

20324



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

14

FACULTAD DE CIENCIAS

POLITOPOS REGULARES Y C-GRUPOS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE: M A T E M A T I C O P R E S E N T A :

JOSE EDUARDO GARCIA GOMEZ TAGLE

DIRECTOR DE TESIS: DR. JAVIER BRACHO CARPIZO



DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

2003

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

1



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION DISCONTINUA



ACADEMIA NACIONAL
DE CIENCIAS
MATEMÁTICAS

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Politopos Regulares y C-Grupos

realizado por José Eduardo García Gómez Tagle

con número de cuenta 9650527-6, quien cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Javier Bracho Carpizo

Propietario Dr. Jorge Luis Arocha Perez

Propietario Dr. Rodolfo San Agustín Chi

Suplente Mat. Julieta Del Carmen Verdugo Díaz

Suplente M. en C. Ricardo Strausz Santiago

[Handwritten signatures: Arocha, Bracho, San Agustín, Verdugo, Strausz]

Consejo Departamental de Matemáticas



M. en C. José Eduardo García Gómez Tagle

C.F. MATEMÁTICAS

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

2

AGRADECIMIENTOS

Primero quiero agradecer a mi papá y a mamá por todo lo que me han dado. A la universidad, a la facultad de ciencias y al Roli por todos estos años de paciencia.

A Sergio, Oscar y Martín por todas sus enseñanzas y buenos consejos.

A mis amigos que, sería imposible numerar pero que todos ellos han formado parte esencial de mi vida, unos desde que éramos larvas y otros ya mas grandecitos, pero todos igual de importantes.

A Rosalba y Adrián, siempre serán mis hermanos favoritos y les deseo muchos triunfos en la vida.

Y finalmente a Carlos y María por mostrarme nuevos campos de investigación y desarrollo.

Índice

1. Introducción	1
2. Nociones Básicas	3
2.1. ¿Qué es un Politopo?	3
2.2. Grupos	9
3. Del grupo de automorfismos a C-grupos	11
4. De C-grupos al grupo de automorfismos	24
4.1. Conclusiones	35

4

1. Introducción

Los poliedros han estado con nosotros desde tiempos inmemoriales. La gran belleza de los poliedros regulares como el cubo y el tetraedro, predecía a las investigaciones matemáticas sobre ellos. Se tiene conocimiento que desde el año 500 a.c. los Etruscos realizaban apuestas, utilizando un cubo como dado, etiquetando cada uno de sus lados con un número del 1 al 6.

Más tarde se puede apreciar como los Egipcios utilizaron polígonos regulares para construir sus pirámides (cuadrados para la base y triángulos para los lados). Luego Platón asocia a los 5 poliedros regulares (tetraedro, octaedro, cubo, icosaedro y dodecaedro) con los elementos básicos : fuego, aire, tierra, agua y el universo, respectivamente. Es por ello que en su memoria los poliedros regulares se han denominado Sólidos Platónicos. Pero no fué sino hasta que Euclides, en Los Elementos, demuestra formalmente que en el espacio (euclidiano) de dimensión 3, solamente existen 5 poliedros regulares.

A mediados del siglo XX, el estudio de los poliedros dió un gran giro. Coxeter los comienza a estudiar, no como cascos convexos de un número finito de puntos, sino como objetos combinatorios. Coxeter, con esta nueva visión, facilita el estudio de los poliedros y sus generalizaciones en dimensiones mayores.

En la actualidad, con una nueva definición de politopo, no sólo se incluye a los cascos convexos de un número finito de puntos. El nuevo concepto de politopo también abarca objetos como teselaciones del plano y del espacio, inclusive de otras superficies, con otro tipo de geometrías como la elíptica de la esfera y la hiperbólica.

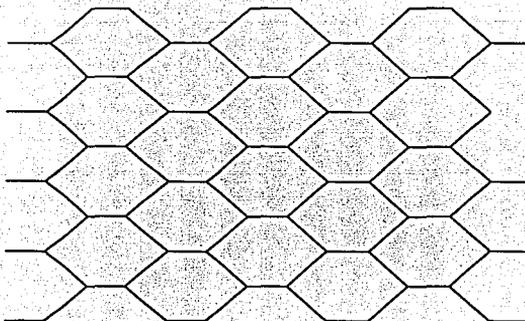


Figura 1

Teselación del plano euclidiano con hexágonos.

Hasta los tiempos de Coxeter, el concepto de regularidad dependía directamente de que tuviera caras iguales y el mismo número de ellas en cada vértice. En la actualidad este concepto fue ampliado un poco, y ahora depende del grupo de automorfismos del politopo, para aumentar el número de objetos que abarque la definición.

Esta tesis pretende demostrar la relación uno a uno, que existe entre los politopos regulares y los C-grupos. Este resultado es muy importante para el estudio de los politopos, ya que los podemos estudiar a través del álgebra como grupos que cumplen ciertas propiedades.

En el capítulo 2, se encuentran las principales definiciones y todos los conceptos básicos acerca de los politopos y del grupo de automorfismos. En el capítulo 3, se contruyen los C-grupos a partir de los grupos de automorfismos de los politopos regulares. Y en el capítulo 4, se hace el paso de regreso, o sea, a partir de los C-grupos se contruyen politopos regulares.

2. Nociones Básicas

2.1. ¿Qué es un Politopo?

En este capítulo nos ocuparemos de dar las nociones básicas acerca de los politopos e isomorfismos, y sus correspondientes definiciones necesarias para llevar a cabo las demostraciones de los capítulos 3 y 4.

Definición 2.1 *Un orden parcial en un conjunto P está dado por una relación \leq , definida para ciertos pares ordenados de elementos de P , que se satisface las siguientes condiciones:*

1. $a \leq a$ para todo los $a \in P$ (reflexividad).
2. Si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$ (antisimetría).
3. Si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$ (transitividad).

Se dice que P es un conjunto parcialmente ordenado (por \leq). Es importante observar que en un conjunto parcialmente ordenado no necesariamente son comparables cada par de elementos. Nosotros estudiaremos a los politopos como un conjunto, en el que estan contenidos vértices, aristas, caras y demás generalizaciones; y a cada elemento del conjunto, a través de una función, denominada rango, se les asignará un valor para distinguirlos que corresponde a la dimensión. A los vértices se les asignará el valor de 0, a las aristas 1, a las caras 2 y así sucesivamente. En este sentido las propiedades de los conjuntos parcialmente ordenados, nos ayudarán a que por ejemplo un vértice y una cara sóloamente se comparen en caso de que el vértice pertenezca a esa cara, es decir, que sean incidentes.

Definición 2.2 *Un Politopo P de rango n , es un conjunto parcialmente ordenado, con una función de rango estrictamente monótona.*

$$r_P : P \longrightarrow \{-1, 0, 1, \dots, n\}$$

que satisface las siguientes cuatro propiedades :

1. Si $P_i = \{F \in P \mid r_P(F) = i\}$, entonces $|P_{-1}| = |P_n| = 1$. Es decir, P tiene un elemento máximo y uno mínimo que, además, son únicos.
2. Los subconjuntos máximos totalmente ordenados, llamados cadenas maximales o banderas, tienen exactamente $n + 2$ elementos, o sea, tienen un elemento para cada P_i .
3. P es fuertemente conexo en banderas, es decir, para cualquier par de banderas Ψ y Φ en P , existe una sucesión de banderas :

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m = \Psi$$

tal que para toda $k \in \{0, 1, 2, \dots, m\}$, Φ_k y Φ_{k+1} difieren por exactamente un elemento y, $\Phi \cap \Psi \subset \Phi_k$.

4. Para F y G en P , con $F \leq G$, si

$$r_P(F) + 1 = i = r_P(G) - 1$$

entonces existen exactamente dos elementos H en P_i , que satisfacen :

$$F \leq H \leq G.$$

Consideremos, de rango 3, la siguiente teselación del toro

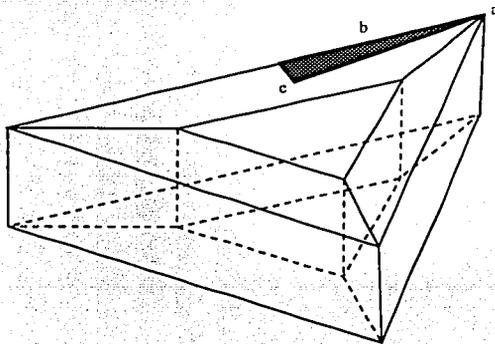


Figura 2

Con respecto a la definición anterior puede verse como en el conjunto de 12 vértices, 24 aristas y 12 caras de la teselación del toro; en él, dos elementos del conjunto son comparables si son incidentes. El elemento mínimo es el conjunto vacío, y el máximo es el politopo en sí (ya que es el elemento de rango 3). El rango de $F \in P$ nos representa la dimensión de la cara F ; a los elementos de rango 0, los llamaremos vértices, a los de rango 1, aristas y a los de rango i , i -caras. En este caso una bandera consta de 5 elementos: el conjunto vacío, un vértice, una arista, una 2-cara y el politopo en sí. En demostraciones subsiguientes frecuentemente omitiremos a los elementos mínimo y máximo por comodidad.

En el caso de los politopos de rango 3, las banderas se pueden representar como triangulitos: tomando como los vértices del triangulito un vértice del politopo, el punto medio de una arista incidente al vértice y el baricentro de una 2-cara incidente al vértice y arista. Como lo podemos observar en la figura 2.

Al conjunto de todas las banderas de P lo denotaremos como $F(P)$. Dadas dos banderas Φ y Ψ en $F(P)$ podemos encontrar una sucesión de banderas tales que:

$$\Phi = \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m = \Psi$$

Al toro también lo podemos representar como un cuadrado identificando sus lados opuestos. Un ejemplo de una sucesión de banderas se puede ver en la figura 3.

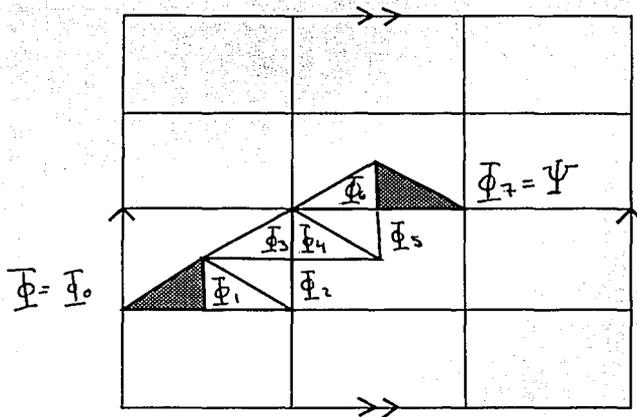


Figura 3

Los órdenes parciales se pueden representar a través de un Diagrama de Hasse, el cual consiste en hacer una gráfica tomando a los elementos del conjunto como vértices, poniendo una arista entre ellos si son incidentes. El acomodo de los vértices se hará en niveles dependiendo de su rango, por lo tanto todos los vértices que representen caras del mismo rango estarán en un mismo nivel. Los niveles se acomodarán en orden por su rango, de tal manera que el de mayor rango quede hasta arriba y el de menor hasta abajo.

Por ejemplo el Diagrama de Hasse del orden parcial de subconjuntos del conjunto $\{0, 1, 2\}$ quedará como a continuación.

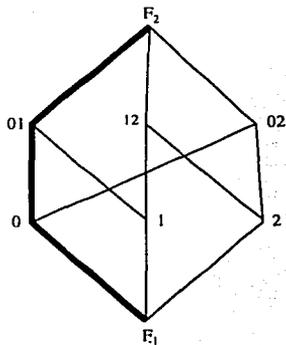


Figura 4

El Diagrama de Hasse de la figura 4 corresponde a un triángulo :

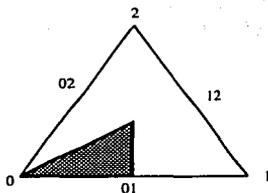


Figura 5

Los ciclos, o polígonos, son los politopos de rango 2 como lo podemos ver en el Diagrama de Hasse de la figura 6.

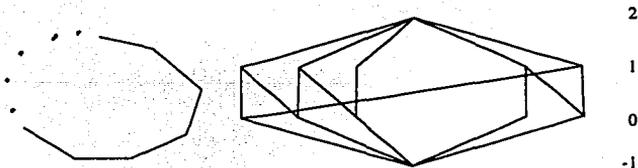


Figura 6

Para F y G en P , con $F \leq G$, llamaremos al conjunto

$$S = G \setminus F = \{H \in P \mid F \leq H \leq G\}$$

una sección, o intervalo, de P . Si nos fijamos en una sección donde F sea un vértice y G una 2-cara, podemos observar que entre una 2-cara y un vértice de la 2-cara hay exactamente dos aristas incidentes.

Se puede observar que toda sección de un politopo es también un politopo : dada una sección $G \setminus F$ cumple claramente con las propiedades 1, 2 y 4 de la definición 2.2; la propiedad 3 se cumple a partir de la implicación de que $\Phi \cap \Psi \subset \Phi_k$ de la propiedad 3, porque podemos tomar a Φ y Ψ de tal manera que $\Phi \cap \Psi = \{F_{-1}, \dots, F, G, \dots, F_n\}$ (como lo podemos ver en la figura 7) y esto establece que la sección $G \setminus F$ es fuertemente conexa en banderas y por lo tanto toda sección de un politopo es politopo.



Figura 7

La definición de politopo excluye objetos como los siguientes :

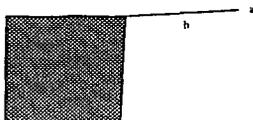


Figura 8

La figura 8 no cumple con la propiedad 2 de la definición porque la cadena $\{a, b\}$ no es maximal, ya que no es incidente a la cara C .

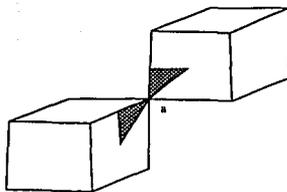


Figura 9

La figura 9 no cumple con la propiedad 3 de la definición porque en el vértice a no es fuertemente conexo en banderas, ya las banderas difieren en dos elementos.

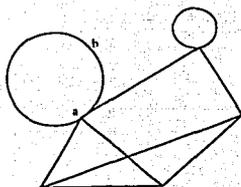


Figura 10

La figura 10 no cumple con la propiedad 4 de la definición porque entre el vacío y la arista b existe un único vértice a , en vez de dos.

2.2. Grupos

Sea G un grupo, al subgrupo generado por $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ lo denotamos por:

$$\langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle$$

Si $\langle g_1, g_2, \dots, g_k \rangle = G$, entonces decimos que $g_1, g_2, \dots, g_k \in G$ son generadores de G . Por convención la multiplicación de funciones será por la derecha.

Definición 2.3 *Un automorfismo de un politopo P , es una biyección del conjunto de caras en sí mismo, que preserva el orden.*

Por ejemplo, el triángulo tiene 6 automorfismos, tres reflexiones y tres rotaciones.

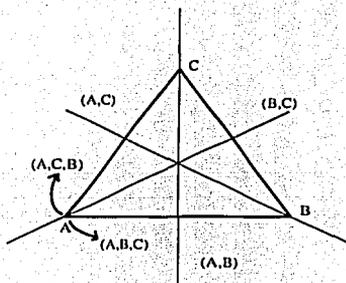


Figura 11

sus automorfismos son : 1, (A,B), (A,C), (B,C), (A,B,C) y (A,C,B).

El conjunto de todos los automorfismos de un Politopo P , forman un grupo. A este grupo lo llamaremos el grupo de automorfismos de P y lo denotaremos $\Gamma(P)$.

3. Del grupo de automorfismos a C-grupos

En este capítulo veremos cómo se construyen los C-grupos a partir de los grupos de automorfismos de los politopos regulares. De aquí en adelante, cuando nos refiramos a un grupo de automorfismos será, por lo general, referente al de un politopo regular.

Lema 3.1 *Sea P un politopo, $\Gamma(P)$ actúa libremente en $F(P)$, es decir, si $\alpha \in \Gamma(P)$ es tal que $\Psi\alpha = \Psi$ para alguna bandera $\Psi \in F(P)$, entonces $\alpha = 1$.*

Demostración. Si Ψ es una bandera que difiere de Φ en un sólo elemento, digamos de rango i , entonces :

$$\Psi = \{F_0, F_1, \dots, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \dots, F_{n-1}\}$$

$$\Phi = \{F_0, F_1, \dots, F_{i-1}, F'_i, F_{i+1}, \dots, F_{n-1}\}$$

Por el inciso 4 de los politopos, únicamente F_i y F'_i son incidentes a F_{i-1} y F_{i+1} , entonces si $F_i\alpha = F_i$, $F_{i-1}\alpha = F_{i-1}$ y $F_{i+1}\alpha = F_{i+1}$ se debe tener que $F'_i\alpha = F'_i$. Por lo tanto $\Phi\alpha = \Phi$.

Por ser fuertemente conexo implica que fija a todas las banderas, y por lo tanto $\alpha = 1$. ■

Definición 3.1 *Un politopo P es regular, si para cada par de banderas $\Phi, \Psi \in F(P)$, existe $\alpha \in \Gamma(P)$, tal que $\Phi\alpha = \Psi$, donde $\Phi\alpha = \{F\alpha \mid F \in \Phi\}$. (Obsérvese que, como habíamos dicho, la multiplicación y acción de las funciones es, por convención por la derecha.)*

Esto significa que $\Gamma(P)$ es transitivo en todas las banderas. Un ejemplo de esta definición es el octaedro: para cualquier par de banderas existe un elemento dentro del grupo de automorfismos, que manda una en la otra.

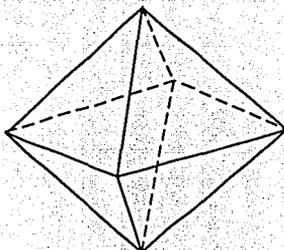


Figura 12

Un ejemplo de un politopo no regular es el prisma que combina caras triangulares y rectangulares. En el prisma no existe ningún automorfismo que mande la bandera $\Phi = \{\emptyset, A, B, C, P\}$ de la figura 13a, en la bandera $\Psi = \{\emptyset, a, b, c, P\}$ de la figura 13b.

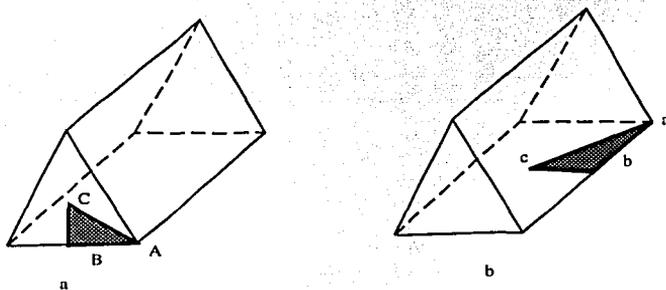


Figura 13

Definición 3.2 Dado un grupo con generadores distinguidos

$$W = \langle s_0, \dots, s_{n-1} \rangle$$

sea $W_I = \langle s_i \mid i \in I \rangle$ donde $I \subset S = \{0, \dots, n-1\}$. La Propiedad de la Intersección establece que para todo $I, J \subset S$ se tiene:

$$W_{I \cap J} = W_I \cap W_J.$$

Podemos observar que siempre se cumple la contención

$$W_{I \cap J} \subset W_I \cap W_J$$

Pues si tenemos $\alpha \in W_{I \cap J}$, entonces α es una palabra de la forma :

$$\alpha = s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n} \quad \text{con } i_j \in I \cap J$$

y por lo tanto

$$\alpha \in W_I \cap W_J$$

Definición 3.3 Un C-grupo, es un grupo con generadores distinguidos $W = \langle s_0, \dots, s_{n-1} \rangle$ que cumple con las siguientes relaciones:

$$s_i^2 = (s_i s_j)^2 = (s_{i-1} s_i)^{R_i} = 1$$

donde $j \neq i, i+1, i-1$, $R_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \infty$ y $R_i > 2$. Y que además cumple con la propiedad de la intersección.

Teorema 3.1 Dado un politopo regular P , el grupo de automorfismos de P , $\Gamma(P)$, esta generado por $\langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ que cumple con las siguientes relaciones:

$$\rho_i^2 = (\rho_i \rho_j)^2 = (\rho_{i-1} \rho_i)^{R_i} = 1$$

donde $j \neq i, i+1, i-1$, $R_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \infty$ y $R_i > 2$.

Demostración. Fijemos a Ψ como una bandera base o determinada en $F(P)$

$$\Psi = \{F_0, F_1, \dots, F_{i-1}, F_i, F_{i+1}, \dots, F_{n-1}\}$$

sea Ψ^i la única bandera $\Psi^i \in F(P)$ que difiere de Ψ por exactamente un elemento de rango i , cuya existencia y unicidad es el inciso 4 de los politopos. Y para cada i , sea $\rho_i \in \Gamma(P)$ el automorfismo tal que $\Psi \rho_i = \Psi^i$, cuya existencia está garantizada por ser regular.

Con base en, Ψ vamos a verificar que las ρ_i generan el grupo de automorfismos $\Gamma(P)$ y cumplen con las relaciones. Por como fueron tomadas las ρ_i podemos observar que:

$$F_j \rho_i = F_j \quad \text{si } j \neq i \quad (1)$$

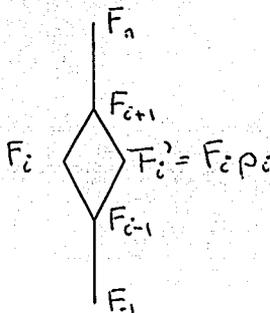
1. Veamos primero qué le pasa a la bandera Ψ cuando le aplicamos ρ_i

$$\Psi\rho_i = \{F_0\rho_i, F_1\rho_i, \dots, F_{i-1}\rho_i, F_i\rho_i, F_{i+1}\rho_i, \dots, F_{n-1}\rho_i\}$$

por (1) :

$$\Psi\rho_i = \{F_0, F_1, \dots, F_{i-1}, F_i\rho_i, F_{i+1}, \dots, F_{n-1}\}$$

tenemos que $F_{i-1} < F_i\rho_i < F_{i+1}$ por el inciso 4 de los politopos, sabemos que entre F_{i-1} y F_{i+1} existen exactamente dos elementos de rango i , F_i y F'_i . Por lo que $F_i\rho_i = F'_i$ entonces $F_{i-1} < F'_i < F_{i+1}$.



Si multiplicamos nuevamente por ρ_i , obtenemos : $F_{i-1}\rho_i < F'_i\rho_i < F_{i+1}\rho_i$ entonces por (1) $F_{i-1} < F'_i\rho_i < F_{i+1}$. Por el inciso 4. de la definición de politopo, sabemos que $F'_i\rho_i = F'_i$ ó F_i pero no puede ser F'_i por como fué escogido ρ_i , ya que este es el automorfismo que manda Ψ en Ψ^i . Sólamente nos queda que $F'_i\rho_i = F_i$, y esto implica que $\Psi\rho_i\rho_i = \Psi$. De aqui se sigue $\Psi\rho_i^2 = \Psi$ y finalmente obtenemos $\rho_i^2 = 1$ por el lema anterior.

2. Para demostrar la segunda relación $(\rho_j\rho_i)^2 = 1$ cuando $j \neq i, i + 1, i - 1$; sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $j < i$.

$$\Psi\rho_j\rho_i = \{F_0\rho_j\rho_i, \dots, F_{j-1}\rho_j\rho_i, F_j\rho_j\rho_i, F_{j+1}\rho_j\rho_i,$$

$$\dots, F_{i-1}\rho_j\rho_i, F_i\rho_j\rho_i, F_{i+1}\rho_j\rho_i, \dots, F_{n-1}\rho_j\rho_i\}$$

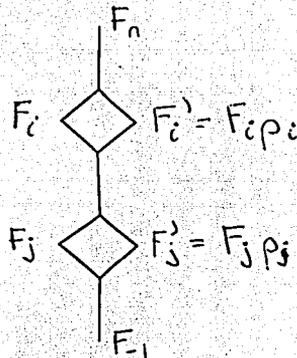
como $j \neq i - 1$ y $j < i$, entonces $F_{j+1} = F_{i-1}$ solamente si $j = i - 2$, pero esto no afectará la demostración ya que por (1) la cara $F_{j+1} = F_{i-1}$ no sería afectada por ρ_j ni ρ_i .

$F_{j-1}\rho_j\rho_i < F_j\rho_j\rho_i < F_{j+1}\rho_j\rho_i, \dots, F_{i-1}\rho_j\rho_i < F_i\rho_j\rho_i < F_{i+1}\rho_j\rho_i$
nuevamente por (1)

$$F_{j-1} < F_j\rho_j < F_{j+1}, \dots, F_{i-1} < F_i\rho_i < F_{i+1}$$

por como fueron escogidas ρ_j y ρ_i

$$F_{j-1} < F_j' < F_{j+1}, \dots, F_{i-1} < F_i' < F_{i+1}$$



multipliquemos nuevamente por $\rho_j\rho_i$

$$F_{j-1}\rho_j\rho_i < F_j'\rho_j\rho_i < F_{j+1}\rho_j\rho_i, \dots, F_{i-1}\rho_j\rho_i < F_i'\rho_j\rho_i < F_{i+1}\rho_j\rho_i$$

$$F_{j-1} < F_j'\rho_j < F_{j+1}, \dots, F_{i-1} < F_i'\rho_i < F_{i+1}$$

al igual que en el inciso 1. de esta demostración:

$$F_j'\rho_j = F_j \quad \text{y} \quad F_i'\rho_i = F_i$$

$$F_{j-1} < F_j < F_{j+1}, \dots, F_{i-1} < F_i < F_{i+1}$$

Finalmente podemos concluir que : $\Psi(\rho_j \rho_i)^2 = \Psi$ y por el lemma anterior,

$$(\rho_j \rho_i)^2 = 1$$

para todo $j \neq i, i + 1, i - 1$. Una forma alterna de ver esta relación, sería al demostrar que

$$\rho_j \rho_i = \rho_i \rho_j$$

3. En este caso observaremos que se necesita un $R_i > 2$ con R_i en $Z^+ \cup \infty$ para obtener: $\Psi(\rho_{i-1} \rho_i)^{R_i} = \Psi$

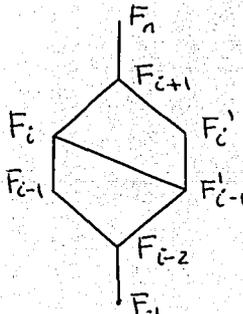
$$\Psi \rho_{i-1} \rho_i = \{F_{0\rho_{i-1}\rho_i}, F_{1\rho_{i-1}\rho_i}, \dots, F_{i-2\rho_{i-1}\rho_i}, F_{i-1\rho_{i-1}\rho_i}, F_i \rho_{i-1} \rho_i, F_{i+1\rho_{i-1}\rho_i}, \dots, F_{n-1\rho_{i-1}\rho_i}\}$$

Nos fijamos en cómo afectará $\rho_{i-1} \rho_i$ la sección $F_{i+1} \setminus F_{i-2}$, ya que sabemos por (1) que el resto de la bandera no será modificada.

$$F_{i-2\rho_{i-1}\rho_i} < F_{i-1\rho_{i-1}\rho_i} < F_i \rho_{i-1} \rho_i < F_{i+1\rho_{i-1}\rho_i}$$

$$F_{i-2} < F'_{i-1} \rho_i < F_i \rho_i < F_{i+1}$$

$$F_{i-2} < F'_{i-1} < F'_i < F_{i+1}$$

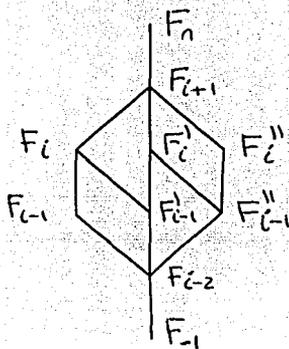


al multiplicar nuevamente por $\rho_{i-1}\rho_i$

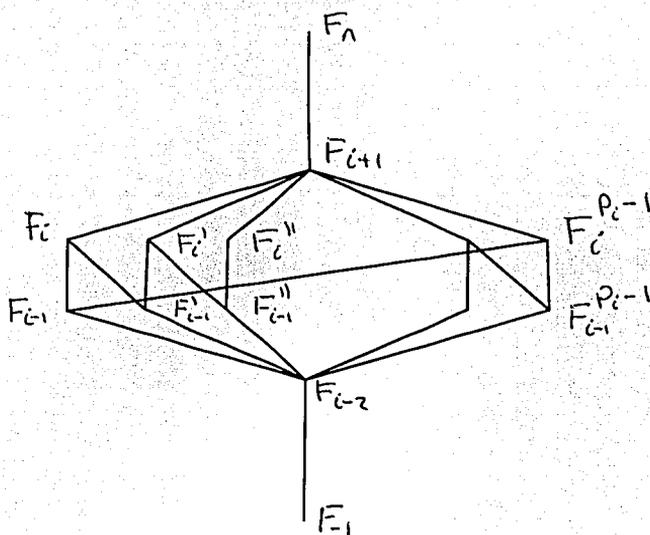
$$F_{i-2}\rho_{i-1}\rho_i < F'_{i-1}\rho_{i-1}\rho_i < F''_i\rho_{i-1}\rho_i < F_{i+1}\rho_{i-1}\rho_i$$

$$F_{i-2} < F''_{i-1}\rho_i < F''_i\rho_i < F_{i+1}$$

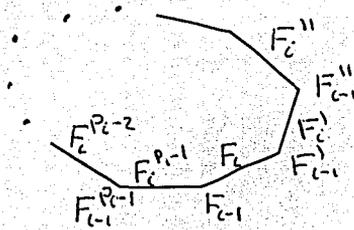
$$F_{i-2} < F''_{i-1} < F''_i < F_{i+1}$$



En este último paso $F'_{i-1}\rho_{i-1} \neq F_{i-1}$ ya que por la propiedad 4. de la definición de polítopo sabemos que entre dos caras de rango $i-2$ y rango i , existen exactamente dos caras de rango i . Pero en este caso estamos tomando diferentes caras de rango i , o sea, primero multiplicamos por ρ_{i-1} y la única cara que cambia es F_{i-1} en F'_{i-1} entre las caras F_{i-2} y F_i , pero al multiplicar nuevamente por ρ_{i-1} no obtenemos F_{i-1} sino F''_{i-1} , ya que esta nueva cara, está entre F_{i-2} y F'_i . Análogamente pasa lo mismo con ρ_i , y las caras de rango i . Esto demuestra que $R_i < 2$, donde si seguimos multiplicando por $\rho_{i-1}\rho_i$, R_i es la primera vez que regresemos a la bandera base o ∞ si nunca lo hacemos.



Esta sección nos representa un q -ágono, y lo que estamos haciendo al multiplicar por $\rho_{i-1}\rho_i$ es cambiar primero un vértice y luego una arista, y así sucesivamente hasta darle la vuelta y regresar al vértice y arista originales, donde en este caso R_i es mayor que 2 y representa el número de lados del q -ágono.



4. Nos falta únicamente ver que las ρ_i generan a $\Gamma(P)$. Para esto, sea $\alpha \in \Gamma(P)$. Por el lema anterior sabemos que α está determinada por lo que le hace a la bandera base, es decir, por $\Psi\alpha$. Por la conexidad fuerte tenemos una sucesión :

$$\Psi = \Psi_0\Psi_1 \dots, \Psi_k = \Psi\alpha$$

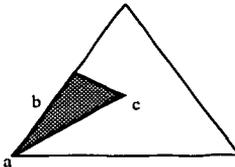
donde Ψ_{j-1} y Ψ_j difieren únicamente por el elemento de rango i_j . Por inducción sobre k y con argumentos similares a los puntos anteriores, es fácil verificar que :

$$\alpha = \rho_{i_k}\rho_{i_{k-1}} \dots \rho_{i_1}$$

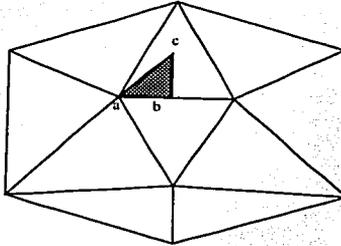
Por lo tanto $\Gamma(P) = \langle \rho_0 \dots \rho_{n-1} \rangle$, y queda demostrado el Teorema.



Estos son algunos ejemplos de grupos de automorfismos.



$$\Gamma(\text{Triangulo}) = \langle \rho_0, \rho_1 \mid \rho_0^2 = \rho_1^2 = (\rho_0\rho_1)^3 = 1 \rangle$$



$$\Gamma(\text{Icosaedro}) = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \mid \rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 =$$

$$(\rho_0\rho_2)^2 = (\rho_0\rho_1)^3 = (\rho_1\rho_2)^5 = 1 \rangle$$

$$\Gamma(\text{Hiper cubo}) = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3 \mid \rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 = \rho_3^2 =$$

$$(\rho_0\rho_2)^2 = (\rho_0\rho_3)^2 = (\rho_1\rho_3)^2 = (\rho_0\rho_1)^4 = (\rho_1\rho_2)^3 = (\rho_2\rho_3)^3 = 1 \rangle$$

Para ver que $\Gamma(P)$ cumple con la Propiedad de la Intersección, necesitaremos el siguiente lema.

Lema 3.2 Sea Φ la bandera base de un politopo regular P , e I un subconjunto de $N = \{0, 1, \dots, n-1\}$ de tal manera que:

$$\Phi_I = \{F_i \in \Phi \mid r_P(F_i) = i \in I\}$$

entonces el grupo $\Gamma(P, \Phi_I) = \{\alpha \in \Gamma(P) \mid \Phi_I\alpha = \Phi_I\}$ es igual al grupo $\Gamma(P)_I = \langle \rho_j \mid j \notin I \rangle$

Demostración. Sea $\Phi^i \in P$ como en el teorema anterior, de tal manera que ρ_i es el único automorfismo tal que $\Phi \rho_i = \Phi^i$. También sabemos por el teorema anterior que $\Gamma(P)$ es un grupo W generado por $\langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ que cumple con las siguientes relaciones:

$$\rho_i^2 = (\rho_i \rho_j)^2 = (\rho_{i-1} \rho_i)^{R_i} = 1$$

donde $j \neq i, i+1, i-1$, $R_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \infty$ y $R_i > 2$.

Como para $j \notin I$, ρ_j deja fija a todas las caras de la bandera Φ que son de rango $i \in I$ entonces $\rho_j \in \Gamma(P, \Phi_I)$. Por lo tanto, tenemos la contención

$$\Gamma(P)_I = \langle \rho_j \mid j \notin I \rangle \subset \Gamma(P, \Phi_I)$$

La demostración de la otra contención se sigue de la prueba del punto 4 de Teorema anterior. Observando que si $\alpha \in \Gamma(P, \Phi_I)$, la conexidad fuerte nos permite suponer que la sucesión de banderas de Φ a $\Phi\alpha$ tiene fija a Φ_I , y por lo tanto los índices $i_j \notin I$. Entonces

$$\alpha = \rho_{i_k} \dots \rho_{i_1} \in \langle \rho_j \mid j \notin I \rangle.$$

■

Para demostrar que este grupo W es un C-grupo nos falta probar que también cumple con la Propiedad de la Intersección.

Teorema 3.2 *Sea P un politopo regular, entonces el grupo de automorfismos de P , $\Gamma(P)$, es un C-grupo.*

Demostración. Sea $N = \{0, 1, \dots, n-1\}$, e I y J dos subconjuntos de N y sea Φ la bandera base de P , por el Teorema 3.1 sabemos que $\Gamma(P)$ es un grupo W generado por $\langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ que cumple con las siguientes relaciones:

$$\rho_i^2 = (\rho_i \rho_j)^2 = (\rho_{i-1} \rho_i)^{R_i} = 1$$

donde $j \neq i, i+1, i-1$, $R_i \in \mathbb{Z}^+ \cup \infty$ y $R_i > 2$. Faltaría demostrar que también cumple con la propiedad de la intersección:

$$\langle \rho_i \mid i \in I \rangle \cap \langle \rho_j \mid j \in J \rangle = \langle \rho_k \mid k \in I \cap J \rangle$$

Para esto tomemos $\alpha \in \langle \rho_i \mid i \in I \rangle \cap \langle \rho_j \mid j \in J \rangle$ se sigue que :

$$\alpha \in \langle \rho_i \mid i \notin N \setminus I \rangle \text{ y } \alpha \in \langle \rho_j \mid j \notin N \setminus J \rangle$$

por el teorema anterior podemos concluir :

$$\Phi_{N \setminus I} \alpha = \Phi_{N \setminus I} \text{ y } \Phi_{N \setminus J} \alpha = \Phi_{N \setminus J}$$

$$\Phi_{(N \setminus I) \cup (N \setminus J)} \alpha = \Phi_{(N \setminus I) \cup (N \setminus J)}$$

nuevamente por el teorema anterior

$$\alpha \in \langle \rho_k \mid k \notin (N \setminus I) \cup (N \setminus J) \rangle$$

por propiedades de conjuntos : $(N \setminus I) \cup (N \setminus J) = N \setminus (I \cap J)$

$$\alpha \in \langle \rho_k \mid k \notin N \setminus (I \cap J) \rangle$$

$$\alpha \in \langle \rho_k \mid k \in I \cap J \rangle$$

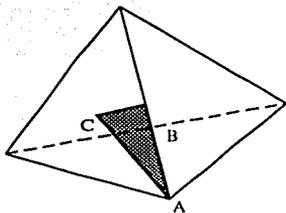
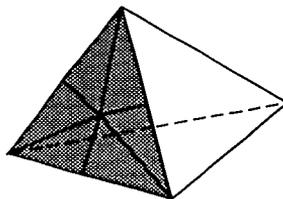
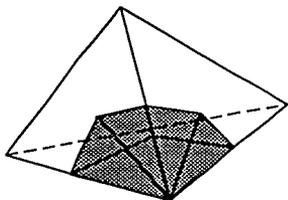
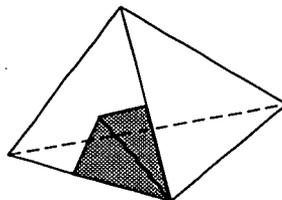
Ya habíamos observado que siempre se cumple la otra contención. Por lo tanto el grupo de automorfismos de un politopo P , $\Gamma(P)$, cumple con la propiedad de la intersección. Entoces podemos concluir que todo grupo de automorfismos $\Gamma(P)$, de un politopo regular P , es un C-grupo. ■

Para ilustrar este último teorema, tomemos al tetraedro y a una bandera de él, $\Psi = \{\emptyset, A, B, C, P\}$ y a su grupo de automorfismos $\Gamma(P)$ de la siguiente forma:

$$\Gamma(\text{Tetraedro}) = \langle \rho_0, \rho_1, \rho_2 \mid \rho_0^2 = \rho_1^2 = \rho_2^2 =$$

$$(\rho_0 \rho_2)^2 = (\rho_0 \rho_1)^3 = (\rho_1 \rho_2)^3 = 1 \rangle$$

Sea $W_{\{0,1\}} = \langle \rho_0, \rho_1 \rangle$, $W_{\{1,2\}} = \langle \rho_1, \rho_2 \rangle$ y $W_{\{1\}} = \langle \rho_1 \rangle$. Por lo que $\Psi W_{\{0,1\}}$ son las banderas que están generadas por el vértice A, y la arista B, sobre la cara C, dejando fija esta última. $\Psi W_{\{1,2\}}$ son las banderas que estan generadas por la arista B, y la cara C, alrededor del vértice A, dejándolo a éste fijo. $\Psi W_{\{1\}}$ son las dos banderas que están generadas por la arista B, dejando fija la cara C y el vértice A.


 Ψ

 $\Psi_{W(0,1)}$

 $\Psi_{W(1,2)}$

 $\Psi_{W(1)}$

Aquí podemos observar cómo $\Gamma(\text{Tetraedro})$ cumple con la propiedad de la intersección:

$$\Psi_{W\{0,1\}} \cap \Psi_{W\{1,2\}} = \Psi_{W\{0,1\} \cap \{1,2\}} = \Psi_{W\{1\}}$$

4. De C-grupos al grupo de automorfismos

En este capítulo, primero vamos a construir politopos a partir de C-grupos, luego veremos que estos politopos son regulares y que el grupo de automorfismos es isomorfo al C-grupo a partir del cual fué construido, con este resultado y con los resultados del capítulo anterior, terminaremos por establecer una correspondencia uno a uno entre los politopos regulares y los C-grupos.

Definición 4.1 Sea H un subgrupo de un grupo G y sea $a \in G$. La clase lateral derecha Ha es el conjunto:

$$Ha = \{ha \mid h \in H\}$$

De la definición de clase lateral se obtienen fácilmente las siguientes equivalencias :

$$Ha = Hb \quad \text{con} \quad a, b \in G \quad \iff \quad b \in Ha \quad \iff \quad a^{-1}b \in H$$

Algunas de las primeras observaciones que podemos hacer con esta definición alterna de clase lateral, es que dos clases laterales son la misma, o no tienen ningún elemento en común. Otra, es el método para encontrar todas las clases laterales diferentes : primero escojo el subgrupo y éste por sí mismo es una clase lateral tomando a la identidad como el elemento del grupo que multiplica; luego tomo un elemento del grupo que no sea elemento del subgrupo y esto me dará una nueva clase lateral, nuevamente vuelvo a tomar un elemento del grupo que no esté en ninguna de las otras clases laterales, y así sucesivamente hasta que obtenga todas (por supuesto, estamos suponiendo que es finito).

Para llevar a cabo lo que acabamos de decir, de ahora en adelante sea W un C-grupo con generadores $W = \langle \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$, y sean W_i , $W_{<i}$ y $W_{>i}$ subgrupos de W , determinados de la siguiente forma:

$$W_i = \langle \rho_0, \dots, \rho_{i-1}, \rho_{i+1}, \dots, \rho_{n-1} \rangle = \langle \rho_j \mid j \neq i \rangle$$

$$W_{<i} = \langle \rho_0, \dots, \rho_{i-1} \rangle = \langle \rho_j \mid j < i \rangle$$

$$W_{>i} = \langle \rho_{i+1}, \dots, \rho_{n-1} \rangle = \langle \rho_j \mid j > i \rangle$$

La importancia de estos subgrupos de W se sigue de los siguientes dos lemas, que nos dicen que las caras de dimensión i de un politopo regular corresponden con las clases laterales del respectivo W_i .

Lema 4.1 *Sea P un politopo regular, sea $\Psi = F_{-1} < F_0 < \dots < F_n$ una bandera básica y $W = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ su C-grupo de automorfismos, entonces :*

$$u \in W_i \iff F_i u = F_i$$

Demostración. Sabemos que como $u \in W_i$, por la definición de W_i se tiene

$$u = \rho_{j_1} \rho_{j_2} \dots \rho_{j_k} \quad j_r \neq i$$

Como $F_i \rho_j = F_i$ si $i \neq j$ se tiene que $F_i u = F_i$. Supongamos que $u \in W$ es tal que $F_i u = F_i$, sea $\Phi = \Psi u$ y tenemos que $\{F_i\} \subset \Phi \cap \Psi$, por la conexidad fuerte y el inciso 4 del teorema 3.1 entonces u se escribe como :

$$u = \rho_{j_1} \rho_{j_2} \dots \rho_{j_k} \quad j_r \neq i \implies u \in W_i.$$

■

Lema 4.2 *Sea P un politopo regular, sea $\Psi = F_{-1} < F_0 < \dots < F_n$ una bandera básica y $W = \langle \rho_0, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ su C-grupo de automorfismos. Si $u \in W$ es tal que $F_i u = G_i$, entonces :*

$$\{v \in W \mid F_i v = G_i\} = W_i u$$

Demostración.

$$v \in W_i u \iff v u^{-1} \in W_i$$

Por el lema anterior esto sucede sí y sólo si :

$$F_i(v u^{-1}) = F_i \iff F_i v = F_i u = G_i$$

■

Regresemos ahora a estudiar los C-grupos en abstracto.

Lema 4.3 Si $w \in W_i$, existen $u \in W_{<i}$ y $v \in W_{>i}$ tales que

$$w = uv = vu,$$

Demostración. Por las propiedades de C-grupos se tiene que si $j < i$ y $k > i$ entonces ρ_j y ρ_k conmutan

$$\rho_k \rho_j = \rho_j \rho_k \quad (2)$$

Si $w \in W_i$ entonces existen j_1, \dots, j_k , todas distintas de i , tales que

$$w = \rho_{j_1} \rho_{j_2} \dots \rho_{j_k}$$

Por (2) las j_m tales que $j_m < i$ se pueden aglomerar a la izquierda de la expresión anterior. De tal manera que podemos suponer que existe k_1 y $0 \leq k_1 \leq k$ tal que $j_m < i$ para $m \leq k_1$ y $j_m > i$ para $m > k_1$. Si definimos

$$u = \rho_{j_1} \rho_{j_2} \dots \rho_{j_{k_1}} \in W_{<i}$$

$$v = \rho_{j_{k_1+1}} \dots \rho_{j_k} \in W_{>i}$$

claramente $w = uv$. Pero de nuevo por (2) se tiene que $w = vu$. ■

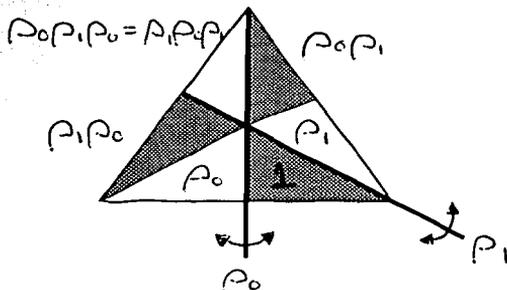
Por el lema anterior podemos observar que :

$$W_i = W_{<i} W_{>i} = W_{>i} W_{<i}$$

Por ejemplo ahora tomemos a un C-grupo en específico para construirle sus clases laterales:

$$W = \langle \rho_0, \rho_1 \mid \rho_0^2 = \rho_1^2 = (\rho_0 \rho_1)^3 = 1 \rangle$$

que es el grupo de automorfismos del triángulo, como ya habíamos visto en el capítulo anterior y tiene los siguientes elementos.



$$W = \{1, \rho_0, \rho_1, \rho_0\rho_1, \rho_1\rho_0, \rho_0\rho_1\rho_0 = \rho_1\rho_0\rho_1\}$$

y sus clases laterales son las siguientes:

$$W_0 = \{1, \rho_1\} \quad W_0\rho_0 = \{\rho_0, \rho_1\rho_0\} \quad W_0\rho_0\rho_1 = \{\rho_0\rho_1, \rho_1\rho_0\rho_1\}$$

$$W_1 = \{1, \rho_0\} \quad W_1\rho_1 = \{\rho_1, \rho_0\rho_1\} \quad W_1\rho_1\rho_0 = \{\rho_1\rho_0, \rho_0\rho_1\rho_0\}$$

Para construir el politopo a partir del C-grupo, las diferentes clases laterales de W_i van a representar las caras de rango i y para las de F_{-1} y F_n tomamos dos copias de W y las denotamos como $W_{-1} = W = W_n$, podemos observar que son únicas ya que:

$$W_{-1}u = Wu = W_nu \quad \forall u \in W$$

Sea $P(W)$ el conjunto de las clases laterales :

$$P(W) = \{W_i u \mid u \in W, \quad i = -1, 0, \dots, n-1, n\},$$

con la relación (que veremos que es un orden parcial) definida por :

$$W_j u \leq W_k v \iff -1 \leq j \leq k \leq n \quad \text{y} \quad W_j u \cap W_k v \neq \emptyset \quad (3)$$

Si nos fijamos es el ejemplo anterior, de las clases laterales nos damos cuenta que como $1 \in W_0$ y $1 \in W_1$, $W_0 \leq W_1$. Pero W_0 y $W_1\rho_1\rho_0$ no se pueden comparar ya que $W_0 \cap W_1\rho_1\rho_0 = \emptyset$.

El siguiente lema nos permitirá demostrar que la relación en $P(W)$ es un orden parcial y, a la vez, controlar sus cadenas.

Lema 4.4 *Sea $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n - 1$ y sean $u_{i_1}, \dots, u_{i_m} \in W$ tales que para cualquier $j \neq m$*

$$W_{i_j}u_{i_j} \cap W_{i_{j+1}}u_{i_{j+1}} \neq \emptyset$$

Entonces existe una $w \in W$ tal que $W_{i_j}u_{i_j} = W_{i_j}w$ para todo $j = 1, \dots, m$.

Demostración. Por inducción sobre m , si $m = 1$ no hay nada que probar, si $m = 2$ tomamos a $w \in W_{i_1}u_{i_1} \cap W_{i_2}u_{i_2}$ y listo. Ahora sea $k \geq 3$ y asumimos que el teorema es cierto si $m < k$. Tomemos a $m = k$ y como la sucesión

$$W_{i_2}u_{i_2}, W_{i_3}u_{i_3}, \dots, W_{i_m}u_{i_m}$$

contiene menos de k elementos, entonces satisface las condiciones del teorema y por lo tanto existe $w' \in W$ que para todo $j \geq 2$, $W_{i_j}u_{i_j} = W_{i_j}w'$. Igualmente, existe $v \in W$ tal que $W_{i_j}u_{i_j} = W_{i_j}v$, para todo $j = 1, 2$.

Podemos observar que $W_{i_2}v = W_{i_2}w'$ por lo que v es un elemento de $W_{i_2}w'$. Entonces existe una $h' \in W_{i_2}$ con la que podemos definir a v de la siguiente manera:

$$v = h'w'$$

Recordemos que el subgrupo $W_{i_2} = W_{>i_2}W_{<i_2} = W_{<i_2}W_{>i_2}$ (conmuta), entonces podemos reescribir a h' como $h' = hg = gh$ donde $g \in W_{>i_2}$ y $h \in W_{<i_2}$. Observemos que:

$$W_{>i_2} \subseteq W_{>i_1} \subseteq W_{i_1}$$

$$W_{<i_2} \subseteq W_{<i_j} \subseteq W_{i_j} \quad \forall j \geq 2$$

Podemos concluir que $g \in W_{i_j}$, si $j \leq 2$ y que $h \in W_{i_j}$, si $j \geq 2$. Finalmente tomemos a $w = g^{-1}v$

$$W_{i_j}w = W_{i_j}g^{-1}v = W_{i_j}g^{-1}h'w' = W_{i_j}g^{-1}ghw' =$$

$$= W_{i_j}hw' = W_{i_j}w' = W_{i_j}u_{i_j} \quad \forall j \geq 2$$

$$W_{i_j}w = W_{i_j}g^{-1}v = W_{i_j}v = W_{i_j}u_{i_j} \quad \forall j = 1, 2$$

Entonces encontramos un elemento $w \in W$ que satisface la propiedad requerida. ■

Teorema 4.1 *El conjunto $P(W)$ es un conjunto parcialmente ordenado, con la relación (3).*

Demostración. Tenemos que demostrar que para los pares ordenados con la relación (3), cumple las leyes reflexiva, antisimétrica y transitiva.

1. Ley reflexiva. Sea $W_{i_u} \in P(W)$, como $W_{i_u} \cap W_{i_u} \neq \emptyset$ e $i \leq i$ entonces $W_{i_u} \leq W_{i_u}$.
2. Ley antisimétrica. Sean $W_{i_u}, W_{j_v} \in P(W)$ con $W_{i_u} \cap W_{j_v} \neq \emptyset$ tales que $W_{i_u} \leq W_{j_v}$ y $W_{i_u} \geq W_{j_v}$, por (3) $i \leq j$ e $i \geq j$, y por propiedades de los enteros $i = j$, entonces como la intersección de las clases laterales W_{i_u} y W_{j_v} es no vacía, podemos concluir que $W_i = W_j$.
3. Ley transitiva. Para demostrar esta ley, usemos el lemma anterior con $m = 3$. Demostrar la transitividad en los casos que vincula a W_{-1} o W_n es trivial. ■

De ahora en adelante, cuando nos refiramos a $P(W)$ como un orden parcial siempre estará implícito que es con la relación (3).

Como corolario del Lema 4.4, tenemos que $W_{i_1}u_1, W_{i_2}u_2, \dots, W_{i_m}u_m$ en $P(W)$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ forman una cadena si y sólo si :

$$\bigcap_{j=1}^m W_{i_j}u_j \neq \emptyset$$

Pues hemos demostrado que existe $w \in W_{i_j}u_j$ para todo j . Además las posibles w son una clase lateral del grupo :

$$\bigcap_{j=1}^m W_{i_j}.$$

Es decir, tiene que $W_{i_1}u_1, W_{i_2}u_2, \dots, W_{i_m}u_m$ en $P(W)$ con $i_1 < i_2 < \dots < i_m$ forman una cadena si y sólo si existe $w \in W$ tal que :

$$\bigcap_{j=1}^m (W_{i_j})u_j = \left(\bigcap_{j=1}^m W_{i_j} \right) w \quad (4)$$

Teorema 4.2 Sea $n \geq 1$, sea $W = \langle \rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{n-1} \rangle$ un C-grupo y $P(W)$ el orden parcial clases laterales de W , entonces $P(W)$ es un Polítopo.

Demostración. Para demostrar que $P(W)$ es un polítopo, necesitamos verificar las cuatro propiedades de la definición de polítopo del capítulo 2. Sabemos que es un conjunto parcialmente ordenado por el teorema anterior. La función de rango la definimos de la siguiente manera:

$$r_{P(W)} : P(W) \implies \{-1, 0, 1, \dots, n\}$$

$$r_{P(W)}(W_i u) = i \quad \forall u \in W \quad \text{y} \quad \forall i \in \{-1, 0, 1, \dots, n\}$$

1. Al elemento mínimo lo definimos como W_{-1} y al máximo como W_n , son únicos ya que $W_{-1} = W = W_n$ y $W_{-1}u = W_{-1}$ y $W_n u = W_n$ para toda u en W . Además también podemos observar que $W_{-1} \leq W_i u \leq W_n$ para toda u en W y todo i en $\{-1, 0, 1, \dots, n\}$.

2. Como $W_i u \cap W_j v \neq \emptyset$ si y sólo si $W_i u = W_j v$, no puede haber relacionadas dos clases laterales distintas del mismo rango, por lo que todas las banderas o cadenas maximales tienen a lo más $n + 2$ elementos. Por el lema 4.4, si $W_i u < W_j v$ con $j - i > 2$, entonces para todo k , $i < k < j$ existe w tal que

$$W_i u < W_k w < W_j v.$$

Entonces las cadenas maximales son de exactamente $n + 2$ elementos.

3. Sean $W_{i-1} u$ y $W_{i+1} v$ en $P(W)$ tales que $W_{i-1} u \cap W_{i+1} v \neq \emptyset$, por el Lema 4.4 existe $w \in W$ tal que $W_{i-1} u = W_{i+1} w$ y $W_{i+1} v = W_{i+1} w$. Tomemos la cadena

$$W_{-1} w < W_0 w < W_1 w < \dots < W_{i-1} w < W_{i+1} w < \dots < W_n w$$

Esta es una cadena de $n + 1$ elementos, que le hace falta una clase lateral de W_i para convertirse en bandera. Ahora veremos que únicamente existen dos clases laterales de W_i con las que se puede relacionar. Nos fijamos en la intersección de los elementos de la cadena y por (4)

$$\bigcap_{j=1}^{n+1} (W_j, w) = \left(\bigcap_{j=1}^{n+1} W_j \right) w$$

y por la Propiedad de la Intersección

$$\left(\bigcap_{j=1}^{n+1} W_j \right) w = (W_{i_1} \cap W_{i_2} \cap \dots \cap W_{i_{n+1}}) w = \langle \rho_i \mid j \neq i \rangle w =$$

$$\langle \rho_i \rangle w = \{1, \rho_i\} w = \{w, \rho_i w\}$$

como $\{1\} \in W_i$ las únicas dos clases laterales con las que esta bandera se puede relacionar son $W_i w$ y $W_i \rho_i w$, por lo que podemos concluir que entre una clase lateral de rango $i_k - 1$ y una de rango $i_k + 1$, existen únicamente dos clases laterales de rango i_k con las que se pueden relacionar.

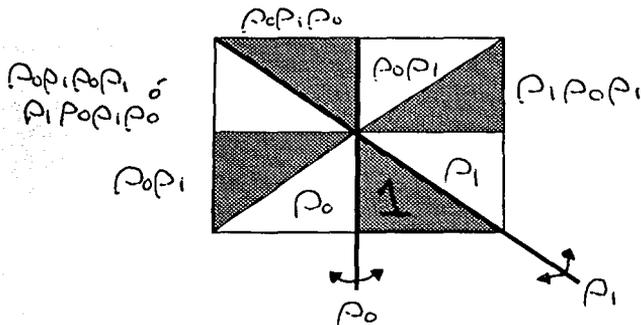
4. Sean Φ y Ψ dos banderas, y por el inciso anterior sea ρ_k en W el elemento del grupo tal que ρ_k genera la única bandera adyacente a Φ que difiere de Φ por un elemento de rango k , $\Phi\rho_k = \Phi^k$. Entonces podemos escribir una sucesión de banderas adyacentes que me lleven de Φ a Ψ de la siguiente manera:

$$\Psi = \Phi\rho_{k_1} \dots \rho_{k_i} = \Phi^{k_1 \dots k_i}$$

y por lo tanto es fuertemente conexo. ■

Para ilustrar todo lo que hemos enunciado hasta ahora construyamos un politopo a partir de un C-grupo W . Tomaremos el C-grupo que obtenemos del grupo de automorfismos del cuadrado.

$$W = \langle \rho_0, \rho_1 \mid \rho_0^2 = \rho_1^2 = (\rho_0\rho_1)^4 = 1 \rangle$$



$$W = \{1, \rho_0, \rho_1, \rho_0\rho_1, \rho_1\rho_0, \rho_0\rho_1\rho_0, \rho_1\rho_0\rho_1, \rho_0\rho_1\rho_0\rho_1 = \rho_1\rho_0\rho_1\rho_0\}$$

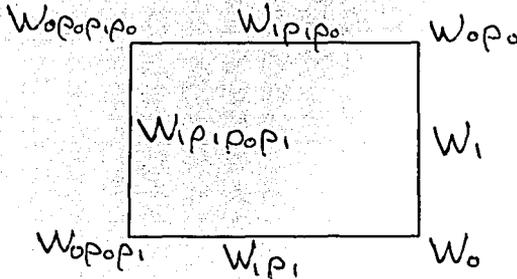
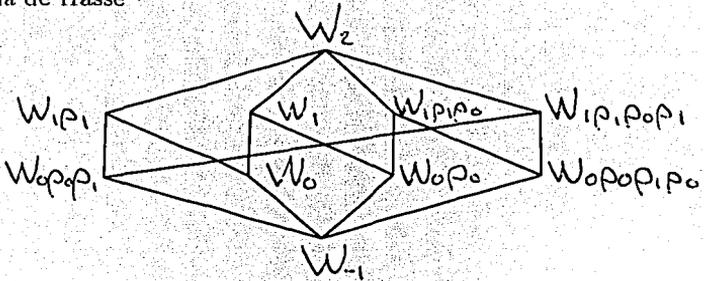
$$P(W) = \{W_{-1}, W_2, W_0 = \{1, \rho_1\}, W_1 = \{1, \rho_0\}\}$$

$$W_0\rho_0 = \{\rho_0, \rho_1\rho_0\}, \quad W_0\rho_0\rho_1 = \{\rho_0\rho_1, \rho_1\rho_0\rho_1\},$$

$$W_0\rho_0\rho_1\rho_0 = \{\rho_0\rho_1\rho_0, \rho_1\rho_0\rho_1\rho_0\}, \quad W_1\rho_1 = \{\rho_1, \rho_0\rho_1\},$$

$$W_1\rho_1\rho_0 = \{\rho_1\rho_0, \rho_0\rho_1\rho_0\}, \quad W_1\rho_1\rho_0\rho_1 = \{\rho_1\rho_0\rho_1, \rho_0\rho_1\rho_0\rho_1\}$$

Diagrama de Hasse



En este ejemplo pudimos observar que el politopo que construimos es un cuadrado, por lo que es regular. Ahora quisiéramos probar que todos los politopos que construyamos a partir de un C-grupo fueran regulares, para esto tendremos que definir el grupo de automorfismos $\Gamma(P(W))$, y con ello a los automorfismos. Como vimos en el capítulo 2, un automorfismo es una biyección del conjunto de caras en sí mismo, que preserve el orden.

Tomemos una función γ_α para $\alpha \in W$ y $W_i u \in P(W)$, y defínase de la siguiente manera :

$$(W_i u)\gamma_\alpha = W_i u \alpha^{-1}$$

Está bien definida ya que $W_i u \alpha^{-1} \in P(W)$.

Si $(W_i u)\gamma_\alpha = (W_i v)\gamma_\alpha$ entonces $W_i u \alpha^{-1} = W_i v \alpha^{-1}$, por la definición de clase lateral podemos concluir que $W_i u = W_i v$. Por lo tanto la función es uno a uno, y si $W_i u \alpha \in P(W)$ y $W_i u \in P(W)$, entonces γ_α es sobre ya que:

$$(W_i u \alpha)\gamma_\alpha = W_i u \alpha \alpha^{-1} = W_i u$$

Por lo que γ_α es una biyección.

La función γ_α preserva el orden, ya que para $\alpha \in W$ y $W_i u, W_i v \in P(W)$ tenemos:

$$W_i u \cap W_i v \neq \emptyset \iff W_i u \alpha^{-1} \cap W_i v \alpha^{-1} \neq \emptyset$$

Lema 4.5 Sea W un C -grupo y $P(W)$ el politopo construido a partir de W . Para toda bandera Φ en $P(P(W))$ existe una única $\alpha \in W$ tal que :

$$\Phi = \Phi_\alpha \doteq \{W_0 \alpha, W_1 \alpha, \dots, W_{n-1} \alpha\}$$

Demostración. Sea Φ una bandera por el lema 4.4 existe $\alpha \in W$ tal que

$$\Phi = \Phi_\alpha \doteq \{W_0 \alpha, W_1 \alpha, \dots, W_{n-1} \alpha\}.$$

Nos fijamos en la intersección de las clases laterales y por (4)

$$\bigcap_{n=-1}^n (W_i \alpha) = \left(\bigcap_{n=-1}^n W_i \right) \alpha$$

y por la Propiedad de la Intersección

$$\left(\bigcap_{n=-1}^n W_i \right) \alpha = (W_{-1} \cap \dots \cap W_n) \alpha = \{1\} \alpha = \{\alpha\}$$

Podemos observar que las clases laterales se intersectan en α , por lo que es única, ya que si existiera una $\alpha' \in W$ que cumpliera con las hipótesis tendríamos que $\alpha 1 = \alpha' 1$ y por lo tanto $\alpha = \alpha'$. ■

Como corolario del lema anterior, podemos observar que hay una correspondencia entre las banderas del politopo y los elementos del grupo.

Teorema 4.3 *Sea W un C-grupo y $P(W)$ el politopo construido a partir de W , entonces $P(W)$ es regular.*

Demostración. Lo que queremos demostrar es que dada una bandera base, existe un automorfismo que la manda en cualquier otra. Sean Φ_α la bandera base y $\Phi_{\alpha'}$ en $F(P(W))$ definidas como en el lema anterior, y $\gamma_{\alpha\alpha'^{-1}}$ un automorfismo. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} (\Phi_\alpha)\gamma_{\alpha\alpha'^{-1}} &= \{(W_i\alpha)\gamma_{\alpha\alpha'^{-1}} \mid i \in \{-1, 0, 1, \dots, n\}\} \\ &= \{W_i\alpha\alpha^{-1}\alpha' \mid i \in \{-1, 0, 1, \dots, n\}\} = \\ &= \{W_i\alpha' \mid i \in \{-1, 0, 1, \dots, n\}\} = \Phi_{\alpha'} \end{aligned}$$

por lo que podemos decir que el conjunto de los automorfismos es transitivo en las banderas de $P(W)$ y por lo tanto $P(W)$ es regular. ■

4.1. Conclusiones

En el capítulo 3 a partir de los grupos de automorfismos (Def. 2.3) de los politopos regulares (Def. 3.1) se construyen los C-grupos (Def. 3.3). Primero se demuestra que el grupo de automorfismos de los politopos regulares cumplen con las relaciones de los C-grupos (Teo. 3.1), y luego verificamos que también cumplan con la Propiedad de la Intersección (Teo. 3.2). Con esto concluimos que todo grupo de automorfismos de un politopo regular es un C-grupo.

En el capítulo 4 se construyeron politopos regulares a partir de C-grupos. Para esto primero se estableció quienes serian las caras del politopo (Def. 4.1) y a que rango corresponderian (Lema 4.2). Luego se estableció la una relación de orden (3) y cómo se pueden controlar y unificar las caras relacionadas (Lema 4.4). Posteriormente se verificó que formaran un conjunto parcialmente ordenado (Teo 4.1) y cumplieran con las cuatro propiedades de los politopos (Teo. 4.2).

Ya teniendo politopos hubo que verificar que estos fueran regulares, para eso primero definimos a los automorfismos mediante una biyección que preserve el orden y, también vimos que las banderas se pueden definir con un elemento del grupo (Lema 4.5). Finalmente se demostró que el grupo de automorfismos del politopo construido a partir de un C-grupo es transitivo en las banderas y, por consecuencia, el politopo es regular. Por todo lo expuesto concluyo mi tesis con el siguiente teorema.

Teorema 4.4 *Existe una correspondencia uno a uno entre los politopos regulares y los C-grupos.*

Demostración. En el capítulo anterior vimos que podíamos asignarle a cada politopo regular un C-grupo, en este capítulo vimos que a partir de cada C-grupo construimos su politopo regular. Por lo que podemos concluir que hay una correspondencia uno a uno entre los politopos regulares y los C-grupos. ■

Referencias

- [1] Hartley, M. I., *All Polytopes Are Quotients, and Isomorphic Polytopes Are Quotients by Conjugate Subgroups*, Discrete Comput. Geom. 21, 289-298 (1999).
- [2] McMullen, P., Schulte, E., *Quotients of Polytopes and C-Groups*, Discrete Comput. Geom. 11, 453-464 (1994).
- [3] McMullen, P., Schulte, E., *Constructions for Regular Polytopes*, Journal of Combinatorial Theory, Series A 53, 1-28 (1990).
- [4] McMullen, P., Schulte, E., *Regular Polytopes from Twisted Coxeter Groups and Unitary Reflection Groups*, Adv. in Math. 82, 35-87 (1990).
- [5] McMullen, P., Schulte, E., *Abstract Regular Polytopes*, (En preparación). Octubre 1999
- [6] Hubard, I., *Poliedros coloreados con órdenes cíclicos*, Tesis de licenciatura, Universidad Nacional Autónoma de México, (2001).