

00323



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

41

**“PROCESOS MULTIPLICATIVOS Y LA
DISTRIBUCIÓN DE LOS TAMAÑOS
DE LAS CIUDADES”**

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:
F I S I C O
P R E S E N T A :
CARLOS ANTONIO LUGO VÉLEZ



**DIRECTOR DE TESIS:
DR. HERNÁN LARRALDE RIDAURA**



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

^



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



ORGANISMO NACIONAL
ALFABETIZACIÓN
MIZO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
 "Procesos Multiplicativos y la distribución de los tamaños de las ciudades"

realizado por Lugo Vélez Carlos Antonio

con número de cuenta 09756644-9 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

A t e n t a m e n t e

Director de Tesis
 Propietario

Dr. Hernán Larralde Ridaura

Propietario

Dr. Germinal Cocho Gil

Propietario

Dr. Raúl Mauricio Rechtman Schrenzel

Suplente

Dr. Francois Leyvraz Waltz

Suplente

Dr. Carlos Villarreal Luján

Waltz
G. Cocho
RMS
F. Leyvraz
Carlos Villarreal

Consejo Departamental de Física

Patricia Colastain
 DRA. PATRICIA COLASTAIN MONACHE
 Coordinadora de Licenciatura en Ciencias Físicas

Dedico esta tesis a mis padres y hermanos, a Cinthya y familia.

Agradezco al Dr. Hernán Larralde por su infinita paciencia, a la U.N.A.M. por darme la oportunidad de cumplir uno de mis sueños.

Índice general

1. Introducción.	3
2. Estadística de ciudades y sistemas físicos.	6
2.1. La distribución de los tamaños de ciudades: la ley de Zipf.	7
2.1.1. La definición de ciudad, robustez y significado de la ley de Zipf.	10
2.1.2. Otras Regularidades: Distribuciones dobles de Pareto.	12
2.2. Física Estadística y Geometría, fuentes de leyes de potencia.	12
2.2.1. Funciones Homogéneas e invariancia de escala.	13
2.2.1.1. Fractales.	13
2.2.2. Escalamiento y universalidad.	18
2.2.2.1. Retos impuestos por los fenómenos críticos.	19
2.2.2.2. Universalidad.	21
2.3. Modelos típicos de sistemas extensos en física.	22
2.3.1. Sistemas en equilibrio: Percolación.	22
2.3.2. Sistemas fuera de equilibrio.	26
2.3.2.1. Dinámica de los procesos de agregación.	26
2.3.2.2. Procesos de agregación irreversibles.	27
2.3.2.3. Sistemas Autoorganizados.	28
3. Modelos que generan la ley de Zipf.	31
3.1. Modelos de sistemas de Ciudades.	31
3.1.1. Modelando la estructura del sistema en el espacio.	31
3.1.2. Evoluciones de la población.	32
3.1.3. La forma más simple de crecer: $n_{t+1} = \lambda_t n_t$	33
3.1.4. Procesos Multiplicativos y la distribución log-normal.	33
3.1.4.1. Eventos raros y el teorema de límite central.	34
3.2. Modelos.	37
3.2.1. Modelo tipo Levy-Solomon.	37
3.2.2. Modelo de Manrubia-Zanette.	40
3.2.2.1. Mapeos acoplados y el proceso estocástico M-Z.	41
3.2.2.2. Alcances y limitaciones del modelo M-Z.	41

4. Simulaciones Numéricas del modelo M-Z.	43
4.1. Definición de Próximos Vecinos y Condiciones de Frontera.	43
4.1.1. Promedios.	44
4.1.2. Resultados.	45
4.1.2.1. Promedio Constante.	45
4.1.2.2. Crecimientos Exponenciales.	57
5. Discusión y Conclusiones.	64
5.1. Conclusión y Comentarios Finales.	65
A. Simulación Estocástica.	67
B. Códigos Fuente.	71

Capítulo 1

Introducción.

El estudio y la modelación de sistemas compuestos por un gran número de elementos que interaccionan se ha beneficiado con el incremento en el poder de cálculo desde la última mitad del siglo XX hasta nuestros días. La capacidad de recrear por medio de extensas simulaciones numéricas, procesos físicos cuyos resultados ajustan bien con los datos observados, ha alimentado el interés por encontrar modelos de sistemas que típicamente pertenecían a otras ramas del conocimiento, adoptando paradigmas de física estadística. Así la atención de muchos físicos se ha centrado en la posible aplicación de métodos, modelos y en general ideas propias de su campo a otros aparentemente ajenos. De tal suerte que actualmente es muy común encontrar aplicaciones de dichos puntos de vista en áreas como ecología, biología, economía, o bien, como en este caso, en lo que puede llamarse *teoría urbana*. De dicha teoría se extrae el problema que motiva esta tesis, el cual consiste en dar cuenta, por medio de algún modelo, de la distribución de los tamaños de las poblaciones en un sistema de ciudades, que empíricamente sigue una ley de potencia universal. Regularidades universales tipo ley de potencia ocurren en diversos sistemas físicos, y para los cuales existen diversos enfoques que buscan su explicación. Es de este tipo de sistemas *parecidos* al sistema de ciudades de donde se extraen las bases para la formulación de modelos de este sistema.

Ese es el espíritu de esta tesis y debe quedar claro que al ser una tesis de física, el modelo y el tratamiento que se presentan es apegado a la manera en la que en física se atacan los problemas, dejando como tarea a los expertos de las áreas correspondientes (sociólogos, antropólogos, etc) una adecuada contextualización de los parámetros del mismo. Se presenta pues una alternativa matemática simple y sensata que busca describir el fenómeno observado.

La organización de la tesis es como sigue: el primer capítulo es esta introducción, el segundo está dedicado a la presentación de la fenomenología. Para el sistema demográfico se discute la distribución de las ciudades de acuerdo al valor de su población conocida como ley de Zipf, que como se mencionó sigue una ley de potencia, cuyo exponente es universal pues no depende de situaciones geográficas, económicas, etcétera, específicas. Después, se presentan algunos

ejemplos de sistemas típicos de física estadística donde las leyes de potencia son adecuadas para la descripción de alguna cantidad relevante, conjuntamente con lo que esto implica.

En el capítulo tres se presentan los modelos comunes sobre la evolución de las ciudades. Estos modelos están constituidos principalmente por procesos aleatorios multiplicativos con condiciones subsidiarias; se pone especial atención a un modelo propuesto por Manrubia-Zanette (M-Z), que es el que se estudia numéricamente en la tesis.

El capítulo cuatro está compuesto por los resultados de las simulaciones del modelo M-Z.

El capítulo cinco y último está dedicado al análisis de los resultados, comentarios finales y conclusiones. El trabajo concluye con dos apéndices, uno dedicado a la simulación estocástica y otro a los códigos de los programas.

La figura (1.1) es una reproducción de una caricatura que ilustra el libro *Scale invariance and Beyond* [2] en donde se discuten tópicos sobre la simetría llamada *invarianza ante cambio de escala*, que es la principal característica de las leyes de potencia. Aquí se reproduce con el fin de advertir lo complejo que puede resultar situar un sistema social en el contexto de la física, pues una simple *sambullida* al universo de las leyes de potencia puede conducir por caminos tan variados como los de la caricatura, donde es muy fácil perderse.

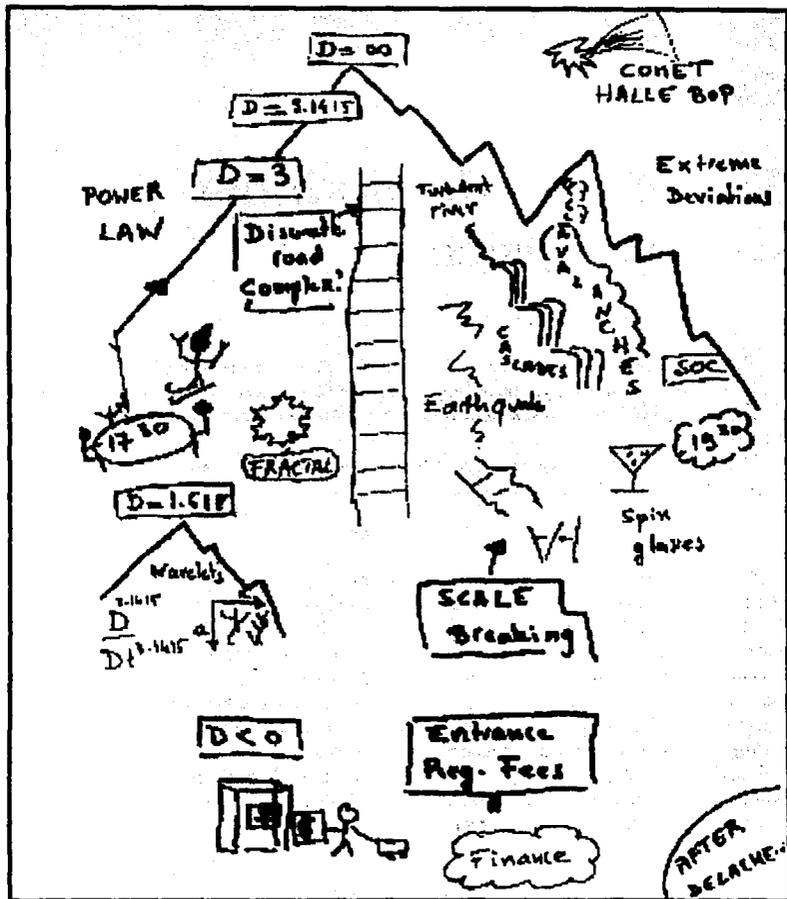


Figura 1.1: Todos los tamaños, ninguna escala, Turbulencia, Fractales, Terremotos, Avalanchas, ¿Ciudades?.

Capítulo 2

Estadística de ciudades y sistemas físicos.

En éste capítulo se presenta la fenomenología de la distribución de ciudades de acuerdo a su población; también se presentan algunos de los sistemas físicos en donde surgen leyes de potencia para describir el comportamiento de variables importantes.

Primero debe precisarse qué es una ley de potencia. Una función real $f(x)$ sigue una ley de potencia si es de la forma

$$f(x) = ax^b \quad (2.1)$$

En la mayoría de los casos que se tratarán aquí a y $b \in \mathbb{R}$. Muchas veces la descripción es de carácter asintótico, en ese caso se escribe $f(x) \sim x^b$.

La propiedad que distingue a la ecuación (2.1) es que es *libre de escalas*, esto quiere decir que si se efectúa la transformación $x' = \lambda x$, entonces $f(x') = \lambda^b f(x)$, de modo que la función se reproduce a sí misma salvo por un factor. Esta *simetría* se conoce usualmente como invarianza ante cambios de escala y tiene implicaciones diversas, dependiendo del contexto es la que se sitúe, por ejemplo: supóngase que una variable aleatoria x tiene una distribución de probabilidad $f(x)$ dada por (2.1), ¿Qué se puede decir de este tipo de estadística?, en principio que no todas las leyes de potencia $f(x) = ax^b$ sirven como distribuciones de probabilidad, pues deben satisfacer

$$i) \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \quad (2.2)$$

$$ii) \quad \int_I f(x) dx = 1, \quad (2.3)$$

para el caso continuo (para variables discretas se normaliza la suma sobre todos los valores $f(x_i)$), I es el intervalo donde la variable x toma valores. La positividad (2.2) implica que las funciones con exponente impar no pueden emplearse, a menos de que se restrinja el intervalo a un subconjunto de los reales

positivos, mientras que por la condición de normalización se requiere de restringir el intervalo dependiendo del valor del exponente, para evitar divergencias. El valor del exponente condiciona también la existencia de cantidades como los momentos. Por lo demás, una distribución de este tipo implica que no existen escalas particulares para los eventos que pueden presentarse. ¿Qué ocurre con el sistema de ciudades?. Para responder la pregunta considere la sugerencia de Gell-Man en [1] de que durante un domingo de ocio se revise un libro de hechos estadísticos, por ejemplo un almanaque mundial o un Atlas, suponga, además, que al estar explorando los datos ahí presentados, aparece entre mapas y tablas, una lista de las algeraciones de población en el mundo ordenadas de manera decreciente. ¡No sólo eso!, también se tienen listas similares para diversos países, entonces, carcomidos por la curiosidad, se etiqueta en cada una de las listas a las poblaciones asignandoles un índice o rango de acuerdo al lugar que ocupan. Así, la ciudad con mayor población que ocupa el primer lugar en la lista tiene rango uno, la segunda mayor población tiene rango dos y así sucesivamente. Finalmente se tabulan los datos de población como función del rango. Este ejercicio que parece sacado de la manga lo realizó George Kingsley Zipf, un lingüista de Harvard, hoy célebre por sus descubrimientos, fruto de la busca de regularidades y principios análogos a los de la física en las ciencias sociales en la primera mitad del siglo XX. Lo que Zipf encontró es precisamente una *distribución universal* del tipo ley de potencia, como se detalla en la siguiente sección.

2.1. La distribución de los tamaños de ciudades: la ley de Zipf.

La mejor manera de presentar los descubrimientos de Zipf es graficando los datos. Considere la figura (2.1), en donde se presentan dos gráficas en escala logarítmica. La superior corresponde a histogramas de la población (frecuencia o número de ciudades con cierta población como función de la población), la inferior corresponde a poblaciones como función del rango. En ambos casos, los datos son de regiones geográficas con historias, economías y sociedades diversas. Lo que se observa es que ambas siguen leyes de potencia con exponentes iguales a las pendientes de las rectas, en el caso de la frecuencia $m_{frec} \simeq -2$. En el caso de los rangos $m_{rango} \simeq -1$, estos valores son independientes de las diferencias entre las regiones antes mencionadas. Este hecho permite reconocer de manera inmediata un problema con todo el perfil de los que se tienen en física estadística, pues se busca *explicar* una regularidad que no depende de manera directa de las diferencias en los parámetros internos que diferencian cada conjunto de ciudades, conjuntos que además están compuestos por un número grande de elementos.

Antes de intentar siquiera dar un balbuceo sobre la génesis de la ley de Zipf deben aclararse muy bien algunas situaciones finas que se han omitido hasta el momento.

En el caso de los histogramas en escala logarítmica (figura (2.1) superior), la situación no corresponde directamente a lo que se mencionó anteriormente

sobre la ley de Zipf, pues originalmente se buscó la relación entre la r -ésima ciudad de una lista con su población, es decir la relación de población n como función del rango r . Dicha relación empírica es la original ley de Zipf, y como se dijo, sigue una ley de potencia

$$n(r) \propto r^{-\nu}, \quad (2.4)$$

donde el valor observado del exponente es $\nu \simeq 1$. Debe probarse entonces que hay alguna equivalencia entre (2.4) y la representación en términos de frecuencias. Es más, debe probarse que ambas son leyes de potencia, así como determinar la relación que hay entre los exponentes y discutir cual de las descripciones es más útil y porqué. Antes de probar la equivalencia, considere el ejemplo de las poblaciones de las ciudades de Monterrey y Juárez. Según el XII censo de población y vivienda [3] tienen poblaciones de 1 110 909 y 1 187 275 habitantes respectivamente. ¿tienen estas ciudades rangos diferentes?. Formalmente sí, en la práctica no necesariamente, pues bajo un cambio de resolución en la medida de las poblaciones bien podríamos decir que ambas tienen 1.1 millones de habitantes. El punto es que en la práctica, la asignación de los rangos debe hacerse de manera juiciosa, y dependiendo del intervalo de poblaciones que se considere, la asignación se hace con mayor o menor precisión. Retomando el caso de México por ejemplo el intervalo de poblaciones bien puede tomarse como $I = [1, 2 \times 10^7]$, de modo que podemos particionar I en subintervalos de longitud 10^4 y efectuar así la asignación de los rangos. La arbitrariedad en la elección de las particiones para elegir los rangos hace que la descripción pierda en algún sentido claridad, además de que en términos prácticos no resulta cómoda para calcular cantidades estadísticas útiles, como momentos etc. De modo que considero más conveniente una descripción de la ley de Zipf en términos de la frecuencia de ocurrencia de las poblaciones y no de los rangos. La equivalencia se obtiene interpretando la ley de Zipf de manera adecuada. Si una cierta población es de rango r_x entonces existen r_x poblaciones mayores o iguales que n_x . Así, si $P(X \geq n_x)$ es el número de ciudades con población mayor o igual que cierta n_x entonces

$$P(X \geq n_x) \propto r_x \quad (2.5)$$

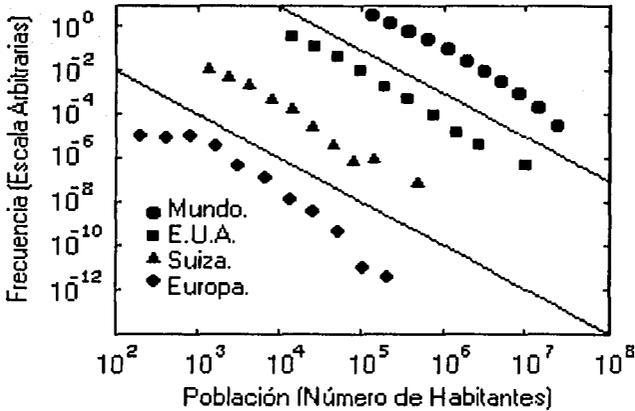
como $n_x \propto r_x^{-\nu}$, entonces $r_x \propto n_x^{-\frac{1}{\nu}}$ y por lo tanto

$$P(X \geq n_x) \propto n_x^{-\frac{1}{\nu}} \quad (2.6)$$

Esta última relación a veces se le llama distribución de Pareto, que no es más que una distribución acumulativa para X . Finalmente se hace notar que para obtener la frecuencia relativa de las poblaciones basta con derivar (2.5), y ver que

$$P(X = n_x) \propto n_x^{-(1+\frac{1}{\nu})} = n_x^{-\beta} \quad (2.7)$$

Las relaciones anteriores muestran que: sea cual sea la estadística empleada (rangos o frecuencias) los datos obedecen una ley de potencia con los exponentes dados por ν en (2.4), $\frac{1}{\nu}$ en (2.6) y $1 + \frac{1}{\nu}$ en (2.7). Los datos presentados en



La ley de Zipf

Población vs Rango

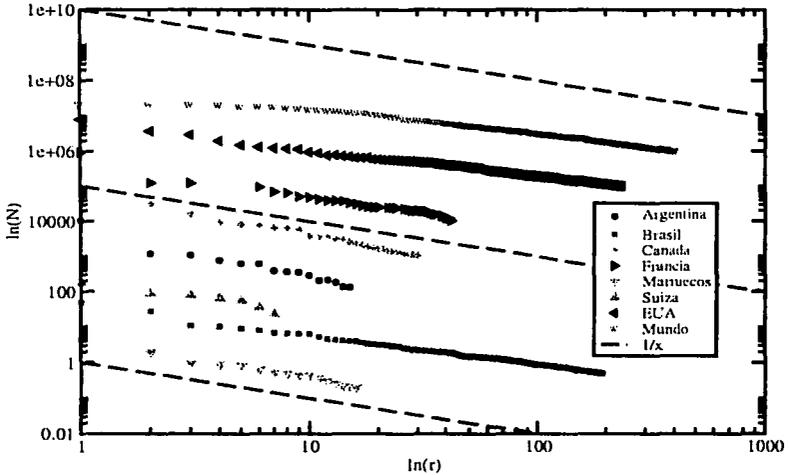


Figura 2.1: Reproducción de los datos graficados en [5] correspondientes a la frecuencia de ocurrencia de ciudades de tamaño n para las 1300 municipalidades más grandes en Suiza, Europa, Mundo y Estados Unidos de América, las líneas sólidas auxiliares tienen una pendiente de -2 . Los datos se encuentran desplazados verticalmente. En la gráfica de abajo se muestran datos que recolecté de diversas fuentes. [16, 17, 18, 19]

las gráficas de la figura (2.1) corroboran que para la frecuencia el exponente observado es $\beta \simeq 2$, mientras que para el rango los exponentes son $\nu \simeq 1$, que efectivamente satisfacen la relación $\beta = 1 + \frac{1}{\nu}$.

2.1.1. La definición de ciudad, robustez y significado de la ley de Zipf.

La fenomenología presentada depende por supuesto de definir con toda precisión conceptos como el de ciudad o bien su población asociada, pues la ley de Zipf en cualquiera de sus formas cuenta poblaciones de ciudades, o mejor dicho de aglomeraciones urbanas, y debe investigarse si la estadística depende de variaciones en esa definición. En general cuando se habla de la población de una ciudad se piensa en la población de una área central principal y localidades vecinas conectadas con ella mediante sectores construídos (habitados) y contínuos. También pueden considerarse localidades más distantes, si el grueso de la población lo constituye un núcleo que viaja diariamente a la ciudad central. Esta definición no depende pues del grado de urbanización y puede contener áreas rurales. Variantes de ésta definición también se aplican, sobre todo en casos en los que se tiene un conglomerado en el que existen varias áreas urbanas principales. Existen casos en los que pese al deseo expreso de la autoridades de delimitar por medio de fronteras un territorio se fracasa en el objetivo de diferenciar una población de otra, un ejemplo muy a la mano lo tenemos en del Distrito Federal y entidades como Ecatepec, Ciudad Nezahualcóyotl, Naucalpan y Tlanepantla, etc, aquí la población que debe tomarse en cuenta es la de la suma de sus poblaciones que es de aproximadamente 20 millones de habitantes, cifra que no se compara con la de cada demarcación por separado 8 millones, 1.7 millones, 1.2 millones, 0.8 millones, 0.7 millones, respectivamente. A esas poblaciones deben sumarse las de Cuatitlán, Cuatitlán Izcalli, Coyotepec, Zinacantepec, etc. Otros casos de interés pueden ser los de las zonas fronterizas, por ejemplo de el caso Tijuana-San Diego o bien El Paso-Ciudad Juárez. Aunque forman conglomerados, al hacer la estadística no sería muy conveniente considerarlos como una sola entidad, pues a diferencia del caso del D.F. y alrededores, existe una frontera bien definida. Al consultar cualquier libro de estadísticas, o bien, las fuentes oficiales siempre se hace referencia a demarcaciones definidas de manera artificial, sin embargo es común que en cada caso se indique si esas entidades coexisten en un mismo *agregado* con otras, es en este último caso en donde se efectúa la estadística de Zipf. Por lo tanto, la ley de Zipf es una regularidad independiente de divisiones políticas, al menos dentro de cada país, representa la estadística de cómo está distribuida la población en un espacio bidimensional (la superficie de la tierra o alguna fracción de ella). Es de algún modo una manifestación de la tendencia de los seres humanos a agruparse de una manera no tan arbitraria como podría en principio suponerse y que además, debido a su independencia de escalas naturales, implica que pueden presentarse eventos de prácticamente todos los tamaños. Finalmente debe mencionarse que todo ésto es válido para situaciones que a lo largo de la historia no han tenido algún tipo de *forzamiento* expreso, pues existe evidencia [12, 18, 16] de que en países con situaciones po-

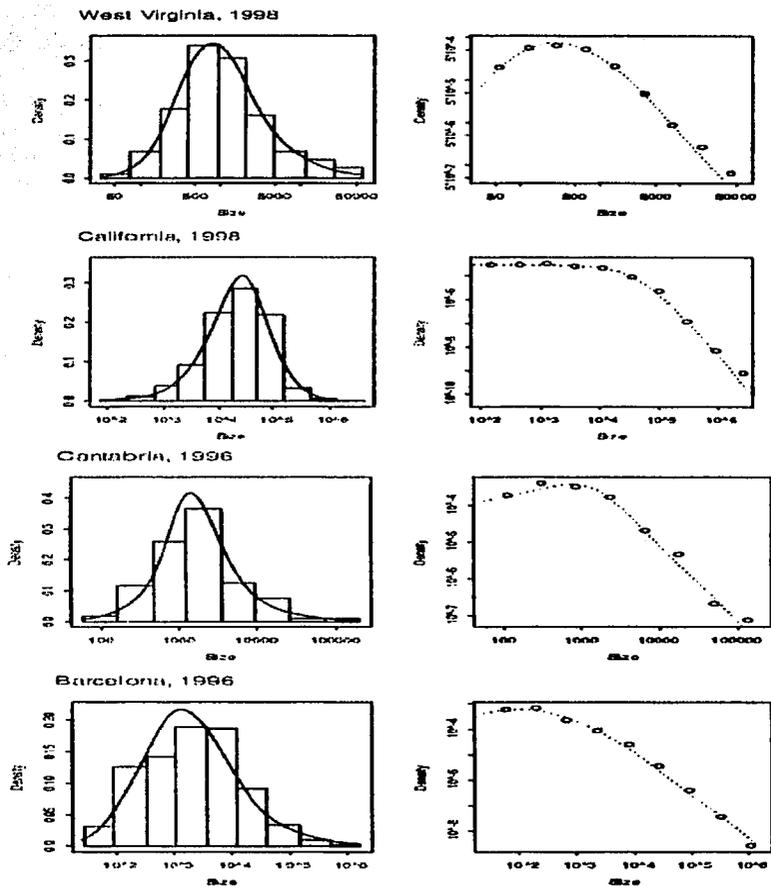


Figura 2.2: Distribuciones de Pareto dobles, para cuatro regiones reportadas en [36], la cola inferior sigue leyes de potencia con exponentes no universales, las colas superiores son las típicas leyes de Zipf.

líticas peculiares como en China o en su momento la Unión Soviética la ley de Zipf no se satisface.

2.1.2. Otras Regularidades: Distribuciones dobles de Pareto.

Como se mencionó, la ley de Zipf está bien documentada y es aceptada como válida asintóticamente para la cola de la distribución de los rangos y tamaños de la ciudades, sin embargo existen algunos aspectos sobre la distribución en el régimen de sitios pequeños, que se han reportado en [36] que son de interés, pues se tiene que la distribución acumulativa satisface que si $x > l$ para cierto l entonces la densidad es proporcional a $x^{-\alpha-1}$, mientras que si $x < l$ entonces la densidad tiene un exponente diferente, es decir, es proporcional a $x^{\beta-1}$. En la figura (2.2) se reproducen algunas de las observaciones de [36]. La parte de la distribución correspondiente a los valores pequeños, parece no ser muy universal y no se ataca en la tesis, sin embargo resulta interesante mencionarlo, pues fenomenología parecida se encuentra bajo investigación en dinámicas simbólicas gobernadas por procesos de reacción-difusión [38].

Eso es todo con respecto a la fenomenología del sistema de ciudades, en lo que queda del capítulo se presentan algunos de los sistemas físicos en donde surgen leyes de potencia así como algunos de los enfoques sobre modelación que se adoptan para su recreación.

2.2. Física Estadística y Geometría, fuentes de leyes de potencia.

La ley de Zipf es lo que en física se conoce como una ley universal. Esto significa que es independiente de los detalles finos de cada sistema, de modo que la tarea de entender la génesis de la ley de Zipf puede realizarse buscando el enfoque adecuado para estudiar el sistema de ciudades en el baúl de la física estadística, en los sistemas donde se presentan este tipo de regularidades. En lo que queda del capítulo se tratan ejemplos de tales sistemas.

En primer lugar, vale la pena decir que los sistemas físicos más populares y tal vez mejor entendidos [4, 15] en donde se encuentran leyes de potencia universales son sistemas termodinámicos en equilibrio, que presentan fenómenos críticos. En esos sistemas los llamados parámetros de orden, así como diversas cantidades termodinámicas en la vecindad del punto crítico obedecen leyes de potencia con exponentes que también son cantidades comunes a muchas sustancias. Otros procesos con comportamientos análogos a los de sistemas termodinámicos en equilibrio se encuentran por ejemplo en percolación. En el caso de procesos fuera de equilibrio ejemplos populares ([4, 15, 29, 24]) donde aparecen leyes de potencia son: el movimiento de partículas brownianas, procesos de agregación, sistemas críticamente auto-organizados, por citar algunos. En lo que sigue se revisan aspectos asociados a algunos de los procesos anteriores, en particular

aquellos que están de cierto modo relacionados a la fenomenología del sistema de ciudades. Para esto es necesario presentar algunos elementos, matemáticos y físicos de respaldo útiles para la discusión posterior.

2.2.1. Funciones Homogéneas e invariancia de escala.

En física, cuando se habla de que *algo* es invariante ante cambios de escala, se debe pensar en cantidades descritas por funciones matemáticas o ecuaciones (energías libres, distribuciones de probabilidad, etc.). De lo anterior se desprende que el lenguaje matemático para describir esta simetría es el de las funciones homogéneas.

Una función real es homogénea de grado k si satisface que para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$:

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x) \quad (2.8)$$

Esta propiedad es obviamente satisfecha por (2.1). En el caso de funciones de más de una variable es posible extender la idea de homogeneidad: por ejemplo en el caso de dos variables se piensa en las funciones que pueden escribirse como

$$F(x, y) = x^\alpha f\left(\frac{y}{x^\beta}\right) \quad (2.9)$$

Esta última se conoce como *representación de escalamiento* y es la forma que resulta útil para describir las variables en sistemas que tienen comportamientos críticos. Una teoría de escalamiento para algún sistema en particular se basa en suponer que alguna de las cantidades relevantes obedece (2.9) en algún límite, en la siguiente sección se trata esto con más de detalle. De manera general y empleando el lenguaje de ecuaciones funcionales se puede decir que un cierto observable O_l , definido en una escala l , es invariante ante cambios de escala si es tal que al escalar el parámetro un factor λ , satisface

$$O_l = \mu(\lambda) O_{l\lambda} \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) tiene como una solución obvia a $O = Cl^\alpha$ con $\alpha = -\frac{\ln(\mu)}{\ln \lambda}$.

En algunas ocasiones la homogeneidad se satisface solamente para factores característicos: en tal caso se habla de invariancia ante cambio de escala discreta. En otros casos esta simetría se satisface sólo de manera estadística. También puede ser satisfecha de manera aproximada. En lo que sigue se tratarán algunos de estos casos, al menos indirectamente. En primer lugar se discute la geometría asociada a esta simetría, la de los conjuntos autosemejantes, cuyos miembros más interesantes por mucho son los conjuntos fractales.

2.2.1.1. Fractales.

Cuando se busca caracterizar los objetos naturales, es un hecho que las figuras comunes de la geometría clásica o euclidiana no son las más adecuadas. Una

¹En general $\lambda \in \mathbb{C}$, aquí nos restringiremos al caso real.

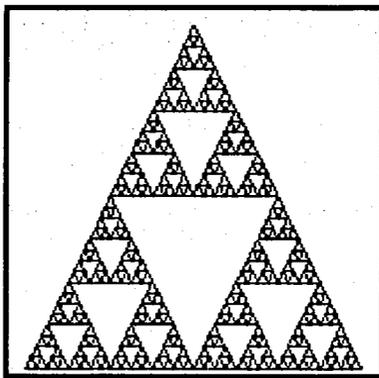


Figura 2.3: Celosía de Sierpinski

de sus principales limitaciones es consecuencia de que en general pierden su estructura al amplificarse: un arco de círculo eventualmente adquiere carácter rectilíneo, las superficies suaves se asemejan a planos, etc. De este modo se debe renunciar a esos conjuntos como modelos de estructuras que al ser amplificadas ganan complejidad o al menos no la pierden, y deben adoptarse como modelos más realistas a conjuntos fractales. Ejemplos de esto son: las líneas costeras, perfiles de bosques, nubes, hojas de algunas plantas y cadenas montañosas [24, 25, 26, 27]. El tema de los fractales, así como la literatura especializada en ellos, son amplísimos y un tratamiento extenso va más allá del alcance de este trabajo, sin embargo se discutirán algunas de las propiedades comunes y las situaciones en las que la ecuación (2.1) resulta importante. Consideremos la figura (2.3): ahí se muestra la representación del conjunto conocido como celosía de Sierpinski, en realidad se muestra uno de los conjuntos S_n que se obtienen de aplicar un algoritmo geométrico $n = 6$ veces, a partir de un conjunto inicial S_0 . El conjunto fractal es aquél que se obtiene en el límite $n \rightarrow \infty$. Este conjunto es solamente uno de los ejemplos entre muchos fractales que se construyen a partir de algoritmos geométricos de aplicación iterada, de ahí precisamente la autosemejanza. Cualitativamente se tiene claro que si se amplifica de manera adecuada el conjunto de Sierpinski, la amplificación será una imagen exactamente igual al conjunto completo. Lo que se busca es caracterizar de manera cuantitativa esta autosemejanza.

Una de las formas de caracterizar los fractales como la malla de Sierpinski es comparándolos con figuras clásicas, por ejemplo un triángulo sólido (completamente relleno) o bien con uno con un número finito de agujeros. Una forma de hacer este tipo de comparación es a través de la *densidad*, que es el número de puntos por unidad de línea, área, volumen, etc. Intuitivamente sabemos

que una cierta área acotada conexa, esté agujerada o no, tiene una densidad constante, pues su *masa* M (insistiendo: el número de puntos) está uniformemente distribuida. Por lo tanto si se amplifican un cierto factor λ las escalas lineales se cumple

$$M(\lambda L) = \lambda^d M(L) \quad (2.11)$$

Con fines de claridad piense en un cubo relleno de canicas que tienen masa M , si aumentamos el volumen al duplicar la longitud de los lados del cubo entonces, la masa M' de las canicas que podemos meter es tal que $\frac{M'}{L^3} = \frac{M}{(2L)^3}$ o bien

$$M' = M(2L) = 2^d M(L)$$

Nótese además que típicamente se debe identificar la d con la dimensión euclídeana del espacio en el cual se tiene al volumen. La ecuación anterior se resuelve fácilmente si $\lambda = \frac{1}{L}$ de modo que $M \propto L^d$, así la densidad $\rho = \frac{M}{L^d}$ es tal que $\rho \propto L^0$, que es lo que ya se sabía, no varía con L . Para los fractales como la celosía, a mayor ampliación la densidad decrece de manera indefinida, si bien, la ecuación funcional para la masa es nuevamente del tipo

$$M(\lambda L) = \lambda^{d_f} M(L) \quad (2.12)$$

La solución $M(L) = L^{d_f}$ tiene un d_f tal que $d_f < d$, el exponente d_f es una de las llamadas dimensiones fractales. Para aterrizar y contrastar las diferencias con los objetos no fractales, considérese el ejemplo de la malla de Sierpinski, ahí se tiene que

$$M(2L) = 3M(L) = 2^{d_f} M(L),$$

con $d_f = \frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3 \simeq 1.5850 < 2$, mientras que la densidad satisface

$$\begin{aligned} \rho(2L) &= \left(\frac{3}{4}\right) \rho(L) \\ &= 2^{d_f-d} \rho(L). \end{aligned}$$

Los fractales que satisfacen ecuaciones exactas como (2.12) (autosemejanza discreta) se llaman *fractales exactos*, pues (2.12) se satisface como igualdad para todos los valores de L .

Los fractales regulares como la malla de Sierpinski, no son necesariamente el tipo de fractales que encontramos en la naturaleza. En el caso de las formas naturales, la autosemejanza es una propiedad que se satisface de manera estadística.

El ejemplo más "trivial" de fractal estadístico que se puede producir, es la trayectoria de una caminata aleatoria en una-red bidimensional cuadrada. Suponga que una partícula se mueve en pasos discretos de tiempo y que puede a cada paso ocupar solamente uno de los sitios más cercanos a su posición actual, es decir, solamente puede dar pasos de tamaño uno. Cada vez que la partícula se mueve tiene cuatro posibles lugares para ocupar, de modo que como el número de pasos es igual al tiempo, entonces después de un tiempo t , se tienen 4^t posibles trayectorias o configuraciones. Si se elige como parámetro de longitud

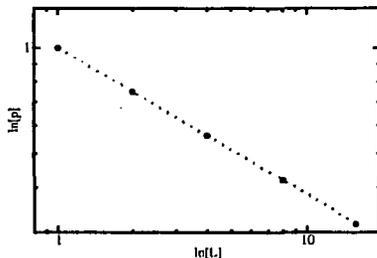


Figura 2.4: Comportamiento típico de los fractales regulares tipo la celosía de Sierpinski, a cada iteración la densidad decrece como ley de potencia, la pendiente es $m = d - d_f$.

a la distancia desde el origen hasta la posición después de dar t pasos, y se promedia sobre todas las configuraciones, se obtiene que, en general

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \propto (\Delta t)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

Este tipo de modelo se puede tratar de manera genérica en redes de d dimensiones, además para tiempos largos y distancias muy grandes con respecto a la distancia intersitios puede describirse por medio de la ecuación de difusión

$$\partial_t P = D \nabla^2 P, \quad (2.14)$$

en donde $P(\vec{x}, t)$ es la función de distribución de probabilidad de encontrar la partícula en el sitio \vec{x} al tiempo t . Este tipo de límite continuo es el modelo canónico de procesos de transporte difusivo normal, cuya solución es una Gaussiana, si la condición inicial es una delta de Dirac

$$P(\vec{x}, t) = (4\pi Dt)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (2.15)$$

$$\propto t^\alpha F\left(\frac{x}{t^\beta}\right) \quad (2.16)$$

La ecuación (2.16) es un ejemplo de escalamiento, que se mencionó en la sección anterior. Para poder tener una idea geométrica de la trayectoria, es conveniente hacer dos observaciones: la primera es que la relación entre los desplazamientos promedio y el tiempo (ec. (2.13)), es válida no solamente entre el origen y el final del camino al azar (el punto en donde nos encontramos al tiempo t), en general se satisface entre dos puntos cualesquiera, siempre y cuando la escala de observación sea mucho mayor que el límite inferior de corte (la distancia intersitios). La segunda observación es que, si pensamos en términos de la escala inferior de corte l , la longitud del camino será del orden nl , con n

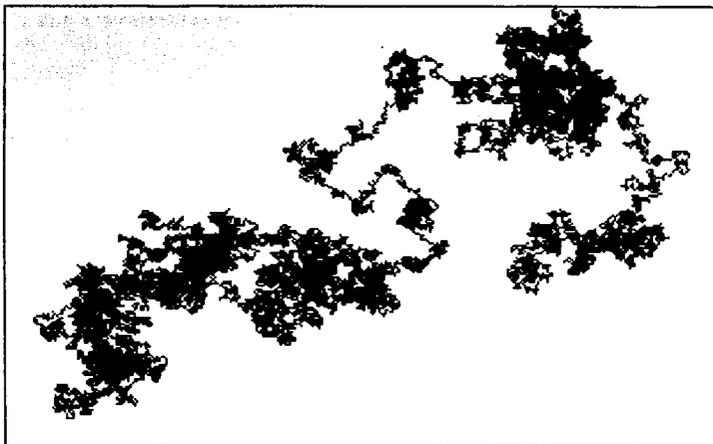


Figura 2.5: *Fractal Aleatorio, generado por una caminata aleatoria.*

el número de pasos, que como se dijo arriba es proporcional al tiempo, de modo que $n \propto \Delta t$, y si se supone que $\Delta t = t - t_0$ y $t_0 = 0$, entonces, la longitud de la trayectoria que es proporcional a t debe acomodarse en una longitud proporcional a $t^{\frac{1}{2}}$, por lo que debe estar terriblemente enredada. Además, debido a la primera observación, ésta situación se reproduce en cada escala mucho mayor a l . Éste comportamiento es la generalización del concepto de autosemejanza, pero la figura que se obtiene no tiene la regularidad de los fractales *normales* tipo celosía de Sierpinski. En general tanto para los fractales regulares como los de tipo estadístico sus caracterizaciones se efectúan por medio de un conjunto de números que miden propiedades con interpretaciones geométricas que típicamente se identifican con la *dimensión* del fractal. En algunos casos, lo que se mide es el número M de puntos consecutivos distintos de la trayectoria, contenidos en una esfera de radio R , centrada en uno de los puntos del conjunto. En el caso de la caminata esta definición conduce a relaciones diferentes en los casos de una dos y tres dimensiones, para dimensiones mayores o iguales que tres se tiene que

$$M(R) \sim R^D$$

Con exponente de escalamiento $D = 2$. Una trayectoria típica para el caso del plano, a tiempo finito, se muestra en la figura (2.5).

Independientemente de la importancia que en sí mismos tienen los conjuntos fractales, hay más razones por las cuales han sido ampliamente estudiados: se han constituido como herramientas útiles en el desarrollo de formalismos, que buscan describir fenómenos complicados en términos de modelos simples, han

sido reconocidos como la columna vertebral de la geometría asociada a la dinámica no lineal, la turbulencia, fenómenos críticos tanto en equilibrio como fuera de él. Con esto se concluye lo asociado a la geometría de fractales y la simetría de autosemejanza contenida en las leyes de potencia, de donde además se puede rescatar un posible abordaje para el problema de la ley de Zipf: encontrar una ecuación diferencial y/o una teoría de escalamiento para la distribución del sistema de ciudades, cuya solución sea la ley de Zipf, al menos en algún límite. Sin embargo, como se discute en la siguiente sección, fundamentar una teoría de escalamiento puede resultar complicado, aunque en caso de lograrse suele traer consigo la existencia de leyes universales, que es justo lo que se desea.

2.2.2. Escalamiento y universalidad.

Postular una teoría de escalamiento para cierto sistema se puede hacer en base a suposiciones físicas, geométricas, o bien simplemente postulando propiedades matemáticas. Ésto último consiste en postular que una variable del sistema está descrita por una función $F(x, y)$ que satisface (2.9), es decir

$$F(x, y) = x^\alpha f\left(\frac{y}{x^\beta}\right) \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) puede aplicarse a una gran cantidad de funciones simples, sin embargo, es muy fácil construir contraejemplos, uno muy sencillo es por ejemplo la suma de dos funciones homogéneas tipo (2.17) con distintos exponentes. En el caso de un conjunto de datos experimentales, la forma más fácil de saber si los datos están bien descritos por la ecuación (2.17) consiste en graficar la cantidad $G = \frac{F}{x^\alpha}$ con respecto a $z = \frac{y}{x^\beta}$, de modo que si la ecuación de escalamiento vale, entonces todas las curvas experimentales para diversos casos caerán en una misma curva experimental, la cual corresponderá a la forma de la función universal $f(z)$. Esto quiere decir que el término escalamiento debe entenderse como la semejanza que existe entre todas las funciones $F(x, y)$, para distintas x , pues si F es escalado por alguna potencia de x , y por alguna otra potencia también de x , entonces $G = \frac{F}{x^\alpha}$ es solamente función de una variable $\frac{y}{x^\beta}$, en lugar de ser una función de dos variables independientes x y y . En la figura (2.6) se muestra esta técnica aplicada a datos experimentales de la curva de coexistencia de diversos fluidos simples. Esta gráfica es una de las evidencias clásicas de sistemas en donde se corrobora la validez de una hipótesis de escalamiento en un sistema real.

Las teorías de escalamiento se aplican en situaciones que pueden ser estáticas o dinámicas y que tienen en general un carácter fenomenológico. La curva experimental de coexistencia de la figura (2.6) carece de datos en la región donde alcanza su máximo, es decir en la vecindad centrada en el punto crítico. Es ahí en donde se presentan leyes de potencia, aunque en general la curva completa es evidencia de un comportamiento universal, además de curva de coexistencia, en las transiciones de fase en equilibrio, existen muchas otras cantidades cuyos comportamientos en el punto crítico obedecen leyes de potencia universales. A continuación, sin entrar a discutir profundamente sobre teorías de fenómenos

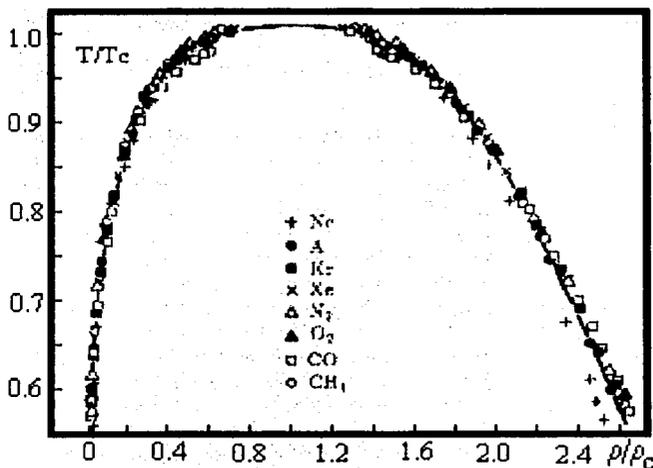


Figura 2.6: Curva de Coexistencia para diversas sustancias, las variables escaladas caen en la misma curva experimental universal.

críticos se presenta de manera breve un recuento de la fenomenología en donde la física encontró el reto de predecir tanto los comportamientos tipo ley de potencia universales para diversas variables, así como el valor numérico observado de los exponentes. Un recuento de estos temas se encuentra en [14].

2.2.2.1. Retos impuestos por los fenómenos críticos.

Considere el experimento de colocar un fluido en un tubo sellado de un determinado volumen (con cierta densidad media ρ). El fluido a cierta temperatura T se rompe en dos fases: una gaseosa y una líquida con densidades $\rho_{gas}(T)$ y $\rho_{liq}(T)$ respectivamente, que están separadas por una interface o menisco visible. Al elevarse la temperatura se observa que existe un determinado valor crítico T_c , en el que las densidades del líquido y vapor toman un valor común $\rho_c = \rho_{liq} = \rho_{gas}$ y la interface desaparece en una especie de niebla que ópticamente se conoce como estado de *opalescencia crítica*. Es a partir de este *punto crítico* que se observa una *continuidad de estado*, es decir; no se observa más la interface y no existe una distinción entre líquido y vapor para valores de la temperatura más allá de la temperatura crítica.

En el caso de fluidos, se puede caracterizar la transición, si se estudia la variación del *parámetro de orden*, que en este caso se define como $\Delta\rho = \rho_{liq} - \rho_{gas}$, conforme se alcanza el punto crítico, es decir, como función de la variable reducida $\varepsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$. Experimentalmente se encuentra que la forma funcional del

parámetro de orden en la región crítica es una ley de potencia

$$\Delta\rho \sim |\varepsilon|^\beta \text{ si } T - T_c \rightarrow 0 \quad (2.18)$$

La relación (2.18) resulta independiente de los detalles que caracterizan cada sustancia, y por lo tanto el exponente β es el mismo para una gran cantidad de sustancias ([31, 14, 4]. Fenomenología completamente análoga se observa en el caso de los sistemas magnéticos, ahí se tiene que el parámetro de orden lo juega la magnetización $M(\varepsilon) \sim |\varepsilon|^\beta$ conforme ε se anula. De hecho, tanto en sistemas magnéticos como en fluidos, esencialmente cada una de las propiedades medibles presenta algún tipo de singularidad *universal* en la región crítica. Algunas de las cantidades importantes que se encuentran con este tipo de comportamiento son: el calor específico $C(T) \sim A^\pm |\varepsilon|^{-\alpha}$ (el símbolo \pm en la relación anterior significa que las amplitudes tienen un valor distinto dependiendo del qué lado nos acercamos a T_c , no son parámetros universales, en adelante se omite cualquier referencia a las amplitudes) a volumen constante para fluidos o en campo cero para sistemas ferromagnéticos (por cierto, la singularidad puede ser del tipo $\log |\varepsilon|$, en lugar de una ley de potencia), las longitudes de correlación, las cuales presentan una divergencia del tipo $\xi \sim \xi_0 |\varepsilon|^{-\nu}$, así como las $\chi(T) \sim |\varepsilon|^{-\gamma}$, que representan a la susceptibilidad isotérmica para ferromagnetos o compresibilidad isotérmica en fluidos.

Queda claro el reto que imponen los fenómenos críticos tradicionales (las llamadas transiciones de fase de segundo orden): dar cuenta de los comportamientos descritos en arriba a partir de las leyes de la mecánica estadística. Esto se encuentra en la teoría de renormalización de Wilson [31], sin embargo previo a la construcción de la teoría de grupo de renormalización, los cimientos fenomenológicos que dan una descripción completa de las transiciones de fase fueron postulados en una teoría de escalamiento.

La hipótesis de escalamiento se postula directamente sobre algún potencial termodinámico (lo que inmediatamente se extiende a los otros) y la función de correlación, la que se emplea para obtener información sobre la organización estructural del sistema y que usualmente se mide en experimentos y resulta ser libre de escala.

En el caso del potencial termodinámico se toma la parte singular² g_s , escrita en términos de variables reducidas (por simplicidad se tiene con notación de sistema magnético)

$$g_s(\varepsilon, h) = - \frac{\Delta G(T, H)}{VkT} \quad (2.19)$$

donde $\varepsilon = \frac{T - T_c}{T_c}$ y $h = \frac{H}{kT}$.

Esta función debe reproducir de manera correcta todas y cada una de las singularidades críticas conforme $\varepsilon \rightarrow 0$ y demás límites, por ejemplo en el caso

²La ΔG significa la diferencia entre G y los términos no singulares.

magnético el asociado a $h \rightarrow 0$, etc. Con ese fin, se postula que

$$g_s \sim |\varepsilon|^{2-\alpha} g_s \left(\frac{h^{1+\frac{1}{\beta}}}{|\varepsilon|^{2-\alpha}} \right) \quad (2.20)$$

la forma tan exótica de los exponentes se debe a que están escritos de manera explícita como soluciones de ecuaciones entre los exponentes asociados a las relaciones empíricas de otras cantidades, por ejemplo en el parámetro de orden su exponente β satisface que $\beta = \frac{2-\alpha}{1+\alpha}$.

A partir de la ecuación (2.20) es posible derivar todas las relaciones entre los exponentes, las famosas *relaciones de escalamiento*, aunque para obtener los valores numéricos debe aplicarse el escalamiento a un modelo concreto. Los exponentes son cantidades que no dependen de los detalles de los sistemas: en el caso de las transiciones de fase esos detalles se refieren por ejemplo al tipo de sustancia; además es posible probar que para estos sistemas existe sólo un número limitado de exponentes independientes, lo que implica la existencia de un número finito de relaciones que se deben satisfacer. La unicidad de los valores así como su independencia de la estructura del sistema dota a los exponentes del carácter *universal*. La existencia de este tipo de cantidades y comportamientos comunes a muchos sistemas han derivado en un paradigma de universalidad, que consiste en creer en la posibilidad de entender todos los comportamientos críticos a partir de un enfoque común.

2.2.2.2. Universalidad.

La idea de que las transiciones de fase son fenómenos que pueden ser entendidos por medio de un mecanismo general se remontan a la teoría clásica de Van der Waals, donde la ley de estados correspondientes establece que para una representación en variables reducidas (una forma de escalamiento) las propiedades dependientes del material desaparecen de la termodinámica del gas. Sin embargo, la teoría moderna de escalamiento dice que la teoría de Van der Waals para los gases no es adecuada para describir los fenómenos críticos, pues en general para sistemas con interacciones de corto alcance no predice correctamente los valores observados. La teoría de escalamiento implica que existe una función universal, común a todos los sistemas, la $f(x)$ de (2.17), lo que se puede interpretar como una simetría de los sistemas naturales, una simetría muy íntima, a nivel fundamental en donde las reglas del juego son genéricas y de carácter colectivo.

De ser así, entonces cualquier material (que sea elemento de alguna *clase de universalidad*), conforme se va alcanzando el punto crítico, se organiza de un modo tal, que las correlaciones entre sus elementos son de gran alcance, haciendo posible que la descripción sea independiente de la escala de observación. La idea de universalidad es importante, en pocas palabras, porque permite albergar la esperanza de que resolver un problema muy simple baste para describir sistemas muy complicados, pues sus soluciones se comportan de la misma forma. Esa manera de pensar aplica a una gran cantidad de situaciones, los casos tal vez más espectaculares se encuentran en la formulación de modelos tipo Ising para fluidos

por un lado, por otro, la aplicación de resultados de mapeos deterministas no lineales al estudio del problemas tipo Rayleigh-Bénard, o turbulencia ([4, 15]). Después de revisar lo que se observa en los fenómenos críticos en equilibrio, queda abierta la pregunta, ¿De ahí se puede explicar la ley de Zipf?, la cual es difícil de contestar, pues no se ha dicho nada sobre cómo modelar las transiciones de fase, con tal fin, en la siguiente sección se discuten algunos de los modelos más simples para éstos y algunos fenómenos.

2.3. Modelos típicos de sistemas extensos en física.

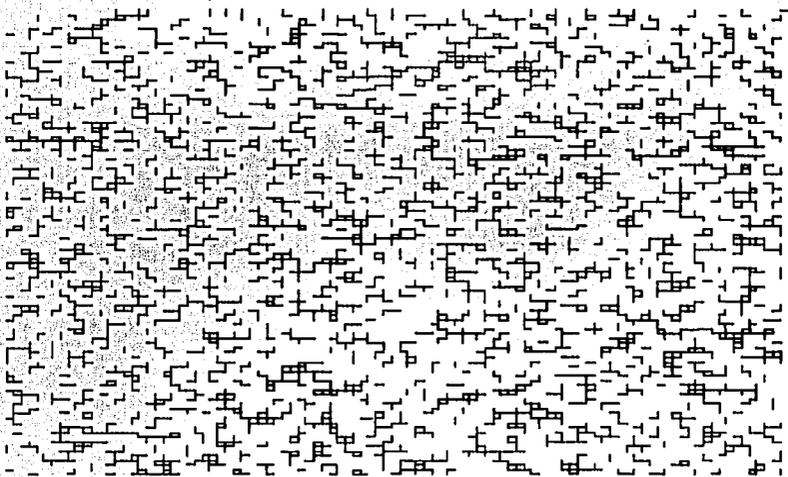
En las secciones anteriores se presentó la fenomenología del sistema de ciudades, se discutió un poco sobre la geometría de fractales y se hizo un repaso sobre lo que se observa en las transiciones de fase en equilibrio. Ambos son ejemplos de sistemas en donde las leyes de potencia tienen un papel fundamental en su caracterización, en lo que queda de éste capítulo se habla un poco sobre los modelos propuestos que las generan.

2.3.1. Sistemas en equilibrio: Percolación.

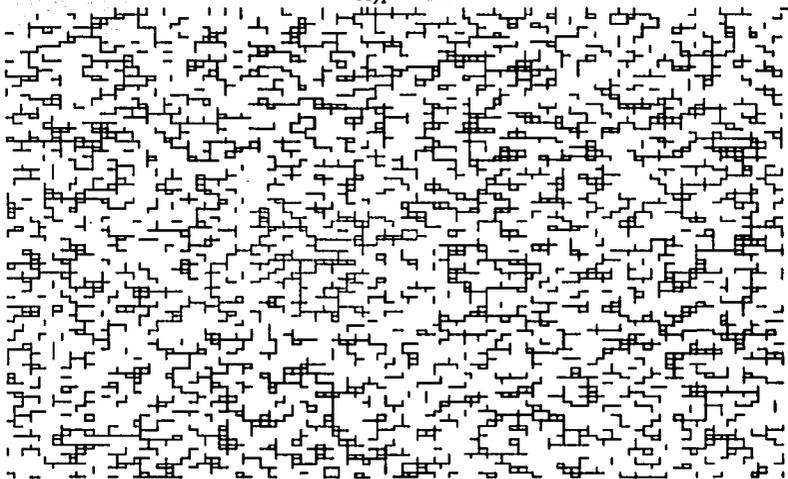
Después de presentar los retos impuestos por los fenómenos críticos se debería presentar el tipo de modelo que dio origen a la solución del problema, el modelo de Ising y la teoría de grupo de renormalización, esto no se hará, pues el tema es amplio, complejo, y fuera de contexto. Sin embargo, es posible presentar un modelo de fenómeno crítico más sencillo, el cual presenta mucha de la fenomenología expuesta en la sección anterior, el modelo de percolación.

Considere la secuencia de la figura (2.7), ahí se muestra el comportamiento de un *modelo de uniones* de percolación. En términos simples: el modelo depende de un parámetro p asociado a la probabilidad de tener dos puntos unidos. La secuencia se obtiene de variar el parámetro, y permite conjeturar la existencia de un valor crítico del parámetro, a partir del cual se forma una estructura conectada, que permite atravesar de un lado a otro la malla, es decir, se efectúa una *transición de fase*, pues se tienen dos regímenes bien definidos, uno en donde la posibilidad de percolar por la estructura es nula y otro en donde dicha probabilidad es uno.

De la secuencia se puede intuir que la parte fundamental del estudio de este proceso son las propiedades del conjunto de estructuras conectadas o *racimos* y la aparición de un camino de pasajes abiertos unidos, aunque antes de seguir adelante, debe dejarse en claro que el modelo de percolación formal, trata con sistemas infinitamente extensos. En las figuras se tiene solamente una representación finita. Así pues los objetos de estudio del proceso son las estructuras conectadas por aristas de la red o *racimos*, los cuales son describibles por medio de ideas de tipo fractal, aunque obviamente lo deben ser en el mismo sentido que la trayectoria browniana, estadísticamente. Las mallas para estudiar percolación pueden elegirse con geometrías diversas, las cuales están determinadas por la



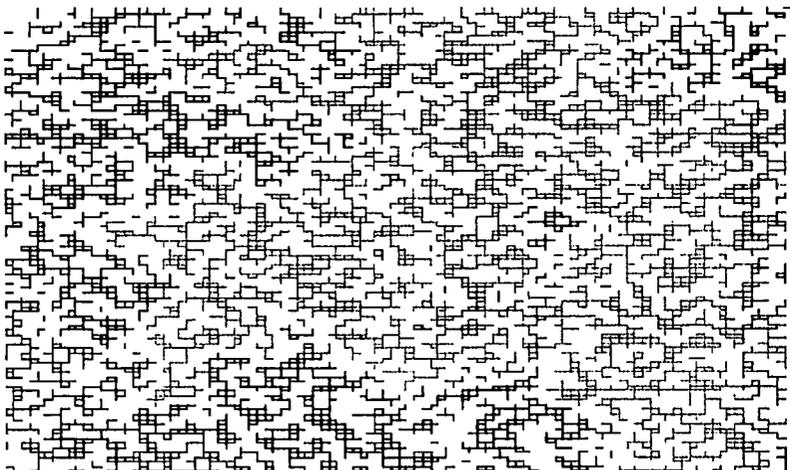
A) $p = 0.1$



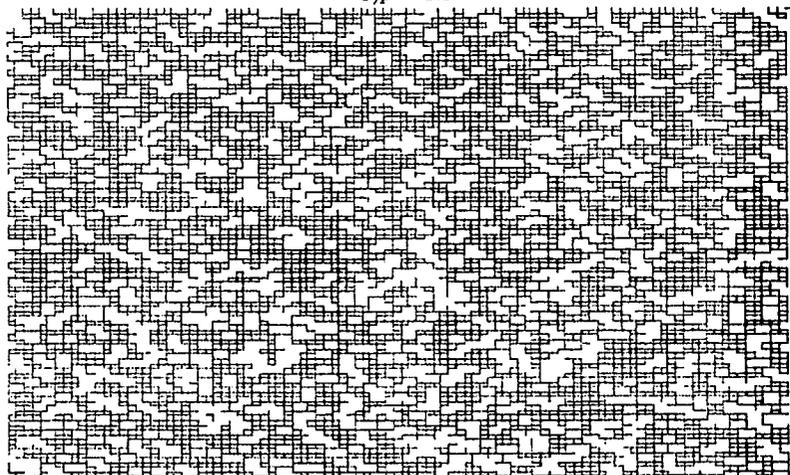
B) $p = 0.3$

TEXIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN



C) $p = 0.6$



D) $p = 0.9$

Figura 2.7: Realizaciones numéricas de un proceso percolativo en una malla de 100×100 , la secuencia se efectúa para valores crecientes de p , de manera cualitativa se puede observar la formación de un racimo que contiene un camino por el que posible ir de la parte superior a la base. Para valor suficientemente grande del parámetro p se forma un racimo terminal.

manera en que se define la distancia entre dos vértices x y y . Las cantidades que se estudian están encaminadas a responder la pregunta sobre la existencia del camino abierto infinito en la malla. Con ese fin es común definir la variable $p - p_c$ y ver la dependencia de algunas cantidades conforme $|p - p_c| \rightarrow 0$. Es posible probar [30] que, justo cuando $p = p_c$ aparece por primera vez el camino abierto infinito contenido dentro de un racimo. Por medio de estudios numéricos se ha descubierto que cantidades como la probabilidad de percolación $\theta(p)$, que es la probabilidad de que una unión o arista pertenezca al racimo mayor, o el tamaño medio $\chi(p)$ de un racimo (es una cantidad *análoga* a las susceptibilidad en termodinámica), se comportan, cerca del punto crítico como leyes de potencia

$$\theta(p) \sim (p - p_c)^\beta \quad (2.21)$$

$$\chi(p) \sim (p - p_c)^{-\gamma} \quad (2.22)$$

Otra de las cantidades que sigue asintóticamente una ley de potencia conforme $p \rightarrow p_c$ es la escala de longitud natural o *longitud de correlación* $\xi(p)$ entre dos uniones que pertenecen al mismo racimo

$$\xi(p) \sim (p - p_c)^{-\nu} \quad (2.23)$$

Las leyes de potencia (2.21)-(2.23) describen la invarianza de escala del conglomerado de uniones en la región crítica y los exponentes *son cantidades universales* que solamente dependen de la dimensión del espacio que contiene a la red y no de la geometría de la misma u otros detalles distintivos.

Los modelos de percolación son geométricos, implican conceptos de probabilidad y como se dijo, son una buena preparación para estudiar las transiciones de fase en fluidos, sistemas magnéticos, etc. Lo relevante del modelo es que por medio de simulaciones numéricas es posible obtener las relaciones (2.21)-(2.23) conjuntamente con un valor del exponente, si conjuntamente con eso se construye una teoría de escalamiento, que prediga resultados para valores de los exponentes, éstos se pueden comparar y en caso de ser coincidentes se tiene ya una teoría fenomenológica completa. Al igual que en la fenomenología de transiciones de fase en equilibrio se ha probado que existen diversas cantidades y comportamientos de tipo universal, que no dependen de detalles como lo podría ser la geometría de la red, con la buena noticia de que todo es en general trabajo teórico y computacional. Por lo tanto ¿Es posible estudiar el sistema de ciudades como un fenómeno crítico?, la respuesta es que no es lo ideal, pues si bien en estos sistemas se presentan leyes de potencia universales, se tienen dos limitaciones fuertes. La primera es que el sistema de ciudades es, aunque estacionario, un sistema fuera del equilibrio; la segunda es que los fenómenos críticos no son *robustos*, esto quiere decir, que las leyes universales que se presentan, sólo ocurren en el punto crítico, variaciones en la temperatura o en el parámetro p de percolación, que alejen al sistema del punto crítico desvanecen todas las regularidades observadas, lo que no ocurre con la ley de Zipf, que es robusta en este sentido. Debido a esto se presentan ahora una clase de sistemas en los que

FALTA CON
ORIGEN

la física también encuentra leyes de potencia en estadísticas, pero en este caso los sistemas están fuera de equilibrio, los modelos de procesos de agregación y el paradigma de sistemas autoorganizados³.

2.3.2. Sistemas fuera de equilibrio.

El universo de la física de sistemas extensos fuera de equilibrio es vasto, aún restringiéndose a sistemas en donde lo relevante es el estudio de la formación y organización de estructuras espaciales resulta fácil salirse del contexto de la tesis.

No obstante, existe una clase de modelos que resulta afín al sistema de ciudades, los modelos que estudian fenómenos de agregación. La afinidad radica en que las leyes de potencia pueden ser adecuadas para describir las estadísticas, además de que se trata de sistemas en donde la materia se agrupa en cúmulos distribuidos en el espacio, que evolucionan en el tiempo.

El término agregación se refiere precisamente a la formación de estructuras por medio de la agrupación de partículas. Ejemplos comunes de agregados se producen experimentalmente por medio de electrodeposición, floculación, sedimentación, por citar algunos ([24, 25, 26]). Además, se han propuesto el modelos de agregación ([15, 26, 27, 24, 32]) como paradigmas de la formación de montañas, estructuras orgánicas, ciudades, entre muchos otros sistemas fuera de equilibrio y típicamente irreversibles. En algunos casos, los procesos diseñados para recrear el fenómeno de agregación presentan dinámicas de carácter estacionario. Además, al igual que en los procesos en equilibrio, los modelos son típicamente fenomenológicos y buscan la recreación, ya sea de las estructuras ó las estadísticas. El resultado de implementar uno de los procesos de agregación más simples, el conocido como agregación limitada por difusión, se presenta en la figura (2.8). El proceso, en términos generales, consiste en fijar una partícula en algún punto del espacio, mientras que desde alguna otra ubicación, se sueltan partículas, las cuales difunden hasta que se encuentran en una vecindad de la partícula fija quedando adheridas. En el caso de la figura, se fijó una partícula en el centro de un cuadrado, las partículas vagabundas, se lanzaron desde posiciones iniciales distribuidas al azar en las aristas. La imagen delata la naturaleza fractal del agregado, situación que es común en los modelos de los procesos de agregación y que los relaciona con las funciones homogéneas. En lo que sigue ésto se discute más ampliamente.

2.3.2.1. Dinámica de los procesos de agregación.

Los modelos de los procesos de agregación son estocásticos, por lo que una parte importante para su descripción se hace con distribuciones de probabilidad. Las variables aleatorias están asociadas con conceptos que describen cantidades que tienen interpretaciones geométricas simples, por ejemplo: los tamaños de

³Un traducción más apegada al nombre original Selforganized criticality sería criticidad autoorganizada.



Figura 2.8: Agregado fractal generado por agregación limitada por difusión, la estructura resultante evoca algunas formas que se obtienen en diversos procesos experimentales, así como algunas formas orgánicas.

los racimos, que se definen como el número de elementos (o la masa) presentes en una estructura conexas.

2.3.2.2. Procesos de agregación irreversibles.

Supóngase que se tienen N_0 partículas distribuidas de manera aleatoria en la red, las cuales obedecen las siguientes reglas para formar agregados: (i) las partículas se difunden por la red hasta encontrarse con otra en uno de los sitios vecinos, en cuyo caso quedarán unidas formando un racimo de dos partículas. (ii) El proceso anterior continúa, ahora empleando tanto racimos como partículas en la difusión y coagulación, formando racimos más grandes hasta que eventualmente se forma un racimo terminal en un sistema finito. La caracterización del anterior proceso de agregación debe tomar en cuenta varios factores de tipo físico. El primero que debe tomarse en cuenta en cualquier proceso difusivo es la capacidad de moverse, descrita por medio del valor del coeficiente de difusión. Es natural suponer que esta cantidad es una función del tamaño s del agregado que difunde, en general se supone que el coeficiente $D(s)$ sigue una ley de potencia, cuyo exponente es uno de los parámetros moduladores del sistema, así $D_\gamma(s) = D_0 s^\gamma$. Un proceso de agregación más realista también toma en cuenta la posibilidad de que durante una colisión no se efectúe siempre la coagulación, esta suposición tiene sus fundamentos obviamente en argumentos de tipo mecánico y químico, en términos operativos estos factores se engloban en una probabilidad P_{ij} de *pegado* entre dos racimos de tamaños i y j .

Los aspectos dinámicos quedarán descritos por la distribución de los tamaños de los racimos $n_s(t)$, que es el número total de racimos de tamaño s , normalizados al volumen total de la red L^d . El enfoque matemático para procesos estocásticos donde los tiempos de ocurrencia entre eventos son de carácter

continuo corresponde a una ecuación diferencial para la distribución, llamada ecuación maestra, que en el caso particular de los procesos de agregación describe la evolución de $n_s(t)$. La solución de la ecuación para $\dot{n}_s(t)$ depende del tipo de proceso que se está considerando, sin embargo para sistemas en los que la masa se conserva se ha reconocido [34] que la solución de escalamiento $n_s(t) \sim s^{-2} f\left(\frac{s}{t^z}\right)$ es adecuada para tiempos largos. Esta suposición introduce una escala típica de tamaño de agregado en el sistema, además la forma explícita de la función de escalamiento es modelo dependiente y por lo general puede presentar varios regímenes, con diversos tipos de decaimientos.

La hipótesis de escalamiento tiene consecuencias en cantidades como los momentos, por ejemplo, el segundo momento, asociado al tamaño medio del racimo y definido como $\sum_s s^2 n_s(t)$, resulta una cantidad divergente conforme t crece $\sum_s s^2 n_s(t) \sim t^z$, etc. El análisis de escalamiento es siempre puesto a prueba por medio de simulaciones numéricas, y aunque se ha hecho mucho trabajo sobre modelos de agregación, el tema está lejos de ser agotado.

Sin ser propiamente un proceso de agregación, puede pensarse en que, en una malla bidimensional se siembran inicialmente N partículas de tamaño inicial $n(x, y, t = 0) = n_0$. Al transcurrir el tiempo los tamaños de las partículas pueden modificarse debido a la interacción con otros elementos del sistema o bien por medio de una *reacción*, la cual debe ser de naturaleza autocatalítica, es decir $n(x, y, t + 1) = f(n(x, y, t))$, esto debido a la restricción de que las partículas se mantienen en la misma posición siempre. Si se identifican las partículas con ciudades, entonces cada sitio será una especie de *agregado puntual*, ¿es posible que este tipo de modelo produzca una distribución de tamaños que asintóticamente sea la ley de Zipf?. Como se verá en el próximo capítulo, una clase particular del modelo autocatalítico, discutido brevemente en el último párrafo es el que se propone para el sistemas de ciudades, por lo tanto la respuesta a la pregunta recién planteada es, por el momento un ¿por que no?. A final de cuentas, ese es el objetivo de la tesis, responder, al menos parcialmente esa pregunta.

Existe un paradigma de organización para sistemas extensos fuera de equilibrio que está íntimamente ligado a la ocurrencia de leyes de potencia como distribuciones de eventos, es el llamado paradigma de la autoorganización. En lo que queda del capítulo se discute brevemente.

2.3.2.3. Sistemas Autoorganizados.

Hasta el momento solamente se han presentado a vuelo de pájaro algunos de los sistemas más sencillos, estudiados por los físicos, tanto analíticamente como numéricamente, en donde las leyes de potencia son el lenguaje común para su descripción. Sin embargo existe una muy extensa variedad de fenómenos ([15, 28, 29]) de tipo físico, económico, biológico, etcétera, donde surgen leyes de potencia, muchos de ellos en busca de una teoría. Si recordamos, al presentar los procesos de agregación cinética, se mencionó que en muchos casos los modelos tienen como motivación principal la imitación de la naturaleza; no son modelos derivados de primeros principios y típicamente suponen un mínimo de

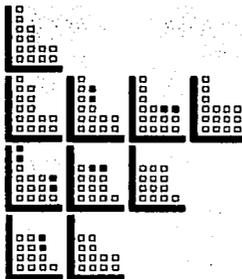


Figura 2.9: Modelo de avalanchas.

mecanismos como los agentes que producen las dinámicas. De modo que caben las preguntas: ¿porqué son estudiados esos modelos tan simplistas?, ¿Son adecuados para describir sistemas reales?. La respuesta es que muchos de esos modelos no constituyen meras aplicaciones a una teoría específica, en realidad, son modelos representativos de *paradigmas* sobre la manera en que se efectúan las cosas en el mundo real, pues a pesar de que se han construido descripciones de la física en escalas espaciales y temporales cada vez más finas, no existen las extrapolaciones de las leyes a ese nivel del mundo a escalas mayores, en el sentido siguiente: A partir de la teoría fundamental del universo microscópico, no ha sido posible derivar de ella una teoría que dé cuenta de los pormenores de las hélices de ADN, de la formación y funcionamiento de las células y de los organismos que éstas conforman. Uno de los paradigmas que se ha propuesto como respuesta a esta carencia de extrapolaciones directas, es lo que se llama autoorganización, teoría que propone que los sistemas dinámicos con muchos grados de libertad tienden a estar en estados con correlaciones de todos los órdenes (por medio de leyes de potencia) entre sus componentes, teniendo como resultado que el sistema presente regularidades debidas a comportamientos colectivos, no individuales. Con fines de claridad se describe con cierto detalle el modelo *representativo* de sistema auto-organizado: el modelo de *avalanchas* en redes de d dimensiones, que en su versión más simple, se muestra en la figura (2.9).

La dinámica comienza al añadir una partícula a una de las columnas elegida al azar, si la pendiente local del perfil de la columna excede un cierto valor m_z entonces debe ser actualizado, repartiendo el granito con los sitios vecinos. Esto se hace hasta que todos los sitios se encuentren en regiones con m menores que m_z . Si esto ocurre, entonces el sistema ha alcanzado un estado *mínimamente estable*, mínimamente, porque la adición de un sólo grano de arena ¡puede desencadenar una avalancha!. De hecho una implementación numérica de este proceso permite corroborar que efectivamente es posible desencadenar avalanchas en todas las escalas de longitud con la adición de uno sólo de los granos en alguna de las columnas. Los grupos de sitios que pueden ser alcanzados por este

proceso físico de tipo *efecto dominó* tienen distribuciones D para los tamaños s , que siguen leyes de potencia

$$D(s) \sim s^{-\tau}$$

con exponentes que usualmente dependen sólo de la dimensión de la red. Además de las distribuciones de los tamaños de los grupos de partículas que son alcanzados por la avalancha, se ha encontrado que: los tiempos de vida de las avalanchas, las longitudes de correlación y algunos otros parámetros, también siguen leyes de potencia. Este tipo de modelo se ha aplicado [29] a situaciones diversas, por ejemplo en el estudio de la turbulencia, procesos de agregación, redes de ríos, superconductores, embotellamientos, entre muchos otros más o menos exóticos. En el caso de la tesis, no se tomará como modelo del sistema de ciudades, pues si bien, los estados autorganizados críticos obedecen leyes de potencia, son robustos (en el sentido de que el efecto de una perturbación es una avalancha que lleva al sistema a un estado similar al anterior), la fenomenología de ciudades no parece ser fácilmente enmarcable en este contexto de efectos tipo avalancha, es decir, no ocurre que al nacer o morir alguien, en algún lugar, se tengan fluctuaciones de población en todos los elementos del sistema hasta de nuevo alcanzar el estado crítico.

Con esto se concluye el capítulo, en el que se presentó la fenomenología del sistemas de ciudades. Se presentaron también algunos modelos de sistemas en donde se presentan leyes de potencia para las estadísticas, se mencionó brevemente que el tipo de modelo elegido bien podría pertenecer al de los procesos de agregación, en donde cada ciudad se correspondería con un conglomerado puntual, que, por un lado, evoluciona autocatalíticamente y que complementariamente experimenta una contribución debida interacciones con los demás elementos del sistema. En el próximo capítulo se tratan con detalle estos modelos.

Capítulo 3

Modelos que generan la ley de Zipf.

¿Como se modela un sistema de ciudades?, muy fácil, con miles de ecuaciones que describen las dinámicas internas de cada ciudad, otro tanto las interacciones externas, todas acopladas y con otros cuantos miles de parámetros de modulación y condiciones iniciales. Una vez establecido el sistema, se resuelve, se hace estadística sobre las poblaciones y eso nos debe dar la ley de Zipf, la que por cierto no depende de todo eso. Como eso es imposible de hacer, pues ni siquiera se tienen las ecuaciones que hay que integrar, los modelos que se han propuesto descansan fundamentalmente en dos tipos. (i) modelos de imitación de la naturaleza, es decir un conjunto de reglas locales sensatas, que al evolucionar pueden hacer que el sistema reproduzca las observaciones. En estos modelos el sistema es discreto en espacio y tiempo. (ii) Procesos basados en ecuaciones diferenciales para la distribución de probabilidad, como en el caso de la ecuación de difusión, empleando suposiciones de dinámica de poblaciones y algunas otras condiciones como la estacionariedad de la ley de Zipf. En ambos casos los modelos son muy simples y con un número muy reducido de variables relevantes. En la tesis se estudia fundamentalmente un modelo de la clase (i), por tanto es de estos modelos de los trata este capítulo.

3.1. Modelos de sistemas de Ciudades.

3.1.1. Modelando la estructura del sistema en el espacio.

La hipótesis de que la formación de una ley universal depende de identificar un mínimo de elementos esenciales quiere decir que no se tomarán en cuenta (al menos explícitamente) factores asociados a políticas expansionistas, factores económicos, sociológicos, el establecimiento de fronteras no naturales y en general todas aquellas situaciones provocadas por el hombre o asociadas al medio. En primer lugar porque son situaciones que difícilmente se tienen cuantificadas

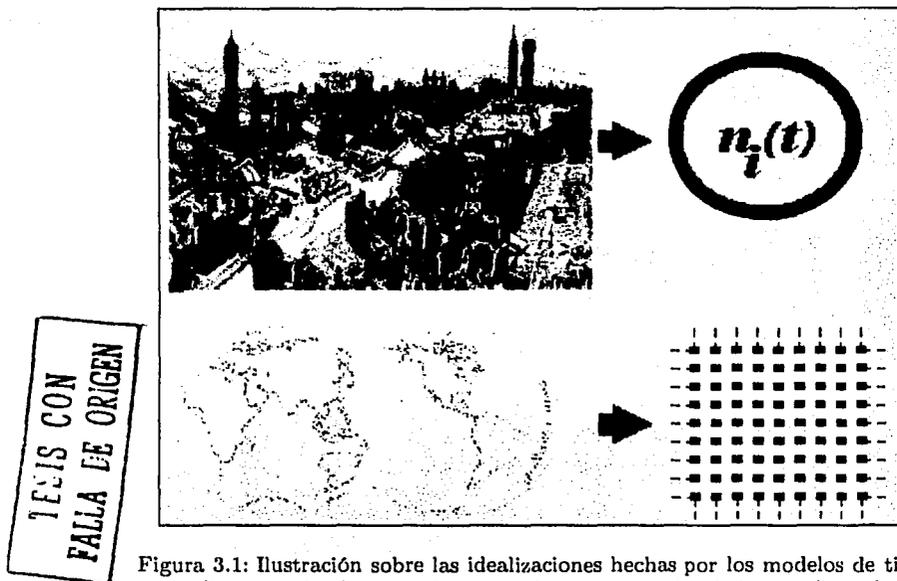


Figura 3.1: Ilustración sobre las idealizaciones hechas por los modelos de tipo multiplicativo e donde las ciudades son de tipo puntual y el sistema de ciudades es una red cuadrada con un número N fijo de elementos, que no excluyen la posibilidad $N \rightarrow \infty$. La ciudad es una ilustración original de "Pope" Solei.

a lo largo del tiempo. En cualquier refinamiento podría ser posible añadir alguno de esos elementos. Para modelar el conjunto de ciudades se suponen válidas las constricciones del sistema real a un espacio bidimensional, con las ciudades perfectamente localizadas en los vértices de una red discreta, en la que cada punto i de la misma representa una ciudad, que está caracterizada por su población $n_i(t)$, en la figura 3.1 se presenta una alegoría a éstas idealizaciones.

3.1.2. Evoluciones de la población.

Una vez asentada la estructura espacial del sistema debe establecerse el criterio de evolución de la población en cada sitio. Una manera sencilla de hacerlo es suponer que $n_i(t)$ tiene dos contribuciones, una $g_{ij}(t)$ para $j \neq i$ debida a las interacciones con los demás componentes del sistema, la otra $f_i(t)$ asociada al cambio debido a factores internos, como lo pueden ser nacimientos y muertes, etc. Por lo que, de manera general, se tiene que

$$n_i(t+1) = u(f_i(t), g_{ij}(t)) \quad (3.1)$$

3.1.3. La forma más simple de crecer: $n_{t+1} = \lambda_t n_t$.

Operativamente la división en dos contribuciones para la transición de la población n_i de un sitio i del tiempo t al tiempo $t + 1$ se puede efectuar en dos subpasos, cada uno asociado a cada término del lado derecho de (3.1). En el caso de la contribución por cambios internos, la dinámica de poblaciones tiene como modelo más simple de crecimiento la ecuación malthusiana. Es decir: si $x(t)$ es la población al tiempo t , la ecuación que describe el crecimiento es $x(t + 1) = \lambda x(t)$, donde λ es el parámetro o tasa de crecimiento. En general esta dinámica está sujeta a la condición inicial $x(0) = x_0$. Si por simplicidad se pide que $x_0 = 1$, entonces la solución al tiempo τ es $x(\tau) = \lambda^\tau$. El modelo puede refinarse integrando la posibilidad de que los factores de proporcionalidad sean de un carácter más general, permitiendo tener eventos de crecimiento o disminución de la población a cada tiempo. Esto se consigue fácilmente haciendo que a cada tiempo se tenga un $\lambda(t)$ que pueda ser mayor o menor que uno. Así, generalizando a todas las ciudades se obtienen las N ecuaciones de evolución

$$n_i(t + 1/2) = \lambda_i(t)n_i(t) \quad (3.2)$$

Debe quedar claro que a cada sitio le corresponde un $\lambda_i(t)$ a cada tiempo. El $t + 1/2$ en el argumento simboliza que no se ha completado la evolución pues hace falta sumar el término asociado a la contribución externa. ¿De donde se sacan ahora los λ_i ? Es más o menos sencillo darse cuenta que un sistema tan complicado puede tener incrementos o disminuciones tan variados como se quiera, lo que sugiere que el control sobre los factores sea solamente de tipo estadístico, por lo que la naturaleza de los factores puede tomarse como aleatoria suponiendo solamente que siguen alguna distribución $P(\lambda)$ preestablecida. El mecanismo multiplicativo es la reacción de tipo autocatalítica, que se ha reconocido [9, 5, 11] entre un sinúmero de funciones $n_i(t + 1) = f(n_i(t))$ como el mecanismo más simple, para producir estadísticas parecidas a la ley de Zipf suponiendo una configuración inicial $n_i(0) = n_{i0}$, conjuntamente con ciertas condiciones subsidiarias. Las condiciones subsidiarias son precisamente el elemento de modelación sutil como veremos más abajo. Primero, debe hacerse ver que los procesos multiplicativos sólo no predicen la ley de Zipf.

3.1.4. Procesos Multiplicativos y la distribución log-normal.

De manera general un proceso multiplicativo está descrito por

$$n(t + 1) = \lambda(t)n(t) \quad (3.3)$$

y una distribución $P(\lambda)$ para los factores.

Supóngase la condición inicial $n(0) = n_0$, deseamos conocer la probabilidad de que n tome un cierto valor conforme $t \rightarrow \infty$.

Una manera de resolver este proceso es cambiando de variable por $y(t) = \ln(n(t))$, de donde se obtiene que

$$y(t + 1) = y(t) + \mu(t), \quad (3.4)$$

donde $\mu(t) = \ln(\lambda(t))$. El proceso (3.4) es una caminata aleatoria, cuya solución se obtiene inmediatamente

$$y(t) = y_0 + \sum_{k=1}^{t-1} \mu(k). \quad (3.5)$$

La distribución del proceso (3.4) se obtiene aplicando el teorema de límite central, aclarando antes algunos puntos finos.

3.1.4.1. Eventos raros y el teorema de límite central.

Cuando se discutió la idea de universalidad en el capítulo anterior se dijo que existen propiedades, que pueden ser números o bien algún tipo de función como la ecuación de estado de Van der Waals en variables reducidas, que resultan generales, pues no dependen de alguna particularidad del sistema. En este contexto podemos establecer que el llamado teorema del límite central es un principio de universalidad para procesos estocásticos aditivos. El teorema establece que bajo condiciones muy generales [6, 7], la distribución de la *suma normalizada* de un grán número de variables aleatorias independientes, idénticamente distribuidas, con media m y varianza σ^2 es asintóticamente normal. Esto es, si y es igual a

$$y = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad (3.6)$$

la probabilidad p_y asociada a y que es tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(y-\bar{y})^2}{2\sigma^2}} \quad (3.7)$$

¹ con $\bar{y} = \sum_i \bar{x}_i = nm$ y $\sigma^2 = \sum_i \sigma_i^2 = n\sigma^2$. ¿Es posible aplicar el teorema del límite central a (3.5)? La respuesta a esta pregunta se encuentra contenida en la respuesta a la pregunta más general, ¿Hay un teorema de límite central para procesos como (3.3)? Para responder ésto debemos medir los efectos que tienen en la estadística la ocurrencia de lo que en la jerga se conoce los *eventos raros*.

Consideremos un proceso binario, es decir uno en donde solamente se tienen dos factores λ_1 y λ_2 que ocurren con probabilidades p y q . En este caso es muy fácil ver que si se tienen N elementos en una cadena con z factores λ_1 y $N - z$ λ_2 , entonces el producto se escribe como

$$n_z = \lambda_1^z \lambda_2^{N-z} \quad (3.8)$$

para algún $0 \leq z \leq N$. La probabilidad de que ocurra cada n_z es una probabilidad binomial pues hay que acomodar dos valores en N sitios, o bien de tener z éxitos en N ensayos, dejando los demás a los $N - z$ fracasos, ésto es

$$p_z = \binom{N}{z} p^z q^{N-z}, \quad (3.9)$$

¹ Las condiciones necesarias y suficientes para una forma más sólida del teorema del límite central para variables aleatorias independientes, las llamadas condiciones de Lindeberg se exponen en [6] volumen II. O en cualquier texto avanzado de teoría de probabilidad.

con $\binom{N}{z} = \frac{N!}{z!(N-z)!}$. De modo que el valor esperado $\langle n_z \rangle$ de n_z es

$$\begin{aligned} \langle n_z \rangle &= \sum_{z=0}^N p_z n_z \\ &= \sum_{z=0}^N \binom{N}{z} p^z q^{N-z} \lambda_1^z \lambda_2^{N-z} \\ &= (p\lambda_1 + q\lambda_2)^N. \end{aligned}$$

Por otra parte el valor de z que maximiza el factor de probabilidad $\binom{N}{z} p^z q^{N-z}$, para $N \gg 1$ es $z_m = \frac{Np}{p+q}$, que al evaluar en $n_z = \lambda_1^z \lambda_2^{N-z}$ da

$$n_{z_{\max}} = (\lambda_1^p \lambda_2^q)^N$$

Por lo tanto el valor promedio y el valor más probable no coinciden. No sólo eso, en general no tienen ni siquiera el mismo orden de magnitud. Tan es así que $\lim_{N \rightarrow \infty} n_{z_{\max}} / \langle n_z \rangle$ tiene una divergencia exponencial. El origen de esta diferencia es esencialmente debido a los eventos raros. Estos eventos ocurren con probabilidades exponencialmente bajas, pero contribuyen de manera significativa al momento de promediar. El caso más simple de visualizar, en el caso binomial es por ejemplo para $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = \frac{1}{2}$: en el conjunto de los posibles resultados del proceso un evento extremo ocurre cuando se presenta una sucesión de productos de λ_1 , sin embargo, ésta cadena ocurre con una probabilidad de presentarse exponencialmente baja, aún así, al momento de promediar, el valor del producto es 2^N con $N \gg 1$, el cual es exponencialmente mayor que un valor típico. El ejemplo anterior ilustra lo que se anticipó, eventos de esta clase contribuyen de forma más importante al valor de $\langle n_z \rangle$ que todas la demás ocurrencias, las típicas, que lo hacen de forma poco significativa. ¿Que hay con el teorema del límite central? El teorema establece que un cálculo de las fluctuaciones de y alrededor del valor medio son del orden de $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, mientras que el comportamiento para los eventos raros, pertenece a la cola de la distribución, pero con eventos de orden $O(1)$, de modo que la aproximación gaussiana no da cuenta de ellos. Es decir, no da cuenta de los eventos en las colas de las distribuciones, que como se dijo arriba son exponencialmente mayores que el valor típico $n_{z_{\max}}$. La estadística provista entonces por el teorema del límite central es válida solamente para tiempos largos y eventos de tamaños de pequeños hasta moderados y presenta graves dificultades al calcular momentos de orden mayor para n_z . Un cálculo detallado permite mostrar que es posible ajustar gaussianas en las colas, pero dependen del orden del momento que desee considerar. De este modo se pierde por completo la posibilidad de una versión del general del teorema. Si consideramos el límite de validez del teorema entonces podemos aplicarlo al proceso aditivo de los logaritmos, es decir, a la variable y definida en (3.5). Así, definiendo U_t como:

$$U_t = \sqrt{C}(y - D),$$

donde los parámetros C y D están relacionados con el promedio y la varianza de las $\mu(k)$ de la forma

$$C(t) = \frac{1}{2t (\langle \mu^2(k) \rangle - \langle \mu(k) \rangle^2)} \quad (3.10)$$

$$D(t) = t \langle \mu(k) \rangle \quad (3.11)$$

y donde se ha sustituido de manera mañosa el número de pasos de la caminata aleatoria por el "tiempo" t debido a que en el caso discreto son iguales. La distribución de U_t converge a $\frac{e^{-C(y-D)^2}}{\sqrt{x}} dy$, implicando que la función de n converge a

$$\frac{e^{-C(\ln(n(t))-D)^2}}{\sqrt{\frac{x}{C}}} \left| \frac{dy}{dn} \right| dn = \frac{e^{-C(\ln(n(t))-D)^2}}{n\sqrt{\frac{x}{C}}} dn, \quad (3.12)$$

pues $y = \ln(n)$. Esta es la famosa distribución log-normal, que en este caso depende paramétricamente del tiempo

$$f(n)dn \sim \sqrt{\frac{C}{\pi}} \frac{e^{-C(\ln(n(t))-D)^2}}{n} dn \quad (3.13)$$

Que puede escribirse como

$$f(n)dn = n^{-1} g(n, t) dn \quad (3.14)$$

La ecuaciones (3.12) y (3.14) son interesantes pues debe notarse que es posible tener leyes de potencia debido a la conservación de probabilidad y un cambio de variable como $y = x^{-\alpha}$, con $\alpha > 1$ o $y = \ln(x)$. Pues por conservación de la probabilidad $P(x)dx = P(y)dy$ y como $dy = \left| \frac{dy}{dx} \right| dx$, entonces

$$P(x)dx = \alpha \frac{P(y(x))}{x^{(\alpha+1)}} dx \quad (3.15)$$

O bien $P(x)dx = \frac{P(y(x))}{x} dx$ para logaritmos.

El resultado (3.15), muy común en teoría elemental de probabilidad de pronto se convierte en una posible fuente de leyes de potencia debida únicamente a un simple cambio de variable adecuado. Sólo basta que la $P(u)$ sea tal que se comporte como constante para algún límite apropiado de u . En el caso que nos interesa, además de las consideraciones asociadas a los eventos extremos, que retomaremos en breve, se necesita que $e^{-C(\ln(n(t))-D)^2}$ se haga constante en algún límite. Sustituyendo (3.10) y (3.11) en $C(\ln(n(t)) - D)^2$, este queda como

$$\frac{(\ln n - t \langle \mu(k) \rangle)^2}{2t (\langle \mu^2(k) \rangle - \langle \mu(k) \rangle^2)} \quad (3.16)$$

Vemos que conforme el tiempo se incrementa el término cuadrático del numerador asociado al máximo de la campana se desplaza con velocidad constante,

mientras que el denominador asociado a la *anchura* también se incrementa haciendo a la curva más gorda. Así, la campana se hace prácticamente constante, con la condición $\ln n - t(\mu(k)) \ll 1$, o bien $n \ll e^{t(\mu)}$. Y la f como función de n es

$$f(n) \sim \frac{1}{n} \quad (3.17)$$

Que es una ley de potencia que se cumple mejor conforme transcurre el tiempo y cuyo exponente es -1 , que difiere del -2 de la ley de Zipf. Se concluye entonces que los procesos puramente multiplicativos pueden dar leyes de potencia pero en todo caso no con el exponente observado y en general tampoco de manera estacionaria. Debe entonces complementarse el modelo con algún otro mecanismo que forme la estadística deseada.

Como ya se discutió, la distribución log-normal no da cuenta de los eventos en la cola de la distribución, pero es ampliamente aceptada como una fuente de leyes de potencia asintótica. Esto se debe a que en una simulación numérica típica, los eventos raros ocurren con probabilidad exponencialmente baja, en general solamente se detectan eventos con contribuciones típicas al promedio compatibles con el orden de las fluctuaciones de la distribución log-normal.

Con ésto se concluye lo que respecta a los procesos multiplicativos, los cuales se postularon como el mecanismo asociado a la contribución autocatalítica a la evolución de las poblaciones, que por sí sólos no dan la ley de Zipf. Por tanto, la evolución del sistema debe tener ingrediente adicional, que puede representar por ejemplo: interacciones entre los sitios del sistema. En la siguiente sección se exponen algunos de los modelos propuestos para estas condiciones adicionales.

3.2. Modelos.

Un modelo realista puede incorporar una gran cantidad de elementos, por ejemplo eventos de crecimiento global de la población por medio de fuentes, ¿porque no? aniquilación estocástica por epidemias o guerras, transporte de población típicamente por difusión, etc. El reto es identificar cuáles, así como el porqué funcionan unos u otros, a continuación, se presentan algunas de las ideas que se han propuesto para los posibles mecanismos subyacentes que dan origen a la ley de Zipf.

3.2.1. Modelo tipo Levy-Solomon.

Este modelo supone además de la ecuación (3.2) con una distribución $\Pi(\lambda)$ para las λ , que el número de elementos presentes en el sistema, durante la evolución, sea fijo e igual a N . El acoplamiento entre los elementos es de tipo global a través de una restricción sobre el mínimo *tamaño* que le es posible tener a cada sitio. La cota mínima esta determinada por una fracción c del tamaño promedio de la población a cada tiempo, es decir: $n_{min} = c \cdot \bar{n}$, donde \bar{n} es el promedio en cada tiempo $\bar{n} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n_i(t)$ y $0 \leq c < 1$. Cada vez que el

resultado de una de las multiplicaciones sea menor que la cota inferior, el valor del sitio se actualiza por el de la cota. Así que la evolución queda como

$$n_i(t+1) = \max \{ \lambda(t)n_i(t), c \cdot \bar{n} \} \quad (3.18)$$

Este modelo es asintóticamente soluble, y predice leyes de potencia $f(n) \sim n^{-(1+\alpha)}$ con el parámetro del exponente $\alpha = \alpha(c, N)$, dado implícitamente por la ecuación

$$N = \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left[\frac{\left(\frac{c}{N}\right)^\alpha - 1}{\left(\frac{c}{N}\right)^\alpha - \frac{c}{N}} \right] \quad (3.19)$$

Cualitativamente se tiene si N es finito y $c = 0$ entonces $\alpha \rightarrow 0$, sin embargo en *límite termodinámico* $N \rightarrow \infty$ el exponente acumula en $\alpha \rightarrow 1$.

De manera más precisa, es posible reconocer en (3.19) dos regímenes que la simplifican y permiten obtener α explícitamente: para N y c en el límite $\frac{1}{nN} \ll c < 1$ se obtiene que $\alpha > 1$ así como $\left(\frac{c}{N}\right)^\alpha \gg \frac{c}{N} \gg 1$, de modo que (3.19) se aproxima a

$$N \simeq \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left[\frac{1}{\frac{c}{N}} \right]$$

\Rightarrow

$$N \simeq \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{N}{c} \Rightarrow \alpha \simeq \frac{1}{1 - c}$$

Por lo tanto:

$$\alpha \simeq \frac{1}{1 - c} \simeq \frac{1}{1 - \frac{n_{\min}}{n}} \quad (3.20)$$

Este resultado es la joya del modelo, es universal pues no depende del tamaño del sistema ni de la distribución $\Pi(\lambda)$, además de que en límite $N \rightarrow \infty$ es exacta. Nótese que uno de los parámetros modulables es precisamente n_{\min} , determinado por c , de modo que sin perder de vista $\frac{1}{nN} \ll c$ podemos hacer que $c = \frac{n_{\min}}{n} \ll 1$, de donde finalmente se obtiene $\alpha \simeq 1$, resultado que al sustituirlo en $f(n) \sim n^{-(1+\alpha)}$ da la ley Zipf.

La validez de la ecuación (3.20) así como los resultados de este modelo se han verificado por medio de simulaciones numéricas en [10]. La validez de la ecuación (3.20) se rompe en caso de que N sea finito y los valores de c sean menores que $\frac{1}{nN}$ pudiéndose tener exponentes $\alpha < 1$. Dentro de este último caso, existe otro límite que permite conocer α : si la comparación de c con $\frac{1}{N}$, satisface $c \ll \frac{1}{N} < 1$, entonces $\frac{c}{N} \ll \left(\frac{c}{N}\right)^\alpha \ll 1$, de modo que la ecuación (3.19) se aproxima a $N \simeq \frac{\alpha - 1}{\alpha} \left[\frac{-1}{\left(\frac{c}{N}\right)^\alpha} \right]$, que al aplicar logaritmos y permitir solamente términos de orden cero se tiene que $\ln N \simeq \alpha \ln\left(\frac{N}{c}\right)$ o bien

$$\alpha \simeq \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{N}{c}\right)},$$

de modo que en general se pierde la ley de Zipf, pues ya no se sigue la unicidad del exponente, y el valor puede diferir significativamente de cero y uno, que son las aproximaciones log-normal y Zipf.

Una modificación de éste modelo, propuesta por Solomon y Blank [11], consiste en hacer más robusto el límite de validez la ecuación $\alpha = \frac{1}{1-c}$. Para lograr eso se proponen tres condiciones que deben satisfacerse de manera simultánea.

i) La existencia durante toda la evolución, y de manera independiente de los valores de la población total, de pequeñas villas con poblaciones del orden de pocos habitantes. Se relaja pues la constricción de n_{min} crezca conforme crece la población promedio.

ii) En el caso de que una ciudad tenga valor menor que n_{min} el sitio desaparece en lugar de ser *subsidiado* a mano al valor n_{min} .

iii) La posible formación de nuevas ciudades: al crecer la población global es razonable suponer que algunos nuevos pobladores funden nuevas ciudades, así, se puede exigir que una fracción del excedente de población entre dos unidades de tiempo forme ciudades con tamaño igual a los n_{min} .

Vale la pena un comentario sobre lo anterior, las reglas i) y ii) pueden sonar contradictorias en una primera lectura, por tanto se aclara lo que quieren decir exactamente. La condición i) quiere decir que se desea que a cualquier tiempo, se tengan presentes en el sistema elementos de tamaño n_{min} fijo. En contraste ii) quiere decir que si al evolucionar un sitio tuviera como resultado una población con tamaño menor que el mínimo, entonces desaparece. La condición iii) asegura que el sistema no se vaciará, pues el número de elementos se incrementa al formarse nuevas ciudades.

El número ΔN de ciudades que aparece en cada paso de tiempo con población n_{min} depende de un parámetro K , como $\Delta N = K(n_{tot}(t+1) - n_{tot}(t))$.

De la definición se sigue que la velocidad con la que varía el promedio es constante $\bar{n} = \frac{\Delta n}{\Delta N} = \frac{1}{K}$, al igual que $c = n_{min}/\bar{n}$, así se garantiza que $\alpha \approx \frac{1}{1-c}$ es válido. El modelo puede tener como condición inicial un sistema de poblaciones pequeñas y estar muy *diluido*, esa situación es realista, pues al principio de la historia, las incipientes concentraciones humanas estaban esparcidas por la superficie de la tierra.

Finalmente es posible obtener valores para los parámetros del sistema y ver que el modelo implica leyes de Zipf, debido a que la validez de la regla $\frac{1}{nN} \ll c \ll 1$ nos da de nuevo un $\alpha \approx 1$. Si se asume que las poblaciones mayores en el mundo son del orden 10^7 , que la población total es del orden 10^{10} y que las poblaciones más pequeñas son del orden de la unidad entonces $\bar{n} = n_{tot}/N \approx n_{tot}n_{min}/n_{maz} \approx 10^{10}/10^7 \approx 10^3 \Rightarrow K \sim 0.001$.

La ley de Zipf de este modelo se corrobora con simulaciones numéricas en [11].

Una alternativa (no excluyente) a los modelos de Levy-Solomon para el acooplamiento entre los elementos del sistema puede ser por medio de difusión, la difusión tiene una interpretación sencilla, la redistribución de población por migración. Este es el modelo propuesto por Manrubia y Zanette [5].

3.2.2. Modelo de Manrubia-Zanette.

Dentro de los eventos complementarios al crecimiento multiplicativo, la redistribución por medio difusión se presenta como uno de los mecanismos realistas más sencillos de establecer, pues se asocia con eventos de migración de población de unos sitios a otros. El problema consiste en establecer de manera adecuada el modo en que se efectúa este transporte de población, pues difícilmente se tienen datos disponibles. Lo que se propone en el modelo M-Z es que el flujo de población se describe por medio de la ecuación de difusión discreta en el espacio y en el tiempo para un medio homogéneo e isotrópico, el alcance de la difusión que se propone es de corto alcance: la población se distribuye solo entre los vecinos más próximos a un determinado sitio. Por tanto, la ecuación puede escribirse como

$$n(t+1) = (1-\alpha)n(t) + \frac{\alpha}{k} \sum_{\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}\}} n_{\mathbf{x}}(t), \quad (3.21)$$

donde $\{\mathbf{x}\}$ es el conjunto de los elementos vecinos al sitio n , k es el número de elementos definidos como vecinos más próximos, y $0 < \alpha < 1$ el parámetro de difusión, que determina la fracción de población que será distribuida homogéneamente entre los vecinos.

El modelo M-Z propone un proceso multiplicativo de tipo binario, en donde sólo es posible multiplicar por dos factores λ_1 y λ_2 con probabilidades de ocurrir p y $1-p$ respectivamente, que además satisface que $\bar{\lambda} = 1$, por lo que debe satisfacerse que $p\lambda_1 + (1-p)\lambda_2 = 1$. Con estas restricciones los factores que se proponen son iguales a $\lambda_1 = \left(\frac{1-q}{p}\right)$ y $\lambda_2 = \left(\frac{q}{1-p}\right)$, para un parámetro $0 \leq q \leq 1$, naturalmente $p \in (0, 1)$. Por lo tanto el proceso multiplicativo para el sitio i , en el tiempo escrito simbólicamente como $t + 1/2$, para indicar solamente media evolución es:

$$n_i(t+1/2) = \begin{cases} \left(\frac{1-q}{p}\right) n_i(t) & \text{con probabilidad } p \\ \left(\frac{q}{1-p}\right) n_i(t) & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases} \quad (3.22)$$

el anterior proceso multiplicativo tiene la propiedad de conservar la población promedio pues el promedio de los factores es igual uno, para ver esto supóngase que la condición inicial es: $n_i(0) = n_{i0}$, entonces

$$\langle n_i(t+1) \rangle = p \left(\frac{1-q}{p}\right) \langle n_i(t) \rangle + (1-p) \left(\frac{q}{1-p}\right) \langle n_i(t) \rangle = \langle n_i(t) \rangle = \langle n_{i0} \rangle.$$

aplicando el paso complementario, el proceso a investigar es

$$n_i(t+1) = (1-\alpha)n'_i(t) + \frac{\alpha}{k} \sum_{\mathbf{x} \in \{\mathbf{x}\}} n_{\mathbf{x}}(t), \quad (3.23)$$

con $n'(t)$ dado por (3.22). Las reglas de evolución (3.22) y (3.23) asumen un sistema de extensión infinita, este es el modelo que se investiga numéricamente

en esta tesis, cuyos resultados de simulaciones numéricas se presentan en el próximo capítulo. Antes de continuar es conveniente hacer algunas precisiones sobre las ecuaciones (3.23) y (3.22).

3.2.2.1. Mapeos acoplados y el proceso estocástico M-Z.

Dentro del estudio de los sistemas complejos existe un paradigma de evolución llamado mapeos acoplados o por sus siglas en inglés CLM. Este enfoque busca convertirse en una alternativa de modelo genérico para sistemas que exhiben caos tanto en el espacio como en el tiempo, y que se presentan en áreas tan diversas como el estudio de reacciones químicas tipo B-Z y convección de Rayleigh-Bénard, hasta el estudio de ecosistemas, o economía, un tratamiento de nivel intermedio de esto se presenta en [37]. El modelo consiste en considerar el sistema como una red discreta cuyos sitios corresponden a una variable $x_i(t)$. El sistema evoluciona localmente por medio de alguna regla $x_i(t + \frac{1}{2}) = f(x_i(t))$ completamentándose con interacciones de acoplamiento con los demás elementos del sistema. La manera más sencilla de acoplar las evoluciones locales es precisamente por medio de la ecuación de difusión discreta en espacio y tiempo, o sea, la ecuación (3.21), esto debe hacerse de manera *paralela*, esto es, todos los componentes interactúan a la vez, a diferencia de la simulación estocástica descrita en la sección anterior. Esto puede entenderse como un mapeo de toda la malla al tiempo t en otra malla a un tiempo subsecuente, por medio de la regla:

$$x_i(t+1) = (1-\alpha)f(x_i(t)) + \frac{\alpha}{k} \sum_{j=1}^k f(x_j(t)) \quad (3.24)$$

para todos los i desde 1 hasta N , la $f(x)$ elegida es una función determinista para modelar una reacción local. A diferencia del modelo M-Z, la evolución es no estocástica, no se hace un muestreo del proceso. El paradigma de universalidad es una de las justificaciones más importantes para aceptar la adopción de este modelo, pues se basa en la existencia de comportamientos genéricos independientes del proceso que se emplea para su recreación. Debe quedar bien claro que la diferencia entre el empleo de mapeos de redes y de una implementación Monte Carlo del modelo Z-M es que en el primer caso la dinámica es de tipo paralela y determinista, en el segundo caso se generan muestras de estados del sistema empleando números aleatorios, el tipo de resultados que se espera obtener de este último es de tipo estadístico. El enfoque de mapeos acoplados también puede implementarse como alternativa a la simulación montecarlo substituyendo la f de la ecuación (3.24) por el proceso multiplicativo.

3.2.2.2. Alcances y limitaciones del modelo M-Z.

El modelo M-Z es un proceso estocástico con un número arbitrariamente grande de componentes acoplados y es, al menos a primera vista intratable analíticamente: esto deriva en que sea la simulación estocástica la herramienta elegida para su estudio. Sin embargo, antes de entrar en detalles sobre esto

último, vale la pena detenerse para discutir un poco sobre los alcances y limitaciones del modelo, aún antes de saber si es o no exitoso en la reproducción de las observaciones.

El primer punto a resaltar es que el modelo incorpora la difusión como mecanismo complementario a la *reacción* multiplicativa, con un argumento simple, que describe una situación que sí se presenta en el sistema real, la migración, sin embargo propone una difusión a primeros vecinos que difícilmente resulta realista, pues por ejemplo en el caso de México se sabe que los flujos migratorios más importantes se efectúan de lugares con poblaciones moderadas hacia las ciudades principales de los estados o bien Estados Unidos, fuertemente motivada por la búsqueda de empleo, escuela, entre otras cosas.

En lo que corresponde al proceso multiplicativo, el minimalismo es un punto débil: se asume que el promedio de la población total es constante. Ésta suposición no es realista, es conocido ([3, 17, 18]) que las poblaciones crecen exponencialmente, tanto local como globalmente, por lo tanto la conservación promedio, así como un proceso de crecimiento binario, son poco realistas. Ésta dificultad no es insalvable, pues basta relajar esa restricción y emplear un proceso con crecimiento exponencial.

El modelo busca exclusivamente recrear la estadística de los tamaños de las ciudades: no tiene restricciones asociadas a la distribución espacial de las mismas, situación que en algunos casos puede no ser despreciable. Por ejemplo, en el caso de centros urbanos importantes, se observa que por lo general están separadas por sitios con poblaciones moderadas: difícilmente se tienen dos metrópolis vecinas, al menos dentro de un mismo país. Ésta forma de distribuirse no es fortuita, y no es tomada en cuenta por el modelo, pues por hipótesis la red es un medio isotrópico y homogéneo, lo cual por supuesto está lejos de ocurrir en la realidad, los factores geográficos siempre son tomados en cuenta al momento de elegir una ubicación para un asentamiento humano. Esto podría ser tomado en cuenta por un refinamiento del modelo.

Finalmente, al igual que en los de tipo Solomon las reglas evolución constituyen una alternativa más, junto con otros abordajes al problema, como cinéticas de agregación [13], ecuaciones diferenciales estocásticas [12], que participan en la carrera para determinar cuales son los mecanismos que originan la ley Zipf. ¿Cuál de todos es el correcto?, probablemente todos tienen la respuesta en parte, así que el modelo M-Z es tan solo un grano de arena más en la búsqueda de una teoría sólida sobre los procesos de formación y evolución de sistemas compuestos por ciudades.

Capítulo 4

Simulaciones Numéricas del modelo M-Z.

En este capítulo se presentan aspectos de la implementación así como los resultados de simulaciones numéricas del modelo M-Z. En primer lugar se detallan las condiciones que se asumieron con respecto a la definición de próximos vecinos y las condiciones de frontera que se suponen para el sistema, así como las cantidades que se miden. Después se presentan los resultados de las simulaciones.

4.1. Definición de Próximos Vecinos y Condiciones de Frontera.

El sistema de ciudades se representó por puntos en una red cuadrada finita, para atenuar los efectos debidos a la finitud se emplearon condiciones de frontera periódicas, que vuelven el cuadrado finito un toro (figura (4.1)). Como definición de los vecinos más cercanos a un sitio se emplearon los puntos colindantes en las direcciones cardinales (fig (4.1)).

Las simulaciones numéricas de las reglas (3.22) y (3.23), se efectuaron para diversos conjuntos de parámetros. En todas las simulaciones se midieron y promediaron, sobre diversas realizaciones: distribuciones acumulativas y momentos de varios órdenes para diversos tiempos.

Las distribuciones acumulativas se calculan contando el número $m(j)$ de sitios con población mayor a un valor j . Para los momentos se calculan de manera directa las sumas $\mu_k(t) = \frac{1}{N} \sum_i n_i^k(t)$, donde $n_i(t)$ representa la población en el sitio i al tiempo t y N el número total de sitios. El tiempo en cada simulación es del tipo Monte Carlo, donde una unidad de tiempo corresponde al tiempo en que típicamente todos los sitios reaccionan y difunden, en total $2N$ operaciones.

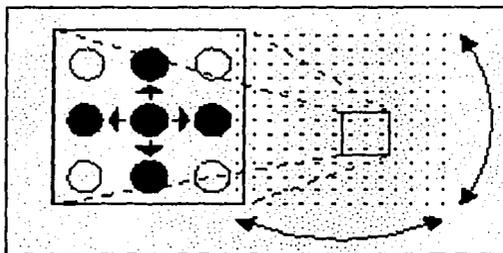


Figura 4.1: Condiciones periódicas de frontera para una red cuadrada y definición de los cuatro próximos vecinos para un sitio en la red..

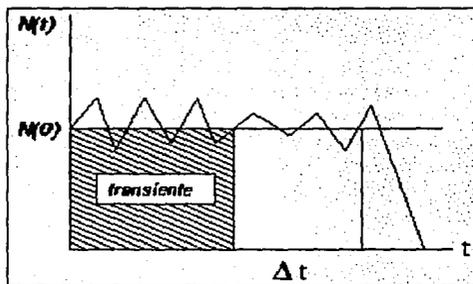


Figura 4.2: Esquema del comportamiento esperado de la población debido al tamaño finito del sistema. El intervalo Δt es en donde deben tomarse las medidas estadísticas.

4.1.1. Promedios.

Las condiciones periódicas resuelven el problema de próximos vecinos en los bordes y atenúan los efectos por finitud de la red, pues se emula un sistema infinito. Sin embargo, se observó que, en general la condición de promedio constante se pierde: conforme transcurre el tiempo se presentan decaimientos de la población que llevan al sistema a la extinción de la población. Se encontró que los decaimientos son de diversos tipos, con tiempos de decaimiento dependientes de los parámetros (p, q, α) . Por esto, las mediciones, tanto de las distribuciones como de los momentos se tomaron a tiempos relativamente cortos para evitar la extinción pero lo suficientemente largos para tener una estadística estacionaria bien formada (Figura (4.2)).

En la figura (4.3) se presenta la variación de la población como función del tiempo para el proceso Z-M en una red de 5×5 , en los casos donde el número de realizaciones es igual a 10, 100, 10000, 1000000. Esto se muestra con el fin de medir el efecto que tiene sobre la medición el número de veces que se promedia

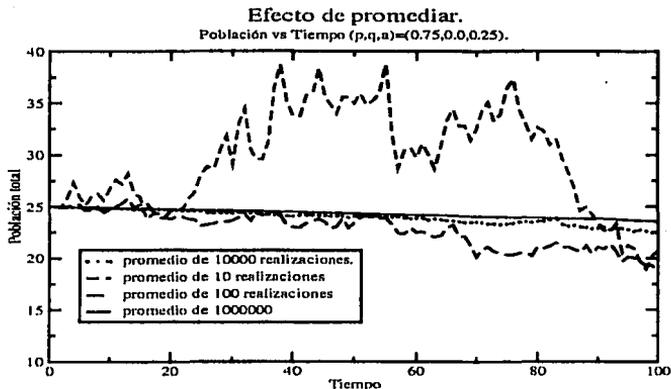


Figura 4.3: Efecto de tomar promedios en la población como función del tiempo para una malla de 5×5 , en cada caso el número de realizaciones promedio es diferente, en orden ascendente son 10, 100, 1×10^4 , 1×10^6 respectivamente

el proceso. El resultado es claro: a mayor número de elementos a promediar, el resultado se limpia de ruido. Esto es debido a que se accede a un número mayor de estados del conjunto representativo, aunque en cada realización típica se tengan configuraciones diferentes, al promediar un número muy grande, el resultado pierde su carácter *estocástico*. Este resultado es la ley de los grandes números y es esencial para la validez de la simulación estocástica.

4.1.2. Resultados.

Se efectuaron dos tipos de simulaciones: procesos multiplicativos con promedio constante y con crecimiento exponencial, en primer lugar se presentan los resultados que corresponden al proceso multiplicativo con promedio constante. En los dos casos las redes empleadas fueron de tamaño 100×100 , con condiciones iniciales $n_i(0) = 1$, para todo i . En las figuras correspondientes a las distribuciones acumulativas los tamaños se rotulan con la letra x , la población total como N y el tamaño del sistema (número de elementos en la red) es $S \times S = S^2$.

4.1.2.1. Promedio Constante.

Los resultados para este caso se muestran en las figuras (4.4)-(4.13) y representan los comportamientos típicos observados para un gran número de vectores

(p, q, α) . Las simulaciones del proceso con distintos valores para p , q y α se hicieron con los objetivos:

1. Determinar si el modelo recrea leyes de Zipf, o bien que otro tipo de distribución predice.
2. Investigar la *robustez* del resultado obtenido en 1: sea cual sea el tipo de distribución que se obtenga ¿Que tan sensible es al cambio de valores en los parámetros?.

La investigación sobre las distribuciones acumulativas arrojó como principal resultado que el modelo predice estadísticas tipo $P(X \geq x) \propto x^{-a}$, con $a \simeq 1$ para diversos valores de los parámetros (figuras (4.7)-(4.13)). La ocurrencia de las leyes de potencia se presenta siempre y cuando la hipótesis de conservación de población total promedio se mantenga (figura (4.4)), la cual si depende de la relación que guardan p , q y α : las ventanas de tiempos en donde eso ocurre se amplían conforme los factores del proceso multiplicativo se encuentren más próximos al límite $\lambda_j \sim 1$, $j = 1, 2$, que implica que $p + q \rightarrow 1$ (figura (4.5)). Algo parecido se presenta si se fijan p y q y se incrementa el valor de α (figura (4.6)).

Debe notarse que en las gráficas, las leyes de potencia se ajustan en intervalos, no en todo el dominio, éstos intervalos tienen cotas inferiores que de órdenes de magnitud pequeños $O(1)$, la cota superior en donde se tomaron las distribuciones es el tamaño del sistema $S \times S$, como se puede ver en las figuras, en general el modelo tiene problemas para reproducir la ley de Zipf en los extremos, las rectas se ajustaron típicamente descartando puntos en los extremos.

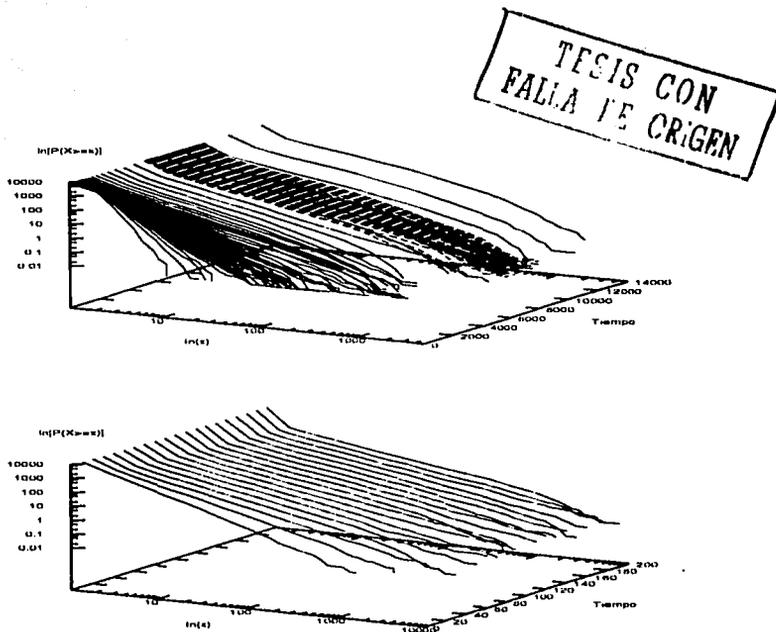


Figura 4.4: Formación de estados estacionarios mientras se conserva la población, se muestran dos casos contrastantes para distribuciones en coordenadas $(\ln(P(X \geq x)), \ln(x), t)$, en cada caso la ventana de tiempos es distinta y los parámetros también, en la primera $5000 < t < 1000$ y $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.45, 0.25)$ en la segunda $0 < t < 200$ y $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.35, 0.1)$. Mientras se mantenga la población más o menos constante y después de transientes de formación de la inhomogeneidades en el sistema, se forman, en general leyes de Zipf.

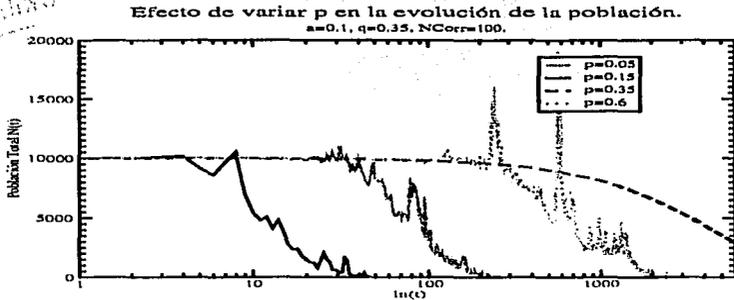


Figura 4.5: Evolución temporal de la población total para q y α fijos y varios valores de p . Conforme $p + q$ se acerca al valor 1 la población se mantiene constante por más tiempo.

En la figura (4.5) se presentan los resultados del comportamiento típico de la población con respecto del tiempo al variar los parámetros p dejando fijos q y el valor del parámetro de difusión. Como se anticipó el decaimiento depende de la relación $p + q$, que entre más cercana se encuentre a 1, hace que la ventana de tiempo en donde se mantiene constante la población total se amplíe, lo que puede entenderse como consecuencia de que conforme se alcanza este régimen, los factores del proceso multiplicativo están más equilibrados, haciendo que las fluctuaciones por multiplicaciones sean menos importantes que con factores más desbalanceados.

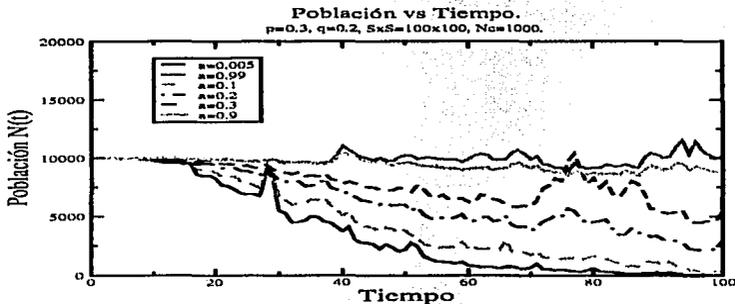


Figura 4.6: Efecto de variar el parámetro de difusión, los parámetros son $(p, q, \alpha) = (0.3, 0.2, \alpha)$. El decaimiento de la población se atenúa conforme se incrementa el valor de α (en la figura es α). Es útil comparar esta situación con la que se presenta en la figura (4.20).

En la figura (4.6) se muestra el efecto de variar el parámetro de difusión α para p y q fijos, iguales a 0.32 y 0.2 respectivamente. Se observa que la disipación de población se atenúa conforme se incrementa α , esto es sensato, pues la difusión homogeneiza el sistema de los desequilibrios en las poblaciones debidos a las fluctuaciones provocadas por el proceso multiplicativo. El mismo efecto se observó en crecimientos exponenciales (figura (4.20)). De la figura (4.6), así como de la figura (4.5) vemos que los decaimientos de la población pueden ser de formas diferentes, en lo que queda (figuras (4.7)-(4.13)) se muestran los tipos de decaimientos típicos que se encontraron, también se muestra que mientras el sistema esté en el régimen de población constante la distribución acumulativa es la deseada ley de Zipf.

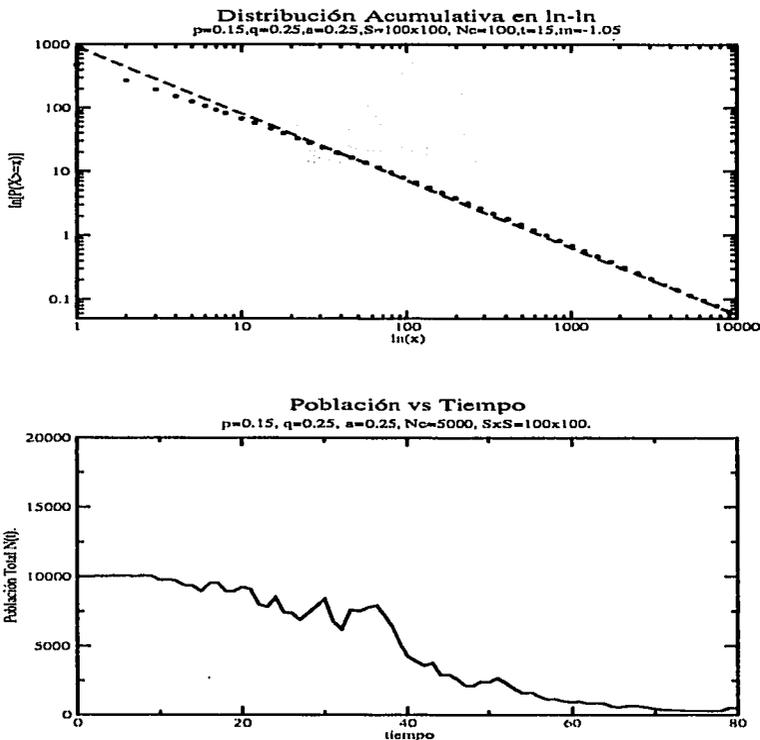


Figura 4.7: Superior: distribución acumulativa en escala logarítmica para $(p, q, \alpha) = (0.15, 0.25, 0.25)$ tomada al tiempo $t = 20$ sobre 100 realizaciones, pendiente de la recta $m = -1.05$. Inferior: evolución de la población para 5000 realizaciones, para los mismos parámetros $(p, q, \alpha) = (0.15, 0.25, 0.25)$.

En la figura (4.7) se presentan los resultados del emplear parámetros $(p, q, \alpha) = (0.15, 0.25, 0.25)$. La gráfica en escala logarítmica de la distribución acumulativa se muestra junto con una ley de potencia de exponente igual a $m = -1.05$, el ajuste se hizo descartando los puntos de orden más bajo.

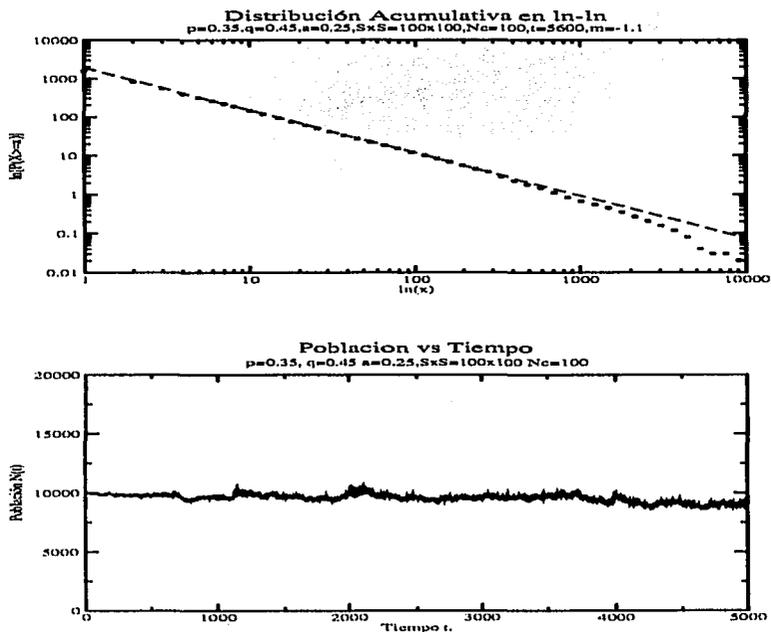


Figura 4.8: Superior: distribución acumulativa en escala logarítmica para $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.45, 0.25)$ tomada al tiempo $t = 5600$ sobre 100 realizaciones, pendiente de la recta -1.1 . Inferior: evolución de la población para 500 realizaciones, para los mismos parámetros $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.45, 0.25)$.

En la figura (4.8) se presentan valores de los parámetros para los cuales el tiempo donde la población es constante es mucho más largo que en los caso anterior (figura (4.7)). En la gráfica de la distribución, ésta se muestra empalmada con una ley de potencia con exponente igual a la pendiente de la recta $m = -1.1$, los parámetros para este caso son $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.45, 0.25)$.

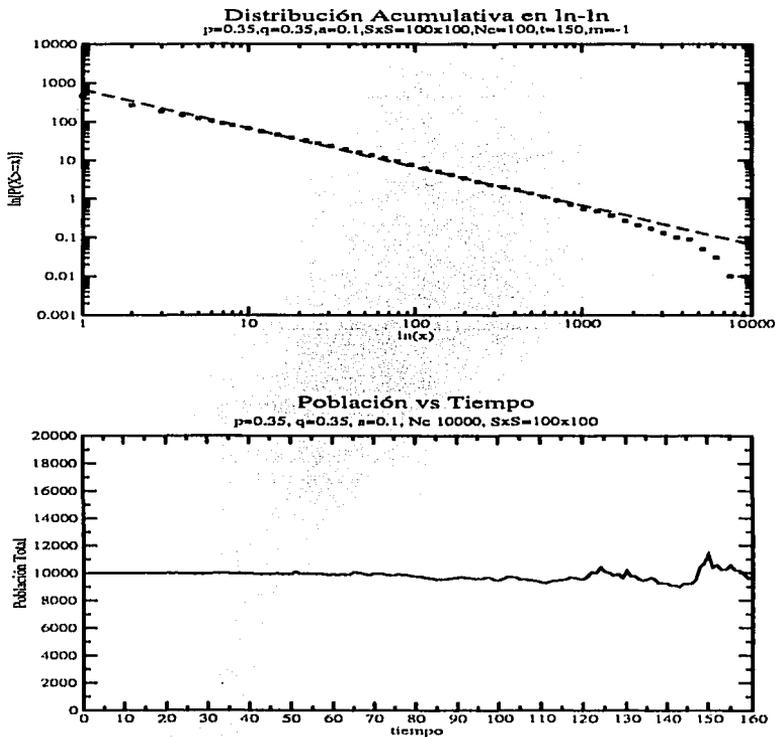


Figura 4.9: Superior: distribución acumulativa en escala logarítmica para $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.35, 0.1)$ tomada al tiempo $t = 150$ sobre 100 realizaciones, pendiente de la recta $m = -1$. Inferior: evolución de la población para 1000 realizaciones, para los mismos parámetros $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.35, 0.1)$.

En la figura (4.9) se presentan resultados para parámetros intermedios a los dos casos anteriores, la población constante se mantiene en tiempos del orden 10^2 , más allá el tipo de decaimiento es similar al que se tiene en la figura (4.7). La distribución acumulativa está empalmada con una ley de potencia con exponente igual a $m = -1$, los parámetros para este caso son $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.35, 0.1)$.

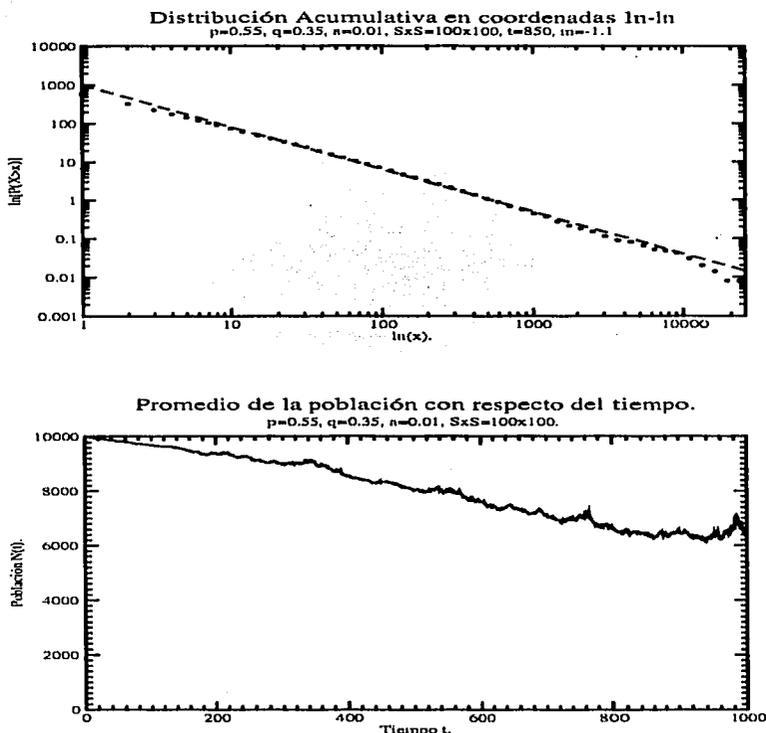


Figura 4.10: Superior: distribución acumulativa en escala logarítmica para $(p, q, \alpha) = (0.55, 0.35, 0.01)$ tomada al tiempo $t = 850$ sobre 100 realizaciones, pendiente de la recta $m = -1$. Inferior: evolución de la población para 100 realizaciones, para los mismos parámetros $(p, q, \alpha) = (0.55, 0.35, 0.01)$.

En la figura (4.10) se tiene una situación particular, que se obtiene de incrementar p con respecto al caso anterior, esto es, $(p, q, \alpha) = (0.55, 0.35, 0.01)$: la población decae de manera menos dramática que en los casos anteriores, aunque de forma sostenida, prácticamente nunca se mantiene constante. La distribución acumulativa se muestra junto con una ley de potencia de exponente igual a $m = -1.1$, los parámetros para este caso son $(p, q, \alpha) = (0.55, 0.35, 0.01)$.

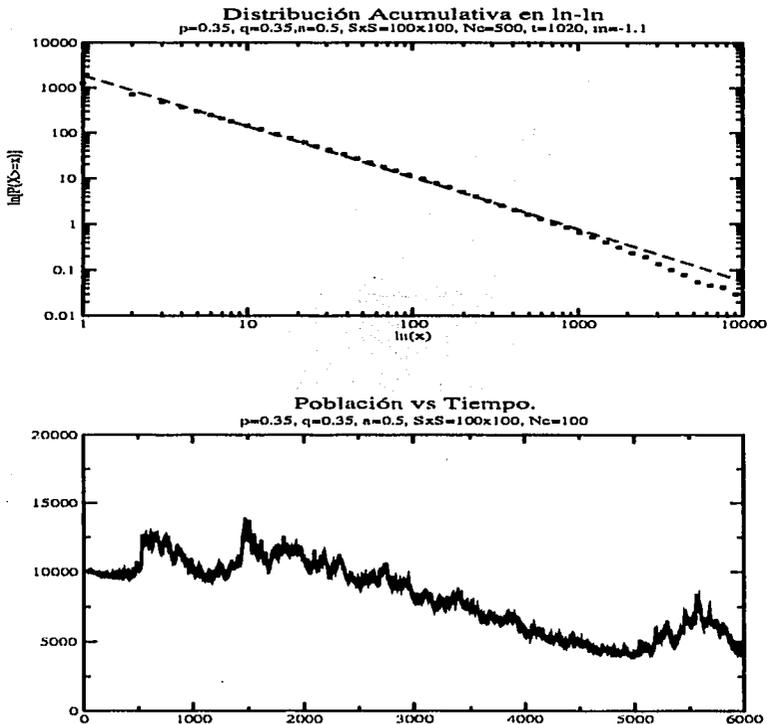


Figura 4.11: Superior: distribución acumulativa en escala logarítmica para $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.35, 0.5)$ tomada al tiempo $t = 1020$ sobre 500 realizaciones, pendiente de la recta $m = -1.1$. Inferior: evolución de la población para 100 realizaciones, para los mismos parámetros $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.35, 0.5)$.

En la figura (4.11) se muestra el caso para $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.35, 0.5)$. Se observa que el tiempo de decaimiento es más largo que en los casos anteriores salvo el de la figura (4.8), este caso tiene los mismos parámetros multiplicativos que los de las figuras (4.9) y (?). La distribución esta empalmada con una ley de potencia con exponente igual a $m = -1.1$.

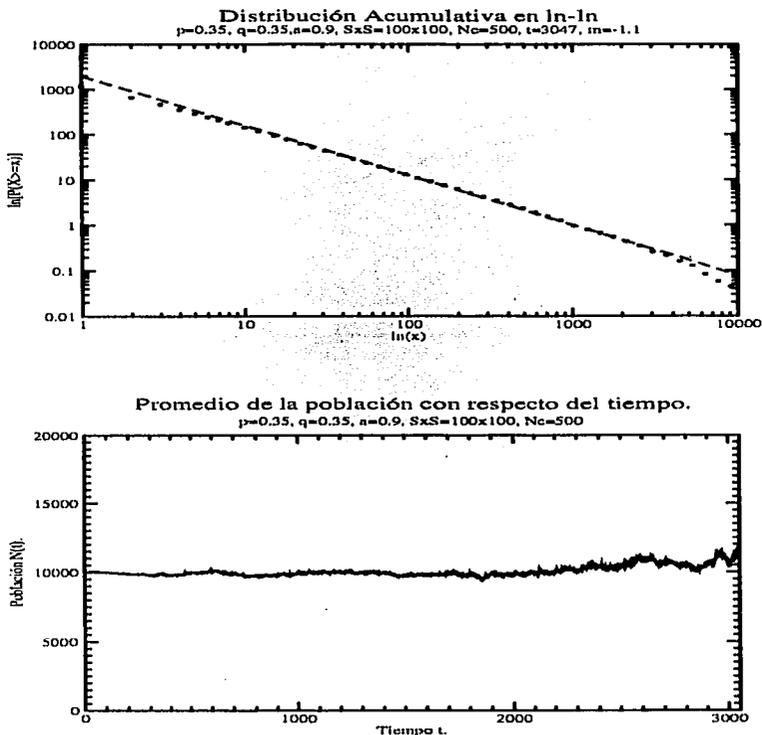


Figura 4.12: Superior: distribución acumulativa en escala logarítmica para $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.35, 0.9)$ tomada al tiempo $t = 3047$ sobre 500 realizaciones, pendiente de la recta $m = -1.1$. Inferior: evolución de la población para 500 realizaciones, para los mismos parámetros $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.35, 0.9)$.

En la figura (4.12) se observa lo que hubiera sido el caso ideal, que el tiempo de decaimiento es largo y la distribución sigue una ley de potencia con exponente igual a $m = -1.1$, este comportamiento se obtiene de tener el caso anterior pero con difusión del 90 %, pues los parámetros para este caso son $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.35, 0.9)$.

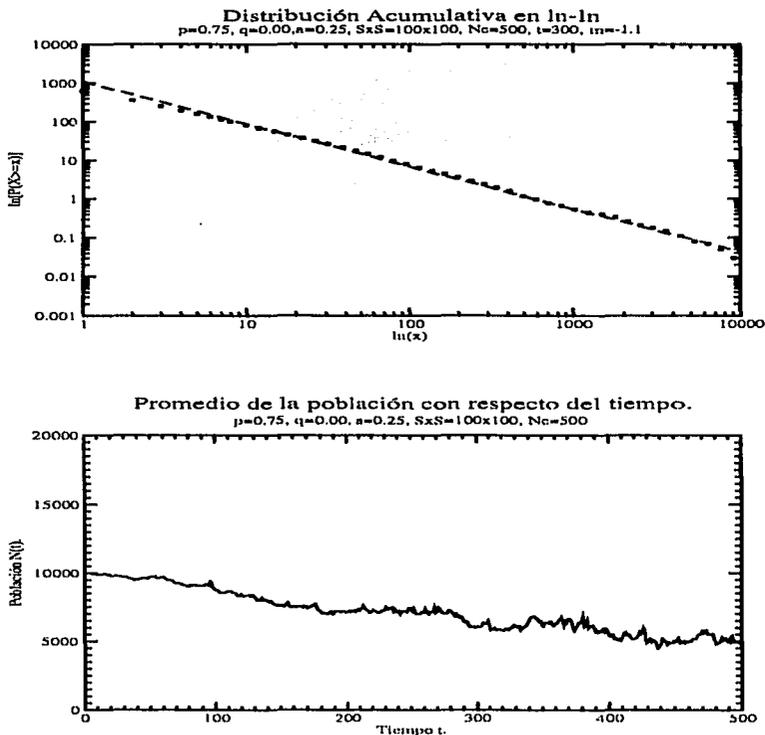


Figura 4.13: Superior: distribución acumulativa en escala logarítmica para $(p, q, \alpha) = (0.75, 0.00, 0.25)$ tomada al tiempo $t = 300$ sobre 500 realizaciones, pendiente de la recta $m = -1.1$. Inferior: evolución de la población para 500 realizaciones, para los mismos parámetros $(p, q, \alpha) = (0.75, 0.00, 0.25)$.

En la figura (4.8) se observa que el tiempo de decaimiento nuevamente relativamente corto. En la gráfica inferior se muestran en escala logarítmica una distribución con exponente $m = -1.1$, los parámetros para este caso son $(p, q, \alpha) = (0.75, 0.00, 0.25)$.

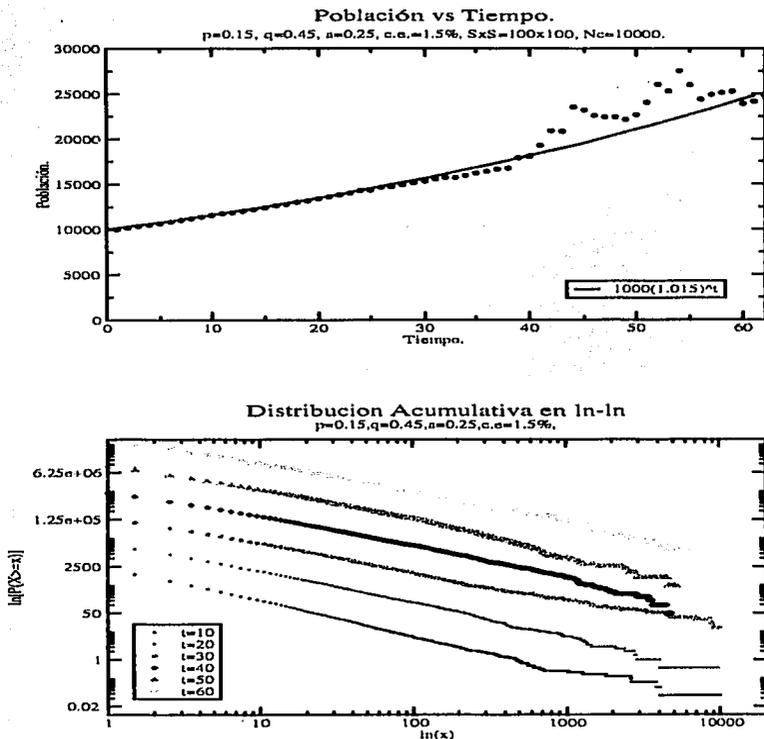


Figura 4.14: Resultados de simular el proceso M-Z con crecimiento exponencial de 1.5%, con parámetros $(p, q, a) = (0.15, 0.45, 0.25)$. Superior: evolución de la población mostrando que efectivamente se sigue este crecimiento al menos antes de que la dinámica sea gobernada por fluctuaciones. Inferior: se muestran distribuciones acumulativas para diversos tiempos, desplazadas verticalmente.

4.1.2.2. Crecimientos Exponenciales.

En los sistemas de ciudades reales, las poblaciones crecen exponencialmente del orden entre 1% y 2% anual. Por eso, después de estudiar numéricamente el modelo M-Z, se investigó si era capaz de producir leyes de Zipf implementando crecimientos exponenciales. Los resultados típicos se muestran en esta sección para redes de tamaño 100×100 y condiciones iniciales $n_i(0) = 1 \forall i$.

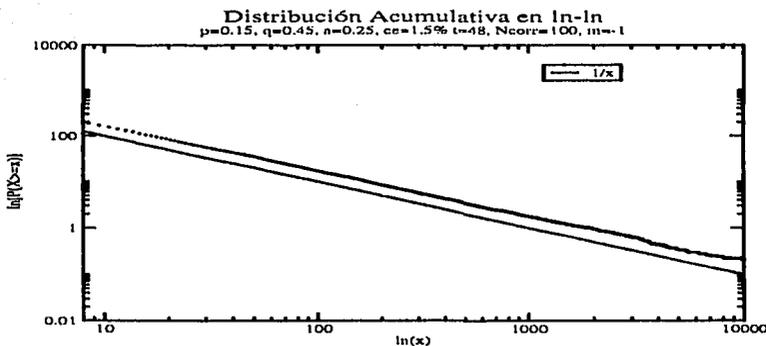


Figura 4.15: Distribución correspondiente a l tiempo $t = 48$ para los parámetros $(p, q, \alpha) = (0.15, 0.45, 0.25)$ con un crecimiento exponencial de 1.5 %, la pendiente es $m = 1$.

A diferencia del caso de promedio constante, el resultado principal es que en general el modelo no reproduce leyes de potencia, de nueva cuenta conforme transcurre el tiempo la población total, que en este casi crece siente los efectos de la dispersión por el tamaño finito del sistema, afectando severamente la dinámica: no se alcanza nunca el estado estacionario deseado y las distribuciones se hacen cada vez más anchas. Para tiempos cortos si se tiene un régimen donde ocurren leyes de potencia, aunque en general con exponentes distintos para cada conjunto de parámetros. Los resultados típicos se presentan en las figuras (4.14)-(4.20).

En la figura (4.14) se muestra la evolución de la población y distribuciones acumulativas para varios tiempos, que se obtuvieron de simulaciones con crecimiento exponencial de 1.5 %, parámetros $(p, q, \alpha) = (0.15, 0.45, 0.25)$ y antes de que la dinámica sea afectada por efectos de finitud. Las distribuciones están desplazadas verticalmente con fines de claridad.

De la figura (4.14) se puede intuir que las distribuciones acumulativas en el intervalo de tiempo mostrado en la evolución temporal son leyes de potencia. Para obtener el exponente de las distribuciones en este rango, se tomó una distribución a un tiempo dentro de dicho intervalo. esto se muestra en la figura (4.15). La distribución que se muestra corresponde a un tiempo $t = 48$ y está acompañada de una ley de potencia de exponente igual a $m = 1$.

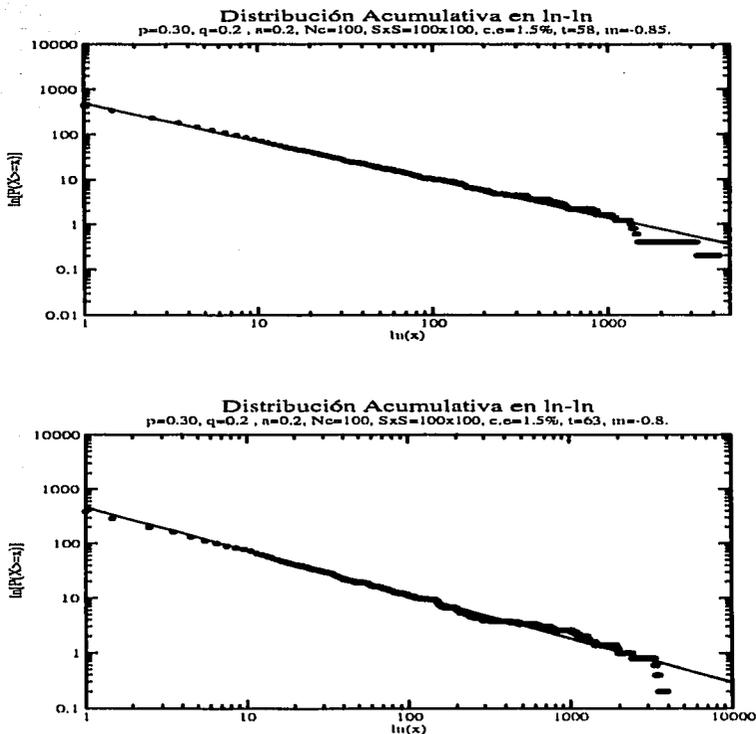


Figura 4.16: Distribuciones acumulativas en escala logarítmica para $(p, q, \alpha) = (0.3, 0.2, 0.2)$ con crecimiento exponencial de 1.5 % para tiempos 58 y 63, la pendiente de estas leyes de potencia es $m \approx 0.85$.

En las figura (4.16), se muestran distribuciones del proceso para parámetros $(p, q, \alpha) = (0.3, 0.2, 0.2)$ de dos tiempos, con crecimiento exponencial de 1.5 %, el exponente de las leyes de potencia que acompañan a las distribuciones es igual a $m = -0.85$, se perdió la unicidad del exponente, aunque el exponente puede ajustarse a las distribuciones de algunos países, no está claro que es lo que determina la variación del exponente.

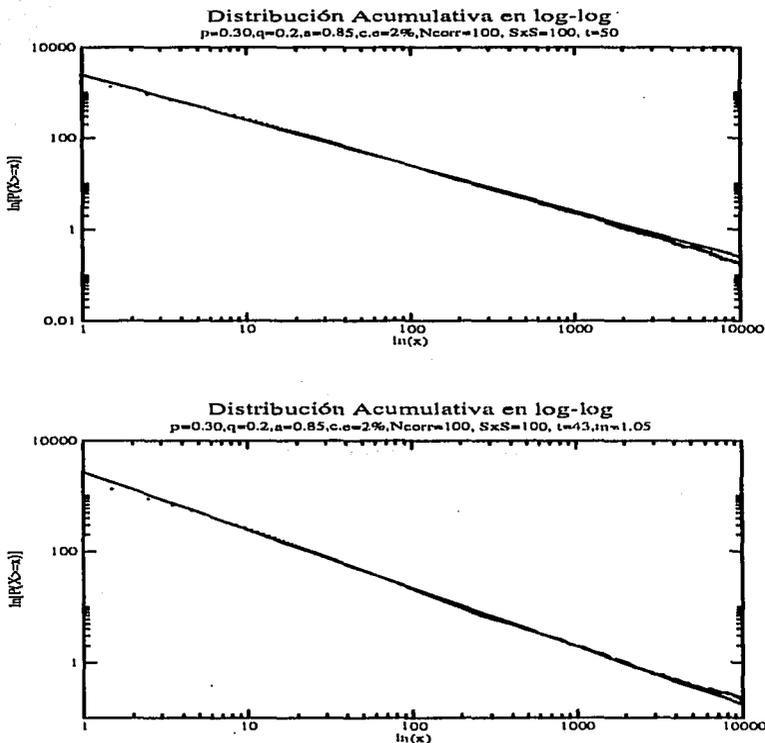


Figura 4.17: *Leyes de Zipf para $(p, q, \alpha) = (0.3, 0.2, 0.85)$ y crecimientos exponenciales de 2% en la superior la pendiente de la recta es -1 al tiempo es $t = 50$ en la inferior el tiempo es $t = 46$ con pendiente -1.05 .*

En la figura (4.17) se muestran dos distribuciones del proceso con parámetros $(p, q, \alpha) = (0.3, 0.2, 0.85)$, crecimiento exponencial de 2% junto con leyes de potencia con exponente $m = -1$.

Además de este caso, los dos anteriores (figuras (4.15) y (4.16)) tienen en común que el decaimiento de la población es muy rápido, del orden de $t = 100$, y se tienen leyes de potencia, aunque con exponentes en general dependientes de los parámetros. El comportamiento típico que se encontró con parámetros que mantienen válido el crecimiento exponencial por más tiempo se muestra en las figuras (4.18) y (4.19).

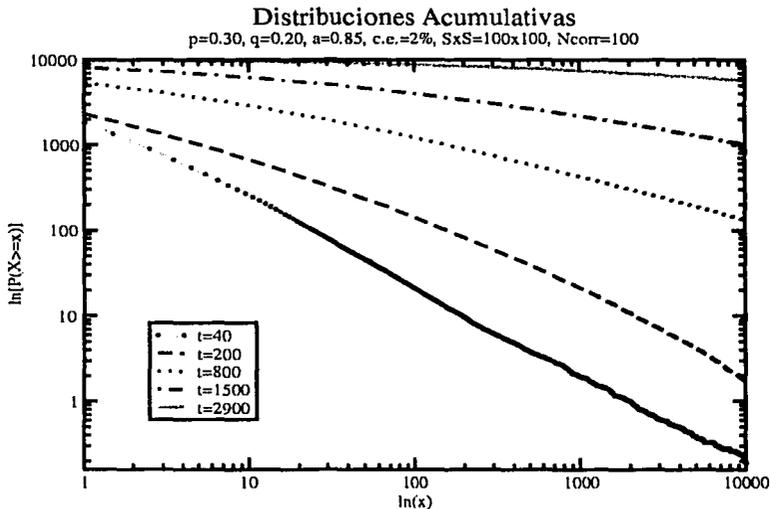


Figura 4.18: *Distribuciones Acumulativas al transcurrir el tiempo. Superior: Para los $(p, q, \alpha) = (0.30, 0.20, 0.85)$ y crecimiento exponencial del 2%. Aparentemente para tiempos cortos si hay un régimen en donde se forman leyes de potencia, sin embargo no se alcanza a formar un estado estacionario y a partir de cierto instante las distribuciones se ensanchan continuamente con el transcurrir el tiempo.*

En la figura (4.18) se muestran en escala logarítmica, distribuciones acumulativas al transcurrir el tiempo para el conjunto de parámetros $(p, q, \alpha) = (0.35, 0.20, 0.85)$. Lo que se obtuvo fue que al transcurrir el tiempo, las distribuciones se hacen cada vez más anchas, aunque al principio, para varios tiempos parece que hay leyes de potencia, las distribuciones nunca alcanzan un estado estacionario (figura (4.19)). El modelo en general no es robusto para crecimientos exponenciales.

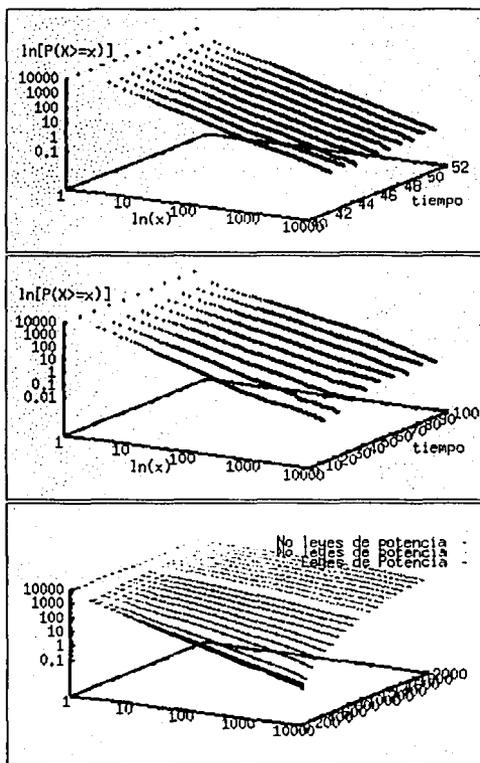


Figura 4.19: Efecto del crecimiento exponencial en las distribuciones, en la secuencia se tienen distribuciones en coordenadas $(\ln(P(X \geq x)), \ln(x), t)$, en cada caso la ventana de tiempos es distinta, en la primera $40 < t < 50$, en la segunda $0 < t < 100$ y en la tercera $0 < t < 2000$. solamente a tiempos cortos se forman leyes de Zipf.

En la figura (4.19) se muestran las distribuciones acumulativas en coordenadas logarítmicas y en un tercer eje el tiempo, en cada caso el intervalo de tiempo se va ampliando, dando una idea clara de lo que ocurre, cuando el proceso tiene crecimiento exponencial, sin pérdida de población importante por tiempos largos: la estadística evoluciona conforme transcurre el tiempo, reflejando que la población se incrementa en el sistema a cada tiempo, de modo que las distribuciones se ensanchan más y más.

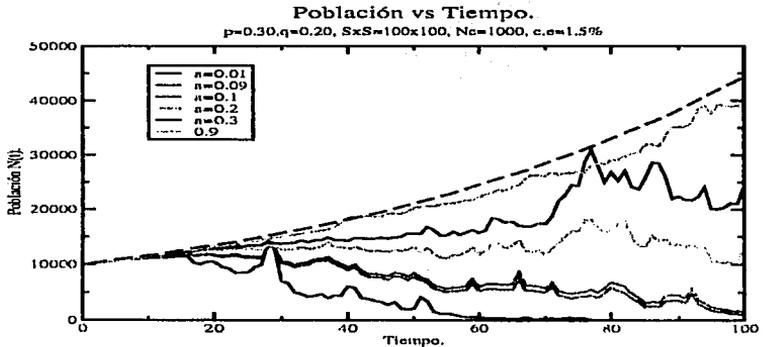


Figura 4.20: Efecto de variar el parámetro de difusión, para crecimiento exponencial de 1.5%, los parámetros son $(p, q, \alpha) = (0.3, 0.2, \alpha)$. Se atienda el decaimiento exponencial debido al tamaño finito y se tiene un comportamiento análogo al caso de promedio constante, es decir, los parámetros en donde el decaimiento es rápido en el caso de promedio constante, también es rápido para el crecimiento exponencial.

Finalmente, en la figura (4.20) se presenta la gráfica análoga a la de la figura (4.6) del caso de promedio constante. Nótese que el variar el parámetro de difusión tiene en ambos casos el mismo efecto, homogeneiza el sistema, que tiene como consecuencia una atenuación de los efectos por finitud de la red.

Capítulo 5

Discusión y Conclusiones.

Ahora se discuten los resultados presentados en el capítulo anterior.

En el caso de proceso multiplicativo con promedio constante se tiene que:

- El modelo reproduce estadísticas del tipo $p(X \geq x)dx = Ax^{-b}dx$ con exponente independiente de los parámetros moduladores y que toma el valor $b \simeq 1$. Esto ocurre después de un cierto transitorio de formación de las inhomogeneidades del sistema y antes del decaimiento de la población. Los tiempos para decaimiento de la población dependen fuertemente de los parámetros, los casos más cerca del ideal se obtienen para $0.5 < p + q < 1$ y $0.5 < \alpha < 1$.

Con el fin de tratar de entender las causas de esta dependencia de los parámetros multiplicativos considérese la situación que se muestra en la figura (5.1), ahí se hace notar que es simple tomar la población total al tiempo t y ver qué ocurre si dejamos que uno de los sitios reaccione. Sea pues $N(t) = \sum_{j=1}^{S^2} n_j(t)$ la población a cierto tiempo $t > 0$ ($N(0) = S \times S$). Si el sitio que evoluciona es n_k , se tiene que: la redistribución por difusión no afecta en nada a $N(t)$, pues se toma un tanto de n_k que se reparte equitativamente entre sus vecinos. Entonces, si se sustituye $n_k(t)$ por $n_k(t') = \lambda_t n_k(t)$ se obtiene $N(t') = N(t) - n_k + n_k(t')$, que es igual a

$$N(t') = N(t) + (\lambda_t - 1)n_k(t)$$

Esta ecuación es una caminata aleatoria, la cual puede dar pasos que dependen linealmente de los n_k , por lo tanto, no es posible decir mucho más, sin conocer la distribución de las n_k . Dentro de lo que si se puede decir, está el hecho de que los pasos $(\lambda_{1,2} - 1) n_k$ satisfacen que $(\lambda_1 - 1) n_k < 0 < (\lambda_2 - 1) n_k$, por lo que se puede siempre avanzar o retroceder, de hecho es fácil ver que los pasos de la caminata tienen promedio nulo, pues el sumando $(\lambda_t - 1)n_k(t)$ tiene promedio igual al producto de los promedios $\langle \lambda_t - 1 \rangle$ y $\langle n_k(t) \rangle$, el primero es simplemente $\langle \lambda_t - 1 \rangle = \langle \lambda_t \rangle - 1 = 0$, lo que prueba la nulidad del promedio. De cualquier modo, la dinámica está gobernada por las fluctuaciones debidas al proceso multiplicativo y debido a éstas, es posible tener picos y eventos de

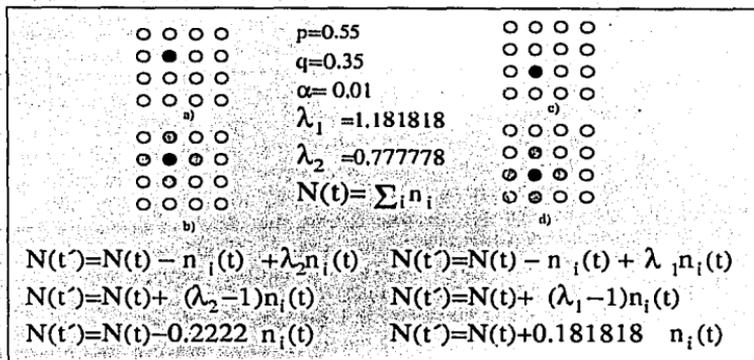


Figura 5.1: Siguiendo puntualmente el proceso en una red es posible entender de manera más o menos clara el decaimiento en la población, aquí se toman los parámetros $(p, q, \alpha) = (0.55, 0.35, 0.01)$.

aniquiliación en la evolución de la población, éstas últimas con la peculiaridad de que, como se mencionó antes, son eventos parecidos a los procesos de ruina, donde una vez agotado el capital es muy difícil la recuperación hasta el estado inicial.

En lo que respecta al proceso con crecimiento exponencial se tiene que:

- El modelo no es general adecuado para producir leyes de Zipf. Esto solamente para los parámetros que extinguen la población a tiempos cortos, aunque se pierde la unicidad del exponente (figura 4.16). En los casos en los que la población decae más lentamente, no se presentan estados estacionarios y por lo tanto, tampoco leyes de Zipf, en estos casos se presentan evoluciones de la distribución, que consisten en ensanchamientos indefinidos con el transcurrir del tiempo.

5.1. Conclusión y Comentarios Finales.

¿Qué es posible decir de este modelo?, lo primero es que, efectivamente es adecuado para producir leyes de potencia en el caso $\bar{\lambda} = 1$ además de que es robusto ante cambio de parámetros. Sin embargo presenta serias dificultades si se permiten crecimientos exponenciales, que tristemente es una suposición más realista del sistema de ciudades.

En ambos casos, la pérdida de población se constituye como uno de los más severos problemas a resolver pues apeguándose a lo observado el modelo predice cataclismos que no se han presentado en el sistema real, los tiempos en lo que se vacía el sistema eventos dependen de los valores de los parámetros. Una solución

artificiosa a la pérdida de población es la adición artificial de masa [12, 35]: en caso de haber perdido población en cada paso de tiempo, se añade el faltante y se reparte en el sistema. Esto no se hizo en la tesis, pues es un poco deshonesto y no tiene una justificación apropiada, además de que no es posible distinguir si se trata de pérdida efectiva o solamente de fluctuaciones alrededor del promedio, en tal caso ¿Porque si se compensa cuando es menor que cierta cota mínima, no se le quita cuando se excede alguna cota superior?, este tipo de subsidio es común en modelos de distribuciones de capital, pero no parece tener una justificación adecuada para el sistema de ciudades. Una sugerencia es que consideraciones de esta clase podrían resultar más naturales si se relajan las constricciones para el número total de elementos de la red permitiéndose la formación de nuevos sitios conjuntamente con la posible desaparición de sitios con poblaciones menores que alguna cota, es decir condiciones tipo Solomon-Blank, aunque también es poco realista, pues en la historia, al menos a partir de cierto momento, es difícil que las ciudades desaparezcan y se formen nuevas, ejemplos a la mano son pocos. En cuanto al proceso difusivo, tal vez valdría la pena relajar la condición a primeros vecinos por una de más largo alcance, pues en general las migración de individuos de una ciudad a otra es de este tipo (México y Centro América hacia E.U.A. por ejemplo).

Como conclusión principal se tiene: postular el mecanismo de difusión como proceso complementario a la ley de Malthus estocástica, puede resultar adecuado para la construcción de un eventual marco teórico sólido, sobre el origen de leyes de potencia universales, funciona bien en el caso de promedio constante y proceso multiplicativo binario, en el caso general depende de las propiedades estadísticas del proceso multiplicativo, esta dependencia no está bien entendida y es posible objeto de investigación.

Apéndice A

Simulación Estocástica.

Tratar en un apéndice temas relacionados al método Monte Carlo es una apuesta arriesgada, pues el tema es extenso, por eso sólo se cubren temas relacionados a lo que se hizo en la tesis, En todo caso, siempre es posible citar fuentes actuales que hagan una cobertura más completa. Vale la pena distinguir que la materia puede partirse en cuestiones relacionadas a los fundamentos del método, en donde las referencias que recomiendo son [20, 21], mientras que un abordaje moderno y sencillo para las aplicaciones se puede encontrar en [22].

Primero, ¿Qué es el método Monte Carlo?, la respuesta más concreta es que el método Monte Carlo es el empleo de procesos estocásticos para resolver un problema. En la práctica la aplicación del método involucra los siguientes pasos:

- Formulación analítica del problema.
- Diseño del proceso aleatorio adecuado.
- Simulación del proceso para generar una muestra de la cual se obtendrá una estimación.

El ejemplo más sencillo consiste en la evaluación de integrales tipo $I = \int_a^b f(x)p(x)dx$ donde $p(x) > 0$ y $\int_a^b p(x)dx = 1$. Es inmediato notar que esta situación corresponde a la evaluación de valores esperados de variables aleatorias con cierta probabilidad. Efectivamente, si X es una variable aleatoria definida en un espacio (de probabilidad), entonces $P(a \leq X \leq b) = 1$ y $P(x \leq X \leq x+h) = \int_x^{x+h} p(u)du$, por tanto, si Y es otra variable en el mismo espacio, dada por $f(X(\omega))$ con f bien comportada. Entonces

$$E(Y) = I$$

así pues, basta muestrear Y , en una forma $\{Y_i\}_{i=1}^n$, consistente en variables aleatorias independientes, cada una con la misma distribución de Y , para luego formar la estadística $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i$ y apelar a la ley de los grandes números para afirmar que

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y}_n = I\right) = 1$$

De modo que, de las muestras de la variable Y se estima I . ¿Cómo generar esa muestra?. Una manera podría ser muestrear X para obtener X_1, \dots, X_n independientes con densidad p de donde resulta que $Y_i = f(X_i), i = 1, \dots, n$. Por ejemplo puede ser que

$$p(x) = \frac{1}{b-a},$$

caso en que X está uniformemente distribuida en $[a, b]$ y $p(x < X < x+h) = h$, es más o menos claro que si X está uniformemente distribuida en $[a, b]$ entonces $U = \frac{X-a}{b-a}$ es uniforme en $[0, 1]$. Así pues $X = a + (b-a)U$ y basta aprender a generar U para tener X . Surge la idea de elegir una transformación adecuada Q para lograr que $Q(U)$ tenga la distribución $p(x)$. Esto es posible aunque no es necesariamente lo más eficiente. Problemas análogos al cálculo de integrales lo representan cálculos tipo

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1},$$

que en principio puede usarse para calcular π . Esta serie es desafortunadamente lenta en converger. Alternativamente se puede emplear el hecho de que $2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, que con algo de manipulación ayuda a expresar π como

$$\pi = 4S$$

con $S = \sum a_n p_n$, $a_n = \frac{(-2)^n}{n+1/2}$ y $p_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, $n = 0, 1, 2, \dots$ y entonces $S = E(Y)$. Igual que en el caso anterior basta muestrear Y para obtener $\{Y_n\}_{i=1}^n$ y luego formar el promedio \bar{Y}_n , que de acuerdo a la ley de los grandes números para n grande, es una buena estimación de S . Todo el problema es pues generar las muestras de las Y . Es posible generar estas muestras a partir de distribuciones uniformes en $[0, 1]$, la dificultad para hacer eso puede variar. Por ejemplo si

$$a_i = i, \quad p_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n.$$

basta tomar

$$Y = [nU] + 1$$

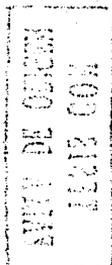
donde $[Z]$ representa la parte entera de Z . Así si U está distribuida uniformemente en $[0, 1]$

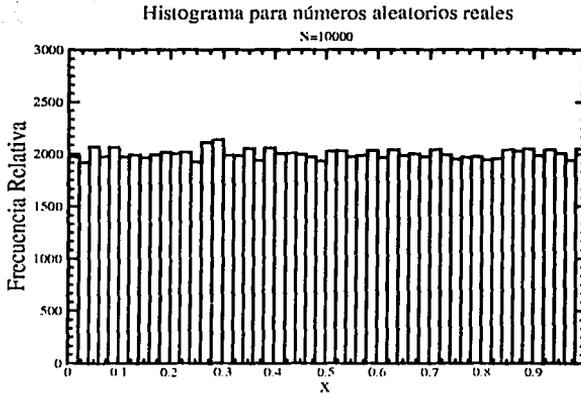
$$P(Y = i) = P([nU] = i - 1) = P\left(\frac{i-1}{n} \leq U \leq \frac{i}{n}\right) = \frac{1}{n}$$

Este ejemplo es interesante pues para $n = 2$ es una moneda honesta, $n = 6$ es un dado honesto además el caso $n = 4$ es útil en modelar las interacciones a primeros vecinos como en los modelos Z-M y caminatas aleatorias en el plano.

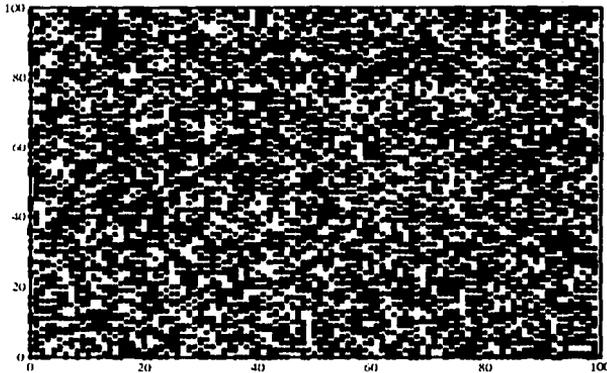
De manera inmediata se reconoce que una de las partes fundamentales del método es la obtención de números aleatorios por medio de algún dispositivo, en este caso por medio de una implementación en algún programa, la referencia

por excelencia para este de este tipo de problemas la encontramos en [23]. La mejor manera de verificar si una muestra de números sigue la estadística que se presupone es haciendo un histograma de la salida, en cada caso. En el caso de la tesis, el programa supone una salida binaria para los factores multiplicativos cada uno con probabilidades p y $1 - p$, además de que a cada S^2 operaciones se debe haber seleccionado, en promedio, cada uno de los sitios de la malla. En el primer caso el algoritmo que se emplea para tener esas distribuciones es generar una muestra uniforme en el intervalo unitario y en caso de que la salida sea menor que p multiplica por λ_1 o bien por λ_2 en el caso complementario, debido a esto, resulta indispensable tener una muestra que cubra el intervalo unitario, en el segundo caso se requiere una muestra que a cada paso cubra las coordenadas enteras de la malla $S \times S$. En las figuras se muestra un histograma para los factores reales entre cero y uno, así como las coordenadas seleccionadas en la malla para una ejecución típica, tomada de un tiempo típico S^3 .





Puntos seleccionados en un tiempo Monte Carlo
t=1000. Ejecución No=1000



TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Figura A.1: Superior: histograma de la distribución de números reales en el intervalo unitario generados en la computadora, están aproximadamente uniformemente distribuidos. La inferior corresponde al experimento de lanzar 10000 disparos en un lapiz de 10000 sitios, con el fin de verificar que típicamente se cubre la región por los puntos en los que se hace blanco y verificar que las coordenadas están distribuidas uniformemente.

Apéndice B

Códigos Fuente.

En este apéndice se presentan los códigos fuente empleados para simular el modelo, los códigos corresponden a uno dedicado a calcular momentos y algunas otras cantidades estadísticas, el segundo contiene las rutinas del primero pero además calcula distribuciones.

Codigo mom.c

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#define S 100
#define Pr 0.5
#define p 0.35
#define q 0.35
#define a 0.1
#define Tc 200
#define Ncorr 10000
#define OM 1

double M[S][S], Pmom[Tc][OM+1], TP1[Tc];
int Nil[4];
int t,k,y;
FILE *fout1,*fout2;

void vecinos (int nh1,int nh2);
int ranint (void);
void proceso (void);
double prob (void);
void reaccion (void);
void difusion (void);
void inicio (void);
double momentos (int mks);
void pmomentos (int pmoms);
void listas (void);
void imprime (int ik);

/*****/
void imprime (int ik)
{
    int imp1,imp2;
```

```

fout1=fopen("meko.dat","w");
for (imp1=0;imp1<Tc;imp1++)
{
    fprintf(fout1,"%f\t",Pmom[imp1][0]);
    for(imp2=1;imp2<OM+1;imp2++)
    {
        fprintf(fout1,"%f\t",((Pmom[imp1][imp2])/double)(1+ik));
    }
    fprintf(fout1,"\n");
}
fclose(fout1);
}
/*****/
void listas (void)
{
    int lst1,lst2;

    for(lst1=0;lst1<Tc;lst1++)
    {
        Pmom[lst1][0]=lst1+1;
    }

    for(lst2=0;lst2<Tc;lst2++)
    {
        TP1[lst2]=lst2;
    }
}
/*****/
void pmomentos (int pmoms)
{
    int pms1;

    for(pms1=0;pms1<OM;pms1++)
    {
        Pmom[pmons][pms1+1]=Pmom[pmons][pms1+1]+momentos(pms1+1);
    }
}
/*****/
double momentos (int mks)
{
    double sum;
    int mom1,mom2;

    sum=0.0;

    for(mom1=0;mom1<S;mom1++)
    {
        for(mom2=0;mom2<S;mom2++)
        {
            sum = sum + pow(M[mom1][mom2],mks);
        }
    }
    return sum;
}
/*****/
void inicio (void)
{
    int ini1,ini2;

    for(ini1=0;ini1<S;ini1++)
    {
        for(ini2=0;ini2<S;ini2++)

```

```

    {
        M[ini1][ini2]=1.0;
    }
}
/*****/
void vecinos (int nh1,int nh2)
{
    NH[0]=(nh1+1) %S;
    if(nh1==0)
        NH[1]=S-1;
    else
        NH[1]=nh1-1;
    NH[2]=(nh2+1) %S;
    if(nh2==0)
        NH[3]=S-1;
    else
        NH[3]=nh2-1;
}
/*****/
int ranint (void)
{
    int i;
    i=rand() %S;
    return i;
}
/*****/
double prob (void)
{
    double prb;
    prb = rand()/((double)RAND_MAX);
    return prb;
}
/*****/
void proceso (void)
{
    double pr1;
    pr1=prob();

    if(pr1<=Pr)
    {
        reaccion();
    }

    else
    {

```

```

    difusion();
}

}

/*****/
void reaccion (void)
{
    double rcc1;
    int rcc4,rcc5;

    rcc4=ranint();
    rcc5=ranint();

    rcc1=prob();

    if(rcc1<=p)
    {
        M[rcc4][rcc5]=((1-q)/p)*M[rcc4][rcc5];
    }
    else
    {
        M[rcc4][rcc5]=(q/(1-p))*M[rcc4][rcc5];
    }
}

/*****/
void difusion (void)
{
    int dff1,dff2,dffaux;

    dff1=ranint();
    dff2=ranint();

    vecinos(dff1,dff2);

    M[NH[0]][dff2]=M[NH[0]][dff2]+(a/4)*M[dff1][dff2];
    M[NH[1]][dff2]=M[NH[1]][dff2]+(a/4)*M[dff1][dff2];
    M[dff1][NH[2]]=M[dff1][NH[2]]+(a/4)*M[dff1][dff2];
    M[dff1][NH[3]]=M[dff1][NH[3]]+(a/4)*M[dff1][dff2];
    M[dff1][dff2]=(1-a)*M[dff1][dff2];
}

/*****/
int main (void)
{
    listas();

    for(k=0;k<Ncorr;k++)

    {
        inicio();
        pmomentos(0);

        for(t=1;t<Tc;t++)
        {
            y=0;
            while(y<2*S*S)
            {
                proceso();
                y=y+1;
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    pmomentos(t);
}
fout2=fopen("Cr.dat","a");
fprintf(fout2,"%d\n",k);
fclose(fout2);
imprime(k);
}
}

```

Codigo dst.c

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include <string.h>
#define S 500
#define Pr 0.5
#define p 0.35
#define q 0.35
#define a 0.9
#define Tc 8820 /*Recordar que SIEMPRE Tc>=Tp*/
#define Ncorr 100
#define OM 4
#define VC 70
#define Tp 24

```

```

double pdist2[Tp][VC],
pdattamp[VC],LVC[VC],
Tp2[Tp],pdatt[Tp][VC],
D[VC],M[S][S],
Tp1[Tc],tezp[Tp];

```

```

int NII[4];
int l,k,y,u;
char file[];
char fnom[5]=".dat";

```

```

FILE *fout1,*fout2,*fout3,*fout4,*fout5;

```

```

void vecinos (int nh1,int nh2);
int ranint (void);
void proceso (void);
double prob (void);
void reaccion (void);
void difusion (void);
void inicio (void);
double momentos (int mks);
void listas (void);
void imprime (void);
void distribucion (void);
void promdist (int pdst);

```

```

/*****/
void distribucion (void)

```

```

{
int ds1,ds2,ds3,ds4,ds5;

```

```

for(ds1=0;ds1<VC;ds1++)
{
D[ds1]=0.0;
}

```

```

for(ds2=0;ds2<VC;ds2++)

```

```

/*printf(" %d\n",ds2);
getchar();*/
for(ds3=0;ds3<S;ds3++)
{
for(ds4=0;ds4<S;ds4++)
{
if(LVC[ds2]<M[ds3][ds4])
D[ds2]=D[ds2]+1.0;
/*printf(" %d\t%d\t%f\n",ds3,ds4,D[ds2]);*/
}
}
}

}
/*****/
void promdist (int pdst)
{
int pdst2,pdst3,pdst4,pdst5;
double Z;

distribucion();

for(pdst2=0;pdst2<VC;pdst2++)
{
pdst[pdst]/pdst2=pdist[pdst]/pdst2+D[pdst2];
}

Z=momentos(2);

for(pdst3=0;pdst3<VC;pdst3++)
{
pdst2[pdst]/pdst3=pdist2[pdst]/pdst3+(pdist[pdst]/pdst3)/sqrt(Z);
}

}

/*****/
void imprime (void)
{
int imp1,imp2,z1;

fout1=fopen("dst.dat","w");

for (imp1=0;imp1<Tp;imp1++)
{
for(imp2=0;imp2<VC;imp2++)
{
fprintf(fout1,"%f\t%f\t%f\n",1+ltexp[imp1],1+LVC[imp2],(pdist[imp1]/imp2)/(double)Ncorr);
}
}

fclose(fout1);

fout3=fopen("dstnor.dat","w");

for (imp1=0;imp1<Tp;imp1++)
{
for(imp2=0;imp2<VC;imp2++)
{
fprintf(fout1,"%f\t%f\t%f\n",1+ltexp[imp1],1+LVC[imp2],(pdist2[imp1]/imp2)/(double)Ncorr);
}
}

```

```

    }
    fclose(fout3);

    for (imp1=0; imp1<Tp; imp1++)
    {
        z1=(int)ltxp[imp1];
        sprintf(file, "%d", z1);
        fout5=fopen(strcat(file,fnom),"w");
        for (imp2=0; imp2<VC; imp2++)
        {
            fprintf(fout5, "%f\t%f\n", LVC[imp2], (pdist[imp1]/imp2)/(double)Ncorr);
        }
        fclose(fout5);
    }
}
/*****/
void listas (void)
{
    int lst1, lst2, lst3, lst4, lst5;

    for (lst2=0; lst2<Tc; lst2++)
    {
        TP1[lst2]=lst2;
    }

    LVC[0]=0.0;
    LVC[1]=1.0;

    for (lst4=6; lst4<VC+6; lst4++)
    {
        LVC[lst4-4]=floor(pow(1.2, lst4));
    }

    /* for (lst4=0; lst4<VC; lst4++)
    {
        printf("%f\n", LVC[lst4]);
    }
    getch();
    */

    for (lst5=0; lst5<Tp; lst5++)
    {
        Tp2[lst5]=lst5;
    }

    ltxp[0]=0.0;
    ltxp[1]=1.0;

    for (lst1=6; lst1<Tp+6; lst1++)
    {
        ltxp[lst1-4]=floor(pow(1.4, lst1));
    }

    /*ltxp[0]=0.00;

    for (lst1=1; lst1<Tp; lst1++)
    {
        ltxp[lst1]=ltxp[lst1-1]+1000;
    }

```

```

    }*/
    /*for(ist1=0;ist1<Tp;ist1++)
    {
    printf("%i\n",ltemp[ist1]);
    }
    getch();
    */
    /*****/
    double momentos (int mks)
    {
    double sum;
    int mom1,mom2;

    sum=0.0;

    for(mom1=0;mom1<S;mom1++)
    {
    for(mom2=0;mom2<S;mom2++)
    {
    sum = sum + pow(M[mom1][mom2],mks);
    }
    }
    return (sum/(double)(S*S));
    }
    /*****/
    void inicio (void)
    {
    int ini1,ini2;

    for(ini1=0;ini1<S;ini1++)
    {
    for(ini2=0;ini2<S;ini2++)
    {
    M[ini1][ini2]=1.0;
    }
    }
    }
    /*****/
    void vecinos (int nh1,int nh2)
    {

    NII[0]=(nh1+1) %S;

    if(nh1==0)
    NII[1]=S-1;

    else

    NII[1]=nh1-1;

    NII[2]=(nh2+1) %S;

    if(nh2==0)

    NII[3]=S-1;

    else

    NII[3]=nh2-1;

    }
    /*****/
    int ranint (void)

```

```

{
  int i;

  i=rand() %S;

  return i;
}
/*****/
double prob (void)
{
  double prb;

  prb = rand()/((double)RAND_MAX);

  return prb;
}

/*****/
void proceso (void)
{
  double pr1;

  pr1=prob();

  if(pr1 <= Pr)
  {
    reaccion();
  }

  else
  {
    difusion();
  }
}

/*****/
void reaccion (void)
{
  double rcc1;
  int rcc4,rcc5;

  rcc4=ranint();
  rcc5=ranint();

  rcc1=prob();

  if(rcc1 <= p)
  {
    M[rcc4][rcc5]=((1-q)/p)*M[rcc4][rcc5];
  }

  else
  {
    M[rcc4][rcc5]=(q/(1-p))*M[rcc4][rcc5];
  }
}
/*****/
void difusion (void)
{
  int dff1,dff2,dffaux;

```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

**ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA**

```

dff1=ranint();
dff2=ranint();

vecinos(dff1,dff2);

for(dffaux=0;dffaux<4;dffaux++)
{

M[NH[0]][dff2]=M[NH[0]][dff2]+(a/4)*M[dff1][dff2];
M[NH[1]][dff2]=M[NH[1]][dff2]+(a/4)*M[dff1][dff2];
M[dff1][NH[2]]=M[dff1][NH[2]]+(a/4)*M[dff1][dff2];
M[dff1][NH[3]]=M[dff1][NH[3]]+(a/4)*M[dff1][dff2];
M[dff1][dff2]=(1-a)*M[dff1][dff2];

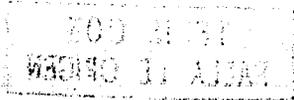
}
/*****/
int main (void)
{

listas();

for(k=0;k<Ncorr;k++)
{
inicio();
promdiat(0);
u=1;
for(t=1;t<Tc;t++)
{
y=0;
while(y<2*S*S)
{
proceso();
y=y+1;
}

if((double)t==ltxp[u])
{
promdiat(u);
u=u+1;
}
}
fout2=fopen("CST.dat","a");
fprintf(fout2,"%d\n",k);
fclose(fout2);
}
imprime();
}

```



Bibliografía

- [1] Murray Gell-Mann, *The Quark and the Jaguar*, Freeman & Co, 1994.
- [2] Dubrulle, B., Graner, F., Sornette, D., editores, CNRS, Nice, France (Eds.), *Scale invariance and Beyond*, Les Houches Workshop, March 10-14, 1997, Series: Les Houches. EDP Sciences and Springer, Berlin, 1997.
- [3] Fuente www.inegi.gob.mx
- [4] L. P. Kadanoff, *From order to chaos, Essays: Critical, Chaotic and Otherwise*, World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A Vol. 1
- [5] S.C. Manrubia y D.H. Zanette, *Phys. Rev. Lett.* 79, 523 (1997).
- [6] Feller, *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*, Limusa 1997 Vol I y Vol II.
- [7] Maisel L, *Probabilidad y Estadística*, Fondo Educativo Interamericano, Colección Fondo 1971.
- [8] Redner S, *Random multiplicative processes: an elementary tutorial*, *Am J. Phys.* 58 267-273, 1990.
- [9] M. Levy y S. Solomon, *Int J. Mod. Phys. C* 7, 745 (1996).
- [10] O. Malacai, O. Biham, S. Solomon, *Phys Rev E*, 60, 1299, (1999).
- [11] Blank A., Solomon S., *Power-laws in cities population, financial markets and internet sites (scaling in systems with variable number of components)*, *Physica A*, 287 (1-2), (2000), p. 279-288.
- [12] M. Marsili, Y.C. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* 80, 2741 (1998).
- [13] F. Leyvraz and S. Redner, *Scaling Theory for Migration-Driven Aggregate Growth*, *Phys. Rev. Lett.* 88, 068301 (2002).
- [14] H. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena*, Oxford University Press, 1972.
- [15] Schroeder, *Fractals, Chaos and power laws, minutes of an infinite paradise* Freeman & Co 1991.

- [16] www.citypopulation.de
- [17] U.S Census Bureau (www.census.gov).
- [18] Britannica Atlas, Encyclopaedia Britannica inc, 1991.
- [19] Population Reference Bureau (www.prb.org).
- [20] Hammersley y Handscomb, Monte Carlo methods, Meuthen, London 1984.
- [21] Alvarez y Hernández Castañón, Método Monte Carlo, Obras Completas Vol. II, SMM, México 1995.
- [22] MacKeown P, Stochastic Simulation in Statistical Physics, Springer 1997.
- [23] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Numerical Recipes in C: the art of numerical recipes in C, Cambridge University Press, segunda edición, 1992.
- [24] H.E. Stanley, Nicole Ostrowsky, editores, On Growth and Form Fractal and Non-Fractal Patterns in Physics, NATO SCIENCE SERIES E, Applied Sciences Volume 100, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht Hardbound, 1985.
- [25] V. Talanaquer, Fractus, Fracta, Fractal, Fractales de laberintos y espejos, Colección la ciencia desde México número 147, Fondo de cultura económica, S.E.P, Conacyt, 1996.
- [26] Peitgen, H. O., H. Jürgens y D. Saupe, Fractals for the Classroom. Parte 1 Springer-Verlag, EUA, 1992.
- [27] B.B. Mandelbrot, The fractal geometry of Nature (W.H. Freeman, New York).
- [28] P.G. de Gennes, Scaling Concepts in Polymer Physics, Cornell University Press.
- [29] P. Bak, How Nature Works: The Science of Self-Organized Criticality, Copernicus Books; 1996.
- [30] Grimmett Geoffrey, Percolation, Second Edition, Springer; 1999.
- [31] Michael E. Fisher, Renormalization group theory: Its basis and formulation in statistical physics, Rev. Mod. Phys. 70, 653-681 (1998).
- [32] Michael Batty, Paul Longley, Fractal Cities, Academic Press, 1996.
- [33] M.V. Smoluchowski, Z. Phys. Chem. 92 215 (1917).
- [34] M. Ernst, en *Fundamental problems in statistical physics VI*, ed. E.G.D. Cohen, Elsevier, New York.

- [35] M Marsili, S Maslov and Y-C Zhang, comentario y replica, *Physical Review Letters*, 80:4831(1998).
- [36] Reed, W. J. On the rank-size distribution for human settlements. *J. Regional Science* (2002) 41:1-17
- [37] K. Kaneko, I. Tsuda, *Complex Systems: Chaos and Beyond, A constructive Approach with Applications in Life Sciences*, Springer-Verlag, 2001.
- [38] Germinal Cocho, por publicar.