00321

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

16

FACULTAD DE CIENCIAS

"OPTIMIZACION DE UN PORTAFOLIO EN BONOS EMITIDOS POR EL GOBIERNO MEXICANO"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

ACTUARIA

PRESENTA:

ASTRID DELGADO ATRIAN

DIRECTOR DE TESIS:
ACT. ANA LAURA DUARTE CARMONA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2003

PAGINACION DISCONTINUA

UNIVERSIDAD NACIONAL
AUTÓNOMA DE
MÉXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Optimización de un Portafolio en Bonos Emitidos por el Gobierno Mexicano".

realizado por ASTRID DELGADO ATRIAN

con número de cuenta 9960094-7 , quién cubrió los créditos de la carrera de ACTUARIA

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	ACT. ANA LAURA DUARTE CARMONA	
Propietario	ACT. MARIA AURORA VALDES MICHEL	
Propietario	M. en C. FRANCISCO CHONG LUNA	
Suplente	ACT. MARINA CASTILLO GARDUÑO	
Suplente	ACT. LAURA MIRIA[illegible]GONZALEZ	

Consejo Departamental de MATEMATICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

MATEMATICAS

i - A

Quiero dedicar este trabajo a mis papás, a quienes amo por sobretodas las cosas. Sin ustedes, yo no sería nada. Papá, gracias por las sonrisas y los consejos. Mamá, gracias por ser mi mejor amiga.

También se los quiero dedicar a mis hermanos, los que siempre me han apoyado y han estado conmigo. Israel, gracias por ayudarme a madurar. Arturo, gracias por dejar que siga siendo una niña. Los adoro.

A mi abuelita Raquel, que no sólo es mi compañera de cuarto, si no que es la persona con la que yo sé que siempre puedo contar. Te quiero muchísimo.

Para Sergio, gracias por ayudarme a llegar a este momento, gracias por el cariño y sobretodo por la paciencia.

Quiero agradecer especialmente a Francisco Chong que me ayudó en todo momento para realizar este trabajo. Gracias también por tu amistad.

Agradezco profundamente a Ana Laura Duarte, quien no sólo es mi Directora de Tesis, sino que tengo la fortuna de decir que es mi amiga.

Gracias a la Universidad Nacional Autónoma de México, en especial a la Facultad de Ciencias por darme la oportunidad aprender.

Gracias a mis sinodales que me apoyaron y confiaron en el trabajo que realicé.

Contenido

i-E

Introducción

Muchas veces, cuando un país necesita obtener fondos para financiar algún proyecto interno, recurren a la emisión de bonos, los cuales son generalmente a largo plazo, lo que ayuda a los gobiernos a "acolchonar" sus pagos. A esto se le conoce generalmente como la deuda externa de un país y México no es la excepción.

El gobierno de México durante su historia, ha emitido varios bonos para el financiamiento de proyectos. La emisión de estos bonos ha variado de moneda de emisión, por ejemplo, hay bonos emitidos en yenes, dólares, marcos, etc. dependiendo de la situación económica y/o política en que se encuentre cada país.

Cuando ya existen más de dos bonos emitidos, puede existir la posibilidad de crear un portafolio para realizar un análisis de estos instrumentos y tomar una decisión adecuada. Es aquí donde se comienza a ver la Teoría de Portafolios y los métodos de optimización para los portafolios.

En este trabajo, se presentará de una forma detallada la construcción de un portafolio en bonos emitidos en dólares, comenzando por una explicación de la teoría de portafolios y después el análisis del portafolio.

En el primer capítulo se comenzará con una introducción al mundo de los bonos, partiendo desde la forma de calcular su precio y rendimiento, hasta concluir con las características generales acerca do los bonos con los que estaremos trabajando. También se dará una breve presentación acerca de la Administración de Riesgos, la cual es un tema importante a considerar en lo que a optimización se refiere. En el segundo capítulo se dará la teoría necesaria para que posteriormente (tercer capítulo) se inicie el análisis del portafolio que se construyó, es decir, se obtendrá el rendimiento esperado, la volatilidad y se concluirá con la construcción de la frontera eficiente y las posibles opciones a tomar con respecto a ésta.

Capítulo 1

Bonos y Administración de Riesgos

Este capítulo comienza con el estudio de las características básicas del mercado de la deuda, es decir, se enfocará en los bonos. Los precios de todos los instrumentos de deuda dependen de los pagos prometidos por el emisor y de las condiciones del mercado que determinan el valor de los pagos. Esta relación se expresa en la fórmula de fijación de precios de bonos y este capítulo contempla la relación entre los rendimientos, precios y pagos prometidos sobre instrumentos de deuda, relaciones que son válidas para todos esos instrumentos. Asimismo se proporcionará una breve introducción acerca de lo que es la Administración del Riesgo y cómo se relaciona al caso de estudio que se propone. Se dará una reseña histórica para así poder comprender la importancia de la Administración del Riesgo dentro del manejo de portafolios de inversión.

1.1 ¿Qué son lo Bonos?

1.1.a Definición

Un bono es una promesa de pagar una determinada cantidad de dinero, a una tasa de interés y en una fecha futura dadas. Un bono es un instrumento de deuda.

Los bonos pueden ser emitidos por entidades gubernamentales o empresas, permitiéndoles a cambio obtener financiamiento. De esta manera, las empresas pueden llevar a cabo sus proyectos con fondos obtenidos en condiciones más favorables que las ofrecidas por el crédito tradicional bancario.

La emisión de bonos permite que los emisores se encuentren "directamente" con los agentes superavitarios de fondos. Al no existir un intermediario (el cual sería un banco), la tasa de interés que se obtiene es más favorable tanto para los colocadores como para los tomadores de recursos.

Los bonos pueden ser adquiridos por empresas, gobiernos o incluso por inversionistas individuales, entre otros. La mayoría de los bonos pagan intereses periódicamente (trimestral o semestralmente) y algunos los pagan al vencimiento. Cuando se realizan pagos periódicos se conocen como cupones. Generalmente pagan una tasa de interés fija, sin embargo, también pueden manejarse bonos que paguen tasa de interés variable. Las emisiones de los bonos pueden ser a corto, mediano y largo plazo e incluso en algunos mercados los bonos reciben algún nombre en específico dependiendo de su duración como "papeles comerciales", "bills", o "notes" cuando son emitidos a corto plazo. Asimismo, es común que los emisores acuerden la "redención" o "recompra" de los bonos en algún momento antes de su vencimiento. Esta redención se da usualmente a la "par" (al valor pagado por el comprador cuando fueron emitidos). También puede redimirse a un precio mayor, a esto se le conoce como "calling" (en México se conoce como que se redime a la par). Esta estrategia puede ser empleada cuando las tasas de interés han bajado, permitiendo a las empresas reemplazar deuda cara, con fondos obtenidos a tasas de interés más favorables.

1.1.b Valuación de los Bonos

➢ **Instrumentos de Descuento Puro**

Un bono de descuento puro promete pagar un cierto importe en un momento específico en el futuro y el instrumento se vende por menos de su pago futuro prometido. Normalmente, el pago futuro prometido es el **valor a la par** o **valor nominal** del bono. La diferencia que existe entre el valor a la par y el precio de venta es el **descuento sobre bonos**. Este valor en particular es un bono de descuento puro debido a que no hay pagos entre la emisión original del bono y su vencimiento que es cuando paga su valor nominal.

Para este tipo de bonos, se puede expresar su precio como una función del valor nominal, del rendimiento sobre el valor y del tiempo hasta que venza:

$$P = \frac{C_m}{(1+r)^t}$$

(ec. 1.1)

donde:

P = precio del instrumento

C_m = flujo de efectivo a pagar al vencimiento del bono en el momento m

r = rendimiento anualizado hasta el vencimiento del bono

t = tiempo en años hasta que venza el bono

Tomemos como ejemplo un bono de descuento puro con vencimiento dentro de 5 años y que tenga un valor nominal de $1,000. Si el bono tiene un rendimiento al vencimiento del 12%, su precio se obtendría de la siguiente manera:

$$P=\frac{\$1{,}000}{(1.12)^5}$$

Ésta es la clase más sencilla de bono, en el cual se encuentran presentes todas las características básicas de la fijación de precios de bonos, es decir, los flujos de efectivo que se prometen, el precio y el rendimiento están todos interrelacionados. El rendimiento al vencimiento es el rendimiento que se obtendrá si se realiza el pago prometido. Mientras más riesgoso sea el pago prometido, tiene que ser más alto el rendimiento prometido o el rendimiento esperado con el fin de inducir a los inversionistas a que conserven sus bonos.

- **Bonos con Cupón**

Dentro del mercado de dinero muchos de los instrumentos que se manejan tienen la estructura de un bono de descuento puro, sin embargo, éste no es el caso de los instrumentos de deuda que tienen un vencimiento más largo. Es más común encontrar que estén relacionados con el bono los pagos múltiples. La mayor parte de los bonos que se emiten actualmente, tienen un valor nominal pagadero al tenedor del bono en una fecha futura especificada cuando venza el bono. Por lo general, los bonos realizan pagos regularmente programados entre la fecha original de su emisión y la fecha de su vencimiento. A estos pagos intermedios de les conoce como **cupones**. En la mayor parte de los casos los pagos de los cupones se hacen en forma semestral.

Para este tipo de bonos la fórmula para la fijación de precios se vuelve más compleja, es decir:

$$P=\sum_{t=1}^{M}\frac{C_t}{(1+r)^t}$$

(ec. 1.2)

donde:

C_t = flujo de efectivo recibido por el tenedor del bono al momento t

Como se puede observar, la diferencia que existe con la ecuación 1 es que existen más pagos de bonos. Por ejemplo, tomemos un bono con cupón que tenga un valor nominal de $1,000, un rendimiento del 13%, un pago semestral de cupón de $60 y vencimiento dentro de un año. Normalmente el último pago del cupón se realiza al vencimiento por lo que a la fecha del vencimiento el bono pagará el importe del valor nominal más el del último cupón. Ahora, se aplicará la fórmula anterior para obtener el precio de la siguiente manera:

$$P = \frac{\$60}{(1.13)^{.5}} + \frac{\$1,060}{(1.13)} = \$56.44 + \$938.05 = \$994.49$$

Es frecuente encontrar que existan bonos emitidos con vencimientos originales a 30 años. En el caso de que se realicen pagos semestrales, esto significaría que se deberán realizar sesenta pagos prometidos por el bono. El calcular el precio de este bono, aún cuando se conozca el rendimiento, es un proceso que puede tomar mucho tiempo. Aún si se conocen el valor y las fechas de todos los pagos así como el precio del bono, es más complicado el calcular los rendimientos, ya que el cálculo debe ser iterativo. Es más, para calcular manualmente el rendimiento es necesario utilizar el sistema de prueba y error. Se descuentan los flujos de efectivo a un rendimiento en particular y se compara el precio calculado resultante con el precio de mercado. Si el precio calculado excede al precio de mercado, el rendimiento utilizado para el cálculo fue demasiado bajo. Se tiene que ajustar el rendimiento y descontar de nuevo los flujos de efectivo; este proceso se tiene que repetir hasta que el precio calculado iguale al precio del mercado. Sólo entonces se habrá encontrado el rendimiento correcto al vencimiento.

1.1.c Fórmula de Aproximación del Rendimiento

A pesar de lo que antes se mencionó, existen otras alternativas para el cálculo del rendimiento, algunas de las cuales son exactas y con otras se alcanza una buena aproximación. Existe una fórmula de aproximación del rendimiento la cual resulta bastante funcional. La idea detrás de la fórmula de aproximación del rendimiento es muy directa, dividiendo un estimado de la utilidad anual proveniente del bono entre la inversión promedio durante la vida del bono, es decir:

$$\text{Rendimiento al vencimiento} = \frac{C + {}^{FV-P}\!/_{n}}{{}^{FV+P}\!/_{2}}$$

(ec. 1.3)

donde:

C = pago anual de cupones
FV = valor nominal del bono
P = precio de mercado del bono
N = número de años hasta el vencimiento del bono

El funcionamiento de la fórmula de aproximación del rendimiento se puede apreciar al considerar un bono que venza dentro de cinco años y que pague un cupón anual del 10%, con un valor nominal de \$1,000. si se fijara el precio del bono en \$1,059.12, según los cálculos mostrados a continuación, el rendimiento que se obtendría según nuestra fórmula sería:

$$\frac{100}{(1.085)^1}+\frac{100}{(1.085)^2}+\frac{100}{(1.085)^3}+\frac{100}{(1.085)^4}+\frac{100}{(1.085)^5}=\$1,059.12$$

Ahora aplicando la fórmula de aproximación obtendríamos:

$$\text{Rendimiento aproximado al vencimiento} = \frac{100 + {}^{1,000-1,059}\!/_{5}}{{}^{1,000+1,059}\!/_{2}} = 0.856$$

1.1.d. UMS

Debido a que este trabajo se enfoca en la utilización de bonos emitidos por el Gobierno Mexicano (UMS) es necesario mencionar las características generales de éstos, para así saber cuál es el terreno en el que estamos trabajando.

Los bonos UMS son títulos de Deuda Soberana Mexicana cotizados en el extranjero y en México.

➢ **Definición**

Son instrumentos de deuda emitios en el extranjero por el Gobierno Federal, cuyas siglas significan "United Mexican States" (Estados Unidos Mexicanos); dichos títulos son nominados y liquidados en dólares.

➢ **Objetivo**

El objetivo de los bonos UMS es el de facilitar a inversionistas nacionales y extranjeros el acceso directo a títulos de deuda pública protegidos contra una posible devaluación del peso frente al dólar e incrementar alternativas de inversión (mayor estabilidad)

➢ **Características Generales**

a) Emisor: Gobierno Federal
b) Forma de colocación: por medio de subastas
c) Tipo de operación: Compra-Venta Reporto
d) Garantía: Gobierno Federal
e) Valor Nominal: 1,000 USD
f) Plazo: 5, 10, 20 y 30 años

g) Liquidez: alta
h) Régimen Fiscal: no se hará retención alguna a personas físicas y morales residentes en el país o extranjero, siempre y cuando:
    - La compra venta y la custodia durante todo el plazo de la tenencia de los bonos se realice en bancos o casas de bolsas mexicanas
    - No se celebren operaciones distintas a reportos con casas de bolsa o bancos

i) Custodia de Valores: Indeval
j) Determinación de la Tasa u Otra Característica del Rendimiento: los intereses devengados se liquidan el mismo día que el principal a través del Indeval utilizando el tipo de cambio fix publicado un día antes de la fecha de liquidación
k) Formas de Operación: el precio de los bonos se cotiza en pesos y limpio. El intermediario podrá convertir a pesos el pago, y aplicarlo a las cuentas de sus clientes, o pagarlos en dólares.

1.2 La Administración de Riesgos

Como se mencionó al principio de este capítulo, es necesario conocer qué es la Administración de Riesgos (AR) ya que posteriormente se introducirán conceptos de minimización de riesgo y maximización del rendimiento lo cual, básicamente es una aplicación clara de la AR. Al mismo tiempo, se tratará de dar una breve explicación de cómo se relaciona el concepto de AR con la aplicación que se propondrá posteriormente dentro de este trabajo.

La AR es una aproximación científica del problema que existe al tratar con riesgos puros con los que se enfrentan comúnmente los individuos o las compañías.

1.2.a Definición

Como una relativamente nueva disciplina, la AR ha sido definida en varias formas, pero algunos puntos aparecen en casi todas las diferentes definiciones que se han propuesto: la AR se preocupa principalmente del riesgo puro[1] y habla de cómo manejar dichos riesgos.

La AR es la técnica de planear, organizar, dirigir y controlar las actividades relacionadas con la identificación, análisis y evaluación de los riesgos puros a que está sujeta una empresa, con el fin de eliminarlos, reducirlos, retenerlos o transferirlos, a los costos más bajos posibles, para minimizar los efectos económicos adversos. Lo anterior es una definición que comúnmente se maneja de la AR sin embargo, existe otro tipo de definición la cual está enfocada realmente a la AR ya que la anterior tiene un enfoque más administrativo: **la AR es el proceso de analizar la exposición a pérdidas accidentales, potenciales y prevenir o restaurar dichas pérdidas de forma que aumenten las actividades de la empresa o de su operación.**

La AR ha evolucionado a partir de la administración de compañías aseguradoras y tiene como su punto principal la posibilidad de pérdidas accidentales de activos e ingresos de una organización. Muchas de las grandes compañías de negocios se han dedicado a entrenar a personas que se especialicen únicamente en tratar con el riesgo; este trabajo puede abarcar desde una sola persona hasta departamentos completos dentro de las compañías.

[1] El término de riesgo puro es usado para designar aquellas situaciones que envuelven sólo la oportunidad de pérdida y no pérdida. Uno de los mejores ejemplos de riesgo puro es la posibilidad de pérdida sobre alguna propiedad; así, la persona que adquiere, por ejemplo, un automóvil, se enfrenta inmediatamente con la posibilidad de que suceda algún daño o que se destruya. Los posibles resultados, entonces, son pérdida o no pérdida. La distinción más notable entre el riesgo puro y otro tipo de riesgo es que todos los riesgos puros son asegurables.

I.2.b Antecedentes Históricos de la Administración de Riesgos

A partir del surgimiento de los seguros en el siglo XVI hasta la primera mitad del siglo XX, dentro del manejo de riesgos puros de las operaciones de las empresas y los comercios, los criterios y métodos fundamentales se encontraban ligados de manera muy estrecha al problema de las coberturas de seguros. Durante la década de los 50' s, en Estados Unidos, el mercado de seguros se transformó de un mercado vendedor a un mercado comprador ya que las gerencias de seguros y la seguridad industrial comenzaron a examinar la posibilidad de disminuir los egresos por concepto de primas, sin tener que caer en la necesidad de disminuir la amplitud que existía en las coberturas. Se realizaron cálculos de costo / beneficio acerca de las diferentes posibilidades que existían en su tratamiento, entonces las grandes compañías comenzaron a hacer uso de los seguros únicamente para transferir a las compañías aseguradoras aquellos riesgos que les eran indeseables por contar con una alta probabilidad de ocurrencia. En la década de los 60, se comenzó a hablar del concepto de Administración de Riesgos, la cual manejaba a los riesgos puros como un costo predecible y administrable para la compañía.

A medida en que se generalizaban estás prácticas, el mercado de seguros en Estados Unidos disminuyó en su tendencia de crecimiento en las décadas siguientes, paralelamente a una cobertura sobre riesgos mucho más económica y satisfactoria para las compañías: la Administración de Riesgos en esa época ya era una realidad. Durante la década de los 60 se fue generalizando en los países industriales, a diferencia de los países en desarrollo, en los cuales se fue utilizando de una forma más lenta.

La Administración de Riesgos en México se comenzó a utilizar a partir de la segunda mitad de la década de los 70 y a partir de ahí su aplicación se ha extendido, ya que los directivos de las compañías se han convencido de que la mejor forma que existe para hacer frente a los riesgos puros es mediante su administración en lugar de pagar sumas altas en contratos de seguros, o retenerlos por desconocimiento porque no los indemniza de su impacto negativo. Los directivos de las empresas han aprendido que puede ser que la administración de riesgos puros es un costo más para la empresa, sin embargo, es la manera más económica de hacerles frente.

1.2.c Las Herramientas de la Administración de Riesgos

Como se mencionó antes, una parte fundamental de la función de la AR es el diseñar e implementar procedimientos que minimicen la ocurrencia de pérdida o el impacto financiero que ocasionan las pérdidas ocurridas. Esto indicó las dos grandes técnicas utilizadas dentro de la AR para poder tratar con los riesgos: control de riesgo y financiamiento del riesgo.

➢ **Control de Riesgo**

Éstas técnicas están diseñadas para minimizar, hasta los menores costos posibles, aquellos riesgos a los que una organización está expuesta. El método de control de riesgo incluye el evitar el riesgo y varias aproximaciones hacia la reducción de riesgos a través de la prevención de pérdidas y el esfuerzo de control. En el caso de evitar el riesgo, la persona o la organización se niega a aceptar cualquier exposición a perder algo en consecuencia de alguna actividad en particular.

La reducción del riesgo consiste en aplicar todas las técnicas que existen para reducir la posibilidad de pérdida. Es común distinguir entre la prevención de alguna pérdida (aquellos esfuerzos que se realizan para prevenir la ocurrencia de alguna pérdida) y el control de pérdida (aquello esfuerzos que se realizan para minimizar la severidad de alguna pérdida, si es que ésta ocurre). Algunos ejemplos de las técnicas de prevención de pérdidas incluyen ciertos pasos para reducir el número de lesiones de los empleados instalando protecciones alrededor de las máquinas. Otra técnica de reducción de riesgo trata de reducir la severidad de aquellas pérdidas que actualmente ocurren, como por ejemplo, la instalación de sistemas contra incendio.

La sofisticación de los esfuerzos para controlar el riesgo pueden variar ampliamente. Ya sea que en establecimientos pequeños simplemente se coloquen extintores y cerraduras fuertes como técnicas de reducción de riesgo, las grandes corporaciones tienen elaborados sistemas contra incendio y personal de seguridad. Éstas son medidas de control de pérdidas enfocadas a los seguros, sin embargo, se puede considerar el modelo de Markowitz para la optimización de portafolios, el cual se analizará más adelante, como una medida de prevención de pérdidas financieras, así como también existen otros métodos como el VaR (valor en riesgo), entre otros. En ambos casos, estas técnicas constituyen la aplicación del control de riesgo en la exposición.

> **Financiamiento del Riesgo**

En contraste con el control de riesgo, el financiamiento del riesgo se enfoca en garantizar la existencia de fondos para hacer frente a las pérdidas en caso de que ocurran. Fundamentalmente, el financiamiento del riesgo toma la forma de retención o transferencia. Todos los riesgos que no se pueden evitar o reducir deben ser, por definición, transferidos o retenidos. Frecuentemente, la transferencia y retención son utilizadas conjuntamente para algún riesgo en particular, es decir, una parte del riesgo se retiene y la otra se transfiere.

La forma que la técnica de financiamiento asume puede también variar considerablemente. La retención, por ejemplo, puede estar acompañada por una colocación específica de capital para poder enfrentar pérdidas que no estén aseguradas, es decir, que no estén cubiertas y puede estar involucrada con la acumulación de un fondo para enfrentar desviaciones de algunas pérdidas esperadas. La retención puede ser menos formal, es decir, sin alguna forma específica de fondeo.

La transferencia puede tomar la forma de arreglos contractuales. La transferencia del riesgo a través de la compra de contratos de seguros es, por supuesto, una aproximación primaria al financiamiento del riesgo.

Como pudimos observar, las técnicas de la AR son sumamente importantes, no sólo para el área de seguros, sino que su uso va más allá de lo que nos podemos imaginar. Dentro de este trabajo, se verá la importancia de la AR conforme se vaya avanzando en la construcción del portafolio en bonos. Tendremos la oportunidad de observar en dos ocasiones cómo un inversionista o una compañía se esmera en reducir el riesgo dentro de sus portafolios, primero en el ejemplo de Zennon Inc, y después en la optimización del portafolio en bonos. El deseo de minimizar volatilidad o maximizar rendimiento es exactamente la aplicación de la AR.

Capítulo 2

Teoría del Portafolio

En este segundo capítulo, se dará una introducción a la teoría necesaria para la valuación de portafolios de inversión. Primero se dará una introducción a la Teoría del Portafolio, para así después continuar con el cálculo del valor esperado, la volatilidad y la obtención de la frontera eficiente, para después terminar con una aplicación ya existente donde se pueden ver claramente todos los conceptos que se mencionaron antes ya aplicados.

2.1 Teoría del Portafolio

2.1.a Concepto

La Teoría del Portafolio es aplicada para la selección de portafolios de inversión[2] que maximicen los rendimientos esperados de los inversionistas con niveles aceptables de riesgo, o que minimicen el riesgo con un determinado nivel de rendimiento.

[2] Un portafolio de inversión es un conjunto de activos y/o pasivos en los cuales una empresa o inversionistas tiene o desea tener una inversión

2.1.b Objetivo

El objetivo principal de la Teoría del Portafolio es ofrecer las herramientas que sean necesarias para valuar el comportamiento de los inversionistas y así, poder determinar la composición óptima del portafolio de inversión.

Existe un modelo considerado como básico para la Teoría del Portafolio conocido como *Mean-Variance Optimization MVO (Optimización de Media-Varianza)*, que fue desarrollado por Harry Markowitz a finales de los años cincuenta. Dicho modelo es una herramienta cuantitativa que permite esta composición óptima considerando la relación riesgo-rendimiento y la conducta o comportamiento de los inversionistas.

Markowitz, después de realizar varios estudios, dedujo la tasa de rendimiento esperada de un portafolio de instrumentos, y mostró que sobre ciertos supuestos, la varianza de la tasa de rendimiento es una medida significativa del riesgo de un portafolio. Los supuestos del modelo de Markowitz son:

1) Los inversionistas consideran que cada alternativa de inversión puede representarse por una distribución de probabilidad de los rendimientos esperados en cierto periodo de tiempo. Markowitz se dio cuenta que cuando existe incertidumbre sobre los rendimientos futuros de los instrumentos en los que se desea invertir, los inversionistas actúan con base en a sus "creencias profesionales" y asignan una función de distribución a los posibles rendimientos del portafolio.
2) Los inversionistas estiman el riesgo de un portafolio basándose en la variabilidad de los rendimientos esperados.
3) Los inversionistas basan sus decisiones en el rendimiento esperado del portafolio, así como en el riesgo de éste. Esto es cierto siempre y cuando los rendimientos del portafolio sean independientes, idénticamente distribuidos y con varianza finita[3]. Además, es importante mencionar que la teoría de Markowitz no obliga a que los rendimientos sigan una distribución normal.

[3] Ver Apéndice A. Conceptos Estadísticos.

4) Los inversionistas desean maximizar los rendimientos o beneficios derivados de sus inversiones. Markowitz supone que la función de utilidad[4] que cada inversionista desea maximizar es aproximadamente cuadrática en una vecindad alrededor de ella, que los rendimientos del portafolio en el cual se decide invertir no exceden el punto en donde dicha función cuadrática alcanza su máximo. En la figura 1, se presenta un conjunto de curvas de indiferencia que representan las preferencias de cierto inversionista, la utilidad que recibe el inversionista es mayor entre más lejos se encuentre la curva de indiferencia del eje horizontal, por ello, la curva u_4 representa una mayor utilidad para el inversionista que la curva u_1.

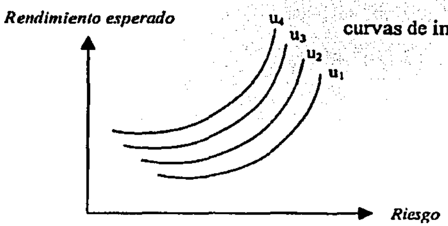


Figura 2.1 Representación de las preferencias de cierto inversionista

5) Los inversionistas son adversos al riesgo, es decir, si tienen que elegir entre dos activos con tasas de rendimiento (r) iguales, seleccionan aquel activo con el menor nivel de riesgo (activo A). De manera similar, dado un nivel de riesgo (σ), los inversionistas prefieren altos rendimientos (r_A) a bajos rendimientos y sólo aceptan un nivel de riesgo mayor si les otorga una mayor tasa de rendimiento.

[4] Una función de utilidad es una expresión matemática la cual asigna un valor a todas las posibles opciones; a mayor valor, mejor la utilidad obtenida.

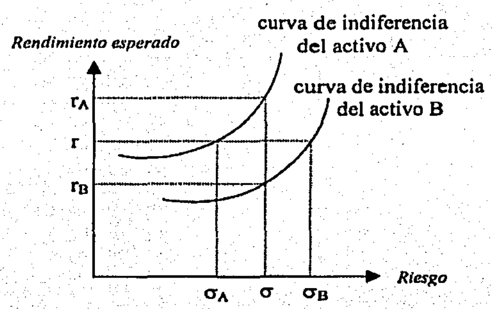


Figura 2.2 Elección entre dos activos, con base en su riesgo y rendimiento

Sobre estos supuestos, vamos a saber si tenemos o no un portafolio eficiente. En el momento de construir un portafolio, los inversionistas buscan maximizar el rendimiento esperado de su inversión a un nivel de riesgo dado, que ellos están dispuestos a aceptar.[5] A los portafolios que satisfacen este requerimiento se les conoce como *portafolios eficientes.* Los conceptos de rendimiento esperado y riesgo serán definidos de una manera más formal más adelante.

Para construir un portafolio eficiente, es necesario hacer algunas suposiciones acerca del posible comportamiento del inversionista en el momento de tomar decisiones de inversión. Una suposición razonable es que los inversionistas sean *adversos al riesgo.* Un inversionista que presente aversión al riesgo, como se mencionó antes, es aquel que al momento de enfrentarse con dos posibles inversiones con el mismo rendimiento esperado pero con dos riesgos diferentes, va a preferir la inversión que presente el menor riesgo.

[5] O de otra forma, los inversionistas buscan minimizar el riesgo al que están expuestos, dado un cierto nivel de rendimiento esperado.

Dados varios portafolios eficientes, de donde un inversionista puede escoger, un *portafolio óptimo* es el que va a preferirse.

2.1.c Activos riesgosos vs. Activos libres de riesgo

Es importante tomar en cuenta que al momento de construir un portafolio existe la posibilidad de encontrar activos que sean considerados riesgosos y libres de riesgo, ya que de esto puede depender el valor del rendimiento esperado del portafolio.

Un activo riesgoso es aquel en el que el rendimiento que se obtendrá en un futuro es incierto. Por ejemplo las acciones de la mayoría de las compañías son activos riesgosos ya que no existe la seguridad del rendimiento que se obtendrá. Incluso instrumentos[6] emitidos por el gobierno de Estados Unidos pueden ser activos riesgosos. Por ejemplo, un inversionista que adquiere un bono del gobierno de Estados Unidos que vence en 30 años no conoce el rendimiento que va a obtener si este bono se planea conservar únicamente durante un año. Esto es debido a que un cambio en la tasa de interés puede afectar el precio del bono dentro de un año a partir de este momento, y por lo tanto también el rendimiento esperado de invertir en ese bono por un año.

Sin embargo, existen activos en los cuales el rendimiento esperado en el futuro es conocido con certeza el día de hoy. Estos activos son los conocidos como libres de riesgo. Los activos libres de riesgo son comúnmente definidos como obligaciones a corto plazo del gobierno de Estados Unidos. Por ejemplo, si un inversionista adquiere un instrumento del gobierno de Estados Unidos (U.S. government security[7]) que vence a un año, y además el inversionista planea conservarlo hasta el vencimiento, entonces no existe ninguna duda sobre el rendimiento que se obtendrá. Es decir, un activo libre de riesgo es uno que está libre del riesgo de falta de pago, por lo que existe la seguridad de que pague su rendimiento esperado.

[6] Estos instrumentos en Estados Unidos se les conoce como securities y son instrumentos financieros seguros, el equivalente en México serían los bonos a corto plazo.
[7] Los equivalentes a estos instrumentos en México serían los CETES.

Los inversionistas por lo general se presentan a diferentes opciones entre un grupo de activos riesgosos. En esta parte del trabajo daremos un vistazo a la forma de medir el rendimiento esperado de un activo riesgoso y de un portafolio de activos riesgosos.

2.2 Cálculo del Valor Esperado

Ahora supongamos que tenemos un portafolio constituido por N activos. Para calcular el rendimiento total del portafolio es fácil observar que puede ser calculado mediante la siguiente expresión:

$$R = w_1R_1 + w_2R_2 + \ldots + w_NR_N$$
(ec. 2.1)

donde:

R = rendimiento total del portafolio
w_n = peso del activo n
R_n = rendimiento del activo n
N = número del activos en el portafolio

O de forma simplificada, la ecuación 2.1 la podemos expresar como sigue:

$$R = \sum_{n=1}^{N} w_n R_n$$
(ec. 2.2)

La ecuación 2.2 dice que el rendimiento de un portafolio de N activos (R) es igual a la suma de los pesos de cada activo del portafolio por su rendimiento individual, para cada uno de los activos n.

Como se pudo observar dentro del cálculo del rendimiento total del portafolio, fueron utilizados valores ponderados, ya que el peso que cada activo puede afectar el resultado del rendimiento total del portafolio; esto puede ser ejemplificado de la siguiente forma:

Supongamos que contamos con dos portafolios, cada uno conformado con dos activos los cuales tienen el mismo rendimiento individual, sin embargo, el peso de cada uno de ellos es diferente dando como resultado rendimientos totales distintos:

Portafolio 1

Activo	w	R
A	30%	7%
B	70%	2%

Portafolio 2

Activo	w	R
A	65%	7%
B	35%	2%

Lo que obtendríamos para cada uno de los portafolios sería lo siguiente:

Rendimiento total para el portafolio 1:

$$R = w_A R_A + w_B R_B = (.30)(.07) + (.70)(.02) = .035 = \mathbf{3.5\%}$$

Rendimiento total para el portafolio 2:

$$R = w_A R_A + w_B R_B = (.65)(.07) + (.35)(.02) = .053 = \mathbf{5.3\%}$$

El siguiente paso a seguir en el manejo de portafolios es la obtención de su rendimiento esperado. Esto nos indicará el comportamiento esperado del rendimiento del portafolio. Para realizar este cálculo partimos de la misma ecuación 2.1, sólo que ahora necesitamos obtener el valor esperado de la ecuación, es decir:

$$E[R] = E[w_1R_1 + w_2R_2 + \cdots + w_NR_N]$$

Pero por propiedades de la esperanza lo que obtendríamos sería lo siguiente:

$$E[R] = E[w_1R_1] + E[w_2R_2] + \cdots + E[w_NR_N]$$

Como w_n es una constante, la ecuación final para el cálculo del rendimiento esperado es:

$$E[R] = w_1E[R_1] + w_2E[R_2] + \cdots + w_NE[R_N]$$

(ec. 2.3)

Como se puede observar en la ecuación 2.3 es necesario obtener el valor esperado de cada activo. Existen diversas alternativas para el cálculo del rendimiento esperado de cierto activo, los cuales deben considerar una proyección del precio del instrumento para el horizonte de inversión deseado. Una proyección tradicional ha sido el considerar el rendimiento promedio histórico como un buen estimador del rendimiento esperado[8], con lo cual se puede decir que:

$$E[R] = \frac{1}{T} \cdot \sum_{j=1}^{T} R_{t-j}$$

[8] Ver Apéndice A. Conceptos Estadísticos

donde:

T = número de datos

Esta forma de obtener el rendimiento esperado de cada activo está basada en la suposición de un comportamiento normal[9] de los rendimientos de cada uno de los instrumentos que constituyen el portafolio.

2.3 Medición del Riesgo del Portafolio. Cálculo de la Volatilidad

El diccionario define "riesgo" como "peligro o inconveniente posible; exposición a una pérdida o lesión". Con respecto a la inversión, los inversionistas han utilizado varias definiciones para describir el riesgo. El Profesor Harry Markowitz cambió la forma en que la gente pensaba acerca del riesgo cuantificando su concepto. Él definió riesgo en términos de una medida estadística conocida como la varianza. Específicamente, Markowitz cuantificó riesgo como la varianza del rendimiento esperado de un activo.

Tabla 2.1

Distribución de Probabilidad para la Tasa de Rendimiento para el Activo XYZ

n	Tasa de rendimiento	Probabilidad de Ocurrencia
1	15%	0.50
2	10	0.30
3	5	0.13
4	0	0.05
5	-5	0.02
		1.00

[9] Ver Apéndice A. Conceptos Estadísticos

2.3.a Varianza como Medida del Riesgo

La varianza de una variable aleatoria es una medida de la dispersión de posibles respuestas alrededor del valor esperado. En el caso del rendimiento de un activo, la varianza es la medida de la dispersión de los posibles resultados para la tasa de rendimiento alrededor del rendimiento esperado.

La ecuación para la varianza del rendimiento esperado del activo *i*, está denotado por $var(R_i)$, es:

$$var(R_i)=p_1[r_1-E(R_i)]+p_2[r_2-E(R_i)]^2+...+p_N[r_N-E(R_i)]^2$$

ó

$$var(R_i)=\sum_{n=1}^{N} p_n[r_n-E(R_i)]^2$$

(ec. 2.4)

Utilizando la distribución de probabilidad del rendimiento para el activo XYZ (*tabla 2.1*), podemos ilustrar la forma de calcular la varianza:

$$Var(R_{XYZ})=0.50(15\%-11\%)^2+0.30(10\%-11\%)^2+0.13(5\%-11\%)^2+0.05(0\%-11\%)^2$$
$$+0.02(-5\%-11\%)^2+0.02(-5\%-11\%)^2=24\%$$

La varianza asociada a la distribución de rendimientos mide la restricción con la que la distribución está agrupada alrededor de la media o el rendimiento esperado. Markowitz argumentó que esta restricción o varianza es equivalente a la incertidumbre o nivel de riesgo de una inversión. Si un activo es no-riesgoso, tiene una dispersión del rendimiento esperada de cero.

❖ **Desviación Estándar**

Dado que la varianza son unidades al cuadrado, es común verla convertida en desviación estándar o sea, la raíz cuadrada de la varianza:

$$SD(R_i) = \sqrt{\operatorname{var}(R_i)}$$

Para el activo XYZ, entonces la desviación estándar es:

$$SD(R_{XYZ}) = \sqrt{24\%} = 4.9\%$$

Ambos son conceptualmente equivalentes; esto es entre más grande la varianza o desviación estándar se tenga, el riesgo de inversión es mayor.

❖ **Crítica de la Varianza como Medida del Riesgo**

Existen 2 críticas sobre el uso de la varianza como medida del riesgo. La primer crítica es que dado que la varianza mide la dispersión del rendimiento de un activo sobre su valor esperado, entonces considera la posibilidad de rendimientos por arriba del rendimiento esperado y debajo del rendimiento esperado. Sin embargo, los inversionistas no ven a los posibles rendimientos sobre el rendimiento esperado como un resultado favorable. De hecho, tales resultados son muy favorables. Por esta razón, algunos investigadores han argumentado que al medir el riesgo no se deben considerar los posibles rendimientos sobre el rendimiento esperado.

Markowitz reconoció esta limitación y sugirió una medida sobre la parte baja del riesgo (el riesgo de realizar un resultado por debajo del valor esperado llamado la semivarianza). La semivarianza es similar a la varianza excepto que, en el cálculo, no se consideran los rendimientos que se encuentran sobre el valor esperado. De cualquier forma, debido a los problemas de cálculo que se producen al usar la semivarianza y a los limitados recursos disponibles en aquel tiempo, se comprometió y utilizó la varianza para desarrollar la teoría de portafolios.

Hoy en día, varias medidas de la parte baja del riesgo son utilizadas por los participantes. Sin embargo, a pesar de la medida utilizada, los principios básicos de la teoría de portafolios desarrollada por Markowitz y lo que se verá más adelante es aplicable. Esto es, la opción de la medida de riesgo puede afectar su cálculo, pero no invalida la teoría.

La segunda crítica es que la varianza es sólo una medida de cómo varían los rendimientos alrededor de su rendimiento esperado, entonces la medida estadística del sesgo[10] de una distribución deberá ser utilizada conjuntamente con la varianza. Markowitz no consideró ninguna de estas en el desarrollo de la teoría de portafolios. La varianza puede ser justificada basándose en la evidencia empírica que sugiere que la distribución histórica de los rendimientos de las acciones es aproximadamente simétrica. Dado que el rendimiento esperado y la varianza son los únicos dos parámetros que los inversionistas consideran para decisiones de inversiones, la formulación de Markowitz de la teoría de portafolios está considerada como un modelo de dos parámetros.

2.3.b Medición del Riesgo para un Portafolio de Dos Activos

La ecuación 2.4 da la varianza para el rendimiento de un activo individual. La varianza de un portafolio consistente de dos activos es un poco más difícil de calcular y depende no sólo de la varianza de los dos activos, sino también de qué tan cercano esté un activo del otro. La fórmula es:

[10] Ver Apéndice A. Conceptos Estadísticos

$$var(R_p)=w_i^2 var(R_i)+w_j^2 var(R_j)+2w_i w_j cov(R_i,R_j)$$

(ec. 2.5)

donde:

$cov(R_i,R_j)$= covarianza entre los rendimientos para los activos *i* y *j*

En palabras, la ecuación 2.5 establece que la varianza del rendimiento del portafolio es la suma de las varianzas ponderadas de los 2 activos más la covarianza ponderada entre los dos activos.

- **Covarianza**

La covarianza es un nuevo término dentro de este tema y tiene una traducción matemática precisa. De cualquier forma, su significado práctico es el grado en que los rendimientos de dos activos varían o cambian juntos. La covarianza no está expresada en una unidad en particular. Una covarianza positiva significa que los rendimientos de los dos activos tienen a moverse o cambiar en la misma dirección, mientras que una covarianza negativa significa que los rendimientos se mueven en dirección opuesta. La covarianza entre cualquiera de los activos *i* y *j* es calculado usando la siguiente fórmula:

$$cov(R_i,R_j)=p_1[r_{i1}-E(R_i)][r_{j1}-E(R_j)]+p_2[r_{i2}-E(R_j)][r_{j2}-E(R_j)]+...+p_N[r_{iN}-E(R_i)][r_{jN}-E(R_j)]$$

(ec. 2.6)

donde:

r_{in}= la n-ésima posible tasa de rendimiento para el activo *i*

r_{jn}= la n-ésima posible tasa de rendimiento para el activo *j*

p_n= la probabilidad de obtener la tasa de rendimiento n para los activos *i* y *j*

N= el número de posibles resultados para la tasa de rendimiento

Para ilustrar el cálculo de la covarianza entre los dos activos, se utilizarán las dos acciones en la *tabla 2.2*. El primer activo es el XYZ, que usamos anteriormente para ilustrar el cálculo del rendimiento esperado y la desviación estándar. El otro activo hipotético es el activo ABC. Usando los datos de la *tabla 2.2* en la ecuación, calculamos la covarianza entre el activo XYZ y el activo ABC como sigue:

$$cov(R_{XYZ}\ R_{ABC})=0.50(15\%-11\%)(8\%-8\%)+0.30(10\%-11\%)(11\%-8\%)+$$
$$0.13(5\%-11\%)(6\%-8\%)+0.05(0\%-4\%)(0\%-8\%)+0.02(-5\%-11\%)(-4\%-8\%)=8.9$$

❖ **Relación entre la covarianza y correlación**

La covarianza es análoga a la correlación entre los rendimientos esperados para los dos activos. Específicamente, la correlación entre los rendimientos para los activos *i* y *j* es definida como la covarianza de los dos activos divididos por el producto de sus desviaciones estándar:

$$cor(R_i, R_j) = \frac{cov(R_i, R_j)}{SD(R_i)SD(R_j)}$$

(ec. 2.7)

La correlación y la covarianza son conceptualmente términos equivalentes. Dividiendo la covarianza entre el producto de las desviaciones estándar simplemente (pero importantemente) hace que la correlación se vuelva un número comparable a través de diferentes activos. La correlación entre los rendimientos de nuestras acciones ejemplo es:

$$cor(R_{XYZ}, R_{ABC}) = \frac{8.9}{(4.9)(3)} = 0.60$$

El coeficiente de correlaciones puede tener valores que vayan de +1.0, denotando un perfecto movimiento en la misma dirección, al –1.0, denotando un perfecto movimiento en direcciones opuestas.

2.3.c Cálculos Utilizando Rendimientos Históricos

En las próximas ilustraciones, los datos que necesitaremos para la teoría de portafolios (el valor esperado, desviación estándar, covarianza y correlación) fueron calculados de la distribución de probabilidad de las dos acciones.

Tabla 2.2

Distribución de Probabilidad para la Tasa de Rendimiento para los Activos XYZ y ABC

n	Tasa de rendimiento para el activo XYZ	Tasa de rendimiento para el activo ABC	Probabilidad de ocurrencia
1	15	8%	0.50
2	10	11	0.30
3	5	6	0.13
4	0	0	0.05
5	-5	-4	0.02
Total			1.00
Rendimiento Esperado	11%	8%	
Varianza	24%	9%	
Desviación Estándar	4.9%	3%	

Así, éstos son realmente "valores esperados", dado que fueron derivados probabilísticamente. En la práctica, la estimación de estas medidas estadísticas son típicamente obtenidas de observaciones históricas en las tasas de rendimientos.

La *tabla 2.3* muestra rendimientos históricos para cinco periodos de tiempo para dos activos hipotéticos, A y B. Se muestran tres diferentes casos. La media, varianza, desviación estándar, covarianza y correlación son mostradas para cada caso.[11]

El caso I muestra correlación positiva perfecta o movimiento: ambos A y B se alzan juntas en incrementos iguales respectivamente. El caso II ilustra una correlación casi cero, esto es, ambos activos se mueven en una "moda" larga e independiente. El caso III ilustra correlación perfecta negativa: cuando el activo A sube, B baja proporcionalmente. En realidad, pocos ejemplos se asemejan a estos tres casos. La mayoría de los activos comunes tienen un correlación positiva pequeña de rendimientos con otra a través del tiempo. Sin embargo, los tres ejemplos demuestran los conceptos básicos de la correlación y covarianza de los rendimientos de los activos.

❖ Implicaciones

Dado que la varianza de un portafolio depende de la covarianza de los activos que la constituyen, el riesgo del portafolio puede ser pequeño a pesar del hecho de que el riesgo de los activos individuales que están en el portafolio pueden ser un poco altos. Este principio tiene implicaciones importantes no sólo para el manejo de portafolios, sino que también para desafiar estándares legales que juzgan la conducta de un administrador profesional de dinero.

2.3.d Medición del Riesgo de un Portafolio con Más de Dos Activos

[11]Éstas fueron calculadas con base en las fórmulas que se encuentran en el Apéndice A. Conceptos Estadísticos

Hasta ahora, se han dado el riesgo del portafolio para un portafolio que contiene dos activos. La extensión para tres activos (*i, j, y k*) está representada como sigue:

$$var(R_p)= w_i^2var(R_i)+ wj^2var(Rj)+ w_k^2var(R_k)+2w_iw_jcov(R_i\,R_j)+$$
$$2w_iw_kcov(R_i\,R_k)+2w_jw_kcov(R_j\,R_k)$$

(ec. 2.8)

Tabla 2.3

Resumen de Estadísticas Basadas en Tasas de Rendimiento Históricas

		Rendimientos Observados por Periodo							
Caso	Acción	1	2	3	4	5	Media	Varianza	Desv. Estándar
I	A	2%	4%	6%	8%	10%	6%	10%	3.2%
	B	4	8	12	16	20	12	40	6.3
	Covarianza=	20.2				Correlación=	+1.0		
II	A	12	8	20	4	16	12	40	6.3
	B	8	0	4	6	2	4	10	3.2
	Covarianza=	0.0				Correlación=	0.0		
III	A	2	4	6	8	10	6	10	3.2
	B	20	16	12	8	4	12	40	6.3
	Covarianza=	-20.2				Correlación=	-1.0		

En palabras, la ecuación 2.8 dice que la varianza del rendimiento del portafolio en la suma de las varianzas ponderadas de los activos individuales más la suma de las covarianzas ponderadas de los activos. De hecho, la varianza del rendimiento esperado del portafolio es la suma ponderada de las varianzas individuales de los activos del portafolio más la suma ponderada del grado en el que los activos varían juntos.

En general, para un portafolio de G activos, la varianza es:

$$\operatorname{var}(R_p)=\sum_{g=1}^{G} w_g^2 \operatorname{var}(R_g)+\sum_{g=1}^{G}\sum_{h=1}^{G} w_g w_h \operatorname{cov}(R_g,R_h)$$

para h $\neq$g

(ec. 2.9)

Todo lo anterior se puede sintetizar en forma matricial para obtener la volatilidad del portafolio con el que el inversionista esté trabajando, de manera tal que exista una forma rápida y sencilla de obtenerla.

La volatilidad del portafolio se obtendrá en varios pasos, primero necesitamos conocer la desviación estándar de cada uno de nuestros activos de aquí vamos a partir para construir la matriz de covarianzas (Φ). Dicha matriz se construirá de la siguiente forma:

- ✓ La matriz será cuadrada y en la diagonal principal tendrá el estimado de la varianza de cada uno de los activos
- ✓ En la celdas restantes se calculará la covarianza entre los dos activos correspondientes, por ejemplo, en las celdas (1,2) necesitamos encontrar la covarianza entre el activo uno y el activo dos

$$\begin{bmatrix} \operatorname{var}(x_1) & \operatorname{cov}(x_1,x_2) & \operatorname{cov}(x_1,x_3) & \cdots & \operatorname{cov}(x_1,x_n) \\ \operatorname{cov}(x_2,x_1) & \operatorname{var}(x_2) & \operatorname{cov}(x_2,x_3) & \cdots & \operatorname{cov}(x_2,x_n) \\ \operatorname{cov}(x_3,x_1) & \operatorname{cov}(x_3,x_2) & \operatorname{var}(x_3) & \cdots & \operatorname{cov}(x_3,x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{cov}(x_n,x_1) & \operatorname{cov}(x_n,x_2) & \operatorname{cov}(x_n,x_3) & \cdots & \operatorname{var}(x_n) \end{bmatrix}$$

Una vez que contamos con la matriz, calculamos la volatilidad mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Volatilidad } (\sigma_p) = w'\Phi w$$
(ec. 2.10)

donde:

w = vector de pesos de los activos

w' = vector de pesos transpuesto

Φ = matriz de covarianzas

σ_p = volatilidad del portafolio

De esta forma es posible encontrar la volatilidad de un portafolio que incluya varios activos. Cabe mencionar que de nueva cuenta se utilizaron los pesos de cada uno de los activos, los cuales se utilizaron anteriormente para obtener el rendimiento esperado del portafolio.

2.3.e Diversificación de Portafolios

A menudo, se puede escuchar a los inversionistas que hablan de diversificar su portafolio. Con esto, un inversionista quiere decir que va a construir un portafolio de tal forma que pueda reducir el riesgo del portafolio sin necesidad de sacrificar el rendimiento. Esto es ciertamente una meta que los inversionistas deben buscar. Sin embargo, la pregunta es, ¿cómo debe hacer el inversionista esto en la práctica?

Algunos inversionistas pueden decir que un portafolio puede ser diversificado incluyendo activos de todas las clases. Por ejemplo, un inversionista puede argumentar que un portafolio debe estar diversificado de manera tal que se inviertan en acciones, bonos y bienes raíces. Mientras que eso suena razonable, se deben hacer dos preguntas más para poder construir un portafolio diversificado. Primero, ¿qué cantidad de cada uno de estos diferentes activos se debe considerar para invertir en el portafolio? ¿Se debe invertir 40% del portafolio en acciones, 50% en bonos y 10% en bienes raíces, o alguna otra forma es la correcta? Segundo, dada la forma correcta de invertir, ¿qué acciones, bonos y bienes raíces debe escoger el inversionista?

Algunos inversionistas que se enfocan únicamente en alguna clase de activo, como un bono, argumentan que dichos portafolios también deben ser diversificados. Con esto, ellos quieren decir que un inversionista no debe poner todos sus fondos en un solo activo de alguna compañía, más bien debe incluir activos de varias compañías. Aquí se vuelven a presentar varias preguntas. Primero, ¿qué compañías deberán estar representadas en el portafolio? Segundo, ¿qué tanto del portafolio deberá ser para cada una de los activos de cada compañía?

Antes del desarrollo de la Teoría de Portafolio, mientras los inversionistas comúnmente hablan de la diversificación en términos generales, ellos nunca proveen las herramientas analíticas para poder responder a las preguntas que antes se mencionaron. Una contribución mayor de la Teoría de Portafolio es el utilizar los conceptos que serán aclarados más adelante, una medida cuantitativa de la diversificación de los portafolios es posible, y es esta medida la que puede ser utilizada para alcanzar el máximo beneficio de la diversificación.

Podemos hablar básicamente de la existencia de dos diferentes formas de diversificar los portafolios, la *Diversificación Ingenua* y la *Diversificación de Markowitz*. Ahora se dará una breve introducción de lo que ambas quieren decir.

- **Diversificación "Ingenua"**

La estrategia de diversificación ingenua se alcanza cuando un inversionista simplemente invierte en un número de activos de diferentes tipos y espera que la varianza del rendimiento esperado en el portafolio se minimice. Por ejemplo, una regla bien conocida acerca de cómo invertir con activos comunes sostiene que los portafolios deben estar diversificados entre varias industrias. La diversificación ingenua es un poco parecida a una práctica que Alexander y Francis[12] llamaron "financial interior decorating" (decorado financiero interior). De acuerdo con esta aproximación, un consultor de inversiones busca diseñar portafolios de manera tal que vayan con la "personalidad financiera" del inversionista. Como Alexander y Francis notaron, la suposición del decorado financiero interior es que ciertos tipos de inversionistas tienen ciertos requerimientos del rendimiento de la inversión que se pueden completar por medio de un diseño "artesanal" de un portafolio de forma que los cumpla.

Por ejemplo, las viudas usualmente tienen una gran necesidad de altos ingresos; por lo tanto deben invertir en los llamados activos de bajo riesgo / altos dividendos (como bonos o acciones sobre utilidades eléctricas). Poca o ninguna atención es puesta en el grado de correlación entre los rendimientos de los activos de esas categorías. La concentración de las inversiones en cualquier categoría de activo es una invitación a incrementar el riesgo implícito por la alta covarianza que usualmente tienen los rendimientos de los activos dentro de tales categorías. En la mayoría de las veces nos acompañarán en las subidas, pero nos dejarán solos cuando vayamos hacia abajo. Sin embargo existe una mejor forma de enfrentar el problema de diversificación.

- **Diversificación de Markowitz**

La estrategia de diversificación de Markowitz se relaciona primordialmente con el grado de covarianza entre los rendimientos de activos en un portafolio. La contribución principal de Markowitz es la formulación del riesgo de un activo en términos de los activos del portafolio. La diversificación de Markowitz busca combinar activos en un portafolio con rendimientos que sean menos que perfecta y positivamente correlacionados, en un esfuerzo de reducir el riesgo de portafolio (volatilidad) sin sacrificar el rendimiento. Es la relación entre mantener el rendimiento, mientras se reduce el riesgo a través del análisis de la covarianza entre rendimiento de los activos, lo separa a la diversificación de Markowitz de la diversificación ingenua y la hace más efectiva.

[12] Gordon J. Alexander and Jack C. Francis, *Portfolio Analysis*, 3era. Ed.

La diversificación de Markowitz y la importancia de las correlaciones de los activos puede ser ilustrada con un simple ejemplo de un portafolio de dos activos. Para hacer esto, primero mostraremos la relación general entre el riesgo esperado de un portafolio de dos activos y la correlación de los rendimientos de los activos. Entonces buscaremos los efectos en el riesgo del portafolio al combinar activos con diferentes correlaciones.

✓ *Riesgo de Portafolio y Correlaciones*

En nuestro portafolio de dos activos, asumimos que un activo C y uno D está disponibles con los rendimientos esperados y desviaciones estándar siguientes:

	E(R)	SD(R)
Activo C	10%	30%
Activo D	25%	60%

Si un peso igual (50%) es asignado a ambas activos, el rendimiento esperado del portafolio puede ser calculado como:

$$E(R)=0.50(10\%)+0.50(25\%)=17.5\%$$

La varianza del rendimiento en un portafolio de dos acciones es:

$$var(R)=(0.50)^2(30\%)^2+(0.50)^2(60\%)^2+2(0.50)(0.50)cov(R_c\ R_D)$$

De la ecuación 2.7 tenemos que:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$cor(R_C,R_D)=\frac{cov(R_C,R_D)}{SD(R_C)SD(R_D)}$$

y por lo tanto:

$$cov(R_C\ R_D) = cor(R_C\ R_D)\ SD(R_C)\ SD(R_D)$$

y como $SD(R_C)=30\%$ y $SD(R_D)=60\%$ entonces:

$$cov(R_C\ R_D) = cor(R_C\ R_D)(30\%)(60\%)$$

sustituyendo en la expresión para var(R), tenemos:

$$var(R) = (0.50)^2(30\%)^2 + (0.50)^2(60\%)^2 + 2(0.50)(0.50)\ cor(R_C\ R_D)(30\%)(60\%)$$

con lo que:

$$SD(R_p) = \sqrt{(0.5)^2(30\%)^2 + (0.5)^2(60\%)^2 + 2(0.5)(0.5)(30\%)(60\%)cor(R_C, R_D)}$$
$$= \sqrt{0.1125 + (0.09)cor(R_C, R_D)}$$

✓ *Efecto de la Correlación de los Rendimientos de los Activos en el Riesgo de Portafolio*

¿Cómo podría cambiar el riesgo para un portafolio de dos activos con distintas correlaciones entre los rendimientos de las acciones? Consideremos los siguientes tres casos: $cor(R_C\ R_D)=+1,0,-1$. sustituyendo en la ecuación 2.7 para estos tres casos de correlación tenemos:

$cor(R_C\ R_D)$	E(R)	SD(R)
+1	17.5%	45.0%
0	17.5	35.0
-1	17.5	15.0

Así como la correlación entre los activos C y D desciende de +1,0 hasta −1, también la desviación estándar desciende de 45% a 15%. Sin embargo el rendimiento esperado se mantiene en 17.5% para cada caso.

Este ejemplo ilustra claramente el efecto de la diversificación de Markowitz. El efecto es muchas veces llamado la magia de la diversificación. El principio de la diversificación de Markowitz establece que en la medida en que la correlación (covarianza) entre rendimientos descienda, así lo hará la varianza del rendimiento para ese portafolio. Las buenas noticias son que los inversionistas pueden mantener el rendimiento esperado del portafolio y al mismo tiempo reducir el riesgo de portafolio combinando activos con menor correlación. De cualquier forma, las malas noticias son que muy pocos activos tienen correlaciones pequeñas o negativas con otros activos.

2.4 Obtención de la Frontera Eficiente. Optimización de un Portafolio

El objetivo de una optimización de un portafolio es maximizar el rendimiento esperado a un nivel de riesgo dado o minimiza el riesgo a un nivel de rendimiento esperado dado. En la mayoría de las aproximaciones para la optimización, la volatilidad del portafolio se ha utilizado como el riesgo objetivo que se va a minimizar. El proceso incluye la creación de la matriz de covarianza que, junto con los rendimientos esperados de los activos, es optimizada por un programa de optimización lineal o cuadrática.

En un mercado con muchos instrumentos el resultado final de la creación de carteras probablemente tenga el aspecto de la *figura 2.3*. Los puntos sobre el interior de la curva representan activos individuales, mientras que la curva que se desplaza desde *L* hasta *H* representa los portafolios finales que se pueden crear provenientes de los muchos activos individuales disponibles en el mercado.

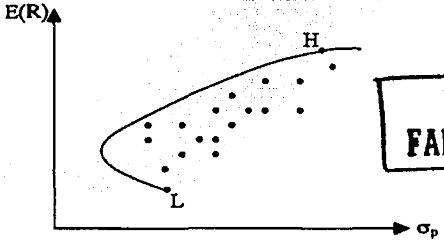


Figura 2.3 Representación de una frontera eficiente

La frontera eficiente es la representación gráfica de los elementos del portafolio eficiente. En la *figura 2.3* la frontera eficiente es simplemente la línea que va desde *L* hasta *H*.

El portafolio eficiente y la frontera eficiente tienen una importancia especial para los inversionistas. Todos los inversionistas que desean rendimientos esperados más altos y que desean evitar riesgo, querrán invertir en portafolios que pertenezcan al portafolio eficiente.

En ausencia de una tasa libre de riesgo, la teoría de portafolios indica que los *portafolios eficientes de Markowitz* (construidos con base en sus rendimientos esperados y a sus varianzas), son aquellos que tienen el mayor rendimiento esperado con un nivel de riesgo dado. Por lo que para cada nivel de riesgo habrá un portafolio eficiente de Markowitz. A la colección de todos los portafolios eficientes de Markowitz se le conoce como *frontera eficiente de Markowitz*. En la *figura 2.4*, para un portafolio situado a la derecha de la frontera eficiente de Markowitz, existe otro con mayor rendimiento o con menor riesgo[13]. Por ejemplo, el portafolio A, no se encuentra en la frontera eficiente de Markowitz, debido a que el portafolio B ofrece el mismo rendimiento con menor riesgo y el portafolio C, tiene un rendimiento mayor con el mismo nivel de riesgo.

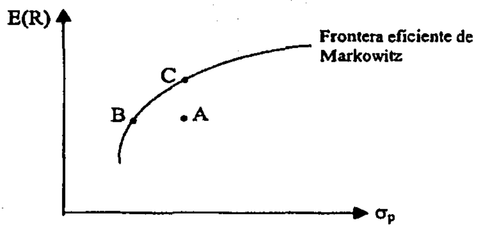


Figura 2.4 Frontera eficiente de Markowitz

Como vimos hace unos momentos, la frontera eficiente es la que nos va a definir los portafolios factibles que cumplen con el requisito de maximizar rendimiento para todo nivel de riesgo. En términos matriciales el problema se reduciría a:

$$
\begin{aligned}
&\underset{\{w_1 \cdots w_l\}}{Max} E[R_p] = w' \cdot E[R] \\
&s.a. \\
&\sigma_p \equiv w' \cdot E[\Phi] \cdot w = \sigma_0 \\
&0 \leq w_i \leq 1 \\
&w' \cdot \bar{1} = 1
\end{aligned}
$$

(ec. 2.11)

o de forma equivalente tendríamos:

$$
\begin{aligned}
&\underset{\{w_1 \cdots w_n\}}{Min} \sigma_p = w' \cdot \Phi \cdot w \\
&s.a. \\
&R_p \equiv w' \cdot E[R] \cdot w = R_0 \\
&0 \leq w_1 \leq 1 \\
&w' \cdot 1 = 1
\end{aligned}
$$

(ec. 2.12)

Al resolver el problema de maximización del rendimiento esperado (o minimización de la volatilidad) propuesto, se están escogiendo los puntos que corresponden a la curva que contiene a todos los demás posicionamientos alternativos que cumplen con las restricciones del problema. En resumen, para el diseño de la frontera eficiente requerimos de dos insumos determinantes: primero, el vector de rendimientos esperados, que proviene del análisis del rendimiento total para todos los activos elegibles de un portafolio, y segundo, la matriz de riesgo (mejor conocida como la matriz de covarianzas).

[13] Los portafolios que se encuentran a la izquierda (hacia arriba) de la frontera eficiente de Markowitz ni siquiera son portafolios factibles, entendiéndose por portafolio factible aquel portafolio que un inversionista puede construir con los activos disponibles.

También es posible obtener la frontera eficiente por medios computacionales, ya que existen programas especiales para resolver problemas de programación lineal o cuadrática, lo cual quedará mejor explicado durante la aplicación de nuestro problema.

2.5 Ejemplo Práctico

Para poder darnos una mejor idea del uso real de toda la teoría antes mencionada, se incluye a continuación un caso de estudio realizado por la consultoría Towers Perrin, por medio del cual podemos observar que la Teoría de Portafolio sirve para inversión en acciones, como todo el mundo está acostumbrado, sino que su uso se puede ampliar.

ZENNON, INC.: Enfocados en la Política de Inversión

Esta compañía manufacturera global ha acumulado excedentes importantes en su mayor plan de pensión. Posteriormente, se utilizó mucho esta reserva, a causa de dos años consecutivos de resultados adversos. A razón de reconsiderar su comportamiento financiero y sus estrategias de administración, los ejecutivos de Zennon comisionaron un estudio de activos / pasivos (comparación de entradas y salidas de dinero). La política de inversión de la compañía no había sido revisada por varios años, y querían saber si la colocación de sus activos era la óptima para la situación actual de su plan. Esto requirió análisis no sólo de los activos de los planes de pensiones, sino que también del plan de responsabilidades (pasivos) – y tomando en consideración cómo ambos van a estar afectados por el plan, y en los cambios de mercado demográfico y de capital durante el tiempo.

El estudio utilizó el análisis de la frontera eficiente, una herramienta estadística que hace posible que una compañía evalúe las alternativas que existen de diversificación de activos y determina cuál es la que posee la combinación más efectiva de riesgo y recompensa (rendimiento). Era crítico para el análisis de Zennon el obtener la definición apropiada de riesgo y de las medidas de recompensa. Esto se necesitaba conectar a través de todas las medidas de comportamiento de la compañía hasta el punto que fuera posible.

En esta medida, la compañía estaba particularmente interesada en considerar el nivel y la volatilidad del costo anual de pensión y los requerimientos de contribución. Por lo tanto, a pesar de que los antiguos análisis de diversificación de activos en Zennon estaban enfocados en el rendimiento esperado y en la volatilidad, el nuevo estudio se enfocaría en combinar comportamientos activos / pasivos.

En el más tradicional análisis de la frontera eficiente mostrado en el *Exhibit 1* indica que el plan de Zennon de mezclar activos puede ser ajustado para alcanzar una tasa de rendimiento un poco más alta sin necesidad de incrementar el riesgo. Pero la frontera eficiente mostrada en el *Exhibit 2* utiliza las definiciones de riesgo y recompensa que se creían que eran las necesarias o más relevantes para los objetivos financieros de Zennon. Éste se enfoca en la proporción de activos hacia la obligación de beneficio proyectada (projected benefit obligation, PBO) –la responsabilidad utilizada para determinar el costo de la pensión- y muestra que la proporción de financiamiento esperado de la compañía puede ser aumentado substancialmente sin aumentar volatilidad en esta medida.

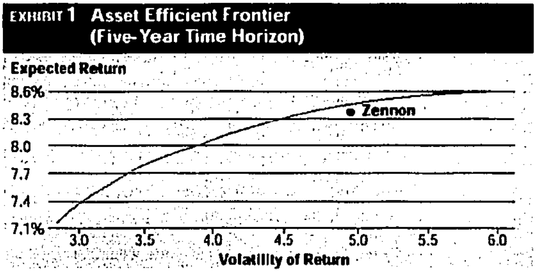


Exhibit 1.- Frontera eficiente de los activos
(Horizonte de tiempo: 5 años)

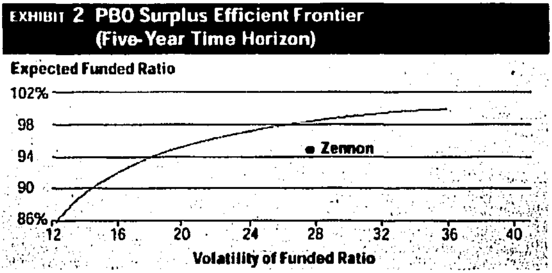


Exhibit 2.- Frontera eficiente con PBO
(Horizonte de tiempo: 5 años)

Basados en este análisis, se definieron un gran número de portafolios de inversión alternativos, después de ser expuestos a una revisión intensiva utilizando pronósticos estocásticos –un modelo de aproximación el cual simula el rango de futuros resultados de costos de pensión, contribuciones y otras variables importantes.

Los ejecutivos de Zennon buscaron identificar un portafolio que pudiera proveer una combinación superior de representaciones de financiamiento esperado y protección contra riesgos de pérdida. Entre las medidas clave de comportamiento las que se pudieron identificar fueron:

- Costo anual de pensión
- Nivel de requerimientos de contribución
- Cargos potenciales variables como resultados de pasivos sin cobertura

La implementación del plan proyectado para cada uno de los portafolios fue evaluada basado en resultados comparativos a través de una predicción en un periodo de 10 años. Estas medidas de comportamiento representaron una expansión considerable superior al criterio que Zennon había utilizado en el pasado, el cual únicamente observaba el rendimiento de la inversión realizada.

Como se muestra en el *Exhibit 3*, los resultados de la predicción a 10 años indicaron que Zennon se necesitaba preparar para un cambio de suerte. Basados en la actual política de inversión, el ingreso de la pensión a la que la compañía estaba acostumbrada ahora se esperaba se convirtiera en costo de pensión a través del periodo de predicción. Los resultados predichos también indicaron requerimientos de contribuciones substanciales esperadas, y esas cargas hacia el capital necesitarían ser anotadas en la hoja de balance de Zennon debido al plan de responsabilidades sin cobertura.

EXHIBIT 3 Zennon · 10-Year Forecast Results

	Average Results			90th Percentile Results	
	Pension Expense (% of pay)	Contributions (% of pay)	Reduction to Equity ($ millions)	Pension Expense (% of pay)	Contributions (% of pay)
Current	2.5%	6.0%	$120	8.0%	15.1%
Mix I	3.6	5.2	50	7.1	11.5
Mix II	2.4	4.4	55	6.9	11.5
Mix III	1.4	4.7	80	7.1	13.1
Mix IV	-0.5	5.1	105	6.9	15.2

Exhibit 3.- Resultados de la predicción a 10 años

Las medidas claves de riesgo de pérdida fueron definidas como el más alto porcentaje de los resultados de costo y contribuciones, es decir, 10% de los escenarios predichos produjeron resultados promedio de los 10 años a este nivel o más altos. Como se muestra en el *Exhibit 4*, basados en la actual política de inversión, los resultados indican una probabilidad del 10% de que el costo de pensión para la compañía promediará por lo menos el 8% de nómina.

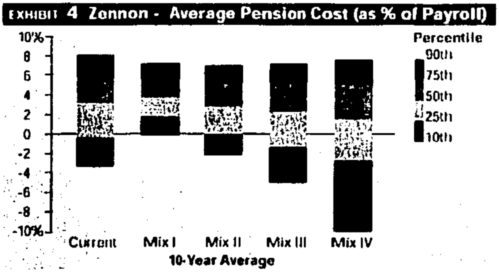


Exhibit 4.- Porcentaje de costos de pensión

Ajuste del Portafolio

Zennon encontró que los cambios al portafolio de inversión podrían mejorar los resultados del plan financiero. De los portafolios eficientes que se identificaron, Zennon escogió el Mix III, con la esperanza de que mejorará el comportamiento financiero esperado y también de que se reducirá la exposición de la compañía al riesgo de pérdida.

El portafolio revisado (ver *Exhibit 5*) dio como resultado:

- un incremento en la colocación de inversión en acciones
- diversificación adicional entre distintas clases de acciones
- promedio de duración alargada para los planes de inversión en renta fija

EXHIBIT 5 Zennon - Investment Portfolios

	Current	Mix III
U.S. large-cap equity	45%	37%
U.S. small-/mid-cap equity	10	10
International equity	5	10
Emerging market equity	2	4
Private equity	3	6
Real estate	0	5
Long-term corporate bonds	0	27
Aggregate bonds	33	0
Cash	2	1

Exhibit 5.- Portafolios de Inversión

El resultado: Zennon encontró una forma de mejorar significativamente la representación de financiamiento de pensión esperado, mientras que al mismo tiempo ayudó a controlar el riesgo de pérdida.

Capítulo 3

Aplicación

Dentro de este capítulo final, veremos paso por paso la construcción del portafolio en bonos emitidos por el Gobierno Mexicano, basándonos en la teoría que se explicó en el capítulo pasado, pero ahora lo analizaremos de una forma más sencilla y rápida. Es necesario aclarar que todos los cálculos se realizaron en el programa Excel.

Para comenzar es necesario conocer los activos que van a conformar el portafolio que manejaremos. Dichos activos serán bonos emitidos por el Gobierno Mexicano, los cuales pagan cupones de tasa fija. La lista de bonos que ocuparemos junto con el total de su emisión, fecha de vencimiento, y moneda de emisión es la siguiente:

Bono	Moneda de emisión	Fecha de Vencimiento	Total de emisión (moneda original)
UMS 9¾% of 05	USD	06-Abr-05	1,000,000.00
UMS 8½% of 06	USD	01-Feb-06	1,500,000.00
UMS 9⅞% of 07	USD	15-Ene-07	1,500,000.00
UMS 8⅝% of 08	USD	12-Mar-08	1,500,000.00
UMS 10⅜% of 09	USD	17-Feb-09	1,925,000.00
UMS 9⅞% of 10	USD	01-Feb-10	2,000,000.00
UMS 8⅜% of 11	USD	14-Ene-11	2,500,000.00
UMS 7½% of 12	USD	14-Ene-12	1,500,000.00
UMS 11⅜% of 16	USD	15-Sep-16	2,394,641.00
UMS 8⅛% of 19	USD	30-Dic-19	3,300,000.00
UMS 8% of 22	USD	24-Sep-22	1,750,000.00
UMS 11½% of 26	USD	15-May-26	1,750,000.00
UMS 8.3% of 31	USD	15-Ago-31	2,500,000.00
		Total	25,119,641.00

Una vez que conocemos los bonos con los que vamos a trabajar necesitamos conocer la media y la desviación estándar de forma individual[14]. Es importante recordar que el cálculo de la media de cada uno de los bonos nos representa el rendimiento total del mismo. Estos datos se obtuvieron de rendimientos históricos de los bonos que abarcan desde el 10 de enero de 2002 hasta el 5 de noviembre de del mismo año[15].

Bono	Estimación de parámetros	
	Media	Desv. Est.
UMS 9¾% of 05	5.2560%	0.3782%
UMS 8½% of 06	5.9101%	0.3624%
UMS 9⅞% of 07	6.2884%	0.3416%
UMS 8⅝% of 08	6.7632%	0.2602%
UMS 10⅜% of 09	7.2550%	0.2334%
UMS 9⅞% of 10	7.4600%	0.2230%
UMS 8⅜% of 11	7.4593%	0.2102%
UMS 7½% of 12	7.3632%	0.2091%
UMS 11⅜% of 16	8.2753%	0.2158%
UMS 8⅛% of 19	8.2452%	0.2156%
UMS 8% of 22	7.5475%	0.3992%
UMS 11½% of 26	8.6128%	0.2218%
UMS 8.3% of 31	8.3979%	0.2275%

[14] En este trabajo no se discutirá si los rendimientos de los factores de riesgo de los instrumentos tiene una distribución normal, pero es un asunto que debe tomarse en cuenta.
[15] Fuente: Bloomberg

El siguiente paso a realizar es obtener el peso de cada uno de los bonos con respecto al total de las emisiones. El resultado que obtengamos lo vamos a nombrar como el "vector de pesos" (w) el cual va a ser necesario para calcular tanto el rendimiento esperado como la volatilidad del portafolio. Debemos recordar que la suma de cada uno de los bonos debe ser uno (100%), lo que significa que se está tomando correctamente cada porción de los bonos dentro del portafolio.

Bono	**Peso de cada bono**
UMS 9¾% of 05	3.98%
UMS 8½% of 06	5.97%
UMS 9⅞% of 07	5.97%
UMS 8⅝% of 08	5.97%
UMS 10⅜% of 09	7.66%
UMS 9⅞% of 10	7.96%
UMS 8⅜% of 11	9.95%
UMS 7½% of 12	5.97%
UMS 11⅜% of 16	9.53%
UMS 8⅛% of 19	13.14%
UMS 8% of 22	6.97%
UMS 11½% of 26	6.97%
UMS 8.3% of 31	9.95%
Total	100%

Para tener una idea más clara de cómo se obtuvo el peso de cada uno de los bonos, a continuación se presenta la forma en la que se obtuvo el peso para el bono UMS 9¾% of 05:

$$w_1 = \frac{\text{total de la emisión del bono}_1}{\text{suma del total de las emisiones de los bonos}} = \frac{1{,}000{,}000}{25{,}119{,}641} = 3.98\%$$

Una vez que ya se obtuvieron estos datos podemos proseguir con el siguiente paso que es el de obtener el rendimiento esperado de nuestro portafolio el cual, como se dijo antes, es la suma de los valores ponderados de cada uno de los bonos dando como resultado lo siguiente:

Bono	Valor ponderado de la esperanza
UMS 9¾% of 05	0.2092%
UMS 8½% of 06	0.3529%
UMS 9⅞% of 07	0.3755%
UMS 8⅝% of 08	0.4039%
UMS 10⅜% of 09	0.5560%
UMS 9⅞% of 10	0.5940%
UMS 8⅜% of 11	0.7424%
UMS 7½% of 12	0.4397%
UMS 11⅜% of 16	0.7889%
UMS 8⅛% of 19	1.0832%
UMS 8% of 22	0.5258%
UMS 11½% of 26	0.6000%
UMS 8.3% of 31	0.8358%
Rendimiento Esperado	**7.5072%**

Para saber cómo se obtuvo cada uno de los valores ponderados de la esperanza, continuaremos con el ejemplo del bono UMS 9¾% of 05 para que así quede completamente claro cada uno de los cálculos:

$$\text{valor ponderado}_1 = \text{media}_1 * \text{peso}_1 = 0.052560*3.98\% = 0.2092\%$$

Por lo tanto, el valor del rendimiento esperado de nuestro portafolio es:

E(R)= 7.5072%

Una vez que ya contamos con el valor del rendimiento esperado, el paso siguiente ha realizar para la optimización de nuestro portafolio es obtener la volatilidad, para la cual primero necesitamos conocer nuestra matriz de covarianzas (Φ) la cual se crea a partir de los datos de las desviaciones estándar de cada uno de nuestro bonos, sin embargo, para el beneficio de este trabajo, se calculará obteniendo lo siguiente:

	UMS05	UMS06	UMS07	UMS08	UMS09	UMS10	UMS11	UMS12	UMS16	UMS19	UMS22	UMS26	UMS31
UMS05	0.0000143	0.0000125	0.0000114	0.0000081	0.0000065	0.0000058	0.0000049	0.0000054	0.0000018	0.0000011	-0.0000088	-0.0000002	0.0000003
UMS06	0.0000125	0.0000131	0.0000116	0.0000083	0.0000066	0.0000059	0.0000051	0.0000058	0.0000019	0.0000013	-0.0000067	0.0000000	0.0000005
UMS07	0.0000114	0.0000116	0.0000117	0.0000079	0.0000066	0.0000058	0.0000050	0.0000057	0.0000021	0.0000014	-0.0000054	0.0000003	0.0000006
UMS08	0.0000081	0.0000083	0.0000079	0.0000068	0.0000055	0.0000050	0.0000046	0.0000046	0.0000029	0.0000026	-0.0000020	0.0000018	0.0000021
UMS09	0.0000065	0.0000066	0.0000066	0.0000055	0.0000054	0.0000049	0.0000046	0.0000044	0.0000035	0.0000031	-0.0000007	0.0000026	0.0000027
UMS10	0.0000058	0.0000059	0.0000058	0.0000050	0.0000049	0.0000050	0.0000045	0.0000042	0.0000035	0.0000030	0.0000000	0.0000026	0.0000026
UMS11	0.0000049	0.0000051	0.0000050	0.0000046	0.0000046	0.0000045	0.0000044	0.0000040	0.0000036	0.0000032	0.0000008	0.0000029	0.0000029
UMS12	0.0000054	0.0000058	0.0000057	0.0000046	0.0000044	0.0000042	0.0000040	0.0000044	0.0000025	0.0000020	0.0000003	0.0000015	0.0000015
UMS16	0.0000018	0.0000019	0.0000021	0.0000029	0.0000035	0.0000035	0.0000036	0.0000025	0.0000047	0.0000045	0.0000032	0.0000045	0.0000045
UMS19	0.0000011	0.0000013	0.0000014	0.0000026	0.0000031	0.0000030	0.0000032	0.0000020	0.0000045	0.0000046	0.0000033	0.0000046	0.0000047
UMS22	-0.0000088	-0.0000067	-0.0000054	-0.0000020	-0.0000007	0.0000000	0.0000008	0.0000003	0.0000032	0.0000033	0.0000159	0.0000043	0.0000037
UMS26	-0.0000002	0.0000000	0.0000003	0.0000018	0.0000026	0.0000026	0.0000029	0.0000015	0.0000045	0.0000046	0.0000043	0.0000049	0.0000049
UMS31	0.0000003	0.0000005	0.0000006	0.0000021	0.0000027	0.0000026	0.0000029	0.0000015	0.0000045	0.0000047	0.0000037	0.0000049	0.0000052

Posteriormente se utilizará la multiplicación matricial dada por la ecuación 2.10, que involucra el vector de pesos de los bonos y la matriz de covarianzas, para obtener la volatilidad del portafolio, obteniendo como resultado:

Volatilidad del portafolio (σ_p) = **0.1870%**

El siguiente paso a realizar es encontrar la frontera eficiente. En este caso cambiaremos la restricción $0 \leq w_i \leq 1$ que habíamos visto en la parte teórica, por la siguiente restricción:

$$0 \leq x_i \leq c_i$$

donde:

c_i = el total de la emisión del bono *i*

x_i = la cantidad que se incluirá en el portafolio del bono *i*

Esta restricción se debe tomar en cuenta pues la cantidad del instrumento i que conformará nuestro portafolio no puede sobrepasar la cantidad de instrumentos en el mercado.

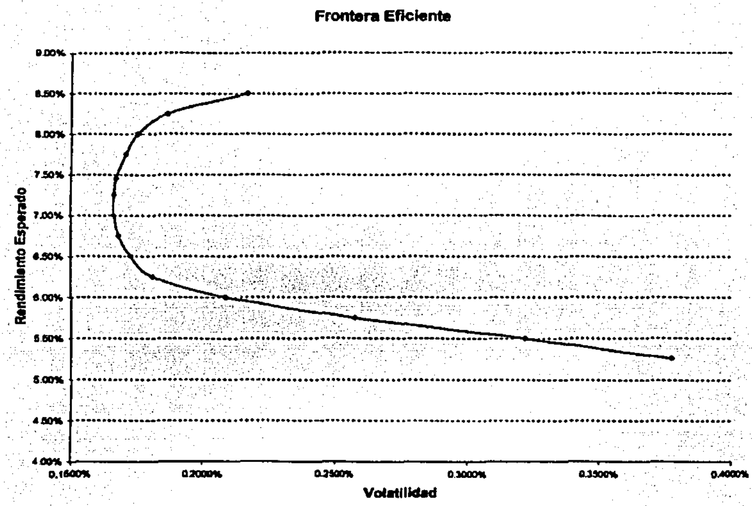
Para efecto de minimizar la volatilidad se utilizará la herramienta Solver del Excel de la siguiente manera:

Tomaremos los rendimientos esperados dentro del intervalo [0.052560, 0.086128]. La cota inferior se obtiene al tomar el instrumento con el menor rendimiento, mientras que la cota superior se obtiene tomando el instrumento con el mayor rendimiento. El objetivo de la minimización de la volatilidad por medio del Solver es fijar un nivel de rendimiento esperado para así poder obtener la volatilidad mínima a ese nivel de rendimiento dado.

Posteriormente se tabularon los valores obtenidos tomando intervalos de 0.0025, obteniendo los siguientes resultados:

Volatilidad	Rendimiento Esperado
0.3777%	5.26%
0.3221%	5.50%
0.2578%	5.75%
0.20889%	6.00%
0.1812%	6.25%
0.1731%	6.50%
0.1686%	6.75%
0.16672%	7.00%
0.1668%	7.25%
0.1676%	7.45%
0.1711%	7.75%
0.1755%	8.00%
0.1866%	8.25%
0.2164%	8.50%
0.2203%	8.60%

Una vez que se obtuvieron los datos y después de haber sido tabulados se prosiguió con la creación de la gráfica, la cual es la representación de la frontera eficiente del portafolio que estamos manejando.

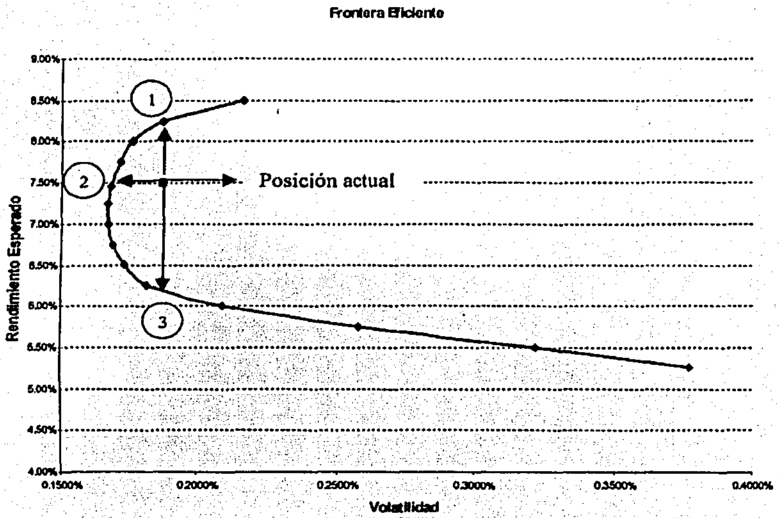


Ahora que contamos con la frontera eficiente, necesitamos interpretarla para entender lo que esta gráfica nos está mostrando. Para esto necesitamos conocer primero en que parte de la gráfica se encuentran nuestros valores de rendimiento esperado y volatilidad para así tomar la decisión que se desee, ya sea la de maximizar el rendimiento esperado o minimizar la volatilidad para saber a quien le conviene más cada uno de esto movimientos y quien tendría la capacidad de hacerlo.

A partir del punto en donde nos encontramos tenemos tres opciones:

1) Fijamos la volatilidad actual y maximizamos el rendimiento. El obtener este punto va a resultar beneficioso para el inversionista, ya que con un mismo nivel de volatilidad se estaría obteniendo un mayor rendimiento. Éste sería un ejemplo clásico de lo que un inversionista quisiera obtener si es que éste invirtiera en acciones, ya que en términos de ganancia diremos que será mayor la ganancia obtenida sin arriesgar nada ya que el nivel de riesgo al que se encontraría la inversión está fijo.
2) Fijamos el rendimiento actual y minimizamos la volatilidad. Lo que obtendríamos al realizar esto, sería únicamente disminuir volatilidad (o en su caso, riesgo) obteniendo un rendimiento fijo. Éste sería el caso en el que se tendría la certeza cada vez mayor de la obtención de un rendimiento ya que el riesgo que tenemos es cada vez menor por lo tanto sería una ganancia "constante pero segura"
3) Este punto lo vamos a obtener fijando la volatilidad de la posición actual y minimizando el rendimiento. En este caso, como con lo que estamos trabajando son bonos, este punto le interesaría al emisor ya que el rendimiento será menor. Dicho en otras palabras, como los bonos son instrumentos de deuda, se aplica el caso contrario a lo que se mencionó en el punto 1 ya que el emisor de los bonos necesita un rendimiento menor, es decir, si eres inversionista y obtienes menor rendimiento, obtienes menos ganancia, sin embargo, si eres el emisor pagas menos.

Gráficamente, los puntos se encontrarían distribuidos de la siguiente forma:



Frontera Eficiente
9.00%
8.50%
8.00%
7.50%
7.00%
6.50%
6.00%
5.50%
5.00%
4.50%
4.00%
Rendimiento Esperado
1
2
3
Posición actual
0.1500%
0.2000%
0.2500%
0.3000%
0.3500%
0.4000%
Volatilidad

Conclusiones

Es importante aclarar que la forma que se implementó para la optimización de este portafolio es la utilizada comúnmente, sobretodo cuando se aplica a los portafolios de inversión en acciones; sin embargo, esta teoría es aplicable también a los portafolios con instrumentos de deuda como el que se construyó en este trabajo. A pesar de que existen otros modelos para la valuación de portafolios en bonos, se optó por la teoría que es considerada como la general, para que así la parte teórica pueda ser utilizada como base para futuros estudios acerca de la Teoría de Portafolios.

Como se mencionó antes, la Teoría del Portafolio su aplicación no sólo se limita a las inversiones en acciones, sino que va más allá puesto que en este trabajo se construyó un portafolio con instrumentos de deuda lo cual ayudó a conocer la situación de los bonos emitidos por el Gobierno Mexicano.

Gracias a la construcción de este portafolio, se podrían tomar decisiones con base en la situación actual de los bonos, por ejemplo, como se vió, una de las decisiones más importantes que se pueden tomar, es el minimizar rendimiento para que así el pago que tiene que realizar el emisor, sea menor. Sin embargo, además de este tipo de decisión, al conocer la situación actual del portafolio el Gobierno Mexicano puede decidir si es necesario la emisión de nuevos bonos (como en el caso del UMS'13 el cual fue emitido el

16 de enero del 2003). También es posible que haciendo un análisis se llegue a la conclusión de aumentar la emisión del bono o inclusive la recompra de éste.

La construcción de una frontera eficiente durante el análisis del portafolio que se esté manejando es de gran importancia, ya que es la que nos da la pauta para tomar algún tipo de decisión puesto que es más sencillo imaginar lo que puede ocurrir teniendo una representación gráfica de la situación. Por ejemplo, en nuestro portafolio, la frontera eficiente nos ayudó a conocer las diferentes opciones que teníamos para trabajar con la volatilidad y con el rendimiento esperado que obtuvimos, es decir, se nos presentaron las opciones para manipular el portafolio a nuestra conveniencia.

De este modo podemos llegar a la conclusión de que la Teoría de Portafolios es muy importante no sólo para el mundo corporativo, ya que el portafolio construido en este trabajo, se aplica directamente a la administración de la deuda externa de México[16], lo que significa que se puede extender las aplicaciones a todos los instrumentos que se manejen en el mercado. La importancia de este trabajo, no sólo es la aplicación que se presentó, porque a pesar de ser una aplicación (de uso es real), la teoría incluida sirve de pauta para poder extendernos por todas las posibilidades que existen de inversiones en el mercado.

Se pudo mostrar que la Probabilidad y la Estadística no sólo se quedan en las ideas teóricas ya que quedó claramente asentado que se pueden aplicar al mundo de las Finanzas y de la Administración del Riesgo.

En conclusión podemos decir que en el momento de construir un portafolio, no importando el tipo de instrumento que se maneje, el saber obtener el rendimiento esperado y la volatilidad además de conocer cómo manipularlos para obtener la optimización adecuada para el portafolio, son claves para poder realizar un trabajo correcto y beneficioso para el poseedor del portafolio. Es importante saber manejar la volatilidad (riesgo) para así

[16] Es importante mencionar que este proyecto se realizó en la Dirección de Administración de Riesgos de la Secretaría de Hacienda y Crédito Público

poder obtener mejores resultados, los cuales se pueden calcular o suponer mediante la obtención de la frontera eficiente.

Apéndice A

Conceptos Estadísticos

Momentos Poblacionales

Los momentos de una variable aleatoria de una distribución son los valores esperados (Esperanzas) de la potencia de la variable aleatoria.

Si X es una variable aleatoria, el r-ésimo momento de X, usualmente denotado por μ'_r es definido como:

$$\mu'_r = \mathrm{E}[X^r]$$

Observe que si r=1, entonces $\mu'_1 = \mathrm{E}[X]$ es la media de X. Este primer momento indica donde se encuentra el "centro" o el mayor punto de acumulación de la distribución.

Momentos Centrales

Si X es una variable aleatoria, el r-ésimo momento central de X sobre a es definido como $\mathrm{E}[(X-a)^r]$.

Si $a=\mu_X$ entonces tenemos el r-ésimo momento central de X sobre μ_X, denotado por μ_r, y será

$$\mu_r=E[(X-\mu_X)^r]$$

Observe que si $m1=E[X-\mu_X]=0$, entonces $m2=E[(X-\mu_X)^2]$ es la varianza de X, este momento mide que tan grande es la dispersión de la distribución alrededor de la media, es decir en términos prácticos, que tan gorda o flaca es la distribución.

Independencia

Sea $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ una variable aleatoria k-dimensional, entonces $X_1,X_2,\ldots,X_n$ son definidas como independientes sí y sólo si

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\prod_{i=1}^{k}F_{X_i}(x_i)$$

Sea $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ una variable aleatoria k-dimensional, con función de probabilidad conjunta $f_{X1,X2,\ldots,Xn}$, entonces $X_1,X_2,\ldots,X_n$ son definidas como independientes sí y sólo si

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_k}(x_1,x_2,\ldots,x_k)=\prod_{i=1}^{k}f_{X_i}(x_i)$$

Covarianza

Sea X y Y dos variables aleatorias cualesquiera definidas en el mismo espacio de probabilidades. La covarianza de X y Y, denotada por $\mathrm{cov}[X,Y]$ ó $\sigma_{X,Y}$ es definida como:

cov[X,Y] = desviación estándar (X)*desviación estándar(Y)*(coeficiente de correlación) y el coeficiente de correlación se define como:

$$\rho = \frac{\mathrm{cov}[X,Y]}{\sigma_{X,Y}}$$

Momentos muestrales

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una función de densidad f(·). Entonces el r-ésimo momento muestra alrededor de 0, denotado por M'_r, está definido por

$$M'_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^r$$

En particular, si r=1, obtendremos la media muestral, que usualmente es denotada por $\overline{X}$ ó por $\overline{X_n}$; esto es

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

De esta forma el r-ésimo momento alrededor de $\overline{X_n}$, denotado por M_r es definido como

$$M_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^r$$

Ahora mostraremos que los momentos muestrales reflejan los momentos poblacionales en el sentido de que el valor esperado de un momento muestral (alrededor de 0) iguala al correspondiente momento poblacional. La implicación es que para una población una vez que se dan los valores que el momento muestral asume, estos tenderán a estar más concentrados alrededor del correspondiente momento poblacional para un tamaño de muestra n grande. Así, un momento muestral puede ser utilizado para estimar su correspondiente momento poblacional.

Teorema 1.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con densidad $f(\cdot)$. El valor esperado del r-ésimo momento (alrededor de 0) es igual al r-ésimo momento poblacional; es decir

$$E[M'_r]=\mu'_r$$

y

$$\operatorname{var}[M'_r]=\frac{1}{n}\left[\mu'_{2r}-(\mu'_r)^2\right]$$

Demostración

$$E[M'_r]=E\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r\right]=\frac{1}{n}E\left[\sum_{r}^{n}X_i^r\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E\left[X_i^r\right]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu'_r=\mu'$$

■

$$\begin{aligned}\operatorname{var}[M'_r]&=\operatorname{var}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^r\right]=\left(\frac{1}{n}\right)^2\operatorname{var}\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^r\right]=\left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\operatorname{var}\left[X_i^r\right]=\\&=\left(\frac{1}{n}\right)^2\sum_{i=1}^{n}\left\{E\left[X_i^{2r}\right]-\left(E\left[X_i^r\right]\right)^2\right\}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{E\left[X_i^{2r}\right]-\left(E\left[X_i^r\right]\right)^2\right\}=\\&=\frac{1}{n}\left[\mu'_{2r}-(\mu'_r)^2\right]\end{aligned}$$

■

En particular si r=1 obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con densidad f(.) y sea $\overline{X}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ la media muestral; entonces donde μ y s2 es la media y la varianza de f(.).

Definición

Varianza muestral. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con densidad f(.); entonces:

$$\delta_n^2 = \delta^2 = \frac{1}{n-1}\underset{i=1}{\overset{n}{Z}}\left(x_i - \bar{x}_n\right)^2 \qquad \textbf{para n mayor q 1}$$

se define como la varianza muestral.

La razón para tomar a S2 en vez de M2 como nuestra definición de la varianza muestral (ambas son medidas de dispersión de la muestra) es que el valor esperado de S2 iguala a la varianza poblacional.

Teorema 2

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una población con densidad f(.) y sea

Entonces:

$$E\left[\delta^2\right] = \sigma^2$$

Demostración

Observemos primero que

$$\begin{aligned}
\overline{Z}(x_i - m)^2\overline{Z}(x_i - \bar{x} + \bar{x} - m)^2 &= \overline{Z}\left[(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - m)\right]^2 \\
&= \overline{Z}\left[\left(x_i - \bar{x}\right)^2 + 2(x_i - \bar{x})(\bar{x} - m) + (\bar{x} - m)^2\right] \\
&= \overline{Z}(x_i - \bar{x})^2 + 2(\bar{x} - m)\overline{Z}(x_i - \bar{x}) + n(\bar{x} - m)^2 \\
&= \overline{Z}(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - m)^2
\end{aligned}$$

Utilizando esta identidad tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\delta^2\right] &= \mathrm{E}\left[\frac{1}{n-1}\Sigma\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\mathrm{E}\left[\bar{\mathrm{Z}}\left(x_i-\bar{x}\right)^2+n\left(\bar{x}-m\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\bar{\mathrm{Z}}\mathrm{E}\left[\left(x_i-\bar{x}\right)^2\right]-n\mathrm{E}\left[\left(\bar{x}-m\right)^2\right]\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{\bar{\mathrm{Z}}\sigma^2-nVar\left[\bar{x}\right]\right\} \\
&= \frac{1}{n-1}\left\{n\sigma^2-n\frac{\sigma^2}{n}\right\}=\sigma^2
\end{aligned}
$$

También:

$$
\mathrm{Var}\left[M^{1}r\right]=Var\left[\frac{1}{n}\bar{\mathrm{Z}}xi^{r}\right]=\left(\frac{1}{n}\right)^2 Var\left[\frac{n}{\mathrm{Z}}x_i^r\right]=\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{n}{\underset{\tau=1}{\mathrm{Z}}}Var\left[x_i^r\right]
$$

$$
=\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{n}{\underset{\tau=1}{\mathrm{Z}}}\left\{\mathrm{E}\left[x_i^{2r}\right]-\left(\mathrm{E}\left[x_i^r\right]\right)^2\right\}=\frac{1}{n}\left\{\mathrm{E}\left[x_i^{2r}\right]-\left(\mathrm{E}\left[x_i^r\right]\right)^2\right\}
$$

$$
=\frac{1}{n}\left[m_{2r}^{1}-\left(m_r^{1}\right)^2\right]
$$

Bibliografía

"Investment Management"
Frank J. Fabozzi, 2° Edición
School of Managment, Yale University

"Inversiones"
Robert W. Kolb,
Limusa, Noriega Editores

"Análisis del VaR en un Portafolio Compuesto por Instrumentos del Mercado Mexicano"
Rojas Garduño Maribell
Tesis Licenciatura; UNAM, Facultad de Ciencias; 2000

"Modern Investment Theory"
Robert A. Haugen, 3° Edición
Pretince Hall

"Investments"
Zvi Bodie, Alex Kane, Alan J. Marcus, 3° Edición
McGraw Hill

"Managing Investment Portfolios" A Dynamic Process
John L. Maginn, Doanal L. Tuttle, 2° Edición
Editorial Warren, Gorham y Lamont

www.riskmanagementmexico.com

Sistema de Información **Bloomberg**

www.towersperrin.com