



00378
5
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERIA DE MATERIALES
INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

"INTERACCION Y MOVIMIENTO DE PARES DE BURBUJAS
EN FLUJO POTENCIAL"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIA E
INGENIERIA DE MATERIALES
P R E S E N T A :
MIGUEL FERNANDO MOCTEZUMA SANCHEZ

DIRECTOR DE TESIS:
DR. ROBERTO ZENIT CAMACHO

MEXICO, D. F.

JULIO 2003

A



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

-
- A mis padres: Miguel y Trinidad, por su apoyo y cariño en cada momento de mi vida. Y por su paciencia para que terminara este trabajo.
 - A mis hermanos, Alberto y Andrés por su amistad y a mis hermanas Claudia, Marina, Marta y Victoria. Por soportar a su hermano y proporcionarme apoyo en todo momento.
 - A Ewa, mi compañera y esposa, por tener la paciencia en las platicas sobre las burbujas. Por su amor, su paciencia y los capuchinos que me preparaba en Polonia.
 - A todos los compañeros del Lab. de Reología. Para los cuates: Joel, Carlos, Gilberto, Victor, Carlos, Angel, y el afamado topo Lima. Y a los amigos Fisicos Gabriel, Rubén y Saul, por sus platicas sobre relatividad y demas temas Light.
 - A los docs: Roberto Zenit por su paciencia, Juan Hernández, Jose Ramón, y el doc Pulos y Geffroy.
 - A mis maestros del Instituto y de la honorable Facultad de Ingenieria.
 - A mis amigos de la facultad, Ildefonso, Carlos el Malone, Jaime el jefe Paredes y Ricardo Perez "Tabasco".
 - A mis amigos de Frances, Paula, Mike y demas conocidos de la Universidad.
 - A mis amigos en el extranjero, Toño, Angel, Daniel, y Dani.

A todos ellos y muchos mas quiero dedicar esta tesis. Espero que su lectura si la realizan no sea demasiado pesada, y como dice Ewa: Dejémoslo para las nuevas generaciones.

PAGINACIÓN DISCONTINUA

"I am prepared for the worst, but hope for the best"

Disraeli

Resumen

En este estudio analizamos la interacción de una burbuja con una pared o con otra burbuja a alto número de Reynolds y bajo número de Weber. En este límite dual, los efectos inerciales dominan y las burbujas son de forma esférica. Bajo estas condiciones, el movimiento de una burbuja en un líquido limpio puede modelarse de manera correcta mediante la teoría de flujo potencial. Existen experimentos que confirman que esta aproximación es válida (Duineveld, 1995).

El potencial de velocidades y la función de corriente de dos burbujas en movimiento con velocidades colineales y paralelas se analiza mediante una doble expansión en armónicos esféricos (Biesheuvel y van Vijngaarden, 1982, Kok, 1992, Kumaran 1992). El potencial se obtiene ajustando la serie a las condiciones de frontera y obteniendo los coeficientes de la expansión en armónicos para un número determinado de términos. El análisis del movimiento de dos burbujas se puede obtener de dos maneras. En la primera obtenemos la energía cinética de las burbujas en movimiento. Usando las ecuaciones de Lagrange se pueden obtener las fuerzas resultantes sobre la burbuja. El segundo método consiste en calcular la presión alrededor de la burbuja e integrarla para obtener la fuerza resultante.

En esta tesis se analizan dos casos de movimiento en particular: el movimiento de dos burbujas en direcciones colineales y el movimiento de dos burbujas en direcciones paralelas (equivalente al caso de una burbuja acercándose a una pared).

En el primer caso pretendemos resolver la controversia existente en el análisis del movimiento de dos cuerpos que se acercan inmersos en un flujo potencial. Existen en la literatura resultados contradictorios: en unos casos se reporta que la fuerza hidrodinámica crece desmedidamente a medida que la distancia entre las superficies

tiende a cero; en otros, se reporta que sí puede ocurrir un contacto entre superficies y éste ocurre a una velocidad finita.

En el segundo caso se calcula la trayectoria de una burbuja que se mueve paralela a una pared. El objetivo de este análisis es determinar el aumento de la 'agitación' o varianza de la velocidad como resultado de la interacción con la pared. La influencia de paredes en el modelado de flujos bifásicos es comúnmente ignorado. Los resultados obtenidos en este estudio podrían utilizarse como una primera aproximación en flujos gas-líquidos de alto número de Reynolds y bajo número de Weber.

Interacción y movimiento de pares de burbujas en flujo potencial

Contenido

I)	Resumen	i)
II)	Índice	ii)
III)	Agradecimientos	iii)
1.	Introducción a la dinámica de flujos bifásicos	1
1.1	Flujos multifásicos	3
1.2	Patrones de flujo en flujos gas-líquido	4
1.3	Flujo bifásico burbujeante	8
1.3.1	Formación de burbujas	8
1.3.2	Aspectos físicos del flujo burbujeante	10
1.3.3	Efectos interfaciales	12
1.4	El movimiento de burbujas y gotas	14
1.5	Parámetros adimensionales	17
1.6	Bibliografía (Cap. 1)	19
2.	Ecuaciones de conservación y teoría de flujo potencial	21
2.1	Ecuaciones de movimiento para un fluido o gas ideal	21
2.2	Flujo potencial en tres dimensiones	23
2.2.1	Doblete	25
2.2.2	Flujo alrededor de una esfera	26
2.3	Solución de la ecuación de Laplace por armónicos esféricos (polinomios de Legendre)	27
2.4	Potencial de dos esferas por medio del método de dipolos o imágenes	30

Indice. Interacción de pares de burbujas en flujo potencial	IIM
2.5 Bibliografía (Cap. 2)	36
2.6 Apéndice 2-A (Uso y origen de los polinomios de Legendre)	37
3. Movimiento de dos burbujas en flujo potencial	41
3.1 Movimiento de burbujas en régimen de alto número de Reynolds y bajo número de Weber	43
3.2 Potencial entre dos esferas en movimiento en flujo potencial	46
3.3 Ecuaciones de movimiento de dos esferas en flujo potencial	54
3.3.1 Método de la energía cinética	56
3.3.2 Solución general (caso 3 dimensiones)	58
3.3.3 Energía cinética del fluido	60
3.3.4 Ecuaciones de movimiento por el método de la energía	61
3.4 Fuerzas de arrastre sobre la burbuja	63
3.5 Método de la presión para obtener las ecuaciones de movimiento	66
3.5.1 Ecuaciones de movimiento por el método de la presión.	67
3.5.2 Contribución del termino de velocidad en la resultante del termino de presión.	69
3.5.3 Comportamiento de la velocidad tangencial	72
3.6 Bibliografía (Cap. 3)	75
4 Movimiento de dos burbujas en direcciones co-lineales	77
4.1 Movimiento de dos burbuja en direcciones co-lineales	80
4.2 Efecto de la fuerza de arrastre en el movimiento de dos burbujas en direcciones co-lineales	85
4.3 Movimiento de la burbuja con el modelo obtenido a partir del balance de presión	92
4.4 Bibliografía (Cap. 4)	99
4.5 Apéndice 4-A (Análisis de Convergencia de la Serie que representa la presión sobre la burbuja)	100

5	Una burbuja que se mueve paralela y cerca a una pared	103
5.1	Trayectoria de una burbuja junto a una pared a alto número de Reynolds	105
5.2	Validación del modelo	111
5.3	Resultados para diferentes radios de burbuja	114
5.4	Resultados para diferentes distancias a la pared	119
5.5	Amplitud de rebote de la burbuja	123
5.6	Frecuencia de rebote de la burbuja	124
5.7	Velocidad cuadrática media horizontal y vertical	125
5.8	Correlación de la amplitud de rebote con el número de Reynolds	126
5.9	Simulaciones que incluyen la fuerza de arrastre	128
5.9.1	Comparación de la fuerza de arrastre usando el modelo simplificado o usando el modelo completo	129
5.9.2	Dependencia de la solución y de la fuerza de arrastre del número de términos en la solución	133
5.10	Trayectorias que incluyen la fuerza de arrastre para burbujas con diferentes radios y diferentes velocidades iniciales	135
5.11	Bibliografía (Cap. 5)	139
6	Conclusiones	140
6.1	Introducción	140
6.2	Movimiento de dos burbujas en flujo potencial	140
6.3	Choque colineal de dos burbujas	141
6.4	Interacción de una burbuja con una pared	142
6.5	Trabajo a futuro y nuevas Investigaciones	144

Apéndices Generales

Rutina en en Matlab que resuelve las ecuaciones de movimiento para dos burbujas en dirección co-lineal y paralela	146
Bibliografía	156

Agradecimientos:

Se agradece la elaboración de esta tesis, así como el apoyo brindado para desarrollarla y concluirla a las siguientes personas y organismos:

- Al proyecto Papiit IN-103900 de la Dirección General de proyectos Académicos, por la beca recibida durante el primer año de mi maestría en Ciencia e Ingeniería de Materiales.
- Al CONACYT por la beca otorgada para el ciclo 2001-2002 del segundo año que curse en el Instituto de Investigaciones en Materiales.
- Al Instituto de Investigaciones en Materiales de la UNAM, por permitirme realizar estos estudios y proporcionarme el apoyo académico.
- Al laboratorio de Reología del IIM, dentro del cual realice la investigación sobre flujos bifásicos y por proporcionarme el equipo necesario para realizar las simulaciones.
- A todos mis compañeros del Instituto de Investigaciones en materiales que en algún momento dieron alguna contribución para terminar esta tesis.
- A la Universidad Nacional Autónoma de México por permitirme continuar mis estudios y por seguir siendo mi Alma Mater.
- A Jerzy y Mikolaj Szczepaniak, por la ayuda brindada para tener equipo de computo en Polonia. Sin su ayuda esta tesis no hubiera sido posible.
- A mis padres y hermanos, que todavía confían en mí después de pasar estos tres años estudiando.
- A mi esposa Ewa por su apoyo y paciencia con mis burbujas.

"Una jornada de mil kilómetros, empieza con los primeros pasos."

Confucio

1. Introducción

El objetivo de esta tesis es estudiar el movimiento e interacción de dos burbujas entre sí y con una pared a régimen de alto número de Reynolds y bajo número de Weber. Para un flujo de burbujas con alto número de Reynolds, se puede utilizar la teoría de flujo potencial para modelar el flujo alrededor de una burbuja. En esta tesis se obtienen soluciones de la ecuación de Laplace y se estudia la interacción de dos burbujas y de una burbuja junto a una pared.

El movimiento de dos burbujas en movimiento en flujo potencial ha sido estudiado por diferentes autores (Stokes, 1847; Lamb, 1957; Miloh et al., 1978; Biesheuvel y Van Vlijnngaarden, 1982). Lamb propuso una solución por medio del método de las imágenes y llegó a una solución como una suma infinita de dipolos. En este trabajo se usa la teoría de armónicos esféricos para dar solución a la ecuación de Laplace. Mediante el potencial de velocidades se calcula la energía cinética del fluido y a partir de ésta se derivan las ecuaciones de movimiento usando las ecuaciones de Lagrange.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

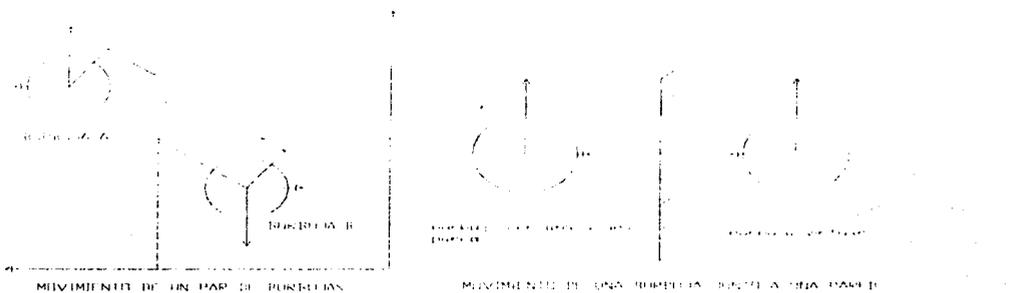


Fig. 1.1 Movimiento de dos burbujas en un fluido semiinfinito.

Aunque existen muchos factores y propiedades que intervienen en la interacción entre el fluido y las burbujas, pretendemos estudiar la interacción de dos burbujas de forma simplificada mediante la teoría de flujo potencial. En primer lugar se consideran los casos en que la deformación de las burbujas es muy pequeña (bajo número de Weber) por lo que se pueden considerar casi esféricas. En segundo lugar se considera un régimen de alto número de Reynolds. En este régimen en el campo de velocidades alrededor de las burbujas es potencial y sólo muy cerca de la superficie de ellas se observa una pequeña capa límite. El arrastre debido a los esfuerzos viscosos dentro de esta capa límite se puede calcular usando la razón de disipación en el fluido.

La primera razón por la que usamos teoría de flujo potencial es porque se pueden obtener soluciones analíticas relativamente sencillas. Además, como las soluciones están basadas en la ecuación de Laplace, éstas se pueden sumar y agregar para obtener soluciones complejas. También, usamos la aproximación de flujo potencial porque nuestro problema físico se ajusta muy bien a las condiciones de esta teoría (Levich, 1962). Asumiremos que las burbujas permanecen esféricas y que tienen igual radio.

En este caso es conocido en la literatura que el campo de flujo inducido por una burbuja de gas que se mueve a números de Reynolds moderados es casi completamente irrotacional. Solo hay una pequeña capa límite en la superficie de la burbuja de espesor de orden $O(Re^{-0.5})$. La capa de estancamiento es de dimensión lineal $O(Re^{-0.15})$ y el diámetro de la estela es de $O(Re^{-0.25})$ (Moore, 1963). Por lo tanto, en una primera aproximación el fluido se puede asumir como inviscido y se puede usar la teoría de flujo potencial.

La organización del desarrollo de esta tesis es como sigue:

En el Capítulo 1 se hace una introducción a los flujos multifásicos y a los flujos burbujeantes. En la Sección 2 se repasan las ecuaciones de conservación en flujo potencial y se analiza brevemente el problema de dos esferas en movimiento en un fluido. En la Sección 3 se formula el potencial de velocidad para dos esferas. Usando este potencial se calcula la energía cinética inducida en el fluido por las dos esferas. En la Sección (3.3) con el formalismo de las ecuaciones

de Lagrange se derivan ecuaciones inerciales de movimiento del par de esferas. A este método lo llamamos método de la energía. También se usa un método alterno para calcular la aceleración de la burbuja a partir del cálculo de la presión sobre la burbuja mediante la ecuación de Bernoulli. A este método lo denominamos de presión y se usa en el Capítulo 3.5. En la Sección (3.4) se incluye la fuerza de arrastre en las ecuaciones de Lagrange. Estas fuerzas de arrastre se derivan a partir de la razón de disipación. Combinando estos resultados se obtienen las ecuaciones de movimiento para burbujas moviéndose con número de Reynolds moderado.

En la Sección 4 y 5 se resuelven numéricamente estas ecuaciones para dos casos: el movimiento de dos burbujas que se mueven sobre la línea de centros de las burbujas, que denominaremos colineal y el movimiento de dos burbujas con velocidades perpendiculares a la línea de centros, que llamaremos paralela. Finalmente, se obtienen trayectorias y se caracteriza el movimiento en ambos casos.

1.1 Flujos multifásicos

Los flujos multifásicos se encuentran en una gran variedad de fenómenos en la naturaleza y en la industria que varían desde flujo de gas y partículas en una tobera de un cohete hasta el movimiento de agua en un acuífero subterráneo. Los flujos multifásicos se identifican de acuerdo a los componentes y a las fases. Un componente es una sustancia química que no varía en su composición. Una fase se refiere al estado físico del material dentro del flujo, por ejemplo fase líquida, fase gaseosa. Existen varios ejemplos de los flujos multicomponentes. Un ejemplo de fluido de una sola fase pero de varios componentes es el aire. El aire es una mezcla de especies químicas (componentes) con nitrógeno siendo el componente de mayor porcentaje, oxígeno y otros gases. Típicamente uno trata el aire como un fluido de un solo componente (nitrógeno) con propiedades adecuadas de viscosidad, constante de gas, y conductividad térmica.

Otro ejemplo de flujo multicomponente de una sola fase es el de dos líquidos inmiscibles como agua y aceite, que es importante en la recuperación de

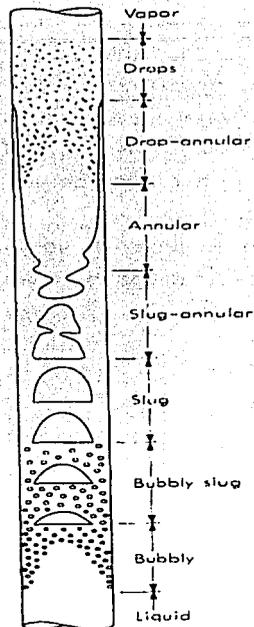
petróleo. Los flujos multifásicos se clasifican en tres grandes grupos, de acuerdo a las fases en la mezcla, es decir: gas-líquido, gas-sólido, y líquido-sólido. Éstas son mezclas bifásicas. Un ejemplo común de flujo de un solo componente en dos fases es la corriente de enfriamiento de las plantas nucleares y otros sistemas termoeléctricos. En general, los equipos de enfriamiento o de intercambio de calor contienen tuberías o recipientes donde se generan cambios de fase de agua a vapor o viceversa. La combustión de gotas de combustible en un horno, por otro lado, sería un ejemplo de un flujo de dos fases (gas y líquido) y de varios componentes.

El transporte neumático de polvo es un buen ejemplo de flujo sólido-gas. El flujo de vapor en medio poroso también es un ejemplo de flujo de dos fases sólido-gas. El flujo de líquido con partículas suspendidas es un ejemplo de flujo líquido-sólido. En esta introducción sólo trataremos el flujo de materiales gas-líquido o flujo de burbujas, pues ese es el tema principal de esta tesis. Se hará una breve reseña de los patrones de flujo y de los modelos básicos de flujos. Existen algunos ejemplos comunes de flujo bifásico en la naturaleza; algunos son: la neblina, el smog, la lluvia, las nubes, las tormentas de arena y las tormentas de viento.

1.2 Patrones en flujos bifásicos gas-líquido

Los mapas de patrones de flujo para flujos de gas-líquido han sido divididos en cuatro regiones básicas de flujo. La aparición de cada tipo o patrón de flujo depende de los flujos máxicos de gas y líquido en la tubería, de la orientación de la tubería y de las propiedades del líquido y gas dentro de la tubería.

- a) El flujo de gas dominante (estratificado y anular)
- b) Flujo intermitente (burbujas alargadas, burbujas dispersas, tapón, espuma)
- c) Flujo de líquido dominante (burbujas dispersas)
- d) Transiciones (estratificado-intermitente, estratificado-anular)



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Figura 1.2 Aproximación de patrones de flujo en una tubería vertical con vapor de agua en evaporación (tomado de, Wallis, 1969)

El flujo de gases en ductos está caracterizado por regímenes de flujo que varían desde flujo de burbujas hasta flujo de gotas en un ducto. Los patrones de flujo principales para una tubería vertical son los siguientes y se ilustran en las Figuras (1.2) y (1.3):

- a) Flujo burbujeante: flujo de líquido en fase continua con burbujas dispersas en el líquido.
- b) Flujo *slug* o tapón: Las burbujas "coalescen" y crecen en tamaños comparables al tamaño de la tubería. Con este patrón de flujo, las

burbujas pueden subir en el centro del ducto, mientras el líquido se desliza hacia abajo en la pared del tubo.

- c) Flujo *churn* o agitado: las burbujas toman formas irregulares con una mezcla más violenta, macroscópica, entre las fases. El líquido se tiende a mover hacia arriba y hacia abajo en una forma oscilatoria.
- d) Anular (el gas es la fase continua): el flujo de líquido está confinado a una capa moviéndose a lo largo de la pared y con gotas fluyendo como niebla en el centro del tubo.
- e) Anular agitado: flujo de líquido en las paredes del tubo y flujo de gotas grandes e irregulares en el centro de la tubería.

tipo de flujo
 CON
 FALLA DE ORIGEN

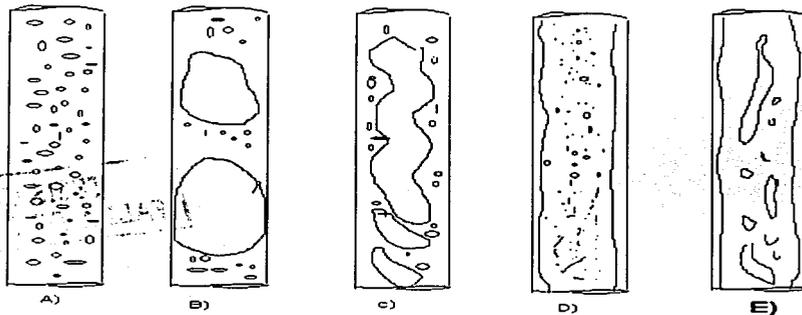


Figura 1.2 Esquema de patrones de flujo en tuberías verticales.

En el análisis de flujos gas líquido en un tubo es extremadamente importante ser capaz de predecir el patrón de flujo. Este es un objetivo muy difícil debido a la complejidad de estos flujos y debido al cambio de los fenómenos de control de cada flujo. La búsqueda de un esquema para tener un mapa de regímenes de flujo continuo es un tema de investigación actual.

Un esquema muy aceptado es el de Hewitt (1982) en el que el flujo es caracterizado por los flujos superficiales de cantidad de movimiento de cada fase $\rho_l U_l^2$, y $\rho_g U_g^2$ (ver figura 1.4). Las velocidades superficiales U_l y U_g , son las

velocidades de las fases líquida y gaseosa, si cada fase fuera a fluir por el tubo por sí sola. Uno observa que el flujo anular de niebla se obtiene con grandes flujos de gas y bajos flujos de líquido. Mientras que los flujos de burbujas se logran con altos flujos de líquido y bajos flujos de gas.

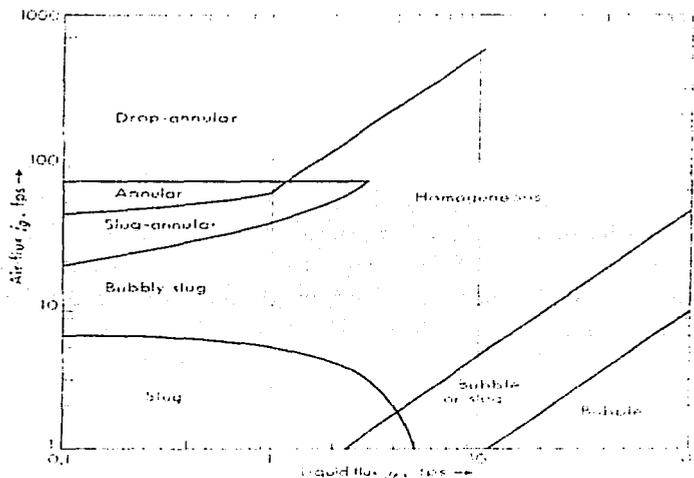


Figura 1.4 Esquemas o patrones de movimiento para flujo vertical de aire y agua a 15 psia en un tubo de 1 plg de diámetro, (tomado de, Wallis, 1969).

Uno de los fenómenos de interés en los flujos burbujeantes es la propagación de ondas de sonido. La presencia de burbujas de gas en el líquido tiene un efecto marcado en la aparición de ondas de sonido. Por ejemplo para una concentración de gas de 10% la velocidad del sonido decrece a 40 m/s. Esto se puede explicar con el acoplamiento de la alta inercia del líquido con la compresibilidad del gas.

En la mayoría de los casos mencionados arriba se puede asumir que las burbujas se mueven con el líquido.

En ingeniería de petróleos, en la industria petroquímica y en sistemas de enfriamiento de las plantas de energía se encuentran generalmente flujos de gas-líquido. En estos casos las fases tienen comúnmente diferente velocidad. Además de las ondas de presión existen otros fenómenos de interés. Un fenómeno que ocurre es que existen varios regímenes de flujo posible. En la transición de flujo de burbujas a flujo tapón, las burbujas coalescen y se forman burbujas grandes y alargadas con diámetro cercano al del tubo.

Por lo tanto, es importante investigar los mecanismos que juegan parte en la transición entre estos flujos. Ha sido sugerido por investigadores de Grenoble, Francia (Matuszkiewicz, Falmand, Bouré, 1987) y de Twente, Holanda (Biesheuvel, 1984), que la inestabilidad de las ondas de concentración están envueltas en esta transición. Estas son ondas a través de las cuales se propagan las variaciones en la concentración de burbujas. Las características principales son determinadas por la interacción de pares de burbujas. Por esta razón es importante el modelado del movimiento de pares de burbujas.

1.3 Flujo burbujeante

El patrón de flujo burbujeante está caracterizado por una suspensión de burbujas en una fase continua. Hay varios regímenes. La concentración de gas (*void fraction*) varía desde una burbuja aislada hasta el flujo cuasi-continuo de espumas con un 1% de líquido. La interacción entre las fases se debe a las fuerzas de tensión superficial, viscosidad, inercia y fuerzas de flotación. Los efectos se observan en la gran variedad y forma de las burbujas y sus trayectorias.

1.3.1 Formación de burbujas

El tamaño de las burbujas tiene una influencia en la dinámica del flujo. A pesar de la gran cantidad de estudios (Clift, Grace y Weber, 1978), sólo algunas ecuaciones para predecir el tamaño de la burbuja han sido aceptadas. Una de las formas más sencillas de generar una burbuja es mediante un orificio hacia arriba en un líquido estacionario. Si el radio de la burbuja es R_b , a punto de desprenderse de un orificio de radio R_o , por equilibrio mecánico:

$$R_b = \left[\frac{3\sigma R_0}{2g(\rho_f - \rho_l)} \right]^{1/3}, \quad (1.1)$$

donde R_b es el radio de la burbuja que se forma, σ es la tensión superficial del líquido, R_0 es el radio del orificio, g es la aceleración de la gravedad y ρ_f , ρ_l son las densidades del gas y del líquido respectivamente.

La ecuación anterior deja de ser válida cuando el diámetro del orificio es comparable con el radio de la burbuja. Cuando se forma una burbuja a un ritmo continuo, se deben tomar en cuenta muchos otros factores incluyendo las propiedades del gas y del líquido. En general, el fenómeno de formación de burbujas es bastante complicado. Cuando el flujo de gas se incrementa a través del orificio, el tamaño de la burbuja se incrementa ya que a la burbuja le toma un tiempo finito en separarse o liberarse del orificio. Para un sistema en que el flujo de gas se mantiene constante, el tamaño de la burbuja se puede predecir con el tiempo que tarda la burbuja en desprenderse (Clift et al., 1978).

Davidson y Amick (1963) calcularon este tiempo de la ecuación de movimiento y dedujeron el siguiente resultado para el volumen de la burbuja:

$$V_b = 1.138 \frac{Q_g^{6/5}}{g^{3/5}}, \quad (1.2)$$

donde V_b es el volumen de la burbuja, Q_g es el gasto de gas que pasa por el conducto y g es la aceleración de la gravedad.

Cuando las burbujas se forman con un gasto pequeño de gas, la formación de las burbujas se aproxima mejor con la Ecuación (1.1) que es el caso de un flujo cuasiestático de gas del conducto hacia la burbuja. Davidson y Schuller (1960) hicieron cálculos parecidos para varios líquidos viscosos y encontraron:

$$V_b = \left(\frac{4\pi}{3} \right) \left[\frac{15\mu_f Q_g^{6/5}}{2g(\rho_f - \rho_g)} \right], \quad (1.3)$$

donde V_b es el volumen de la burbuja, μ_f es la viscosidad del fluido, Q_g es el gasto de gas, ρ_f y ρ_g son las densidades del fluido y del gas y g es la aceleración de la gravedad.

En aplicaciones comerciales las burbujas no se forman por un simple orificio, sino por un grupo de varios orificios o un plato poroso. En este caso, la teoría es sólo usada como una primera aproximación.

1.3.2 Aspectos físicos del flujo burbujeante

Cuando se trabaja con flujos de burbujas se puede analizar la interacción entre las burbujas y el líquido, o se puede analizar el comportamiento global del pseudofluido, ya que se conocen las propiedades de interacción entre las burbujas y el líquido. Antes de escribir las ecuaciones o modelos para predecir el comportamiento de flujos bifásicos, escribiremos algunas de las propiedades o variables más importantes para el flujo de burbujas:

- a) Fracción volumétrica de gas.
- b) Velocidad superficial de gas y líquido.
- c) La caída de presión.
- d) La distribución de presiones de las fases gas y líquido.
- e) Área interfacial.

Fracción volumétrica de gas y fracción másica de líquido

La fracción de gas y la concentración de área interfacial son dos de los parámetros topológicos más importantes. El conocimiento de la concentración de área interfacial es indispensable en el análisis bidimensional o tridimensional cuando se trabaja con modelos de dos fluidos.

La fracción volumétrica de gas se ve afectada por la densidad del gas así como por la presión. Por ejemplo, en columnas burbujeantes se ha determinado que cuando se aumenta la densidad del gas, la fracción de gas aumenta mientras que el tamaño de la burbuja decrece. Esto es, si aumenta la densidad del gas sin

umentar la temperatura, las burbujas ocuparán un volumen menor y por lo tanto formarán burbujas más pequeñas. Lo mismo pasa si se aumenta la presión.

La fracción de líquido y el gradiente de presión son los parámetros más importantes en el diseño, escalamiento y control de las tuberías que transportan gas y líquido simultáneamente.

Área interfacial

El área interfacial es el área de la fase líquida que entra en contacto con la fase gaseosa. El área interfacial es proporcional al tamaño medio de la burbuja a una determinada fracción de gas. La constante de transferencia de masa entre la fase líquida y gaseosa es directamente proporcional al área interfacial. Así como el área interfacial depende del radio de la burbuja y de la distancia media entre ellas, con burbujas más pequeñas y más cercanas hay mayor área interfacial. Cuando ocurre coalescencia, el área interfacial decrece porque dos burbujas tienen área interfacial mayor que una sola.

Los efectos interfaciales incluyen: arrastre, masa virtual, esfuerzos de Reynolds (inducidos por las burbujas), presión promedio interfacial y tensión interfacial.

Velocidad superficial de gas y líquido

El campo de velocidades se puede considerar formado de tres componentes. Primero, el campo de velocidad de la fase continua lejos de la superficie de las burbujas. Segundo, el campo de velocidad del líquido cerca de las burbujas y en la interfase líquido-gas de la burbuja (por ejemplo la capa límite cerca de las burbujas o la vorticidad generada alrededor de ellas). Tercero, la velocidad del gas dentro de las burbujas.

En nuestro modelo de flujo de dos burbujas sólo consideramos el flujo ideal alrededor de las burbujas, el flujo de la fase continua. Pero no consideramos los flujos en la capa límite, ni del gas dentro de la burbuja. El modelo de una esfera en flujo potencial es suficiente para modelar en este caso el problema físico.

Las relaciones empíricas entre velocidad relativa, fracción de gas y la velocidad de ascenso, pueden ser remplazadas por una expresión teórica para flujos no uniformes. La diferencia entre la presión cerca y lejos de la burbuja se puede dar en función del promedio de la presión del líquido, la presión de la pared de la burbuja y la presión lejos de las burbujas.

1.3.3 Efectos Interfaciales

Fuerza de arrastre y fuerza de masa virtual

La fuerza de arrastre es una fuerza interfacial debida a los esfuerzos viscosos. Para una sola partícula o burbuja, dicha fuerza depende de su forma, tamaño y las condiciones de flujo. La fuerza de masa virtual surge debido a la fuerza requerida para acelerar la masa de un cuerpo inmerso en una corriente de fluido, cuando la velocidad relativa cambia. El efecto de masa virtual es mucho mayor en una burbuja en un líquido que en una gota en un gas, debido a la mayor densidad del líquido alrededor de la burbuja.

Fuerza de tensión superficial

El comportamiento de superficies e interfases es complejo porque incluye numerosos efectos físicos y químicos. Por ejemplo, la aparición de impurezas puede afectar dramáticamente la aparición de la condensación o evaporación, la estabilidad de espumas, las ondas en los lagos y la tendencia de los espejos y vidrios a empañarse.

Con el propósito de analizar flujos de dos fases, la importancia mas grande de los efectos interfaciales es la manera en que afectan las condiciones de frontera de las ecuaciones que modelan el fenómeno. En flujos bifásicos es posible encontrar discontinuidades en ciertos componentes de la velocidad y del esfuerzo en las interfases.

Condiciones de frontera para la velocidad

Si no hay cambio de fase o transferencia de masa, la compatibilidad de velocidades es la misma que en flujos de un componente. Con cambios de fase hay una posibilidad de existencia de una velocidad finita en la interfase.

Las siguientes condiciones se deben satisfacer:

1. Velocidades tangenciales continuas:

$$v_{1t} = v_{2t}, \quad (1.4)$$

2. Continuidad a través de la interfase:

$$\rho_1 v_{1N} = \rho_2 v_{2N} = m, \quad (1.5)$$

donde m representa un flujo de masa a través de la interfase en dirección normal.

Condiciones de frontera para el esfuerzo

La continuidad del esfuerzo en una interfase se ve modificada por el efecto de la tensión superficial. Si la interfase está curvada, la presión en el lado interno difiere de la presión del lado externo por una cantidad:

$$p_2 - p_1 = \sigma \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} \right), \quad (1.6)$$

donde R_a y R_b son los radios de curvatura de la interfase en un par de direcciones perpendiculares.

Si la tensión superficial es uniforme, el esfuerzo de corte es continuo a través de la interfase. De cualquier forma, puede haber gradientes de tensión superficial debido a las impurezas, polvo, agentes surfactivos, o por la temperatura a lo largo de la interfase.

En este caso el esfuerzo de corte salta en una cantidad igual al gradiente de tensión superficial:

$$\tau_1 + \nabla \sigma = \tau_2. \quad (1.7)$$

La tensión superficial es de importancia grande tanto en hidrodinámica como en transferencia de calor. La formación de burbujas y la atomización de gotas están gobernadas por la tensión superficial. La nucleación de burbujas en un líquido hirviendo depende de cómo se generan burbujas en los orificios de las paredes del recipiente.

Aunque la tensión superficial es un factor importante, no lo consideramos en la solución de nuestro modelo de dos burbujas en flujo potencial. La primera razón es que en este modelo las burbujas son esféricas de radio constante y por tanto no se deforman. La segunda razón es que las variaciones de presión en un

líquido para burbujas de radios menores a 0.5 mm no afectan el esfuerzo en las paredes de las burbujas (Batchelor, 1979). Por tanto no es necesario incluir este factor para el caso que modelamos.

1.4 El movimiento de burbujas y gotas

El movimiento de burbujas en líquidos y de gotas en gases tiene muchas aplicaciones importantes. Este movimiento difiere del de esferas sólidas, debido a la viscosidad finita del gas o del líquido dentro de la gota o de la burbuja. Además, una esfera sólida se puede sujetar mecánicamente y permanecer estática mientras el fluido circula alrededor de la esfera y por lo tanto, no se ve afectada por la gravedad. En cambio las burbujas y gotas siempre están en movimiento y sujetas a las fuerzas de gravedad, debido a la diferencia de densidades entre las fases.

La viscosidad finita de una burbuja o gota permite una velocidad tangencial en la superficie produciendo una circulación interna que puede disminuir el arrastre. La tensión superficial finita permite desviaciones oscilatorias y permanentes de la esfericidad, controla la magnitud de estas desviaciones y limita el máximo tamaño estable de la burbuja.

Características cualitativas del movimiento de burbujas

La viscosidad y densidad de las burbujas es normalmente despreciable comparado con el líquido que las rodea. De cualquier forma, debido a la presencia de impurezas en el líquido, las burbujas, particularmente las pequeñas, raramente demuestran un comportamiento ideal.

Un efecto importante de los surfactantes contaminantes que se acumulan en la superficie de las burbujas es que aumentan el arrastre de las burbujas. Esta contaminación puede detener la circulación de las burbujas pequeñas causando que se muevan como esferas sólidas. Aybers y Tapucu (1969) reportaron observaciones cuantitativas de la disminución de la velocidad de las burbujas, al rozar con agua conteniendo pequeños contaminantes y compuestos surfactantes disueltos. Con burbujas más grandes, que se mueven a velocidades mayores, los

contaminantes son forzados a la estela de la burbuja, teniendo menos influencia. Haberman y Morton (1956,1953) observaron diferencias significantes en el comportamiento de burbujas muy largas en agua filtrada y no filtrada y atribuyeron esta diferencia a la materia en partículas que se acumula en la superficie.

Se ha reportado los siguientes comportamientos en el flujo de una sola burbuja de aire que se mueve en agua. En la Figura (1.5) se describen las formas de burbujas de acuerdo al número de Reynolds.

1) $Re < 70$

Las burbujas con forma esférica suben en forma rectilínea con coeficiente de arrastre igual al de esferas sólidas que suben en agua pura.

.2) $70 < Re < 400$

Las burbujas esféricas suben en forma rectilínea con coeficiente de arrastre menor al de esferas que sube en agua pura.

3) $400 < Re < 500$

Las burbujas tienen forma de esferoides ovalados con un eje de simetría perpendicular a la dirección de ascenso y suben en forma rectilínea.

4) $500 < Re < 1100$

Las burbujas adquieren forma de esferoides ovalados y suben con trayectoria helicoidal.

5) $1100 < Re < 1600$

Las burbujas se asemejan a esferoides irregular subiendo en trayectoria rectilínea.

6) $1600 < Re < 5000$

Transición del estado 5 al 7.

7) $Re > 5000$

Las burbujas toman patrones irregulares horizontales con forma de hongo o falda, subiendo mas o menos en forma rectilínea y seguidos por una capa turbulenta.

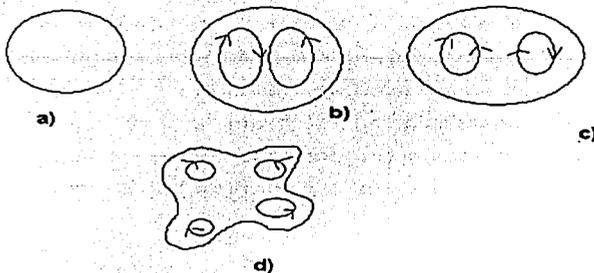


Figura 1.5 Forma de las burbujas de acuerdo al numero de Reynolds.

a) casos 1-2, b) casos 3-5, c) caso 6 d) caso 7.

La Figura (1.6) de Haberman y Morton (1956) ilustra la dependencia con el diámetro de la velocidad de ascenso de las burbujas en agua destilada, observada por varios investigadores.

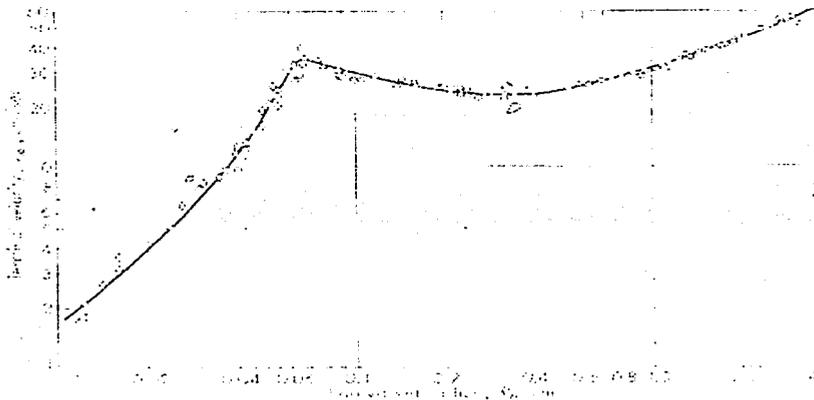


Figura 1.5 Velocidad terminal de burbujas de aire en agua filtrada o destilada en función del tamaño de la burbuja, (tomado de, Wallis, 1969).

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

La velocidad terminal u_t es la componente de velocidad vertical en el caso movimiento helicoidal, ó inestable, y D_v es el diámetro equivalente de una esfera de volumen V , esto es:

$$D_v = \left(\frac{6V}{\pi} \right)^{1/3}.$$

Para las burbujas más pequeñas, cuyo movimiento se aproxima con el de esferas sólidas debido al efecto dominante de la tensión superficial en su forma, la solución de 'Stokes' nos da una descripción adecuada:

$$v_\infty = \frac{1}{18} \frac{d^2 g (\rho_f - \rho_n)}{\mu_f}, \quad (1.8)$$

donde g es la aceleración de la gravedad y $(\rho_f - \rho_n)$ es la diferencia de densidades y μ_f es la viscosidad del líquido. La ecuación es válida para esferas sólidas. Para esferas 'fluidas' conteniendo gas con viscosidad μ_g que es despreciable en comparación de la viscosidad del líquido y que contienen una superficie que no es rígida, la siguiente ecuación modela el flujo (Hadamard y Rybczynski, 1911):

$$v_\infty = \frac{1}{12} \frac{d^2 g (\rho_f - \rho_n)}{\mu_f} \quad (1.9)$$

Cuando existe una ausencia total de impurezas, se puede obtener un resultado similar al predicho por la Ecuación (1.9).

1.5 Parámetros adimensionales importantes

Ahora daremos una explicación breve de los parámetros adimensionales encontrados en esta tesis. Éstos surgen naturalmente cuando se escalan las ecuaciones de conservación y las condiciones de frontera.

Cuando se adimensionaliza la ecuación de conservación de cantidad de movimiento, se llega a la siguiente ecuación adimensional de Navier Stokes. Para obtener esta ecuación, las variables se hacen adimensionales de la siguiente forma: la longitud se escala con una longitud $L^*=L/D$ (por ejemplo el diámetro de la

esfera), el tiempo se escala como $t^* = V/D$ y la velocidad se escala con velocidad característica. Tomando estas variables como adimensionales se obtiene:

$$\text{Re} \left[\frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V \right] = -\nabla p + \nabla^2 V. \quad (1.9)$$

La cantidad adimensional que multiplica la derivada respecto al tiempo y el término convectivo es el número de Reynolds:

$$\text{Re} = LV / \nu. \quad (1.10)$$

El significado físico del número de Reynolds es que mide la importancia relativa de las fuerzas inerciales con las fuerzas generadas por la viscosidad de la sustancia.

El balance de esfuerzos normales en la superficie o interfase de la gota o burbuja nos conduce a otro número adimensional. Si se toman los esfuerzos viscosos en relación con la tensión superficial se obtiene el número Capilar Ca , definido como

$$Ca = \frac{\mu V}{\sigma}. \quad (1.11)$$

La magnitud del número Capilar determina la importancia relativa de los esfuerzos de tensión superficial respecto a los esfuerzos viscosos. El número Capilar nos da una medida de la importancia relativa de las fuerzas viscosas de deformación, comparada con las fuerzas interfaciales que actúan para mantener la forma de la superficie que tendría si no hubiera flujo de fluidos.

En problemas donde los efectos dominantes son los inerciales sobre los viscosos, el esfuerzo sería adimensionalizado con una escala inercial. El número adimensional relevante en este caso es el número de Weber que es el producto del número Capilar con el número de Reynolds. La definición del número de Weber es:

$$We = \frac{\rho L V^2}{\sigma}. \quad (1.12)$$

En el siguiente capítulo abordaremos la teoría de flujo potencial, que como hemos visto, aplica para flujos con valores grandes del número de Reynolds.

1.6 Referencias (1er capítulo)

- 1 Lamb, H., 1957
Hydrodynamics, 6th Edition,
Cambridge University Press.
- 2 Biesheuvel, A. y Van Vijnngaarden, L., 1982
The motion of a pair of bubbles in a liquid
Journal of Engineering Mathematics **16**, 349-365.
- 3 Levich, V.G., 1962
Physicochemical Hydrodynamics
Prentice Hall, Englewoods Cliffs, NJ.
- 4 Hewitt, G. F., 1982
"Liquid-Gas systems" Chapter 2
Handbook of multiphase system, Hetroni G. (Ed.)
Hemisphere publishing.
- 5 Bieshuevel, A. , 1984,
On void fraction waves in dilute mixture of liquid and gas bubble,
Ph. D. Thesis, University of Twente, Enshede.
- 6 Clift, R., Grace, J. R., Weber M. E., 1978
Bubbles, drops and particles
Academic Press, New York.
- 7 Davidson, J. K. y Harrison, D., 1963
"Fluidised particles"
Cambridge University Press, London.
- 8 Davidson, J. F., Shuler, B.O.G., 1960
"Trans. Inst. Chem. Engrs.
38, 144-154 y 335-342.
- 9 Aybers N. M. y Tapucu A., 1969
Studies on the drag and shape of gas bubbles rising through a stagnant liquid
Warme, U. Stoffubergftragung, **2**,171

-
- 10 Haberman, W. L. y Morton, R.K., 1956
An experimental study of bubbles moving in Liquids
Paper 2279, trans ASCE, **121**, 227
 - 11 Hadamard, J. y Rybcynski, 1911
W., Compt. Rend. Acad. Sci. Paris,
Vol. 152, pp. 1735-1738, 1911
 - 13 Matuszkiewicz, A., Flamand, J. C., Boure, J. A., 1987
The bubble slug flow pattern transition and instabilities of void fraction
waves
Int. J. Multiphase Flow 13, 199-218

**"Si nadie escucha, entonces, no
hay sonido"**

R. Lima

2 Ecuaciones de conservación y teoría de flujo potencial

El propósito de este Capítulo es introducir las ecuaciones diferenciales que gobiernan el flujo de fluidos ideales

2.1 Ecuaciones de movimiento para un flujo de un líquido o gas ideal

En este Capítulo hablaremos de flujo potencial ya que el flujo de burbujas en ciertas condiciones puede ser modelado por las ecuaciones de un flujo o gas ideal. Además introduciremos el uso de la teoría de los armónicos esféricos para resolver el problema de flujos alrededor de cuerpos con simetría esférica. Sabemos que en flujos con número de Reynolds grande (especialmente en flujos externos) los efectos viscosos quedan confinados a una capa límite cerca de la superficie.

La razón por la que usamos flujo potencial es que nuestro modelo físico se apega bastante bien a las condiciones de flujo potencial. Cuando el número de Reynolds es grande y como sólo se observa una pequeña capa límite alrededor de las burbujas, el flujo es prácticamente irrotacional alrededor de esta capa límite.

Las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento para un flujo potencial son:

$$\nabla \cdot U = 0,$$

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\nabla p + \rho g.$$

(2.1)

La primera se conoce como ecuación de continuidad y la segunda es la ecuación de Euler. Si despreciamos los efectos viscosos, los gradientes de entropía y la estratificación, el flujo es irrotacional y la inercia es el único factor

importante en las ecuaciones. Por lo tanto, la velocidad se puede expresar como el gradiente de un potencial.

$$U = \nabla \phi. \quad (2.2)$$

donde la función escalar ϕ es el potencial de velocidades. Si se introduce la Ecuación para la velocidad (2.2) en la Ecuación de continuidad (2.1), ésta se convierte en la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0. \quad (2.3)$$

y la ecuación de cantidad de movimiento se convierte en la ecuación de Bernoulli:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 + gz = 0. \quad (2.4)$$

Las condiciones de contorno son: (1) se conoce la velocidad aguas arriba, (2) no hay velocidad normal en los límites de la superficie de sólidos en reposo.

Una de las razones para usar la teoría de flujo potencial es que el estudio de la ecuación de Laplace está muy bien desarrollado. Hay muchas técnicas para encontrar las funciones potenciales que satisfacen la ecuación de Laplace. Éstas incluyen: (1) superposición de funciones, (2) análisis numérico, (3) transformación conforme, (4) analogías eléctricas y mecánicas.

Habiendo determinado el potencial $\phi(x,y,z,t)$, se determina el campo de velocidades \mathbf{U} por derivación de la Ecuación (2.2) y después se puede calcular el campo de presión de la Ecuación (2.4). Si el flujo está descrito en coordenadas cartesianas, se puede definir una función de corriente. Por ejemplo en coordenadas x-y

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.5)$$

En flujo irrotacional plano, la función de corriente ψ satisface también la ecuación de Laplace. De igual forma la función de corriente en coordenadas polares es:

$$V_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, V_\theta = - \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (2.6)$$

Las condiciones de contorno son las mismas que anteriormente. La superficie de un cuerpo inmerso en flujo potencial forma una superficie de función de corriente constante = K, donde K es una constante:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = - \frac{\partial \psi}{\partial x}, \psi_{\text{cuerpo}} = K. \quad (2.7)$$

De las definiciones de la función de corriente y del potencial, encontramos que:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Estas relaciones entre las derivadas del potencial de velocidad ϕ y de la función de corriente ψ , son las ecuaciones de Cauchy-Riemann que aparecen en la teoría de variable compleja. Las funciones de ϕ y ψ son funciones armónicas porque satisfacen la ecuación de Laplace y forman una función analítica $F = \phi + i\psi$ llamada potencial de velocidad complejo.

2.2 Flujo potencial en tres dimensiones

En el caso de las burbujas abordamos problemas en que la simetría es esférica. Además el problema es tridimensional y aunque contamos con una simetría axi-simétrica necesitamos resolver el problema en 3 dimensiones.

En tres dimensiones no se puede definir una función de corriente, aunque se puede definir un potencial de velocidad que satisface la ecuación de Laplace. Pero si el flujo es simétrico respecto al eje x, se puede definir una función de corriente, ya que la ecuación de continuidad involucra sólo dos términos. En este caso, la función de corriente no satisface la ecuación de Laplace y no es ortogonal con la función de potencial de velocidad.

En problema de flujos axi-simétricos se puede trabajar tanto con coordenadas cilíndricas como con esféricas. La relación entre las coordenadas cilíndricas y esféricas con las cartesianas se da a continuación:

Cilíndricas.	Esféricas:	
$x=x,$	$x= r \cos (\theta),$	
$y=w \cos (\varphi),$	$y= r \operatorname{sen}(\theta) \cos (\varphi),$	
$z= w \operatorname{sen}(\varphi),$	$z= r \operatorname{sen}(\theta) \operatorname{sen}(\varphi).$	(2.9)

donde w es la distancia al eje de simetría en coordenadas cilíndricas y r es el radio al origen para coordenadas esféricas. (ver Figura (2.1)).

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

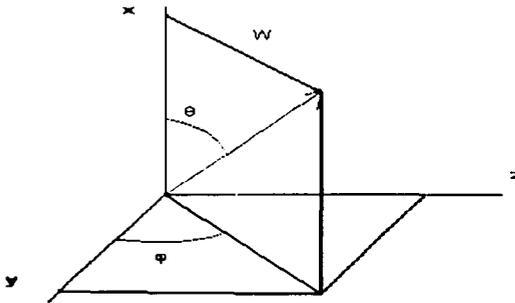


Figura 2.1 Diagrama de coordenadas esféricas y cilíndricas.

Se puede definir una función de corriente realizando un balance de flujo volumétrico en la dirección radial y en la dirección axial. En coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial}{\partial x}(wU_x) + \frac{\partial}{\partial w}(wU_w) = 0 \quad (2.10)$$

la cual se satisface con la siguiente función de corriente:

$$U_x = -\frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial w}, U_w = \frac{1}{w} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.11)$$

La función de corriente axi-simétrica, a veces llamada función de corriente de Stokes, tiene unidades m^3/s . Debido a la simetría respecto al eje x , las líneas de función de corriente constante forman superficies de revolución. Es fácil demostrar que las líneas de función de corriente constante y de potencial de velocidad constante no son ortogonales.

En coordenadas esféricas las funciones de corriente y de potencial se definen de acuerdo a las siguientes formulas

$$U_r = -\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, U_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r}; \quad (2.12)$$

y la función potencial de velocidad para coordenadas esféricas se definen de acuerdo a

$$U_r = -\frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad U_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}. \quad (2.13)$$

Flujo de una fuente y un sumidero (doblete)

Uno de los flujos más sencillos consiste en la combinación de una fuente de magnitud m en el punto $(a,0)$ y un sumidero de magnitud m en el punto $(-a,0)$. Si r_1 es la distancia entre el centro de la fuente y un punto P y r_2 la distancia entre el centro del sumidero y un punto P , su potencial de velocidad y función de corriente se escriben como:

$$\phi = m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right), \quad \psi = m(\cos \theta_2 - \cos \theta_1). \quad (2.14)$$

Si el producto $2ma = \mu$ permanezca constante cuando $m \rightarrow \infty$ y $2a \rightarrow 0$, la combinación se transforma en una doble fuente o doblote. La función de corriente y potencial de velocidad se pueden obtener fácilmente:

$$\phi = \mu \frac{\cos \theta}{r^2}, \quad \psi = -\mu \frac{\sin^2 \theta}{r}. \quad (2.15)$$

Las líneas de corrientes de este flujo se muestran en la Figura (2.2), donde se muestra la localización de la fuente y el sumidero.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

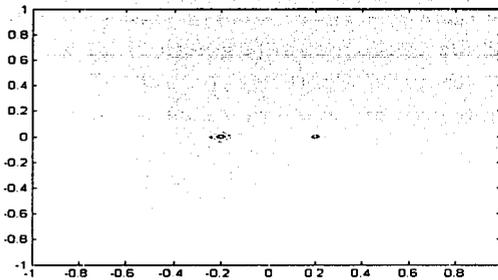


Figura 2.2 Flujo de una fuente y un sumidero, o doblete

Flujo alrededor de una esfera

El flujo irrotacional alrededor de una esfera se puede generar por una superposición de una corriente uniforme y un doblete axisimétrico en dirección opuesta a la corriente.

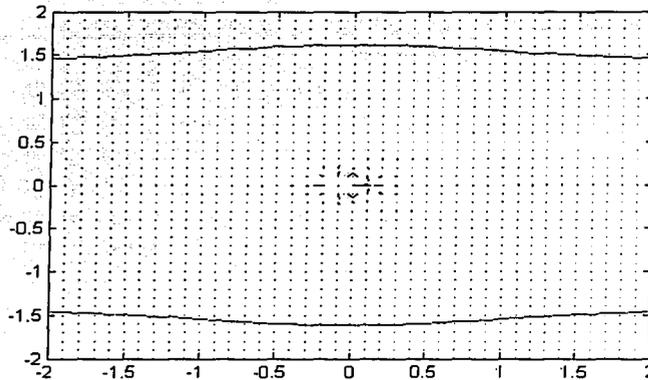
$$\psi = -\mu \text{sen}^2\theta / r + \frac{1}{2} U r^2 \text{sen}^2\theta. \tag{2.16}$$

La función de corriente tiene un valor igual a cero en los puntos con radio de la esfera $a = (2\mu/U)^{1/3}$ y en todo el eje x al exterior de la esfera. Las velocidades en la dirección radial y tangencial son:

$$U_r = \frac{1}{r^2 \text{sen} \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = U \left[1 - \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \cos \theta, \tag{2.17}$$

$$U_\theta = -\frac{1}{r \text{sen} \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} = -U \left[1 + 1/2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 \right] \text{sen} \theta. \tag{2.18}$$

De la misma forma que para un flujo bidimensional, la distribución de presión alrededor de la esfera es simétrica respecto al eje y aunque físicamente sólo existen las líneas de corriente fuera del círculo, también se muestran las líneas de corriente dentro del círculo.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN.

Figura 2.3 Flujo de una corriente uniforme alrededor de una esfera

2.3 Solución de la ecuación de Laplace por armónicos esféricos

A continuación veremos el uso de ciertas funciones especiales que nos sirven para resolver la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas. Estas funciones son los armónicos esféricos o polinomios de Legendre, los cuales son funciones que satisfacen la ecuación de Laplace. Cada armónico esférico representa un modo normal de flujo que es independiente de los demás.

Sumando varios armónicos esféricos se pueden obtener geometrías muy complicadas de flujo o se pueden ajustar sus magnitudes para obtener soluciones particulares de flujo con condiciones de frontera predeterminadas.

La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (2.19)$$

La ecuación se simplifica bastante, cuando el problema no tiene dependencia con el ángulo φ , que ocurre para flujos axi-simétricos. En este caso la solución se limita a:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) \right) = 0. \tag{2.20}$$

La solución de esta ecuación se puede obtener por separación de variables. La solución de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas para el caso axi-simétrico se puede expresar como un desarrollo en series de armónicos esféricos, que son funciones del radio R(r) multiplicadas por polinomios P_n (cosθ) que se conocen como polinomios de Legendre. En el apéndice 2-A se da una deducción breve de los polinomios de Legendre. Para mas información sobre armónicos esféricos y polinomios de Legendre consulte Arfken(1965). Los armónicos esféricos que dan solución a la ecuación de Laplace son los siguientes:

(1/r) P ₁ (cosθ)	r P ₁ (cosθ)	
(1/r) ² P ₂ (cosθ)	r ₂ P ₂ (cosθ)	
(1/r) ³ P ₃ (cosθ)	r ₃ P ₃ (cosθ)	(2.21)

Cada uno de los productos de funciones de rⁿ multiplicadas por los polinomios de Legendre de orden n, forman el conjunto de armónicos esféricos de las variables r y θ. Los polinomios de Legendre de orden n son los siguientes:

$P_1(\cos \theta) = \cos \theta,$
 $P_2(\cos \theta) = 1/2(3 \cos^2 \theta - 1),$
 $P_3(\cos \theta) = 1/2(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta),$

 $P_n(\cos \theta) = 1/(2^n n!) d^n/dx^n[(\cos^n \theta - 1)^n].$

Formula de Rodriges

(2.22)

Las funciones P_n(cosθ), donde n=1,2,3..., se conocen como funciones o polinomios de Legendre o armónicos zonales del primer tipo. Estas funciones son apropiadas para problemas con simetría esférica y axi-simétricos, como el caso de burbujas en movimiento.

Suma de armónicos esféricos como solución de la Ecuación de Laplace

De esta forma los problemas de dos variables con simetría esférica se limitan a proponer una solución en términos de las eigenfunciones en la dirección radial y las eigenfunciones en la dirección angular. Es decir:

$$\phi = \sum (A_n \cdot r^n + B_n \cdot 1/r^{n+1}) P_n(\cos \theta) \quad (2.23)$$

Después sólo se tienen que ajustar los valores de estas constantes a las condiciones de frontera.

El armónico de primer orden está incluido en el problema del movimiento de una esfera en una masa infinita de fluido. Si tomamos el origen como el centro de la esfera y el eje x en la dirección del movimiento, la velocidad normal de la superficie de la esfera es $U \cos \theta$, donde U es la velocidad del centro de la esfera.

Entonces las condiciones para determinar ϕ son que se debe cumplir $\nabla^2 \phi = 0$ en cualquier lugar del fluido y que en la superficie de la esfera se deben cumplir las condiciones de frontera:

$$-\frac{\partial \phi}{\partial r} = U \cos \theta \quad (2.24)$$

Aplicando las condiciones anteriores nos da como resultado el potencial de velocidad para una esfera en movimiento en un flujo potencial:

$$\phi = 1/2 U \frac{a^3}{r^2} \cos \theta \quad (2.25)$$

Los armónicos esféricos son muy útiles para definir la velocidad y el potencial dentro del flujo para problemas que incluyen dos o más cuerpos o para problemas que involucran fronteras con simetría esférica. Algunas de las propiedades más importantes de los polinomios de Legendre es que son funciones ortogonales. Además se puede comprobar que cualquier función en la superficie de una esfera se puede expresar como una sumatoria infinita de los polinomios de Legendre o armónicos esféricos.

2.4 Potencial de dos esferas por medio del método de las imágenes

En esta sección analizaremos el movimiento de dos burbujas que se mueven con velocidades U_1 y U_2 en un fluido inviscido e irrotacional.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

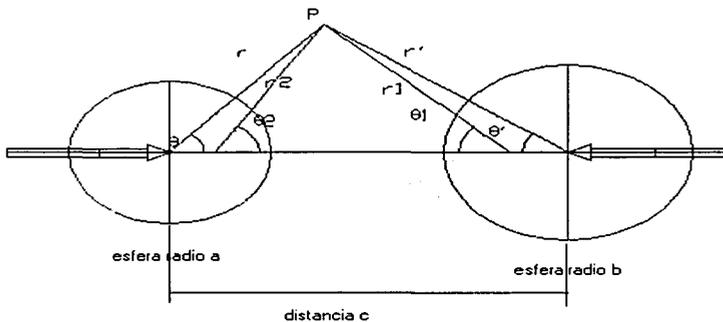


Figura 2.4 Potencial de dos esferas en un flujo potencial.

El problema de dos esferas que se mueven en flujo potencial ha sido analizado por varios autores (Lamb, 1957; Milne, 1964; Miloh, 1978; Van Vijnngaarden et al., 1982). En esta sección analizaremos dos soluciones básicas al problema de dos esferas. Primero veremos la solución propuesta por Milne (1964). La limitación de esta solución es que sólo hace una corrección al potencial debido a la primera interacción de los dipolos de las esferas. La solución propuesta por Lamb es más general, porque propone una suma infinita de dipolos pero el desarrollo necesario para obtener la energía cinética y las ecuaciones de movimiento es muy complicado.

La solución propuesta por Milne (1982) que parte de un desarrollo en series de armónicos esféricos centrados en cada esfera, es más apropiada para obtener las ecuaciones de movimiento.

Consideremos una esfera centrada en A de radio a que se mueve en la dirección x con velocidad U y una esfera centrada en B de radio b que se mueve

en la misma dirección pero con sentido contrario con velocidad \mathbf{V} (Ver Figura (2.3)). La posición del punto P esta fija en el plano. Mediante sus coordenadas polares (r, θ) se refiere a A y mediante sus coordenadas (r', θ') se refiere a B. El potencial de velocidad ϕ debe satisfacer las condiciones de frontera. Esto es la velocidad del fluido debe ser igual a la velocidad normal de las esferas:

$$-\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_{r=a} = U \cos \theta \quad -\left(\frac{\partial \phi}{\partial r'}\right)_{r'=b} = V \cos \theta' \quad (2.26)$$

Podemos descomponer el potencial en dos componentes: un potencial ϕ_1 cuando la esfera A se mueve con velocidad U y la esfera B esta en reposo y un potencial ϕ_2 cuando la esfera B se mueve con velocidad V y A se encuentra en reposo. Por lo tanto podemos escribir

$$\phi = U\phi_1 + V\phi_2 \quad (2.27)$$

Donde los potenciales de velocidad satisfacen las siguientes condiciones de frontera:

$$-\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right)_{r=a} = U \cos \theta \quad -\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \quad (2.28)$$

$$-\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial r}\right)_{r=b} = 0 \quad -\left(\frac{\partial \phi_2}{\partial r}\right)_{r=b} = V \cos \theta' \quad (2.29)$$

Empezaremos resolviendo el problema para ϕ_1 ya que el problema para ϕ_2 es similar. Si B estuviera ausente, ϕ_1 sería el potencial debido un doblete en A en la dirección de AB, con magnitud $\mu_0 = 1/2 a^3$. La presencia de B causa que la condición de frontera (2.28) en B sea violada, pues existe un flujo que pasa a través de la segunda esfera.

Para compensar el flujo en B debido al movimiento de la esfera en A, se puede introducir la imagen del doblete μ_0 dentro de la esfera en B. La imagen de un doblete en una esfera es otro doblete de magnitud $\mu_1 = \mu_0(b^3/c^3)$ en A_1 , el punto inverso de A con respecto a B. Este punto se localiza dentro de la esfera a una

distancia b^2/c de B. El doblete μ_1 requiere una imagen μ_2 en A_2 , el punto inverso de A_1 con respecto a A y así sucesivamente.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

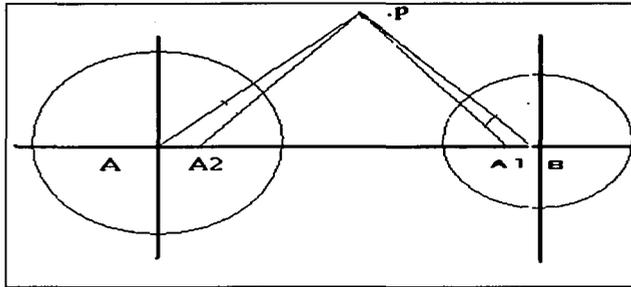


Figura 2.5 Diagrama que ilustra la posición de los dipolos en el método de las imágenes.

La suma de estos dobletes localizados dentro de la esfera A y B, forman el potencial ϕ_1 cuando la esfera A esta en movimiento y B esta en reposo. De esta forma obtenemos una serie infinita de imágenes en los puntos A_1, A_2, A_3, \dots , de magnitudes $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$, etc.

Las distancias f_n entre la esfera A y el centro de cada uno de estos dipolos, donde $AB=c$ y $f_n=AA_n$, se obtienen a partir de las siguientes expresiones:

$$f_1 = c - \frac{b^2}{c}, f_2 = \frac{a^2}{f_1}, f_3 = c - \frac{b^2}{c - f_2}, \quad (2.30)$$

Asimismo podemos escribir el valor de los dipolos $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$, etc. de la siguiente manera:

$$\mu_1 = \mu_0 \left(-\frac{b^3}{c^3}\right), \mu_2 = \mu_1 \left(-\frac{a^3}{f_1^3}\right), \mu_3 = \mu_2 \left(-\frac{b^3}{(c - f_2)^3}\right), \quad (2.31)$$

La magnitud de las imágenes disminuyen continuamente en intensidad y esta disminución es mayor cuando el radio de las esferas es pequeño en

comparación con la distancia que las separa. La ecuación para ϕ nos conduce a una ecuación diferencial de Ricatti, que puede ser resuelta para el valor de μ_n . Con la notación de la Figura (2.3), tenemos :

$$\phi_1 = \frac{\mu_0 \cos \theta}{r^2} + \frac{\mu_1 \cos \theta_1}{r_1^2} + \frac{\mu_1 \cos \theta_1}{r_1^2} + \dots \quad (2.32)$$

EL valor de ϕ cerca de la superficie de A se puede escribir a partir de los resultados de las Formulas (A-11) como

$$\begin{aligned} \phi_1 = & (\mu_0 + \mu_2 + \mu_4 + \dots) \frac{\cos \theta}{r^2} - 2 \left(\frac{\mu_1}{f_1^3} + \frac{\mu_3}{f_3^3} + \dots \right) r \cos \theta \\ & + (2f_2\mu_2 + 2f_4\mu_4 + \dots) \frac{P_2(\cos \theta)}{r^3} - 3 \left(\frac{\mu_1}{f_1^4} + \frac{\mu_3}{f_3^4} + \dots \right) r^2 P_2(\cos \theta) + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

Esta ecuación nos muestra la equivalencia entre los dos métodos, el de las imágenes y el de los polinomios de Legendre o armónicos esféricos.

Ésta es una solución exacta pero en una forma poco apropiada. Para obtener una solución con un precisión de $1/c^3$, usaremos el siguiente método.

Si B estuviera ausente, el potencial ϕ_1 sería:

$$\phi_1 = 1/2a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} \dots \quad (2.34)$$

Usando la expansión de un dipolo en polinomios de Legendre, encontramos el potencial en la superficie de B:

$$1/2a^3 \frac{\cos \theta}{r^2} = -\frac{1}{2} \frac{a^3}{c^2} - \frac{a^3 r' P_1(\cos \theta')}{c^3} - \dots \quad (2.35)$$

Con esta ecuación podemos calcular la velocidad normal del fluido en la superficie de B

$$V_{r'} = \frac{a^3 P_1(\cos \theta')}{c^3} - \dots \quad (2.36)$$

Para eliminar estos términos de velocidad en la esfera B, se pueden agregar los siguientes términos al potencial basado en la esfera en A,

$$\phi_1 = \frac{1}{2b^3} \frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{a^3 b^3}{c^3} \frac{P_1(\cos \theta')}{r'^2} + \dots \quad (2.37)$$

Cada una de estas correcciones a la velocidad normal en B, causa una modificación al potencial en A. Sin embargo, la aproximación es buena para distancias grandes entre esferas. Como aproximación para el potencial ϕ_1 y ϕ_2 tenemos:

$$\phi_1 = \frac{1}{2a^3} \frac{\cos \theta}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{a^3 b^3}{c^3} \frac{\cos \theta'}{r'^2} + \dots \quad (2.38)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2b^3} \frac{\cos \theta'}{r'^2} + \frac{1}{2} \frac{a^3 b^3}{c^3} \frac{\cos \theta}{r^2} + \dots \quad (2.39)$$

Las expresiones se pueden simplificar más si se expresa el dipolo basado en θ' y r' en función de θ y r .

$$\frac{\cos \theta'}{r'^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{2r \cos \theta}{c^3} + \dots \quad (2.40)$$

De esta forma evaluando el potencial ϕ_1 y ϕ_2 alrededor de la esfera A en $r=a$, tenemos:

$$\phi_1 = 1/2a \cos \theta \quad \phi_2 = \frac{1}{2} \frac{b^3}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{ab^3}{c^3} \cos \theta \quad (2.41)$$

En la Sección (3.3) veremos que las ecuaciones de movimiento de ambas burbujas se pueden calcular a partir de la energía cinética del líquido. Para calcular la energía cinética del líquido se tiene la siguiente expresión:

$$T = - \frac{1}{2} \rho \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS_A - \frac{1}{2} \rho \int \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS_B \quad (2.42)$$

La integral se toma alrededor de las esferas A y B. Los valores del gradiente en la dirección radial en la esfera A y B son $\cos(\theta)$ y $\cos(\theta')$ respectivamente.

La energía cinética se puede escribir evaluando las integrales de la siguiente forma:

$$T = \frac{1}{2} \rho \left[P_1 U^2 + (Q_1 + Q_2) UV + P_2 V^2 \right] \quad (2.43)$$

donde los valores P_1 , Q_1 , Q_2 , P_2 se evalúan calculando las integrales del potencial ϕ_1 y ϕ_2 con las condiciones de frontera:

$$P_1 = \frac{2}{3} \pi a^3, \quad Q_1 = Q_2 = \frac{2}{c^3} \pi a^3 b^3, \quad P_2 = \frac{2}{3} \pi b^3, \quad (2.44)$$

de tal forma la energía cinética queda:

$$T = \left[\frac{1}{4} M_1' U^2 + \frac{2\pi a^3 b^3}{c^3} UV + \frac{1}{4} M_2' V^2 \right] \quad (2.45)$$

Donde M_1' y M_2' son las masas de líquido desplazado por ambas burbujas. Este análisis, aunque nos da la expresión para la energía cinética en función de las velocidades de las esferas, no es suficientemente completo, pues, no toma en cuenta las interacciones de los potenciales de los dipolos, más que hasta la primera interacción. Por lo tanto, las fuerzas entre las burbujas obtenidas no son exactas y sólo son válidas cuando las esferas se encuentran a distancias grandes. En el Capítulo 3 obtendremos una solución válida para cualquier distancia.

2.4 Referencias (2do capítulo)

- 1 Lamb, H., 1957
Hydrodynamics, 6th Edition,
Cambridge University Press.
- 2 Milne-Thompson, L. M., 1964
Theoretical Hydrodynamics, Fifth edition,
Dover publications.
- 3 Batchelor, G. K., 1970
An Introduction to Fluid dynamics
Cambridge University Press.
- 4 Biesheuvel, A. y Van Vijnngaarden, L., 1982
The motion of a pair of bubbles in a liquid
Journal of Engineering Mathematics **16**, 349-365.
- 5 Bentwich, M. y Miloh, T., 1978
On the exact solution for the two sphere problem in axisymmetrical potential
flow
Journal of Applied Mechanics, **45**, 3, Sept., 463-468.
- 6 Hobson, E. W., 1965
The Theory of spherical and ellipsoidal harmonics
Cambridge University Press.
- 7 Harper, J.F., 1972
The motion of bubbles and drops through liquids
J. Adv. Applied mechanics **12**, 59-129.
- 8 Herman, R. A., 1887
On the motion of two spheres in fluid
J. pure and applied math. **22**, 204-216.
- 9 Hicks, W. M., 1880
On the motion of two spheres in a fluid
Trans Royal Society London **171**, 455-470
- 24 Arfken, 1995,
Mathematical Methods for physics,
Academic Press, McGraw-Hill

2.5 Apéndice 2-A (Uso y origen de los polinomios de Legendre)

En este apéndice se da una explicación breve sobre el origen y uso de los polinomios de Legendre. La explicación parte del desarrollo en series de un dipolo pero se aplica a funciones mas complicadas.

Los armónicos esféricos son soluciones a la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}) + \frac{1}{\text{sen} \theta} (\frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}) = 0. \tag{1}$$

La ecuación se simplifica bastante cuando el problema no tiene dependencia con el ángulo, como para flujos axisimétricos. En este caso, la solución se limita a:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{1}{\text{sen} \theta} (\frac{\partial}{\partial \theta} (\text{sen} \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta})) = 0. \tag{2}$$

Una solución básica de la ecuación de Laplace es una fuente o sumidero. La expresión analítica de una fuente se forma dividiendo la magnitud de la fuente m por la distancia al origen r . Si la fuente ϕ se desplaza una distancia c del origen, R es el radio desplazado; entonces:

$$\phi = m / R. \tag{3}$$

Para mostrar el origen de los polinomios de Legendre, veremos que pasa si desplazamos la fuente o sumidero una distancia c del origen sobre el eje x , de acuerdo a la figura (2.3).

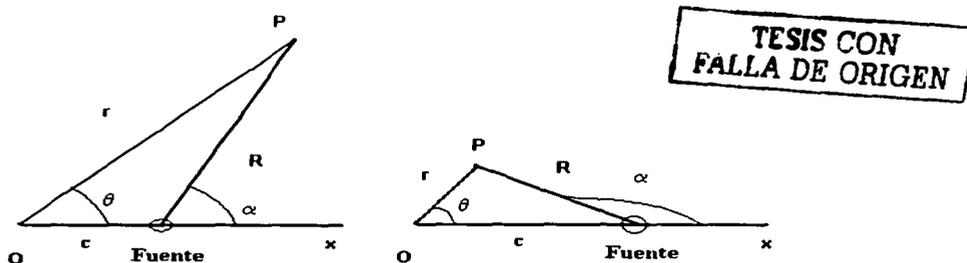


Figura 2.3 Una fuente desplazada una cantidad c del origen de coordenadas.

Al desplazar la fuente del origen, la expresión analítica de la fuente cambia. Primero tenemos que encontrar una nueva expresión para el radio, lo cual logramos con la siguiente relación:

$$R^2 = r^2 + c^2 - 2cr \cdot \cos \theta$$

$$= r^2(1 - 2c/r \cdot \cos \theta + c^2/r^2)$$
(4)

Por lo tanto, el potencial de la fuente $\phi = m/R$ se escribe como:

$$\phi = m/r(1 - 2c/r \cdot \cos \theta + c^2/r^2)^{-1/2}$$
(5)

Si desarrollamos en serie el binomio de la Ecuación (2.23) en función de potencias del cociente c/r , se obtiene la siguiente ecuación para el potencial de la fuente:

$$\phi = m/r(1 + c/r \cdot P_1(\cos \theta) + (c/r)^2 \cdot P_2(\cos \theta) + \dots)$$
(6)

Los coeficientes $P_n(\cos \theta)$ de cada potencia $(c/r)^n$ son los polinomios de Legendre de orden n del tipo 1 y se escriben mediante la función $\cos \theta$. Este desarrollo en series es válido cuando $r > c$. En el caso que $r < c$, la expresión que corresponde es:

$$\phi = m/c(1 + r/c \cdot P_1(\cos \theta) + (r/c)^2 \cdot P_2(\cos \theta) + \dots)$$
(7)

Ya que los términos en $r, r^2, \dots, r^{-1}, r^{-2}, \dots$ de estas expansiones son homogéneos pero de grados diferentes, cada uno debe ser un armónico esférico. Por lo tanto, tenemos dos conjuntos de armónicos esféricos (ignorando la constante c):

$(1/r) P_1(\cos \theta)$	$r P_1(\cos \theta)$
$(1/r)^2 P_2(\cos \theta)$	$r^2 P_2(\cos \theta)$
$(1/r)^3 P_3(\cos \theta)$	$r^3 P_3(\cos \theta)$

(8)

Cada uno de los productos de funciones de r^n multiplicadas por los polinomios de Legendre de orden n , forman el conjunto de armónicos esféricos de

las variables r y θ . Los polinomios de Legendre de orden 1, 2, 3 y n son los siguientes:

$$P_1(\cos \theta) = \cos \theta, \tag{9}$$

$$P_2(\cos \theta) = 1/2(3 \cos^2 \theta - 1),$$

$$P_3(\cos \theta) = 1/2(\cos^3 \theta - 3 \cos \theta),$$

.....

.....

$$P_n(\cos \theta) = 1/(2^n n!) d^n/dx^n[(\cos^n \theta - 1)^n] \quad \text{Formula de Rodrigues}$$

Las funciones $P_n(\cos \theta)$, $n=1,2,3,\dots$, se conocen como funciones o polinomios de Legendre o armónicos esféricos zonales del primer tipo. Estas funciones son apropiadas para problemas con simetría esférica y axi-simétricos, como el caso de burbujas en movimiento.

Como un doblete es la suma de una fuente y un sumidero separados una distancia c muy pequeña, podemos encontrar una expresión similar para el armónico esférico de orden 1 ó dipolo. Derivando con respecto a c término a término, la expresión para una fuente:

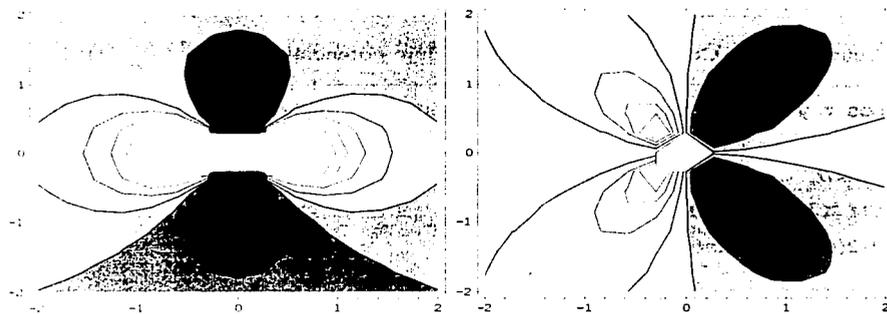
$$\phi = \mu \frac{\partial}{\partial c} \left(\frac{1}{(r^2 + c^2 - 2cr \cdot \cos \theta)^{1/2}} \right) \tag{10}$$

Derivando la Expresión (6) y (7) término a término para una fuente, se obtiene la expresión para un doblete,

$$\cos(\alpha) / R^2 = \frac{1}{r^2} (1/r^2 P_1(\cos \theta) + 2c/r P_2(\cos \theta) + \dots) \text{ para } r > c, \tag{11}$$

$$\cos(\alpha) / R^2 = -\frac{1}{c^2} (1 + 2r/c P_1(\cos \theta) + \dots) \text{ para } r < c,$$

En la Figura (2.3) se grafican el potencial de velocidad y la función de corriente de un armónico esférico de orden 2 o cuadrípulo con simetría esférica. Como veremos, sumando varias de estas funciones, se pueden obtener soluciones mas complicadas a la ecuación de Laplace.



a) Potencial de velocidad

b) función de corriente.

Figura 2.3 Armónico de segundo orden o cuádrupolo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

“La naturaleza es indiferente a las dificultades que le causa a un matemático”

J. Fourier

3. Movimiento de dos burbujas en flujo potencial

En este capítulo estudiaremos la interacción de dos esferas en movimiento en flujo potencial. En relación a nuestro problema de interés esto representa a dos burbujas en condiciones de alto número de Reynolds y bajo número de Weber. Las propiedades de suspensiones de burbujas en ascenso, debido a la gravedad, depende de las interacciones a pequeña escala; esto es, de las interacciones entre pares de burbujas.

Consideraremos burbujas suficientemente pequeñas en que estas permanecen prácticamente esféricas. Existen variaciones de presión en el líquido sobre la frontera de la burbuja que tienden a distorsionar la burbuja. La distorsión es muy pequeña para burbujas de radio menor a 0.5 mm (Batchelor, 1967). Otra consideración es que existe una pequeña capa límite alrededor de la burbuja pero ésta no se desprende de la superficie. Observaciones cualitativas sugieren que no existe flujo hacia atrás (Hartunian y Sears, 1957). Y finalmente se supone que el flujo interno del gas no afecta el movimiento de la burbuja. Bajo las condiciones anteriores, la vorticidad está confinada a una pequeña capa en la superficie de la burbuja y a una estela axi-simétrica. Por lo tanto, el flujo alrededor de esta región es casi el mismo que en flujo irrotacional e inviscido.

Entonces, para una burbuja esférica de radio a , moviéndose con velocidad \mathbf{U} a través de un fluido en reposo, el flujo afuera de la capa límite puede aproximarse por la función potencial de velocidad.

$$\phi = -\frac{1}{2} U a^3 \frac{\cos\theta}{r^2}, \quad (3.1)$$

donde r , θ , son las coordenadas esféricas polares con origen en la posición instantánea del centro de la burbuja.

Sin embargo, a pesar de que el fluido se puede considerar invíscido, dentro de la capa límite existe una fuerza de arrastre sobre la burbuja. Una posible opción para calcular las fuerzas de arrastre es obtener el flujo en la capa límite y calcular las fuerzas de fricción producidas. Otro enfoque que se puede utilizar es calcular la energía disipada por la burbuja al moverse a través del fluido usando la razón de disipación. Mediante este enfoque alterno, la energía disipada es igual al ritmo con que las fuerzas de flotación realizan trabajo, esto es velocidad x fuerzas de arrastre=UD debe ser igual a la razón de disipación en el líquido (Batchelor, pp 367-368, 1964).

La expresión general para la razón de disipación en el caso de flujo irrotacional incompresible en un volumen de fluido V rodeado por el área A, está dado por:

$$2\mu \int \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_i} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_j} dV = \mu \int \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_i \partial x_i} dV = \mu \int n \cdot \nabla u^2 dA \quad (3.2)$$

donde u^2 es el cuadrado de la velocidad del fluido en movimiento. Para calcular la razón de disipación para una burbuja, usamos la fórmula del potencial de velocidad (Eq. 3.1) y derivamos la siguiente expresión.

$$UD = -\mu \int_0^\pi \left(\frac{\partial q^2}{\partial r} \right)_{r=a} 2\pi a^2 \sin \theta d\theta. \quad (3.3)$$

Realizando las derivadas e integrales de esta ecuación, se llega a la fórmula para la fuerza de arrastre D sobre una burbuja que se mueve en flujo casi irrotacional

$$D = 12\mu\pi a U \quad (3.4)$$

Esta fórmula para la fuerza de arrastre se utiliza comúnmente para los cálculos de propiedades de suspensiones de burbujas. Es importante analizar si esta aproximación es válida cuando existe la interacción de burbujas.

3.1 Movimiento de burbujas en régimen de alto número de Reynolds y bajo número de Weber

La razón por la que se estudia el movimiento e interacción de pares de burbujas es la siguiente: a concentraciones bajas de burbujas, cuando la concentración de gas por unidad de volumen α es menor al 1% ($\alpha=1\%$), las burbujas se comportan como si fueran burbujas solitarias. A mayores concentraciones, la interacción entre burbujas tiene que considerarse. El cálculo de propiedades de suspensiones con una aproximación α^2 requiere conocer la interacción entre pares de burbuja; por lo que es necesario investigar la interacción de burbujas en un líquido en reposo.

La deformación de una burbuja en ascenso en un fluido viscoso ha sido estudiada por Moore (1963), para números de Weber bajos. Asumiendo que la forma de la burbuja es un esferoide ovalado Moore encontró que la razón del eje mayor al eje menor es $(1+9/32We)$, donde We es el número de Weber basado en el radio y la velocidad terminal de la burbuja. Ryskin y Leal (1984) realizaron estudios numéricos que muestran que la deformación de la burbuja es pequeña cuando el número de Weber es 2 con números de Reynolds hasta 200.

En nuestro problema físico analizamos burbujas suficientemente pequeñas que permanecen esféricas bajo las fuerzas de tensión superficial, flotación y arrastre viscoso. La interacción entre un par de burbujas no deformables ha sido estudiada por varios autores (Miloh, 1978; Biesheuvel y Van Wijngaarden, 1982; Kok, 1989). El sistema de Biesheuvel y Van Wijngaarden consistió en un par de burbujas de igual radio, suspendidas en un contenedor de líquido en reposo en ausencia de fuerzas externas. Este contenedor es acelerado instantáneamente a una velocidad específica y el movimiento de las burbujas era analizado.

En nuestro problema el potencial de velocidad fue calculado haciendo un desarrollo en series de los armónicos esféricos centrado en cada una de las esferas. La condición de fuerza neta cero se aplicó usando el Teorema de Lagally. En esta tesis se siguió un método muy parecido al usado por Biesheuvel (1982) en la obtención del potencial de velocidades y al método de energía usado por Kok (1989) para obtener las ecuaciones de movimiento de las burbujas.

Primero se calcula la energía cinética del fluido y después se deriva la energía cinética del fluido respecto al tiempo. El cambio de la energía del fluido con el tiempo es igual a las fuerzas resultantes externas sobre las esferas. Además, en este trabajo se usa un método alternativo para obtener ecuaciones de aceleración de la burbuja, a partir del campo de velocidades y del campo de presión obtenido mediante la ecuación de Bernoulli (Kumaran, 1992).

En nuestro caso analizamos dos casos particulares: el del movimiento de dos burbujas en dirección **colineal** que se mueven una hacia la otra y el movimiento de una burbuja que se mueve **paralela** y cercana a una pared. La contribución de esta tesis es agregar mayor número de términos a la solución. Kumaran (1993) estudio el movimiento colineal y predijo el choque de dos esferas separadas por una distancia s con velocidad inicial U .

Sin embargo, su modelo solo toma en cuenta términos correctos hasta $(R/s)^4$. Las ecuaciones de movimiento que resolvimos incluyen el caso de Kumaran e incrementamos a 30 el número de términos en las ecuaciones de movimiento y en los multipolos. También incluimos las fuerzas de arrastre en las ecuaciones de movimiento.

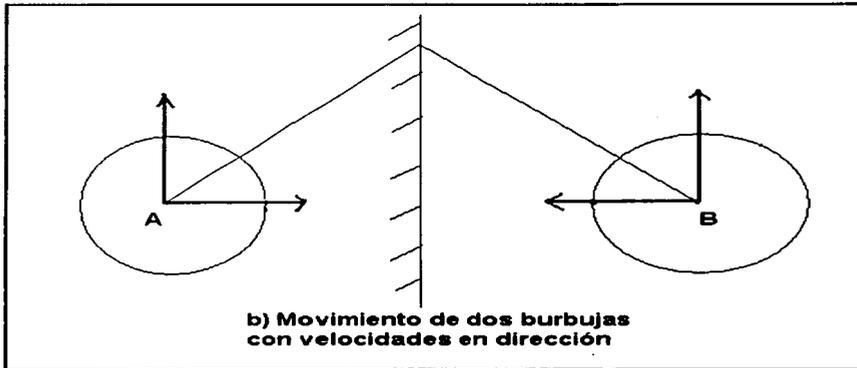


Figura 3.1 Movimiento de dos burbujas en dirección paralela.

La interacción entre un par de burbujas no deformables en flujo potencial se analiza en la Sección 3.3 y se deriva la ecuación para la aceleración de las burbujas, como un desarrollo en series asintótico en (a_i/s) , donde a_i es el radio de las burbujas y s es la distancia entre los centros de las burbujas. El potencial de velocidades se calcula por el método de doble desarrollo en series de armónicos esféricos.

Para calcular la presión en la superficie de las burbujas se usa la ecuación de Bernoulli, que es una ecuación no lineal y dependiente del tiempo. Esto hace el análisis de la interacción de burbujas más difícil que la interacción de partículas a bajo número de Reynolds. Mediante un balance de fuerzas se obtiene la aceleración de las burbujas (Sección 3.5).

El caso de dos burbujas que se mueven en dirección colineal una hacia la otra es analizado en el Capítulo 4. El caso de una burbuja que se mueve en dirección paralela a una pared se analiza en el Capítulo 5. Este caso es importante para determinar la influencia de las paredes en la agitación de las burbujas en una suspensión. En ambos casos se analiza el movimiento de las burbujas sin y con fuerza de arrastre. Es importante ver el efecto de la interacción de los dipolos en la fuerza de arrastre, pues en algunos cálculos de propiedades promedio de suspensiones esta contribución se simplifica.

Uno de los objetivos de este trabajo, es analizar el "choque" de las burbujas. Landweber (1992) realizó un estudio teórico que analiza el problema de esferas en movimiento por el método de dipolos. Se encuentra que la fuerza entre dos esferas diverge cuando éstas se aproximan a una velocidad U y cuando la distancia entre sus superficies tiende a cero, $s \rightarrow 2R$. Esto implicaría que las burbujas no chocan en un flujo potencial. En el estudio realizado por Kumaran (1993), encontró que las burbujas tienen una velocidad finita cuando sus superficies entran en contacto. El objetivo de este trabajo y tesis es encontrar cuál de los dos hallazgos es correcto.

3.2 Potencial de dos esferas en movimiento en flujo potencial.

Considere el campo de flujo inducido por un par de esferas en un movimiento tridimensional a través de un fluido perfecto sin límites. El campo de flujo puede ser descrito por un potencial de velocidad Φ , que satisface la ecuación de Laplace.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

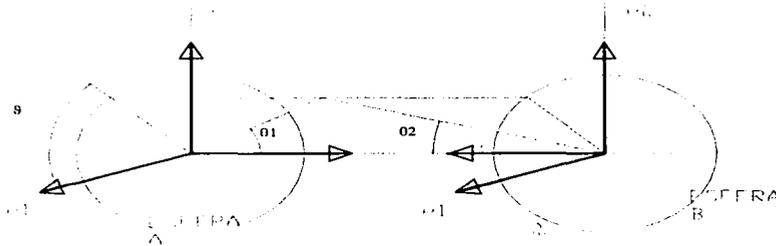


Figura 3.2 Dos esferas en movimiento en un flujo potencial.

Para poder calcular la energía cinética inducida por las esferas en el fluido se necesita calcular este potencial de velocidades, que satisface la ecuación de Laplace

$$\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi = 0. \tag{2.3}$$

Cuando el flujo es irrotacional, el campo de velocidades del fluido se puede expresar como el gradiente de un potencial de velocidades. El campo de velocidades del fluido se obtiene como

$$U = \nabla \Phi. \tag{3.5}$$

Ya que se obtiene el potencial de velocidades alrededor de cada burbuja, es necesario conocer la fuerza neta que actúa sobre cada burbuja. Para obtenerla

se necesita la presión que actúa sobre la superficie. Para obtener el campo de presión hacemos uso de la ecuación de Bernoulli

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}u^2. \quad (3.6)$$

Como la densidad de la burbuja es mucho menor que la del agua es posible considerar que la suma de fuerzas externas mas la presión es igual a cero. Realizando un balance de los esfuerzos alrededor de la burbuja con las fuerzas externas:

$$-\int_{A_i} p \cdot n_i dA_i + F_i = 0; \quad (3.7)$$

donde F_i es la suma de las fuerzas externas sobre la burbuja y A_i es la superficie de la burbuja i . Además, la velocidad y la presión del fluido a distancias muy lejos de la burbuja son prácticamente cero. Las dos esferas tienen radio igual a R y la distancia entre los centros es s .

Una simplificación importante es que se divide la velocidad absoluta de las dos esferas en dos componentes. Un componente de la velocidad común de las esferas V , es igual a la suma de las velocidades de las esferas dividida por dos. El otro componente W , es la velocidad relativa entre las dos esferas y es igual a la diferencia de velocidades absolutas de las esferas dividido por dos. Ambos componentes son los siguientes:

$$\begin{aligned} V &= 1/2 (U_1 + U_2), \\ W &= 1/2 (U_1 - U_2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Otra parte importante del planteamiento del problema, es fijar los sistemas de referencia. En este caso se usa un sistema de coordenadas cartesianas, fijo a la esfera 1 en movimiento. También se usan dos sistemas de coordenadas esféricas con centro en cada una de las esferas, con coordenadas r_1 , r_2 , θ_1 , θ_2 , y φ . Estos sistemas de coordenadas forman el marco de referencia del fluido en movimiento respecto a las dos esferas. Entre las dos esferas hay una distancia s .

Además fijamos a cada esfera tres vectores unitarios: el primero e_1 dirigido del centro de la esfera A a la B, el segundo vector e_2 , perpendicular a e_1 y un tercer vector e_3 perpendicular a e_1 u e_2 .

Para obtener el potencial de velocidades se resuelve la ecuación de Laplace. Como las fronteras de nuestro problema son de geometría esférica, se usa un doble desarrollo en series en armónicos esféricos (también se puede resolver el problema en coordenadas bi-esféricas, pero la solución es más compleja). La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right) = 0. \quad (3.9)$$

La solución general de esta ecuación cuando el problema tiene simetría esférica, se puede encontrar en varios libros sobre Física Matemática (por ejemplo Arfken, 1965), (Ver apéndice 2-A).

La solución está dada en término de funciones del radio r^l o $r^{-(l+1)}$ y de los polinomios $P_n(\cos \theta)$ llamadas polinomios de Legendre o armónicos esféricos zonales. Una de las propiedades más importantes de los armónicos es que cualquier solución a la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas se puede expresar como una sumatoria de armónicos esféricos. Otra propiedad es la ortogonalidad. Esto es, la integral de un armónico de orden n por otro de orden m alrededor de la esfera, sólo es diferente de cero, cuando $m = n$.

En vista de esto, se puede escribir el potencial de velocidad de la siguiente manera para solo una esfera en movimiento (ver Sección 2.3) :

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = \sum_{l,m} (A_{lm} r^l + B_{lm} r^{-(l+1)}) P_l^m(\cos \theta). \quad (3.10)$$

El potencial de velocidad se expresa en función de la velocidad de las burbujas y de la separación, haciendo un desarrollo en series de armónicos esféricos en cada esfera. Este método fue usado por Biesheuvel y Van Vijnngaarden (1982) para el estudio de interacción entre dos burbujas del mismo tamaño.

Ya que la ecuación de Laplace y las condiciones de frontera son lineales, se pueden calcular las contribuciones ϕ_1 y ϕ_2 , debidas a las velocidades V_k y W_k en las tres direcciones coordenadas por separado y después sumar para evaluar el potencial total. La ecuación de Laplace se resuelve usando el método de separación de variables y solo los armónicos esféricos de orden 0 y 1 se retienen. La solución para el potencial ϕ_1 y ϕ_2 es:

$$\Phi_{V_k} = \sum_{n=1}^{\infty} V_k \cdot a_1 \left\{ g_{mn}^1 \left(\frac{R}{r_1} \right)^{n+1} Y_n^k(\cos \theta_1, \mu) + g_{mn}^2 \left(\frac{R}{r_2} \right)^{n+1} Y_n^k(\cos \theta_2, \mu) \right\}, \quad (3.11)$$

$$\Phi_{W_k} = \sum_{n=1}^{\infty} W_k \cdot a_1 \left\{ -f_{mn}^1 \left(\frac{R}{r_1} \right)^{n+1} Y_n^k(\cos \theta_1, \mu) + f_{mn}^2 \left(\frac{R}{r_2} \right)^{n+1} Y_n^k(\cos \theta_2, \mu) \right\}; \quad (3.12)$$

donde las funciones $Y_n^k(\cos \theta, \mu)$ son los armónicos esféricos zonales de orden 0 y 1 correspondientes a cada dirección ortogonal y están definidos de la siguiente forma

$$\begin{aligned} Y_n^a(\cos \theta, \mu) &= P_n(\cos \theta), \\ Y_n^b(\cos \theta, \mu) &= P_n^1(\cos \theta) \cos \mu, \\ Y_n^c(\cos \theta, \mu) &= P_n^1(\cos \theta) \operatorname{sen} \mu. \end{aligned} \quad (3.13)$$

El movimiento del fluido en las tres direcciones esta relacionado con estos armónicos. Los armónicos del primer tipo $P_n(\cos \theta)$ están relacionados con la velocidad V_0 en la dirección colineal de las esferas. Los armónicos de segundo tipo $P_n^1(\cos \theta)$ estan relacionados con el movimiento en la dirección paralela de las esferas. Juntos forman el perfil del potencial alrededor de las tres direcciones.

Además, por simetría, el valor de las constantes g_{mn} esta relacionado para las dos expansiones por

$$g_{mn}^1 = (-1)^{m-1} g_{mn}^2. \quad (3.14)$$

Para evaluar las constantes f_{mn}^i y g_{mn}^i se usa la condición de frontera de la velocidad normal en la superficie de las burbujas

$$\nabla\Phi_1 \cdot n = 0 \quad (3.15)$$

En un sistema coordenado centrado en una esfera, los polinomios de Legendre pueden ser expresados mediante los términos centrados en la otra esfera, usando la expresión de desplazamiento derivada por Hobson (1931)

$$\left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1} \{P_n^m(\cos\theta_1)\} = \left(\frac{R}{s}\right)^{n+1} \sum_{q=m}^n \begin{bmatrix} n+q \\ q+m \end{bmatrix} \left(\frac{r_{1-1}}{s}\right)^q \cdot P_q^m(\cos\theta_{1-1}). \quad (3.16)$$

Se puede escribir el potencial Φ_1 de velocidad para dos burbujas en movimiento con velocidad V , en función del ángulo θ_1 y el radio r_1 , usando la fórmula de Hobson (Ec. 3.16) y la condición de simetría (Ec. 3.14)

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1} \{V_0 g_{mn}^1 P_n^m(\cos\theta_1)\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{V_0 (-1)^{m-1} g_{mn}^1 \left(\frac{R}{s}\right)^{n+1} \cdot \sum_{q=m}^{\infty} \begin{bmatrix} n+q \\ q+m \end{bmatrix} \left(\frac{r_1}{s}\right)^q P_q^m(\cos\theta_1)\right\}. \quad (3.17)$$

Aplicando las condiciones de frontera a la Ecuación (3.17) en la superficie de la burbuja, se encuentran las siguientes ecuaciones para los coeficientes de los multipolos g_{mn} :

$$g_{mn} = (-1)^m \left(\frac{1}{2} \delta_{1n} - \frac{n}{n+1} \sum_{q=m}^{\infty} \begin{bmatrix} q+n \\ n+m \end{bmatrix} g_{mq} \left(\frac{R}{s}\right)^{n+q+1} \right). \quad (3.18)$$

Soluciones para las Ecuaciones (3.18) se puede obtener escribiendo g_{mn} como una serie de potencias del cociente (R/s)

$$g_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} K_{mnp} \left(\frac{R}{s}\right)^p, \quad (3.19)$$

donde los coeficientes K_{mnp} se obtienen sustituyendo 3.19 en 3.18 y se igualan términos con potencias iguales en (R/s) , de tal forma que

$$K_{mn0} = (-1)^m \delta_{1n},$$

$$K_{mnp} = (-1)^{m-1} \frac{n}{n+1} \sum_{q=1}^{p-n-1} \begin{bmatrix} q+m \\ n+m \end{bmatrix} K_{mq(p-n-1)}. \quad (3.20)$$

De una manera similar se puede escribir la ecuación para el potencial ϕ_2 en función de las diferencias de velocidades W_k como:

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} - \left(\frac{R}{r_1} \right)^{n+1} \left\{ W_0 f_{0n}^{-1} P_n^0(\cos \theta_1) \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ W_0 (-1)^{m-1} f_{0n}^{-1} \left(\frac{R}{s} \right)^{n+1} \cdot \sum_{q=m}^{\infty} \begin{bmatrix} n+q \\ q+m \end{bmatrix} \left(\frac{r_1}{s} \right)^q P_q^m(\cos \theta_1) \right\}. \quad (3.21)$$

donde, por simetría, se puede derivar que

$$f_{mn}^1 = (-1)^{m-1} f_{mn}^2, \quad (3.22)$$

además, tenemos las siguientes condiciones de frontera

$$\nabla \Phi_1 \cdot n = \begin{Bmatrix} w \cdot n \dots \text{esfera..A} \\ -w \cdot n \dots \text{esfera..B} \end{Bmatrix}. \quad (3.23)$$

Usando las condiciones de frontera de las burbujas para las dos esferas, se obtienen la siguiente ecuación para f_{mn} :

$$f_{mn} = (-1)^m \left(\frac{1}{2} \delta_{1n} + \frac{n}{n+1} \sum_{q=m}^{\infty} \begin{bmatrix} q+n \\ n+m \end{bmatrix} f_{mq} \left(\frac{R}{s} \right)^{n+q+1} \right), \quad (3.24)$$

donde los coeficientes de los multipolos se obtienen escribiendo f_{mn} como una serie de potencias en (R/s) :

$$f_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} L_{mnp} \left(\frac{R}{s} \right)^p, \quad (3.25)$$

donde los coeficientes L_{mnp} se pueden del mismo modo que los coeficientes K_{mnp} :

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

$$L_{mn0} = (-1)^m \delta_{ln},$$

$$L_{mnp} = (-1)^m \frac{n}{n+1} \sum_{q=1}^{p-n-1} \left[\frac{q+m}{n+m} \right] K_{mq(p-n-1)}.$$
(3.26)

Los coeficientes más importantes en el potencial de velocidad son los correspondientes a los armónicos de primer orden g_{01} y g_{11} . De la misma forma que para el potencial ϕ_1 , los coeficientes que más interesan para el cálculo de la energía cinética son f_{01} y f_{11} . Estos aparecerán en el cálculo subsiguiente de la energía cinética del fluido. Los valores de estos coeficientes con exactitud hasta el término $(R/s)^{10}$, son:

$$g_{01} = \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{R}{s}\right)^3 + \left(\frac{R}{s}\right)^6 + 3\left(\frac{R}{s}\right)^8 - \left(\frac{R}{s}\right)^9 + \dots \right)$$

$$g_{11} = \frac{1}{2} \left(-1 - 0.5\left(\frac{R}{s}\right)^3 - 0.25\left(\frac{R}{s}\right)^6 - 1\left(\frac{R}{s}\right)^8 - 0.125\left(\frac{R}{s}\right)^9 + \dots \right)$$

$$f_{01} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{R}{s}\right)^3 + \left(\frac{R}{s}\right)^6 + 3\left(\frac{R}{s}\right)^8 + \left(\frac{R}{s}\right)^9 + \dots \right)$$

$$f_{11} = \frac{1}{2} \left(-1 + 0.5\left(\frac{R}{s}\right)^3 - 0.25\left(\frac{R}{s}\right)^6 - 1\left(\frac{R}{s}\right)^8 + 0.125\left(\frac{R}{s}\right)^9 + \dots \right)$$
(3.27)

De esta forma, se llega a una expresión del potencial en términos de las velocidades V_k y W_k . Mediante estos coeficientes, se puede obtener el potencial de velocidades y graficar las funciones de corriente y el potencial de velocidad. En la Figura 3.3 se muestra la imagen de dos esferas en movimiento en flujo potencial cuando la velocidad de las esferas es paralela y en el mismo sentido. Como se ve, las líneas de corriente se estrechan entre las dos burbujas, lo cual conduce a que haya menos presión en la región entre las burbujas y por lo tanto, las burbujas se atraen debido al efecto hidrodinámico.

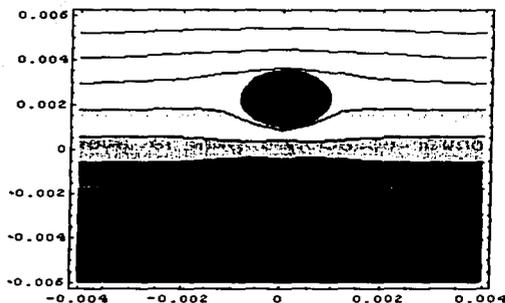


Figura 3.3 Líneas de corriente de dos esferas estáticas en un flujo uniforme.

Sumando las Ecuaciones (3.17) y (3.21) se puede expresar el potencial en función del radio r_1 y el ángulo θ_1 .

$$\Phi_{vk} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r_1} \right)^{n+1} R \{ D_{mn} Y_n^k(\cos \theta_1) \} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(\frac{R}{s} \right)^{n+1} R \left\{ \sum_{q=m}^{\infty} E_{mn} \left[\frac{n+q}{q+m} \right] \left(\frac{r_1}{s} \right)^q Y_q^k(\cos \theta_1) \right\} \quad (3.28)$$

De una forma similar, se puede expresar el potencial en función del radio r_2 y el ángulo θ_2 :

$$\Phi_{vk} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r_2} \right)^{n+1} R \{ E_{mn} Y_n^k(\cos \theta_2) \} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \left(\frac{R}{s} \right)^{n+1} R \left\{ \sum_{q=m}^{\infty} D_{mn} \left[\frac{n+q}{q+m} \right] \left(\frac{r_2}{s} \right)^q Y_q^k(\cos \theta_2) \right\} \quad (3.29)$$

El valor de las constantes D_{mn} , y E_{mn} esta dado en función de los coeficientes g_{mn} y f_{mn} . Estos aparecen al sumar los potenciales debido a las velocidades V_k , y W_k .

$$D_{mn} = G_m g_{mn} - W_n f_{mn}$$

$$E_{mn} = G_m g_{mn} + W_n f_{mn}$$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

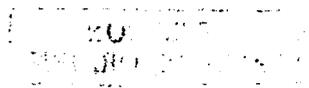
(3.31)

3.3 Ecuaciones de movimiento de dos burbujas en flujo potencial

Para obtener las ecuaciones de movimiento de las burbujas se puede recurrir a dos métodos. El primer método consiste en calcular la energía cinética del fluido. Se puede demostrar que la razón de cambio de la energía cinética con el tiempo es igual al trabajo realizado por las fuerzas externas sobre la esfera. Aplicando las ecuaciones de Lagrange al sistema de dos burbujas en movimiento, se puede encontrar las ecuaciones de movimiento derivando la energía cinética del fluido. Esto nos permite encontrar ecuaciones para la aceleración y la velocidad de las burbujas

El segundo método consiste en calcular el campo de presión del fluido en cada punto alrededor de la esfera. Usando el potencial de velocidades se deriva la velocidad de la burbuja y con la ecuación de Bernoulli se puede obtener la presión alrededor de la burbuja, para después integrar el campo de presión alrededor de la burbuja. Esta presión se sustituye en el balance de fuerzas (Ec. 3.7) para obtener 6 ecuaciones para la evolución de la velocidad de la burbuja en cada una de las direcciones coordenadas seleccionadas. Como la masa de la burbuja es despreciable en comparación de la masa del fluido, se puede obtener la aceleración sobre la burbuja. Estos dos métodos se muestran de manera esquemática en la Figura 3.2.

Los dos métodos usan la teoría de los armónicos esféricos, pero siguen caminos diferentes para obtener la aceleración de la burbuja. El método de la energía es mucho más directo, ya que por ortogonalidad se simplifican los términos con polinomios de Legendre de orden diferente a uno. El método de presión es más complicado, pues aparecen términos de multipolos de mayor orden. Es importante comprobar la equivalencia de los dos métodos. En la siguiente sección abordaremos el método de la energía para obtener las ecuaciones de movimiento, el método de presión lo abordaremos en la Sección 3.5.



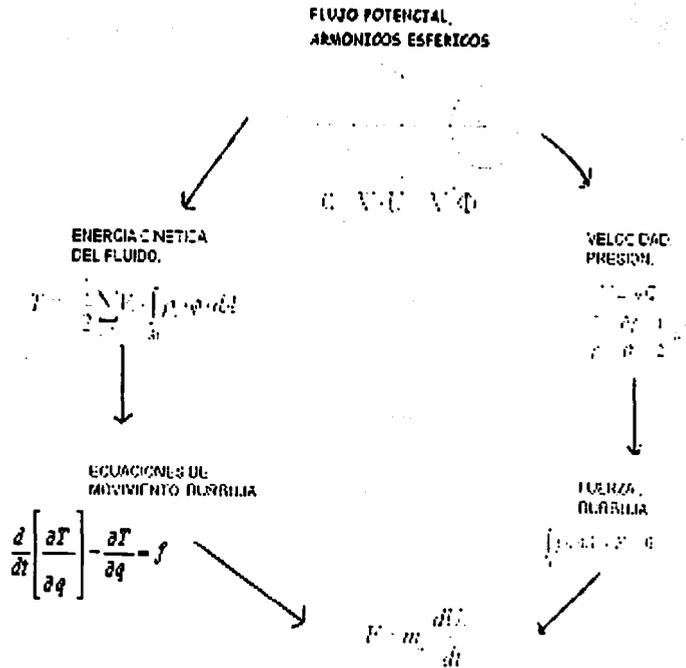


Figura 3.4 Método de energía y presión para obtener las ecuaciones de movimiento

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES
 EN QUÍMICA

3.3.1 Método de la energía cinética

El primer método para calcular las ecuaciones de movimiento de dos burbujas es a través de un balance de energía. La configuración que trataremos se muestra en la figura 3.3. Las burbujas tienen una velocidad inicial U una hacia la otra, cuando la distancia entre ellas es suficientemente grande para considerar las interacciones despreciables. El radio de la burbuja a , se usa para hacer adimensionales las escalas en longitud y la velocidad inicial de la burbuja U se usa para escalar las velocidades en el fluido.

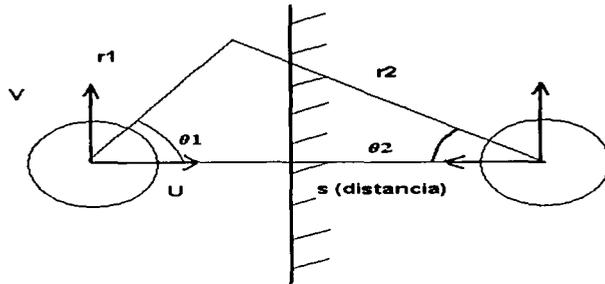


Figura 3.4 Configuración que muestra las burbujas en movimiento.

El potencial de velocidades esta dado por las Ecuaciones (3.11) y (3.12) donde la velocidad común V y los componentes de la diferencia de velocidad $W1$ y $W2$ son cero. La diferencia de velocidades U , a lo largo de la línea de centros es la magnitud de la velocidad de la burbuja adimensionalizada por U_0 .

La energía cinética del líquido alrededor de la burbuja en un marco de referencia en reposo, está asociada con el movimiento de las esferas:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{A_i} u^2 dV \tag{3.33}$$

TESTE CON FALLA DE ORIGEN

En la Ecuación (3.33) se realiza la integral sobre todo el volumen del fluido. La integral de volumen en 3.33 se puede transformar en una integral de Superficie usando el teorema de Green:

$$T = \frac{1}{2} \rho \left[\int_{A_\infty} \phi \nabla \phi \cdot n_\infty dA_\infty - \int_{A_i} \phi \nabla \phi \cdot n_i dA_i \right]. \quad (3.34)$$

donde la integración de área se hace sobre una superficie muy grande que rodea al líquido A_∞ y n_∞ es la normal a esta superficie, mientras que A_i y n_i son la superficie y la normal que rodean a cada una de las esferas en movimiento. Ya que el potencial decrece conforme $(1/r^2)$, la integral sobre la superficie en infinito es cero y la expresión para la energía cinética se reduce a una integral de superficie del potencial por el gradiente del potencial. Usando la expresión para el potencial (3.17), se multiplica esta expresión por la velocidad normal en la superficie de la esfera $U \cos \theta$. La integral se simplifica, debido a la ortogonalidad de los polinomios de Legendre, para dar la siguiente expresión:

$$T = -\frac{2}{3} \pi U^2 \cdot 2 \left\{ -f_{01} - \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{j+1}{1} \right] \left(\frac{R}{s} \right)^{j+2} f_{0j} \right\}, \quad (3.35)$$

De la Ecuación de recursividad (3.23) para f_{mn} , se puede simplificar la expresión anterior:

$$T = -\frac{4}{3} \pi a^3 U^2 \{ 1 - 3f_{01} \}, \quad (3.36)$$

donde sólo aparecen en la ecuación la velocidad y el radio de las burbujas y el término correspondiente al primer dipolo f_{01} . Usando la condición de que la razón de cambio de la energía cinética es cero, se obtiene la ecuación para la aceleración de la burbuja correcta hasta el orden $O(a/R)^{10}$, ya que se escribe f_{01} con este orden de exactitud.

$$\frac{dU}{dt} = - \frac{U^2}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s} (1 - 3f_{01}) = \frac{9U^2}{R} \left[\frac{R}{s} \right]^4 (1 + 2 \frac{R^3}{s^3} + 8 \frac{R^5}{s^5} + 3 \frac{R^7}{s^7}). \quad (3.37)$$

Esta ecuación se puede resolver numéricamente para obtener valores de la velocidad conforme se acercan las dos esferas. Es importante encontrar el comportamiento a distancias entre esferas pequeñas, cuando $R/s \rightarrow 2$. Hay que notar que en esta solución solo aparecen los términos correspondientes al primer dipolo f_{01} . Cuando se usa el método de presión, se encuentran términos extras que influyen en el movimiento de las burbujas, debido a los multipolos de orden mayor a uno. En el Capítulo 4 se analizara con mayor detalle este problema.

3.3.2 Solución general (caso en tres dimensiones)

Se puede obtener una expresión general de la energía cinética usando la expresión general del potencial de velocidades de la Ecuación (3.29) y (3.30). Realizando la integral del producto de los términos del potencial por el gradiente del potencial del fluido en la frontera de la esfera y simplificando las integrales de área con las relaciones de ortogonalidad, se obtiene la siguiente ecuación:

$$T = - \frac{2}{3} \rho \pi R^3 \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{1a} \\ U_{1b} \\ U_{2c} \end{Bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} D_{01} \\ D_{11} \\ D_{21} \end{Bmatrix} + \sum_{q=m}^{\infty} \begin{bmatrix} j+1 \\ 1+m \end{bmatrix} \left(\frac{R}{s} \right)^{j+2} \begin{Bmatrix} E_{01} \\ E_{11} \\ E_{21} \end{Bmatrix} \right\} \\ - \frac{2}{3} \rho \pi R^3 \sum_{n=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{1a} \\ U_{1b} \\ U_{2c} \end{Bmatrix} \left\{ \begin{Bmatrix} E_{01} \\ E_{11} \\ E_{21} \end{Bmatrix} + \sum_{q=m}^{\infty} \begin{bmatrix} j+1 \\ 1+m \end{bmatrix} \left(\frac{R}{s} \right)^{j+2} \begin{Bmatrix} D_{01} \\ D_{11} \\ D_{21} \end{Bmatrix} \right\}. \quad (3.38)$$

Con esta expresión para la energía cinética se pueden obtener las ecuaciones de movimiento de cada burbuja puesto que la energía está expresada en función de las velocidades de las burbujas y de los coeficientes del potencial del primer dipolo, g_{01} , g_{11} y f_{01} , f_{11} . Las Ecuaciones (3.38) se pueden escribir en una forma cuadrática en los componentes de velocidad común G y diferencia de

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

velocidades W , sustituyendo los valores de los arreglos D y E

$$T = \frac{1}{2} \rho_l V a_{ij} u^i u^j. \quad (3.39)$$

Los componentes contravariantes de velocidad se toman de la siguiente forma: para $i=0..2$ y para $j=3..5$,

$$\begin{aligned} u^i &= G_i, \\ u^j &= W_j, \end{aligned} \quad (3.40)$$

donde G_i son las velocidades del centro de masas de las dos burbujas y W_i son las velocidades relativas entre las burbujas en las tres direcciones ortogonales. En ese caso, los componentes a_{ij} del tensor de inercia de segundo orden están dados por:

$$\begin{aligned} a_{00} &= 2 \left[g_{01} - \sum_{q=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} j+1 \\ 1 \end{matrix} \right] \left(\frac{R}{s} \right)^{j+2} g_{0j} \right], \\ a_{11} = a_{22} &= 2 \left[-g_{11} - \sum_{q=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} j+1 \\ 1 \end{matrix} \right] \left(\frac{R}{s} \right)^{j+2} g_{1j} \right], \\ a_{33} &= 2 \left[f_{01} + \sum_{q=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} j+1 \\ 1 \end{matrix} \right] \left(\frac{R}{s} \right)^{j+2} f_{0j} \right], \\ a_{44} = a_{55} &= 2 \left[-f_{11} + \sum_{q=0}^{\infty} \left[\begin{matrix} j+1 \\ 1 \end{matrix} \right] \left(\frac{R}{s} \right)^{j+2} f_{1j} \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Las sumatorias sobre los índices j en las sumas de los coeficientes g_{mj} y f_{mj} , se pueden remover usando las Ecuaciones de recursividad (3.14) y (3.23) con $n=1$. De esta forma los coeficientes del tensor de inercia de segundo orden son:

$$\begin{aligned} a_{00} &= 2[-1 + 3g_{01}], \\ a_{11} = a_{22} &= 2[-1 - 3g_{11}], \\ a_{33} &= 2[-1 + 3f_{01}], \\ a_{44} = a_{55} &= 2[-1 - 3f_{11}]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Como el tensor de inercia esta diagonalizado, se puede concluir que los ejes con direcciones e_0, e_1, e_2 son los ejes principales del sistema de dos esferas

en movimiento. En muchos casos el movimiento no sucede en tres dimensiones sino en un solo plano. En tal caso se usan los vectores e_0 y e_1 .

3.3.3 Energía cinética del fluido en función de la velocidad del centro de masa y las velocidades relativas

El sistema de coordenadas usado es un poco inadecuado para obtener las ecuaciones de movimiento a través de las ecuaciones de Lagrange, porque los ejes coordenadas giran alrededor del centro de masa de las burbujas en movimiento. Por tal razón, es necesario transformar las velocidades q^0 y q^1 del sistema basado en e_0, e_1 a un sistema x, y , basado en los vectores unitarios e_x, e_y fijos en el espacio. Las formulas de transformación son las siguientes:

$$\begin{aligned} u^0 &= -x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ u^1 &= x' \sin \theta - y' \cos \theta. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Los componentes del movimiento relativo se transformarán del sistema coordenado e_3 y e_4 , a un sistema coordenado polar, con origen en el centro de masa de las dos burbujas:

$$\begin{aligned} u^3 &= -\frac{1}{2} s', & u^4 &= -\frac{1}{2} s \theta'. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Llevando a cabo dichas transformaciones y reorganizando y renumerando los componentes de velocidad, se obtiene una nueva expresión para la energía cinética de las dos burbujas en función de las velocidades x', y' y s', θ' .

$$T = \frac{1}{2} \rho_l V a_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad \begin{aligned} q^1 &= x, & q^3 &= s, \\ q^2 &= y, & q^4 &= \theta. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Al transformar las coordenadas, los componentes del tensor de inercia a_{ij} se transforman de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= -2 + 3(g_{01} - g_{11}) + 3(g_{01} + g_{11}) \cos 2\theta, \\
 a_{22} &= -2 + 3(g_{01} - g_{11}) - 3(g_{01} + g_{11}) \cos 2\theta, \\
 a_{12} &= a_{21} = 3(g_{01} + g_{11}) \sin 2\theta, \\
 a_{33} &= \frac{1}{2} [-1 + 3f_{01}], \\
 a_{44} &= \frac{1}{2} s^2 [-1 - 3f_{11}]
 \end{aligned}
 \tag{3.46}$$

En estas ecuaciones, se nota que los componentes a_{11} , a_{22} , a_{12} tienen incluidas las coordenadas del movimiento relativo. Esto hace que el movimiento del centro de masa quede acoplado con el movimiento relativo de las esferas. A continuación derivaremos a partir de las ecuaciones de Lagrange, las ecuaciones de movimiento de dos burbujas en movimiento. Con esto obtendremos expresiones para la aceleración de las burbujas.

3.3.4 Ecuaciones de movimiento para un par de esferas en un fluido perfecto por el método de la energía

Las ecuaciones de Lagrange aplicadas a un sistema de coordenadas fijo, son aplicables a la solución del movimiento o aceleración de un cuerpo hidrodinámico sumergido en un fluido potencial. Las ecuaciones de Lagrange en coordenadas generalizadas q^i se pueden escribir, como:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^i} \right] - \frac{\partial T}{\partial q^i} = F_i,
 \tag{3.47}$$

donde T es la energía cinética, q_i son las coordenadas generalizadas de una partícula en movimiento en un campo conservativo y F_i son los componentes covariantes de la fuerzas resultantes sobre el cuerpo en movimiento. Cuando el sistema de coordenadas se mueve con la esfera es necesario modificar las ecuaciones de Lagrange, pero ya que hemos transformado nuestro sistema de coordenadas a un sistema de coordenadas absoluto x , y y un sistema de

coordenadas relativo s, θ , esto no nos afecta. Combinando las Ecuaciones (3.43) con (3.44) se obtiene:

$$\rho_l V \frac{d}{dt} \left[a_{11} \frac{dx}{dt} + a_{12} \frac{dy}{dt} \right] = F_1,$$

$$\rho_l V \frac{d}{dt} \left[a_{12} \frac{dx}{dt} + a_{22} \frac{dy}{dt} \right] = F_2,$$

$$\rho_l V \frac{d}{dt} \left[a_{33} ds/dt \right] = \frac{1}{2} \rho_l V \left[\dot{x}^2 \frac{\partial}{\partial s} a_{11} + \dot{y}^2 \frac{\partial}{\partial s} a_{22} + \dot{x} \dot{y} \frac{\partial}{\partial s} a_{12} + s^2 \frac{\partial}{\partial s} a_{33} + \dot{\theta}^2 \frac{\partial}{\partial s} a_{44} \right] + F_3,$$

$$\rho_l V \frac{d}{dt} \left[a_{44} d\theta/dt \right] = 3\rho_l V (g_{01} + g_{11}) \left[(-\dot{x}^2 + \dot{y}^2) \text{sen} 2\theta + 2\dot{x}\dot{y} \text{cos} 2\theta \right] + F_4.$$

(3.48)

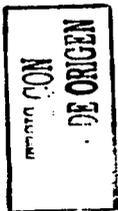
Estas son las ecuaciones de movimiento de dos burbujas que se mueven en un flujo potencial. Los términos F_1 a F_4 son las fuerzas que actúan sobre las burbujas como la fuerza de gravedad, el arrastre hidrodinámico, etc.

De estas ecuaciones se encuentra que los movimientos relativos y el movimiento del centro de masa están acoplados. El movimiento del centro de masa depende del ángulo y la distancia relativa, debido a los componentes del tensor a_{ij} . El movimiento relativo depende del cuadrado de la velocidad lineal x', y' . La naturaleza de estas fuerzas se investigará estudiando dos esferas en movimiento con velocidad de ascenso x' mucho mayor que las demás velocidades y', s', θ' . Para la coordenada en s sabemos que las esferas se atraen o repelen entre sí, dependiendo de la orientación de θ . Hay un cambio en el signo de a_{11} , cuando $\frac{\partial}{\partial s} a_{11} = 0$, si $\theta = \alpha^\circ$, donde $\alpha = f(R/s)$ y está dado por la siguiente relación:

$$\cos 2\alpha = \frac{\frac{d}{ds} [g_{01} - g_{11}]}{\frac{d}{ds} [g_{01} + g_{11}]}.$$

(3.49)

Los valores para α , dados por la Ecuación 3.48 varían desde 54.73° para $s/R \rightarrow \infty$, hasta 35° para $R/s \rightarrow 2$. La ecuación para θ muestra que en la dirección θ ,



hay un momento hidrodinámico que tiende a alinear las burbujas en la dirección $\theta=0=90^\circ$. Una conclusión de esto, es que la posición $\theta=0^\circ$ es inestable pues una pequeña perturbación en el flujo, tenderá a desalinearse las esferas y por lo tanto, las burbujas tienden a alinearse en dirección perpendicular al flujo.

3.4 Fuerzas de arrastre sobre la burbuja

Como hemos visto, el flujo alrededor de las burbujas se puede considerar potencial en la zona externa de la burbuja, a excepción de una pequeña capa límite donde existen fuerzas viscosas. Las fuerzas de arrastre se pueden calcular evaluando los esfuerzos normales y de corte en la capa límite, sin embargo este enfoque es demasiado laborioso.

Otro enfoque es calcular la razón de disipación de energía del fluido. Esta energía debe ser igual al trabajo que hace la burbuja en deformar el fluido (Batchelor, p368, 1967). Usando la razón de disipación calculada a partir del flujo potencial e igualándola a la fuerza de arrastre multiplicada por la velocidad de la burbuja. Levich (1962), encontró el coeficiente de arrastre de una burbuja solitaria

$$C_D = \frac{48}{Re}, \quad \text{donde } Re = 2RU/\nu. \quad (3.50)$$

donde R es el radio de la burbuja, U la velocidad y ν la viscosidad cinemática. Moore (1963) mejoró estos resultados, calculando la razón de disipación en la capa límite. De esta forma obtuvo otro coeficiente de arrastre:

$$C_D = \frac{48}{Re} \left[1 - \frac{2.2}{\sqrt{Re}} \right] + O(Re^{-11/16}). \quad (3.51)$$

Podemos extrapolar estos resultados para calcular la razón de disipación para dos esferas en movimiento en flujo potencial. Los coeficientes de arrastre calculados del flujo i-rotacional son exactos en orden (Re^{-1}). Como estamos interesados en burbujas que se mueven a Re alrededor de 200, los errores son menores al 0.5%. La razón de disipación esta dada por:

$$D = \mu \sum_{i=1}^2 \int \nabla(\nabla \phi \cdot \nabla \phi) \cdot dA, \quad (3.52)$$

donde ϕ es el potencial calculado en la Sección (3.3), μ es la viscosidad dinámica y dA es el elemento de área diferencial dirigido normal a la superficie de integración A_i . Las integrales de superficie se pueden evaluar usando las propiedades de ortogonalidad y varias formulas de recurrencia de los polinomios de Legendre. Kok (1989) y Biesheuvel (1982) encontraron que la razón de disipación puede ser expresada como:

$$D = \pi\mu RK_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j, \quad (3.53)$$

con los componentes contra variantes de la velocidad \dot{q}^i . Los coeficientes K_{ij} dependen de las coordenadas q^i , pero no de las velocidades de la burbuja \dot{q}^i . Los coeficientes de arrastre son los siguientes:

$$\begin{aligned} K_{00} &= 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} g_{0n}^2, \\ K_{11} &= K_{22} = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} g_{1n}^2, \\ K_{33} &= 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} f_{0n}^2, \\ K_{44} &= K_{55} = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} g_{1n}^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Estos coeficientes están basados en las coordenadas G_i y W_i . Al igual que las ecuaciones de movimiento es mejor referirlas a las coordenadas fijas x , y y relativas s , q . Al transformar los coeficientes a este sistema de coordenadas se obtiene:

$$\begin{aligned} K_{11} &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} \left[\left[g_{0n}^2 + \frac{n(n+1)}{2} g_{1n}^2 \right] + \left[g_{0n}^2 - \frac{n(n+1)}{2} g_{1n}^2 \right] \cos 2\theta \right], \\ K_{22} &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} \left[\left[g_{0n}^2 + \frac{n(n+1)}{2} g_{1n}^2 \right] - \left[g_{0n}^2 - \frac{n(n+1)}{2} g_{1n}^2 \right] \cos 2\theta \right], \\ K_{12} &= 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} \left[\left[g_{0n}^2 - \frac{n(n+1)}{2} g_{1n}^2 \right] \sin 2\theta \right], \\ K_{33} &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} f_{0n}^2, \\ K_{44} &= K_{55} = 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} x^2 f_{1n}^2. \end{aligned} \quad (3.55)$$

En analogía con la situación de una burbuja, las fuerzas de arrastre se pueden calcular igualando la energía calculada con la razón de disipación en el fluido. El trabajo realizado por la fuerza de arrastre a la velocidad de ascensión de la burbuja es:

$$D = -f_i \dot{q}^i, \quad (3.56)$$

donde f_i son los componentes contra variantes de las fuerzas de arrastre ejercidas por las burbujas en el fluido. Comparando las Ecuaciones (3.53) con (3.56) podemos concluir que las fuerzas de arrastre están dadas por:

$$F = -\pi\mu R K_{ij} \dot{q}^j \quad (3.57)$$

Ya se mencionó que los coeficientes K_{ij} dependen de las coordenadas q^i , pero no de las velocidades. Otro método, que nos permite calcular las fuerzas de arrastre es el de Raleigh, en donde se calculan las fuerzas a partir de la razón de disipación D

$$f_i = - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} (D/2). \quad (3.58)$$

Combinando las tres Ecuaciones (3.53, 3.55, 3.58), se obtienen los valores de las fuerzas de arrastre en la ecuación de movimiento.

$$\begin{aligned} f_1 &= -8\mu\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} \left[\dot{x} \left[g_{0n}^2 + \frac{n(n+1)}{2} g_{1n}^2 \right] \right] \\ &+ (\dot{x} \cos 2\theta + \dot{y} \sin 2\theta) \left[g_{0n}^2 - \frac{n(n+1)}{2} g_{1n}^2 \right], \\ f_1 &= -8\mu\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} \left[\dot{y} \left[g_{0n}^2 + \frac{n(n+1)}{2} g_{1n}^2 \right] \right] \\ &+ (-\dot{y} \cos 2\theta + \dot{x} \sin 2\theta) \left[g_{0n}^2 - \frac{n(n+1)}{2} g_{1n}^2 \right], \\ f_3 &= -4\mu\pi R s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} f_{0n}^2, \\ f_4 &= -4\mu\pi R s^2 \dot{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} f_{1n}^2. \end{aligned}$$

(3.59)

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Note que en estas ecuaciones las fuerzas de arrastre del movimiento relativo no están acopladas con las del movimiento del centro de masa a diferencia de las ecuaciones de movimiento.

Con estas ecuaciones ya tenemos las herramientas para calcular las trayectorias de las burbujas en flujo potencial incluyendo los efectos viscosos. Para hacerlo, necesitamos resolver el sistema de ecuaciones (3.48) de las ecuaciones de movimiento. Estas son ecuaciones no lineales de segundo orden, en x , y además en q , s . En los siguientes 2 capítulos daremos una solución a los dos sistemas.

3.5 Método de la presión para obtener la ecuación de movimiento

El segundo método para obtener las ecuaciones de movimiento es a partir del cálculo de la presión alrededor de las burbujas. Sustituyendo el campo de velocidades en la ecuación de Bernoulli, se obtiene la presión en cada punto alrededor de la burbuja. Después, se puede integrar para obtener una fuerza resultante sobre cada burbuja.

La ecuación de Bernoulli no estacionaria, incluyendo la derivada del potencial con el tiempo y la velocidad al cuadrado es la siguiente:

$$\frac{P}{\rho} = -\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2}u^2. \quad (3.60)$$

Al combinar la ecuación de Bernoulli con el balance de fuerza y con la definición del potencial de velocidad, se obtiene la ecuación para la fuerza resultante sobre la burbuja:

$$\int \frac{\partial\phi}{\partial t} Y_i^K(\theta_i, \mu) dA_i + \int \frac{1}{2} u^2 Y_i^K(\theta_i, \mu) dA_i + \frac{1}{\rho} F_i \cdot e_M = 0, \quad (3.61)$$

donde $i=1,2$ y $K=a, b, c$ son las direcciones de movimiento de la burbuja. Note que las componentes de la normal de la diferencial de área en (3.50) se han escrito como armónicos esféricos.

3.5.1 Ecuaciones de movimiento por el método de la presión.

En esta sección calcularemos la presión alrededor de la burbuja para el caso en que las dos burbujas se acercan con dirección colineal y con velocidad en sentido contrario. Hay dos términos muy importantes en esta ecuación. El primero es la derivada del potencial respecto al tiempo. Ya que el potencial de velocidad cambia a medida que las burbujas se acercan o se alejan, es necesaria una variación en la velocidad de las esferas para compensar este efecto.

El cambio respecto al tiempo del potencial, se expresa en término de las velocidades de las burbujas y las distancias entre ellas de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \sum_{k=a,b,c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial V_k} \frac{dV_k}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial W_k} \frac{dW_k}{dt} \right) - \nabla \phi \cdot U_i \quad (3.62)$$

El último término en la expresión compensa por el movimiento del sistema esférico con la burbuja. Note que, mientras la velocidad del fluido es definida en un sistema coordinado en movimiento con la burbuja, la velocidad de la burbuja es relativa a un sistema fijo de referencia.

Las Ecuaciones del potencial (3.11) y (3.12) se sustituyeron, en la ecuación (3.61) y (3.62), para obtener la aceleración de las burbujas en las tres coordenadas espaciales. Las integrales de superficie se simplifican explotando la simetría de los polinomios de Legendre alrededor de los ejes coordinados. Por lo tanto, las ecuaciones que representa la integral del cambio del potencial respecto al tiempo en las direcciones x y y son las siguientes:

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial t} n_1 dA = V_c \left[\begin{array}{l} \{-1 + 3g_{01}\} \frac{dVa}{dt} + Va \frac{d}{ds} \{-1 + 3g_{01}\} \frac{ds}{dt} + \\ \{1 - 3f_{01}\} \frac{dWa}{dt} + Wa \frac{d}{ds} \{1 - 3f_{01}\} \frac{ds}{dt} \end{array} \right] - \int \nabla \phi \cdot U_i \cdot n_1 dA,$$

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial t} n_2 dA = V_c \left[\begin{array}{l} \{1 + 3g_{11}\} \frac{dVb}{dt} + Vb \frac{d}{ds} \{1 + 3g_{11}\} \frac{ds}{dt} + \\ \{-1 - 3f_{11}\} \frac{dWb}{dt} + Wb \frac{d}{ds} \{-1 - 3f_{11}\} \frac{ds}{dt} \end{array} \right] - \int \nabla \phi \cdot U_i \cdot n_1 dA.$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

(3.63)

Simplificando el problema al del dos esferas que se mueven con velocidad colineal, es decir cuando las velocidades V_a y V_b son iguales a cero, y sólo la velocidad relativa colineal W_a es diferente de cero e igual a U , mientras que $W_b=0$, las ecuaciones anteriores se simplifican para el choque de dos esferas en dirección colineal:

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial t} n_i dA = V_c \left[\{1 - 3f_{01}\} \frac{dU}{dt} + U \frac{ds}{dt} \frac{d}{ds} \{1 - 3f_{01}\} \right] - \int \nabla \phi \cdot U i \cdot n_i dA. \quad (3.64)$$

Ahora es necesario calcular el término correspondiente al producto de la velocidad del fluido por la velocidad de la esfera, el último término en la Ecuación (3.64). Sabemos que la velocidad normal del líquido es $U_n = U \cos \theta$. La velocidad tangencial se puede calcular derivando respecto al ángulo y dividiendo entre r_1 .

$$U_\theta = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \sum_{n=1}^{\infty} UR / r_1 \left\{ (-1)^n \delta_{1n} - \binom{n+1}{n} f_{nn} \right\} \frac{dP_n^m(\cos \theta_1)}{d \cos(\theta_1)} (-\sin \theta). \quad (3.65)$$

Por último, es necesario calcular el producto de la velocidad tangencial del fluido por la velocidad tangencial de la esfera, igual a $-U \sin(\theta)$, multiplicarla por la normal a la superficie $x = \cos \theta$, multiplicarla por la diferencial de área $dA = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$ e integrar. Al realizar dicha integración se obtiene:

$$\int \nabla \phi \cdot U i \cdot n_i dA = -4\pi R^2 f_{02} U^2. \quad (3.66)$$

Por lo tanto la Ecuación (3.64) se puede reescribir utilizando la Ecuación (3.62) de la siguiente manera:

$$\int \frac{\partial \phi}{\partial t} n_i dA = V_c \left[\{1 - 3f_{01}\} \frac{dU}{dt} + U \left(\frac{ds}{dt} \right) \frac{d}{ds} \{1 - 3f_{01}\} \right] + 4\pi R^2 f_{02} U^2. \quad (3.67)$$

Como vemos en esta ecuación, el primer término entre paréntesis es similar al obtenido en la solución usando la energía cinética.

En la siguiente Sección calcularemos la contribución de la velocidad al cuadrado a la presión en la ecuación de Bernoulli. Al calcular esta contribución

aparecen los términos de los múltipolos f_{01} , f_{02} , f_{03} ... f_{0n} . Analizaremos su importancia en la aceleración de la burbuja. Cada coeficiente va siendo un orden de magnitud menor que el anterior, por lo tanto la importancia de cada término extra es cada vez de menor magnitud.

3.5.2 Contribución de la velocidad al cuadrado en el balance de presiones

En la siguiente Sección calcularemos la contribución debida al cuadrado de la velocidad. Como veremos este término arroja contribuciones de productos de los coeficientes de los multipolos $f_{02}f_{03}$, $f_{03}f_{04}$... Estas contribuciones son muy pequeñas. Sin embargo, es necesario conocer si éstas contribuciones a la presión son despreciables o por el contrario son muy grandes y causan que las burbujas no choquen.

A continuación, se calculará la integral del gradiente cuadrado de la velocidad del fluido, en la Ecuación del balance de fuerzas (3.61).

$$\frac{1}{2} \int U^2 n_i dA_i = \frac{1}{2} \int \nabla \phi \cdot \nabla \phi \cdot n_i dA. \quad (3.68)$$

Los componentes de la velocidad del fluido son dos: la velocidad normal a la esfera en cada punto y la velocidad tangencial o angular en cada punto. La componente de la velocidad normal es $U \cos \theta$, la cual es simétrica respecto al eje $\theta = \pi/2$. Por lo tanto no causa contribución a la fuerza resultante sobre la burbuja.

Sin embargo, la componente tangencial calculada en la Ecuación (3.65) si causa una fuerza resultante sobre la esfera ya que es asimétrica respecto al eje $\theta = \pi/2$. Ahora analizaremos la contribución de este término. Usando la Ecuación (3.65) se obtiene el valor de U_θ para diferentes valores de n

$$\frac{1}{r_1} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \sum_{n=1}^{\infty} UR / r_1 \left\{ (-1)^n \delta_{1n} - \binom{n+1}{n} f_{nn} \right\} \frac{dP_n(x)}{dx} (-1-x)^{1/2}, \quad (3.69)$$

donde $x = \cos\theta$ y U es la velocidad de aproximación de la burbuja. Calculando los primeros cinco valores de la serie de polinomios de Legendre para cada término, obtenemos una aproximación de la velocidad tangencial:

$$r_1 \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = U \left\{ \begin{aligned} &(1 - 3f_{01})(1) + \\ &\left(-\frac{5}{2} f_{02}\right)(3x) + \\ &\left(-\frac{7}{3} f_{03}\right)(15/2x^2 - 3/2) + \\ &\left(-\frac{9}{4} f_{04}\right)(35/2x^3 - 15/2x) + \\ &\left(-2f_{05}\right)(315/8x^4 - 210/8x^2 + 15/8) + \dots \end{aligned} \right\} \left\{ -(1-x^2)^{1/2} \right\}. \tag{3.70}$$

Como se ve, el valor del perfil de velocidad varía incluyendo mayor número de términos en la solución. Al graficar la velocidad tangencial (mediante un programa en Mathematica), para distancias entre esferas cercanas a $s=2R$, se encontró que la velocidad tangencial tiende a valores muy grandes en el área de contacto de la esfera (es decir para ángulos θ cercano a 0 grados). Es necesario saber si la integral de la presión sobre la burbuja (Ecuación 3.61) diverge o es convergente cuando las dos burbujas se aproximan una a otra.

El valor de la integral 3.68, calculado para 10 valores de la serie de polinomios de Legendre, mediante un programa en Mathematica, es el siguiente:

$$\frac{1}{2} \int \nabla \phi \cdot \nabla \phi \cdot n \cdot dA = -4\pi R^2 U^2 (f_{02} - 3f_{01}f_{02} - 4f_{02}f_{03} - \dots - (n+1)f_{0n-1}f_{0n} - \dots). \tag{3.71}$$

Este término lo podemos introducir en el balance de fuerzas de la presión, Ecuación (3.61) y obtener un valor para la aceleración. Introduciendo el valor de la integral $d\phi/dt$ y de $\text{grad}^2 \phi$, calculados en estas dos secciones, encontramos para el balance de fuerzas sobre la esfera:

$$V \left[\{1 - 3f_{01}\} \frac{dU}{dt} + U \left(\frac{ds}{dt} \right) \frac{d}{ds} \{1 - 3f_{01}\} \right] + 4\pi R^2 f_{02} U^2 - 4\pi R^2 U^2 (f_{02} - 3f_{01}f_{02} - 4f_{02}f_{03} - 5f_{03}f_{04} - \dots - (n+2)f_{0n}f_{0n+1}) - \frac{F_i e_{ik}}{\rho} = 0. \quad (3.72)$$

Si despreciamos la fuerza de arrastre, el último término del lado izquierdo de la Ecuación (3.72), lo podemos considerar cero. Rearreglando la Ecuación (3.72), dividiendo por el volumen y por el término $(1-3f_{01})$ y además sustituyendo $U = -1/2(ds/dt)$, se obtiene la ecuación para la aceleración de la burbuja:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{1-3f_{01}} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d}{ds} \{1 - 3f_{01}\} + \frac{3(ds/dt)^2}{2R(1-3f_{01})} (3f_{01}f_{02} + 4f_{02}f_{03} + 5f_{03}f_{04} + \dots + (n+1)f_{0n-1}f_{0n} + \dots) - \frac{F_i e_{ik}}{\rho} = 0 \quad (3.73)$$

Si analizamos estos términos, el primer término de la Ecuación (3.73) es positivo y causa repulsión entre las esferas. El segundo término en la ecuación es negativo y por el contrario causa atracción entre las esferas. Por lo tanto, el término debido a la velocidad de las burbujas causa una atracción. De tal forma existe una competencia entre las fuerzas que determinan la repulsión entre las burbujas (cambio temporal del potencial) y de las fuerzas que causan que las burbujas se atraigan (velocidad al cuadrado del fluido). La diferencia del método de presión es que nos muestra desglosado la contribución de cada término.

Si comparamos la Ecuación (3.73) obtenida por el método de presión con la Ecuación (3.34) obtenida por el método de la energía, notamos dos cosas. La primera es que el primer término de la Ecuación (3.73) es igual al doble del obtenido en la Ecuación (3.34). La segunda observación es que en el método de presión se obtiene la sumatoria de términos debidos a los dipolos. Estos términos no aparecen en el método de la energía. En la Sección 4 se modelara el movimiento de dos esferas en movimiento colineal. En este trabajo se encontró que el movimiento obtenido por ambos sistemas es equivalente.

Esto es una gran ventaja, porque debemos esperar que ambos métodos de solución nos arrojen un resultado parecido.

3.5.3 Comportamiento de la velocidad tangencial de las burbujas

Ahora analizaremos el comportamiento de la velocidad tangencial, calculando su magnitud calculada a partir de un programa en Mathematica. A continuación, mostramos gráficas de la velocidad tangencial como función del ángulo de la esfera para una distancia entre esferas de (5, 2.5, 2.01) radios y ($R=1$ mm, $U=1$ m/s). El calculo se realizo con 10 armónicos en la función de potencial de velocidad.

Observamos que a medida que se acercan las dos esferas, las gráficas muestran una velocidad mayor en el punto de contacto, esto es para $x=\cos\theta=1$. A medida que se acercan más las esferas, la velocidad en la zona de contacto es mayor pero la presión es menor (por efecto Bernoulli) y por tanto la fuerza de repulsión entre las dos esferas disminuye en vez de aumentar.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

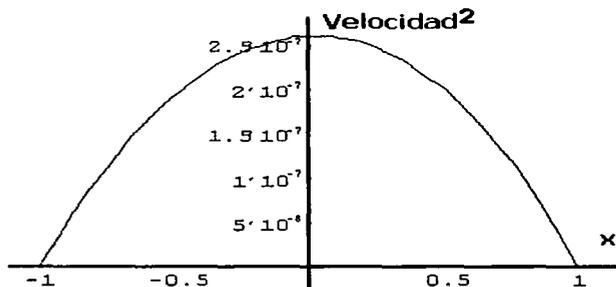


Figura 5.8 Gráfica de $(V_t)^2$ en función de $x=\cos\theta$, ($s=5R$), ($R=1$ mm, $U=1$ m/s)

En la Figura 5.8 se observa el comportamiento cuando $s=2.01$ Radios. En este caso las burbujas prácticamente están en contacto, pero la fuerza de repulsión que hay entre ellas no diverge. Basado en esta observación, la fuerza entre las burbujas no crece a infinito y por lo tanto las burbujas pueden chocar con velocidad finita.

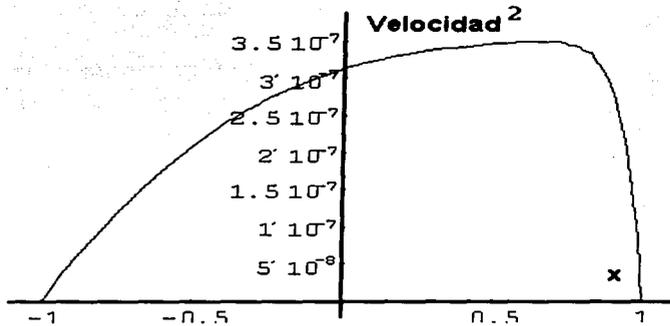
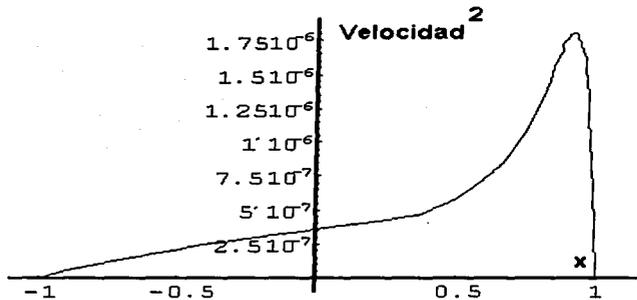


Figura 5.8 Gráfica de $(V_0)^2$ en función de $x=\cos(\theta)$, ($s=2.5 R$), ($R=1 \text{ mm}$, $U=1 \text{ m/s}$)



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 5.8 Gráfica de $(V_0)^2$ en función de $x=\cos\theta$, ($s=2.01 R$), ($R=1 \text{ mm}$, $U=1 \text{ m/s}$)

La convergencia de la serie que representa la presión debida a la contribución del campo de velocidad es importante para determinar si las burbujas chocan o no chocan, al menos en teoría. Si la serie que representa esta presión diverge, es decir cada termino es mayor que el anterior o simplemente la sumatoria tiende a infinito y la fuerza también es infinita, las burbujas chocan en

un flujo potencial. Sin embargo si la serie es convergente entonces la fuerza es finita y no es suficiente para detener el movimiento de las burbujas.

En este trabajo se realizó este análisis y se encontró que la fuerza es convergente. El análisis se muestra en el apéndice 3-A y se puede consultar si le interesa al lector. Por el momento podemos concluir que siendo la fuerza finita y la serie convergente, es posible que las burbujas choquen en un fluido potencial.

En el siguiente capítulo integraremos la aceleración obtenida por los métodos de energía y de presión, obteniendo la velocidad y la posición en cada instante de tiempo para demostrar si las burbujas colisionan con velocidad finita. El conocimiento o determinación del choque de las burbujas es muy importante para estudiar la coalescencia o no coalescencia de burbujas en una suspensión de gas-líquido. Realizando estas simulaciones podemos estar seguros del choque de las burbujas.

3.6 Bibliografía (Capítulo 3)

- 1 Batchelor, G. K., 1970
An Introduction to Fluid dynamics
Cambridge University Press.
- 2 Moore, D. W., 1963
The boundary layer on a spherical gas bubble
Journal of fluid mechanics **16**, 161-176.
- 3 Ryskin, G. y Leal, L. G., 1984
Numerical solution of free boundary problems in fluid mechanics
Part 2. Buoyancy driven motion of a gas bubble through quiescent liquid
Journal of fluid mechanics **148**, 19-35.
- 4 Kok, J.B.W., 1993
Collision dynamics of bubble pairs moving through a perfect liquid,
Applied Scientific Research, **50**, 169-188.
- 8 Kok, J.B.W., 1989
Dynamics of gas bubbles moving through liquid
Ph. D. thesis, Technological University of Twente
Enschede, The Netherlands.
- 5 Biesheuvel, A. y Van Vijnngaarden, L., 1982
The motion of a pair of bubbles in a liquid
Journal of Engineering Mathematics **16**, 349-365.
- 6 Landweber, L. y Shashahian A., 1992
Added masses and force on two bodies approaching central impact in an
inviscid flow
Journal of Ship Research, **36**, (No 2), June 1992, 99-122.
- 7 Kumaran, V., 1992
Dynamics of suspensions with significant inertial effects,
Ph. D. Thesis, Cornell University, Ithaca NY.
- 8 Kumaran, V. y Koch, D.L., 1993
The rate of coalescence in a suspension of High Reynolds Number, low
Weber number bubbles,
Physics of Fluids **A5**, 1135.
- 9 Hobson, E. W., 1965
The Theory of spherical and ellipsoidal harmonics
Cambridge University Press.

-
- 10 Levich, V.G., 1962
Physicochemical Hydrodynamics
Prentice Hall, Englewoods Cliffs, NJ.
- 24 Arfken, 1995,
Mathematical Methods for physics,
Academic Press, McGraw-Hill
- 11 De Vries, A.W.G., 1999
Path and Wake of a rising bubble
Ph. D. thesis, Technological University of Twente
Enschede, The Netherland.
- 12 Duineveld, P.C., 1995
"The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high Reynolds numbers,"
J. Fluid Mech. **292**, 325.

“The best advice to young people, find something that you like to do, and find someone who pays for doing it.”

Catherine Whittorpe

4 Movimiento de dos burbujas en dirección colineal

En este capítulo analizaremos el movimiento de dos burbujas en dirección colineal. El potencial obtenido en la Sección (3.2) se puede expresar como una serie de polinomios de Legendre alrededor de las dos esferas, con las coordenadas r_1, θ_1 , referidas a la esfera 1 y r_2, θ_2 referidas a la esfera 2. El potencial que depende de las velocidades comunes V_k y de las velocidades contrarias W_k , es él escrito en la ecuación 5.1.

$$\Phi_{V_k} = \sum_{n=1}^{\infty} V_k \cdot a_1 \left\{ g_{mn}^1 \left(\frac{R}{r_1} \right)^{n+1} Y_n^k(\cos \theta_1, \mu) + g_{mn}^2 \left(\frac{R}{r_2} \right)^{n+1} Y_n^k(\cos \theta_2, \mu) \right\}$$

$$\Phi_{W_k} = \sum_{n=1}^{\infty} W_k \cdot a_1 \left\{ -f_{mn}^1 \left(\frac{R}{r_1} \right)^{n+1} Y_n^k(\cos \theta_1, \mu) + f_{mn}^2 \left(\frac{R}{r_2} \right)^{n+1} Y_n^k(\cos \theta_2, \mu) \right\}$$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

(4.1)

donde las funciones $Y_n^k(\cos \theta, \mu)$ son los armónicos esféricos de orden 0 y 1. Con esta solución a la ecuación de Laplace y con los valores de los armónicos esféricos se pueden graficar el potencial de velocidad y la función de corriente. Usando un programa en Matlab se graficaron el potencial de velocidad y la función de corriente, para dos casos. El primero es el caso de dos burbujas en movimiento colineal en el mismo sentido y el segundo es él de dos burbujas en movimiento colineal en sentido contrario.

En la Figura (4.1) se muestra la función de corriente de dos burbujas en movimiento horizontal, una detrás de otra., para una distancia de 2.5 radios. También se muestran flechas que representan la velocidad del fluido alrededor de las esferas. Como se ve, el fluido rodea ambas esferas conforme se mueven de derecha a izquierda. Podemos hacer un acercamiento a las dos esferas en la zona central entre ambas para observar el flujo entre las dos esferas en movimiento.

El fluido se mueve de la esfera B a la A y parte del fluido regresa hacia el otro lado de la esfera. La Figura (4.1) muestra como las líneas de corriente del dipolo de la burbuja en A se unen con las líneas de corriente de la esfera en B. En la zona entre ambas esferas, hay una interacción de los dipolos, pero esta interacción es pequeña cuando la distancia entre esferas es grande. Pero cuando la distancia es pequeña se observa una distorsión en el campo de velocidad que puede ser importante. El fluido en medio de las dos esferas aparentemente está en reposo, pero más bien se mueve de la burbuja B a la burbuja A.

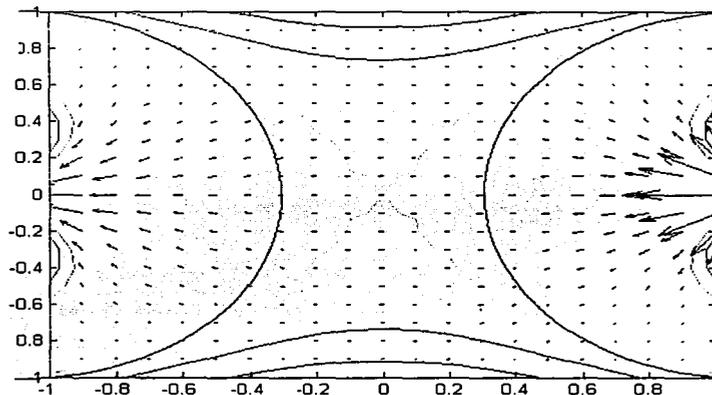
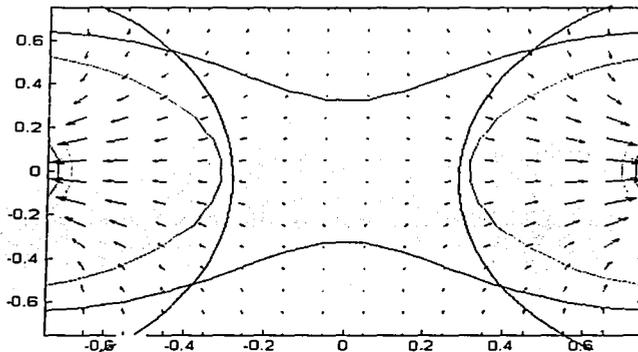


Figura 4.1 Gráfica de función de corriente para dos burbujas en la misma dirección para $s = 2.0$ radios.

En la Gráfica (4.2) se muestra el comportamiento, cuando dos esferas se mueven sobre una línea entre sus centros, con velocidad igual, pero en sentido contrario. Cuando las burbujas se mueven con sentidos contrarios, las líneas de corriente se contraponen en el centro de las esferas, lo que causa que el fluido se separe en el punto central entre las esferas y se mueva hacia arriba y hacia abajo conforme se acercan las dos esferas.

Se puede observar que las líneas de corriente de cada dipolo, correspondiente a cada esfera, van en sentido contrario. Podemos apreciar mejor este efecto, haciendo un acercamiento a la gráfica.



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Figura 4.5 Gráfica de potencial de velocidad y función de corriente para dos burbujas con velocidad contraria, $U, -U$. Radio = 1 m, $U = 1$ m/s.

Como se ve en este caso las líneas de corriente chocan y se contraponen entre las dos burbujas. Debido a esto, se forma una corriente de cierta magnitud entre las dos esferas. Esta corriente ocasiona que las fuerzas viscosas entre las esferas se incrementen. Es necesario determinar si dicha corriente causa que las burbujas se repelan lo suficiente para causar que las dos burbujas se separen antes de entrar en contacto, o si por el contrario causan una atracción o disminución de la repulsión entre las esferas y las burbujas colisionan con velocidad finita.

Esto lo determinaremos usando los dos modelos, el de energía y el de presión que hemos obtenido en el capítulo anterior. Se analizará el movimiento de las burbujas con y sin fuerzas de arrastre. También se le analizará para diferentes radios y diferentes velocidades iniciales de la burbuja. Cuando la distancia o 'gap' entre las dos burbujas es muy pequeña, la velocidad entre las dos esferas tiene

una razón de crecimiento mayor. Como la velocidad se incrementa es de esperar que las fuerzas viscosas se incrementen y puedan evitar que las burbujas colisionen. Sin embargo, Kumaran (1992) realizó un estudio de escalamiento de las fuerzas viscosas en el intersticio entre las esferas comparandolo con la energía cinética del fluido debido al movimiento de las esferas. En su análisis encontró, que la energía viscosa disipada es de un orden de magnitud menor que la energía cinética de las esferas en movimiento. Como la energía disipada es mucho menor que la energía total de las esferas, las burbujas no se frenan antes de hacer contacto una con otra a velocidad finita.

4.1 Movimiento de dos burbujas con velocidad en dirección colineal y en sentido contrario

Para analizar el movimiento de dos burbujas podemos usar dos sistemas de ecuaciones. Las ecuaciones de movimiento encontradas en el Capítulo 3 por el método de la energía.

$$\rho_l V \frac{d}{dt} [a_{33,s}] = -\frac{1}{2} \rho_l V \left[s^2 \frac{\partial}{\partial s} a_{33} \right] + F_3, \quad (4.2)$$

$$a_{33} = \frac{1}{2} [-1 + 3f_{01}] \quad (4.3)$$

Con el valor de a_{33} que se obtuvo en el Capítulo 3 se obtiene la siguiente ecuación de movimiento de las dos esferas:

$$\rho_l V (-1 + 3f_{01}) \frac{d^2}{dt^2} [s] = -\frac{1}{2} \rho_l V \left[s^2 \frac{d}{ds} (-1 + 3f_{01}) \right] + F_3 \quad (4.4)$$

Esta ecuación es muy similar a la obtenida en la Ecuación (3.68), en el Capítulo 3 por el método de la presión. Sin embargo aparece un factor de $\frac{1}{2}$ en el primer término del lado derecho del cambio del potencial respecto al tiempo, que no aparece en el método de presión.

En esta sección analizaremos el resultado de usar las dos ecuaciones y veremos cual es efecto de introducir los términos extras de los dipolos f_{02} , f_{03} , f_{04} en la ecuación de movimiento obtenida por el método de presión

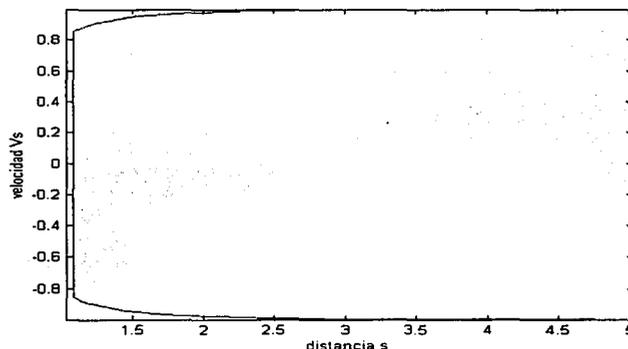
$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{1-3f_{01}} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d}{ds} \{1-3f_{01}\} + \frac{3(ds/dt)^2}{2R(1-3f_{01})} (3f_{01}f_{02} + 4f_{02}f_{03} + \dots + (n+1)f_{0n-1}f_{0n} + \dots) - \frac{F_i e_{ik}}{\rho} = 0 \quad (4.5)$$

Como vimos anteriormente, el primer término es un término de repulsión, pero el segundo es de atracción. Podemos modelar el movimiento de las dos burbujas con y sin el último término que corresponde a la fuerza de arrastre.

Comparando la Ecuación de movimiento (4.4) obtenida por el método de la energía con la Ecuación (4.5) obtenida por el método de presión, se observa que el primer término es muy parecido, solo que en el método de presión es del doble del valor que en el método de energía. Además el método de presión contiene términos extras (f_{01} , f_{02} , f_{03} ...) debidos al término de velocidad en la ecuación de Bernoulli. El método de energía debe ser equivalente al método de presión, pues ambos representan el mismo comportamiento. Si los dos métodos nos dan un resultado similar en la trayectoria y velocidad de las burbujas, quiere decir que ambos métodos son correctos y por tanto podemos usar cualquiera de los dos para obtener el comportamiento de las burbujas.

Primero analizaremos el problema con el método de la energía, Ecuación (5.2). El primer caso que analizaremos será el de dos esferas que se mueven con velocidad $U=1$ m/s, desde una distancia de 10 radios con un radio $R=1$ mm y sin considerar la fuerza de arrastre. No se incluye el efecto de la gravedad. Además, hemos hecho los siguientes cambios para adimensionalizar las variables. La velocidad se ha adimensionalizado dividiéndola por la velocidad inicial U , el tiempo se adimensionalizó multiplicándolo por U/R y la aceleración se adimensionalizó multiplicándola por R/U^2 .

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN



Gráfica 4.5 velocidad de la burbuja contra distancia entre las burbujas, $S_0 = 10R$.

Analizaremos cada una de las gráficas. En la Gráfica 4.5 se muestra que las burbujas reducen su velocidad al 82%. Las dos burbujas prácticamente no reducen su velocidad hasta que la distancia s entre sus centros es menor a 4 radios. En este caso, que no incluye las fuerzas de arrastre, las dos burbujas entran en contacto con una velocidad finita.

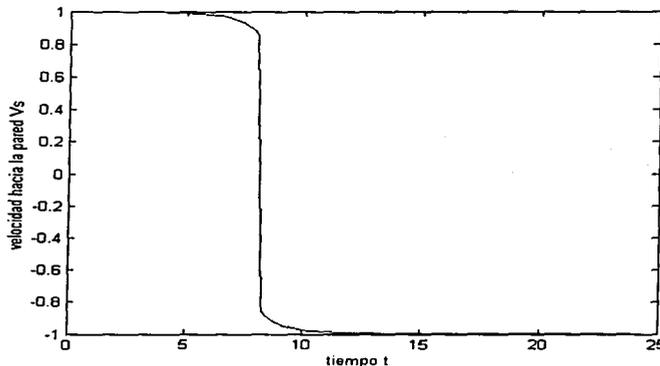
Si las burbujas entran en contacto, no existe una disipación de energía considerable, por lo que hemos impuesto una condición de rebote totalmente elástico. Esto se logra de la siguiente manera: la velocidad horizontal antes de entrar en contacto es V_h en el tiempo t_n , por lo que se cambia el signo de la velocidad horizontal justo después del rebote a $-V_h$ en el tiempo t_{n+1} . Mientras que la velocidad vertical permanece con el mismo valor y mismo signo V_v antes y después del rebote. La condición de rebote elástico es una condición ideal que nos sirve para nuestro análisis. En condiciones reales, el rebote elástico no se cumple y es necesario tomar en cuenta la disipación viscosa y la deformación de las burbujas en el momento del choque.

En la Figura 4.6 se muestra la velocidad en función del tiempo. Como se ve aparece una discontinuidad en el momento del choque. En este punto las burbujas entran en contacto y cambian su velocidad instantáneamente de acuerdo a la

condición impuesta. Mientras aparezca esta discontinuidad, quiere decir que las burbujas chocan con velocidad finita. En la Gráfica 4.7 se muestra la aceleración de las burbujas conforme se aproximan. La aceleración es positiva cuando las burbujas se repelen y negativa cuando las burbujas se atraen (por la forma en que escogimos el signo de W_k). La aceleración crece hasta 0.2 (adimensional) conforme las burbujas se aproximan y muestran un pico en el momento del choque, pero no es suficiente para frenar el movimiento de las burbujas y evitar que estas choquen.

Para determinar el choque final de las esferas, es necesario analizar los esfuerzos viscosos entre las superficies de las esferas. Resolver en forma exacta la velocidad y los esfuerzos viscosos, requeriría resolver las ecuaciones de Navier Stokes completas. Sin embargo el análisis de escalamiento realizado por Kumaran (1992), donde compara los esfuerzos viscosos con la energía del fluido, es suficiente para determinar el choque o colisión entre las dos burbujas.

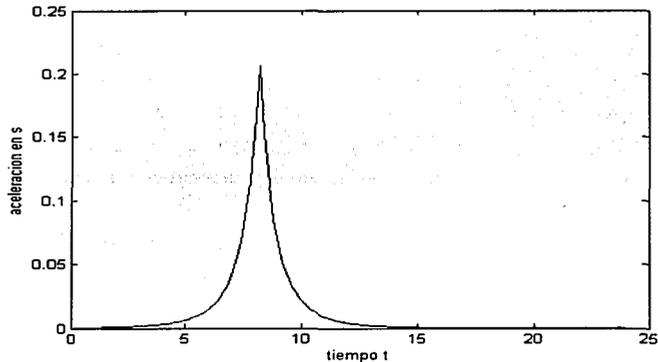
"Por lo tanto 2 burbujas que se mueven en dirección colineal y dirección contraria en un flujo potencial chocan con velocidad finita, sin que el fluido pueda frenar el movimiento de las burbujas". Para una comprobación matemática de este hecho, ver apéndice (4-A).



Gráfica 4.6 Velocidad de la burbuja en función del tiempo.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

TRUCOS CON
 J. J. J. J.
 FALLA DE ORIGEN



Gráfica 4.7 Aceleración de la burbuja contra tiempo.

Si comparamos la Ecuación de movimiento (Sección 5.2) obtenido por la energía cinética, con la de presión (Sección 5.5), el primer término del método de presión es del doble del valor que en el método de energía y la primera no contiene los términos $f_{01}f_{02}+f_{03}f_{04}+\dots$, debido a los multipolos de orden mayor a uno. Aunque el método de la energía arroja un resultado para la aceleración de las burbujas que no muestra la contribución de los multipolos, encontramos después de simular el movimiento con las dos ecuaciones, que el resultado es el mismo. Por lo tanto, podemos usar cualquiera de los métodos, aunque se prefiere él de la energía por ser mas sencillo y directo.

Ya que el termino $\text{grad}\phi^2=U^2$, que aparece en el método de presión, proviene de la velocidad del fluido, si las burbujas no entrarán en contacto se debe a que la velocidad del fluido entre las esferas crece demasiado y esto causa una fuerza muy grande que impide que las burbujas entren en contacto. Sin embargo con el método de presión que toma en cuenta la contribución debido a la velocidad, se demostrará que las burbujas entran en contacto con velocidad finita y por tanto la velocidad no crece lo suficiente para evitar su colisión.

4.2 Efecto de la fuerza de arrastre en el movimiento de dos burbujas en dirección colineal

En esta sección cuantificaremos el efecto de las fuerzas de arrastre en el movimiento de dos burbujas en dirección colineal. Aplicando la Ecuación (4.4)

$$\rho_l V (-1 + 3f_{01}) \frac{d^2}{dt^2} [s] = -\frac{1}{2} \rho_l V \left[\frac{d^2}{ds} (-1 + 3f_{01}) \right] + F_3 \quad (4.4)'$$

Incluyendo el término de la fuerza de arrastre F_3 , definido en el Capítulo 3, en la Ecuación (3.82):

$$F_3 = 4\mu\pi R s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)}{n} f_{0n}^2, \quad (3.82)$$

Podemos modelar el movimiento de las burbujas usando este modelo de fuerza de arrastre con las siguientes condiciones: las burbujas se encuentran inicialmente a una distancia de 5 radios aparte, para un radio de 1 mm; Los resultados se grafican para tres velocidades de acercamiento entre las burbujas, (ds/dt) igual a 0.5 m/s, 0.2 m/s y 0.1 m/s, que equivalen a un número de Reynolds de 500, 200, 100 respectivamente. El arrastre no modifica demasiado la velocidad de las burbujas conforme se aproximan cuando el número de Reynolds es mayor a 200, pero cuando el Re es del orden o menor a 100 la velocidad de las burbujas se reduce considerablemente. En la Figura 4.8 se muestra la velocidad como función del tiempo.

La velocidad al momento del choque se reduce hasta el 78% de U inicial, cuando $Re=500$, 60% cuando $Re=200$, y 35% de U , cuando $Re=100$. Las burbujas rebotan, cambian de dirección y empiezan a frenarse después del contacto. Después, el arrastre causa que las burbujas disminuyan su velocidad y se frenen después de una distancia finita. Se encontró que para un número de Reynolds entre 70 y 75, las burbujas se frenan totalmente antes de entrar en contacto.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

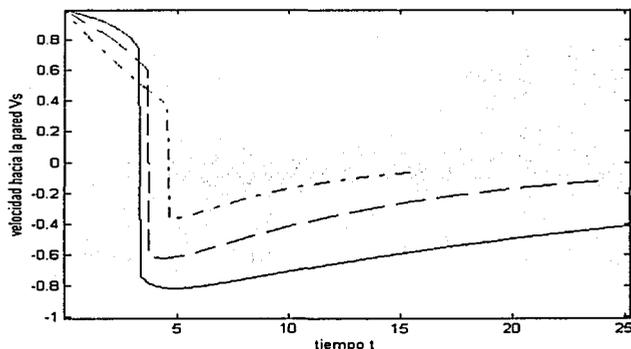


Figura 4.8 Gráfica de Velocidad vs tiempo, para Radio 1 mm, con fuerza de arrastre, para a) ___Re=500, b) --- Re=200, c) -.-.-Re = 100

El efecto de simular con un número de Reynolds bajo es que las fuerzas de arrastre viscosas predominan sobre las fuerzas de inercia. Cuando se usa un número de Reynolds alto, las fuerzas inerciales predominan sobre las viscosas y las burbujas disminuyen su velocidad muy poco y el efecto del arrastre es menor. En cambio con un número de Reynolds menor, la fuerza de arrastre tiene mayor efecto y las burbujas sufren una reducción de velocidad mayor. En la Figura 4.9 se muestra la velocidad como función de la distancia s entre las dos esferas.

Podemos ver que para velocidades grandes con $Re=500$, la burbuja después de rebotar no disminuye la magnitud de su velocidad, sino que la incrementa por un pequeño espacio. Esto se debe a que la fuerza de repulsión hidrodinámica se sigue manifestando y es de mayor magnitud relativa, que la fuerza de arrastre que tiende a frenar la burbuja y disminuir la velocidad absoluta de la burbuja.

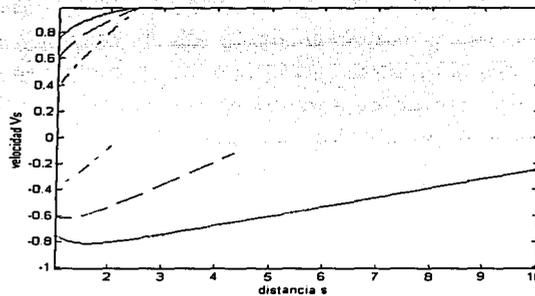


Figura 4.9 Gráfica de Velocidad vs. distancia entre esferas, para Radio 1 mm, con fuerza de arrastre, para a) $Re = 500$ b) $Re = 200$, c) $Re = 100$

En la Figura 4.10 se muestra la distancia entre las dos esferas en función del tiempo. Para números de Reynolds altos, la burbuja se acerca rápidamente a la segunda burbuja, entran en contacto y se separan hasta que finalmente la burbuja se frena. Para números de Reynolds más pequeños, la burbuja tarda más en entrar en contacto y el tiempo de rebote es por tanto más largo. Además, las burbujas rebotan una distancia menor, porque las fuerzas de arrastre son de mayor magnitud.

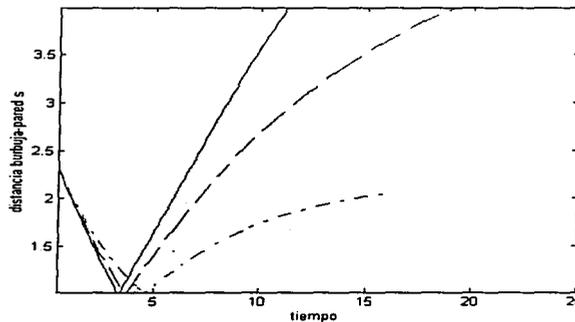


Figura 4.10 Gráfica de distancia entre esferas vs. Tiempo, para Radio 1 mm, con fuerza de arrastre, para a) $Re = 500$ b) $Re = 200$, c) $Re = 100$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

En la Figura 4.11 se muestra la aceleración en función del tiempo. Cuando modelamos con números de Reynolds altos, las fuerzas de arrastre no tienen demasiada influencia. En este caso la gráfica de aceleración es muy parecida a la gráfica que no incluye la fuerza de arrastre y se observa un pico de aceleración debido a la fuerza hidrodinámica. Pero cuando se incluye un número de Reynolds menor, ya no se observa el pico de aceleración tan pronunciado, porque las fuerzas viscosas de frenado son de igual magnitud y la aceleración se amortigua con la disipación viscosa debido al arrastre. Sin embargo, el resultado neto es una mayor reducción de velocidad de las esferas.

Podemos tomar los datos de la velocidad de impacto en función del número de Reynolds y hacer una gráfica que nos indique la reducción de la velocidad de choque como función del número de Reynolds para diferentes distancias iniciales s entre las burbujas. Dicha gráfica para una distancia de 5 radios se muestra en la Figura 4.12.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

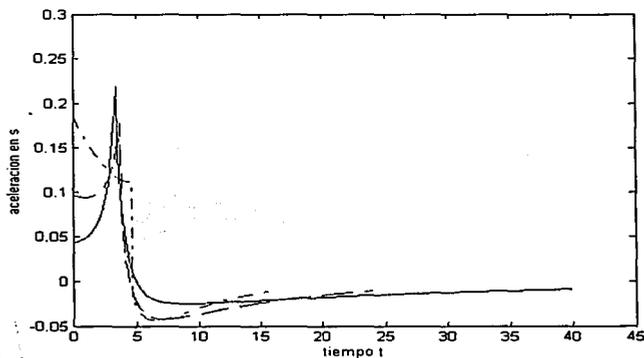
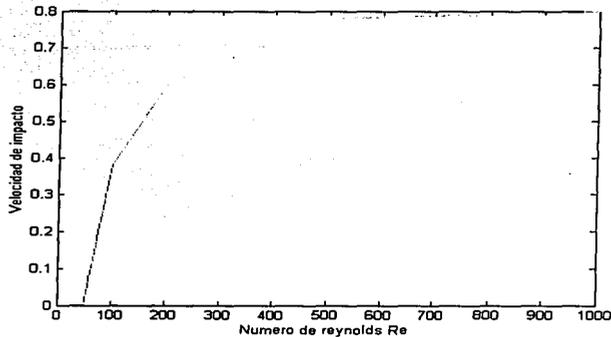


Figura 4.11 Gráfica de aceleración vs. tiempo, para Radio 1 mm, con fuerza de arrastre, para a) — $Re = 500$ b) ---- $Re = 200$, c) -.-. $Re = 100$



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Figura 4.12 Velocidad de impacto entre las burbujas como función del Re , para una distancia inicial entre burbujas de $s=5$ Radios.

La velocidad de choque entre burbujas puede ser una medida importante en experimentos de flujos de burbujas. A números de Reynolds bajos, las burbujas se frenan demasiado antes de chocar entre ellas. En experimentos realizados con burbujas en líquidos con alta viscosidad, Martínez (2003) observó que con líquidos viscosos, las burbujas se mueven más lentamente y además conservan su forma esférica. Este movimiento se aproxima más al predicho por flujo potencial.

En nuestra segunda parte de la simulación, analizaremos el comportamiento del movimiento de las burbujas cuando la distancia es mayor e igual a 10 radios. Como veremos, la reducción de velocidad es mayor, pues con un número de Reynolds de 120, las burbujas no chocan porque se frenan antes de entrar en contacto. A mayores números de Reynolds, el frenado es menor y las burbujas chocan. La simulación en este caso la realizamos para cuatro números de Reynolds, $Re=1000$, 500 , 200 y 120 . En la Gráfica 4.13 se muestra la velocidad en función del tiempo. Para un Re de 1000 , la velocidad solo se reduce a un 80% de la velocidad inicial. Pero para un $Re=200$, la velocidad se reduce a 0,25% de la velocidad inicial. Finalmente para un $Re=120$ la burbuja reduce por completo su velocidad sin entrar en contacto con la otra burbuja.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

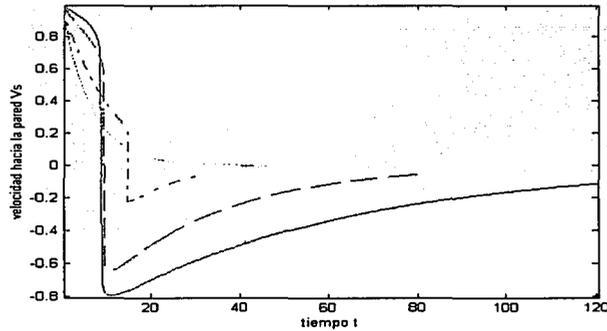


Figura 4.13 Grafica de Velocidad en función del tiempo, para Radio 1 mm, para a) $Re = 1000$ b) $Re=500$, c) $Re=200$, d) $Re= 120$

En la Figura 4.14 se muestra de nuevo la velocidad de la burbuja, pero en función de la distancia s entre las burbujas. En la Figura 4.15 se muestra la posición o distancia a la pared de las burbujas en función del tiempo. Para un Re menor a 120 la burbujas se frenan antes de llegar a la otra burbuja a una distancia de $s=4$ radios y permanece en reposo.

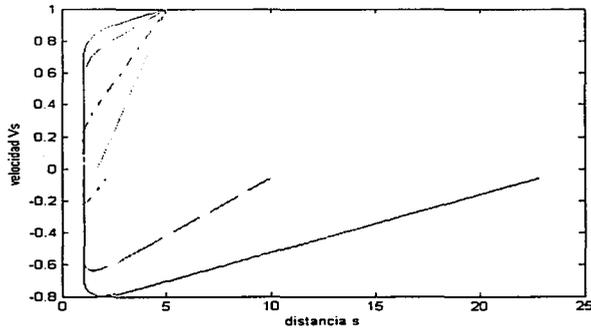


Figura 4.14 Grafica de velocidad en función de la distancia entre burbujas s , para Radio 1 mm, para a) $Re = 1000$ b) $Re=500$, c) $Re=200$, d) $Re= 120$

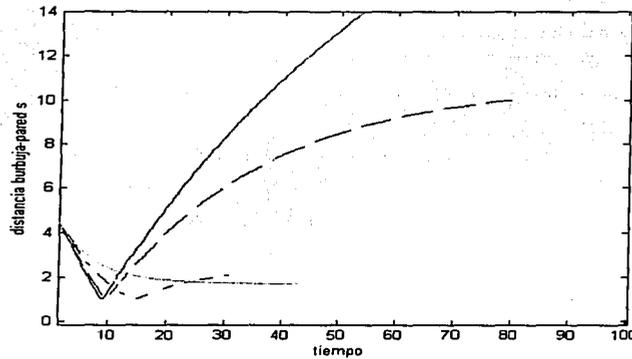


Figura 4.15 Gráfica de posición en función del tiempo , para Radio 1 mm, con fuerza de arrastre, para a)___Re= 1000 b)--- Re=500, c)-.-.-Re=200, d)___Re=120

Finalmente, en la Gráfica 4.16 se muestra el comportamiento de la aceleración cuando las dos burbujas se aproximan. Se vuelve a observar que con números de Reynolds altos, el efecto de la repulsión es mayor, mientras que con Re menor, los efectos viscosos tienen mayor importancia.

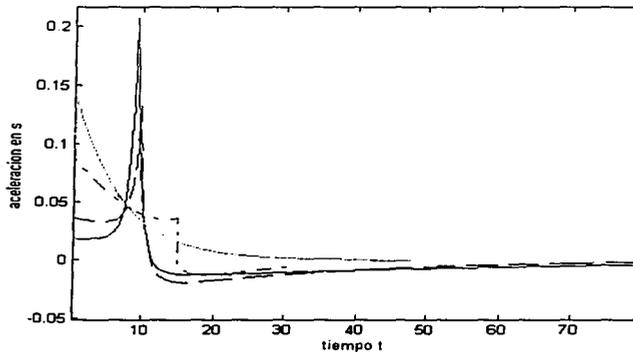


Figura 4.16 Gráfica de aceleración vs. Tiempo, para Radio 1 mm, con fuerza de arrastre, para a)___Re = 1000 b)--- Re=500, c)-.-.-Re=200, d)___ Re= 120

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Podemos concluir lo siguiente acerca del movimiento de las burbujas cuando se incluye la fuerza de arrastre. A números de Reynolds altos, el efecto de la viscosidad y el arrastre no es de importancia, y por tanto, el movimiento es gobernado por la fuerza hidrodinámica. Este comportamiento se observa mayormente para números de Re mayores a 200 cuando la distancia inicial es de 10 radios y para números de Reynolds mayores a 400 cuando la distancia inicial es de 5 radios.

“Podemos decir entonces que a números de Reynolds mayores a 200, las burbujas en movimiento con velocidad contraria colisionan con velocidad finita”

4.3 Movimiento de la burbuja con el modelo obtenido mediante balance de presión

La ecuación de movimiento, cuando se toman en cuenta los términos extras del balance de presión, se modifica de la siguiente forma de acuerdo a la Ecuación (4.5).

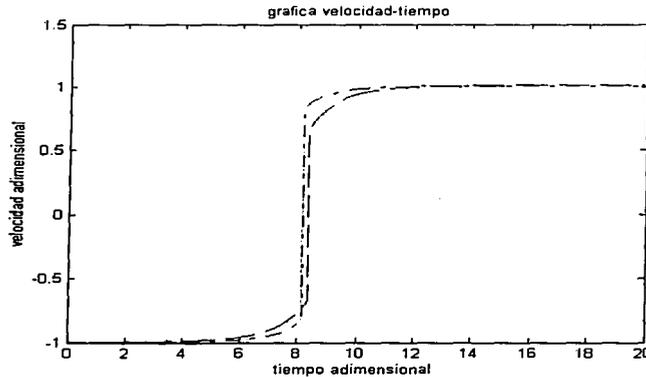
$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{1}{1-3f_{01}} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \frac{d}{ds} \{1-3f_{01}\} + \frac{3(ds/dt)^2}{2R(1-3f_{01})} (3f_{01}f_{02} + 4f_{02}f_{03} + 5f_{03}f_{04} + \dots + (n+1)f_{n-1}f_n + \dots) - \frac{F_{ie_{ik}}}{\rho} = 0 \quad (4.5)$$

Para comparar los resultados obtenidos mediante el método de la energía con el balance de presión, modelaremos el sistema con ambas ecuaciones, incluyendo el mismo número de términos. Esto es, expresando los coeficientes de los multipolos f_{01} , f_{02} , f_{03} ... f_{0n} , con una precisión de $O(R/s)^n$. Realizaremos la misma simulación que en el principio de este capítulo con s inicial de 10 radios y con una velocidad inicial de 1 m/s, correspondiente a Re de 1000, para un Radio de 1 mm.

Se obtuvieron gráficos de velocidad, posición y aceleración en función del tiempo y de la posición. Como sabemos, los resultados dependen del número de términos que se incluyen en la solución. Pero para empezar, haremos la simulación con 10 términos en los coeficientes, esto es una precisión de $O(R/s)^{10}$ y

usaremos los primeros 10 coeficientes f_{01} , f_{02} , f_{03} ... f_{010} . Además, el método de presión, Ecuación. (3.5) lo modelamos para dos casos, incluyendo solo el cambio temporal del potencial (modelo truncado) e incluyendo todos los términos debidos a la velocidad del fluido alrededor de las burbujas (modelo completo).

En la Figura 4.17 se muestra la velocidad de la esfera en función del tiempo usando el método de la energía con línea continua; el método de presión, usando solo el primer miembro de la ecuación con línea punteada ---; y el método de presión completo, con línea discontinua -.-.-. Podemos observar que con el método de la energía las burbujas no se frenan antes de entrar en contacto y colisionan con una velocidad de $0,82 U_0$ donde U_0 es la velocidad inicial de la burbuja.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 4.17 Grafica de velocidad v. tiempo, con a)___ modelo de energía b)--- modelo de presión truncado, c)modelo de presión con 10 términos.

Cuando usamos el método de presión truncado, incluyendo solo el término del cambio temporal del potencial, la velocidad se reduce al 65% de la velocidad inicial, pero las burbujas siguen entrando en contacto con velocidad finita. Aunque el tiempo que tardan en entrar en contacto se incrementa, la fuerza de repulsión no es suficiente para evitar el choque de las burbujas.

Cuando se usa el método de presión completo, incluyendo tanto los términos del cambio temporal del potencial como los de la velocidad al cuadrado,

el comportamiento de la velocidad es el mismo que con el método de la energía. Como vemos, la velocidad disminuye al 82% aproximadamente usando 10 términos en ambos modelos y la velocidad se reduce la misma cantidad en ambos modelos.

En la Figura 4.18 se muestra la velocidad en función de la posición de las burbujas. Se hace que las burbujas cambien su velocidad con un choque 'elástico' cuando $s=2,0001 R$. La velocidad entre las burbujas no se reduce a menos del 95% hasta que la distancia entre las burbujas s es menor a 5 radios. Esto significa, que solo cuando la distancia s es menor a este valor la fuerza entre las burbujas es considerable para frenar su movimiento. Podemos considerar que la fuerza entre las burbujas es de corto alcance.

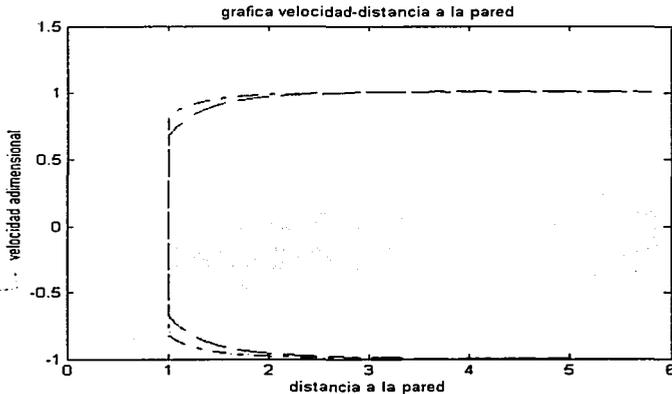


Figura 4.18 Grafica de velocidad vs distancia s entre burbujas con a)___ modelo de energía y b)---modelo de presión truncado, c)-.-. modelo de presión

La Figura 4.19 muestra la aceleración de la burbuja con el método de la energía y el método de presión. Aunque hay una pequeña porción de la gráfica en que hay una pequeña diferencia, la aceleración es prácticamente la misma en ambos métodos e igual a 0.25. La aceleración crece mucho cuando las burbujas se aproximan a distancias s muy cercanas a $2R$, debido a que las funciones que definen la aceleración de las burbujas son muy sensibles a valores cercanos a

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

este valor. Sin embargo, este cambio solo es en distancias muy cercanas al choque. Se realizaron simulaciones en que se refinó el paso de tiempo en la integración de la Ecuación 4.5 hasta en tres órdenes de magnitud, pero no se noto un cambio apreciable. Finalmente, en la Figura 4.20 se muestra la posición o distancia entre burbujas en función del tiempo. Se puede apreciar que el choque o colisión es franco y no hay un cambio de curvatura de la línea que define la trayectoria en el momento del choque.

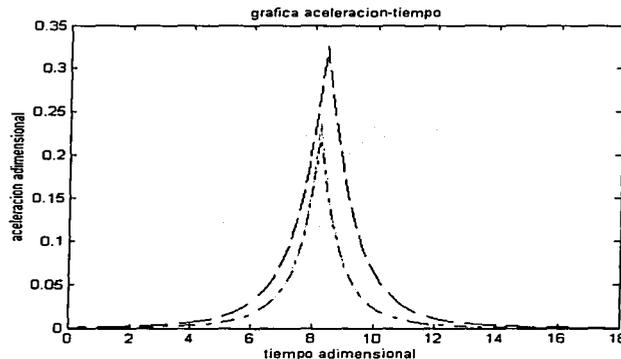


Figura 4.19 Grafica de aceleración vs. tiempo, con a) ___ modelo de energía, b) --- modelo de presión truncado, c) -.-.- modelo de presión, con 10 términos.

Como podemos observar, en ninguno de los casos la velocidad de las burbujas se reduce a cero, evidenciando que las burbujas en un flujo potencial en movimiento en dirección colineal chocan con velocidad finita. Para verificar la validez de los resultados, mostramos simulaciones con mayor número de términos. Si usamos mayor número de términos, la aceleración si se incrementa cada vez, pero la velocidad y la posición no se ven afectadas más que en un porcentaje muy pequeño, menor al 2%.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

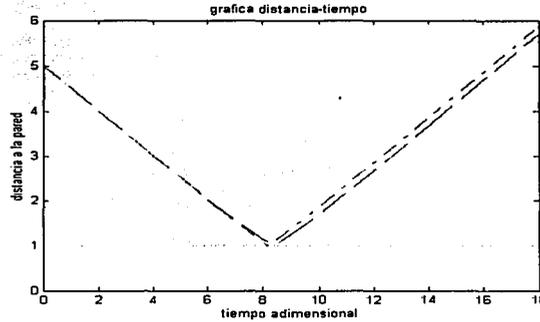


Figura 4.20 Gráfica de posición vs tiempo, para a) método de la energía y b) modelo de presión truncado, c) modelo de presión , con 10 términos.

A continuación se muestran las gráficas de velocidad, aceleración y posición, usando 10, 20 y 30 términos en la solución. Como se observa el cambio no es muy grande. En la Figura 4.21 se muestra la gráfica de velocidad en función del tiempo. La velocidad pasa de $0.82U_0$ a $0.80U_0$ al usar 20 en lugar de 10 términos en la ecuación. Pero cuando se usan 30 términos, la reducción es mucho menor.

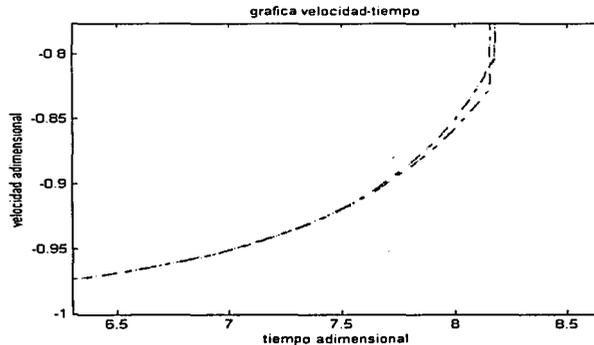
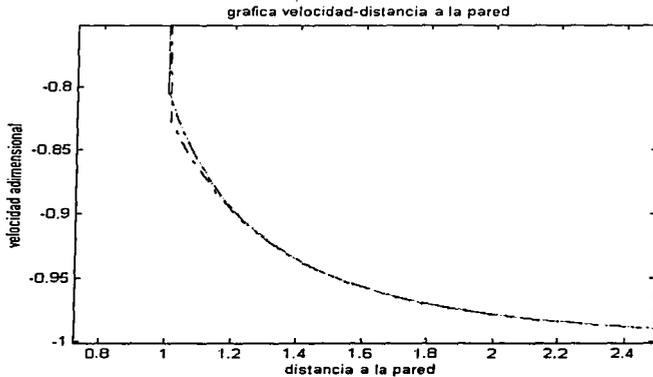


Figura 4.21 Gráfica de velocidad vs tiempo con el modelo de presión usando a) 10 términos. b) 20 términos y c) 30 términos.

En este caso, aunque se aumente al doble el número de términos usado en la ecuación, no causa una reducción mayor en la velocidad. Esto contrasta con el cambio en la aceleración que si es considerable. En la Gráfica 4.22 se muestra la velocidad en función de la distancia entre burbujas. Como se observa, la reducción aumenta cuando las burbujas se acercan a menos de 5 radios de distancia entre centros.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 4.22 Grafica de velocidad vs posición con el modelo de presión usando a) ___ 10 términos. b)---- 20 términos y c) -.-.-30 términos.

En la Figura 4.23 se muestra la aceleración de la burbuja conforme se acercan las burbujas. Aunque el incremento es de 0.28 a 0.35 en el momento del choque, esto no afecta demasiado a la velocidad y a la posición. Esto se debe a que la perturbación en la aceleración solo es en un período muy pequeño de tiempo, y aunque usemos un incremento de tiempo muy pequeño en la integración, la velocidad nunca se reduce a cero. Otra explicación es que la velocidad es la integral de la aceleración respecto al tiempo, es decir el área bajo la curva de la gráfica de aceleración. Por lo tanto, aunque hay una perturbación en la aceleración cerca del choque, como esta perturbación dura muy poco, no afecta demasiado al comportamiento de la velocidad y de la posición de las burbujas.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

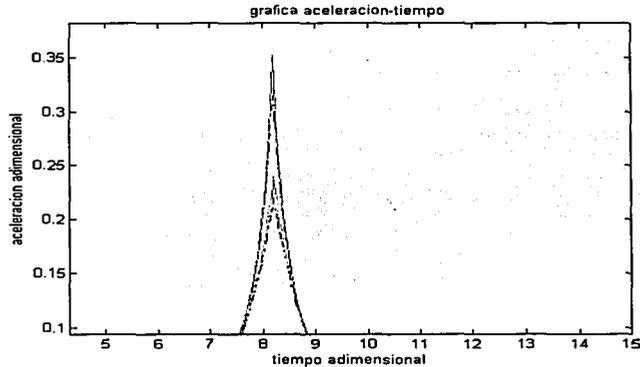


Figura 4.23 Gráfica de aceleración vs tiempo con el modelo de presión usando a) ____ 10 términos. b)---- 20 términos y c) -.-.-30 términos.

Podemos concluir a partir de los manejos matemáticos hechos hasta ahora, para deducir la Ecuación (4.5) y de las simulaciones realizadas para el movimiento entre burbujas, que las burbujas en un flujo a alto número de Reynolds, y bajo número de Weber, entran en contacto con velocidad finita." Y por lo tanto, la fuerza hidrodinámica no es suficiente para detener el movimiento de las burbujas.

La segunda conclusión es que los dos métodos, tanto de presión, como de energía son equivalentes, pues arrojan resultados iguales. La tercera conclusión y que deriva de comparar las Ecuaciones (4.4) y (4.5) es que el término debido a la variación del potencial es el doble del valor que el término debido a la contribución de la velocidad al cuadrado. Además en todos los casos, la burbuja recupera su velocidad inicial y su posición anterior al instante inicial, en un tiempo igual al doble del tiempo en que tardan en chocar. Las burbujas después del choque pueden coalescer y formar una sola burbuja o bien pueden rebotar, si la tensión superficial permite la deformación de las burbujas. Un tema de estudio muy importante es saber si finalmente las burbujas coalescen después de un período de tiempo determinado.

En un flujo de dos burbujas en dirección paralela bajo la acción de gravedad, las burbujas colisionan o chocan y pueden rebotar en repetidas ocasiones. Determinar si las burbujas coalescen después de un determinado número de colisiones es un tema de investigación y probablemente material para una tesis más. Kumaran (1992) determinó por escalamientos de presión y la velocidad entre las burbujas que la capa de líquido entre las dos burbujas finalmente se rompe y por tanto las burbujas coalescen. En el Capítulo 5 analizaremos con más detalle este problema y los detalles del movimiento de burbujas en paralelo y de una burbuja junto a una pared.

4.4 Bibliografía (Capítulo 4)

- 1 Biesheuvel, A. y Van Vijnngaarden, L., 1982
The motion of a par of bubbles in a liquid
Journal of Engineering Mathematics **16**, 349-365.
- 2 Landweber, L. y Shashahan A., 1992
Added masses and force on two bodie approaching central impact in an inviscid flow
Journal of Ship Research, **36**, (No 2), June 1992, 99-122.
- 3 Kok, J.B.W., 1993
Collision dynamics of bubble pairs moving through a perfect liquid,
Applied Scientific Research, **50**, 169-188.
- 8 Kok, J.B.W., 1989
Dynamics of gas bubbles moving thrrough liquid
Ph. D. thesis, Technological University of Twente
Enshede, The Netherland.
- 4 Kumaran, V. , 1992
Dynamics of suspensions with significant inertial effects,
Ph. D. Thesis, Cornell University, Ithaca NY.
- 5 Kumaran, V. y Koch, D.L., 1993
The rate of coalescence in a suspension of High Reynolds Number, low Weber number bubbles,
Physics of Fluids A5, 1135.
Journal of fluid mechanics **148**, 19-35.

4.5 Apéndice 4-A (Análisis de convergencia de la Serie que representa la presión sobre la burbuja)

El siguiente análisis de convergencia de la serie del término de velocidad es opcional. Este análisis es necesario para determinar si las burbujas pueden chocar en un flujo inviscido e irrotacional. Si la serie en cuestión es convergente, entonces la fuerza sobre la burbuja es finita y es posible que las burbujas choquen. Si la serie es divergente y tiende a infinito, entonces la fuerza entre las burbujas es muy grande y es imposible que suceda el choque entre las burbujas.

Para analizar la convergencia de una serie debemos aplicar varios criterios. Uno de ellos es saber si el término n ésimo tiende a cero. Que el término n ésimo tienda a cero cuando $n \rightarrow \infty$ es una condición necesaria, pero no suficiente para que la serie converja. El segundo criterio que utilizaremos es el criterio de la razón, que estipula, que una serie converge si la razón entre el término n y el término $n+1$ es mayor que uno.

1era Prueba.

$$\lim A_k = \lim (S_k - S_{k-1})$$

$$S_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

(1)

La serie S_k que representa la suma de los k términos de la sucesión A_k converge si el término k ésimo de la sucesión tiende a cero. Así, si S_k converge entonces:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$$

(2)

2da prueba. (criterio de la razón)

$$\lim \left| \frac{A_{k+1}}{A_k} \right| < 1$$

(3)

Implica que la serie S_k es absolutamente convergente.

$$\lim \left| \frac{A_{k+1}}{A_k} \right| > 1$$

(4)

Implica que la serie S_k es divergente.

En este caso usaremos solo el criterio de la razón para probar que la serie es convergente. La serie en cuestión se puede representar en forma general de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2} \int \nabla \phi \cdot \nabla \phi \cdot n_i dA = 4\pi R^2 U^2 (3f_{01}f_{02} + 4f_{02}f_{03} + 5f_{03}f_{04} + \dots + (n+2)f_{0n}f_{0n+1} + \dots) \quad (5)$$

Entonces para evaluar la convergencia de esta serie, usaremos el criterio de la razón, para demostrar que la serie es convergente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \frac{f_{0n}f_{0n+1}}{f_{0n-1}f_{0n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \frac{f_{0n+1}}{f_{0n-1}} < 1 \quad (6)$$

El cociente $(n+2)/(n+1)$ tiende a uno a medida que n tiende a infinito. Basta demostrar entonces que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{0n+1}}{f_{0n-1}} < 1. \quad (7)$$

Lo que tenemos que demostrar es que la serie converge en el límite dual de $n \rightarrow \infty$, y $s \rightarrow 2R$, donde R es el radio de la burbuja.

En la sección 3,3 obtuvimos una representación de f_{0n} , como una serie de potencias en (R/s) . Dando valores a R/S podemos darnos una idea del comportamiento de f_{0n} para diferentes valores de n , es decir $n=1,2,3\dots n$,

$$f_{mn} = \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{\infty} L_{mnp} \left(\frac{R}{s} \right)^p \quad (8)$$

Usando las matrices L_{mnp} obtenidas en la sección 3.3, en la ecuación 3,68:

$$L_{mn0} = (-1)^m \delta_{1n},$$

$$L_{mnp} = (-1)^m \frac{n}{n+1} \sum_{q=1}^{p-n-1} \begin{bmatrix} q+n \\ n+m \end{bmatrix} L_{mq(p-n-q-1)}. \quad (9)$$

Podemos calcular valores de los coeficientes de los múltiplos f_{0n} y obtener las expresiones para los primeros 8 múltiplos. El cálculo se realizó con un programa que calcula en forma recursiva la matriz L_{mnp} en Mathematica.

Haciendo este cálculo se llega a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 f_{01} &= \frac{1}{2} \left(1 + \left(\frac{R}{s}\right)^3 + \left(\frac{R}{s}\right)^6 + 3\left(\frac{R}{s}\right)^8 + \left(\frac{R}{s}\right)^9 + \dots \right) \\
 f_{02} &= \frac{1}{2} \left(2\left(\frac{R}{s}\right)^4 + 2\left(\frac{R}{s}\right)^7 + 8\left(\frac{R}{s}\right)^9 + 2\left(\frac{R}{s}\right)^{10} + \dots \right) \\
 f_{03} &= \frac{1}{2} \left(3\left(\frac{R}{s}\right)^5 + 3\left(\frac{R}{s}\right)^8 + 15\left(\frac{R}{s}\right)^{10} + \dots \right) \\
 f_{04} &= \frac{1}{2} \left(4\left(\frac{R}{s}\right)^6 + 4\left(\frac{R}{s}\right)^9 + \dots \right) \\
 f_{05} &= \frac{1}{2} \left(5\left(\frac{R}{s}\right)^7 + 5\left(\frac{R}{s}\right)^{10} + \dots \right) \\
 f_{06} &= \frac{1}{2} \left(6\left(\frac{R}{s}\right)^8 + \dots \right) \\
 f_{07} &= \frac{1}{2} \left(7\left(\frac{R}{s}\right)^9 + \dots \right) \\
 f_{08} &= \frac{1}{2} \left(8\left(\frac{R}{s}\right)^{10} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

(10)

Podemos analizar los valores de esta serie de coeficientes. Para calcular el límite analicemos los coeficientes f_{07} y f_{08} por ejemplo. El valor de f_{07} es de orden $7(R/s)^9 + O(R/s)^{12}$. El siguiente valor f_{08} es de orden $8(R/s)^{10} + O(R/s)^{13}$. Por lo tanto, tomando como ejemplo estos dos coeficientes podemos escribir el límite 3.75:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{0n+1}}{f_{0n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n} \frac{(R/s)^{n-2}}{(R/s)^n} = (1) * \lim \left(\frac{R}{s} \right)^2$$

(11)

Este límites cuando $s \rightarrow 2R$ tiende a $\frac{1}{4}$. Por lo tanto cada término es 25% del término anterior. Esto garantiza que la serie converge para $n \rightarrow \infty$. De acuerdo a este resultado la integral que representa esta serie es absolutamente convergente. Como la fuerza no es infinita, no existe una fuerza suficientemente grande para evitar que las burbujas entren en contacto.

“Si puedes medir aquello de lo que estas hablando, y expresarlo en números, entonces sabes algo acerca de eso”

Lord Kelvin.

Capítulo 5. Una burbuja que se mueve paralela a una pared.

El fenómeno que analizaremos en este Capítulo será el movimiento de una burbuja junto a una pared. En un flujo bifásico de burbujas, hay dos fenómenos que influyen en el movimiento de las burbujas, el primero es la interacción entre pares de burbujas, el segundo es la interacción de las burbujas con las paredes. Cuando las burbujas se mueven junto a una pared sufren una atracción por efecto Bernoulli, que causa que las burbujas se acercan a la pared y reboten cada vez. Cada vez que las burbujas rebotan, cambian de dirección y por tanto la magnitud de la velocidad horizontal de las burbujas varía continuamente.

La agitación de las burbujas en un fluido está definido como la desviación estándar de la velocidad horizontal dividido por la velocidad característica o terminal. Esto es la agitación $A = \frac{\sigma_v}{V}$, donde σ_v es la desviación estándar de la velocidad y V es la velocidad terminal de la burbuja. Con este ejercicio pretendemos analizar la agitación que producen las paredes en un flujo o suspensión de burbujas en movimiento en un recipiente o conducto.

Calculando $\langle U_s/U \rangle$ y $\langle U_x/U \rangle$, donde U_s es la velocidad horizontal y U_x la velocidad vertical, podemos evaluar la perturbación en la trayectoria y la velocidad de una burbuja como resultado de la interacción con una pared. Si obtenemos valores medios de la velocidad horizontal y vertical, podemos medir la agitación producida por las paredes. Estos valores medios están definidos como:

$$\langle V_s/U \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (V_s/U) dt \quad , \quad (5.1-a)$$

$$\langle V_x/U \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T (V_x/U) dt \quad , \quad (5.1-b)$$

donde U es la velocidad terminal de la burbuja y T es el período en el que se calcula el promedio.

Para analizar el movimiento de una burbuja que se mueve junto a una pared, es necesario resolver las ecuaciones de movimiento (Ec. 3.47) en combinación con las fuerzas de arrastre (Ec. 3.52). Cuando las burbujas suben, debido a la fuerza de la gravedad, es necesario incluir las fuerzas de flotación:

$$F_1 = 2\rho_l Vg. \quad (5.2)$$

Tomando la aceleración de la gravedad g en la dirección negativa del eje x de coordenadas. Para adimensionalizar los resultados se hicieron los siguientes cambios en las variables: (1) las distancias sobre los ejes coordenados se adimensionalizaron con el radio de la burbuja R ; (2) las velocidades horizontal y vertical del centro de masa de las dos burbujas x' , y' y la velocidad relativa s' , se hicieron adimensionales con una velocidad característica U ; (3) el tiempo se hizo adimensional con el factor R/U ; (4) la aceleración se hizo adimensional con R/U^2 .

La opción lógica para U , es la velocidad terminal de una burbuja. De acuerdo al coeficiente de arrastre de Levich (1949), tenemos:

$$U = \frac{gR^2}{9\nu}. \quad (5.3)$$

De esta forma se obtienen ecuaciones adimensionales de movimiento, con términos de masa añadida y fuerzas hidrodinámicas de $O(1)$ y las fuerzas de arrastre y de flotación de $O(Re^{-1})$, donde el número de Re está dado por:

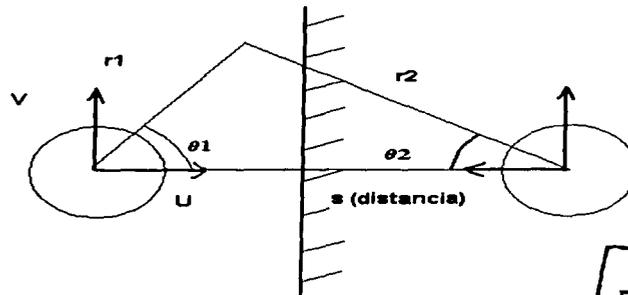
$$Re = \frac{gR^3}{9\nu^2}. \quad (5.4)$$

El conjunto de ocho ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales se integraron numéricamente para varios valores de números de Reynolds y diferentes condiciones iniciales. Las trayectorias se calcularon para velocidad inicial $V_0=1$ m/s al inicio del movimiento, mientras se varió las condiciones de distancia a la pared s y radio de la burbuja.

5.1 Trayectoria de una burbuja junto a una pared a alto número de Reynolds

El movimiento de una burbuja junto a una pared se puede modelar por el método de las imágenes si se coloca una esfera imagen dentro de la pared a una distancia $s/2$. Como se observa, este problema es equivalente al flujo de dos esferas con velocidad \mathbf{U} en dirección paralela. El problema se puede estudiar con las ecuaciones de movimiento para dos burbujas, tomando la velocidad de las dos burbujas paralela en la dirección vertical, e igual a \mathbf{U} .

Aunque hay algunos fenómenos que no modelan el flujo potencial, como por ejemplo la velocidad tangencial nula en la superficie de la pared. Este modelo es suficiente para modelar la atracción entre la burbuja y la pared.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 5.1 Movimiento de una burbuja junto a una pared.

Si denominamos a x' la velocidad del centro de masa de las burbujas en la dirección vertical y y' la velocidad del centro de masas en la dirección horizontal, la componente y' es igual a cero, ya que el centro de masas de las esferas no se desplaza en la dirección y . Por lo tanto la ecuación de la componente y' se elimina. Además el coeficiente a_{12} (Ecuación 3.43) es igual a cero porque el ángulo entre las burbujas y la vertical es 90° y constante. También los términos del miembro derecho de la ecuación en θ son cero, debido a que θ es igual a 90° .

Por lo tanto, se eliminan dos ecuaciones de segundo orden, las correspondientes a y , θ . Tomando en cuenta esto, las ecuaciones de movimiento se reducen a

$$\rho_l V_b \frac{d}{dt} \left[a_{11} \frac{dx}{dt} \right] = 2\rho_l V_b g + f_1,$$

$$\rho_l V_b \frac{d}{dt} \left[a_{33} \frac{ds}{dt} \right] = \frac{1}{2} \rho_l V_b \left[\dot{x}^2 \frac{\partial}{\partial s} a_{11} + \dot{s}^2 \frac{\partial}{\partial s} a_{33} \right] + f_3,$$

(5.5)

donde V_b es el volumen de la burbuja, ρ_l es la densidad del fluido, x es la coordenada vertical, s es la distancia entre las burbujas y f_1 y f_3 son las fuerzas externas como la fricción sobre las burbujas. Analicemos físicamente lo que representa cada término en estas ecuaciones. Los términos de la izquierda representan la inercia de la burbuja es decir la fuerza necesaria para acelerar las burbujas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

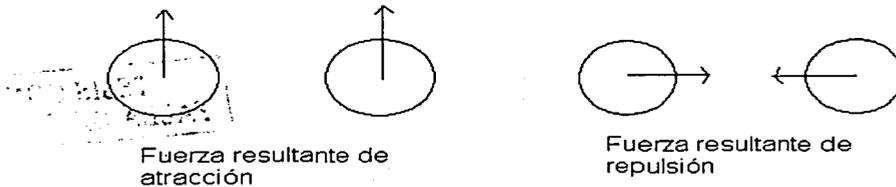


Figura 5.2 Fuerzas de atracción y repulsión de acuerdo al movimiento relativo de las burbujas entre sí.

El término $2\rho_l g$ representa la fuerza de flotación por unidad de volumen sobre las burbujas y el término en el miembro derecho de la ecuación en s , representa la fuerza hidrodinámica, debido a que las burbujas se mueven en dirección paralela ó colineal.

Como veremos, la fuerza de atracción debido al movimiento en paralelo, supera a la fuerza de repulsión debido al movimiento colineal (ver Figura 5.2). Por esta razón las burbujas siempre se aproximan entre sí. Los coeficientes a_{11} y a_{33} dependen de la razón (R/s) en cada instante, y del ángulo θ , que es constante e igual a $\pi/2$. Podemos escribir los componentes del tensor de inercia a_{11} , y a_{33} con la precisión requerida, por ejemplo, escribiéndolos correctos hasta un orden $O(R/s)^6$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -2(1 + 3g_{11}) = \left(-1 + \frac{3}{2}\left[\frac{R}{s}\right]^3 - \frac{3}{4}\left[\frac{R}{s}\right]^6 + \dots\right), \\ a_{33} &= \frac{1}{2}(-1 + 3f_{01}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{R}{s}\right]^3 + \frac{3}{4}\left[\frac{R}{s}\right]^6 + \dots. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Además las fuerzas de arrastre para las direcciones x , y s , se calculan a partir de las Ecuaciones 3.82. Haciendo las simplificaciones pertinentes tenemos:

$$\begin{aligned} f_1 &= -8\mu\pi R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)^2}{n} \left[x \left[g_{1n}^2 \right] \right], \\ f_3 &= 4\mu\pi R s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(n+1)^2}{n} f_{0n}^2. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Con estos coeficientes calculados la ecuación de movimiento se puede reescribir correcta hasta un orden $O(R/s)^4$; es decir, con los primeros tres términos en la ecuación para a_{11} y a_{33} . Esta es una solución aproximada, sin embargo, se puede obtener una precisión mayor a la de los dipolos incluyendo mayor número de términos en los coeficientes a_{11} y a_{33}

$$\begin{aligned} \left(-1 + \frac{3}{2}\left[\frac{R}{s}\right]^3\right) \frac{d^2x}{dt^2} &= 2g - \left(\frac{9}{2R}\left[\frac{R}{s}\right]^4\right) \frac{dx}{dt} \frac{ds}{dt} + \frac{f_1}{\rho_1 V}, \\ \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{R}{s}\right]^3\right) \frac{d^2s}{dt^2} &= \left(\frac{9}{4R}\left[\frac{R}{s}\right]^4\right) \left[\frac{1}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \right] + \frac{f_3}{\rho_1 V}. \end{aligned}$$

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

(5.8)

donde las fuerzas f_1 y f_2 son las fuerzas de arrastre sobre la burbuja de acuerdo a la Ecuación 3.52.

Como primer caso analizaremos el movimiento de burbujas sin fuerzas de arrastre, con una velocidad inicial U en la dirección vertical, y para una distancia inicial entre burbujas s igual a $4 \cdot R$. Se eligieron los siguientes parámetros de prueba, $R=1$ mm, y $U= 1.00$ m/s, lo que resultó en $Re=2000$.

Las ecuaciones de movimiento se resolvieron con una rutina de Runge Kutta de 2° orden programada en Matlab. Los coeficientes a_{11} y a_{33} se obtuvieron en base a la definición de K_{mnp} y L_{mnp} del Capítulo 3, incluyendo los primeros 20 términos en los coeficientes. El paso de tiempo se hizo variable de acuerdo a la aceleración de la burbuja, para optimizar la precisión de la rutina. En la Figura 5.3 se observa la trayectoria obtenida para la burbuja con esta simulación.

La Ecuación (5.8) muestra una aceleración negativa, de atracción, en el eje s , conforme las burbujas suben. Esta aceleración se incrementa a medida que disminuye la distancia entre las burbujas ($s \rightarrow 2R$) y cuando $(dx/dt)^2 > \frac{1}{2}(ds/dt)^2$. Como ds/dt nunca es mayor en magnitud a $2^{1/2}$ la velocidad vertical de la burbuja, la fuerza entre las burbujas siempre es de atracción, por lo tanto las burbujas chocan en todos los casos. Cuando las burbujas están muy cerca entran en juego varios factores que nuestra ecuación no modela. Uno es que la velocidad en la pared es igual a cero (nuestro modelo considera una velocidad de deslizamiento). Dos, es que debido a la fuerza de atracción y en el momento del choque la burbuja se deforma y esto causa que se almacene energía en la superficie de la burbuja. Por lo tanto, en la realidad, el centro de masa de la burbuja se debe aproximar a la pared a una distancia menor a R .



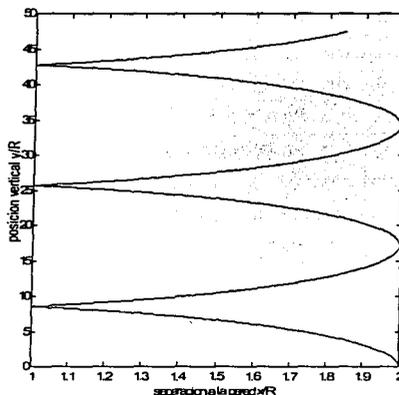
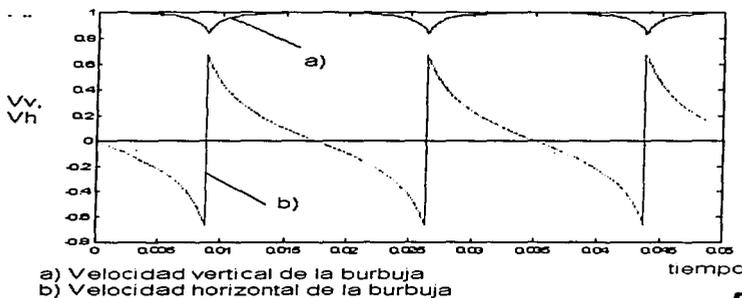


Figura 5.3 Distancia a la pared, vs posición vertical, $R=1\text{mm}$, $U=1\text{ m/s}$.

En nuestro modelo simplificamos este efecto considerando que se trata de un choque perfectamente elástico y que las burbujas no se deforman. Cuando la distancia entre las burbujas se hace menor a $2R$, imponemos una condición artificial para que la velocidad sea igual, pero de signo contrario en la dirección s.



a) Velocidad vertical de la burbuja
b) Velocidad horizontal de la burbuja

Figura 5.4 Velocidad vertical y horizontal vs tiempo, $R=1\text{mm}$.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Las Figuras 5.4 y 5.5 muestran la velocidad y la aceleración como función del tiempo. Estas variables son funciones periódicas del tiempo. La velocidad en s es negativa a medida que se acerca a la pared, es decir s disminuye. Cuando ocurre el choque cambia de signo a positivo, es decir las burbujas se alejan. La Figura 5.4 muestra que el valor de la velocidad en s siempre es menor que la velocidad en x . A su vez la aceleración siempre es negativa; esto es, siempre existe una fuerza de atracción.

La Figura 5.6 muestra la distancia a la pared en función del tiempo. Esta gráfica es muy similar en forma a la Figura 5.3 de la trayectoria de la burbuja. Cuando se hace adimensional la Gráfica de distancia en función del tiempo, ésta es exactamente igual a la Gráfica de trayectoria de la burbuja, por lo que solo indicaremos una de ellas.

En el caso de la Gráfica de trayectoria de la burbuja, se puede observar que ésta recupera su posición y velocidad inicial después de la interacción con la pared cuando no se considera el arrastre. Este resultado es muy apropiado, pues en este caso no hay fuerzas de fricción y por tanto, la velocidad y la amplitud de rebote no se ve amortiguada.

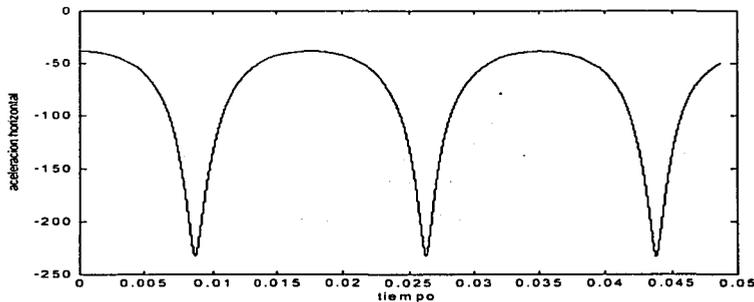


Figura 5.5 Aceleración horizontal vs tiempo, $R= 1 \text{ mm}$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

IMPRESIÓN

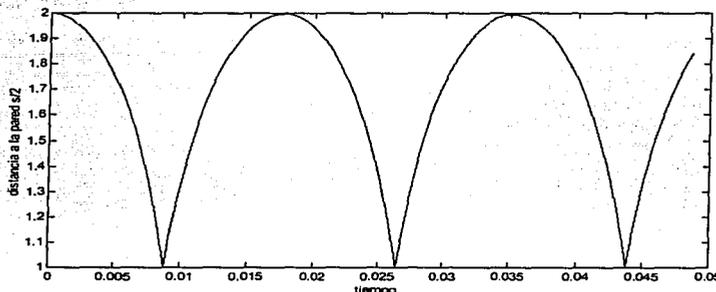


Figura 5.6 Distancia a la pared vs tiempo, $R = 1 \text{ mm}$

5.2 Validación del modelo

En esta Sección analizaremos el movimiento de una esfera junto a una pared en flujo potencial y validaremos el modelo usando diferente número de coeficientes en la ecuación de movimiento de las burbujas. La Ecuación de movimiento (5.5) depende de los coeficientes a_{11} y a_{33} descritos en la Ecuación (5.6). A medida que aumentamos el orden de las potencias en los coeficientes se mejora la precisión de la solución, pero se aumenta el tiempo de cálculo de ésta.

Como la potencia de cada coeficiente decae muy rápidamente se obtiene una buena aproximación escribiendo a_{11} y a_{33} con precisión de orden $O(R/s)^3$, es decir con sólo 3 términos. Sin embargo, determinaremos un número óptimo de términos, resolviendo las Ecuaciones (5.5) con mayor número de términos.

$$\rho_l V_b \frac{d}{dt} \left[a_{11} \frac{dx}{dt} \right] = 2\rho_l V g + f_1,$$

$$\rho_l V_b \frac{d}{dt} \left[a_{33} \frac{ds}{dt} \right] = \frac{1}{2} \rho_l V \left[\dot{x}^2 \frac{\partial}{\partial s} a_{11} + \dot{s}^2 \frac{\partial}{\partial s} a_{33} \right] + f_3,$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

(5.5)

Si aumentamos el número de términos en el cálculo de los coeficientes a_{11} y a a_{33} , obtendremos diferentes comportamientos en la velocidad y aceleración de las burbujas.

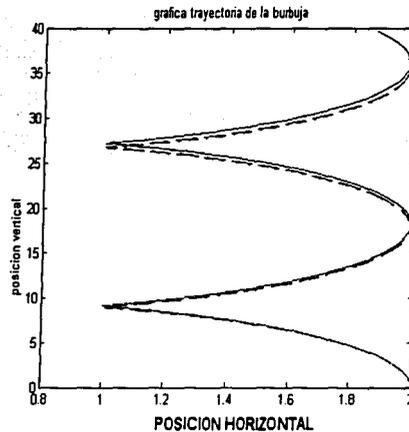
$$a_{11} = -2(1 + 3g_{11}) = (-1 + \frac{3}{2} \left[\frac{R}{s} \right]^3 - \frac{3}{4} \left[\frac{R}{s} \right]^6 + \dots)$$

$$a_{33} = \frac{1}{2} (-1 + 3f_{01}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left[\frac{R}{s} \right]^3 + \frac{3}{4} \left[\frac{R}{s} \right]^6 + \dots)$$

(5.6)

Cuando la velocidad vertical x' de las burbujas aumenta, aumenta la atracción de las burbujas. También cuando se aumenta el número de términos en las ecuaciones, esto equivale a tener un número mayor de multipolos en la solución. Aunque cada multipolo es de magnitud inferior que el anterior el resultado es una mayor atracción. Es necesario cuantificar cuantos términos son apropiados. Para comparar los resultados, primero graficaremos la velocidad y trayectoria para una burbuja de 1.0 mm de radio para una velocidad igual a la velocidad terminal ($Vt=1.088$ m/s) correspondiente a un valor de número de Reynolds, de 2100.

Consideremos los casos con coeficientes calculados con 3, 10 y 20 términos. Las trayectorias obtenidas tomando en cuenta estas variantes se presentan en las siguientes gráficas. Como ven, las diferencias son muy pequeñas y consideramos que el modelo con 10 términos en la solución es suficientemente exacto. Si observamos la Figura 5.7, la trayectoria varía muy poco al incluir 10 en vez de 3 términos y la variación es todavía menor, cuando se incluyen 20 términos. Podemos evaluar la exactitud comparando la amplitud de cada rebote para cada solución. El primer rebote en cada caso sucede en 9 radios de altura. El tercer rebote en cambio, sucede a 28 radios para 3 términos y en 27 radios para 20 términos. Por lo tanto la diferencia entre las soluciones es menor a 4%.



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Figura 5.7 Desplazamiento vertical vs. horizontal. a) ___ solución con 3 términos
b) --- con 10 términos, c) -.- con 20 términos.

En la Figura 5.8 se muestra la velocidad como función del tiempo adimensional. Como se puede observar, la velocidad de ascenso permanece cercana a 1.0 y sólo desciende un 20% en el momento de cada rebote. La velocidad horizontal en el momento del choque no varía considerablemente (de $0.64U$ a $0.66U$, menor al 3%). Y el período de choque se reduce un poco, pero marginalmente.

En la Figura 5.9 se observa la aceleración horizontal como función del tiempo. La aceleración en el momento del choque aumenta con mayor número de términos, de 0.26 a 0.34; un cambio mayor al 30%. Sin embargo este cambio sólo sucede en la aceleración porque se mantiene un período de tiempo pequeño, por lo tanto el efecto sobre la velocidad o el desplazamiento no es muy grande. Consecuentemente, cuando queremos obtener soluciones aproximadas de la velocidad o la posición, es suficiente 10 términos en la solución.

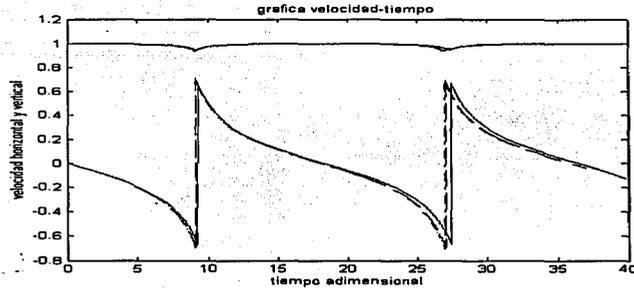


Figura 5.8 Velocidad vertical vs. tiempo adimensional. A) — Solución con 3 términos b) --- con 10 términos y c) -.-.-con 20 términos.

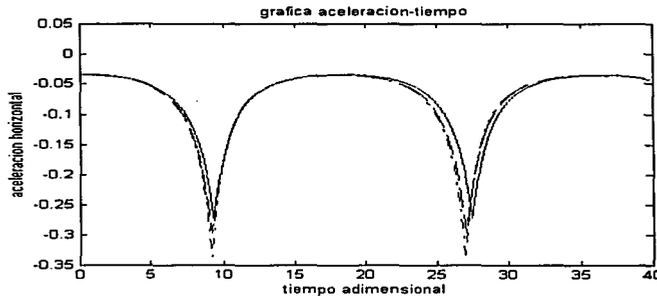


Figura 5.9 Aceleración horizontal vs. tiempo adimensional. A) — Solución con 3 términos b) ---- con 10 términos y c) -.-.- con 20 términos.

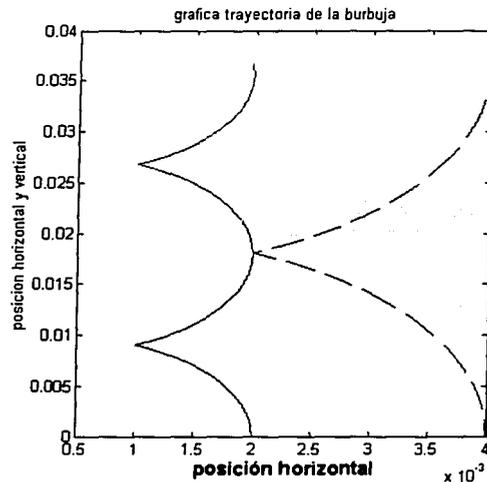
5.3 Resultados para diferentes radios de burbuja

A continuación veremos el comportamiento de las gráficas de posición, velocidad y aceleración con respecto al tiempo, para diferentes radios de burbuja. En esta Sección modelaremos las ecuaciones de movimiento con 10 términos en la solución, con velocidad inicial constante $U=1$ m/s y distancia inicial a la pared de 2 radios. Si observamos la Ecuación de movimiento (5.5), aparecen varios coeficientes que dependen de a_{11} y a_{33} , los cuales a su vez dependen de la razón

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

$(R/s)^n$. Esto hace que las gráficas sean similares para una distancia inicial similar $(R/s)=4,6$, etc.

Sin embargo encontramos que cuando variamos el radio al doble, por ejemplo $R=2$ mm, la aceleración se hace de la mitad, debido al factor $1/R$ en las ecuaciones. Como la aceleración se reduce a la mitad, las burbujas hacen contacto con la pared en un tiempo aproximadamente igual al doble. Veremos a continuación, cuál es el comportamiento de las demás variables (velocidad, posición). En la Figura 5.10 podemos apreciar la gráfica de la trayectoria, o posición de la burbuja en el plano x-y. Como se puede apreciar cuando se duplica el radio de la burbuja se obtiene una amplitud de rebote del doble. De esta manera la gráfica de trayectoria es proporcional al radio de la burbuja.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Figura 5.10 Posición horizontal vs posición vertical, a) $R=1$ mm, b) $R=2$ mm. $U = 1$ m/s, Distancia inicial $=2R$

De acuerdo a la gráfica 5.11 la velocidad en el momento del choque es constante para diferentes radios e igual a 0.64U. Este resultado es lógico porque la velocidad esta dividida por la velocidad de referencia y es adimensional.

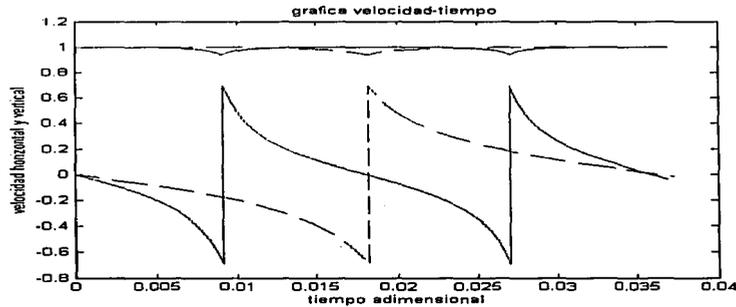


Figura 5.11 Velocidad horizontal vs tiempo, para a) $\text{---} R=1$ mm, b) $\text{---} R=2$ mm. $U=1$ m/s, Distancia inicial = $2R$

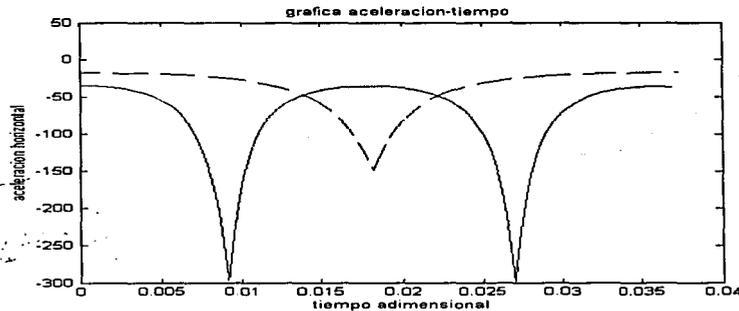


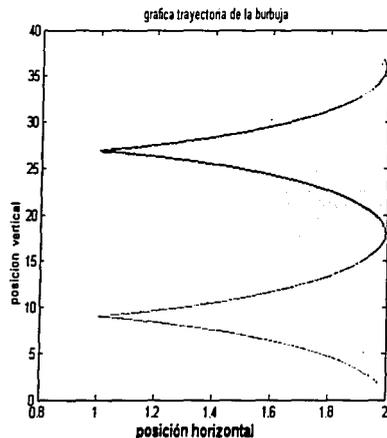
Figura 5.12 Aceleración horizontal vs tiempo, para a) $\text{---} R=1$ mm, b) $\text{---} R=2$ mm, $U=1$ m/s, distancia inicial = $2R$

En cambio la aceleración toma valores cercanos a la mitad del original de acuerdo a la Figura 5.12 (pero no esta adimensionalizada), cuando se duplica el radio. Cuando usamos variables adimensionales, todas las gráficas son similares y no hay diferencia en modelar con diferentes radios.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Si observamos la Ecuación (5.5), podemos apreciar que el segundo término está multiplicado por el factor $1/R$. Podemos hacer un análisis adimensional para demostrar que las trayectorias son efectivamente idénticas, sin embargo nos contentamos por el momento con simular las ecuaciones para diferentes radios con variables adimensionales. Cuando no se toman en cuenta las fuerzas de arrastre, las trayectorias obtenidas son independientes del radio y la velocidad elegida para la simulación.

Podemos agrupar mejor los datos, haciendo adimensionales las variables, es decir, usando un tiempo adimensional $t^*=t(U/R)$, una aceleración adimensional $a^*=a R/U^2$ y una velocidad adimensional $V^*= V/U$, donde U es la velocidad terminal y R es el radio. Se muestran a continuación las gráficas de posición, velocidad, y aceleración para cuatro diferentes radios: $R=2\text{mm}$, 1mm , 0.5mm , correspondientes a $Re= 4000, 2000, 1000$.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 5.13 Grafica de trayectoria , para a) —R=2 mm, b) ---R=1 mm.

Después de modelar el movimiento de las burbujas se obtuvo que la trayectoria y las gráficas de velocidad y aceleración cuando se hacen las variables

adimensionales, no varían al cambiar el radio de la burbuja. En la Figura 5.13 podemos apreciar que la amplitud de rebote o de choque se mantuvo constante. Para obtener los mismos resultados, es necesario refinar el paso de tiempo cuando el radio se reduce, ya que la aceleración se incrementa. Con excepción de estos detalles numéricos, las gráficas son iguales.

En la Figura 5.14 se muestra la velocidad horizontal y vertical de la burbuja. Esta no cambia al variar el radio de la burbuja. En la Figura 5.15 se muestra los resultados para la aceleración.

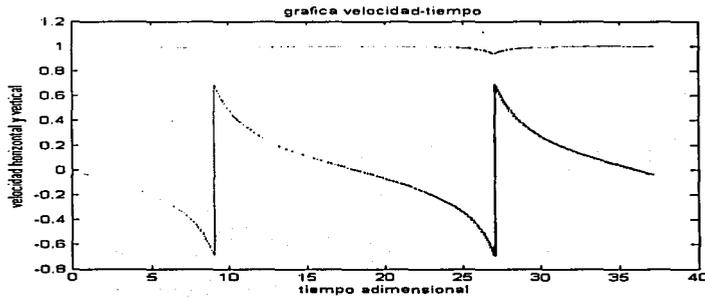


Figura 5.14 Gráfica de velocidad vertical y horizontal vs. tiempo, para a) $\text{---} R=2 \text{ mm}$, b) $\text{---} R=1 \text{ mm}$.

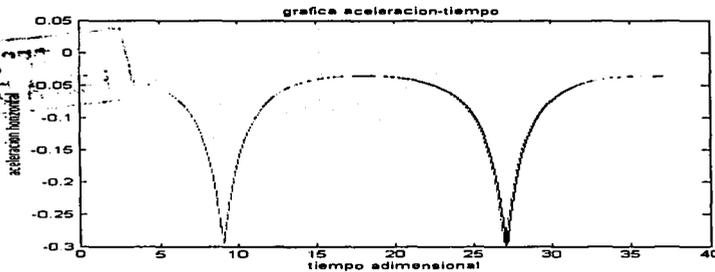


Figura 5.15 Aceleración horizontal vs. tiempo, para a) $\text{---} R=2 \text{ mm}$, b) $\text{---} R=1 \text{ mm}$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Si observamos dos burbujas en movimiento paralelo, las burbujas chocan en varias ocasiones sin que haya una fuerza de repulsión que lo evite. El resultado es la coalescencia de las burbujas.

5.4 Resultados para diferentes distancias a la pared

En la Sección anterior modelamos la trayectoria de una burbuja cercana a una pared para diferentes radios. La trayectoria y velocidad no dependen del radio de la burbuja cuando se modela el movimiento sin incluir el arrastre. En esta Sección modelaremos el movimiento con diferentes distancias a la pared. En este caso, elegiremos un radio fijo de 2 mm y variaremos la distancia inicial (s_0) a la pared con diferentes valores.

$$s_0 = \{4R, 6R, 8R, 10R\dots\} \quad (5.9)$$

Uno de los objetivos de esta tesis es cuantificar el efecto de las paredes en un flujo de burbujas. Una forma de cuantificar este efecto, es calcular la agitación del fluido en la velocidad horizontal. La agitación de un fluido la podemos definir como la desviación estándar de la velocidad horizontal dividida por una velocidad característica, como el promedio de la velocidad o la velocidad terminal.

$$\text{Agitación} = A_f = \frac{\sigma_v}{U} \quad (5.10)$$

donde σ_v es la desviación estándar y U la velocidad característica. Calculando $\langle U_s/U \rangle$ y $\langle U_x/U \rangle$, donde U_s y U_x son las velocidades horizontal y vertical de la burbuja, podemos evaluar la perturbación en la trayectoria de una burbuja como resultado de la interacción con una pared.

Obtendremos valores medios de la velocidad horizontal y de la velocidad vertical de ascenso de la burbuja. Estos valores medios están definidos como

$$\begin{aligned} \langle V_s / U \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (V_s / U) dt, \\ \langle V_x / U \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (V_x / U) dt; \end{aligned} \quad (5.11)$$

donde U es la velocidad terminal de la burbuja y T es el período en el que se calcula el promedio. Para una distancia inicial mayor, el periodo de choque es proporcionalmente mayor y también la amplitud de rebote es más grande.

La frecuencia de rebote que es el inverso del periodo de rebote debe disminuir conforme se incrementa la distancia a la pared. La frecuencia de rebote se hace adimensional como $f^* = (f) R/U$. En las siguientes gráficas se muestran las trayectorias adimensionales, la velocidad horizontal y vertical y la aceleración horizontal y vertical como función del tiempo. De la misma forma, usando las Ecuaciones (5.11), obtendremos el promedio de la velocidad horizontal y vertical.

A partir de las gráficas para diferentes distancias, se obtiene la amplitud de rebote y la frecuencia de rebote para diferentes radios de burbuja. En la Figura 5.16 se muestra el desplazamiento de la burbuja en el plano x-y para diferentes distancias a la pared. Se usa una velocidad inicial de 1 m/s (equivalente a un $Re=4000$) y se modela la Ecuación de movimiento (5.5) con 10 términos en la solución.

Como se puede observar en la Figura 5.16 la amplitud de rebote aumenta con la distancia a la pared. El periodo de rebote también aumenta con la distancia a la pared. La amplitud de rebote varía con la distancia de acuerdo a la tabla 5.

AMPLITUD DE REBOTE (en radios R) (para burbuja $R=2\text{mm}$)($U=1\text{m/s}$)

Distancia a la pared	2	3	4	5	6
Amplitud de rebote	18	54	110	192	302

En la figura 5.17 se muestra la velocidad horizontal y vertical de la burbuja como función del tiempo. La velocidad horizontal de choque se incrementa ligeramente con la distancia inicial a la pared. Sin embargo la variación es menor al 2%. Este ligero cambio se debe a que la burbuja tiene más tiempo y espacio para acelerarse cuando está más lejos de la pared. La variación de la velocidad vertical en el momento del choque también es pequeña. La energía que gana la burbuja al acelerarse hacia la pared, la obtiene reduciendo la velocidad de ascenso.

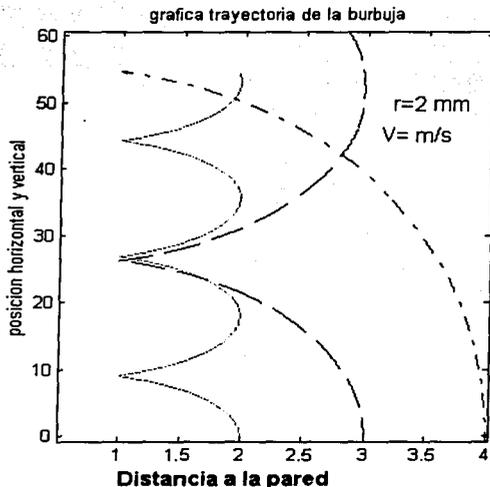
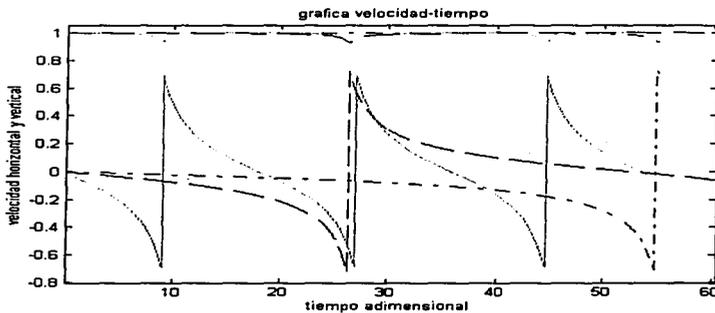


Figura 5.16 Gráfica de la Trayectoria para diferentes distancias a la pared, a) 2 radios, b) --- 3 radios, c) 4 radios



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Figura 5.17 Gráfica de aceleración horizontal y vertical vs. tiempo para diferentes distancias a la pared, a) 2 Radios, b) --- 3 radios, c) 4 radios ($R=2 \text{ mm}$, $U=1\text{m/s}$)

Ahora analizaremos la aceleración horizontal y vertical de la burbuja: (Figura 5.18 y 5.19). De acuerdo a la Ecuación (5.8), cuando la burbuja se encuentra a una distancia de 4 radios de la pared, la aceleración sobre la burbuja es 1/16 menor, que cuando la burbuja se encuentra a 2 radios.

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left(\frac{R}{s} \right)^3 \right) \frac{d^2 s}{dt^2} &= \left(\frac{9}{4R} \left(\frac{R}{s} \right)^4 \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] + \frac{f_3}{\rho_l V} \\ \left(-1 + \frac{3}{2} \left(\frac{R}{s} \right)^3 \right) \frac{d^2 x}{dt^2} &= 2g - \left(\frac{9}{2R} \left(\frac{R}{s} \right)^4 \right) \frac{dx}{dt} \frac{ds}{dt} + \frac{f_1}{\rho_l V} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Entre mayor es la distancia a la pared, menor es la aceleración y además la aceleración se reduce cerca de la pared por el incremento en la velocidad horizontal. De acuerdo a la Ecuación 5.5 la aceleración horizontal depende de los coeficientes $a_{11}(R/s)$, $a_{33}(R/s)$ y de la velocidad horizontal y vertical de la burbuja.

Al modelar las ecuaciones de movimiento se encontró que la aceleración de choque horizontal disminuye con la distancia a la pared. La variación es de 0.24 a 0.20 (del 20%) al cambiar de 2 radios de distancia inicial a 4 radios. La variación de la aceleración vertical es menor y se muestra en la Figura 5.18. Concluimos que los cambios en la aceleración son considerables en la dirección horizontal, pero estos no afectan prácticamente la velocidad horizontal y vertical de choque.

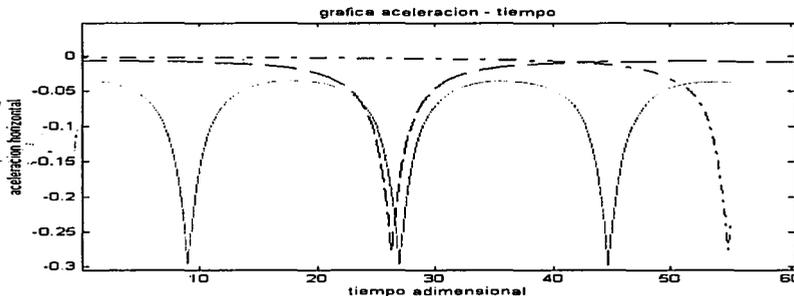


Figura 5.18 Gráfica de aceleración horizontal vs. Tiempo para distintas separaciones de la pared, a) — 2 radios, b) --- 3 radios, c) ... 4 radios.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

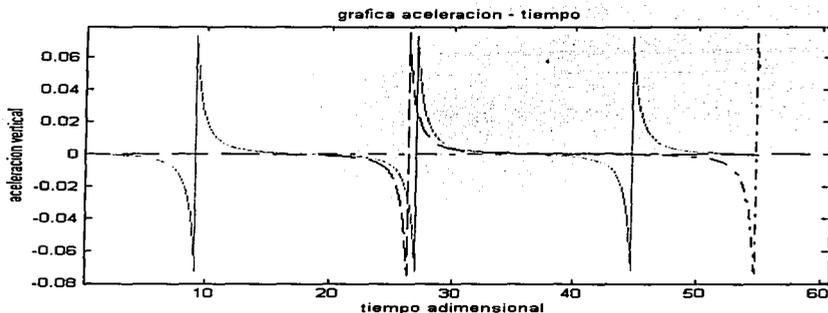


Figura 5.19 Gráfica de aceleración horizontal y vertical vs. tiempo para distintas distancias a la pared, a) — 2 radios, b) --- 3 radios, c) ... 4 radios.

5.5 Amplitud de rebote de la burbuja

En esta Sección, analizaremos el comportamiento de la amplitud de rebote y de la frecuencia de rebote con la distancia a la pared. Definimos la amplitud de rebote como la distancia vertical (medida en radios) recorrida por la burbuja entre dos choques sucesivos. Y la frecuencia de choque como el número de choques por unidad de tiempo que la burbuja colisiona con la pared. Como ya vimos en la Figura 5.16, la amplitud de rebote aumenta con mayor distancia inicial a la pared. La frecuencia de rebote de la burbuja se puede obtener como el inverso del período de rebote. Por lo tanto se puede obtener la frecuencia de rebote adimensional como el inverso del tiempo adimensional de rebote.

No es necesario presentar gráficas de la amplitud del rebote adimensional a la vez que del período de rebote. La razón es que ambas son numéricamente iguales a $U \cdot t/R$, donde U es la velocidad de ascenso de la burbuja, R el radio y t el período de rebote entre cada choque. Además, las gráficas adimensionales son las mismas para diferentes radios de burbuja, por lo que usamos un solo radio ($R=2$ mm). En la Figura 5.20 se muestra la amplitud de rebote en función de la distancia a la pared.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

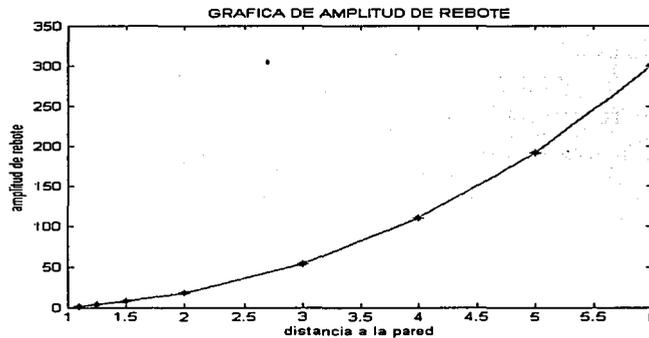


Figura 5.20 Amplitud de rebote vs. distancia a la pared.

5.6 Frecuencia de rebote de la burbuja

En la Figura 5.21 se muestra la frecuencia de rebote en función de la distancia a la pared. Esta es inversamente proporcional a la distancia inicial a la pared con que inicia la burbuja su movimiento. Vemos que la frecuencia tiende a cero a medida que nos alejamos de la pared y tiende a un valor máximo conforme nos aproximamos a la pared. El valor máximo es de 0.5-0.6 (adimensional).

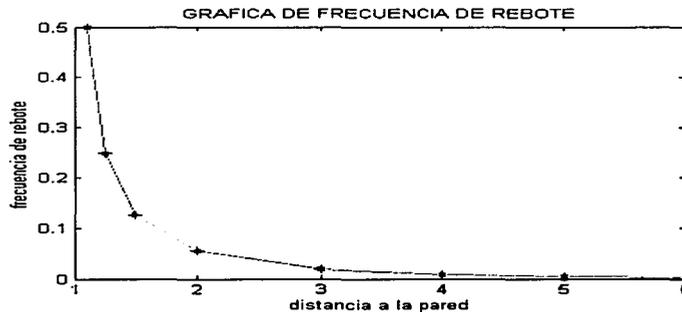


Figura 5.21 Frecuencia de rebote vs. distancia a la pared.

5.7 Velocidad cuadrática media horizontal y vertical.

La velocidad media vertical aumenta con la distancia a la pared y la velocidad media horizontal disminuye cuando modelamos el problema con distancias mayores a 2 radios. Sin embargo la velocidad horizontal presenta un máximo conforme nos acercamos a la pared ($s=1.5$ radios) de 0.25 y la velocidad vertical presenta un mínimo conforme nos acercamos a la pared de 0.99. Esto significa que aunque nos acerquemos indefinidamente a la pared, la velocidad media horizontal no aumenta y por lo tanto la agitación presenta un máximo. La razón es que las burbujas no se pueden acelerar lo suficiente aunque estén muy cerca de la pared.

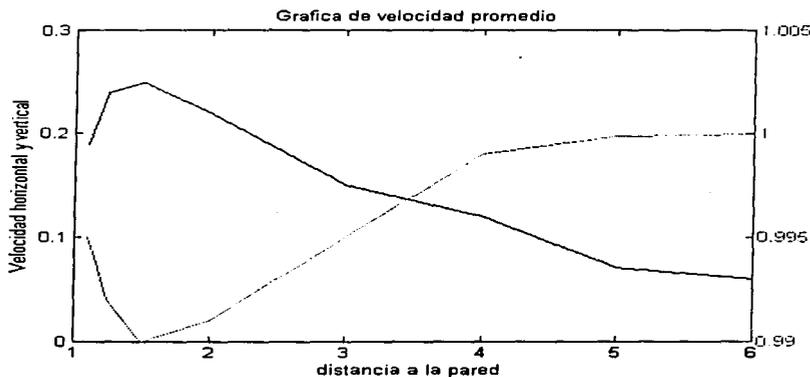


Figura 5.22 Velocidad horizontal media vs. distancia a la pared.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

En la Figura 5.22 se muestra la velocidad horizontal y vertical media, como función de la distancia inicial a la pared. Como se observa la velocidad de ascenso varía de valores de 1.00(U) lejos de la pared, disminuye hasta 0.99U en $s=1.5$ Radios, y luego se incrementa de nuevo a 0.995U. La velocidad media horizontal fluctúa entre 0.06U lejos de la pared, luego se incrementa a 0.25U en $s=1.5$ radios y finalmente disminuye a 0.19U junto a la pared. En la siguiente sección modelaremos el problema para diferentes velocidades. Esto presenta un tope a la agitación producida por una pared en un flujo de burbujas.

En esta sección, se calculó la velocidad media horizontal y vertical para una burbuja que se mueve cerca de una pared sin incluir las fuerzas de arrastre. Por lo tanto la medida varía con la distancia a la pared, pero no varía con el número de Reynolds. Es importante medir esta agitación cuando se incluye el arrastre y la velocidad y su varianza dependen del número de Reynolds.

5.8 Correlación de la amplitud de rebote con el número de Reynolds

Como hemos visto la amplitud de rebote y frecuencia de rebote no dependen del radio de burbuja, cuando se modela el movimiento de la burbuja sin fuerzas de arrastre. Como el número de Reynolds depende del radio de la burbuja y la velocidad de ascenso de la burbuja es necesario averiguar si hay alguna dependencia con la velocidad de ascenso de la burbuja.

De acuerdo a la ecuación 5.8 la aceleración horizontal de la burbuja esta descrita por la siguiente expresión:

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \left[\frac{R}{s} \right]^3 \right) \frac{d^2 s}{dt^2} = \left(\frac{9}{4R} \left(\frac{R}{s} \right)^4 \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] + \frac{f_3}{\rho_l V} \quad (5.8)$$

Por lo tanto la aceleración esta multiplicada por el factor $(1/R)$ y por la velocidad V_s^2 y V_x^2 . Ya que la aceleración se hace adimensional con el factor (R/U^2) , en la ecuación tenemos la cantidad V_s^2/R y V_x^2/R , por lo tanto debemos esperar graficas semejantes usando diferentes velocidades de ascenso.

Para averiguar esta dependencia de la velocidad usaremos un radio fijo de burbuja ($R=2$ mm) y resolveremos la ecuación de movimiento con 10 términos en los coeficientes a_{11} y a_{33} . Usaremos dos velocidades de prueba ($U= 1$ m/s, 2 m/s) y obtendremos gráficas de trayectoria, velocidad y aceleración de la burbuja con estas velocidades de prueba.

En la Figura 5.23 se muestran los resultados de trayectoria y velocidad para dos velocidades diferentes. Las gráficas son las mismas y por tanto podemos concluir que no hay dependencia de la velocidad en el movimiento de una burbuja sin incluir fuerzas de arrastre. Por tanto ni la amplitud de rebote, ni la velocidad media horizontal y vertical dependen del número de Reynolds en esta

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

situación. En la obtención de la solución para una velocidad de 2 m/s se uso un paso de tiempo 4 veces menor. La razón es que la velocidad incrementa 2^2 la aceleración sobre la burbuja, por lo tanto es necesario compensar el paso de tiempo para obtener resultados similares.

En la Sección 5.9 se analizará la variación de las trayectorias y de la velocidad cuando se incluyen las fuerzas de arrastre. En este caso encontraremos la dependencia de la amplitud y frecuencia de rebote con el número de Reynolds, es decir con el radio y velocidad de la burbuja.

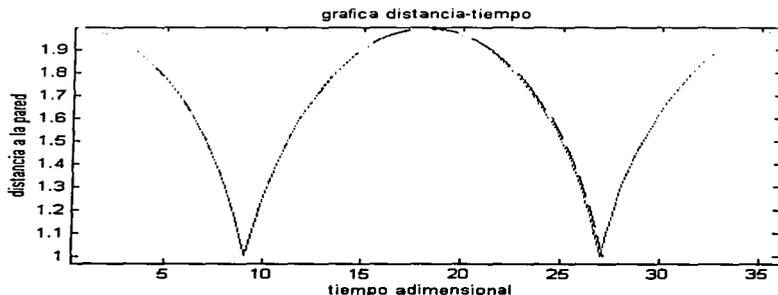
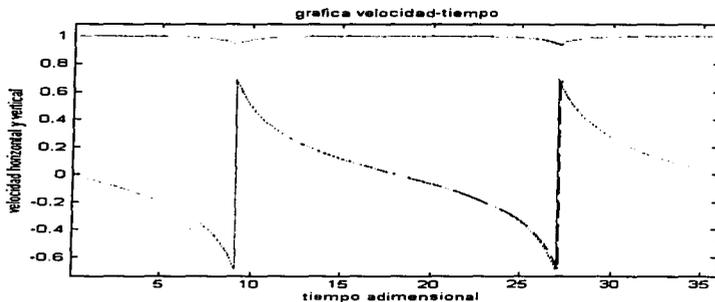


Figura 5.23 Período de rebote para dos velocidades diferentes ($R=2\text{ mm}$, $U = 1\text{ m/s}$, 2 m/s), 10 términos en la solución.



**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Figura 5.24 Velocidad horizontal y vertical para dos velocidades ($R=2\text{ mm}$, $U = 1\text{ m/s}$, 2 m/s), 10 términos en la solución.

5.9 Simulaciones incluyendo la fuerza de arrastre en la solución

En esta sección obtendremos el movimiento de una burbuja junto a una pared, cuando se incluyen las fuerzas de arrastre. Cuando se incluye la fuerza de arrastre se deben resolver las Ecuaciones (5.5), tomando en cuenta los coeficientes de la fuerza de arrastre definidos en las Ecuaciones (5.7).

Los coeficientes de arrastre que se usan para este caso son los correspondientes a la velocidad en la dirección vertical y los correspondientes a la velocidad horizontal. Esto es la fuerza de arrastre en la dirección de la coordenada x y la fuerza de arrastre en la dirección de la coordenada s. De acuerdo a las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= -8\mu\pi R \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(n+1)^2 \left[\dot{x} [g_{1n}^2] \right] \\
 f_3 &= -4\mu\pi R s \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)(n+1) f_{0n}^2
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

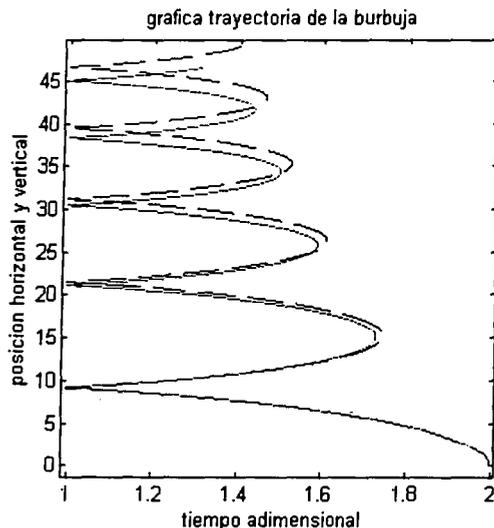
Los términos de las fuerza de arrastre son directamente proporcionales a la velocidad de ascenso de la burbuja \dot{x} y la velocidad con que se acercan las burbujas s y al coeficiente de viscosidad. Podemos usar una forma simplificada para las fuerzas de arrastre de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= -24\mu\pi R \dot{x} \\
 f_3 &= -6\mu\pi R s
 \end{aligned}
 \tag{5.12}$$

La fuerza de arrastre para una esfera solitaria en movimiento es $12\pi\mu RU$, donde U es la velocidad de la esfera. En la velocidad en x, tenemos que tomar en cuenta que son dos esferas en movimiento. Y para la velocidad en s, sabemos que $s'=2V_h$, donde V_h es la velocidad horizontal de la esfera. En este trabajo comparamos los resultados usando la fuerza de arrastre completa y la fuerza simplificada. Ya que hay que determinar si esta aproximación es valida o si nos arroja un resultado sin mucha exactitud.

5.9.1 Comparación de la fuerza de arrastre simplificada y la fuerza de arrastre total

Primero veremos la solución con la fórmula de arrastre simplificada, sin tomar en cuenta la interacción de los dipolos en la fuerza de arrastre. Luego obtendremos la solución incluyendo la fuerza de arrastre que toma en cuenta la interacción de los multi-polos. Las soluciones se obtienen para un radio de $R=1$ mm y la velocidad inicial igual a la velocidad terminal $V_t=1.088$ m/s, correspondiente a un número de Reynolds de 2176. Las ecuaciones se calculan con 10 términos en la solución. En la figura 5.25 se muestra los resultados para la trayectoria de la burbuja.

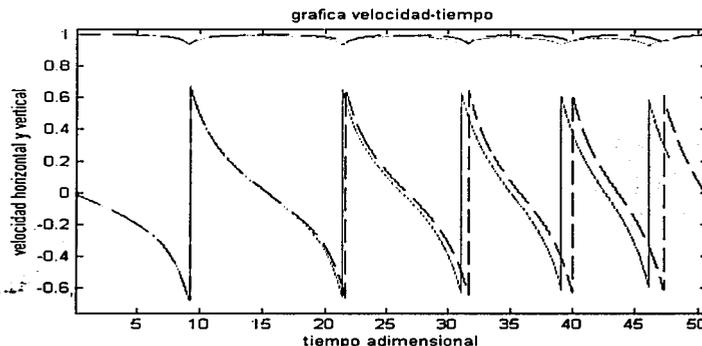


**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Grafica 5.25 Trayectoria de la burbuja para a) modelo con arrastre total con interacción de dipolos, b) modelo de arrastre simplificado $12 \pi \mu R U$, para, $R=1$ mm, $Re=1088$, $V_t=1.088$ m/s.

Como podemos observar las trayectorias son muy similares hasta los primeros 3 rebotes. Después del 3er rebote hay un defasamiento entre las soluciones. El 5° rebote sucede a 45 radios para las solución completa y a 47 radios para la solución simplificada. La diferencia es del 4%. También hay una diferencia en la amplitud de rebote. Con la solución simplificada las burbujas rebotan una distancia mayor, debido a que el arrastre es más pequeño.

En las Figuras 5.26 se muestra, la velocidad horizontal y vertical de la burbuja. La amplitud de rebote se reduce entre cada ciclo de movimiento. A su vez la velocidad horizontal es cada vez menor (con un decrecimiento exponencial). Cuando se usa el modelo simplificado la reducción de la amplitud y de la velocidad es menor. La velocidad vertical decrece más en cada rebote con el modelo con interacción de dipolos.

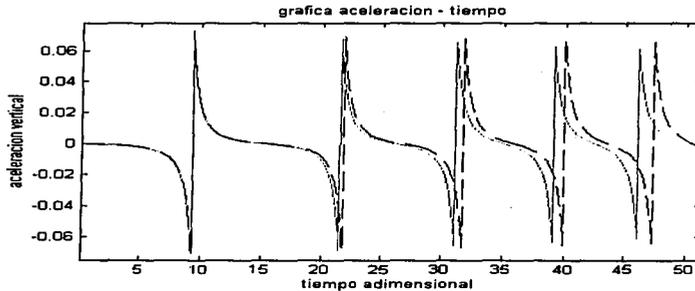


Gráfica 5.26 Velocidad horizontal y vertical para a) — modelo de arrastre total b) --- modelo con arrastre simplificado, $R=1$ mm, $U=1.088$ m/s, $Re=2176$.

Finalmente mostramos la gráfica 5.27, de la aceleración vertical usando los dos modelos. La aceleración en el momento de rebote se reduce sucesivamente entre cada choque con la pared en ambos modelos. Pero la reducción es mayor con la solución completa. Ya hemos dicho que la distancia a la pared y la amplitud de rebote se reducen entre cada rebote de acuerdo a una ley exponencial.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La magnitud de este amortiguamiento debe ser inversamente proporcional al número de Reynolds, ya que las burbujas reducen más su velocidad con números de Reynolds menores.



Gráfica 5.27 Aceleración vertical para a) ----modelo de arrastre simplificado, y b) _____ para modelo con arrastre total.

Sugerimos una fórmula para la distancia a la pared en cada instante del siguiente tipo:

$$A(t) = A_i \exp\left(-K \frac{1}{Re} \cdot t\right) \quad (5.12)$$

Donde K es una constante a determinar, A_i es distancia inicial de rebote, y Re es el número de Reynolds. Si aplicamos logaritmo natural a ambos lados de la ecuación anterior. Obtendremos lo siguiente:

$$\ln(A) = \ln(A_i) - \frac{K}{Re} \cdot t \quad (5.13)$$

Podemos obtener los valores de los parámetros K, y A_i de esta ecuación, si graficamos los valores del logaritmo de la distancia de rebote contra el tiempo, como en la figura 5.28

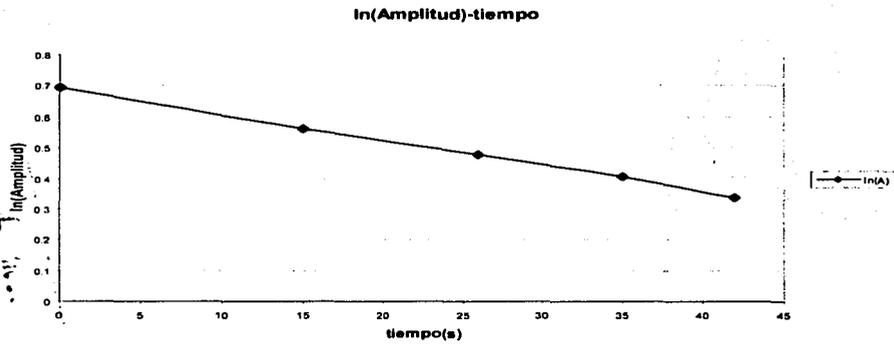


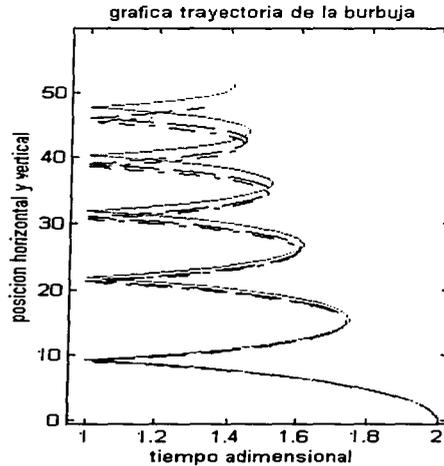
FIGURA 5.28 Logaritmo natural de la amplitud de rebote vs. tiempo.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

5.9.2 Dependencia de la solución y la fuerza de arrastre con el número de términos en la solución.

En esta sección analizaremos la dependencia de la fuerza de arrastre y de la trayectoria, velocidad y aceleración del número de términos usados en la solución. Simularemos el movimiento de la burbuja para el modelo completo de fuerza de arrastre, con 3, 10 y 20 términos en los coeficientes de la ecuación de movimiento. En la figura 5.29 se muestra la trayectoria de la burbuja en el plano x-y. Cuando usamos sólo 3 términos en los coeficientes de la ecuación de movimiento la burbuja rebota más y la distancia que recorre la burbuja en el eje horizontal aumenta. Esta solución es similar a la solución usando la aproximación para el arrastre de $12\pi\mu RU$.

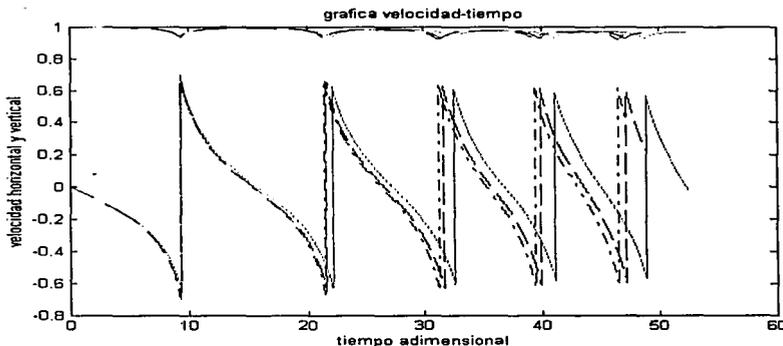
Conforme agregamos más términos a la ecuación el arrastre es mayor, con lo que el rebote es menor. La distancia del 3er rebote es de 1.50 con solo 3 términos contra 1.53 con 20 términos (una diferencia del 2%).



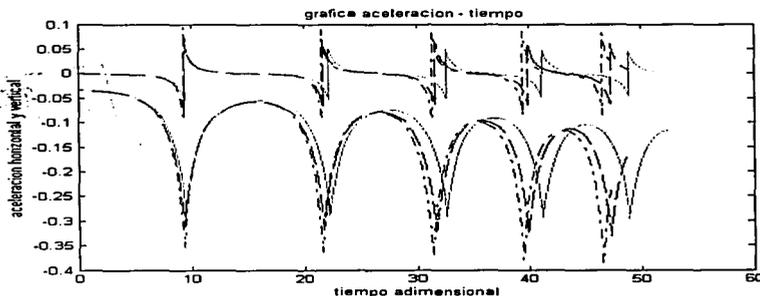
**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Figura 5.29 Trayectoria de la burbuja de 1 mm de radio, $Re=1088$ para modelo con a)___3 términos , b) ---10 términos y c)-.- 20 términos.

En la figura 5.30 se observa el comportamiento de la velocidad horizontal y vertical con el tiempo. La velocidad de ascenso sufre una pequeña disminución en cada rebote, pero permanece prácticamente constante. La velocidad horizontal de choque disminuye lentamente con cada choque. Un cambio notable es que el período de rebote se reduce considerablemente entre choque y choque cuando se aumenta el número de términos.



Gráfica 5.30 Velocidad horizontal y vertical de la burbuja de 1 mm de radio, $Re=1088$ para modelo con a) 3 términos, b) 10 términos y c) 20 términos.



Gráfica 5.30 Gráfica de aceleración vertical de la burbuja de 1 mm de radio, para modelo con a) 3 términos, b) 10 términos y c) 20 términos en la ecuación de movimiento.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Finalmente mostramos el comportamiento de la aceleración de la burbuja. La aceleración horizontal y vertical aumentan cuando se modela con mayor número de términos. Este comportamiento permanece constante para la aceleración vertical, pero se incrementa en cada choque para la aceleración horizontal. Podemos concluir que la aceleración es más afectada cuando se modela con mayor número de términos. En la gráfica 5.31 se muestra este comportamiento.

5.10 Trayectorias con la fuerza de arrastre para diferentes números de Reynolds

Finalizaremos este estudio modelando la trayectoria de las burbujas y su velocidad y aceleración para diferentes números de Reynolds. La velocidad terminal de la burbuja para una viscosidad y aceleración de gravedad esta determinada por la ecuación 5.2. Si adimensionalizamos la ecuación 5.5 encontraremos los siguientes resultados:

$$\frac{U^2}{R} \frac{d}{dt^*} \left[a_{33} \frac{ds^*}{dt^*} \right] = \frac{1}{2} \frac{U^2}{R} \left[\left(\frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s^*} a_{11} + \left(\frac{ds^*}{dt^*} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s^*} a_{33} \right] - \frac{12\pi\mu R}{\rho, 4/3\pi R^3} \frac{ds^*}{dt^*} (U) \quad (5.12)$$

Donde s^* , x^* y t^* son variables adimensionales de longitud y de tiempo.

Rearreglando la ecuación y simplificando:

$$\frac{d}{dt^*} \left[a_{33} \frac{ds^*}{dt^*} \right] = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx^*}{dt^*} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s^*} a_{11} + \left(\frac{ds^*}{dt^*} \right)^2 \frac{\partial}{\partial s^*} a_{33} \right] - \frac{1}{Re} \frac{ds^*}{dt^*} \quad (5.13)$$

De acuerdo a esta ecuación el cociente de las fuerzas hidrodinámicas o de inercia con las fuerzas de arrastre esta escalado como $1/Re$. Por lo tanto entre menor sea el numero de Reynolds mayor será la influencia de las fuerzas de arrastre y mayor será la amortiguación de las trayectorias y de la velocidad.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\frac{F_a}{F_h} = \frac{1}{Re}$$

(5.14)

Donde F_a es la fuerza de arrastre, y F_h es la fuerza hidrodinámica. Cuando las fuerzas de arrastre viscosas son pequeñas en comparación de las fuerzas inerciales no hay mucho amortiguamiento ($Re \gg 1$). Cuando las fuerzas viscosas son más grandes ($Re \ll 1$) el amortiguamiento es mayor y la trayectoria de la burbuja decrece muy rápidamente.

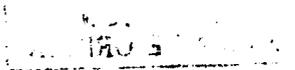
Confirmaremos estas suposiciones, modelando el movimiento para los siguientes radios de burbujas (0,7 mm, 1 mm, 1.4 mm). Los números de Reynolds correspondientes se muestran en la siguiente gráfica:

Radio (mm)	0,7	1	1,4
Velocidad Terminal (m/s)	0,53	1,09	2,13
Reynolds	748	2180	5980

En las gráficas siguientes se muestran simulaciones de la trayectoria y de la velocidad para tres diferentes radios para $R=1.4$, 1.0 y 0.7 mm. Cuando modelamos con $R=1.4$ mm hay poca amortiguación y la amplitud y distancia de rebote aumenta de acuerdo a la figura 5.31.

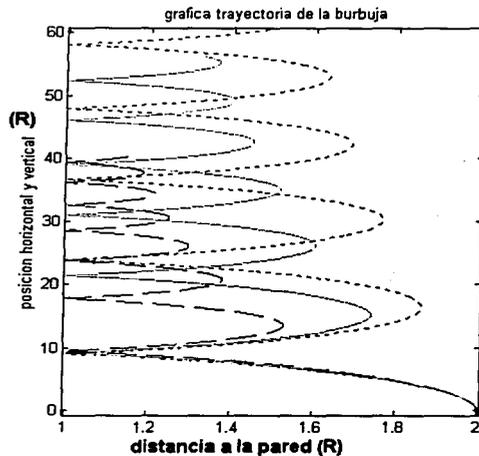
Las gráficas nos muestran la amplitud y la posición adimensional. Conforme reducimos el radio a 1.0 y 0.7 mm, las trayectorias se amortiguan más y las burbujas suben más cercanas a la pared. Ya que la fuerza de arrastre es mayor en magnitud relativa, la distancia de rebote es menor, y la amplitud de rebote también disminuye.

En la gráfica 5.32 se muestra la velocidad horizontal y vertical adimensional de la burbuja. Como se observa la velocidad horizontal del primer choque es prácticamente la misma para los tres radios de burbuja. Para un radio menor (0.7 mm) la velocidad se reduce considerablemente entre ciclo y ciclo. La reducción sigue un comportamiento exponencial. Esta reducción es mayor con números de Reynolds menores. Una consecuencia es que las burbujas pequeñas



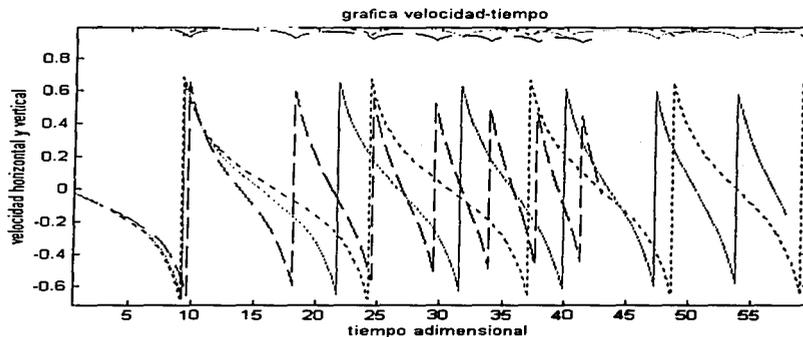
TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

rebotan con amplitudes pequeñas y las burbujas grandes con amplitudes grandes y cercanas a la ideal.



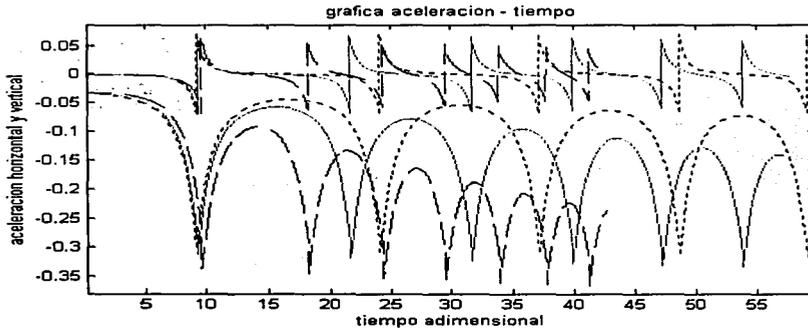
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Grafica 5.31 Trayectoria de la burbuja para tres diferentes radios de burbuja, a) $r = 1.4$ mm ,b) $r = 1$ mm y c) $r = 0.7$ mm, incluyendo fuerza de arrastre.



Grafica 5.32 Gráfica de la velocidad horizontal y vertical de la burbuja, para tres diferentes radios de burbuja, a) $r = 1.4$ mm ,b) $r = 1$ mm y c) $r = 0.7$ mm.

En la gráfica 5.33 se muestra la aceleración de la burbuja. El valor de aceleración es mayor entre choque y choque. Este incremento es mayor para números de Reynolds pequeños. También el período de rebote es menor cuando modelamos con número de Reynolds pequeño que cuando modelamos con número de Reynolds grande. El período de rebote o la amplitud de rebote puede ser una medida de la viscosidad del fluido y del radio de la burbuja para un experimento.



Gráfica 4.38 Aceleración horizontal y vertical de la burbuja, para tres diferentes radios de burbuja, a)..... $r=1.4$ mm ,b) _____ 1 mm y c)---- 0.7 mm.

Podemos concluir que es posible caracterizar el comportamiento de una burbuja que se mueve junto a una pared. Las burbujas se mueven con trayectorias periódicas. La amplitud de rebote sigue un comportamiento exponencial y este comportamiento depende mayormente del número de Reynolds, esto es, del diámetro de la burbuja, de la velocidad de ascenso y de la viscosidad del líquido, y de la aceleración de gravedad en donde se realiza la simulación. Estas simulaciones y conclusiones teóricas pueden servir para realizar experimentos de la interacción de burbujas con una pared.

5.11 Bibliografía (Capítulo 5)

- 1 Biesheuvel, A. y Van Vijnngaarden, L., 1982
The motion of a par of bubbles in a liquid
Journal of Engineering Mathematics **16**, 349-365.
- 2 Kok, J.B.W., 1993
Collision dynamics of bubble pairs moving through a perfect liquid,
Applied Scientific Research, **50**, 169-188.
- 8 Kok, J.B.W., 1989
Dynamics of gas bubbles moving through liquid
Ph. D. thesis, Technological University of Twente
Enschede, The Netherland.
- 3 Kumaran, V. , 1992
Dynamics of suspensions with significant inertial effects,
Ph. D. Thesis, Cornell University, Ithaca NY.
- 4 Kumaran, V. y Koch, D.L., 1993
The rate of coalescence in a suspension of High Reynolds Number, low
Weber number bubbles,
Physics of Fluids A5, 1135.
- 5 Moore, D. W, 1963
The boundary layer on a spherical gas bubble
Journal of fluid mechanics **16**, 161-176.
- 6 Ryskin, G. y Leal, L. G., 1984
Numerical solution of free boundary problems in fluid mechanics
Part 2. Buoyancy driven motion of a gas bubble through quiescent liquid
Journal of fluid mechanics **148**, 19-35.
- 7 De Vries, A.W.G., 1999
Path and Wake of a rising bubble
Ph. D. thesis, Technological University of Twente
Enschede, The Netherland.
- 8 Duineveld, P.C., 1995
"The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high Reynolds
numbers,"
J. Fluid Mech. **292**, 325.

“Dejemos que los nuevos resultados los descubran las nuevas generaciones...”

E. Szczepaniak

6. Conclusiones.

6.1 Introducción

El estudio de los flujos burbujeantes requiere en general el análisis de muchas componentes y fuerzas. En el caso de flujos a baja concentración ($0 < \alpha < 10\%$), el estudio de la interacción de pares de burbujas y de la interacción de una burbuja con una pared nos arroja resultados relevantes. El estudio de dos burbujas a alto número de Reynolds y bajo número de Weber, que conservan su forma esférica, se puede realizar mediante la teoría de flujo potencial. Burbujas de un radio entre 0.4 y 0.8 mm que suben en agua satisfacen esta condición pues el número de Reynolds varía entre 50 y 350 y el número de Weber varía entre 8×10^{-2} y 2.

6.2 Movimiento de dos burbujas en flujo potencial

Para analizar el movimiento de dos burbujas en flujo potencial se estudian dos métodos de solución. La primera propuesta (Lamb, 1954) se realiza a través del método de las imágenes. Se parte de dos dipolos originales que representan el flujo individual de cada esfera, luego se introduce una imagen del primer dipolo de la esfera A en la esfera B, y del primer dipolo de la esfera B en la esfera A. Esto da lugar a una sucesión infinita de dipolos en ambas esferas. Expresando cada dipolo en función del ángulo original, θ_1 y el radio original r_1 , se puede obtener una expresión para la energía cinética.

Este método tiene el inconveniente de trabajar con una sucesión infinita de dipolos donde se requiere trunca a un cierto número de términos. Además, es complicado obtener las ecuaciones de movimientos cuando se usan más de cuatro dipolos en la ecuación de energía cinética.

El segundo método se obtiene a partir de la teoría de los armónicos esféricos haciendo una doble expansión en armónicos alrededor de cada una de las esferas (Biesheuvel y Van Wijngaarden, 1982). Si se expande el potencial de

cada esfera en función de los armónicos centrados en cada esfera, se obtiene una expresión para el potencial en función de la velocidad de cada burbuja y de la distancia entre ellas. Usando las condiciones de frontera, se llega a funciones de recurrencia para los coeficientes de cada armónico de orden n en la solución.

Este método nos permite manipular fácilmente los términos del potencial y de la energía cinética, con lo que la deducción de las ecuaciones de movimiento se facilita. Además, como los coeficientes y la solución de la ecuación de movimiento se pueden programar en una computadora, es más fácil obtener soluciones numéricas.

Podemos recurrir a dos métodos para calcular las ecuaciones de movimiento de dos burbujas. En el primer método se recurre al cálculo de la presión sobre la superficie de la burbuja para obtener las ecuaciones de movimiento. El método de presión consiste en calcular la presión en los puntos alrededor de la esfera por medio de la ecuación de Bernoulli, y la ecuación del potencial de velocidad. Este método es importante para estudiar el movimiento de dos burbujas en dirección colineal con velocidad inicial U_0 a una distancia inicial s_0 . También nos permite estudiar el movimiento de las burbujas cuando estas se encuentran a distancias muy pequeñas. El segundo método consiste en calcular la energía cinética del fluido que circula alrededor de las esferas. Las ecuaciones de movimiento se pueden obtener por un balance de energía y las ecuaciones de Lagrange.

6.3 Choque Colineal de dos burbujas desde una posición inicial

Para obtener el comportamiento de dos burbujas que se mueven en dirección colineal con velocidades encontradas, se resolvieron las ecuaciones de movimiento obtenidas en el capítulo 3. Se usó tanto la ecuación obtenida por el método de Presión como la del método de energía. Se modeló el problema con dos burbujas que partían de una distancia s entre centros, y con velocidad inicial U . Las ecuaciones se obtuvieron del modelo de presión obtenido a partir del potencial de velocidad. Se resolvieron las ecuaciones con 20 y 30 términos en la solución.

Obtuvimos resultados equivalente por el método de presión y por el método de la energía. Además, después de realizar el modelado con pasos de tiempo muy pequeños en la integración y con un número cada vez mayor de términos (hasta 30 términos) se encontró que las burbujas siempre chocan con velocidad finita de aproximadamente 80% de la velocidad inicial, cuando no se incluye arrastre.

Además la velocidad horizontal nunca se reduce a cero, y existe un pico de aceleración pero no es suficiente para frenar a las burbujas. Cuando se modela el movimiento con fuerzas de arrastre, la velocidad de choque se reduce. Para números de Reynolds de 200 la velocidad se reduce al 60% y al 25% para números de Reynolds de 100, cuando la distancia inicial es de 5 radios. Cuando la distancia se incrementa a 10 radios, las burbujas se frenan totalmente con números de Reynolds de 150. Este resultado es importante porque se nota un amortiguamiento importante cuando se modela el problema con arrastre.

Para determinar si las fuerzas viscosas son suficientes para frenar a la burbuja, cuando el número de Reynolds es alto, Kumaran (1992) realizó un análisis de escalamiento del flujo en el espacio entre dos burbujas, encontrando que la disipación de energía en este espacio es de $O(Re^{-1})$ menor que la energía cinética del flujo. Entonces, una colisión entre burbujas puede causar la coalescencia o el rebote entre ellas. Un estudio numérico realizado por Chesters y Hoffman (1982) del flujo entre el espacio entre dos burbujas a números de $We < 10^{-2}$, muestra que el flujo en el espacio entre burbujas no es suficiente para detener el movimiento de burbujas antes de que la capa de líquido se vuelva inestable y se rompa. Estos autores especulan que a ciertos números de Weber ($We > 0.165$) la deformación de la superficie podría causar que las burbujas reboten. Concluimos, que dos esferas en movimiento colineal en flujo potencial chocan con velocidad finita, y la fuerza viscosa no es suficiente para detenerlas.

6.4 Interacción de una burbuja con una pared

Con este método pudimos modelar el movimiento de una burbuja paralela a una pared. Estudiamos el movimiento para diferentes radios y para diferentes

distancias a la pared. Cuando el movimiento se modela sin fuerzas de arrastre las trayectorias se escalan con el radio y la velocidad inicial.

Después, modelamos el movimiento de las burbujas con las fuerzas de arrastre. Comparamos dos formas de arrastre disponible: la forma simplificada y la forma completa tomando en cuenta la interacción de los múltiplos. Encontramos que la solución simplificada conduce a diferencias considerables en las trayectorias. También se estudio el efecto del número de coeficientes en las ecuaciones de movimiento. Es importante modelar el arrastre de forma completa con suficiente número de términos.

Finalmente modelamos el arrastre para diferentes radios o números de Reynolds. Encontramos que para radios pequeños el arrastre tiene una influencia muy marcada. Esto lo verificamos con un análisis dimensional donde encontramos que el cociente de las fuerzas de arrastre con las hidrodinámicas está escalado de acuerdo a $1/Re$. De acuerdo a esto, con número de Reynolds pequeños las fuerzas de arrastre tienen mayor importancia y las trayectorias y la amplitud de rebote se amortiguan en mayor medida. Encontramos que las trayectorias son similares a las obtenidas por Kumaran, (1993).

En teoría de flujo inviscido, el efecto de una pared en una burbuja puede ser modelada con una burbuja en espejo dentro de la pared, conduciendo a un par de burbujas. Para el choque de una burbuja con una pared no existe coalescencia. Además la capa límite que se forma en el choque de la burbuja, es diferente de la situación de un par de burbujas. De cualquier forma, experimentalmente es mas conveniente una interacción burbuja pared porque las 'burbujas' son idénticas y alineadas. El fenómeno de atracción es captado con la teoría de flujo potencial, sin embargo hay fenómenos interesantes observados experimentalmente en el choque de las burbujas (De Vries, 1999) que no son captados con el uso de esta teoría.

Uno de los fenómenos que se observan en el choque de las burbujas con una pared experimentalmente (De Vries, 1999) es por ejemplo que la velocidad vertical tangencial de la burbuja se reduce a cero en el momento del choque. Este efecto es difícil de modelar cuando se usa solo teoría de flujo potencial, y solo se

puede obtener su efecto resolviendo las ecuaciones de Navier Stokes incluyendo la deformación de las burbujas. Pero se pueden obtener resultados similares introduciendo una condición de rebote adecuado. Un ejemplo es poner la velocidad vertical después del choque igual a cero. El estudio de estos fenómenos puede ser tema de investigaciones futuras.

Concluimos que es posible modelar el flujo de una burbuja junto a una pared, a alto número de Reynolds, y bajo número de Weber.

6.5 Trabajo a futuro y nuevas Investigaciones

Dejando abierto el campo a nuevas investigaciones y después del trabajo realizado encontramos las siguientes ideas para nuevas contribuciones. Hay varias áreas donde se puede seguir investigando y proponiendo nuevos modelos o teorías.

- Obtener el potencial y la energía cinética del fluido mediante el modelo de dipolos propuesto por Lamb (1957). Debe ser interesante modelar el movimiento a partir del potencial por dipolos, e integrar las ecuaciones de movimiento utilizando el modelo de dipolos, e investigar el comportamiento cuando la distancia entre esferas es mínimo.
- Cuando las dos burbujas se aproximan al choque, existen fuerzas viscosas mucho mayores en el *intersticio* entre las dos burbujas. Para encontrar la magnitud es necesario realizar simulaciones numéricas, ya sea resolviendo la ecuación de Navier Stokes o proponiendo algún modelo alternativo que tome en cuenta los esfuerzos viscosos.
- Los fenómenos cuando una burbuja se aproxima a una pared no son modelados totalmente por el flujo potencial. Ya que aparecen vórtices, turbulencia y la burbuja se adhiere a la pared. Además la burbuja rebota distancias inusuales en los experimentos reales y su velocidad vertical disminuye al acercarse a la pared (De Vries, 1999).
- Para modelar estos cambios se puede ajustar el modelo propuesto, por ejemplo cambiando la velocidad de ascenso en el momento del choque,

y conservar la velocidad horizontal de choque. Este es un modelo empírico pero arroja buenos resultados.

- Modelar las burbujas como cuerpos deformables y encontrar los cambios debidos a la variación en la tensión superficial. Para realizar esto se requiere un modelo de diferencias finitas que resuelva la ecuación de Navier Stokes.
- Hacer calculos de la agitación con diferentes números de Reynolds. En el capítulo 5 se obtuvo una ecuación experimental que modela el movimiento de la burbuja cuando se incluye el arrastre. Con esta Ecuación se pueden obtener resultados teóricos de la agitación.
- Modelar el problema como esferas pero resolviendo la Ecuación de Navier Stokes numéricamente.

Estos son algunos de las propuestas para trabajo futuro, que seguramente se realizaran en el IIM (Instituto de Investigaciones en Materiales), o en otros centros de Investigación.

Cd. Universitaria, México, 23 de Junio de 2003

Apendice I. Rutina en en Matlab que resuelve las ecuaciones de movimiento para dos burbujas en dirección co-lineal y paralela

1era Rutina: Calcula los coeficientes K_{mnp} y L_{mnp} para calcular los coeficientes de la ecuación de movimiento.

```
%1era parte del programa
for m=1:2
  for n=1:N
    for p=1:P
      K(m,n,p)=0;
    end
  end
  K(m,1,1)=(-1)^(m-1);
  for p=4:P
    for n=1:(p-3)
      for q=1:(p-n-2)
        NQ=1;
        NM=1;
        QM=1;
        for i=1:(n+q)
          NQ=NQ*i;
        end
        for i=1:(n+m-1)
          NM=NM*i;
        end
        for i=1:(q-m+1)
          QM=QM*i;
        end
        comb=NQ/(NM*QM);
        K(m,n,p)=K(m,n,p)+(-1)^(m-2)*(n/(n+1))*comb*K(m,q,p-q-n-1);
      end
    end
  end
end
m=1
n=1
p=1
g01=0;
```

```
g11=0;
s=sym('s');
for p=1:P
    g01=g01+1/2*K(m,n,p)*(R/s)^(p-1);
end
m=2
for p=1:P
    g11=g11+1/2*K(m,n,p)*(R/s)^(p-1);
end

%clf
figure(1)
ezplot(g01,1.5*R,5*R)
hold on
xlabel('distancia s')
ylabel('funcion g01')

figure(2)
ezplot(g11,1.5*R,5*R)
hold on
xlabel('distancia s')
ylabel('funcion g11')
```

2da Rutina: Calcula los constantes de la ecuación de movimiento.

```
theta=pi/2;
s=sym('s');

a11=-2+3*(g01-g11)+3*(g01+g11)*cos(2*theta);
a22=-2+3*(g01-g11)-3*(g01+g11)*cos(2*theta);
a12=0*s;
a33=1/2*(-1+3*f01);
a44=1/2*s^2*(-1-3*f11);

a11s=diff(a11);
a22s=diff(a22);
a12s=diff(a12);
a33s=diff(a33);
a44s=diff(a44);
```

3ra Rutina: Calcula la trayectoria, velocidad y aceleración de dos burbujas orientadas horizontalmente, a una distancia inicial s_0 , con velocidad horizontal V_h con velocidad vertical terminal V_t .

%PROGRAMA DE CALCULO DE TRAYECTORIAS DE DOS BURBUJAS EN FLUJO POTENCIAL

clear all;

%SUBRUTINAS, CALCULAN LAS CONSTANTES g_{mn} y f_{mn} de LA ECUACION DE LAGRANGE
%DE MOVIMIENTO DE LA BURBUJA

lagrange1;

%DATOS DE ENTRADA DE LA BURBUJA R, RADIO, g ACEL DE LA GRAVEDAD, N= ITERACIONES

%Rch = RADIO DE CHOQUE, μ VISCOSIDAD DINAMICA,

R=.002

g=0

t=1

Z=22000

Rch=1.01*R

$\mu=0$

$Nu=\mu/1000$

$Ro=1000$

$V_b=4/3*\pi*R^3$

$V_t=1$

$V_{terminal}=g*R^2/(9*Nu)$

$Reynolds=g*R^3/(9*Nu^2)$

%VELOCIDAD TERMINAL DE LA BURBUJA

$V_t=1$

%CONDICIONES INICIALES DE LA TRAYECTORIA Y VELOCIDAD DE LA BURBUJA, TIEMPO DE ITERACION

t=1

$h(t)=.000005$

$x_1(t)=0;$

$y_1(t)=0;$

$\theta_1(t)=\pi/2;$

$s_1(t)=4*R;$

$f_s(t)=0;$

```
Vx1(t)=Vt;  
Vy1(t)=0;  
Vs1(t)=0;  
Vtheta1(t)=0;  
Ax(t)=0;  
Ay(t)=0;  
As(t)=0;  
f1=0;  
f2=0;  
f3=0;  
f4=0;  
t1(t)=0
```

```
%AQUI EMPIEZA LA ITERACION
```

```
for t=1:Z,
```

```
h1=h(t);  
s=s1(t);  
x=x1(t);  
y=y1(t);  
theta=theta1(t);  
Vs=Vs1(t);  
Vx=Vx1(t);  
Vy=Vy1(t);  
Vtheta=Vtheta1(t);  
M1x=Ax(t);  
M1y=Ay(t);  
M1s=As(t);
```

```
f1=0;
```

```
f2=0;
```

```
f3=0;
```

```
f4=0;
```

```
P=23;
```

```
for n=1:N
```

```
g0n=0;
```

```
g1n=0;
```

```
f0n=0;
```

```
f1n=0;
```

```
for p=1:N+3
```

Apendice I, Rutina en en Matlab que resuelve las ecuaciones de movimiento para dos burbujas en dirección co-lineal y paralela

IIM

```

g0n=g0n+1/2*K(1,n,p)*(R/s)^(p-1);
g1n=g1n+1/2*K(2,n,p)*(R/s)^(p-1);
end
for p=1:N+3
f0n=f0n+1/2*L(1,n,p)*(R/s)^(p-1);
f1n=f1n+1/2*L(2,n,p)*(R/s)^(p-1);
end

f1=f1-8*pi*Mu*R*(2*n+1)^(n+1)/n*(Vx*(g0n^2+n*(n+1)/2*g1n^2)+(Vx*cos(2*theta)+Vy*sin(2*theta))*(g0n^2-
n*(n+1)/2*g1n^2));
f2=f2-8*pi*Mu*R*(2*n+1)^(n+1)/n*(Vy*(g0n^2+n*(n+1)/2*g1n^2)+(-Vy*cos(2*theta)+Vx*sin(2*theta))*(g0n^2-
n*(n+1)/2*g1n^2));

f3=f3-4*pi*Mu*R*Vs*(2*n+1)^(n+1)/n*f0n^2;
f4=f4-4*pi*Mu*R*s^2*Vtheta*(2*n+1)^(n+1)/2*f1n^2;
end

```

%CALCULA LA ACELERACION Y LA VELOCIDAD RESULTANTES DE LA PRIMERA ITERACION
 %TOMA EN CUENTA LA DISTANCIA ENTRE LAS BURBUJAS Y EL ANGULO Y SUS DERIVADAS EN T

```

K1x=Vx*h1;
coef11=(eval(a11s)*Vs+eval(a11theta)*Vtheta);
coef12=(eval(a12s)*Vs+eval(a12theta)*Vtheta);
coef22=(eval(a22s)*Vs+eval(a22theta)*Vtheta);
M1x=(2*g-coef11*Vx-coef12*Vy-eval(a12)*M1y/h1+f1/(Ro*Vb))/eval(a11)*h1;
K1y=Vy*h1;
M1y=(-coef22*Vy-coef12*Vx-eval(a12)*M1x/h1+f2/(Ro*Vb))/eval(a22)*h1;
fs=1/2*(Vx^2*eval(a11s)+Vy^2*eval(a22s)+2*Vx*Vy*eval(a12s)+Vs^2*eval(a33s)+Vtheta^2*eval(a44s));
K1s=Vs*h1;
M1s=(fs-Vs^2*eval(a33s)+f3/(Ro*Vb))/eval(a33)*h1;
K1theta=Vtheta*h1;
coeftheta=3*(eval(g01)+eval(g11))*((-Vx^2+Vy^2)*sin(2*theta)+2*Vx*Vy*cos(2*theta))-Vs*Vtheta*eval(a44s);
M1theta=(coeftheta+f4/(Ro*Vb))/eval(a44)*h1;

```

%CALCULA NUEVAS CONDICIONES DE S, VX Y VTHETA, DESPUES DE LA PRIMERA APROXIMACION
 %K1 Y M1 EN EL METODO DE RUNGE KUTTA

```

s=s+K1s/2;
theta=theta+K1theta/2;
Vx=Vx+M1x/2;

```

Apendice I, Rutina en en Matlab que resuelve las ecuaciones de movimiento para dos burbujas en dirección co-lineal y paralela

IIM

```
Vs=Vs+M1s/2;
Vtheta=Vtheta+M1theta/2;
Vy=Vy+M1y/2;

%CALCULA LA SEGUNDA APROXIMACION DE VELOCIDAD Y ACELERACION
K2x=Vx*h1;
coef11=(eval(a11s)*Vs+eval(a11theta)*Vtheta);
coef12=(eval(a12s)*Vs+eval(a12theta)*Vtheta);
coef22=(eval(a22s)*Vs+eval(a22theta)*Vtheta);
M2x=(2*g-coef11*Vx-coef12*Vy-eval(a12)*M1y/h1+f1/(Ro*Vb))/eval(a11)*h1;
K2y=Vy*h1;
M2y=(-coef22*Vy-coef12*Vx-eval(a12)*M1x/h1+f2/(Ro*Vb))/eval(a22)*h1;
fs=1/2*(Vx^2*eval(a11s)+Vy^2*eval(a22s)+2*Vx*Vy*eval(a12s)+Vs^2*eval(a33s)+Vtheta^2*eval(a44s));
K2s=Vs*h1;
M2s=(fs-Vs^2*eval(a33s)+f3/(Ro*Vb))/eval(a33)*h1;
K2theta=Vtheta*h1;
coeftheta=3*(eval(g01)+eval(g11))*((-Vx^2+Vy^2)*sin(2*theta)+2*Vx*Vy*cos(2*theta))-Vs*Vtheta*eval(a44s);
M2theta=(coeftheta+f4/(Ro*Vb))/eval(a44)*h1;

%Reinicializa los valores de las variables s, x ,y, theta, e incrementa de acuerdo
%al valor de K2

s=s1(t);
x=x1(t);
y=y1(t);
theta=theta1(t);
Vs=Vs1(t);
Vx=Vx1(t);
Vy=Vy1(t);
Vtheta=Vtheta1(t);

s=s+K2s/2;
theta=theta+K2theta/2;
Vx=Vx+M2x/2;
Vs=Vs+M2s/2;
Vtheta=Vtheta+M2theta/2;
Vy=Vy+M2y/2;
```

%CALCULA LA SEGUNDA APROXIMACION DE VELOCIDAD Y ACELERACION

```

K3x=Vx*h1;
coef11=(eval(a11s)*Vs+eval(a11theta)*Vtheta);
coef12=(eval(a12s)*Vs+eval(a12theta)*Vtheta);
coef22=(eval(a22s)*Vs+eval(a22theta)*Vtheta);
M3x=(2*g-coef11*Vx-coef12*Vy-eval(a12)*M1y/h1+f1/(Ro*Vb))/eval(a11)*h1;
K3y=Vy*h1;
M3y=(-coef22*Vy-coef12*Vx-eval(a12)*M1x/h1+f2/(Ro*Vb))/eval(a22)*h1;
fs=1/2*(Vx^2*eval(a11s)+Vy^2*eval(a22s)+2*Vx*Vy*eval(a12s)+Vs^2*eval(a33s)+Vtheta^2*eval(a44s));
K3s=Vs*h1;
M3s=(fs-Vs^2*eval(a33s)+f3/(Ro*Vb))/eval(a33)*h1;
K3theta=Vtheta*h1;
coeftheta=3*(eval(g01)+eval(g11))*((-Vx^2+Vy^2)*sin(2*theta)+2*Vx*Vy*cos(2*theta))-Vs*Vtheta*eval(a44s);
M3theta=(coeftheta+f4/(Ro*Vb))/eval(a44)*h1;

```

%Reinicializa los valores de las variables s, x, y, theta, e incrementa de acuerdo
%al valor de K2

```

s=s1(t);
x=x1(t);
y=y1(t);
theta=theta1(t);
Vs=Vs1(t);
Vx=Vx1(t);
Vy=Vy1(t);
Vtheta=Vtheta1(t);

```

```

s=s+K3s;
theta=theta+K3theta;
Vx=Vx+M3x;
Vs=Vs+M3s;
Vtheta=Vtheta+M3theta;
Vy=Vy+M3y;

```

%CALCULA LA SEGUNDA APROXIMACION DE VELOCIDAD Y ACELERACION

```

K4x=Vx*h1;
coef11=(eval(a11s)*Vs+eval(a11theta)*Vtheta);
coef12=(eval(a12s)*Vs+eval(a12theta)*Vtheta);
coef22=(eval(a22s)*Vs+eval(a22theta)*Vtheta);
M4x=(2*g-coef11*Vx-coef12*Vy-eval(a12)*M1y/h1+f1/(Ro*Vb))/eval(a11)*h1;

```

```

K4y=Vy*h1;
M4y=(-coef22*Vy-coef12*Vx-aval(a12)*M1x/h1+f2/(Ro*Vb))/eval(a22)*h1;
fs=1/2*(Vx^2*eval(a11s)+Vy^2*eval(a22s)+2*Vx*Vy*eval(a12s)+Vs^2*eval(a33s)+Vtheta^2*eval(a44s));
K4s=Vs*h1;
M4s=(fs-Vs^2*eval(a33s)+f3/(Ro*Vb))/eval(a33)*h1;
K4theta=Vtheta*h1;
coeftheta=3*(eval(g01)+eval(g11))*((-Vx^2+Vy^2)*sin(2*theta)+2*Vx*Vy*cos(2*theta))-Vs*Vtheta*eval(a44s);
M4theta=(coeftheta+f4/(Ro*Vb))/eval(a44)*h1;

%CALCULA LA VELOCIDAD Y DESPLAZAMIENTO RESULTANTE, RELATIVO Y ABSOLUTO
s1(t+1)=s1(t)+1/6*(K1s+2*K2s+2*K3s+K4s)+1/2*(M1s*h1);
Vs1(t+1)=Vs1(t)+1/6*(M1s+2*M2s+2*M3s+M4s);
x1(t+1)=x1(t)+1/6*(K1x+2*K2x+2*K3x+K4x)+1/2*(M1x*h1);
Vx1(t+1)=Vx1(t)+1/6*(M1x+2*M2x+2*M3x+M4x);
y1(t+1)=y1(t)+1/6*(K1y+2*M2y+2*M3y+K4y)+1/2*(M1y*h1);
Vy1(t+1)=Vy1(t)+1/6*(M1y+2*M2y+2*M3y+M4y);
theta1(t+1)=theta1(t)+1/6*(K1theta+2*K2theta+2*K3theta+K4theta)+1/2*(M1theta*h1);
Vtheta1(t+1)=Vtheta1(t)+1/6*(M1theta+2*M2theta+2*M3theta+M4theta);

%COORDENADAS RELATIVAS ENTRE LAS BURBUJAS
coorcx(t)= s*sin(theta);
coorcy(t)= s*cos(theta);

Ax(t+1)=1/6*(M1x+2*M2x+2*M3x+M4x)/h1;
Ay(t+1)=1/6*(M1y+2*M2y+2*M3y+M4y)/h1;
As(t+1)=1/6*(M1s+2*M2s+2*M3s+M4s)/h1;
t1(t+1)=t1(t)+h1;

%OBTIENE UN TAMAÑO DE PASO OPTIMO
h(t+1)=(Vs1(t+1)-Vs1(t))*h1/M2s;

%CONDICION DE CHOQUE CON LA PARED U OTRA BURBUJA
if s1(t+1)/2<Rch
    Vs1(t+1)=-Vs1(t+1);
    s1(t+1)=s1(t+1);
else
end
end

```

Apendice I, Rutina en en Matlab que resuelve las ecuaciones de movimiento para dos burbujas en dirección co-lineal y paralela

IIM

% GRAFICA DISTANCIA ENTRE LAS BURBUJAS CONTRA POSICION VERTICAL

```
figure(5)
%clf
plot(s1/(2*R),x1/R,'r')
hold on
xlabel('separacion a la pared x/R')
ylabel('posicion vertical y/R')
axis([0 5 0 60])
```

%GRAFICA LA POSICION VERTICAL Y HORIZONTAL RELATIVA ENTRE LAS DOS BURBUJAS

```
figure(6)
%clf
plot(coordx/R,coordy/R,'r')
hold on
xlabel('posicion relativa x')
ylabel('posicion relativa y')
```

%GRAFICA LA VELOCIDAD VERTICAL Y LA VELOCIDAD RELATIVA ENTRE LAS BURBUJAS

```
figure(7)
%clf
plot(t1,Vx1/Vt,'r')
hold on
plot(t1,Vs1/Vt,'r')
```

```
%clf
figure(8)
plot(t1,x1/R,'r')
ylabel('altura de las burbujas(radios)')
xlabel('tiempo')
hold on
```

```
%clf
figure(9)
plot(t1,s1/(2*R),'r')
hold on
xlabel('tiempo')
ylabel('distancia a la pared(radios)')
plot(t1,Rch/R,'b')
```

```
%cif
figure(10)
plot(t1,h,'r')
xlabel('tiempo')
ylabel('delta t , intervalo de tiempo, Integracion')
hold on

%cif
figure(11)
plot(t1,Ax,'r')
xlabel('tiempo')
ylabel(' aceleracion vertical')
hold on

%cif
figure(12)
plot(t1,As,'r')
xlabel('tiempo')
ylabel(' aceleracion hoprizontal')
hold on
```

Bibliografia

- 1 Lamb, H., 1957
Hydrodynamics, 6th Edition,
Cambridge University Press.
- 2 Milne-Thompson, L. M., 1964
Theoretical Hydrodynamics, Fifth edition,
Dover publications.
- 3 Batchelor, G. K., 1970
An Introduction to Fluid dynamics
Cambridge University Press.
- 4 Biesheuvel, A. y Van Vijnngaarden, L., 1982
The motion of a pair of bubbles in a liquid
Journal of Engineering Mathematics **16**, 349-365.
- 5 Bentwich, M. y Miloh, T., 1978
On the exact solution for the two sphere problem in axisymmetrical potential flow
Journal of Applied Mechanics, **45**, 3, Sept., 463-468.
- 6 Landweber, L. y Shashahan A., 1992
Added masses and force on two bodies approaching central impact in an inviscid flow
Journal of Ship Research, **36**, (No 2), June 1992, 99-122.
- 7 Kok, J.B.W., 1993
Collision dynamics of bubble pairs moving through a perfect liquid,
Applied Scientific Research, **50**, 169-188.
- 8 Kok, J.B.W., 1989
Dynamics of gas bubbles moving through liquid
Ph. D. thesis, Technological University of Twente
Enschede, The Netherlands.
- 8 Kumaran, V., 1992
Dynamics of suspensions with significant inertial effects,
Ph. D. Thesis, Cornell University, Ithaca NY.
- 9 Kumaran, V. y Koch, D.L., 1993
The rate of coalescence in a suspension of High Reynolds Number, low Weber
number bubbles,
Physics of Fluids **A5**, 1135.

- 10 Davis, R. H., Schonberg, J. A. y Rallison, J. M., 1989
The lubrication force within two viscous drops
Physics of Fluids **A1**, 77-81.
- 11 Hobson, E. W., 1965
The Theory of spherical and ellipsoidal harmonics
Cambridge University Press.
- 12 Ryskin, G. y Leal, L. G., 1984
Numerical solution of free boundary problems in fluid mechanics
Part 2. Buoyancy driven motion of a gas bubble through quiescent liquid
Journal of fluid mechanics **148**, 19-35.
- 13 Moore, D. W., 1963
The boundary layer on a spherical gas bubble
Journal of fluid mechanics **16**, 161-176.
- 14 Levich, V.G., 1962
Physicochemical Hydrodynamics
Prentice Hall, Englewoods Cliffs, NJ.
- 15 Clift, R., Grace, J. R., Weber M. E., 1978
Bubbles, drops and particles
Academic Press, New York.
- 16 Harper, J. F., 1970
On bubbles rising in line at large Reynolds number
Journal of fluid mechanics **41**, 751-758.
- 17 Harper, J.F., 1972
The motion of bubbles and drops through liquids
J. Adv. Applied mechanics **12**, 59-129.
- 18 Herman, R. A., 1887
On the motion of two spheres in fluid
J. pure and applied math. **22**, 204-216.
- 19 Hewitt, G. F., 1982
"Liquid-Gas systems" Chapter 2
Handbook of multiphase system, Hetroni G. (Ed.)
Hemisphere publishing.
- 20 Hicks, W. M., 1880
On the motion of two spheres in a fluid
Trans Royal Society London **171**, 455-470

-
- 21 Aybers N. M. y Tapucu A., 1969
Studies on the drag and shape of gas bubbles rising through a stagnant liquid
Warme, U. Stoffubergtragung, **2**,171
- 22 Haberman, W. L. y Morton, R.K., 1956
An experimental study of bubbles moving in Liquids
Paper 2279, trans ASCE, **121**, 227
- 23 Wallis, G.B, 1969
Two dimensional, two phase flow
McGraw-Hill Book Company
- 24 Hadamard, J. y Rybcynski, 1911
W., Compt. Rend. Acad. Sci. Paris,
Vol. 152, pp. 1735-1738, 1911
- 25 Arfken, 1995,
Mathematical Methods for physics,
Academic Press, McGraw-Hill
- 23 De Vries, A.W.G., 1999
Path and Wake of a rising bubble
Ph. D. thesis, Technological University of Twente
Enschede, The Netherland.
- 24 Duineveld, P.C., 1995
"The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high Reynolds numbers,"
J. Fluid Mech. **292**, 325.