

00324

6



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

El Teorema del índice de Morse para Lagrangianos Convexos

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
M A T E M Á T I C O
P R E S E N T A:

Miguel Ángel Chávez García



Director de Tesis:

Dr. Héctor Francisco Sánchez Morgado





Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION DISCONTINUA



DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"El Teorema del índice de Morse para Lagrangianos Convexos"

realizado por Miguel Ángel Chávez García

con número de cuenta 9119109-0, quien cubrió los créditos de la carrera de:
 Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis
 Propietario

Dr. Héctor Fidencio Sánchez Morgado

F. Sánchez M.

Propietario

Dr. Eugenio Garnica Vigil

E. Garnica V.

Propietario

Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

O. Palmas V.

Suplente

Dr. Renato Gabriel Iturriaga Acevedo

Renato Iturriaga

Suplente

Dr. Santiago López de Medrano Sánchez

Santiago López de Medrano

Consejo Departamental de Matemáticas



J. C.

FACULTAD DE CIENCIAS

M. en C. José Antonio Ortega

DE MATEMÁTICAS

1. a

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

AGRADECIMIENTOS

Esta tesis es el resultado del esfuerzo, trabajo y dedicación de un gran número de personas que en el transcurso de mi vida me han apoyado, a ellas les escribo unas breves palabras de agradecimiento.

Quiero agradecer:

A mis padres, todo el amor y cariño que nos han dado a mí y a mis hermanas. Quiero reconocer y admirar el esfuerzo, la lucha y el coraje que tienen para que podamos salir adelante.

A Dios, por darle a mi familia una nueva oportunidad.

A Katito, Liz y Chila porque con sus risas, sus ocurrencias y su alegría hacen que cada día sea distinto.

Al resto de mi familia del D.F. y de Oaxaca por las atenciones que han tenido con nosotros.

Al Dr. Héctor Sánchez Morgado por todo su apoyo y entusiasmo, así como por las enseñanzas que de él he recibido dentro y fuera de las aulas.

Al Dr. Oscar Palmas por su paciencia y por las observaciones que dio para la realización de esta tesis.

Al Dr. Eugenio Garnica por sus comentarios y disposición para revisar el presente trabajo.

Al Dr. Renato Iturriaga por las correcciones y sugerencias que hicieron posible que esta tesis sea más clara. De todos ustedes he aprendido y espero seguir aprendiendo.

A mis colegas y amigos de la Facultad de Ciencias: Juan Miguel Bautista Granados, Tonatihu Valdez Hernández, Alejandro Suarez Bautista, Narciso Alejandro Hernández Vargas, Ana Helice Rodrigo Espinoza, Jose Luis Cuacuamoxtla Alcaide y Héctor Joe Rosas Toledo porque hemos compartido ideas y sueños, porque cuando menos lo pensaba estuvieron conmigo en las buenas y en las malas apoyandome incondicionalmente. Gracias amigos.

También a los hermanos Jorge Alberto y Eduardo Ramírez, Moises Luna y Alejandro Martínez.

A mis profesores, ya que debo gran parte de mi formación como matemático a cada uno de ellos, en especial a : M. en C. José Antonio Gómez Ortega, Dr. León Kushner Schnur, Dr. Oscar Palmas, Dr. Héctor Sánchez, Dr Eugenio Garnica y M. Areli Carrillo; así como a dos grandes amigos: Eduardo Arellano Arjona y Gabriel Ocampo. Todos ustedes me han ayudado para que siga en este medio.

Al profesor Alberto Rosas, por las atenciones y apoyo que tuvo durante mi servicio social en la Facultad de Química.

A los compañeros de la Facultad de Química: Beatriz Amanda Victoria Ochoa Robledo, Mayell Soto Mejía, Christian Velasco, Rogelio Ibarra, Aracne Huerta, Omar Escalante, Liliana Torres, Lizeth Meza, Isaura Hernández, por los grandes detalles que han tenido y por la ayuda recibida durante mi estancia en esa Facultad.

A meus colegas da turma do português: Abril Acosta, Isabel González, Mario Ruiz e também pra minha professora Erendira Camarena.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En donde quiera que estén a Maria Esther Fonseca, Ricardo Luna y Marina Mora Martínez. No los he olvidado.

A Jaime Carmona Martínez y Joel Carrasco García, es un orgullo que sean mis amigos... Gracias.

A Mario Hernández por su amistad y a Ernesto Sánchez Pacheco por toda la confianza y ayuda que me dio en el CCH

A los hermanos Jesús y Eugenio Plata, por los buenos tiempos.

A la familia Guerrero, y en especial a la maestra Rosalba por confiar en mí. Mil gracias.

A mis compañeros del cubículo externo: Javier Santillán por su amistad y confianza, así como a José Ramírez por las sugerencias que me dio.

Una vez más a mi asesor Héctor Sánchez, por dedicarme gran parte de su tiempo, a él le debo mucho de mi formación. Gracias Héctor.

Finalmente agradezco a la Máxima Casa de Estudios: la UNAM, pues desde el bachillerato me ha formado, a la Facultad de Ciencias y al Instituto de Matemáticas por todas las facilidades que me otorgó para elaboración de mi tesis.

Miguel Ángel.

El Teorema del índice de Morse para Lagrangianos Convexos

Miguel Ángel Chávez García.

Facultad de Ciencias - Instituto de Matemáticas, UNAM

Ciudad Universitaria C. P. 04510

Ciudad de México, México.

Agosto de 2003.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Índice General

Introducción	i
Capítulo 1. Los espacios de trayectorias	1
1. Funciones absolutamente continuas	1
2. Variedades de Banach y de Hilbert	5
3. Las variedades de curvas absolutamente continuas	7
4. Las variedades de curvas C^2	9
Capítulo 2. Cálculo de variaciones	11
1. Lagrangianos y la primera variación	11
2. Ejemplos	17
3. Minimizantes locales y el Teorema de Weierstrass	19
Capítulo 3. El índice de Morse	27
1. La segunda variación	27
2. Campos de Jacobi y puntos conjugados	30
3. La invariancia del índice de Morse	32
Capítulo 4. El Teorema del índice de Morse	37
1. Campos diferenciables por tramos	37
2. El Teorema del índice de Morse	40
3. Aplicaciones del Teorema del índice	44
Bibliografía	45

Introducción

Leonhard Euler en su obra "*Métodos de máximos y mínimos*" da a conocer un método para hallar curvas que gocen de una propiedad de máximo o mínimo. El problema clásico de este tipo es el de hallar una curva plana que encierre una área máxima entre todas las curvas de la misma longitud, es decir entre curvas isoperimétricas. El "*Métodos de máximos y mínimos*" es un método para resolver estos problemas isoperimétricos y también otros más generales.

Si bien este tipo de problemas data desde la época de los griegos, es Euler quien crea en su obra toda una nueva disciplina a la que él mismo en 1756 en una sesión de la Academia Real de Ciencias de Berlín da el nombre de *Cálculo de Variaciones*, tributando con ello un reconocimiento a J. L. Lagrange que acababa de crear el revolucionario concepto de *variación de una función*. Este concepto condujo a Lagrange a una notable simplificación y ampliación del método original de Euler. Por otra parte no se concibe fácilmente la creación del concepto lagrangiano de variación sin un trabajo clarificador previo como la obra de Euler.

El mérito de la obra consiste en que plantea bien toda una nueva clase de problemas muy difíciles y que da un método general y sistemático para resolverlos. Que esos problemas eran difíciles lo muestra la historia, pues después de los primeros ejemplos concretos por los hermanos Bernoulli a finales del siglo *XVII*, quienes al mismo tiempo que Newton, Leibnitz y Huygens dan las primeras soluciones, los nuevos problemas permanecen mucho tiempo sin resolver; y aún más, los matemáticos que dan las primeras soluciones algo más generales: J. Hermann (1729), B. Taylor (1685-1731) y el mismo Euler (1732), dan soluciones equivocadas.

Con la aportación que después hace Lagrange, se percibe la evolución y aplicación del recién creado cálculo infinitesimal, lo cual tiene un inmenso valor para la física teórica de los medios continuos. Principalmente porque muchas leyes físicas se enuncian en forma de principios variacionales. Por ejemplo, que la luz cuando se transmite por un medio variable, sigue la trayectoria más rápida (no necesariamente la más corta), como enunció y aplicó correctamente Fermat (1662), en un trabajo que se integra en los orígenes del cálculo de variaciones.

Un paso hacia la formulación de la mecánica Lagrangiana se da en el primer aditamento de la obra de Euler (ver [Eu]), pues constituye el primer tratado de elasticidad y en él Euler descubre la carga crítica que hace pandear una columna, lo que constituye el primer caso de un autovalor de un operador diferencial de cuarto orden no lineal. Este resultado, la naturaleza misma del cálculo de variaciones, el principio de mínima acción y el concepto de variación introducido por Lagrange que generaliza, aplicándolo a funciones, así como el concepto de Leibnitz de diferencial (ver [Ar]), son todos ellos los primeros antecedentes, anteriores incluso a la resolución

de las ecuaciones en derivadas parciales, del moderno análisis funcional, aunque sin el soporte de los espacios topológicos de reciente creación.

El desarrollo del cálculo de variaciones, forma hoy parte de las técnicas matemáticas que se emplean en la topología diferencial, geometría diferencial y en la resolución de numerosos y variados problemas, por ejemplo de geometría diferencial, los de optimización y control desistemas regidos por ecuaciones en derivadas parciales, y sobre todo hasta desempeñar un papel muy relevante en el tratamiento de la mecánica analítica.

En la geometría, históricamente la noción de curva geodésica sobre una superficie se remonta a Johann Bernoulli, quien la definió como la que proporciona la longitud mínima de una curva sobre la superficie entre dos puntos cualesquiera. Su teoría local fue entendida correctamente después del trabajo de los geómetras del siglo *XIX*; primero acerca de superficies como: K. F. Gauss, Jacobi, O. Bonnet, y más tarde acerca de variedades Riemannianas por geómetras como: B. Riemann, Christoffel, Levi-Civita.

Pero dos problemas globales acerca de geodésicas sobre una variedad Riemanniana M de dimensión n fueron formulados de la siguiente manera

1. ¿Tiene un arco geodésico con extremos p y q realmente la longitud mínima entre todas las curvas rectificables que unen a p con q ? (es decir es una geodésica minimal).
2. ¿Cuántos arcos geodésicos que unen estos puntos existen?

Localmente estos problemas tienen una respuesta completa, cada punto de M tiene una vecindad abierta V , tal que para cualesquiera dos puntos distintos p, q en V , hay exactamente un arco geodésico contenido en V , el cual une a p con q , y es la única geodésica minimal que une a estos dos puntos.

Hasta 1920 los únicos resultados generales sobre el problema global provinieron de la investigaciones de Jacobi acerca del primer problema. Él había mostrado que sobre una curva geodésica γ con origen en x_0 , existe en general una sucesión de puntos x_1, x_2, \dots , los cuales son conjugados a x_0 a lo largo de la curva γ de tal forma que cualquier arco de γ que no contenga ninguno de estos puntos conjugados, es una geodésica minimal; pero si contiene al menos uno de estos puntos conjugados, entonces en toda vecindad de γ existen arcos geodésicos suaves por partes que unen a los puntos p y q de γ , la longitud de los cuales es estrictamente menor que la longitud del arco de γ entre p y q .

En una serie de artículos y textos comenzados en 1928, Marston Morse atacó los problemas anteriores usando una combinación muy ingeniosa de geometría diferencial y topología algebraica aplicada a espacios de funciones apropiados, lo que él llamó: "*Cálculo variacional a lo extenso*". Él consideró el conjunto $\Omega(M; p, q)$ de trayectorias suaves por tramos en M , que tienen sus extremos fijos p, q definidos como funciones continuas (que no necesariamente son inyectivas); $\omega: [0, T] \rightarrow M$ tal que $\omega(0) = p, \omega(T) = q$ y hay un número finito de puntos t_0, t_1, \dots, t_n del intervalo $[0, 1]$ tal que $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$ es una función C^∞ . Si l_i denota la longitud del segmento $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$, entonces $L(\omega) = \sum_i l_i$ es la longitud de ω , y una funcional de ω en $\Omega(M; p, q)$.

Un arco minimal de p a q debe ser una trayectoria ω para la cual $L(\omega)$ es un mínimo en $\Omega(M; p, q)$ y un arco geodésico debe ser un punto crítico para la funcional

L. Esto en primer lugar no tenía significado pues $\Omega(M; p, q)$ no tiene una estructura de variedad diferenciable.

La teoría de Morse consiste en mostrarnos que es posible sustituir $\Omega(M; p, q)$ por variedades que sean diferenciables en donde los resultados sobre puntos críticos pueden ser aplicados. Casi todas las ideas introducidas por Morse en este proceso fueron nuevas, incluyendo su investigación acerca de puntos críticos de una función definida sobre una variedad. Aplicó su método no sólo a geodésicas sino también a extremales de problemas más generales que se presentan en el cálculo de variaciones (en una variable).

Sus demostraciones con el paso del tiempo han sido gradualmente simplificadas; como lo presenta John Milnor en su libro "*Morse Theory*"; y aplicadas en diversos campos como los Sistemas Dinámicos. Para más referencias se puede consultar [Di].

La curvatura Riemanniana de una variedad está relacionada con el comportamiento de sus geodésicas, en particular con las geodésicas que pasan por algún punto en alguna dirección dada; es decir punto inicial y dirección inicial. Al investigar la divergencia de las geodésicas, se linealiza la ecuación diferencial que las define. La ecuación diferencial lineal de segundo orden que se obtiene es llamada *ecuación de Jacobi*, la cual se escribe en términos de la derivada covariante y el tensor de curvatura; es decir, una primera relación entre geodésicas y curvatura $K(p, \gamma)$ es que la curvatura indica qué tan rápido se alejan las geodésicas en p que son tangentes a γ . Para la formalización de esta velocidad de alejamiento de las geodésicas, se introducen los *campos de Jacobi*, los cuales son campos de vectores a lo largo de geodésicas, definidos por medio de una ecuación diferencial que aparece en el estudio de la aplicación exponencial. Además los campos de Jacobi permiten obtener una caracterización simple de las singularidades de la aplicación exponencial, a tales singularidades se les llama *puntos conjugados*.

Las geodésicas se pueden caracterizar como soluciones de un problema variacional, para ello se usan conceptos y técnicas del cálculo variacional, en donde se hace el cálculo de la fórmula de la segunda variación de la energía de una geodésica. Los conceptos anteriores sirven para demostrar *El Teorema del índice de Morse*, el cual relaciona el número de puntos conjugados en un segmento de geodésica contados con su multiplicidad; al índice de cierta forma cuadrática definida a partir de la fórmula de la segunda variación. El teorema del índice es una generalización de un resultado clásico de Jacobi, el cual afirma que un segmento geodésico minimiza la longitud de arco relativamente a las curvas vecinas con las mismas extremidades si y solo si tal segmento no tiene puntos conjugados.

La discusión de este y otros temas relacionados se explica ampliamente en [Mi], [dC] y [Ar].

Un hecho de suma importancia para la existencia de puntos conjugados sobre una curva en una variedad, es que esta última sea de curvatura mayor o igual que cero. Para una demostración de este hecho se puede ver en [dC].

Los argumentos anteriores tienen una generalización a Sistemas Lagrangianos. Así, a lo largo de esta tesis vamos a generalizar la noción y los resultados que se tienen en el caso de una métrica Riemanniana.

En los últimos años varios teoremas que habian sido demostrados para flujos geodésicos se han estado probando para el caso más general de flujos Lagrangianos. Este es el resultado principal de esta tesis así, el objetivo central de este trabajo es

presentar una prueba del Teorema del índice de Morse para Lagrangianos Convexos, siguiendo la prueba que para geodésicas presenta J. Milnor en su libro *Morse Theory*. Las graficas se elaboraron con *metagraf* y la dirección electronica es:
<http://w3.mccanica.upm.es/metapost/metagraf.php> .

*Miguel Ángel Chávez García.
Ciudad Universitaria.
Agosto de 2003.*

CAPÍTULO 1

Los espacios de trayectorias

En este capítulo se introducen los espacios de curvas que se utilizan en el Cálculo de Variaciones. Dado que la idea es presentar al Cálculo de Variaciones como Cálculo Diferencial infinito dimensional, los espacios de curvas serán variedades modeladas sobre espacios de Hilbert y de Banach. Los espacios apropiados son, el espacio de Hilbert $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ de curvas absolutamente continuas, y el espacio de Banach $C^r(I, \mathbb{R}^n)$ de curvas de clase C^r , en un intervalo cerrado I .

1. Funciones absolutamente continuas

DEFINICIÓN 1.1. Una función $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}^n$; donde $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}^n$; es llamada absolutamente continua si cualquiera (y así ambas) de las siguientes dos condiciones son satisfechas

- Dada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si

$$0 \leq t_0 < \dots < t_{2k+1} \leq 1 \quad \text{y} \quad \sum_{i=0}^k |t_{2i+1} - t_{2i}| < \delta$$

entonces

$$\sum_{i=0}^k \|\omega(t_{2i+1}) - \omega(t_{2i})\| < \varepsilon.$$

- Existe una $g \in L^1(I, \mathbb{R}^n)$; es decir g es una función medible de I en \mathbb{R}^n y

$$\int_0^1 \|g(t)\| dt < \infty;$$

tal que

$$\omega(t) = \omega(0) + \int_0^t g(s) ds, \quad \forall t \in I.$$

OBSERVACIONES 1.1. 1. La equivalencia de estas dos condiciones es un teorema clásico de Lebesgue (ver [K-F], págs. 387-391). De la segunda condición se sigue que $\dot{\omega}(t)$ existe para casi toda $t \in I$, que $\dot{\omega}(=g)$ es sumable y

$$\omega(t) = \omega(0) + \int_0^t \dot{\omega}(s) ds.$$

2. De la primera condición se sigue fácilmente de la definición que si φ es una función C^1 de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m , o más en general si $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisface la condición de Lipschitz en todo conjunto compacto, entonces $\varphi \circ \omega$ es absolutamente continua, si ω es absolutamente continua.

Se dará por hecho, lo que es un espacio de Banach y un espacio de Hilbert (ver [K-F], págs. 149 y 165). Por razones de consistencia que se harán claras más tarde, denotaremos al conjunto de las funciones medibles de $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que

$$\int_0^1 \|\omega(t)\|^2 dt < \infty$$

por $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ en lugar de la forma habitual $L^2(I, \mathbb{R}^n)$. Entonces $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert bajo operaciones puntuales y el producto interior \langle, \rangle_0 definido por

$$\langle \omega, \rho \rangle_0 = \int_0^1 \langle \omega(t), \rho(t) \rangle dt,$$

donde \langle, \rangle es el producto interior en \mathbb{R}^n . Denotaremos por $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ al conjunto de las funciones absolutamente continuas $\omega : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $\omega' \in H_0(I, \mathbb{R}^n)$. Entonces $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert bajo el producto interior \langle, \rangle_1 definido por

$$\langle \omega, \rho \rangle_1 = \langle \omega(0), \rho(0) \rangle + \langle \omega', \rho' \rangle_0.$$

De hecho la función $\mathbb{R}^n \oplus H_0(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_1(I, \mathbb{R}^n)$ definida por $(v, g) \rightarrow \omega$, donde

$$\omega(t) = v + \int_0^t g(s) ds$$

es una isometría.

DEFINICIÓN 1.2. Sea $L : H_1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0(I, \mathbb{R}^n)$ definida por $L\omega = \omega'$ y sea $H_1^*(I, \mathbb{R}^n) = \{\omega \in H_1(I, \mathbb{R}^n) | \omega(0) = 0 = \omega(1)\}$.

Entonces lo siguiente es inmediato.

TEOREMA 1.1. L es una transformación lineal acotada y de norma uno. $H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$ es un subespacio lineal cerrado de codimensión $2n$ en $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ y L manda isométricamente $H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$ en el conjunto de las $g \in H_0(I, \mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_0^1 g(t) dt = 0,$$

es decir sobre el complemento ortogonal en $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ del conjunto de las funciones constantes de I en \mathbb{R}^n .

TEOREMA 1.2. (De integración por partes.) Si $\rho \in H_1^*(I, \mathbb{R}^n)$ y λ es una función absolutamente continua de I en \mathbb{R}^n entonces

$$\int_0^1 \langle \lambda'(t), \rho(t) \rangle dt = \langle \lambda, -L\rho \rangle_0.$$

Demostración. Es claro que la función $t \rightarrow \langle \lambda(t), \rho(t) \rangle$ es absolutamente continua con imagen en \mathbb{R} y su derivada es $\langle \lambda'(t), \rho \rangle + \langle \lambda, \rho'(t) \rangle$. Dado que una función absolutamente continua es la integral de su derivada y además $\langle \lambda(t), \rho(t) \rangle$ se anula en 0 y 1, entonces se sigue el teorema. \square

Denotaremos al conjunto de funciones continuas de I en \mathbb{R}^n por $C^0(I, \mathbb{R}^n)$, considerado como un espacio de Banach con norma $\| \cdot \|_\infty$ definida por

$$\|\omega\|_\infty = \sup\{\|\omega(t)\| : t \in I\}.$$

Recordando el Teorema de Arzela-Ascoli (ver [K-F], págs. 115-119), un subconjunto S_0 de $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ es relativamente compacto si y sólo si es acotado y equicontinuo (lo anterior significa que dada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que si $|s - t| < \delta$ entonces $|g(s) - g(t)| < \varepsilon$ para toda $g \in S_0$). Dado que la inclusión de $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ en $H_0(I, \mathbb{R}^n)$ es uniformemente continua se sigue que S es relativamente compacto en $H_0(I, \mathbb{R}^n)$. El siguiente resultado es un caso especial de las desigualdades de Sobolev.

TEOREMA 1.3. Si $\omega \in H_1(I, \mathbb{R}^n)$ entonces

$$\|\omega(t) - \omega(s)\| \leq |t - s|^{\frac{1}{2}} \|L\omega\|_0.$$

Demostración. Sea h la función característica del intervalo $[s, t]$, entonces

$$\|\omega(t) - \omega(s)\| = \left\| \int_s^t \omega'(x) dx \right\| \leq \int_s^t \|\omega'(x)\| dx = \int_0^1 h(x) \|\omega'(x)\| dx$$

y usando la desigualdad de Schwartz (ver [K-F], pág. 153) se completa la demostración. \square

Consecuencias del teorema anterior son las siguientes

COROLARIO 1.4. Si $\omega \in H_1(I, \mathbb{R}^n)$ entonces $\|\omega\|_\infty \leq 2\|\omega\|_1$.

Demostración. Por definición de $\|\cdot\|_1$ tenemos $\|\omega(0)\| \leq \|\omega\|_1$ y $\|L\omega\|_0 \leq \|\omega\|_1$. Así $\|\omega(t)\| \leq \|\omega(0)\| + \|\omega(t) - \omega(0)\|$ y por el teorema 1.3 obtenemos $\|\omega(t) - \omega(0)\| \leq \|L\omega\|_0$. \square

COROLARIO 1.5. Las inclusiones $i_1 : H_1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$, $i_2 : H_1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_0(I, \mathbb{R}^n)$ son operadores compactos

Demostración. Sea S un conjunto acotado en $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ entonces por el corolario 1.4, S es acotado en $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ y por el teorema 1.3 S satisface una condición uniforme de Hölder de orden $\frac{1}{2}$ así, es equicontinua. \square

TEOREMA 1.6. Si $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función C^{k+2} entonces la función $\bar{\varphi} : H_1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_1(I, \mathbb{R}^p)$ definida por $\omega \rightarrow \varphi \circ \omega$ es una función C^k $\bar{\varphi} : H_1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_1(I, \mathbb{R}^p)$. Además si $1 \leq m \leq k$ entonces

$$(1.1) \quad d^m \bar{\varphi}_\omega(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = d^m \varphi_{\omega(t)}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)).$$

Para demostrar el teorema 1.6 utilizaremos el siguiente

LEMA 1.1. 1. Sea F una función C^1 de \mathbb{R}^n en $L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, entonces la función \bar{F} de $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ en $L^s(H_1(I, \mathbb{R}^n), H_1(I, \mathbb{R}^p))$ definida por

$$\bar{F}(\omega)(\lambda_1, \dots, \lambda_s)(t) = F(\omega(t))(\lambda_1(t), \dots, \lambda_s(t))$$

es continua.

2. Si F es C^3 entonces \bar{F} es C^1 y $d\bar{F} = \overline{dF}$.

Demostración. Notemos que

$$(\bar{F}(\omega)(\lambda_1, \dots, \lambda_s))'(t) =$$

$$dF_\omega(\omega'(t))(\lambda_1(t), \dots, \lambda_s(t)) + \sum_{i=1}^s F(\omega(t))(\lambda_1(t), \dots, \lambda_i'(t), \dots, \lambda_s(t))$$

Así

$$\begin{aligned} \|(\overline{F}(\omega)(\lambda_1, \dots, \lambda_s))'(t)\| \leq & \|dF_{\omega(t)}\| \cdot \|\omega'(t)\| \cdot \|\lambda_1(t)\| \dots \|\lambda_s(t)\| + \\ & \sum_{i=1}^s \|F(\omega(t))\| \cdot \|\lambda_1(t)\| \dots \|\lambda_i'(t)\| \dots \|\lambda_s(t)\|. \end{aligned}$$

Así por el corolario 1.4 del teorema 1.3 se tiene $\|\lambda_i\|_\infty \leq 2\|\lambda_i\|_1$, podemos ver que $\|(\overline{F}(\omega)(\lambda_1, \dots, \lambda_s))'\|_0 \leq 2^s L(\omega) \|\lambda_1\|_1 \dots \|\lambda_s\|_1$, donde $L(\omega) = \sup \|dF_{\omega(t)}\| \cdot \|\omega'\|_0 + s \cdot \sup \|F(\omega(t))\|$.

También $\|\overline{F}(\omega)(\lambda_1, \dots, \lambda_s)\|_\infty \leq 2^s \sup \|F(\omega(t))\| \cdot \|\lambda_1\|_1 \dots \|\lambda_s\|_1$. Recordando que $\|\rho\|_1^2 = \|\rho(0)\|_0^2 + \|\rho'\|_0^2$

vemos que $\|\overline{F}(\omega)(\lambda_1, \dots, \lambda_s)\|_1 \leq K(\omega) \|\lambda_1\|_1 \dots \|\lambda_s\|_1$. Dado que $\overline{F}(\omega)$ es multilineal se sigue que $\overline{F}(\omega) \in L^s(H_1(I, \mathbb{R}^n), H_1(I, \mathbb{R}^p))$. Si $\rho \in H_1(I, \mathbb{R}^n)$ entonces

$$\|(\overline{F}(\omega) - \overline{F}(\rho))(\lambda_1, \dots, \lambda_s)\|_\infty \leq 2^s \sup \|\overline{F}(\omega) - \overline{F}(\rho)\| \cdot \|\lambda_1\|_1 \dots \|\lambda_s\|_1,$$

por lo tanto

$$\|((\overline{F}(\omega) - \overline{F}(\rho))(\lambda_1, \dots, \lambda_s))'\|_\infty \leq 2^s M(\omega, \rho) \|\lambda_1\|_1 \dots \|\lambda_s\|_1,$$

donde

$$\begin{aligned} M(\omega, \rho) = & \sup \|dF_{\omega(t)}\| \cdot \|\omega' - \rho'\|_0 \\ & + \sup \|dF_{\omega(t)} - dF_{\rho(t)}\| \cdot \|\rho'\|_0 + s \cdot \sup \|F(\omega(t)) - F(\rho(t))\|. \end{aligned}$$

Así

$$\|(\overline{F}(\omega(t)) - \overline{F}(\rho(t)))\| \leq K(\omega, \rho),$$

donde $\| \cdot \|$ es la norma en $L^s(H_1(I, \mathbb{R}^n), H_1(I, \mathbb{R}^p))$ y $K(\omega, \rho) \rightarrow 0$ si $\sup \|\omega' - \rho'\|_0$, $\sup \|dF_{\omega(t)} - dF_{\rho(t)}\|$ y $\sup \|F(\omega(t)) - F(\rho(t))\|$ tienden a cero. Pero si $\rho \rightarrow \omega$ en $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ entonces $\|\omega' - \rho'\|_0 \leq \|\omega - \rho\|_1$ tiende a cero y por el corolario 1.4 del teorema 1.3 $\rho \rightarrow \omega$ uniformemente, así dado que F y dF son continuas, entonces $F(\rho(t)) \rightarrow F(\omega(t))$ uniformemente y $dF_{\rho(t)} \rightarrow dF_{\omega(t)}$ uniformemente, de modo que $K(\omega, \rho) \rightarrow 0$. Esto es, $\|(\overline{F}(\omega(t)) - \overline{F}(\rho(t)))\| \rightarrow 0$ y \overline{F} es continua. Esto prueba la primera parte del lema.

Para la segunda parte del lema, supongamos que $F \in C^2$; así $dF \in C^2$. Por el teorema del valor medio existe una función C^1 , $R : \mathbb{R}^n \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n, L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$ tal que si $x = \rho + v$ entonces

$$F(x) - F(\rho) - dF_\rho(v) = R(x)(v, v).$$

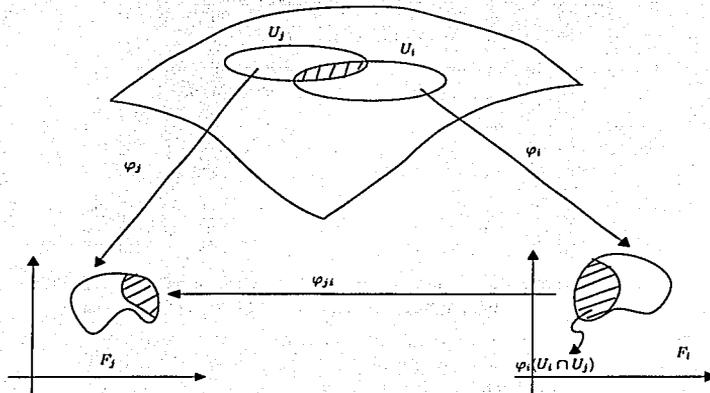
Entonces la función

$$\overline{R} : H_1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(H_1(I, \mathbb{R}^n), H_1(I, L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))),$$

es continua por la primera parte del teorema 1.3 y si ω y $x = \rho + \omega$ están en $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ entonces $\overline{F}(x) - \overline{F}(\omega) - d\overline{F}_\omega(\rho) = \overline{R}(x)(\rho, \rho)$, se sigue que \overline{F} es diferenciable en ω y $d\overline{F}_\omega = d\overline{F}_\omega$. Dado que $d\overline{F}_\omega$ es una función continua de ω por la primera parte del lema \overline{F} es C^1 . Esto prueba la segunda parte del lema. \square

Ahora procedamos a probar el teorema pendiente.

Demostración. Del teorema 1.6. Es una consecuencia del lema 1.1, tomando $F = d^s \varphi$ con $0 \leq s \leq k-1$, se obtiene la afirmación. \square

FIGURA 1. Atlas que es C^k

OBSERVACIÓN 1.2. Del lema 1.1, si $s = 0$ entonces interpretamos a $L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ como \mathbb{R}^p , donde $L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ es el conjunto de las funciones s -lineales con valores en H_1 .

El siguiente teorema es inmediato.

TEOREMA 1.7. Considere \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m como subespacios complementarios en \mathbb{R}^{n+m} . Entonces la función $(\lambda, \omega) \rightarrow \lambda + \omega$ es una isometría de $H_1(I, \mathbb{R}^n) \oplus H_1(I, \mathbb{R}^m)$ en $H_1(I, \mathbb{R}^{n+m})$.

2. Variedades de Banach y de Hilbert

DEFINICIÓN 1.3. Sea S un conjunto. Una carta en S es una biyección φ de un subconjunto U de S a un subconjunto abierto de un subespacio de un espacio de Banach y se denota a φ por (U, φ) donde U es el dominio de φ .

Un atlas C^k en S es una familia de cartas $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) | i \in I\}$ que satisface:

1. $S = \bigcup \{U_i | i \in I\}$.
2. Cualesquiera dos cartas son compatibles en \mathcal{A} en el siguiente sentido: cuando dos funciones se enciman entre miembros de \mathcal{A} , son difeomorfismos C^k ; es decir que para dos cartas (U_i, φ_i) y (U_j, φ_j) con $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, se forma la función que encima $\varphi_{ji} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} | \varphi_i(U_i \cap U_j)$ donde $\varphi_i^{-1} | \varphi_i(U_i \cap U_j)$ significa la restricción de φ_i^{-1} al conjunto $\varphi_i^{-1} | \varphi_i(U_i \cap U_j)$. Se requiere que $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ sea abierto y que φ_{ji} sea un difeomorfismo C^k .

De lo anterior decimos que dos atlas $C^k, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ son equivalentes si y sólo si $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ es un atlas C^k . Una estructura diferenciable \mathcal{D} en S es una clase de equivalencia de los atlas en S . La unión de los atlas en \mathcal{D} , $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \bigcup \{\mathcal{A} | \mathcal{A} \in \mathcal{D}\}$ es el atlas maximal de \mathcal{D} y una carta $(U, \varphi) \in \mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ es una carta local admisible. Si \mathcal{A} es

un atlas C^k en S entonces la unión de todos los atlas equivalentes a \mathcal{A} es llamada la estructura C^k diferenciable generada por \mathcal{A} .

DEFINICIÓN 1.4. Una variedad diferenciable M es una pareja (S, \mathcal{D}) , donde S es un conjunto y \mathcal{D} es una estructura C^k diferenciable en S .

OBSERVACIÓN 1.3. Generalmente se denota a la pareja (S, \mathcal{D}) como M . Si las cartas tienen su imagen en un espacio de Banach E , entonces E es llamado el espacio modelo y se dice que M es una variedad Banach C^k modelada en E .

DEFINICIÓN 1.5. Sea M una variedad diferenciable, $A \subset M$ es llamado abierto si y sólo si para cada $a \in A$ existe una carta local admisible (U, φ) tal que $a \in U$ y $U \subset A$.

De la definición anterior se sigue que los conjuntos abiertos en M definen una topología, la prueba de esta afirmación está en [A-M-R], pág. 150.

DEFINICIÓN 1.6. Una variedad diferenciable M es una n -variedad cuando toda carta tiene como imagen un espacio vectorial de dimensión n . Esto es que para todo punto $a \in M$ existe una carta admisible (U, φ) con $a \in U$ y $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Se escribirá $n = \dim M$. Las n -variedades que usaremos tienen la propiedad de ser Hausdorff.

OBSERVACIÓN 1.4. Una variedad es llamada de dimensión finita si sus componentes son todas n -variedades; la n puede variar con respecto a cada componente. Una variedad es llamada variedad de Hilbert si el espacio modelo es un espacio de Hilbert.

Dada una variedad M y $A \subset M$, entonces la estructura diferenciable de M induce de manera natural una estructura sobre A así, A es llamada subvariedad abierta de M .

DEFINICIÓN 1.7. Una subvariedad de una variedad M es un subconjunto B de M con la propiedad que para cada $c \in B$ existe una carta admisible (U, φ) en M con $c \in U$ la cual tiene la propiedad

$$\varphi: U \rightarrow E \times F, \quad \varphi(U \cap B) = \varphi(U) \cap (E \times \{0\}).$$

De la definición anterior se sigue que un subconjunto abierto V de M es una subvariedad en este sentido, pues si se toma $F = \{0\}$ y para $x \in V$ se usa una carta (U, φ) de M para cada $x \in U$.

PROPOSICIÓN 1.1. Sea B una subvariedad de una variedad M . B es una variedad con esta definición generada por el atlas: $\{(U \cap B, \varphi|_{U \cap B}), (U, \varphi)$ donde (U, φ) es una carta admisible en M que tiene la propiedad de la definición anterior}.

La demostración de la proposición anterior se encuentra en [A-M-R], pág. 151.

Si (S_1, \mathcal{D}_1) y (S_2, \mathcal{D}_2) son dos variedades diferenciables, entonces el producto de variedades $(S_1 \times S_2, \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2)$ consiste de los conjuntos $S_1 \times S_2$ junto con la estructura diferenciable $\mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_2$ generada por el atlas $\{(U_1 \times U_2, \varphi_1 \times \varphi_2)|(U_i, \varphi_i)$ es una carta de $(S_i, \mathcal{D}_i), i = 1, 2\}$.

DEFINICIÓN 1.8. Sea $f: M \rightarrow N$ donde M y N son variedades C^k . Se dice que f es de clase C^r con $0 \leq r \leq k$, si para cada $x \in M$ y una carta admisible (V, ψ)

de N con $f(x) \in V$, existe una carta (U, φ) de M que satisface para cada $x \in U$ y $f(U) \subset V$, tal que la representación local de f , $f_{\varphi\psi} = \psi \circ f\varphi^{-1}$ es de clase C^r .

Si $[a, b]$ es un intervalo, una función continua $c : [a, b] \rightarrow M$ es llamada diferenciable en un punto a si existe una carta (U, φ) en $c(a)$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{(\varphi \circ c)(t) - (\varphi \circ c)(a)}{t - a},$$

existe y es finito, este límite se denota por $(\varphi \circ c)'(a)$. Si (V, ψ) es otra carta en $c(a)$ y si $v = (\varphi \circ c)(t) - (\varphi \circ c)(a)$, entonces en $U \cap V$ se tiene

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ c)(t) - (\psi \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ c)(a) = D(\psi \circ \varphi^{-1})((\varphi \circ c)(a)) + o(\|v\|).$$

(ver [A-M-R], pág. 158) y así $c : [a, b] \rightarrow M$ es diferenciable en a en la carta (U, φ) si y sólo si es diferenciable en a en la carta (V, ψ) , y la función c es diferenciable en (a, b) si y sólo si en cada uno de los puntos (a, b) lo es.

La función $c : [a, b] \rightarrow M$ es llamada de clase C^1 si y sólo si es diferenciable y $(\varphi \circ c)' : [a, b] \rightarrow E$ es continua para cada carta (U, φ) que satisface $U \cap c([a, b]) \neq \emptyset$, donde E es el espacio modelo de M .

DEFINICIÓN 1.9. Sea M una variedad y $m \in M$, una curva en m es una función C^1 , $c : I \rightarrow M$ con $I \subset \mathbb{R}$ con $c(0) = m$. Sean c_1 y c_2 dos curvas en m y (U, φ) una carta admisible con $m \in U$, entonces se dice que c_1 y c_2 son tangentes en m con respecto a φ si y sólo si $(\varphi \circ c_1)'(0) = (\varphi \circ c_2)'(0)$.

PROPOSICIÓN 1.2. Sean c_1 y c_2 dos curvas en m . Suponga que (U_β, φ_β) son cartas admisibles con $m \in U_\beta$, $\beta = 1, 2$. Entonces c_1 y c_2 son tangentes en m con respecto a φ_1 si y sólo si son tangentes en m con respecto a φ_2 .

Para la demostración ver [A-M-R], págs. 158-159. La proposición anterior garantiza que la tangencia de curvas en m es una noción independiente de la carta usada. Se dice que c_1, c_2 son tangentes en m con respecto a φ para cada carta local φ en m . Una clase de equivalencia de tales curvas es denotada por $[c]_m$, donde c es el representante de la clase.

DEFINICIÓN 1.10. Para una variedad M y $m \in M$, el espacio tangente a M en m es el conjunto de clases de equivalencias de curvas en m :

$$T_m M = \{[c]_m | c : I \rightarrow M\};$$

para un subconjunto $A \subset M$, sea $TM|_A = \bigcup_{m \in A} T_m M$; donde esta unión es disjunta. Llamamos $TM = TM|M$ como el haz tangente de M y la función $\pi_M : TM \rightarrow M$ está definida por $\pi_M([c]_m) = m$ que es la proyección del haz tangente de M . Con lo anterior si M una variedad de Hilbert y si definimos una función $\| \cdot \|$ en TM dada por $\langle v, v \rangle^{1/2}$ para $v \in T_p M$ que varía diferenciablemente entonces M se le llama variedad Riemanniana.

3. Las variedades de curvas absolutamente continuas

DEFINICIÓN 1.11. Si M es una variedad C^1 , se define $H_1(I, M)$ como el conjunto de funciones continuas $\omega : I \rightarrow M$ tal que $\varphi \circ \omega$ es absolutamente continua y $\|(\varphi \circ \omega)'\|$ es localmente cuadrado sumable para cada carta φ de M .

DEFINICIÓN 1.12. 1. Si M es una variedad C^∞ y $\omega \in H_1(I, M)$ entonces

$$H_1(I, M)_\omega = \{\lambda \in H_1(I, TM) \mid \lambda(t) \in T_{\omega(t)}M, \forall t \in I\}.$$

2. Si $p, q \in M$ entonces

$$\mathcal{H}_1(M; p, q) = \{\omega \in H_1(I, M) \mid \omega(0) = p, \omega(1) = q\}.$$

3. si $\omega \in \mathcal{H}_1(M; p, q)$ entonces

$$\mathcal{H}_1(M; p, q)_\omega = \{\lambda \in H_1(I, M)_\omega \mid \lambda(0) = 0_p, \lambda(1) = 0_q\}.$$

Sin pérdida de generalidad supondremos que M está encajada en un espacio euclidiano \mathbb{R}^N , esto es por el Teorema del encaje de Whitney (ver [Gui-P], págs. 53-54). Sea $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$ el haz tangente de M con la proyección canónica $\pi: TM \rightarrow \mathbb{R}$.

OBSERVACIÓN 1.5. Si M es una subvariedad cerrada C^{k+4} de \mathbb{R}^N con $k \geq 1$ entonces $H_1(I, M)$ consiste de todas las curvas $\omega \in H_1(I, \mathbb{R}^N)$ tal que $\omega(I) \subset M$.

Es claro que $H_1(I, M)_\omega$ tiene estructura de espacio vectorial bajo operaciones puntuales y además $\mathcal{H}_1(M; p, q)_\omega$ es un subespacio de $H_1(I, M)_\omega$. El siguiente teorema es de suma importancia pues establece el tipo de estructuras que tienen los espacios de la definición 1.12.

TEOREMA 1.8.

Sea M como en la observación 1.5, entonces

1. $H_1(I, M)$ es una subvariedad cerrada C^k de Hilbert del espacio $H_1(I, \mathbb{R}^n)$.
2. Si $p, q \in M$ entonces $\mathcal{H}_1(M; p, q)$ es una subvariedad C^k de $H_1(I, M)$.
3. Si $\omega \in H_1(I, M)$ entonces el espacio tangente a $H_1(I, M)$ en ω es $H_1(I, M)_\omega$ el cual es igual a $\{\lambda \in H_1(I, \mathbb{R}^n) \mid \lambda(t) \in T_{\omega(t)}M, t \in I\}$.
4. Si $\omega \in \mathcal{H}_1(M; p, q)$ entonces el espacio tangente a $\mathcal{H}_1(M; p, q)$ en ω es $\mathcal{H}_1(M; p, q)_\omega$ el cual es igual a $\{\lambda \in H_1(I, M)_\omega \mid \lambda(0) = 0 = \lambda(1)\}$.

Demostración. 1. Dado que M es cerrada en \mathbb{R}^N se sigue que $H_1(I, M)$ es cerrada en $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ así también lo es en $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ por el corolario 1.5 del teorema 1.3.

2. De la misma forma podemos ver que $\mathcal{H}_1(M; p, q)$ es cerrada en $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ y que $H_1(I, M)_\omega$ y $\mathcal{H}_1(M; p, q)_\omega$ son subespacios cerrados de $H_1(I, \mathbb{R}^n)$.

3. Como M es una subvariedad C^{k+4} de \mathbb{R}^N podemos encontrar una métrica Riemanniana C^{k+3} para \mathbb{R}^N tal que M es una subvariedad totalmente geodésica; entonces si $\exp: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es la correspondiente función exponencial (es decir $t \rightarrow \exp(p, tv)$ es la geodésica que comienza en p con vector tangente v) la cual es una función C^{k+2} . Sea $\omega \in H_1(I, M)$ y definamos $\varphi: H_1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow H_1(I, \mathbb{R}^n)$ por

$$\varphi(\lambda)(t) = \exp(\omega(t), \lambda(t)),$$

entonces por los teoremas 1.6 y 1.7 se tiene que φ es C^k y es claro que $\varphi(0) = \omega$. Además, por el teorema 1.6

$$d\varphi_0(\lambda)(t) = d\exp_0^{\omega(t)}(\lambda(t))$$

donde $\exp^{\omega(t)}(v) = \exp(\omega(t), v)$. Ahora, por una propiedad básica de la función exponencial $d\exp_0^{\omega(t)}$ es la transformación identidad de \mathbb{R}^n , por eso $d\varphi_0$ es la función

identidad de $H_1(I, \mathbb{R}^n)$. Por el teorema de la función inversa φ transforma una vecindad del cero isomorficamente en una vecindad de ω en $H_1(I, \mathbb{R}^n)$; este isomorfismo es C^k . Dado que M es totalmente geodésica se sigue que para λ cercana a cero en $H_1(I, \mathbb{R}^n)$, $\varphi(\lambda) \in H_1(I, M)$ si y sólo si $\lambda \in H_1(I, M)_\omega$.

4. De manera similar, si $\omega \in \mathcal{H}_1(M; p, q)$ entonces $\varphi(\lambda) \in \mathcal{H}_1(M; p, q)$ si y sólo si $\lambda \in \mathcal{H}_1(M; p, q)_\omega$. En consecuencia φ^{-1} restringida a una vecindad de ω en $H_1(I, M)$ (respectivamente $\mathcal{H}_1(M; p, q)$) es una carta en $H_1(I, M)$ (respectivamente $\mathcal{H}_1(M; p, q)$) la cual es la restricción de una carta C^k para $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ así, por definición $H_1(I, M)$ y $\mathcal{H}_1(M; p, q)$ son subvariedades cerradas C^k de $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ y sus espacios tangentes en ω son $H_1(I, M)_\omega$ y $\mathcal{H}_1(M; p, q)_\omega$ respectivamente. Es claro el hecho de que $H_1(I, M)_\omega$ y $\mathcal{H}_1(M; p, q)_\omega$ son iguales. \square

TEOREMA 1.9. Sean M y W subvariedades cerradas C^{k+4} de \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m respectivamente ($k \geq 1$) y sea $\varphi: M \rightarrow W$ una función C^{k+4} . Entonces $\bar{\varphi}: H_1(I, M) \rightarrow H_1(I, W)$ definida por $\bar{\varphi}(\omega) = \varphi \circ \omega$ es una función C^k de $H_1(I, M)$ en $H_1(I, W)$. Además $d\bar{\varphi}_\omega: H_1(I, M)_\omega \rightarrow H_1(I, W)_{\bar{\varphi}(\omega)}$ está dada por $d\bar{\varphi}_\omega(\lambda)(t) = d\varphi_{\omega(t)}(\lambda(t))$.

Demostración. Dado que $\varphi: M \rightarrow W$ y $W \subset \mathbb{R}^m$ entonces para cada punto $x \in W$ existe un difeomorfismo $\xi: U \rightarrow A$ de un abierto U de x en un abierto A de \mathbb{R}^m . Así, podemos pensar a φ como una función de M en \mathbb{R}^m . Entonces, por el Teorema de extensión de Tietze (ver [O-R], pág. 17), φ se puede extender a una función C^{k+4} de una vecindad U de M a \mathbb{R}^n ; así, la afirmación del teorema se sigue de los teoremas 1.6 y 1.8. \square

DEFINICIÓN 1.13. Sea M una variedad C^{k+4} de dimensión finita ($k \geq 1$) y sea $i: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ un encaje C^{k+4} en un espacio euclidiano (esto lo garantiza el teorema de Whitney). Entonces por el teorema 1.9 las estructuras C^k inducidas en $H_1(I, M)$ y $\mathcal{H}_1(M; p, q)$ como subvariedades cerradas C^k de $H_1(I, M)$ son independientes de la elección de i .

De aquí en adelante consideraremos a $H_1(I, M)$ y $\mathcal{H}_1(M; p, q)$ como variedades de Hilbert C^k y M como una variedad C^∞ . Si $\varphi: M \rightarrow N$ es una función C^{k+4} , por el teorema 1.9, $\bar{\varphi}: H_1(I, M) \rightarrow H_1(I, N)$ definida por $\bar{\varphi}(\omega) = \varphi \circ \omega$ es una función C^k y $d\bar{\varphi}_\omega(\lambda)(t) = d\varphi_{\omega(t)}(\lambda(t))$, además $\bar{\varphi}$ transforma $\mathcal{H}_1(M; p, q)$ en $\mathcal{H}_1(N; \varphi(p), \varphi(q))$ y esta transformación es C^k .

4. Las variedades de curvas C^2

Dado $[a, b] \subset \mathbb{R}$ denotaremos por $C^r([a, b], \mathbb{R}^n)$ al espacio de funciones C^r , $x: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dotado con la norma C^r

$$\|x\|_r = \sup\{\|x^j(t)\|; 0 \leq j \leq r, t \in [a, b]\}$$

donde x^j denota la j -ésima derivada de x . Entonces $C^r([a, b], \mathbb{R}^n)$ es un espacio de Banach. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un abierto, definimos

$$C^r([a, b], U) = \{x \in C^r([a, b], \mathbb{R}^n); x([a, b]) \subset U\}.$$

Se puede ver que $C^r([a, b], U)$ es un subconjunto abierto de $C^r([a, b], \mathbb{R}^n)$.

El siguiente teorema es el análogo del teorema 1.6 para los espacios de Banach $C^2([a, b], \mathbb{R}^n)$

TEOREMA 1.10. Si $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ es una función C^{k+2} entonces la función $\bar{\varphi} : C^2([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^2([a, b], \mathbb{R}^p)$ definida por $\omega \rightarrow \varphi \circ \omega$ es C^k $\bar{\varphi} : C^2([a, b], \mathbb{R}^n) \rightarrow C^2([a, b], \mathbb{R}^p)$. Además si $1 \leq m \leq k$ entonces

$$(1.2) \quad d^m \bar{\varphi}_\omega(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = d^m \varphi_{\omega(t)}(\lambda_1(t), \dots, \lambda_m(t)).$$

La idea de la demostración es similar a la del teorema 1.6.

Consideremos el espacio

$$C^2([0, T], M) = \{\omega : [0, T] \rightarrow M; \omega \in C^2\}$$

el cual resulta ser una variedad de Banach cuyo espacio tangente en ω es

$$C^2([0, T], M)_\omega = \{W \in C^2([0, T], TM); W(t) \in T_{\omega(t)}M\}.$$

También definimos el siguiente espacio

$$\Omega(M; p, q) = \{\omega \in C^2([0, T], M); \omega(0) = p, \omega(T) = q\}.$$

Análogamente, $\Omega(M; p, q)$ es una variedad de Banach y el espacio tangente en ω es

$$\Omega(M, p, q)_\omega = \{W \in C^2([0, T], M)_\omega; W(0) = 0_p, W(T) = 0_q\}.$$

Las demostraciones de las afirmaciones anteriores son análogas a la prueba del teorema 1.8.

CAPÍTULO 2

Cálculo de variaciones

En este capítulo, esencialmente se presenta el método clásico de Lagrange para calcular los puntos críticos de la funcional de acción $A_L : C^r([a, b], U) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A_L(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t) dt,$$

donde L es una función $L : TM \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ llamada Lagrangiano. Se calcula la derivada de A_L en x , lo que permite saber que x es un punto crítico de la acción precisamente cuando satisface la ecuación de Euler-Lagrange asociada a L

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}, t) = 0.$$

Todo esto se traslada después al espacio $\Omega(M; p, q)$. El Lagrangiano L en TM se supone convexo y superlineal; se dan ejemplos de este tipo como son

- El *Lagrangiano Riemanniano* en M está dado por la energía cinética

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|_x^2.$$

Su ecuación de Euler-Lagrange es la ecuación de las geodésicas de la métrica Riemanniana y su flujo de Euler-Lagrange es el flujo geodésico.

- El *Lagrangiano mecánico* está dado por la energía cinética menos la energía potencial $U : M \rightarrow \mathbb{R}$,

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|_x^2 - U(x).$$

Su ecuación de Euler-Lagrange es $\frac{D}{dt} \dot{x} = -\nabla U(x)$, donde $\frac{D}{dt}$ es la derivada covariante y ∇U es el gradiente de U con respecto a la métrica Riemanniana g .

Se introduce el concepto de curva minimizante $\omega \in \mathcal{H}_1([t_0, t_1], M)$ que une a dos puntos (t_0, x_0) y (t_1, x_1) y se demuestra el teorema de Weierstrass, el cual garantiza la existencia de curvas minimizantes estrictas $\omega \in \mathcal{H}_1(t_0, t_1)$. En el transcurso de la demostración se emplean campos de Mayer. Este resultado es de suma importancia pues hasta antes de Riemann, éste era el principal teorema que no requería la segunda variación para la existencia de minimizantes.

1. Lagrangianos y la primera variación

DEFINICIÓN 2.1. Dada un función continua $L : U \times \mathbb{R}^n \times J \rightarrow \mathbb{R}$ donde $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, la acción $A_L(x)$ de L sobre una función C^1 , $x : [a, b] \rightarrow U$, $[a, b] \subset J$ está dada por

$$A_L(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

La función L se llama Lagrangiano.

PROPOSICIÓN 2.1. Si $L \in C^k$, con $k \geq 2$ y $[a, b] \subset J$, entonces la acción $A_L : C^r([a, b], U) \rightarrow \mathbb{R}$ es C^k para $1 \leq r$. Además, su derivada $A'_L(x)$ en $x \in C^r([a, b], U)$

está dada por

$$(2.1) \quad A'_L(x)u = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t), t) \right] u(t) dt + \\ \frac{\partial L}{\partial v}(x(a), \dot{x}(a), a) u(a) - \frac{\partial L}{\partial v}(x(b), \dot{x}(b), b) u(b).$$

Demostración. Considerense la transformación lineal continua

$$T: C^r([a, b], U) \rightarrow C^{r-1}([a, b], U \times \mathbb{R}^n \times J)$$

dada por $T(x) = (x, \dot{x}, 0)$ y la transformación afín

$$(2.2) \quad x(t) \mapsto T(x)(t) + (0, 0, t)$$

La función

$$(2.3) \quad \bar{L}: C^r([a, b], U \times \mathbb{R}^n \times J) \rightarrow C^0([a, b], \mathbb{R})$$

dada por $\bar{L}(\alpha) = L \circ \alpha$, es C^k por el teorema 1.10 y su derivada está dada por

$$d\bar{L}_\alpha(\gamma) = dL_{\alpha(t)}(\gamma(t)).$$

Así A_L es C^k y su derivada en x es $A'_L(x) = \int d\bar{L}_{(r(x), t)} \circ T$, o sea

$$(2.4) \quad A'_L(x)u = \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t)u + \frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}, t)\dot{u} \right) dt.$$

Pero si L y u son C^2 tenemos

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t), t)\dot{u}(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}, t) \right) u(t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}, t) \cdot u(t)$$

entonces sustituyendo en (2.4) obtenemos,

$$A'_L(x)u = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}, t) \right] u(t) - \frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}, t) u(t) \Big|_a^b,$$

y desarrollando obtenemos la ecuación 2.1 □

Dado $[a, b] \subset J$ y $p_0, p_1 \in U$, consideremos el conjunto $\Omega^r(U; p_0, p_1)$ de funciones $x \in C^r([a, b], U)$ con $x(a) = p_0$, $x(b) = p_1$. Este conjunto es la intersección del abierto $C^r([a, b], U)$ con el subespacio afín

$$\{x \in C^r([a, b], \mathbb{R}^n) | x(a) = p_0, x(b) = p_1\}.$$

El espacio tangente a $\Omega^r(U; p_0, p_1)$ en la curva x es

$$\Omega(U; p_0, p_1)_x = \{u \in C^r([a, b], \mathbb{R}^n); u(a) = 0 = u(b)\}.$$

COROLARIO 2.1. $x \in \Omega^r(U; p_0, p_1)$ es un punto crítico de $A_L|_{\Omega^r(U; p_0, p_1)}$ si y sólo si x satisface la ecuación

$$(2.5) \quad \frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}, t) \right) = 0$$

Demostración. Aplicando la proposición 2.1 y la ecuación 2.1 y observando que $u(a) = 0 = u(b)$ obtenemos

$$\begin{aligned} A'_L(x)u &= \\ & \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}, t) \right) \right] u(t) dt + \frac{\partial L}{\partial v}(x(a), \dot{x}(a), a) u(a) \\ & \quad - \frac{\partial L}{\partial v}(x(b), \dot{x}(b), b) u(b) = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}, t) \right) \right] u(t) dt, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x, \dot{x}, t) \right) = 0$$

□

Las ecuaciones 2.5 son llamadas *ecuaciones de Euler-Lagrange* asociadas a L , las cuales se pueden escribir como

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}, t) - \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, \dot{x}, t) \ddot{x} - \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial x}(x, \dot{x}, t) \dot{x} - \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial t}(x, \dot{x}, t) = 0.$$

Sus soluciones son llamadas también soluciones de L . Cuando el Hessiano $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v, t)$ es invertible para todo (x, v, t) , entonces las ecuaciones 2.5 se pueden escribir en la forma $\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ donde $F: U \times \mathbb{R}^n \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función C^{k-2} , si L es C^r .

Podemos suponer que L es C^3 , pero para nuestros fines de ahora en adelante supondremos que L es C^∞ .

DEFINICIÓN 2.2. Sea $L: U \times \mathbb{R}^n \times J \rightarrow \mathbb{R}$ donde $J \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto y $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto. Dado $[a, b] \subset J$ y $x_0 \in C^2([a, b], U)$ decimos que la función $C^2; x: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow U$, con $\varepsilon > 0$ es una variación de x_0 si satisface

1. $x(0, t) = x_0(t)$, para toda $t \in [a, b]$.

2. $x(s, a) = x(a)$, $x(s, b) = x(b)$, para toda $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

y denotamos $x(s, t) = x_s(t)$.

PROPOSICIÓN 2.2. Si $[a, b] \subset J$ y $x_0: [a, b] \rightarrow U$ es una función C^2 , entonces las siguientes propiedades son equivalentes:

(a) x_0 es solución de L .

(b) Para toda variación $x: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow U$ de x_0

$$(2.6) \quad \left. \frac{d}{ds} \int_a^b L(x_s, \dot{x}_s, t) dt \right|_{s=0} = 0$$

Demostración. Si $x: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow U$ es una variación de $x_0: [a, b] \rightarrow U$ entonces

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \int_a^b L(x_s, \dot{x}_s, t) dt \right|_{s=0} &= \int_a^b \left. \frac{d}{ds} L(x_s, \dot{x}_s, t) \right|_{s=0} dt = \\ & \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x_s, \dot{x}_s, t) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial v}(x_s, \dot{x}_s, t) \frac{\partial^2 x}{\partial s \partial t} \right] dt \Big|_{s=0} \end{aligned}$$

integrando por partes obtenemos

$$\frac{d}{ds} \int_a^b L(x_s, \dot{x}_s, t) dt \Big|_{s=0} = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(x_s, \dot{x}_s, t) \frac{\partial x}{\partial s} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x_s, \dot{x}_s, t) \right) \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial v} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} \Big|_a^b.$$

Pero por la demostración del corolario 2.1 tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial s}(a, t) = 0 = \frac{\partial x}{\partial s}(b, t)$$

y

$$\frac{\partial x}{\partial s}(s, t) \in \{u \in C^r([a, b], \mathbb{R}^n) \mid u(a) = 0 = u(b)\} = \Omega(M; p_0, p_1)_x$$

entonces la última integral es igual a

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x_s, \dot{x}_s, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x_s, \dot{x}_s, t) \right) \right] \frac{\partial x}{\partial s} dt.$$

Sea $\xi(t) = \frac{\partial L}{\partial s}(0, t)$; entonces

$$\frac{d}{dt} \int_a^b L(x_s, \dot{x}_s, t) dt \Big|_{t=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}(x_0, \dot{x}_0, t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x_0, \dot{x}_0, t) \right) \right] \xi(t) dt.$$

Cualquier función $C^1, \xi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $\xi(a) = 0 = \xi(b)$ se puede obtener como

$\xi(t) = \frac{\partial x}{\partial s}(0, t)$ para una variación de x_0 ; se sigue de la propiedad (b) que

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x_0, \dot{x}_0, t) - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}(x_0, \dot{x}_0, t) = 0,$$

y x_0 es una solución de L . Así hemos probado que (a) implica (b). Ahora probemos que (b) implica (a). Sabemos que para toda variación $x : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b]$ de x_0 satisface la ecuación 2.6, entonces por el corolario 2.1 también cumple con las ecuaciones de Euler-Lagrange, así sus soluciones son soluciones de L , en particular de x_0 . \square

DEFINICIÓN 2.3. Una función $L : TM \times J \rightarrow \mathbb{R}$ la cual es C^∞ , es un *Lagrangiano* en M si satisface los siguiente

1. *Convezidad:* L es convexa si el hessiano L_{vv} de la restricción de L a cada fibra $T_x M$, es definido positivo.
2. *Supertincalidad:* L es superlineal si

$$\lim_{|v| \rightarrow +\infty} \frac{L(x, v, t)}{|v|} = +\infty,$$

uniformemente en $(x, t) \in M \times J$, es decir, para toda $A \in \mathbb{R}$ existe un $B \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, v, t) \geq A|v| - B$$

para toda $(x, v, t) \in TM \times J$.

Dado $[0, T] \subset J$ y una trayectoria $\omega \in \mathcal{H}_1([0, T], M)$ la acción $A_L(\omega)$ del Lagrangiano L en ω se define como en el caso euclidiano

$$A_L(\omega) = \int_0^T L(\omega, \dot{\omega}, t) dt.$$

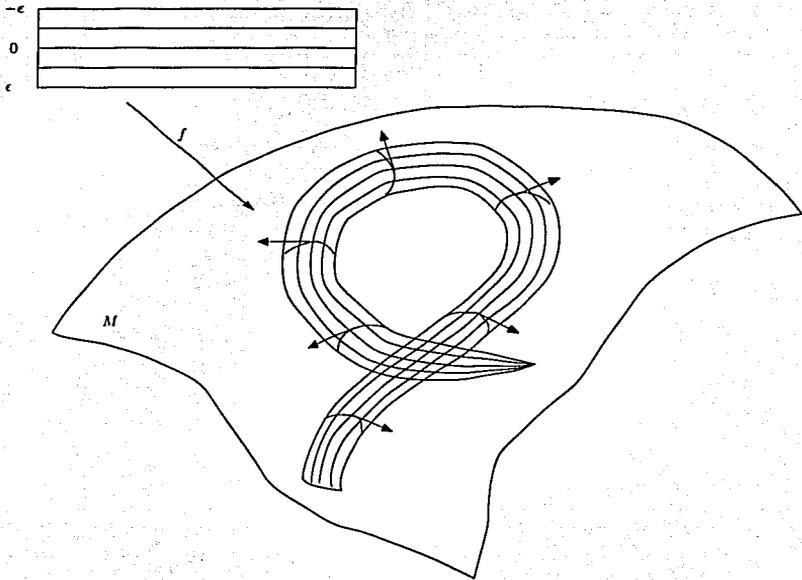


FIGURA 1. Variación sobre una variedad

DEFINICIÓN 2.4. Dada una trayectoria $\omega \in \Omega(M; p, q)$, una *variación* de ω es una función continua

$$F : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega(M; p, q)$$

para alguna $\varepsilon > 0$, que satisface lo siguiente:

1. $F(0) = \omega$.
2. La función $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, T] \rightarrow M$, definida por $f(s, t) = F(s) \cdot t$ es C^2 , así $f(0, t) = \omega(t)$ para toda $t \in [0, T]$.
3. Dado que $F(s)$ pertenece a $\Omega(M; p, q)$, se tiene que $f(s, 0) = \omega(0) = p$; $f(s, T) = \omega(T) = q$ para toda $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$,

y denotamos $f(s, t)$ como $\omega_s(t)$, así $\omega_0(t) = \omega(t)$.

OBSERVACIÓN 2.1.

1. Al hacer referencia a una variación, se usará f ó F indistintamente.
2. Algunas veces en vez de tomar $(-\varepsilon, \varepsilon)$ se tomará una vecindad V con centro en 0 de \mathbb{R}^k y en tal caso f será llamada variación a k parámetros de ω .
3. Se usará la palabra curva o trayectoria al referirse a ω .

Para t fija, se considera la curva C^2 , $\omega_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ dada por $f(s, t) = \omega_t(s)$. El vector velocidad de esta curva "transversal" en $u = 0$ es

$$W(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t).$$

El campo vectorial $W \in \Omega(M; p, q)_\omega$ se llama campo tangente a la variación f .

DEFINICIÓN 2.5. Una trayectoria $\omega \in \Omega(M; p, q)$ se llama crítica si y sólo si $(A_L \circ f)'(0) = 0$ para toda variación f de ω .

PROPOSICIÓN 2.3. Sean $\omega \in \Omega(M; p, q)$ y $W(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$; entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes

(i) ω es un punto crítico de $A_L|\Omega(M; p, q)$.

(ii) Para toda variación $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, T] \rightarrow M$ se satisface

$$(2.7) \quad \frac{d}{dt} \int_0^T L(f, \frac{\partial f}{\partial t}, t) dt \Big|_{s=0} = \int_0^T (L_x(\omega, \dot{\omega}, t) - \frac{d}{dt} L_v(\omega, \dot{\omega}, t)) W(t) dt = 0.$$

Demostración. La demostración es análoga a la que se hizo en \mathbb{R}^n , observando que

$$\begin{aligned} A_L \circ F &= \int_0^T L(f, \frac{\partial f}{\partial t}, t) dt. \\ \frac{d(A_L \circ F)}{ds}(0) &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} L(f, \frac{\partial f}{\partial t}, t) dt \\ &= \int_0^T [L_x(\omega, \dot{\omega}, t) W(t) + L_v(\omega, \dot{\omega}, t) \frac{W(t)}{dt}] dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes se obtienen las fórmulas (2.7). □

COROLARIO 2.2. $\omega \in \Omega(M; p, q)$ es un punto crítico de $A_L|\Omega(M; p, q)$ si y sólo si ω satisface la ecuación de Euler-Lagrange

$$(2.8) \quad L_x(\omega, \dot{\omega}, t) - \frac{d}{dt} L_v(\omega, \dot{\omega}, t) = 0.$$

Ahora se quiere definir un campo vectorial sobre $TM \times J$ cuyas órbitas proyectadas en M coincidan con las soluciones de L .

PROPOSICIÓN 2.4. Si L es convexo, existe un único campo vectorial C^2 el cual depende de $t, X_L(t), t \in J$ sobre TM tal que si $[a, b] \subset J$ y $u : [a, b] \rightarrow TM$ es C^1 , entonces $X_L(t, u(t)) = \dot{u}(t)$, para todo $t \in [a, b]$ si y sólo si $\pi \circ u : [a, b] \rightarrow M$ (donde $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección canónica) es solución de L .

Demostración. Dada $(x_0, v_0, t_0) \in TM \times J$ se tiene una solución de la forma $\omega : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow M$ de L tal que $\omega(t_0) = x_0; \dot{\omega}(t_0) = v_0$. Tales soluciones existen por la no degeneración de L ; al tomar una vecindad V de x_0 en M , una carta coordenada $\varphi : V \rightarrow \varphi(V)$ y considerando el Lagrangiano definido anteriormente $L_\varphi : \varphi(V) \times \mathbb{R}^n \times J \rightarrow \mathbb{R}$. Dado que $\frac{\partial^2 L_\varphi}{\partial v_i \partial v_j}$ es invertible, las ecuaciones de Euler-Lagrange de L_φ se pueden escribir en la forma $\ddot{\omega} = F(\omega, \dot{\omega}, t)$ donde F es C^{r-2} .

Entonces tomando la solución $y : (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \rightarrow \varphi(V)$ de esta ecuación con $y(t_0) = \varphi(x_0)$; $\dot{y}(t_0) = \varphi'(x_0)v_0$ y definiendo $\omega = \varphi^{-1} \circ y$. Es claro que esta es la solución deseada de L . Así definimos

$$X_L(t_0, x_0, v_0) = \left. \frac{d}{dt}(\omega(t), \dot{\omega}(t)) \right|_{t=t_0}.$$

□

La ecuación de Euler-Lagrange es una ecuación de segundo orden en M , y la hipótesis de convexidad permite escribir la ecuación de Euler-Lagrange en la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= (L_{vv})^{-1}(L_x - L_{vx}v). \end{aligned}$$

El campo vectorial X en TM asociado es el campo vectorial Lagrangiano y su flujo $\varphi : TM \times \mathbb{R} \rightarrow TM$, denotado por φ_t es el flujo de Euler-Lagrange o flujo Lagrangiano, el cual está definido por

$$\varphi_t(x_0, v_0) = (x(t), \dot{x}(t)),$$

donde $X : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ con condiciones iniciales $x(0) = x_0$ y $\dot{x}(0) = v_0$. Si M es compacta entonces φ es completo y x es solución máxima de la ecuación de Euler-Lagrange (ver [CI-1], pág. 5).

2. Ejemplos

EJEMPLO 2.1. Sea M una variedad Riemanniana con una conexión afín ∇ y se denota su métrica Riemanniana por $g = \langle \cdot, \cdot \rangle_x$ en TM ; se sabe que existe una única correspondencia que asocia un campo vectorial V a lo largo de una curva diferenciable $\omega : J \rightarrow M$ otro campo vectorial $\frac{DV}{dt}$ a lo largo de ω , denominada *derivada covariante* de V a lo largo de ω ; si además V es inducido por un campo de vectores sobre la variedad M ; es decir, $V(t) = Y(\omega(t))$ entonces $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{d\omega}{dt}} Y$, (ver [dC], págs. 50-52) entonces por el Teorema de Levi-Civita (ver [dC], pág. 55) sabemos que existe una única conexión afín ∇ que satisface:

1. ∇ es simétrica.
2. ∇ es compatible con la métrica Riemanniana.

Entonces el *Lagrangiano Riemanniano* en M está dado por la energía cinética

$$(2.9) \quad L(x, v, t) = \frac{1}{2} \|v\|_x^2 = \frac{1}{2} g_{ij}(x) v^i v^j.$$

con $v \in T_x M$ y la acción es

$$(2.10) \quad A_L(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, \dot{x}, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} g_{ij}(x) v^i v^j dt.$$

Como $L_{v^k} = g_{ki} v^i$ y $L_{x^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j$, las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt}(g_{ki} \dot{x}^i) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j;$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{ki}) \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ki}) \dot{x}_j \dot{x}_i + g_{ki} \ddot{x}_j$$

$$0 = g^{km} \left(-\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{ki}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ki}) \right) \dot{x}_j \dot{x}_i + g^{km} g_{ki} \ddot{x}_j$$

usando la identidad $\frac{\partial}{\partial x_j} g_{ik}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j = \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jk}(x) \dot{x}^i \dot{x}^j$ y los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{ij}^m = g^{km} \left(\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} g_{jk}(x) + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{ik}(x) - \frac{\partial}{\partial x^k} g_{ij}(x) \right\} \right)$$

obtenemos en coordenadas locales

$$(2.11) \quad 0 = x^m + \Gamma_{ij}^m \dot{x}^i \dot{x}^j.$$

Por lo tanto la ecuación de Euler-Lagrange asociada a 2.10 es la ecuación 2.11 de las geodésicas de g , que también se escriben como

$$(2.12) \quad \frac{D}{dt} \dot{x} = 0$$

donde $\frac{D}{dt}$ es la derivada covariante y su flujo de Euler-Lagrange es el flujo geodésico.

Desde un enfoque físico este ejemplo representa el movimiento libre de un punto-masa sobre una variedad; es decir, la ecuación 2.11 describe la trayectoria que sigue el punto-masa del punto a al punto b en M , sin la influencia exterior de una fuerza y la ecuación 2.9 es llamada la *energía cinética* (ver [Mo], págs. 9-11).

EJEMPLO 2.2. El *Lagrangiano mecánico* está dado por la energía cinética $T = \frac{1}{2} \|v\|_x^2 = \frac{1}{2} g_{ij}(x) v^i v^j$; con $v \in T_x M$; menos la energía potencial $U : M \rightarrow \mathbb{R}$

$$(2.13) \quad L(x, v, t) = \frac{1}{2} \|v\|_x^2 - U(x),$$

donde U es una función diferenciable. Así la acción es

$$A_L(x) = \int_{t_0}^{t_1} L(x, v, t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \|v\|_x^2 - U(x).$$

Entonces para encontrar los puntos críticos de $A_L(x)$ se calculan las ecuaciones de Euler-Lagrange. Así, $L_{x^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} (g_{ij}) v^i v^j - \frac{\partial}{\partial x^k} U(x)$ y $L_{v^k} = g_{ki} v^i$ usando el ejemplo anterior se obtiene

$$\ddot{x}^m + \Gamma_{ij}^m \dot{x}^i \dot{x}^j = -g^{km} \frac{\partial}{\partial x^k} U(x).$$

$$\frac{D}{dt} \dot{x} = -\nabla U(x).$$

donde ∇U es el gradiente de U con respecto a la métrica Riemanniana g , es decir

$$d_x U(v) = \langle \nabla U(x), v \rangle_x, \quad \forall (x, v) \in TM.$$

EJEMPLO 2.3. Un Lagrangiano se llama *simétrico* cuando

$$(2.14) \quad L(x, v) = L(x, -v) \quad \forall (x, v) \in TM.$$

y en tal caso su flujo de Euler-Lagrange es llamado *reversible* en el siguiente sentido: $\varphi_{-t}(v) = -\varphi_t(-v)$. La clase de Lagrangianos simétricos incluye los Lagrangianos mecánicos y Riemannianos.

Si uno añade una 1-forma ω al Lagrangiano se obtiene

$$\mathbb{L}(x, v) = L(x, v) + \omega_x(v).$$

Si ω es cerrada, las acciones de \mathbb{L} y L de la variación de una curva ω difieren por una constante y así, los funcionales tienen las mismas curvas críticas.

EJEMPLO 2.4. Llamamos *Lagrangiano electromagnético* a un lagrangiano de la forma

$$(2.15) \quad L(x, v) = \frac{1}{2} \|v\|_x^2 + \eta_x(v) - U(x),$$

donde $\|\cdot\|_x$ es una métrica Riemanniana, η es una 1-forma en M con $d\eta \neq 0$ y $U: M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función suave. Sea $Y: TM \rightarrow TM$ la transformación dada por

$$d\eta(u, v) = \langle Y(u), v \rangle,$$

entonces usando los ejemplos anteriores, la ecuación de Euler-Lagrange de 2.15 es

$$(2.16) \quad \frac{D}{dt} \dot{x} = Y_x(\dot{x}) - \nabla U(x).$$

Esta ecuación modela el movimiento de una partícula con carga y masa unitarias bajo el efecto de un campo electromagnético $(-\nabla U, Y)$.

Una discusión más amplia sobre los ejemplos, se encuentra en [CI-2].

3. Minimizantes locales y el Teorema de Weierstrass

DEFINICIÓN 2.6. Una curva ω en $\mathcal{H}_1([t_0, t_1], M)$, donde $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, es una minimizante de L cuando

$$A_L(\delta) \geq A_L(\omega)$$

para toda curva δ en $\mathcal{H}_1([t_0, t_1], M)$, con $\omega(t_0) = \delta(t_0)$, $\omega(t_1) = \delta(t_1)$. Se dice que es estrictamente minimizante cuando la desigualdad es estricta siempre que $\omega \neq \delta$.

Es claro que si existe una minimizante estricta que une a los puntos (t_0, p_0) , (t_1, p_1) , entonces es única.

TEOREMA 2.3. Teorema de Weierstrass. Sea $L: TM \times J \rightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangiano como en la definición 2.3. Entonces, para todo $p_0 \in M$, $t_0 \in J$ y $K > 0$ existe $\varepsilon > 0$ tal que si $t_0 < t_1 < t_0 + \varepsilon$ y $p_1 \in M$ satisfacen $d(p_0, p_1) \leq K(t_1 - t_0)$, entonces existe un minimizante estricto ω en $\mathcal{H}_1([t_0, t_1], M)$ que une (t_0, ω_0) con (t_1, ω_1) , donde ω es solución de L .

La demostración utiliza un método debido a Weierstrass, el cual aplicaremos para el caso de Lagrangianos. Primero se probará el Teorema cuando M es un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ considerando una clase especial de Lagrangianos.

LEMA 2.1. Sea $U_0 \subset \mathbb{R}^n$, $J_0 \subset \mathbb{R}$ conjuntos abiertos y $L_0: U_0 \times \mathbb{R}^n \times J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^3 tal que

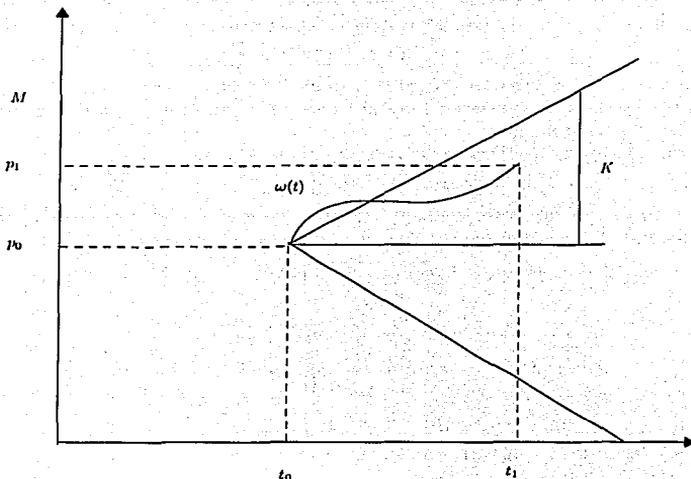


FIGURA 2. Gráfica del Teorema de Weierstrass

a) $L_0(x, v, t) > L_0(x, 0, t)$ para todo x y $v \neq 0$

b) Las funciones constantes $x(t) = x_0$, para todo $t \in J$ son soluciones de la ecuación de Euler-Lagrange para L_0 para toda $x_0 \in U_0$.

Entonces, para todo $x_0 \in \Omega(U; x_0, x_1)$ y $[t_0, t_1] \subset J_0$ la función constante $x(t) = x_0$ es un minimizante estricto que une a los puntos (t_0, x_0) con (t_1, x_1) .

Demostración. Por la propiedad (b) se tiene

$$(2.17) \quad \frac{\partial L_0}{\partial x}(x, 0, t) = 0,$$

para todo x, t , en efecto, dada $x_0 \in U_0$, la función constante $x(t) = x_0$ satisface

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t), t) \right) - \frac{\partial L_0}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t), t) = 0$$

o sea que

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_0}{\partial v}(x_0, 0, t) \right) - \frac{\partial L_0}{\partial x}(x_0, 0, t) = 0.$$

Por (a) se tiene que $\frac{\partial L_0}{\partial v}(x_0, 0, t) = 0$. Así $\frac{\partial L_0}{\partial x}(x_0, 0, t) = 0$.

Ahora sea $\delta : [t_0, t_1] \rightarrow U_0$ una función absolutamente continua con $\delta(t_0) = x_0 = \delta(t_1)$. Si δ no es constante, se sigue de la continuidad absoluta de δ que $\dot{\delta}(t) \neq 0$ para un conjunto $T \subset J_0$ de medida positiva de valores de t . Así, por (a) $L_0(\delta(t), \dot{\delta}(t), t) > L_0(\delta(t), 0, t)$ para $t \in T$ y $L_0(\delta(t), \dot{\delta}(t), t) \geq L_0(\delta(t), 0, t)$ para toda

$t \in J_0$, entonces

$$\int_{t_0}^{t_1} L_0(\delta(t), \dot{\delta}(t), t) > \int_{t_0}^{t_1} L_0(\delta(t), 0, t)$$

pero por (2.17), $L_0(\delta(t), 0, t) = L_0(x_0, 0, t)$ para toda t . Entonces,

$$A_{L_0}(\delta) = \int_{t_0}^{t_1} L_0(\delta(t), \dot{\delta}(t), t) dt > A_L(x_0)$$

□

Ahora se mostrará que un Lagrangiano $L : U \times \mathbb{R}^n \times J_0 \rightarrow \mathbb{R}$ se reduce localmente a un Lagrangiano que satisface las hipótesis del lema anterior.

DEFINICIÓN 2.7. Un campo de Mayer asociado a L , es una función $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 , donde $V \subset U \times J$ es un conjunto abierto, que satisface:

1. La proyección de V en \mathbb{R} es un intervalo $J_0 \subset \mathbb{R}$ tal que todas las soluciones máximas de la ecuación $\dot{x}(t) = \xi(t, x(t))$ están definidas en J_0 .
2. Todas las soluciones de $\dot{x} = \xi(t, x)$ son soluciones de las ecuaciones de Euler-Lagrange de L .
3. Existe un $t_0 \in J_0$ y una función de clase C^1 , $W_0 : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x, \xi(t_0, x), t_0) = \frac{dW_0}{dx}(x) \quad \forall x \in U.$$

Otra definición de campos de Mayer se encuentra en [Mo], pág. 31.

Sean $V_t = \{x \in U \mid (t, x) \in V\}$ y $\varphi_t : V_{t_0} \rightarrow V_t$, donde $\varphi_{t_0} = Id$ es la familia de difeomorfismos generados por la ecuación $\dot{x} = \xi(t, x)$ es decir

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x) = \xi(t, \varphi_t(x)) \quad \forall (t, x) \in U.$$

OBSERVACIÓN 2.2. Para hacer referencia al campo de Mayer, se usará $\xi_t(x)$ en lugar de $\xi(t, x)$.

LEMA 2.2. Existe una función de clase C^1 , $W : V \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x, \xi_t(x), t) = \frac{\partial W}{\partial x}(x, t).$$

Demostración. Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(\varphi_t(x), \xi_t(\varphi_t(x)), t) \dot{\varphi}_t(x) \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(\varphi_t(x), \xi_t(\varphi_t(x)), t) \dot{\varphi}_t(x) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial L}{\partial v}(\varphi_t(x), \xi_t(\varphi_t(x)), t) \frac{\partial}{\partial t} \dot{\varphi}_t(x) \right) = \frac{\partial L}{\partial x}(\varphi_t(x), \xi_t(\varphi_t(x)), t) \dot{\varphi}_t(x) + \\ &\quad \frac{\partial L}{\partial v}(\varphi_t(x), \xi_t(\varphi_t(x)), t) \dot{\xi}_t(x) = \frac{\partial}{\partial x} L(\varphi_t(x), \xi_t(\varphi_t(x)), t). \end{aligned}$$

Así al integrar

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\varphi_t(x), \xi_t(\varphi_t(x)), t) \dot{\varphi}_t(x) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, \xi_{t_0}(x), t) + \frac{\partial G}{\partial x}(x, t),$$

donde

$$G(x, t) = \int_{t_0}^{t_1} L(\varphi_s(x), \xi_s(\varphi_s(x)), t) ds.$$

Se define $W^* = W_0 + G$, entonces

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\varphi_t(x), \xi_t(\varphi_t(x)), t)\dot{\varphi}_t(x) = \frac{\partial W^*}{\partial x}(x, t)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x, \xi_t(x), t) = \frac{\partial W^*}{\partial x}(\varphi_t^{-1}(x), t)(\dot{\varphi}_t)^{-1}(x),$$

por lo tanto, al definir $W(x, t) = W^*(\varphi_t^{-1}(x), t)$, se obtiene lo que se quería demostrar $\frac{\partial L}{\partial v}(x, \xi_t(x), t) = \frac{\partial W}{\partial x}(x, t)$. \square

LEMA 2.3. Si $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo de Mayer asociado a L y $[a, b] \subset J_0$ (donde J_0 es la proyección de V en \mathbb{R}) entonces toda solución $x_0 : [a, b] \rightarrow V$ de $\dot{x} = \xi(t, x)$ es una minimizante estricta entre todas las funciones absolutamente continuas $\delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisfacen $\delta(a) = x_0(a)$, $\delta(b) = x_0(b)$ y $(t, \delta(t)) \in V$ para toda t .

Demostración.

Se elige $t_0 \in (a, b)$ y se define $V_t, \varphi_t : V_{t_0} \rightarrow V_t$ y $W : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ como en el lema anterior y $L_0 : V_{t_0} \times \mathbb{R}^n \times J_0 \rightarrow \mathbb{R}$

$$L_0(x, v, t) = L(\varphi_t(x), \dot{\varphi}_t(x)v + \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x), t) - \frac{\partial W}{\partial x}(\varphi_t(x, t))\dot{\varphi}_t(x)v - \frac{\partial W}{\partial t}(\varphi_t(x), t).$$

A toda curva absolutamente continua $x : [a, b] \rightarrow V_{t_0}$, se le asocia $x^* : [a, b] \rightarrow U$ definida por $x^*(t) = \varphi_t(x(t))$. Toda curva absolutamente continua $\delta : [a, b] \rightarrow V_{t_0}$ satisface $(t, \delta(t)) \in V$ para toda t , y se puede escribir como $\delta = x^*$ para $x(t) = \varphi_t^{-1}(\delta(t))$. Además

$$(2.18) \quad A_{L_0}(x) = A_L(x^*) - [W(\varphi_b(x(b))), b] - W(\varphi_a(x(a)), a)]$$

pues

$$\begin{aligned} A_{L_0}(x) &= \int_a^b L(\varphi_t(x(t)), \dot{\varphi}_t(x(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(x(t)), t) dt - \\ &\quad \int_a^b ((\frac{\partial W}{\partial x}(\varphi_t(x(t))), \dot{\varphi}_t(x(t))\dot{x}(t) + \frac{\partial W}{\partial t}(\varphi_t(x(t)), t)) dt = \\ &\quad A_L(x^*) - \int_a^b \frac{d}{dt} W(\varphi_t(x^*(t)), t) dt = \\ &\quad A_L(x^*) - W(\varphi_b(x(b)), t) - W(\varphi_a(x(a)), a). \end{aligned}$$

Por lo tanto x es una minimizante estricta de A_{L_0} que une los puntos $(a, z(a))$ con $(b, z(b))$ si y sólo si x^* es una minimizante estricta de A_L entre todas las curvas absolutamente continuas $\delta : [a, b] \rightarrow U$ que unen a $(a, \varphi_a(z(a)))$ con $(b, \varphi_b(z(b)))$ y que satisfacen $(t, \delta(t)) \in V$ para toda t . Pero $z = x^*$ donde x es la función constante $x(t) = z(a)$. Así, si se demuestra que la función constante x es una minimizante estricta de A_{L_0} entonces el lema queda demostrado. Para ello es suficiente mostrar que L_0 satisface las hipótesis del lema 2.1. Ahora se verificará que satisface la hipótesis (b). Si $x : [a, b] \rightarrow V_{t_0}$ es una constante, entonces x^* tiene la forma $t \rightarrow \varphi_t(z)$ para alguna z y entonces es solución de $\dot{x} = \xi_t(x)$. Por otra parte dado que sobre un espacio de funciones con valores en la frontera dados, A_L y A_{L_0} difieren por una

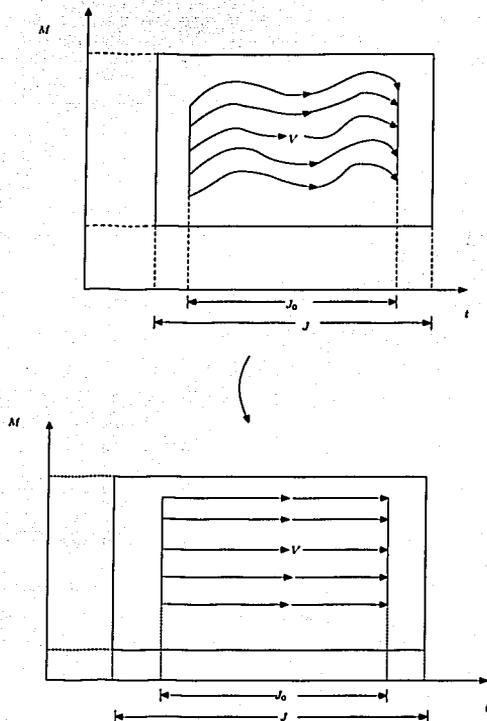


FIGURA 3. Gráfica del lema 2.3

constante (esto se sigue de 2.18), entonces se sigue que x es solución de L_0 si y sólo si x^* es solución de L . Así, las constantes son soluciones de L_0 . Ahora se verificará la hipótesis (a); observe que L_0 es convexa en las fibras, pues L lo es (por hipótesis) y L_0 se obtiene en las fibras componiendo L con una transformación lineal y añadiendo una transformación afín. Una vez que se sabe que L_0 es convexa en las fibras, la hipótesis (a) es equivalente a

$$\frac{\partial L_0}{\partial v}(x, 0, t) = 0,$$

para toda x y y , pero

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_0}{\partial v}(x, 0, t) &= \frac{\partial L}{\partial v}(\varphi_t(x), \xi(\varphi_t(x)), t)\dot{\varphi}_t(x) - \frac{\partial W}{\partial x}(\varphi_t(x), t)\dot{\varphi}_t(x) = \\ & \left(\frac{\partial L}{\partial v}(\varphi_t(x), \xi(\varphi_t(x)), t) - \frac{\partial W}{\partial x}(\varphi_t(x), t) \right) \dot{\varphi}_t(x) = 0. \end{aligned}$$

y esto demuestra el lema. \square

LEMA 2.4. Dado $x_0 \in U$, $t_0 \in J$ y $C_1 > 0$, existe un $\varepsilon_1 > 0$ y una vecindad W de x_0 tal que para toda $v \in \mathbb{R}$ con $|v| \leq C_1$ existe un campo de Mayer $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $[t_0 - \varepsilon_1, t_0 + \varepsilon_1] \times W \subset V$ y $\xi(t_0, x_0) = v$.

Demostración. Dado que $v_0 \in \mathbb{R}^n$, se toma una vecindad W_{v_0} de x_0 y una función $\xi_0 : W_{v_0} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface

$$\frac{\partial L}{\partial v}(x, \xi_0(x), t_0) = \frac{\partial L}{\partial v}(x_0, v_0, t_0),$$

para toda $x \in W_{v_0}$. Esta función existe por el Teorema de la función implícita pues $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x_0, v_0, t_0)$ es invertible, entonces existe un $\delta(v_0) > 0$ tal que para toda $p \in W_{v_0}$ la solución x_0 de L con condición inicial $x_p(t_0) = p$, $\dot{x}_p(t_0) = \xi_0(p)$ está definida en $[t_0 - \delta(v_0), t_0 + \delta(v_0)]$. Definimos $\varphi_t(p) = x_p(t)$. Al hacer $\delta(v_0)$ lo suficientemente pequeño se puede suponer que φ_t es un difeomorfismo para $|t - t_0| \leq \delta(v_0)$; pues $\varphi_0 = Id$. Entonces si

$$V = \{(t, \varphi_t(p)) \mid |t - t_0| < \delta(v_0), p \in W_{v_0}\}$$

y el campo vectorial $\xi(t, \varphi_t(p)) = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}(p) = \dot{x}_p(t)$. Regresando a los campos de Mayer, con $W_0(x) = \frac{\partial L}{\partial v}(x_0, v_0, t_0)x$. Finalmente se observa que dada $C_1 > 0$, existe una vecindad W de x_0 y $\varepsilon_1 > 0$ tal que si $|v| < C_1$ entonces $W \subset W_{v_0}$ y $\delta(v) > \varepsilon_1$. Esto se sigue de la dependencia continua de las soluciones en las condiciones iniciales. \square

LEMA 2.5. Dada una vecindad W de x_0 y $K > 0$, existe $\varepsilon_2(W, K) = \varepsilon_2 > 0$ tal que $|v| \leq K$ y $x_1(t) = x_0 + (t - t_0)v$ entonces

$$A_L(x_1/[t_0, t_0 + \varepsilon_2]) < A_L(x)$$

para toda curva absolutamente continua $\omega : [t_0, t_0 + \varepsilon_2] \rightarrow U$ tal que $\omega(t_0) = \omega_0$, $\omega(t_0 + \varepsilon_2) = \omega_1(t_0 + \varepsilon_2)$ que viven en W .

Demostración. Por la superlinealidad de L se sabe que existe $B > 0$ tal que $L(x, v, t) \geq |v| - B$, para toda x , v entonces

$$A_L(z) = \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon_2} L(z, \dot{z}, t) dt \geq \int_{t_0}^{t_0 + \varepsilon_2} |\dot{z}| dt - B\varepsilon_2.$$

La propiedad $z(t) \notin W$ para alguna t implica que $|z(t) - x_0| \geq c$ donde $c = \inf\{|y - \omega_0|; y \notin W\}$. Entonces

$$A_L(z) \geq \int_{t_0}^t |\dot{z}| dt - B\varepsilon_2 \geq |z(t) - x(t_0)| - B\varepsilon_2 \geq c - B\varepsilon_2$$

con lo cual existe $D = D(K)$ tal que $A_L(x_1/[t_0, t_0 + \varepsilon_2]) \leq D\varepsilon_2$. Por lo tanto el lema está demostrado si ε_2 es más pequeño que $(D + B)\varepsilon_2 < c$. \square

LEMA 2.6. Para todo $C_1 > K > 0$ existe un $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeña tal que si $|x_1 - x_0| < K\varepsilon$ entonces existe una solución $x : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow U$ de L tal que $x(t_0) = x_0, x(t_0 + \varepsilon) = x_1$ y $|\dot{x}(t_0)| < C_1$.

Demostración. La ecuación de Euler-Lagrange de L tiene la forma $\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$. Dado que $C_1 > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que para toda $c \in \mathbb{R}^n$ con $|v| < C_1$, la solución x_v de $\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$ con condiciones iniciales $x_v(t_0) = x_0, \dot{x}_v(t_0) = v$ está definida en $[t_0, t_0 + \delta]$, entonces al integrar dos veces $\ddot{x}_v = F(x_v, \dot{x}_v, t)$ se tiene

$$x_v(t) = x_0 + (t - t_0)v + \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^u F(x_v, \dot{x}_v, s) ds \right) du$$

entonces

$$x_v(t) = x_0 + (t - t_0)v + (t - t_0)\phi_t(v)$$

donde

$$\phi_t(v) = \frac{1}{t - t_0} \int_{t_0}^t \left(\int_{t_0}^u F(x_v, \dot{x}_v, s) ds \right) du.$$

Entonces por la dependencia continua de las condiciones iniciales se sigue que $\phi_t \rightarrow 0$ en la topología C^1 con $|v| \leq C_1$ cuando $t \rightarrow t_0$. Entonces $v \rightarrow \phi_t(v) + v$ es C^1 cerca de la identidad en la topología C^1 cuando $t \rightarrow t_0$, esto implica que si ε es pequeño y $|w| \leq K$ existe v con $|v| \leq C_1$ tal que $w = v + \phi_\varepsilon(v)$. Así, si $|x_1 - x_0| \leq K\varepsilon$, existe v con $|v| \leq C_1$ tal que

$$v + \phi_\varepsilon(v) = \frac{x_1 - x_0}{\varepsilon}$$

entonces

$$x_v(t_0 + \varepsilon) = x_0 + \varepsilon v + \varepsilon \phi_\varepsilon(v) = x_1$$

y $\dot{x}_v(t_0) = v$ que satisface $|v| < C_1$. \square

Demostración. (Del Teorema de Weierstrass en \mathbb{R}^n .) Dado $K > 0$, se puede tomar $C_1 > K$, $\varepsilon_1 > 0$ y W dado en el lema 2.4. Al tomar $\varepsilon > 0$ dado por el lema 2.6; suponga que $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ y $0 < \varepsilon < \varepsilon(W, C_1)$ dados por el lema 2.5, además se supone $|x_1 - x_0| \leq C\varepsilon$. Se define

$$v_0 = \frac{(x_1 - x_0)}{\varepsilon}; \quad z(t) = x_0 + (t - t_0)v_0,$$

entonces $z(t_0 + \varepsilon) = x_1$; pues de otra manera por el lema 2.6 existe una solución $x : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow U$ de L tal que

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_0 + \varepsilon) = x_1, \quad |\dot{x}(t_0)| \leq C_1$$

así la última ecuación implica que $x(t) \in W$ para toda $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$, si ε es lo suficientemente pequeño. Se mostrará que x es un minimizante estricto y se supone que existen $\delta : [t_0, t_0 + \varepsilon] \rightarrow U$ curvas absolutamente continuas con $\delta(t_0) = x_0$, $\delta(t_1) = x_1$ y $A_L(\delta) \leq A_L(x)$. Se puede suponer que $\delta \in W$ para toda $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ pues si estas propiedades fallan, se tiene por el lema 2.5 que

$$A_L(z/[t_0, t_0 + \varepsilon]) < A_L(x),$$

y se puede sustituir δ por $z/[t_0, t_0 + \varepsilon]$ en el argumento que sigue. Pero ahora conociendo que $\delta(t) \in W$ para toda $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ se obtiene por el lema 2.4 que $A_L(\delta) > A_L(x)$ pues el lema dice que existe un campo de Mayer $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ cuyo

dominio V cubre a W y satisface $\xi(t_0, x_0) = \dot{x}(t_0)$ (pues $|\dot{x}(t_0)| < C_1$) entonces $(t, \delta(t)) \in V$ para toda $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon]$ y dado que x es la solución de $\dot{x} = \xi(t, x)$ con $x(t_0) = x_0$ se sigue del lema 2.4 que $A_L(x) < A_L(\delta)$. \square

Demostración. (Del Teorema de Weierstrass, cuando M es variedad.) El caso general se sigue de esto tomando una vecindad abierta U del punto $\omega_0 \in M$ y observando el caso particular del teorema ya demostrado, muestra que si $\varepsilon > 0$ y $d(\omega_1, \omega_2) < K\varepsilon$ entonces existe una solución de L que une a (t_0, ω_0) con $(t_0 + \varepsilon, \omega_1)$ que es un minimizante estricto sobre todas las curvas absolutamente continuas que unen (t_0, ω_0) con $(t_0 + \varepsilon, \omega_1)$ con valores en U , pero ω es un minimizante estricto porque por el lema 2.6 dada una curva absolutamente continua que une a (t_0, ω_0) con $(t_0 + \varepsilon, \omega_1)$ que no toma un valor en U existe otra curva absolutamente continua que une (t_0, ω_0) con $(t_0 + \varepsilon, \omega_1)$ que toma valores en U y tiene una acción estrictamente pequeña; repitiendo estos argumentos se tiene la demostración del teorema. \square

La generalización del Teorema de Weierstrass es el Teorema de Tonelli, el cual pide como hipótesis adicional que la variedad M sea completa para poder garantizar la existencia de un minimizante absolutamente continuo en un abierto de M , una demostración del teorema de Tonelli se encuentra en [Ma], págs. 37-45.

CAPÍTULO 3

El índice de Morse

En este capítulo se obtiene la segunda derivada o hessiano de la acción, la cual se denotará por $\text{Hess } A_L$; bajo la hipótesis que L es autónomo; se define funcional bilineal, se dice cuando es definida positiva (negativa) y se define el índice. El cálculo de $\text{Hess } A_L$ se hace en $C^r([a, b], U)$ donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es abierto; se prueba un resultado acerca de las minimizantes y se presenta una formulación variacional de $\text{Hess } A_L$. Lo anterior se traslada a $\Omega(M; p, q)$ y $\xi, \eta \in \Omega(M; p, q)_\omega$ de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Hess } A_L(\xi, \eta) &= \int_0^1 [L_{vv}(\dot{\xi}, \dot{\eta}) + L_{vx}(\dot{\xi}, \dot{\eta}) + L_{xv}(\xi, \dot{\eta}) + L_{xx}(\xi, \eta)] dt \\ &= \int_0^1 [(L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt})(\xi, \eta) - \frac{d}{dt}(L_{vv}\dot{\eta})\xi] dt. \end{aligned}$$

La última integral da la pauta para definir los campos de Jacobi, a saber, η es campo de Jacobi si y sólo si satisface

$$\frac{d}{dt} L_{vv}(\dot{\eta}) - (L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt})\eta = 0.$$

Se prueba una caracterización de los campos de Jacobi, que viene de la linealización de una ecuación diferencial no autónoma. Se define el concepto de puntos conjugados a lo largo de la trayectoria crítica ω , así como la multiplicidad de este tipo de puntos. Se define el espacio nulo de $\text{Hess } A_L(\omega)$ así como su nulidad. Para concluir este capítulo, se prueba el siguiente *Teorema de invariancia*:

El índice de Morse λ es finito y no cambia si es reemplazado el espacio $\Omega(M; p, q)_\omega$ por cualquier espacio E que satisfice

$$\Omega(M; p, q)_\omega \subset E \subset \mathcal{H}_1(I, M)_\omega.$$

Este resultado es de mucha importancia pues el espacio que se usa en la demostración del teorema del índice no es el espacio tangente a una variedad de Banach o de Hilbert, pero a pesar de ello, satisface las condiciones del teorema de invariancia.

1. La segunda variación

DEFINICIÓN 3.1. Sea E un espacio lineal normado y $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional. Decimos que B es bilineal, si para toda $x, y, z \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ se satisface

- $B(\alpha x, y) = \alpha B(x, y) = B(x, \alpha y)$.
- $B(x + y, z) = B(x, z) + B(y, z)$; $B(x, y + z) = B(x, y) + B(x, z)$.

Si además $B(x, y) = B(y, x)$ entonces decimos que B es simétrica.

Una funcional bilineal se llama definida positiva (negativa) si $B(x, x) > 0 (< 0)$ para toda $x \neq 0$ y $x \in E$. El índice de B es la máxima dimensión de un subespacio en el cual es definido negativa.

DEFINICIÓN 3.2. El Lagrangiano $L(x, v, t)$ es autónomo si es independiente de t ; es decir $L_t = 0$.

A partir de este capítulo en adelante, supondremos que el Lagrangiano L es autónomo.

TEOREMA 3.1. *La segunda derivada de la acción $A_L : C^r([a, b], U) \rightarrow \mathbb{R}$ para $r \geq 2$ en $x \in C^r([a, b], U)$; donde x es un punto crítico; está dada por*

$$(3.1) \quad \text{Hess } A_L(x)(h, g) = \int_a^b [L_{xx}(x(t), \dot{x}(t))(h, g) + L_{xv}(x(t), \dot{x}(t))(h, \dot{g}) + \\ L_{vx}(x(t), \dot{x}(t))(\dot{h}, g) + L_{vv}(x(t), \dot{x}(t))(\dot{h}, \dot{g})] dt.$$

donde $h, g \in C^r([a, b], U)$.

Demostración. Recordemos de la demostración de la proposición 2.1 que A_L es la composición de la transformación afín continua dada en (2.2), la transformación \bar{L} en (2.3) y la integración. Por lo tanto

$$\text{Hess } A_L(x) = \int d^2 \bar{L}_{(T(x), t)} \circ (T, T),$$

o sea

$$\begin{aligned} \text{Hess } A_L(x)(h, g) &= \int_a^b d^2 L_{(T(x(t), t))} (T(h)(t), T(g)(t)) dt \\ &= \int_a^b [L_{xx}(x(t), \dot{x}(t))(h, g) L_{xv}(x(t), \dot{x}(t))(h, \dot{g}) \\ &+ L_{vx}(x(t), \dot{x}(t))(\dot{h}, g) + L_{vv}(x(t), \dot{x}(t))(\dot{h}, \dot{g})] dt. \end{aligned}$$

□

Del teorema anterior, es claro que el Hess A_L es una función bilineal simétrica.

OBSERVACIONES 3.1.

1. Para referirse al hessiano se escribirá Hess $A_L(h, g)$ o Hess $A_L(x)(h, g)$ indistintamente.
2. De igual manera se escribirá $L_{vv}(\dot{h}, \dot{g})$ o $L_{vv}(x)(\dot{h}, \dot{g})$ indistintamente; análogamente para $L_{vx}(\dot{h}, g)$, $L_{xv}(h, \dot{g})$ y $L_{xx}(h, g)$.

COROLARIO 3.2. *Sean x, h, g y L como en el teorema 3.1 entonces la segunda variación de A_L es*

$$(3.2) \quad \text{Hess } A_L(h, g) = \int_a^b \frac{d}{dt} (L_{vx}(h, g)) - \frac{dL_{vx}}{dt}(h, g) + \frac{d}{dt} (L_{vv}(h, \frac{dg}{dt})) \\ + \int_a^b L_{xx}(h, g) - \frac{d}{dt} (L_{vv}(\cdot, \frac{dg}{dt})) h$$

Demostración. Como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (L_{vx}(h, g)) &= \frac{dL_{vx}}{dt}(h, g) + L_{vx}(\frac{dh}{dt}, g) + L_{vx}(h, \frac{dg}{dt}) \\ \frac{d}{dt} (L_{vv}(h, \frac{dg}{dt})) &= L_{vv}(\frac{dh}{dt}, \frac{dg}{dt}) + \frac{d}{dt} (L_{vv}(\cdot, \frac{dg}{dt})) h \end{aligned}$$

al sustituir en 3.1 obtenemos (3.2)

□

OBSERVACIÓN 3.2. El cálculo de la segunda derivada es equivalente al cálculo de la segunda variación.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{d\varepsilon^2}A_L(\gamma_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} &= \int_a^b [L_{xx}(h, h) + L_{xv}(h, \dot{h}) + L_{vx}(\dot{h}, h) + L_{vv}(\dot{h}, \dot{h})]dt \\ \text{Hess } A_L(x_0)(h) &= \int_a^b [L_{vv}(\dot{h}, \dot{h}) + 2L_{xv}(h, \dot{h}) + L_{xx}(h, h)]dt,\end{aligned}$$

donde $\gamma_\varepsilon = x^*(t) + \varepsilon h(t)$, $x^* \in \Omega(U; p_0, p_1)$ es una trayectoria crítica, $h \in \Omega(U; p_0, p_1)$ y $h' \in \Omega(U; p_0, p_1)_x$, donde $\gamma_\varepsilon \subset U$ para valores pequeños de ε .

TEOREMA 3.3. Sea $x^* \in C^r([a, b], U)$ una minimizante entonces

$$L_{vv}(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)(\zeta, \zeta) \geq 0,$$

para toda $t \in [a, b]$ y toda $\zeta \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea γ_ε como en la observación 3.2 entonces

$$(3.3) \quad 0 \leq \frac{d^2}{d\varepsilon^2}A_L(\gamma_\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_a^b [L_{xx}(h, h) + 2L_{xv}(h, \dot{h}) + L_{vv}(\dot{h}, \dot{h})]dt.$$

Sea $\zeta \in \mathbb{R}^n$ y $\tau \in (a, b)$ construiremos una función especial $h \in \Omega(u; 0, 0)_x$ de la siguiente manera

$$h_j(t) = \zeta_j \psi\left(\frac{t-\tau}{\varepsilon}\right),$$

donde $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ la cual satisface $\psi(\lambda) = 0$ para $|\lambda| \geq 1$ y

$$\int_{\mathbb{R}} (\dot{\psi})^2 d\lambda = 0.$$

Como ψ depende de una nueva variable λ , entonces $t = \tau + \varepsilon\lambda$, así $\varepsilon^{-1}dt = d\lambda$ y

$$\dot{h}_j(t) = \zeta_j \dot{\psi} \varepsilon^{-1}.$$

Entonces al sustituir en 3.3 obtenemos

$$0 \leq \int_a^b L_{vv}(\zeta, \zeta) \dot{\psi}(\lambda) \varepsilon^{-3} d\lambda + O(\varepsilon).$$

así para $\varepsilon > 0$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tiene

$$L_{vv}(x^*(\tau), \dot{x}^*(\tau), \tau)(\zeta, \zeta) \geq 0$$

El teorema 3.1 es válido para los espacios $\Omega(U; p_0, p_1)$ y $\Omega(M; p, q)$. □

TEOREMA 3.4. Sean $\omega \in \Omega(M, p, q)$ y $\xi, \eta \in \Omega(M; p, q)_\omega$ entonces

$$(3.4) \quad \begin{aligned}\text{Hess } A_L(\xi, \eta) &= \int_0^T [L_{vv}(\dot{\xi}, \dot{\eta}) + L_{vx}(\xi, \eta) + L_{xv}(\xi, \dot{\eta}) + L_{xx}(\xi, \eta)]dt \\ &= \int_0^T [(L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt})(\xi, \eta) - \frac{d}{dt}(L_{vv}\dot{\eta})\xi]dt.\end{aligned}$$

La segunda derivada se puede calcular utilizando variaciones en $\Omega(M; p, q)_\omega$ de la siguiente manera. Sean $\omega \in \Omega(M; p, q)$ una trayectoria crítica y $\xi, \eta \in \Omega(M; p, q)_\omega$. Elijamos una variación a dos parámetros $f : V \times [0, T] \rightarrow U$, donde V es una vecindad del $0 \in \mathbb{R}^2$, tales que

$$(3.5) \quad f(0, 0, t) = \omega(t), \quad \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0, t) = \xi(t), \quad \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0, t) = \eta(t),$$

entonces definimos $\text{Hess } A_L(\omega) : \Omega(M; p, q)_\omega \times \Omega(M; p, q)_\omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$(3.6) \quad \text{Hess } A_L(\omega)(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 (A_L \circ f)}{\partial u \partial s}(0, 0).$$

Así el teorema 3.1 se reescribe como

TEOREMA 3.5. *Sea f una variación a dos parámetros de la trayectoria crítica ω con campos tangentes ξ, η como en (3.5). Entonces*

$$(3.7) \quad \text{Hess } A_L(\xi, \eta) = \int_0^T [L_{vv}(\dot{\xi}, \dot{\eta}) + L_{vx}(\dot{\xi}, \eta) + L_{xv}(\xi, \dot{\eta}) + L_{xx}(\xi, \eta)] dt \\ = \int_0^T [(L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt})(\xi, \eta) - \frac{d}{dt}(L_{vv}\dot{\eta})\xi] dt.$$

2. Campos de Jacobi y puntos conjugados

DEFINICIÓN 3.3. Un campo vectorial diferenciable η a lo largo de la trayectoria crítica $\omega \in \Omega(M; p, q)$ es un *campo de Jacobi* si se tiene

$$(3.8) \quad \frac{d}{dt}(L_{vv}(\omega, \dot{\omega}) \frac{d\eta}{dt}) - [L_{xx}(\omega, \dot{\omega}) - \frac{d}{dt}L_{vx}(\omega, \dot{\omega})]\eta = 0.$$

La ecuación 3.8 se le llama ecuación de Jacobi.

A continuación se obtendrá la ecuación de Jacobi como la linealización de la ecuación de Euler-Lagrange, y los campos de Jacobi quedarán caracterizados por la ecuación (3.9). La demostración que el flujo φ_t es diferenciable se encuentra en [H-S], capítulo 15.

PROPOSICIÓN 3.1. *Sea $\omega \in \Omega(M; p, q)$ una trayectoria crítica, por lo que escribimos $\varphi_t(\omega(0), \dot{\omega}(0)) = (\omega(t), \dot{\omega}(t))$, donde φ_t es el flujo asociado a la ecuación 3.8. Entonces para cualesquiera $v, w \in T_{\omega(0)}M$ tenemos que*

$$(3.9) \quad \eta(t) = D(\varphi_t)(\omega(0), \dot{\omega}(0))(v, w)$$

es un campo de Jacobi a lo largo de ω . Recíprocamente cualquier campo de Jacobi a lo largo de ω es de la forma (3.9)

Demostración. Sea $\beta(u) = (a(u), b(u)) \in TM$ tal que

$$\beta(0) = (\omega(0), \dot{\omega}(0)), \quad a'(0) = v, \quad \frac{db}{ds}(0) = w.$$

Entonces $\varphi_t(\beta(u)) = (f(u, t), \frac{\partial f}{\partial t}(u, t))$ donde f es una variación a un parámetro de

ω tal que cada $F(u)$ es una trayectoria crítica. Sea $\eta(t) = \frac{\partial f}{\partial u}(0, t)$, entonces

$$D\varphi_t(\omega(0), \dot{\omega}(0))(v, w) = (\eta(t), \frac{d\eta}{dt}).$$

Así

$$L_x(f, \frac{\partial f}{\partial t}) = \frac{\partial}{\partial t} L_v(f, \frac{\partial f}{\partial t}).$$

Derivando respecto a u y evaluando en $u = 0$

$$\begin{aligned} L_{xx}(\omega, \dot{\omega})\eta + L_{xv}(\omega, \dot{\omega})\frac{d\eta}{dt} &= \frac{d}{dt}(L_{vx}(\omega, \dot{\omega})\eta + L_{vv}(\omega, \dot{\omega})\frac{d\eta}{dt}) \\ &= \frac{d}{dt}(L_{vx}(\omega, \dot{\omega}))\eta + L_{vx}(\omega, \dot{\omega})\frac{d\eta}{dt} + \frac{d}{dt}(L_{vv}(\omega, \dot{\omega})\frac{d\eta}{dt}), \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\frac{d}{dt}(L_{vv}(\omega, \dot{\omega})\frac{d\eta}{dt}) - (L_{xx}(\omega, \dot{\omega}) - \frac{d}{dt}L_{vx}(\omega, \dot{\omega}))\eta = 0$$

Sea ξ un campo de Jacobi a lo largo de ω y sean $v = \xi(0)$, $w = \frac{d\xi}{dt}(0)$. El campo η definido por (3.9) es un campo de Jacobi con $\eta(0) = v$, $\frac{d\eta}{dt}(0) = w$, así por la unicidad de las soluciones de la ecuación (3.8), obtenemos $\xi = \eta$. \square

DEFINICIÓN 3.4. El espacio vertical en $\theta \in TM$ es $V(\theta) = \ker(D\pi(\theta))$. Dos puntos $\theta_1, \theta_2 = \varphi_T(\theta_1)$, $T \neq 0$ se llaman *conjugados* si

$$D\varphi_T(V(\theta_1)) \cap V(\theta_2) \neq \{0\}.$$

Por la Proposición 3.1 esto es equivalente a decir que existe un campo de Jacobi $\eta \neq 0$ a lo largo de $\omega(t) = \pi\varphi_t(\theta_1)$, tal que $\eta(0) = 0 = \eta(T)$. Diremos también que los puntos $\omega(0) = p$ y $\omega(T) = q$ son conjugados a lo largo de ω . Observe que cualquier campo de Jacobi η a lo largo de ω tal que $\eta(0) = 0$, se puede escribir como $\eta(t) = D(\pi\varphi_t|_{T_pM})_{\theta_1} w$, con $w \in T_pM$.

La *multiplicidad* de p y q como puntos conjugados se define como

$$\dim D\varphi_T(V(\theta_1)) \cap V(\theta_2) = \dim \ker D(\pi\varphi_T|_{T_pM})_{\theta_1},$$

que es el número máximo de campos de Jacobi linealmente independientes que se anulan en 0 y T .

Geoméricamente $V(\theta)$ es el espacio tangente a la fibra $T_xM \subset TM$ en el punto θ , una formulación de la ecuación de Jacobi para geodésicas se encuentra en [Pat].

DEFINICIÓN 3.5. Sea $\omega \in \Omega(M; p, q)$ una trayectoria crítica, el *espacio nulo* de $\text{Hess } A_L(\omega)$ es el espacio vectorial $\ker \text{Hess } A_L$ que consiste de todos los campos vectoriales $\eta \in \Omega(M; p, q)_\omega$ tales que $\text{Hess } A_L(\omega)(\xi, \eta) = 0$ para toda ξ .

La *nullidad* de $\text{Hess } A_L$ es $\nu = \dim \ker \text{Hess } A_L$. Si $\nu > 0$, decimos que $\text{Hess } A_L$ es degenerado.

TEOREMA 3.6. Un campo vectorial $\eta \in \Omega(M; p, q)_\omega$ pertenece al espacio nulo de $\text{Hess } A_L$ si y sólo si η es un campo de Jacobi que se anula en 0 y T .

Demostración. Sea η un campo de Jacobi tal que $\eta(0) = 0 = \eta(T)$, así $\eta \in \Omega(M; p, q)_\omega$, aplicando la ecuación 3.7 obtenemos

$$\text{Hess } A_L(\xi, \eta) = \int_0^T [(L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt})(\xi, \eta) - \frac{d}{dt}(L_{vv}\eta)\xi] dt$$

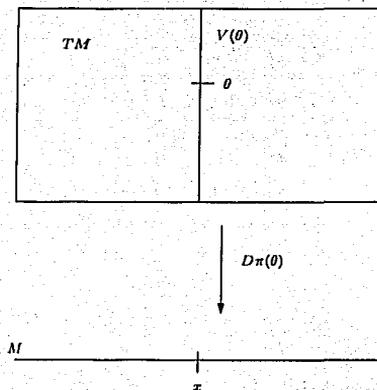


FIGURA 1. Interpretación geométrica del espacio vertical.

Como η satisface 3.8, $\text{Hess } A_L(\xi, \eta) = 0$ y por lo tanto $\eta \in \ker \text{Hess } A_L$.

Ahora supóngase que $\text{Hess } A_L(\xi, \eta) = 0$ para toda $\xi \in \text{Sea } Z$ el campo vectorial tal que

$$\frac{d}{dt} L_{vv}(\cdot, \frac{d\eta}{dt})X - (L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt})(X, \eta) = \langle Z, X \rangle$$

para toda $X \in T_{\omega(t)}M$, entonces

$$\begin{aligned} \text{Hess } A_L(Z, \eta) &= \int_0^T [L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt} Z(t), \eta) - \frac{d}{dt} L_{vv}(\cdot, \frac{d\eta}{dt})] dt \\ &= \int_0^T |Z(t)|^2 dt = 0 \end{aligned}$$

de donde $Z(t) \equiv 0$ □

COROLARIO 3.7. *Hess A_L es degenerado si y sólo si los puntos finales p y q son conjugados a lo largo de ω y la nulidad de Hess A_L es igual a la multiplicidad de p y q como puntos conjugados.*

OBSERVACIÓN 3.3. La ecuación de Jacobi (3.8) es una ecuación lineal de segundo orden, por lo tanto, si un campo de Jacobi tiene una infinidad de ceros en el intervalo $[0, a]$, entonces hay un punto de acumulación de estos ceros y entonces la derivada del campo en ese punto también se anula. Por la unicidad de soluciones de (3.8), el campo se anula idénticamente. Por lo tanto el número de ceros de un campo de Jacobi en un intervalo $[0, a]$ es finito.

3. La invariancia del índice de Morse

En el capítulo 2, el hessiano de $A_L(\omega)$ se calculó en los espacios $\Omega(U; p_0, p_1)_\omega$ ú $\Omega(M; p, q)_\omega$. Sin embargo $\text{Hess } A_L(\omega)$ puede extenderse al espacio $H_1(I, \mathbb{R}^n)$ o

$H_1(I, M)_\omega$ utilizando la misma fórmula. Para demostrar el teorema de invariancia necesitamos algunos resultados que se presentan a continuación.

PROPOSICIÓN 3.2. Sea \mathbf{A} una matriz en $\mathfrak{M}(\mathbb{R}, 2n \times 2n)$ dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde las matrices A, B, C, D están en $\mathfrak{M}(\mathbb{R}, n \times n)$ y cada $a_{ij}(t), b_{ij}(t), c_{ij}(t), d_{ij}(t)$ son funciones continuas de t en $[0, T] \subset \mathbb{R}$, con $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$. Sea D una matriz definida positiva. Entonces existe $q(t)$ una forma bilineal simétrica definida positiva en \mathbb{R}^n que depende continuamente de t tal que la matriz

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} q + A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

es definida positiva para toda $t \in [0, T]$.

Demostración. Sea $t_0 \in [0, T]$ y escribese la matriz \mathbf{A} como

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

donde $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ están evaluadas en t_0 . Como D es definida positiva, entonces todos los menores angulares son positivos, es decir el menor de orden k se encuentra en las primeras k filas y k columnas de su matriz, donde $1 \leq k \leq n$ y se denotará por $\det(d_{kk})$ así, $\det(d_{kk}) > 0$. Ahora formese la matriz dada por

$$D_1 = \begin{pmatrix} a_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ c_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Así, si $\det(D_1) > 0$ se sigue que D_1 es definida positiva; en caso contrario, si $\det(D_1) \leq 0$ entonces existe un $\varepsilon_n(t_0) > 0$ tal que

$$\det D_1 = \begin{vmatrix} a_{nn} + \varepsilon_n & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ c_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Formese la matriz

$$D_2 = \begin{pmatrix} a_{n-1n-1} & a_{n-1n} & b_{n-11} & \cdots & b_{n-1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} + \varepsilon_n & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ c_{1n-1} & c_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{nn-1} & c_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces si $\det D_2 > 0$ se obtiene que D_2 es definido negativo, en caso de no ser así, existe $\varepsilon_{n-1}(t_0) > 0$ tal que

$$\det D_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1n-1} + \varepsilon_{n-1} & a_{n-1n} & b_{n-11} & \cdots & b_{n-1n} \\ a_{nn-1} & a_{nn} + \varepsilon_n & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \\ c_{1n-1} & c_{1n} & d_{11} & \cdots & d_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{nn-1} & c_{nn} & d_{n1} & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Repetiendo los argumentos anteriores, se forman las matrices (a partir de la diagonal de la matriz A) D_3, \dots, D_n y se obtienen los números positivos $\varepsilon_{n-2}(t_0), \dots, \varepsilon_1(t_0)$. De esta manera se contruye una matriz

$$q(t_0) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Dado que la construcción anterior no depende de la t_0 que se elija entonces en una vecindad de t_0 por continuidad de la función $\varepsilon_k(t)$ sigue siendo positiva, esto se puede hacer para cualquier $t_0 \in [0, T]$. Así se obtiene la función

$$q(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varepsilon_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_n(t) \end{pmatrix},$$

la cual es una forma bilineal simétrica definida positiva en $[0, T]$ que hace que la matriz $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} q + A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ sea definida positiva en $[0, T]$. \square

Denotemos por $\mathcal{L}(H)$ al conjunto de todas las transformaciones continuas y lineales de un espacio de Hilbert H en H .

PROPOSICIÓN 3.3. (ver [Ta] Apéndice.)

Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es un operador compacto y autoadjunto en H , entonces H tiene una base ortonormal u_j de eigenvectores de A . Con $Au_j = \lambda_j u_j$, y la sucesión de números reales $\{\lambda_j\}$ tiene al 0 como punto de acumulación.

TEOREMA 3.8. El índice de Morse λ es finito y no cambia si se reemplaza el espacio $\Omega(M; p, q)_\omega$ por cualquier espacio E tal que

$$\Omega(M; p, q)_\omega \subset E \subset \mathcal{H}_1(I, M)_\omega.$$

Demostración. Sabemos que L es convexa, para nuestra conveniencia haremos la prueba en el caso que M es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n . Por la proposición 3.2 existe $q(t)$ una forma bilineal simétrica definida positiva en \mathbb{R}^n que depende continuamente de t en $[0, T]$ tal que

$$Q(t) = \begin{pmatrix} q(t) + L_{xx}(\omega) & L_{vx}(\omega) \\ L_{xv}(\omega) & L_{vv}(\omega) \end{pmatrix}$$

sea definida positiva para toda $t \in [0, T]$. Escribiendo

$$Q(x, y) = \int_0^T \langle q(t)x, y \rangle dt,$$

se sigue que Q es un producto interior en $\Omega(M; p, q)_\omega$ entonces por el

LEMA 3.1. Q induce la topología L^2 .

Demostración. Por la Proposición 3.2 $q(t)$ es continua dentro del compacto $[0, T]$ y así, existen $m, M > 0$ tal que $m|x|^2 \leq \langle q(t)x, x \rangle \leq M|x|^2$ para todo $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto

$$m\|\xi(t)\|_{L^2} \leq \|\xi(t)\|_Q = \left(\int_0^T \langle q(t)\xi(t), \xi(t) \rangle dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq M\|\xi(t)\|_{L^2}. \quad \square$$

LEMA 3.2. $Q + \text{Hess } A_L$ es un producto interior en $\Omega(M; p, q)_\omega$ e induce la topología de H^1 .

Demostración. Por la Proposición 3.2, $Q(t)$ es continua y definida positiva dentro del compacto $[0, T]$ y así, existen $m, M > 0$ tales que

$m(|z|^2 + |y|^2) \leq L_{yy}(y, y) + L_{yz}(y, z) + L_{zy}(y, z) + (q(t) + L_{zz})(z, z) \leq M(|z|^2 + |y|^2)$
para todo $t \in [0, T]$, $y, z \in \mathbb{R}^n$. Por lo tanto

$$m(\|\xi(t)\|_{L_2}^2 + \|\dot{\xi}(t)\|_{L_2}^2) \leq \|\xi(t)\|_{Q + \text{Hess } A_L(\omega)}^2 \leq M(\|\xi(t)\|_{L_2}^2 + \|\dot{\xi}(t)\|_{L_2}^2). \quad \square$$

Sean $H_{p,q}^0$ y $H_{p,q}^1$ la completación del espacio $\Omega(M; p, q)_\omega$ con respecto a Q , y respectivamente a $Q + \text{Hess } A_L(\omega)$. Definamos el operador lineal en $H_{p,q}^1$ por

$$\text{Hess } A_L(\omega) = (Q + \text{Hess } A_L(\omega)) \circ \mathcal{E}$$

aquí la forma bilineal es considerada como una función entre el espacio vectorial y su dual. Si $\mathcal{E} = Id - K$ entonces

$$\begin{aligned} \text{Hess } A_L(\omega) &= Q \circ \mathcal{E} + \text{Hess } A_L(\omega) \circ \mathcal{E} \\ &= Q - Q \circ K + \text{Hess } A_L(\omega) - \text{Hess } A_L(\omega) \circ K, \end{aligned}$$

de donde $Q = (\text{Hess } A_L(\omega) + Q) \circ K$.

Así $K : H_{p,q}^0 \rightarrow H_{p,q}^1$ es continuo y por lo tanto compacto como un operador en $H_{p,q}^0$ en vista del teorema de Ascoli.

$$\begin{array}{ccc} H_{p,q}^0 & \xrightarrow{K} & H_{p,q}^1 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ H^0 & \longrightarrow & H^1 \end{array}$$

Se sigue que K es un operador positivo simétrico en $H_{p,q}^1$ y por la proposición 3.3 tiene un espectro discreto que converge a 0, así \mathcal{E} es un operador simétrico en $H_{p,q}^1$ con un espectro discreto $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ tal que $\lambda_j \nearrow 1$ cuando $j \rightarrow \infty$. En particular

la suma E^- de los eigespacios de \mathcal{E} para los eigenvalores negativos es de dimensión finita y $\mathcal{E} \geq 0$ en el complemento ortogonal E^+ de E^- en $H_{p,q}^1$. Concluimos que

$$H_{p,q}^1 = E^- \oplus E^+, \quad \text{Hess } A_L|_{E^-}(\omega) < 0, \quad \text{Hess } A_L(\omega)|_{E^+} \geq 0.$$

Si \mathcal{L} es otro subespacio lineal de $H_{p,q}^1$ en el cual $\text{Hess } A_L(\omega) < 0$, entonces la proyección de \mathcal{L} sobre E^- a lo largo de E^+ es inyectiva y así, $\dim \mathcal{L} \leq \dim E^-$. Como $\Omega(M; p, q)_\omega$ es denso en $H_{p,q}^1$ uno puede encontrar un subespacio lineal \mathcal{L} de $\Omega(M; p, q)_\omega$ tal que $\dim \mathcal{L} = \dim E^-$ y $\text{Hess } A_L(\omega) < 0$ en \mathcal{L} . \square

CAPÍTULO 4

El Teorema del índice de Morse

Los capítulos anteriores dan las herramientas para demostrar *El Teorema del índice de Morse para Lagrangianos Convexos*:

El índice λ de Hess A_L es igual al número de puntos $\omega(t)$, $0 < t < T$, conjugados a $\omega(0)$ a lo largo de la trayectoria crítica $\omega|_{[0, T]}$, donde cada punto conjugado se cuenta con su multiplicidad.

Se consideran los siguientes conjuntos

- El espacio $\Omega(M; p, q)$.
- El conjunto $\Omega(M; p, q)^*$ consiste de los campos $W : [0, T] \rightarrow TM$ con $W(t) \in T_{\omega(t)}M$, que son continuos y C^2 por tramos y que satisfacen $W(0) = 0_p, W(T) = 0_q$,

Utilizando el conjunto $E = \Omega(M; p, q)^*$; se procede a demostrar el Teorema central de esta tesis. Para ello se obtiene la fórmula de la segunda variación para $\omega \in \Omega(M; p, q)$ y $\xi, \eta \in \Omega(M; p, q)^*$

$$\text{Hess } A_L(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^k L_{vv}(\xi, \eta)|_{t_{i-1}}^{t_i} + \int_0^1 (L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt})(\xi, \eta) - \frac{d}{dt}(L_{vv}(\cdot, \eta))\xi.$$

Se prueba que el espacio $\Omega(M; p, q)^*$ se puede descomponer como $T^* \oplus \Omega(t_0, \dots, t_n)^*$ donde $\Omega(t_0, \dots, t_n)^* \subset \Omega(M; p, q)^*$ es el conjunto de campos de Jacobi a lo largo de ω que satisface

1. $\eta(0) = 0$ y $\eta(T) = 0$.
2. Si $0 = t_0 \leq \dots \leq t_{i-1} \leq t_i \leq \dots \leq T = t_n$ es una partición de $[0, T]$ entonces $\eta|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es un campo de Jacobi a lo largo de $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$,

y $T^* = \{\eta \in \Omega(M; p, q)^*; \eta(t_i) = 0 \quad \forall i = 0, \dots, k\}$. Además se prueba que Hess $A_L|_{T^*}$ es definido positivo. Después se considera la trayectoria $\omega_\tau = \omega|_{[0, \tau]}$ y se denotará $\lambda(\tau)$ al índice del hessiano $(\text{Hess } A_L)|_0^*$ asociado a la trayectoria. Finalmente se prueba:

- (a) La función $\lambda(\tau)$ es creciente de τ .
- (b) $\lambda(\tau) = 0$ para valores suficientemente pequeños.
- (c) Para toda $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se satisface $\lambda(\tau - \varepsilon) = \tau$.
- (d) Si ν es la nulidad del hessiano $(\text{Hess } A_L)|_0^*$, entonces para toda $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se tiene $\lambda(\tau + \varepsilon) = \lambda(\tau) + \nu$.

Esto concluye la prueba del Teorema de índice de Morse y como aplicación de este teorema, se da un par de resultados de Jacobi que relaciona puntos conjugados y curvas minimizantes en una variedad.

1. Campos diferenciables por tramos

En la sección 4 del capítulo 1 definimos los espacios $\Omega(M; p, q)$ y $\Omega(M; p, q)_\omega$. Ahora introducimos el espacio $\Omega(M; p, q)^*$ de los campos $W : [0, T] \rightarrow TM$ con $W(t) \in T_{\omega(t)}M$, que son continuos y C^2 por tramos y $W(0) = 0_p, W(T) = 0_q$, el cual satisface que

$$\Omega(M; p, q)_\omega \subset \Omega(M; p, q)^* \subset H_1(I, M)_\omega.$$

En virtud del teorema 3.8, el índice permanece invariante si cambiamos al espacio $\Omega(M; p, q)_\omega$ por $\Omega(M; p, q)^*$, el cual usaremos de aquí en adelante.

TEOREMA 4.1. Fórmula de la segunda variación. Sea $\omega \in \Omega(M; p, q)$ una trayectoria crítica y sean $\xi, \eta \in \Omega(M; p, q)^*$. Entonces

$$(4.1) \quad \text{Hess } A_L(\omega)(\xi, \eta) = \int_0^1 (L_{vv}(\dot{\xi}, \dot{\eta}) + L_{vx}(\dot{\xi}, \eta) + L_{xv}(\xi, \dot{\eta}) + L_{xx}(\xi, \eta)) dt \\ = \int_0^1 [(L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt})(\xi, \eta) - (\frac{d}{dt}L_{vv}(\cdot, \frac{d\eta}{dt}))\xi] dt + \sum_{i=1}^{k-1} L_{vv}(\xi(t_i), \frac{d\eta}{dt}(t_i^-) - \frac{d\eta}{dt}(t_i^+)).$$

Demostración. Basta demostrar la segunda fórmula, entonces usamos parte de la demostración del Corolario 3.2 así

$$\begin{aligned} \text{Hess } A_L(\xi, \eta) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (L_{vx}(\xi, \eta)) - \frac{dL_{vx}}{dt}(\xi, \eta) + \frac{d}{dt} (L_{vv}(\xi, \dot{\eta})) \\ &\quad + \int_0^1 L_{xx}(\xi, \eta) - \frac{d}{dt} (L_{vv}(\cdot, \dot{\eta})) \xi \\ &= \sum_{i=1}^k L_{vv}(\xi, \dot{\eta})|_{t_{i-1}}^{t_i} + \int_0^1 (L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt})(\xi, \eta) - \frac{d}{dt} (L_{vv}(\cdot, \dot{\eta})) \xi \end{aligned}$$

□

OBSERVACIÓN 4.1. Sea ω una trayectoria crítica. Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormal de $T_{\omega(0)}M$. Sean h_1, \dots, h_n campos de Jacobi que satisfacen

$$h_i(0) = 0, \quad \frac{dh_i}{dt}(0) = e_i,$$

entonces $h_1(t), \dots, h_n(t)$ es una base del espacio vectorial N_0 de campos de Jacobi η tales que $\eta(0) = 0$. El conjunto de los puntos donde alguno de estos n campos se anula es finito. Fuera de estos puntos, ningún campo de Jacobi que se anula en $t = 0$, se vuelve anular. Es decir, a lo largo de la trayectoria crítica $\omega: [0, T] \rightarrow M$ hay solamente un número finito de puntos conjugados a $\omega(0)$.

Supongamos que $\omega(b)$ no es conjugado a $\omega(0)$. Entonces la transformación lineal $T_{\omega(0)}M \rightarrow T_{\omega(b)}M, \sum_{i=1}^k a_i h_i(0) \mapsto \sum_{i=1}^k a_i h_i(b)$, es un isomorfismo.

Elijamos una partición del $[0, T], 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = T$, la cual es lo suficientemente fina para que cada $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ sea diferenciable, que en el segmento $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ no haya puntos conjugados, y que $h_i(t) \neq 0$ para $t \neq t_i$.

Consideremos la transformación de Legendre $\mathcal{L}: TM \rightarrow T^*M$ dada por $\mathcal{L}(v) = L_v(x, v)$, con $v \in T_x M$, donde

$$T^*M = \{(p, q); p \in M, q \in T_p^*M\}$$

es el haz cotangente de M . Dada $\gamma: I \rightarrow M$ una curva diferenciable considere $(\mathcal{L} \circ \gamma')(t) = L_v(\gamma'(t))$, entonces al derivar

$$\frac{d}{dt} L_v(\gamma'(t)) = L_{vx}(\gamma'(t))(\cdot, \gamma') + L_{vv}(\gamma'(t))(\cdot, \frac{d\gamma'}{dt}).$$

Definiendo $w_i(t) = L_{vx}(\cdot, h_i) + L_{vv}(\cdot, \frac{dh_i}{dt})$, tenemos

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \frac{dw_i}{dt} &= \frac{d}{dt} L_{vx}(\cdot, h_i) + \frac{d}{dt} L_{vv}(\cdot, \frac{dh_i}{dt}) \\ &= \left(\frac{d}{dt} L_{vx} \right)(\cdot, h_i) + L_{vx}(\cdot, \frac{dh_i}{dt}) + \left(L_{xx} - \frac{d}{dt} L_{vx} \right)(\cdot, h_i) \\ &= L_{vx}(\cdot, \frac{dh_i}{dt}) + L_{xx}(\cdot, h_i). \end{aligned}$$

Definimos la transformación $H(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\omega(t)}M$ mediante

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum \lambda_i h_i(t),$$

y denotamos por $H'(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\omega(t)}M$ la transformación

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum \lambda_i \frac{dh_i(t)}{dt}.$$

Definimos también la transformación $W(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\omega(t)}^*M$ mediante

$$W(t)\lambda = L_{vx}(\cdot, H(t)\lambda) + L_{vv}(\cdot, H'(t)\lambda) = \sum \lambda_i w_i(t),$$

y denotamos por $W'(t) : \mathbb{R}^k \rightarrow T_{\omega(t)}^*M$ la transformación

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto \sum \lambda_i \frac{dw_i(t)}{dt}.$$

Se sigue de (4.2) que

$$W'(t)\lambda = L_{vx}(\cdot, H'(t)\lambda) + L_{xx}(\cdot, H(t)\lambda).$$

LEMA 4.1. Sean $H(t)^*$, $W(t)^*$ las adjuntas de $H(t)$, $W(t)$ respectivamente. Entonces $H(t)^*W(t)$ es simétrica, es decir

$$(4.3) \quad H(t)^*W(t) = W(t)^*H(t)$$

Demostración. Note que

$$[H(t)^*W(t)]' = H'(t)^*W(t) + H(t)^*W'(t) = L_{vx}(H'(t), H(t)) + L_{vv}(H'(t), H'(t)) + L_{vx}(H(t), H'(t)) + L_{xx}(H(t), H(t))$$

es simétrica. Como $H(0) = 0$, por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$H(t)^*W(t) = \int_0^t [H(s)^*W(s)]' ds,$$

de donde, $H(t)^*W(t)$ es simétrica □

Sea $\eta \in \Omega(M; p, q)^*$. Para $t \neq t_i$, $H(t)$ no es singular y podemos definir $\zeta(t) \in \mathbb{R}^k$ por $\eta(t) = H(t)\zeta(t) = \sum \zeta_i(t)h_i(t)$.

Entonces el integrando de

$$A_{L..}(\eta, \eta) = \int_0^T L_{vv}\left(\frac{d\eta}{dt}, \frac{d\eta}{dt}\right) + L_{vx}\left(\frac{d\eta}{dt}, \eta\right) + L_{xv}(\eta, \frac{d\eta}{dt}) + L_{xx}(\eta, \eta)$$

puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned} L_{vv}(H'\zeta + H\zeta', H'\zeta + H\zeta') + L_{vx}(H'\zeta + H\zeta', H\zeta) + L_{xv}(H\zeta, H'\zeta + H\zeta') + L_{xx}(H\zeta, H\zeta) \\ = L_{vv}(H'\zeta + H\zeta', H\zeta') + \langle W\zeta, H'\zeta + H\zeta' \rangle + L_{xv}(H\zeta, H\zeta') + \langle W'\zeta, H\zeta \rangle \\ = L_{vv}(H\zeta', H\zeta') + \langle W'\zeta', H\zeta \rangle + \langle W\zeta, H'\zeta + H\zeta' \rangle + \langle W'\zeta, H\zeta \rangle \end{aligned}$$

Usando el Lema 4.1 tenemos

$$\langle W\zeta, H\zeta' \rangle = (H^*W\zeta) \cdot \zeta' = (W^*H\zeta) \cdot \zeta' = \langle W\zeta', H\zeta \rangle,$$

por lo que el integrando de Hess $A_L(\eta, \eta)$ es

$$L_{vv}(H\zeta', H\zeta') + \langle W\zeta, H\zeta' \rangle.$$

Obtenemos

$$\begin{aligned} (4.4) \quad \text{Hess } A_L(\eta, \eta) &= \int_0^T [L_{vv}(H\zeta', H\zeta') + \langle W\zeta, \eta \rangle'] dt \\ &= \int_0^T L_{vv}(H\zeta', H\zeta') dt + \langle W\zeta, \eta \rangle \Big|_0^T - \sum_{i=1}^m \langle W\zeta, \eta \rangle \Big|_{t_i^-}^{t_i^+} \end{aligned}$$

donde $\eta = H\zeta$. De manera análoga se obtiene un resultado similar para Hess $A_L(\xi, \eta)$ con $\xi, \eta \in \Omega(M; p, q)^*$ donde $\xi = H\zeta$ y $\eta = H\rho$

$$\begin{aligned} (4.5) \quad \text{Hess } A_L(\xi, \eta) &= \int_0^T L_{vv}(H\zeta', H\rho') + \langle W\zeta \cdot H\rho \rangle' = \\ &= \int_0^T L_{vv}(H\zeta', H\rho') + \langle W\zeta \cdot H\rho \rangle \Big|_0^T - \sum_{i=1}^N \langle W\zeta \cdot H\rho \rangle \Big|_{t_i^-}^{t_i^+}. \end{aligned}$$

2. El Teorema del índice de Morse

Sea $\Omega(t_0, \dots, t_k)^* \subset \Omega(M; p, q)^*$ el espacio vectorial que consiste de todos los campos vectoriales η a lo largo de ω tales que

1. Si $0 = t_0 \leq \dots \leq t_{i-1} \leq t_i \leq \dots \leq T = t_n$ es una partición de $[0, T]$ entonces $\eta|_{[t_{i-1}, t_i]}$ es un campo de Jacobi a lo largo de $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$, para cada $i = 1, \dots, k$.
2. η se anula en los puntos finales $t = 0, t = T$.

Así $\Omega(t_0, \dots, t_k)^* \subset \Omega(M; p, q)^*$ es un espacio vectorial de dimensión finita que consiste de campos de Jacobi por tramos a lo largo de ω .

Sea $T' \subset \Omega(M; p, q)^*$ el espacio vectorial de todos los campos vectoriales $\eta \in \Omega(M; p, q)^*$ para los cuales $\eta(t_i) = 0$, para toda $i = 0, \dots, k$.

LEMA 4.2. *El espacio vectorial $\Omega(M; p, q)^*$ se descompone como*

$$\Omega(M; p, q)^* = T' \oplus \Omega(t_0, \dots, t_k)^*.$$

Esta descomposición es ortogonal con respecto al producto interior Hess A_L . Además Hess $A_L|_{T'}$ es definido positivo.

Demostración. Sea $\eta \in \Omega(M; p, q)^*$ cualquier campo vectorial. Como $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$ no tiene puntos conjugados, entonces hay un único campo vectorial $\xi \in \Omega(t_0, \dots, t_k)^*$ tal que $\xi(t_i) = \eta(t_i)$, para toda $i \in \{0, \dots, k\}$.

Sea $\mathbf{W} = \eta - \xi$ entonces $\mathbf{W} \in T'$ y por lo tanto $T' + \Omega(t_0, \dots, t_k)^* = \Omega(M; p, q)^*$. Por el párrafo anterior, el único campo $\xi \in T' \cap \Omega(t_0, \dots, t_k)^*$ es el campo vectorial 0, por lo que $T' \oplus \Omega(t_0, \dots, t_k)^* = \Omega(M; p, q)^*$. Si $\xi \in \Omega(t_0, \dots, t_k)^*$ y $\eta \in T'$ entonces aplicando la fórmula (4.1)

$$\begin{aligned} \text{Hess } A_L(\omega)(\xi, \eta) &= \int_0^T [(L_{xx} - \frac{dL_{vx}}{dt})(\xi, \eta) - (\frac{d}{dt}L_{vv}(\cdot, \frac{d\eta}{dt})\xi)] dt + \\ &\quad \sum_{i=1}^k L_{vv}(\xi, \frac{d\eta}{dt})|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0 + \sum_{i=1}^k L_{vv}(\xi, \frac{d\eta}{dt})|_{t_{i-1}}^{t_i} = 0. \end{aligned}$$

Por consiguiente $\Omega(t_0, \dots, t_k)^* \perp T'$ con respecto a $\text{Hess } A_L$.

Demostremos que $\text{Hess } A_L(\mathbf{W}, \mathbf{W}) \geq 0$ para $\mathbf{W} \in T'$. Utilizando la fórmula (4.4)

$$\begin{aligned} \text{Hess } A_L(\mathbf{W}, \mathbf{W}) &= \int_0^T L_{vv}(H\zeta', H\zeta') + \langle W\zeta, \mathbf{W} \rangle|_0^T - \sum_{i=1}^m \langle W\zeta, \mathbf{W} \rangle|_{t_i}^{t_i'} \\ &= \int_0^T L_{vv}(H\zeta', H\zeta') \geq 0 \end{aligned}$$

donde $\mathbf{W} = H\zeta$.

Ahora demostraremos que $\text{Hess } A_L(\mathbf{W}, \mathbf{W}) > 0$ para $\mathbf{W} \in T' - \{0\}$. Afirmamos que si $\text{Hess } A_L(\mathbf{W}, \mathbf{W}) = 0$, entonces $\mathbf{W} \in \ker \text{Hess } A_L$. En efecto, previamente se ha visto que $\text{Hess } A_L(\mathbf{W}, \xi) = 0$ para cualquier $\xi \in \Omega(t_0, \dots, t_k)^*$. También, para cualquier $\eta \in T'$ y toda $c \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\text{Hess } A_L(\mathbf{W} + c\eta, \mathbf{W} + c\eta) \geq 0,$$

o sea

$$\begin{aligned} \text{Hess } A_L(\mathbf{W}, \mathbf{W}) + 2 \text{Hess } A_L(\mathbf{W}, c\eta) + c^2 \text{Hess } A_L(\eta, \eta) \\ = c^2 \text{Hess } A_L(\eta, \eta) + 2c \text{Hess } A_L(\mathbf{W}, \eta) \geq 0 \end{aligned}$$

para toda $c \in \mathbb{R}$, de donde $\text{Hess } A_L(\mathbf{W}, \eta) = 0$,

Así \mathbf{W} está en el espacio nulo; pero tal espacio $\text{Hess } A_L$ consiste de todos los campos de Jacobi. Dado que T' no contiene otros campos de Jacobi que el cero, se sigue que $\mathbf{W} = 0$. Así, la forma cuadrática $\text{Hess } A_L$ es definida positiva en T' . \square

Se sigue del Lema 4.2 que el subespacio nulo de $\text{Hess } A_L$ y el subespacio maximal donde $\text{Hess } A_L$ es negativa definida, son subespacios de $\Omega(t_0, \dots, t_k)^*$. Por lo tanto se obtiene el siguiente resultado:

COROLARIO 4.2. *El índice (o la nulidad) de $\text{Hess } A_L$ es igual al índice (o la nulidad) de $\text{Hess } A_L$ restringido al espacio $\Omega(t_0, \dots, t_k)^*$ de campos de Jacobi por tramos. En particular (dado que $\Omega(t_0, \dots, t_k)^*$ es un espacio vectorial de dimensión finita) el índice λ es siempre finito.*

TEOREMA 4.3. *Teorema del índice de Morse. Sea $\omega|_{[0, T]}$ una trayectoria crítica. El índice λ de $\text{Hess } A_L$ es igual al número de puntos $\omega(t)$, $0 < t < T$,*

conjugados a $\omega(0)$ a lo largo de ω , donde cada punto conjugado se cuenta tantas veces como su multiplicidad.

Demostración. Consideremos $\omega_\tau = \omega|_{[0, \tau]}$ y denotemos por $\lambda(\tau)$ al índice del hessiano $(\text{Hess } A_L)_0^\tau$ asociado a esta trayectoria, de esta manera definimos una función $\lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{N}$ cuyo comportamiento vamos a estudiar. La prueba del Teorema del índice de Morse consiste de los siguientes pasos

1. $\lambda(\tau)$ es una función creciente de τ .
2. $\lambda(\tau) = 0$ para valores pequeños de τ .
3. Para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se tiene $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$
4. Sea ν la nulidad del hessiano $(\text{Hess } A_L)_0^\tau$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, se tiene $\lambda(\tau + \varepsilon) = \lambda(\tau) + \nu$, es decir si τ es conjugado de 0 con multiplicidad ν entonces $\lambda(\tau + \varepsilon) = \lambda(\tau) + \nu$.

1. Si $\tau < \tau^*$ entonces existe un subespacio Z_τ , de dimensión $\lambda(\tau)$, del espacio $T_{\omega_\tau} \Omega_\tau$ de los campos vectoriales a lo largo de ω_τ que se anulan en $\omega(0)$ y $\omega(\tau)$, tal que el hessiano $(\text{Hess } A_L)_0^\tau$ es definido negativo en Z_τ . Cada campo vectorial V en Z_τ se extiende a un campo vectorial V^* a lo largo de ω_τ , haciendo $V^*(t) = 0$ para $t \in [\tau, \tau^*]$. Así obtenemos un subespacio $Z_{\tau^*} \subset T_{\omega_{\tau^*}} \Omega_{\tau^*}$ de dimensión $\lambda(\tau)$ en el que $(\text{Hess } A_L)_0^{\tau^*}$ es definido negativo. Por tanto $\tau \mapsto \lambda(\tau)$ es creciente. \square

2. Esta afirmación es equivalente a que no haya puntos conjugados a lo largo de ω_ε , $\varepsilon > 0$ pequeño, lo cual fue probado en la observación 4.1 \square

3. Del Corolario 4.2, $\lambda(T)$ se puede interpretar como el índice de la forma cuadrática sobre el espacio vectorial $\Omega(t_0, \dots, t_k)^*$. Podemos suponer que la partición es de la forma $t_i < \tau < t_{i+1}$. Entonces el índice $\lambda(\tau)$ se puede interpretar como el índice de la correspondiente forma cuadrática J_τ sobre un espacio vectorial de campos, de Jacobi por tramos, a lo largo de ω_τ . Este espacio vectorial se construye usando las subdivisiones $0 < t_1 < \dots < t_i < \tau$ de $[0, \tau]$. Dado que un campo de Jacobi está determinado únicamente por sus valores en los puntos $\omega(t_i)$, este espacio vectorial es isomorfo a la suma directa

$$\Gamma = T_{\omega(t_1)}M \oplus \dots \oplus T_{\omega(t_i)}M.$$

Observe que este espacio vectorial Γ es independiente de τ en (t_i, t_{i+1}) , pues la función $\lambda(\tau)$ no depende de la partición que se escoja en $[0, \tau]$. Es claro que la forma cuadrática J_τ , varía continuamente con respecto de τ . Ahora, J_τ es definida negativa en un subespacio Θ de Γ de dimensión $\lambda(\tau)$. Para toda τ^* suficientemente cercana a τ se tiene que J_{τ^*} es definida negativa sobre Θ . Por lo tanto $\lambda(\tau^*) \geq \lambda(\tau)$. Pero si $\tau^* = \tau - \varepsilon < \tau$ con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña entonces, se tiene de la primera parte de la demostración $\lambda(\tau - \varepsilon) \leq \lambda(\tau)$. Así, $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$. \square

4. Demostraremos que $\lambda(\tau + \varepsilon) \leq \lambda(\tau) + \nu$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Sean J_τ y Γ como en la demostración anterior. Dado que $\dim \Gamma = ni$ se tiene que J_τ es definido positivo en algún espacio $\Theta' \subset \Gamma$ de dimensión $ni - \lambda(\tau) - \nu$. Para toda τ^* lo suficientemente cercana a τ se sigue que J_{τ^*} es continua y definida positiva en Θ' . Así obtenemos

$$\lambda(\tau^*) \leq \dim \Gamma - \dim \Theta' = ni - ni + \lambda(\tau) + \nu = \lambda(\tau) + \nu.$$

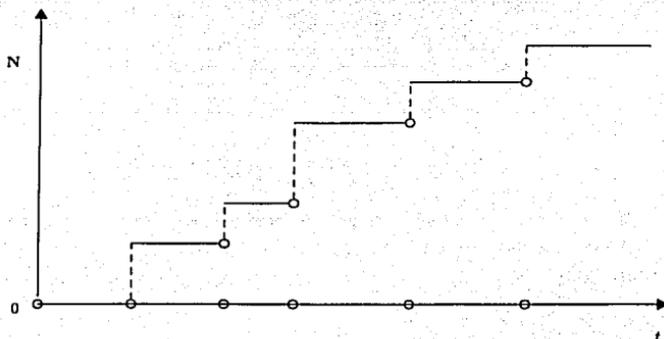


FIGURA 1. Comportamiento de la función $\lambda(\tau)$: Esta función es cero en una vecindad del origen y tiene discontinuidades de tipo salto en los puntos conjugados a $\omega(0)$.

Ahora demostremos que $\lambda(\tau + \varepsilon) \geq \lambda(\tau) + \nu$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Sean $W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)} \in T_{\omega, \Omega_\tau}$ campos vectoriales tales que la matriz

$$(\text{Hess } A_L)_0^{\tau} (W_i, W_j)$$

es definida negativa. Sean $X_1, \dots, X_\nu \in T_{\omega, \Omega_\tau}$ campos de Jacobi a lo largo de ω_τ , linealmente independientes los cuales se anulan en los puntos extremos. Obsérvese que los ν vectores

$$\frac{dX_\alpha}{dt}(\tau) \in T_{\omega(\tau)} M, \alpha = 1, \dots, \nu,$$

son linealmente independientes. Así, es posible elegir ν campos vectoriales Y_1, \dots, Y_ν a lo largo de $\omega_{\tau+\varepsilon}$, que se anulan en los puntos finales de $\tau + \varepsilon$ y tales que

$$L_{\nu\nu} \left(\frac{dX_\alpha}{dt}(\tau), Y_r(\tau) \right)$$

es igual a la matriz identidad $I_{\nu \times \nu}$. Extendamos los campos vectoriales W_i y X_α a $\omega_{\tau+\varepsilon}$, haciendolos cero para $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon$. Usando la ecuación (3.7) de la segunda variación obtenemos

$$\begin{aligned} (\text{Hess } A_L)_0^{\tau+\varepsilon} (X_\alpha, W_i) &= 0 \\ (\text{Hess } A_L)_0^{\tau+\varepsilon} (X_\alpha, Y_k) &= \delta_{\alpha k} \end{aligned}$$

donde $\delta_{\alpha k}$ es la delta de Kronecker. Sea $c \neq 0$ un número pequeño, y considere los $\lambda(\tau) + \nu$ campos vectoriales

$$W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)}, c^{-1} X_1 - c Y_1, \dots, c^{-1} X_\nu - c Y_\nu$$

a lo largo de $\omega_{\tau+\varepsilon}$. Para c suficientemente pequeña estos campos vectoriales generan un espacio vectorial de dimensión $\lambda(\tau) + \nu$ en el cual la forma cuadrática $(\text{Hess } A_L)_0^{\tau+\varepsilon}$

es definida negativa. En efecto, la matriz $(\text{Hess } A_L)_0^{r+\epsilon}$ con respecto a estas bases es

$$\begin{pmatrix} ((\text{Hess } A_L)_0^r(W_i, W_j)) & c\mathbf{A} \\ c\mathbf{A}^T & -2I + c^2\mathbf{B} \end{pmatrix}$$

Donde \mathbf{A} y \mathbf{B} son matrices fijas. Si c es lo suficientemente pequeño, esta matriz compuesta es negativa definida. \square

3. Aplicaciones del Teorema del índice

COROLARIO 4.4. Jacobi.

Si $\theta \in TM$ y el segmento $\{\omega(t) | t \in [0, S]\}$ es minimizante, entonces el segmento no tiene puntos conjugados.

Demostración. Como el segmento $\{\omega(t) | t \in [0, S]\}$ es minimizante, sabemos por el teorema 4.3

$$(\text{Hess } A_L(\xi, \xi))_0^S \geq 0.$$

Entonces $\lambda = 0$, así $\{\omega(t) | t \in [0, S]\}$ no tiene puntos conjugados. \square

COROLARIO 4.5. Jacobi. Sea $\theta \in TM$, si el segmento $\{\omega(t) | t \in [0, S]\}$ no tiene puntos conjugados entonces para toda variación propia de ω , existe $\delta > 0$ tal que $A_L(s) < A_L(\delta)$ para $0 < |s| < \delta$.

Demostración. Supongamos que ω no tiene puntos conjugados en $[0, S]$, entonces por el corolario 3.7 sabemos que $\text{Hess } A_L$ es no degenerado; aplicando el teorema 4.3 tenemos que $\lambda = 0$, más aún $((\text{Hess } A_L)(\xi, \xi))_0^S \geq 0$ es decir definida positiva y esto sucede para toda variación de ω con respecto a s de ahí que exista un $\delta > 0$ tal que $A_L(s) < A_L(\delta)$ para $0 < |s| < \delta$. \square

Bibliografía

- [A-M-R] R. Abraham & J. E. Marsden & T. Ratiu. *Manifolds, Tensor Analysis and Applications. Second Edition.* Applied Mathematica Sciences 75. Springer Verlag, 1988.
- [Ar] V. I. Arnold. *Mathematical Methods of Classical Mechanics, Second Edition.* Graduate Text in Mathematics 60. Springer Verlag, 1989.
- [CI-1] G. Contreras & R. Iturriaga. *Convex Hamiltonians without Conjugate Points.* Ergod. Th. & Dynam. Sys., Vol. 19, 1999. pag. 901-952
- [CI-2] G. Contreras & R. Iturriaga. *Global Minimizer of Autonomous Lagrangians.* 22o Coloquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1999.
- [CISM] G. Contreras & R. Iturriaga & H. Sánchez-Morgado. *On the creation of conjugate points for Hamiltonians systems.* Nonlinearity 11(2), No. 2, 1998. pag. 355-361
- [Ch] M. A. Chávez García. *El Teorema del Índice de Morse para Lagrangianos Convexos.* Por aparecer en las Memorias del XXXV Congreso Nacional de la SMM.
- [dC] M. P. Do Carmo. *Geometría Riemanniana.* Projeto Euclides, IMPA, 1988.
- [Di] J. Dieudonné. *A History of Algebraic and Differential Topology 1900-1960.* Boston - Basel Birkhäuser, 1989.
- [Du] J. J. Duistermaat. *On the Morse Index in Variational Calculus.* Advances in Math. 21, No. 2, 1976. pag.173-195.
- [Eu] L. Euler. *Método de máximos y mínimos.* Publicacions de la Universidad Autónoma de Barcelona y Ediciones de la Universidad Politécnica de Catalunya, traducción de Albert Dou, 1993.
- [F-G] S. V. Fomin & I. M. Gelfand. *Calculus of variations.* Prentice-Hall, 1963.
- [Gui-P] V. Guillemin & A. Pollack. *Differential Topology.* Prentice-Hall, 1974.
- [H-S] M. Hirsch & S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra.* Academic Press, 1974.
- [K-F] A. N. Kolmogórov & S. V. Fomin. *Elementos de la teoría de las funciones y del análisis funcional, Segunda Edición.* Editorial Mir-Moscú, 1975.
- [Ma] R. Mañé. *Global Variational Methods in Conservative Dynamics.* 18o Coloquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1991.
- [Mi] J. Milnor. *Morse Theory.* Annals of Mathematics Studies, No.51, Princeton University Press, Princeton, N.J. 1963.
- [Mo] J. Moser. *Ausgewählte Kapitel der Variationsrechnung.* Skriptum aus einer ETH-Vorlesung über Variationsrechnung gehalten im Sommersemester. Zürich, 1988.
- [O-R] E. Outeiro & J. M. Ruiz. *Topología Diferencial.* Addison-Wesley Iberoamericana España, 1998.
- [Pa] R. S. Palais. *Morse Theory on Hilbert Manifolds.* Topology 2. 1963. pag. 299-340.
- [Pat] G. P. Paternain. *Geodesic Flows.* Birkhäuser, 1999.
- [Ta] M. E. Taylor. *Partial Differential Equations.* Springer Verlag, 1996.