UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ASPECTOS DE LOS TEOREMAS DE LA FUNCION IMPLICITA Y DE LA FUNCION INVERSA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

DELFINO ENRIQUE SANCHEZ MEZA

DIRECTOR DE TESIS: ACT. HUMBERTO SANTILLANA ROYO

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2003

A

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"ASPECTOS DE LOS TEOREMAS DE LA FUNCION IMPLICITA Y DE LA FUNCION INVERSA"

realizado por SANCHEZ MEZA DELFINO ENRIQUE

con número de cuenta 7844155-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de: MATEMATICAS

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT. HUMBERTO SANTILLANA LOYO	
Propietario	MAT. MARIA DE LA LUZ NUÑEZ MORALES	María de la Luz Núñez Morales
Propietario	M en C. AGUSTIN ONTIVEROS PINEDA	
Suplente	M en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA	
Suplente	M en C. FRANCISCO STRUCK CHAVEZ	

Consejo Departamental de MATEMATICAS

M en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA
Coordinador de la Carrera de Matemáticas

CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

B

A Max y

a Luz María,

Mayra y Bárbara

SIN INDICE

PREFACIO

La razón fundamental que motivó la exposición de este trabajo de tesis acerca de un tema de cálculo fue sin duda, que los teoremas de la función implícita y de la función inversa tienen un tratamiento especial en los libros de cálculo y, por ende, en la enseñanza de los mismos, no muy bien llevado a cabo por cierto. Esta forma especial de abordarlos se debe a la complejidad intrínseca de los mismos. En sus enunciados se debe probar primero la existencia de las funciones, para luego probar propiedades de continuidad de las mismas y, por último, establecer sus reglas de derivación. Todas estas cuestiones juntas en la formulación de un teorema lo hacen, desde su enunciado, difícil de comprender. Con una cantidad considerable de detalles que se tienen que probar en cada uno de estos enunciados, es fácil perder la secuencia del razonamiento, además de que muchas de las cuestiones por probar son omitidas.

Así, aunque los teoremas de la función implícita y de la función inversa merecen un capítulo aparte en los textos de cálculo, no son discutidos con profundidad y muchos detalles no son probados, hechos que traen como consecuencia que sean difíciles de comprender.

En la formulación de los teoremas dadas en este trabajo se hace una separación en bloques de los enunciados con la idea de lograr una mayor comprensión. Aunado a esto, antes de cada enunciado se establece una discusión sobre las condiciones que hacen válido al teorema. Esta se pretende que sea profunda y que aborde cuestiones medulares de la prueba para que sea entendida a plenitud. Todas las demostraciones dadas están lo suficientemente bien cuidadas en sus exposiciones y se proporcionan con mucho detalle.

En la bibliografía dada al final están los libros de los cuales se ha nutrido el presente trabajo. De ellos he recopilado lo que me ha parecido lo más relevante con la idea de lograr una discusión profunda, rica e incluyente.

De manera que el presente trabajo logra que coincidan diversas ideas y enfoques, de los distintos tratamientos que hacen los libros mencionados en la bibliografía, sobre los casos de los teoremas aquí expuestos.

No se proporcionan las demostraciones de los enunciados más generales, sino que sólo se establecen como referencia, puesto que eso está más alla del alcance del trabajo, que se pretende sea lo más intuitivo y accesible y lo menos técnico posible.

El trabajo tiene también por intención, aparte de la de servir para graduarme, que sea de utilidad para estudiantes y profesores de la facultad cuando estudien los teoremas de la función implícita y de la función inversa en sus cursos de cálculo. En este texto podrán encontrar suficiente información sobre los citados teoremas.

Quiero sinceramente agradecer a todos mis profesores, en especial a áquellos quienes me dejaron una semilla de luz y conocimiento para entender las matemáticas y poder perseverar así por sus intrincados caminos. Pero con reconocimiento especial quiero agradecer a la Profa. María de la Luz Núñez Morales, primero, por sus lecciones de cálculo, que me abrieron el camino a entenderlo, y segundo, por todo su apoyo para poder estar en el camino de mi profesión. Siento un gran honor el haber

sido su ayudante varios años de sus cursos de cálculo. Hecho que pude cristalizar con la redacción de este texto.

Quiero también agradecer a mi director de tesis, Humberto Santillana Loyo, por la libertad y la confianza depositada en mí para llevar a cabo este trabajo. A mis sinodales, Agustín Ontiveros Pineda, Alejandro Bravo Mojica y Francisco Struck Chávez por haberse tomado la molestia de participar de este proceso de graduación de un servidor y, finalmente, a Samuel M. Reyna Silva por su valiosa colaboración en la captura por computadora de este trabajo.

Junio 2003

DESCRIPCION TEMATICA DE LA TESIS

Esta sección se incluye con un doble própósito: una es suplir al índice, debido a que los capítulos no tienen nombre, y a que el trabajo no está organizado por subtemas, y la otra, la de mostrar e introducir al lector, de una manera muy breve, sobre el contenido y la organización de esta tesis.

En el capítulo 1 se prueba el primer caso del teorema de la función implícita al mostrar la existencia de una función $y = f(x)$ a partir de una ecuación en dos variables $F(x, y) = 0$.

En el capítulo 2 se establece la misma secuencia del capítulo 1 pero ahora para el siguiente caso del teorema de la función implícita. En éste se muestra la existencia de una función $z = f(x, y)$ a partir de una ecuación en tres variables $F(x, y, z) = 0$. Este resultado se usa un par de veces en el capítulo 4. Al final de este segundo capítulo se establece como referencia el caso general del mencionado teorema.

Para una lectura rápida basta con leer cualquiera de los dos capítulos aunque es más recomendable leer el primer capítulo por tener una mayor discusión introductoria y un mejor contexto.

En el capítulo 3 se prueba el teorema de la función inversa para el caso de una función real de variable real. Este mismo resultado es obtenido usando el caso del teorema de la función implícita probado en el capítulo 1.

En el capítulo 4 se prueba el teorema de la función inversa para una transformación del plano en el plano. Al final de este capítulo se establece como referencia el caso general de este teorema.

A diferencia de los capítulos 1 y 2, los cuales están expuestos estableciendo similitudes entre sus contenidos, cosa que es posible hacer, los capítulos 3 y 4 no pueden desarrollarse de esta misma forma.

INTRODUCCION

Esta sección tiene la finalidad de introducir sobre una base informal uno de los dos temas que son motivo de análisis de este trabajo de tesis, como lo es el concepto de función implícita. También se desea resaltar en esta parte introductoria la importancia de los teoremas expuestos en otras ramas de las matemáticas. Con este fin, se comentan dos situaciones: una en las ecuaciones diferenciales y otra en el análisis complejo .

Veamos como se aborda el concepto de función implícita y la técnica para su diferenciación en los libros de cálculo de una variable. En ellos, no se da una demostración, ya que esta involucraría conceptos del cálculo avanzado como son el de derivada parcial, la regla de la cadena y algunos otros. Por lo que, sin más, se supone la existencia de una función "implícita" por medio de una ecuación en dos variables $F(x,y) = 0$.Esto es, se asume que para cada número x dentro de un cierto intervalo existe un único y tal que el par (x,y) satisface la ecuación $F(x,y) = 0$, de modo que es posible definir una función $y = f(x)$. Con esta última igualdad se enfatiza que dado x sólo hay un único y tal que el par (x,y) cumple la ecuación $F(x,y) = 0$.

Al escribir la expresión funcional $y = f(x)$ no se está dando una regla de correspondencia explícita que permita hallar el valor de y cuando a x se le da un valor particular. En su lugar decimos que la función $y = f(x)$ esta definida de una manera implícita por la ecuación $F(x,y) = 0$ y escribimos $F(x, f(x)) = 0$ para toda x que pertenece al dominio de f. El hecho de que al sustituir $f(x)$ por y en la expresión

$F(x, y) = 0$ conduzca a una identidad ($F(x, f(x)) = 0$), es una característica de toda función determinada implícitamente por una ecuación. El significado geómetrico es que la gráfica de $y = f(x)$ coincide con una parte o con toda la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$.

El que una función esté definida de una manera explícita o implícita no caracteriza la naturaleza de la función, sino sólo la forma en que ésta viene dada.

Enseguida se asume la diferenciabilidad de la función $y = f(x)$ y se obtiene y' de la expresión $F(x, y) = 0$ al derivar ésta con respecto a x.

Veamos un ejemplo. Considérese la ecuación

$$y^5 - 3y^2 - 2x^2 - x + 5 = 0.$$

Esta expresión es imposible resolverla para y en términos de x, por lo que asumiremos que la ecuación determina implícitamente una función diferenciable f tal que $y = f(x)$. Así, es posible escribir $[f(x)]^5 - 3[f(x)]^2 - 2x^2 - x + 5 = 0$ para cada x en el dominio de f.

Para hallar y' se considera a y como un símbolo que denota a $f(x)$, así, derivando con respecto a x se tiene

$$5y^4y' - 6yy' - 4x - 1 = 0$$

Resolviendo para y' obtenemos

$$y' = \frac{4x + 1}{5y^4 - 6y} \qquad \text{con tal de que} \qquad 5y^4 - 6y \neq 0$$

K

Así, si $y = f(x)$, tenemos $\qquad f'(x) = \dfrac{4x+1}{5\,[f(x)]^4 - 6f(x)}$

Nótese que en la expresión para la derivada de $y = f(x)$ aparece la misma función f, hecho que es general en las derivadas de funciones implícitas. Al procedimiento para hayar y' a partir de la expresión $F(x,y) = 0$ se le conoce como técnica de diferenciación implícita.

Un problema que surge cuando se consideran funciones definidas implícitamente por medio de ecuaciones es que se puede tener el caso de que una ecuación puede dar lugar a dos o más (incluso una infinidad) de funciones implícitas. Un caso típico es la ecuación del círculo unitario con centro en el origen: $x^2 + y^2 = 1$. Resolviendo la ecuación para y en términos de x se obtiene $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.

Dos funciones f y g determinadas implícitamente por la ecuación son $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ y $g(x) = -\sqrt{1-x^2}$ cuyas gráficas son los semicírculos superior e inferior respectivamente. Se pueden encontrar otras funciones implícitas si se escoge un número α entre -1 y 1 y se define la función h como sigue:

$$h(x) = \sqrt{1-x^2}, \text{ si } -1 \leq x \leq \alpha \quad \text{y}$$
$$h(x) = -\sqrt{1-x^2}, \text{ si } \alpha < x \leq 1$$

Al hacer que α tome diferentes valores entre -1 y 1 se pueden obtener tantas funciones implícitas como se desee.

Las funciones como éstas últimas no son diferenciables en todo el intervalo $(-1,1)$, a diferencia de f y g que son las únicas dos funciones diferenciables sobre $(-1,1)$ determinadas implícitamente por la ecuación del círculo unitario.

L

Así, si diferenciamos implícitamente la ecuación del círculo unitario se obtiene

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2\right)=\frac{d}{dx}\left(1\right)$$
$$2x+2yy'=0$$
$$y'=\frac{-x}{y},\ \ y\neq 0$$

Pero, ¿cuál de las dos funciones diferenciables sobre $(-1,1)$ estamos diferenciando?. Esto se resuelve tomando un punto (x_0, y_0) con $y_0 \neq 0$ sobre la gráfica de la ecuación. Dependiendo en que semicírculo se encuentre este punto, esto determinará que función es la que se está derivando.

El hecho de tomar un punto (x_0, y_0) que satisfaga la ecuación $F(x,y)=0$ (razón por la que se llama una solución inicial) es algo esencial para exhibir la existencia de una función implícita f determinada por la ecuación $F(x,y)=0$.

En el caso del teorema de la función implícita que se expone en el capítulo 1, se establecen condiciones bajo las cuales una función implícita existe y es diferenciable, aún más, que su derivada es continua.

Ya se ha mencionado que en los libros de cálculo de una variable estas condiciones se omiten, puesto que éstas están expresadas en términos de conceptos que se abordan en el cálculo de varias variables. Sin embargo, los libros de cálculo avanzado que tratan este tema lo hacen, unos, sin demostración alguna, y sólo muestran la técnica de diferenciación implícita con el uso de la herramienta propia del cálculo de varias variables, los que proporcionan una demostración, dan ésta en una forma muy escueta y no abundan en una discusión suficiente sobre las condiciones que hacen válido al caso del teorema que demuestran.

Una demostración de cualquier caso del teorema de la función implícita es siempre difícil por lo larga y llena de detalles, aunque es completamente "elemental". La demostración del caso más general (sistemas de funciones implícitas) es un tema propiamente del análisis.

Entre los varios própositos de este trabajo están: en ahondar en una discusión sobre las condiciones que hacen válidos a los teoremas que aquí se demuestran, en proporcionar demostraciones lo más claras y detalladas posibles de los mismos y en mostrar una buena cantidad de ejemplos.

Pasemos ahora a mostrar 2 diferentes contextos de uso y aplicación de los teoremas de la función implícita y de la función inversa.

Estos teoremas del cálculo avanzado tienen una importancia extrema tanto en los desarrollos y técnicas propias del cálculo como en otras disciplinas de las matemáticas como son el análisis númerico, la topología diferencial, la geometría diferencial, aparte de las ya mencionadas.

Veamos, a manera de ejemplo, un caso típico que se presenta en las ecuaciones diferenciales. La ecuación $x+y+e^{xy}=0$, la cual es imposible despejar para cualquiera de las variables en términos de las funciones elementales del cálculo, es solución de la ecuacion diferencial

$$(1+xe^{xy})\,y'+1+ye^{xy}=0$$

como puede verificarse calculando y' mediante diferenciación implícita a partir de la ecuación dada y sustituyendo la expresión para y' en la ecuación diferencial. Para que este procedimiento sea válido debe tenerse en cuenta que la relación $x+y+e^{xy}=0$ debe definir una función implícita $y=f(x)$ en la vecindad de un punto (solución inicial) sobre la gráfica de la ecuación. Así, si se toma al punto (0,-1) como solución inicial para la ecuación $x+y+e^{xy}=0$ y se verifica que $\frac{\partial}{\partial y}(x+y+e^{xy})$ no se anula en (0,-1) entonces se garantiza que la función implícita $y=f(x)$ definida por la ecuación dada es solución para le ecuación diferencial.

Esto es, podemos tener funciones implícitas como soluciones de ecuaciones diferenciales, y puesto que para las funciones implícitas su existencia sólo es local, se tendrá que su validez como solución de alguna ecuación diferencial también tendrá el mismo caracter.

En el análisis complejo hay una versión propia del teorema de la función inversa, mismo que es usado para encontrar la derivada de la función compleja log. Existe también otra prueba para la derivada de la misma función que hace uso de las ecuaciones de Cauchy-Riemann en forma polar, pero que, sin embargo, hace uso de la versión del cálculo del teorema de la función inversa.

Basta con destacar estos dos ejemplos para darse una idea de la importancia de los teoremas expuestos en esta tesis.

CAPITULO 1

En este capítulo se demostrará el primer caso del teorema de la función implícita el cual establece la existencia y unicidad de una función $y = f(x)$ determinada por una ecuación $F(x, y) = 0$, y al mismo tiempo se dará una regla para obtener su derivada. Las condiciones requeridas que aseguran la conclusión o tesis de dicho teorema tienen que ver con la función $F : R^2 \to R$ de las variables independientes x e y.

Veamos púes, primero, que significa la relación $F(x, y) = 0$ en sus sentidos analítico y geométrico. El lado izquierdo establece una relación entre las variables x e y a través de una expresión analítica que hace uso únicamente de las funciones elementales. Es decir, esta expresión define una función con dominio el plano cartesiano R^2 y contradominio el conjunto R de los números reales. Así, su gráfica es una superficie en el espacio tridimensional. El que la expresión se iguale a cero significa geométricamente que la superficie se intercepta con el plano $z = 0$ o plano xy. A tal intersección se le llama curva de nivel cero de la función F y su gráfica es una curva en el plano xy. Si denotamos por C_0 esta intersección tenemos

$$C_0 = \{(x, y) \in R^2 \mid F(x, y) = 0\}.$$

La gráfica de este conjunto, o dicho de otra manera, la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$ puede ser muy complicada, y es precisamente con técnicas del cálculo como las que se expresan en el teorema de la función implícita las que nos ayudan a conocer más sobre dicha gráfica, como, por ejemplo, el saber que localmente se tiene definida una función $y = f(x)$ ó $x = g(y)$.

Un problema que surge inmediatamente es cuando la ecuación $F(x, y) = 0$ no es la representación implícita de una función $y = f(x)$ o $x = g(y)$. Esto ocurre cuando la gráfica de F no intercepta al plano xy, o si lo intercepta, lo hace en un conjunto de puntos cuya gráfica no es una curva continua. Veamos unos ejemplos al respecto.

Si $F(x, y) = x^2 + y^2 + 4$ entonces a la ecuación respectiva $x^2 + y^2 + 4 = 0$ no la satisface ningún punto del plano xy, o, si $F(x, y) = x^2 + y^2$ entonces a la ecuación $x^2 + y^2 = 0$ únicamente la satisface el punto con coordenadas $(x, y) = (0, 0)$. Si ahora $F(x, y) = senx + \sec y$ entonces la gráfica de la ecuación $senx + \sec y = 0$ consiste en una infinidad de puntos aislados. Para ver que la gráfica es así, obsérvese que $|senx| \leq 1$ y $|\sec y| \geq 1$ por lo que la ecuación se satisface cuando $senx = 1$ y $\sec y = -1$ o cuando $senx = -1$ y $\sec y = 1$.

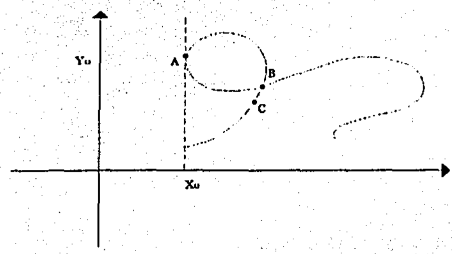
Así, como primer condición para las hipótesis de nuestro teorema, requeriremos que a la ecuación $F(x, y) = 0$ la satisfaga cuando menos un punto $(x_{0,}y_0)$. A un punto tal lo llamaremos una solución inicial.

Ahora la idea será extender esta solución a toda una vecindad (disco pequeño) del punto $(x_{0,}y_0)$, esto es, queremos encontrar puntos (x, y) en la vecindad tal que $F(x, y) = 0$, y además, y se pueda representar como función de x o x se pueda expresar como función de y.

Veamos con detenimiento cual debe ser el caracter de la solución inicial que permita estudiar la gráfica localmente, es decir, en una vecindad de la solución inicial, para poder hacer la extensión correctamente. El que sólo analicemos el comportamiento local de la gráfica cerca de esta solución inicial, tiene la siguiente implicación.

La propiedad que se esta describiendo se conserva sin importar que tan pequeña sea la vecindad de esta solución inicial. Sin embargo, la propiedad ya no es válida si se escoge una vecindad suficientemente grande o, si se escoge un punto diferente sin importar que tan cercano esté.

Obsérvese la siguiente gráfica.



La recta tangente a la gráfica en el punto A es vertical por lo que en una vecindad pequeña del punto A, podemos pensar a x como función de y, sin embargo, en la misma vecindad y no es función de x, dado que hay puntos muy cercanos a x_0 a los cuales les corresponde dos valores de y. Así, describimos el comportamiento local de la gráfica cerca del punto A diciendo que x es función de y pero que y no es función de x. Y esta afirmación es falsa si se escoge una vecindad suficientemente grande.

En el punto B la gráfica se intercepta a si misma y en cualquier vecindad de él, y no se puede representar como función de x ni x se puede representar como función de y. Esta afirmación tiene que ver con el comportamiento local de la gráfica cerca del punto B porque si se escoge otro punto C, no importa que tan cercano esté a B, la afirmación cambia. En una vecindad de C, y se puede representar como función de x

y también x se puede representar como función de y.

Pasemos a analizar ahora otra de las condiciones requeridas como hipótesis del teorema que nos ocupa. Con este fin, consideremos la ecuación del plano tangente a la gráfica de F en la solución inicial (x_0,y_0). Suponiendo que la función F es suave tenemos:

$$z = \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\right](x - x_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y - y_0) + F(x_0,y_0)$$

Si ambas derivadas parciales son cero, entonces el plano tangente a la gráfica de F en (x_0,y_0) es el plano $z = 0$.

Veamos que situaciones pueden ocurrir.

Una es que la gráfica de F intercepte al plano xy en una curva donde si se pueda extender la solución inicial a una vecindad. Entendiendo por esto último, que en dicha vecindad, $y = f(x)$ o $x = g(y)$.

Considérese como ejemplo, $F(x, y) = (y - x)^2$. Claramente el conjunto de puntos (x, y) en R^2 con $x = y$ satisface la ecuación $(y - x)^2 = 0$. Aquí no tiene caso hacer un ánalisis del comportamiento local de la gráfica en un punto que sea solución inicial. La función idéntica se puede expresar en la forma $y = f(x)$ para todo $x \in R$ y también en la forma $x = g(y)$ para todo $y \in R$.

La otra situación que puede ocurrir cuando el plano tangente en una solución inicial (x_0,y_0) es horizontal es que ésta no se pueda extender a una solución $y = f(x)$ o $x = g(y)$. El paraboloide $F(x, y) = x^2 + y^2$ únicamente tiene la solución inicial $(x, y) = (0, 0)$ como intersección con el plano xy. Otro ejemplo que nos muestra la imposibilidad de una tal extensión es cuando la curva solución de la ecuación

$F(x,y) = 0$ se intercepta a si misma y la solución inicial es uno de tales puntos de intersección. Considérese la silla de montar $F(x,y) = x^2 - y^2$ con la solución inicial $(x,y) = (0,0)$. La curva solución de la ecuación $x^2 - y^2 = 0$ son las rectas $y = x$ y $y = -x$. Tales rectas se interceptan en el origen. Sin embargo, en ninguna vecindad del origen, por muy pequeña que pueda ser ésta, se puede representar la curva solución en la forma $y = f(x)$ o $x = g(y)$.

Así, la conclusión que se puede obtener del hecho de que ambas derivadas parciales sean cero en una solución inicial es que se puede cumplir, pero también no cumplir, la tesis del teorema de la función implícita.

Supongamos ahora que al menos una de las derivadas parciales de F no se anula en la solución inicial (x_0, y_0). En la discusión anterior no hemos dado preferencia a ninguna variable sobre la otra, dado que sólo estábamos interesados en saber si en una vecindad de la solución inicial una variable se podía representar en términos de la otra, es decir, si $y = f(x)$ o $x = g(y)$ con (x,y) en una vecindad de (x_0,y_0). El que cualquiera de estas condiciones ocurra (podrían ocurrir las dos) depende de cual derivada parcial no se anula en (x_0, y_0).

Así, si se tiene como hipótesis que $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, y asumiendo la continuidad de F y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ en (x_0, y_0) entonces nuestro teorema afirma que si es posible extender la solución inicial en una forma tal que y es la que se puede representar como función de x de una manera única.

Si, por el contrario, se asume que $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ y, además, se supone la continuidad de F y $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ en (x_0, y_0) entonces la extensión ahora es tal que x es la que se puede representar como función de y en una única forma.

Obviamente, si ambas derivadas parciales no se anulan entonces la extensión se puede hacer indistintamente. Como casi siempre se usa y para denotar a la variable dependiente y x a la variable independiente, en la demostración de nuestro teorema supondremos que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Haciendo uso de la propiedad geométrica del gradiente de F de ser ortogonal a las curvas de nivel de F, se ve de inmediato que si $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, esto es, si el vector $\nabla F(x_0, y_0)$ es paralelo al eje y, entonces $\nabla F(x_0, y_0)$ es ortogonal a la recta tangente a la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$ en el punto (x_0, y_0). Es decir, tal recta tangente es paralela al eje x. Así, localmente, y se puede representar como función de x cerca de (x_0, y_0), pero x no se puede representar como función de y. Obviamente, si $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ entonces, describiendo el comportamiento local de la gráfica cerca de (x_0, y_0), x es representable como función de y, pero no a la inversa.

Para el caso en que ambas derivadas parciales sean diferentes de cero, $\nabla F(x_0, y_0)$ no es paralelo a ninguno de los ejes coordenados y se sigue que cualquier variable se puede representar en función de la otra.

Llevado a cabo un ánalisis previo de las hipótesis, pasemos a enunciar nuestro teorema para luego dar algunas ideas previas a su demostración.

Dividamos el enunciado completo en 3 bloques. Un primer bloque en el que se enuncien las hipótesis, un segundo bloque en el que se afirme la existencia y unicidad de la función implícita y un último bloque en el que se enuncien las propiedades que cumple la función que se describe en el segundo bloque, además de establecer la regla para la diferenciación de esta clase de funciones.

Teorema. Sea F una función con dominio algún subconjunto abierto de R^2 y con valores en el conjunto R de los reales.

(1) Supóngase que F tiene derivadas parciales continuas $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ en una vecindad de un punto (x_0, y_0) donde

$$F(x_0, y_0) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

(2) Entonces existe una única función implícita $y = f(x)$ con dominio un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ y con rango contenido en un intervalo $J = (y_0 - k, y_0 + k)$ tal que

$$f(x_0) = y_0$$

y, para toda x, en el intervalo I

$$F(x, f(x)) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$$

(3) Además, la función f determinada en (2) y su derivada f' son continuas en I, y

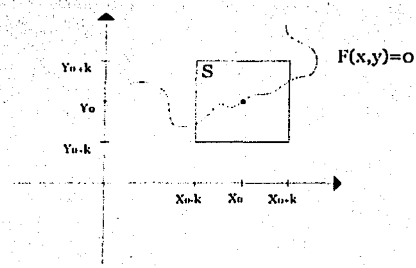
$$y' = f'(x) = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}.$$

En (1) no se hizo mención explícita de que F sea continua, ya que esto se sigue de la continuidad de sus derivadas parciales.

Prueba. Sin pérdida de generalidad asumamos que $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) > 0$. De otro modo, considérese la función $-F$ y repítase el argumento. Obsérvese que las ecuaciones $F(x,y) = 0$ y $[-F](x,y) = 0$ poseen las mismas soluciones.

Por ser $\frac{\partial F}{\partial y}$ continua en una vecindad de (x_0, y_0) existe un cuadrado S, centrado en (x_0, y_0) y totalmente contenido en esta vecindad, en donde $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$ para todo (x,y) en S.

Sea $S = \{(x,y) \in R^2 \mid |x - x_0| < k \text{ y } |y - y_0| < k\}$



En todo punto (x,y) que pertenece a S, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$.

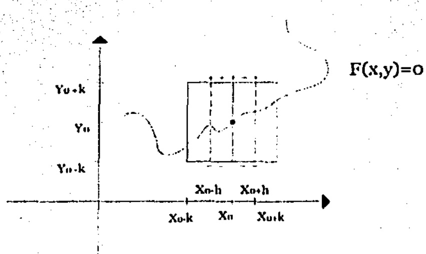
Nótese que para cada x en el intervalo $(x_0 - k, x_0 + k)$ la función $F(x,y)$ considerada sólo como función de y es estrictamente creciente en el intervalo $[y_0 - k, y_0 + k]$ puesto que su derivada $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$.

La idea de la demostración es la siguiente.

Dada x fija que cumpla $|x - x_0| < h$ con $h < k$,el y único que corresponda a esta x, y que nos permitirá definir la función $y = f(x)$, lo determinará la función $F(x,y)$

(sólo de la variable y) al aplicársele el teorema del valor intermedio. Este único y es el único cero de la función creciente $F(x,y)$ en el intervalo $[y_0 - k, y_0 + k]$.

Iniciemos con x_0. Tenemos que la función $F(x_0, y)$ es una función creciente en $[y_0 - k, y_0 + k]$ y se anula en y_0, por lo que $F(x_0, y_0 - k) < 0$ y $F(x_0, y_0 + k) > 0$



Consideremos ahora el par de funciones $F(x, y_0 - k)$ y $F(x, y_0 + k)$ definidas en el intervalo $[x_0 - k, x_0 + k]$. Nótese que ambas son funciones únicamente de la variable x.

La primera función cumple que $F(x_0, y_0 - k) < 0$ y por ser continua en x_0, es negativa en toda una vecindad $(x_0 - h_1, x_0 + h_1)$ de x_0. Analogamente, la segunda función cumple que $F(x_0, y_0 + k) > 0$ y es continua en x_0, por lo que es positiva en toda una vecindad $(x_0 - h_2, x_0 + h_2)$ de x_0.

Sea $h = \min(h_1, h_2)$. Entonces para toda x tal que $|x - x_0| < h$ se tiene

$$F(x, y_0 - k) < 0 \quad \text{y} \quad F(x, y_0 + k) > 0$$

Fijemos x en el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ y consideremos a $F(x,y)$, sólo como función de y, sobre $[y_0 - k, y_0 + k]$. Esta función cumple que

$$F(x, y_0 - k) < 0 \text{ y } F(x, y_0 + k) > 0.$$

Entonces, de acuerdo al teorema del valor intermedio, existe un único y en $(y_0 - k, y_0 + k)$ tal que $F(x, y) = 0$. Así, queda establecida la existencia y unicidad de la función $y = f(x)$ con dominio $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ y con rango contenido en $J = (y_0 - k, y_0 + k)$.

Vemos píes, que dentro del rectángulo $R = \{(x, y) \in R^2 \mid |x - x_0| < h \text{ y } |y - y_0| < k\}$ la parte de la gráfica de la ecuación $F(x, y) = 0$ es la gráfica de la función implícita $y = f(x)$. Donde, además, $f(x_0) = y_0$, y para toda x en I,

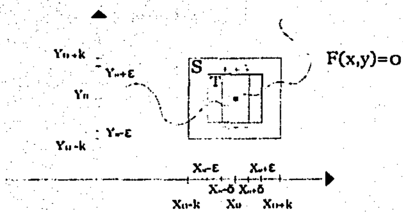
$$F(x, f(x)) = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$$

Continuando con la demostración pasemos a probar lo que se propone en el bloque (3).

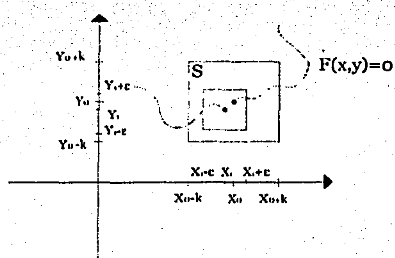
Probaremos que f es continua en el intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ haciendo ver primero que es continua en x_0 y después mostrando que es continua en todo $x \in I - \{x_0\}$.

Sea $0 < \varepsilon < k$. Obsérvese que los valores que asume la función f están restringidos por la elección del cuadrado S, esto es, por la elección de k. Esa es la razón de porque debe la ε ser menor que k.

Si repetimos el proceso para determinar la función f, pero ahora nos restringimos al cuadrado más pequeño T, también centrado en (x_0, y_0), descrito por $T = \{(x, y) \in R^2 \mid |x - x_0| < \varepsilon \text{ y } |y - y_0| < \varepsilon\}$ obtendremos la misma función f pero con dominio restringido a un intervalo $I' = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ con $\delta < h$ y con rango contenido en el intervalo $J' = (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Así, por la misma forma en que es determinada la función f, tenemos que para cualquier $0 < \varepsilon < k$, existe $\delta > 0$ tal que para todo x, si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Por tanto, f es continua en x_0.



Para probar que f es continua en $I - \{x_0\}$, tómese cualquier punto x_1 en $I - \{x_0\}$ y un $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para garantizar que el cuadrado $U = \{(x, y) \in R^2 \mid |x - x_1| < \varepsilon \text{ y } |y - y_1| < \varepsilon\}$ centrado en (x_1, y_1) y donde $y_1 = f(x_1)$, esté totalmente contenido en el cuadrado original S, y además, para todo x tal que $|x - x_1| < \varepsilon$ se debe tener que $x \in I$. Así, repitiendo el proceso para determinar f, ahora restringiéndonos a las x que cumplen $|x - x_1| < \varepsilon$, encontramos que existe una $0 < \delta_1 < \varepsilon$ tal que, para todo x, si $|x - x_1| < \delta_1$ entonces $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$. Lo cual quiere decir que f es continua en x_1. Por consiguiente, f es continua en I.



Finalmente probamos que f' es continua en I con derivada $f'(x) = -\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$.

Probaremos esta afirmación primero para x_0 y después escogiendo cualquier x en $I - \{x_0\}$.

Antes de pasar a la prueba mencionemos un resultado, conocido como lema fundamental de diferenciación, que será usado en la misma.

Si las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ son continuas en (x_0, y_0) entonces se tiene que $F(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - F(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\triangle x + \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\triangle y + G_1(\triangle x, \triangle y)\triangle x + G_2(\triangle x, \triangle y)\triangle y$ donde

$$\lim_{(\triangle x, \triangle y)\to(0,0)} G_1(\triangle x, \triangle y) = 0 \text{ y } \lim_{(\triangle x, \triangle y)\to(0,0)} G_2(\triangle x, \triangle y) = 0$$

Iniciemos otra vez con x_0. Sea $x_0 + \triangle x \in I$ y sea $y_0 + \triangle y = f(x_0 + \triangle x)$. Obsérvese que

$$F(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) = F(x_0 + \triangle x, f(x_0 + \triangle x)) = 0$$

Así, $F(x_0 + \triangle x, y_0 + \triangle y) - F(x_0, y_0) = 0$ por lo que, según el lema fundamental de diferenciación:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + G_1(\triangle x, \triangle y)\right]\triangle x + \left[\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + G_2(\triangle x, \triangle y)\right]\triangle y = 0$$

y además, $\lim_{(\triangle x, \triangle y)\to(0,0)} G_1(\triangle x, \triangle y) = 0$ y $\lim_{(\triangle x, \triangle y)\to(0,0)} G_2(\triangle x, \triangle y) = 0$

De la última igualdad se sigue que:

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) + G_1(\triangle x, \triangle y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + G_2(\triangle x, \triangle y)}$$

En esta última expresión ambos denominadores son diferentes de cero. La cantidad $|\triangle x|$ se toma lo suficientemente pequeña para que se cumpla $x_0 + \triangle x \in I$.

Pero si $\triangle x$ es pequeño, también la cantidad $\triangle y = f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$ es pequeña, por lo que $G_2(\triangle x, \triangle y)$ se puede hacer tan pequeña como se desee. Así si $\triangle x \to 0$, también se tiene que $\triangle y \to 0$, pués ya se probó que f es continua en x_0.

Por lo tanto, de la última igualdad se tiene que al tomar el límite cuando $\triangle x \to 0$, obtenemos

$$f'(x_0) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

La misma fórmula es válida si se escoge cualquier $x \in I - \{x_0\}$ y se aplica el argumento anterior, obteniéndose que

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, y)} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \text{ para toda } x \in I$$

Finalmente, se tiene que el cociente del lado derecho es un cociente de funciones continuas de funciones continuas. Por lo tanto, f' es continua en I. Así, se tiene probado todo lo afirmado en el bloque (3).

Se puede hacer una ligera modificación al enunciado de nuestro recién probado teorema para establecer un resultado más general que al enunciarse en una forma completamente informal sería como sigue: las curvas de nivel de una función suave son curvas suaves. Formulemos con rigor cuál sería el enunciado que podría sustituir al de nuestro teorema.

Supóngase que F es una función cuyas derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ son continuas en una vecindad de (x_0, y_0) donde

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Entonces existe una única función implícita $y = f(x)$ con dominio un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ y con rango contenido en un intervalo $J = (y_0 - k, y_0 + k)$ tal que

$$f(x_0) = y_0$$

y, para toda x en el intervalo I

$$F(x, f(x)) = F(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \neq 0$$

Además f y su derivada f' son continuas en I, y

$$f'(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Hemos enunciado este resultado en una forma completamente ánaloga a nuestro teorema. Su demostración es casi idéntica, salvo por los ligeros cambios apropiados.

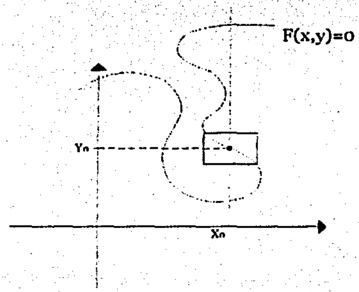
En esencia, nuestro teorema afirma que la ecuación de la curva de nivel $F(x, y) = 0$ que pasa por (x_0, y_0) puede resolverse en la forma $y = f(x)$ cerca de (x_0, y_0), mientras que este resultado afirma lo mismo, pero para la ecuación de la curva de nivel $F(x, y) = k$ que pasa por (x_0, y_0). Así, si F es suave entonces la ecuación de la curva de nivel $F(x,y) = k$ que pasa por (x_0, y_0) puede resolverse en la forma $y = f(x)$ cerca de (x_0, y_0) y donde $y' = f'(x)$ es continua en un intervalo apropiado que contiene a x_0, esto es, tal curva de nivel es suave cerca de (x_0, y_0).

Valen la pena unos comentarios antes de exponer unos ejemplos.

La prueba de nuestro teorema no nos proporciona un método para encontrar la función particular f, ni indica como encontrar una solución inicial (x_0, y_0) de la ecuación $F(x,y) = 0$. Es decir, nuestro teorema es un teorema de existencia.

También, es puramente local, en cuanto a que nada es determinado acerca de que tanto puede extenderse el dominio de f. Sin embargo, el resultado permanece cierto sin importar que tan pequeño se escoja el rectángulo centrado en (x_0, y_0). Lo mismo puede afirmarse de la unicidad y regularidad de la solución $y = f(x)$.

Como puede apreciarse en el siguiente dibujo, la recta $x = x_0$ puede interceptar la gráfica de la ecuación $F(x,y) = 0$ en varios puntos, pero sólo intercepta una vez a la parte de la gráfica que está dentro del rectángulo.



Así, la parte de la gráfica de la ecuación $F(x,y) = 0$ que está dentro del rectángulo se extiende a lo largo de un arco de la forma $y = f(x)$ con $y' = f'(x)$ continua.

Veamos mediante algunos ejemplos, como usar nuestro teorema para obtener información sobre la gráfica de una ecuación $F(x,y) = 0$.

Ejemplo 1.- La gráfica de la siguiente ecuación (a primera vista podría parecer muy complicada)

$$F(x,y) = y^5 + 2x^4y - x^3 + 5y = 0$$

es la gráfica de una función la cuál está definida para todo x en los reales.

En efecto, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 5y^4 + 2x^4 + 5 > 0$ para todo (x,y) , por lo que, para cada x fijo, se tiene que $F(x,y)$ es una función creciente de y. Este hecho, junto con las siguientes observaciones, $F(x,y) \to \infty$ cuando $y \to \infty$ y $F(x,y) \to -\infty$ cuando $y \to -\infty$ nos permiten concluir que para cada x existe un único y tal que $F(x,y) = 0$. Tenemos púes que las hipótesis de nuestro teorema son satisfechas en cualquier punto (x_0, y_0) tal que $F(x_0, y_0) = 0$. Por lo tanto, la función implícita f, determinada por la ecuación $y^5 + 2x^4y - x^3 + 5y = 0$, está definida, es continua y diferenciable sobre toda la recta real con x como variable independiente.

Ejemplo 2.- La ecuación de la curva llamada lemniscata

$$F(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

es algo complicada y no es fácil resolverla para y ni para x.

Veamos como aplicando nuestro teorema podemos dar una descripción bastante precisa de su gráfica. Es evidente que el origen $(0,0)$ es una solución de la ecuación, sin embargo, $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0$, y en este caso, no se puede obtener conclusión alguna. Obsérvese que en todos los puntos de la curva donde $y \neq 0$ se puede obtener la derivada de $y = f(x)$ dada por

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{4x\left(x^2+y^2\right)-4a^2x}{4y\left(x^2+y^2\right)+4a^2y}$$

Investiguemos ahora las intersecciones con los ejes.

Si $y = 0$, la ecuación se reduce a $x^4 - 2a^2x^2 = 0$ cuyas soluciones son $x = 0$, $x = \sqrt{2}a$ y $x = -\sqrt{2}a$. De lo cual se obtiene que $\nabla F\left(\sqrt{2}a, 0\right) = \left(4\sqrt{2}a^3, 0\right)$, así, si $a > 0$ el gradiente de F en $\left(\sqrt{2}a, 0\right)$ está sobre el eje x,apunta hacia la derecha y es ortogonal a la curva en tal punto. Se tiene una situación simétrica en el otro punto $\left(-\sqrt{2}a, 0\right)$.

Si ahora $x = 0$, la ecuación se reduce a $y^4 + 2a^2y^2 = 0$ con $y = 0$ como la única solución. De modo que la gráfica únicamente intercepta al eje y en el origen.

Para localizar los máximos y mínimos locales de la curva hacemos $y' = 0$. Esto último ocurre si $4x\left(x^2+y^2\right) - 4a^2x = 0$, con las soluciones $x = 0$ o $x^2 + y^2 = a^2$.

Determinando las soluciones simúltaneas del par de ecuaciones,

$$\left(x^2+y^2\right)^2 - 2a^2\left(x^2-y^2\right) = 0$$

$$x^2 + y^2 = a^2$$

se obtiene $4a^2y^2 - a^4 = 0$ y $-4a^2x^2 + 3a^4 = 0$ cuyas soluciones son $y = \frac{a}{2}$ y $y = -\frac{a}{2}$ para la primera ecuación y $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ y $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}a$ para la segunda.

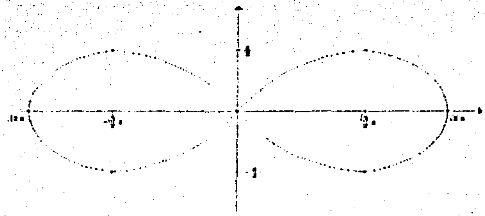
Para obtener más detalles de la gráfica de nuestra ecuación expresémosla en coordenadas polares, resultando la ecuación

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Esta expresión tiene sentido sólo si θ pertenece a los siguientes intervalos $\left[0, \frac{1}{4}\pi\right]$, $\left[\frac{3}{4}\pi, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{5}{4}\pi\right]$ y $\left[\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right]$. Nótese que en cada uno de éstos, $\cos 2\theta > 0$.

Se sigue así que la gráfica está entre las gráficas de las rectas $y = x$ y $y = -x$.

Con esta información puede darse ya una descripción completa de la gráfica.



Ejemplo 3.- Considérese la ecuación del círculo unitario $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Aunque ya sabemos de antemano que al círculo unitario lo conforman las gráficas de las dos funciones continuas $y = \sqrt{1 - x^2}$ y $y = -\sqrt{1 - x^2}$ sobre el intervalo cerrado $[-1, 1]$, aplicaremos nuestro teorema para verificar tal hecho.

Sea (x_0, y_0) cualquier punto cuyas coordenadas satisfagan la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Así, $x_0^2 + y_0^2 = 1$, además tenemos $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$, con tal de que $x_0 \neq \pm 1$.

Por consiguiente, dado cualquier x_0 en $(-1, 1)$, nuestro teorema garantiza la existencia de una única función continuamente diferenciable $y = f(x)$, definida en alguna vecindad de x_0 la cual satisface la ecuación $x^2 + y^2 - 1 = 0$ y cuya gráfica pasa por el punto $\left(x_0, \sqrt{1 - x_0^2}\right)$ si se toma $y_0 > 0$ o pasa por el punto $\left(x_0, -\sqrt{1 - x_0^2}\right)$ si se toma la otra solución, $y_0 < 0$. Cuando $x_0 = \pm 1$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ y nuestro teorema falla en el sentido de querer expresar a y como función de x en alguna vecindad de

$x_0 = \pm 1$. Sin embargo, en los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$, la derivada parcial $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ no se anula y podemos en una vecindad de $y_0 = 0$ expresar a x como función de y, obteniendo dos soluciones $x = \sqrt{1 - y^2}$ y $x = -\sqrt{1 - y^2}$. Claramente, en uno u otro caso, las soluciones se pueden extender al intervalo abierto $(-1, 1)$.

Ejemplo 4. También es posible diferenciar una función implícita $y = f(x)$ hasta un determinado orden deseado si la función $F(x, y)$ posee derivadas parciales continuas hasta ese orden.

Supongamos que ya se ha establecido la existencia y diferenciabilidad de la función $y = f(x)$ que satisface la ecuación $F(x, y) = 0$. Por consiguiente, $F(x, f(x)) = 0$ y se puede también hallar $f'(x)$ al aplicar la regla de la cadena a la última ecuación. En efecto,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} f'(x) = 0$$

de donde, $f'(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$ con tal de que $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Obsérvese que tanto el numerador como el denominador son funciones compuestas de x :

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Si ahora $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ tienen derivadas parciales continuas y, como ya se mostró, f tiene primer derivada continua entonces f' tiene derivada continua f'' la cual puede calcularse por medio de la regla de la cadena al aplicarla al anterior cociente. En efecto,

$$y'' = f''(x) = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} f'\right) - \dfrac{\partial F}{\partial x}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} f'\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2}$$

sustituyendo por f' la expresión $-\dfrac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}$ claramente se obtiene:

$$y'' = -\frac{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - 2\dfrac{\partial F}{\partial x}\dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)^3}$$

CAPITULO 2

Continuemos con nuestro estudio de otro caso del teorema de la función implícita, el cual establece la existencia y unicidad de una función $z = f(x, y)$ determinada por una ecuación en tres variables $F(x, y, z) = 0$; el mismo también establece como hallar las derivadas parciales de una función tal.

Las condiciones que garantizan la conclusión de este teorema son ánalogas al caso ya visto, que como ya se vió, hacen referencia a la función $F : R^3 \to R$ de las variables independientes x, y, z.

Hagamos primero un breve ánalisis de la relación $F(x, y, z) = 0$.

La expresión del lado izquierdo sólo debe hacer uso de las funciones elementales y el que ésta expresión se iguale a cero significa que se determina un lugar geométrico en el espacio tridimencional R^3 conocido como la superficie de nivel cero de la función F. Si denotamos por S_0 tal superficie tenemos

$$S_0 = \{(x, y, z,) \in R^3 \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

Podríamos tener, como ocurrió en el caso ya visto, que la ecuación $F(x, y, z,) = 0$ no fuese la representación implícita de ninguna de las tres posibles funciones: $z = f(x, y)$ o $y = g(x, z)$ o $x = h(y, z)$.

Veamos algunos ejemplos que cumplan lo recién afirmado.

Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1$, entonces a la ecuación respectiva $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ no la satisface ningún punto de R^3. El lugar geométrico correspondiente a ésta superficie de nivel cero de F es el conjunto vacío. Si ahora F se define como

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, tenemos que a la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ sólo la satisface el punto $(0,0,0)$.

Recordemos que una de las condiciones requeridas en el caso ya visto, fue que se tuviese una solución inicial de la ecuación $F(x,y) = 0$. Haremos este mismo requerimiento para el caso que nos ocupa.

Así, requerimos que el punto (x_0, y_0, z_0) sea una solución de la ecuación $F(x,y,z) = 0$ y le llamaremos una solución inicial.

Lo que nos interesará ahora es extender ésta solución dentro de una vecindad de ella, en la cual la parte de la superficie de nivel cero de F esté constituida por puntos que satisfagan la ecuación $F(x,y,z) = 0$ y donde, además, al menos una de las variables pueda representarse en función de las otras dos. Esto es, queremos que dentro de la vecindad de la solución inicial, al menos una de las siguientes relaciones se cumpla: $z = f(x,y)$ o $y = g(x,z)$ o $x = h(y,z)$ y donde para la (las) que se cumpla (cumplan) debe tenerse además que $F(x,y,f(x,y)) = 0$ o $F(x,g(x,z),z) = 0$ o $F(h(y,z),y,z) = 0$.

Debe tenerse en cuenta que esto último sólo podrá conseguirse a nivel local, puesto que si se escoge una vecindad lo suficientemente grande o si se escoge otro punto sin importar que tan cercano esté, podría dejar de ser cierta la propiedad.

Sigamos estableciendo analogías con el caso ya visto.

Los dos ejemplos que siguen muestran que si se tiene una solución inicial (x_0, y_0, z_0) y las derivadas parciales de F se anulan en éste punto entonces un ejemplo muestra que la conclusión del teorema de la función implícita se cumple mientras que el otro muestra que la conclusión del mismo no se cumple.

Para la primera situación considérese la función $F(x, y, z) = (y - x)^2$. La superficie de nivel cero de F es el plano que corta al plano xy en la recta $x = y$ y además es perpendicular a éste. Como solución inicial considérese cualquier punto de éste plano, digamos (x_0, y_0, z_0) con $x_0 = y_0$. En éste punto las tres derivadas parciales de F se anulan y es posible extender la solución inicial a todo el plano $x = y$ (superficie de nivel cero de F) de las dos siguientes formas:

$$x \text{ como función de } y \text{ y } z \ (x = h(y, z) = y) \text{ y}$$
$$y \text{ como función de } x \text{ y } z \ (y = g(x, z) = x).$$

Para la segunda situación considérese la función $F(x, y, z) = xy$ y como solución inicial el punto $(0, 0, 0)$.

En cualquier vecindad del origen ninguna variable puede representarse en función de las otras dos. La superficie de nivel cero de ésta función son los planos coordenados xz y yz.

Así, no es posible sacar conclusión alguna para el caso en que las derivadas parciales de F se anulan en una solución inicial (x_0, y_0, z_0) de la ecuación $F(x, y, z) = 0$.

Supongamos, púes, que al menos una de las tres derivadas parciales de F no se anula en la solución inicial (x_0, y_0, z_0). La variable de la derivada parcial de F que no se anule en el punto (x_0, y_0, z_0), y asumiendo la continuidad de F y la derivada parcial de F aludida, es la que se podrá representar en términos de las otras dos.

Así, si $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, y asumiendo las hipótesis de continuidad mencionadas, entonces nuestro teorema afirma que la solución inicial se puede extender a una vecindad de ésta en la que z se puede representar en términos de x y y, esto es, $z = f(x, y)$ y $F(x, y, f(x, y)) = 0$ para (x, y, z) en la vecindad de (x_0, y_0, z_0).

Se siguen argumentos similares al anterior si ahora $\frac{\partial F}{\partial x}$ o $\frac{\partial F}{\partial y}$ no se anulan en (x_0, y_0, z_0) y, además, se asumen las hipótesis de continuidad respectivas para cada caso.

Se puede ver fácilmente, a partir de la propiedad geométrica del gradiente de F de ser ortogonal a las superficies de nivel de ésta, el porque la variable de la derivada parcial que no se anule se puede representar como función de las otras dos.

Así, si $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, entonces $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ no es perpendicular al eje z, de tal forma que el plano tangente a la superficie de nivel cero de F en el punto(x_0, y_0, z_0) no es perpendicular al plano xy.

De la idea de que el plano tangente se "parece" a la superficie de nivel cero de F en las proximidades del punto (x_0, y_0, z_0), no siendo áquel paralelo al eje z, se ve que, en efecto, es posible representar a z como función de x y y dentro de una vecindad de (x_0, y_0, z_0).

En el caso en que dos derivadas parciales o las tres derivadas parciales de F no se anulen en el punto (x_0, y_0, z_0), y asumiendo las hipótesis de continuidad de F y de las derivadas parciales de F adecuadamente, la extensión se podría garantizar de dos o tres maneras, efectuando áquella (áquellas) que según convenga (convengan).

La formulación de nuestro teorema se hará en términos de la variable z, puesto que usualmente z es la variable dependiente y x e y las variables independientes cuando se consideran funciones con dominio en R^2 y contradominio en R.

Al igual que en el caso anterior, el enunciado de nuestro teorema lo dividiremos en 3 bloques.

Teorema. Sea F una función con dominio algún subconjunto abierto de R^3 y con valores en el conjunto R de los reales.

(1) Supóngase que F tiene derivadas parciales continuas $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}$, y $\frac{\partial F}{\partial z}$ en una vecindad de un punto (x_0, y_0, z_0) donde

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

(2) Entonces existe una única función implícita $z = f(x, y)$ con dominio un rectángulo centrado en (x_0, y_0), $R = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k)$ y con rango contenido en un intervalo $J = (z_0 - l, z_0 + l)$ tal que

$$f(x_0, y_0) = z_0$$

y, para todo (x, y) en el rectángulo R

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \neq 0$$

(3) Además, la función f determinada en (2) y sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R y

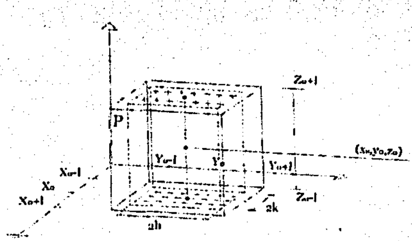
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

En (1) se omitió el hecho de que F sea continua en la vecindad aludida puesto que esto se sigue de la continuidad de sus derivadas parciales.

Prueba. Asumamos que $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) > 0$.

Por ser $\frac{\partial F}{\partial z}$ continua en una vecindad de (x_0, y_0, z_0) existe un cubo P centrado en (x_0, y_0, z_0) y totalmente contenido en ésta vecindad en donde $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) > 0$ para todo (x, y, z) en P.

Sea $P = \{(x, y, z) \in R^3 \mid |x - x_0| < l, |y - y_0| < l, |z - z_0| < l\}$.



Obsérvese que para cada punto (x, y) en el cuadrado $(x_0 - l. x_0 + l) \times (y_0 - l, y_0 + l)$ la función $F(x, y, z)$ considerada únicamente como función de z es estrictamente creciente en el intervalo $[z_0 - l, z_0 + l]$ puesto que su derivada $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) > 0$.

La idea que nos permitirá definir la función que se postula en (2) es la siguiente: para un punto (x, y) fijo tal que $|x - x_0| < h$ y $|y - y_0| < k$ con $h < l$ y $k < l$, el único z que corresponda a éste punto (x, y), lo determinará la función $F(x, y, z)$ (sólo de la variable z) al aplicársele el teorema del valor intermedio. Esta función es continua y creciente sobre $[z_0 - l, z_0 + l]$, de tal forma que se anula en un único z con $z_0 - l < z < z_0 + l$. Sea este $z = f(x, y)$.

Hallemos primero el z correspondiente al punto (x_0, y_0). La función $F(x_0, y_0, z)$ es una función creciente sobre $[z_0 - l, z_0 + l]$ y asume el valor cero en z_0 de tal forma que $F(x_0, y_0, z_0 - l) < 0$ y $F(x_0, y_0, z_0 + l) > 0$. Obsérvese que el punto $(x_0, y_0, z_0 + l)$ está sobre la cara superior del cubo P y el punto $(x_0, y_0, z_0 - l)$ está sobre la cara inferior.

Consideremos ahora el par de funciones $F(x, y, z_0 - l)$ y $F(x, y, z_0 + l)$ ambas definidas para (x, y) en el cuadrado $(x_0 - l, x_0 + l) \times (y_0 - l, y_0 + l)$.

La primera función satisface $F(x_0, y_0, z_0 - l) < 0$ por lo que, debido a su continuidad en (x_0, y_0), tiene el mismo signo sobre toda una vecindad de dicho punto. De la misma forma la segunda función satisface $F(x_0.y_0, z_0 + l) > 0$ y debido a su continuidad en (x_0, y_0), tiene el mismo signo en toda una vecindad de dicho punto.

Se puede escoger una vecindad común centrada en (x_0, y_0) en forma de rectángulo de lados $2h$ y $2k$ paralelos a los ejes coordenados x e y. Luego considere este rectángulo sobre las dos caras, superior e inferior, del cubo P.

Así, hemos construído un paralelepípedo rectangular Q, definido como

$Q = \{(x, y, z) \in R^3 \mid |x - x_0| < h, |y - y_0| < k, |z - z_0| < l\}$, centrado en (x_0, y_0, z_0) y contenido en el cubo P que además cumple lo siguiente: la función $F(x, y, z_0 + l) > 0$ para todo punto $(x, y, z_0 + l)$ sobre la cara superior de Q y la función $F(x, y, z_0 - l) < 0$ para todo punto $(x, y, z_0 - l)$ sobre la cara inferior de Q.

Fijemos (x, y) en el rectángulo $(x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k)$ y consideremos a $F(x, y, z)$, sólo como función de z, sobre $[z_0 - l, z_0 + l]$. Esta función cumple $F(x, y, z_0 - l) < 0$ y $F(x, y, z_0 + l) > 0$ por lo que se le puede aplicar el teorema del valor intermedio, obteniéndose un único z en $(z_0 - l, z_0 + l)$ en donde $F(x, y, z) = 0$.

Queda, así, establecida la existencia y unicidad de la función $z = f(x, y)$ con dominio $R = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k)$ y con rango contenido en $J = (z_0 - l, z_0 + l)$.

Por consiguiente, dentro del paralelepípedo rectangular Q, la parte de la gráfica de la ecuación $F(x, y, z) = 0$ es la gráfica de la función implícita $z = f(x, y)$, donde, además, $f(x_0, y_0) = z_0$ y para todo $(x, y) \in R$,

$$F(x, y, f(x, y)) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \neq 0.$$

Continuemos con las pruebas de lo que se afirma en el bloque tres.

Para probar que f es continua en el rectángulo $R = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k)$ primero lo haremos para el punto (x_0, y_0) y después para cualquier otro punto (x_1, y_1) en $R - \{(x_0, y_0)\}$.

Sea $0 < \varepsilon < l$. Nótese que los valores que asume la función f están en el intervalo $(z_0 - l, z_0 + l)$, por esta razón se escoge la ε menor que l.

Considérese el cubo M centrado en el punto (x_0, y_0, z_0) y contenido en el cubo P, definido como

$$M = \{(x, y, z) \mid |x - x_0| < \varepsilon, |y - y_0| < \varepsilon, |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Repitiendo el proceso para determinar la función f, pero ahora restringiéndonos al cubo M, obtenemos la misma función f pero con un dominio más restringido, digamos un rectángulo R_1 (con R_1 centrado en (x_0, y_0) y contenido en el rectángulo R) definido como $R_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid |x - x_0| < \delta_1, |y - y_0| < \delta_2\}$ donde $\delta_1 < h$ y

$\delta_2 < k$, y con rango contenido en el intervalo $(z_0 - \varepsilon, z_0 + \varepsilon)$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Entonces se cumple que para $0 < \varepsilon < l$ existe $\delta > 0$ tal que, para todo (x, y), si $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ entonces $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Por consiguiente, f es continua en (x_0, y_0).

Mostramos ahora que f es continua en cualquier otro punto (x_1, y_1) de $R - \{(x_0, y_0)\}$

Sea $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño para asegurar que el cubo

$N = \{(x, y, z) \in R^3 \mid |x - x_1| < \varepsilon, |y - y_1| < \varepsilon, |z - z_1| < \varepsilon\}$ centrado en (x_1, y_1, z_1) éste totalmente contenido en el cubo original P, donde $z_1 = f(x_1, y_1)$ y, además, para todo (x, y) en el cuadrado $T = [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon] \times [y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon]$ se debe tener que $(x, y) \in R$. (Recuérdese que el rectángulo R es el dominio de la función f hallada en (2)). Nótese también que F satisface en el punto (x_1, y_1, z_1) las mismas hipótesis que las establecidas en el teorema relativo al punto (x_0, y_0, z_0).

Por lo que, si se repite el proceso para determinar f, pero ahora uno se restringe a los puntos (x, y) en el cuadrado T se encuentra que existe una función g con dominio contenido en el cuadrado T y con rango contenido en el intervalo $(z_1 - \varepsilon, z_1 + \varepsilon)$. Esta función no puede ser otra más que la misma función f hallada anteriormente debido a su unicidad sobre su dominio de definición.

Así, existe una $\delta > 0$ tal que, para todo (x, y), si $\|(x, y) - (x_1, y_1)\| < \delta$ entonces $|f(x, y) - f(x_1, y_1)| < \varepsilon$. Esto es, f es continua en (x_1, y_1). Por consiguiente, f es continua en R.

Por último, probamos que f es de clase C^1 en R y que sus derivadas parciales están dadas por las expresiones en (3).

Antes de iniciar la demostración mencionemos el teorema del valor medio para varias variables que se usará en la misma.

Si F es diferenciable sobre un abierto $U \subseteq R^2$ que contiene el segmento rectilíneo cerrado entre dos puntos $\bar{x}$ y $\overline{y}$ del mismo, entonces existe un número $\theta \in (0,1)$ tal que $F(\overline{y}) - F(\overline{x}) = (\overline{y} - \overline{x}) \cdot DF(\overline{x} + \theta(\overline{y} - \overline{x}))$.

Expresemos de una manera conveniente este mismo resultado usando coordenadas. Sean $\overline{x} = (a,b)$ y $\overline{y} = (a+h, b+k)$, entonces tenemos

$$F(a+h,b+k) - F(a,b) = (h,k) \cdot DF(a+\theta h, b+\theta k) =$$
$$h\frac{\partial F}{\partial x}(a+\theta h, b+\theta k) + k\frac{\partial F}{\partial y}(a+\theta h, b+\theta k).$$

Probaremos únicamente la primera fórmula de (3), esto es
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}$, y también la continuidad de la misma $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ en R, puesto que el otro caso es completamente similar.

Sea (x,y) en R y sea $z = f(x,y)$. Consideremos a la variable Δx tan pequeña para que el punto $(x+\Delta x, y)$ también esté en R.

Definamos ahora la cantidad Δz como

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y)$$

Considerando a F como función únicamente de x y z, tenemos que por el teorema del valor medio,

$F(x+\Delta x, y, z+\Delta z) - F(x,y,z) = (\Delta x, 0, \Delta z) \cdot DF(x+\theta\Delta x, y, z+\theta\Delta z) =$
$\Delta x\dfrac{\partial F}{\partial x}(x+\theta\Delta x, y, z+\theta\Delta z) + \Delta z\dfrac{\partial F}{\partial z}(x+\theta\Delta x, y, z+\theta\Delta z)$ donde $0 < \theta < 1$.

Pero $F(x+\Delta x, y, z+\Delta z) - F(x,y,z) = F[x+\Delta x, y, f(x+\Delta x, y)] - F[x,y,f(x,y)] =$ 0 puesto que (x,y) y $(x+\Delta x, y)$ están en el dominio de f.

De esta forma,

$$\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x+\theta\Delta x, y, z+\theta\Delta z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x+\theta\Delta x, y, z+\theta\Delta z)}$$

Nótese que $\frac{\partial F}{\partial z}(x+\theta\Delta x, y, z+\theta\Delta z) \neq 0$

De modo que cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta z \to 0$ debido a la continuidad de f. También se tiene que $x+\theta\Delta x \to x$ y $z+\theta\Delta z \to z$ y como $\frac{\partial F}{\partial x}$ y $\frac{\partial F}{\partial z}$ son continuas, concluímos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,f(x,y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,f(x,y))}.$$

En forma completamente ánaloga se prueba la fórmula para $\frac{\partial f}{\partial y}$. Para ver que $\frac{\partial f}{\partial x}$ es continua en (x,y) en R, nótese que está expresada como un cociente de funciones continuas de funciones continuas.

Por consiguiente, f es de clase C^1 en R. Queda así demostrado completamente el teorema.

El resultado que acabamos de probar está enunciado para una superficie de nivel cero de la función F, sin embargo, puede hacerse más general si se enuncia para una superficie de nivel de valor $F(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Podemos reparafrasear este resultado más general diciendo que las superficies de nivel de funciones suaves son superficies suaves.

Veamos unos ejemplos de aplicación de nuestro teorema.

Ejemplo 1. La gráfica de la ecuación $F(x,y,z) = z^3 + (x^2+y^2)z + 1 = 0$ es la gráfica de una función $z = f(x,y)$ definida para todo (x,y) en R^2.

En efecto, $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 + x^2 + y^2 \geq 0$ y continua para todo $(x,y,z) \in R^3$. También puede verse de la ecuación que para x, y fijos, la función $G(z) = z^3 + (x^2+y^2)z + 1$ es estrictamente creciente, por lo que hay un único z_0 con $G(z_0) = 0$.

Así, si (x_0, y_0, z_0) es una solución inicial de la ecuación $F(x,y,z) = 0$, entonces ésta puede extenderse sobre todo el plano xy. Por consiguiente, la ecuación define una única función implícita $z = f(x,y)$ con dominio todo R^2. Además, f es de clase C^1 sobre todo R^2, puesto que las derivadas parciales $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2xz$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2yz$ son continuas en todo R^3.

Por último se tiene que las derivadas parciales de la función $z = f(x,y)$ están dadas por

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xz}{3z^2+x^2+y^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yz}{3z^2+x^2+y^2}$$

Ejemplo 2. El teorema de la función implícita proporciona un método muy eficaz para hallar las derivadas parciales de una variable con respecto a otras cuando éstas se relacionan a través de una ecuación, como en la fórmula

$$P(V-b)\,e^{\frac{a}{RTV}} = RT$$

donde V representa el volumen, T la temperatura, P la presión y a, b y R son constantes.

Si se considera V como una función de T y P, podemos representar a la fórmula anterior como

$$F(T, P, V(T, P)) = 0$$

Haremos caso omiso sobre las hipótesis del teorema y supondremos que únicamente estamos interesados en hallar la derivada parcial de V con respecto de T.

Así, asumiendo que podemos calcular $\dfrac{\partial V}{\partial T}$ tenemos,

$$\frac{\partial V}{\partial T} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial T}}{\frac{\partial F}{\partial V}} = -\frac{P(V-b)e^{\frac{a}{RTV}}\left(\frac{-a}{RVT^2}\right) - R}{P(V-b)e^{\frac{a}{RTV}}\left(\frac{-a}{RVT^2}\right) + Pe^{\frac{a}{RTV}}} = -\frac{RT\left(\frac{-a}{RVT^2}\right) - R}{RT\left(\frac{-a}{RV^2T}\right) + \frac{RT}{V-b}} = \frac{R + \frac{a}{TV}}{\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}}.$$

Ejemplo 3. Considérese la ecuación de la esfera de radio a, dada por la expresión $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$.

Ya tenemos conocimiento de que ésta ecuación determina implícitamente dos funciones continuas, definidas ambas sobre el disco de radio a en el plano xy, cuyas reglas explícitas están dadas por

$$g(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \quad \text{y} \quad h(x, y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

Verifiquemos con nuestro teorema que una de éstas funciones es la que se obtendría, aquella que se obtenga dependerá de si la solución inicial (x_0, y_0, z_0) está en el hemisferio superior $(z_0 > 0)$ o si está en el hemisferio inferior $(z_0 < 0)$. Si el punto (x_0, y_0, z_0) está en el ecuador $(z_0 = 0)$ no podemos aplicar el teorema $\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0\right)$. En un punto del ecuador el plano tangente a la superficie es paralelo al eje z.

Sea, pües, (x_0, y_0, z_0) una solución inicial con $z_0 \neq 0$.

Así, $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, por lo que existe una vecindad V de (x_0, y_0) donde se puede definir una función implícita $z = f(x, y)$ y que contenga al punto (x_0, y_0, z_0) en su gráfica. Si $z_0 > 0$ entonces la gráfica de la función $z = f(x, y)$ será una parte de la gráfica del hemisferio superior, por lo que su regla de correspondencia estará dada por $f(x, y) = g(x, y)$ para (x, y) en la vecindad V. En este caso, el dominio V se puede extender a todo el disco de radio a centrado en $(0, 0)$.

De manera ánaloga, si $z_0 < 0$ entonces la gráfica de la función $z = f(x, y)$ se puede extender de manera que coincida completamente con el hemisferio inferior, en este caso, la gráfica de la funcion h.

Ejemplo 4. Es posible también que se desee hallar derivadas parciales de más alto orden de la función $z = f(x, y)$, lo cual es factible siempre y cuando la función F sea continuamente diferenciable hasta un determinado orden.

Asumamos, púes, que se tiene establecida la existencia y diferenciabilidad de la función $z = f(x, y)$ que satisface la ecuación $F(x, y, z) = 0$. Así, tenemos que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ es una identidad en x y y.

Obsérvese que también podemos calcular las derivadas parciales de la función $z = f(x, y)$ mediante la regla de la cadena. Para tal efecto, considere la función compuesta de $x, y : G(x, y) = F(x, y, f(x, y))$. Aplicando la regla de la cadena a G dos veces, tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}$$

Como $G(x,y) \equiv 0$, también $\dfrac{\partial G}{\partial x} = \dfrac{\partial G}{\partial y} \equiv 0$. Por consiguiente, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ y

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ con tal de que $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Las derivadas parciales de F deben ser evaluadas con $z = f(x,y)$, por lo que en los numeradores y denominadores de los anteriores cocientes tenemos funciones compuestas de x e y nuevamente. Nótese también que $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ son continuas si las derivadas parciales de F lo son.

Calculemos ahora una derivada parcial de segundo orden de la función $z = f(x,y)$, digamos la derivada parcial mixta $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, para lo cual supongamos que $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ tienen derivadas parciales continuas

Así, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\dfrac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}$

Al sustituir $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ por $-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$ se obtiene

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial^2 z}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3}$$

Para terminar este capítulo, por referencia estableceremos el caso general del teorema de la función implícita pero omitiremos su prueba. Esta está basada en las mismas ideas y procedimientos que se usaron en la prueba que se incluyó en este capítulo.

Teorema. Sea F una función con dominio algún subconjunto abierto en el espacio R^{n+1} y con valores en el conjunto de los reales.

(1) Supóngase que F tiene derivadas parciales continuas en una vecindad de un punto $(a_1, a_2, ..., a_n, b)$ donde

$$F(a_1, a_2, ..., a_n, b) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(a_1, a_2, ..., a_n, b) \neq 0$$

(2) Entonces existe una única función implícita $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ con dominio una caja centrada en $(a_1, a_2, ..., a_n)$,

$$I = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid |x_1 - a_1| < h_1, |x_2 - a_2| < h_2, ..., |x_n - a_n| < h_n\}$$

y con rango contenido en un intervalo $J = (b - l, b + l)$ tal que

$$f(a_1, a_2, ..., a_n) = b$$

y, para todo $(x_1, x_2, ..., x_n)$ en I

$$F(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x_1, x_2, ..., x_n, f(x_1, x_2, ..., x_n)) \neq 0$$

(3) Además, la función f determinada en (2) y sus derivadas parciales son continuas en I, y para todo $i = 1, 2, ..., n$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, ..., x_n, z)}{\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(x_1, x_2, ..., x_n, z)}$$

donde $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

CAPITULO 3

En este capítulo se abordará el teorema de la función inversa para funciones de valores reales de una sola variable real. Se pretende con él que sirva como motivación y un buen punto de partida para la discusión y desarollo de otros teoremas de la función inversa que serán expuestos en este trabajo.

La demostración del teorema de la función inversa para este caso (funciones de R en R) será sencilla debido a que en ella se pueden aplicar resultados del cálculo de una variable de una manera directa. Para los otros casos esto no es posible puesto que no es fácil generalizar los resultados del cálculo de una variable que se usan en la demostración dada en este capítulo.

Una razón más para incluir este caso del teorema de la función inversa es que puede ser enunciado en la misma forma en que se formularán los otros casos con la intención de hacer evidente la generalización.

Exactamente en el mismo sentido como lo es el teorema de la función implícita, el teorema de la función inversa también tendrá un caracter local. Más adelante haremos unos comentarios al respecto una vez que hayamos demostrado el caso que aquí nos ocupa. Para su demostración dividimos el enunciado del teorema en 3 bloques. El primero, para las hipótesis; el segundo, para enunciar la existencia de la función inversa y el tercero para las propiedades.

Teorema. Sea $f : A \to R$ definida sobre el abierto $A \subset R$ y sea x_0 en A.

(1) Supóngase que f tiene derivada continua y que $f'(x_0) \neq 0$.

(2) Entonces existe un intervalo abierto I que contiene al punto x_0, y un intervalo

abierto J que contiene su imagen $f(x_0)$, tal que la función $f : I \to J$ es uno a uno y sobre.

(3) Además, la función inversa $f^{-1} : J \to I$ también tiene derivada continua, y para un punto $y \in J$, si x en I es tal que $f(x) = y$, entonces

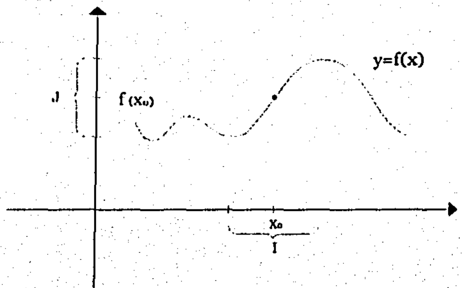
$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Prueba. Sin pérdida de generalidad supóngase que $f'(x_0) > 0$. Se tiene, por hipótesis, que f' es continua sobre el abierto A, de manera que al estar x_0 en A y $f'(x_0) > 0$, se sigue que f' tiene el mismo signo (positivo) sobre toda una vecindad V (intervalo abierto) de x_0 con $V \subset A$. Así, existe un número $h > 0$ tal que $[x_0 - h, x_0 + h] \subset V$ y donde $f'(x_0) > 0$ para todo x en el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$.

De esto último se concluye que f es estrictamente creciente y a su vez uno a uno sobre el citado intervalo.

Para ver ahora que f es sobre, considere la imagen del intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$. Su imagen es el intervalo cerrado $[f(x_0 - h), f(x_0 + h)]$ puesto que f es continua. Así, si y es cualquier punto en el intervalo $(f(x_0 - h), f(x_0 + h))$ existe un x en el intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ tal que $f(x) = y$.

Si llamamos I al intervalo $(x_0 - h, x_0 + h)$ y J al intervalo $(f(x_0 - h), f(x_0 + h))$ entonces se tiene que $f : I \to J$ es uno a uno y sobre.



Hemos obtenido de esta forma que localmente la función f tiene una inversa $f^{-1}: J \to I$.

Probamos ahora que f^{-1} es diferenciable en todo punto de J. Primero lo haremos para $y_0 = f(x_0)$ y luego para cualquier otro $y \in J$ con $y \neq y_0$.

Formemos el cociente eligiendo y en J y $y \neq y_0$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{\frac{y - y_0}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}} = \frac{1}{\frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}}$$

Si hacemos que y tienda a y_0 también se tiene que $f^{-1}(y)$ tiende a $f^{-1}(y_0)$ dado que f^{-1} es continua en y_0, hecho que se sigue de la continuidad de f en x_0. Así, el denominador del último cociente tiene como límite al número $f'(x_0)$ cuando y tiende a y_0, esto es,

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))}{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)} = f'(f^{-1}(y_0)) = f'(x_0)$$

por definición de derivada de f en $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Por consiguiente,

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Así, f^{-1} es diferenciable en y_0 y además $(f^{-1})'$ es continua en y_0 puesto que en el denominador del último cociente aparece la composición $f' \circ f^{-1}$ que resulta ser continua en y_0.

Para ver ahora que f^{-1} es diferenciable en cualquier otro punto de J diferente de y_0, tome $y \in J$ con $y \neq y_0$ y sea x en I tal que $f(x) = y$. Obsérvese que $f'(x) > 0$.

Tenemos pués que se cumplen las hipótesis de nuestro teorema con referencia al x anterior. Así, aplicando el argumento anterior que se efectuó con y_0, se puede obtener que f^{-1} es diferenciable en y, que su derivada es continua en el mismo punto y que se cumple la misma regla para su derivada.

La prueba recién dada es una prueba de existencia, esto es, no nos proporciona algún método para hallar la función inversa f^{-1} de f. También la existencia de f^{-1} es puramente local, ya que no se afirma nada acerca de que tanto puede extenderse su dominio sin embago, el resultado sigue siendo válido si se escoge alguna otra vecindad W de x_0 con $W \subset V$.

Ejemplo 1. Podemos también obtener la tesis del teorema de la función inversa como una aplicación del teorema de la función implícita que se expuso en el capítulo 1.

Sea $y = f(x)$ una función real de variable real con derivada continua sobre un conjunto abierto A y sea x_0 un punto de A donde $f'(x_0) \neq 0$.

Considere la función $F(x, y) = y - f(x)$ y calculemos sus derivadas parciales. Así

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -f'(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1$$

Nótese que F, $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ son continuas sobre el conjunto $B = \{(x, y) \in R^2 \mid x \in A\}$.

Considere ahora como solución inicial el punto (x_0, y_0) donde $y_0 = f(x_0)$. Tenemos que

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = -f'(x_0) \neq 0$$

De manera que se cumplen las hipótesis del Teorema de la función implícita. Luego entonces cerca del punto (x_0, y_0) la variable x puede representarse en términos de la variable y. Esto expresado formalmente nos dice que existe una única función implícita $x = g(y)$ con dominio un intervalo $J = (y_0 - k, y_0 + k)$ y con rango contenido en un intervalo $I = (x_0 - h, x_0 + h)$ tal que

$$g(y_0) = x_0$$

y, para toda y, en el intervalo J

$$F(g(y), y) = 0$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y) \neq 0$$

Además, g y su derivada g' son continuas sobre J, y

$$g'(y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(g(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y)} = -\frac{1}{-f'(g(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

Evidentemente, la función g que hemos determinado no es otra que la inversa de f.

Ejemplo 2. Sea f la función definida por la regla de correspondencia $f(x) = -x^5 - x$. Si calculamos su derivada, tenemos $f'(x) = -5x^4 - 1$. Obsérvese que $f'(x) < 0$ para toda x en los reales, por lo que f es decreciente sobre toda la recta real y a su vez es uno a uno. También es inmediato que f es suprayectiva en el contradominio R.

Concluímos así que la inversa de f está definida sobre toda la recta real y que su gráfica es decreciente. Sin embargo, no se puede obtener la regla de correspondencia para la inversa, como puede verse de la siguiente observación. Si $y = -x^5 - x$ entonces $x^5 + x + y = 0$ y de ésta última fórmula no se ve como despejar x en términos de y.

Sin embargo, podemos calcular su derivada. Sea y cualquier número real y supóngase que x es tal que $f^{-1}(y) = x$. Así,

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{f'(x)} = -\frac{1}{5x^4+1}.$$

CAPITULO 4

Este capítulo está dedicado a demostrar el teorema de la función inversa para el caso de una función con dominio algún subconjunto de R^2 y con imagen en R^2.

La demostración que damos aquí hará uso, de una manera fundamental, del teorema de la función implícita expuesto en el capítulo 2. El otro concepto clave del cual se hará uso también es el de el determinante Jacobiano de una transformación de R^2 en R^2.Después de una breve discusión sobre el concepto de transformación inversa definiremos el Jacobiano.

Considere el par de funciones

$$u = f(x, y), \qquad v = g(x, y) \qquad (*)$$

Estas definen una ley de correspondencia por medio de la cual a un punto del plano xy se le asigna un punto del plano uv.

Puede que sea posible resolver las ecuaciones anteriores para x e y en términos de u y v. Si tal es el caso, obtendríamos un par de ecuaciones de la forma

$$x = F(u, v), \qquad y = G(u, v) \qquad (**)$$

Estas ecuaciones definen también una ley de correspondencia en una forma tal que a un punto del plano uv se le asocia un punto del plano xy.

Si la transformación $(*)$ entre puntos del plano xy y puntos del plano uv es uno a uno entonces a la correspondencia $(**)$ se le llama la transformación inversa.

Veamos que situaciones se presentan cuando se trata de hallar la inversa de una transformación dada de R^2 en R^2.

En ciertos casos puede ser que las ecuaciones (**) se obtengan mediante algún proceso algebraico explícito, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Sea la transformación dada por

$$u = x + 3y, \qquad v = 2x + 5y.$$

Entonces la transformación inversa está dada por

$$x = -5u + 3v, \qquad y = 2u - v.$$

En otros casos puede resultar que las funciones F y G de las ecuaciones (**) sean expresables en términos de las funciones elementales familiares.

Considere el siguiente ejemplo. Sea

$$u = \frac{x^2 + y^2}{2}, \qquad v = \frac{x^2 - y^2}{2}.$$

Es claro que ésta transformación no es uno a uno si todos los puntos del plano xy son considerados. Las ecuaciones se pueden resolver para x^2 e y^2, obteniendo $x^2 = u + v$, $y^2 = u - v$.

Si a la transformación le añadimos alguna restricción, como por ejemplo, que a x e y nunca se les asignen valores negativos entonces tendríamos que la transformación inversa estaría dada por

$$x = \sqrt{u + v}, \qquad y = \sqrt{u - v}.$$

Este ejemplo muestra también que si a la transformación dada se le añade otra restricción diferente, como por ejemplo, que a x e y nunca se les asignen valores positivos entonces la transformación inversa estaría ahora dada por

$$x = -\sqrt{u+v}, \qquad y = -\sqrt{u-v}.$$

La conclusión que se puede obtener de éste ejemplo es que cuando se está tratando de determinar la inversa de una transformación dada, una de las cosas que a menudo hay que hacer es determinar una región en el dominio de la transformación donde ésta sea uno a uno. Así, una transformación inversa existirá y dependerá de ésta región del dominio donde la transformación dada es uno a uno.

El teorema que presentaremos más adelante será todavía más restrictivo en lo que se refiere a la determinación de una región donde una transformación dada sea uno a uno. Como todos los teoremas expuestos en este trabajo, tendrá un caracter local y también será de existencia. Esto es, nada se concluye en cuanto a la extensión de la región en donde se determina la invertibilidad de la transformación dada. Ni tampoco da un método para determinar la regla de correspondencia de la transformación inversa.

Sin embargo, el teorema establece como calcular la derivada de la transformación inversa, así como también algunas propiedades de continuidad.

Como se mencionó antes, el determinante Jacobiano juega un papel fundamental en la demostración que se expondrá más adelante. Definimos ahora mismo este concepto.

Sea T una transformación de R^2 en R^2 definida por dos funciones diferenciables componentes, esto es, $T(x,y) = (f(x,y), g(x,y)) = (u,v)$.

El determinante Jacobiano de la transformación T, que se denota $\dfrac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}$ o también $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, se define como

$$\frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$$

Pasemos a la prueba de nuestro teorema.

Teorema. Sea $T : A \subseteq R^2 \longrightarrow R^2$ definida por $T(x,y) = (u,v) = (f(x,y), g(x,y))$ sobre el abierto A y sea $(x_0, y_0) \in A$ tal que $u_0 = f(x_0, y_0)$ y $v_0 = g(x_0, y_0)$.

(1) Supóngase que T es de clase C^1 y que el Jacobiano $D = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\partial g}{\partial y} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}$ no se anula en (x_0, y_0).

(2) Entonces existen números positivos h y k tales que para cada punto (u,v) que satisface $|u - u_0| < h$ y $|v - v_0| < h$ existe un y sólo un punto (x,y) tales que $T(x,y) = (u,v)$ con $|x - x_0| < k$ y $|y - y_0| < k$.

Si denotamos ésta transformación inversa por

$$x = F(u,v),\ y = G(u,v)$$

(3) Entonces las funciones F y G son continuas y tienen derivadas parciales continuas (sobre el cuadrado $|u - u_0| < h$ y $|v - v_0| < h$) dadas por

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial g}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial v} = -\dfrac{1}{D}\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} = -\dfrac{1}{D}\dfrac{\partial g}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial v} = \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial f}{\partial x} \end{array}$$

Prueba. La prueba consistirá en resolver la ecuación $u = f(x,y)$ para la variable x y luego sustituir la expresión resultante en la ecuación $v = g(x,y)$ para obtener una expresión de la variable y únicamente. Esta última expresión se resolverá para y obteniendo así una de las funciones inversas. La otra función inversa se obtendrá de la expresión en donde se despejó a x en términos de u e y.

Dado que por hipótesis el Jacobiano D no se anula en (x_0, y_0), al menos una de las derivadas parciales de f no es cero en (x_0, y_0). Sin pérdida de generalidad supongamos que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$.

Considere ahora la ecuación $M(u, x, y) = u - f(x, y) = 0$ y tome a (u_0, x_0, y_0) como solución inicial para aplicar el teorema de la función implícita.

Veamos que efectivamente se cumplen las hipótesis de éste.

La función M y sus derivadas parciales son continuas en una vecindad de (u_0, x_0, y_0).

$$M(u_0, x_0, y_0) = u_0 - f(x_0, y_0) = 0$$
$$\frac{\partial M}{\partial x}(u_0, x_0, y_0) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0$$

Por consiguiente, existe una única función $x = K(u, y)$ con dominio un rectángulo $R_1 = (u_0 - h_1, u_0 + h_1) \times (y_0 - h_2, y_0 + h_2)$ centrado en (u_0, y_0) y con rango contenido en el intervalo $J = (x_0 - h_3, x_0 + h_3)$ tal que $K(u_0, y_0) = x_0$ y, para todo (u, y) en R_1

$$M(u, K(u, y); y) = u - f(K(u, y), y) = 0$$
$$\frac{\partial M}{\partial x}(u, K(u, y), y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(K(u, y), y) \neq 0$$

Además,

$$\frac{\partial K}{\partial u}(u, y) = -\frac{\frac{\partial M}{\partial u}(u, K(u, y), y)}{\frac{\partial M}{\partial x}(u, K(u, y), y)} = -\frac{1}{-\frac{\partial f}{\partial x}(K(u, y), y)}$$
$$\frac{\partial K}{\partial y}(u, y) = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y}(u, K(u, y), y)}{\frac{\partial M}{\partial x}(u, K(u, y), y)} = -\frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(K(u, y), y)}{-\frac{\partial f}{\partial x}(K(u, y), y)}$$

Escribiendo en forma conveniente las anteriores expresiones, obtenemos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(K\left(u,y\right),y\right)\cdot\frac{\partial K}{\partial u}\left(u,y\right)=1$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(K\left(u,y\right),y\right)\cdot\frac{\partial K}{\partial y}\left(u,y\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(K\left(u,y\right),y\right)=0$$

Supongamos ahora que las constantes h_2 y h_3 son tan pequeñas que el rectángulo $R_2=\left(x_0-h_3,x_0+h_3\right)\times\left(y_0-h_2,y_0+h_2\right)$ esté contenido en el dominio de las funciones f y g.

Sustituyamos la expresión $K\left(u,y\right)$ para x en la función $g\left(x,y\right)$, para obtener la función compuesta $g\left(K\left(u,y\right),y\right)=H\left(u,y\right)$

Obsérvese que el dominio de la función H es el mismo que el de la función K, a saber, el rectángulo R_1.

Los siguientes dos hechos serán usados al aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación $N\left(u,v,y\right)=v-H\left(u,y\right)=0$ con $\left(u_0,v_0,y_0\right)$ como solución inicial.

$H\left(u_0,y_0\right)=g\left(K\left(u_0,y_0\right),y_0\right)=g\left(x_0,y_0\right)=v_0,\quad$ y

$$\frac{\partial H}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial x}\left[-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}\right]+\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}=\frac{D}{\frac{\partial f}{\partial x}}\neq 0.$$

La función N y sus derivadas parciales son continuas en una vecindad de $\left(u_0,v_0.\,y_0\right)$.

$N\left(u_0,v_0,y_0\right)=v_0-H\left(u_0,y_0\right)=0$

$\frac{\partial N}{\partial y}\left(u_0,v_0,y_0\right)=-\frac{\partial H}{\partial y}\left(u_0,y_0\right)\neq 0.$

Por consiguiente, existe una única función $y=G\left(u,v\right)$ con dominio el rectángulo $R_3=\left(u_0-h_4,u_0+h_4\right)\times\left(v_0-h_5,v_0+h_5\right)$ y con rango contenido en el intervalo $\left(y_0-h_6,y_0+h_6\right)$ tal que $G\left(u_0,v_0\right)=y_0$,

y para todo $\left(u,v\right)$ en R_3

$$N(u,v,G(u,v)) = v - H(u,G(u,v)) = 0,$$

$$\frac{\partial N}{\partial y}(u,v,G(u,v)) = -\frac{\partial H}{\partial y}(u,G(u,v)) \neq 0.$$

Asumamos que $h_4 \leq h_1$ y $h_6 \leq h_2$.

Sustituyamos a $y = G(u,v)$ en la expresión $x = K(u,y)$ para obtener $x = K(u,G(u,v)) = F(u,v)$.

La función F tiene el mismo dominio que la función G y ambas definen la transformación inversa. Veamos que, en efecto, se cumple lo recién afirmado.

$f(F(u,v), G(u,v)) = f(K(u,G(u,v)), G(u,v)) = u$ puesto que $f(K(u,y), y) = u$, y $g(F(u,v), G(u,v)) = g(K(u,G(u,v)), G(u,v)) = H(u,G(u,v)) = v$

puesto que $g(K(u,y), y) = v$.

De manera que, si hacemos $h = \min\{h_4, h_5\}$, tenemos que las funciones $F(u,v)$ y $G(u,v)$ tienen como dominio el cuadrado centrado en (u_0, v_0) de lado $2h$.

Ahora si hacemos $k = \min\{h_3.h_6\}$ se cumple que $|F(u,v) - x_0| < k$ y $|G(u,v) - y_0| < k$ puesto que los rangos de las funciones implícitas halladas satisfacen $|K(u,y) - x_0| < h_3$ y $|G(u,v) - y_0| < h_6$. Así, la transformación inversa, definida por las funciones F y G, tiene su rango contenido en el cuadrado centrado en (x_0, y_0) de lado $2k$.

Para mostrar la unicidad de las funciones inversas F y G, suponga que x, y, u, v son valores tales que satisfacen $|x - x_0| < k$, $|y - y_0| < k$, $|u - u_0| < h$, $|v - v_0| < h$.

Las funciones $x = K(u,y)$, $y = G(u,v)$ que se obtuvieron como aplicación del teorema de la función implícita son únicas en su dominio de definición. Así, se tiene la unicidad de G. Para la unicidad de F, obsérvese que $x = K(u,G(u,v)) = F(u,v)$.

Por lo tanto, las funciones F y G son únicas.

De la misma aplicación del teorema de la función implícita se obtiene que K y G son de clase C^1. A su vez, F también es de clase C^1, puesto que es una función compuesta de K y G.

Encontramos ahora las derivadas parciales de las funciones inversas F y G.

Tenemos que son válidas las ecuaciones (identidades)

$$f\left(F\left(u,v\right),G\left(u,v\right)\right)=u, \qquad g\left(F\left(u,v\right),G\left(u,v\right)\right)=v.$$

sobre el cuadrado $\left(u_0-h,u_0+h\right)\times\left(v_0-h,v_0+h\right).$

Diferenciemos cada una de las funciones compuestas anteriores con respecto a u y v. Así, al aplicar la regla de la cadena, obtenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial u}=1, \qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial v}=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial v}=1$$

En el primer sistema las incógnitas son $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial G}{\partial u}$. Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\frac{\partial g}{\partial y}}{D}, \qquad \frac{\partial G}{\partial u}=-\frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{D}$$

Por su parte las incógnitas del segundo sistema son $\dfrac{\partial F}{\partial v}$ y $\dfrac{\partial G}{\partial v}$. Al resolver el sistema, obtenemos

$$\frac{\partial F}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{D}, \qquad \frac{\partial G}{\partial v}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{D}.$$

Queda así probado todo lo afirmado en el teorema.

Veamos ahora ejemplos sobre como aplicar nuestro teorema.

Ejemplo 1. Consideremos nuevamente la transformación que se usó para discutir el concepto de transformación inversa al inicio de este capítulo, esto es, sea

$$u = \frac{x^2 + y^2}{2}, \quad v = \frac{x^2 - y^2}{2} \qquad (*)$$

Si consideramos como dominio de ésta transformación únicamente al primer cuadrante $x \geq 0$ e $y \geq 0$ se tiene que la transformación es uno a uno, por lo que su inversa está dada por

$$x = \sqrt{u+v}, \quad y = \sqrt{u-v} \qquad (**)$$

Para hallar el dominio de ésta transformación obsérvese que $x^2 + y^2/2 \geq 0$ por lo que el rango de la transformación (*) debe estar contenido en el semiplano $u \geq 0$. Nótese también que las funciones que definen la inversa están bien definidas si $u+v \geq 0$ y $u - v \geq 0$, esto es, si $|v| \leq u$. De modo que el dominio de la transformación (**) es el conjunto de puntos (u, v) con $u \geq 0$ y $|v| \leq u$.

El Jacobiano de la transformación (*) está dado por $\dfrac{\partial (u, v)}{\partial (x, y)} = -2xy$.

Puede verse fácilmente que cuando se toma un punto de la forma $(x, 0)$ o de la forma $(0, y)$, en una vecindad de cualquiera de estos puntos la transformación (*) no es uno a uno. De modo que cuando $x = 0$ o $y = 0$ (el Jacobiano en este caso es cero) no podemos aplicar nuestro teorema.

Considerando, púes, como dominio de la transformación (*) a todo el plano xy, se deduce que sobre los ejes no se puede definir localmente la inversa.

Sin embargo, considerando la transformación (*) restringida al primer cuadrante, tenemos que para evitar puntos donde el Jacobiano sea cero, se debe permanecer enteramente en el primer cuadrante.

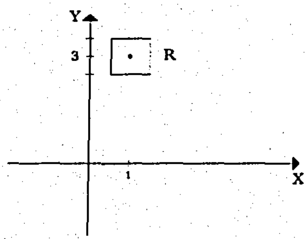
Veamos como deben escogerse los cuadrados centrados en puntos específicos donde se cumpla lo que se afirma en el teorema.

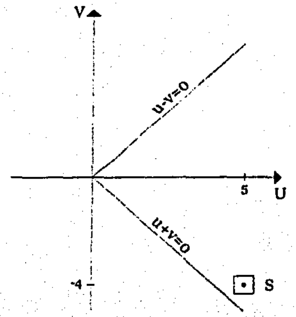
Sea $x_0 = 1$, $y_0 = 3$ entonces $u_0 = 5$, $v_0 = -4$.

En el plano xy no se debe tocar las rectas $x = 0$ o $y = 0$. Esto significa que en el plano uv no se debe tocar las rectas $u + v = 0$ y $u - v = 0$. De modo que el cuadrado S centrado en el punto $(5, -4)$ debe estar arriba de la recta $u + v = 0$ y debajo de la recta $u - v = 0$, mientras que el cuadrado R centrado en el punto $(1, 3)$ debe estar en el primer cuadrante.

Estos requerimientos significan que en este caso, las constantes positivas h y k deben satisfacer las desigualdades $h < 1$ y $k < \frac{1}{2}$.

Por último, nótese que el tamaño de S depende de el de R; si R se escoge con dimensiones pequeñas, las dimensiones de S tendrán que ser lo suficientemente pequeñas de manera que la transformación inversa mantendrá (x, y) en R cuando (u, v) está en S.





Ejemplo 2. Nuestro recién probado teorema nos asegura que en un punto del plano xy donde el Jacobiano de una transformación C^1 de R^2 en R^2 no se anula se puede establecer localmente la invertibilidad de la transformación referida, definida, digamos, por $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ obteniéndose la transformación inversa definida por $x = F(u, v)$, $y = G(u, v)$.

En un punto donde el Jacobiano se anula el teorema falla y no proporciona información. De hecho, cualquier cosa puede suceder, como lo muestran las dos siguientes situaciones.

Sea la transformación

$$u = x^3, \qquad v = y$$

la cual es uno a uno en todo el plano xy. Por consiguiente, la transformación inversa, definida en todo el plano uv, está dada por

$$x = \sqrt[3]{u}, \qquad y = v$$

Sin embargo, el Jacobiano está dado por $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 3x^2$,el cual se anula en todo punto del eje y.

De modo que en cualquier punto de este eje, se puede establecer la invertibilidad de la transformación dada sobre cualquier vecindad sin cumplirse la hipotesis de que en tales puntos el Jacobiano no se anule.

Para la otra situación considere la transformación

$$u = x^2, \qquad v = y$$

la cual evidentemente no es uno a uno en todo el plano xy.De forma semejante a la situación anterior, el Jacobiano de ésta transformación, el cual es $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 2x$, se anula en todo punto del eje y. Sin embargo, en este caso, no se puede obtener la invertibilidad de la transformación sobre ninguna vecindad de un punto de la forma (o,y).

Ejemplo 3. Considere la transformación C^1 dada por

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy$$

la cual está definida en todo el plano xy. Es evidente que la transformación no es uno a uno si se considera todo el plano xy como su dominio. Calculando el Jacobiano, obtenemos $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 4\left(x^2 + y^2\right)$, el cual se anula únicamente en el origen. De modo que nuestro teorema garantiza que en cualquier punto $(x_0, y_0) \neq (0,0)$ se puede establecer localmente la invertibilidad de nuestra transformación.

Así, existe, para cualquier punto (x_0, y_0), un cuadrado centrado en él y un cuadrado centrado en su imagen (u_0, v_0), donde la transformación dada es uno a uno y sobre. Denotemos por M y N estos cuadrados.

Si escribimos a la transformación inversa como

$$x = F(u, v), \qquad y = G(u, v)$$

nuestro teorema asegura que ésta correspondencia con dominio N y rango M es de clase C^1 así como también sus derivadas parciales.

Si hacemos $(u_0, v_0) = (x_0^2 - y_0^2, 2x_0y_0)$ entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial u}(u_0, v_0) &= \frac{1}{D}\frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{x_0}{2(x_0^2 + y_0^2)} \\
\frac{\partial F}{\partial v}(u_0, v_0) &= \frac{-1}{D}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{y_0}{2(x_0^2 + y_0^2)} \\
\frac{\partial G}{\partial u}(u_0, v_0) &= -\frac{1}{D}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{-y_0}{2(x_0^2 + y_0^2)} \\
\frac{\partial G}{\partial v}(u_0, v_0) &= \frac{1}{D}\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{x_0}{2(x_0^2 + y_0^2)}
\end{aligned}$$

Finalmente, en el origen, donde el Jacobiano se anula, nuestro teorema falla, como puede verse si observamos que en cualquier vecindad del origen hay puntos (x, y) y $(-x, -y)$ donde la transformación les asigna el mismo punto $(u, v.)$. De modo que no es uno a uno.

Ejemplo 4. Analicemos desde la perspectiva de nuestro teorema la transformación de coordenadas polares a rectangulares y su transformación inversa, de rectangulares a polares.

Dado un punto P de coordenadas (x, y) en el plano xy (sistema de coordenadas rectangulares) lo podemos ubicar también con el par (r, θ), sus coordenadas polares, con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. La restricción sobre θ al intervalo $[0, 2\pi)$ es para que la descripción sea única. El par $(r, \theta + 2\pi k)$ con k entero serviría igualmente para describir el mismo punto.

Las coordenadas rectangulares x e y del punto P están dadas en términos de r y θ mediante las fórmulas (transformación) $x = r\cos\theta$, $y = rsen\theta$.

De modo que si consideramos en el plano $r\theta$ el conjunto de todos los puntos (r,θ) con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$ como el dominio de la transformación anterior, se cumple que ésta transformación es suprayectiva en el plano xy. Si, además, al dominio le excluímos el segmento de los puntos (r,θ) con $r = 0$ y $0 < \theta < 2\pi$ entonces sobre éste nuevo dominio la transformación es uno a uno (se considera el punto $r = 0$ y $\theta = 0$ en el dominio para que la suprayectividad no cambie).

Hecho que se puede comprobar calculando el Jacobiano de la transformación, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r$.

Por consiguiente, en cualquier punto (r,θ) con $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$, se puede establecer localmente la invertibilidad de la transformación $x = r\cos\theta$, $y = rsen\theta$.

Se puede establecer la regla de correspondencia de la transformación inversa, esto es, se puede expresar a r y θ en términos de x e y, aunque en una forma algo especial, para lo cual hay que hacer unas adecuaciones para asegurar que θ esté entre 0 y 2π.

La coordenada r está dada por $r = \sqrt{x^2+y^2}$, mientras que la coordenada θ está dada por

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{si } x > 0 \text{ e } y \geq 0;$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi \qquad \text{si } x < 0;$$
$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi \qquad \text{si } x > 0 \text{ e } y < 0;$$

donde $\arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ está entre $-\dfrac{\pi}{2}$ y $\dfrac{\pi}{2}$. Cuando $x = 0$, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ para $y > 0$ y $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$ para $y < 0$.Y el origen del plano xy se envía al origen del plano $r\theta$.

Así, por ejemplo, si se quiere establecer la transformación inversa sobre alguna vecindad de un punto de la forma $(x, 0)$, es preciso aplicar la regla $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ para puntos (x, y) con $y \geq 0$ y la regla $\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi$ para puntos (x, y) con $y < 0$.

Para concluir este capítulo enunciaremos el caso general del teorema de la función inversa.

Teorema. Sea $T : A \subseteq R^n \longrightarrow R^n$ definida por $u_i = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, $(i = 1, 2, ..., n)$ sobre el abierto A y sea $\bar{x}_0 \in A$.

(1) Supóngase que T es de clase C^1 y que el Jacobiano $D = \dfrac{\partial(f_1, f_2, ..., f_n)}{\partial(x_1, x_2, ..., x_n)}$ no se anula en $\bar{x}_0$.

(2) Entonces existe una vecindad U de el punto $\bar{x}_0$ y una vecindad V de su imagen $T(\bar{x}_0)$ tal que la transformación $T : U \longrightarrow V$ es biyectiva.

(3) Además, la transformación inversa $T^{-1} : V \longrightarrow U$, definida por $x_i = F(u_1, u_2, ..., u_n)$, $i = 1, 2, ...n$, también es de clase C^1, y para un punto $\bar{y}$ en V, si $\bar{x}$ es el punto en U en el cual $T(\bar{x}) = \bar{y}$, entonces

$$DT^{-1}(\bar{y}) = [DT(\bar{x})]^{-1}$$

$[DT(\bar{x})]^{-1}$ es la matriz inversa de la matriz $DT(\bar{x})$.

Regresemos a las fórmulas para las derivadas parciales de las funciones $x = F(u, v)$, $y = G(u, v)$ para establecerlas en notación matricial.

$$DT^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial y} & -\frac{\partial f}{\partial y} \\ -\frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} = [DT(\bar{x})]^{-1}$$

CONCLUSIONES

Con la redacción de esta tesis se ha buscado conseguir entre muchos otros objetivos, el de plantear, primero, sobre una base informal, la cuestión de la existencia de funciones definidas por medio de ecuaciones, para posteriormente abordar, de una manera intuitiva, las condiciones que garantizan la existencia de tales funciones. Al respecto se lleva a cabo una discusión suficientemente profunda con la intención de lograr entender la naturaleza y alcance de los resultados aquí expuestos. En todo momento se enfatiza sobre el caracter local de los teoremas demostrados.

En cuanto a las demostraciones de los teoremas de la función implícita para los casos de ecuaciones de una curva y de una superficie, éstas están escritas rigurosamente y con el mayor detalle. Con las dos demostraciones en un mismo texto, se tiene una manera para compararlas, puesto que están desarrolladas buscando en todo momento similitud entre ellas. Hecho que podría parecer repetitivo, pero que, sin embargo, pone énfasis en la búsqueda de una mayor comprensión de este teorema.

Otros aciertos logrados son que el tratamiento es más general en lo que se refiere a no dar importancia a una variable sobre la (las) otra (otras) y también a que la notación es consistente para ambos teoremas. Hechos que contribuyen a un mejor entendimiento de los mismos.

Aun cuando los casos de los teoremas de la función inversa aquí expuestos no es posible desarrollarlos buscando similitud entre ellos, cuando menos, se establece su formulación en forma idéntica. Para estos mismos también se consiguen demostraciones con todo rigor y suficientemente detalladas .

También es de destacar que hay una separación en bloques de todos los enunciados de los teoremas aquí expuestos, que tiene como efecto el de dar mayor claridad a la exposición y por tanto el de lograr una mejor comprensión.

BIBLIOGRAFIA

Courant, Richard and John, Fritz. Introduction to Calculus and Analysis . Volume II. Springer Verlag, 1989.

Haaser, Norman and Lasalle, Joseph. Introduction to Analysis. Volume II. Ginn and Company, 1959.

Osserman, Robert. Two - Dimensional Calculus. Harcourt, Brace and World, 1968.

Protter, Murray. Intermediate Calculus. 2nd. ed. Springer Verlag, 1985.

Taylor, Angus. Advanced Calculus. 2nd. ed. John Wiley and Sons, 1972.