

01190
6



U.N.A.M.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS SÍSMICO NO LINEAL
DE TANQUES CILÍNDRICOS DE ALMACENAMIENTO

TESIS DOCTORAL

Presentada como requisito para obtener el grado de
Doctor en ingeniería

Presenta

Hugo Hernández Barrios

Directores :

Dr. Ernesto Heredia Zavoni

Dr. Alvaro Aldama Rodríguez



F.I.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

México D.F. agosto de 2003



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Así dijo Jehová: No se alabe el sabio en su sabiduría, ni en su valentía se alabe el valiente, ni el rico se alabe en sus riquezas.

Mas alábase en esto el que se hubiere de alabar: **en entenderme y conocerme, que yo soy Jehová**, que hago misericordia, juicio y justicia en la tierra; porque estas cosas quiero, dice Jehová.

Jeremías 23-24

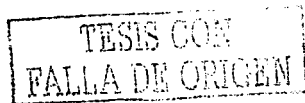
Todah Rabah:

Hashem

Rabi Yehoshua b.Yosef de Natzrat, el Melej ha Mashiaj

Ruajhakodesh

Baruj Hashem Adonai



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los integrantes del comité Doctoral:

Dr. Ernesto Heredia Zavoni

Dr. Alvaro Aldama Rodríguez

Dr. Luis Esteva Maravoto

Dra. Sonia Ruíz Gómez

Dr. Javier Avilés López

Dr. Francisco Sanchez Sesma

Dr. Eduardo Reinoso Angulo

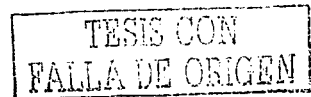
por sus valiosos comentarios, sugerencias y observaciones necesarias para la realización de este trabajo.

Especialmente agradezco a los doctores: Ernesto Heredia Z. y Alvaro Aldama R. por compartir su amistad, conocimientos, tiempo y por su invaluable apoyo. Son un ejemplo académico, profesional y personal a seguir.

Agradezco al Ing. Oscar Valle Molina por su apoyo durante mi estancia en el Instituto Mexicano del Petróleo.

Se agradece la beca de estudios otorgada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico, UNAM, en los proyectos DGAPA-IN114296 y DGAPA-IN123698.

Finalmente, agradezco al Instituto de Ingeniería de la UNAM (I de I UNAM), al Instituto Mexicano del Petróleo (IMP) y al Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA) por haber participado en mi formación profesional.

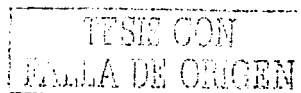


Hugo Hernández Barrios

↻

CONTENIDO

| | |
|---|-----|
| Lista de Figuras | i |
| Lista de Tablas | iii |
| Tabla de símbolos | iv |
| Resumen | ix |
| Abstract | xi |
| Capítulo 1 Generalidades | |
| 1.1 Características de tanques cilíndricos | 2 |
| 1.2 Fallas presentadas en tanques cilíndricos debidas a movimientos sísmicos | 4 |
| 1.3 Registro de tanques de almacenamiento en el DF | 6 |
| 1.4 Análisis sísmico de tanques cilíndricos | 6 |
| 1.4.1 Análisis sísmico lineal de tanques cilíndricos –Estado del Arte- | 8 |
| 1.4.2 Análisis sísmico no lineal de tanques cilíndricos –Estado del Arte- | 13 |
| Capítulo 2 Ecuaciones de movimiento | |
| 2.1 Condiciones geométricas | 20 |
| 2.2 Ecuación de cantidad de movimiento | 22 |
| 2.3 Condiciones de frontera en las zonas rígidas, F1 | 25 |
| 2.4 Condición cinemática en la superficie libre del líquido, F2 | 26 |
| 2.5 Ecuación de Bernoulli en el dominio, Ω | 26 |
| 2.6 Condición dinámica en la superficie libre del líquido | 28 |
| 2.7 Resumen de condiciones de frontera, sistema inercial | 28 |
| 2.8 Condiciones de frontera en un sistema no inercial | 29 |
| 2.8.1 Condiciones de frontera en las zonas rígidas, F1 | 30 |
| 2.8.2 Condición cinemática en la superficie libre del líquido, F2 | 30 |
| 2.8.3 Condición dinámica en la superficie libre del líquido, F2 | 31 |
| 2.9 Resumen de condiciones de frontera, sistema no inercial | 32 |
| 2.10 Condiciones de frontera en un sistema no inercial, potencial relativo ϕ | 33 |
| 2.10.2.1 Condición de frontera en las zonas rígidas, F1 | 33 |
| 2.10.2.2 Condición cinemática en la superficie libre del líquido, F2 | 34 |
| 2.10.2.3 Condición dinámica en la superficie libre del líquido, F2 | 34 |
| 2.11 Resumen de condiciones de frontera, sistema no inercial, potencial Relativo ϕ | 35 |
| 2.12 Efecto del amortiguamiento | 36 |
| 2.12.1 Ecuaciones básicas para un flujo ideal | 37 |
| 2.12.2 Ecuaciones básicas para un flujo viscoso | 39 |
| 2.12.3 Ecuaciones básicas para un flujo con amortiguamiento tipo Rayleigh | 40 |
| 2.12.4 Ecuaciones básicas para un flujo viscoso pseudo-viscoso | 42 |
| 2.13 Resumen y Conclusiones | 44 |
| Capítulo 3 Solución Analítica Lineal | |
| 3.1 Condiciones de frontera en coordenadas cilíndricas, potencial Relativo ϕ | 46 |
| 3.2 Función de potencial de velocidad relativa, ϕ | 47 |
| 3.3 Procedimiento de análisis | 56 |
| 3.4 Aplicación | 57 |



| | |
|---|----|
| 3.5 Análisis bajo una excitación armónica | 63 |
| 3.6 Resumen y Conclusiones | 67 |

Capítulo 4 Solución Numérica Lineal

| | |
|--|-----|
| 4.1 Introducción | 70 |
| 4.2 Error en la solución numérica | 71 |
| 4.3 Ecuaciones en Diferencias Finitas en coordenadas cilíndricas | 72 |
| 4.4 Efecto del amortiguamiento pseudo-viscoso | 73 |
| 4.5 Solución Numérica Lineal | 74 |
| 4.5.1 Método del Volumen Finito (MVF) | 75 |
| 4.5.2 Discretización del punto central | 76 |
| 4.5.3 Esquema I, en el dominio | 79 |
| 4.5.4 Esquema II, efecto transitorio | 81 |
| 4.5.4.1 Esquema explícito (Euler hacia adelante) | 83 |
| 4.5.4.2 Esquema semi-implícito | 86 |
| 4.5.4.3 Esquema Crank-Nicholson | 86 |
| 4.6 Descripción de mallas usadas | 90 |
| 4.7 Método del Gradiente Biconjugado | 90 |
| 4.8 Aplicación | 93 |
| 4.8.1 Esquema explícito | 93 |
| 4.8.2 Esquema Crank-Nicholson | 94 |
| 4.8.3 Altura de Ola relativa | 98 |
| 4.8.4 Esquema semi-implícito | 99 |
| 4.9 Cálculo de presiones, fuerzas cortantes y momentos de volteo | 99 |
| 4.10 Resumen y Conclusiones | 105 |

Capítulo 5 Solución Numérica no Lineal

| | |
|---|-----|
| 5.1 Introducción | 108 |
| 5.2 Procedimientos de Solución | 109 |
| 5.3 Disipación numérica | 111 |
| 5.4 Esquema semi-implícito | 115 |
| 5.4.1 Aplicación, Método semi-implícito | 117 |
| 5.5 Esquema semi-implícito con disipación numérica | 118 |
| 5.5.1 Aplicación, Método semi-implícito con disipación numérica | 119 |
| 5.6 Esquema Crank-Nicholson | 120 |
| 5.6.1 Linealización de ecuaciones -Método de Newton- | 125 |
| 5.6.2 Cálculo de presiones, fuerzas cortante y momentos de volteo | 127 |
| 5.6.3 Aplicación, Método Implícito (Crank-Nicholson-Newton) | 129 |
| 5.7 Análisis bajo una excitación armónica | 150 |
| 5.7.1 Curvas de Respuesta en frecuencia | 156 |
| 5.7.2 Efecto del amortiguamiento pseudo-viscoso | 160 |
| 5.8 Resumen y Conclusiones | 163 |

Capítulo 6 Conclusiones

| | |
|------------------|-----|
| 6.1 Introducción | 166 |
| 6.2 Hipótesis | 166 |

| | |
|--|-----|
| 6.3 Conclusiones y Resultados | 167 |
| 6.4 Contribuciones | 169 |
| 6.5 Trabajos Futuros | 170 |
| Referencias | 172 |
| Apéndice A Comportamiento de la ecuación de Laplace en $R=0$ | 184 |
| Apéndice B Ecuaciones en Diferencias Finitas | 192 |
| Apéndice C Transformación de Ecuaciones | 208 |
| Apéndice D Discretización del esquema semi-implícito | 226 |
| Apéndice E Condiciones de Frontera en un sistema no inercial | 234 |

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

F

LISTA DE FIGURAS

| FIGURA | Pg. |
|--|-----|
| 1.1 Fallas generales en tanques de almacenamiento..... | 3 |
| 1.2 Fallas presentadas en tanques debidas a movimientos sísmicos..... | 5 |
| 1.3 Ubicación de tanques de almacenamiento en la zona metropolitana del DF..... | 7 |
| 2.1 Condiciones de frontera del tanque de almacenamiento..... | 20 |
| 2.2 Sistemas coordenados de referencia..... | 21 |
| 2.3 Relación de ejes de referencia durante el movimiento..... | 24 |
| 3.1 Tanque cilíndrico en estudio..... | 48 |
| 3.2 Variación de periodos de vibrar vs H/a | 52 |
| 3.3 Historia de oleaje en la pared del tanque..... | 60 |
| 3.4 Respuesta de oleaje ante la excitación sísmica CA.EW..... | 62 |
| 3.5 Tanque cilíndrico sometido a una excitación armónica en su base | 63 |
| 3.6 Espectros de respuesta: excitación tipo armónica, características CA.EW..... | 65 |
| 3.7 Espectros de respuesta: excitación tipo armónica, características SCT.NS..... | 66 |
| 4.1 Definición de la malla en un plano horizontal..... | 76 |
| 4.2 Modos de vibrar de la superficie libre de un tanque cilíndrico..... | 80 |
| 4.3 Esquemas de discretización del dominio en diferencias finitas..... | 82 |
| 4.4 Características de discretización de la Malla M1..... | 91 |
| 4.5 Características de discretización de la Malla M2..... | 91 |
| 4.6 Comparación de soluciones analítica vs numérica, método explícito..... | 93 |
| 4.7 Comparación de historia de altura de ola relativa en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5m$, $H=7.5m$, $\xi=0.5\%$)..... | 101 |
| 4.8 Distribución de presiones sobre la pared del tanque..... | 104 |
| 5.1 Dominio físico y dominio computacional..... | 110 |
| 5.2 Oleaje en la pared del tanque de aplicación, método semi-implícito, CU.NS..... | 117 |
| 5.3 Historia de oleaje, método semi-implícito con disipación numérica, $\ell = 0.8$, CU.NS..... | 120 |
| 5.4 Oleaje en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5m$, $H=2.75m$, $\xi=0.5\%$). Método implícito, solución lineal-no lineal..... | 132 |
| 5.5 Oleaje en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5m$, $H=2.75m$, $\xi=0.5\%$). Método implícito, solución lineal-no lineal..... | 133 |
| 5.6 Oleaje en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5m$, $H=2.75m$, $\xi=0.5\%$). Método implícito, solución lineal-no lineal..... | 134 |
| 5.7 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento CU.NS, $\xi=0.5\%$ | 136 |
| 5.8 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento CU.EW, $\xi=0.5\%$ | 137 |
| 5.9 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento VIV.NS, $\xi=0.5\%$ | 138 |
| 5.10 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento VIV.EW, $\xi=0.5\%$ | 139 |

| | |
|---|-----|
| 5.11 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento CALETA.NS, $\xi=0.5\%$ | 140 |
| 5.12 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento CALETA.EW, $\xi=0.5\%$ | 141 |
| 5.13 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento TACY.NS, $\xi=0.5\%$ | 142 |
| 5.14 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento TACY.EW, $\xi=0.5\%$ | 143 |
| 5.15 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento CA.NS, $\xi=0.5\%$ | 144 |
| 5.16 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento CA.EW, $\xi=0.5\%$ | 145 |
| 5.17 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento SCT.NS, $\xi=0.5\%$ | 146 |
| 5.18 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75m$, $a=7.85m$, movimiento SCT.EW, $\xi=0.5\%$ | 147 |
| 5.19 Distribución de presiones hidrodinámicas..... | 149 |
| 5.20 Oleaje en la pared del tanque con $a=5.5m$, $H=2.75m$, $\xi=0\%$ | 151 |
| 5.21 Altura de ola en la pared del tanque ($a=5.5m$, $H=2.75$, $\xi=0.5\%$)..... | 152 |
| 5.22 Altura de ola en la pared del tanque, $R=+a$, bajo una excitación armónica: $a_x(t) = 0.2 \text{ sen}(1.5t)$, $\xi=0.5\%$, para diferentes profundidades del líquido..... | 154 |
| 5.23 Historia del oleaje en la pared del tanque ($a=5.5m$, $H=3.5m$, $\xi=0.5\%$)..... | 155 |
| 5.24 Historia del oleaje en la pared del tanque ($a=5.5m$, $H=2.75m$, $\xi=0.5\%$), $a_x(t) = 0.169g \text{ sen}(3.1416t)$ | 156 |
| 5.25 Curvas de respuesta en frecuencia para un oscilador lineal..... | 156 |
| 5.26 Curvas de respuesta en frecuencia para la ecuación tipo Duffing..... | 158 |
| 5.27 Relación frecuencia-amplitud, $v-\gamma$, tanque cilíndrico ($a=5.5m$, $H=2.75m$, $\xi=0\%$)..... | 160 |
| 5.28 Efecto del amortiguamiento en la respuesta..... | 161 |
| 5.29 Curvas características de la respuesta amortiguada..... | 163 |

LISTA DE TABLAS

| TABLA | Pg. |
|---|-----|
| 3.1 Frecuencias y periodos de vibrar de la superficie libre del líquido..... | 58 |
| 3.2 Características de los registros sísmicos utilizados..... | 58 |
| 3.3 Altura de ola máxima para el ejemplo de aplicación..... | 59 |
| 3.4 Características de los movimientos armónicos y resultados..... | 64 |
| 4.1 Resultados de oleaje y características de discretización, malla M1, $\xi=0\%$ | 94 |
| 4.2 Resultados de oleaje y características de discretización, malla M2, $\xi=0\%$ | 95 |
| 4.3 Resultados de oleaje y características de discretización, malla M2, $\xi=0.5\%$ | 96 |
| 4.4 Altura de ola máxima, $N=3000$, $\xi=0\%$ | 97 |
| 4.5 Altura de ola máxima, registro SCT.EW, $N=3000$, $\xi=0\%$ | 97 |
| 4.6 Altura de ola máxima, $N=3000$, $\xi=0.5\%$ | 97 |
| 4.7 Oleaje relativo, $N=6000$, malla M2, $\xi=0.5\%$ | 98 |
| 4.8 Altura de ola máxima, esquema semi-implícito, $\xi=0.5\%$ | 99 |
| 4.9 Fuerza cortante máxima, ejemplo de aplicación, $\xi=0.5\%$ | 105 |
| 4.10 Momentos de volteo máximos, ejemplo de aplicación, $\xi=0.5\%$ | 105 |
| 5.1 Comparación de altura de ola lineal y no lineal, tanque $H/a=0.5$ | 130 |
| 5.2 Comparación de altura de ola lineal y no lineal..... | 135 |
| 5.3 Fuerzas cortantes y momentos de volteo, lineales y no lineales..... | 148 |
| 5.4 Características de los tanques de la figura 5.22, $\Omega=1.5$ rad/s..... | 153 |

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TABLA DE SIMBOLOS

| | |
|--------------------------------|--|
| $A_n(t)$ | Variable auxiliar en la transformación de la ecuación de movimiento. |
| A_1, A_2 | Constantes de integración. |
| a | Radio del tanque cilíndrico. |
| $\hat{a}(t) = (a_x, a_y, a_z)$ | Vector de aceleración del terreno. |
| $A_{m\acute{a}x}$ | Aceleración máxima del terreno. |
| B_1, B_2 | Constantes de integración. |
| c | Celeridad de onda. |
| C_m | Constante de integración, método de separación de variables. |
| D_R | Fracción de amortiguamiento numérico en la dirección radial. |
| D_θ | Fracción de amortiguamiento numérico en la dirección angular. |
| dX, dY, dZ | Diferencial de volumen en las direcciones X, Y y Z, respectivamente. |
| $\hat{d}(t) = (d_x, d_y, d_z)$ | Vector de velocidad del terreno. |
| $[DER]^n$ | Función derivada evaluada en el instante $t=n$. |
| $dV = RdRd\theta dz$ | Diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas. |
| D_m | Constante de integración, método de separación de variables. |
| E_m | Constante de integración, método de separación de variables. |
| F_1, F_2 | Zonas rígidas (pared y fondo del tanque). |
| $f_i^n(x)$ | Función evaluada en el instante $t=n$. |
| $F_i^n(x)$ | Función evaluada en el instante $t=n$. |
| F | Amplitud de la excitación armónica. |
| $F_p(t)$ | Fuerza cortante por unidad de longitud en la pared del tanque. |
| $f(R)$ | Función de apoyo en la serie Fourier-Bessel. |
| g | Aceleración de la gravedad. |
| $g(x)$ | Función no lineal, método de Newton. |
| $G(\omega_n)$ | Factor de amplificación dinámico. |
| h | Altura de ola medida desde el fondo del tanque. |

| | |
|---------------------------------|---|
| H | Profundidad media del líquido contenido en el tanque. |
| $J_m(kR)$ | Función de Bessel de primer tipo. |
| $j = 1,2,3,\dots,MR$ | Subíndices de definición de un punto en la malla en la dirección radial, |
| $k = 1,2,3,\dots,M\theta$ | angular y vertical, respectivamente. |
| $l = 1,2,3,\dots,Mz$ | |
| J(x) | Matriz Jacobiana en el método de Newton. |
| k_{mn} | Raíz n-ésima de la función de Bessel de primer tipo de orden m-ésimo. |
| K_x, K_y, K_z | Distancias del origen del sistema inercial al no inercial, horizontales y vertical, respectivamente. |
| ℓ | Fracción de amortiguamiento numérico (esquema "upwind"). |
| m, k | Constantes de separación, método de separación de variables. |
| M(t) | Momento de volteo en el instante t. |
| MR, M θ , MZ | Número de puntos total en una malla en las direcciones radial, angular y vertical, respectivamente. |
| \hat{n} | Vector normal unitario. |
| NP | Número de puntos en el registro sísmico. |
| p | Vector de incógnitas, método de Newton. |
| P_n | Presión hidráulica en la pared del tanque. |
| Q_n | Coefficientes de la sucesión de Fourier-Bessel. |
| $r_n = \frac{\Omega}{\omega_n}$ | Relación entre frecuencias de la excitación y la frecuencia del oscilador. |
| $\hat{r} = (x, y, z)$ | Vector de posición de una partícula P con respecto al sistema no inercial. |
| R, θ , z | Coordenadas cilíndricas, radial, angular y vertical. |
| $S_m(R, \theta)$ | Función que representa la variación espacial de la ola. |
| T_n | Periodo n-ésimo de vibra de un oscilador lineal. |
| $\hat{U} = (u, v, w)$ | Vector de velocidad relativa. |
| $U_{j,k,l}^n$ | Aproximación de la función potencial en diferencias finitas en el nodo j,k,l evaluada en el instante t=n. |
| $\hat{V}_o = (U_o, V_o, W_o)$ | Vector de velocidad absoluta. |

| | |
|---|---|
| v_R, v_θ | Velocidad de propagación de ola en las direcciones radial y angular, respectivamente. |
| $X_{mn} = k_{mn}a$ | Raíz positiva de la primer derivada de la función de Bessel. |
| x, y, z | Coordenadas cartesianas referidas a un sistema no inercial. |
| X, Y, Z | Coordenadas cartesianas referidas a un sistema inercial. |
| $Y_m(kR)$ | Función de Bessel de segundo tipo. |
| Δ | Incremento o error (porcentual) |
| Δt | Incremento temporal. |
| $\Delta x(m), \Delta y(m), \Delta z(m)$ | Espaciamiento en la malla en coordenadas cartesianas. |
| $\Delta R(m), \Delta \theta(\text{rad}), \Delta Z(m)$ | Espaciamiento en la malla en coordenadas cilíndricas. |
| ε | Perturbación infinitesimal. |
| $\varepsilon_o(m)$ | Desplazamiento del terreno. |
| $\delta(m)$ | Altura de ola. |
| μ | Coefficiente de amortiguamiento pseudo-viscoso. |
| ν | Término de detonación de la frecuencia transformada, método de perturbaciones. |
| ξ_n | Coefficiente de amortiguamiento con respecto al crítico (tipo Rayleigh). |
| ξ, η, σ | Coordenadas referidas al sistema ortogonal en el dominio computacional. |
| ρ | Densidad del líquido, constante para un líquido incompresible. |
| Φ | Función potencial de velocidad absoluto. |
| φ | Función potencial de velocidad relativo. |
| $\hat{\varphi}$ | Función potencial de velocidad equivalente (dominio computacional). |
| θ | Desplazamiento angular. |
| σ | Decremento logarítmico (cap. 2). |
| σ | Variable independiente en el dominio computacional (cap. 4). |
| Ω | Dominio físico del líquido. |
| Ω' | Dominio computacional del líquido. |
| Ω | Frecuencia de la excitación (rad/s). |

| | |
|---|---|
| $\vec{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ | Vector de velocidad angular. |
| ω_n | Frecuencia circular n-ésima de vibrar de un oscilador lineal. |
| γ | Amplitud de la respuesta, método de perturbaciones. |
| γ | Peso volumétrico del líquido. |
| $\psi(t)$ | Función dependiente del tiempo en la altura de ola. |
| π | Constante numérica pi. |
| $\frac{D}{Dt}$ | Operador derivada total o material. |
| $\frac{\partial}{\partial t}$ | Operador derivada local. |
| ∇ | Operador gradiente. |
| ∇^2 | Operador Laplaciano. |
| $\langle \cdot, \cdot \rangle$ | Producto interno. |

**TESIS CON
FALLA DE LENGUAJE**

RESUMEN

Se estudia la respuesta sísmica no lineal de tanques cilíndricos excitados horizontalmente en su base por una aceleración del terreno con gran amplitud, periodo dominante largo y con gran duración. La respuesta se evalúa en función de la altura de ola, fuerza cortante y momentos de volteo en el tanque. El tanque cilíndrico se considera con paredes rígidas y anclado a una cimentación indeformable. El líquido contenido en el tanque es no viscoso, incompresible e irrotacional, lo que permite considerar la existencia de un potencial de velocidad que al ser introducido en la ecuación de continuidad resulta la ecuación de Laplace. El amortiguamiento numérico del sistema se considera como pseudo-viscoso.

Los resultados de la solución analítica lineal indican la influencia de los modos superiores en la respuesta y la presencia del fenómeno de resonancia, por lo que se hace necesario considerar los efectos hidrodinámicos no lineales en la respuesta.

El sistema de ecuaciones no lineales, válido en el dominio físico del líquido, es mapeado a un dominio computacional definido por un paralelepípedo con dimensiones que permanecen invariables en cada instante, evitando realizar un remallado durante la solución del problema transitorio. El sistema de ecuaciones no lineales se resuelve numéricamente por medio del Método de Diferencias Finitas (MDF) en coordenadas cilíndricas, sin desprestigiar el punto central del dominio, y en forma tridimensional. El esquema usado en la discretización de las ecuaciones en diferencias finitas fue el de Crank-Nicholson y linealizadas por medio del método de Newton; el sistema de ecuaciones algebraicas resultantes se resolvieron por el método del Gradiente Biconjugado.

La diferencia entre la respuesta no lineal y la lineal varía para cada movimiento sísmico. El incremento porcentual entre ambas respuestas resulta ser más significativo para los momentos de volteo. Los efectos no lineales en la respuesta son más importantes para tanques anchos, con relación altura a semiancho, $H/a=0.30$, en donde la altura de ola máxima no lineal es del orden del 35% de la profundidad del tanque.

El amortiguamiento pseudo-viscoso modela adecuadamente la combinación de los efectos por fricción entre el líquido y las fronteras sólidas del tanque, y los efectos

debidos a la viscosidad del líquido. En resonancia se presenta inestabilidad numérica en la solución, tal vez sea necesario agregar disipación numérica externamente al sistema para estabilizarlo o considerar un planteamiento que permita que la altura de ola rompa. Cerca de la zona de resonancia la respuesta no lineal difiere significativamente de la lineal, se presenta un comportamiento en el cual la amplitud del oleaje positivo es mayor que la del negativo, además del alargamiento del periodo de oscilación. Las curvas de respuesta en frecuencia indican un comportamiento similar al de la ecuación de Duffing con rigidez "débil".

ABSTRACT

Nonlinear Sloshing and Seismic Response of Vertical Cylindrical Tanks

In this work, the nonlinear response of vertical cylindrical tanks subjected to earthquake ground motion is studied. The tank is considered anchored to the ground and its walls are rigid. The liquid stored in the tank is supposed to be inviscid, irrotational and incompressible; pseudo viscous numerical damping is introduced in the response analysis. The response is studied in terms of wave heights at the liquid free surface, and base shear and overturning moment at the tank walls. Ground motions recorded at several stations during the Mexico earthquake of September 19, 1985 are used for the analysis.

The linear solution is examined first. The results show that the contributions from higher modes to the response may be significant. It is also shown that if resonance occurs, the linear solution does not predict the response appropriately and nonlinear sloshing needs to be considered. Ground motions modeled as harmonic functions are considered for the analysis of resonance effects.

The nonlinear sloshing problem was formulated in the physical domain and transformed to and solved in a computational domain. Due to a change of variables, the computational domain is defined by a cube with known time invariant dimensions, as opposed to the physical domain that changes with time. Thus, for the numerical solution the computational mesh needs not change along time. The system of equations is written in polar coordinates for a three-dimensional model of the tank. The discrete system of equations in the computational domain is solved using the Finite Difference Method (FDM) including the central point at the tank vertical axis. A Crank-Nicholson scheme was used for the solution of the finite difference equations, linearized by means of the Newton method; the resulting system of equations was solved using the method of the biconjugate gradient.

The differences in the response parameters of interest are examined for the nonlinear and linear solutions. The increase of response from the linear to the nonlinear solution is more significant for the overturning moment. Broad tanks, *i.e* those with a

height to radius ratio less than $H/a=0.30$, tend to be more likely to exhibit nonlinear sloshing, where the maximum non linear wave height at the free surface is about 35% the water depth in the tank.

Numerical instability of the solution is found at resonance. It may be necessary to include numerical dispersion into the model or take into account that waves may break. The nonlinear liquid behavior near resonance is considerably different from the corresponding linear behavior. Typically, positive liquid amplitudes grow much faster with time than the negative ones, and periods of oscillation become longer. It was found that the nonlinear frequency curve for the tank responses analyzed exhibits the typical nonlinear softening behavior obtained by the Duffing's method.

CAPÍTULO 1

GENERALIDADES

1.1 CARACTERÍSTICAS DE TANQUES CILÍNDRICOS

Los tanques para almacenar líquidos o procesar su contenido, como ocurre en los sistemas de almacenamiento y regulación de agua potable, plantas de tratamiento de agua, plantas industriales y refinerías pueden ser elevados o apoyados en la superficie del terreno, éstos últimos generalmente son de acero y de forma cilíndrica. Los tanques cilíndricos apoyados sobre el terreno se clasifican dependiendo de su relación altura a radio, H/a , como tanques "anchos" o de gran diámetro, cuando H/a es menor o igual a 0.50 y como tanques "esbeltos" cuando dicha relación es mayor.

Generalmente los tanques cilíndricos de acero son cerrados. La cubierta puede ser:

1. Flotante, la cual sube o baja con el nivel del líquido en el interior del tanque y se guía para mantenerla cerrada, permitiéndose una holgura en su perímetro del orden de 10 cm.
2. Plana o de forma cónica, apoyada en el perímetro del tanque o sobre columnas intermedias.

La cubierta plana o cónica rigidiza al tanque (cascarón cilíndrico), y esta rigidez es un poco mayor si la cubierta está apoyada sobre una estructuración interna formada por columnas y largueros. En un recipiente cerrado perfectamente rígido y completamente lleno, toda la masa del líquido junto con la del recipiente, se mueve como cuerpo rígido. Sin embargo, en un recipiente que almacena un poco menos de su capacidad las presiones hidrodinámicas sobre las paredes y el fondo son prácticamente iguales a las de un recipiente con superficie libre.

Los tanques de almacenamiento pueden estar anclados a la cimentación o solamente apoyados sobre ella. En el primer caso se conocen como tanques anclados y en el segundo como tanques sin anclar. En el caso de tanques que no están anclados a la cimentación, al ser sometidos a una excitación sísmica horizontal se induce un

momento de volteo que debe ser resistido por los esfuerzos permisibles horizontales de tensión y por los axiales de compresión en las paredes del tanque. Durante un evento sísmico estos tanques sufren un levantamiento parcial de la base lo que genera una no-linealidad de contacto.

En la Figura 1.1 se muestran los tipos de fallas que pueden presentarse en los tanques cilíndricos de almacenamiento, algunas de las cuales son generadas por efectos sísmicos.

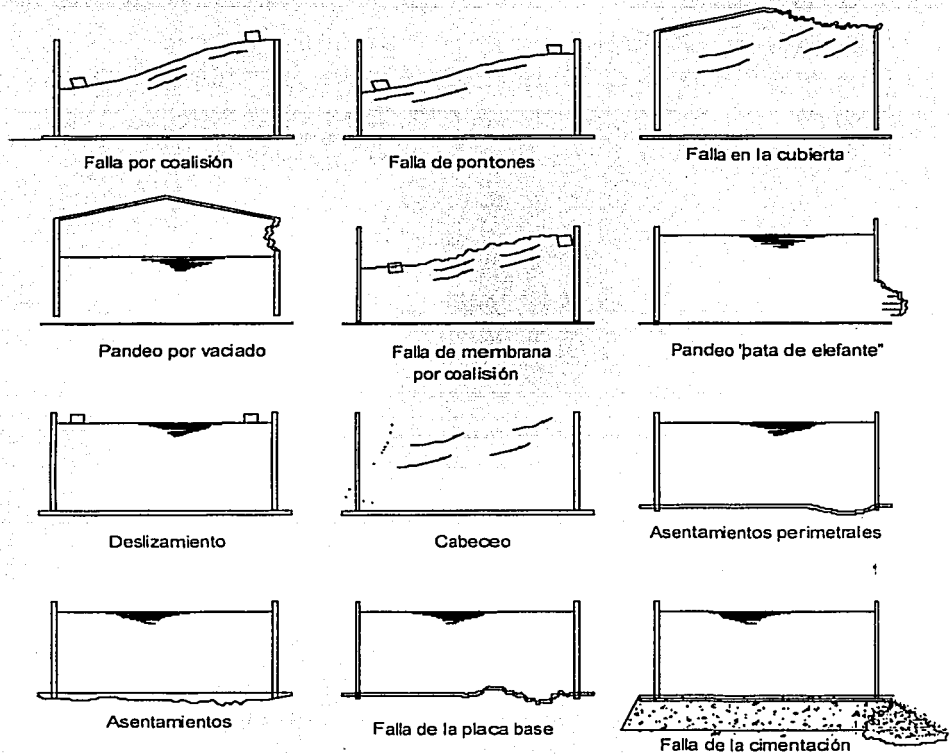


Fig. 1.1 Fallas generales en tanques de almacenamiento

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

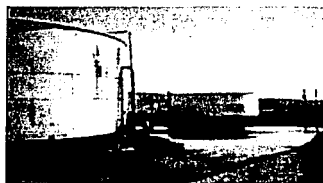
1.2 FALLAS PRESENTADAS EN TANQUES CILÍNDRICOS DEBIDAS A MOVIMIENTOS SÍSMICOS

En las últimas décadas se han presentado daños severos en tanques cilíndricos para almacenamiento de líquidos debido a movimientos sísmicos en su base. El sismo de Alaska de 1964 fue el primer evento que ocasionó daños de pandeo en tanques cilíndricos de almacenamiento anclados a la cimentación. En Greenville-Livermore California, el sismo de 1980 ocasionó pandeo en 100 tanques de almacenamiento (Niwa y Clough, 1982). En 1964, debido al sismo de Nigata, Japón, varios tanques que almacenaban aceite y que se encontraban anclados a la cimentación, sufrieron daños considerables en la cubierta debido al oleaje del fluido en la superficie (Sakar y Ogawa, 1984). En febrero de 1971, cinco tanques sin anclar y apoyados sobre anillos de cimentación sufrieron levantamiento en promedio de 35 cm durante el sismo de San Fernando, California (Jennings, 1971). El sismo de Colinga, Argentina, en 1983, ocasionó pandeo tipo "pata de elefante" en las paredes de tanques que almacenaban aceite además de rupturas en la unión de la placa base con el anillo inferior del tanque y del daño en soldaduras; once tanques presentaron daños en la cubierta flotante, (Manos y Clough, 1985). En otros eventos sísmicos también se han presentado fallas considerables en tanques cilíndricos, como las registradas en Landers en 1992 y en Northridge en 1994. Recientemente, el sismo de Kocaeli en Turquía, 1999, produjo fallas en las conexiones de las tuberías de alimentación debidas a momentos de volteo excesivos. Consecuencias adicionales de falla producidas por sismos en tanques, y no menos importantes, son las pérdidas humanas, incendios, explosiones, daño ecológico e interrupción del abastecimiento de agua potable.

En la Figura 1.2 se muestran algunas fallas en tanques cilíndricos presentadas durante eventos sísmicos.



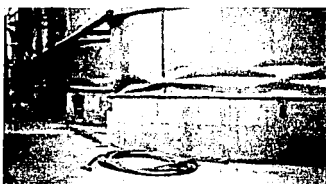
(a) Falla tipo pata de Elefante, Alaska, 1964



(b) Excesivo oleaje, Coalinga, 1983



(c) Excesivo momento de Volteo, Kobe, Japón, 1995



(d) Falla tipo Diamante, Livermore, 1980



(e) Falla en la pared, San Fernando, 1971



(f) Tanque de almacenamiento de agua, falla en conexiones, Santa Rosa, 1965



(g) Izmit, Turquía, falla en conexiones (1999)

Fig. 1.2 Fallas presentadas en tanques debidas a movimientos sísmicos

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.3 REGISTRO DE TANQUES DE ALMACENAMIENTO EN EL DF

En el Distrito Federal (DF), México, existen cerca de 900 tanques de los cuales 250 son de almacenamiento y regulación de agua potable (Figura 1.3). La mayoría se ubica en las zonas de lomas y de transición, y más de una docena de tanques se encuentran en la zona de lago. En el área metropolitana se encuentran también un gran número de plantas de tratamiento de aguas negras y plantas industriales que cuentan con tanques cilíndricos de almacenamiento. Estos tanques son vitales para el sistema de abastecimiento y dosificación de agua potable. Existen también en el área metropolitana del DF tanques de abastecimiento de la industria petrolera, así como tanques para almacenamiento de turbosina y gasavión. La falla de alguna de estas estructuras durante un temblor afectaría el abastecimiento de combustible para tráfico aéreo, causaría un gran daño ecológico y pondría en riesgo la vida de un gran número de personas.

1.4 ANÁLISIS SÍSMICO DE TANQUES CILÍNDRICOS

En las últimas décadas se han desarrollado varios estudios sobre el problema dinámico de líquidos almacenados en contenedores con superficie libre. La gran mayoría de estos estudios se han aplicado principalmente a la industria militar, aérea y espacial. Las fallas producidas por efectos sísmicos en tanques cilíndricos impulsaron el estudio dinámico de este tipo de estructuras.

Las ecuaciones hidrodinámicas de un fluido incompresible pueden determinarse por medio de las ecuaciones de Navier-Stokes o las de Euler, estas últimas junto con la hipótesis de fluido irrotacional, permiten suponer la existencia de un flujo con potencial.

La descripción del comportamiento del fluido se realiza desde dos tipos de enfoques: el Lagrangiano y el Euleriano. En la descripción Euleriana las coordenadas de la malla, en la que se discretiza el fluido, están fijas con respecto a un marco de referencia, tal que el fluido se mueve através de la malla de elemento a elemento. La descripción Lagrangiana está caracterizada por un sistema coordinado o malla la cual

se mueve con el fluido. Físicamente, la descripción Lagrangiana centra su atención en las partículas específicas del medio continuo, mientras que la descripción Euleriana se interesa por una región particular del espacio ocupada por el medio continuo.

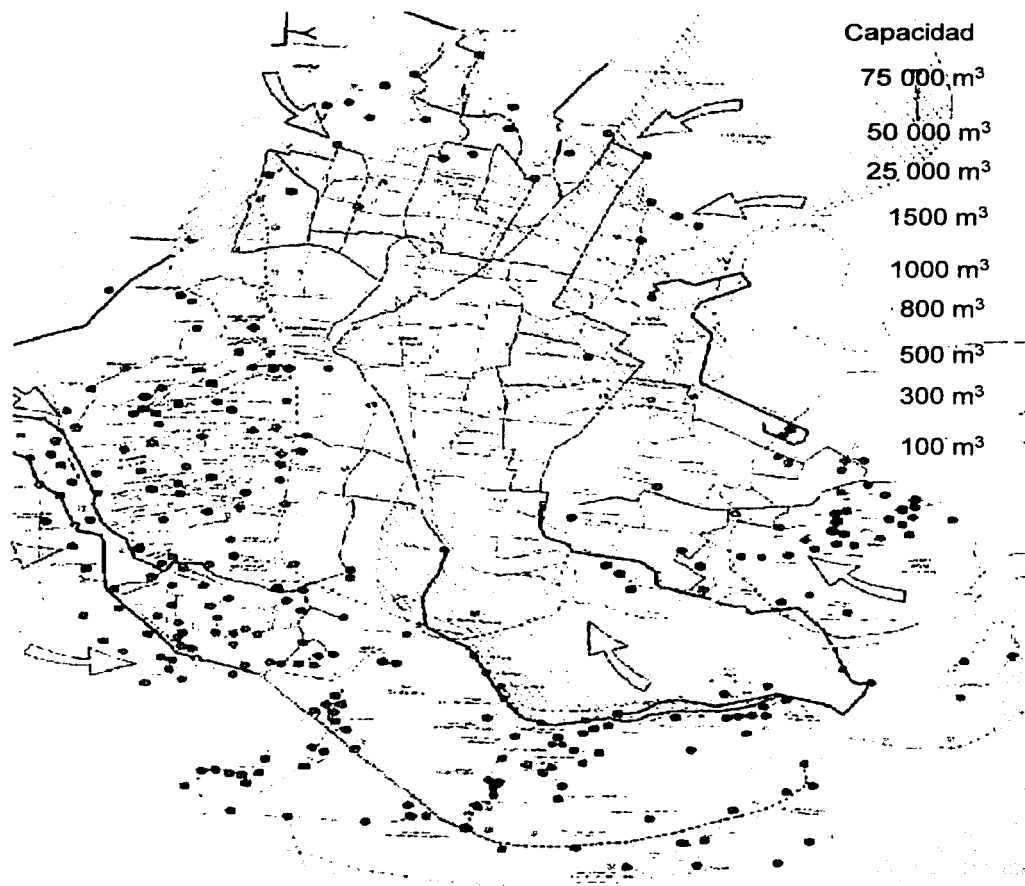


Fig. 1.3 Ubicación de tanques de almacenamiento en la zona metropolitana del DF.

Cuando un sistema coordenado está fijo en el espacio, también conocido como sistema coordenado Newtoniano o inercial, las ecuaciones de movimiento contienen una gran cantidad de términos, lo cual hace más difícil su evaluación, además, se limita

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

la amplitud del movimiento del tanque (Bridges, 1981). Cuando se usa un sistema coordinado que se mueve, las condiciones de frontera del problema dinámico son homogéneas con referencia al origen del sistema coordinado, este último enfoque es considerado como válido para grandes movimientos del tanque (Lou, Su y Flipse, 1980) e incluso para la modelación de olas que rompen (Ortiz, Barhorst y Robinett, 1998), sin embargo, es necesario incluir las fuerzas de Coriolis y centrífuga.

El efecto hidrodinámico en los tanques está asociado prácticamente a las olas superficiales. El fenómeno puede esquematizarse como lineal mientras las olas sean pequeñas; sin embargo, la formación de olas altas conduce a un comportamiento hidrodinámico no lineal. El problema dinámico es no lineal en dos aspectos: (1) la forma de la superficie del líquido no es conocida a priori, (2) existen términos de orden cuadrático en las condiciones de frontera de la superficie libre.

Lo anterior da lugar a dos tipos de planteamientos matemáticos del problema: (1) solución lineal, en la cual se desprecian los términos de orden superior en las condiciones de frontera, (2) solución no lineal, en la que se toman en cuenta las condiciones de frontera completas.

1.4.1 ANÁLISIS SÍSMICO LINEAL DE TANQUES CILÍNDRICOS -ESTADO DEL ARTE-

El problema dinámico lineal de tanques cilíndricos, excitados sísmicamente, se ha resuelto en forma analítica por medio de la teoría del potencial. La altura de ola, presiones hidráulicas, fuerzas cortantes y momentos de volteo se expresan en términos de un potencial de velocidades. En forma numérica se han aplicado métodos como: Elemento Finito (MEF), Elementos de Frontera (MEF) y la combinación de ambos. La solución linealizada del problema es válida para pequeñas oscilaciones del fluido.

Los primeros intentos de considerar el efecto dinámico del fluido sobre un contenedor fueron aplicados a tanques de aeronaves y fueron realizados por Jacobsen (1949) y por Graham y Rodríguez (1952). Abramson (1966) introdujo la teoría del potencial en el cálculo del oleaje en tanques cuadrados de vehículos espaciales y

excitados armónicamente. Graham y Rodríguez suponen que las presiones dinámicas del líquido sobre las paredes del tanque pueden separarse en dos: una convectiva y otra impulsiva. Las presiones impulsivas están asociadas con las fuerzas de inercia producidas por movimientos impulsivos de las paredes del tanque y son directamente proporcionales a la aceleración de las paredes del mismo. Las presiones convectivas se producen por la oscilación del fluido en la superficie libre y son consecuencia de las presiones impulsivas. Retomando la propuesta realizada por los autores anteriores, Housner (1957,1963) propone un procedimiento de análisis basado en un modelo simplificado masa-resorte y que posteriormente fue modificado por Veletsos (Veletsos y Yang, 1977).

Los tanques cilíndricos pueden ser rígidos o flexibles, dependiendo de las hipótesis sobre el comportamiento del cascarón. Wozniak y Mitchell (1978) establecen que los efectos hidrodinámicos impulsivos en tanque con paredes rígidas son similares a los que se presentarían en tanques con paredes flexibles, hecho que ha sido corroborado por Gupta y Hutchinson (1995). Estudios sobre tanques con paredes flexibles (Veletsos y Kumar, 1984; Veletsos, 1984; Fischer, 1979; Tang, Veletsos y Tang, 1992) muestran que las fuerzas convectivas pueden ser estimadas razonablemente con base en las soluciones obtenidas para tanques de paredes rígidas reemplazando la máxima aceleración del terreno por el valor espectral de la pseudoaceleración correspondiente a la frecuencia fundamental del fluido. El método de Elemento Finito se ha usado para modelar un tanque con paredes flexibles. Cuando se aplica el Método del Elemento Finito, para modelar la interacción fluido-estructura, se puede realizar por medio de cuatro enfoques: Euleriano, Lagrangiano, Euleriano-Lagrangiano y por Masa Agregada. En el enfoque de Masa Agregada, la masa que generan las presiones hidrodinámicas es sumada o agregada a la masa de la estructura en la interfase del fluido con la estructura, este enfoque ignora las oscilaciones del fluido. En el enfoque Euleriano, los desplazamientos son las variables en la estructura y las presiones o los potenciales de velocidad son las variables en el fluido. Debido a que las incógnitas en la estructura son principalmente los desplazamientos y posteriormente los esfuerzos, una incompatibilidad ocurre en el dominio del fluido, el cual está descrito por las presiones nodales. Esta incompatibilidad requiere una formulación especial para

determinar la respuesta dinámica del sistema (Greeves y Dumanoglu, 1989). En el enfoque Lagrangiano el comportamiento, tanto del fluido como de la estructura, se expresan en términos de desplazamientos nodales por lo que las condiciones de equilibrio y de compatibilidad son automáticamente satisfechas en los nodos de la interfase fluido-estructura. El elemento fluido generalmente es considerado como un elemento sólido elástico con módulo de rigidez al corte despreciable y con módulo de elasticidad volumétrico igual al módulo de compresibilidad del fluido (Dogangun, Durmuş y Ayvaz, 1994). En la mayoría de los casos la pared se ha modelado por medio de elementos tipo "shell" (Balendra, et al, 1982; Barton y Parker, 1987; Liu, 1981). La descripción Lagrangiana no es adecuada para fluidos que presentan grandes desplazamientos ya que la malla podría distorsionarse, por otro lado, la descripción Euleriana puede usarse para cualquier fluido pero no es compatible con los grandes desplazamientos de la estructura en la cual la geometría de las fronteras se altera; por lo anterior ha surgido un planteamiento llamado Euleriano-Lagrangiano (Hughes, Lui y Zimmermann, 1991; Liu y Ma, 1982; Liu, 1981; Bathe y Hahn, 1979) que toma en cuenta ventajas de ambos planteamientos. Para resolver problemas de fluidos viscosos con superficie libre, Ramaswamy y Kawahara (1987) desarrollaron una descripción cinemática Euleriano-Lagrangiano para el dominio del fluido en la que los puntos nodales pueden desplazarse independientemente del movimiento del fluido, lo que permite mayores distorsiones del movimiento del fluido que el método puramente Lagrangiano. La técnica se denomina Euleriano-Lagrangiano debido a que existen tres opciones para el movimiento de los vértices del contenedor: (1) se pueden mover con el fluido desde un punto de vista Lagrangiano, (2) pueden permanecer fijos, desde el punto de vista Euleriano y (3) se pueden mover en forma arbitraria, previamente establecida. Huerta y Liu (1988) también desarrollaron una técnica de Elemento Finito Lagrangiana-Euleriana, para el estudio del oleaje de flujos viscosos. Usan la descripción Lagrangiana en la dirección vertical de la malla para calcular las velocidades en el interior de los elementos, ya que consideran que varían linealmente con la profundidad y una descripción Euleriana en la dirección horizontal.

En el método de Elementos de Frontera la frontera del líquido se discretiza por medio de ecuaciones integrales. Básicamente existen dos enfoques en la formulación

del método: uno está basado el uso de ecuaciones integrales y el otro hace uso del conjunto completo de soluciones, este último evita la introducción de singularidades en la solución fundamental (Funciones de Green) y ha sido utilizado en problemas de interacción fluido-estructura en presas y en estructuras costa afuera (Avilés y Liu, 1998 y 2001).

El método de Elementos de Frontera combinado con Elemento Finito ha sido usado por Haroum (1980) para modelar un tanque con paredes flexibles sometido a una excitación sísmica en su base.

Estudios recientes en tanques sin anclar, apoyados sobre una losa rígida de cimentación, han mostrado que el levantamiento de la cimentación tiene influencia significativa en la respuesta dinámica, produciéndose esfuerzos de compresión en las paredes mucho mayores que los que se presentarían en el mismo sistema, si estuviera anclado a la cimentación (Peek, 1989; Natsiavas, 1987; Haroum y Badawi, 1988; Lau y Clough, 1989; Malhotra y Veletsos, 1994, 1995). En algunos estudios (Malhotra, 1995, 1997) se usan elementos viga con una carga uniforme debida a la presión hidrostática en el fondo del tanque y un modelo masa-resorte para modelar los efectos hidrodinámicos.

La mayoría de los estudios considera que el tanque está perfectamente empotrado en una cimentación rígida y apoyada sobre suelo indeformable. Veletsos y Shivakumar (1995) estudian la interacción suelo-estructura en tanques cilíndricos por el modelo del semiespacio, considerando que la base del tanque no se desliza ni se levanta. Sugieren que los efectos de cabeceo pueden ser importantes, principalmente para tanques esbeltos apoyados sobre suelos flexibles. Lo anterior también es reportado por Deylami y Sarrafzadeh (1996). La interacción suelo-estructura alarga el periodo de vibración del modo impulsivo y aumenta su amortiguamiento (Manual de Diseño Sísmico, CFE, 1993), sin embargo, son escasos los estudios experimentales o analíticos que tomen en cuenta la interacción suelo-estructura.

Resultados experimentales en tanques para almacenamiento, con superficie libre, muestran claramente que existe un comportamiento amortiguado en la respuesta del líquido (Case y Parkinson, 1957); la disipación de energía está relacionada con el amortiguamiento en el movimiento del fluido. En la teoría del potencial, no es posible

tomar en cuenta la disipación de energía, por lo que en los trabajos en los que se toma en cuenta el amortiguamiento, éste se introduce en la ecuación de movimiento por analogía a la ecuación de un oscilador amortiguado. Para simular el efecto del amortiguamiento viscoso en la teoría del potencial, en tanques cuadrados, Faltinsen (1978) introdujo un término ficticio en la ecuación de movimiento para representar la viscosidad del fluido. En este planteamiento el término del amortiguamiento representa una fuerza de oposición al movimiento de una partícula de fluido.

Considerando la teoría del potencial para la solución linealizada del problema dinámico, han surgido varios procedimientos para el aislamiento de la base de tanques cilíndricos ante movimientos sísmicos (Nam-Sik Kim, et al, 1995). Los más recientes proponen desconectar las paredes del tanque de la placa base y apoyar el anillo en forma horizontal en un material elastomérico flexible.

Los códigos API-STD-650-93, AWWA D100-88 y NENSEE-1986, proponen un procedimiento de análisis sísmico de tanques cilíndricos, basado en el modelo simplificado masa-resorte desarrollado por Housner (1957) y modificado por Veletsos (Veletsos y Yang, 1977). Dicho procedimiento considera dos modos de la respuesta del sistema fluido-tanque: (1) el del sistema cascarón-cubierta, junto con una porción del líquido que se mueve al unísono con éste, asociado a una fuerza impulsiva; y (2) el fundamental del oleaje del líquido contenido en el tanque asociado a una fuerza convectiva. Las hipótesis básicas en el análisis son: (a) la amplitud del oleaje es pequeña y se pueden desprestigiar los efectos hidrodinámicos no lineales; y (b) las paredes del tanque son rígidas. El Manual de Diseño de Obras Civiles (Diseño por Sismo; 1993) considera un modelo similar al anterior con la posibilidad de tomar en cuenta los efectos de la interacción suelo-estructura para los modos impulsivos.

Es muy probable que las fallas por pandeo tipo "pata de elefante" en tanques cilíndricos ubicados en zonas epicentrales, se producen principalmente por la componente vertical de la aceleración sísmica del terreno. Por lo anterior, se han desarrollado varios trabajos sobre el comportamiento dinámico lineal de tanques cilíndricos sometidos a la componente vertical de la aceleración. Los modelos matemáticos que se han utilizado para investigar la respuesta consideran que la componente vertical excita los modos simétricos de vibrar del líquido por lo que, por la

teoría lineal, no se produce oleaje en la superficie libre (Kawano et al, 1980; Niwa y Clough, 1982; Haroun y Tayel, 1984, 1985; Guanquin, 1984; Veletsos y Kumar, 1984; Manos, 1985; Ficher y Seeber, 1988; Manos, 1989; Williams y Moubayed, 1990; Manos, 1991; Min Zhou, et al, 1992).

Los resultados de los trabajos tanto analíticos como experimentales (Clough, 1977; Manos y Clough, 1982; Z-H Jia y Ketter, 1989) concluyen que la respuesta dinámica de tanques, excitados sísmicamente, puede calcularse satisfactoriamente considerando las paredes del tanque rígidas y que la aportación principal en la respuesta es debida al modo fundamental. Suponen que no existe evidencia de que una estructura civil con las características de un tanque de almacenamiento pueda entrar en resonancia.

1.4.2 ANÁLISIS SÍSMICO NO LINEAL DE TANQUES CILÍNDRICOS

-ESTADO DEL ARTE-

Estrictamente hablando existe únicamente un trabajo relacionado con el análisis sísmico no lineal de tanques de almacenamiento, en el cual la excitación en la base del tanque puede ser una registro sísmico o una función armónica (Chen, Haroun y Liu, 1996) y está enfocado a tanques rectangulares cuya forma bidimensional y condiciones geométricas difieren sustancialmente a las de un tanque cilíndrico.

Al igual que para la solución linealizada del problema, el planteamiento dinámico no lineal se ha desarrollado tanto en forma analítica como numérica y en ocasiones por una combinación de ambas. Las soluciones analíticas existentes se basan en el Método de Perturbaciones y las numéricas, principalmente, en los métodos de Elementos de Frontera, Elementos Finitos y Diferencias Finitas, siendo en menor número los trabajos donde se aplica el Método del Elemento Finito.

La aplicación de los métodos numéricos anteriores, principalmente se ha realizado en tanques cuadrados y con una excitación horizontal en su base del tipo armónica, con pequeña amplitud y corta duración. Los registros sísmicos normalmente presentan altos niveles de excitación ($\sim 0.2g$), tienen un periodo de duración de 20 a 60

segundos o mayor y el movimiento que presentan, estrictamente, no es armónico. Los movimientos registrados en el Valle de México presentan altos periodos dominantes y gran duración.

La naturaleza del oleaje es no lineal y en ocasiones la no linealidad está gobernada por el carácter del movimiento del líquido. Abramson (1966) dividió los efectos no lineales en tres clases: (1) aquéllos que son consecuencia de la geometría del contenedor, es decir, dependen de la verticalidad de las paredes o de estructuras internas, (2) aquéllos que son consecuencia de la alta amplitud de la excitación y de la respuesta, y (3) aquéllos que involucran diferentes formas en el comportamiento del líquido producidas por el acoplamiento o inestabilidad de varios modos laterales del oleaje.

La solución analítica no lineal, basada en la teoría del potencial y en el método de perturbaciones, se ha usado para predecir la respuesta no amortiguada del fluido en la zona cercana a la frecuencia de resonancia. Se ha aplicado a tanques rectangulares y cilíndricos (Rogger y Weiss, 1963) sometidos a una excitación horizontal o rotacional del tipo armónica. En general, la teoría de Moiseev (1958) es la base de algunos estudios de oleaje no lineal. Hutton (1963) usó la teoría de Moiseev para estudiar oscilaciones forzadas con pequeña amplitud, cercana a la primera frecuencia de resonancia en un contenedor vertical. Faltisen (1974) desarrolló una teoría no lineal para un tanque rectangular con paredes rígidas, forzado a vibrar armónicamente con pequeña amplitud y con una frecuencia cercana a la de resonancia. Las teorías de Moiseev (1958) y de Hutton (1963) son presentadas por Abramson (1966), junto con la teoría de Penny y Price (1952) para oscilaciones libres no amortiguadas en un tanque rectangular con profundidad finita.

El método de Diferencias Finitas ha sido ampliamente usado para la solución del problema de oleaje no lineal. En la literatura aparecen diferentes algoritmos de solución basados en el método llamado Marcador y Celda (MAC, Marker and Cell), propuesto por Harlow y Welch (1965, 1966) en el que se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para un flujo laminar por el método de diferencias finitas. El método MAC divide el dominio computacional en celdas, en las que un sistema de marcadores de partículas de fluido son inicialmente colocadas en celdas y subsecuentemente son movidas con

velocidad local. Una celda que no tiene un marcador de partícula se considera que no tiene fluido. Harlow y Welch describen el método de MAC para un fluido incompresible en un recipiente con paredes rígidas de forma plana. Hirt, Nichols y Romero (1975) proponen una versión simplificada del método MAC con los algoritmos de SOLA (A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows) y SOLA-SURF. SOLA es una técnica de solución para flujos incompresibles, sin superficie libre, en un plano bidimensional o en coordenadas axisimétricas. SOLA-SURF es una extensión del algoritmo SOLA y permite flujos a superficie libre y recipientes con paredes curvas. Durante el periodo de 1975 a 1981 se desarrollaron varios algoritmos computacionales simplificados con el nombre genérico SOLA. En 1981, Flow Science, Inc. desarrolló una extensión tridimensional del algoritmo SOLA, el SOLA-VOF (Volumen de Fluido). SOLA-VOF es una combinación de SOLA, que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes en diferencias finitas con el Volumen de Fluido, VOF, técnica utilizada para trazar la superficie libre de fluidos. Hirt (1986) describe diferentes versiones y aplicaciones de los códigos SOLA. Tozawa y Sueoka (1989) desarrollaron el programa de simulación MSLOSH (Mitsubishi SLOSHing simulation program), en el cual se introduce un método para determinar las presiones de impacto y un sistema de coordenadas que se mueven usando el algoritmo SOLA-VOF; el método es aplicable en tanques en dos dimensiones. Tozawa y Sueoka presentan varios resultados de modelos experimentales, pero no muestran ningún resultado entre las presiones medidas y las calculadas.

Vezić y Orlandi (1996) resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes por medio de Diferencias Finitas en coordenadas cilíndricas para el problema de superficie libre en un anillo. Miyata y Nishimura (1986) utilizan el mismo procedimiento para la solución del oleaje sobre un barco. Hwang, Lee y Lee (1988) combinan el método del Volumen de Fluido (VOF) y el de Diferencias Finitas, para la solución del oleaje en un tanque rectangular. Ukeguchi, Sakata y Adachi (1980) proponen el método llamado FLIC (Fluido en Celda) en el que se combina el método de Elemento Finito con el método VOF para calcular el flujo alrededor de un cuerpo estanco.

Ikegawa (1974), Washizu y Ikegawa (1974) usan el método de Elemento Finito (MEF) para analizar el oleaje no lineal de un líquido en un contenedor rectangular

bidimensional. El contenedor es forzado a vibrar armónicamente con pequeña amplitud en dirección horizontal, el fluido se supone no viscoso e irrotacional. El dominio del fluido se discretiza en elementos triángulo. Washizu, Ikegawa y Ikegawa (1978, 1980) extienden el método de Ikegawa para tanques que oscilan angular y verticalmente.

Faltinsen (1978) desarrolló un método numérico para el cálculo del oleaje en dos dimensiones de tanque rectangulares basado en la técnica de integrales en la frontera y el método del panel. Nakayama y Washizu (1981) aplican el método de Elementos de Frontera para el análisis no lineal del oleaje en dos dimensiones de un contenedor rectangular sujeto a oscilaciones horizontales, verticales y angulares. Las fronteras se discretizan en elementos línea.

Shinkai, Yamaguchi y Fukuda (1983) combinan el método MEF, linealizando las condiciones de frontera por el método de perturbaciones, para el análisis de un tanque esférico usando coordenadas cartesianas y sometido a una excitación armónica en su base. Iseki y Nakatake (1989) aplican una combinación del MEF con un elemento "spline cúbico" para discretizar la superficie libre del fluido y el método de perturbaciones en la ecuación dinámica, a un tanque rectangular y a uno esférico en coordenadas rectangulares, excitados armónicamente. Reportan inestabilidades numéricas debido a que es necesario un remallado en la superficie para obtener la solución transitoria del problema.

Abe y Sakuraba (1993) aplican el MEF en la solución hidrodinámica de un tanque con paletas generadoras de oleaje. Kasuga, Sugino y Tosaka (1993) y Zhen-Xin (1993) utilizan una formulación Lagrangiana-Euleriana con elementos de frontera para un tanque en coordenadas cartesianas. No es muy clara la formulación en el remallado de la superficie libre del líquido y debido a la sensibilidad del intervalo de tiempo en la solución, es necesario hacer un remallado cada instante, lo cual dificulta mantener la exactitud de la solución y aumenta el esfuerzo computacional. Específicamente, para la solución del problema del remallado de la superficie, han surgido algunos trabajos (Abe, 1996; Peraire y Peiró, 1992).

El método del Panel es utilizado para simular el movimiento armónico tridimensional de un tanque esférico (Hwang, Kim, Seol, Lee y Chon, 1992). Romate (1989) simula numéricamente el oleaje no lineal en estructuras costa afuera en forma

tridimensional, usando un método del panel de orden alto. Un método similar es utilizado por Broezer (1993).

Telste (1985) y Yeung (1989) establecen el movimiento de un cuerpo flotante en un contenedor realizando un mapeo de las condiciones de frontera en la superficie libre por medio de coordenadas curvilíneas a un dominio computacional fijo. El sistema de ecuaciones se discretizan por el método de Diferencias Finitas. Este procedimiento es utilizado por Chen (Chen, Haroun y Liu, 1996) para el cálculo de la respuesta sísmica no lineal de tanques rectangulares.

Basados en el trabajo de Zakharov (1968), Luke (1967), Miles (1976, 1977, 1984 y 1985), Brooke y Olver (1982), y Bridges y Dias (1990), han resuelto el problema de estabilidad del movimiento no lineal del oleaje en tanques circulares y rectangulares por medio de Métodos Variacionales.

1.5 RESUMEN Y CONCLUSIONES

Los tanques cilíndricos para almacenar líquidos pueden construirse de concreto armado o de acero estructural. Dependiendo de su relación altura a radio, H/a , se clasifican como anchos, si $H/a \leq 0.5$ y como esbeltos cuando dicha relación es mayor. Este tipo de tanques generalmente almacenan un poco menos de su capacidad total, por lo que las presiones hidrodinámicas sobre las paredes y el fondo son prácticamente iguales a las de un recipiente en superficie libre. Los tanques cilíndricos pueden estar anclados o simplemente apoyados a la cimentación, la cual puede considerarse como flexible o rígida.

Los tanques cilíndricos se utilizan en la industria para almacenar o procesar líquidos como: petróleo y sus derivados, gasavión y turbosina, entre otros. En las zonas metropolitanas se encuentran también en un gran número de plantas de tratamiento de aguas negras y en sistemas de abastecimiento de agua potable. La falla de alguna de estas estructuras durante un temblor afectaría el abastecimiento de combustible para tráfico aéreo, causaría gran daño ecológico, desabasto de agua potable y se pondría en riesgo la vida de un gran número de personas.

Daños severos han ocurrido en tanques cilíndricos para almacenamiento de líquidos durante temblores como los de Alaska, 1964, Nigata, 1964, California, 1980, Colinga, 1983 y Northridge, 1994. Se han observado daños por pandeo en las paredes del tanque, daños en la cubierta por la magnitud del oleaje en la superficie libre del líquido, daños en soldaduras y rupturas entre la pared del tanque y el anillo base, así como levantamiento del anillo de cimentación. El sismo de Kocaeli en Turquía, 1999, produjo fallas en las conexiones de las tuberías de alimentación debidas a momentos de volteo excesivos.

Matemáticamente el problema hidrodinámico de un tanque cilíndrico se puede considerar como lineal, para un oleaje de pequeña amplitud, y no lineal cuando se presenta oleaje de gran magnitud. En varios trabajos la solución sísmica lineal del problema ha sido resuelta en forma analítica y numérica, concluyendo que la respuesta dinámica puede calcularse satisfactoriamente considerando las paredes del tanque rígidas y que la aportación principal en la respuesta es debida al modo fundamental del líquido.

Existen referencias en las que la solución no lineal del problema se ha resuelto en forma analítica por medio del método de perturbaciones y en forma numérica por medio de los métodos de Elemento Finito (MEF), Elementos de Frontera (MEF) y Diferencia Finitas (MDF). En ellos, se supone que la excitación en la base del tanque es de tipo armónica con pequeña amplitud y corta duración. Los movimientos sísmicos ocasionalmente presentan altos niveles de excitación ($> 0.2g$), tienen un periodo de duración de 20 a 60 segundos o mayor, y el movimiento que presentan, estrictamente, no es armónico.

En este trabajo se considerará el tanque cilíndrico anclado a la cimentación y que tanto las paredes como la cimentación son rígidas, esto último implica que se desprecia la interacción suelo-estructura-fluido en el análisis. El sistema se considerará excitado en su base por una aceleración sísmica o de tipo armónico.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

CAPÍTULO 2

ECUACIONES DE MOVIMIENTO

2.1 CONDICIONES GEOMÉTRICAS

En la Figura 2.1 se representa un tanque cilíndrico con paredes rígidas perfectamente anclado a la cimentación considerada como rígida. Existen tres fronteras en el dominio del líquido (Ω), las paredes y el fondo del tanque forman las fronteras F_1 y la superficie libre del líquido la F_2 . El tanque tiene radio, a , y altura media del líquido H .

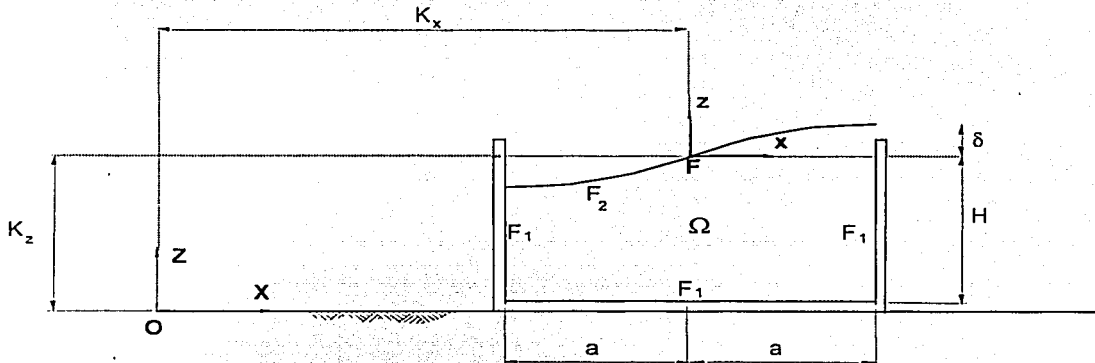


Fig. 2.1 Condiciones de frontera del tanque de almacenamiento

Se establecen dos sistemas cartesianos de referencia (Fig. 2.2). Un sistema $X-Y-Z$, con el origen en un punto fijo O y cuyo eje X es paralelo a la superficie del terreno. El otro sistema $x-y-z$, ubicado en la superficie media del líquido y en la parte central del tanque y tiene como origen el punto F .

Ambos sistemas coordenados están separados una distancia constante: K_z , K_x y K_y , en las direcciones vertical y en ambas horizontales ortogonales, respectivamente.

Suponiendo que el fluido está en equilibrio estático antes de iniciarse el movimiento sísmico, las coordenadas de posición de una partícula de fluido, P , con respecto al sistema inercial $X-Y-Z$ son:

$$X = x + K_X$$

$$Y = y + K_Y$$

$$Z = z + K_Z$$

Cuando existe un desplazamiento del terreno, $\hat{d}(t) = d_x(t)\hat{i} + d_y(t)\hat{j} + d_z(t)\hat{k}$, las nuevas coordenadas de posición de la partícula P son:

$$X = x + K_X + d_x(t)$$

$$Y = y + K_Y + d_y(t)$$

$$Z = z + K_Z + d_z(t)$$

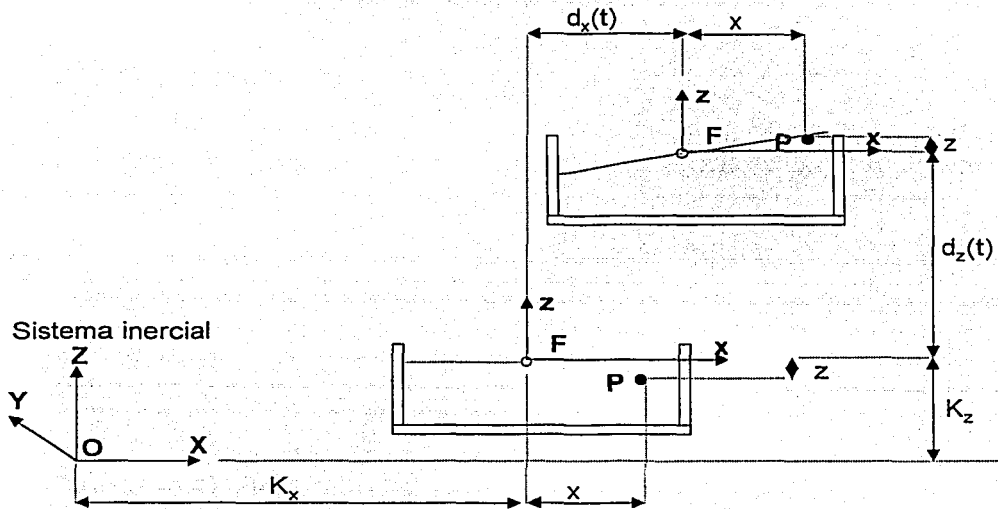


Fig. 2.2 Sistemas coordenados de referencia

Se puede observar que el eje cartesiano X-Y-Z está fijo, por lo que las coordenadas referidas a él se conocen como coordenadas absolutas o inerciales; por otro lado, el eje cartesiano x-y-z con origen en el punto F, cambia de posición durante el movimiento, por lo que las coordenadas referidas a él se conocen como coordenadas relativas o no inerciales.

2.2 ECUACIÓN DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO

La ecuación de cantidad de movimiento se obtiene igualando las fuerzas aplicadas a las fuerzas de inercia por unidad de volumen del fluido. Para un fluido ideal las fuerzas viscosas son nulas y las fuerzas aplicadas consisten únicamente a la gravedad y a la presión. La ecuación de Momentum es el resultado de aplicar la segunda ley del movimiento de Newton a un elemento infinitesimal de volumen de líquido (dX , dY , dZ) con respecto a un marco inercial:

$$\rho \frac{D\hat{V}_o}{Dt} = -\nabla P_h - \rho \nabla(gZ) \quad (2.1)$$

donde g es la aceleración de la gravedad, $\hat{V}_o = (U_o, V_o, W_o)$ es el vector de velocidad absoluta de una partícula, P , con respecto a un sistema inercial en el dominio del líquido. El término $(-\nabla P_h)$ es la presión neta estática y dinámica ejercida sobre un volumen infinitesimal de líquido y $-\nabla(gZ)$ es la fuerza de cuerpo actuando sobre el volumen de líquido debido a la gravedad. La ecuación (2.1) es aplicable a líquidos no viscosos.

La derivada total o material de \hat{V}_o , $\frac{D\hat{V}_o}{Dt}$, es la aceleración absoluta del líquido expresada con respecto a un sistema inercial (X, Y, Z) y consiste de:

$$\frac{D\hat{V}_o}{Dt} = \frac{\partial \hat{V}_o}{\partial t} + \hat{V}_o \cdot \nabla \hat{V}_o \quad (2.2)$$

donde $\frac{\partial \hat{V}_o}{\partial t}$ es la derivada local de \hat{V}_o y $\hat{V}_o \cdot \nabla \hat{V}_o$ es la derivada convectiva.

La ecuación (2.1) se puede escribir como:

$$\rho \left(\frac{\partial \hat{V}_o}{\partial t} + \hat{V}_o \cdot \nabla \hat{V}_o \right) = -\nabla P_h - \rho \nabla(gZ) \quad (2.3)$$

La ecuación de continuidad se puede expresar como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \hat{V}_o) = 0 \quad (2.4)$$

Para un fluido de densidad, ρ , constante, la ecuación de continuidad se puede escribir como:

$$\nabla \cdot \hat{V}_o = 0 \text{ en } \Omega \quad (2.5)$$

ó bien:

$$\frac{\partial U_o}{\partial X} + \frac{\partial V_o}{\partial Y} + \frac{\partial W_o}{\partial Z} = 0$$

Para un fluido irrotacional $\nabla \times \hat{V}_o = \hat{0}$, ó

$$\left(\frac{\partial W_o}{\partial Y} - \frac{\partial V_o}{\partial Z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial U_o}{\partial Z} - \frac{\partial W_o}{\partial X} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial V_o}{\partial X} - \frac{\partial U_o}{\partial Y} \right) \hat{k} = \hat{0}$$

así:

$$\frac{\partial W_o}{\partial Y} = \frac{\partial V_o}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial U_o}{\partial Z} = \frac{\partial W_o}{\partial X}$$

$$\frac{\partial V_o}{\partial X} = \frac{\partial U_o}{\partial Y}$$

(2.6)

Para un flujo irrotacional, la función de potencial de velocidad, Φ , se define con las relaciones:

$$U_o = \frac{\partial \Phi}{\partial X}$$

$$V_o = \frac{\partial \Phi}{\partial Y}$$

$$W_o = \frac{\partial \Phi}{\partial Z}$$

(2.7)

$$\text{ó bien } \hat{V}_o = \nabla \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial X} \hat{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial Y} \hat{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial Z} \hat{k}.$$

Al sustituir (2.7) en la ecuación de continuidad tenemos,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Z^2} = 0 \text{ en } \Omega$$

(2.8)

la cual se puede escribir como $\nabla^2\Phi = 0$, donde ∇^2 es el operador Laplaciano y Φ es el potencial de velocidad absoluto, en el sentido que está referido a una velocidad absoluta, \hat{V}_0 , que a su vez está referida a un sistema inercial.

La velocidad absoluta de una partícula de fluido, P, contenida en un tanque, el cual está excitado tridimensionalmente en su base por desplazamientos en X-Y-Z y por tres desplazamientos angulares, $\hat{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$, con respecto al sistema inercial (Fig. 2.3) es:

$$\hat{V}_0 = \hat{V}(t) + \hat{U} + \hat{\Omega} \times \hat{r}$$

donde $\hat{V}(t)$ es el vector de velocidad del terreno que coincide con el vector del sistema coordenado F, anclado al tanque; \hat{U} es el vector de velocidad local de una partícula de fluido, P, con respecto al sistema coordenado F; $\hat{\Omega} \times \hat{r}$ es la velocidad de P que origina la rotación del sistema libre y \hat{r} es el vector de posición de P con respecto al sistema F. Las ecuaciones de movimiento considerando una excitación tridimensional en la base del tanque, con componentes ortogonales, y considerando que la base del tanque gira alrededor de los mismos ejes cartesianos, se desarrollan en el Apéndice E.

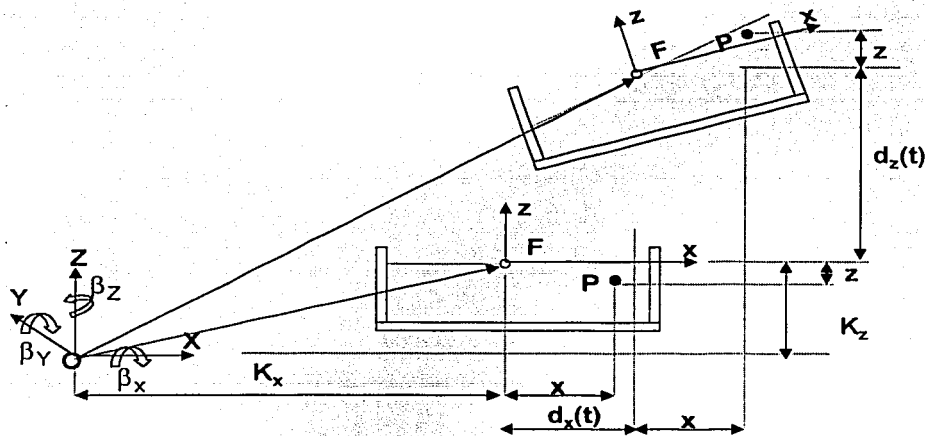


Fig. 2.3 Relación de los ejes de referencia durante el movimiento

2.3 CONDICIONES DE FRONTERA EN LAS ZONAS RÍGIDAS, F1

Las fronteras del tanque están formadas por las paredes rígidas y el fondo del tanque, por lo que se considera que no existe flujo del fluido a través de ellas.

Se supone que el fluido se puede mover libremente entre las fronteras por lo que el componente perpendicular de la velocidad del líquido en las fronteras debe de ser igual a:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \hat{V}_o \cdot \hat{n} \quad (2.9)$$

donde \hat{n} es el vector unitario normal, positivo hacia fuera de la zona húmeda de la pared y del fondo del tanque.

Una partícula de fluido que está en contacto con la frontera rígida del tanque, se mueve tangencialmente a ella por lo que: $\hat{U} \cdot \hat{n} = 0$.

La condición (2.9) se convierte en,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = [\hat{V}(t) + \hat{\Omega} \times \hat{r}] \cdot \hat{n} \quad (2.10)$$

Si la velocidad angular es cero, entonces la condición en las fronteras es,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \hat{V}(t) \cdot \hat{n}$$

que se puede escribir para las paredes,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = V_x(t) \text{ en } X = \pm a + K_x + d_x(t) \quad (2.11a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y} = V_y(t) \text{ en } X = \pm a + K_y + d_y(t) \quad (2.11b)$$

Para el fondo del tanque,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Z} = V_z(t) \text{ en } Z = -H + K_z + d_z(t) \quad (2.12)$$

donde $\hat{V}(t) = V_x(t)\hat{i} + V_y(t)\hat{j} + V_z(t)\hat{k}$ es el vector de velocidad del terreno.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2.4 CONDICIÓN CINEMÁTICA EN LA SUPERFICIE LIBRE DEL LÍQUIDO, F2

Para que una partícula de fluido que está en la superficie libre del líquido permanezca en ella, desde un punto de vista inercial, se debe cumplir que

$$\frac{D(Z-\delta)}{Dt} = 0 \text{ en } \Omega \quad (2.13)$$

donde la altura de ola es $\delta(X,Y,t)$ y Z es referida a un sistema inercial. La ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{\partial(Z-\delta)}{\partial t} + \hat{V}_o \cdot \nabla(Z-\delta) = 0$$

desarrollando,

$$-\frac{\partial\delta}{\partial t} - U_o \frac{\partial\delta}{\partial X} - V_o \frac{\partial\delta}{\partial Y} + W_o = 0$$

En términos de la función de potencial de velocidad absoluta, Φ :

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial X} \frac{\partial\delta}{\partial X} + \frac{\partial\Phi}{\partial Y} \frac{\partial\delta}{\partial Y} \right] - \frac{\partial\Phi}{\partial Z} = 0 \quad (2.14)$$

La condición cinemática es la responsable de la propagación del oleaje en la superficie libre del líquido. La velocidad de propagación de ola es $\frac{\partial\Phi}{\partial X}$ en dirección X y su signo determina la dirección de propagación.

2.5 ECUACIÓN DE BERNOULLI EN EL DOMINIO, Ω

La ecuación Euler (2.3) del movimiento de una partícula de fluido es válida en todo el dominio del líquido; esta ecuación se puede escribir

$$\rho \left(\frac{\partial U_o}{\partial t} + U_o \frac{\partial U_o}{\partial X} + V_o \frac{\partial U_o}{\partial Y} + W_o \frac{\partial U_o}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial P_h}{\partial X} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial X}$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_o}{\partial t} + U_o \frac{\partial V_o}{\partial X} + V_o \frac{\partial V_o}{\partial Y} + W_o \frac{\partial V_o}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial P_h}{\partial Y} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial Y}$$

$$\rho \left(\frac{\partial W_o}{\partial t} + U_o \frac{\partial W_o}{\partial X} + V_o \frac{\partial W_o}{\partial Y} + W_o \frac{\partial W_o}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial P_h}{\partial Z} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial Z}$$

Las ecuaciones anteriores se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial U_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\hat{V}_o^2}{2} \right) \right) &= -\frac{\partial P_h}{\partial X} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial X} \\ \rho \left(\frac{\partial V_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\frac{\hat{V}_o^2}{2} \right) \right) &= -\frac{\partial P_h}{\partial Y} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial Y} \\ \rho \left(\frac{\partial W_o}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\frac{\hat{V}_o^2}{2} \right) \right) &= -\frac{\partial P_h}{\partial Z} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial Z} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dado que:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial X} = U_o, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Y} = V_o, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial Z} = W_o, \quad \text{y además } \nabla \Phi = \hat{V}_o$$

el término de inercia convectiva es:

$$\frac{1}{2} (\hat{V}_o^2) = \frac{1}{2} [U_o^2 + V_o^2 + W_o^2] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial X} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Z} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2$$

Las ecuaciones (2.15) se pueden escribir,

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial}{\partial X} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] &= -\frac{\partial P_h}{\partial X} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial X} \\ \rho \frac{\partial}{\partial Y} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] &= -\frac{\partial P_h}{\partial Y} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial Y} \\ \rho \frac{\partial}{\partial Z} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] &= -\frac{\partial P_h}{\partial Z} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial Z} \end{aligned}$$

en forma compacta,

$$\nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla P_h - \nabla(gZ)$$

integrando esta ecuación tenemos,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 = -\frac{1}{\rho} P_h - gZ + f(t) \quad (2.17)$$

La ecuación anterior es la ecuación de Bernoulli, válida para cualquier punto en el fluido y en cualquier dirección.

2.6 CONDICIÓN DINÁMICA EN LA SUPERFICIE LIBRE DEL LÍQUIDO

Para una partícula en la superficie libre del líquido, la presión P_h se puede tomar igual a la atmosférica, entonces se puede establecer que $P_h=0$. Así, la condición dinámica en la superficie libre se obtiene de aplicar Bernoulli (2.17) con $P_h=0$,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + gZ = 0 \text{ en } Z = \delta + K_z + d_z(t) \quad (2.18)$$

2.7 RESUMEN DE ECUACIONES REFERIDAS AL SISTEMA INERCIAL

La ecuación de movimiento del sistema es:

$$\nabla^2\Phi = 0 \text{ en } \Omega \quad (2.19.1)$$

En resumen, las condiciones de frontera para el problema dinámico referidas a un sistema de referencia inercial son:

En las fronteras rígidas:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = [\hat{V}(t) + \hat{\Omega} \times \hat{r}] \cdot \hat{n}$$

si la velocidad angular es cero, podemos escribir:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X} = V_x(t) \text{ en } X = \pm a + K_x + d_x(t) \quad (2.19.2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = V_y(t) \text{ en } Y = \pm a + K_y + d_y(t) \quad (2.19.3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Z} = V_z(t) \text{ en } Z = -H + K_z + d_z(t) \quad (2.19.4)$$

Condición cinemática:

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial X} \frac{\partial\delta}{\partial X} + \frac{\partial\Phi}{\partial Y} \frac{\partial\delta}{\partial Y} - \frac{\partial\Phi}{\partial Z} \right] = 0 \text{ en } Z = \delta + K_z + d_z(t) \quad (2.19.5)$$

Condición dinámica:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + gZ = 0 \text{ en } Z = \delta + K_z + d_z(t) \quad (2.19.6)$$

Estas condiciones de frontera están expresadas en términos de las coordenadas X-Y-Z del sistema inercial. Una característica de ellas es que el dominio del líquido cambia con el tiempo, es decir, la geometría que define la frontera derecha del líquido es:

$$X = a + K_x + d_x(t)$$

como el movimiento del terreno es función del tiempo, la frontera derecha varía desde un punto de vista del sistema inercial. Lo anterior también sucede con las otras fronteras. El vector de velocidad del terreno es: $\hat{V}(t) = V_x(t)\hat{i} + V_y(t)\hat{j} + V_z(t)\hat{k}$.

La velocidad absoluta, $\hat{V}_o(X, Y, Z, t)$ de una partícula, P, de fluido estrictamente es:

$$\hat{V}_o(X, Y, Z, t) = \hat{V}(t) + \hat{U} + \hat{\Omega} \times \hat{r} \quad (2.19.7)$$

donde \hat{U} es el vector de velocidad de una partícula de líquido relativa al sistema no inercial, F, y \hat{r} es el vector de posición de una partícula de fluido con respecto al sistema no inercial.

2.8 CONDICIONES DE FRONTERA EN UN SISTEMA NO INERCIAL

En el comportamiento sísmico de tanque de almacenamiento, la velocidad que interesa conocer es la de una partícula de fluido con respecto a la velocidad que tendría el terreno en un cierto instante.

En la Figura 2.3 se ve que el sistema coordenado x-y-z con origen en F, se mueve con una velocidad igual a la del terreno, $\hat{V}(t)$, lo mismo que las fronteras rígidas del tanque, ambas relacionadas al sistema inercial X-Y-Z. Es conveniente reemplazar X-Y-Z por las coordenadas x-y-z como variables independientes del problema. De las siguientes relaciones entre las coordenadas inerciales y no inerciales,

$$\begin{aligned} X &= x + K_x + d_x(t) \\ Y &= y + K_y + d_y(t) \\ Z &= z + K_z + d_z(t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Por tanto,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Y} = \frac{\partial\Phi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial Z} = \frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Sustituyendo las relaciones anteriores en las condiciones de frontera (2.19.1 a 2.19.6), se pueden obtener las nuevas condiciones de frontera.

2.8.1 CONDICIONES DE FRONTERA EN LAS ZONAS RÍGIDAS, F1

Como $\frac{\partial\Phi}{\partial X} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}$ entonces,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = V_x(t) \text{ en } x = \pm a \quad (2.21)$$

La anterior ecuación establece que en las paredes del tanque, la velocidad de una partícula, P, de fluido en dirección x debe de ser igual a la velocidad de las paredes que se mueven igual que el terreno; es decir, la velocidad relativa ente la partícula P y la velocidad de las paredes del tanque debe ser cero.

Para el fondo del tanque, la velocidad relativa de una partícula de fluido en dirección vertical es:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = V_z(t) \text{ en } z = -H \quad (2.22)$$

2.8.2 CONDICIÓN CINEMÁTICA EN LA SUPERFICIE LIBRE DEL LÍQUIDO, F2

De la expresión (2.19.7), si la velocidad angular es cero, entonces la velocidad absoluta es:

$$\hat{V}_o(X, Y, Z, t) = \hat{V}(t) + \hat{U}$$

Si el sistema no inercial no se mueve, $\hat{V}(t) = 0$. Entonces para cada dirección se tiene,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial X} &= \frac{\partial\Phi}{\partial x} - V_x(t) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial Y} &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} - V_y(t) \\ \frac{\partial\Phi}{\partial Z} &= \frac{\partial\Phi}{\partial z} - V_z(t)\end{aligned}\quad (2.23)$$

Sustituyendo en la condición (2.195),

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} - V_x(t) \right] \frac{\partial\delta}{\partial x} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y} - V_y(t) \right] \frac{\partial\delta}{\partial y} - \left[\frac{\partial\Phi}{\partial z} - V_z(t) \right] = 0 \text{ en } z=\delta \quad (2.24)$$

2.8.3 CONDICIÓN DINÁMICA EN LA SUPERFICIE LIBRE DEL LÍQUIDO, F2

La derivada con respecto al tiempo en un sistema inercial se puede transformar en el sistema no inercial por medio de:

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} [\bullet] \right|_{x,y,z,t} = \left[\frac{\partial}{\partial t} [\bullet] - \hat{V}(t) \cdot \nabla [\bullet] \right]_{x,y,z,t}$$

donde $[\bullet]_{x,y,z,t}$ y $[\bullet]_{x,y,z}$ significa que la función en el paréntesis es evaluada en los sistemas X-Y-Z y x-y-z, respectivamente. Entonces:

$$\left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right|_{x,y,z} = \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \hat{V}(t) \cdot \nabla\Phi \Big|_{x,y,z}$$

sustituyendo en la condición de frontera (2.19.6) en la superficie libre del líquido,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \hat{V}(t) \cdot \nabla\Phi - g\delta = 0 \text{ en } z=\delta \quad (2.25)$$

2.9 RESUMEN DE ECUACIONES REFERIDAS AL SISTEMA NO INERCIAL

La ecuación de movimiento referida a un sistema no inercial es:

$$\nabla^2\Phi = 0 \text{ en } \Omega \quad (2.26.1)$$

Las condiciones de frontera referidas al sistema no inercial son:
en las fronteras:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = V_x(t) \text{ en } x = \pm a \quad (2.26.2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = V_y(t) \text{ en } y = \pm a \quad (2.26.3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = V_z(t) \text{ en } z = -H \quad (2.26.4)$$

Condición cinemática:

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} - V_x(t) \right] \frac{\partial\delta}{\partial x} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial y} - V_y(t) \right] \frac{\partial\delta}{\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} + V_z(t) = 0 \text{ en } z = \delta \quad (2.26.5)$$

Condición dinámica:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 - \hat{V}(t) \cdot \nabla\Phi - g\delta = 0 \text{ en } z = -H \quad (2.26.6)$$

donde $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$, $\delta = \delta(x, y, z, t)$ y $\hat{V}(t)$ en el vector de velocidad del terreno, definido como:

$$\hat{V}(t) = V_x(t)\hat{i} + V_y(t)\hat{j} + V_z(t)\hat{k}$$

El término $\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x} - V_x(t) \right]$ en la condición cinemática, significa que la ola se propaga a una velocidad relativa del líquido con respecto a la velocidad de las paredes o del terreno.

Se puede observar que el problema dinámico con condiciones de frontera anterior está excitado por la velocidad del terreno, sin embargo, los registros sísmicos se obtienen en forma discretizada de la aceleración del terreno, por lo que para la

solución del problema usando estas ecuaciones se deben obtener las velocidades del terreno de los registros sísmicos por medio de integración numérica.

2.10 CONDICIONES DE FRONTERA EN UN SISTEMA NO INERCIAL, POTENCIAL RELATIVO, φ

El potencial de velocidad absoluta, $\Phi(x, y, z, t)$, con respecto a un sistema no inercial se puede considerar formado por un potencial de velocidad relativo, $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ y la parte correspondiente al movimiento del sistema no inercial, es decir del terreno. Por lo que,

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t) + \hat{V}(t) \cdot \hat{r} \quad (2.27)$$

donde $\hat{r}(x, y, z)$ es el vector de posición de una partícula de fluido, P, con respecto al sistema no inercial.

Si consideramos el desplazamiento angular igual a cero, la velocidad absoluta es,

$$\hat{V}_o = \hat{U} + \hat{V}(t)$$

2.10.2.1 CONDICIONES DE FRONTERA EN LAS ZONAS RÍGIDAS, F1

Para una partícula de fluido con vector de posición $r = x$, y considerando que existe únicamente movimiento del terreno en dirección horizontal, la ecuación (2.27) es

$$\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t) + x \cdot V_x(t)$$

derivándola con respecto a x ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V_x(t) \quad (2.28)$$

Igualando la expresión (2.28) con (2.26.2)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \text{ en } x = \pm a \quad (2.29)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al anterior, tenemos que para el fondo del tanque,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ en } z=-H \quad (2.30)$$

2.10.2.2 CONDICIÓN CINEMÁTICA EN LA SUPERFICIE LIBRE DEL LÍQUIDO, F2

Como $\Phi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z, t) + \hat{r} \cdot \hat{V}(t)$ realizando las derivadas,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V_x(t)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + V_y(t)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + V_z(t)$$

y sustituyéndolas en la expresión (2.26.5) que representa la condición cinemática en la superficie libre del líquido,

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \delta}{\partial y} \right] - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = 0 \text{ en } z=\delta \quad (2.31)$$

2.10.2.3 CONDICIÓN DINÁMICA EN LA SUPERFICIE LIBRE DEL LÍQUIDO, F2

Derivando la ecuación (2.31) con respecto a t,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \hat{r} \cdot \hat{a}(t) \quad (2.32)$$

donde $\hat{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k}$ es el vector de aceleraciones del terreno. Como, $\hat{V}_o = \hat{U} + \hat{V}(t)$, es decir,

$$\nabla\Phi = \nabla\varphi + \hat{V}(t) \quad (2.33)$$

Con la ecuación anterior, podemos calcular los productos,

$$\frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \nabla\varphi \cdot \hat{V}(t) + \frac{1}{2}\hat{V}(t)^2 \quad (2.34)$$

$$\hat{V}(t) \cdot \nabla\Phi = \hat{V}(t) \cdot \nabla\varphi + \hat{V}(t)^2 \quad (2.35)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.32), (2.34) y (2.35) en la (2.26.6), tenemos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + g\delta - \frac{1}{2}[\hat{V}(t)]^2 + \hat{r} \cdot \hat{a}(t) = 0 \text{ en } z=\delta \quad (2.36)$$

2.11 RESUMEN DE ECUACIONES REFERIDAS AL SISTEMA NO INERCIAL, POTENCIAL RELATIVO φ

La ecuación de movimiento con respecto a un sistema no inercial es:

$$\nabla^2\varphi = 0 \text{ en } \Omega \quad (2.37.1)$$

Las condiciones de frontera para el problema dinámico con respecto a un sistema no inercial son:

En las fronteras:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \text{ en } x = \pm a \quad (2.37.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \text{ en } y = \pm a \quad (2.37.3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = -H \quad (2.37.4)$$

Condición cinemática:

$$\frac{\partial\delta}{\partial t} + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\delta}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\delta}{\partial y} \right] - \left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right] = 0 \text{ en } z=\delta \quad (2.37.5)$$

Condición dinámica:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + g\delta + \hat{r} \cdot \hat{a}(t) = 0 \text{ en } z=\delta \quad (2.37.6)$$

donde $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ es el potencial de velocidad relativo, \hat{r} es el vector de posición de una partícula de fluido, P, con respecto al sistema no inercial. El vector de aceleración del terreno es: $\hat{a}(t) = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k}$.

Se puede observar que las condiciones de frontera son homogéneas en las paredes y en el fondo del tanque. La excitación del sistema se da en términos de la aceleración del terreno en la condición dinámica de la superficie libre del líquido.

2.11 EFECTO DEL AMORTIGUAMIENTO

Considerando la teoría de oleaje pequeño, el movimiento del fluido es esencialmente irrotacional excepto cerca de las fronteras sólidas del tanque (Mei y Liu, 1973). La teoría del potencial descrita no predice disipación de energía. Sin embargo, resultados experimentales en tanques para almacenamiento, con superficie libre, muestran claramente que existe un comportamiento amortiguado en la respuesta del líquido (Case y Parkinson, 1957); hay disipación de energía relacionada con el amortiguamiento en el movimiento del fluido. La disipación de energía se produce en la capa límite cerca de las paredes y el fondo del tanque, y en la capa límite cerca de la superficie libre del líquido, formándose un menisco entre el líquido y la pared. La cantidad de energía disipada depende de la forma del tanque, de la rugosidad de las paredes y de la viscosidad del líquido.

En pruebas experimentales de tanques rectangulares llenos con agua, se han medido decrementos logarítmicos equivalentes a coeficientes de amortiguamiento crítico del orden de $\xi=0.35\%$ (Keulegan, 1958). En pruebas de vibración ambiental de tanques cilíndricos se ha tomado un valor de 0.5% para el modo fundamental de vibrar del líquido (Housner y Haroun, 1980; 1983). Si el tanque está fijo a la base se recomienda un factor de amortiguamiento del sistema tanque-líquido del $\xi=2\%$, en su

modo fundamental (Veletsos y Shivakumar, 1997) y de $\xi=0.5\%$ en el caso de líquidos estratificados (Veletsos y Shivakumar, 1993). Los códigos para el diseño de tanques cilíndricos de almacenamiento proponen un valor de $\xi=0.5\%$ para el modo fundamental de vibrar del líquido. En el análisis de estabilidad del movimiento del líquido bajo rotación y traslación del tanque, se ha propuesto como condición más desfavorable considerar que el amortiguamiento es nulo (Rogge y Weiss, 1966).

Para simular el efecto del amortiguamiento viscoso en la teoría del potencial para tanques cuadrados, Faltinsen (1978) introdujo un término ficticio para la viscosidad en la ecuación de movimiento y propuso un coeficiente de amortiguamiento crítico del 5% para el primer modo de vibrar del líquido.

Con el fin de tomar en cuenta el efecto de disipación de energía se ha incluido un término numérico en la ecuación de movimiento de manera análoga al caso de la ecuación de movimiento de un oscilador con amortiguamiento viscoso (Housner y Haroun, 1980; 1983; Veletsos y Shivakumar, 1993).

En el problema no lineal del oleaje de tanques es posible que los efectos viscosos sean importantes. Con el fin de establecer el sistema de ecuaciones que gobiernan el comportamiento no lineal del oleaje, en un tanque cilíndrico excitado sísmicamente y considerando un potencial de velocidad, se modificará la ecuación de Euler agregándole un término ficticio, μ , que represente una fuerza de oposición al movimiento de una partícula de fluido. Mediante este planteamiento el término que representa el amortiguamiento tiene un significado físico.

2.11.1 ECUACIONES BÁSICAS PARA UN FLUJO IDEAL

Suponiendo que el fluido contenido en el tanque cilíndrico es ideal e irrotacional, las ecuaciones de Euler, referidas a un sistema inercial, se pueden escribir

$$\rho \left(\frac{\partial U_o}{\partial t} + U_o \frac{\partial U_o}{\partial X} + V_o \frac{\partial U_o}{\partial Y} + W_o \frac{\partial U_o}{\partial Z} \right) = - \frac{\partial P_h}{\partial X} - \frac{\partial (\rho g Z)}{\partial X}$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_o}{\partial t} + U_o \frac{\partial V_o}{\partial X} + V_o \frac{\partial V_o}{\partial Y} + W_o \frac{\partial V_o}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial P_h}{\partial Y} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial Y}$$

$$\rho \left(\frac{\partial W_o}{\partial t} + U_o \frac{\partial W_o}{\partial X} + V_o \frac{\partial W_o}{\partial Y} + W_o \frac{\partial W_o}{\partial Z} \right) = -\frac{\partial P_h}{\partial Z} - \frac{\partial(\rho g Z)}{\partial Z} \quad (2.38)$$

donde el vector velocidad es $\hat{V}_o = U_o i + V_o j + W_o k$, P_h es la presión, ρ es la densidad del fluido y g es la aceleración de la gravedad.

Las ecuaciones anteriores se pueden escribir como,

$$\rho \frac{D\hat{V}_o}{Dt} = -\nabla P_h - \rho \nabla \Pi \quad (2.39)$$

donde las fuerzas debidas a la gravedad se pueden escribir como el gradiente de la función potencial, Π , i.e.

$$-\nabla \Pi = -\left[\frac{\partial(gZ)}{\partial X} + \frac{\partial(gZ)}{\partial Y} + \frac{\partial(gZ)}{\partial Z} \right] = -g \quad (2.40)$$

ya la derivada material de la velocidad absoluta está definida como,

$$\frac{D\hat{V}_o}{Dt} = \frac{\partial \hat{V}_o}{\partial t} + \hat{V}_o \cdot \nabla \hat{V}_o \quad (2.41)$$

Es decir la ecuación (2.39) se puede escribir

$$\frac{\partial \hat{V}_o}{\partial t} + \hat{V}_o \cdot \nabla \hat{V}_o = -\frac{1}{\rho} \nabla P_h - \nabla \Pi \quad (2.42)$$

Sí el flujo es irrotacional, $\nabla \cdot \hat{V}_o = 0$, y sí se acepta la existencia de potencial de velocidad absoluto, Φ ,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{1}{\rho} P_h + gZ = 0 \quad (2.43)$$

Aplicando la ecuación anterior en la superficie libre del líquido y suponiendo la presión atmosférica constante, es decir $P_h=0$, la condición dinámica en la superficie libre se puede escribir,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + g\delta = 0 \quad \text{en } Z = \delta + K_z + d_z(t) \quad (2.44)$$

donde δ es la altura de ola, $d_z(t)$ es el desplazamiento del terreno referido a un sistema inercial y K_z es la distancia vertical entre los orígenes de los sistemas inerciales y no

inerciales. La ecuación (2.44) es la misma que la (2.19.6) y en la que no aparece ningún término que represente el amortiguamiento del líquido.

2.11.2 ECUACIONES BÁSICAS PARA UN FLUJO VISCOSO

La condición dinámica completa, en la superficie libre del líquido, se obtiene tomando en cuenta las fuerzas de fricción debidas a la viscosidad del fluido en las ecuaciones de Euler, obteniéndose las ecuaciones de Navier-Stokes.

Los esfuerzos cortantes en el líquido se presentan debido a la viscosidad del fluido y son causados por la transferencia de fuerzas moleculares (Le Méhauté, 1976). Las fuerzas de fricción se suponen proporcionales a la relación entre el coeficiente de viscosidad y la deformación angular.

$$\rho \left(\frac{\partial U_o}{\partial t} + U_o \frac{\partial U_o}{\partial X} + V_o \frac{\partial U_o}{\partial Y} + W_o \frac{\partial U_o}{\partial Z} \right) = - \frac{\partial P_h}{\partial X} - \frac{\partial (\rho g Z)}{\partial X} + \mu \left[\frac{\partial^2 U_o}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U_o}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 U_o}{\partial Z^2} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_o}{\partial t} + U_o \frac{\partial V_o}{\partial X} + V_o \frac{\partial V_o}{\partial Y} + W_o \frac{\partial V_o}{\partial Z} \right) = - \frac{\partial P_h}{\partial Y} - \frac{\partial (\rho g Z)}{\partial Y} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_o}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V_o}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 V_o}{\partial Z^2} \right]$$

$$\rho \left(\frac{\partial W_o}{\partial t} + U_o \frac{\partial W_o}{\partial X} + V_o \frac{\partial W_o}{\partial Y} + W_o \frac{\partial W_o}{\partial Z} \right) = - \frac{\partial P_h}{\partial Z} - \frac{\partial (\rho g Z)}{\partial Z} + \mu \left[\frac{\partial^2 W_o}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 W_o}{\partial Z^2} \right]$$

Estas ecuaciones se pueden escribir como:

$$\frac{D\hat{V}_o}{Dt} = - \frac{1}{\rho} \nabla P_h - \nabla \Pi + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \hat{V}_o \quad (2.45)$$

donde $\frac{\mu}{\rho}$ es la viscosidad cinemática del líquido, o bien

$$\frac{\partial \hat{V}_o}{\partial t} + \hat{V}_o \cdot \nabla \hat{V}_o = - \frac{1}{\rho} \nabla P_h - \nabla \Pi + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \hat{V}_o \quad (2.46)$$

2.11.3 ECUACIONES BÁSICAS PARA UN FLUJO CON AMORTIGUAMIENTO TIPO RAYLEIGH

Faltinsen, en el estudio de la respuesta de tanques cuadrados (1978), retoma el concepto sugerido por Rayleigh para tomar en cuenta el amortiguamiento en un sistema mecánico, y propone modificar la ecuación de Euler agregándole un término ficticio, μ , que representa una fuerza de oposición al movimiento de una partícula de fluido.

Con base en lo anterior la ecuación (2.39) se modifica a,

$$\frac{D\hat{V}_o}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P_h - \nabla \Pi - \mu \nabla \Phi \quad (2.47)$$

donde Φ es el potencial de velocidad referido a un sistema absoluto y μ es un coeficiente que trata de representar la viscosidad del fluido.

El coeficiente de amortiguamiento, μ , se supone con un valor pequeño, mucho más pequeño que el amortiguamiento crítico, $\mu_{crit} = 2\omega_1$, donde ω_1 es la frecuencia fundamental de vibrar del líquido. El coeficiente de amortiguamiento puede escribirse como:

$$\mu = 2 \frac{\sigma}{T_1}$$

donde σ es el decremento logarítmico, y T_1 es el periodo fundamental del oleaje.

El decremento logarítmico fue definido por Abramson (1966) como,

$$\sigma = \ln \frac{\text{máxima amplitud en cualquier oscilación}}{\text{máxima amplitud un ciclo después}}$$

De las dos últimas ecuaciones, la amplitud después de n periodos de oscilación se puede determinar con,

$$a_n = \left[\frac{1}{e^{\sigma}} \right]^n a_o$$

donde a_o es la amplitud inicial (en cualquier oscilación) y a_n es la amplitud n oscilaciones después.

Keulegan (1958) estudió el decremento logarítmico para oscilaciones libres en tanques rectangulares. En el análisis matemático supone que la atenuación de las olas

es debido a la pérdida de viscosidad en una capa cerca de la frontera de las paredes del tanque.

Para un tanque rectangular de 1.0 m de ancho, altura de 0.5 m y longitud de 0.10 m, lleno con agua (viscosidad cinemática 10^{-6} m²/s), sus fórmulas predicen un decremento logarítmico total de $\sigma = 0.0212$, lo que corresponde a un coeficiente de amortiguamiento $\mu = 0.0359$, es decir 0.34% del amortiguamiento crítico. Faltinsen (1978) propone un valor de $\mu = 5\%$ del amortiguamiento crítico.

Considerando la existencia de un potencial de velocidad absoluto, Φ , la ecuación (2.60) se puede escribir,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 = -\frac{1}{\rho} P_h - gZ - \mu \Phi \quad (2.48)$$

que es la ecuación de Bernoulli.

La condición dinámica en la superficie libre del líquido se obtiene aplicando Bernoulli con la presión atmosférica considerada como constante. La ecuación (2.61) está referida a un sistema inercial, X-Y-Z, por lo que para transformarla a un sistema no inercial, x-y-z se usa la relación:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\cdot)_{xyz} = \left[\frac{\partial}{\partial t} (\cdot) - \hat{V}(t) \cdot \nabla (\cdot) \right]_{xyz} \quad (2.49)$$

donde $\hat{V}(t)$ es la velocidad con que se mueve el sistema con respecto al fijo, que en este caso es la velocidad del terreno.

Aplicando la expresión (2.49) al potencial de velocidad, Φ , evaluada en $z = \delta$ y sustituyendo en (2.48) con una presión igual a cero, se tiene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \hat{V}(t) \cdot \nabla \Phi + g\delta + \mu \Phi = 0 \quad (2.50)$$

como $\Phi = \phi + r\hat{V}(t)$, sustituyendo en la ecuación (2.50), tenemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + r\hat{a}(t) + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \nabla \phi \cdot \hat{V}(t) + \frac{1}{2} [\hat{V}(t)]^2 - \hat{V}(t) \cdot \nabla \phi - [\hat{V}(t)]^2 + g\delta + \mu \phi + \mu r\hat{V}(t) = 0$$

El vector de posición en coordenada cartesianas es: $r = x$, considerando que existe únicamente movimiento del terreno en la dirección x , y despreciando el término $-\frac{1}{2}[\dot{V}(t)]^2$, se tiene para la condición dinámica en la superficie libre del líquido,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 + \mu \phi + g\delta + x[a_x(t) + \mu v_x(t)] = 0 \quad (2.51)$$

donde μ es el coeficiente que representa al amortiguamiento tipo Rayleigh, $a_x(t)$ y $v_x(t)$ son la aceleración y velocidad del terreno en la dirección x .

Despreciando los términos de orden superior en las ecuaciones en la frontera libre del líquido, tenemos para la condición cinemática

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \delta}{\partial t} \text{ en } z = \delta \quad (2.52)$$

y de la condición dinámica (2.51), despejando la altura de ola, δ ,

$$\delta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu \phi + x[a_x(t) + \mu v_x(t)] \right] \quad (2.53)$$

Como se puede ver en la ecuación anterior, el coeficiente de amortiguamiento μ afecta la velocidad del terreno, $v_x(t)$, amortiguándola.

2.11.4 ECUACIONES BÁSICAS PARA UN FLUJO PSEUDO-VISCOSO

La expresión original propuesta por Faltinsen, para tomar en cuenta el amortiguamiento del líquido en un tanque cuadrado es,

$$\frac{D\dot{V}_o}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P_h - \nabla \Pi - \mu \nabla \Phi \quad (2.54)$$

donde Φ es el potencial de velocidad referido a un sistema inercial y μ es un coeficiente que trata de simular el amortiguamiento tipo Rayleigh.

Para que la velocidad relativa del líquido contenido en el tanque sea la amortiguada, la ecuación (2.54) se modifica como:

$$\frac{D\hat{V}_o}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P_h - \nabla \Pi - \mu \nabla \varphi \quad (2.55)$$

que se puede escribir,

$$\nabla \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla P_h - \nabla \Pi - \mu \nabla \varphi \quad (2.56)$$

integrando la ecuación anterior,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 = -\frac{1}{\rho} P_h - gZ - \mu \varphi \quad (2.57)$$

donde $\varphi(x, y, z, t)$ es el potencial de velocidad relativa.

La ecuación (2.57) está referida a un sistema inercial, X-Y-Z, por lo que para transformarla a un sistema no inercial, x-y-z, se aplica la expresión (2.13) al potencial de velocidad, Φ . Evaluando (2.49) en $z = \delta$ y con una presión igual a cero, se tiene:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 - \hat{V}(t) \cdot \nabla \Phi + g\delta + \mu \varphi = 0 \quad (2.58)$$

como $\Phi = \varphi + r\hat{V}(t)$, tenemos,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + r\hat{a}(t) + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \nabla \varphi \cdot \hat{V}(t) + \frac{1}{2} [\hat{V}(t)]^2 - \hat{V}(t) \cdot \nabla \Phi - [\hat{V}(t)]^2 + g\delta + \mu \varphi = 0$$

El vector de posición en coordenada cartesianas es: $r = x$, considerando que únicamente existe movimiento del terreno en la dirección x, la condición dinámica linealizada en la superficie libre del líquido,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \mu \varphi + g\delta + x[a_x(t)] = 0 \quad (2.59)$$

La ecuación (2.59) es la condición dinámica amortiguada en la superficie libre del líquido, que se utilizará para la solución linealizada del sistema de ecuaciones de frontera que gobiernan el comportamiento dinámico del sistema.

2.12 RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se dedujo el sistema de ecuaciones de frontera que gobiernan el comportamiento dinámico de un tanque cilíndrico excitado en su base por una aceleración del tipo sísmica o armónica. La ecuación de movimiento puede considerarse una excitación tridimensional en la base del tanque, con componentes ortogonales, y que la base del tanque gira alrededor de los mismos ejes cartesianos (Apéndice E).

Se consideran tres fronteras en el dominio del líquido. Las paredes y el fondo del tanque forman las fronteras rígidas y la superficie libre del líquido forma la frontera superior en donde son válidas la condición cinemática y la dinámica. La condición cinemática establece que una partícula de fluido que está en dicha superficie permanezca en ella. La condición dinámica gobierna el comportamiento transitorio del problema y se obtiene de aplicar la ecuación de Bernoulli en la superficie libre.

El sistema de ecuaciones de frontera se definió desde tres sistemas coordinados de referencia:

1. Sistema de referencia inercial, cuyo origen no se mueve durante el movimiento. El sistema de ecuaciones es función de un potencial de velocidad absoluto.
2. Sistema de referencia no inercial, cuyo origen se mueve con la misma velocidad del terreno. La excitación del sistema dinámico es función de la velocidad del terreno.
3. Sistema de referencia no inercial en función de un potencial de velocidades relativo. Las condiciones de frontera en las zonas rígidas son homogéneas y la excitación del sistema está en términos de la aceleración del terreno. Lo anterior le da ventajas a este sistema de referencia con respecto a los dos primeros.

El sistema de ecuaciones de frontera utilizado en este trabajo es el deducido bajo un sistema de referencia no inercial en función de un potencial de velocidad relativo, agregándole a la ecuación dinámica en la superficie libre del líquido un término μ que representa el amortiguamiento pseudo-viscoso del fluido.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

CAPÍTULO 3

SOLUCIÓN ANALÍTICA LINEAL

3.1 CONDICIONES DE FRONTERA EN COORDENADAS CILÍNDRICAS, POTENCIAL RELATIVO, φ

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del problema dinámico (2.37.1 a 2.37.5) en términos de un potencial de velocidad relativo, φ , referido a un sistema no inercial y despreciando los términos no lineales, son:

$$\nabla^2 \varphi = 0 \text{ en } \Omega \quad (3.1)$$

en las fronteras:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = 0 \text{ en } R = a \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = -H \quad (3.3)$$

En la superficie libre del líquido la condición cinemática, despreciando los términos de orden superior, es:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ en } z = \delta \quad (3.4)$$

La condición dinámica amortiguada (2.72) en la superficie libre es:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \varphi + g\delta + \hat{r} \cdot \hat{a}(t) = 0 \text{ en } z = \delta \quad (3.5)$$

donde a es el radio del tanque, δ es la altura de ola, μ es el término que representa el amortiguamiento tipo pseudo-viscoso y H la profundidad media del líquido.

La ecuación (3.2) indica que la componente del vector de velocidad normal a la pared del tanque es cero; es decir, la velocidad relativa entre el líquido contenido en el tanque y la pared del tanque es nula. La interpretación física de la ecuación (3.3) es similar a la anterior sólo que en el fondo del tanque. Ambas condiciones de frontera especifican que el líquido no traspasará las fronteras rígidas del tanque durante su movimiento.

La condición cinemática de contorno en la superficie libre controla el movimiento vertical de las partículas y garantiza que una partícula que se encuentre en la superficie libre permanezca en ella durante el movimiento. La condición dinámica se obtiene de aplicar la ecuación de Bernoulli en la superficie libre del líquido con una presión atmosférica constante.

La solución lineal del problema dinámico se realizará con las condiciones de frontera anteriores ya que presentan ciertas ventajas matemáticas con respecto a las condiciones de frontera referidas al sistema inercial. Una es que el vector de aceleración del terreno aparece en forma explícita en la condición dinámica y la otra es que las condiciones de frontera en las zonas rígidas del tanque son homogéneas.

La condición dinámica en la superficie libre del líquido se puede escribir en vibración libre:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \varphi + g \delta = 0 \quad \text{en } z=0 \quad (3.5a)$$

y en vibración forzada como:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \varphi + g \delta = -R \cos \theta \, a_x(t) \quad \text{en } z=0 \quad (3.5b)$$

3.2 FUNCIÓN DE POTENCIAL DE VELOCIDAD RELATIVA, φ

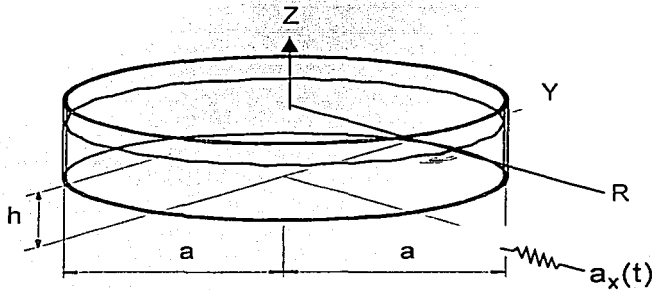
Consideremos un tanque cilíndrico anclado a una cimentación, tanto las paredes como la cimentación se consideran rígidas. El tanque contiene un fluido ideal e irrotacional y está sometido, en su base, a una aceleración sísmica del terreno: $\hat{a}(t) = a_x(t)$ como se muestra en la Figura 3.1. Suponiendo alturas de ola pequeñas y que el fluido del tanque es incompresible y no viscoso, existe un potencial de velocidad, φ , que satisface la ecuación de Laplace en todo punto del volumen Ω , $\nabla^2 \varphi = 0$.

En coordenadas cilíndricas la ecuación de Laplace se puede escribir como:

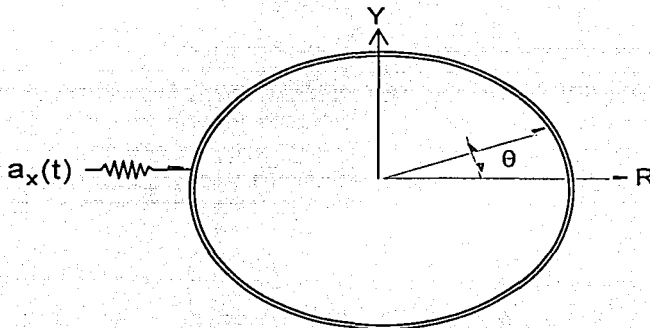
$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.6)$$

donde R , θ y z son las coordenadas en la dirección radial, angular y vertical, respectivamente. El potencial de velocidad $\varphi(R, \theta, z, t)$ se puede expresar como el producto de las funciones $\mathfrak{R}(R)$, $T(\theta)$, $Z(z)$ y $F(t)$ de acuerdo con el método de separación de variables,

$$\varphi(R, \theta, z, t) = \mathfrak{R}(R)T(\theta)Z(z)F(t) \quad (3.7)$$



(a) Notación general



(b) Planta

Fig. 3.1 Tanque cilíndrico en estudio

Sustituyendo (3.7) en (3.6) se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\ddot{T}(\theta) + m^2 T(\theta) = 0 \quad (3.8)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\ddot{Z}(z) - k^2 Z(z) = 0 \quad (3.9)$$

$$R^2 \ddot{\eta}(R) + [k^2 R^2 - m^2] \eta(R) = 0 \quad (3.10)$$

donde m y k son constantes. La ecuación (3.8) es similar a la de vibración libre no amortiguada de un oscilador simple cuya solución es

$$T(\theta) = A_1 \sin(m\theta) + A_2 \cos(m\theta) \quad (3.11)$$

La solución de la ecuación (3.9) se puede escribir como

$$Z(z) = B_1 \exp(kz) + B_2 \exp(-kz) \quad (3.12)$$

La ecuación (3.10) es la forma canónica de la ecuación de Bessel de orden m y su solución es,

$$\eta(R) = C_m J_m(kR) + D_m Y_m(kR) \quad (3.13)$$

donde J_m y Y_m son funciones de Bessel de primer y segundo tipo, respectivamente, de orden m . Dado que $Y_m(kR)$ es singular en $R=0$ para todo valor de m , los coeficientes de integración D_m deben de ser cero, i.e. el potencial de velocidad es proporcional a $J_m(kR)$,

$$\eta(R) = C_m J_m(kR) \quad (3.14)$$

Sustituyendo (3.11), (3.12) y (3.14) en (3.7), el potencial de velocidad está dado por

$$\varphi(R, \theta, z, t) = [A_1 \sin(m\theta) + A_2 \cos(m\theta)] [B_1 \exp(zk) + B_2 \exp(-zk)] [C_m J_m(kR)] F(t) \quad (3.15)$$

donde las constantes de integración A_1 , A_2 , B_1 , B_2 y C_m deben determinarse según las condiciones de frontera.

De la condición dinámica (3.5) despejando la altura de ola, δ ; con un vector de posición $\hat{r} = R \cos \theta$ y considerando que en base del tanque actúa en la dirección x , la aceleración, $a_x(t)$, se obtiene

$$\delta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \varphi + a_x(t) R \cos \theta \right] \quad (3.16)$$

derivando con respecto a la variable t y sustituyendo en la condición cinemática (3.4) se obtiene la ecuación en la superficie libre del líquido,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \dot{a}_x(t) R \cos \theta \right] = 0 \quad \text{en } z=0 \quad (3.17)$$

donde $\dot{a}_x(t)$ es la derivada de la aceleración con respecto al tiempo. El potencial de velocidad $\varphi(R, \theta, z, t)$, ecuación (3.15), debe satisfacer las condiciones de frontera. Así para la condición en el fondo del tanque,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = F(t) [A_1 \sin(m\theta) + A_2 \cos(m\theta)] C_m J_m(kR) [B_1 k \exp(kz) - B_2 k \exp(-kz)]$$

igualando a cero y evaluando en $z=-H$ se obtiene que

$$B_1 = B_2 \exp(2kh) \quad (3.18)$$

Sustituyendo en la ecuación (3.15)

$$\varphi(R, \theta, z, t) = F(t) [A_1 \sin(m\theta) + A_2 \cos(m\theta)] [2B_2 \exp(kH) \cosh[k(z+H)]] C_m J_m(kR) \quad (3.19)$$

El potencial de velocidad debe satisfacer la condición (3.16) en vibración libre en la superficie libre del líquido, es decir

$$\delta = -\frac{1}{g} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mu \varphi \right] \quad \text{en } z=0 \quad (3.20)$$

Derivando la ecuación (3.19) con respecto a t , tomando la solución cosenoidal y sustituyéndola en (3.20) se tiene,

$$\delta = -\frac{1}{g} \{ [F(t) + \mu F(t)] [A \cos(m\theta)] [2B_2 \exp(kH) \cosh[kH]] C_m J_m(kR) \} \quad (3.21)$$

Considerando que,

$$E_m = 2B_2 \exp(kH) \cosh[kH] J_m(ka) C_m A$$

de donde,

$$2B_2 \exp(kH) = \frac{E_m}{A C_m} \frac{1}{\cosh[kH]} \frac{1}{J_m(ka)} \quad (3.22)$$

Al sustituir la ecuación (3.22) en la (3.21) la altura de ola, δ , se puede escribir como:

$$\delta(R, \theta, t) = \psi(t) S_m(R, \theta) \quad (3.23)$$

es decir, como el producto de una función dependiente de t , $\psi(t)$, y una función que representa la variación espacial de la ola,

$$S_m(R, \theta) = \frac{J_m(kR)}{J_m(ka)} \cos(m\theta)$$

Sustituyendo la ecuación (3.22) en la (3.19) obtenemos,

$$\varphi(R, \theta, z, t) = F(t) E_m \cos(m\theta) \frac{J_m(kR)}{J_m(ka)} \frac{\cosh[k(z+H)]}{\cosh[kH]} \quad (3.24)$$

La ecuación (3.24) debe cumplir con la condición de frontera en la pared del tanque,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial R} = F(t) E_m \cos(m\theta) \frac{J'_m(ka)}{J_m(ka)} \frac{\cosh[k(z+H)]}{\cosh[kH]} = 0$$

Para una solución diferente a la trivial se requiere que $J'_m(ka) = 0$ lo cual se satisface para un número infinito de valores discretos de k . Denotemos estos valores empleando doble subíndice, así k_{mn} denota la n -ésima raíz de la derivada de la función de Bessel de primer tipo de m -ésimo orden. La solución general del potencial de velocidad se obtiene superponiendo todas las posibles soluciones:

$$\varphi(R, \theta, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \frac{J_m\left[X_{mn} \frac{R}{a}\right]}{J_m[X_{mn}]} \frac{\cosh\left[X_{mn} \frac{(z+H)}{a}\right]}{\cosh\left[X_{mn} \frac{H}{a}\right]} \cos(m\theta) \quad (3.25)$$

donde $X_{mn} = k_{mn}a$ es la raíz positiva de la primer derivada de la función de Bessel, $J'_m[X_{mn}] = 0$. En tanques cilíndricos con paredes rígidas el modo fundamental de vibrar, en la dirección angular, se presenta en $m=1$, por lo que la solución del potencial es:

$$\varphi(R, \theta, z, t) = \cos \theta \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \frac{J_1\left[X_n \frac{R}{a}\right]}{J_1[X_n]} \frac{\cosh\left[X_n \frac{(z+H)}{a}\right]}{\cosh\left[X_n \frac{H}{a}\right]} \quad (3.26)$$

La frecuencia natural de vibrar de la superficie del líquido, ω_n , se obtiene de la ecuación (3.24) con $F(t) = \sin \omega t$ y haciendo uso de las condiciones de frontera en la superficie en vibración libre,

$$\omega_n^2 = g \left[\frac{X_n}{a} \right] \tanh \left[X_n \frac{H}{a} \right] \quad (3.27)$$

para $n=1,2,3,\dots$, X_n son las n -ésimas raíces positivas de la función de Bessel de primer tipo de orden uno, $\frac{H}{a}$ es la longitud característica del sistema. Las eigenfrecuencias del líquido disminuyen cuando aumenta la profundidad del líquido y cuando incrementa el radio del tanque. En la Figura 3.2 se observa la variación de los primeros cinco periodos de vibrar con respecto a diferentes valores de $\frac{H}{a}$, para un valor del radio constante. Para valores grandes de $\frac{H}{a}$ (i.e., $\frac{H}{a} \geq 2$) las eigenfrecuencias se pueden aproximar como:

$$\omega_n^2 = \frac{g}{a} X_n$$

y para pequeños valores de $\frac{H}{a}$ con:

$$\omega_n^2 = g \left[\frac{X_n}{a} \right]^2 H$$

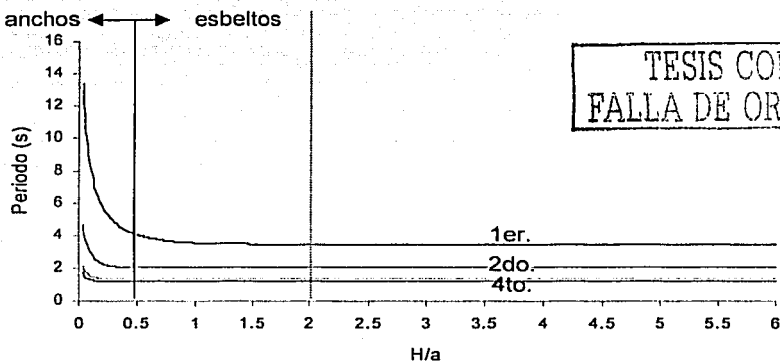


Fig. 3.2 Variación de periodos de vibrar vs $\frac{H}{a}$

Sustituyendo el potencial de velocidad, $\varphi(R, \theta, z, t)$, en la expresión (3.17) en vibración forzada, se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1 \left[X_n \frac{R}{a} \right]}{J_1 \left[X_n \right]} \left[\ddot{F}_n(t) + \mu \dot{F}_n(t) + \omega_n^2 F_n(t) \right] + R \dot{a}_x(t) = 0 \quad (3.28)$$

la ecuación anterior se puede escribir como,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1 \left[X_n \frac{R}{a} \right]}{J_1 \left[X_n \right]} \left[\ddot{F}_n(t) + \mu \dot{F}_n(t) + \omega_n^2 F_n(t) \right] = f(R) \quad (3.29)$$

donde $f(R) = -R \dot{a}_x(t)$.

Expresando la ecuación (3.28) en términos de una serie de Fourier-Bessel del tipo,

$$f(R) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n J_1[k_n R]$$

donde los coeficientes de la sucesión son:

$$Q_n = \left[\ddot{F}_n(t) + \mu \dot{F}_n(t) + \omega_n^2 F_n(t) \right] \left[\frac{1}{J_1[ak_n]} \right] \quad (3.30)$$

y se calculan para $0 \leq R \leq a$ como

$$Q_n = \frac{I_1}{I_2} \quad (3.31)$$

donde:

$$I_1 = \int_0^a R f(R) J_1(k_n R) dR$$

$$I_2 = \int_0^a R [J_1(k_n R)]^2 dR$$

Para el calculo de la integral I_1 se sustituye $f(R) = -R \dot{a}_x(t)$,

$$I_1 = -\dot{a}_x(t) \int_0^a R^2 J_1(k_n R) dR$$

como $\frac{d}{dR} [R^2 J_2(k_n R)] = k_n R^2 J_1(k_n R)$ entonces,

$$I_1 = -\frac{\dot{a}_x(t)}{k_n} a^2 J_2(k_n a)$$

Para la integral I_2 ,

$$I_2 = \frac{k_n^2 a^2 - 1}{2k_n^2} [J_1(k_n a)]^2$$

Sustituyendo I_1 y I_2 en (3.31), y considerando que $J_1(k_n a) = k_n a J_2(k_n a)$ tenemos,

$$Q_n = -\dot{a}_x(t) \frac{2a}{[k_n^2 a^2 - 1] J_1(k_n a)}$$

igualando la ecuación anterior con la (3.30), se tiene:

$$\ddot{F}_n(t) + \mu \dot{F}_n(t) + \omega_n^2 F_n(t) = \frac{2a}{[1 - X_n^2]} \dot{a}_x(t) \quad (3.32)$$

En la expresión anterior la excitación depende de la derivada de la aceleración sísmica del terreno. La ecuación (3.32) es análoga a la ecuación de movimiento de un oscilador amortiguado, si se considera el término $\mu_n = 2\xi_n \omega_n$ (Housner y Haroum, 1980; Veletsos y Shivakumar, 1997; Hernández y Heredia, 2000).

Llamando a $\alpha_n = \frac{2a}{[X_n^2 - 1]}$, la ecuación (3.32) se puede escribir como:

$$\ddot{F}_n(t) + \mu \dot{F}_n(t) + \omega_n^2 F_n(t) = -\alpha_n \dot{a}_x(t) \quad (3.33)$$

La altura de ola en el tanque se calcula con la expresión (3.16) por lo que observando la ecuación (3.26) será necesario conocer de la ecuación (3.33) los términos $\dot{F}_n(t)$ y $F_n(t)$. Para evitar solucionar la ecuación (3.33), donde la excitación está dada como la derivada de la aceleración y que ello pueda generar ruido numérico en la solución, se realiza el siguiente cambio de variable (Hildebrand, 1976):

$$A_n(t) = \int_0^t F_n(\tau) d\tau$$

es decir,

$$\frac{d}{dt} [A_n(t)] = \frac{d}{dt} \left[\int_0^t F_n(\tau) d\tau \right] = F_n(t)$$

ó bien,

$$\dot{A}_n(t) = F_n(t) = \int_0^t \ddot{F}_n(\tau) d\tau$$

$$\ddot{A}_n(t) = \dot{F}_n(t) = \int_0^t \ddot{F}_n(\tau) d\tau$$

que se pueden utilizar para reducir el orden de la derivada del lado izquierdo de la ecuación de movimiento. Así, integrando en τ ambos lados de la ecuación (3.33), entre 0 y t , se tiene,

$$\int_0^t \ddot{F}_n(\tau) d\tau + \mu \int_0^t \dot{F}_n(\tau) d\tau + \omega_n^2 \int_0^t F_n(\tau) d\tau = -\alpha_n \int_0^t \frac{d}{dt} [a_x(t)] d\tau$$

es decir,

$$\ddot{A}_n(t) + \mu \dot{A}_n(t) + \omega_n^2 A_n(t) = -\alpha_n a_x(t) \quad (3.34)$$

con las condiciones iniciales son,

$$A_n(0) = \left[\int_0^t F_n(\tau) d\tau \right]_{t=0} = 0$$

$$\dot{A}_n(0) = F_n(0) = 0$$

La ecuación diferencial (3.34) se puede resolver numéricamente. En este trabajo se utilizará el método de Runge-Kutta de cuarto orden (Press, et al., 1992).

La altura de ola en la superficie libre del líquido se calcula con,

$$\delta(R, \theta, t) = -\frac{1}{g} \left[Ra_x(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ddot{A}_n(t) + \mu \dot{A}_n(t) \right] \frac{J_1 \left[X_n \frac{R}{a} \right]}{J_1 [X_n]} \right] \cos \theta \quad (3.35)$$

El primer término de la ecuación (3.35), $Ra_x(t)$, representa el movimiento de cuerpo rígido del tanque y el segundo término representa el desplazamiento relativo del líquido.

3.3 PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Una vez que se conoce el potencial de velocidad, ϕ , la altura de ola en la superficie libre del líquido, $z=0$, se calcula con la ecuación (3.35) considerando únicamente el desplazamiento relativo del líquido,

$$\delta(R, \theta, t) = -\frac{1}{g} \left[\sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{A}_n(t) + \mu \dot{A}_n(t)] \frac{J_1 \left[X_n \frac{R}{a} \right]}{J_1 \left[X_n \right]} \right] \cos \theta \quad (3.36)$$

Despreciando los términos no lineales, la ecuación de Bernoulli se puede escribir como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu \phi + a_x(t) R \cos \theta + gz + \frac{P_h}{\rho} = 0 \quad (3.37)$$

donde P_h es la presión hidráulica. Despejando P_h de esta ecuación, se tiene

$$P_h(R, \theta, z, t) = -\rho \left[gz + a_x(t) R \cos \theta + \mu \phi + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \quad (3.38)$$

Se puede notar que el primer término en el lado derecho de la ecuación (3.38) representa la presión hidrostática, $-\rho gz$; los siguientes términos representan la presión hidrodinámica producto de la excitación horizontal del terreno. En función del potencial de velocidad, la presión hidráulica sobre las paredes del tanque, se calcula con:

$$P_h(a, 0, z, t) = -\rho \left[gz + a a_x(t) \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{A}_n(t) + \mu \dot{A}_n(t)] \frac{\cosh \left[X_n \frac{(z+H)}{a} \right]}{\cosh \left[X_n \frac{H}{a} \right]} \cos \theta \right] \quad (3.39)$$

La fuerza cortante en la pared del tanque se obtiene integrando la presión hidrodinámica en la altura,

$$\dot{F}_P(t) = \left[-\int_{-H}^0 \rho \pi a^2 a_x(t) dz - \int_{-H}^0 \rho \pi a \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{A}_n(t) + \mu \dot{A}_n(t)] \frac{\cosh \left[X_n \frac{(z+H)}{a} \right]}{\cosh \left[X_n \frac{H}{a} \right]} (H+z) dz \right] \cos \theta$$

es decir

$$F_p(t) = -(\rho\pi a^2) \left[a_x(t)H + \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{A}_n(t) + \mu\dot{A}_n(t)] \frac{1}{X_n} \tanh \left[X_n \frac{H}{a} \right] \right] \cos \theta \quad (3.40)$$

El momento de volteo en la base de la pared del tanque se obtiene de:

$$M(t) = - \int_{-h}^0 \rho\pi a^2 a_x(t)(H+z) dz - \int_{-h}^0 \rho\pi a \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{A}_n(t) + \mu\dot{A}_n(t)] \frac{\cosh \left[X_n \frac{(z+H)}{a} \right]}{\cosh \left[X_n \frac{H}{a} \right]} (H+z) dz$$

de donde

$$M(t) = -(\rho\pi a^2) \left[\frac{1}{2} a_x(t)H^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{A}_n(t) + \mu\dot{A}_n(t)] \left[\frac{H}{X_n} \tanh \left[X_n \frac{H}{a} \right] + \frac{a}{X_n^2} \left[\operatorname{sech} \left[X_n \frac{H}{a} \right] - 1 \right] \right] \right] \cos \theta \quad (3.41)$$

3.4 APLICACIÓN

Consideremos primeramente un tanque cilíndrico con diámetro igual a 11m y altura del líquido de 2.75m. El peso volumétrico del líquido contenido en el tanque es $\gamma=1 \text{ t/m}^3$ y su densidad $\rho=0.1019 \text{ ts}^2/\text{m}^4$. El coeficiente de amortiguamiento pseudo-viscoso se considera igual a $\mu = 2\xi\omega_1$, donde el porcentaje de amortiguamiento con respecto al crítico es: $\xi = 0.5\%$. La Tabla 3.1 lista las primeras 9 frecuencias y periodos modales de la superficie libre del líquido.

El tanque se sometió a las componentes de aceleración NS y EW registradas durante el sismo del 19 de septiembre de 1985 en las estaciones de Ciudad Universitaria (CU), Viveros (VIV), Secretaria de Comunicaciones y Transporte (SCT), Central de Abasto (CA), Tacubaya (TACY) y Caleta de Campos (CALETA). Sus características en cuanto a espaciamiento en el tiempo, Δt , número de puntos contenidos en el registro, NP, y duración se resumen en la Tabla 3.2.

Tabla 3.1 Frecuencias y periodos de vibrar de la superficie libre del liquido

| Modo | Frecuencia (rad/s) | Periodo (s) |
|------|--------------------|-------------|
| 1 | 1.5443 | 4.0687 |
| 2 | 3.0688 | 2.0474 |
| 3 | 3.9012 | 1.6106 |
| 4 | 4.5693 | 1.3751 |
| 5 | 5.1489 | 1.2203 |
| 6 | 5.6686 | 1.1084 |
| 7 | 6.1441 | 1.0226 |
| 8 | 6.5850 | 0.9542 |
| 9 | 6.9981 | 0.8978 |

La Figura 3.3 muestra las historias de altura de ola en la pared del tanque para cada registro sísmico. En general, las alturas de ola máximas producidas por los movimientos sísmicos son menores a 40cm; sin embargo en el caso del registro SCT, las componentes NS y EW generan alturas de ola de 125cm y de 215cm, respectivamente.

Tabla 3.2 Características de los registros sísmicos utilizados

| Movimiento | Duración (s) | Δt (s) | NP |
|------------|--------------|----------------|-------|
| CU.NS | 60 | 0.02 | 3005 |
| CU.EW | 60 | 0.02 | 3005 |
| VIV.NS | 60 | 0.02 | 3002 |
| VIV.EW | 60 | 0.02 | 3002 |
| SCT19.NS | 180 | 0.04 | 4503 |
| SCT20.NS | 180 | 0.02 | 9002 |
| SCT19.EW | 180 | 0.04 | 4503 |
| SCT20.EW | 180 | 0.02 | 9002 |
| SCT30.EW | 180 | 0.01 | 18009 |
| CA.NS | 180 | 0.04 | 4501 |
| CA.EW | 180 | 0.04 | 4501 |
| TACY.NS | 150 | 0.03 | 4999 |
| TACY.EW | 150 | 0.03 | 4999 |
| CALETA.NS | 47 | 0.01 | 4686 |
| CALETA.EW | 47 | 0.01 | 4686 |

La Tabla 3.3 muestra las alturas de ola máximas obtenidas para cada movimiento, considerando el modo fundamental y los primeros veinte modos de

vibración, así como los incrementos porcentuales en la respuesta. Se observa que los modos superiores de vibrar tienen una contribución importante en la respuesta sísmica; dicha contribución no es independiente de las características de la excitación. En el caso de la componente NS del registro SCT, los modos superiores pueden incrementar la respuesta en 89%; dicha contribución es de 35% cuando se trata de la componente EW del mismo registro. Es de interés el caso del registro en la estación CA.EW en el que se produce una altura de ola mayor que la altura total del tanque. La Figura 3.4 muestra la historia de respuesta del oleaje en la superficie libre del tanque sometido al registro de CA.EW. Se puede observar el incremento excesivo de la respuesta por encima de las paredes del tanque. En la dirección NS el registro de Central de Abasto genera una altura de ola máxima del orden de la profundidad del tanque ($H=275\text{cm}$). Estos resultados sugieren la presencia de cierto fenómeno de resonancia y, por tanto, la altura de ola no podría predecirse correctamente con la solución lineal.

Tabla 3.3 Altura de ola máxima para el ejemplo de aplicación

| Movimiento | Altura de ola (cm) | | Inc. % |
|------------|--------------------|----------|--------|
| | Fundamental | 20 modos | |
| CU.NS | 24.43 | 23.91 | 2 |
| CU.EW | 31.60 | 40.50 | 28 |
| VIV.NS | 29.84 | 36.31 | 22 |
| VIV.EW | 41.03 | 45.36 | 11 |
| SCT.NS | 66.46 | 125.80 | 89 |
| SCT.EW | 159.54 | 215.41 | 35 |
| CA.NS | 265.75 | 267.56 | 1 |
| CA.EW | 454.07 | 450.88 | -1 |
| TACY.NS | 34.95 | 38.85 | 11 |
| TACY.EW | 33.21 | 35.82 | 8 |
| CALETA.NS | 71.56 | 78.68 | 9 |
| CALETA.EW | 62.05 | 76.86 | 24 |

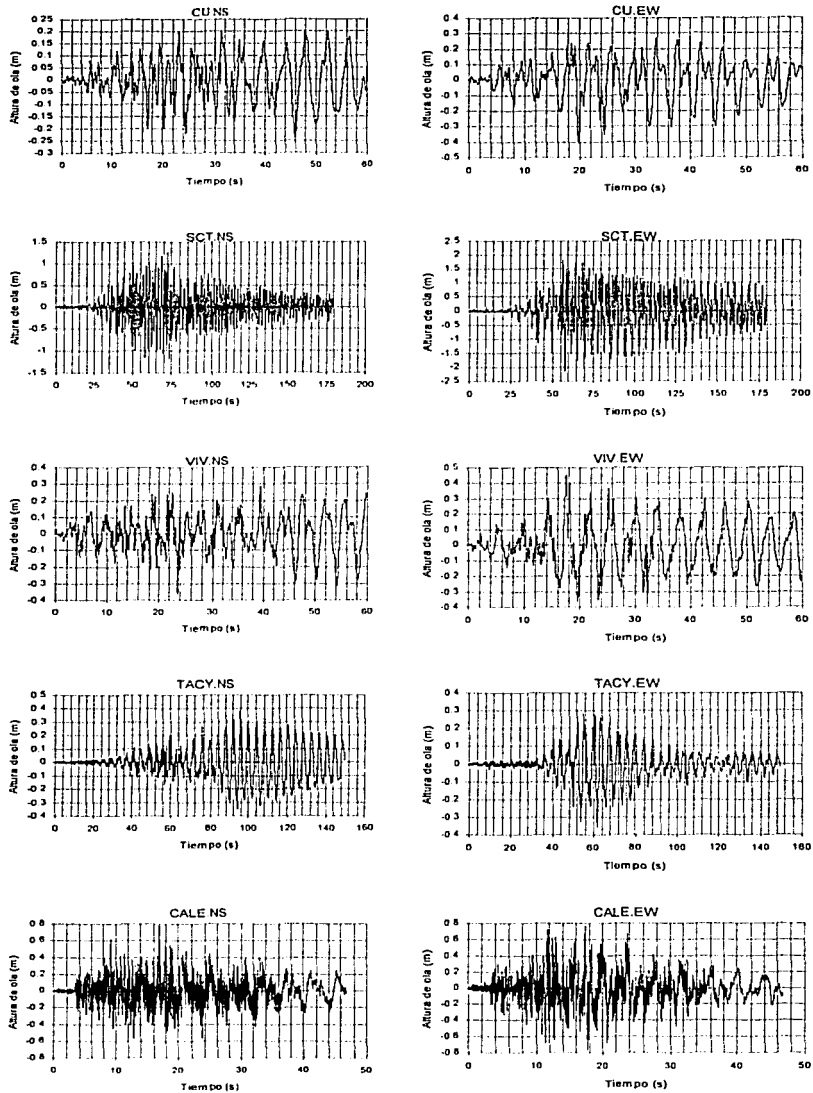


Fig. 3.3 Historia de Oleaje en la pared del tanque

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

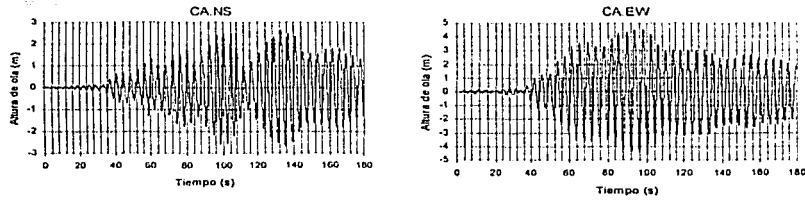


Fig. 3.3 Historia de altura de ola en la pared del tanque (continuación)

Se podría pensar que los valores excesivos de altura de ola registradas en la Tabla 3.3 se deben a que no se consideró para su cálculo la influencia de la interacción suelo-estructura. La interacción suelo-estructura tiende a alargar el periodo de vibración de la estructura y aumenta el amortiguamiento asociado a ella. El Manual de Obras Civiles (Diseño por Sismo, CFE, 1993) sugiere que se puede considerar el mismo valor de amortiguamiento para los modos convectivos e impulsivos. Establece, para fines prácticos, un valor de amortiguamiento del orden del 1% para los modos convectivos, que representan los modos hidrodinámicos debidos al modo fundamental de vibrar del liquido y que generan el oleaje en la superficie, y un valor del 2% para los modos impulsivos con lo cual se cubren las recomendaciones sobre interacción suelo-estructura. Por otra parte, el Manual de Obras Civiles (Diseño por Sismo, CFE, 1993) recomienda que en un análisis que considere la interacción suelo-estructura, se pueden despreciar tanto las presiones convectivas, como los efectos de la interacción¹ en los modos convectivos. Por tanto, los efectos de la interacción suelo-estructura no influirían en la respuesta del oleaje (modos convectivos) producidos en la superficie libre del liquido. En el análisis de tanques de almacenamiento son escasos los estudios experimentales o analíticos en los que se tome en cuenta la interacción suelo-estructura.

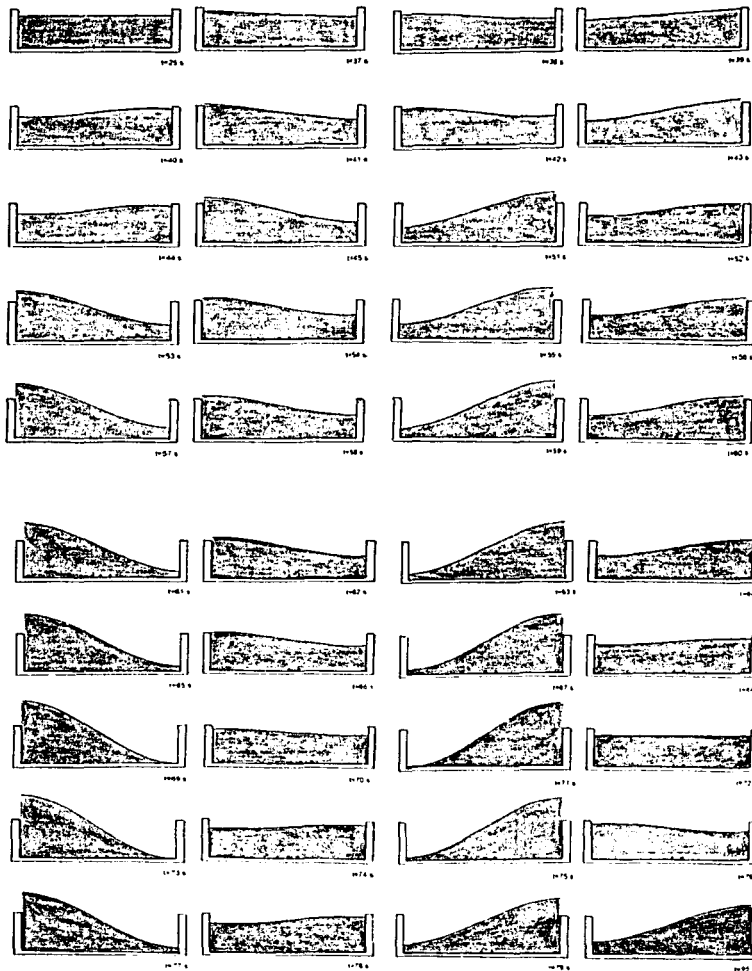


Fig. 3.4 Respuesta de oleaje ante la excitación sísmica CA.EW

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.5 ANÁLISIS BAJO UNA EXCITACIÓN ARMÓNICA

Con el fin de entender mejor el aparente comportamiento en resonancia del tanque del ejemplo de aplicación sometido al movimiento registrado en Central de Abastos, se analizó el caso de una excitación de tipo armónica aplicada en su base, tal que: $a_x(t) = -Fe^{i\Omega t}$ donde $i = \sqrt{-1}$, donde Ω es la frecuencia de la excitación y F su amplitud. La ecuación (3.34) se convierte en:

$$\ddot{A}_n(t) + \mu\dot{A}_n(t) + \omega_1^2 A_n(t) = \alpha_n F \Omega e^{i\Omega t} \quad (3.45)$$

donde

$$\alpha_n = a\beta_n = a \left[\frac{2}{X_n^2 - 1} \right] \quad (3.46)$$

de manera que el sistema se puede modelar como un oscilador amortiguado tal como se indica en la Figura 3.5. La solución de la ecuación (3.45) es:

$$\ddot{A}_n(t) = -F\Omega^2 G(\omega_n) \text{sen}(\Omega t - \psi) \quad (3.47)$$

$$\dot{A}_n(t) = -F\Omega G(\omega_n) \text{cos}(\Omega t - \psi) \quad (3.48)$$

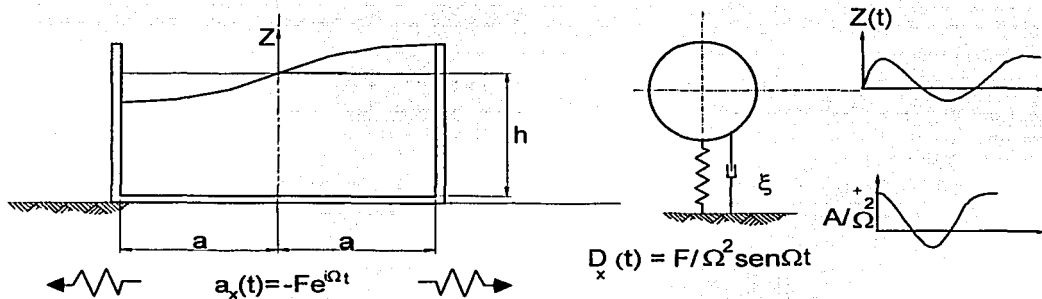


Fig. 3.5 Tanque cilíndrico sometido a una excitación armónica en su base

En (3.47) y (3.48), $G(\omega_n)$ es un factor de amplificación dinámico dado por

$$G(\omega_n) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega)^2 + (\mu\Omega)^2}} \quad (3.49)$$

y ψ es el ángulo de fase,

$$\psi = \tan^{-1} \left[\frac{\frac{\mu}{\omega_n} \frac{\Omega}{\omega_n}}{1 - \left[\frac{\Omega}{\omega_n} \right]^2} \right] \quad (3.50)$$

donde $\mu = 2\xi\omega_1$, la frecuencia de la excitación es Ω , y la del oleaje en el modo fundamental, ω_1 .

En $R=a$ y $\theta=0^\circ$ la altura de ola máxima se puede calcular como:

$$\delta(a,0,t)_{\max} = \pm \frac{F}{g} a \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n G(\omega_n) \left[\Omega^2 \sin(\Omega t - \psi) + \mu \Omega \cos(\Omega t - \psi) \right] \quad (3.51)$$

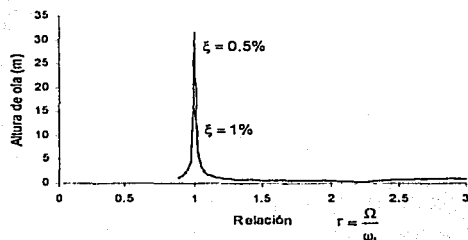
Suponiendo que los movimientos sísmicos registrados en el Valle de México son armónicos, se calculó la altura de ola máxima para el tanque cilíndrico en estudio usando la ecuación (3.51). Se consideró un porcentaje del amortiguamiento crítico del líquido de 0.5%. En la Tabla 3.4 se listan las características de los movimientos CU, VIV, SCT y CA considerados como armónicos (Bello y Gaxiola, 1986) y las alturas de ola máximas considerando uno y veinte modos de vibrar en la respuesta.

Tabla 3.4 Características de los movimientos armónicos y resultados

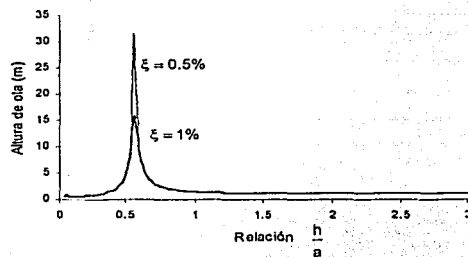
| Movimiento | A_{\max}/g | Ω (rad/s) | $r = \frac{\Omega}{\omega_1}$ | 1 modo δ_{\max} (cm) | 20 modos δ_{\max} (cm) |
|------------|--------------|------------------|-------------------------------|--------------------------------|----------------------------------|
| CU.NS | 0.0281 | 3.6960 | 2.3933 | 15.70 | 23.83 |
| CU.EW | 0.0334 | 6.6139 | 4.2828 | 16.27 | 27.86 |
| VIV.NS | 0.0411 | 10.8330 | 7.0148 | 19.29 | 23.04 |
| VIV.EW | 0.0424 | 11.6355 | 7.5345 | 19.83 | 23.60 |
| SCT.NS | 0.0976 | 3.1416 | 2.0343 | 59.43 | 149.92 |
| SCT.EW | 0.169 | 3.1416 | 2.0343 | 102.91 | 259.60 |
| CA.NS | 0.0658 | 1.6487 | 1.1301 | 266.57 | 268.00 |
| CA.EW | 0.0688 | 1.5982 | 1.0172 | 409.94 | 411.33 |

Se puede observar que en el caso de los registros de la Central de Abastos en ambas direcciones, la relación de frecuencia de la excitación con respecto a la frecuencia fundamental es cercana a uno y las alturas de ola máximas calculadas son iguales a 268 y 411cm. La primera es casi del orden de la altura total del tanque y la

segunda rebasa dicha altura. Se verifica el efecto de resonancia en el primer modo y que, en este caso, la influencia de los modos superiores es despreciable. En consecuencia la teoría lineal es incapaz de predecir apropiadamente la respuesta del sistema en resonancia. En la Figura 3.6(a) se muestra el espectro de respuesta del tanque del ejemplo con radio $a=5.5\text{m}$, sometido a la excitación CA.EW para diferentes valores de relación de frecuencias y para amortiguamientos del 0.5 y 1% con respecto al crítico, en ella se observa que la respuesta en resonancia está completamente influenciada por el valor del amortiguamiento. Si se usa un amortiguamiento del 1% la respuesta disminuye en un 50% con respecto a la considerada con 0.5%.



(a) Relación: altura de ola vs frecuencias, $a=5.5\text{m}$



(b) Altura de ola vs longitud característica, $a=5.5\text{m}$

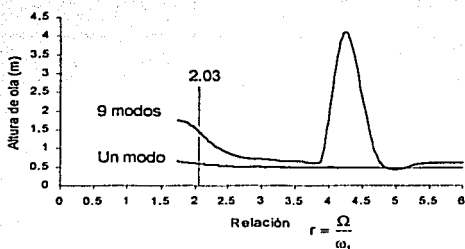
Fig. 3.6 Espectros de respuesta: excitación tipo armónica, características CA.EW

El efecto de resonancia en la teoría lineal produce resultados que escapan al contexto físico del problema. Será necesario resolver el problema de oleaje no lineal para predecir mejor las alturas de ola en resonancia; sin embargo, es previsible que en

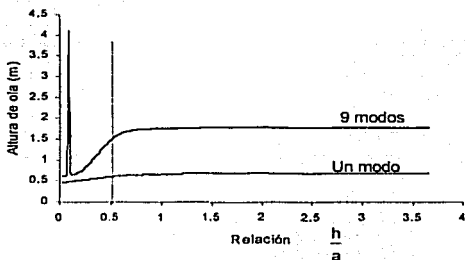
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

este caso las grandes alturas de ola en la superficie del líquido pueden producir daños importantes en las cubiertas. En la Figura 3.6(b) se puede ver que la máxima respuesta es precisamente para $H/a=0.5$, que corresponde al ejemplo de aplicación.

Si se consideran los movimientos SCT.NS y SCT.EW como armónicos, los modos superiores tienen gran influencia en la respuesta (Tabla 3.4); en este caso la relación entre frecuencias de la excitación y la fundamental del sistema es de 2.03. En la Figura 3.7 se tiene el espectro de respuesta para un tanque con radio $a=5.5\text{m}$ sometido a una excitación con características similares a las de SCT.NS.



(a) Relación: altura de ola vs frecuencias, $a=5.5\text{m}$



(b) Altura de ola vs longitud característica, $a=5.5\text{m}$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Fig. 3.7 Espectros de respuesta: excitación tipo armónica, características SCT.NS

En la Figura 3.7(a) se observa la influencia de los modos superiores para un valor de $r=2.03$, que corresponde a una relación $H/a=0.5$ (Fig. 3.7(b)), de donde $H=2.75\text{m}$, que corresponde a la altura media del tanque del ejemplo. Para un tanque con estas características las relaciones para las dos primeras frecuencias son:

$$r_1 = \frac{\Omega}{\omega_1} = 2.03$$

$$r_2 = \frac{\Omega}{\omega_2} = 1.02$$

es decir se presenta resonancia primaria para el segundo modo. Los dos modos están fuertemente acoplados y la energía que existe en uno de ellos la pueden intercambiar continuamente durante el movimiento, dando lugar a una resonancia interna definida por $\omega_2 \approx 2\omega_1$. En la Tabla 3.1 se observa que $\omega_1 = 1.5443$ rad/s y $\omega_2 = 3.0688$ rad/s, lo cual verifica dicha relación.

En la Figura 3.7(a) se observa que se presenta un máximo en la respuesta para un valor de $r = 4.04$, que corresponde a una relación $H/a=0.10$ (Figura 3.7(b)), de donde $H=0.55$ m; para un tanque con estas características las relaciones entre frecuencias son:

$$r_1 = \frac{\Omega}{\omega_1} = 4.04$$

$$r_2 = \frac{\Omega}{\omega_2} = 1.46$$

$$r_3 = \frac{\Omega}{\omega_3} = 0.97$$

es decir, se presenta una gran influencia del tercer modo en la respuesta. Es obvio que un tanque con estas dimensiones ($H=0.55$ m, $2a=11$ m) no es práctico desde el punto de vista ingenieril.

3.6 RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se determinó la solución analítica lineal del problema transitorio de un tanque cilíndrico excitado por un movimiento sísmico horizontal en su base. Las ecuaciones de frontera se resolvieron en términos de un potencial de velocidad relativo, referido a un sistema no inercial y despreciando los términos no lineales. La ecuación de Laplace se resolvió en coordenadas cilíndricas por medio del método de separación de variables y el problema de valores en la frontera se resolvió recurriendo a las propiedades de las

funciones Fourier-Bessel. La ecuación de movimiento resultante es similar a la de un oscilador con amortiguamiento tipo viscoso (Rayleigh) si es que el término μ , que representa el amortiguamiento pseudo-viscoso, se toma como $\mu = 2\xi_n\omega_n$. Se presentan ecuaciones para el cálculo de la altura de ola relativa, presiones hidráulicas, fuerzas cortantes en las paredes del tanque y momentos de volteo en un punto inmediatamente arriba de la base del tanque. Como ejemplo de aplicación se consideró un tanque cilíndrico con diámetro igual a 11m y altura media del líquido, $H=2.75\text{m}$. El coeficiente de amortiguamiento pseudo-viscoso se tomó igual a $\mu = 2\xi\omega_1$, en donde ω_1 es la frecuencia fundamental del líquido y el porcentaje de amortiguamiento con respecto al crítico, $\xi = 0.5\%$.

Se resolvió la ecuación de movimiento paso a paso para los movimientos sísmicos registrados durante el sismo del 19 de septiembre de 1985 en las estaciones de Ciudad Universitaria (CU), Viveros (VIV), Secretaria de Comunicaciones y Transportes (SCT), Central de Abasto (CA), Tacubaya (TACY) y Caleta de Campos (CALETA), en sus componentes NS y EW. Los resultados de oleaje en la superficie libre del líquido indican una contribución importante de los modos superiores de vibrar en la respuesta. Los resultados para el movimiento registrado en Central de Abasto, en ambas direcciones, sugirieron la presencia del fenómeno de resonancia y se hace ver que, la altura de ola no podría predecirse correctamente con la solución lineal. Con el fin de entender mejor el aparente comportamiento en resonancia, se analizó el sistema excitándolo en su base con una aceleración de tipo armónica con características de amplitud y frecuencia similares a las de los movimientos sísmicos anteriormente descritos. Se verificó el fenómeno de resonancia primaria en el modo fundamental para el registro CA.EW, sin una influencia importante de los modos superiores en la respuesta. Para el movimiento con características similares al de SCT.NS se encontró que los modos superiores tienen gran influencia en la respuesta sísmica presentándose resonancia primaria en el segundo modo y verificándose resonancia interna en el sistema. El efecto de resonancia en la teoría lineal produce resultados que escapan al contexto físico del problema; sin embargo, es previsible que en este caso las grandes alturas de ola en la superficie del líquido pueden producir daños importantes en las cubiertas o derramamiento del líquido.

La influencia de los modos superiores en la respuesta y la presencia del fenómeno de resonancia, indican la necesidad de considerar los efectos hidrodinámicos no lineales en la respuesta sísmica de este tipo de estructuras. Los resultados obtenidos en forma analítica servirán de comparación y calibración del modelo utilizado en la solución numérica lineal del capítulo 4.

CAPÍTULO 4

SOLUCIÓN NUMÉRICA LINEAL

4.1 INTRODUCCIÓN

El Método de Diferencias Finitas (MDF) es ampliamente usado para resolver ecuaciones diferenciales parciales. En él las derivadas en las ecuaciones diferenciales parciales se sustituyen por cocientes en diferencias.

Existen dos procedimientos para determinar las ecuaciones en diferencias: 1) por medio de expansiones de polinomios, en donde se aproxima la ecuación diferencial original según el orden deseado en el truncamiento. La expansión de los polinomios se realiza por medio de series de Taylor y/o por medio del Método de Coeficientes Indeterminados; 2) por medio de Leyes de Conservación, en donde se desarrolla el esquema usando leyes físicas de conservación; este esquema es la base del Método de Volumen Finito (MVF), en el cual se aproxima la ecuación integral que gobierna el comportamiento físico del problema sobre un volumen de control, discretizándola en cada punto nodal. En ambos enfoques es posible deducir esquemas para mallas con diferente espaciamiento. En el Apéndice B se deducen las ecuaciones en diferencias finitas truncadas a segundo orden para los esquemas centrado, hacia atrás y hacia adelante, con incrementos uniformes entre los puntos nodales de la malla y para incrementos no uniformes.

En un sistema cartesiano (x,y,z) , una función continua $f(x,y,z)$ puede ser representada por su conjunto de valores discretizados en los puntos:

$$f_{j,k,l} = f[(j-1)\Delta x, (k-1)\Delta y, (l-1)\Delta z]$$

para $j=1,2,3, \dots, j_{\text{máx}}$, $k=1,2,3, \dots, k_{\text{máx}}$ y $z=1,2,3, \dots, z_{\text{máx}}$, donde $[(j-1)\Delta x, (k-1)\Delta y, (l-1)\Delta z]$ representa un punto en una malla tridimensional.

Cuando todos los términos diferenciales de una ecuación diferencial parcial y sus correspondientes condiciones de frontera son reemplazadas por diferencias finitas, el problema original se transforma en un conjunto de ecuaciones algebraicas. Si el problema es transitorio entonces será necesaria la discretización de las ecuaciones por

medio de un esquema en el tiempo, que junto con las ecuaciones de frontera forman un sistema de ecuaciones simultáneas. El problema de valores en la frontera está completo una vez definidas las condiciones iniciales.

4.2 ERROR EN LA SOLUCIÓN NUMÉRICA

La solución numérica de una ecuación puede diferir de la solución exacta debido principalmente a dos fuentes de error: 1) error de truncamiento en la discretización del esquema, y 2) error de redondeo. El error numérico de redondeo es generado después de que se realiza un número repetitivo de operaciones. Este tipo de error puede disminuir si en el algoritmo de solución se utilizan variables con doble precisión, requiriéndose un mayor tiempo de ejecución y mayor memoria en el almacenamiento de los datos.

El error de truncamiento está relacionado con el orden del polinomio truncado en la aproximación, es decir, si una función $f(x)$ se expande en una serie de Taylor:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + f''(x)\frac{\Delta x^2}{2} + f'''(x)\frac{\Delta x^3}{6} + O(\Delta x^4) \quad (4.1)$$

donde $O(\Delta x^n)$ es el error de truncado de la serie de orden n ésimo y Δx es el incremento del valor en x . En general, el orden de aproximación de la solución del problema es el orden más bajo de cualquiera de las ecuaciones discretizadas en el dominio.

Los errores numéricos en problemas transitorios son propagados de un paso del esquema al siguiente. Si el error numérico se amplifica, entonces puede generarse una solución inestable; por otro lado, si el error no se incrementa y específicamente disminuye, normalmente la solución numérica presenta un comportamiento estable.

Si después de haber realizado la discretización de la ecuación original se logra recuperar la ecuación diferencial, haciendo que los incrementos o espaciamentos de la discretización tiendan a cero, se dice que el esquema numérico es consistente con la ecuación diferencial original. Por otro lado, si después de obtener una secuencia de soluciones numéricas discretas, la solución se aproxima a la solución exacta del

problema, entonces se dice que la solución es convergente. La convergencia y la consistencia están relacionadas con la estabilidad de la solución.

Cuando se discretiza una ecuación en diferencias finitas por medio de series de Taylor, el orden del truncamiento influye en el comportamiento de la solución numérica, dando lugar a dos tipos de errores: a) dispersión numérica y b) disipación numérica.

La disipación numérica es el resultado directo del truncamiento de términos de orden par y la dispersión numérica de orden impar. Entonces, dependiendo del orden del truncamiento podría presentarse en la solución numérica un comportamiento de disipación y/o de dispersión.

4.3 ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS EN COORDENADAS CILÍNDRICAS

Cuando se usa el Método de Diferencias Finitas (MDF), para la solución de un problema físico con una configuración con fronteras curvas, comúnmente la discretización se realiza en coordenadas cartesianas y el dominio se discretiza en una retícula rectangular. Las ecuaciones en diferencias se ajustan en los puntos de la retícula cercanos a la frontera, lo cual genera un error debido a la aproximación lineal del dominio curvo. Para evitar ese error en este trabajo se discretizan las ecuaciones en coordenadas cilíndricas por medio de una transformación del dominio, de tal forma que la discretización se realiza en coordenadas cilíndricas en una malla rectangular generándose un esquema con periodicidad en la dirección angular, θ , y continuidad en el centro del dominio cilíndrico.

El sistema de ecuaciones de frontera que gobiernan el comportamiento del problema transitorio, en términos de un potencial de velocidad relativo, φ , referido a un sistema no inercial y despreciando los términos de orden superior es,

$$\left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] = 0 \text{ en } \Omega \quad (4.2)$$

en la frontera rígida de la pared,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] = 0 \text{ en } R = a \quad (4.3)$$

y en el fondo del tanque,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = 0 \text{ en } z=0 \quad (4.4)$$

En la superficie libre del líquido se tiene la condición cinemática,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] \text{ en } z=h \quad (4.5)$$

y la condición dinámica,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = -\mu \varphi - gh + gH - R \cos \theta [a_x(t)] \text{ en } z=h \quad (4.6)$$

Este sistema de ecuaciones está referido a un sistema coordenado (R, θ, z) que tiene el origen en el centro del fondo del tanque; μ representa el término de amortiguamiento pseudo-viscoso, H la profundidad media del líquido y h la altura de ola medida a partir del fondo del tanque. En la ecuación dinámica se ha considerado únicamente la existencia de la aceleración horizontal del terreno, sin embargo, como se estableció en la sección 2.10, el análisis puede realizarse con tres solicitaciones sísmicas ortogonales e incluso un cabeceo alrededor del eje horizontal.

4.4 EFECTO DEL AMORTIGUAMIENTO PSEUDO-VISCOSO

El amortiguamiento en la solución numérica puede incluirse en forma explícita en un esquema numérico, agregando en la condición dinámica un término de disipación de segundo orden. El coeficiente de amortiguamiento numérico estará en proporción al espaciamiento de la malla por lo que no representa ningún significado físico, en cambio, el término μ en la ecuación (4.6) trata de representar una fuerza de oposición al movimiento de una partícula de fluido. El amortiguamiento utilizado depende de las características físicas del sistema, el valor de μ se tomará como:

$$\mu = 2\xi\omega_1 \quad (4.7)$$

donde $\xi=0.5\%$ y ω_1 es la frecuencia fundamental del sistema. Los resultados analíticos lineales con amortiguamiento, obtenidos en la sección 3.6, pueden ser comparados con la solución numérica lineal.

Se puede pensar que este esquema de proporcionar amortiguamiento al sistema tiene el inconveniente de que proporciona un amortiguamiento uniforme en todos los modos de vibrar y que en realidad se espera que los modos superiores se amortiguen más rápidamente. La solución analítica amortiguada obtenida en el capítulo 3 es comparable con la solución analítica con amortiguamiento ficticio tipo Rayleigh en donde se amortiguan más rápidamente los modos superiores (Hernández y Heredia, 2000).

4.5 SOLUCIÓN NUMÉRICA LINEAL

El sistema de ecuaciones de frontera (4.2) a (4.6) gobierna el comportamiento del problema transitorio de un tanque cilíndrico de almacenamiento. La discretización de las ecuaciones en coordenadas cilíndricas se realizará en forma tridimensional. La ecuación de Laplace (4.2) válida en todo el dominio del líquido presenta una singularidad en $R = 0$, por lo que la discretización en el punto central se realizará por medio del Método del Volumen Finito (MVF). En cualquier otro lugar del dominio, la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera en las zonas rígidas (4.3) y (4.4), se discretizarán por el Método de Diferencias Finitas (MDF).

El comportamiento transitorio del sistema de ecuaciones está representado por las condiciones: cinemática (4.5) y dinámica (4.6) en la superficie libre del líquido.

Con el fin de determinar la estabilidad del sistema de ecuaciones en diferencias, se comparará la solución analítica del problema lineal (capítulo 3) con la solución numérica transitoria obtenida con los esquemas: explícito (Euler), semi-implícito y Crank-Nicholson. La exactitud y convergencia del sistema numérico se obtendrá por comparación de los resultados con diferentes valores de incrementos o espaciamentos en la discretización de la malla y los resultados analíticos para diferentes valores de

amortiguamiento. Así mismo, se podrá obtener el espaciamiento de la malla que genere un menor error en la solución con un trabajo computacional no elevado.

4.5.1 MÉTODO DEL VOLUMEN FINITO (MVF)

El Método del Volumen Finito (MVF) se desarrolló como una formulación especial de diferencias finitas. La formulación consiste en integrar las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del fluido sobre un volumen (finito) de control o sub-región en el dominio de la solución; la discretización consiste en sustituir las integrales por ecuaciones en diferencias, convirtiendo las ecuaciones integrales en un sistema de ecuaciones algebraicas.

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas presenta una singularidad en el punto central del dominio, $R = 0$, por lo que se desarrolló una aproximación a la solución integrando la ecuación diferencial parcial sobre una pequeña sub-región que contenga dicha singularidad. El volumen de control se definió por la región comprendida entre los siguientes límites $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq R \leq \frac{\Delta R}{2}$ y $z = l$ (ver Fig. 4.1).

El sistema de ecuaciones de frontera (4.2) a (4.6) se discretizará tridimensionalmente en coordenadas cilíndricas en un dominio como el que se presenta en la Figura 4.1, que representa la distribución de una malla en el plano horizontal $z = l$. La malla se discretiza de $j=1,2,3, \dots, MR$, en la dirección radial; de $k=1,2,3, \dots, M\theta$, para la dirección angular y de $l=1,2,3, \dots, MZ$, para la dirección axial. Se puede observar que el punto central es un nodo común para los puntos que se encuentran alrededor de él y que todos los puntos en la línea $j=1$ son el mismo. Además, existe periodicidad en la dirección angular, es decir los puntos sobre la línea $k=1$ corresponden a los puntos en $k=M\theta$.

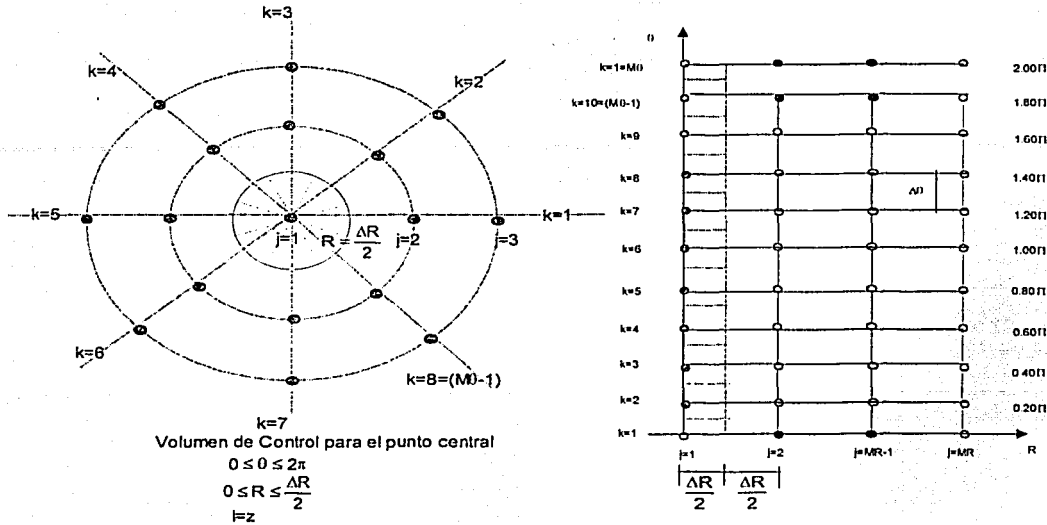


Fig. 4.1 Definición de la malla en un plano horizontal

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.5.2 DISCRETIZACIÓN EN EL PUNTO CENTRAL

La ecuación del potencial de velocidad en coordenadas cilíndricas es,

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (4.8)$$

donde la función de potencial, $\varphi = \varphi(R, \theta, z)$.

Integrando la ecuación de Laplace en el volumen de control o sub-región $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq R \leq \frac{\Delta R}{2}$, $z = l$ (Fig. 4.1) y considerando que la diferencial de volumen

tridimensional para el punto central $j = 1$ es $dv = R dR d\theta dz$, se tiene:

$$\int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] R dR d\theta + \int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] R dR d\theta + \int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] R dR d\theta = 0$$

(4.9)

que se pueden escribir como,

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \quad (4.10)$$

donde,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] R dR d\theta$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] R dR d\theta$$

$$I_3 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] R dR d\theta$$

La solución de la integral I_1 es:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] R dR d\theta = \int_0^{2\pi} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]_0^{\frac{\Delta R}{2}} d\theta = \left[\frac{\Delta R}{2} \right] \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left(\frac{\Delta R}{2}, \theta \right) d\theta$$

aproximando, $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]$ en el punto $j = \frac{\Delta R}{2}, k \neq 0$, en el plano $z = 1$, con un esquema en diferencias finitas centrales de segundo orden,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left(\frac{\Delta R}{2}, \theta \right) = \frac{1}{(\Delta R)} [U_{2,k,l} - U_{1,l}]$$

donde $U_{1,l}$ corresponde al punto central $j = 1, k = 1, z = 1$. Así,

$$I_1 = \left[\frac{\Delta R}{2} \right] \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left(\frac{\Delta R}{2}, \theta \right) d\theta = \left[\frac{\Delta R}{2} \right] \sum_{k=1}^{(M\theta-1)} \left[\frac{U_{2,k,l} - U_{1,l}}{(\Delta R)} \right] (\Delta \theta)$$

donde la integral se aproximó en " $M\theta$ " sub-volumenes.

La integral se puede aproximar como,

$$I_1 = \left[\frac{\Delta \theta}{2} \right] \sum_{k=1}^{(M\theta-1)} U_{2,k,l} - \left[\frac{\Delta \theta}{2} \right] (M\theta - 1) U_{1,l} \quad (4.11)$$

lo que significa que $U_{1,l}$ se suma $(M\theta-1)$ veces.

En la solución de la integral I_2 se debe considerar que la ecuación de Laplace en $R=0$ es independiente de la variable angular, θ , (ver Apéndice A) por lo que,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right] R dR d\theta = 0 \quad (4.12)$$

Lo anterior también se puede comprobar si se aplica el Teorema de Divergencia en coordenadas cilíndricas a la suma de las integrales I_1+I_2 (Marsden y Tromba, 1981).

La integral I_3 se puede evaluar si suponemos una función, $W(R,\theta)$, continua y diferenciable en R y θ . Expandiéndola en una serie de Taylor con respecto a R , alrededor del origen con $R=0$,

$$W(R,\theta) = W(0,0) + \frac{\partial W}{\partial R}(0,0)R + O(R^2) \quad (4.13)$$

entonces,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \int_0^{2\pi} W(R,\theta) d\theta dR &= \int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \int_0^{2\pi} RW(0,0) d\theta dR = W(0,0) \theta \Big|_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} \Big|_0^{\frac{\Delta R}{2}} \\ &= 2\pi \frac{1}{8} (\Delta R)^2 W(0,0) + O(\Delta R^3) \end{aligned} \quad (4.14)$$

como $2\pi = (M\theta - 1)\Delta\theta$, entonces,

$$\int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \int_0^{2\pi} RW(R,\theta) d\theta dR = \frac{1}{8} (\Delta R)^2 (M\theta - 1) (\Delta\theta) W(0,0) \Big|_{z=1}$$

donde $W(0,0)$ es la función evaluada en el punto $j=1, k=1$.

Así para la integral I_3 tenemos

$$I_3 = \int_0^{\frac{\Delta R}{2}} \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right] R dR d\theta$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$I_3 = \frac{1}{8} (\Delta R)^2 (M\theta - 1) (\Delta\theta) \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right]_{1,1} \quad (4.15)$$

Sustituyendo el valor de las integrales I_1 e I_3 en la expresión (4.10) obtenemos la discretización de la ecuación de Laplace en $R=0$.

$$\left[\frac{\Delta\theta}{2} \right] \sum_{k=1}^{(M\theta-1)} U_{2,k,l} - \left[\frac{\Delta\theta}{2} \right] (M\theta-1)U_{1,1,l} + \frac{1}{8} (\Delta R)^2 (M\theta-1)(\Delta\theta) \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right]_{1,1,l} = 0 \quad (4.16)$$

Nótese que si en la ecuación de Laplace (4.8), únicamente existiera dependencia radial, la discretización para el punto central sería:

$$\left[\frac{\Delta\theta}{2} \right] \sum_{k=1}^{(M\theta-1)} U_{2,k,l} - \left[\frac{\Delta\theta}{2} \right] (M\theta-1)U_{1,1,l} = 0 \quad (4.17)$$

despejando el punto central, $U_{1,1,l}$

$$U_{1,1,l} = \left[\frac{1}{(M\theta-1)} \right] \sum_{k=1}^{(M\theta-1)} U_{2,k,l} \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) puede presentar las siguientes soluciones:

a) $U_{1,1,l} = U_{2,k,l}$ para todo $k=1, 2, 3, \dots, (M\theta-1)$ si es que $\sum_{k=1}^{(M\theta-1)} U_{2,k,l} = (M\theta-1)U_{2,k,l}$, es decir, $U_{2,k,l} = U_{2,1,l} = U_{2,2,l} = U_{2,3,l} \dots = U_{2,(M\theta-1),l}$

Esta condición representa a los modos simétricos del oleaje (Fig. 4.2(a)).

b) $U_{1,1,l} = 0$ si es que $\sum_{k=1}^{(M\theta-1)} U_{2,k,l} = 0$. Condición que representa a los modos antisimétricos del oleaje (Fig. 4.2(b)).

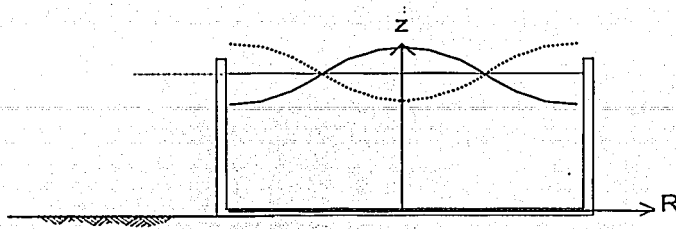
4.5.3 ESQUEMA I, EN EL DOMINIO

En las ecuaciones (4.2) a (4.4) la función de potencial de velocidad, φ , es independiente de la variable temporal, por lo que se considera este conjunto de ecuaciones como el esquema I.

En la pared del tanque la condición de frontera que se debe cumplir es la ecuación (4.3) que puede aproximarse por un esquema de tres puntos hacia atrás. (Fig. 4.3 (a)) truncado a segundo orden y con espaciamentos uniformes (Apéndice B), como:

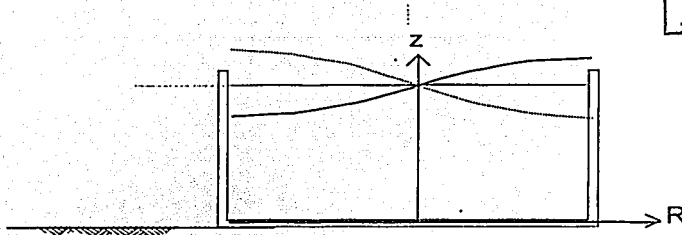
$$3U_{MR,k,l} - 4U_{(MR-1),k,l} + U_{(MR-2),k,l} = 0 \quad (4.19)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



(a) Modos simétricos

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



(b) Modos antisimétricos

Fig. 4.2 Modos de vibrar de la superficie libre de un tanque cilíndrico

para $j=MR$, $k=1,2,3, \dots (M\theta-1)$ y $l=1,2,3, \dots MZ$.

En la frontera rígida del fondo del tanque, la ecuación (4.4) se aproxima por medio de un esquema de tres puntos hacia adelante (Fig. 4.3 (b)),

$$-3U_{j,k,MZ} + 4U_{j,k,(MZ-1)} - U_{j,k,(MZ-2)} = 0 \quad (4.20)$$

para $j = 1,2,3, \dots (MR-1)$, $k=1,2,3, \dots (M\theta-1)$ y $l=MZ$.

En el dominio del líquido la ecuación de Laplace se discretiza como,

$$U_{j,k,l} \left[- \left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] \left[R_{\left(j+\frac{\Delta R}{2}\right)} + R_{\left(j-\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] - 2 \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta \theta)^2} \right] - 2 \left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] +$$

$$U_{j+1,k,l} \left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] R_{\left(j+\frac{\Delta R}{2}\right)} + U_{j-1,k,l} \left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] R_{\left(j-\frac{\Delta R}{2}\right)} +$$

$$\begin{aligned}
 & U_{j,k+1,l} \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + U_{j,k-1,l} \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + \\
 & U_{j,k,l+1} \left[\left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] + U_{j,k,l-1} \left[\left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] = 0
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

donde las variables están especificadas en la Figura 4.3.

En la ecuación (4.21) se discretizó el esquema de diferencias finitas centrales en θ y en z . En la dirección radial se prefirió discretizar, $\left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]$ en lugar de $\frac{1}{R} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right]$ ya que se conocen los valores de $R_{j+\frac{1}{2}}$ y de $R_{j-\frac{1}{2}}$ lo que genera un esquema más exacto (Thomas, 1995).

4.5.4 ESQUEMA II, EFECTO TRANSITORIO

Las condiciones de frontera (4.5) y (4.6) en la superficie libre del líquido establecen el comportamiento transitorio del problema. El esquema de discretización temporal es importante en la estabilidad de la solución del problema. No existe una conclusión general para el esquema ideal de un problema; un esquema temporal puede ser estable para un problema y divergir en otro.

Otro aspecto importante, en el esquema de discretización temporal, es el amortiguamiento numérico implícito en el esquema. En este trabajo se estudiarán los esquemas: explícito hacia adelante (Euler), semi-implícito y Crank-Nicholson.

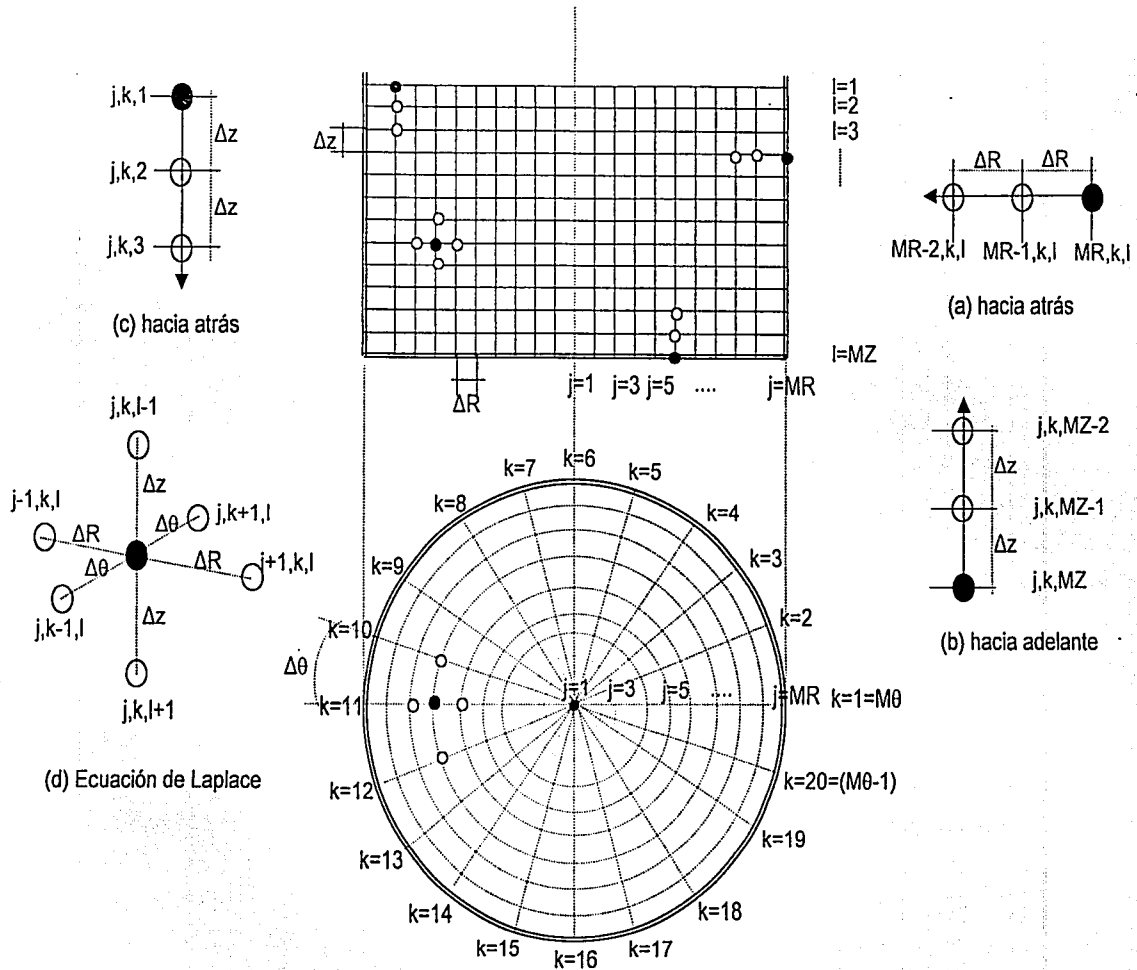


Fig. 4.3 Esquemas de discretización del dominio en diferencias finitas

TESIS CON
 FALLA DE ORDEN

4.5.4.1 ESQUEMA EXPLÍCITO (EULER HACIA ADELANTE)

La derivada parcial de una función con respecto al tiempo se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = F(x, f, f', f'', \dots) \quad (4.22)$$

donde F es función de la variable x, y de sus derivadas espaciales. Si suponemos que F es función de una sola variable espacial, el esquema temporal en diferencias finitas hacia adelante se puede escribir,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} \quad (4.23)$$

donde los subíndices representan la posición espacial y los superíndices la posición temporal, por lo que f_i^{n+1} significa la función f evaluada en el tiempo $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ en el punto de la retícula $x_i = i\Delta x$. La discretización explícita de la ecuación (4.22) en un tiempo "n", es

$$f_i^{n+1} = f_i^n + F(x, f, f', f'', \dots)^n \Delta t \quad \text{para } n=0,1,2,\dots; \text{ y } i=1,2,3,\dots i_{\text{máx}}. \quad (4.24)$$

En el esquema explícito la función F es evaluada en el paso previo de tiempo, $t=n$. Entonces, se pueden determinar los nuevos valores de "f" en $t=n+1$, conocidas las condiciones iniciales y los valores de "f" en los puntos discretos en un tiempo previo. El esquema explícito es condicionalmente estable para algunos casos e inestable para otros.

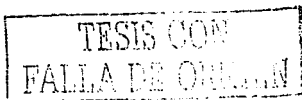
La condición de frontera dinámica discretizada en un esquema explícito con espaciamientos uniformes en las variables espaciales, es:

$$h_{j,k}^{n+1} = h_{j,k}^n + \left[\frac{\Delta t}{2(\Delta z)} \right] [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}]^n \quad (4.25)$$

para $j=1,2,3,\dots MR$, $k=1,2,3, \dots (M0-1)$, $l=1$. Y la condición cinemática,

$$U_{j,k,1}^{n+1} = U_{j,k,1}^n [1 - \mu \Delta t] - \Delta t g h_{j,k}^n + \Delta t g H - \Delta t R_j \cos \theta [a_x(t)]^n \quad (4.26)$$

válida para $j=1,2,3,\dots(MR-1)$, $k=1,2,3, \dots (M0-1)$, $l=1$.



Para los puntos en la pared del tanque, $j=MR$, y en la superficie libre del líquido $l=1$,

$$U_{MR,k,1}^{n+1} = \left[\frac{4U_{MR-1,k,1} - U_{MR-2,k,1}}{3} \right]^{n+1} \quad (4.27)$$

válida para $k=1,2,3, \dots (M\theta-1)$.

Con las ecuaciones (4.25) a (4.27) se puede predecir explícitamente los valores para la altura de ola y del potencial de velocidad, sin resolver un sistema de ecuaciones simultáneas, únicamente conociendo los valores de ambas variables en el paso previo de tiempo.

Los puntos en cualquier otra parte del dominio se discretizan a segundo orden de exactitud (Apéndice B) considerando espaciamentos uniformes en las variables espaciales como se especifica en la Figura 4.3(d).

Los puntos del dominio que se encuentran sobre la pared del tanque se discretizan hacia atrás, como

$$3U_{MR,k,1}^n - 4U_{(MR-1),k,1}^n + U_{(MR-2),k,1}^n = 0 \quad (4.28)$$

para $j=MR$, $k=1,2,3, \dots (M\theta-1)$ y $l=2,3, \dots MZ$.

En la frontera rígida del fondo del tanque la ecuación (4.4) se aproxima por medio de un esquema de tres puntos hacia adelante,

$$-3U_{1,1,MZ}^n + 4U_{1,1,(MZ-1)}^n - U_{1,1,(MZ-2)}^n = 0 \quad (4.29)$$

para $j=1$, $k=1$, $l=MZ$. Y para $j=2,3, \dots (MR-1)$, $k=1,2,3, \dots (M\theta-1)$ y $l=MZ$,

$$-3U_{j,k,MZ}^n + 4U_{j,k,(MZ-1)}^n - U_{j,k,(MZ-2)}^n = 0 \quad (4.30)$$

El punto central se discretiza con la ecuación (4.16), para $j=1$, $k=1$, $l=2$, como:

$$\left[\frac{\Delta\theta}{2} \right] \sum_{k=1}^{(M\theta-1)} U_{2,k,2}^n - \left[\frac{\Delta\theta}{2} \right] (M\theta-1)U_{1,1,2}^n + \frac{1}{8} \frac{(\Delta R)^2 (M\theta-1)(\Delta\theta)}{(\Delta z)^2} [U_{1,1,3} - 2U_{1,1,2}]^n = - \left[\frac{(\Delta R)^2 (M\theta-1)(\Delta\theta)}{8(\Delta z)^2} \right] U_{1,1,1}^n \quad (4.31)$$

y para $j=1$, $k=1$, $l=3,4, \dots (MZ-1)$,

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\left[\frac{\Delta\theta}{2} \right] \sum_{k=1}^{(M\theta-1)} U_{2,k,l}^n - \left[\frac{\Delta\theta}{2} \right] (M\theta-1) U_{1,1,l}^n + \frac{1}{8} \frac{(\Delta R)^2 (M\theta-1)(\Delta\theta)}{(\Delta z)^2} [U_{1,1,l+1} - 2U_{1,1,l} + U_{1,1,l-1}]^n = 0 \quad (4.32)$$

En el dominio del líquido la ecuación de Laplace se discretiza en $j=2,3,4,\dots(MR-1)$, $k=1,2,3, \dots (M\theta-1)$, $l=2$, como:

$$\begin{aligned} & U_{j,k,2}^n \left[- \left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] \left[R_{\left(j+\frac{\Delta R}{2}\right)} + R_{\left(j-\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] - 2 \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] - 2 \left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] + \\ & U_{j+1,k,2}^n \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] R_{\left(j+\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] + U_{j-1,k,2}^n \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] R_{\left(j-\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] + \\ & U_{j,k+1,2}^n \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + U_{j,k-1,2}^n \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + \\ & U_{j,k,3}^n \left[\left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] = -U_{j,k,1}^n \left[\left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Para los puntos $j=2,3,4,\dots(MR-1)$, $k=1,2,3, \dots (M\theta-1)$, $l=3,4,\dots(MZ-1)$, la ecuación de Laplace es,

$$\begin{aligned} & U_{j,k,l}^n \left[- \left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] \left[R_{\left(j+\frac{\Delta R}{2}\right)} + R_{\left(j-\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] - 2 \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] - 2 \left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] + \\ & U_{j+1,k,l}^n \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] R_{\left(j+\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] + U_{j-1,k,l}^n \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] R_{\left(j-\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] + \\ & U_{j,k+1,l}^n \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + U_{j,k-1,l}^n \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + \\ & U_{j,k,l+1}^n \left[\left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] + U_{j,k,l-1}^n \left[\left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.5.4.2 ESQUEMA SEMI-ÍMPLICITO

En este esquema, las derivadas en el tiempo de φ y de h se discretizan en diferencias finitas hacia adelante de la siguiente manera,

$$h_{j,k}^{n+1} = h_{j,k}^n + \left[\frac{\Delta t}{2(\Delta z)} \right] [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}]^n \quad (4.35)$$

válida para $j=1,2,3,\dots,MR$, $k=1,2,3, \dots (M0-1)$, $l=1$. Para los puntos $j=1,2,3,\dots,(MR-1)$, $k=1,2,3, \dots (M0-1)$, $l=1$, se tiene,

$$U_{j,k,1}^{n+1} = U_{j,k,1}^n [1 - \mu \Delta t] - \Delta t g h_{j,k}^{n+1} + \Delta t g H - \Delta t R_j \cos \theta [a_x(t)]^n \quad (4.36)$$

Para el punto en la pared del tanque, $j=MR$, y en la superficie libre del líquido $l=1$,

$$U_{MR,k,1}^{n+1} = \left[\frac{4U_{MR-1,k,1} - U_{MR-2,k,1}}{3} \right]^{n+1} \quad (4.37)$$

para $k=1,2,3, \dots (M0-1)$. En los demás puntos del dominio la discretización de las ecuaciones es igual que en el esquema explícito, por lo que el esfuerzo computacional es el mismo. En este esquema el término $h_{j,k}^n$ de la ecuación (4.26) se evalúa en $h_{j,k}^{n+1}$, en la ecuación (4.36). En el dominio del líquido se resuelve la ecuación de Laplace, $\nabla^2 \varphi^{n+1} = 0$, junto con las condiciones de frontera en las paredes y el fondo, es decir, se suponen conocidos los valores de $h_{j,k}^n$, para $j=1,2,3,\dots,MR$, $k=1,2,3, \dots (M0-1)$ y los valores de $U_{j,k,l}^n$, para $j=1,2,3,\dots,MR$, $k=1,2,3, \dots (M0-1)$, $l=1$; las demás ecuaciones del dominio se evalúan en $t=n+1$. Este esquema presenta muy poco amortiguamiento numérico.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.5.4.3 ESQUEMA CRANK-NICHOLSON

Los esquemas explícito y completamente implícito son de primer orden de exactitud y asimétricos en la diferenciación en el tiempo, lo cual en ocasiones genera alto contenido de amortiguamiento numérico. El esquema de Crank-Nicholson es

centrado en el tiempo y de segundo orden de exactitud. La ecuación (4.22) puede escribirse centrada en el tiempo como,

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = F_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.38)$$

donde $F_i^{n+\frac{1}{2}}$ en la función "F" evaluada en x_i el tiempo $t=n+1/2$.

Los valores de "F" en $t=n+1/2$ pueden ser aproximados por el promedio de los valores en $t=n$ y en $t=n+1$, con la regla trapezoidal de la siguiente forma,

$$F_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{F_i^n + F_i^{n+1}}{2} \quad (4.39)$$

Se puede escribir,

$$\frac{f_i^{n+1} - f_i^n}{\Delta t} = \frac{F_i^n + F_i^{n+1}}{2} \quad (4.40)$$

El esquema de Crank-Nicholson es implícito ya que para calcular los valores discretos de "f" en $t=n+1$, se necesita resolver un sistema de ecuaciones simultáneas que involucran los valores discretos de "f" en un tiempo $t=n$. Este esquema tiene la ventaja de ser incondicionalmente estable y normalmente contiene poco amortiguamiento numérico.

En la condición dinámica en la superficie libre del líquido (4.6),

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = -\mu \varphi - gh + gH - R \cos \theta [a_x(t)] \quad \text{en } z=h \quad (4.41)$$

llamando a,

$$[DER] = -\mu \varphi - gh + gH - R \cos \theta [a_x(t)] \quad (4.42)$$

Tomando la derivada de (4.41) centrada en el tiempo,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]^{n+\frac{1}{2}} = \frac{U_{j,k,l}^{n+1} - U_{j,k,l}^n}{\Delta t} \quad (4.43)$$

Por la regla trapezoidal,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [DER^n + DER^{n+1}] \quad (4.44)$$

TESIS CON
FALLA DE CALIDAD

igualando (4.43) con (4.44),

$$\frac{U_{j,k,l}^{n+1} - U_{j,k,l}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [\text{DER}^n + \text{DER}^{n+1}] \quad (4.45)$$

sustituyendo la ecuación (4.42) en (4.45), tomando términos comunes y despejando

$h_{j,k}^{n+1}$ se tiene,

$$h_{j,k}^{n+1} = \left[\frac{2}{\Delta t g} \right] \left[U_{j,k,l}^n \left[1 - \frac{\Delta t \mu}{2} \right] - U_{j,k,l}^{n+1} \left[1 + \frac{\Delta t \mu}{2} \right] \right] - h_{j,k}^n + 2H - \frac{2R_j}{g} \cos \theta \left[\frac{a_x(t)^n + a_x(t)^{n+1}}{2} \right] \quad (4.46)$$

La condición cinemática (4.5) se puede escribir como,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] = \left[\frac{1}{2(\Delta z)} \right] [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}] \quad (4.47)$$

llamando a,

$$[\text{DER}] = \left[\frac{1}{2(\Delta z)} \right] [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}] \quad (4.48)$$

Por el método de Crank-Nicholson la ecuación (4.47) se puede escribir,

$$\frac{h_{j,k}^{n+1} - h_{j,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [\text{DER}^n + \text{DER}^{n+1}] \quad (4.49)$$

sustituyendo la ecuación (4.48) en (4.49), tomando términos comunes y despejando

$h_{j,k}^{n+1}$, se tiene:

$$h_{j,k}^{n+1} = \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta z)} \right] [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}]^n + \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta z)} \right] [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}]^{n+1} + h_{j,k}^n \quad (4.50)$$

Igualando (4.46) con (4.50), y tomando términos comunes,

$$U_{j,k,1}^{n+1} \left[- \left[\frac{2}{\Delta t g} \right] \left[1 + \frac{\Delta t \mu}{2} \right] - \left[\frac{3(\Delta t)}{4(\Delta z)} \right] \right] + U_{j,k,2}^{n+1} \left[\frac{\Delta t}{\Delta z} \right] + U_{j,k,3}^{n+1} \left[- \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta z)} \right] \right] = \\ U_{j,k,1}^n \left[- \left[\frac{2}{\Delta t g} \right] \left[1 - \frac{\Delta t \mu}{2} \right] + \left[\frac{3(\Delta t)}{4(\Delta z)} \right] \right] + U_{j,k,2}^n \left[- \left[\frac{\Delta t}{\Delta z} \right] \right] + U_{j,k,3}^n \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta z)} \right] +$$

$$+ 2h_{j,k}^n - 2H + \frac{2R_j}{g} \cos \theta [a_x(t)]^{n+1/2} \quad (4.51)$$

La ecuación (4.51) es válida para $j=1,2,3,\dots(MR-1)$, $k=1,2,3, \dots (M\theta-1)$, $l=1$.

Los puntos del dominio que se encuentran sobre la pared del tanque se discretizan hacia atrás, para $j = MR$, $k = 1,2,3, \dots (M\theta-1)$ y $l = 1, 2,3, \dots MZ$, como:

$$3U_{MR,k,l}^{n+1} - 4U_{(MR-1),k,l}^{n+1} + U_{(MR-2),k,l}^{n+1} = 0 \quad (4.52)$$

En la frontera rígida del fondo del tanque la ecuación (4.4) se aproxima por medio de un esquema de tres puntos hacia adelante, para $j = 1$, $k=1$, $l = MZ$:

$$-3U_{1,1,MZ}^{n+1} + 4U_{1,1,(MZ-1)}^{n+1} - U_{1,1,(MZ-2)}^{n+1} = 0 \quad (4.53)$$

y para $j = 2,3,\dots(MR-1)$, $k=1,2,3, \dots (M\theta-1)$ y $l = MZ$,

$$-3U_{j,k,MZ}^{n+1} + 4U_{j,k,(MZ-1)}^{n+1} - U_{j,k,(MZ-2)}^{n+1} = 0 \quad (4.54)$$

El punto central se discretiza para $j=1$, $k=1$, $l = 2,3,4,\dots(MZ-1)$, con:

$$\left[\frac{\Delta\theta}{2} \right] \sum_{k=1}^{(M\theta-1)} U_{2,k,l}^{n+1} - \left[\frac{\Delta\theta}{2} \right] (M\theta-1) U_{1,1,l}^{n+1} + \frac{1}{8} \frac{(\Delta R)^2 (M\theta-1) (\Delta\theta)}{(\Delta z)^2} [U_{1,1,l+1} - 2U_{1,1,l} + U_{1,1,l-1}]^{n+1} = 0 \quad (4.55)$$

Para los puntos $j = 2,3,4,\dots(MR-1)$, $k=1,2,3, \dots (M\theta-1)$, $l = 2, 3, 4,\dots(MZ-1)$, la ecuación de Laplace es,

$$\begin{aligned} & U_{j,k,l}^{n+1} \left[- \left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] \left[R_{\left(j+\frac{\Delta R}{2}\right)} + R_{\left(j-\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] - 2 \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] - 2 \left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] + \\ & U_{j+1,k,l}^{n+1} \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] R_{\left(j+\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] + U_{j-1,k,l}^n \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] R_{\left(j-\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] + \\ & U_{j,k+1,l}^{n+1} \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + U_{j,k-1,l}^n \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + \\ & U_{j,k,l+1}^{n+1} \left[\left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] + U_{j,k,l-1}^n \left[\left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.56)$$

TESIS CON
FALLA DE COPIADO

Las ecuaciones (4.51) a (4.56) forman un sistema de ecuaciones simultáneas, que se resuelven para $t=n+1$, una vez conocidos los valores para $t=n$.

4.6 DESCRIPCIÓN DE LAS MALLAS USADAS

La solución numérica está limitada por el tamaño del sistema de ecuaciones simultáneas que se tendrán que resolver durante el proceso de cálculo. Con el fin de determinar el tamaño de la malla que represente adecuadamente la solución del problema transitorio y la estabilidad del esquema temporal, primeramente se calculó el oleaje en la pared del tanque con la malla M1 que tiene espaciamientos uniformemente distribuidos y cuyos parámetros se especifican en la Figura 4.4.

Con el fin de indagar sobre una aproximación de la solución numérica que modele el comportamiento, físico del problema y a la vez se optimice el trabajo computacional, se utilizará la malla M2 (Figura 4.5) con espaciamientos no uniformes en las direcciones vertical y radial. La discretización de la variable temporal es la misma para la malla M1 y la M2; sin embargo, la discretización de las variables espaciales es diferente. Para la malla M1 se utilizó la discretización de las ecuaciones con espaciamientos uniformemente distribuidos y para la malla M2 con espaciamientos no uniformes, ambos sistemas de discretización se deducen en el Apéndice B.

4.7 MÉTODO DEL GRADIENTE BICONJUGADO

En los últimos veinticinco años se han venido desarrollando técnicas especiales para manipular matrices con pocos elementos no nulos, es decir, matrices dispersas. Una alternativa para la solución de sistemas de ecuaciones lineales simultáneas son los métodos iterativos. La idea básica de los métodos iterativos consiste en llegar a la solución del problema mediante una sucesión de soluciones que converja a aquella. Estos métodos no proporcionan teóricamente la solución exacta aunque sí permiten acercarse a ella tanto como se desee. Las técnicas iterativas rara vez se emplean para

resolver sistemas de ecuaciones lineales de pequeña dimensión pues el tiempo y el número de iteraciones requerido para lograr una precisión suficiente en la solución exceden a los de los métodos directos.

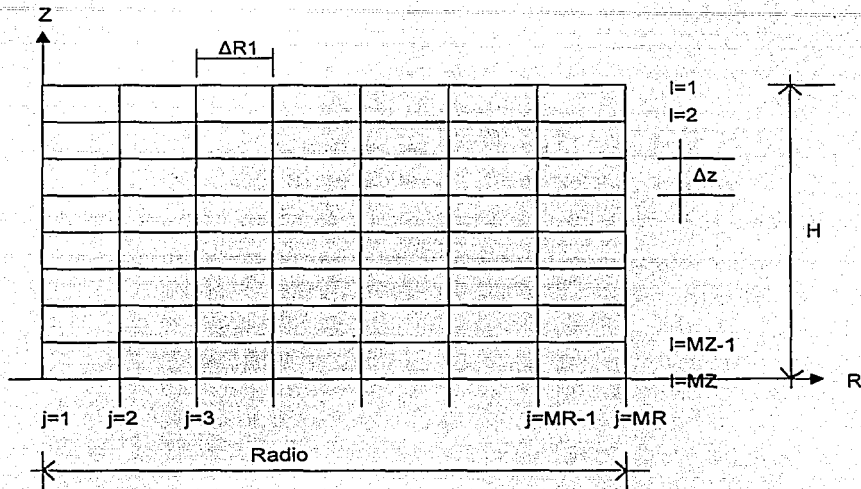


Fig. 4.4 Características de discretización de la Malla M1

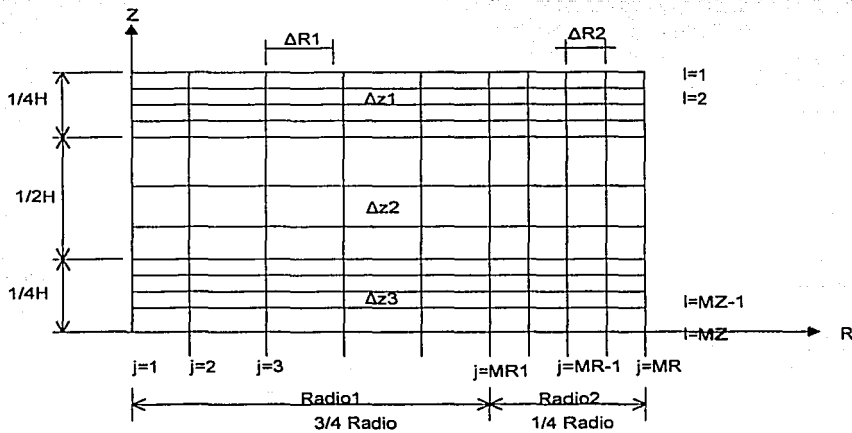


Fig. 4.5 Características de discretización de la Malla M2

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

El método del Gradiente Conjugado es una técnica derivada de los métodos de optimización que permite resolver sistemas de ecuaciones lineales simultaneas de orden $N \times N$ del tipo:

$$[A] \cdot x = b \quad (4.57)$$

Este método tiene la ventaja que permite resolver fácilmente sistemas de ecuaciones dispersas de gran tamaño únicamente multiplicando la matriz $[A]$ por un vector o por la multiplicación de su transpuesta y de un vector. El almacenamiento de la matriz puede hacerse por medio de la técnica de indización (Press W. H., et al.,1992). El algoritmo del Gradiente Conjugado permite resolver únicamente sistemas de ecuaciones cuando la matriz $[A]$ es simétrica y positiva definida. Se basa en la idea de minimizar la función,

$$f(x) = \frac{1}{2} x \cdot [A] \cdot x - b \cdot x \quad (4.58)$$

esta función es minimizada cuando su gradiente

$$\nabla f = [A \cdot x - b] \quad (4.59)$$

es cero, lo cual es equivalente a la ecuación (4.57). La minimización se obtiene generando una sucesión de búsquedas direccionales P_k y mejorar el minimizador x_k . En cada iteración se encuentra una cantidad α_k que minimiza a $f(x_k + \alpha_k P_k)$ y x_{k+1} es igual al nuevo punto $x_k + \alpha_k P_k$. Los vectores P_k y x_k se forman de manera que el vector x_{k+1} es siempre el mínimo de f en todo el espacio vectorial. Después de N interacciones se obtiene el valor mínimo en todo el espacio vectorial, i.e., la solución del sistema (4.57). El método del Gradiente Biconjugado permite resolver sistemas de ecuaciones lineales no necesariamente positivas definidas o simétricas (Press, et. al.,1992; Conde,1990; De la fuente, 1998).

En este trabajo se emplea en la solución del sistema de ecuaciones lineales simultáneas el método del Gradiente Biconjugado con almacenamiento óptimo de la matriz por medio de indización (Press, et al.,1992).

4.8 APLICACIÓN

El esquema numérico se aplicará al tanque cilíndrico del ejemplo de la sección 3.6, con diámetro igual a 11m y altura media del líquido de 2.75m, excitado en su base por los movimientos sísmicos previamente descritos. Se calcula la altura de ola máxima y la historia de oleaje en la pared del tanque.

4.8.1 ESQUEMA EXPLÍCITO

Para determinar la estabilidad de los esquemas temporales de discretización se analizó primeramente el esquema explícito de Euler, excitando el sistema con el registro SCT19. EW y utilizando la malla M1. En la Figura 4.6 se observa la historia de altura de ola en la pared del tanque del ejemplo de aplicación con un valor de amortiguamiento $\xi=0\%$. Se compara la solución numérica con la analítica, observándose que la solución numérica es inestable y diverge notoriamente de la analítica después de 11 segundos.

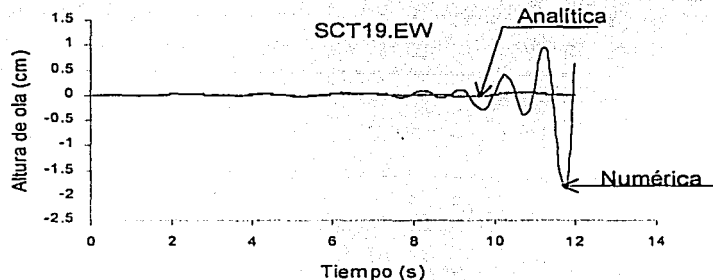


Fig. 4.6 Comparación de soluciones analítica vs numérica; método explícito

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.8.2 ESQUEMA CRANK-NICHOLSON

En este análisis se toma como base el registro SCT19.NS y la distribución nodal de la malla M1. La respuesta numérica se calcula sin amortiguamiento y se compara con la analítica no amortiguada, considerando los primeros 20 modos de vibrar. En la Tabla 4.1 se muestran las características de espaciamento del registro, Δt ; los espaciamientos en la malla: radial, ΔR , angular $\Delta\theta$, y vertical Δz ; la dimensión del sistema de ecuaciones resuelto, N; la altura de ola máxima absoluta numérica y analítica, así como el porcentaje de error entre ellas.

Tabla 4.1 Resultados de oleaje y características de discretización, malla M1, $\xi=0\%$

| Movimiento | Incrementos | | | | N | Ola máxima (cm) | | error % |
|------------|----------------|----------------|----------------------|----------------|------|-----------------|-----------|---------|
| | Δt (s) | ΔR (m) | $\Delta\theta$ (rad) | Δz (m) | | Numérica | Analítica | |
| SCT19.NS | 0.04 | 0.9157 | 0.6283 | 0.5500 | 360 | 78.25 | 120.74 | 54 |
| SCT19.NS | 0.04 | 0.5500 | 0.6283 | 0.3056 | 1000 | 99.57 | 120.74 | 21 |
| SCT19.NS | 0.04 | 0.5500 | 0.6383 | 0.1964 | 1500 | 105.50 | 120.74 | 14 |
| SCT19.NS | 0.04 | 0.3667 | 0.6283 | 0.1964 | 2250 | 112.10 | 120.74 | 8 |
| SCT20.NS | 0.02 | 0.3667 | 0.6383 | 0.1964 | 2250 | 118.32 | 120.74 | 2 |

En la Tabla 4.1 se muestra que para un valor de $N=360$ ($MR=6$, $M\theta=11$, $MZ=6$), el error entre soluciones es del 54%, por lo que se aumentó dicho valor a $N=1000$ ($MR=10$, $M\theta=11$, $MZ=10$), disminuyendo los espaciamientos radiales y verticales, dando un error del 21%. Para determinar el efecto del espaciamento vertical se incremento el número de nodos en esa dirección ($MR=10$, $M\theta=11$, $MZ=15$) con lo que el error entre soluciones disminuyó a un 14%. El efecto de la discretización radial se observa al disminuir dicho espaciamento ($MR=15$, $M\theta=11$, $MZ=15$) con lo cual error es del 8%. El efecto del Δt en la respuesta, se observa al mantener el mismo tamaño de la malla ($MR=15$, $M\theta=11$, $MZ=15$) y excitando el sistema con el registro SCT20.NS que tiene un espaciamento de $\Delta t = 0.02s$ ($NP=9002$) disminuyendo el error entre respuestas, a tan sólo el 2%. El tiempo de cómputo para obtener respuesta con el registro SCT20.NS se duplica con respecto al obtenido con el SCT19.NS, lo cual debe ser considerado en la solución no lineal del problema.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por lo anterior, se indagó la respuesta del sistema con la malla M2 que tiene espaciamientos nodales no uniformes, procurando mantener el mínimo trabajo computacional dado por la dimensión del sistema de ecuaciones simultáneas resueltas cada Δt , los resultados se registran en la Tabla 4.2.

Tabla 4.2 Resultados de oleaje y características de discretización, malla M2, $\xi=0\%$

| Movimiento | Incrementos | | | | | | N | Ola máxima (cm) | | error % |
|------------|--------------------|--------------------|-------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------|-----------------|----------|---------|
| | $\Delta R1$ (m) | $\Delta R2$ (m) | $\Delta\theta$ (rad) | $\Delta z1$ (m) | $\Delta z2$ (m) | $\Delta z3$ (m) | | N | Numérica | |
| SCT19.NS | 0.4278 | 0.275 | 0.6283 | 0.1719 | 0.2292 | 0.1719 | 2250 | 118.10 | 120.74 | 2 |
| SCT19.NS | 0.4278 | 0.275 | 0.3142 | 0.1719 | 0.2292 | 0.1719 | 4500 | 118.10 | 120.74 | 2 |
| SCT19.NS | 0.2775 | 0.275 | 0.6283 | 0.1719 | 0.2292 | 0.1719 | 3000 | 118.10 | 120.74 | 2 |
| SCT20.NS | 0.4278 | 0.275 | 0.628 | 0.1719 | 0.2292 | 0.1719 | 2250 | 118.36 | 120.74 | 2 |

En la Tabla 4.2 se observa que para $N=2250$ ($MR=15$, $M\theta=11$, $MZ=15$), con los espaciamientos indicados, el error entre la respuesta numérica y la analítica es del 2%. El efecto del espaciamiento angular, $\Delta\theta$, que no se consideró en la Tabla 4.1, se analizó al aumentar el número de puntos en la malla en esa dirección a $M\theta=21$, incrementando la dimensión del tamaño de sistema de ecuaciones a $N=4500$; se observa que el error entre soluciones no se modifica. Como no hay un efecto importante en la respuesta debido al incremento de $M\theta$, se toma el mismo valor con el que se inició el análisis, modificando ahora el tamaño de espaciamiento en la dirección radial ($MR=20$, $M\theta=11$, $MZ=15$), teniéndose que el error entre las respuestas es del 2%, es decir, tampoco hay una influencia importante en la respuesta numérica. El efecto del Δt en la respuesta, se observa al mantener el mismo tamaño de la malla inicial ($MR=15$, $M\theta=11$, $MZ=15$) y excitando el sistema con el registro SCT20.NS, aumentando muy poco la respuesta numérica sin que disminuya el error en la respuesta. Por lo anterior se puede considerar que el espaciamiento de la malla M2 ($MR=15$, $M\theta=11$, $MZ=15$, $N=2500$) genera mejores resultados que la malla M1, con el mismo trabajo computacional.

El valor del amortiguamiento es importante en la solución del problema transitorio, por lo que se realizó un análisis similar al anterior considerando un valor de amortiguamiento, $\xi=0.5\%$. Los resultados se observan en la Tabla 4.3. La respuesta

numérica amortiguada para el registro SCT19.NS es menos exacta que la no amortiguada ya que el error entre las respuestas es del orden del 5%.

Tabla 4.3 Resultados de oleaje y características de discretización, malla M2, $\xi=0.5\%$

| Movimiento | Incrementos | | | | | | N | Ola máxima (cm) | | error % |
|------------|--------------------|--------------------|--------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|------|-----------------|-----------|---------|
| | $\Delta R1$ (m) | $\Delta R2$ (m) | $\Delta \theta$ (rad) | $\Delta z1$ (m) | $\Delta z2$ (m) | $\Delta z3$ (m) | | Numérica | Analítica | |
| SCT19.NS | 0.4278 | 0.275 | 0.6283 | 0.1719 | 0.2292 | 0.1719 | 2250 | 97.27 | 103.36 | 6 |
| SCT19.NS | 0.4278 | 0.275 | 0.3142 | 0.1719 | 0.2292 | 0.1719 | 4500 | 98.44 | 103.36 | 5 |
| SCT19.NS | 0.2775 | 0.275 | 0.6283 | 0.1719 | 0.2292 | 0.1719 | 3000 | 98.59 | 103.36 | 5 |
| SCT20.NS | 0.4278 | 0.275 | 0.628 | 0.1719 | 0.2292 | 0.1719 | 2250 | 98.45 | 103.36 | 5 |

En la Tabla 4.4 se resumen las respuestas numéricas para el tanque del ejemplo de aplicación con un valor de amortiguamiento con respecto al crítico del $\xi=0\%$, para los registros sísmicos analizados en la sección 3.4. Los resultados de oleaje absoluto máximo se calcularon con un valor de $N=3000$ y con los espaciamientos registrados en la Tabla 4.3. En la Tabla 4.4 se observa que para el registro SCT19.EW la solución numérica no amortiguada tiene un error del 13% con respecto a la analítica con 20 modos de vibrar. La solución numérica para el registro CALETA.EW presenta un error del 12%, para TACY.EW del 14% y para el movimiento sísmico registrado en CA.NS del 17%. La influencia del Δt en la respuesta numérica no amortiguada, se indagará considerando la misma distribución nodal en la malla M2 y tomando como excitación el registro SCT.EW, los resultados se resumen en la Tabla 4.5.

En la Tabla 4.5 se observa que aún cuando el valor del espaciamiento del registro sísmico, Δt , sea pequeño y por tanto el número de puntos del registro (NP) aumente, el error en la respuesta numérica no se modifica. Para el registro SCT.EW no hay una influencia importante del Δt en la respuesta.

En la Tabla 4.6 se resume el error entre la respuesta numérica y analítica, con un valor de amortiguamiento de $\xi=0.5\%$, para los movimientos sísmicos de la sección 3.4. Se puede observar que el error en la solución numérica es del mismo orden que los registrados en la Tabla 4.4.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tabla 4.4 Altura de ola máxima, N=3000, $\xi=0\%$

| Movimiento | Ola máxima (cm), $\xi=0\%$ | | |
|------------|----------------------------|----------|---------|
| | Analítica | Numérica | error % |
| CU.NS | 24.73 | 26.94 | 9 |
| CU.EW | 34.40 | 32.19 | 6 |
| VIV.NS | 29.65 | 30.85 | 4 |
| VIV.EW | 32.88 | 32.67 | 1 |
| SCT19.NS | 120.74 | 118.10 | 2 |
| SCT19.EW | 235.97 | 205.28 | 13 |
| CA.NS | 350.89 | 291.32 | 17 |
| CA.EW | 571.16 | 546.37 | 4 |
| TACY.NS | 39.68 | 40.55 | 2 |
| TACY.EW | 27.58 | 23.63 | 14 |
| CALETA.NS | 25.54 | 26.90 | 5 |
| CALETA.EW | 28.81 | 25.25 | 12 |

Tabla 4.5 Altura de ola máxima, registro SCT.EW, N=3000, $\xi=0\%$

| Movimiento | Δt (s) | NP | Ola máxima (cm), $\xi=0\%$ | | error % |
|------------|----------------|-------|----------------------------|----------|---------|
| | | | Analítica | Numérica | |
| SCT19.EW | 0.04 | 4503 | 235.97 | 205.28 | 13 |
| SCT20.EW | 0.02 | 9005 | 235.97 | 205.16 | 13 |
| SCT30.EW | 0.01 | 18009 | 235.97 | 205.07 | 13 |

Tabla 4.6 Altura de ola máxima, N=3000, $\xi=0.5\%$

| Movimiento | Ola máxima (cm), $\xi=0.5\%$ | | |
|------------|------------------------------|----------|---------|
| | Analítica | Numérica | error % |
| CU.NS | 21.91 | 22.77 | 4 |
| CU.EW | 28.76 | 28.45 | 1 |
| VIV.NS | 25.09 | 27.22 | 8 |
| VIV.EW | 27.74 | 25.81 | 7 |
| SCT19.NS | 103.36 | 98.59 | 5 |
| SCT19.EW | 167.86 | 144.22 | 14 |
| CA.NS | 254.50 | 221.50 | 13 |
| CA.EW | 443.86 | 376.77 | 15 |
| TACY.NS | 35.00 | 36.78 | 5 |
| TACY.EW | 23.85 | 22.46 | 6 |
| CALETA.NS | 22.20 | 23.18 | 4 |
| CALETA.EW | 27.18 | 23.73 | 13 |

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.8.3 ALTURA DE OLA RELATIVA

Como se mencionó en la sección 3.2, el desplazamiento vertical del líquido representado por la altura de ola, está compuesto por un movimiento de cuerpo rígido y por un desplazamiento relativo, que para fines de diseño es el que realmente interesa. En la Tabla 4.7 se resume la altura de ola relativa con un valor de amortiguamiento con respecto al crítico de $\xi=0.5\%$, calculada con un valor de $N=6000$ ($M_R=20$, $M_0=21$, $M_Z=15$), correspondiente a los espaciamentos en la malla M2: $\Delta R_1=0.44305$, $\Delta R_2=0.1375$, $\Delta \theta=0.3142$, $\Delta z_1=0.1799$, $\Delta z_2=0.2292$ y $\Delta z_3=0.1799$. Se observa que el porcentaje de error entre la solución analítica, considerando la influencia de los primeros 20 modos de vibrar, y la numérica es menor del 5%, excepto solamente en el caso del registro TACY.EW con un error del 11%. Se puede concluir, con base en los resultados de la Tabla 4.7, que el modelo numérico predice adecuadamente la respuesta. En la Figura 4.7 se compara la historia de altura de ola relativa, obtenida con la solución analítica y la numérica, utilizando el método de Crank-Nicholson, con los valores de la malla M2 anteriormente descritos. Como se muestra en la Figura 4.7, el modelo numérico propuesto es adecuado para calcular el oleaje lineal en el tanque cilíndrico cuando es sometido a un movimiento sísmico en su base.

Tabla 4.7 Oleaje relativo, $N=6000$, malla M2, $\xi=0.5\%$

| Movimiento | Altura de ola máxima, (cm) | | error % |
|------------|----------------------------|----------|---------|
| | Analítica | Numérica | |
| CU.NS | 23.91 | 22.83 | 4 |
| CU.EW | 40.50 | 39.99 | 1 |
| VIV.NS | 36.31 | 35.88 | 1 |
| VIV.EW | 45.36 | 45.78 | 1 |
| SCT.NS | 125.80 | 119.36 | 5 |
| SCT.EW | 215.41 | 211.11 | 2 |
| CA.NS | 267.56 | 260.68 | 3 |
| CA.EW | 450.88 | 438.63 | 3 |
| TACY.NS | 38.85 | 37.36 | 4 |
| TACY.EW | 32.82 | 36.51 | 11 |
| CALETA.NS | 78.68 | 82.63 | 5 |
| CALETA.EW | 76.86 | 81.08 | 5 |

4.8.4 ESQUEMA SEMI-IMPLÍCITO

Para determinar la estabilidad del esquema semi-implícito, se calcularon las alturas de ola usando la malla M2 y N=6000, en la pared del tanque del ejemplo de aplicación. En la Tabla 4.8 se compara la altura de ola máxima relativa obtenida en forma numérica, con la analítica considerando 20 modos de vibrar, para cada movimiento sísmico y con un valor de amortiguamientos, ξ , de 0.5%. Se observa que la respuesta numérica máxima es comparable con la analítica. Los resultados muestran que el esquema de discretización es adecuado para calcular la respuesta numérica del problema transitorio y que el esquema semi-implícito es estable para todos los registros sísmicos estudiados.

Tabla 4.8 Alturas de ola máxima relativa, esquema semi-implícito, $\xi=0.5\%$

| Movimiento | Altura de ola máxima, (cm) | | error % |
|------------|----------------------------|----------|---------|
| | Analítica | Numérica | |
| CU.NS | 23.91 | 22.69 | 5 |
| CU.EW | 40.50 | 40.50 | 0 |
| VIV.NS | 36.31 | 35.89 | 1 |
| VIV.EW | 45.36 | 46.01 | 1 |
| SCT.NS | 125.80 | 118.20 | 6 |
| SCT.EW | 215.41 | 212.30 | 1 |
| CA.NS | 267.56 | 263.25 | 2 |
| CA.EW | 450.88 | 451.11 | 1 |
| TACY.NS | 38.85 | 36.72 | 6 |
| TACY.EW | 32.82 | 36.55 | 11 |
| CALETA.NS | 78.68 | 82.36 | 4 |
| CALETA.EW | 76.86 | 81.07 | 5 |

4.9 CÁLCULO DE PRESIONES, FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS DE VOLTEO

La presión hidráulica, P_h , que ejerce el líquido sobre la pared del tanque se obtiene de la ecuación de Bernoulli (3.37), despreciando los términos de orden superior,

$$\frac{P_h}{\rho} = - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] - \mu \varphi - gz + gH - R \cos \theta [a_x(t)] \quad (4.60)$$

donde ρ es la densidad del líquido considerada como $\rho = 0.1019 \frac{ts^2}{m^4}$ para el tanque del ejemplo de aplicación (sección 3.4).

La derivada $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{j,k,l}^n$ se puede discretizar con un esquema de diferencias finitas

centrales,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{j,k,l}^n = \frac{U_{j,k,l}^{n+1} - U_{j,k,l}^{n-1}}{2(\Delta t)} \quad (4.61)$$

que es equivalente al esquema Crank-Nicholson ya que ambos son centrados en el tiempo. Para calcular esta derivada será necesario conocer los valores de φ en los intervalos $(n-1)$ y $(n+1)$, así:

$$P_{h,j,k,l} = -\rho \left[\frac{U_{j,k,l}^{n+1} - U_{j,k,l}^{n-1}}{2(\Delta t)} \right] - \rho \mu U_{j,k,l}^n - \rho g h_{j,k}^n + \rho g H - \rho R_j \cos \theta [a_x(t)]^n \quad (4.62)$$

La fuerza cortante total por unidad de longitud, F_p , para un instante t se calcula integrando las presiones, P_h , en las paredes del tanque, como

$$F_p(t) = \int_0^H a \pi P_h(a, z, t) dz \quad (4.63)$$

donde P_h se obtiene de la ecuación (4.62), H es la altura media del líquido y a es el radio del tanque. El momento de volteo, $M(t)$, en la base del tanque se calcula con,

$$M(t) = \int_0^H a \pi z P_h(a, z, t) dz \quad (4.64)$$

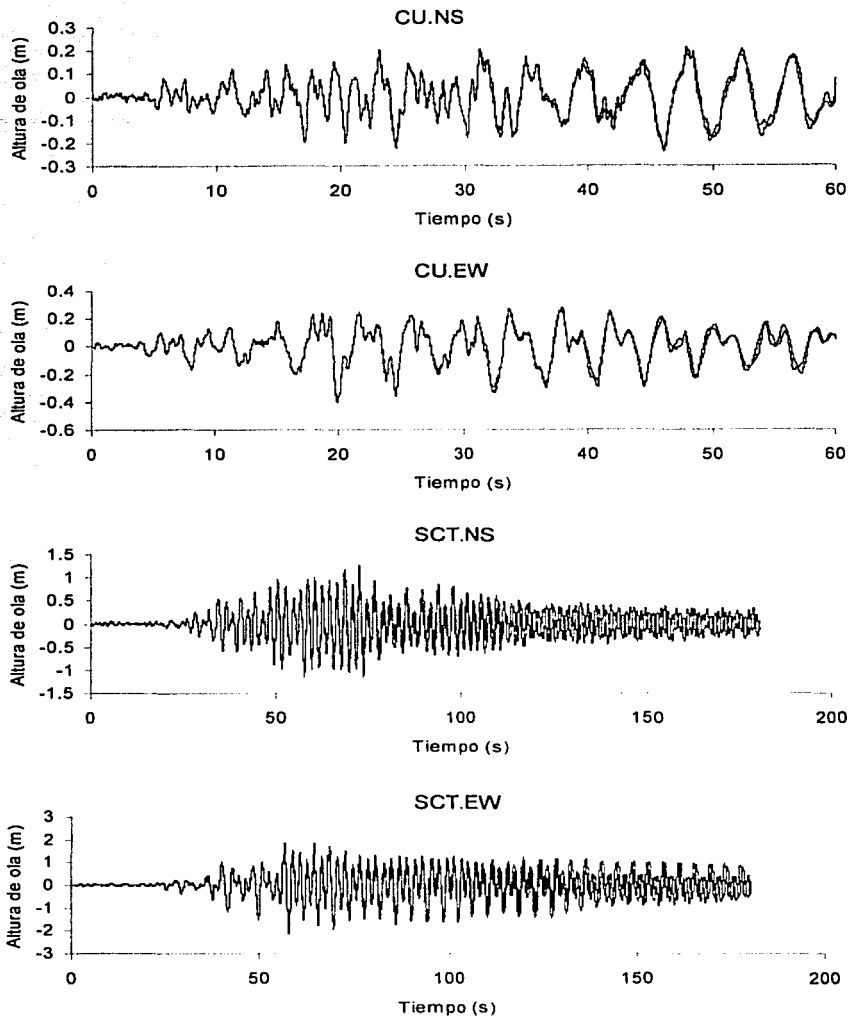


Fig. 4.7 Comparación de historia de altura de ola relativa en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\xi=0.5\%$)

—solución numérica —solución analítica

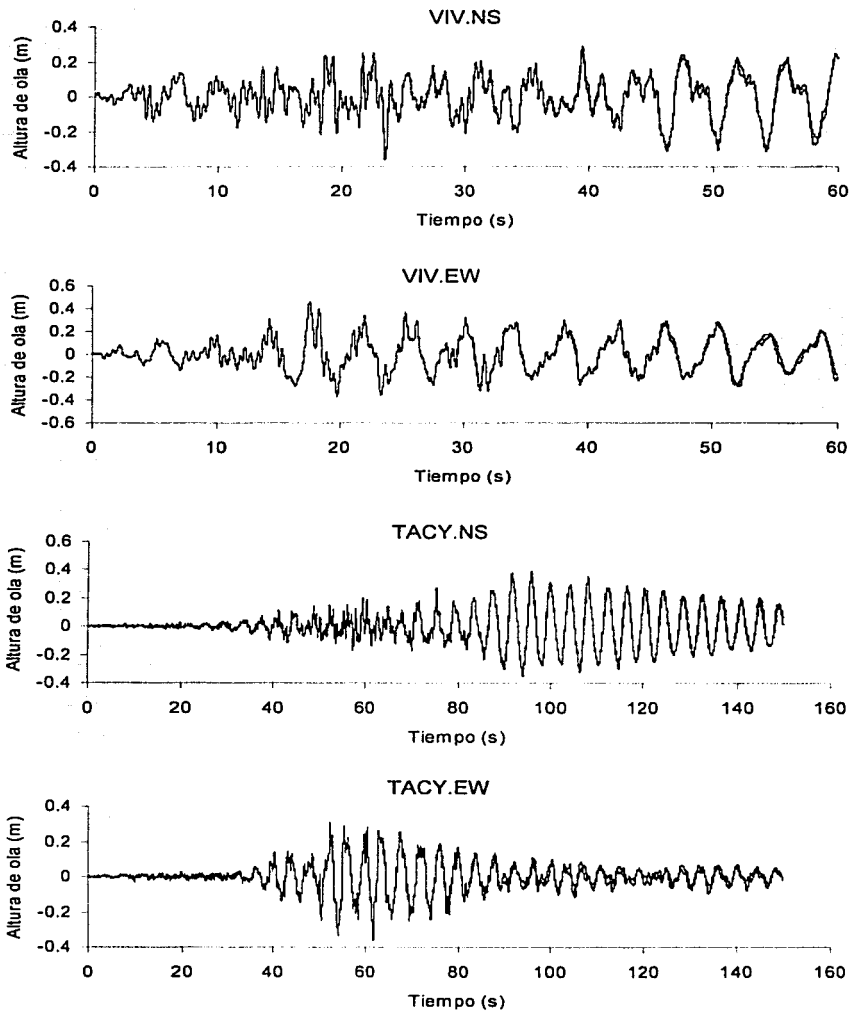


Fig. 4.7 Comparación de historia de altura de ola relativa en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\xi=0.5\%$); continuación
 — solución numérica — solución analítica

TESIS CON
 FALLA DE ORDEN

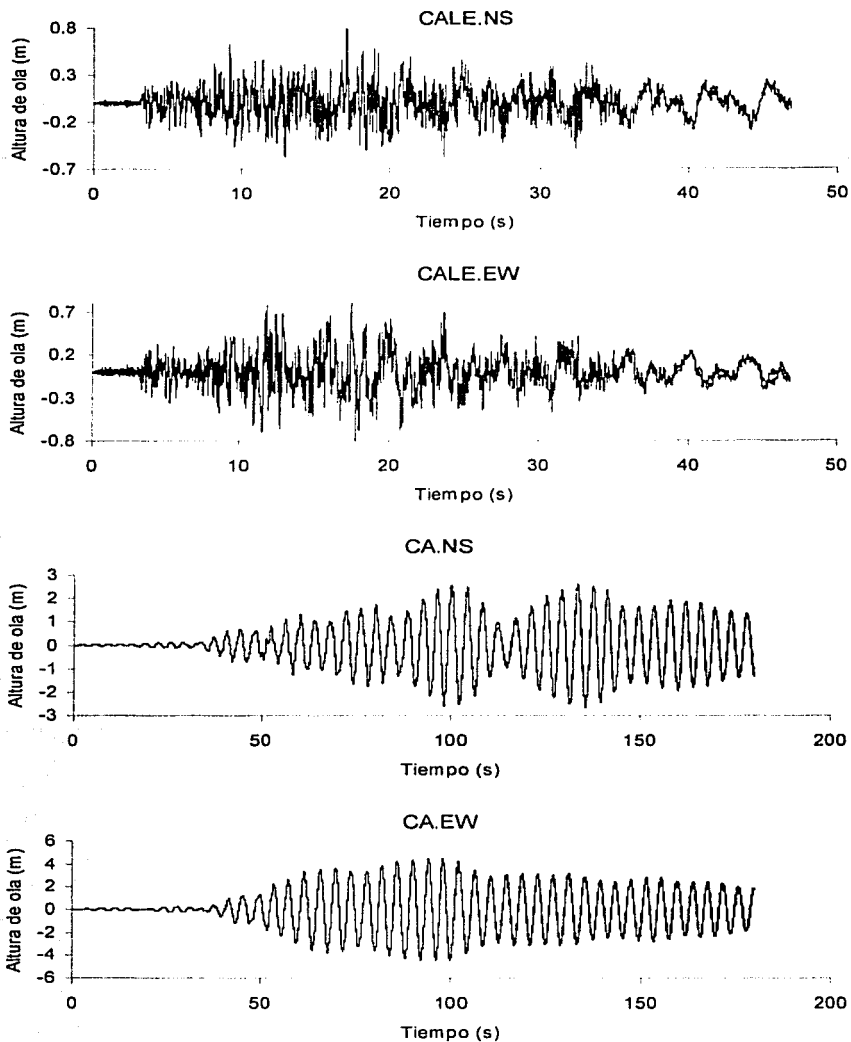


Fig. 4.7 Comparación de historia de altura de ola relativa en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\xi=0.5\%$); continuación
 — solución numérica — solución analítica

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Las integrales anteriores se pueden discretizar por la regla trapezoidal, por ejemplo con respecto a la base del tanque, la integral $I = \int z P_h(a, z, t) dz$ se puede calcular para los primeros cuatro puntos (Figura 4.8) sobre la pared como:

$$I = \left[\frac{P_h(1) + P_h(2)}{2} \right] [\Delta z] \left[\frac{\Delta z}{2} \right] + \left[\frac{P_h(2) + P_h(3)}{2} \right] [\Delta z] \left[\frac{3\Delta z}{2} \right] + \left[\frac{P_h(3) + P_h(4)}{2} \right] [\Delta z] \left[\frac{5\Delta z}{2} \right]$$

ó bien:

$$I = \left[\frac{P_h(1)}{4} + P_h(2) + 2P_h(3) + \frac{5P_h(4)}{4} \right] [\Delta z]^2 \quad (4.65)$$

Se calcularon las fuerzas cortantes máximas y los momentos de volteo en la base del tanque del ejemplo de aplicación con el esquema Crank-Nicholson y los parámetros de la malla M2 registrados en la Tabla 4.7. En la Tabla 4.9 se observa el error entre las fuerzas cortantes máximas, obtenidas con la solución analítica y la numérica, para los registros sísmicos descritos en la sección 3.4. En la Tabla 4.10 se resumen los momentos de volteo máximos, analíticos y numéricos, así como el porcentaje de error entra ambas soluciones. Como puede verse, el modelo numérico predice la solución lineal del problema con un margen de error medio del 5%.

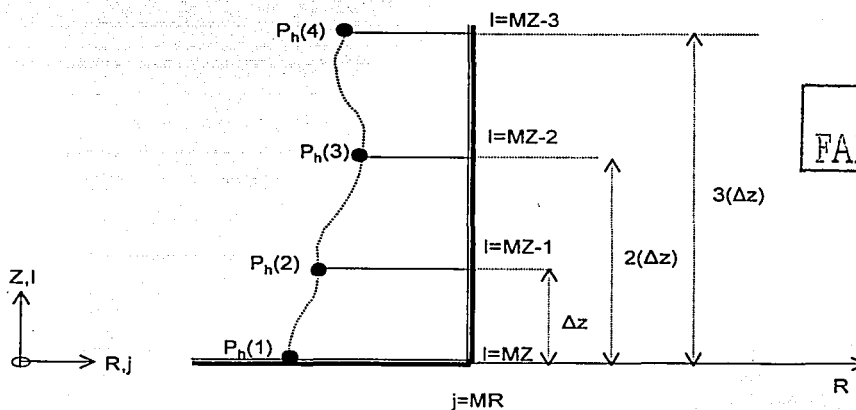


Fig. 4.8 Distribución de presiones sobre la pared del tanque

Tabla 4.9 Fuerza cortante máxima, ejemplo de aplicación, $\xi=0.5\%$

| Movimiento | Fuerza cortante máxima (t) | | error % |
|------------|----------------------------|----------|---------|
| | analítica | numérica | |
| CU.NS | 8.1781 | 7.7886 | 5 |
| CU.EW | 10.2400 | 10.3439 | 1 |
| VIV.NS | 8.5102 | 8.5335 | 2 |
| VIV.EW | 11.0430 | 11.0258 | 1 |
| SCT19.NS | 25.5321 | 24.3099 | 5 |
| SCT19.EW | 39.9811 | 39.1193 | 2 |
| TACY.NS | 13.8521 | 13.3001 | 4 |
| TACY.EW | 8.4073 | 9.4464 | 12 |
| CALETA.NS | 14.3245 | 15.0811 | 5 |
| CALETA.EW | 16.8087 | 17.7145 | 5 |

Tabla 4.10 Momentos de volteo máximos, ejemplo de aplicación, $\xi=0.5\%$

| Movimiento | Momento de volteo (t m) | | error % |
|------------|-------------------------|----------|---------|
| | analítico | numérico | |
| CU.NS | 11.9379 | 11.3694 | 5 |
| CU.EW | 15.0675 | 14.9085 | 1 |
| VIV.NS | 13.1502 | 12.8923 | 2 |
| VIV.EW | 15.0232 | 15.3503 | 3 |
| SCT19.NS | 42.6203 | 40.5908 | 5 |
| SCT19.EW | 70.6283 | 64.2434 | 2 |
| TACY.NS | 20.4342 | 19.6481 | 4 |
| TACY.EW | 15.2317 | 13.7221 | 10 |
| CALETA.NS | 19.1428 | 19.9404 | 4 |
| CALETA.EW | 22.5941 | 24.0363 | 6 |

4.10 RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se ha determinado el esquema en Diferencias Finitas para el sistema de ecuaciones de frontera que definen el problema transitorio amortiguado de un tanque cilíndrico rígido excitado en su base por un movimiento sísmico. La respuesta numérica se ha validado con respecto a la solución exacta, obteniéndose un error numérico satisfactorio. Las ecuaciones en diferencias se resolvieron en coordenadas cilíndricas en un dominio tridimensional, sin despreciar el punto central. Las ecuaciones discretizadas para el punto central se dedujeron por el Método del Volumen Finito y las

ecuaciones para el resto del dominio por expansiones de un polinomio en series de Taylor. Las ecuaciones en diferencias se dedujeron para espaciamentos de los puntos nodales en una malla uniforme, M1, y para otra con espaciamentos no uniformes, M2, (Apéndice B). La estabilidad del sistema de ecuaciones en diferencias finitas se verificó discretizando la variable temporal por los esquemas explícito de Euler, semi-implícito y Crank-Nicholson. El esquema de Euler (explícito hacia adelante) es inestable para todos los registros sísmicos estudiados. Los esquemas semi-implícito y de Crank-Nicholson son estables para todos los movimientos sísmicos estudiados. La exactitud del sistema numérico se obtiene por comparación de los resultados obtenidos con diferentes valores de espaciamentos en la malla y los obtenidos con la solución analítica calculada en el capítulo 3.

Después de realizar un gran número de aproximaciones en el tamaño de las discretizaciones en la malla, se concluye que las características óptimas de discretización consisten en tres zonas en la dirección vertical: la zona superior y la inferior deben de ser de $\frac{1}{4}$ de la altura media del líquido, en ambas se discretizan cinco espaciamentos. La zona central, con tamaño de $\frac{1}{2}$ de la profundidad media, en donde también se discretizan cinco espaciamentos lo cual da un valor de $MZ=15$. En la dirección radial la malla debe tener dos zonas, una próxima a la pared con un tamaño de $\frac{1}{4}$ del radio del tanque y con cinco espaciamentos y la otra con una dimensión de $\frac{3}{4}$ de la longitud del radio (Fig. 4.5). Se observó que el número total de espaciamentos en la dirección radial debe ser de $MR=20$ y en la dirección angular $M\theta=21$. El número total de puntos en la malla es de $N=6000$, lo que significa que se debe resolver un sistema de ecuaciones simultáneas de orden 6000×6000 para cada Δt . Cabe mencionar que la matriz a resolver no es simétrica, lo que implica un especial cuidado en la solución del sistema de ecuaciones lineales. Para la solución del sistema de ecuaciones lineales simultáneas, en este trabajo se utilizó el método del Gradiente Biconjugado con un almacenamiento óptimo por medio de índices.

La altura de ola relativa, las presiones hidráulicas y fuerzas cortantes en la pared del tanque, así como los momentos de volteo con respecto a un punto inmediatamente arriba del fondo del tanque, son adecuadamente calculados con el modelo numérico propuesto, por lo que los resultados así obtenidos son considerados como correctos. La

solución numérica lineal obtenida en este capítulo se comparará con la solución no lineal que se obtendrá en el capítulo 5.

CAPÍTULO 5

SOLUCIÓN NUMÉRICA NO LINEAL

5.1 INTRODUCCIÓN

La no linealidad está gobernada por el carácter del movimiento del líquido contenido en el tanque de almacenamiento. Abramson (1966) dividió los efectos no lineales en tres clases: (1) aquellos que son consecuencia de la geometría del tanque, es decir, los que dependen de la verticalidad de las paredes o de las estructuras internas, (2) aquellos que involucran diferentes formas en el comportamiento del líquido producidas por el acoplamiento o inestabilidad de varios modos laterales del oleaje, y (3) aquellos que son consecuencia de la amplitud de la excitación y de la respuesta; éstos últimos son los estudiados en este trabajo.

El problema hidrodinámico es no lineal en dos aspectos: (1) la forma de la superficie libre del líquido no es conocida a priori; (2) existen términos de segundo orden en las condiciones de frontera en la superficie libre.

Una de las principales características del problema hidrodinámico no lineal es que la superficie libre del líquido cambia de posición en cada incremento de tiempo por lo que si se resuelve el problema en forma numérica, la malla de discretización del dominio debe ajustarse a la nueva configuración en cada incremento, es decir, debe realizarse un remallado.

Los efectos hidrodinámicos no lineales han sido resueltos, principalmente, en tanques cuadrados excitados horizontalmente en su base con un movimiento armónico con pequeña amplitud y corta duración. Los registros sísmicos normalmente presentan altas intensidades ($> 0.2g$), tienen un periodo de duración de 20 a 60 segundos o mayor y el movimiento que presentan, estrictamente, no es armónico. En el caso del Valle de México los movimientos sísmicos registrados presentan altos periodos dominantes y gran duración.

En este trabajo se establece un procedimiento para la solución del problema transitorio no lineal de un tanque de almacenamiento cilíndrico sometido a una

aceleración sísmica horizontal en su base. El sistema de ecuaciones no lineales que gobierna el comportamiento del problema en el dominio físico se mapea a un nuevo dominio computacional mediante un cambio de variable. El nuevo sistema de ecuaciones no lineales tiene un mayor número de términos que en el sistema original, pero permite resolver el problema sin que sea necesario realizar un remallado en cada instante. El sistema de ecuaciones no lineales se discretiza por medio del método de Diferencias Finitas en coordenadas cilíndricas y en forma tridimensional. Se emplean los métodos de discretización semi-implícito y de Crank-Nicholson, que resultaron adecuados en el capítulo 4 para la solución lineal del problema. La excitación horizontal aplicada en la base del tanque es de dos tipos: sísmica y armónica. Los resultados numéricos no lineales de altura de ola, fuerzas cortantes y momentos de volteo en la pared del tanque se comparan con los obtenidos en forma numérica lineal en el capítulo 4.

5.2 PROCEDIMIENTO DE SOLUCIÓN

El dominio matemático en el que es válido el sistema de ecuaciones que gobierna el comportamiento hidrodinámico no lineal, va cambiando durante la solución del problema debido al oleaje en la superficie libre del líquido, es decir, dicha frontera no permanece plana en cada instante del problema transitorio. Como estrategia de solución que evite realizar un remallado en cada instante se propone el siguiente cambio de variable:

$$\xi = R, \eta = \theta, \sigma = \frac{z}{h(R, \theta, t)} \quad (5.1)$$

donde $h(R, \theta, t)$ es la elevación de la superficie libre del líquido medida desde el fondo del tanque y z es la variable independiente en el problema físico. Mediante (5.1) se mapea el dominio físico a un dominio computacional donde ahora z es la variable independiente (Figura 5.1).

La ventaja de usar este cambio de variable es que la nueva variable dependiente, σ , siempre vale la unidad en la superficie libre del líquido. Así, el dominio

físico desconocido se transforma a un dominio computacional definido, que consiste de un paralelepípedo de dimensiones "a", 2π , y 1. Sin embargo, el sistema de ecuaciones de frontera en el dominio computacional tiene un número de elementos considerablemente mayor.

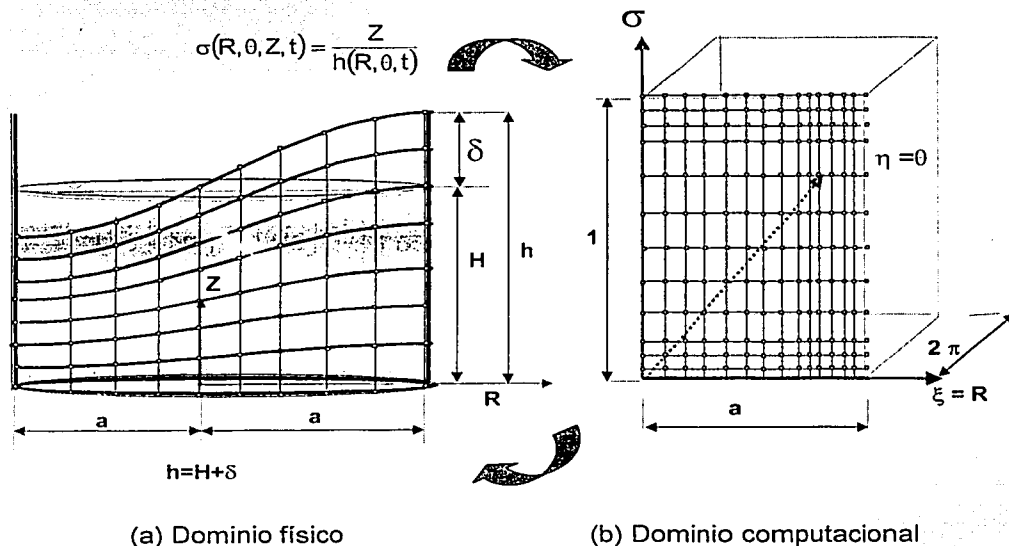


Fig. 5.1 Dominio físico y dominio computacional

A continuación se presentan las ecuaciones en el dominio computacional; el desarrollo de estas ecuaciones se desglosa en detalle en el Apéndice C. Sea $\tilde{\varphi}(\xi, \eta, \sigma, t)$ el nuevo potencial en el dominio computacional, $\tilde{\varphi}(\xi, \eta, \sigma, t) = \varphi(R, \theta, z, t)$, se tiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

Para el potencial de velocidad equivalente, $\tilde{\varphi}$,

$$\left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial R^2} + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^2} \right] - \sigma \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\left[\frac{\partial^2 h}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] \right] +$$

$$+ 2\sigma \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] + \sigma^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] +$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] \left[\frac{1}{h^2} \right] - 2\sigma \left[\frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - 2\sigma \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = 0 \quad \text{en } \Omega' \quad (5.2)$$

Para el fondo del tanque:

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] = 0 \quad \text{en } \sigma = 0 \quad (5.3)$$

En la pared:

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] = \sigma \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] \quad \text{en } R = a \quad (5.4)$$

Condición dinámica equivalente:

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right] = -gh + gH - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] - \mu \tilde{\varphi} - R \cos \theta [a_x(t)] \quad \text{en } \sigma = 1 \quad (5.5)$$

Condición cinemática equivalente:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \quad \text{en } \sigma = 1 \quad (5.6)$$

Las ecuaciones (5.2) a (5.6) forman el nuevo sistema de ecuaciones de frontera en el dominio computacional. El sistema de ecuaciones no lineales se resolverá utilizando el Método de Diferencias Finitas en coordenadas cilíndricas, de tal manera que la topología del problema y la discretización nodal se realizará como se estableció en el capítulo 4.

5.3 DISIPACIÓN NUMÉRICA

Quando se discretiza una ecuación en diferencias finitas por medio de series de Taylor, el orden del truncamiento influye en el comportamiento de la solución numérica, dando lugar a dos tipos de errores: a) dispersión numérica y b) disipación numérica. La disipación numérica es el resultado directo del truncamiento de términos de orden par y la dispersión numérica de orden impar. Entonces, dependiendo del orden del

truncamiento en el esquema podría presentarse en la solución numérica un comportamiento de disipación o de dispersión.

En las ecuaciones de Navier-Stokes (2.58), el término que representa el coeficiente de viscosidad, μ , está multiplicado por un término en segunda derivada

$\left(\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} \right)$. Este término representa el comportamiento disipativo de la viscosidad del

fluido. Como la disipación numérica está relacionada con el truncamiento de un término de orden par, entonces por analogía un comportamiento en la respuesta con disipación numérica también se conoce como con viscosidad artificial o amortiguamiento numérico. Así, los esquemas en Diferencias Finitas pueden presentar un amortiguamiento numérico implícito del algoritmo. En ocasiones para mejorar la estabilidad de la solución numérica es posible incluir esta disipación en forma externa o explícita, lo que vendría a representar un amortiguamiento ficticio en el sistema, dicho amortiguamiento podría agregarse al sistema en términos que involucran derivadas de orden par.

Cuando se trata de resolver una ecuación diferencial parcial no lineal, en ocasiones, se utiliza disipación numérica para hacer estable un esquema que es inestable (p. ej. Lax-Wendroff) o para hacer más estable un esquema neutralmente estable (p. ej. Cranck-Nicholson). La viscosidad artificial compromete la exactitud de la solución numérica pero algunas veces mejora la estabilidad del esquema. Cuando la solución se encuentra cerca de la inestabilidad, el redondeo numérico o algunos modos "parásitos" pueden causar oscilaciones no deseadas en la solución. Una forma de evitar este problema es agregar disipación numérica en el esquema. Cuando se desea estabilizar un esquema la cantidad de disipación agregada debe ser tan pequeña que no modifique la convergencia de la solución.

Existen varios métodos para agregar disipación numérica al esquema. Uno de los más populares es el conocido como "upwind" que trata de simular numéricamente la dirección de propagación de un flujo en las curvas características.

En la ecuación de onda o de advención:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + c \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] = 0 \quad (5.7)$$

donde c es conocido como celeridad y representa la velocidad de propagación de la onda, el comportamiento de la solución dependerá de cómo se discretice el término

$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]$, que en forma general se puede discretizar como:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] = \frac{(1 + \beta)h_{j+1} - 2\beta h_j - (1 - \beta)h_{j-1}}{2(\Delta x)} \quad (5.8)$$

de tal manera que se pueden tener los siguientes casos:

1. Si $\beta = 0$, entonces

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] = \frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{2(\Delta x)} \quad (5.9)$$

que corresponde a un esquema centrado y que presenta estabilidad neutra.

2. Si $\beta = +1$, entonces

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] = \frac{h_{j+1} - h_j}{(\Delta x)} \quad (5.10)$$

que corresponde a un esquema hacia adelante y que es inestable.

3. Si $\beta = -1$, entonces

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] = \frac{h_j - h_{j-1}}{(\Delta x)} \quad (5.11)$$

que corresponde a un esquema hacia atrás y que es estable.

Reescribiendo la ecuación (5.8) se tiene,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] = \frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{2(\Delta x)} + \frac{\beta h_{j+1} - 2\beta h_j + \beta h_{j-1}}{2(\Delta x)} \quad (5.12)$$

ó bien,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] = \frac{h_{j+1} - h_{j-1}}{2(\Delta x)} + \beta \left[\frac{\Delta x}{2} \right] \left[\frac{h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}}{(\Delta x)^2} \right] \quad (5.13)$$

En la ecuación (5.13), los términos del lado derecho representan el esquema centrado y truncado a segundo orden de $\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right]$ y de $\beta \left[\frac{\Delta x}{2} \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]$, respectivamente.

Para garantizar un esquema estable se toma $\beta = -1$, por lo que la ecuación (5.13) se puede escribir,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] = \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] - \left[\frac{\Delta x}{2} \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \quad (5.14)$$

Sustituyendo (5.14) en (5.7), tenemos

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + c \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] - |c| \left[\frac{\Delta x}{2} \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (5.15)$$

El término $\left[\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right]$ es el responsable de la viscosidad artificial o disipación numérica. Sustituyendo la ecuación (5.13) en la ecuación (5.7) considerando un valor de $\beta = -1$,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \frac{c(\Delta x)}{2(\Delta x)^2} [h_{j+1} - h_{j-1}] - |c| \left[\frac{\Delta x}{2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \right] [h_{j+1} - 2h_j + h_{j-1}] = 0 \quad (5.16)$$

ordenando,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] - \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \right] \left[c \left[\frac{\Delta x}{2} \right] + |c| \left[\frac{\Delta x}{2} \right] \right] h_{j-1} + \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \right] \left[c \left[\frac{\Delta x}{2} \right] - |c| \left[\frac{\Delta x}{2} \right] \right] h_{j+1} + 2|c| \left[\frac{\Delta x}{2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \right] h_j = 0 \quad (5.17)$$

llamando a: $\lambda = |c| \left[\frac{\Delta x}{2} \right]$,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] - \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \right] \left[c \left[\frac{\Delta x}{2} \right] + \lambda \right] h_{j-1} + \left[\frac{1}{(\Delta x)^2} \right] \left[c \left[\frac{\Delta x}{2} \right] - \lambda \right] h_{j+1} + \left[\frac{2\lambda}{(\Delta x)^2} \right] h_j = 0 \quad (5.18)$$

En la ecuación (5.18), el término "c" puede tomar los siguientes valores:

a) Si $c > 0$, entonces:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \frac{c}{(\Delta x)} [h_j - h_{j-1}] = 0 \quad (5.19a)$$

b) Si $c < 0$, entonces:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \frac{c}{(\Delta x)} [h_{j+1} - h_j] = 0 \quad (5.19b)$$

La ecuación (5.19a) indica que si la onda se propaga hacia la derecha ($c > 0$) la derivada se discretiza hacia atrás; por otro lado, la ecuación (5.19b) indica que cuando la ola se propaga hacia la izquierda ($c < 0$) el esquema correspondiente es hacia adelante. Este esquema de agregar viscosidad artificial o disipación numérica al sistema se conoce como "upwind".

El esquema "upwind" tiene la desventaja que es de primer orden de exactitud y también altamente difusivo, por lo que se recomienda agregar disipación por medio de un esquema de orden superior. Para estabilizar un esquema normalmente se emplea una fracción del amortiguamiento numérico.

Existe en la literatura una gran cantidad de métodos para estabilizar un esquema numérico o para agregarle explícitamente viscosidad artificial (Hirt, 1968; Harlow y Amsden, 1971; Boris y Book, 1993; Warming y Hyett, 1974; Hirt y Cook, 1974; Briggs, 1975; Sharif y Busnaina, 1988). Algunos de ellos son superiores en cuanto a exactitud al esquema "upwind". Agregar una gran cantidad de amortiguamiento a un esquema pone en riesgo la exactitud de la solución; el esquema puede ser estable pero el alto contenido de amortiguamiento es equivalente a agregar masa al sistema o bien "estirar" el dominio, lo que contradice la hipótesis de incompresibilidad del líquido.

5.4 ESQUEMA SEMI-IMPLÍCITO

La condición cinemática equivalente en la superficie libre del líquido, $\sigma = 1$, se discretiza en la variable temporal en forma explícita hacia adelante, tal que,

$$h_{j,k}^{n+1} = h_{j,k}^n + \Delta t \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^n \left[\frac{1}{h_{j,k}^n} \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right]^n - \Delta t \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^n \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^n - \Delta t \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^n \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^n \right. \quad (5.20)$$

en donde el desarrollo en diferencias finitas para cada punto en la malla se realiza a segundo orden como se muestra en el Apéndice D.

La condición dinámica equivalente en la superficie libre del líquido, $\sigma = 1$, se calcula con:

$$U_{j,k,1}^{n+1} = U_{j,k,1}^n [1 - \mu \Delta t] - \Delta t g h_{j,k}^{n+1} + \Delta t g H - \Delta t R_j \cos \theta [a_x(t)]^n - \left[\frac{\Delta t}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 \right]^n -$$

$$- \left[\frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 \right]^n + \left[\frac{\Delta t}{2} \left[\frac{1}{h_{j,k}^{n+1}} \right]^2 \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \right]^n \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] \right]^{n+1} \right] \quad (5.21)$$

En este esquema el valor de $h_{j,k}^{n+1}$ calculado en la ecuación (5.20) se sustituye en la ecuación (5.21).

En el dominio computacional, Ω' , la función potencial de velocidad equivalente se discretiza como,

$$\left[\frac{1}{R_j} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^2} \right] \right]^n + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^n [2F2_{j,k}^{n+1} - F1_{j,k}^{n+1}]_{\sigma} + \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right]^n [\sigma^2 F2_{j,k}^{n+1} + F3_{j,k}^{n+1}] -$$

$$- \left[\frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \right]^n [2F4_{j,k}^{n+1}]_{\sigma} - \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \right]^n [2F5_{j,k}^{n+1}]_{\sigma} = 0 \quad \text{en } \Omega' \quad (5.22)$$

donde se conocen los valores en $t = n+1$ de,

$$F1_{j,k}^{n+1} = \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] \right] \right]^{n+1} \quad (5.23 a)$$

$$F2_{j,k}^{n+1} = \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] \right] \right]^{n+1} \quad (5.23b)$$

$$F3_{j,k}^{n+1} = \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right]^{n+1} \quad (5.23c)$$

$$F4_{j,k}^{n+1} = \left[\frac{1}{h_{j,k}} \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] \right]^{n+1} \quad (5.23d)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$F5_{j,k}^{n+1} = \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^{n+1} \quad (5.23e)$$

5.4.1 APLICACIÓN, MÉTODO SEMI-IMPLÍCITO

Resolviendo el problema transitorio en el dominio computacional por medio del esquema semi-implícito, se calculó la historia de la altura de ola en el tanque del ejemplo de aplicación de la sección 4.7.3. El tanque tiene un diámetro de 11m y altura media del líquido, H, de 2.75m. En la Figura 5.2 se muestra la historia del oleaje en la pared del tanque, excitado en su base con el movimiento sísmico registrado en CU.NS, con un valor de amortiguamiento con respecto al crítico, $\xi=0.5\%$, y utilizando una malla con topología igual a la M2. Debido a la divergencia en las iteraciones en la variable temporal, la solución numérica se bloquea en el instante $t=54.72s$, a partir del cual ya no es posible obtener la respuesta numérica. Cuando se utiliza este método con los movimientos sísmicos restantes, definidos en el capítulo 3, la simulación numérica se bloquea antes de los primeros 20s de la simulación. Por lo que el método semi-implícito no se considera adecuado para obtener la solución numérica del problema.

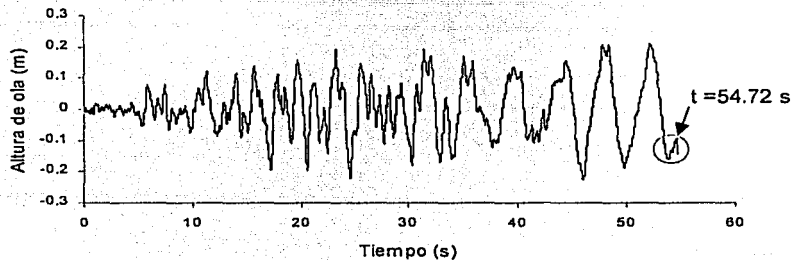


Fig. 5.2 Oleaje en la pared del tanque de aplicación, método semi-implícito, CU.NS

5.5 ESQUEMA SEMI-IMPLÍCITO CON DISIPACIÓN NUMÉRICA

Como se indicó en la sección 5.4.1 el esquema semi-implícito es inestable para todos los movimientos sísmicos descritos en el capítulo 3. Posiblemente, esta inestabilidad se deba a errores de redondeo, por lo que al método semi-implícito se le agregó disipación numérica o viscosidad artificial por medio del método "upwind".

La ecuación cinemática equivalente (5.6) en la superficie libre del líquido se puede escribir,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] = 0 \quad \text{en } \sigma = 1 \quad (5.24)$$

como las velocidades de propagación de la ola en las direcciones radial y angular son:

$v_R = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]$ y $v_\theta = \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]$, respectivamente, entonces la ecuación (5.24) se puede escribir como,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + v_R \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + v_\theta \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] = 0 \quad (5.25)$$

Por analogía con la ecuación (5.15) la expresión (5.25) se puede escribir,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + v_R \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - |v_R| \left[\frac{\Delta R}{2} \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial R^2} \right] + v_\theta \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - |v_\theta| \left[\frac{\Delta \theta}{2} \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] = 0 \quad \text{en } \sigma = 1 \quad (5.26)$$

ó en forma equivalente,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - D_R \left[\frac{\partial^2 h}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - D_\theta \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] = 0 \quad \text{en } \sigma = 1 \quad (5.27)$$

donde los términos D_R y D_θ están definidos como:

$$D_R = \ell \left[\frac{\Delta R}{2} \right] \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \quad (5.28 a)$$

$$D_0 = \ell \left[\frac{\Delta \theta}{2} \right] \left[\frac{1}{R^2} \right] \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \quad (5.28b)$$

En las ecuaciones anteriores $0 \leq \ell \leq 1$ para tomar en cuenta una fracción del amortiguamiento numérico; si $\ell = 1$ el esquema se conoce como "upwind". Se puede ver que el término que representa la viscosidad artificial depende del tamaño de la discretización de la malla (ΔR y $\Delta \theta$) y no del problema físico en sí, lo que representa una desventaja. La viscosidad agregada externamente debe sumarse a la que implícitamente tiene el sistema debido a la naturaleza de la discretización, lo que hace difícil su control.

En el esquema semi-implícito con disipación numérica, la ecuación (5.20) se sustituye por la (5.27) discretizada en la variable temporal explícitamente hacia adelante,

$$h_{j,k}^{n+1} = h_{j,k}^n + \Delta t \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^n \left[\frac{1}{h_{j,k}^n} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right]^n - \Delta t \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^n \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^n + \Delta t D_R \left[\frac{\partial^2 h}{\partial R^2} \right]^n - \Delta t \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^n \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^n + \Delta t D_0 \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right]^n \quad (5.29)$$

Las ecuaciones (5.22) a (5.23) permanecen sin cambio.

5.5.1 APLICACIÓN, MÉTODO SEMI-IMPLÍCITO CON DISIPACIÓN NUMÉRICA

En la Figura 5.3 se compara la historia de oleaje en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5m$, $H=2.75m$) obtenida numéricamente con las ecuaciones linealizadas (sección 4.7.3) y la obtenida por medio de un esquema semi-implícito con viscosidad artificial con $\ell=0.8$. Esta fracción del amortiguamiento numérico es alta y podría comprometer la exactitud de la solución, sin embargo, es la única que estabiliza

el esquema para una excitación como la registrada en CU.NS. Para los otros movimientos sísmicos no fue posible encontrar un valor para el parámetro ℓ que hiciera estable la solución.

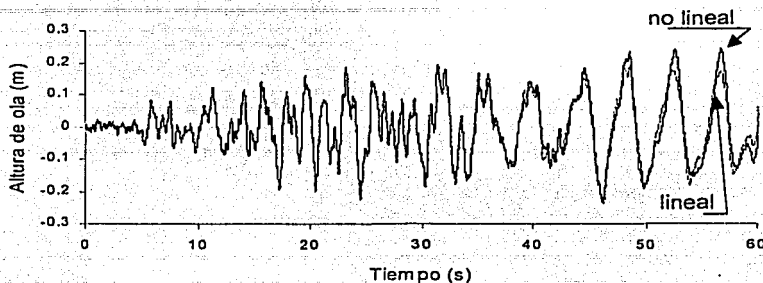


Fig. 5.3 Historia de oleaje, método semi-implícito con disipación numérica, $\ell = 0.80$, CU.NS

5.6 ESQUEMA CRANK-NICHOLSON

El esquema Crank-Nicholson, especificado en la sección 4.5.4.3, se aplica a las ecuaciones de frontera válidas en $\sigma = 1$ del dominio computacional. El esquema de Crank-Nicholson es centrado en el espacio y en el tiempo lo que lo hace incondicionalmente estable, además de que tiene muy poco amortiguamiento numérico implícito.

En la condición dinámica equivalente,

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \right]^2 \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] - \mu \tilde{\varphi} - gh + gH - R \cos \theta [a_x(t)] \quad (5.30)$$

llamando a,

$$[DER] = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{2} \right] \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \right]^2 \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] -$$

$$-\mu\tilde{\varphi} - gh + gH - R \cos \theta [a_x(t)] \quad (5.31)$$

Aplicando el método de Crank-Nicholson especificado por la ecuación (4.45),

$$\frac{U_{j,k,1}^{n+1} - U_{j,k,1}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} [DER^n + DER^{n+1}] \quad (5.32)$$

la ecuación (5.30) se puede escribir como,

$$\begin{aligned} & \left[U_{j,k,1} \left[1 + \frac{\mu\Delta t}{2} \right] + \left[\frac{\Delta t}{4} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{\Delta t}{4} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 - \right. \\ & \left. - \left[\frac{\Delta t}{4} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{g\Delta t}{2} \right] h_{j,k} \right]^{n+1} = \right. \\ & \left[U_{j,k,1} \left[1 - \frac{\mu\Delta t}{2} \right] - \left[\frac{\Delta t}{4} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 - \left[\frac{\Delta t}{4} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\Delta t}{4} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 - \left[\frac{g\Delta t}{2} \right] h_{j,k} \right]^{n+1} + [\Delta t g H] - \Delta t R_j \cos \theta [a_x(t)]^{n+1/2} \end{aligned} \quad (5.33)$$

Ordenando los términos de la ecuación (5.33) se obtiene,

$$\begin{aligned} (g_1)_{j,k,1}^{n+1} = & -U_{j,k,1} \left[\frac{2}{\Delta t g} \right] \left[1 + \frac{\mu\Delta t}{2} \right] - \left[\frac{1}{2g} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 - \left[\frac{1}{2g} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + \\ & + \left[\frac{1}{2g} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 + \left[\frac{1}{2g} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \\ & + \left[\frac{1}{2g} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 - h_{j,k} \right]^{n+1} - f_1^n(\tilde{\varphi}, h) = 0 \end{aligned} \quad (5.34)$$

en donde,

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
f_1^n(\tilde{\varphi}, h) = & -U_{j,k,1} \left[\frac{2}{\Delta t g} \left[1 - \frac{\mu \Delta t}{2} \right] + \left[\frac{1}{2g} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{2g} \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 - \right. \right. \right. \\
& - \left. \left. \left[\frac{1}{2g} \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 - \left[\frac{1}{2g} \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left[\frac{1}{2g} \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 - h_{j,k} - 2H \right]^n + \frac{2R_j}{g} \cos \theta [a_x(t)]^{n+1/2} \right. \right. \right. \quad (5.35)
\end{aligned}$$

Una vez conocidos los valores de $h_{j,k}^n$ y de $U_{j,k,1}^n$, que representa la aproximación de $\tilde{\varphi}$, el término $f_1^n(\tilde{\varphi}, h)$ definido por (5.35) es una constante. La ecuación (5.34) al discretizarse en diferencias finitas para cada uno de los puntos del dominio, se convierte en una ecuación algebraica no lineal de segundo orden y cuyas derivadas parciales, con respecto a las variables espaciales, pueden ser evaluadas en forma analítica para formar el Jacobiano según se describirá más adelante.

De la ecuación cinemática equivalente,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right]$$

en $\sigma = 1$ (5.36)

llamando a,

$$\text{[DER]} = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right]$$

(5.37)

Aplicando el método de Crank-Nicholson,

$$\frac{h_{j,k}^{n+1} - h_{j,k}^n}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\text{DER}^n + \text{DER}^{n+1} \right]$$

(5.38)

en la ecuación (5.36) y tomando términos comunes se tiene,

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
& \left[h_{j,k} - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] + \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right]^{n+1} = \\
& \left[h_{j,k} + \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - \right. \\
& \quad \left. - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right]^{n+1}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Esta ecuación se puede escribir como,

$$\begin{aligned}
(g_2)_{j,k,1}^{n+1} = & h_{j,k} - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \\
& + \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right]^{n+1} - f_2^n(\tilde{\varphi}, h) = 0
\end{aligned} \tag{5.40}$$

donde,

$$\begin{aligned}
f_2^n(\tilde{\varphi}, h) = & h_{j,k} + \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] + \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 - \\
& - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right]^{n+1}
\end{aligned} \tag{5.41}$$

De nueva cuenta el término $f_2^n(\tilde{\varphi}, h)$ es una constante, una vez conocidos los valores de $h_{j,k}^n$ y de $U_{j,k,1}^n$. La ecuación (5.40) al discretizarse en diferencias finitas para cada uno de los puntos del dominio, se convierte en una ecuación algebraica no lineal

de segundo orden, cuyas derivadas parciales con respecto a las variables espaciales pueden ser evaluadas en forma analítica para formar el Jacobiano.

El potencial de velocidad equivalente en el dominio computacional, se puede escribir como,

$$\begin{aligned}
 (g_3)_{j,k,l}^{n+1} = & \left[\frac{1}{R_j} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right] - \\
 & - \sigma \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] \right] + \\
 & + \left[2\sigma \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] + \sigma^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right] \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] - \\
 & - 2\sigma \left[\frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - 2\sigma \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \right] \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^{n+1} = 0
 \end{aligned}
 \tag{5.42}$$

Al discretizar la ecuación (5.42) por medio de diferencias finitas se convierte en una ecuación algebraica no lineal, cuyas primeras derivadas se pueden calcular en forma analítica.

Para el fondo del tanque en el dominio computacional,

$$(g_4)_{j,k,MZ}^{n+1} = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^{n+1} = 0
 \tag{5.43}$$

y la condición de frontera en la pared,

$$(g_5)_{MR,k,l}^{n+1} = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^{n+1} = 0
 \tag{5.44}$$

Las condiciones de frontera del problema transitorio quedan definidas por las ecuaciones no lineales (5.34), (5.40) y (5.42) conjuntamente con las lineales (5.43) y (5.44).

5.6.1 LINEALIZACIÓN DE ECUACIONES- MÉTODO DE NEWTON

Supongamos un conjunto de "n" ecuaciones no lineales con "n" incógnitas, cuyas segundas derivadas son continuas en el dominio de definición, tal que,

$$\begin{aligned}g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0 \\&\vdots \\g_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0\end{aligned}\tag{5.45}$$

que se pueden escribir como,

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T\tag{5.46}$$

$$g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)]^T\tag{5.47}$$

es decir,

$$g(x) = 0\tag{5.48}$$

Expandiendo la ecuación (5.48) en una serie de Taylor alrededor de $x^{(k)}$, donde $x^{(k)}$ es el valor aproximado a la solución, se tiene

$$g(x^{(k)} + p) = g(x^{(k)}) + J(x^{(k)})p + \dots\tag{5.49}$$

donde $J(x^{(k)}) = \nabla g(x^{(k)})$ es la matriz Jacobiana de las primeras derivadas de las funciones evaluadas en $x^{(k)}$,

$$[J(x^{(k)})]_{i,j} = \left. \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right|_{x=x^{(k)}}\tag{5.50}$$

que en forma expandida se puede escribir:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$[J(x^{(k)})]_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1(x)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_n(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (5.51)$$

Empleando la siguiente notación para el Jacobiano $J^{(k)} = J(x^{(k)})$, y para el vector que contiene los valores de las funciones $g^{(k)} = g(x^{(k)})$, la ecuación (5.49) considerando los dos primeros términos de la serie de Taylor se puede escribir como:

$$g(x^{(k)} + p) = g^{(k)} + J^{(k)}p \approx y \quad (5.52)$$

Con la ecuación (5.52) se establece una aproximación lineal de las funciones no lineales y se puede usar para determinar el siguiente valor estimado de la solución $x^{(k+1)}$. Tomando $y=0$ en (5.52), se tiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales, donde p representa un vector de incógnitas,

$$J^{(k)}p = -g^{(k)} \quad (5.53)$$

El nuevo valor estimado de la solución está dado por,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + p \quad (5.54)$$

ó bien,

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - (J^{(k)})^{-1}g^{(k)} \quad (5.55)$$

Esta última ecuación es la fórmula de Newton y representa un algoritmo recursivo de la ecuación (5.52); los super-índices "k" ($k=0,1,2,3, \dots, \text{itemáx}$) son los contadores de cada iteración y $(J^{(k)})^{-1}$ es la inversa de la matriz Jacobiana, que se espera que sea no singular. El método de Newton es un proceso de convergencia rápida, siempre que la solución inicial esté dentro de la "zona de atracción" y no ocurran divergencias. Si la ecuación (5.55) se premultiplica por $(J^{(k)})$, se puede escribir como,

$$J^{(k)}x^{(k+1)} = b^k \quad (5.56)$$

donde

$$b^k = J^{(k)} x^{(k)} - g^{(k)} \quad (5.57)$$

El progreso de la solución se puede medir en términos de los valores de las funciones no lineales,

$$\|g(x^{(k+1)})\| < \|g(x^k)\| \quad (5.58)$$

Se establece una tolerancia, TOL, para evitar que el incremento, p, sea muy grande, tal que,

$$\|p\| \leq \text{TOL} \quad (5.59)$$

Se considera que la solución del sistema de ecuaciones no lineales se obtiene cuando la norma del vector entre dos iteraciones sucesivas,

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} \|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\| \quad (5.60)$$

es menor que la tolerancia, TOL, previamente descrita.

El éxito del método de Newton depende de si la condición inicial de la iteración de las raíces es próxima a la raíz verdadera; esta consideración es tomada en cuenta en la solución no lineal del oleaje considerando que el cambio numérico de la respuesta entre dos intervalos de tiempo es continua y pequeña, además de que Δt es suficientemente pequeño.

5.6.2 CÁLCULO DE PRESIONES, FUERZAS CORTANTES Y MOMENTOS DE VOLTEO

Las presiones hidrodinámicas en la pared del tanque se calculan de la ecuación de Bernoulli (3.37 ó 4.57) considerando las ecuaciones transformadas en el dominio computacional, desarrolladas en el Apéndice C.

$$\frac{P_h}{\rho} = -\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}\right] + \left[\frac{\sigma}{h}\right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma}\right] \left[\frac{\partial h}{\partial t}\right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R}\right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_j^2}\right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta}\right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h_{j,k}}\right]^2 \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma}\right]^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\sigma}{h} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma}{h} \right]^2 \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right] - \\
& - \mu \tilde{\varphi} - \sigma h g + g H - R_j \cos \theta [a_x(t)] \quad (5.61)
\end{aligned}$$

donde ρ es la densidad del líquido, considerada en los ejemplos de aplicación como

$$\rho = 0.1019 \frac{ts^2}{m^4}.$$

Los términos que contienen la derivada temporal, en la ecuación (5.61), se discretizan con un esquema de diferencias finitas centrales, tal que el esquema de discretización sea equivalente al esquema Crank-Nicholson,

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right]_{j,k,l}^n = \frac{U_{j,k,l}^{n+1} - U_{j,k,l}^{n-1}}{2(\Delta t)} \quad (5.62)$$

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right]_{j,k}^n = \frac{h_{j,k}^{n+1} - h_{j,k}^{n-1}}{2(\Delta t)} \quad (5.63)$$

llamando a,

$$\text{TERM2}(i) = \left[\frac{\sigma}{h} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \right] \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned}
\text{TERM3}(i) = & - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h_{j,k}} \right]^2 \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 + \right. \\
& + \left[\frac{\sigma}{h} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right] - \\
& - \left. \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma}{h} \right]^2 \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right] - \\
& - \mu \tilde{\varphi} - \sigma h g + g H - R_j \cos \theta [a_x(t)] \quad (5.65)
\end{aligned}$$

Las presiones en cualquier punto de la pared del tanque, evaluadas en un tiempo $t=n$, se puede calcular como,

$$\frac{P_h}{\rho} \Big|_0^n = - \left[\frac{U_{j,k,l}^{n+1} - U_{j,k,l}^{n-1}}{2(\Delta t)} \right] + \left[\frac{h_{j,k}^{n+1} - h_{j,k}^{n-1}}{2(\Delta t)} \right] \left[\text{TERM2}(i) \Big|_0^n + \text{TERM3}(i) \Big|_0^n \right] \quad (5.66)$$

La fuerza cortante total por unidad de longitud, F_p , para un instante t se calcula integrando las presiones, P_h , en las paredes del tanque como,

$$F_p(t) = \int_0^h a \pi P_h(a, z, t) dz \quad (5.67)$$

donde P_h se obtiene de la ecuación (5.66); h es la altura de ola en la pared del tanque medida a partir del fondo; a es el radio del tanque y la ordenada se obtiene de la transformación inversa, $z = h\sigma$. El momento de volteo, $M(t)$, en un punto inmediatamente arriba de la base del tanque, se calcula con,

$$M(t) = \int_0^h a \pi z P_h(a, z, t) dz \quad (5.68)$$

Es de notarse que las integrales (5.67) y (5.68) tienen como límite superior la superficie libre del líquido en la pared del tanque, h , y no la superficie media del líquido, H , como se hace en el cálculo lineal de estos mismos elementos mecánicos (ecuaciones 4.60 y 4.61). Las integrales se evalúan por medio de la regla trapezoidal, como se ejemplificó en la sección 4.8.

5.6.3 APLICACIÓN, MÉTODO IMPLÍCITO (CRANK-NICHOLSON-NEWTON)

Las condiciones de frontera del problema transitorio en el dominio computacional quedan definidas por las ecuaciones no lineales (5.34), (5.40) y (5.42) conjuntamente con las lineales (5.43) y (5.44). Las ecuaciones no lineales se linealizan por medio del método de Newton y se combinan con las lineales para obtener un sistema de ecuaciones simultáneas que se resuelve en cada incremento de tiempo del problema transitorio. Aplicando el procedimiento anterior se calculó la historia de altura de oleaje

en la pared del tanque cilíndrico del ejemplo de la sección 4.7, con diámetro de 11m y altura media del líquido de 2.75m, excitado en su base por los movimientos sísmicos en el capítulo 3. Las historias de altura de ola en la pared del tanque se muestran en las Figuras 5.4, 5.5 y 5.6. En ellas se comparan los resultados de la solución numérica lineal de la sección 4.7.2 con la numérica no lineal obtenida con el método implícito (Crank-Nicholson-Newton). Para discretizar la variable temporal en ambas soluciones numéricas se utilizó el método de Crank-Nicholson y un valor de amortiguamiento con respecto al crítico de $\xi=0.5\%$. En la Tabla 5.1 se comparan las alturas de ola numérica lineal y la no lineal, así como el incremento porcentual entre ellas.

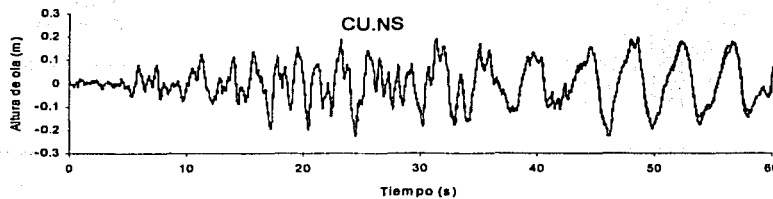
Tabla 5.1 Comparación de altura de ola lineal y no lineal, tanque $H/a=0.5$

| Movimiento | Altura de ola (m) | | $\Delta\%$ |
|------------|-------------------|-----------|------------|
| | Lineal | no lineal | |
| CU.EW | 0.39 | 0.38 | --- |
| CU.NS | 0.23 | 0.23 | --- |
| VIV.EW | 0.46 | 0.45 | --- |
| VIV.NS | 0.36 | 0.35 | --- |
| CA.EW | 4.39 | ---- | --- |
| CA.NS | 2.61 | 1.74 | -49 |
| SCT.EW | 2.11 | 1.83 | -15 |
| SCT.NS | 1.16 | 0.89 | -30 |
| TACY.EW | 0.37 | 0.34 | -7 |
| TACY.NS | 0.37 | 0.33 | -13 |
| CALETA.EW | 0.81 | 0.81 | --- |
| CALETA.NS | 0.83 | 0.83 | --- |

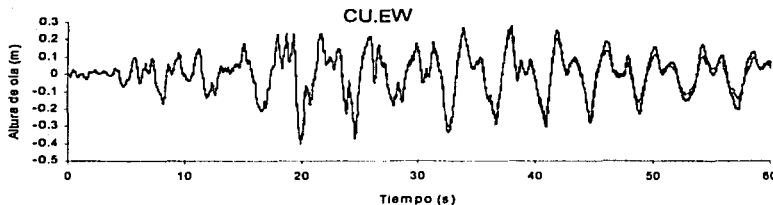
En la Tabla 5.1 se puede observar que no existe una influencia significativa de los términos no lineales en la solución numérica de la historia del oleaje para los movimientos sísmicos registrados en CU, VIV y CALETA, en ambas direcciones. En la Figura 5.5 y en Tabla 5.1 se observa que para el movimiento sísmico TACY, en ambas direcciones, la altura de ola linealizada es ligeramente mayor que la no lineal. Para el movimiento sísmico SCT.EW la altura máxima obtenida con la teoría lineal es de 211.10cm y la obtenida con la solución no lineal de 183.06cm; en la dirección NS la altura de ola máxima obtenida con la teoría lineal es de 116.36cm y con la teoría no lineal de 89.22cm. En ambos casos la teoría lineal predice una altura de ola mayor que

la teoría no lineal. Los dos primeros periodos de vibrar, obtenidos con la teoría lineal, de la superficie libre del líquido del tanque del ejemplo son $T_1= 4.068s$ y $T_2= 2.05s$. El periodo característico del movimiento sísmico SCT es de $2s$, por lo que el movimiento SCT se espera que excite los modos subarmónicos del tanque, es decir, que el sistema se encuentre en resonancia primaria en el segundo modo. En tal caso la respuesta dinámica no lineal es ligeramente menor que la lineal, como se verá en la sección 5.7.

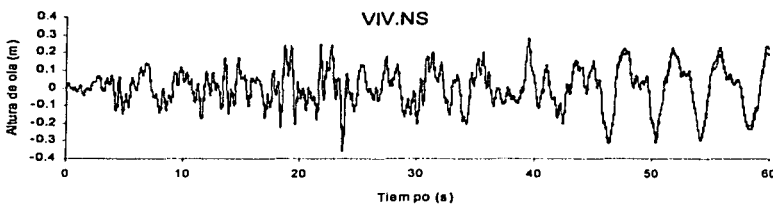
Considerando que el movimiento sísmico CA.NS tiene un periodo característico de $T=3.8109s$, el periodo de la excitación está cercano al periodo fundamental del sistema ($T_1=4.068s$), por lo que la respuesta se encuentra en pseudo-resonancia. En tal caso la solución no lineal predice una respuesta menor que la lineal. Lo anterior se observa en la Figura 5.6, en donde la altura máxima obtenida con la solución no lineal es de $174.02cm$ y la obtenida con la solución lineal es de $260.68cm$. La componente CA.EW (Fig. 5.6) tiene un periodo característico de $T=3.9314s$, y se encuentra aún más próxima al periodo fundamental del tanque, por lo que la respuesta dinámica se puede considerar en cuasi-resonancia. La respuesta numérica obtenida por el método Crank-Nicholson-Newton se bloquea en el instante $t=81.05s$, a partir del cual ya no es posible obtener la solución del sistema. Tal vez sea necesario agregar viscosidad artificial al sistema numérico para estabilizarlo, como sucedió en el método semi-implícito. En este caso no se consideró adecuado comprometer la exactitud de la solución.



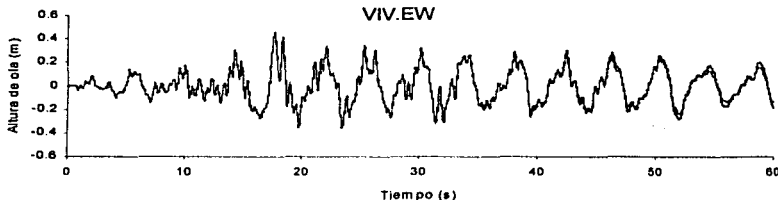
Máx. lineal= 22.83cm
Máx. no lineal= 22.88cm



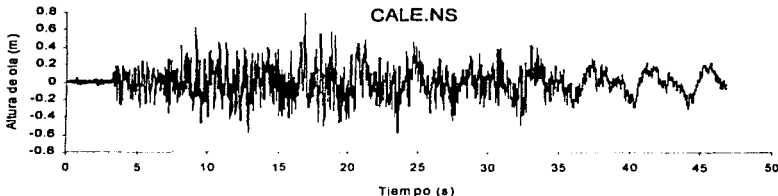
Máx. lineal= 39.99cm
Máx. no lineal= 38.33cm



—— lineal
—— no lineal
Máx. lineal= 35.88cm
Máx. no lineal= 35.14cm

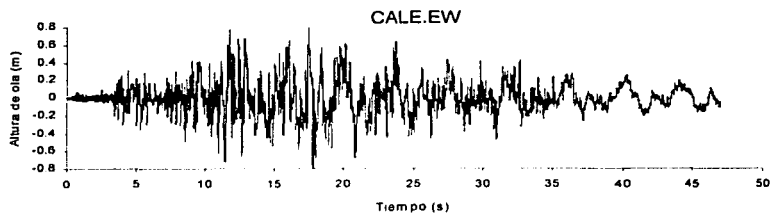


Máx. lineal= 45.78cm
Máx. no lineal= 44.76cm

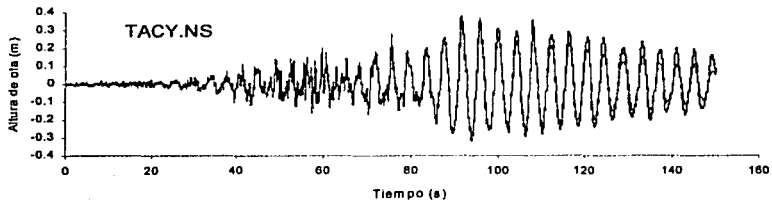


Máx. lineal= 82.63cm
Máx. no lineal= 83cm

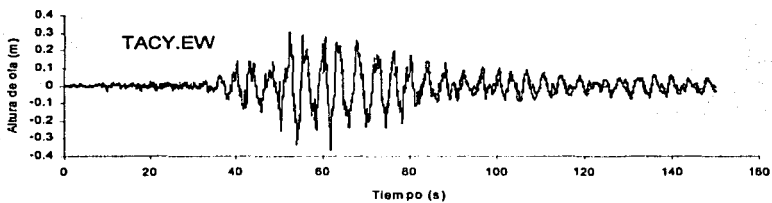
Fig. 5.4 Oleaje en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($H=2.75m$, $a=5.50m$, $\xi=0.5\%$). Método implícito, solución lineal vs no lineal



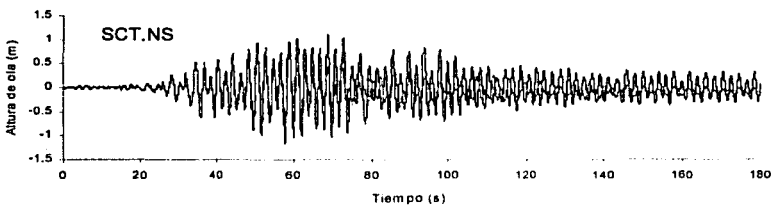
Máx. lineal= 81.08cm
Máx. no lineal= 81.14cm



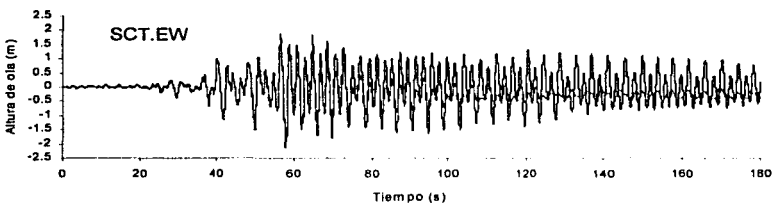
Máx. lineal= 37.36cm
Máx. no lineal= 32.96cm



—— lineal
—— no lineal
Máx. lineal= 36.51cm
Máx. no lineal= 33.87cm



Máx. lineal= 116.36cm
Máx. no lineal= 89.22cm



Máx. lineal= 211.10cm
Máx. no lineal= 183.0cm

Fig. 5.5 Oleaje en la pared del tanque ($H=2.75m$, $a=5.50m$, $\xi=0.5\%$), continuación

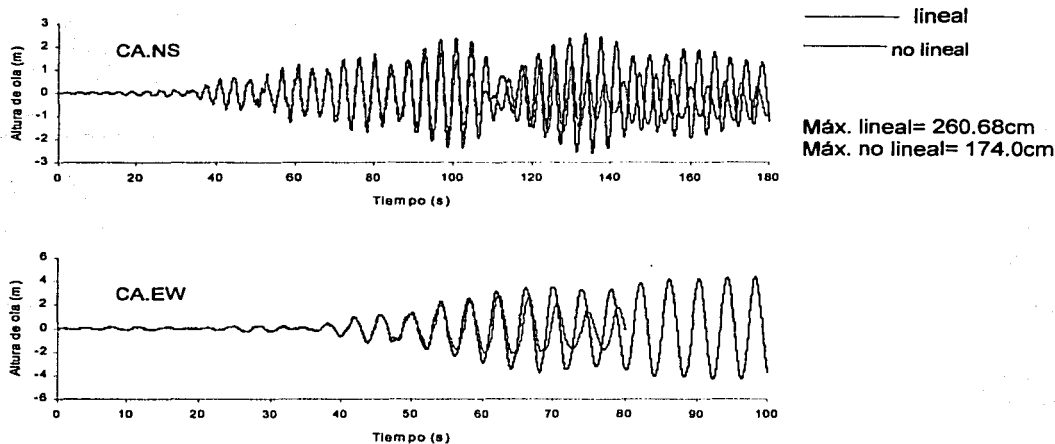


Fig. 5.6 Oleaje en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($H=2.75\text{m}$, $a=5.50\text{m}$, $\xi=0.5\%$). Método implícito, solución lineal vs no lineal

Considerando como segundo ejemplo de aplicación un tanque cilíndrico con diámetro de 15.70m ($a=7.85\text{m}$) y altura $H=2.75\text{m}$ ($H/a=0.35$), excitado en su base por los movimientos sísmicos anteriormente descritos y con un valor de amortiguamiento con respecto al crítico, $\xi=0.5\%$, se calculó la solución numérica lineal obtenida con el esquema Crank-Nicholson y se comparó con la obtenida con el método numérico no lineal, Crank-Nicholson-Newton. Las historias de altura de ola, fuerza cortante y momento de volteo, para cada uno de los movimientos sísmicos se observan en las Figuras 5.7 a 5.18.

En la Tabla 5.2 se resume la altura de ola máxima obtenida con la teoría lineal y la obtenida con la teoría no lineal, así como el incremento porcentual entre ambas, para cada uno de los movimientos sísmicos anteriormente descritos. Se puede observar que para los movimientos sísmicos registrados en CALETA, en ambas direcciones, y para CA.EW, no existe una contribución importante de los términos no lineales en la respuesta. Para los movimientos sísmicos CU y VIV, en ambas componentes, y para el SCT.EW, dicha contribución es menor al 10%. Para los movimientos sísmicos CA.NS, SCT.NS y TACY.EW, el incremento porcentual es menor al 20%. La contribución de los

términos no lineales en la respuesta numérica obtenida con el movimiento sísmico TACY.NS son del 25%; dicha contribución ejemplifica la importancia de considerar la solución no lineal en este tipo de problemas. En estos casos la altura de ola linealizada subestima el valor del oleaje, lo que podría ocasionar derramamiento del líquido o fallas en la cubierta del tanque si fuera diseñado con base en la solución lineal.

A diferencia del primer ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75$, $H/a=0.5$) en el que los efectos no lineales en la altura de ola no son significantes, para este segundo ejemplo ($a=7.85\text{m}$, $H=2.75$, $H/a=0.35$) los efectos no lineales adquieren mayor importancia, por lo que podría pensarse que la relación altura-radio del tanque influye en tal comportamiento.

Tabla 5.2 Comparación de altura de ola lineal y no lineal

| Movimiento | Altura de ola (m) | | $\Delta\%$ |
|------------|-------------------|-----------|------------|
| | Lineal | no lineal | |
| CU.EW | 0.3205 | 0.3348 | 4 |
| CU.NS | 0.2605 | 0.2801 | 7 |
| VIV.EW | 0.3728 | 0.3855 | 3 |
| VIV.NS | 0.3761 | 0.4144 | 10 |
| CA.EW | 1.0348 | 1.0348 | -- |
| CA.NS | 1.0939 | 1.2566 | 15 |
| SCT.EW | 1.2287 | 1.3070 | 6 |
| SCT.NS | 0.9696 | 1.0907 | 13 |
| TACY.EW | 0.2862 | 0.3398 | 19 |
| TACY.NS | 0.4551 | 0.5710 | 25 |
| CALETA.EW | 1.1905 | 1.1931 | -- |
| CALETA.NS | 1.0919 | 1.098 | -- |

Los resultados de fuerzas cortantes máximas y momentos de volteo máximos obtenidos con la solución lineal y la no lineal, así como el incremento porcentual entre ellos, se resumen en la Tabla 5.3.

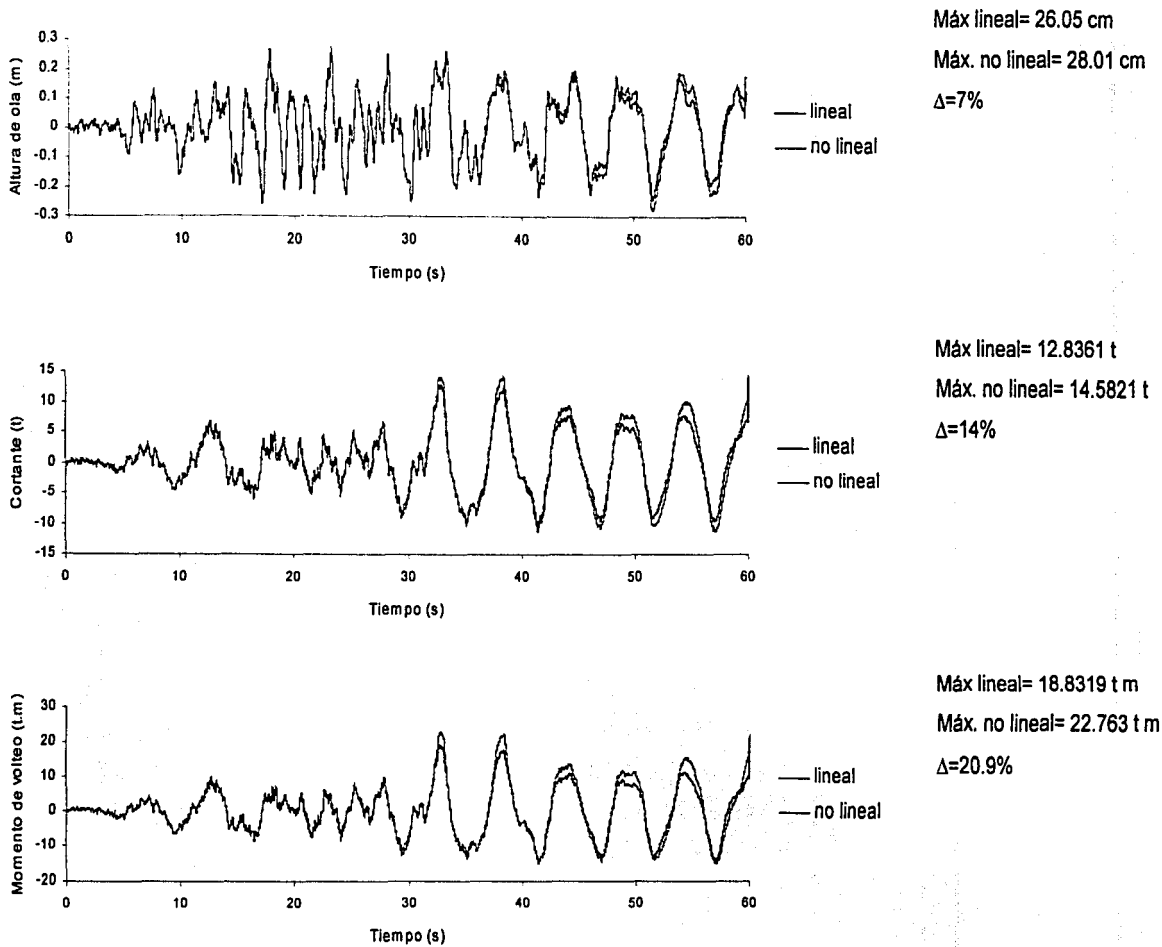
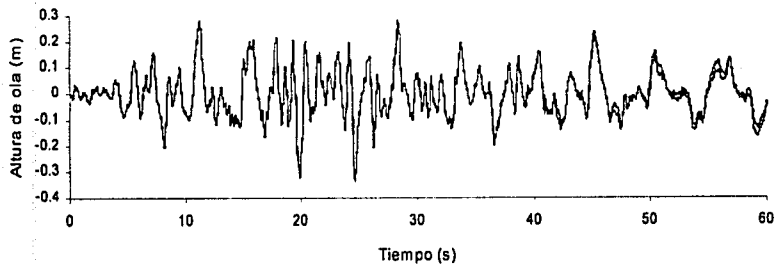
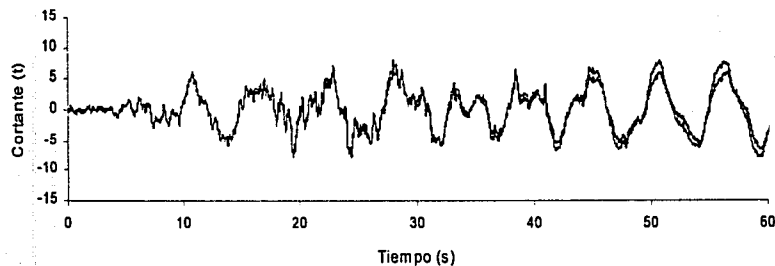


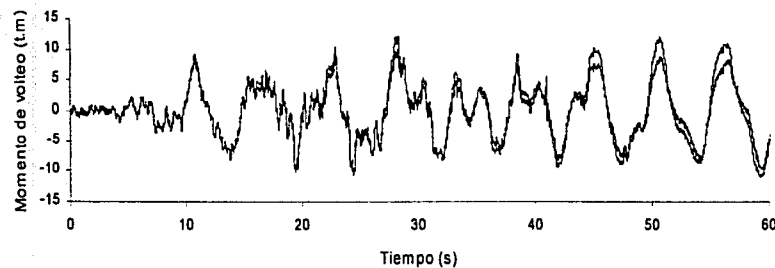
Fig. 5.7 Comparación de respuestas en la pared del tanque, H=2.75 m, a=7.85 m, movimiento CU.NS, $\xi=0.5\%$



Máx lineal= 32.05 cm
 Máx. no lineal= 33.48 cm
 $\Delta=4\%$

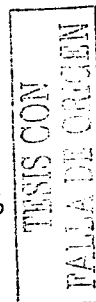


Máx lineal= 7.5515 t
 Máx. no lineal= 7.9692 t
 $\Delta=6\%$

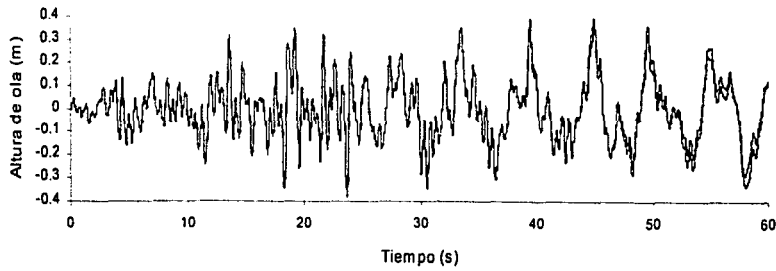


Máx lineal= 10.1992 t m
 Máx. no lineal= 12.1138 t m
 $\Delta=18.8\%$

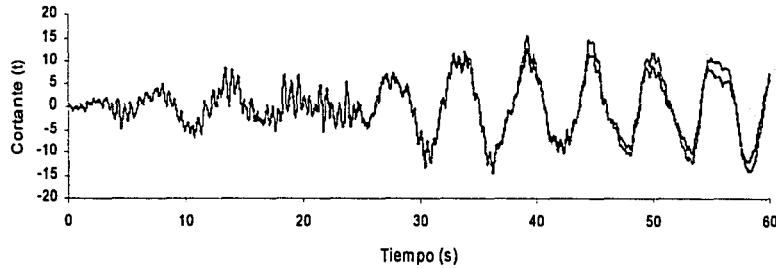
Fig. 5.8 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75$ m, $a=7.85$ m, movimiento CU.EW, $\xi=0.5\%$



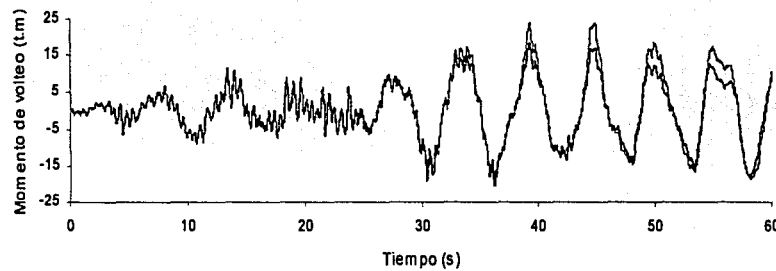
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Máx lineal= 37.61 cm
Máx. no lineal= 41.44 cm
 $\Delta=10\%$



Máx lineal= 14.3682 t
Máx. no lineal= 15.5248 t
 $\Delta=8\%$



Máx lineal= 20.3532 t m
Máx. no lineal= 24.0407 t m
 $\Delta=18.1\%$

Fig. 5.9 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75$ m, $a=7.85$ m, movimiento VIV.NS, $\xi=0.5\%$

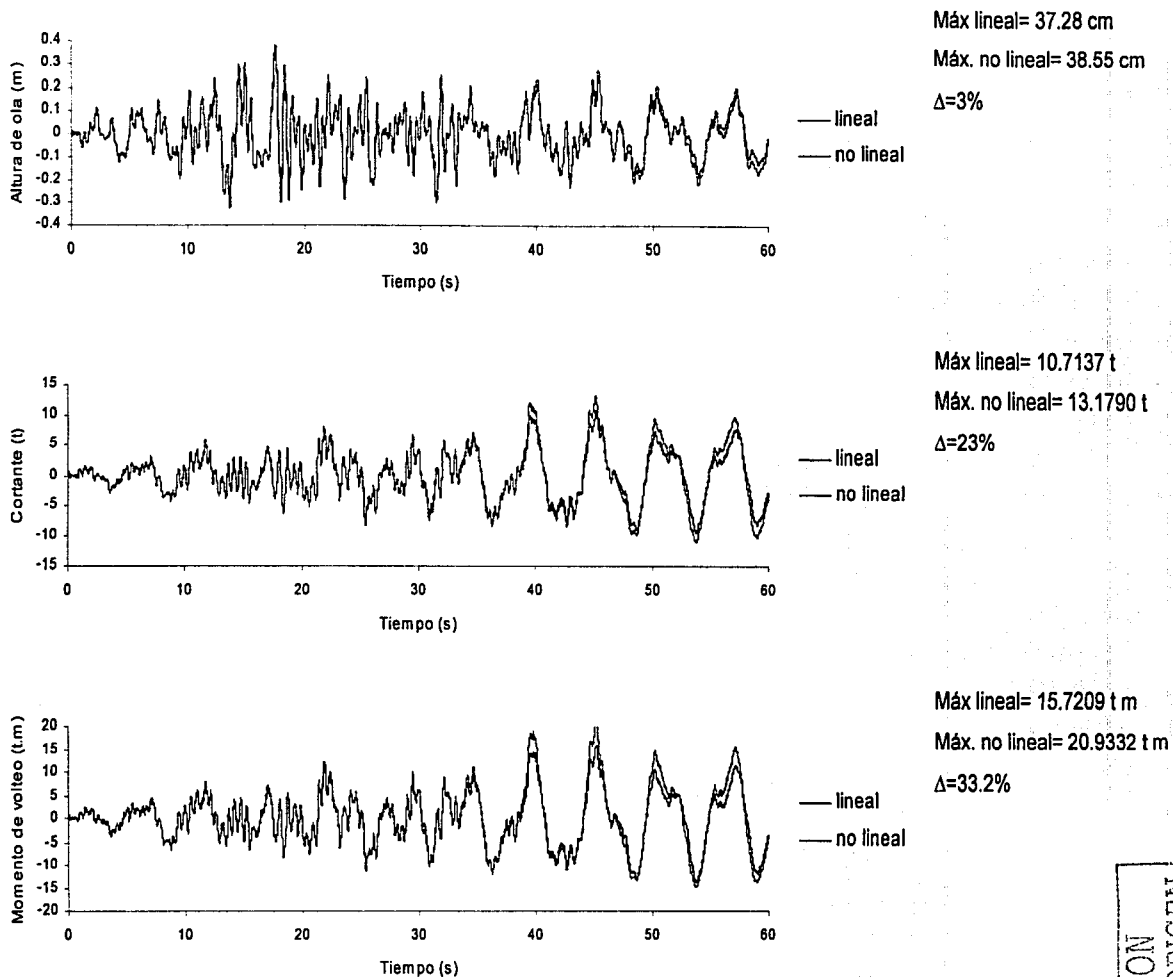


Fig. 5.10 Comparación de respuestas en la pared del tanque, H=2.75 m, a=7.85 m, movimiento VIV.EW, $\xi=0.5\%$

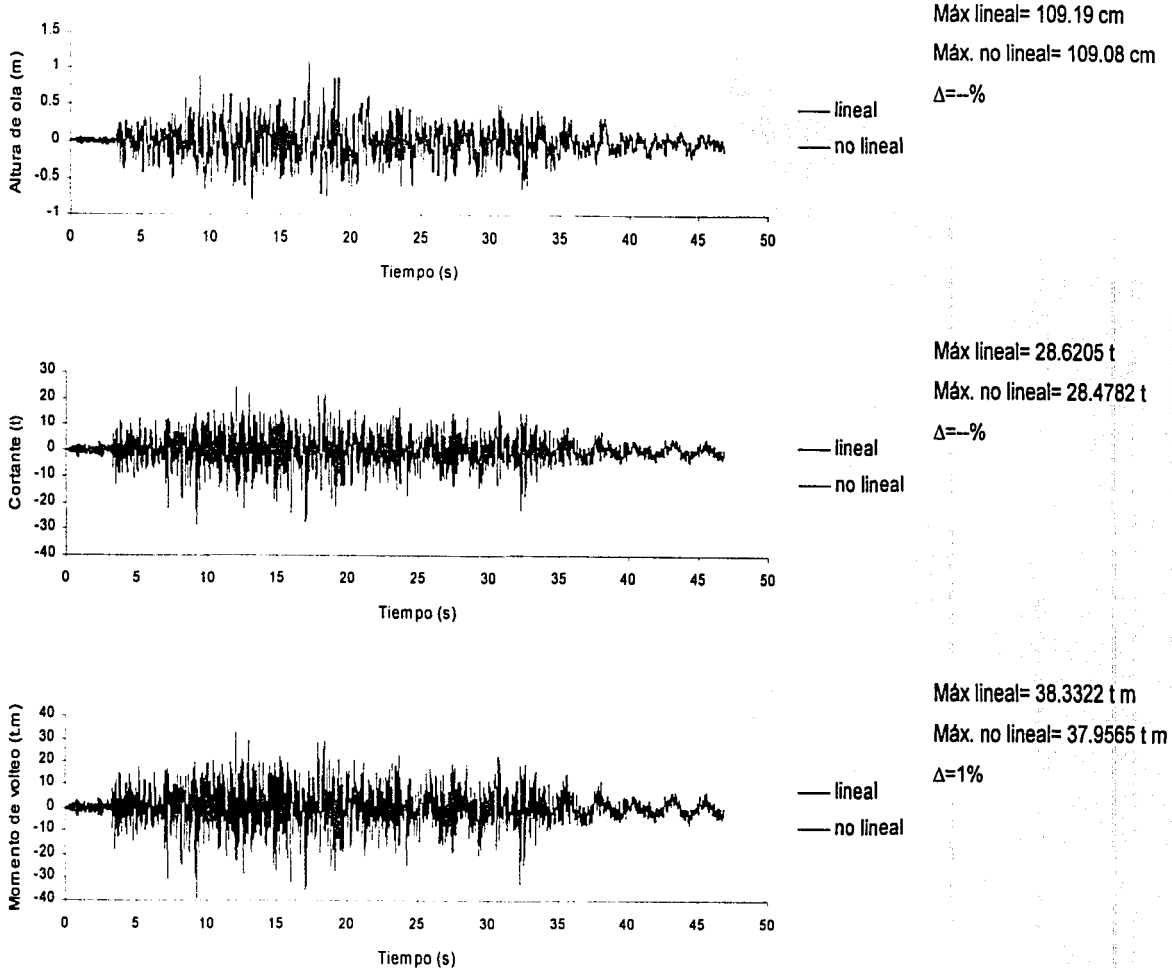


Fig. 5.11 Comparación de respuestas en la pared del tanque, H=2.75 m, a=7.85 m, movimiento CALETA.NS, $\xi=0.5\%$

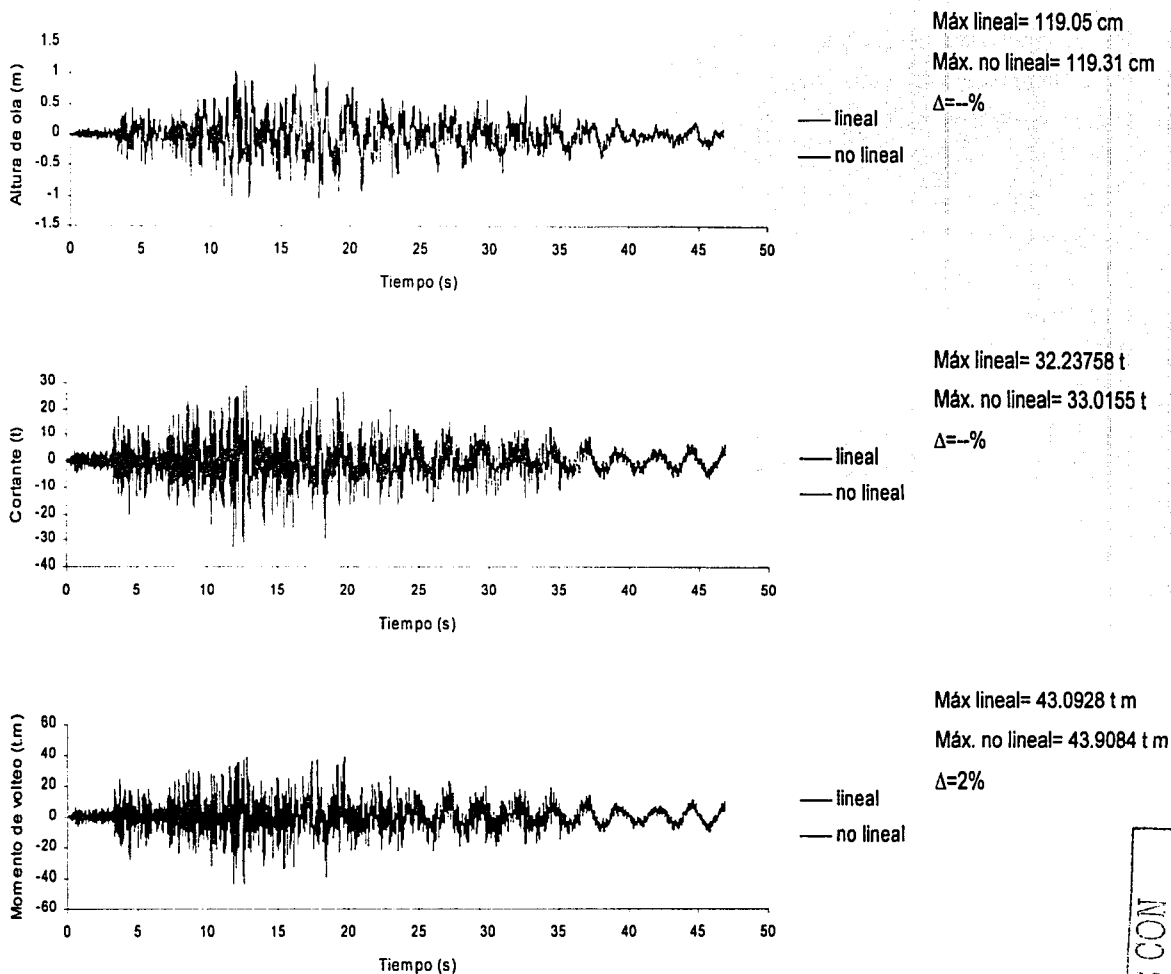
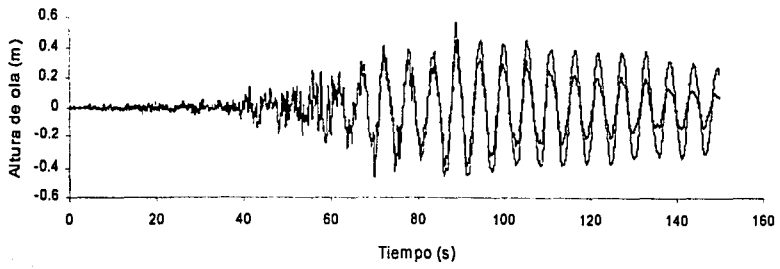


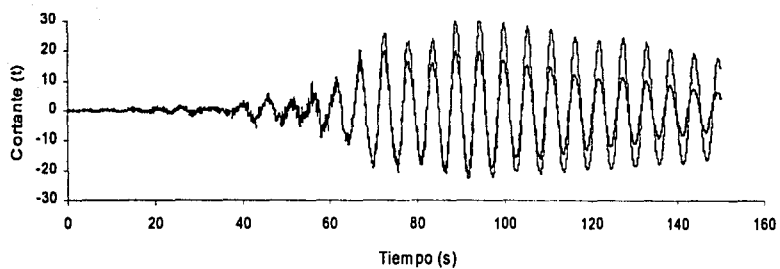
Fig. 5.12 Comparación de respuestas en la pared del tanque, H=2.75 m, a=7.85 m, movimiento CALETA.EW, $\xi=0.5\%$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN



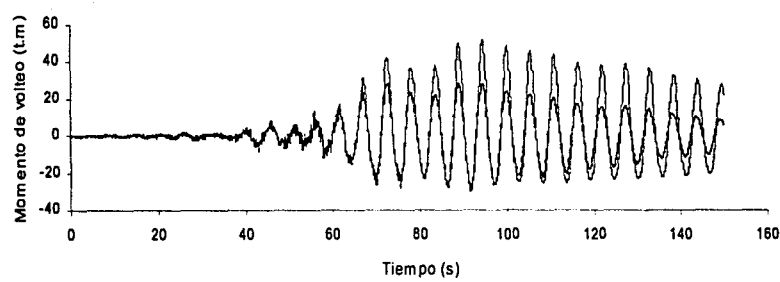
Máx lineal= 45.51 cm
 Máx. no lineal= 57.10 cm
 $\Delta=25\%$

— lineal
 — no lineal



Máx lineal= 20.8563 t
 Máx. no lineal= 31.3037 t
 $\Delta=50\%$

— lineal
 — no lineal



Máx lineal= 29.8651 t m
 Máx. no lineal= 52.5147 t m
 $\Delta=75.8\%$

— lineal
 — no lineal

Fig. 5.13 Comparación de respuestas en la pared del tanque, H=2.75 m, a=7.85 m, movimiento TACY.NS, $\xi=0.5\%$

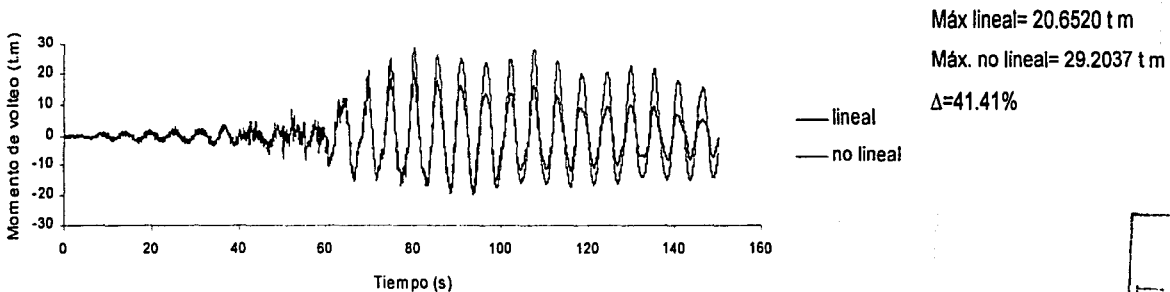
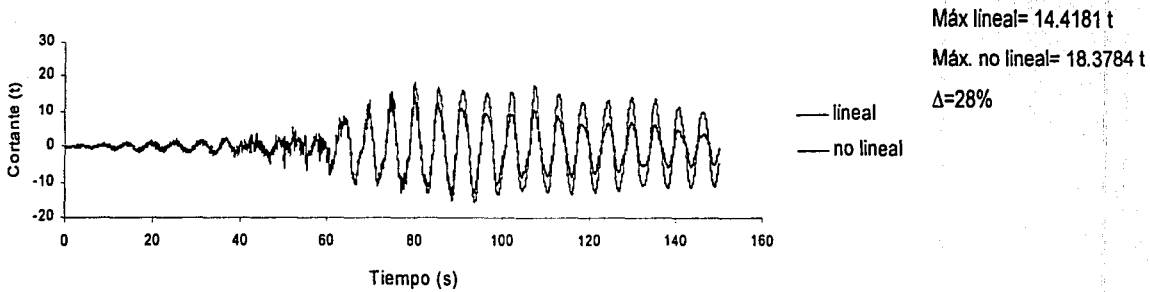
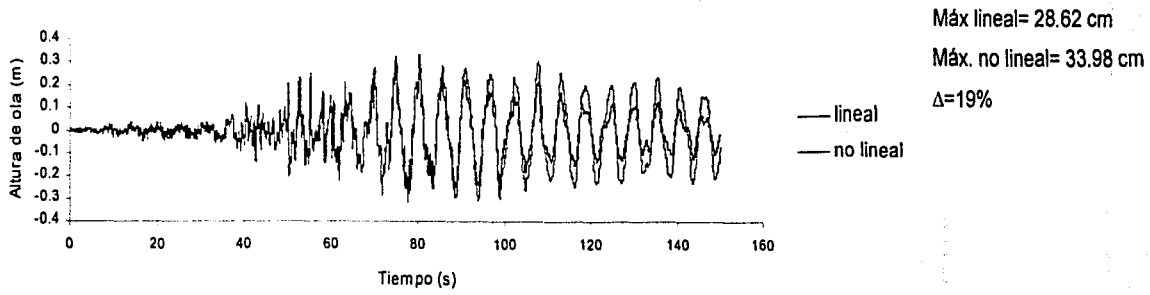
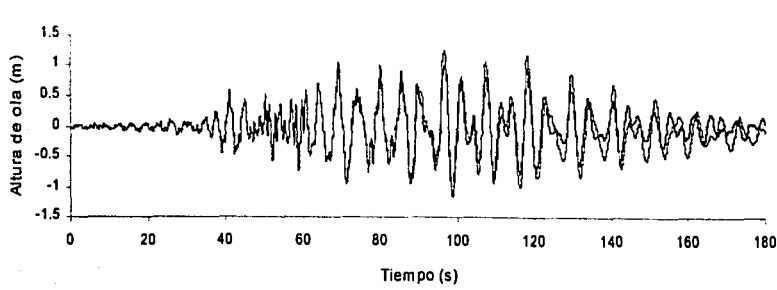
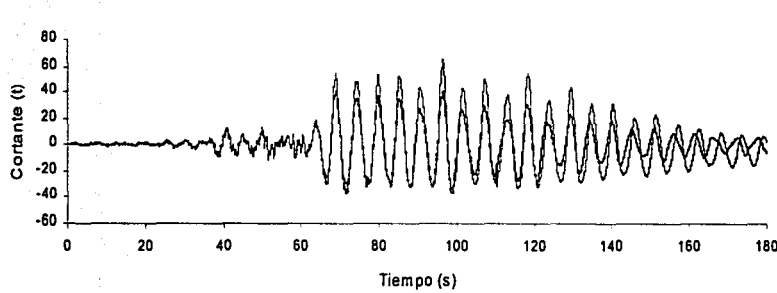


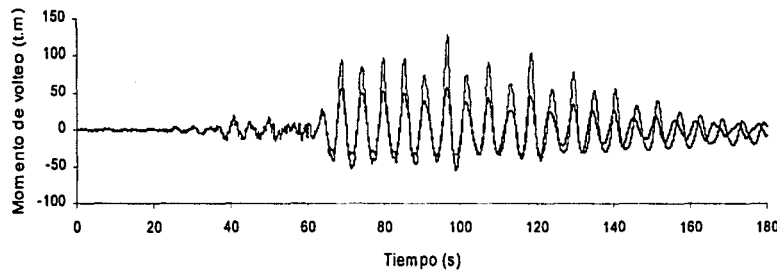
Fig. 5.14 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75$ m, $a=7.85$ m, movimiento TACY.EW, $\xi=0.5\%$



Máx lineal= 109.39 cm
 Máx. no lineal= 125.66 cm
 $\Delta=15\%$



Máx lineal= 40.2208 t
 Máx. no lineal= 65.5017 t
 $\Delta=63\%$



Máx lineal= 57.1372 t m
 Máx. no lineal=128.6772 t m
 $\Delta=225\%$

Fig. 5.15 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75$ m, $a=7.85$ m, movimiento CA.NS, $\xi=0.5\%$

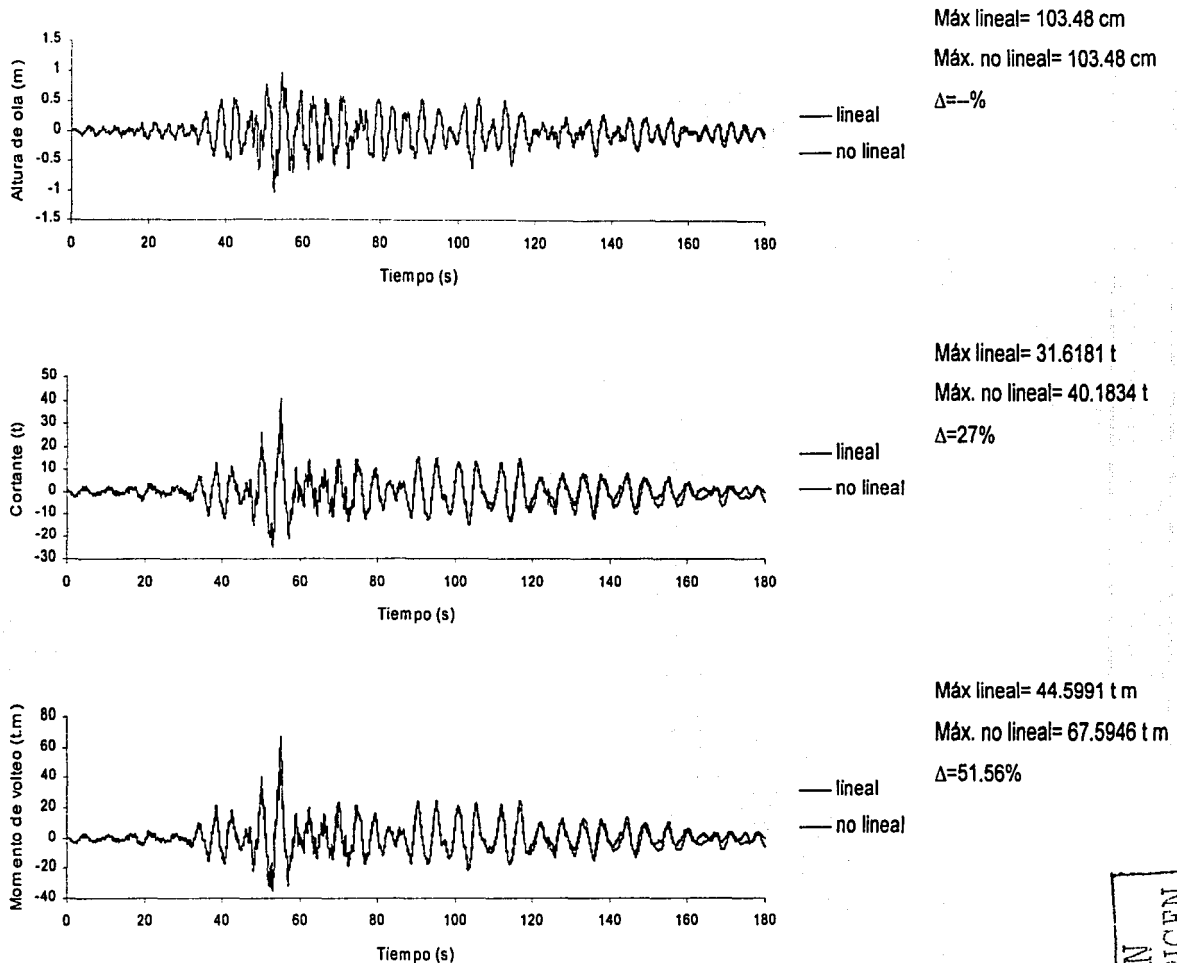
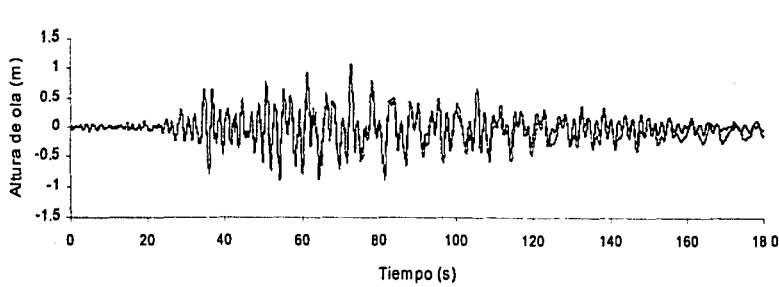


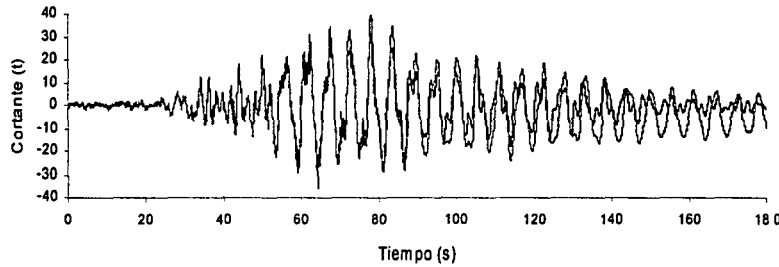
Fig. 5.16 Comparación de respuestas en la pared del tanque, H=2.75 m, a=7.85 m, movimiento CA.EW, $\xi=0.5\%$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

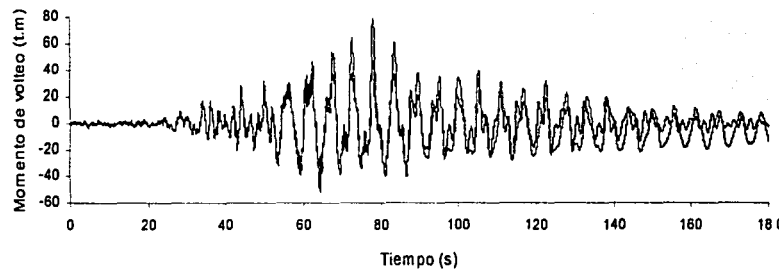
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Máx lineal= 96.96 cm
Máx. no lineal= 109.07 cm
 $\Delta=13\%$



Máx lineal= 35.9236 t
Máx. no lineal= 40.4534 t
 $\Delta=13\%$



Máx lineal= 51.3911 t m
Máx. no lineal= 78.4107 t m
 $\Delta=52.6\%$

Fig. 5.17 Comparación de respuestas en la pared del tanque, $H=2.75$ m, $a=7.85$ m, movimiento SCT.NS, $\xi=0.5\%$

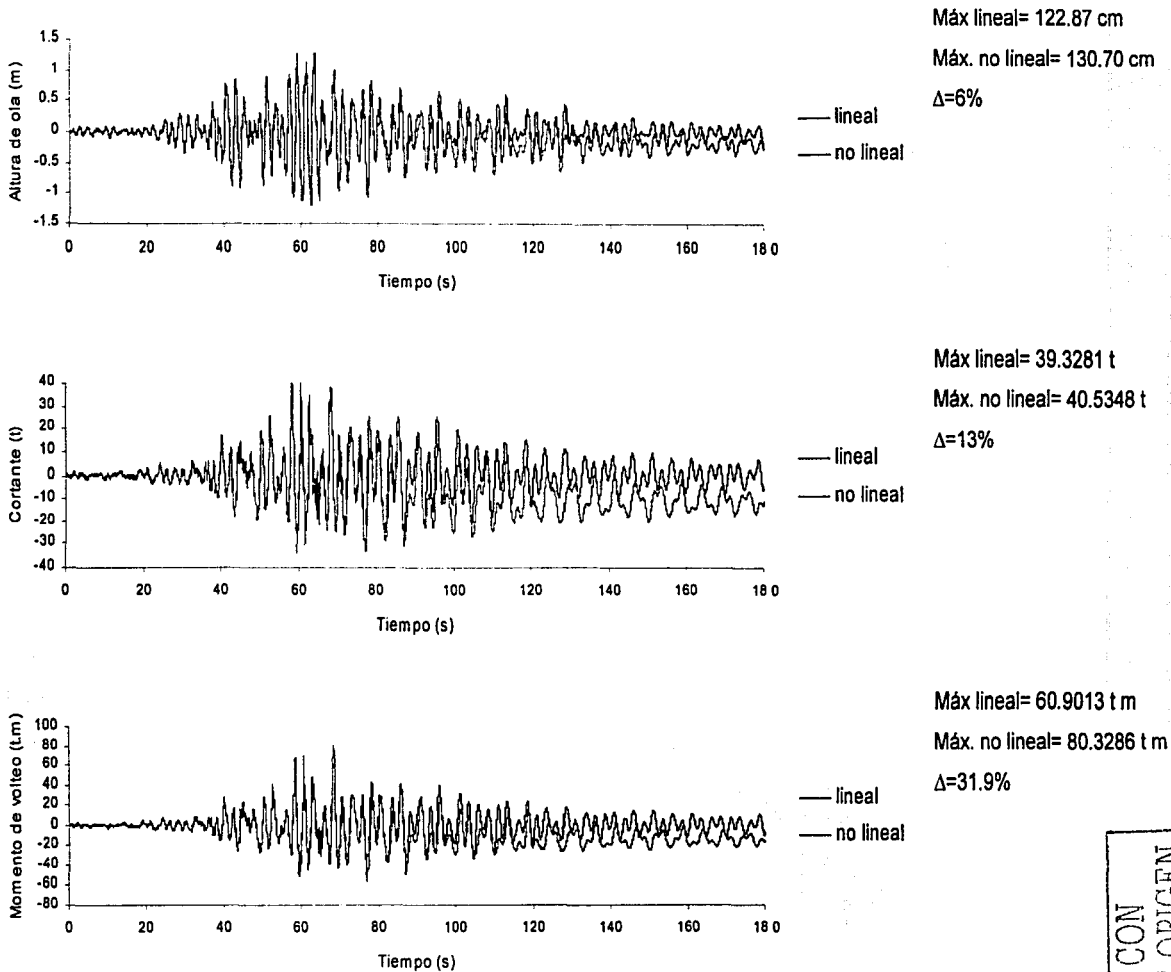


Fig. 5.18 Comparación de respuestas en la pared del tanque, H=2.75 m, a=7.85 m, movimiento SCT.EW, $\xi=0.5\%$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Tabla 5.3 Fuerzas cortantes y momentos de volteo, lineales y no lineales

| Movimiento | Fuerza cortante (t) | | $\Delta\%$ | Momento de volteo (t.m) | | $\Delta\%$ |
|------------|---------------------|-----------|------------|-------------------------|-----------|------------|
| | lineal | no lineal | | Lineal | no lineal | |
| CU.EW | 7.5515 | 7.9692 | 6 | 10.1992 | 12.1138 | 19 |
| CU.NS | 12.8361 | 14.5821 | 14 | 18.8319 | 22.7634 | 21 |
| VIV.EW | 10.7137 | 13.1790 | 23 | 15.7209 | 20.9332 | 33 |
| VIV.NS | 14.3682 | 15.5248 | 8 | 20.3532 | 24.0407 | 18 |
| CA.EW | 31.6181 | 40.1834 | 27 | 44.5991 | 67.5946 | 52 |
| CA.NS | 40.2208 | 65.5017 | 63 | 57.1372 | 128.6772 | 225 |
| SCT.EW | 39.3281 | 40.5348 | 13 | 60.9013 | 80.3286 | 32 |
| SCT.NS | 35.9263 | 40.4534 | 13 | 51.3911 | 78.4107 | 52 |
| TACY.EW | 14.4081 | 18.3784 | 28 | 20.6520 | 29.2037 | 41 |
| TACY.NS | 20.8563 | 31.3037 | 50 | 29.8651 | 52.5147 | 76 |
| CALETA.EW | 32.2375 | 33.0155 | --- | 43.0928 | 43.9084 | 2 |
| CALETA.NS | 28.6205 | 28.4782 | --- | 38.3322 | 37.9865 | -1 |

En la Tabla 5.3 se observa que, para los movimientos sísmicos estudiados, los términos no lineales en la respuesta son importantes para el cálculo de las fuerzas cortantes y momentos de volteo, siendo más importantes en estos últimos. Para el movimiento sísmico registrado en CALETA, en ambas direcciones, los efectos no lineales no tienen trascendencia en el cálculo de los elementos de diseño. Las fuerzas cortantes para los movimientos CU.EW y VIV.NS presentan un incremento porcentual entre la respuesta lineal y la no lineal menor del 10%; para los movimientos CU.NS, SCT.NS y SCT.EW, el incremento es del orden del 14%; para los movimientos VIV.EW, CA.EW y TACY.EW, el incremento es menor del 30%. La respuesta no lineal tiene mayor importancia para los movimientos TACY.NS, con un incremento del 50%, y para CA.NS con un incremento del 63%. Los resultados anteriores indican que para el tanque del ejemplo de aplicación, excitado sísmicamente en su base con los movimientos estudiados, es importante calcular las fuerzas cortantes en la pared del tanque por medio de la teoría no lineal, ya que la teoría lineal subestima la respuesta.

Los efectos no lineales en el cálculo de los momentos de volteo, en general, son aún más importantes que para el cálculo de las fuerzas cortantes. Dichos efectos no son trascendentes para el movimiento registrado en CALETA. Los incrementos porcentuales entre la respuesta lineal y la no lineal, son menores del 20% para los movimientos CU.EW, CU.NS y VIV.NS; y del orden del 30% para los movimientos VIV.EW y SCT.EW. Los efectos no lineales son aún más importantes para los

movimientos CA.EW y SCT.NS, en los cuales el incremento porcentual es del orden del 50%, y para el movimiento TACY.NS con un incremento del orden del 75%. Es notoria la importancia de la respuesta no lineal en el cálculo de los momentos de volteo para el registro sísmico CA.NS, que presenta un incremento entre la respuesta lineal y la no lineal del 225%. Estos resultados indican que para el tanque del segundo ejemplo de aplicación la teoría lineal subestima la respuesta, en cuanto a las fuerzas cortantes y momentos de volteo, los cuales son importantes para el diseño del espesor de la pared del tanque y para la cimentación del mismo.

Los efectos no lineales en el cálculo de la altura de ola son menores que en el cálculo de las fuerzas cortante y momentos de volteo, debido a que en la teoría lineal las presiones hidrodinámicas sobre la pared del tanque se integran entre el fondo del tanque y la altura media del líquido, H , la cual permanece constante en cada instante (Fig. 5.19 a). Cuando se utiliza la teoría no lineal, las presiones hidrodinámicas sobre la pared del tanque se integran entre el fondo del tanque y la superficie libre del líquido en la pared, $h = H + \delta$, la cual cambia de posición en cada incremento de tiempo en el problema transitorio. Esto se ejemplifica en la Figura 5.19b en donde la fuerza $P2$ se omite para el cálculo de la respuesta lineal. La fuerza $P2$ tiene un brazo de palanca, con respecto al fondo del tanque, que produce un momento de volteo mayor que el calculado con la teoría lineal.

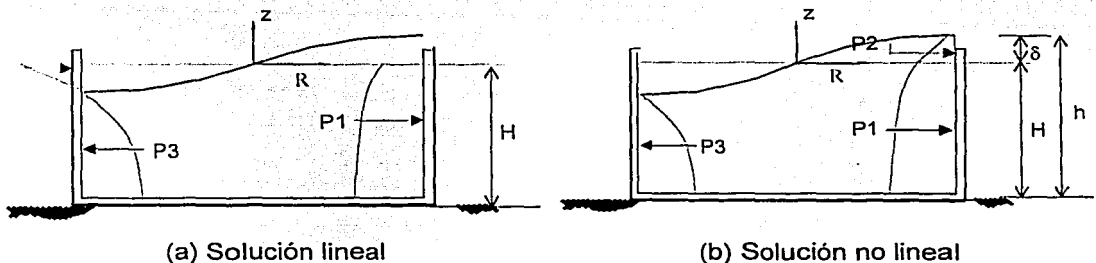


Fig. 5.19 Distribución de presiones hidrodinámicas

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

5.7 ANÁLISIS BAJO UNA EXCITACIÓN ARMÓNICA

Según la teoría lineal, las frecuencias de vibrar de la superficie libre del líquido contenido en un tanque cilíndrico, se calculan con:

$$\omega_n = \sqrt{g \left[\frac{X_n}{a} \right] \tanh \left[X_n \frac{H}{a} \right]} \quad (5.69)$$

donde el subíndice n indica el n -ésimo modo de vibrar del líquido, X_n son las n -ésimas raíces positivas de la función de Bessel de primer tipo de orden uno, H es la profundidad media del líquido y a es el radio del tanque. Para el tanque del primer ejemplo de aplicación de radio $a=5.5\text{m}$ y altura media del líquido $H=2.75\text{m}$, las dos primeras frecuencias de vibrar del líquido son:

$$\omega_1 = 1.54 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = 3.07 \text{ rad/s}$$

Aplicando el método implícito (Crank-Nicholson-Newton) al tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\xi=0\%$) excitado en su base por un movimiento armónico en la dirección horizontal del tipo $a_x(t)=0.2\text{sen}(\Omega t)$, donde Ω es la frecuencia de la excitación, se calculó la historia del oleaje en las paredes izquierda, $R=-a$, y derecha, $R=+a$, para una frecuencia de la excitación igual a la primera fundamental del líquido ($\Omega = \omega_1$). Los resultados se observan en la Figura 5.20. Debido a que el movimiento es no amortiguado el valor de la altura de ola se incrementa exageradamente y finalmente diverge. Se puede observar una característica no lineal del oleaje en la que la amplitud del oleaje positivo es mayor que la del oleaje negativo, además de un comportamiento no lineal "suave" (Hutton, 1963) el cual se caracteriza por la prolongación del periodo de oscilación.

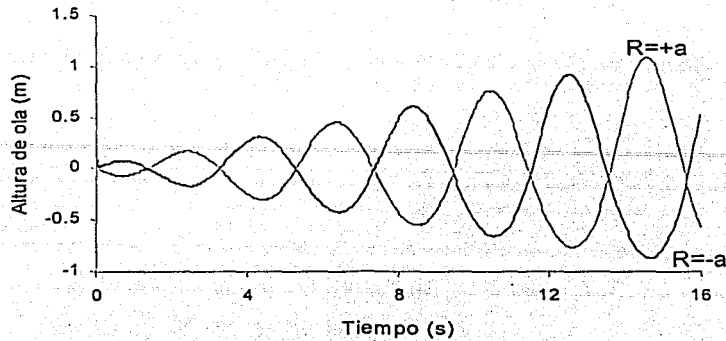


Fig. 5.20 Oleaje en la pared del tanque con $a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\xi = 0\%$

La teoría lineal del oleaje puede considerarse válida cuando la altura de ola es pequeña. Se considera un oleaje de gran amplitud cuando la relación de altura de ola a profundidad media del líquido es mayor del 1% (Bang-Fuh y Hsuen-Weng, 1999). Algunos otros autores consideran una altura de ola de gran amplitud cuando dicha relación es del 10% (Kana y Dodge, 1975). Tomando en cuenta esta última relación, la altura de ola límite lineal es: 0.28m. En la Figura 5.21 se muestra la altura de ola en la pared del tanque ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$) sometido a una aceleración en la base: $a_x(t) = 0.2\text{sen}(1.5t)$, con valor de amortiguamiento con respecto al crítico $\xi=0.5\%$. La altura de ola después de $t=4.44\text{s}$ es mayor de 0.28m, llegando a ser en $t=24.45\text{s}$ del orden de 1.0m, que representa un 33% de la altura media del líquido.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

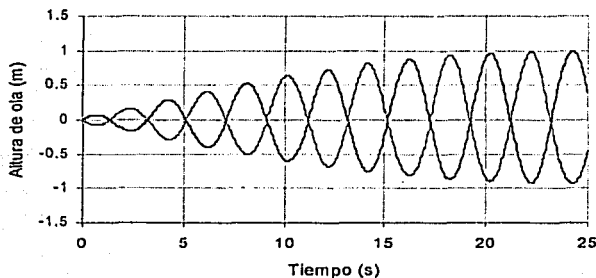


Fig. 5.21 Altura de ola en la pared del tanque ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\xi=0.5\%$)

Para una excitación de larga duración con frecuencia próxima a la primer frecuencia fundamental del líquido en el tanque, las amplitudes positivas y negativas del oleaje en las paredes, pueden incrementarse y disminuir alternativamente. La forma de la historia del oleaje en las paredes es similar a la de un tren de ondas en el océano. Este fenómeno se llama batimiento (beating) y está relacionado al parámetro: $\omega_1 / (\omega_1 - \Omega)$, i.e., el período medio podría ser teóricamente infinito cuando la frecuencia de la excitación, Ω , es igual a la frecuencia fundamental del oleaje, ω_1 .

En la Figura 5.22 se compara el fenómeno de batimiento en la respuesta en un tanque con diferentes profundidades y con radio 5.5m, excitado armónicamente en su base con una aceleración: $a_x(t) = 0.2\text{sen}(1.5t)$ y considerando un valor de amortiguamiento con respecto al crítico de $\xi=0.5\%$. Las profundidades del fluido son $H=1.65, 2.75, 3.5, 4.0$ y 5.5m ; sus correspondientes frecuencias fundamentales son respectivamente: $\omega_1 = 1.28, 1.54, 1.64, 1.69$ y 1.77 rad/s. El período medio más grande es el que corresponde a un tanque N2 con profundidad media $H= 2.75\text{m}$ ($\omega_1 / \Omega = 1.03$) lo que indica la presencia del fenómeno de cuasi-resonancia. El tanque con profundidad media $H=3.5\text{m}$ ($\omega_1 / \Omega = 1.09$) podría decirse que se encuentra en pseudo-resonancia. En la Tabla 5.3 se resumen las características de los tanques y la relación entre la altura de ola máxima y la profundidad media del tanque, $\frac{\text{olamáx}}{H}$, que indica la importancia de los efectos no lineales en la respuesta.

Tabla 5.4 Características de los tanques de la figura 5.22, $\Omega=1.5$ rad/s

| Tanque | a(m) | H (m) | $\frac{H}{a}$ | ω_1 rad/s | $\frac{\omega_1}{\Omega}$ | olam _{máx} (m) | $\frac{olam_{máx}}{H}$ |
|--------|------|-------|---------------|------------------|---------------------------|-------------------------|------------------------|
| N1 | 5.5 | 1.65 | 0.30 | 1.28 | 0.85 | 0.58 | 0.35 |
| N2 | 5.5 | 2.75 | 0.50 | 1.54 | 1.03 | 2.70 | 0.98 |
| N3 | 5.5 | 3.50 | 0.64 | 1.64 | 1.09 | 0.99 | 0.28 |
| N4 | 5.5 | 4.0 | 0.73 | 1.69 | 1.13 | 0.73 | 0.18 |
| N5 | 5.5 | 5.5 | 1.0 | 1.76 | 1.17 | 0.52 | 0.10 |

En la Tabla 5.4 se observa que para el tanque en cuasi-resonancia (N2, $H/a=0.50$) la altura de ola máxima es casi igual a la profundidad media del tanque, pero sin llegar a ser mayor que ésta. Con respecto a los otros tanques, para una relación $H/a=0.30$, los efectos no lineales en el cálculo de la altura de ola son más significativos ya que el valor de la altura de ola máxima no lineal es del 35% de la profundidad media del tanque. Conforme el tanque es más esbelto los efectos no lineales en la respuesta son menos significativos, siendo la altura de ola máxima para el tanque N5 del orden del 10% de la altura media del tanque.

En la Figura 5.23 se muestra la historia de la respuesta del oleaje en el tanque N3 ($H/a=0.64$) cuando la duración de la excitación se prolonga a $t=150$ s. La respuesta inicialmente presenta el fenómeno de batimiento para después disminuir tendiendo, posteriormente, a ser estacionaria. Este tipo de comportamiento es clásico de los sistemas no lineales gobernados por la ecuación de Duffing (Fig. 5.26), como se discutirá en la siguiente sección.

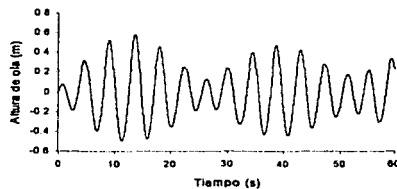
Tanque N1

$$\omega_1 = 1.28 \text{ rad/s}$$

$$a = 5.5 \text{ m}$$

$$H = 1.65 \text{ m}$$

$$H/a = 0.30$$



$$\sigma_{\text{lamax}} = 0.58 \text{ m}$$

$$\sigma_{\text{lamax}} = 0.35 \text{ H}$$

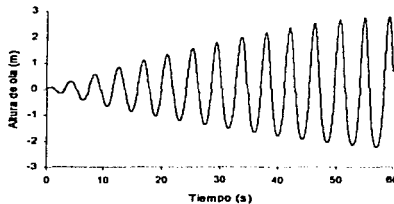
Tanque N2

$$\omega_1 = 1.54 \text{ rad/s}$$

$$a = 5.5 \text{ m}$$

$$H = 2.75 \text{ m}$$

$$H/a = 0.50$$



$$\sigma_{\text{lamax}} = 2.70 \text{ m}$$

$$\sigma_{\text{lamax}} = 0.98 \text{ H}$$

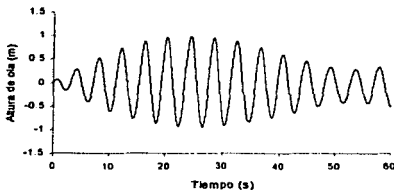
Tanque N3

$$\omega_1 = 1.64 \text{ rad/s}$$

$$a = 5.5 \text{ m}$$

$$H = 3.5 \text{ m}$$

$$H/a = 0.64$$



$$\sigma_{\text{lamax}} = 0.99 \text{ m}$$

$$\sigma_{\text{lamax}} = 0.28 \text{ H}$$

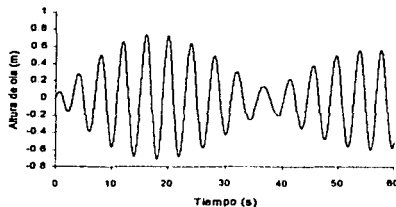
Tanque N4

$$\omega_1 = 1.69 \text{ rad/s}$$

$$a = 5.5 \text{ m}$$

$$H = 4.0 \text{ m}$$

$$H/a = 0.73$$



$$\sigma_{\text{lamax}} = 0.73 \text{ m}$$

$$\sigma_{\text{lamax}} = 0.18 \text{ H}$$

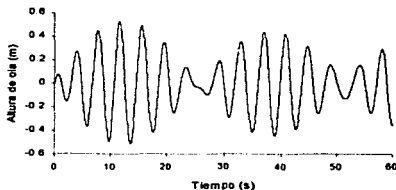
Tanque N5

$$\omega_1 = 1.76 \text{ rad/s}$$

$$a = 5.5 \text{ m}$$

$$H = 5.5 \text{ m}$$

$$H/a = 1.0$$



$$\sigma_{\text{lamax}} = 0.52 \text{ m}$$

$$\sigma_{\text{lamax}} = 0.10 \text{ H}$$

Fig. 5.22 Altura de ola en la pared del tanque, $R=+a$, bajo una excitación armónica: $a_x(t) = 0.2\text{sen}(1.5t)$, $\xi=0.5\%$, para diferentes profundidades del líquido

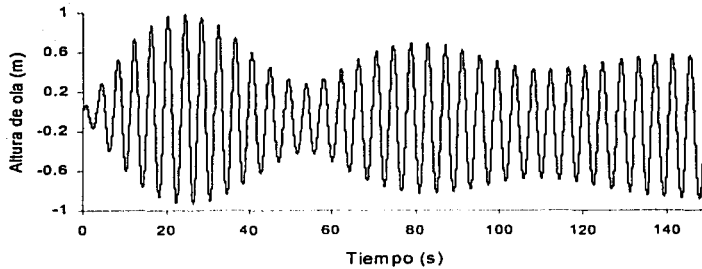


Fig. 5.23 Historia del oleaje en la pared del tanque ($a=5.5\text{m}$, $H=3.5\text{m}$, $\xi=0.5\%$)

En la Figura 5.24 se observa la historia del oleaje en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\omega_2 = 3.07\text{rad/s}$, $\xi=0.5\%$) sometido a una aceleración horizontal en su base del tipo: $a_x(t) = 0.169g \sin(3.1416t)$, cuyas características corresponden al movimiento sísmico SCT.EW (ver Tabla 3.5). La relación entre la frecuencia de la excitación y la segunda fundamental del sistema es:

$$r = \frac{\Omega}{\omega_2} = \frac{3.1416}{3.07} = 1.02$$

lo que indica que el sistema se encuentra en resonancia secundaria, es decir, son excitados los modos subarmónicos. El periodo característico de la excitación es de $T=2\text{s}$; en la Figura 5.24 se observa que los valores máximos de la amplitud se presentan cada $2T=4\text{s}$, lo cual es típico de este comportamiento dinámico (Nayfeh, 1979).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

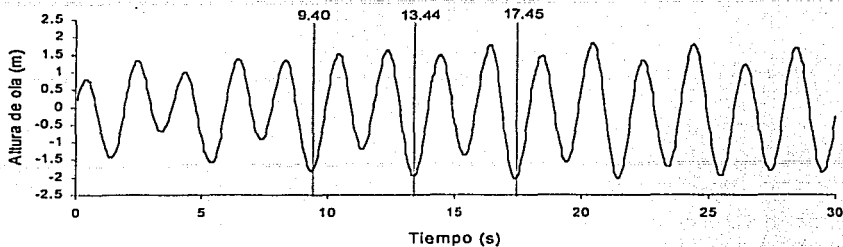


Fig. 5.24 Historia del oleaje en la pared del tanque ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\xi=0.5\%$), $a_x(t) = 0.169g \sin(3.1416t)$

5.7.1 CURVAS DE RESPUESTA EN FRECUENCIA

La gráfica de respuesta de un sistema dinámico lineal en una zona próxima a la resonancia primaria, $\frac{\Omega}{\omega_1} \approx 1$, describe la influencia del amortiguamiento, ξ , y de la frecuencia de la excitación, Ω , sobre el factor de amplificación dinámica (Fig. 5.25). Esta curva es independiente de la amplitud de la excitación. Cuando el valor del amortiguamiento es pequeño, la amplitud de la respuesta es grande.

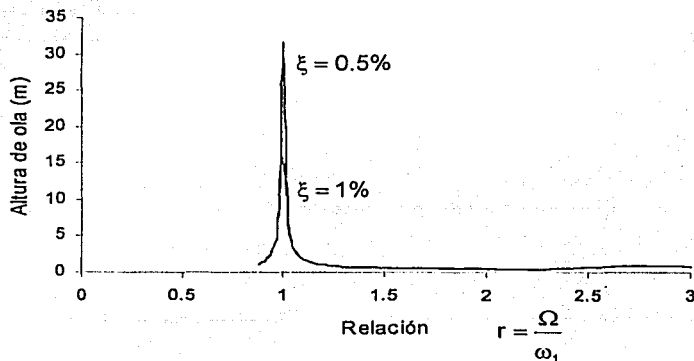


Fig. 5.25 Curvas de respuesta en frecuencia para un oscilador lineal

En un sistema dinámico no lineal sometido a una excitación armónica con pequeña amplitud, ε_0 , gobernado por la ecuación de Duffing, la amplitud de la respuesta, γ , está relacionada con la amplitud y con la frecuencia de la excitación, Ω , por medio del término de detonación de frecuencia, ν , definido como

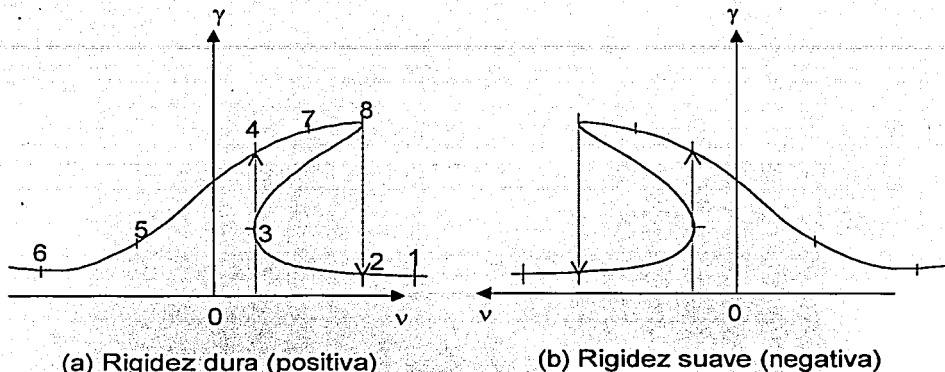
$$\nu = \left[1 - \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} \right] \varepsilon^{-2/3} \quad (5.70)$$

donde $\varepsilon = \varepsilon_0 \Omega$ (Hutton, 1963).

Las curvas de respuesta en frecuencia para un sistema dinámico no lineal representado por la ecuación de Duffing son flexionadas a la derecha si el parámetro que representa la rigidez es positivo (Fig. 5.26a) y a la izquierda, si es negativo (Fig. 5.26b). Si el término que representa la rigidez es positivo se dice que el sistema tiene "rigidez dura" y tiene como características que la rigidez aumenta con el desplazamiento del sistema y su periodo natural disminuye con la amplitud de vibración. Si el término que representa la rigidez es negativo se dice que el sistema tiene "rigidez suave" y presenta características contrarias a la de un sistema con "rigidez dura". La inclinación de las curvas de respuesta en frecuencia produce múltiples valores de la amplitud de la respuesta, lo que ocasiona un fenómeno de "salto".

Consideremos un experimento en un sistema dinámico no lineal sometido a una excitación con amplitud constante y con frecuencia, Ω , variando suavemente. El experimento se inicia con una frecuencia, Ω , próxima a la primer frecuencia del sistema, ω_1 , correspondiente al punto 1 de la Figura 5.26a. Si la frecuencia decrece, el punto en el que se presenta el movimiento pasa por el punto 2 y sigue la rama inferior de la curva. En el punto 3 una pequeña disminución de la frecuencia hace "saltar" el punto representativo del movimiento a la posición 4, lo que indica que hay una inestabilidad en el punto 3, sin embargo, el primer movimiento se hace no estacionario y después alcanza un nuevo estado estacionario que corresponde al punto 4. A medida que la frecuencia sigue disminuyendo el punto representativo sigue la curva de respuesta en frecuencia pasando por los puntos 5 y 6, y no se produce ninguna otra inestabilidad. Supongamos que el punto 6 se deja de disminuir la frecuencia y ahora se aumenta. Cuando el término de detonación de la frecuencia (ν) crece, el punto representativo

sigue la curva de respuesta en frecuencia pasando por los puntos 5, 4, 7 y 8. No salta del punto 4 al 3.



(a) Rigidez dura (positiva) (b) Rigidez suave (negativa)
 Fig. 5.26 Curvas de respuesta en frecuencia para la ecuación tipo Duffing

En el punto 8 un pequeño aumento de la frecuencia hace caer el punto representativo a la posición 2 y sigue moviéndose sobre la curva hasta el punto 1, por lo que el punto representativo no recircula por la misma trayectoria.

La porción de la curva de respuesta en frecuencia comprendida entre las tangentes verticales a los puntos 3 y 8 corresponde a movimientos inestables. Se entiende por inestable el hecho de que cualquier perturbación, no importa lo pequeña que sea, hará que el movimiento se traslade ya sea a la rama superior o a la inferior, por lo que, no se pueden observar estas soluciones en un experimento ni tampoco se pueden calcular numéricamente (los errores de redondeo producen la perturbación); es únicamente por medios analíticos que se puede determinar su existencia.

La teoría propuesta por Moiseev (1958) y el método de perturbaciones es la base para predecir la respuesta de un fluido dentro de un contenedor cuando oscila con frecuencia próxima a la frecuencia de resonancia. En el método de perturbaciones es conveniente reescribir la ecuación de movimiento en términos de variables adimensionales, de esta manera se pueden identificar los parámetros que caracterizan el sistema y se establece el intervalo de estos parámetros para el cual las

aproximaciones son válidas, así como el orden de los errores. El método más común es el de escala múltiples, llamado así porque expresa la solución en términos de diferentes escalas de tiempo. Para determinar la estabilidad del movimiento estacionario se determina la naturaleza de los puntos singulares. Hutton (1963) estableció el comportamiento no lineal del oleaje de un líquido contenido en un tanque con pequeña amplitud y frecuencia próxima a la fundamental empleando la analogía del movimiento no amortiguado de un péndulo, desarrollada por Miles (1962), y la teoría de Moiseev (1958). Hutton (1963) desarrolló el potencial de velocidad del líquido contenido en el tanque y la altura de ola como:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \varepsilon^{n/3} = \phi_1 \varepsilon^{1/3} + \phi_2 \varepsilon^{2/3} + \phi_3 \varepsilon$$

$$\delta = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \varepsilon^{n/3} = \delta_1 \varepsilon^{1/3} + \delta_2 \varepsilon^{2/3} + \delta_3 \varepsilon$$

Moiseev (1958) determinó que esta expansión es la mejor de $\varepsilon^{(a/b)n}$. Rogger y Wess (1972) presentaron algunas correcciones al trabajo de Hutton.

En la Figura 5.27 se muestran las zonas de estabilidad del movimiento no amortiguado en función de la frecuencia transformada (ν) y la amplitud del oleaje en estado estacionario para el tanque cilíndrico del ejemplo de aplicación del capítulo 3 ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$). Se puede observar un comportamiento similar a la ecuación de Duffing con "rigidez suave". Las zonas de estabilidad del movimiento se determinaron usando la teoría propuesta por Hutton (1963) considerando un valor de $\varepsilon_0=0.088\text{m}$ y $\Omega=1.5\text{ rad/s}$. Se puede ver que el movimiento es inestable para una frecuencia de oscilación igual a la frecuencia fundamental del líquido.

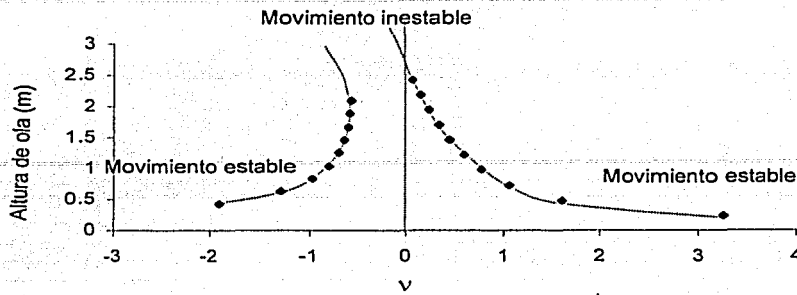


Fig. 5.27 Relación frecuencia transformada - altura de ola máxima, tanque cilíndrico ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\xi=0\%$)

5.7.2 EFECTO DEL AMORTIGUAMIENTO PSEUDO-VISCOSO

Como se mencionó en la sección 2.11, el movimiento del fluido es esencialmente irrotacional excepto cerca de las fronteras sólidas del tanque (Mei y Liu, 1973). La disipación de energía se produce en la capa límite cerca de las paredes y el fondo del tanque, y en la capa límite cerca de la superficie libre del líquido, formándose un menisco entre el líquido y la pared. La cantidad de energía disipada depende de la forma del tanque, de la rugosidad de las paredes y de la viscosidad del líquido. Indudablemente el valor del amortiguamiento debe determinarse experimentalmente. La relación entre el amortiguamiento viscoso (tipo Rayleigh) y el pseudo-viscoso se ha determinado en este trabajo igual a:

$$\mu = 2\xi\omega_1 \quad (5.71)$$

donde ξ es el porcentaje de amortiguamiento con respecto al crítico, ω_1 es la frecuencia fundamental de la superficie libre del líquido y μ es el término que representa el amortiguamiento pseudo-viscoso en el sistema. En la Figura 5.28 se observa la influencia del amortiguamiento en la respuesta del oleaje en la pared del tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\omega_1=1.54\text{rad/s}$), para valores de amortiguamiento con respecto al crítico ξ de 0, 0.5 y 2%, sometido a una excitación horizontal en la base del tanque del tipo, $a_x(t) = 0.2\text{sen}(1.5t)$.

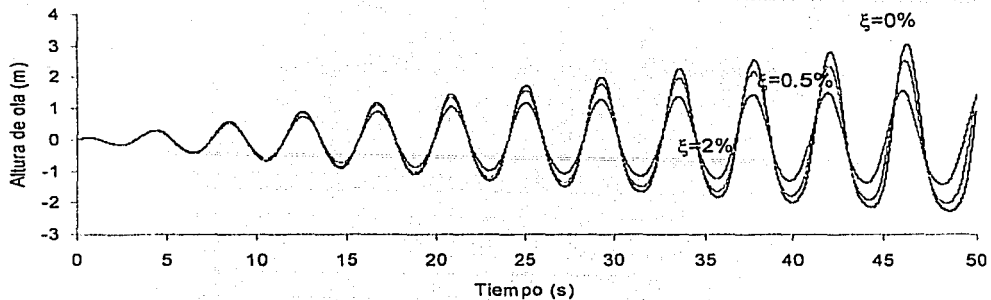


Fig. 5.28 Efecto del amortiguamiento en la respuesta

En forma conceptual se considera que en un sistema dinámico pueden existir tres tipos de amortiguamiento: viscoso, histerético y por fricción o de Coulomb. Raramente un sólo tipo de amortiguamiento puede ocurrir en forma independiente, normalmente los tres tipos de amortiguamiento ocurren simultáneamente, incluso pueden ocurrir otros tipos de amortiguamiento. En los fluidos el amortiguamiento es del tipo viscoso o turbulento. En el amortiguamiento viscoso la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad y en el amortiguamiento turbulento es proporcional al cuadrado de la velocidad. La ecuación de movimiento con amortiguamiento viscoso es lineal. En el amortiguamiento histerético la fuerza de amortiguamiento es función de la velocidad y de la frecuencia de la excitación, Ω , lo que hace que la ecuación de movimiento sea no lineal. En el amortiguamiento por fricción o de Coulomb, también conocido como amortiguamiento constante, la fuerza de amortiguamiento es independiente de los desplazamientos o de sus derivadas y únicamente depende de las fuerzas normales entre las superficies de contacto. Por esta razón la fuerza de amortiguamiento es constante y se considera que es causada por la fricción entre superficies de contacto; en este caso la ecuación de movimiento es no lineal. Físicamente todos los sistemas deben tener un amortiguamiento tipo Coulomb ya que únicamente la fricción puede detener el movimiento. En el amortiguamiento viscoso o en el histerético, el movimiento teóricamente continúa indefinidamente aunque con una amplitud infinitesimal (Steidel, 1979).

Una forma de identificar el tipo de amortiguamiento en un sistema dinámico es por medio de una gráfica semilogarítmica, en la cual en las ordenadas se coloca el logaritmo de los máximos desplazamientos y en las abscisas el número de ciclos en vibración libre. La gráfica es lineal si el amortiguamiento es viscoso, en donde la pendiente de la línea es el decremento logarítmico. Si se presenta amortiguamiento histerético la gráfica es una curva cóncava hacia arriba y si el amortiguamiento es por fricción la gráfica es una curva cóncava hacia abajo. Liu y Huang (1994) determinan el tipo de amortiguamiento en vibración forzada según la tendencia de la forma de la historia de la altura de ola.

Sustituyendo en la ecuación (5.71) el valor de la frecuencia fundamental del tanque del ejemplo de aplicación, ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\omega_1 = 1.54\text{ rad/s}$) con un amortiguamiento de $\xi=0.5\%$, se obtiene un valor de $\mu=0.0154$. Para tanques cuadrados Liu y Huang (1994) recomiendan tomar un valor de $\mu=0.08$, que para este ejemplo corresponde a un valor de amortiguamiento de $\xi=2.5\%$. En la Figura 5.29 se observa la gráfica semilogarítmica de los primeros seis ciclos de la respuesta amortiguada correspondiente para $\xi=0.5\%$ ($\mu=0.0154$) para el tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\omega_1 = 1.54\text{ rad/s}$) sometido a una aceleración en su base del tipo: $a_x(t) = 0.2\text{sen}(1.5t)$. La gráfica es una línea recta, característica de un amortiguamiento tipo viscoso, que posteriormente se convierte en una curva cóncava hacia abajo. Se puede considerar que un valor de amortiguamiento numérico de $\xi=0.5\%$ representa adecuadamente la combinación de los efectos por fricción entre las fronteras sólidas del tanque y el líquido, y los efectos debidos a la viscosidad del líquido.

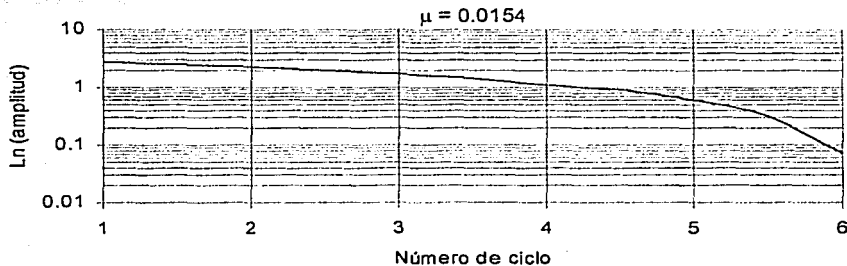


Fig. 5.29 Curvas características de la respuesta amortiguada

5.8 RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se estableció un procedimiento para la solución del problema dinámico no lineal de tanques cilíndricos sometidos a una aceleración sísmica horizontal en su base.

El sistema de ecuaciones de frontera no lineales, válidas en el dominio físico en el que la frontera superior debido al oleaje no permanece horizontal, son mapeadas por medio de un cambio de variable a un dominio computacional definido. El nuevo sistema de ecuaciones no lineales está compuesto por un número mayor de elementos que en el dominio físico y tiene la ventaja de que evita realizar un remallado en cada instante. Se utilizó el método de Diferencias Finitas en la discretización del sistema de ecuaciones no lineales, en un dominio tridimensional y en coordenadas cilíndricas.

El amortiguamiento numérico en el esquema en diferencias finitas puede ser implícito o bien se puede agregar a él en forma explícita. Este tipo de amortiguamiento depende del orden del truncamiento en la serie de Taylor, generándose disipación numérica cuando el truncamiento es de orden par. La cantidad agregada de disipación numérica debe ser pequeña de manera que no altere la convergencia y exactitud de la solución. La disipación numérica agregada explícitamente depende del tamaño de la discretización en la malla y no del problema físico en sí, lo que representa una desventaja.

El sistema de ecuaciones no lineales en el dominio computacional se discretizó por medio de dos esquemas: (1) semi-implícito y (2) implícito o de Crank-Nicholson.

La respuesta numérica se analizó con los movimientos sísmicos definidos en el capítulo 3 y que se registraron el 19 de septiembre de 1985. Para el tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $H/a=0.5$, $\xi=0.5\%$) el esquema numérico semi-implícito diverge de la solución para todos los movimientos sísmicos estudiados. Para el movimiento registrado en CU.NS la solución numérica se obtuvo agregándole explícitamente, por medio del esquema "upwind", un alto contenido de disipación numérica al sistema arriesgándose la exactitud de la solución.

Por lo anterior se considera que el esquema de discretización semi-implícito no es adecuado para la solución del problema.

El esquema Crank-Nicholson es centrado en el espacio y en el tiempo. Al aplicar el esquema a las nuevas condiciones de frontera, resulta un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que pueden linealizarse por medio del método de Newton. El esquema Crank-Nicholson-Newton resultó ser estable en la solución del tanque del ejemplo de aplicación para todos los movimientos sísmicos estudiados, excepto en resonancia, en donde tal vez sea necesario agregar disipación numérica explícitamente al sistema.

La altura de ola calculada con el esquema no lineal resultó ser mayor que la calculada en forma lineal para el tanque con características: $a=7.85\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $H/a=0.35$ y $\xi=0.5\%$. La diferencia entre la altura de ola no lineal y la lineal varía para cada movimiento sísmico, siendo del orden del 25% para el sismo TACY.NS y del 19% para el TACY.EW.

El incremento porcentual entre la respuesta no lineal y la lineal, resulta ser más significativo para las fuerzas cortantes y momentos de volteo. Para el movimiento sísmico registrado en TACY.NS el incremento en las fuerzas cortantes resultó ser del 50% y para el TACY.EW del 28%. Para el movimiento CA.NS dicho incremento es del 63%.

El incremento porcentual de los momentos de volteo, es mayor del 15% para todos los registros sísmicos, excepto para CALETA en ambas direcciones. Para el movimiento TACY.NS el incremento es del 76% y para TACY.EW del 41%. Para los

movimientos SCT.NS y CA.EW el incremento es del orden del 50%. Es de notarse que para el registro CA.NS dicho incremento es del 225%.

Para el registro CALETA, en ambas direcciones, los efectos no lineales en la respuesta no son significativos.

La solución lineal del problema subestima la altura de ola, fuerza cortante y momentos de volteo, para los registros sísmicos estudiados en el tanque del ejemplo de aplicación ($a=7.85\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $H/a=0.35$, $\xi=0.5\%$). En este mismo tanque se analizó la respuesta no lineal al someterse en su base a una excitación horizontal del tipo armónica. La respuesta no lineal sin amortiguamiento se incrementa exageradamente y finalmente diverge. Los resultados indican un comportamiento típico no lineal, en el cual la amplitud del oleaje positivo es mayor que la del oleaje negativo, además de la prolongación del periodo de oscilación.

Los efectos no lineales en la respuesta son más importantes para tanques anchos, con relación $H/a=0.30$, en donde la altura de ola máxima no lineal es del orden del 35% de la profundidad del tanque.

Las curvas de respuesta en frecuencia para un sistema no lineal están relacionadas con la amplitud y con la frecuencia de la excitación, y puede producirse en ellas el fenómeno de "salto" de la respuesta en la zona de inestabilidad del sistema. Usando la teoría de perturbaciones y la técnica de escalas múltiples se definieron las curvas frecuencia-amplitud y de estabilidad del movimiento para el tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $\xi=0\%$).

Considerar el término que representa el amortiguamiento pseudo-viscoso en el esquema numérico genera mejores resultados que un amortiguamiento numérico implícito (disipación numérica). El término μ que representa el amortiguamiento pseudo-viscoso se definió como $\mu = 2\xi\omega_1$, donde ξ es el amortiguamiento numérico tipo viscoso tomado igual al 0.5% del crítico y ω_1 es la frecuencia fundamental del sistema. El amortiguamiento pseudo-viscoso representa adecuadamente la combinación de los efectos por fricción entre el líquido y las fronteras sólidas del tanque, y los efectos debidos a la viscosidad del líquido.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

6.1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años se han desarrollado varios estudios sobre el problema dinámico de líquidos almacenados en contenedores a superficie libre. La mayoría se han aplicado principalmente a la industria militar, aérea y espacial; sin embargo, las dimensiones de los tanques analizados no tienen aplicación en la Ingeniería Civil.

El problema dinámico es no lineal en dos aspectos: (1) la forma de la superficie libre del líquido no es conocida a priori; (2) existen términos no lineales en las condiciones de frontera en la superficie libre.

En los trabajos existentes la solución no lineal del problema se ha obtenido, principalmente, en tanques rectangulares excitados en su base por una aceleración armónica con pequeña amplitud y corta duración. Los movimientos sísmicos normalmente presentan altos niveles de excitación ($> 0.2g$), tienen un periodo de duración de 20 a 60 segundos o mayor y el movimiento que presentan, estrictamente, no es armónico.

En esta tesis se estudiaron los efectos no lineales del oleaje en la respuesta de tanques cilíndricos excitados en su base en la dirección horizontal, por un movimiento discretizado, que puede representar un movimiento sísmico o una excitación armónica del tipo seno-cosenoidal.

6.2 HIPÓTESIS

Se consideró el tanque cilíndrico con paredes rígidas y anclado a una cimentación indeformable, por lo que se despreció el efecto de la interacción suelo-estructura. La excitación horizontal en la base del tanque es armónica o sísmica, discretizada en un registro. El líquido contenido en el tanque se supuso no viscoso,

incompresible e irrotacional, lo que permite considerar la existencia de un potencial de velocidad y la ecuación de continuidad en función del operador Laplaciano.

6.3 CONCLUSIONES Y RESULTADOS

En este trabajo, las ecuaciones de frontera y la ecuación de movimiento están referidos a un sistema no inercial en función de un potencial de velocidad relativo, en donde las condiciones de frontera en las zonas rígidas son homogéneas y la excitación del sistema está en términos de la aceleración del terreno. Se incluyó en la ecuación dinámica de la superficie libre del líquido un término que representa el amortiguamiento pseudo-viscoso del fluido.

La ecuación de movimiento analítica-numérica lineal se resolvió paso a paso en el dominio del tiempo para los movimientos sísmicos registrados durante el sismo del 19 de septiembre de 1985 en las estaciones de Ciudad Universitaria (CU), Viveros (VIV), Secretaria de Comunicaciones y Transportes (SCT), Central de Abastos (CA), Tacubaya (TACY) y Caleta de Campos (CALETA), en sus componentes NS y EW. Los resultados de oleaje en la superficie libre del líquido indican:

- 1) Una contribución importante de los modos superiores de vibrar en la respuesta.
- 2) La presencia del fenómeno de resonancia.

El efecto de resonancia en la teoría lineal produce resultados que escapan al contexto físico del problema. Es previsible que en el caso de resonancia las grandes alturas de ola en la superficie del líquido puedan producir daños importantes en las cubiertas o derramamiento del líquido.

La influencia de los modos superiores en la respuesta y la presencia del fenómeno de resonancia, indican la necesidad de considerar los efectos hidrodinámicos no lineales en la respuesta sísmica de este tipo de estructuras.

Se calculó la respuesta sísmica lineal en forma numérica por medio del método de Diferencias Finitas (MDF). Las ecuaciones en diferencias se resolvieron en coordenadas cilíndricas en un dominio tridimensional sin despreciar el punto central, el

cual se consideró mediante integración en un volumen finito. La exactitud del modelo numérico se validó con respecto a la solución analítica-numérica lineal. La estabilidad del sistema se verificó discretizando la variable temporal por los esquemas: explícito de Euler, semi-implícito y Crank-Nicholson. Los esquemas semi-implícito y de Crank-Nicholson son estables para todos los movimientos sísmicos estudiados. La altura de ola relativa, las presiones hidráulicas y fuerzas cortantes en la pared del tanque, así como los momentos de volteo con respecto a un punto inmediatamente arriba del fondo del tanque, son adecuadamente calculados con el modelo numérico propuesto.

El sistema de ecuaciones de frontera no lineales, válido en el dominio físico en el que la frontera superior debido al oleaje no permanece horizontal, fue mapeado por medio de un cambio de variable a un dominio computacional definido. El nuevo sistema de ecuaciones no lineales está compuesto por un número mayor de elementos que en el dominio físico y tiene la ventaja de que evita realizar un remallado cada instante. Se utilizó el método de Diferencias Finitas en la discretización del sistema de ecuaciones no lineales, en un dominio tridimensional y en coordenadas cilíndricas.

El sistema de ecuaciones no lineales en el dominio computacional se discretizó por medio de dos esquemas: semi-implícito y Crank-Nicholson. La respuesta numérica se analizó con los movimientos sísmicos previamente definidos. Para el tanque del ejemplo de aplicación ($a=5.5\text{m}$, $H=2.75\text{m}$, $H/a=0.5$, $\xi=0.5\%$) el esquema numérico semi-implícito diverge de la solución para todos los movimientos sísmicos estudiados. Para el movimiento registrado en CU.NS la solución numérica se obtuvo agregándole explícitamente, por medio del esquema "upwind", un alto contenido de disipación numérica al sistema con lo cual se arriesga la exactitud de la solución. Por lo anterior se consideró que el esquema de discretización semi-implícito no es adecuado para la solución del problema.

Al aplicar el esquema de Crank-Nicholson a las nuevas condiciones de frontera, resulta un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales que pueden linealizarse por medio del método de Newton. El esquema Crank-Nicholson-Newton resultó ser estable para todos los movimientos sísmicos estudiados, excepto en resonancia, en donde es necesario agregar disipación numérica explícitamente al sistema o considerar un modelo matemático que permita el rompimiento del oleaje.

Los resultados indican un comportamiento típico no lineal en resonancia, en el cual la amplitud del oleaje positivo es mayor que la del oleaje negativo, además de la prolongación del periodo de oscilación.

Se mostró que la solución lineal del problema puede subestimar la altura de ola, fuerza cortante y momentos de volteo. La diferencia entre la respuesta no lineal y la lineal varía para cada movimiento sísmico. El incremento porcentual entre ambas respuestas resulta ser más significativo para las fuerzas cortantes y momentos de volteo.

Los efectos no lineales en la respuesta son más importantes para tanques anchos, con relación $H/a=0.30$, en donde la altura de ola máxima no lineal es del orden del 35% de la profundidad del tanque.

Considerar el término que representa el amortiguamiento pseudo-viscoso en el esquema numérico genera mejores resultados que un amortiguamiento numérico implícito (disipación numérica). El amortiguamiento pseudo-viscoso representa adecuadamente la combinación de los efectos por fricción entre el líquido y las fronteras sólidas del tanque, y los efectos debidos a la viscosidad del líquido.

6.4 CONTRIBUCIONES

a) Se estudiaron los efectos no lineales del oleaje en la respuesta de tanques cilíndricos excitados en su base en la dirección horizontal, por un movimiento discretizado, que puede representar un movimiento sísmico o una excitación armónica del tipo seno-cosenoidal

b) Se obtuvo la solución analítica-numérica lineal considerando un término que representa el amortiguamiento pseudo-viscoso en la respuesta.

c) En la solución lineal se verificó una importante contribución de los modos superiores de vibrar en la respuesta sísmica.

d) Se verificó la presencia del fenómeno de resonancia en la respuesta lineal, en donde la solución produce resultados que escapan al contexto físico del problema.

e) Se obtuvo la solución numérica lineal, por medio del método de Diferencias Finitas, en coordenadas cilíndricas en forma tridimensional y considerando el punto central en la solución.

f) Se propuso un método para la solución numérica no lineal del sistema de ecuaciones de frontera y de movimiento, que evita realizar un remallado cada instante. Se utilizó el método de Diferencias Finitas en la discretización del sistema de ecuaciones no lineales, en un dominio tridimensional y en coordenadas cilíndricas.

g) Se mostró que la solución lineal del problema puede subestimar la altura de ola, fuerza cortante y momentos de volteo; para los movimientos sísmicos estudiados.

h) La diferencia entre la respuesta no lineal y la lineal varía para cada movimiento sísmico. El incremento porcentual entre ambas resulta ser más significativo para fuerzas cortantes y momentos de volteo.

i) Los efectos no lineales en la respuesta son más importantes para tanque anchos, con relación $H/a=0.30$, en donde la altura de ola máxima no lineal es del orden del 35% de la profundidad del tanque.

j) El término de amortiguamiento pseudo-viscoso en el esquema numérico genera mejores resultados que un amortiguamiento numérico implícito (disipación numérica).

6.5 TRABAJOS FUTUROS

Es necesario continuar con el estudio dinámico de este tipo de estructuras considerando, entre otros: los efectos de interacción suelo-estructura, efectos de compresibilidad del líquido, efectos de pantallas amortiguadoras y efectos sísmicos tridimensionales. Es necesario además, realizar estudios experimentales para la determinación del amortiguamiento del líquido, estudios en mesa vibradora y de vibración ambiental. Se considera necesario también estudiar la aplicación de otros métodos numéricos que permitan obtener la solución no lineal del problema en menor tiempo computacional.

**TESIS CON
FALLA DE CINGEN**

REFERENCIAS

1. Abe K. y Sakuraba S. (1993). "Boundary Element Optimization for Sloshing analysis", Boundary Element Methods, M. Tanaka, Q. Du and T. Honma (Editors), Elsevier Science Publishers B. V., 247-256.
2. Abe K. (1996). "R-Adaptive Boundary Element Method for Unsteady Free-Surface Flow Analysis", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 39, 2769-2787.
3. Abramson H. N. (1966). "The Dynamic behavior of liquids in moving containers, whit applications to Space Vehicle Technology", NASA SP-106, San Diego.
4. American Petroleum Institute (1980). "Welded steel tanks for oil storage", API Standard 650, 7th edn, Washington, D.C.
5. American Water Works Association (1984). "AWWA standard for welded steel tanks for water storage", AWWA D-100, Denver, Colorado.
6. Anónimo. (1993). "Manual de Diseño de Obras Civiles, Diseño por Sismo", Comisión Federal de Electricidad, IIE, México.
7. Avilés J. y Li X. (1998). "Analytical-Numerical Solution for Hydrodynamic Pressures on Dams with sloping face considering compressibility and viscosity of water", Computers and Structures, Vol. 66, 481-488.
8. Avilés J. y Li X. (2001). "Hydrodynamic pressures on axisymmetric offshore structures considering seabed flexibility ", Computers and Structures, Vol. 79, 2595-2606.
9. Baker G. R., Meiron D. I. y Orszag S. A. (1982). "Generalized vortex methods for free-surface flow problems", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 123, 477-501.
10. Balendra T., Ang K. K., Paramasivam P y Lee S. L. (1982). "Seismic Design of Flexible Cylindrical Liquid Storage Tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, 477-496.
11. Bathe K. J. y Hahn W. F. (1979). "On transient Analysis of Fluid-Structure systems", Computer and Structures, Vol. 10, 383-391.

12. Barton D. C. y Parker J. V. (1987). "Finite Analysis of the Seismic Response of Anchored and Unanchored Liquid storage tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 15, 299-322.
13. Beer F. P y Johnston Jr. E. R. (1998). "Mecánica vectorial para ingenieros, Dinámica", Mc. Graw Hill.
14. Bello M. A. y Gaxiola S. V. (1986). "Análisis de la respuesta sísmica registrada en la superficie del subsuelo de la Ciudad de México, durante el sismo de septiembre 19 de 1985", Memorias del Simposio Los sismos de 1985: casos de Mecánica de Suelos, SMMS, 269-272.
15. Boris J. P. y Book D. L. (1973). "Flux-Corrected Transport. I. SHASTA, A Fluid Transport Algorithm that Works", Journal of Computational Physics, Vol. 11, 38-69.
16. Bridges T. J. (1981). "A numerical simulation of large amplitude sloshing", Proceedings of the 3rd. International Conference on Numerical ship Hydrodynamics, 269-283.
17. Bridges T. J. y Dias F. (1990). "An analysis of two-dimensional water waves based on O(2) symmetry", Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 14, N° 9, 733-764.
18. Briggs D. G. (1975). "A Finite Difference Scheme for the Incompressible Advection-Diffusion Equation", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 6, 223-241.
19. Brooke B. T. y Olver P. J. (1982). "Hamiltonian structure, symmetries and conservation laws for water waves", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 125, 137-185.
20. Case K. M. y Parkinson W. C. (1957). "Damping of surface waves in an incompressible liquid", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 10, N° 1, 172-184.
21. Chen W., Haroun M. A. y Liu F. (1996). "Large Amplitude liquid sloshing in seismically excited tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 25, 653-669.
22. Clough D. P. (1977). "Experimental Evaluation of Seismic Design Methods for Broad Cylindrical Tanks", Report No. UCB/EERC-77/10, Earthquake Engineering Research Center, Berkeley, California.

23. Cobble M. H. (1973). "Non-linear Shallow water theory", Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 8, 513-522.
24. Conde Lázaro C. y Winter A. G. (1990). "Métodos y Algoritmos básicos del álgebra numérica", Editorial Reverté, SA.
25. De la Fuente O'Connor J. L. (1998). "Técnicas de cálculo para sistemas de Ecuaciones, Programación Lineal y Programación Entera", Códigos en Fortran y C con Aplicaciones de Sistemas de Energía Eléctrica, Segunda Edición, Editorial Reverté, SA.
26. Deylami A. y Sarrafzadeh M. R. (1992). "Seismic Analysis of Cylindrical Liquid Storage Tanks", Faculty of Civil Engineering, Amirkabir University of Technology, Tehran-Iran.
27. Dogangun A., Durmus A. y Ayvaz Y. (1996). "Static and Dynamic Analysis of Rectangular Tanks by Using the Lagrangian Fluid Finite Element", Computer and Structures, Vol. 59, No. 3, 547-552.
28. Dommermuth D. G. y Yue D. K. (1987). "Numerical simulations of nonlinear axisymmetric flow with a free surface", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 178, 195-219.
29. Faltinsen O. M. (1974). "A nonlinear Theory of Sloshing in rectangular tanks", Journal of Ship Research, Vol. 18, N° 4, 224-241.
30. Faltinsen O. M. (1978). "A numerical nonlinear method of sloshing in tanks with two-dimensional flow", Journal of Ship Research, Vol. 22, N° 3, 193-202.
31. Fischer F. D. (1979). "Dynamic Fluid Effects in Liquid-Filled Flexible Cylindrical Tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 7, 587-601.
32. Fischer F. D. y Seeber R. (1988). "Dynamic Response of Vertically Excites Liquid Storage Tanks Considering Liquid-Soil Interaction", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 16, 329-342.
33. Flipse J. E., Lou Y. K., Su T. C. (1980). "A Nonlinear Analysis of Liquid Sloshing in Rigid Containers", Report TAMU RE-4084, Ocean Engineering Program, Texas A&M University College Station, TX 77843.
34. Gaunqing Ch. (1984). "Why the elephant's foot phenomenon of liquid storage tanks happened", Proceedings Eighth World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, CA, Vol. 7, 445-452.

35. Greeves E. J. y Dumanoglu A. A. (1989). "The implementation of an efficient computer analysis for fluid-structure interaction using the Eulerian approach with SAPIV", Report UCB-EE 89-10 Department of Civil Engineering University of Bristol.
36. Gupta R. K. y Hutchinson G. L. (1991). "Effects of wall flexibility on the dynamic response of liquid storage Tanks", Eng. Struct., Vol. 13, 253-267.
37. Harlow H. F. y Welch J. E. (1965). "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface", Methods in Computational Physics, B. Alder, S. Fernbach, and M. Rotenberg (Editors). Academic Press, Vol. 3, 2182-2189.
38. Harlow H. F. y Welch J. E. (1966). "Numerical Study of Large-Amplitude Free-Surface Motions", The Physics of fluids, Vol. 9, N° 5, 842-851.
39. Harlow H. F. y Amsden A. A. (1971). "A numerical Fluid Dynamics Calculation Method for All Flow Speeds", Journal of Computational Physics, Vol. 8, 197-213.
40. Haroun M. A. (1983). "Vibration studies and tests of liquid storage tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 11, 179-206.
41. Haroun M. A. y Tayel M. A. (1984) "Dynamic Behavior of Cylindrical Liquid Storage Tanks under vertical Earthquake excitation", Proceedings Eight World Conference on Earthquake Engineering, San Francisco, CA, 421-428.
42. Haroun M. A. y Tayel M. A. (1985) "Response of Tanks to Vertical Seismic Dynamic Excitations", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 13, 583-595.
43. Hernández B. H. y Heredia Z. E. (2000). "Respuesta sísmica de Tanques cilíndricos para almacenamiento de líquidos", Revista de Ingeniería Sísmica, N° 62, 63-88.
44. Hess J. L. (1975). "Review of integral-equation techniques for solving potential-flow problems with emphasis on the surface-source method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, N° 5, 145-196.
45. Hirt C. W. (1968). "Heuristic Stability Theory for Finite-Difference Equations", Journal of Computational Physics, Vol. 2, 339-355.
46. Hirt C. W., Amsden A. A. y Cook J. L. (1974). "An Arbitrary Lagrangian-Eulerian Computing Method for All Flow Speeds", Journal of Computational Physics", Vol. 14, 227-253.

47. Hirt C. W., Nichols B. D. y Romero N. C. (1975). "SOLA- A Numerical Solution Algorithm for Transient Fluid Flows", Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-5852.
48. Hirt C. W. y Nichols B. D. (1981). "Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries", *Journal of Computational Physics*, Vol. 39, 201-225.
49. Hirt C. W. (1986). "SOLA: A Basic Solution Algorithm for Flow Analysis", Applications of SOLA to Free Surface Flows, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series 1986-07, Introduction to Numerical Solution of Industrial Flows, 12-16 May.
50. Housner G. W. (1957). "Dynamic Pressures on Accelerated fluid containers", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 47, 15-35.
51. Housner G. W. y Haroun M. A. (1980). "Dynamic analyses of liquid storage tanks", Turkish National Committee on Earthquake Engineering, Proceedings Seventh World Conference on Earthquake Engineering, Istanbul, Turkey, Vol. 8, 431-438.
52. Huerta A. y Liu W. K. (1988). "Viscous flow with large free surface motion", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 69, 227-324.
53. Hughes J. R., Liu W. K. y Zimmermann T. K. (1981). "Lagrangian-Eulerian Finite Element Formulation for Incompressible Viscous Flows", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 29, 329-349.
54. Hutton R. E. (1963). "An investigation of Resonant, Nonlinear Nonplanar Free Surface Oscillations of a Fluid", NASA TN D-1870.
55. Hwang J. H., Lee S. H. y Lee S. C. (1988). "Computation of Sloshing Loads by Finite Difference Methods", Report of the Research Institute of Industrial Science, Vol. 11, N° 1, 1-10.
56. Hwang J. H., Kim I. S., Seol Y. S., Lee S. C. y Chon Y. K. (1992). "Numerical Simulation of liquid sloshing in three-dimensional tanks", *Computer and Structures*, Vol. 44, N° 1-2, 339-342.
57. Ikegawa M. (1974). "Finite element analysis of fluid motion in a container", in *Finite Element Methods in Flow Problems* (Eds. J. T. Olsen, O. C. Zienkiewicz, R. H. Gallagher and C. Taylor), UAH Press, Huntsville, 737-738.
58. Iseki T. y Nakatake K. (1989). "Boundary Element Analysis of 3-Dimensional Sloshing Problems by Using Cubic Spline Element", *Trans. West. Japan Soc. Naval Architects*, N° 166, 355-362.

59. Jacobsen L. S. (1949). "Impulsive Hydrodynamics of Fluid Inside a Cylindrical Tank and of a Fluid Surrounding a Cylindrical Pier", Bull. S.S.A., Vol. 39.
60. Jennings P. C. (1971). "Damage of storage tanks, engineering features of the San Fernando Earthquake, Feb. 9, 1971", Earthquake Engineering Research Laboratory, Cal. Tech.
61. Jia Z-H y Ketter R. L. (1989). " Experimental Study of Elephant foot bulge Instability of Thin-Walled Metal Tanks", Technical Report NCEER-89-0004, National Center for Earthquake Engineering Research, State University of New York at Buffalo.
62. Kasuga I., Sugino R. y Tosaka N. (1993). "Sloshing motion in a cylindrical container by boundary element method", Boundary Element Methods, M. Tanaka, Q. Du and T. Honma (Editors), Elsevier Science Publishers B. V., 315-324.
63. Kawano K., Oda T., Yoshida S., Yamamoto T., Shibuya S. y Yamada S. (1980). "Damages of Oil Storage Tanks for off Miyagi Prefecture Earthquake of June 12, 1978", Proceedings of seventh World Conference on Earthquake Engineering, September 8-13, Istanbul, Turkey, Vol. 8, 507-510.
64. Keulegan G. H. (1959). "Energy dissipation in standing waves in rectangular basin", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 9, 153-158.
65. Le Méhauté B. (1976). "An introduction to hydrodynamic and water waves", Springer-Verlag.
66. Lennon G. P., Liu P. L-F. y Liggett J. A. (1982). "Boundary Integral Solutions of Water Wave Problems", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 108, N° HY8, 921-931.
67. Liu P. L-F. y Cheng A. H-D. (1984). "Boundary Solutions for Fluid-Structure Interaction", Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 110, N° 1, paper 18502, 51-64.
68. Lui W. K. (1981). "Finite Element Procedures for Fluid-Structure Interactions and Application to Liquid Storage Tanks", Nuclear Engineering and Design, No. 65, 221-238.
69. Liu W. K. y C. Ma D. (1982). "Computer Implementation Aspects for Fluid-Structure Interaction problems", Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 31, 129-148.
70. Liu W. K. y Chang H. G. (1985). "A Method of computation for fluid structure interaction", Computer and Structures, Vol. 20, N° 1-3, 311-320.

71. Liu Z. y Huang Y. (1994). "A New Method for Large Amplitude Sloshing Problems", Journal of Sound and Vibration, Vol. 175 (2), 185-195.
72. Malhotra P. K. (1995). "Base Uplifting Analysis of Flexibly Supported Liquid-Storage Tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 24, 1591-1607.
73. Malhotra P. K. (1997). "Seismic Response of Soil-Supported Unanchored Liquid-Storage Tanks", Journal of Structural Engineering, Vol. 123, 440-450.
74. Malhotra P. K. (1997). "New Method for Seismic Isolation of Liquid-Storage Tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 26, 839-847.
75. Manos G. C. (1991). "Evaluation of the Earthquake Performance of Anchored Wine Tanks during the San Juan, Argentina, 1977, Earthquake", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 20, 1099-1114.
76. Manos G. C. y Clough R. W. (1982). "Further Study of the Earthquake Response of a Broad Cylindrical Liquid-Storage Tanks Model", Report No. UCB/EERC-82/07, Earthquake Engineering Research Center, Berkeley, California.
77. Manos G. C. y Clough R. W. (1985). "Tank damage during the May 1983 Coalinga Earthquake", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 13, 449-466.
78. Marsden J. E. y Tromba A. J. (1981). "Calculo Vectorial", Fondo Educativo Interamericano, S.A.
79. Manos G. C., Shibata H. y Shigeta T. (1989). "Correlation of Cylindrical Tank Wall Buckling with an Earthquake motion recorded at a small distance from the Tank", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 18, 169-184.
80. Mena E., Carmona C., Delgado R., Alántara L. y Domínguez O. (1986). "Catálogo de acelerogramas procesados del sismo del 19 de septiembre de 1985", Parte I: Ciudad de México, Series del I de I, N° 497, UNAM.
81. McIver P. y Smith S. R. (1987). "Free-surface oscillations of fluid in closed basin", Journal of Engineering Mathematics, N° 21, 139-148.
82. Mei C. C. y Liu L. F. (1973). "The damping of surface gravity waves in a bounded liquid", part 2, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 59, 239-256.
83. Miles J. W. (1962). "Stability of forced oscillations of a spherical pendulum", Quart. Appl. Math, Vol. 20, 21-32.

84. Miles J. (1976). "Nonlinear surface waves in closed basins", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 75, part 3, 419-448.
85. Miles J. (1977). "On Hamilton's principle for surface waves", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 83, 153-158.
86. Miles J. (1984). "Resonantly forced surface waves in a circular cylinder", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 149, 15-31.
87. Miles J. (1984). "Internally resonant surface waves in a circular cylinder", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 149, 1-14.
88. Miles J. (1985). "Surface waves in basins of variable depth", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 152, 379-389.
89. Miyata H. y Nishimura S. (1986). "Finite-difference simulation of nonlinear ship waves", *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 157, 327-357.
90. Moiseev N. N. (1958). "On the Theory of Nonlinear Vibrations of a Liquid of Finite Volume", *Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*, Vol. 22, No. 5, 612-621.
91. Nakayama T. y Washizu K. (1980). "Nonlinear analysis of liquid motion in a container subjected to forced pitching oscillations", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, 1207-1220.
92. Nakayama T. y Washizu K. (1981). "The Boundary Element Method Applied to The Analysis of two-dimensional Nonlinear Sloshing Problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, 1631-1646.
93. Nayfeh A. H. y Mook D. T. (1979). "Nonlinear Oscillations", John Wiley and Sons.
94. Nichols B. D. y Hirt C. W. (1971). "Improved Free Surface Boundary Conditions for Numerical Incompressible-Flow Calculations", *Journal of Computational Physics*, N° 8, 434-448.
95. Niwa A. y Cluogh R. W. (1982). "Buckling of cylindrical liquid-storage tanks under earthquake loading", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, 107-122.
96. Ortiz J. L. y Barhorst A. A. (1997). "On modeling fluid-structure interaction", *Proc. 35th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit*, paper AIAA 97-0785, Reno NV.
97. Peek R. y Jennings P. C. (1988). "Simplified Analysis of Unanchored Tanks", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, 1073-1085.

98. Pelekasis N. A., Tsamopoulos J. A. y Manolis G. D. (1992). "A Hybrid Finite-Boundary Element Methods for Inviscid Flows with Free Surface", Journal Of Computational Physics, N° 101, 231-251.
99. Penney W. G. y Price A. T. (1952). "Finite Periodic Stationary Gravity Waves in a Perfect Liquid", Philosophical Transactions of the Royal Society (London), Vol. A 244, 254-284.
100. Peraire J y Peiró J. (1992). "Adaptive Remeshing for three-dimensional Compressible Flow Computations", Journal of Computational Physics, N° 103, 269-285.
101. Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. y Flannery B. P. (1992). "Numerical Recipes in Fortran, The Art of Scientific Computing", Second Edition, Cambridge University Press.
102. Priestley M. J. N. (Editor) (1986). "Seismic Design of Storage Tanks", New Zealand National Society of Earthquake Engineering (NZNSEE).
103. Ramaswamy B., Kawahara M., y Nakayama T. (1986). "Lagrangian finite element method for the analysis of two-dimensional sloshing problems", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 6, 659-670.
104. Rogge T. R. y Weiss H. J. (1966). "An approximate nonlinear analysis of the stability of sloshing modes under translational and rotational excitation", NASA CR-220, San Diego.
105. Rogge T. R. y Weiss H. J. (1966). "A nonlinear analysis for sloshing Forces and Moments on a Cylindrical tank", NASA CR-221, San Diego.
106. Sakar F. N. y Ogawa H. (1984). "Sloshing behavior of floating-roof oil storage tanks", Computer and Structures, Vol. 19, N° 1-2, 183-192.
107. Sharif M. A. R. y Busnaina A. A. (1988). "Assessment of Finite Difference Approximations for the Advection Terms in the Simulation of Practical Flow Problems", Journal of Computational Physics, Vol. 74, 143-176.
108. Shinkai A., Yamaguchi K. y Fukuda J-I. (1983). "Numerical Analysis of three-dimensional Sloshing Problems", Trans. West. Japan Soc. Naval Architects, N° 66, 25-35.
109. Steidel R. F. Jr. (1979). "An Introduction to Mechanical Vibrations", Second Edition, John Wiley and Sons.

110. Telste J. G. (1985). "Calculation of fluid motion resulting from large-amplitude forced heave motion of two-dimensional cylinder in a free surface", Naval Ship Research and Development Center, 20284, 81-93.
111. Thomas J. W. (1995). "Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods", Springer-Verlag New York, Inc.
112. Tozawa S. y Sueoka H. (1989). "Experimental and Numerical Studies on Sloshing in Partially Filled Tanks", The Proceedings of the Fourth International Symposium on Practical Design on Ships and Mobile Units, 57.1-57.8.
113. Ukeguchi N., Sakata H. y Adachi T. (1980). "On the Numerical Analysis of Compressible flow problems by the Modified Flic Method", Computers and Fluid, Vol. 8, 251-263.
114. Veletsos A. S. y Shivakumar P. (1993). "Sloshing response of layered liquids in rigid tanks", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 22, 801-821.
115. Veletsos A. S. y Shivakumar P. (1997). "Dynamic response of tanks containing liquids or solids", Rice University, Houston, Texas, USA.
116. Veletsos A. S. y Yang J. Y. (1977). "Earthquake response of liquid storage tanks", Advances in Civil Engineering through Engineering Mechanics, Proceedings. Second Annual Engineering Mechanics Division Specialty Conference, ASCE, 1-24.
117. Veletsos A. S. y Kumar A. (1984). "Dynamic of vertically excited liquid storage tanks", Proceeding of the VII WCEE, San Francisco, CA, USA, 453-459.
118. Veletsos A. S. (1984). "Seismic response and design of liquid storage tanks", Guidelines for the Seismic Design of Oil and Gas Pipeline Systems, Technical Council on Lifeline Earthquake Engineering, ASCE, New York, 255-370 y 443-461.
119. Veletsos A. S., Tang Y. y Tang H. T. (1992). "Dynamic Response of Flexible Supported Liquid Storage Tanks", Journal of Structural Engineering Division, ASCE, 118, 264-283.
120. Verhagen J. H. y Wijngaarden L. V. (1965). "Non-linear oscillations of fluid in a container", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 22, part 4, 737-751.
121. Verzicco R. y Orlandi P. (1996). "A Finite-Difference Scheme for three-dimensional Incompressible Flows in Cylindrical Coordinates", Journal of Computational Physics, N° 123, 402-414.

122. Warming R. F. y Hyett B. J. (1974). "The Modified Equation Approach to the Stability and Accuracy Analysis of Finite-Difference Methods", *Journal of Computational Physics*, Vol. 14, 159-179.
123. Washizu K., Nakayama T. y Ikegawa M. (1978). "Applications of the finite element methods to some free surface fluid problems", *Finite Element in Water Resources* (Eds. W. G. Gray, G. F. Pinder y C. A. Brebbia), Pentech Press, London, 4.247-4.266.
124. Washizu K. (1982). "Some applications of Finite Element Techniques to Nonlinear free surface fluid flow problems", *Finite Element Flow Analysis*, Tadahiko Kawai (Editor), University of Tokio, North-Holland, 3-15.
125. Welch J. E., Harlow F. H., Shannon J. P. y Daly B. J. (1965). "The MAC Method, a Computing Technique for Solving Viscous, Incompressible, Transient Fluid-Flow Problems Involving Free Surfaces", Los Alamos Scientific Laboratory, Report LA-3425.
126. Williams A. N. y Moubayed W. I. (1990). "Green's function solution for axisymmetric vibration of flexible liquid-filled storage tanks", *Eng. Struct.* Vol. 12, 49-59.
127. Wozniak R.S. y Mitchell (1978). "Basis of Seismic design Provision for Welded Steel Oil Storage Tanks", *Proceedings – Refining Department*, Vol. 57, 485-501.
128. Yeung W. R. y Wu C-F. (1989). "Nonlinear wave-body motion in a closed domain", *Computers and Fluids*, Vol. 17, 351-370.
129. Zakharov V. E. (1968). "Stability of periodic waves on finite amplitude on the surface of a deep fluid", *J. Appl. Mech. Technol. Phys.*, 9, 190-194. (Transl. From Russian).
130. Zhen-xing F. (1993). "BEM modeling for 3-D transient sloshing", *Boundary Element Methods*, M. Tanaka, Q. Du and T. Honma (Editors), Elsevier Science Publishers B. V., 305-314.
131. Zhou M., Zheng S. y Zhang W. (1992). "Study on Elephant-Foot Buckling of Broad Liquid Storage Tanks by Nonlinear Theory of Shells", *Computers and Structures*, Vol. 44, No. 4, 783-788.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

APÉNDICE A

COMPORTAMIENTO DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN $R=0$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

APÉNDICE A

COMPORTAMIENTO DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE EN R=0

En la discretización de la ecuación de Laplace en diferencias finitas es importante el comportamiento de el punto central del dominio, es decir, en R=0. La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas es,

$$\nabla^2 \varphi = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] \quad (A1)$$

Para un valor determinado de $z=z_0$, y realizando una expansión en una serie de Taylor para un valor de φ analítico,

$$\begin{aligned} \varphi(R, \theta, z_0) = \varphi(0,0,z_0) + R \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]_{(0,0,z_0)} + \theta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{R^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right]_{(0,0,z_0)} + \\ + R\theta \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R \partial \theta} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{\theta^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right]_{(0,0,z_0)} + \dots \end{aligned} \quad (A2)$$

evidentemente,

$$\varphi(0, \theta, z_0) = \varphi(0,0,z_0) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi] \quad (A3)$$

Tomando el límite de la ecuación (A2) cuando $R \rightarrow 0$,

$$0 = \theta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{\theta^2}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right]_{(0,0,z_0)} + \dots \quad (A4)$$

la expresión anterior se cumple como identidad para θ , por lo que,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{\partial^n \varphi}{\partial \theta^n} \right] = 0 \quad \text{para } n=1,2,3, \dots \quad \theta=0, z=z_0 \quad (A5)$$

También es evidente que por simetría axial,

$$\left[\frac{\partial^n \varphi}{\partial \theta^n} \right]_{(0,0,z_0)} = \left[\frac{\partial^n \varphi}{\partial \theta^n} \right]_{(0,0,z_0)} \quad (A6)$$

La expresión (A5) puede escribirse,

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{\partial^n \varphi}{\partial \theta^n} \right] = 0 \quad \text{para } n=1,2,3, \dots \quad \theta \in [0, 2\pi], z=z_0 \quad (A7)$$

Una expresión similar a (A5) para $\left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]$ es,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]_{(R,0,z_0)} &= \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]_{(0,0,z_0)} + R \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right]_{(0,0,z_0)} + \theta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R \partial \theta} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{R^2}{2} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial R^3} \right]_{(0,0,z_0)} + \\ &+ R\theta \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial R^2 \partial \theta} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{\theta^2}{2} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial R \partial \theta^2} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{R^3}{6} \left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial R^4} \right]_{(0,0,z_0)} + \\ &+ \frac{R^2 \theta}{2} \left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial^3 R \partial \theta} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{R\theta^2}{2} \left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial R^2 \partial \theta^2} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{\theta^3}{6} \left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial R \partial \theta^3} \right]_{(0,0,z_0)} \end{aligned} \quad (A8)$$

De nuevo por simetría axial en $R=0$,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]_{(0,0,z_0)} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]_{(0,0,z_0)} \quad (A9)$$

por lo que el límite de (A8) cuando $R \rightarrow 0$ es,

$$0 = \theta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R \partial \theta} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{\theta^2}{2} \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial R \partial \theta^2} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{\theta^3}{6} \left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial R \partial \theta^3} \right]_{(0,0,z_0)} + \dots \quad (A10)$$

Tomado en cuenta que existe simetría axial,

$$\left[\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial R \partial \theta^n} \right]_{(0,0,z_0)} = \left[\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial R \partial \theta^n} \right]_{(0,0,z_0)} \quad (A11)$$

En virtud de que (A10) debe de cumplirse como identidad en θ , se concluye que,

$$\left[\frac{\partial^{n+1} \varphi}{\partial R \partial \theta^n} \right] = 0 \quad \text{para } n=1,2,3, \dots \quad \theta \in [0,2\pi], \quad z=z_0 \quad (A12)$$

ó bien, $\frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\partial^n \varphi}{\partial \theta^n} \right] = 0$ ó por continuidad $\frac{\partial^n}{\partial \theta^n} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] = 0$

Procediendo en forma inductiva entre (A7) y (A12), entonces,

$$\left[\frac{\partial^{m+n} \varphi}{\partial R^m \partial \theta^n} \right] = 0 \quad \text{para } m=0, 1, 2, \dots \quad n=1, 2, \dots \quad \theta \in [0,2\pi], \quad z=z_0 \quad (A13)$$

Por tanto la expansión de $\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right]$ alrededor de $R=0$ y $\theta=0$ manteniendo $z=z_0$ es

de la forma,

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right]_{(R,0,z_0)} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right]_{(0,0,z_0)} + R \left[\frac{\partial^3 \varphi}{\partial R \partial \theta^2} \right]_{(0,0,z_0)} + \frac{R^2}{2} \left[\frac{\partial^4 \varphi}{\partial R^2 \partial \theta^2} \right]_{(0,0,z_0)} + \dots \quad (\text{A14})$$

de la expresión (A13),

$$0 = 0 + 0 + 0 + \dots \quad (\text{A15})$$

La expresión (A14) significa que $\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right]$ tiende a cero más rápidamente que cualquier potencia positiva de R, por lo que en $R=0$ y en $z=z_0$, la ecuación de Laplace es independiente de la dirección θ . Por lo que,

$$\nabla^2 \varphi = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \quad (\text{A16})$$

Para determinar el comportamiento de la ecuación Laplace en la dirección radial establecemos la ecuación de Laplace en coordenadas cartesianas, con independencia axial :

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right] = 0 \quad (\text{A17})$$

donde:

$$x = R \cos \theta \quad (\text{A18})$$

$$y = R \sin \theta \quad (\text{A19})$$

De (A18) tenemos:

$$\cos^2 \theta = \frac{x^2}{R^2} \quad (\text{A20})$$

y además

$$dx = \cos \theta dR - R \sin \theta d\theta \quad (\text{A21})$$

De la expresión (A19) tenemos,

$$\sin^2 \theta = \frac{y^2}{R^2} = \frac{x^2 - R^2}{R^2} \quad (\text{A22})$$

y además

$$dy = \sin \theta dR + R \cos \theta d\theta \quad (\text{A23})$$

Del sistema de ecuaciones que forman las expresiones (A21) y (A23), determinamos que,

$$dR = \cos\theta dx + \sin\theta dy$$

$$d\theta = -\frac{\sin\theta}{R} dx + \frac{\cos\theta}{R} dy$$

como la derivada total es,

$$dR = \left[\frac{\partial R}{\partial x} \right] dx + \left[\frac{\partial R}{\partial y} \right] dy$$

$$d\theta = \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx + \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right] dy$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial R}{\partial x} \right] &= \cos\theta & \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] &= -\frac{\sin\theta}{R} \\ \left[\frac{\partial R}{\partial y} \right] &= \sin\theta & \left[\frac{\partial \theta}{\partial y} \right] &= \frac{\cos\theta}{R} \end{aligned} \quad (A24)$$

ahora,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial R}{\partial x} \right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = \left[\cos\theta \frac{\partial}{\partial R} - \frac{\sin\theta}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \varphi \quad (A25)$$

y la segunda derivada,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] &= \cos^2\theta \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] + \frac{\cos\theta \sin\theta}{R^2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] - \frac{\cos\theta \sin\theta}{R} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R \partial \theta} \right] - \\ &\quad - \frac{\sin\theta \cos\theta}{R} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta \partial R} \right] + \frac{\sin^2\theta}{R} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] + \frac{\sin^2\theta}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] + \frac{\sin\theta \cos\theta}{R^2} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (A26)$$

Tomando en cuenta únicamente la componente radial, es decir $\varphi(x) = \varphi(|x|)$ aquellas que sólo dependen de la distancia del punto del origen y siendo el Laplaciano independiente de las variaciones angulares las ecuaciones (A25) y (A26) son,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] &= \cos\theta \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \\ \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right] &= \cos^2\theta \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] - \frac{\sin^2\theta}{R} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \end{aligned}$$

sustituyendo las ecuaciones (A20) y (A22) en las anteriores, tenemos:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}} \right] = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left[\frac{\mathbf{x}}{R} \right]$$

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] \left[\frac{\mathbf{x}^2}{R^2} \right] - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left[\frac{\mathbf{x}^2 - R^2}{R} \right]$$

ó bien:

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \mathbf{x}^2} \right] = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] \left[\frac{\mathbf{x}^2}{R^2} \right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left[\frac{R - \frac{\mathbf{x}^2}{R}}{R^2} \right] \quad (\text{A27})$$

De esta manera, el Laplaciano $\nabla^2 \varphi = 0$ se puede escribir como,

$$\nabla^2 \varphi = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] \left[\frac{\mathbf{x}^2}{R^2} \right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left[\frac{R - \frac{\mathbf{x}^2}{R}}{R^2} \right] = 0 \quad (\text{A28})$$

Reescribiendo la ecuación (A28),

$$\nabla^2 \varphi = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{y^2}{x^2} \right] = 0 \quad (\text{A29})$$

En forma general, las soluciones radiales de la ecuación de Laplace vienen dadas por las soluciones de la ecuación ordinaria de segundo orden:

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] + \frac{(N-1)}{R} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] = 0 \quad (\text{A30})$$

donde N es la dimensión del espacio. Llamando a $p = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]$ la ecuación (A30) se puede escribir como una ecuación con variables,

$$\left[\frac{\partial p(R)}{\partial R} \right] + \frac{(N-1)}{R} p(R) = 0$$

cuya solución es,

$$\varphi(R) = \begin{cases} a \ln R + b & \text{si } N = 2 \\ \frac{a}{R^{N-2}} + b & \text{si } N > 2 \end{cases} \quad (\text{A31})$$

donde a y b son constantes.

Se puede ver que todas las soluciones radiales de la ecuación de Laplace en $R=0$ son singulares, excepto si $a=0$ lo cual implica que se trata de una solución constante. En el problema dinámico de un tanque de almacenamiento de líquidos se necesita que la solución de la ecuación de Laplace en $R=0$ sea no singular, por lo que su solución debe ser una constante.

Así, retomando la ecuación de Laplace (A29) en $x=y$ y que debe de coincidir con la (A16),

$$\nabla^2 \varphi = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] = 0 \quad (\text{A32})$$

Tomando el límite en $R=0$ del segundo término de (A32),

$$\lim_{R \rightarrow 0} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left[\frac{1}{R} \right] = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]}{R} = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right]}{1} = \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right]$$

sustituyendo en la ecuación (A32), la ecuación de Laplace en $R=0$ y para $z=z_0$, se puede escribir,

$$\nabla^2 \varphi = 2 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] = 0 \quad (\text{A33})$$

Es decir, la solución radial de la ecuación de Laplace, en un plano $z=z_0$, que produce una solución no singular en $R=0$ debe ser una constante definida por:

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] = 0 \quad \text{en } R=0 \quad (\text{A34})$$

APÉNDICE B

ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

APÉNDICE B

ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS

La solución analítica de una ecuación diferencial parcial determina el valor de las variables dependientes en forma continua en todo el dominio. La solución numérica da la aproximación de la función únicamente, en puntos discretos del dominio llamados puntos nodales.

Los puntos en la malla se pueden identificar por los subíndices j , k , l en las direcciones x , y , z , respectivamente (Figura B1). Entonces, si (j, k, l) son los subíndices de un punto P en la malla, los puntos ubicados a la izquierda y a la derecha de P son $(j+1, k, l)$ y $(j-1, k, l)$, respectivamente.

El esquema para resolver una ecuación en diferencias, consiste en reemplazar las derivadas por cocientes de diferencias, convirtiendo la ecuación en derivadas a otra en diferencias. Se escribe la ecuación en diferencias, correspondiente a cada punto en la intersección (nodo) de una malla que subdivide la región de interés, en la cual los valores de la función son desconocidos. Resolviendo estas ecuaciones simultáneas se obtienen valores aproximados para la función en cada nodo.

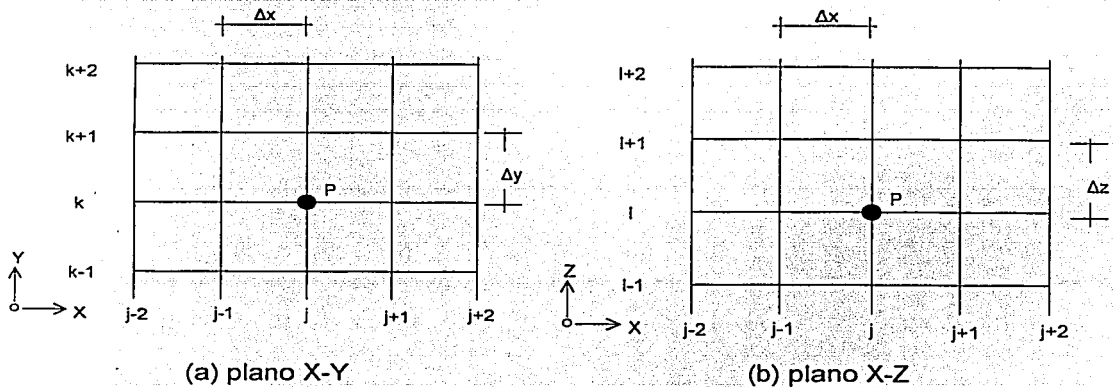


Fig. B1 Discretización de una malla rectangular

B1 ECUACIONES EN DIFERENCIAS CON ESPACIAMIENTOS UNIFORMES

Una forma de representar las derivadas en diferencias finitas es por medio de una expansión en series de Taylor. Si $U_{j,k}$ representan la componente de la velocidad en el punto (j,k) , entonces la velocidad $U_{j+1,k}$ en el punto $(j+1,k)$ puede expresarse en una serie de Taylor expandida alrededor del punto (j,k) como:

$$U_{j+1,k} = U_{j,k} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{j,k} (\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{j,k} \frac{(\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_{j,k} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (B1)$$

La ecuación (B1) es matemáticamente exacta para $U_{j+1,k}$ si el número de términos es infinito y la serie converge y/o si $(\Delta x) \rightarrow 0$. Resolviendo la ecuación para $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{j,k}$ se tiene,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{j,k} = \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta x} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{j,k} \frac{(\Delta x)}{2} + \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_{j,k} \frac{(\Delta x)^2}{6} + \dots \quad (B2)$$

El primer término del lado derecho de (B2) es la representación en diferencias finitas de la derivada parcial, los términos restantes constituyen el error de truncamiento. El término de orden más bajo, en el error de truncamiento, determina el orden de exactitud de la aproximación. La ecuación (B2) escrita en primer orden de exactitud en Δx es:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{j,k} = \frac{U_{j+1,k} - U_{j,k}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (B3)$$

En la ecuación (B3) aparecen los términos $U_{j,k}$ y $U_{j+1,k}$ por lo que se conoce como ecuación en diferencias hacia adelante de primer orden.

Expandiendo la serie de Taylor para $U_{j-1,k}$ alrededor de $U_{j,k}$, se tiene,

$$U_{j-1,k} = U_{j,k} + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{j,k} (-\Delta x) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{j,k} \frac{(-\Delta x)^2}{2} + \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_{j,k} \frac{(-\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (B4)$$

resolviendo para,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{j,k} = \frac{U_{j,k} - U_{j-1,k}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (B5)$$

que representa la ecuación en diferencias finitas hacia atrás en primer orden.

En muchas aplicaciones numéricas no es suficiente la discretización en primer orden, por lo que se requiere un mayor orden de exactitud. Restando (B4) de (B1), tenemos:

$$U_{j+1,k} - U_{j-1,k} = 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{j,k} (\Delta x) + 2\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right)_{j,k} \frac{(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (B6)$$

reescribiendo la ecuación anterior,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{j,k} = \frac{U_{j+1,k} - U_{j-1,k}}{2(\Delta x)} + O(\Delta x)^2 \quad (B7)$$

que representa la ecuación en diferencias finitas centrales en segundo orden.

Sumando (B1) y (B4) se tiene,

$$U_{j+1,k} + U_{j-1,k} = 2U_{j,k} + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{j,k} (\Delta x)^2 + \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4}\right)_{j,k} \frac{(\Delta x)^4}{12} + \dots \quad (B8)$$

resolviendo para la segunda derivada,

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_{j,k} = \frac{U_{j+1,k} - 2U_{j,k} + U_{j-1,k}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (B9)$$

que es la representación en diferencias centrales de segundo orden.

En la Tabla B1 se resumen las ecuaciones en diferencias finitas de segundo orden hacia atrás, hacia adelante y centradas (Thomas, 1995).

Tabla B1 Ecuaciones en diferencias finitas de segundo orden $O(\Delta x)^2$

| Primera derivada | Segunda derivada |
|--|---|
| Hacia adelante $2(\Delta x) \frac{\partial U}{\partial x} = -3U_j + 4U_{j+1} - U_{j+2}$ | Hacia adelante $(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2U_j - 5U_{j+1} + 4U_{j+2} - U_{j+3}$ |
| Hacia atrás $2(\Delta x) \frac{\partial U}{\partial x} = 3U_j - 4U_{j-1} + U_{j-2}$ | Hacia atrás $(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2U_j - 5U_{j-1} + 4U_{j-2} - U_{j-3}$ |
| Centrada $2(\Delta x) \frac{\partial U}{\partial x} = U_{j+1} - U_{j-1}$ | Centrada $(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}$ |

B2 ECUACIONES EN DIFERENCIAS CON ESPACIAMIENTOS NO UNIFORMES

La ecuación (B7) en diferencias finitas centrales de segundo orden está referida a un espaciamiento uniforme, Δx , en la dirección de discretización. La primera derivada a segundo orden, discretizada en la dirección radial, R , para $U_{j,k}$ puede escribirse para un espaciamiento no uniforme (Figura B2), como:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{j,k} = \frac{U_{j+1,k} - U_{j-1,k}}{(\Delta R1 + \Delta R2)} \quad (\text{B10.1})$$

donde $\Delta R1$ y $\Delta R2$ son los espaciamientos de los nodos en la dirección de discretización. La ecuación (B10.1) se puede escribir como,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{j,k} = U_{j-1,k} \left[-\frac{1}{[\Delta R1 + \Delta R2]} \right] + U_{j+1,k} \left[\frac{1}{[\Delta R1 + \Delta R2]} \right] \quad (\text{B10.2})$$

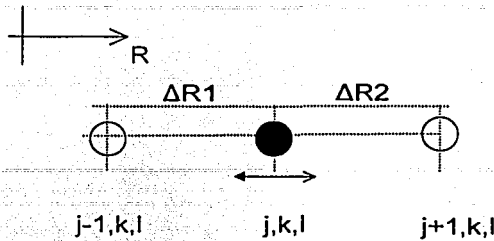


Fig. B2 Molécula con espaciamentos no uniformes en la dirección radial, R

Para la segunda derivada en diferencias finitas centrales,

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{j,k} = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial U}{\partial R}\right) = \frac{\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{\left(j+\frac{\Delta R2}{2}\right),k} - \left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{\left(j-\frac{\Delta R1}{2}\right),k}}{\left[\frac{\Delta R1}{2} + \frac{\Delta R2}{2}\right]} \quad (\text{B11.1})$$

ó bien,

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{j,k} = U_{j-1,k} \left[\frac{2}{[\Delta R1 + \Delta R2]\Delta R1}\right] - U_{j,k} \left[\frac{2}{[\Delta R1][\Delta R2]}\right] + U_{j+1,k} \left[\frac{2}{[\Delta R1 + \Delta R2]\Delta R2}\right] \quad (\text{B11.2})$$

Las ecuaciones en diferencias (B10.2) y (B11.2) son centradas de segundo orden.

Las ecuaciones en diferencias finitas, en el plano vertical $z = l$ (Figura B3), pueden determinarse hacia atrás o hacia delante del punto de interés, $U_{j,k,l}$.

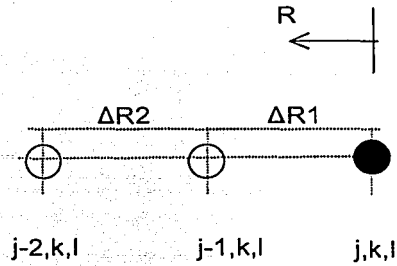
Expandiendo la derivada de $U_{j,k,l}$ alrededor de $U_{j-1,k,l}$,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{j,k,l} = \frac{U_{j,k,l} - U_{j-1,k,l}}{\Delta R1} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right) \frac{(\Delta R1)}{2} + \dots \quad (\text{B12})$$

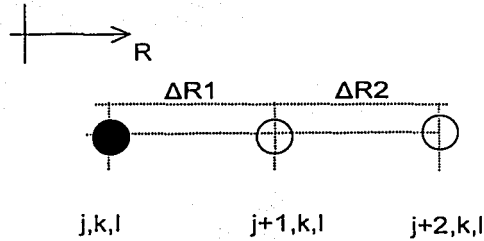
Expandiendo la derivada de $U_{j,k,l}$ alrededor de $U_{j-2,k,l}$,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{j,k,l} = \frac{U_{j,k,l} - U_{j-2,k,l}}{[\Delta R1 + \Delta R2]} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right) \frac{(\Delta R1 + \Delta R2)}{2} + \dots \quad (\text{B13})$$

Despejando $U_{j-1,k,l}$ de (B12),



(a) esquema hacia atrás



(b) esquema hacia adelante

Fig. B3 Moléculas con espaciamientos no uniformes en la dirección radial, R

$$U_{j-1,k,l} = U_{j,k,l} - \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{j,k,l} (\Delta R1) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right)_{j,k,l} \frac{(\Delta R1)^2}{2} + \dots \quad (B14)$$

Despejando $U_{j-2,k,l}$ de (B13),

$$U_{j-2,k,l} = U_{j,k,l} - \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{j,k,l} [\Delta R1 + \Delta R2] - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right)_{j,k,l} \frac{[\Delta R1 + \Delta R2]^2}{2} + \dots \quad (B15)$$

desarrollando,

$$U_{j-2,k,l} = U_{j,k,l} - \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{j,k,l} (\Delta R1) - \left(\frac{\partial U}{\partial R} \right)_{j,k,l} (\Delta R2) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right)_{j,k,l} \frac{(\Delta R1)^2}{2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right)_{j,k,l} [\Delta R1][\Delta R2] - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2} \right)_{j,k,l} \frac{(\Delta R2)^2}{2} + \dots \quad (B16)$$

Restando (B14) de (B16), se tiene,

$$U_{j-2,k,l} - U_{j-1,k,l} = -\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{j,k,l} (\Delta R2) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{j,k,l} (\Delta R1)(\Delta R2) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{j,k,l} \frac{(\Delta R2)^2}{2} + \dots \quad (B17)$$

sustituyendo (B12) en la expresión anterior,

$$U_{j-2,k,l} - U_{j-1,k,l} = \left[\frac{U_{j,k,l} - U_{j-1,k,l}}{\Delta R1} \right] (\Delta R2) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{j,k,l} (\Delta R1)(\Delta R2) - \dots - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{j,k,l} (\Delta R1)(\Delta R2) - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{j,k,l} \frac{(\Delta R2)^2}{2} + \dots \quad (B18)$$

Tomando términos comunes y despejando $\left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial R^2}\right)_{j,k,l} &= -U_{j,k,l} \left[\frac{2[\Delta R2]}{[(\Delta R1)(\Delta R2) + (\Delta R2)^2] (\Delta R1)} \right] + \\ &+ U_{j-1,k,l} \left[\frac{2[\Delta R1 + \Delta R2]}{[(\Delta R1)(\Delta R2) + (\Delta R2)^2] (\Delta R1)} \right] - \\ &- U_{j-2,k,l} \left[\frac{2}{[(\Delta R1)(\Delta R2) + (\Delta R2)^2]} \right] \end{aligned} \quad (B19)$$

La ecuación (B19) está truncada a primer orden. Sustituyendo (B19) en (B12) y tomando términos comunes, se tiene la ecuación en diferencias finitas en segundo orden hacia atrás,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{j,k,l} &= \left[\frac{1}{[(\Delta R1)^2 (\Delta R2) + (\Delta R1)(\Delta R2)^2]} \right] \left[U_{j,k,l} [2(\Delta R1)(\Delta R2) + (\Delta R2)^2] - \right. \\ &\quad \left. - U_{j-1,k,l} [(\Delta R1 + \Delta R2)^2] + U_{j-2,k,l} [(\Delta R1)^2] \right] \end{aligned} \quad (B20)$$

Análogamente, la ecuación en diferencias finitas de segundo orden hacia adelante es:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{j,k,l} = \left[\frac{1}{(\Delta R1)^2(\Delta R2) + (\Delta R1)(\Delta R2)^2} \right] \left[-U_{j,k,l} [2(\Delta R1)(\Delta R2) + (\Delta R2)^2] + U_{j+1,k,l} [(\Delta R1 + \Delta R2)^2] - U_{j+2,k,l} [(\Delta R1)^2] \right] \quad (B21)$$

Si se considera un espaciamento uniforme ΔR , tal que: $\Delta R1 = \Delta R2 = \Delta R$, entonces la ecuación (B21) se puede escribir como:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{j,k,l} = \frac{-3U_{j,k,l} + 4U_{j+1,k,l} - U_{j+2,k,l}}{2(\Delta R)} \quad (B22)$$

La expresión anterior es la ecuación en diferencias finitas hacia adelante, de segundo orden (Tabla B1).

B 2.1 MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

Para ejemplificar el método de coeficientes indeterminados se calculará el esquema hacia adelante de segundo orden de aproximación.

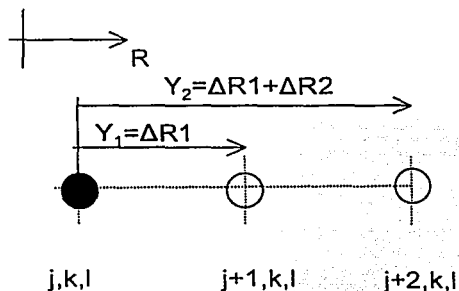


Fig. B4 Molécula con espaciamentos no uniforme, esquema hacia adelante

En la Figura B4 se muestra la molécula para el esquema en diferencias finitas hacia adelante, en donde se puede ver que:

$$y_1 = \Delta R1 \text{ y } y_2 = \Delta R1 + \Delta R2 \quad (B23)$$

Considerando el polinomio de aproximación para la función U,

$$U = aR + dR^2 + U_0 \quad (B24)$$

donde a y d son los coeficiente indeterminados.

La primera derivada de (B24) es,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right) = a + 2dR \quad (B25)$$

evaluando (B24) en $U_{j+1,k,l}$,

$$U_{j+1,k,l} = ay_1 + dy_1^2 + U_{j,k,l} \quad (B26)$$

evaluando (B24) en $U_{j+2,k,l}$

$$U_{j+2,k,l} = ay_2 + dy_2^2 + U_{j,k,l} \quad (B27)$$

Las ecuaciones (B26) y (B27) se pueden escribir como,

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_1^2 \\ y_2 & y_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{j,k,l} \\ U_{j,k,l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{j+1,k,l} \\ U_{j+2,k,l} \end{bmatrix} \quad (B28)$$

resolviendo (B28) para a y d, y sustituyendo en (B25) despreciando el término 2dy, se tiene,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{j,k,l} = \left[\frac{1}{y_1[y_2^2 - y_1y_2]} \right] \left[-U_{j,k,l}[y_2^2 - y_1^2] + U_{j+1,k,l}[y_2^2] - U_{j+2,k,l}[y_1^2] \right] \quad (B29)$$

Sustituyendo (B23) en (B29),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U}{\partial R}\right)_{j,k,l} = & \left[\frac{1}{[(\Delta R1)^2(\Delta R2) + (\Delta R1)(\Delta R2)^2]} \right] \left[-U_{j,k,l} [2(\Delta R1)(\Delta R2) + (\Delta R2)^2] + \right. \\ & \left. + U_{j+1,k,l} [(\Delta R1 + \Delta R2)^2] - U_{j+2,k,l} [(\Delta R1)^2] \right] \quad (B30) \end{aligned}$$

que es igual a (B22).

B 3 DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE

La ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas, se puede escribir como:

$$\left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (B31)$$

ó bien,

$$\left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (B32)$$

Se prefiere discretizar la ecuación de Laplace en la dirección radial,

... $\left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]$ en lugar de $\left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right]$ ya que se conocen los valores de $R_{\left(j+\frac{1}{2}\right)}$ y

de $R_{\left(j-\frac{1}{2}\right)}$, es decir, las distancias radiales de los nodos $j+\frac{\Delta R}{2}$ y $j-\frac{\Delta R}{2}$,

respectivamente. Discretizando la ecuación (B31) en la dirección radial se genera un esquema más exacto (Thomas, 1995). Con respecto a la Figura B5, la discretización en diferencias finitas centrales de segundo orden es,

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] &= \frac{1}{R_j} \frac{\left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]_{\left(j+\frac{\Delta R_2}{2}\right),k,l} - \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]_{\left(j-\frac{\Delta R_1}{2}\right),k,l}}{\left[\frac{\Delta R_1}{2} + \frac{\Delta R_2}{2} \right]} \\ &= \frac{1}{R_j} \frac{2}{\left[\Delta R_1 + \Delta R_2 \right]} \left[R_{\left(j+\frac{\Delta R_2}{2}\right)} \frac{U_{j+1,k,l} - U_{j,k,l}}{\Delta R_2} - R_{\left(j-\frac{\Delta R_1}{2}\right)} \frac{U_{j,k,l} - U_{j-1,k,l}}{\Delta R_1} \right] \end{aligned}$$

ordenando términos,

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{R} \right] \frac{\partial}{\partial R} \left[R \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] = & U_{j,k,l} \left[- \left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{2}{[\Delta R1 + \Delta R2](\Delta R1)(\Delta R2)} \right] \left[(\Delta R1)R_{\left(j + \frac{\Delta R2}{2}\right)} + (\Delta R2)R_{\left(j - \frac{\Delta R1}{2}\right)} \right] \right] + \\ & + U_{j+1,k,l} \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{2}{[\Delta R1 + \Delta R2](\Delta R2)} \right] R_{\left(j + \frac{\Delta R2}{2}\right)} \right] + \\ & + U_{j-1,k,l} \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{2}{[\Delta R1 + \Delta R2](\Delta R1)} \right] R_{\left(j - \frac{\Delta R1}{2}\right)} \right] \end{aligned}$$

(B33)

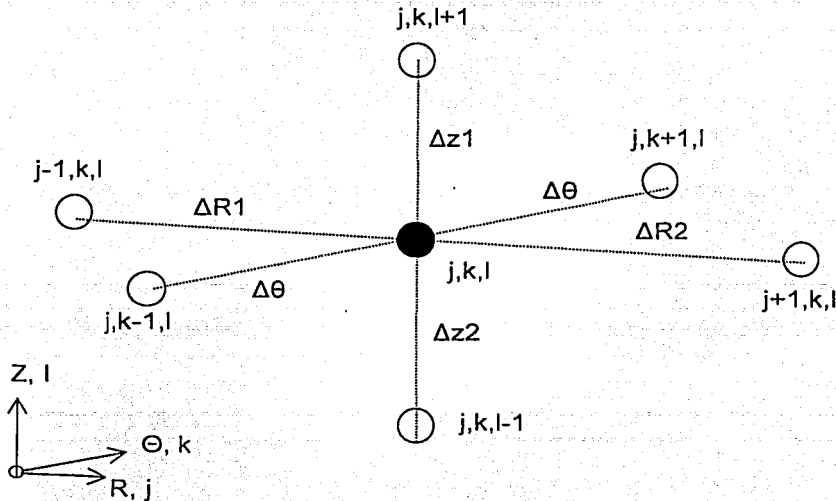


Fig. B5 Esquema tridimensional para la discretización de la ecuación de Laplace

La discretización de la ecuación (B31) en la dirección vertical, se realiza por diferencias finitas centrales de segundo orden como,

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = \frac{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{j,k,l+\frac{\Delta z1}{2}} - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{j,k,l-\frac{\Delta z2}{2}}}{\left[\frac{\Delta z1}{2} + \frac{\Delta z2}{2} \right]}$$

Ordenando términos,

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] = U_{j,k,l-1} \left[\frac{2}{(\Delta z1 + \Delta z2)(\Delta z2)} \right] - U_{j,k,l} \left[\frac{2}{(\Delta z1)(\Delta z2)} \right] + U_{j,k,l+1} \left[\frac{2}{(\Delta z1 + \Delta z2)(\Delta z1)} \right] \quad (B34)$$

La ecuación de Laplace en la dirección angular, θ , se discretiza en diferencias finitas centrales de segundo orden, considerando espaciamento uniforme, $\Delta\theta$.

$$\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] = \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] [U_{j,k-1,l} - 2U_{j,k,l} + U_{j,k+1,l}]$$

Ordenando términos,

$$\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] = U_{j,k-1,l} \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] - 2U_{j,k,l} \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] + U_{j,k+1,l} \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \quad (B35)$$

El esquema en diferencias finitas de la ecuación de Laplace, truncada a segundo orden, se obtiene sustituyendo los esquemas (B33), (B34) y (B35) en la ecuación (B31), como:

$$U_{j,k,l} \left[- \left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{2}{(\Delta R1 + \Delta R2)(\Delta R1)(\Delta R2)} \right] R_{\left(j+\frac{\Delta R2}{2}\right)} (\Delta R1) + R_{\left(j-\frac{\Delta R1}{2}\right)} (\Delta R2) \right] -$$

$$- 2 \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] - 2 \left[\frac{1}{(\Delta z1)(\Delta z2)} \right] +$$

$$U_{j+1,k,l} \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{2}{(\Delta R1 + \Delta R2)(\Delta R2)} \right] R_{\left(j+\frac{\Delta R2}{2}\right)} \right] + U_{j-1,k,l} \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{2}{(\Delta R1 + \Delta R2)(\Delta R1)} \right] R_{\left(j-\frac{\Delta R1}{2}\right)} \right] +$$

$$\begin{aligned}
& U_{j,k+1,l} \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + U_{j,k-1,l} \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + \\
& U_{j,k,l+1} \left[\frac{2}{(\Delta z_1 + \Delta z_2)(\Delta z_1)} \right] + U_{j,k,l-1} \left[\frac{2}{(\Delta z_1 + \Delta z_2)(\Delta z_2)} \right] = 0
\end{aligned}
\tag{B36}$$

La ecuación de Laplace discretizada a segundo orden, con espaciamentos uniformes: $\Delta R, \Delta\theta, \Delta z$, en las direcciones radial, angular y vertical, es

$$\begin{aligned}
& U_{j,k,l} \left[- \left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] \left[R_{\left(j+\frac{\Delta R}{2}\right)} + R_{\left(j-\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] - 2 \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] - 2 \left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] + \\
& U_{j+1,k,l} \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] R_{\left(j+\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] + U_{j-1,k,l} \left[\left[\frac{1}{R_j} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R)^2} \right] R_{\left(j-\frac{\Delta R}{2}\right)} \right] + \\
& U_{j,k+1,l} \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + U_{j,k-1,l} \left[\left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta\theta)^2} \right] \right] + \\
& U_{j,k,l+1} \left[\left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] + U_{j,k,l-1} \left[\left[\frac{1}{(\Delta z)^2} \right] \right] = 0
\end{aligned}
\tag{B37}$$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

APÉNDICE C

TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES

**TESIS COL.
FALLA DE ORIGEN**

APÉNDICE C

TRANSFORMACIÓN DE ECUACIONES

Considerando el cambio de variables del dominio físico: $\varphi = \varphi(R, \theta, z, t)$, al dominio computacional $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(\xi, \eta, \sigma, \tau)$.

CÁLCULO DE PRIMERAS DERIVADAS

Primera derivada en R,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right]_{0,z,t} &= \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right]_{\eta,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right]_{0,z,t} + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right]_{\xi,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right]_{0,z,t} \\ &+ \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]_{\xi,\eta,\tau} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]_{0,z,t} + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right]_{\xi,\eta,\sigma} \left[\frac{\partial \tau}{\partial R} \right]_{0,z,t} \end{aligned}$$

se puede escribir:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] \quad (C1)$$

Primera derivada en z,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{R,0,t} &= \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right]_{\eta,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right]_{R,0,t} + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right]_{\xi,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right]_{R,0,t} \\ &+ \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]_{\xi,\eta,\tau} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right]_{R,0,t} + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right]_{\xi,\eta,\sigma} \left[\frac{\partial \tau}{\partial z} \right]_{R,0,t} \end{aligned}$$

se puede escribir:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] \quad (C2)$$

Primera derivada en θ ,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right]_{R,z,t} &= \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right]_{\eta,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right]_{R,z,t} + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right]_{\xi,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right]_{R,z,t} \\ &+ \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]_{\xi,\eta,\tau} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right]_{R,z,t} + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right]_{\xi,\eta,\sigma} \left[\frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right]_{R,z,t} \end{aligned}$$

se puede escribir:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] \quad (C3)$$

Primera derivada en t,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_{R,0,z} &= \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right]_{\eta,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \xi}{\partial t} \right]_{R,0,z} + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right]_{\xi,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t} \right]_{R,0,z} \\ &+ \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]_{\xi,\eta,\tau} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right]_{R,0,z} + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right]_{\xi,\eta,\sigma} \left[\frac{\partial \tau}{\partial t} \right]_{R,0,z} \end{aligned}$$

se puede escribir:

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right] \quad (C4)$$

CÁLCULO DE SEGUNDAS DERIVADAS

Para el cálculo de la segunda derivada en R, de la ecuación (C1) tenemos que el operador,

$$\left[\frac{\partial}{\partial R} \right]_{0,z,t} = \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right]_{\eta,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right]_{0,z,t} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \right]_{\xi,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right]_{0,z,t} + \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \right]_{\xi,\eta,\tau} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]_{0,z,t}$$

llamando a $P = \left[\frac{\partial}{\partial R} \right]_{0,z,t}$

se tiene,

$$\left[\frac{\partial P}{\partial R} \right] = \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} \right]_{0,z,t} = \left[\frac{\partial}{\partial R} \right]_{0,z,t} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right]_{\eta,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right]_{0,z,t} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \right]_{\xi,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right]_{0,z,t} + \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \right]_{\xi,\eta,\tau} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]_{0,z,t} \right\} \text{ que}$$

podemos escribir,

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right]_{\eta,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial R^2} \right]_{0,z,t} + \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right]_{0,z,t} \left[\frac{\partial^2}{\partial R \partial \xi} \right]_{\eta,\sigma,\tau} \quad (C5.a)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta} \right]_{\xi,\sigma,\tau} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial R^2} \right]_{0,z,t} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right]_{0,z,t} \left[\frac{\partial^2}{\partial R \partial \eta} \right]_{\xi,\sigma,\tau} \quad (C5.b)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \right]_{\xi, \eta, \tau} \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial R^2} \right]_{0, z, t} + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]_{0, z, t} \left[\frac{\partial^2}{\partial R \partial \sigma} \right]_{\xi, \eta, \tau} \quad (C5.c)$$

Los segundos términos de las ecuaciones (C5.a) a (C5.c) involucran la diferenciación con respecto a una variable del sistema (R, θ, z, t) y otra en el sistema $(\xi, \eta, \sigma, \tau)$, esto no es deseable ya que se requiere que se expresen únicamente en términos del sistema $(\xi, \eta, \sigma, \tau)$.

El segundo término en (C5.a) se puede expresar como:

$$[A] = \left[\frac{\partial^2}{\partial R \partial \xi} \right] = \left[\frac{\partial}{\partial R} \right]_{0, z, t} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right]_{\eta, \sigma, \tau}$$

por medio de la regla de la cadena,

$$[A] = \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right]_{\eta, \sigma, \tau} \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right]_{0, z, t} + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \right]_{\xi, \sigma, \tau} \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right]_{0, z, t} + \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \right]_{\xi, \eta, \tau} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]_{0, z, t} \right\} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right]_{\eta, \sigma, \tau}$$

que se puede escribir,

$$\begin{aligned} [A] = & \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right]_{\eta, \sigma, \tau} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial R \partial \xi} \right]_{0, z, t} + \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right]_{0, z, t} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right]_{\eta, \sigma, \tau} + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \right]_{\xi, \sigma, \tau} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial R \partial \xi} \right]_{0, z, t} + \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right]_{0, z, t} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right]_{\eta, \xi, \sigma, \tau} + \\ & + \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \right]_{\xi, \eta, \tau} \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial R \partial \xi} \right]_{0, z, t} + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]_{0, z, t} \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \sigma} \right]_{\xi, \eta, \sigma, \tau} \end{aligned}$$

Se puede verificar que,

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} \right]_{\eta, \sigma, \tau} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial R \partial \xi} \right]_{0, z, t} = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \eta} \right]_{\xi, \sigma, \tau} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial R \partial \xi} \right]_{0, z, t} = 0$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \sigma} \right]_{\xi, \eta, \tau} \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial R \partial \xi} \right]_{0, z, t} = 0$$

por lo que el segundo término en (C5.a) se puede escribir:

$$\left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial R \partial \xi} \right] = \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right]^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right] + \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right] + \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \sigma} \right]$$

Análogamente el segundo término de (C5.b) se puede escribir,

$$\left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial R \partial \eta} \right] = \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \right] + \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right]^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right] + \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \sigma} \right]$$

y el segundo término de (C5.c),

$$\left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial R \partial \sigma} \right] = \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \sigma} \right] + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \sigma} \right] + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \right]$$

Sustituyendo los términos anteriores en las ecuaciones (C5.a) a (C5.c), tenemos para la segunda derivada con respecto a R,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] &= \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial R^2} \right] + \\ &+ \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right]^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi^2} \right] + \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right]^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta^2} \right] + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] + \\ &+ 2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi \partial \eta} \right] + 2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi \partial \sigma} \right] + 2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta \partial \sigma} \right] \end{aligned}$$

(C6)

De la misma manera se pueden obtener el mapeo de las segundas derivadas con respecto a θ y a z ,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] &= \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \right] + \\ &+ \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right]^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi^2} \right] + \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right]^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta^2} \right] + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right]^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] + \\ &+ 2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi \partial \eta} \right] + 2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi \partial \sigma} \right] + 2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta \partial \sigma} \right] \end{aligned}$$

(C7)

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] &= \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right] + \\
&+ \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right]^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi^2} \right] + \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right]^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta^2} \right] + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right]^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] + \\
&+ 2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi \partial \eta} \right] + 2 \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi \partial \sigma} \right] + 2 \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta \partial \sigma} \right]
\end{aligned}$$

(C8)

TRANSFORMACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LAPLACE

La ecuación de Laplace en el dominio físico es,

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial R^2} \right] + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] = 0 \tag{C9}$$

sustituyendo las ecuaciones (C6), (C1), (C7) y (C8) en (C9), tenemos:

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial R^2} \right] + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right] \right] + \\
&\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial R^2} \right] + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right] \right] + \\
&\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial R^2} \right] + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right] \right] + \\
&\left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi^2} \right] \left[\left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right]^2 \right] + \\
&\left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta^2} \right] \left[\left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right]^2 \right] + \\
&\left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right]^2 \right] + \\
&2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi \partial \eta} \right] \left[\left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right] \right] +
\end{aligned}$$

$$2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \xi \partial \sigma} \right] \left[\left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] \right] +$$

$$2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \eta \partial \sigma} \right] \left[\left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] \right] = 0 \quad (C10)$$

Considerando la transformación directa,

$$\xi = R$$

$$\eta = \theta$$

$$\sigma = \frac{z}{h}$$

$$\tau = t$$

ó bien la transformación inversa:

$$R = \xi$$

$$\theta = \eta$$

$$z = h\sigma$$

$$t = \tau$$

La ecuación (C10) se puede escribir,

$$\left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^2} \right] +$$

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \right] + \left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right] \right] +$$

$$\left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right]^2 \right] +$$

$$2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial R \partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] +$$

$$2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta \partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] = 0 \quad (C11)$$

Debido a que la transformación en la dirección vertical $\sigma = \sigma(R, \theta, z, t)$ especificada como:

$$\sigma = \frac{z}{h(R, \theta, t)} \quad (C12)$$

donde z es la coordenada vertical independiente en el dominio físico y $h = h(R, \theta)$ es la altura de ola medida desde el fondo del tanque, entonces,

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] = \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{z}{h} \right] = -\frac{z}{h^2} \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] = -\frac{\sigma}{h} \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] \quad (C13)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial R^2} \right] = -\frac{z}{h^2} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial R^2} \right] + 2 \frac{z}{h^3} \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 = -\frac{\sigma}{h} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial R^2} \right] + 2 \frac{\sigma}{h^2} \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 \quad (C14)$$

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] = -\frac{z}{h^2} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = -\frac{\sigma}{h} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \quad (C15)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \theta^2} \right] = -\frac{z}{h^2} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] + 2 \frac{z}{h^3} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 = -\frac{\sigma}{h} \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] + 2 \frac{\sigma}{h^2} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \quad (C16)$$

$$\left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] = \left[\frac{1}{h} \right] \quad (C17)$$

$$\left[\frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (C18)$$

Sustituyendo de la ecuación (C13) a la (C18) en (C11), la ecuación de Laplace en el dominio computacional es,

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^2} \right] - \\ & - \sigma \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] + \\ & + 2 \sigma \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] + \\ & + \sigma^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] \left[\frac{1}{h} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] + \\ & + \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] \left[\frac{1}{h} \right]^2 - \\ & - 2 \sigma \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial R \partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - 2 \sigma \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta \partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = 0 \end{aligned} \quad (C19)$$

TRANSFORMACIÓN DE LA CONDICIÓN CINEMÁTICA

La condición cinemática del oleaje, en el dominio físico es,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \varphi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = 0 \text{ en } z = \delta(R, \theta, t) + H = h \quad (C20)$$

sustituyendo las ecuaciones (C1), (C2) y (C3) en (C20) tenemos,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] \right\} \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \\ + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] \right\} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - \\ - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (C21)$$

debido a que la transformación es,

$$\xi = R$$

$$\eta = \theta$$

$$\sigma = \frac{z}{h}$$

$$\tau = t$$

y de las ecuaciones (C13), (C15) y (C17), la ecuación (C21) es:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[-\frac{\sigma}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] \right\} \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \\ \left[\frac{1}{R^2} \right] \left\{ \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[-\frac{\sigma}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right\} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] = 0 \end{aligned} \quad (C22)$$

Por lo que la condición cinemática en el dominio computacional es,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left\{ \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 \right\} = 0 \quad \text{en } \sigma = 1 \quad (C23)$$

tomando términos comunes, tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right] \right] + \\
 & + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] \right] + \\
 & + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] + \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial \xi}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \xi}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \xi}{\partial z} \right]^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial \eta}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \eta}{\partial z} \right]^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right]^2 \right] + \\
 & + gh - gH + \mu \tilde{\varphi} + R \cos \theta [a_x(t)] = 0
 \end{aligned}$$

como:

$$\xi = R$$

$$\eta = \theta$$

$$\sigma = \frac{z}{h}$$

$$\tau = t$$

La condición dinámica se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right]^2 \right] + \\
 & + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right]^2 + gh - gH + \mu \tilde{\varphi} + R \cos \theta [a_x(t)] = 0
 \end{aligned}$$

El primer producto de la ecuación anterior se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right] \right] = \\ \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\left[-\frac{\sigma}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[-\frac{\sigma}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[-\frac{\sigma}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right] = \\ \left[-\frac{\sigma}{h} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\left[\frac{\partial h}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \eta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right] \end{aligned}$$

El segundo producto se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right]^2 \right] = \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\left[-\frac{\sigma}{h} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{R^2} \left[-\frac{\sigma}{h} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{h} \right]^2 \right] = \\ \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{\sigma}{h} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{R^2} \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{\sigma} \right]^2 \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación original, tomando términos comunes y $\sigma=1$ ($z=h$) tenemos que la condición dinámica en la superficie del líquido, en el dominio computacional, es:

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\left[\frac{\partial h}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 \right] + \\ + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + gh - gH + \mu \tilde{\varphi} + R \cos \theta [a_x(t)] = 0 \quad \text{en } \sigma = 1 \end{aligned} \quad (C25)$$

COMBINACIÓN DE CONDICIÓN CINEMÁTICA Y DINÁMICA

Condición dinámica (C25) en la superficie libre:

$$\begin{aligned} - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\left[\frac{\partial h}{\partial \tau} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 \right] + \\ \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tau} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + gh - gH + R \cos \theta [a_x(t)] = 0 \quad \text{en } \sigma = 1 \end{aligned}$$

Condición cinemática (C23) en la superficie libre:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 = 0 \quad \text{en } \sigma = 1$$

de la ecuación anterior, despejando:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1$$

y sustituyendo en la condición dinámica,

$$-\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + gh - gH + R \cos \theta [a_x(t)] = 0 \quad \text{en } \sigma = 1$$

ordenando términos,

$$-\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + gh - gH + R \cos \theta [a_x(t)] = 0$$

ó bien:

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 + gh - gH + \mu \tilde{\varphi} + R \cos \theta [a_x(t)] = 0 \quad \text{en } \sigma = 1$$

Así, la condición cinemática en la superficie libre es:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 = 0 \quad \text{en } \sigma = 1$$

(C26)

y la dinámica:

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 + 1 \right] +$$

$$+ gh - gH + \mu \tilde{\varphi} + R \cos \theta [a_x(t)] = 0 \text{ en } \sigma = 1$$

(C27)

Las dos ecuaciones anteriores se pueden escribir como:

Condición dinámica:

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right] = -gh + gH - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] -$$

$$- \mu \tilde{\varphi} - R \cos \theta [a_x(t)] \text{ en } \sigma = 1$$

Condición cinemática:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]$$

en $\sigma = 1$

TRANSFORMACIÓN DE LA CONDICIÓN DEL FONDO

La condición de frontera en la zona rígida del fondo del tanque en el dominio físico es,

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right] = 0 \text{ en } z=0$$

(C28)

de la ecuación (C2) tenemos,

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial z} \right] = 0 \text{ en } \sigma = 0$$

de la expresión (C17),

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] = 0 \text{ en } \sigma = 0$$

por lo que la condición de frontera en el dominio computacional para la frontera del fondo es,

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] = 0 \text{ en } \sigma = 0$$

(C29)

TRANSFORMACIÓN DE LA CONDICIÓN EN LA PARED

La condición de frontera en la pared del tanque en el dominio físico es,

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] = 0 \quad \text{en } R=a \quad (\text{C30})$$

de la expresión (C1), se tiene que

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \xi} \right] + \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial \sigma}{\partial R} \right] = 0 \quad \text{en } \xi = a$$

al sustituir la ecuación (C13), tenemos la condición de frontera que representa la pared del tanque, en el dominio computacional,

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] - \sigma \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] = 0 \quad \text{en } R=a \quad (\text{C31})$$

RESUMEN DE ECUACIONES TRANSFORMADAS

Potencial de velocidad, $\tilde{\varphi}$,

$$\begin{aligned} & \left[\left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \theta^2} \right] \right] - \\ & - \sigma \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\left[\frac{\partial^2 h}{\partial R^2} \right] + \left[\frac{1}{R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} \right] \right] + \\ & + 2\sigma \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] + \\ & + \sigma^2 \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] + \\ & + \left[\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \sigma^2} \right] \left[\frac{1}{h^2} \right] - \\ & - 2\sigma \left[\frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - 2\sigma \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right] = 0 \quad \text{en } \Omega' \end{aligned}$$

EN LAS FRONTERAS

Para el fondo del tanque:

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] = 0 \quad \text{en } \sigma = 0$$

En la pared:

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] = \sigma \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] \quad \text{en } R = a$$

Condición dinámica:

$$\left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} \right] = -gh + gH - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right]^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{h^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right]^2 \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] -$$

$$- \mu \tilde{\varphi} - R \cos \theta [a_x(t)] \quad \text{en } \sigma = 1$$

Condición cinemática:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} \right] = \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{1}{h} \right] \left[1 + \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right]^2 + \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]^2 \right] - \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial R} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial R} \right] - \left[\frac{1}{R^2} \right] \left[\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} \right] \left[\frac{\partial h}{\partial \theta} \right]$$

$$\text{en } \sigma = 1$$

APÉNDICE D

DISCRETIZACIÓN DEL ESQUEMA SEMI-IMPLÍCITO

APÉNDICE D

DISCRETIZACIÓN DEL ESQUEMA SEMI-IMPLÍCITO

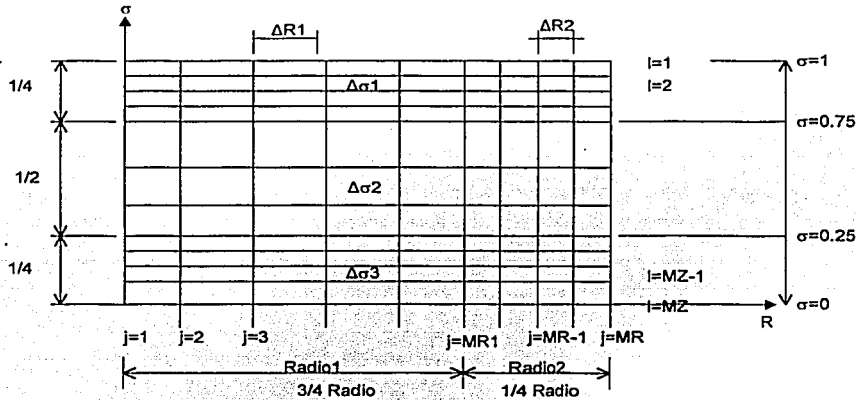


Fig. D1 Características de discretización de la Malla M2

Con referencia a la malla de la Figura D1, la condición cinemática equivalente en la superficie libre del líquido se discretiza con un esquema explícito en la variable temporal.

Para $j=2$; $k= 1,2,3,\dots,(M\theta -1)$,

$$h_{j,k}^{n+1} = h_{j,k}^n$$

$$\begin{aligned}
 & - \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta R1)^2} \right] \left[-3U_{j,k,1} + 4U_{j+1,k,1} - U_{j+2,k,1} \right] \left[-3h_{j,k} + 4h_{j+1,k} - h_{j+2,k} \right]^n - \\
 & - \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta \theta)^2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[U_{j,k+1,1} - U_{j,k-1,1} \right] \left[h_{j,k+1} - h_{j,k-1} \right]^n + \\
 & + \left[3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3} \right] \left[\frac{\Delta t}{2(\Delta \sigma1)} \right] + \left[\frac{\Delta t}{8(\Delta R1)^2(\Delta \sigma1)} \right] \left[-3h_{j,k} + 4h_{j+1,k} - h_{j+2,k} \right]^2]^n
 \end{aligned}$$

$$+ \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\Delta t}{8(\Delta\theta)^2(\Delta\sigma_1)} \right] [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^2 \right]^n \left[\frac{1}{h_{j,k}^n} \right]$$

Para $j=3,4,5, \dots, (MR-1)$; $k=1,2,3, \dots, (M\theta-1)$,

$$h_{j,k}^{n+1} = h_{j,k}^n$$

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta R_1)^2} \right] [U_{j+1,k,1} - U_{j-1,k,1}] [h_{j+1,k} - h_{j-1,k}]^n - \\ & - \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta\theta)^2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] [U_{j,k+1,1} - U_{j,k-1,1}] [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^n + \\ & + [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}] \left[\frac{\Delta t}{2(\Delta\sigma_1)} \right] + \left[\frac{\Delta t}{8(\Delta R_1)^2(\Delta\sigma_1)} \right] [h_{j+1,k} - h_{j-1,k}]^2]^n \\ & + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\Delta t}{8(\Delta\theta)^2(\Delta\sigma_1)} \right] [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^2 \right]^n \left[\frac{1}{h_{j,k}^n} \right] \end{aligned}$$

Para $j=MR$; $k=1,2,3, \dots, (M\theta-1)$,

$$h_{j,k}^{n+1} = h_{j,k}^n$$

$$\begin{aligned} & - \Delta t \left[\frac{1}{(\Delta R_1 + \Delta R_2)} \right]^2 [U_{j+1,k,1} - U_{j-1,k,1}] [h_{j+1,k} - h_{j-1,k}]^n - \\ & - \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta\theta)^2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] [U_{j,k+1,1} - U_{j,k-1,1}] [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^n + \\ & + [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}] \left[\frac{\Delta t}{2(\Delta\sigma_1)} \right] + \left[\frac{\Delta t}{2(\Delta\sigma_1)} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R_1 + \Delta R_2)} \right]^2 [h_{j+1,k} - h_{j-1,k}]^2]^n \\ & + \left[\frac{1}{R_j^2} \left[\frac{\Delta t}{8(\Delta\theta)^2(\Delta\sigma_1)} \right] [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^2 \right]^n \left[\frac{1}{h_{j,k}^n} \right] \end{aligned}$$

Para $j=(MR1+1)$; $k= 1,2,3,\dots(M\theta -1)$,

$$h_{j,k}^{n+1} = h_{j,k}^n$$

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta R2)^2} \right] [U_{j+1,k,1} - U_{j-1,k,1}] [h_{j+1,k} - h_{j-1,k}]^n - \\ & - \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta\theta)^2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] [U_{j,k+1,1} - U_{j,k-1,1}] [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^n + \\ & + [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}] \left[\frac{\Delta t}{2(\Delta\sigma1)} \right] + \left[\frac{\Delta t}{8(\Delta R2)^2(\Delta\sigma1)} \right] [h_{j+1,k} - h_{j-1,k}]^2]^n \\ & + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\Delta t}{8(\Delta\theta)^2(\Delta\sigma1)} \right] [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^2]^n \left[\frac{1}{h_{j,k}^n} \right] \end{aligned}$$

Para $j=MR$; $k= 1,2,3,\dots(M\theta -1)$,

$$h_{j,k}^{n+1} = h_{j,k}^n$$

$$\begin{aligned} & - \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta R2)^2} \right] [3U_{j,k,1} - 4U_{j-1,k,1} + U_{j-2,k,1}] [3h_{j,k} - 4h_{j-1,k} + h_{j-2,k}]^n - \\ & - \left[\frac{\Delta t}{4(\Delta\theta)^2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] [U_{j,k+1,1} - U_{j,k-1,1}] [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^n + \\ & + [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}] \left[\frac{\Delta t}{2(\Delta\sigma1)} \right] + \left[\frac{\Delta t}{8(\Delta R2)^2(\Delta\sigma1)} \right] [3h_{j,k} - 4h_{j-1,k} + h_{j-2,k}]^2]^n \\ & + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{\Delta t}{8(\Delta\theta)^2(\Delta\sigma1)} \right] [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^2]^n \left[\frac{1}{h_{j,k}^n} \right] \end{aligned}$$

La condición dinámica equivalente, en la superficie libre del líquido, se discretiza con un esquema explícito en la variable temporal y los valores del oleaje obtenidos con el esquema explícito anterior se sustituyen en el lado derecho de la ecuación

discretizada, por lo cual el esquema es semi-implicito. Con referencia a la malla de la Figura D1, tenemos:

Para $j=2; k=1,2,3 \dots (M\theta - 1)$

$$\begin{aligned}
 U_{j,k,1}^{n+1} = & U_{j,k,1}^n [1 - \mu \Delta t] - \Delta t g h_{j,k}^{n+1} + \Delta t g H - R_j \Delta t \cos \theta [a_x(t)]^n - \\
 & - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta R_1)} \right]^2 [-3U_{j,k,1} + 4U_{j+1,k,1} - U_{j+2,k,1}]^2 |^n - \\
 & - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \theta)} \right]^2 [U_{j,k+1,1} - U_{j,k-1,1}]^2 |^n + \\
 & + \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \sigma_1)} \right]^2 [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}]^2 |^n \left[1 + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \theta)} \right]^2 [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^2 |^{n+1} + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{1}{2(\Delta R_1)} \right]^2 [-3h_{j,k} + 4h_{j+1,k} - h_{j+2,k}]^2 |^{n+1} \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right]^{n+1} \right.
 \end{aligned}$$

Para $j=3,4,5, \dots (MR_1-1); k=1,2,3 \dots (M\theta - 1)$

$$\begin{aligned}
 U_{j,k,1}^{n+1} = & U_{j,k,1}^n [1 - \mu \Delta t] - \Delta t g h_{j,k}^{n+1} + \Delta t g H - R_j \Delta t \cos \theta [a_x(t)]^n - \\
 & - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta R_1)} \right]^2 [U_{j+1,k,1} - U_{j-1,k,1}]^2 |^n - \\
 & - \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \theta)} \right]^2 [U_{j,k+1,1} - U_{j,k-1,1}]^2 |^n + \\
 & + \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \sigma_1)} \right]^2 [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}]^2 |^n \left[1 + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \theta)} \right]^2 [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^2 |^{n+1} + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{1}{2(\Delta R_1)} \right]^2 [h_{j+1,k} - h_{j-1,k}]^2 |^{n+1} \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right]^{n+1} \right.
 \end{aligned}$$

Para $j = MR1; k=1,2,3 \dots (M0 -1)$

$$\begin{aligned}
 \dot{U}_{j,k,1}^{n+1} &= U_{j,k,1}^n [1 - \mu \Delta t] - \Delta t g h_{j,k}^{n+1} + \Delta t g H - R_j \Delta t \cos \theta [a_x(t)]^n - \\
 &- \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{(\Delta R1 + \Delta R2)} \right]^2 [U_{j+1,k,1} - U_{j-1,k,1}]^2 |^n - \\
 &- \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \theta)} \right]^2 [U_{j,k+1,1} - U_{j,k-1,1}]^2 |^n + \\
 &+ \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \sigma 1)} \right]^2 [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}]^2 |^n \left[1 + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \theta)} \right]^2 [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^2 |^{n+1} + \right. \\
 &+ \left. \left[\frac{1}{(\Delta R1 + \Delta R2)} \right]^2 [h_{j+1,k} - h_{j-1,k}]^2 |^{n+1} \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right]^{n+1} \right.
 \end{aligned}$$

Para $j=(MR1+1) \dots (MR-1); k=1,2,3 \dots (M0 -1)$

$$\begin{aligned}
 U_{j,k,1}^{n+1} &= U_{j,k,1}^n [1 - \mu \Delta t] - \Delta t g h_{j,k}^{n+1} + \Delta t g H - R_j \Delta t \cos \theta [a_x(t)]^n - \\
 &- \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta R2)} \right]^2 [U_{j+1,k,1} - U_{j-1,k,1}]^2 |^n - \\
 &- \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \theta)} \right]^2 [U_{j,k+1,1} - U_{j,k-1,1}]^2 |^n + \\
 &+ \left[\frac{\Delta t}{2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \sigma 1)} \right]^2 [3U_{j,k,1} - 4U_{j,k,2} + U_{j,k,3}]^2 |^n \left[1 + \left[\frac{1}{R_j^2} \right] \left[\frac{1}{2(\Delta \theta)} \right]^2 [h_{j,k+1} - h_{j,k-1}]^2 |^{n+1} + \right. \\
 &+ \left. \left[\frac{1}{2(\Delta R2)} \right]^2 [h_{j+1,k} - h_{j-1,k}]^2 |^{n+1} \left[\frac{1}{h_{j,k}^2} \right]^{n+1} \right.
 \end{aligned}$$

Para $j=MR; k=1,2,3 \dots (M0 -1)$

$$U_{j,k,1}^{n+1} = \left[\frac{1}{3} \right] [4U_{j-1,k,1} - U_{j-2,k,1}]^{n+1}$$

APÉNDICE E

**CONDICIONES DE FRONTERA EN UN SISTEMA NO INERCIAL,
CONSIDERANDO DESPLAZAMIENTOS ANGULARES**

APÉNDICE E

CONDICIONES DE FRONTERA EN UN SISTEMA NO INERCIAL, CONSIDERANDO DESPLAZAMIENTOS ANGULARES

E1 MÉTODO GENERAL

Con respecto a la Figura E1, el sistema inercial X-Y-Z con origen en O está fijo en el espacio y el sistema x-y-z con origen en F está fijo en el tanque y se mueve con el contenedor, el eje x coincide con la superficie horizontal media del líquido.

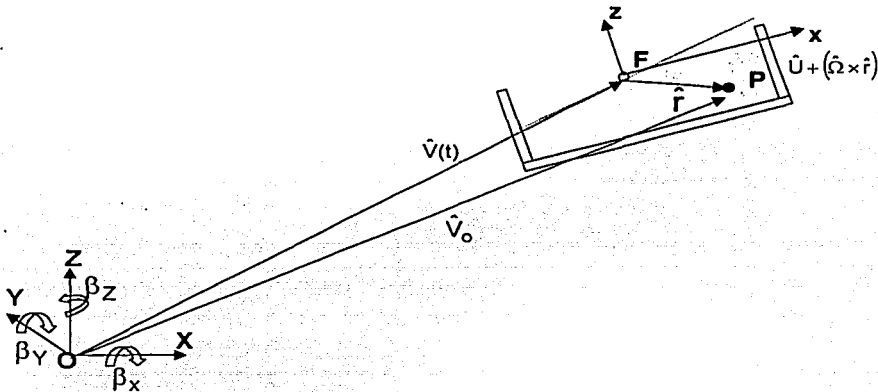


Fig. E1 Sistemas de referencia

El sistema coordenado F(x,y,z) no inercial se mueve con velocidad $\hat{V}(t) = (V_x(t), V_y(t), V_z(t))$ que corresponde a la velocidad del terreno y con velocidad angular $\hat{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$, debida al vector de desplazamiento angular $\hat{\beta} = (\beta_x, \beta_y, \beta_z)$, cuyas componentes se conocen como: balanceo (β_x), cabeceo (β_y) y giro (β_z). Una partícula de fluido P, ubicada en el tanque, se mueve con velocidad absoluta referida al sistema O(X,Y,Z),

$$\hat{V}_o = \hat{V}(t) + \hat{U} + (\hat{\Omega} \times \hat{r}) \quad (E1)$$

con componentes $\hat{V}_o = (U_o, V_o, W_o)$. La velocidad relativa de P, con respecto al sistema $F(x,y,z)$, está definida como: $\hat{U} = (u, v, w)$ y donde $\hat{r} = (x, y, z)$ es el vector de posición de P con respecto al origen del sistema no inercial $F(x,y,z)$. Llamando a \hat{F}_b el vector de fuerzas de cuerpo por masa unitaria y a P_h la presión, entonces la ecuación de movimiento referida al sistema $O(X, Y, Z)$ se puede escribir como:

$$\left. \frac{D\hat{V}_o}{Dt} = \frac{D}{Dt} [\hat{V}(t) + \hat{U} + (\hat{\Omega} \times \hat{r})] \right|_O = \hat{F}_b - \frac{\nabla P_h}{\rho} \quad (E2)$$

donde $\left. \frac{D\hat{V}_o}{Dt} \right|_O$ representa la aceleración absoluta de la partícula P. La aceleración absoluta de la partícula P, referida al sistema $O(X,Y,Z)$ se obtiene (Beer y Johnston, 1997) como:

$$\left. \frac{D\hat{V}_o}{Dt} \right|_O = \hat{a}(t)_{|F} + \hat{\alpha} \times \hat{r} + \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) + 2\hat{\Omega} \times \hat{U} \Big|_F + \left. \frac{D\hat{U}}{Dt} \right|_F \quad (E3)$$

donde, $\hat{a}(t)_{|F} = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + a_z(t)\hat{k}$ es el vector de aceleración del origen móvil $F(x,y,z)$ con respecto al sistema inercial $O(X,Y,Z)$ y que representa el vector de aceleración del terreno y $\hat{\alpha} = (\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z)$ es el vector de aceleración angular.

Igualando (E3) con (E2),

$$\hat{a}(t)_{|F} + \hat{\alpha} \times \hat{r} + \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) + 2\hat{\Omega} \times \hat{U} \Big|_F + \left. \frac{D\hat{U}}{Dt} \right|_F = \hat{F}_b - \frac{\nabla P_h}{\rho}$$

ordenando los términos se tiene,

$$\left. \frac{D\hat{U}}{Dt} \right|_F + 2\hat{\Omega} \times \hat{U} \Big|_F = \hat{F}_b - \frac{\nabla P_h}{\rho} - \hat{\alpha} \times \hat{r} - \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) - \hat{a}(t)_{|F} \quad (E4)$$

El término $\left. \frac{D\hat{U}}{Dt} \right|_F$ es la aceleración local de una partícula P con respecto al sistema no inercial, $F(x,y,z)$; $\hat{\alpha} \times \hat{r} + \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r})$ es la aceleración de transporte y $2\hat{\Omega} \times \hat{U}$ es la aceleración de Coriolis. Los términos involucrados en la ecuación (E4) se pueden escribir iniciando con el término $2\hat{\Omega} \times \hat{U}$,

$$2\hat{\Omega} \times \hat{U} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2\Omega_x & 2\Omega_y & 2\Omega_z \\ u & v & w \end{vmatrix} = [2\Omega_y w - 2\Omega_z v] \hat{i} + [2\Omega_z u - 2\Omega_x w] \hat{j} + [2\Omega_x v - 2\Omega_y u] \hat{k}$$

(E5)

El término $\hat{\alpha} \times \hat{r}$,

$$\hat{\alpha} \times \hat{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \alpha_x & \alpha_y & \alpha_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = [z\alpha_y - y\alpha_z] \hat{i} + [x\alpha_z - z\alpha_x] \hat{j} + [y\alpha_x - x\alpha_y] \hat{k} \quad (E6)$$

Para el término $\hat{\Omega} \times \hat{r}$,

$$\hat{\Omega} \times \hat{r} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = [z\Omega_y - y\Omega_z] \hat{i} + [x\Omega_z - z\Omega_x] \hat{j} + [y\Omega_x - x\Omega_y] \hat{k} \quad (E7)$$

El término $\hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r})$,

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ (z\Omega_y - y\Omega_z) & (x\Omega_z - z\Omega_x) & (y\Omega_x - x\Omega_y) \end{vmatrix} \\ &= [\Omega_y(y\Omega_x - x\Omega_y) + \Omega_z(z\Omega_x - x\Omega_z)] \hat{i} + \\ &+ [\Omega_x(x\Omega_y - y\Omega_x) + \Omega_z(z\Omega_y - y\Omega_z)] \hat{j} + \\ &+ [\Omega_x(x\Omega_z - z\Omega_x) + \Omega_y(y\Omega_z - z\Omega_y)] \hat{k} \end{aligned} \quad (E8)$$

Desarrollando los términos se puede ver que,

$$\hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) = \hat{\Omega} \cdot (\hat{\Omega} \cdot \hat{r}) - \hat{r} \cdot \hat{\Omega}^2 \quad (E9)$$

Sustituyendo las ecuaciones (E5), (E6) y (E8) en (E4) se tienen las componentes de la ecuación de Euler,

$$\frac{Du}{Dt} - 2\Omega_z v + 2\Omega_y w = F_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_h}{\partial x} - z\alpha_y + y\alpha_z - \Omega_y (y\Omega_x - x\Omega_y) - \Omega_z (z\Omega_x - x\Omega_z) - a_x(t)$$

$$\frac{Dv}{Dt} - 2\Omega_x w + 2\Omega_z u = F_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_h}{\partial y} - x\alpha_z + z\alpha_x - \Omega_x (x\Omega_y - y\Omega_x) - \Omega_z (z\Omega_y - y\Omega_z) - a_y(t)$$

$$\frac{Dw}{Dt} - 2\Omega_y u + 2\Omega_x v = F_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_h}{\partial z} - y\alpha_x + x\alpha_y - \Omega_x (x\Omega_z - z\Omega_x) - \Omega_y (y\Omega_z - z\Omega_y) - a_z(t)$$

(E10)

donde la derivada substancial es,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Si consideramos que no existe giro en el tanque, las ecuaciones anteriores se reducen a,

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = F_1 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_h}{\partial x} - a_x(t)$$

$$\left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = F_2 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_h}{\partial y} - a_y(t)$$

$$\left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = F_3 - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_h}{\partial z} - a_z(t)$$

es decir:

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P_h}{\partial x} - \frac{\partial(\rho g z)}{\partial x} - \rho \frac{\partial [x a_x(t)]}{\partial x}$$

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P_h}{\partial y} - \frac{\partial(\rho g z)}{\partial y} - \rho \frac{\partial [y a_y(t)]}{\partial y}$$

$$\rho \left[\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = - \frac{\partial P_h}{\partial z} - \frac{\partial(\rho g z)}{\partial z} - \rho \frac{\partial [z a_z(t)]}{\partial z}$$

(E11)

Aplicando el operador divergencia a la ecuación (E1), se tiene,

$$\nabla \cdot \hat{V}_o = \nabla \cdot \hat{V}(t) + \nabla \cdot \hat{U} + \nabla \cdot (\hat{\Omega} \times \hat{r}) \quad (E12)$$

el desarrollo para los términos involucrados es,

$$\nabla \cdot \hat{V}(t) = \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [V_x(t)\hat{i} + V_y(t)\hat{j} + V_z(t)\hat{k}] = 0 \quad (\text{E13})$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\hat{\Omega} \times \hat{r}) = & \left[\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot [(z\Omega_y - y\Omega_z)\hat{i} + (x\Omega_z - z\Omega_x)\hat{j} + \\ & + (y\Omega_x - x\Omega_y)\hat{k}] = 0 \end{aligned} \quad (\text{E14})$$

Así, la ecuación (E12) se puede escribir,

$$\nabla \cdot \hat{V}_0 = \nabla \cdot \hat{U} \quad (\text{E15})$$

Para un fluido de densidad, ρ , constante, la ecuación de continuidad se puede escribir,

$$\nabla \cdot \hat{V}_0 = 0 \text{ en } \Omega \quad (\text{E16})$$

por lo que si $\nabla \cdot \hat{V}_0 = 0$ implica, según (E15) que,

$$\nabla \cdot \hat{U} = 0 \text{ en } \Omega \quad (\text{E17})$$

ó bien,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \text{ en } \Omega \quad (\text{E18})$$

Tomando el operador rotacional a la ecuación (E1),

$$\nabla \times \hat{V}_0 = \nabla \times \hat{V}(t) + \nabla \times \hat{U} + \nabla \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) \quad (\text{E19})$$

El desarrollo para cada uno de los términos es,

$$\nabla \times \hat{V}(t) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x(t) & V_y(t) & V_z(t) \end{vmatrix} = \hat{0} \quad (\text{E20})$$

Para el término,

$$\nabla \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (z\Omega_y - y\Omega_z) & (x\Omega_z - z\Omega_x) & (y\Omega_x - x\Omega_y) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{\partial}{\partial y} (y\Omega_x - x\Omega_y) - \frac{\partial}{\partial z} (x\Omega_z - z\Omega_x) \right] \hat{i} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial z} (z\Omega_y - y\Omega_z) - \frac{\partial}{\partial x} (y\Omega_x - x\Omega_y) \right] \hat{j} \\
&+ \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\Omega_z - z\Omega_x) - \frac{\partial}{\partial y} (z\Omega_y - y\Omega_z) \right] \hat{k} \\
&= 2\Omega_x \hat{i} + 2\Omega_y \hat{j} + 2\Omega_z \hat{k} = 2\hat{\Omega}
\end{aligned} \tag{E21}$$

Así, la ecuación (E19) se puede escribir,

$$\nabla \times \hat{V}_o = \nabla \times \hat{U} + 2\hat{\Omega} \tag{E22}$$

lo cual indica que el movimiento absoluto de la velocidad es rotacional. Considerando que no existen desplazamientos angulares, la ecuación (E1) es,

$$\hat{V}_o = \hat{V}(t) + \hat{U} \tag{E23}$$

y la ecuación (E22) es,

$$\nabla \times \hat{V}_o = \nabla \times \hat{U} \tag{E24}$$

Si el fluido es considerado irrotacional, $\nabla \times \hat{U} = \hat{0}$, también lo es referido al sistema inercial $O(X,Y,Z)$, $\nabla \times \hat{V}_o = \hat{0}$, por lo que podría suponerse la existencia de un potencial de velocidad absoluto, $\Phi(X,Y,Z,t)$ y un potencial de velocidad relativo, $\phi(x,y,z,t)$, tal que

$$\begin{aligned}
\nabla \Phi &= \hat{V}_o \\
\nabla \phi &= \hat{U}
\end{aligned} \tag{E25}$$

Dado que la ecuación de continuidad es $\nabla \cdot \hat{U} = 0$ y considerando un fluido irrotacional, entonces,

$$\begin{aligned}
u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\
v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\
w &= \frac{\partial \phi}{\partial z}
\end{aligned} \tag{E26}$$

tal que la ecuación de continuidad se puede escribir:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{E27})$$

Las ecuaciones (E11) en función del potencial de velocidad, φ , son:

$$\nabla \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla P_h - \nabla(gz) - \nabla(\hat{r} \cdot \hat{a}(t))$$

integrando la ecuación anterior, obtenemos la ecuación de Bernoulli con respecto al sistema no inercial,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 = -\frac{1}{\rho} P_h - gz - \hat{r} \cdot \hat{a}(t) \quad (\text{E28})$$

donde $\hat{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ es el vector de posición de una partícula, P, con respecto al sistema no inercial, F.

E2 ECUACIONES DE MOVIMIENTO EN 2D

Con referencia a la Figura E2, el sistema inercial X-Y-Z con origen en O está fijo en el espacio, y el sistema x-y-z con origen en F está fijo en el tanque y se mueve con el contenedor, el eje x coincide con la superficie horizontal media del líquido.

El sistema coordenado F(x,y,z) no inercial se mueve con velocidad: $\hat{V}(t) = (V_x(t), V_y(t), 0)$ que corresponde a la velocidad del terreno, y con velocidad angular $\hat{\Omega} = (0, 0, \Omega_z)$ debida al un giro β_z ó cabeceo alrededor del eje z.

Una partícula P, ubicada en el tanque, se mueve con velocidad absoluta referida al origen O(X,Y,Z),

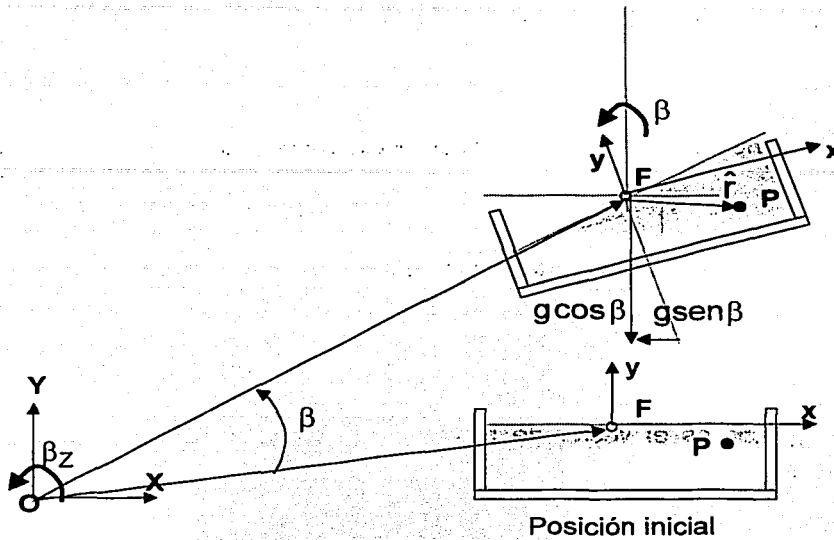


Fig. E2 Sistemas de referencia, movimiento bidimensional

$$\hat{V}_o = \hat{V}(t) + \hat{U} + (\hat{\Omega} \times \hat{r}) \quad (E29)$$

con componentes $\hat{V}_o = (U_o, V_o, 0)$. La velocidad relativa de P, con respecto al sistema $F(x, y, z)$, está definida como: $\hat{U} = (u, v, 0)$ y $\hat{r} = (x, y, z)$ es el vector de posición de P con respecto al origen del sistema no inercial $F(x, y, z)$. Llamando a \hat{F}_b el vector de fuerzas de cuerpo por masa unitaria y a P_h la presión, entonces la ecuación de movimiento referida al sistema $O(X, Y, Z)$ se puede escribir como se especificó en la ecuación (E3),:

$$\frac{D\hat{V}_o}{Dt} = \hat{a}(t)|_F + \hat{\alpha} \times \hat{r} + \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) + 2\hat{\Omega} \times \hat{U}|_F + \frac{D\hat{U}}{Dt}|_F \quad (E30)$$

donde, $\hat{a}(t)|_F = a_x(t)\hat{i} + a_y(t)\hat{j} + 0\hat{k}$ es el vector de aceleración del origen del sistema no inercial $F(x, y, z)$ con respecto al sistema inercial $O(X, Y, Z)$ y que representa el vector de aceleración del terreno; y $\hat{\alpha} = (0, 0, \alpha_z)$ es el vector de aceleración angular. La ecuación (E30) se puede escribir como.

$$\hat{a}(t)|_F + \hat{\alpha} \times \hat{r} + \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) + 2\hat{\Omega} \times \hat{U}|_F + \left. \frac{D\hat{U}}{Dt} \right|_F = \hat{F}_b - \frac{\nabla P_h}{\rho} \quad (E31)$$

ordenando los términos se tiene,

$$\left. \frac{D\hat{U}}{Dt} \right|_F + 2\hat{\Omega} \times \hat{U}|_F = \hat{F}_b - \frac{\nabla P_h}{\rho} - \hat{\alpha} \times \hat{r} - \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) - \hat{a}(t)|_F \quad (E32)$$

El término $\left. \frac{D\hat{U}}{Dt} \right|_F$ es la aceleración local de una partícula P con respecto al

sistema no inercial, $F(x,y,z)$; $\hat{\alpha} \times \hat{r} + \hat{\Omega} \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) = \hat{\alpha} \times \hat{r} + \hat{\Omega} \cdot (\hat{\Omega} \cdot \hat{r}) - \hat{r} \cdot \hat{\Omega}^2$ es la aceleración de transporte y $2\hat{\Omega} \times \hat{U}$ es la aceleración de Coriolis.

Considerando que, $\hat{F}_b = (-g \text{sen} \beta_z, -g \text{cos} \beta_z, 0)$, donde β_z es el desplazamiento angular alrededor del eje z y g es la aceleración de la gravedad; las componentes de la ecuación de Euler son:

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - 2\Omega_z v &= -g \text{sen} \beta_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_h}{\partial x} + y \alpha_z + x \Omega_z^2 - a_x(t) \\ \frac{Dv}{Dt} + 2\Omega_z u &= -g \text{cos} \beta_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_h}{\partial y} - x \alpha_z + y \Omega_z^2 - a_y(t) \end{aligned} \quad (E33)$$

donde la derivada substancial es,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (E34)$$

Si el desplazamiento angular alrededor del eje z se denomina como: $\beta_z = \beta$, entonces las ecuaciones (E33) se pueden escribir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - 2\beta v &= -g \text{sen} \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_h}{\partial x} + y \ddot{\beta} + x(\dot{\beta})^2 - a_x(t) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + 2\beta u &= -g \text{cos} \beta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_h}{\partial y} - x \ddot{\beta} + y(\dot{\beta})^2 - a_y(t) \end{aligned} \quad (E35)$$

Las ecuaciones (E35) se encuentran en función de la velocidad relativa $\hat{U} = (u, v, 0)$ de cualquier partícula de fluido contenido en el tanque con respecto al sistema no inercial, $F(x,y,z)$.

Aplicando el operador rotacional a la ecuación (E1), se tiene,

$$\nabla \times \hat{V}_o = \nabla \times \hat{V}(t) + \nabla \times \hat{U} + \nabla \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) \quad (\text{E36})$$

se puede verificar que,

$$\nabla \times \hat{V}(t) = \hat{0} \quad (\text{E37})$$

$$\nabla \times (\hat{\Omega} \times \hat{r}) = 2\Omega_z \hat{k} \quad (\text{E38})$$

es decir la única componente diferente de cero en (E38), es normal a la página. Sustituyendo (E37) y (E38) en (E36), se tiene,

$$\nabla \times \hat{V}_o = \nabla \times \hat{U} + 2\hat{\Omega} \quad (\text{E39})$$

Se puede observar que el movimiento absoluto de la velocidad es rotacional.

Para un fluido de densidad, ρ , constante, la ecuación de continuidad se puede escribir,

$$\nabla \cdot \hat{V}_o = 0 \text{ en } \Omega \quad (\text{E40})$$

De igual manera, la ecuación de continuidad para la velocidad relativa es,

$$\nabla \cdot \hat{U} = 0 \text{ en } \Omega \quad (\text{E41})$$

ó bien,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \text{ en } \Omega \quad (\text{E42})$$

Aplicando el operador divergencia a la ecuación (E1), se tiene,

$$\nabla \cdot \hat{V}_o = \nabla \cdot \hat{V}(t) + \nabla \cdot \hat{U} + \nabla \cdot (\hat{\Omega} \times \hat{r}) \quad (\text{E43})$$

se puede verificar que,

$$\nabla \cdot \hat{V}_o = \nabla \cdot \hat{U} \quad (\text{E44})$$

por lo que si $\nabla \cdot \hat{V}_o = 0$ implica que: $\nabla \cdot \hat{U} = 0$.

En un movimiento plano o bidimensional todas las líneas del movimiento del fluido son paralelas a un plano fijo y además, los vectores velocidad en puntos correspondientes de todos los planos paralelos al plano de referencia son iguales (Levi, 1991). Se puede suponer la existencia de una función $\psi = \psi(x, y, t)$, llamada función de corriente, y que puede suponerse en cualquier tipo de flujo, rotacional o irrotacional. Así, $\psi = \text{constante}$, implica que la función de corriente se mantiene constante a lo largo de toda la línea de corriente. La función de corriente se define como,

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$v = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (\text{E45})$$

La ecuación de continuidad (E42) se puede escribir,

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial\psi}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial\psi}{\partial x} \right] = 0 \quad (\text{E46})$$

lo cual implica que ψ satisface el principio de continuidad.

Si se considera que el movimiento relativo de la velocidad es rotacional,

$$\nabla \times \hat{U} = \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \hat{k} \quad (\text{E47})$$

cuya única componente diferente de cero es normal a la página.

Las ecuaciones (E35) son función de la velocidad relativa, por lo que interesa conocer la función de corriente, ψ , definiendo el rotacional local como,

$$\hat{\omega} = \nabla \times \hat{U} \quad (\text{E48})$$

tal que según (E47) la componente diferente de cero es normal a la página,

$$\omega = \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (\text{E49})$$

Sustituyendo las ecuaciones (E45) en (E42),

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \omega \quad (\text{E50})$$

es decir,

$$\nabla^2\psi = \omega \quad (\text{E51})$$

La ecuación anterior es la ecuación de Poisson para ψ .