00324
35

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONJUNTOS GENERADOS POR EL AXIOMA DE CANTOR Y SU NEGACION

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA

ELIAS SELEM AVILA

DIRECTOR DE TESIS:

DR. CARLOS IMAZ JAHNKE

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2003

A

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

CONJUNTOS GENERADOS POR EL AXIOMA DE CANTOR Y SU NEGACION

realizado por Elías Sélem Avila

con número de cuenta 7494601-5, quién cubrió los créditos de la carrera de MATEMATICO.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	DR. CARLOS IMAZ JANHKE	
Propietario	DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA	
Propietario	DR. JOSE ALFREDO AMOR MONTAÑO	
Suplente	M. en C. RAFAEL ROJAS BARBACHANO.	RRB.
Suplente	M. en C. ALEJANDRO BRAVO MOJICA.	

Consejo Departamental de MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

M. en C. JOSE ANTONIO GOMEZ ORTEGA.

B

.......A todos aquellos que en su ingenuidad infinita creen en la continuidad de la recta, porque de ellos será el reino de los espacios vacíos.

ÍNDICE

Introducción

La ubicación de los problemas que se discuten en este trabajo, se halla en la intersección de varias ramas de la matemática, entre las que se cuentan la Lógica Matemática, la Teoría de Conjuntos, Análisis Matemático estándar y no estándar y Fundamentos de la Geometría. La pregunta más importante que se plantea, es sobre continuidad y puede formularse en términos geométricos o aritméticos.

Antes de la construcción del conjunto *R de los números hiperreales se pensaba casi unánimemente que la completación del conjunto Q de los números racionales, realizada por Dedekind para obtener el conjunto R de los números reales, era absoluta, es decir después de efectuado este proceso y obtenido el isomorfismo entre R y la recta geométrica – o lo que se creía que era ésta-,no había más puntos ni números que agregar, y los ya existentes formaban un conjunto linealmente ordenado, denso y sin agujeros (es decir, continuo), entre cuyos elementos no podrían insertarse otros puntos, pues *a cada posición corresponde un punto y a cada punto corresponde una posición.*Esta afirmación es equivalente a la creencia, actualmente obsoleta, de que los números reales son suficientes para medir cualquier segmento, cuya versión técnica es la exigencia de que el rango de toda métrica sea un subconjunto de los números reales no negativos.

El advenimiento de los números hiperreales y con ellos del Análisis no estándar, puso en claro que la recta geométrica con la que se trabaja en geometría euclidiana, es en realidad *la recta real R*, ésta es un subconjunto propio de la recta hiperreal *R y cada punto de R es un punto aislado en *R. De modo que los puntos de R están separados unos de otros por distancias menores que cualquier real positivo, pero mayores que cero. Esta separación no es detectable si se insiste en considerar sólo distancias reales, como huelga decir.

La manera como A. Robinson fundamentó el Análisis no estándar es por demás tortuosa; usó la más sofisticada herramienta de la teoría de modelos, entre cuyas proposiciones *infortunadamente* tomó el Principio de transferencia como método de demostración que simplifica tanto las pruebas de muchas proposiciones de Análisis real, a grado tal que hizo prevalecer el punto de vista superficial de que la importancia principal del Análisis no estándar, es la aportación de métodos para pruebas alternas más sencillas de proposiciones conocidas. La realidad es que esta aplicación de la nueva rama, es sólo incidental y totalmente secundaria, de la cual puede prescindirse tranquila y totalmente, sin ningun problema. La importancia real de este sistema formal, radica en las consecuencias que se derivan de sus proposiciones y que afectan prácticamente a toda la matemática. Como siempre ha sucedido, existe una tremenda resistencia a la adopción de estas ideas, incluso sus propios artífices se curan en salud, como antes lo hizo Cantor con la Teoría de Conjuntos, con opiniones que suavizan el impacto que pudiera ser generado.Una postura clara y radical en este sentido es la manifestada por K. Gödel al final de [20].

Una gran particularidad del conjunto R de los números reales, es que su cardinal y el del conjunto de sus enteros, son diferentes.De hecho, ésta es la base de la completez (relativa) de R, y la carencia de esta propiedad es causa de la incompletez de las extensiones ***R, **R, ***R, ..etc.,** de los números reales R, como puede verse al analizar de cerca sus respectivas construcciones.

El objetivo principal de este trabajo es mostrar que cualquier conjunto Ω que contenga al conjunto –indefinido en geometría- conocido como *recta geométrica*, es intrínsecamente incompleto. Es decir, entre dos puntos diferentes cualesquiera A, B de este conjunto, existe un punto C, colineal con los anteriores y que no se encuentra en Ω.Obviamente, la afirmación precedente se refiere, entre otros conjuntos, a R, *R y todas sus extensiones.

Se inicia el escrito con la presentación de algunos conceptos y propiedades necesarios para abordar los trabajos de Dedekind y Hilbert que aquí se discuten, enfatizando la analogía entre la construcción axiomática de los números reales y la de la recta geométrica resultante de los axiomas de Hilbert. A continuación se hace una discusión cuya conclusión es que el teorema que afirma que en un encaje de intervalos como el usado en el axioma de Cantor, hay *sólo* un elemento, es un sofisma. Colateralmente –de manera deliberada-, se dan elementos suficientes para realizar la construcción de *R, a partir de los axiomas de Hilbert, con la variante de sustituir el axioma de Cantor por una de sus negaciones.

Finalmente, en el capítulo dos se aborda la discusión principal del trabajo, la construcción de extensiones propias de los números hiperreales *R, y las consecuencias inmediatas que ésta conlleva. Para esto, se da una introdución en la que se ilustran algunas formas de abordar estos temas usadas actualmente, al final de la cual se presenta un resultado propio al que se denomina *paradoja del ultrafiltro vacío*. Enseguida se discuten algunos resultados preliminares en apoyo a la mejor comprensión de la parte medular del escrito, que es desarrollada a partir de este punto. Se concluye con la presentación de un conjunto de apéndices de complementación y la bibliografía básica utilizada.

Para terminar, hay que advertir que la inclusión o exclusión de la hipótesis generalizada del continuo (HGC), es irrelevante para los fines del trabajo, ya que su uso se restringe a identificar los cardinales de ciertos conjuntos que aparecen a lo largo de la exposición, con los correspondientes $\aleph_n$, y en ninguna circunstancia se requiere de esta hipótesis para obtener o demostrar proposiciones del mismo.

CAPÍTULO 1

Continuidad relativa y axiomatización de la primera completación de la recta.

1.0. Introducción. Lo último que debe de haber pasado por las mentes de Dedekind y Hilbert cuando el primero llamó *completación,* y el segundo *axioma de completitud*, a sus trabajos tendientes a la formalización del concepto de continuidad, es que lejos de completar, en el sentido cotidiano, a la recta geométrica, lo que estaban haciendo era dar un paso en firme en la dirección contraria, es decir, en mostrar que la recta geométrica es un objeto matemático, tal que mientras más se le completa -en el sentido matemático-,infinitamente más agujeros va mostrando. Detrás de esta aparente antinomia podría estar escondido el autocontradictorio concepto de universo absoluto en una de sus formas, como límite de la familia de espacios n- hiperreales. En este capítulo se hace un breve recorrido por las rutas seguidas por Dedekind y Hilbert, sobre todo en lo concerniente al concepto de continuidad. De ahí que se inicie con la presentación de una serie de conceptos como infinito, orden, orden parcial, orden total, buen orden, tipos y números ordinales, etc.; indispensables para establecer los resultados principales acerca de la continuidad, abordados en este capítulo, en cuya parte final se incluye una discusión sobre distintas posibles fundamentaciones para la geometría y los conjuntos resultantes de ellas, sobre los que se desarrollaría el Análisis Matemático, estándar, o no estándar, correspondiente.Un importante resultado en este capítulo es la descripción explícita de la construcción de los hiperreales $^*R$ a partir de los axiomas de Hilbert para la geometría euclidiana, con la variante de sustituir el axioma de Cantor por una de sus negaciones (tiene dos).

*1.1 Antecedentes.*El método de exhaución atribuido a Eudoxio y ampliamente utilizado en los trabajos de Arquímedes contiene la idea, y la usa, de diferencias que se hacen menores que cualquier valor real positivo fijado de antemano, misma que germinó en los trabajos de Newton y Leibniz en la construcción del Cálculo diferencial e integral, cuando manejaron los incrementos de funciones atribuyéndoles esta propiedad bajo ciertas condiciones adecuadas; lo que les posibilitó la creación de métodos y algoritmos para la obtención de lo que hoy conocemos como derivada e integral.La fundamentación axiomática de estos conceptos, junto con el de continuidad, no podía darse sin hacer lo propio previamente con el concepto de *infinito*,cosa que se comenzó a lograr en firme hasta fines del siglo XIX, con los trabajos de George Cantor. Es hasta ese momento, ya con números ordinales y cardinales infinitos - aunque sin inversos aditivo ni multiplicativo, de éstos-, en que empieza a tener sentido plantearse la posibilidad de construir axiomáticamente sistemas algebraicos con infinitésimos e infinitos que obedezcan las mismas reglas operacionales que los números reales.

A continuación se inicia la presentación sucinta de la serie de herramientas y conceptos básicos para la discusión de los trabajos de Dedekind y Hilbert que se señalan en la introducción de este capítulo.

1.2. Cantor. Teoremas sobre tipos ordinales.

1.2.1. *Sistematización del concepto de infinito.*Después de muchas vicisitudes, como ha sucedido con toda gran innovación, fueron adoptados por la comunidad matemática los resultados de Cantor y sus seguidores.Destacan entre éstos, la diferenciación entre cardinales de conjuntos infinitos (v.g. los números reales y los números enteros), el Teorema de Cantor, que permite construir un conjunto con cardinal estrictamente mayor que el cardinal de cualquier conjunto dado, las demostraciones de que existen más números irracionales que racionales y más números trascendentes que algebraicos, así como igual cantidad de algebraicos, racionales, enteros,naturales, primos, múltiplos de 5, biprimos, triprimos, etc.por mencionar algunas proposiciones sobre cardinalidad sobre los conjuntos infinitos más pequeños.En este trabajo se asumen todas las proposiciones sobre cardinales necesarias para su desarrollo, que no constituyan resultados a demostrar propios del mismo documento.En cuanto a *tipos y números ordinales*, se hace la siguiente presentación sintetizada, en función de los requerimientos de la discusión.

1.2.2. *Orden parcial.*Una relación R ordena parcialmente un conjunto A, si se cumplen las condiciones siguientes :

(i) Reflexividad : $\forall a \in A, aRa.$

(ii)Antisimetría : $\forall a \in A, \forall b \in A, aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b.$

(iii) Transitividad :$\forall a \in A, \forall b \in A, \forall c \in A, aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc.$

Si además se cumple la condición siguiente, entonces el conjunto A es *totalmente ordenado* por la relación R.

(iv) $\forall a \in A, \forall b \in A, \quad aRb \vee bRa.$

1.2.3.*Buen orden.*Se dice que un conjunto A, totalmente ordenado está *bien ordenado* si cada uno de sus subconjuntos no vacíos tiene primer elemento. A continuación se enuncia la más célebre proposición respecto a buen orden.

Teorema del Buen Orden (Zermelo). *Todo conjunto puede ser bien ordenado (*para una demostración ver [11, pp. 65-68]).

Se asumen explícitamente, **el Axioma de elección (AE) y la Hipótesis generalizada del continuo (HGC)**, asentados en la página 16.

Dos conjuntos A y B, son *similares* (isomorfos respecto al orden) y se denota $A \cong B$, si existe una función biyectiva $f : A \rightarrow B$, que preserva el orden, es decir, si $a < b$ en A, entonces $f(a) < f(b)$, en B. Como la similaridad es una relación de equivalencia, a la clase de los conjuntos similares a un conjunto dado A, se le asigna un tipo ordinal α.Si además el conjunto A, es bien ordenado, entonces su tipo ordinal se denomina *número ordinal*. Por ejemplo los conjuntos N, Q, R de los números naturales, racionales y reales, respectivamente, son todos totalmente ordenados por la relación $\leq$, (en su orden normal) y sus tipos ordinales se denotan ω, η y λ, respectivamente, de los cuales sólo ω es un número ordinal, pues sólo N es bien ordenado.

Observación. Considérense los conjuntos *N (ver capítulo 2) de los hiperenteros, y $N_p = \{ 2,3,4,5,6,....... \}$ de los n-primos, es decir, primos, biprimos, triprimos, ..etc., donde un número es n-primo si consta de exactamente n factores primos.

$N_p = \{2, 3, 5, 7, .(.primos)....4, 6, 10, ...(biprimos)...8, 12, 18, ...(triprimos).., ..\}$.

$^*N = \{ 1,2,3,4,5,6,..... \quad ..... \quad ...... \quad , \alpha - 1, \alpha, \alpha + 1, ..., .., ...\}$, para cada α, hipernatural infinito.

(i) Los elementos de N_p y *N, están divididos en clases de equivalencia de cardinalidad $\aleph_0$ cada una, las clases de N_p son de tipo ordinal ω, y las de *N, son de tipo ordinal $^*\omega + \omega$ (tipo de los enteros Z).

(ii) Pueden reordenarse las clases de los hiperenteros *N de modo que cada clase sea de tipo ω.Sin embargo aún después de este reordenamiento, se tendrá que N_p es bien ordenado y *N no lo es. La diferencia radica en que todo subconjunto no vacío de N_p tiene primer elemento, mientras que en *N (reordenado), no se cumple este requerimiento, pues por ejemplo, $A = \{\alpha \in {}^*N \mid \alpha$ es infinito $\}$, no tiene primer elemento. La razón de esta diferencia es que las clases de N_p forman una familia bien ordenada , mientras que las clases de *N (reordenadas, o no), no forman una familia bien ordenada.Otra diferencia más profunda es que la primera familia es numerable -los conjuntos numerables pueden reordenarse fácilmente, por lo general- y la segunda, es no numerable, y aún cuando por el teorema del buen orden, es sabido que puede bien ordenarse, es un famoso problema abierto de la matemática bien ordenar un conjunto no numerable.

1.2.4. *Teoremas sobre tipos ordinales.* Un conjunto finito de n elementos, puede ordenarse de $n!$ formas y cada uno de los reordenamientos tiene a n como su tipo ordinal, su número cardinal y su número ordinal. La situación cambia si se tiene un conjunto infinito. La siguiente proposición aborda el caso para cualquier conjunto infinito numerable.

Teorema I..*El conjunto de tipos numerables tiene la cardinalidad del continuo* ([11], p. 58).

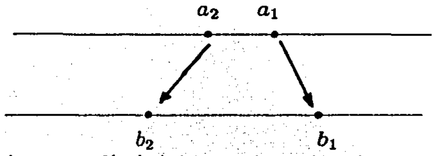
Otra prueba, distinta a la citada, se basa en el hecho de que un conjunto A = { $a_1, a_2, a_3, \ldots$} infinito numerable, puede descomponerse en una partición de a lo más $\aleph_0$, clases de equivalencia, cada una de las cuales puede reordenarse de a lo más $\aleph_0^{\aleph_0}$ formas distintas (en caso de ser infinita) , de donde el total de reordenamientos es :

$$\aleph_0 \times (\aleph_0^{\aleph_0}) = \aleph_0 \times 2^{\aleph_0} = \aleph_0 \times \aleph_1 = \aleph_1 \quad \text{(HC)}.$$

Siguiendo a Dedekind, a un conjunto ordenado sin extremos, se le llama *no acotado* ; a un conjunto ordenado no vacío, cuyos elementos no tienen elementos vecinos (sucesor ni antecesor), se le llama *denso;* Las dos proposiciones siguientes llevan a la importante conclusión de que todos los conjuntos densos numerables sin extremos, son isomorfos entre sí, en particular esto significa que todos los modelos del conjunto de los números racionales Q, son isomorfos.En el teorema VI, se muestra lo propio para el conjunto de los números reales R.Después, el teorema de Haussdorff, prueba lo correspondiente para los números hiperreales.Se conjetura la existencia de un teorema general que predica la validez de la propiedad para cada cardinal.

Teorema II. *Si A es un conjunto (ordenado) numerable y B es un conjunto denso no acotado, entonces A es similar a un subconjunto de B.*

DEMOSTRACIÓN.Sea $A_1 = \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$, un buen orden de A.Defínase la función f : A$\rightarrow B$, tal que $f(a_1) = b_1$, donde b_1, es cualquier elemento de B. $f(a_2) = b_2$, con $b_2 < b_1$, si $a_2 < a_1$, o viceversa (en el orden original).



órdenes
originales

Así se continúa con $f(a_3) = b_3$, con b_3 en la misma posición respecto a b_1 y b_2, que la de a_3, respecto a_1 y a_2. Una sencilla aplicación de la inducción matemática lleva al resultado deseado.

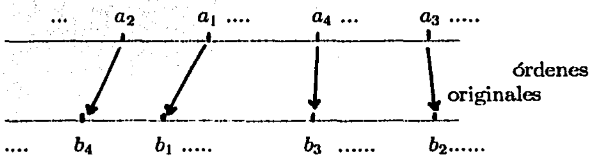
Teorema III. *Todos los conjuntos (ordenados) numerables, densos y no acotados, son similares (isomorfos).*

DEMOSTRACIÓN.Sean A y B dos conjuntos numerables, densos y no acotados, y A_0 ={ $a_1, a_2, a_3, \ldots$} y B_0= {$b_1, b_2, b_3, \ldots$}, buenos ordenamientos de A y B, respectivamente.

Se define la función $f: A \to B$ de la forma siguiente :

(i) $f(a_1) = b_1 = \beta_1$.

(ii) $f(a_2) = b_{n_2}$ donde b_{n_2} es el elemento de menor índice que está respecto de b_1, igual que a_2 respecto de a_1,en los órdenes originales (en el ejemplo, $f(a_2) = b_4$, $f(a_3) = b_2$, $f(a_4) = b_3$).



De nueva cuenta, la aplicación de la inducción matemática a este proceso, permite concluir que A y B son isomorfos.

Se cierra este apartado con el enunciado de un teorema sobre algunas características de los conjuntos de tipo η (como Q), ya que contrariamente a lo que podría esperarse, la similaridad de un conjunto A, con un subconjunto de B, junto con la de B con un subconjunto de A, no implican la similaridad de A y B; un ejemplo inmediato lo proporcionan, los intervalos de reales (3,5) y [2,8].

Teorema IV (de Cantor). *Todo conjunto denso no acotado, contiene un subconjunto tipo η. Un conjunto tipo η contiene subconjuntos de cada tipo numerable. Todo conjunto numerable denso y no acotado es de tipo η.*

DEMOSTRACIÓN.Como el conjunto Q de los racionales es tipo η y numerable, el teorema II implica que todo conjunto B denso y no acotado contiene un subconjunto tipo η.

Cualquier conjunto B tipo η, es isomorfo a Q; por lo tanto es denso y no acotado. Entonces por el teorema II, si A es cualquier conjunto ordenado numerable, será $A \cong B_1 \subseteq B$, lo que prueba la segunda afirmación.

El teorema III, junto con el hecho que el conjunto Q de los racionales, es tipo η , prueban la parte final del teorema.

1.3. Dedekind. Completación de cualquier conjunto denso numerable no acotado.

Las ideas básicas del trabajo de Dedekind no pueden ser más simples, lo que hizo fue detectar los agujeros en un conjunto denso numerable no acotado, y colocar números o puntos, según el caso, para cubrirlos, la presentación siguiente de estos resultados sigue las líneas generales de *Essays on the theory of numbers* by Richard Dedekind, publicado originalmente en alemán en 1901.

1.3.1. *Definiciones preliminares.* Se inicia definiendo los conceptos de salto (jump), cortadura (cut) y agujero (gap), que son utilizados para caracterizar o dar definiciones alternas de los conceptos de *densidad y continuidad.*

Sea A un conjunto (ordenado) y P$\cup Q = A$, con P$\cap Q = \emptyset$ y P$<Q$ (todo elemento de P, anterior a todo elemento de Q), es decir se trata de una partición ordenada de A. En estas condiciones se dice que la partición $\langle P, Q\rangle$ genera cada uno de los conceptos siguientes en el conjunto A :

(i) *Salto :* si P tiene último elemento y Q tiene primer elemento.

(ii) *Cortadura :* Si P tiene último elemento y Q no tiene primer elemento, o si P no tiene último elemento y Q tiene primer elemento.

(iii) *Agujero :* Si P no tiene último elemento y Q no tiene primer elemento.

Definición. Un conjunto sin saltos es denso, un conjunto sin saltos ni agujeros es continuo.

1.3.2. *Un conjunto intrínsecamente continuo.* A partir de la definición de conjunto continuo, se tiene que la densidad es una condición necesaria para la continuidad. El teorema siguiente de hecho constituye une formulación técnica de la idea vaga de llenar todos los agujeros de un conjunto denso, es decir, construir un conjunto continuo. Por la relevancia de este resultado se incluye su prueba que se dice en el medio matemático, *encierra la esencia de la continuidad.*

Teorema V (Dedekind). *Para todo conjunto denso no acotado A, el conjunto Π de segmentos iniciales sin último elemento, de todas las particiones ordenadas $\langle P, Q\rangle$ es continuo.*

Demostración. Considérense todas las particiones ordenadas de A, y sea Π el conjunto de segmentos iniciales P, sin último elemento. Esta familia es ordenada por la contención, es decir $P_1 \leq P_2$, si y sólo si $P_1 \subseteq P_2$. En estas condiciones se tiene :

(i) Π es denso. Para probarlo sean $P_1 \subset P_2$ dos elementos distintos de Π. Entonces $P_1 < P_2$ y $P_2 - P_1$, es un conjunto infinito sin último elemento ; en caso contrario, el último elemento de $P_2 - P_1$, sería último elemento de P_2, contradiciendo la hipótesis inicial. Tómese $a \in P_2 - P_1$, distinto del primer elemento, para formar :

$$P = \{ x \in A : x < a\},$$

como A es denso, entonces P no tiene último elemento. Luego $P \in \Pi$, y además $P_1 < P < P_2$. Por lo tanto Π es denso.

(ii). Toda partición $\langle \Pi_1, \Pi_2\rangle$ ordenada de Π, es una cortadura. Sea $\langle \Pi_1, \Pi_2\rangle$ una partición ordenada de Π, entonces Π_1 es segmento inicial de Π, y Π_2 segmento final de Π, y ambos contienen sólo segmentos iniciales de A sin último elemento.

Además $\Pi_1 < \Pi_2$.

Fórmense : $\quad P = \cup P_i \,, \quad P_i \in \Pi_1$

$$Q = \cap (P_i)^c, \quad P_i \in \Pi_1 = (\cup P_i)^c \,, P_i \in \Pi_1.$$

Entonces para toda $x \in A$, se tiene que $x \in P \;\vee\; x \in Q$, cumpliéndose exactamente una de las dos alternativas, es decir $P \cup Q$ es una partición de A, con segmento inicial P sin último elemento, pues en caso contrario éste también sería último elemento de alguno de los elementos de Π_1, cuya unión es P (y los elementos de Π_1 no tienen último elemento). Entonces $P \in \Pi_1 \cup \Pi_2$. Ahora bien, por una parte se tiene que $P_i \subset P$, para todo P_i. Por otro lado, si $x \in P$, entonces $x \in P_i$, para algún $P_i \in \Pi_1$, como $P_i < P_j$, para todo $P_i \in \Pi_1$ y todo $P_j \in \Pi_2$, se tiene que $x \in P_j$, para todo $P_j \in \Pi_2$ .Se sigue que $P \subseteq P_j$, para todo $P_j \in \Pi_2$, y de ahí que $P_i \subseteq P \subseteq P_j$, para todo $P_i \in \Pi_1$ y para todo $P_j \in \Pi_2$.

Por lo tanto P es el último elemento de Π_1, o bien, P es el primer elemento de Π_2, lo que lleva a la conclusión que $\langle \Pi_1, \Pi_2 \rangle$ es una cortadura y de (i) y (ii) se sigue que Π es continuo.■

El teorema V tiene una serie de importantes consecuencias, por ejemplo muestra que si se axiomatiza para que cada segmento inicial de un conjunto ordenado, denso y no acotado, tenga supremo en el mismo conjunto, entonces se generará un conjunto continuo; otra importante consecuencia de este teorema es que permite entrever la posibilidad de cubrir los agujeros de un conjunto de una forma distinta a la ortodoxa (un punto por cada agujero), lo que como se verá en breve, conduce a campos y geometrías no cantorianos. Desde luego todo este trabajo de Dedekind estaba enfocado a axiomatizar la construcción del campo de los números reales, así que es completamente natural que la completación hecha en ese momento sea la que genera dicho conjunto. Otro asunto que se discutirá enseguida es el de la identificación del conjunto R de los números reales con un conjunto de puntos que se conoce como *la recta geométrica*.Se concluye este parágrafo con una proposición que caracteriza a los conjuntos continuos.

Teorema VI. *Todo conjunto continuo tiene un subconjunto de tipo λ (tipo de los reales). Todo conjunto continuo para el cual existe un conjunto numerable denso en el primero, es de tipo λ.*([11] *pp.*63) .

DEMOSTRACIÓN. Sea A un conjunto continuo sin extremos.Entonces existe $B \subset A$, con B de tipo η (teorema IV). Si B no tiene agujeros, entonces es de tipo λ, en caso contrario sea $B = P \cup Q$, con $P < Q$ y $\langle P, Q \rangle$ un agujero de B.Entonces existe un elemento x del conjunto A, que está entre P y Q; de otra forma, el conjunto A tendría un agujero, contradiciendo la hipótesis.

Así, A tiene un subconjunto C de tipo λ, que se obtiene agregando al conjunto B, un elemento de A, en cada agujero de B.

Por otra parte, si B es denso en A, entonces sólo un elemento de A puede estar entre P y Q (si hubiera dos elementos de A, entre P y Q, entre ellos no habría algún elemento de B, contradiciendo la presupuesta densidad de B en A), así que A = C. Lo que prueba el teorema.

1.4. Geometrías cantoriana y no cantoriana.

1.4.1. *Fundamentación de la geometría.* En la célebre fundamentación de la geometría presentada por Hilbert en 1899 (ver [8], cap.II, o [12],pp. 17-22) se toman como componentes indefinidos del sistema un conjunto de puntos, un conjunto de rectas y un conjunto de planos; al conjunto de todos estos objetos indefinidos se le llama *espacio.* Las relaciones entre estos objetos son : *pertenece a, entre* y *congruente,* que no se definen, sino se caracterizan por los siguientes grupos de axiomas (apéndice A) :

(I) Ocho axiomas de incidencia.

(II) Cuatro axiomas de orden.

(III) Cinco axiomas de congruencia.

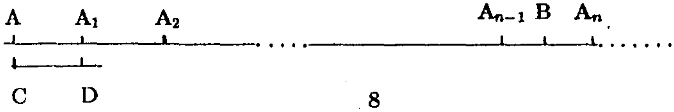
(IV) Dos axiomas de continuidad.

(V) Un axioma de paralelismo.

En la construcción de la geometría por esta vía, después de aplicar los grupos de axiomas I, II y III, se genera un conjunto de puntos linealmente ordenado, denso, numerable y aplicando el primer axioma de continuidad (axioma de Arquímedes), se le dota de la propiedad de ser no acotado. Es notorio el hecho de que en la construcción axiomática de (R, +, $\cdot$, <), el campo ordenado completo de los números reales, también se genera un conjunto totalmente ordenado, denso, numerable, no acotado; con todos los axiomas excepto el de completez , o axioma equivalente, que se use. Es claro que se trata del conjunto de los números racionales Q. El teorema IV de este capítulo permite la identificación de estos dos conjuntos, en base a la isometría resultante.

Enseguida se dan las versiones geométricas de los axiomas de continuidad.

Axioma de Arquímedes (IV-1). *Sean AB y CD segmentos arbitrarios. Entonces sobre la recta AB existe un número finito de puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, situados de tal manera que A_1, está entre A y A_2; A_2 está entre A_1 y A_3, etc., tales que los segmentos AA_1, $A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ son congruentes al segmento CD y B está entre A y A_n.*



Axioma de completitud (IV-2). *Los elementos (puntos, rectas, planos) de la geometría forman un sistema de objetos que, con la condición de que se cumplan todos los axiomas adoptados antes, no admite extensión alguna, es decir, el sistema de puntos, rectas y planos es tal que no se le puede agregar nuevos puntos, rectas y planos de forma de que en el nuevo sistema extendido se sigan satisfaciendo todos los axiomas I-III, IV-1 y V.*

Axioma de Cantor (IV-2a). *Supongamos que en una recta arbitraria a, se da una sucesión infinita de segmentos A_1B_1, A_2B_2,..... , de los cuales cada uno está en el interior del precedente; supongamos además, cualquiera que sea un segmento prefijado, existe un índice n para el cual A_nB_n es menor que este segmento. Entonces existe sobre la recta a, un punto X, que está en el interior de todos los segmentos A_1B_1, A_2B_2, etc.*

Los axiomas IV-2 y IV-2a son equivalentes ([8], pp. 199-201), aún cuando cronológicamente IV-2a es anterior a IV-2. Entonces ¿por qué introducir otro axioma, que además parece mucho menos intuitivo ?.Para comenzar a dar una respuesta, hay que decir que la recta (y el plano y el espacio) que se obtiene después de aplicar los grupos de axiomas I,II y III , es un conjunto ordenado, denso, infinito numerable, isomorfo al conjunto Q de los números racionales; en estas circunstancias se elige una unidad lineal arbitraria y con la introducción del axioma de Arquímedes, ya se puede asignar de manera única, un número positivo (su longitud, o medida) a cada segmento, aunque hasta este punto, todos los segmentos tienen extremos, y por lo tanto,longitudes racionales (bajo el isomorfismo adecuado).Para poder establecer la propiedad recíproca, es decir, la existencia de un segmento cuya longitud sea igual a un número positivo prefijado, se requiere la introducción del axioma de Cantor -o cualquiera de las proposiciones equivalentes-.Entonces ya se puede probar que la recta así obtenida es isomorfa al conjunto R de los números reales (ver [8], pp. 177-187), como parte del resultado más general que muestra la consistencia relativa de la geometría respecto a la aritmética.Así que la adopción del axioma de completitud se justifica observando que el conjunto generado por los axiomas I-III, IV-1 es un conjunto denso numerable con agujeros, que al ser completado por cualquier método se transforma en un conjunto de tipo ordinal λ. En síntesis, Dedekind completa la recta racional de forma que resulte isomorfa al conjunto R de los números reales (que es lo que deseaba hacer).La principal consecuencia de los axiomas de continuidad, es que el sistema de axiomas de la geometría es completo, es decir, sus modelos son isomorfos([8], pp. 199-204), esto se sigue del hecho que el único de sus modelos que satisface el axioma de Cantor es el cartesiano, luego R es categórico, i.e. todos sus modelos son iguales salvo isomorfismo. Este último resultado se obtiene de forma más directa, mostrando que todo modelo de R es un conjunto continuo en el sentido de Dedekind, que además tiene un subconjunto numerable denso en el modelo. Después aplicando el teorema VI, se llega a la misma conclusión.

1.4.2. *Una falacia centenaria.* Para simplificar la notación, de aquí en adelante se hacen las denominaciones siguientes :

C : Axioma de Cantor, con la estructura $(H_1 \wedge H_2) \rightarrow C_0$, donde :

H_1: "En una recta cualquiera a, se toma una sucesión infinita de segmentos A_nB_n, cada uno de los cuales está en el interior del precedente."

H_2: "Cualquiera que sea un segmento prefijado, existe un índice n para el cual A_nB_n es menor que este segmento."

C_0: " Existe sobre la recta a, un punto X, que está en el interior de todos los segmentos."

Además, se llamará **Q**, al conjunto de puntos generado antes de aplicar C; se llamará R_1, al conjunto generado después de aplicar C. Obsérvese que el primero es un conjunto totalmente ordenado, denso, numerable, no acotado, es decir, es de tipo η,(como el conjunto de los números racionales).En cambio R_1, puede ser tipo λ o λ^λ; como se verá enseguida.

También se hará uso de las proposiciones siguientes :

E : "Existe en R_1, un segmento no nulo, menor que cualquier segmento no nulo de **Q**"

O bien de su versión aritmética :

E' : "Existe en R_1 un número α, tal que $0 < \alpha <$ r, para toda r $\in \mathbf{Q}^+$".

C_1: "En las condiciones de C, se tiene que $\cap I_n$ consta de exactamente un punto"

C_2: "En las condiciones de C, $\#\cap I_n > 1$ ".

Enseguida se da una definición que extiende a la de densidad.

Conjunto superdenso. Un conjunto totalmente ordenado es *superdenso*, si para cualquier par de subconjuntos numerables A < B, de X, existe p $\in$**X**, tal que A < {p}<B.

El más conocido de los conjuntos superdensos (ver cap. 2) es *R , el conjunto de los números hiperreales; los conjuntos **R, Q y Q**^{c},de los números reales, racionales e irracionales, respectivamente, no son superdensos, pues por ejemplo, entre **A** = [0,2] $\cap$ **Q** y B = (2,3) $\cap$ **Q**, no hay elementos de **R** ni de **Q.**

Dos importantes propiedades de los conjuntos superdensos, son :

S_i (Teorema de Hausdorff) : "Todos los conjuntos superdensos de cardinal $\aleph_1$ son isomorfos" ([22],pp.92,93).

S_a : "Los subconjuntos numerables de un conjunto superdenso, son acotados" ([22],p.90). Cuya prueba es obvia.

Es una costumbre en los cursos de Análisis Matemático y/o Fundamentos de Geometría, dar una prueba de C_1, como la siguiente ([8], p. 62) :

"De las condiciones del axioma de Cantor se sigue de inmediato que existe sólo un punto que está dentro de todos los segmentos A_1B_1, A_2B_2, ...etc. En efecto, si sobre la recta a, existe otro punto Y interior a todos los segmentos A_1B_1,A_2B_2,..... etc., entonces para todo n, el segmento A_nB_n será mayor que el XY, cosa excluida por la condición"

A_n X Y B_n.

Ahora bien, esta prueba es válida siempre que no exista en el conjunto generado R_1, un segmento no nulo menor que cualquier segmento no nulo de $\mathbb{Q}$ (al cual se le llamará segmento infinitesimal), pues en tal caso la contradicción desaparece, pues pueden cumplirse H_1 y H_2 , sin que $I_n = [A_n, B_n] = A_nB_n$, se haga menor que **XY**, ni haya alguna contradicción. Nada en los axiomas o teoremas anteriores permite afirmar o negar, la existencia de un segmento tal, ni conocer anticipadamente las propiedades del conjunto R_1, que se generará al aplicar C. El enunciado siguiente, es un primer paso en esa dirección :

Teorema S_1 : " *Bajo las condiciones de C, existe un segmento infinitesimal, si y sólo si, R_1 es superdenso".En símbolos, C$\Rightarrow$ (E $\Leftrightarrow$ R_1 es superdenso).*

DEMOSTRACIÓN : Supónganse C y E. Se probará que R_1 es superdenso.

Sea $I_n = [0, \frac{1}{n}]$; entonces $0 \in \cap I_n$, además por E, existe $\alpha \in R_1$, tal que :

$$0 < \alpha < p, \quad \text{para toda } p \in \mathbf{Q}^+.$$

Entonces : $\alpha \in \cap I_n$, con $0<\alpha < p < \frac{1}{\alpha}$, para toda p$\in \mathbf{Q}^+$.

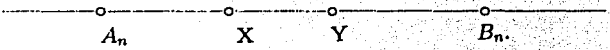
Es decir, R_1 es un conjunto con infinitésimos e infinitos con un conjunto de infinitesimales isomorfo a m(0)= {x$\in$*R: x$\backsim$ 0}, la mónada de cero en *R; lo que se prueba usando la idea de una construcción de *R de asociar el elemento generado α con $\{\frac{1}{n}\}_{n\in N}$, la sucesión formada con los valores del extremo derecho de I_n.De aquí, se sigue que R_1 es isomorfo a *R, y como este último es superdenso, se concluye que R_1 es superdenso.

Para la propiedad recíproca, supónganse C y R_1superdenso, entonces para $I_n = [0, b_n]$ cantoriano, se tiene que I_n se hace menor que cualquier segmento racional prefijado, además, $\{0\} < \{b_n\}_{n\in N}$, donde ambos son subconjuntos numerables de R_1 superdenso, luego existe $\alpha \in R_1$, con $\{ 0\} < \{\alpha\} < \{b_n\}_{n\in N}$,este elemento

α de R_1, genera un segmento mayor que cero y menor que cualquier segmento racional positivo, lo que prueba E.

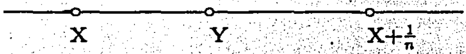
Teorema $\mathbf{S_2}$: *"En las condiciones de C, $\cap I_n = \{x\}$ para algún $x \in R_1$, si y sólo si, no existe en R_1 un segmento no nulo menor que cualquier segmento no nulo de Q". En símbolos , $C \Rightarrow (C_1 \iff \neg E)$.*

Supónganse C y $\neg E$. Sea $I_n = [A_n, B_n]$ un encaje cantoriano. Por C, existe X $\in R_1$, tal que X $\in \cap I_n$.



Por ser I_n cantoriano, se hace menor que cualquier segmento racional prefijado, de modo que de haber algún $Y \neq X$ en $\cap I_n$ el segmento XY sería menor que cualquier segmento racional no nulo, contradiciendo $\neg E$. Luego $\cap I_n = \{X\}$, con $X \in R_1$.

Suponiendo ahora C y C_1, sea XY un segmento cualquiera de R_1, con X<Y .



Definiendo $I_n = [X, X + \frac{1}{n}]$, resulta un encaje cantoriano no degenerado.

Entonces, X $\in \cap I_n$, y por C_1 será $\cap I_n = \{X\}$. luego $Y \notin \cap I_n$. De aquí se sigue que hay segmentos racionales no nulos menores que XY; lo que permite concluir $\neg E$.

Otra forma de abordar el problema es proporcionada por la proposición siguiente :

Teorema $\mathbf{S_3}$: *" En las condiciones de C, R_1 es superdenso, si y sólo si, $\neg C_1$".*

DEMOSTRACIÓN : Supónganse C y R_1 superdenso. Sea $I_n = [A_n, B_n]$ un encaje cantoriano no degenerado. Entonces existe $X \in \cap I_n$, por C, tal que :

$$(A_n < X) \vee (X < B_n), \quad \text{para toda n .}$$

Entonces : $(\{A_n\} < \{X\}) \vee (\{X\} < \{B_n\})$, con todos estos conjuntos, subconjuntos numerables de R_1 superdenso.

Se sigue que : Existe $Y \in R_1$ tal que $(\{A_n\} < \{Y\} < \{X\}) \vee (\{X\} < \{Y\} < \{B_n\})$.

Por lo tanto : $\# \cap I_n > 1$.

Para la propiedad recíproca, supónganse C y $\neg C_1$, y sean $\emptyset \neq A < B \neq \emptyset$, subconjuntos numerables de R_1.

Considérense las proposiciones :

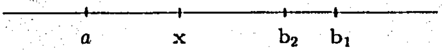
U : "El conjunto A tiene último elemento ".

P : "El conjunto B tiene primer elemento ".

Entonces se tienen los 4 casos siguientes :
(1) U $\wedge$ P.
(2) U $\wedge$ $\neg$P.
(3) $\neg$U $\wedge$ P.
(4) $\neg$U $\wedge$ $\neg$P.

En el caso (1), existen a, el último elemento de A; y b, el primer elemento de B, tales que $a < b$, por ser A<B. Entonces por ser R_1 denso, existe un elemento c de R_1, tal que $a < c < b$. Se sigue que $A < \{c\} < B$.

Para el caso (2), sea a el último elemento de A. Entonces $a < b_i$ para todo $b_i \in B$, pues de lo contrario, a sería primer elemento de B.



Para cualquier conjunto B' = $\{ \ldots\ldots\ldots, b_3, b_2, b_1\} \subset B$, tal que $\ldots\ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$; haciendo $I_n = [a, b_n]$, se cumple que $I_{n+1} \subseteq I_n$ para toda n.Ahora bien, si I_n no se hace menor que cualquier segmento prefijado, existe $x \in R_1$, tal que $a < x \leq b_n$ para toda n. Si por el contrario I_n se hace menor que cualquier segmento prefijado, entonces el encaje $\{I_n\}_{n\in N}$ es cantoriano, con $a \in \cap I_n$, y entonces por $\neg C_1$ existe $x \in R_1$, tal que $x \neq a$ y $x \in \cap I_n$. Así que $a < x \leq b_n$ para toda n.

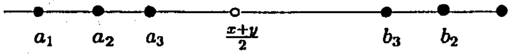
Luego $A < \{\frac{a+x}{2}\} < B$, con $\frac{a+x}{2} \in R_1$.

El caso (3) es similar al (2).

Para el caso (4), sean :

A' $= \{ a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\} \subseteq A$.

B' $= \{ \ldots\ldots b_3, b_2, b_1\} \subseteq B$, totalmente ordenados por "$\leq$ ", es decir, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots\ldots < \ldots\ldots\ldots \leq b_3 \leq b_2 \leq b_1$.



Defínase $I_n = [\, a_n, b_n]$. Entonces $I_{n+1} \subseteq I_n$ para toda n.

Si I_n se hace menor que cualquier segmento prefijado, entonces $\# \cap I_n > 1$, por $\neg C_1$, y entonces existen $x \neq y$ elementos de R_1, en $\cap I_n$. Si I_n no se hace menor que cualquier segmento prefijado, existen $x \neq y$ en R_1, tales que $a_n \leq x < y \leq b_n$ para toda n.

Luego : $A < \{\frac{x+y}{2}\} < B$, con $\frac{x+y}{2} \in R_1$.

Se concluye que R_1 es superdenso.

A partir de la discusión presentada hasta este momento, se concluye que C_1, no es demostrable a partir de los axiomas de incidencia, orden, congruencia, de Arquímedes y de Cantor.

1.4.3. ¿Por qué no se genera una inconsistencia en el Análisis Matemático?

Un análisis comparativo de los conjuntos R y *R, de los números reales e hiperreales, respectivamente, muestra que tanto (R, $+$, $\cdot$), como (*R, $+$, $\cdot$), son campos totalmente ordenados por la relación "$\leq$" usual, y que además, las operaciones son compatibles con la relación de orden en ambos casos.

Por otra parte, ambos conjuntos satisfacen la propiedead arquimediana : " Si $0 < \alpha < \beta$, en A, existe un entero τ de A, tal que $\alpha < \tau\beta$ ". Lo que hace forzoso que la diferencia radique en el axioma de Cantor C. Para ver esto, llámese axioma de Cantor modificado y denótese C_m , a C + C_1 , entonces será : $\neg C_m = C + C_2$. Es decir C_m resulta de agregar a C la proposición que declara la unicidad de $\cap I_n$, y entonces su negación resulta de agregar a C, la proposición que declara que $\# \cap I_n > 1$. Se da por asentado que en 1.4.2 se ofrecen argumentos suficientes para concluir que R satisface C_m y *R satisface $\neg C_m$.

Llamando $\sum$ a cualquiera de los conjuntos de axiomas (de campo, de orden, de Arquímedes); o bien (de incidencia, de orden, de congruencia y de Arquímedes), se tiene que :

$$\text{R es un modelo para } \sum + C_m \, .$$
$$\text{*R es un modelo para } \sum + \neg C_m \, ;$$

Como es inmediato de verificar, por las vías usuales.

Luego ambos sistemas axiomáticos son consistentes (lo que ya se sabe por otros medios), y entonces aún cuando $\sum +$ C $\nvdash$ C_1 (C_1 no es demostrable a partir de $\sum + C$), la falacia de su prueba tiene el efecto neto de agregar C_1 a $\sum + C$, transformándolo en $\sum + C_m$,ambos conjuntos consistentes de axiomas para el Análisis Matemático Real . No es por demás comentar que $\sum + \neg C_m$ es un conjunto de axiomas consistente que genera el Análisis no Estándar (Análisis Matemático Hiperreal).

CAPITULO 2

n–Extensiones propias de $^{*}R$ de cardinales $\aleph_n$.

2.1. Introducción. En la mayoría de los trabajos sobre análisis no estándar (ANE) se tiene la limitante de usar métodos que funcionan sobre entidades internas del sistema (obtenibles por transferencia a partir de otras existentes antes de construir extensiones), lo que no permite una discusión sobre una parte igualmente extensa que la mencionada. Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar cómo se pueden aplicar los métodos usuales de la matemática para abordar problemas de las extensiones en general, tales como determinación de cardinalidad, densidad, superdensidad, propiedades topológicas, etc. Para ubicar la discusión se inicia con una descripción sucinta de una de las formas más aceptadas de construir $^{*}R$, la que se conoce como "construcción por ultraproductos", (ver [13]), que tiene la gran ventaja de permitir en las demostraciones tanto los métodos tradicionales, como los que usan el principio de transferencia ([13], p. 21) –fortísima herramienta del ANE– en este apartado se incluye una digresión que muestra que hay un filtro vacío, pero no un ultrafiltro vacío, sobre cualquier conjunto.

A continuación se dan algunos resultados preliminares cuyas demostraciones se obtienen por métodos tradicionales. Entonces ya se puede abordar el tema principal del capítulo, las extensiones de $^{*}R$.

Un punto importante en el trabajo, es probar que para cada extensión que se tenga de $^{*}R$, puede construirse otra con un conjunto de infinitésimos más cercanos al cero y de mayor cardinalidad que el correspondiente conjunto anterior, y las consecuencias obvias en cuanto a los nuevos elementos infinitos. El autor desconoce si este material ya ha sido trabajado anteriormente, presentando como resultados originales la construcción y uso del ultrafiltro coacotado sobre $^{**\cdots *}N$, que permite la construcción de la extensión siguiente, así como la demostración –también resultado original– de que su cardinal es mayor que el de su predecesor. Es claro que esta situación admite inducción matemática y probablemente inducción transfinita.

Las partes del trabajo señaladas con Δ, constituyen aportaciones del autor ya sea como demostraciones alternas o nuevas proposiciones.

En esta discusión se asumen las proposiciones siguientes:

(AE): Axioma de elección: El producto cartesiano de una familia no vacía de conjuntos no vacíos, es no vacío.

(TU): ([1]) **Teorema del ultrafiltro:** Si $\mathcal{F}$ es filtro en I entonces hay un ultrafiltro $\mathcal{U}$ en I conteniendo $\mathcal{F}$.

(HGC): Hipótesis generalizada del continuo: Para cualquier cardinal transfinito α, 2^α es el siguiente cardinal.

2.2. Breve descripción de la construcción de $^*R$ por medio de ultraproductos.

(i) Considérese $R^N = \{f : N \to R \mid f \text{ es función}\}$, es decir el conjunto de las sucesiones de números reales.

El cardinal de este conjunto es

$$\#R^N = \aleph_1^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = \aleph_1 .$$

i.e. hay tantas sucesiones de reales, como números reales.

(ii) Para $s = (s_1, s_2, s_3, \dots)$, $t = (t_1, t_2, t_3, \dots)$ elementos de R^N se definen:

$$\begin{aligned} s + t &= (s_1 + t_1, s_2 + t_2, \dots) = (s_n + t_n)_{n \in N} \\ s \cdot t &= (s_1 \cdot t_1, s_2 \cdot t_2, \dots) = (s_n \cdot t_n)_{n \in N} \end{aligned}$$

como se trata de funciones $f : N \to R$, entonces $s = t$ si y sólo si $s_n = t_n$ para toda $n \in N$.

(iii) Asociando a $r \in R$ la sucesión $(r, r, r, \dots)$, se tiene por ejemplo:

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow (1, 1, 1, 1, \dots) \\ 0 &\leftrightarrow (0, 0, 0, 0, \dots) . \end{aligned}$$

Bajo estas condiciones el análisis de la estructura $(R^N, +, \cdot)$ lleva a la conclusión de que se trata de un anillo, pero no de un campo, pues:

$$(0, 1, 0, 1, \dots) \cdot (1, 0, 1, 0, \dots) = (0, 0, 0, 0, \dots) .$$

Es decir, en esta estructura hay elementos distintos de cero cuyo producto es cero (con las identificaciones correspondientes). Todas las demás propiedades como asociatividad, cerradura, elemento neutro, etc. las tiene la estructura como es fácil de checar, así como el hecho de "estar bien definidas" las operaciones.

(iv) Para eliminar el problema de los divisores de cero, se divide el conjunto R^N en clases de equivalencia por medio de un ultrafiltro libre (no generado o no principal), para lo cual se recuerda que: $F \subset P(I)$ es filtro en I, si:

(1) $\phi \notin F$

(2) $A, B \in F \Rightarrow A \cap B \in F$

[1] A veces se toma como axioma, para una prueba ver ([3],[13]).

(3) $A \in F$ y $A \subset B \subset I \Rightarrow B \in F$
Si además:
(4) Para todo $A \subset I : A \in F \vee A^C \in F$, entonces F es ultrafiltro (equivalentemente un filtro F en I, es ultrafiltro en I, si es maximal, i.e. para todo filtro G en I, $F \subseteq G \Rightarrow F = G$).

En este trabajo se tomarán filtros sobre N, $^*N, \ldots$, etc., solamente, pero I es arbitrario.

Ejemplos:

1. $F_1 = \{M \subset N : 1 \in M\}$
   es filtro en N,
   es ultrafiltro en N.
2. $F_A = \{M \subset N : A \subset M\}$ donde A es un subconjunto no vacío de N, es filtro en N.
   NO es ultrafiltro en N (v.g. para $A = \{1,2,3,4\}$, ni $X = \{1,3,5,7,,\ldots\}$, ni $X^C = \{2,4,6,\ldots\}$ están en F_A).
3. $F = \{A \subset N : A^C$ es finito$\}$, es un filtro en N, llamado el filtro de Fréchet.
   NO es ultrafiltro en N (pues por ejemplo, ni $A = \{5, 10, 15, \ldots, 5n, \ldots\}$, ni $A^C = \{1,2,3,4,6,7,8,9,11,\ldots m \neq 5n, \ldots\}$ están en F).

$\triangle$ **Digresión** (Paradoja del ultrafiltro vacío).

Sea $I = \phi$, entonces $P(I) = \{\phi\}$.

Los posibles filtros en I, son $F_1 = \{\phi\}$ y $F_2 = \phi$.

1. F_1 NO es filtro pues $\phi \in F_1$.
2. Para $F_2 = \phi$ se tiene:
   (i) $\phi \notin F_2$.
   (ii) Si A, $B \in F_2 = \phi$ entonces $A \cap B \in F_2$, se cumple por vacuidad (no existen elementos de F_2 que no lo cumplan, i.e. todos lo cumplen).
   (iii) Si $A \in F_2$ y $A \subset B \subset I$, entonces $B \in F_2$, es cierto nuevamente por vacuidad.

   Luego $F_2 = \phi$ es filtro con $I = \phi$– de hecho ϕ es filtro en I, sea $I = \phi$ o $I \neq \phi$–; ahora bien:
3. Para toda $A \subset I = \phi$, forzosamente $A = \phi = A^C$, como $F_2 = \phi$, entonces $A \notin F_2$ y $A^C \notin F_2$.
   Luego F_2 no es ultrafiltro.
   (3-a) Por otra parte, para cualquier filtro G en I tal que $F_2 \subseteq G$, se tendrá:

$$F_2 = G$$

ya que F_2 es el único filtro en I.

Entonces F_2 es filtro maximal en I, es decir, es ultrafiltro en I (en contradicción con (3)).

Para evitar esta complicación se toma $I \neq \phi$, lo que lleva a que se tendrá el filtro vacío, pero no el ultrafiltro vacío. Lo que proporciona un punto de partida sólido, claro y distinto en el intelecto (Descartes).

Una propiedad muy importante de los ultrafiltros es que:

2.2.1. *Proposición. Si $A_1, A_2, \ldots A_n$ es una partición del conjunto base, entonces, una y sólo una, de estas clases de equivalencia está en el ultrafiltro.*

Demostración Sean $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ una partición de I y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro en I.

(i): Si dos distintas clases de equivalencia A_i, A_j de esta partición están en $\mathcal{U}$, entonces $A_i \cap A_j = \phi \in \mathcal{U}$ (contradicción).

(ii): Si $A_i \notin \mathcal{U}$, para $i = 1, 2, 3 \ldots, n$, entonces $(A_i)^C \in \mathcal{U}$, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$;

i.e. $\bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c \in \mathcal{U}$, equivalentemente: $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = I^c = \phi \in \mathcal{U}$ (contradicción).

Por lo tanto:

Exactamente una clase de equivalencia A_i, para algún $i \in \{1, 2, , 3, \ldots, n\}$, está en $\mathcal{U}$.

Tomando $^*R = R^N/\mathcal{U}$ con $\mathcal{U}$ ultrafiltro libre, es decir conteniendo al filtro de Fréchet (la existencia de $\mathcal{U}$ está garantizada por el teorema del ultrafiltro), y dando las definiciones para las operaciones, relaciones, funciones, etc. en base a $\mathcal{U}$, se tiene que $(^*R, +, \cdot)$ constituye un campo no arquimediano (²), extensión propia de $(R, +, \cdot)$, así

$$\begin{aligned}
\alpha = (a_n), \beta = (b_n), \qquad & \alpha = \beta \ \ sii \ \{n \in N : a_n = b_n\} \in \mathcal{U} \\
& \alpha \neq \beta \ \ sii \ \{n \in N : a_n \neq b_n\} \in \mathcal{U} \\
& \alpha \in {}^*N \ \ sii \ \{n \in N : a_n \in N\} \in \mathcal{U} \\
& \alpha >^* r = (r, r, r, , \ldots) \ \ sii \ \{n \in N : a_n > r\} \in \mathcal{U}
\end{aligned}$$

v.g.

$$\alpha = (0, 1, 0, 1, \ldots) \quad \text{implica} \quad \alpha = (0, 0, 0, \ldots) \vee \alpha = (1, 1, 1, \ldots)$$

pues $\{n \in N : a_n = 0\} = \{1, 3, 5, \ldots\} \in \mathcal{U} \ \vee \{n \in N : a_n = 1\} \in \mathcal{U}$, y hay ultrafiltros que contienen a cada uno (en este punto hay que aclarar que no importa qué ultrafiltro libre se tome sobre N, los $^*R$ resultantes son isomorfos entre sí, de hecho sólo cambian los representantes de los componentes del sistema). ([22], págs. 92, 93).

²No arquimediano, aunque sí $*$-arquimediano, es decir para todo $\alpha \in {}^*R_+$ existe $m \in {}^*N$ tal que $\alpha m > \beta$, para cualquier $\beta \in {}^*R$ dado.

Semejantemente, si $\alpha = (a_n)$ con $a_n \in \{m_1, m_2, \dots m_k\}$, entonces $\alpha = {}^*m_1 \vee \alpha = {}^* m_2 \vee \cdots \vee \alpha = {}^*m_k$, pues es fácil probar que exactamente uno de los conjuntos: $\{n \in N : a_n = m_1\}$, $\{n \in N = a_n = m_2\}, \dots \{n \in N : a_n = m_k\}$ está en $\mathcal{U}$.

También se tiene que:

$\alpha = (1, 2, 3, \dots) = (a_n)_{n \in N} >^* r = (r, r, r, \dots)$ para toda $r \in R$.

$\alpha^{-1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots) = (a_n^{-1})_{n \in N} <^* s = (s, s, s, , \dots)$ para toda $s \in R_+$,

son elementos infinito e infinitesimal de $^*R$, que se denominan no estándar; al conjunto, $m(0) = \{\alpha \in {}^*R : |\alpha| < r \; \forall r \in R_+\}$ se le llama la mónada de cero o conjunto de números infinitesimales.

2.3. Algunos resultados preliminares. El conjunto $G(\beta) = \{\alpha \in {}^*R : \beta - \alpha \text{ finito}\}$ se denomina la galaxia de β y está constituido por aquellos elementos de $^*R$ que se encuentran a una distancia finita de β.

Es claro que $\mathcal{G} = \{G(\alpha) : \alpha \in {}^*R\}$ es una partición de $^*R$ inducida por la relación de equivalencia $\alpha \sim \beta$ si y sólo si $\alpha - \beta$ es finito.

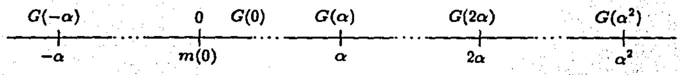


FIGURA 1.

Δ **Teorema:** *El conjunto $\mathcal{G}$ es de cardinal $\aleph_1$.*

1. *Como $\mathcal{G}$ es una partición de $^*R$ (de cardinal $\aleph_1$), entonces $\#\mathcal{G} \leq \aleph_1$.*
2. *Sean $\alpha \in {}^*R_\infty$, $f : R \to \mathcal{G}$, con $f(x) = G(\alpha x)$.*
   Entonces, si $x \neq y$ son reales:

$$f(x) = G(\alpha x), f(y) = G(\alpha y)$$

Pero: $\alpha x - \alpha y = (x - y)\alpha$ con $(x - y)\alpha$ infinito (si $(x - y)\alpha = k$ finito, entonces $\alpha = \frac{k}{x-y}$ finito (contradicción)).

Es decir $G(\alpha x) \neq G(\alpha y)$.

De aquí que f es inyectiva y $\#\mathcal{G} \geq \aleph_1$.

Por el teorema de Schroeder–Berstein (tricotomía generalizada a cardinales transfinitos) y (HGC):

$$\#\mathcal{G} = \aleph_1 .$$

Δ **Observación:** La restricción $f : [0, 1] \to \mathcal{G}$ de la función anterior, que obviamente es inyectiva, muestra que entre $G(0)$ y $G(\alpha)$ hay $\aleph_1$ distintas galaxias (semejantemente a lo que sucede entre números reales).

Δ **Teorema:** *Para cualquier entero infinito* α, $\#\{1,2,3,\dots,\alpha\} = \aleph_1$. *Además* $\#^*N = \aleph_1$.

Demostración: *Basta observar que para* $\alpha = (a_n)_{n\in N}$, $[\alpha] = ([a_n])$ *(función "mayor entero") y* $\alpha - [\alpha] = (a_n - [a_n])$ *es finito. Es decir, en cada galaxia hay enteros.*

FIGURA 2.

Sea $\mathcal{G}(\alpha) = \{G(\beta) : 0 \le \beta \le \alpha\}$, entonces:

$$f : [0,1] \to \mathcal{G}(\alpha), \quad \text{con} \quad f(x) = G(\alpha x)$$

es inyectiva.

De ahí que $\#\mathcal{G}(\alpha) \ge \aleph_1$. Así que también $\#\{1,2,3,\dots,\alpha\} \ge \aleph_1$.

Por otra parte,

$$^*N = N^N/\mathcal{U}.$$

Por lo que $\#^*N \le \#N^N = \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Se concluye que:

$$\#^*N = \#\{1,2,3,\dots\alpha\} = \aleph_1, \quad \text{para} \quad \alpha \in {}^*R_\infty,$$

Δ además que entre dos galaxias diferentes hay $\aleph_1$ distintas galaxias.

Es importante notar que $^*N = \{1,2,,3,\dots\alpha,\alpha+1,\dots\}$ es un conjunto totalmente ordenado por la relación $\le$, equivalente (equipotente) a R, pero DISCRETO, no es bien ordenado pues para cualquier $\alpha \in {}^*N_\infty$, $G(\alpha)$ no tiene primer elemento, sin embargo cada galaxia se puede dotar de un buen orden fácilmente (como se hace con Z), pero esto no es suficiente para dar un buen orden para $^*N$, ya que el conjunto $\mathcal{G} = \{G(\alpha) : \alpha \in {}^*R\}$ es totalmente ordenado, pero no bien ordenado. Este es sin embargo, un buen avance en el camino a la obtención de un buen ordenamiento para R, que de lograrse llevaría a no pocos cambios conceptuales en la matemática.

2.4. Ultrafiltros sobre $^*N$. La forma "natural" de tratar de extender $^*R$ por medio de un ultrafiltro basado en

$$\mathcal{F} = \{A \subset^* N : A^c \quad \text{es finito}\}$$

que es el filtro de Fréchet en $^*N$, lleva a lo siguiente:

1. Sean $\alpha \in m(0)$ y $\Lambda = (\frac{1}{n})_{n\in {}^*\mathbf{N}}$ (es decir Λ es una función de $^*N$ en $^*R$ que toma los valores hiperreales, $1, 1/2, \dots, 1/n, \dots 1/k, \dots k \in {}^*N$).

   Entonces $\alpha^{-1} \in {}^*R_\infty$, pero por ser $^*N$ no acotado en $^*R$, existe $N_0 \in {}^*N_\infty$ con $\alpha^{-1} < N_0$. Puede tomarse, sin perder generalidad N_0 como el primer entero mayor que α^{-1}.

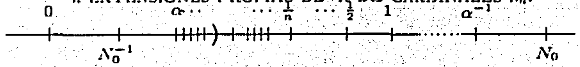


FIGURA 3.

2. Se tendrá que: $N_0^{-1} < \alpha$, y entonces

$$\begin{aligned} A &= \{n \in {}^*N : \frac{1}{n} \geq \alpha\} = \{1, 2, 3, \ldots, (N_0 - 1)\} \\ A^c &= \{N_0, N_0 + 1, \ldots\ldots\} = \{n \in {}^*N : \frac{1}{n} < \alpha\}. \end{aligned}$$

Como $N_0 \in {}^*N_\infty$, tanto A como A^c son de cardinal $\aleph_1$, por lo que ninguno es cofinito, y entonces según se tome A o A^c en el ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$, será

$$\Lambda > \alpha \quad \text{ó} \quad \Lambda < \alpha.$$

De aquí que $\mathcal{F}$ resulta inadecuado para extender R^*.

Δ Sin embargo, ${}^2\mathcal{F} = \{A \subset {}^*N : A^c \text{ es acotado en } {}^*R\}$ que como se muestra enseguida, es filtro, resulta útil para extender $^*R$ a $^{**}R$.

(i) $\phi \notin {}^2\mathcal{F}$, pues $\phi^c = {}^*N$.

(ii) Si A, $B \in {}^2\mathcal{F}$, entonces A^c, B^c acotados en $^*R$, entonces $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ acotado en $^*R$, y $(A \cap B) \in {}^2\mathcal{F}$.

(iii) Si $A \in {}^2\mathcal{F}$ y $A \subset B \subset^* N$, entonces $B^c \subset A^c$ acotado en $^*R$ y $B \in {}^2\mathcal{F}$.

Por lo tanto ${}^2\mathcal{F}$ es filtro en $^*N$ (además contiene al filtro de Fréchet en $^*N$).

Por el teorema del ultrafiltro, existe un ultrafiltro ${}^2\mathcal{U} \supseteq {}^2\mathcal{F}$ (${}^2\mathcal{F}$ no es ultrafiltro, como es fácil ver), al que se denomina ultrafiltro coacotado.

Δ **Observación:** Acotado en $^*R$ equivale a "$*$–finito" que es la transferencia en el lenguaje de $^*R$ de la propiedad "finito" en R, i.e. $^*R$ es $*$–arquimediano.

Regresando a la situación anterior para cualquier $\alpha \in m(0)_+$, existe $N_0 \in {}^*N_\infty$ tal que:

$$\frac{1}{N_i} < \alpha \quad \text{para toda} \quad N_i > N_0.$$

Así:

$$\begin{aligned} X &= \{n \in {}^*N : \frac{1}{n} < \alpha\} = \{N_0, N_0 + 1, \ldots\} \\ X^c &= \{n \in {}^*N : \frac{1}{n} \geq \alpha\} = \{1, 2, 3, \ldots, (N_0 - 1)\} \end{aligned}$$

como X^c acotado, entonces $X \in {}^2\mathcal{U}$, i.e.

$$(\frac{1}{n})_{n \in {}^*N} = \Lambda < \alpha, \quad \text{para toda} \quad \alpha \in m(0)_+.$$

De ahí que: $\Lambda^{-1} > \beta$ para todo $\beta \in {}^*R$. Ya se tiene que: ${}^*R^{{}^*N}/{}^2\mathcal{U} = {}^{**}R$

es extensión propia de $^*R$, con $*$–infinitesimales y $*$–infinitos, y en la que cualquier elemento de $^*R$ es $*$–finito (i.e. existe $\Lambda \in {}^{**}N$ tal que $\Lambda > \beta$ para todo $\beta \in {}^*R$).

En $^{**}R = {}^2R$ se tienen:

$$\begin{aligned} {}^2m(0) &= \{\Lambda \in {}^{**}R : \Lambda < |\beta|, \forall \beta \in {}^*R\} \\ {}^{**}N &= {}^2N = \{(\alpha_n)n \in {}^*N : \{n \in {}^*N : \alpha_n \in {}^*N\} \in {}^2\mathcal{U}\} = {}^*N^{{}^*N}/{}^2\mathcal{U} \end{aligned}$$

.... etc.

Para relaciones,

$$\Lambda = (\alpha_n)_{n \in {}^*N} = B = (\beta_n)_{n \in {}^*N} \quad \text{si}$$

$$\{n \in {}^*N : \alpha_n = \beta_n\} \in {}^2\mathcal{U}$$

y semejantemente para las otras relaciones de rutina.

Las operaciones suma y producto se definen como en $^*R$, es decir por componentes iguales, así $\Lambda + B = (\alpha_n + \beta_n)n \in {}^*N$, $\Lambda \cdot B = (\alpha_n \cdot \beta_n)n \in {}^*N$, de esta forma es inmediato que $({}^{**}R, +, \cdot)$ es campo totalmente ordenado, extensión propia de $^*R$, v.g.

$$\begin{aligned} (\Lambda + B) + \Gamma &= \Lambda + (B + \Gamma) \quad \forall \Lambda, B, \Gamma \text{ en } {}^{**}R = {}^2R. \\ \text{Pues} \quad (\Lambda + B) + \Gamma &= ((\alpha_n + \beta_n) + \gamma_n)_{n \in {}^*N} \\ &= (\alpha_n + (\beta_n + \gamma_n))_{n \in {}^*N} \quad \text{asoc. en} \quad ({}^*R, +) \\ &= \Gamma + (B + \Gamma) \end{aligned}$$

semejantemente para $(\Lambda \cdot B) \cdot \Gamma = \Lambda \cdot (B \cdot \Gamma)$.

$$\begin{aligned} {}^{**}0 &= (a_n)_{n \in {}^*N} \quad \text{con} \quad a_n = 0 \quad \forall n \in {}^*N \\ {}^{**}1 &= (a_n)_{n \in {}^*N} \quad \text{con} \quad a_n = 1 \quad \forall n \in {}^*N \end{aligned}$$

son representantes de las únicas clases de equivalencia elementos neutros de $+$ y $\cdot$ respectivamente.

Para $\Lambda \in {}^2R$ existen $(-\Lambda)$ y $(1/\Lambda)$ –si $\Lambda \neq 0$– inversos bajo cada operación, con $-\Lambda = (-\alpha_n)_{n \in {}^*N}$ y $1/\Lambda = (1/\alpha_n$ si $\alpha_n \neq 0$, 0 si $\alpha_n = 0)$, haciendo $A = \{n \in {}^*N : \alpha_n \neq 0\}$ es claro que $A \in {}^2\mathcal{U}$–pues $\Lambda \neq 0$–, entonces:

$$A = \{n \in {}^*N : \alpha_n \cdot (1/\alpha_n) = 1\} \in \mathcal{U}$$

esto es: $\Lambda \cdot 1/\Lambda = {}^{**}1$.

Luego $({}^2R, +, \cdot)$ es campo.

Por otra parte todas estas proposiciones, y más generalmente todas las proposiciones en la extensión obtenidas por transferencia a partir de proposiciones válidas acerca de los hiperreales son válidas en $({}^{**}R, +, \cdot)$, ya que $^{**}R$ es $*$– extensión de $^*R$ (teorema de transferencia).

2.5. Algunas propiedades de $^{**}R$. A partir de:

$$\begin{aligned} {}^{**}R_\infty &= \{\Lambda \in {}^{**}R : \Lambda > B\ \forall B \in {}^*R\} \quad \text{(infinitos de } {}^{**}R) \\ {}^{**}R_f &= ({}^{**}R_\infty)^c = \{\Lambda \in {}^{**}R : |\Lambda| \leq B \quad \text{para algún} \quad B \in {}^*R\} \\ {}^2m(0) &= \{\Lambda \in {}^{**}R : |\Lambda| < B\ \ \forall B \in {}^*R_+\} \quad \text{(infinitesimales de } {}^{**}R) \end{aligned}$$

$^{**}R_f$ es el conjunto de números finitos de $^{**}R$. Se tiene:

(i) $m(0) \cap {}^2m(0) = \{0\}$ (0 es el único hiperreal $*$–infinitesimal).

(ii) Para B finito, no infinitesimal en $^{**}R$ y $\Lambda \in {}^{**}R_\infty$, $B\Lambda \in {}^{**}R_\infty$. Pues si $B\Lambda \notin {}^{**}R_\infty$, sería $B^{-1}B\Lambda = \Lambda$ finito (elemento de $^{**}R_f$), contradiciendo la hipótesis.

(iii) $^2m(0)$ es ideal en $^{**}R_f$.

Sean $\Gamma \in {}^2m(0)$, $B \in {}^{**}R_f(B, \Gamma > 0)$ si $\Gamma B \not\in {}^2m(0)$ (no es infinitesimal en $^{**}R$) entonces: $\Gamma B \in {}^{**}R_f$ y por (ii): $\Gamma^1(\Gamma B) = B \in {}^{**}R_\infty$ (contradiciendo la hipótesis).

(iv) Para todo $\Lambda \in {}^{**}R$, $^2m(\Lambda)$ es una traslación de $^2(m)(0)$.

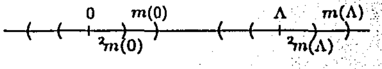


FIGURA 4.

(v) Una sucesión $(\Lambda n)_{n \in {}^*N}$ de elementos de $^{**}R$, converge en el sentido de $^*R$, si y sólo si, es constante. Esto debido a que si $|\Lambda_n - K_0| < \alpha$ para toda $\alpha \in {}^*R_+$, cualquier elemento de $^2m(K_0)$ también cumple la condición, en ambos casos a partir de una misma $m_0 \in {}^*N$.

(vi) Un elemento $\Lambda = (\alpha_n)_{n \in {}^*N}$ representa una clase de equivalencia de $^*R^{^*N}/{}^2\mathcal{U}$, es decir una familia de sucesiones de $^*N$ en $^*R$, que constan de $\aleph_1$ entradas, ejemplo:

$$\begin{aligned} \Lambda &= ((1,2,3,\dots),(1,2,3,\dots),(1,2,3,\dots),\dots) = (\alpha_n)_{n \in {}^*N} \\ &\quad \text{con} \quad \alpha_n = (1,2,3,\dots) = (N) \forall n \in {}^*N \\ B &= ((3,3,3,\dots),(3,3,3,\dots),\dots), {}^*3 = \alpha_n, \forall n \in {}^*N \\ \Gamma &= ((1,1,1,\dots),(2,2,2,\dots),(3,3,3,\dots),\dots(n,n,n,\dots),\dots)n \in {}^*N \\ &= ({}^*1, {}^*2 {}^*3, \dots, {}^*n, \dots) = (\gamma_n)n \in {}^*N, \gamma_n = n\ \forall n \in^* N\,. \end{aligned}$$

Claramente Λ y B son finitos (elementos de $^{**}R_f$) y Γ infinito (elemento de $^{**}R_\infty$), pues para $m \in {}^*N_\infty$, $N = \{1,2,3,\dots\} \subset \{1,2,3,\dots,m\}$ como es bien sabido, así que: $\{n \in {}^*N : \gamma_n > \alpha_n\} \in {}^2\,\mathcal{U}$, lo que lleva a la conclusión que $\Gamma > \Lambda$, y mayor que cualquier elemento de $^*N =^{**} N -^{**} N_\infty$ (náturales finitos en $^{**}R$)$=^{**} N_f$.

(vii) Toda sucesión creciente (decreciente) $(\alpha_n)n \in N$ de elementos de $^*R$ está acotada superiormente (inferiormente) en $^*R$ (ver 9). De aquí que conforme a la definición: "Un conjunto X es superdenso. si para cualquier par de subconjuntos $A < B$ (.i.e. $a < b$, para todo $a \in A$

y todo $b \in B$), numerables, no simultáneamente vacíos de X, existe $c \in X$ tal que: $A < \{c\} < B$", se llega a que $^*R$ y $^{**}R$ son superdensos.

(viii) Definiendo $*$–superdenso con la variante $*$–numerable (equipotente a un subconjunto de $^*N$) se tiene que $^{**}R$ es $*$–superdenso (o bien 2-superdenso).

(ix) $^2G(\Lambda) = \{b \in {}^{**}R : |\Lambda - B| \leq \gamma$ para algún $r \in {}^*R\}$, la 2-galaxia de Λ, es isomorfo a $\{\alpha + {}^2m(0) : \alpha \in {}^*R\}$.

2.6. Δ Cardinalidad de $^{**}N$ y $^{**}R$.

1. Se tiene que: $\#^*N = \#^*R = \aleph_1$
2. $^{**}R = \mathcal{A} = \{f :{}^* N \to{}^* R\}/\mathcal{U}$ (ultrafiltro coacotado en $^*N$).

   De ahí que: $\aleph_1 \leq \#^{**}R \leq \#^*R^{^*N} = \aleph_2$

   Por otra parte: $^{**}R \supset{}^{**} N = \{f :{}^* N \to{}^* N\}/\mathcal{U} ={}^* N^{^*N}/\mathcal{U}$

   Así, para cada $\Lambda \in {}^{**}N$, $\Lambda = (f(1), f(2), \dots) = (f(n))_{n\in {}^*N}$ para alguna $f \in {}^*N^{^*N}$ (f es representante de una clase de equivalencia de elementos de $^*N^{^*N}$, iguales módulo $\mathcal{U}$, de cardinal $\aleph_2$) ([3]).
3. Supóngase $^*N \sim{}^{**} N$, entonces existe una función biyectiva entre $^*N$ y $^{**}N$

$$F :{}^* N \to{}^{**} N$$

con $F(m) = (f_m(1), f_m(2), \dots) = (f_m(n))_{n\in {}^*N}$ para toda $m \in {}^*N$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \leftrightarrow & (f_1(1), & f_1(2), & f_1(3), & \dots f_1(w), \dots), & = & (f_1(n))_{n\in {}^*N} \\
2 & \leftrightarrow & (f_2(1), & f_2(2), & f_2(3), & \dots f_2(w), \dots), & = & (f_2(n))_{n\in {}^*N} \\
3 & \leftrightarrow & (f_3(1), & f_3(2), & f_3(3), & \dots f_3(w), \dots) & = & (f_3(n))_{n\in {}^*N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
w & \leftrightarrow & (f_w(1), & f_w(2), & f_w(3), & \dots f_w(w), \dots & = & (f_w(n))_{n\in {}^*N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

4. Sea $g :{}^* N \to{}^* N$ tal que

$$g(\alpha) \notin \{f_1(\alpha), f_2(\alpha), \dots, f_\alpha(\alpha)\} \quad \text{para todo} \quad \alpha \in {}^*N$$

Así, $g(1) \notin \{f_1(1)\}$, $g(2) \notin \{f_1(2), f_2(2)\}, \dots, g(w) \notin \{f_1(w), f_2(w), \dots, f_w(w)\}$.

Entonces, para cualquier $w \in {}^*N$:

$$\{w, w+1, w+2, \dots\} \subseteq \{n \in {}^*N : g(n) \neq f_w(n)\} = A$$

$A^c = \{n \in {}^*N : g(n) = f_w(n)\} \subseteq \{1, 2, 3 \dots, w\}$, es acotado en $^*N$.

Por lo tanto: $A \in \mathcal{U}$, lo que significa que $\Gamma = (g(n))_{n\in {}^*N}$, no es imagen de ninguna $w \in {}^*N$, bajo F. Y dado que Γ claramente está en $^{**}N$ se tiene una contradicción.

Entonces $^*N \not\sim{}^{**} N$.

De (1), (2) y (HGC): $\#^{**}N = \aleph_2 = \#^{**}R$.■

[3] Por cada $A \in \mathcal{U}$ hay un elemento de $^*N^{^*N}$ igual a $\Lambda \in {}^{**}R$, esto es $\Lambda \in {}^{**}R$ tiene $\aleph_2$ representantes.

Δ Nota: Una prueba alternativa puede darse construyendo $\Gamma = (g(n))_{n\in {}^*N}$, a partir de la aplicación del axioma de elección a la familia $\{A^c n\} n \in {}^*N$ de los complementos de los conjuntos

$$A_1 = \{f_1(1)\}, A_2 = \{f_1(2), f_2(2)\}, \dots, A_w = \{f_1(w), f_2(w), \dots f_w(w)\} \dots$$

etc. para todo $w \in {}^*N$. De esa forma $\Gamma \neq (f_m(n))_{n\in {}^*N}$, $\forall m \in {}^*N$, i.e. Γ no aparece en la correspondencia supuesta biunívoca.

2.7. Δ **Conclusiones.** En virtud de la naturaleza de la construcción de $^{**}R$, el proceso es iterable, ahora se puede tomar

$$^3\mathcal{F} = \{A \subset^{**} N : A^c \quad \text{acotado en} \quad {}^{**}N\}.$$

Que es un filtro en $^{**}N$, por lo que existe $^3\mathcal{U} \supseteq {}^3\mathcal{F}$, ultrafiltro no principal tal que:

$$^{**}R^{^{**}N}/^3\mathcal{U} =^{***} R$$

extensión propia de $^{**}R$, de cardinal $\aleph_3$ (bajo HGC), con infinitesimales $E < |\Lambda|$, $\forall \Lambda \in {}^{**}R$, e infinitos mayores que cualquier elemento de $^{**}R$.

En general $^{(n+1)*}R$ es extensión propia de $^{n*}R$, de cardinal $\aleph_{(n+1)}$ (bajo HGC).

Lo anterior lleva a que en cualquier $^{n*}R$ (desde $^{0*}R = R$), o plano $(^{n*}R)^2$, o espacio $(^{n*}R)^k$, hay más puntos sin ocupar, que los pertenecientes al $(^{n*}R)^k$, $n = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$.

En particular, dados a, b en $(^{n*}R)^k$ NO ES POSIBLE llenar (en el sentido de no poder agregar elementos entre a y b) el segmento que los une a partir de extensiones de R como las que se han construido:

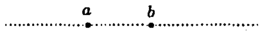


FIGURA 5.

Δ **Observación:** Nótese que en N, $^*N$, $^{**}N, \dots {}^{n*}N, \dots$ hay cardinales para conjuntos finitos, o bien de $\aleph_1, \aleph_2, \dots, \aleph_n, \dots$ elementos: (v.g. $w \in {}^*N_\infty \Rightarrow \#\{1, 2, 3, \dots, w\} = \aleph_1$ (HGC), así cualquier hipernatural infinito es cardinal (representante de R, $^*N$, $^*R$, etc), sin embargo no hay hiperenteros que sirvan como cardinales de N, es decir no existe $\alpha \in {}^*N$ tal que $\{1, 2, 3, \dots, \alpha\} \sim N$. Esto parece ser consecuencia de que el paso de $^{n*}R$ a $^{(n+1)}$ $^*R$ implica cambio de cardinalidad, excepto de R a $^*R$ (ambos de cardinales $\aleph_1$), donde $\#N = \aleph_0 < \aleph_1 = \#R$, y para los demás casos $\#^{n*}N = \#^{n*}R$.

Comentario final. Números α infinitesimal en $^{n*}R$, y β infinito en $^{n*}R$ (respecto a), pasan a ser finitos en $^{(n+1)*}R$. De donde se sigue que estos conceptos son RELATIVOS, aunque claro está, son absolutos respecto a $^{k*}R$, para $k \leq n$, en particular para $^{0*}R = R$. Una pregunta interesante es: ¿existen ${}^{m*}R$ con $m < 0$? se conjetura que la respuesta es afirmativa.

APÉNDICE A.

Axiomas de la geometría elemental (Hilbert).

En adelante consideraremos tres conjuntos diferentes de objetos; los objetos del *PRIMER* conjunto se denominan *puntos*, los del *SEGUNDO*, *rectas* y los del *TERCERO*. *planos*. El conjunto de todos los puntos, rectas y planos se denomina *espacio*.

Los puntos, rectas y los planos pueden estar relacionados unos con otros de una manera determinada, que se indica por las palabras *pertenece a*, *entre*, *congruentes*. Estas relaciones deben satisfacer las condiciones contenidas en los *axiomas* que se enumeran a continuación; por lo demás, la naturaleza de los objetos y de las relaciones entre ellos puede ser arbitraria.

Grupo 1. Axiomas de incidencia.

1. Cualesquiera que sean los puntos A, B, existe una recta a que pasa por cada uno de los puntos A, B.
2. Cualesquiera que sean dos puntos diferentes A, B, existe a lo sumo una recta que pasa por cada uno de los puntos A, B.
   Estos axiomas pueden resumirse como sigue: dos puntos diferentes determinan una y sólo una recta que pasa por ellos.
3. En cada recta hay al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta.
   Con respecto al punto A y al plano α que se hallen en correspondencia, utilizaremos también las expresiones: *A pertenece a α; A es un punto del plano α; α pasa por A*, etc.
4. Cualesquiera que sean tres puntos A, B, C que no pertenecen a una misma recta, existe un plano α que pasa por cada uno de los tres puntos A, B, C. En cada plano hay al menos un punto.
5. Sean cuales fueren tres puntos A, B, C que no pertenecen a una misma recta, existe a lo sumo un plano que pasa por cada uno de los tres puntos A, B, C.
6. Si dos puntos diferentes A, B de la recta a pertenecen al plano α, cada punto de la recta a pertenece al plano α.
   En este caso decimos que *la recta a pertenece al plano α; el plano α pasa por la recta a*, etc.
7. Si dos planos α, β tienen un punto común A, tienen al menos otro punto común B.
8. Existen al menos cuatro puntos que no pertenecen a un mismo plano.

Grupo II. Axiomas de orden.

Suponemos que un punto sobre una recta puede encontrarse en determinada relación con otros dos puntos de la misma recta; esta relación se denotará por el término *se encuentra entre*.

1. Si el punto B se encuentra entre el punto A y el C, entonces A, B y C son puntos diferentes de una misma recta, y B se encuentra, asimismo, entre C y A.
2. Cualesquiera que sean los puntos A y C, existe al menos un punto B sobre la recta AC tal que C está entre A y B.
3. Entre tres puntos cualesquiera de una recta, a lo sumo uno de ellos puede encontrarse entre los otros dos.

Los axiomas II.1–II.3 se denominan axiomas de orden lineal.

Definición. Un par no ordenado de puntos A y B se llamará *segmento* y se denotará AB, o bien BA. Los puntos que se encuentran entre A y B se llamarán *puntos interiores*, o simplemente *puntos del segmento AB*; los puntos A y B, *extremos del segmento*. Los demás puntos de la recta AB se denominarán *puntos exteriores del segmento AB*.

1. **(Axioma de Pasch).** Sean A, B, C tres puntos que no pertenecen a una misma recta, y a, una recta en el plano ABC, que no contiene ninguno de los puntos A, B, C. Entonces, si la recta a pasa por algún punto del segmento AB, también pasará o bien por algún punto del segmento AC, o bien por alguno del segmento BC.

Grupo III. Axiomas de congruencia.

Suponemos que un segmento se puede encontrar en una relación determinada con otro (o consigo mismo), que denotaremos con el término *congruente*, o bien *igual*. La relación de congruencia debe de satisfacer los siguientes axiomas.

1. Si A, B son dos puntos sobre la recta a, y A' es un punto de la misma recta, o bien de otra recta a', siempre se puede encontrar, a un lado prefijado de A' sobre la recta a', un punto B', y sólo uno, tal que el segmento AB es congruente al $A'B'$.

   Tal relación entre los segmentos AB y $A'B'$ se denota así:

   $$AB \equiv A'B' .$$

   Para cada segmento AB se exige la congruencia

   $$AB \equiv BA .$$

   La primera parte de este axioma se expresa más concisamente así: cada segmento puede ser aplicado de manera unívoca sobre cada recta a un lado prefijado cualquiera de cualquier punto dado de ésta.
2. Si los segmentos $A'B'$ y $A''B''$ son congruentes al mismo segmento AB, entonces $A'B'$ es congruente al segmento $A''B''$; es decir, si

   $$A'B' \equiv AB \qquad \text{y} \qquad A''B'' \equiv AB ,$$

   entonces también

   $$A'B' \equiv A''B'' .$$

3. Sean AB y BC dos segmentos sobre la recta a, sin puntos interiores comunes y sean, además, $A'B'$ y $B'C'$ dos segmentos sobre la misma recta, o bien sobre otra a', que tampoco poseen puntos interiores comunes. Si

$$AB \equiv A'B' \qquad \text{y} \qquad BC \equiv B'C',$$

entonces

$$AC \equiv A'C'$$

4. Sean dados $\angle(h,k)$ en el plano α, una recta a' en este mismo plano, o bien en otro, α', y supongamos fijado un lado determinado del plano α' con respecto a la recta a'.

   Sea h' una semirrecta de la recta a', con origen en el punto O'. Entonces en el plano α' existe una semirrecta k', y sólo una, tal que $\angle(h,k)$ es congruente con $\angle(h',k')$ y, además, todos los puntos interiores de $\angle(h',k')$ se encuentran en el lado prefijado con respecto a a'. Para denotar la congruencia de ángulos se utiliza la notación

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h',k').$$

   Si $\angle(h,k) \equiv \angle(h',k')$, entonces $\angle(k,h) \equiv \angle(k',h')$. Cada ángulo es congruente consigo mismo, es decir,

$$\angle(h,k) \equiv \angle(h,k) \qquad \text{y} \qquad \angle(h,k) \equiv \angle(k,h).$$

5. Sean A, B, C tres puntos no pertenecientes a una misma recta y A', B', C' otros tres, tampoco pertenecientes a una misma recta. Si

$$AB \equiv A'B', \qquad AC \equiv A'C' \qquad \text{y} \qquad \angle ABC \equiv \angle B'A'C',$$

entonces

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C' \quad \text{y} \quad \angle ACB \equiv \angle A'C'B'$$

Grupo IV. Axiomas de continuidad

1. **(Axioma de Arquímedes).** *Sean AB y CD segmentos arbitrarios. Entonces sobre la recta AB existe un número finito de puntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, situados de manera que A_1 está entre A y A_2, A_2 está entre A_1 y A_3, etc., tales que los segmentos $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ son congruentes al segmento CD y B está entre A y A_n.*
2. **(Axioma de Cantor).** *Supongamos que en una recta arbitraria a se da una sucesión infinita de segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \ldots,$ de los cuales cada uno está en el interior del precedente; supongamos, además, cualquiera que sea un segmento prefijado, existe un índice n para el cual A_nB_n es menor que este segmento. Entonces existe sobre la recta a un punto X, que está en el interior de todos los segmentos A_1B_1, A_2B_2, etc.*

   De las condiciones del axioma se sigue de inmediato que *existe sólo un punto X que está dentro de todos los segmentos A_1B_1, A_2B_2, etc.*

En efecto, si sobre la recta a existe otro punto Y interior a todos los segmentos $A_1B_1, A_2B_2, \ldots$, para todo n el segmento A_nB_n será mayor que el XY, cosa excluida por la condición.

Grupo V. Axioma de paralelismo.

Definición. Dos rectas que se encuentren en un mismo plano y no tengan puntos comunes se llaman *paralelas.*

(Axioma de paralelismo). *Sea a una recta arbitraria, y A, un punto exterior a ella; entonces en el plano determinado por A y la recta a, se puede trazar a lo sumo una recta que pasa por A y no interseca a.*

APÉNDICE B.

B. Axiomas de Campo $(F, +, \cdot)$

A_1: **Clausura:** $a, b \in F \Longrightarrow a + b \in F$.
A_2: **Ley asociativa:** $a, b, c \in F \Longrightarrow a + (b + c) = (a + b) + c$.
A_3: **Identidad:** $\exists\, 0 \in F$ tal que $0 + a = a + 0 = a \quad \forall\, a \in F$.
A_4: **Inverso:** $a \in F \Longrightarrow \exists\, -a \in F$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
A_5: **Ley conmutativa:** $a, b \in F \Longrightarrow a + b = b + a$.
M_1: **Clausura:** $a, b \in F \Longrightarrow a \cdot b \in F$.
M_2: **Ley asociativa:** $a, b, c \in F \Longrightarrow a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
M_3: **Identidad:** $\exists\, 1 \in F, 1 \neq 0$, tal que $1 \cdot a = a \cdot 1 = a \quad \forall a \in F$.
M_4: **Inverso:** $a \in F, a \neq 0 \Longrightarrow \exists\, a^{-1} \in F$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$.
M_5: **Ley conmutativa:** $a, b \in F \Longrightarrow a \cdot b = b \cdot a$.
D_1: **Ley distributiva:** $a, b, c \in F \Longrightarrow \begin{cases} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \end{cases}$

Propiedades importantes de todo campo

1. Los elementos identidad 0 y 1 son únicos.
2. Leyes de cancelación:
   - **(i):** $a + b = a + c \Longrightarrow b = c$.
   - **(ii):** $a \cdot b = a \cdot c, a \neq 0 \Longrightarrow b = c$.
3. Los elementos inversos $-a$ y a^{-1} son únicos.
4. Para todo $a, b \in F$,
   - **(i):** $a \cdot 0 = 0$,
   - **(ii):** $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$,
   - **(iii):** $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$,
   - **(iv):** $b - a = b + (-a)$,
   - **(v):** $\dfrac{b}{a} = b \cdot a^{-1}, \qquad a \neq 0$.

C. El Teorema del Ultrafiltro.

Sea F un filtro en I y $\mathcal{F} = \{F_i \subset P(I) \colon F \subset F_i \wedge F_i \text{ es filtro en } I\}$. Entonces $\mathcal{F}$ es parcialmente ordenado por la relación de inclusión $\subseteq$, como cualquier otra familia.

Una cadena $\mathcal{C}$ es una familia tal que $X, Y \in \mathcal{C}$ implica que $X \subset Y \vee Y \subset X$. Se probará que toda cadena en $\mathcal{F}$ tiene cota superior.

Sea $\mathcal{C} = \{C_k \colon k \in K\}$ una cadena en $\mathcal{F}$ y $C = \bigcup_{k \in K} C_k$, la unión de los elementos (filtros que contienen a F) de $\mathcal{C}$.

(i): Como $\emptyset \notin C_k$ para toda $k \in K$, entonces $\emptyset \notin C$.
(ii): Sean $X, Y \in C$, entonces existen $i, j \in K$, tales que $X \in C_i$, $Y \in C_j$ y además $C_i \subset C_j \vee C_j \subset C_i$. Supóngase que $C_i \subset C_j$, entonces $X, Y \in C_j$ y como C_j es filtro, también $X \cap Y \in C_j$ y $X \cap Y \in C$.
(iii): Sea $Z \subset I$ y $X \subset Z$, para algún $X \in C_j$. Entonces $Z \in C_j$ y de ahí $Z \in C$.

De (i), (ii) y (iii) se sigue que C es filtro en I.

Por otro lado como $F \subset C_k$ para toda $k \in K$, entonces $F \subset C$ y de ahí que $C \in \mathcal{F}$. Así que C es cota superior para $\mathcal{C}$ en $\mathcal{F}$, es decir, toda cadena en $\mathcal{F}$ tiene cota superior en $\mathcal{F}$. De ahí que la aplicación del Lema de Zorn[4] lleva a que $\mathcal{F}$ tiene elemento maximal G, que es el ultrafiltro requerido.

[4]**Lema de Zorn.** *Sea (X, R) un orden parcial, si cada cadena en X tiene cota superior, entonces X tiene elemento maximal.*

D. Algunas propiedades importantes de $^*R$.

1. Todas las galaxias son isomorfas al conjunto $*R_f$ de los hiperreales finitos, que a su vez forman $G(0)$, la galaxia de cero.

    Esto puede verse a partir de una traslación de $G(0)$ a $G(\alpha)$, para cualquier $\alpha \in {}^*R$.
2. Dado un ultrafiltro libre U, no existe $M \in U$ tal que $M \subset A$, para todo $A \in U$. En particular $\cap U = \emptyset$.

    Tomando $A \in U$ tal que $A \subset B$ para toda $B \in U$ y $a \in A$, como $\{a\} \notin U$, entonces $\{a\}^c \in U$. De ahí que $A \subset \{a\}^c$ (contradicción). Por lo tanto no existe tal conjunto A y $\cap U = \emptyset$.
3. Un ultrafiltro U en N (o en cualquier conjunto) se llama *fijo* si algún $n \in N$ pertenece a todos los elementos del ultrafiltro. Si se toma un ultrafiltro fijo U en N, para construir los hiperreales $^*R$, entonces $^*R$ resulta isomorfo a R.

    (Éste es un ejercicio rutinario en construcciones que usan ultrafiltros).
4. Dado un natural infinito $n \in {}^*\mathbb{N}_\infty$, existe un conjunto infinito no numerable de naturales menores que n ($\aleph_1$, bajo la hipótesis del continuo). Semejantemente, existe un conjunto no numerable de naturales mayores que n. (Ver capítulo 3).
5. Cada $\alpha = [(a_n)] \in {}^*R$, puede representarse de $\aleph_1$ formas distintas, pero equivalentes bajo U.

    Dado $\alpha = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cada elemento del ultrafiltro U con el cual fue construido $^*R$ induce infinitas sucesiones iguales módulo U, a la sucesión dada, y además $\#R^{\mathbb{N}} = \aleph_1^{\aleph_0} = \aleph_1$.
6. Si $\varepsilon > 0$ y $\varepsilon \approx 0$, entonces $\varepsilon^\varepsilon \approx 1$.
7. Si $\alpha, \beta \in {}^*R$, $\beta > 0$, si $\tau \in {}^*R$, tal que $\tau^\alpha = \beta$.
8. Para $\alpha \in {}^*R_f$ (finito) con $\alpha > 0$, si $\tau \approx \rho$, no se cumple siempre que $\alpha^\tau \approx \alpha^\rho$ (para exponentes finitos sí vale la propiedad).
9. $\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha \approx e$, para todo α infinito positivo.
10. Una sucesión de números hiperreales, y más generalmente, todo conjunto numerable de hiperreales, siempre es acotado.
11. Toda sucesión creciente de infinitesimales tiene cota superior infinitesimal y recíprocamente, toda sucesión decreciente de hiperreales infinitos positivos tiene cota infinita positiva.
12. Una sucesión (numerable) en $^*R$ converge, si y sólo si, es constante.

Las propiedades 6,7,8 y 9 se obtienen directamente a partir de las definiciones de las operaciones involucradas; las últimas tres son consecuencia de la superdensidad de $^*R$ (ver capítulo 2 .

Bibliografía

[1] W. Alvarado, Ultrafiltros y representatividad de infinitesimales, Aportaciones Mat.: Comunicaciones. Soc. Mat. Mexicana, **14**, (1994), 61–71.

[2] W. Alvarado, *Representatividad de infinitesimales en modelos de ultrapotencia numerable*, Ciencias Matemáticas, Vol. III No. **1**, (1992), 33–38.

[3] J. L. Bell, A. B. Slomsom, Models and ultraproducts, an introduction. Third revised printing. North Holland Publishing, Co. 1974.

[4] X. Caicedo, *¿Son todos los infinitesimales representables por sucesiones convergentes a 0?*, Matemática, Enseñanza Univesitaria, No. **38** (1986), 28–34.

[5] J. N. Crossley and Others, *What is mathematical logic?*, Oxford University Press, 1972.

[6] R. Dedekind, *Essays on the theory of numbers*, Open Court Publishing Co., 1901.

[7] H. D. Ebbinghaus and Others, *Numbers*, Springer Verlag, 1991.

[8] N. V. Efímov, *Geometría superior*, Editorial Mir, Moscú, 1978.

[9] A. A. Fraenkel, *Abstract set theory*, North Holland Publishing Co., 1961.

[10] A. A. Fraenkel, *Teoría de los conjuntos y lógica*, UNAM, Instituto de Investigaciones Filosóficas, Cuad. 31, 1976.

[11] F. Hausdorff, *Set theory*, Chelsea Publishing Co., 1937 (trad. 1957).

[12] D. Hilbert, *Fundamentos de las matemáticas*, Colección Mathema, Fac. de Ciencias, UNAM, 1993.

[13] A. Hurd, P. Loeb, Introduction to non standard real analysis, Academic Press, Inc. 1985.

[14] C. Imaz, *Infinitesimals models for calculus*, Bol. Soc. Mat. Mexicana, Soc. Mat. Mexicana **9** (2), (1984).

[15] C. Imaz, *Una propuesta didáctica para la integral definida*, PNFAPM, 1985.

[16] G. E. Martin, *The foundations of geometry and the non-Euclidean plane*, Springer Verlag.

[17] E. Nelson, *Internal set theory, a new approach to nonstandard analysis*, Bulletin of American Mathematical Society, Vol. 89, number 6, Nov. 1977.

[18] A. V. Pogorelov, *Lectures on the foundations of geometry*, P. Noordhoff Ltd. Groningen, 1966.

[19] C. Puritz, *Skies constellations and monads*, (Contributions to nonstandard analysis, studies in logic and foundations of mathematics, vol. 69), North Holland, (1972), 215–243.

[20] A. Robinson, Non–standard Analysis, North Holland Publishing Company 1966.

[21] R. Salat, *Uso y enseñanza del cálculo*, Esc. Sup. de Física y Matemáticas, IPN, 1994.

[22] Y. Takeuchi, Métodos analíticos del análisis no estándar, Universidad Nacional de Colombia, 1988.

[23] Y. Takeuchi, *Infinitesimales de Cauchy no representables por sucesiones monótonas*, preprint.

[24] C. Videla, *Un curso de lógica matemática*, Aportaciones Matemáticas, Serie. Comunicaciones, Soc. Mat. Mexicana, 1995.