

1 20321  
38

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO**



**ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS  
PROFESIONALES "ACATLÁN"**



**MOVIMIENTOS BROWNIANOS APLICADOS  
AL CÁLCULO DE LA VOLATILIDAD EN EL TIPO  
DE CAMBIO**

**TESINA**

**QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
LICENCIADO EN ACTUARÍA**

**P R E S E N T A:  
VICTOR VARGAS VILLAFUERTE**

**A S E S O R:  
ACT. LUIS ALEJANDRO TAVERA PEREZ**



**11 DE AGOSTO DE 2003**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# Movimientos Brownianos aplicados al Cálculo de la Volatilidad en el Tipo de Cambio

Victor Vargas Villafuerte

## Resumen

Con el fin de encontrar alternativas al método de tasa fija para el cálculo de la volatilidad en el tipo de cambio se desarrollará un método en donde se supone que la volatilidad se comporta como un Movimiento Browniano, además de exponer otros métodos alternativos ya conocidos. Aplicando todos estos métodos en información mexicana actual para probar su efectividad.

Palabras Clave: Tipo de Cambio, Volatilidad y Métodos de Estimación.

## Abstract

In order to find alternatives to the fixed rate method for the forecasting of the volatility in the exchange rate it will be developed a method where it is supposed that the volatility behaves like a Brownian Movement, besides of exposing other alternative methods already known. Applying all this methods to the present Mexican information in order to prove their effectiveness.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Índice

## Resumen

Introducción.....6

## Capítulo I: Tipo de Cambio

1.1 Teoría Monetaria de Tipos de Cambio.....8

1.2 Aproximación de Capital a los Tipos de Cambio.....9

1.3 Aproximación de Balance de Portafolio a los Tipos de Cambio.....10

    1.3.1 Efecto de las Operaciones de Mercado Abierto.....11

    1.3.2 Crecimiento del Ingreso Real en la Teoría de Balance de Portafolio.....11

1.4 Balanza de Pagos y su relación con el Tipo de Cambio.....12

1.5 Teoría de Flujos de Tipo de Cambio.....14

1.6 Principio de Paridad del Poder Adquisitivo.....16

    1.6.1 Razones por las cuales no se cumple la Condición de Paridad del Poder Adquisitivo...19

1.7 Condición de Paridad de Interés.....20

    1.7.1 Razones por las cuales no se cumple la Condición de Paridad de Interés.....21

    1.7.2 Relación entre la Paridad de Poder Adquisitivo y la Paridad de Interés.....22

1.8 Métodos de determinación de Tipos de Cambio.....22

    1.8.1 Sistema Standard Oro.....22

    1.8.2 Bretón Woods.....23

    1.8.3 Sistema Monetario Europeo.....24

    1.8.4 Flotación Sucia.....25

    1.8.5 Banda Ancha.....25

    1.8.6 Crawling Peg.....25

## Capítulo II: Volatilidad y Movimiento Browniano

2.1 Definición de Volatilidad.....26

2.2 Teorías de Volatilidad en Tipos de Cambio.....26

    2.2.1 Teoría "Sticky Price" de Dornbusch.....26

    2.2.2 Elasticidades Variables.....27

    2.2.3 Fluctuaciones de Flujo y Ajuste de "Stock".....28

    2.2.4 Teoría de las Burbujas Especulativas.....28

2.3 Procesos Estocásticos.....29

    2.3.1 Tipos de Procesos.....29

    2.3.2 Proceso de Markov.....29

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

2.4 Movimiento Browniano (Proceso Weiner).....30

2.5 Movimiento Browniano Geométrico.....32

2.6 Aplicación del Movimiento Browniano al Tipo de Cambio.....33

2.7 Estimación Empírica de la Volatilidad a partir de la Información Histórica.....37

**Capítulo III: Modelos**

3.1 Volatilidad Constante.....39

    3.1.1 Tasa de Rendimiento Geométrica vs. Tasa de Rendimiento Aritmética.....40

3.2 Modelo ARCH.....41

3.3 Modelo EWMA.....42

3.4 Modelo GARCH (1,1).....43

3.5 Promedios Móviles.....45

3.6 Volatilidad como Movimiento Browniano.....45

**Capítulo IV: Resultados**

4.1 Volatilidad Constante.....47

    4.1.1 Volatilidad con Tasa de Rendimiento Aritmética.....47

    4.1.2 Volatilidad con Tasa de Rendimiento Geométrica.....47

    4.1.3 Diferencia entre la tasa de Rendimiento Geométrica y Aritmética.....48

4.2 Modelo ARCH.....49

4.3 Modelo EWMA.....50

4.4 Modelo GARCH (1,1).....52

4.5 Promedios Móviles.....54

    4.5.1 Promedios Móviles con 3 datos históricos.....54

    4.5.2 Promedios Móviles con 20 datos históricos.....54

    4.5.3 Diferencia entre pronósticos con Promedios Móviles.....55

4.6 Volatilidad como Movimiento Browniano.....56

4.7 Comparación entre los pronósticos de los distintos métodos.....58

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

**Capítulo V: Aplicación**

5.1 Pronóstico del Tipo de Cambio.....	62
5.2 Contratos Forward.....	65
5.3 Contratos de Futuros.....	67
5.4 Opciones.....	68
5.5 Swaps.....	73
Conclusiones.....	74
Bibliografía.....	75

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Introducción

Durante mis estudios en la carrera de Actuaría y especialmente en la prespecialidad de Finanzas se resaltó mucho la importancia del riesgo cambiario, el tipo de cambio y que las fluctuaciones de su valor son importantes tanto para empresas privadas como para empresas paraestatales que tengan activos en moneda extranjera, que realicen exportaciones o importaciones, etc.

Debido a lo anterior decidí elegir este tema para titularme enfocándome principalmente en lo que a volatilidad se refiere debido a que, en diversas materias se presentaron situaciones en las cuales se consideraba a la volatilidad como constante, siendo que en la realidad eso no es cierto.

El presente trabajo tiene por objetivo el encontrar una alternativa al método de tasa fija utilizado para modelar la volatilidad probando otros métodos, especialmente el que utiliza como hipótesis que la volatilidad se comporta como un movimiento browniano. Para tener una visión general de la efectividad de los métodos se realizarán comparaciones entre los pronósticos de los métodos y datos reales.

Primero damos las bases teóricas de los tipos de cambio, de la volatilidad y del movimiento browniano, posteriormente se plantean los métodos de forma teórica y los datos que se utilizarán, después se presentan los resultados de los distintos modelos y finalmente la aplicación de esos datos en la práctica. Para esto se dividió el trabajo en cinco capítulos.

En el primer capítulo se presenta una revisión de las distintas teorías existentes sobre el tipo de cambio para de esta forma sentar las bases teóricas y entender cómo es que se obtiene el tipo de cambio a nivel macroeconómico. Esto porque, aunque el trabajo va más enfocado a un punto de vista financiero y estadístico nos sirve para entender las características de la información que estamos estudiando.

En el segundo capítulo veremos qué es la volatilidad y diversas teorías que buscan explicar el porqué de la existencia de la volatilidad en el tipo de cambio, basándose éstas principalmente en conocimientos económicos y en el sentido común el cual es útil debido a que nos da un conocimiento cualitativo del tipo de información con la que se trabaja y el porqué de su comportamiento. Además se ven los procesos estocásticos y en especial el movimiento browniano (el cual será un pilar para el desarrollo del trabajo) así como su aplicación al tipo de cambio. Finalmente se presenta una estimación empírica de la volatilidad a partir de información histórica.

El tercer capítulo nos muestra los distintos modelos utilizados para el muestreo de la volatilidad del tipo de cambio, presentando las bases teóricas de cada modelo así como dando información sobre cómo se aplicaron de forma práctica y los datos que fueron utilizados para aplicarlos.

El capítulo cuarto nos presenta los resultados arrojados por todos los modelos explicando a qué se pueden deber ciertos resultados y al final nos ofrece una comparación entre los modelos.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Este trabajo tendría poco valor si no existiera una forma de aplicar los resultados al mundo real y es por eso que en el quinto capítulo mostramos una forma de aplicar los distintos métodos al pronóstico del tipo de cambio y a algunos de los principales instrumentos en donde podríamos utilizar los pronósticos de tipo de cambio para tomar decisiones

Finalmente se presentan las conclusiones generales a las que se llegó con este trabajo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo I: Tipo de cambio

El tipo de cambio se puede entender como el precio de una moneda en términos de otra. Hay distintos métodos que buscan el camino para calcularlas y pronosticarlas, desde las teorías de flujos o las teorías de "stocks" y además hay distintas formas de designar el tipo de cambio, como son libre flotación y tipo de cambio fijo. A través de este capítulo revisaremos todo eso, además de dar un rápido vistazo a distintas teorías que explican el porqué se da la volatilidad en el tipo de cambio.

### 1.1 Teoría Monetaria de Tipos de Cambio<sup>1</sup>

Esta teoría nos dice que el nivel de precios entre dos países está muy relacionado con el tipo de cambio entre las monedas de estos dos países. Predice que un tipo de cambio va a depreciarse por el exceso de crecimiento de dinero de un país sobre el otro y que el rápido crecimiento del PIB nos va a causar apreciación mientras que con altas tasas de interés y de inflación esperada lo que nos provocará es depreciación.

La teoría monetaria de los tipos de cambio vincula dos aspectos para explicar el cálculo de los tipos de cambio entre dos monedas. Los dos aspectos que toma en cuenta, son la relación existente entre los diferentes niveles de precios entre naciones diferentes con las ofertas de dinero de estas naciones y la relación entre los niveles de precios y los tipos de cambio.

La ecuación de la demanda de dinero es utilizada para relacionar los niveles de precios y las ofertas de dinero.

$$M_a/P_a = (Q_a^\alpha) * e^{(-\beta * r_a)}$$

$$M_b/P_b = (Q_b^\alpha) * e^{(-\beta * r_b)}$$

$M_a$  = Demanda de dinero del país A.

$M_b$  = Demanda de dinero del país B.

$Q_a$  = PIB real del país A.

$Q_b$  = PIB real del país B.

$r_a$  = Tasa nominal de interés del país A.

$r_b$  = Tasa nominal de interés del país B.

$P_a$  = Nivel de Precios del país A.

$P_b$  = Nivel de Precios del país B.

$\alpha$  y  $\beta$  = Factores Positivos

$e$  = exponencial.

<sup>1</sup> Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan, pp 482-481

D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp154-157

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Sabiendo que al dividir una variable nominal entre el nivel de precios nos arroja una variable real tenemos que el lado izquierdo de las ecuaciones nos representa la demanda real de dinero en cada país, esto es, la cantidad de dinero que el país demanda para adquirir bienes y servicios.

Tenemos que la cantidad de dinero demandado (para comprar bienes y servicios) aumenta al aumentar el PIB real (la proporción en que aumenta está dada por  $\alpha$ ).

Al contrario, el aumento de la tasa de interés nominal de un país hace que la demanda de consumo disminuya (esto se debe a que prefieren invertir su dinero porque el costo de oportunidad de gastarlo es mayor). En este punto estamos asumiendo que los productos de inversión de los dos países no son sustituibles.

La teoría monetaria asume que la gente ajusta el dinero que tiene hasta que la cantidad de dinero demandada iguala a la cantidad de dinero ofertada (esto ocurre ya que, si hay exceso de oferta la gente gasta su dinero en bonos, etc., entonces por ley de oferta y demanda aumenta el precio de los bonos y por lo tanto baja la tasa de interés y viceversa, al haber exceso de demanda la gente vende sus bonos lo cual baja el precio de los bonos y aumenta las tasas de interés). Al alcanzarse el equilibrio se tiene que  $M =$  demanda u oferta de dinero de un país. Lo que nos arroja a la conclusión de que los niveles de precios varían inversamente al comportamiento del PIB real y directamente con las tasas nominales de interés.

"El tipo de cambio entre las monedas de las dos naciones está relacionada con el nivel de precios de estas". (para lo cual se apoya en el principio de paridad del poder adquisitivo (PPP Power Purchasing Parity))<sup>2</sup>

$$S(A/B) = P_a/P_b$$

Al sustituir los niveles de precios queda la siguiente ecuación, la cual nos resume la teoría. Ya que, si B tiene un mayor PIB mejora su tipo de cambio y si A tiene un nivel más alto de tasa de interés (lo cual implicaría un nivel más alto de precios) esto perjudica su tipo de cambio. Esto contradice la teoría de oferta y demanda que nos dice que al existir un rápido aumento del PIB real esto se traduce en aumento de importaciones, un aumento de oferta de la moneda y por lo tanto una depreciación sin embargo, esa teoría pasa por alto la relación entre el PIB y la demanda de dinero (esto es entre los bienes y los mercados de dinero).

$$S(A/B) = (M_a/M_b) * [(Q_b/Q_a)^\alpha] * [e^{(\beta * (r_a - r_b))}]$$

### 1.2 Aproximación de Capital al Tipo de Cambio (Asset Approach to Exchange Rates)<sup>3</sup>

La aproximación de capital al tipo de cambio nos señala que el tipo de cambio actual depende del tipo de cambio esperado en el futuro.

<sup>2</sup> Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan. pp 473-474 y 477-479

<sup>3</sup> D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp.154-157



Al igual que el valor de un activo depende de lo que se espera valga en el futuro, así el tipo de cambio en este momento depende de lo que se espera que valga en el futuro, por lo tanto el tipo de cambio de hoy depende de lo que se espera que le pase a todos los factores que afectan al tipo de cambio en el futuro.

Se supone que se toma en cuenta toda la información útil que esté disponible para predecir el comportamiento de los factores que afectan al tipo de cambio. Toda esta información conforme va apareciendo va siendo agregada al tipo de cambio actual, sin embargo, toda la información nueva (tanto buena como mala) aparece aleatoriamente, por lo tanto el comportamiento del tipo de cambio presenta un componente aleatorio, el cual fluctúa alrededor del tipo de cambio esperado. Y es en este hecho en el que nos basamos para considerar que el tipo de cambio se comporta como un movimiento browniano (de una forma aleatoria).

Esta aproximación es compatible con las otras teorías ya que toma en cuenta la información que nos arroja la balanza de pagos, tasas de interés, etc. Lo cual nos lleva a implicaciones tanto de teoría fiscal como de política monetaria porque poniendo un ejemplo, si el gobierno realiza una acción crea cierta expectativa de comportamiento del mercado en el futuro, por medio de la aproximación que estamos utilizando esa expectativa no se reflejaría en el futuro sino en la actualidad.

### 1.3 Aproximación de Balance de Portafolio a los Tipos de Cambio.<sup>4</sup>

En esta teoría se asume que la gente de un país desea tener monedas, bonos, etc. tanto de su país como de un país extranjero, sin embargo acepta que la gente tenga preferencia por algún país. Lo cual se traduce en que la gente prefiriere portafolios diversificados para así reducir su riesgo. Debido a esto, el cambio en la preferencia entre el bono de un país u otro o en la demanda de bonos en un país u otro afecta a los tipos de cambio.

El modelo de balance de portafolios consiste en ecuaciones de oferta y demanda para dinero y bonos en todos los países, así como ecuaciones igualando las demandas de dinero y de bonos a la ofertas de bonos y dinero. Entonces al agregar ecuaciones de demanda de bonos y condiciones de equilibrio para que las demandas de bonos igualen la oferta de bonos para cada país, las implicaciones de cambiar ofertas y demandas de bonos cambian en relación a los resultados obtenidos en la aproximación monetaria ya que, encontramos efectos de oferta y demanda de bonos en las tasas de interés y tipo de cambio.

<sup>4</sup> Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan. pp 331, 352, 477-479, 483-486.

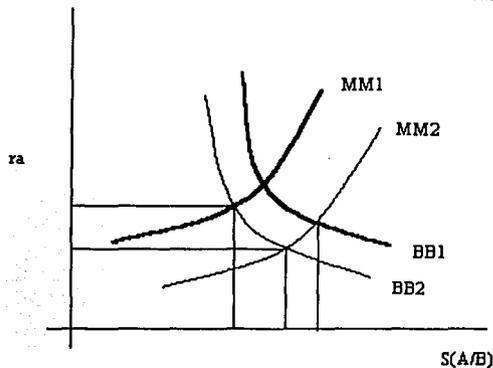
D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 158-163

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 1.3.1 Efecto de las operaciones de Mercado Abierto<sup>5</sup>

(Gráfica 1.1) MM1 representa el equilibrio en el mercado de dinero del país A. La línea se recorre porque una tasa de interés más grande en ese país reduce la demanda de dinero, mientras que un tipo de cambio más grande  $S(A/B)$  incrementa la demanda de dinero por medio del incremento de la riqueza debido al incremento del valor de A en bonos y moneda de B. BB1 representa el equilibrio inicial del mercado de bonos de A. La línea baja debido a que una reducción en la tasa de interés reduce la demanda por bonos de A, esto se debe a que rinde más ahora en bonos de B porque el tipo de cambio  $S(A/B)$  al crecer lo hace más productivo. Ahora cuando la oferta de dinero de A aumenta como consecuencia de que el gobierno de A realiza compra de bonos, la línea MM1 se recorre a ser MM2 y BB1 se recorre a ser BB2. Al efectuarse ambos movimientos se reduce la tasa de interés  $r$ . Ahora hay que notar que la reducción de oferta de bonos (provocado por la compra de bonos por parte del gobierno A) hace que se reduzca la depreciación de la moneda A. Esta última reducción de depreciación es lo que la teoría monetaria no toma en cuenta y, en la aproximación por balance de portafolios si se toma en cuenta, por lo que con el pronóstico de la teoría monetaria se estaría depreciando de más la moneda A de lo que en realidad se debe. Esto es, la aproximación de balance de portafolio predice el efecto de cambios en la oferta de dinero sobre tipos de cambio. En resumen el tipo de cambio depende de cómo son modificadas las ofertas de dinero.

Gráfica 1.1



### 1.3.2 Crecimiento del Ingreso Real en la Teoría de Balance de Portafolio.<sup>6</sup>

(Gráfica 1.2) Un ingreso (PIB) más alto por parte del país A incrementa la demanda de dinero en A y mueve la línea MM1 a MM2, el equilibrio del dinero se puede mantener moviendo el tipo de cambio en favor de la moneda A (para reducir el beneficio al obtener menos monedas A por bonos o monedas B) o aumentando la tasa de interés (con lo que se reduce la demanda de dinero). Ahora el aumento del PIB de A provoca un aumento de demanda de bonos de A, esto provoca que BB1 se mueva a BB2 y una tasa más baja tanto de cambio como de interés reduce la

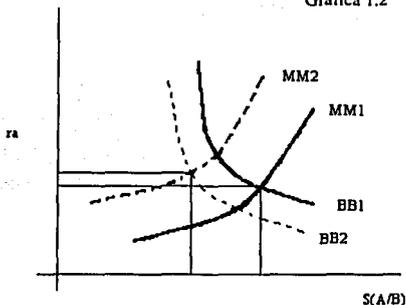
<sup>5</sup> D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 159-161  
Riviera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan.  
pp 462-463

<sup>6</sup> D. Maurice Levi "International Finance" pp161-163

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

demanda por bonos de A y mantiene el equilibrio. El resultado de todo esto arroja una moneda A más apreciada a la que tendría si no se tomara en cuenta el ajuste del equilibrio del mercado de bonos como lo hubiera hecho la teoría monetaria.

Gráfica 1.2



#### 1.4 Balanza de Pagos y su relación con el Cálculo del Tipo de Cambio.<sup>7</sup>

Tenemos que el tipo de cambio lo podemos tomar como el precio de la moneda de un país en términos de la moneda de otro país, con eso se ve que los tipos de cambio son el resultado de la oferta y la demanda entre ambas monedas, a partir de esto podemos construir curvas de oferta y demanda para las monedas así como el punto de equilibrio (que en este caso sería el tipo de cambio). Al igual que cualquier otro producto al incrementarse la oferta de una moneda, se reducirá su valor (la depreciará) y viceversa, además si se aumenta la demanda de esa moneda su valor aumentará (se apreciará).

En los países existe la balanza de pagos que es información publicada para reportar el desempeño internacional de la nación en cuanto al comercio con otras naciones se refiere y para mantener un registro del volumen de los flujos de capital que entran y salen del país en un periodo dado. Esto significa un registro de factores que influyen en la oferta y demanda de la moneda. La balanza de pagos es registrada con un sistema de "cargos y abonos" en el cual los cargos (los movimientos registrados con signo positivo) representan operaciones que provocan un aumento a la demanda de la moneda) y los movimientos que representen abonos (con signo negativo) representan un aumento de la oferta de la moneda.

Cuando las exportaciones exceden a las importaciones se dice que se tiene un superávit y si las exportaciones son menores que las importaciones se dice que se tiene un déficit. Las

<sup>7</sup> D. Maurice Levi "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp.105-114, 116-117

Ossa Scaglia Fernando "Economía Monetaria Internacional" Ed. Alfaomega pp. 27-45

Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan. pp 429-449

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

importaciones y exportaciones se encuentran dentro de la cuenta corriente de la balanza de pagos que es el resultado de la importación y exportación de productos, servicios, ingresos y donaciones (también llamados transferencias unilaterales). Un déficit en la cuenta corriente debe ser financiado al pedir préstamos del exterior o al dejar de invertir en activos extranjeros, mientras que un superávit debe darse al prestar al exterior o invertir en activos extranjeros ( lo que influye la inversión en el extranjero son las tasas de retorno en el país extranjero y en el país propio así como los niveles de riesgo de las inversiones). Al realizar las acciones anteriores se presenta una entrada positiva (para el caso de déficit) o una entrada negativa (para el caso de superávit) y con esto se equilibra la balanza y se mantiene el tipo de cambio.

Las reservas nacionales son activos líquidos que tienen los gobiernos. Estas reservas incluyen oro, monedas extranjeras en bancos extranjeros y saldos en el Fondo Monetario Internacional. Las reservas se modifican cuando los tipos de cambio son fijos para mantenerlos de esa forma y cuando los tipos de cambio son libres las reservas no se modifican.

La balanza de pagos de la cuenta de capital es el resultado neto de todos los préstamos hechos y recibidos, inversión y retiro de fondos de instituciones no bancarias, bancarias e individuos.

Ahora tenemos la siguiente ecuación de la balanza de pagos:<sup>8</sup>

$$Bc + AR + Bk + e = 0$$

Bc = Balanza de Cuenta Corriente  
 AR = Cambio en Reservas Nacionales  
 Bk = Balance de la Cuenta de Capital  
 e = Diferencia estadística

En el caso en que los tipos de cambio son flexibles se elimina la AR debido a que no hay modificación de las reservas y si suponemos que no hay error (discrepancia estadística) al hacer los cálculos tenemos que  $Bc = -Bk$ , lo cual nos dice que si se mide bien el déficit de la cuenta corriente este es igual al superávit de la cuenta de capital y viceversa. Lo anterior nos asegura que el déficit de la cuenta corriente sea un resultado de las importaciones de capital y que un superávit de la cuenta corriente sea resultado de las exportaciones de capital.

Ahora para el caso en que las tasas sean fijas tenemos que<sup>9</sup>

$$AR = -(Bc + Bk)$$

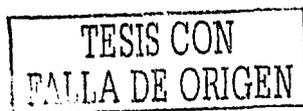
Por lo cual las reservas nacionales deben ser iguales y con signo contrario al resultado combinado de la cuenta de capitales y la cuenta corriente, así si hay déficit las reservas tienen que

<sup>8</sup> Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan, pp 255-257

D.Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 118-120

<sup>9</sup> Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan, pp 454

D.Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 119



disminuir para mantener el tipo de cambio y si hay superávit las reservas deberán aumentar para mantener el tipo de cambio.

En ambos casos tanto para el tipo de cambio flexible como para el tipo de cambio fijo se nota que sólo se pueden aceptar déficits en periodos cortos ya que si se presentan en periodos largos lo que provoca es el fin de las reservas y posteriormente un endeudamiento extremo.

### 1.5 Teoría de Flujos de Tipo de Cambio (oferta – demanda)<sup>10</sup>

La curva de oferta de una moneda nos muestra la cantidad de esa moneda ofertada y el precio de la moneda dado por el tipo de cambio, hay que tomar en cuenta que cuando graficamos la oferta de una moneda no se grafican cantidades sino valores (lo cual es la multiplicación de cantidades por precios). La curva de oferta de una moneda se deriva de la demanda de importaciones del país, ya que cuando se pagan las importaciones en la moneda extranjera se ofrece la moneda doméstica para cambiarla por moneda extranjera, de ahí que la cantidad de moneda doméstica ofertada es igual al valor de las importaciones, por lo tanto se obtiene la curva de la siguiente forma: Primero buscamos el precio de las importaciones a cada tipo de cambio posible. Segundo determinamos la cantidad de importaciones al precio de la curva de demanda de importaciones y calculamos el valor de las importaciones (multiplicando la cantidad por el precio de las importaciones). Finalmente graficamos el valor de las importaciones contra el tipo de cambio en el cual ocurre.

La curva de demanda de una moneda nos enseña el valor de la moneda que es demandado a cada posible tipo de cambio. Las exportaciones de un país son iguales a la demanda de su moneda, ya que para pagar sus exportaciones los otros países deben conseguir la moneda doméstica del país que exporta, de ahí que la curva de la demanda de la moneda de un país se derive de la curva de la oferta de las exportaciones. Por lo tanto la forma de obtener la gráfica de la curva es la siguiente: Primero encontramos el precio de las exportaciones a cada tipo de cambio posible. Segundo determinamos la cantidad de exportaciones al precio que la curva de oferta de exportaciones nos indica y calculamos el valor de las exportaciones (al multiplicar el precio de las exportaciones por la cantidad de las exportaciones). Finalmente graficamos el valor de las exportaciones contra el tipo de cambio en el que se presenta cada uno.

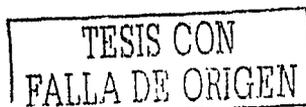
Ahora podemos graficar esas dos curvas juntas y así encontrar el tipo de cambio que equilibre el valor de las importaciones y las exportaciones o en otras palabras que la cantidad de moneda demandada iguale a la cantidad de moneda ofertada.

Los diversos factores que afectan el valor de las importaciones y de las exportaciones provocan que se muevan las curvas de demanda y de oferta, por lo que modifican la tasa de equilibrio.<sup>11</sup>

<sup>10</sup> D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 129-131

Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan, pp 454

<sup>11</sup> D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 133



Entonces si se presenta un incremento en el valor de la exportaciones en todos los puntos debido a un factor externo esto provocará que la curva de demanda de la moneda doméstica se recorra a la derecha, lo que se traduce como un aumento del valor de la moneda doméstica. Este aumento se puede dar por un incremento de la cantidad exportada o por un incremento del precio de la exportación. De la misma forma si por algún motivo se llega a presentar un aumento en el valor de las importaciones (ya sea por aumento de precio o de la cantidad de importaciones) esto se traducirá en la disminución del valor de la moneda doméstica.

Otro factor que afecta los tipos de cambio es la inflación ya que ésta afecta la competitividad de los productos de una nación en relación a productos iguales o similares de otras naciones. Para saber como afecta la inflación a las exportaciones e importaciones primero debemos saber como se obtiene la demanda de importaciones y la oferta de exportaciones. La demanda de importaciones se obtiene por la diferencia de la cantidad de producto demandada y la cantidad ofertada (visto por medio de curvas de oferta y demanda eso sería la diferencia horizontal entre las dos curvas) y por el contrario si es mayor la cantidad ofertada que la cantidad demandada la diferencia entre las dos curvas sería la oferta de exportaciones.<sup>12</sup>

La inflación como sabemos es el aumento de precios y por lo tanto implica un aumento de precio en las exportaciones e importaciones, esto se ve reflejado en las curvas de oferta y demanda que se trasladan para arriba (tanto en las de demanda y oferta del producto que se exporta como del producto que se importa) y por lo tanto también las curvas de oferta de todas las exportaciones y de demanda todas las importaciones se trasladan para arriba en un porcentaje igual al que fue el crecimiento de la inflación. Se da por hecho que en el caso de que existiese deflación todos los movimientos serían contrarios.

Ahora, la inflación se puede presentar solamente en un país o en ambos países. Cuando la inflación se presenta solamente en un país se seguirán vendiendo la misma cantidad de exportaciones hasta que se haya presentado una depreciación aproximadamente igual a la tasa de inflación que existió en el país. La misma cantidad vendida a precios más altos significa que el valor de las exportaciones es más alto por la tasa de inflación. Esto hace que la curva de demanda de la moneda se recorra hacia abajo y a la derecha aproximadamente en la misma proporción que la inflación. El mismo argumento se le aplica a la curva de oferta de la moneda. Entonces el tipo de cambio del país que presenta la inflación se deprecia aproximadamente la tasa de inflación y la cantidad de moneda comercializada aumenta en la misma proporción que la tasa de inflación. Sin embargo para el caso en que la tasa de inflación ocurre también en el otro país las mismas cantidades son importadas y exportadas al mismo tipo de cambio que se tenía antes de que se presentaran las tasas de inflación, mientras esto pasa los valores de las importaciones y las exportaciones aumentan en un porcentaje igual a la tasa de inflación (debido a que el precio aumentó ese porcentaje y la cantidad de producto no varía) Todo esto se ve como un traslado de las curvas de demanda y oferta a la derecha en proporción igual al aumento de la inflación y el tipo de cambio no se afecta. Todo este análisis nos resume que sin haber cambio en otros factores el tipo de cambio de una nación se deprecia aproximadamente en la misma medida en que su tasa de inflación excede las tasas de inflación de los demás países lo cual es congruente con el principio de la paridad de poder adquisitivo.

Sabemos que la demandas y ofertas de servicios y productos se comportan de la misma forma, por lo que podemos agregarlas (lo cual gráficamente resultaría en una suma horizontal) y así poder calcular el tipo de cambio que incluya todos los productos y servicios de un país.

<sup>12</sup> Idem 134-144

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Tenemos que la oferta y demanda de moneda resultante de intereses, dividendos, etc. no tiene relación con el tipo de cambio, ya que están determinados por tasa de retorno de inversiones pasadas, sin embargo también podemos agregar horizontalmente esos flujos de dinero y calcular el punto de equilibrio. De este punto podemos notar que entre más grande sea el ingreso de exportaciones (incluyendo inversiones hechas por extranjeros en el país) en relación a las importaciones (incluyendo inversiones hechas en el extranjero) más apreciada será la moneda.<sup>13</sup>

Sabemos que el monto de las inversiones que fluyen dentro o fuera de un país depende de las tasas de retorno en ese país en relación a las tasas de retorno en los demás países y de los riesgos que presenta ese país en relación a los demás. De ahí que un incremento en las tasas de interés o en las ganancias esperadas en un país provocan el incremento en la demanda de la moneda de ese país porque invierte gente del extranjero en ese país y además reduce la oferta de la moneda doméstica al reducir las personas residentes de ese país su grado de inversión en el extranjero (porque ahora para ellos es más productivo invertir en su propio país). Lo anterior nos dice que el incremento en las tasas de interés o en las ganancias esperadas provocan que la moneda se aprecie. Además para unas tasas de interés o expectativas de ganancias favorables, se creará la expectativa de que esa moneda se apreciará, aumentará la atracción de los inversionistas para invertir ahí, y a la larga se provocará que efectivamente, la moneda se aprecie.<sup>14</sup>

## 1.6 Principio de Paridad del Poder Adquisitivo

La conexión a largo plazo entre la inflación y los tipos de cambio ha sido conocida como el principio de paridad del poder adquisitivo. Este principio fue popularizado por Gustav Cassell en 1920.<sup>15</sup>

Para explicar el principio de la paridad del poder adquisitivo primero debemos conocer la ley de un solo precio, esta ley afirma que en ausencia de agentes de fricción (como lo son costos de transportación, impuestos, tarifas, etc.) el costo de un producto al ser convertido a una moneda común utilizando el tipo de cambio vigente debe ser el mismo en todos los países. Esto debería de cumplirse bajo el supuesto de que si son diferentes los precios en dos países se puede realizar el arbitraje, el cual por medio de fuerza de demanda y oferta igualaría los precios en ambas naciones. Es más, aun con la presencia de tarifas, impuestos y costos de transportación la ley de un solo precio se debe mantener debido al arbitraje. Esta ley se explica con la fórmula:

$$P_a = S(A/B) * P_b \quad ^{16}$$

$P_a$  = Precio del producto en el país A

$P_b$  = Precio del producto en el país B

$S(A/B)$  = Tipo de cambio (número de monedas A equivalentes a una moneda B)

Si generalizamos la fórmula haciendo :

<sup>13</sup> Idem 140

<sup>14</sup> Idem 142

<sup>15</sup> Idem 239

<sup>16</sup> Idem 241

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Pa = Costo de una canasta de productos y servicios en el país A.  
 Pb = Costo de una canasta de productos y servicios en el país B.

Eso nos daría la forma absoluta de la condición de paridad de poder adquisitivo. Podemos recomendarla para que nos ofrezca el valor del tipo de cambio

$$S(A/B) = Pa/Pb^{17}$$

Esto nos debería dar el tipo de cambio, sin embargo las canastas de precios (el INPC en México) varían de un país a otro en su composición de productos y servicios y en el peso que se le da a cada producto o servicio en relación con los demás.

Suponiendo que la forma general de la condición de paridad del poder adquisitivo se cumple, al final de un año para que se siguiera cumpliendo la fórmula sería:

$$Pa(1+P'a) = S(A/B) [1 + S'(A/B)] * Pb(1+P'b)^{18}$$

Donde:

S'(A/B) = el cambio porcentual en el tipo de cambio en un año  
 P'a = el cambio porcentual de los niveles de precios en A (inflación en A)  
 P'b = el cambio porcentual en los niveles de precios de B (inflación en B)

Dividiendo esa fórmula entre la forma general nos queda:

$$(1+P'a) = [1+S'(A/B)] * (1+P'b)$$

Reacomodando obtenemos:

$$S'(A/B) = (P'a - P'b)/(1+P'b)$$

La cual es la forma relativa o dinámica del principio de paridad de poder adquisitivo.

Una forma aproximada de calcular la condición de paridad de poder adquisitivo es:

$$S'(A/B) = P'a - P'b$$

Esta forma aproximada de la paridad de poder adquisitivo es útil pero sólo con tasas de inflación pequeñas, lo cual nos dice que con tasas de inflación pequeñas los movimientos en el tipo de cambio son aproximadamente iguales a la diferencia entre las tasas de inflación de los dos países.

Si suponemos la existencia de impuestos, etc. que provoquen que el precio en un país sea mayor que otro en proporción t, la forma general no se cumplirá:

<sup>17</sup> Ibidem

<sup>18</sup> Idem 242

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

$$P_a = S(A/B) * P_b(1-t)$$

Si la misma condición sigue un año después esto significará:

$$P_a(1+P'a) = S(A/B) [1 + S'(A/B)] * P_b(1+P'b) (1-t)$$

Al dividir esta fórmula entre la anterior tenemos que:

$$(1+P'a) = [1+S'(A/B)] * (1+P'b)$$

que es la misma fórmula que se había obtenido antes (forma relativa o dinámica del principio de paridad de poder adquisitivo) y nos lleva a concluir que la forma relativa se mantendrá aún si la forma absoluta no lo hace.<sup>19</sup>

Otra forma de obtener la condición del principio de paridad de poder adquisitivo es considerando el comportamiento que tienen los especuladores (ya la hemos derivado considerando que el arbitraje equilibra los precios)<sup>20</sup>

Si:

$S^{\circ}(A/B)$  = cambio porcentual esperado por el mercado en el tipo de cambio.

$P^{\circ}a$  = Tasa anual de inflación esperada para un grupo de instrumentos en A. (es el rendimiento esperado al comprar una canasta de instrumentos en A en términos de la moneda A.

$P^{\circ}b$  = Tasa anual de inflación para un grupo de instrumentos en B.

$P^{\circ}b + S^{\circ}(A/B)$  = Será el rendimiento esperado a obtener del grupo de mercancías en términos de la moneda A, ya que hay dos componentes (el cambio esperado en el precio de los instrumentos en B y el cambio esperado en el valor de A por B)

Si ignoramos el riesgo que existe y tomando en cuenta que los mercados son eficientes el rendimiento esperado en la inversión de los instrumentos tenderá a la igualdad y hará:

$$P^{\circ}a = P^{\circ}b + S^{\circ}(A/B)$$

y al reacomodar tenemos:

$$S^{\circ}(A/B) = P^{\circ}a - P^{\circ}b$$

La cual es conocida como la forma de mercados eficientes o forma de esperanzas del principio de paridad del poder adquisitivo y es la forma relativa de la condición del principio de paridad del poder adquisitivo.

<sup>19</sup> Idem 243

<sup>20</sup> Idem 244

### 1.6.1 Razones por las cuales no se cumple el Principio de Paridad de Poder Adquisitivo

Si el principio de paridad se sostuviera en su forma relativa seríamos capaces de explicar los cambios en los tipos de cambio a corto plazo con los cambios en las tasas de inflación a corto plazo y si se mantuviera la forma de esperanzas se podría explicar lo mismo pero a largo plazo, sin embargo el principio de paridad no se sostiene debido a varios factores.

Uno de los factores que provocan que el principio de paridad no se sostenga es que los índices de precios para las tasas de inflación no son siempre muy precisos y al cubrir varios artículos no nos indican qué sucede con los precios de esos artículos en particular, además como se ha visto en diversos estudios hasta la ley de un sólo precio es violada en su forma relativa.<sup>21</sup>

Los niveles de precios se llegan a mover rápidamente mientras la corrección de precios por medio del arbitraje puede llegar a tardar tiempo aún con los productos que son comercializados internacionalmente y por supuesto en los productos que no se comercializan internacionalmente tarda más. Y tenemos que los índices de precios incluyen productos que no se comercializan internacionalmente eso crea discrepancias, además otro punto muy importante a tomar en cuenta es que un producto en algún lado no es tan importante o indispensable como en otro país y por eso varía el peso que se le da en el índice de precios de cada país.

Se ha descubierto que los tipos de cambio se ajustan a las tasas de inflación pero después de un periodo relativamente largo.

Como ya vimos los costos de transportación, tarifas e impuestos afectan al principio sólo en su forma absoluta, sin embargo límites en el número de productos que se puedan importar afectan y provocan que se creen desvíos de resultados en relación al principio de paridad.

Otra posibilidad de que los resultados que en teoría arroja el principio de paridad no se vean iguales a los que arroja la realidad son los procedimientos estadísticos que se utilizan. La mayoría de las pruebas que se realizan por el principio de paridad se basan en estimados de una ecuación de regresión que puede ser escrita como:

$$S'(A/B) = \beta_0 + \beta_1(P^a - P^b) + m$$

Donde para que se dé como válido el principio de paridad:

$m$  = error de regresión debe ser cercano a cero.

$\beta_0$  = debe ser cercano a 0.0

$\beta_1$  = debe ser cercano a 1.0

Sin embargo se presentan errores al medir el diferencial de inflaciones:  $P^a - P^b$  lo cual es una característica de la metodología de regresión (errores en la medida de las variables explicativas mandando los coeficientes de regresión hacia cero), lo que en otras palabras dice que el diferencial es mal medido debido a que se utilizan diferentes canastas en los países y el estimado  $\beta_1$  es menor a 1 aunque en la realidad sea igual a 1. Otro problema es la determinación simultánea de las variables  $S'(A/B)$  (lo cual es otra característica de la metodología de regresión)

<sup>21</sup> Idem 250

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

que provocan que el coeficiente &1 se dirija hacia cero debido a que la causalidad de la inflación y los tipos de cambio son bidireccionales.<sup>22</sup>

Estudios que han tratado de sobreponerse a los errores y problemas antes mencionados han encontrado que el principio de paridad se cumple.

### 1.7 Condición de Paridad de Interés

La condición de paridad de interés cubierto es una condición que afirma que cuando se ha eliminado el riesgo de cambio extranjero, costos de pedir prestado y tasas de retorno en inversiones financieras éstas serán iguales sin importar en qué moneda fueron invertidas o pedidas prestadas. Por lo tanto es una condición paralela a la de paridad del poder adquisitivo sólo que esta corre en el sentido de mercados financieros.<sup>23</sup>

La condición de paridad de interés cubierto (se le llama cubierto ya que envuelve la utilización de los mercados de forwards) se expresa matemáticamente de la siguiente forma:

$$(1+ra)^n = [Fn(A/B)/S(A/B)]*(1+rb)$$

donde:

ra = tasa de rendimiento al invertir en A  
 rb = tasa de rendimiento al invertir en B  
 Fn = Tasa de un contrato Forward a tiempo n  
 S(A/B) = Tipo de cambio

Si se cumple la igualdad antes descrita significa que no es rentable hacer arbitraje de interés cubierto, ahora que si no se cumple la ecuación anterior provocaría que las personas se dedicaran a realizar arbitraje lo cual empujaría a que se cumpliera la igualdad.

Hay que hacer notar que los ajustes se llevan a cabo a través del movimiento de la tasa de los contratos forward ya que los mercados de cambio spot y de instrumentos de inversión son más activos que los mercados de forward y por lo tanto de aquí también se puede afirmar que las tasas forward se determinan a partir del diferencial de los intereses entre dos naciones.

Se sabe que la especulación provoca que la tasa de los forwards sea aproximadamente igual al tipo de cambio esperado en el futuro, de donde se dice que:

$S^n(A/B)$  = Tipo de cambio esperado entre A y B en n años.

<sup>22</sup> Idem 250-253

<sup>23</sup> Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan. pp 56-58

D.Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 264

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$S^n(A/B) = F_n(A/B)$$

Y si llegan a existir desviaciones de esta igualdad los especuladores empujarán de regreso a la igualdad al comprar o vender forwards esperando obtener beneficios.

Al sustituir esta última igualdad en la paridad de interés cubierto tenemos que:

$$(1+ra)^n = [S^n(A/B)/S(A/B)]*(1+rb)$$

Lo cual es sólo una aproximación porque se asumió la igualdad de los forwards con la tasa esperada y ahí se está desechando un riesgo que existe. Esta fórmula es conocida como la paridad de interés descubierto.<sup>24</sup>

Si notamos que por definición:

$$S^n(A/B) = S(A/B)(1 + S^\circ)^n$$

Siendo  $S^\circ$  el cambio porcentual esperado en el tipo de cambio.

Y si sustituimos en la paridad de interés descubierto tenemos :

$$(1+ra)^n = (1 + S^\circ)^n (1+rb)^n$$

al sacar raíz de n

$$1 + ra = 1 + S^\circ + rb + S^\circ * rb$$

Asumiendo que  $S^\circ$  y  $rb$  son números pequeños a comparación de 1, el producto será muy chico, lo cual nos permitirá escribir la aproximación:

$$ra - rb = S^\circ \quad ^{25}$$

De donde deducimos que el diferencial de interés debe ser aproximadamente igual al cambio esperado del tipo de cambio.

### 1.7.1 Razones por las cuales no se cumple la Condición de Paridad de Interés

En la realidad la paridad de interés se mantiene muy cercana, sin embargo no se cumple exactamente por diversas razones entre las cuales se encuentran los costos de transacción (al cambiar una moneda por otra, al invertir, etc.). A pesar de todo el desvío de los datos pronosticados no pasa de cierto porcentaje, o sea que, en vez de tener una línea de equilibrio lo que tenemos es una banda de equilibrio la cual no es muy ancha debido a que se puede presentar

<sup>24</sup> D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 268

Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan. pp 56-58

<sup>25</sup> D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 269

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

arbitraje por países terceros para los cuales el costo de transacción sería menor que para los que quisieran hacer arbitraje entre esos dos países.

Otro factor que hace que la realidad se desvíe de lo pronosticado es el riesgo político, éste también provoca la creación de una banda alrededor de la línea de equilibrio, pero a diferencia de lo que ocurre con los costos de transacción esta banda no es igual de ancha en ambos lados, esto se debe a que a los habitantes de un primer país les puede parecer más riesgoso invertir en el otro país en comparación al riesgo que perciben los habitantes del otro país al invertir en el primer país.

Por último, un factor que hay que mencionar son impuestos diferenciados entre los inversionistas extranjeros y los nacionales, esto por supuesto afecta y desvía los resultados reales del equilibrio dados por el principio de igualdad de tasas.<sup>26</sup>

### 1.7.2 Relación entre la Paridad de Poder Adquisitivo y la Paridad de Interés

Si tomamos la condición de paridad de poder adquisitivo en su forma de esperanzas y la condición de paridad de interés descubierta notamos que ambas se igualan a  $S^e$ . De ahí podemos igualar a ambas y tenemos que:

$$ra - rb = P^oa - P^ob$$

al recomodar queda:

$$ra - P^oa = rb - P^ob$$

que es conocida como la condición abierta de Fisher, esta condición iguala las tasas reales de rendimiento (tasa de interés menos el nivel de inflación) entre los países.<sup>27</sup>

## 1.8 Métodos de Determinación de Tipos de Cambio

### 1.8.1 Sistema Standard de Oro<sup>28</sup>

El punto esencial del standard oro es que cada nación se mantiene lista para convertir su papel moneda en oro por un precio designado, estos precios son los que designan los tipos de cambio entre las monedas.

<sup>26</sup> Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan. pp. 59-68

<sup>27</sup> D.Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 281-285

<sup>28</sup> D.Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 171-175

Ossa Scaglia Fernando "Economía Monetaria Internacional" Ed. Alfaomega pp. 27-45

Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan. pp. 59-68

Como ya hemos visto los tipos de cambio varían según ley de oferta y demanda, sin embargo en éste se tiene fijo el tipo de cambio por lo cual debe haber un ajuste en algún lado ya que los ajustes no se dan en el tipo de cambio (como se daría si el tipo de cambio fuera libre). El mecanismo de ajuste del nivel de precios para el standard oro se conoce como el mecanismo de ajuste automático precio - especie.

El mecanismo de ajuste automático precio - especie funciona de la siguiente manera: si un país le importa más a un país de lo que exporta el ajuste se realiza mediante la traslación de oro del país con el déficit al país con el superávit.

Ahora, se tiene que tener una reserva mínima de oro según la cantidad de dinero que esté en circulación (25% es el porcentaje que se utilizó históricamente), lo anterior provoca que al aumentar el nivel de reservas de oro de un país que tiene superávit, éste puede poner más dinero en circulación y el país con el déficit debe sacar dinero de circulación, todo esto resultará en el aumento de precios en el país con superávit y una disminución de precios en el país con el déficit (así es como fue explicado por los economistas clásicos y este efecto de que los precios cambien en proporción a la oferta de dinero es conocido como teoría de cantidad de dinero). Todo este movimiento de precios provocará que las exportaciones del país que tiene el déficit aumenten y que las importaciones disminuyan y a la larga desaparecerá el déficit de este país.

El mecanismo de ajuste de precios no funciona sólo por medio de los cambios en los precios relativos entre las naciones sino que también por medio de cambios en precios relativos dentro de las naciones, como podrían ser la diferencia de precios entre productos que se comercian internacionalmente (los cuales cambiarían) y los que no se comercian internacionalmente (que permanecerían sin cambiar) lo cual provoca el cambio de consumo en estos productos por parte de la población (pasan a consumir el tipo de producto más barato) lo que hace que aumenten o bajen las exportaciones o importaciones y así mueven la balanza de pagos.

Cuando las reservas a causa de déficits continuos durante periodos largos disminúan bastante provocaban que se tuviera que devaluar (así se le llama a la depreciación cuando es realizada por decreto) la moneda para que al valer menos hiciera que las reservas fueran suficientes.

Sin embargo en la realidad el sistema no funcionó muchas veces por la llamada esterilización o política de neutralización que consiste en no modificar la oferta de dinero según los niveles de reservas, esto ocurría seguido debido a que los países preferían atender a o tras necesidades más apremiantes para ellos. Otra razón es porque los precios son más rígidos para bajar por lo cual no se podía realizar el ajuste por medio del mecanismo de ajuste de precios.

### 1.8.2 Bretton Woods<sup>29</sup>

Este método de determinación de tipos de cambio permitía el movimiento de los tipos de cambio entre puntos de soporte. Los puntos de soporte eran los tipos de cambio en los cuales los bancos

<sup>29</sup> Ossa Scaglia Fernando "Economía Monetaria Internacional" Ed. Alfaomega pp. 269-279  
D.Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 176-181, 209-214

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

centrales compraban y vendían su moneda por dólares para asegurarse que los tipos de cambio no se movieran más allá del intervalo entre esos dos puntos, a su vez los Estados Unidos mantenían los dólares fijos a un precio en relación al oro, por lo que ofrecían cambiar dólares por oro a un precio oficial. Los países que se mantenían amarrados a los tipos de cambio en relación a los dólares debían de mantener el tipo de cambio real a menos de 1% del valor de paridad seleccionada, para que esto fuera posible era necesaria la intervención del gobierno del país para vender o comprar moneda local por dólares para mantener ese 1% aunque las fuerzas de los mercados libres las empujaran, lo cual se traduce en una disminución o aumento de las reservas.

El ajuste se da de tal forma que si la cantidad de moneda demandada supera la cantidad de moneda ofertada y hace que el tipo de cambio se mueva en favor de esa moneda por lo que el banco central debe vender su moneda y comprar dólares, esto va a provocar que aumente la oferta de esa moneda y también que aumenten los precios. Al aumentar los precios se provoca que las exportaciones de ese país disminuyan y que aumenten las importaciones lo que regresa al tipo de cambio al lugar anterior (al regresar la curva de la demanda al mismo lugar), lo mismo ocurre para el caso contrario (cuando la moneda ofertada es mayor a la moneda demandada) sólo que al revés, el gobierno va a vender dólares y cambiarlos por moneda doméstica.

La intervención de un banco central afecta la oferta de dinero, los precios locales, las importaciones y exportaciones y esto hace que se restablezca el equilibrio entre la oferta privada y demanda. Sin embargo si existe la esterilización del déficit o superávit de la balanza de pagos y a la oferta de dinero no se le permite cambiar el mecanismo de ajuste del nivel de precios no va a funcionar. La esterilización resultará en un cambio continuo en las reservas extranjeras y en la necesidad eventual de revisar el tipo de cambio. Lo anterior hace a la predicción del tipo de cambio una actividad muy provechosa ya que la necesidad de revisar el tipo de cambio se vuelve aparente al revisar los niveles de la reserva del tipo de cambio. Si existe la posibilidad de una devaluación debido a bajas reservas lo peor que puede ocurrir para un especulador es que no se devalúe la moneda (es prácticamente imposible que se revalúe), por lo tanto especular con la posible devaluación de una moneda es prácticamente una acción con un riesgo nulo. Las acciones de los especuladores empujan más la oferta de la moneda a incrementarse y el gobierno debe comprar esas monedas lo que se traduce en una disminución de las reservas en una mayor medida y finalmente en la devaluación a menos que consiga un préstamo internacional.

Otro problema es que las naciones que tienen continuos déficits se ven obligadas a devaluar su moneda, sin embargo, las naciones que tienen continuos superávits no se ven tan presionadas a revalorarlas por lo que este sistema cae más pesadamente en las naciones con continuos déficits.

### 1.8.3 Sistema Monetario Europeo<sup>30</sup>

Este sistema consistía en que en el caso de que se presentara la llegada de un tipo de cambio a un límite eso significaba que ambas naciones debían intervenir en la corrección de ese problema, y si no podía un país tomar las medidas debía explicar a todo el grupo de países a que se debía que no tomaba las medidas.

<sup>30</sup> D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 181-184

Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan. pp 79

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Actualmente en Europa se sigue una forma más avanzada de este sistema donde todas las naciones utilizan una misma moneda que es como si fuera un portafolio de todas las distintas monedas europeas (peseta, marco alemán, franco, etc.) la cual ofrece los beneficios de la diversificación.

#### 1.8.4 Flotación sucia<sup>31</sup>

Este consiste en que los bancos centrales intervienen en los mercados de tipo de cambio aún cuando se declara que los tipos de cambio son flexibles, esto se debe a que se busca reducir la incertidumbre a corto plazo de los tipos de cambio pero dejando que los tipos de cambio reflejen diferenciales en tasas de interés, de inflación, etc. a largo plazo.

#### 1.8.5 Banda Ancha<sup>32</sup>

Este consiste en mantener un rango de fluctuación más ancho que el normal, para así permitir que tenga más oportunidad de fluctuar el valor real del tipo de cambio alrededor de un valor sin tener que estar haciendo los ajustes pertinentes tan seguido.

#### 1.8.6 Crawling Peg<sup>33</sup>

Es un sistema automático para revisar el valor central entre el que el tipo de cambio puede fluctuar, con lo cual periódicamente se van moviendo el tope superior e inferior, por lo tanto el banco central tiene la responsabilidad de vigilar que no se pase de esos niveles pero estos niveles son revisados periódicamente.

Normalmente el valor central, que es revisado periódicamente, se revisa con respecto a un promedio de los tipos de cambio (o niveles de inflación, de tasas de interés, etc.) de las últimas semanas o meses. Lo anterior permite que el tipo de cambio refleje las tendencias a largo plazo pero reduciendo la incertidumbre a corto plazo.

<sup>31</sup> D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 185, 218-220.

<sup>32</sup> Idem pp. 185

<sup>33</sup> Ibidem

## Capítulo II: Volatilidad y Movimiento Browniano

### 2.1 Definición de Volatilidad

La Volatilidad es una medida de la incertidumbre sobre el comportamiento de cierta variable en el futuro (rendimiento de una acción, valor del tipo de cambio en el futuro, etc.)

Una definición más formal es que la volatilidad es la raíz cuadrada del segundo momento de la distribución  $(E(X - \mu)^2)^{1/2} = \sigma$ . Y mide el riesgo como la dispersión de los resultados alrededor de su valor esperado o promedio.

### 2.2 Teorías de Volatilidad en el Tipo de Cambio

#### 2.2.1 Teoría "Sticky - Price" de Dornbusch<sup>34</sup>

Tenemos que el principio de paridad de poder de compra es un pilar para la teoría monetaria y que este principio incluye el supuesto de que en la fórmula se incluyen los niveles de precios que agrupan todos los bienes y servicios, sin embargo al no darse esto la teoría monetaria puede generar "overshooting" al ir los tipos de cambio más allá del nuevo punto de equilibrio antes de regresar y quedarse en él.

Parte de esto se debe a que los productos y servicios que no son comercializados internacionalmente son "pegajosos" ("sticky") lo que significa que tardan mucho más en mover su precio para alcanzar un nuevo punto de equilibrio una vez que se han presentado cambios. Ahora, estas circunstancias provocan que, de acuerdo a lo expuesto por la teoría monetaria, el tipo de cambio se mueva en proporción al incremento porcentual en la oferta de dinero de ese país. Entonces por el movimiento del tipo de cambio tenemos que el precio de los productos comercializados internacionalmente se mueve automáticamente (eso se puede ver en la fórmula que resume a la teoría monetaria), sin embargo los productos que no son comercializados internacionalmente modificarán su precio en una forma mucho más lenta que los comercializados internacionalmente lo que provoca que mientras se alcanza el nuevo nivel de precios que trae equilibrio al exceso de oferta de dinero se elimine este exceso de oferta por medio del gasto en bonos, lo cual provoca un precio más alto en bonos y disminuye las tasas de interés del país. De ahí, al ser las tasas de interés más bajas que las de los demás países, el capital invertido en ese país, emigra hasta que se creen expectativas de que la moneda del país se aprecie (compensando

<sup>34</sup> D. Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 163-166.

Rivera Batiz Francisco y Luis "International Finance & Open Economy Macroeconomics" Ed. Mc Millan. pp 79

así la pérdida al bajar las tasas de interés con el beneficio ganado al ser más valiosa la moneda). Para que la moneda tenga la expectativa de ser apreciada debe hacer "overshoot" al bajar más allá del punto de equilibrio, esto provoca que los precios de los productos comercializados internacionalmente (los cuales se mueven junto con el tipo de cambio) incrementen más allá del incremento de la oferta de dinero con lo cual se mantiene el equilibrio entre la oferta y demanda de dinero en el corto plazo.

Ahora, los precios de los productos no comercializados internacionalmente en el largo plazo alcanzarán el incremento proporcional al incremento de la oferta de dinero. Lo cual significará que la moneda sólo habrá de depreciarse en la misma proporción en que aumentó la oferta de dinero por lo que el tipo de cambio cambia de tal forma que la moneda se aprecia y llega al punto de equilibrio al que debió haber llegado en un principio de haber cambiado todos los productos y servicios (los comercializados internacionalmente así como los que no son comercializados internacionalmente) su precio inmediatamente. Además los precios de los productos comercializados internacionalmente que crecieron en proporción más que el crecimiento de la oferta de dinero reducirán su precio (alcanzando el incremento igual al incremento de la oferta de dinero) y no sólo los precios sino que las tasas de interés eventualmente también regresan a su nivel original.

## 2.2.2 Elasticidades Variables<sup>35</sup>

Algo que es importante señalar y analizar es la elasticidad de la demanda de importaciones. Cuando la curva de la demanda de importaciones es elástica (esto es que al caer el precio de las importaciones la cantidad de importaciones crece en un mayor porcentaje que el que disminuye el precio de las importaciones) la curva de la oferta de moneda tenga curvatura hacia arriba. Sin embargo si la curva de la demanda de importaciones es inelástica (con la reducción del precio de importaciones el aumento de la cantidad de importaciones será menor que el porcentaje en que se redujo el precio y viceversa, o sea, si el precio aumenta el porcentaje en que se reducirá la cantidad de importaciones será menor que el porcentaje en que aumentó el precio) la curva de la oferta de la moneda tendrá una curvatura hacia abajo, si hay una depreciación (que en el caso de demanda de importaciones inelástica provocaría una reducción del valor de las importaciones) se provoca un aumento del valor de las importaciones.

Al incrementar más el precio de las importaciones que la cantidad de importaciones el valor de las importaciones aumenta, lo cual provocará que aún con la depreciación de la moneda la oferta de dinero en ese país aumenta, lo que provoca exceso de oferta de dinero y debe haber una depreciación para arreglar esto lo cual provocaría que el ciclo se repitiera indefinidamente, todo esto debido a que la elasticidad de la demanda por importaciones es inelástica, sin embargo al pasar el tiempo las elasticidades de la oferta de exportaciones y de demanda de importaciones incrementa y eso hace que se llegue a un equilibrio. Pero todo esto provoca "overshooting" en el tipo de cambio. La situación en que las elasticidades varían se puede dar debido al efecto llamado de la curva J, el cual consiste en la creencia de que las elasticidades son más inelásticas a corto plazo que a largo plazo (que es el tiempo en que la gente tarda en encontrar los sustitutos a los productos que compra), entonces al ser las importaciones y exportaciones lo suficientemente inelásticas en el corto plazo y hace que tengamos ambos tipos de cambio inestables y el empeoramiento(o mejoramiento) temporal de la balanza de comercio (valor de las importaciones

<sup>35</sup> D.Levi Maurice "International Finance" 3<sup>rd</sup> Edition pp. 166, 142-147.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

o exportaciones) después de una depreciación (o apreciación), pero al cambiar las elasticidades a largo plazo la estabilidad regresa a los mercados de cambio de moneda extranjera. Otra razón que puede provocar esto es que la elasticidad por cierto periodo sea cero como resultado de contratos de importación y exportación hechos con anterioridad. Un factor que puede reducir el "overshooting" es que estos comportamientos sean predichos por especuladores.

Ese círculo vicioso que provocaría que se siguieran depreciando las monedas sin alcanzar su punto de equilibrio demostraría que se estaría en un mercado inestable (éstos se dan cuando al haber un disturbio en el punto de equilibrio las fuerzas normales empujan al tipo de cambio en una dirección que la aleja del punto de equilibrio que es lo contrario a lo que ocurre en un mercado estable). Un mercado inestable se da cuando la curva de la oferta de la moneda tiene tendencia hacia abajo y además la curva de la demanda de la moneda es más inclinada que la curva de la oferta, esto es, que la corte por arriba en vez de por abajo. La estabilidad de un mercado se puede saber viendo si se cumple la condición de Marshall - Lerner:

$n_e$  = elasticidad de la demanda de exportaciones  
 $n_i$  = elasticidad de la demanda de importaciones

$$n_e + n_i > 1$$

Cuando es menor a 1 significa que el mercado es inestable y cuando es igual a 1 indicará que el mercado es metaestable y que se mantendrá en donde está. Aunque una vez más debemos recordar que esto puede no cumplirse debido a que los especuladores pueden adivinar el comportamiento y con sus acciones modificarlo.

### 2.2.3 Fluctuaciones de Flujos y Ajuste de "Stock"<sup>36</sup>

Por diversas razones llegan a presentarse cambios de decisiones sobre en que país invertir, etc. lo que puede llegar a representar un cambio de dirección del flujo de dinero que se destina a inversión en un país a otro país o de todo el dinero que se tiene invertido en ese país para pasarlo a otro país, lo que representaría que la demanda de moneda del país al cual se va a invertir ahora y la oferta de la moneda del país del que se saca el dinero serán mucho más grandes de lo que son periódicamente (por ejemplo del país en el que ahora se va a invertir la demanda periódica sólo será la del flujo y no la del flujo junto con todo el capital que se traslada) lo cual provocará "overshooting" del tipo de cambio ya que más tarde disminuirán la demanda y oferta de moneda en los dos países respectivamente.

### 2.2.4 Teoría de las Burbujas Especulativas<sup>37</sup>

Esta teoría afirma que los administradores de los portafolios de inversión se guían por predicciones hechas por dos grupos: los que extrapolan tendencias recientes y por los que se guían por teorías y conceptos fundamentales (tales como que el principio de paridad de poder

<sup>36</sup> Idem pp.166

<sup>37</sup> Idem pp.167

adquisitivo se mantiene). Los administradores generalmente siguen los pronósticos del grupo más acertado últimamente hasta que el otro grupo comienza a tener más certeza en sus predicciones, sin embargo, a veces al tener grandes diferencias ambos grupos entre sus pronósticos el salto de seguir las predicciones de uno a otro puede provocar movimientos bruscos y crear "overshooting".

## 2.3 Procesos Estocásticos

Una variable que presenta cambios inciertos en el tiempo sigue un proceso estocástico.

### 2.3.1 Tipos de Procesos Estocásticos

Los procesos se clasifican según el tipo de variable o tiempo.<sup>38</sup>

La clasificación por tiempo se divide en:

- Proceso estocástico de tiempo discreto: Es aquel en el cual la variable puede presentar cambios sólo en ciertos puntos del tiempo
- Proceso estocástico de tiempo continuo: La variable puede presentar cambios en cualquier momento.

La clasificación según el tipo de variable se divide en:

- Proceso estocástico de variable discreta: en este tipo de procesos la variable puede tomar sólo ciertos valores dentro de un rango.
- Proceso estocástico de variable continua: En este tipo de procesos la variable puede tomar cualquier valor dentro de un rango.

### 2.3.2 Proceso de Markov

Proceso estocástico donde sólo el valor presente es relevante para la predicción del futuro.

<sup>38</sup> Hull John C. Options Futures & Other Derivatives. 2000 Pag 218

Karlin S. and H.M. Taylor. A first course in stochastic processes, 2<sup>nd</sup> edition, New York Academic Press 1975. Pags 26-30



La distribución de probabilidad del comportamiento del precio en el futuro no depende de la tendencia seguida en el pasado por un precio. Para esto el valor actual del tipo de cambio, el precio de una acción, etc. debe reflejar toda la información contenida en los precios o índices anteriores.

Las expresiones para el futuro deben ser expresadas en forma de probabilidad.

## 2.4 Movimiento Browniano (Proceso Weiner)<sup>39</sup>

Proceso estocástico de Markov con media de cambio cero y varianza de 1 por año.

Una variable  $z$  que sigue un movimiento Browniano tiene las siguientes propiedades:

1.- El cambio  $\Delta z$  durante un periodo pequeño de tiempo  $\Delta t$  es:

$$\Delta z = \varepsilon (\Delta t)^{1/2}$$

donde  $\varepsilon$  es un valor aleatorio de una distribución normal aleatoria  $\Phi(0,1)$

Esto nos indica que  $\Delta z$  tiene una distribución normal con media = 0, desviación standard =  $(\Delta t)^{1/2}$  y varianza =  $\Delta t$

2.- Los valores  $\Delta z$  para dos intervalos de tiempo  $\Delta t$  diferentes son independientes, lo cual implica que sigue un proceso de Markov.

Si consideramos un incremento en el valor de  $z$  durante un periodo de tiempo largo  $T$ . Esto es:  $z(T) - z(0)$ . Esto se puede tomar como la suma de incrementos en  $z$  durante  $N$  intervalos de tiempo de longitud  $\Delta t$

donde:

$$N = T/\Delta t$$

De ahí:

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i (\Delta t)^{1/2}$$

donde  $\varepsilon_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) son muestras aleatorias de  $\Phi(0,1)$  y además debido a la segunda propiedad de los procesos de Weiner las  $\varepsilon_i$ 's son independientes entre sí. Todo esto nos hace ver que  $Z(T) - z(0)$  se distribuye normalmente con una media = 0, varianza =  $N \Delta t = T$  y una desviación standard =  $(T)^{1/2}$ .

A partir de esto podemos notar que la incertidumbre de la variable en cierto punto en el futuro crece como la raíz cuadrada de qué tan adelante miramos (ya que está medida por la

<sup>39</sup> Hull John C. Options Futures & Other Derivatives. 2000 Pag 220

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

desviación standard) por lo que al hacer  $\Delta t \rightarrow 0$  esto nos lleva a que  $(\Delta t)^{1/2}$  sea mucho mayor que  $\Delta t$ .

Este proceso tiene un incremento promedio por unidad de tiempo (tasa drift) con valor cero (lo cual significa que el valor de  $z$  en cualquier tiempo futuro es igual al valor presente) y una tasa de varianza 1.0 ( lo que significa que la varianza en un periodo de cambio  $T$  es  $T$ ).

Tenemos que

$$dx = a dt + b dz^{40}$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes es una expresión que nos representa un proceso Weiner generalizado.

$a dt$  nos indica que  $x$  tiene una tasa de incremento promedio por unidad de tiempo de  $a$ . Viendo la expresión sin el término  $b dz$ :

$$dx = a dt$$

$$dx/dt = a$$

o también se puede ver como:

$$x = x_0 + at$$

donde

$$x_0 = x \text{ en el tiempo cero.}$$

Todo esto nos representa que  $x$  en un periodo de longitud  $t$  se incrementará en una cantidad  $at$ .

$b dz$  es el término que nos indica la variabilidad de la trayectoria seguida por  $x$ . Este ruido o variabilidad es  $b$  veces el proceso Weiner.

Si un proceso Weiner tiene una desviación standard de 1.0 entonces  $b$  veces un proceso Weiner tiene una desviación de  $b$ .

Y para un intervalo de tiempo  $\Delta t$  el cambio de  $x$  denotado por  $\Delta x$  es expresado por:

$$\Delta x = a \Delta t + b \varepsilon (\Delta t)^{1/2}$$

$\varepsilon$  es una muestra de  $\Phi(0,1)$

Por lo anterior,  $\Delta x$  tiene una distribución normal con media  $= a \Delta t$ , desviación standard  $= b (\Delta t)^{1/2}$  y varianza  $= (b^2) \Delta t$ .

Si asumimos que  $S$  es el precio de la acción en  $t$ , la tasa drift se asume que es  $\mu$  para un parámetro constante  $\mu$  (que representará el retorno esperado en forma decimal). Lo cual significa

<sup>40</sup> Hull John C. Options Futures & Other Derivatives. 2000 Pag 223

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

que para un intervalo corto de tiempo  $\Delta t$  el incremento esperado en  $S$  es  $\mu S \Delta t$ . Todo esto se debe a que esperamos cierto retorno sin importar el precio.<sup>41</sup>

Tomando la volatilidad del precio como cero el modelo implicará que:

$$\Delta S = \mu S \Delta t$$

$\lim \Delta t \rightarrow 0$

$$ds = \mu S dt$$

$$ds/S = \mu dt$$

de ahí tenemos que:

$$S_T = S_0 e^{(\mu T)}$$

$S_0$  = precio en cero

$S_T$  = precio en el tiempo  $T$ .

Lo anterior nos dice que cuando la varianza es cero el precio aumenta a una tasa compuesta de  $\mu$  por unidad de tiempo.

## 2.5 Movimiento Browniano Geométrico

Ahora asumimos que la variabilidad de la tasa de retorno en un periodo corto de tiempo  $\Delta t$  es la misma sin importar el precio de la acción lo cual nos sugiere que la desviación standard de cambio en un periodo corto de tiempo  $\Delta t$  debe ser proporcional al precio de la acción, esto nos arroja el modelo:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

$$dS/S = \mu dt + \sigma dz$$

$\sigma$  : es la volatilidad del precio

$\mu$  : es la tasa de retorno esperada

y es conocido como el Movimiento Browniano Geométrico<sup>42</sup>

la versión discreta de tiempo del Movimiento Browniano Geométrico es:

$$\Delta S/S = \mu \Delta t + \sigma \epsilon (\Delta t)^{(1/2)}$$

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \epsilon (\Delta t)^{(1/2)}$$

<sup>41</sup> Hull John C.Options Futures & Other Derivatives.2000 Pag 225

<sup>42</sup> Hull John C.Options Futures & Other Derivatives.2000 Pag 226

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$\Delta S$  : Cambio del precio

$\Delta t$  : Intervalo de tiempo

$\varepsilon$  : muestra aleatoria de una distribución normal standarizada  $\Phi(0,1)$

$\mu$  : tasa de retorno esperada por unidad de tiempo (constante).

$\sigma$  : volatilidad de precio de una acción (constante).

$\Delta S/S$  : retorno proveído por la acción en el periodo corto de tiempo  $\Delta t$

$\sigma^2 \Delta t$  : varianza del componente estocástico (varianza del retorno total)

$\Delta S/S$  se distribuye normalmente con media  $\mu \Delta t$ , y desviación standard  $\sigma (\Delta t)^{(1/2)}$

$\Delta S/S \sim \Phi (\mu \Delta t, \sigma (\Delta t)^{(1/2)})$

## 2.6 Aplicación del Movimiento Browniano al Tipo de Cambio

Si queremos aplicar el comportamiento de un Movimiento Browniano Geométrico al tipo de cambio, lo tomamos como el precio de una acción, todo esto realizándolo de la siguiente forma:

Primero observamos la similitud entre un activo que paga dividendos a una tasa  $q$  por año y uno que no paga dividendos.<sup>43</sup>

Ambos activos deben proveer la misma ganancia total (dividendos más la ganancia de capital).

El pago de un dividendo continuo provoca que la tasa de crecimiento del precio de la acción sea menor de lo que sería si no hubieran dividendos por el monto  $q$ .

Si pagando dividendos continuos  $q$ , el precio de la acción crece de  $S_0$  (en el tiempo cero) a  $S_T e^{qT}$  en el tiempo  $T$ , en ausencia del pago de dividendos crecería de  $S_0 e^{-qT}$  en el tiempo cero a  $S_T$  en el tiempo  $T$ .

Esto nos lleva a obtener la misma distribución de probabilidad para el precio de la acción en el tiempo  $T$  en los siguientes dos casos:

- 1.- La acción empieza con el precio  $S_0$  y paga un dividendo continuo a tasa  $q$ .
- 2.- La acción empieza con el precio  $S_0 e^{-qT}$  y no paga dividendo.

Entonces para hacer valuaciones con acciones que paguen dividendos tomamos el precio de  $S_0 e^{-qT}$  en vez del precio  $S_0$  y lo valuamos como una acción que no paga dividendos.

Una moneda extranjera es análoga a un activo que provee un dividendo conocido. El propietario de la moneda extranjera recibe un "dividendo" igual a la tasa libre de riesgo  $r_f$  en la moneda extranjera. Entonces para valorar utilizamos el tipo de cambio hoy ( $S_0$ ) con el precio

$$S_0 e^{-qT} \quad 44$$

<sup>43</sup> Idem pp 273

<sup>44</sup> Idem pp 283

Ahora definimos a  $S$  como el valor del tipo de cambio spot (valor de una moneda extranjera medida en moneda doméstica).

Asumimos que  $S$  sigue un movimiento browniano geométrico y que estamos en un mundo neutral al riesgo, entonces el proceso sería:

$$dS = (r - r_f) S dt + \sigma S dz$$

donde:

$r$  : la tasa doméstica libre de riesgo.

$r_f$  : la tasa extranjera libre de riesgo.

$\sigma$  : volatilidad de el tipo de cambio.

Por lo que para cualquier cálculo relacionado con tipos de cambio utilizaremos los modelos para las acciones realizando las sustituciones de valores pertinentes.

Recordamos que  $dS = \mu S dt + \sigma S dz$  lo que significa que el tipo de cambio sigue un movimiento browniano geométrico

Sabemos que una variable tiene una distribución log normal si el logaritmo natural de la variable se distribuye normalmente y de ahí:

$$d \ln S = [\mu - ((\sigma^2)/2)] dt + \sigma dz$$

lo cual obtenemos a través del lema de Ito:

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t) dz$$

$dz$  : proceso de Weiner

$a$  y  $b$  : funciones de  $x$  y  $t$

$x$  : variable con un incremento promedio por unidad de tiempo (tasa drift)  $a$  y tasa de varianza  $b^2$

El Lema de Ito<sup>45</sup> dice que una función  $G$  de  $x$  y  $t$  sigue el proceso

$$dG = \left[ (\delta G/\delta x)a + (\delta G/\delta t) + (1/2) [(\delta^2 G)/(\delta(x^2))] b^2 \right] dt + (\delta G/\delta x) b dz$$

donde :  $dz$  sigue siendo el mismo proceso de Weiner

Al  $G$  seguir un proceso de Ito esto indica que tiene una tasa drift

$$(\delta G/\delta x)a + (\delta G/\delta t) + (1/2) [(\delta^2 G)/(\delta(x^2))] (b^2)$$

y una tasa de varianza de

$$[(\delta G/\delta x)^2] (b^2)$$

<sup>45</sup> Idem pp 229 y Appendix 10A

Tenemos que  $dS = \mu S dt + \sigma S dz$  (con  $\mu$  y  $\sigma$  constantes) es un modelo de movimientos de precio, al aplicarle el Lema de Ito el proceso que sigue la función  $G$  de  $S$  y  $t$  es:

$$dG = [(\delta G/\delta S)\mu S + (\delta G/\delta t) + (1/2) [((\delta^2 G)/(\delta S^2))] \sigma^2 S^2] dt + (\delta G/\delta S) \sigma S dz^{46}$$

donde  $G$  y  $S$  están afectados por el mismo origen de incertidumbre  $dz$ .

Ahora definiendo

$$G = \ln S$$

Ya que

$$(\delta G/\delta S) = (1/S) ; ((\delta^2 G)/(\delta S^2)) = -1/S^2 ; (\delta G/\delta t) = 0$$

entonces el proceso seguido por  $G$  será:

$$dG = [\mu - ((\sigma^2)/2)] dt + \sigma dz$$

en donde  $\mu$  y  $\sigma$  son constantes y  $G$  sigue (por lo que indica la ecuación) un proceso de Weiner.

Tiene una tasa drift constante de

$$[\mu - ((\sigma^2)/2)] t$$

y una tasa de varianza constante de  $\sigma^2$ .

El cambio de  $G$  entre 0 y un tiempo futuro  $T$  se distribuye normalmente con media

$$[\mu - ((\sigma^2)/2)] T$$

y varianza

$$(\sigma^2) T$$

lo que se expresa de la siguiente forma

$$\ln S_T - \ln S_0 \sim \Phi ([\mu - ((\sigma^2)/2)] T, \sigma T^{1/2})$$

$$\ln (S_T / S_0) \sim \Phi ([\mu - ((\sigma^2)/2)] T, \sigma T^{1/2})$$

y

$$\ln S_T \sim \Phi (\ln S_0 + [\mu - ((\sigma^2)/2)] T, \sigma T^{1/2})^{47}$$

$S_T$  : precio de la acción en un tiempo futuro  $T$ . Se distribuye normalmente y tiene una distribución lognormal.

<sup>46</sup> Idem pp 230-231

<sup>47</sup> Idem pp 237 y 250

$S_0$  : precio de la acción en el tiempo 0.

$\Phi(m,s)$  : distribución normal

A partir de lo observado anteriormente tenemos que el modelo

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz$$

implica que el precio de una acción en el tiempo T dado su precio actual se distribuye como log normal. La desviación standard del logaritmo del precio de la acción es  $\sigma T^{1/2}$  y es proporcional a que tan adelante estemos observando.

A partir de:

$$\ln(S_T / S_0) \sim \Phi([\mu - ((\sigma^2)/2)] T, \sigma T^{1/2})$$

y las propiedades de la distribución lognormal, se puede mostrar que el valor esperado de  $S_T$ .  $E(S_T)$  está dado por :

$$E(S_T) = S_0 e^{\mu T}$$

Lo que coincide con la definición de  $\mu$  como la tasa esperada de retorno. La varianza de  $S_T$  se puede mostrar como:

$$\text{Var}(S_T) = (S_0)^2 [e^{2\mu T}] [(e^{2\sigma T}) - 1]^{48}$$

Si tenemos

$$S_T = S_0 [e^{(\eta T)}]$$

Donde:

$\eta$  : tasa compuesta de retorno por año entre los tiempos 0 y T.

Se tiene luego que:

$$\eta = (1/T) \ln(S_T/S_0)$$

$$\rightarrow \eta \sim \Phi([\mu - ((\sigma^2)/2)], \sigma [T^{1/2}])$$

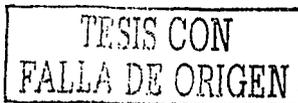
la tasa compuesta continuamente de retorno por año se distribuye normalmente con media  $[\mu - ((\sigma^2)/2)]$  y desviación standard  $\sigma [T^{1/2}]$ <sup>49</sup>

A partir de esto podemos definir la volatilidad del precio de una acción como la desviación standard del retorno provisto por la acción en un año cuando el retorno es expresado utilizando una composición continua.

La expresión

<sup>48</sup> Idem pp 239

<sup>49</sup> idem pp 240



$$\ln S_T - \Phi \left( \ln S_0 + [\mu - ((\sigma^2)/2)] T, \sigma T^{1/2} \right)$$

donde  $S$  es el precio de la acción nos muestra que la volatilidad es la desviación standard del logaritmo natural del precio de una acción al final del año.

La versión discreta del movimiento browniano geométrico

$$\Delta S/S = \mu \Delta t + \sigma \varepsilon (\Delta t)^{1/2}$$

nos muestra que  $\sigma (\Delta t)^{1/2}$  es aproximadamente igual a la desviación standard del cambio proporcional del cambio en el precio de la acción en el tiempo  $\Delta t$ , por lo tanto, la incertidumbre sobre el precio futuro de la acción (medida como la desviación standard) crece (aproximadamente) con la raíz cuadrada de qué tan lejos miremos.<sup>50</sup>

## 2.7 Estimación Empírica de la Volatilidad a partir de Información Histórica

Si queremos estimar la volatilidad en el precio de una acción empíricamente a partir de información histórica cada cierto intervalo de tiempo (1 día, 1 semana, 1 año, etc.) hacemos una observación del precio de la acción

Tenemos que

$$u_i = \ln(S_i/S_{i-1}) \quad \text{con } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

donde:

$u_i$ : es el retorno continuamente compuesto (no anualizado) en el  $i$ -ésimo intervalo.

$n+1$  = número de observaciones.

Si: Precio de la acción al final del  $i$ -ésimo intervalo.

$$S_i = S_{i-1} e^{u_i}$$

Y definimos:

$$s = \left[ \frac{1}{(n-1)} \sum (u_i - \bar{u})^2 \right]^{1/2}$$

$s$ : desviación standard de las  $u_i$ 's.

$\bar{u}$ : media de las  $u_i$ 's

de ahí

$$s = \left[ \frac{1}{(n-1)} \sum (u_i)^2 - \frac{1}{(n-1)} \left( \sum u_i \right)^2 \right]^{1/2}$$

<sup>50</sup> ídem pp 241

$$\ln(S_w/S_0) \sim \Phi([\mu - ((\sigma^2)/2)T], \sigma(T)^{(1/2)})$$

nos indica que la desviación standard de ui es  $\sigma(T)^{(1/2)}$

T : longitud del intervalo de tiempo en años

De ahí  $\sigma$  puede ser estimado como  $\sigma^*$

Donde

$$\sigma^* = s / (T)^{(1/2)}$$

El error standard de este estimado es aproximadamente  $\sigma^* / [(2n)^{(1/2)}]$

Normalmente se utiliza una n entre 90 y 180 días.<sup>51</sup>

---

<sup>51</sup> Idem pp 242

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### Capítulo III: Modelos

En el capítulo pasado ya hemos visto cómo estimar la volatilidad ( $\sigma_n$ ) a través de información histórica. Ahora en este capítulo se presentan los diferentes modelos que utilizaremos para el pronóstico o modelaje de la volatilidad y cómo se va a llevar a cabo en la práctica el cálculo de la volatilidad.

Se presentan las bases teóricas que sostienen estos modelos y también las fórmulas que son aplicadas.

Para poder realizar la aplicación práctica de los modelos presentados en este trabajo se obtuvo información histórica del tipo de cambio peso - dólar del 3 de Mayo de 1999 hasta el 8 de Mayo del 2002, para esto se utilizó la cifra dada por el Banco de México.

Los programas utilizados para desarrollar los modelos fueron Excel de Microsoft Office y E-Views 3.1

#### 3.1 Volatilidad Constante

Para estimar la volatilidad de forma constante definimos:

$\sigma_n$  : Volatilidad de la variable de mercado en el momento  $n$ , estimada en  $n - 1$ .

$\sigma_n^2$  : Tasa varianza.

$S_i$  : Valor de la variable de mercado en el día  $i$  (tipo de cambio).

$u_i$  : Retorno compuesto continuamente durante el día  $i$  (entre el fin del día  $i-1$  y el día  $i$ ).

$u_i = \ln (S_i/S_{i-1})$

Un estimado para la tasa varianza por día  $\sigma_n^2$  utilizando las  $m$  observaciones más recientes (los 720 datos de los cuales disponemos) de  $u_i$  es:

$$\sigma_n^2 = [1/(m-1)] \sum (u_{n-i} - u)^2^{52}$$

donde:

$$u = (1/m) \sum u_{n-i} \quad (\text{media de las } u_i\text{'s})$$

<sup>52</sup> idem pp 241-242

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.1.1 Tasa de Rendimiento Geométrica vs. Tasa de Rendimiento Aritmética.<sup>53</sup>

Cuando se realiza la medición del riesgo de mercado la variable que se utiliza es la tasa de rendimiento de un activo financiero. Este rendimiento se realiza por periodos tomando para el rendimiento actual el valor final del periodo anterior t-1 y el valor del final del periodo actual t.

La tasa de rendimiento aritmética se define de la siguiente forma:

$$r_t = (P_t - P_{t-1})/P_{t-1}$$

La tasa de rendimiento geométrica se define:

$$r_t = \ln (P_t / P_{t-1})$$

Se utilizará preferentemente la tasa de rendimiento geométrica debido a las ventajas que presenta :

Si las tasas se distribuyen normalmente la tasa nunca va a llevar a un precio negativo , lo cual se debe a que la cola izquierda de la distribución  $(\ln (P_t/P_{t-1}) \rightarrow -\infty$  se obtiene como  $(P_t/P_{t-1}) \rightarrow 0$ , o  $P_t \rightarrow 0$ .

Si se distribuye normalmente la tasa de rendimiento aritmética la cola izquierda  $R_t = (P_t - P_{t-1}) / P_{t-1} \rightarrow -\infty$  se obtiene como  $(P_t/P_{t-1}) - 1 < -1$ , o  $P_t < 0$ . Económicamente, esto no es significativo. Por lo que al imponer una distribución normal a la tasa de rendimiento aritmética permite una conducta aberrante de los precios.

Ahora viéndolo desde el punto de vista de tipos de cambio el rendimiento geométrico es más consistente. Sea  $S(M1/M2)$  el precio de M2 en M1, la variable aleatoria de interés será:  $x = \ln(S_t/S_{t-1})$ , pero ahora si lo queremos medir desde el punto de vista contrario la variable sería:  $y = \ln[(1/S_t)/(1/S_{t-1})] = -\ln (S_t/S_{t-1}) = -x$ . De donde las distribuciones de  $x$  y  $y$  son mutuamente consistentes, lo cual no sucedería si se definen los rendimientos en términos discretos, por lo tanto definiremos de esa forma la tasa de rendimiento geométrica en todos los ejercicios menos en uno donde utilizaremos la tasa de rendimiento aritmética con el objetivo de mostrar las diferencias y/o similitudes que presenta con los resultados de la tasa de rendimiento geométrica.

Se utiliza la tasa Aritmética para calcular el valor en riesgo, lo cual se hace realizando las siguientes modificaciones<sup>54</sup>:

1.- Definimos  $u_i$  como el cambio proporcional en la variable de mercado entre el fin del día i-1 y el día i.

$$u_i = (S_i - S_{i-1})/S_{i-1}$$

2.- Asumimos la media de  $u_i$  como cero.

<sup>53</sup> Jorion, Philippe "Valor en Riesgo" Ed. Limusa MexDer pp 99-101.

<sup>54</sup> Hull John C. Options Futures & Other Derivatives.2000 Pag 368-369

$$u_i = 0.$$

3.- Reemplazamos  $m-1$  por  $m$  (esto modifica el estimado imparcial –unbiased estimate– y lo transforma en un estimado de máxima verosimilitud –maximum estimate likelihood–.

Estas modificaciones nos provocan una diferencia muy pequeña a los estimados de varianza calculados y la fórmula para la tasa de varianza se vuelve:

$$\sigma_n^2 = (1/m) \sum u_n^2$$

$$u_i = (S_i - S_{i-1})/S_{i-1}$$

Lo cual está dando un peso igual al estimar  $\sigma_n^2$  a todas las  $u_i$ 's.<sup>55</sup>

### 3.2 Modelo ARCH<sup>56</sup>

Hasta ahora hemos dado igual peso a la información reciente y a la información vieja, sin embargo es más lógico tomar en cuenta con más peso la información más reciente que la información más vieja, por lo que se puede utilizar el siguiente modelo:

$$\sigma_n^2 = \sum \alpha_i (u_{n-i})^2 \quad \alpha_i > 0 \quad i > j \rightarrow \alpha_i > \alpha_j$$

$$\sum \alpha_i = 1$$

donde:

$\alpha_i$  : monto del peso dado a la observación de hace  $i$  días.

Otra opción es utilizar el modelo ARCH que consiste en suponer la existencia de una tendencia a largo plazo de volatilidad que debe ser tomada en cuenta. La expresión que representa al modelo es la siguiente:

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \sum \alpha_i (u_{n-i})^2$$

$V$  : Tendencia de volatilidad a largo plazo.

$\gamma$  : Peso asignado a la tendencia de volatilidad a largo plazo.

$$\gamma + \sum \alpha_i = 1$$

El estimado de la varianza se basa en una varianza promedio a largo plazo y  $m$  observaciones. Entre más nueva sea una observación se le asigna más peso.

<sup>55</sup> Ibidem

<sup>56</sup> Idem 369

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Lo primero que hacemos es obtener los factores del modelo ARCH, éstos los obtenemos por medio del programa E-Views sacando la tendencia de volatilidad a largo plazo y el peso asignado a la volatilidad a largo plazo.

Luego tenemos que definir los pesos para la información sobre volatilidad de los últimos 20 días que para este ejercicio en particular los tomamos como que van decreciendo los pesos de la información con un exponente cuadrado conforme es más viejo el dato que tenemos. Algo que es interesante resaltar es que con esta distribución de pesos a la información histórica solamente los 11 datos más recientes resultan con un peso significativo, los otros datos tienen un valor en su peso tan bajo que son redondeados a cero.

### 3.3 Modelo EWMA (Exponential Weighted Moving Average)<sup>57</sup>

Si ahora suponemos que los pesos asignados  $\alpha_i$  van decreciendo exponencialmente conforme vamos retrocediendo en el tiempo.

$$\alpha_{i+1} = \lambda \alpha_i \quad \lambda : \text{constante entre } 0 \text{ y } 1$$

Esto nos lleva a la fórmula

$$\sigma_n^2 = \lambda (\sigma_{n-1})^2 + (1-\lambda)(u_{n-1})^2$$

donde:

$\sigma_n$  : estimado de la volatilidad del día n hecho al final del día n-1.

$\sigma_{n-1}$  : estimado hecho para el día n-1 en el día n-2.

$u_{n-1}$  : observación más reciente sobre los cambios en la variable del mercado.

Si sustituimos  $\sigma_{n-1}$  por  $\lambda (\sigma_{n-2})^2 + \lambda (u_{n-2})^2$

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &= \lambda [\lambda (\sigma_{n-2})^2 + \lambda (u_{n-2})^2] + \lambda (u_{n-1})^2 \\ \rightarrow \\ \sigma_n^2 &= (1-\lambda) [(u_{n-1})^2 + \lambda (u_{n-2})^2] + (\lambda^2) (\sigma_{n-2})^2 \end{aligned}$$

después sustituimos  $\sigma_{n-2}$  por  $\lambda (\sigma_{n-3})^2 + \lambda (u_{n-3})^2$

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda) [(u_{n-1})^2 + \lambda (u_{n-2})^2 + (\lambda^2) (u_{n-3})^2] + (\lambda^3) (\sigma_{n-3})^2$$

continuando este proceso llegamos a la fórmula

$$\sigma_n^2 = (1-\lambda) [\sum \lambda^{i-1} (u_{n-i})^2] + (\lambda^m) (\sigma_0)^2$$

esta fórmula nos indica que cuando llegamos a una m muy grande (un dato muy viejo) el valor de  $(\lambda^m) (\sigma_0)^2$  es muy pequeño para ser tomado en cuenta, lo cual nos deja que esta ecuación es:

<sup>57</sup> Idem pp 370

$$\sigma_n^2 = \sum \alpha_i (u_{n-i})^2$$

donde:

$$\alpha_i = (1-\lambda) \lambda^{i-1}$$

que es la fórmula del esquema de pesos. Aquí las  $u_i$ 's decrecen a una tasa de  $\lambda$  conforme retrocedemos en el tiempo, esto es que cada peso es  $\lambda$  veces el peso anterior.

Al utilizar solamente un estimado anterior para el cálculo del estimado actual este modelo nos arroja la gran ventaja de que no necesitamos mucha información almacenada para obtener nuestros pronósticos.

Cuando se presentan movimientos bruscos en la variable de mercado provocan un aumento de la  $u^2$  y a su vez nos aumenta la  $\sigma_n$ , lo que se traduce en un aumento en la volatilidad estimada para el día siguiente en la variable.

Para controlar que tanto afectan las últimas observaciones de las  $u_i^2$ 's en nuestro estimado de la volatilidad movemos el valor de  $\lambda$  según nuestra conveniencia, tomando en cuenta que entre más alto utilicemos el valor de  $\lambda$  más lento va a responder a las observaciones más nuevas y entre más bajo utilicemos el valor de  $\lambda$  más peso se le da a la última observación (esto provoca que los estimados en los días sucesivos sean altamente volátiles).

Para llevar a cabo este ejercicio le asignamos a  $\lambda$  un valor de 0.985 porque eso nos da los pronósticos más acertados en relación a los resultados históricos utilizados.

### 3.4 Modelo GARCH<sup>58</sup>

GARCH (p,q) calcula  $\sigma_n^2$  por las últimas p observaciones de  $u^2$  y las q más recientes estimaciones de la varianza. Además toma en cuenta la tasa varianza promedio a largo plazo.

Si ahora además de utilizar para el cálculo el pronóstico anterior  $\sigma_{n-1}^2$  y la observación anterior  $u_{n-1}$  tomamos en cuenta la tasa varianza promedio a largo plazo nos queda:

$$\sigma_n^2 = \gamma V + \beta (\sigma_{n-1})^2 + \alpha (u_{n-1})^2$$

V : Tasa varianza promedio a largo plazo

$\gamma$  : peso asignado a V.

$\alpha$  : peso asignado a  $(u_{n-1})^2$

$\beta$  : peso asignado a  $(\sigma_{n-1})^2$

es lógico que

$$\gamma + \beta + \alpha = 1$$

<sup>58</sup> Idem pp 372

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

éste sería el modelo GARCH (1,1) ya que el (1,1) representa que se toma para el pronóstico la observación más reciente de  $u^2$  y la más reciente estimación para la varianza. Una cosa que se puede observar es que el modelo EWMA es un caso particular del modelo GARCH (1,1) en donde

$$\begin{aligned}\gamma &= 0 \\ \alpha &= 1 - \lambda \\ \beta &= \lambda\end{aligned}$$

Para calcular los parámetros utilizamos GARCH (1,1) en la siguiente forma:

$$\omega = \gamma V$$

$$\sigma_n^2 = \omega + \beta (\sigma_{n-1})^2 + \alpha (u_{n-1})^2$$

Ya calculados  $\omega$ ,  $\beta$  y  $\alpha$ , obtenemos

$$\gamma = 1 - \alpha - \beta$$

$$V = \omega / \gamma$$

Sustituyendo queda

$$\sigma_{n-1}^2 = \omega + \alpha (u_{n-2})^2 + \beta (\sigma_{n-2})^2$$

Y observamos que los pesos van declinando a una tasa de  $\beta$  y se utiliza para influir en que tanto se toman en cuenta las observaciones más viejas en relación a las más nuevas, de la misma forma en que se utiliza la  $\lambda$  para el modelo EWMA, esto es que entre más alto utilizamos la  $\beta$  más lento responde nuestro pronóstico a las observaciones más nuevas y entre más bajo sea la  $\beta$  más peso se le da a la última observación.

Introducimos la serie de datos al programa E-Views 3.1 para que nos arroje los coeficientes de GARCH (1,1) dando los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\omega &= 2.75 \times 10^{-05} \\ \alpha &= 0.12329 \\ \beta &= 0.868338 \\ \gamma &= 1 - \alpha - \beta = 0.008372 \\ V &= \omega / \gamma = 0.00328475872\end{aligned}$$

De ahí tenemos que la volatilidad a largo plazo es:  $V^{(1/2)} = 0.057312814$

Se sustituyen estos datos en la fórmula y se hace esto para los 720 datos en una hoja de Excel y el dato 721 será el pronóstico de volatilidad para el día siguiente.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.5 Promedios Móviles<sup>59</sup>

Es un método burdo pero utilizado ampliamente debido a la sencillez que presenta. El método es una ventana móvil, de longitud fija, para estimar la volatilidad.

Asumiendo que observamos rendimientos  $r_i$  en  $M$  días, esta estimación de volatilidad se construye a partir de un promedio móvil,

$$\sigma^2 = (1/M) \sum_{i=1}^M r_i^2$$

Cada día, el pronóstico es actualizado al agregar la información del día anterior y omitiendo la información de  $(M+1)$  días previos. Todas las ponderaciones sobre los rendimientos pasados son iguales y fijadas a  $(1/M)$ . Aunque su implementación es simple, el modelo tiene serias desventajas.

La más importante es que ignora la ordenación dinámica de las observaciones. En particular, la información reciente recibe el mismo peso que la información más vieja, aunque los datos recientes deberían ser más relevantes. Además si existiesen rendimientos muy grandes hace  $M$  días, la omisión de estos a medida que la ventana se desplaza un día hacia adelante afectará substancialmente la estimación de la volatilidad. Como resultado, las mediciones de promedio móvil de la volatilidad tienden a parecer "mesetas" de Amplitud  $M$  cuando se grafican contra el tiempo.

Para nuestro ejercicio en particular se ha hecho una proyección con promedios móviles con una ventana de 3 datos y otra proyección de promedios móviles con una ventana de 20 datos.

### 3.6 Volatilidad como Movimiento Browniano

En este ejercicio asumiremos que la volatilidad se comporta de una manera caótica por lo que no presenta patrones en el tiempo y su comportamiento es aleatorio.

Para poder simular lo antes mencionado utilizamos la siguiente fórmula:

$$S_0 * e^{((\mu - (\sigma^2/2))t) + \sigma (t^{1/2}) z}$$

donde:

$S_0$ : es el valor de la  $\sigma^2$  más reciente de todos los que tenemos.

$\mu$ : es el valor de la media de las  $\sigma^2$

<sup>59</sup> Jorion Philippe, "Valor en Riesgo" Ed. Limusa - Mexder. Pp. 192-193

$\sigma^2$  y  $\sigma$ : las obtenemos a partir de la varianza de los 50 datos más recientes en relación al dato que se modela.

t: es el tiempo expresado como el número de periodo entre los días de un año (360). Como en nuestro ejercicio utilizamos 720 datos (dos años) este número va desde 0.0028 hasta 2

z: números aleatorios generados de una normal (0,1).

El resultado (que es el pronóstico para próximo periodo) es el que arroje la fórmula para el número de periodo 1.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo IV: Resultados

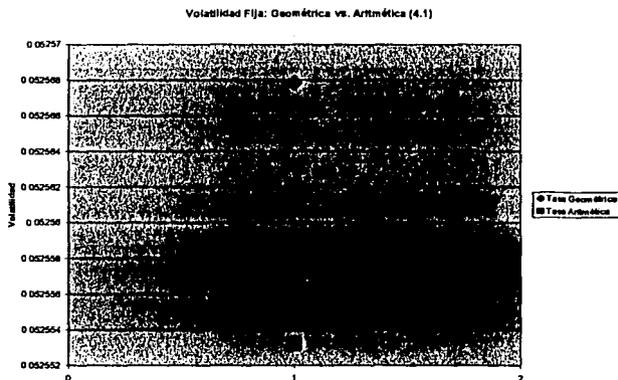
Antes de comenzar a leer los resultados de los ejercicios realizados es imperativo tomar en cuenta la siguiente indicación: todos los datos sobre volatilidad que se indican en los resultados se encuentran expresados a manera de porcentaje, así que si se lee una volatilidad de 0.05 debe entenderse como una volatilidad de 0.05% y no como una volatilidad de 5%, esto significa que si se dice que hay una volatilidad de 0.05 cuando el tipo de cambio es de 9.45 pesos la volatilidad será de 0.4725 centavos y no de 47.25 centavos.

### 4.1 Volatilidad Constante

#### 4.1.1 Volatilidad con Tasa de Rendimiento Aritmética

Como se puede observar en la gráfica 4.1 la volatilidad se estima en un nivel de 0.05255320910.

Como se toma con este método una modelación de la volatilidad constante al realizar el pronóstico del tipo de cambio a futuro, cuando se aplican la  $\sigma$  y la  $\sigma^2$  a la fórmula éstas permanecerán sin variar aunque se trate de periodos diferentes.



#### 4.1.2 Volatilidad con Tasa de Rendimiento Geométrica

Tomando la tasa de rendimiento de una forma geométrica la gráfica 4.1 nos muestra que el estimado se ubica en 0.052567831.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Al igual que en el caso de la tasa de rendimiento aritmética tenemos que como es constante la volatilidad ésta se mantendrá sin cambio alguno al sustituir los valores involucrados en la fórmula para dar el pronóstico del tipo de cambio.

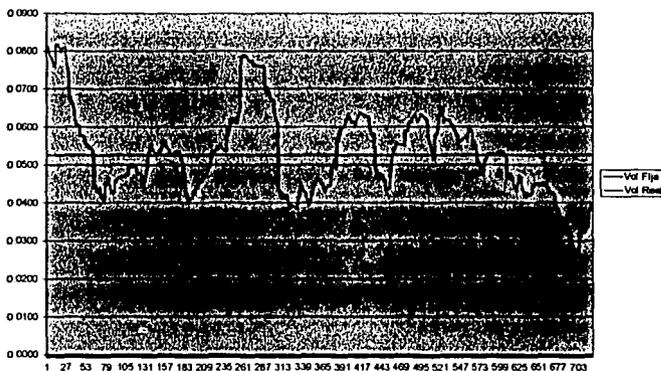
#### 4.1.3 Diferencia presentada entre la tasa de rendimiento geométrica y la tasa de rendimiento aritmética

La diferencia que presentó el pronóstico de la volatilidad tomándola como una constante al utilizar la tasa de rendimiento geométrica o una tasa de rendimiento aritmética es realmente muy pequeña por lo que la diferencia es insignificante aunque se prefiere el uso de la tasa Geométrica para los demás métodos por razones ya mencionadas en el anterior capítulo.

$$0.05255320910 - 0.052567831 = -0.0000146219$$

La diferencia tan pequeña del pronóstico utilizando las dos tasas de rendimiento se debe a que las tasas de rendimiento geométrica y aritmética presentan diferencias insignificantes en cada periodo.

Volatilidad Fija vs. Volatilidad Real (4.2)



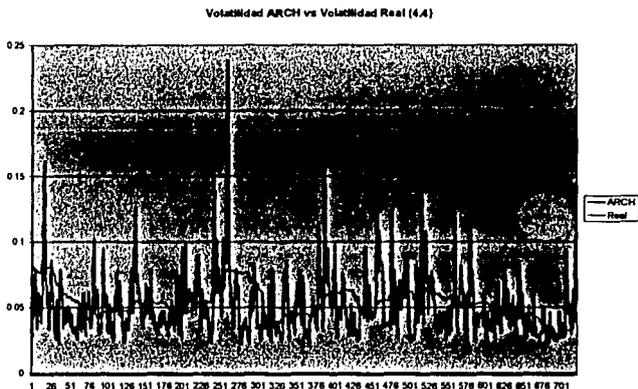
Ahora observemos la gráfica comparativa entre el pronóstico de tasa fija y los datos reales que se presentaron (Gráfica 4.2), es realmente muy claro que este pronóstico no sirve, sin embargo se utiliza mucho debido a lo simple que resulta, normalmente se realizan revisiones de los niveles de volatilidad cada cierto periodo de tiempo para volver a fijar un nivel en el que será

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**FALTA**  
**PAGINA**

**49**

pronósticos del método ARCH se anticipan correctamente a todos los movimientos de la volatilidad real aunque tiene la desventaja de que estos pronósticos si bien son acertados en cuanto a la dirección que toman (alza o baja de los niveles de volatilidad) exageran en mucho lo que en realidad se va a presentar por lo que al utilizar este método hay que tomar en cuenta los pronósticos pero sin esperar cambios tan bruscos como los que pronostica en las tendencias de la volatilidad.



### 4.3 Modelo EWMA

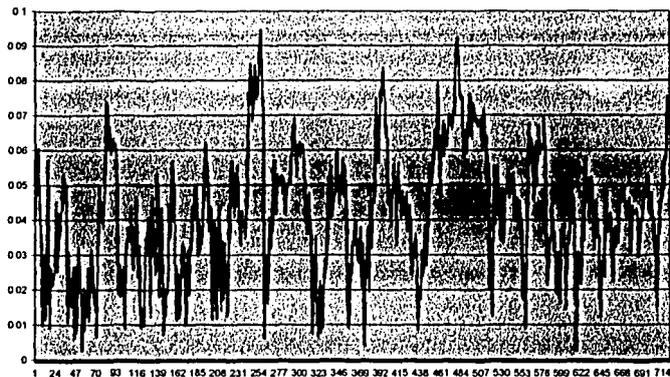
Para este método los estimados de volatilidad (Gráfica 4.5) que nos dan como resultado se encuentran alrededor de 0.0419, el piso del comportamiento de los pronósticos de la volatilidad se encuentra en 0.0025 y el techo en 0.0760.

Algo que se observa en la gráfica de este método es que tanto el techo como el piso van cambiando según diferentes periodos de tiempo, cosa que por ejemplo en el modelo ARCH no se presentó porque de vez en cuando se rompían los techos pero por lo general regresaban al mismo intervalo mientras que en este método el techo y el piso se mueven simultáneamente, esto es, que si el techo sube el piso también y si el techo baja el piso lo hará también en una cantidad más o menos igual.

El número que nos da como pronóstico para el próximo periodo es 0.0643 este dato es alto porque viene reflejando altas volatilidades de los periodos anteriores, sin embargo disminuye en relación a los anteriores y se espera que siga una tendencia a la baja en corto plazo porque acaba de alcanzar el techo y como dijimos antes que se mueve el piso como se mueve el techo esperamos que los valores de la tendencia que acaba de tomar estarán entre 0.0760 y 0.05

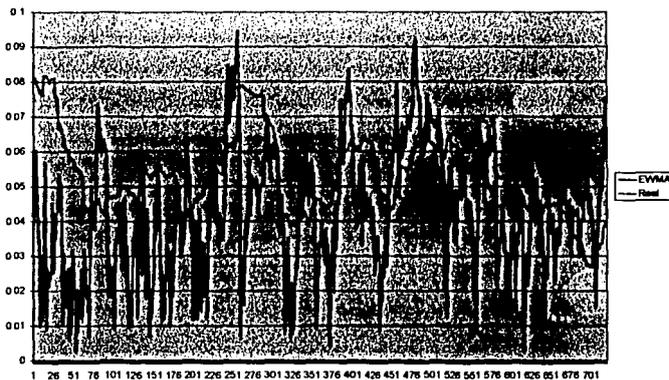
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Pronóstico de Volatilidad EWMA (4.5)



El punto más alto es el 0.0945 del periodo 255, lo cuál nos muestra también que el periodo de volatilidad alta en ese momento afecta al pronóstico a tal grado de hacerlo la parte más alta al igual que en el método ARCH.

Vol EWMA vs Vol Real (4.6)



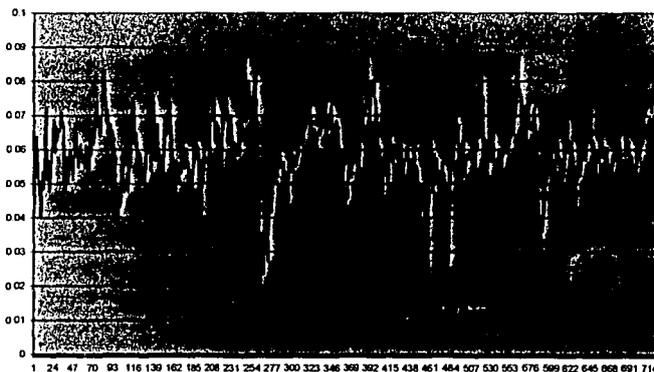
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Al igual que el método ARCH nos da un pronóstico acertado pero con una exageración de la magnitud del cambio, aunque los cambios que nos presenta no son tan “alocados” como los de los pronósticos ARCH por lo que al existir un cambio brusco esperamos que el nivel real de la volatilidad cambie en menor proporción hacia esa dirección y que se mantenga ahí, no como en ARCH que el pronóstico nos da un cambio brusco pero luego cae y nos muestra un cambio menos brusco a lo que indicó inicialmente, teniendo un resultado de volatilidad real mostrando sólo un cambio brusco hacia arriba y no una caída inmediatamente posterior. Lo que presenta como ventaja EWMA sobre ARCH es tener el techo y piso de los pronósticos más estrechos que los del método ARCH. Una cosa que es importante resaltar es que comparado con la tasa real (Gráfica 4.6) cuando hay un cambio brusco de tendencia hacia arriba la tasa real se encuentra más o menos al nivel del piso de la tendencia pronosticada por EWMA y cuando hay un cambio brusco de tendencia hacia abajo la tasa real de volatilidad se encuentra más o menos por el nivel del techo de la tendencia pronosticada por EWMA.

#### 4.4 Modelo GARCH (1,1)

Los pronósticos arrojados por el método GARCH como se puede observar (Gráfica 4.7) se encuentran alrededor 0.0594 y presentan dos techos, uno en 0.0760 y otro en 0.0870, teniendo que el primer techo mencionado es el que se mantiene principalmente y sólo de vez en cuando se presenta un rompimiento de ese techo por poco tiempo que lo envía a el segundo techo para regresar rápidamente al primer techo, como era de esperarse estos techos corresponden a los periodos de alta volatilidad que también los otros dos métodos han resaltado aunque el método GARCH (1,1) lo ha hecho de una forma más mesurada sin dispararlos drásticamente para arriba como los dos métodos anteriores (ARCH y EWMA).

Pronóstico de Volatilidad GARCH (4.7)



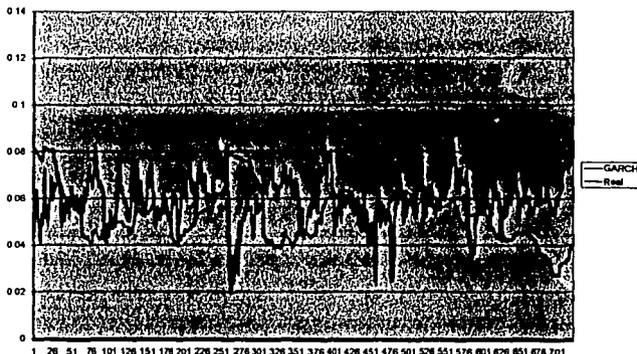
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Tiene también dos pisos, el primero en 0.0397 y el segundo en 0.0191. Con los pisos ocurre una situación similar a la que ocurre con los techos donde regularmente se mantiene en el primer piso y cuando llega a romperse ese primer piso la volatilidad cae cerca del segundo piso, pero esto sólo ocurre por periodos muy pequeños y entonces la volatilidad vuelve a subir hasta colocarse por encima del primer piso. Y de nuevo se ve que los pronósticos los tiene más centrados a lo que es el valor promedio de los pronósticos de la volatilidad dejando caer los valores por cortos periodos sólo cuando hay una caída realmente marcada de la volatilidad y no como EWMA que tenía un piso un poco más bajo pero que las bajas en la volatilidad las mostraba cambiando el techo y el piso por periodos relativamente largos comparados con GARCH o como ARCH que no marcaba realmente las caídas rompiendo el piso sino que el piso se encontraba mucho más bajo y solo marcaba los rompimientos hacia arriba.

El pronóstico para el valor de la volatilidad del periodo siguiente es 0.0694 lo que nos indica que el valor va a disminuir en relación a los últimos pronósticos y gráficamente también se nota que en este método se había alcanzado el techo.

La gráfica que compara los pronósticos del método GARCH con los de la volatilidad real (Gráfica 4.8) nos enseña que los pronósticos que nos arrojó el método GARCH se anticipan de una forma más precisa en cuanto a que no exagera tanto los cambios que se dan y que el piso y techo que muestran sus pronósticos no están tan separados como los del método EWMA o como los del método ARCH sin embargo notamos que al final se queda un poco atorado en cierto nivel sin pronosticar de forma correcta la magnitud con la que se presenta una caída en los niveles de volatilidad, esto se debe a que en este método se toma en cuenta la tendencia de la volatilidad a largo plazo, entonces si bien se presenta un periodo de baja de volatilidad se espera que a mediano plazo los niveles de volatilidad vuelvan a subir, cosa que se empieza a notar en los últimos datos y que se puede comprobar posteriormente en otras gráficas al checar los datos de volatilidad real que se dieron en días posteriores a estos pronósticos que se hicieron con GARCH.

Volatilidad GARCH vs Volatilidad Real (4.8)



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Dado lo anterior nos damos cuenta de que este pronóstico a veces se puede quedar un poco "atorado" en un nivel debido a la tendencia de volatilidad a largo plazo que toma en cuenta por lo que sus pronósticos se deben tomar en cuenta a mediano plazo y es importante revisar la tendencia general de volatilidad y los parámetros que se utilizan cada periodo mediano o largo de tiempo.

## **4.5 Promedios Móviles**

### **4.5.1 Promedios Móviles con 3 datos históricos**

Los pronósticos se encuentran en promedio en el valor 0.0465. Aunque los pronósticos varían mucho en relación al promedio y no es tan claro fijar un sólo piso o un sólo techo ya que constantemente se van moviendo tanto el techo como el piso si es claro que existen ambos (techo y piso) y se puede ver la tendencia que siguen, sin embargo cuando existe un cambio drástico en la volatilidad se nota un gran salto en el pronóstico rompiendo el piso o el techo por un margen grande regresando rápidamente (subiendo si existió una caída grande o bajando si existió un aumento grande) a un nivel que si bien tiene un nuevo piso y techo en muchas ocasiones nos da un nivel más congruente con el presentado en general por el comportamiento de la volatilidad y por lo tanto por el comportamiento de los pronósticos. Ahora que siendo aventurados a dar un piso general se da uno con 0.0056 y un techo de 0.0910 para la primer parte y uno que va de 0.1338 a 0.0812 en la segunda parte. El punto más alto que se dispara fuera de cualquier techo es de 0.1878 en el periodo 260 y se mantiene durante tres periodos lo cual nos muestra claramente la desventaja de este método ya que si existe un dato muy alejado de los anteriores éste lo aleja mucho de la tendencia que sigue realmente ya que no tiene a los demás datos para que amortigüen el "golpe" que es resultado de un cambio brusco y después al desaparecer ese número en la ponderación cambia estrepitosamente de nuevo por lo que afecta dos veces el dato muy disparado a menos que los datos consecutivos también presenten el mismo nivel que el dato en cuestión y es por esto que, como ya se dijo antes no exista un techo ni un piso que se mantenga, por lo tanto para este método hay que seguir las tendencias en general sin hacer mucho caso a los saltos muy bruscos y cortos.

El pronóstico que nos presentan los promedios móviles con tres datos es de 0.0455 lo que nos dice que el techo al parecer ya se ha estabilizado aunque es muy probable que tome una tendencia hacia abajo.

### **4.5.2 Promedios Móviles con 20 datos históricos**

Los pronósticos en promedio son de una volatilidad de 0.0552, tienen un techo de 0.0806 y un piso de 0.0307 los cuales son rotos respectivamente sólo una vez, el techo en el periodo de alta volatilidad ubicado por el número 260 y el piso por el número 670.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

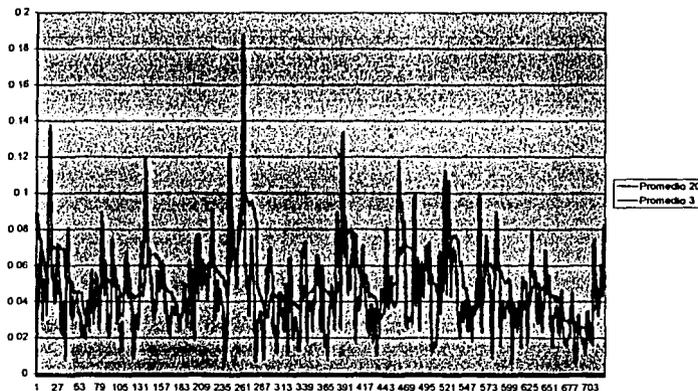
Claramente en la gráfica (Gráfica 4.9) se pueden observar las “mesetas” mencionadas en la parte teórica de este trabajo debido a que un movimiento brusco de la volatilidad afecta a los siguientes 20 pronósticos que se realicen aunque el movimiento brusco haya sido aislado por lo que muchas veces se sobrevalua o se subestima con este modelo y eso sucede entre mayor sea el número de periodos que se tomen en cuenta.

El pronóstico que nos arroja para el siguiente periodo es de 0.0507 que a pesar de estar afectado por la “meseta” respectiva nos indica una disminución de la volatilidad.

#### 4.5.3 Diferencia entre pronósticos con Promedios Móviles

Podemos observar el comportamiento de ambos ejercicios y sus diferencias en la gráfica que compara los pronósticos (Gráfica 4.9)

Pronósticos de Volatilidad con Promedios Móviles (4.9)



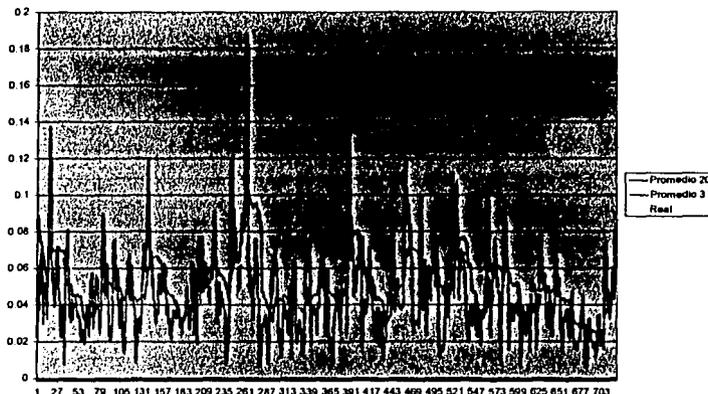
Ambos ejercicios como, hemos visto, nos presentan ciertas desventajas, el utilizar un número muy reducido de datos históricos nos provoca que se puedan presentar saltos muy grandes que con cualquier dato nos hacen salirnos muy rápido de la tendencia que está llevando la volatilidad al hacer el pronóstico y si utilizamos muchos datos históricos nos pasa lo contrario pero también afecta, ya que un dato nos mantiene muy “estacionados” en una tendencia que es muy probable que haya cambiado pero que no es evidente sino hasta que sale de la “ventana” de datos históricos, el dato en cuestión.

Los pronósticos de promedio móvil de 3 siguen la tendencia de la volatilidad real pero no son prácticamente de utilidad ya que varían mucho y no se puede establecer un pronóstico preciso, cosa muy diferente pasa con el promedio móvil de 20 datos el cual nos da datos muy aproximados a la tasa real y sólo en dos o tres ocasiones se nota que el efecto de las “mesetas”

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

afecta haciendo que el pronóstico no sea bueno, dadas estas observaciones se recomienda que si se utiliza el método de promedios móviles se utilice entre 20 y 60 datos para que los datos sean los suficientes para crear "estabilidad" en los pronósticos y tampoco sean muchos datos para poder cambiar en caso de que se presente un cambio de tendencia considerable. Su desventaja es tener que almacenar todos esos datos para realizar el cálculo cada vez que se lleva a cabo el pronóstico. Todo lo mencionado anteriormente lo podemos observar fácilmente al graficarse junto con la volatilidad real (Gráfica 4.10).

Volatilidad Promedios Móviles vs Volatilidad Real (4.10)



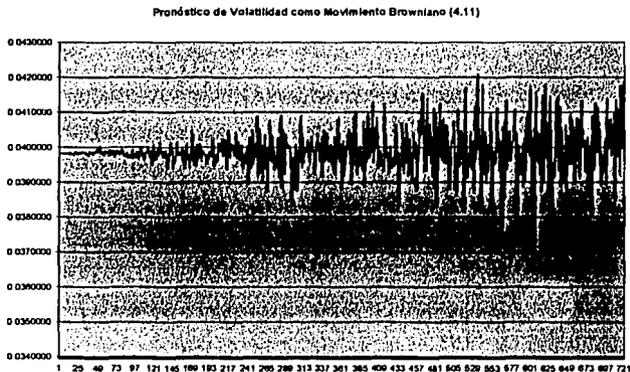
#### 4.6 Volatilidad como Movimiento Browniano

En este método no se está presentando un pronóstico para cada uno de los periodos anteriores y ya que para eso se tendría que haber hecho el proceso 720 veces, eso es actualizar los 720 datos cada vez que se hiciera el cálculo, sin embargo tenemos la gran ventaja de que con este proceso podemos hacer la proyección del pronóstico hacia el futuro en varios periodos hacia adelante y no sólo en un periodo como en los otros casos. Ahora los datos que se ven en la gráfica 4.14 como datos pasados son en realidad las volatilidades que se tomaron en cuenta para hacer el pronóstico, en sí no son pronósticos realizados por este método. La gráfica 4.11 sí es la gráfica de pronósticos hecha por este método hacia el futuro.

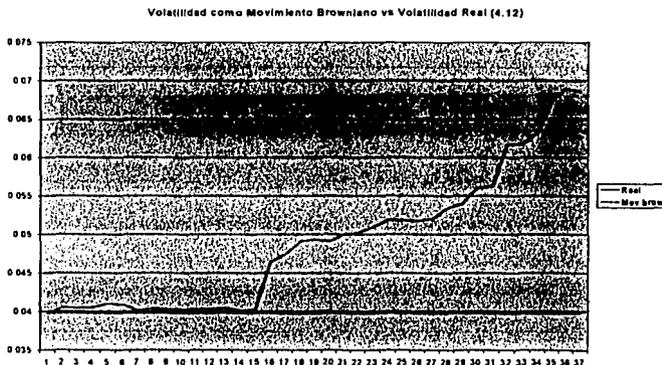
Como vemos el pronóstico que nos arroja para la volatilidad del primer periodo siguiente es de 0.03981166 y los siguientes pronósticos se encuentran más o menos en el mismo nivel de volatilidad. Es muy claro que conforme avanza el tiempo los pronósticos se empiezan a mover alrededor del mismo nivel pero alejándose cada vez más, esto es lógico y significa que se espera que el valor real de la volatilidad se encuentre entre los valores del techo y el piso los cuales al estar cada vez más separados conforme pasa el tiempo dan un mayor intervalo en el que puede caer el valor real. Todo esto por sentido común se deduce que es más difícil dar un dato exacto

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

sobre cuál será la volatilidad y entonces sólo se puede decir que estará dentro de cierto intervalo de valores.



La gráfica que compara los datos de volatilidad reales que se dieron posteriormente y los datos de volatilidad pronosticados por el método que considera a la volatilidad como un movimiento browniano (Gráfica 4.12) nos dejan muy claro que los pronósticos de movimiento browniano tienen una precisión muy grande pero solamente en los primeros 5 pronósticos generalmente, de ahí en adelante la confianza disminuye de una forma muy significativa. Para este caso en particular los pronósticos fueron acertados hasta el periodo 15 en el futuro, a partir del periodo 16 se aleja mucho la estimación del valor real.

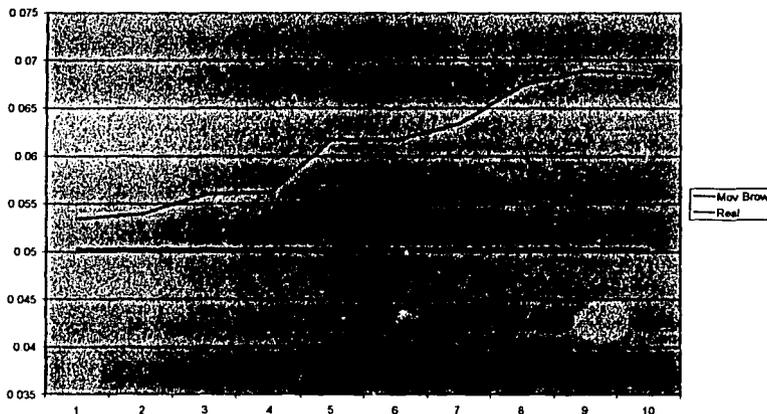


TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

A pesar de que se pierda confianza después de los primeros 5 periodos pronosticados aproximadamente se entiende que cada periodo (o al menos cada cinco periodos) los datos se han actualizado y se ha corrido de nueva cuenta el modelo para realizar un nuevo pronóstico, el cual, con los datos históricos renovados corregirá los pronósticos y dará de nuevo confianza a los pronósticos de los siguientes 5 periodos.

Para ver más claramente lo anteriormente dicho se hace de nuevo un pronóstico 20 días después (Gráfica 4.13) donde se presenta una variación mucho mayor en los niveles de volatilidad que hay de un día a otro y se ve que se tiene un pronóstico acertado para 4 días. Cabe aclarar que ese periodo de cambios de la volatilidad tan brusca despertó una gran sorpresa entre especialistas en el país y por eso se eligió para ver el comportamiento de los pronósticos con este método ante cambios tan bruscos, de ahí podemos concluir que los pronósticos son acertados en un menor periodo hacia el futuro que cuando la volatilidad es más estable pero aún así los primeros pronósticos son lo suficientemente acertados como para ser tomados en cuenta.

Volatilidad como Movimiento Browniano vs Volatilidad Real (4.13)  
(Pronóstico hecho 20 días después)



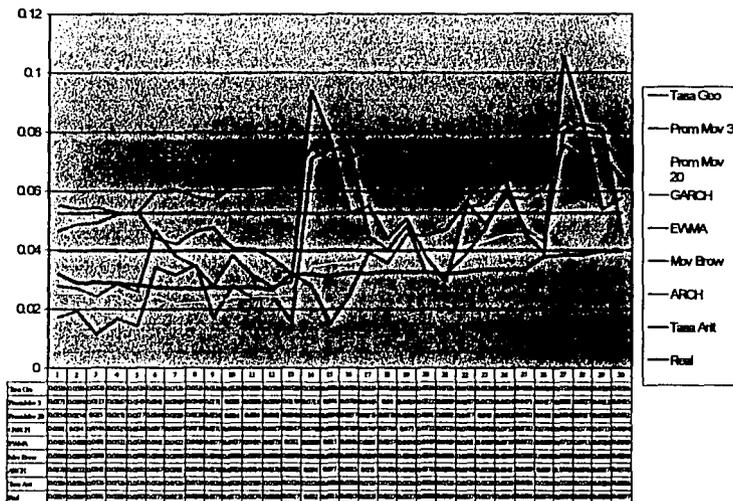
#### 4.7 Comparación entre los pronósticos de los distintos métodos

En la gráfica (Gráfica 4.14) tenemos los pronósticos de los distintos métodos en los últimos 29 días y el pronóstico hecho para el día siguiente, todos estos los comparamos con los datos reales de volatilidad que tuvimos en los 30 días (los 29 que ya se conocían y el día siguiente).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Como se puede ver, los pronósticos que más se asemejan al comportamiento de la tasa de volatilidad real son el método GARCH y el método de promedios móviles con 20 datos, siendo este último el que más se acerca a los valores reales.

Comparación de Métodos para modelar la Volatilidad (4.14)



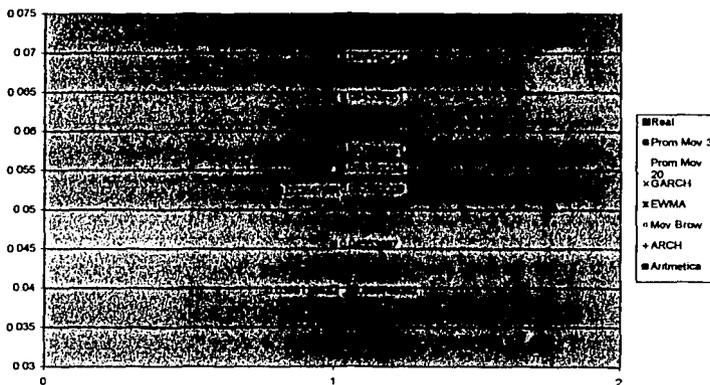
Los pronósticos ARCH y de promedios de 3 están reconociendo desde antes las tendencias pero las exageran. El de ARCH sin embargo es de destacar que sólo hace las exageraciones en los aumentos y rápidamente recupera el nivel de pronósticos cercanos a la realidad, promedios de 3 varía mucho pasándose en los pronósticos y regresando rápido, pero esto mismo no permite reconocer bien cual es la tendencia por lo que no nos sirve y por último tenemos a EWMA que en esta parte aunque se encuentra regularmente cerca de la tasa real no pronostica muy bien los comportamientos que va a tener la tasa real de volatilidad y en algunos puntos hace un pronóstico inverso muy marcado, cosa que contrasta un poco con los buenos resultados que se veían en los otros periodos.

Ahora pasamos a la gráfica que solo muestra los pronósticos de todos los métodos para el día siguiente (Gráfica 4.15). Una vez más miramos que el pronóstico de GARCH se encuentra más alejado, seguido por EWMA, ARCH, Promedios móviles con 20 datos y las tasas fijas, los más cercanos son Promedio Móvil con 3 datos y Movimiento Browniano, sin embargo ya habíamos visto que los pronósticos de promedios móviles con 3 datos y las tasas fijas no son de mucha utilidad por lo que descartándolas nos quedan como las más precisas la de Movimiento Browniano y la de Promedios Móviles de 20.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Hemos visto que los métodos de Movimiento Browniano y el método de tasas fijas sirven para poder hacer pronósticos más allá de un día y hemos comprobado la eficacia del método de Movimiento Browniano al utilizarlo hacia adelante en el tiempo por lo que si queremos hacer un pronóstico preciso a cinco días es mucho más recomendable utilizar el de movimientos brownianos. La gran desventaja al usar el método de movimientos brownianos es que se necesita gran cantidad de información acumulada y que el método no es tan sencillo como otros. Otra cosa que observamos es que el método de GARCH parecía dar un pronóstico acertado a mediano plazo por lo que si lo que necesitamos es tener una idea aproximada de dónde se encontrará la volatilidad a mediano plazo es recomendable utilizar el método GARCH que si bien no tiene la precisión de otros métodos nos da la ventaja de que no necesita tantos datos para correrlo aunque el proceso para obtener los factores de GARCH no sea tan sencillo.

Pronósticos de Volatilidad (4.16)  
(para el día siguiente)

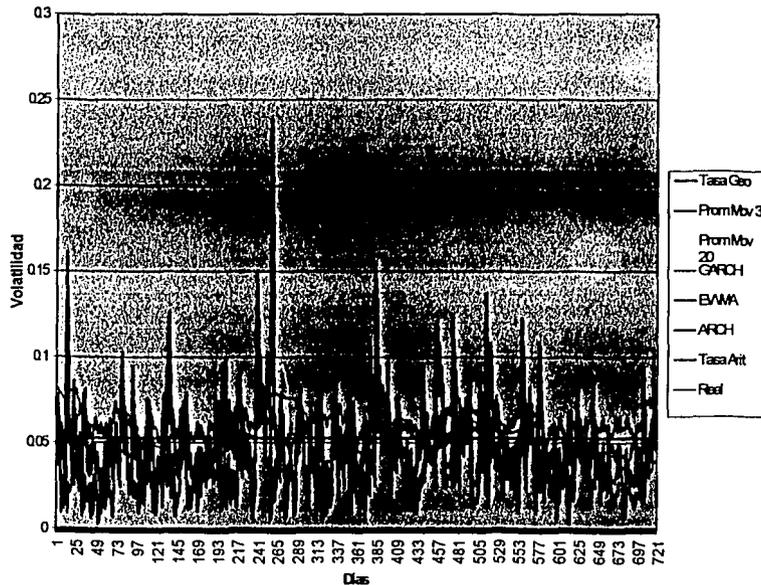


Para sacar promedios para el periodo siguiente, los métodos que son más recomendables son el de Promedios móviles de 20 si se quiere más precisión sin tantos saltos aunque se tenga que tener guardada mucha información y no se responda tan inmediatamente a los cambios o el método ARCH, que necesita menos información y que responde más rápido a los cambios aunque responda de una forma un poco exagerada y corrija rápidamente o por último, si la prioridad es sacar el pronóstico la información mínima posible, la opción es EWMA que aunque en algunos lapsos llega a tener un poco de error sigue siendo confiable en su comportamiento general.

Por último la Gráfica 4.16 nos muestra los pronósticos a lo largo de los 720 periodos de todos los métodos.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Comparación de Pronósticos de Volatilidad (4.16)



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo V: Aplicación

El conocer el comportamiento futuro de la volatilidad del tipo de cambio sirve principalmente para el pronóstico del tipo de cambio, el cual es utilizado posteriormente para valuar opciones, forwards, etc.

### 5.1 Pronóstico del tipo de Cambio

Para hacer el cálculo del tipo de cambio a futuro utilizaremos un método similar al que se utilizó para la modelación de la volatilidad como movimiento browniano.

$$S = S_0 \cdot e^{((\mu - (\sigma^2/2))t) + \sigma (t^{1/2}) z}$$

Donde:

$S_0$ : es el valor del tipo de cambio más reciente.

$\mu$ : es el valor de la media de los rendimientos, que en este caso sería la diferencia de la tasa libre de riesgo doméstica menos la tasa libre de riesgo extranjera.

$\sigma^2$  y  $\sigma$ : estos datos los obtenemos de los métodos que hemos utilizado y serían los estimados para la volatilidad y su cuadrado para el siguiente periodo.

$t$ : es el tiempo expresado como el número de periodo entre los días de un año (360). Como en nuestro ejercicio utilizamos 720 datos (dos años) este número va desde 0.0028 hasta 2

$z$ : números aleatorios generados de una normal (0,1).

$S$ : Son los pronósticos para el tipo de cambio. El resultado que arroja esta fórmula para  $t=1$  será el pronóstico para el primer periodo y para  $t=2$  es el pronóstico para el segundo periodo, etc.

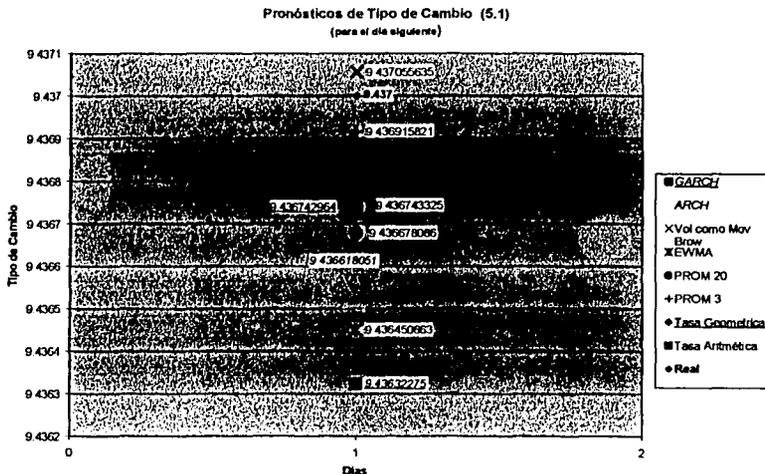
Esta forma de pronosticar el tipo de cambio utilizando los movimientos brownianos se utiliza para pronosticar el comportamiento del valor de los precios de acciones, sin embargo como ya se había explicado en la parte teórica de este trabajo este modelo es útil para los tipos de cambio al tomarlo como una acción que paga dividendos por lo que la media de rendimiento se tiene que utilizar como la diferencia entre la tasa de interés libre de riesgo doméstica y la tasa de interés libre de riesgo extranjera.

Es de esperarse que los pronósticos más acertados para la volatilidad sean los que arrojen los pronósticos más acertados para el tipo de cambio, sin embargo como se modela el tipo de cambio incluyendo un factor aleatorio esto se nota claramente al ver los pronósticos durante muchos periodos (un ejercicio que se hizo con la volatilidad), aún así es interesante analizar los pronósticos del tipo de cambio para el periodo siguiente, cosa que podemos observar en la gráfica (Gráfica 5.1)

El pronóstico más cercano a la realidad es el que toma los pronósticos de volatilidad como movimiento browniano el cual tuvo un pronóstico apenas por arriba del valor real. Casi a la misma distancia pero pronosticado por debajo del valor original tenemos el pronóstico hecho con

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

la volatilidad calculada con promedios móviles utilizando 3 datos. Después siguen en orden de precisión las tasas fijas, los promedios de 20, ARCH, EWMA y GARCH. Aún así el pronóstico de GARCH que en esta ocasión fue el más alejado se encuentra desviado del dato real por 0.00068 pesos lo que es un 0.007205% de error.

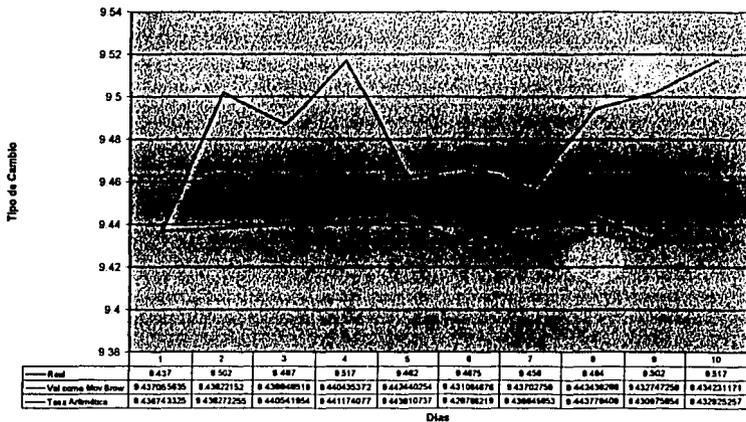


Ahora tenemos que ver los pronósticos a más de un periodo lo cual es más interesante porque así nos damos cuenta de qué tan precisos son los pronósticos con el paso del tiempo, lo cual implica una pérdida de precisión. Al principio pensaríamos que es igual utilizar el pronóstico realizado tomando la tasa fija de volatilidad debido a que de los 10 pronósticos presentados en la gráfica (Gráfica 5.2) la mitad de los hechos con tasa fija son más acerbados que los hechos con la tasa calculada con movimiento browniano, aunque esto se debe a que la tasa fija apenas fue calculada con los datos disponibles por lo que esa tasa fija está hecha óptima para estos primeros pronósticos, sin embargo como ya dijimos la tasa fija presenta sus desventajas rápidamente al existir cambios en la tendencia de la volatilidad, situación que es más factible que suceda al avanzar el tiempo.

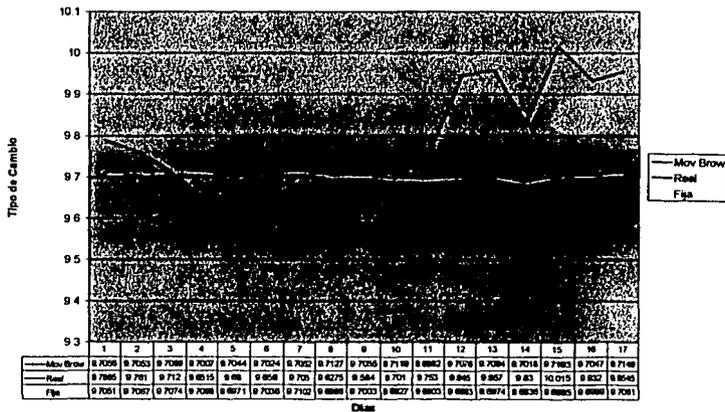
Para demostrar la pérdida de exactitud de pronósticos al avanzar el tiempo utilizando la tasa fija hacemos de nuevo el ejercicio de pronosticar el tipo de cambio 20 días después (Gráfica 5.3). Ahora ya se comienza a ver la ventaja de utilizar los pronósticos con la tasa de volatilidad modelada como movimiento browniano ya que los pronósticos hechos con tasa de volatilidad modelada como movimiento browniano superan en efectividad (por más del doble) a los pronósticos hechos con tasa de volatilidad fija. Si esto sucede con un periodo relativamente corto como 20 días en un periodo largo de tiempo los pronósticos con tasa fija serán mucho menos efectivos.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Comparación de pronósticos del Tipo de Cambio (5.2)



Pronósticos de Tipo de Cambio (5.3)  
(20 días después)



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Ahora presentaremos algunas herramientas para reducir el riesgo cambiario y cómo se pueden aplicar los pronósticos que hemos visto para tomar decisiones en cuanto al uso de estas herramientas.

## 5.2 Contratos Forward

Un contrato Forward es un derivado prácticamente muy sencillo. Es el acuerdo de comprar o vender una moneda en cierto tiempo futuro y por cierto precio. El contrato Forward se realiza "Over The Counter", normalmente entre dos instituciones financieras o entre una institución financiera y uno de sus clientes.

Una de las partes del contrato Forward asume una posición "larga" y acepta comprar la moneda en cierta fecha futura a cierto precio específico. La otra parte asume una posición "corta" y acepta vender la moneda en la misma fecha y al mismo precio. El precio en un contrato Forward es conocido como "delivery price". En el momento en que se crea el contrato Forward el "delivery price" se escoge de tal manera que el valor del Forward para ambos lados es cero, o en otras palabras que a ninguna de las partes le cuesta entrar en una posición corta o larga.

El precio Forward para un contrato forward en particular, en una fecha en particular, es el "delivery price" que aplicaría si el contrato fuera hecho en ese momento.

### Fórmula de pagos

En general la fórmula de pagos de una posición "larga" de un contrato forward en una unidad de moneda es:

$$S_T - K$$

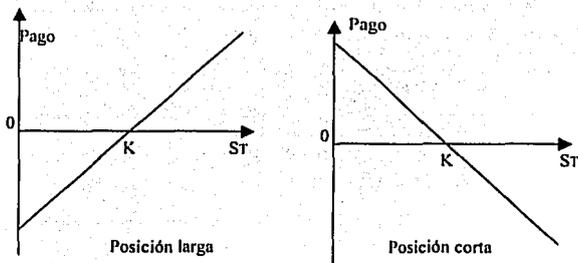
Donde  $K$  es el "delivery price" y  $S_T$  es el tipo de cambio al momento de vencer el contrato. Esto es porque el dueño del contrato está obligado a comprar una moneda que vale  $S_T$  por  $K$ . De manera similar la fórmula de pagos de una posición corta en un contrato forward por una unidad de moneda es:

$$K - S_T$$

Estos pagos pueden ser positivos o negativos y como no cuesta nada entrar a un contrato así el resultado del pago del contrato es también la ganancia o pérdida total de haber entrado al contrato.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Hull John C. Options Futures & Other Derivatives. 2000 Pags 1-2





Podemos utilizar nuestros pronósticos para observar un posible comportamiento al entrar a contratos Forward, lo cual nos puede ayudar a tomar decisiones.

Primero tenemos que calcular el valor del contrato Forward para ver el "strike price" que están considerando y a partir de eso, según nuestro pronóstico, saber que decisión tomamos que nos pueda resultar más benéfica.

Para calcular el valor del contrato forward utilizamos la siguiente fórmula:

$$F_0 = S_0 e^{-(r-r_f)T}{}^{61}$$

donde:

$F_0$  = Es el valor del contrato forward en este momento, cuando se inicia el contrato forward también es igual al "strike price"

$S_0$  = Es el tipo de cambio actual.

$r$  = es la tasa libre de riesgo doméstica.

$r_f$  = es la tasa libre de riesgo extranjera.

$T$  = es el tiempo expresado en años.

Realizaremos el ejercicio para contratos forward a 7 y 4 días el día 5 de Junio del 2002, lo que sería el día 20 después de nuestra serie de 720 datos utilizada para hacer los pronósticos de volatilidad (para ese mismo día ya hicimos nuestros pronósticos de tipo de cambio con el método de movimiento browniano y será contra esos datos que se compararán los resultados que arrojen nuestros cálculos del contrato forward).

Comenzamos con el ejercicio a 7 días, el resultado que nos arroja es  $F_0 = 9.7155$  o lo que significa que el strike price para el contrato forward es 9.7155 en otras palabras esperan que el tipo de cambio para 7 días después sea 9.7155, mientras que nosotros esperamos después de realizar nuestro pronóstico tomando la volatilidad como un movimiento browniano que el tipo de

<sup>61</sup> Idem pp 68-70

cambio para ese día sea de 9.7052. En resumen sentimos que están valuando de más el tipo de cambio para el día de vencimiento de contrato Forward.

A partir de esto pensamos que entrar al contrato Forward nos provocaría lo siguiente:

Si entramos al contrato forward en una posición larga para el ejercicio de 7 días y según el valor de tipo de cambio que nosotros calculamos,  $9.7052 - 9.7155 = -0.0103$ , entonces tenemos que si entramos a un contrato forward en una posición larga estaríamos perdiendo 0.0103 pesos por cada dólar. Y si entramos al contrato forward en una posición corta para el ejercicio de 7 días esperamos que suceda lo siguiente:  $9.7155 - 9.7052 = 0.0103$ , que es lo que ganaríamos en pesos por cada dólar.

Ahora pasamos a analizar qué es lo que pasa con el tipo de cambio real. Tenemos que para la posición larga se presenta  $9.705 - 9.7155 = -0.0105$ , estaríamos perdiendo 0.0105 pesos por dólar y para la posición corta:  $9.7155 - 9.705 = 0.0105$  ganaríamos esa cantidad por dólar.

Si entramos al contrato forward en una posición larga para el ejercicio de 4 días y según el valor de tipo de cambio que nosotros calculamos  $9.7007 - 9.711 = -0.0103$ , entonces tenemos que si entramos a un contrato forward en una posición larga estaríamos perdiendo 0.0103 pesos por cada dólar. Y si entramos al contrato forward en una posición corta para el ejercicio de 7 días esperamos que suceda lo siguiente:  $9.711 - 9.7007 = 0.0103$  que es lo que ganaríamos en pesos por cada dólar.

En la realidad el contrato forward nos daría los siguientes resultados: para la posición larga  $9.6515 - 9.711 = -0.0595$ , perdiendo esa cantidad por dólar y para la posición corta  $9.711 - 9.6515 = 0.0595$ , ganando esa cantidad por dólar.

Como se ve, nuestros pronósticos al ser más acertados (al ver qué tasa se presentará al vencimiento del forward) que los pronósticos del forward nos permiten anticipar el resultado que nos arrojará el forward de una forma correcta.

### 5.3 Contratos de Futuros

Al igual que en un contrato Forward, un contrato de futuros es un acuerdo en donde dos partes convienen vender o comprar una moneda en cierto momento en el futuro a cierto precio. Sin embargo, a diferencia de los contratos forward, los contratos de futuros se realizan en un mercado, lo que hace que el mercado especifique ciertos aspectos y estándares del contrato y como las dos partes del contrato no necesariamente se conocen entre sí el mercado provee un mecanismo que da a las dos partes una garantía de que el contrato será respetado.

La forma en que se pueden aplicar los pronósticos a estos contratos es como en los contratos forward.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 5.4 Opciones

Las opciones son contratos en los cuales el comprador de la opción adquiere un derecho.

Hay dos tipos básicos de opciones.

- Call Option: Le da al dueño de la opción el derecho de comprar una moneda en cierta fecha por cierto precio.
- Put Option: Da al dueño de la opción el derecho de vender una moneda en cierta fecha por cierto precio.

El precio del contrato es conocido como el precio de ejercicio, la fecha en el cual se lleva a cabo el derecho se conoce como fecha de expiración o "maturity".

Las opciones en general se dividen en dos clases:

- Opciones Americanas: Las opciones americanas pueden ser ejercidas en cualquier momento antes de la fecha de expiración.<sup>62</sup>
- Opciones Europeas: Pueden ser ejercidas únicamente en la fecha de expiración.

### Posiciones en las Opciones

Existen dos lados en cada contrato de opción. Uno es el del que toma la posición larga (el que compra la opción) y por el otro lado se encuentra el que tiene la posición corta (el que ha vendido o suscrito la opción). El que toma la posición corta recibe dinero pero tiene obligaciones potenciales en el futuro.

Las ganancias o pérdidas de uno son inversas a las ganancias o pérdidas del otro.

### Fórmula de pagos

Existen 4 posiciones básicas de pagos:

- 1.- Posición larga en una call option.
- 2.- Posición corta en una call option.
- 3.- Posición larga en una put option.
- 4.- Posición corta en una put option.

<sup>62</sup> Generalmente las opciones son Americanas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Si suponemos que el costo inicial de la opción no existe, tenemos que  $X$  es el "strike price" y que  $St$  es el tipo de cambio que se da al final, tendremos que:

Función de pagos de una posición larga de una call option europea

$$\max (St - X, 0)$$

Lo cual nos refleja que la opción será ejercida si  $St > X$  y que no será ejercida si

$$St \leq X.$$

Función de pagos de una posición corta de una call option europea

$$-\max (St - X, 0) \text{ o } \min (X - St, 0)$$

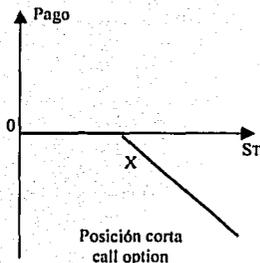
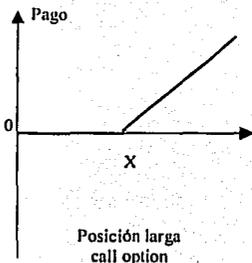
Función de pagos de una posición larga de una opción put europea

$$\max (X - St, 0)$$

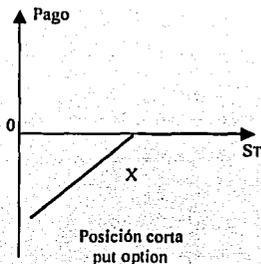
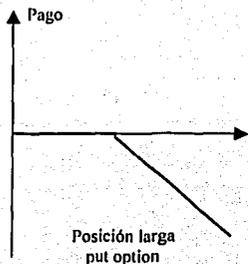
Función de pagos de una posición corta de una opción put europea

$$-\max (X - St, 0) \text{ o } \min (St - X, 0)$$

A continuación podemos observar las 4 fórmulas de pagos descritas anteriormente de forma gráfica.

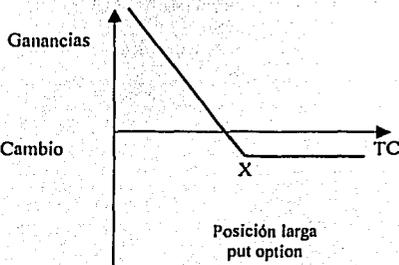
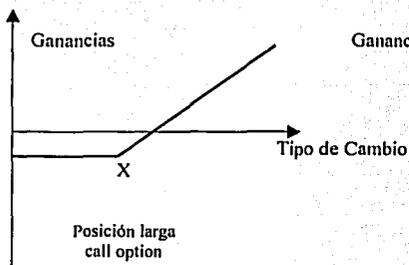


TESIS CON  
ESTA TESIS FALLA DE ORIGEN  
DE LA BIBLIOTECA

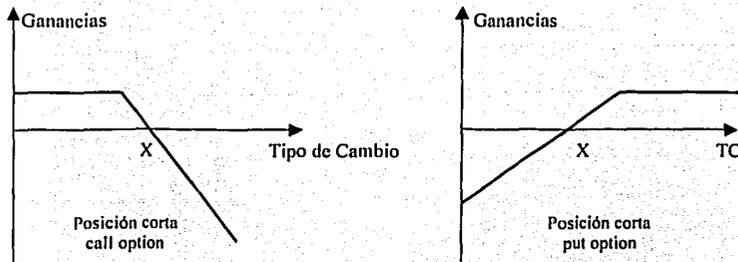


En estas gráficas podemos observar claramente que las posiciones presentan funciones de pago inversas.

Sin embargo, en estas funciones de pago se está suponiendo que entrar a un contrato de opción no cuesta nada lo cual no se da en la vida real ya que la persona que vende la opción (aquel que está corto) no tendría la oportunidad de obtener ganancias y es por esto que tomando en cuenta el costo inicial de la opción, las funciones de ganancias quedarían de la siguiente forma:



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Para ver la aplicación de nuestros pronósticos en las opciones hacemos un ejercicio similar al hecho con los contratos forward comenzando con el cálculo del precio de las opciones para monedas.

Las ecuaciones para el cálculo del precio de una opción de monedas es:<sup>63</sup>

$$c = [e^{(-rT)}] [F_0 N(d_1) - XN(d_2)]$$

$$p = [e^{(-rT)}] [X N(-d_2) - F_0 N(-d_1)]$$

$$d_1 = \left[ \frac{\ln(F_0/X) + ((\sigma^2) T) / 2}{\sigma \sqrt{T}} \right]$$

$$d_2 = \left[ \frac{\ln(F_0/X) - ((\sigma^2) T) / 2}{\sigma \sqrt{T}} \right] = d_1 - [\sigma \sqrt{T}]$$

donde:

$F_0$  = es el valor del forward para las mismas monedas y el mismo tiempo

$X$  = Strike price (que en este caso sería el mismo que el del forward y por lo tanto igual a  $F_0$ )

$T$  = tiempo expresado en años

$\sigma$  = volatilidad

Como nuestro ejercicio será para el mismo periodo (7 y 4 días) y las mismas monedas (peso y dólar) que los de los ejercicios de contratos forward que hicimos antes utilizaremos los datos de esos ejercicios y para la volatilidad utilizaremos la volatilidad real que se dió.

Los precios para las opciones put y call a 7 días son 0.0001940358926 pesos por dólar y para las opciones put y call a 4 días son 0.0001940640392.

<sup>63</sup> Hull John C. Options Futures & Other Derivatives. 2000 pp284

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Sólo veremos los casos en los que entramos largos a las opciones y comenzamos con las de periodo de vencimiento a 7 días

Call larga a 7 días  $9.7052 - 9.7155 = -0.0103$  lo cual es menor que 0 y por lo tanto no ejercemos nuestro derecho ya que nos es más barato recurrir al mercado normal de cambios y por lo tanto perdemos lo que pagamos por la opción que es 0.0001940358926 pesos por dólar.

En la realidad tenemos que  $9.705 - 9.7155 = -0.0105$  que al ser menor que cero nos hace que no ejerzamos nuestro derecho y que perdamos 0.0001940358926 pesos por dólar.

Put larga a 7 días  $9.7155 - 9.7052 = 0.0103$  que al ser mayor a cero nos indica que ejercemos nuestro derecho y nuestra ganancia sería  $0.0103 - 0.0001940358926 = 0.010105964$  pesos por dólar.

En la realidad tenemos que  $9.7155 - 9.705 = 0.0105$  que al ejercer nuestro derecho nos deja una ganancia de  $0.0105 - 0.0001940358926 = 0.010305964$

Call larga a 4 días  $9.7007 - 9.711 = -0.0103$  lo que no nos hace ejercerla y perdemos los 0.0001940640392 pesos por dólar, que es el precio de la opción.

En la realidad tenemos que  $9.6515 - 9.711 = -0.0595$  y al no ejercer nuestro derecho perdemos lo que pagamos por la opción 0.0001940640392 pesos por dólar.

Put larga 9.711 - 9.7007 = 0.0103 lo que al ejercer nuestro derecho nos daría una ganancia de  $0.0103 - 0.0001940640392 = 0.010105935$  pesos por dólar.

En la realidad nos encontramos que  $9.711 - 9.6515 = 0.0595$  que ejerciéndolo nos da una utilidad de  $0.0595 - 0.0001940640392 = 0.059305935$  pesos por dólar.

Hemos visto una vez más que al igual que en los contratos forward, en las opciones nuestros pronósticos al ser más acertados nos permiten anticiparnos al resultado de la opción ayudándonos a elegir un curso de acción a seguir, ya que si por ejemplo, vemos que según nuestros cálculos podemos tener una pérdida muy grande al entrar a un contrato debido a lo dispar del "strike price" que se está dando y el tipo de cambio que estamos pronosticando es mejor buscar alguna forma alternativa de cobertura frente al riesgo.

Otra forma en que nos pueden ser útiles nuestros pronósticos es en el cálculo del precio de las opciones, ya que como se ve en la fórmula para calcular el precio de las opciones se utiliza la variable de volatilidad, al utilizar muchas veces las volatilidades obtenidas a partir de métodos como el de tasa fija se puede tener un valor más correcto de la opción modelándola como movimiento browniano por ejemplo y así saber si entramos a un contrato o no a partir de esa información.

Algo que es necesario aclarar es que como se ha dicho, los pronósticos son confiables aproximadamente durante los primeros 5 días y después se pierde mucho la confianza, es por eso que es muy útil hacer estos pronósticos cuando se piensa entrar a un contrato forward o a una opción con un corto periodo de duración, además hay que tener presente en todo momento que estos instrumentos sirven para reducir el riesgo y este tipo de pronósticos que presentamos aquí es una herramienta para ayudar a tomar decisiones y no para seguir ciegamente sus resultados e

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

intentar obtener beneficios de forma fácil, ya que al intentar hacer eso se puede caer en un grave peligro de tener pérdidas catastróficas.

## 5.5 Swaps

Un swap es un acuerdo para comprar y vender monedas extranjeras a tasas cambiarias especificadas previamente y en donde la compra y la venta ocurren en puntos separados en el tiempo, o solicitar fondos en préstamo de una moneda y prestar fondos en otra.

Un swap tiene dos componentes, generalmente una transacción al contado y una transacción a plazo en la dirección opuesta, aunque un swap podría involucrar dos transacciones a plazo o solicitar fondos en préstamo en una moneda y prestarlos en otra. Por ejemplo un swap-in americano consiste en un convenio para comprar dólares al contado y venderlos a plazo. Un swap-out consiste en vender dólares de contado y comprarlos a plazo. A hora un ejemplo que incluya dos transacciones a plazo sería un contrato para comprar dolares en plazo de un mes y venderlos a un plazo de dos meses lo que es conocido como swap a doble plazo.

Los swaps son muy valiosos para quienes están invirtiendo o solicitando fondos en préstamo en una moneda extranjera. Por ejemplo, una persona que invierte en un certificado de tesorería puede usar un swap "al contado-a plazo" para evitar el riesgo que implican las monedas extranjeras. El inversionista vende a plazo el valor al vencimiento en moneda extranjera del certificado al mismo tiempo que se compran los cambios extranjeros al contado para liquidar el certificado. Puesto que una cantidad conocida de la moneda nacional del inversionista será recibida de acuerdo con el componente a plazo del swap, no se enfrentará ninguna incertidumbre con relación a los tipos de cambio. De manera similar, aquellos que solicitan fondos en préstamo en moneda extranjera pueden comprar a plazo la divisa necesaria para el reembolso del préstamo en moneda extranjera al mismo tiempo que convierten los fondos extranjeros solicitados en préstamo en el mercado de contado.

Nuestros pronósticos sirven para según el tipo de cambio que esperamos y las tasas de interés pactadas para el Swap veamos si nos es conveniente entrar al Swap o no.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Conclusiones

- Hay distintos métodos para estimar la volatilidad y dependiendo del tipo de necesidades que se tengan es el modelo que se utiliza para estimar las volatilidades.
- El utilizar una tasa fija acarrea diversos inconvenientes en comparación con los otros métodos de estimación por lo que se aconseja en la medida de lo posible utilizar otras formas de estimación
- La hipótesis de que la volatilidad se puede modelar asumiendo que se comporta como un movimiento browniano resultó acertada y factible para ser utilizada en modelos que impliquen la utilización de niveles de volatilidad del tipo de cambio.
- El tener un pronóstico más acertado de la volatilidad futura hace que se tengan pronósticos más acertados del tipo de cambio futuro.
- Es muy útil tener pronósticos acertados del tipo de cambio para tomar decisiones sobre acciones a seguir cuando se busca cubrir el riesgo cambiario.
- Los pronósticos deben de ser utilizados como herramientas para disminuir el riesgo y no abusar de ellos buscando ganancias fáciles.
- La aportación que realiza el siguiente trabajo a la carrera de Actuaría es el presentar alternativas al pronóstico de la volatilidad de una forma sencilla, clara y ejemplificada resaltando las ventajas y desventajas de esas alternativas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Bibliografía

Jorion Philippe  
"Valor en Riesgo (El nuevo Paradigma para el control de riesgos con derivados)"  
Ed. Limusa Mex-Der  
1a Edición.  
México  
1999

Hull John C.  
"Options, Futures & Other Derivatives"  
Ed. Prentice Hall  
4<sup>th</sup> Edition  
USA  
2000

Rivera Batiz Francisco y Luis  
"International Finance & Open Economy Macroeconomics"  
Ed. Mc Millan.  
USA  
1996

Levi, Maurice  
"Finanzas Internacionales"  
3a Edición  
España  
1993

Ossa Scaglia, Fernando  
"Economía Monetaria Internacional"  
Ed. Alfaomega  
México

Karlin S. and H.M. Taylor.  
"A first course in stochastic processes"  
2<sup>nd</sup> edition.  
New York Academic Press  
USA  
1975.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Actuaris Society  
Options & The Management Of Financial Risk  
1993

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN