

2032/  
33 1



# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLÁN"

LOS NÚMEROS FIBONACCI Y LAS OLAS DE  
ELLIOTT. UNA APLICACIÓN A LAS FINANZAS.

T E S I S A

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LIC. EN ACTUARÍA

PRESENTA

MIGUEL ANGEL SÁNCHEZ BARQUÍN.

Asesor: FÍS-MAT. JORGE LUIS SUÁREZ  
MADARIAGA.

AGOSTO 2003



la Dirección General de Bibliotecas se  
difundir en formato electrónico e impres  
trabajo de mi trabajo (repositorio)  
NOMBRE: Miguel Angel  
Sánchez Barquín  
FECHA: 13 agosto 2003  
FIRMA:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

A mis padres.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

A mi hermano.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**ÍNDICE**

	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
<b>1.</b>	<b>SUCESIÓN DE FIBONACCI. RELACIONES, PROPIEDADES Y GENERALIZACIONES</b>	<b>4</b>
1.1.	Leonardo Pisano	4
1.2.	Números Fibonacci	5
1.2.1.	Preliminares	5
1.2.2.	Identidades de Fibonacci	8
1.2.3.	Números Lucas, generalizaciones de secuencias Fibonacci y sus relaciones.	12
1.3.	El Número de la Sección dorada	20
<b>2.</b>	<b>APLICACIONES DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI.</b>	<b>31</b>
2.1.	Problemas que involucran números Fibonacci.	31
2.2.	Problemas relacionados con el número de la Sección dorada	44
<b>3.</b>	<b>APLICACIÓN A LAS FINANZAS DE LOS NÚMEROS FIBONACCI. OLAS DE ELLIOTT.</b>	<b>51</b>
3.1.	Conceptos básicos	51
3.2.	Patrones	55
3.2.1.	Patrones de Tendencia	55
3.2.2.	Patrones Correctivos	60
3.2.3.	Canales de Tendencia	68

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

3.2.4.	Números y razones de Fibonacci.	71
3.3.	Directrices Generales para Pronosticar.	73
4.	CONCLUSIONES	75
5.	BIBLIOGRAFÍA	76

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## INTRODUCCIÓN.

La necesidad creciente de utilizar métodos alternativos de pronóstico, con el fin de tener una mayor certeza en los mercados, ha permitido desarrollar técnicas nuevas que en la práctica han sido de gran utilidad y han abierto paso a la construcción de teorías nuevas en este sentido.

El propósito de este estudio es brindar las bases tanto de los números Fibonacci como de algunas de sus aplicaciones, específicamente en una de las más recientemente utilizadas como método de pronóstico para los mercados financieros. Esta es la teoría de las olas de Elliott, cuya premisa son los números Fibonacci y la razón dorada.

En el primer capítulo se desarrollan los principios básicos de los números Fibonacci, algunas fórmulas e identidades que caracterizan a los estos números, y su relación con los números Lucas y la generalización de los números Fibonacci. También se dan algunos teoremas importantes relativos a la convergencia de la razón de los números Fibonacci, desembocando precisamente en el número de la sección dorada, el cual es de nuestro interés para los siguientes dos capítulos.

El segundo capítulo aborda algunos problemas clásicos que involucran al número de la sección dorada y a los números de Fibonacci.

Finalmente, el tercer capítulo trata principalmente sobre los conceptos de la teoría de las olas de Elliott y se analizan los patrones que se observan en los mercados, y que utilizan quienes hacen uso de esta herramienta de pronóstico. Cabe mencionar que la idea original de Elliott, a quien se le debe esta teoría, ha sido modificada para sustentarse en los números Fibonacci y sus características de convergencia, más que en el conteo de olas, que es como propuso Elliott en su tiempo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## 1. SUCESIÓN DE FIBONACCI. RELACIONES, PROPIEDADES Y GENERALIZACIONES.

*En el presente capítulo se presenta una breve biografía de Leonardo Fibonacci. Además se estudian las propiedades de los números estudiados por Leonardo Fibonacci, de donde obtuvieron su nombre, así como su relación con el número de la sección dorada.*

### 1.1. Leonardo Pisano.

El método de numeración romano, arduo y poco adecuado en el cálculo, no encontró un sistema alternativo en la edad media hasta que, en el siglo XII, **Leonardo Fibonacci** generalizó el uso de la notación numérica árabe, empleada anteriormente sólo en círculos matemáticos restringidos.

Leonardo Fibonacci, conocido como Leonardo Pisano, nació hacia 1170 probablemente en Pisa. Hijo de un mercader, acompañó a su padre al norte de África cuando éste fue nombrado cónsul de la república marítima pisana en aquellas tierras y entró en contacto con los conocimientos matemáticos árabes. En sus continuos viajes por Egipto, Siria, Grecia, Sicilia y Provenza, se dedicó al estudio de diversos métodos de numeración, actividad que lo condujo a divulgar en Europa el sistema numeral indoarábigo hasta entonces apenas conocido por las traducciones del matemático Mohamed ibn Musa al-Jwarizmi.

La principal obra de Pisano, el *Liber abaci* (1202; *Libro del ábaco*), contenía explicaciones sobre la aplicación comercial de las cifras árabes y la enumeración de algunas reglas especulativas de técnicas algebraicas.

Aunque el campo de cobertura de sus trabajos alcanzó también cuestiones de geometría y especulaciones generales sobre filosofía de la ciencia, fueron sus hipótesis teóricas sobre los números las que le confirieron merecida fama ya en su tiempo. Su relación intelectual con la corte pisana del emperador Federico II, dio como resultado una interesante publicación, el *Liber quadratorum* (1225; *Libro de los números cuadrados*), que incluía una colección de teoremas, así como la resolución de problemas aritméticos de grandes repercusiones en posteriores razonamientos matemáticos.

En 1228, Leonardo Pisano revisó la nueva publicación de su *Liber abaci*, fecha a partir de la cual no existen más referencias históricas sobre él hasta 1240. En aquel año, el gobierno de Pisa le concedió una asignación por servicios prestados, siendo éste el último dato que de su vida quedó registrado.





## 1.2. Números Fibonacci.

En esta sección se introducen conceptos preliminares sobre los que descansan los números Fibonacci. Además se exponen algunas identidades y fórmulas importantes, así como la relación que existe entre los números Fibonacci y los números Lucas. Se estudian además las propiedades de los números Fibonacci con el número dorado. También se plantea la generalización de los números Fibonacci.

### 1.2.1. Preliminares.

Consideremos las secuencias de orden 2, generadas por

$$u_{n+2} = a_1 u_{n+1} + a_2 u_n \quad (1)$$

para  $n \geq 0^1$ .

Tomemos un vector  $s_n \in \mathbb{R}^2$ , tal que  $s_n = (u_n, u_{n+1})$ , para  $n \geq 0$ . Consideremos además un operador lineal  $T$  sobre  $\mathbb{R}^2$  definido por

$$T(u_n, u_{n+1}) = (u_{n+1}, u_{n+2})$$

$$T(s_n) = s_{n+1}$$

La matriz de  $T$  respecto a la base canónica de  $\mathbb{R}^2$  está dada por

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_2 & a_1 \end{pmatrix}$$

de tal forma que,

$$C s_n' = s_{n+1}' \quad (2)$$

para  $n \geq 0$ .

---

<sup>1</sup> En un contexto más general se pueden considerar secuencias de orden  $k$ . Véase [1] pp.17-23.

Sea  $s_0 \in \mathbb{R}^2$  el vector "semilla", tal que  $s_0 = (u_0, u_1)$ . Aplicando de manera recursiva la expresión (2), i.e., multiplicando  $n$  veces por  $C$  ambos lados de esta expresión, se cumple que,

$$s'_n = C^n s'_0.$$

Determinamos el polinomio característico  $P_C(x)$  de la matriz  $C$ , tal que  $P_C(x) = 0$ .

$$P_C(x) = \det(xI - C) = x^2 - a_1x - a_2 = 0$$

$$x^2 = a_1x + a_2 \quad (3)$$

Las raíces de  $x^2 - a_1x - a_2 = 0$  son

$$r_1 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}}{2} \quad \text{y} \quad r_2 = \frac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Fijemos valores para el vector "semilla"  $s_0 = (u_0, u_1)$ , de tal forma que

$$c_1 + c_2 = u_0$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = u_1$$

Entonces para  $r_1 \neq r_2$ , tenemos que  $u_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n$ .

En efecto, por la forma como se determinaron  $c_1$  y  $c_2$ ,

$$c_1 + c_2 = u_0$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = u_1$$

Supongamos ahora que se cumple para  $u_n$  y para  $u_{n+1}$ , entonces por la regla de recurrencia (1) tenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= a_1 u_{n+1} + a_2 u_n \\ &= a_1(c_1 r_1^{n+1} + c_2 r_2^{n+1}) + a_2(c_1 r_1^n + c_2 r_2^n) \end{aligned}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
 &= c_1 (a_1 r_1^{n+1} + a_2 r_1^n) + c_2 (a_1 r_2^{n+1} + a_2 r_2^n) \\
 &= c_1 r_1^n (a_1 r_1 + a_2) + c_2 r_2^n (a_1 r_2 + a_2) \\
 &= c_1 r_1^n (r_1^2) + c_2 r_2^n (r_2^2) \quad \text{por (3)} \\
 &= c_1 r_1^{n+2} + c_2 r_2^{n+2}.
 \end{aligned}$$

□

Consideremos ahora dos casos:

(i)  $r_1 \neq r_2$  y como vector "semilla"  $(0,1)$ , de donde

$$c_1 = -c_2 = \frac{1}{r_1 - r_2} \Rightarrow u_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{r_1 - r_2} \quad (4)$$

(ii)  $r_1 = r_2$  y como vector "semilla"  $(2, a_1)$ , de donde

$$c_1 = c_2 = 1 \Rightarrow v_n = r_1^n + r_2^n \quad (5)$$

Hagamos  $a_1 = a_2 = 1$  en (4). Entonces  $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  y  $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , y con la semilla  $(0,1)$  se produce:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

que resulta ser la sucesión de **Fibonacci**<sup>2</sup> y puede expresarse a partir de (1) como:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

para  $n \geq 0$ , y  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ .

Análogamente, hagamos  $a_1 = a_2 = 1$  en (5).

Entonces  $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  y  $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , y con la semilla  $(2,1)$  se produce:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, \dots$$

<sup>2</sup> El caso en que el orden de la sucesión sea 3, se conoce como la sucesión de *Tribonacci*; tomando el vector semilla  $(0,0,1)$  da lugar a los números de *Tribonacci*:  $0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, \dots$  Ver [3] pp. 527-532.

que resulta ser la sucesión de **Lucas** y puede expresarse igualmente a partir de (1) como:

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

para  $n \geq 0$ , y  $L_0 = 2, L_1 = 1$ .

### 1.2.2. Identidades de Fibonacci.

#### Fórmula de Binet.

La expresión dada en (4), permite calcular el  $n$ -ésimo número Fibonacci en caso de que  $a_1 = a_2 = 1$ , de donde la expresión

$$F_n = \frac{\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n\right)}{\sqrt{5}}$$

se conoce como la fórmula de Binet<sup>3</sup>.

#### Expresión Binomial para números Fibonacci.

Otra forma de expresar los números Fibonacci es por medio de la forma Binomial,

$$F_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n-j}{j}, \text{ para } n \geq 0. \quad (6)$$

Nótese que sólo un número finito de los coeficientes binomiales en la expresión (6) son diferentes de cero.

#### Prueba:

Es claro que para  $n=0$  y  $n=1$  en (6) se tiene

<sup>3</sup> El matemático Jacques-Phillipe-Marie Binet expuso esta fórmula en 1843, pero fue descubierta en 1718 por el matemático francés Abraham De Moivre.



$$F_1 = 1, F_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{-j}{j} = \binom{0}{0} + 0 + 0 + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

$$F_2 = 1, F_2 = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{1-j}{j} = \binom{1}{0} + \binom{0}{1} + \binom{-1}{2} + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

Suponga que se cumple para  $n-1$  y para  $n$ , entonces

$$F_n = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-j-1}{j}, F_{n+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-j}{j} = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-j-1}{j+1}$$

Entonces basta probar que se cumple para  $n+1$ , pero nótese que se cumple la igualdad,

$$\binom{n-j-1}{j} + \binom{n-j-1}{j+1} = \binom{n-j}{j+1},$$

de donde,

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = 1 + \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-j}{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-j+1}{j}. \quad \square$$

Es posible determinar el  $(n+1)$ -ésimo número Fibonacci si se conoce el  $n$ -ésimo término, mediante la fórmula dada por

$$F_{n+1} = \left\lfloor \frac{F_n + 1 + \sqrt{5F_n^2}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{F_n(1 + \sqrt{5}) + 1}{2} \right\rfloor. \quad (n \geq 2) \quad (7)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

donde  $[ \cdot ]$  representa el máximo entero. Esta expresión se demostrará en la sección 1.3.

### Sumas e identidades.

Consideremos ahora la suma de los primeros  $n$  términos de números Fibonacci, es decir,

$$(s_j, j = 0, 1, 2, \dots: s_n = \sum_{k=0}^n F_k)$$

Realizando el cálculo de  $s_n$  para algunos valores de  $n$  tenemos

$$\begin{aligned} s_0 &= F_0 & &= 0 \\ s_1 &= F_0 + F_1 & &= 1 \\ s_2 &= F_0 + F_1 + F_2 & &= 2 \\ s_3 &= F_0 + F_1 + F_2 + F_3 & &= 4 \\ s_4 &= F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 & &= 7 \\ s_5 &= F_0 + F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 & &= 12. \end{aligned}$$

Parece ser que se cumple la relación

$$\sum_{k=0}^n F_k = F_{n+2} - 1 \quad (8)$$

Prueba:

En efecto,  $s_0 = 0$ ,  $F_2 - 1 = 0$  y  $s_1 = 1$ ,  $F_3 - 1 = 1$ . Supóngase válida la expresión (8), entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} F_k &= \sum_{k=0}^n F_k + F_{n+1} \\ &= F_{n+2} - 1 + F_{n+1} \\ &= (F_{n+2} + F_{n+1}) - 1 \\ &= F_{n+3} - 1. \end{aligned}$$

□

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Las siguientes identidades se demuestran de forma análoga a las anteriores por inducción:

$$\sum_{k=1}^n F_{2n-1} = F_{2n} \quad (9)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{3k} = \frac{F_{3n+2} - 1}{2} \quad (10)$$

$$\sum_{k=1}^n F_k^2 = F_n F_{n+1} \quad (11)$$

$$\sum_{k=1}^n F_{4k} = F_{2n+1}^2 - 1 \quad (12)$$

Probemos por inducción la siguiente identidad,

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (13)$$

Prueba:

Para  $n = 1$  se tiene,

$$F_0 F_2 - F_1^2 = (0)(1) - (1)^2 = -1 = (-1)$$

Supongamos que se cumple para  $n$ , demosremos que se cumple para  $n+1$ ,

$$\begin{aligned} F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 &= F_n(F_{n+1} + F_n) - F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) \\ &= F_n F_{n+1} + F_n^2 - F_{n+1} F_n - F_{n+1} F_{n-1} \\ &= F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} \\ &= (-1)(F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2) \\ &= (-1)(-1)^n \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

□

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Considérese la siguiente fórmula,

$$F_n = F_{k+1} F_{n-k} + F_k F_{n-k-1} \quad (14)$$

Prueba:

Para  $k=1$  se tiene

$$F_n = F_2 F_{n+1} + F_1 F_{n-2} = F_{n+1} + F_{n-2}$$

Supóngase que se cumple para  $k$ , y demostremos que se verifica para  $k+1$ ,

$$\begin{aligned} F_n &= F_{k+1} F_{n-k} + F_k F_{n-k-1} \\ &= F_{k+1} (F_{n-k-1} + F_{n-k-2}) + F_k F_{n-k-1} \\ &= F_{k+1} F_{n-k-1} + F_{k+1} F_{n-k-2} + F_k F_{n-k-1} \\ &= F_{n-k-1} (F_{k+1} + F_k) + F_{k+1} F_{n-k-2} \\ &= F_{n-k-1} F_{k+2} + F_{k+1} F_{n-k-2} \\ &= F_{k+2} F_{n-k-1} + F_{k+1} F_{n-k-2}. \end{aligned}$$

□

### 1.2.3. Números Lucas, generalizaciones de sucesiones Fibonacci y sus relaciones.

Recuérdese que con la expresión dada en (5) y haciendo  $a_1 = a_2 = 1$ , partiendo del vector "semilla" (2,1) se produce la secuencia de números que se conocen como números Lucas, cuya fórmula de recurrencia está dada por,

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

para  $n \geq 0$ , y  $L_0 = 2, L_1 = 1$ .

Considérese ahora, como en el apartado anterior, la suma de los primeros  $n$  números de Lucas. Para esta suma se tiene la siguiente identidad,

$$\sum_{k=1}^n L_k = L_{n+2} - 3 \quad (15)$$

Prueba:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Es claro que para  $n=1$  se tiene que  $L_3 - 3 = 4 - 3 = 1 = \sum_{k=1}^1 L_k = L_1 = 1$ .

Supóngase válido para  $n$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} L_k &= \sum_{k=1}^n L_k + L_{n+1} \\ &= L_{n+2} - 3 + L_{n+1} \\ &= (L_{n+2} + L_{n+1}) - 3 \\ &= L_{n+3} - 3. \end{aligned}$$

□

Del mismo modo que en el apartado anterior, se pueden deducir identidades que involucren los números Lucas.

Ahora consideremos las secuencias generalizadas de números Fibonacci. Éstas se derivan a partir de (1), en donde  $a_1 = a_2 = 1$ , pero el vector "semilla" es de la forma  $(a, b)$ . Es claro que para  $a = 0$  y  $b = 1$ , se tiene la secuencia de Fibonacci con la que hemos estado tratando y para  $a = 2$  y  $b = 1$ , se tiene la expresión que utilizamos para generar los números de Lucas.

El siguiente paso es determinar los valores para  $c_1$  y  $c_2$ , tales que

$$c_1 + c_2 = a$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = b$$

donde  $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ .

Por lo tanto,

$$c_1 = \frac{a r_2 - b}{r_2 - r_1}, c_2 = \frac{b - a r_1}{r_2 - r_1}, \text{ y}$$

$$G_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n.$$

Escribimos la secuencia de números Fibonacci como sigue,

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$$

(16)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

para  $n \geq 0$ , y  $G_0 = a$ ,  $G_1 = b$ .

Si desarrollamos algunos términos de la expresión (16), podemos concluir que se cumple la identidad

$$G_n = aF_{n-1} + bF_n \quad (17)$$

para  $n \geq 0$ , y  $G_0 = a$ ,  $G_1 = b$ .

Prueba:

En efecto, se cumple para,  $n=0$  y  $n=1$ ,

$$G_0 = a, \quad G_0 = aF_{-1} + bF_0 = a(1) + b(0) = a$$

$$G_1 = b, \quad G_1 = aF_0 + bF_1 = a(0) + b(1) = b$$

Nótese que de la fórmula de Fibonacci se tiene que  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , de donde  $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ , donde  $n = \{-1, -2, -3, \dots\}$ , o equivalentemente  $F_{-n} = F_{-n+2} - F_{-n+1}$  para  $n = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , y en particular se tiene que  $F_{-1} = 1$ ; cumpliéndose en general

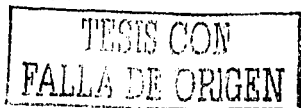
$$F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n \quad (17a)$$

Supóngase que se cumple (17) para  $n$  y  $n+1$ , falta demostrar que se cumple para  $n+2$ ,

$$\begin{aligned} G_{n+2} &= G_{n+1} + G_n \\ &= (aF_n + bF_{n+1}) + (aF_{n-1} + bF_n) \\ &= a(F_n + F_{n-1}) + b(F_{n+1} + F_n) \\ &= aF_{n+1} + bF_{n+2}. \end{aligned} \quad \square$$

Propondremos a continuación algunas identidades que involucran la relación entre los números Fibonacci, los números Lucas y la generalización de las secuencias de Fibonacci<sup>4</sup>.

<sup>4</sup> Véase [2] pp.193-205.



La primera expresión que consideramos es

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \quad (18)$$

Prueba:

Se verifica para  $n = 0$ ,

$$L_0 = 2, F_{-1} + F_1 = 1 + 1 = 2$$

Supóngase que se cumple para  $n$  y  $n+1$ , entonces

$$\begin{aligned} L_{n+2} &= L_{n+1} + L_n \\ &= (F_n + F_{n+2}) + (F_{n-1} + F_{n+1}) \\ &= (F_n + F_{n-1}) + (F_{n+2} + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1} + F_{n+3}. \end{aligned} \quad \square$$

La siguiente expresión que proponemos es

$$5F_n = L_{n-1} + L_{n+1} \quad (19)$$

Prueba:

Para demostrar la identidad anterior nos valemos de la relación dada en (18), en donde sustituyendo un par de veces en (19) y utilizando la fórmula de recurrencia de Fibonacci se tiene lo deseado,

$$\begin{aligned} L_{n-1} + L_{n+1} &= (F_{n-2} + F_n) + (F_n + F_{n+2}) \\ &= 2F_n + F_{n+2} + F_{n-2} \\ &= 2F_n + (F_{n+1} + F_n) + F_{n-2} \\ &= 3F_n + (F_n + F_{n-1}) + F_{n-2} \\ &= 4F_n + (F_{n-1} + F_{n-2}) \\ &= 4F_n + F_n \\ &= 5F_n. \end{aligned} \quad \square$$

Podemos expresar  $L_n$  como

$$L_n = F_{n-2} + F_{n+2}, \quad (20)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

ya que por (18)

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n-1} + F_{n+1} \\ &= (F_{n-1} - F_n) + (F_{n+1} + F_n) \\ &= F_{n-2} + F_{n+2}. \end{aligned}$$

De la identidad (18) se obtiene también

$$L_n + F_n = 2F_{n+1}$$

pues

$$\begin{aligned} L_n + F_n &= F_{n-1} + F_{n+1} + F_n \\ &= (F_n + F_{n-1}) + F_{n+1} \\ &= 2F_{n+1}. \end{aligned}$$

Consideremos la secuencia generalizada de números Fibonacci  $G_1, G_2, \dots$ , entonces se cumple que

$$G_{n+m} = F_{m-1} G_n + F_m G_{n+1} \quad (21)$$

Prueba:

En efecto, ya que para  $m=0$  y  $m=1$

$$\begin{aligned} G_n &= F_{-1} G_n + F_0 G_{n+1} = (1) G_n + (0) G_{n+1} = G_n \\ G_{n+1} &= F_0 G_n + F_1 G_{n+1} = (0) G_n + (1) G_{n+1} = G_{n+1} \end{aligned}$$

Supongamos que se cumple para  $m$  y para  $m+1$ , entonces

$$\begin{aligned} G_{n+m+2} &= G_{n+m} + G_{n+m+1} \\ &= F_{m-1} G_n + F_m G_{n+1} + F_m G_n + F_{m+1} G_{n+1} \\ &= G_{n+1} (F_m + F_{m+1}) + G_n (F_{m-1} + F_m) \\ &= F_{m+2} G_{n+1} + F_{m+1} G_n. \end{aligned}$$

Para  $m=2$ , (21) se reduce a la expresión (16).  
Análogamente se tiene por (21) y (17a)

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$G_{n-m} = F_{m-1} G_n + F_m G_{n+1} = (-1)^m (F_{m+1} G_n - F_m G_{n+1}) \quad (22)$$

Si hacemos  $G_i = F_i$  en (21) y además  $m = n+1$ , tenemos

$$F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1} \quad (23)$$

mientras que

$$F_{n+1}^2 - F_n^2 = (F_{n+1} + F_n)(F_{n+1} - F_n) = F_{n+2} F_{n-1} \quad (24)$$

Ahora usando (21) y (18), y haciendo  $m = n$ ,

$$F_{2n} = F_{n-1} F_n + F_n F_{n+1} = F_n L_n \quad (25)$$

De donde finalmente se obtiene

$$F_{n+1} L_{n+1} - F_n L_n = F_{2n+2} - F_{2n} = F_{2n+1} \quad (26)$$

Considérese la siguiente matriz,

$$\begin{pmatrix} G_{n+1} & G_n \\ G_n & G_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_n & G_{n-1} \\ G_{n-1} & G_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} G_2 & G_1 \\ G_1 & G_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}$$

Nótese que sólo se utilizó  $n-1$  veces la identidad (16). Ahora obtenemos el determinante de las matrices y obtenemos,

$$G_{n+1} G_{n-1} - G_n^2 = (-1)^n (G_1^2 - G_0 G_2). \quad (27)$$

Nótese que si se sustituye  $G_i$  por  $F_i$ , se obtiene (13).

Ahora consideremos la suma de las generalizaciones de números Fibonacci,

$$\sum_{i=1}^n G_i = \sum_{i=3}^{n+2} G_i - \sum_{i=2}^{n+1} G_i = \left( \sum_{i=1}^n G_i - G_1 - G_2 \right) - \left( \sum_{i=1}^{n+2} G_i - G_1 - G_{n+2} \right)$$

de donde se obtenemos,

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\sum_{i=1}^n G_i = G_{n+2} - G_2 \quad (28)$$

También se tiene que

$$\sum_{i=1}^n G_{2i-1} = \sum_{i=1}^n G_{2i} - \sum_{i=1}^n G_{2i-2} = \sum_{i=1}^n G_{2i} - \sum_{i=0}^{n-1} G_{2i},$$

entonces,

$$\sum_{i=1}^n G_{2i} = G_{2n} - G_0. \quad (29)$$

Similarmente,

$$\sum_{i=1}^n G_{2i} = \sum_{i=1}^n G_{2i+1} - \sum_{i=1}^n G_{2i-1} = \sum_{i=1}^n G_{2i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} G_{2i+1},$$

entonces,

$$\sum_{i=1}^n G_{2i} = G_{2n+1} - G_1. \quad (30)$$

Nótese que sumando (29) y (30) y sustituyendo  $2n$  por  $n$ , se obtiene (28). Ahora, restando (29) de (30) resulta

$$\sum_{i=1}^n G_{2i} - \sum_{i=1}^n G_{2i-1} = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i G_i = G_{2n-1} + G_0 - G_1 \quad (31)$$

Probemos por inducción la siguiente identidad,

$$\sum_{k=1}^n \frac{G_{k-1}}{2^k} = \frac{G_0 + G_3}{2} - \frac{G_{n+2}}{2^n}, \quad (31A)$$

*Prueba:*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Claramente se cumple para  $n = 1$ , supóngase válida para  $n$ , entonces

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{G_{k-1}}{2^k} &= \sum_{k=1}^n \frac{G_{k-1}}{2^k} + \frac{G_n}{2^{n+1}} = \frac{G_0 + G_3}{2} - \frac{G_{n+2}}{2^n} + \frac{G_n}{2^{n+1}} = \\ &= \frac{G_0 + G_3}{2} + \frac{-2G_{n+2} + (G_{n+2} - G_{n+1})}{2^{n+1}} = \frac{G_0 + G_3}{2} + \frac{-G_{n+2} - G_{n+1}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{G_0 + G_3}{2} - \frac{G_{n+3}}{2^{n+1}}. \quad \square \end{aligned}$$

Regresemos a la expresión dada en (27), la cual puede escribirse como

$$\begin{aligned} G_{n+1}G_{n-1} - G_n^2 &= (G_n + G_{n-1})G_{n-1} - G_n^2 \\ &= G_n G_{n-1} + G_{n-1}^2 - G_n^2 \\ &= (-1)^n (G_1^2 - G_0 G_2) \end{aligned}$$

por lo que,

$$G_n G_{n-1} + G_{n-1}^2 - G_n^2 = (-1)^n (G_1^2 - G_0 G_2). \quad (32)$$

Sustituyendo en (32) para valores de  $1, 2, 3, \dots, 2n$ , sumando para todos

estos valores y observando que  $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k = 0$ ,

$$\sum_{k=1}^{2n} G_k G_{k-1} = G_{2n}^2 - G_0^2 \quad (33)$$

Consideremos

$$G_{n+1}^2 - G_n^2 = (G_{n+1} - G_n)(G_{n+1} + G_n) = G_{n+2} G_{n-1}.$$

Entonces,

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned} G_2^2 - G_1^2 &= G_3 G_0 \\ G_3^2 - G_2^2 &= G_4 G_1 \\ &\vdots \\ G_{n+1}^2 - G_n^2 &= G_{n+2} G_{n-1} \end{aligned}$$

y sumado, obtenemos

$$\sum_{k=1}^n G_{k+2} G_{k-1} = G_{n+1}^2 - G_1^2. \quad (34)$$

### 1.3. El Número de la Sección Dorada.

Hemos trabajado con las secuencias de Fibonacci y sus generalizaciones en las secciones anteriores, y se ha visto que se pueden generar tanto los números Fibonacci como los números Lucas, a partir del vector "semilla" adecuado. Además se pueden obtener fórmulas e identidades relativas a los números Fibonacci a partir de las igualdades obtenidas para las generalizaciones de secuencias Fibonacci. Ahora trataremos con las secuencias ya ahora estudiadas, y el número de la Sección Dorada.

Recordemos en principio que para la generalización de secuencias Fibonacci, se tenía la expresión dada por (16),

$$G_{n+2} = G_{n+1} + G_n$$

para  $n \geq 0$ , y  $G_0 = a$ ,  $G_1 = b$ .

También determinamos otra forma de calcular  $G_n$ ,

$$G_n = c_1 r_1^n + c_2 r_2^n. \quad (35)$$

<sup>5</sup> Para formularios relacionados con los números Fibonacci, Lucas y sus generalizaciones véase [1] pp. 176-184 y [3] pp. 87-93.





donde,  $r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ ,  $r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , son las raíces de la ecuación (3);

cumpliéndose que

$$c_1 + c_2 = G_0$$

$$c_1 r_1 + c_2 r_2 = G_1$$

$$c_1 = \frac{G_0 r_2 - G_1}{r_2 - r_1} = \frac{G_1 - G_0 \sigma}{\sqrt{5}}$$

$$c_2 = \frac{G_1 - G_0 r_1}{r_2 - r_1} = \frac{G_0 \varphi - G_1}{\sqrt{5}}$$

Ahora asumiremos una nueva notación para las raíces obtenidas:

$$r_1 = \varphi, \quad r_2 = \sigma.$$

El número  $\varphi = 1.618339887\dots$  es el número de la Sección Dorada.

Nótese que se cumplen las siguientes relaciones entre  $\varphi$  y  $\sigma$  :

$$\varphi + \sigma = 1$$

$$\varphi - \sigma = \sqrt{5}$$

$$\varphi \sigma = -1$$

$$\varphi^2 = 1 + \varphi$$

$$\sigma^2 = 1 + \sigma.$$

También se cumple lo siguiente,

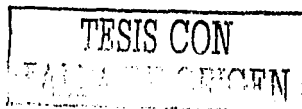
$$c_1 c_2 = \frac{G_0 G_2 - G_1^2}{5}.$$

Entonces para la secuencia de Fibonacci se tiene que  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ , de

$$\text{donde } c_1 = -c_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Y para la secuencia de Lucas, donde  $L_0 = 2$ ,  $L_1 = 1$ ; se tiene  $c_1 = c_2 = 1$ .

De donde, por (4) y (5)



$$F_n = \frac{\varphi^n - \sigma^n}{\sqrt{5}} \quad (36)$$

$$L_n = \varphi^n + \sigma^n \quad (37)$$

La fórmula (36) es la expresión dada al inicio de la sección de identidades de Fibonacci, conocida como fórmula de Binet.

Tanto los números Fibonacci como los números Lucas son enteros.  $\varphi^n$  y  $\sigma^n$  son números Fibonacci generalizados, aunque sólo son enteros para el caso en que  $n = 0$ . Así de (21) y  $n = 0$ , se tiene que

$$\varphi^n = \varphi F_n + F_{n-1}.$$

De (36) y (37) se sigue que

$$\varphi^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2} \quad \text{y} \quad \sigma^n = \frac{L_n - \sqrt{5}F_n}{2}.$$

A continuación presentamos las funciones que involucran el número de la sección Dorada, y que permiten obtener identidades de Fibonacci. Estas funciones se conocen como "funciones generatrices".

Sea

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k. \quad ^6$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} g(x) - F_0 x^0 - F_1 x^1 &= g(x) - x \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} F_k x^k = \sum_{k=2}^{\infty} (F_{k-1} x^k + F_{k-2} x^k) \end{aligned}$$

<sup>6</sup> De Moivre estableció (36) utilizando esta función generatriz mucho antes que Binet.



$$= x \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k = xg(x) + x^2 g(x)$$

o

$$g(x) = \frac{x}{1-x-x^2}.$$

Ahora, factorizando el denominador y descomponiendo por fracciones parciales se tiene

$$g(x) = \frac{x}{(1-\varphi x)(1-\sigma x)} = \frac{1}{\sqrt{5}(1-\varphi x)} - \frac{1}{\sqrt{5}(1-\sigma x)},$$

de donde

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(1+\varphi x + \varphi^2 x^2 + \varphi^3 x^3 + \dots)}{\sqrt{5}} - \frac{(1+\sigma x + \sigma^2 x^2 + \sigma^3 x^3 + \dots)}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{((\varphi-\sigma)x + (\varphi^2 - \sigma^2)x^2 + (\varphi^3 - \sigma^3)x^3 + \dots)}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

El coeficiente de  $x^n$ , está dado por  $\frac{\varphi^n - \sigma^n}{\sqrt{5}}$ , es decir,  $F_n$ , como en la expresión dada por (36)<sup>7</sup>.

Análogamente para los números Lucas, se tiene la función generatriz dada por

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k x^k,$$

entonces,

<sup>7</sup> Con esta expresión de  $g(x)$  se observa que los números Fibonacci son los coeficientes de Taylor de una función racional.

$$\begin{aligned}
 h(x) - 2 - x &= \sum_{k=2}^{\infty} L_k x^k = \sum_{k=2}^{\infty} (L_{k-1} x^k + L_{k-2} x^k) = \\
 &= x \sum_{k=1}^{\infty} L_k x^k + x^2 \sum_{k=0}^{\infty} L_k x^k \\
 &= x(h(x) - 2) + x^2 h(x).
 \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{2-x}{1-x-x^2} = \frac{1}{1-\varphi x} + \frac{1}{1-\sigma x} = \\
 h(x) &= 2 + (\varphi + \sigma)x + (\varphi^2 + \sigma^2)x^2 + \dots
 \end{aligned}$$

estableciéndose la expresión (37).

Igualando  $g(x)$  y  $\sum_{k=0}^{\infty} F_k x^k$  obtenemos la siguiente expresión,

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} F_k x^{k-1} \quad (A)$$

Sustituyendo  $x = 1/2$  en (A) se tiene,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{2^{k-1}} = 4 \quad \text{ó} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{2^k} = 2 \quad (38)$$

Diferenciando de ambos lados la expresión (A) respecto a  $x$ , tenemos

$$\frac{1+2x}{(1-x-x^2)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)F_k x^{k-2}$$

y haciendo  $x = 1/2$  tenemos que  $4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kF_k}{2^k} - 2(4) = 32$ , de donde,

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kF_k}{2^k} = 10 \quad (39)$$

Ahora demostraremos algunas identidades, además de la expresión (7) dada en la primera sección. Para ello necesitaremos probar primero el siguiente resultado,

$$0 < \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (B)$$

Prueba:

Como  $\sigma < 0$ ,  $|\sigma| = -\sigma$ . Además, como  $0 < |\sigma| < 1$ ,  $0 < |\sigma|^n < 1$ . Entonces

$$0 < |\sigma|^n < \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$0 < \frac{|\sigma|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.$$

Caso 1. Sea  $n$  par. Entonces  $|\sigma|^n = \sigma^n$ , y de la desigualdad anterior se tiene que  $0 < \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ , y por ende,  $\frac{1}{2} < \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < 1$ .

Caso 2. Sea  $n$  impar. Entonces  $|\sigma|^n = -\sigma^n$ ,  $0 < -\frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$ . Tenemos entonces que  $-\frac{1}{2} < \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < 0$ , y por ende  $0 < \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ .

En ambos casos se cumple que,  $0 < \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < 1$ . □

Ahora probemos la expresión dada por

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$F_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (40)$$

Prueba:

Por la fórmula dada en (36),

$$F_n = \frac{\varphi^n - \sigma^n}{\sqrt{5}} = \left( \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right) - \left( \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right). \quad (C)$$

Por lo tanto, 
$$\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} = F_n + \left( \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right) < F_n + 1.$$

Como  $\frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} > 0$ , se sigue de (C) que  $F_n < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2}$ .

De lo anterior tenemos que  $F_n < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} < F_n + 1$ , de donde finalmente obtenemos que

$$F_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rfloor. \quad \square$$

Como se cumple la igualdad  $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil - 1$ , para números reales no enteros, se sigue que

$$F_n = \left\lceil \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} \right\rceil - 1. \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (41)$$

Nótese además que se cumple la igualdad  $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$ , para  $n$  entero, por lo que

$$F_n = \left\lceil \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2} \right\rceil. \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (42)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Probemos ahora un par de identidades relacionadas con la función máximo entero, que permiten calcular números Fibonacci, nuevamente a partir del número de la Sección Dorada.

$$F_{2n} = \left[ \frac{\varphi^{2n}}{\sqrt{5}} \right] \quad \text{y} \quad F_{2n+1} = \left[ \frac{\varphi^{2n+1}}{\sqrt{5}} \right] \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (43)$$

Prueba:

Se  $n$  par. Entonces por la prueba para la expresión (B), tenemos que se cumple

$$F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}, \text{ ya que } 0 < \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.$$

Además,

$$\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} = F_n + \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} < F_n + 1, \text{ ya que } 0 < \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$$

Por lo que,

$$F_n < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} < F_n + 1,$$

$$\therefore F_n = \left[ \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right].$$

Sea  $n$  impar, entonces

$$F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} > \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}, \text{ ya que } 0 < \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}.$$

Además, se cumple lo siguiente,

$$\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} = F_n + \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} > F_n - 1, \text{ ya que } -\frac{1}{2} < \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}} < 0$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Por lo que se tiene,

$$F_n - 1 < \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} < F_n$$

$$\therefore F_n = \left\lfloor \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} \right\rfloor. \quad \square$$

Demostremos ahora que si  $n \geq 2$ , entonces  $0 < \frac{1}{2} - \sigma^n < 1$ . (D)

Prueba:

Tenemos que  $|\sigma| < 0.62$ ,  $|\sigma|^2 < \frac{1}{2}$ , por lo que  $|\sigma|^n < \frac{1}{2}$  cuando  $n \geq 2$ .

Como  $|\sigma|^n = |\sigma^n|$ , tenemos que  $-\frac{1}{2} < \sigma^n < \frac{1}{2}$ . Entonces  $-1 < \sigma^n - \frac{1}{2} < 0$ , es decir,  $0 < \frac{1}{2} - \sigma^n < 1$ .  $\square$

Ahora podemos demostrar la expresión (7) dada en la sección 1.2.2.

$$F_{n+1} = \left\lfloor \varphi F_n + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad (n \geq 2) \quad (7a)$$

Prueba:

Tenemos que

$$F_n = \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}} - \frac{\sigma^n}{\sqrt{5}}$$

$$\varphi F_n = \frac{\varphi^{n+1} - \varphi \sigma^n}{\sqrt{5}} = \frac{\eta^{n+1} - \varphi \sigma(\sigma^{n-1}) + \sigma^{n+1} - \sigma^{n+1}}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{(\varphi^{n+1} - \sigma^{n+1}) + \sigma^{n-1} + \sigma^{n+1}}{\sqrt{5}} = F_{n+1} + \frac{\sigma^{n-1}(\sigma^2 + 1)}{\sqrt{5}}$$

$$= F_{n+1} + \frac{\sigma^{n-1}(-\sqrt{5}\sigma)}{\sqrt{5}} = F_{n+1} - \sigma^n.$$

$$\therefore \varphi F_n + \frac{1}{2} = F_{n+1} + \left(\frac{1}{2} - \sigma^n\right).$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Por (D) tenemos que,  $0 < \frac{1}{2} - \sigma^n < 1$ , esto implica que  $F_{n+1} < \varphi F_n + \frac{1}{2}$ , además  $\varphi F_n + \frac{1}{2} < F_{n+1} + 1$ , concluimos que  $F_{n+1} = \left\lfloor \varphi F_n + \frac{1}{2} \right\rfloor$ .  $\square$

Finalmente demosremos un importante hecho de convergencia que tiene que ver con los números Fibonacci, y en general con cualquier generalización de números Fibonacci.

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \varphi \quad (n \rightarrow \infty) \quad (44)$$

Prueba:

Nótese primero que para cualquier número real, se tiene que si  $\lfloor x \rfloor = k$ , entonces  $x = k + \theta$ , donde  $0 \leq \theta < 1$ .

Por lo que por (7a), se tiene que

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \varphi F_n + \frac{1}{2} - \theta \\ \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \varphi + \frac{1}{2F_n} - \frac{\theta}{F_n}, \text{ (aplicando límites)} \\ \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \varphi, \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$\square$

Demostremos ahora que la razón del  $(n+1)$ -ésimo por el  $n$ -ésimo número Fibonacci generalizado, converge.

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \varphi \quad (n \rightarrow \infty) \quad (45)$$

Prueba:

Primero nótese que como en la demostración de (44), se tiene lo siguiente

$$\varphi F_n + \frac{1}{2} = F_{n+1} + \theta \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$F_n = \frac{F_{n+1}}{\varphi} + \frac{\theta}{\varphi} - \frac{1}{2\varphi} \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

$$\frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\varphi} + \frac{\theta}{\varphi F_{n+1}} - \frac{1}{2\varphi F_{n+1}}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{1}{\varphi}$$

De la expresión (21), haciendo  $n=0$ , y  $m=n+1$  para  $G_{n+1}$ , así como  $n=0$  y  $m=n$  para  $G_n$ , tenemos que

$$\frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{G_1 F_{n+1} + G_0 F_n}{G_1 F_n + G_0 F_{n-1}} = \frac{\frac{G_1 F_{n+1}}{F_n} + \frac{G_0 F_n}{F_n}}{\frac{G_1 F_n}{F_n} + \frac{G_0 F_{n-1}}{F_n}} = \frac{\frac{G_1 F_{n+1}}{F_n} + G_0}{G_1 + \frac{G_0 F_{n-1}}{F_n}}$$

Aplicando límites, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_1 F_{n+1}}{F_n} + \lim_{n \rightarrow \infty} G_0}{\lim_{n \rightarrow \infty} G_1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_0 F_{n-1}}{F_n}} = \frac{\varphi G_1 + G_0}{G_1 + G_0 \frac{1}{\varphi}} = \frac{\varphi G_1 + G_0}{\varphi}$$

$$= \varphi. \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \varphi.$$

□

FALLA DE ORIGEN

## 2. APLICACIONES DE LA SUCESIÓN DE FIBONACCI Y EL NÚMERO DE LA SECCIÓN DORADA<sup>8</sup>.

*En este capítulo se abordarán algunos problemas cuya solución involucran la sucesión de Fibonacci y el número de la Sección Dorada. También se exponen algunos hechos que se dan en la Naturaleza y que tienen una estrecha relación con el número de la Sección Dorada y los números Fibonacci.*

### 2.1. Problemas que involucran la sucesión de Fibonacci.

1. El primer problema que abordaremos, el cual se conoce como el problema de los conejos, se plantea en el libro de Fibonacci, *Liber Abaci*.

Supóngase que contamos con una pareja de conejos recién nacidos. Uno macho y el otro hembra. ¿Cuántos pares de conejos habrá al final del año (doce periodos)? si:

- Cada par de conejos recién nacidos tardan un periodo en madurar sexualmente.
- Cada par de conejos da vida a dos conejos, uno hembra y otro macho, cada periodo siguiente al de la concepción (desde el segundo periodo en adelante).
- Ningún conejo muere en el transcurso del problema.

La pregunta la replantearemos del siguiente modo, bajo las mismas condiciones dadas anteriormente: ¿Cuántos pares de conejos habrá en el *n*-ésimo periodo?

*Solución:*

Comencemos analizando el problema paso a paso.

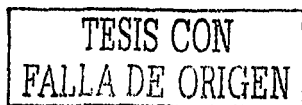
En el primer periodo sólo contamos con el par original, por lo que en el primer periodo tenemos un par. Es claro que en el primer periodo no se generaron más conejos, dado que éstos tardan un periodo después de nacidos en procrear.

En el segundo periodo el par ya es maduro y conciben, por lo que en el segundo periodo tenemos un par.

En el tercer periodo tenemos el par original más el par recién nacido, por lo que en total hay dos pares.

---

<sup>8</sup> Consúltese *The Fibonacci Quarterly*.



Ahora supongamos que  $A_n$  denota el número de pares de conejos adultos, y  $B_n$  el número de pares de conejos inmaduros. Como cada par adulto generará en el siguiente periodo un par de conejos inmaduros, el número de pares de conejos inmaduros en el periodo  $n$  es igual al número de adultos en el periodo precedente, esto es,  $B_n = A_{n-1}$ . Entonces,

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1} = A_{n-1} + A_{n-2}. \quad (E)$$

Finalmente, el número total de pares de conejos en el periodo  $n$  será, el número total de pares adultos en ese periodo, más el número total de pares de conejos inmaduros en ese periodo. Sea  $C_n$ , el número total de pares de conejos en el periodo  $n$ , entonces

$$\begin{aligned} C_n &= A_n + B_n = A_n + A_{n-1}, && \text{pero por (E)} \\ A_{n+1} &= A_n + A_{n-1}, && \text{por lo que,} \\ C_n &= A_{n+1}, && \text{además,} \\ C_{n+1} &= A_{n+2} = A_{n+1} + A_n, && \text{por lo tanto,} \\ C_{n+1} &= C_n + C_{n-1}, && \text{para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Nótese que  $C_1=1$  y  $C_2=1$ , ya que tanto en el primero como en el segundo periodo, el número total de pares de conejos es 1. Por lo que la igualdad  $C_{n+1} = C_n + C_{n-1}$ , se puede describir como,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} 0$$

que resulta ser la expresión de Fibonacci. □

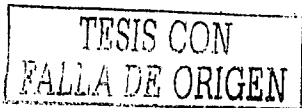
2. El siguiente problema es estructuralmente similar al anterior, sin embargo, tiene cierta relación con las posibles maneras de escribir cualquier número entero  $n$  como suma de una secuencia de términos, siendo éstos 1 o 2.

El problema establece lo siguiente:

Una escalinata tiene  $n$  escaleras. Se puede subir por la escalinata de una escalera o dos a la vez. ¿De cuántas maneras posibles (digamos  $S_n$ ) se puede subir la escalinata?

*Solución:*

Cuando comenzamos a subir la escalinata podemos hacerlo con un paso o con dos. Si subimos un solo escalón, restan  $S_{n-1}$  posibilidades para subir los  $n-1$  escalones restantes de la escalinata. Si subimos dos escalones,



entonces el número de posibilidades restantes para subir la escalinata es de  $S_{n-2}$ . Entonces se cumple que

$$S_n = S_{n-1} + S_{n-2}.$$

Nótese que ésta fórmula tiene la misma estructura que la fórmula de Fibonacci o de Lucas, solo que falta determinar  $S_1$  y  $S_2$ . Cuando la escalinata tiene un único escalón, existe una posibilidad para subir dicho escalón, esto es,  $S_1 = 1$ . Si la escalinata cuenta con dos escalones, ésta se puede subir de dos maneras: tomando un paso que abarque los dos escalones, o tomando un paso a la vez, por lo que  $S_2 = 2$ . Entonces obtenemos la secuencia

$$\begin{array}{cccccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \\ S_n & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & \dots \end{array}$$

Lo que resulta ser la secuencia de Fibonacci, con un término rezagado, por lo que

$$S_n = F_{n+1}.$$

□

3. Consideremos generaciones de abejas. Los huevos de las abejas trabajadoras sin fertilización generan zánganos, mientras que los que son fertilizados generan hembras únicamente. Entonces un zángano tiene un solo padre, en tanto que una hembra tiene dos, uno macho y otro hembra. ¿Cuántas abejas hay en cada generación?

*Solución:*

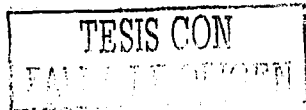
En la primera generación supongamos que tenemos una hembra, denotada por  $f_1=1$ , y que no hay machos,  $m_1=0$ . En las siguientes generaciones se cumple que

$$\begin{array}{ll} m_{n+1} = f_n & f_{n+1} = f_n + m_n \\ m_{n+2} = f_{n+1} & f_{n+2} = f_{n+1} + m_{n+1} \end{array}$$

Por lo que,

$$m_{n+2} = m_{n+1} + m_n, \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Tanto la secuencia de  $f_n$  como la de  $m_n$  son secuencias de Fibonacci pero con semillas diferentes. De hecho,



$$f_n = F_n, \quad m_n = F_{n-1}.$$

Como estamos interesados en el número de abejas en cada generación tenemos que,

$$f_n + m_n = F_n + F_{n-1} = F_{n+1},$$

Entonces en la generación  $n$  hay  $F_{n+1}$  abejas. □

4. Considérese los números naturales  $1, 2, 3, \dots, n$ , en este orden. Encuentre el número de aquellas permutaciones en las que cada número se mantiene fijo o cambia de lugar con algún número vecino. Más de uno de tales cambios pueden darse al mismo tiempo.

*Solución:*

Denotemos el número de tales permutaciones de los  $n$  números por  $g_n$ . Si  $n$  se mantiene fijo, entonces existen  $g_{n-1}$  posibles permutaciones. Si  $n$  y  $n-1$  intercambian lugares, entonces existen  $g_{n-2}$  posibles permutaciones. De esto,

$$g_n = g_{n-1} + g_{n-2}.$$

Para determinar completamente a  $g_n$  consideremos  $g_1$ , que es obviamente 1, y  $g_2 = 2$ , ya que los números 1 y 2 pueden mantener su posición inicial o cambiar lugar. La secuencia de  $g_n$  es  $1, 2, 3, 5, 8, \dots$ , esto es  $g_n = F_{n+1}$ .

Considérese el mismo problema descrito anteriormente, pero con los números colocados alrededor de un círculo. Denotemos el número de posibles arreglos descritos previamente por  $h_n$ . Supóngase que  $n \geq 3$ .

Si el número 1 y  $n$  se intercambian, entonces existen  $g_{n-2}$  permutaciones. Si no cambian de lugar, entonces tenemos el problema anterior, con  $g_n$  posibilidades. Entonces,

$$h_n = g_n + g_{n-2} = F_{n+1} + F_{n-1}.$$

La secuencia descrita por  $h_n$  está dada por  $4, 7, 11, 18, 29, \dots$ , que resulta ser la secuencia de Lucas, por lo que  $h_n = L_n$ . □

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

5. ¿De cuántas maneras es posible obtener  $n$  como la suma de enteros positivos mayores que 1?

*Solución:*

Denotemos el número de maneras posibles por  $T_n$ . Como ejemplo tenemos que  $T_7 = 8$ ; ya que 7 se puede escribir como,

$$\begin{array}{cccc} 2+2+3; & 2+3+2; & 2+5; & 3+2+2; \\ 3+4; & 4+3; & 5+2; & 7. \end{array}$$

Tres de estas sumas comienzan con 2. Si en dichas sumas omitimos el número 2, entonces tenemos todas las posibles sumas para 5. Entonces  $T_5 = 3$ . Cinco de las sumas escritas comienzan con un número mayor que 2. Si reducimos los primeros términos en 1, obtenemos todas las posibilidades para la suma del 6. Por lo que  $T_6 = 5$ .

Aplicando el mismo procedimiento anterior para cualquier  $n$ , encontramos que  $T_{n+2} = T_n + T_{n+1}$ . Como  $T_2 = 1$  y  $T_3 = 1$ , concluimos que  $T_n = F_{n-1}$ .

Análogamente, en un caso más general ¿De cuántas formas es posible obtener el número  $n$  como la suma de los enteros  $1, 2, \dots, m$ ?

Denotemos por  $T_n^{(m)}$ . Como ejemplo tenemos que  $T_4^{(3)} = 7$ , ya que 4 puede escribirse como

$$\begin{array}{cccc} 1+1+1+1; & 1+1+2; & 1+2+1; & 1+3; \\ 2+1+1; & 2+2; & 3+1. & \end{array}$$

Observando que si se omiten los primeros términos de cada suma cuando aplique, encontramos que se cumple lo siguiente,

$$T_4^{(3)} = T_3^{(3)} + T_2^{(3)} + T_1^{(3)}.$$

ya que,

$$T_1^{(3)} = 1, \quad T_2^{(3)} = 2, \quad T_3^{(3)} = 4.$$

De forma generalizada se tiene que,

$$T_{n+1}^{(m)} = T_1^{(m)} + T_2^{(m)} + T_3^{(m)} + \dots + T_n^{(m)}.$$

□

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

6. Una moneda equilibrada es lanzada hasta que dos águilas hayan aparecido consecutivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan dos águilas consecutivamente después de  $k$  lanzamientos?

*Solución:*

Para  $k=2$  la probabilidad es claramente  $\frac{1}{4}$  y para  $k=0$  la probabilidad es 0. Para  $k \geq 3$ , la secuencia de tamaño  $k$  es una secuencia de tamaño  $k-1$  precedida por un sol o por una secuencia de tamaño  $k-2$  precedida por águila y sol. Por lo que la probabilidad  $P_k$  de una secuencia de tamaño  $k$  es,

$$P_k = \frac{1}{2} P_{k-1} + \frac{1}{4} P_{k-2}.$$

Nótese cómo la expresión anterior es una secuencia de orden 2, con

$a_1 = \frac{1}{2}$  y  $a_2 = \frac{1}{4}$ , por lo que la matriz  $C$  está dada por

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \text{ calculando el polinomio característico tenemos que}$$

resolver la ecuación dada por

$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = 0,$$

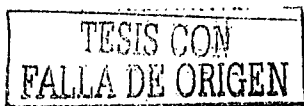
de donde las raíces resultan ser  $r_1 = \frac{1}{2}\varphi$  y  $r_2 = \frac{1}{2}\sigma$ , por lo que

$$P_k = c_1 \left(\frac{1}{2}\varphi\right)^k + c_2 \left(\frac{1}{2}\sigma\right)^k.$$

Además nótese que los valores para los sistemas de ecuaciones son  $P_1=0$  y

$P_2=\frac{1}{4}$ , por lo que obtenemos que  $c_1 = \frac{1}{\varphi\sqrt{5}}$  y  $c_2 = -\frac{1}{\sigma\sqrt{5}}$ , y finalmente,

$$P_k = \frac{(\varphi^{k-1} - \sigma^{k-1})}{2^k \sqrt{5}} = \frac{F_{k-1}}{2^k}.$$





Obsérvese que  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{F_{k-1}}{2^k} = 1$ .

Lo anterior se sigue de la expresión (31A) dada en el capítulo I, ya que sustituyendo  $G_n$  por  $F_n$  y observando que

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+2}}{2^n} = 0$ , por lo que sí es una densidad de probabilidad.

Por otro lado, el valor esperado de esta densidad para el problema dado es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kF_{k-1}}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)F_k}{2^{k+1}} = 6. \text{ por las fórmulas (38) y (39).} \quad \square$$

7. Una moneda equilibrada es lanzada hasta que aparezcan consecutivamente tres soles o tres águilas. ¿Cuál es la probabilidad de que aparezcan consecutivamente tres soles o tres águilas en  $k$  lanzamientos?

*Solución:*

Denotemos la probabilidad de que la secuencia termine después de  $k$  lanzamientos por  $P(k)$ . También denotemos la probabilidad de que la secuencia concluya con  $k$  lanzamientos, dado que el primer lanzamiento fue sol por  $Q(k)$  y que termine en  $k$  lanzamientos, dado que el primero fue águila por  $R(k)$ . Entonces,

$$P(k) = Q(k) + R(k).$$

Claramente,  $P(1) = P(2) = 0$ ,  $P(3) = \frac{1}{4}$ . Sea  $k \geq 4$ .

Si para empezar con dos lanzamientos obtenemos dos soles, entonces el tercer lanzamiento deberá ser águila, pues en otro caso no consideraríamos que  $k \geq 4$ . Por lo tanto, después de dos lanzamientos,  $k-2$  lanzamientos restan, comenzando con águila.

Por otro lado, si en el primer lanzamiento se observó águila, y en el segundo sol, entonces el águila se considera el primer término de la secuencia de  $k-1$  lanzamientos. Por lo que,

$$Q(k) = \frac{1}{4}R(k-2) + \frac{1}{2}R(k-1).$$

Similarmente,

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

8. Encuentre el número de posibles secuencias de  $n$  dígitos, cada dígito con valor de 0 o 1, sin que dos ceros aparezcan consecutivamente en la secuencia.

*Solución:*

Denotemos el número de posibles secuencias por  $P(n)$ . Existen  $P(n-1)$  formas, comenzando con 1, y  $P(n-2)$  maneras comenzando con 0,1. De donde,

$$P(n) = P(n-1) + P(n-2).$$

Si  $n = 1$ , existen dos posibilidades ( 0 o 1 ). Si  $n = 2$ , existen tres maneras ( 1,1 o 0,1 o 1,0 ). Por lo tanto tenemos que  $P(1) = 2$  y  $P(2) = 3$ , y generalizando,

$$P(n) = F_{n+2}.$$

El resultado anterior se sigue del resultado obtenido en el problema 6.

Considérese las  $2^n$  posibles secuencias de ceros y unos con la misma probabilidad de que alguno de éstos aparezcan en el  $m$ -ésimo lugar ( $m = 1, 2, \dots, n$ ). La probabilidad de que dos ceros hayan aparecido después de

dos pasos es  $\frac{F_1}{2^2}$ . La probabilidad de que dos ceros aparezcan por primera

vez después de tres pasos ( 1,0,0 ) es  $\frac{F_2}{2^3}$ , y después de  $n$  pasos se tiene

$\frac{F_{n-1}}{2^n}$ . Por lo que la probabilidad de que dos ceros hayan aparecido por

primera vez después de  $k$  pasos es  $\frac{F_{k-1}}{2^k}$ , y de que no hayan aparecido los

dos ceros durante los primeros  $n$  pasos es  $1 - \sum_{k=2}^n \frac{F_{k-1}}{2^k} = \frac{F_{n+2}}{2^n}$ . Esto

último por la fórmula (31A).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

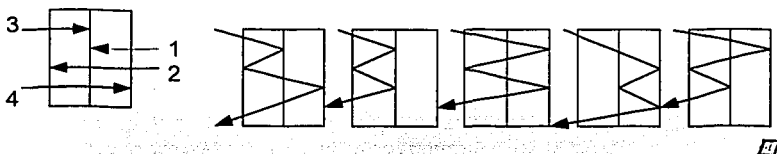
9. Considérese dos placas de vidrio superpuestas, de tal forma que hayan cuatro caras de reflexión. Supóngase que un rayo de luz es dirigido a los vidrios apilados. ¿De cuántas maneras distintas un rayo de luz puede reflejarse  $n$  veces cuando pasa a través de las placas de vidrio?

*Solución:*

Denotemos el número de posibilidades por  $a_n$ . Supóngase que el rayo se refleja una vez, entonces hay dos posibilidades distintas para este caso. Si el rayo se refleja dos veces, entonces existen tres posibles reflexiones distintas. De forma análoga para tres reflexiones, existen cinco posibilidades (observe la figura).

De forma más general, supóngase que el rayo se refleja  $n$  veces, entonces la última reflexión ocurre en la cara 1 o 3. Entonces la reflexión previa debe ocurrir en la cara 2 o 4. El número de posibilidades con la  $n$ -ésima reflexión en la cara 1 equivale al número de posibilidades que se darán en la cara 1 después de  $n-1$  reflexiones, por lo que existen  $a_{n-1}$  de dichas posibilidades. Supóngase ahora que la  $n$ -ésima reflexión se da en la cara 3. La  $(n-1)$ -ésima reflexión debe ocurrir en la cara 4. El rayo debe haberse reflejado  $n-2$  veces antes de reflejarse en la cara 4, por lo que este número es  $a_{n-2}$ . Por lo que  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , y como  $a_1 = 2$  y  $a_2 = 3$ , entonces,

$$a_n = F_{n+2}.$$

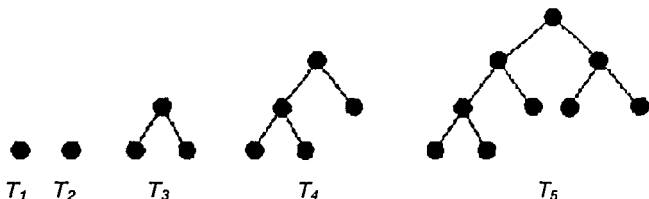


TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

10. Árboles Fibonacci. El  $n$ -ésimo árbol Fibonacci denotado por  $T_n$  es un árbol binario, definido de forma recursiva como sigue, donde  $n \geq 1$ :

- Tanto  $T_1$  y  $T_2$  son árboles binarios con un vértice cada uno.
- Sea  $n \geq 3$ . Entonces  $T_n$  es un árbol binario cuyo subárbol izquierdo es  $T_{n-1}$  y su subárbol derecho es  $T_{n-2}$ .

Por ejemplo, a continuación se muestran árboles Fibonacci desde  $T_1$  hasta  $T_5$ .



Encontremos una expresión para  $v_n$  el número de vértices,  $l_n$  el número de hojas,  $i_n$  el número de vértices internos y  $e_n$  el número de bordes en el  $n$ -ésimo árbol Fibonacci.

*Solución:*

Observando la figura podemos decir que se cumplen las siguientes igualdades para  $n \geq 1$ :

$$a) v_n = 2F_n - 1$$

$$b) l_n = F_n$$

$$c) i_n = F_n - 1$$

$$d) e_n = 2F_n - 2$$

- a) Tenemos que cuando  $n = 1$  y  $n = 2$ , se cumple la fórmula recursiva, pues  $v_1 = 1$  y  $v_2 = 1$ . Ahora, cuando  $n \geq 3$ ,  $T_n$  tiene  $T_{n-1}$  como subárbol a su izquierda y  $T_{n-2}$  como subárbol a su derecha, por lo que  $v_n = v_{n-1} + v_{n-2} + 1$ . Hagamos  $b_n = v_n + 1$ . Entonces  $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$ , donde  $b_1 = b_2 = 2$ . Por lo tanto  $b_n = 2F_n$ , por la fórmula (17), y concluimos que  $v_n = 2F_n - 1$ .
- b) Por la definición recursiva de un árbol Fibonacci,  $T_n$  se sigue que  $l_n = l_{n-1} + l_{n-2}$ , donde  $l_1 = l_2 = 1$ . Por lo que  $l_n = F_n$ .
- c) Claramente se cumple que  $i_n = v_n - l_n = (2F_n - 1) - F_n = F_n - 1$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- d) Nuevamente por la definición recursiva de  $T_n$ ,  $e_n = e_{n-1} + e_{n-2} + 2$ , donde  $e_1 = e_2 = 0$ . Sea  $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ , donde  $c_1 = c_2 = 2$ . Por lo que  $c_n = 2F_n$ , y por ende,  $e_n = 2F_n - 2$ , donde  $n \geq 1$ .  $\square$

Existen muchos problemas cuya solución involucra números Fibonacci, Lucas o sus generalizaciones. Previamente hemos tratado con algunos de los más conocidos e ilustrativos, que describen en su solución una forma generalizada para resolver problemas relativos a secuencias de cualquier orden.

Ahora abordaremos un Teorema relacionado con la representación de números naturales a partir de números Fibonacci.

**11. Teorema 1.** Cualquier número entero positivo  $N$  puede ser expresado como la suma de diferentes números Fibonacci.

$$N = F_{k_1} + F_{k_2} + \dots + F_{k_r} \quad (46)$$

tal que

- a)  $k_{i+1} \leq k_i - 2 \quad (i = 1, 2, \dots, r-1)$   
 b)  $k_r \geq 2$ .

es decir, con números Fibonacci que no sean consecutivos. Este Teorema se conoce como Teorema de Zeckendorf.

*Prueba:*

Cuando  $N$  es en sí un número Fibonacci ( $N = 1$  o  $2$  o  $3$ ), la prueba es trivial. Observamos por inspección que se cumple para  $N = 4 = F_4 + F_2$ .

Supongamos que todos los números naturales se pueden expresar por (46) siempre que no excedan  $F_n$ , y sea  $F_{n+1} > N > F_n$ .

Ahora,  $N = F_n + (N - F_n)$ ; pero nótese que  $N - F_n < F_n$ , por lo que por nuestro supuesto  $N - F_n$  puede expresarse como la suma de números Fibonacci con ningún número Fibonacci consecutivo.  $\square$

La representación de cualquier número natural  $N$  dada en el teorema anterior, se conoce como la *representación canónica*.

Por supuesto, pueden existir diversas formas de expresar  $N$  que no sea la representación canónica. Por ejemplo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$25 = F_8 + F_4 + F_2 \quad (\text{canónica})$$

$$25 = F_7 + F_6 + F_4 + F_2.$$

12. Finalmente veremos cómo el número racional  $\frac{1}{89}$  puede expresarse como la suma:

$$\begin{aligned} & 0.01 \\ & 0.001 \\ & 0.0002 \\ & 0.00003 \\ & + 0.000005 \\ & 0.0000008 \\ & 0.00000013 \\ & 0.000000021 \\ & 0.0000000034 \end{aligned}$$

⋮

donde cada número significativo es un número Fibonacci consecutivo. Para demostrar lo anterior recurriremos a las funciones generatrices estudiadas en el capítulo I.

*Solución:*

Sea

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k+1} F_k.$$

Ahora consideremos también  $xf(x)$  y  $x^2f(x)$ , por lo que como la suma comienza con  $x^2$ , tenemos que se cumple lo siguiente:

$$f(x)(1 - x - x^2) = x^2$$

Por lo que,

$$f(x) = \frac{x^2}{1 - x - x^2} = \frac{1}{x^{-2} - x^{-1} - 1}.$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Finalmente, haciendo  $x = \frac{1}{10}$  y sustituyendo en la última igualdad, tenemos que

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{1}{100 - 10 - 1} = \frac{1}{89}$$

$$f\left(\frac{1}{10}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_k}{(10)^{k+1}}.$$

□

Nótese cómo se puede expresar algunos números racionales, siempre que la sustitución para  $x$  sea adecuada.

## 2.2. Problemas relacionados con el Número de la Sección Dorada.

En el primer capítulo hemos tratado las propiedades del número de la sección dorada así como su estrecha relación con los números de Fibonacci y sus generalizaciones. Dicho número lo hemos representado por la letra griega  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

Se ha encontrado en el mundo real diversas aproximaciones con éste número, que aunque no de forma exacta debido a la irracionalidad de  $\varphi$ , sí de manera muy próxima.

Cabe señalar que el número  $\varphi$  no sólo recibe el nombre del número de la Sección Dorada, sino que también se le conoce como el número dorado, número de la razón aurea o simplemente número de la razón o proporción dorada.

1. Para la construcción de la pirámide egipcia de Giza hacia el año 3070 a.C., se hizo uso del número de la sección dorada, denominada por ellos como la *proporción sagrada*. Esta proporción se escogió de tal forma que el área de un cuadrado cuyo lado es el mismo a la altura de la pirámide, es igual al área de la cara triangular inclinada de la pirámide.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Para comprobar lo anterior, sea  $2b$  la base de la pirámide,  $a$  la altura de la cara triangular inclinada y  $h$  la altura de la pirámide. Según lo anterior vemos

que  $h^2 = \frac{2b \cdot a}{2} = ab$ . Además por el teorema

de Pitágoras se tiene que  $h^2 = a^2 - b^2$ .

Entonces  $a^2 - b^2 = ab$ , y por ende

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 1 + \left(\frac{a}{b}\right).$$

cómo  $\frac{a}{b}$  satisface la ecuación cuadrática  $x^2 = x + 1$ , por lo que

$$x = \frac{a}{b} = \varphi.$$

Las medidas reales de la pirámide de Giza son las siguientes:  $a = 188.4$  mts.,  $b = 116.4$  mts. y  $h = 148.2$  mts. Por lo que,

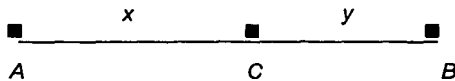
$$\frac{a}{b} = \frac{188.4}{116.4} = 1.618556701 \dots \approx 1.618.$$

2. Considérense tres números positivos  $a, b$  y  $c$ , tales que  $a^2 = bc$ . Entonces  $a$  se denomina la *media proporcional* de  $b$  y  $c$ . Nótese cómo  $a^2 = bc$  si y sólo si  $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$ .

La interpretación geométrica consiste en encontrar un punto  $C$  en un segmento de recta  $\overline{AB}$ , de tal forma que la longitud del segmento mayor  $\overline{AC}$ , sea la *media proporcional* del segmento completo  $\overline{AB}$  y del segmento menor  $\overline{BC}$ . En otras palabras buscamos un punto  $C$ , tal que

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AB}{AC} \quad (*)$$

entonces  $C$ , divide  $\overline{AB}$  en la proporción dorada.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Para localizar  $C$ , hagamos  $\overline{AC} = x$  y  $\overline{BC} = y$ . Entonces la ecuación (\*) se puede expresar como

$$\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)},$$

es decir,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \left(\frac{x}{y}\right) - 1 = 0.$$

Por lo que  $\frac{x}{y}$  satisface la ecuación cuadrática cuya raíz positiva es

$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ . Por lo que el punto  $C$  debe escogerse de tal forma que

$\frac{AC}{BC} = \frac{x}{y} = \varphi$ , dividiendo el segmento de recta  $\overline{AB}$  en la razón o proporción dorada<sup>9</sup>. □

3. En el cuerpo humano se ha encontrado que algunas proporciones se aproximan a la razón dorada  $\varphi$ . Por ejemplo, la altura de una persona entre la distancia del ombligo a los pies, se aproxima al número 1.618. La proporción entre la distancia del ombligo a los pies y del ombligo a la cabeza, también es aproximadamente igual a  $\varphi$ . Otra relación que se aproxima a 1.618 se da entre lo que mide el antebrazo y la longitud de la mano. Más aún, en los huesos que forman la mano y los dedos, se observa también el número  $\varphi$ . Es decir, la proporción del metacarpo y las falanges es relativamente igual a 1.618, la razón de las falanges y las falanginas es también  $\varphi$ , y lo mismo se observa entre las falanginas y las falangetas. En otras palabras, el hueso del que se hable es mayor en 1.618 al que le precede.

Respecto a la cabeza de una persona se ha encontrado que ésta forma un rectángulo dorado con los ojos en su parte media. La nariz y la boca están colocados en secciones doradas respecto a la distancia entre los ojos y la barbilla. Otras proporciones que se aproximan a  $\varphi$  no sólo se encuentran en el cuerpo humano, sino en otras formas de vida como animales y plantas.

<sup>9</sup> Relacionado a la geometría que involucra números Fibonacci, véase [3] pp. 294-307.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

En otro sentido, un grupo de investigadores en el campo de la astronomía, a través de un conjunto de antenas rastrean radiaciones de extremadamente baja frecuencia y han encontrado vibraciones de 1.618033 Hertz o ciclos por segundo, que se aproximan al número dorado  $\varphi$ . La fuente de procedencia de dicha frecuencia no se conoce.

4. Consideremos las funciones que cumplan la igualdad  $f'(x) = f^{-1}(x)$ . Propongamos  $f(x) = Ax^n$  como solución de la igualdad dada previamente.

Entonces  $f'(x) = Anx^{n-1}$  y  $f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{A}\right)^{1/n}$ . La condición indica que

$Anx^{n-1} = \left(\frac{x}{A}\right)^{1/n}$ ; esto es,  $A^{n+1}n^n x^{n(n-1)-1} = 1$ , de donde si  $n^2 - n - 1 = 0$ ,

se tiene que  $A^{n+1}n^n = 1$ . Entonces, resolviendo la ecuación cuadrática anterior se observa que  $n = \varphi, \sigma$  y  $A = n^{-n/(n+1)}$ .

Supongamos ahora que  $n = \sigma$ . Nótese que  $n < 0$ , pero  $(n+1) > 0$ . Por lo que  $\frac{-\sigma}{\sigma+1} > 0$  y entonces,  $A = \sigma^{-\sigma/(\sigma+1)}$ , pero en este caso  $A$  no es un número real. Consecuentemente  $f$  no es una función real.

Pero cuando  $n = \varphi$ ,  $f$  sí es una función real, por lo que la única solución para la condición de  $f'(x) = f^{-1}(x)$  es que  $f(x) = x^\varphi \varphi^{-1/\varphi}$ , recordando que se cumple siempre la siguiente identidad:  $\varphi^2 = \varphi + 1$ .

De manera general, consideremos la siguiente ecuación

$$f^{-1}(x) = f^{(m)}(x). \quad (\text{A})$$

Nuevamente consideremos  $f(x) = Ax^n$ . Entonces,

$$f^{(m)}(x) = An(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)x^{n-m}$$

y de la ecuación dada en (A) tenemos que,

$$\left(\frac{x}{A}\right)^{1/n} = An(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)x^{n-m}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Por lo que

$$A^{n+1} [n(n-1) \dots (n-m+1)]^n x^{n(n-m)-1} = 1.$$

Entonces,

$$A^{n+1} [n(n-1) \dots (n-m+1)]^n = 1,$$

cuando  $n^2 - mn - 1 = 0$ . Siempre que

$$n = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2},$$

y por ende se tiene que,

$$A = [n(n-1) \dots (n-m+1)]^{-n/(n+1)}.$$

Nuevamente, existe un caso en el que el valor para  $A$  no es real.

Para observar esto consideremos dos casos, cuando  $m$  es impar y cuando  $m$  es par.

Sea  $m$  impar. Entonces si,

$$n = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} < 0,$$

como antes, se tiene que  $A$  no es un número real. Pero cuando

$$n = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} > 0$$

llegamos a una solución válida

$$f(x) = [n(n-1) \dots (n-m+1)]^{-n/(n+1)} x^n.$$

Por otro lado, cuando  $m$  es par,  $[n(n-1) \dots (n-m+1)] > 0$  independientemente de que  $n$  sea mayor que cero o menor que cero. Por lo que en este caso tenemos dos soluciones:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$f(x) = [n(n-1)\dots(n-m+1)]^{-n/(n+1)} x^n$$

donde,

$$n = \frac{m \pm \sqrt{m^2 + 4}}{2}.$$

□

5. A continuación expresaremos  $\varphi$  términos trigonométricos<sup>10</sup>. Para esto hagamos  $\theta = \frac{\pi}{10}$ . Entonces,  $2\theta + 3\theta = \frac{\pi}{2}$ . Se sigue entonces que,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(2\theta) &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) \\ &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(3\theta) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{sen}(3\theta) \\ &= \cos(3\theta). \end{aligned}$$

Sustituyendo por identidades adecuadas,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}2\theta &= \cos3\theta, \\ 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, \end{aligned}$$

Multiplicando ambos miembros de la igualdad anterior por  $\tan\theta$ , tenemos,

$$2\operatorname{sen}\theta = 4(1 - \operatorname{sen}^2\theta)\operatorname{sen}\theta - 3\operatorname{sen}\theta,$$

$$4\operatorname{sen}^3\theta + 2\operatorname{sen}^2\theta - \operatorname{sen}\theta = 0,$$

y como  $\operatorname{sen}\theta \neq 0$ ,

$$4\operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta - 1 = 0.$$

Resolviendo la ecuación cuadrática para  $\operatorname{sen}\theta$ , resulta que,

<sup>10</sup> En relación a los números Fibonacci y la Trigonometría véase [3] pp. 248-293, 308-331.

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \left( \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right),$$

y tomando la raíz positiva  $\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2} \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) = -\frac{1}{2} \sigma$  y recordando que se cumple la igualdad  $\sigma \varphi = -1$ , resulta que

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{1}{2\varphi}.$$

$$\therefore -2\operatorname{sen} \theta = \sigma.$$

(B)

Por lo que finalmente,

$$\cos 2\theta = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \theta$$

$$= 1 - \frac{1}{2\varphi^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{2} = \frac{2 - \sigma^2}{2} = \frac{2 - (1 + \sigma)}{2} = \frac{1 - \sigma}{2},$$

y como se cumple que  $\varphi + \sigma = 1$ , se tiene lo siguiente,

$$\cos 2\theta = \cos(\pi/5) = \frac{\varphi}{2}.$$

(C)

$$\therefore 2\cos(\pi/5) = \varphi.$$

□

6. Ahora trataremos de expresar los números Fibonacci a partir de una fórmula trigonométrica utilizando el número de la sección dorada y las identidades encontradas en el problema anterior.

Entonces tenemos que  $-2\operatorname{sen}(\pi/10) = \sigma$  y  $2\cos(\pi/5) = \varphi$ .

De la fórmula de Binet tenemos que

$$F_n = \frac{\varphi^n - \sigma^n}{\varphi - \sigma} = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^{n-k-1} \sigma^k$$

TERMINA  
FALLA DE ORIGEN

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \left( 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \right)^{n-k-1} \left( -2 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\right) \right)^k$$

$$2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^{n-k-1}\left(\frac{\pi}{5}\right) \operatorname{sen}^k\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\therefore F_n = 2^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cos^{n-k-1}\left(\frac{\pi}{5}\right) \operatorname{sen}^k\left(\frac{\pi}{10}\right).$$

□

<p style="text-align: center;">TESIS CON FALLA DE ORIGEN</p>
--

### 3. UNA APLICACIÓN A LAS FINANZAS DE LOS NÚMEROS FIBONACCI. OLAS DE ELLIOTT.

*En este capítulo se desarrollarán conceptos que involucran la teoría de las olas de Elliott y su relación con los números Fibonacci así como al Número de la Sección Dorada. En este sentido, se describirá de forma más precisa la aplicación que los números Fibonacci tienen en las Finanzas.*

#### 3.1. Conceptos Básicos.

El principio de las Olas de Elliott fue descubierto a finales de la década de 1920 por el ingeniero Ralph Nelson Elliott. El observó que la Bolsa de Valores no tenía un comportamiento del todo caótico como se creía, sino que los movimientos del mercado presentaban ciclos repetitivos, los cuales reflejaban las acciones y emociones de la gente involucrada, causada además por influencias externas y la psicología masiva. Ésta se revela en patrones similares que se repiten una y otra vez, dando lugar a las denominadas *olas*.

El trabajo de Elliot se basa a su vez en la teoría de Dow, la cual define los movimientos de los precios en términos de olas o de movimientos cíclicos seguida de un principio de acción y reacción. En este contexto, los patrones, el tiempo y las proporciones son características propias de las actividades humanas, y por ende del mercado. Sin embargo, Elliott descubrió el comportamiento fractal del mercado, por lo que fue capaz de analizar los mercados más profundamente e identificar las características específicas de los patrones, además de realizar predicciones del mercado con mayor detalle es base a éstos<sup>11</sup>.

Llanamente hablando, un fractal es una estructura matemática que en una escala cada vez más pequeña, se repite infinitamente. Los patrones que Elliott observó se sustentan del mismo modo. Así, por ejemplo, una ola impulsora, la cual sigue la tendencia principal, siempre muestra cinco olas en su comportamiento. Realizando una observación más detenida, cada ola de impulso dentro de la ola de impulso original, también está constituida por cinco olas y este patrón se sigue indefinidamente.

El concepto de factales fue reconocido por matemáticos y científicos algunos años después de que Elliott ya los hubiera identificado. Mandelbrot demostró la existencia de los fractales y reconoció que esta estructura también se presenta en objetos reales y en diversas formas de vida.

En los setentas, el principio de las Olas de Elliott ganó popularidad a través del trabajo de Frost y Prechter, quienes publicaron un libro en base a esta

---

<sup>11</sup> Véase *The Complete Writings of R.N. Elliott with Applications* de J.R. Hill, J.R. Hill, Commodity Research Institute, N. Carolina, 1979.



teoría, y con esta herramienta predijeron, en medio de la crisis de los setentas no sólo un mercado alcista para los ochentas, sino que Prechter predijo con gran exactitud la quiebra (*crash*) de 1987. Después de años de estudio, Elliott logró detectar estos patrones en el mercado de valores. Además de dichos patrones Elliott, basó sus pronósticos del mercado en los números Fibonacci.

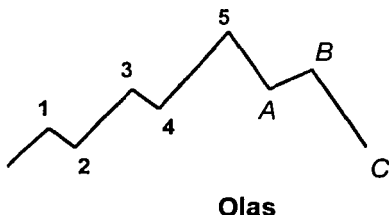
Conforme a la tercera ley de Newton, a toda acción corresponde una reacción igual y en sentido opuesto. La teoría de las Olas de Elliott plantea como premisa esta ley pero dirigida a los mercados financieros. El movimiento de los precios debe seguirse por un movimiento contrario.

Estos movimientos en los precios se dividen en tendencias por un lado y correcciones por el otro. Las tendencias describen el comportamiento general que siguen los precios, mientras que las correcciones se mueven en sentido contrario a la tendencia. Según la terminología de Elliott estos fenómenos se denominan Olas de Impulso para la tendencia y Olas Correctivas para las correcciones.

En un sentido más amplio se dividen los mercados en Mercado Alcista (*Bull Market*) y Mercado Bajista (*Bear Market*). El primer mercado (*Bull Market*) se refiere a los mercados que presentan en una temporalidad determinada una tendencia de crecimiento en el movimiento de los precios, y el segundo mercado (*Bear Market*) se caracteriza porque en un lapso de tiempo determinado, los movimientos de los precios siguen una tendencia descendente.

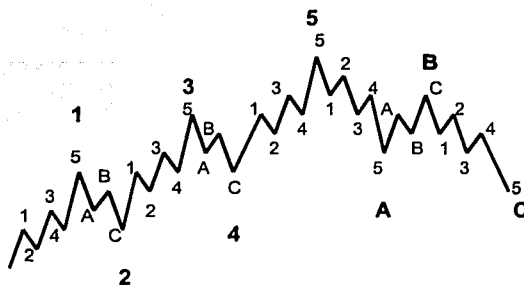
De esta forma Elliot divide el mercado, ya sea Alcista o Bajista, en ocho olas principales o mayores. Las primeras cinco *olas mayores* (1,2,3,4 y 5) siguen el comportamiento característico del mercado, pudiendo ser a la alza o a la baja (*Bull* o *Bear*). Las olas 1, 3 y 5 son de impulso, mientras que las olas 2 y 4 son correctivas. Las tres *olas mayores* restantes (A, B y C) se mueven en sentido opuesto a la tendencia característica del mercado, es decir, si el mercado es Alcista, estas olas se mueven a la baja y viceversa. Además, las olas A y C son de impulso, en tanto que la ola B es correctiva.

Cada una de estas olas, a su vez se subdividen en cinco *olas intermedias* para las olas de Impulso y en tres *olas intermedias* en las olas Correctivas. El proceso se realiza de manera análoga una vez más, dividiéndose en *olas menores*, cinco para la tendencia y tres para las correcciones. La siguiente figura muestra este proceso para un mercado Alcista:

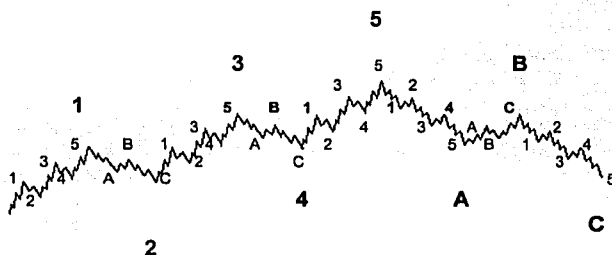


TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN



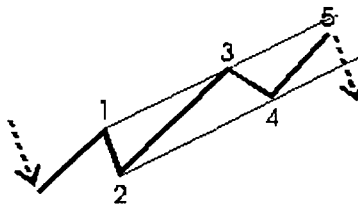


Olas Intermedias



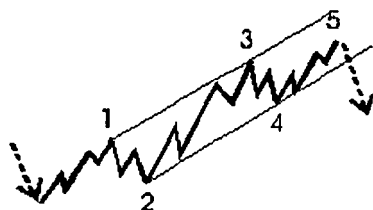
Olas menores

Analizando detenidamente la figura anterior se observa que la estructura de la ola de impulso presenta cinco diferentes movimientos, tres siguiendo a la tendencia (1, 3 y 5) y dos en contra de la tendencia (2 y 4), como se muestra en seguida<sup>12</sup>:

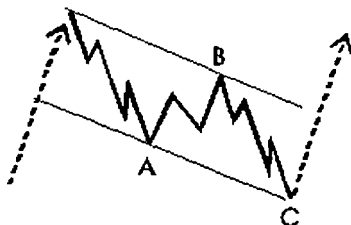


<sup>12</sup> Véase [4] y [5] pp. 11-13.

Claramente los tres movimientos que van según la tendencia son impulsos y por ende cada una de estas olas se compone de cinco. Las olas correctivas por su parte, se componen de tres olas, como se presenta a continuación:



Por su parte, la estructura de la ola correctiva, normalmente está formada por tres movimientos distintos, dos en la dirección de la corrección principal (A y C) y una en contra de ésta (B). Nótese que tanto la ola 2 como la 4 en la figura anterior son correcciones. Téngase en cuenta que las olas A y C siguen una tendencia más corta pero a la baja, por lo que además de ser impulsoras, se componen de cinco olas:



En teoría, cada ola se puede dividir en las olas que la componen y así sucesivamente; a este proceso se le denomina grado de ola. Sin embargo, en la práctica se llegan a detectar como máximo cuatro grados más en las olas<sup>13</sup>.

El problema con este concepto general de mercado es que en la mayoría de los casos no se presentan movimientos regulares con cinco olas. Más aún, esto constituye una excepción. Para evitar este problema, Elliott

<sup>13</sup> [4] p. 12 y [5] pp. 13-15.

introdujo un conjunto de patrones que en realidad se presentan en el mercado y que se ajustan a la mayoría de las situaciones.

### 3.2. Patrones.

El estudio de patrones resulta de suma importancia para aplicar los principios de las Olas de Elliott de manera correcta. Si estos patrones en el mercado son identificados adecuadamente, entonces es posible pronosticar el nivel de precios en el mercado, así como determinar el patrón que seguirán los movimientos de precios.

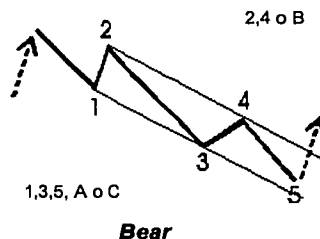
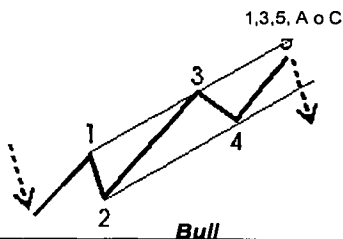
En este sentido se explican algunos patrones significativos de la Teoría Clásica de las Olas de Elliott, clasificadas como patrones de Tendencias y patrones Correctivos o de Corrección; también se abordan algunos patrones modernos. Estos patrones modernos resultan ser híbridos de los ya existentes, en donde se observan distintos comportamientos combinados en una o varias olas. Se presentan también algunas figuras para describir gráficamente los patrones y por lo general se muestra el caso de un mercado *bull* y de un mercado *bear*.

Dentro de los patrones que Elliott no definió, están los patrones WXY y WXYXZ, en los que W y Y se refieren al conjunto de olas previamente designadas por A, B y C pero vistas como sub olas y una ola simbolizada por X que une a estos dos conjuntos de olas, caracterizada por ser correctiva además de compleja. Esta forma de etiquetar los patrones permite mayor consistencia en el análisis y en la clasificación de las diferentes formaciones que se presentan en los mercados, pudiendo así trabajar con cinco olas en la mayoría de los casos<sup>14</sup>.

#### 3.2.1. Patrones de Tendencia.

##### 1. Patrones de Impulso o de 5 Olas.

Estos patrones se muestran en las siguientes figuras:



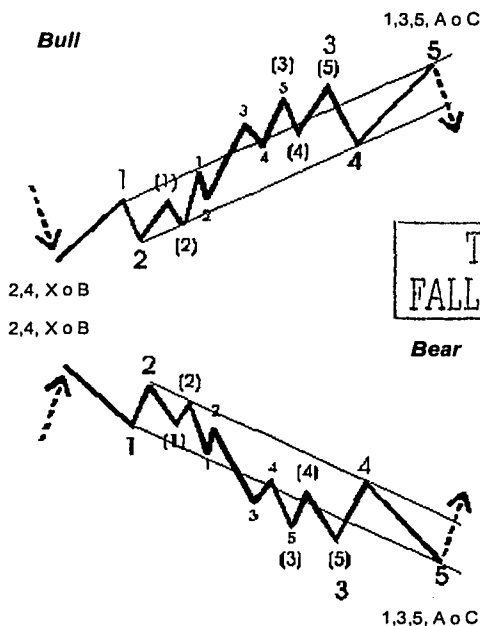
<sup>14</sup> [6] pp. 21-27.

Los patrones de impulso siempre se componen de cinco olas, simbolizadas por 1, 2, 3, 4 y 5. Las olas 1, 3 y 5 son en sí olas con comportamiento de impulso, y son aproximadamente iguales en cuanto a longitud. Por su parte, las olas 2 y 4 son siempre de esencia correctiva. Recuérdese que todas las olas a su vez, incluyendo las olas A, B y C, también pueden constituirse por olas de impulso.

Las características que se debe presentar el patrón de impulso son las siguientes:

- La ola 2 no puede ser mayor en cuanto a precio que la ola 1, y no puede decrecer más del origen de la ola 1.
- La ola 3 nunca es la menor en comparación con la ola 1 y la 5, por lo que la tercera ola muestra el mayor impulso, excepto cuando la quinta ola presenta una extensión.
- La ola 4 no debe traslapar a la ola 1, excepto en formaciones de triángulos diagonales y a veces respecto a las olas 1 y A, pero nunca en la tercer ola. En la mayoría de los casos no se debe presentar una superposición entre las olas 1 y A.
- La ola 5 debe exceder el punto final de la ola 3.
- Además se muestran diferentes tipos de patrones o estructuras correctivas en las olas 2 y 4.

## 2. Patrones de Extensión.



Por definición, un patrón de extensión ocurre siempre en una ola de impulso, donde las olas 1, 3 o 5 pueden extenderse, siendo más largas que otras olas similares o de cierto patrón<sup>15</sup>. Esto se presenta a menudo, y normalmente se da en la tercera ola. En el caso en el que se presente una extensión en alguna de estas olas, en las dos restantes, no se observará este fenómeno.

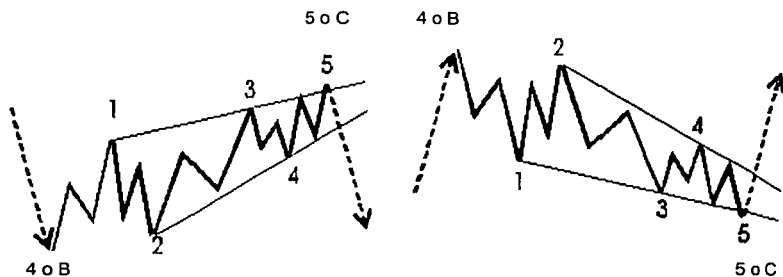
Se clasifican a su vez tres tipos de extensiones, dependiendo de la ola en la que se presente el patrón. Es otras palabras, se dividen en el patrón de Extensión 1, Extensión 3 y Extensión 5, indicando que la ola 1, 3 y 5 se extienden, respectivamente.

Las reglas que siguen los patrones de extensión son:

- La estructura de la ola se compone de 9, 13 o 17 olas.
- La ola 2 no puede exceder en longitud de precio a la ola 1, por lo que no debe sobrepasar más allá del origen de la primera ola.
- La tercera ola nunca es la menor comparándose con las olas 1 y 5.
- No se traslapa la ola 4 con la ola 1.
- La ola 5 excede el punto final de la ola 3.
- Por lo general la ola que presenta el patrón de extensión muestra una mayor aceleración que las demás.

A su vez, las olas A y C también pueden presentar este comportamiento de extensión.

### 3. Patrón de Triángulo Diagonal del tipo I.



Estos patrones diagonales son una especie de patrones de impulso, en los que por lo general ocurren en olas terminales como la ola 5 o en la ola C. No se deben confundir estos patrones con triángulos correctivos, más adelante explicados. Los patrones diagonales son más bien un fenómeno raro en los primeros grados de ola, pero se presentan frecuentemente en

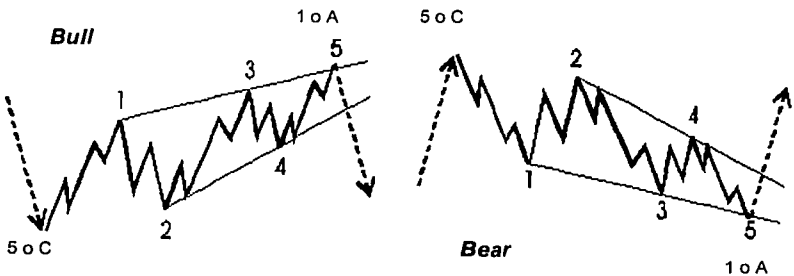
<sup>15</sup> [4] p. 17, 73-93.

olas menores. Usualmente después de observarse un patrón de triángulos diagonales de tipo I, se sigue un cambio violento en la dirección del mercado.

Las reglas o características de este patrón son las siguientes:

- Se compone de 5 olas.
- Las olas 4 y 1 no se traslapan.
- La ola 4 no puede sobrepasar el origen de la ola 3.
- La tercera ola no puede ser la menor.
- La estructura interna de las olas de la formación diagonal tienen una esencia correctiva, pero además deben presentar distintos tipos de patrones correctivos.
- La ola más larga es la primera y, la más pequeña es la quinta.
- Las líneas diagonales deben converger.

#### 4. Patrón de Triángulo Diagonal del tipo II.



Este patrón de triángulo diagonal de tipo II es también una especie de patrón de impulso, el cual normalmente ocurre en la ola 1 o en la ola A. Pero la principal diferencia con el patrón de tipo I es el hecho de que las olas 1, 3 y 5 tienen una estructura interna de cinco olas en lugar de tres. Por otro lado, después de un patrón de triángulo diagonal de tipo II no se presenta un cambio violento en la dirección del mercado, debido a que dicho comportamiento no es el final de una tendencia, excepto en el caso en el que se presente este fenómeno en la ola 5 o en la C<sup>16</sup>.

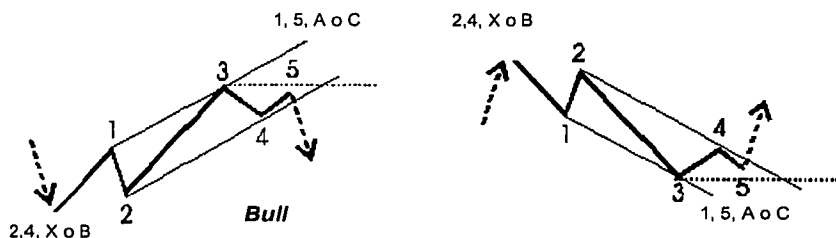
Las principales características y reglas que siguen estos patrones son:

- Se compone de 5 olas.
- Las olas 4 y 1 no se superponen.
- La ola 4 no puede exceder más allá del origen de la ola 3.

<sup>16</sup> [6] pp. 30.

- La tercera ola no puede ser la más pequeña.
- Internamente, las olas 1, 3 y 5 tienen una estructura de impulso.
- La ola 1 es la ola más larga y la 5 la más pequeña.
- La estructura interna de las olas deben presentar distintos tipos de estructuras correctivas.

### 5. Patrón de Truncamiento.



El patrón de truncamiento es un patrón de impulso en el cual se observa que la quinta ola no sobrepasa la tercera ola. Los movimientos de olas en los que la última exceden ligeramente el punto final de la tercera ola también entran en esta clasificación. Esto indica que la tendencia es débil y que el mercado mostrará una aceleración en la dirección opuesta a la tendencia<sup>17</sup>.

Puntos inherentes a este patrón de truncamiento son los siguientes:

- La ola 2 no es mayor en longitud de precio que la ola 1, por lo que no debe superar el origen de la ola 1.
- La tercera ola nunca es la más pequeña en comparación con las olas 1 y 5.
- La ola 4 no debe superponerse a la ola 1. Esto sólo sucede en el caso de formaciones de triángulos diagonales y a veces en las olas 1 o A, pero nunca en la ola 3. Además no se deben traslapar las olas 1 y A.
- La ola 5 no excede el punto final de la ola 3.
- La tercera ola muestra el impulso mayor.
- La estructura interna de estos patrones muestran alternancia, es decir, se componen de diferentes tipos de patrones correctivos.

Este tipo de truncamientos solamente ocurre en las olas 5 y C.

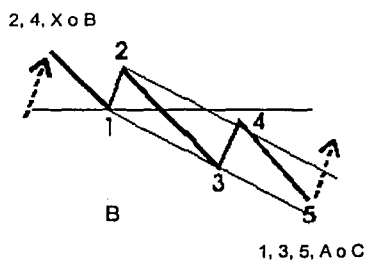
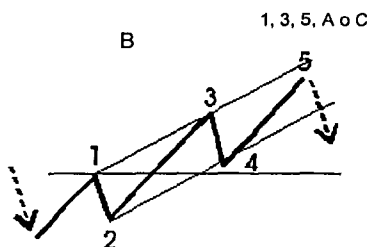
<sup>17</sup> [6] p. 35. y [4] p.47-48.

## 6. Patrones de Impulso 2.

Este tipo de patrones es un caso poco común que se parece demasiado al patrón de impulso normal descrito anteriormente. Por lo general suele permitirse un máximo repliegue del 51.5% en la ola 4 en un patrón de impulso o en cualquier otro movimiento de tendencia. A veces este repliegue en la ola 4 suele ser mayor y por ende el impulso de la ola previa se elimina.

Las características de este patrón son las mismas que las descritas en *Patrones de Impulso*, en el inciso 1. Sin embargo, en este caso la ola 4 se puede retraer desde un 51.5% a un 62%, sin traslaparse con la ola 1, además de que por lo general la ola 4 tiene un patrón de Zigzag.

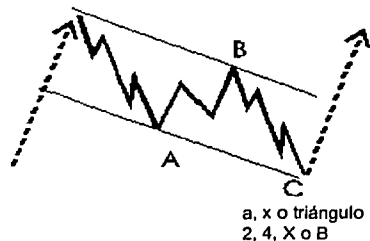
Los Patrones de Impulso 2 ocurren con mayor frecuencia en las olas 1, A o C, pero nunca en la ola 3.



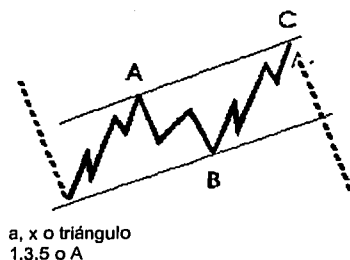
### 3.2.2. Patrones de Corrección.

#### 1. Patrón Zigzag.

a, x o triángulo  
1,3,5 o A



a, x o triángulo  
2, 4, X o B



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



El patrón zigzag es la forma correctiva más común. Parece que es una ola de impulso por la aceleración que muestra. Este patrón se puede extender a un doble o triple zigzag, aunque por lo general no suele suceder, ya que impide alternación entre las olas. Nótese que este patrón sólo puede al principio de una estructura correctiva<sup>18</sup>.

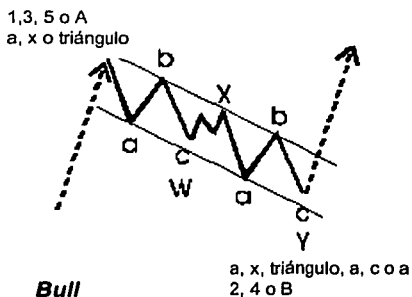
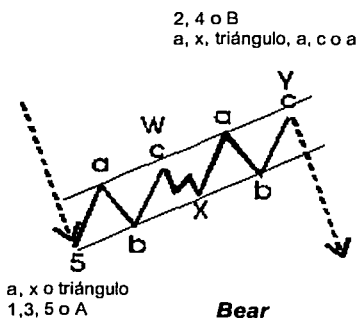
Las principales características de los movimientos zigzag son:

- Se compone de 3 olas.
- Las olas A y C son impulsos, mientras que B es correctiva.
- La ola B se retrae no más de 61.8% de la longitud en precio de A.
- La ola C debe sobrepasar el punto final de A, y al menos es igual que A.

La mayoría de las veces este patrón ocurre en las olas A, X o 2.

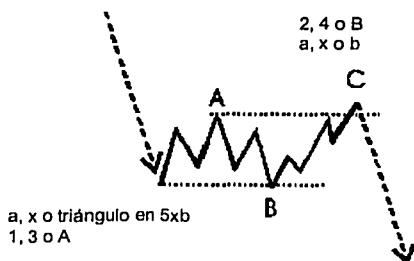
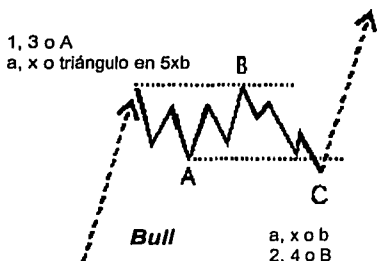
Un patrón zigzag simple se compone de 3 olas, una doble de 7 separados por una ola X en medio y un zigzag triple se conforma de 11 olas separadas por dos olas X.

En las figuras siguientes se muestra un ejemplo de un patrón zigzag doble. Cabe señalar que una representación más moderna en este patrón se ha utilizado, esto es, etiquetando los movimientos por WXY en lugar de ABCXABC. Como se mencionó previamente, esto brinda una mayor consistencia en la clasificación, ya que 2 zigzag de olas menores se unen a las demás olas de grado mayor. Así, en lugar de llamar el conjunto de 7 olas por ABCXABC, se utilizan 3 olas mayores WXY. El mismo método se utiliza para los zigzag triples, representándose por WXYZ en lugar de ABCXABCXABC, reduciéndose además el número de olas de 11 a 5.



<sup>18</sup> [6] p. 48; [4] pp. 39-42, y [5] pp. 64.

## 2. Patrón Horizontal.



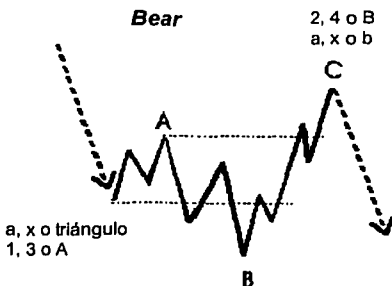
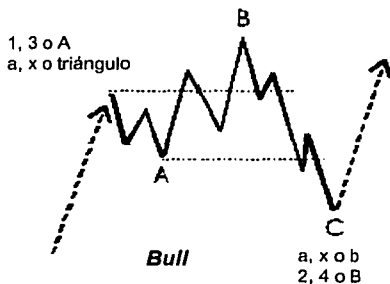
Los patrones horizontales son formaciones comunes de patrones correctivos, que por lo general muestran movimientos laterales. Las olas A y B de este patrón son ambas correctivas, mientras que la ola C es de impulso. Normalmente la ola C no superará el punto final de la ola A.

Las características de los patrones horizontales son:

- El patrón se compone de 3 olas.
- La ola C es impulsiva, mientras que A y B son olas correctivas.
- La ola B se retrae más del 61.8% de A, además de que regularmente esta ola suele superar la ola que le precede.
- La ola C no debe sobrepasar el punto final de A y por lo general es igual a ésta.

En la mayoría de los casos el patrón horizontal ocurre en las olas B, aunque es común en las olas 2 y 4.

## 3. Patrón Horizontal Ampliado o Irregular.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

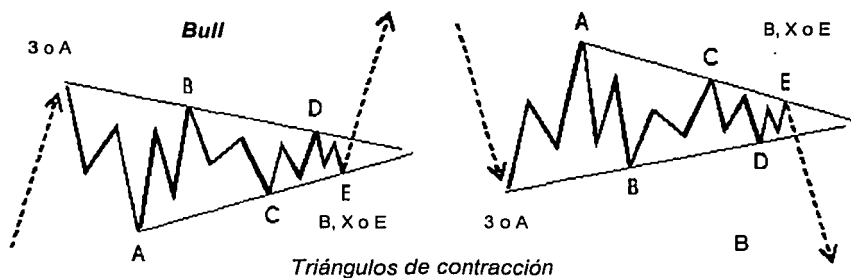
Este patrón también suele ser común. En este caso la ola B se extiende y excede el punto final de la ola previa. La fuerza de la ola B muestra que el mercado intenta dirigirse en el sentido de B. Por lo general una fuerte aceleración sucederá, dando lugar a una tercera ola o bien una extensión de la quinta ola. Si C es mucho mayor en cuanto a longitud de precio que A, entonces esta fuerza será menor.

Las principales características de el patrón horizontal irregular son:

- El patrón se compone de 3 olas.
- La ola C tiene un comportamiento de impulso, mientras que A y B son de esencia correctiva. A su vez, la ola C es mucho más larga que la ola A.
- La ola B se retrae más allá del punto final de la ola que le precede.

Además, este patrón suele suceder en las olas 2, 4 y B, así como en la X. Si sucede en las olas 2 y C, el patrón es corto, dando lugar a una aceleración en la tercera ola.

#### 4. Patrón de Triángulos.



Los triángulos son de esencia correctiva, los cuales se pueden contraer o extender. Más aún, puede ascender o descender. Los triángulos se componen de cinco olas, cada una de patrón correctivo<sup>19</sup>.

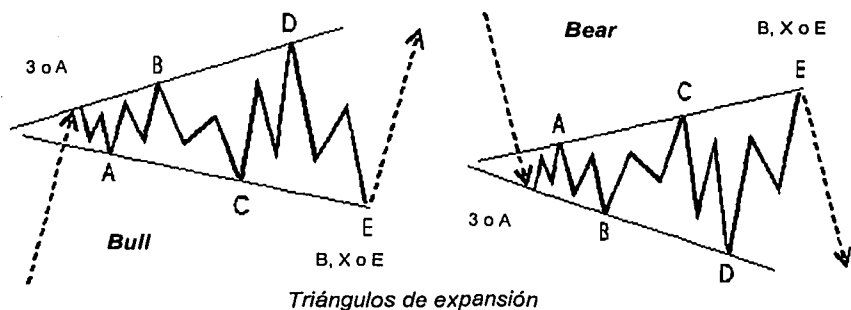
Las características que definen a los triángulos son:

- Se componen de 5 olas.
- Las olas 4 y 1 se traslapan.
- La ola 4 no puede sobrepasar el origen de la ola 3.
- La ola 3 no puede ser la menor.

<sup>19</sup> [6] pp. 63-66.

- Internamente, todas las olas de la diagonal tienen una estructura correctiva.
- En el caso de que el triángulo se contraiga, la ola 1 es la ola más larga en precio y la ola 5 es la más pequeña. Si el triángulo se expande, la ola 1 es la menor y la 5 la mayor.
- Este patrón generalmente tienen forma de cuña.
- Además la estructura interna de las olas muestra diferentes tipos de estructuras correctivas.

Los triángulos sólo ocurren en las olas B, X y 4. Nunca en las olas 2 o A. Además pueden ser triángulos de contracción, de expansión o cuasi-triángulos. Este último se caracteriza porque la ola B excede el origen de la ola A y puede ser tanto de contracción o de expansión. A continuación se muestran figuras de triángulos de expansión:



## 5. Patrón WXY o Combinado.

Este patrón se muestra en la figura para un caso complejo, pero pueden darse tantas combinaciones como sea posible.

El patrón WXY combina distintos tipos de correcciones. Éstas se simbolizan por WXY y WXYXZ si el patrón es aún más complejo. En la figura anterior la ola W se conforma por un movimiento correctivo Zigzag, seguido de una ola X, para continuar con un patrón horizontal, que forma la ola Y<sup>20</sup>.

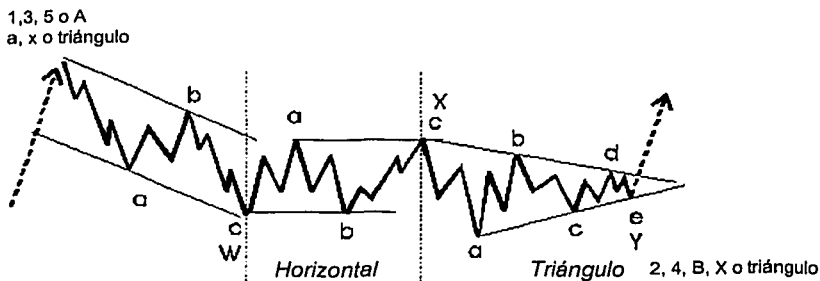
Las características principales de este patrón son:

- Todos los diferentes patrones que forman esta estructura son de esencia correctiva, para formar una mayor.

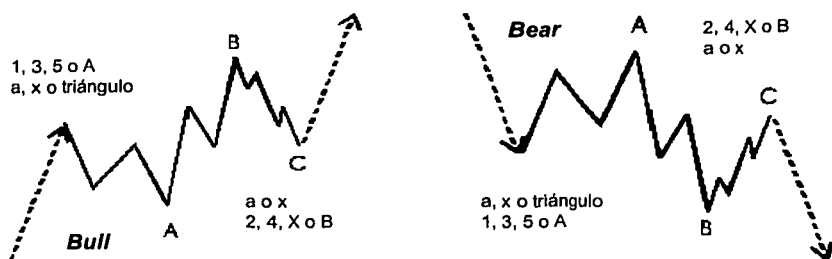
<sup>20</sup> [6] pp. 71-74.

- Las características de los patrones correctivos que formen el nuevo patrón prevalecen.
- Una combinación con un patrón de triángulos normalmente ocurre al final.
- Los patrones de corrección en WXY generalmente muestran diferentes comportamientos correctivos.

Usualmente el patrón combinado ocurre con mayor frecuencia en las olas B, X y 4, y no tanto en las olas A. En las olas 2 suele considerarse un caso raro.



## 6. Patrón Cuasi-Horizontal.



Este patrón correctivo es un raro caso del patrón de truncamiento. Es una especie de movimiento horizontal con una elongación en la ola B, y una ola C pequeña.

En teoría este patrón podría ser una extensión de una ola impulsora, donde la ola se subdivide en dos o más combinaciones. Si la ola B está compuesta

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

de tres olas, entonces es una corrección irregular, en otro caso es una extensión.

Las principales características de este patrón son:

- La ola B debe componerse de tres olas.
- La ola C está formada por cinco olas, pero es tan corta que no alcanza los niveles de precio de la ola A.
- Además, la ola C no se debe retraer más del 100% de la ola B, pero sí más del 60% de la ola A.

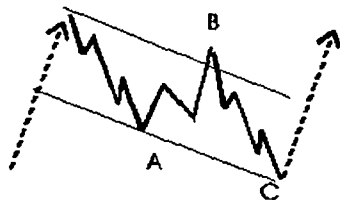
La mayoría de los casos este patrón ocurre en las olas 2 o B.

## 7. Ola X.

Como se mencionó previamente, las olas X son olas intermedias de esencia correctiva que unen otros patrones. Puede constituirse por cualquier patrón correctivo como Zigzag, doble Zigzag, patrones horizontales o triángulos, entre otros<sup>21</sup>.

## 8. Patrón Zigzag Horizontal.

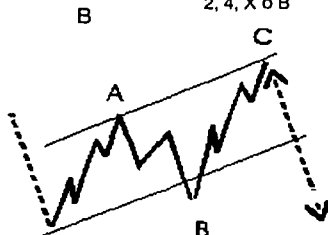
1, 3, 5 o A  
a, x o triángulo



**Bull**

a, x o triángulo  
2, 4, X o B

a, x o triángulo  
2, 4, X o B



a, x o triángulo  
1, 3, 5 o A

Este patrón suele ser muy común y es igual al movimiento Zigzag en sus características excepto por el hecho de que la ola B se puede retraer más del 61.8% de la ola A.

## 9. Patrón Cuasi-Zigzag.

Además de los triángulos de contracción, un truncamiento en un patrón de corrección sucede cuando la ola C es más corta que la ola A y no logra

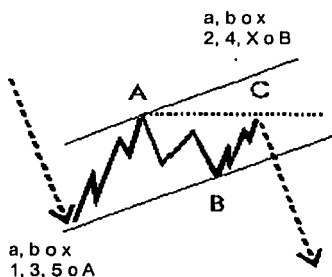
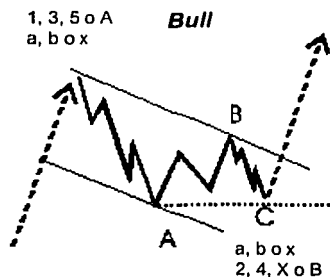
<sup>21</sup> [6] p. 78.

superar el punto final de A. Esto sucede con mayor frecuencia en los patrones cuasi-horizontales o en los Zigzag, indicando la fuerza en la dirección de la tendencia principal.

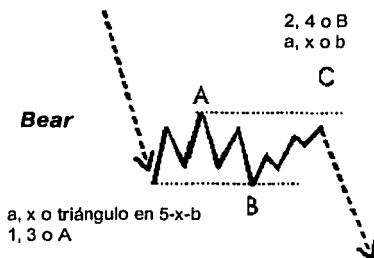
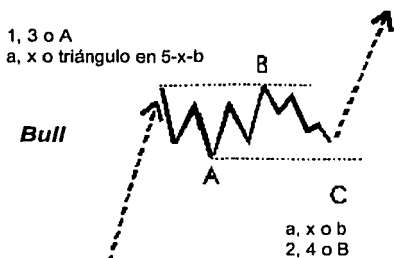
Las características del patrón cuasi-zigzag son las mismas que las del patrón de corrección que se presente, pero en este caso la ola C no logra superar el punto terminal de la ola A.

Estos truncamientos suelen suceder en las olas C de una ola 2, en una ola C o E de una ola 4 o en una ola C de una ola B o X.

Nótese cómo este patrón lleva un movimiento definido y comienza a comportarse como un zigzag, no logrando formar este patrón.



### 10. Patrón Horizontal Truncado.

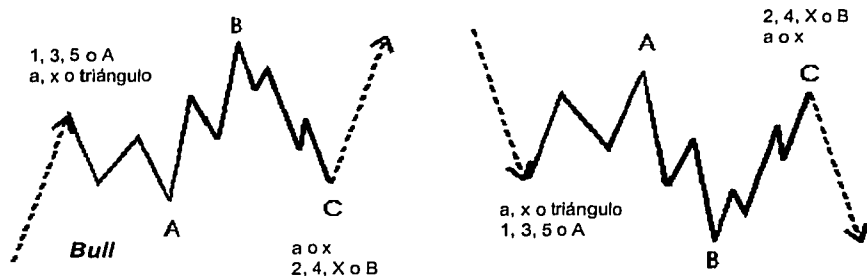


Este patrón es exactamente igual al patrón horizontal, a excepción de que la ola C en este caso, no alcanza el punto final de la ola A y por lo tanto es menor que la ola B.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 11. Patrón Cuasi-Horizontal Moderno.

Este patrón es exactamente igual al cuasi-horizontal, pero en este caso los movimientos de precios se retraen más del 60%. Esta distinción es necesaria debido a que el patrón cuasi-horizontal es un caso raro, pero si se retrasa más del 60% y aún así no logra alcanzar el punto final de la ola A, resulta ser más probable que el patrón ocurra.

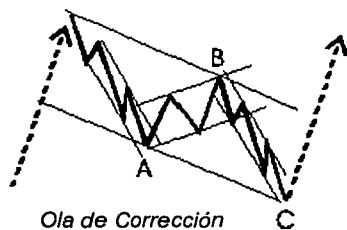
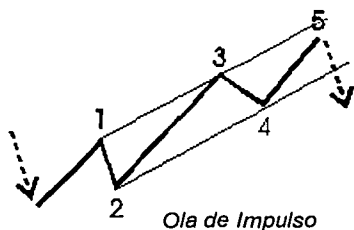


### 3.2.3. Canales de Tendencia.

Los canales de tendencia son una herramienta útil no sólo para determinar los patrones de olas menores o intermedias que están unidas, sino para proyectar los precios en las siguientes olas.

Estos canales son líneas paralelas, que contienen variaciones completas de precios en una ola. Estas líneas ya se han utilizado en las figuras de los patrones que se han descrito. Cabe señalar que aún cuando las líneas de patrones como los triángulos no son paralelas, se consideran canales.

A continuación se muestra una figura de una ola impulsora con sus canales, así como un movimiento correctivo con todas sus líneas de tendencia. Esta figura, muestra claramente cómo los canales permiten determinar cuáles olas deben agruparse dentro de un mismo patrón.





Las olas del mismo grado se pueden reconocer también a través de los canales de tendencia. Esto se da especialmente en los patrones de impulso o de 5 olas, en zigzags y triángulos. Si los patrones no se ajustan adecuadamente a las propiedades que los definen, se deberá optar por otra forma alternativa de contar olas y trazo de canales.

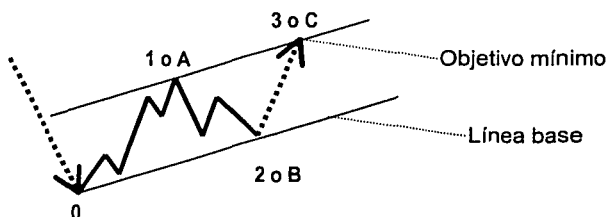
A continuación se muestra el trazo de canales para distintas olas.

Para el caso de las olas 3 o C, el trazo del canal se realiza una vez que las olas 1 y 2 se han dado. Luego se une el origen de la ola 1, la cual se denota por 0 (cero), con el punto final de la ola 2. A su vez, se dibuja una línea paralela a ésta en el punto final de la ola 1.

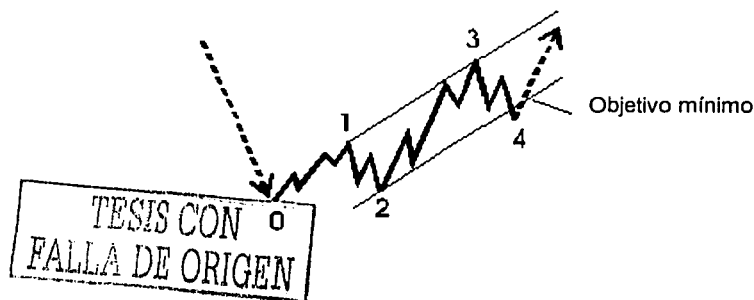
El canal descrito determina el objetivo mínimo para la ola 3. Si ésta no rompe la línea superior o no la alcanza, probablemente se esté tratando con una ola C.

Cuando se sobrepasa la línea inferior del canal, existe una probabilidad alta de que la ola 2 (o B) tenga una estructura compleja y por ende las olas 3 o C no comiencen después del punto final de la ola 2 o B.

Normalmente la ola 3 es la que presenta una fuerza mayor, por lo que a menudo sobrepasará la línea superior.



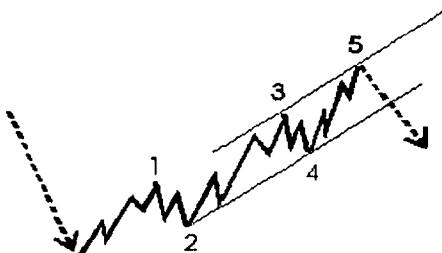
En el caso de la ola 4 se tiene que, tan pronto como la ola 3 se ha formado se puede trazar el canal de tendencia. Para esto se une el punto final de la ola 1 y 3 para formar la línea superior y a partir de ésta se traza una línea paralela que toque el punto final de la ola 2. De esta forma se puede proyectar el punto objetivo para la ola 4. Por lo general, la línea base del canal de tendencia será sobrepasado por el precio de la ola 4, indicando el objetivo mínimo de ésta. En el caso en que el movimiento del precio no se acerque a la línea base, se tiene un signo de que la tendencia es fuerte, y probablemente el movimiento sea parte de la ola 3.



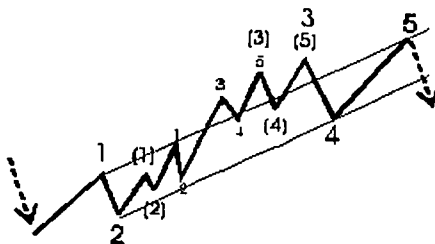
TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Para el caso de la ola 5, los canales de tendencia se pueden construir de dos maneras:

1) La primera se realiza cuando la ola 4 se ha dado, uniendo el punto final de la ola 2 y la 4 para obtener la línea base. Trazando una línea paralela a ésta encima del punto final de la ola 3, se obtiene la línea superior. Con el canal de tendencia construido, se puede determinar el objetivo para la ola 5. En general la quinta ola no logrará alcanzar la línea superior del canal, excepto cuando se trate de una extensión o cuando la ola 3 sea débil.

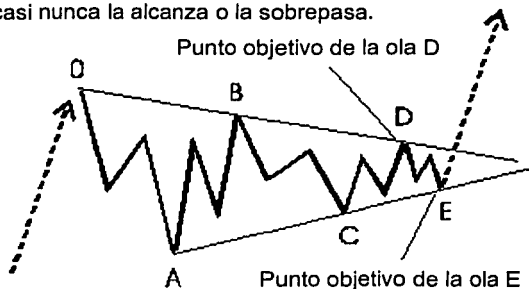


2) La segunda manera de construir los canales de tendencia para la quinta ola, se basa en el hecho de que la ola 3 es más fuerte que las olas 1 y 5, mostrando un movimiento más bien vertical, para después cambiar su dirección en sentido opuesto. Entonces se forma la línea base uniendo los puntos finales de las olas 2 y 4, pero la línea paralela se coloca en el punto final de la primera ola, cortando la ola 3 y mostrando el punto objetivo de la ola 5.

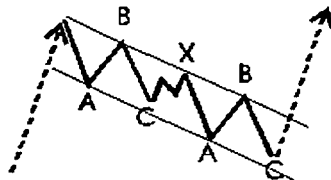


Para la construcción de los canales de tendencia de las olas D y E, se deben unir el punto inicial de la ola A con el punto final de la ola B, para formar la línea superior del triángulo y determinar el punto objetivo al que se espera que la ola D llegue. Para determinar el punto objetivo al que debe

llegar la ola E, se necesita unir el punto final de la ola A con el punto final de la ola C. Generalmente la ola E no tiene su punto final en esta línea trazada, sino que casi nunca la alcanza o la sobrepasa.



Los canales de tendencia son útiles para separar los Zigzag dobles de las olas de impulso. Los Zigzag dobles suelen ajustarse al canal casi perfectamente, mientras que en los patrones de impulso, la tercera ola claramente rompe con el canal.



### 3.2.4. Números y razones de Fibonacci.

En los capítulos precedentes se han estudiado los números Fibonacci y el número de la sección dorada. Ahora veremos cómo se utilizan éstos en el mercado y su comportamiento<sup>22</sup>.

Notemos que según los principios de las olas de Elliott, cada ola se compone de cinco olas de impulso y tres correctivas, sumando en total ocho olas. Los números 3, 5 y 8 son números Fibonacci.

El análisis de las relaciones de Fibonacci con los movimientos en los precios del mercado resulta importante por varias razones. En principio se

<sup>22</sup> [4] pp. 95-102.

puede controlar el análisis de las olas, ya que las olas están relacionadas unas con otras y el conteo de las olas resulta ser más preciso, siempre que las razones de Fibonacci lo sean. Además es posible proyectar de manera más realista los precios una vez definido el conteo de olas correctamente junto con el planteamiento de distintos escenarios.

El número de la sección dorada y algunas funciones básicas de éste, muestran las proporciones de una ola a otra, relacionándose entre sí aproximadamente por los valores  $1 + \varphi$ ,  $\varphi$ ,  $1$ ,  $1 - \varphi$ ,  $1/\varphi$ ,  $(1/\varphi)^2$  y  $(1/\varphi)^3$ , o 2.618, 1.618, 1, 0.618, 0.382 y 0.236 respectivamente. Estas razones que se dan entre las olas permiten, junto con los canales de tendencia, determinar precios esperados para las olas.

Si por ejemplo, la ola 1 o A de cualquier grado se ha completado, se pueden proyectar retrocesos de 0.382, 0.5 y 0.618 para las olas 2 o B respecto a las que les preceden. En la mayoría de los casos, la tercera ola es la más fuerte, por lo que aproximadamente ésta será 1.618 veces mayor que la ola 1. La ola 4 por su parte, muestra un retroceso menor al de la ola 2, acercándose a 0.236 o 0.382. Si la ola 3 es la mayor, la razón entre la ola 5 y la 3 es de 0.618. Además casi siempre la ola 5 es igual a la ola 1.

Las mismas relaciones se dan en las olas A y C. Así, la ola C es 1.618 veces mayor que la ola A.

El punto final de la primera ola es igual al punto inicial de la ola correctiva anterior, la cual normalmente es la ola B, coincidiendo con un retraso del 38.2% o 61.8% respecto a ésta.

La ola 2 se retrae al menos un 38.2% pero en la mayoría de los casos retrocede un 61.8% o más que la ola 1. Sin embargo, un retroceso mayor al 76% en la ola 2 no suele ser común.

La ola 3 es al menos igual a la ola 1, excepto en un patrón de triángulo. Si la ola 3 es la ola mayor, su precio final será 161% mayor que la ola 1 y a veces hasta un 261% mayor que ésta.

En el caso de la ola 4, se presenta un retraso de al menos 23% de la ola 3, pero frecuentemente se retrae un 38.2%. Normalmente la ola 4 alcanza precios de la ola 4 de menor grado que forma parte de la ola 3. Además, cuando el mercado muestra una tendencia fuerte, la ola 4 se retrae sólo un 14% de la ola precedente.

La ola 5 normalmente es igual que la ola 1 o representa el 61.8% de la ola 1. Si la ola 5 presenta una extensión, se verá reflejada en un crecimiento del 161.8% respecto a la ola 3 o de la longitud neta de las olas 1 y 3.

Después de una formación triangular, la ola A se retrae hasta la ola 2 del triángulo previo de la ola 5. Cuando la ola A forma parte de un patrón B, 4 o triangular, frecuentemente se retrae 38.2% de la quinta ola precedente y sobrepasa el punto final de la cuarta ola que le precede. En el caso de un Zigzag, la ola A se retrae 61.8% de la ola 5.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

En un Zigzag la ola B suele retraerse entre un 38.2% y un 61.8% respecto a la ola A. En un patrón Horizontal, esta ola es aproximadamente igual a la ola que le precede, es decir, la ola A. En el caso de una formación Horizontal expandida, la ola B se proyecta en un 138.2% respecto la ola A.

A su vez, la ola C tiene un movimiento de precio de al menos 61.8% de lo que representa la ola A, sobretodo si el patrón observado es un Triángulo de contracción. Puede ser más corta, en cuyo caso, se tratará de un truncamiento, indicando una aceleración en la dirección opuesta. Pero por lo general la ola C es igual en cuanto a longitud de precio que la ola A, aunque suele ser 161.8% mayor que A cuando se trata de un patrón Horizontal expandido.

En un Triángulo de contracción, la ola D representa el 61.8% de la ola B, y la ola E tiene una longitud igual al 61.8% de la ola C, nunca siendo mayor que ésta.

La ola X se retrae 38.2% respecto al movimiento ABC previo, aunque un movimiento del 61.8% suele ser también común.

### 3.3. Directrices Generales para Pronosticar.

Los principios de las Olas de Elliott proveen un método de pronóstico para la inversión y negociación en el mercado de valores. Como se ha visto en las secciones precedentes, la identificación correcta de patrones permite determinar cuál es la tendencia del mercado, además de señalar las circunstancias bajo las que existen mayores posibilidades de éxito. Además, los patrones detectan el momento preciso para comprar o vender. El punto clave para pronosticar precios en el mercado es determinar cuál de los distintos escenarios es el que tiene más probabilidades. Para determinar cuál escenario tiene mayores posibilidades, se realizan diferentes alternativas de conteo de olas que señalen en la misma dirección, para así seleccionar una buena oportunidad de negociación<sup>23</sup>.

Cabe señalar que el Principio de las Olas de Elliott puede resultar sumamente complejo, especialmente en olas correctivas, ya que se presentan patrones dentro de los patrones de grado mayor y así sucesivamente.

El tener presente los patrones ya estudiados, así como la forma de construir canales y determinar el grado de las olas que se analizan, es indispensable para realizar un correcto análisis previo al pronóstico. Esto es relativamente sencillo con la ayuda de paquetes de cómputo y permiten realizar dicho análisis con mayor facilidad, pero se requiere de mucho cuidado para llevar un conteo adecuado de olas y trazo correcto de canales de tendencia.

---

<sup>23</sup> [5] pp. 85-96.



Seguido de esto, es necesario diseñar escenarios alternativos. Para esto se necesita separar los patrones de impulso de las correcciones, recordando que los primeros muestran una aceleración notoria y sin traslapo, mientras que las correcciones presentan movimientos laterales en contra de la tendencia. Además, cabe señalar que las olas del mismo grado, presentan proporciones similares, y por ende se debe de cuidar este aspecto, para no confundir olas de diferentes grados.

La ola 2 no se puede retraer más del 100% ni sobrepasar el punto final de la ola 1. La longitud de la ola 3 normalmente es la mayor y ésta nunca se traslapa entre la ola 4 ni la 1.

El etiquetar los gráficos por grados de olas y analizarlos, resulta ser útil, tomando en cuenta la estructura interna de éstas y las reglas de patrones ya vistas.

A parte de considerar lo anterior, se debe de utilizar indicadores de volumen para determinar la forma de etiquetar la ola; si se está tratando de una ola 3, la cual tiene el mayor impulso, entonces debe presentar el mayor volumen.

Después de etiquetar y clasificar las olas según sus patrones, es conveniente calcular las relaciones de Fibonacci que se presentan de una ola a otra y posteriormente construir canales de tendencia.

El siguiente paso consiste en diseñar tantos escenarios como el principio de Elliott permita en cuanto a tiempo y en grados de olas. El análisis adecuado de cada escenario, utilizando los patrones y formaciones, conjuntamente con el trazo de los canales de tendencia, permiten señalar el precio objetivo más probable.

Para diseñar un sistema de negociación se debe determinar en primer lugar el marco temporal (o los grados de olas) con los que se pretenda negociar. Simultáneamente se necesita decidir qué patrones y alternativas de conteo de olas permiten una mejor oportunidad de negociación relativa a objetivos de precio, tal y como distintas alternativas indican movimientos de precios en la misma dirección. Los puntos clave para negociar en base a los patrones indican el momento de comprar o vender<sup>24</sup>.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

---

<sup>24</sup> [6] pp. 112-115. [4] pp. 106-108 y [5] pp. 127-135.

## CONCLUSIONES.

Como se ha visto, el estudio de los números Fibonacci se ha desarrollado enormemente y sus aplicaciones son cada vez más socorridas en distintas áreas del conocimiento, para nuestro caso en las Finanzas. Esto se debe en parte, a la necesidad de disponer de técnicas y métodos de pronóstico alternativos, para su contraste y comparación, y así obtener una diversidad más amplia de opciones.

El estudio aquí presentado muestra los elementos en los que se basa este método de pronóstico, que si bien parece carecer de una teoría formal que la sustente, la experiencia ha demostrado que es precisa, consistente y coherente en sus predicciones. Los expertos que han hecho uso de esta herramienta de predicción por algunas décadas, han extendido los conceptos presentados originalmente por Elliott, adecuándolos a problemas específicos a los que se han tenido que enfrentar en los nuevos mercados, desarrollando y fortaleciendo la teoría de las olas de Elliott. Además, con el desarrollo tecnológico de computadoras y paquetes, es posible realizar cálculos y análisis que antes resultaban difíciles o muy tardados.

Sin embargo, aunque los principios de las olas de Elliott funcionan adecuadamente en mercados "regulares", esto rara vez sucede, comportándose más bien de forma "irregular". Es así que la experiencia muestra que en esencia, el conteo de las olas de los mercados no es muy fiable como método de predicción, debido a que la estructura de las olas son muy complejas, dejando sin respuesta a preguntas de esperanza de ciertos patrones, sobre todo en los movimientos de corrección.

Lo que es importante en la teoría de las olas de Elliott no es el conteo de las olas, aún cuando Elliott así lo creía. Lo que resulta trascendental en estos conceptos es precisamente la razón de Fibonacci, ya que esta proporción refleja el comportamiento humano, que es precisamente lo que se desea "medir", y permanece constante en los mercados.

Cabe mencionar que la descripción de los patrones dada en el último capítulo resulta de suma importancia, ya que se ha modificado sustancialmente de lo que Elliott propuso en su tiempo, adecuándose a los mercados actuales y sustentándose en función de los números y la razón de Fibonacci.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**BIBLIOGRAFÍA**

- [1]. VAJDA S. Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section. 1989, New York, Wiley.
- [2]. PHILIPPOU A.N., HORADAM A.F., BERGUM G.E. (eds.) Applications of Fibonacci Numbers. 1988, Netherlands, Kluwer Academic Publishers.
- [3]. KOSHY T. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. 2001, EE.UU, John Wiley & Sons.
- [4]. FISCHER R. Fibonacci Applications and Strategies for Traders: Unveiling the secret of the Logarithmic Spiral. 1993, EE.UU, John Wiley & Sons.
- [5]. FISCHER R., FISCHER J. The New Fibonacci Trader: Tools and Strategies for Trading Success. 2001, EE.UU, John Wiley & Sons.
- [6]. PRETCHER, FROST. Elliott wave principle: Key to Market Behavior. 2001, EE.UU, John Wiley & Sons.
- [7]. COXETER H.S.M. Introduction to Geometry. 1961, New York, John Wiley & Sons.
- [8]. HONGQUAN Y., YI W., MINGFENG H. On the limit of Generalized Golden Numbers. Fibonacci Quaterly. 34.4. Agosto 1996. pp. 320-322.
- [9]. WENPENG Z. Some Identities Involving the Fibonacci Numbers. Fibonacci Quaterly. 35.3. Agosto 1997. pp. 225-229.
- [10]. <http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html>. KNOTT. 1996-2003.
- [11]. <http://math.holycross.edu/~davis/fibonacci/course.html>. DAVIDS. 1996.

<b>TESIS CON FALLA DE ORIGEN</b>
--------------------------------------