

00580
4

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO DE INGENIERÍA.

ESTUDIO DEL FLUJO DE UN LÍQUIDO VISCOELÁSTICO
EN UN SISTEMA DE LUBRICACIÓN
DE PLATOS CONCÉNTRICOS

TESIS:

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRO EN INGENIERÍA QUÍMICA (POLÍMEROS)

PRESENTA:

I.Q. EDTSON EMILIO HERRERA VALENCIA.

ASESOR:

DR. ÁNGEL ENRIQUE CHÁVEZ CASTELLANOS.

COASESOR

DR. OCTAVIO MANERO BRITO

México, D.F.

Notifico a la Dirección General de Biblioteca
UNAM a difundir en formato electrónico el
contenido de mi trabajo de tesis.
2003.
NOMBRE: Edtson Emilio Herrera Valencia

FECHA: 26/06/03
FIRMA: Edtson E. Herrera Valencia

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS
CON
FALLA DE
ORIGEN**

ÍNDICE

No. de hoja:

Nomenclatura	
Resumen	1
Capítulo 1	
1.1 Antecedentes.	2
1.2 Objetivos de la investigación.	4
1.3 Descripción del contenido de la tesis.	4
Capítulo 2	
2.1 Concepto de surfactante.	6
2.2 Estructuras formadas con surfactantes.	6
Capítulo 3	
3.1 Modelos reológicos cinéticos.	8
3.2 El modelo.	11
Capítulo 4	
4.1 Flujo continuo por compresión.	13
4.1.1 Ecuaciones teóricas.	13
4.1.2 Tensores cinemáticos.	13
4.1.3 Condiciones de contorno.	14
4.1.4 Variables adimensionales.	14
4.1.5 Resumen de ecuaciones.	14
4.1.6 Condiciones de frontera adimensionales.	15
4.1.7 Perturbaciones regulares.	16
4.1.8 Teoría a orden cero.	16
4.1.9 Límites asintóticos.	17
4.1.10 Obtención de las componentes de la velocidad y el gradiente de presión.	17
4.1.11 Modelo de dos constantes.	18
4.1.12 Fuerza a orden cero en $z = 1$.	19
4.1.13 Algoritmo de cálculo para la fuerza a orden cero.	20
4.1.14 Fuerza a rapidez de deformación baja.	20
4.1.15 Fuerza a rapidez de deformación alta.	21
4.2 Modelo de redes.	22
4.2.1 Esfuerzo cortante, primera y segunda diferencia de esfuerzos normales a orden cero.	22
4.3 Flujo transitorio por compresión.	23

B

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.3.1	Introducción.	23
4.3.2	Variables adimensionales.	23
4.3.3	Condiciones de frontera.	23
4.3.4	Ecuaciones adimensionales.	23
4.3.5	Condiciones de frontera adimensionales.	24
4.3.6	Cálculo del gradiente de presión.	24
4.3.7	Fuerza a orden cero.	24
4.3.8	Fuerza a rapidez de deformación baja.	25
4.3.9	Fuerza a rapidez de deformación alta.	25
4.3.10	Fuerza a orden cero. (Caso micelar).	25
4.3.11	Cálculo de las componentes de la velocidad y gradiente de presión.	26
4.3.12	Algoritmo de cálculo para la fuerza a orden cero.	26

Capítulo 5

5.1	Flujo continuo por compresión.	28
5.1.1	Modelo de dos constantes.	30
5.1.2	Velocidad radial y axial.	32
5.1.3	Gradiente de presión a orden cero.	31
5.1.4	Fuerza a orden cero.	32
5.1.5	Fuerza a rapidez de deformación baja.	32
5.1.6	Fuerza a rapidez de deformación alta.	33
5.2	Modelo de redes.	37
5.3	Flujo Transitorio por compresión.	38
5.3.1	Velocidad radial y axial.	38
5.3.2	Gradiente de presión a orden cero.	39
5.3.3	Fuerza a orden cero.	39
5.3.4	Fuerza a rapidez de deformación baja.	39
5.3.5	Fuerza a rapidez de deformación alta.	40
5.4	Parte experimental.	43

Figuras 46

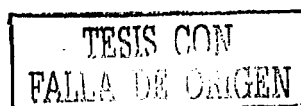
Apéndice A 48

Apéndice B 50

Conclusiones

Trabajo a futuro

Bibliografía



NOMENCLATURA

g	Aceleración de la gravedad. $[M/T^2]$
F^*	Cociente de fuerzas adimensionales. [1]
ξ	Constante. (Relación de funciones). [1]
$\sigma_{(ik)j}$	Componente ik del tensor de esfuerzos de orden j en α . $[M/LT^2]$
m	Constante de homogeneidad. [1]
K	Constante de normalización para los esfuerzos $(1/G_0)$. $[LT^2/M]$
r	Coordenada adimensional en R . [1]
z	Coordenada adimensional en Z . [1]
z_0	Coordenada adimensional en $Z=0$. [1]
z_1	Coordenada adimensional en $Z=1$. [1]
R, θ, Z	Coordenadas polares cilíndricas. $\{[L],[1],[L]\}$
$\overset{\nabla}{\sigma}$	Derivada convectiva superior de Maxwell, para el tensor de esfuerzo. $[M/LT^3]$
h	Distancia de separación entre los discos. [L]
ρ	Densidad del líquido. $[M/L^3]$
Q	Flujo volumétrico. $[L^3/T]$
φ	Fluidez (inverso de la viscosidad). $[LT/M]$
φ_0	Fluidez a rapidez de deformación baja. $[LT/M]$
φ_∞	Fluidez a rapidez de deformación alta. $[LT/M]$
$C^2(\Omega)$	Función continua y diferenciable dos veces en el conjunto abierto Ω .
Γ	Función no lineal de la presión para el flujo transitorio por compresión. [1]

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

a	Radio del disco [L]
q	Rapidez de deformación adimensional. [1]
q_0	Rapidez de deformación adimensional evaluada en $z=0$. [1]
α	Relación adimensional $(h/a) \ll 1$. [1]
N_2	Segunda diferencia de esfuerzos normales $[M/LT^2]$
β	Segunda función de estructura. [1]
$\underline{\underline{\sigma}}$	Tensor de esfuerzos $[M/LT^2]$
$\underline{\underline{T}}$	Tensor de esfuerzos total $[M/LT^2]$
$\nabla \underline{\underline{V}}$	Tensor gradiente de velocidad [1/T]
$\underline{\underline{D}}$	Tensor rapidez de deformación [1/T]
$\underline{\underline{W}}$	Tensor de vorticidad [1/T]
$\underline{\underline{\delta}}$	Tensor unidad. [1]
τ_1	Tiempo de relajación a rapidez de deformación baja para el flujo transitorio por compresión. [T]
τ_2	Tiempo de relajación a rapidez de deformación alta para el flujo transitorio por compresión. [T]
λ_r	Tiempo de relajación a rapidez de deformación alta [T]
λ_0	Tiempo de relajación a rapidez de deformación baja [T]
λ	Tiempo de relajación de la estructura. $\lambda_r \leq \lambda \leq \lambda_0$ [T]
$\nabla \underline{\underline{V}}'$	Transpuesta del tensor gradiente de velocidad [1/T]
$u(r)$	Velocidad adimensional en r , evaluada en $z=0$. [1]

Λ	Función no lineal de la presión para el flujo homogéneo por compresión. [1]
$F_{q \rightarrow 0}$	Fuerza adimensional a rapidez de deformación baja. [1]
F_{00}	Fuerza homogénea en el disco superior, $z=1$ de orden cero en α . [1]
F_{0m}	Fuerza no homogénea en el disco superior, $z=1$ de orden cero en α . [1]
F_N^1	Fuerza newtoniana a rapidez de deformación baja (Flujo homogéneo por compresión). [1]
F_N^2	Fuerza newtoniana a rapidez de deformación alta. Flujo homogéneo por compresión). [1]
$F_{q \rightarrow \infty}$	Fuerza a rapidez de deformación alta. [1]
F_0	Fuerza a orden cero en α (flujo transitorio por compresión). [1]
\bar{p}_0	Gradiente de presión adimensional a orden cero en α [1]
G_0	Módulo de rigidez [M/LT ²]
Re_1	Número de Reynolds en el flujo continuo por compresión. [1]
Re_2	Número de Reynolds en el flujo transitorio por compresión. [1]
We_1	Número de Weissenberg en el flujo continuo por compresión. [1]
We_2	Número de Weissenberg en el flujo transitorio por compresión. [1]
\square	Operador convectivo no lineal. [1/T]
$\frac{D}{Dt}$	Operador de Stokes [1/T]
P	Presión isotrópica [M/LT ²]
N_1	Primera diferencia de esfuerzos normales [M/LT ²]
A	Primera función de estructura (φ_{ϕ_0}). [1]

F

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

v	Velocidad adimensional radial. [1]
w	Velocidad adimensional axial. [1]
V_z	Velocidad axial dimensional [M/T]
V_R	Velocidad radial dimensional [M/T]
V	Velocidad promedio $V = Q/2\pi ah$ [L/T]
η	Viscosidad cortante. $\eta_\infty \leq \eta \leq \eta_0$ [M/LT]
η_0	Viscosidad cortante a rapidez de deformación baja [M/LT]
η_∞	Viscosidad cortante a rapidez de deformación alta [M/LT]

RESUMEN

Se presenta un modelo reológico simple, el cual resulta de acoplar una ecuación cinética que describe la evolución de la estructura a la ecuación constitutiva convectiva superior de Maxwell. Este método, se utiliza para reproducir el complejo comportamiento reológico de soluciones de surfactantes y micelas. El sistema requiere de cuatro constantes, las cuales poseen significado físico, también se analiza un líquido viscoelástico en dos situaciones de flujo que ocurren en el espacio, formado por dos discos paralelos con diferente cinemática. La ecuación reológica y cinética se resuelven junto con la ecuación de movimiento por perturbaciones regulares. El primero de estos sistemas, es el flujo continuo por compresión, el cual, consiste en inyectar el líquido a flujo constante, por una serie de perforaciones alineadas en el plato inferior. A orden cero, la dependencia del esfuerzo con el escalar rapidez de deformación es cuadrática y a rapidez de deformación baja y alta el esfuerzo tiene dos zonas constantes. Para la primera diferencia de esfuerzos normales a rapidez de deformación baja es cuadrática y a rapidez de deformación alta la dependencia es la misma multiplicada por un pequeño factor numérico menor que uno. Además, se deducen expresiones para la fuerza a rapidez de deformación alta y baja. Estas expresiones son equivalentes a lo deducido por Stefan (1902) para un fluido newtoniano. Finalmente, se presenta una serie de gráficas que muestran el comportamiento del esfuerzo, la primera diferencia de esfuerzos normales y la fuerza adimensional como función del escalar rapidez de deformación y la no homogeneidad del fluido para diferentes valores en el número de Weissenberg. Para el segundo flujo (flujo transitorio por compresión) se obtienen las ecuaciones de Stefan a rapidez de deformación baja, alta y además, la expresión integral de la fuerza como función de los tiempos de relajación. De la misma manera, se presentan una serie de gráficas que permiten analizar el comportamiento de la variación de la altura del plato como función del tiempo, de la fuerza y el esfuerzo adimensional como función del número de Weissenberg, asimismo, las ecuaciones obtenidas en el flujo transitorio por compresión, se usan para correlacionar algunos datos experimentales provenientes de la literatura.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

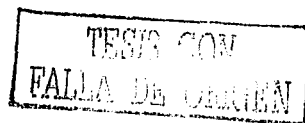
CAPÍTULO 1

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Antecedentes.

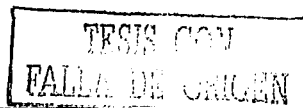
El flujo continuo por compresión (Ver fig. 1) fue propuesto por Oliver [3-6]. En este sistema el fluido es inyectado a flujo constante entre dos discos paralelos de radio, los cuales están separados por una distancia axial h , es decir el líquido entra por una serie de perforaciones en el plato inferior. El sistema tiene las ventajas de que no hay partes móviles, por lo que no se toma en cuenta la inercia de los platos. Waters y Gooden [1] han analizado este sistema para un fluido tipo ley de potencia, usando un método perturbativo para resolverlo. A orden cero demostraron que la fuerza depende de las propiedades geométricas y de flujo como son: el radio del plato, la separación de los platos, la viscosidad cortante a rapidez de deformación baja y la no homogeneidad del flujo, debido a la entrada del líquido por el plato inferior. Para flujo homogéneo la relación que obtuvieron es equivalente a la que alcanzó Stefan (1902) para el flujo transitorio por compresión (Ver fig. 2) tomando en cuenta la inercia de los platos. Para flujo no homogéneo se encontró una expresión equivalente a la que adquirió Scott (1932) para un fluido que sigue el modelo de ley de potencia. A primer orden deducen una expresión, la cual es una primera contribución por mecanismos inerciales. En este contexto, se demuestra cómo los efectos inerciales contribuyen al fenómeno de lubricación, de la misma manera, Waters y Gooden [2] analizaron un líquido viscoelástico caracterizado por una ecuación constitutiva tipo Oldroyd-B, la que contiene ocho parámetros ajustables, por lo que, en este modelo se predicen efectos no lineales asociados matemáticamente con los operadores convectivos de los tensores de esfuerzo y rapidez de deformación. Estos efectos físicamente están relacionados con propiedades elásticas del medio. Básicamente se procede como en [1], a orden cero, se demuestra que la fuerza depende de las propiedades del medio y del flujo, tiempos de relajación, viscosidad cortante a rapidez de deformación baja y la no homogeneidad del fluido. Sin embargo, este resultado es numérico, puesto que la no linealidad de la ecuación reológica complica una solución en términos de funciones elementales para la fuerza. A orden cero la primera diferencia de esfuerzos normales es distinto de cero, lo que implica efectos de segundo orden (elásticos). A primer orden, la fuerza se divide en dos contribuciones: inerciales y elásticas, concluyendo que a orden cero, los efectos elásticos y viscosos no se separan, lo que no sucede con el primer orden, donde se tiene una integral por efectos elásticos y otra por efectos inerciales, además, los resultados experimentales, concluyen que los efectos elásticos permiten mejorar la capacidad mecánica del sistema del flujo por compresión continuo. En la parte experimental de este sistema Oliver y R.C Ashton [6] probaron prácticamente este método para una solución de poliacrilamida concentrada a una temperatura de 16°C., encontrando que la fuerza tiene una variación de tipo lineal con el flujo y aumenta conforme disminuye el diámetro de las perforaciones en el plato inferior. Con estos resultados, concluyen que un líquido viscoelástico mejora la capacidad mecánica del aparato debido a los efectos elásticos y al diámetro de las perforaciones en el plato inferior. Estos sistemas se pueden aplicar a fenómenos de lubricación en maquinaria que entra en contacto con aceites y líquidos viscoelásticos.

Flujo transitorio por compresión (Ver Fig. 2) fue estudiado por G. Brindley, J.M Davies y K. Walters [7]. En este sistema, el fluido es colocado entre dos platos concéntricos de radio, los cuales, están separados por una distancia axial h . Aquí el fluido es colocado en los platos y comprimido por el plato superior, el cual, se aproxima al medio con una velocidad que se modifica punto a punto. Sobre este sistema, se tiene mucho trabajo reportado en la literatura [1-17]. Uno de los primeros que utilizó este tipo de sistema para un fluido newtoniano, fue Stefan (1902) quien demostró que la fuerza para mantener el movimiento del líquido fluyendo por el espacio



comprendido entre los platos, es proporcional a la viscosidad cortante y propiedades geométricas del sistema. Después de esta investigación Scott (1930) aplicó el mismo problema pero para un fluido de ley de potencia. En este trabajo se deduce una expresión analítica para la fuerza en función de las propiedades de modelo de ley de potencia. Este resultado se aplica a fluidos pseudoplásticos o dilatantes. Esta expresión, se reduce a lo encontrado por Stefan en (1902), para un fluido newtoniano. G. Brindley, J.M Davies y K. Walters [7] analizó un líquido viscoelástico, con una ecuación constitutiva de segundo orden. En esta investigación, se deduce una expresión analítica para la fuerza en función de los tiempos de relajación, la viscosidad cortante y la velocidad con la que desciende al plato. También se presentan variaciones del esfuerzo como función de la rapidez de deformación a partir de la expresión de la fuerza. Además, se presenta muestra esquemáticamente la variación de la altura de los platos como función del tiempo. Otro de los proyectos interesantes acerca de fluidos viscosos pero con esfuerzo de cedencia, es el que exhiben G.H. Covey y B.R. Stanmore. [9]. En esta investigación, utilizan dos tipos de ecuaciones constitutivas: la primera de ellas es un ecuación que describe un fluido de Bingham, el cual posee dos constantes materiales y la segunda ecuación, es un fluido de Herschel-Bulkley el cual, contiene parámetros del modelo de ley de potencia y un esfuerzo de cedencia. En este trabajo se reportan dos soluciones analíticas, en función de los parámetros del medio para valores asintóticos en el número de plasticidad, el cual, relaciona el esfuerzo cortante con el esfuerzo de cedencia. Los datos experimentales que reportan para pastas, concuerdan con el modelo teórico deducido y a partir de esto, se puede predecir los parámetros materiales.

Uno de los recientes artículos que hablan acerca de los efectos de la temperatura en un fluido viscoelástico para una geometría de platos paralelos es el de Benoît Debbaut [11]. En esta investigación, se acopla la ecuación convectiva superior de Maxwell con la ecuación de energía y se propone que la viscosidad tenga una dependencia tipo Arrhenius. En este escrito, no se deduce una expresión analítica por la complejidad de las ecuaciones, sino por que se utilizó un elemento finito para el cálculo de la fuerza. También se demostró que la temperatura se ve afectada por los tiempos de relajación y propiedades del medio. Además, el calor decrece monotonamente conforme va menguando la altura en el flujo transitorio por compresión. Este trabajo en particular, tiene aplicaciones en la industria, existen muchos procesos donde son no isotérmicos. J.D. Sherwood [13] estudia el flujo por compresión transitorio para pastas, en el movimiento relativo entre un sólido y un líquido. En este trabajo, la fuerza se aplica a un sistema de placas paralelas, las cuales, se aproximan con una velocidad V . En esta investigación, se modifican la ecuación de movimiento y las condiciones de contorno, para introducir los efectos de porosidad en el medio, por lo que la solución es numérica, además, se define la fracción volumen, para tomar en cuenta la filtración. Además J.D. Sherwood demostró que la fuerza crece conforme la separación de la placa aumenta y el número de Peclet disminuye. Por otro lado Colin Servais, André Luciani, Jan-Anders y E. Manson [14] trabajaron el flujo por compresión, pero aplicado a suspensiones de fibras concentradas, ellos propusieron un modelo tipo Herschel-Bulkley el cual, contiene tres parámetros ajustables. La aportación de este trabajo, es que se toma en cuenta los efectos, debido a las fuerzas de fricción e hidrodinámicas. De las comparaciones que hacen experimentalmente, encuentran que la relación entre la presión y la rapidez de deformación es lineal con el modelo teórico, mientras que en las fibras el comportamiento no es lineal para diferentes longitudes de fibras. M.A. McClelland y B.A. Finlayson [12]. Estudian el flujo por compresión transitorio en geometría de platos concéntricos, utilizando una técnica basada en perturbaciones como en [1]. En este trabajo, para su solución se asume estado cuasi-estacionario. La ecuación reológica que utilizan es un modelo corrotacional de Maxwell. Para la velocidad a orden cero obtienen un perfil parabólico, el cual se ve afectado por los parámetros del medio. De la misma manera, se obtiene la componente en z de la velocidad y el gradiente de presión. La expresión para la fuerza depende de



variables geométricas y de la velocidad con la que el sistema comprime al líquido. Las curvas experimentales demuestran que la variación de la altura es monótona decreciente como función del tiempo. Recientemente se ha tratado de modificar la geometría para las aplicaciones del flujo transitorio por compresión. Uno de estos trabajos es el que presentan Guopin Lian, Yong Xu, Webin Huang, Michael J. Adams [15]. En esta investigación, se demuestra que el gradiente de presión tiende a cero conforme la separación es pequeña. Además, demostraron que la presión disminuye cuando el radio del plato disminuye. En este trabajo, se demuestra que la fuerza decrece, conforme el índice del modelo de ley de potencia aumenta. Otra de las investigaciones en fluidos de Bingham, es la hecha por D.N. Smyrniotis, J.A. Tsamopoulos [16]. En esta investigación se trabaja con la aproximación de lubricación, la cual consiste en despreciar los efectos inerciales de la ecuación de movimiento tomando en cuenta órdenes de magnitud en las ecuaciones constitutivas. El cálculo de la fuerza es hecho mediante elemento finito. Ellos deducen que la velocidad radial es parabólica para $n=0$ y se modifica debido a las propiedades del medio. Además, presentan las curvas de nivel de la velocidad, donde se observa las regiones en la que se pierde la simetría. Otra de las aportaciones del trabajo, es la de presentar la variación del esfuerzo total como función del radio para diferentes valores en los parámetros reológicos. Ellos concluyen que el tensor de esfuerzos es constante en ciertas regiones del espacio y que decrece monótonamente conforme aumenta el radio. El esfuerzo cortante para este sistema presenta una variación lineal a valores pequeños en el radio. En valores intermedios el esfuerzo es monótono creciente y finalmente tiene una pendiente pronunciada. Otro de los trabajos acerca de líquidos elásticos ideales es el que presenta N. Phan-Thien, J. Dudek, D.V. Boger y V. Tiratmadja [8]. Aquí se presenta una solución exacta para un líquido viscoelástico, caracterizado por una ecuación constitutiva tipo Oldroyd-B. Este sistema se resuelve por técnicas de similitud y por elemento finito. También se muestran datos experimentales y comparaciones asintóticas elásticas ideales junto con los programas de simulación.

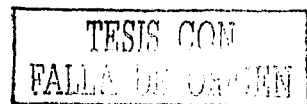
1.2 Objetivos de la investigación.

El objetivo principal del presente trabajo es contribuir al entendimiento del comportamiento reológico de soluciones de surfactantes y micelas en dos distintos tipos de flujos. El flujo de estos sistemas es complejo, puesto que tienen elementos cortantes y elementos extensionales. Existen otros tres objetivos: El primero de ellos, es desarrollar un modelo fenomenológico que describa y pronostique el comportamiento reológico de surfactantes, basado en la cinética de ruptura-reformación de la microestructura. Aquí se propone un modelo que acopla la ecuación convectiva superior de Maxwell, con una ecuación cinética para describir la evolución del parámetro estructural (Fredrickson 1970). El segundo objetivo es deducir expresiones de la fuerza que experimenta el sistema a orden cero, como función de los parámetros del medio y de flujo para los sistemas de flujo continuo por compresión y transitorio por compresión. El último objetivo es utilizar las ecuaciones obtenidas para correlacionar algunos datos experimentales provenientes de la literatura. Una de las mayores ventajas de este modelo, es que todas las constantes tienen significado físico.

Por otro lado y debido a las aplicaciones científicas y tecnológicas actuales y potenciales de los cristales líquidos y de las soluciones de miscelas elongadas, así como a la ausencia de un modelo que describa el flujo por compresión transitorio y continuo en forma satisfactoria para estos sistemas, se justifica plenamente la originalidad de la investigación, contenida en el presente proyecto de maestría.

1.3 Descripción del contenido de la tesis

Este trabajo se divide en cinco capítulos, cuyo contenido es el siguiente: En el primero, se describen brevemente los sistemas estudiados, se justifica la realización de la presente



investigación y se exponen los objetivos del proyecto realizado. En el segundo, se revisan los aspectos teóricos relacionados con las soluciones de surfactantes, la formación de estructuras y los fundamentos de la mecánica del medio continuo. En el tercero, se describe el modelo reológico utilizado en la presente tesis. En el cuarto capítulo se presenta el marco teórico con las deducciones de las ecuaciones y resultados más importantes para los modelos presentados. En el quinto, se hace el análisis de resultados, las conclusiones y el trabajo a futuro. Para concluir, se presenta la bibliografía y los apéndices, en estos últimos, se muestra detalladamente las deducciones de algunas ecuaciones generadas por el marco del modelo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIGURAS

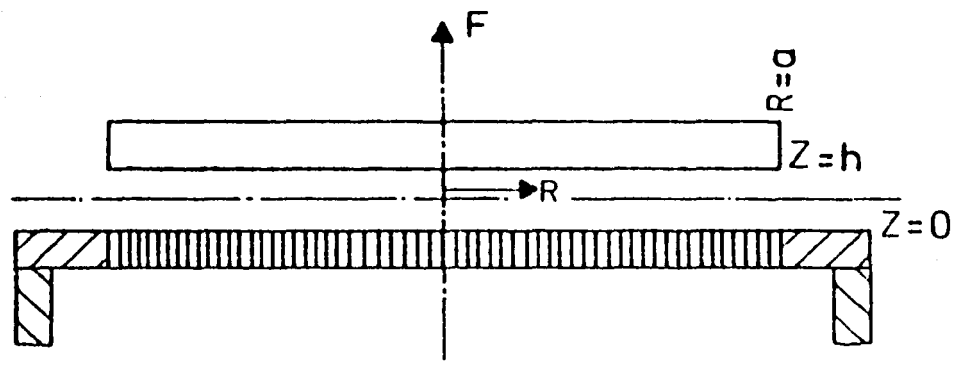


Figura 1. Flujo continuo por compresión

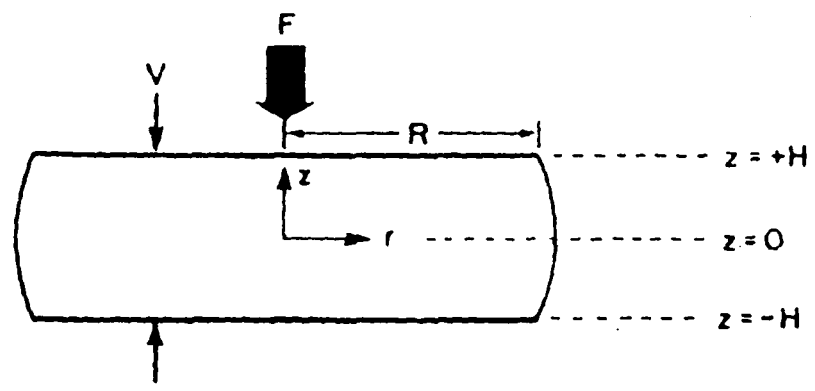


Figura 2. Flujo transitorio por compresión.

TESIS CON
FALDA DE ORIGEN

CAPÍTULO 2

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2. ESTRUCTURAS FLUIDAS MICROESTRUCTURADAS

2.1 Concepto de surfactante.

Un anfifílico, es una sustancia que posee un grupo polar unido a uno o varios grupos no polares mediante enlaces covalentes. Un surfactante o agente de actividad superficial, es una sustancia anfifílica, que reduce la tensión superficial o interfacial de las fases en que está disuelta y que tiene la capacidad de formar micelas en agua y/o disolventes orgánicos. Esta definición, permite distinguir a los surfactantes de las sustancias anfifílicas simples como alcoholes y aminas, las cuales pueden reducir la tensión superficial de las fases en las que se encuentran disueltas, pero que son incapaces de formar micelas u otro tipo de agregados en solución. Según la naturaleza del grupo polar, los surfactantes se dividen en iónicos y no iónicos, dentro de los dos primeros se encuentran los surfactantes aniónicos (jabones, ésteres de ácido sulfúrico, ácidos sulfónicos, de ácido fosfórico, etc.), los catiónicos (sales cuaternarias de amonio), los anfóteros (betainas, alquilimidazolin, aminoácidos, proteínas, etc) y los zwitteriónicos (glicéridos, fosfolípidos, etc.). Un ejemplo de surfactantes no iónicos son los óxidos de polietileno. También existe otra clasificación basada en el número de "colas" (grupos no polares) de la molécula de surfactantes de cola sencilla y de cola doble.

2.2 Estructuras formadas con surfactantes.

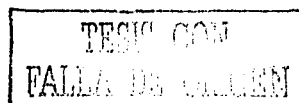
Micelas y vesículas.

Debido a su naturaleza anfifílica, los surfactantes tienen la tendencia a absorberse en interfaces agua-aire o aceite-agua, de tal forma que las colas hidrocarbonadas se orientan hacia la fase aire o hacia la fase oleica y los grupos hidrofílicos hacia la fase acuosa. El estado final de una interfase representa un equilibrio entre la tendencia a la adsorción en la interfase y la tendencia hacia la disolución completa, debido a la agitación térmica de las moléculas. Por ello, la parte hidrocarbonada del surfactante tiende a ser "marginada" y expulsada del agua (parte hidrofóbica). En contraste, la parte polar o iónica, interactúa fuertemente con las moléculas de agua, en consecuencia, tiende a quedar retenida dentro del medio acuoso (parte hidrofílica). De esta manera, la mayor parte del surfactante añadido, en bajas concentraciones por debajo de la c.m.c., se concentra en la interfase con la parte hidrofílica orientada hacia la fase acuosa y la parte hidrofóbica orientada hacia la otra fase, disminuyendo notablemente la tensión interfacial.

La concentración del surfactante en la interfase aumenta con el incremento de la concentración en la fase acuosa, sin embargo, para concentraciones mayores que una concentración denominada **concentración micelar crítica (c.m.c)**, las moléculas de anfifilo se empiezan a asociar entre sí dentro de la fase acuosa formando estructuras denominadas micelas, algunos surfactantes con doble cola y con un gran volumen en la cabeza forman vesículas, en este caso, la concentración crítica es llamada concentración vesicular crítica.

Para el caso de micelas, los grupos polares del surfactante están en contacto con la fase acuosa, mientras que el interior de las micelas está constituido por las cadenas hidrocarbonadas. En consecuencia, la parte interna de la micela tiene propiedades parecidas a las de un hidrocarburo. Entonces, cuando en una fase acuosa se encuentran dispersas un gran número de micelas, es posible solubilizar moléculas orgánicas normalmente insolubles en una fase acuosa.

Algunas de las propiedades físicas de las soluciones de surfactantes, (tales como detergencia, conductividad eléctrica, tensión superficial e interfacial, presión osmótica, conductividad



equivalente, etc.) cambian en forma brusca cerca de la concentración miscelar crítica, lo que permite determinar la c.m.c., esta última, se define como la concentración a la cual ocurre el máximo cambio en la pendiente de la curva, en que se representa una propiedad coaligativa ideal ψ , en función de la concentración total del surfactante, c_T .

Las micelas, son estructuras dinámicas formadas por una agrupación de decenas o centenas de moléculas de surfactante, usualmente con una masa micelar molar entre 3,000 y 100,000, mientras que sus dimensiones son entre 5 y 10 nm, frecuentemente. La estructura micelar crítica, es influida por la atracción de las cadenas hidrocarbonadas y la repulsión iónica de las cabezas hidrofílicas, por tanto, la estructura química del surfactante determina el tamaño y la forma de las micelas.

La forma de los agregados, ha sido dilucidada gracias a los recientes progresos de las técnicas de investigación que usan espectroscopia de resonancia magnética nuclear (R.M.N), dispersión de neutrones y dispersión cuasiestática de luz. Los experimentos de dispersión de neutrones a bajo ángulo con micelas de dodecilsulfonato de sodio y otras micelas iónicas sugieren que cerca del c.m.c son esféricas, sin embargo, conforme aumenta la concentración de surfactante la forma de los agregados cambia de esferas a cilindro.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO 3

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.1.1 Modelos reológicos cinéticos

En estos modelos se supone que el material posee estructura y que ésta cambia con el flujo. El comportamiento reológico no lineal de estos materiales puede ser descrito por un conjunto de dos ecuaciones (Mewis [23]), tales como:

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{f}}_1[\underline{\underline{D}}(t), X(t)] \quad (1)$$

$$\frac{d}{dt}X(t) = \underline{\underline{f}}_2[\underline{\underline{D}}(t), X(t)] \quad (2)$$

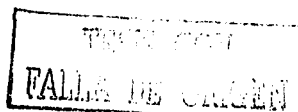
En estas ecuaciones, $\underline{\underline{\sigma}}$ es el tensor de esfuerzos, X es un parámetro estructural y $\underline{\underline{D}}$ es el tensor de velocidad de deformación. La ecuación (1) expresa el esfuerzo instantáneo en función de la cinemática instantánea y del parámetro estructural. La ecuación (2) describe la evolución temporal del parámetro estructural como función de la cinemática instantánea y del grado de estructura presente al tiempo t . En muchos estudios, el grado de estructura ha sido caracterizado por el número de enlaces transitorios, los cuales contribuyen al comportamiento reológico dependiente del tiempo. Esto determina la forma de la ecuación (1). Para la ecuación (2) varios autores han utilizado una cinética de rompimiento-deformación de primer orden ([22],[23],[24]). Un gran número de autores han usado la viscosidad aparente como una medida de la estructura ([22],[23],[24]). Esto equivale a suponer que la viscosidad es proporcional al número de puntos estructurales, el número de enlaces físicos o enredamientos) existentes al tiempo t . Además, cuanto más complicado es el modelo, es menor el número de soluciones analíticas que se pueden obtener y es mayor el número de constantes, por lo que se oscurece la interpretación física. Lo anterior no quiere decir que los modelos cinéticos son innecesarios, por el contrario, al desarrollar prototipos microscópicos más rigurosos se pueden hacer mejores predicciones del comportamiento reológico. En la literatura se encuentran varios modelos reológicos propuestos para líquidos poliméricos y suspensiones, los cuales, consideran que el flujo provoca cambios en la microestructura del material. La mayoría de los modelos cinético-estructurales reportados en la literatura, poseen la misma estructura matemática. En general la ecuación constitutiva de estos patrones se pueden escribir como:

$$\underline{\underline{\Phi}} + \lambda \overset{\vee}{\underline{\underline{\Phi}}} = \underline{\underline{\Phi}} \underline{\underline{D}} \quad (3)$$

Aquí $\underline{\underline{\Phi}}$, es una función de la estructura y/o del tiempo, $\overset{\vee}{\underline{\underline{\Phi}}}$ es un tensor de esfuerzos generalizado y $\underline{\underline{\Phi}}$, es un operador convectivo no lineal del tensor de esfuerzos generalizado y λ , es un tiempo de relajación de esfuerzos generalizado., así mismo, la ecuación de evolución de la estructura se puede generalizar como:

$$\frac{dX}{dt} = F(1 - X) + HX + L \quad (4)$$

Donde F , es la función de construcción (que esta relacionada con el tiempo de relajación de la estructura), H , es la función de destrucción (que puede depender de la velocidad de corte, el esfuerzo aplicado, la historia de deformación, etc.) y L , está relacionada con la reformación de estructura debida al flujo. En la tabla 1 se presentan las expresiones explícitas de $\underline{\underline{\Phi}}$, λ , F , H y L para alguno de los modelos cinéticos estructurales, reportados en la literatura (ver simbología), a continuación, se describen los alcances y limitaciones de algunos de los modelos reológicos



estructurales reportados en la literatura.

Tabla 1

	F	H	L	λ	Φ	observaciones
Fredickson	$\frac{1}{\lambda}$	$-k\underline{\sigma} : \underline{D}$	$\frac{k\underline{\sigma} \cdot \underline{D} \varphi_0}{\varphi_0}$	0	$\frac{1}{\varphi(t)}$	$x = \varphi/\varphi_0$
Marrucci	$\frac{1}{\lambda}$	$-\frac{k}{\lambda} \sqrt{\frac{tr\underline{\sigma}}{2G}}$	0	$\lambda x^{1.4}$	2λ	$\underline{\Phi} = \frac{g}{Gx^{1.4}}$
Williams	$\frac{1}{\lambda}$	$b \dot{\gamma}^m$	0	λx	$G\lambda x$	
De Kee	k_c	$g_1 - g_2$	0	$\lambda(\underline{\sigma}, \underline{D})$	$\eta(t)$	$x = \eta/\eta_0$

Modelo de Fredickson

Este modelo (Fredickson 1970), utiliza como parámetro estructural, la fluidez (φ) (inverso de la viscosidad), la razón, para usar la fluidez como parámetro estructural, es que la ecuación que se obtiene es de un orden menor al de la ecuación de la viscosidad. La ecuación de evolución de la estructura está dada por:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(\varphi_0 - \varphi)}{\lambda} + k(\varphi_\infty - \varphi)\underline{\sigma} : \underline{D} \quad (5)$$

Donde λ , es el tiempo de reconstrucción de la estructura, φ_0 es la fluidez a rapidez de deformación baja, φ_∞ es la fluidez a rapidez de deformación alta y k , es una constante de normalización para el esfuerzo. En este caso, la función de destrucción de la estructura, depende de la energía disipada $\underline{\sigma} : \underline{D}$, esto es, reconoce el trabajo utilizado en destruir la microestructura. La ecuación de la estructura esta acoplada a una ecuación constitutiva newtoniana generalizada, es decir, en estado estacionario el modelo de Fredickson predice adelgazamiento al corte con una pendiente muy próxima a la unidad:

Modelo de Marrucci

Para este modelo (Marrucci 1976), se propone una ecuación semejante a la del modelo de Maxwell convectivo superior, dada por:

$$\frac{\underline{\sigma}}{G'} + \lambda \frac{\dot{\underline{\sigma}}}{G'} = 2\lambda \underline{D} \quad (6)$$

Acoplada a una función de evolución de la estructura, donde la velocidad de cambio de la estructura con el transcurso del tiempo, depende de funciones relacionadas con la destrucción y reformación de la estructura:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{(1-X)}{\lambda} - \frac{k}{\lambda} \sqrt{\frac{tr\underline{\sigma}}{2G'}} X \quad (7)$$

Donde $tr\underline{\sigma}$, es la traza del tensor de esfuerzos, k , es la constante de destrucción de estructura y λ , es el tiempo de relajación del parámetro estructural, además, G' y λ , dependen de la cantidad de estructura al tiempo t , que están definidos como $G' = G_0 X^{1.4}$ y $\lambda = \lambda_0 X^{1.4}$.

Modelo de Williams.

Para este modelo (Williams.1981), se propone la siguiente función de estructura:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{(1-X)}{\lambda} - \frac{b(\dot{\gamma})^m}{\lambda} X \quad (8)$$

Donde m , es el exponente del modelo de ley de potencia y b , es una constante de ajuste., el cociente b/λ , puede ser una función de la rapidez de deformación para materiales complejos., la función de destrucción, depende de la velocidad de corte elevada al exponente de la ley de potencia y la ecuación del parámetro estructural está acoplada a una ecuación constitutiva mazwelliana, pero incluye la derivada convectiva superior e inferior de Oldroyd [34]. La expresión de la ecuación constitutiva empleada en este modelo es la siguiente:

$$\underline{\underline{\sigma}} + \lambda \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = 2\eta_0 \underline{\underline{D}} = 2\lambda G_0 \underline{\underline{D}} \quad (9)$$

Donde el tiempo de relajación y la viscosidad newtoniana dependen del parámetro estructural, de tal manera que $\lambda = \lambda_0 X$ y $\eta_0 = G_0 \lambda_0 X$.

En regimen permanente de (7) y (8) se obtiene:

$$\eta = G_0 \lambda (1 + b(\dot{\gamma})^m) \quad (10)$$

Esto es, el sistema presenta una región newtoniana y una región, en la cual el material sufre adelgazamiento al corte, dependiendo del valor del exponente., además, el modelo de Williams predice un máximo en el esfuerzo, como función del tiempo para el inicio del flujo, y un relajamiento de esfuerzos no lineal y ciclos de histéresis. Este modelo usa cuatro constantes y una función de ajuste

Modelo de De Kee.

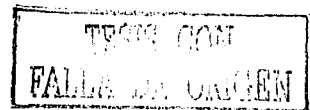
Para este modelo (De Kee.1994), la ecuación de evolución del parámetro estructural está dada por:

$$\frac{dn}{dt} = k(n_0 - n) - (g_1(\lambda \dot{\gamma}) - g_2(\lambda \dot{\gamma}))n \quad (11)$$

Donde n_0 y n , son el número de puntos estructurales a tiempo 0 y t , respectivamente, k , es una constante de construcción, mientras g_1 y g_2 , son funciones de ajuste que dependen del tiempo de relajación y de la velocidad de corte para cada material en particular. La función de construcción, tiene dos contribuciones: formación de estructura causada por el movimiento Browniano y por el flujo cortante, mientras que la destrucción sólo depende del flujo cortante. Al incorporar la solución de la ecuación (10), en la ecuación constitutiva de Maxwell generalizada se obtiene que

$$\underline{\underline{\sigma}} + \lambda \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\eta_0}{(1 + (f_1 - f_2)/k)} \left[1 + \frac{1}{k} (f_1 - f_2) e^{-k(1 + (f_1 - f_2)/k)t} \right] \underline{\underline{D}} \quad (12)$$

Donde $\dot{\underline{\underline{\sigma}}}$, es la derivada de Gordon-Schowalter, que incluye las derivadas convectiva superior y convectiva inferior de Oldroyd [34], este, es un modelo de tres constantes y dos funciones de ajuste. Para el movimiento oscilatorio de pequeña amplitud, el sistema de De Kee, predice un decaimiento en la viscosidad con el aumento en la frecuencia, parecido al del modelo de Maxwell., en estado estacionario, el modelo predice diferentes comportamientos no newtonianos dependiendo de la diferencia $g_2 - g_1$: (i) cuando $g_2 - g_1 > 0$, el prototipo predice adelgazamiento al corte (ii)



cuando $g_2 - g_1 = 0$, el modelo pronostica fluido newtoniano y (iii) cuando $g_2 - g_1 < 0$, el modelo anuncia espesamiento al corte., también , este modelo predice espesamiento en flujo uniaxial elongacional en estado estacionario., en otro contexto, para el inicio del flujo causado por un escalón de velocidad de corte, el modelo De Kee presenta dos casos: (i) para velocidades de cortes bajas la respuesta es Maxwelliana; (ii) para velocidades altas, el esfuerzo crece desde cero hasta un máximo, para luego decaer hasta su valor en estado estacionario.; también , se predice una relajación de esfuerzos no lineal. Por último, para una velocidad de corte constante, este modelo predice tixotropía cuando $g_2 - g_1 > 0$ y reopexia $g_2 - g_1 < 0$.

Modelo Giesekus

Giesekus (1966;1982;1984;1985) propuso un modelo, que considera que el arrastre que sufren las moléculas poliméricas durante un flujo, depende de la dirección en la que se mueven, lo cual, implica que el arrastre es anisotrópico, en este caso, el autor derivó una teoría cuyo objetivo es la descripción del comportamiento reológico de soluciones concentradas o de polímeros fundidos en flujo cortante. Al efecto, Giesekus[24-25] supuso que las moléculas durante el flujo, se orientan respecto a las líneas de corriente, por lo que, cada molécula siente una fricción viscosa dependiente de la dirección. Para representar este caso el autor, reemplazó el inverso del tiempo de relajación en la ecuación convectiva superior de Maxwell, por un tensor de movilidad anisotrópica. La ecuación propuesta por Giesekus es:

$$\underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{B}} \cdot (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\delta}}G') = \underline{\underline{0}} \quad (13)$$

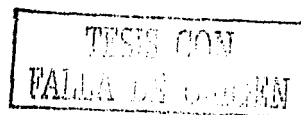
Donde el tensor $\underline{\underline{B}}$, es igual a $A(\underline{\underline{\sigma}}/G' - \underline{\underline{\delta}}) + \underline{\underline{\delta}}$ y A , es una constante de proporcionalidad empírica, en este caso, la constante A puede tomar valores entre 0 y 1, los cuales corresponden al estado isotrópico y el máximo en anisotropía., asimismo, cuando el material esta en reposo, el esfuerzo es isotrópico, esto es, $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{\delta}}$. La ecuación constitutiva del modelo de Giesekus es:

$$\lambda_0 \underline{\underline{\dot{\sigma}}} + \underline{\underline{\sigma}} + \frac{A}{G'} \underline{\underline{\sigma}}^2 = 2G'\lambda_0 \underline{\underline{D}} \quad (14)$$

Al respecto, es importante destacar que la ecuación constitutiva del modelo de Giesekus difiere en el término cuadrático respecto al esfuerzo de la ecuación convectiva superior de Maxwell {[28],[34]}..En este orden de ideas el modelo de Giesekus predice una zona newtoniana a baja rapidez de deformación y adelgazamiento al corte a altas velocidades de corte con pendiente constantes. En el flujo transitorio, este sistema predice un máximo en el esfuerzo para inicio de flujo, el cual se incrementa con el aumento en la velocidad de corte y no predice oscilaciones. En experimentos de relajación de esfuerzos, indica un decaimiento no lineal.

3.2. EL MODELO

En este trabajo se acopla una ecuación cinética, que cuantifica la evolución de la fluidez (inverso de la viscosidad) al modelo codeformacional de Maxwell generalizado, el objetivo, es generar un prototipo capaz de describir el comportamiento de sistemas viscoelásticos, que exhiben fenómenos dependientes del tiempo (tixotropía y reopexia). El modelo para materiales viscoelástico más sencillo que predice relajación de esfuerzos y efectos no lineales, es el modelo convectivo superior de Maxwell, el cual ha sido deducido usando un método molecular (Larson 1987), por ello , se decidió emplear esta ecuación constitutiva para desarrollar este modelo. La ecuación cinética que describe la evolución del parámetro estructural, es similar a la empleada por Fredrickson (1970). Para desarrollar el sistema empleado en este trabajo, se hicieron las siguientes



suposiciones:

1) El material obedece a una ecuación maxwelliana codeformacional generalizada, con una fluencia φ , la cual, en general depende de la posición y del tiempo.

$$\underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{\varphi G_0} \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = 2 \frac{1}{\varphi} \underline{\underline{D}} \quad (15)$$

Donde G_0 , es el módulo de digidez y $\underline{\underline{D}}$, es el tensor rapidez de deformación.

2) La ecuación cinética que se propone, es la de Fredickson (1970), la cual, considera que la microestructura de la macromolécula cambia (un ejemplo, sería que la macromolécula se encuentra en forma esférica, y que debido a los esfuerzos internos, se empieza a desenrollar cambiando su configuración espacial) debido a los esfuerzos internos y se genera y orienta debido al flujo, misma, que a continuación se enuncia:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{(\varphi_0 - \varphi)}{\lambda} + K(\varphi_\infty - \varphi) \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \quad (16)$$

3) En estado estacionario, la función de estructura queda acoplada con la ecuación reologica (15) de la siguiente manera:

$$\frac{1 + (\lambda/G_0)(\lambda_0/\lambda_\infty)(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}})}{1 + (\lambda/G_0)(\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}})} \underline{\underline{\sigma}} + \lambda_0 \dot{\underline{\underline{\sigma}}} = 2\eta_0 \underline{\underline{D}} \quad (17)$$

Esta expresión contiene cuatro parámetros ajustables: tres tiempos de relajación ($\lambda_0, \lambda_\infty, \lambda$), y el módulo elástico G_0 . La ecuación (17), es una ecuación diferencial parcial no lineal y describe el estado reológico del fluido con la cinética de destrucción, además, es cuadrática en el esfuerzo y en la rapidez de deformación.

4) El sistema se encuentra en estado estacionario, es decir, los atributos o variables del sistema no dependen del tiempo.

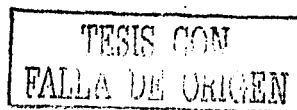
5) Al considerar regimen permanente, se supone que la misma cantidad de microestructura que se rompe es la que se forma, por lo tanto no existe fuentes ni sumideros en referencia con la ecuación de continuidad de la mecánica del medio continuo.

6) La constante K por lo regular, es una función que puede depender de los invariantes del sistema [18] es decir, de las propiedades del flujo. Para este modelo, se considera constante y con valor igual al inverso del módulo de rigidez G_0^{-1} .

7) El proceso es isotérmico, ninguno de los atributos o variables del sistema son función de la temperatura.

8) Las funciones matemáticas son $C^2(\Omega)$.

9) Suponemos que el sistema tiene simetría cilíndrica. $F(\theta + 2\pi) = F(\theta)$.



CAPÍTULO 4

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.1 FLUJO CONTINUO POR COMPRESIÓN.

4.1.1 Ecuaciones teóricas.

Físicamente el problema es el mismo que en [1-2]., es decir, el líquido fluye entre dos discos estacionarios de radio a , y distancia axial h ($h \ll a$). El sistema de coordenadas es cilíndrico (R, θ, Z) , definido en el centro de los platos., por hipótesis, el movimiento es causado por el flujo continuo del líquido, a través de una serie de perforaciones a lo largo del plato inferior. Basicamente las ecuaciones utilizadas, son: la ecuación reológica (Cap. 3-17), la ecuación de movimiento, continuidad y tensor de esfuerzo total. El vector velocidad para este sistema es:

$$\underline{V} = \langle V_{(R)}, 0, V_{(Z)} \rangle \quad (1)$$

Ecuación de balance de cantidad de movimiento

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho g \quad (2)$$

Ecuación de continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \underline{V}) = 0 \quad (3)$$

Ecuación general de esfuerzos

$$\underline{T} = -p\underline{\underline{\delta}} + \underline{\underline{\sigma}} \quad (4)$$

donde p , es la presión isotrópica $\underline{\underline{\delta}}$, es el tensor de unidad y $\underline{\underline{\sigma}}$ es el tensor de esfuerzos., de esta expresión se identifica ρ como la densidad del fluido, y g es la aceleración de la gravedad.

4.1.2 Tensores cinemáticos.

Tensor gradiente de velocidad

$$\nabla \underline{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_R}{\partial R} & 0 & \frac{\partial V_R}{\partial Z} \\ 0 & \frac{V_R}{R} & 0 \\ \frac{\partial V_Z}{\partial R} & 0 & \frac{\partial V_Z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Tensor de esfuerzo.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{RR} & 0 & \sigma_{RZ} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0 \\ \sigma_{ZR} & 0 & \sigma_{ZZ} \end{pmatrix} \quad (6)$$

Tensor rapidez de deformación

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial V_R}{\partial R} & -0 & \frac{\partial V_R}{\partial Z} - \frac{\partial V_Z}{\partial R} \\ 0 & 2 \frac{V_R}{R} & 0 \\ \frac{\partial V_Z}{\partial R} + \frac{\partial V_R}{\partial Z} & 0 & 2 \frac{\partial V_Z}{\partial Z} \end{pmatrix} \quad (7)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tensor de vorticidad.

$$\underline{W} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial V_z}{\partial r} - \frac{\partial V_r}{\partial z} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

4.1.3 Condiciones de contorno.

$$\left(\begin{array}{l} V_{(R)} = 0 \quad \int_0^a 2\pi R V_{(Z)} dR = Q \quad \text{en } Z = 0 \quad (\text{Flujo axial}) \\ V_{(R)} = V_{(Z)} = 0 \quad \text{en } Z = 0 \quad (\text{Condición de adherencia}) \\ V_{(R)} = V_{(Z)} = 0 \quad \text{en } Z = h \quad (\text{Condición de adherencia}) \end{array} \right) \quad (9)$$

4.1.4 Variables adimensionales.

Se propone, el siguiente conjunto de variables, para adimensionalizar las ecuaciones de movimiento, continuidad y reológica.

$$\left(\begin{array}{l} v = V_{(R)}/V \quad w = hV_{(Z)}/aV \quad p = h^2 P/a\eta_0 V \\ r = R/a \quad z = Z/h \quad \sigma'_{(ik)} = h\sigma'_{(ik)}/\eta_0 V \quad \alpha = h/a \end{array} \right) \quad (10)$$

En (10) η_0 , es la viscosidad a rapidez de deformación baja, V , es la velocidad promedio del sistema, h , es la longitud axial en z , a , es la longitud radial en r y α , es la relación geométrica dimensional. En este caso, $V = Q/2\pi ah$ donde Q es el flujo volumétrico.

4.1.5 Resumen de ecuaciones.

Después de sustituir las variables adimensionales definidas en (10), en ((2),(4) y Cap.3 - [17]) y realizar el álgebra correspondiente obtenemos:

Componente de la ecuación de balance de cantidad de movimiento en r

$$\alpha \text{Re}_1 \square v = \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma'_{rr}) - \frac{\sigma'_{\theta\theta}}{r} \right] - \frac{\partial \sigma'_{rz}}{\partial z} - \frac{dp}{dr} \quad (11)$$

Componente de la ecuación de balance de cantidad de movimiento en z

$$\alpha^3 \text{Re}_1 \square w = \frac{\alpha^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\sigma'_{rz}) + \alpha \frac{\partial \sigma'_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (12)$$

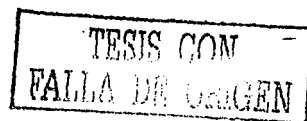
Ecuación de continuidad.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (13)$$

Componente del tensor de esfuerzos en zr

$$A\sigma'_{zr} + We_1 \left[\alpha \left(\square \sigma'_{zr} - \frac{\partial w}{\partial z} \sigma'_{zr} - \frac{\partial v}{\partial r} \sigma'_{zr} \right) - \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial r} \sigma'_{rr} + \frac{\partial w}{\partial z} \sigma'_{zz} \right] = \left[\frac{\partial v}{\partial z} + \alpha^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right] \quad (14)$$

Componente del tensor de esfuerzos en $\theta\theta$



$$A\sigma'_{\theta\theta} + We_1\alpha[\square - 2\frac{v}{r}]\sigma'_{\theta\theta} = 2\alpha\frac{v}{r} \quad (15)$$

Componente del tensor de esfuerzos en zz.

$$A\sigma'_{zz} + We_1\alpha[\square\sigma'_{zz} - 2\{\alpha\frac{\partial v}{\partial r}\sigma'_{rz} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma'_{zz}\}] = 2\alpha\frac{\partial v}{\partial z} \quad (16)$$

Componente del tensor de esfuerzos en rr

$$A\sigma'_{rr} + We_1[\alpha\{\square\sigma'_{rr} - 2\frac{\partial v}{\partial r}\sigma'_{rr}\} + 2\frac{\partial v}{\partial z}\sigma'_{rz}] = 2\alpha\frac{\partial v}{\partial r} \quad (17)$$

Componente del tensor de esfuerzos en rz

$$A\sigma'_{rz} + We_1[\alpha\{\square\sigma'_{rz} - (\frac{\partial v}{\partial r}\sigma'_{rz} + \frac{\partial v}{\partial r}\sigma'_{rr} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma'_{rz})\} + \frac{\partial v}{\partial z}\sigma'_{zz}] = \frac{\partial v}{\partial z} + \alpha^2\frac{\partial v}{\partial r} \quad (18)$$

Ecuación cinética.

$$A = \frac{1 + (\lambda/\lambda_0)We_1^2[\alpha(\sigma'_{rr}\frac{\partial v}{\partial r} + \sigma'_{\theta\theta}\frac{v}{r} + \sigma'_{zz}\frac{\partial w}{\partial r} + \alpha\sigma'_{rz}\frac{\partial w}{\partial r}) + \sigma'_{rz}\frac{\partial v}{\partial z}]}{1 + (\lambda/\lambda_0)We_1^2[\alpha(\sigma'_{rr}\frac{\partial v}{\partial r} + \sigma'_{\theta\theta}\frac{v}{r} + \sigma'_{zz}\frac{\partial w}{\partial r} + \alpha\sigma'_{rz}\frac{\partial w}{\partial r}) + \sigma'_{rz}\frac{\partial v}{\partial z}]} \quad (19)$$

donde:

$$We_1 = \lambda_0\frac{V}{h}; \quad \alpha = h/a \ll 1; \quad Re_1 = \rho\frac{Vh}{\eta_0}; \quad \square = (v\frac{\partial}{\partial r} + w\frac{\partial}{\partial z}) \quad (20)$$

donde: We_1 es el número de Weissenberg, α es la relación de distancias axial y radial, Re_1 es el número de Reynolds y \square es el operador convectivo no lineal de la ecuación de movimiento

Se sustituye (10) en (9) y después de simplificar obtenemos:

$$\left(\begin{array}{lll} v = 0 & w = u(r) & \text{en } z = 0 \\ v = w = 0 & & \text{en } z = 1 \\ v = w = 0 & & \text{en } r = 0 \end{array} \right) \quad (21)$$

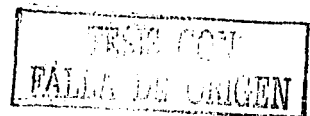
La función $u(r)$ debe satisfacer la condición de normalización para el flujo:

$$\int_0^1 ru(r)dr = 1. \quad (22)$$

Casos

Flujo uniforme : $u(r) = 2$

Este es un caso particular de una expresión más general para el flujo no uniforme., en su trabajo experimental, Oliver encontró que el flujo a lo largo del plato inferior, podría tener una distribución no uniforme, para mayor referencia acerca del trabajo experimental, en este tipo de equipo ver: (Oliver DR, Ashton RC and Wadelin GD (1978) Appl Sci Res 34:25)



Flujo no uniforme : $u(r) = (k+2)r^k (k \geq 1)$

La función $u(r)$ debe satisfacer la condición de normalización (21).

4.1.7 Perturbaciones regulares.

Como las ecuaciones [11-19] dependen del parámetro α , se postula que para un cierto intervalo de αRe las velocidades, la presión y los esfuerzos se pueden expresar en términos de una serie infinita {[1],[2], 29]}.

$$\left(\begin{array}{l} v = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j v_j \\ w = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j w_j \\ p = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j p_j \\ \sigma'_{(rk)_j} = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha^j \sigma'_{(rk)_j} \end{array} \right) \quad (23)$$

Después de sustituir [23] en [11-19] y despreciar términos superiores a orden cero en el parámetro α , obtenemos las siguientes expresiones para las componentes de la ecuación de movimiento esfuerzo cortante, primera y segunda diferencia de esfuerzos normales:

4.1.8 Teoría a orden cero $O(\alpha^0)$:

$$\frac{\partial \sigma'_{(r-z)_0}}{\partial z} = \frac{dp_0}{dr} \quad (24)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial z} = 0 \quad (25)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_0) = 0 \quad (26)$$

$$\sigma'_{(r-z)_0} = \frac{-[1 - (\lambda\lambda_0)We_1^2 q^2] + \sqrt{(1 - (\lambda\lambda_0)We_1^2 q^2)^2 + 4(\lambda\lambda_0)We_1^2 q^2}}{2(\lambda\lambda_0)We_1^2 q} \quad (27)$$

$$N'_1 = 2We_1 q \sigma'_{(rz)_0} \cdot \frac{1 + (\lambda\lambda_0)We_1^2 [\sigma'_{(rz)_0}]}{1 + (\lambda\lambda_0)We_1^2 [\sigma'_{(rz)_0}]} \quad (28)$$

$$N'_2 = 0 \quad (29)$$

$$q = \frac{\partial v_0}{\partial z} \quad (30)$$

Las ecuaciones (24-26) son las mismas que se obtienen por medio de la aproximación de lubricación ([7],[8],[12]), la cual, considera que los términos inerciales son despreciables a orden cero., en este punto, se hace la observación de que la presión (25) no es función de la coordenada axial z ([1],[2],[7],[8],[12]). De la expresión (27), se observa que el esfuerzo tiene una

dependencia cuadrática con q y que la primera diferencia de esfuerzos normales, es función del esfuerzo cortante $\sigma'_{(r)_0}$, lo que concuerda con lo encontrado en [19], para un fluido cortante simple. Las condiciones de frontera, definidas en (21) en función del parámetro q (30) toman la siguiente forma:

$$\left(\begin{array}{lll} v = 0 & w = u(r) & \text{en } q = q_0 \\ v = w = 0 & & \text{en } q = q_1 \\ v = w = 0 & & \text{en } r = 0 \end{array} \right) \quad (31)$$

4.1.9 Límites asintóticos.

A rapidez de deformación baja y alta las expresiones (27) y (28) toman la siguiente forma:

$$\text{Lim}_{q \rightarrow 0} \sigma'_{(r)_0} = q \quad (32)$$

$$\text{Lim}_{q \rightarrow 0} N_1 = 2We_1 q^2 \quad (33)$$

$$\text{Lim}_{q \rightarrow \infty} \sigma'_{(r)_0} = \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right) q \quad (34)$$

$$\text{Lim}_{q \rightarrow \infty} N_1 = 2 \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right)^2 We_1 q^2 \quad (35)$$

Consideramos el siguiente caso asintótico de la expresión (27). Si $1 \gg (\lambda/\lambda_0)We_1^2 q^2$, la expresión (27) toma la siguiente forma (esto es muy común en sistemas micelares):

$$\sigma'_{(r)_0} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\lambda/\lambda_\infty)We_1^2 q^2}}{2(\lambda/\lambda_\infty)We_1^2 q} \quad (36)$$

La ecuación (36), a rapidez de deformación baja, tiene los mismos resultados que en (32-33), por lo que, a rapidez de deformación alta, el esfuerzo y la primera diferencia de esfuerzos normales tienen la siguiente forma:

$$\text{Lim}_{q \rightarrow \infty} \sigma'_{(r)_0} = \frac{1}{We_1} \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda} \right)^{1/2} \quad (37)$$

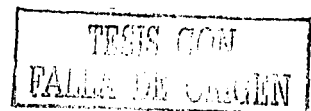
$$\text{Lim}_{q \rightarrow \infty} N_1 = \frac{2}{We_1} \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda} \right)^{1/2} \quad (38)$$

4.1.10 Obtención de las componentes de la velocidad y el gradiente de presión

Si se integra la ecuación de balance mecánico (24) con respecto a z y se usa la condición (25), se tiene la siguiente expresión para la presión a orden cero.

$$\bar{p}_0 = \frac{\sigma'_{(r)_0}(q) - \sigma'_{(r)_0}(q_0)}{(z - z_0)} \quad (39)$$

Donde $\sigma'_{(r)_0}(q)$ y $\sigma'_{(r)_0}(q_0)$ son los esfuerzos cortantes evaluados en q y q_0 . La expresión (27) para el esfuerzo cortante es muy compleja de tratar analíticamente, por lo que, para hacer progresos en esta dirección, consideramos un modelo más sencillo, el de dos constantes materiales (λ_0, G_0) . este modelo, se obtiene cuando se hace $\lambda \rightarrow \lambda_\infty \rightarrow 0$ en (27). A partir de este



resultado, se calculan los perfiles de velocidades, gradiente de presión y la fuerza que experimenta el sistema debido al medio.

4.1.11 Modelo de dos constantes.

A partir de la ecuación (30) y el gradiente de presión definido en (39) y con la condición de frontera $v_0(q = q_0) = 0$, obtenemos la componente radial de la velocidad a orden cero, para el modelo de dos constantes.

$$v_0(q, r) = \frac{1}{4\bar{p}_0 W e^2} \ln \left[\frac{q^2 (\sqrt{1 + 4W_c^2 q^2} + 1) (\sqrt{1 + 4W_c^2 q_0^2} - 1)}{q_0^2 (\sqrt{1 + 4W_c^2 q^2} - 1) (\sqrt{1 + 4W_c^2 q_0^2} + 1)} \right] \quad (40)$$

De la ecuación de continuidad (13) y utilizando (39-40) e integrando con la condición de frontera $w_0(q = q_0, r) = u(r)$, definida en (31) obtenemos la componente axial a orden cero en α :

$$w_0 = u(r) + \frac{1}{8W e^4 \bar{p}_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\bar{p}_0} \frac{d\bar{p}_0}{dr} \right) \left[\begin{aligned} & \left\{ -\ln \frac{q^2}{q_0^2} \cdot \frac{\sqrt{1 + 4W_c^2 q^2}}{q} + 3 \left(\frac{\sqrt{1 + 4W_c^2 q_0^2}}{q_0} - \frac{\sqrt{1 + 4W_c^2 q^2}}{q} \right) \right. \\ & \quad + 4W e \ln \left(\frac{2W_c q + \sqrt{1 + 4W_c^2 q^2}}{2W_c q_0 + \sqrt{1 + 4W_c^2 q_0^2}} \right) \\ & \quad + \frac{1}{q} \ln \frac{q^2}{q_0^2} + 2 \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{q_0} \right) \\ & \quad + \ln \left[\frac{\sqrt{1 + 4W_c^2 q^2} + 1}{\sqrt{1 + 4W_c^2 q^2} - 1} \cdot \frac{\sqrt{1 + 4W_c^2 q_0^2} - 1}{\sqrt{1 + 4W_c^2 q_0^2} + 1} \right] \frac{\sqrt{1 + 4W_c^2 q^2}}{q} \\ & \quad \left. + \frac{1}{q} \ln \left[\frac{\sqrt{1 + 4W_c^2 q^2} - 1}{\sqrt{1 + 4W_c^2 q^2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{1 + 4W_c^2 q_0^2} + 1}{\sqrt{1 + 4W_c^2 q_0^2} - 1} \right] \right\} \end{aligned} \right] \quad (41)$$

Si se sustituye (31) en la expresión (40) obtenemos la siguiente relación para q_1 :

$$\frac{(q_1)^2}{(q_0)^2} = \frac{\sqrt{1 + 4W_c^2 q_1^2} - 1}{\sqrt{1 + 4W_c^2 q_1^2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{1 + 4W_c^2 q_0^2} + 1}{\sqrt{1 + 4W_c^2 q_0^2} - 1} \quad (42)$$

La ecuación (42) tiene solución para $q_1 = \pm q_0$. Si $q_1 = q_0$ de la expresión (39), obtenemos:

$$\bar{p}_0 = 0 \quad (43)$$

La expresión (43) implica que no existe flujo en la dirección radial r , i.e., ($v = 0$)!, esto físicamente es imposible, por lo tanto, la única solución aceptable es:

$$q_1 = -q_0 \quad (44)$$

La expresión (44), indica que q_1 se puede expresar en término de q_0 , pero no sabemos su valor, para esto, utilizamos la ecuación (41) con la condición de frontera $w_0(q_0 = -q_1, r) = 0$, por lo que finalmente:

$$\Gamma(q_1, r) = u(r) + \left[\frac{1}{4We^2} \left(\frac{q_1}{1 - \sqrt{1 + 4W^2 q_1^2}} \right) \left\langle \frac{1}{r} + \frac{6}{We^2 q_1 \sqrt{1 + 4W^2 q_1^2}} \cdot \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r r' u(r') dr' - u(r) \right) \times \right. \right. \quad (45)$$

$$\left. \left. \left\{ 2We \ln \left(\frac{\sqrt{1 + 4W^2 q_1^2} + 2W + q_1}{\sqrt{1 + 4W^2 q_1^2} - 2W + q_1} \right) + \frac{2 - 3\sqrt{1 + 4W^2 q_1^2}}{q_1} \right\} \right]$$

La ecuación (45) es no lineal, por lo que se procede a utilizar un método numérico para su solución., para una $u(r)$ que satisface (22), la ecuación (45) se resuelve fácilmente por un procedimiento iterativo como un Newton Raphson para un valor inicial de q_1 (con r fija).

$$(q_1)_{n+1} = (q_1)_n - \frac{\Gamma((q_1)_n)}{\Gamma'((q_1)_n)} \quad (46)$$

El valor inicial del Newton Raphson está basado en la solución newtoniana ([1], [2])

$$q_1 = -\frac{6}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \quad (47)$$

La deducción de (47), se presenta en el apéndice B., la expresión para el gradiente de presión, después de sustituir la ecuación (44) y recordando que el esfuerzo es una función impar, i.e. $\sigma'_{(r)_0}(-q_1) = -\sigma'_{(r)_0}(q_1)$ toma la forma:

$$\bar{p}_0 = \frac{1 - \sqrt{1 + 4W^2 q_1^2}}{We^2 q_1} \quad (48)$$

4.1.12 Fuerza en el disco superior.

Para encontrar la expresión para la fuerza que experimenta el sistema debido al medio se plantea un balance de esfuerzos, asimismo, la fuerza aplicada en una área, se balancea debido al tensor de esfuerzos:

$$\frac{dF}{dA} = -T_{(zz)} \big|_{z=h} \quad (49)$$

En la ecuación (49), se utiliza la aproximación de lubricación $-T_{(zz)} \big|_{z=h} = -P \big|_{z=h}$ e integrando por partes la ecuación diferencial obtenemos:

$$F_0 = -\frac{\pi a^3 \eta_0 V'}{h^2} \int_0^1 r^2 \frac{dp_0}{dr} dr \quad (50)$$

Donde se ha utilizado la condición de que $p_0 = 0$ en $R = a$ ó $r = 1$ [1 - 2], si se sustituye el valor del gradiente de presión a orden cero (48) en (50) se obtiene:

$$\frac{F_{0m}}{F_{0N}} = -\frac{1}{3} \int_0^1 r^2 \left[\frac{1 - \sqrt{1 + 4W^2 q_1^2}}{We^2 q_1} \right] dr \quad (51)$$

Donde:

$$F_{0N} = \frac{3\pi a^3 \eta_0 V'}{h^2} \quad (52)$$

La expresión (51), es la fuerza que experimenta el sistema para un líquido newtoniano (esta

expresión fue deducida por [1],[2]). La ecuación (51), es una de las más importantes del presente trabajo., esta relación, da información, acerca de la variación de la fuerza adimensional como función de los parámetros del medio (tiempos de relajación, módulo de rigidez, etc.) y la no homogeneidad del flujo. La ecuación (51), se resuelve junto con (45), con r fija para obtener la fuerza en el sistema. El algoritmo se presenta a continuación:

4.1.13 Algoritmo de cálculo para la fuerza a orden cero.

1. -Dado una función $u(r)$ que satisface la condición de normalización.

$$\int_0^1 ru(r)dr = 1$$

2. -Se procede a resolver la ecuación no lineal, por el método de Newton Rhapson.

$$\Gamma(q_1, r) = u(r) + \frac{1}{4We^2} \left(\frac{q_1}{1 - \sqrt{1 + 4We^2 q_1^2}} \right) \left[\frac{1}{r} + \frac{6}{We^2 q_1 \sqrt{1 + 4We^2 q_1^2}} \cdot \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r r' u(r') dr' - u(r) \right) \right. \\ \left. \left\{ 2We \ln \left(\frac{\sqrt{1 + 4We^2 q_1^2} + 2We q_1}{\sqrt{1 + 4We^2 q_1^2} - 2We q_1} \right) + \frac{2 - 3\sqrt{1 + 4We^2 q_1^2}}{q_1} \right\} \right]$$

El valor inicial para la iteración, esta basado en la solución newtoniana. (para una r fija).

$$q_1 = -\frac{6}{r} \int_0^r r' u(r') dr'$$

3. -La q_1^* que satisface la ecuación no lineal se sustituye en la expresión para la fuerza.

$$\frac{F_{0m}}{F_{0N}} = -\frac{1}{3} \int_0^1 r^2 \left[\frac{1 - \sqrt{1 + 4We^2 (q_1^*)^2}}{We^2 q_1^*} \right] dr$$

Esto se hace para cada valor de r y se obtiene la solución numérica a la integral.

4.1.14 Fuerza a rapidez de deformación baja.

En esta sección, consideramos casos asintóticos de la expresión para el esfuerzo cortante (27), en particular, se analiza el sistema a rapidez de deformación baja i.e, $q \rightarrow 0$, si se integra la ecuación de balance mecánico (24) con respecto a z y se utiliza (24) junto con (30) con la condición de frontera $v_0(q = q_0) = 0$ (31) por lo que obtenemos:

$$v_0 = \frac{1}{2\bar{p}_0} [q^2 - q_0^2] \quad (53)$$

Esta es la expresión, para la velocidad radial a orden cero en α , se observa que es cuadrática, lo que concuerda con el perfil parabólico encontrado en la literatura ([1], [2]). A partir de la ecuación de continuidad a orden cero (14) y (53) junto con la condición de frontera $w_0(q = q_0, r) = 0$ obtenemos la componente axial de la velocidad.

$$w_0 = u(r) - \frac{1}{2\bar{p}_0^2 r} \left(\frac{1}{\bar{p}_0} \frac{d\bar{p}_0}{dr} + \frac{1}{r} \right) \left\langle \frac{q^4}{3} - qq_0^2 + \frac{2}{3} q_0^3 \right\rangle \quad (54)$$

Donde $u(r)$ satisface (22), después de sustituir las (31) en la velocidad radial (53) y por (42 - 44) obtenemos lo siguiente:

$$q_1 = -q_0 \quad (55)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Si se sustituye (55) en (39) y se utiliza el resultado expuesto en el apéndice B, obtenemos la ecuación para el gradiente de presión en el caso newtoniano ([1-2]).

$$\bar{p}_0 = -\frac{12}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \quad (56)$$

De manera análoga, se calcula la fuerza sustituyendo la expresión del gradiente de presión (56) en la ecuación (50) junto con $u(r) = (m+2)r^m$.

$$F_{0m} = 12\pi\eta_0 \frac{a^3 V}{h^2(m+4)}, \quad m \geq 1 \quad (57)$$

Esta es la expresión de la fuerza a rapidez de deformación baja para una distribución no uniforme del flujo. En particular, si $m = 0$ se tiene la expresión equivalente a la ecuación de Stefan (1902 fluido newtoniano) la cual, depende de variables geométricas y propiedades del medio.

$$F_N^{(1)} = 3\pi\eta_0 \frac{a^3 V}{h^2} \quad (58)$$

4.1.15 Fuerza a rapidez de deformación alta.

En esta sección se trabaja el caso, donde la rapidez de deformación es alta, los resultados son muy parecidos a lo expuesto a rapidez de deformación baja, por lo que no se hacen todas las deducciones como en el caso anterior.

La velocidad radial a orden cero para este caso es:

$$v_0 = \frac{1}{2\bar{p}_0} \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right) [q^2 - q_0^2] \quad (59)$$

La velocidad axial a orden cero es:

$$w_0 = u(r) - \frac{1}{2\bar{p}_0^2 r} \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right) \left(\frac{1}{\bar{p}_0} \frac{d\bar{p}_0}{dr} + \frac{1}{r} \right) \left\langle \frac{q^3}{3} - qq_0^2 + \frac{2}{3}q_0^3 \right\rangle \quad (60)$$

La presión a orden cero es:

$$\bar{p}_0 = -\frac{12}{r} \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right) \int_0^r r' u(r') dr' \quad (61)$$

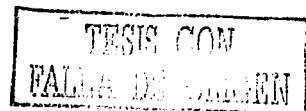
La expresión para la fuerza es:

$$F_{0m} = 12\pi\eta_0 \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right) \frac{a^3 V}{(m+4)}, \quad m \geq 1 \quad (62)$$

Esta es la expresión de la fuerza a rapidez de deformación alta, para una distribución no uniforme del flujo. En particular, si $m = 0$ se tiene la expresión equivalente a la ecuación de Stefan para el caso a rapidez de deformación alta.

$$F_N^{(2)} = 3\pi\eta_0 \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right) \frac{a^3 V}{h^2} = \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right) F_N^{(1)} \quad (63)$$

Combinando las ecuaciones (58) y (63) tenemos lo siguiente inecuación:



$$\left(\frac{\lambda_{\infty}}{\lambda_0}\right) \leq \frac{F}{F_N^{(1)}} \leq 1 \quad (64)$$

Esta expresión muestra, que la fuerza adimensional $\frac{F}{F_N^{(1)}}$ esta acotada superiormente por 1 e inferiormente por $\left(\frac{\lambda_{\infty}}{\lambda_0}\right) \ll 1$, gráficamente, se observan dos regiones constantes a rapidez de deformación baja y a rapidez de deformación alta.

4.2 MODELO DE REDES.

En esta sección, se muestra que el modelo de redes, puede ser generado con una ecuación constitutiva consistente con los modelos aquí tratados., donde la derivación de un método particular de redes ha sido tratada en diferentes publicaciones y libros {[27-28],[34]}. En especial, se escoge la siguiente ecuación reológica:

$$\beta(tr\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} = 2G_0\underline{\underline{D}} \quad (65)$$

Donde β , es una función de la traza del tensor de esfuerzo, la anterior ecuación, abarca muchos casos particulares, dependiendo de la funcionalidad de β . Actualmente, si $\beta(tr\underline{\underline{\sigma}}) = 1$, la ecuación (65) se reduce al caso convectivo superior de Maxwell. Sobre el particular, en este trabajo, se propone la siguiente función de estructura:

$$\beta\{\langle r^2 \rangle\} = \beta_0\{1 + \beta_1\langle r^2 \rangle\} \quad (66)$$

Donde $\langle r^2 \rangle$, es el promedio cuadrático de la distancia extrema de un segmento, basados en la proporcionalidad entre $\langle r^2 \rangle$ y $tr(\underline{\underline{\sigma}})$, se tiene lo siguiente (Apendice A):

$$\beta\langle r^2 \rangle \propto \frac{\beta_0}{1 - \beta_n tr(\underline{\underline{\sigma}})} \quad (67)$$

Por lo tanto, si se sustituye (67) en (65) se obtiene:

$$\frac{\beta_0}{1 - \beta_n tr(\underline{\underline{\sigma}})} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} = 2G_0\underline{\underline{D}} \quad (68)$$

4.2.1 Esfuerzo cortante, primera y segunda diferencia de esfuerzos normales a orden cero.

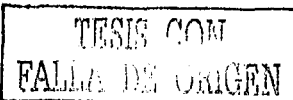
Después de sustituir (10) y (21), y despreciar términos de orden superior, obtenemos el esfuerzo cortante, la primera y segunda diferencia de esfuerzos normales a orden cero.

$$\sigma'_{(r)_0} = \frac{1}{G_0 W e} \cdot \frac{-1 + \sqrt{1 + (8G_0\beta_n/\beta_0^2)(V/h)^2 q^2}}{4(\beta_n/\beta_0)(V/h)q} \quad (69)$$

$$N_1' = \frac{1}{G_0 W e \beta_n} \cdot \frac{\sqrt{1 + (8G_0\beta_n(V/h)^2 q^2)/\beta_0^2} - 1}{\sqrt{1 + (8G_0\beta_n(V/h)^2 q^2)/\beta_0^2} + 1} \quad (70)$$

$$N_2 = 0 \quad (71)$$

Comparando las ecuaciones para el esfuerzo y la primera diferencia de esfuerzos normales



(69) y (70) con el modelo de dos constantes (27) y (28) tratado en (4.1), se tiene lo siguiente:

$$\beta_0 = \frac{1}{\lambda_0} \quad ; \quad \beta_n = \frac{1}{2G_0} \quad (72)$$

Si (72), se sustituye en la ecuación reológica (68) y se simplifica, obtenemos:

$$\frac{1}{1 - (tr(\underline{\sigma})/2G_0)} \underline{\sigma} + \lambda_0 \dot{\underline{\sigma}} = 2\eta_0 \underline{D} \quad (73)$$

La ecuación derivada en esta sección a orden cero, es la misma que para el modelo de dos constantes tratado en (4.1)., una diferencia notable es que, el modelo de redes no predice una segunda zona newtoniana a rapidez de deformación alta, i.e. $(\frac{\lambda}{\lambda_0}) We^2 q^2 \gg 1$, lo que, en el modelo de dos constantes (4.1.12) si lo hace.

4.3 FLUJO TRANSITORIO POR COMPRESIÓN

4.3.1 Introducción.

En esta sección, se hace un análisis del flujo por compresión transitorio para un líquido viscoelástico caracterizado con las mismas ecuaciones que en (4.1)., el fluido es contenido en dos platos concéntricos de radio, los cuales están separados a una distancia axial h . El fluido se encuentra en reposo para $t < 0$., en el instante, en el que $t = 0$, el plato superior se baja y comprime al fluido, produciéndose un laminado radial. Las condiciones de frontera y variables adimensionales cambian, puesto que la velocidad promedio V se sustituye por $h(t)$., en la siguiente discusión, se presentan las ecuaciones más importantes.

4.3.2 Variables adimensionales.

Basicamente las variables adimensionales son las que se definieron en (4.1), lo único diferente es la velocidad V que se sustituye por $h(t)$, por lo que tenemos lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{lll} v = V_{(R)}/h(t) & w = hV_{(Z)}/a h(t) & p = h^2 P/a\eta_0 h(t) \\ r = R/a & z = Z/h & \sigma'_{(ik)} = h\sigma_{(ik)}/\eta_0 h(t) \quad \alpha = h/a \end{array} \right) \quad (74)$$

Las variables para normalizar la velocidad, presiones y esfuerzos son las mismas que se definieron en (10).

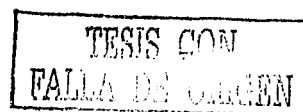
4.3.3 Condiciones de frontera.

Las ecuaciones de movimiento y reológica, deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera:

$$\left(\begin{array}{ll} V_{(R)} = V_{(Z)} = 0 & \text{en } Z = 0 \\ V_{(R)} = 0 & \text{en } Z = h(t) \\ V_{(Z)} = h(t) & \text{en } Z = h(t) \end{array} \right) \quad (75)$$

4.3.4 Ecuaciones adimensionales.

Las ecuaciones adimensionales prácticamente son las mismas reportadas en (4.1), la única diferencia conceptual, es en la definición del número de Reynolds, el cual se define a continuación:



$$Re_2 = \frac{\rho}{\eta_0} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} h(t)^2 \right) \quad (76)$$

La ecuación (76), nos dice que a diferencia del flujo continuo por compresión en el transitorio, se tiene un Reynolds local, es decir, varía punto a punto y cambia con la cinemática del sistema, de la misma manera, para el número de Weissenberg, se genera algo análogo para el caso continuo, asimismo, se obtiene un Weissenberg local y para el el transitorio se define como:

$$We_2 = \lambda_0 \frac{d}{dt} (Lnh(t)) \quad (77)$$

La expresión (77), muestra que el Weissenberg es una función de punto y que se modifica de acuerdo con la cinemática del problema.

4.3.5 Condiciones de frontera adimensionales.

A partir de las definiciones anteriores, las ecuaciones de continuidad y movimiento deben satisfacer las siguientes condiciones de frontera adimensionales.

$$\left(\begin{array}{ll} w = v = 0 & z = 0 \\ v = 0 & z = 1 \\ w = \alpha & , \quad z = 1 \end{array} \right) \quad (78)$$

En la expresión (78) se observa que las condiciones son similares, excepto, para la componente axial de la velocidad, donde en $z=1$ que es igual al cociente, entre la distancia axial y radial.

4.3.6 Cálculo del gradiente de presión.

Después de sustituir las series infinitas, definidas en (4.1) y despreciar términos superiores a orden cero, tenemos la aproximación de lubricación, al integrar esta expresión con respecto a z y utilizar la condición de frontera $q = 0$ en $z = 1/2$, obtenemos:

$$\sigma'_{(r)_0}(q) = \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial p}{\partial r} \quad (79)$$

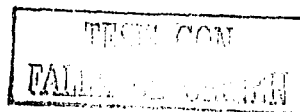
La relación (75) da la dependencia entre el esfuerzo cortante y el gradiente de presión, integrando la ecuación de continuidad (14) y utilizando las condiciones de frontera (78), obtenemos:

$$r = \frac{2}{\alpha} \int_0^1 zq(z) \frac{\partial p}{\partial r} \lambda dz \quad (80)$$

Donde $q(z, \frac{\partial p}{\partial r})$, es una función que depende de la coordenada espacial z y el gradiente de presión. Esta expresión se calcula sustituyendo el esfuerzo cortante (29) en (79) y despejando el escalar rapidez de deformación q como función de z y $\frac{\partial p}{\partial r}$. Uno de los principales problemas de este algoritmo, es que las ecuaciones que se utilizan, pueden ser demasiado complejas para resolver para q , por lo que esto, es una limitante.

4.3.7 Fuerza experimental

De la misma manera que en (4.1), la fuerza que experimenta el medio debido al movimiento del plato es:



$$F_0 = \pi a^3 \eta_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{h(t)} \right) \int_0^1 r^2 \frac{dp_0}{dr} dr \quad (81)$$

4.3.8 Rapidez de deformación baja.

A rapidez de deformación baja, el esfuerzo cortante (32) se sustituye en la expresión (92) para obtener:

$$q = (z - 1/2) \frac{\partial p}{\partial r} \quad (82)$$

La expresión (82), se sustituye en (80) para obtener el gradiente de presión., este término, se sustituye en la expresión (81), para calcular la fuerza a rapidez de deformación baja.

$$F = -\frac{3\pi a^2}{2} \eta_0 \frac{d}{dt} (\ln h(t)) \quad (83)$$

Si F es constante, la ecuación (83) se integra con la condición inicial de $h(t=0) = h_0$ y se obtiene una función entre la altura de los platos y el tiempo, también se observa, que la expresión (83) proporciona información de la viscosidad a rapidez de deformación baja.

$$h(t) = h_0 \exp(-t/\tau_1) \quad (84)$$

Donde:

$$\tau_1 = \frac{3\pi \eta_0 a^2}{2F} \quad (85)$$

4.3.9 Rapidez de deformación alta.

De la misma manera como en (82), se sustituye el esfuerzo a rapidez de deformación alta en (80), para obtener la relación entre el gradiente de presión y la rapidez de deformación alta

$$q = \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_\infty} \right) (z - 1/2) \frac{\partial p}{\partial r} \quad (86)$$

(86) Se sustituye en (80) y se obtiene el gradiente de presión., a partir de este resultado, y la ecuación (81) obtenemos la siguiente expresión, para la fuerza a rapidez de deformación alta

$$F = -\frac{3\pi a^2}{2} \eta_\infty \frac{d}{dt} (\ln h(t)) \quad (87)$$

De la misma manera, como en (83), se integra (87) con las condiciones de frontera $h(t=0) = h_0$.

$$h(t) = h_0 \exp(-t/\tau_2) \quad (88)$$

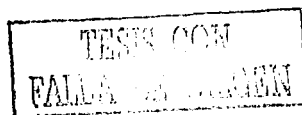
Donde:

$$\tau_2 = \left(\frac{\lambda_\infty}{\lambda_0} \right) \tau_1 \quad (89)$$

la expresión (89), es un tiempo de relajación de orden menor, igual al que se definió en (85).

4.3.10 Fuerza a orden cero. (Caso micelar)

En esta sección, consideramos el modelo de cuatro constantes, definido en (37), este resultado se aplica como se dijo anteriormente, a sistemas micelares, por lo que, combinado las



expresiones (37) y (79), obtenemos:

$$\frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\lambda/\lambda_\infty)We_2^2 q}}{2(\lambda/\lambda_\infty)We_2^2 q} = (z - 1/2) \frac{\partial p}{\partial r} \quad (90)$$

La ecuación (90), se resuelve para el escalar rapidez de deformación q y se obtiene:

$$q = \frac{(z - 1/2) \frac{\partial p}{\partial r}}{1 - 4\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)We_2^2 \left(\frac{\partial p}{\partial r}\right)^2 (z - 1/2)^2} \quad (91)$$

4.3.11 Cálculo de las componentes de la velocidad y gradiente de presión.

A partir de (91), se calcula la velocidad radial a orden cero en α :

$$v_0 = \kappa \cdot \left(\frac{1}{\bar{p}^2}\right) Ln \left| \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)We_2^2 \bar{p}^2 / 4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)We_2^2 \bar{p}^2 (z - 1/2)^2}} \right| \quad (92)$$

Si se combina la ecuación de continuidad (14) y la expresión (92), obtenemos la velocidad axial.

$$w_0 = \left[\begin{aligned} & \left\langle \left(2\frac{\kappa}{\bar{p}^3} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\kappa}{\bar{p}^2} \right) \ln \left(\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_\infty)We_2^2 \bar{p}^2} \right) - \frac{1}{\bar{p}} \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty} \right) We_2^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_\infty)We_2^2 \bar{p}^2}} \right\rangle z \\ & + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\lambda_\infty}{\lambda}} \cdot \frac{1}{We_2 \bar{p}} \left\{ \arcsen \left(2\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_\infty}} (z - 1/2) \right) + \arcsen \left(\sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_\infty}} \right) \right\} \\ & - \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{p}} \left\{ (z - 1/2) \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_\infty)We_2^2 (z - 1/2)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_\infty)We_2^2} \right\} \\ & + \left(\frac{\kappa}{\bar{p}^2} - 2\frac{\kappa}{\bar{p}^3} \frac{\partial p}{\partial r} \right) \left\{ z \ln \left(\sqrt{1 - 4(\lambda/\lambda_\infty)We_2^2 \bar{p}^2 (z - 1/2)^2} + \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_\infty)We_2^2 \bar{p}^2} \right) \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{1 - (\lambda/\lambda_\infty)We_2^2 \bar{p}^2 (z - 1/2)^2} \right\} \end{aligned} \right] \quad (93)$$

$$\text{Donde : } \kappa = \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty} \right) \cdot \frac{1}{4We_2^2} \quad \bar{p} = \partial p / \partial r$$

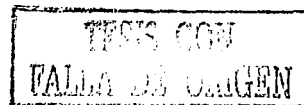
La ecuación (91) se sustituye en la integral definida en (80), la cual se integra con el siguiente cambio de variable $z = 1/2 + 1/We_2 \frac{\partial p}{\partial r} \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty} \right) \text{sen}\theta$ para obtener una ecuación no lineal para el gradiente de presión.

$$\Gamma \left(\frac{\partial p}{\partial r}, r, We_2 \right) = \left(Ln \left[\frac{2 + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) We_2 \frac{\partial p}{\partial r}}}{2 - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) We_2 \frac{\partial p}{\partial r}}} \right] - 2We_2 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)} (1 - r\alpha \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) We_2} \frac{\partial p}{\partial r}) \right) \quad (94)$$

La ecuación (94) se resuelve con el mismo método iterativo que en (4.1).

4.3.12 Cálculo de la fuerza a orden cero.

1) Se procede a resolver la ecuación no lineal para el gradiente de presión por Newton-Rhapson.



$$\Gamma\left(\frac{\partial p}{\partial r}, r, We_2\right) = \left(\operatorname{Ln} \left[\frac{2 + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) We_2} \frac{\partial p}{\partial r}}{2 - \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) We_2} \frac{\partial p}{\partial r}} \right] - 2We_2 \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right)} (1 - r\alpha \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) We_2}) \frac{\partial p}{\partial r} \right) \quad (a)$$

en este caso, el valor inicial se basa en la solución newtoniana para la presión, el cual es:

$$(\partial p / \partial r)_0 = 6r_0 / We_2 \sqrt{\lambda / \lambda_\infty} \quad \forall r_0 \in [0, 1] \subset R. \quad (b)$$

2) Se procede a iterar la ecuación no lineal, mediante la siguiente ecuación recursiva dado el valor inicial $(\partial p / \partial r)_0$

$$(\partial p / \partial r)_{n+1} = (\partial p / \partial r)_n - \frac{\Gamma(\partial p / \partial r)_n}{\Gamma'(\partial p / \partial r)_n} \quad (c)$$

3) Con este valor de la presión, se evalúa la integral y se obtiene el comportamiento de la fuerza a orden cero en α .

$$F_0 = -\pi\alpha^3 \eta_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{h(t)} \right) \int_0^1 r^2 \frac{dp_0}{dr} dr \quad (d)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO 5

TESIS CON
VALOR DE ORIGEN

ANÁLISIS

5.1 Flujo continuo por compresión.

De los resultados obtenidos se puede inferir lo siguiente: en (4.1) se investigó el comportamiento de un líquido viscoelástico por medio del flujo continuo por compresión. El fluido fue caracterizado por una ecuación constitutiva codeformacional de Maxwell y una cinética que describe la destrucción y formación de la microestructura debido al flujo.

$$\underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{\varphi G_0} \overset{v}{\underline{\underline{\sigma}}} = \frac{2}{\varphi} \underline{\underline{D}} \quad (1)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\lambda} (\varphi_0 - \varphi) + K(\varphi_\alpha - \varphi) \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}} \quad (2)$$

En (1) y (2) $\underline{\underline{\sigma}}$ es el tensor de esfuerzos, $\underline{\underline{D}}$ es el tensor rapidez de deformación, φ es la fluidez, φ_0 es la fluidez a rapidez de deformación baja, φ_α es la fluidez a rapidez de deformación alta, λ es un tiempo de relajación de la estructura K es una constante de normalización para el esfuerzo y $\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}$ es un término de disipación de energía. Este sistema de ecuaciones están acopladas en el tensor de esfuerzos y rapidez de deformación. Al considerar regimen permanente (2) toma la forma:

$$A = \frac{\varphi}{\varphi_0} = \frac{\eta_0}{\eta} = \frac{1 + K\lambda(\lambda_0/\lambda_\alpha) \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}}{1 + K\lambda \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}}$$

la expresión (3) es la función de estructura A y mide los cambios de la viscosidad con el término disipativo y depende de los tiempos de relajación $\lambda_0 = \eta_0/G_0$, $\lambda_\alpha = \eta_\alpha/G_0$. Finalmente, si se multiplica (3) en (1) obtenemos [19]:

$$\frac{1 + K\lambda(\lambda_0/\lambda_\alpha) \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}}{1 + K\lambda \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{D}}} \underline{\underline{\sigma}} + \lambda_0 \overset{v}{\underline{\underline{\sigma}}} = 2\eta_0 \underline{\underline{D}} \quad (4)$$

la ecuación (4) es no lineal en el tensor de esfuerzos y rapidez de deformación. Esta ecuación acoplada no lineal describe como cambia la microestructura debido a los esfuerzos internos y parámetros materiales del medio. Al susituir las variables adimensionales definidas en el Cap. (4-10) se obtienen las componentes del tensor de esfuerzos y de movimiento adimensionales. A orden cero en α , se obtiene la aproximación clásica de lubricación (la cual, consiste en despreciar los términos inerciales de la ecuación de movimiento, es decir se linealiza) expuesta ampliamente en [1-10]. A partir de la componente r de la ecuación de movimiento obtenemos un balance mecánico entre la divergencia del tensor de esfuerzos y el gradiente de presión radial. La componente en z indica que la presión es independiente de z y que es una función exclusiva de la variable radial r. La ecuación de continuidad permanece invariante a orden cero en α . La ecuación para el tensor de esfuerzos a orden cero, resulta cuadrática como lo propuesto para un fluido cortante simple [19]. Por cuestiones físicas solo la solución positiva es tomada en cuenta. La primera diferencia de esfuerzos normales a orden cero en α queda expresada en función del esfuerzo cortante zr . Esta expresión depende del número de Weissenberg y de los tiempos de relajación. A orden cero las componentes extensionales son cero, no importando la función de estructura que se use.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\sigma_{(\tau)_0} = \frac{[1 - (\lambda/\lambda_0)We^2q^2] + \sqrt{(1 - (\lambda/\lambda_0)We^2q^2)^2 + 4(\lambda/\lambda_x)We^2q^2}}{2(\lambda/\lambda_x)We^2q} \quad (5)$$

$$N_1 = 2Weq\sigma_{(\tau)_0} \frac{1 + (\lambda/\lambda_0)We^2\sigma_{(\tau)_0}}{1 + (\lambda/\lambda_x)We^2\sigma_{(\tau)_0}} \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) tienen los siguientes límites asintóticos a rapidez de deformación baja:

$$\lim_{q \rightarrow 0} \sigma_{(\tau)_0} = q \quad (7)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} N_1 = 2Weq^2 \quad (8)$$

lo que concuerda con lo encontrado para un fluido cortante simple [19]. La ecuación (7) implica que el esfuerzo cortante a rapidez de deformación baja tiene un comportamiento newtoniano. Para la primera diferencia de esfuerzos normales observamos, que a rapidez de deformación baja depende del cuadrado del escalar rapidez de deformación y del número de Weissenberg. A rapidez de deformación alta se tiene lo siguiente:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sigma_{(\tau)_0} = \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_0} \right) q \quad (9)$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} N_1 = 2We \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_0} \right)^2 q^2 \quad (10)$$

las expresiones (9) y (10) son las mismas reportadas en [19] para un flujo cortante simple. La expresión (9) indica que el esfuerzo cortante tiene una segunda zona newtoniana a rapidez de deformación baja, por lo que, el esfuerzo cortante pasa de una primera zona constante a una segunda zona constante. De la misma manera, la primera diferencia de esfuerzos normales presenta un límite asintótico a rapidez de deformación alta y depende del cuadrado del cociente de tiempos de relajación y del número de Weissenberg. La ecuación (5) tiene el siguiente caso para sistemas micelares: $1 \gg (\lambda/\lambda_0)We^2q^2$

$$\sigma_{(\tau)_0} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\lambda/\lambda_x)We^2q^2}}{2(\lambda/\lambda_x)We^2q} \quad (11)$$

A rapidez de deformación baja, el esfuerzo cortante presenta los mismos límites que en (7) y (8). A rapidez de deformación alta se tiene lo siguiente:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} \sigma_{(\tau)_0} = \frac{1}{We} \sqrt{\left(\frac{\lambda_x}{\lambda} \right)} \quad (12)$$

$$\lim_{q \rightarrow \infty} N_1 = \frac{2}{We} \sqrt{\left(\frac{\lambda_x}{\lambda} \right)} \quad (13)$$

las expresiones (12-13) presentan tres límites asintóticos: el primero de ellos, es cuando $\lambda \rightarrow \lambda_x$. En este caso las expresiones se reducen a valores constantes. Para el esfuerzo cortante se tiene un valor del inverso del número de Weissenberg. Para la primera diferencia de esfuerzos normales se obtiene el doble del valor del esfuerzo cortante. Cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$ se tiene el mismo resultado del primer caso, pero multiplicado por un factor $\sqrt{\lambda_x/\lambda_0} \ll 1$. Para la primera diferencia de esfuerzos normales, se tiene el mismo resultado que el primero pero multiplicado por $\sqrt{\lambda_x/\lambda_0} \ll 1$. De la misma manera, si $\lambda \in (\lambda_x, \lambda_0)$ tenemos un caso

intermedio para el esfuerzo cortante y la primera diferencia de esfuerzos normales.

5.1.1 Modelo de dos constantes.

El modelo de dos constantes (λ_0, G_0) se obtiene de la expresión general (5) cuando se toma el caso asintótico $\lambda \rightarrow \lambda_\infty \rightarrow 0$, resultando:

$$\sigma_{(rz)_0} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4We^2q^2}}{2We^2q} \tag{14}$$

La expresión (14) tiene los mismos límites asintóticos a rapidez de deformación baja y alta (5-6). A rapidez de deformación baja el comportamiento es newtoniano. Cuando la rapidez de deformación aumenta el esfuerzo se comporta asintoticamente con valor constante igual al inverso del numero de Weissenberg. A partir de la definición de función viscosidad, $\eta = \sigma_{(rz)_0}/q$, se observa que a rapidez de deformación baja la viscosidad tiene una zona constante y al incrementar q la viscosidad decrece monotonamente. Físicamente significa que el fluido en esta región es pseudoplástico y analíticamente se puede representar con la siguiente función viscosidad.

$$\eta(q) = \frac{1}{We} q^{-1} \tag{15}$$

5.1.2 Velocidad radial y axial.

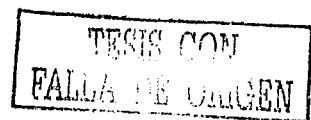
A orden cero se encontró que la velocidad radial es una función que depende de q, q_0 , y el gradiente de presión \bar{p}_0 .

$$v_0(q, r) = \frac{1}{4\bar{p}_0^2 We^2} \ln \left[\frac{q^2 (\sqrt{1 + 4We^2q^2} + 1) (\sqrt{1 + 4We^2q_0^2} - 1)}{q_0^2 (\sqrt{1 + 4We^2q^2} - 1) (\sqrt{1 + 4We^2q_0^2} + 1)} \right] \tag{16}$$

Donde:

$$We = \lambda_0 \frac{1}{h} \cdot v \cdot q_0 = \frac{6}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \tag{17}$$

la expresión (16) depende del número de Weissenberg, el cual proporciona información de los mecanismos viscosos y elásticos. El escalar q_0 (17) se expresa en función del flujo volumetrico, cuando entra el líquido al plato inferior en $z=0$. Además (17) proporciona información acerca de la no homogeneidad del fluido. Para flujo uniforme $u(r) = 2$ el perfil de velocidades es parabólico, pero para flujo no uniforme $u(r) \neq 2$ los perfiles de velocidad pierden esa simetría. A partir de la ecuación de continuidad (Cap. 4-13), se calcula la componente axial de la velocidad a orden cero en α es:



$$\begin{aligned}
w_0 = u(r) + \frac{1}{8We^4 p_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{d \ln \bar{p}_0}{dr} \right) \times \\
- \ln \left(\frac{q}{q_0} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{1+4We^2 q^2}}{q} + 3 \left[\frac{q \sqrt{1+4We^2 q_0^2} - q_0 \sqrt{1+4We^2 q^2}}{qq_0} \right] \\
+ 4We \ln \left[\frac{2Weq + \sqrt{1+4We^2 q^2}}{2Weq_0 + \sqrt{1+4We^2 q_0^2}} \right] + \frac{1}{q} \ln \left(\frac{q}{q_0} \right)^2 + 2 \left(\frac{q_0 - q}{qq_0} \right) \\
+ \frac{\sqrt{1+4We^2 q^2}}{q} \cdot \ln \left(\frac{\sqrt{1+4We^2 q^2} - 1}{\sqrt{1+4We^2 q^2} + 1} \right) \left(\frac{\sqrt{1+4We^2 q_0^2} - 1}{\sqrt{1+4We^2 q_0^2} + 1} \right) \\
\frac{1}{q} \ln \left(\frac{\sqrt{1+4We^2 q^2} - 1}{\sqrt{1+4We^2 q^2} + 1} \right) \left(\frac{\sqrt{1+4We^2 q_0^2} + 1}{\sqrt{1+4We^2 q_0^2} - 1} \right)
\end{aligned} \tag{18}$$

La ecuación (18) es antisimétrica y depende de los parámetros q, q_0 y r . Además, contiene la no homogeneidad del fluido en $u(r)$ y el dominio de los mecanismos viscosos y elásticos en el número de Weissenberg.

5.1.3 Gradiente de presión a orden cero.

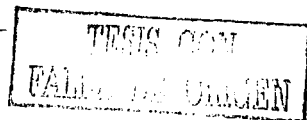
El gradiente de presión no tiene una representación analítica, por lo que, para calcularlo se necesita resolver dos ecuaciones acopladas que dependen del escalar rapidez de deformación en q_1 .

$$\frac{d\bar{p}_0}{dr} = \left(\frac{1 - \sqrt{1+4We^2 q_1^2}}{Weq_1} \right) \tag{19}$$

Donde q_1 está dado por la siguiente ecuación no lineal.

$$\begin{aligned}
\Gamma(q_1, r) = u(r) + \frac{1}{4We^2} \left(\frac{q_1}{1 - \sqrt{1+4Weq_1^2}} \right) \times + \frac{2 - 3\sqrt{1+4We^2 q_1^2}}{q_1} \\
\frac{1}{r} + \frac{12}{Weq_1 \sqrt{1+4Weq_1^2}} \left(\frac{1}{r^2} \int_0^r r' u(r') dr' - u(r) \right) \ln \left[\frac{2Weq + \sqrt{1+4We^2 q^2}}{2Weq_0 + \sqrt{1+4We^2 q_0^2}} \right] \\
+ \frac{2 - 3\sqrt{1+4We^2 q_1^2}}{q_1}
\end{aligned} \tag{20}$$

Por la complejidad de las ecuaciones, no se deduce una forma analítica para la presión. Las ecuaciones (19-20) se resuelven para encontrar el valor de q_1 y después, se sustituye en la expresión (21) para obtener la fuerza en función de las propiedades del medio y del flujo. Para resolverlas se propone el siguiente esquema numérico. Dado un valor de $r \in (0, 1)$ y un valor de m se obtiene el valor de q_0 . A partir de esto, la ecuación (20) se resuelve con un método iterativo como Newton-Rhaphson. El valor inicial está basado en la solución newtoniana (17) (Ver [1-2]). Físicamente, el gradiente de presión radial es una función de las propiedades del medio (viscosidad a rapidez de deformación, tiempos de relajación, módulo de rigidez) y de flujo (la no homogeneidad del fluido).



5.1.4 Fuerza a orden cero.

A partir del balance mecánico y la aproximación de lubricación se obtiene la siguiente expresión para la fuerza a orden cero en α .

$$\frac{F_{0m}}{F_{0N}} = -\frac{1}{3} \int_0^1 r^2 \left(\frac{1 - \sqrt{1 + 4We^2 q_1^2}}{Weq_1} \right) dr \quad (21)$$

La expresión integral (20) como se mencionó, depende de las propiedades del medio y del flujo. En esta expresión F_{0N} obtenida por [1-2], representa la fuerza newtoniana, We es el número de Weissenberg, q_1 es la rapidez de deformación en $z=1$ y el índice m representa la no homogeneidad del flujo. Físicamente, a orden la expresión (21) representa una medida de los efectos viscosos.

5.1.5 Fuerza a rapidez de deformación baja.

En esta parte, consideramos el caso asintótico a rapidez de deformación baja, es decir, cuando el escalar rapidez de deformación tiende a cero, la velocidad radial tiene la siguiente forma paramétrica:

$$v_0 = \frac{1}{2\bar{p}_0} (q^2 - q_0^2) \quad (22)$$

la expresión (22) es cuadrática lo que concuerda con lo obtenido por Gooden y Waters [1-2]. Para el caso newtoniano (perfil parabólico). De la ecuación de continuidad a orden cero se encuentra la componente axial del vector velocidad, i.e.,

$$w_0 = u(r) - \frac{1}{2\bar{p}_0^2 r} \left(\frac{d \ln \bar{p}_0}{dr} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{q^3}{3} - qq_0 + \frac{2}{3} q_0^3 \right) \quad (23)$$

la expresión (23) es cúbica en q y además, depende del gradiente del logaritmo de la presión radial. En particular si $q = q_0$ se satisface que $w_0 = u(r)$. La expresión para el gradiente de presión viene dada por:

$$\bar{p}_0 = -\frac{12}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \quad (24)$$

la expresión para la fuerza no homogénea es la siguiente:

$$F_{0m} = 12\pi\eta_0 \frac{a^3 V}{h^2(m+4)}, \quad (m \geq 1) \quad (25)$$

esta es la expresión para la rapidez de deformación baja para una distribución no uniforme del flujo. En particular si $m = 0$ se tiene la expresión equivalente a la ecuación de Stefan (1902, líquido newtoniano, flujo transitorio por compresión) la cual, depende de las variables geométricas y propiedades del medio.

$$F_N = 3\pi\eta_0 \frac{a^3 V}{h^2}, \quad (m = 0) \quad (26)$$

La expresión (26) fue deducida por [1] para un líquido viscoso, que satisface el modelo de ley de potencia.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

5.1.6 Fuerza a rapidez de deformación alta.

En esta sección discutimos los resultados a rapidez de deformación alta, las ecuaciones para las velocidades, presión y la fuerza son muy parecidas a lo expuesto a rapidez de deformación baja, por lo que nos ocuparemos en la parte física.

$$v_0 = \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_0} \right) \frac{1}{2\bar{p}_0} (q^2 - q_0^2) \quad (27)$$

$$w_0 = \left[u(r) - \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_0} \right) \frac{1}{2\bar{p}_0 r} \left(\frac{d \ln \bar{p}_0}{dr} + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{q^3}{3} - qq_0 + \frac{2}{3} q_0^3 \right) \right] \quad (28)$$

$$\bar{p}_0 = - \left(\frac{\lambda_x}{\lambda_0} \right) \frac{12}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \quad (29)$$

$$F_{0m} = 12\pi\eta_\infty \frac{a^3 V}{h^2(m+4)}, \quad (m \geq 1) \quad (30)$$

$$F_N^2 = 3\pi\eta_\infty \frac{a^3 V}{h^2}, \quad (m = 0) \quad (31)$$

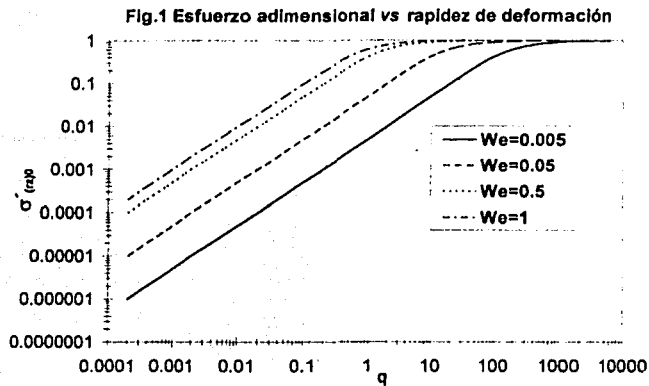
Prácticamente las ecuaciones (27-31) son las mismas que se obtuvieron en el análisis que se hizo a rapidez de deformación baja. La única diferencia es el factor $(\lambda_x/\lambda_0) \ll 1$. Este factor lo que hace es contraer el perfil parabólico de velocidades, esto sucede para la componente axial y la presión. Para la expresión de la fuerza (30-31) observamos que proporciona información acerca de la velocidad a rapidez de deformación alta η_x . La expresión (31) es la segunda ecuación equivalente de Stefan (1902 Flujo transitorio por compresión), por lo tanto, de las expresiones (26) y (31) se tiene la siguiente inecuación para la fuerza:

$$F_N^2 \leq F \leq F_N^1 \quad (32)$$

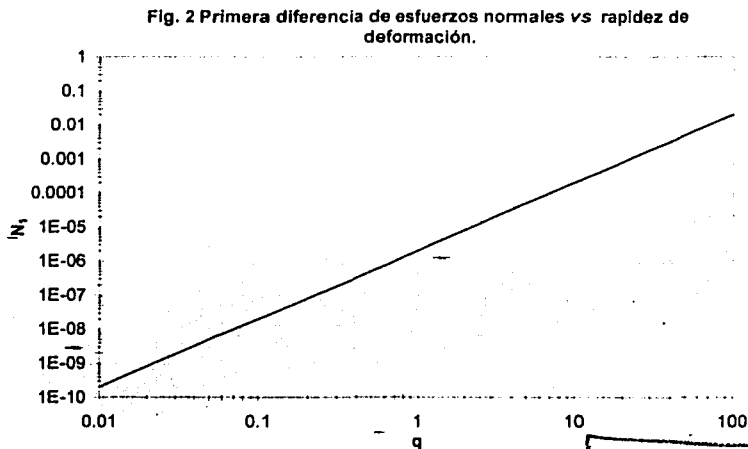
La forma adimensional se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{\lambda_x}{\lambda_0} \right) \leq F^* \leq 1 \quad (33)$$

La inecuación (33) muestra que la fuerza adimensional F^* está acotada superiormente por 1 e inferiormente por el cociente de los tiempos de relajación. Esto explica que en la gráfica de fuerzas adimensionales existan dos zonas constantes y un región donde la fuerza decrece monotonamente con una pendiente cercana a la unidad. En las figuras (1-13) se presentan algunos de los resultados teóricos de las ecuaciones expuestas cambiando los parámetros del medio y del flujo.

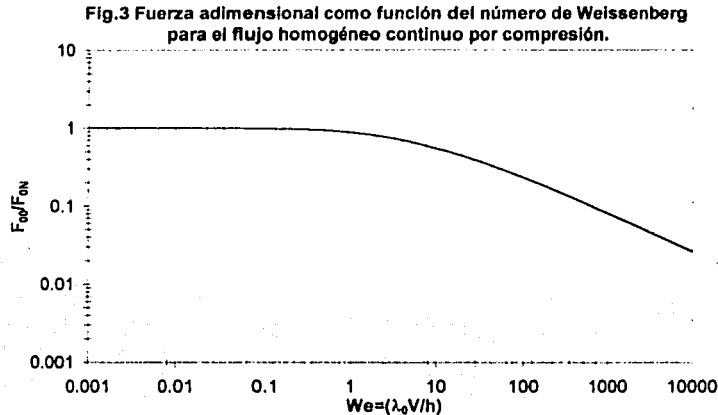


En la Fig. (1) se ilustran las predicciones del modelo de dos constantes materiales (5). En el eje de las ordenadas se representa el esfuerzo cortante $\sigma_{(r,z)_0}$ y en de las abcisas se tiene el escalar rapidez de deformación q . De la Fig. (1) se observa que a rapidez de deformación baja, el esfuerzo es lineal, lo que concuerda con lo encontrado en (7). Conforme la rapidez de deformación aumenta, el esfuerzo cortante es asintótico con valor igual al inverso en el número de Weissenberg. También se observa una familia de curvas que están desfasadas, dependiendo del valor en el número de Weissenberg. Para $We = 0.005$, es decir, cuando los efectos elásticos dominan a los viscosos, la vecindad donde el esfuerzo es lineal, es mucho mayor que en el caso $We= 0.05$, $We=0.5$ y por último el caso viscoelástico $We =1$. Físicamente significa que el esfuerzo cortante se ve afectado por la naturaleza de los mecanismos elásticos y viscosos y que en la zona lineal es donde se lleva a cabo el mayor rompimiento en la microestructura del material porque el esfuerzo es creciente y para un cierto intervalo se comporta asintóticamente.



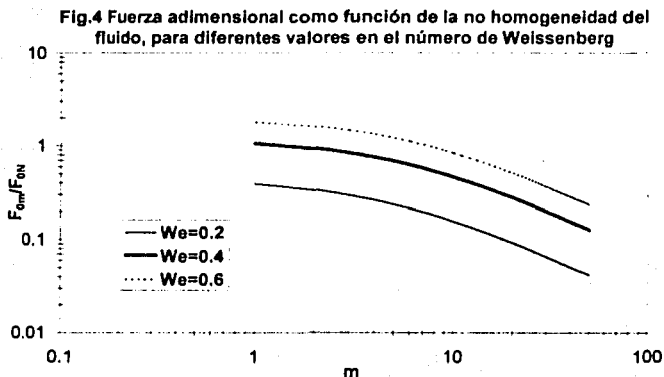
TESIS CON
FALLA DE CALIFICACION

En la Fig.(2) se presentan predicciones de la ecuación (6) para un valor de $We = 0.5$. Se observa que la dependencia de la primera diferencia de esfuerzos normales con la rapidez de deformación es lineal con pendiente de 2. En la Fig. (2) analizamos el caso donde el mecanismo que domina es el elástico. Si se modifica el número de Weissenberg se tendría un haz de rectas desfasadas en la ordenada al origen y este valor tiene que ver con la competencia de mecanismos. Si el $We < 1$ los efectos que dominan son los elásticos, mientras que para $We > 1$ son los viscosos.

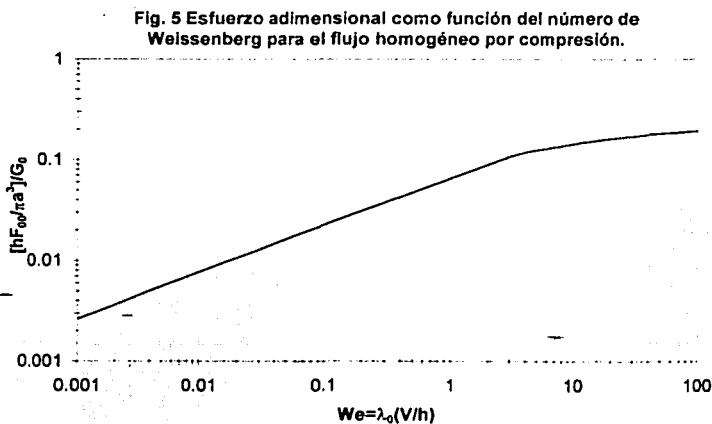


En la Fig. (3) se presentan las predicciones de (20) con $m = 0$ (flujo homogéneo) para el modelo de dos constantes (13). En el eje de las ordenadas se representa la fuerza adimensional F_{00}/F_{0N} y en las abscisas se tiene el número de Weissenberg $We = \lambda_0(V/h)$. En esta representación F_{0N} es la fuerza newtoniana deducida por [1]. Se aprecia que a We pequeños, i.e $We \in (0.001, 0.1)$ el cociente de fuerzas es constante y a medida de que el $We > 0.1$ la fuerza adimensional decrece monotonamente con una pendiente cercana a la unidad. Físicamente, esto significa que a pequeños valores de Weissenberg, el mecanismo que domina es el elástico y para valores de $We > 0.1$ es el viscoso. Es de notarse que esta curva reproduce lo encontrado para un flujo cortante simple a orden cero a partir de un flujo por compresión [19].

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



En la Fig. (4) se presentan predicciones de (20) con $m \neq 0$ (flujo homogéneo) modelo de dos constantes. En el eje de las ordenadas se representa la fuerza adimensional F_{0m}/F_{0N} como función de la no homogeneidad del fluido m , para distintos valores en el Weissenberg. Para el caso $m = 0$ (homógeno) se tiene un fluido que no depende de la posición (figura 3). Pero en el caso donde $m \neq 0$ la fuerza decrece monotonamente en el intervalo $1 \leq m \leq 60$. Además, se observa que al aumentar el número de Weissenberg, existe un desfase en las curvas. Esto físicamente, representa que al disminuir los efectos elásticos y aumentar los mecanismos viscosos, la fuerza adimensional crece. De las Fig. (3-4) se concluye que la fuerza se modifica, debido a las propiedades del medio y del flujo.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En la Fig. (5) se presenta predicciones de (20) con $m = 0$ (modelo de dos constantes). Se observa como varia el esfuerzo adimensional conforme aumenta el número de Weissenberg. $\forall We \in (0.001)$ el esfuerzo es monotonamente creciente con una pendiente aproximada de 2. A partir $We > 0.001$ el esfuerzo es asintótico, es decir, al disminuir los efectos elásticos, el mecanismo que domina es el viscoso, por lo que el esfuerzo aumenta linealmente. A partir de este resultado, se infiere que el esfuerzo a orden cero se ve afectado por los mecanismos viscosos y elásticos. También se concluye, que existen dos zonas de predominio. La primera de ellas, donde los efectos dominantes son los elásticos, es donde se lleva el mayor cambio de configuración en la microestructura. En la segunda zona, donde los efectos dominantes son los viscosos, el esfuerzo se comporta asintóticamente, por lo que en esta parte, no hay un cambio tan notable en la microestructura.

5.2 Modelo de redes.

Este tipo de modelos se utiliza para macromoléculas como polímeros y micelas [19]. Para estudiar estos sistemas físicos, utilizamos la ecuación reológica (1) pero con una función de estructura diferente. Esta función depende de la traza del tensor de esfuerzos y además, tiene dos constantes reológicas a determinar β_0 y β_n .

$$\frac{\beta_0}{1 - \beta_n \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})} \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}}^v = 2G_0 \underline{\underline{D}} \quad (34)$$

La forma analítica de la función de estructura está deducida con detalle en el apéndice A. Después de sustituir las variables adimensionales (10) y utilizar la misma técnica por perturbaciones (4.1.7-(23-24)), obtenemos el esfuerzo y la primera diferencia de esfuerzos normales a orden cero:

$$\sigma_{(r)_0} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8G_0\beta_n V^2 q^2 / h^2 \beta_0^2}}{4\beta_n V q / h \beta_0} \quad (35)$$

$$N_1 = \frac{1}{\beta_n} \frac{\sqrt{1 + 8G_0\beta_n V^2 q^2 / h^2 \beta_0^2} - 1}{\sqrt{1 + 8G_0\beta_n V^2 q^2 / h^2 \beta_0^2} + 1} \quad (36)$$

$$N_2 = 0 \quad (37)$$

Comparando las ecuaciones (35) y (36) con (3) se obtienen las siguientes relaciones:

$$\beta_n = \frac{1}{2G_0}, \beta_0 = \frac{1}{\lambda_0} \quad (38)$$

Finalmente, las expresiones para el esfuerzo cortante y la primera diferencia de esfuerzos normales son las mismas que para el modelo de dos constantes ($\lambda \rightarrow \lambda_r \rightarrow 0$). Esto quiere decir, que el modelo de redes es un caso particular del de dos constantes materiales. Las predicciones de este sistema son reportadas en las Fig.(3-5).

5.3 Flujo transitorio por compresión.

Este sistema como se explico en el capítulo (3) difiere del flujo continuo por compresión en que el fluido es colocado entre los platos y comprimido por el plato superior, el cual se aproxima con una velocidad $h(t)$ en z . La compontes de la ecuacion de movimiento y del tensor de esfuerzos son las mismas que se calculan para el flujo continuo por compresión. La única diferencia es en las condiciones de frontera, las cuales, se ven afectada por condiciones cinemáticas distintas. Al utilizar la técnica por perturbaciones expuesta por Gooden y Waters [2-3] obtenemos la aproximación clásica de lubricación [7-15]. Para este sistema, utilizamos el modelo discutido en (11). Experimentalmente, se ha comprobado que los sistemas micelares obedecen este tipo de ecuaciones.

$$\sigma_{(r)0} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(\lambda/\lambda_\infty)We_2^2 q^2}}{2(\lambda/\lambda_\infty)We_2^2 q} \quad (39)$$

La expresión (39) es la misma que en el Cap. 4-37. Esta expresión consta de cuatro parámetros ajustables $\lambda, \lambda_0, \lambda_\infty, G_0$ y además, tiene dos límites asintóticos a rapidez de deformación baja y alta (5-6).

5.3.1 Velocidad radial y axial.

A partir de la aproximación de lubricación (4.1.8) y la ecuación (5-39) se integra con las condiciones de frontera definidas en (4-3-5) y se obtiene:

$$v_0(z, r) = \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) \frac{1}{\bar{p}_0^2} \ln \left[\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_x}\right) We_2^2 \bar{p}_0^2 / 4}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_x}\right) We_2^2 \bar{p}_0^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)^2}} \right] \quad (40)$$

la expresión (40) es la velocidad radial a orden cero en α para el flujo transitorio por compresión. Se observa que depende de los tiempos de relajación, numero de Weissenberg y de la coordenada espacial z . Esta ecuación tiene tres resultados distintos, dependiendo del valor que tome el tiempo de relajación λ . Si $\lambda \rightarrow \lambda_\infty$ se obtiene un modelo equivalente al de dos constantes (λ_0, G_0). Si $\lambda \rightarrow \lambda_0$ se obtiene un modelo que contiene dos tiempos de relajación y el módulo de rigidez ($\lambda_0, \lambda_\infty, G_0$). Si $\lambda \in (\lambda_\infty, \lambda_0)$ se obtiene un modelo de cuatro parámetros. Tres de ellos son: tiempos de relajación y módulo de rigidez ($\lambda, \lambda_0, \lambda_\infty, G_0$). Estos parámetros modifican el perfil de velocidades radial a orden cero en α . De la misma manera que en (4.1.12), se utiliza la ecuacion de continuidad para obtener la componente axial de la velocidad:

$$\begin{aligned} w_0 = & \left\langle 2 \left(\frac{\kappa}{\bar{p}_0^3} \frac{d\bar{p}_0}{dr} - \frac{\kappa}{\bar{p}_0^2} \right) \ln \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) We_2^2 \bar{p}_0^2} - \frac{1}{\bar{p}_0} \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) \frac{We_2^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_x}\right) We_2^2 \bar{p}_0^2}} \right\rangle = \\ & + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\lambda_\infty}{\lambda}} \cdot \frac{1}{We_2 \bar{p}_0} \left\{ \arcsen \left(2 \sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda}} \left(z - \frac{1}{2}\right) \right) + \arcsen \left(\sqrt{\frac{\lambda_x}{\lambda}} \right) \right\} \\ & - \frac{1}{2\bar{p}_0} \left\{ \left(z - \frac{1}{2}\right) \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) We_2^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) We_2^2} \right\} \\ & + 2 \left(\frac{\kappa}{\bar{p}_0^3} \frac{d\bar{p}_0}{dr} - \frac{\kappa}{2\bar{p}_0^2} \right) \left(z \ln \sqrt{1 - 4 \left(\frac{\lambda}{\lambda_\infty}\right) We_2^2 \bar{p}_0^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_x}\right) We_2^2} \right) \\ & - 2 \left(\frac{\kappa}{\bar{p}_0^3} \frac{d\bar{p}_0}{dr} - \frac{\kappa}{2\bar{p}_0^2} \right) \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_x}\right) We_2^2 \bar{p}_0^2 \left(z - \frac{1}{2}\right)^2} \end{aligned} \quad (41)$$

La expresión (41) depende de parámetros del medio como son: $(\lambda, \lambda_0, \lambda_\infty, G_0)$, de parámetros espaciales (r, z) y del gradiente de presión $\frac{dp_0}{dr}$. A velocidad axial (17), la ecuación (40) depende explícitamente de la coordenada espacial z . La expresión (40) tiene tres límites diferentes, dependiendo de los valores que tome el tiempo de relajación λ . Además la componente axial, depende de la relación geométrica α lo que no sucede en el flujo continuo por compresión.

5.3.2 Gradiente de presión a orden cero.

Como en el flujo continuo por compresión, la presión, es una función no lineal que depende de los tiempos de relajación, del número de Weissenberg y del cociente entre la distancia radial y axial.

$$\Lambda \left(\frac{dp_0}{dr}, r, We_2, \alpha \right) = \ln \frac{2 + \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_\infty}} We_2 \frac{dp_0}{dr}}{2 - \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_\infty}} We_2 \frac{dp_0}{dr}} - 2We_2 \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_\infty}} \left(1 - \alpha r \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_\infty}} We_2 \right) \frac{dp_0}{dr} \quad (42)$$

5.3.3 Fuerza a orden cero.

La expresión para la fuerza es equivalente al modelo del flujo continuo por compresión. La única diferencia conceptual es que la velocidad promedio V se modifica por la velocidad puntual $dh(t)/dt$.

$$F_0 = \pi a^3 \eta_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{h(t)} \right) \int_0^1 r^2 \frac{dp_0}{dr} dr \quad (43)$$

En esta expresión, el gradiente de presión se calcula a partir de la ecuación (42) por un método iterativo.

5.3.4 Fuerza a rapidez de deformación baja.

A partir del esfuerzo a rapidez de deformación baja (7) se sustituye en la ecuación (4.3.6-79) y se resuelve para q obteniendo la rapidez de deformación como función de z y del gradiente de presión. Esta ecuación se sustituye en (43) y se deduce la fuerza a rapidez de deformación baja.

$$F_{q \rightarrow 0} = -\frac{3\pi a^2}{2} \eta_0 \frac{d}{dt} [\ln h(t)] \quad (44)$$

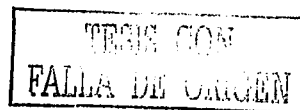
La ecuación (44) es la expresión analítica para la fuerza a rapidez de deformación baja. Se observa, que depende de variables geométricas y del medio como son: la viscosidad a rapidez de deformación baja, la altura y el radio del plato. Si F es constante la expresión (44) se puede integrar con la condición inicial $h(t=0) = h_0$ para obtener:

$$h(t) = h_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_1}\right) \quad (45)$$

Donde:

$$\tau_1 = \frac{3\pi \eta_0 a^2}{2F} \quad (46)$$

La expresión (45) da la dependencia de la altura como función del tiempo. Esta expresión contiene un tiempo de relajación característico τ_1 . Este tiempo depende de las propiedades del medio, de la geometría y la fuerza normal que se aplica al plato. Por lo regular, esta fuerza normal es el peso, i.e., $F = mg$.



5.3.5 Fuerza a rapidez de deformación alta.

De la misma manera, como en el caso a rapidez de deformación baja, se obtiene la expresión para la fuerza a rapidez de deformación alta.

$$F_{q \rightarrow \infty} = - \left(\frac{\lambda_{\infty}}{\lambda_0} \right) F_{q \rightarrow 0} \quad (47)$$

La ecuación (46) se integra como en (43) y se obtiene la relación de la altura como función del tiempo:

$$h(t) = h_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_2}\right) \quad (48)$$

Donde:

$$\tau_2 = \left(\frac{\lambda_{\infty}}{\lambda_0} \right) \tau_1 \quad (49)$$

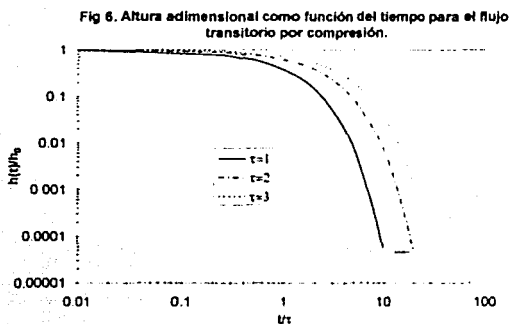
la expresión (48) es idéntica a la expresión (45) pero multiplicada por el cociente de tiempos de relajación. La ecuación (49) expresa que el segundo tiempo de relajación τ_2 es menor que el tiempo τ_1 porque $(\lambda_{\infty}/\lambda_0) \ll 1$. La ecuación (47) proporciona información acerca de la viscosidad a rapidez de deformación alta η_{∞} . Además, a rapidez de deformación alta, la fuerza es proporcional a la fuerza que experimenta el sistema a rapidez de deformación baja, pero multiplicada por un pequeño factor numérico menor que la unidad. Finalmente de (44) y (47) tenemos lo siguiente:

$$\left(\frac{\lambda_{\infty}}{\lambda_0} \right) \leq F^* \leq 1 \quad (50)$$

Donde:

$$F^* = F/F_{q \rightarrow 0} \quad (51)$$

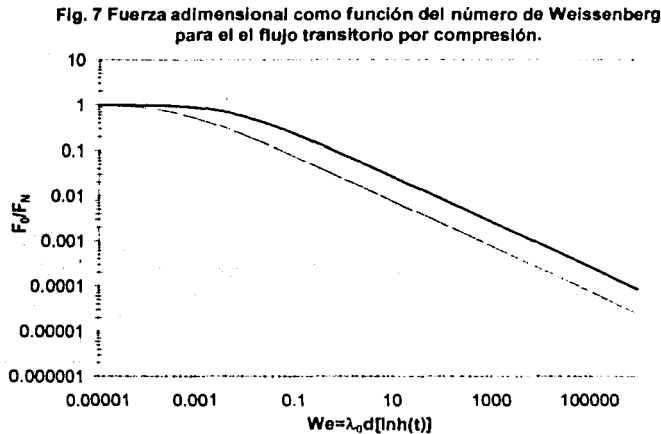
La expresión (49) muestra que la fuerza F^* está acotada superiormente por 1 e inferiormente por el cociente de tiempos. En las figura (6-10) se presentan algunos resultados de estas ecuaciones.



TESIS CON
FALLA DE REGISTRO

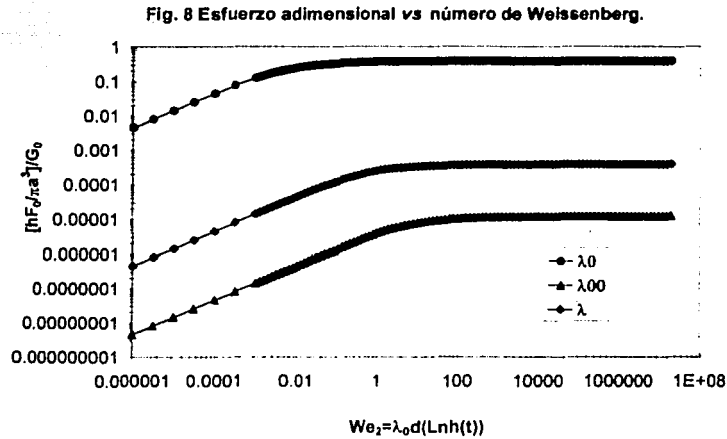
En la Fig. (6) se hacen predicciones de (44) para tres tiempos de relajación ($\tau_1 < \tau_2 < \tau_3$). En el eje de las ordenadas tenemos la altura normalizada con la altura inicial h_0 . En las abscisas se tiene el tiempo t/τ . Se aprecia que todas las curvas parten de uno, debido a la condición de normalización con la altura inicial. Para valores pequeños en el tiempo adimensional, el comportamiento es constante y para un cierto valor mayor $t/\tau > 0.2$

la curva decrece monotonamente. Cuando $\tau = \frac{3\pi\eta_0 a^2}{2F}$ aumenta, físicamente significa que la fuerza normal con la que se comprime el plato va decreciendo y esto produce un aumento en los mecanismos viscosos. Por otro lado, si la fuerza normal es muy grande el tiempo de relajación τ tiende a cero, implica que la altura adimensional $h(t)/h_0 \rightarrow 0$.



En la Fig. (7) se presentan predicciones de la integral (43) como función del número de Weissenberg para el flujo transitorio por compresión. En el eje de las ordenadas tenemos la fuerza F_0 normalizada con la fuerza newtoniana F_{0N} deducida en [7-15]. En el eje de las abscisas se tiene el Weissenberg $We_2 = \lambda_0 d (\ln h(t))$. Este Weissenberg es una función que cambia punto a punto. En la Fig. (7) se representa dos curvas con un comportamiento similar. La primera de ellas se cálculo a partir de la expresión (43) con $\lambda \rightarrow \lambda_0$ Como en el flujo continuo por compresión (Fig.4) observamos que la fuerza es constante para valores de $We_2 \in (0.00001, 0.001)$. Pero para un valor de $We_2 \geq 0.001$ hay un punto de inflección donde la función decrece monotonamente. La región donde la fuerza decrece, físicamente representa la pseudoplasticidad del fluido. La segunda gráfica, presenta una zona donde el cociente de fuerzas es menor, este caso es cuando $\lambda \rightarrow \lambda_r$ (modelo de dos constantes). De manera analoga, se observa un comportamiento similar al modelo de dos constantes, para valores de $We_2 > 0.0001$ la función decrece monotonamente. Esta región físicamente, representa los efectos pseudoplasticos del líquido. Uno de los aspectos interesantes de estos resultados es que a $We_2 < 1$ los efectos importantes son los elásticos y a medida de que el $We_2 > 1$, los mecanismos importantes son los viscosos. Por otro lado, en el flujo transitorio por compresión, no se toma en cuenta la no homogeneidad del fluido lo que no sucede con el flujo continuo por compresión. De estos resultados, se puede inferir que la fuerza se puede mantener constante en un cierto intervalo modificando los parámetros del medio (tiempos de relajación, modulo de rigidez, etc). Estos resultados concuerdan con lo reportado para un flujo cortante simple [19].

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



En la Fig (8) se presentan resultados de la expresión (43). En el eje de las ordenadas se gráfica el esfuerzo adimensional $[hF_0/\pi a^3]/G_0$ y en las abscisas se tiene el número de Weissenberg $We_2 = \lambda_0 d(\ln h(t))$. De la Fig. (8) se analizan tres casos: (i); El primero de ellos es cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$. En este se aprecia, el comportamiento del esfuerzo es lineal para valores de $We_2 < 0.01$ y se observa a partir de un $We_2 > 0.01$ el comportamiento es monótono creciente. Físicamente representa que los efectos dominantes para $We_2 < 0.01$ son los elásticos y que para $We_2 > 0.01$ son los viscosos. (ii) Por otro lado cuando $\lambda \in (\lambda_\infty, \lambda_0)$ el comportamiento es similar que (i), pero la curva se encuentra desfasada, y la vecindad donde el esfuerzo es monótono creciente es mayor que en el caso (i). También notamos, que a partir de un valor de $We_2 > 1$ la curva se comporta de manera asintótica. En el caso $\lambda \rightarrow \lambda_\infty$, se observa el mismo comportamiento que en (i) y (ii), pero la vecindad en la cual el esfuerzo permanece lineal es superior al caso (i) y (ii). Para $We_2 < 10$ el esfuerzo es lineal pero para $We_2 > 10$ el esfuerzo se comporta de manera asintótica. Es evidente que hay dos zonas de predominio de mecanismos tanto para la fuerza y esfuerzo adimensional. Para el esfuerzo adimensional se infiere que se desfasan las curvas debido a los tiempos de relajación. El supremo de los esfuerzos se tiene cuando $\lambda \rightarrow \lambda_0$ mientras el infimo se tiene cuando $\lambda \rightarrow \lambda_\infty$. Es interesante notar, que la microestructura principalmente se rompe debido a los esfuerzos internos y se genera debido al flujo. Por este hecho la zona donde se rompe la mayor microestructura es la zona lineal donde existe una función inyectiva entre el esfuerzo y el Weissenberg local We_2 .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

5.4 Parte Experimental.

Los datos obtenidos fueron tomados de Cambridge, del departamento de matemáticas. La solución de surfactante fue hecha de un surfactante viscoelástico concentrado de una mezcla de un surfactante catiónico, erucylbis (hydroxyethyl) methhyl amonio clorhidro (EHAC), 75 Wt % y un aditivo líquido, isopropanol (25%). La solución de surfactante es formulada por una mezcla de 4Wt % de una solución acuosa con 3 % de cloruro de potasio. El flujo por compresión incluye cinco experimentos para varias fuerzas y radios del plato.

Tabla 2

Serie	Fuerza(N)	Radio(m)
I	3.11	0.01
II	2.66	0.015
III	1.42	0.02
IV	0.60	0.015
V	0.45	0.02

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

El resultado del primer experimento se presenta en la figura (9), la cual se interpreta a continuación: En el eje de las ordenadas se tiene una altura adimensional la cual es normalizada con la separación inicial h_0 de los platos. En el eje de las abscisas se tiene un tiempo adimensional t/τ donde $\tau = 3\pi\eta_0 a^2/2F$ el cual, es uno de los tiempos de relajación del flujo transitorio por compresión. Este tiempo involucra propiedades geométricas, del medio y la fuerza con la que se comprime el líquido. Los puntos experimentales para cada serie son sobrepuestos con la curva teórica. En la fig. (9) se comparan las predicciones de la ecuación (44) con los datos experimentales. Para la serie (I) el tiempo de relajación τ se utilizan los siguientes parámetros reológicos: $G_0 = 100 \text{ Pa}$, $\lambda_0 = 1 \text{ s}$, $F = 3.11 \text{ N}$ y $a = 0.01 \text{ m}$. De la gráfica se observa que existe una vezidad del tiempo donde no hay puntos experimentales ($t^* \in (0.00001, 0.00015)$). Esto se debe a cuestiones del aparato, puesto que al momento de comprimir el fluido es tan rápido que no alcanza a detectar estas lecturas. Los puntos experimentales concuerdan con lo esperado teóricamente, se aprecia que hay puntos que se alejan de la curva y que se pueden inferir a errores de tipo experimental. (errores de paralaje, mediciones en la altura, etc). En las serie (II) se utilizan los mismos parámetros reológicos pero cambiando la fuerza y el radio. En este caso se tiene que la fuerza $F = 2.66 \text{ N}$ y $a = 0.015 \text{ m}$. De la gráfica se aprecia un desplazamiento hacia la derecha, consecuencia de la disminución en la fuerza y aumento en el radio del plato. Esto quiere decir que entre más disminuya la fuerza normal aplicada al plato el mecanismo viscoso es el que permite que se desfase la curva hacia la derecha y por lo tanto el tiempo adimensional t^* aumenta. De la misma manera se grafican los datos experimentales de la serie III. Para estos datos la fuerza $F = 0.60 \text{ N}$ y $a = 0.015 \text{ m}$. De la gráfica se observa que la mayoría de los puntos siguen la tendencia de la curva teórica. Los puntos que no caen en la curva teórica se deben principalmente a que las primeras mediciones presentan incertidumbres asociadas con el aparato ya que al principio hay una región en la que no se puede hacer la medición sin cometer errores experimentales. Basicamente el análisis es el mismo que en los otros puntos si disminuye la fuerza, la curva se desfase hacia la derecha lo que implica que el tiempo adimensional aumenta. Para la serie (IV), se tiene una fuerza $F = 1.42 \text{ N}$ y $a = 0.02 \text{ m}$. De la misma manera, la gráfica se ve desplazada hacia la derecha debido a la disminución en la fuerza y el plato. Para la serie (V) se tiene una fuerza de $F = 0.45 \text{ N}$ y $a = 0.02 \text{ m}$. Practicamente el comportamiento es similar y representa la última de las gráficas. En esta, se aprecia que el tiempo adimensional de compresión es mayor que en los casos anteriores. Esto físicamente implica que se puede modificar el tiempo de relajación del sistema

mediante la fuerza normal aplicada al plato y por condiciones geométricas. Si la fuerza es grande el tiempo adimensional es pequeño. Si la fuerza es pequeña, pero el radio es grande se obtienen efectos equivalentes.

Fig. 9 Predicciones teóricas vs resultados experimentales.

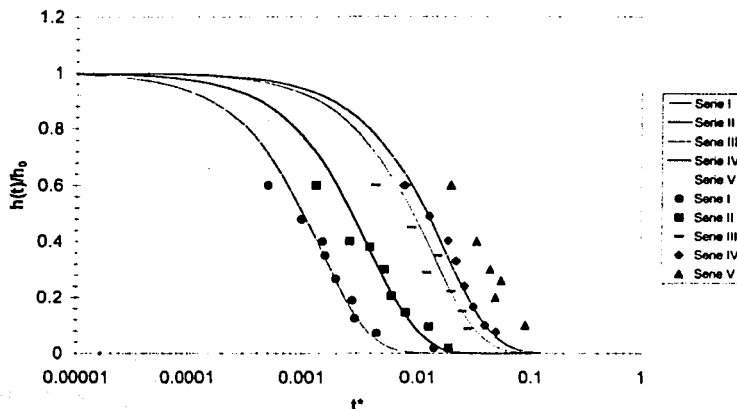
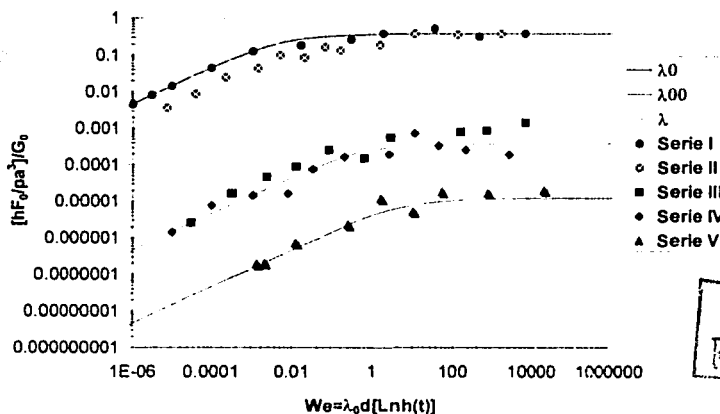


Fig. 10 Predicciones teóricas vs resultados experimentales



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La figura (10) predice resultados de la ecuación (43). Para esta gráfica los valores que se utilizaron son: $G_0 = 100 \text{ Pa}$, $\lambda_0 = 1 \text{ s}$ y los valores de radios y fuerzas reportados en las series (I-V). En el eje de las ordenadas se tiene el esfuerzo adimensional $(hF_0/\pi a^3)$, el cual es normalizado con el módulo de elástico G_0 . En el numerador se tiene el esfuerzo debido a los procesos viscosos y en el denominador se tiene el esfuerzo debido a los mecanismos elásticos. En la abscisa se tiene el número de Weissenberg, el cual es un cociente entre tiempos. Se presenta el mismo tratamiento que en la Fig. (9) los puntos para cada serie son superpuestos con la curva teórica. Para la serie (I), se aplica una fuerza de 3.11 N y un radio de plato de 0.01 m. Se observa que los datos presentan un comportamiento parecido al de la curva teórica no obstante hay un intervalo de incertidumbre que puede ser inferido a

cuestiones de error experimental (errores de paralaje, fenómenos de deslizamiento en las paredes, etc). Analizando el caso en el cual se aplica una fuerza de 2.66 N con un radio de 0.015 m, el comportamiento fue similar al anterior, pero se observa que a números de $We < 0.1$, el modelo se ajusta a los datos experimentales, mientras que para $We > 0.1$ el modelo no predice tales puntos. De la misma manera para la serie (3-5) el comportamiento es muy similar a bajos números de We , los efectos que dominan, son los elásticos y a medida que se incrementa el We , los efectos importantes son los viscosos. De los resultados que se obtuvieron en las gráficas (9) y (10) se infiere que la altura con la que desciende el plato y esfuerzo adimensional se modifican, debido principalmente a dos razones: la primera de ellas es la fuerza normal con la que se comprime y la segunda las propiedades del medio y geométricas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figuras.

En la figura (1) se ilustran predicciones del esfuerzo adimensional (Cap5-13) como función de la rapidez de deformación q para el modelo de dos constantes materiales (λ_0, G_0). En esta simulación se toman los siguientes valores para el número de Weissenberg ($We = 0.005, 0.05, 0.5, 1$).

En la figura (2) se ilustran predicciones de la primera diferencia de esfuerzos normales (Cap5-6) como función del escalar rapidez de deformación q para el modelo de dos constantes materiales (λ_0, G_0). Para esta simulación el $We = 0.5$.

En la figura (3) se ilustran predicciones de la fuerza adimensional (Cap.5- 20) como función del número de Weissenberg, para el modelo de dos constantes materiales (λ_0, G_0) con $m = 0$ (flujo homogéneo).

En la figura (4) se ilustran predicciones de la fuerza adimensional (Cap.5-20) como función de la no homogeneidad del fluido ($m \neq 0$). Para distintos valores del Weissenberg ($We = 0.2, 0.4, 0.6$).

En la figura (5) se ilustran variaciones de la esfuerzo adimensional $[hF_{00}/\pi a^3]/G_0$ (Cap. 5-20) como función del número de Weissenberg para el flujo homogéneo por compresión ($m = 0$).

En la figura (6) se ilustran variaciones de la altura adimensional (Cap.5 -42) como función del tiempo, para el flujo transitorio por compresión. En esta simulación $\tau_1 = 1, \tau_2 = 2, \tau_3 = 3$.

En la figura (7) se ilustran variaciones de la fuerza adimensional (Cap5-42) como función del número de Weissenberg para el flujo transitorio por compresión. En esta simulación se tomaron los siguientes valores: $\lambda_\infty = 0.001s$ y $\lambda_0 = 1s$.

En la figura (8) se presenta el esfuerzo adimensional (Cap5-42) como función del número de Weissenberg. En esta simulación fueron tomados los siguientes valores: $\lambda_\infty = 0.001s$, $\lambda_0 = 1s, \lambda = 0.01$.

En la figura (9) se presentan las predicciones teóricas (Cap5-20) contra los resultados experimentales. Para las fuerzas y radios del plato se tomaron los siguientes datos:

Serie	Fuerza(N)	Radio(m)
I	3.11	0.01
II	2.66	0.015
III	1.42	0.02
IV	0.60	0.015
V	0.45	0.02

constantes reológicas: $G_0 = 100Pa, \lambda_0 = 1s$.

En la figura (10) se presentan predicciones teóricas del esfuerzo adimensional (Cap. 5-42) como función del número de Weissenberg. Para las fuerzas y radios del plato se tomaron los siguientes datos:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Serie	Fuerza(N)	Radio(m)
I	3.11	0.01
II	2.66	0.015
III	1.42	0.02
IV	0.60	0.015
V	0.45	0.02

constantes reológicas: $G_0 = 100Pa$, $\lambda_0 = 1s$, $\lambda_\infty = 0.001s$ y $\lambda = 0.01s$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

APÉNDICES

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

APÉNDICE A

Consideremos una macromolécula inmersa en un fluido newtoniano incompresible. Se supone que en estado de equilibrio forma una cadena la cual se deforma y eventualmente se rompe bajo flujo. En estas cadenas hay N número de segmentos de longitud l las cuales pueden rotar libremente. La dinámica de esta red bajo flujo puede ser descrita en término de una ecuación de balance para su configuración espacial, la cual refleja los procesos de formación y destrucción de estructura. Sea $\Psi(\underline{r}, t)d^3r$ el número de segmentos en el elemento de volumen d^3r en la configuración espacial, entonces:

$$N = \int \Psi(\underline{r}, t)d^3r \quad (A-1)$$

Como es usual en la formulación en los modelos de redes, la dependencia temporal es gobernada por una ecuación de evolución de la forma:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \underline{r}} \cdot \Psi \underline{r} = k - \beta \Psi \quad (A-2)$$

En este modelo el vector \underline{r} representa la distancia extremo extremo de una macromolécula. Si se define \underline{r} en término del tensor gradiente de velocidad obtenemos:

$$\underline{r} = \underline{L} \cdot \underline{r} \quad (A-3)$$

k y β en la ecuación (A-2) los terminos de creación y destrucción de estructura. La teoría de Lodge [13] esencialmente corresponde a la suposición de que

$$k = g\Psi_0(\underline{r}) = g(b/\pi)^3 e^{-b^2 r^2}, b = 3/2l^2 \quad (A-4)$$

donde g es una contante.

La ecuación (A-4) asume que los segmentos son constantes y que son creados a una razón constante y que siguen una distribución gaussiana. además se asume que la creación y destrucción de estructura no depende explícitamente de \underline{r} solamente de las propiedades promedio del estado del fluido, como la raíz cuadrada del promedio del cuadrado de la distancia extremo extremo de la cadena $\langle r^2 \rangle^{1/2}$. Siguiendo estas hipótesis, se multiplica la ecuación (A-2) por la diada $\underline{r}\underline{r}$ e integrando sobre toda la configuración espacial, se obtiene:

$$\beta[\langle r^2 \rangle \langle \underline{r}\underline{r} \rangle + \langle \underline{r}\underline{r} \rangle] = g \langle \underline{r}\underline{r} \rangle_0 \quad (A-5)$$

donde

$$\langle \underline{r}\underline{r} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \underline{r}\underline{r} \rangle - \underline{L} \cdot \langle \underline{r}\underline{r} \rangle - \langle \underline{r}\underline{r} \rangle \cdot \underline{L}^T \quad (A-6)$$

Para escribir una ecuación de evolución para el segundo momento de la función de distribución, definamos el tensor de esfuerzos en la forma tradicional:

$$\underline{\underline{\sigma}} = N \langle \underline{f}\underline{r} \rangle \quad (A-7)$$

\underline{f} es la fuerza entropica relacionada con la distribución en el equilibrio (A-4) y tiene la siguiente forma:

$$\underline{f} = 2k_B T b \underline{r} \quad (A-8)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

k_B es la constante de Boltzmann y T es la temperatura absoluta. El esfuerzo total es determinado por la siguiente expresión:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}' - p\underline{\underline{I}} \quad (\text{A-9})$$

donde p se escoge de manera que $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{0}}$ en el equilibrio.

De (A-8) y (A-9) se tiene lo siguiente:

$$\underline{\underline{\sigma}} = 2Nk_B T b [\langle r r \rangle - \frac{1}{3} \langle r_0^2 \rangle \underline{\underline{I}}] \quad (\text{A-10})$$

y de (A-4)

$$\frac{1}{3} \langle r_0^2 \rangle \underline{\underline{I}} = \langle r r \rangle_0 = \frac{1}{2b} \underline{\underline{I}} \quad (\text{A-11})$$

Si se calcula la traza de la ecuación (A-10) se obtiene:

$$\text{tr} \underline{\underline{\sigma}} = 2bNk_B T [\langle r^2 \rangle - \langle r_0^2 \rangle] \quad (\text{A-12})$$

Y si se combinan las ecuaciones (A-5), (A-10), (A-11) con el hecho de que la traza del tensor de esfuerzo es proporcional a $\langle r^2 \rangle$ por la ecuación (A-12) se tiene:

$$\beta (\text{tr} \underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{\sigma}} + \underline{\underline{\sigma}} = 2G_0 \underline{\underline{D}} \quad (\text{A-13})$$

Donde el modulo elástico es

$$G_0 = Nk_B T \quad (\text{A-14})$$

La ecuación (A-13) y (A-14) son las que se ocupan en (4.2)

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

APÉNDICE B.

Deducción de la expresión integral para la rapidez de deformación $q_1 = -\frac{6}{7} \int_0^r r' u(r') dr'$

Demostración:

Para calcular el término q_1 , se utiliza el teorema del valor medio de la integral de Riemann. A partir de la expresión general para el flujo volumétrico se tiene:

$$Q(R, Z) = \iint V \cdot dS \Rightarrow Q(R, Z) = \int_0^{2\pi} \int_0^r V_z(R, Z) R dR d\theta \quad (\text{B-1})$$

pero, primeramente, se tiene que adimensionar esta expresión: Considerando como variable adimensional para el radio r'

$$r' = \frac{R}{a} \quad \text{si } R = 0 \Rightarrow r' = 0 \quad (\text{B-2})$$

y de la expresión $R = ar$ se despeja la variable radial R por lo que, se tiene lo siguiente:

$$R = ar \Rightarrow r' = r \Rightarrow r' \in (0, r) \quad (\text{B-3})$$

y la componente de la velocidad axial se puede escribir como:

$$V_z(R, Z) = \frac{hV}{a} w(R, Z) \quad (\text{B-4})$$

en la expresión general para el flujo volumétrico (B-1) se sustituye (B-3) y (B-4)

$$Q(r) = Q(R, Z = 0) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \frac{hV}{a} w(R, Z = 0) a^2 r' dr' \right) d\theta \quad (\text{B-5})$$

Simplificando (B-5)

$$Q(r) = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^r \frac{hV}{a} w(R, Z = 0) a^2 r' dr' \right) d\theta \quad (\text{B-6})$$

Por otra parte, se supone que el flujo en dirección radial, se comporta localmente como el de una rendija (i.e. se desprecian los efectos de curvatura) por lo que la expresión para una rendija se escribe como:

$$Q = \frac{2(w)B^2}{3} \left(\frac{P_0 - P_L}{\eta_0 L} \right) \quad (\text{B-7})$$

Identificando variables geométricas de la ecuación (B-7) con nuestro problema se tiene lo siguiente: W es igual al perímetro del plato por lo que $w = 2\pi r$ donde r es el radio del plato circular, la Longitud axial en una rendija es igual a $2B$ para nuestro sistema $2B = h \Rightarrow B = \frac{h}{2}$ donde h es la separación de los platos. Si se sustituyen estos resultados en (B-7) obtenemos.

$$Q = \frac{4\pi r (h/2)^2}{3} \left(\frac{P_0 - P_L}{2\eta_0 L} \right) \Rightarrow Q = \frac{(\pi r)(h)^2}{3} \left(\frac{P_0 - P_L}{2\eta_0 L} \right) \quad (\text{B-8})$$

Pero la rapidez de deformación en una rendija esta definida como:

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = \left(\frac{P_0 - P_L}{2\eta_0 L} \right) \quad (\text{B-9})$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Si se adimensiona (B-9) se obtiene la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial V_r}{\partial z} \Big|_{z=h/2} = \frac{V}{h} \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=h/2} \quad (\text{B-10})$$

Si sustituimos (B-10) en (B-8) obtenemos:

$$Q(r) = \frac{(\pi r)(h)^2}{3} \frac{V}{h} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{B-11})$$

y luego (B-11) se simplifica

$$Q(r) = \frac{(\pi r)(h)V}{3} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{B-12})$$

Por el teorema del valor medio para integrales, $\exists c \in [0, r] \subset R$ tal que si $c = a \Rightarrow Q(r = a)$ por lo que:

$$Q(r = a) = \frac{\pi a h V}{3} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{B-13})$$

Si se igualan (B-12) y (B-13) obtenemos:

$$\frac{\pi a h V}{3} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{2\pi h V a}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \quad (\text{B-14})$$

simplificando (B-14) se tiene:

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 6 \frac{1}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \quad (\text{B-15})$$

A orden cero la expresión (B-15) toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial z}(v_0 + O(\alpha)) = \frac{\partial v_0}{\partial r} + O(\alpha) \quad (\text{B-16})$$

Se combinan (B-15) y (B-16)

$$\frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{6}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \quad (\text{B-17})$$

y recordando que $q_0 = \frac{\partial v_0}{\partial z}$ la expresión (B-17) se simplifica a

$$q_0 = \frac{6}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \quad (\text{B-18})$$

y recordando los valores de q para las cuales, se cumple que $v = 0$ son: $q_1 = \pm q_0$ y como se demostro en (44) que $q_1 = -q_0$ por lo que finalmente:

$$q_1 = -\frac{6}{r} \int_0^r r' u(r') dr' \quad (\text{B-19})$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Conclusiones

En el presente trabajo, se estudió el flujo continuo y transitorio por compresión. El primero de ellos fue analizado por Gooden y Waters [1-2], el segundo ha sido ampliamente estudiado por diferentes autores [3-15]. De los resultados obtenidos se infiere lo siguiente:

1.- A orden cero para el flujo transitorio y continuo los resultados del esfuerzo y primera diferencia de esfuerzos normales son los mismos que para un flujo cortante simple estudiado por [18-19].

2.-La ecuación integral [21] es una medida de los efectos viscosos.

$$F_{00}/F_{0N} = -\frac{1}{3} \int_0^1 r^2 \bar{p}_0 dr$$

3.-A partir de la curva de la fuerza adimensional, como función del número de Weissenberg para el flujo transitorio por compresión (Figura 7), se obtiene, la curva de viscosidad para un líquido complejo que se estructura. Este comportamiento, es el mismo que se obtiene para un flujo cortante simple [19].

4.- La fuerza para el flujo continuo por compresión y transitorio, se modifica principalmente por:

- a) Propiedades del medio: $\eta_0, \eta_\infty, G_0, \lambda_0, \lambda_\infty, \lambda$
- b) Propiedades de flujo: m no homogeneidad.
- c) Propiedades geométricas: h, a

5.- Existe una diferencia fundamental entre el número de Weissenberg continuo y transitorio, es decir, en el continuo la velocidad característica, es un promedio $V = Q/2\pi ah$, mientras que en el transitorio, la velocidad es una función de punto $dh(t)dt$.

6. Finalmente, estos sistemas, presentan comportamientos equivalentes (ecuaciones para las componentes de la velocidad, presiones, etc) a pesar de que las condiciones cinemáticas sean distintas. Por último, una de las ventajas de estos equipos, es la aplicación en la industria de lubricantes en maquinaria y equipo pesado.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Trabajo a futuro.

Como una sugerencia para trabajos futuros, se proponen dos líneas de investigación:

1) La primera de ellas es referente a la parte matemática. Como se vio a lo largo del trabajo, deducir una expresión analítica para la fuerza es complicado, ya que en esencia los problemas se ven reducidos a métodos numéricos, que permiten obtener soluciones aproximadas. En esta aportación se abordó el modelo de dos constantes, ya que el de cuatro no permite muchos progresos, en busca de una solución analítica. Uno de los problemas que queda abierto es buscar la solución numérica para el modelo general, puesto que, se tendría una expresión para la fuerza a orden cero, pero con todos los parámetros del medio y por lo tanto, tener una representación matemática de la fuerza.

2) La segunda línea de investigación es la parte física, en esta, se puede probar una función de estructura, que permita considerar otro tipo de efectos (flujo bandeado, etc). En el presente proyecto de maestría, la función de estructura se supone que es constante e igual al inverso en el módulo elástico, si se considera que puede depender de los invariantes del tensor rapidez de deformación, en donde, la estructura se modifica no solo por los esfuerzos internos, si no, por las propiedades del flujo.

Por último, otro de los aspectos importantes de este proyecto, es considerar que el proceso no es isotérmico, es decir, las propiedades o atributos del sistema son funciones de la temperatura, de esta manera, se podría cuantificar como se modifica la estructura, debido a los esfuerzos internos, propiedades del flujo y efectos térmicos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

BIBLIOGRAFÍA

- [1] N.D Waters and D.K Gooden, Appl. Sci. Res.,(1983) 146 179
- [2] N.D Waters and D.K Gooden, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 14 (1984) 361-376
- [3] D.R Oliver and R.C Ashton, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1 (1976) 93.
- [4] D.R Oliver and R.C Ashton, J.Non-Newtonian Fluid Mech., 2 (1977) 367.
- [5] D.R Oliver and R.C Ashton, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 9 (1981) 369.
- [6] D.R Oliver and M. Shaidullah, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 9(1981) 257.
- [7] G. Brindley, J. M Davis and K. Walters., J. Non-Newtonian Fluid Mech., 1(1976) 19-37.
- [8] N. Phan Thien J.Dudek, D.V. Boger and V Tirtatmadia., J. Non-Newtonian Fluid Mech., 18(1985) (227-254)
- [9] P.Shirodkar and S. Middelma, J. Rheol., 26 (1982) 1.
- [10] K. P Jackson, K. Walters and R. W. Williams, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 14 (1984)
- [11] Benoit Debbaut , J. Non-Newtonian Fluid Mech., 98 (2001)15-31
- [12] M.A.McClelland and B.A Finlayson, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 13 181-201 (1983).
- [13] J. D. Sherwood., J.Non-Newtonian Fluid Mech., 104 (2002) 1-32.
- [14] Colin Servais, André Luciani, Jan Anders E. Manson. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 104 (2002) (165-184)
- [15] Guopin Lian, Yong Xu, Webin Huang. Michael J. Adams, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 100(2001) (151-164).
- [16] D.N Smyrnaninos ,J.A. Tsamopoulos, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 100 (2001) 165-190
- [17] F.Avila, D.M Binding, J. Non-Newtonian Fluid Mech., 11 (1982) 111.
- [18] F. Bautista , J.M de Santos. J E Puig, O. Manero J. Non- Newtonian Fluid Mech., 80 (1999) 93.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

[19] O. Manero et al. /J. Non-Newtonian Fluid Mech., 106 (2002) 1-15

[20] R.B. Bird, R.C. Armstrong, O. Hassager, C.F. Curtiss, Dynamics of Polymeric Liquids. Vol 2, 2nd Edition Wiley, New York, 1987

[21] R.G Larson, Constitutive equations for Polymeric Melts and Solutions , Butterworths, Boston, 1988.

[22] Marrucci, G., J. Non-Newtonian. Fluid Mech. 21, 329 (1986)

[23] Mewis, J., M.M. Deen, J. Non-Newtonian. Fluid Mech. 23, 249 (1987)

[24] Giesekus, H.J. Non-Newtonian Fluid Mech., 17, 349-372 (1985)

[25] Giesekus, H., J. Non-Newtonian Fluid Mech., 17, 349-372 (1985).

[26] BIRD. R.B Stewart W.E Lighfoot E.N Fenómenos de transporte. Edit. Reverté México 1993 546 p.p

[27] W. Trim Donald. Applied partial differential equations. PWS-KENT Publication United States of America 1990, 148 p.p

[28] GARCÍA Colín Scherer Leopoldo Termodinámica de procesos irreversibles. Colección CBI México 1990, 148 p.p

[29] HERRERA Valencia Edtson Emilio. Estudio del flujo de un fluido de Cross en un sistema de lubricación de platos concéntricos. Tesis de licenciatura Facultad de Química UNAM-2002 México.

[30] GILBERT W: Castellan Físicoquímica. Segunda edición. addison Wesley Iberoamericana 1987, 1054 p.p