00324

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

23

FACULTAD DE CIENCIAS

" EL APRENDIZAJE IMPLÍCITO DEL CONCEPTO DE GRUPO "

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE :

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

RAFAEL MARTINEZ VEGA

DIRECTORES DE TESIS: DR. MAX NEUMANN COTO

CO. DIRECTOR: DR. JUAN FERNANDEZ RUIZ

MEXICO, D.F. 2003

A

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"El aprendizaje implícito del concepto de grupo."

realizado por Rafael Martínez Vega

con número de cuenta 9757401-5 , quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Max Neumann Coto
Co-director Propietario	Dr. Juan Fernández Ruiz
Propietario	M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes
Suplente	Dra. Ana Meda Guardiola
Suplente	Mat. Concepción Ruiz Ruiz Funes

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

3

Agradezco a mis asesores, el Dr. Max Neumann Coto y el Dr. Juan Fernández Ruiz todo el apoyo brindado en la dirección de esta tesis.

Agradezco a la DGAPA (Proyecto IN210300) por la beca otorgada para la realización de la presente tesis de licenciatura.

Agradezco al Laboratorio de Neuropsicología del Departamento de Fisiología de la Facultad de Medicina de la UNAM por las facilidades otorgadas para el diseño y aplicación de las pruebas usadas en este trabajo.

Agradezco al Ingeniero en Sistemas Computacionales Héctor Javier Acosta Corro por la ayuda otorgada en la programación del software utilizado en las pruebas.

Agradezco al Taller de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM y al Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras de la UNAM por haberme permitido el acceso a sus instalaciones para aplicar las pruebas.

Agradezco a toda la gente que ha estado conmigo antes y después.

Contenido

1.**Introducción**.....1

1.1.**Aprendizaje Implícito**.....1

1.2.**Concepto de Grupo**.....5

2.**Diseño del Experimento**.....25

2.1.**Características Generales y Ensayos Preliminares**.....26

2.2.**Prueba Estadística Kolmogorov-Smirnov**.....30

3.**Resultados**.....37

3.1.**Experimento Inicial**.....37

3.2.**Experimento Final**.....44

4.**Conclusiones**.....62

5.**Bibliografía**.....66

El aprendizaje implícito del concepto de grupo.

'En cierto modo la ciencia puede ser definida como el pensamiento paranoide aplicado a la naturaleza. En efecto, andamos a la búsqueda de conspiraciones naturales, de nexos entre hechos aparentemente dispares.'
Carl Sagan 'Los Dragones del Edén'

1 Introducción

La lectura de ensayos y artículos sobre el aprendizaje implícito, al igual que la oportunidad de participar con un grupo de investigación en neuropsicología, motivaron el interés por el presente experimento, cuyo objetivo es averiguar la posibilidad de un aprendizaje de este tipo en lo que respecta al concepto algebraico de grupo. En particular, la lectura del libro '*Implicit Learning and Tacit Knowledge. An Essay on the Cognitive Unconscious*' de Arthur S. Reber, en el cual se muestra la forma de estudio de este aprendizaje, sucitó la curiosidad por diseñar y realizar este experimento.

En el presente texto se definirán los conceptos neuropsicológicos y matemáticos necesarios para entender la motivación y desarrollo del experimento.

Se comenzará presentando un marco teórico sobre el llamado aprendizaje implícito; posteriormente, se explicarán los conceptos matemáticos sobre los que se estudió la posible existencia de dicho aprendizaje; y, finalmente, se describirán los experimentos realizados, el diseño experimental, el análisis y discusión de los resultados obtenidos.

1.1 Aprendizaje Implícito.

Sin duda, la manera en la que el ser humano obtiene conocimiento sobre el medio en el que se encuentra es un tema que captura la atención. En cuanto a aprendizaje se refiere, se tiene la noción de que éste consta de un descubrimiento y control de las reglas que rigen a los objetos que se encuentran a nuestro alrededor. Inclusive hay ocasiones en las que nosotros como seres humanos, desarrollamos a partir de lo que conocemos nuevos objetos, ya sean físicos o no, que nos facilitan la concepción de nuestra identidad. Es decir que, en cuanto a cuestiones de aprendizaje, éste no es únicamente un acto de descubrimiento, sino que también se ha vuelto un acto de creación.

Por lo general se tiene la idea de que el aprendizaje se realiza de una sola manera. Inclusive, se cuenta con instituciones que se dedican a difundir el conocimiento, siguiendo unas reglas de enseñanza. Pero, en realidad, no existe una forma única en la que aprendemos.

A partir de la curiosidad innata de la humanidad, desde hace mucho tiempo se empezaron a estudiar los procesos cognitivos. Hay quien los estudia desde puntos de vista meramente evolutivos; otros, pedagógicos, etcétera.

Se han descubierto algunos fenómenos interesantes sobre cuestiones de procesos cognoscitivos a través de experimentos diseñados y realizados por científicos del área de la neuropsicología (Schacter, 1987, "Implicit Memory: History and Current Status"). A partir de dichos descubrimientos, se ha discutido sobre el papel que juega la memoria en el aprendizaje. De acuerdo con dichos estudios y descubrimientos se puede clasificar a la memoria en al menos dos tipos –explícita e implícita (de donde se desprende el concepto de aprendizaje implícito)– para explicar cuestiones del aprendizaje.

Como menciona Schacter, el primer tipo se caracteriza como la memoria a la que se tiene acceso conscientemente; y, el segundo, como el tipo de memoria que nos facilita resolver tareas tras la exposición a algunos conceptos de forma no-explícita, es decir, que son presentados sin la intención de que se encuentre una regla que ayude a resolver la tarea. Algunos ejemplos que se exhiben de dicho tipo de aprendizaje son el aprendizaje probabilístico y el que se obtiene a partir de la exposición de gramáticas artificiales (que será discutido después, más ampliamente).

Una manera en la que el concepto de aprendizaje implícito se puede 'definir' es como el aprendizaje que se lleva a cabo de forma inconsciente, es decir, aquel aprendizaje que no se puede declarar verbalmente. Este aprendizaje es actualmente un tema de amplia discusión en cuanto a la inconsciencia de la adquisición del conocimiento, lo cual ha impedido tener de él una definición formal.

Uno de los principales incentivos para la creación del término han sido algunos casos clínicos en los cuales pacientes amnésicos (como el caso de H.M. a quien se le extrajeron el *gyrus* hipocampal, la amígdala y dos tercios del hipocampo provocándole una severa amnesia) resuelven, de manera satisfactoria y similar a pacientes no amnésicos, pruebas que involucran a la memoria para ser resueltos.

El caso específico de H.M. es una muestra clara de la existencia de esta memoria implícita. H.M. mostró habilidades casi normales en pruebas de dibujo en espejo, de resolución de laberintos táctiles, pruebas que, para mejorar su ejecución, requieren un residuo de memoria de experiencias previas. En contraste, en la ejecución de pruebas como la de la torre de Hanoi, H.M. no mostró mejoras tras varios intentos de resolución.

H.M. es un ejemplo más que suficiente para sustentar la clasificación sobre la memoria mencionada previamente; en la actualidad se discute sobre la memoria explícita y la memoria implícita a partir de la terminología aceptada (Reber, Arthur S., 1993, *Implicit Learning and Tacit Knowledge*). En cuanto al aprendizaje implícito, éste se refiere al aprendizaje llevado a cabo de forma análoga a la manera en la que se describe la memoria implícita. Es decir, es un aprendizaje que no es declarable verbalmente; los sujetos son capaces de resolver las pruebas de manera satisfactoria y sin embargo no pueden enunciar las reglas que rigen la correcta resolución de las pruebas; esto último es algo que caracteriza a la memoria y el aprendizaje de tipo explícito; ya que en tales casos los sujetos son capaces de exponer explícitamente los sucesos recordados, al igual que el conocimiento obtenido.

Se han hecho algunas suposiciones generales al respecto de la memoria y aprendizaje implícitos; se mencionará un par de las que se encuentran en el libro *Implicit Learning and Tacit Knowledge* de Reber, éstas (y otras no mencionadas) permiten discutir sobre el diseño de las pruebas con las que se estudian la memoría y aprendizaje implícitos:

· Los procesos de inducción implícita son generales y universales.

· La adquisición implícita es el modo *default* de la adquisición y es el que normalmente es adoptado.

En cuanto a las características de ese conocimiento implícito –es decir aquel obtenido tras un proceso de aprendizaje implícito– se menciona que tiende a ser relativamente inflexible e inaccesible, ligado al material con el que se adquirió. En otros términos, se tiene que este conocimiento no es fácilmente verbalizable (de aquí que sea inflexible e inaccesible) y se encuentra en función del estímulo que fue vehículo de su adquisición.

Igualmente, a partir de las suposiciones existentes, Reber menciona varias características de las pruebas a utilizar en los experimentos referentes a este tipo de memoria y aprendizaje. Algunas de ellas son las siguientes:

· Los estímulos deben ser novedosos.

· Las reglas que rigen a los estímulos deben ser complejas.

· Los estímulos deben carecer de algún sentido emocional o conceptual para el sujeto.

· Los estímulos deben ser arbitrarios.

Una de las pruebas que se han utilizado para hacer evidente este tipo de aprendizaje –y que motiva el presente experimento– es la del aprendizaje implícito de *gramáticas artificiales*.

Las gramáticas artificiales son creadas a partir de unas reglas de construcción de palabras, con un cierto conjunto cuyos elementos forman un *abecedario*. Los sujetos que resuelven la prueba son expuestos por un tiempo determinado a una lista de *palabras* formadas a partir de reglas impuestas en dicha gramática –esto se puede ver a partir de una gráfica cuyos vértices son *letras*; y cuyas aristas definen las reglas de construcción de palabras. En dichas pruebas, las reglas de construcción no son expuestas de manera explícita.

Posteriormente, los sujetos son expuestos a una lista de palabras que contiene algunas construídas a partir de la reglas gramaticales, y otras que las rompen. Se les pide entonces que señalen cuáles son las que creen que están bien escritas, es decir, las que están escritas de acuerdo a las reglas de la gramática artificial.

Los sujetos, amnésicos y no amnésicos, tienden a resolver esta prueba de manera satisfactoria y similar, es decir, tienden a escoger correctamente y en aproximadamente la misma cantidad, las palabras bien escritas. Posteriormente se les pregunta las razones por las que escogieron dichas palabras, a lo cual contestan de manera tal que demuestran su imposibilidad para explicar conscientemente su elección.

El concepto de gramática artificial recuerda al concepto algebraico de *grupo libre*, pues en ambos se trabaja con palabras; esto incentivó trasladar la estructura de las pruebas de aprendizaje implícito de gramáticas artificiales a pruebas de aprendizaje implícito del concepto de grupo. Es decir, motivó el diseño de un experimento que exhibiera la existencia o no existencia de un aprendizaje tal sobre cuestiones algebraicas.

La exhibición de un aprendizaje tal podría ayudar a mejorar la enseñanza de algunos conceptos matemáticos inmersos dentro del concepto de grupo, como es el caso de la noción de neutro e inverso. Esto, en respuesta a las dificultades que presenta la enseñanza de la *teoría de grupos* o, inclusive, la percepción de cuestiones algebraicas elementales [Dubinsky, *et al.*, 1994 , "On learning fundamental concepts of group theory"].

Es importante mencionar que el experimento fue diseñado en colaboración con el Laboratorio de Neuropsicología del Departamento de Fisiología de la

Facultad de Medicina, de la UNAM; como parte de los proyectos sobre memoria y aprendizaje que ahí se llevan a cabo.

1.2 Concepto de Grupo.

Debido a que el interés del experimento radica en el aprendizaje de la teoría de grupos es necesario definir lo que éste es.

Definición. *Un grupo G es un conjunto, junto con una operación binaria * que a cada pareja de elementos a y b le asocia otro elemento a*b, y satisface los siguientes tres axiomas:*

A1.- La operación $*$ es asociativa, es decir $(a * b) * c = a * (b * c)$.

A2.- Existe un elemento e en G tal que $e * x = x = x * e$ para todo elemento x en G. (Se dice que e es un *elemento identidad* o *neutro* en G)

A3.- Para cada a en G existe un elemento b en G tal que $a * b = e = b * a$. (Se dice que b es un *inverso* de a)

Un par de propiedades comunes para todos los grupos son la unicidad del elemento neutro, e igualmente la unicidad del inverso para cada elemento de G. Supongamos que los elementos e y e' de G tienen las propiedades enunciadas en A2; entonces, $e = e * e' = e'$; por lo tanto $e = e'$.

Para observar la unicidad de los elementos inversos, supongamos que w y z son ambos elementos inversos de x. Entonces,
$w = e * w = (z * x) * w = z * (x * w) = z * e = z.$

Por lo tanto $w = z$, y se obtiene que el elemento inverso es único.

Entonces, dentro de un grupo existen cancelaciones bajo la operación de los elementos del grupo. Por la manera en que está definidos el neutro y los elementos inversos, estas cancelaciones están permitidas por ambos lados.

A continuación se mencionan algunos ejemplos de grupos:

1. Los ejemplos más conocidos de grupos son los conjuntos de números enteros (denotados por $\mathbb{Z}$), los números racionales ($\mathbb{Q}$) y los números reales ($\mathbb{R}$) con la suma usual como operacion (ya que la suma es asociativa, el 0 es el neutro y el inverso de un número r es $-r$). En $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ también está definida la multiplicación, pero con esta operación los conjuntos no son grupos (aunque la multiplicación es una operación asociativa y el 1 es un neutro, en $\mathbb{Z}$ no hay inversos, y en $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ el 0 no tiene inverso). Sin embargo, los racionales positivos y los reales positivos con la multiplicación usual si son grupos.

2. Los enteros módulo n. El conjunto $\mathbb{Z}_n = \{1, 2, 3, ..., n\}$ con la operación $+_n$(suma mod n) definida como:

$i +_n j = i + j$ si $i + j \leq n$ y $i +_n j = i + j - n$ si $i + j > n$ forma un grupo en el que n es el neutro y el inverso del número i es el número $n - i$.

3. El espacio euclidiano de n dimensiones identificado con el conjunto $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \,|x_i \in \mathbb{R}\}$ también es un grupo con la suma coordenada a coordenada: $(x_1, x_2, ...x_n) + (y_1, y_2, ...y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$

4. Un ejemplo más es el *grupo de permutaciones* (S_A) de elementos de un conjunto A. Éstas son las biyecciones de A en sí mismo –con la composición como operación binaria (la composición de funciones es asociativa, la función *Identidad* pertenece al conjunto y es el neutro del grupo; y cada función biyectiva f tiene una función inversa f^{-1} que deshace lo que f hizo). El nombre viene de que cada función biyectiva puede verse como un reordenamiento o permutación de los elementos del conjunto.

5. Grupos de palabras.

Tomemos un conjunto de símbolos o letras, por ejemplo $A=\{a_1,a_2,....,a_n\}$, y formemos con éstos todas las palabras posibles, donde una *palabra* es una sucesión finita $a_{i_1}^{\varepsilon_1}a_{i_2}^{\varepsilon_2}.....a_{i_n}^{\varepsilon_n}$ de letras, tales que $\varepsilon_j = \pm 1$. La palabra $a_i a_i \cdots a_i$ de n factores se abrevia como a_i^n, y la palabra vacía se denota por 1.

Podemos definir el producto de dos palabras poniendo una después de la otra.

Este producto es claramente asociativo y el neutro es la palabra vacía, pero no hay inversos porque al multiplicar palabras se hacen más largas. Para que haya inversos hay que pensar que las sílabas de la forma $a_i a_i^{-1}$ o $a_i^{-1} a_i$ no cuentan (es decir, que pueden borrarse o añadirse en cualquier parte de la palabra sin cambiar su significado). Si pensamos que las palabras que tienen el mismo significado son equivalentes, obtenemos un grupo donde el inverso de una palabra $p = a_{i_1}^{\varepsilon_1}a_{i_2}^{\varepsilon_2}.....a_{i_k}^{\varepsilon_k}$ es la palabra $p^{-1} = a_{i_k}^{-\varepsilon_k}a_{i_{k-1}}^{-\varepsilon_{k-1}}.....a_{i_1}^{-\varepsilon_1}$. A este grupo se le conoce como el grupo libre con n generadores $a_1,a_2,....,a_n$.

También podemos pensar que además de las sílabas $a_i a_i^{-1}$ o $a_i^{-1} a_i$ hay otras sílabas que no cuentan, éstas sílabas las podemos elegir arbitrariamente siempre y cuando pensemos que sus inversos tampoco cuentan.

Estas sílabas que no cuentan, llamadas *relaciones*, dan las reglas de contracción de las palabras generadas por las letras y que tienen el mismo significado.

Ahora podemos pensar que dos palabras p_1 y p_2 son equivalentes con respecto a las relaciones r_j si p_1 se puede convertir en p_2 tras una sucesión finita de operaciones del siguiente tipo:

(i) inserción o substracción de una subpalabra de la forma $a_i a_i^{-1}$ o $a_i^{-1} a_i$.

(ii) inserción o substracción de una subpalabra r_j.

No es difícil mostrar que el conjunto $\langle a_1, a_2, \ldots\ldots; r_1, r_2, \ldots..\rangle$ de clases de equivalencia de palabras escritas con las letras a_i (generadores) con respecto a las relaciones r_i, bajo la extensión de la operación de producto, forman un grupo.

6. El conjunto de todas las simetrías de cualquier figura en $\mathbb{R}^n$ (que como se verá más adelante son las funciones del conjunto sobre sí mismo que preservan distancias entre sus puntos) es un grupo, ya que por definición la *Identidad* es una simetría, la composición de simetrías es una simetría, y la inversa de una simetría también lo es.

Como ejemplo de grupo de simetrías podemos hacer mención del grupo de simetrías del cuadrado (D_4) con la composición como operación binaria. Las simetrías del cuadrado son: la *Identidad* -(ρ_0), la rotación de $\frac{\pi}{2}$ -(ρ_1), la rotación de π -(ρ_2), la rotación de $\frac{3\pi}{2}$ -(ρ_3), la reflexión vertical -(μ_1), la reflexión horizontal -(μ_2), y las reflexiones diagonales δ_1 y δ_2.

A continuación se muestra la tabla de operación respectiva a D_4:

$\circ$	$\boxed{\rho_0}$	$\boxed{\rho_1}$	$\boxed{\rho_2}$	$\boxed{\rho_3}$	$\boxed{\mu_1}$	$\boxed{\mu_2}$	$\boxed{\delta_1}$	$\boxed{\delta_2}$
$\boxed{\rho_0}$	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	μ_1	μ_2	δ_1	δ_2
$\boxed{\rho_1}$	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	δ_2	δ_1	μ_1	μ_2
$\boxed{\rho_2}$	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	μ_2	μ_1	δ_2	δ_1
$\boxed{\rho_3}$	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	δ_1	δ_2	μ_2	μ_1
$\boxed{\mu_1}$	μ_1	δ_1	μ_2	δ_2	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3
$\boxed{\mu_2}$	μ_2	δ_2	μ_1	δ_1	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1
$\boxed{\delta_1}$	δ_1	μ_2	δ_2	μ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
$\boxed{\delta_2}$	δ_2	μ_1	δ_1	μ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ρ_0

A partir de esta tabla se observa que la composición dentro del grupo de simetrías del cuadrado no es una operación conmutativa; esto se puede ver a través del siguiente ejemplo: $\mu_1 \circ \delta_2 = \rho_1$ y $\delta_2 \circ \mu_1 = \rho_3$. Por lo tanto, la asociatividad de la operación dentro de un grupo no garantiza la conmutatividad dentro de éste.

Subgrupos.

Ahora, es de observarse que dentro de un conjunto con estructura de grupo a veces se puede encontrar un subconjunto con estructura de grupo:

Definición. *Un subgrupo de un grupo G es un subconjunto de G tal que por si mismo es un grupo bajo la operación con la que G es grupo.*

Ejemplos:

1. Con la operación de suma, $\mathbb{Z}$ es un subgrupo de $\mathbb{Q}$ que a su vez es un subgrupo de $\mathbb{R}$.

2. Los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son $\{0\}$ y los conjuntos $n\mathbb{Z}$ (los múltiplos del número n). La asociatividad de la suma en $n\mathbb{Z}$ se hereda de $\mathbb{Z}$; el elemento neutro es el $0 = n \cdot 0$; y el elemento inverso de $n \cdot k \in n\mathbb{Z}$ es $n \cdot (-k)$, pues
$(n \cdot k) + (n \cdot (-k)) = n \cdot (k - k) = n \cdot 0 = 0.$

3. Otro ejemplo sencillo de subgrupo es el siguiente: sea G un grupo dado y a un elemento de éste, las potencias de a son los elementos de G que se obtienen de multiplicar a o a^{-1} por si mismo n veces ($a^n = a * a * ... * a$, $a^{-n} = a^{-1} * a^{-1} * ... * a^{-1}$, $a^0 = e$). Es fácil observar que el conjunto de todas las potencias de a, denotado por $\langle a \rangle$, es un subgrupo de G ya que el producto de potencias es una potencia, el neutro es a^0 y el inverso de a^r es a^{-r} pues $a^r a^{-r} = a^0 = e$.

Como todo subgrupo de G que contenga a a tiene que contener a sus potencias, $\langle a \rangle$ es el menor subgrupo de G que contiene a a y se le conoce como el grupo cíclico generado por a. Si la cantidad de elementos de G es finita entonces existe $m \neq 0$ tal que $a^m = e$ (ya que las potencias se tienen que repetir, es decir, si $a^{m_1} = a^{m_2}$ para algunos $m_1 \neq m_2$, entonces $a^{m_1 - m_2} = e$) y el mínimo m con esa propiedad se le llama el *orden* de a.

4. Como ejemplos de subgrupos de D_4 se mencionan los siguientes: $\langle \rho_1 \rangle$, éste es el subgrupo de simetrías del cuadrado que preservan la orientación, es decir, las rotaciones. $\langle \mu_1 \rangle$ es el subgrupo de D_4 que consta de μ_1 y e. Si nos fijamos en el subgrupo generado por ρ_1 y μ_1, obtenemos a todo D_4; esto es porque con ρ_1 se generan todas las rotaciones, y al componer con μ_1 se obtienen todas las reflexiones.

5. $\mathbb{R}^n$ tiene una infinidad de subgrupos, por ejemplo $\mathbb{Z}^n$ (los puntos en $\mathbb{R}^n$ con coordenadas enteras) y $\mathbb{Q}^n$ (los puntos con coordenadas racionales); también los hiperplanos por el origen (un hiperplano está formado por los puntos $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que son soluciones de un sistema de ecuaciones de la forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0.$$

Es claro que el $(0, 0, \dots, 0)$ es una solución; que la suma de dos soluciones es una solución y que el inverso de una solución también lo es.

6. Dentro de los grupos de palabras; si se renombran algunas sílabas como nuevas letras, y sus inversas como las respectivas inversas, se observa que este nuevo conjunto de letras hereda la estructura del grupo original. Al ser las sílabas un subconjunto del conjunto de palabras original, se tiene que éste es un subgrupo del grupo de palabras. Además, éste subgrupo es a su vez un grupo de palabras.

Se define el *orden* de un grupo como el número de elementos que tiene (si es infinito, el orden es infinito). El siguiente teorema da una relación entre el orden de un grupo y el orden de sus subgrupos.

Teorema. *(Lagrange) El orden de un subgrupo de un grupo finito es divisor del orden del grupo.*

Demostración. Sea H un subgrupo de un grupo finito G. Observemos los subconjuntos de G de la forma $aH = \{ah|h \in H\}$. Este tipo de subconjuntos se llaman clases laterales del subgrupo H. El único caso en el que aH es un subgrupo es cuando $a \in H$ pues en este caso $aH = H$.

Dos clases laterales de H son ajenas o son la misma: sean aH y $a'H$ dos clases laterales de H distintas y supongamos que $aH \cap a'H \neq \emptyset$.

Sea $x \in aH \cap a'H$; entonces $x = ah_1 = a'h_2$ para algún par de elementos $h_1, h_2 \in H$; de aquí se sigue que $a = a'h_2h_1^{-1}$, y $a' = ah_1h_2^{-1}$.

Ahora, sea $y = ah_3 \in aH$, entonces se tiene que $y = a'h_2h_1^{-1}h_3$;

$\Longrightarrow y \in a'H$ y por lo tanto $aH \subseteq a'H$.

De manera análoga si $w = a'h_4 \in a'H$, entonces $w = ah_1h_2^{-1}h_4$;

$\Longrightarrow w = a'h_4 \in aH$ y por lo tanto $a'H \subseteq aH$.

Entonces, $aH = a'H$.

También se observa que todas las clases laterales tienen el mismo número de elementos que H. $(H = eH)$ Considérese la transformación $\mathrm{F}_a : H \longrightarrow aH$ dada por $\mathrm{F}_a(h) = ah$. F_a es una transformación suprayectiva sobre aH. Hay que demostrar que también es inyectiva. Si h_1 y h_2 están en H y $ah_1 = ah_2$, entonces $h_1 = h_2$ debido a las leyes de cancelación existentes por ser G grupo. De aquí se sigue la biyección entre H y aH. Como esto es para cualquier clase lateral, todas las clases laterales tienen el mismo número de elementos.

Todo elemento de G está en alguna clase lateral de H ya que $g = ge \in gH$. Ahora, si G tiene n elementos y H tiene m elementos, entonces por lo mencionado arriba H divide a G en clases laterales ajenas cada una con m elementos, por lo que n debe ser múltiplo de m. De aquí se sigue el resultado querido. ■

Este teorema es útil en cuanto a la clasificación de los grupos en términos del orden del mismo. Si el orden del grupo G es primo –por el teorema anterior–, entonces G no puede tener ningún subgrupo propio.

Isomorfismo.

Hay grupos en apariencia muy distintos que en el fondo son muy parecidos:

Definición. *Dos grupos G y G' son isomorfos si existe una biyección φ de G en G' tal que satisface que $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ para todo $x, y \in G$. La función φ descrita se define como un isomorfismo entre G y G'.*

Esta noción de isomorfismo es la que nos permitirá pensar en la 'igualdad' de los grupos aparentemente distintos. Si existe un isomorfismo entre dos grupos, entonces sus tablas de operación son idénticas; sólo basta con renombrar los elementos de un grupo con los nombres de los elementos del otro para observar la igualdad.

Hay que observar que un isomorfismo envía al elemento neutro de un grupo en el neutro del otro; igualmente envía elementos inversos de un grupo en elementos inversos del otro:

$\varphi(x) = \varphi(x \cdot e_1) = \varphi(x) \circ \varphi(e_1)$ y $\varphi(x) = \varphi(e_1 \cdot x) = \varphi(e_1) \circ \varphi(x)$, por lo tanto $\varphi(e_1)$ es el neutro.

Con esto, ver que envía inversos en inversos es simple:

$\varphi(e_1) = \varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(x) \circ \varphi(x^{-1})$,

análogamente $\varphi(e_1) = \varphi(x^{-1} \cdot x) = \varphi(x^{-1}) \circ \varphi(x)$ de donde se sigue lo requerido demostrar.

Como los isomorfismos son biyecciones, es claro que 2 grupos isomorfos deben tener el mismo orden. También se puede observar que los isomorfismos mandan subgrupos en subgrupos, y que preservan el orden de los elementos:

Sean $\varphi : G \longrightarrow G'$ un isomorfismo, H un subgrupo de G y $x', y' \in \varphi(H)$; entonces existen $x,y \in H$ tales que $\varphi(x) = x'$, y $\varphi(y) = y'$.

$x \cdot y^{-1} \in H$, por ser H subgrupo de G, entonces:

$\varphi(x \cdot y^{-1}) = \varphi(x) \circ \varphi(y^{-1}) = \varphi(x) \circ \varphi(y)^{-1} = x' \circ y'^{-1} \in \varphi(H)$

Por lo tanto $\varphi(H)$ es también un subgrupo.

Consideremos ahora el caso de que H fuese un grupo cíclico, $h = \langle g \rangle$, g$\in$G. Si $x' \in \varphi(H)$, entonces $x' = \varphi(g^m) = \varphi(g)^m$ para algún entero m. Entonces, $\varphi(H)$ es generado por $\varphi(g)$, y como H y $\varphi(H)$ tienen la misma cantidad de elementos, el orden de $\varphi(g)$ es el mismo de g. Por lo tanto el orden de los elementos del grupo se preserva bajo isomorfismos.

Se mencionarán algunos ejemplos de isomorfismo entre grupos.

1. Los grupos $\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ son isomorfos, el isomorfismo está dado por la función $\varphi(x) = nx$. Claramente esta función es una biyección entre $\mathbb{Z}$ y $n\mathbb{Z}$ –entre los enteros y los pares se observa que $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$:

$\varphi(x+y) = n(x+y) = nx + ny = \varphi(x) + \varphi(y)$.

Este ejemplo muestra que se pueden dar isomorfismos entre un grupo y algún subgrupo propio del mismo.

2. $(\mathbb{R}, +)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}^+, \times)$: el isomorfismo está definido por $\varphi(x) = e^x$. El isomorfismo se ve claramente de las propiedades de los exponentes:

$\varphi(x+y) = e^{x+y} = e^x \times e^y = \varphi(x) \times \varphi(y)$.

3. Ahora, se demostrará que $(\mathbb{Q}, +)$ no es isomorfo a $(\mathbb{Q}, \times)$. Supongamos que hay un isomorfismo τ entre ellos. Por propiedades de $\mathbb{Q}$, se tiene que para todo $x \in \mathbb{Q}$ existe $y \in \mathbb{Q}$ tal que $x = 2y$. Ahora, como τ es un isomorfismo, existe una $x \in \mathbb{Q}$ tal que: $2 = \tau(x) = \tau(2y) = \tau(y+y) = \tau(y) \times \tau(y)$. Si $z = \tau(y)$, $z \in \mathbb{Q}$. Entonces, se tiene que $z^2 = 2$. Esto implica que $z = \sqrt{2}$, lo cual contradice que $z \in \mathbb{Q}$, pues es sabido que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Por lo tanto no existe un isomorfismo entre $(\mathbb{Q}, +)$ y $(\mathbb{Q}, \times)$.

4. En general, cualquier grupo puede ser descrito a partir de generadores y relaciones, por lo que es isomorfo a un grupo de palabras con relaciones. Las letras son todos los elementos del grupo, y las relaciones son las dadas por la tabla de operación del grupo, que dicen que la sílaba formada por dos letras significa lo mismo que la letra que representa su producto.

5. Aunque dos grupos isomorfos tienen que tener el mismo orden, el hecho de que dos grupos tengan el mismo orden no es una cualidad suficiente para que sean isomorfos.

Tal es el caso de los grupos de orden 4; uno de ellos $\mathbb{Z}_4$, y el otro $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, que es el grupo formado por e=$(0,0)$, a=$(0,1)$, b=$(1,0)$ y c=$(1,1)$ y la suma en cada coordenada está dada por la suma en $\mathbb{Z}_2$.

Se muestran a continuación sus tablas de operación:

$+_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

y

$*$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Tomando los subgrupos que generan los elementos de cada grupo se obtiene lo siguiente:

En $\mathbb{Z}_4$:

$\langle 0\rangle = \{0\}$, $\langle 1\rangle = \{1,2,3,0\} = \langle 3\rangle$ y $\langle 2\rangle = \{2,0\}$.

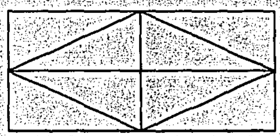
En $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$:

$\langle e\rangle = \{e\}$, $\langle a\rangle = \{a,e\}$, $\langle b\rangle = \{b,e\}$ y $\langle c\rangle = \{c,e\}$

Como el primer grupo tiene elementos de orden 4 y el segundo no los tiene, los grupos no pueden ser isomorfos.

Por lo tanto, no basta con que los grupos tengan el mismo orden para que exista un ismorfismo entre ellos.

6. Existen figuras distintas tales que tienen grupos de simetrías isomorfos; por ejemplo un rectángulo y un rombo.

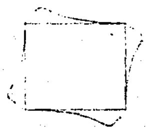


Esto es fácil de observarse, notando que es posible inscribir uno en otro y viceversa trazando las rectas entre los centros de lados contigüos, de modo que las simetrías de uno dan simetrías del otro y viceversa. Estas simetrías son la identidad $-e$, la reflexión vertical $-\rho_v$, la reflexión horizontal $-\rho_h-$ y la rotación de 180^0 $-\phi$. La tabla de composiciones de las simetrías es:

$\circ$	e	ρ_v	ρ_h	ϕ
e	e	ρ_v	ρ_h	ϕ
ρ_v	ρ_v	e	ϕ	ρ_h
ρ_h	ρ_h	ϕ	e	ρ_v
ϕ	ϕ	ρ_h	ρ_v	e

Esta tabla es igual a la tabla de multiplicación del grupo $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, por lo tanto los grupos de simetrías del rectángulo y el rombo son isomorfos a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Ahora, si a un cuadrado se le hacen ciertas modificaciones de modo que las rotaciones sigan siendo simetrías pero que no permitan que las reflexiones lo sean se puede restringir el grupo de simetrías a $\mathbb{Z}_4$.



Por lo tanto, para grupos de orden 4 existen figuras distintas que tienen grupos de simetrías isomorfos; y también figuras que tienen grupos de simetrías no isomorfos.

Sin embargo, si hay casos en el que todos los grupos de un orden dado son isomorfos. Ese caso es cuando el orden es un número primo.

Lema. *Si un grupo G tiene orden p, p un número primo, entonces G es isomorfo al grupo cíclico $\mathbb{Z}_p$.*

Demostración. Sean A y B dos grupos cíclicos del mismo orden k, A=$\langle a\rangle$, B=$\langle b\rangle$; y sean 1_A y 1_B los neutros de cada grupo. Definimos $\psi : A \to B$ de la siguiente manera: $\psi(a^n) = b^n$ para cada $1 \leq n \leq k$. Es necesario demostrar que tal ψ es un isomorfismo:

Sean $x, y \in A$, $x = a^m$, $y = a^n$;
$\psi(x \cdot y) = \psi(a^m \cdot a^n) = \psi(a^{m+n}) = b^{m+n} = b^m \times b^n$
$= \psi(a^m) \times \psi(a^n) = \psi(x) \times \psi(y)$.

Supongamos que $\psi(a^n) = \psi(a^m)$ para $n,m \leq k$; entonces $b^n = b^m$ y por lo tanto $b^{n-m} = 1_B$, como el orden de b es k se tiene que $n - m$ es un múltiplo de k y entonces como el orden de a es k resulta que $a^{n-m} = 1_A$ por lo tanto $a^n = a^m$; ψ es una función inyectiva.

Sea $x \in B$, por ser B un grupo cíclico de orden k existe $t \in \{1, 2, ...k\}$ tal que $x = b^t = \psi(a^t)$. $a^t \in A$, por lo tanto ψ es sobreyectiva. Entonces ψ es una biyección entre A y B.

Por lo tanto A y B son grupos isomorfos.

Ahora, sea G un grupo de orden p, p un número primo. Se demostrará que G es cíclico; el isomorfismo con $\mathbb{Z}_p$ se sigue a partir de la igualdad del orden de ambos grupos.

Sea $\langle a\rangle = \{a^n | n \in \mathbb{Z}\}$, donde a es cualquier elemento de G distinto de e. Por el Teorema de Lagrange el orden de $\langle a\rangle$ divide al orden de G, pero como el orden de G es un número primo, entonces el orden de $\langle a \rangle$ es p para toda $a \in$G, $a \neq e$. Esto da la unicidad del grupo de orden p. ■

Una vez expuesto lo que es un isomorfismo será de gran utilidad hacer mención del *Teorema de Cayley*.

Teorema. *(Cayley) Todo grupo finito es isomorfo a un subgrupo de un grupo de permutaciones.*

Demostración. Cada elemento g_i de G genera una permutación L_{g_i}:G$\longrightarrow$G definida por $L_{g_i}(x) = g_i \circ x$.

Si $\{g_1, g_2, \ldots\ldots, g_n\}$ son los elementos de G; la permutación generada por g_i es $(g_i \circ g_1 \quad g_i \circ g_2 \quad \ldots\ldots \quad g_i \circ g_n)$. Para ver que es una permutación basta con observar que $L_{g_i}(x)$ es una biyección;

$L_{g_i}(x)$ es inyectiva:

$L_{g_i}(x) = L_{g_i}(y) \Longrightarrow g_i \circ x = g_i \circ y$, como $g_i \in$G, y éste es un grupo; entonces existe $g_i^{-1} \in$G, y por lo tanto

$g_i^{-1} \circ g_i \circ x = g_i^{-1} \circ g_i \circ y$

$\Longrightarrow x = y$.

$\therefore$ $L_{g_i}(x)$ es inyectiva.

$L_{g_i}(x)$ es suprayectiva:

Sea $z \in$G, entonces $L_{g_i}(g_i^{-1} \circ z) = g_i \circ g_i^{-1} \circ z = z$.

$\therefore$ $L_{g_i}(x)$ es suprayectiva.

Por lo tanto $L_{g_i}(x)$ es una permutación.

Sea LG $:= \{L_g : g \in$G$\}$; LG es un subconjunto de S_G, el conjunto de permutaciones de los elementos de G. La operación en S_G que le da la estructura de grupo es la composición de las permutaciones:

$L_{g_i}(L_{g_k}(x)) = L_{g_i}(g_k \circ x) = g_i \circ (g_k \circ x) = (g_i \circ g_k) \circ x = L_{g_i \circ g_k}(x)$ para toda $x \in$G; por lo tanto la operación es cerrada en LG.

El elemento identidad ε de S_G se encuentra en LG: L_e.

Y de igual manera se observa que el inverso de $L_{g_i}(x)$ es $L_{g_i^{-1}}(x)$, que también se encuentra en LG.

Por lo tanto LG es un subgrupo de S_G; entonces, basta con demostrar que G es isomorfo a LG para tener el resultado deseado.

Se define una correspondencia entre G y LG de la siguiente manera: $g_i \longrightarrow L_{g_i}$.

Claramente esta correspondencia es suprayectiva, basta con observar el índice; respeta las operaciones de cada grupo: $g \circ h \longrightarrow L_{g \circ h} = L_g(L_h)$.

También es inyectiva:

si $L_g = L_h$ entonces, $g = L_g(e) = L_h(e) = h$.

Por lo tanto hay un isomorfismo entre G y LG que es un subgrupo de S_G.

También es fácil observar a partir de lo anterior que si el grupo es de orden finito e isomorfo a un subgrupo de $S_{|G|}$. Para hacer esto basta con enumerar los elementos de G para obtener un isomorfismo entre S_G y S_n del que se desprende uno entre LG y H; donde éste último es un subgrupo de S_n.

Se puede notar, igualmente, que debido a la forma en que se definen las permutaciones, este resultado se puede extender de manera natural a grupos de orden infinito. ■

Acciones de grupos.

Ahora, ampliando la discusión sobre los grupos, se puede mencionar la forma en la que éstos operan o actúan sobre conjuntos. Es decir, una manera en que la estructura algebraica de un grupo puede ser expuesta a través de un conjunto.

Defninción. *Sea X un conjunto y G un grupo. Una acción de G en X es una forma de asociar a cada elemento g de G una funcion $f_g : X \longrightarrow X$ tal que:*

1.- $f_e(x) = x, \forall\ x \in X$

2.- $f_g \circ f_h(x) = f_{g*h}(x) \forall\ x \in X,\ g, h \in G.$

Como para cada g se tiene $f_g \circ f_{g^{-1}}(x) = f_{g*g^{-1}}(x) = f_e(x) = x$, resulta que las funciones f_g tienen que ser invertibles ($f_{g^{-1}}$ es la inversa de f_g).

Un ejemplo sencillo de la acción de un grupo sobre un conjunto es la de el grupo de simetrías del cuadrado sobre el conjunto de vértices de éste: cada simetría manda vértices en vértices, intercambiándolos. El elemento neutro del grupo deja a cada uno de los vértices fijos, cumpliendo el primer punto de la definición; y, el aplicar dos elementos del grupo, uno seguido del otro, es equivalente a aplicar la composición de tales elementos.

La acción de un grupo de permutaciones sobre algún conjunto se ve como el reordenamiento de sus elementos. La permutación *Identidad* deja todos los elementos fijos; y, al aplicarles dos permutaciones una tras otra se está aplicando la permutación equivalente a la composición de dichas permutaciones.

Definición. *Una acción es libre si el único elemento que deja fijo a algún punto del conjunto es la Identidad. La acción de un grupo es fiel si todos los elementos del grupo actúan de manera distinta.*

En el ejemplo anterior de las simetrías del cuadrado, si se restringe éste al subgrupo de D_4 de simetrías que preservan la orientación se obtiene una acción que es fiel. Ahora, si se observa la acción de D_4 no se obtiene una acción libre, pues las reflexiones sobre las diagonales del cuadrado dejan fijos a los vértices que definen a la diagonal y éstas reflexiones son distintas a la *Identidad.*

Dos ejemplos muy importantes son la acciones de cada grupo G sobre sí mismo dadas por la multiplicación por la izquierda: $L_g(h) = g * h$ y por la derecha $D_g(h) = h * g$.

En la demostración del teorema de Cayley dada arriba se probó que la acción de multiplicación por la izquierda es libre y fiel (que es igualmente cierto para la multiplicación por la derecha).

Otro ejemplo de acción es la manera en la que $\mathbb{R}^n$ actúa sobre sí mismo. Esta acción se puede observar a través de la acción del grupo de traslaciones en $\mathbb{R}^n$, ya que $f_p(x) = x + p$, da una biyección entre el grupo de traslaciones y $\mathbb{R}^n$ que preserva la suma: $f_{p+q}(x) = x + p + q = f_p(x + q) = f_p \circ f_q(x)$. Claramente dicha acción es libre y fiel.

Simetrías.

A partir de las propiedades de los isomorfismos y varios de los grupos expuestos, resulta natural la cuestión al respecto de la posibilidad de construir una figura en algún espacio $\mathbb{R}^n$ que tenga como grupo de simetrías a un grupo dado. El Teorema de Cayley sugiere la existencia de tal figura ya que cualquier grupo es isomorfo a algún subgrupo de permutaciones; entonces, basta con encontrar una figura cuyo grupo de simetrías es isomorfo al mismo subgrupo de permutaciones al que el grupo dado es isomorfo. Para obtenerla explícitamente, será necesario hacer uso de algunas nociones que nos permitan construirla y verificar que en efecto tiene el grupo dado como grupo de simetrías.

Una transformación rígida de un conjunto en $\mathbb{R}^n$ es una transformación que no altera las distancias entre los distintos puntos del conjunto, y que por lo tanto no cambia su forma ni tamaño. Es decir, es una funcion φ tal que

$$||x - y|| = ||\varphi(x) - \varphi(y)||,$$

para todos los puntos x y y del conjunto.

Por ejemplo, las traslaciones, las rotaciones y las reflexiones, al igual que las composiciones de cualesquiera de éstas son transformaciones rígidas de $\mathbb{R}^n$.

Las transformaciones rígidas envían rectas en rectas, esto es debido a que las rectas son las trayectorias más cortas entre cada par de puntos; y como las transformaciones rígidas no alteran distancias, la imagen de un segmento de recta bajo una transformación rígida debe de ser otro segmento de recta.

Recordemos que el segmento de recta que une a dos puntos x_1 y x_2 está formado por los puntos de $\mathbb{R}^n$ que son combinaciones lineales de la forma

$$y = (1 - t)x_1 + tx_2, \text{ con } 0 \leq t \leq 1 ,$$

donde t depende de las distancias relativas de y a los extremos. Por lo tanto, una transformacion rígida φ debe enviar a cada punto $(1-t)x_1 + tx_2$ del segmento al punto $(1-t)\varphi(x_1) + t\varphi(x_2)$ del segmento que une a $\varphi(x_1)$ con $\varphi(x_2)$.

Definición. *Las simetrías de un conjunto de puntos S en $\mathbb{R}^n$ son las transformaciones rígidas que llevan al conjunto sobre sí mismo.*

El conjunto de simetrías de un conjunto de puntos S forma un grupo con la composición como operación: supóngase que α,β son dos simetrías de S entonces, $(\alpha \circ \beta)(S) = \alpha(\beta(S)) = \alpha(S) = S$, por lo tanto el conjunto de simetrías es cerrado bajo composición.

La función *Identidad* es el neutro del grupo al ser ella misma una simetría.

Por definición las simetrías son funciones suprayectivas. Si φ es una simetría de S; entonces φ es una transformación inyectiva: supóngase que hay dos elementos distintos en S a,b tales que $\varphi(a) = \varphi(b)$; al ser φ una isometría se tendría que $||a-b|| = ||\varphi(a) - \varphi(b)|| = 0$. Esto contradice que a y b fueran distintos. Por lo tanto φ es inyectiva.

Al ser φ una transformación biyectiva, φ tiene inversa; sea φ^{-1} su inversa. Es necesario demostrar que φ^{-1} es una simetría:

1. $\varphi^{-1}(S) = \varphi^{-1}(\varphi(S)) = e(S) = S$. Por lo tanto φ^{-1} es una transformación de S en sí mismo.

2. Sean x, y dos puntos cualesquiera de S. Entonces,
$||\varphi^{-1}(x) - \varphi^{-1}(y)|| = ||\varphi(\varphi^{-1}(x)) - \varphi(\varphi^{-1}(y))|| = ||x-y||$.
$\Longrightarrow \varphi^{-1}$ es una transformación rígida.

Por lo tanto las simetrías forman un grupo con la composición como operación binaria.

Hay figuras que tienen una cantidad finita de simetrías, por ejemplo los polígonos regulares y tambien figuras asimétricas cuyo grupo de simetrías es el grupo trivial. También existen figuras cuyo grupo de simetrías es de orden infinto. El círculo unitario por ejemplo, tiene una infinidad de simetrías; basta con observar que todas las rotaciones alrededor del origen son simetrías, al igual que las reflexiones sobre sus diámetros. Por lo tanto su grupo de simetrías es un grupo de orden infinito.

El grupo de simetrías de un segmento de $\mathbb{R}$ sólo tiene como elementos a la simetría trivial y la reflexión sobre el centro del intervalo. Claramente este grupo de simetrías es isomorfo a $\mathbb{Z}_2$.

Para discutir sobre las simetrías de figuras en R^n, será necesario definir antes algunos conceptos.

Un *poliedro convexo* es un subconjunto acotado de $\mathbb{R}^n$ que es la intersección de una coleccion finita de semiespacios.

Por ejemplo, los poliedros convexos en $\mathbb{R}$ son intervalos y en $\mathbb{R}^2$ son polígonos convexos.

Los *vértices* v_i de un poliedro convexo P son los puntos del poliedro que *no* están en el interior de ningun segmento de recta cuyos extremos están en P.

Se puede mostrar que el poliedro P esta formado por los puntos $\mathbb{R}^n$ que son combinaciones lineales de los vértices de P de la forma $y = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, donde $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, $a_i \geq 0$, aunque en general la combinación lineal que produce y no es única.

Lema. *Las simetrías de un poliedro convexo P envían vértices en vértices.*

Demostración. Los vértices de P son los puntos de P que no están en el interior de ningún segmento de recta cuyos extremos están en P. Como las simetrías de P deben enviar a cada segmento de recta con extremos en P a un segmento de recta con extremos en P, un punto que no sea un vértice de P no puede ir a dar a un vértice. Como la inversa de una simetría también es una simetría, puntos de P que no son vértices tampoco pueden venir de vértices. Así que como las simetrías son biyecciones, los vértices tienen que ir y venir de vértices.■

Como la posición de cada punto de un poliedro convexo está determinada por sus distancias a los vértices, lo que le haga una simetría a los vértices determina lo que le hace a los demás puntos del poliedro: $\varphi(p)$ es el (único) punto cuya distancia a cada $\varphi(v_i)$, es igual a la distancia de p a cada v_i.

Corolario. *El grupo de simetrías de un poliedro convexo es isomorfo a un subgrupo del grupo de permutaciones de sus vértices.*

Para ver que cada simetría de un poliedro convexo genera una permutación de sus vértices basta ver que una simetría da una biyección del conjunto de sus vértices en sí mismo. Por el lema anterior la simetría manda vértices en vértices, y como la inversa de una simetría también es una simetría, todos los vértices vienen de vértices. La inyectividad se obtiene a partir del hecho de que una simetría preserva distancias, y por lo tanto puntos distintos deben de ir a puntos distintos bajo una simetría.

Y como las imágenes de los vértices bajo la simetría determinan las imágenes de todos los demás puntos del poliedro, a permutaciones distintas de los vértices le corresponden simetrías distintas, y como cada simetría induce una permutación se obtiene la biyección.■

A partir del Teorema de Cayley, y lo expuesto sobre simetrías y poliedros convexos, es natural pensar si se cumple la siguiente conjetura:

Conjetura. *Todo grupo de orden finito es isomorfo al grupo de simetrías de un poliedro convexo en algún* $\mathbb{R}^n$.

Para demostrar la conjetura vamos a partir de las figuras mas simples en $\mathbb{R}^n$, llamadas *simplejos* que modificaremos para obtener los poliedros que buscamos.

Un *n-simplejo* es un poliedro convexo cuyos vértices son (n+1) puntos p_1, p_2,...,p_{n+1} en posicion general en algun $\mathbb{R}^k$, $k > n$, y esta formado por los puntos de $\mathbb{R}^k$ que pueden escribirse como combinaciones lineales

$p = a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_{n+1}p_{n+1}$ con $0 \leq p_i \leq 1$ y $a_1 + a_2 + ... + a_{n+1} = 1$.

Un n-simplejo regular es uno cuyos vértices se encuentren a la misma distancia por pares, por ejemplo el *n-simplejo estándar* Δ^n es el simplejo en $\mathbb{R}^{n+1}$ cuyos vértices son $e_1 = (1,0,0,0,......,0)$, $e_2 = (0,1,0,0,......,0)$, ... y $e_{n+1} = (0,0,0,...,0,1)$.

La primera observación es el siguiente lema:

Lema. *El grupo de simetrías de un n-simplejo regular es isomorfo al grupo de permutaciones de sus (n+1) vértices*

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede demostrar el lema para Δ^n. Claramente, Δ^n es un poliedro convexo, y por lo visto anteriormente cada simetría de Δ^n induce una permutación de sus vértices.

Ahora es necesario demostrar que toda permutación de los vértices induce una simetría. Como todos los puntos dentro de $\mathbb{R}^n$ son combinaciones lineales de los e_i, podemos verlos de la siguiente manera:

$p = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Sea σ una permutación de los e_i; $\sigma = (\sigma_1\ \sigma_2\ .....\ \sigma_n)$, donde σ_i indica la imagen de e_i bajo σ. Ésta a su vez da una permutación de los x_i.

La simetría de Δ^n inducida por σ es $\tau_\sigma(p) = (\sigma_1(x_1), \sigma_2(x_2), ..., \sigma_n(x_n))$. Claramente $||p - q|| = ||\tau_\sigma(p) - \tau_\sigma(q)||$, por lo tanto τ_σ es una transformación rígida; igualmente τ_σ es una biyección del conjunto de los e_i en si mismo, al ser inducida por una permutación de éstos.

La relación $\sigma \mapsto \tau_\sigma$ da una biyección entre el grupo de permutaciones de los vértices de Δ^n y sus simetrías.

τ_σ también cumple que dadas dos permutaciones de los vértices σ y σ':

$\tau_{\sigma'} \circ \tau_\sigma(p) = \tau_{\sigma'}(\sigma_1(x_1), \sigma_2(x_2), ..., \sigma_n(x_n))$

$$= (\sigma'(\sigma_1(x_1)),\sigma'(\sigma_2(x_2)),.....,\sigma'(\sigma_n(x_n)))$$
$$= (\sigma' * \sigma_1(x_1),\sigma' * \sigma_1(x_1),....,\sigma' * \sigma_1(x_1))$$
$$= \tau_{\sigma' * \sigma}(p)$$

Por lo tanto el grupo de simetrías de un n-simplejo regular es isomorfo al grupo de permutaciones de sus (n+1) vértices.■

En general, del lema anterior se obtiene que, para un simplejo regular basta con observar la forma de acomodar los vértices en el espacio para obtener todas sus simetrías. Ahora, si nos fijamos en los grupos de simetrías de los n-simplejos regulares nos podemos dar cuenta de que el orden de tales grupos aumenta más rápido que la simple enumeración de los números naturales. El orden va creciendo en el siguiente orden: 1, 2, 6, 24, ...; i.e. la sucesión $\{n!\}$, de modo que hay muchos grupos que no son isomorfos a grupos de simetrias de un simplejo, por ejemplo, un grupo de orden 3.

Teorema. *Todo grupo de orden 'n' es isomorfo al grupo de simetrías de una figura convexa en* $\mathbb{R}^{n-1}$.

Demostración. Los grupos de simetrías del 0-simplejo y del 1-simplejo son el trivial y $\mathbb{Z}_2$, que son los únicos grupos de orden 1 y 2. Para $n \geq 3$, la idea es empezar con un simplejo estándar y modificarlo, cortándole las esquinas de modo que sólo algunas de las simetrías del simplejo original sigan siendo simetrías de la figura resultante. Sin embargo, es necesario hacer los cortes alrededor de los vértices con sumo cuidado, para evitar que al hacer las modificaciónes se generen simetrías no contempladas dentro del grupo. Para evitar esta situación, los puntos que determinen los cortes se escogen a distancias pequeñas de los vértices y distintas entre sí.

Sean G un grupo dado de orden 'n' con la operación *, y Δ^{n-1} el $(n-1)$-simplejo estandar en $\mathbb{R}^n$. Si G=$\{g_1, g_2, ..., g_n\}$, donde g_1 es el elemento neutro del grupo, es conveniente renombrar a los vértices de Δ^{n-1} como e_{g_1}, e_{g_2},..., e_{g_n}.

De manera similar a como se hizo en la demostración del Teorema de Cayley, se observa que G actúa sobre el conjunto de vértices de la siguiente forma: $g_j(e_{g_i}) = e_{g_j * g_i}$. Por medio de ésta acción, cada g_i induce una permutación de los vértices e_{g_j}. Como los e_{g_i} son vértices de Δ^{n-1}, cada una de estas permutaciones induce una simetría de Δ^{n-1}.

La acción de g_i sobre cualquier punto de Δ^{n-1} está determinada de la manera siguiente:

$$g_i(x_1 e_{g_1} + x_2 e_{g_2} + ... + x_n e_{g_n}) = x_1 e_{g_i * g_1} + x_2 e_{g_i * g_2} + ... + x_n e_{g_i * g_n}$$

Ahora queremos quitarle a Δ^{n-1} las 'esquinas', cortándole alrededor de cada vértice e_{g_i} un (n-1) simplejo irregular C_{g_i}. Para definir C_{g_1} (donde $g_1 = e$, la identidad del grupo) observemos que para cada $g_j \neq e$, el punto:

$v_{g_1,g_j} = (1 - \frac{1}{2j})e_{g_1} + \frac{1}{2j}e_{g_j}$ se encuentra en el segmento de recta que va de e_{g_1} y e_{g_j}, y esta mucho más cerca de e_{g_1} que de e_{g_j}.

Sea C_{g_1} el (n-1) simplejo cuyos vértices son e_{g_1} y los puntos v_{g_1,g_j} con $g_j \neq e$.

En general, sea $v_{g_i,g_j} = (1 - \frac{1}{2j})e_{g_i} + \frac{1}{2j}e_{g_j}$ y sea C_{g_i} el (n-1) simplejo cuyos vértices son e_{g_i} y los puntos $v_{g_ig_j}$ con $g_j \neq e$.

Sea $A = \Delta^{n-1} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} C_{g_i}$. A es el poliedro convexo cuyos vértices son los puntos v_{g_i,g_j} para g_i, $g_j \in G$, $g_j \neq e$. Ahora es necesario observar que los elementos de G inducen simetrías de A, en particular que $g_i(A) = A$. Para ver esto, se demostrará que cada g_i envía los cortes a Δ^{n-1} generados por sustraer los C_{g_i} en otros cortes, especificamente que $g_j(C_{g_i}) = C_{g_j * g_i}$.

Por definicion $g_k(e_{g_i}) = e_{g_k * g_i}$ y

$g_k(v_{g_i,g_j}) = g_k\left((1 - \frac{1}{2j})e_{g_i} + \frac{1}{2j}e_{g_j}\right) = (1 - \frac{1}{2j})g_k(e_{g_i}) + \frac{1}{2j}g_k(e_{gj}) =$
$(1 - \frac{1}{2j})e_{g_k * g_i} + \frac{1}{2j}e_{g_k * g_j} = v_{g_k * g_i, g_k * g_j}$

por lo tanto $g_k(C_{g_i}) = C_{g_k * g_i}$ para cada i y k, de modo que $g_k(A) = A$ para cada g_k.

Además, por lo anterior,

$g_k * g_l(v_{g_i,g_j}) = v_{(g_k * g_l) * g_i,\ (g_k * g_l) * g_j} = v_{g_k * (g_l * g_i),\ g_k * (g_l * g_j)}$
$= g_k(v_{g_l * g_i,\ g_l * g_j}) = g_k(g_l((v_{g_i,\ g_j})) = g_k \circ g_l(v_{g_i,\ g_j})$

y como la imagen de los vértices bajo una simetría del poliedro determina la imagen de todos los puntos del poliedro, se tiene que $g_k * g_l = g_k \circ g_l$ donde * es la operación con la que G es grupo, y $\circ$ es la composición de simetrías. Entonces, al asociarle a cada $g_i \in$G la simetría correspondiente de A se preserva la estructura de grupo.

Por construcción la acción de G sobre A es libre y fiel. Por lo tanto a cada elemento de G le corresponde una simetría de A; ahora es necesario demostrar que A no tiene otras simetrías mas que los elementos de G.

Para ver esto será necesario recordar que las simetrías de A envían vértices en vértices. Los vértices de A son los v_{g_i,g_j}; como las simetrías conservan las distancias entre los vértices, entonces deben enviar vértices cercanos en vértices cercanos. Como las distancias entre los vértices de cada C_{g_i} son todas menores a las distancias entre vértices en distintos C_{g_i}, entonces, bajo una simetría, dos vértices de A en el mismo C_{g_i} no pueden ir a dar a dos C_{g_j} distintos: todos los vértices en un C_{g_i} tienen que ir a dar a un mismo C_{g_j}.

Además por construcción, las distancias entre los vértices de A en cada C_{g_i} son todos distintas, por lo tanto hay una única manera de enviarlos preservando distancias a los vértices de otro C_{g_j} .

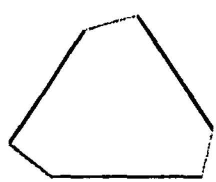
Ahora afirmamos que al saber a que C_{g_k} van a dar los vértices de C_{g_i} la simetría queda determinada. Esto es porque para cada i, las distancias a los vértices v_{g_i,g_j} determinan la posición de los puntos del poliedro (hay 2 puntos en $\mathbb{R}^n$ a las mismas distancias de los vértices, uno a cada lado del hiperplano que contiene a los vértices, el hecho de que el poliedro esta en un lado determina cual de los dos puntos es), y por lo tanto las distancias a las imágenes de los vértices determinan la imagen del punto.

Y para ver que esta simetría es precisamente una de las $g_k \in$G, basta ver que hay una g_k que hace lo mismo en los vértices. Como $g_j * g_i^{-1}(C_{g_i}) = C_{g_j}$, la g_k que lleva a los vertices de C_{g_i} a C_{g_j} es $g_j * g_i^{-1}$.■

Enseguida se mencionan algunos ejemplos sobre las figuras resultantes de acuerdo con grupos de distintos órdenes.

El 0-simplejo cumple con tener al grupo trivial como grupo de simetrías. Si el grupo tiene orden 2, entonces el grupo es $\mathbb{Z}_2$ que es el grupo de simetrías de un intervalo, de un 1-simplejo. Al sustraerle intervalos que contienen a los vértices se sigue teniendo un intervalo cuyo grupo de simetrías es el dado.

Si el grupo tiene orden 3, entonces el grupo es $\mathbb{Z}_3$. En este caso ya no basta con tomar al 2-simplejo como figura, pues al ser un 2-simplejo un triángulo, éste tiene seis simetrías y no tres. Sin embargo, las modificaciones mencionadas en la demostración del teorema llevan del tirángulo a la siguiente figura que si tiene a $\mathbb{Z}_3$ como grupo de simetrías, pues $\mathbb{Z}_3$ es equivalente a observar tan sólo las rotaciones.



Se cumple así que la figura tiene a $\mathbb{Z}_3$ como grupo de simetrías, como era querido.

Los ejemplos interesantes son para grupos de orden 4, que como hemos visto no hay uno único. Es necesario checar entonces que las figuras son distintas, es decir, que en verdad representan a las figuras que tienen a los grupos dados como grupos de simetría.

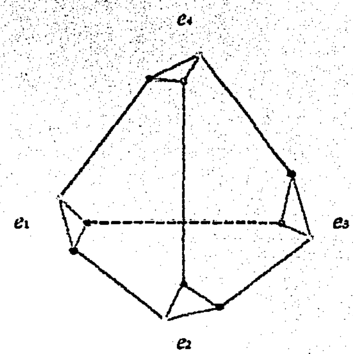
Observamos de nueva cuenta a $\mathbb{Z}_4$ y a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; se construirán las figuras derivadas de un 3-simplejo tales que tengan a dichos grupos como grupos de simetrías. Recordamos sus tablas:

$+_4$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$
$\boxed{0}$	0	1	2	3
$\boxed{1}$	1	2	3	0
$\boxed{2}$	2	3	0	1
$\boxed{3}$	3	0	1	2

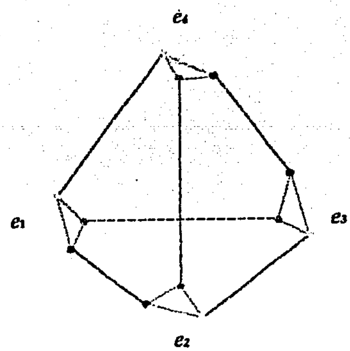
y

$*$	$\boxed{e}$	$\boxed{a}$	$\boxed{b}$	$\boxed{c}$
$\boxed{e}$	e	a	b	c
$\boxed{a}$	a	e	c	b
$\boxed{b}$	b	c	e	a
$\boxed{c}$	c	b	a	e

La figura para $\mathbb{Z}_4$ es la siguiente:



y la figura correspondiente a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ es:



De la misma manera en que se obtuvieron este par de figuras se obtienen las respectivas para grupos de órdenes mayores, haciendo uso de los n-simplejos respectivos.

2 Diseño del Experimento.

Como se mencionó en la introducción, la motivación del presente experimento fue estudiar la posibilidad de un aprendizaje de tipo implícito sobre el concepto de grupo. El incentivo original fue, esencialmente, la similitud entre un grupo de palabras y una gramática artificial; ya que ambos se basan en la posibilidad de construcción de palabras. Sin embargo, más allá de eso, en realidad no hay una verdadera identificación entre sí; pues, de lo expuesto en la sección anterior es claro que la estructura de grupo es bastante más compleja que la de una gramática artificial.

Una diferencia esencial entre ambos radica en la posibilidad de contracción de palabras en un grupo de palabras, mientras que en una gramática artificial sólamente existen reglas de pegado entre las letras . Se debe recordar, que una gramática artificial puede ser observada a partir de una gráfica cuyos vértices son letras, y las aristas representan las reglas de pegado entre las letras posibles. En un grupo, la estructura es más dinámica, pues en él siempre hay elementos que se cancelan entre sí; esta cancelación dentro de las palabras se observa a través de la contracción tal y como fue descrito en la sección en la que se mencionó la propiedad de observar a los grupos como un conjunto de generadores y sus relaciones.

El diseño de una prueba que permitiera detectar la existencia de un aprendizaje implícito de lo que es un grupo, no se puede restringir únicamente al aprendizaje de lo que es un grupo libre, pues como se mencionó, existen una infinidad de grupos; lo importante al respecto, entonces es, averiguar si es posible un aprendizaje implícito de la estructura de grupo; es decir, la comprensión de la operación entre los elementos, y la existencia de neutros e inversos. Una manera simple de exhibir tales elementos es por medio de la acción de un grupo sobre algún conjunto.

Para hacer esto, hubo que escoger un grupo que facilitara la comprensión de estos elementos, y la manera de presentar la acción del grupo sobre un conjunto, de tal forma que no fueran tan evidente las propiedades de dichos elementos. Entonces se podría discutir sobre el aprendizaje implícito del concepto de grupo.

Se diseñaron varias pruebas con el proposito de detectar la existencia de tal aprendizaje. A continuación se presentan las características generales que tuvieron cada una de las pruebas diseñadas; también se describirá la manera en que los resultados de cada prueba fueron medidos y, finalmente, se mostrarán los resultados de las pruebas, con sus análisis respectivos.

2.1 Características Generales y Ensayos Preliminares.

Debido a que el punto esencial de la exhibición de un grupo es la operación entre sus elementos –de esta manera se puede mostrar las propiedades del elemento neutro y de los elementos inversos–, se eligió un grupo relativamente simple para ser expuesto en los reactivos. El parámetro de simpleza utilizado para la elección del grupo fue la cantidad de elementos que éste tuviera. Se escogió este parámetro pues, si se expusiera un grupo con n elementos se tendría que habría n^2 combinaciones posibles para mostrar la operación entre sus elementos.

También fue necesario hacer la exhibición a través de grupos que fueran relativamente cotidianos –no sería fácil exhibir grupos de matrices por ejemplo. Se escogió el grupo de simetrías del cuadrado D_4 y el subgrupo de permutaciones de cuatro elementos al que es isomorfo. Este grupo tiene ocho elementos; sin embargo, para examinar la comprensión de la estructura de grupo, no es necesario exhibir a todos sus elementos; las nociones fundamentales, en cuanto a elementos del grupo, son la existencia del neutro y de elementos inversos.

Otra razón para reducir la cantidad de elementos a exhibir es la posibilidad de que la exhibición de todos ellos cause agotamiento durante la resolución de los reactivos de la prueba. Por lo tanto, se decidió que sólamente se exhibirían cuatro elementos; uno de tales, el elemento neutro; los restantes se escogieron en función de la conveniencia de la exhibición del grupo. Como uno de los grupos elegidos fue D_4 –grupo de simetrías del cuadrado– se eligió un elemento de él que preservara la orientación y otro que la invirtiera.

Las simetrías –elegidas aleatoriamente– fueron la rotación de 90° como la que preserva la orientación, y la reflexión vertical, la que invierte la orientación. Se escogió a la reflexión sobre la diagonal '/' como la cuarta simetría a examinar, pues ésta es la simetría resultante al componer la rotación de 90° con la reflexión vertical –en ese orden, y se trata de estudiar si la exhibición previa de dos elementos de un grupo incentiva el aprendizaje de un elemento equivalente a la composición de ellos. Un resultado positivo al respecto sería de gran interés en cuanto al tipo de aprendizaje, pues se obtendría una comprensión implícita de la operación entre los elementos.

Para el subgrupo de permutaciones se eligieron las equivalentes a las simetrías escogidas bajo el isomorfismo entre los grupos. Es decir, la identidad e; la que recorre a los elementos un lugar (2 3 4 1) –equivalente a la rotación–; una que intercambia elementos 'contiguos' por pares: (2 1 4 3) –la reflexión vertical; y, la que intercambia dos elementos no contiguos: (3 2 1 4) –reflexión diagonal.

Este isomorfismo se puede observar a través del cuadrado descrito anteriormente –es decir, un cuadrado cuyo vértices estén enumerados en sentido contrario a las manecillas del reloj, comenzando en el vértice inferior izquierdo.

Existen varias maneras de mostrar la acción de un grupo de permutaciones; por el interés del tipo de prueba, se buscó la forma que fuera lo más independiente posible de la manera de exhibir las simetrías. Para esto, se colocarían los cuatro elementos a permutar alineados horizontalmente; si se exhibiera un grupo seguido del otro, y los elementos a permutar aparecieran colocados en los lugares correspondientes a los vértices de un cuadrado, no se podría discutir respecto a la comprensión del isomorfismo entre los grupos, pues los sujetos podrían pensar que en ambos casos se trató del mismo grupo, y no que eran dos grupos distintos cuyas tablas coinciden con exactitud.

La acción de los elementos escogidos del grupo se exhibió –por medio de un programa de computadora compilado en C++– en la siguiente forma: en el centro de la pantalla de la computadora aparecía una caja de un color –a cada elemento del grupo le correspondía un color diferente– luego, aparecía una figura arriba de la caja que comenzaba a descender hacia el interior de la caja; cuando la figura se llegaba en el interior, aparecían más abajo tres figuras como opciones de respuesta.

Todas las opciones de respuesta eran la imagen de la figura inicial bajo un elemento del grupo –en el caso del grupo de permutaciones, eran cuatro figuras las que descendían hacia el interior de la caja–, donde una de ellas era la respuesta correcta. Una vez presentadas las opciones de respuesta, se les pedía a los sujetos que indicaran cuál de las tres opciones –haciendo 'click' en el botón izquierdo del 'mouse'– era la forma en la que creían que la figura debía salir después de atravesar la caja.

Ahora, las figuras sobre las que se mostraría la acción de los elementos del grupo se diseñaron de tal manera que no causaran confusión en los sujetos. En el caso de D_4, las figuras fueron tales que no tuvieran algún elemento de D_4 como simetría propia; pues si tal fuera el caso, el sujeto no podría diferenciar si el elemento actuando sobre la figura es la *Identidad* o algún otro elemento de D_4. Para el grupo de permutaciones bastó solamente con que todas las figuras que permutaran fueran distintas.

Otra manera de incentivar el aprendizaje implícito, distinta a la regulación de los estímulos y las reglas de los objetos a examinar, fue dar intervalos cortos de tiempo para responder los reactivos. Limitando la cantidad de tiempo para contestar se dificulta el aprendizaje 'consciente' de los conceptos que se examinan. Se decidió que el intervalo de tiempo para responder cada reactivo fuera de cuatro segundos.

En cuanto a la aplicación de la prueba a los sujetos. Antes de comenzar los reactivos, el programa tomaba los datos del sujeto –nombre, edad, lateralidad, escolaridad, tipo de prueba. Después aparecía una pantalla con fondo gris y un botón en el centro de la pantalla donde se leía: ¿list@?; los reactivos de la prueba comenzarían después de hacer 'click' sobre dicho botón. En tanto el botón estuviera en la pantalla se le explicaba al sujeto la dinámica de la prueba. También se le decía que la computadora le indicaría si su respuesta fue correcta o incorrecta mostrando una paloma o un tache en la pantalla después de cada reactivo. Si al sujeto no le daba tiempo de contestar, el programa continuaba con el siguiente reactivo. Para evitar que muchos reactivos quedaran sin respuesta se les pedía a los sujetos que trataran de contestar la mayor cantidad de reactivos posible. Si no contestaban una cuarta parte de los reactivos, la prueba no se tomaba en cuenta.

La asignación del color de caja en función del elemento del grupo fue la siguiente:

Blanco - *Identidad* –denotada por e;

Azul - reflexión vertical –denotada por ρ_v;

Naranja - rotación de 90° –denotada por ϕ;

Verde - reflexión sobre la diagonal '/' –denotada por ρ_d.

En todas, la permutación equivalente bajo el isomorfismo utilizaba el mismo color.

La prueba estaba dividida en dos partes; la primera parte examinaba sólamente la comprensión de los elementos del grupo; en la segunda se examinaba la comprensión de la operación entre ellos. La segunda parte es la parte nodal de la prueba, pues es donde se examina la comprensión de la operación de los elementos, al igual que las propiedades del elemento neutro y los elementos inversos.

La dinámica de esta segunda parte fue similar a la primera; la única diferencia entre ambas fue que en la segunda parte las figuras atravesaban dos cajas en vez de una. Se hacía hincapié al sujeto que la elección de la respuesta, en este caso, tendría que ser la forma en la que creía que debían salir las figuras al atravesar ambas cajas. Debía quedar claro que la forma en la que entraba la figura en la segunda caja era tal y como había salido de la primera. Los sujetos no podrían ver cómo era dicha forma, pues el par de cajas se encontraban muy cerca.

De los cuatro elementos del grupo elegidos se obtienen dieciseis posibles combinaciones por pares. Éstos son demasiados reactivos para examinar, lo cual podría interferir en la comprensión de los mismos. Otro factor que pudiera causar problemas en la comprensión es la no conmutatividad del grupo elegido; examinar $b \circ a$ y luego $a \circ b$ podría causar confusión pues los resultados no son necesariamente los mismos. Por lo tanto, para disminuir los efectos que la cantidad y la no-conmutatividad pudieran tener sobre la resolución de la prueba, las posibles combinaciones se clasificaron de la siguiente manera:

(i) las que mostraran la interacción de los elementos con el elemento neutro;

(ii) las que mostrarán la interacción de los elementos consigo mismos –es decir las potencias de los elementos;

(iii) las que mostraran la interacción de pares de elementos distintos, ninguno de ellos el neutro.

En cada una de éstas clasificaciones se escogieron cuatro combinaciones.

En la primera clase se escogieron combinaciones tales que se mostrara la cualidad del elemento neutro, por ambos lados. Tales combinaciones fueron: $e \circ \rho_v$, $e \circ \rho_d$, $\rho_d \circ e$ y $\phi \circ e$.

Éstas combinaciones se escogieron de manera semialeatoria –se examinaría la conmutatividad del neutro examinando la operación de éste con otro elemento por ambos lados; dos por el lado izquierdo y dos por el derecho.

En la segunda clase se tomaron las potencias de todos los elementos expuestos; es decir, $e \circ e$, $\phi \circ \phi$, $\rho_v \circ \rho_v$ y por último $\rho_d \circ \rho_d$. En éstos casos el resultado de tales composiciones son la *Identidad* para todos excepto la potencia de ϕ.

En la tercera clase se escogieron de manera aleatoria las siguientes cuatro combinaciones: $\rho_d \circ \phi$, $\rho_v \circ \phi$, $\rho_d \circ \rho_v$ y por último $\rho_v \circ \rho_d$.

También se diseñó una prueba que examinara todas las clases anteriores, de manera aleatoria; los elementos se escogieron de manera semialeatoria, dos combinaciones de cada una de las clases anteriores. Para la pruebas correspondientes a permutaciones se tomaron los reactivos respectivos bajo el isomorfismo.

Para poder discutir la cualidad implícita del aprendizaje, al terminar cada prueba, al sujeto se le examinaba de forma explícita a través de una prueba simple. Se dibujaba en una hoja de papel una figura (cuatro, si se examinaba permutaciones) y una caja de alguno de los cuatro colores; posteriormente se le pedía que dibujara debajo de dicha caja la forma en la que debía de salir la figura tras atravesar la caja. Se hizo lo análogo para examinar con respecto a la composición de elementos del grupo –se dibujaban dos cajas. Ésta prueba permite sustentar si el aprendizaje dado en las pruebas es implícito o no, pues se observaba si el sujeto podía contestar de manera satisfactoria la prueba por computadora, y sin embargo no poder hacerlo de manera explícita.

Los resultados de las pruebas se analizaron utilizando la prueba estadística Kolmogorov-Smirnov que determina si dos distribuciones son distintas. Se analizó si la distribución empírica de las respuestas correctas de cada prueba es distinta a la distribución aleatoria respectiva –la distribución binomial de probabilidad $\frac{1}{3}$ con respecto a la cantidad de reactivos de la prueba–; si las distribuciones fueran distintas de manera significativa, y la distribución empírica superara a la distribución binomial, entonces esto querría decir que la manera en la que los sujetos resuelven la prueba no es aleatoria, y por ende debiera de haber un aprendizaje de los conceptos que causara la diferencia. Si los sujetos no fueran capaces entonces, de justificar la razones por las que contestaron de manera satisfactoria la prueba, daría pie a una discusión sobre un aprendizaje de tipo implícito.

A continuación se expone la justificación teórica de la prueba estadística Kolmogorov-Smirnov.

2.2 Prueba Estadística Kolmogorov-Smirnov.

Se darán primero unas nociones simples de estadística que ayudarán a entender la elección del estadístico, al igual que las bases teóricas que le dan pie:

Un espacio muestra se define como el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento o suceso.

Una variable aleatoria es una función que le asigna valores reales a los puntos dentro un espacio muestra. Con respecto a una variable aleatoria, una función probabilidad $f(x)$ es la que da la probabilidad de que en el espacio muestra X ocurra el valor dado x. Es decir, la probabilidad $P(X)$ de que ocurra cada uno de los resultados o sucesos posibles del espacio muestra X. $f(x) = P(X = x)$

La función probabilidad de la variable aleatoria siempre vale 0 en x, si x no es un valor dentro del espacio muestra, pues la probabilidad de que ocurra un suceso no contemplado como posible es nula.

Una función distribución de una variable aleatoria es la función que da la probabilidad en X de ser menor o igual a un valor real dado x. Es decir,

$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{t \leq x} f(t)$

Esto es, ir sumando los valores de las probabilidades de eventos en un espacio muestra. Y precisamente, como lo dice su nombre, indica en qué proporción y de qué forma están distribuidos los puntos dentro del espacio muestra X.

Con esta terminología se pueden comenzar a exponer las bases teóricas de la prueba estadística utilizado en la evaluación de los resultados arrojados por el experimento.

La prueba estadística elegida para hacer el análisis fue el Kolmogorov-Smirnov. Se utilizó éste, porque permite hacer la comparación entre una distribución empírica (es decir la de los resultados obtenidos) y una distribución hipotética. Esto quiere decir que compara que tan alejada se encuentra la distribución de los eventos en un espacio muestra de la distribución que se cree éstos deban tener. Entonces, se enuncia una hipótesis al principio (usualmente llamada hipótesis nula) respecto a la forma en la que se cree deba ser la comparación entre las distribuciones.

La razón de enunciar una hipótesis nula inicialmente es la de demostrar con base en los valores del estadístico si los resultados arrojados por las pruebas se distribuyen de una manera. A partir de los valores del estadístico se acepta o rechaza una hipótesis; esto es así pues el valor del estadístico indica si el valor obtenido se encuentra en un área de aceptación o rechazo de la hipótesis –usualmente llamada región crítica. Si el valor obtenido supera al del estadístico se rechaza la hipótesis, pues significa que el suceso estudiado se comporta de tal manera que la probabilidad de que sucediese es mínima –esto depende de la probabilidad con la que se tome el valor del estadístico.

Si la hipótesis nula fuese rechazada, entonces se debe de aceptar una hipótesis alternativa; la negación de la nula. La hipótesis nula debe ser formulada con sumo cuidado para evitar ambigüedad en el enunciamiento de una hipótesis alternativa.

En el caso relativo a varias pruebas se plantea como hipótesis nula que la forma de resolverlas empíricamente es igual a la manera de resolverlas de manera aleatoria. El uso del estadístico Kolmogorov-Smirnov permite decir si la forma en la que se resuelven los reactivos de alguna prueba por sujetos experimentales es meramente aleatoria o no; comparando la distribución empírica con la distribución aleatoria respectiva a las probabilidades de responder correctamente cada reactivo. Entonces, la aplicación de manera adecuada de este estadístico permite decir si la manera en que los sujetos responden los reactivos de algunas pruebas es debida a la comprensión de lo que las pruebas examinan, o si es que simplemente están tratando de adivinar la respuestas correctas.

Las bases teóricas de la prueba estadística Kolmogorov-Smirnov son las siguientes:

Supóngase que hay dos variables aleatorias de distintos tamaños m y n sobre dos poblaciones F_X y F_Y; donde los estadísticos del orden de cada variable X, Y –i.e. el orden en el que acontecieron los sucesos de la variable aleatoria– son $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(m)}$ y $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \ldots\ldots Y_{(n)}$. Con dichas variables aleatorias se obtienen sus respectivas distribuciones empíricas.

Éstas distribuciones se definen de la siguiente manera:

$$S_m(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < X_{(1)} \\ \frac{k}{m} & \text{si } X_{(k)} \leq x < X_{(k+1)} \text{ para } k \in \{1, 2, \ldots\ldots, m-1\} \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(m)} \end{array} \right\}$$

$$S_n(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{si } x < Y_{(1)} \\ \frac{k}{n} & \text{si } Y_{(k)} \leq x < Y_{(k+1)} \text{ para } k \in \{1, 2, \ldots\ldots, n-1\} \\ 1 & \text{si } x \geq Y_{(m)} \end{array} \right\}$$

Se trata entonces, de observar la proporción en la que ocurren los sucesos de cada variable aleatoria con respecto a la otra –importa también el orden en el que ocurren. La curva de distribución es una curva monótona creciente que describe el orden de aparición de –y la proporción en la que lo hacen– los sucesos que forman parte de la variable aleatoria.

Esto es –dentro de una combinación del orden de los $m+n$ valores de las variables aleatorias $S_m(x)$ y $S_n(x)$– la proporción de X y Y tal que no exceden al número x. Es una manera de medir que tanto ocurre un evento de una variable aleatoria con respecto a los de la otra para saber si las distribuciones de ambas variables son iguales es cierta, es decir:

$H_0 : F_Y(x) = F_X(x)$ para toda x.

Debido a esta noción de diferencia entre distribuciones que la prueba estadística Kolmogorov-Smirnov es una prueba de dos colas –las curvas de distribución determinan dos regiones críticas–, pues sólamente hace observar si son distintas sin hacer diferencia sobre cuál de ellas supera a la otra. Si se supone desde un principio que la distribución de una variable supera a la otra, se puede tomar como una prueba de una sóla cola en cuyo caso sólo se observa una de las regiones críticas, o colas de la curva.

Para explicar esto último será necesario exponer el critero con el que se obtienen los valores de la tabla del estadístico Kolmogorov-Smirnov. Este criterio denotado por $D_{m,n}$ es el máximo de los valores absolutos de las diferencias entre las dos distribuciones a comparar:

$D_{m,n} = \underset{x}{máx} |S_m(x) - S_n(x)|$

Si se supusiera que hubiera una diferencia a favor de una distribución, entonces se tomaría la diferencia con un sentido; si por ejemplo se supusiera que $S_m(x)$ domina a $S_n(x)$ el estadístico se tomaría como:

$D_{m,n} = \underset{x}{máx}(S_m(x) - S_n(x))$, en cuyo caso sería una prueba de una sóla cola.

De la manera en que fue enunciada la hipótesis nula, se observa que la hipótesis alternativa es:

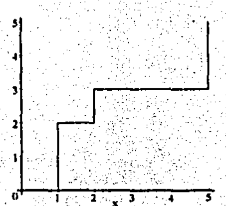
$H_A : F_Y(x) \neq F_X(x)$ para alguna x.

El significado de los valores obtenidos en las tablas indican entonces si la hipótesis respectiva al fenómeno se puede sostener, o si debe de ser rechazada –los valores se toman con respecto a una cierta probabilidad, entre más alta sea ésta, el valor del estadístico será mayor, y por lo tanto se reduce la región de rechazo. Es decir, se determina qué tan alta es la probabilidad de que ocurra un evento, y a partir de ésta discutir la naturaleza del suceso en cuanto a la posibilidad de ocurrencia de éste, bajo las hipótesis de los sucesos.

A continuación se expondrá la manera en que se calcula la probabilidad de que el valor $D_{m,n}$ sea mayor o igual a un valor observado empíricamente:

$P(D_{m,n} \geq d)$ donde $d = \underset{x}{máx}|S_m(x) - S_n(x)|$.

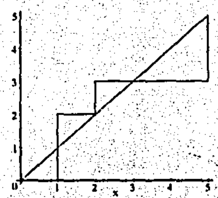
Primero se colocan los elementos de la muestra observada de manera creciente en magnitud. Esto se puede observar como una trayectoria en $\mathbb{R}^2$ que comienza en el origen y termina en el punto (m,n). Esta es también una manera de exhibir las distribuciones de las variables aleatorias; los tramos horizontales de la trayectoria representan la distribución de una variable aleatoria, y los tramos verticales de la trayectoria a la distribución de la otra variable. Por ejemplo, si los valores de las variables aleatorias están ordenados con la secuencia $x\ y\ y\ x\ y\ x\ x\ x\ y\ y$ entonces, esto se puede observar de la siguiente manera con la gráfica que se presenta a continuación:



Los valores de $mS_m(x)$ y $nS_n(x)$ son las coordenadas de los puntos (u, v)

en la trayectoria con $u, v \in \mathbb{Z}$. Entonces d es el máximo de las diferencias $|\frac{u}{m} - \frac{v}{n}| = |nu - mv|/mn$.

Si se observa ahora la recta que une al punto $(0,0)$ con (m,n) (que en este caso es $(5,5)$) cuya ecuación es $nx - my = 0$ se puede observar que la distancia vertical entre (u,v), que se encuentra sobre la trayectoria descrita, a la recta es: $|v - \frac{nu}{m}|$



Por lo tanto, nd es la distancia mayor de la diagonal a la trayectoria. Esto es puesto que:

$d = |\frac{u}{m} - \frac{v}{n}| = \frac{|nu-mv|}{mn}$

$nd = \frac{n|nu-mv|}{mn} = \frac{|nu-mv|}{m} = |\frac{nu}{m} - v| = |v - \frac{nu}{m}|$

En este caso el punto sobre la trayectoria más alejado de la diagonal es el punto $(5,3)$, de donde resulta que $d = 2$.

Lo importante de observar aquí, y lo que le da la razón al estadístico, es lo siguiente. El número total de combinaciones –en cuanto al orden– en las que pueden suceder m veces X, y n veces Y es $\binom{m+n}{m}$. Bajo la hipótesis nula H_0, cada una de las trayectorias derivadas por cada combinación tiene la misma probabilidad de ocurrir.

La probabilidad de un valor observado $D_{m,n}$ menor que d es el número de trayectorias tales que tienen puntos a una distancia de la diagonal menor a d dividido entre el número total de trayectorias. Es decir, $\binom{m+n}{m}$.

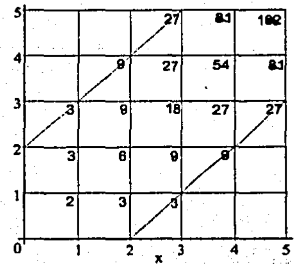
Ahora, se construye una vecindad al rededor de la diagonal con los puntos que distan menos que nd de manera vertical. Sea $A_{m,n}$ el número de trayectorias posibles entre $(0,0)$ y (m,n) en tal vecindad.

Entonces la probabilidad que se busca es:

$P(D_{m,n} \geq d) = 1 - P(D_{m,n} \ll d) = 1 - \frac{A_{m,n}}{\binom{m+n}{m}}$

$A_{m,n}$ se puede calcular con una fórmula recursiva –sobre los puntos con coordenadas enteras (u,v) $u, v \in \mathbb{Z}$– de la siguiente manera: $A_{u,v} = A_{u-1,v} + A_{u,v-1}$ con las condiciones para los puntos en la frontera de que $A_{0,v} = A_{u,0} = 1$.

Es decir, $A_{u,v}$ es la suma de los valores en las intersecciones donde el punto anterior de la trayectoria pudo haber estado antes de llegar al punto (u, v) sin salir del área delimitada.



En el caso del ejemplo, hay dos trayectorias distintas para llegar al punto $(1, 1)$, por lo tanto $A_{1,1} = 2$. Para observar cómo funciona la fórmula recurrente mencionada se expondrá por qué $A_{1,1} = 2$; los vértices con entradas enteras anteriores al $(1,1)$ son $(1,0)$ y $(0,1)$ –son los únicos en el área delimitada– donde en cada uno de ellos $A_{m,n}$ vale 1 pues son elementos de la frontera donde se cumple la condición. Entonces, es fácil observar que $A_{2,2} = 6$, y por último, haciendo las cuentas a partir de los vértices en el área que le preceden,

$A_{5,5} = 162$.

Por lo tanto $A_{u,v}$ es la suma de los valores en los puntos con entradas enteras sobre los que pasó la trayectoria manteniéndose en la vecindad de la diagonal. Como se mencionó, en este caso $nd = 10$ $(d = 2, n = 5)$ y $A_{5,5} = 162$.

Entonces, $P(D_{4,5} \geq 2) = 1 - \frac{162}{\binom{10}{5}} = \frac{162}{252} = .64286$

Lo anteriormente expuesto es una manera muy simple de mostrar el razonamiento de la prueba estadística. Sin embargo, si el número de eventos es muy grande resulta muy complicado calcular la probabilidad de que las trayectorias –que representan a las distribuciones– se encuentren relativamente cerca. Al respecto Smirnov demostró que

$$\lim_{m,n\to\infty} P(\sqrt{\tfrac{mn}{m+n}}D_{m,n} \leq d) = \mathrm{L}(d) = 1 - 2\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}e^{-2i^2d^2}$$

con la restricción de que $\frac{m}{n}$ se mantuviera con un valor constante al tomar el límite. El límite permite hacer los cálculos para números de eventos grandes.

La restricción sobre la proporción entre los eventos es debido a una probabilidad inicial sobre ellos. Por ejemplo, al tirar monedas al aire la probabilidad de que esta caiga con una cara o la otra hacia arriba es $\frac{1}{2}$; si no se mantuviera tal probabilidad o la proporción en la que resulta cada cara se podría pensar que dicha moneda está cargada hacia una cara. Lo mismo sucede con los dados como un segundo ejemplo; en este caso la probabilidad por cada valor es de un $\frac{1}{6}$ si el dado es de seis caras ($\frac{1}{n}$ si tiene n caras).

A partir de éstas probabilidades de que ocurra un fenómeno, se obtienen los valores del estadístico (tablas) con los que se comparan los resultados de una muestra.

Para analizar e interpretar los resultados de los experimentos se utilizó ésta prueba estadística. Esto se realizó en todas las fases del experimento; es decir, en cada una de las pruebas piloto que ayudaron al diseño final de la prueba al igual que en la prueba final.

3 Resultados

3.1 Experimento Inicial

El interés en este primer experimento giró alrededor de la comprensión de un grupo; para esto se hizo uso del concepto de isomorfismo de grupos. Se aplicaron dos pruebas equivalentes bajo isomorfismo. Las pruebas constaban de dos partes, una sobre el grupo de simetrías y otra sobre el grupo de permutaciones; las preguntas en cada prueba eran equivalentes bajo el isomorfismo entre estos dos grupos. La diferencia entre las pruebas fue el orden en el que se presentaron los grupos. Entonces, para analizar la comprensión del grupo se comparó la manera de resolver la prueba respecto a cada grupo, en función de si fue el primer o segundo grupo expuesto. También se analizó si el orden en el que se presentaban los estímulos influía en la manera de resolver la prueba en general –es decir, independientemente del grupo del que se tratara. Se diseñaron cuatro pruebas distintas; las características de éstas se describen a continuación:

(i) Exhibición de los elementos del grupo en orden semi-aleatorio (todos se examinaban la misma cantidad de veces) durante toda la prueba;

(ii) Durante la primera mitad se exhibían por bloques cada una de las transformaciones, y durante la segunda mitad se examinan todas en orden aleatorio;

(iii) Durante las primeras tres cuartas partes se exhibían por bloques cada una de las transformaciones, y durante la última parte se examinan todas en orden aleatorio;

(iv) Durante toda la prueba se exhibían por bloques cada una de las transformaciones; ya no había un bloque en el que se examinaran de manera aleatoria.

Aunque la manera de exhibir los elementos del grupo en las cuatro pruebas fueron esencialmente distintas en cuanto al orden. Las preguntas eran idénticas en todos los casos –es decir, tenían los mismos estímulos y las mismas opciones de respuesta–; la única diferencia radicó entonces en el orden en el que eran examinadas. De esta manera se trató de hacer todas las pruebas equivalentes.

Para evitar que los sujetos pensaran que las respuestas correctas correspondían a las figuras en función de la posición en la que aparecía se evitó que la respuesta correcta estuviera en la misma posición más de dos veces consecutivas.

La prueba respectiva a la examinación de reactivos de una sóla transformación estaba constituída por 64 preguntas, 16 por cada una de las transformaciones elegidas.

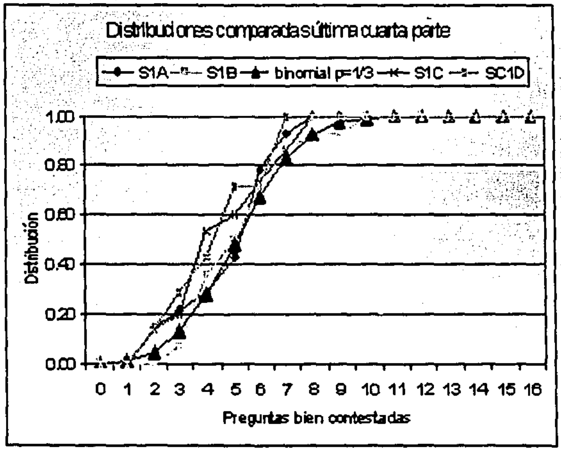
En cuanto a la composición de transformaciones; se diseño una prueba única de 32 preguntas. Entonces, la única diferencia que habría entre las pruebas de composición sería la prueba con la que aprenden lo que cada una de las transformaciones por sí misma hace.

En todas las pruebas –las de una sóla transformación y las de composición– se analizó sólamente la última cuarta parte de la prueba –en la cual ya no se le indicaba al sujeto si había contestado de manera correcta o incorrecta. Para todas, excepto para la de la forma (iv), la última cuarta parte era idéntica. En las pruebas de la forma (iv) se tomaba el conjunto equivalente a ésta. La razón para analizar sólamente esta parte es que en ésta ya debiera estar fundamentado un aprendizaje después de haber recibido todos los estímulos correspondientes (o equivalentes) a las primeras terceras cuartas partes. Para las pruebas sobre la composición se analizó la segunda parte, donde tampoco se les indicaba si habían respondido de manera correcta o no.

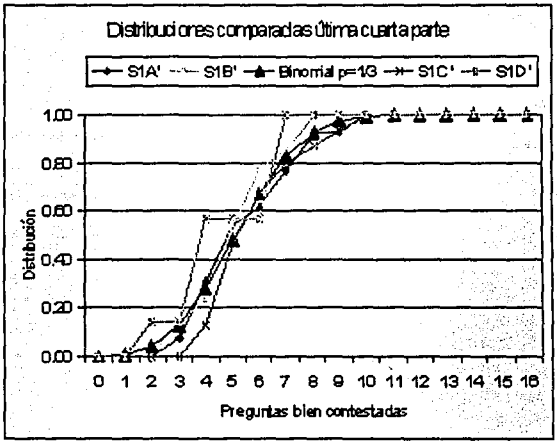
La hipótesis nula respectiva al experimento es que las distribuciones empíricas de todas las pruebas son iguales a la distribución binomial p=$\frac{1}{3}$.

Todas las pruebas se aplicaron en el Taller de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM a sujetos de ambos sexos entre 18 y 24 años de edad no zurdos.

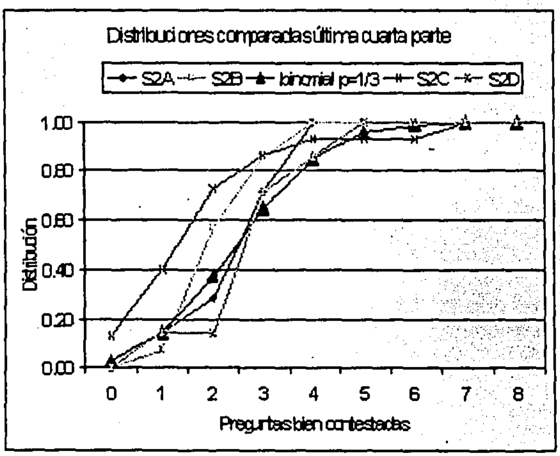
En las gráficas 1 - 8 se muestran los resultados obtenidos:



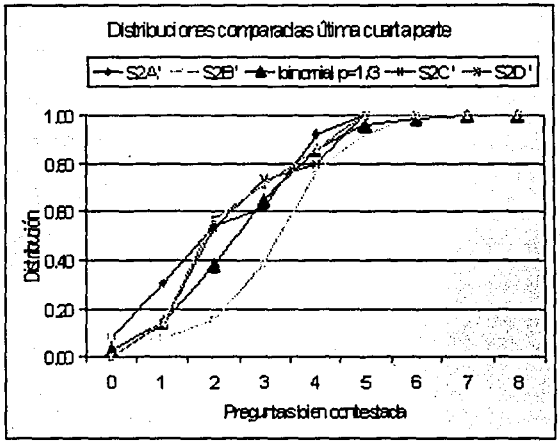
Gráfica 1: Una sóla simetría, primer grupo



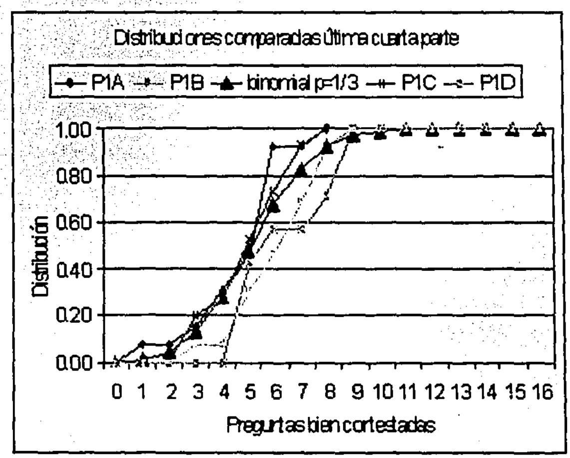
Gráfica 2: Una sóla simetría, segundo grupo



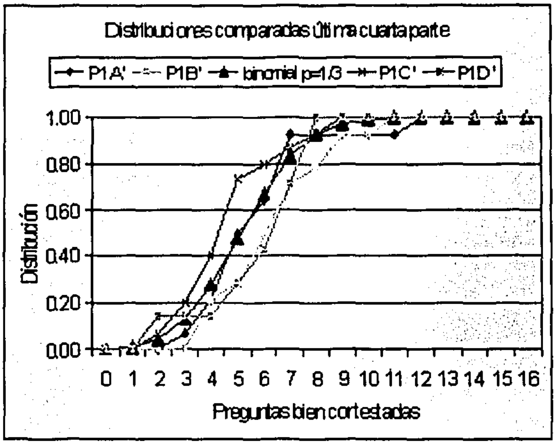
Gráfica 3: Composición de simetrías, primer grupo



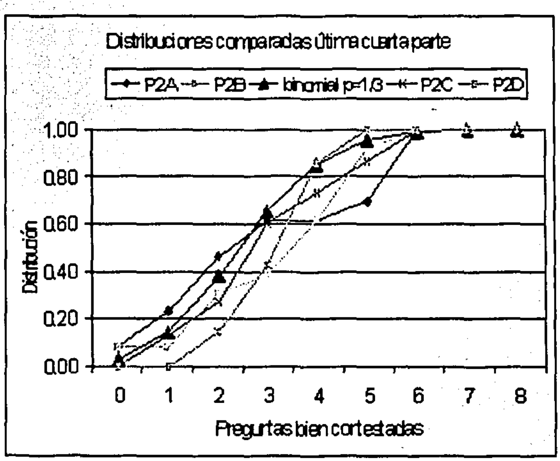
Gráfica 4: Composición de simetrías, segundo grupo



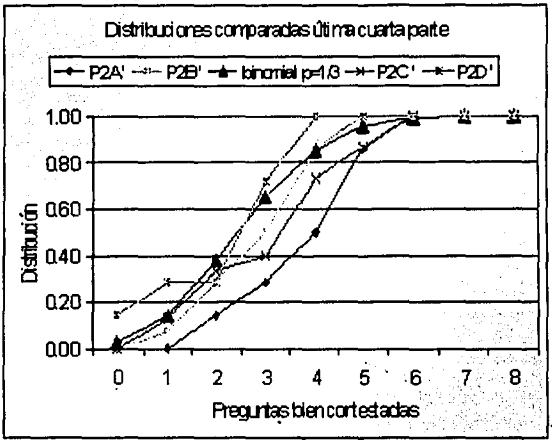
Gráfica 5: Una sóla permutación, primer grupo



Gráfica 6: Una sóla permtuación, segundo grupo



Gráfica 7: Composición de permutaciones, primer grupo



Gráfica 8: Composición de permutaciones, segundo grupo

Las distintas pruebas fueron denotadas de la siguiente manera:

S1A - exhibición de manera aleatoria. (S-simetrías del cuadrado)

S1B - exhibición durante la primera mitad de bloques iterados de la misma transformación y la segunda mitad de manera aleatoria.

S1C -exhibición durante las primeras tres cuartas partes en bloques iterados y la última cuarta parte de manera aleatoria.

S1D -exhibición de las transformaciones durante toda la prueba de manera iterada.

Lo equivalente para el subgrupo de permutaciones son las pruebas P1A, P1B, P1C y P1D.

La comilla aparece cuando el grupo examinado fue el segundo grupo expuesto. Las pruebas de composición de transformaciones fueron idénticas; para diferenciar el tipo de prueba que le antecedía –para estudiar si la forma de exhibir a los elementos del grupo influía o no en la percepción– el único cambio en el nombre de la prueba es el dígito. Es decir, si el sujeto había resulto la prueba S1A, entonces a la prueba sobre composición de simetrías se le llamaba S2A.

Los resultados de la segunda mitad de cada prueba se compararon con una distribución binomial con probabilidad un tercio para analizar al igual que en la primera si la manera de resolver los sujetos las pruebas era distinta a la aleatoria. Se decidió hacer sólamente el análisis en la segunda mitad para analizar el aprendizaje y no permitir que la casualidad de respuestas correctas al principio de la prueba pudiera afectar los resultados que respaldaran un posible aprendizaje cuando no lo hubiera.

Para tomar el valor respectivo del estadístico a la prueba se tomó el número de eventos posibles –17, pues también se toma en cuenta que no conteste ninguna correcta–, y el valor correspondiente al 0.95 cuantil –i.e. se buscó una confianza del 95%– para una prueba de dos colas, debido a que sólo se busca analizar si las distribuciones son distintas.

El valor del estadístico Kolmogorov-Smirnov correspondiente a una prueba con 17 posibles eventos, y con una probabilidad del 95% de confianza –tomado de la tabla del estadístico del libro *Practical Nonparametric Statistics; Conover, W.J.*, 1993– es de $\frac{7}{17} = 0.411\,76$. Éste es un valor –de las diferencias entre las distribuciones empíricas y la aleatoria– que no rebasa ninguno de las pruebas de una sola caja. El valor correspondiente a las pruebas de dos cajas –9 posibles eventos, probabilidad 95%– es de $\frac{5}{9} = .555\,56$. Éste también es un valor que ninguna prueba rebasa en cuanto a la diferencia entre su distribución empírica y la distribución binomial $p=\frac{1}{3}$:

S1A	0.11	P1A '	0.10
S1B	0.08	P1B '	0.19
S1C	0.25	P1C '	0.26
S1D	0.24	P1D '	0.25
P1A	0.25	S1A '	0.06
P1B	0.21	S1B '	0.10
P1C	0.11	S1C '	0.15
P1D	0.28	S1D '	0.29

para la composición:

S2A	0.14	P2A '	0.36
S2B	0.21	P2B '	0.15
S2C	0.36	P2C '	0.25
S2D	0.23	P2D '	0.14
P2A	0.27	S2A '	0.16
P2B	0.27	S2B '	0.27
P2C	0.12	S2C '	0.16
P2D	0.23	S2D '	0.19

Vale la pena, observar que nadie fue capaz de declarar verbalmente lo que hacían las cajas. Con base a los resultados obtenidos se acepta la hipótesis nula, es decir que no hubo aprendizaje alguno, en ninguna de las pruebas.

Éstos resultados demuestran lo complicado que es el concepto; y en general también demuestran que si importa la forma en que es examinado, ésto es en cuanto a si se muestran por bloques o de manera aleatoria. Hay algunos detalles a observar al respecto de éstos resultados, pues son varios los factores que pudieron haber intervenido sobre ellos. A continuación se mencionan algunos que se consideran fundamentales:

-La poca agilidad de mover el 'mouse' debido al programa en el que se compilaron las pruebas,

-La cantidad de reactivos y de estímulos –había una figura distinta por cada reactivo,

-La duración de la prueba –duraba 20 minutos.

Se pensó entonces que se debían de hacer cambios para mitigar la influencia de tales factores.

El primer cambio que se hizo a este primer experimento fue cambiar la manera de constetar los reactivos. Se realizó una prueba en la que los sujetos fueron capaces de resolver los reactivos con el teclado. En vez de elegir haciendo 'click', los sujetos podían escoger con las teclas '1', '2' y '3' si la respuesta que se escogía era la 'izquierda', 'centro' ó 'derecha'. Al igual que con el mouse, si al sujeto le daba tiempo podía cambiar la respuesta apretando la tecla equivalente a su nueva elección. Esto agilizó la elección de las respuestas, sin embargo no fue suficiente, las respuestas se distribuyeron de manera similar a las del primer experimento. Esta manera de resolver la prueba indicó que gran parte de la dificultad de la prueba radicó en la cantidad de estímulos. Fue necesario reducir el número de estímulos para que el sujeto no distrajera su atención de la acción de las cajas sobre los estímulos.

3.2 Experimento Final

Se decidió restringir la prueba a sólo un grupo para evitar confusiones, se eligió a D_4 como grupo a exhibir pensando en la sutilidad que éste puede tener para ser expuesto escogiendo bien las figuras con las que se exhibía la acción. Se redujo el número de reactivos por elemento del grupo a exhibir al igual que el orden. Ahora habría pruebas exclusivas para cada elemento del grupo. Es decir, habría partes de la prueba que examinaran, por un tramo sólamente, la acción de un elemento del grupo.

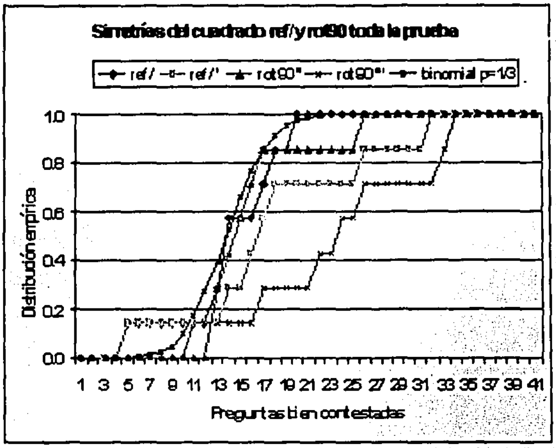
Se consideró solamente a una figura con la cual mostrar la acción de los elementos de D_4 escogidos, la figura elegida fue la letra F. Sin embargo, para evitar que los sujetos pensarán que la respuesta es siempre la misma y no tomaran en cuenta la dependencia de la respuesta en función del color de la caja, se consideraron como estímulos también a las imágenes de la figura F bajo todas las simetrías en D_4. También, en los primeros 12 reactivos de cada prueba la figura era siempre la F -sin ninguna alteración- para propiciar la comprensión de la simetría respectiva. En los reactivos siguientes la F no siempre entraba tal cual, a veces entraba girada o reflejada.

El hacer la prueba por bloques de elementos hizo necesario averiguar si el orden de presentar a dichos elementos influye en la manera de resolver la prueba. Para analizar esto se realizó una prueba -de 40 reactivos- en la que sólo se examinaran dos simetrías, la mitad de la población resolvería en un orden dado la prueba, y la otra mitad la resolvería en el orden inverso. Entonces, no sólo se analizaría la diferencia entre la distribución empírica de cada una de las pruebas en función de la simetría y la distribución binomial, sino que también se haría un análisis entre pruebas de la misma simetría para averiguar si el orden en el que se exhiben influye en la manera en la que se responden las pruebas.

Las simetrías elegidas fueron la rotación de 90° (ϕ) y la reflexión diagonal '/' (ρ_d); se escogieron éstas por el interés de examinar si la rotación influía de manera positiva en la manera de resolver los reactivos respectivos a la reflexión mencionada, que es una simetría poco usual.

La hipótesis nula al respecto de este segundo experimento es la misma que en la anterior: las distribuciones empíricas de ambas partes de las pruebas respectivas son iguales a la distribución aleatoria; y además, las distribuciones empíricas respectivas a las pruebas sobre la misma simetría tomadas por pares son también iguales.

La prueba se aplicó en el Taller de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM a 14 alumnos de ambos sexos entre 18 y 24 años de edad, no zurdos. La decisión sobre cual era la primer simetría examinada fue aleatoria; este orden fue decidido antes de aplicar todas las pruebas a los sujetos. En la figura 9 se presentan las gráficas de los resultados de la primera prueba piloto:



Gráfica 9: Distribución ref '/' vs. rot 90

En este caso la leyenda de la gráfica es la siguiente:

ref / – la prueba de ρ_d, siendo la primer simetría expuesta.

ref / ' – la prueba de ρ_d, siendo la segunda simetría expuesta.

rot90° – la prueba de ϕ, siendo la primer simetría expuesta.

rot 90° ' – la prueba de ϕ, siendo la segunda simetría expuesta.

Binomial p=$\frac{1}{3}$ – la distribución binomial con probabilidad un tercio.

De la gráfica anterior son claras dos cosas; la primera es que la simplificación de la prueba al exhibir sólo 8 figuras, se reflejó en que los sujetos tuvieron más respuestas correctas que en el experimento anterior; la segunda es que se demuestra que el orden en el que se presentan las simetrías es un factor de importancia significativa. Ahora se analiza toda la prueba, ya no sólo la última cuarta parte. En este caso el valor del estadístico Kolmogorov-Smirnov para una prueba de 41 posibles eventos al 95% de probabilidad es de $\frac{1.92}{\sqrt{41}} = .299\,85$. Las diferencias entre las distribuciones –con respecto a la distribución aleatoria– arrojadas por la prueba son las siguientes:

ref /	0.197	rot 90° '	0.705
rot90°	0.274	ref / '	0.372

Los resultados son bastante interesantes pues muestran que el orden en el que se exhiben las simetrías influye en la percepción de las mismas. Esto se observa a partir del hecho de que la primera vez que se exhibe cada simetría, la diferencia de sus respectivas distribuciones empíricas con respecto a la distribución binomial no rebasan el valor del estadístico; sin embargo, en las pruebas respectivas a cuando son expuestas como segunda simetría exhibida, los valores arrojados por la prueba, claramente, rebasan el valor del estadístico por lo que se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa de que las distribuciones son distintas. Lo cual significa que hubo un aprendizaje que incentivó un mejor desenvolvimento en la resolución de la segunda parte de la prueba.

Ahora, las diferencias entre las pruebas de la misma simetría con respecto al orden en el que fue expuesta fueron las siguientes:

rot90° vs. rot90° '	0.571
ref / vs. ref / '	0.286

Con el mismo valor para el estadístico, se obtiene claramente que para ϕ –rotación de 90°– influyó el orden en el que las simetrías fueron expuestas. Para ρ_d –la reflexión diagonal– la diferencia no resultó ser significativa, pero si hubo un mejor desenvolvimiento en la resolución de los reactivos al haber sido expuesta primero la rotación.

Por lo tanto se puede afirmar que el orden en el que se presentan las simetrías influye en el desempeño de los sujetos al resolver las pruebas.

En cuanto a la declaración verbal de lo comprendido, ningún sujeto fue capaz de resolver las preguntas de forma correcta. Un par de sujetos contestaron que dentro de la caja respectiva a la reflexión sucedían dos transformaciones, pero no sabían decir cuáles precisamente.

A partir de los resultados de éste experimento piloto respecto al orden, se hicieron los últimos cambios. En este experimento se consideró el siguiente orden para presentar las cuatro simetrías –en pruebas de 28 reactivos cada una–: primero la *Identidad* – e; luego la rotación de 90° – ϕ; posteriormente la reflexión vertical – ρ_v; y por último la reflexión diagonal – ρ_d. Se escogió la *Identidad* al principio para que el sujeto fuera capaz de comprender la dinámica de la prueba pronto –es decir, que entienda cómo debe realizar la elección–; el orden de la rotación y la reflexión vertical se determinó así, pensando que el ser expuestas en ese orden ayudaría a resolver de manera satisfactoria la prueba relativa a la reflexión diagonal, que es la simetría que es composición –en ese orden– de la rotación y reflexión vertical.

Se retomó el interés por estudiar la comprensión de la composición de elementos del grupo; para esto se aplicó la categorización hecha en el experimento 1 respecto al tipo de componentes –es decir, composición con el neutro, potencias y composiciones distintas a las otras dos categorías anteriores. Éstas pruebas de composición constaron de 20 reactivos cada una; para el análsis sólo se contaron los últimos 16 para evitar que el descontrol de observar por primera vez una composición tuviera algún efecto sobre los resultados. También se diseñaron unas pruebas cortas que hicieran la función de recordatorios sobre la acción de cada elemento del grupo. Éstas constaban de 8 reactivos, donde aparecía cada una de las simetrías escogidas orginalmente, dos veces.

Este último tipo de pruebas se aplicarían al finalizar la parte de la prueba respectiva a la acción de un sólo elemento, y entre cada una de las pruebas sobre composición de elementos, con la intención de que sirvan a mejorar la resolución de las preguntas respectivas a las composiciones de elementos del grupo.

El orden en que se mostraron las distintas categorías hechas sobre composición de elementos fue el siguiente:

(i) Composición con el neutro;

(ii) Potencias de los elementos del grupo;

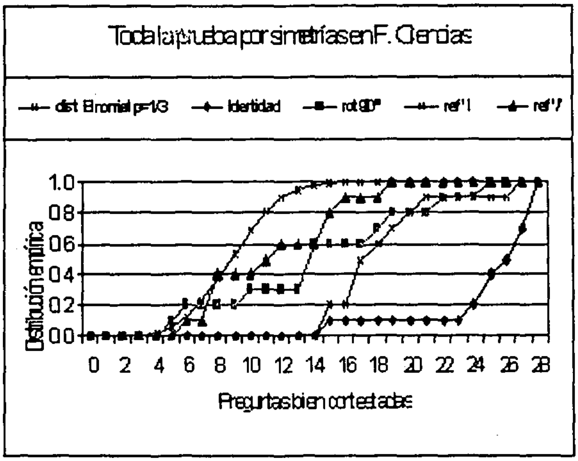
(iii) Composición de elementos que no cumplen con las características de las anteriores; y por último

(iv) Elementos de las categorías anteriores en la misma proporción –es decir, dos de cada una.

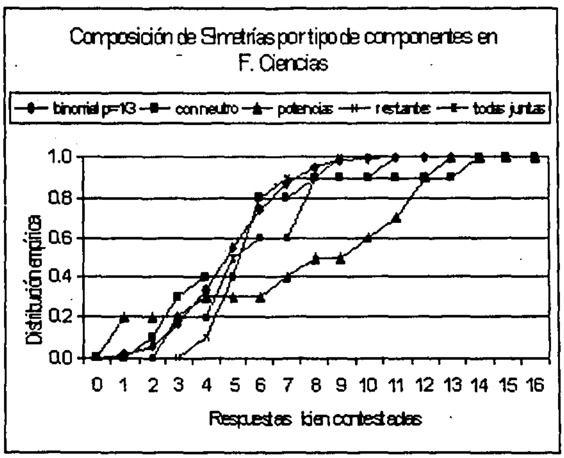
La elección del orden fue hecha así, para emular el orden escogido y discutido sobre la acción de un sólo elemento. Por eso se comienza con los que tienen que ver con el neutro (*Identidad*) y se termina con los elementos que no están relacionados entre sí –en cuanto a que sean ellos mismos, ni que tengan algo que ver con el neutro; que debieran ser las composiciones más complicadas por no poder hacer una relación entre los componentes fácilmente.

También se amplió la población experimental aplicando la prueba no sólo en el Taller de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la UNAM, sino que también en el Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras de la UNAM. Los sujetos experimentales fueron personas de ambos sexos, entre 18 y 24 años de edad, no zurdos.

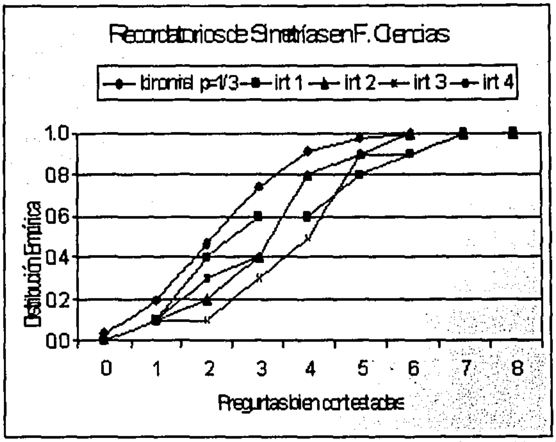
Los análisis fueron entonces, los respectivos a cada prueba dependiendo de la simetría. También interesó discutir al respecto de la locación donde se realizó cada prueba; por lo tanto, se realizó también el análisis estadístico respecto a las mismas pruebas en locaciones distintas. En todos los casos, la hipótesis nula es que las distribución empíricas de las pruebas y la distribución binomial son iguales.



Gráfica 10: Una sóla simetría, F. Ciencias



Gráfica 11: Composición simetrías, F. Ciencias



Gráfica 12: Pruebas intermedias, F. Ciencias

La terminología en las gáficas 10 - 12 es la siguiente:

Para las pruebas de una sóla transformación la leyenda es evidente, de éstas pruebas la última es INT1 que consiste de 8 reactivos combinados de las cuatro simetrías, distribuidas de manera aleatoria y equitativa –2 veces cada una.

INT2, INT3, INT4 - bloques intermedios con todas las simetrías.

Para las pruebas de composición de transformaciones la leyeda es también evidente.

El análisis sobre el aprendizaje en las pruebas aplicadas en el Taller de Matemáticas de la Facultad de Cienicas arrojaron los siguientes resultados, en cuanto a la diferencia entre las distribuciones empíricas y la binomial:

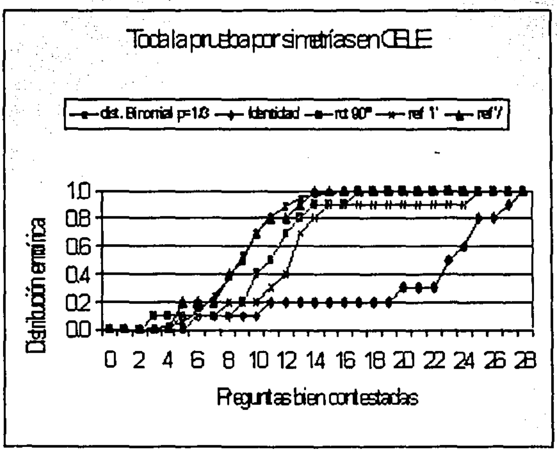
Identidad	0.978
Rotación 90°	0.650
Reflexión vertical	0.978
Reflexión diagonal	0.378
Composición con neutro	0.147
Potencias	0.484
Composiciones restantes	0.239
Composiciones combinadas	0.273
Intermedio 1	0.312
Intermedio 2	0.341
Intermedio 3	0.441
Intermedio 4	0.341

El valor del estadístico respectivo para una prueba de dos colas con 29 eventos, al 95%, es $\frac{10}{29} = .344\,83$; por lo que para todas las pruebas de una caja la hipótesis nula debe ser rechazada y se obtiene que las distribuciones son distintas a la distribución binomial; y por lo tanto se afirma que en tales pruebas se da un aprendizaje.

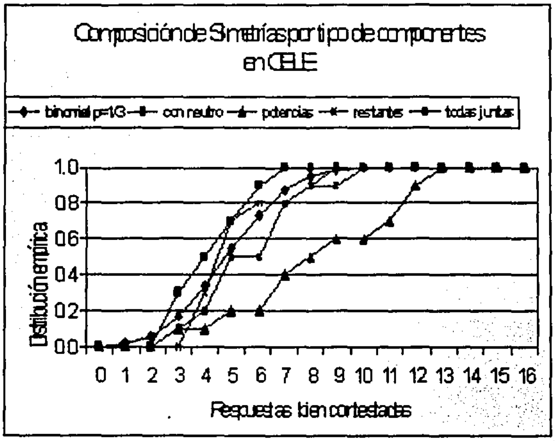
El valor del estadístico respectivo para una prueba de dos colas con 17 eventos, al 95%, es $\frac{7}{17} = .411\,76$; en este caso la única prueba que arroja un valor que rebasa al estadístico es la prueba de composición de potencias. Entonces, sólo se puede afirmar que hay un aprendizaje en la percepción de la potencia de las simetrías escogidas. Para las restantes no hay aprendizaje.

El valor del estadístico respectivo para una prueba de dos colas con 9 eventos, al 95%, es $\frac{5}{9} = .555\,56$; en ninguna de las pruebas intermedia se puede afirmar que haya un aprendizaje pues los valores arrojados por la prueba no superan al estadístico.

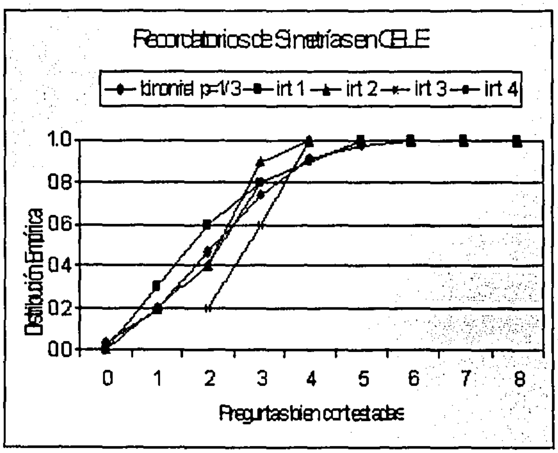
El análisis respectivo a la prueba aplicada en el Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras de la UNAM es el siguiente:



Gráfica 13: Una sóla simetría, CELE



Gráfica 14: Composición simetrías, CELE



Gráfica 15: Pruebas intermedias, CELE

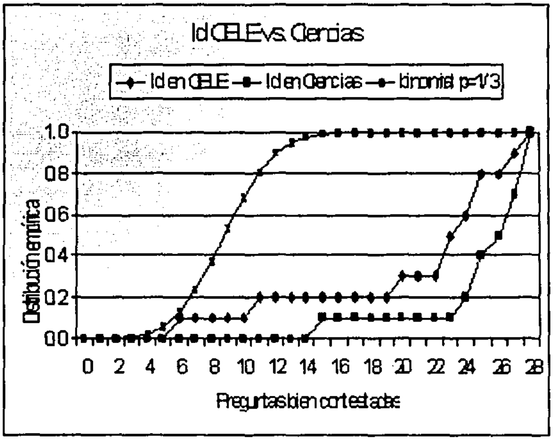
Identidad	0.800
Rotación 90°	0.336
Reflexión vertical	0.509
Reflexión diagonal	0.143
Composición con neutro	0.163
Potencias	0.537
Composiciones restantes	0.166
Composiciones combinadas	0.237
Intermedio 1	0.131
Intermedio 2	0.158
Intermedio 3	0.268
Intermedio 4	0.068

El valor del estadístico respectivo para una prueba de dos colas con 29 eventos, al 95%, es $\frac{10}{29} = .344\,83$; entonces se obtiene que para las pruebas de la *Identidad* y ρ_v la hipótesis nula debe ser rechazada. Por lo tanto, en éstas dos pruebas se puede sostener que si hay un aprendizaje, pues los sujetos contestan correctamente más allá de la probabilidad.

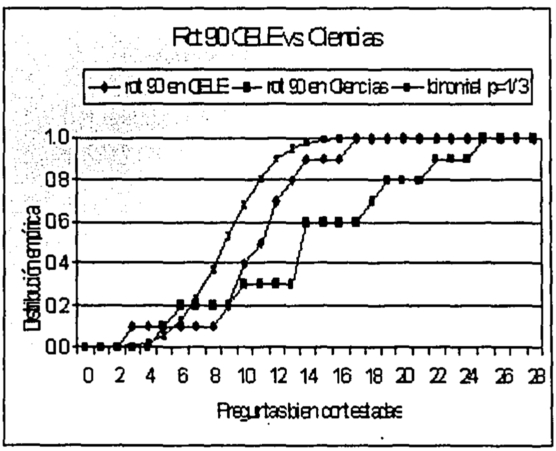
El valor del estadístico respectivo para una prueba de dos colas con 17 eventos, al 95%, es $\frac{7}{17} = .411\,76$; en este caso, al igual que en la Facultad de Ciencias, la única prueba que arroja un valor que rebasa al valor del estadístico es la prueba de composición de potencias. Entonces sólo se puede afirmar que hay un aprendizaje en la percepción de la potencias de las simetrías escogidas.

El valor del estadístico respectivo para una prueba de dos colas con 9 eventos, al 95%, es $\frac{5}{9} = .555\,56$; entonces en ninguna de las pruebas intermedias se puede afirmar que haya un aprendizaje.

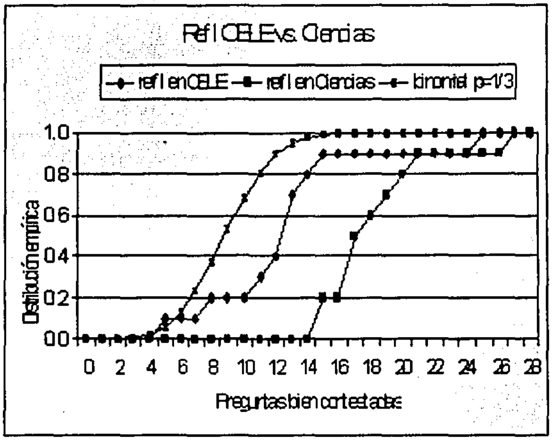
Ahora, en las gráficas restantes, se muestra la comparación de las distribuciones empíricas en función de las locaciones, también se muestran las distribuciones binomiales respectivas como referencia.



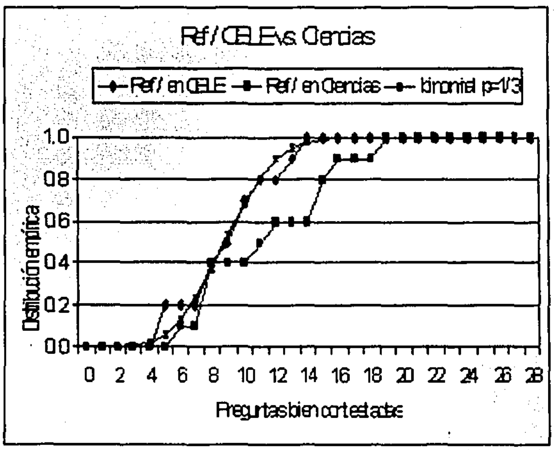
Gráfica 16: Identidad, CELE vs. F. Ciencias



Gráfica 17: Rot 90°, CELE vs. F. Ciencias



Gráfica 18: Ref '|', CELE vs. F. Ciencias

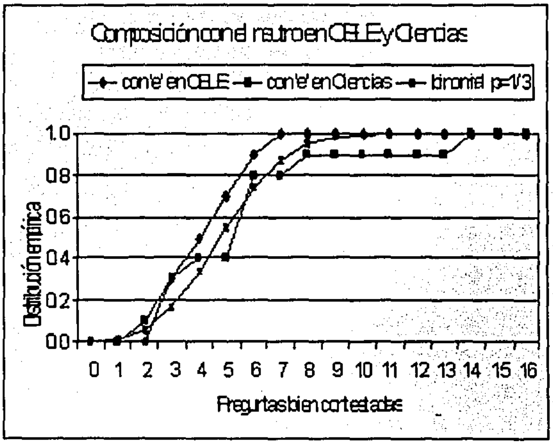


Gráfica 19: Ref '/', CELE vs. F. Ciencias

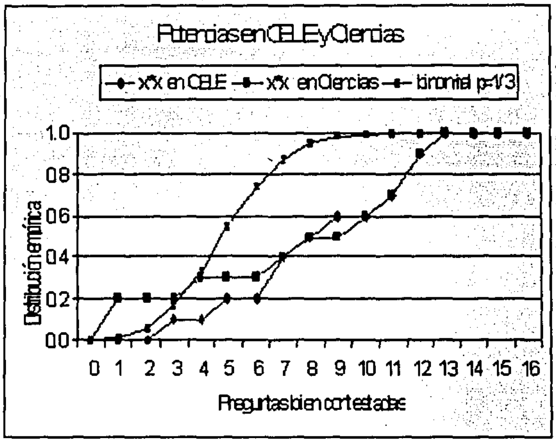
Los resultados arrojados por las pruebas de una sola simetría son los siguientes:

Identidad	0.400
Rotación 90°	0.500
Reflexión vertical	0.800
Reflexión diagonal	0.400

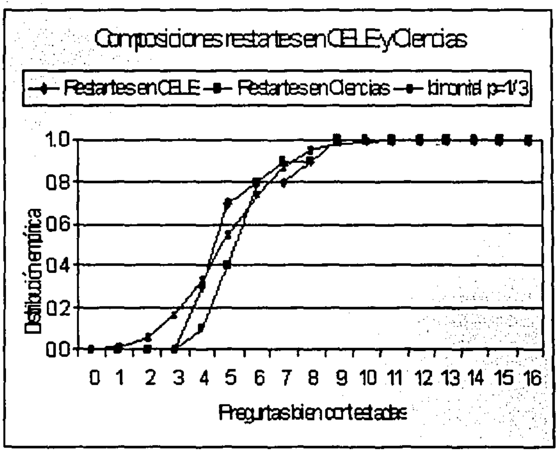
El valor respectivo del estadístico (29 eventos al 95%) es $\frac{10}{29} = .344\,83$, que es un valor que todas las pruebas, claramente, rebasan. Por lo tanto se afirma que existe una diferencia entre las distribuciones en función de la locación, todas a favor de la Facultad de Ciencias.



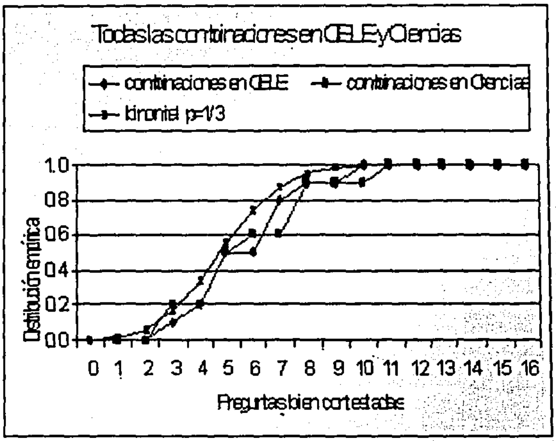
Gráfica 20: Composición con neutro, CELE vs. F. Ciencias



Gráfica 21: Potencias, CELE vs. F. Ciencias



Gráfica 22: Composiciones restantes, CELE vs. F. Ciencias

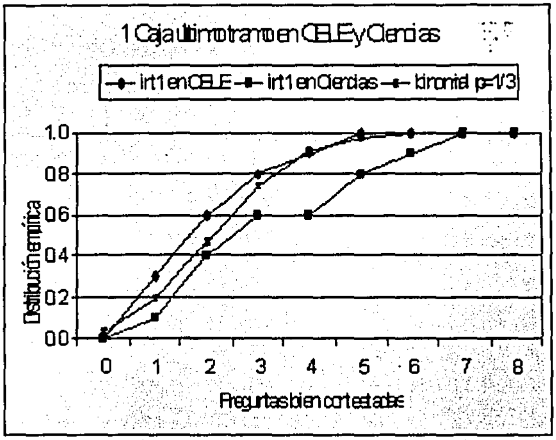


Gráfica 23: Composiciones varias, CELE vs. F. Ciencias

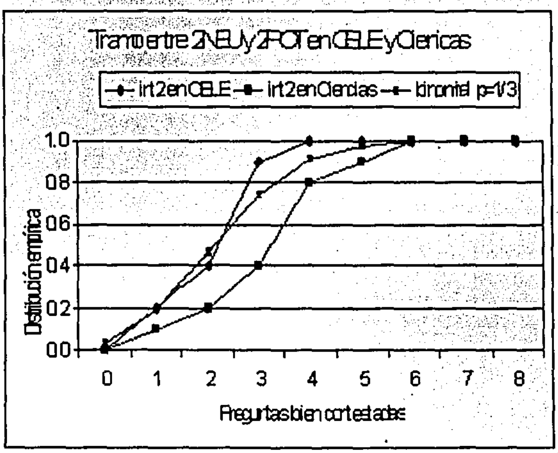
Los resultados arrojados por las pruebas sobre composición de simetrías son los siguientes:

Composición con neutro	0.300
Potencias	0.200
Composiciones restantes	0.300
Composiciones combinadas	0.200

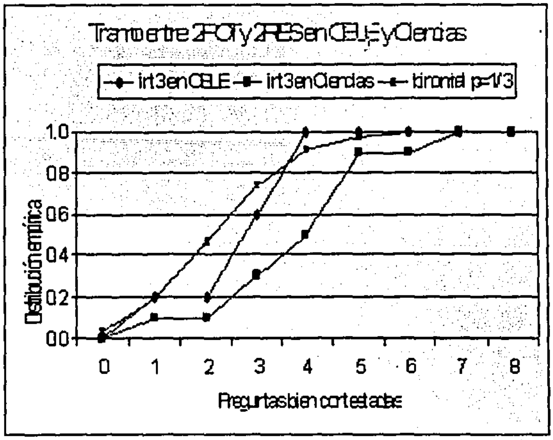
El valor respectivo del estadístico (17 eventos al 95%) es de $\frac{7}{17} = .411\,76$, que es un valor que ninguna de las pruebas rebasa. Por lo tanto no existe una diferencia entre las distribuciones en función de la locación.



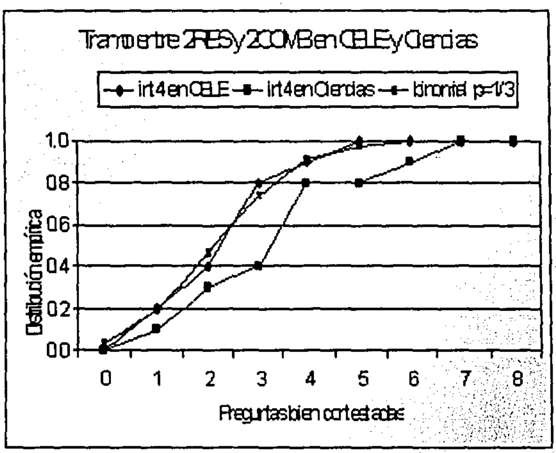
Gráfica 24: Intermedio 1, CELE vs. F. Ciencias



Gráfica 25: Intermedio 2, CELE vs. F. Ciencias



Gráfica 26: Intermedio 3, CELE vs. F. Ciencias



Gráfica 27: Intermedio 4, CELE vs. F. Ciencias

Los resultados arrojados por las pruebas intermedias son los siguientes:

Intermedio 1	0.300
Intermedio 2	0.500
Intermedio 3	0.500
Intermedio 4	0.400

El valor respectivo del estadístico (9 eventos al 95%) es de $\frac{5}{9} = .555\,56$, que es un valor que ninguna de las pruebas rebasa. Por lo tanto no existe una diferencia entre las distribuciones en función de la locación.

En cuanto a la posibilidad de declarar verbalmente sobre los conceptos que fueron examinados en el Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras nadie fue capaz de declarar de manera correcta lo que las cajas, distintas a la de la *Identidad*, hacían. Los resultados dan la impresión de que los sujetos son capaces de comprender a la *Identidad* por sí misma, pero no son capaces de llevar esta comprensión a la interacción de ésta con las demás simetrías.

En la Facultad de Ciencias, los sujetos pudieron, todos, declarar lo que hacía la *Identidad*; algunos pudieron declarar otras; pero nadie fue capaz de explicar lo que la caja relacionada con ρ_d hacía.

En ninguna de las dos locaciones, las respuestas a las preguntas respecto a la composición fueron satisfactorias.

4 Conclusiones

Como fue mencionado anteriormente, el interés del experimento fue analizar la existencia de un aprendizaje del tipo implícito del concepto de grupo. Para el diseño de las pruebas se utilizaron algunas de sus propiedades algebraicas, como el isomorfismo. Sin embargo, no bastó con este concepto para exhibir un grupo de manera satisfactoria; una razón por la que se cree que la exhibición fue infructuosa es el hecho de no haber tenido un orden explícito dentro de los reactivos. De la misma manera se puede concluir que la cantidad de reactivos dentro de la prueba es un factor de fatiga que influye en la resolución de la prueba por parte de los sujetos. Otro factor influyente en la percepción de D_4 –el grupo de simetrías del cuadrado– fue, sin duda, el hecho de que en cada reactivo aparecía un estímulo distinto con el que se mostraban las simetrías.

Se realizaron entonces tres cambios en el diseño. Primero, respecto al grupo a exhibir, ya no se exhibieron un par de grupos isomorfos, sino que se estudió solamente la comprensión de D_4. Segundo, se disminuyeron los estímulos en cada reactivo, presentándose sólamente ocho estímulos distintos para todas las simetrías–, y tercero, el orden de exhibición de los elementos del grupo.

En cuanto a esto último, al hacer los cambios en el orden pertinente; se estudió si la exposición de otras propiedades de los grupos –como la cerradura– ayuda a la comprensión de los elementos. Es decir, los cambios en el orden permitieron analizar si la exhibición de dos elementos cuya composición es un tercero es tal que incentiva la manera de resolver el reactivo correspondiente al resultado de la composición.

Para estudiar la posibilidad de un aprendizaje al respecto, se exhibieron a los elementos en distinto orden en un par de pruebas; en dicho experimento se examinó a la simetría a y luego a la simetría b, y en la otra en el sentido inverso. Se obtuvo que el orden en el que se presentan los reactivos muestra una respuesta significativamente diferente.

Es decir, los resultados con respecto a cada simetría son mejores cuando ésta es la segunda que es expuesta; para ambas simetrías elegidas, la diferencia con respecto a la binomial es significativa. Sin embargo, una de ellas no mostró una mejoría significativa al hacer la comparación de ella contra sí misma en función del orden en el que se exhibió. Pero esto pudo haber sido debido también a que se trató de una simetría que no es tan habitual –la reflexión sobre '/'. En la otra simetría sí hubo una mejora significativa en la manera de resolver la prueba correspondiente.

Este resultado es notable, pues se entiende entonces que los sujetos son capaces de ir construyendo una estructura algebraica que les permite resolver con mayor facilidad la prueba conforme ésta va avanzando. A partir de éste hecho se restructuró el orden de presentacíon de las simetrías elegidas. Se comenzó ahora con la simetría más simple para que los sujetos comprendieran la dinámica de la prueba; luego, las restantes fueron mostradas en el orden más pertinente, en cuanto a aprendizaje y a la manera en que se incentiva la comprensión por medio de la exhibición previa de otros elementos.

Se eligió el orden siguiente: *Identidad*, Rotación de 90°, Reflexión vertical y Reflexión sobre la diagonal '/'. La reflexión sobre la diagonal '/' se colocó como último elemento por ser la simetría resultante de componer la segunda y tercera; además de ser considerada como la simetría menos usual de las elegidas.

Tomando en cuenta la importancia del orden en la exhibición de los reactivos, se consideró lo equivalente en reactivos que examinaran la composición de las simetrías. Para hacer esto, se clasificaron los distintos tipos de composición de la siguiente manera: los que mostraran la composición con el elemento neutro; los que mostraran la potencia de cada elemento; y las que mostraran la composición de un par de elementos distintos, ninguno de ellos el neutro. De esta manera, se emulaó el orden de exhibición utilizado para mostrar sólamente un elemento. Se comenzó con pruebas que exhibieron las propiedades del neutro, se continuó entonces con las que examinan las potencias de los elementos y, por último, se examinaron las combinaciones de la última clase.

Las pruebas sobre composición fueron más cortas que las respectivas a cada elemento, pues no se quizo fatigar a los sujetos. Entre cada una de las partes que conformaron la prueba respectiva a la composición se colocaron pequeños bloques de reactivos de una sóla simetría en los que se exhibían todas las simetrías elegidas de manera aleatoria. Esto se hizo con el interés de que el sujeto no olvidara lo que había aprendido en la prueba respectiva a una sola simetría. Sin embargo, se corrió el riesgo de que en éstas pruebas los sujetos perdieran la noción de lo que hacía cada simetría por separado debido a que se exhibieron aleatoriamente.

Las pruebas respectivas a estas últimas modificaciones se llevaron a cabo en la Facultad de Ciencias de la UNAM, y en el Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras de la UNAM, para comparar los resultados en dos poblaciones distintas. Los resultados respecto a la pruebas de una sola simetría en la Facultad de Ciencias mostraron una diferencia significativa con respecto a la distribución binomial. En el Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras, todas, excepto la rotación, y la reflexión sobre '/', exhibieron una diferencia significativa. Respecto a la diferencia de las distribuciones empíricas entre ambas locaciones, en todas las pruebas hubo una diferencia significativa a favor de la Facultad de Ciencias.

En las pruebas sobre composición en ambas locaciones, la única en la que se exhibió una diferencia significativa entre la distribución empírica y la distribución binomial, fue la prueba referida a potencias de los elementos del grupo. En las restantes, no hubo diferencias significativas en ninguna de las dos locaciones.

El análisis hecho en función de las locaciones no mostró diferencias significativas; por lo tanto las pruebas sobre composición de elementos fueron respondidas de manera similar en ambas locaciones.

Estos resultados son interesantes, pues no demuestran que un aprendizaje sobre las simetrías se haya consolidado. Si las pruebas respectivas a una única simetría exhiben un aprendizaje –sin importar de que tipo–, la manera de resolver las pruebas sobre composición no debieran arrojar resultados que no se separan de manera significativa del azar. También resulta interesante que los sujetos no sean capaces de responder de manera satisfactoria reactivos que involucran al neutro de manera directa; y sin embargo, sean capaces de resolver de manera satisfactoria reactivos que involucran la composición de elementos inversos y por lo tanto del neutro.

En cuanto a los tramos restantes entre cada prueba de composición de elementos –las respectivas a todas las simetrías en orden aleatorio–, no demuestran ninguna diferencia significativa con la distribución binomial respectiva; ni tampoco entre sí con respecto a la locación donde se realizaron las pruebas.

Los resultados de las pruebas demuestran una comprensión, y aprendizaje de algunas simetrías del cuadrado; en una locación es más claro que en la otra. Sin embargo, éste aprendizaje no significa necesariamente que haya habido uno del concepto de grupo, que era lo buscado. A partir de las modificaciones hechas al diseño original del experimento se tiene que la complejidad de la estructura algebraica de grupo es en gran parte lo que dificulta este aprendizaje.

Los conceptos que si aprendieron implícitamente los sujetos fueron las simetrías; excepto quizá el concepto de neutro, que lo aprendieron casi todos los sujetos explícitamente. Esto se ve a través de la forma en la que los sujetos contestaron algunas preguntas similares a las de la prueba por computadora de forma explícita. En el Centro de Enseñanza de Lenguas Extranjeras, nadie fue capaz de resolver de manera satisfactoria las preguntas hechas de forma explícita, excepto las respectivas al elemento neutro. En la Facultad de Ciencias, todos los sujetos fueron capaces de responder las preguntas respectivas al neutro; algunos respondieron otras, pero nadie fue capaz de resolver las preguntas respectivas a la reflexión sobre '/' –varios sujetos dijeron que se trataba de dos transformaciones a la vez. En ninguna de las dos locaciones fueron capaces de resolver al respecto de composición de simetrías de manera satisfactoria.

Por lo pronto, los resultados del actual experimento no demuestran un aprendizaje satisfactorio del concepto de grupo, aún cuando el conjunto que lo forma es claramente comprendido. Sin embargo, para posteriores diseños de pruebas será importante observar los resultados obtenidos respecto a la forma de exhibir a los elementos del grupo. En primer lugar, la manera de exhibir al grupo es importante en el sentido de que hay maneras de reducir las dificultades que brinda la complejidad del concepto a la comprensión del mismo. Segundo –y quizá el más interesante–, el orden en el que se exhiben los elementos del grupo muestra diferencias significativas –positivas– en cuanto al aprendizaje del concepto. Es decir, hay una manera de ir facilitando la comprensión de la estructura algebraica de un grupo aprovechando la propiedad de cerradura del grupo.

Otro factor que se considera importante en cuanto a la dificultad del aprendizaje del concepto de grupo, es la fatiga que puede causar la prueba. Para mitigar este factor, se propone la aplicación de una prueba similar en una distribución de tiempo distinta. Quizá a lo largo de varios días, y si hay tiempo suficiente, aplicar también una prueba equivalente a la del primer experimento, es decir, una prueba seguida de otra donde se exhiba en ambos un par de grupos isomorfos.

Al respecto de pruebas posteriores, también se podría diseñar una prueba que permita hacer un análisis más puntual respecto a las poblaciones de los sujetos que resuelven las pruebas; entonces se discutiría la importancia de las características de dichas poblaciones.

5 Bibliografía

1. Armstrong, M. A.. 1988. *Groups and Symmetry.* Ed. Springer Verlag New York Inc.

2. Conover, W. J.. 1980. *Practical Nonparametrical Statistics.* Ed. John Wiley & Sons New York

3. Dickinson G., J., Chakraborti, S.. 1992. *Nonparametrical Satistical Interference.* Ed. Marcel Decker Inc. New York

4. Dubinsky, E.; Dautermann, J.; Leron, U. & Zazkis, R.. 1994. *On Learning Fundamental Concepts of Group Theory. Educational Studies in Mathematics* 27 : 267-305

5. Fraleigh, J. B.. 1987. *Álgebra Abstracta.* Ed. Addison-Wesley Iberoamericana

6. Martin, G. E.. 1982. *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry.* Ed. Springer Verlag New York Inc.

7. Reber, A. S.. 1993. *Implicit Learning and Tacit Knowledge. An Essay on the Cognitive Unconscious.* Ed. Oxford University Press

8. Schacter, D. M.. 1987. *Implicit Memory: History and Current Status.* Journal of Experimental Psychology: *Learning, Memory and Cognition.* 13 (3) : 501-518

9. Stillwell, J.. 1993. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory.* Ed. Springer Verlag New York Inc.