00324

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

21

FACULTAD DE CIENCIAS

"ALGUNOS PROCESOS ASOCIADOS AL PROCESO DE POISSON".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

JUAN PABLO ROBERTO MARQUEZ ARIAS

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MARIA EMILIA CABALLERO ACOSTA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2003

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNMA DE MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Juan Pablo Roberto Márquez Arias.
FECHA: IX/8/03
FIRMA:

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"ALGUNOS PROCESOS ASOCIADOS AL PROCESO DE POISSON".

realizado por Juan Pablo Roberto Márquez Arias

con número de cuenta 9850688-4 , quien cubrió los créditos de la carrera de:

Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. María Emilia Caballero Acosta.	M E Caballero
Propietario	Dr. Miguel Angel García Alvarez.	
Propietario	Dr. Guillermo Grabinsky Steider.	
Suplente	Act. Gerónimo Francisco Uribe Bravo.	
Suplente	Dra. Guadalupe Carrasco Licea.	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega.

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

2

Algunos procesos asociados al proceso de Poisson

Juan Pablo Roberto Márquez Arias

Septiembre 2003

A mis padres,
Adela y Rafael.

En sincero agradecimiento:

A mi amiga, profesora y tutora,
Ma. Emilia

A mi amigo y profesor,
Miguel Ángel

A los miembros de mi honorable jurado:
Dra. María Emilia Caballero
Dr. Miguel Ángel García
Dr. Guillermo Grabinsky
Act. Gerónimo Uribe
Dra. Guadalupe Carrasco,
por sus comentarios,
sugerencias, correcciones,
su inestimable interés y apoyo.

A todos aquellos que de alguna u otra forma
me han apoyado durante estos seis años,
ya que gracias a ellos ha sido posible la
realización de esta tesis.

Índice General

Prefacio

Este trabajo surgió de la idea de hacer una monografía del proceso de Poisson y algunos de los proceso asociados a él, proyecto bastante ambicioso ya que existen bastantes resultados relacionados con él tema, los cuales no figuran en este trabajo. Sin embargo, los resultados básicos son abarcados en esta tesis la cual consta de tres partes en las que se estudian las características principales de los temas abordados en cada una de ellas.

En la primera parte empezaremos por definir la distribución de Poisson, mencionaremos su origen y motivaremos su estudio. Esto es seguido de la definición del proceso de Poisson, demostraremos su existencia construyéndolo y exhibiremos sus propiedades básicas.

En una segunda parte se estudiarán algunos de los procesos conocidos como martingalas con tiempo continuo que esten asociados al proceso de Poisson, dichos procesos son de gran importancia en la teoría de la probabilidad y de los procesos estocásticos ya que han ayudado al desarrollo del cálculo estocástico además de tener aplicaciones de gran importancia. En la década de los cuarenta del siglo XX Îto publicó una fórmula sobre el proceso de Wiener ó movimiento browniano conocida como integral estocástica, en la década siguiente Doob y Meyer notaron que dicha fórmula debía sus propiedades a que el proceso de Wiener es una martingala. Fué entonces que el concepto de martingala tomó importancia teórica y en la década de los sesenta Meyer desarrolló gran parte de la teoría de martingalas y a su vez de las teorías de integración estocástica y del compensador. Es por eso que se estudian algunas martingalas en este texto. En la última sección de este capítulo definiremos al proceso de Poisson compuesto y estudiaremos sus propiedades básicas.

El capítulo final generalizará el concepto de proceso de Poisson al de medida aleatoria de Poisson, definiremos al proceso de Poisson puntual como un caso particular de las medidas aleatorias de Poisson, probaremos la fórmula de Campbell y finalmente enunciaremos y demostraremos el teorema de coloración para las medidas aleatorias de Poisson.

El capítulo primero utiliza básicamente resultados de los cursos de Porbabilidad I y Probabilidad II. A diferencia del primero las dos últimas partes exigen al lector para su mejor comprehensión conocimientos más avanzados, los cuales son estudiados en los cursos de Procesos Estocásticos I, Procesos Estocásticos II y Teoría de la Medida.

Capítulo 1

Distribución y proceso de Poisson.

En este capítulo estudiaremos en un primer acercamiento a la distribución de Poisson. Expondremos su existencia como una distribución a la cual converge una sucesión de variables aleatorias binomiales con parámetros (λ, p_n). Su nombre se debe a su descubridor Siméon Denis Poisson, y su estudio es de gran importancia, dado que por una parte nos ayuda en la práctica a tener una buena aproximación de ciertas distribuciones binomiales. Además de que por la otra nos permite medir la ocurrencia de eventos en cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ dado, dichos eventos se deben distribuir Poisson en el subconjunto de $\mathbb{R}$ dado.
En una segunda sección definiremos al proceso de Poisson y demostraremos su existencia de un forma constructiva, es decir, construiremos al proceso en estudio mediante una sucesión de variables aleatorias con ciertas características. Terminaremos dicha sección con la formulación y demostración de la ley fuerte de los grandes números para dicho proceso.

1.1 La distribución de Poisson.

Definición 1.1. Una variable aleatoria, X, tiene distribución Poisson, $\mathcal{P}(\mu)$, con parámetro μ si sus posibles valores son enteros positivos y si

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[X = n] &= \pi_n(\mu)\\ &= \mu^n \frac{e^{-\mu}}{n!}; \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \mu > 0.\end{aligned}$$

Si una variable aleatoria tiene función de distribución Poisson diremos que es una variable aleatoria de Poisson.

Proposición 1.1. *Sea X una variable aleatoria con distribución $\mathcal{P}(\mu)$, entonces la esperanza de X es μ.*

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}[X=n] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n(\mu) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n\mu^n \frac{e^{-\mu}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} n\mu^n \frac{e^{-\mu}}{n!} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^n \frac{e^{-\mu}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^{n+1} \frac{e^{-\mu}}{(n)!} \\
&= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{e^{-\mu}}{(n)!} = \mu \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mu)
\end{aligned}$$

Como $\pi_n(\mu)$ es una función de distribución de probabilidad $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mu) = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n(\mu) \\
&= \mu \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mu) = \mu
\end{aligned}$$

por lo tanto, $\mathbb{E}[X] = \mu$. □

A veces es necesario extender la definición de $\mathcal{P}(\mu)$ para incluir los casos frontera $\mu = 0$ y $\mu = \infty$. Entonces $\mathcal{P}(0)$ hará referencia a la distribución concentrada en 0, i.e. $\mathbb{P}[X = 0] = 1$ y $\mathcal{P}(\infty)$ a la distribución concentrada en $+\infty$, i.e. $\mathbb{P}[X = \infty] = 1$.

1.1.1 Función generadora de probabilidades.

Si z es cualquier real, la variable aleatoria z^X es de esperanza finita y $g(z) = \mathbb{E}\left[z^X\right]$ es la función generadora de probabilidades asociada a X. Su papel es importante ya que nos ayuda a calcular los momentos, al igual que la función generadora de momentos o transformada de Laplace las cuales se verán más adelante. Calculamos $\mathbb{E}\left[z^X\right]$ para el caso en que X se distribuye Poisson con parámetro μ

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[z^X\right] &= \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n(\mu) z^n = e^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((\mu z)^n)}{n!} \\
&= e^{-\mu} e^{\mu z} = e^{-\mu(1-z)}
\end{aligned}$$

esto para $z \in \mathbb{R}$ y $0 \leq \mu \leq \infty$.

Los momentos de X pueden ser obtenidos al derivar g con respecto a z y evaluarla en 1.

$$\begin{aligned}
g'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \pi_n(\mu) \\
\therefore g'(1) &= \sum_{n=1}^{\infty} n \pi_n(\mu) \\
&= \mathbb{E}[X] \\
g''(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} \pi_n(\mu) \\
\therefore g''(1) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \pi_n(\mu) \\
&= \mathbb{E}[X(X-1)] \\
g'''(z) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) z^{n-3} \pi_n(\mu) \\
\therefore g'''(1) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) \pi_n(\mu) \\
&= \mathbb{E}[X(X-1)(X-2)], \ldots
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$
\begin{aligned}
g'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \pi_n(\mu) \\
&= \mu e^{-\mu(1-z)} \\
\Rightarrow g'(1) &= \mu \\
g''(z) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) z^{n-2} \pi_n(\mu) \\
&= \mu^2 e^{-\mu(1-z)} \\
\Rightarrow g''(1) &= \mu^2 \\
g'''(z) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) z^{n-3} \pi_n(\mu) \\
&= \mu^3 e^{-\mu(1-z)} \\
\Rightarrow g'''(1) &= \mu^3, \ldots
\end{aligned}
$$

de lo cual deducimos

$$\mathbb{E}\left[X^2\right] = \mu^2 + \mathbb{E}[X] = \mu^2 + \mu$$

lo que implica que

$$Var[X] = \mu^2 + \mu - (\mu^2) = \mu$$

y además

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[X^3\right] &= \mu^3 + 3\mathbb{E}\left[X^2\right] - 2\mathbb{E}[X] = \mu^3 + 3\mu^2 + 3\mu - 2\mu \\
&= \mu^3 + 3\mu^2 + \mu.
\end{aligned}
$$

1.1.2 Sumas de variables aleatorias de Poisson.

La propiedad más importante de la distribución Poisson es su aditividad.

Proposición 1.2. *Sean X y Y variables aleatorias independientes, con distribuciones $\mathcal{P}(\lambda)$ y $\mathcal{P}(\mu)$ respectivamente, entonces $X+Y$ es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $(\lambda+\mu)$.*

Demostración. Para $r, s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}[X = r, Y = s] &= \mathbb{P}[X = r]\mathbb{P}[Y = s] && (1.1) \\
&= \lambda^r \frac{e^{-\lambda}}{r!} \lambda^s \frac{e^{-\mu}}{s!} && (1.2)
\end{aligned}
$$

Podemos encontrar la distribución de la variable aleatoria $X+Y$ sumando (1.2) sobre todos los valores posibles de r y s con $r+s=n$ fijo.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X+Y=n] &= \sum_{r=0}^{n} \mathbb{P}[X=r, Y=n-r] \\
&= \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{n!}\left(\lambda^r \frac{e^{-\lambda}}{r!}\mu^{n-r}\frac{e^{-\mu}}{(n-r)!}\right) \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{r=0}^{n}\frac{n!}{r!(n-r)!}\mu^{n-r}\lambda^r \\
&= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}\sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}\mu^{n-r}\lambda^r
\end{aligned}$$

y por el teorema del binomio de Newton

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{n!}(\lambda+\mu)^n$$

en consecuencia $X+Y \sim \mathcal{P}(\lambda+\mu)$.

□

Esto puede extenderse por inducción a la suma de cualquier número finito de variables aleatorias independientes. Sin embargo necesitaremos un resultado mucho más fuerte, el cual abarca sumas infinitas y nos da condiciones de convergencia.

Teorema 1.1 (Teorema de la aditividad numerable). *Sean $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ variables aleatorias independientes y supongamos que X_j tiene distribución $\mathcal{P}(\mu_j)$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Si $\sigma = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j$ converge, entonces $S = \sum_{j=1}^{\infty} X_j$ converge casi seguramente (c.s.) ó con probabilidad 1, y S tiene distribución $\mathcal{P}(\sigma)$. Si por otra parte σ diverge entonces S diverge c.s.*

Demostración. Primero se observa que $(S_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\sum_{j=1}^{n} X_j\right)_{n=1}^{\infty}$ es no decreciente por lo que $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe (aunque puede ser $+\infty$), sea este S. Por inducción sobre n $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ tiene distribución $\mathcal{P}(\sigma_n)$ donde $\sigma_n = \sum_{j=1}^{n}\mu_n$. Entonces, para cualquier r, $\mathbb{P}[S_n \leq r] = \sum_{k=0}^{r}\pi_k(\sigma_n)$. Como $S_n \leq S_{n+1}$ es claro que los eventos $E_n = \{S_n \leq r\}$ decrecen conforme n crece para r fija, y por lo mismo $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = E = \{S \leq r\}$. Entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[S \leq r] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[S_n \leq r] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma_n)\end{aligned}$$

Si σ_n converge a σ ($\sigma < \infty$), por la continuidad de π_k podemos decir lo siguiente

$$\pi_k(\sigma_n) = e^{-\sigma_n}\frac{\sigma_n^k}{k!} \longrightarrow e^{-\sigma}\frac{\sigma^k}{k!} = \pi_k(\sigma)$$

cuando n tiende al infinito, de lo cual tenemos que

$$\mathbb{P}[S \leq r] = \sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma).$$

De ahí que

$\mathbb{P}[S = r] = \pi_r(\sigma)$. En consecuencia S es finita y tiene distribución $\mathcal{P}(\sigma)$.

y por lo tanto,

$$\mathbb{P}[S < \infty] = \sum_{r=1}^{\infty} \mathbb{P}[S = r] = 1.$$

Pero si σ_n diverge, cuando n tiende a ∞,

$$\sum_{k=0}^{r} \pi_k(\sigma_n) = e^{-\sigma_n}\sum_{k=0}^{r}\frac{\sigma_n^k}{k!} \longrightarrow 0,$$

lo cual implica que S diverge ya que para toda $r \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}[S \leq r] = 0$. Entonces,

$$\mathbb{P}[S = r] = 0, \text{ para toda } r \in \mathbb{N}.$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}[S < \infty] = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbb{P}[S = r] = 0.$$

$\square$

Ejemplos de aplicaciones de la distribución de Poisson.

Como ya vimos en la proposición 1.1 $\mathbb{E}[X] = \lambda$ si X es una variable aleatoria de Poisson con parámetro λ. Esto nos señala que λ es el promedio de los valores de X. En el siguiente ejemplo veremos como es que esta observación es útil en la práctica.

Ejemplo 1.1. *Supongamos que el número de perros de la calle que son capturados por una perrera al día es en promedio 3.2 y se distribuye Poisson. ¿Cuál es la probabilidad de que en dos días se capturen menos de 5 perros?*

Solución. Sea λ es el promedio por día entonces el promedio en dos días es de 2λ ya que el número de perros capturados en dos días es la suma de perros capturados en un día más el número de perros capturados en otro. De lo cual podemos observar, gracias a la aditividad de las variables aleatorias de Poisson, que si X es el número de perros capturados en dos días X es una variable aleatoria de Poisson con parámetro 2λ y en consecuencia:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X < 5] &= \sum_{i=0}^{4} \frac{(6.4)^i}{i!} e^{-(6.4)} \\ &= 0.2351. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.2. *Supongamos que el número de muestras encontradas a lo largo de un sendero en un bosque se distribuye Poisson. Por cada s metros de distancia uno se encuentra* $0.03s$ *muestras. ¿Cúal es la probabilidad de que no se encuentren muestras en 100 metros?*

Solución. De igual forma que el ejemplo anterior, si X_s es el número de muestras en s metros, entonces X_s se distribuye Poisson con parámetro $0.03s$. Entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_{100} = 0] &= \frac{((0.03)(100))^0}{0!} e^{-(0.03*100)} \\ &= e^{-3} = 0.04979. \end{aligned}$$

□

1.1.3 La distribución de Poisson y su relación con las distribuciones binomial y multinomial.

La distribución de Poisson es un caso límite de la distribución binomial, tal descubrimiento fué realizado por S.D. Poisson en 1837. A dicho resultado se le conoce como el teorema de Poisson; y no es más que la convergencia débil o en distribución de una sucesión de variables aleatorias Binomiales de parámetros (n, p_n) cuando n tiende a ∞. Como es un caso discreto esta convergencia débil es fácil de calcular.

Teorema 1.2 (Teorema de Poisson). *Supongamos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, X_n es una variable aleatoria con distribución binomial de parámetros n y $p_n \in (0,1)$, tales que $\lambda = np_n$ sea constante, entonces para cualquier $k \in \{0,1,\ldots\}$ se tiene,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

Es decir, las sucesión de variables $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente ó en distribución a una variable aleatoria X, donde X se distribuye $\mathcal{P}(\lambda)$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X_n = k] &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}\frac{\lambda^k}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} \\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Se toman límites

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = k] &= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}, \\
\text{ya que } \lim_{n\to\infty}\left(\Pi_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\right) = 1
\end{aligned}$$

Por otra parte sabemos que $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

□

Si una variable aleatoria con distribución $\mathcal{B}(n,p)$ tiene una n relativamente grande y p relativamente pequeña entonces se puede aproximar por una variable aleatoria Poisson de parámetro np.Esto es fácil de ver ya que como $p = \frac{\lambda}{n}$ si n es grande p es pequeña. A esta aproximación se le conoce como la aproximación de la binomial por la Poisson y es de gran utilidad para cuando en los estudios estadísticos se tienen muestras muy grandes.

Ahora veremos una relación entre la distribución multinomial y la Poisson, lo cual nos dará, como consecuencia, otra relación entre la última y la distribuión binomial.

Proposición 1.3. *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes donde $X_j, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, se distribuye Poisson con parámetro μ_j y $S = \sum_{j=1}^{n} X_j$. Entonces:*

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[X_1 = r_1, X_2 = r_2, \ldots, X_n = r_n | S = s] \\ &= \frac{s!}{r_1! r_2! \ldots r_n!} \left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^{r_1} \left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^{r_2} \ldots \left(\frac{\mu_n}{\sigma}\right)^{r_n}\end{aligned}$$

donde $\sigma = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$ y $s = \sum_{j=1}^{n} r_j$

Demostración. Como el valor de S es invariante ante las permutaciones de los valores de las r_i tenemos que,

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[X_1 = r_1, X_2 = r_2, \ldots, X_n = r_n | S = s] \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{\mu_j e^{-\mu_j}}{r_j!} \left(\frac{\sigma^s e^{-\sigma}}{s!}\right)^{-1} \\ &= \frac{s!}{r_1! r_2! \ldots r_n!} \left(\frac{\mu_1}{\sigma}\right)^{r_1} \left(\frac{\mu_2}{\sigma}\right)^{r_2} \ldots \left(\frac{\mu_n}{\sigma}\right)^{r_n}\end{aligned}$$

□

Esta es la distribución multinomial, $\mathcal{M}(s; p_1, p_2, \ldots, p_n)$, donde $p_j = \frac{\mu_j}{\sigma}, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
Si $n = 2$, el resultado se reduce a lo siguiente: si X y Y son dos variables aleatorias de Poisson con parámetros μ y λ respectivamente entonces, la distribución condicional de X, dado $X + Y = n$, es $\mathcal{B}(n; p)$ donde $p = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$.
Lo anterior nos deja claro que las distribuciones binomial y multinomial pueden ser obtenidas condicionando adecuadamente ciertas distribuciones Poisson.

Proposición 1.4. *Sea N una variable aleatoria de Poisson con parámetro μ, y sea M una variable aleatoria tal que, para $0 \leq t \leq s$, $t, s \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}[M = m | N = s] = \binom{s}{t} p^t (1 - p)^{s-t},$$

donde $p \in (0, 1)$. Entonces M y $N - M$ son variables aleatorias de Poisson independientes con parámetros μp y $\mu(1 - p)$ respectivamente.

Demostración. Sea $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[M = m, N - M = k] &= \mathbb{P}[M = m, N = k + m] \\
&= \mathbb{P}[N = m + k]\mathbb{P}[M = m | N = m + k] \\
&= \mu^{m+k} \frac{e^{-\mu}}{(m+k)!} \binom{m+k}{m} p^m (1-p)^k \\
&= \frac{e^{-\mu(p+1-p)} \mu^{m+k} (m+k)!}{(m+k)! m! k!} p^m (1-p)^k \\
&= \frac{e^{-\mu p} (\mu p)^m}{m!} \frac{e^{-\mu(1-p)} (\mu(1-p))^k}{k!}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, M se distribuye Poisson parámetro μp y N-M se distribuye Poisson parámetro $\mu(1-p)$, y son mutuamente independientes. □

Ejemplos de aplicaciones de la aproximación de la binomial por la Poisson.

Ejemplo 1.3. *Uno de cada 50 libros de ficción publicados en E.U. se convierten en best-seller. Supongamos que una compañia publica 100 libros. Sea X el número de best-sellers entre los 100, encontrar el valor exacto de $\mathbb{P}[X = 3]$ y $\mathbb{P}[X \leq 4]$.*

Solución.

$$X \sim \mathcal{B}\left(n = 100, p = \frac{1}{50}\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X = 3] &= \binom{100}{3} (0.02)^3 (0.98)^{97} \\
&= 0.1823 \\
\mathbb{P}[X \leq 4] &= \sum_{i=0}^{4} \binom{100}{i} (0.02)^i (0.98)^{100-i} \\
&= 0.9492
\end{aligned}$$

Los cálculos anteriores son algo largos y tardados, esa es una razón para mejor aproximarlos con la Poisson. En este caso podemos usar el teorema de Poisson, ya que $n = 100$ es grande y $p = 0.02$ es relativamente pequeña, de lo cual obtenemos que $\lambda = np = 2$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X=3] &\approxeq \frac{2^3}{3!}e^{-2} = 0.1804 \\
\mathbb{P}[X \leq 4] &\approxeq \sum_{i=0}^{4} \frac{2^i}{i!}e^{-2} = e^{-2}\left(1+2+2+\frac{8}{6}+\frac{16}{24}\right) \\
&= 0.9473
\end{aligned}$$

Si comparamos resultamos podemos notar que el error es relativamente pequeño. □

Ejemplo 1.4. *La probabilidad de que ocurra un incendio doméstico en el transcurso del año es de $\frac{1}{150}$ en E.U.. En un pueblo de 500 casas, ¿cuál es la probabilidad de que ocurran más de 4 incendios en el siguiente año?*

Solución. Sea X el número de incendios que ocurren en un pueblo de 500 casas, entonces:

$$X \sim \mathcal{B}\left(500; \frac{1}{150}\right).$$

De ahí que,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X=j] &= \binom{500}{j}\left(\frac{1}{150}\right)^j\left(1-\frac{1}{150}\right)^{500-j} \\
&\approxeq \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

donde $\lambda = np = \frac{500}{150} \approxeq 3.33$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X>4] &= 1-\mathbb{P}[X \leq 4] \\
&\approxeq 1-e^{3.33}\left(1+3.33+\frac{(3.33)^2}{2}+\frac{(3.33)^3}{6}+\frac{(3.33)^4}{24}\right) \\
&= 0.2435.
\end{aligned}$$

□

1.2 El Proceso de Poisson.

Definición 1.2 (Proceso de Poisson.). *Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ una colección de variables aleatorias indicadas por $\mathbb{R}^+$, se dice que $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson de intensidad c si:*

1. $N_0 = 0$.

2. $(N_t)_{t\geq 0}$ *tiene trayectorias càdlàg, es decir,* $(N_t)_{t\geq 0}$ *es continuo por la derecha y tiene límites por la izquierda (càdlàg proviene del francés y es una abreviatura del término "continu à droite, limites à gauche").*

3. $(N_t)_{t\geq 0}$ *tiene incrementos independientes, es decir, si* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$*, entonces*

$$\mathbb{P}[N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = n_i,\ 1 \leq i \leq k] = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}[N_{t_i} - N_{t_i-1} = n_i].$$

4. Para $0 \leq s < t$*,*

$$\mathbb{P}[N_t - N_s = n] = e^{-c(t-s)}\frac{(c(t-s))^n}{n!},\ n = 0, 1, \ldots$$

La propiedad 4 nos da la estacionariedad de los incrementos y también implica que

$$\mathbb{E}[N_t] = ct$$

lo cual, a su vez, nos deja ver por qué c es la intensidad del proceso. Los procesos que como este tienen incrementos independientes y estacionarios y trayectorias càdlàg se llaman procesos de Lévy.

En esta sección daremos una construcción directa del proceso de Poisson; mostraremos de esta manera que existe un proceso con las propiedades de la definición anterior.

Sea $(\xi_i)_{i=0}^{\infty}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con distribución exponencial de parámetro $c > 0$, lo cual sabemos que existe gracias al teorema de Kolmogorov (ver [12]) Se puede probar gracias a la ley fuerte de los grandes números que $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i = \infty$. Se define $T_n = \sum_{i=0}^{n} \xi_i$, $n = 1, 2, \ldots$ y es sabido que bajo estas condiciones que, para toda $i \in \mathbb{N}$, $0 \leq T_1 < T_2 < \cdots < T_i < T_{i+1}$, ya que $\xi_i \geq 0$. T_n es una variable aleatoria ya que es una suma de variables aleatorias y $T_n - T_{n-1}$ se

distribuye igual que T_1. A los procesos con dichas propiedades se les conoce como procesos de renovación.
Sea $N_t = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_i)$, a N_t se le conoce como el proceso de conteo asociado a $(T_n)_{n=1}^{\infty}$. Es obvio que si $s \leq t$ entonces $N_s \leq N_t$.

Proposición 1.5. *Sea $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ el proceso de renovación antes mencionado y $(N_t)_{t\geq 0}$ su proceso de conteo asociado. Entonces:*

1. $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$.

2. $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

3. $N_t = \max\{n \in \mathbb{N} | T_n \leq t\}$.

Demostración. Probemos las tres afirmaciones:

1. $$\{N_t \geq n\} = \{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_i) \geq n\} = \{T_n \leq t\},$$

   ya que $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_i) \geq n$ es equivalente a decir que hay al menos n $T_i's$ tales que $T_i \leq t$, es decir, $T_n \leq t$.
   Además,

   $$\{N_t < n\} = \{N_t \geq n\}^c = \{T_n \leq t\}^c = \{T_n > t\}.$$

2. De 1 se obtiene lo que se quería:

   $$\begin{aligned}\{N_t = n\} &= \{n \leq N_t < n+1\} = \{n \leq N_t, N_t < n+1\} \\ &= \{T_n \leq t, T_{n+1} > t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}.\end{aligned}$$

3. Para probar esta afirmación consideraremos dos casos:

   a) $N_t < +\infty$. Sea $k < +\infty$ tal que $N_t = k$. Entonces $T_k \leq t < T_{k+1}$ y como $(T_n)_{n=1}^{+\infty}$ es proceso de renovación entonces para $m \leq k$, $T_m \leq t$, de donde $\mathbf{1}_{[0,t]}(T_m) = 1$, para $m \leq k$. Es decir $\sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) = k$ de ahí que $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) = \sum_{n=1}^{k} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) = \max\{n \in \mathbb{N} | T_n \leq t\}$.

b) $N_t = +\infty$. Entonces para $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq t$, de donde $\mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) = 1$, para $n \in \mathbb{N}$.

De ahí que

$$\begin{aligned} N_t &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty \end{aligned}$$

y $\{n|T_n \leq t\}$ no tiene máximo pues para $n \in \mathbb{N}$, $T_n \leq t$, en consecuencia tenemos que $N_t = +\infty = \max\{n|T_n \leq t\}$, y por lo tanto $N_t = \max\{n \in \mathbb{N}|T_n \leq t\}$.

□

De 1 y 2 podemos concluir que N_t es una variable aleatoria, y que, $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico con índices en $\mathbb{R}^+$.

Algo muy de nuestro interés, como siempre ocurre en la teoría de la probabilidad, es saber como se distribuyen nuestras variables aleatorias. En este momento sabemos que ξ_i, $i \in \mathbb{N}$, tiene distribución exponencial de parámetro c, esto lo usaremos para probar que T_n tiene distribución $\Gamma(n, c)$. Pero antes se harán cálculos de las transformadas de Laplace que vamos a usar en los próximos resultados. Las siguientes transformadas de Laplace no son más que las funciones generadoras de momentos de ξ_i y T_n.

Proposición 1.6. *Si X se distribuye gamma con parámetros (n, c) entonces:* $\mathbb{E}[\exp(-qX)] = \left(\frac{c}{q+c}\right)^n$

Demostración.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(-qX)] &= \int_\Omega e^{-qX} d\mathbb{P}_{T_k} \\
&= \int_0^\infty e^{-qx} \frac{c}{\Gamma(n)} e^{-cx} (cx)^{n-1} dx \\
& \quad \text{como } q+c>0 \text{ la integral converge} \\
&= \frac{c^n}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-x(q+c)} x^{n-1} dx \\
& \quad \text{sea } x(q+c)=u \Rightarrow du=(q+c)dx \\
&= \frac{c^n}{\Gamma(n)(q+c)} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{u}{q+c}\right)^{n-1} du \\
&= \left(\frac{c}{q+c}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-u} u^{n-1} du \\
&= \left(\frac{c}{q+c}\right)^n \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n)} = \left(\frac{c}{q+c}\right)^n = M_X(t)
\end{aligned}
$$

□

Proposición 1.7. *Sea $q \geq 0$, entonces:*

a) $\mathbb{E}[\exp(-q\xi_i)] = \frac{c}{q+c}$

b) $\mathbb{E}[\exp(-qT_k)] = \left(\frac{c}{q+c}\right)^n$

Demostración. a)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(-q\xi_i)] &= \int_\Omega e^{-q\xi_i} d\mathbb{P} \\
&= \int_{\mathbb{R}} e^{-q\xi_i} d\mathbb{P}_{\xi_i} \\
&= \int_0^\infty e^{-qx} c e^{-cx} dx \\
&= c \int_0^\infty e^{-x(q+c)} dx = \frac{c}{q+c} \left(-e^{-x(q+c)}\right) \Big|_0^\infty \\
&= \frac{c}{q+c} = M_{\xi_i}(t)
\end{aligned}
$$

b) Para probar esto, se utiliza el método de la función generadora de momentos. Es fácil mostrar que si $(\xi_i)_{i=1}^{\infty}$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas entonces:

$$M_{\sum_{i=1}^{n}\xi_i}(t)=(M_{\xi_i}(t))^n$$

y por lo tanto utilizando el inciso anterior se obtiene el resultado.

□

Proposición 1.8. *Sea T_n como se definió anteriormente, entonces T_n tiene distribución $\Gamma(n,c)$.*

Demostración. Por la proposición 1.6 y por la proposición 1.7 b) esto es obvio. □

Consideremos una sucesión de eventos, dado que $T_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, T_n puede ser visto como el tiempo en que ocurre el n-ésimo evento y N_t como el número de eventos que ocurren en el intervalo [0,t]. El número de eventos en el intervalo (s,t] es el incremento $N_t - N_s$. A continuación mostraremos que $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson de intensidad c, pero antes obtendremos la distribución de N_t la cual nos será de gran utilidad.

Proposición 1.9. *Sea $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ el proceso de renovación anteriormente mencionado y (N_t) su proceso de conteo asociado. Entonces:*

1. *N_t se distribuye Poisson con parámetro ct.*

2. $\mathbb{E}[\exp(-\lambda N_t)] = \exp(ct(\exp(-\lambda) - 1))$, $\lambda \geq 0$.

Demostración. Ambos incisos se demostrarán directamente y como se conoce la distribución de T_n, demostrar el primero será de gran facilidad.

1.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_t = k] &= \mathbb{P}[T_k \leq t < T_{k+1}] = \mathbb{P}[T_k \leq t < T_k + \xi_{k+1}] \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\mathbf{1}_{(t,\infty)}(s+x)\mathbb{P}_{(T_k,\xi_{k+1})}(s,x)dxds \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\mathbf{1}_{(t,\infty)}(s+x)ce^{-cx}\frac{(cs)^{k-1}ce^{cs}}{(k-1)!}dxds \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\mathbf{1}_{(t,\infty)}(s+x)c^{k+1}\frac{(s)^{k-1}e^{-c(x+s)}}{(k-1)!}dxds
\end{aligned}$$

Sea $y = x + s$ $(\Rightarrow dy = dx)$,

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^t \frac{c^{k+1}s^{k-1}}{(k-1)!}\int_t^{\infty} e^{-cy}dyds \\
&= \int_0^t \frac{c^{k+1}s^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{e^{-ct}}{c}\right)ds \\
&= \frac{c^k e^{-ct}}{(k-1)!}\int_0^t s^{k-1}ds = \frac{c^k e^{-ct}}{(k-1)!}\left(\frac{t^k}{k}\right) = \frac{(ct)^k e^{-ct}}{(k)!}
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad N_t \sim \mathcal{P}(ct).$$

2.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(\exp(-\lambda N_t)) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-(\lambda k)}e^{-(ct)}\frac{(ct)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(cte^{-\lambda}\right)^k}{k!}e^{-(ct)} \\
&= e^{-(ct)}e^{\left(cte^{-\lambda}\right)} = e^{\left(cte^{-\lambda}-ct\right)} \\
&= \exp\left(ct\left(e^{-\lambda}-1\right)\right) = \exp(ct(\exp(\lambda)-1)).
\end{aligned}
$$

□

Teorema 1.3. *Sea $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ el proceso de renovación antes mencionado y $(N_t)_{t\geq 0}$ su proceso de conteo asociado, entonces $(N_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson de intensidad c.*

Demostración. Para demostrar este teorema basta verificar las cuatro propiedades de la definición.

1. Observamos que $N_t = 0$ si $t < T_1 = \xi_1$, en particular $N_0 = 0$.

2. Demostraremos primero la continuidad por la derecha, para lo cual consideraremos dos casos:

   a) $N_t < +\infty$. Sea $k < +\infty$ tal que $N_t = k$, entonces

   $$T_k \leq t < T_{k+1}.$$

   En consecuencia tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $T_k \leq t + \epsilon < T_{k+1}$ de ahí que si $\lambda \in [0, \epsilon]$, $T_k \leq t + \lambda < T_{k+1}$ implica que $N_{t+\lambda} = k$ y esto a su vez implica que $\lim_{\lambda\to 0^+} N_{t+\lambda} = k = N_t$, por lo tanto $(N_t)_{t\geq 0}$ es continuo por la derecha en este caso.

b) $N_t = +\infty$. Entonces como $(N_t)_{t\geq 0}$ es no decreciente, para $\lambda \geq 0$, $N_{t+\lambda} = +\infty$ de donde $\lim_{\lambda\to 0^+} N_{t+\lambda} = +\infty = N_t$ por lo tanto $(N_t)_{t\geq 0}$ es continuo por la derecha.

Los límites por la izquierda se prueban de manera análoga.

3. Probaremos una característica importante del proceso, la independencia de los incrementos. Sea $t > 0$ fija, y consideremos los eventos que ocurren después del tiempo t. Por definición de N_t tenemos que $T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1}$ y el tiempo de espera desde t al primer evento, después de t, es $T_{N_t+1} - t$; el tiempo de espera entre el primero y segundo evento después de t es ξ_{N_t+2} y así sucesivamente. Entonces

$$\xi_1^{(t)} = T_{N_t+1} - t,\ \xi_2^{(t)} = \xi_{N_t+2},\ \xi_3^{(t)} = \xi_{N_t+3}, \ldots$$

son los tiempos de espera después de t. Es claro por 1.5 1 que

$$N_{t+s} + N_t \geq m \Leftrightarrow N_{t+s} \geq N_t + m \Leftrightarrow T_{N_t+m} \leq t + s.$$

lo cual es lo mismo que

$$\xi_1^{(t)} + \xi_2^{(t)} + \cdots + \xi_m^{(t)} \leq s$$

Razón:

$$T_{N_t+1} + \xi_{N_t+2} + \cdots + \xi_{N_t+m} = T_{N_t+m} \leq s + t$$

si y sólo si

$$s \geq T_{N_t+1} - t + \xi_{N_t+2} + \cdots + \xi_{N_t+m} = \xi_1^{(t)} + \xi_2^{(t)} + \cdots + \xi_m^{(t)}.$$

lo cual implica que

$$N_{t+s} - N_t = \max\{m \in \mathbb{N} | \xi_1^{(t)} + \xi_2^{(t)} + \cdots + \xi_m^{(t)} \leq s\}$$

por lo tanto

$$[N_{t+s} - N_t = m] = [\xi_1^{(t)} + \xi_2^{(t)} + \cdots + \xi_n^{(t)} \leq s < \xi_1^{(t)} + \xi_2^{(t)} + \cdots + \xi_m^{(t)} + \xi_{m+1}^{(t)}]$$

Si comparamos N_t, con $N_{t+s} - N_t$, t fija y para $t > s \geq 0$ nos damos cuenta que $N_{t+s} - N_t$ está definida con respecto a las $\xi_i^{(t)}$ de la misma forma en que N_t lo está con respecto a las ξ_i.
Ahora probaremos que condicionando las variables $(\xi_i^{(t)})$ con el evento $[N_t = n]$, estas son independientes y se distribuyen exponencial. Esto es algo intuitivamente claro, dado que las ξ_i son independientes y por

la propiedad "desmemoriada" de la distribución exponencial (ver [1, págs. 189–190]). Para probarlo utilizaremos el hecho de que si X y Y son vectores aleatorios independientes tales que se distribuyen μ y ν en $\mathbb{R}^j$ y $\mathbb{R}^k$ respectivamente, entonces:

$$\mathbb{P}[X \in A, (X,Y) \in B] = \int_A \mathbb{P}[(x,Y) \in B]\mu(dx), \ A \in \mathbb{R}^j, \ B \in \mathbb{R}^{j+k},$$

ver [1, págs. 263–264]. Supongamos $y \geq 0$; si G_n es la función de distribución de T_n, entonces dado que ξ_{n+1} tiene distribución exponencial,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_t = n, \xi_1^{(t)} > y] &= \mathbb{P}[T_n \leq t < T_{n+1}, T_{n+1} - t > y] \\
&= \mathbb{P}[T_n \leq t, T_n < t + y < T_{n+1}] \\
&= \mathbb{P}[T_n \leq t, \xi_{n+1} > t + y - T_n] \\
&= \int_{x \leq t} \mathbb{P}[\xi_{n+1} > t + y - x] dG_n(x)
\end{aligned}$$

por la propiedad desmemoriada,

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}[\xi_1 > y] \int_{x \leq t} \mathbb{P}[\xi_{n+1} > t - x] dG_n(x) \\
&= e^{-(cy)} \int_{x \leq t} \mathbb{P}[\xi_{n+1} > t - x] dG_n \\
&= e^{-(cy)} \mathbb{P}[T_n \leq t, \xi_{n+1} > t - T_n] \\
&= e^{-(cy)} \mathbb{P}[T_n \leq t < T_{n+1}].
\end{aligned}$$

Por la independencia de las ξ_i,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[N_t = n, \xi_1^{(t)} > y_1, \xi_2^{(t)} > y_2, \ldots, \xi_j^{(t)} > y_j] \\
= \ &\mathbb{P}[T_{n+1} - t > y_1, \xi_{n+2} > y_2, \ldots, \xi_{n+j} > y_j, T_n \leq t < T_{n+1}] \\
= \ &\mathbb{P}[T_{n+1} - t > y_1, T_n \leq t < T_{n+1}] e^{-(cy_2)} \ldots e^{-(cy_j)} \\
= \ &\mathbb{P}[N_t = n] e^{-(cy_1)} e^{-(cy_2)} \ldots e^{-(cy_j)}
\end{aligned}$$

Sea $H = (y_1, \infty) \times (y_2, \infty) \times \cdots \times (y_j, \infty)$;

$$\mathbb{P}[N_t = n, (\xi_1^{(t)}, \xi_2^{(t)}, \ldots, \xi_j^{(t)}) \in H] = \mathbb{P}[N_t = n] \mathbb{P}[(\xi_1, \ldots, \xi_j) \in H], \ (**)$$

Esto se puede extender de una H definida como arriba a cualquier $H \subset \mathbb{R}^j$, esto gracias al lema de clases monótonas (ver [1, pág. 42]).

Ahora el evento $[N_{s_i} = m_i, 1 \leq i \leq u]$ puede ser escrito de la forma $[(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j) \in H]$ donde $j = m_u + 1$ y H es el conjunto de las $x \in \mathbb{R}^j$ para el cual $x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i} \leq s_i < x_1 + x_2 + \cdots + x_{m_i} + x_{m_i+1}$, $1 \leq i \leq u$. Pero entonces $[(\xi_1^{(t)}, \xi_2^{(t)}, \ldots, \xi_j^{(t)}) \in H]$ es el mismo evento que $[N_{t+s_i} - N_t = m_i,\ 1 \leq i \leq u]$, esto debido a la definición de $N_{t+s} - N_t$. Entonces $\mathbb{P}[N_t = n, N_{t-s_i} - N_t = m_i,\ 1 \leq i \leq u] = \mathbb{P}[N_t = n]\mathbb{P}[N_{s_i} = m_i,\ 1 \leq i \leq u]$ por $(**)$. De aquí se sigue por inducción sobre k que si $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, entonces

$$\mathbb{P}[N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = n_i,\ 1 \leq i \leq k] = \prod_{i=1}^{k} \mathbb{P}[N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = n_i], \tag{1.3}$$

por lo tanto lo incrementos son independientes.

4. De (1.3) y debido a que $N_t \sim \mathcal{P}(ct)$ entonces $(N_t - N_s) \sim \mathcal{P}(c(t - s))$, $t > s$. De esto tenemos que los incrementos son estacionarios ya que su distribución sólo dependen de la longitud del intervalo de tiempo, ó de la diferencia $t - s$.

Por lo tanto $(N_t)_{t \geq 0}$ es un proceso de Poisson de intensidad c. □

Como consecuencia de este teorema tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.1. *Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson de intensidad c. Entonces:*

1. *Sean $s, t > 0$, $(N_{t+s} - N_t)_{t\geq 0}$ tiene la misma distribución que $(N_s)_{s\geq 0}$ y es independiente de $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s : s \leq t)$ ($(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es la filtración del proceso de Poisson, ver apéndice A).*

2. *Dada t, tal que $t = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Entonces para todo $\Lambda \in \mathcal{F}_t$,*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[\Lambda, (N_{t_1} - N_t) \in B_1, \ldots, (N_{t_n} - N_{t_{n-1}}) \in B_n | \mathcal{F}_t] \\ = \mathbb{P}[\Lambda | \mathcal{F}_t] \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[N_{t_i - t_{i-1}} \in B_i].\end{aligned}$$

   Donde $B_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}+}$, $i = 1, \ldots, n$..

3. *Si $\Lambda \in \mathcal{F}_t$, $s, t > 0$ y $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^+$, entonces*

$$\mathbb{E}[\mathbf{1}_\Lambda f(N_{t+s} - N_t) | N_t] = \mathbb{P}[\Lambda | N_t] \mathbb{E}[f(N_s)].$$

Demostración. 1. Dado que N_{t-s} se distribuye $\mathcal{P}(c(t-s))$, $t > s \geq 0$, y que los incrementos son estacionarios (i.e. $(N_t - N_s)$, $t > s \geq 0$ se distribuye igual que N_{t-s}), entonces si $t > 0$, $(N_{t+s} - N_t)_{s\geq 0}$ se distribuye igual que $(N_s)_{s\geq 0}$. Ahora probaremos la independencia. Sea $\epsilon > 0$ y sean $C \in \sigma(N_{t+s} - N_t : s \geq 0)$ y $B \in \sigma(N_s : s \leq t)$ sabemos que existen $C_\epsilon \in \sigma(N_{t+s_1} - N_t, \ldots, N_{t+s_n} - N_t)$ y $B_\epsilon \in \sigma(N_{s'_1}, \ldots, N_{s'_n})$, con $s_1 < \cdots < s_n$ y $s'_1 < \cdots < s'_n$, tales que

$$\mathbb{P}[C \triangle C_\epsilon] < \epsilon \text{ y } \mathbb{P}[B \triangle B_\epsilon] < \epsilon$$

esto por el corolario 2 de [14]. Como $\sigma(N_{t+s_1} - N_t, \ldots, N_{t+s_n} - N_t)$ y $\sigma(N_{s'_1}, \ldots, N_{s'_n})$ coinciden con la σ-álgebra de los incrementos entoces debido al independencia de estos últimos C_ϵ es independiente de B_ϵ. Basta mostrar que $\mathbb{P}[C, B] = \lim_{\epsilon \to 0} \mathbb{P}[C_\epsilon, B_\epsilon] = \mathbb{P}[C_\epsilon]\mathbb{P}[B_\epsilon] = \mathbb{P}[C]\mathbb{P}[B]$ Probemos la primera igualdad:

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}[C, B] - \mathbb{P}[C_\epsilon, B_\epsilon]| &= \left| \int (\mathbf{1}_C \mathbf{1}_B) d\mathbb{P} \right| \\
&\leq \left| \int (\mathbf{1}_C (\mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{B_\epsilon})) d\mathbb{P} \right| \\
&+ \left| \int (\mathbf{1}_{B_\epsilon} (\mathbf{1}_C - \mathbf{1}_{C_\epsilon})) d\mathbb{P} \right| \\
&\leq \mathbb{P}[B \triangle B_\epsilon] + \mathbb{P}[C \triangle C_\epsilon]
\end{aligned}$$

De ahí que la primera igualdad vale, la segunda es consecuencia de la independencia entre C_ϵ y B_ϵ y la tercera se prueba de manera análoga a la primera. Por lo tanto, podemos concluir que $(N_{t+s} - N_t)_{s\geq 0}$ es independiente de $\mathcal{F}_t$.

2.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[\Lambda, (N_{t_1} - N_t) \in B_1, \ldots, (N_{t_n} - N_{t_{n-1}}) \in B_n | \mathcal{F}_t] \\
= \; &\mathbf{1}_{Lamda} \mathbb{P}[(N_{t_1} - N_t) \in B_1, \ldots, (N_{t_n} - N_{t_{n-1}}) \in B_n | \mathcal{F}_t]
\end{aligned}$$

Por la independencia de los incrementos tenemos que,

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{Lamda} \mathbb{P}[(N_{t_1} - N_t) \in B_1, \ldots, (N_{t_n} - N_{t_{n-1}}) \in B_n] \\
&= \mathbb{P}[\Lambda | \mathcal{F}_t] \mathbb{P}[(N_{t_1} - N_t) \in B_1] \ldots \mathbb{P}[(N_{t_n} - N_{t_{n-1}}) \in B_n]
\end{aligned}$$

y como los incrementos son estacionarios sabemos que $(N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ se distribuye como $N_{t_n - t_{n-1}}$, entonces

$$= \mathbb{P}[\Lambda | \mathcal{F}_t] \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[(N_{t_i - t_{i-1}}) \in B_i].$$

3.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathbf{1}_\Lambda f(N_{t+s}-N_t)|N_t] &= \sum_{u=0}^{\infty}\mathbf{1}_{N_t=u}\mathbb{E}[\mathbf{1}_\Lambda f(N_{t+s}-N_t)|N_t=u]\end{aligned}$$

por la independencia de los incrementos

$$\begin{aligned}&= \sum_{u=0}^{\infty}\mathbb{P}[N_t=u]\mathbb{P}[\Lambda|N_t=u]\mathbb{E}[f(N_{t+s}-N_t)]\\ &= \mathbb{P}[\Lambda|N_t]\mathbb{E}[f(N_{t+s}-N_t)]\end{aligned}$$

y por la estacionariedad de los incrementos

$$= \mathbb{P}[\Lambda|N_t]\mathbb{E}[f(N_s)].$$

A este último inciso se le conoce como la propiedad de Markov.

□

Ejemplos de aplicaciones del proceso de Poisson

Ejemplo 1.5. *3 llamadas telefónicas son recibidas cada media hora, en promedio. Encontrar:*

a) La probabilidad de no recibir llamadas en una hora.

b) La probabilidad de recibir 2 llamadas en 15 minutos.

c) La probabilidad de recibir más de 2 llamadas entre las 11:00 y las 11:45 hrs.

Solución. Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ el proceso de Poisson de intensidad ct asociado a nuestro problema, donde N_t es el número de llamadas recibidas al tiempo t y t está dado en minutos. $N_t \sim \mathcal{P}(ct)$ donde $c=\frac{3}{30}=0.10$ Entonces:

a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N_{60}=0] &= \frac{((0.10)(60))^0}{0!}e^{-((0.10)(60))}\\ &= e^{-6}=0.002479.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[N_{15}=2] &= \frac{((0.10)(15))^2}{2!}e^{-((0.10)(15))}\\ &= 0.2510.\end{aligned}$$

c) Por la estacionariedad de los incrementos y como $ct = (0.10)(45) = 4.5$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_{705} - N_{660} > 2] &= \mathbb{P}[N_{45} > 2] = 1 - \mathbb{P}[N_{45} \leq 2] \\
&= 1 - \left(\frac{(4.5)^0}{0!} + \frac{(4.5)^1}{1!} + \frac{(4.5)^2}{2!}\right) e^{-4.5} \\
&= 0.8264
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 1.6. *Se sabe que el número de cierto tipo de átomos que se desintegran en una fuente radioactiva se distribuye Poisson. Supongamos que 1000 desintegraciones de una muestra fueron registradas durante el curso de una hora. ¿Cuál es la probabilidad de que en 5 segundos no haya desintegraciones?*

Solución. Si $(N_t)_{t\geq 0}$ es el proceso de Poisson de intensidad ct asociado a nuestro problema, donde N_t es el número de desintegraciones al tiempo t; y t está dado en unidades de segundo. $N_t \sim \mathcal{P}(ct)$ donde $c = \frac{1000}{3600} = \frac{5}{18}$, entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_5 = 0] &= \frac{\left(\left(\frac{5}{18}\right)(5)\right)^0}{0!} e^{-\left(\left(\frac{5}{18}\right)(5)\right)} \\
&= e^{-\left(\frac{25}{18}\right)} = 0.2494.
\end{aligned}$$

□

Es importante notar que el parámetro t no necesariamente debe hacer referencia al tiempo, el siguiente ejemplo es prueba de ello.

Ejemplo 1.7. *Supongamos que el número de puntos a lo largo de un cable se distribuye Poisson con un promedio de 1 punto por cada 2 metros. ¿Cuál es la probabilidad de que en un cable de 10 metros existan menos de 3 puntos?*

Solución. En este ejemplo t es la distancia en metros. $c = \frac{1}{2}$ de lo cual tenemos que $ct = \frac{10}{2} = 5$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[N_{10} < 2] &= e^{-5}\left(1 + 5 + \frac{5^2}{2}\right) \\
&= 0.1638
\end{aligned}$$

□

1.2.1 La ley fuerte de los grandes números para el proceso de Poisson.

En esta sección haremos dos demostraciones de la ley fuerte de los grandes números para el proceso de Poisson, en la primera se hará uso de la ley fuerte de los grandes números para las sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, y en la segunda se utilizará la desigualdad de Tchebychev. Usaremos las mismas notaciones de las secciones anteriores.

Proposición 1.10. *Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson de intensidad λ. Entonces:*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\lambda\ c.s.$$

Demostración 1. Por la ley fuerte de los grandes números para sumas de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas sabemos que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\frac{T_k}{k} &= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\xi_i\\ &= \mathbb{E}[\xi_i]=\frac{1}{\lambda}\ c.s.\end{aligned}$$

Como N_t diverge cuando t tiende a ∞, se tiene que

$$\lim_{t\to\infty}\frac{T_{N_t}}{N_t}\longrightarrow\frac{1}{\lambda}$$

y como $\Omega=\bigcup_{k=1}^{\infty}\{N_t=k\}$. Si $\omega\in\{N_t=k\}$ por 1.5 2 tenemos que

$$T_{N_t}(\omega)=T_k(\omega)\leq t<T_{k+1}(\omega)=T_{N_t+1}(\omega)$$

entonces

$$T_{N_t}\leq t<T_{N_t+1}.$$

y en consecuencia

$$\frac{T_{N_t}}{N_t}\leq\frac{t}{N_t}<\frac{T_{N_t+1}}{N_t+1}\frac{N_t+1}{N_t}$$

tomando límites

$$\frac{1}{\lambda}\leq\lim_{t\to\infty}\frac{t}{N_t}\leq\frac{1}{\lambda}\ c.s.$$

Entonces

$$\lim_{t\to\infty}\frac{t}{N_t}=\frac{1}{\lambda}\ c.s.$$

$$\therefore\ \lim_{t\to\infty}\frac{N_t}{t}=\lambda\ c.s.$$

□

Demostración 2. Para t fija tenemos que $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ entonces podemos decir que $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ y $Var[N_t] = \lambda t$. De esto obtenemos que $\mathbb{E}[\frac{N_t}{t}] = \lambda$ y $Var[\frac{N_t}{t}] = \frac{\lambda}{t}$. Por la desigualdad de Tchebychev tenemos que para $\epsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left[\left|\frac{N_t}{t}\right| \geq \epsilon\right] \leq \frac{Var\left[\frac{N_t}{t}\right]}{\epsilon^2} = \frac{\lambda}{\epsilon^2 t}.$$

Se toma $t_k = k^2$ y entonces por lo anterior

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[\left|\frac{N_{k^2}}{k^2}\right| \geq \epsilon\right] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\epsilon^2 k^2} < \infty.$$

Por el lema de Borel-Cantelli tenemos que $\mathbb{P}[E] = 0$ donde $E = \limsup_k E_k$ y $E_k = \left\{\left|\frac{N_{k^2}}{k^2}\right| \geq \epsilon\right\}$. Por lo tanto

$$\mathbb{P}[\limsup_k E_k^c] = 1$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_{k^2}}{k^2} = \lambda \ c.s.$$

Sea $k = [t^{\frac{1}{2}}]$ entonces para $t > 1$

$$N_{k^2} \leq N_t \leq N_{(k+1)^2} \ \text{ y } \ k^2 \leq t < (k+1)^2$$

Como $\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$ entonces

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t}{k^2} = 1$$

De ahí que

$$\frac{N_{k^2}}{k^2} = \frac{N_{k^2}}{k^2}\frac{t}{t} \leq \frac{t}{k^2}\frac{N_t}{t} \leq \frac{t}{k^2}\frac{(k+1)^2}{t}\frac{N_{(k+1)^2}}{(k+1)^2} = \frac{N_{(k+1)^2}}{k^2}$$

como k diverge cuando t tiende a ∞ al tomar el límite sobre t tenemos que

$$\lambda \leq \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \leq \lambda.$$

Por lo tanto

$$\lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \ c.s.$$

$\square$

Capítulo 2

Procesos asociados al proceso de Poisson.

En esta parte, la cual consta de dos secciones, estudiaremos en la primera sección algunas de las martingalas asociadas al proceso de Poisson. Dichas martingalas son en tiempo continuo, esto debido a que el proceso estudiado es continuo con respecto al parámetro tiempo; dicha continuidad en tiempo de las martingalas nos obliga a usar herramientas teóricas mayores, es decir, haremos uso de ciertos elementos llamados filtraciones así como de resultados arrojados por la teoría de la medida. Como observación cabe señalar que el estudio sobre filtraciones y martingalas a tiempo continuo es complementado por los apéndices A y C respectivamente.
En la sección final de este capítulo definiremos al proceso de Poisson compuesto como una suma aleatoria parcial de variables aleatorias pertenecientes a una sucesión de variables aleatorias, donde el número de términos en la suma está dado por N_t, el proceso de Poisson de parámetro c. Una vez definido el proceso de Poisson compuesto estudiaremos algunas de sus propiedades.

2.1 Martingalas asociadas al proceso de Poisson.

Debido a sus multiples propiedades y aplicaciones, las martingalas son procesos de interés, es por eso que en esta parte nos dedicaremos a estudiar algunas funcionales del proceso de Poisson de intesidad $c > 0$, $(N_t : t \geq 0)$, que son martingalas con respecto a la filtración del proceso de Poisson.

Proposición 2.1. *Los siguientes procesos son martingalas con respecto a la filtración del proceso de Poisson,* *1.* $(M_t = N_t - ct, t \geq 0)$.

2. $((M_t^2 - ct), t \geq 0)$.

3. $\xi_t^{(q)} = (\exp(-qN_t + ct(1 - e^{-q})), t \geq 0), q > 0$

Demostración. 1. $(M_t = N_t - ct, t \geq 0)$. Para mostrar que M_t es martingala utilizaremos la propiedad de independencia de incrementos. Sea $s < t$, entonces

$$\mathbb{E}[M_t - M_s|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[N_t - ct - N_s + cs|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[N_t - N_s|\mathcal{F}_s] - c(t - s)$$

por la independencia de los incrementos,

$$= \mathbb{E}[N_t - N_s] - c(t - s) = c(t - s) - c(t - s) = 0.$$

Por lo tanto M_t es $\mathcal{F}_t$-martingala.

2. $((M_t^2 - ct), t \geq 0)$.Obsérvese que $M_t^2 = N_t^2 - 2ctN_t + c^2t^2$. Sea $s < t$, entonces

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[M_t^2 - ct - M_s^2 + cs|\mathcal{F}_s] \\ = & \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 + 2M_tM_s - 2M_s^2|\mathcal{F}_s] - c(t - s) \\ = & \mathbb{E}[(M_t - M_s)^2] + 2\mathbb{E}[M_s(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s] - c(t - s) \end{aligned}$$

por independencia de incrementos y por ser M_s $\mathcal{F}_s$-medible, el segúndo sumando es igual a $2M_s\mathbb{E}[(M_t - M_s)|\mathcal{F}_s]$ lo cual a su vez es cero porque ya vimos que $(M_t)_{t\geq 0}$ es $\mathcal{F}_t$-martingala.

$$\begin{aligned} = & \mathbb{E}[(N_t - ct - N_s + cs)^2] - c(t - s) \\ = & \mathbb{E}[(N_t - N_s)^2 - 2c(t - s)(N_t - N_s) + c^2(t - s)^2] - c(t - s) \\ = & \mathbb{E}[(N_t - N_s)^2] - 2c(t - s)\mathbb{E}[N_t - N_s] + c^2(t - s)^2 - c(t - s). \\ = & c^2(t - s)^2 + c(t - s) - 2c^2(t - s)^2 + c^2(t - s)^2 - c(t - s) \\ = & 0. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad es consecuencia de que $\mathbb{E}[(N_t - N_s)^2] = Var[N_t- - N_s] + (\mathbb{E}[N_t - N_s])^2$. Por lo tanto $((M_t^2 - ct), t \geq 0)$ es $\mathcal{F}_t$-martingala.

3. $\xi_t^{(q)} = (\exp(-qN_t + ct(1 - e^{-q})), t \geq 0)$. Sea $s < t$, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\xi_t^{(q)}|\mathcal{F}_s\right] & = \mathbb{E}\left[e^{-qN_t + ct(1-e^{-q})}|\mathcal{F}_s\right] \\ & = \mathbb{E}\left[e^{-q(N_t - N_s + N_s) + c(t-s+s)(1-e^{-q})}|\mathcal{F}_s\right] \\ & = \mathbb{E}\left[e^{-q(N_t - N_s) - qN_s + c(t-s)(1-e^{-q}) + cs(1-e^{-q})}|\mathcal{F}_s\right] \end{aligned}$$

como $e^{-qN_s+cs(1-e^{-q})}$ es $\mathcal{F}_s$-medible, entonces

$$= e^{-qN_s+cs(1-e^{-q})}\mathbb{E}\left[e^{-q(N_t-N_s)+c(t-s)(1-e^{-q})}|\mathcal{F}_s\right]$$

nuevamente por independencia y estacionariedad de incrementos,

$$\begin{aligned}
&= e^{-qN_s+cs(1-e^{-q})}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-qk+c(t-s)(1-e^{-q})}\frac{(c(t-s))^k e^{-c(t-s)}}{k!} \\
&= e^{-qN_s+cs(1-e^{-q})}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(e^{-q}c(t-s))^k}{k!}e^{c(t-s)(1-e^{-q}-1)} \\
&= e^{-qN_s+cs(1-e^{-q})}e^{-c(t-s)e^{-q}}e^{c(t-s)e^{-q}} = e^{-qN_s+cs(1-e^{-q})}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\xi_t^{(q)}$ es martingala.

□

Proposición 2.2. *Si $H = (H_t : t \geq 0)$ es un proceso con trayectorias continuas por la izquierda y adaptado a la filtración (Ver apéndice),$(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, i.e. H_t es $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s : s \leq t)$-medible para $t \geq 0$ y si:*

1. *$\triangle N_s = (N_s - N_{s^-})$ es el salto del proceso de Poisson.*
2. $$\int_0^t H_s dN_s = \sum_{s\leq t} H_s \triangle N_s.$$
3. $\mathbb{E}\left[\int_0^t |H_s|ds\right] < \infty.$

Entonces:$\left(V_t = \int_0^t H_s dN_s - c\int_0^t H_s ds : t \geq 0\right)$ *es $(\mathcal{F}_t)$-martingala y en consecuencia se tiene la fórmula de compensación*

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s dN_s\right] = c\mathbb{E}\left[\int_0^t H_s ds\right].$$

Demostración. Para demostrar esto basta verlo para procesos de la siguiente forma (esto no se mostrará en este trabajo ya que rebasa su nivel). Sea

$$H(t,\omega) = \xi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i(\omega)\mathbf{1}_{(u_i,u_{i+1}]}(t)$$

donde $u_1 < u_2 < \cdots < u_n < \ldots$ es una partición,π, de $(0,\infty)$ (a estos procesos se les conoce como procesos elementales).

Sea $s \leq r$, entonces existen, j_0, $m \in \mathbb{N}$ tal que,

$$u_{j_0} \leq s < u_{j_0+1} \leq \cdots < u_{m-1} \leq r < u_m \leq \ldots$$

$$\begin{aligned}
\text{entonces, } H &= \xi_0(\omega)\mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{j_0-1} \xi_i(\omega)\mathbf{1}_{(u_i,u_{i+1}]}(t) + \xi_{j_0}(\omega)\mathbf{1}_{(u_{j_0},s]}(t) \\
&+ \xi_{j_0}(\omega)\mathbf{1}_{(s,u_{j_0}+1]}(t) + \sum_{i=j_0+1}^{m-2} \xi_i(\omega)\mathbf{1}_{(u_i,u_{i+1}]}(t) \\
&+ \xi_{m-1}(\omega)\mathbf{1}_{(u_{m-1},r]}(t) + \xi_{m-1}(\omega)\mathbf{1}_{(r,u_m]}(t) \\
&+ \sum_{i=m}^{\infty} \xi_i(\omega)\mathbf{1}_{(u_i,u_{i+1}]}(t).
\end{aligned}$$

De modo que tenemos una nueva partición $\pi' = \pi \cup \{s\} \cup \{r\}$, donde $\pi = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. En consecuencia

$$\mathbb{E}\left[\int_0^r H_t dN_t - c\int_0^r H_t dt|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{u_i' \leq r} \xi_i'(N_{u_{i+1}'} - N_{u_i'}) - c\sum_{u_i' \leq r} \xi_i' \Delta u_i' |\mathcal{F}_s\right]$$

dado que las ξ_i' son $\mathcal{F}_s$-medibles hasta $i = j_0$, tenemos que

$$= \sum_{u_i' \leq s} \xi_i'(N_{u_{i+1}'} - N_{u_i'}) - c\sum_{u_i' \leq s} \xi_i' \Delta u_i' + \mathbb{E}\left[\sum_{s < u_i' \leq r} (\xi_i'(N_{u_{i+1}'} - N_{u_i'}) - c\xi_i' \Delta u_i')|\mathcal{F}_s\right].$$

En esto último, la parte dentro de la esperanza se puede ver como la suma de ciertas funciones g_i tales que $g_i = \xi_i'(N_{u_{i+1}'} - N_{u_i'}) - c\xi_i'(u_{i+1}' - u_i')$ como

$$\mathbb{E}[g_i|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[g_i|\mathcal{F}_{u_i'}\right]|\mathcal{F}_s\right]$$

y

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[g_i|\mathcal{F}_{u_i'}\right] &= \mathbb{E}\left[\xi_i'(N_{u_{i+1}'} - N_{u_i'}) - c\xi_i'(u_{i+1}' - u_i')|\mathcal{F}_{u_i'}\right] \\
&= \xi_i'\mathbb{E}\left[(N_{u_{i+1}'} - cu_{i+1}') - (N_{u_i'} - cu_i')|\mathcal{F}_{u_i'}\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

ya que $(N_{u_i'} - cu_i')_{i\geq 0}$ es martingala. Por lo tanto V_t es $\mathcal{F}_t$-martingala. Dado que $(V_t)_{t\geq 0}$ es martingala.

$$\mathbb{E}[V_t] = \mathbb{E}[V_0] = 0$$

Por lo cual,

$$\mathbb{E}\left[\int_0^r H_t dN_t - c\int_0^r H_t dt\right] = 0.$$

De ahí que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^r H_t dN_t\right] = c\mathbb{E}\left[\int_0^r H_t dt\right].$$

$\square$

Proposición 2.3. *Si h es medible $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ y sea*

$$\left\{ Z_t = \exp\left\{ -\int_0^t h(s)dN_s + c\int_0^t \left(1 - e^{-h(s)}\right) ds \right\}, t \geq 0 \right\}$$

entonces $(Z_t)_{t\geq 0}$ es martingala y en consecuencia se tiene la fórmula exponencial:

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)dN_s\right)\right] = \exp\left(-c\int_0^t \left(1 - e^{-h(s)}\right) ds\right).$$

Demostración. Sabemos que $(Z_t)_{t\geq 0}$ es martingala si y sólo si para $s \leq t$

$$\mathbb{E}[Z_t Z_s^{-1} | \mathcal{F}_s] = 1.$$

Esto es claro ya que si $(Z_t)_{t\geq 0}$ es martingala si y sólo si para todo $s \leq t$

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = Z_s$$

y esto es lo mismo que

$$Z_s^{-1}\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = 1$$

ya que $Z_s > 0$ para toda s. Como Z_s^{-1} es $\mathcal{F}_s$-medible lo anterior es equivalente a

$$\mathbb{E}[Z_t Z_s^{-1} | \mathcal{F}_s] = 1$$

Ahora por el lado izquierdo de nuestra última igualdad tenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_t Z_s^{-1} | \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t h(u)dN_u + c\int_0^t (1 - e^{-h(u)})du\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. + \int_0^s h(u)dN_u - c\int_0^s (1 - e^{-h(u)})du\right) | \mathcal{F}_s\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_s^t h(u)dN_u + c\int_s^t (1 - e^{-h(u)})du\right) | \mathcal{F}_s\right]
\end{aligned}$$

Entonces nos basta demostrar que

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_s^t h(u)dN_u + c\int_s^t \left(1-e^{-h(u)}\right)du\right)|\mathcal{F}_s\right] = 1.$$

lo cual será suficiente verlo para h simple medible (ver apéndice E), i.e. sea

$$h(t) = \alpha_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \mathbf{1}_{(u_i,u_{i+1}]}(t)$$

donde $\alpha_i \geq 0, i \in [0,\infty)$, $0 \leq u_1 < u_2 < \ldots$ son una partición π y $\lim_{n\to\infty} u_n = \infty$. Sea $s \leq t$. Existen u_{j_0} y u_m tales que

$$u_{j_0} < s < u_{j_0+1} < \cdots < u_{m-1} < r < u_m < \ldots$$

entonces

$$h(t) = \alpha_0 \mathbf{1}_{\{0\}}(t) + \sum_{i=1}^{j_0-1} \alpha_i \mathbf{1}_{(u_i,u_{i+1}]}(t) + \alpha_{j0}\mathbf{1}_{(u_{j_0},s]}(t) + \alpha_{j0}\mathbf{1}_{(s,u_{j_0+1}]}(t)$$

$$+ \sum_{i=j_0+1}^{m-2} \alpha_i \mathbf{1}_{(u_i,u_{i+1}]}(t) + \alpha_{m-1}\mathbf{1}_{(u_{m-1},r]}(t) + \alpha_{m-1}\mathbf{1}_{(r,u_m]}(t)$$
$$+ \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i \mathbf{1}_{(u_i,u_{i+1}]}(t).$$

Tomemos una nueva partición $\pi' = \pi \cup \{s\} \cup \{r\}$, donde $\pi = \{u_i\}$ la partición original, las cosas quedan así

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_s^t h(u)dN_u + c\int_s^t \left(1-e^{-h(u)}\right)du\right)|\mathcal{F}_s\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=j_0+1}^{m} (N_{u'_{i+1}} - N_{u'_i}) + c(1-e)(u'_{i+1}-u'_i)\right)|\mathcal{F}_s\right]$$

Sea $g_i = \left(N_{u'_{i+1}} - N_{u'_i}\right) + c(1-e)\left(u'_{i+1}-u'_i\right)$ y sustituimos, entonces

$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=j_0+1}^{m} g_i\right)|\mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=j_0+1}^{m} g_i\right)|\mathcal{F}_{u'_m}\right]|\mathcal{F}_s\right]$$

ya que las $g_i, i \leq m'$ son $\mathcal{F}_{m'}$-medibles

$$= \mathbb{E}\left[\exp\left(\sum_{i=j_0+1}^{m-1} g_i\right) \mathbb{E}[\exp(g_m)|\mathcal{F}_{u'_m}]|\mathcal{F}_s\right]$$

pero

$$\mathbb{E}\left[\exp(g_m)|\mathcal{F}_{u'_m}\right] = \mathbb{E}\left[\exp(N_{u'_{m+1}} - N_{u'_m}) + c(1-e)(u'_{m+1} - u'_m)|\mathcal{F}_{u'_m}\right]$$

por la independencia de los incrementos

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}\left[\exp(N_{u'_{m+1}} - N_{u'_m}) + c(1-e)(u'_{m+1} - u'_m)\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(k + c(1-e)\left(u'_{m+1} - u'_m\right)\right) \exp\left(-c\left(u'_{m+1} - u'_m\right)\right) \frac{\left(c\left(u'_{m+1} - u'_m\right)\right)^k}{k!} \\
&= \exp\left(-ce\left(u'_{m+1} - u'_m\right)\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(ce\left(u'_{m+1} - u'_m\right)\right)^k}{k!} \\
&= \exp\left(-ce\left(u'_{m+1} - u'_m\right)\right) \exp\left(ce\left(u'_{m+1} - u'_m\right)\right) = 1.
\end{aligned}$$

se prosigue de la misma forma $m - j_0 - 3$ veces, de tal forma que

$$\mathbb{E}[Z_t Z_s^{-1}|\mathcal{F}_s] = 1$$

Por lo tanto $(Z_t)_{t\geq 0}$ es martingala. y en consecuencia $\mathbb{E}[Z_t]\mathbb{E}[Z_0] = 1$.

$$\begin{aligned}
1 &= \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)dN_s + c\int_0^t \left(1 - e^{-h(s)}\right) ds\right)\right] \\
&= \exp\left(c\int_0^t \left(1 - e^{-h(s)}\right) ds\right) \mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)dN_s\right)\right]
\end{aligned}$$

y esto sucede si y sólo si

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s)dN_s\right)\right] = \exp\left(-c\int_0^t \left(1 - e^{-h(s)}\right) ds\right)$$

□

2.2 El proceso de Poisson compuesto.

Sea $(N_t)_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson de intensidad c y $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes tales que la σ-álgebra generada por $(N_t)_{t\geq 0}$ es independiente de la generada por $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ entonces si $S_0 = 0$, $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ con $n \geq 1$; se define a $Z_t = S_{N_t}$ es decir, dado $\omega \in \Omega$ se tiene que $Z_t(\omega) = S_{N_t(\omega)}(\omega)$. A $(Z_t)_{t\geq 0}$ se le llama proceso de Poisson compuesto. Es fácil ver que si $Y_i = 1$ con $i \in \mathbb{N}$ entonces $Z_t = N_t$. En la siguiente proposición se demostrará que $(Z_t)_{t\geq 0}$ es también un proceso de Lévy.

Teorema 2.1. *Con la misma notación, $(Z_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy.*

Demostración. 1. Como $N_0 = 0$ y $S_0 = 0$ entonces $Z_0 = 0$.

2. Sea $s > t$ entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t} Z_s &= \lim_{s\to t}\sum_{i=1}^{N_s} Y_i \\ &= \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = Z_t.\end{aligned}$$

Sea $s < t$ entonces,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t} Z_s &= \lim_{s\to t}\sum_{i=1}^{N_s} Y_i \\ &= \sum_{i=1}^{N_{s^-}} Y_i = Z_{s^-}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(Z_t)_{t\geq 0}$ es càdlàg.

3. En este punto probaremos que $(Z_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes y estacionarios, lo cual se hará por casos para dejarlo más en claro. 1er. Caso.Sea $t > s > v$ y $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (borelianos), entonces:

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}[(Z_t - Z_s) \in A, (Z_s - Z_v) \in B] \\ &= \sum_{R} \mathbb{P}[(Z_t - Z_s) \in A, (Z_s - Z_v) \in B, N_t = k_2, N_s = k_1, N_v = k_0]\end{aligned}$$

donde $R = \{0 \leq k_0 < k_1 < k_2; k_i \in \mathbb{N}, i \in \{0, 1, 2\}$

$$= \sum_{R} \mathbb{P}[S_{k_2} - S_{k_1} \in A, S_{k_1} - S_{k_0} \in B, N_t - N_s = k_2 - k_1, N_s - N_v = k_1 - k_0, N_v = k_0]$$

ya que $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son variables aleatorias independientes identicamente distribuidas y son independientes de $(N_t)_{t\geq 0}$ se tiene que $S_{k_2} - S_{k_1}$ es independiente de $S_{k_1} - S_{k_0}$; que $S_{k_2} - S_{k_1}$ se distribuye igual que $S_{k_2-k_1}$, lo mismo que $S_{k_1} - S_{k_0}$ se distribuye igual que $S_{k_1-k_0}$ y además como $(N_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos estacionarios e independientes, de ahí que

$$\begin{aligned}
&= \sum_R \mathbb{P}[S_{k_2-k_1} \in A, N_{t-s} = k_2 - k_1]\mathbb{P}[S_{k_1-k_0} \in B, N_{s-v} = k_1 - k_0] \\
&\quad \mathbb{P}[N_v = k_0] \\
&= \sum_{\substack{\{0\leq k_1 < k_2,\\ k_i \in \mathbb{N}\}}} \mathbb{P}[S_{k_2-k_1} \in A, N_{t-s} = k_2 - k_1] \\
&\quad \times \sum_{\substack{\{0\leq k_0 < k_1,\\ k_i \in \mathbb{N}\}}} \mathbb{P}[S_{k_1-k_0} \in B, N_{s-v} = k_1 - k_0] \sum_{k_0\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[N_v = k_0] \\
&= \mathbb{P}[S_{N_{t-s}} \in A]\mathbb{P}[S_{N_{s-v}} \in B] = \mathbb{P}[Z_{t-s} \in A]\mathbb{P}[Z_{s-v} \in B].
\end{aligned}$$

y entonces obtenemos la fórmula

$$\mathbb{P}[(Z_t - Z_s) \in A, (Z_s - Z_v) \in B] = \mathbb{P}[Z_{t-s} \in A]\mathbb{P}[Z_{s-v} \in B].$$

En el siguiente caso se generalizará dicha fómula y se probará la estacionariedad.

2do. Caso. Sea $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ y $A_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}} \in A_i, i = 1, \ldots, n] \\
&= \sum_{\substack{R = \{0\leq k_0 < k_1 < \cdots < k_n\\ k_i \in \mathbb{N}\}}} \mathbb{P}[S_{k_i} - S_{k_{i-1}} \in A_i, N_{t_i} = k_i, i = 1, \ldots, n] \\
&= \sum_R \mathbb{P}[S_{k_i} - S_{k_{i-1}} \in A_i, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i - k_{i-1}, i = 1, \ldots, n]
\end{aligned}$$

ya que $(N_t)_{t\geq 0}$ es independiente de las $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$, además de que $(N_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos estacionarios e independientes y dado que si $k_i \geq k_{i-1}$ tenemos que $(S_{k_i} - S_{k_{i-1}})$ se distribuye de igual forma que $S_{k_i-k_{i-1}}$, ya que las Y_i's son independientes e identicamente distribuidas, en consecuencia obtenemos:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{R} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[S_{k_i-k_{i-1}} \in A_i] \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i - k_{i-1}] \\
&= \sum_{\substack{\{j_0 < j_1 < \cdots < j_n \\ j_i \in \mathbb{N}\}}} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[S_{j_i} \in A_i, N_{t_i - t_{i-1}} = j_i] \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[S_{N_{t_i-t_{i-1}}} \in A_i] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[Z_{t_i-t_{i-1}} \in A_i].
\end{aligned}$$

De donde,

$$\mathbb{P}[Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}} \in A_i, i = 1, \ldots, n] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[Z_{t_i-t_{i-1}} \in A_i]$$

Si $n = 1$ entonces $(Z_{t_1} - Z_{t_0})$ se distribuye igual que $Z_{t_1-t_0}$ y por inducción sobre n se sigue que $(Z_t)_{t\geq 0}$ tiene incrementos estacionarios e independientes en intervalos de tiempo contiguos.
3er. Caso. Sea $t > s > v > u$ y $A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ entonces

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[(Z_t - Z_s) \in A, (Z_v - Z_u) \in B] \\
= \; &\mathbb{P}[(Z_t - Z_s) \in A, (Z_s - Z_v) \in \mathbb{R}, (Z_v - Z_u) \in B]
\end{aligned}$$

y por el caso anterior

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{P}[Z_{t-s} \in A]\mathbb{P}[Z_{s-v} \in \mathbb{R}]\mathbb{P}[Z_{v-u} \in B] \\
&= \mathbb{P}[Z_{t-s} \in A]\mathbb{P}[Z_{v-u} \in B]
\end{aligned}$$

4to. Caso. Sean $t_n > s_n > t_{n-1} > s_{n-1} > \cdots > t_1 > s_1 > t_0$ y $A_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ entonces,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}[(Z_{t_i} - Z_{s_i}) \in A_i, i = 1, \ldots, n] \\
= \; &\mathbb{P}[(Z_{t_i} - Z_{s_i}) \in A_i, (Z_{s_i} - Z_{t_{i-1}}) \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, n]
\end{aligned}$$

por los dos últimos casos anteriores tenemos lo deseado,

$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}[Z_{t_i-s_i} \in A_i]$$

Por lo tanto $(Z_t)_{t\geq 0}$ es un proceso de Lévy. $\square$

Con las mismas notaciones fijemonos en la transformada de Laplace de Z_t. Supongamos que $M_{Y_i}(u) = \mathbb{E}[\exp\{-uY_i\}]$ con $i \in \mathbb{N}$, es la transformada de Laplace de las Y_i's y donde $u > 0$. Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned}
M_{Z_t}(u) &= \mathbb{E}[\exp\{-uZ_t\}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\exp\{-uZ_t\}|N_t = n]\mathbb{P}[N_t = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\exp\{-u(Y_1 + \cdots + Y_n)\}|N_t = n]\mathbb{P}[N_t = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbb{E}[\exp\{-uY_1\}])^n e^{-ct}\frac{(ct)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (M_{Y_1}(u))^n e^{-ct}\frac{(ct)^n}{n!} = \exp\{ct(M_{Y_1}(u) - 1)\}.
\end{aligned}$$

Proposición 2.4. *Consideremos las notaciones anteriores. Si Y_i se distribuye Bernoulli parámetro p, $i \in \mathbb{N}$, entonces $(Z_t)_{t\geq 0}$ se distribuye Poisson parámetro pc.*

Demostración. Si Y_i se distribuye Bernoulli parámetro p entonces $M_{Y_i}(u) = (1-p) + pe^{-u}$ y en consecuencia

$$\begin{aligned}
M_{Z_t}(u) &= \exp\{ct((1-p) + pe^{-u} - 1\} \\
&= \exp\{pct(e^{-u} - 1)\}.
\end{aligned}$$

Y debido a la estacionariedad de los incrementos, entonces $(Z_t)_{t\geq 0}$ se distribuye Poisson parámetro pc. □

Proposición 2.5. *Prosigamos con las mismas notaciones. Sea $\mathbb{E}[Y_1] = \mu$ y $Var[Y_1] = \sigma^2$, $|\mu| < \infty$, $\sigma < \infty$. Si N_t es un proceso de Poisson de intensidad c, entonces Z_t tiene media y varianza*

$$\mathbb{E}[Z_t] = ct\mu \quad Var[Z_t] = ct(\mu^2 + \sigma^2)$$

Demostración.

$$\mathbb{E}[Z_t] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_t|N_t = k]\mathbb{P}[N_t = k].$$

Si $N_t = k$ entonces hay k términos en Z_t y $\mathbb{E}[Z_t|N_t = k] = k\mu$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_t] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mu\mathbb{P}[N_t = k] \\
&= \mu\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}[N_t = k] = \mu\mathbb{E}[N_t] \\
&= ct\mu.
\end{aligned}$$

De igual forma

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_t^2] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z_t^2|N_t = k]\mathbb{P}[N_t = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(Var[Z_t|N_t = k] + \mathbb{E}^2[Z_t|N_t = k]\right)\mathbb{P}[N_t = k] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k\sigma^2 + k^2\mu^2)\mathbb{P}[N_t = k] \\
&= \sigma^2\sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}[N_t = k] + \mu^2\sum_{k=0}^{\infty} k^2\mathbb{P}[N_t = k] \\
&= \sigma^2\mathbb{E}[N_t] + \mu^2\mathbb{E}[N_t^2] = ct\sigma^2 + \mu^2(Var[N_t] + \mathbb{E}^2[N_t]) \\
&= ct\sigma^2 + \mu^2(ct + (ct)^2).
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
Var[Z_t] &= \mathbb{E}[Z_t^2] - \mathbb{E}^2[Z_t] = ct\sigma^2 + \mu^2 ct + \mu^2(ct)^2 - \mu^2(ct)^2 \\
&= ct(\sigma^2 + \mu^2)
\end{aligned}$$

□

2.2.1 Ejemplos y aplicaciones del proceso de Poisson compuesto.

Ejemplo 2.1. *Supongamos que el número de semillas, N_t, producidas por cierta clase de planta al tiempo t es un proceso de Poisson de intensidad c. Cada semilla, independientemente de cuántas haya, tiene probabilidad p de desarrollarse como planta. Encontrar la media y la varianza del número de semillas desarrolladas como plantas.*

Solución. Sea $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con distribución Bernoulli parámetro $p.Y_i$ nos indica si la i-ésima semilla se desarrolló como planta o no, entonces por 2.2 Z_t que es el número de semillas que se desarrollaron como plantas hasta el tiempo t tiene media y varianza iguales a pct. □

Aplicación en neurobiología.

En los enlaces que existen entre los músculos y las redes nerviosas ocurren pequeñas descargas eléctricas espontáneamente. Los tiempos de llegada, por así decirles a los tiempos en que aparecen las descargas, son descritos por un proceso de Poisson, esto es lo que se ha descubierto. Aqui lo que es de nuestro interés son las magnitudes de dichas descarga. El histograma de las amplitudes de las pequeñas y espontáneas cargas eléctricas es ajustado a una densidad normal, es decir, se puede suponer que las amplitudes mencionadas tienen como función de densidad la gaussiana. Cuando un impulso nervioso, enviado por la espina dorsal, entra en el enlace produce una mayor reacción cuya amplitud será llamada Z_t. Una hipótesis sugerida fue que una reacción grande es compuesta por varias reacciones unitarias, estas correspondientes a la actividad espontánea.

Dado que la amplitud se puede ajustar a una distribución normal supondremos que las reacciones unitarias, $Y_1, Y_2, \ldots$, son una sucesión de variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas y que Y_1 se distribuye normal con parámetros μ y σ^2. Una reacción grande consiste en el número aleatorio N_t de reacciones unitarias al tiempo t. Si $N_t = 0$ no existe reacción alguna. Entonces $Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ lo cual es una suma aleatoria de variables aleatorias. Una observación que vale la pena hacer aquí es que otro supuesto que se puede hacer con respesto a la distribución de N_t es que esta variable aleatoria se distribuya binomial con parámetros n y p, donde n es el número de sitios potencialmente activos y p es la probabilidad de que alguno se active. Aunque usualmente, debido a fines prácticos, se toma supuesto de que N_t se distribuye Poisson; esto ya que comunmente la n es suficientemente grande como hacer el cómputo de las probabilidades de manera tediosa, además de que es más sencillo manejar un parámetro a dos de ellos. Este cambio de supuesto se basa en la aproximación a la Poisson de la distribución binomial (ver sección 1.1.3.). En consecuencia se tiene que Z_t se distribuye aproximadamente Poisson compuesta. A continuación calcularemos la función de densidad de Z_t.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[Z_t \in (v, v+dv)] &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[Z_t \in (v, v+dv) | N_t = k] \mathbb{P}[N_t = k] \\
&= e^{-ct} \mathbb{P}[Z_t \in (v, v+dv) | N_t = 0] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ct} \frac{(ct)^k}{k!} \mathbb{P}[Z_t \in (v, v+dv) | N_t = k] \\
&= e^{-ct} \delta(v) dv \\
&\quad + e^{-ct} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ct)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma^2}} \exp\left\{ \frac{-(v-k\mu)^2}{2k\sigma^2} \right\} dv \\
&= \left(e^{-ct} \delta(v) \right. \\
&\quad \left. + e^{-ct} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ct)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma^2}} \exp\left\{ \frac{-(v-k\mu)^2}{2k\sigma^2} \right\} \right) dv
\end{aligned}$$

donde

$$\delta(v) = \begin{cases} 1, & \text{si } v = 0; \\ 0, & \text{si } v \neq 0. \end{cases}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
f_{Z_t} &= e^{-ct} \delta(v) \\
&\quad + e^{-ct} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ct)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi k\sigma^2}} \exp\left\{ \frac{-(v-k\mu)^2}{2k\sigma^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Medidas aleatorias de Poisson.

En la parte final de este trabajo motivaremos el estudio y la definición a las medidas aleatorias de Poisson, veremos que el proceso de Poisson es un caso particular de ellas y definiremos al proceso de Poisson puntual como un caso particular de ellas también. Además probaremos dos importantes resultados, la fórmula de Campbell y el teorema de coloración ambos para medidas aleatorias.

3.1 Medidas aleatorias de Poisson.

El proceso de Poisson se estudia, debido a que funciona como una medida aleatoria de conteo, sobre la recta real positiva, de eventos. Es decir, nos permite medir la ocurrencia de los eventos en el tiempo. A veces es necesario medir dicha ocurrencia en otros espacios, como ejemplos podrían estar la presencia de cierto cuerpo estelar en el espacio exterior, el número de árboles en un bosque e incluso en la teoría de los mismos procesos estocásticos para medir la ocurrencia de eventos en espacios más abstractos y no necesariamente euclidianos. Es por eso que es necesario extender el concepto de proceso de Poisson de $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}, \lambda)$ a cualquier $(E, \mathcal{E}, \mu)$, espacio de medida σ-finita.

Definición 3.1. Sea $(E, \mathcal{E}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita. Una medida aleatoria de Poisson de medida de intensidad μ es un proceso $M = (M(B) : B \in \mathcal{E})$, donde $M(B)$ toma valores en $\mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$ y tal que:

1. Si $\mu(B) < \infty$ entonces $M(B)$ es una variable aleatoria de Poisson de

parámetro $\mu(B)$. Si $\mu(B) = \infty$ entonces $M(B) = \infty$ c.s.

2. Sean $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{E}$ tales que $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Entonces $\{M(B_i)\}_{i=1}^n$ es una colección de procesos independientes.

Dado que $(N_t)_{t\geq 0}$ el proceso de Poisson de intesidad c tiene la propiedad de ser creciente y càdlàg induce una medida en intervalos, la cual coincide con el mismo proceso. Es por eso que se sugiere para su generalización el nombre de medida aleatoria ya que consta de ls propiedades de una medida. En el siguiente ejemplo veremos que el concepto de medida aleatoria de Poisson en verdad generaliza el concepto de proceso de Poisson.

Ejemplo 3.1. *Sea M una medida aleatoria de Poisson de medida de intensidad μ sobre $(E, \mathcal{E}, \mu)$. Donde $E = \mathbb{R}^+$, $\mathcal{E} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$ y $\mu = \lambda$ la medida de Lebesgue. ¿Qué es $t \to M[0,t]$?*

Solución. Si nos fijamos en el proceso de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ de intensidad $c = 1$ veremos que $N_t = M[0,t]$ ya que $N : \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \to \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{+\infty\}$, probemos pues las dos propiedades.

1. Si N_t se distribuye Poisson con parámetro t entonces por estacionariedad si $t \geq s$, N_{t-s} se distribuye Poisson con parámetro $(t-s)$. Por lo tanto si $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$, $B = (a,b]$ $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $M(B) = N_b - N_a = N_{b-a}$ y esto se distribuye Poisson con parámetro $(b-a)$; y $b - a = \lambda((a,b]) = \lambda(B) = \mu(B)$.

2. Por tener incrementos independientes. Sea $0 < t_0 < \cdots < t_n$ los intervalos $(t_{i-1}] = B_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$ son ajenos y $(N_{t_i - t_{i-1}})_{i=1}^n$ son independientes.

Por lo tanto M es el proceso de Poisson de intensidad 1. □

Teorema 3.1 (Teorema de superposición). *Sean $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ medidas σ-finitas en $(E, \mathcal{E})$ y $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$ medida σ-finita. Sean $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ las medidas aleatorias de Poisson independientes con medidas de intensidad $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ respectivamente. Entonces $M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i$ es la medida aleatoria de Poisson de medida de intensidad $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$.*

Demostración. Sea $B \in \mathcal{E}$ entonces $(M_j(B))_{j\in\mathbb{N}}$ son independientes debido a que $M_j(B)$ se distribuye Poisson con parámetro $\mu_j(B)$. Por el teorema de la aditividad numerable (ver capítulo 1), podemos concluir que

$M(B) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} M_j(B)$ se distribuye Poisson de parámetro $\mu(B) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu_i(B)$, para $B \in \mathcal{E}$. Como las $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son medidas aleatorias de Poisson con medidas de intensidad μ_j, $j \in \mathbb{N}$, respectivamente; entonces dada $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión disjunta de elementos de $\mathcal{E}$, $(M_j(B_i))_{i\in\mathbb{N}}$ son independientes para toda $j \in \mathbb{N}$.Ahora las $(M_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son independientes entre ellas entonces $(\sum^{\infty} M_j(B_i))_{i\in\mathbb{N}}$ son independientes. Como $M(B_i) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} M_j(B_i)$ se concluye que M es medida aleatoria de Poisson de medida de intensidad μ. $\square$

Pasemos a probar la existencia de la medida aleatoria de Poisson, pero antes dejemos clara la notación a usarse. Sean $(S, \mathcal{S})$ un espacio medible y μ una medida σ-finita sobre $(S, \mathcal{S})$: Definimos M_p, el espacio de las medidas puntuales sobre S, como el conjunto de todas las medidas como el conjunto de todas las medidas en $\mathcal{S}$ que son de la forma

$$\nu = \sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i}$$

donde $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} y x_i \in \mathcal{S}$. Para cada $A \in \mathcal{S}$, consideremos la aplicación

$$T_A : M_p(S) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\},$$
$$T_A(\nu) = \mu(A).$$

Proveeremos a $M_p(S)$ de la σ-álgebra $\mathcal{M}$ generada por la familia

$$\{T_A : A \in \mathcal{S}\}.$$

Proposición 3.1. *Dado un espacio de medida σ-finita $(S, \mathcal{S}, \mu)$, existe una medida aleatoria de Poisson con medida de intensidad μ.*

Demostración. Supongamos $\mu < \infty$. Se puede construir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ en el que exista una sucesión de variables aleatorias independientes $\xi, X_1, X_2, \ldots$ tales ξ tome valores en los naturales con distribución de Poisson y parámetro $\mu(S)$, y que las X_i tomen valores en $(S, \mathcal{S})$ con distribución $\frac{\mu}{\mu(S)}$, i.e. $\frac{\mu(B)}{\mu(S)}$ para $B \in \mathcal{S}$; esto gracias al teorema de Ionescu Tulcea (fuente por citar). Sea $N : \Omega \to M_p(s)$ definida como $\sum\limits_{i=1}^{\xi} \delta_{X_i}$. Para verificar que N es una transformación medible, basta probar que para cada $A \in \mathcal{S}$;la función $T_A \circ N : \Omega \to \mathbb{N}$ es medible. Observemos que

$$T_A \circ N = N(A) = \sum_{i=1}^{\xi} \delta_{X_i}(A) = \sum_{i=1}^{\xi} \mathbf{1}_A \circ X_i$$

por lo tanto, para cualquier $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$(T_A \circ N = k) = \bigcup_{n=k}^{\infty} (\xi = n, \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_A \circ X_i = k) \in \mathcal{F}.$$

Calculamos ahora, para A_1 y A_2 en S disjuntos y $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, la función generadora de momentos de $(N(A_1), N(A_2)$ evaluada en (λ_1, λ_2):

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\exp\{-\lambda_1 N(A_1) - \lambda_2 N(A_2)\}] \\
= & \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[\xi = k] \mathbb{E}[\exp\{-\lambda_1 \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{A_1}(X_i) - \lambda_2 \sum_{i=1}^{k} \mathbf{1}_{A_2}(X_i)\}] \\
& \text{Por independencia,} \\
= & \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} \prod_{i=1}^{k} \mathbb{E}[\exp\{-\lambda_1 \mathbf{1}_{A_1}(X_i) - \lambda_2 \mathbf{1}_{A_2}(X_i)] \\
& \text{Como son idénticamente distribuidos,} \\
= & \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu(S)^k}{k!} e^{-\mu(S)} \left(\int_S \frac{\mu(dx)}{\mu(S)} \exp\{-\lambda_1 \mathbf{1}_{A_1}(x) - \lambda_2 \mathbf{1}_{A_2}(x)\} \right)^k \\
= & \sum_{i=1}^{k} \frac{e^{-\mu(S)}}{k!} \left(\int_S \mu(dx) \exp\{-\lambda_1 \mathbf{1}_{A_1}(x) - \lambda_2 \mathbf{1}_{A_2}(x)\} \right)^k \\
= & \exp\left\{ -\mu(S) + \int_S \mu(dx) \exp\{-\lambda_1 \mathbf{1}_{A_1}(x) - \lambda_2 \mathbf{1}_{A_2}(x)\} \right\} \\
= & \exp\left\{ -\int_S \mu(dx)(1 - \exp\{-\lambda_1 \mathbf{1}_{A_1}(x) - \lambda_2 \mathbf{1}_{A_2}(x)\}) \right\} \\
= & \exp\{-\mu(A_1)(1 - \exp\{-\lambda_1\}) - \mu(A_2)(1 - \exp\{-\lambda_2\})\} \\
= & \exp\{-\mu(A_1)(1 - \exp\{-\lambda_1\})\} \exp\{-\mu(A_2)(1 - \exp\{-\lambda_2\})\}
\end{aligned}$$

Esto implica que $N(A_1)$ y $N(A_2)$ son independientes y tienen distribución Poisson con parámetros $\mu(A_1)$ y $\mu(A_2)$ respectivamente. De la misma forma se puede obtener por inducción que para cualquier $A_1, A_2, \ldots, A_p \in \mathcal{S}$ disjuntos,

$$\mathbb{E}[\exp\{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i N(A_i)\}] = \exp\left\{ -\int_S \mu(dx)(1 - \exp\{-\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \mathbf{1}_{A_i}(x)\}) \right\}$$

Finalmente, si μ es una medida σ-finita, entonces S puede descomponerse como $S = \bigcup_n S_n$, con los S_n disjuntos y $\mu(S_n) < \infty$. Definamos $\mu_n = \mu|_{S_n}$

(la medida restringida a S_n), y consideremos N^n una medida aleatoria de Poisson sobre S_n con medida de intensidad μ_n. Las medidas N^n, $n = 1, 2, \ldots$ pueden elegirse de tal manera que sean independientes y entonces $N = \sum_n N^n$ es una medida aleatoria de Poisson de medida de intensidad μ, por el teorema de superposición. $\square$

3.1.1 Ejemplos y aplicaciones de medidas aleatorias de Poisson.

Ejemplo 3.2. *Sea $(\mathbb{R}^{2^+}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{2+}}, \lambda)$ un espacio de medida σ-finita, que consiste en el primer cuadrante del plano y donde λ es la medida de Lebesgue en el plano (área). Sea M una medida aleatoria de Poisson en dicho espacio con una medida de intensidad $c\lambda$, $c \in \mathbb{R}^+$. Dicha medida aleatoria mide el número de puntos en los subconjuntos del espacio. ¿Cuál es el número esperado de puntos por cuadrado unitario?*

Solución. Observemos que el número de puntos en el cuadrado $I = [0, x] \times [0, y]$ es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $c\lambda(I) = cxy$. Si $x = y = 1$ entonces el número de puntos en el intervalo unitario es una variable aleatoria de Poisson con parámetro c y en consecuencia el número esperado de puntos por cuadrado unitario es c. $\square$

Aplicación a modelos ecológicos.

A los ecologistas les interesa la distribución de espacio, de las plantas y de los animales. Tres de las situaciones de interés son:

1. Los organismos se distribuyen aleatoriamente.

2. Los organismos tienen lugares de preferencia en el sentido en que tienden a vivir en grupo o en algunas regiones con más frecuencia que en otras.

3. Los organismos son distribuidos en una forma regular en el sentido que las distancias entre ellos y sus vecinos más cercanos tiende a ser constante.

Una importante razón para estudiar esto es que podemos estimar la distribución de la población total si conocemos la distribución en alguna pequeña región. La hipótesis de aleatoriedad nos da la pauta para argumentar el uso de medida aleatoria de Poisson en el plano. Los ecologistas se refieren a dicha medida como el bosque de Poisson. Del supuesto del bosque de Poisson podemos obtener la función de densidad de la distribución de un organismo a su vecino más cercano.

Proposición 3.2. *En un bosque de Poisson, la distancia R_1, desde un punto fijo arbitrario al más cercano evento tiene como función de densidad $f_{R_1}(r)$ donde*

$$f_{R_1}(r) = 2\lambda\pi r e^{-\lambda\pi r^2}, \qquad r > 0.$$

Demostración. Como $R_1 > r$ si y sólo si no existen puntos en el círculo de radio r con centro en un punto fijo bajo consideración. Dicho círculo tiene área πr^2, en consecuencia el número de eventos dentro del círculo es una variable aleatoria Poisson N con parámetro $\lambda\pi r^2$. Sea C el círculo de radio r. Entonces

$$\mathbb{P}[R_1 > r] = \mathbb{P}[N(C) = 0] = e^{-\lambda\pi r^2}$$

de donde

$$F_{R_1}(r) = 1 - e^{-\lambda\pi r^2}$$

entonces

$$f_{R_1}(r) = 2\lambda\pi r e^{-\lambda\pi r^2}.$$

□

3.1.2 Más aplicaciones de medidas aleatorias de Poisson.

Para las medidas aleatorias de Poisson hay muchas aplicaciones esto gracias a que en todos los supuestos en los que aparece la distribución binomial se argumenta la aproximación a la Poisson. Los siguientes ejemplos son prueba de ello.

1. Degradación radioactiva. Los tiempos en los que una colección de núcleo átomico emite, por ejemplo, partículas alpha puede ser bien aproximado con unas medida aleatoria de Poisson. Supongamos que hay N períodos de observación de duración T. Sea $\bar{n} = \lambda T$ el valor esperado del número de emisiones por período observado. Bajo los supuestos, el valor esperado, n_k, del número N_k de períodos de observación que presentan k emisiones es $n_k = N\frac{e^{-\bar{n}}\bar{n}^k}{k!}$

2. Tiempos de llegada. Los tiempos de llegada de clientes a tiendas, bancos, etc... pueden ser aproximados por medidas aleatorias de Poisson. De manera similar para los tiempos en que las llamadas por teléfono se realizan, accidentes que ocurren en un fábrica o en un taller, etc.. En

"Teoría de Colas" el supuesto de la distribución de Poisson es frecuentemente hecho, en parte por su evidencia empírica y en parte porque nos lleva a simplificaciones matemáticas. En muchas de estas situaciones la intensidad varía de tal forma que $c = c(t)$. Sin embargo, en períodos de tiempo, el supuesto de c constante será válido.

3. Mutaciones. En la células los cambios del material genético (hereditario) son llamados mutaciones. Pueden ser espontáneos ó inducidos por agentes externos. Si las mutaciones ocurren en las células reproductivas ó gametos entonces la descendencia hereda los genes mutantes. En los humanos la tasa con la que ocurren dichas mutaciones espontáneas es de 4 por 100,000 gametos aproximadamente. En la bacteria E. coli, una variedad mutante es resistente a la estreptomicina. En un experimento, N=150 cajas de petri no tuvieron colonias resistentes, 40 tuvieron una, 8 tuvieron dos, 3 tuvieron 3 y 1 tuvo 4. El promedio de $\bar{n}$, de mutantes por millones de células es entonces

$$\bar{n} = \frac{(40)(1) + (8)(2) + (3)(3) + (1)(4)}{150} = 0.46$$

Bajo hipótesis de Poisson, el número esperado, n_k, de cajas conteniendo k mutantes está dado por

$$n_k = N\frac{\exp\{-\bar{n}\}\bar{n}^k}{k!}.$$

4. Cambio de voltaje en los enlaces músculo-nerviosos. Los cambios de voltaje vistos en una célula muscular atribuidos a la actividad espontánea de las células nerviosas vecinas ocurren en tiempos descritos como medidas aleatorias de Poisson tal y como se desarrolló en la aplicación del proceso de Poisson compuesto.

3.1.3 La fórmula de Campbell.

Sea $f : E \to \mathbb{R}^+$ medible y

$$\int_E f dM = < M, f >$$

Si f es simple medibles entonces

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{B_i}(x)$$

donde $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ es partición de E y $< M, f >= \sum_{i=1}^{\infty} c_i M(B_i)$. Si f es medible y acotada

$$f_n(x) = \frac{k}{2^n}$$

sobre,

$$E_{n_k} = \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f \leq \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

entonces

$$f_n \xrightarrow{c.u.} f.$$

Tenemos que

$$< M, f_n >= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} M(E_{n_k})$$

y por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$< M, f >= \lim_{n\to\infty} < M, f_n > .$$

La fórmula de Campbell nos da una importante relación

$$\mathbb{E}[\exp\{- < M, f >\}] = \exp\left[- \int_E \left(1 - e^{-f(x)}\right) \mu(dx) \right].$$

Consideremos lo siguiente.

1. Si $f = \mathbf{1}_B, < M, f >= M(B)$ entonces

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_B(\xi_i) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i).$$

2. Si $f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbf{1}_{B_i}, < M, f >= \sum_{j=1}^{\infty} c_j M(B_j)$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i) &= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{\infty} c_j \mathbf{1}_{B_j}(\xi_i) \right) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{i=1}^{N} \mathbf{1}_{B_j}(\xi_i) \\ &= \sum_{j=1}^{N} c_j (\#\{i \leq N, \xi_i \in B_i\}) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j M(B_j). \end{aligned}$$

3. Si f es medible y acotada

$$< M, f >= \lim_{n\to\infty} < M, f_n >= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f i_n(\xi_i) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)$$

Ahora probaremos la fórmula

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp\{-<M,f>\}] &= \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)\right\}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{\infty}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\right\}\right)\mathbf{1}_{\{k\}}(N)\right] \\
\text{por T.C.M.} \quad &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\mathbb{P}[N=k]\mathbb{E}\left[\exp\left\{-\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\right\}\right]\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu(E)}\frac{(\mu(E))^k}{k!}\mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^{k}\exp\{-f(\xi_i)\}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu(E)}\frac{(\mu(E))^k}{k!}\prod_{i=1}^{k}\mathbb{E}[\exp\{-f(\xi_i)\}]
\end{aligned}$$

Por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$\mathbb{E}[\exp\{-f(\xi_i)\}] = \int_E e^{-f(x)}\xi(dx)$$

y como las ξ_i's son variable aleatorias independientes e identicamente distribuidas entonces los cálculos de arriba quedan de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu(E)}\frac{(\mu(E))^k}{k!}\left(\int_E e^{-f(x)}\frac{\mu(dx)}{\mu(E)}\right)^k \\
&= e^{-\mu(E)}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_E e^{-f(x)}\mu(dx)\right)^k\frac{1}{k!} \\
&= e^{-\mu(E)}e^{\int_E e^{-f(x)}\mu(dx)}
\end{aligned}$$

como $\mu(E) = \int\limits_E \mu(dx)$

$$= \exp\{\int_E (1-e^{-f(x)})\mu(dx)\}$$

Proposición 3.3. *Sea* $(N_t)_{t\geq 0}$ *un proceso de Poisson de intensidad* 1 *y*

$$M(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_B(s)dN_s, \quad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

$M(B)$ representa el número de saltos de N que caen en B. Y además

$$M(B \cap [0,t]) = \int_0^t \mathbf{1}_B(s) dN_s$$

entonces M es medida aleatoria de Poisson en $(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$ y μ es la medida de Lebesgue.

Demostración. Sea $h(s) = q\mathbf{1}_B(s)$, $q \in \mathbb{R}^+$ y $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ fijos . Por la fórmula exponencial de la proposición 2.3.

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\int_0^t h(s) dN_s\right)\right] = \exp\left(-\int_0^t \left(1 - e^{-h(s)}\right) ds\right)$$

entonces,

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-q\int_0^t \mathbf{1}_B(s) dN_s\right)\right] = \exp\left(-\int_0^t \left(1 - e^{-q\mathbf{1}_B(s)}\right) ds\right)$$

en consecuencia tenemos que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\exp(-qM(B \cap [0,t]))] &= \exp\left(-\int_{B\cap[0,t]} \left(1 - e^{-q}\right) ds\right) \\ &= \exp(-(1-e^{-q})\mu(B \cap [0,t]))\end{aligned}$$

Dado que $1 > e^{-qM(B\cap[0,t])}$, haciendo tender t a ∞, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue obtenemos que

$$\mathbb{E}[\exp(-qM(B))] = \exp(-(1-e^{-q})\mu(B))$$

la parte derecha de la última igualdad es la transformada de Laplace de la distribución Poisson de parámetro $\mu(B)$ de lo cual podemos concluir que $M(B)$ se distribuye Poisson de parámetro $\mu(B)$. Ahora mostraremos que si $B \cap B' = \emptyset$ entonces $M(B)$ es independiente de $M(B')$. Sean $q, q' \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$h(s) = q\mathbf{1}_B(s)$$

y

$$h'(s) = q'\mathbf{1}_{B'}(s)$$

Sean M_t y M_t' tales que

$$M_t = \exp\left\{-\int_0^t h(s) dN_s + \int_0^t \left(1 - e^{-h(s)}\right) ds\right\}$$

y

$$M'_t = \exp\left\{-\int_0^t h'(s)dN_s + \int_0^t \left(1 - e^{-h'(s)}\right) ds\right\}$$

M_t y M'_t son martingalas de variación acotada y no saltan simultaneamente. Usando el resultado del apéndice el cual dice que el producto de dos martingalas acotadas es martingala, tenemos enseguida que $(M_tM'_t)$ es martingala y como $(M_0M'_0) = 1$ entonces $\mathbb{E}[M_tM'_t] = 1$.

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\exp\left\{-\int_0^t (h(s) + h'(s))dN_s + \int_0^t \left(1 - e^{-h(s)}\right) ds\right. \\
& \left. + \int_0^t \left(1 - e^{-h'(s)}\right) ds\right\} \\
= \; & \mathbb{E}[\exp(-qM(B \cap [0,t]) - q'M(B' \cap [0,t]) \\
& +(1 - e^{-q})\mu(B \cap [0,t]) + (1 - e^{-q'})\mu(B' \cap [0,t]))]
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[\exp(-qM(B \cap [0,t]) - q'M(B' \cap [0,t])] \\
= \; & \exp(-(1 - e^{-q})\mu(B \cap [0,t])) \exp(-(1 - e^{-q'})\mu(B' \cap [0,t])) \\
= \; & \mathbb{E}[\exp(-qM(B \cap [0,t]))]\mathbb{E}[\exp(-q'M(B' \cap [0,t]))]
\end{aligned}$$

de ahí que concluimos que $M(B)$ y $M(B')$ son independientes. Ya que si X y Y son variables aleatorias independientes y $\mathcal{L}$ su transformada de Laplace.

$$\mathcal{L}(X, Y)(a, b) = \mathcal{L}(X)(a)\mathcal{L}(Y)(b).$$

□

Ahora veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. *Sea $M(B)$ una medida aleatoria de Poisson con medida de intensidad $\mu(dx) = \frac{dx}{x^2}$, es decir,*

$$\mu(B) = \int_B \frac{dx}{x^2}, \qquad B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}$$

Describe a $M(B)$.

Solución. Sea $\epsilon \geq 0$ entonces

$$\mu([\epsilon,\infty)) = \int_\epsilon^\infty \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{\epsilon} < \infty$$

Pero si ϵ tiende a 0, $\mu([\epsilon,\infty))$ diverge, entonces $\mu([0,\infty)) = \infty$. Como M es medida aleatoria de Poisson entonces $M([0,\infty)) = \infty$ c.s. por definición y teníamos que en $[\epsilon,\infty)$ hay un número finito de átomos, por lo cual concluimos que en 0 se acumulan una infinidad de átomos. □

3.2 El proceso de Poisson puntual.

Sea $(E,\mathcal{E},n)$ un espacio de medida σ-finita.

Definición 3.2. Una medida aleatoria de Poisson sobre $\mathbb{R}^+ \times E$ con medida de intensidad $dt \times n(de)$ se llama proceso de Poisson puntual sobre E con medida característica n. Es decir, si N es un proceso de Poisson puntual implica que, para $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \otimes \mathcal{E}$, $N(B)$ se distribuye Poisson parámetro $\iint_B dtn(de)$ y si $B_1, B_2, \ldots, B_n, B_i \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \otimes \mathcal{E}$, son disjuntos, entonces $(N(B_i))_{i=1}^n$ son independientes.

Sea $t \geq 0$. Denotemos por N_t al elemento de $M_p(E)$ tal que $N_t(A) = N((0,t] \times A)$, $A \in \mathcal{E}$. Si $n(A) < \infty$, entonces $(N_t(A))_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson con parámetro $n(A)$ pues

$$(N_t(A) - N_s(A)) = N((s,t] \times A)$$

es independiendiente de $(N_u(A))_{u\geq s}$, ya que los conjuntos $(s,t] \times A$ y $(0,u] \times A$ son disjuntos si $u \leq t$. En el ejemplo del bosque Poisson, este se puede ver como un proceso de Poisson puntual tomando $(E,\mathcal{E},\mu)$ igual a $(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^+}, \lambda)$ donde λ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$.
Observemos tambien que para $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{E}$, disjuntos, el proceso $(N_t(A_1), (N_t(A_2), \ldots, (N_t(A_k))_{t\geq 0}$ es un proceso de Poisson con valores en $\mathbb{R}^k$, y parámetro $(n(A_1), n(A_2), \ldots, n(A_k))$.

3.3 Coloración de las medidas aleatorias de Poisson.

Las proposiciones 1.3 y 1.4 de la sección 1.1.3 tienen una inmediata y sorpresiva consecuencia para las medidas aleatorias de Poisson. Sea M una medida aleatoria de Poisson, sobre $(E, \mathcal{E}, \mu)$ espacio de medida σ-finita, de medida de intensidad μ. Sea $A \in \mathcal{E}$ entonces si $M(A) = k$, y consideramos el experimento consistente en colorear los k eventos en A de manera aleatoria de verde o rojo, donde los colores de eventos distintos son independientes, y las probabilidades de que sean pintadas de rojo o de verdes son p y $1-p$ respectivamente. Sean $M_r(A)$ y $M_g(A)$ el número de puntos rojos y puntos verdes en A respectivamente. Entonces $M(A)$ se distribuye $\mathcal{P}(\mu(A))$ y, dado $M(A) = k$, la distribución condicional de $M_r(A)$ es $\mathcal{B}(M(A), p)$. Entonces $M_r(A)$ y $M_g(A) = M(A) - M_r(A)$ son independientes y se distribuyen $\mathcal{P}(p\mu(A))$ y $\mathcal{P}((1-p)\mu(A))$. Además si $(A_i)_{i=1}^n$ son disjuntos en $\mathcal{E}$, la terna de variables aleatorias $(M(A_i), M_r(A_i), M_g(A_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, son independientes y en consecuencia las variables aleatorias $M_r(A_j)$ y $M_g(A_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, son independientes. De esto se sigue que el número de eventos rojos y verdes son medidas aleatorias de Poisson independientes con medidas de intensidad $p\mu$ y $(1-p)\mu$ respectivamente. Por inducción sobre k el resultados se extiende para colorear con un número finito de k colores, lo cual abre paso a nuestro siguiente teorema.

Teorema 3.2 (Teorema de coloración). *Sea M una medida aleatoria de Poisson, sobre $(E, \mathcal{E}, \mu)$ espacio de medida σ-finita, de medida de intensidad μ. Dado $M(B) = k$, $B \in \mathcal{E}$, supongamos que dichos k eventos son coloreados de manera aleatoria con n colores distintos, la probabilidad de que un evento reciba el i-ésimo color es p_i, $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$ y los colores son independientes uno de los otros. Sea $N_i(B))$ el número de eventos de B con el i-ésimo color. Entonces $(N_i(B))_{i=1}^n$ son medidas aleatorias de Poisson independientes con medidas de intensidad $\mu_i(B) = p_i\mu(B)$.*

Demostración. Es claro que la suma de las p_i es igual a uno, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, ya que un evento sólo puede ser coloreado de un sólo color. El que un evento sea coloreado del i-ésimo color tiene probabilidad p_i. Este experimento ocurre $M(B) = k$ veces; y como ninguno de los k experimentos afecta al resto de los $k-1$ expereimentos, ya que son independientes. Entonces

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[M_1(B) = r_1, M_2(B) = r_2, \ldots, M_{n-1}(B) = r_{n-1} | M(B) = k] \\ = & \frac{r!}{r_1! r_2! \ldots r_n!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n} \end{aligned}$$

donde $M(B) = \sum_{i=1}^{n} M_i(B)$ y $k = \sum_{i=1}^{n} r_i$. Ahora queremos ver si las $(M_i)_{i=1}^n$ son variables aleatorias de Poisson independientes de parámetro $p_i\mu(B)$.

Calculamos

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{P}[M_1(B) = r_1, M_2(B) = r_2, \ldots, M_n(B) = r_n] \\
= \; & \mathbb{P}[M_1(B) = r_1, M_2(B) = r_2, \ldots, M(B) - \sum_{i=1}^{n-1} M_i(B) = r_n] \\
= \; & \mathbb{P}[M_1(B) = r_1, M_2(B) = r_2, \ldots, M(B) = \sum_{i=1}^{n} r_i = k] \\
= \; & \mathbb{P}[M(B) = k]\mathbb{P}[M_1(B) = r_1, M_2(B) = r_2, \ldots, M_{n-1}(B) = r_{n-1} | M(B) = k] \\
= \; & \frac{e^{-\mu(B)}(\mu(B))^k}{k!} \frac{k!}{r_1! r_2! \ldots r_n!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n} = \frac{e^{-\mu(B)(\sum_{i=1}^{n} p_i)} (\mu(B))^{\sum_{i=1}^{n} r_i}}{r_1! r_2! \ldots r_n!} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_n^{r_n} \\
= \; & \frac{e^{-\mu(B)p_1}(\mu(B)p_1)^{r_1}}{r_1!} \frac{e^{-\mu(B)p_2}(\mu(B)p_2)^{r_2}}{r_2!} \ldots \frac{e^{-\mu(B)p_n}(\mu(B)p_n)^{r_n}}{r_n!} \\
= \; & \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\mu(B)p_i}(\mu(B)p_i)^{r_i}}{r_i!}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto las M_i's se distribuyen Poisson parámetro $p_i\mu(B)$ y son independientes entre ellas. Para ver si las M_i's cumplen la propiedad 2 de medidas aleatorias de Poisson utilizaremos un resultado, el cual no será probado debido a que sobrepasa el nivel de este trabajo y dice:
Sean N, M dos procesos de Poisson respecto a la misma filtración entonces N y M son independientes si y sólo si N y M no tienen tiempos de saltos en común.
Sean $B, B' \in \mathcal{E}$, tales que $B \cap B' = \emptyset$. Y sean $M_{i_t}^{B}$ =número de puntos del i-ésimo color en B al tiempo t, y $M_{i_t}^{B'}$ =número de puntos del i-ésimo color en B' al tiempo t. Es claro que $(M_{i_t}^{B})$ y $(M_{i_t}^{B'})$ son procesos de Poisson, como $B \cap B' = \emptyset$, saltan en distintos tiempos y entonces son independientes. Por lo tanto $(M_i(B_j))_{j\in\mathbb{N}}$ son independientes si $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ son disjuntos. Y en consecuencia $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ son medidas aleatorias de Poisson, independientes, con medidas de intensidad $p_i\mu(B)$ respectivamente. $\square$

Epílogo

Para concluir este trabajo vale la pena observar que dentro de la teoría de los procesos estocásticos hay dos procesos que son fundamentales, y ocurren una y otra vez, a veces de manera sorpresiva. Uno es el movimiento browniano ó proceso de Wiener, el cual ha sido tema de muchos libros y publicaciones. El otro, el proceso de Poisson, del cual su estudio parece tener menos importancia. La mayoría de los libros mencionan a este último pero de manera escueta prefiriendo profundizar más en procesos markovianos o procesos puntuales más generales.
Esta observación es de mal juicio y es concecuencia de la falta de percepción de la verdadera importancia del proceso de Poisson. Esto es provocado en parte a la restricción en una dimensión, pero la teoría se enriquece mucho más a la hora de hablar en un contexto más general, como cuando hablamos de una medida aleatoria de Poisson o de un proceso de Poisson compuesto ó puntual.
Un resultado obtenido de esta tesis es la revaluación de la importancia del proceso de Poisson, así como la exposición de su belleza, riqueza teórica y fácilidad de aplicación en una más dimensiones. Otro resultado a considerar es la compilación de resultados que no se encuentran juntos en otra publicación, así como el darles una misma notación.

Apéndice A

Filtraciones.

Definición A.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad. Una filtración es una familia $(\mathcal{F}_t)_t \geq 0$ de sub-σ-álgebras de $\mathcal{F}$, tales que $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ siempre y cuando $s \leq t$.

Al sistema $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ se le llama espacio de probabilidad filtrado. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, la filtración canónica de dicho proceso está dada por $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s : s \leq t)$.

Definición A.2. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocático definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, diremos que el proceso es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si para toda $t \geq 0$ se tiene que la variable aleatoria es $\mathcal{F}_t$-medible.

Definición A.3. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado y sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocático definido en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, diremos que el proceso es progresivamente medible si para toda $t \in \mathbb{R}$:

$$(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega \longrightarrow X_t(\omega)$$

es $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$-medible.

Claramente todo proceso es adaptado a su filtración canónica y todo proceso progresivamente medible es adaptado.

Teorema A.1. *Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso estocástico con valores en un espacio métrico $(E, \mathcal{B}_E)$, adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y continuo por la derecha o por la izquierda , entonces $(X_t)_{t\geq 0}$ es progresivamente medible.*

Demostración. Solamente se demostrará el caso en el que el proceso es continuo por la derecha, el otro caso es análogo. Para ello, basta ver que para cada $A \in \mathcal{B}_E$.

$$\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : X_s(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t.$$

Para cada $n \geq 1$, $k = \{0,1,\ldots,2^{n-1}\}$ y $0 \leq s \leq t$, definamos al proceso

$$X_s^n(\omega) = \begin{cases} X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega), & \text{si } \frac{kt}{2^n} < s \leq \frac{(k+1)t}{2^n} \\ X_0, & \text{si } s = 0. \end{cases}$$

Debido al continuidad por la derecha tenemos que $\lim_{n\to\infty} X_s^n(\omega) = X_s(\omega)$ para toda $(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$. Por lo tanto basta mostrar que $X_s^n(\omega)$ es $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$-medible para obtener el resultado. Al conjunto $\{(s,\omega) \in [0,t] \times \Omega : X_s^n(\omega) \in A\}$ se le puede ver como

$$\bigcup_{k=1}^{2^n} \left\{ \left(\frac{kt}{2^n}, \frac{(k+1)t}{2^n} \right] \times \left\{ X_{\frac{(k+1)t}{2^n}}(\omega) \in A \right\} \right\} \cup \{\{0\} \times \{X_0(\omega) \in A\}\}$$

el cual claramente pertenece a $\mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$. $\square$

Apéndice B

Tiempos de paro.

Definición B.1. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad filtrado. Una función $\tau : \Omega \to [0, \infty)$ se llama tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si el conjunto $(\tau \leq t)$ pertenece a $\mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$.

Proposición B.1. *Si la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha, entonces τ es un tiempo de paro si y sólo si $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Sea $t \geq 0$ fijo, por ser τ tiempo de paro

$$(\tau \leq s) \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \text{ para toda } s < t,$$

entonces

$$(\tau < t) = \bigcup_{s<t} (\tau \leq s) \in \mathcal{F}_t \text{ para toda } t \geq 0.$$

$\Leftarrow$) Como la filtración es continua por la derecha y como $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$, se tiene que

$$(\tau < t) = \bigcap_{s>t} (\tau \leq s) \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t.$$

□

Cabe señalar que en la primera parte de la demostración, nunca se utilizó que la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ es continua por la derecha, por lo cual, se puede afirmar que si τ es un tiempo de paro entonces $(\tau < t) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$.

Proposición B.2. *Sea τ un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y $X_t = \mathbf{1}_{[0,\tau]}(t)$, entonces el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ resulta ser un proceso adaptado a dicha filtración.*

Demostración. Sea $t \geq 0$ fija, entonces

$$X_t(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \leq \tau(\omega); \\ 0, & \text{si } t > \tau(\omega), \end{cases}$$

por lo tanto,

$$(X_t \leq u) = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } u < 0; \\ (\tau < t), & \text{si } u \in [0,1); \\ \Omega, & \text{si } u \geq 1, \end{cases}$$

pero estos tres conjuntos están en $\mathcal{F}_t$, ya que τ es tiempo de paro, en conclusión el conjunto $(X_t \leq r) \in \mathcal{F}_t$ para toda $t \geq 0$. □

Apéndice C

Martingalas con tiempo continuo.

Definición C.1. Sea $(X_t)_{t\geq 0}$ un proceso adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ tal que X_t es integrable para $t \geq 0$. Decimos que es submartingala si para cada $0 \leq s < t < \infty$,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s,$$

y sobre martingala si para cada $0 \leq s < t < \infty$,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s.$$

Decimos que el proceso $(X_t)_{t\geq 0}$ es martingala si es submartingala y sobremartingala, es decir si,

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s.$$

Proposición C.1. *Sea $(M_t)_{t\geq 0}$ una $\mathcal{F}_t$-martingala acotada y càdlàg, y sea $(M'_t)_{t\geq 0}$ una $\mathcal{F}_t$-martingala de variación acotada y càdlàg; ambas martingalas en L_2. Si M y M' no tienen saltos en común entonces MM' es martingala.*

Demostración. Sea Π una partición de $[s,t) \subset \mathbb{R}^+$ tal que, $s = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = t$ y fijemonos en lo siguiente:

$$\begin{aligned} M_t M'_t - M_s M'_s &= \sum_{i=0}^{k-1} M_{t_i}(M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i}) + \sum_{i=0}^{k-1} M'_{t_i}(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1}(M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i}) \end{aligned}$$

entonces

$$\mathbb{E}[M_tM'_t - M_sM'_s] = 0 + 0 + \mathbb{E}[\sum_{i=0}^{k-1}(M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})]$$

ya que M y M' son martingalas. Sea c la cota de M y k la variación total de M' entonces

$$\begin{aligned} |\sum_{i=0}^{k-1}(M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})| &\leq c|\sum_{i=0}^{k-1}(M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i})| \\ &\leq ck < \infty. \end{aligned}$$

Esto implica que el término del extremo izquierdo de esta última desigualdad converge a cero si el tamaño de Π tiende a cero, debido a que no tienen saltos en común. Finalmente por el teorema de convergencia dominada tenemos que

$$\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{k-1}(M'_{t_{i+1}} - M'_{t_i})(M_{t_{i+1}} - M_{t_i})] \longrightarrow 0$$

Por lo tanto el producto, MM', es martingala. □

Proposición C.2. *Sea $(M_t)_{t\geq 0}$ una $\mathcal{F}_t$-martingala de variación acotada y càdlàg, y sea $(M'_t)_{t\geq 0}$ una $\mathcal{F}_t$-martingala de variación acotada y càdlàg; ambas martingalas en L_2. Si M y M' no tienen saltos en común entonces MM' es martingala.*

Demostración. En este caso tenemos dos martingalas de variación acotada, entonces tomamos a τ_n un tiempo de paro con respecto a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ y nos fijamos en $M_t^{\tau_n}$ que es la martingala detenida al tiempo en que $M_t = n$, la cual acotamos por su supremo y por la proposición anterior obtenemos lo deseado. □

Apéndice D

La integral de Lebesgue-Stieltjes.

Definición D.1. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente. Sea I un intervalo real cualquiera, y sea $\theta : I \to \mathbb{R}$ un función escalonada. Decimos que θ es α-sumable si el soporte de θ (conjunto de puntos donde se anula), es α-finito.

Sea $A_\alpha(\theta) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \lambda(I_j)$ donde c_j son reales cualesquiera, I_j son intervalos reales y λ denota la medida de Lebesgue.

Definición D.2. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona creciente, y sea $f : I \to \mathbb{R}$ con la propiedad de que existe una sucesión $\theta_1, \theta_2, \ldots$ de funciones escalonadas α-medibles definidas en I tales que $L_\alpha(|f - \theta_n|) \to 0$). Entonces escribimos

$$\int_I f d\alpha = L_\alpha(f^+) - L_\alpha(f^-),$$

donde $L_\alpha(f) = inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} A_\alpha(\theta_j) \right\}$.Llamaremos a esta cantidad la integral de Lebesgue-Stieltjes de f sobre I con respecto a α.

Definición D.3. Sea $A = (A_t)_{t \geq 0}$ un proceso càdlàg. A es un proceso creciente si las trayectorias de $A : t \to A_t(\omega)$ son no decrecientes para casi toda ω. A es llamado proceso de variación finita si casi todados los caminos de A son de variación finita en cada intervalo compacto de $\mathbb{R}^+$.

Sea $A = (A_t)_{t \geq 0}$ un proceso creciente. Fijemos ω tal que $t \to A_t(\omega)$ es continuo por la derecha y no decreciente. Esta función induce una medida

$\mu_A(\omega, ds)$ en $\mathbb{R}^+$. Si f está acotada, función boreliana en $\mathbb{R}^+$, entonces

$$\int_0^t f(s)\mu_A(\omega, ds)$$

está bien definida para cada $t > 0$. Denotaremos esta integral por

$$\int_0^t f(s)dA_s(\omega).$$

Si $F_s = F(s, \omega)$ está acotada y es conjuntamente medible, podemos definir, una integral conjuntamente medible.

$$I(t, \omega) = \int_0^t F(s, \omega)dA_s(\omega).$$

para F acotada y conjuntamente medible.
Concluimos esta sección con un ejemplo.

Ejemplo D.1. *Sea N un proceso de Poisson de intensidad c. Entonces $M_t = N_t - ct$ es una martingala y un proceso de variación finita. Para un proceso H conjuntamente medible y acotado, tenemos*

$$\begin{aligned} I_t &= \int_0^t H_s dM_s = \int_0^t H_s d(N_s - cs) \\ &= \int_0^t H_s dN_s - c\int_0^t H_s ds \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} H_{T_n} \mathbf{1}_{\{t \geq T_n\}} - \int_0^t H_s ds \end{aligned}$$

donde $(T_n)_{n\geq 1}$ son los tiempos de espera del proceso de Poisson.

Apéndice E

Aproximación de una función medible por una simple medible.

Probaremos que h medible puede ser aproximada por una simple medible. Para esto fijemonos primero que si $h = \mathbf{1}_A(t)$, A boreliano. Entonces existe h_ϵ que la aproxima. Fijemonos en el álgebra $\mathcal{A} = \{\{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]\}$ donde los intervalos $(a_i, b_i]$ son ajenos dos a dos.
Entonces por el corolario 2 de [14], para todo $\epsilon > 0$ y $B \in \sigma(\mathcal{A})$ existe $A_\epsilon \in \mathcal{A}$ de medida finita en $\sigma(\mathcal{A})$, tal que $\mu(B \triangle A_\epsilon) < \epsilon$.
Sea $A \subset [s,t] \in \sigma(\mathcal{A})$ y $h = \mathbf{1}_A(t)$ entonces existe $h_\epsilon = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{(a_i,b_i](t)} + \mathbf{1}_0(t)$ tal que

$$\int_s^t |h - h_\epsilon| d\lambda < \epsilon$$

donde λ es la medida de Lebesgue, esto ya que

$$\begin{aligned}\int_s^t |h - h_\epsilon| d\lambda &= \lambda(A \triangle \{\{0\} \cup \bigcup_{i=1}^{n} (a_i, b_i]\}) \\ &< \epsilon\end{aligned}$$

por lo tanto h_ϵ converge casi dondequiera a h respecto a λ.
De igual forma si h es simple medible de la forma $h = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{A_i}$ entonces para $\epsilon > 0$ existe $h_\epsilon = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{(a_i,b_i]} + c_0 \mathbf{1}_0$ tal que h_ϵ converge casi dondequiera a

h relativo a λ la medida de Lebesgue.
Ahora como toda simple se puede aproximar por una simple medible de la forma de h entonces también se puede aproximar por una de la forma de h_ϵ y por lo anterior esta última converge en L_1 a h' medible. Entonces se afirma que existe h_{ϵ_k} subsucesión de $h_\epsilon$que converge casi dondequiera a h' respecto a la medida de Lebesgue.
Para probar que

$$\int_s^t h_{\epsilon_k} dN_u \to \int_s^t h' dN_u$$

casi seguramente con respecto a $\mathbb{P}$, primero probaremos que el conjunto de saltos de N_u fuera de $A \subset [s,t]$, con $\lambda(A) = t - s$, tiene probabilidad cero. Lo cual se reduce a encontrar

$$\mathbb{P}[\{T_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [s,t] \setminus A]$$

Donde T_i son los tiempos de los saltos del proceso, los cuales se distribuyen exponencial de parámetro c. Sea B tal que $\lambda(B) = 0$ entonces por σ-subaditividad tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\bigcup_{i=1}^{\infty}(T_i \in B)] &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[T_i \in B] \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_B ce^{-cx} dx \right) = 0 \end{aligned}$$

ya que $\lambda(B) = 0$. Como $\lambda([s,t] \setminus A) = 0$ entonces $\mathbb{P}[\{T_i\}_{i=1}^{\infty} \subset [s,t] \setminus A] = 0$. Por lo tanto

$$\int_s^t h_{\epsilon_k} dN_u \to \int_s^t h' dN_u$$

Además como

$$0 \leq \exp\left\{ - \int_s^t h_{\epsilon_k} dN_u \right\} \leq 1.$$

por el teorema de convergencia acotada para esperanza condicional (ver [3]), tenemos que

$$\lim_{\epsilon_k \to 0} \mathbb{E}\left[\exp\left\{ - \int_s^t h_{\epsilon_k} dN_u \right\} | \mathcal{F}_s \right] = \mathbb{E}\left[\exp\left\{ - \int_s^t h' dN_u \right\} | \mathcal{F}_s \right].$$

Bibliografía

[1] Patrick Billingsley, *Probability and measure*, Tercera edición, John Wiley & Sons, 1995.

[2] Ma. Emilia Caballero y Juan Carlos Pardo, *Martingalas y Tiempos de Paro*, Notas para un curso avanzado de procesos estocásticos.

[3] Ma. Emilia Caballero y Gerónimo Uribe, *Probabilidad Condicional*, Notas para un curso avanzado de procesos estocásticos.

[4] Michael Carter y Bruce van Brunt, *The Lebesgue-Stieltjes integral*, Primera edición, Springer-Verlag, 2000.

[5] J.F.C. Kingman, *Poisson Processes*, Primera edición, Oxford University Press, 1993.

[6] Juan Carlos Mejía, *Teoremas límite y el proceso de Poisson*, Tesis de licenciatura, Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM, 1995.

[7] Philip Protter, *Stochastic Integration and Differential Equations*, Primera edición, Springer-Verlag, 1990.

[8] Daniel Revuz y Marc Yor, *Continuous martingales and brownian motion*, Primera edición,Springer-Verlag,1991.

[9] Julio C. García y Juan Ruiz de Chávez, *Tiempos locales y excursiones del Movimiento Browniano*, Primera edición, Universidad Autónoma Metropolitana unidad Iztapalapa, 2002.

[10] Frederick Solomon, *Probability and Stochastic Processes*, Primera edición, Prentice-Hall, 1987.

[11] Henry C. Tuckwell, *Elementary Applications of Probability Theory*, Primera edición, Chapman and Hall Ltd., 1988.

[12] Constantin Tudor, *Procesos Estocáticos*, Segunda Edición, Sociedad Matemática Mexicana, 1997.

[13] Gerónimo Uribe Bravo, *Ley arcoseno en caminatas aleatorias, en el proceso de Poisson compuesto y en el movimiento browniano*, Tesis de licenciatura, Actuaría, Facultad de Ciencias, UNAM, 2002.

[14] Gerónimo Uribe Bravo, *σ-álgebras asociadas a variables aleatorias*, Notas para un curso de procesos estocásticos II.