

00382  
2



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA  
DE MEXICO

Autizo a la Dirección General de Bibliotecas •  
UNAM a difundir en formato electrónico e impre-  
contenido de mi trabajo recepción:

NOMBRE: JERÓNIMO ALONSO  
CORTEZ QUEZADA

FECHA: 26 DE JUNIO DE 2003

FIRMA: [Firma]

**CUANTIZACIÓN DE MODELOS SIGMA NO LINEALES:  
LA COSMOLOGÍA DE GOWDY T<sup>3</sup>**

**T E S I S**

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)**

**PRESENTA:**

**JERÓNIMO ALONSO CORTEZ QUEZADA**

**DIRECTORES DE TESIS: DR. ALEJANDRO CORICHI RODRÍGUEZ GIL  
DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS**

**COMITÉ TUTORAL: DR. JOSÉ DAVID VERGARA OLIVER**

**pcf**  
posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MÉXICO, D.F.

**pcf**  
posgrado en ciencias físicas  
u n a m

2003

1

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS  
CON  
FALLA DE  
ORIGEN**

# **PAGINACIÓN DISCONTINUA**

**Cuantización de Modelos Sigma No Lineales: La  
Cosmología de Gowdy  $T^3$ .**

**Jerónimo Alonso Cortez Quezada.**

**Universidad Nacional Autónoma de México.  
México, D.F., 2003.**

2

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

---

**A Noemí , Diego y Claude.**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Índice general

---

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introducción</b>  | <b>1</b>  |
| <b>1. Cuantización</b>   | <b>5</b>  |
| §1.1. El programa de cuantización canónica                         | 5         |
| §1.2. Formulación algebraica                                       | 9         |
| <b>2. Modelos de simetría reducida y modelos sigma no lineales</b> | <b>14</b> |
| §2.1. Modelos sigma no lineales                                    | 15        |
| §2.2. El modelo cosmológico de Gowdy $T^3$ polarizado              | 18        |
| §2.2.1. Variables de Ashtekar                                      | 19        |
| §2.2.2. La descomposición $2+1$                                    | 21        |
| §2.3. Cuantización   | 24        |
| §2.3.1. Cuantización canónica basada en las variables de Ashtekar  | 24        |
| §2.3.2. Cuantización covariante basada en la formulación $2+1$     | 25        |
| <b>3. Comparación entre cuantizaciones.</b>                        | <b>29</b> |
| §3.1. Representación de Fock                                       | 29        |
| §3.2. Representación de Schrödinger                                | 32        |
| §3.2.1. Álgebra cuántica y estados                                 | 33        |
| §3.2.2. Estructura compleja en el espacio de datos de Cauchy       | 35        |
| §3.2.3. Representación funcional                                   | 36        |
| §3.2.4. Equivalencia unitaria en teoría de campos                  | 39        |
| §3.2.5. Vacío Gaussiano  | 42        |
| §3.2.6. Algunos comentarios  | 43        |
| §3.3. La conexión entre las representaciones                       | 45        |
| §3.4. Comparación entre las cuantizaciones para Gowdy $T^3$        | 46        |
| <b>4. Evolución funcional</b>                                      | <b>48</b> |
| §4.1. La transformación simpléctica de la dinámica clásica         | 48        |
| §4.2. Implementabilidad cuántica                                   | 50        |
| §4.3. Estructura compleja e implementabilidad                      | 52        |
| <b>Discusión</b>   | <b>57</b> |
| <b>A. Espacio fase y observables para el campo escalar</b>         | <b>60</b> |
| <b>B. Cuantización isomonodrómica</b>                              | <b>65</b> |

**Notación**

**Bibliografía** .....

**Anexo**

**III**

**72**

**74**

**78**

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

# Introducción

---

Durante más de cincuenta años se han realizado innumerables esfuerzos para entender y resolver el problema que plantea la cuantización de la teoría general de la relatividad. Diversas formulaciones han acompañado a dichos esfuerzos y, sin embargo, ninguna de ellas a conseguido la tan ansiada *teoría cuántica de la gravedad*. Aunque históricamente la relatividad general fué desarrollada antes que la mecánica cuántica, esta última está cimentada en un contexto estrictamente Newtoniano. Con la intención de extender a la teoría cuántica primigenia a un marco menos estrecho que el Newtoniano, a mediados del siglo pasado surge, resultado de la fusión entre la teoría especial de la relatividad y la mecánica cuántica ordinaria, la *teoría cuántica de campos*. El paso lógico siguiente era entonces modificar (y quizá refinar) la herramienta matemática para incorporar ahora a la relatividad general, pero el carácter mismo de esta teoría pronto desvaneció la posibilidad de tocar sólo la tecnología y usar esencialmente las mismas ideas empleadas para unificar relatividad especial y teoría cuántica, un cambio profundo y radical en las ideas aparece como el principal reto pues los campos y el espacio tiempo son ahora una misma entidad, ya no hay actores y escenario como en la teoría cuántica de campos en un *fondo de Minkowski*; la tecnología, ante semejante salto conceptual, parece quedar corta. Este elemento clave separa a la relatividad general del resto de las teorías y es uno de los principales motivos por los cuales *cuantizar a la gravedad* es materia no resuelta y sujeta a intenso estudio.

A lo largo de setenta años, tres grandes líneas de investigación se han desarrollado para atacar el problema de la gravedad cuántica, a saber la "perturbativa", la "canónica" y la "suma sobre historias" [1]. La primera de ellas asume un espacio tiempo de fondo y consiste en construir a la teoría como una teoría cuántica de campos de las fluctuaciones de la métrica sobre dicho fondo, ésta es la línea de investigación más próxima a sólo modificar la tecnología. El programa fue comenzado en los treinta por Rosenfeld, Fierz y Pauli. Las reglas de Feynman para la relatividad general fueron halladas y presentadas a la comunidad en los sesentas por DeWitt y el mismo Feynman. Una década después, ya en los setenta, nace la supergravedad, consecuencia de la firme evidencia de la no renormalizabilidad de la teoría hallada por t'Hooft y Veltman, Deser y Van Nieuwenhuizen, entre los más destacados. El intenso trabajo en la búsqueda de una extensión a la relatividad general que resultase renormalizable o con expansiones perturbativas finitas desemboca en los ochenta en la teoría de cuerdas. La segunda línea de investigación, la canónica, fiel al carácter peculiar de la teoría, prescinde de una métrica de fondo fija y consiste en construir una teoría cuántica en cuyo espacio de Hilbert los operadores correspondientes a toda la métrica, o funciones de ésta, sean adecuadamente representados. El programa comenzó en los cincuenta y corrió a cargo de Bergmann y Dirac. Era necesario exhibir la estructura canónica de la relatividad general; Bergmann, Dirac, Peres, Arnowit, Deser y Misner lo logran entre finales de los cincuenta y principios de los sesenta. Surge entonces la ecuación de Wheeler-DeWitt, la primera ecuación formal de la teoría cuántica. Sin embargo, esta ecuación estrictamente hablando no está bien definida, y fue sólo hasta mediados de los noventa en que se logró una versión adecuada [2]. La suma sobre historias, tercera gran línea de investigación en el recuento, se basa en la cuantización por integral funcional de

Feynman para definir la teoría, los modelos de 'espuma de espines' (spin foams), recientemente introducidos, pertenecen a esta línea, al igual que la mayor parte de las formulaciones discretas (como por ejemplo los posets y las triangulaciones dinámicas) y la gravedad cuántica Euclídea de Hawking.

Gran parte de los problemas que en gravedad cuántica deben enfrentarse son debidos a la ausencia de una métrica de espacio tiempo de fondo y a la presencia de un número infinito de grados de libertad. La invariancia de la teoría ante difeomorfismos es consecuencia de la ausencia de una geometría de fondo y dificulta la formulación precisa de preguntas de interés físico debido a las complicaciones en la construcción de observables. Mientras que un espacio tiempo con hipersuperficies de Cauchy tipo espacio no compactas cuenta con un generador (infinitesimal) de dinámica "genuino", uno cuyas hipersuperficies de Cauchy sean compactas no: el generador es pura norma y, en consecuencia, del conjunto infinito de campos vectoriales Hamiltonianos hay que seleccionar a uno que represente a la dinámica.

En el marco de la formulación canónica, históricamente ha resultado de utilidad considerar modelos de simetría reducida como modelos de juguete que permiten probar estrategias y programas en casos muy específicos para afrontar estos problemas. Los ejemplos más estudiados son modelos homogéneos, donde el sistema de dimensionalidad infinita es reducido a un modelo con un número finito de grados de libertad. Éstos son conocidos como modelos de minisuperespacios [3]. A nivel cuántico, el problema del tiempo es tratado a través de una "deparametrización" y, gracias al teorema de Stone-von Neumann, el resto de la cuantización es libre de ambigüedades pues la segunda gran dificultad (número infinito de grados de libertad) esta excluida en estos modelos. Para afrontar a ésta, necesitamos considerar teorías de campo genuinas que no requieran de una geometría de fondo. Una estrategia obvia es considerar a los llamados superespacios con simetría intermedia (midisuperespaces) que son otra clase de modelos de simetría reducida, caracterizados por el hecho de que el sistema resultante mantiene un número infinito de grados de libertad y, por lo tanto, continúa como una teoría de campo [4]. Dentro de esta clase, los modelos que recientemente han recibido especial atención son las ondas gravitacionales de Einstein-Rosen y los modelos cosmológicos de Gowdy  $T^3$  [5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12], ambos casos particulares del modelo sigma no lineal  $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$  que abarca, además, al campo axisimétrico estacionario y al modelo de Gowdy  $S^1 \times S^2$  [13]. La cuantización realizada entre finales de los noventa y principios de este siglo de las ondas gravitacionales con simetría cilíndrica [6] y de los modelos de Gowdy  $T^3$  sin polarización [8] y polarizados [9, 10], son ejemplos prototípicos de la cuantización de modelos con simetría intermedia que implementan el programa de cuantización canónica no perturbativa para la gravedad, desarrollado por A. Ashtekar a principios de la década pasada [14]. El hecho de que estos modelos retengan un carácter de teoría de campo implica que en el proceso de cuantización necesariamente debe llevarse a cabo una elección "adecuada" que codifique la ambigüedad inherente en teoría cuántica de campos y particularice a la representación en un espacio de Hilbert de las relaciones canónicas de conmutación; este es un ingrediente esencial que debe ser incorporado de manera consistente en la cuantización de este tipo de modelos. Adicionalmente, vale la pena mencionar que un problema interesante es la búsqueda de criterios de "plausibilidad" que permitan elegir una representación por encima de las otras; la ambigüedad parece ser, más que una propiedad de la naturaleza, un fiel reflejo de nuestra limitación para decidir cual es la teoría que debemos elegir para describirla adecuadamente.

En este trabajo nos concentraremos en analizar los dos métodos aplicados para cuantizar a los modelos cosmológicos de Gowdy  $T^3$  [8, 9, 10], poniendo especial atención en la ambigüedad

inherente al sistema y en investigar la dinámica del modelo con objeto de extraer algún criterio que, desde la perspectiva de teoría cuántica de campos sobre superficies curvas, sea "plausible" para reducir la infinita libertad que en elecciones tenemos. En el primer capítulo se presenta brevemente el programa de cuantización canónica no perturbativa y la formulación algebraica de la teoría cuántica, ahí se especificará qué habremos de entender por "cuantizar" a un sistema clásico e introduciremos algunos de los conceptos e ideas que a lo largo de este trabajo iremos empleando. En el segundo capítulo veremos que los modelos de Gowdy con topología toroidal, introducidos por R. H. Gowdy a principios de los setentas [15], son un caso particular del modelo sigma no lineal  $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$  y motivaremos el estudio comparativo entre las cuantizaciones para el modelo de Gowdy desde el contexto de los modelos sigma. En este mismo capítulo se expondrán, tanto a nivel clásico como a nivel cuántico, los principales componentes de las formulaciones desarrolladas de manera independiente para este modelo en [8] y [9, 10]. Será claro que en ambos casos los grados de libertad locales del modelo residen en un campo escalar real y libre propagándose en un fondo ficticio, pero en representaciones diferentes, a saber *a la Schrödinger* y *a la Fock*. La inquietud natural de comparar estas dos cuantizaciones se traduce entonces al problema de investigar la relación entre estas dos representaciones, lo cual implica, en particular, construir la representación de Schrödinger para un campo escalar en un fondo globalmente hiperbólico. El capítulo tres esta dedicado esto, bajo la suposición de contar con una representación a la Fock cualquiera, se construirá una representación a la Schrödinger unitariamente equivalente. Se analizarán ciertas sutilezas en la construcción, daremos la conexión entre las representaciones y, finalmente, estaremos en posición de comparar las cuantizaciones llevadas a cabo por Mena [8] y Pierri [9, 10] para Gowdy  $T^3$ . Cabe señalar aquí que la representación de Schrödinger es, en cierto sentido, la representación más natural desde el punto de vista de gravedad cuántica canónica y, por consiguiente, es muy importante tener un entendimiento apropiado de la construcción y su relación con la representación de Fock. Aunque existen en la literatura diversos trabajos que tratan con la representación de Schrödinger [16, 17], es hasta este trabajo de tesis que se considera una construcción sistemática para espacios tiempos globalmente hiperbólicos y se nota la presencia de un término altamente no trivial en el operador de momento (resultados que dieron lugar a las publicaciones [18, 19]). En el cuarto y último capítulo se estudia la evolución dinámica del modelo de Gowdy  $T^3$ ; es decir, la dinámica en la cual un estado cuántico evoluciona de una hipersuperficie de Cauchy inicial a una final [20, 21]. Puesto que en relatividad general no hay foliaciones predilectas del espacio tiempo, la evolución dinámica debe considerar entonces todas las posibles foliaciones tipo espacio para respetar el requerimiento de covariancia general. Adicionalmente, debe notarse que para el caso en que las superficies de Cauchy son compactas, la evolución dinámica es única y exclusivamente norma, de tal manera que cualquier interpretación de evolución temporal es vía la introducción de un tiempo interno a través de un procedimiento de deparametrización. Dado que en nuestro caso particular la dinámica del modelo es la de un campo escalar no masivo, real, libre y axisimétrico, propagándose en un fondo (ficticio) con topología  $T^2 \times \mathbb{R}$ , la dinámica corresponde a la evolución de estados cuánticos entre superficies toroidales y es la definida por la elección de norma particular. A nivel clásico, la evolución dinámica del campo puede representarse como una transformación simpléctica que actúa sobre puntos del espacio fase. La pregunta es si a nivel cuántico esta transformación es implementable sobre el espacio de estados cuánticos como un operador unitario. Este es un problema delicado que a sido analizado con anterioridad para otros casos [20, 21, 22, 23] y, recientemente, para el modelo de Gowdy  $T^3$  en el trabajo de esta tesis (cuyos principales resultados son los de este cuarto capítulo y que dieron lugar a [11]) y en [12].

En este cuarto capítulo veremos que para las elecciones realizadas en la cuantización desarrollada por Pierri [9, 10] (y que aquí exponemos en las secciones §2.2.2 y §2.3.2) la evolución temporal no es unitariamente implementable en el espacio de estados cuánticos del sistema. Discutiremos las implicaciones de este resultado tanto desde el punto de vista de gravedad cuántica canónica, como el de teoría cuántica de campos en superficies curvas.

Por último agradezco profundamente a los Doctores Alejandro Corichi y Hernando Quevedo por el ánimo, interés y entusiasmo con que dirigieron este trabajo de tesis. Al Instituto de Ciencias Nucleares, departamento de Gravitación y Teoría de Campos por las facilidades brindadas. Al CONACYT por la beca y a la DGEP, UNAM por el complemento de la misma.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Cuantización

En este capítulo revisaremos brevemente que entenderemos a lo largo de este trabajo por "cuantizar" a un sistema físico. En particular, en la sección §1.1 expondremos el programa de cuantización canónica desarrollado por A. Ashtekar a inicios de los noventa y que promueve la cuantización en un espacio de Hilbert, elevando primero a determinado conjunto de observables clásicas al nivel de *elementales*. En la sección §1.2 veremos los principales elementos que componen a la formulación algebraica, basada esencialmente en el conjunto de observables elementales. Es importante mencionar que aquí abordaremos sin mayor detalle los temas mencionados, enfatizando únicamente aquellos puntos que serán de utilidad más adelante en este trabajo; sin embargo, en ambos terrenos hay una extensa literatura, por ejemplo en [14, 24, 25, 26] puede seguirse a el programa desde lo básico hasta algunos de los detalles y sutilezas, mientras que [27, 28, 29] son excelentes introducciones a la formulación algebraica.

## §1.1. El programa de cuantización canónica

Un sistema físico usualmente es representado, a nivel clásico, en el espacio fase. Es decir, los estados del sistema son puntos en una variedad simpléctica  $(\Gamma, \Omega)$  de dimensión par, donde  $\Gamma$  denota a la variedad y  $\Omega$  a la estructura simpléctica definida sobre ésta. El conjunto de observables clásicas  $\mathcal{O}$ , constituido por funciones reales y suaves sobre  $\Gamma$ , tiene una estructura de espacio vectorial de dimensión infinita sobre el cual esta definido el paréntesis de Poisson

$$(f, g) = \Omega^{ab} \nabla_a f \nabla_b g \quad (1.1)$$

que dota al espacio de observables con un "producto" antisimétrico que satisface la identidad de Jacobi.

Es importante hacer notar que si el sistema dinámico está constringido, la restricción de la dos forma simpléctica  $\Omega_{ab}$  a la subvariedad de constringción  $\Gamma_c$ , digamos  $\tilde{\Omega}_{ab}$ , es una estructura simpléctica degenerada (todos los campos vectoriales de constringción son direcciones degeneradas para  $\tilde{\Omega}_{ab}$ ). De manera tal que  $\tilde{\Omega}_{ab}$  no tiene una única inversa y, por consiguiente, si nuestra elección fuese trabajar en  $\Gamma_c$  tendríamos que afrontar el problema de que el paréntesis de Poisson (1.1) no estará bien definido si utilizamos la restricción de la forma simpléctica. Sin embargo, existen dos alternativas para recuperar una descripción adecuada. La primera es eliminar en  $\Gamma_c$  a las variables que representan grados de libertad de norma, e introducir el llamado espacio fase reducido  $\Gamma_r := \Gamma_c / \mathcal{G}$  (donde  $\mathcal{G}$  denota al conjunto de transformaciones de norma) que no es más que el espacio de órbitas de los difeomorfismos de norma. Con ello obtenemos una proyección  $P : \Gamma_c \rightarrow \Gamma_r$ , y la forma simpléctica *no degenerada*  $\Omega_{ab}^{(r)}$  en  $\Gamma_r$  esta definida de manera natural según  $\Omega_{ab}^{(r)} U^a V^b := \tilde{\Omega}_{ab} u^a v^b$ , donde  $u^a$  y  $v^a$  son cualesquiera dos vectores proyectados por  $P$  a  $U^a$  y  $V^a$ , respectivamente. La segunda alternativa para obtener una estructura simpléctica no degenerada consiste en fijar la norma. Es decir, considerar una sección transversal global (si es que existe)

de  $\Gamma_c$  para la cual cada punto de ésta interseca a la variedad integral de los campos vectoriales de constricción una y sólo una vez, y restringimos entonces a los estados que están sobre esta sección transversal. El pull-back de  $\Omega_{ab}$  a la superficie que fija la norma es no degenerado.

En términos generales, por "cuantizar" a un sistema habremos de entender el proceso que debemos llevar a cabo para, a partir de un sistema clásico (i.e., un espacio fase  $(\Gamma, \Omega)$  y observables  $O$  definidas sobre éste), obtener la respectiva versión cuántica. Especificar un programa que describa el proceso de cuantización es, sin duda, materia no trivial; entre las diversas líneas que existen [1], y que son desarrolladas e implementadas hoy en día, se encuentra el programa de cuantización canónica no perturbativa que fué reexaminado y sujeto a intenso estudio durante la pasada década, concretamente en la primera mitad de ésta ([14, 24, 25]). Aquí expondremos, de manera general y siguiendo [14], el programa de cuantización canónica elaborado por Ashtekar, haciendo a un lado detalles y sutilezas producto de las estructuras matemáticas auxiliares que se introducen en el camino y que habremos de abordar más adelante para el caso particular del modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$ . El programa, basado en la formulación algebraica para la teoría cuántica, especifica que "cuantizar" un sistema clásico, cuyo espacio fase asumiremos como un haz cotangente sobre algún espacio de configuración, es la implementación de los siguientes puntos:

1. Hallar un subespacio  $\mathcal{O}$  del espacio de funciones sobre el espacio fase  $\Gamma$  con las siguientes dos propiedades:

- $\mathcal{O}$  debe ser un espacio vectorial lo suficientemente vasto como para que cada función (regular) sobre  $\Gamma$  pueda obtenerse como (quizá el límite de) la suma de productos de elementos en  $\mathcal{O}$ . La idea de este requerimiento es que deseamos que suficientes observables sean cuantizadas sin ambigüedad.
- $\mathcal{O}$  debe ser lo suficientemente pequeño como para ser cerrado bajo el paréntesis de Poisson.

El conjunto  $\mathcal{O}$ , al cual nos referiremos como el conjunto de *variables elementales clásicas* del sistema, se elige entonces de tal manera que bajo el proceso de cuantización cada elemento  $F \in \mathcal{O}$  tendrá un único análogo cuántico  $\hat{F}$  sin ambigüedad.

2. Asociar a cada elemento  $F$  en  $\mathcal{O}$  un operador abstracto  $\hat{F}$ , (a) construyendo el álgebra asociativa y libre generada por  $\mathcal{O}$  y (b) imponiendo en ésta las relaciones de conmutación canónicas (y, en caso de ser necesario, también de anticonmutación). Denotar el álgebra resultante por  $\mathcal{A}$ .

(a) Construcción del álgebra asociativa y libre.

Comencemos por definir a un álgebra asociativa y libre:

**Definición 1.1** (Álgebra asociativa [30]) *Un álgebra asociativa compleja (real) consta de (i) un espacio vectorial complejo (real)  $U$  y, (ii) una regla que asigna, dados  $u, u' \in U$ , un tercer elemento  $uu' \in U$  (llamado el producto de  $u$  con  $u'$ ) sujeto a las siguientes condiciones:*

1. El producto es lineal en cada factor. Para  $u, u', u''$  vectores, y  $\lambda$  un número, tenemos que

$$(u + \lambda u')u'' = uu'' + \lambda u'u''$$

y

$$u(u' + \lambda u'') = uu' + \lambda uu''$$

II. El producto es asociativo. Para  $u, u', u''$  vectores, tenemos

$$(uu')u'' = u(u'u'')$$

**Definición 1.2** (Homomorfismo entre álgebras asociativas [30]) Un mapeo  $\varphi : A \rightarrow B$ , donde  $A$  y  $B$  son álgebras asociativas (ambas complejas o reales), es un homomorfismo de álgebras asociativas si "preserva estructura", i.e., si  $\varphi$  es un mapeo lineal de espacios vectoriales y además  $\varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a')$ ,  $\forall a, a' \in A$ .

**Definición 1.3** (Álgebra libre y asociativa [30]) Un álgebra libre y asociativa sobre un espacio vectorial  $V$  consta del par  $(A, \alpha)$ , con  $A$  un álgebra asociativa y  $\alpha : V \rightarrow A$  lineal, y es tal que la siguiente propiedad se satisface: dado el par  $(B, \beta)$ , con  $B$  cualquier álgebra asociativa y  $\beta : V \rightarrow B$  lineal, hay un único homomorfismo  $\gamma : A \rightarrow B$  entre álgebras asociativas tal que  $\gamma \circ \alpha = \beta$ .

El primer paso consiste entonces en construir, a partir del conjunto de variables elementales  $\mathcal{O}'$ , un álgebra asociativa. Empecemos complejificando<sup>1</sup> a  $\mathcal{O}'$ ,  $\mathcal{O}'_{\mathbb{C}} := \mathcal{O}' \oplus i\mathcal{O}'$ , y considerando al siguiente espacio vectorial complejo

$$\mathcal{B} := \mathcal{O}'_{\mathbb{C}} \oplus (\mathcal{O}'_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}) \oplus (\mathcal{O}'_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}'_{\mathbb{C}} \otimes \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}) \oplus \dots$$

Un elemento en  $\mathcal{B}$  es, en consecuencia, de la forma  $b = (v_1, \dots, v_n, \dots)$  con  $v_m \in \otimes^m \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}$  (un tensor contravariante de rango  $m$  sobre  $\mathcal{O}'_{\mathbb{C}}$ ).

Para  $b = (0, \dots, 0, S_1 \otimes \dots \otimes S_n, 0, \dots)$  y  $b' = (0, \dots, 0, S'_1 \otimes \dots \otimes S'_m, 0, \dots)$  en  $\mathcal{B}$  (donde  $\{S_k \in \mathcal{O}'_{\mathbb{C}} \mid k = 1 \dots n\}$  y  $\{S'_j \in \mathcal{O}'_{\mathbb{C}} \mid j = 1 \dots m\}$ ) el producto  $bb'$  es definido como

$$bb' = (0, \dots, 0, S_1 \otimes \dots \otimes S_n \otimes S'_1 \otimes \dots \otimes S'_m, 0, \dots) \in \mathcal{B}$$

Extendiendo este producto a todo  $\mathcal{B}$  por linealidad es fácil ver que  $\mathcal{B}$  es un álgebra asociativa (sobre  $\mathcal{O}'_{\mathbb{C}}$ ).

Sea  $\alpha : \mathcal{O}'_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{B}$ ,  $\alpha(S) := (S, 0, 0, \dots)$ . Hemos visto que  $\mathcal{B}$  es un álgebra asociativa, ahora queremos mostrar que  $(\mathcal{B}, \alpha)$  es libre:

Sea  $\mathcal{E}$  cualquier álgebra asociativa y  $\beta : \mathcal{O}'_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{E}$  un mapeo lineal entre espacios vectoriales. Debemos hallar y mostrar la unicidad de un homomorfismo  $\gamma : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{E}$  entre álgebras asociativas tal que  $\gamma \circ \alpha = \beta$ . Para cualquier elemento de  $\mathcal{B}$  de la forma  $(S, 0, 0, \dots)$  (i.e., de la forma  $\alpha(S)$ ) pedimos que  $\gamma[(S, 0, 0, \dots)] = \beta(S)$ ; con ello garantizamos que efectivamente  $\gamma \circ \alpha = \beta$ . Como  $\gamma$  debe ser un homomorfismo entonces debe ocurrir que

$$\begin{aligned} \gamma[(0, \dots, 0, S_1 \otimes \dots \otimes S_n, 0, \dots)] &= \gamma[(S_1, 0, \dots)(S_2, 0, \dots) \dots (S_n, 0, \dots)] = \\ &= \gamma[(S_1, 0, \dots)]\gamma[(S_2, 0, \dots)] \dots \gamma[(S_n, 0, \dots)] = \beta(S_1)\beta(S_2) \dots \beta(S_n) \end{aligned}$$

Todo elemento en  $\mathcal{B}$  puede escribirse como la combinación lineal de productos de elementos de la forma  $(S, 0, 0, \dots)$ . Por lo tanto,  $\gamma$  está completa y únicamente determinada por su acción sobre estos elementos. Entonces,  $(\mathcal{B}, \alpha)$  es efectivamente un álgebra libre y asociativa.

(b) Imposición de las relaciones de conmutación canónicas<sup>2</sup>.

Sea  $\alpha : \mathcal{O}'_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{B}$  como antes. En particular  $\alpha(i(s, s')) = (i(s, s'), 0, 0, \dots)$  y  $\alpha(s)\alpha(s') - \alpha(s')\alpha(s) = (0, s \otimes s' - s' \otimes s, 0, \dots)$ . Nótese que  $S$  es en general un elemento de la forma  $(a, b) \in \mathcal{O}'_{\mathbb{C}}$  y que por  $s$  nos referimos a elementos en  $\mathcal{O}'$ ; es decir, a las "entradas" de  $\mathcal{O}'_{\mathbb{C}}$ .

Definimos al ideal de un álgebra como sigue:

<sup>1</sup>En este caso estamos asumiendo que  $\mathcal{O}'$  es un espacio vectorial real, cuando éste es complejo no es necesario complejificar. Esencialmente se introduce la complejificación para tener definida la multiplicación por  $i$ .

<sup>2</sup>Como se mencionó en el enunciado del segundo punto del programa, en ocasiones es necesario imponer también relaciones de anticonmutación; sin embargo, omitiremos este caso pues a lo largo de este trabajo no está incluido ningún campo de naturaleza fermiónica.

**Definición 1.4** (Ideal [30]) Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra asociativa. Un ideal  $I_{\mathcal{A}}$  de  $\mathcal{A}$  es un subconjunto de  $\mathcal{A}$  tal que (a) para cualesquiera  $l, l' \in I_{\mathcal{A}}$  y  $\lambda$  un número,  $l + \lambda l' \in I_{\mathcal{A}}$ , y (b) para cualquier  $l \in I_{\mathcal{A}}$  y  $a \in \mathcal{A}$ ,  $la$  y  $al$  están ambos en  $I_{\mathcal{A}}$ .

Sea  $I_{\mathcal{B}}$  el ideal de  $\mathcal{B}$  generado por los elementos de la forma  $\alpha(i(s, s')) - \alpha(s)\alpha(s') + \alpha(s')\alpha(s)$ , i.e., por los elementos  $(i(s, s'), s \otimes s' - s' \otimes s, 0, \dots)$ . Sea  $\mathcal{A}$  el álgebra cociente,  $\mathcal{A} = \mathcal{B}/I_{\mathcal{B}}$ , y sea  $\gamma$  el homomorfismo  $\mathcal{B} \xrightarrow{\gamma} \mathcal{A}$  de álgebras asociativas que manda  $b \in \mathcal{B}$  al cociente  $b + I_{\mathcal{B}}$  de  $I_{\mathcal{B}}$  en  $\mathcal{B}$  [ $\gamma(b + \lambda b') = b + \lambda b' + I_{\mathcal{B}}$  es justamente el cociente  $b + I_{\mathcal{B}}$  más  $\lambda$  veces el cociente  $b' + I_{\mathcal{B}}$ , lo cual es precisamente  $\gamma(b) + \lambda\gamma(b')$ ]. Por otra parte,  $\gamma(b)\gamma(b') = (b + I_{\mathcal{B}})(b' + I_{\mathcal{B}})$  es igual a  $bb' + bI_{\mathcal{B}} + I_{\mathcal{B}}b' + I_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{B}}$ , pero por definición de ideal  $bI_{\mathcal{B}}, I_{\mathcal{B}}b', I_{\mathcal{B}}I_{\mathcal{B}} \in I_{\mathcal{B}}$  y en consecuencia  $\gamma(b)\gamma(b') = bb' + I_{\mathcal{B}} = \gamma(bb')$ . Por lo tanto  $\gamma$  es un homomorfismo; i.e., es lineal y preserva estructura ].

Sea  $\beta = \gamma \circ \alpha$ , entonces  $\beta : \mathcal{O}'_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{A}$  es lineal. Puesto que

$$\beta(i(s, s')) - \beta(s)\beta(s') + \beta(s')\beta(s) = \gamma[\alpha(i(s, s')) - \alpha(s)\alpha(s') + \alpha(s')\alpha(s)]$$

i.e.,  $\gamma[(i(s, s'), s \otimes s' - s' \otimes s, 0, \dots)]$ , pero  $(i(s, s'), s \otimes s' - s' \otimes s, 0, \dots) \in I_{\mathcal{B}}$  y  $\gamma$  de tal cantidad es cero dado que  $\gamma(I) = I + I_{\mathcal{B}} = [I] = [0] = 0$ . Por lo tanto,

$$i\beta[(s, s')] = \beta(s)\beta(s') - \beta(s')\beta(s)$$

Sea  $\delta := \beta(s) \in \mathcal{A}$  el operador elemental (abstracto) asociado a  $s \in \mathcal{O}'$ . Entonces la última ecuación es simplemente

$$i(\widehat{s, s'}) = [\delta, \delta']$$

Por consiguiente, asociado a cada  $F \in \mathcal{O}'$  hay un operador abstracto  $\hat{F} \in \mathcal{A}$ . El operador asociado a  $s_1 + s_2$  es igual a la suma de los operadores asociados a  $s_1$  y  $s_2$  por separado:  $\hat{\beta}(s_1 + s_2) = \hat{\beta}(s_1) + \hat{\beta}(s_2)$ , i.e.,  $s_1 + s_2 = \hat{s}_1 + \hat{s}_2$ . Finalmente, nótese que el único elemento de  $\mathcal{B}$  del tipo  $(v, 0, 0, \dots)$  que también está en  $I_{\mathcal{B}}$  es el elemento cero, por lo que después de efectuar la operación del cociente dos elementos del tipo  $(s, 0, 0, \dots)$  pertenecen a clases de equivalencia diferentes. i.e., si  $[s_1] = [s_2]$  entonces  $(s_1, 0, 0, \dots) = (s_2, 0, 0, \dots) + I$ , es decir  $(s_1 - s_2, 0, 0, \dots) = I \in I_{\mathcal{B}}$  y por lo tanto  $s_1 = s_2$ .

3. Sobre  $\mathcal{A}$  se introduce una operación  $*$ :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  involutiva, requiriendo que  $*$  sea la conjugación compleja en  $\mathcal{O}'_{\mathcal{C}}$  (i.e.,  $S^* := \hat{S}$ ). Extendemos su acción a  $\mathcal{A}$  imponiendo (i) antilinealidad,  $(\lambda a + \mu a')^* = \bar{\lambda}a^* + \bar{\mu}a'^*$ , y (ii) la ley del producto,  $(aa')^* = a'^*a^*$ , para toda  $a, a' \in \mathcal{A}$  y  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ ; de lo cual se sigue que  $(a^*)^* = a$  (i.e.,  $*$  es en efecto una involución). Denotamos por  $\mathcal{A}^*$  al álgebra resultante

4. Introducir una representación lineal de  $\mathcal{A}$  sobre un espacio vectorial  $V$  (i.e., los difeomorfismos  $R_a : V \rightarrow V$ , con  $a \in \mathcal{A}$ , son lineales.)

5. Obtener explícitamente operadores sobre  $V$  que representen a las constricciones cuánticas. En general, es necesario acudir a regularizaciones para conseguir que las constricciones cuánticas estén bien definidas.

Hallar el núcleo (kernel)  $V_f$  de estos operadores. Este es el espacio de estados físicos.

6. Extraer el álgebra  $*$  física; es decir, operadores en  $\mathcal{A}^*$  que dejen invariante a  $V_f$ .

Introducir en  $V_f$  un producto interno (Hermítico) pidiendo que las relaciones abstractas  $*$  en  $\mathcal{A}_f^*$  queden representadas como relaciones Hermíticas-adjuntas.

i.e., si  $\hat{F} = G$ , entonces la relación abstracta  $\hat{F}^* = \hat{G}$  en  $\mathcal{A}_f^*$  se refleja en  $V_f$  como  $\langle R(\hat{F}) \cdot \Psi, \Phi \rangle = \langle \Psi, R(\hat{G}) \cdot \Phi \rangle$ , donde  $\Psi, \Phi \in V_f$  y  $R$  es una representación lineal del álgebra física. En otras palabras, para especificar el producto interno requerimos que las condiciones clásicas de realidad se realicen como relaciones autoadjuntas.

Nótese que en el programa es necesario llevar a cabo una serie de elecciones. Por ejemplo, determinar a las variables clásicas elementales (con las propiedades mencionadas) o elegir el espacio de representación para el álgebra abstracta. En principio, no hay ninguna regla para realizar tales elecciones y, en consecuencia, éstas quedan en general a nuestra discrecionalidad y buen criterio. Sin embargo, vale la pena hacer notar que cuando el espacio fase  $\Gamma$  es un espacio vectorial, hay una elección particularmente simple para el conjunto  $\mathcal{O}$ . Por tratarse de un espacio vectorial podemos tomar una carta global sobre  $\Gamma$  y elegir que  $\mathcal{O}$  sea el espacio vectorial generado por las funciones lineales sobre  $\Gamma$  [31]. En cierto sentido ésta es la más pequeña de las elecciones que uno podría hacer para especificar a  $\mathcal{O}$ . Como caso concreto, consideremos el ejemplo más sencillo e ilustrativo, a saber cuando el espacio de configuración  $C$  es  $\mathbb{R}^3$ . Ahí tomamos la carta global  $(q^i, p_i)$  sobre  $\Gamma$  y consideramos a  $\mathcal{O}$  como el espacio vectorial de siete dimensiones  $\text{Gen}\{1, q^1, q^2, q^3, p_1, p_2, p_3\}$ . Nótese que se han incluido a las funciones constantes sobre  $\Gamma$ , generadas por la función constante uno pues sabemos que  $\{q^i, p_j\} = \delta_j^i$ , y deseamos que el subconjunto  $\mathcal{O}$  sea cerrado bajo el paréntesis de Poisson.

En general, cuando el espacio fase es lineal, la elección del espacio  $\mathcal{O}$  es "canónica" y está basada en que contamos con una estructura simpléctica no degenerada y una sola carta sobre el espacio fase, exactamente como en el ejemplo. Denotemos por  $Y^a$  a un elemento de  $\Gamma$ , puesto que éste es un espacio lineal,  $Y^a$  también representa un vector en  $T\Gamma$ . Dada una una forma  $\lambda_a$ , podemos definir una función lineal sobre  $\Gamma$  como  $F_\lambda(Y) := -\lambda_a Y^a$ . Nótese que  $\lambda$  es una etiqueta de la función  $F$  con argumento  $Y^a$ . De manera natural, gracias a que la estructura simpléctica es no degenerada, podemos asociar a la una forma  $\lambda_a$  el vector  $\lambda^a := \Omega^{ab} \lambda_b$ , y escribir entonces

$$F_\lambda(Y) = \Omega_{ab} \lambda^a Y^b = \Omega(\lambda, Y) \quad (1.2)$$

Si ahora consideramos una nueva función lineal con etiqueta  $\nu$ ,  $G_\nu(Y) = \nu_a Y^a$ , el paréntesis de Poisson entre  $F_\lambda$  y  $G_\nu$  es

$$\{F_\lambda, G_\nu\} = \Omega^{ab} \nabla_a F_\lambda(Y) \nabla_b G_\nu(Y) = \Omega^{ab} \lambda_a \nu_b \quad (1.3)$$

Dado que la dos forma simpléctica es no degenerada, podemos reescribir al paréntesis como  $\{F_\lambda, G_\nu\} = -\Omega_{ab} \lambda^a \nu^b$ . Así,

$$\{\Omega(\lambda, Y), \Omega(\nu, Y)\} = -\Omega(\lambda, \nu) \quad (1.4)$$

El conjunto  $\mathcal{O}$  es, por lo tanto, el espacio generado por la función constante uno y las observables básicas  $\Omega(\lambda, \cdot)$ ; i.e.,  $\mathcal{O} = \text{Gen}\{1, \Omega(\lambda, \cdot)\}$ .

## §1.2. Formulación algebraica

Como mencionamos al inicio de este capítulo, el programa de cuantización canónica está basado en la formulación algebraica de la teoría cuántica. Esta formulación esencialmente invierte los papeles que, dentro del marco tradicional de la teoría cuántica en un espacio de Hilbert, juegan observables y estados. Es decir, mientras que en la formulación que usualmente se considera para

una teoría cuántica se comienza por construir estados como vectores en un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  y se definen entonces a las observables como operadores en  $\mathcal{H}$  (i.e., actúan sobre estados) en la formulación algebraica el punto de partida es la construcción de observables como elementos de un álgebra abstracta y, entonces, se definen a los estados como aquellos objetos que al actuar sobre las observables producen un número. El punto central en la formulación algebraica consiste entonces en situar a las observables como los objetos relevantes de la teoría cuántica, dejando un rol "secundario" para los estados. El tipo de álgebra abstracta que consideraremos a lo largo de este trabajo es el álgebra  $C^*$ , concretamente el álgebra de Weyl, que es el álgebra abstracta asociada de manera natural a teorías lineales.

**Definición 1.5** (Álgebra  $C^*$  [30]) *Un álgebra  $C^*$  consta de (i) un álgebra asociativa compleja  $C$ , (ii) una regla que asigna, a cada elemento  $A$  de  $C$ , un número real  $|A|$ , y (iii) una regla que asigna, a cada elemento  $A$  de  $C$ , un elemento  $A^*$  de  $C$  sujeto a las siguientes condiciones:*

1. Para cualquier  $A$  diferente de cero en  $C$ ,  $|A|$  es positivo.
2. Para cualquier  $A$  y  $B$  en  $C$ , y cualquier número complejo  $\lambda$ ,  $|A + B| \leq |A| + |B|$ ,  $|\lambda A| = |\lambda| |A|$ , and  $|AB| \leq |A| |B|$ .
3. Para cualquier  $A$  y  $B$  en  $C$ , y cualquier número complejo  $\lambda$ ,  $(A + B)^* = A^* + B^*$ ,  $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$ , y  $(AB)^* = B^* A^*$ .
4. Para cualquier  $A$  en  $C$ ,  $|A^*| = |A|$  y  $A^{**} = A$ .
5. El espacio vectorial topológico  $C$  (i.e., el espacio vectorial  $C$ , con la topología que proviene de  $|\cdot|$ ) es completo.

Los ingredientes principales en la formulación algebraica son dos, a saber [28]: (1) un álgebra  $C^*$ ,  $\mathcal{A}$ , de observables y (2) estados  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , que son funcionales lineales positivos ( $\omega(A^*A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ ) tales que  $\omega(1) = 1$ . El valor de la operación del estado  $\omega$  sobre la observable  $A \in \mathcal{A}$  puede interpretarse como el valor de expectación del operador  $A$  en el estado  $\omega$ , i.e.  $\langle A \rangle = \omega(A)$ .

Ahora bien, la formulación de una teoría cuántica en un espacio de Hilbert corresponde a una representación del álgebra abstracta en un determinado espacio de Hilbert (§1.1). Es decir, a la especificación de un mapeo  $R$  que va del álgebra  $C^*$ ,  $\mathcal{A}$ , al conjunto  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  de operadores lineales acotados sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , con la propiedad de que, para toda  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$  y  $A, B \in \mathcal{A}$ ,  $R(\lambda A + \mu B) = \lambda R(A) + \mu R(B)$ ,  $R(AB) = R(A)R(B)$  y  $R(A^*) = R(A)^\dagger$ . La representación más importante, que relaciona la formulación en un espacio de Hilbert con la algebraica, es la representación de Gelfand, Naimark y Segal, conocida como la construcción GNS y que usualmente se presenta como teorema [28].

**Teorema 1.1** (Construcción GNS) *Sea  $\mathcal{A}$  un álgebra  $C^*$  con identidad y sea  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  un estado. Entonces existe un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ , una representación  $R : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , y un vector cíclico  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  (i.e., el conjunto de vectores  $\{R(A)|\Psi\rangle\}_{A \in \mathcal{A}}$  es un subespacio denso de  $\mathcal{H}$ ) tales que*

$$\omega(A) = \langle \Psi | R(A) | \Psi \rangle. \quad (1.5)$$

*Además, la tripleta  $(\mathcal{H}, R, |\Psi\rangle)$  queda determinada de manera única (hasta equivalencia unitaria) por estas propiedades.*

La construcción GNS consiste, esquemáticamente, en lo siguiente. Puesto que contamos con un álgebra  $C^*$ ,  $\mathcal{A}$ , con elemento identidad, y con un estado algebraico, podemos entonces definir de manera natural el mapeo bilineal  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  como sigue:

$$\langle A, B \rangle := \omega(A^* B). \quad (1.6)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Si  $\omega(A^*A) = 0$  si y sólo si  $A = 0$ , nótese que entonces  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  define un producto interno sobre  $\mathcal{A}$  dado que  $\omega(A^*A) \geq 0$  para todo  $A \in \mathcal{A}$ . Si existiese un subconjunto  $\mathcal{A}'$  tal que  $\{A = 0, \emptyset\} \subset \mathcal{A}'$  y  $\omega(A^*A') = 0$  para todo  $A' \in \mathcal{A}'$ , entonces habremos de "factorizar" i.e., tomamos el espacio  $\mathcal{A}_f = \mathcal{A}' \sim \mathcal{A}$ . La forma bilineal sobre  $\mathcal{A}_f$  es, en efecto, un producto interno.

El siguiente paso en la construcción consiste en completar  $\mathcal{A}$  (o el espacio factorizado) en la norma definida por (1.6) (i.e.,  $\| \cdot \| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$ ) para obtener un espacio de Hilbert, al cual denotaremos por  $\mathcal{H}$ . (Nótese que mientras que  $\mathcal{A}$  es un espacio de Banach,  $\mathcal{A}_{\|}$  es un espacio de Hilbert). Representamos  $\mathcal{A}$  (o el espacio factorizado) sobre si mismo actuando por multiplicación y extendemos por continuidad esta acción al espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Es decir, la representación de  $A \in \mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{A}$  simplemente es  $R(A) \cdot B = AB$  para todo  $B \in \mathcal{A}$ . El mapeo lineal acotado  $R(A)$  puede extenderse por continuidad a  $\mathcal{H}$ , obteniéndose así un elemento de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Finalmente, el vector cíclico deseado  $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}$  corresponde al elemento identidad de  $\mathcal{A}$ . En efecto, dado que  $I \in \mathcal{A} \subset \mathcal{H}$ , entonces  $I \in \mathcal{H}$ . Puesto que  $R(A) \cdot I = AI = A$ , entonces  $\{R(A) \cdot I\}_{A \in \mathcal{A}} = \mathcal{A}$ , dado que  $\mathcal{A}$  es denso en  $\mathcal{H}$  entonces  $\{R(A) \cdot I\}_{A \in \mathcal{A}}$  es un subespacio denso de  $\mathcal{H}$  (i.e.,  $I$  es cíclico).

La representación GNS determinada por el estado  $\omega$  es irreducible, es decir que los únicos subespacios cerrados de  $\mathcal{H}$  que son invariantes bajo  $R(\mathcal{A})$  son  $\{0\}$  y el propio  $\mathcal{H}$ , solamente cuando el estado es puro [29]. i.e., cuando el estado  $\omega$  no puede ser escrito como una combinación no trivial convexa de otros estados<sup>3</sup>. En general, uno busca contar con representaciones fieles (donde  $R(A) = 0$  implica  $A = 0$ ) e irreducibles. La fidelidad e irreducibilidad son afortunados apellidos para una representación, el primero asegura que el álgebra abstracta no es "demasiado grande" para el espacio de representación, mientras que el segundo hace lo propio para garantizar que el espacio de estados de representación no "le quede grande" al álgebra.

Al final de la sección anterior obtuvimos que para el caso de teorías lineales el conjunto  $\mathcal{O}$  es aquel generado por la función constante uno y las observables fundamentales  $\Omega(\lambda, \cdot)$ . A partir de los pasos uno a tres del programa, y de (1.4), tenemos que los operadores fundamentales  $\hat{\Omega}(\lambda, \cdot)$  en el álgebra  $*$  asociativa y libre, correspondientes a estas observables clásicas, satisfacen las siguientes relaciones de conmutación canónicas (RCC),

$$[\hat{\Omega}(\lambda, \cdot), \hat{\Omega}(\nu, \cdot)] = -i\Omega(\lambda, \nu) I \quad (1.7)$$

para cualesquiera  $\lambda^a$  y  $\nu^a$  en el espacio de etiquetas.

No obstante que la construcción de estos operadores fundamentales es matemáticamente correcta, éstos no son acotados (exactamente como ocurre con  $\hat{q}_i$  y  $\hat{p}_i$  en mecánica cuántica ordinaria) y, por lo tanto, sólo pueden estar densamente definidos ( $\hat{q}_i$  y  $\hat{p}_i$  no están definidos en  $L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ , pero si lo están en el subespacio denso de las funciones de Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ ). Para evitar problemas con los dominios de definición, es entonces conveniente trabajar con la versión exponenciada de los operadores fundamentales,

$$\hat{W}(\lambda) = \exp(i\hat{\Omega}(\lambda, \cdot)) \quad (1.8)$$

Dado que bajo  $*$  los operadores fundamentales satisfacen que  $\hat{\Omega}^*(\lambda, \cdot) = \hat{\Omega}(\lambda, \cdot)$ , entonces  $\hat{W}(\lambda)$  en (1.8) es unitario. Las RCC son entonces sustituidas por las relaciones de Weyl

$$\hat{W}(\lambda)^* = \hat{W}(-\lambda), \quad \hat{W}(\lambda_1)\hat{W}(\lambda_2) = e^{i\hat{\Omega}(\lambda_1, \lambda_2)} \hat{W}(\lambda_1 + \lambda_2) \quad (1.9)$$

<sup>3</sup>En contraparte, un estado es mezclado si puede representarse en la forma  $\omega = \eta\omega_1 + (1 - \eta)\omega_2$ , donde  $0 < \eta < 1$  y  $\omega_1, \omega_2$  son estados distintos. i.e., si puede ser escrito como una combinación no trivial convexa de otros estados.

donde  $\hat{W}(\lambda)$  varía continuamente respecto a  $\lambda$  en la topología fuerte de operadores<sup>4</sup>.

Ahora sabemos, dado un sistema clásico descrito por un espacio vectorial simpléctico  $(\Gamma, \Omega)$ , como especificar el subespacio  $\mathcal{O}$  de observables fundamentales clásicas, el álgebra abstracta asociada a éstas y el álgebra de Weyl, generada por la versión exponencial de los operadores fundamentales. Desde la perspectiva de la formulación algebraica el hecho de que el álgebra de Weyl capture la estructura algebraica de las RCC la coloca como la depositaria del contenido físico de la teoría cuántica; nada de significado fundamental es agregado a la teoría cuando ésta es representada de manera particular. El álgebra de Weyl, vista como un álgebra  $C^*$  abstracta, es independiente de la representación en un espacio de Hilbert y, en consecuencia, cualquier posible ambigüedad proveniente de la elección de representación es, en el contexto algebraico, irrelevante. Sin embargo, exitosas teorías como la mecánica cuántica ordinaria, o la teoría de campos en un fondo de Minkowski, son teorías basadas en la formulación en un espacio de Hilbert. En principio, no parece haber todavía una razón de peso que incline la balanza por una u otra formulación; en la búsqueda de un argumento definitivo para poner a una de éstas por encima de la otra, una de las alternativas es el estudio de la ambigüedad inherente (no unitariedad entre teorías) que existe en teoría cuántica de campos (en el marco de la formulación sobre un espacio de Hilbert). Es importante señalar que dicha ambigüedad surge en teorías cuyo espacio fase es de dimensión infinita, pues para sistemas físicos con un número finito de grados de libertad el teorema de Stone-von Neumann [28] garantiza la unitariedad entre representaciones.

**Teorema 1.2** [Stone-von Neumann] *Sea  $(\Gamma, \Omega)$  un espacio vectorial simpléctico de dimensión finita. Sean  $(\mathcal{H}, \hat{W}(\lambda))$  y  $(\mathcal{H}', \hat{W}'(\lambda))$  representaciones fuertemente continuas, irreducibles y unitarias de las relaciones de Weyl (1.9). Entonces,  $(\mathcal{H}, \hat{W}(\lambda))$  y  $(\mathcal{H}', \hat{W}'(\lambda))$  son unitariamente equivalentes.*

En mecánica cuántica ordinaria la representación más popular es la de Schrödinger. En ésta, el espacio de Hilbert que se elige para representar a los operadores fundamentales es  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, d^3x)$ , donde el operador identidad y el de posición actúan multiplicativamente, en tanto que el operador de momento lo hace derivando. En concreto,

$$(\hat{1} \cdot \Psi)(q) = \Psi(q) \quad (\hat{q}^j \cdot \Psi)(q) = q^j \Psi(q) \quad (\hat{p}_i \cdot \Psi)(q) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q^i} \Psi(q). \quad (1.10)$$

La exponenciación de estos operadores da como resultado una representación irreducible de las relaciones de Weyl, así que cualquier otra elección que produzca una representación irreducible de dichas relaciones será una teoría físicamente equivalente a la representación de Schrödinger según el teorema de Stone-von Neumann.

Para el caso del oscilador armónico unidimensional, por ejemplo, contamos con las representaciones de Schrödinger y de Fock que, por tratarse de representaciones irreducibles de las relaciones de Weyl, son unitariamente equivalentes. Si el conjunto  $\{|e_i\rangle\}$  denota la base de estados en un Hilbert abstracto,  $\langle m|e_n\rangle = (0, \dots, 0, \delta_{m,n}, 0, \dots)$  la representación a la Fock y  $\langle q|e_n\rangle = H_n(q)$  (donde  $H_n(q)$  son los polinomios de Hermite) a la Schrödinger de  $|e_n\rangle$ , entonces el estado abstracto  $|\psi\rangle = \sum_n a_n |e_n\rangle$  en la representación "funcional" es  $\psi(q) = \sum_n a_n H_n(q)$ , mientras que en la de

<sup>4</sup>La topología fuerte de operadores sobre un espacio normado es aquella que proviene de la norma [32, 33]. Dado que el conjunto de operadores  $\{\hat{W}(\lambda)\}$  generan el álgebra de Weyl, que es un álgebra  $C^*$  y, por consiguiente, con topología fuerte, podemos decir entonces que  $\hat{W}$  es un mapeo que varía continuamente respecto a las etiquetas en la topología natural del álgebra que genera.

Fock es  $\sum_n \langle n | \psi \rangle = \sum_{i,n} a_i \langle n | e_i \rangle$ . Es decir, dado el estado  $\sum_n a_n H_n(q)$  en la representación a la Schrödinger, el estado correspondiente en la representación de Fock es el arreglo de coeficientes  $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$  en la expansión de Hermite.

En el teorema de Stone-von Neumann la hipótesis de que el espacio  $\Gamma$  sea de dimensión finita es esencial. Para teorías cuya descripción sea a través de un espacio fase de dimensión infinita existe una infinidad de representaciones irreducibles de las relaciones de Weyl unitariamente inequivalentes. Sin embargo, cabe señalar que la teoría de campos en un fondo plano es una excepción y también esta exenta de ambigüedad alguna, pues ahí el requerimiento de invariancia bajo el grupo de Poincaré fija una representación predilecta. En espacios tiempos curvos, en general, no contamos con criterios que seleccionen alguna representación en particular, aunque debemos enfatizar que en "general" no significa "siempre". Por ejemplo, en el caso de un campo escalar propagándose en un fondo estacionario (y arbitrario) el requerir que el valor de expectación sobre estados coherentes del Hamiltoniano cuántico sea igual a la energía del campo clásico, en la solución asociada al estado, selecciona una estructura compleja única [34, 35].

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Modelos de simetría reducida y modelos sigma no lineales

---

El programa de cuantización canónica, expuesto de manera general en el capítulo anterior, representa uno de los caminos alternativos con miras a obtener una teoría cuántica de la gravitación. Para probar sus alcances y limitaciones, buscar mejoras y detectar estructuras comunes, usualmente se acude a modelos con simetría reducida, en particular a los llamados superespacios con simetría intermedia. Estos últimos, son teorías de campo que se obtienen al llevar a cabo una reducción de simetría en el campo gravitacional. Ejemplos de esta clase de modelos, que recientemente han recibido particular atención en el contexto de la cuantización, son las ondas gravitacionales de Einstein-Rosen [6, 7] y los modelos cosmológicos de Gowdy con topología de un tres toro, no polarizado [8] y polarizado [9, 10]. Todos estos superespacios con simetría intermedia son casos particulares del modelo sigma no lineal  $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$  [13], módulo un campo cíclico, y uno podría especular entonces que la cuantización de cada caso particular corresponde a realizar diferentes identificaciones en la cuantización del modelo sigma. Sin embargo, y aunque ésta es una tarea que en un futuro deberá abordarse, la cuantización en general de éste modelo sigma no lineal, y el investigar si las identificaciones clásicas se "trasladan" a nivel cuántico (y, de ser así, como son realizadas éstas) va más allá del alcance de este trabajo. Aquí nos limitaremos al estudio de la cuantización de uno de estos modelos, a saber el modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$ , basados en las cuantizaciones que en [8] y [9, 10] se exhiben. La idea central, en el contexto del modelo sigma no lineal, es que sabemos que las identificaciones (si es que existen) no pueden ser únicas, puesto que estamos trabajando con teorías de campo, y que para resolver si éstas son o no razonables, es necesario comparar el hipotético resultado con las cuantizaciones ya existentes. En particular, determinadas elecciones deberán reproducir (al menos parcialmente) las cuantizaciones expuestas en [8] y [9, 10], bajo el supuesto de que estas cuantizaciones sean consistentes. Así, lo primero que debemos reconocer es con cuál de las cuantizaciones compararíamos y por qué. O bien, si debemos comparar con ambas. El analizar las cuantizaciones del modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$  en este contexto, nos permitirá precisar que queremos decir por *comparar* teorías, que en principio pueden no ser unitariamente equivalentes, y qué significa que cada una de éstas sea *consistente*.

En este capítulo presentaremos los elementos clásicos de la teoría y las cuantizaciones del modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$  basados en [8, 9, 10]. En la primera sección daremos una breve descripción de lo que un modelo sigma no lineal es y el caso particular del modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$  como parte del modelo sigma no lineal  $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ . La segunda sección está dedicada a presentar la teoría clásica del modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$ , (1) a partir de las variables de Ashtekar y (2) como un modelo equivalente a gravedad  $2 + 1$  acoplada a un campo escalar real no masivo. Estas dos formulaciones clásicas del modelo son enteramente equivalentes (teniendo en cuenta, evidentemente, que el caso no polarizado contiene al polarizado) y constituyen la "preparación del terreno" antes de cuantizar. En la tercera sección presentaremos

un breve resumen de las cuantizaciones del modelo de Gowdy  $T^3$  basadas justamente en cada una de las preparaciones de terreno, a saber la que se lleva a cabo a partir de la formulación clásica en variables de Ashtekar [8] y la que se realiza a partir de la equivalencia entre la teoría clásica y gravedad 2 + 1 acoplada a un campo escalar [9, 10].

## §2.1. Modelos sigma no lineales

En relatividad general todo espacio tiempo con dos campos vectoriales de Killing, tales que conmuten entre si, puede ser interpretado como un modelo sigma no lineal (MSNL) bidimensional [36]; la similitud entre campos gravitacionales y sigma ha dado lugar a que, sobre todo como modelos de juguete para gravedad cuántica, los MSNL hayan sido sujeto de amplio estudio [13, 37]. Un modelo sigma no lineal, en lenguaje llano, es una teoría de mapeos entre variedades, con las siguientes propiedades: (a) los campos estan sujetos a constricciones no lineales y (b) la densidad Lagrangiana y las constricciones son invariantes bajo la acción de un grupo de Lie,  $G$ , de simetría global. De manera más precisa [38], las configuraciones de campo clásicas en uno de estos modelos son mapeos  $\phi : B \rightarrow M$ , donde  $B$  es un espacio base y  $M$  es un espacio de llegada dados. La descripción "no lineal" se reserva para aquellos modelos donde los campos físicos, para todos los puntos  $p \in B$ , toman valores en una variedad Riemanniana  $M$  que no es un espacio lineal. Dado que cualquier variedad Riemanniana  $M$  puede encajarse isométricamente en un espacio vectorial Euclídeo  $V$ , la densidad Lagrangiana del modelo (reescrita en términos de campos  $V$ -valuados) deberá complementarse con las constricciones que expresan el hecho de que los campos  $V$ -valuados deben estar restringidos a la subvariedad encajada  $M$ .

En la mayoría de los modelos el grupo de invariancia global  $G$  actúa transitivamente sobre  $M$ , de tal manera que esta variedad es un espacio Riemanniano homogéneo para  $G$ . Si  $E$  es el grupo de estabilidad de un punto  $m \in M$ , entonces  $M$  puede identificarse con el espacio cociente izquierdo  $G/E$  (i.e.,  $M = (gE)$ ).

Existen métodos generales para construir Lagrangianos a partir de estas teorías, la idea consiste en representar a las configuraciones de campo del modelo como mapeos  $g$  de  $B$  en  $G$  en lugar de mapeos  $\phi$  de  $B$  en  $M$ , con  $\phi(x) = g(x)E$ . La densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  en cualquier MSNL es una función de  $g$  y  $\partial_\mu g$ ,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g, \partial_\mu g)$ , que será invariante bajo la transformación de norma

$$g(x) \mapsto g(x)h(x), \quad h(x) \in E \quad (2.1)$$

Así que los campos invariantes de norma serán  $G/E$ -valuados y la densidad Lagrangiana puede ser vista como una función de los campos con valores en  $G/E$ .

La construcción de  $\mathcal{L}$  es, a grandes rasgos, la siguiente. Sea  $G$  una representación fiel del grupo global de simetría  $G$  y sea  $\{L(\rho)\}$  una base para el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$  con la propiedad  $[\text{Tr}(L(\rho)L(\sigma))] = \delta_{\rho,\sigma}$ , donde  $\rho, \sigma = \{1, \dots, [G] := \text{Dim } G\}$ . Para  $\alpha \leq [E] := \text{Dim } E$ , los generadores  $L(\alpha)$  generan el álgebra de Lie  $\mathfrak{e}$  de  $E$  y los denotaremos por  $t(\alpha)$ . Los restantes generadores los llamaremos  $s(i)$ , donde  $[E] + 1 \leq i \leq [G]$ . Entonces, las relaciones de conmutación quedan como sigue:

$$[t(\alpha), t(\beta)] = i f_{\alpha\beta\gamma} t(\gamma), \quad [t(\alpha), s(i)] = i \bar{f}_{\alpha i j} s(j), \quad [s(i), s(j)] = i(\bar{f}_{\alpha i j} t(\alpha) + f_{k i j} s(k)) \quad (2.2)$$

Sea  $w$  una forma definida sobre  $G$  con componentes  $w_\mu(g) = g^{-1} \partial_\mu g$ , bajo la transformación de norma (2.1) esta una forma se transforma como

$$w_\mu(gh) = h^{-1} w_\mu(g)h + h^{-1} \partial_\mu h \quad (2.3)$$

No es difícil convencerse de que  $w_\mu$  puede escribirse como la suma de la proyección de ésta en el álgebra de Lie e más el complemento ortogonal; i.e.,

$$w_\mu = A_\mu + B_\mu \quad (2.4)$$

donde  $A_\mu(g) = t(\alpha)\text{Tr}(t(\alpha)w_\mu(g))$  y  $B_\mu(g) = s(i)\text{Tr}(s(i)w_\mu(g))$ . De (2.3) y (2.4), se sigue que bajo una transformación de norma estas componentes transforman como

$$A_\mu(gh) = h^{-1}A_\mu(g)h + h^{-1}\partial_\mu h, \quad B_\mu(gh) = h^{-1}B_\mu(g)h \quad (2.5)$$

Nótese que contamos con la estructura de un haz fibrado principal  $(E, B, F, G, \Pi)$  con espacio total  $E = G$ , espacio base  $B = G/E$ , fibra  $F \simeq E$ , grupo de estructura  $G = E$  y proyector  $\Pi : G \rightarrow G/E, g \mapsto [g]$ . Por construcción, todos los campos están en  $G$  y los campos físicos están en el espacio base  $G/E$ . Debido a esta estructura, tenemos entonces que la uno forma  $A$  con componentes  $A_\mu$  transforma como un potencial de norma (para el grupo de norma  $E$ ) y por lo tanto actúa como una uno forma de conexión. Así, a partir de  $A$  podemos construir la dos forma de curvatura  $F$  que bajo (2.1) transforma como  $F' = h^{-1}Fh$ .

La estructura de la uno forma  $w$  permite construir cantidades que satisfacen los requerimientos estipulados para ser densidades Lagrangianas de un MSNL. En particular

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\text{Tr}(B_\mu B_\nu) \quad (2.6)$$

y

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}g^{\mu\tau}g^{\nu\rho}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\tau\rho}) \quad (2.7)$$

donde  $g^{\mu\nu}$  son las componentes de un tensor métrico dado sobre  $B$  (el espacio tiempo, por ejemplo), respecto a coordenadas (locales)  $x^\mu$ , y  $g$  es su determinante.

Si  $\Phi$  es un campo invariante de norma, entonces podemos expresarlo como

$$\Phi = g(\sum_\alpha t(\alpha))g^{-1} \quad (2.8)$$

Puesto que el lado derecho de (2.8) pertenece a  $g$ , entonces

$$g(\sum_\alpha t(\alpha))g^{-1} = \sum_\rho \phi_\rho L(\rho) \quad (2.9)$$

donde los campos  $\phi_\rho$  son también campos físicos. De (2.9) y la propiedad de normalización para los generadores de  $g$ , uno puede mostrar que

$$\sum_\alpha \text{Tr}(t(\alpha)t(\alpha)) = \sum_\rho \phi_\rho^2 \text{Tr}(L(\rho)L(\rho)) \quad (2.10)$$

De (2.10) se sigue que los campos  $\phi_\rho$  están sujetos a una restricción no lineal y que hay  $[G] - 1$  campos físicos independientes. La variedad  $M$  queda entonces definida por la ecuación (2.10) y, dado el carácter no lineal de esta restricción, no es un espacio vectorial.

Las ecuaciones de Einstein para los campos gravitacionales axisimétricos estacionarios, de ondas gravitacionales cilíndricas, y modelos cosmológicos de Gowdy  $T^3$  y  $S^1 \times S^2$ , están relacionadas con aquellas del MSNL  $S(L(2, \mathbb{R}))/SO(2)$ , pues la densidad Lagrangiana para este modelo sigma no lineal es equivalente a la acción reducida de cada uno de los campos gravitacionales [13]. Para construir este modelo sigma específico, consideremos la representación matricial de  $S(L(2, \mathbb{R}))$  en sí mismo. Los generadores de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$  están dados por

$$L_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad L_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

donde  $L_1$  es el generador de  $\mathfrak{so}(2)$  y, en efecto, satisfacen que  $|Tr(L_\rho L_\sigma)| = \delta_{\rho\sigma}$  con  $\rho, \sigma = \{1, 2, 3 = [SL(2, \mathbb{R})]\}$ . Observemos que en este caso solamente hay dos campos invariantes de norma independientes. En efecto, de (2.10) y (2.11) tenemos que

$$\phi_1^2 - (\phi_2^2 + \phi_3^2) = 1 \quad (2.12)$$

Consecuentemente, es natural fijar la norma en  $G$  en términos de dos campos independientes  $\eta = \eta(x^1, x^2)$  y  $\xi = \xi(x^1, x^2)$ . La elección para fijar la norma es [39]

$$g(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} e^\eta & \xi e^{-\eta} \\ 0 & e^{-\eta} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}) \quad (2.13)$$

Por construcción  $g(x^1, x^2)$  es una sección en  $SL(2, \mathbb{R})$  a través de la cual podemos especificar a la densidad lagrangiana de este modelo sigma no lineal. De (2.13) tenemos que las componentes de la uno forma  $w$  estan dadas por

$$w_\mu(g) = g^{-1} \partial_\mu g = \begin{pmatrix} \eta_\mu & e^{-2\eta} \xi_\mu \\ 0 & -\eta_\mu \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

donde  $\eta_\mu := \partial\eta/\partial x^\mu$  y  $\xi_\mu := \partial\xi/\partial x^\mu$ . Puesto que  $B_\mu(g) = S_i Tr(S^i w_\mu(g))$ , después de algunas manipulaciones algebraicas simples se encuentra que

$$B_\mu(g) = \begin{pmatrix} \eta_\mu & \frac{1}{2} e^{-2\eta} \xi_\mu \\ \frac{1}{2} e^{-2\eta} \xi_\mu & -\eta_\mu \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Entonces

$$Tr\{B_\mu B_\nu\} = 2\eta_\mu \eta_\nu + \frac{1}{2} e^{-4\eta} \xi_\mu \xi_\nu \quad (2.16)$$

y

$$\mathcal{L}_\sigma = \sqrt{-g} g^{\mu\nu} (2\eta_\mu \eta_\nu + \frac{1}{2} e^{-4\eta} \xi_\mu \xi_\nu) \quad (2.17)$$

La ecuación (2.17) representa a la densidad Lagrangiana para el modelo sigma no lineal con  $G = SL(2, \mathbb{R})$  y  $E = SO(2)$ . Las ecuaciones de campo son las ecuaciones de Euler-Lagrange que de (2.17) se derivan,

$$g^{\alpha\mu} \xi_{\alpha\mu} + \xi_\mu g_{,\alpha}^{\alpha\mu} - 4g^{\alpha\mu} \xi_\mu \eta_{,\alpha} + \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \xi_\mu (\ln|g|)_{,\alpha} = 0 \quad (2.18)$$

$$g^{\alpha\mu} \eta_{\alpha\mu} + \eta_\mu g_{,\alpha}^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} \eta_\mu (\ln|g|)_{,\alpha} + \frac{1}{2} e^{-4\eta} g^{\alpha\mu} \xi_\alpha \xi_\mu = 0 \quad (2.19)$$

donde  $\eta_{\mu\nu} := \partial^2 \eta / \partial x^\mu \partial x^\nu$  y  $\xi_{\mu\nu} := \partial^2 \xi / \partial x^\mu \partial x^\nu$ .

Para el caso particular del modelo cosmológico de Gowdy con topología de un tres toro, el punto de partida es el elemento de línea

$$ds^2 = -e^{-(\lambda+3\tau)/2} d\tau^2 + e^{-(\lambda-\tau)/2} d\theta^2 + h_1(\tau)h_2(\theta)[e^P(d\sigma + Qd\delta)^2 + e^{-P}d\delta^2] \quad (2.20)$$

donde  $h_1(\tau) = e^{-\tau}$ ,  $h_2(\theta) = 1$ ,  $\lambda$ ,  $P$  y  $Q$  dependen de las coordenadas  $\tau$  y  $\theta$ , y  $0 \leq \sigma, \delta, \theta \leq 2\pi$ . Este elemento de línea incluye el caso  $S^1 \times S^2$ , donde  $h_1(\tau) = \text{sen } e^{-\tau}$  y  $h_2(\theta) = \text{sen } \theta$ . La densidad Lagrangiana reducida de Einstein-Hilbert es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GOW} &= \frac{1}{2} e^\tau h_1 h_2 [(P_\tau^2 - e^{-2\tau} P_\theta^2) + e^{2P} (Q_\tau^2 - e^{-2\tau} Q_\theta^2)] \\ &+ \frac{1}{2} e^\tau (h_2 h_{1\tau} \lambda_\tau - e^{-2\tau} h_1 h_{2\theta} \lambda_\theta) + V(\tau, \theta) \end{aligned} \quad (2.21)$$

donde  $V(\tau, \theta) = e^{-\tau} h_1 h_2^{-1} h_{2\theta}^2 - e^\tau h_2 h_{1\tau} (h_1 h_1^{-1} + 1)$ . Puesto que  $\lambda$  es una "coordenada" cíclica de la densidad Lagrangiana (2.21) y el término  $V(\tau, \theta)$  no interviene en las ecuaciones de campo, podemos entonces llevar a cabo una transformación de Legendre tal que (2.21) queda como

$$\mathcal{L}_{GOW} = \frac{1}{2} e^\tau h_1 h_2 [(P_\tau^2 - e^{-2\tau} P_\theta^2) + e^{2P} (Q_\tau^2 - e^{-2\tau} Q_\theta^2)] \quad (2.22)$$

De (2.22), se obtiene que las ecuaciones de campo son

$$P_{\tau\tau} - e^{-2\tau} P_{\theta\theta} + P_\tau(1 + h_1^{-1} h_{1\tau}) - e^{-2\tau} h_2^{-1} h_{2\theta} P_\theta - e^{-2P} (Q_\tau^2 - e^{-2\tau} Q_\theta^2) = 0 \quad (2.23)$$

$$Q_{\tau\tau} - e^{-2\tau} Q_{\theta\theta} + Q_\tau(1 + h_1^{-1} h_{1\tau}) - e^{-2\tau} h_2^{-1} h_{2\theta} Q_\theta + 2(P_\tau Q_\tau - e^{-2\tau} P_\theta Q_\theta) = 0 \quad (2.24)$$

Para el caso del modelo  $T^3$  ( $h_1 = e^{-\tau}$ ,  $h_2 = 1$ ) queremos la norma (2.13) y que los campos  $\eta$  y  $\xi$  dependan solamente de  $\tau$  y  $\theta$ . Entonces, la ecuación (2.6) da la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2} [(4\eta_\tau^2 - 4e^{-2\tau} \eta_\theta^2) + e^{-4\eta} (\xi_\tau^2 - e^{-2\tau} \xi_\theta^2)] \quad (2.25)$$

que, después de la identificación  $\eta = -P/2$  y  $\xi = Q$ , es idéntica a la densidad Lagrangiana de Einstein-Hilbert (2.22) para el modelo de Gowdy  $T^3$  no polarizado.

## §2.2. El modelo cosmológico de Gowdy $T^3$ polarizado

El modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$  polarizado consiste en un espacio tiempo cuadrdimensional vacío, globalmente hiperbólico y cuyas hipersuperficies compactas tipo espacio son homeomorfas a un tres toro, cuenta con dos campos vectoriales de Killing tipo espacio que conmutan entre si y son hipersuperficie ortogonales [15]. Estos modelos fueron extensamente estudiados principalmente en la década de los setenta [40, 41] y reexaminados a finales de los ochenta [42] y en el último tramo del siglo XX [8] e inicios del XXI [9, 10]. En la reciente cuantización del modelo llevada a cabo en [9] se menciona que la "creación de partículas" enfatizada en la cuantización canónica realizada en [41] no tiene un sentido físico natural pues (se argumenta) el sistema es cerrado y uno esperaría entonces que el vacío físico fuese estable; no hay campos físicos externos que bombeen energía al sistema y creen cuantos/partículas físicas. Adicionalmente, en [9] se asegura no tener creación de partículas, en contraste con [41], dado que la elección de estructura compleja es independiente del tiempo<sup>1</sup> y, por consiguiente, no hay mezcla en los operadores de

<sup>1</sup> Sin embargo, es interesante hacer notar que aquí se presenta una situación contrastante: con la elección de estructura compleja que se lleva a cabo en [9] la transformación de evolución temporal es no implementable a nivel cuántico (Capítulo 4) y, en ciertos textos, ello es interpretado como una creación infinita de partículas [43, 44].

creación y aniquilación. Admitiendo esta argumentación para privilegiar la cuantización de M. Pierri [9] sobre la de B. K. Berger [41], nos concentraremos en este trabajo de tesis a considerar las cuantizaciones completas del modelo que llevan a cabo M. Pierri [9, 10] por una parte y, por la otra, G. Mena [8].

En esta sección revisaremos (siguiendo [8, 9]) brevemente los principales aspectos de la dinámica clásica de este modelo a través de las dos distintas (pero equivalentes) formulaciones, que "preparan de manera óptima el terreno" para cada una de las cuantizaciones que hemos dicho que consideraremos y que serán expuestas más adelante en este mismo capítulo.

### §2.2.1. Variables de Ashtekar

En el formalismo de Ashtekar para relatividad general Lorentziana, las variables fundamentales son una triada densitizada  $\tilde{E}_i^a$  y una conexión  $SO(3)$ ,  $A_i^a$ , ambas definidas sobre una variedad tres dimensional  $\Sigma$  [14], donde las letras latinas del inicio del alfabeto denota índices espaciales, mientras que las letras intermedias del alfabeto denotan índices  $SO(3)$ . La variable de configuración es la uno forma de conexión  $SO(3)$ ,  $A_i^a$ , y su momento canónico conjugado es la triada  $\tilde{E}_i^a$  con peso de densidad uno. La estructura de paréntesis de Poisson esta dada por  $(A_i^a(x), \tilde{E}_j^b(y)) = i\delta_a^b \delta_j^i \delta(x, y)$ . Las constricciones de primera clase de la relatividad general en vacío son [14]:  $\mathcal{G}_i = D_a \tilde{E}_i^a = \partial_a \tilde{E}_i^a + \epsilon_{ij}^k A_a^j \tilde{E}_i^k$ ,  $C_a = F^i{}_{ab} \tilde{E}_i^b$  y  $\mathcal{H} = \epsilon_{i}{}^{jk} F^i{}_{ab} \tilde{E}_j^a \tilde{E}_k^b$ , donde  $F^i{}_{ab} = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon^j{}_{ik} A_a^j A_b^k$  es la curvatura de la conexión  $SO(3)$ .

Para los universos de Gowdy con topología  $T^3$ , es posible elegir siempre coordenadas espaciales periódicas  $\delta, \sigma$  y  $\theta$  tales que  $(\partial_\delta)^\alpha$  y  $(\partial_\sigma)^\alpha$  son campos vectoriales de Killing que conmutan entre si. Así, todas las variables del modelo dependerán de  $\theta$  y de la coordenada de tiempo  $t$ , y además éstas serán periódicas en  $\theta \in S^1$ . Esta reducción de simetría permite hacer cero a las componentes  $\tilde{E}_1^\alpha$ ,  $\tilde{E}_2^\alpha$  y  $\tilde{E}_3^\alpha$  de la triada. Por lo tanto,  $A_\theta^1 = A_\theta^2 = A_\theta^3 = 0$  resuelven las constricciones  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, C_\delta$  y  $C_\sigma$ . En consecuencia, el modelo de Gowdy con topología de un tres toro queda descrito por los diez campos periódicos en  $\theta$ ,  $A := A_\theta^3, E := \tilde{E}_3^\alpha, A_\alpha^L$ , y  $\tilde{E}_L^\alpha$ , donde  $\alpha = \delta, \sigma$  y  $L = 1, 2$ , sujetos a las siguientes constricciones Gaussiana, de difeomorfismos y escalar:

$$G = \partial_\theta E + J = 0, \quad (2.26)$$

$$C = \tilde{E}_L^\alpha \partial_\theta A_\alpha^L + AJ = 0, \quad (2.27)$$

$$H = 2E \tilde{E}_L^\alpha \epsilon^L{}_{\theta\beta} \partial_\theta A_\alpha^M + 2AEK - K_\alpha^\beta K_\beta^\alpha + K^2 = 0 \quad (2.28)$$

donde  $K_\alpha^\beta := A_\alpha^L \tilde{E}_L^\beta$ ,  $K := K_\alpha^\alpha$ ,  $J_\alpha^\beta := \epsilon_L{}^M A_\alpha^L \tilde{E}_M^\beta$ , y  $J := J_\alpha^\alpha$ .

Restringiéndonos al sector de métricas no degeneradas, llevamos a cabo el cambio de variables de espacio fase  $x = q^{\delta\delta}/q^{\sigma\sigma}$ ,  $v = q^{\delta\sigma}/q^{\sigma\sigma}$ ,  $\gamma = \ln q^{\sigma\sigma}$  y  $\phi = \arctan(\tilde{E}_3^\sigma/\tilde{E}_3^\delta)$ , con  $q^{\alpha\beta} := \tilde{E}_i^\alpha \tilde{E}_i^{\beta L}$ . Puesto que  $\tilde{E}_i^\alpha = e_i^\alpha h(e)$  y las componentes  $\tilde{E}_1^\alpha, \tilde{E}_2^\alpha, \tilde{E}_3^\alpha$  y  $\tilde{E}_3^\sigma$  son cero, entonces  $q^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} h^2$ , de tal manera que para tres métricas positivas definidas,  $q^{\alpha\beta}$  también será positiva definida. Las variables elementales para el modelo, que en efecto forman un álgebra de Poisson cerrada, son  $A, E, K_\delta^\delta, K_\delta^\sigma, K, J, x, v, \gamma, \phi$ . Para eliminar a los grados de libertad no físicos, se imponen condiciones que fijan la norma:  $\chi_H = E - e^t$ ,  $\chi_G = \phi$  y  $\chi_C = K - \frac{1}{\sqrt{2x}} K_0$ , donde  $K_0 = \frac{1}{\sqrt{2x}} \oint K$  es tal que su paréntesis de Poisson con todas las constricciones de primera clase (2.26)-(2.28) es cero y, por lo tanto, no puede removerse bajo el proceso de fijar la norma<sup>2</sup>. Para  $K_0 \neq 0$ ,

<sup>2</sup> El símbolo  $\oint$  denota integración sobre  $\theta \in S^1$ .

$\Phi = (\chi_H, \chi_G, \chi_C, \oint \tilde{n}H, \oint \lambda G, \oint nC)$  es un conjunto de segunda clase si  $\tilde{n}, \lambda, \partial_\theta n \neq 0$  (si uno adopta la elección de tiempo de Gowdy,  $E = \tau$ , las soluciones clásicas con  $K_0 = 0$  no están incluidas en las familias de cosmologías con topología de un tres toro [8]). A partir de las condiciones para fijar la norma resolvemos las constricciones de Gauss (2.26) y escalar (2.28), obteniendo expresiones para  $J$  y  $A$  como funciones de las variables  $K_\delta^\sigma, K_\sigma^\delta, x, v$  y  $K_0$ . Ésto y las condiciones  $\chi_H = 0$  y  $\chi_G = 0$ , nos permite remover a los pares canónicamente conjugados  $(A, E)$  y  $(J, \phi)$  del conjunto de grados de libertad dinámicos.

La construcción de difeomorfismos (2.27) puede reescribirse como

$$\Pi - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} K_0 \gamma' = 0, \text{ o bien como } \gamma(\theta) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{K_0} \int_0^\theta d\theta_1 \Pi + \gamma(0) \quad (2.29)$$

donde  $\Pi = (2(x-v^2))^{-1} [K_\delta^\sigma (vx' - 2xv') - K_\sigma^\delta (x' - 2vv')]$ , con las letras primadas representando derivada respecto a la coordenada  $\theta$ . La ecuación (2.29) fija todos los coeficientes de Fourier  $\gamma_n$ , para  $n \neq 0$  (i.e., el coeficiente  $\gamma_0$  queda indeterminado), en términos de  $K_0$  y de los coeficientes de Fourier de  $\Pi$ . La periodicidad de  $\gamma$  implica que

$$\Pi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint \Pi = \frac{K_0}{4\pi} (\gamma(2\pi) - \gamma(0)) = 0 \quad (2.30)$$

Dado que  $\{K_n, \gamma_m\} = 2i\delta_{-n,m}$ , y  $K_n$  y  $\gamma_n$  conmutan bajo el paréntesis de Poisson con el resto de las variables de espacio fase, entonces la construcción de difeomorfismos, junto con la condición  $\chi_C = 0$ , permite eliminar como grados físicos de libertad a los pares canónicamente conjugados  $(K_n, \gamma_{-n})_{n \neq 0}$ , en tanto que  $K_0$  y  $\gamma_0$  permanecen como variables dinámicas. El espacio fase del modelo reducido es descrito por los cuatro campos periodicos  $K_\delta^\sigma, K_\sigma^\delta, x$  y  $v$ , y por las variables homogéneas  $K_0$  y  $\gamma_0$ .

La compatibilidad entre las condiciones que fijan la norma y la evolución dinámica generada por el Hamiltoniano de construcción

$$H = \oint \left( -\frac{\tilde{N}}{2} H - iN^\theta (C - AG) - i\lambda G \right)$$

implica que la función densitizada de lapso,  $\tilde{N}$ , esta dada por  $\tilde{N} = -i\sqrt{2\pi}/K_0$  y que la única componente no nula del corrimiento,  $N^\theta$ , puede ser una función cualquiera de  $t$ ,  $N^\theta = N^\theta(t)$ . Nótese que hay una construcción remanente,  $\Pi_0 = 0$ , y por consiguiente la libertad de norma en difeomorfismos no ha sido completamente removida. La función de corrimiento puede ser reabsorbida a través de la transformación de coordenadas  $\tilde{\theta} = \theta + \int_{t_0}^t dt_1 N^\theta(t_1)$ , donde  $t_0$  es cualquier tiempo dado. Los campos vectoriales  $(\partial_{\tilde{\theta}})^\alpha$  y  $(\partial_t)^\alpha$  son ortogonales. Por lo tanto, la evolución dinámica (manteniendo  $\tilde{\theta}$  constante) es generada por la densidad Hamiltoniana reducida  $\mathcal{H}_R = -iA(K_\delta^\sigma, K_\sigma^\delta, x, v, K_0)e^t$ , la cual es el negativo del momento canónicamente conjugado a la variable que se elige como tiempo.

Llevando a cabo el cambio de variables  $\psi = \ln(x-v^2) - 2t$ ,  $p_\psi = \text{Re}(\frac{1}{2}(K_\delta^\sigma - K_\sigma^\delta v))$ ,  $p_v = \text{Re}(iK_\sigma^\sigma)$  y  $k_0 = iK_0$ , obtenemos el conjunto canónico  $(\psi, p_\psi; v, p_v; \gamma_0, k_0)$  de variables elementales reales para nuestro modelo reducido. La construcción (2.30) puede expresarse como

$$-i\Pi_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint (p_\psi \psi' + p_v v') \quad (2.31)$$

y la nueva densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H}_R = -\frac{\sqrt{2\pi}}{k_0} \left[ 4p_\psi^2 + e^{2t} e^{i\psi} p_v^2 + \frac{e^{2t}}{16} (\psi')^2 + \frac{e^{-\psi}}{4} (v')^2 \right] \quad (2.32)$$

No es difícil convencerse de que las únicas componentes no nulas de la 3-métrica  $h_{ab}$  son  $h_{\theta\theta} = e^\gamma e^{\psi/2}$ ,  $h_{\alpha\beta} = e^{-\psi/2} g_{\alpha\beta}$ , con  $g_{\sigma\sigma} = e^{2t} e^\psi + v^2$ ,  $g_{\sigma\delta} = -v$ ,  $g_{\delta\delta} = 1$ . La función de lapso,  $N = \tilde{N}(\det h_{ab})^{1/2}$ , esta dada en este caso por  $N = \frac{\sqrt{2\pi}}{k_0} e^t e^{\gamma/2} e^{\psi/4}$ .

Fijando  $v \equiv 0$ , condición que nos da el modelo polarizado y que es compatible con  $p_\nu \equiv 0$ , introduciendo el cambio de coordenada temporal  $T = \frac{\sqrt{2\pi}}{k_0} e^t$ , rescalando  $\psi$  por  $2\sqrt{2}\psi$  y recordando que la función de corrimiento  $N^\theta$  puede absorberse en la coordenada angular  $\theta$ , llegamos al siguiente elemento de línea

$$ds^2 = e^{\sqrt{2}\psi} [e^\gamma (-dT^2 + d\theta^2) + (Tp)^2 d\sigma^2] + e^{-\sqrt{2}\psi} d\delta^2 \quad (2.33)$$

donde  $p = \frac{k_0}{\sqrt{2\pi}}$ . Entonces, el conjunto de variables elementales reales consta de los grados locales de libertad ( $\varphi = \psi(\theta)$ ,  $\pi = p_\psi(\theta)$ ) y de los globales ( $c_0, b_0$ ), donde  $b_0 := k_0 \gamma_0 / 2$  y  $c_0 := \ln k_0$  (es posible fijar a  $k_0 \in \mathbb{R}^+$  sin pérdida de generalidad). El modelo esta sujeto a la constricción global

$$P_\theta := \oint p_\psi \psi' = 0. \quad (2.34)$$

Soluciones exactas de la forma (2.33) corresponden a modelos cosmológicos con hipersuperficies compactas homeomorfas a un tres toro. Un análisis de los invariantes de curvatura muestra que las singularidades aparecen especialmente cuando el campo  $\psi$  diverge, un comportamiento que es de esperarse ocurra a  $T \rightarrow 0$ .

### §2.2.2. La descomposición 2+1

Una manera alternativa de describir a los modelos de Gowdy  $T^3$  polarizados es utilizando su analogía con la dinámica de un campo escalar no masivo propagándose en un espacio tiempo ficticio de dimensión 2 + 1. Explícitamente, para ver esto consideremos primero las ecuaciones de Einstein en vacío,  $R_{\mu\nu} = 0$ , para la métrica de Gowdy (2.33)

$$\psi'' - \dot{\psi} - \frac{1}{T} \dot{\psi} = 0 \quad (2.35)$$

$$\gamma' = 2T\dot{\psi}\psi' \quad (2.36)$$

$$\dot{\gamma} = T((\dot{\psi})^2 + (\psi')^2) \quad (2.37)$$

donde las letras primadas representan derivadas respecto a  $\theta$ , mientras que los puntos denotan derivada respecto a  $T$ . Las ecuaciones (2.35)-(2.37) pueden ser obtenidas variando la acción de gravedad 2 + 1 mínimamente acoplada a un campo escalar axisimétrico no masivo

$$S^{(3)}(g, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_{(3)M} d^3x \sqrt{-^{(3)}g} \left( {}^{(3)}R - {}^{(3)}g^{ab} \nabla_a \psi \nabla_b \psi \right) \quad (2.38)$$

donde  ${}^{(3)}R$  es el escalar de Ricci del espacio tiempo  $({}^{(3)}M, {}^{(3)}g_{ab})$  tres dimensional,  ${}^{(3)}M$  es una variedad 3-dimensional topológicamente equivalente a  $T^2 \times \mathbb{R}$  y con métrica de espacio tiempo  ${}^{(3)}g_{ab} = h_{ab} + \tau^2 \nabla_a \sigma \nabla_b \sigma$ . El campo de Killing  $\sigma^a$  es un campo de hipersuperficie ortogonal y el campo  $h_{ab}$  es una métrica de signatura  $(-, +)$  sobre la 2-variedad ortogonal a  $\sigma^a$ ;  $\tau$  es la norma de  $\sigma^a$  y  $\sigma$  es una coordenada angular con rango  $0 \leq \sigma < 2\pi$  y tal que  $\sigma^a \nabla_a \sigma = 1$ .

Introduciendo una foliación con hipersuperficies compactas etiquetadas con  $t = \text{const}$ , la dos métrica puede expresarse como

$$h_{ab} = (-N^2 + N^\theta N_\theta) \nabla_a t \nabla_b t + 2N_\theta \nabla_{(a} t \nabla_{b)} \theta + e^\gamma \nabla_a \theta \nabla_b \theta$$

donde el lapso,  $N$ , el corrimiento,  $N^\theta$ , y  $\gamma$  son funciones de  $t$  y (periódicas en)  $\theta$ . La coordenada angular  $\theta \in [0, 2\pi)$  es tal que  $\hat{\theta}^\alpha \nabla_\alpha \theta = 1$ , donde  $\hat{\theta}^\alpha$  es el campo vectorial unitario en cada hoja ortogonal a  $\sigma^\alpha$ . En consecuencia, el sistema consta de cinco funciones ( $N$ ,  $N^\theta$ ,  $\gamma$ ,  $\tau$ ,  $\psi$ ) de  $t$  y  $\theta$ . La función  $\psi$  representa al campo escalar no masivo.

Para obtener la formulación Hamiltoniana, basta con sustituir la expresión (2 + 1) para  ${}^{(3)}g_{ab}$  en la acción (2.38),

$$S = \int dt \left( \oint (p_\gamma \dot{\gamma} + p_\tau \dot{\tau} + p_\psi \dot{\psi}) \right) - H[N, N^\theta] \quad (2.39)$$

donde el Hamiltoniano  $H$  esta dado por  $H[N, N^\theta] = \oint (NC + N^\theta C_\theta)$  y las constricciones de primera clase  $C$  y  $C^\theta$  son

$$C = e^{-\gamma/2} \left[ 2\tau'' - \gamma' \tau' - p_\gamma p_\tau + \tau \left( \frac{p_\psi^2}{4\tau^2} + \psi'^2 \right) \right] \quad (2.40)$$

$$C^\theta = e^{-\gamma} (\gamma' p_\gamma - 2p_\gamma' + \tau' p_\tau + p_\psi \psi') \quad (2.41)$$

El lapso y el corrimiento no son variables dinámicas, de tal manera que el espacio fase  $\Gamma$  esta ordenado por los siguientes tres pares canónicamente conjugados ( $\gamma$ ,  $p_\gamma$ ;  $\tau$ ,  $p_\tau$ ;  $\psi$ ,  $p_\psi$ ) de funciones periódicas en  $\theta$ , definidas sobre una 2-variedad  $\Sigma$  con topología  $T^2$ .

Puesto que el Hamiltoniano se anula sobre la superficie de constricción, no hay distinción entre norma y dinámica y, por consiguiente, es necesario introducir una "deparametrización" para discutir la dinámica. La idea es entonces seleccionar, del conjunto infinito de campos vectoriales generados por la constricción Hamiltoniana, uno que represente la evolución fijando la norma de los otros. Para fijar la norma pedimos que

$$p_\gamma + p = 0 \quad \text{y} \quad \tau(\theta)' = 0, \quad (2.42)$$

donde  $p$  es una constante espacial cuyo paréntesis de Poisson con todas las constricciones es cero y, por lo tanto, no puede ser removida por fijar la norma. La segunda condición, que más bien es una elección de la dinámica, permite ver a  $\tau(\theta)$  como el parámetro de tiempo.

La consistencia del formalismo requiere que los paréntesis de Poisson ( $\tau(\theta)'$ ,  $H[N, N^\theta]$ ) y ( $p_\gamma + p$ ,  $H[N, N^\theta]$ ) sean cero. Esto se logra si las funciones libres de especificarse,  $N$  y  $N^\theta$ , se eligen como

$$N = \frac{e^{\gamma/2}}{p} \quad \text{y} \quad N^\theta = 0, \quad (2.43)$$

de tal manera que la condición (2.42) es, en efecto, aceptable. Para el caso particular (2.43), tenemos que  $t(\theta) = 1$  y  $\dot{p}_\gamma = -\dot{p} = 0$ , así que  $p$  es una constante que puede asociarse con un parámetro de rescalamiento del tiempo en el espacio tiempo original 3 + 1. Además de un grado global de libertad, los grados físicos de libertad residen en el campo  $\psi$ . Resolviendo el sistema de constricciones de segunda clase ( $C$ ,  $C^\theta$ ,  $p_\gamma + p$ ,  $\tau'$ ), se obtiene que

$$p_\tau = -\frac{t}{p} \left( \frac{p_\psi^2}{4t^2} + \psi'^2 \right), \quad (2.44)$$

$$\gamma(\theta) = \frac{1}{p} \int_0^\theta d\theta_1 p_\psi \psi' + \gamma(0). \quad (2.45)$$

Como  $\gamma$  es una función suave de  $\theta$ , ésta admite una descomposición en series de Fourier

$$\gamma = q + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} \gamma_n.$$

entonces

$$\sum_{n \neq 0} \left( \frac{e^{in\theta} - 1}{\sqrt{2\pi}} \right) \gamma_n = \frac{1}{p} \int_0^{\theta} d\theta_1 p_\psi \psi'.$$

y podemos resolver para todos los modos excepto para el modo cero. i.e., podemos resolver (2.45) para  $\tilde{\gamma} := \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} \gamma_n$  y quedarnos con el grado de libertad global,  $q = \frac{1}{2\pi} \oint \gamma$ , sin resolver. Esto es consistente con el hecho de que un vector de corrimiento constante,  $N^\theta = \text{const}$ , también sería aceptable pues preserva las condiciones (2.42). Sustituyendo (2.45) en (2.43) se obtiene que  $N = N[q, p, \psi, p_\psi]$ . La métrica del espacio tiempo<sup>3</sup> esta completamente determinada por  $q, p, \psi$  y  $p_\psi$

$${}^{(1)}g_{ab} = e^{q+\tilde{\gamma}} \left( -\frac{1}{p^2} \nabla_a t \nabla_b t + \nabla_a \theta \nabla_b \theta \right) + t^2 \nabla_a \sigma \nabla_b \sigma \quad (2.46)$$

Las variables de espacio fase son funciones periódicas de  $\theta$ , por lo que  $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 0$  define vía (2.45) la restricción global (2.34). i.e.,

$$P_\theta := \oint p_\psi \psi' = 0 \quad (2.47)$$

La estructura simpléctica no degenerada en el espacio fase reducido  $\Gamma_r = \Gamma_g \oplus \bar{\Gamma}$ , donde  $\Gamma_g$  es coordinado por el par  $(q, p)$  y  $\bar{\Gamma}$  por  $(\psi, p_\psi)$ , es el pull-back de la estructura simpléctica natural definida sobre  $\Gamma$ . Entonces,  $\{q, p\} = 1$  y  $\{\psi(\theta_1), p_\psi(\theta_2)\} = \delta(\theta_1, \theta_2)$  en  $\Gamma_r$ .

Sustituyendo (2.42) y (2.44) en (2.39) se obtiene la acción reducida

$$S = \int dt \left( p\dot{q} + \oint \left[ p_\psi \dot{\psi} - \frac{t}{p} \left( \frac{p_\psi^2}{4t^2} + \psi'^2 \right) \right] \right) \quad (2.48)$$

y el Hamiltoniano reducido

$$H = \oint \frac{t}{p} \left[ \frac{p_\psi^2}{4t^2} + \psi'^2 \right] \quad (2.49)$$

Variando (2.48) respecto a  $\psi$  y  $p_\psi$ , las ecuaciones de campo son  $\frac{\delta S}{\delta t} = \frac{p_\psi}{2t^2}$  y  $\frac{\delta S}{\delta p_\psi} = 2T p_\psi \psi'$ , que es equivalente a la ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar  $\psi$  propagándose en un fondo ficticio plano

$${}^{(1)}g_{ab} = -\nabla_a T \nabla_b T + \nabla_a \theta \nabla_b \theta + T^2 \nabla_a \sigma \nabla_b \sigma$$

con la restricción adicional de que el campo  $\psi$  no depende de  $\sigma$ . Aquí se ha considerado el rescalamiento constante  $T := t/p$ , para simplificar las ecuaciones dinámicas resultantes para  $\psi$ . El espacio fase  $\bar{\Gamma}$ , coordinado por  $\varphi := \psi(\theta)$  y  $\pi := p_\psi(\theta)$ , corresponde al espacio vectorial simpléctico  $(S, \Omega_S)$  de soluciones suaves y reales a la ecuación de Klein-Gordon  ${}^{(1)}g^{ab} \nabla_a \nabla_b \psi = 0$ ,

$$\psi(\theta, T) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\theta, T) A_m + \overline{f_m(\theta, T) A_m} \quad (2.50)$$

<sup>3</sup>Notar que la métrica (2.33) es justamente  $e^{\sqrt{2\theta}} [{}^{(1)}g_{ab}] + e^{-\sqrt{2\theta}} \nabla_a \delta \nabla_b \delta$ .

donde la barra denota conjugación compleja, las  $A_m$ 's son constantes arbitrarias y

$$f_0(\theta, T) = \frac{1}{2}(\ln T - i) \quad (2.51)$$

$$f_m(\theta, T) = \frac{1}{2}H_0^{(1)}(|m|T)e^{im\theta} \text{ for } m \neq 0 \quad (2.52)$$

con  $H_0^{(1)} = J_0 + iN_0$  la función de Hankel de primera especie y orden 0; y donde la estructura simpléctica  $\Omega_S$  esta dada por

$$\Omega_S(\psi_1, \psi_2) = \oint T(\psi_2 \partial_T \psi_1 - \psi_1 \partial_T \psi_2) \quad (2.53)$$

Nótese que la elección del tiempo interno  $T : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  depende de los puntos del espacio fase, en particular del grado global de libertad  $p$ , dando como consecuencia que éste tiempo sea un  $q$ -número. Recuérdese que en este caso se ha deparametrizado el sistema, es decir, hemos definido una evolución temporal ficticia con respecto al número  $T$ . Estrictamente hablando, desde el punto de vista canónico uno debería elegir un valor particular  $t_0$  del parámetro de tiempo para fijar de una vez y para siempre a una sola superficie de Cauchy  $\Sigma_0$ . Esta es la descripción "congelada del formalismo", donde sólo los verdaderos grados de libertad son tomados en cuenta y la noción de dinámica se pierde.

## §2.3. Cuantización

### §2.3.1. Cuantización canónica basada en las variables de Ashtekar

En el apartado §2.2.1 vimos al modelo cosmológico de Gowdy en la formulación de variables de Ashtekar. Ahí se obtuvo que el conjunto de variables elementales del modelo consiste en dos grados locales de libertad ( $\varphi = \psi(\theta)$ ,  $\pi = p_\psi(\theta)$ ) y dos grados homogéneos de libertad ( $b_0, c_0$ ). Por otra parte,  $\varphi$  y  $\pi$  pueden ser expandidas en series de Fourier, y los coeficientes de éstas ( $\varphi_n, \pi^n$ ) $_{n \in \mathbb{Z}}$ , junto con ( $b_0, c_0$ ), definen un nuevo conjunto infinito de variables elementales homogéneas con los siguientes paréntesis de Poisson

$$\{\varphi_n, \pi^m\} = \delta_{-n}^m, \quad \{b_0, c_0\} = 1. \quad (2.54)$$

Las condiciones de realidad sobre el conjunto de variables elementales implica que

$$\overline{b_0} = b_0, \quad \overline{c_0} = c_0, \quad \overline{\varphi_n} = \varphi_{-n} \text{ y } \overline{\pi^n} = \pi^{-n} \quad (2.55)$$

Los siguientes pasos en el programa de cuantización (§1.1), una vez que el conjunto  $\mathcal{O} = \text{Gen}\{1, b_0, c_0, \varphi_n, \pi_n\}$  ha sido especificado, consisten en asociar un operador abstracto a cada variable elemental (i.e.,  $(\varphi_n, \pi^n, b_0, c_0) \rightarrow (\hat{\varphi}_n, \hat{\pi}^n, \hat{b}_0, \hat{c}_0)$ ), imponer las relaciones de conmutación canónicas e introducir una representación lineal del álgebra resultante. Elijiendo como espacio de representación auxiliar al espacio vectorial de funcionales analíticas  $\Psi$  de  $\Omega = (c_0, \varphi_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ , Mena representa en [8] a los operadores fundamentales como

$$\hat{c}_0 \cdot \Psi = c_0 \Psi, \quad \hat{b}_0 \cdot \Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial c_0} \quad (2.56)$$

$$\hat{\varphi}_n \cdot \Psi = \varphi_n \Psi, \quad \hat{\pi}^n \cdot \Psi = -i \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_n} \quad (2.57)$$

un conjunto cuyos conmutadores, por construcción, reproduce el álgebra clásica de Poisson (2.54).

En el espacio auxiliar  $\Omega$  el producto interno es

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \int d\Omega \wedge d\bar{\Omega} \rho(\Omega, \bar{\Omega}) \overline{\Phi(\Omega)} \Psi(\Omega) \quad (2.58)$$

con  $d\Omega \wedge d\bar{\Omega} = (i/2)dc_0 \wedge d\bar{c}_0 \prod_n (i/2)d\varphi_n \wedge d\bar{\varphi}_n$ , y con medida

$$\rho = \delta(c_0 - \bar{c}_0) \prod_n \delta(\varphi_{-n} - \bar{\varphi}_n). \quad (2.59)$$

determinada (hasta una constante positiva) al imponer las condiciones de realidad (2.55) como relaciones autoadjuntas.

El espacio de Hilbert auxiliar,  $\mathcal{H}_{aux}$ , es determinado por el producto interno (2.58)-(2.59). Para imponer la constricción (2.34) a nivel cuántico, representemos  $P_\theta$  como el operador<sup>4</sup>

$$\hat{P}_\theta = i \sum_{s \in \mathbb{Z}} s \hat{\varphi}_s \hat{\pi}^{-s} \quad (2.60)$$

Los estados físicos son aquellos que son aniquilados por el operador de constricción  $\hat{P}_\theta$ . Las funcionales analíticas que cumplen con esta condición forman un espacio vectorial complejo, que al completarse respecto a (2.58)-(2.59) finalmente da el espacio de Hilbert de estados físicos,  $\mathcal{H}_f$ , cuyos elementos son de la forma

$$\Psi = P(k, \sigma') \frac{1}{C} \left( \prod_{0 \leq s} \frac{1}{\sqrt{2\pi A_s}} \right) \exp \left( -\frac{1}{4} \left\{ \frac{c_0^2}{C^2} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\varphi_s \varphi_{-s}}{A_s^2} \right\} \right) \quad (2.61)$$

donde  $C$  y  $A_s$  ( $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ) son constantes reales, y  $P(k, \sigma')$  es cualquier polinomio de la forma  $P(k, \sigma') = c_0^k \prod_n \varphi_n^{i_n}$ , que son eigenfunciones de  $\hat{P}_\theta$  (i.e.,  $\hat{P}_\theta P(k, \sigma') = N(\sigma') P(k, \sigma')$ , donde  $N(\sigma') = \sum_{s=1}^{\infty} s(i_s - i_{-s})$ , con  $\sigma' = (i_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ,  $k$  e  $i_n$  enteros no negativos) donde  $\sigma'$  contiene un número finito de elementos no nulos y  $N(\sigma') = 0$ .

El Hamiltoniano cuántico, considerado como la observable autoadjunta que representa a la integral de la densidad Hamiltoniana clásica reducida del modelo ( $H_f^T = \oint \mathcal{H}_f$ , donde  $\mathcal{H}_f$  esta dada por la ecuación (2.32) con  $v = p_v = 0$  para el caso polarizado), es

$$H_f^T = - \left( e^{-\bar{c}_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} 4 \sqrt{2\pi} \hat{\pi}^n \hat{\pi}^{-n} + e^{2i} e^{-\bar{c}_0} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sqrt{2\pi}}{16} n^2 \hat{\varphi}_n \hat{\varphi}_{-n} \right) \quad (2.62)$$

Las observables cuánticas pueden especificarse como la suma de productos de operadores elementales.

### §2.3.2. Cuantización covariante basada en la formulación 2 + 1

Como vimos en la sección (§2.2.2), el espacio fase que resulta de la descomposición 2 + 1 es el determinado por el conjunto de soluciones (2.50). Así, el problema de la cuantización de los grados locales de libertad se reduce entonces al de la teoría cuántica de un campo escalar no masivo  $\psi$  propagándose en un fondo ficticio.

<sup>4</sup>Con el ordenamiento dado en (2.60),  $\hat{P}_\theta$  es, al menos de manera formal, autoadjunto en  $\mathcal{H}_{aux}$ .

Para la cuantización de este sistema uno puede usar el procedimiento de Fock (el cual será detallado en el próximo capítulo), comenzando por el espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}_0$  determinado por una estructura compleja  $J$  compatible con la estructura simpléctica  $\Omega_S$ . En este caso en particular, la estructura compleja "natural" está definida por

$$J_V(a \ln T) := -a \quad y \quad J_V(a) := a \ln T, \quad (2.63)$$

para  $m = 0$ , y como

$$J_V(J_0(|m|T)) := N_0(|m|T) \quad y \quad J_V(N_0(|m|T)) := -J_0(|m|T), \quad (2.64)$$

para  $m \neq 0$ , donde  $a$  es una constante. El espacio de Hilbert cinemático es  $\mathcal{F} = \mathcal{H}_g \otimes \mathcal{F}$ , donde  $\mathcal{H}_g$  es el espacio de Hilbert en el cual los operadores  $\hat{q}$  y  $\hat{p}$  están bien definidos, y  $\mathcal{F}$  es el espacio de Fock simétrico (asociado al espacio de Hilbert de "una partícula"  $\mathcal{H}_0$ ) en el cual el operador de campo  $\hat{\psi}$  es simplemente

$$\hat{\psi}(\theta, T) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\theta, T) \hat{A}_m + \overline{f_m(\theta, T)} \hat{A}_m^\dagger, \quad (2.65)$$

en términos de operadores de creación y aniquilación.

El espacio de estados físicos<sup>5</sup>,  $\mathcal{F}_f$ , es el subespacio de  $\mathcal{F}$  definido por

$$: \hat{p}_\theta : |\Psi\rangle_f = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} m \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m |\Psi\rangle_f = 0. \quad (2.66)$$

Por lo tanto,  $\mathcal{F}_f$  contiene al vacío,  $\hat{A}_n \otimes \hat{q}|0\rangle = 0, \forall n$ , así como los estados con partículas en el modo cero (i.e.  $m = 0$ ). Un estado físico con  $N$  "partículas" esta dado por

$$|{}^N\Psi\rangle_f = |\phi\rangle \otimes \left[ \prod_{k=1}^N |m_k\rangle \right] \quad \text{tal que} \quad \sum_{k=1}^N m_k = 0$$

donde  $|\phi\rangle$  es un estado en  $\mathcal{H}_g$  y  $|m_k\rangle$  representa el estado de una partícula con momento angular  $m_k$ .

El operador Hamiltoniano en términos de los operadores  $\hat{A}_n$  y  $\hat{A}_n^\dagger$  es

$$\hat{H} = \frac{\pi}{2T} : \hat{p}(\hat{A}_0 + \hat{A}_0^\dagger)^2 : + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{p}(\alpha_n \hat{A}_n \hat{A}_{-n} + \bar{\alpha}_n \hat{A}_n^\dagger \hat{A}_{-n}^\dagger + 2\beta_n \hat{A}_n^\dagger \hat{A}_n) \quad (2.67)$$

donde

$$\alpha_n(T) = (T/4)n^2 [(H_0^{(1)})^2 + (H_1^{(1)})^2]$$

y

$$\beta_n(T) = (T/4)n^2 [H_1^{(1)} H_1^{(2)} + H_0^{(1)} H_0^{(2)}]$$

para  $n \neq 0$ . Aunque este Hamiltoniano deja al espacio  $\mathcal{F}_f$  invariante, tiene la desventaja de que el estado de vacío no es un eigenvector de éste con eigenvalor cero. Para evitar esta dificultad, definimos nuevos operadores de creación y aniquilación<sup>6</sup> [11]

$$\hat{a}_0 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\sqrt{3}\hat{A}_0 + \hat{A}_0^\dagger), \quad (2.68)$$

<sup>5</sup>Es importante señalar que no siempre ocurre que las soluciones a las constricciones estén contenidas en el espacio de Hilbert cinemático [25, 26]

<sup>6</sup>La nueva elección de operadores difiere de la que en [10] se presenta, donde las relaciones  $[\hat{a}_n, \hat{a}_{n'}^\dagger] = \delta_{n,n'}$  no se satisfacen

y

$$\hat{a}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\bar{\alpha}_n \hat{A}_n + \bar{\beta}_n \hat{A}_{-n}^\dagger). \quad (2.69)$$

donde  $\bar{\alpha}_n = \alpha_n / (|\pi| \bar{\beta}_n)$  y  $\bar{\beta}_n = \sqrt{(\beta_n - |n|/\pi) / |n|}$ . En este nuevo conjunto, el operador Hamiltoniano queda escrito como sigue,

$$: \hat{H} := \frac{1}{T} \hat{P}_0^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \hat{P}_n^\dagger \hat{a}_n. \quad (2.70)$$

con  $\hat{P}_0 = i \sqrt{\pi} (1 + \sqrt{3}) (\hat{a}_0^\dagger - \hat{a}_0)$ . Para este Hamiltoniano, el vacío es de hecho un eigenvector con eigenvalor cero.

El conjunto de operadores  $(\hat{A}_n, \hat{A}_n^\dagger)_{n \in \mathbb{Z}}$  y el definido por (2.68)-(2.69) da teorías unitariamente equivalentes. De la relación entre estos dos conjuntos de operadores, se sigue que sus coeficientes están relacionados según [11]

$$\sum_k (\bar{\alpha}_{mk} \bar{\alpha}_{nk} - \bar{\beta}_{mk} \bar{\beta}_{nk}) = \delta_{m,n}. \quad (2.71)$$

y

$$\sum_k (\bar{\alpha}_{mk} \bar{\beta}_{nk} - \bar{\beta}_{mk} \bar{\alpha}_{nk}) = 0. \quad (2.72)$$

donde  $\bar{\alpha}_{mk} = \bar{\alpha}_m \delta_{m,k}$  y  $\bar{\beta}_{mk} = \bar{\beta}_m \delta_{-m,k}$ . Más aún, los coeficientes  $\bar{\beta}_{mk}$  son de cuadrado sumable. Para ver esto, sea  $C(|m|T)$  igual a  $(\beta_m - |m|/\pi) / |m|$  y sea  $N$  un entero positivo tal que  $NT \gg 1$ , entonces

$$\sum_{m,n} |\bar{\beta}_{nm}|^2 = \sum_m |\bar{\beta}_m|^2 = 2 \sum_{m=1}^{N-1} C(mT) + 2 \sum_{m=N}^{\infty} C(mT) \quad (2.73)$$

Por lo que la condición de cuadrado sumable es equivalente a

$$\sum_{m=N}^{\infty} C(mT) < \infty \quad (2.74)$$

A partir de las expansiones para  $J_n(x)$  y  $N_n(x)$ ; i.e.,

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ P_n(x) \cos\left(x - \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2}\right) - Q_n(x) \sin\left(x - \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2}\right) \right], \quad (2.75)$$

$$N_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ P_n(x) \sin\left(x - \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2}\right) + Q_n(x) \cos\left(x - \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2}\right) \right],$$

donde

$$P_n(x) = 1 - \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(8x)^2} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)(4n^2 - 49)}{4!(8x)^4} - \dots, \quad (2.76)$$

$$Q_n(x) = \frac{(4n^2 - 1)}{1!(8x)} - \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)}{3!(8x)^3} + \dots,$$

es fácil ver que

$$C(kT) = \frac{Tk}{4} \left[ \frac{2}{\pi T k} (P_1^2(kT) + P_0^2(kT) + Q_1^2(kT) + Q_0^2(kT)) \right] - \frac{1}{\pi} \quad (2.77)$$

Es decir, para  $kT \gg 1$  obtenemos que

$$C(kT) = \frac{Tk}{4} \left[ \frac{2}{\pi T k} (2 + O(1/(kT)^2)) \right] - \frac{1}{\pi} \quad (2.78)$$

donde  $O(1/(kT)^2)$  contiene a todos los términos de la forma  $\frac{c_i}{(kT)^i}$ , con  $c_i$  constantes reales y  $N \ni n \geq 2$ . Como  $\sum_k \frac{c_i}{(kT)^i}$  converge (la función zeta de Riemann definida por  $\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$  es divergente si  $p \leq 1$  y convergente para  $p > 1$ ) entonces (2.78) implica (2.74) y, por lo tanto, los coeficientes  $\beta_{mk}$  son de cuadrado sumable. Así, la transformación entre los dos diferentes conjuntos de operadores de creación y aniquilación es una transformación unitaria de Bogoliubov [43, 45].

## Comparación entre cuantizaciones.

En el capítulo anterior se presentaron brevemente los principales puntos en la cuantización del modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$ , ahí puede notarse que en un caso la representación que se utiliza para las observables básicas es la representación de Schrödinger (§2.3.1) mientras que en el otro se representan a éstas a la Fock (§2.3.2). Para comparar estas dos cuantizaciones del mismo modelo gravitacional es necesario exponer con cierto detalle las citadas representaciones, y posteriormente revisar cómo es que estas se relacionan en general. Este capítulo está enteramente dedicado a presentar la cuantización, para un campo escalar en un fondo globalmente hiperbólico, a la Fock (siguiendo [28]), a construir la representación a la Schrödinger para dicho campo (resultados que dieron lugar a [18, 19]), a exhibir la relación que hay entre estas dos representaciones ([46]) y, finalmente, al examen concreto del modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$ .

### §3.1. Representación de Fock

La idea intuitiva en esta representación es que el espacio de Hilbert de la teoría es construido a partir de "estados de  $n$  partículas". La cuantización a la Fock se construye de manera natural partiendo de las soluciones clásicas y descansa fuertemente en la estructura lineal de este espacio, de tal suerte que ésta sólo puede ser implementada para cuantizar *teorías de campo lineales (libres)*. Los pasos principales en la cuantización del campo de Klein-Gordon son los siguientes: Dado un espacio tiempo 4 dimensional globalmente hiperbólico  $(M, g)$ , el primer paso es considerar al espacio vectorial de soluciones  $\mathcal{S}$  de la ecuación de movimiento. Después se construye el álgebra  $\mathcal{O}$  de observables fundamentales que serán cuantizadas, y que en este caso consiste de funcionales lineales sobre  $\mathcal{S}$ . El siguiente paso es construir el llamado *espacio de Hilbert de una partícula*<sup>1</sup>  $\mathcal{H}_0$  a partir del espacio de soluciones  $\mathcal{S}$ , la única estructura matemática extra que se requiere para tal fin es la introducción de una estructura compleja compatible con la estructura simpléctica que de manera natural está definida sobre  $\mathcal{S}$ . A partir de  $\mathcal{H}_0$  se construye el espacio de Fock simétrico  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_0)$ , que es el espacio de Hilbert de la teoría. El paso final es representar a la versión cuántica del álgebra  $\mathcal{O}$  de observables en el espacio de Fock, como combinaciones adecuadas de los operadores de creación y aniquilación.

Las observables clásicas elementales son funcionales lineales, que provee la estructura simpléctica, sobre el espacio de soluciones a la ecuación de Klein-Gordon (ver apéndice A); i.e.,  $\Omega(\lambda, \cdot) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $\lambda$  en el espacio de funciones de prueba. El siguiente paso en el programa de cuantización es especificar el espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}_0$ . La estrategia es la siguiente: partir del espacio vectorial simpléctico  $(\mathcal{S}, \Omega)$  y definir un operador lineal  $J : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , tal que  $J^2 = -1$ . La *estructura compleja*  $J$  deberá ser compatible con la estructura simpléctica. Es decir, el mapeo bilineal  $\mu(\cdot, \cdot) := \Omega(J\cdot, \cdot)$  debe ser una métrica positiva definida sobre  $\mathcal{S}$ . El producto

<sup>1</sup>El espacio de Hilbert de una partícula  $\mathcal{H}_0$  recibe este nombre pues éste puede ser interpretado como el espacio de Hilbert para el sistema de una partícula relativista (por ejemplo el fotón, en el caso electromagnético).

interno Hermítico estará dado entonces por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2\hbar} \mu(\cdot, \cdot) - i \frac{1}{2\hbar} \Omega(\cdot, \cdot). \quad (3.1)$$

La estructura compleja  $J$  define una separación natural de  $\mathcal{S}_C$ , la complexificación de  $\mathcal{S}$ , como sigue: Dado cualquier  $\Phi$  en  $\mathcal{S}_C$ , la componente de frecuencia positiva de este vector esta dada por la combinación  $\Phi^+ := \frac{1}{2}(\Phi - iJ\Phi)$  y la de frecuencia negativa por  $\Phi^- := \frac{1}{2}(\Phi + iJ\Phi)$ . Nótese que  $\Phi^- = \overline{\Phi^+}$  y  $\Phi = \Phi^+ + \Phi^-$ . Dado que  $J^2 = -1$ , los eigenvalores de  $J$  son  $\pm i$ , así que estamos descomponiendo el espacio vectorial  $\mathcal{S}_C$  en eigensubespacios de  $J$ :  $J(\Phi^\pm) = \pm i\Phi^\pm$ . El calificativo de 'frecuencia positiva-negativa' permanece como una reminiscencia del caso Minkowskiano, donde la estructura compleja estándar en efecto separa a una solución genérica como la suma de soluciones con frecuencia positiva y soluciones con frecuencia negativa.

En cuanto al espacio de Hilbert de una partícula, cabe señalar que hay dos descripciones alternativas y completamente equivalentes, a saber:

- $\mathcal{H}_0$  consiste de funciones reales (soluciones a la ecuación de Klein-Gordon), y de una estructura compleja  $J$ . El producto interior esta dado por (3.1).
- $\mathcal{H}_0$  se construye complexificando el espacio vectorial  $\mathcal{S}$  y descomponiéndolo usando  $J$  como fué descrito arriba. En esta construcción el producto interno es

$$\langle \Phi, \Phi \rangle = -\frac{i}{\hbar} \Omega(\Phi^-, \Phi^+)$$

Nótese que en este caso, el espacio de Hilbert de una partícula consiste de soluciones con 'frecuencia positiva'.

El espacio de Fock simétrico asociado a  $\mathcal{H}_0$  es definido como el siguiente espacio de Hilbert

$$\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_0) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes^n_s \mathcal{H}_0),$$

donde  $\otimes^0 \mathcal{H} := \mathbb{C}$  y  $\otimes^n_s \mathcal{H}_0$  denota el producto tensorial simetrizado de  $\mathcal{H}_0$ , que es definido como el subespacio de  $\otimes^n \mathcal{H}_0$  compuesto por los mapeos totalmente simétricos  $\alpha : \overline{\mathcal{H}}_1 \times \dots \times \overline{\mathcal{H}}_n \rightarrow \mathbb{C}$  (con  $\mathcal{H}_1 = \dots = \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_0 =: \mathcal{H}$ ) que satisfacen

$$\sum |\alpha(\bar{e}_{1i_1}, \dots, \bar{e}_{ni_n})|^2 < \infty.$$

El espacio de Hilbert  $\overline{\mathcal{H}}$  es el complejo conjugado del espacio  $\mathcal{H}$ , con  $(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_j, \dots)$  una base ortonormal.

Puesto que es la manera más conveniente de describir al espacio de Fock, es útil introducir la notación de índices abstractos para espacios de Hilbert. Dado un espacio  $\mathcal{H}$ , podemos construir los espacios  $\overline{\mathcal{H}}$ , el espacio complejo conjugado;  $\mathcal{H}^*$ , el espacio dual; y  $\overline{\mathcal{H}^*}$ , el espacio dual del complejo conjugado. En analogía con la notación empleada en espinores, denotemos a los elementos de  $\mathcal{H}$  por  $\phi^A$ , a los de  $\overline{\mathcal{H}}$  por  $\phi^{\dot{A}}$ . Similarmente, elementos de  $\mathcal{H}^*$  son denotados por  $\phi_A$  y elementos de  $\overline{\mathcal{H}^*}$  por  $\phi_{\dot{A}}$ . Sin embargo, usando el lema de Riesz podemos identificar  $\overline{\mathcal{H}}$  con  $\mathcal{H}^*$  y  $\mathcal{H}$  con  $\overline{\mathcal{H}^*}$ . Por lo tanto podemos eliminar el uso de índices primados, entonces  $\phi_{\dot{A}}$  será usado para un elemento en  $\overline{\mathcal{H}}$  correspondiente al elemento  $\phi^A \in \mathcal{H}$ . Un elemento  $\phi \in \otimes^n_s \mathcal{H}$  consistirá de elementos tales que

$$\phi^{A_1 \dots A_n} = \phi^{(A_1 \dots A_n)}. \quad (3.2)$$

Un elemento  $\psi \in \mathcal{O}^n \overline{\mathcal{H}}$  será denotado como  $\psi_{A_1 \dots A_n}$ . En particular, el producto interno de vectores  $\psi, \phi \in \mathcal{H}$  es denotado en esta notación de índices abstractos por

$$\langle \psi, \phi \rangle =: \overline{\psi}_A \phi^A$$

Un vector  $\Psi \in \mathcal{F}_n(\mathcal{H})$  puede representarse, en la notación de índices abstractos como

$$\Psi = (\psi, \psi^{A_1}, \psi^{A_1 A_2}, \dots, \psi^{A_1 \dots A_n}, \dots),$$

donde, para toda  $n$ , tenemos que  $\psi^{A_1 \dots A_n} = \psi^{(A_1 \dots A_n)}$ . La norma esta dada por

$$|\Psi|^2 := \overline{\psi} \psi + \overline{\psi}_A \psi^A + \overline{\psi}_{A_1 A_2} \psi^{A_1 A_2} + \dots < \infty. \quad (3.3)$$

Sea  $\xi^A \in \mathcal{H}$  y  $\overline{\xi}_A$  el correspondiente elemento en  $\overline{\mathcal{H}}$ . El operador de aniquilación  $\mathcal{A}(\xi) : \mathcal{F}_n(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathcal{H})$  asociado a la etiqueta  $\xi_A$  es definido como

$$\mathcal{A}(\xi) \cdot \Psi := (\overline{\xi}_A \psi^A, \sqrt{2} \overline{\xi}_A \psi^{A A_1}, \sqrt{3} \overline{\xi}_A \psi^{A A_1 A_2}, \dots). \quad (3.4)$$

Análogamente, el operador de creación  $C(\xi) : \mathcal{F}_n(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{F}_n(\mathcal{H})$  asociado a la etiqueta  $\xi^A$  está definido como

$$C(\xi) \cdot \Psi := (0, \psi \xi^{A_1}, \sqrt{2} \xi^{(A_1} \psi^{A_2)}, \sqrt{3} \xi^{(A_1} \psi^{A_2 A_3)}, \dots). \quad (3.5)$$

Si los domonios de los operadores son subespacios de  $\mathcal{F}_n(\mathcal{H})$  tales que las normas de los vectores (3.4) y (3.5) son finitas, entonces puede probarse que  $C(\xi) = (\mathcal{A}(\overline{\xi}))^\dagger$ . También puede verificarse que éstos satisfacen las RCC,

$$[\mathcal{A}(\overline{\xi}), C(\eta)] = \overline{\xi}_A \eta^A \hat{1}. \quad (3.6)$$

En el apartado §1.1 vimos que para el caso de teorías lineales existe una manera natural de construir observables lineales en  $(\Gamma, \Omega)$ , a las cuales denotamos por  $F_\lambda(Y)$ . Para el caso del campo escalar estas observables están dadas por

$$F_\lambda(Y) = -\lambda_\alpha Y^\alpha := \int_{\Sigma} (f \varphi + g \pi) d^3 x \quad (3.7)$$

Éstas no son más que la combinación de, en el esquema "puramente canónico", las observables elementales de configuración y de momento,

$$\varphi[f] := \int_{\Sigma} d^3 x f \varphi \quad (3.8)$$

$$\pi[g] := \int_{\Sigma} d^3 x g \pi. \quad (3.9)$$

donde  $f$  es una densidad escalar y  $g$  un escalar (ver ecuaciones (A.17), (A.18) y (A.19) en el apéndice A). Estas observables, junto con la función identidad, generan al conjunto  $\mathcal{O}$  de observables elementales del sistema. Cada una de ellas corresponde a tomar en  $\Omega(\lambda, \cdot)$  la etiqueta adecuada (para la de configuración  $\lambda^\alpha = (0, f)^\alpha$ , mientras que para la de momento  $\lambda^\alpha = (-g, 0)^\alpha$  -ver apéndice A). Para simplificar notación denotemos por  $\mathcal{O}[\eta]$  a  $\Omega(\eta, \cdot)$ . Dado que estas son observables elementales, entonces para cada  $\mathcal{O}[\eta] \in \mathcal{O}$  hay un operador  $\hat{\mathcal{O}}[\eta]$ . Adicionalmente, deseamos que las RCC se cumplan,

$$[\hat{\mathcal{O}}[\eta], \hat{\mathcal{O}}[\xi]] = i\hbar[\mathcal{O}[\eta], \mathcal{O}[\xi]] \hat{1} = -i\hbar \Omega(\eta, \xi) \hat{1}. \quad (3.10)$$

Debemos verificar entonces que la construcción a la Fock sea una representación de las RCC en un espacio de Hilbert de nuestros operadores básicos. Tomemos como espacio de Hilbert al espacio de Fock simétrico  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$  y representemos sobre éste a los operadores como sigue

$$\hat{O}[\eta] \cdot \Psi := i\hbar (\mathcal{A}(\bar{\eta}) - C(\eta)) \cdot \Psi. \quad (3.11)$$

Sea  $\eta^A \in \mathcal{H}$  la representación en índices abstractos del par  $(-g, f)$ . Es decir, el vector  $\eta$  que aparece en las expresiones previas debe pensarse como una *etiqueta* para los estados creados (o aniquilados) por  $C(\eta)$  ( $\mathcal{A}(\bar{\eta})$ ) sobre el espacio de Hilbert.

Enfoquémonos ahora en las propiedades de los operadores dados por (3.11). Primero, nótese que por construcción el operador es autoadjunto. Un cálculo directo nos permite verificar que las RCC en efecto se satisfacen,

$$\begin{aligned} [\hat{O}[\eta], \hat{O}[\xi]] &= \hbar^2 [\mathcal{A}(\bar{\eta}), C(\xi)] + \hbar^2 [C(\eta), \mathcal{A}(\bar{\xi})] \\ &= \hbar^2 (\bar{\eta}_A \xi^A - \bar{\xi}_A \eta^A) \hat{1} \\ &= \hbar^2 (\langle \eta, \xi \rangle - \langle \xi, \eta \rangle) \hat{1} \\ &= 2i\hbar^2 \text{Im}(\langle \eta, \xi \rangle) \hat{1} = -i\hbar \Omega(\eta, \xi) \hat{1}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde hemos usado (3.6) en el segundo rengón y (3.1) en la última línea. Nótese que en este cálculo solamente usamos propiedades generales del producto interno Hermítico y, por lo tanto, la representación de las RCC es, en principio, para *cualquier* producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dado que el producto interno esta, a su vez, dado por una estructura compleja  $J$ , vemos entonces que hay una correspondencia uno a uno entre representaciones de las RCC y estructuras complejas y que, por ende,  $J$  representa la libertad (infinita) en la elección de la representación cuántica.

### §3.2. Representación de Schrödinger

En contraste con la representación de Fock, que de manera natural se presenta y construye en un marco covariante [28], la construcción de la representación de Schrödinger descansa sobre una hipersuperficie de Cauchy  $\Sigma$ , pues la interpretación más "ligera" es en términos de funcionales al tiempo  $t$ .

Comencemos por ver cuales son las observables clásicas que en este caso serán cuantizadas, y en términos de las cuales se expresan las RCC. Puesto que el espacio vectorial de variables elementales clásicas es  $\mathcal{O} = \text{Gen}[1, \varphi[f], \pi[g]]$  y hay, asociado con cada elemento  $F$  en  $\mathcal{O}$ , un operador abstracto  $\hat{F}$  en el álgebra asociativa y libre generada por  $\mathcal{O}$ , entonces tenemos que los operadores básicos de la teoría son  $\hat{\varphi}[f]$  y  $\hat{\pi}[g]$ . Las relaciones de conmutación canónicas surgen al imponer la condición de cuantización de Dirac sobre los operadores cuánticos fundamentales, de (1.4), (3.8) y (3.9), las RCC dan  $[\hat{\varphi}[f], \hat{\pi}[g]] = i\hbar \int d^3x f g \hat{1}$ .

Al menos de manera intuitiva, la representación de Schrödinger consiste en considerar 'funciones de onda' como funcion(al)es de  $\varphi$ . De manera más precisa, esta representación consiste en representar a los operadores abstractos  $\hat{\varphi}[f]$  y  $\hat{\pi}[g]$  como operadores en  $\mathcal{H}_\hbar := L^2(\bar{C}, d\mu)$ , donde un estado es representado por una función(al)  $\Psi[\varphi] : \bar{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , con las "condiciones de realidad" apropiadas, que en nuestro caso significa que estos operadores deben ser Hermíticos.

Como primer intento, inspirados y seducidos por los nombres "configuración" y "momento", uno podría tratar de representar a los correspondientes operadores calcando la representación usual de éstos en mecánica cuántica ordinaria, a saber, actuando por multiplicación y por derivación, respectivamente. Sin embargo, uno debe ser cuidadoso pues, a diferencia de la mecánica cuántica ordinaria, el espacio de configuración de la teoría es ahora de dimensión infinita y las medidas del tipo Lebesgue ya no son en este caso medidas accesibles (La teoría de la medida sobre espacios vectoriales de dimensión infinita cuenta con algunas sutilezas, entre ellas está el hecho de que medidas bien definidas deben ser medidas de *probabilidad* [47, 48]. Una medida uniforme no podría tener tal propiedad). Como consecuencia de la íntima relación entre la representación de operadores y la medida, y para reflejar de manera consistente la no existencia de una medida homogénea, debemos modificar un poco la más sencilla de las extensiones (sugerida por la mecánica cuántica ordinaria) y representar a los operadores básicos, cuando actúan sobre funcionales  $\Psi[\varphi]$ , como sigue

$$(\hat{\varphi}[f] \cdot \Psi)[\varphi] := \varphi[f] \Psi[\varphi], \quad (3.13)$$

y

$$(\hat{A}[g] \cdot \Psi)[\varphi] := -i\hbar \int_{\mathcal{X}} d^3x g(x) \frac{\delta \Psi}{\delta \varphi(x)} + \text{término multiplicativo}. \quad (3.14)$$

donde el segundo término en (3.14), dependiente sólo de la variable de configuración, está precisamente ahí para dar carácter autoadjunto al operador cuando la medida es diferente a la "homogénea", y depende de los detalles de la medida. Lo primero que debe notarse es que la representación no es fijada canónicamente. Es decir, necesitamos conocer la medida para representar a la observable de momento. Esto contrasta con la estrategia que se sigue en el método algebraico [24], donde uno primero representa a los operadores y después encuentra una medida que haga a éstos Hermíticos. Pareciera que, incluso para los sistemas más sencillos en teoría de campos, uno necesita modificar ligeramente esta estrategia.

Observese que ahora hay dos nuevos actores en el juego. El primero es el *espacio de configuración cuántico*  $\hat{C}$ , y el segundo es la medida  $\mu$  sobre éste. En la construcción de la teoría es necesario entonces especificar estos objetos. Para ello llevaremos a cabo un proceso en dos pasos. Primero necesitamos hallar a la medida  $d\mu$  sobre el espacio de configuración cuántico para obtener el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_\mu$  y, segundo, necesitamos hallar el término multiplicativo del operador elemental (3.14).

La estrategia natural para determinar a la medida y al operador multiplicativo es suponer que contamos con una representación a la Fock (no importa cual en particular, pues los resultados serán suficientemente generales). Esta representación debe tener su contraparte unitariamente equivalente en la representación de Schrödinger, y por lo tanto fija la medida y al operador multiplicativo en el marco funcional. Es decir, dada una representación de Fock, queremos hallar la representación de Schrödinger que es unitariamente equivalente a ésta.

### §3.2.1. Álgebra cuántica y estados

Assumiremos la existencia de una representación consistente a la Fock de las RCC. El problema que queremos resolver aquí es el de formular la equivalencia entre las dos diferentes representaciones para la teoría. Con tal finalidad, el camino más natural es a través de la formulación algebraica de la teoría cuántica de campos expuesta brevemente en §1.2, concretamente a través del teorema GNS (Teorema 1.1). Un aspecto clave de este teorema es que uno puede tener diferentes

(pero unitariamente equivalentes) representaciones del álgebra de Weyl que den teorías cuánticas *equivalentes*. Este es el sentido preciso en el cual las representaciones de Fock y Schrödinger están relacionadas.

Seamos más específicos. Sabemos exactamente como construir una representación de Fock a partir del espacio vectorial simpléctico  $(S, \Omega_S)$  dotado con una estructura compleja  $J$  (§3.1). La libertad infinita en la elección de la representación de las RCC recae en la elección de estructuras complejas admisibles, que dan lugar a diferentes espacios de Hilbert de una partícula<sup>2</sup>  $\mathcal{H}_0$ . Una vez que realizamos la elección de una estructura compleja, y especificamos por lo tanto un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_0$ , la construcción es completamente natural y no hay más elecciones que hacer: Tomamos el espacio de Hilbert de la teoría cuántica de campos como el espacio de Fock simétrico  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_0)$  definido en §3.1. Las observables fundamentales  $\Omega(\phi, \cdot)$  sobre  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_0)$  son definidas por  $\Omega(\phi, \cdot) = iA(\overline{K}\phi) - iC(K\phi)$ , donde  $C$  y  $A$  son los operadores de creación y aniquilación, y  $K$  es la restricción a  $S$  del mapeo de proyección ortogonal  $\overline{K} : S_\mu^C \rightarrow \mathcal{H}_0$  en el producto interno  $\mu(\phi_1, \phi_2) := -i\Omega(\overline{\phi}_1, \phi_2)$  [28]. Por consiguiente, si suponemos que tenemos una estructura compleja en  $S$  (i.e., una representación de Fock) podemos ahora calcular el valor de expectación de los operadores de Weyl sobre el vacío de Fock y entonces obtener una funcional lineal positiva  $\omega_{\text{fock}}$  sobre el álgebra  $\mathcal{A}$  (ver ecuación (1.5) en el teorema GNS). La representación de Schrödinger equivalente a la de Fock será aquella que la construcción GNS provea vía el *mismo* estado algebraico  $\omega_{\text{fock}}$ . El trabajo ahora consiste en completar la construcción de Schrödinger tal que el valor de expectación de los operadores de Weyl coincida con el valor de éstos en la representación de Fock.

El primer paso en esta construcción consiste en escribir, en términos de la estructura compleja  $J$ , el valor de expectación de los operadores de Weyl en la representación de Fock. Por hipótesis, contamos con la tripleta  $(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_0), R_{\text{fock}}, \Omega_{\mathcal{F}})$ , donde (i)  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_0)$  es el espacio de Fock simétrico especificado por alguna estructura compleja, (ii)  $R_{\text{fock}}$  es un mapeo del álgebra de Weyl algebra a la colección de todos los mapeos lineales y acotados sobre el espacio de Fock simétrico ( $R_{\text{fock}}$  "envía" a los generadores de Weyl  $\hat{W}(\phi)$ , etiquetados por  $\phi$ , a los operadores  $\exp[i\Omega(\phi, \cdot)] \in \mathcal{L}(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_0))$ , y se extiende a toda el álgebra por linealidad y continuidad), y (iii)  $\Omega_{\mathcal{F}}$  es el vacío de la teoría. De la construcción GNS (ver ecuación (1.5)) se sigue que el valor del estado  $\omega_{\text{fock}}$  actuando sobre los generadores de Weyl  $\hat{W}(\phi)$  es el valor de expectación de los operadores correspondientes  $R_{\text{fock}}(\hat{W}(\phi))$  en el vacío  $\Omega_{\mathcal{F}}$  (en lo que sigue, reemplazaremos  $\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_0)$  por  $\mathcal{F}$ ):

$$\omega_{\text{fock}}(\hat{W}(\phi)) = \langle \Omega_{\mathcal{F}}, R_{\text{fock}}(\hat{W}(\phi))\Omega_{\mathcal{F}} \rangle_{\mathcal{F}}. \quad (3.15)$$

Dado que  $R_{\text{fock}}(\hat{W}(\phi)) = \exp[i\Omega(\phi, \cdot)] = \exp(C(K\phi) - A(\overline{K}\phi))$ , podemos escribir, usando la relación de Baker-Campbell-Hausdorff, el generador de Weyl representado a la Fock como

$$R_{\text{fock}}(\hat{W}(\phi)) = \exp(C(K\phi)) \exp(-A(\overline{K}\phi)) \exp\left(-\frac{1}{2}[A(\overline{K}\phi), C(K\phi)]\right). \quad (3.16)$$

Pero el conmutador  $[A(\overline{K}\phi), C(K\phi)]$  es igual a  $(\overline{K}\phi)_A(K\phi)_A^{\wedge}$ . Dado que

$$(\overline{K}\phi)_A(K\phi_2)_A^{\wedge} = (K\phi_1, K\phi_2)_{\mathcal{H}_0} = \frac{1}{2}\mu(\phi_1, \phi_2) - \frac{i}{2}\Omega(\phi_1, \phi_2). \quad (3.17)$$

<sup>2</sup>Hacemos notar aquí que la posibilidad de elegir entre una infinidad de estructuras complejas equivalentes y no equivalentes, para obtener una teoría consistente, es un claro indicativo de que el teorema de Stone-von Neumann (en general) no se generaliza a teorías de campo, como se mencionó en §1.2.

entonces  $(\overline{K\phi})_A(K\phi)^A = \frac{1}{2}\mu(\phi, \phi)$ . Por lo tanto, el valor de expectación en vacío del operador  $R_{\text{Fock}}(\dot{W}(\phi))$  esta dado por

$$\langle R_{\text{Fock}}(\dot{W}(\phi)) \rangle_{\text{vac}} = \langle \Omega_{\mathcal{F}}, \exp(C(K\phi)) \exp(-A(\overline{K\phi})) \Omega_{\mathcal{F}} \rangle_{\mathcal{F}} \exp\left(-\frac{1}{4}\mu(\phi, \phi)\right). \quad (3.18)$$

Como  $\langle \Omega_{\mathcal{F}}, \Psi \rangle_{\mathcal{F}} = 0$  para todo  $\Psi \in \mathcal{F}$  tal que  $\Psi = (0, \phi^{A_1}, \phi^{A_1 A_2}, \dots, \phi^{A_1 \dots A_n}, \dots)$ , entonces  $\langle \Omega_{\mathcal{F}}, \exp(C(K\phi)) \exp(-A(\overline{K\phi})) \Omega_{\mathcal{F}} \rangle_{\mathcal{F}} = \langle \Omega_{\mathcal{F}}, \Omega_{\mathcal{F}} \rangle_{\mathcal{F}}$ . Por lo tanto, si el vacío esta normalizado, sustituyendo  $\langle R_{\text{Fock}}(\dot{W}(\phi)) \rangle_{\text{vac}}$  en (3.15) obtenemos que el valor del estado  $\omega_{\text{Fock}}$  actuando sobre los generadores del álgebra de Weyl  $\dot{W}(\lambda)$  esta dado por la siguiente expresión

$$\omega_{\text{Fock}}(\dot{W}(\lambda)) = e^{-\frac{1}{2}\mu(\lambda, \lambda)}, \quad (3.19)$$

donde, gracias al isomorfismo simpléctico  $\mathcal{I}$  entre el espacio de datos de Cauchy  $\Gamma$  y el espacio de soluciones  $\mathcal{S}$  (ver apéndice A),  $\lambda$  denota una etiqueta en (3.19) ya sea en la formulación covariante o la canónica. Nótese que la construcción GNS es la herramienta que nos permite invertir el proceso. Es decir, desde el punto de vista de la formulación algebraica, la elección de una estructura compleja  $J$  define la representación de Fock via la construcción GNS basada en un estado  $\omega_{\text{Fock}}$ , que es definido sobre los generadores básicos del álgebra de Weyl por (3.19).

### §3.2.2. Estructura compleja en el espacio de datos de Cauchy

Antes de proseguir con la construcción de la representación a la Schrödinger, hagamos una breve pausa para revisar como proveer a la formulación canónica con una estructura compleja, dado que contamos con una en la formulación covariante. Este punto es central, pues exactamente como  $J$  covariante codifica la infinidad de representaciones a la Fock, su contraparte canónica habrá de hacer lo propio con la infinidad de representaciones a la Schrödinger.

Recordemos que en la representación de Fock, que de manera natural es construida a partir del espacio de fase covariante  $(\mathcal{S}, \Omega_{\mathcal{S}})$ , la estructura compleja es compatible con la estructura simpléctica definida sobre  $\mathcal{S}$ . Ahora bien, para el espacio fase canónico, dado un encaje  $T_{\mathfrak{h}_0} : \Sigma \rightarrow \mathfrak{M}$  y una estructura compleja sobre  $\mathcal{S}$ , hay una estructura compleja sobre  $\Gamma$  inducida gracias al isomorfismo simpléctico  $\mathcal{I}_{\mathfrak{h}_0}$  entre los espacios  $\Gamma$  y  $\mathcal{S}$ . Sobre el espacio vectorial simpléctico  $(\Gamma, \Omega)$  con coordenadas  $(\varphi, \pi)$ , la forma más general de la estructura compleja  $J$  esta dada por

$$-J_{\Gamma}(\varphi, \pi) = (A\varphi + B\pi, C\pi + D\varphi), \quad (3.20)$$

donde  $A, B, C$  y  $D$  son operadores lineales que satisfacen las siguientes relaciones [34]:

$$A^2 + BD = -1, \quad C^2 + DB = -1, \quad AB + BC = 0, \quad DA + CD = 0. \quad (3.21)$$

El producto interno  $\mu_{\Gamma}(\cdot, \cdot) = \Omega(\cdot, -J_{\Gamma} \cdot)$  en términos de estos operadores está explícitamente dado por

$$\mu_{\Gamma}((\varphi_1, \pi_1), (\varphi_2, \pi_2)) = \int_{\Sigma} d^3x (\pi_1 B \pi_2 + \pi_1 A \varphi_2 - \varphi_1 D \varphi_2 - \varphi_1 C \pi_2), \quad (3.22)$$

para todos los pares  $(\varphi_1, \pi_1)$  y  $(\varphi_2, \pi_2)$ . Como  $\mu_{\Gamma}$  es simétrico y positivo definido, entonces los operadores lineales deben satisfacer adicionalmente que [34]

$$\int_{\Sigma} f B f' = \int_{\Sigma} f' B f, \quad \int_{\Sigma} g D g' = \int_{\Sigma} g' D g, \quad \int_{\Sigma} f A g = - \int_{\Sigma} g C f, \quad (3.23)$$

$$\int_{\Sigma} f B f > 0 \quad , \quad \int_{\Sigma} g D g < 0 \quad (3.24)$$

donde  $g, g' \in C_0^{\infty}(\Sigma)$  son escalares, y  $f, f' \in C_0^{\infty}(\Sigma)$  son densidades escalares de peso uno.

Dado un encaje  $T_0$  de  $\Sigma$  en el espacio tiempo, hay una relación uno a uno entre estructuras complejas sobre  $S$  y  $\Gamma$ . Esto es, si tenemos un isomorfismo particular  $I_{T_0}$  (dado un encaje, en efecto tenemos un isomorfismo), la estructura compleja inducida sobre  $\Gamma$  por  $J_S$  (una estructura compleja particular sobre el espacio fase covariante) esta dada por  $J_{\Gamma} = I_{T_0}^{-1} J_V I_{T_0}$ . Esta relación y la forma general (3.20) implica que

$$A\varphi + B\pi = -T_0^* [J_V \phi] \quad , \quad C\pi + D\varphi = -T_0^* [\sqrt{\hbar} \mathcal{L}_n(J_V \phi)] \quad (3.25)$$

donde  $\phi = I_{T_0}(\varphi, \pi)$  (i.e.,  $\phi$  es la solución a la ecuación de Klein-Gordon cuyos datos de Cauchy es el par  $(\varphi, \pi)$ ). Así, la realización particular de los operadores  $A, B, C$  y  $D$  será diferente para distintos encajes  $T_i$  de  $\Sigma$ .

Una vez expuesta la forma general de la estructura compleja en el marco canónico, volvamos a la construcción de la representación de Schrödinger.

### §3.2.3. Representación funcional

El siguiente paso es completar la representación de Schrödinger. Es decir, hallar la medida  $d\mu$  y el término multiplicativo en (3.14), que corresponden a una representación de Fock dada.

Para especificar a la medida  $d\mu$ , que define al espacio de Hilbert, es suficiente considerar observables de configuración. Sabemos como representar estas observables *independientemente* de la medida pues estan representadas por operadores de multiplicación como en (3.13). La observable de Weyl  $\hat{W}(\lambda)$ , con  $\lambda^{\sigma} = (0, f)^{\sigma}$ , en la representación de Schrödinger tiene la forma

$$R_{\text{sch}}(\hat{W}(\lambda)) = e^{i\phi[\lambda]} \quad (3.26)$$

La ecuación (3.19) nos dice que el estado  $\omega_{\text{sch}}$  debe ser tal que,

$$\omega_{\text{sch}}(\hat{W}(\lambda)) = \exp\left[-\frac{1}{4}\mu(\lambda, \lambda)\right] = \exp\left[-\frac{1}{4}\int_{\Sigma} d^3x f B f\right] \quad (3.27)$$

donde hemos usado (3.22) en el último paso. Por otra parte, el lado izquierdo de (3.19) es el valor de expectación del operador  $\hat{W}(\lambda)$ . Esto es,

$$\omega_{\text{sch}}(\hat{W}(\lambda)) = \int_{\mathcal{C}} d\mu \bar{\Psi}_0(R_{\text{sch}}(\hat{W}(\lambda)) \cdot \Psi_0) = \int_{\mathcal{C}} d\mu e^{i \int_{\Sigma} d^3x f \psi} \quad (3.28)$$

Comparemos ahora (3.27) y (3.28),

$$\int_{\mathcal{C}} d\mu e^{i \int_{\Sigma} d^3x f \psi} = \exp\left[-\frac{1}{4}\int_{\Sigma} d^3x f B f\right] \quad (3.29)$$

En este punto es necesario realizar un breve paréntesis para precisar el significado de (3.29). Puesto que en el caso de espacios vectoriales  $\mathcal{V}$  de dimensión infinita la *transformada de Fourier* de la medida  $\bar{\mu}$  esta definida por

$$\chi_{\bar{\mu}}(f) := \int_{\mathcal{V}} d\bar{\mu} e^{if(\psi)}$$

donde  $f(\varphi)$  es una función(al) continua arbitraria sobre  $\mathcal{V}$ . La transformada de Fourier  $\chi$ , bajo ciertas condiciones técnicas, caracteriza completamente a la medida  $\bar{\mu}$ . Este hecho es particularmente útil para nosotros pues nos permite dar una definición precisa de la medida Gaussiana. Asumamos que  $\mathcal{V}$  es un espacio de Hilbert y  $O$  un operador positivo definido y autoadjunto sobre  $\mathcal{V}$ . Entonces, se dice que una medida  $\bar{\mu}$  es Gaussiana si su transformada de Fourier tiene la forma,

$$\chi_{\bar{\mu}}(f) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle f, Of \rangle_{\mathcal{V}}\right), \quad (3.30)$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{V}}$  es el producto interno Hermítico sobre  $\mathcal{V}$ . Podemos ahora preguntarnos, dada la forma de la transformada de Fourier, cómo es la forma de la medida  $\bar{\mu}$ . La respuesta es que, esquemáticamente, ésta tiene la forma

$$"d\bar{\mu} = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \varphi, O^{-1}\varphi \rangle_{\mathcal{V}}\right) \mathcal{D}\varphi", \quad (3.31)$$

donde  $\mathcal{D}\varphi$  representa a la medida "tipo Lebesgue" ficticia sobre el espacio  $\mathcal{V}$ . La expresión (3.31) (que no es una expresión completamente bien definida como (3.30)) es de mucha ayuda para entender de donde proviene el apelativo de Gaussiana. El término  $-\frac{1}{2}\langle \varphi, O^{-1}\varphi \rangle_{\mathcal{V}}$  finito y negativo definido, da el carácter Gaussiano a  $\bar{\mu}$ .

Volviendo a nuestro caso particular, notemos que de las ecuaciones (3.30) y (3.31) se sigue que (3.29) nos dice que la medida  $d\mu$  es Gaussiana y que ésta corresponde a una medida heurística de la forma

$$"d\mu = e^{-\frac{1}{2}\langle \varphi, O^{-1}\varphi \rangle_{\mathcal{V}}} \mathcal{D}\varphi". \quad (3.32)$$

Esta es la medida deseada. Queda por determinar todavía al "término multiplicativo" en la representación del operador de momento (3.14). Para ello, necesitaremos recurrir a todos los generadores de Weyl y a la ecuación (3.19). Sea  $K$  el espacio de Hilbert que se obtiene al completar  $C$  respecto al producto interno auxiliar  $(g, f) := \int_{\Sigma} g f$  [34]. Tenemos que calcular  $\langle R_{sch}(\hat{W}(g, f))_{vac} = \langle \Psi_0, \exp(i\hat{\varphi}[f] - i\hat{\pi}[g])\Psi_0 \rangle$ , por lo que usaremos la relación de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH) para separar a los operadores; i.e.,

$$\exp(i\hat{\varphi}[f] - i\hat{\pi}[g]) = \exp(i\hat{\varphi}[f]) \exp(-i\hat{\pi}[g]) \exp\left(-\frac{1}{2}[i\hat{\varphi}[f], -i\hat{\pi}[g]]\right). \quad (3.33)$$

Dado que  $[\hat{\varphi}[f], \hat{\pi}[g]] = i \int_{\Sigma} f g \hat{1}$  ( $\hat{1} = 1$ ), entonces sustituyendo (3.33) en (1.5) y usando (3.19) llegamos a que

$$e^{-\frac{1}{2}\mu_{\mathcal{R}}(g, f), (g, f)} = \exp\left(-\frac{i}{2} \int_{\Sigma} f g\right) \langle \Psi_0, \exp(i\hat{\varphi}[f]) \exp(-i\hat{\pi}[g])\Psi_0 \rangle, \quad (3.34)$$

donde hemos usado que  $\exp(-i/2 \int_{\Sigma} f g \hat{1})\Psi_0 = \exp(-i/2 \int_{\Sigma} f g)\Psi_0$  y  $\exp(-i/2 \int_{\Sigma} f g)$  no depende de  $\varphi$ .

Escribimos al operador de momento como sigue,

$$\exp(-i\hat{\pi}[g])\Psi_0 = \exp(-i\hat{M} + \hat{d})\Psi_0, \quad (3.35)$$

con

$$-i\hat{M} \cdot \Psi = \left( \int_{\Sigma} \varphi \hat{m} g \right) \Psi = -iM\Psi \text{ and } \hat{d} \cdot \Psi = - \int_{\Sigma} g \frac{\delta\Psi}{\delta\varphi}. \quad (3.36)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Dado que  $[-i\hat{M}, \hat{d}] \cdot \Psi = -i[\int_{\Sigma} g \frac{\delta M}{\delta \varphi}] \Psi$  (pues  $M$  es lineal en  $\varphi$ , y por lo tanto  $\frac{\delta M}{\delta \varphi}$  no depende de  $\varphi$ ), entonces usando BCH podemos escribir el lado derecho de (3.35) como<sup>3</sup>

$$\exp\left(\frac{i}{2} \int_{\Sigma} g \frac{\delta M}{\delta \varphi}\right) \exp(-i\hat{M}) \exp(\hat{d}) \Psi_0.$$

Por otro lado,  $\exp(\hat{d}) \Psi_0 = \Psi_0$  y  $\exp(-i\hat{M}) \Psi_0 = \exp(-iM) \Psi_0$ . Entonces, (3.35) es

$$\exp(-i\hat{K}[g]) \Psi_0 = \exp\left(\frac{i}{2} \int_{\Sigma} g \frac{\delta M}{\delta \varphi}\right) \exp(-iM) \Psi_0. \quad (3.37)$$

Sustituyendo esta última expresión en (3.34) obtenemos que

$$e^{-\frac{1}{2} \mu r(g, f)(g, f)} = e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} f g} e^{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} g \frac{\delta M}{\delta \varphi}} \int_{\mathcal{C}} d\mu e^{i \int_{\Sigma} f \varphi} e^{-iM}. \quad (3.38)$$

Usando (3.22) y (3.36) tenemos que (3.38) es

$$e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (f B f + f A g - g D g - g C f)} = e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} f g} e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} g \hat{M} g} \int_{\mathcal{C}} d\mu e^{i \int_{\Sigma} (f - i \hat{M} g) \varphi}. \quad (3.39)$$

De la última relación en (3.23), y usando el hecho de que la integral sobre  $\mathcal{C}$  es la transformada de Fourier con  $f \mapsto (f - i \hat{M} g)$  de la medida (3.32), llegamos a que

$$e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (f B f - g D g + 2 f A g)} = e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} f g} e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} g \hat{M} g} e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (f - i \hat{M} g) B (f - i \hat{M} g)}. \quad (3.40)$$

Es decir,

$$e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (f B f - g D g + 2 f A g)} = e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} f g} e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} g \hat{M} g} e^{-\frac{1}{2} \int_{\Sigma} f B f} e^{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\hat{M} g \times B \hat{M} g)} e^{\frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\hat{M} g \times B f)}, \quad (3.41)$$

donde hemos utilizado la primera de las relaciones en (3.23) para obtener el último término. Puesto que (3.41) tiene que ser válida para toda  $g$  y  $f$  en  $K$ , entonces deben cumplirse

$$-\int_{\Sigma} f A g = i \int_{\Sigma} (\hat{M} g \times B f) - i \int_{\Sigma} f g, \quad (3.42)$$

y

$$\int_{\Sigma} g D g = \int_{\Sigma} (\hat{M} g \times B \hat{M} g) - 2 \int_{\Sigma} g \hat{M} g. \quad (3.43)$$

Usando la primera relación en (3.23), la ecuación (3.42) puede ser reescrita como

$$\int_{\Sigma} f(A + iB\hat{m} - i1)g = 0. \quad (3.44)$$

Para hallar  $\hat{m}$  asumiremos que  $iB\hat{m} - i1$  es un operador lineal. Dado que  $A$  es lineal, entonces  $L := A + iB\hat{m} - i1$  es también lineal. La ecuación (3.44) debe ser válida para toda  $f$  y  $g$  en  $K$ , entonces  $Lg = 0$  para toda  $g$  en  $K$  (i.e., el kernel o núcleo del operador  $L$  es todo  $K$ ), por lo tanto  $L = 0$ , y

$$\hat{m} = B^{-1} + iB^{-1}A. \quad (3.45)$$

<sup>3</sup>Pues nuestra elección de  $\Psi_0$  es una constante que, de hecho, puede fijarse como la funcional 1. Después del proceso uno puede verificar que, en efecto, éste es un vector cíclico y que corresponde, por la construcción GNS, a la funcional de vacío en la representación de Schrödinger.

Nótese que  $\hat{m}$  es (i) un operador lineal de  $K$  a  $K \oplus iK$  y (ii) es simétrico respecto al producto interior en  $K$ ,  $(f, g) = \int_{\Sigma} f g$ , en el sentido de que  $(g, B^{-1}g') = (B^{-1}g, g')$  y  $(g, B^{-1}Ag') = (B^{-1}Ag, g')$  para toda  $g$  y  $g'$  en  $K$ .

La ecuación (3.43) es simplemente una ecuación de compatibilidad. Si sustituimos (3.45) en el lado derecho de (3.43), obtenemos (usando el hecho de que  $\hat{m}$  es simétrico),

$$\int_{\Sigma} g(B^{-1} + iB^{-1}A)(1 + iA)g - 2 \int_{\Sigma} g(B^{-1} + iB^{-1}A)g = - \int_{\Sigma} g(B^{-1} + B^{-1}A^2)g = \int_{\Sigma} g Dg, \quad (3.46)$$

donde la última ecuación se sigue de la primera relación en (3.21), lo cual implica que  $D + B^{-1}A^2 = -B^{-1}$  y por lo tanto  $B^{-1} + B^{-1}A^2 = -D$ .

Sustituyendo (3.45) en (3.36) obtenemos  $\hat{M}$ . Entonces, la representación del operador  $\hat{h}[g]$ , para el caso general de una estructura compleja arbitraria (3.20), esta dado por

$$\hat{h}[g] \cdot \Psi[\varphi] = -i \int_{\Sigma} \left( g \frac{\delta}{\delta \varphi} - \varphi(B^{-1} + iB^{-1}A)g \right) \Psi[\varphi], \quad (3.47)$$

que puede ser reescrito en términos del operador  $C$ : de la tercera relación en (3.21) se sigue que  $B^{-1}A = -CB^{-1}$  y en consecuencia

$$\hat{h}[g] \cdot \Psi[\varphi] = -i \int_{\Sigma} \left( g \frac{\delta}{\delta \varphi} - \varphi(B^{-1} - iCB^{-1})g \right) \Psi[\varphi]. \quad (3.48)$$

Nótese que los operadores de momento  $\hat{h}[g]$  y  $\hat{h}[h]$  conmutan para cualquier elección de  $g$  y  $h$  dado que  $B^{-1}A$  ( $CB^{-1}$ ) es autoadjunto.

Antes de concluir esta sección sobre la representación de Schrödinger, vale la pena discutir un poco en torno al operador de momento que hemos obtenido (ecuaciones (3.47)-(3.48)) y, por otra parte, exhibir un vacío Gaussiano que, por estar asociado a una medida homogénea, no está adecuadamente definido (aunque aparece con frecuencia en la literatura [16]).

### §3.2.4. Equivalencia unitaria en teoría de campos

Al comienzo de la discusión respecto a la representación de Schrödinger, mencionamos que el segundo término en (3.14), dependiente únicamente de la variable de configuración, tiene como tarea hacer que el operador sea autoadjunto cuando la medida es diferente a la homogénea, y depende de los detalles de la medida. Esto es, dada la medida cuántica Gaussiana, uno debe ajustar la acción del operador de momento para satisfacer las condiciones de realidad. Sabemos que si la observable de momento puede ser asociada a un campo vectorial  $v^a$  sobre el espacio de configuración, entonces la forma general del operador de momento esta dada por  $\hat{P}(v) = -i\hbar(\mathcal{L}_v + \frac{1}{2}\text{Div}_\mu v)$ , donde  $\text{Div}_\mu v$  es la divergencia del campo vectorial  $v$  con respecto a la medida (cuántica)  $\mu$ . Por lo tanto, dada la medida cuántica en el caso de teorías de campo, uno podría en principio determinar el término multiplicativo en la representación del operador cuántico de momento.

En §3.2.3 vimos que dado un operador Hermítico positivo definido  $G$ , por ejemplo en el espacio de Hilbert  $L^2$  de funciones escalares  $\varphi$ , la forma general de la medida Gaussiana heurísticamente es

$$d\mu_G = \exp \left[ - \int_{\Sigma} d^3x \varphi G \varphi \right] \mathcal{D}\varphi, \quad (3.49)$$

Los campos vectoriales sobre el espacio de configuración  $C$ , asociados con las variables de momento  $\pi[g]$  son campos vectoriales constantes (en la carta definida por  $(\varphi, \pi)$ ). Hay una fórmula

general para la divergencia de un campo vectorial "constante"  $v^a$  dada por  $\text{Div}_\mu v = v^a \nabla_a (\ln \mu)$ . En el caso de dimensión infinita, ésta es esencialmente la misma, con el cuidado que debe tenerse de reinterpretarla apropiadamente en términos de "derivadas funcionales". En nuestro caso, la derivada logarítmica de la medida a lo largo del campo vectorial constante definido por  $g$  da un operador cuántico de momento de la forma

$$\hat{H}[g] \cdot \Psi[\varphi] = -i \int_{\Sigma} \left( g \frac{\delta}{\delta \varphi} - \varphi G g \right) \Psi[\varphi]. \quad (3.50)$$

Ahora bien, por otra parte hemos obtenido en §3.2.3 que el operador de momento esta dado por la expresión (3.47), donde  $B^{-1}$  y  $B^{-1}A$  son operadores Hermíticos, y  $B^{-1}$  es el operador correspondiente a  $G$  en (3.50). El hecho más notorio y destacable es que el operador (3.47) tiene un término *extra*, comparado con (3.50).

Una sospecha inicial podría ser que el operador (3.47) no cumpliera con las condiciones de realidad requeridas. Sin embargo, el término *extra*,  $\left[ \int_{\Sigma} \varphi (B^{-1}A) g \right] \Psi[\varphi]$ , corresponde a un operador de configuración "suavizado" con la función real de prueba  $B^{-1}A g$  y, por consiguiente, es un operador Hermítico. Así que las condiciones de realidad se satisfacen en ambas representaciones (3.47) y (3.50). Adicionalmente, nótese que desde el punto de vista geométrico la representación (3.50) es la más natural cuando se cuenta con una estructura de haz cotangente para el espacio fase y se trabaja en la representación de configuración. En principio, parece intrigante el haber obtenido una representación alternativa y no tan intuitiva. Así, tenemos entonces que decidimos por alguna de las siguientes opciones: (i) las representaciones (3.47) y (3.50) son equivalentes, (ii) el término *extra* en (3.47) es irrelevante, y (iii) no es, en definitiva, irrelevante.

Consideremos los valores de expectación de las teorías cuánticas que resultan con cada una de las representaciones. Por la construcción GNS, la fórmula (3.19) da, para la representación (3.47), que

$$\langle \hat{W}(\lambda) \rangle_{\text{gns}} = \exp \left[ -\frac{1}{4} \int_{\Sigma} d^3x (f B f + f A g - g D g - g C f) \right] \quad (3.51)$$

para el "vector etiqueta"  $\lambda^a = (g, f)^a$ . Por otra parte, la representación (3.50) tendrá como valores de expectación los siguientes

$$\langle \hat{W}(\lambda) \rangle_{\text{alg}} = \exp \left[ -\frac{1}{4} \int_{\Sigma} d^3x (f B f + g B^{-1} g) \right] \quad (3.52)$$

De las expresiones anteriores es claro que la ausencia del término *extra* en la representación (3.50) implica que, en general, las expectativas en el vacío (3.51) y (3.52) diferirán. Así, las teorías son (en general) unitariamente inequivalentes. De tal suerte que la opción (i) deberá ser descartada.

El término *extra*,  $\left[ \int_{\Sigma} \varphi (B^{-1}A) g \right] \Psi[\varphi]$  o equivalentemente  $\left[ \int_{\Sigma} \varphi (C B^{-1}) g \right] \Psi[\varphi]$ , no parece ser irrelevante, pues en general una estructura compleja esta codificada por el par  $(B, C)$  (o, equivalentemente  $(B, A)$ ), pues de acuerdo a (3.21) si conocemos  $B$  y  $C$  podemos determinar al resto de los operadores. Adicionalmente, la representación (3.50) corresponde a tomar  $C = 0$  y, como hemos visto, en general es una representación no equivalente a (3.47), así que si ignoramos el término *extra* en la representación (3.47) del momento, estaríamos deshechando una infinidad de representaciones correspondientes a estructuras complejas que, en principio, pueden ser perfectamente válidas. La pregunta entonces es la siguiente, sabemos que existen teorías codificadas por  $(B, C \neq 0)$  no equivalentes a aquella codificada por  $(B, 0)$  (con los mismos  $B$ 's); sin embargo,

debemos verificar que, en efecto, dichas teorías son consistentes con el requerimiento de compatibilidad entre la estructura compleja y la estructura simpléctica (i.e., que existen estructuras complejas con  $C \neq 0$  que dan teorías no unitariamente equivalentes a aquella con  $C = 0$  y que son compatibles con la estructura simpléctica).

La idea consiste en mostrar que la siguiente conjetura es falsa: *Si uno prescribe  $B$  y la medida, no existe una representación de Fock parametrizada con la misma  $B$  y un  $C$  no trivial que sea consistente.*

Para mostrar que esta conjetura es falsa, basta con reescribir las condiciones (3.23) y (3.24) en términos de  $B$  y  $C$ , usando (3.21) para ello, y suponer que la teoría resultante es unitariamente equivalente a la parametrizada por  $(B, 0)$ , i.e., en particular, que se debe cumplir la siguiente condición necesaria para la unitariedad entre teorías: existen  $b, b' > 0$  tales que, para todo  $(\varphi, \pi) \in \Gamma$ ,

$$b' \mu_0(\varphi, \pi) \leq \mu_C(\varphi, \pi) \leq b \mu_0(\varphi, \pi) \quad (3.53)$$

donde  $\mu_0(\cdot, \cdot) = \Omega(J_{(B,0)}(\cdot, \cdot))$  y  $\mu_C(\cdot, \cdot) = \Omega(J_{(B,C)}(\cdot, \cdot))$ .

De escribir las condiciones (3.23) y (3.24) en términos de  $B$  y  $C$ , se sigue que cualquier operador  $C$  que sea (a)  $L_2$ -simétrico y (b) tal que  $[C, B] = 0$ , arroja como resultado una estructura compleja  $J_{(B,C)}$  compatible con  $\Omega$ . Por otro lado, (3.53) implica, en particular, que

$$\mu_0((C\varphi, 0), (C\varphi, 0)) \leq \lambda \mu_0((\varphi, 0), (\varphi, 0)) \quad (3.54)$$

debe cumplirse para alguna  $\lambda > 0$ . Por lo tanto, la conjetura puede no ser falsa si lo siguiente es verdadero

*Dado cualquier operador  $C$  que commute con  $B$  y que sea  $L_2$ -simétrico, entonces  $\exists \lambda > 0$  tal que (3.54) se satisface.*

Sin embargo, esta última afirmación es falsa. Para mostrar esto, consideremos, por ejemplo, el campo escalar masivo sobre el espacio de Minkowski (i.e.,  $M$  tiene la topología  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ) donde la estructura compleja se elige como aquella que da la descomposición estándar en frecuencias positivas y negativas. Esta elección esta asociada al campo vectorial constante tipo tiempo  $t^a$  que define la coordenada de tiempo  $t$  para un observador inercial. La estructura compleja  $J_{(B,0)}$  esta entonces dada por

$$J_{(B,0)}(\varphi, \pi) = (-(-\Delta + m^2)^{-1/2}\pi, (-\Delta + m^2)^{1/2}\varphi), \quad (3.55)$$

lo cual significa que  $C = 0$  y  $B = (-\Delta + m^2)^{-1/2}$ . Ahora bien, si tomamos  $C := B^{-1} = (-\Delta + m^2)^{1/2}$ , es claro que

$$J_{(B,C)}(\varphi, \pi) = ((-\Delta + m^2)^{1/2}\varphi - (-\Delta + m^2)^{-1/2}\pi, ((-\Delta + m^2)^{1/2} + (-\Delta + m^2)^{3/2})\varphi - (-\Delta + m^2)^{1/2}\pi) \quad (3.56)$$

es una estructura compleja compatible con  $\Omega$ . Si las teorías que corresponden a estas estructuras complejas son unitariamente equivalentes, entonces (3.54) debe cumplirse; i.e.,

$$\int_{\Sigma} d^3x \varphi (-\Delta + m^2)^{3/2} \varphi \leq \lambda \int_{\Sigma} d^3x \varphi (-\Delta + m^2)^{1/2} \varphi$$

lo cual implica que

$$\int_{\Sigma} d^3x \varphi (-\Delta + m^2) \varphi \leq \lambda \int_{\Sigma} d^3x \varphi \varphi \quad (3.57)$$

para toda  $\varphi$ . i.e.,  $(-\Delta + m^2)$  es un operador acotado con respecto a la norma  $L_2$ . Sin embargo, no es verdad que  $(-\Delta + m^2)$  este acotado respecto a la norma  $L_2$ , de tal manera que la afirmación es

falsa y, en consecuencia, las normas  $\mu_0((\varphi, \pi), (\varphi, \pi))$  y  $\mu_C((\varphi, \pi), (\varphi, \pi))$  no son equivalentes y las teorías, por consiguiente, son unitariamente inequivalentes. Así que es posible tener una teoría consistente codificada por la misma  $B$  y una  $C$  no trivial que es unitariamente inequivalente a la teoría codificada por el par  $(B, 0)$ .

Nótese que para el caso de un campo de Klein-Gordon no masivo, si elegimos  $C = B = (-\Delta)^{-1/2}$ , la estructura compleja esta dada por

$$J_{(B,C)}(\varphi, \pi) = ((-\Delta)^{-1/2}\varphi - (-\Delta)^{-1/2}\pi, ((-\Delta)^{1/2} + (-\Delta)^{-1/2})\varphi - (-\Delta)^{-1/2}\pi) \quad (3.58)$$

y las teorías que corresponden a (3.55) y (3.58) podrían ser unitariamente equivalentes si (entre otras condiciones) la desigualdad

$$\int_{\Sigma} d^3x \varphi (-\Delta)^{-1} \varphi \leq \lambda \int_{\Sigma} d^3x \varphi \varphi \quad (3.59)$$

se satisface para toda  $\varphi$ . Dado que no es el caso, las teorías son inequivalentes.

Por lo tanto, queda claro que habremos de descartar (i) y (ii), y quedarnos con (iii). De hecho, después de esta discusión podemos afirmar que el término extra es un término altamente no trivial.

### §3.2.5. Vacío Gaussiano

A lo largo de esta sección hemos enfatizado que el operador de momento debe contar con un término multiplicativo para ser Hermítico respecto a una medida distinta a la homogénea. Hemos dicho también que es indispensable tal término, pues para el caso de teorías de campo no existen las medidas homogéneas. Sin embargo, uno podría ignorar esto y pretender que la representación sin término multiplicativo en el momento esta bien definida. En analogía con el oscilador armónico, es de esperar que en tal caso el vacío tenga una forma Gaussiana. Supongamos pues que el operador de momento esta representado como sigue

$$\mathcal{H}[g] = -i \int d^3x g(x) \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \quad (3.60)$$

El vacío, por definición, es la funcional  $\Psi_0$  tal que  $\mathcal{H}(\zeta) \cdot \Psi_0 = 0$  para toda  $\zeta \in \Gamma$ . Considerando la representación dada en §3.3 para el operador de aniquilación, la condición para el vacío queda como

$$\mathcal{A}(-g, f) \cdot \Psi_0 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} (\varphi[Dg - Cf - if] + [iAg - g - iBf] \frac{\delta}{\delta \varphi}) \Psi_0 = 0 \quad (3.61)$$

Sea  $\Lambda$  tal que  $\delta \Psi_0[\varphi]/\delta \varphi = \Lambda \Psi_0[\varphi]$ . Entonces,

$$\int_{\Sigma} (\varphi[Dg - Cf - if] + \Lambda[iAg - g - iBf]) \Psi_0 = 0 \quad (3.62)$$

para todo  $(-g, f) \in \Gamma$ . Dado que  $g$  y  $f$  son independientes, la última ecuación debe ser válida para todos los vectores del tipo  $(0, f) \in \Gamma$ . Así, usando la primera y la última de las relaciones en (3.23) tenemos que

$$\int_{\Sigma} (f(iB\Lambda + [i - A]\varphi)) \Psi_0 = 0; \quad \forall f \quad (3.63)$$

lo que implica que  $(1 + iA)\varphi + B\Lambda = 0$  entonces  $\Lambda = -B^{-1}\varphi - iB^{-1}A\varphi$ . Podemos ahora verificar que, para toda  $g$ ,

$$\int_{\Sigma} (\varphi Dg + \Lambda[iAg - g]) \Psi_0 = \int_{\Sigma} g(D\varphi - iC\Lambda - \Lambda) \Psi_0 \quad (3.64)$$

se anula una vez que  $\Lambda$  es sustituida en la expresión y usando las condiciones que satisfacen los operadores  $A, B, C, D$ . Entonces, podemos concluir que la condición sobre la "funcional de vacío" es

$$\frac{\delta \Psi_0[\varphi]}{\delta \varphi} = -[(B^{-1} + iB^{-1}A)\varphi]\Psi_0[\varphi] =: -(Q \cdot \varphi)\Psi_0[\varphi], \quad (3.65)$$

donde hemos definido al operador  $Q := (B^{-1} + iB^{-1}A)$ . Proponemos como solución a

$$\Psi_0[\varphi] = e^{\alpha \int \varphi Q \varphi} \quad (3.66)$$

Mostremos ahora que, en efecto, este estado satisface (3.65). Sea  $\{\varphi_\lambda\}$  una familia uniparamétrica de configuraciones de campo y sea  $\delta\varphi := d\varphi_\lambda/d\lambda|_{\lambda=0}$ , entonces

$$\frac{d\Psi_0}{d\lambda} = \alpha \int_{\Sigma} \left[ \frac{d\varphi_\lambda}{d\lambda} (Q \cdot \varphi_\lambda) + \varphi_\lambda \left( Q \cdot \frac{d\varphi_\lambda}{d\lambda} \right) \right] \Psi_0 = \alpha \int_{\Sigma} [\tilde{\varphi}_\lambda Q \cdot \varphi_\lambda + \varphi_\lambda Q \cdot \tilde{\varphi}_\lambda] \Psi_0 \quad (3.67)$$

donde  $\tilde{\varphi}_\lambda = d\varphi_\lambda/d\lambda$ . Consideremos el término generico de la forma  $\int g Q g'$ , para todo  $g$  y  $g'$  en  $C_0^\infty(\Sigma)$ . Puesto que  $B$  es simétrico,  $B^{-1}$  lo será también, y entonces  $\int g Q g' = \int g' B^{-1} g + i \int g B^{-1} (A g')$ , pero como  $\int g B^{-1} (A g') = \int A g' (B^{-1} g) = - \int g' C B^{-1} g$ , usando la identidad  $-C B^{-1} = B^{-1} A$  obtenemos que  $\int g B^{-1} A g' = \int g' B^{-1} A g$ . Por lo tanto,  $\int g Q g' = \int g' B^{-1} g + i \int g' B^{-1} A g$ . Es decir,  $Q$  es simétrico. Así que podemos concluir que

$$\frac{d\Psi_0}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \int_{\Sigma} \tilde{\varphi}_\lambda (2\alpha Q \cdot \varphi_\lambda) \Psi_0|_{\lambda=0} = \int \delta\varphi \left[ \frac{\delta \Psi_0[\varphi]}{\delta \varphi} \right] \quad (3.68)$$

lo cual implica que  $\delta \Psi_0[\varphi]/\delta \varphi = 2\alpha(Q \cdot \varphi)\Psi_0[\varphi]$ . Por lo tanto,  $\alpha = -1/2$  y el vacío, en la representación de Schrödinger "homogénea", esta dado por la funcional

$$\Psi_0[\varphi] = e^{-\frac{1}{2} \int \varphi (B^{-1} + iB^{-1}A) \varphi} = e^{-\frac{1}{2} \int \varphi (B^{-1} - iC B^{-1}) \varphi} \quad (3.69)$$

donde la última igualdad se sigue de utilizar la tercera relación en (3.21).

Entonces, si "absorbimos al vacío en la medida", tendríamos que

$$d\mu = \overline{\Psi_0} \Psi_0 \mathcal{D}\varphi = e^{-\int \varphi B^{-1} \varphi} \mathcal{D}\varphi$$

que es precisamente la medida Gaussian dada por (3.32).

### §3.2.6. Algunos comentarios

En esta sección hemos utilizado la condición en el valor de expectación en el vacío (3.19) para construir la representación de Schrödinger. Hemos dado las expresiones más generales para la teoría cuántica a la Schrödinger, con encajes arbitrarios de  $\Sigma$  en  ${}^4M$ . Vimos que la única posibilidad de representar consistentemente a la teoría es en términos de una medida probabilística, eliminando así a la inocente e incorrecta representación homogénea. Ello implicó modificar al operador de momento agregando un término multiplicativo que contiene toda la información necesaria proveniente de la estructura compleja. Notamos que en dicho operador multiplicativo hay un término altamente no trivial y que éste no puede ser derivado a partir de la medida. Debe notarse que la construcción esta sustentada en la idea central y no trivial de imponer la condición (3.19) sobre la expectación en el vacío de los operadores elementales.

Antes de concluir con esta sección, es necesario hacer algunos comentarios.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

1. Espacio de configuración cuántico. Al principio de esta sección hicimos notar la presencia del espacio de configuración cuántico  $\bar{C}$ . Sin embargo, no lo especificamos y en todo momento se supuso que éste estaba dado, y era tal que los objetos que ahí definimos tenían un comportamiento adecuado. En el caso del espacio tiempo de Minkowski y de encajes planos, donde  $\Sigma$  es un espacio Euclideo, el espacio de configuración cuántico es el espacio dual topológico al espacio de Schwartz  $\mathcal{S}$  (i.e.,  $\mathcal{S}^*$ ). El punto crucial en este caso es que es posible tomar al espacio de etiquetas como el espacio de Schwartz  $\mathcal{S}$  y aplicar entonces el teorema generalizado de Bochner [47, 48]. Es decir, como  $\mathcal{S}$  es un espacio nuclear metrizable, y la transformada de Fourier es continua en  $\mathcal{S}$ , entonces la medida en la ecuación (3.29) esta soportada en  $\mathcal{S}^*$ . Sin embargo, para variedades  $\Sigma$  menos restrictivas, ya no es posible definir a el espacio de Schwartz y usualmente se considera al espacio de funciones suaves con soporte compacto  $C_0^\infty(\Sigma)$ , como el espacio de etiquetas (ver apéndice A). Para indagar si es posible o no aplicar el teorema de Bochner extendido, es necesario probar que este espacio es nuclear y afrontar el problema en la completéz del álgebra de Weyl. Esta es una posible ruta para tratar de determinar al espacio de configuración cuántico  $\bar{C}$  de manera general.
2. Naturaleza Gaussiana de la medida. Nótese que la forma de la medida dada por (3.29) es siempre Gaussiana. Esto es garantizado por el hecho de que el operador  $B$  es positivo definido en la norma  $L^2$  sobre  $\Sigma$  [34]. Sin embargo, la realización particular del operador  $B$  será diferente para distintos encajes  $T_i$  de  $\Sigma$  (ver (3.25)). Por consiguiente, dada  $J$ , la forma explícita de la representación de Schrödinger depende, por supuesto, de la elección de encaje.
3. Hermiticidad. Para tener una cuantización consistente, es necesario asegurar que los operadores asociados a las observables fundamentales satisfacen las "condiciones de realidad", que en este caso significa que éstos deben ser operadores Hermíticos. Es directo mostrar que el operador dado en (3.47) o bien en (3.48) es, en efecto, Hermítico.
4. Encaje plano en el espacio de Minkowski. Consideremos el caso más simple y común, donde la estructura compleja es aquella tal que se obtiene la descomposición estándar en frecuencias positivas y negativas. Esta elección esta asociada a un campo vectorial constante tipo tiempo  $t^a$ . Además,  $\Sigma$  se elige como la hipersuperficie normal a  $t^a$ , a saber el marco inercial en el cual el campo vectorial  $t^a$  esta en "reposo". La estructura compleja  $J$  es en este caso  $J(\varphi, \pi) = (-(-\Delta + m^2)^{-1/2}\pi, (-\Delta + m^2)^{1/2}\varphi)$ , lo cual significa que  $A = C = 0$ ,  $B = (-\Delta + m^2)^{-1/2}$  y  $D = -(-\Delta + m^2)^{1/2}$ . La medida cuántica es entonces " $d\mu = e^{-\int \varphi(-\Delta + m^2)^{1/2} \varphi} \mathcal{D}\varphi$ ". Entonces, recuperamos inmediatamente la medida Gaussiana existente en la literatura [27, 49], y que corresponde a la representación usual de Fock. Como debe ser claro, ésta representa un caso muy particular (espacio tiempo de Minkowski y encajes planos) de la formula general que hemos presentado (válida para todo espacio tiempo globalmente hiperbólico y encajes arbitrarios).

En la siguiente sección compararemos la representación resultante de Schrödinger con su contraparte de Fock.

### §3.3. La conexión entre las representaciones

En esta sección veremos brevemente como estan relacionadas las representaciones, y como podemos pasar de una a la otra. Consideremos el estado más sencillo, el vacío  $|\mathbf{0}\rangle$ . Denotemos con 'Kets' a los elementos del espacio de Hilbert abstracto, y utilicemos los 'Brakets' para estados en alguna representación. Entonces,  $\langle\varphi|\mathbf{0}\rangle$  representa al vacío en la representación de Schrödinger mientras que  $\langle n|\mathbf{0}\rangle$  lo hace en la de Fock, donde usamos la notación en analogía con los estados de  $n$  partículas de, por ejemplo, un oscilador.

Supongamos que contamos con los estados en la representación de Fock, y con ambas representaciones. Entonces, nuestro propósito es representar a los operadores de creación y aniquilación actuando sobre funcionales, para así convertir un estado de Fock en uno de Schrödinger. Puesto que actuando iterativamente con el operador de creación sobre el vacío se obtiene un subconjunto denso en el espacio de estados de Fock, lo mismo habrá de ocurrir en la representación funcional cuando el operador de creación actúe iterativamente sobre la funcional de vacío que, hasta una fase cuántica, esta dada por la función(al) constante

$$\Psi_0(\varphi) := \langle\varphi|\mathbf{0}\rangle = 1. \quad (3.70)$$

El siguiente paso es representar a los operadores de creación y aniquilación sobre  $\mathcal{H}_\zeta$ . Si  $\zeta^\alpha = (-g, f) \in \Gamma$ , podemos definir a la correspondiente observable como  $\mathcal{O}_\zeta = \varphi[f] + \pi[g]$  y, por lo tanto, a la observable cuántica  $\hat{\mathcal{O}}(\zeta)$ . Los operadores de creación y aniquilación en términos de la observable  $\hat{\mathcal{O}}(\zeta)$  estan dados por

$$C(\zeta) := \frac{1}{2\hbar} (\hat{\mathcal{O}}(J\zeta) + i\hat{\mathcal{O}}(\zeta)) \quad (3.71)$$

y

$$\mathcal{A}(\zeta) := \frac{1}{2\hbar} (\hat{\mathcal{O}}(J\zeta) - i\hat{\mathcal{O}}(\zeta)) \quad (3.72)$$

Recuérdese que la estructura compleja  $J$  actúa sobre datos iniciales como  $-J(\varphi, \pi) = (A\varphi + B\pi, C\pi + D\varphi)$ . Entonces,

$$C(-g, f) = \frac{1}{2\hbar} (\hat{\varphi}[Dg - Cf + if] + \mathcal{R}[Bf - Ag + ig]) \quad (3.73)$$

El operador de aniquilación puede escribirse de manera similar,

$$\mathcal{A}(-g, f) := \frac{1}{2\hbar} (\hat{\varphi}[Dg - Cf - if] + \mathcal{R}[Bf - Ag - ig]) \quad (3.74)$$

Las expresiones (3.73) y (3.74) son completamente generales, para cualquier  $J$  y cualquier representación. En el caso particular en el cual estamos interesados, a saber cuando la representación es equivalente a la de Fock y esta dada por (3.13) y (3.48), contamos por hipótesis con los operadores deseados. Nótese que para tener una formulación consistente debemos tener que

$$\mathcal{A}(-g, f) \cdot \Psi_0[\varphi] = 0, \quad (3.75)$$

para toda  $f$  y  $g$ . Es directo verificar que este es en efecto el caso.

Para hallar el "estado de una partícula" en la representación de Schrödinger, a la cual denotaremos por  $\Phi_\zeta^1 := C[\zeta] \cdot \Psi_0$ , utilizamos el operador de creación (3.73) para actuar con él sobre el vacío y obtener

$$\Phi_\zeta^1(\varphi) = \frac{i}{\hbar} \left( \int d^3x \varphi[f + i(B^{-1} - iCB^{-1})g] \right) \quad (3.76)$$

el "estado de una partícula" dado por el vector  $\zeta = (-g, f)$ . Adicionalmente, cualquier estado en la representación de Schrödinger puede obtenerse mediante la acción sucesiva del operador de creación (3.73).

### §3.4. Comparación entre las cuantizaciones para Gowdy $T^3$

En §2.3.1 y §2.3.2 se expusieron brevemente dos de las cuantizaciones que existen para el modelo cosmológico de Gowdy con topología de un tres toro, siguiendo [8] y [9, 10, 11] respectivamente. La idea aquí es comparar estas dos cuantizaciones, sustentados por la tecnología que hemos desarrollado en las primeras tres secciones de este capítulo. Comencemos notando que en §2.3.1 los grados locales de libertad, en particular, son representados a la Schrödinger según (2.57), y que estos grados locales de libertad corresponden justamente a un campo escalar propagándose en un fondo ficticio como el que se especifica en §2.3.2. Por consiguiente, para comparar estas dos cuantizaciones es suficiente con recurrir al material expuesto en las secciones anteriores. Es decir, puesto que para los grados locales de libertad tenemos, por una parte, una cuantización a la Fock (§2.3.2) y, por la otra, una cuantización a la Schrödinger (§2.3.1), ambas para un campo escalar propagándose en un fondo ficticio plano  ${}^{(4)}g_{ab}$ , dado en §2.2.2, lo único que debemos hacer aquí es identificar a que representación de Fock corresponde la representación (2.57) y si esta representación equivalente de Fock es o no unitariamente equivalente a la representación de Fock que en §2.3.2 se presenta. Nótese que todo este análisis es modulo las constricciones.

Empecemos notando que en la cuantización llevada a cabo en [8] (presentada y adaptada al caso polarizado en §2.3.1) la representación de los operadores elementales es única. Sin embargo, sabemos que por tratarse de una teoría de campo esto no es posible y es preciso señalar entonces que en la cuantización realizada en [8] no se considera apropiadamente la introducción de una estructura compleja (particular, como en [9]) que codifique a la teoría y exprese la ambigüedad inherente en teoría cuántica de campos. En este sentido, la cuantización de Mena es incompleta, pues no obstante que se sigue al pie de la letra el programa expuesto en §1.1, en el proceso de elecciones que uno debe hacer se ignora por completo la introducción de una estructura compleja. Como resultado de la inadecuada elección puede observarse que cuando se requiere que las condiciones de realidad (2.55) sean realizadas como relaciones de Hermiticidad, se obtiene un producto interno (2.58)-(2.59) cuya medida *no* es probabilística (2.59). Adicionalmente, nótese que en esta cuantización los estados, dados por (2.61), son Gaussianos. Todo ello está en perfecta armonía con el análisis llevado a cabo en §3.2.5, donde se muestra explícitamente que para medidas homogéneas, con el operador de momento sin término multiplicativo, el vacío es una Gaussiana (y es de suponer que el resto de los estados, bajo la aplicación sucesiva del operador de creación, como en §3.3, también lo sean). Debido a la ausencia de una estructura compleja, no es posible en este caso construir la versión a la Fock y compararla con la teoría cuántica desarrollada por Pierri en [9, 10]. Este hecho enfatiza que debemos entonces proveer a la teoría cuántica con una estructura compleja, de lo contrario ésta será incompleta y las comparaciones simplemente carecerán de sentido.

Entonces, para evadir medidas no probabilísticas y reflejar la ambigüedad inherente en teoría de campos, tenemos que introducir a la estructura compleja a través de una representación no trivial de los operadores cuánticos elementales. Para ello basta con notar, como lo hemos mencionado ya, que el espacio de los grados locales de libertad  $((\varphi, \pi))$  corresponde al espacio fase para un campo escalar. Es decir, la ecuación (2.35) implica que el par  $(\varphi, \pi)$  corresponde a datos de Cauchy

para un campo escalar libre, no masivo, propagándose en un fondo ficticio ( $M \approx T^2 \times \mathbb{R}$ ,<sup>(9)</sup>  $g_{ab} = -\nabla_a T \nabla_b T + \nabla_a \theta \nabla_b \theta + T^2 \nabla_a \sigma \nabla_b \sigma$ ) e independiente de  $\sigma$ . Esto significa que a nivel clásico el espacio de grados locales de libertad,  $\{(\varphi, \pi)\}$ , puede verse como la versión canónica de espacio fase de la presentación covariante empleada por Pierri. En este contexto, podemos decir que (a) a nivel cuántico la representación desarrollada por Mena es una versión a la Schrödinger incompleta de la cuantización usual a la Fock para un campo escalar, y (b) esta deficiencia se debe a la ausencia de una estructura compleja sobre  $\Gamma$ . El problema consiste entonces en dar una representación a la Schrödinger, completa y consistente, para el campo escalar anteriormente descrito, y subsanar así la omisión de [8]. Gracias al aparato desarrollado en las anteriores secciones, concretamente en §3.2, lo único que debemos hacer aquí para cumplir nuestro propósito es particularizar el tratamiento general: los operadores elementales, siguiendo (3.13), (3.48) y desarrollando en series de Fourier, son

$$\hat{\varphi}_n \cdot \Psi = \varphi_n \Psi, \quad \hat{\pi}^{-n} \cdot \Psi = -iT_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_n} + iR(n) \Psi \quad (3.77)$$

donde

$$R(n) = \oint \frac{e^{in\theta}}{2\pi} (B^{-1} - iCB^{-1}) \sum_m e^{im\theta} \varphi_m \quad (3.78)$$

Por consiguiente, el término que deberá agregarse a la representación de Mena (2.57) para reflejar correctamente la ambigüedad inherente que existe en teoría de campos es  $iR(n)\Psi$ , con  $R(n)$  dada por (3.78). Sea  $\alpha := \{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ , entonces por (3.32), la medida (heuristicamente hablando) es

$$"d\varphi = d\alpha \exp[-\sum_k \varphi_k \hat{R}(k)]"$$

donde  $\hat{R}(k) = \oint (e^{ik\theta} B^{-1} \sum_m e^{im\theta} \varphi_m)$ .

Vale la pena enfatizar que, clásicamente, la formulación canónica sobre el espacio fase co-ordenado por  $\{(\varphi, \pi)\}$  no es más que la contraparte de la formulación covariante sobre el espacio vectorial simpléctico  $(\mathcal{S}, \Omega_{\mathcal{S}})$ , usada por Pierri. Así que a nivel cuántico, la representación modificada que surge de la formulación canónica es, con una elección apropiada de los operadores  $B$  y  $C$ , la versión a la Schrödinger de la cuantización a la Fock llevada a cabo por Pierri (salvo constricciones). Es decir, aquí se introdujo a la estructura compleja sin particularizar a los operadores que la constituyen, por lo que (3.77) cubre todas las representaciones de Schrödinger para el campo escalar en cuestión. Más aún, debido a la relación entre las representaciones de Fock y Schrödinger (secciones §3.1-§3.3) sabemos que este hecho implica que también cubrimos a todas las representaciones a la Fock, incluyendo, por supuesto, a la de Pierri especificada por (2.63)-(2.64).

Si deseamos entonces llevar hasta el final la cuantización presentada en §2.3.1 bastaría con reemplazar (2.57) por (3.77) y generalizar los calculos en §2.3.1, ello arrojaría como resultado una cuantización que podríamos llamar *genérica* para el modelo de Gowdy  $T^3$ . Una segunda opción, menos ambiciosa pero bastante útil, sería aprovechar la estructura compleja definida por las ecuaciones (2.63)-(2.64), hallar su contraparte canónica usando (3.25), y exhibir, en el lenguaje de [8] la cuantización presentada en [9, 10]. Una tercera alternativa es la búsqueda de una nueva y "razonable" estructura simpléctica (i.e., operadores  $B$  y  $C$ ) con la cual implementar de manera concreta (3.77) y dar una nueva cuantización en el esquema de Schrödinger para el modelo de Gowdy. Las tres líneas tienen valor propio, y con seguridad en el camino plantearían nuevas e interesantes interrogantes.

## Evolución funcional

Con la finalidad de redondear la discusión en torno a la cuantización del modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$ , es útil analizar la dinámica a nivel cuántico. Para ello, aprovecharemos que este modelo es equivalente a gravedad  $2 + 1$  acoplada (mínimamente) a un campo escalar axisimétrico propagándose en un fondo ficticio con topología  $T^2 \times \mathbb{R}$  (sección §2.2.2), y analizaremos entonces la evolución de este campo entre dos superficies de Cauchy.

El estudio de la evolución temporal entre dos superficies de Cauchy en la teoría cuántica data desde el trabajo de Dirac [50]. Sin embargo, es sólo hasta épocas recientes que la implementabilidad unitaria de la evolución temporal a sido de nueva cuenta abordada. Es conocido que para un campo escalar no masivo, libre, y real, propagándose en un espacio tiempo estático de dimensión  $(n + 1)$  con topología  $T^n \times \mathbb{R}$ , la evolución dinámica respecto a foliaciones arbitrarias tipo espacio es unitariamente implementada sobre el mismo espacio de Fock que la asociada con foliaciones inerciales si  $n = 1$  [20] y no será, en general, unitariamente implementada si  $n > 1$  [21]. No obstante esto, para el caso (especial) en el que se considera la evolución temporal del campo de Klein-Gordon entre cualesquiera dos superficies de Cauchy planas, la evolución dinámica es unitariamente implementable para todos los enteros positivos  $n$ . En este capítulo (basados en [11]) veremos que este resultado no se extiende al caso del modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$ , donde el campo escalar axisimétrico se propaga en un fondo cuyos cortes espaciales tienen la misma topología, toros, pero que ahora éstos se expanden.

### §4.1. La transformación simpléctica de la dinámica clásica

Sean  $E_I(\Sigma)$  y  $E_F(\Sigma)$  cualesquiera hipersuperficies de Cauchy inicial y final, representadas por los encajes  $E_I$  y  $E_F$ . La evolución temporal de  $E_I(\Sigma)$  a  $E_F(\Sigma)$  puede verse como la biyección  $I_{(E_I, E_F)} : \Gamma \rightarrow \Gamma$  sobre el espacio de datos de Cauchy [21]:  $I_{(E_I, E_F)} := I_{E_F}^{-1} \circ I_{E_I}$ . La "receta" es: (a) tomar un dato inicial sobre  $E_I(\Sigma)$ , (b) hallar la correspondiente solución de la ecuación de Klein-Gordon, y (c) hallar el correspondiente par inducido sobre  $E_F(\Sigma)$  por esta solución. Nótese que este mapeo también define *evolución temporal* sobre el espacio de soluciones,  $\mathcal{S}$ , a través de la biyección naturalmente inducida por  $I_{(E_I, E_F)}$ ,  $T_{(E_I, E_F)} := I_{E_I} \circ I_{(E_I, E_F)} \circ I_{E_F}^{-1}$ . Los tres pasos de la receta son ahora los siguientes: (a) tomar una solución de la ecuación de campo, (b) hallar el dato inducido sobre la superficie de Cauchy  $E_F(\Sigma)$ , y (c) considerar a este dato como el dato inicial sobre  $E_I(\Sigma)$  y hallar la solución resultante. De la independencia respecto al encaje de las estructuras simplécticas ((A.15) y (A.16)) sobre  $\Gamma$  y  $\mathcal{S}$  se sigue que cada una de estas transformaciones de evolución temporal es un isomorfismo simpléctico. i.e.,  $I_{(E_I, E_F)}^* \Omega_\Gamma = \Omega_\Gamma$  y  $T_{(E_I, E_F)}^* \Omega_\mathcal{S} = \Omega_\mathcal{S}$ .

Para nuestro caso particular, construiremos la evolución dinámica entre cualesquiera dos superficies de Cauchy planas  $E_I(T^2) := (T_I, x')$  y  $E_F(T^2) := (T_F, x')$ , donde  $x' = (\theta, \sigma) \in (0, 2\pi)$  son coordenadas sobre  $T^2$  y  $T$  es la coordenada (suave) de "tiempo" sobre  $(M \approx T^2 \times \mathbb{R}, {}^n g_{ab})$ , y que es tal que cada superficie a  $T$  constante es una superficie de Cauchy. Denotemos por  $\psi$  a la

solución que resulta de la acción de la transformación  $T_{(E_I, E_F)}$  sobre  $\psi$ . Siguiendo la prescripción, lo primero que debemos hallar es el dato inducido sobre  $E_F(T^2)$ :

En general  $\varphi_F = E_F^* \psi$  y  $\pi_F = E_F^*(\sqrt{h_F} \varepsilon_{n_F} \psi)$ , dado que en nuestro caso  $E_F(T^2) = (T_F, x^i)$  y  $\psi$  depende solamente de las coordenadas  $T$  y  $\theta$ , tenemos entonces que  $\varphi_F = \psi(\theta, T_F)$  y  $\pi_F = [T \partial_T \psi(\theta, T)]|_{T=T_F}$ . Entonces, de la forma explícita para las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon (2.50), tenemos que

$$\varphi_F = \text{Im}(A_0) + \text{Re}(A_0) \ln T_F + \sum_{m \neq 0} \text{Re}[B_m H_0^{(1)}(|m|T_F)] \quad (4.1)$$

$$\pi_F = \text{Re}(A_0) - T_F \sum_{m \neq 0} |m| \text{Re}[B_m H_1^{(1)}(|m|T_F)] \quad (4.2)$$

donde  $B_m = A_m e^{im\theta}$ .

El siguiente paso en la prescripción es tomar a este par  $(\varphi_F, \pi_F)$  de datos iniciales para  $\psi$  respecto a  $E_F(T^2)$ , como datos iniciales sobre  $E_I(T^2)$  y hallar la solución resultante  $\tilde{\psi}$ . Es decir, debemos resolver para  $\{\tilde{A}_k, \tilde{A}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  el siguiente sistema

$$\psi(\theta, T_F) = \tilde{\psi}(\theta, T_I) \quad (4.3)$$

$$[T \partial_T \psi(\theta, T)]|_{T=T_F} = [T \partial_T \tilde{\psi}(\theta, T)]|_{T=T_I} \quad (4.4)$$

donde  $\tilde{\psi}(\theta, T_I) = E_I^* \tilde{\psi}$  y  $[T \partial_T \tilde{\psi}(\theta, T)]|_{T=T_I} = E_I^*(\sqrt{h_I} \varepsilon_{n_I} \tilde{\psi})$  están dadas de manera explícita por

$$\tilde{\psi}(\theta, T_I) = \text{Im}(\tilde{A}_0) + \text{Re}(\tilde{A}_0) \ln T_I + \sum_{m \neq 0} \text{Re}[\tilde{B}_m H_0^{(1)}(|m|T_I)] \quad (4.5)$$

$$[T \partial_T \tilde{\psi}(\theta, T)]|_{T=T_I} = \text{Re}(\tilde{A}_0) - T_I \sum_{m \neq 0} |m| \text{Re}[\tilde{B}_m H_1^{(1)}(|m|T_I)] \quad (4.6)$$

con  $\tilde{B}_m = \tilde{A}_m e^{im\theta}$ .

Usando la propiedad de ortogonalidad  $\oint e^{i(n-m)\theta} = 2\pi \delta_{n,m}$ , la conocida relación [51]

$$H_0^{(1)}(x) \overline{H_1^{(1)}(x)} - H_1^{(1)}(x) \overline{H_0^{(1)}(x)} = \frac{4i}{\pi x} \quad (\text{donde } x > 0)$$

y las expresiones explícitas para los campos, dadas por las ecuaciones (4.1), (4.2), (4.5) y (4.6), no es difícil mostrar que el sistema (4.3)-(4.4) es resuelto por

$$\text{Re}(\tilde{A}_0) = \text{Re}(A_0) \quad (4.7)$$

$$\text{Im}(\tilde{A}_0) = \text{Im}(A_0) + \text{Re}(A_0) \ln(T_F/T_I) \quad (4.8)$$

para  $k = 0$ , y

$$\tilde{A}_k = \frac{i\pi}{4} [F(y_k, x_k) - \overline{F(x_k, y_k)}] A_k + \frac{i\pi}{4} [G(y_k, x_k) - \overline{G(x_k, y_k)}] \overline{A_k} \quad (4.9)$$

para toda  $k \neq 0$ , donde  $x_k := |k|T_I$ ,  $y_k := |k|T_F$ ,  $F(r, s) := r H_1^{(1)}(r) \overline{H_0^{(1)}(s)}$  y  $G(r, s) := r H_0^{(1)}(r) \overline{H_1^{(1)}(s)}$ .

Por lo tanto, la transformación simpléctica  $T_{(E_I, E_F)}$  define, y es definida por, una transformación de  $\overline{A_m}$ :

$$\overline{A}_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \chi_{kl} A_l + \varepsilon_{kl} \overline{A}_l \quad (4.10)$$

donde

$$\chi_{k0} = -\frac{i}{2} \ln(T_F/T_I) \delta_{k,0}, \quad \chi_{kl} = \frac{i\pi}{4} [\overline{G(x_l, y_l)} - \overline{G(y_l, x_l)}] \delta_{l,-k} \quad (\forall l \neq 0) \quad (4.11)$$

$$\xi_{k0} = [1 - \frac{i}{2} \ln(T_F/T_I)] \delta_{k,0}, \quad \xi_{kl} = \frac{i\pi}{4} [F(x_l, y_l) - \overline{F(y_l, x_l)}] \delta_{l,k} \quad (\forall l \neq 0) \quad (4.12)$$

Evidentemente cuando  $T_I = T_F$  ocurre que  $\overline{A}_k = \overline{A}_k$  para toda  $k \in \mathbb{Z}$  (i.e., cuando  $T_{(E_I, E_F)}$  es el mapeo identidad).

## §4.2. Implementabilidad cuántica

Queremos indagar si la evolución clásica definida sobre el fondo ficticio es o no implementable a nivel cuántico. Para ello es útil recurrir a la formulación algebraica de la teoría cuántica de campos, pues ahí las transformaciones simplécticas (en particular la de evolución) son isomorfismos del álgebra de Weyl [21] y, desde el punto de vista de esta formulación, son entonces de manera natural implementables. La pregunta es si tal isomorfismo, representado en un espacio de Hilbert a través de la construcción GNS, se traduce o no en una transformación unitaria sobre el espacio de Fock correspondiente al estado algebraico  $\omega_{\text{Fock}}(\hat{W}(\psi)) = \exp(-1/4 \Omega(J\psi, \psi))$ , con  $J$  dada por (2.63)-(2.64).

Asociado a una transformación simpléctica  $f$  sobre  $Y$  (donde  $Y$  representa ya sea a  $\Gamma$  o bien a  $S$ ), hay un automorfismo\* del álgebra de Weyl  $\mathcal{A}$ ,  $\alpha_f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , definido por  $\alpha_f \cdot \hat{W}(y) := \hat{W}(f[y])$ . En particular, la transformación simpléctica  $T_{(E_I, E_F)}$  que representa la evolución temporal de  $E_I = (T_I, x^i)$  a  $E_F = (T_F, x^i)$  define el automorfismo\*  $\alpha_{(E_I, E_F)}$ . Así, desde el punto de vista algebraico, si le asignamos el estado  $\omega$  al tiempo inicial representado por el encaje  $E_I$ , el valor de expectación de la observable  $\hat{W} \in \mathcal{A}$  en  $E_I$  esta dado por

$$\langle W \rangle_{E_I} = \omega(W) \quad (4.13)$$

Consideremos el generador de Weyl  $\hat{W}(\psi)$  etiquetado por  $\psi$ . Bajo la transformación simpléctica  $T_{(E_I, E_F)}$ , la etiqueta es mapeada a  $\tilde{\psi}$  y la relación entre  $\hat{W}(\psi)$  y  $\hat{W}(\tilde{\psi})$  esta dada por  $\alpha_{(E_I, E_F)} \cdot \hat{W}(\psi) = \hat{W}(\tilde{\psi})$ . Puesto que a nivel clásico  $T_{(E_I, E_F)}$  dicta la evolución temporal, podemos interpretar entonces al cambio  $\hat{W}(\psi) \rightarrow \alpha_{(E_I, E_F)} \cdot \hat{W}(\psi)$  como la contraparte en el álgebra abstracta de observables. Es decir,  $\hat{W}(\psi) \rightarrow \alpha_{(E_I, E_F)} \cdot \hat{W}(\psi)$  es la representación matemática de la evolución temporal de las observables en el esquema de Heisenberg. Mientras que en este esquema el valor de expectación de la observable  $\hat{W}(\psi)$  al tiempo final esta dada por  $\langle W(\psi) \rangle_{E_F} = \omega(\alpha_{(E_I, E_F)} \cdot \hat{W}(\psi))$ , en la representación de Schrödinger esta expectación es  $\langle \hat{W}(\psi) \rangle_{E_F} = \omega_{E_F}(\hat{W}(\psi))$ . Por lo tanto el estado final  $\omega_{E_F}$ , obtenido al evolucionar el estado inicial  $\omega$ , esta dado por  $\omega \circ \alpha_{(E_I, E_F)}$ .

Ahora bien, para saber si la evolución temporal entre cualesquiera dos superficies de Cauchy planas esta bien definida en el marco de la formulación sobre un espacio de Hilbert, es preciso invocar a la construcción GNS (Teorema 1.1) que nos permite "bajar" a las transformaciones sobre el álgebra  $C^*$  a una representación en un determinado espacio de Hilbert. Una transformación simpléctica  $f : Y \rightarrow Y$ , cuyo automorfismo correspondiente es  $\alpha_f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , es unitariamente implementable [21] si hay una transformación  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  tal que, para cualquier  $\hat{W} \in \mathcal{A}$ ,  $U^{-1}R(\mathcal{A})U = R(\alpha_f \cdot \hat{W})$ .

Dado que  $\omega$  y su transformación inducida por  $f$ ,  $\omega \circ \alpha_f$ , no siempre definen representaciones en el espacio de Hilbert unitariamente equivalentes, no todas las transformaciones simplécticas  $f$

serán implementables en teoría de campos (desde el punto de vista de la formulación en un espacio de Hilbert, por supuesto). Aquí estamos interesados en la implementabilidad de la transformación simpléctica  $f = T_{(E_I, E_F)}$  sobre el espacio de Fock simétrico  $\mathcal{F}$  especificado en §2.3.2, construido a partir del espacio de Hilbert de "una partícula"  $\mathcal{H}_0$ , determinado por la estructura compleja (2.63)-(2.64), y cuyos elementos pueden ser identificados con las funciones complejas

$$\Psi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\theta, T) \overline{A_m}. \quad (4.14)$$

La transformación continua (4.10) define un par de mapeos lineales  $\xi : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$  y  $\chi : \mathcal{H}_0 \rightarrow \overline{\mathcal{H}_0}$ , donde  $\overline{\mathcal{H}_0}$  es el espacio complejo conjugado de  $\mathcal{H}_0$ . Con  $\Psi$  dada por (4.14), tenemos que

$$\xi \cdot \Psi = \sum_{m, l \in \mathbb{Z}} \overline{f_m(\theta, T)} \xi_{ml} \overline{A_l} \quad (4.15)$$

y

$$\chi \cdot \Psi = \sum_{m, l \in \mathbb{Z}} f_m(\theta, T) \overline{\chi_{ml}} \overline{A_l} \quad (4.16)$$

El automorfismo  $\alpha_{(E_I, E_F)}$  asociado a  $T_{(E_I, E_F)}$  es unitariamente implementable con respecto a la representación de Fock ( $\mathcal{F} = \mathcal{F}_I(\mathcal{H}_0), R$ ) si y sólo si el operador  $\chi$  es Hilbert-Schmidt [45]. i.e., sii

$$\sum_{m, l \in \mathbb{Z}} |\chi_{lm}|^2 < \infty \quad (4.17)$$

Dado que  $\sum_{m, l \in \mathbb{Z}} |\chi_{lm}|^2 = \frac{1}{2} \ln(T_F/T_I)^2 + \sum_{l, m \neq 0} |\chi_{lm}|^2$ , entonces de acuerdo con (4.11), la condición (4.17) es equivalente a

$$\sum_{m \neq 0} (\operatorname{Re}[g_m(x_m, y_m)])^2 < \infty \quad \text{y} \quad \sum_{m \neq 0} (\operatorname{Im}[g_m(x_m, y_m)])^2 < \infty \quad (4.18)$$

donde  $g_m(r, s) := \overline{G(r, s)} - \overline{G(s, r)}$ . Usando la definición de las funciones de Hankel en términos de las funciones de Bessel y Neumann (para  $n = 0$  o  $1$ ), la primera de las condiciones en (4.18) puede reescribirse como sigue

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\Lambda_m[a, y_m])^2 < \infty \quad (4.19)$$

donde  $\Lambda_m[a, y_m] := m[J_0(y_m)J_1(ay_m) - N_0(y_m)N_1(ay_m)] + N_1(y_m)N_0(ay_m) - J_1(y_m)J_0(ay_m)$  y  $a := T_I/T_F$ . En la región asintótica  $x \gg 1$  (para  $n = 0$  o  $1$ ) el comportamiento de las funciones de Bessel y Neumann esta dado por

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

y

$$N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right)$$

respectivamente, entonces el comportamiento asintótico de  $\Lambda_m[a, y_m]$  es

$$\Lambda_m[a, y_m] \approx \frac{2m}{\sqrt{a\pi y_m}} (a-1) \cos(y_m(1+a) - \pi) \quad \text{para } m \gg$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

y (4.19) es simplemente

$$\frac{4(1-a)^2}{\pi^2 T_F^2} \sum_{m=N}^{\infty} \cos^2(T_F(1+a)m) < \infty \quad (4.20)$$

donde  $N \gg 1$ . Nótese que para el caso  $a = 1$  se satisface trivialmente, como es de esperarse.

La implementabilidad unitaria implica que (4.20) debe satisfacerse para toda  $a \in (0, 1)$  y por lo tanto, si hay valores particulares de  $T_F$  ( $r_0 > 0$ ) y  $a$  ( $a_0 \in (0, 1)$ ) tales que  $\sum_{m=N}^{\infty} \cos^2(r_0(1+a_0)m)$  diverga, entonces  $\alpha_{(E_i, E_f)}$  no será implementada unitariamente. En particular, si tomamos  $T_F = \frac{1}{1+a}$  resulta que cada entero  $m \geq N$  corresponde a un máximo de  $\cos^2(T_F(1+a)x)$  y por lo tanto la suma en (4.20) diverge. Por consiguiente, la transformación asociada con  $T_{(E_i, E_f)}$  no es unitariamente implementable con respecto a la representación de Fock  $(\mathcal{F}, (\mathcal{H}_0), \pi)$  y por lo tanto la evolución temporal clásica, dictada por  $T_{(E_i, E_f)}$ , no tiene análogo cuántico vía un operador unitario en la formulación sobre un espacio de Hilbert. En este caso el esquema de Schrödinger para describir evolución funcional, usando la representación en el espacio de Fock de la teoría cuántica, no es alternativa; consecuentemente, la "ecuación de Schrödinger" asociada con el operador Hamiltoniano  $\hat{H}(T)$  no puede ser interpretada como una ecuación de evolución (sobre el fondo ficticio) para los estados cuánticos. Este análisis muestra la no implementabilidad en el espacio de Hilbert cinemático, para el Hilbert físico (i.e., el definido por la restricción cuántica) es posible probar que la no implementabilidad prevalece [12].

### §4.3. Estructura compleja e implementabilidad

En este capítulo hemos encontrado explícitamente la transformación simpléctica  $T_{(E_i, E_f)}$  que determina la evolución temporal clásica y visto que ésta no tiene análogo cuántico a través de un operador unitario en la formulación sobre un espacio de Hilbert. Esto significa que la dinámica clásica de los modelos cosmológicos de Gowdy  $T^3$ , incluso para las superficies de Cauchy más simples (planas y paralelas en la carta dada) que uno podría imaginar, no puede ser implementada bajo la deparametrización y la elección de estructura compleja que se ha realizado (ver sección (§2.2.2) y (§2.3.2), respectivamente). Sin embargo, no es completamente claro hasta donde este resultado prevalece para cualquier elección de operadores de aniquilación y creación (o, de manera equivalente, cualquier elección de estructura compleja  $\mathcal{J}$ ). La elección en [9] parece ser la más natural desde el punto de vista de la forma explícita de las soluciones a la ecuación de Klein-Gordon, pero no desde la perspectiva de la implementabilidad unitaria que, en el contexto de la teoría cuántica de campos sobre superficies curvas, quizá sea un requerimiento de selección de estructura compleja relevante para la adecuada representación de las RCC. La idea entonces es imponer a la implementabilidad unitaria como un requerimiento de la teoría, dada la deparametrización expuesta en (§2.2.2), y buscar a la familia de estructuras complejas (si es que existe) tal que la transformación simpléctica  $T_{(E_i, E_f)}$  tenga una contraparte como operador unitario en la teoría cuántica. Como ejemplo para fijar una estructura compleja a partir de un requerimiento específico, consideremos el caso más sencillo, a saber el de fijar a la estructura compleja vía el requerimiento de invariancia de Poincaré sobre el espacio de Minkowski.

Consideremos una estructura compleja compatible con  $\Omega$  sobre el espacio vectorial simpléctico  $(S, \Omega)$ , entonces podemos dar a  $S$  una estructura de espacio pre-Hilbert complejo según  $\langle x, y \rangle = \frac{1}{2}\Omega(Jx, y) - \frac{1}{2}\Omega(x, y)$ . Diremos que la estructura compleja es *invariante* relativa a un grupo simpléctico dado si conmuta con todos los elementos del grupo [27]. Si la estructura compleja

es invariante bajo una transformación simpléctica  $T$  dada sobre  $S$ ,  $T$  será unitaria relativa a la estructura pre-Hilbert compleja.

Pensemos ahora en cualesquiera dos observadores inerciales,  $O_1$  y  $O_2$ , en el espacio de Minkowski  $(M, \eta_{ab})$ . Los sistemas coordenados de cada observador corresponden a una foliación del espacio tiempo, definiendo, así, campos vectoriales tipo tiempo  $t_1^a$  y  $t_2^a$ , respectivamente<sup>1</sup>. Cada observador separa a las soluciones, de manera natural, en frecuencias positivas y negativas respecto al campo vectorial de Killing asociado, definiendo de esta manera a las estructuras complejas  $J_1 = -(-\mathcal{E}_{t_1} \mathcal{E}_{t_1})^{-1/2} \mathcal{E}_{t_1}$  y  $J_2 = -(-\mathcal{E}_{t_2} \mathcal{E}_{t_2})^{-1/2} \mathcal{E}_{t_2}$ . En general, todo observador inercial define una estructura compleja del tipo  $J = -(-\mathcal{E}_\xi \mathcal{E}_\xi)^{-1/2} \mathcal{E}_\xi$ , donde el campo vectorial  $\xi^a \in TM$ , en el sistema coordenado del observador,  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $p \mapsto X(p) = (t, x, y, z)$ , coincide con  $(\partial/\partial t)^a$ .

Por otra parte, los observadores  $O_1$  y  $O_2$  están conectados por una transformación de Poincaré,  $P$ , que, a su vez, induce una transformación en el espacio de soluciones  $S$ . El observador uno induce una foliación del espacio tiempo  $\mathcal{S}$ , por consiguiente, una familia uniparamétrica de encajes  $E_1(t_1) : \mathcal{S} \rightarrow M$ , de los cuales elegimos  $E_1 := E_1(0)$ , como el encaje a partir del cual se construye la versión canónica de la teoría. La transformación de Poincaré (activa) mapea cada  $E_1(t_1)(\mathcal{S})$  en hipersuperficies de Cauchy  $E_2(t_2)(\mathcal{S}) = P(E_1(t_1)(\mathcal{S}))$  que corresponden al observador dos y que tienen como vector normal a  $t_2^a$ . En particular,  $E_{t_2=r'}(\mathcal{S}) = E_1(0)(\mathcal{S})$  y, evidentemente, para la misma solución  $\phi$  los elementos de  $\Gamma$  son distintos; a saber,  $\varphi(x) = (\phi \circ E)(x)$  y  $\pi(x) = (\sqrt{h} \mathcal{E}_n \phi \circ E)(x)$  son los datos de Cauchy para la solución  $\phi$  respecto al encaje  $E = E_1(0)$ , en tanto que  $\varphi'(x) = (\phi \circ E')(x)$  y  $\pi'(x) = (\sqrt{h'} \mathcal{E}_{n'} \phi \circ E')(x)$  lo son respecto al encaje  $E' = E_2(r')$ . Así que la transformación de Poincaré (activa)  $P : M \rightarrow M$  induce, a través de  $E' = P \circ E : \mathcal{S} \rightarrow M$ , la transformación  $\phi \mapsto \phi' = P^* \phi$  (i.e., la solución  $\phi$  es mapeada a la solución  $\phi'$  mediante la regla  $\phi'(p) = \phi(P \cdot p)$ ) en el espacio de soluciones. Entonces, dado un encaje  $E$  fijo, un elemento del grupo de Poincaré induce una transformación en el espacio de soluciones. La transformación  $P^* : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  es simpléctica e induce una estructura compleja  $J' = P^* J_1 P^{*-1}$ ; en efecto,

$$\mu_1(\phi, \phi) = \Omega(J_1 \phi, \phi) = \Omega(P^* J_1 P^{*-1} \phi', \phi') = \mu'(\phi', \phi')$$

donde  $\mu'(\cdot, \cdot) = \Omega(J' \cdot, \cdot)$ , con  $J'$  especificada como se mencionó.

Entonces, por una parte tenemos la estructura compleja natural asociada al observador dos,  $J_2 = -(-\mathcal{E}_{t_2} \mathcal{E}_{t_2})^{-1/2} \mathcal{E}_{t_2}$ , y, por otra parte, la estructura compleja inducida por una transformación de Poincaré,  $J' = P^* J_1 P^{*-1}$ . Sin embargo, estas estructuras complejas son exactamente las mismas, pues la transformación de Poincaré  $P$  induce una transformación  $P_T$  que mapea  $t_1^a$  "anclado" en  $p \in E(\mathcal{S})$ , a  $t_2^a$  "anclado" en  $p' = P \cdot p \in E'(\mathcal{S})$ . Dado un operador  $A(\xi^a) : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  sobre el espacio de soluciones, construido y etiquetado por el vector de Killing  $\xi^a$ , el operador inducido por una transformación de Poincaré,  $P^* A(\xi^a) P^{*-1}$ , coincide con el operador etiquetado y construido por el vector de Killing inducido por dicha transformación; i.e.,  $P^* A(\xi^a) P^{*-1} = A(P_T \xi^a)$ . En consecuencia,

$$-J_2 = (-\mathcal{E}_{t_2} \mathcal{E}_{t_2})^{-1/2} \mathcal{E}_{t_2} = (-\mathcal{E}_{P_T t_1} \mathcal{E}_{P_T t_1})^{-1/2} \mathcal{E}_{P_T t_1} = P^* (-\mathcal{E}_{t_1} \mathcal{E}_{t_1})^{-1/2} \mathcal{E}_{t_1} P^{*-1} = -J'$$

Es decir, la estructura compleja asociada de manera inherente a un sistema inercial, es covariante ante el grupo de Poincaré.

<sup>1</sup> Los campos vectoriales  $t_1^a$  y  $t_2^a$  son aquellos campos tales que  $t_1^a \nabla_a t_1 = 1$  y  $t_2^a \nabla_a t_2 = 1$ , donde  $t_1$  y  $t_2$  son los tiempos coordenados respectivos para el observador uno y para el observador dos.

Ahora bien, dado el encaje  $E : \Sigma \rightarrow M$  existe un isomorfismo natural  $I_E$  que va del espacio de datos de Cauchy  $\Gamma$  al espacio de soluciones  $S$ . De manera tal que la estructura compleja  $J_1$  induce una estructura compleja en  $\Gamma$  de acuerdo a

$$J_{1,\Gamma} \begin{pmatrix} \varphi \\ \pi \end{pmatrix} = I_E^{-1} J_1 I_E \begin{pmatrix} \varphi \\ \pi \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Como  $\xi_i, \phi$  tiene datos de Cauchy  $\dot{\varphi} = \xi_i, \phi|_{E(\Sigma)}$  y  $\pi = \sqrt{h} \xi_n, \xi_i, \phi|_{E(\Sigma)}$ , entonces

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \pi \end{pmatrix} = I_E^{-1} \xi_i, \phi = I_E^{-1} \xi_i, I_E I_E^{-1} \phi = I_E^{-1} \xi_i, I_E \begin{pmatrix} \varphi \\ \pi \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Sea  $h$  tal que  $\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \pi \end{pmatrix} = -h \begin{pmatrix} \varphi \\ \pi \end{pmatrix}$ , entonces

$$h = -I_E^{-1} \xi_i, I_E. \quad (4.23)$$

Por consiguiente,  $-hh = -(I_E^{-1} \xi_i, I_E)(I_E^{-1} \xi_i, I_E) = (I_E^{-1} \theta_i, I_E)$ , donde  $\theta_i := -\xi_i, \xi_i$ . Así que,

$$|h|^{-1} = I_E^{-1} \theta_i^{-1/2} I_E. \quad (4.24)$$

De (4.23) y (4.24) tenemos que  $|h|^{-1} h = I_E^{-1} (-\theta_i^{-1/2} \xi_i, I_E) = I_E^{-1} (J_1 I_E)$ . Por lo tanto  $J_{1,\Gamma} = |h|^{-1} h$  es la estructura compleja inducida en  $\Gamma$  por  $J_1$ .

Supongamos ahora que  $O_2$  esta relacionado con  $O_1$  mediante un boost, entonces  $r_1^a = N n^a + N^a$ , con  $n^a = (\partial/\partial t_2)^a$ ,  $N = \gamma$ , y  $N^a = -\gamma v^j (\partial/\partial x_2^j)$ . Por (A.13) tenemos que

$$h = \begin{pmatrix} \gamma v^j \frac{\partial}{\partial x_2^j} & -\gamma \\ \gamma(-\Delta_{(2)} + m^2) & \gamma v^j \frac{\partial}{\partial x_2^j} \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

donde los subíndices con el número dos denotan que las derivadas son respecto a las coordenadas espaciales  $(x_2, y_2, z_2)$  de  $O_2$  y donde  $\Delta$  es el operador de Laplace  $h^{ab} D_a D_b$  en  $\Sigma$  (o también conocido como operador de Laplace-Beltrami para  $(\Sigma, h_{ab})$  [52]). Entonces, dado que  $\Delta_{(2)}$  y  $\partial/\partial x_2^j$  conmutan, mediante un cálculo directo se obtiene que (eliminando los subíndices "2" para simplificar notación)

$$|h|^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma^{-1} \theta_r^{-1/2} & -\gamma^{-1} \theta_r^{-1/2} D \\ \gamma^{-1} \theta_r^{1/2} D & \gamma^{-1} \theta_r^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

donde  $\gamma^{-1}$  es  $(D^2 + \theta_r)^{-1}$ ,  $\theta_r = (-\Delta + m^2)$  y  $D = v^j \partial_j$ . De (4.25) y (4.26) se sigue que la estructura compleja en el espacio de datos de Cauchy inducida por un boost es simplemente

$$J'_\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -(-\Delta + m^2)^{-1/2} \\ (-\Delta + m^2)^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Pero esta es justamente la estructura compleja inducida en el espacio de datos de Cauchy por la estructura compleja natural  $J_2$ , con lo cual ilustramos que, en efecto, la estructura compleja natural es covariante ante transformaciones de Poincaré.

Adicionalmente, se verifica que dada una solución con frecuencia positiva  $\phi^+$  (negativa  $\phi^-$ ) respecto a  $r_1^a$ , sucede que  $J_2 \phi^+ = i \phi^+$  ( $J_2 \phi^- = -i \phi^-$ ). Por lo tanto,  $J_1 \phi = J_2 \phi$  y dado que  $J_2 = P^* J_1 P^{-1}$ ,

entonces  $(P^*J_1 - J_1P^*)\phi = 0$  (i.e., la estructura compleja natural es invariante ante transformaciones de Poincaré). Dado que para un sistema coordinado asociado a un observador inercial ésta es única [52], entonces el requerimiento de invariante de Poincaré fija a la estructura compleja (que, en este caso, es la estructura compleja natural asociada al marco de referencia de un observador inercial).

Ahora bien, para el caso del modelo de Gowdy  $T^3$ , donde tenemos un campo escalar axisimétrico no masivo propagándose en un fondo ficticio plano cuyos cortes toroidales se expanden respecto al parámetro  $T$ , las simetrías ya no son las del grupo de Poincaré y, además, no podemos acudir a criterios de la energía para fijar a la estructura compleja como en [34, 35]. Una alternativa, como hemos mencionado ya, es imponer a la implementabilidad unitaria como un requerimiento y, basados en nuestra experiencia con la invariancia de Poincaré en Minkowski, complementar a ésta con algún criterio de simetría. La búsqueda de criterios para fijar una estructura compleja que de como resultado una teoría cuántica consistente, en el marco de teoría de campos en espacios tiempos curvos, es un problema abierto que va más allá del alcance de este trabajo. Sin embargo, cabe mencionar que para espacios tiempos estacionarios con  $V^a$  un campo vectorial de Killing (no nulo) tipo tiempo tal que el mapeo de identificación entre superficies de Cauchy  $E(\Sigma)$  y  $E'(\Sigma)$ ,  $(\nu^a : E(\Sigma) \rightarrow E'(\Sigma))$  es una isometría, y dado un estado algebraico cuasilibre<sup>2</sup>  $\omega_{E(\Sigma)}$ , el automorfismo  $\alpha$  definido por  $\omega_{E(\Sigma)} \circ \alpha = \omega_{E'(\Sigma)}$ , es unitariamente implementable [44].

Ahora bien, es importante notar que en el marco de gravedad cuántica canónica, la teoría es definida sobre una variedad "abstracta"  $\Sigma$  que en nuestro caso es  $\Sigma = T^2$ . No hay espacio tiempo y por consiguiente no hay noción de encaje alguno de  $\Sigma$  en  $M$ . Lo que se tiene, en el escenario de norma fija, es un espacio fase reducido que representa a los verdaderos grados de libertad, y, en la teoría cuántica, un espacio de Hilbert de estados físicos y observables físicas que operan sobre éste. Esta es la descripción "congeleada". Al llevar a cabo el procedimiento de deparametrización en §2.2.2 se introdujo una noción artificial de evolución temporal que nos permitió "evolucionar" condiciones iniciales sobre  $\Sigma$  en una familia uniparamétrica de condiciones iniciales, con una interpretación precisa de espacio tiempo. Esta familia uniparamétrica es generada vía una transformación canónica generada (valga la redundancia) por el Hamiltoniano reducido. Sin embargo, en gravedad cuántica el parámetro  $T$  no puede ser pensado, a priori, como una función de tiempo sobre un espacio tiempo por la simple razón de ausencia en la noción de espacio tiempo. El parámetro  $T$  es útil en el sentido de que el automorfismo  $\alpha$  es la realización algebraica de la dinámica clásica y da lugar al esquema de Heisenberg: Tenemos un único estado  $(\Psi)_{T_0}$ , definido sobre una variedad  $\Sigma_0$  preferida y fija, y los operadores que actúan sobre éste pueden, en principio, "depender del tiempo". Es aquí donde el parámetro  $T$  juega un rol central. Por ejemplo, podemos considerar a la familia uniparamétrica de observables que corresponden a "el volumen del universo a tiempo  $T$ ",  $\hat{V}_T$  [10]. En la formulación estándar de la teoría cuántica, donde existe un operador unitario de evolución  $\hat{U}(T, T_0)$ , podemos relacionar a los operadores de la familia a través de una transformación unitaria. De manera equivalente, uno tiene acceso al esquema de Schrödinger y puede describir al sistema vía una familia uniparamétrica de estados que "evolucionan" respecto al parámetro  $T$ . La gravedad cuántica canónica se construye de manera natural en el esquema de Heisenberg, donde los operadores físicos corresponden a las denominadas "constantes de movimiento en evolución". Por lo tanto, cualquier operador  $\mathcal{O}_T$  bien definido (i.e., que deje invariante al espacio de Hilbert o a un subespacio denso de éste) etiquetado por el tiempo  $T$ ,

<sup>2</sup>Un estado de la forma  $\omega(\hat{W}(\phi)) = \exp(-\mu(\phi, \phi)/4)$  y que satisface  $\mu(\phi_1, \phi_1)\mu(\phi_2, \phi_2) \geq |\Omega(\phi_1, \phi_2)|^2$  es un estado cuasilibre [28].

puede verse como un objeto lleno de contenido físico que representa a nivel cuántico a la observable clásica al "tiempo"  $T$ . Lo que se pierde con la carencia de un operador  $\hat{U}(T, T_0)$ , como es nuestro caso, es la "equivalencia unitaria" de los operadores  $O_T$  para todos los valores de  $T$ . En este sentido, hemos perdido evolución temporal unitaria y no es posible especificar el esquema de Schrödinger para la evolución de estados cuánticos. La evolución unitaria es uno de los pilares de la teoría cuántica pues expresa la conservación de probabilidad. No obstante, la gravedad cuántica canónica es conceptualmente distinta de la descripción estándar de la teoría cuántica, que cuenta con un tiempo Newtoniano externo y predilecto, y por consiguiente es necesaria una inspección de otro tipo para descartar alguna teoría en particular. En la descripción Hamiltoniana la "evolución temporal" es pura norma, de manera que estrictamente hablando sólo tiene sentido físico examinar observables sobre el espacio fase reducido. No hay evolución temporal ni dinámica. Cualquier deparametrización es clásicamente equivalente y da lugar, vía transformaciones canónicas, a una dinámica sobre un fondo ficticio. No hay ninguna razón que nos obligue a considerar una deparametrización en particular. Por consiguiente, en el marco de gravedad cuántica canónica, no hay confrontación con el hecho de que para las elecciones realizadas aquí la evolución no sea unitariamente implementable.

Dentro de este contexto, el parámetro  $T$ , que hemos introducido de manera artificial para hablar de "evolución", no tiene sentido físico fundamental. El hecho de que la teoría cuántica no contemple una contraparte unitaria de dicha transformación simpléctica no es razón suficiente para descartar a la teoría. Sin embargo, si debe ser claro que la ausencia de una transformación unitaria reduce de manera significativa la importancia de ésta cuantización para el modelo de Gowdy  $T^3$ , pues los operadores de Heisenberg  $O_T$  no están bien definidos: su espectro, valores de expectación, etc., dependen de la elección en el valor de  $T_0$ . Podríamos considerar un valor diferente, digamos  $T = T'_0$ , y por lo tanto obtener un estado de Heisenberg diferente  $|\Psi\rangle_{T'_0}$  y distintos operadores  $O_{T'} \neq O_T$ . En el marco tradicional de la teoría cuántica el requerimiento mínimo de consistencia es que los operadores  $O_{T'}$  y  $O_T$  sean unitariamente equivalentes. Así que en este ámbito, la cuantización es físicamente inaceptable.

## Discusión

En este trabajo hemos abordado, en el contexto de la gravedad cuántica canónica y la cuantización de sistemas con simetría intermedia (midisuperspaces) como 'laboratorio', el análisis comparativo de representaciones diferentes para la teoría cuántica del modelo de Gowdy  $T^3$  polarizado. Hemos visto que este modelo, caso particular del modelo sigma no lineal  $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ , tiene la característica de que los grados locales de libertad residen en un campo escalar no masivo, definido sobre una variedad de dimensión  $2 + 1$  con topología  $T^2 \times \mathbb{R}$ . Por consiguiente, la cuantización del modelo, en el sector de teoría de campo, corresponde a la de un campo de Klein-Gordon en un fondo ficticio e imponer en el espacio de Hilbert cinemático el operador de constricción para hallar el espacio de estados físicos.

En un caso los operadores (abstractos) elementales de la teoría son representados a la Schrödinger (2.57), mientras que, en el otro, la representación formal del operador de campo fundamental es a la Fock (2.65). Así que planteamos comparar estas cuantizaciones exigió construir la representación de Schrödinger para un campo escalar en un fondo globalmente hiperbólico, utilizando para ello como herramienta central a la construcción GNS (teorema 1.1). En esta construcción se enfatiza a los objetos clásicos necesarios para especificar a las representaciones. Para el caso de la representación a la Fock es ampliamente conocido que el único objeto relevante en la construcción es una estructura compleja  $J$  compatible con la estructura simpléctica<sup>3</sup>; la libertad infinita en la elección de estos objetos es precisamente la ambigüedad en la elección de representación en un espacio de Fock. En el caso de la representación funcional, además de  $J$ , tenemos la elección del encaje para la variedad  $\Sigma$ . Incluso cuando se cuenta con una teoría bien definida en el lenguaje de Fock, las descripciones inducidas sobre dos encajes diferentes  $E_1(\Sigma)$  y  $E_2(\Sigma)$  de  $\Sigma$  pueden resultar unitariamente inequivalentes y, en consecuencia, carecer de un operador unitario (i.e., el operador de evolución entre  $E_2(\Sigma)$  y  $E_1(\Sigma)$ , con la primera en el futuro de la segunda) que relacione a las representaciones de Schrödinger. Exactamente esto es lo que ocurre para el modelo de Gowdy  $T^3$ , donde la transformación simpléctica de evolución temporal entre dos superficies de Cauchy (4.10)-(4.12) induce una estructura compleja cuya teoría asociada es inequivalente a la especificada en §2.3.2.

En el proceso de construcción de la representación funcional utilizamos la formulación algebraica (sección §1.2) para precisar el sentido en el cual la representación de Fock es "Gaussiana" en el lenguaje funcional. Notamos que las condiciones de realidad-Hermiticidad no son (en general) suficientes para seleccionar a la representación de las RCC. Dado que desde el punto de vista geométrico-algebraico un término crucial en la representación es irreproducible, la elección más simple y natural de representación es incompleta. Debemos señalar que este término extra juega un papel relevante en el contexto del análisis de la unitariedad entre teorías [19] y, junto con los recientes resultados respecto a la implementabilidad unitaria de transformaciones simplécticas

<sup>3</sup>O, de manera alternativa, un producto interno  $\mu$  tal que para toda  $\psi_1 \in \mathcal{S}$ ,  $\mu(\psi_1, \psi_1) = \sup_{\psi_2 \neq 0} [\Omega(\psi_1, \psi_2)]^2 / \mu(\psi_2, \psi_2)$  [28]

([21, 12] y el expuesto aquí en el cuarto capítulo siguiendo [11]), plantean la posibilidad de que las versiones exponenciales finitas de operadores Hermíticos (posiblemente) bien definidos no existan como operadores en una teoría cuántica de campos rigurosamente definida. Adicionalmente, cabe mencionar que la naturaleza no trivial de este término y su derivación, son interesante indicio para revisar desde esta óptica la elección de representación de los operadores de momento de 'campo eléctrico' en el formalismo de la geometría cuántica [53], y para analizar asuntos relacionados con el límite semiclásico de la teoría. Por otra parte, como lo hicimos notar en la sección §3.2.6, la construcción de la representación de Schrödinger no esta del todo terminada pues hace falta especificar a el espacio de configuración cuántico  $\tilde{C}$  en el caso general (i.e., cuando el espacio de datos de Cauchy no puede ser considerado como el espacio de Schwartz). Un futuro trabajo en esta dirección sería completar la representación determinando el espacio de configuración cuántico y extender los resultados obtenidos al caso del campo de Maxwell en espacios globalmente hiperbólicos. Con ello, se establecerían las condiciones apropiadas para atacar asuntos tales como la relación entre las excitaciones poliméricas y de Fock [54, 55], para el campo de Maxwell, en un espacio tiempo curvo general y no sólo en el de Minkowski. Ello podría resultar útil en el entendimiento del límite de bajas energías en la cuantización de lazos.

Una vez contando con la representación funcional para el campo escalar, la comparación entre las dos formulaciones cuánticas para el modelo de Gowdy  $T^3$  ([8]-sección §2.3.1 y [9, 10]-sección §2.3.2) consistía en llevar a la práctica todo el aparato expuesto en las secciones §3.1, §3.2 y §3.3. Notamos que la cuantización canónica llevada a cabo por Mena en [8], siguiendo al pie de la letra el programa de Ashtekar ([14]-sección §1.1), es incompleta debido a la ausencia de una estructura compleja. La ambigüedad presente en teoría de campos no es considerada y, por lo tanto, la comparación entre las dos formulaciones no tiene sentido. Sin embargo, se propuso como introducir consistentemente la ambigüedad y así 'curar' a la formulación de tan importante carencia.

Finalmente, en el último de los capítulos mostramos que la dinámica clásica no tiene una contraparte cuántica como operador unitario. Hicimos notar que en el contexto de gravedad cuántica canónica esto no parece ser un punto débil de la cuantización del modelo de Gowdy  $T^3$  polarizado (con la parametrización y estructura compleja especificadas en §2.2.2 y §2.3.2) pero que, sin embargo, en el marco de la teoría cuántica de campos en superficies curvas, la implementabilidad o no de transformaciones simplécticas que definan evolución temporal puede incluso ser un criterio para seleccionar familias de estructuras complejas predilectas. Desde esta última perspectiva, la cuantización no es completamente satisfactoria y se requiere por lo tanto un análisis más profundo.

Los resultados en torno a la implementabilidad cuántica de la evolución temporal obtenidos a lo largo del trabajo de tesis (y que dieron lugar a [11]), han llamado la atención de expertos en el tema [12] y abierto la discusión en lo que se refiere al estudio de la relación entre la transformación simpléctica  $T_{(E_1, E_2)}$ , el Hamiltoniano y la implementabilidad cuántica. Recientemente [12], usando el formalismo de "espacio fase covariante", se mostró que, no obstante la no implementabilidad, el momento y configuración del campo cuántico, así como sus derivadas, son operadores autoadjuntos bien definidos a cada instante de tiempo y con espectro continuo en  $\mathbb{R}$ . Se argumenta entonces que (módulo la construcción, que restringe la clase de operadores físicos) los operadores de campo elementales representan observables con una interpretación física perfectamente aceptable en el esquema de Heisenberg. Adicionalmente, se muestra que la familia uniparamétrica de Hamiltonianos para el modelo de Gowdy puede definirse como operadores autoadjuntos tanto en el Hilbert cinemático como en el de estados físicos, no obstante que la evolución dinámica que generan no

es unitariamente implementable. Aunque no es posible la descripción dinámica en el esquema de Schrödinger, en [12] se considera que la evolución dinámica esta definida en el esquema de Heisenberg por las ecuaciones de campo y que este hecho, junto con la adecuada definición de los operadores, parecen ser razón suficiente para que el modelo cuántico de Gowdy sea aceptable, aún con la carencia de unitariedad en la dinámica. Por otra parte, es interesante notar que al observar el operador Hamiltoniano (2.70) que aquí obtuvimos, uno no esperaría que la unitariedad fuese un problema. Esta aparente tensión entre Hamiltoniano y evolución finita es parte de la discusión actual y tema abierto de investigación. Entre las propuestas para atacar dicha tensión se encuentra la sugerencia de que este Hamiltoniano no es el generador de la evolución temporal dado que la transformación de Bogoliubov (2.68)-(2.69) es dependiente del tiempo y es necesario redefinir al Hamiltoniano para preservar su carácter como generador de evolución [56]; el operador puede usarse para estudiar propiedades del operador Hamiltoniano a cada instante de tiempo dado, pero este operador no genera la dinámica. En cualquier caso, este trabajo de tesis abrió una nueva ventana de discusión en el ámbito de la implementabilidad de transformaciones simplécticas; sin duda, se requiere un conocimiento más detallado para entender y resolver la aparente tensión, quizá el estudio de la selección de estructuras complejas en este ámbito sea un buen punto de partida. Además de estos tópicos a investigar, sería interesante llevar a cabo análisis similares al realizado en el capítulo cuatro para el caso de fondos como el de FRW y de-Sitter.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# A

## Espacio fase y observables para el campo escalar

Sea  $\mathcal{C}$  el espacio de configuraciones de campo sobre la variedad  $M$ . La acción para el campo real de Klein-Gordon propagándose en un espacio tiempo globalmente hiperbólico,  $(M, g_{ab})$ , es la funcional  $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$S[\phi] := -\frac{1}{2} \int_M \sqrt{-g} d^4x (g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2). \quad (\text{A.1})$$

donde  $\mathcal{L}_{KG} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2)$  es la densidad Lagrangiana para el campo escalar.

De todas las posibles configuraciones de campo, las configuraciones físicas corresponden a aquellos campos para los cuales la acción es estacionaria. Consecuentemente, la ecuación de campo que describe al sistema se obtiene variando la acción respecto a  $\phi$  y exigiendo que ésta sea estacionaria. Como resultado de este proceso, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon,

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi - m^2 \phi = 0. \quad (\text{A.2})$$

Esta es la formulación Lagrangiana de la teoría y es, dada la independencia respecto a sistemas coordenados, covariante (i.e., la formulación es invariante ante difeomorfismos). Ahora bien, exactamente como sucede para el caso de una partícula en mecánica clásica, el sistema puede describirse equivalentemente a través de la formulación Hamiltoniana. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre en mecánica clásica donde el tiempo es absoluto, la formulación Hamiltoniana del campo escalar en un fondo globalmente hiperbólico "fija al observador". Es decir, la prescripción estándar para obtener una formulación Hamiltoniana a partir de una Lagrangiana requiere la introducción de una descomposición  $3 + 1$  del espacio tiempo  $(M, g_{ab})$  y, por lo tanto, se rompe la covariancia. En general, la prescripción para una teoría de campo consiste en los siguientes puntos [57]:

(1) Dada la formulación Lagrangiana correspondiente a la densidad  $\mathcal{L}$  para el campo  $\psi$ , introducir una descomposición  $3 + 1$  del espacio tiempo  $(M, g_{ab})$ , donde la variedad cuatro dimensional  $M$  es topológicamente equivalente a  $\mathbb{R} \times \Sigma$ . Es decir, puesto que el espacio tiempo es globalmente hiperbólico, se especifica una foliación por hipersuperficies de Cauchy difeomorfas a la variedad tridimensional  $\Sigma$ . i.e., se especifica un difeomorfismo  $E_t : \mathbb{R} \times \Sigma \rightarrow M$  tal que para cada elemento de  $\mathbb{R}$  la imagen de  $\Sigma$  es una superficie de Cauchy tipo espacio.

(2) Especificar el espacio de configuración  $C$  como aquél cuyos elementos  $q$  son la restricción del campo  $\psi$  a  $E_t(\Sigma)$ . Los elementos de  $C$ ,  $q$  definidos sobre  $E_t(\Sigma)$ , describen la configuración instantánea del campo  $\psi$ . Entonces uno puede escribir la densidad Lagrangiana como una función de  $q$ , sus derivadas temporales, y sus derivadas espaciales.

(3) Asumiendo que  $\mathcal{L}$  no depende de derivadas temporales de  $q$  mayores al primer orden, el momento  $p$  asociado al campo  $\psi$  sobre  $E_t(\Sigma)$  es

$$p = \frac{\delta S}{\delta \dot{q}}. \quad (\text{A.3})$$

Resolvemos (A.3) para  $\dot{q}$  como función de  $q$  y  $p$ . Si ésto es posible, definimos entonces

$$\mathcal{H}(q, p) = p\dot{q} - \mathcal{L} \quad (\text{A.4})$$

donde se debe entender que  $\dot{q} = \dot{q}(q, p)$  (tanto implícita como explícitamente). La integral de la densidad Hamiltoniana (A.4) sobre la superficie  $E_t(\mathcal{L})$  es la funcional  $H(q, p)$  sobre  $E_t(\mathcal{L})$ , mejor conocida como el Hamiltoniano.

Para el caso particular del campo escalar real y masivo, la sustitución en (A.1) de la descomposición  $g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b$  de la métrica del espacio tiempo, da como resultado

$$S[\phi] = -\frac{1}{2} \int_M \sqrt{-g} d^4 x \left( h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi - n^a n^b \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2 \right).$$

Por otro lado, el cuadri elemento de volumen bajo la descomposición  $3 + 1$  del espacio tiempo es simplemente  $\sqrt{-g} d^4 x = N \sqrt{h} dt d^3 x$ , donde  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) denota coordenadas espaciales,  $t : M \rightarrow \mathbb{R}$  es una función que define hipersuperficies de Cauchy  $E_t(\mathcal{L})$  al mismo tiempo (i.e.,  $t$  es el parámetro real que define la coordenada tiempo),  $N$  es la función de lapso (o dilatación) y  $h$  es el determinante de la 3-métrica inducida sobre  $E_t(\mathcal{L})$ . Puesto que  $n^a \nabla_a \phi = \frac{1}{N} (t^a - N^a) \nabla_a \phi = \frac{1}{N} \dot{\phi} - \frac{1}{N} N^a \nabla_a \phi$ , la acción queda entonces como

$$S[\phi] = \int_I dt \int_{E_t(\mathcal{L})} d^3 x \left( (\sqrt{h} n^a \nabla_a \phi) \dot{\phi} - F[\phi, n^a \nabla_a \phi, N^a \nabla_a \phi] \right),$$

donde

$$F[\phi, n^a \nabla_a \phi, N^a \nabla_a \phi] := \frac{N \sqrt{h}}{2} \left( (n^a \nabla_a \phi)^2 + h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi + m^2 \phi^2 + \frac{2}{N} (n^a \nabla_a \phi) (N^b \nabla_b \phi) \right).$$

Siguiendo la prescripción, el espacio de configuración clásico,  $C$ , es el conjunto  $\{\varphi | \varphi = \phi|_{E_t(\mathcal{L})}\}$ . El único término con derivada temporal es el primer término del integrando, de tal manera que el momento asociado al campo  $\phi$  sobre  $E_t(\mathcal{L})$  es

$$\pi = \frac{\delta S}{\delta \dot{\phi}} \Big|_{E_t(\mathcal{L})} = \left( \sqrt{h} n^a \nabla_a \phi \right) \Big|_{E_t(\mathcal{L})}. \quad (\text{A.5})$$

y de (A.4) tenemos que<sup>1</sup>

$$\mathcal{H}_{KG} = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{\sqrt{h}} \pi^2 + \sqrt{h} N h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi \Big|_{E_t(\mathcal{L})} + \sqrt{h} N m^2 \phi^2 \Big|_{E_t(\mathcal{L})} + 2\pi N^a \nabla_a \phi \Big|_{E_t(\mathcal{L})} \right). \quad (\text{A.6})$$

El tercer termino en (A.6) es simplemente  $\sqrt{h} N m^2 \phi^2$  pues  $\phi|_{E_t(\mathcal{L})} = \varphi$ . Nos interesa ahora escribir los terminos segundo y cuarto en términos de la función  $\varphi$  para, con ello, expresar a la densidad Hamiltoniana como una funcional que dependa de  $\varphi$  y  $\pi$ . Dado que  $g^{ab} = h^{ab} - n^a n^b$ , entonces  $\delta_a^c = h_a^c - n_a n^c$ . Por otra parte,  $D_a f = h_a^c \nabla_c f$  para  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  suave, así que

$$D_a f = \delta_a^c \nabla_c f + n_a n^c \nabla_c f,$$

y, por consiguiente,

$$N^a D_a f = N^a \nabla_a f,$$

<sup>1</sup>Es decir, al introducir la descomposición  $3 + 1$  del espacio tiempo no hemos hecho otra cosa que realizar una transformación de Legendre.

pues  $N^a = N^d \delta_d^a$  y  $N^a n_a = 0$ . El cuarto termino es entonces  $2\pi N^a \nabla_a \phi|_{E_i(\Sigma)} = 2\pi N^a D_a(\phi|_{E_i(\Sigma)}) = 2\pi N^a D_a \phi$ .

El segundo termino (que es relativamente un poco más complicado de describir que los dos anteriores y, por ello, lo hemos dejado hasta el final) puede escribirse en términos de  $\varphi$  como sigue:  $g^{ba} D_a f = h^{bc} \nabla_c f$ , por lo que  $g^{ba} D_a f \nabla_b f = h^{bc} \nabla_c f \nabla_b f$ . Pero

$$g^{ba} D_a f \nabla_b f = (h^{ba} - n^b n^a) D_a f \nabla_b f = h^{ab} D_a f \nabla_b f,$$

donde la última igualdad se sigue del hecho de que  $n^a D_a f = 0$ , pues  $n^a D_a f = n^a h_a^d \nabla_d f = 0$  dado que  $n^a h_a^d = 0$ . De igual manera, se sigue que  $h^{ab} \nabla_b f = g^{ac} D_c f = h^{ac} D_c f$ . Por lo tanto,

$$h^{ab} \nabla_a f \nabla_b f = g^{ab} D_a f \nabla_b f = h^{ab} D_a f D_b f.$$

Entonces, el segundo termino en (A.6) es simplemente

$$\sqrt{h} N h^{ab} \nabla_a \phi \nabla_b \phi \Big|_{E_i(\Sigma)} = \sqrt{h} N h^{ab} D_a(\phi|_{E_i(\Sigma)}) D_b(\phi|_{E_i(\Sigma)}) = \sqrt{h} N h^{ab} D_a \phi D_b \phi.$$

Finalmente, la densidad Hamiltoniana queda, en términos de las variables de configuración y momento, como sigue

$$\mathcal{H}_{KG} = \frac{1}{2} \left( \frac{N}{\sqrt{h}} \pi^2 + \sqrt{h} N h^{ab} D_a \phi D_b \phi + \sqrt{h} N m^2 \varphi^2 + 2\pi N^a D_a \phi \right). \quad (\text{A.7})$$

La acción es, entonces, la siguiente

$$S[\varphi, \pi] = \int_I dt \int_{\Sigma} (\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}_{KG}) \quad (\text{A.8})$$

donde hemos considerado el pull-back bajo  $E$  de  $\pi \dot{\varphi} - \mathcal{H}_{KG}$  a  $\Sigma$ , y denotado a éste con las mismas variables. Es decir,  $\varphi$  y  $\pi$  son ahora funciones de  $\Sigma$  en  $\mathbb{R}$  y están definidas por  $E^*(\phi)$  y  $E^*(\sqrt{h} n^a \nabla_a \phi)$ , respectivamente.

A partir de (A.8) uno encuentra las ecuaciones de campo correspondientes a la formulación Hamiltoniana (ó "canónica") de la teoría,

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \varphi} = \dot{\varphi} - \frac{\delta H_{KG}}{\delta \pi} \quad (\text{A.9})$$

$$0 = \frac{\delta S}{\delta \pi} = \pi + \frac{\delta H_{KG}}{\delta \varphi} \quad (\text{A.10})$$

donde  $H_{KG}$  es el Hamiltoniano de Klein-Gordon, i.e.,

$$H_{KG} = \int_E d^3 x \mathcal{H}_{KG} = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} d^3 x \sqrt{h} \left( \frac{N}{h} \pi^2 + N h^{ab} D_a \phi D_b \phi + N m^2 \varphi^2 + \frac{2\pi}{\sqrt{h}} N^a D_a \phi \right). \quad (\text{A.11})$$

Para hallar las ecuaciones de campo de manera explícita tendremos entonces que variar  $H_{KG}$  respecto a los campos  $\varphi$  y  $\pi$ . Sea  $\{(\varphi_\lambda, \pi_\lambda)\}$  una familia uniparamétrica de configuraciones de campo que comienzan en  $(\varphi_0, \pi_0)$  y que satisfacen condiciones de frontera apropiadas. Denotemos por  $\delta\varphi$  a  $d\varphi_\lambda/d\lambda|_{\lambda=0}$  y por  $\delta\pi$  a  $d\pi_\lambda/d\lambda|_{\lambda=0}$ . Entonces,

$$\frac{dH_{KG}}{d\lambda} \Big|_{\lambda=0} = \int d^3 x \left( \frac{\delta H_{KG}}{\delta \varphi} \delta\varphi + \frac{\delta H_{KG}}{\delta \pi} \delta\pi \right)$$

$$= \int d^3x \sqrt{h} \left( -D^\alpha (ND_\alpha \varphi) + Nm^2 \varphi - D_\alpha (N^a \pi / \sqrt{h}) \right) \delta \varphi + \sqrt{h} \left( \frac{N}{h} \pi + \frac{1}{\sqrt{h}} N^a D_\alpha \varphi \right) \delta \pi \quad (\text{A.12})$$

Entonces  $\delta H_{KG} / \delta \varphi = \sqrt{h} \left( -D^\alpha (ND_\alpha \varphi) + Nm^2 \varphi - D_\alpha (N^a \pi / \sqrt{h}) \right)$  es una densidad escalar mientras que  $\delta H_{KG} \delta \pi = \sqrt{h} \left( \frac{N}{h} \pi + \frac{1}{\sqrt{h}} N^a D_\alpha \varphi \right)$  es un escalar. De (A.9) y (A.10) se sigue entonces que

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\pi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N^a D_a & N / \sqrt{h} \\ \sqrt{h} N D^\alpha D_\alpha + \sqrt{h} D^\alpha N D_\alpha - N \sqrt{h} m^2 & \sqrt{h} D_\alpha (N^a / \sqrt{h}) + N^a D_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \pi \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Ahora bien, el espacio  $\{(\varphi, \pi)\}$  corresponde a la configuración y momento *instantaneos* del campo  $\phi$ , de manera que éste no es más que el espacio de datos iniciales del campo. Asociada a un dato inicial representado por un par  $(\varphi, \pi)_p$  particular, hay una solución  $\phi_p$ . La especificación del espacio de datos iniciales queda a nuestro criterio salvo que éste debe estar constituido por una clase de funciones suficientemente "decentes", que garanticen que determinadas estructuras matemáticas (como por ejemplo la forma simpléctica) estén bien definidas, y que no sea tan restrictiva como para que los grados locales de libertad del sistema sean inhibidos [28]. En el caso del espacio tiempo de Minkowski es el espacio de Schwartz,  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , la clase de funciones que usualmente se selecciona; no obstante que las funciones de Schwartz cumplen con los criterios señalados, tienen la seria limitante de estar definidas para variedades que puedan ser cubiertas por una sola carta y, por lo tanto, no es de ninguna manera obvio como extenderlas a variedades más generales. Sin embargo, la clase de funciones suaves y de soporte compacto en  $\Sigma$  no tiene tal limitante, satisface los criterios de "decencia" y cada par de éstas define una única solución ([28]) con soporte compacto sobre cada superficie de Cauchy en  $(M, g_{ab})$ . Definimos entonces a  $\Gamma := \{(\varphi, \pi)\}$  como

$$\Gamma := \{(\varphi, \pi) \mid \varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}; \varphi, \pi \in C_0^\infty(\Sigma)\} \quad (\text{A.14})$$

A este espacio, por motivos que ahora son evidentes, se le conoce en la literatura como el espacio de datos iniciales de Cauchy ó, simplemente, como espacio de Cauchy. Puesto que cada punto en  $\Gamma$  determina una solución de manera única, definimos al espacio de soluciones  $\mathcal{S}$  como el espacio de soluciones a la ecuación de Klein-Gordon que son suaves y con datos iniciales en el espacio de Cauchy. Dado un encaje  $E$  de  $\Sigma$  como una superficie de Cauchy en  $M$ , hay entonces un isomorfismo natural  $I_E : \Gamma \rightarrow \mathcal{S}$ , que se obtiene tomando un punto en  $\Gamma$  y evolucionándolo a partir de la superficie de Cauchy  $E(\Sigma)$  para obtener así una solución de la ecuación (A.2). El mapeo inverso,  $I_E^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \Gamma$ , toma un punto  $\phi \in \mathcal{S}$  y encuentra, gracias al encaje  $E$ , el dato de Cauchy inducido sobre  $\Sigma$ :  $\varphi = E^* \phi$  y  $\pi = E^*(\sqrt{h} \mathcal{L}_n \phi)$ , donde  $\mathcal{L}_n$  es la derivada de Lie a lo largo de la normal a la superficie de Cauchy  $E(\Sigma)$  y  $h$  es el determinante de la métrica inducida sobre  $E(\Sigma)$ .

El Lagrangiano para el campo escalar da lugar a una estructura simpléctica natural tanto sobre  $\Gamma$  como sobre  $\mathcal{S}$ , a saber<sup>2</sup>

$$\Omega_\Gamma((\varphi_1, \pi_1), (\varphi_2, \pi_2)) = \int_\Sigma d^3x (\pi_1 \varphi_2 - \pi_2 \varphi_1) \quad (\text{A.15})$$

y

$$\Omega_\mathcal{S}(\phi_1, \phi_2) = \int_{E(\Sigma)} d^3x \sqrt{h} (\phi_2 \mathcal{L}_n \phi_1 - \phi_1 \mathcal{L}_n \phi_2) \quad (\text{A.16})$$

<sup>2</sup>En general, dado un Lagrangiano puede construirse canónicamente la estructura simpléctica [58].

respectivamente. Así, ambos espacios,  $\Gamma$  y  $S$ , están equipados con una estructura simpléctica natural que provee al espacio de funciones reales definidas sobre cada uno de éstos con una estructura algebraica: el paréntesis de Poisson. El espacio fase de la teoría, en la "versión canónica", es el espacio vectorial simpléctico  $(\Gamma, \Omega_\Gamma)$  mientras que, en la "covariante", es  $(S, \Omega_S)$ .

Ahora bien, por tratarse de un espacio fase lineal, las observables fundamentales se construyen como se mencionó al final del apartado (§1.1). Es decir, las observables para el espacio  $\Gamma$  se construyen directamente dando funciones "suavizantes" sobre  $\Sigma$ . Especificamos funciones lineales sobre  $\Gamma$  dando un vector  $Y^a$  en  $\Gamma$  de la forma  $Y^a = (\varphi, \pi)^a$ , y un par  $\lambda_a = (-f, -g)_a$ , donde  $f$  es una densidad escalar y  $g$  un escalar, y definimos la acción de  $\lambda_a$  sobre  $Y^a$  como,

$$F_\lambda(Y) = -\lambda_a Y^a := \int_\Sigma (f\varphi + g\pi) d^3x \quad (\text{A.17})$$

De (A.15) y (A.17) se sigue que podemos escribir a la función lineal como  $F_\lambda(Y) = \Omega_{ab} \lambda^a Y^b = \Omega(\lambda, Y)$ , si identificamos  $\lambda^b = \Omega^{ba} \lambda_a = (-g, f)^b$ . Esto es, el par  $(-f, -g)_a$  de funciones "suavizantes" en la definición de las observables  $F$ , que es originalmente visto como una una forma sobre el espacio fase, pueden también serlo como el vector  $(-g, f)^a$ . No obstante, nótese que el papel de las funciones suavizantes es intercambiado en el paso de la uno forma al vector.

De singular importancia en la formulación canónica de la teoría es considerar observables de configuración y momento. Estos son casos particulares de observables  $F$  que dependen de la elección específica de la etiqueta  $\lambda$ . Consideremos el "vector etiqueta"  $\lambda^a = (0, f)^a$ , el cual normalmente es visto como un vector en la dirección del "momento". Sin embargo, cuando consideramos la observable lineal que este vector genera, obtenemos que

$$\varphi[f] := \int_\Sigma d^3x f \varphi. \quad (\text{A.18})$$

Análogamente, dado el vector  $(-g, 0)^a$  en la dirección de "configuración" podemos construir la observable lineal

$$\pi[g] := \int_\Sigma d^3x g \pi. \quad (\text{A.19})$$

Nótese que cualquier par de campos de prueba  $(-g, f)^a \in \Gamma$  definen una observable lineal, pero que los 'mezcla'. De manera más precisa, un escalar  $g$  en  $\Sigma$ , es decir, un par  $(-g, 0) \in \Gamma$  da lugar a una observable de momento  $\pi[g]$  y, por su parte, una densidad escalar  $f$ , que da lugar a un vector  $(0, f) \in \Gamma$  define una observable de configuración  $\varphi[f]$ .

## Cuantización isomonodrómica

Entre las diversas formulaciones que para cuantizar modelos con simetría intermedia existen, se encuentra el de la cuantización isomonodrómica. A mediados de la década pasada, Korotkin y Nicolai propusieron la cuantización del campo axisimétrico estacionario [59, 60] a partir de esta formulación.

Esencialmente, la idea presentada en [59, 60] consiste en reformular las ecuaciones de Einstein (en vacío) en términos de un par de ecuaciones diferenciales ordinarias matriciales. Para ello se introduce el potencial de Ernst  $\mathcal{E}$  y se muestra que las ecuaciones independientes de campo son equivalentes a la ecuación de Ernst, cuyo campo es una matriz  $g \in SL(2, \mathbb{R})$  compuesta por el potencial  $\mathcal{E}$ , y que las ecuaciones para el campo "cíclico" corresponden a las entradas de una forma cerrada que depende, también, de  $g$ . Se propone un sistema de ecuaciones matriciales de primer orden y se encuentran las condiciones que el parámetro espectral variable debe satisfacer para que el sistema sea equivalente a la ecuación de Ernst. Investigando las propiedades analíticas de este nuevo sistema se sigue que la ecuación de Ernst es equivalente a un sistema de ecuaciones de primer orden, en las variables  $\xi = z + i\rho$  y  $\bar{\xi} = z - i\rho$ , cuyos campos fundamentales  $A_j(\xi, \bar{\xi})$  son los residuos de polos en el parámetro espectral variable. La dinámica clásica es entonces gobernada por un "sistema Hamiltoniano de dos tiempos",  $H^{(\xi)}$  y  $H^{(\bar{\xi})}$ , respecto al paréntesis de Lie-Poisson  $\{A(\gamma) \sharp A(\mu)\} = [r(\mu - \gamma), A(\gamma) \otimes I + I \otimes A(\mu)]$ , donde la matriz racional clásica  $r(\gamma)$  es igual a  $\Pi/\gamma$  con  $\Pi$  el operador de permutación en  $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2$ . Para cuantizar el modelo se reemplaza el paréntesis de Lie-Poisson por el conmutador  $[A(\gamma) \sharp A(\mu)] = i\hbar[r(\mu - \gamma), A(\gamma) \otimes I + I \otimes A(\mu)]$ , se promueve a los campos fundamentales a operadores y se representan en el sector  $N$  solitónico  $\mathcal{H}^{(N)} = \mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N$ , donde cada componente del Hilbert es un espacio de representación de  $SU(2)$ . Los estados físicos son aquellos que resuelven las ecuaciones tipo Schrödinger para  $H^{(\xi)}$  y  $H^{(\bar{\xi})}$ .

El desarrollo de este formalismo puede, en principio, generalizarse a todos los modelos sigma no lineales  $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$  (mencionados en la sección §2.1) mediante una adecuada elección de las variables  $\xi$  y  $\bar{\xi}$ , y mostrando que la forma de la ecuación de Ernst, dependiente de  $g \in SL(2, \mathbb{R})$ , es genérica para todos ellos. En efecto, módulo asuntos relacionados con complejificaciones, si se logra reescribir a las ecuaciones (independientes) de campo en términos de una matriz  $g \in SL(2, \mathbb{R})$  dependiente del potencial de Ernst y con la forma presentada por Korotkin y Nicolai en [59], entonces es posible "calcar" el formalismo. En este apéndice presentaremos una alternativa de como reproducir la forma de la ecuación de Ernst y de la matriz  $g \in SL(2, \mathbb{R})$ , para el modelo de Gowdy  $T^3$  no polarizado. Este representa entonces el primer paso para llevar a cabo la cuantización (isomonodrómica) del modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$ , desde una perspectiva completamente diferente a la presentada en el capítulo 2.

El elemento de línea para el modelo de Gowdy  $T^3$  no polarizado puede escribirse como [61]:

$$ds^2 = e^{-\lambda/2} e^{\tau/2} (-e^{-2\tau} dt^2 + d\theta^2) + e^{-\tau} (e^{\rho} (d\sigma + Qd\delta)^2 + e^{-\rho} d\delta^2) \quad (\text{B.1})$$

Consideremos el siguiente conjunto de transformaciones,

$$T := e^{-\tau} , e^{-\sqrt{2}\psi} := pe^{P-\tau} , e^{\gamma} := p^2 e^{-(\lambda+\tau)/2} e^P$$

Entonces,

$$dT^2 = e^{-2\tau} d\tau^2 , e^{-\lambda/2} e^{\tau/2} = \frac{1}{p} e^{\sqrt{2}\psi} e^{\gamma}$$

$$e^{P-\tau} = \frac{1}{p} e^{-\sqrt{2}\psi} , e^{-P-\tau} = pT^2 e^{-\sqrt{2}\psi}$$

y el elemento de línea (B.1) queda entonces como

$$ds^2 = \frac{1}{p} e^{\sqrt{2}\psi} e^{\gamma} (-dT^2 + d\theta^2) + \frac{1}{p} e^{-\sqrt{2}\psi} (d\sigma + Qd\delta)^2 + pT^2 e^{\sqrt{2}\psi} d\delta^2$$

Puesto que  $p^{-1}$  es un factor conforme, entonces tenemos que

$$ds^2 = e^{\sqrt{2}\psi} e^{\gamma} (-dT^2 + d\theta^2) + e^{-\sqrt{2}\psi} ((d\sigma - Qd\delta)^2 + (pT)^2 e^{2\sqrt{2}\psi} d\delta^2) \quad (\text{B.2})$$

(donde hemos realizado el cambio  $Q \rightarrow -Q$ )

Tomando las siguientes transformaciones,

$$\frac{u}{2} \leftrightarrow \sqrt{2}\psi , 2w \leftrightarrow \gamma , p = \frac{|k_0|}{\sqrt{2\pi}} , Q = v$$

conseguimos, como era de esperarse, reproducir el elemento de línea que en [8] se presenta. En efecto,

$$ds^2 = e^{u/2} e^{2w} (-dT^2 + d\theta^2) + e^{-u/2} \left( (d\sigma - vd\delta)^2 + \frac{k_0^2}{2\pi} T^2 e^u d\delta^2 \right)$$

$$\sigma \rightarrow \omega , \delta \rightarrow v$$

$$ds^2 = e^{2w} e^{u/2} (-dT^2 + d\theta^2) + e^{-u/2} (d\omega^2 - 2vd\omega dv + \left(\frac{k_0^2}{2\pi} T^2 e^u + v^2\right) dv^2)$$

El elemento de línea que vamos a considerar aquí es

$$ds^2 = e^{\sqrt{2}\psi} e^{2\gamma} (-dT^2 + d\theta^2) + e^{-\sqrt{2}\psi} ((d\sigma - Qd\delta)^2 + (pT)^2 e^{2\sqrt{2}\psi} d\delta^2) \quad (\text{B.3})$$

(este elemento de línea se obtiene a partir de (B.2) vía la transformación  $\gamma \rightarrow 2\gamma$ )

Las ecuaciones de campo correspondientes al elemento de línea (B.3) son

$$-\psi_{TT} + \psi_{\theta\theta} - \frac{1}{T} \psi_T + \frac{e^{-2\sqrt{2}\psi}}{\sqrt{2}(Tp)^2} (Q_\theta^2 - Q_T^2) = 0 \quad (\text{B.4})$$

$$Q_{\theta\theta} - Q_{TT} + \frac{1}{T} Q_T + 2\sqrt{2}(\psi_T Q_T - \psi_\theta Q_\theta) = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\gamma_T = \frac{T}{2} (\psi_T^2 + \psi_\theta^2) + \frac{e^{-2\sqrt{2}\psi}}{4Tp^2} (Q_T^2 + Q_\theta^2) \quad (\text{B.6})$$

$$\gamma_\theta = T\psi_T\psi_\theta + \frac{e^{-2\sqrt{2}\psi}}{2Tp^2} Q_T Q_\theta \quad (\text{B.7})$$

Introduzcamos ahora el potencial de Ernst  $\mathcal{E} := \alpha + i\beta$ , donde

$$\alpha := \frac{1}{P} e^{-\sqrt{2}\psi} \quad (\text{B.8})$$

$$\beta_T := -\frac{e^{-2\sqrt{2}\psi}}{Tp^2} Q_\theta, \quad \beta_\theta := -\frac{e^{-2\sqrt{2}\psi}}{Tp^2} Q_T \quad (\text{B.9})$$

Podemos ahora introducir el operador complejo  $D := (\partial_T, i\partial_\theta)$ , que nos permite reescribir a las ecuaciones principales (i.e., la de los campos independientes  $\psi$  y  $Q$ ) en una representación tipo Ernst

$$E(\mathcal{E}) := (\text{Re}E)(D^2\mathcal{E} + T^{-1}DTDE) - (DE)^2 = 0$$

Por consiguiente, la ecuación (B.4) corresponde a  $\text{Re}[E(\mathcal{E})] = 0$ , mientras que (B.5) es equivalente a  $\beta_{T\theta} = \beta_{\theta T}$  y  $\text{Im}[E(\mathcal{E})] = 0$  se satisface automáticamente (una vez que se sustituyen  $\beta_T$  y  $\beta_\theta$ ).

Sea  $X := \theta - T$  y  $\bar{X} := \theta + T$ . Entonces, para  $f = f(X, \bar{X})$  tenemos que

$$f_\theta = f_X + f_{\bar{X}}, \quad f_T = f_{\bar{X}} - f_X, \quad f_X = \frac{1}{2}(f_\theta - f_T), \quad f_{\bar{X}} = \frac{1}{2}(f_\theta + f_T)$$

$$f_{\theta\theta} = f_{XX} + 2f_{\bar{X}X} + f_{\bar{X}\bar{X}}, \quad f_{TT} = f_{XX} - 2f_{\bar{X}X} + f_{\bar{X}\bar{X}}$$

Con esto a la mano, no es difícil ver que

$$Q_X = \frac{T}{\alpha^2} \beta_X, \quad Q_{\bar{X}} = -\frac{T}{\alpha^2} \beta_{\bar{X}}$$

Podemos escribir ahora las ecuaciones (B.4)-(B.7) en términos de  $\mathcal{E}$  y la nueva variable  $X$ . Esto es, la ecuación (B.4) es reescrita como

$$\alpha_{X\bar{X}} + \frac{1}{2(\bar{X} - X)}(\alpha_X - \alpha_{\bar{X}}) - \frac{1}{\alpha}(\alpha_X\alpha_{\bar{X}} - \beta_X\beta_{\bar{X}}) = 0 \quad (\text{B.10})$$

La ecuación (B.5), en términos de  $\alpha, \beta$  y  $X$ , es

$$2\left[\frac{(X - \bar{X})}{\alpha^2}\beta_X\right]_{\bar{X}} + \frac{1}{\alpha^2}(\beta_{\bar{X}} + \beta_X) + \frac{2(X - \bar{X})}{\alpha^3}(\alpha_{\bar{X}}\beta_X - \alpha_X\beta_{\bar{X}}) = 0 \quad (\text{B.11})$$

Puesto que  $\gamma_X = \frac{1}{2}(\gamma_\theta - \gamma_T)$ , usando (B.6) y (B.7) obtenemos que

$$\gamma_X = \frac{(X - \bar{X})}{4\alpha^2}(\alpha_X^2 + \beta_{\bar{X}}^2) \quad (\text{B.12})$$

Consideremos ahora la siguiente matriz  $g$ ,

$$g = \frac{1}{2\alpha} \begin{pmatrix} F & -2\beta \\ -2\beta & G \end{pmatrix}$$

y su inversa

$$g^{-1} = \frac{2\alpha}{FG - 4\beta^2} \begin{pmatrix} G & 2\beta \\ 2\beta & F \end{pmatrix}$$

Nuestro objetivo es determinar a  $F$  y  $G$  (i.e.,  $g$ ) imponiendo las siguientes tres condiciones (por analogía con el caso axisimétrico [59, 60]):

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- La matriz  $g$  debe ser tal que  $g \in SL(2, \mathbb{R})$ .
- La ecuación (B.12) debe satisfacer

$$2\gamma_X = \frac{(X - \bar{X})}{4} \text{tr}(g_X g^{-1})^2$$

- Las ecuaciones (B.10) y (B.11) deberán poder ser representadas en la siguiente (y más compacta) ecuación matricial

$$\left[ (X - \bar{X}) g_X g^{-1} \right]_{\bar{X}} + \left[ (X - \bar{X}) g_X g^{-1} \right]_X = 0$$

La primera condición implica que  $F$  y  $G$  deben ser tales que

$$FG = 4(\alpha^2 + \beta^2) \quad (\text{B.13})$$

Para la segunda y tercera condición necesitamos escribir a éstas explícitamente, e invocar a la primera en cada paso que así lo requiera. Un cálculo directo muestra que

$$g_X g^{-1} = \frac{1}{4\alpha^2} \begin{pmatrix} GF_X - 4\beta\beta_X - 4\alpha\alpha_X & 2\beta F_X - 2F\beta_X \\ 2\beta G_X - 2G\beta_X & FG_X - 4\beta\beta_X - 4\alpha\alpha_X \end{pmatrix}$$

Ahora bien, dada una matriz

$$M = \frac{1}{\delta} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

sabemos que

$$\text{tr} M^2 = \frac{1}{\delta^2} (\alpha^2 + 2bc + d^2) \quad (\text{B.14})$$

Usando la primera condición ( $FG = 4(\alpha^2 + \beta^2)$ ) y la fórmula (B.14) obtenemos (después de tediosa álgebra) que la segunda de las condiciones implica la siguiente expresión general (i.e., también válida para el caso axisimétrico)

$$2\gamma_X = \frac{(X - \bar{X})}{2\alpha^2} (\alpha_X^2 + \beta_X^2) - \frac{(X - \bar{X})}{8\alpha^2} F_X G_X \quad (\text{B.15})$$

Comparando (B.15) con (B.12), notamos que  $F$  y  $G$  deben ser tales que

$$F_X G_X = 0 \quad (\text{B.16})$$

Antes de proponer cualquier solución, tomemos en cuenta a la tercera condición, con la idea de extraer un conjunto "completo" de condiciones consistentes para  $F$  y  $G$  impuestas por los requerimientos. Consideremos el término genérico  $g_y g^{-1}$ , es fácil ver que

$$g_y g^{-1} = \frac{1}{4\alpha^2} M(y)$$

donde

$$M(y) = \frac{1}{4\alpha^2} \begin{pmatrix} GF_y - 4\beta\beta_y - 4\alpha\alpha_y & 2\beta F_y - 2F\beta_y \\ 2\beta G_y - 2G\beta_y & FG_y - 4\beta\beta_y - 4\alpha\alpha_y \end{pmatrix}$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Por lo tanto,

$$\left[ (X - \bar{X})G_X G^{-1} \right]_X = \frac{(X - \bar{X})}{4\alpha^2} M(X)_{\bar{X}} - \frac{1}{4\alpha^2} M(X) + \frac{(X - \bar{X})}{2\alpha^3} \alpha_{\bar{X}} M(X) \quad (\text{B.17})$$

y

$$\left[ (X - \bar{X})G_{\bar{X}} G^{-1} \right]_X = \frac{(X - \bar{X})}{4\alpha^2} M(\bar{X})_X + \frac{1}{4\alpha^2} M(\bar{X}) + \frac{(\bar{X} - X)}{2\alpha^3} \alpha_X M(\bar{X}) \quad (\text{B.18})$$

Consecuentemente, la tercera condición implica el siguiente conjunto de ecuaciones (cada entrada de la matriz igualada a cero):

$$A(F, G) - 8\alpha(X - \bar{X}) \left[ \alpha_{X\bar{X}} + \frac{1}{2(\bar{X} - X)}(\alpha_X - \alpha_{\bar{X}}) - \frac{1}{\alpha}(\alpha_X \alpha_{\bar{X}} - \beta_X \beta_{\bar{X}}) \right] - 4\alpha^2 \beta \left[ 2 \left[ \frac{(X - \bar{X})}{\alpha^2} \beta_X \right]_X + \frac{1}{\alpha^2}(\beta_{\bar{X}} + \beta_X) + \frac{2(X - \bar{X})}{\alpha^3}(\alpha_{\bar{X}} \beta_X - \alpha_X \beta_{\bar{X}}) \right] = 0 \quad (\text{B.19})$$

$$A(G, F) - 8\alpha(X - \bar{X}) \left[ \alpha_{X\bar{X}} + \frac{1}{2(\bar{X} - X)}(\alpha_X - \alpha_{\bar{X}}) - \frac{1}{\alpha}(\alpha_X \alpha_{\bar{X}} - \beta_X \beta_{\bar{X}}) \right] - 4\alpha^2 \beta \left[ 2 \left[ \frac{(X - \bar{X})}{\alpha^2} \beta_X \right]_{\bar{X}} + \frac{1}{\alpha^2}(\beta_{\bar{X}} + \beta_X) + \frac{2(X - \bar{X})}{\alpha^3}(\alpha_{\bar{X}} \beta_X - \alpha_X \beta_{\bar{X}}) \right] = 0 \quad (\text{B.20})$$

$$B(F) - \frac{\alpha^2 F}{2} \left[ 2 \left[ \frac{(X - \bar{X})}{\alpha^2} \beta_X \right]_X + \frac{1}{\alpha^2}(\beta_{\bar{X}} + \beta_X) + \frac{2(X - \bar{X})}{\alpha^3}(\alpha_{\bar{X}} \beta_X - \alpha_X \beta_{\bar{X}}) \right] = 0 \quad (\text{B.21})$$

y

$$B(G) - \frac{\alpha^2 G}{2} \left[ 2 \left[ \frac{(X - \bar{X})}{\alpha^2} \beta_X \right]_{\bar{X}} + \frac{1}{\alpha^2}(\beta_{\bar{X}} + \beta_X) + \frac{2(X - \bar{X})}{\alpha^3}(\alpha_{\bar{X}} \beta_X - \alpha_X \beta_{\bar{X}}) \right] = 0 \quad (\text{B.22})$$

donde

$$A(Y, Z) = (X - \bar{X})(2ZY_{X\bar{X}} + Z_X Y_{\bar{X}} + Z_{\bar{X}} Y_X) + Z(Y_{\bar{X}} - Y_X) - \frac{2(X - \bar{X})}{\alpha} Z(\alpha_X Y_{\bar{X}} + \alpha_{\bar{X}} Y_X)$$

$$B(Y) = \beta \left[ (X - \bar{X})Y_{X\bar{X}} + \frac{1}{2}(Y_{\bar{X}} - Y_X) + \frac{(\bar{X} - X)}{\alpha}(\alpha_{\bar{X}} Y_X - \alpha_X Y_{\bar{X}}) \right]$$

Para reproducir la ecuación (B.11) debemos pedir  $B(F) = 0$  y  $B(G) = 0$ . i.e.,

$$\begin{pmatrix} (X - \bar{X})F_{X\bar{X}} \\ (X - \bar{X})G_{X\bar{X}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(F_X - F_{\bar{X}}) + \frac{(X - \bar{X})}{\alpha}(\alpha_{\bar{X}} F_X - \alpha_X F_{\bar{X}}) \\ \frac{1}{2}(G_X - G_{\bar{X}}) + \frac{(X - \bar{X})}{\alpha}(\alpha_{\bar{X}} G_X - \alpha_X G_{\bar{X}}) \end{pmatrix}$$

o simplemente que

$$(X - \bar{X})Y_{X\bar{X}} = \frac{1}{2}(Y_X - Y_{\bar{X}}) + \frac{(X - \bar{X})}{\alpha}(\alpha_{\bar{X}} Y_X - \alpha_X Y_{\bar{X}}) \quad (\text{B.23})$$

para  $Y = F$  o  $Y = G$ . Usando esta última expresión, sustituimos  $F_{X\bar{X}}$  y  $G_{X\bar{X}}$  en las ecuaciones (B.19) y (B.20). Pidiendo que (B.10) y (B.11) se cumplan, obtenemos la siguiente condición

$$F_X G_{\bar{X}} + F_{\bar{X}} G_X = 0 \quad (\text{B.24})$$

ESTA TESIS CON  
DE LA BARRA DE ORIGEN

Las relaciones (B.13), (B.16), (B.23) y (B.24) proveen toda la información necesaria para especificar a los campos  $F$  y  $G$ . Veamos, específicamente, como.

(A) En primer lugar notemos que (B.16) puede ser resuelta por (i)  $F = F(\bar{X})$ , (ii)  $G = G(\bar{X})$  o bien por (iii)  $F = F(\bar{X})$  y  $G = G(\bar{X})$ . Supongamos que elegimos (iii); puesto que  $F_X = G_X = 0$ , entonces  $F_X G_{\bar{X}} + F_{\bar{X}} G_X = 0$  y la condición (B.24) se satisface. Pero la condición (B.23) es ahora

$$\begin{pmatrix} F_{\bar{X}}(1 - 2(X - \bar{X})\alpha^{-2}\alpha_X) \\ G_{\bar{X}}(1 - 2(X - \bar{X})\alpha^{-2}\alpha_X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dado que  $1 - 2(X - \bar{X})\alpha^{-2}\alpha_X \neq 0$ , entonces  $F_{\bar{X}} = 0$  y  $G_{\bar{X}} = 0$ . De nuestra elección (iii), tenemos entonces que  $F_X = 0$  y  $G_X = 0$ , por lo tanto  $F = \text{const}_1$  y  $G = \text{const}_2$ . Ello implica que  $\alpha^2 + \beta^2$  debe ser constante según (B.13). Esta conclusión es inaceptable, pues  $\alpha$  y  $\beta$  son campos independientes. Así, (iii) queda descartada.

(B) Consideremos (i). i.e.,  $F = F(\bar{X})$ . Puesto que  $F_X = 0$  y  $G_X \neq 0$ , entonces (B.24) implica  $F(\bar{X}) = 0$  y por lo tanto  $F = \text{const}$ . Por otro lado, (B.23) se satisface automáticamente para  $F = \text{const}$ , (B.13) nos dice que  $G = \frac{4}{\text{const}}(\alpha^2 + \beta^2)$  y sustituyendo esta expresión para  $G$  en (B.23) obtenemos que la ecuación resultante no es más que "(B.10)+(B.11)". Por lo tanto, hemos fijado a los campos (hasta una constante) usando las cuatro relaciones (B.13), (B.16), (B.23) y (B.24) (vale la pena señalar que la condición (ii) podría ser igualmente considerada y, por analogía, corresponde a tomar  $G = \text{const}'$  y  $F = \frac{4}{\text{const}'}(\alpha^2 + \beta^2)$ ).

Hagamos un breve recuento. Inspirados por el hecho de que tanto el modelo axisimétrico estacionario como el de Gowdy  $T^3$  son representaciones particulares del modelo sigma no lineal  $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ , es razonable pensar en la posibilidad de llevar a cabo la cuantización isomonodrómica del modelo de Gowdy utilizando exactamente la misma tecnología empleada para el caso axisimétrico estacionario en [59, 60]. Nuestro propósito era elegir una nueva variable  $X$  que haga posible escribir las ecuaciones (independientes) de campo en la forma

$$\left[ (X - \bar{X})g_X g^{-1} \right]_{\bar{X}} + \left[ (X - \bar{X})g_{\bar{X}} g^{-1} \right]_X = 0$$

(donde  $g \in SL(2, \mathbb{R})$ ) y expresar al campo no dinámico  $\gamma$  en la forma particular

$$2\gamma_X = \frac{(X - \bar{X})}{4} \text{tr}(g_X g^{-1})^2$$

Para ello se propuso  $X = \theta - T$ ,  $\bar{X} = \theta + T$  y

$$g = \frac{1}{2\alpha} \begin{pmatrix} F & -2\beta \\ -2\beta & G \end{pmatrix}$$

Encontramos que todos los requerimientos se satisfacen si tomamos  $F = \text{const}$  y  $G = \frac{4}{\text{const}}(\alpha^2 + \beta^2)$ . Sin pérdida de generalidad podemos considerar que  $\text{const} = 2$  y, finalmente, desplegar la lista que reproduce los primeros pasos con miras a la cuantización isomonodrómica para el modelo de Gowdy  $T^3$ :

- Nueva(s) variable(s)  $X = \theta - T$  ( $\bar{X} = \theta + T$ ).
- Matriz  $g \in SL(2, \mathbb{R})$ ,

$$g = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & \alpha^2 + \beta^2 \end{pmatrix}$$

i.e.,

$$g = \frac{1}{\mathcal{E} + \bar{\mathcal{E}}} \begin{pmatrix} 2 & i(\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}}) \\ i(\mathcal{E} - \bar{\mathcal{E}}) & 2\mathcal{E}\bar{\mathcal{E}} \end{pmatrix}$$

Con esto a nuestro alcance, es posible explorar ahora (siguiendo [59, 60]) la estructura Hamiltoniana de dos tiempos para el modelo de Gowdy  $T^3$  y comenzar a reproducir la cuantización isomonodrómica. Sin embargo, hay un detalle que pareciera no ser menor. En la "preparación clásica" del campo axisimétrico estacionario de [59] se llega a que toda la información respecto a los grados de libertad esta codificada en el conjunto de matrices constantes  $\{A_j^{(0)} := A_j(\xi^{(0)}, \bar{\xi}^{(0)})\}_{j=1}^N$  y, por lo tanto, el espacio fase de la teoría parece tener dimensión finita. Por el teorema de Stonevon Neumann (sección §1.2) ello implica que la cuantización es única y que, por lo tanto, no hay ambigüedad alguna. No obstante, el campo axisimétrico estacionario es ejemplo de un modelo con simetría intermedia y, por lo tanto, es una teoría de campo. Es entonces inaceptable un espacio fase de esta naturaleza y, por consiguiente, antes de plantear la posibilidad de cuantizar el modelo cosmológico de Gowdy  $T^3$  con este formalismo es necesario investigar con mayor profundidad si en efecto hay esta carencia de ambigüedad en la formulación isomonodrómica del campo axisimétrico estacionario o no. Cabe mencionar, adicionalmente, que en [59, 60], al introducir  $\{\Phi\}$  y declarar al sistema como un sistema Hamiltoniano de dos tiempos, prácticamente se 'empata' el sistema con el de una cadena de espines con  $N$  nodos [62] que, debe notarse, corresponde a un sistema con un número finito de grados de libertad.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# Notación

---

La siguiente lista incluye algunos de los símbolos que aparecen a lo largo del texto:

|                              |  |
|------------------------------|--|
| $[ , ]$                      | Conmutador.  |
| $\{ , \}$                    | Paréntesis de Poisson.   |
| $\dagger$                    | Conjugación hermítica.   |
| $\bar{\phantom{x}}$          | Conjugación compleja.  |
| $:=$                         | Definición.  |
| $\equiv$                     | Idéntico.  |
| $\oplus$                     | Suma directa.  |
| $\otimes$                    | Producto tensorial.  |
| $\mathbb{C}$                 | El campo de los números complejos.   |
| $\mathbb{R}$                 | El campo de los números reales.  |
| $\mathbb{Z}$                 | Los números enteros.   |
| $\mathbb{N}$                 | Los números naturales.   |
| $\Gamma$                     | Espacio fase.  |
| $\Gamma_c$                   | Superficie de constricción en $\Gamma$ .                                   |
| $\Gamma_r$                   | Espacio fase reducido, $\Gamma_c$ /norma.                                  |
| $C$                          | Espacio de configuración clásico.  |
| $C_r$                        | Espacio de configuración (clásico) reducido.                               |
| $\tilde{C}$                  | Espacio de configuración cuántico.   |
| $C_0^\infty(N)$              | Espacio de funciones suaves y con soporte compacto sobre la variedad $N$ . |
| $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  | Espacio de Schwartz.   |
| $\mathcal{H}$                | Espacio de Hilbert.  |
| $\mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ | Espacio de Fock simétrico.   |
| $H$                          | Hamiltoniano.  |
| $\mathcal{H}$                | Densidad Hamiltoniana.   |
| $L$                          | Lagrangiano.   |
| $\mathcal{L}$                | Densidad Lagrangiana.  |
| $M$                          | Variedad del espacio tiempo.   |
| $\Sigma$                     | Variedad 3-dimensional.  |
| $g_{ab}$                     | Métrica del espacio tiempo.  |
| $\eta_{ab}$                  | Métrica de Minkowski.  |
| $\mathcal{L}_t$              | Derivada de Lie respecto a $t$ .   |
| $T_p^*M$                     | Espacio cotangente a la variedad $M$ en el punto $p$ .                     |
| $\Omega$                     | Estructura simpléctica.  |

- $\Omega_{ab}$  Forma simpléctica.  
 $\bar{\Omega}_{ab}$  Restricción de  $\Omega_{ab}$  a  $\bar{\Gamma}$ .  
 $\mathfrak{g}$  Álgebra de Lie del grupo  $G$ .

La notación que emplearemos en el caso de tensores difiere de las convenciones estándar que la mayor parte de los textos de álgebra tensorial y relatividad general presentan. En ellos se utilizan, por lo general, índices griegos para las componentes espacio-temporales de un tensor, e índices latinos para las componentes puramente espaciales. No obstante la eficiencia de esta notación para expresar operaciones tales como contracción, diferenciación covariante, y producto tensorial, esta convención estándar tiene la desventaja de que es imposible distinguir una relación entre tensores de una relación que sólo se cumple para componentes tensoriales con respecto a una base particular. Para evadir esta dificultad, emplearemos la notación de índices abstractos, en donde las primeras letras del alfabeto serán empleadas como índices en un tensor y no representan componentes, sino que son parte misma de la notación para el tensor. Por otro lado, índices griegos en un tensor representarán, como en la notación estándar, a las componentes.

Dado un espacio vectorial  $V$ , un tensor del tipo  $(k, l)$  es un mapeo multilineal que va de  $(\times_1^k V^*) \times (\times_1^l V)$  a los reales, donde  $V^*$  denota el espacio dual a  $V$ , y será denotado por  $T^{a_1 \dots a_k b_1 \dots b_l}$ . Las partes totalmente simétricas y antisimétricas de un tensor  $T_{a_1 \dots a_l}$  tipo  $(0, l)$  son, respectivamente,

$$T_{(a_1 \dots a_l)} = \frac{1}{l!} \sum_{\Pi} T_{a_{\Pi(1)} \dots a_{\Pi(l)}} \quad \text{y} \quad T_{[a_1 \dots a_l]} = \frac{1}{l!} \sum_{\Pi} \delta_{\Pi} T_{a_{\Pi(1)} \dots a_{\Pi(l)}},$$

donde la suma se lleva a cabo sobre todas las permutaciones,  $\Pi$ , de  $1, \dots, l$  y  $\delta_{\Pi}$  es  $+1$  para permutaciones pares y  $-1$  para impares. Un campo tensorial del tipo  $(0, l)$  totalmente antisimétrico (i.e.,  $T_{a_1 \dots a_l} = T_{[a_1 \dots a_l]}$ ) es llamado una  $l$  forma diferencial.

## Bibliografía

---

- [1] Para una revisión histórica y del estado actual de la gravedad cuántica, ver por ejemplo: C. Rovelli, *Strings, loops and others: a critical survey of the present approaches to quantum gravity*, [arXiv:gr-qc/9803024]; C. Rovelli, *Notes for a brief history of quantum gravity*, in *Proceedings of the 9th Marcel Grossmann Conference, Rome 2000*, [arXiv:gr-qc/0006061]; C. Rovelli, *The century of the incomplete revolution: searching for general relativistic quantum field theory*, *J. Math. Phys.* **41**, 3776 (2000); A. Ashtekar, *Quantum Geometry and Gravity: Recent Advances*, [arXiv:gr-qc/0112038]; S. Carlip, *Quantum Gravity: A Progress Report*, *Rept. Prog. Phys.* **64**, 885 (2001); L. Smolin, *How far are we from the quantum theory of gravity?*, [arXiv:hep-th/0303185].
- [2] T. Thiemann, *Anomaly-free formulation of non-perturbative, four-dimensional Lorentzian quantum gravity*, *Phys. Lett. B* **380**, 257 (1996).
- [3] C. W. Misner, *Minisuperspace*, in *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*, (Freeman, San Francisco, 1972).
- [4] C. G. Torre, *Midisuperspace models of canonical quantum gravity*, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1081 (1999).
- [5] K. Kuchař, *Canonical Quantization of Cylindrical Gravitational Waves*, *Phys. Rev. D* **4**, 955 (1971); M. Angulo and G. Mena, *Large quantum gravity effects: Cylindrical waves in four dimensions*, *Int. J. Mod. Phys. D* **9**, 669 (2000).
- [6] A. Ashtekar and M. Pierri, *Probing quantum gravity through exactly soluble midi-superspaces. I*, *J. Math. Phys.* **37**, 6250 (1996).
- [7] D. Korotkin and H. Samtleben, *Canonical Quantization of Cylindrical Gravitational Waves with Two Polarizations*, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 14 (1998).
- [8] G. Mena, *Canonical quantization of the Gowdy model*, *Phys. Rev. D* **56**, 908 (1997).
- [9] M. Pierri, *Probing quantum general relativity through exactly soluble midi-superspaces. II: Polarized Gowdy models*, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 135 (2002).
- [10] M. Pierri, *Hamiltonian and volume operators*, [arXiv:gr-qc/0201013].
- [11] A. Corichi, J. Cortez and H. Quevedo, *On Unitary Time Evolution in Gowdy  $T^3$  Cosmologies*, *Int. J. Mod. Phys. D* **11**, 1451 (2002).
- [12] C. G. Torre, *Quantum dynamics of the polarized Gowdy  $T^3$  model*, *Phys. Rev. D* **66**, 084017 (2002).
- [13] J. Cortez, D. Núñez, and H. Quevedo, *Gravitational Fields and Nonlinear  $\sigma$ -Models*, *Int. J. Theor. Phys.* **40**, 251 (2001).
- [14] A. Ashtekar, *Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity*. Notes prepared in collaboration with R. S. Tate, (World Scientific, Singapore 1991).
- [15] R. H. Gowdy, *Vacuum Spacetimes with Two-Parameter Spacelike Isometry Groups and Compact Invariant Hypersurfaces: Topologies and Boundary Conditions*, *Ann. Phys.* **83**, 203 (1974).

- [16] Ver por ejemplo: M. Luscher, *Schrödinger representation in quantum field theory*, Nucl. Phys. B **254**, 52 (1985); R. Jackiw, *Schrödinger Picture Analysis Of Boson And Fermion Quantum Field Theories*, MIT-CTP-1514 Given at the Conf. on Mathematical Quantum Field Theory, Montreal, Canada, Sep 1987; R. Jackiw, *Analysis On Infinite Dimensional Manifolds: Schrödinger Representation For Quantized Fields*, in *Field Theory and Particle Physics*, (World Scientific, 1990); So-Young Pi, *Quantum Field Theory in Flat Robertson-Walker Space-Time: Functional Schrödinger Picture*, in *Field Theory and Particle Physics*, (World Scientific, 1990).
- [17] J. Cornwall, R. Jackiw and E. Tomboulis, *Effective Action For Composite Operators*, Phys. Rev. D **10**, 2428 (1974); J. Guven, B. Liberman and C. Hill, *Schrödinger-picture field theory in Robertson-Walker flat spacetimes*, Phys. Rev. D **39**, 438 (1989).
- [18] A. Corichi, J. Cortez and H. Quevedo, *Schrödinger representation for a scalar field on curved spacetime*, Phys. Rev. D **66**, 085025 (2002).
- [19] A. Corichi, J. Cortez and H. Quevedo, *Note on canonical quantization and unitary equivalence in field theory*, Class. Quant. Grav. **20**, L83 (2003).
- [20] C. G. Torre and M. Varadarajan, *Quantum fields at any time*, Phys. Rev. D **58**, 064007 (1998).
- [21] C. G. Torre and M. Varadarajan, *Functional evolution of free quantum fields*, Class. Quant. Grav. **16**, 2651 (1999).
- [22] K. Kuchař, *Dirac Constraint Quantization of a Parametrized Field Theory by Anomaly - Free Operator Representations of Space-Time Diffeomorphisms*, Phys. Rev. D **39**, 2263 (1989); K. Kuchař, *Parametrized Scalar Field on  $R \times S(1)$ : Dynamical Pictures, Space-Time Diffeomorphisms, and Conformal Isometries*, Phys. Rev. D **39**, 1579 (1989).
- [23] A. D. Helfer, *The Stress-Energy Operator*, Class. Quant. Grav. **13**, L129 (1996).
- [24] A. Ashtekar and R.S. Tate, *An Algebraic Extension of Dirac Quantization: Examples*, J. Math. Phys. **35**, 6434 (1994); A. Ashtekar, J. Lewandowsky, D. Marolf, J. Mourao, T. Thiemann, *Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom*, J. Math. Phys. **36**, 6456 (1995); D. Marolf, *Refined algebraic quantization: Systems with a single constraint*, [arXiv:gr-qc/9508015].
- [25] D. Giulini and D. Marolf, *On the Generality of Refined Algebraic Quantization*, Class. Quant. Grav. **16**, 2479 (1999).
- [26] D. Marolf, *Group averaging and refined algebraic quantization: Where are we now?*, in *Proceedings of the 9th Marcel Grossmann Conference, Rome 2000*, [arXiv:gr-qc/0011112].
- [27] J. Baez, I. Segal and Z. Zhou, *An Introduction to Algebraic and Constructive Quantum Field Theory*, (Princeton U. Press, 1992).
- [28] R.M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics*, (The University of Chicago Press, Chicago, 1994).
- [29] R. Haag, *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*, (Springer-Verlag, 1996).
- [30] R. Geroch, *Mathematical Physics*, (The University of Chicago Press, Chicago 1985).
- [31] A. Corichi, *Introduction to the Fock quantization of the Maxwell field*, Rev. Mex. Fís. **44**, 402 (1998).
- [32] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette and M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics*, (Nort-Holland, 1982).

- [33] M. Reed and B. Simon, *Functional Analysis*, (Academic Press, London 1980).
- [34] A. Ashtekar and A. Magnon, *Quantum fields in curved space-times*, Proc. Roy. Soc. Lond. A. **346**, 375 (1975).
- [35] A. Ashtekar and A. Magnon-Ashtekar, *A curiosity concerning the role of coherent states in quantum field theory*, Pramana **15**, 107 (1980).
- [36] D. Maison, *Are the Stationary, Axially Symmetric Einstein Equations Completely Integrable?*, Phys. Rev. Lett. **41**, 521 (1978).
- [37] C. Misner, *Harmonic maps as models for physical theories*, Phys. Rev. D **18**, 4510 (1978); B. DeWitt, *Nonlinear Sigma Models in 4 Dimensions as Toy Models for Quantum Gravity*, in *Geometrical and Algebraic Aspects of Nonlinear Field Theory*, (North-Holland, 1989) ; A. Ashtekar and V. Husain, *Symmetry reduced Einstein gravity and generalized  $\sigma$  and chiral models*, Int. J. Mod. Phys D **7**, 549 (1998).
- [38] A. P. Balachandran, A. Stern and G. Trahern, *Nonlinear models as gauge theories*, Phys. Rev. D **19**, 2416 (1978); A. P. Balachandran, G. Marmo, B. S. Skagerstam and A. Stern, *Classical Topology and Quantum States*, (World Scientific, 1991); E. Abdalla, M. C. B. Abdalla and K. D. Rothe, *Non-perturbative methods in 2 dimensional quantum field theory*, (World Scientific, 1991).
- [39] H. Nicolai, *Two-Dimensional Gravities and Supergravities as Integrable System*, in *Recent Aspects of Quantum Fields*, (Springer Verlag, 1991).
- [40] C. W. Misner, *A Minisuperspace Example: The Gowdy  $T^3$  Cosmology*, Phys. Rev. D **8**, 3271 (1973); B. K. Berger, *Quantum cosmology: Exact solution for the Gowdy  $T^3$  model*, Phys. Rev. D **11**, 2770 (1975); B. K. Berger, *Quantum Effects in the Gowdy  $T^3$  Cosmology*, Ann. Phys. **156**, 155 (1984).
- [41] B. K. Berger, *Quantum Graviton Creation in a Model Universe*, Ann. Phys. **83**, 458 (1974).
- [42] V. Husain, *Quantum effects on the singularity of Gowdy cosmology*, Class. Quantum Grav. **4**, 1587 (1987).
- [43] N. D. Birrel and P. C. W. Davies, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, Cambridge 1982).
- [44] A. Arageorgis, J. Earman and L. Ruetsche, *Weyling the time away: the non-unitary implementability of quantum field dynamics on curved spacetime*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics **33**, 151 (2002).
- [45] R. Honegger and A. Rieckers, *Squeezing Bogoliubov transformations on the infinite mode CCR-algebra*, J. Math. Phys. **37**, 4291 (1996).
- [46] A. Corichi, J. Cortez and H. Quevedo, *On the Relation Between Fock and Schrödinger Representations for a Scalar Field*, [arXiv: hep-th/0202070].
- [47] A. Ashtekar, *Diffeomorphism-Invariant Quantum Theory and Quantum Gravity* (Unpublished Notes, 1995).
- [48] Y. Yamasaki, *Measures on infinite dimensional spaces*, (World Scientific, 1985).
- [49] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics, a Functional Integral Point of View* (Springer Verlag, 1987).
- [50] P.A.M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, (New York, Yeshiva University, 1964).
- [51] G. Arfken and H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, (Academic Press, 1995).

- [52] B. Kay, *Linear Spin-Zero Quantum Fields in External Gravitational and Scalar Field*, Commun. Math. Phys. **62**, 55 (1978).
- [53] H. Sahlmann, *Some comments on the representation theory of the algebra underlying loop quantum gravity*, [arXiv:gr-qc/0207111]; H. Sahlmann and T. Thiemann, *Irreducibility of the Ashtekar-Isham-Lewandowski representation*, [arXiv:gr-qc/0303074]; H. Sahlmann and T. Thiemann, *On the supers-election theory of the Weyl algebra for diffeomorphism invariant quantum gauge theories*, [arXiv:gr-qc/0302090]; J. Lewandowski and A. Okolow, *Diffeomorphism covariant representations of the holonomy flux  $\ast$  algebra*, [arXiv:gr-qc/0302059].
- [54] M. Varadarajan, *Fock representations from  $U(1)$  holonomy algebras*, Phys. Rev D **61**, 104001 (2000); M. Varadarajan, *Photons from quantized electric flux representations*, Phys. Rev D **64**, 104003 (2001).
- [55] A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Relation between polymer and Fock excitations*, Clas. Quant. Grav. **18** L117 (2001).
- [56] C. G. Torre, A. Corichi. Comunicación privada.
- [57] R. M. Wald. *General Relativity*, (The University of Chicago Press, 1984).
- [58] J. Lee and R. M. Wald, *Local symmetries and constraints*, J. Math. Phys. **31**, 725 (1990); A. Ashtekar, L. Bombelli and O. Reula, *The Covariant Phase Space of Asymptotically Flat Gravitational Fields*, in *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years after Lagrange*, (North-Holland, 1991).
- [59] H. Nicolai and D. Korotkin, *Separation of Variables and Hamiltonian Formulation for the Ernst Equation*, Phys. Rev. Lett. **74**, 1272 (1995).
- [60] H. Nicolai and D. Korotkin, *An integrable model of quantum gravity*, Phys. Lett. B **356**, 211 (1995).
- [61] H. Quevedo, M. Ryan, *Generating Cosmological Solutions from Known Solutions*, in *Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology*, (Springer-Verlag, 2000).
- [62] E. K. Sklyanin, *Separation of variables in the Gaudin model*, J. Sov. Math. **47**, 2473 (1989).

## Anexo

---

En este anexo se incluye la principal publicación ha que dió lugar este trabajo de tesis.

- A. Corichi, J. Cortez and H. Quevedo, *On Unitary Time Evolution in Gowdy  $T^3$  Cosmologies*, Int. J. Mod. Phys. D **11**, 1451 (2002).

Otros artículos ha que dió lugar este trabajo de tesis son:

- A. Corichi, J. Cortez and H. Quevedo, *Note on canonical quantization and unitary equivalence in field theory*, Class. Quant. Grav. **20**, L83 (2003).
- A. Corichi, J. Cortez and H. Quevedo, *Schrödinger representation for a scalar field on curved spacetime*, Phys. Rev. D **66**, 085025 (2002).
- A. Corichi, J. Cortez and H. Quevedo, *On the Relation Between Fock and Schrödinger Representations for a Scalar Field*, [arXiv: hep-th/0202070].

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## ON UNITARY TIME EVOLUTION IN GOWDY $T^3$ COSMOLOGIES

ALEJANDRO CORICHI,<sup>\*,§,¶</sup> JERÓNIMO CORTEZ<sup>†,§</sup> and HERNANDO QUEVEDO<sup>‡,§</sup>

<sup>§</sup>*Instituto de Ciencias Nucleares, Universidad Nacional Autónoma de México,  
A. Postal 70-543, México D.F. 04510, México*

and

<sup>¶</sup>*Department of Physics and Astronomy, University of Mississippi, MS 38677, USA*

\**corichi@nuclecu.unam.mx*

†*cortez@nuclecu.unam.mx*

‡*quevedo@nuclecu.unam.mx*

Received 5 May 2002

Revised 22 June 2002

Communicated by D. Marolf

A non-perturbative canonical quantization of the Gowdy  $T^3$  polarized models is considered here. This approach profits from the equivalence between the symmetry reduced model and  $2 + 1$  gravity coupled to a massless real scalar field. The system is partially gauge fixed and a choice of internal time is made, for which the true degrees of freedom of the model reduce to a massless free scalar field propagating on a two-dimensional expanding torus. It is shown that the symplectic transformation that determines the classical dynamics cannot be unitarily implemented on the corresponding Hilbert space of quantum states. The implications of this result for both the quantization of fields on curved manifolds and other physically relevant questions regarding the initial singularity are discussed.

PACS numbers: 04.60.Ds, 04.60.Kz, 04.62.+v

### 1. Introduction

In the search for a quantum theory of gravity within the canonical approach, it has been historically useful to consider symmetry reduced models. The most studied examples are homogeneous models, where the infinite dimensional system is reduced to a model with a finite number of degrees of freedom. These are known as mini-superspace models.<sup>1</sup> Another class of symmetry reduced models where the resulting system is still a field theory with an infinite number of degrees of freedom are known as midi-superspace models (for a recent review see Ref. 2). Recently, within this class, the models that have received special attention are the Einstein–Rosen waves and Gowdy cosmological models.<sup>3–5</sup> One interesting feature of this type of models is that due to their spacetime symmetries, the classical dynamics turns out to be derivable from an equivalent complete integrable system, but they still possess an infinite number of degrees of freedom so that their quantization would lead to a

true quantum field theory (in contrast to mini-superspace models with a finite number of degrees of freedom). In this work, we will consider the canonical quantization of the polarized Gowdy  $T^3$  cosmological model.<sup>6</sup> This is the simplest inhomogeneous, empty, spatially closed cosmological model. It was extensively studied<sup>7,8</sup> in the 70's, and subsequently re-examined by several authors.<sup>9,10</sup> Of particular relevance is the recent work by Pierri, where definite progress was achieved in defining a rigorous quantization of the model.<sup>4</sup> In this case, the quantization is based on the fact that the corresponding gravitational field can be equivalently treated as 2 + 1 gravity coupled to a massless scalar field, defined on a 2 + 1-dimensional manifold with topology  $T^2 \times R$ .

One important aspect in the study of quantum cosmological models is dynamical evolution; that is the dynamics in which a physical quantum state evolves from an initial Cauchy surface to a final one. Recall that in general relativity there are no preferred foliations in spacetime and the dynamical evolution should consider all possible spacelike foliations in order to be in agreement with the requirement of general covariance. Furthermore, in the case in which the Cauchy surfaces are compact, dynamical evolution is a pure gauge, so any interpretation of time evolution is normally through a deparametrization procedure which, in the Hamiltonian language, is normally achieved via "time dependent gauge fixing." Thus, the dynamics to be considered in quantum cosmological models concerns the evolution of quantum states between Cauchy surfaces, defined by the particular gauge choice. Different choices of time parameters may lead to inequivalent quantizations. This fact is true even in the simple mechanical mini-superspace models. In the particular model we are interested, the system is partially gauge fixed at the classical level, and in particular a time function  $T$  is chosen and interpreted as the time which defines "evolution." The surfaces of constant  $T$  are Cauchy surfaces of a fiducial flat background, so the model gets reduced to a quantum scalar field on a flat background, equipped with a foliation of preferred surfaces which define "time evolution" in the corresponding quantum gravitational system.

At the classical level, this dynamical evolution of the field can be represented as a canonical transformation that acts on points of the corresponding phase space. The question is whether, at the quantum level, this canonical transformation can be implemented on the space of quantum states of the field by means of a unitary operator. This is a rather delicate problem that has been analyzed in detail only recently and for a few special cases,<sup>11-14</sup> all of them concerning free scalar fields on flat or curved (globally hyperbolic) asymptotically static spacetimes. Fortunately, the quantum polarized Gowdy  $T^3$  cosmological models belong to this class, and so we will be able to investigate the question about the unitary implementability of these models within this approach. This is the main goal of the present work.

We will show that for the particular quantization performed,<sup>4,5</sup> time evolution is not implementable as a unitary evolution. Given that, at the classical level time evolution is a pure gauge, and the particular choice of time is an *ad-hoc* procedure to regain dynamics from a purely frozen formalism, one might argue that unitary

implementability of this fictitious time evolution is not necessary for the consistency of the formalism. However, as we will argue, the implementability is needed in order to ask physically meaningful questions regarding, say, the initial singularity. That is, questions such as whether the initial singularity is smeared by quantum effects should have a definite answer within a consistent quantization. Thus, we shall conclude that we can not extract any physics out of these models as presently constructed.

This paper is organized as follows. In Sec. 2 we review the quantization of polarized Gowdy  $T^3$  cosmological models as performed by Pierri.<sup>4,5</sup> We show that the two different sets of creation and annihilation operators proposed in this quantization are related by means of a unitary Bogoliubov transformation. In Sec. 3.1 we explicitly calculate the canonical (symplectic) transformation that represents the classical evolution of the system. In Sec. 3.2 we prove that this canonical transformation is not unitarily implementable on the corresponding Fock space. We will end with a discussion and some conclusions in Sec. 4.

## 2. Canonical Quantization

The polarized Gowdy  $T^3$  models are globally hyperbolic four-dimensional vacuum spacetimes, with two commuting hypersurface orthogonal spacelike Killing fields and compact spacelike hypersurfaces homeomorphic to a three-torus. Since this system can be equivalently treated as 2+1 gravity (minimally) coupled to an axial-symmetric massless scalar field, let us begin by considering the action

$$S^{(3)}[g, \psi] = \frac{1}{2\pi} \int_{(3)M} d^3x \sqrt{-(3)g} \left( (3)R - (3)g^{ab} \nabla_a \psi \nabla_b \psi \right) \quad (1)$$

where  $(3)R$  is the Ricci scalar of the 3-d spacetime  $((3)M, (3)g_{ab})$ ,  $(3)M$  is a 3-d manifold with topology  $T^2 \times \mathbb{R}$  and the spacetime metric  $(3)g_{ab} = h_{ab} + \tau^2 \nabla_a \sigma \nabla_b \sigma$ . The Killing field  $\sigma^a$  is hypersurface orthogonal and the field  $h_{ab}$  is a metric of signature  $(-, +)$  on the 2-manifold orthogonal to  $\sigma^a$ ;  $\tau$  is the norm of  $\sigma^a$  and  $\sigma$  is an angular coordinate with range  $0 \leq \sigma < 2\pi$  such that  $\sigma^a \nabla_a \sigma = 1$ .

Introducing a generic slicing by compact spacelike hypersurfaces labeled by  $t = \text{const}$  the 2-metric can be written as

$$h_{ab} = (-N^2 + N^\theta N_\theta) \nabla_a t \nabla_b t + 2N_\theta \nabla_{(a} t \nabla_{b)} \theta + e^\gamma \nabla_a \theta \nabla_b \theta,$$

where the lapse,  $N$ , the shift,  $N^\theta$ , and  $\gamma$  are functions of  $\theta$  and  $t$ . The angular coordinate  $\theta \in [0, 2\pi)$  is such that  $\hat{\theta}^a \nabla_a \theta = 1$ , where  $\hat{\theta}^a$  is the unit vector field within each slice orthogonal to  $\sigma^a$ . Thus the system consists of five functions  $(N, N^\theta, \gamma, \tau, \psi)$  of  $t$  and  $\theta$  which are periodic in  $\theta$ . The function  $\psi$  represents the zero rest mass scalar field.

Substituting the expression for  $(3)g_{ab}$  in the action (1) we pass to the Hamiltonian formulation

$$S = \int dt \left( \int (p_\gamma \dot{\gamma} + p_\tau \dot{\tau} + p_\psi \dot{\psi}) \right) - H[N, N^\theta] \quad (2)$$

where the Hamiltonian  $H$  is given by  $H[N, N^\theta] = \oint (NC + N^\theta C_\theta)$  (here, the symbol  $\oint$  denotes integration over  $\theta \in S^1$ ) and the first class constraints  $C$  and  $C^\theta$  are

$$C = e^{-\gamma/2} \left[ 2\tau'' - \gamma' \tau' - p_\gamma p_\gamma + \tau \left( \frac{p_\psi^2}{4\tau^2} + \psi'^2 \right) \right], \quad (3)$$

$$C^\theta = e^{-\gamma} (\gamma' p_\gamma - 2p'_\gamma + \tau' p_\gamma + p_\psi \psi'). \quad (4)$$

The lapse and shift are not dynamical variables, thus the phase space  $\Gamma$  consists of three canonically-conjugate pairs of periodic functions of  $\theta$ ,  $(\gamma, p_\gamma; \tau, p_\tau; \psi, p_\psi)$  on a 2-d manifold  $\Sigma$  with topology  $T^2$ .

Since the Hamiltonian vanishes on the constraint surface there is no distinction between gauge and dynamics and therefore it is necessary to introduce a "de-parametrization" procedure to discuss dynamics. From the infinite set of vector fields generated by the Hamiltonian constraints we select one to represent evolution and gauge fix the others. For gauge fixing let us demand

$$p_\gamma + p = 0 \quad \text{and} \quad \tau(\theta)' = 0 \quad (5)$$

where  $p$  is a spatial constant that has zero Poisson bracket with all the constraints and hence it cannot be removed by gauge fixing. The second condition will allow us to regard  $\tau(\theta)$  as the time parameter.

The consistency of the formalism requires that the Poisson brackets  $\{\tau(\theta)', H[N, N^\theta]\}$  and  $\{p_\gamma + p, H[N, N^\theta]\}$  vanish. This can be achieved if the freely specifiable  $N$  and  $N^\theta$  are chosen as

$$N = \frac{e^{\gamma/2}}{p} \quad \text{and} \quad N^\theta = 0, \quad (6)$$

therefore the coordinate condition (5) is acceptable. Indeed, for the special choice (6) we have that  $\dot{\tau}(\theta) = 1$  and  $\dot{p}_\gamma(\theta) = -\dot{p} = 0$  and hence  $p$  becomes a true constant that can be associated with a time scaling parameter in the original 3 + 1-spacetime. Thus, apart from a global degree of freedom, the true degrees of freedom will all reside in the field  $\psi$ . Solving the set of second class constraints  $(C, C^\theta, p_\gamma + p, \tau')$  the result is

$$p_\tau = -\frac{e}{p} \left( \frac{p_\psi^2}{4t^2} + \psi'^2 \right), \quad (7)$$

$$\gamma(\theta) = \frac{1}{p} \int_0^\theta d\theta_1 p_\psi \psi' + \gamma(0). \quad (8)$$

Since  $\gamma$  is a smooth function of  $\theta$ , it must admit a Fourier series of the form

$$\gamma = q + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} \gamma_n,$$

then

$$\sum_{n \neq 0} \left( \frac{e^{in\theta} - 1}{\sqrt{2\pi}} \right) \gamma_n = \frac{1}{p} \int_0^\theta d\theta_1 p_\psi \psi'$$

and we can solve for all modes but the zero mode. i.e. we can solve (8) for  $\bar{\gamma} = \sum_{n \neq 0} \frac{e^{in\theta}}{\sqrt{2\pi}} \gamma_n$  and we are left with the global degree of freedom  $q = \frac{1}{2\pi} \oint \gamma$  unsolved. This is consistent with the fact that a constant shift vector  $N^\sigma = \text{const}$  would also be acceptable for preserving the conditions (5). Substituting (8) into (6) we obtain that  $N = N[q, p, \psi, p_\psi]$ . The spacetime metric is now completely determined by  $q, p, \psi$  and  $p_\psi$

$${}^{(3)}g_{ab} = e^{q+\gamma} \left( -\frac{1}{p^2} \nabla_a t \nabla_b t + \nabla_a \theta \nabla_b \theta \right) + t^2 \nabla_a \sigma \nabla_b \sigma. \quad (9)$$

The phase space variables are periodic functions of  $\theta$ , therefore  $\gamma(2\pi) - \gamma(0) = 0$  defines via (8) the global constraint

$$P_\theta := \oint p_\psi \psi' = 0. \quad (10)$$

The non-degenerate symplectic structure on the reduced phase space  $\Gamma_r = \Gamma_g \oplus \bar{\Gamma}$ , where  $\Gamma_g$  is coordinatized by the pair  $(q, p)$  and  $\bar{\Gamma}$  by  $(\psi, p_\psi)$ , is the pull-back of the natural symplectic structure defined on  $\Gamma$ . Thus  $\{q, p\} = 1$  and  $\{\psi(\theta_1), p_\psi(\theta_2)\} = \delta(\theta_1, \theta_2)$  on  $\Gamma_r$ .

Substituting (5) and (7) into (2) we obtain the reduced action

$$S = \int dt \left( p\dot{q} + \oint \left[ p_\psi \dot{\psi} - \frac{t}{p} \left( \frac{p_\psi^2}{4t^2} + \psi'^2 \right) \right] \right) \quad (11)$$

and the reduced Hamiltonian

$$H = \oint \frac{t}{p} \left[ \frac{p_\psi^2}{4t^2} + \psi'^2 \right]. \quad (12)$$

Varying the action (11) with respect to  $\psi$  and  $p_\psi$ , the field equations are  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{p_\psi}{2T p}$  and  $\frac{\partial p_\psi}{\partial t} = 2T p \psi''$ , which is equivalent to the Klein-Gordon equation for the scalar field  $\psi$  propagating on a fictitious flat background

$${}^{(f)}g_{ab} = -\nabla_a T \nabla_b T + \nabla_a \theta \nabla_b \theta + T^2 \nabla_a \sigma \nabla_b \sigma,$$

with the further restriction that the field  $\psi$  does not depend on  $\sigma$ . Here the constant rescaling  $T = t/p$  has been considered, in order to simplify the resulting dynamical equation for  $\psi$ . Hence the phase space  $\bar{\Gamma}$ , coordinatized by  $\varphi = \psi(\theta)$  and  $\pi = p_\psi(\theta)$ , corresponds to the symplectic vector space  $(V, \Omega_V)$  of smooth real solutions to the Klein-Gordon equation  ${}^{(f)}g^{ab} \nabla_a \nabla_b \psi = 0$ , where the symplectic structure  $\Omega_V$  is given by

$$\Omega_V(\psi_1, \psi_2) = \oint T(\psi_2 \partial_r \psi_1 - \psi_1 \partial_r \psi_2). \quad (13)$$

Note that the choice of internal time  $T: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ , depends on the point of phase space, in particular, on the global degree of freedom  $p$ , making it a  $q$ -number. Recall that in this case, one has deparametrized the system, that is, one has defined a

fictitious time evolution with respect to the number  $t$ . Strictly speaking, from the canonical viewpoint one should choose a particular value  $t_0$  of the time parameter in order to fix once and for all a single Cauchy surface  $\Sigma_0$ . This would be the "frozen formalism" description, where only the true degrees of freedom are left and the notion of dynamics has been lost. However, for the purposes of quantization, it is convenient to exploit this deparametrization since this allows one to complete the quantization in a rigorous fashion. However, in the quantum theory the role of  $T$  is very different, namely the function  $T$  does not have an *a priori* meaning as a spacetime time parameter. At best, one might expect that if one chooses suitable semi-classical states, a classical notion of time might arise, which could be then compared to the function  $T$ . We shall come back to the issue of "frozen formalism vs. fake dynamics" in the discussion section.

Thus, the problem of quantization of the true degrees of freedom in this case reduces to the quantum theory of a massless scalar field  $\psi$  on a fictitious background.<sup>4</sup> There is a convenient way of writing the solutions of the Klein-Gordon equation,

$$\psi(\theta, T) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\theta, T) A_m + \overline{f_m(\theta, T) A_m}, \quad (14)$$

where the bar denotes complex conjugation, the  $A_m$ 's are arbitrary constants and  $f_0(\theta, T) = (1/2)(\ln T - i)$ ,  $f_m(\theta, T) = (1/2)H_0^{(1)}(|m|T)e^{im\theta}$  for  $m \neq 0$ , with  $H_0^{(1)}$  the 0th-order Hankel function of the first kind.

For the quantization of this system one can use the Fock procedure, starting from the one-particle Hilbert space  $\mathcal{H}_0$  for which an appropriate complex structure  $J_V$  is needed that must be compatible with the symplectic structure  $\Omega_V$ . It can be shown<sup>4</sup> that in this case the complex structure can be chosen as

$$J_V(a \ln T) = -a \quad \text{and} \quad J_V(a) = a \ln T \quad (15)$$

for  $m = 0$ , and as

$$J_V(J_0(|m|T)) := N_0(|m|T) \quad \text{and} \quad J_V(N_0(|m|T)) := -J_0(|m|T) \quad (16)$$

for  $m \neq 0$ , where  $a$  is a constant. The (fiducial) Hilbert space can be represented as  $\mathcal{F} = \mathcal{H}_g \otimes \mathcal{F}$ , where  $\mathcal{H}_g$  is the Hilbert space in which the operators  $\hat{q}$  and  $\hat{p}$  are well defined, and  $\mathcal{F}$  is the symmetric Fock space (associated to the "one-particle" Hilbert space  $\mathcal{H}_0$ ) in which the field operator  $\hat{\psi}$  can be written as

$$\hat{\psi}(\theta, T) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\theta, T) \hat{A}_m + \overline{f_m(\theta, T) \hat{A}_m} \quad (17)$$

in terms of the creation and annihilation operators. The space  $\mathcal{F}_p$  of physical states is the subspace of  $\mathcal{F}$  defined by

$$: \hat{P}_0 : |\Psi\rangle_p = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} m \hat{A}_m^\dagger \hat{A}_m |\Psi\rangle_p = 0. \quad (18)$$

Finally, the Hamilton operator can be expressed as

$$\hat{H} = \frac{\pi}{2T} : \hat{p}(\hat{A}_0 + \hat{A}_0^\dagger)^2 : + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{p}(\alpha_n \hat{A}_n \hat{A}_{-n} + \bar{\alpha}_n \hat{A}_n^\dagger \hat{A}_{-n}^\dagger + 2\beta_n \hat{A}_n^\dagger \hat{A}_n) \quad (19)$$

where

$$\alpha_n(T) = (T/4)n^2 \left[ \left( H_0^{(1)} \right)^2 + \left( H_1^{(1)} \right)^2 \right],$$

$$\beta_n(T) = (T/4)n^2 \left[ H_1^{(1)} H_1^{(2)} + H_0^{(1)} H_0^{(2)} \right],$$

for  $n \neq 0$ . Although this Hamiltonian leaves  $\mathcal{F}_p$  invariant, it has the disadvantage that the vacuum state is not an eigenvector of it with zero eigenvalue. In order to avoid this difficulty, a new set of creation and annihilation operators has been recently proposed:<sup>5</sup>

$$\hat{a}_0 = \frac{i}{\sqrt{2}} (\sqrt{3} \hat{A}_0 + \hat{A}_0^\dagger), \quad (20)$$

and

$$\hat{a}_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\bar{\alpha}_n \hat{A}_n + \bar{\beta}_n \hat{A}_{-n}^\dagger), \quad (21)$$

where  $\bar{\alpha}_n = \alpha_n / (|n| \bar{\beta}_n)$  and  $\bar{\beta}_n = \sqrt{(\beta_n - |n|/\pi) / |n|}$ . It should be noted that our choice differs from that Ref. 5, which does not satisfy the relations  $[\hat{a}_n, \hat{a}_n^\dagger] = \delta_{n,n'}$ . In this new set the Hamilton operator can be written as

$$: \hat{H} : = \frac{1}{T} \hat{p} \hat{P}_0^2 + \frac{2}{\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |n| \hat{p} \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \quad (22)$$

with  $\hat{F}_0 = i\sqrt{\pi}/(1 + \sqrt{3})(\hat{a}_0^\dagger - \hat{a}_0)$ . For this Hamiltonian, the vacuum state is in fact an eigenvector with zero eigenvalue. The question arises whether locally the two different sets of creation and annihilation operators lead to different quantizations. If so, one would need to investigate the problem of unitary implementability (to be treated in the next section) for both sets separately. To answer this question we have analyzed the coefficients that relate the old operators  $\hat{A}_n$  with the new ones  $\hat{a}_n$ . A straightforward calculation shows that they satisfy the relationships

$$\sum_k (\bar{\alpha}_{mk} \bar{\alpha}_{nk} - \bar{\beta}_{mk} \bar{\beta}_{nk}) = \delta_{m,n}, \quad (23)$$

$$\sum_k (\bar{\alpha}_{mk} \bar{\beta}_{nk} - \bar{\beta}_{mk} \bar{\alpha}_{nk}) = 0, \quad (24)$$

where  $\bar{\alpha}_{mk} = \bar{\alpha}_m \delta_{m,k}$  and  $\bar{\beta}_{mk} = \bar{\beta}_m \delta_{-m,k}$ . Moreover, the coefficients  $\bar{\beta}_{mk}$  are square-summable. To see this, let  $C(|m|T) = (\beta_m - |m|/\pi)/|m|$  and let  $N$  be a positive integer such that  $NT \gg 1$ , then

$$\sum_{m,n} |\bar{\beta}_{nm}|^2 = \sum_m |\bar{\beta}_m|^2 = 2 \sum_{m=1}^{N-1} C(mT) + 2 \sum_{m=N}^{\infty} C(mT) \quad (25)$$

and the condition that the coefficients  $\tilde{\beta}_{mk}$  are square-summable is equivalent to

$$\sum_{m=-N}^{\infty} C(mT) < \infty. \quad (26)$$

Now, from the expansions<sup>19</sup> for  $J_n(x)$  and  $N_n(x)$ ; i.e.,

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ P_n(x) \cos \left( x - \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2} \right) - Q_n(x) \sin \left( x - \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2} \right) \right], \\ N_n(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left[ P_n(x) \sin \left( x - \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2} \right) + Q_n(x) \cos \left( x - \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (27)$$

where

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 1 - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)}{2!(8x)^2} + \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)(4n^2-49)}{4!(8x)^4} - \dots, \\ Q_n(x) &= \frac{(4n^2-1)}{1!(8x)} - \frac{(4n^2-1)(4n^2-9)(4n^2-25)}{3!(8x)^3} + \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

it is easy to see that

$$C(kT) = \frac{Tk}{4} \left[ \frac{2}{\pi Tk} (P_1^2(kT) + P_0^2(kT) + Q_1^2(kT) + Q_0^2(kT)) \right] - \frac{1}{\pi}. \quad (29)$$

That is, for  $kT \gg 1$  we obtain

$$C(kT) = \frac{Tk}{4} \left[ \frac{2}{\pi Tk} \left( 2 + O \left( \frac{1}{(kT)^2} \right) \right) \right] - \frac{1}{\pi} \quad (30)$$

where  $O(1/(kT)^2)$  contains all the terms of the form  $\frac{c_i}{(kT)^i}$  with  $c_i$  some (real) constants and  $N \ni n \geq 2$ . Since  $\sum_k \frac{1}{(kT)^n}$  converges (the Riemann zeta function defined by  $\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-p}$  is divergent for  $p \leq 1$  and convergent for  $p > 1$ ), (30) implies (26) and therefore the coefficients  $\tilde{\beta}_{mk}$  are square-summable. Thus, the transformation between the two different sets of creation and annihilation operators is a unitary Bogoliubov transformation.<sup>15,17</sup> Consequently, the second set of operators,  $\hat{a}_n$ , corresponds only to the choice of a second complete set of modes  $\hat{f}_n$ . Thus, we can equivalently choose any of these two sets of creation and annihilation operators given above. We will perform the analysis of the quantum implementability of the classical dynamical evolution in Sec. 3, using the operators  $\hat{A}_n$  and the complex structure given above.

### 3. Functional Evolution

It is known that for a massless, free, real scalar field propagating on a  $(n+1)$ -dimensional static spacetime with topology  $T^n \times \mathbb{R}$ , dynamical evolution along arbitrary spacelike foliations is unitarily implemented on the same Fock space as

that associated with inertial foliations<sup>13</sup> if  $n = 1$  and will not be, in general, unitarily implemented<sup>14</sup> if  $n > 1$ . However, for the (special) case in which we consider time evolution of the Klein-Gordon field between any two flat spacelike Cauchy surfaces, dynamical evolution is unitarily implementable for all positive integers  $n$ . In this section we will see that this result actually does not extend to our case, where the spatial slices have the same topology (tori) but now they are expanding.

### 3.1. The symplectic transformation of classical dynamics

It is generally known that the phase space of a real, linear Klein-Gordon field propagating on a globally hyperbolic background spacetime ( $M \simeq \Sigma \times \mathbb{R}$ ,  $g_{ab}$ ) with  $\Sigma$  a compact spacelike Cauchy surface, can be alternatively described by the space  $\Gamma$  of Cauchy data, that is  $\{(\varphi, \pi) | \varphi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}, \pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}; \varphi, \pi \in C^\infty(\Sigma)\}$ , or by the space  $V$  of smooth solutions<sup>16</sup> to the Klein-Gordon equation which arises from initial data on  $\Gamma$ . Given an embedding  $E$  of  $\Sigma$  as a Cauchy surface  $E(\Sigma)$  in  $M$ , there is a natural isomorphism  $I_E : \Gamma \rightarrow V$ , obtained by taking a point in  $\Gamma$  and evolving from the Cauchy surface  $E(\Sigma)$  to get a solution of  $(g^{ab}\nabla_a\nabla_b - m^2)\psi = 0$ . That is, the specification of a point in  $\Gamma$  is an appropriate initial data for determining a solution to the equation of motion. The inverse map,  $I_E^{-1} : V \rightarrow \Gamma$ , takes a point  $\psi \in V$  and finds the Cauchy data induced on  $\Sigma$  by virtue of the embedding  $E : \varphi = E^*\psi$  and  $\pi = E^*(\sqrt{h}\mathcal{L}_n\psi)$ , where  $\mathcal{L}_n$  is the Lie derivative along the normal to the Cauchy surface  $E(\Sigma)$  and  $h$  is the determinant of the induced metric on  $E(\Sigma)$ .

It is worth pointing out that  $\Gamma$  and  $V$  are equipped with a (natural) symplectic structure  $\Omega_\Gamma$  and  $\Omega_V$ , respectively, that provides the space of classical observables, which are (alternatively) represented by smooth real valued functions on  $\Gamma$  or  $V$ , with an algebraic structure via the Poisson bracket. On the space  $V$  of solutions, the symplectic structure is

$$\Omega_V(\psi_1, \psi_2) = \int_{E(\Sigma)} \sqrt{h}(\psi_2 \mathcal{L}_n \psi_1 - \psi_1 \mathcal{L}_n \psi_2) \quad (31)$$

while on the space  $\Gamma$  of Cauchy data, it is given by

$$\Omega_\Gamma((\varphi_1, \pi_1), (\varphi_2, \pi_2)) = \int_\Sigma (\varphi_2 \pi_1 - \varphi_1 \pi_2) \quad (32)$$

From (31)-(32) and the specification of the isomorphism  $I_E$ , it is obvious that  $\Omega_\Gamma = I_E^* \Omega_V$ ; i.e.  $I_E$  is a symplectic map.

Now, let  $E_I(\Sigma)$  and  $E_F(\Sigma)$  be any given initial and final Cauchy surfaces, represented by the embeddings  $E_I$  and  $E_F$ . The Time evolution from  $E_I(\Sigma)$  to  $E_F(\Sigma)$  can be viewed as a bijection  $t_{(E_I, E_F)} : \Gamma \rightarrow \Gamma$  on the space of Cauchy data:<sup>14</sup>  $t_{(E_I, E_F)} = I_{E_F}^{-1} \circ I_{E_I}$ . Thus, the recipe is: (a) take initial data on  $E_I(\Sigma)$ , (b) evolve it to a solution of the Klein-Gordon equation, and (c) find the corresponding pair induced on  $E_F(\Sigma)$  by this solution. Notice that this map also defines

the time evolution on the space  $V$  of solutions, through the natural induced bijection  $T_{(E_I, E_F)} = I_{E_I} \circ I_{(E_I, E_F)} \circ I_{E_I}^{-1}$ . The three steps of the recipe are now: (a) take a solution to the field equation, (b) find the data induced on  $E_F(\Sigma)$ , and (c) take the data as initial data on  $E_I(\Sigma)$  and find the resulting solution. It is straightforward to see, from the embedding independence of (31) and from (32), that each transformation is a symplectic isomorphism. i.e.  $\mathcal{L}_{(E_I, E_F)}^* \Omega_\Gamma = \Omega_\Gamma$  and  $T_{(E_I, E_F)}^* \Omega_V = \Omega_V$ .

For our particular case, we shall construct dynamical evolution between any two flat Cauchy surfaces  $E_I(T^2) = (T_I, x^i)$  and  $E_F(T^2) = (T_F, x^i)$ , where  $x^i = (\theta, \sigma) \in (0, 2\pi)$  are coordinates on  $T^2$  and  $T$  is the smooth "time coordinate" on  $(M \simeq T^2 \times \mathbb{R}, {}^{(1)}g_{ab})$  such that each surface of constant  $T$  is a Cauchy surface. Let us denote by  $\tilde{\psi}$  the resulting solution from the action of  $T_{(E_I, E_F)}$  on  $\psi$ . Following the prescription, we first have to find the induced data on  $E_F(T^2)$ :

In general  $\varphi_F = E_F^* \psi$  and  $\pi_F = E_F^*(\sqrt{h_F} \mathcal{L}_{n_F} \psi)$ , since in our case  $E_F(T^2) = (T_F, x^i)$  and  $\psi$  depend on the coordinates  $T$  and  $\theta$  only, we thus have that  $\varphi_F = \psi(\theta, T_F)$  and  $\pi_F = [T \partial_T \psi(\theta, T)]|_{T=T_F}$ . Thus, from the explicit form (14) for solutions of the Klein-Gordon equation, we have that

$$\varphi_F = \Im(A_0) + \Re(A_0) \ln T_F + \sum_{m \neq 0} \Re[B_m H_0^{(1)}(|m|T_F)], \quad (33)$$

$$\pi_F = \Re(A_0) - T_F \sum_{m \neq 0} |m| \Re[B_m H_1^{(1)}(|m|T_F)], \quad (34)$$

where  $B_m = A_m e^{im\theta}$ .

The next step in the prescription is to take the pair  $(\varphi_F, \pi_F)$  as initial data on  $E_I(T^2)$  and find the resulting solution  $\tilde{\psi}$ . That is, we have to solve for  $\{\tilde{A}_k, \tilde{\tilde{A}}_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  the following system

$$\psi(\theta, T_F) = \tilde{\psi}(\theta, T_I), \quad (35)$$

$$[T \partial_T \psi(\theta, T)]|_{T=T_F} = [T \partial_T \tilde{\psi}(\theta, T)]|_{T=T_I}, \quad (36)$$

where

$$\tilde{\psi}(\theta, T_I) = E_I^* \tilde{\psi} \quad \text{and} \quad [T \partial_T \tilde{\psi}(\theta, T)]|_{T=T_I} = E_I^*(\sqrt{h_I} \mathcal{L}_{n_I} \tilde{\psi})$$

are explicitly given by

$$\tilde{\psi}(\theta, T_I) = \Im(\tilde{A}_0) + \Re(\tilde{A}_0) \ln T_I + \sum_{m \neq 0} \Re[\tilde{B}_m H_0^{(1)}(|m|T_I)], \quad (37)$$

$$[T \partial_T \tilde{\psi}(\theta, T)]|_{T=T_I} = \Re(\tilde{A}_0) - T_I \sum_{m \neq 0} |m| \Re[\tilde{B}_m H_1^{(1)}(|m|T_I)] \quad (38)$$

with  $\tilde{B}_m = \tilde{A}_m e^{im\theta}$ .

Using the orthogonality property  $\int e^{i(n-m)\theta} = 2\pi\delta_{n,m}$ , the well-known relation

$$H_0^{(1)}(x)\overline{H_1^{(1)}(x)} - H_1^{(1)}(x)\overline{H_0^{(1)}(x)} = \frac{4i}{\pi x} \quad (\text{where } x > 0)$$

and the explicit expression for the fields, given by (33), (34), (37) and (38), it is not difficult to see that the system (35)–(36) is solved by

$$\Re(\tilde{A}_0) = \Re(A_0), \tag{39}$$

$$\Im(\tilde{A}_0) = \Im(A_0) + \Re(A_0) \ln(T_F/T_I), \tag{40}$$

for  $k = 0$ , and

$$\tilde{A}_k = \frac{i\pi}{4} [F(y_k, x_k) - \overline{F(x_k, y_k)}] A_k + \frac{i\pi}{4} [G(y_k, x_k) - \overline{G(x_k, y_k)}] \overline{A_{-k}} \tag{41}$$

for all  $k \neq 0$ , where  $x_k = |k|T_I$ ,  $y_k = |k|T_F$ ,  $F(r, s) = rH_1^{(1)}(r)\overline{H_0^{(1)}(s)}$  and  $G(r, s) = rH_1^{(1)}(r)\overline{H_0^{(1)}(s)}$ .

Therefore, the symplectic transformation  $T_{(E_I, E_F)}$  defines, and is defined by, a transformation of  $\tilde{A}_m$ :

$$\tilde{A}_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \chi_{kl} A_l + \xi_{kl} \overline{A_l} \tag{42}$$

where

$$\chi_{k0} = -\frac{i}{2} \ln(T_F/T_I) \delta_{k,0}, \quad \chi_{kl} = \frac{i\pi}{4} [\overline{G(x_l, y_l)} - \overline{G(y_l, x_l)}] \delta_{l,-k} (\forall l \neq 0), \tag{43}$$

$$\xi_{k0} = \left[ 1 - \frac{i}{2} \ln(T_F/T_I) \right] \delta_{k,0}, \quad \xi_{kl} = \frac{i\pi}{4} [F(x_l, y_l) - \overline{F(y_l, x_l)}] \delta_{l,k} (\forall l \neq 0). \tag{44}$$

Obviously  $\overline{\tilde{A}_k} = \overline{A_k}$  for all  $k \in \mathbb{Z}$  when  $T_I = T_F$  (i.e. when  $T_{(E_I, E_F)}$  is the identity map).

### 3.2. Quantum implementability

The question we want to address in this part is whether or not the classical evolution on the fictitious background is implementable at the quantum level. A particularly convenient approach to this issue is given by the algebraic approach of QFT, since the notion of implementability of symplectic transformations on a Hilbert space formulation is defined in a natural way.<sup>14</sup> The main idea in the algebraic approach is to formulate the quantum theory in such a way that the observables become the relevant objects and the quantum states are “secondary,” they are taken to “act” on operators to produce numbers. The basic ingredients of this formulation are two, namely: (1) a  $C^*$ -algebra  $\mathcal{A}$  of observables, and (2) states  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ , which are positive linear functionals ( $\omega(A^*A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}$ ) such that  $\omega(\mathbf{1}) = 1$ . The value of the state  $\omega$  acting on the observable  $A$  can be interpreted as the expectation value of the operator  $A$  on the state  $\omega$ , i.e.  $\langle A \rangle = \omega(A)$ .

For free (linear) fields it is possible to construct the Weyl algebra of quantum abstract operators from the elementary classical observables (equipped with an algebraic structure given by the Poisson bracket). The elements of this  $C^*$ -algebra are taken to be the fundamental observables for the quantum theory, thus the (natural) algebra  $\mathcal{A}$  for free fields is the Weyl algebra. Let  $(Y, \Omega_Y)$  be a symplectic vector space, each generator  $W(y)$  of the Weyl algebra is the "exponentiated" version of the linear observable  $\Omega_Y(y, \cdot)$ . These generators satisfy the Weyl relations:<sup>\*</sup>

$$W(y)^* = W(-y), \quad W(y_1)W(y_2) = e^{-\frac{i}{2}\Omega_Y(y_1, y_2)}W(y_1 + y_2). \quad (45)$$

Given a symplectic transformation  $f$  on  $Y$ , there is an associated  $*$ -automorphism of  $\mathcal{A}$ ,  $\alpha_f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , defined by  $\alpha_f \cdot W(y) := W(f[y])$ . In particular, the symplectic transformation  $T_{(E_I, E_F)}$  representing time evolution from  $E_I = (T_I, x^i)$  to  $E_F = (T_F, x^i)$  defines the  $*$ -automorphism  $\alpha_{(E_I, E_F)}$ . Thus, from the algebraic point of view, if we assign the state  $\omega$  to the initial time as represented by the embedding  $E_I$ , the expectation value of the observable  $W \in \mathcal{A}$  on  $E_I$  is given by

$$\langle W \rangle_{E_I} = \omega(W). \quad (46)$$

Let us consider the Weyl generator  $W(\psi)$  labeled by  $\psi$ . Under the symplectic transformation  $T_{(E_I, E_F)}$ , the label goes to  $\tilde{\psi}$  and the relation between  $W(\psi)$  and  $W(\tilde{\psi})$  is given by  $\alpha_{(E_I, E_F)}W(\psi) = W(\tilde{\psi})$ . Since  $T_{(E_I, E_F)}$  dictates time evolution at classical level, one can interpret the change  $W(\psi) \rightarrow \alpha_{(E_I, E_F)}W(\psi)$  as a counterpart in the observables. That is,  $W(\psi) \rightarrow \alpha_{(E_I, E_F)}W(\psi)$  is the mathematical representation of time evolution of observables in the Heisenberg picture. Thus, while in the Heisenberg picture the expectation value of the observable  $W(\psi)$  at final time is given by  $\langle W(\psi) \rangle_{E_F} = \omega(\alpha_{(E_I, E_F)} \cdot W(\psi))$ , in the Schrödinger picture it is  $\langle W(\tilde{\psi}) \rangle_{E_F} = \omega_{E_F}(W(\tilde{\psi}))$ . Therefore, the final state  $\omega_{E_F}$  obtained by evolving the initial state  $\omega$  is given by  $\omega \circ \alpha_{(E_I, E_F)}$ .

Now, in order to know if time evolution between any two flat Cauchy surfaces is well defined in the framework of the Hilbert space formulation, we have to introduce the GNS construction that tells us how the quantization in the old sense (that is, a representation of the Weyl relations on a Hilbert space) and the algebraic approach are related:

Let  $\mathcal{A}$  be a  $C^*$ -algebra with unit and let  $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  be a state. Then there exist a Hilbert space  $\mathcal{H}$ , a representation  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow L(\mathcal{H})$  and a vector  $|\Psi_0\rangle \in \mathcal{H}$  such that,  $\omega(A) = \langle \Psi_0, \pi(A)\Psi_0 \rangle_{\mathcal{H}}$ . Furthermore, the vector  $|\Psi_0\rangle$  is cyclic. The triplet  $(\mathcal{H}, \pi, |\Psi_0\rangle)$  with these properties is unique (up to unitary equivalence).

With this in hand, we have a precise way to go down transformations on the  $C^*$ -algebra to a given Hilbert space representation. Thus, a symplectic transformation  $f : Y \rightarrow Y$ , with corresponding algebra automorphism  $\alpha_f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , is unitarily

<sup>\*</sup>The CCR that correspond to operators  $\hat{\Omega}_Y(y, \cdot)$  get now replaced by the quantum Weyl relations.

implementable<sup>14</sup> if there is a unitary transformation  $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  on the Hilbert space  $\mathcal{H}$  such that, for any  $W \in \mathcal{A}$ ,  $U^{-1}\pi(W)U = \pi(\alpha_f \cdot W)$ .

Since  $\omega$  and its transform  $\omega \circ \alpha_f$  will not always define unitarily equivalent Hilbert space representations, thus not all symplectic transformations  $f$  will be implementable in field theory. In our case, we are interested on the implementability of  $f = T_{(E_I, E_F)}$  on the symmetric Fock space  $\mathcal{F}$ , constructed from the so-called "one-particle" Hilbert space,  $\mathcal{H}_0$ , whose elements are the complex functions

$$\Psi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} f_m(\theta, T) \overline{A_m} \quad (47)$$

determined by the natural splitting of  $V_{\mathbb{C}}$ , the complexification of  $V$ , on negative and positive parts through the complex structure  $J_V$ .

The continuous<sup>b</sup> transformation (42) defines a pair of bounded linear maps  $\xi : \mathcal{H}_0 \rightarrow \mathcal{H}_0$  and  $\chi : \mathcal{H}_0 \rightarrow \overline{\mathcal{H}_0}$ , where  $\overline{\mathcal{H}_0}$  is the complex conjugate space to  $\mathcal{H}_0$ . With  $\Psi$  given by (47), we have

$$\xi \cdot \Psi = \sum_{m, l \in \mathbb{Z}} f_m(\theta, T) \xi_{ml} \overline{A_l} \quad (48)$$

and

$$\chi \cdot \Psi = \sum_{m, l \in \mathbb{Z}} f_m(\theta, T) \overline{\chi_{ml} A_l}. \quad (49)$$

The automorphism  $\alpha_{(E_I, E_F)}$  associated with  $T_{(E_I, E_F)}$  is unitarily implementable with respect to the Fock representation ( $\mathcal{F} = \mathcal{F}_s(\mathcal{H}_0, \pi)$ ) if and only if the operator  $\chi$  is Hilbert-Schmidt,<sup>17</sup> i.e., iff

$$\sum_{m, l \in \mathbb{Z}} |\chi_{lm}|^2 < \infty. \quad (50)$$

Since  $\sum_{m, l \in \mathbb{Z}} |\chi_{lm}|^2 = |\frac{1}{2} \ln(T_F/T_I)|^2 + \sum_{l, m \neq 0} |\chi_{lm}|^2$ , then according to (43), the condition (50) is equivalent to

$$\sum_{m \neq 0} (\Re[g_m(x_m, y_m)])^2 < \infty \quad \text{and} \quad \sum_{m \neq 0} (\Im[g_m(x_m, y_m)])^2 < \infty \quad (51)$$

where  $g_m(r, s) := \overline{G(r, s)} - \overline{G(s, r)}$ . Using the definition of Hankel function in terms of Bessel and Neumann functions (for  $n = 0$  or  $1$ ), the first condition in (51) can be written as follows

$$\sum_{m=1}^{\infty} (\Lambda_m[a, y_m])^2 < \infty \quad (52)$$

where

$$\begin{aligned} \Lambda_m[a, y_m] = & m[a(J_0(y_m)J_1(ay_m) - N_0(y_m)N_1(ay_m)) \\ & + N_1(y_m)N_0(ay_m) - J_1(y_m)J_0(ay_m)] \end{aligned}$$

<sup>b</sup>Actually, it can be shown that there is a constant  $b$  such that, for all  $\psi \in V$ ,  $\|T_{(E_I, E_F)}\psi\| \leq b\|\psi\|$  in the norm  $\|\psi\|^2 = \omega_V(J_V\psi, \psi)$ .

and  $a = T_I/T_F$ . In the asymptotic region  $x \gg 1$  (for  $n = 0$  or  $1$ ) the behavior of Bessel and Neumann functions is given by

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right),$$

$$N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right)$$

respectively, then

$$\Lambda_m[a, y_m] \approx \frac{2m}{\sqrt{a\pi y_m}} (a-1) \cos(y_m(1+a) - \pi) \quad \text{for } m \gg 1$$

is the asymptotic behavior of  $\Lambda_m[a, y_m]$  and (52) becomes

$$\frac{4(1-a)^2}{a\pi^2 T_F^2} \sum_{m=N}^{\infty} \cos^2(T_F(1+a)m) < \infty, \quad (53)$$

where  $N \gg 1$ . Notice that for the case  $a = 1$  this condition is trivially satisfied, as expected.

Thus, unitary implementability implies that (53) is satisfied for all  $a \in (0, 1)$  and hence, if there are particular values of  $T_F$  ( $r_0 > 0$ ) and  $a$  ( $a_0 \in (0, 1)$ ) such that  $\sum_{m=N}^{\infty} \cos^2(r_0(1+a_0)m)$  diverges, then  $\alpha_{(E_I, E_F)}$  will not be unitarily implemented. In particular, by choosing  $T_F = \frac{1}{1-a}$  every integer  $m \geq N$  corresponds to a maximum of  $\cos^2(T_F(1+a)x)$  and therefore the sum in (53) diverges. Thus, the transformation associated with  $T_{(E_I, E_F)}$  is not unitarily implementable with respect to the Fock representation  $(\mathcal{F}_s(\mathcal{H}_0), \pi)$  and hence classical time evolution, dictated by  $T_{(E_I, E_F)}$ , does not have a quantum analog in the Hilbert space formulation via a unitary operator. In this case, the Schrödinger picture is not available to describe functional evolution using the Fock space representation of the quantum theory. Consequently the "Schrödinger equation" associated with the Hamilton operator  $\hat{H}(T)$  can not be interpreted as an evolution equation (on the fictitious background) for quantum states.

#### 4. Discussion and Conclusions

In this work we have analyzed the quantization of the polarized Gowdy  $T^3$  cosmological models as carried out by Pierri. We have found explicitly the symplectic transformation that determines the classical dynamical evolution  $T_{(E_I, E_F)}$  given by the phase space function  $T$ . We have shown that this symplectic transformation does not have a quantum analog in the Hilbert space formulation via a unitary operator. This means that the classical dynamics of Gowdy  $T^3$  cosmological models cannot be implemented in the context of Pierri's quantization procedure. Let us now discuss the implications of this negative result for two related areas, namely for canonical quantum gravity and for quantization of fields on curved manifolds.

*Canonical quantum gravity*

First of all let us recall that in canonical quantum gravity, the theory is defined over an "abstract" manifold  $\Sigma$  which in our case is given by  $\Sigma = T^2$ . There is no spacetime and therefore no notion of an embedding of  $\Sigma$  into this spacetime. What we have is, in the gauge fixed scenario, a reduced phase space representing the true degrees of freedom, and, in the quantum theory, a Hilbert space of physical states and physical observables defined on it. This is the frozen formalism description. When the deparametrization procedure was introduced classically, an artificial notion of time evolution was created that allows the "evolution" of any set of (physical) initial conditions on  $\Sigma$  into a one parameter family of initial conditions with a precise spacetime interpretation. This one parameter family is produced via a canonical transformation generated by the reduced Hamiltonian. In quantum gravity, however, the parameter  $T$  can not be thought, *a priori*, as a time function in a spacetime for the only reason that a spacetime notion is absent. Then, in which sense can the parameter  $T$  be useful? Recall from the discussion in Sec. 3 that the notion of time evolution in the algebraic formulation is well defined, giving rise to the Heisenberg picture: We have a unique state  $|\Psi\rangle_{T_0}$ , defined on a preferred and fixed  $\Sigma_0$ , and operators acting on it which could be "time dependent." This is the place where the parameter  $T$  plays a central role. We can have, for instance, a one parameter family of observables, say  $V_T$ , corresponding to "the volume of the Universe at time  $T$ ."<sup>5</sup> In the standard formulation of quantum theory, where a unitary evolution operator  $\hat{U}(T, T_0)$  exists, we can relate the operators belonging to the family via unitary transformations. One can also construct the Schrödinger picture and have a one-parameter family of states that "evolve" in time  $T$ , using the standard construction. Canonical quantum gravity is most naturally constructed in the Heisenberg picture, where the physical operators correspond to the so called "evolving constants of the motion." Therefore, any operator  $\mathcal{O}_T$  labeled by the time  $T$ , if it is well defined (i.e. if it leaves the Hilbert space, or a dense subset of it, invariant), can be regarded as a physically meaningful object representing the classical observable at "time  $T$ ." What is lost in the absence of the operator  $\hat{U}(T, T_0)$ , which is our case, is the "unitary equivalence" of the operators  $\mathcal{O}_T$  for all values of  $T$ . In this sense, unitary time evolution and the Schrödinger picture are lost. Unitary evolution is one of the pillars of present quantum theory, and theories that do not satisfy this property suffer from the rejection of the community, since the theory becomes unable to make predictions due to the lack of conservation of probability. This would be the case, for instance, in the event of the evaporation of a black hole via Hawking radiation. Physicists have always tried to avoid such descriptions and look for explanations that are "unitary." However, as we would like to argue, canonical quantum gravity is conceptually very different from the standard description of quantum theory with a preferred and external Newtonian time, so one should look for more involved arguments before dismissing a particular theory. In the Hamiltonian description, time evolution is a pure gauge, so strictly speaking one should

193

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

only meaningfully discuss physical observables on the reduced phase space. There is no time evolution and no dynamics. Any deparametrization is classically equivalent, giving rise to fictitious dynamics via canonical transformations. There is no compelling reason to expect that there is a preferred deparametrization that will be meaningful quantum-mechanically. Thus, there is no logical contradiction to the result that a particular choice cannot be unitarily implemented.

Within this perspective, the parameter  $T$  that was introduced artificially at the classical level bears no fundamental physical significance. The fact that the quantum theory does not endorse this choice should not be enough reason to dismiss it. However, it should be clear that the absence of unitary transformation reduces significantly the importance of this quantization, since the Heisenberg operators  $\mathcal{O}_T$  are not well defined. That is, their spectra, expectation values, etc., depend on the choice of the value of  $T_0$ . Had we chosen a different value  $T = T'_0$  and therefore different Heisenberg state  $|\Psi\rangle_{T'_0}$ , we would get different operators  $\mathcal{O}_{T'} \neq \mathcal{O}_T$  (for the same value of  $T$ ). A minimum requirement for the consistency of the quantization is that the operators  $\mathcal{O}_{T'}$  and  $\mathcal{O}_T$  be (unitary) equivalent. Thus, the quantization is physically unacceptable, since it does not provide unambiguous answers for physically relevant questions.

However, it is not completely clear whether this negative result holds for any choice of a set of creation and annihilation operators (or, equivalently, any choice of complex structure  $J$ ). The original choice in Ref. 4 seems natural from the viewpoint of the explicit form of the solutions of the Klein-Gordon equation, and the fact that it is time independent and therefore there is no "particle creation." However, further work is needed in order to understand whether there exist different choices of  $J$  and therefore of representations of the CCR for which "time evolution" is a well defined concept. Unitary implementability might even be a criteria leading to a physically relevant quantization.

#### *Quantum fields on curved surfaces*

The issue of formulating time evolution between arbitrary Cauchy surfaces in the quantum theory of fields goes back to the work of Dirac.<sup>15</sup> However, it is only recently that unitary implementability of arbitrary time evolution has been considered. Somewhat surprisingly, it has been recognized that even for free fields on Minkowski spacetime, time evolution between arbitrary Cauchy surfaces is not unitarily implementable in three and higher spacetime dimensions.<sup>14</sup> The failure is in general attributed to the fact that time evolution between arbitrary surfaces is not generated by an isometry of the background metric.<sup>12,14</sup> It is also known that in two dimensions, for the standard quantization coming from the symmetries of the system, time evolution is well defined for arbitrary Cauchy surfaces with topology of a circle. However, for our model, even when it is a truly two dimensional model ( $\psi$  depends only on  $\theta$  and  $T$ ), it does not satisfy a free scalar equation (it is instead related to a Liouville model). Therefore, there is no contradiction with the fact that

time evolution is not unitary. From the three dimensional perspective, the theory is given by a free scalar field on a flat background, but in which the vector field  $\partial/\partial T$  that generates the natural time evolution is not an isometry of the background spacetime. Thus, it is interesting to see that in this case, even for the simplest Cauchy surfaces (flat and parallel in the given chart), time evolution is not implementable. It is also interesting to note that particle creation and non-unitary time evolution do not imply each other, as noted in.<sup>14</sup> As previously mentioned, it is not clear whether different representations of the CCR would yield unitary quantum theories. Namely, is there a choice of  $J$  that will render the theory unitary? Would it be unique? We shall leave these questions for future investigations.

#### Note Added

After submitting this paper, we learned that similar results were independently found by Torre.<sup>20</sup>

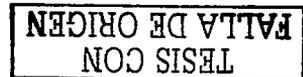
#### Acknowledgments

We would like to thank the referee for helpful comments and C. Torre for correspondence. This work has been supported by DGAPA-UNAM grant No. IN-112401 and CONACYT grants 36581-E and J32754-E. This work was also partially supported by NSF grant No. PHY-0010061. J. Cortez was supported by a CONACYT-UNAM (DGEP) Graduate Fellowship.

#### References

1. C. W. Misner, in *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*, ed. J. Klauder (Freeman, San Francisco, 1972).
2. C. G. Torre, *Int. J. Theor. Phys.* **38**, 1081 (1999).
3. A. Ashtekar and M. Pierri, *J. Math. Phys.* **37**, 6250 (1996).
4. M. Pierri, *Int. J. Mod. Phys. D11*, 135 (2002).
5. M. Pierri, "Hamiltonian and volume operators," arXiv:gr-qc/0201013.
6. R. H. Gowdy, *Phys. Rev. Lett.* **27**, 826 (1971); *Ann. Phys.* **83**, 203 (1974).
7. B. K. Berger, *Ann. Phys.* **83**, 458 (1974); *Phys. Rev. D11*, 2770 (1975).
8. C. W. Misner, *Phys. Rev. D8*, 3271 (1973).
9. V. Husain, *Class. Quantum Grav.* **5**, 1587 (1987).
10. G. A. Mena Marugan, *Phys. Rev. D56*, 908 (1997).
11. K. Kuchaf, *Phys. Rev. D39*, 2263 (1989); K. Kuchaf, *Phys. Rev. D39*, 1579 (1989).
12. A. D. Helfer, *Class. Quantum Grav.* **13**, L129 (1996) [arXiv:gr-qc/9602060].
13. C. G. Torre and M. Varadarajan, *Phys. Rev. D58*, 064007 (1998).
14. C. G. Torre and M. Varadarajan, *Class. Quantum Grav.* **16**, 2651 (1999).
15. N. D. Birrel and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, Cambridge, 1982).
16. A. Ashtekar, L. Bombelli and O. Reula, in *Mechanics, Analysis and Geometry: 200 Years After Lagrange* (North-Holland, New York, 1991); R. M. Wald, *Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics* (University of Chicago Press, Chicago, 1994).

95



1468 A. Corichi, J. Cortes and H. Quevedo

17. R. Honninger and A. Rieckers, *J. Math. Phys.* **37**, 4291 (1996).
18. P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964).
19. G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists* (Academic Press, 1995).
20. C. G. Torre, private communication, and C. G. Tom, "Quantum dynamics of the polarized Gowdy  $T^3$  model," gr-qc/0206083.