



00382
7

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

UNAM a través de la Dirección General de Bibliotecas
contiene el contenido de esta tesis en formato electrónico a través
del sistema de bibliotecas de la UNAM.
NOMBRE: Erick Leonardo Patiño Jaidar
FECHA: 15/05/2003
FIRMA: Erick Leonardo Patiño Jaidar

**SOBRE EL PROBLEMA DE LA TRANSICIÓN
CAMPO-PARTÍCULA**

T E S I S

**QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (FÍSICA)
PRESENTA:**

ERICK LEONARDO PATIÑO JAIDAR

**DIRECTOR DE TESIS: DR. HERNANDO QUEVEDO CUBILLOS
COMITÉ TUTORAL: DR. LUIS DE LA PEÑA AUERBACH
DR. SAHEN HACYAN SALERYAN**



posgrado en ciencias físicas
u n a m

MÉXICO, D.F.



2003

posgrado en ciencias físicas
u n a m

1

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS
CON
FALLA DE
ORIGEN**

PAGINACIÓN DISCONTINUA

A Isabel Jaidar y Edgar Patiño

2

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Quiero agradecer profundamente al Dr. Hernando Quevedo, quien dirigió la elaboración de esta tesis y que en mi opinión lo hizo de manera insuperable.

3

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Agradecimientos:

Quiero agradecer de manera muy especial al Dr. Luis de la Peña, por su apoyo y muy importante ejemplo.

Quiero agradecer también a los miembros del sínodo:

**Dr. Sahen Hacyan Saleryan
Dr. Miguel Alcubierre Moya
Dr. Alberto Gúijosa Hidalgo
Dr. Tonatiuh Matos Chassin
Dr. Alfredo Macías Álvarez**

Este trabajo doctoral se llevó a cabo gracias al apoyo de una beca de postgrado otorgada por la DGEFG-UNAM.

4

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Índice general

Introducción	III
1. La fase de Dirac	1
1.1. Monopolo magnético	3
1.2. Fase en términos de curvatura	4
1.3. Fase y simetrías	6
1.4. Comportamiento bosónico y fermiónico	8
1.5. Integración de dos-formas endomórficas	11
1.5.1. Requisitos para la integral	12
1.5.2. Mediante un ansatz para la holonomía	13
1.5.3. Mediante una superficie de referencia	14
1.5.4. La métrica de Kerr-Newman	16
1.6. Conclusiones del capítulo primero	20
2. Cuantización topológica	23
2.1. ¿Qué es cuantización topológica?	23
2.2. Monopolo magnético	25
2.3. Cuantización topológica intrínseca	27
2.3.1. Teoría linealizada de Einstein	27
2.3.2. Energía-C	31
2.4. Cuantización topológica inducida	38
2.4.1. Reissner-Nordstrom	38
2.4.2. Kerr-Newman	43
2.4.3. Modelo sigma $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$	47
2.4.4. Un ejemplo no-abeliano	49
2.5. Conclusiones del capítulo segundo	54
3. El principio holográfico	57
3.1. ¿Qué es el principio holográfico?	57

3.2. El mapeo holográfico	60
3.3. Entropía y el principio holográfico	63
3.3.1. El modelo de Bianchi tipo IX	65
3.3.2. La entropía a partir de la primera ley de la termodinámica	66
3.3.3. La entropía a partir de TCC	69
3.4. Conclusiones del capítulo tercero	73
4. Conclusiones generales	75
A. Apéndice matemático	79
B. Kerr-Newman	83
C. Modelos sigma y mapeos armónicos	87

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Introducción

Hoy en día, las teorías que describen las cuatro fuerzas conocidas en la naturaleza se conforman mediante dos partes principales. La primera es el campo en sí que puede tener un carácter escalar, vectorial, etc. y sirve para representar las fuerzas y sus posibles interacciones entre sí. En esta parte las fuentes de las fuerzas no aparecen en ningún lugar y por lo común cuando se intenta analizarlas en este contexto aparecen singularidades o "regiones críticas" en las que las teorías ya no son aplicables. Para remediar este problema se introduce la segunda componente importante que es la materia. Esta última se postula como una magnitud externa, ajena al campo, y no existe procedimiento alguno para derivarla en base a razonamientos fundamentales. Cada una de estas componentes se representa mediante una acción estacionaria, de donde se derivan las ecuaciones de movimiento correspondientes. Este esquema de descripción de las fuerzas de la naturaleza ha tenido un gran éxito y ha dado como resultado el Modelo Cosmológico Estándar, que describe nuestro Universo a nivel macroscópico, y el Modelo Estándar de Partículas Elementales, que describe el mundo microscópico. Ambos modelos han logrado explicar y predecir con gran exactitud los datos provenientes de observaciones y experimentos.

A pesar de este éxito, la pregunta fundamental sobre la descripción del origen de la materia permanece sin respuesta. El problema de la transición campo-partícula se puede considerar como un primer paso hacia la construcción de una teoría de campos hipotética en la que la materia no aparecería como una magnitud externa, sino que sería una consecuencia de la teoría. Los campos serían considerados como fuentes de materia y las partículas como configuraciones especiales de los campos. Históricamente esta idea ha sido planteada por diversos autores, por ejemplo, en 1876 W. K. Clifford, creador de los números de Clifford, escribe[1]: "De hecho sostengo (1) Que pequeñas porciones del espacio de hecho *son* de naturaleza análoga a la de pequeñas colinas en una superficie que en promedio es plana; es decir, que las leyes ordinarias de la geometría no son válidas para estas porciones. (2)

Que esta propiedad de estar curvada o distorsionada pasa continuamente de una porción del espacio a otra a manera de onda. (3) Que esta variación de la curvatura del espacio es lo que en realidad pasa en ese fenómeno que nosotros llamamos el *movimiento de materia*, ya sea pragmático o etereo. (4) Que en el mundo físico sólo esta variación tiene lugar, sujeta (posiblemente) a la ley de continuidad." Otros ejemplos de autores que han hablado al respecto son Lorentz, Heisenberg, Klein, Einstein, etc. y para una referencia histórica puede verse [2].

Explícitamente por ejemplo, la pregunta central del artículo de Einstein y Rosen de 1935 [3] es: ¿Es concebible una teoría atomista de la materia y la electricidad que, aún excluyendo singularidades en los campos, no use más variables que aquellas del campo gravitacional ($g_{\mu\nu}$) y las del campo electromagnético en el sentido dado por Maxwell (potenciales vectoriales, A_μ)? La consideración de un ejemplo los hace modificar ligeramente las ecuaciones gravitacionales, que entonces admiten soluciones estáticas, con simetría esférica y libres de singularidades. Estas soluciones involucran la descripción matemática del espacio físico por un espacio de dos hojas idénticas, donde una partícula se representa como un puente conectando ambas hojas, y los sistemas de muchas partículas se representan por muchos puentes de este tipo entre las dos hojas. El estudio de sistemas de muchas partículas nunca lo llevaron a cabo.

Mientras impartía el curso de relatividad en la primavera de 1953, J. A. Wheeler, pensando en términos de que la luz es afectada por la gravedad y al mismo tiempo es fuente de ella, se planteó la pregunta de qué tanta luz se requeriría concentrar para que ésta se mantuviera junta por su acción de autogravitación [4]. Sus ideas lo condujeron a formular el concepto de geón, donde g se refiere al carácter gravitacional, la e al electromagnético y la terminación *on*, a la palabra raíz para partícula. Como su nombre lo indica, un geón es una forma de modelar una partícula por medio de un campo electromagnético autogravitante. En 1955 publicó un artículo [5] donde exploró las primeras alternativas de geones que le hacían pensar en un universo sin partículas, sólo conformado por campos. Al discutir sus ideas con Einstein, él le indicó que era probable que los geones fueran inestables, y de hecho poco tiempo después lo confirmó él mismo Wheeler. Sin embargo le siguió pareciendo fascinante la idea de tener masa sin masa, es decir partículas por medio de campos. No solamente le atraía la idea de la masa sin masa, sino que también le interesaba la carga sin carga. En la teoría del electromagnetismo, las líneas de campo eléctrico se visualizan empezando y terminando en partículas puntuales, pero esto sólo es una idealización matemática, porque desde luego que una partícula puntual nos llevaría al

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

problema de una densidad infinita. En un espacio tiempo plano el pensar en carga sin carga no es posible, pero en un espacio curvo sí lo es. Supongamos que tenemos una hoja donde dos círculos se recortan en puntos remotos de ella y después estos círculos se unen por medio de una manija, es decir un tubo de forma aproximadamente cilíndrica que conecta los perímetros de los círculos que se recortaron. En este caso, las líneas de campo podrían desaparecer en un extremo de la manija y aparecer en el otro, de esta manera, si los círculos son muy pequeños, las líneas de campo parecerían terminar en un objeto casi puntual, o iniciar en un objeto del mismo tipo. A esta configuración Misner y Wheeler le llamaron, en 1957, agujero de gusano, y le consideraron una forma de tener carga sin carga, es decir, la configuración de campo de una partícula sin la necesidad de una fuente puntual. Los problemas de una teoría de agujeros de gusano no son pocos, pero han sido objeto de investigación desde entonces por sus características topológicas no triviales.

En 1976, R. Sorkin [6] analiza el problema que puede presentar el hecho de que en un agujero de gusano, los extremos de la manija están inevitablemente correlacionados. Esto podría tener consecuencias muy importantes sobre todo respecto a la indistinguibilidad de las partículas. Para resolver este problema, las características topológicas del espacio empiezan a cobrar importancia, en este caso, la orientabilidad. La propuesta es acercar las bocas del agujero de gusano, pero dado que éstas aparentan cargas opuestas, el sistema deja de parecerse a una partícula cargada. Al construir una agujero de gusano de tal manera que el espacio-tiempo resulte no orientable, es posible que ambas bocas aparenten ser fuentes (o sumideros) del campo, logrando con esto que la configuración simule poseer una carga neta.

A partir de este trabajo, Sorkin realizó muchos estudios [7, 8] sobre lo que llamó geones topológicos, que son objetos de topología no trivial como los agujeros de gusano, donde trató problemas del tipo de la estadística de geones, es decir como se comportan ante el intercambio, etc. También analizó como se comportan ante rotaciones. Ambas circunstancias son importantes, puesto que son características esenciales del comportamiento de las partículas elementales.

Más autores han trabajado en la relación espín-estadística [9, 10], el comportamiento cuántico de los geones [11, 12, 13], e incluso en la aparición misma de espín fraccionario dentro de la teoría clásica de la relatividad [14].

Dentro del contexto del problema de la transición campo-partícula, la pregunta central de la presente tesis es si es posible y en qué circunstancias, observar *indicios* de comportamiento cuántico en sistemas clásicos. En particular veremos configuraciones gravitacionales que podrían de alguna

forma estar relacionadas con la teoría de geones y contar con una topología no trivial.

El tipo específico de características cuánticas que hemos buscado, es la discretización de las propiedades de los sistemas, y vale la pena insistir en que cuando hablemos de *cuantización* o de *comportamiento cuántico* a lo largo del presente trabajo, nos referiremos en particular a este carácter discreto. La razón por la que esto nos parece importante es que los parámetros en las configuraciones de campos clásicos en general, toman valores en un espectro continuo (como es el caso de los parámetros M , e y a de la métrica de Kerr-Newman), mientras que las partículas tienen parámetros discretos, como sus masas, cargas, etc. Esto es parte del problema conocido como el de los modos cero [15]. Incluso, la reinterpretación que implicaría la discretización de los parámetros podría ayudar a hacer estables sistemas que no lo serían de tener parámetros continuos, que es otra motivación para el presente análisis.

Esta cuantización la buscaremos como una analogía con el monopoló magnético de Dirac [16] donde por medio de un argumento que puede ser establecido en términos de intensidad de campo (curvatura asociada al potencial electromagnético) [17] o en términos topológicos [18], se logra la cuantización (discretización) del producto gq , con g la carga magnética y q la carga eléctrica. Ambos planteamientos del análisis del monopoló se verán con cierto detalle más adelante en esta tesis.

En el primer capítulo realizaremos un análisis de la curvatura del espacio-tiempo por medio de la definición de un objeto tipo fase. Esto nos permite determinar que cualquier configuración gravitacional, está restringida a comportarse como un fermión o como un bosón ante rotaciones. A partir de este mismo objeto podemos deducir la existencia de condiciones de cuantización similares a las obtenidas por Dirac, para una gama muy amplia de configuraciones gravitacionales.

En el capítulo segundo, definimos lo que consideramos cuantización topológica y la dividimos en intrínseca e inducida dependiendo de si la configuración que se analiza en particular, se cuantiza (en el sentido que se ha discutido) por efectos de la métrica misma, o si requiere de un campo de norma extrínseco a la métrica para cuantizarse. Para ambos casos encontramos ejemplos en los que se presenta la cuantización de ciertos parámetros.

En el tercer capítulo iniciamos la investigación del principio holográfico con la intención de ampliar las posibilidades de aplicación de los métodos desarrollados en los dos primeros capítulos. Esto es porque en algunos casos no es claro el significado de nuestro procedimiento en un sistema particular, pero por medio del principio holográfico podemos buscar algún sistema relacionado con éste, en el que el sentido de nuestro método sea más claro.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En el presente trabajo no fue posible establecer tal correspondencia, sin embargo hubo resultados interesantes para el ejemplo analizado, en concreto definimos la entropía de modelos gravitacionales dependientes del tiempo y analizamos la validez de la fórmula de Cardy-Verlinde para estos modelos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 1

La fase de Dirac en configuraciones gravitacionales

En este capítulo, intentaremos establecer la analogía con el monopolo de Dirac por medio del análisis de la curvatura del espacio-tiempo. Esto lo haremos definiendo un objeto tipo fase, que nos permitirá determinar ciertas relaciones de carácter discreto entre los parámetros de la métrica del espacio-tiempo. La definición de este objeto tipo fase requiere de la evaluación de integrales de dos-formas con componentes endomórficas¹. La manera de realizar esta integral no es clara, por lo que las primeras secciones de este capítulo se dedican a los resultados que se pueden establecer independientemente de la forma explícita de tal integral. Motivados por la obtención de resultados interesantes inherentes al objeto tipo fase, dedicamos el final del capítulo a la definición de la integral mencionada, llegando a una propuesta concreta, que a manera de prueba se utiliza para realizar un análisis de la métrica de Kerr-Newman. La definición de la integral aún no es satisfactoria, por lo que más trabajo es necesario en este sentido.

Hay que aclarar que la existencia de un tipo similar de fase cuántica, pero que es inducida por un campo magnético real, ha sido demostrada a través del efecto Aharonov-Bohm [19]. Más aún, la generalización de este efecto para campos de norma en general ha sido realizada por Aharonov y Anandan [20] quienes consideran una fase en términos de potenciales de Yang-Mills y los generadores del álgebra de Lie del grupo de norma.

¹La descripción de formas diferenciales con componentes endomórficos se da en el apéndice A, véase también [17].

En todos estos casos se supone que el potencial de norma existe en todos los puntos donde la intensidad de campo está bien definida. En este contexto se puede interpretar que la fase cuántica es inducida por un potencial de norma bien definido. Pero las fases cuánticas también pueden ser inducidas por la presencia de un campo externo (aun si el campo no se puede derivar de un potencial, como es el caso del sistema que consiste de una carga eléctrica y un monopolo magnético). Desde el punto de vista de las aplicaciones experimentales, es interesante analizar el caso cuando el campo externo es el campo gravitacional. Muchos autores han investigado las consecuencias físicas de una fase cuántica inducida por gravedad [21], y la primera prueba experimental directa de su existencia se obtuvo en el renombrado experimento de COW (Collela, Overhauser, y Werner) [22] donde se usó interferometría de neutrones.

El objeto tipo fase que introduciremos aquí está totalmente determinado por el campo gravitacional, y como ya dijimos, veremos que haciendo uso de este objeto, es posible extraer información de las propiedades de la fuente de gravedad correspondiente. Sin embargo, su naturaleza física es diferente a la de las fases cuánticas estudiadas con anterioridad. Detrás de la postulación de este objeto tipo fase, está la suposición de que existe un haz fibrado sobre el cual podemos describir la teoría de la gravitación, y que las propiedades *topológicas* de este haz fibrado se pueden analizar por medio del objeto tipo fase. En este sentido, la diferencia con las fases cuánticas es que nuestro objeto tipo fase es una entidad topológica, y no depende de las interacciones cuánticas que pueda tener el campo con un sistema cuántico de prueba, las cuales son fundamentales para la descripción de la fase cuántica usual.

Por otro lado, la razón para llamarle *objeto tipo fase* y no simplemente fase es que no conocemos explícitamente el sentido en que éste representa una fase. No obstante este objeto tiene dos características importantes que sugieren su carácter de fase y motivan el estudio realizado en el presente capítulo. El primero de estos hechos es que, como veremos más adelante, este objeto asocia a cada trayectoria cerrada γ basada en el punto p , un endomorfismo para el espacio tangente T_p , que es justamente lo que hace una fase. Por otro lado, para el cálculo de este endomorfismo se utiliza una superficie de integración S que debe de tener a γ por frontera, y en este sentido, el segundo hecho importante es que el resultado de tal cálculo es el mismo para todas las superficies que pertenecen a la misma clase homotópica. Esto hace pensar que el objeto que estamos calculando es propio de la curva γ , y no de la superficie de integración, como debe de ser una fase.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.1. Monopolo magnético

Como inicio y motivación del presente capítulo, haremos un breve repaso del argumento expuesto por Dirac [16] para la cuantización del monopolo magnético, que será precisamente la idea que trataremos de generalizar al caso de la gravitación.

Dirac analizó la fase cuántica adquirida por una partícula cargada al ser arrastrada a lo largo de una trayectoria cerrada en la presencia de un monopolo magnético. En general la fase que adquiere una partícula cargada que describe una trayectoria γ inmersa en un campo magnético B está dada por

$$\Phi = e^{iq \int_{\gamma} A}, \quad (1.1)$$

donde q es la carga de la partícula y A es el potencial vectorial del campo B , es decir $dA = B$.

Cuando γ es una trayectoria cerrada es posible usar el teorema de Stokes para reescribir la fase como

$$\Phi = e^{iq \int_S B}, \quad (1.2)$$

con S una superficie cuya frontera sea γ , i.e. $\partial S = \gamma$.

El campo magnético de un monopolo de carga magnética g en coordenadas esféricas está dado por $B = g \sin\theta d\theta \wedge d\phi$. Lo que hace interesante el análisis de este campo es que no existe un potencial vectorial A del cual provenga y que esté bien definido en todo punto donde B lo esté [17]. Desde luego, por ejemplo $B = dA$ para $A = -\frac{g}{2} \cos\theta d\phi$, pero en particular este potencial vectorial es singular en los puntos $\theta = 0, \pi$, por lo que no podemos usarlo como potencial vectorial. Este problema lo presentará cualquier potencial vectorial que se use para B . Esto se puede demostrar de manera general en geometría algebraica, notando que el grupo de cohomología H^{n-1} , de la variedad n -dimensional donde se encuentra definido el campo magnético B , es diferente de cero. Viendo esto es claro que si queremos calcular la fase adquirida por una partícula que se mueve sobre el plano ecuatorial describiendo un círculo al rededor del origen, no podemos usar la expresión (1.1), puesto que carecemos de un potencial A bien definido.

Si queremos calcular la fase para la trayectoria descrita en el párrafo anterior, nos vemos obligados a utilizar la expresión (1.2), donde notamos que podemos elegir distintas superficies para hacer el cálculo, en particular podemos usar cualquiera de los dos hemisferios que tiene a γ como frontera. El signo de la integral sobre un hemisferio debe de ser el opuesto al que

se elija para el otro, ya que las orientaciones de las superficies deben de ser consistentes con la de la trayectoria γ . De esta manera obtenemos $\Phi = \exp(-igq/2)$ para uno de los hemisferios y $\Phi = \exp(igq/2)$ para el otro. La razón por la cual el valor de la integral en (1.2) no es independiente de la elección de superficie, es que los dos hemisferios no son superficies homotópicas, lo cual es posible[17] gracias a que el espacio que estamos considerando es $\mathbb{R}^3 - 0$ que no es simplemente conexo. El origen del sistema de coordenadas se debe de remover por que el campo magnético no está bien definido en ese punto por tener una singularidad que no cumple con las leyes de Maxwell.

Estamos en un punto del análisis de la fase en que tenemos resultados distintos para el mismo cálculo, pero tenemos un argumento para fijar este resultado, ya que la fase cuántica por ser una cantidad física debe de ser la misma independientemente de la forma en que se haya calculado, por lo que requerimos que los dos resultados anteriores sean iguales. Vemos que la única forma de que esta igualdad se satisfaga es que la cantidad qg sea un múltiplo entero de 2π , i.e. $qg = 2\pi n$ para un número entero n obteniendo así lo que a lo largo del presente trabajo llamaremos "condición de cuantización" y trataremos de obtener expresiones de este tipo para otros sistemas en diferentes teorías. Dirac concluyó a partir de esto que la existencia de un monopolo magnético implicaría la cuantización de la carga eléctrica $q = 2\pi n/g$.

1.2. Fase en términos de curvatura

Lo primero que debemos notar es que la integral en la ecuación (1.2) es de hecho la integral del tensor electromagnético sobre una superficie específica. En el caso del monopolo magnético, la única entrada diferente de cero del tensor electromagnético es la correspondiente a $d\theta \wedge d\phi$ en coordenadas esféricas, por eso se integra sobre una superficie en $d\theta d\phi$. Por otro lado, desde la perspectiva geométrica de la teoría de campos, el tensor electromagnético no es otra cosa que la curvatura asociada a la conexión electromagnética.

Consideremos ahora una variedad semiRiemanniana $(M, g_{\mu\nu})$, donde $g_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$) es la métrica subyacente. En este caso podemos introducir un objeto tipo fase descrito por

$$\Phi = e^{\int R}, \quad (1.3)$$

donde R es la curvatura asociada a la métrica, es decir, el tensor de Riemann, que es una dos-forma con valores endomórficos (véase el apéndice A o por

<p>TESIS CON FALLA DE ORIGEN</p>

ejemplo [17]). Para establecer una definición exacta de este objeto tipo fase sería necesario el uso de una exponencial con orden de trayectoria y un factor constante antes de la integral en (1.3) dependiendo de la elección de coordenadas, pero por el momento estamos interesados solamente en la estructura general de Φ .

La integral en (1.3) se debe de realizar sobre el carácter de dos-forma del tensor de Riemann, y el resultado es un endomorfismo, así que el objeto tipo fase Φ siendo la exponencial de un endomorfismo, será a su vez otro endomorfismo.

Las componentes del tensor de Riemann son endomorfismos, y por lo tanto para cada punto de la variedad viven en un espacio vectorial distinto que puede ser asociado con el producto cartesiano del espacio tangente y el espacio cotangente [17]. Si realizamos la integral en (1.3) tal como aparece, estaremos sumando objetos que viven en espacios distintos, lo cual no es justificable. Lo que necesitamos es realizar un transporte paralelo del endomorfismo desde el punto de evaluación hasta un punto fijo, donde diremos que la integral esta basada. Este transporte paralelo sólo debe de ser aplicado sobre el carácter endomórfico del tensor de Riemann, ya que la parte de dos-forma se maneja a través de la retracción (pull-back) de la manera usual. Así que en lugar de (1.3) debemos de usar

$$\Phi = e^{\int R'} \equiv e^{\int H^{-1}RH}, \quad (1.4)$$

donde hemos definido $R' \equiv H^{-1}RH$ siendo H la holonomía que resulta del transporte paralelo, y depende explícitamente del punto de evaluación. Desde luego existen una cantidad infinita de trayectorias a lo largo de las que se puede realizar el transporte paralelo, por lo que la forma explícita de H se tendrá que fijar usando argumentos del tipo que se discutirán en la quinta sección de este capítulo. Por el momento el punto importante es que se puede llegar a ciertas conclusiones independientemente de la forma explícita de H , únicamente suponiendo que esta holonomía preserva algunas de las simetrías fundamentales del tensor de Riemann. Esto no es un requerimiento fuera de contexto, dado que H está directamente relacionada con la métrica y por consiguiente con sus simetrías. Si este comportamiento no apareciera de manera espontánea para H , se podría imponer por construcción.

Una vez definido nuestro objeto tipo fase, recordemos que el punto clave para el argumento de Dirac es que el espacio base no es simplemente conexo. Por tal motivo las configuraciones gravitacionales en que esperamos que nuestro análisis sea relevante son aquellas en que el espacio-tiempo no es simplemente conexo. Ejemplos de esto son soluciones a las ecuaciones de

Einstein que presenten singularidades de curvatura localizadas, en cuyo caso el punto singular debe ser removido del espacio-tiempo, lo que evita que sea simplemente conexo.

1.3. Fase y simetrías

Para poder analizar el objeto tipo fase descrito en la sección anterior de manera general, consideraremos el tensor de curvatura en términos de una base semiortonormal. Vale la pena aclarar de antemano que todos los resultados de esta sección y la siguiente, son independientes de la forma explícita de la H involucrada en la definición (1.4).

En todo momento debemos de entender al tensor de curvatura como una dos-forma de componentes endomórficas, así que cuando hablemos de una componente, nos referiremos al endomorfismo asociado a la correspondiente entrada de la dos-forma. Vemos así que cada una de estas componentes mapea un espacio de dimensión cuatro en sí mismo, por lo que debe de tener cuatro valores propios, que como veremos en la sección siguiente, son las cantidades relevantes para el análisis del objeto tipo fase (1.4).

Cuando las componentes del tensor de curvatura se expresan en términos de tetradas, es decir, de una base semiortonormal (vease el apéndice A), estas pertenecen al álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,1)$, así que explícitamente la componente asociada con la dos-forma $dx^\mu \wedge dx^\nu$ se puede escribir de forma general como

$$R_{\delta\mu\nu}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & a_{\mu\nu} & b_{\mu\nu} & c_{\mu\nu} \\ a_{\mu\nu} & 0 & d_{\mu\nu} & e_{\mu\nu} \\ b_{\mu\nu} & -d_{\mu\nu} & 0 & f_{\mu\nu} \\ c_{\mu\nu} & -e_{\mu\nu} & -f_{\mu\nu} & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

con $a_{\mu\nu}, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu}, d_{\mu\nu}, e_{\mu\nu}$ y $f_{\mu\nu}$ funciones reales de las coordenadas del espacio-tiempo.

Si llamamos $\lambda_{\mu\nu i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) a los valores propios de la correspondiente componente del tensor de curvatura, vemos que dada la forma de (1.5) estos valores cumplen con la relación de simetría

$$\lambda_{\mu\nu 1} = -\lambda_{\mu\nu 2} \text{ y } \lambda_{\mu\nu 3} = -\lambda_{\mu\nu 4}. \quad (1.6)$$

Desde luego estos valores propios son función de las coordenadas del espacio-tiempo, pero lo importante es que cumplen con la relación (1.6) en cada punto.

El cálculo explícito del objeto tipo fase (1.4) involucra la holonomía H , pero esta es un mapeo de $so(3,1)$ en sí mismo, por lo que los valores propios del endomorfismo resultante $R'_{\mu\nu} = H^{-1}R_{\mu\nu}H$ están obligados a satisfacer de igual forma la relación de simetría (1.6).

La definición del objeto tipo fase implica también la integración del endomorfismo R' sobre la superficie S . Dado que S es una subvariedad del espacio-tiempo, podemos introducir coordenadas x^μ tales que, por ejemplo x^1 y x^2 describan la superficie de integración S cuando x^0 y x^3 se fijan a ciertas constantes específicas, con lo cual la expresión (1.4) se escribe de manera explícita como $\Phi = \exp I$ donde I está dada por

$$I = \int R'_{12} dx^1 \wedge dx^2, \quad (1.7)$$

con x^0 y x^3 fijos en los valores correspondientes.

Es importante notar que la relación de simetría (1.6) es inherente al carácter $so(3,1)$ que tiene el tensor de curvatura cuando sus componentes se expresan en términos de tétradas, por lo tanto es independiente de la elección de las uno-formas coordenadas dx^μ . En particular los valores propios λ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) del integrando en (1.7) cumplen con la relación (1.6) en cada punto del dominio de integración, lo que implica que los valores propios λ_i del endomorfismo I también satisfacen la simetría (1.6) independientemente de la superficie S . Esto también se puede afirmar dado que $so(3,1)$ es un álgebra, y como tal, la suma de sus elementos también está en $so(3,1)$, lo que implica que el resultado de la integral (1.7) pertenece de igual forma a $so(3,1)$, y consecuentemente sus valores propios satisfacen (1.6). La invariancia de la relación (1.6) se puede demostrar haciendo un análisis en términos de clasificaciones de Petrov, para los detalles de este análisis, véase [23].

Dados los argumentos anteriores podemos garantizar que los valores propios λ_i del endomorfismo I resultado de la integración que aparece en la definición del objeto tipo fase (1.4), satisfacen (1.6) independientemente de la forma explícita de H y de la superficie de integración que se tome.

Describamos ahora el tipo de superficies de integración que consideraremos. Podemos construir una superficie cerrada simétrica respecto a un eje, digamos z , e intersectarla con un plano que contenga a tal eje y que divida a la superficie original en dos superficies que comparten la misma frontera. Si el espacio-tiempo está descrito por una métrica semiRiemanniana con una singularidad de curvatura localizada que se encuentra entre las dos superficies, entonces éstas dos superficies no serán homotópicas. Para continuar la descripción introduzcamos coordenadas esféricas. Supongamos que la métrica del espacio-tiempo es simétrica respecto al cambio de co-

ordenadas $\phi \rightarrow \phi + \pi$ (claramente esta condición la cumplen una amplia clase de configuraciones gravitacionales, por ejemplo todas las soluciones con simetría axial). En consecuencia de ésta simetría, la integral del tensor de Riemann sobre las dos superficies descritas solo puede diferir por un signo, que se debe al hecho de que cuando la métrica posee simetría ante alguna transformación, el tensor de Riemann no está limitado a ser simétrico, sino que puede ser también antisimétrico ante tal transformación. Denotemos las integrales correspondientes a las dos superficies como I_1 e I_2 , y a las correspondientes fases como $\Phi_1 = \exp(\pm I_1)$ y $\Phi_2 = \exp(\mp I_2)$, donde el signo debe de ser elegido de acuerdo a la orientación de la frontera común.

1.4. Comportamiento bosónico y fermiónico

Si siguiendo el argumento de Dirac exigiremos que el objeto tipo fase (1.4) tenga el mismo valor para las dos superficies, i.e. $\Phi_1 = \Phi_2$. Si las integrales I_1 e I_2 tienen signos opuestos, entonces los objetos tipo fase Φ_1 y Φ_2 que se obtienen a partir de ellos son iguales, dado que la consistencia con la orientación de la frontera implica que una de las integrales debe de cambiar de signo antes de ser exponenciada. En esta situación el requisito $\Phi_1 = \Phi_2$ se satisface trivialmente, así que no se obtienen nuevas condiciones de este análisis.

Por otro lado, si $I_1 = I_2$, el cambio de signo requerido en una de las integrales, digamos en $-I_2$ antes de ser exponenciada hace que Φ_1 y Φ_2 sean diferentes, por lo que hace falta un mayor análisis. En este caso los valores propios de I_1 son el negativo de los de I_2 , y ahora vemos la importancia de la relación de simetría (1.6), ya que gracias a ella podemos estar seguros de que ambos juegos de valores propios coinciden, y que la única diferencia es el intercambio de los vectores propios asociados con cada uno de ellos. Ahora debemos de exponenciar las integrales $I_{1,2}$, que están representadas por matrices 4×4 , ya que son el resultado de integrar componentes como las descritas por (1.5).

Una forma simple de calcular la exponencial de una matriz, digamos M , es por medio de diagonalizarla primero y luego obtener la exponencial como

$$\exp(M) = T \exp(D) T^{-1}, \quad (1.8)$$

donde D es la matriz diagonal que tiene los valores propios de M como componentes, y la matriz T representa el cambio de base que diagonaliza a M y se construye explícitamente colocando los vectores propios de M como columnas en el mismo orden en que los valores propios asociados aparecen

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

en D . Para aplicar este procedimiento a Φ_1 y Φ_2 , podemos usar el hecho de que I_1 e I_2 tienen los mismos valores propios y que éstos satisfacen la relación de simetría (1.6) para definir una matriz

$$A \equiv \exp \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\lambda_3} \end{pmatrix}, \quad (1.9)$$

que nos permite escribir a los objetos tipo fase como

$$\Phi_1 = T_1 A T_1^{-1} \text{ y } \Phi_2 = T_2 A T_2^{-1}, \quad (1.10)$$

usando la misma matriz A para ambos, de tal manera que la única diferencia entre el cálculo de Φ_1 y Φ_2 radica en las matrices T_1 y T_2 .

Usando las ecuaciones (1.10) vemos que

$$\begin{aligned} \Phi_1 = \Phi_2 &\Leftrightarrow T_1 A T_1^{-1} = T_2 A T_2^{-1} \Leftrightarrow A T_1^{-1} = T_1^{-1} T_2 A T_2^{-1} \\ &\Leftrightarrow A T_1^{-1} T_2 = T_1^{-1} T_2 A \Leftrightarrow [A, T_1^{-1} T_2] = 0, \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde los paréntesis cuadrados se refieren al conmutador de las matrices correspondientes. Con esto vemos que cualquier implicación que tenga el requerimiento $\Phi_1 = \Phi_2$ se puede obtener de manera muy sencilla de la imposición de que el conmutador $[A, T_1^{-1} T_2]$ se haga cero.

Para analizar este conmutador debemos de notar que las matrices T_1^{-1} y T_2 sólo difieren entre sí por el orden de sus columnas, ya que los vectores propios de I_1 e I_2 son los mismos habiendo únicamente un intercambio de los valores propios asociados con ellos. A partir de ésto vemos que de manera general

$$T_1^{-1} T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.12)$$

Dada esta expresión de la matriz $T_1^{-1} T_2$ y usando la definición (1.9) de A , vemos que el conmutador $[A, T_1^{-1} T_2]$ se hace cero si y sólo si

$$e^{\lambda_1} = e^{-\lambda_1} \text{ y } e^{\lambda_3} = e^{-\lambda_3}, \quad (1.13)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

que nos lleva a las condiciones de cuantización

$$\lambda_1 = i n_1 \pi \text{ y } \lambda_3 = i n_2 \pi, \quad (1.14)$$

donde n_1 y n_2 son enteros arbitrarios.

Recordando que los valores propios λ_i son funciones de los parámetros de la métrica, vemos que las condiciones (1.14) son análogas a las condiciones de cuantización encontradas por Dirac.

Algo de preocupación puede surgir por el carácter imaginario de los valores propios impuesto por las condiciones (1.14), pero esto no debe de ser factor de importancia ya que al realizar los cálculos concretos resulta que los valores de λ_i aparecen en términos de raíces cuadradas de números que son positivos en algunos casos, pero negativos en otros, dando lugar a valores reales e imaginarios para estas λ 's. Cuando un valor propio es real, la única posibilidad admisible para la n asociada es cero, pero cuando el valor propio es imaginario, entonces n puede tomar cualquier valor entero, dando lugar a un conjunto infinito de soluciones discretas.

La forma explícita de las condiciones (1.14) dependerá de la configuración en particular que se esté considerando [24], así como de los detalles de la definición del objeto tipo fase (1.4), pero la aparición de estas condiciones es inherente al análisis realizado. A continuación veremos más conclusiones a las que se puede llegar de manera general, independientemente de los detalles de la definición (1.4) del objeto tipo fase.

Consideremos ahora el caso en que las condiciones de cuantización no se satisfacen de forma trivial, i.e. $n_1, n_2 \neq 0$. Usando (1.14) en (1.9) obtenemos para A cuatro posibilidades diferentes

$$A_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \text{ o } A_4 = \begin{pmatrix} -\mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad (1.15)$$

donde $\mathbb{1}$ es la matriz unidad 2×2 . Dado que ya hemos impuesto la condición $\Phi_1 = \Phi_2$ podemos usar indistintamente T_1 o T_2 para los cálculos siguientes, así que insertando las distintas opciones dadas por (1.15) en (1.10) obtenemos diferentes objetos tipo fase. Para el caso de A_1 el objeto tipo fase es igual a la identidad

$$\Phi = T A_1 T^{-1} = \mathbb{1}_{4 \times 4}. \quad (1.16)$$

Para los casos A_k ($k = 2, 3, 4$) obtenemos objetos tipo fase que difieren de la identidad

$$\Phi = TA_k T^{-1}, \quad (1.17)$$

pero son raíces cuadradas de esta, es decir que al elevarlos al cuadrado resultan en la identidad

$$\Phi^2 = TA_k T^{-1} TA_k T^{-1} = \mathbb{1}_{4 \times 4}, \quad (1.18)$$

donde hemos usado el hecho de que $A_k^2 = \mathbb{1}_{4 \times 4}$, como se puede verificar fácilmente de (1.15).

Este resultado muestra que las configuraciones gravitacionales que tengan simetría axial o sean invariantes ante la transformación $\phi \rightarrow \phi + \pi$, y que lleven a condiciones de cuantización no triviales se pueden dividir en dos clases. La primera está caracterizada por una curvatura cuyo objeto tipo fase asociado, llamémosle Φ_T es simplemente la identidad. La segunda clase está constituida por las soluciones con fase, digamos $\Phi_S \neq \mathbb{1}_{4 \times 4}$ que cumplen con $\Phi_S^2 = \mathbb{1}_{4 \times 4}$. Este es exactamente el comportamiento que se esperaría para una fase que distinga entre entidades bosónicas ($\Phi_T = \mathbb{1}_{4 \times 4}$) o fermiónicas ($\Phi_S^2 = \mathbb{1}_{4 \times 4}$) cuando se someten a rotaciones por un ángulo de 2π .

Muchos intentos se han hecho para modelar a las partículas elementales por medio de soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein [7, 8, 3, 25, 10]. Si adoptamos esa perspectiva y consideramos al objeto tipo fase Φ como la representación del efecto de una rotación de 2π , concluimos que una partícula descrita por una métrica que satisfaga las simetrías expuestas sólo puede comportarse ante rotaciones en dos posibles maneras, como un bosón (cuando $\Phi = \Phi_T$) o como un fermión (cuando $\Phi = \Phi_S$). Vale la pena resaltar que el tipo de simetrías que hemos requerido no son descabelladas para una métrica que represente una partícula elemental.

La búsqueda de este tipo de comportamientos en modelos de partículas elementales no ha sido poca [26, 8], y vemos que los resultados que hemos obtenido aquí por medio de una perspectiva muy simple, son una indicación de tal comportamiento en configuraciones gravitacionales.

1.5. Integración de dos-formas endomórficas

En las secciones anteriores hemos conseguido establecer resultados precisos sobre el objeto fase (1.4) sin necesidad de conocer su definición exacta. El objetivo de la presente sección es discutir las dificultades que presenta tal definición y hacer una propuesta para ésta, aplicándola a casos concretos en los que las predicciones que se obtengan puedan ser analizadas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como ya se había hecho notar, toda arbitrariedad de la definición (1.4) radica en la manera de integrar dos-formas cuyas componentes sean endomorfismos, por lo tanto es a este problema al que nos enfocaremos a continuación. Desde luego la manera que proponemos para realizar integrales de este tipo debe de ser consistente con la integración usual de dos-formas cuyos componentes son números reales.

1.5.1. Requisitos para la integral

Un hecho que conocemos a partir del teorema de Stokes, es que el resultado de integrar una dos-forma ω con componentes reales, sobre distintas superficies homotópicas entre sí, es el mismo en tanto ω sea cerrada, es decir, que su derivada exterior sea cero $d\omega = 0$ [17].

Este es un elemento clave para el argumento de Dirac, por lo tanto, aunque lo modificaremos ligeramente, será lo primero que exigiremos a la definición de integral que estamos buscando. La modificación radica en que pediremos que las dos-formas involucradas en la integración, satisfagan la identidad de Bianchi en lugar de ser cerradas. Esto lo hacemos por que la dos-forma con componentes endomórficos que nos interesa es el tensor de curvatura, que no es cerrado, es decir su derivada exterior no es cero, $dR \neq 0$, sin embargo R satisface la identidad de Bianchi, es decir que su derivada exterior *covariante* sí se anula, $d_D R = 0$. Para el caso de formas diferenciales con componentes reales, esta modificación no cambia nada, ya que en ese caso la derivada exterior es igual a la derivada exterior covariante.

Para verificar que el valor de la integral sea el mismo para diferentes superficies homotópicas, tenemos que confirmar que la variación de esta integral con respecto a la superficie de integración se anule siempre que la variación de la superficie sea homotópica a la original.

Si realizamos la integral de la dos-forma, entrada por entrada del endomorfismo, por medio de la retracción² es fácil ver que el teorema de Stokes implica que la variación de la que hablamos es proporcional a la derivada exterior de la dos-forma.

El otro requisito que pediremos a la definición de integral que buscamos, es que se reduzca a la integral usual cuando se consideren formas diferenciales con componentes reales.

²El procedimiento usual por medio de la retracción (pull-back) de la dos-forma está explicado en [27]

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.5.2. Mediante un ansatz para la holonomía

En la definición del objeto tipo fase (1.4) la integración de la dos-forma R se justifica por medio de la introducción de H , que es una holonomía que permite, en principio, sumar elementos de espacios vectoriales diferentes³. Veamos ahora como debe de ser esta holonomía si queremos que la integral en (1.4) cumpla con los requisitos expuestos en la sección anterior.

Escribiendo de manera explícita los índices en el cálculo de R' tenemos

$$(R')_{b\mu\nu}^a = (H^{-1})_c^a R_{d\mu\nu}^c H_b^d, \quad (1.19)$$

donde en principio H_b^a es arbitraria en tanto no sea degenerada, y como se dijo en la sección (1.2) debe fijarse por medio de los argumentos que se expondrán a continuación.

Ya se ha dicho que la variación de la integral de una dos-forma, respecto a superficies homotópicas, es proporcional a su derivada exterior. El primer requisito de la sección anterior implica que esta variación se debe de anular para R' cuando la derivada exterior covariante de R sea cero, por lo que debemos de encontrar una holonomía H tal que

$$dR' \propto d_D R. \quad (1.20)$$

Para encontrar la H que satisfaga (1.20) notamos que

$$\begin{aligned} \partial_\delta (R')_{b\mu\nu}^a &= [\partial_\delta (H^{-1})_c^a] R_{d\mu\nu}^c H_b^d + \\ & (H^{-1})_c^a (\partial_\delta R_{d\mu\nu}^c) H_b^d + (H^{-1})_c^a R_{d\mu\nu}^c (\partial_\delta H_b^d) \end{aligned} \quad (1.21)$$

Dado que H es no-degenerada, siempre es posible calcular C_{cb}^d , una uno-forma con componentes endomórficos dada por

$$C_{f\delta}^d = (\partial_\delta H_b^d) (H^{-1})_f^b, \quad (1.22)$$

con lo que podamos escribir

$$\partial_\delta H_b^d = C_{cb}^d H_b^c \quad \text{y} \quad \partial_\delta (H^{-1})_c^a = -(H^{-1})_d^a C_{cb}^d. \quad (1.23)$$

Usando (1.23) en (1.21) obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_\delta (R')_{b\mu\nu}^a &= [-(H^{-1})_c^a C_{cb}^c] R_{d\mu\nu}^c H_b^d + \\ & (H^{-1})_c^a (\partial_\delta R_{d\mu\nu}^c) H_b^d + (H^{-1})_c^a R_{d\mu\nu}^c (C_{cb}^c H_b^c) \end{aligned} \quad (1.24)$$

³Para una discusión más detallada de la introducción de H véase la sección (1.2)

o renombrando índices mudos

$$\partial_\delta (R)_{b\mu\nu}^a = (H^{-1})_e^a \{ (\partial_\delta R_{d\mu\nu}^e) + R_{c\mu\nu}^e C_{d\delta}^e - C_{c\delta}^e R_{d\mu\nu}^e \} H_b^d. \quad (1.25)$$

En esta última expresión vemos que la cantidad entre paréntesis cuadrado sería justamente la derivada covariante de $R_{b\mu\nu}^a$ si $C_{c\delta}^d$ dada por (1.22) cumpliera con

$$C_{b\mu}^a = \omega_{b\mu}^a, \quad (1.26)$$

donde $\omega_{b\mu}^a$ es la conexión de Levi-Civita con sus componentes escritos en términos de tetradas. A la conexión escrita de esta forma también se le llama conexión de espín[18].

El satisfacer la condición (1.26) garantiza el cumplimiento del requisito (1.20), con lo que reducimos el problema de la definición de H a resolver el sistema de ecuaciones diferenciales parciales dadas por

$$\partial_\delta H_b^a = \omega_{c\delta}^a H_b^c. \quad (1.27)$$

Desafortunadamente las condiciones de integrabilidad de las ecuaciones (1.27) son

$$(\omega_{c\mu,\nu}^a - \omega_{c\nu,\mu}^a + \omega_{d\nu}^a \omega_{c\mu}^d - \omega_{d\mu}^a \omega_{c\nu}^d) H_b^c = 0, \quad (1.28)$$

donde $M_{,\mu}$ significa derivada parcial respecto a x^μ .

Dado que H es no degenerado, las condiciones de integrabilidad (1.28) serán satisfechas únicamente si la cantidad entre paréntesis, que es la curvatura misma, se anula.

La conclusión a la que llegamos, es que la única situación en la que se puede encontrar una holonomía H solución a (1.27) es cuando el espacio-tiempo es globalmente plano. Esto no implica que no sea posible encontrar una H tal que R' satisfaga la condición (1.20), ya que en el análisis anterior establecimos la proporcionalidad entre dR' y $d_D R$ pidiendo que la cantidad entre paréntesis cuadrados en la ecuación (1.25) fuera igual a la derivada covariante de R . Dado que esta no es la manera más general de satisfacer (1.20) debemos de buscar formas alternativas de hacerlo.

1.5.3. Mediante una superficie de referencia

En la última sección nos dimos cuenta de que debemos de tomar un punto de vista más general para que la definición de la integral cumpla

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

con los requisitos que hemos impuesto. Tomando otra perspectiva, podemos usar el teorema de Stokes, por el cual sabemos que para toda dos-forma Ω se cumple la relación [28]

$$\int_{S'} \Omega - \int_S \Omega = \int_V d\Omega, \quad (1.29)$$

donde S y S' son superficies homotópicas, y V es cualquier volumen que tenga la superficie $S' \cup S$ como frontera⁴, i.e. $\partial V = S' \cup S$. Debemos aclarar que Ω es una dos-forma con componentes endomórficos, sin embargo hemos suprimido todos sus índices, tanto los internos, que indican el carácter endomórfico, como los externos que indican su carácter de forma diferencial. Esto lo hemos hecho para simplificar las expresiones siguientes; un manejo sistemático de esta notación se puede encontrar en [18].

Para cada clase de superficies homotópicas podemos elegir una superficie de referencia S_{ref} y definir la integral sobre cualquier superficie S perteneciente a la misma clase como

$$\int'_S \Omega = \int_S \Omega - \int_V (\omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega), \quad (1.30)$$

donde es V cualquier volumen cuya frontera sea $S \cup S_{ref}$ y ω es la conexión de espín con todos los índices suprimidos. Hay que notar que en la expresión (1.30), la superficie de referencia no aparece explícitamente, sino que está implícita en la definición de V . Por otro lado debemos de hacer incapie en que esta expresión define al objeto que está al lado izquierdo de (1.30), por eso lo denotamos con un apóstrofe sobre el signo de integral.

La razón para introducir esta definición es que para Ω arbitraria, el valor de la integral definida en (1.30) sobre distintas superficies homotópicas será distinto y el único caso en que esta integral tendrá el mismo valor para toda superficie homotópica será cuando Ω satisfaga la identidad de Bianchi. Lo anterior lo podemos ver a partir de que sólo en este caso se cumple que $(\omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega) = -d\Omega$, igualdad que al ser insertada en (1.30) garantiza, vía el teorema de Stokes (1.29), que el valor de la integral así definida será el mismo para toda superficie homotópica. En general $(\omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega) \neq -d\Omega$, por lo que la integral dada por (1.30) variará de una superficie a otra aunque éstas sean homotópicas.

Un hecho importante es que tanto V como S_{ref} en (1.30) se pueden elegir de manera conveniente para los cálculos específicos.

⁴Decimos cualquier volumen porque en dimensiones superiores a tres, V no será único, pero dado que $d(d\Omega) = 0$ el valor de la integral en el lado derecho de (1.29) será independiente de la elección de V en tanto $S' \cup S$ sea su frontera.

Esta puede ser una propuesta ingenua, pero satisface los dos requerimientos que se mencionaron en (1.5.1). Usando (1.29) vemos que efectivamente el valor de esta integral es el mismo para todas las superficies en la clase de equivalencia homotópica, si y sólo si Ω satisface la identidad de Bianchi, o equivalentemente $(\omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega) = -d\Omega$.

Con respecto al otro requisito, vemos que para el caso de formas diferenciales con componentes reales, el conmutador $[\omega, \Omega]$ es cero, así que esta definición se reduce a la usual.

Desde luego esta definición tiene el problema de necesitar una superficie de referencia para cada clase homotópica, pero para nuestro análisis en particular, ésto no será importante, puesto que nosotros estamos interesados en diferencias entre las integrales, y tales diferencias son independientes de la superficie de referencia que se use, como se puede ver fácilmente restando el valor que toma (1.30) para diferentes superficies homotópicas.

La dos-forma en la que estamos interesados es el tensor de curvatura, cuyos componentes, al ser expresados en términos de tétradas, son elementos del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,1)$. La conexión de espín es una uno-forma cuyos componentes también están en $\mathfrak{so}(3,1)$ [18]. Por lo tanto para el caso del tensor de curvatura, ambos integrandos en el lado derecho de (1.30) son elementos del álgebra $\mathfrak{so}(3,1)$ y consecuentemente el resultado de su integración será también un elemento de esta álgebra. Por lo tanto los valores propios de la integral de la curvatura al ser realizada como se define en (1.30) cumplirán con la relación de simetría (1.6), que es todo lo que fue necesario para la obtención de los resultados de las secciones (1.3) y (1.4), así que estos resultados se recuperan al usar esta definición de integración.

1.5.4. La métrica de Kerr-Newman

Ahora que hemos propuesto una definición para la integral de dos-formas con componentes endomórficos, podemos utilizarla para realizar algún cálculo concreto para alguna métrica solución a las ecuaciones de Einstein en la cual nuestro análisis pueda ser relevante. Con este fin elegimos la métrica de Kerr-Newman que está dada por el elemento de línea [29]

$$ds^2 = -\left(\frac{\Delta - a^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{2a \operatorname{sen}^2(\theta)(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi + \left[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}{\Sigma}\right] \operatorname{sen}^2(\theta) d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (1.31)$$

y el potencial electromagnético

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$A = -\frac{e\tau}{\Sigma} [dt - a \operatorname{sen}^2(\theta) d\phi], \quad (1.32)$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \\ \Delta &= r^2 + a^2 + e^2 - 2M\tau. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Elegimos esta métrica ya que es axisimétrica y tiene una singularidad localizada en $(r = 0, \theta = \pi/2)$ en las coordenadas de Boyer-Linquist [30]. En este caso podemos tomar como superficies no homotópicas las dos mitades de una esfera centrada en el origen del sistema de coordenadas.

Antes de continuar con el cálculo, debemos de aclarar que, los valores propios de un endomorfismo son independientes de la base en la que éste se escriba. Por esta razón, la relación (1.6) se satisface sin importar en que base estén escritas las entradas de los componentes del tensor de Riemann⁵, puede ser en tétradas $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$ o en la base coordenada dx^{α} , $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$. Los cálculos explícitos para la presente sección se hicieron usando la base coordenada, pero las conclusiones de secciones anteriores siguen siendo validas en este análisis.

Prosigamos con el cálculo, usando la definición de la sección anterior escribimos

$$\Phi_1 = e^{\int_{h_1} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi}; \Phi_2 = e^{\int_{h_2} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi}, \quad (1.34)$$

y requeriremos $\Phi_1 = \Phi_2$.

Una elección conveniente para la superficie de referencia es usar para esta alguno de los hemisferios, digamos h_1 . Si lo hacemos así obtenemos

$$\Phi_1 = e^{\int_{h_1} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi}; \Phi_2 = e^{\int_{h_2} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi - \int_V (\omega_{\beta\rho}^{\alpha} R_{\beta\mu\nu}^{\rho} - R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \omega_{\beta\rho}^{\rho}) dx^{\rho} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}}, \quad (1.35)$$

donde V se puede elegir como la bola sólida dentro de $h_1 \cup h_2$ a un tiempo dado.

En este caso sabemos que $R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$ cumple con la identidad de Bianchi, por lo que podemos reescribir $(\omega_{\beta\rho}^{\alpha} R_{\beta\mu\nu}^{\rho} - R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \omega_{\beta\rho}^{\rho}) = -\partial_{\rho} R_{\beta\mu\nu}^{\alpha}$, y obtener

$$\begin{aligned} &\int_{h_2} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi - \int_V (\omega_{\beta\rho}^{\alpha} R_{\beta\mu\nu}^{\rho} - R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} \omega_{\beta\rho}^{\rho}) dx^{\rho} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \\ &= \int_{h_2} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi + \int_V \partial_{\rho} R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} dx^{\rho} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

⁵Para detalles del uso de índices véase el apéndice I.

Usando el teorema de Stokes (1.29) podemos reescribir

$$\int_{h_2} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi + \int_V \partial_{\rho} R_{\beta\mu\nu}^{\alpha} dx^{\rho} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} = \int_{h_1} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi - \int_{Sp} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi, \quad (1.37)$$

donde Sp es una esfera centrada en el origen y para obtener la igualdad anterior se debe de tomar el límite cuando su radio tiende a cero.

Usando los dos resultados anteriores Φ_2 se puede escribir como

$$\begin{aligned} \Phi_2 &= e^{\int_{h_2} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi} - \int_V (\omega_{\delta\rho}^{\alpha} R_{\beta\mu\nu}^{\delta} - R_{\delta\mu\nu}^{\alpha} \omega_{\beta\rho}^{\delta}) dx^{\rho} \wedge dx^{\mu} \wedge dx^{\nu} \\ &= e^{\int_{h_1} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi} - \int_{Sp} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi, \end{aligned} \quad (1.38)$$

donde Sp es una esfera centrada en el origen y para obtener el valor de Φ_2 se debe de tomar el límite cuando su radio tiende a cero.

En términos de esta última expresión, la condición $\Phi_1 = \Phi_2$ se puede reescribir como

$$\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow e^{\int_{h_1} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi} = e^{\int_{h_1} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi} - \int_{Sp} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi. \quad (1.39)$$

La integral $\int_{h_1} R$ se hace cero en el límite en que el radio de h_1 se hace infinito, y a partir de este punto supondremos que estamos trabajando en este límite, suposición que justificaremos más adelante.

En este límite (1.39) se reescribe como

$$\Phi_1 = \Phi_2 \Rightarrow \mathbb{1} = e^{-\int_{Sp} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi} \Rightarrow \int_{Sp} R_{\beta\theta\phi}^{\alpha} d\theta \wedge d\phi = \mathbb{1}. \quad (1.40)$$

Al introducir la componente $R_{\beta\theta\phi}^{\alpha}$ del tensor de curvatura asociado a la métrica de Kerr-Newman, que se muestra en el apéndice B, en la integral que aparece en (1.40) e integrar sobre θ y ϕ , vemos que el resultado, también expuesto en el apéndice B, depende del valor del radio de Sp . Como habíamos dicho con anterioridad, el valor de esta integral se debe tomar en el límite en que el radio de Sp va a cero, el problema es que en este límite el valor de la integral se hace infinito.

Parecería ser necesaria la introducción de un radio de corte, que podría ser alguno de los horizontes de la métrica de Kerr-Newman, pero no es obvio cual debería de ser, ni si su suposición ésta justificada.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Partícula	Radio Clásico (cm.)	Radio 1 (cm.)	Radio 2 (cm.)	Radio 3 (cm.)
Electrón	$2,817 \times 10^{-13}$	$2,814 \times 10^{-13}$	$9,380 \times 10^{-14}$	$7,071 \times 10^{-11}$
Leptón τ	$8,100 \times 10^{-17}$	$8,092 \times 10^{-17}$	$2,697 \times 10^{-17}$	$2,033 \times 10^{-14}$
Leptón μ	$1,362 \times 10^{-15}$	$1,361 \times 10^{-15}$	$4,537 \times 10^{-16}$	$3,420 \times 10^{-13}$
Mesones $\pi^{+/-}$	$1,031 \times 10^{-15}$	$1,030 \times 10^{-15}$	$3,434 \times 10^{-16}$	$5,176 \times 10^{-13}$
Protón	$1,534 \times 10^{-16}$	$1,533 \times 10^{-16}$	$5,108 \times 10^{-17}$	$3,851 \times 10^{-14}$
Neutrón	$1,1 \times 10^{-15}$	$3,881 \times 10^{-14}$		

Cuadro 1.1: Comparación entre los radios clásicos y los predichos para diferentes partículas. Radio 1 es, en la mayoría de los casos muy cercano al radio clásico $r = \frac{e^2}{m}$ [31]. En el caso del neutrón sólo existe una raíz real y su valor es aproximadamente un tercio del valor experimental [32].

Por otro lado, si los parámetros m, e y a de la métrica de Kerr-Newman se fijaran de alguna forma, las entradas de la integral que aparece en (1.40) serían función solamente del radio r_{Sp} de la esfera Sp , por lo que las condiciones de cuantización impuestas precisamente por la relación (1.40) se traducirían en condiciones para este radio.

El intento que se hizo fue basado en que el objetivo final es el modelar algún tipo de partículas por medio de esta geometría, así que aún sabiendo que el utilizar los valores de masa, carga y espín del electrón hacen que aparezca una singularidad desnuda, sustituimos estos valores para los parámetros m, e y $m \times a$. Al hacer esto, las condiciones de cuantización se traducieron en las ecuaciones polinómicas para r_{Sp} que se muestran en el apéndice B, y al resolverlas se encontraron muchas soluciones, pero casi todas resultaron negativas o complejas, y por lo tanto carentes de sentido físico. Sólo tres de ellas fueron reales y positivas, y en particular una de éstas coincidió aproximadamente con el radio clásico del electrón $2,87 \times 10^{-13}$ cm. Dado este valor de r_{Sp} , vemos que un radio r_{h_1} del orden de 10^{-8} para h_1 , hace que la integral $\int_{h_1} R_{\beta\phi}^2 d\theta \wedge d\phi$ sea muy pequeña en comparación con la integral para r_{Sp} , justificando la suposición que hicimos sobre $\int_{h_1} R_{\beta\phi}^2 d\theta \wedge d\phi \rightarrow 0$.

Dado el resultado anterior decidimos probar el procedimiento para los parámetros de otras partículas, incluso no elementales y encontramos para varias partículas cargadas una muy buena concordancia entre los radios clásicos dados por $\frac{e^2}{m}$ y las soluciones a las condiciones dadas por (1.40). En el cuadro (1.1) presentamos estos resultados.

Es importante mencionar que la cantidad $(r_{Sp} - \frac{e^2}{m})$ no se factoriza de los polinomios para r_{Sp} , así que el radio clásico no es una raíz exacta de estas funciones, y de hecho por experimentación numérica hemos verificado que

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

las soluciones para r_{Sp} dependen, aunque muy sutilmente, del parámetro a de la métrica.

1.6. Conclusiones del capítulo primero

En este primer capítulo hemos visto que es posible extender al caso de la gravitación el argumento de cuantización propuesto por Dirac para el monopolo magnético. Esto lo vimos por medio de proponer un objeto tipo fase (1.4), cuya definición precisa aún no es clara, pero a pesar de esta vaguedad, pudimos en las secciones 1.3 y 1.4 establecer resultados concretos independientes de la definición específica.

Uno de los resultados principales es la deducción de la existencia de las condiciones de cuantización (1.14), para la cual se partió de las características del objeto tipo fase (1.4) inherentes a su construcción, e independientes de su planteamiento concreto. Desde luego se hizo ver que para que estas condiciones de cuantización aparezcan en el análisis de una configuración gravitacional específica, ésta debe de cumplir con ciertas características, en concreto debe de tener singularidades localizadas de curvatura y poseer algún tipo de simetría, ya sea axial, ante una rotación por un ángulo π , simetría especular respecto a un plano, etc. Desde luego la forma explícita de estas condiciones de cuantización dependerán de la definición exacta que se dé al objeto tipo fase.

Otro resultado que se obtuvo partiendo de las mismas características generales del objeto tipo fase, fué que su comportamiento es reminiscente del comportamiento de bosones y fermiones. De partida es interesante ver que configuraciones gravitacionales presenten este tipo de comportamiento, incluso a nivel clásico, y aún mas notable es la predicción de que para configuraciones gravitacionales clásicas no haya ningún otro comportamiento permitido.

Estos resultados son un indicativo de que la propuesta de la existencia de tal objeto tipo fase es viable y puede ayudar a hacer un análisis interesante de los modelos de geones propuestos con anterioridad en algunas configuraciones gravitacionales.

Desde luego hasta este punto sólo hemos analizado el comportamiento de las configuraciones gravitacionales ante rotaciones, que es únicamente una de las características de los bosones y los fermiones. Para establecer un símil mejor fundamentado es necesario analizar el comportamiento ante intercambio de partículas y la verificación del teorema espin estadística. Aun así es interesante ver que una de estas características sea correctamente

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

predicha por el análisis hecho en este capítulo.

Propusimos también una forma de realizar integrales de dos-formas con componentes endomórficas, de tal manera que esta forma de integrar cumpliera con algunos requerimientos básicos. A pesar de haber logrado cubrir los requerimientos fundamentales, esta definición aún no es satisfactoria, más trabajo es necesario en este sentido, ya que la propuesta aún no parece tener un carácter definitivo por requerir de una superficie de referencia para cada clase de superficies homotópicas. En esta aspecto los resultados son solamente parciales.

Los resultados que se alcanzaron con el uso de esta integral para el análisis de la métrica de Kerr-Newman son objeto de duda en muchos sentidos. Por un lado están los cuestionamientos intrínsecos a la definición de la integral, pero más allá de eso, la aparición de tres posibles radios clásicos con valores reales y positivos no es una conclusión que parezca tener mucho sentido. Incluso se debería de analizar la aparición de soluciones negativas y complejas a las condiciones de cuantización.

A partir de este punto se postula la pregunta de si hay alguna otra forma sistemática de extender el análisis realizado, y a dar respuesta a esta pregunta a lo que se dedica el siguiente capítulo, rehaciendo el planteamiento desde la perspectiva de haces fibrados principales y teorías de norma.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 2

Cuantización topológica

En este capítulo obtendremos condiciones de cuantización, del tipo que hemos discutido hasta el momento, por medio de un análisis topológico al que llamaremos cuantización topológica. Justamente empezaremos por definir lo que consideramos cuantización topológica y la dividiremos en intrínseca e inducida dependiendo de si la configuración que se analiza en particular, se cuantiza por efectos de la geometría misma, o si requiere de un campo de norma extrínseco a la métrica para cuantizarse. Después analizaremos dos ejemplos de cuantización topológica intrínseca, donde encontraremos la cuantización de algunos parámetros, de los que analizaremos el sentido físico. Se expondrán también ejemplos de cuantización inducida donde el campo de norma extrínseco es el campo electromagnético de Einstein-Maxwell y estableceremos condiciones de cuantización, a las que daremos sentido físico. Finalizamos el capítulo discutiendo otros ejemplos de campos de norma extrínsecos que podrían dar resultado a condiciones de cuantización no triviales.

2.1. ¿Qué es cuantización topológica?

Lo primero que debemos de aclarar respecto a la cuantización topológica es que no es (por el momento) un método para cuantizar una teoría completa, sino que dentro de una teoría dada, es un método que se usa para analizar configuraciones de campo específicas que sean una solución particular a las ecuaciones de campo. Para que a una configuración de campo se le pueda aplicar el método, es necesario que tenga dos características esenciales que discutimos a continuación.

En primer lugar la configuración por analizar debe de pertenecer a una

teoría que se pueda describir por medio de un haz fibrado principal. En el apéndice A hacemos un recordatorio de los elementos que constituyen a un haz fibrado, para mayores detalles véase [33]. En una teoría que admita esta descripción, el potencial vectorial debe ser una uno-forma A definida sobre el espacio base B del haz fibrado, cuyos componentes A_μ tomen valores en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo G del haz fibrado, es decir que el potencial vectorial será una conexión para el espacio base B [18]. En este caso, la intensidad del campo estará descrita por la curvatura F asociada a la conexión dada por el potencial vectorial. Por ser un haz fibrado principal, la fibra F es isomórfica al grupo G , así que este grupo actúa de forma transitiva sobre F . Si hablamos de una teoría de norma, las ecuaciones de campo son invariantes ante una transformación de norma g aplicada sobre los campos. La asociación del espacio base B con el espacio-tiempo es usual, y también la elección de la fibra como alguno de los grupos $U(1)$, $SU(2)$, etc. que son los grupos asociados a distintas teorías de campos.

Por otro lado, para que se obtengan condiciones de cuantización por medio del método de cuantización topológica, la configuración del haz fibrado asociada a la solución particular que se analice, debe de ser no trivial, es decir que el espacio total no sea equivalente a $B \times F$.

Estas son las condiciones de aplicabilidad del método. La primera es conocida para muchas teorías. La segunda es propia de algunas soluciones particulares y para verificar que se satisfaga en cada caso y completar la cuantización, podemos utilizar dos procedimientos diferentes. El primero es por medio de la conexión A dada por la configuración de campo y la segunda hace uso de los invariantes topológicos.

En el análisis por medio de la conexión, hay que demostrar que no existe una conexión global bien definida. Para ésto se buscan puntos de la base B en la que el potencial vectorial A , es decir la conexión, diverja o no sea univaluada. Una vez hecho ésto, debemos de verificar que no sea posible modificar A por medio de una transformación de norma de tal manera que la conexión resultante esté bien definida en todo punto, ya que si éste fuera el caso, habría una conexión global bien definida que representaría la misma solución a las ecuaciones de campo, y el haz fibrado sería trivial.

Para completar el método de cuantización, una vez que se determinó que el haz es no trivial, hay que encontrar un conjunto de conexiones locales A_i , que estén respectivamente bien definidas sobre conjuntos abiertos U_i . Los conjuntos U_i deben de cubrir todo el espacio donde esté definida la configuración de campo, i.e. $B \in \cup_i U_i$. La transformación de norma que relaciona las conexiones locales A_i y A_j define la función de transición $\gamma_{i \rightarrow j}$ entre los conjuntos U_i y U_j . Las posibles condiciones de cuantización surgen

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

al imponer que las funciones de transición $\gamma_{i \rightarrow j}$ cumplan con las simetrías del sistema, que en muchos casos, como se verá en la sección siguiente, se reducen a exigir periodicidad en una dirección compacta.

El procedimiento en términos de invariantes topológicos consiste en calcular el invariante correspondiente al grupo de norma G para verificar que no sea trivial. En este proceso, el valor del invariante queda escrito en términos de los parámetros de la métrica y de los campos. Las condiciones de cuantización aparecen ya que los invariantes topológicos deben de adoptar valores discretos.

A continuación veremos varios ejemplos de éste tipo de cuantización, pero antes queremos recalcar que los resultados que se obtengan por medio del análisis de la conexión deben de ser equivalentes a los que se obtenga por medio de invariantes topológicos cuando sean aplicables a la misma configuración de campos.

2.2. Monopolo magnético

Como primer ejemplo concreto de lo que hemos descrito como cuantización topológica, expondremos al monopolo magnético, pero en esta ocasión lo describiremos como un haz fibrado principal.

Al analizar el haz fibrado $U(1)$ del monopolo magnético es claro que la condición de cuantización aparece como consecuencia de un requisito de regularidad en la conexión sobre el haz [18]. Veamos esto con algún detalle.

El campo electromagnético de un monopolo puede ser descrito, modulo una transformación de norma, por el potencial

$$A_m = \frac{1}{2} ig(-1 - \cos \theta) d\phi, \quad (2.1)$$

donde se han usado coordenadas esféricas. Con anterioridad se dijo que no existía un potencial vectorial que describiera el campo de un monopolo magnético, dado que cualquier potencial que se propusiera, sería singular en algún punto donde el campo electromagnético estuviera bien definido y justamente esta será la base para el argumento en términos de haces fibrados. En particular el potencial (2.1) es singular en $\theta = 0$, como se puede ver al reescribirlo en términos de tétradas

$$A_m = \frac{1}{2} ig(-1 - \cos \theta) \frac{e^\phi}{r \sin(\theta)}, \quad (2.2)$$

donde se uso la expresión para ϕ en términos de la uno-forma unitaria $e^\phi d\phi = e^\phi / r \sin(\theta)$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Este potencial puede ser modificado por medio de una transformación de norma. Para esto recordemos que el grupo de norma del electromagnetismo es $U(1)$, que se puede representar por $e^{i\alpha}$ con α un número real. Obviamente el potencial (2.2) está en la representación inducida del álgebra de Lie $\mathfrak{u}(1)$. Dado que $U(1)$ es abeliano, una transformación de norma actúa sobre un potencial de norma de acuerdo a

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \gamma^{-1} \partial_\mu \gamma. \quad (2.3)$$

Por lo que si elegimos

$$\gamma = e^{ig\phi}, \quad (2.4)$$

y actuamos sobre (2.1) el potencial resultante es

$$A'_m = \frac{1}{2} ig(1 - \cos \theta) d\phi = \frac{1}{2} ig(1 - \cos \theta) \frac{e^\phi}{r \operatorname{sen}(\theta)}, \quad (2.5)$$

que es singular en $\theta = \pi$, pero regular en $\theta = 0$.

El punto clave del argumento es que para que la transformación de norma (2.4) esté bien definida, es decir, sea univaluada sobre el espacio-tiempo, es necesario que el número g sea un entero. Así que para decir que es posible remover la singularidad del potencial (2.2) por medio de una transformación de norma, es necesario que g , la intensidad del monopolo, sea un número entero, lo cual se interpreta nuevamente como la cuantización de la carga magnética del monopolo¹.

Lo que se está haciendo en realidad en el presente análisis es cubrir todo el haz fibrado, dado por $\mathbb{R}^3 - 0$ como base y el grupo $U(1)$ como fibra, con una conexión bien definida. El potencial vectorial es la proyección de tal conexión, siendo en sí mismo, una conexión para el espacio base. Así que los potenciales dados por (2.2) y (2.5) son diferentes proyecciones del mismo objeto, una de ellas está bien definida para todo punto menos el semieje positivo z_+ y la otra para todo punto salvo el semieje negativo z_- .

Pensando en esto de forma inversa, vemos que para describir propiamente al haz fibrado del monopolo magnético son necesarias dos conexiones, ω_{β_+} y ω_{β_-} dadas respectivamente por (2.2) y (2.5), cada una de ellas está definida sobre un conjunto abierto distinto, para la primera tenemos al conjunto $U_- = \mathbb{R}^3 - z_+$ y para la segunda al conjunto $U_+ = \mathbb{R}^3 - z_-$. Los conjuntos

¹ En el argumento original la carga eléctrica aparece en la condición de cuantización, pero aquí la carga eléctrica se ha fijado como la unidad al elegir la representación que se usó para el grupo $U(1)$.

U_- y U_+ son una cobertura del espacio base del haz fibrado, que es $\mathbb{R}^3 - 0$. Si queremos que ω_{β_+} y ω_{β_-} sean las respectivas proyecciones π_+ y π_- de una conexión bien definida en el haz fibrado, es necesario que en la intersección de los conjuntos U_- y U_+ estas conexiones estén relacionadas por una función de transición de norma, que en este caso esta dada por $\gamma_{+ \rightarrow -} = e^{i\theta\phi}$. Ahora podemos ver que para que esta función de transición esté bien definida, la condición de cuantización $g \in \mathbb{Z}$ debe de ser satisfecha.

El argumento expuesto en el párrafo anterior es un caso particular de lo que se describió en general como cuantización topológica en la sección (2.1), constituyendo así el primer ejemplo concreto de la aplicación de este método.

2.3. Cuantización topológica intrínseca

En esta sección daremos ejemplos de cuantización topológica intrínseca. El carácter de intrínseco se refiere a que al campo de norma que se le aplicará el procedimiento de cuantización topológica, es la conexión asociada a la curvatura. Para que esta sea una conexión de norma, es necesario escribir sus componentes en términos de tétradas semiortonormales [18], es decir que usaremos la conexión de espín. La razón para llamarle intrínseca es que, en este caso, lo que da lugar a la cuantización de los parámetros de la métrica es la geometría misma que ésta induce sobre el espacio-tiempo a través de la conexión de espín. Este tipo de cuantización debe de contrastarse con los ejemplos que se expondrán en la sección (2.4), en los que la presencia de otros campos de norma, además de la conexión de espín, es necesaria para obtener las condiciones de cuantización.

2.3.1. Teoría linealizada de Einstein

A continuación mostraremos que en el límite lineal de la teoría de la gravitación, el monopolo gravitomagnético se cuantiza en la misma forma que el monopolo magnético en la teoría del electromagnetismo.

Recordemos que en el límite linealizado de la relatividad general el elemento de línea se puede escribir como [29]

$$ds^2 = -(1 - 2\varphi)dt^2 + (1 + 2\varphi)dx^2 + (1 + 2\varphi)dy^2 + (1 + 2\varphi)dz^2 + 2\chi_x dt dx + 2\chi_y dt dy + 2\chi_z dt dz, \quad (2.6)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde suponemos que tanto φ como χ_i son muy pequeñas comparadas con la unidad, y hemos utilizado la norma de Lorentz.

Escritas en este límite, las ecuaciones de Einstein se reducen a expresiones idénticas a las ecuaciones de Maxwell

$$\partial^\mu \partial_\mu A_\nu = -4\pi J_\nu, \quad (2.7)$$

para el potencial vectorial dado por

$$\mathbf{A} = -\frac{1}{4}(4\varphi dt + \chi_x dx + \chi_y dy + \chi_z dz), \quad (2.8)$$

y la cuadricorriente

$$\mathbf{J} = -T_{0\nu} dx^\nu, \quad (2.9)$$

donde $T_{\mu\nu}$ son las componentes del tensor de energía momento en el límite lineal.

Al considerar el movimiento de una partícula de prueba inmersa en esta métrica, vemos que a primer orden en su velocidad, las ecuaciones de geodésicas implican

$$\mathbf{a} = -\mathbf{E} - 4\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.10)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{B} se obtienen a partir de \mathbf{A} en la misma forma en que se hace en el caso electromagnético, y $\mathbf{a} = d^2\mathbf{x}/dt^2$.

Como ya habíamos dicho, cuando en la gravitación los componentes de la curvatura y de la conexión se escriben en términos de tétradas, esta teoría presenta una libertad de norma $SO(3,1)$ [18], pero para poder escribir las ecuaciones de Einstein en la forma (2.7), la norma se fija parcialmente como la norma de Lorentz, dejando sólo una libertad de norma remanente que equivale a $U(1)$. Así que en este sentido, la teoría linealizada de la gravedad se vuelve una teoría de norma $U(1)$, es decir que las ecuaciones de Einstein en el límite lineal son invariantes ante una transformación de norma $U(1)$ al igual que el caso electromagnético.

Para poder escribir la teoría linealizada de la gravedad en términos de haces fibrados, debemos de arreglar un par de cosas. Primero debemos de multiplicar el potencial vectorial (2.8) por un factor i , dado que el álgebra de Lie $u(1)$ es \mathbb{R} . También necesitamos elegir una representación de $U(1)$, que estará dada por $e^{\frac{iMs}{\hbar}}$, con s la única coordenada del grupo, y por supuesto, para que está sea una representación, el número $\frac{M}{\hbar}$, que aquí se considera sólo un parámetro, debe de ser un entero, que fijaremos a la unidad para el

resto del presente análisis. En este contexto, una transformación de norma γ :espacio-tiempo \rightarrow U(1), actúa sobre el potencial (2.8) de acuerdo a

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \gamma(\partial_\mu \gamma^{-1}). \quad (2.11)$$

Ahora bien, dada la equivalencia de las ecuaciones (2.7) con las ecuaciones de Maxwell, cualquier solución en la teoría electromagnética, será una solución a estas ecuaciones también. En particular podemos tomar el potencial en coordenadas esféricas

$$\mathbf{A} = \left(\frac{i}{4}\right)(4\varphi dt + \chi_\varphi d\phi), \text{ con } \chi_\varphi = 2g(-1 - \cos\theta) \quad (2.12)$$

que en tanto φ no dependa del tiempo, representa, en la teoría electromagnética, un monopolo magnético superpuesto a una fuente de campo eléctrico $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. La interpretación de esta solución en el caso de la teoría linealizada de la gravedad será dada más adelante, por lo pronto basta con decir que para mantener el análisis dentro del límite lineal, basta con que φ y g sean muy pequeños comparados con la unidad, siendo estos mismos los parámetros de la expansión. A partir de este potencial, vemos que el elemento de línea

$$ds^2 = -(1 - 2\varphi)dt^2 + (1 + 2\varphi)dr^2 + r^2(1 + 2\varphi)d\theta^2 + r^2\sin^2\theta(1 + 2\varphi)d\phi^2 + 4g(-1 - \cos\theta)dtd\phi \quad (2.13)$$

es solución a las ecuaciones de Einstein linealizadas con $T_{\mu\nu} = 0$.

El argumento de cuantización es una copia idéntica al de la sección anterior. Notamos que el potencial (2.12) es divergente en $\theta = \pi$, dado que en ese punto la uno forma $d\phi$ se hace infinita. Arreglamos la divergencia en ese punto por medio de una transformación de norma (2.11) tomando γ dado por

$$\gamma = e^{is\phi}. \quad (2.14)$$

El potencial resultante es

$$\mathbf{A} = \left(\frac{i}{4}\varphi\right)dt + \frac{ig}{2}(1 - \cos\theta)d\phi, \quad (2.15)$$

que está bien definido en $\theta = \pi$, pero es divergente en $\theta = 0$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por medio de los dos potenciales (2.12) y (2.15) podemos cubrir todo el espacio-tiempo² \mathbb{R}^4 —Línea de mundo del origen, con una conexión bien definida, usando la primera para todo punto menos el semieje z_- y el segundo para todo punto menos el semieje z_+ . La función de transición en este caso está dada por $\gamma_{+\rightarrow-} = e^{ig\phi}$, que para ser univaluada en ϕ requiere que g sea un entero. Con lo cual llegamos a la condición de cuantización

$$g = n \in \mathbb{Z}. \quad (2.16)$$

Como vemos, el argumento de cuantización se puede aplicar al caso linealizado de la gravedad casi sin diferencia, pero ahora corresponde analizar qué carácter físico tiene desde el punto de vista gravitacional el factor g que aparece en la componente $dt d\phi$ del elemento de línea. Para ésto podemos calcular los momentos multipolares gravitacionales[34] del elemento de línea (2.6). Al hacer esto encontramos que el multipolo gravitomagnético de orden m es proporcional a

$$\frac{g^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (2.17)$$

Dado que para mantenernos dentro del límite lineal, solo debemos de considerar el término lineal en g , vemos que todo polo de orden mayor a cero debe de ser despreciado, así que la interpretación correcta del parámetro g es como la intensidad del monopolio gravitomagnético. Por otra parte, los momentos multipolares asociados con la masa resultan estar dados mediante derivadas de φ y χ_ϕ con respecto a la coordenada radial r . Una vez más, debido a que $\varphi, \chi_\phi \ll 1$ en el límite lineal, el único término que sobrevive corresponde al primer término en el desarrollo del potencial φ , o sea el monopolio de masa.

Analicemos ahora el resultado obtenido. La condición de cuantización (2.16) muestra que g puede tomar solamente valores discretos, independientemente del valor de φ . Esto se debe a que en el límite Newtoniano estacionario en vacío que estamos analizando, las componentes de la métrica (2.6) están desacopladas, es decir, satisfacen independientemente las ecuaciones $\nabla^2\varphi = 0$ y $\nabla^2\chi_i = 0$. Esto nos ha permitido escoger el potencial (2.12) de forma tal que la condición de cuantización se aplica solamente sobre χ_i . Sin embargo, en la interpretación del parámetro hemos aplicado

²La línea de mundo del origen la hemos quitado del espacio-tiempo ya que es ahí donde se encuentra la fuente del campo $F = dA$, y por lo tanto F es singular a lo largo de esta línea, haciendo necesario removerla del espacio-tiempo.

el método de momentos multipolares según el cual, el monopolo gravitomagnético es proporcional a g . Para hallar el factor de proporcionalidad es necesario dar una solución particular para el potencial Newtoniano φ . Si tomamos $\varphi = \frac{m}{r}$, donde m es el monopolo de masa, entonces el monopolo gravitomagnético resulta ser igual a mg . Esto significa que g representa el monopolo gravitomagnético por unidad de masa. La condición de cuantización (2.16) implica entonces que el monopolo gravitomagnético específico es una cantidad que puede tomar sólo valores discretos.

2.3.2. Energía-C

Como un segundo ejemplo de cuantización topológica intrínseca, aplicaremos el procedimiento a la familia de métricas con simetría cilíndrica descritas por el elemento de línea [35]

$$ds^2 = e^{2(\varphi-\psi)}(-dt^2 + d\rho^2) + e^{2\psi}dz^2 + \rho^2 e^{-2\psi}d\phi^2, \quad (2.18)$$

donde se han usado coordenadas canónicas de Weyl y tanto ψ como φ son funciones de ρ y t únicamente. Este elemento de línea es conocido como métrica de Einstein-Rosen.

A partir de esta métrica podemos obtener los símbolos de Christoffel $\Gamma_{\beta\mu}^\alpha$. Para obtener a partir de éstos la conexión de espín $\omega_{b\mu}^a$ necesitamos hacer la transformación

$$\omega_{b\mu}^a = e_\alpha^a \Gamma_{\beta\mu}^\alpha (e^{-1})_b^\beta + e_\beta^a \partial_\mu (e^{-1})_b^\beta, \quad (2.19)$$

donde e_α^a son las componentes de las uno-formas semiortonormales e^a dadas por $e^a = e_\alpha^a dx^\alpha$, que se describen, junto con la métrica local y la conotación de sus índices, en el apéndice A. Encontramos e_α^a para la métrica (2.18). En este caso las tétradas son las cuatro uno-formas

$$e^0 = e_\alpha^0 dx^\alpha = e^{(\varphi-\psi)} dt, \quad (2.20)$$

$$e^1 = e_\alpha^1 dx^\alpha = e^{(\varphi-\psi)} d\rho, \quad (2.21)$$

$$e^2 = e_\alpha^2 dx^\alpha = e^\psi dz, \quad (2.22)$$

$$e^3 = e_\alpha^3 dx^\alpha = \rho e^{-\psi} d\phi, \quad (2.23)$$

así que e_α^a está dada por

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$e_{\alpha}^a = \begin{pmatrix} e^{(\varphi-\psi)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{(\varphi-\psi)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\psi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho e^{-\psi} \end{pmatrix}. \quad (2.24)$$

Una vez obtenida e_{α}^a continuemos con el análisis usando (2.23) para expresar a $d\phi$ en términos de las tétradas, con lo que obtenemos $d\phi = (e^{\psi}/\rho)e^3$, así que $d\phi$ es divergente en $\rho = 0$. Ahora necesitamos analizar el comportamiento de $\omega_{b\mu}^a$ en este valor de ρ .

La conexión de espín es la uno-forma de componentes endomórficos dada por

$$\omega = \omega_{b_t}^a e_a \otimes e^b dt + \omega_{b_\rho}^a e_a \otimes e^b d\rho + \omega_{b_z}^a e_a \otimes e^b dz + \omega_{b_\phi}^a e_a \otimes e^b d\phi, \quad (2.25)$$

así que para que ésta sea regular es necesario que todas las entradas de todos los componentes sean regulares y aún más, las entradas de la componente $\omega_{b_\phi}^a$ deben eliminar la divergencia de $d\phi$.

Después de hacer los cálculos resulta que en efecto todas las entradas de todos los componentes son finitos en $\rho = 0$, pero $\omega_{b_\phi}^a$ está dado por

$$\omega_{b_\phi}^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \rho e^{-\varphi} \dot{\psi} \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\varphi}(-1 + \rho\psi') \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho e^{-\varphi} \dot{\psi} & -e^{-\varphi}(-1 + \rho\psi') & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

donde $\dot{\psi} = \frac{\partial\psi}{\partial t}$ y $\psi' = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}$

Si suponemos que $\dot{\psi}$ no diverge cuando $\rho \rightarrow 0$, tenemos que para $\rho = 0$

$$\omega_{b_\phi}^a|_{\rho=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-\varphi}|_{\rho=0} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\varphi}|_{\rho=0} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Por lo que en general la conexión será divergente en $\rho = 0$ en consecuencia de la divergencia de $d\phi$.

Está es precisamente la divergencia que deseáramos eliminar por medio de una transformación de norma, que en este caso, dado que el grupo de norma es $SO(3,1)$ actuará sobre $\omega_{b\mu}^a$ como

$$\omega_{b\mu}^a \rightarrow \omega_{b\mu}^a = \gamma_c^a \omega_{d\mu}^c (\gamma^{-1})_b^d + \gamma_c^a \partial_\mu (\gamma^{-1})_b^c, \quad (2.28)$$

con $\gamma_\rho^0 : M \rightarrow SO(3, 1)$, siendo M el espacio-tiempo.

Dado que φ sólo es función de ρ y de t , vemos que independientemente de su forma explícita y su valor en $\rho = 0$, podemos realizar una transformación de norma de acuerdo a (2.28) usando

$$\gamma = e^{e^{-\varphi} \rho = 0} S, \quad (2.29)$$

con S el elemento del álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3,1)$ dado por

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

y con ello eliminar los componentes de ω_ρ^0 en $\rho = 0$.

Vemos ahora que S es precisamente uno de los generadores del grupo $SO(3,1)$, así que en particular la transformación de norma γ dada por (2.29) será univaluada en ϕ si y sólo si $e^{-\varphi} \rho = 0$ es un número entero independiente³ de t .

A continuación listaremos todos los elementos distintos de cero para cada componente de la conexión ω' que resulta de haber realizado la transformación de norma (2.29)⁴

$$\begin{aligned} \omega_{1t}^0 &= \cos(e^{-\varphi_0} \phi) (\psi' - \varphi'); & \omega_{3t}^0 &= \sin(e^{-\varphi_0} \phi) (\psi' - \varphi') \\ \omega_{1\rho}^0 &= \cos(e^{-\varphi_0} \phi) (\dot{\psi} - \dot{\phi}); & \omega_{3\rho}^0 &= \sin(e^{-\varphi_0} \phi) (\dot{\psi} - \dot{\phi}); & \omega_{2z}^0 &= -e^{2\psi - \varphi} \dot{\psi} \\ \omega_{2z}^1 &= -e^{2\psi - \varphi} \psi' \cos(e^{-\varphi_0} \phi); & \omega_{3z}^2 &= -e^{2\psi - \varphi} \psi' \sin(e^{-\varphi_0} \phi) \\ \omega_{1\phi}^0 &= -e^{-\varphi} \dot{\psi} \sin(e^{-\varphi_0} \phi); & \omega_{3\phi}^0 &= e^{-\varphi} \dot{\psi} \cos(e^{-\varphi_0} \phi) \\ \omega_{3\phi}^1 &= e^{-\varphi} (-1 + e^{-\varphi_0} e^\varphi + \rho \psi'), \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde φ_0 se refiere a $\varphi|_{\rho=0}$.

³El pedir la independencia en t es fundamental, y podría parecer demasiado restrictiva, pero se pueden encontrar soluciones a las ecuaciones de Einstein que cumplan tal requisito, por ejemplo el caso en que φ es independiente de t en todo punto.

⁴Las componentes endomórficas de la conexión se pueden reconstruir a partir de sus elementos comparando por ejemplo con la componente de ω dada en (2.26), para detalles ver el apéndice A.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Así vemos que con esta transformación hemos logrado que las entradas $\omega_{b\phi}^a$ se anulen en $\rho = 0$, pero para que la conexión ω' esté bien definida es necesario que las entradas de sus componentes no dependan de ϕ en $\rho = 0$, por lo que nos limitaremos a las soluciones a las ecuaciones de Einstein para la métrica (2.18) que cumplan con $(\psi' - \phi')|_{\rho=0} = (\psi - \phi)|_{\rho=0} = \psi'|_{\rho=0} = 0$. Por otro lado, para que ω' sea univaluada en ϕ , es necesario que $e^{-\varphi}|_{\rho=0}$ sea un número entero independiente de t , con lo que podemos establecer la condición de cuantización

$$e^{-\varphi}|_{\rho=0} = n. \quad (2.32)$$

Al hacer lo anterior hemos encontrado una conexión bien definida globalmente, por lo que no es necesaria ninguna función de transición, ya que con una sola conexión cubrimos todo el espacio-tiempo. Por esto la transformación de norma que nos llevó a tal conexión es irrelevante y no implica ninguna condición de cuantización. Sin embargo hay que notar que por ser $SO(3,1)$ un grupo no abeliano, la conexión ω' heredó ciertas características de la transformación de norma, permitiendo así establecer la condición de cuantización (2.32).

Para interpretar físicamente la condición de cuantización que hemos obtenido, haremos referencia al trabajo de Thorne[35] donde introduce el concepto de "energía cilíndrica", o energía-C, que se refiere a la energía contenida en una configuración gravitacional que pueda ser descrita por un elemento de línea de la forma (2.18).

En su artículo Thorne introduce también la cantidad E , que representa la energía-C por unidad de longitud a lo largo del eje z a un tiempo dado. Lo que encuentra es que $E = \varphi$, donde φ es precisamente la función que aparece en el elemento de línea y en nuestra condición de cuantización. Por lo que vemos que (2.32) se puede interpretar como la cuantización de E dada por

$$E = -\log n. \quad (2.33)$$

La condición de cuantización (2.33) indica que E es negativa, pero en su artículo original Thorne argumenta que éste podría ser el caso para algunos sistemas físicos, haciendo a la energía-C un candidato poco probable para representar a una energía clásica. Sin embargo también hace notar que aún para estos casos, la energía-C sigue siendo una herramienta útil para el análisis dinámico del sistema. Menciona que en su tesis doctoral considera otra definición de energía-C dada por $E = 1 - e^{-2\varphi}$, en cuyos términos la condición de cuantización (2.32) se reescribe como

$$E = 1 - n^2. \quad (2.34)$$

Independientemente de la definición que se tome debemos de notar que la cantidad E es solamente una densidad, por lo que la cuantización de la energía total se conseguirá hasta que se especifiquen las dimensiones del sistema.

Thorne introdujo muchos sistemas diferentes e interesantes que presentan este tipo de simetría, y argumenta que la energía-C sí se comporta propiamente como energía en el sentido de que se reduce a la energía Newtoniana o a la masa propia en las adecuadas situaciones límite.

Uno de los sistemas que menciona es un cilindro estático, para el cual Thorne encuentra explícitamente, que su masa por unidad de longitud es precisamente la densidad de energía-C que se obtiene a partir de la métrica que induce el cilindro mismo. Después propone que es posible doblar el cilindro hasta formar un toro, y que el análisis no cambiará en tanto el radio del cilindro sea mucho más pequeño que el de la línea guía del toro.

Este caso es interesante para nosotros, puesto que por ser estático, el radio de la línea guía está fijo, con lo que nuestro resultado (2.33) implica la cuantización de la energía-C total, que es equivalente a la cuantización de la masa del toro. También hay que notar que en este ejemplo, las funciones métricas no dependen de z , por lo que en particular $\varphi|_{\rho=0}$ no dependerá de z .

Si pensamos en un toro del tamaño aproximado de una partícula elemental en el contexto de la teoría de geones, nuestro resultado es equivalente a la cuantización de la masa de la partícula descrita por el sistema.

Tratando de ir más lejos con la analogía anterior, vale la pena mencionar que en electro-vacío existe la posibilidad de obtener soluciones del tipo descrito, sin necesidad del toro masivo[35]. El problema para estas soluciones es que no permiten la existencia de un campo eléctrico radial, que sería necesario para la descripción de una partícula cargada. Esta fue la principal motivación para estudiar una familia de métricas más general.

Un elemento de línea que permite la existencia de un campo eléctrico radial está dado por

$$ds^2 = -e^{2(\varphi-\psi)}(dt^2 - d\rho^2) + e^{2\psi}dz^2 + \alpha^2 e^{-2\psi}d\phi^2, \quad (2.35)$$

con ψ , φ y α funciones solo del ρ .

Las soluciones a las ecuaciones de Einstein-Maxwell son

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\psi = \frac{1}{2} \log(\alpha) - \frac{d}{2} \int \frac{1}{\alpha} d\rho + C_1, \quad (2.36)$$

$$\varphi = c \int \frac{1}{\alpha} d\rho + C_2, \quad (2.37)$$

$$E_\rho = b \frac{e^{-2(\psi-\varphi)}}{\alpha}, \quad (2.38)$$

con α solución a la ecuación diferencial

$$(\alpha' - d)^2 - c\alpha' + \frac{1}{2}\alpha\alpha'' = 0, \quad (2.39)$$

donde (b, c, d, C_1, C_2) son constantes, α' denota la derivada de α respecto a ρ y E_ρ es la componente del campo eléctrico en la dirección ρ .

Si elegimos la tétrada dada por

$$e^0 = e^{(\varphi-\psi)} dt, \quad e^1 = e^{(\varphi-\psi)} d\rho, \quad e^2 = e^\psi dz, \quad e^3 = \alpha e^{-\psi} d\phi, \quad (2.40)$$

los únicos elementos de la conexión de espín distintos de cero son

$$\omega_{1t}^0 = \psi' - \varphi', \quad \omega_{2z}^1 = -e^{(2\psi-\varphi)} \psi', \quad \omega_{3\phi}^1 = e^{-\varphi} (\alpha\psi' - \alpha'). \quad (2.41)$$

Podemos expresar $d\phi$ en términos del elemento de la tétrada e^3 como $d\phi = (e^\psi/\alpha)e^3$, con lo que vemos que $d\phi$ es singular en $\alpha = 0$, que es donde haremos el análisis de la conexión.

A partir de (2.37) vemos que para que φ' no diverja en $\alpha = 0$, es necesario que c sea cero, por lo que φ será una constante. De la ecuación diferencial para α (2.39) vemos que una vez fijando $c = 0$

$$(\alpha' - d)^2 = -\frac{1}{2}\alpha\alpha'' \Rightarrow \alpha'|_{\alpha=0} = d. \quad (2.42)$$

De (2.36) obtenemos

$$\psi' = \frac{1}{2\alpha} (\alpha' - d). \quad (2.43)$$

Usando (2.42) en (2.43) vemos que $\psi'|_{\alpha=0} = 0$, y con estos resultados podemos establecer

$$\omega_{b\phi}^{\alpha}|_{\alpha=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-\varphi}|_{\alpha=0}d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\varphi}|_{\alpha=0}d & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Vemos que la conexión ω es singular en $\alpha = 0$ ya que $d\phi$ lo es y la componente $\omega_{b\phi}^{\alpha}|_{\alpha=0}$ es distinta de cero. Esta singularidad se puede remover por medio de la transformación de norma

$$\gamma = e^{e^{-\varphi_0}d\phi S}, \quad (2.45)$$

con S dada por (2.30).

Las componentes distintas de cero de la conexión ω' que resulta de la transformación de norma (2.45) son

$$\begin{aligned} \omega_{1t}^0 &= \cos(de^{-\varphi_0}\phi)(\psi' - \varphi'); \quad \omega_{3t}^0 = \sin(de^{-\varphi_0}\phi)(\psi' - \varphi') \\ \omega_{2x}^1 &= -e^{2\psi-\varphi}\psi' \cos(de^{-\varphi_0}\phi); \quad \omega_{3z}^2 = -e^{2\psi-\varphi}\psi' \sin(de^{-\varphi_0}\phi) \\ \omega_{3\phi}^1 &= e^{-\varphi}(-\alpha' + de^{-\varphi_0}e^{\varphi} + \alpha\psi'), \end{aligned} \quad (2.46)$$

con $\varphi_0 = \varphi|_{\alpha=0}$.

Dado que $\psi'|_{\alpha=0} = \varphi' = 0$ y usando el resultado (2.42) vemos que la conexión ω' está bien definida en $\alpha = 0$, pero para ser univaluada cuando $\alpha \neq 0$, es necesario que el número $e^{-\varphi}|_{\alpha=0}d$ sea un entero, obteniendo así la condición de cuantización

$$e^{-\varphi}|_{\alpha=0}d = n. \quad (2.47)$$

donde debemos de recordar que $\varphi|_{\alpha=0}$ es una constante y que como de costumbre $n \in \mathbb{Z}$.

Hay que destacar que la ecuación diferencial (2.39) tiene solución cuando se fija $c = 0$ en tanto $d > 0$, pero para nuestros propósitos no fue necesario encontrarla, dado que para obtener la condición de cuantización (2.47) sólo necesitamos saber el valor que toma α' cuando $\alpha = 0$.

Para la métrica (2.35), la definición de la energía- C que Thorne menciona que está en su tesis es $E = 1 - (\alpha'^2)e^{-2\varphi}$, en términos de la cual la condición de cuantización (2.47) toma la forma

$$E = 1 - n^2. \quad (2.48)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Así que la cantidad que se ha cuantizado con este procedimiento, es precisamente la energía-C de este sistema más general. Pensando en términos del toro que se discutió con anterioridad, esta solución permitiría la descripción de una partícula cargada, cuyo campo eléctrico está dado por (2.38) y su energía-C total está cuantizada por (2.48).

2.4. Cuantización topológica inducida

La presente sección la dedicaremos a dar ejemplos de lo que hemos llamado cuantización topológica inducida. En este caso la cuantización de los parámetros de la métrica se presenta al requerir que alguna conexión de norma, extrínseca a la geometría, esté bien definida sobre el espacio-tiempo. Los sistemas que analizaremos deben ser soluciones a las ecuaciones de Einstein con el tensor de energía-momento generado por el campo de norma extrínseco, que a su vez debe de cumplir con las ecuaciones de norma propias a su descripción. Por ejemplo, al considerar al electromagnetismo como una teoría de norma sobre un espacio curvo, las ecuaciones que debemos de resolver son las de Einstein-Maxwell.

2.4.1. Reissner-Nordstrom

Como primer ejemplo dentro de la teoría de Einstein-Maxwell, consideremos la solución de Reissner-Nordstrom dada por el elemento de línea

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2(\theta)d\phi^2, \quad (2.49)$$

y el potencial vectorial electromagnético

$$A = \frac{-e}{r}dt. \quad (2.50)$$

La razón para considerar esta configuración es que tiene como elemento clave al potencial vectorial (2.50), que es una conexión para un haz fibrado $U(1)$ con el espacio-tiempo como base.

Iniciaremos el procedimiento intentando detectar los lugares donde la conexión (2.50) es singular, para lo que la escribimos en términos de una base semiortonormal de uno-formas,

$$A = \frac{-e}{r\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{1/2}}e^0, \quad (2.51)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde e^0 es uno de los elementos de la tétrada, cuya relación con dt esta dada por $e^0 = (1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2})^{1/2} dt$, expresión donde es fácil de ver que e^0 está propiamente normalizado.

Al escribir la conexión A en la forma (2.51) se hace evidente que es singular en los dos lugares geométricos dados por las esferas centradas en el origen y de radios $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - e^2}$. Claramente esta conexión es singular también en el origen, pero en ese punto existe una singularidad de curvatura, por lo que esta no se considerará parte del espacio-tiempo.

Lo siguiente que debemos de hacer es realizar una transformación de norma para obtener una conexión que sea regular en r_{\pm} . La transformación de norma dada por $\gamma_1 = e^{-ite/r_+}$ pasa de la conexión (2.50) (multiplicada por un factor i por las razones expuestas en la sección (2.3.1)) a

$$A' = i\left(\frac{-e}{r} + \frac{e}{r_+}\right)dt, \quad (2.52)$$

o en términos de e^0

$$A' = i\left(\frac{-e}{r} + \frac{e}{r_+}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{1/2}} e^0. \quad (2.53)$$

No es difícil ver que A' es regular en todo punto del espacio-tiempo, excepto en r_- , así que hemos obtenido una conexión bien definida en un lugar donde la conexión original no lo estaba. Ahora debemos de realizar otra transformación de norma para obtener una conexión que sea regular en r_- , para lo que usamos $\gamma_2 = e^{-ite/r_-}$ y lo aplicamos sobre A , resultando

$$A'' = i\left(\frac{-e}{r} + \frac{e}{r_-}\right)dt, \quad (2.54)$$

o una vez más en términos de e^0

$$A'' = i\left(\frac{-e}{r} + \frac{e}{r_-}\right) \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{1/2}} e^0. \quad (2.55)$$

Ahora vemos que A'' es regular en todo punto menos en r_+ , consecuentemente podemos cubrir la variedad que representa al espacio-tiempo por medio de A' y A'' , y no necesitamos de la A original, así que lo único que falta es encontrar la transformación de norma que relaciona a A' con A'' . Desde luego ésta se encuentra haciendo la composición del inverso de γ_1 con γ_2 para transformar A' en A'' o el inverso para pasar de A'' a A' .

Expresando todo en términos de la notación usada al definir cuantización topológica en la sección (2.1), podemos renombrar A' como A_1 , A'' como A_2

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

y definir U_1 como la parte del espacio-tiempo descrita por $\infty > r > r_-$ y U_2 como la parte con $r_+ > r > 0$. Es fácil ver que U_1 y U_2 son una cobertura del espacio-tiempo. La función de transición en la intersección $U_1 \cap U_2$ esta dada por

$$\gamma_{1 \rightarrow 2} = e^{it\left(\frac{1}{M+\sqrt{M^2-e^2}} - \frac{1}{M-\sqrt{M^2-e^2}}\right)}. \quad (2.56)$$

Ahora que hemos completado el procedimiento, analizamos la transición de fase, y vemos que está bien definida en la intersección $U_1 \cap U_2$ independientemente de los valores que tomen M y e , así que no obtenemos condiciones de cuantización. Sin embargo, no hemos considerado el hecho de que la intersección $U_1 \cap U_2$ corresponde exactamente a la región dentro del horizonte donde las coordenadas t y r pierden su sentido temporal y espacial. De hecho dentro del horizonte t se convierte en una coordenada espacial y r en temporal. Una manera de hacer frente a este problema es reinterpretando al espacio-tiempo dentro del horizonte, para lo cual intercambiamos t por r [36, 37] y tomamos

$$\begin{aligned} t &= M - \sqrt{(M^2 - e^2) \cos^2(e^{-\tau})} & \text{para} & \quad -\ln(\pi) \leq \tau \leq -\ln(\pi/2), \\ t &= M + \sqrt{(M^2 - e^2) \cos^2(e^{-\tau})} & \text{para} & \quad -\ln(\pi/2) \leq \tau \leq \infty \end{aligned}$$

y

$$r = \delta, \quad (2.57)$$

con lo que el elemento de línea (2.49) se transforma en

$$ds^2 = e^{-\lambda/2} e^{\tau/2} (-e^{-2\tau} d\tau^2 + d\theta^2) + L \text{sen}(e^{-\tau}) (e^P d\delta^2 + e^{-P} \text{sen}^2(\theta) d\phi^2), \quad (2.58)$$

con $L^2 = e^2 - M^2$, $e^P = \frac{1}{2} \sqrt{-(1 - \frac{2M}{t} + \frac{e^2}{t^2})}$ y $e^{-\lambda/2} = t^2 e^{-\tau/2}$. En todas estas expresiones t debe de ser entendido como una función biyectiva y creciente de la nueva coordenada τ , como puede ser visto a partir de su definición (2.57).

El elemento de línea (2.58) con $0 \leq \delta \leq 2\pi$ puede ser interpretado⁵ como un modelo cosmológico de Gowdy[38] del tipo $S^1 \times S^2$, donde la compactificación de la coordenada t está implícita por su asociación con δ . Esta

⁵Esta interpretación es justificada posteriormente por el hecho de que al repetir el cálculo con invariantes topológicos se recupera el mismo resultado.

métrica es una solución a las ecuaciones de Einstein-Maxwell con el potencial electromagnético

$$A = A = \frac{-e}{t} d\delta, \quad (2.59)$$

o en términos de la uno-forma de la base semiortonormal $e^1 = (-1 + \frac{2M}{t} - \frac{e^2}{t^2})^{1/2} d\delta$,

$$A = \frac{-e}{t(-1 + \frac{2M}{t} - \frac{e^2}{t^2})^{1/2}} e^1. \quad (2.60)$$

Todo el análisis hecho para este potencial en el caso de Reissner-Nordstrom procede de igual para esta nueva solución, en tanto nos limitemos a la región entre los horizontes, que ahora están descritos por las hipersuperficies dadas por $\tau = -\log(\pi)$ y $\tau = \infty$. U_1 ahora es el espacio-tiempo descrito por τ, δ, θ y ϕ , con el lugar geométrico $\tau = -\ln(\pi)$ removido. Equivalentemente, para U_2 quitamos el lugar $\tau = \infty$.

Las conexiones (multiplicadas por un factor i por las razones expuestas en la sección (2.3.1)) son

$$A_1 = i\left(\frac{-e}{t} + \frac{e}{t_+}\right) \frac{1}{(-1 + \frac{2M}{t} - \frac{e^2}{t^2})^{1/2}} e^1, \quad (2.61)$$

$$A_2 = i\left(\frac{-e}{t} + \frac{e}{t_-}\right) \frac{1}{(-1 + \frac{2M}{t} - \frac{e^2}{t^2})^{1/2}} e^1, \quad (2.62)$$

con $t_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - e^2}$.

La función de transición (2.56) se escribe

$$\gamma_{1 \rightarrow 2} = e^{i\delta e(\frac{1}{t_+} - \frac{1}{t_-})} = e^{-i\delta 2\frac{\sqrt{M^2 - e^2}}{e}}. \quad (2.63)$$

En este nuevo contexto, vemos que debido a la periodicidad en δ , para que la función de transición $\gamma_{1 \rightarrow 2}$ sea univaluada en tal coordenada, la cantidad $\frac{2\sqrt{M^2 - e^2}}{e}$ debe ser un entero, lo que nos lleva a la condición

$$\frac{2\sqrt{M^2 - e^2}}{e} = n \Rightarrow M = |e\sqrt{\frac{n^2}{4} + 1}|, \quad (2.64)$$

con n un número entero, siendo justamente el tipo de relación con valores discretos al que hemos llamado condición de cuantización.

Debemos mencionar que la condición de cuantización (2.64) se pudo haber obtenido también a partir de invariantes topológicos. La forma de

Clern para esta conexión es $c_1 = \frac{e}{r^2} dt \wedge dr$, así que el invariante topológico esta dado por⁶

$$\int_{r_-}^{r_+} \int_0^{2\pi} -\frac{e}{r^2} dt \wedge dr = 4\pi e \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) = 4\pi \frac{2\sqrt{M^2 - e^2}}{e}, \quad (2.65)$$

que debe de ser un múltiplo entero de 4π , así que recuperamos la condición de cuantización (2.64). Esto justifica el método usado arriba para analizar la función de transición "dentro del horizonte" mediante el cambio de t por r . La manera de proceder usando invariantes topológicos no es siempre clara para otras situaciones, por ejemplo cuando se trabaja con variedades no compactas. A pesar de que la cuantización por medio de la definición correcta de la conexión puede ser más complicada en algunos casos, siempre es claro como llevarla a cabo.

La condición de cuantización (2.64) o (2.65) indica que cierta combinación de los parámetros M y e puede tomar solamente valores discretos. Para el agujero negro de Reissner-Nordstrom se puede calcular el área \mathcal{A} del horizonte que resulta ser [39]

$$\mathcal{A} = 4\pi[2M^2 - e^2 + 2M(M^2 - e^2)^{1/2}], \quad (2.66)$$

expresión que podemos reescribir en términos de la condición de cuantización (2.64) como

$$\mathcal{A} = 4\pi e^2 \left[\frac{n}{2} + \sqrt{1 + \frac{n^2}{4}} \right]^2. \quad (2.67)$$

De esta manera vemos que el área del horizonte está completamente determinada por el número entero n . Existen otros métodos mediante los cuales se ha llegado a expresiones cuantizadas para el area del horizonte. Por ejemplo, Bekenstein [40] llegan a la conclusión de que $\mathcal{A} = 4\pi(n + \frac{1}{2})$, ($n = 0, 1, \dots$), mientras que aplicando la teoría cuántica de lazos se obtiene $\mathcal{A} = 4\pi\sqrt{j(j+1)}$ [41]. La ecuación (2.67) puede ser considerada como una expresión más que refleja el carácter cuántico del área del horizonte.

Para el caso de Reissner-Nordstrom, pudimos haber usado una sola transformación de norma dada por $\gamma = e^{-ite/r}$, que hubiera resultado en la conexión

⁶Estamos usando las coordenadas viejas porque la expresión es más simple, y como esta forma diferencial va a ser integrada, lo único relevante serán los límites de integración, pero el resultado es independiente de las coordenadas que se elijan.

$$A''' = ite/r^2 dr, \quad (2.68)$$

o en términos de la uno-forma de la base semiortonormal $e^1 = (1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2})^{-1/2} dr$

$$A''' = it(e/r^2)(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2})^{1/2} e^1, \quad (2.69)$$

que está bien definida en todo el espacio-tiempo excepto por el problema de la coordenada t dentro del horizonte, con lo que hubiéramos llegado a la misma conclusión, es decir, que no habían condiciones de cuantización fuera del horizonte. Al intentar usar esta transformación de norma dentro del horizonte (modelo cosmológico de Gowdy) el problema es que la conexión resultante

$$A''' = i\delta(e/t^2)(-1 + \frac{2M}{t} + \frac{e^2}{t^2})^{1/2} e^0, \quad (2.70)$$

no es univaluada en la coordenada δ , haciéndola inaceptable, lo cual nos obligaría a recurrir al análisis que se hizo con anterioridad.

Nuestro resultado de cuantización (2.64) no es válido en el límite $e \rightarrow 0$. Esto desde luego ocurre por que la cuantización está siendo *inducida* por el campo de norma electromagnético (2.50), que para $e = 0$ desaparece y deja de inducir tal cuantización.

2.4.2. Kerr-Newman

Como otro ejemplo, podemos tomar la solución de Kerr-Newman, que está dada por el elemento de línea [29]

$$ds^2 = -(\frac{\Delta - a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma}) dt^2 - \frac{2a \text{sen}^2(\theta)(r^2 + a^2 - \Delta)}{\Sigma} dt d\phi + \quad (2.71)$$

$$[\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma}] \text{sen}^2(\theta) d\phi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2,$$

y el potencial electromagnético

$$A = -\frac{er}{\Sigma} (dt - a \text{sen}^2(\theta) d\phi), \quad (2.72)$$

donde

$$\begin{aligned} \Sigma &= r^2 + a^2 \cos^2(\theta), \\ \Delta &= r^2 + a^2 + e^2 - 2Mr. \end{aligned} \quad (2.73)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como primer paso, escribiremos la conexión en términos de la base semiortonormal

$$\begin{aligned}
 e^0 &= \sqrt{\frac{\Delta - a^2 \text{sen}^2 \theta}{\Sigma}} dt + \frac{a \text{sen}^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\sqrt{\Sigma(\Delta - a^2 \text{sen}^2 \theta)}} d\phi, \\
 e^1 &= \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}} dr, \\
 e^2 &= \sqrt{\Sigma} d\theta, \\
 e^3 &= \text{sen} \theta \sqrt{\frac{2\Delta\Sigma}{\Delta - a^2 \text{sen}^2 \theta}} d\phi,
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

con la que obtenemos

$$A = \frac{er}{[\Sigma(\Delta - a^2 \text{sen}^2 \theta)]^{1/2}} [-c^0 + \frac{a \text{sen} \theta}{\Delta^{1/2}} e^3], \tag{2.75}$$

En esta expresión es claro que la conexión diverge, aparte de en la singularidad física de anillo, en los cuatro lugares geométricos dados por $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - e^2 - a^2}$ y $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - e^2 - a^2 \cos^2(\theta)}$. Usando únicamente la transformación de norma $\gamma = e^{i\frac{er}{c^2 - 2Mr}}$ obtenemos la conexión (multiplicada por un factor i por las razones expuestas en la sección (2.3.1))

$$\begin{aligned}
 A' &= -i \left(\frac{er}{c^2 - 2Mr} + \frac{er}{\Sigma} \right) dt - \\
 &+ i \left(\frac{2emr}{(c^2 - 2Mr)^2} + \frac{et}{c^2 - 2Mr} \right) dr + i \frac{aer \text{sen}^2(\theta)}{\Sigma} d\phi,
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

o en términos de la base semiortonormal

$$\begin{aligned}
 A' &= i \frac{er(\Delta - a^2 \text{sen}^2 \theta)^{1/2}}{(-e^2 + 2Mr)\Sigma^{1/2}} e^0 - \\
 &+ i \frac{e^3 t \Delta^{1/2}}{(c^2 - 2Mr)^2 \Sigma^{1/2}} e^1,
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

que es regular en todo punto del espacio-tiempo, excepto en la hipersuperficie descrita por $r = \frac{e^2}{2M}$.

En este caso podemos cubrir el espacio-tiempo con tres conjuntos abiertos; U_1 siendo la región descrita por $\infty > r > \frac{e^2}{2M}$, U_2 la región entre los horizontes $r_+ > r > r_-$, y U_3 la región con $\frac{e^2}{2M} > r > 0$, excluyendo en ésta última la singularidad física de anillo en $r = 0$, $\theta = \pi/2$. Las conexiones A_1 y A_3 están dadas por (2.77), mientras que A_2 está dada por la conexión original (2.72). Las funciones de transición son

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\gamma_{1 \rightarrow 2} = e^{\frac{-i\tau r}{e^2 - 2Mr}} \text{ y } \gamma_{2 \rightarrow 3} = e^{\frac{i\tau r}{e^2 - 2Mr}}. \quad (2.78)$$

Como en el caso de Reissner-Nordstrom, vemos que la transformaciones de norma (2.78) están bien definidas independientemente de los valores de los parámetros de la métrica, por lo que no se obtienen condiciones de cuantización. Pero nuevamente tenemos el problema de que r no es una coordenada espacial en la región U_2 . Para arreglar este problema procedemos como en la sección anterior. Los detalles de las transformaciones correspondientes al caso $e = 0$ se pueden consultar en [36], las diferencias con el caso presente son mínimas.

El elemento clave es una vez más, el intercambio t por τ , y la identificación del nuevo τ con δ . Para reescribir A' notamos que la tetrada en estas coordenadas se obtiene de la tetrada (2.74) intercambiando t por τ y para que e^0 y e^1 conserven su carácter temporal y espacial respectivamente intercambiamos $e^0 \leftrightarrow e^1$. De nuevo entendiendo a t como una función de τ , podemos ver que la conexión A' ahora dada por

$$A' = i \frac{e^3 \delta \sqrt{-(a^2 + e^2 - 2Mt + t^2)}}{(e^2 - 2Mt)^2 \sqrt{t^2 + a^2 \cos^2(\theta)}} e^0 + i \frac{e \delta \sqrt{-(a^2 \cos^2(\theta) + e^2 - 2Mt + t^2)}}{(-e^2 + 2Mt) \sqrt{t^2 + a^2 \cos^2(\theta)}} e^1, \quad (2.79)$$

no es aceptable, dado que no es periódica en δ , por lo que no podemos usarla⁷.

Notemos sin embargo que la conexión (2.72) en estas nuevas coordenadas se escribe como

$$A = -\frac{e t}{\Sigma} (d\delta - a \sin^2(\theta) d\phi), \quad (2.80)$$

y si le aplicamos la transformación dada por $\gamma_{\pm} = e^{-\frac{i\delta e t_{\pm}}{a^2 + t_{\pm}^2}}$, con $t_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - e^2 - a^2}$, y pasamos a una base semiortogonal, obtenemos la conexión (multiplicada por un factor i por las razones expuestas en la sección (2.3.1))

⁷ Los cambios de signo se deben al cambio de signo de las cantidades dentro de las raíces cuadradas.

$$A'' = i \frac{\sqrt{(t^2 + a^2 \cos^2(\theta))} \left(\frac{et}{t^2 + a^2 \cos^2(\theta)} - \frac{et_+}{a^2 + t_+^2} \right)}{\sqrt{-(a^2 \cos^2(\theta) + e^2 - 2Mt + t^2)}} e^1 \quad (2.81)$$

$$+ i \left(\frac{ae^3(t_+ - t) \operatorname{sen}(\theta)}{(e^2 - 2Mt_+) \sqrt{(t^2 + a^2 \cos^2(\theta))} (a^2 + e^2 - 2Mt + t^2) (a^2 \cos^2(\theta) + e^2 - 2Mt + t^2)} \right) e^3.$$

Esta conexión está bien definida en todo punto excepto por el lugar geométrico dado por $t(\tau) = t_-$, que es uno de los extremos del modelo cosmológico. Usando ahora la transformación $\gamma_4 = e^{-\frac{t_+ e t}{a^2 + t_+^2}}$ aplicada sobre (2.80) y transformando a tétradas, obtenemos

$$A''' = i \frac{\sqrt{(t^2 + a^2 \cos^2(\theta))} \left(\frac{et}{t^2 + a^2 \cos^2(\theta)} - \frac{et_-}{a^2 + t_-^2} \right)}{\sqrt{-(a^2 \cos^2(\theta) + e^2 - 2Mt + t^2)}} e^1 \quad (2.82)$$

$$+ i \left(\frac{ae^3(t_- - t) \operatorname{sen}(\theta)}{(e^2 - 2Mt_-) \sqrt{(t^2 + a^2 \cos^2(\theta))} (a^2 + e^2 - 2Mt + t^2) (a^2 \cos^2(\theta) + e^2 - 2Mt + t^2)} \right) e^3.$$

conexión que está bien definida en todo lugar menos en $t(\tau) = t_+$, que es otro de los extremos del modelo. Ahora vemos que podemos cubrir todo el espacio-tiempo con U_1 obtenido por medio de remover el lugar $t(\tau) = t_-$ y U_2 haciendo lo equivalente para $t(\tau) = t_+$. Las conexiones A_1 y A_2 son A'' y A''' respectivamente, y la función de transición entre los conjuntos está dada por

$$\gamma_{1 \rightarrow 2} = e^{i\delta \left(\frac{et_+}{a^2 + t_+^2} - \frac{et_-}{a^2 + t_-^2} \right)} \quad (2.83)$$

$$= e^{-i\delta \frac{2e^3 \sqrt{M^2 - e^2 - a^2}}{e^4 + 4a^2 M^2}}.$$

Para que esta función de transición sea univaluada en δ es necesario que el número $\frac{2e^3 \sqrt{M^2 - e^2 - a^2}}{e^4 + 4a^2 M^2}$ sea un entero, lo que nos lleva a la condición de cuantización

$$\frac{2e^3 \sqrt{M^2 - e^2 - a^2}}{e^4 + 4a^2 M^2} = n, \quad (2.84)$$

con n un entero.

Esta condición relaciona todos los parámetros que determinan el agujero negro de Kerr-Newman, y en el caso $a = 0$ coincide con el agujero negro de Reissner-Nordstrom. El límite $e = 0$ no está permitido debido nuevamente

a que este parámetro determina la conexión que nos lleva a la cuantización inducida.

Es interesante mencionar que en el caso de un agujero negro extremo ($M^2 = e^2 + a^2$), el único valor permitido para π es cero, obteniendo así un caso de cuantización degenerada, es decir, ausencia de cuantización.

Aunque sería posible utilizar la condición de cuantización (2.84) para expresar el área del horizonte en términos del parámetro π y de los parámetros M , e y a , esta expresión tiene una forma más complicada que en el caso de Reissner-Nordstrom (1.9) y no es de gran ayuda para interpretar el resultado.

Nuevamente en este caso, la simetría en la variable δ fue la causa de la condición de cuantización. Al tratar de obtener para esta configuración condiciones de cuantización a partir de los invariantes topológico, nos encontramos con que las integrales que hay que resolver no son sencillas, sin embargo, el resultado que se obtuviera de ese procedimiento no podría diferir del que hemos obtenido analizando la conexión.

Antes de pasar al siguiente ejemplo, hay algo que querríamos discutir. ¿Qué hubiera pasado si el factor en alguna de las funciones de transición hubiera dependido de alguna de las coordenadas? ¿Nos llevaría ésto a condiciones de cuantización dependientes de las coordenadas?

Desde luego esto no es aceptable, y de hecho no puede ser el caso.

Supongamos que la coordenada x^1 es periódica, y que los parámetros en alguna función de transición γ no se pueden arreglar para que la periodicidad de ésta sea garantizada independientemente del valor de alguna otra coordenada x^2 . Esto implicaría que la función $\partial_{x^2}\gamma$ no es periódica en x^1 . Partiendo de que la componente A_{x^2} de la conexión original era periódica en x^1 , vemos que la nueva componente $A'_{x^2} = A_{x^2} + \gamma\partial_{x^2}\gamma^{-1}$ no lo puede ser a causa del segundo término. Con lo que vemos que la conexión que resultaría de la aplicación de una transformación de norma de este tipo, no sería aceptable por no cumplir con las simetrías del sistema. De tal manera que no es factible que aparezcan éste tipo de transformaciones en nuestro análisis.

2.4.3. Modelo sigma $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$

Otra manera de conferir una conexión de norma a un espacio-tiempo curvo es por medio de modelos sigma no lineales, para todos los detalles del modelo sigma, véase el apéndice C. En particular, con el modelo sigma no lineal $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ se puede conferir una conexión de norma $SO(2)$ a los espacio-tiempos axisimétricos estacionarios[42], cuyo elemento de línea en coordenadas canónicas de Weyl está dado por

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$ds^2 = e^{2\psi}(dt - \omega d\phi)^2 - e^{(2\gamma-2\psi)}(d\rho^2 + dz^2) - e^{-2\psi}\rho^2 d\phi^2, \quad (2.85)$$

donde ψ , γ y ω son funciones de ρ y z únicamente.

La conexión que se confiere al espacio-tiempo es

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{cc} 0 & -\frac{e^{2\psi}}{2\rho}\omega_z \\ \frac{e^{2\psi}}{2\rho}\omega_z & 0 \end{array} \right) d\rho + \left(\begin{array}{cc} 0 & \frac{e^{2\psi}}{2\rho}\omega_\rho \\ -\frac{e^{2\psi}}{2\rho}\omega_\rho & 0 \end{array} \right) dz, \quad (2.86)$$

donde $\omega_\mu \equiv \frac{\partial\omega}{\partial z^\mu}$.

Esta conexión es singular en cualquier punto donde $e^\gamma = 0$ es decir $\gamma \rightarrow -\infty$, ya que en tales lugares geométricos, las uno-formas $d\rho$ y dz son singulares. Este tipo de singularidades se pueden regularizar por medio de transformaciones de norma y por lo tanto podemos aplicar el método de cuantización topológica.

Un intento que se podría hacer, sería analizar la métrica de Kerr, ya que ésta se puede escribir como un elemento de línea de la forma (2.85), sin embargo, antes de hacer ningún tipo de cálculo, notamos que el grupo $SO(2)$, que es el grupo de norma de la conexión (2.86), es abeliano, y las transformaciones que se usen para regularizar la conexión en sus posibles singularidades, serán transformaciones que sólo dependan de las coordenadas ρ y z . Ninguna de estas coordenadas es compacta, por lo que cualquiera que sea la transformación de norma que se requiera para regularizar la conexión, será univaluada en ρ y z , por lo que no obtendremos condiciones de cuantización a partir del modelo $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$. No obstante también se podría argumentar que para obtener condiciones de cuantización es necesario que las coordenadas ρ y z sean compactas (y periódicas). En configuraciones axi-simétricas estacionarias este no es el caso, puesto que ρ y z son coordenadas espaciales claramente definidas. En las secciones anteriores vimos que estas coordenadas dentro del horizonte el agujero negro pierden su carácter espacial y permiten ser reinterpretadas como compactas. Por otra parte recordemos que por medio del modelo sigma $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ se puede describir cualquier campo gravitacional con dos vectores de Killing. Por lo tanto se pueden encontrar configuraciones en las cuales las coordenadas que entran en el modelo sigma $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$ sean compactas. Esto llevaría inmediatamente a la aparición de condiciones de cuantización.

Lo que se afirma en el párrafo anterior respecto a que no aparecerán condiciones de cuantización, es claro basados en la argumentación que se da, sin embargo, a manera de confirmación, hicimos los cálculos explícitos

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

y regularizamos la conexión sin que esto implicara ninguna condición de cuantización.

A pesar de no obtener condiciones de cuantización usando directamente el modelo sigma no lineal $SL(2, \mathbb{R})/SO(2)$, la razón para exponerlo aquí, es hacer mención de que es factible aplicar el procedimiento para otros modelos sigma no lineales, posiblemente con grupos de norma no abelianos, en los que la conexión conferida al espacio-tiempo tenga componentes en alguna dirección compacta, ya que como vimos en los ejemplos de las secciones (2.4.1) y (2.4.2) éstos son los casos en que aparecen condiciones de cuantización. En este sentido más investigación es necesaria.

2.4.4. Un ejemplo no-abeliano

En todos los ejemplos con grupos de norma no abelianos a los que intentamos aplicar nuestro procedimiento, nos topamos con la necesidad de resolver sistemas de ecuaciones diferenciales parciales altamente acopladas, por lo que no obtuvimos ninguna solución concreta. El no tener un ejemplo real para exponer en esta tesis nos llevó a pensar en hacer un ejemplo ficticio en el sentido de que no es una solución particular a una teoría de norma, sino que lo construimos explícitamente para ejemplificar el caso no abeliano. Consideramos necesaria su inclusión para ilustrar la manera en que se debe de aplicar el procedimiento de cuantización topológica inducida cuando el grupo de norma no es abeliano. Para construir este ejemplo, partamos de una conexión para la cual la aplicación del método sea muy sencilla. Por ejemplo, tomemos la dos-esfera unitaria con elemento de línea $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ como espacio base y al grupo $SO(3)$ como fibra y grupo de norma. Usemos ahora la conexión dada por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2}(1 - \cos \theta) & 0 \\ -\frac{m}{2}(1 - \cos \theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\phi, \quad (2.87)$$

donde m es simplemente un parámetro. Esta conexión es equivalente a la del monopolo magnetico, y a pesar de ser irregular en $\theta = \pi$, podemos arreglar esto por medio de la transformación de norma dada por

$$\gamma = e^{m\phi S}, \quad (2.88)$$

con S dada por

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\phi. \quad (2.89)$$

La conexión que resulta de aplicar esta transformación es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{m}{2}(-1 - \cos\theta) & 0 \\ -\frac{m}{2}(-1 - \cos\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\phi, \quad (2.90)$$

que está bien definida en $\theta = \pi$, pero diverge en $\theta = 0$. A partir de estas conexiones que completan nuestro procedimiento, podemos construir una conexión para hacer un ejemplo más general.

Actuemos sobre la conexión (2.87) de acuerdo a

$$A'_\mu = \gamma A_\mu \gamma^{-1} + \gamma(\partial_\mu \gamma^{-1}), \quad (2.91)$$

usando alguna transformación de norma arbitraria, por ejemplo

$$\gamma = e^{(5\phi + \theta^2 S_2)}, \quad (2.92)$$

con S_2 dada por

$$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\phi. \quad (2.93)$$

La conexión que obtenemos es

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\theta \\ 0 & 0 & 0 \\ -2\theta & 0 & 0 \end{pmatrix} d\theta + \begin{pmatrix} 0 & h_1 & 5 \\ -h_1 & 0 & h_2 \\ -5 & -h_2 & 0 \end{pmatrix} d\phi, \quad (2.94)$$

con $h_1 = \frac{m}{2}(1 - \cos(\theta)) \cos(5\phi + \theta^2)$ y $h_2 = \frac{m}{2}(1 - \cos(\theta)) \sin(5\phi + \theta^2)$.

Esta conexión en una base ortonormal sólo cambia por un factor $1/\sin\theta$ en la componente asociada a $d\phi$, por lo que podemos ver que esta conexión diverge en los puntos $\theta = 0, \pi$.

Supongamos ahora para hacer el ejemplo, que en realidad nuestro punto de partida es la conexión (2.94), y que queremos aplicar sobre ella el procedimiento de cuantización topológica.

Empecemos por escribir la transformación de norma $SO(3)$ más general posible sobre la esfera, para lo que podemos usar la descripción de $SO(3)$ en términos de los ángulos de Euler y determinarlos como funciones de las coordenadas θ y ϕ , de tal manera que la transformación se obtiene por medio de la multiplicación de las tres matrices dada por

$$\gamma = \begin{pmatrix} \cos(f_1) & -\text{sen}(f_1) & 0 \\ \text{sen}(f_1) & \cos(f_1) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(f_2) & 0 & -\text{sen}(f_2) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(f_2) & 0 & \cos(f_1) \end{pmatrix} \quad (2.95)$$

$$\begin{pmatrix} \cos(f_3) & -\text{sen}(f_3) & 0 \\ \text{sen}(f_3) & \cos(f_3) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $f_i (i = 1, 2, 3)$ funciones generales de θ y ϕ .

Esta es la expresión de γ que debemos de usar en (2.91) para transformar la conexión (2.94).

La expresión general que se encuentra para la nueva conexión A'' es un tanto larga, así que haremos el análisis entrada por entrada. Para estudiar las divergencias debemos de notar, como se dijo antes, que la conexión en términos de tétradas cambia solamente por un factor $\frac{1}{\text{sen}(\theta)}$ en la componente $d\phi$.

Para que la conexión A' sea regular y bien definida en los puntos $\theta = 0, \pi$, cada entrada de sus componentes debe de ser no singular. Para lograr que éste sea el caso, podemos establecer una serie de ecuaciones diferenciales para las funciones f_1, f_2 y f_3 .

Por ejemplo, la entrada (1,2) de la componente $d\phi$ de A'

$$\begin{aligned} (A'')_{2\phi}^1 &= \left[\frac{\pi}{2} (1 - \cos(\theta)) \cos(5\phi + \theta^2) \cos(f_2) + \right. \\ &\left. \frac{\pi}{2} (1 - \cos(\theta)) \text{sen}(5\phi + \theta^2) \cos(f_3) \right] \text{sen}(f_2) \\ &- 5\text{sen}(f_2) \text{sen}(f_3) + \partial_\phi f_1 + \cos(f_2) \partial_\phi f_3, \end{aligned} \quad (2.96)$$

debe ser tal que en $\theta = 0$ elimine la singularidad proveniente de $d\phi = \frac{1}{\text{sen}(\theta)} e^2$. Para lograr esto podemos en particular escribir una ecuación diferencial donde la entrada (2.96) se iguale a cero. En este caso la ecuación

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

diferencial es muy sencilla, y podemos resolverla fijando $f_3 = 0$ y $\partial_\phi f_1 = 0$. Después de ésto hay que verificar que las ecuaciones resultantes de las demás entradas de ambos componentes, acepten estos valores. Vemos que la entrada

$$\begin{aligned} (A'')_{3\phi}^1 &= -5 \cos(f_1) \cos(f_3) - \\ & \left(\frac{\pi}{2} (1 - \cos(\theta)) \sin(5\phi + \theta^2) \cos(f_2) \cos(f_3) \sin(f_1)\right) \\ & + \frac{\pi}{2} (1 - \cos(\theta)) \cos(5\phi + \theta^2) \sin(f_1) \sin(f_2) - \\ & \left(\frac{\pi}{2} (1 - \cos(\theta)) \sin(5\phi + \theta^2) \cos(f_1) \sin(f_3)\right) \end{aligned} \quad (2.97)$$

$$5 \cos(f_2) \sin(f_1) \sin(f_3) + \cos(f_1) \partial_\phi f_2 + \sin(f_1) \sin(f_2) \partial_\phi f_3,$$

acepta los valores establecidos para f_3 y $\partial_\phi f_1$, e incluso, si hacemos $f_1 = f_3 = 0$ y $f_2 = 5\phi$ podemos fijar esta componente a cero también. Una vez más, tenemos que verificar la compatibilidad de estos valores con las demás ecuaciones diferenciales. La última entrada que podría representar problemas es

$$\begin{aligned} (A'')_{3\phi}^2 &= \left(\frac{\pi}{2} (1 - \cos(\theta)) \sin(5\phi + \theta^2) \cos(f_1) \cos(f_1) \cos(f_3)\right) - \\ & 5 \cos(f_3) \sin(f_1) - \frac{\pi}{2} (1 - \cos(\theta)) \cos(5\phi + \theta^2) \cos(f_1) \sin(f_2) - \\ & 5 \cos(f_1) \cos(f_2) \sin(f_3) - \left(\frac{\pi}{2} (1 - \cos(\theta)) \sin(5\phi + \theta^2) \sin(f_1) \sin(f_3)\right) + \\ & \sin(f_1) \partial_\phi f_2 - \cos(f_1) \sin(f_2) \partial_\phi f_3, \end{aligned} \quad (2.98)$$

pero vemos que la elección de funciones que hemos hecho, eliminan esta componente también.

Todas las entradas de la componente A_θ son proporcionales a θ , por lo que se hacen cero en $\theta = 0$, que de hecho es más de lo necesario, pues basta con que estas entradas sean independientes de ϕ en ese punto.

Concluimos entonces que la transformación de norma γ_1 dada por (2.95) con $f_1 = f_3 = 0$ y $f_2 = 5\phi$ hace que A'' esté bien definida en $\theta = 0$.

De manera análoga, al recurrir que las entradas (2.96), (2.97) y (2.98) se hagan cero en $\theta = \pi$ obtenemos una serie de ecuaciones diferenciales con solución $f_1 = -\pi\phi$, $f_2 = 5\phi + \theta^2$ y $f_3 = 0$. Estas funciones, vía la ecuación (2.95) definen otra transformación de norma γ_2 , que transforman la conexión en una A''' bien definida en $\theta = \pi$.

Así que por medio de éstas dos transformaciones de norma, obtenemos dos conexiones que cubren todo el espacio base, y la función de transición entre ellas está dada por $\gamma_{1 \rightarrow 2} = \gamma_2(\gamma_1)^{-1}$, que en términos de la ecuación (2.95) se representa por $f_1 = -m\phi$, $f_2 = \theta^2$ y $f_3 = 0$.

Esta $\gamma_{1 \rightarrow 2}$ es la transformación que debemos de analizar, y de hecho es fácil de ver que para que ésta sea univaluada en la coordenada ϕ , el parámetro m debe de ser un entero, ya que las funciones que aparecen en (2.95) son trigonométricas con argumento f_1 .

Desde luego éste fue un ejemplo explícitamente construido, pero el procedimiento expuesto aquí es el mismo en todos los casos, así que hagamos un resumen de los pasos.

Una conexión para el espacio base está dada por una uno-forma \mathbf{A} cuyos componentes A_μ son elementos del álgebra de Lie \mathfrak{g} correspondiente al grupo de norma G . Una transformación de norma γ es un mapeo del espacio base al grupo G , i.e. $\gamma: B \rightarrow G$, que actúa sobre los componentes de la conexión de acuerdo a

$$A'_\mu = \gamma A_\mu \gamma^{-1} + \gamma(\partial_\mu \gamma^{-1}). \quad (2.99)$$

Desde luego, las A_μ son las componentes de la uno-forma \mathbf{A} en la base dx^μ que usualmente no es (semi)ortonormal, así que para detectar los lugares en que la conexión falla a ser finita o bien definida, debemos de expresar \mathbf{A} en una base (semi)ortonormal de uno-formas e^μ .

Una vez detectadas las singularidades de la conexión nos damos a la tarea de regularizarlas por medio de transformaciones de norma. Para esto usamos el hecho de que un grupo de Lie es una variedad, y por lo tanto podemos introducir, al menos localmente, funciones coordenadas y^α para describir al grupo. A continuación, escribimos estas coordenadas como función de las coordenadas del espacio base x^μ , asociando un elemento específico del grupo con cada punto del espacio base, con lo que se obtiene la transformación de norma más general posible $\gamma[y^\alpha(x^\mu)]$. Una vez que $\gamma(x^\mu)$ se ha escrito en esta forma, la podemos introducir en (2.99) para obtener las componentes A'_α de la conexión \mathbf{A}' . Estas componentes estarán escritas en términos de funciones explícitas⁸ de las coordenadas x^μ y de funciones indeterminadas $y^\alpha(x^\mu)$ junto con sus derivadas respecto a las coordenadas x^μ . Gracias a ésto, podemos expresar las condiciones de definición y regularidad de la conexión, en forma de ecuaciones diferenciales para las funciones $y^\alpha(x^\mu)$.

⁸Estas funciones provienen de las entradas de la conexión original \mathbf{A} y del tensor de transformación a la base (semi)ortonormal.

Al resolver estas ecuaciones diferenciales, encontramos transformaciones de norma γ_i que dan lugar a conexiones A_i bien definidas en ciertos conjuntos abiertos U_i . Debemos dar una cobertura del espacio base eligiendo algunos de estos U_i , y determinar las funciones de transición entre ellos. Como último paso después de haber obtenido las funciones de transición, éstas deben de ser analizadas para detectar la posible aparición de condiciones de cuantización.

El procedimiento descrito es justamente un ejemplo de cuantización topológica.

2.5. Conclusiones del capítulo segundo

Hemos iniciado el presente capítulo definiendo el procedimiento de cuantización topológica que, enunciado como fue, es aplicable a una gama muy amplia de teorías. Con ésto hemos conseguido que el argumento de cuantización de Dirac, se generalice a un análisis que debe de ser realizado para cualquier teoría en que exista un campo de norma de carácter físico. Desde esta perspectiva, podemos pensar que el carácter discreto que presentan muchos sistemas en la naturaleza, podría ser una consecuencia de que los distintos campos de norma acoplados a la gravedad, definidos en el espacio-tiempo, deben de cumplir con los requisitos que hemos mencionado aquí. La forma de hacer este análisis ha sido expuesta con detalle.

Para hacer ver la aplicabilidad del método, hemos expuesto varios ejemplos para los que hemos obtenido condiciones de cuantización similares a la que obtuvo Dirac, algunas de ellas con sentido físico claro y otras no.

Con nuestro procedimiento podemos considerar como campo de norma, incluso a la conexión de Levi-Civita. Cuando se obtienen condiciones de cuantización de este campo de norma, hablamos de cuantización topológica intrínseca, ya que la geometría es la responsable de su propia discretización. Ejemplo de esto fué el análisis realizado para la teoría linealizada de la gravedad, donde vimos que en efecto, los parámetros involucrados en la métrica resultaron discretos, en particular, el momento de momento angular. La pregunta a partir de este caso, es si esta cuantización es propia de la teoría completa, o si sólo es una propiedad del límite lineal, consecuencia de su analogía con la electrodinámica. Lo que hay que notar para responder a esto, es que las analogías entre la teoría linealizada y el electromagnetismo, necesarias para que se repita el argumento de cuantización, son únicamente los puntos en común que tienen todas las teorías de norma, por lo que si la gravitación en su forma exacta se considera una teoría de norma, ésta sería

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

susceptible de cuantización topológica.

Para ver un caso al cual aplica el método, y que es solución exacta a la teoría de Einstein, vimos la cuantización de sistemas con simetría cilíndrica, donde obtuvimos condiciones de cuantización de la energía- C definida por Thorne. La interpretación de esta energía no es clara, de hecho hay más discusión al respecto en la literatura[43], pero su cuantización como cantidad dinámica es interesante por sí misma, y ejemplifica la aplicabilidad del método en soluciones exactas, que tienen un grupo no abeliano como grupo de norma.

El carácter físico de la conexión de Levi-Civita puede ser cuestionado, pero la cuantización intrínseca es interesante en casos más generales que la gravitación, por ejemplo en modelos de Kaluza-Klein, donde la conexión métrica se considera como tal, un campo de norma. También podemos pensar en modelos de dimensiones más bajas, como $d=1+1$ o $d=2+1$. La aplicación del método para estos casos no se ha realizado, pero es un tema interesante para trabajo posterior.

Los ejemplos que hemos dado de cuantización inducida, también requieren un poco de discusión. Es interesante notar que en estos ejemplos, las cantidades que aparecen en las condiciones de cuantización, no son únicamente las que están directamente relacionadas con el campo de norma objeto del procedimiento. Por ejemplo, en el caso del agujero negro de Kerr-Newman, el parámetro directamente relacionado con el campo electromagnético es e , pero al aplicar el procedimiento sobre la conexión electromagnética, las condiciones de cuantización obtenidas involucran también a los parámetros de la métrica M y a , por esto es que le llamamos *inducida*, puesto que no solo se cuantiza el campo proveniente del potencial de norma, sino que éste induce una discretización sobre la geometría del espacio.

Desde luego, para realizar el análisis completo de un sistema, debemos de considerar todos los campos de norma involucrados y acoplados a gravedad, obteniendo las condiciones de cuantización que impongan cada uno de ellos sobre la geometría y entre sí mismos, para después verificar que todas estas condiciones sean compatibles y lleven a resultados concretos. Esta fue la razón para incluir un ejemplo de grupo de norma no abeliano, ya que era necesario demostrar la aplicabilidad del método para tales casos, que existen en otras teorías de norma en la naturaleza.

Cabe mencionar que el procedimiento de cuantización inducida se puede aplicar a teorías de campos no sólo en la gravitación Einsteiniana, por ejemplo, la teoría de cuerdas cuenta con campos de norma más allá del modelo estándar, que pueden ser objeto de nuestro procedimiento.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 3

El principio holográfico

El presente capítulo es complementario a los primeros dos, ya que estudiaremos el principio holográfico con la intención de ampliar las posibilidades de aplicación de los métodos que hemos desarrollado. En algunos casos no es claro el significado de nuestro procedimiento en un sistema particular, pero por medio del principio holográfico podemos buscar algún sistema relacionado con éste, en el que el sentido de nuestro método sea más claro. Ha habido una serie de trabajos relacionando métricas de agujeros negros en gravitación, con modelos de mundos-brana, en los cuales sería interesante ver como se transfieren las condiciones de cuantización de una teoría a la otra. En el presente trabajo no fue posible establecer tal correspondencia, sin embargo hubieron resultados interesantes para el ejemplo analizado, en concreto definimos la entropía de modelos gravitacionales dependientes del tiempo y analizamos la validez de la fórmula de Cardy-Verlinde para estos modelos.

3.1. ¿Qué es el principio holográfico?

El origen conceptual del principio holográfico fue establecido en la década de los setenta por Bekenstein[44] y Hawking[45], quienes formularon respectivamente, la segunda ley de la termodinámica para agujeros negros y el proceso de creación de partículas por agujeros negros. Estas ideas fueron implementadas en el contexto de la teoría cuántica de campos, en particular, en gravedad cuántica y en cosmología por 'tHooft[46] y Susskind[47].

El principio holográfico es una afirmación acerca del conteo de estados cuánticos de un sistema físico. Empecemos hablando de algunas ideas intuitivas que deben aclarar el sentido de esta afirmación. Consideremos una

región B de espacio. Ninguna condición se impone sobre la topología ni sobre la geometría de la región B , pero por simplicidad podemos empezar identificando a B con una esfera y tomar V como su volumen. Supongamos que colocamos en el interior de B a un sistema físico arbitrario, de tal manera que la región exterior a B está vacía. Consideremos ahora el espacio \mathcal{H} de estados que describe al sistema físico dentro de B . Ahora nos podemos preguntar por la dimensionalidad del espacio \mathcal{H} . Obviamente la respuesta dependerá de las características físicas del sistema. Supongamos que se trata de una red de espines con espaciamiento d . Si la red llena por completo la región B , el máximo número de espines contenido en ésta es V/d^3 . Dado que cada espín puede encontrarse en dos estados diferentes, el número total de estados ortogonales es $2^{V/d^3}$ y también es la dimensionalidad del espacio de estados \mathcal{H} . Este número también determina la máxima entropía S_{max} que puede tener el sistema, definida como el logaritmo del número total de estados, $S_{max} = \ln N_{estados} = \ln \dim(\mathcal{H})$. Así que en este ejemplo tenemos que $S_{max} = (V \ln 2)/d^3$. Este proceso de conteo y su relación con la máxima entropía de una sistema es lo que el principio holográfico pretende determinar de manera general. En nuestro ejemplo no se puede extraer más información porque el sistema con el que estamos tratando tiene un número finito de grados de libertad, y por lo tanto la dimensionalidad de \mathcal{H} (el espacio de Hilbert) es finita.

Los casos de interés son aquellos en los que el número de grados de libertad es infinito, como en la teoría de campos. Para manejar este caso, debemos definir la densidad de entropía s como función de la densidad de energía ρ del campo. Así $S_{max} = s(\rho_{max})V$ y el número total de estados es $N_{estados} = \exp(S_{max})$. Ahora supongamos que en la región B tenemos un conjunto de fuentes de distintos campos, incluso gravedad. Sea A el área de la frontera ∂B . La masa máxima del sistema contenido por la frontera ∂B no puede exceder la masa de un agujero negro con un horizonte de área A . Este es un punto crucial, de acuerdo con nuestro entendimiento de las teorías de campos, no sabemos de ningún sistema que, estando contenido en una región dada, tenga más masa que un agujero negro cuyo horizonte tenga un área igual a la de la frontera de dicha región. En otras palabras, los agujeros negros son los objetos más masivos que hay en la naturaleza. Ahora, a partir de la segunda ley de la termodinámica, sabemos que la máxima entropía de un agujero negro de área A está dada por $S_{max} = A/4$ (donde hemos usado unidades de Planck con $c = G = \hbar = 1$). Consecuentemente el número total de estados tiene la cota máxima $N_{estados} = \exp(A/4)$. Este es el enunciado del principio holográfico para este caso en particular. Ésta simple relación tiene implicaciones profundas, establece una conexión entre una cantidad

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

en el volumen ($N_{estados}$), con una cantidad diferente en la frontera (A). Por el otro lado predice una cota superior para la dimensionalidad del espacio de estados \mathcal{H} . Hay que notar que no se impuso condición alguna para la distribución de campos y materia contenidos en B , por lo que podrían ser de naturaleza clásica o cuántica. Ambos casos han sido analizados en la literatura.

En la descripción anterior no especificamos la región B e “insertamos” libremente campos en ella. Como sea, es sabido que campos relativistas afectan la topología y la geometría del espacio en que viven. Por lo tanto, uno de los principales retos al desarrollar ejemplos específicos, es definir la región B de tal manera que sea consistente con la existencia de los campos. En el caso de modelos cosmológicos, ésto se ha hecho para el espacio-tiempo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW)[48] y algunas generalizaciones clásicas[49]. Se ha encontrado que la dinámica del espacio-tiempo de FRW “en el volumen” está gobernada por una relación de entropía “en la frontera”. Este resultado se ha generalizado para incluir diferentes tipos de correcciones cuánticas[50].

Desde la perspectiva de interés del presente trabajo, debemos decir que el problema de la transición campo partícula es de alguna forma, un caso del principio holográfico. Las propiedades internas del campo (en el volumen) deben de ser representadas por propiedades externas de la partícula (en la frontera). Supongamos que φ_0 es una configuración específica de un campo, o sea que es solución a una teoría clásica, y que representa el espín de una partícula. El número total de estados es $N_{estados} = 2$. Si ahora llenamos la región donde vive la partícula con un agujero negro, de acuerdo con la discusión anterior, el “área” de la partícula es $A = 4 \ln 2$. Hasta este punto, nada especial parece pasar, pero al analizar la dinámica del sistema, el problema de los modos cero se hace presente[15]. Las fluctuaciones del campo $\varphi_0 + \delta\varphi_0$ llevan a configuraciones del campo para la partícula que son inestables. Esto contradice el hecho de que las partículas elementales son estables ante perturbaciones infinitesimales. El problema del análisis es que las perturbaciones ocurren en el campo, que tiene un número infinito de grados de libertad, y afectan a la partícula, que tiene un número finito de grados de libertad. Para manejar este problema propiamente dentro del concepto del principio holográfico, hay que llevar a cabo los siguientes pasos: (i) Elegir el campo φ , junto con su teoría subyacente, y una configuración específica φ_0 del campo que describa el espín de la partícula; (ii) Definir la región B en concordancia con la geometría de φ_0 ; (iii) Encontrar la teoría en ∂B y la configuración de campo $\tilde{\varphi}_0$ que son la contraparte de la teoría en B y el campo φ_0 respectivamente; (iv) Realizar una perturbación sobre la nueva

configuración $\tilde{\varphi}_0 + \delta\tilde{\varphi}_0$. Si el procedimiento entero funciona correctamente, se podría esperar que la configuración en la frontera, $\tilde{\varphi}_0$, fuera estable [51]. Hasta el momento, todo lo anterior es especulación, pero como vimos en la sección (1.4), en el marco de la teoría de la gravedad de Einstein, se encuentran una gran clase de configuraciones que presentan comportamiento espinorial.

3.2. El mapeo holográfico

Las ideas presentadas en la sección anterior han tenido muchas aplicaciones en diferentes áreas de la física teórica, especialmente en el contexto de teorías de cuerdas y teorías conformes de campos. En casi todos los casos la búsqueda de la frontera ∂B sobre la cual se debe “proyectar” la teoría existente en el volumen definido por la región del espacio B , ha sido un punto crucial. Sin embargo, dada la complejidad del problema y el hecho de que aún no se entiende completamente lo que debe significar el “principio holográfico”, los casos tratados en la literatura manejan “fronteras” que no son fronteras en el sentido topológico (como es el caso del “límite cerca del horizonte” de agujeros negros en dimensiones superiores a 4), “fronteras” de variedades que por su construcción geométrica no pueden tener fronteras topológicas (como es el caso de modelos cosmológicos), “entropías” que no son entropías en el sentido termodinámico y muchos otros conceptos que dejarían perplejo a cualquier físico teórico que esté convencido que un problema físico debe estar bien formulado desde el punto de vista matemático [52]. No obstante, la investigación continúa sin prestar mayor atención a este problema (en los últimos diez años se han publicado más de 500 artículos con aplicaciones del principio holográfico).

En esta sección presentaremos una formulación de más estricta de lo que hemos llamado *mapeo holográfico* con el objetivo de que sirva de herramienta para entender mejor el “principio holográfico”.

Sea M una variedad diferencial de dimensión m . En M existen los campos Φ^Σ mediante los cuales se construye la acción

$$S_M = \int \mathcal{L}(\Phi^\Sigma, \nabla\Phi^\Sigma) d^m v, \quad (3.1)$$

donde ∇ es el operador de derivada en M . La acción (3.1) satisface el principio de acción mínima que conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden que denotaremos por

$$F(\Phi^\Sigma, \nabla\Phi^\Sigma, \nabla^2\Phi^\Sigma) = 0. \quad (3.2)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En general, este sistema de ecuaciones puede depender explícitamente de las coordenadas X^A ($A = 1, 2, \dots, m$) en M , pero omitiremos esta dependencia para simplificar la notación. De la misma manera, supongamos que en una variedad N de dimensión n existen los campos ϕ^α cuya acción

$$S_N = \int \mathcal{L}(\phi^\alpha, D\phi^\alpha) d^n v, \quad (3.3)$$

implica el sistema de ecuaciones diferenciales

$$f(\phi^\alpha, D\phi^\alpha, D^2\phi^\alpha) = 0. \quad (3.4)$$

Sea $\Phi_0^\Sigma(X^A)$ una solución particular del sistema de ecuaciones (3.2) y $\phi_0^\alpha(x^a)$ ($a = 1, 2, \dots, n$), una solución del sistema (3.4). Decimos que la teoría definida en N es la *representación holográfica* de la teoría definida en M si existe un mapeo $h: M \rightarrow N$ tal que $\forall \phi_0^\alpha(x^a) \in N$ existe por lo menos un $\Phi_0^\Sigma(X^A) \in M$. Al mapeo h le llamaremos *mapeo holográfico*.

Nótese que no hemos impuesto ningún tipo de condición sobre el mapeo holográfico. Más bien estamos imponiendo condiciones de existencia de configuraciones particulares (soluciones exactas) en cada una de las teorías. De esta manera, cualquier tipo de mapeo entre dos variedades diferenciales puede ser utilizado como posible candidato a ser un mapeo holográfico. Por ejemplo, podemos utilizar el mapeo de "encajamiento" (embedding) $h: X^A \rightarrow x^a$ cuando $m < n$, o éste mismo como mapeo diferenciable $1 - 1$ cuando $m = n$, o el mapeo proyectivo si $N = \partial M$ ($n = m - 1$), etc. Las posibilidades de selección serían prácticamente infinitas y dependerían solamente del tipo de teorías que se esté analizando en cada caso particular.

Nótese además que la condición de existencia a nivel de configuraciones de campo está dada en la dirección $N \rightarrow M$. Esto implica que en M pueden existir varias configuraciones de campo que corresponden a una misma configuración en N . De esta manera se podrían entender los diferentes tipos de simetrías (tales como dualidad, supersimetría, etc.) que se han encontrado en diversas teorías de campo.

Sin embargo, nuestra definición de mapeo holográfico es tan amplia, y a la vez tan restrictiva con respecto a la existencia de configuraciones particulares de campo, que en este momento podemos afirmar que no se conoce en la literatura ninguna teoría que sea la representación holográfica de otra. Solamente podemos afirmar que esta definición permitiría verificar exactamente si una teoría es equivalente a otra en el sentido holográfico.

Todos los casos tratados en la literatura se pueden sintetizar de la siguiente manera: En algunas teorías se ha visto que existen configuraciones de

campo $[\Phi_0^\Sigma(X^4) \in M]$ para las cuales se ha encontrado algún mapeo holográfico particular $h : X^4 \rightarrow x^a$ que las relaciona con configuraciones de campo $[\phi_0^\Sigma(x^a) \in N]$. Uno de los ejemplos más conocidos es el que dio lugar a la conjetura AdS/CFT de Maldacena [53]. En este caso $M = AdS_5 \otimes S_5$ que es una variedad de 10 dimensiones donde la configuración de campo Φ_0^Σ es una métrica de curvatura constante (anti de Sitter con una esfera 5-dimensional) que es solución a una teoría de cuerdas. Además $N = \partial AdS_5$ es la "frontera" del espacio de anti de Sitter, ϕ_0^Σ es una solución particular de una teoría de Super Yang-Mills en 4 dimensiones y el mapeo holográfico es del tipo $h : X^4 \rightarrow x^a$, definido como el "límite cerca del horizonte" de la métrica de anti de Sitter. En todas las generalizaciones que se han hecho de este caso la variedad M está determinada por una solución de tipo agujero negro con constante cosmológica. La característica común de todos ellos es que la métrica que determina M depende únicamente de las coordenadas espaciales.

Otro caso específico que dio lugar a la llamada "fórmula de Cardy-Verlinde" es el siguiente [54]. M es una variedad de $n + 2$ dimensiones y la teoría en ella es la del campo gravitacional con constante cosmológica que satisfice las ecuaciones de Einstein correspondientes. La configuración particular que se toma es la solución de Schwarzschild con constante cosmológica. El mapeo holográfico está dado mediante una proyección (definida mediante una ecuación diferencial [55]) sobre una brana de dimensión $n + 1$, la cual define la variedad N . Al proyectar la solución de Schwarzschild sobre la brana, ésta se transforma en la métrica de Friedman-Robertson-Walker (FRW). En este caso tenemos entonces un mapeo entre las variedades que permite pasar de una configuración en M a una configuración en N . ¿Cuál sería entonces la teoría en la variedad N ? Se podría pensar inmediatamente en la teoría de Einstein en $n + 1$ dimensiones. Sin embargo, para cumplir con los requisitos mencionados arriba en (3.4), además de la métrica de FRW es necesario introducir la materia como un fluido perfecto de forma tal que sea derivable de un principio variacional; es decir, se necesita introducir una acción en la brana cuyas ecuaciones de campo coincidan con las ecuaciones de FRW. Sin embargo, como es sabido, no existe en general una acción razonable de la cual se pueda derivar el tensor energía-momento de un fluido perfecto. Por lo tanto, en N no se cuenta con una teoría de campos derivable de un principio variacional. No obstante, la forma en que se construye la brana en N permite determinar que cualquier acción sobre ella debe ser invariante con respecto a transformaciones conformes. Esto llevó a Verlinde [56] a pensar en la alternativa de comparar las ecuaciones de campo de FRW con resultados conocidos de teorías conformes de campo. La solución

se presentó a través de la fórmula de Cardy que es una expresión para la entropía que se deriva con todo rigor en teorías conformes. Como resultado se obtuvo que las ecuaciones de campo para el modelo de FRW se pueden expresar como la fórmula de Cardy, una vez se reinterpretan los parámetros (factor de escala, densidad de energía y presión) que determinan el modelo de FRW. Este resultado ha sido generalizado a casos en los que las configuraciones en M corresponden a agujeros negros de Reissner-Nordström y de Kerr-Newman con constante cosmológica [57]. En todos ellos se ha visto que la métrica proyectada sobre la brana corresponde a modelos cosmológicos homogéneos e isotrópicos con diferentes tipos de ecuaciones de estado.

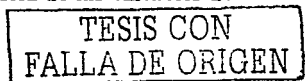
Nuestro objetivo original de aplicar el principio holográfico al problema de la transición campo partícula se ve truncado debido a que aún no se cuenta con las herramientas suficientes para aplicarlo. Lo ideal sería tener en M una configuración de campo clásica y aplicando el mapeo holográfico encontrar en N una configuración con propiedades cuánticas. En los ejemplos mencionados arriba se ha visto que agujeros negros se proyectan en modelos cosmológicos isotrópicos y homogéneos en N , mientras que para el problema de la transición campo partícula en N esperaríamos una configuración que dependa de las coordenadas espaciales. Es por eso que nos dimos a la tarea de explorar la posibilidad de obtener en N configuraciones más generales que el modelo de FRW. El caso más sencillo a nuestra disposición es el modelo de Bianchi IX que presenta tan solo anisotropías. Veremos que realmente es posible analizar este modelo en el contexto del principio holográfico mediante el método de Cardy-Verlinde.

3.3. Entropía y el principio holográfico

Nuestro objetivo en esta sección es derivar un ejemplo concreto de aplicación del principio holográfico. Puesto que este tipo de aplicación ha servido principalmente para introducir el concepto de entropía en modelos cosmológicos, comenzaremos con un breve comentario al respecto.

El concepto de entropía para modelos cosmológicos tiene muchas sutilezas. Usualmente se empieza por exigir que para el modelo con dependencia temporal que describe al sistema, se cumpla la primera ley de la termodinámica. Después se considera una ecuación de estado específica y se impone la compatibilidad entre las ecuaciones de campo y la primera ley de la termodinámica. De aquí resultan usualmente expresiones explícitas para las variables termodinámicas (entropía y temperatura) del modelo.

En un paso posterior se cuestiona la relevancia física de las variables de



estado, la ecuación de estado que las vincula y de las variables termodinámicas. En el caso sencillo de un universo FRW, este procedimiento se puede realizar exitosamente[58], obteniendo variables termodinámicas y de estado, físicamente razonables.

Recientemente, una nueva perspectiva ha sido propuesta por Verlinde[56] quien notó una relación formal entre las ecuaciones de campo para la cosmología de FRW y las fórmulas termodinámicas de la teoría de campos conforme (TCC). A pesar de que en un principio ésto parecía sólo una notable coincidencia, un análisis mas profundo parece ligar estos resultados con las ideas del principio holográfico.

La relación con este principio se plantea porque recientemente la fórmula de Cardy[59], que permite el conteo de estados cuánticos en la TCC en dos dimensiones, ha sido generalizada por Verlinde[56] para incluir espacios-tiempos de dimensión arbitraria y determinar la densidad de estados.

A este resultado se le conoce ahora como la fórmula de Cardy-Verlinde. Verlinde propuso también que un universo cerrado tiene una contribución de tipo Casimir a su energía y a su entropía, y que la contribución de la energía de Casimir tiene como cota superior la energía de Bekenstein-Hawking. Solo para el caso dominado por radiación, este límite lleva a la unificación de los límites para la entropía de Bekenstein y Hubble, para universos débil y fuertemente autogravitantes, respectivamente.

Más aún, resulta que la fórmula de Cardy-Verlinde coincide con las ecuaciones de Friedman en el momento en que la cota de la energía de Casimir se satura. Este resultado hace natural preguntar si esta función de la fórmula de Friedman, la entropía de Cardy y el principio holográfico es solamente una coincidencia notable, o si es la manifestación de una propiedad física profunda de los modelos dependientes del tiempo, TCC y el principio holográfico. Para responder esta pregunta resulta natural tratar de generalizar estos conceptos fundamentales a casos más generales de configuraciones físicas. En este contexto, Wang *et al.* [60] han generalizado la fórmula de Cardy-Verlinde para el caso de universos con constante cosmológica, Nojiri *et al.*[50] han encontrado cotas para esas fórmulas, Youm [61] ha generalizado la fórmula de entropía para incluir fluidos perfectos con ecuaciones de estado barotrópicas en general, Brevik y Odintsov [62, 63] han considerado generalizaciones con una viscosidad constante en el volumen, etc. Un listado más extensivo de trabajos recientes se puede encontrar en [61].

La pregunta que nosotros quisimos responder fue si los resultados previos pueden ser generalizados para casos de dimensionalidad arbitraria con varios componentes de la métrica que dependen del tiempo.

A continuación analizaremos en particular el modelo cosmológico de

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Bianchi tipo IX con un fluido perfecto como fuente. Como es bien sabido, este modelo se reduce al modelo cerrado de FRW en el límite isotrópico.

3.3.1. El modelo de Bianchi tipo IX

Como caso particular de modelos dependientes del tiempo, consideremos el elemento de línea general para el modelo cosmológico Bianchi tipo IX[64]

$$ds^2 = dt^2 - e^{-2\Omega} \left[e^{2X+2Y} (\omega^1)^2 + e^{2X-2Y} (\omega^2)^2 + e^{-4X} (\omega^3)^2 \right], \quad (3.5)$$

donde Ω, X, Y son funciones del tiempo t solamente y

$$\omega^1 = \frac{1}{2} (-\text{sen}x^3 dx^1 + \text{sen}x^1 \cos x^3 dx^2), \quad (3.6)$$

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (\cos x^3 dx^1 + \text{sen}x^1 \text{sen}x^3 dx^2), \quad (3.7)$$

$$\omega^3 = \frac{1}{2} (\cos x^1 dx^2 + dx^3), \quad (3.8)$$

donde (x^1, x^2, x^3) son los ángulos de Euler para $SO(3)$.

Para escribir las ecuaciones de campo en una forma que facilite el análisis, introducimos los factores de escala

$$a_1 = e^{-\Omega+X+Y}, \quad a_2 = e^{-\Omega+X-Y}, \quad a_3 = e^{-\Omega-2X}, \quad (3.9)$$

con sus parámetros de Hubble correspondientes $H_i = \dot{a}_i/a_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Usando entonces las relaciones $H_1 + H_2 + H_3 = -3\dot{\Omega}$, $H_1 + H_2 - 2H_3 = 6\dot{X}$, y $H_1 - H_2 = 2\dot{Y}$, podemos escribir la constricción Hamiltoniana como

$$\frac{1}{3}(H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3) + \frac{1}{a_1^2} \left(1 + \frac{1}{3}\epsilon^2 \right) = \frac{8}{3}\pi G\rho, \quad (3.10)$$

con

$$\epsilon^2 = 1 - \frac{a_3^2}{a_2^2} - 2 \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right) - \frac{a_2^2}{a_3^2} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2} \right)^2. \quad (3.11)$$

Y más aún, las ecuaciones dinámicas restantes se pueden escribir como

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{aligned}
 & \dot{H}_1 + \dot{H}_3 + H_1^2 + H_3^2 + H_1 H_3 + \\
 & \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} - 3 \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} + \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} + 2 \frac{1}{a_1^2} - 2 \frac{1}{a_2^2} + 2 \frac{1}{a_3^2} = -8\pi G\rho, \\
 & \dot{H}_2 + \dot{H}_3 + H_2^2 + H_3^2 + H_2 H_3 - \\
 & 3 \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} + \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} - 2 \frac{1}{a_1^2} + 2 \frac{1}{a_2^2} + 2 \frac{1}{a_3^2} = -8\pi G\rho, \\
 & \dot{H}_1 + \dot{H}_2 + H_1^2 + H_2^2 + H_1 H_2 + \\
 & \frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} + \frac{a_2^2}{a_1^2 a_3^2} - 3 \frac{a_3^2}{a_1^2 a_2^2} + 2 \frac{1}{a_1^2} + 2 \frac{1}{a_2^2} - 2 \frac{1}{a_3^2} = -8\pi G\rho,
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde ρ es la densidad de materia, p su presión, y G denota la constante gravitacional de Newton. Un punto sobre una función denota la derivada respecto al tiempo t .

A partir de las ecuaciones dinámicas de campo (3.12) obtenemos la ley de conservación de energía-momento, que en este caso está dada por

$$\dot{\rho} - 3\dot{\Omega}(\rho + p) = 0. \tag{3.13}$$

Para una ecuación de estado barotrópica $p = \omega\rho$ la ecuación anterior puede ser integrada y resulta en

$$\rho = \rho_0 e^{3(1+\omega)\Omega}, \tag{3.14}$$

donde ρ_0 es una constante.

3.3.2. La entropía a partir de la primera ley de la termodinámica

Supongamos ahora que el modelo tipo IX de Bianchi satisface la primera ley de la termodinámica, $TdS = dE + pdV$, donde T es la temperatura del universo y S la entropía contenida en el volumen V . Para un elemento de volumen comovil de volumen coordenado unitario y volumen físico v , obtenemos a partir de la primera ley de la termodinámica que

$$\dot{s} = \frac{v}{T} \left[\dot{\rho} + (p + \rho) \frac{\dot{v}}{v} \right], \tag{3.15}$$

donde s es la densidad de entropía por volumen comovil. Una forma razonable de definir el volumen físico es como $v = a_1 a_2 a_3 = e^{-3\Omega}$, expresión que

coincide con el volumen físico del universo de FRW dada la forma especial de tratar la anisotropía en el modelo tipo IX de Bianchi. Esta suposición se sustenta también en el hecho de que el volumen total del universo resulta ser $V = \int \sqrt{-h} d^3x = \frac{1}{8} e^{-3\Omega} \int \text{sen} x_1 d^3x$, donde h es el determinante de la parte espacial del elemento de línea (3.5).

Por lo tanto podemos escribir $V = \kappa v = \kappa e^{-3\Omega}$, donde κ es una constante que resulta de la integral anterior. A partir de Eq.(3.15) y de la conservación de energía-momento (3.13) se sigue que la densidad de entropía permanece invariante ($\dot{s} = 0$) a lo largo de la evolución i.e., la expansión es adiabática. Más aún, la primera ley de la termodinámica puede ser integrada para s y resulta en[58]

$$s = \frac{e^{-3\Omega}}{T} (p + \rho) + s_0, \quad (3.16)$$

donde s_0 es una constante aditiva.

Siguiendo la perspectiva de Verlinde[56] representamos la energía total $E = \rho V$ como la suma de una energía extensiva $E_E(S, V)$ y una energía sub-extensiva $E_C(S, V)$

$$E = E_E + \frac{1}{2} E_C, \quad (3.17)$$

donde E_C es la energía de Casimir que se define como la violación de la identidad de Euler:

$$E_C = 3(E + pV - TS). \quad (3.18)$$

Ante una transformación de escala $S \rightarrow \lambda S$ y $V \rightarrow \lambda V$ las componentes de la energía se comportan como $E_E(\lambda S, \lambda V) = \lambda E_E(S, V)$ y $E_C(\lambda S, \lambda V) = \lambda^{1/3} E_C(S, V)$.

Introduciendo la expresión para la entropía (3.16) en Eq.(3.18) obtenemos

$$E_C = -3 \frac{s_0}{s - s_0} (p + \rho) V, \quad (3.19)$$

o

$$E_C = -3\kappa \frac{s_0 \rho_0}{s - s_0} (1 + \omega) e^{3\omega\Omega}, \quad (3.20)$$

para un universo satisfaciendo una ecuación barotrópica de estado. Por lo tanto, el comportamiento de la energía de Casimir a lo largo de la evolución en el tiempo está dada por $E_C \sim e^{3\omega\Omega}$. Por otro lado vemos que a partir

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

de (3.14) la energía total del sistema está dada por $E = \kappa\rho_0 e^{3\omega\Omega}$ y consecuentemente la energía total se comporta de manera similar, $E_E \sim e^{3\omega\Omega}$.

La entropía total S del universo debe de estar relacionada con la energía de tal manera que la condición de adiabaticidad que derivamos anteriormente, se mantenga. Por lo tanto, si asociamos la entropía S_E y S_C a la energía extensiva y de Casimir respectivamente, dado el comportamiento de la energía que hemos establecido, concluimos que únicamente las expresiones $S_E \sim E_E e^{-3\omega\Omega}$ y $S_C \sim E_C e^{-3\omega\Omega}$ satisfacen esta condición. Más aún, considerando el comportamiento de las energías ante una transformación de escala, podemos derivar su dependencia en términos de la entropía. Estas expresiones se pueden escribir de manera conveniente como

$$E_E = \frac{\alpha}{4\pi} e^{3\omega\Omega} S^{1+\omega}, \quad E_C = \frac{\beta}{2\pi} e^{3\omega\Omega} S^{1/3+\omega}, \quad (3.21)$$

donde α y β son constantes arbitrarias (En TCC se tiene que $\sqrt{\alpha\beta} = 3$ como consecuencia de la correspondencia AdS/CFT). Así vemos que la entropía total se relaciona con la energía como [61]

$$S = \left[\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} e^{-3\omega\Omega} \sqrt{2E_E E_C} \right]^{\frac{3}{2+3\omega}}. \quad (3.22)$$

Esta expresión para S representa la generalización al caso anisotrópico del modelo Bianchi IX, de la fórmula original de Cardy-Verlinde, y se reduce a ésta sólo en el caso de un universo dominado por radiación, en concordancia con los resultados en [56].

La ecuación (3.22) define la entropía total de un universo descrito por un modelo tipo IX de Bianchi. Ésta recuerda a la entropía de un universo FRW. Cabría preguntar de que forma están presentes en esta expresión, los factores de escala que dependen del tiempo, pero de hecho no lo están. La razón es que en el análisis basado en la primera ley de la termodinámica, la forma explícita del volumen total V y del volumen físico v son cruciales y, como hemos visto, estos no dependen explícitamente de las funciones X y Y que son las que determinan las tres distintas tasas de expansión.

Hay que notar que para un valor fijo de E y ω positiva, la entropía (3.22) tiene un valor máximo, así que la cota dada por

$$S \leq \left[\frac{2\pi}{\sqrt{\alpha\beta}} E e^{-3\omega\Omega} \right]^{\frac{3}{2+3\omega}}, \quad (3.23)$$

se respeta. Ésta se vuelve la cota de Bekenstein, $S \leq S_B$ con $S_B = \frac{2\pi}{3} E e^{-\Omega}$ para un universo dominado por radiación con $\omega = 1/3$ y factor de normalización $\sqrt{\alpha\beta} = 3$.

Parcería por lo tanto apropiada la introducción de

$$S_B^{plt} = \left[\frac{2\pi}{3} E c^{-3\omega\Omega} \right]^{\frac{3}{2+3\omega}}, \quad (3.24)$$

como la entropía de Bekenstein que acota a la entropía total del modelo cosmológico de Bianchi tipo IX. El super índice "plt" representa que esta expresión para la entropía se obtuvo usando la primera ley de la termodinámica, y será útil al compararla con distintas expresiones que se derivarán en la siguiente sección. Si insertamos en la ecuación (3.24) la expresión para la energía total, encontramos que S_B^{plt} permanece constante durante la evolución cosmológica. Por lo tanto la entropía de Bekenstein representa una cota constante para la entropía del sistema.

3.3.3. La entropía a partir de TCC

La validez universal de la fórmula de Cardy para la entropía

$$S_C = 2\pi\sqrt{\frac{c}{6} \left(L_0 - \frac{c}{24} \right)}, \quad (3.25)$$

para TCC ha sido propuesta en [56] usando una definición de la carga central c en términos de la energía de Casimir. Intencionalmente hemos usado aquí la notación S_C para la entropía de Cardy con el fin de distinguirla de la entropía S derivada en la sección anterior por medio de la primera ley de la termodinámica. Supongamos ahora que esta fórmula para la entropía es válida para el modelo tipo IX de Bianchi. Entonces, independientemente de la ecuación de estado que gobierne la evolución de modelo cosmológico, se puede ver fácilmente que la restricción Hamiltoniana (3.10) coincide con la ecuación (3.25) si el valor propio L_0 del operador de Virasoro y la carga central c se eligen como

$$L_0 = \frac{1}{3} E \frac{\alpha_1}{\sqrt{1 + \epsilon^2/3}}, \quad c = \frac{3}{\pi G} \frac{V}{\alpha_1} \sqrt{1 + \epsilon^2/3}, \quad (3.26)$$

Más aún, la entropía de Cardy está relacionada con los parámetros de Hubble como

$$S_C = \frac{1}{2\sqrt{3}G} \sqrt{H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3} V. \quad (3.27)$$

Nótese que los valores explícitos dados en las Eqs.(3.26)-(3.27) pueden ser formalmente obtenidos aplicando la transformación

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$H \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3}, \quad a \rightarrow \frac{a_1}{\sqrt{1 + \epsilon^2/3}}, \quad (3.28)$$

sobre el parámetro de Hubble H y el factor de escala a del espacio-tiempo isotrópico de FRW. Escrita en esta forma, esta transformación parecería indicar la presencia de una dirección preferencial determinada por la homogeneidad en a_1 . Sin embargo, expresiones similares pueden ser escritas para a_2 y a_3 (con los cambios correspondientes en la definición de ϵ^2) así que cualquiera de las direcciones podría haber sido elegida. La dirección específica elegida para hacer la transformación (3.28) es solo cuestión de convención.

También debe de ser mencionado que una vez que se ha supuesto que la fórmula de Cardy (3.25) es válida para el modelo tipo IX de Bianchi, y hemos exigido que ésta represente la ecuación de campo (3.10), entonces la identificación de L_0 y c dada en (3.26) es única (modulo la convención ya mencionada).

De forma similar, la constricción Hamiltoniana (3.10) puede ser reescrita como la fórmula de Verlinde

$$S_H^2 - 2S_{BH}S_B + S_{BH}^2 = 0, \quad (3.29)$$

donde la entropía de Bekenstein, S_B , Hubble, S_H , y Bekenstein-Hawking, S_{BH} , están dadas por

$$S_B = \frac{2\pi}{3} \frac{E a_1}{\sqrt{1 + \epsilon^2/3}}, \quad (3.30)$$

$$S_{BH} = \frac{1}{2G} \frac{V}{a_1} \sqrt{1 + \epsilon^2/3}, \quad (3.31)$$

$$S_H = \frac{1}{2\sqrt{3}G} \sqrt{H_1 H_2 + H_1 H_3 + H_2 H_3} V. \quad (3.32)$$

Entonces, por analogía con otros trabajos (véase [61] para una lista de referencias) en los cuales la relación entre la fórmula de Cardy y las ecuaciones de campo han sido investigadas, proponemos a las expresiones (3.30)-(3.32) como las definiciones de las entropías para el modelo tipo IX de Bianchi. En el límite isotrópico ($\epsilon^2 = 0$) recuperamos las correspondientes entropías para el modelo FRW.

La ecuación (3.29) tiene la misma forma Pitagórica que la encontrada para el modelo FRW [56]. Ésto nos permite representar la evolución dinámica de las entropías como un círculo de radio S_B que, en contraste con el

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

caso de FRW, no es constante, sino que cambia con el tiempo. Como consecuencia, la evolución dinámica de las entropías definidas en (3.30)-(3.32), que está gobernada por las ecuaciones de campo (3.12), ya no queda determinada por las demás entropías, sino que depende de las características específicas del fluido. Por ejemplo, de las ecuaciones (3.30) y (3.31), usando las ecuaciones de campo (3.12) en la forma (3.13) se puede mostrar que

$$\frac{d}{dt}(S_B S_{BH}) = 3(\omega - 1)\Omega S_B S_{BH} . \quad (3.33)$$

Y por otro lado, de (3.29) obtenemos

$$\dot{S}_H = \frac{S_{BH}}{S_H} [3(\omega - 1)\Omega S_B - \dot{S}_{BH}] . \quad (3.34)$$

Éstas dos últimas ecuaciones determinan el comportamiento dinámico de las entropías que dependerá del valor específico de ω . El caso $\omega = 1$ puede ser fácilmente resuelto, pero no es particular interés para este trabajo.

Para obtener algo de intuición respecto a la estructura de estas entropías, se puede calcular la contribución para el caso especial en que se tienen sólo dos diferentes componentes de la métrica que dependan del tiempo.

Ésto se puede hacer considerando X infinitesimal ($X \ll 1$) y $Y = 0$. Entonces tenemos

$$S_B^a = S_B^i \left(1 + \frac{5}{2}X^2\right) , \quad (3.35)$$

$$S_{BH}^a = S_{BH}^i \left(1 - \frac{5}{2}X^2\right) , \quad (3.36)$$

$$S_H^a = S_H^i \left(1 - \frac{X^2}{2H^2}\right) , \quad (3.37)$$

donde los super índices a e i denotan las cantidades "anisotrópicas" e "isotrópicas" respectivamente.

Lo primero que se puede notar es que, debido a las anisotropías, la entropía de Bekenstein dada en la ecuación (3.30) no permanece constante a lo largo de la evolución temporal [cf. también en (3.35)].

Esto difiere del resultado obtenido en la sección pasada para la entropía de Bekenstein S_B^{int} que era una constante que sólo dependía de el tipo de fluido (i.e., depende de ω). Sin embargo, ambas entropías (3.24) y (3.30) se reducen en el caso límite $X = 0$, $Y = 0$, $\omega = 1/3$ a la entropía de Bekenstein para un universo de FRW dominado por radiación.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En términos de la entropía de Hubble S_H , y de la energía de Bekenstein-Hawking, E_{BH} , que se definen como

$$S_H = S_C, \quad E_{BH} = \frac{3}{4\pi G} \frac{V}{a_1^2} (1 + \epsilon^2/3), \quad (3.38)$$

la ecuación (3.25) para el modelo tipo IX de Bianchi, puede ser identificada con la fórmula cosmológica de Cardy

$$S_H = \frac{2\pi}{3} \frac{a_1}{\sqrt{1 + \epsilon^2/3}} \sqrt{E_{BH}(2E - E_{BH})}. \quad (3.39)$$

En un universo FRW dominado por radiación, la fórmula de Cardy-Verlinde (3.22) coincide con la fórmula cosmológica de Cardy (3.39), con E_{BH} tomando el papel de la energía de Casimir E_C . Esto no es cierto en nuestro caso general. Mientras la dependencia funcional en la fórmula cosmológica de Cardy (3.39) está dictada por la raíz cuadrada de las energías, independientemente de la ecuación de estado, esta dependencia funcional en la fórmula de Cardy-Verlinde (3.22) es diferente para cada ecuación de estado y se hace una raíz cuadrada sólo para el caso $\omega = 1/3$.

Consideremos por lo tanto sólo el caso dominado por radiación del universo Bianchi IX, para el cual la fórmula de Cardy-Verlinde (3.22) se expresa (tomando $\sqrt{\alpha\beta} = 3$ y usando la relación $E_E = (2E - E_C)/2$)

$$S = \frac{2\pi}{3} e^{-\Omega} \sqrt{E_C(2E - E_C)}, \quad (3.40)$$

Y para este caso investiguemos el límite cosmológico de la energía de Casimir

$$E_C \leq E_{BH} \quad (3.41)$$

postulado por Verlinde [56]. De la ecuación (3.20) vemos que $E_C \sim e^\Omega$ mientras que la entropía de Bekenstein-Hawking se comporta de acuerdo a $E_{BH} \sim e^{-\Omega - 2X - 2Y} (1 + \epsilon^2/3)$, según la ecuación (3.38).

Por lo tanto, la cota de Verlinde a la energía (3.41) se puede satisfacer pero aparece una diferencia en la saturación. Consideremos por ejemplo el caso aproximado ($Y = 0$, $X \ll 1$). Usando la expresión aproximada (3.36) obtenemos $E_{BH}^2 = (3/4\pi G)e^{-\Omega}(1 - 8X^2) = E_{BH}^i(1 - 8X^2) < E_{BH}^i$. Por otro lado, de acuerdo con la ecuación (3.20) $E_C^2 = E_C^i$. Dado que la cota $E_C \leq E_{BH}$ se mantiene y es saturada para un tamaño específico de un universo que se expande, entonces la cota $E_C \leq E_{BH}^2$ será la generalización al caso isotrópico.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como sea, dado $E_{BH}^a = E_{BH}^i(1 - 8X^2)$, la relación anterior para el caso anisotrópico implica que la desigualdad se saturará para un tamaño mayor, comparado con el caso isotrópico, el universo en expansión.

En el punto de saturación $E_C^a = E_{BH}^i$, sin embargo, la fórmula de Cardy-Verlinde (3.40) no coincide con la fórmula cosmológica de Cardy (3.39), dada la presencia de varios factores de escala en la última fórmula. De hecho, para el caso aproximado obtuvimos que $S_H = S(1 + 5/2X^2)$, y la coincidencia falla.

3.4. Conclusiones del capítulo tercero

La importancia del principio holográfico en el problema de la transición campo partícula se ha expuesto en el presente capítulo, y fue la motivación para iniciar el estudio del ejemplo que se describe en la sección (3.3). El objetivo concreto de encontrar la teoría en la frontera a la que se le pudiera aplicar el procedimiento de cuantización topológica no se alcanzó. Más investigación es necesaria en este sentido, quizás con otros ejemplos u otras teorías donde sea más clara la aplicación de principio holográfico.

Sin embargo, el estudio del modelo tipo IX de Bianchi tuvo algunos resultados interesantes por sí mismos.

Nuestra intención se centraba en entender cuales eran las teorías entre las que estableceríamos una equivalencia por medio del principio holográfico. Nuestro primer paso en ese sentido fue definir las entropías asociadas con configuraciones gravitacionales dependientes del tiempo, empezamos por esto ya que en la literatura ya había trabajo previo sobre temas relacionados. A lo largo de nuestro trabajo encontramos tales entropías para el modelo tipo IX de Bianchi. Dado que este modelo se considera la generalización anisotrópica del modelo de FRW cerrado, estas entropías deben de ser la modificación adecuada por la presencia de varias componentes de la métrica que dependen del tiempo.

Primero supusimos que este modelo satisfacía la primera ley de la termodinámica, y obtuvimos la expresión para la entropía, que generaliza la fórmula de Cardy-Verlinde a estos modelos. Es notable que esta entropía se mantiene constante en la evolución dada la ley de conservación de la energía y la misma primera ley de la termodinámica.

Después supusimos la validez universal de la fórmula de Cardy para la entropía y mostramos que coincide con la restricción Hamiltoniana de las ecuaciones de campo. Lo que nos permitió considerar la fórmula cosmológica de Cardy (3.39) y definir las entropías de Bekenstein, Bekenstein-Hawking

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

y Hubble. La primera consecuencia fue que estas entropías dependen de las diferentes componentes de la métrica.

Una generalización automática para el caso anisotrópico dominado por radiación de la cota de Verlinde para la energía, ($E_C^a \leq E_{BH}^a$), indica que la saturación ocurre para un universo más grande que para el caso isotrópico. También hemos mostrado que la fórmula de Cardy-Verlinde (3.40) y la fórmula cosmológica de Cardy (3.39) no coinciden cuando la desigualdad se satura en ($E_C^a = E_{BH}^a$).

Por otro lado, nosotros sólo hemos analizado el modelo tipo IX de Bianchi. Parece razonable esperar que los resultados obtenidos aquí puedan ser generalizados para incluir otros modelos tipo A de Bianchi [65]. Más aún, los resultados presentados en este capítulo pueden, en principio, ser generalizados para cualquier número de dimensiones con varios componentes de la métrica que dependan del tiempo. Aún así, las expresiones para la entropía (3.22) y (3.24) se reducen a la fórmula original de Cardy-Verlinde sólo para universos dominados por radiación. Un paso siguiente sería tratar de extender los resultados que aquí se obtuvieron para varios componentes gravitacionales dependientes del tiempo, a su estudio en relación con campos materiales más generales [66, 61, 62, 63]. Esto permitiría el estudio de otros sistemas físicos interesantes, como SD-branas [67], que son el tipo de objetos que se construyen por medio de métricas con componentes dependientes del tiempo y que aparecen de forma natural en la teoría de cuerdas.

En un futuro tendremos que continuar con nuestra intención de aplicar el procedimiento de cuantización topológica entre teorías equivalentes. Sabemos que una elegante propuesta se ha hecho para establecer una correspondencia AdS/CFT [54] (véase también [68] para una revisión) en la cual se empieza con una métrica de Schwarzschild AdS₅ y por medio de especificar la localización de una brana en su forma paramétrica, se puede inducir sobre ésta la métrica de un universo FRW dominado por radiación. En [69] y [70] esto se ha generalizado para incluir agujeros negros cargados asintóticamente planos o AdS. Los modelos con varios factores de escala han sido menos explorados. Sin embargo, una descripción geométrica de mundo-brana del modelo Bianchi VI₋₁ fue obtenida en [71] a partir de otras soluciones a las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica negativa en cinco dimensiones. Aún así, la búsqueda de métricas estáticas en mayores dimensiones por medio de las que se pueda obtener el modelo IX de Bianchi en la brana es cuestión de trabajo futuro.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Capítulo 4

Conclusiones generales

La conclusión principal de esta tesis es que sí se pueden observar indicios de comportamiento cuántico dentro del marco de teorías clásicas. En particular, la discretización de algunos parámetros involucrados en soluciones clásicas, es un paso muy importante en el problema de la transición campo partícula, ya que en las configuraciones de campo, los parámetros que deberían estar asociados con las características básicas de una partícula, como masa, carga, etc., toman valores en un continuo, mientras que para el caso de la partícula, sólo adoptan valores discretos.

La forma de abordar este problema propuesta aquí, fue por medio del análisis topológico y geométrico de los sistemas clásicos a ser considerados. Con este objetivo, dos métodos fueron expuestos, y cada uno de ellos aportó algún elemento de interés para el estudio.

El análisis de fases realizado en el primer capítulo hizo posible concluir que aún las configuraciones gravitacionales clásicas pueden comportarse, ante rotaciones, solamente como bosones o como fermiones. Con éste mismo procedimiento, pudimos establecer la existencia genérica de condiciones de cuantización para una amplia gama de métricas y configuraciones que satisfacen algunos requisitos de simetría. En el contexto de la teoría de geones, ya sean topológicos o gravitoelectromagnéticos, este es un resultado importante, ya que estas características son necesarias en la construcción de un modelo adecuado de partículas elementales.

Para determinar de manera exacta este método aún hace falta la definición de la integral de dos-formas con componentes endomórficos, que es un problema interesante en sí mismo. Para la obtención explícita de las condiciones de cuantización, es necesaria tal definición, pero el resultado del comportamiento fermiónico y bosónico, es independiente de los detalles de

ésta.

En este sentido, la ventaja que presenta el planteamiento del segundo capítulo, es que su definición es precisa y tiene una amplia gama de aplicación. Por medio de este segundo enfoque, nos hemos dado cuenta de que la discretización de las configuraciones clásicas puede ser consecuencia del acoplamiento que tengan estas configuraciones, con los campos de norma asociados a diversas teorías. Nuevamente, en el contexto de geones, esto es importante, ya que cualquiera que sea la naturaleza y constitución de los geones que representen partículas elementales, estos interactuarán con distintos campos de norma, y en consecuencia, deben de ser fuentes de tales campos también. Lo que podríamos esperar a partir de esto, es que las características discretas que presentan las partículas elementales, fueran correctamente reproducidas por modelos de geones al ser sujetos al análisis del segundo capítulo.

Complementario a los dos primeros, el tercer capítulo discute el principio holográfico con el fin de buscar comportamientos cuánticos en sistemas clásicos inducidos por una teoría que los represente en un espacio de configuraciones en el que el comportamiento cuántico sea inherente. En términos de lo que hemos desarrollado nosotros, podríamos aplicar cualquiera de los dos métodos descritos en esta tesis, a la teoría en la frontera ∂B , obtener resultados de cuantización para esta teoría, y después transferirlos a la teoría en el volumen B por medio del principio holográfico. Desde luego el proceso también podría ir en el sentido inverso. Esto nos permite un poco más de libertad, ya que hay situaciones en las que no es claro que los métodos que hemos descrito, impongan condiciones de cuantización útiles en un sistema, así que para estos casos, podríamos investigar si alguna teoría asociada por medio del principio holográfico es susceptible de la aplicación de nuestro método. Si es así, podemos obtener las condiciones de cuantización para la configuración $\bar{\varphi}$ asociada a nuestra configuración original φ , y verificar si las condiciones de cuantización que se inducen sobre nuestro sistema original son más transparentes o están más claramente relacionadas con las características discretas que éste debería de presentar para ser un modelo de alguna entidad física.

Qué tanto del comportamiento cuántico de la naturaleza se puede recuperar a partir de estas consideraciones topológicas y geométricas, es algo que aún no queda claro, pero la investigación en este sentido se ve motivada por los primeros resultados obtenidos en esta tesis. Es necesario considerar sistemas más generales para aplicar el método, donde con seguridad, al implementarlo, se vean necesidades nuevas para el análisis, que se reflejarán en resultados más realistas, quizás aproximándonos a una descripción

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

geométrica del comportamiento cuántico de las partículas elementales.

En resumen los resultados obtenidos en este trabajo son los siguientes:

1) Se introdujo un objeto tipo fase en términos de la curvatura del espaciotiempo, mediante el cual demostramos que pueden existir configuraciones gravitacionales con parámetros que toman solamente valores discretos. Las configuraciones gravitacionales presentan solamente dos tipos de comportamiento ante rotaciones: bosónico o fermiónico. Aunque no fue posible dar una definición exacta de la integral de una dos-forma endomórfica para calcular explícitamente el objeto tipo fase, se presentaron dos diferentes alternativas, una de las cuales llevó de forma inesperada a valores relacionados con el radio clásico de partículas elementales. Sería interesante continuar este trabajo para ver si es posible construir de esta manera un "modelo gravitacional del radio clásico de las partículas elementales". Una parte de los resultados obtenidos en este contexto se publicaron en los siguientes artículos:

– *Bosonic and fermionic behavior in gravitational configurations* (L. Patiño and H. Quevedo), *Modern Physics Letters A* **18** 1331 (2003).

– *Quantum effects from topological conditions in solutions to Einstein equation* (L. Patiño), *Proceedings of the IV Workshop on Gravitation and Mathematical Physics*, *Revista Mexicana de Física* (2003), en prensa.

2) Se introdujo el método de cuantización topológica de manera general y se aplicó al caso del campo de un monopolo gravitomagnético en la teoría linealizada de Einstein, a la energía C de espaciotiempos con simetría cilíndrica y a los agujeros negros de Reissner-Nordström y Kerr-Newman. En cada uno de estos casos se obtuvieron condiciones de cuantización que discretizan los posibles valores de los parámetros que determinan cada una de las métricas. Los resultados de esta investigación se encuentran en proceso de redacción, aunque algunas ideas al respecto fueron sintetizadas en el artículo:

– *The field-to-particle transition problem* (J. Cortez, L. Patiño and H. Quevedo), in *Proceedings of the First Mexican School on Experimental and Theoretical Physics*, Eds. A. Macias *et. al.*, (Kluwer Publishers, 2002).

3) Se introdujo el concepto de mapeo holográfico que permite clasificar los ejemplos conocidos donde se ha aplicado el principio holográfico. Aplicamos el principio holográfico, expresado mediante la fórmula de Cardy-Verlinde, al caso del modelo cosmológico Bianchi tipo IX y propusimos expresiones para las entropías de Bekenstein, Bekenstein-Hawking y Hubble. Estos resultados han sido publicados parcialmente en el artículo:

– *Towards the entropy of gravity time-dependent models via the Cardy-Verlinde formula* (O. Obregón, L. Patiño and H. Quevedo), *Physical Review*

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

D (2003), en prensa.

Por último quisiera mencionar que en cada uno de los temas abordados en este trabajo han quedado muchas preguntas sin resolver y al mismo tiempo se han propuesto proyectos de investigación que habrán de ser desarrollados en el futuro próximo. Nuestros resultados han aportado nuevos métodos de análisis del problema de la transición campo partícula.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndice A

Apéndice matemático

Recordemos que una forma diferencial con componentes endomórficos, es una forma diferencial

$$\Omega = \omega_\mu dx^\mu, \quad (\text{A.1})$$

donde dx^μ es una base del espacio de formas diferenciales, y cada una de las componentes ω_μ es un endomorfismo. Un endomorfismo es un mapeo lineal de un espacio vectorial V en sí mismo, así que cada componente de la forma diferencial Ω es un mapeo de este estilo. Estos mapeos se pueden representar de distintas maneras, es usual representarlos por matrices, en cuyo caso cada componente ω_μ será una matriz representada por sus entradas correspondientes, $\omega_{\beta\mu}^\alpha$, con α y β tomando valores desde uno hasta la dimensión de V , y μ desde uno hasta la dimensión del espacio de unoformas¹.

Debemos de mencionar que las formas diferenciales con componentes endomórficas se pueden escribir también como matrices cuyas entradas son formas diferenciales. Desde luego el resultado de cualquier cálculo es independiente de la manera en que se escriban estos objetos. En esta tesis nos apegaremos al estilo que describimos primero.

Un ejemplo de forma diferencial con componentes endomórficas es el tensor de Riemann $R_{\beta\mu\nu}^\alpha$, que en particular es una dos-forma. Los índices μ y ν son externos (aquellos que denotan en carácter de dos-forma), por otro lado α y β son internos (se refieren al carácter endomórfico). En este caso el espacio de formas diferenciales es el de las dos-formas, para el cual podemos usar la base $dx^\mu \wedge dx^\nu$, y el espacio V sobre el que actúan los endomorfismos es el espacio tangente a la variedad T_p en cada punto p , por lo que una base para

¹En relatividad es usual que los índice corran desde cero hasta $\text{dim}-1$.

los endomorfismos es $\partial_\alpha \otimes dx^\beta$ [17]. Con esto vemos que los componentes $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ representan la dos-forma con componentes endomórficas \mathbf{R} dada por

$$\mathbf{R} = R^\alpha_{\beta\mu\nu}(\partial_\alpha \otimes dx^\beta)(dx^\mu \wedge dx^\nu). \quad (\text{A.2})$$

Quando el primer índice se hace covariante el carácter endomorfo se pierde. Nuestra convención será que al hacer esto, el índice originalmente contravariante se coloca a la extrema izquierda.

Recordemos que una tetrada es una base semiortonormal de uno-formas e^a con $(a = 0, 1, 2, 3)$. Cada una de éstas cuatro uno-formas se escribe en términos de las uno-formas coordenadas como $e^a = e^\mu_a dx^\mu$, y sus componentes cumplen con la relación de semiortonormalidad

$$e^\alpha_\mu g^{\mu\nu} e^b_\nu = \eta^{ab}, \quad (\text{A.3})$$

introduciendo así la métrica local $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, +1 +1 +1)$.

Visto como un arreglo e^μ_a describe el tensor del cambio de la base de vectores coordenados ∂_μ , a la base de vectores semiortonormales e_a , que se escriben en términos de la base coordenada como $e_a = e^\mu_a \partial_\mu$, y sus componentes cumplen con la relación

$$e^\mu_a g_{\mu\nu} e^b_\nu = \eta_{ab}. \quad (\text{A.4})$$

De manera análoga a e^μ_a , el arreglo e^μ_a describe el tensor del cambio de la base de uno-formas coordenadas dx^μ a la base semiortonormal e^a . De (A.3) y (A.4) se sigue que $e^\mu_a e^\nu_a = \delta^\mu_\nu$.

Quando hablamos de los tensores de cambio de base, nos referimos a que un vector V se escribe en términos de las distintas bases como

$$V = V^\mu \partial_\mu = V^a e_a = V^a e^\mu_a \partial_\mu, \quad (\text{A.5})$$

es decir que las componentes están relacionadas por

$$V^\mu = e^\mu_a V^a \quad \text{o equivalentemente} \quad V^a = e^\mu_a V^\mu. \quad (\text{A.6})$$

Para las componentes de las uno-formas se cumplen las relaciones

$$\omega_\mu = e^\alpha_\mu \omega_\alpha \quad \text{y} \quad \omega_\alpha = e^\mu_\alpha \omega_\mu. \quad (\text{A.7})$$

En esta tesis se usan índices latinos, a, b, c , etc. para denotar componentes respecto a la tetrada, e índices griegos μ, ν, α , etc. para los componentes respecto a la base coordenada. Así por ejemplo, para el tensor de Riemann

escrito como $R_{b\mu\nu}^a$, los índices internos están en términos de la tetrada mientras que los externos en términos de la base coordenada de dos-formas, i.e.

$$\mathbf{R} = R_{b\mu\nu}^a (e_a \otimes e^b)(dx^\mu \wedge dx^\nu). \quad (\text{A.8})$$

Después de ver esta expresión vale la pena notar que, como se pone de manifiesto en ella, es posible utilizar bases distintas para el espacio V sobre el que actúan los endomorfismos y el espacio de formas diferenciales, a pesar de que V y el espacio base del álgebra exterior sean el mismo.

Recordemos ahora que un haz fibrado está constituido por los elementos (E, B, F, Π, G) , donde

- i. E es el espacio total,
- ii. B es el espacio base, con un proyector $\Pi : E \rightarrow B$,
- iii. F es la fibra estandar y
- iv. G es un grupo que actúa sobre la fibra.

Un punto p en el espacio total E esta representado por el par (b, f) con b un punto en el espacio base y f un punto en la fibra. Si el espacio total E es homomórfico al espacio dado por el producto cartesiano de B y F , $B \otimes F$, entonces se trata de un haz fibrado trivial. Menos restrictiva que esta característica es la de trivialidad local, que consiste en que el espacio base B tenga una cobertura de conjuntos abiertos U_i tales que la fracción de E dada por los puntos que cumplan con $\Pi(p) \in U_i$ sea homomorfica al espacio $U_i \otimes F$. Los espacios que nos interesan en esta tesis son triviales localmente pero no globalmente. Para hacer las identificaciones pertinentes entre los puntos de $U_i \otimes F$ y $U_j \otimes F$ se definen funciones de transición $\gamma_{i \rightarrow j} : U_i \cap U_j \rightarrow G$ que asocian a cada punto de $U_i \cap U_j$ un elemento del grupo G que mapea la fibra en si misma, identificando el punto (b, f) en $U_i \otimes F$ con el punto $(b, \gamma_{i \rightarrow j}(b)f)$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndice B

La curvatura de la métrica de Kerr-Newman

A continuación listamos las componentes del tensor de Riemann distintas de cero que se usaron en la sección 1.5.4.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$R_{r\theta\phi}^t = (\alpha(-9a^6M - a^4e^2M - 40a^4e^2r - 8a^2e^4r + 2a^4m^2r + 43a^4Mr^2 + 28a^2e^2Mr^2 - 72a^2e^2r^3 - 24a^2M^2r^3 + 100a^2Mr^4 - 32e^2r^5 + 48Mr^6 - 4a^2(2a^4M + a^2r(-2e^2 + 7mr) + r(-2e^4 + e^2(7m - 2r)r + Mr^2(-6M + 5r))) \cos 2\theta + a^4M(a^2 + e^2 - 2Mr + r^2) \cos 4\theta) \text{sen} 2\theta) / (16\Delta\Sigma^3),$$

$$R_{\theta\theta\phi}^t = -(4a(a^2 + r^2)(r^2(2e^2 - 3mr) + a^2(-4e^2 + 9mr) \cos^2\theta) \text{sen}^2\theta) / 4\Sigma^3,$$

$$R_{t\theta\phi}^r = \alpha\Delta(-5a^2 - 4r^2 + a^2 \cos 2\theta)(a^2M + 4e^2r - 6Mr^2 + a^2m \cos 2\theta) \times \text{sen} 2\theta / 8\Sigma^4,$$

$$R_{\phi\theta\phi}^r = (24a^2(a^2 + r^2)\Delta \cos \theta(a^2M + 4e^2r - 6Mr^2 + a^2M \cos 2\theta) \text{sen}^3\theta) / 16\Sigma^4,$$

$$R_{t\theta\phi}^0 = (\alpha(a^4(4e^2 - 9Mr) + a^2(e^4 - 5e^2Mr + 3M(2M - r)r^2) - 2r^2(e^4 + M(2M - 3r)r^2 + e^2r(-3M + 2r)) + a^2(e^4 + 3M(2M - 3r)r^2 + e^2r(-5M + 4r) + a^2(4e^2 - 9Mr)) \cos 2\theta) \text{sen}^2\theta) / 2\Sigma^4,$$

$$R_{\phi\theta\phi}^0 = (-13a^6e^2 - a^4e^4 + 27a^6Mr + 5a^4e^2Mr - 13a^4e^2r^2 + 4a^2e^4r^2 - 6a^4M^2r^2 + 31a^4Mr^3 - 12a^2e^2Mr^3 + 8a^2e^2r^4 + 8a^2M^2r^4 - 12a^2Mr^5 + 8c^2r^6 - 16Mr^7 - 4a^2(a^2r^2(7e^2 - 13Mr) + 3a^4(e^2 - 2Mr) + r^2(e^4 + M(2M - 7r)r^2 + e^2r(-3M + 4r))) \cos 2\theta + a^4(e^2 - 3Mr)\Delta \cos 4\theta) \times$$

$$R_{r\theta\phi}^{\phi} = -(a^2(3a^2 + e^2 + r(-2M + 3r))(a^2M + 4e^2r - 6Mr^2 + a^2M \cos 2\theta)\sin 2\theta/4\Delta\Sigma^3,$$

$$R_{\theta\theta\phi}^{\phi} = (13a^4e^2 - 27a^4Mr - 4a^2Mr^3 - 8e^2r^4 + 16Mr^5 + 4a^2(r^2(4e^2 - 7Mr) + 3a^2(e^2 - 2Mr)) \cos 2\theta - a^4(e^2 - 3Mr) \cos 4\theta)/8\Sigma^3.$$

Algunas de estas entradas se anulan al ser integradas sobre θ y ϕ , las distintas de cero son

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R_{\theta\theta\phi}^t d\theta d\phi = \frac{-a\pi^2(a^2e^2 + 4e^2r^2 - 6Mr^3)}{2r^3\sqrt{a^2 + r^2}},$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R_{t\theta\phi}^{\theta} d\theta d\phi = (a\pi^2(3a^6(e^2 - Mr) + 4r^4(e^4 + M(2M - 3r)r^2 + e^2r(-3M + 2r)) + a^4(2e^4 + 2M(M - 6r)r^2 + e^2r(-5M + 11r)) + a^2r^2(5e^4 + 3M(2M - 7r)r^2 + e^2r(-13M + 16r))))/4r^5(a^2 + r^2)^{5/2},$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R_{\phi\theta\phi}^{\theta} d\theta d\phi = (\pi^2(4r^6(e^2 - 2Mr) + 3a^6(e^2 - Mr) + a^4(2e^4 + 2M(M - 6r)r^2 + e^2r(-5M + 9r)) + a^2r^2(3e^4 + M(6M - 17r)r^2 + e^2r(-9M + 10r))))/4r^5(a^2 + r^2)^{3/2},$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R_{\theta\theta\phi}^{\phi} d\theta d\phi = -(\pi^2(8a^6e^2r^2 - 3a^8(e^2 - 3Mr) + 16a^2r^6(2e^2 - 3Mr) + 32r^8(e^2 - 2Mr) + 8a^4r^4(e^2 + 2Mr)))/(16r^5(a^2 + r^2)^{5/2}).$$

Al calcular los valores propios de este arreglo obtenemos $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -\lambda_4$ y λ_4 dado por

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\lambda_4 = (\pi^4((8a^6e^2r^2 - 3a^8(e^2 - 3Mr) + 16a^2r^6(2e^2 - 3Mr) + 32r^8(e^2 - 2Mr) + 8a^4r^4(e^2 + 2Mr))(4r^6(e^2 - 2Mr) + 3a^6(e^2 - Mr) + a^4(2e^4 + 2M(M - 6R)r^2 + e^2r(-5M + 9r)) + a^2r^2(3e^4 + M(6M - 17r)r^2 + e^2r(-9M + 10r))) + 8a^2r^2(a^2 + r^2)(a^2e^2 + 4e^3r^2 - 6Mr^3)(3a^6(e^2 - Mr) + 4r^4(e^4 + M(2M - 3r)r^2 + e^2r(-3M + 2r)) + a^4(2e^4 + 2M(M - 6r)r^2 + e^2r(-5M + 11r)) + a^2r^2(5e^4 + 3M(2M - 7r)r^2 + e^2r(-13M + 16r)))))/256r^{10}(a^2 + r^2)^4$$

Al sustituir los valores de masa, carga y espín de las distintas partículas, y usar estos valores de λ_3 y λ_4 en las condiciones de cuantización (1.14) con $n = 0$, se obtienen los radios del cuadro (1.1).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndice C

Introducción a los modelos sigma y mapeos armónicos

Los modelos sigma no lineales (MSNL) son un importante laboratorio teórico en el contexto de la teoría de campos, en particular, para aquellas definidas sobre espacios (semi)Riemannianos simétricos, ya que éstos cumplen con las condiciones de integrabilidad de la teoría clásica[72](admiten un número infinito de leyes de conservación y son ejemplos de teorías de campo totalmente integrables). Los MSNL están, en muchos sentidos, estrechamente relacionado con teorías de Yang-Mills y tienen puntos en común con QCD[73](en espacio-tiempos $1+1$, algunos de estos modelos tienen libertad asintótica[74] e instantones[75]). Las ecuaciones de Einstein para algunos campos gravitacionales, por ejemplo, los axisimétricos estacionarios, ondas gravitacionales de Einstein-Rosen, modelos cosmológicos de Gowdy T^3 y $S^1 \times S^2$, etc., están relacionadas con las ecuaciones de MSNL en espacio-tiempos $1+1$ [76]. Los MSNL también aparecen en teoría de cuerdas y las similitudes entre los campos gravitacionales y los campos de MSNL son suficientes para hacerlos modelos de juguete interesantes para gravedad cuántica.

A grandes rasgos, un MSNL es una teoría de campos de mapeos entre variedades que cumple con las siguientes propiedades: (a) los campos están sujetos a constricciones no-lineales y (b) la densidad Lagrangiana y las constricciones son invariantes ante la acción de un grupo (de Lie) G de simetría global. Más precisamente[72, 77], las configuraciones de campo clásicas en esos modelos son mapeos $\phi : B \rightarrow M$, donde B es un espacio base dado y M un espacio objetivo dado. El calificativo no-lineal se reserva para aquellos modelos en los que los campos físicos toman, para todo punto p en B ,

valores en una variedad (Riemanniana) M que no es un espacio lineal. Esta restricción es para garantizar que la energía sea positiva en los MSNL. Dado que cualquier variedad Riemanniana se puede encajar isométricamente en un espacio vectorial Euclideo E , la densidad Lagrangiana del modelo (escrita en términos de campos con valores en E) debe de ser complementada con las constricciones que indiquen que los campos con valores en E deben de restringirse a la subvariedad dada por el encaje de M . En la mayoría de estos modelos el grupo de simetría global G actúa de manera transitiva en M , y de hecho supondremos que éste es el caso (de tal manera que M es un espacio Riemanniano para G). Si H es el grupo de estabilidad de el punto $m \in M$, entonces M se puede identificar con el espacio cociente G/H (i.e. $M = gH, g \in G$).

Existen métodos generales para construir Lagrangianos para estas teorías, la idea es simplemente representar las configuraciones de campo del modelo, no por mapeos $\phi : B \rightarrow M$ sino por mapeos $g : B \rightarrow G$, con $\phi(x) = g(x)H$. Ahora bien, el Lagrangiano en cualquier modelo no lineal es una función de g y de $\partial_\mu g$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}(g, \partial_\mu g)$, que es invariante ante una transformación de norma

$$g(x) \rightarrow h(x)g(x), h(x) \in H, \quad (C.1)$$

así que los campos invariantes de norma toma valores en G/H y la densidad Lagrangiana puede ser considerada una función de los campos en G/H .

La construcción de \mathcal{L} es como sigue. Tomemos G una representación legítima de (el grupo de simetría global) un grupo de Lie compacto y semisimple, y $\{b(\rho)\}$ una base del álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo G con la propiedad siguiente: $\text{Tr}(b(\rho)b(\sigma)) = \delta_{\rho,\sigma}$ ($\rho, \sigma = 1, \dots, [G] := \dim G$). Para $\alpha \leq [H] := \dim H$, los generadores $b(\alpha)$ se eligen tales que generen el álgebra de Lie \mathfrak{h} del grupo H , y los denotaremos por $t(\alpha)$. Los demás generadores los llamamos $s(i)$ con $[H] + 1 \leq i \leq [G]$. Así que las relaciones de conmutación son

$$\begin{aligned} [t(\alpha), t(\beta)] &= i f_{\alpha\beta\gamma} t(\gamma), \\ [t(\alpha), s(i)] &= i \bar{f}_{\alpha ij} s(j), \\ [s(i), s(j)] &= i (\bar{f}_{\alpha ij} t(\alpha) + f_{kij} s(k)). \end{aligned} \quad (C.2)$$

Llamemos ω a la uno-forma definida en B con componentes $\omega_\mu(g(x)) = g^{-1}(x) \partial_\mu g(x)$, sobre la cual una transformación de norma de la forma (C.1), actúa como

$$\omega_\mu(gh) = h\omega_\mu h^{-1} + h\partial_\mu h^{-1}. \quad (\text{C.3})$$

No es difícil ver que podemos escribir ω_μ como la suma de dos términos, que de hecho son las proyecciones de ω_μ sobre el álgebra \mathfrak{h} y su complemento ortogonal,

$$\omega_\mu = A_\mu + B_\mu, \quad (\text{C.4})$$

con $A_\mu(g) = t(\alpha)\text{Tr}(t(\alpha)\omega_\mu(g))$ y $B_\mu(g) = s(i)\text{Tr}(s(i)\omega_\mu(g))$. Una transformación de norma actúa sobre estas componentes de acuerdo con

$$A_\mu(gh) = hA_\mu h^{-1} + h\partial_\mu h^{-1}, \quad B_\mu(gh) = hB_\mu h^{-1}. \quad (\text{C.5})$$

Vale la pena notar que tenemos la estructura de un haz fibrado principal con espacio total $E = G$, espacio base $B = G/H$, fibra $F \simeq H$, grupo de estructura $G = H$ y proyector $\Pi : G \rightarrow G/H, g \mapsto [g]$. Por construcción todos los campos tienen valores en G y los campos físicos en G/H . Dada esta estructura, la uno-forma A con componentes A_μ se transforma como un potencial de norma para el grupo H , y por lo tanto actúa como una conexión. Este A , definido sobre el espacio base ya que explícitamente es $A[g(x)]$, es precisamente el campo de norma que utilizamos en la sección (2.4.3). A partir de esta conexión, podemos definir la dos-forma de curvatura F , sobre la cual una transformación de norma del tipo (C.1) actúa como $F' = h^{-1}Fh$.

Los objetos descritos nos permiten escribir diferentes funciones que satisfacen los requisitos para ser una densidad Lagrangiana de un MSNL, por ejemplo

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}g^{\mu\nu}\text{Tr}(B_\mu B_\nu), \quad (\text{C.6})$$

y

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}g^{\mu\tau}g^{\nu\rho}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\tau\rho}), \quad (\text{C.7})$$

donde $g^{\mu\nu}$ son las componentes de la métrica sobre B tomando coordenadas locales x^μ , y g es su determinante. Hay que notar que, como se hizo en la sección (2.4.3), podría tomarse al espacio B como el espacio-tiempo.

Si un campo es invariante de norma, entonces se puede escribir como

$$\Phi = g\left(\sum_{\alpha} t(\alpha)\right)g^{-1}. \quad (\text{C.8})$$

Dado que el lado derecho de (C.8) está en el álgebra de Lie \mathfrak{g} , se puede expresar como una combinación de elementos de la base

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$g\left(\sum_{\alpha} t(\alpha)\right)g^{-1} = \sum_{\rho} \phi_{\rho} b(\rho), \quad (\text{C.9})$$

donde los ϕ_{ρ} son campos físicos.

Dada (C.9) y que los generadores de \mathfrak{g} están normalizados, se puede mostrar que se cumple la relación

$$\sum_{\alpha} \text{Tr}(t(\alpha)t(\alpha)) = \sum_{\rho} \phi_{\rho}^2 \text{Tr}(b(\rho)b(\rho)). \quad (\text{C.10})$$

De la ecuación (C.10) se sigue que los campos ϕ_{ρ} están sujetos a restricciones no lineales y que sólo hay $[G]-1$ campos físicos independientes. La variedad M en que los campos pueden tomar valores, está definida por la ecuación (C.10), y dado el carácter no lineal de la relación, no es un espacio vectorial.

Como habíamos dicho antes, un aspecto interesante de los modelos sigma es que en algunos casos se puede hacer que las ecuaciones de Euler-Lagrange para (C.6) o (C.7) sean equivalentes a las ecuaciones de otras teorías, por ejemplo a las ecuaciones de Einstein para familias de métricas con dos vectores de Killing[76]. En estos casos es posible que el modelo sigma correspondiente tenga una relación con la teoría que representa más allá de una mera equivalencia entre las ecuaciones, de hecho se ha probado que existe incluso equivalencia a nivel de la densidad Lagrangiana[42]. Pensando en esta equivalencia es que en el segundo capítulo se pensó en introducir la conexión dada por el modelo sigma.

Esta característica de equivalencia entre ecuaciones es un caso particular de lo que se conoce como mapeos armónicos. Para definir lo que es un mapeo armónico supongamos que tenemos una variedad M con coordenadas x^{μ} y elemento de línea $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}$ y otra variedad N , con coordenadas Z^A y elemento de línea $dS^2 = G_{AB} dZ^A dZ^B$. Establezcamos un mapeo $Z : M \rightarrow N$ por medio de expresar $Z^A(x^{\mu})$. Definimos la acción dada por

$$I = \int \sqrt{-g} d^m x g^{\mu\nu} Z_{,\mu}^A Z_{,\nu}^B G_{AB}(Z(x)), \quad (\text{C.11})$$

con m la dimensión de M .

Al mapeo representado por $Z^A(x^{\mu})$ se le llama armónico si las ecuaciones de Euler-Lagrange que resultan de anular la variación de (C.11) son ecuaciones de geodésicas funcionales en N , es decir si se escriben como

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} Z_{,\mu}^A)_{,\nu} + \Gamma_{BC}^A Z_{,\mu}^B Z_{,\nu}^C g^{\mu\nu} = 0, \quad (\text{C.12})$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde Γ_{BC}^A son los símbolos de Christoffel asociados a la métrica G_{AB} . Hay que notar que esta definición es para $g_{\mu\nu}$ y G_{AB} arbitrarias.

A través de éste tipo de mapeos se pueden buscar equivalencias entre diferentes teorías, por ejemplo, al tomar M como el espacio tiempo, la anulación de la acción de Hilber-Einstein

$$I_{HE} = \int d^4x (\sqrt{-g}R + \mathcal{L}_{mat}) \quad (C.13)$$

define las ecuaciones de Einstein en M

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (C.14)$$

Ahora podemos preguntarnos si existe una métrica G_{AB} en N tal que las ecuaciones (C.12) sean equivalentes a (C.13). En general esta pregunta se analiza para familias específicas de métricas en M , y los métodos de construcción de G_{AB} son muy diversos.

Cuando se encuentra tal G_{AB} , se dice que las ecuaciones de Einstein se reescriben como geodésicas funcionales en el espacio N [78].

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Bibliografía

- [1] W. K. Clifford, Proc. Cambridge Phil. Soc. **2**, 157 (1876).
- [2] E. T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity*, (Tomash Publishers, American Institute of Physics, 1987).
- [3] A. Einstein y N. Rosen, *Phys. Rev.* **48** 73 (1935).
- [4] J. A. Wheeler, *Geons, Black Holes & Quantum Foam*, (W. W. Norton & Company, 1998).
- [5] J. A. Wheeler, *Phys. Rev.* **97** 511 (1955).
- [6] R. Sorkin, *J. Phys.* **A10** 717 (1977).
- [7] R. D. Sorkin, "Introduction to Topological Geons" *Topological Properties and Global Structure of Spacetime*, (Plenum, New York, 1986).
- [8] J. L. Friedman and R. D. Sorkin, *Phys. Rev. Lett* **44** 1100 (1980); *Gen. Relativ. Gravit.* **14** 615 (1982).
- [9] C. Aneziris, A. P. Balachandran, M. Bourdeau, S. Jo, T. R. Ramadas y R. Sorkin, *Mod. Phys. Lett.* **A4** 331(1989).
- [10] A. Balachandran, "Topological Aspects of Quantum Gravity" *Proc. of the DST Workshop in Particle Physics, Superstring Theory*, Kanour, December 1987 (World Scientific).
- [11] M. J. Hadley, *Found. Phys. Lett.* **10** 43 (1996).
- [12] M. J. Hadley, *Int. J. Theor. Phys.* **38** 1481 (1998).
- [13] A. P. Balachandran, E. Batista, I.P. Costa e Silva y P. Teotonio-Sobrinho, *Nuc. Phys.* **B566** 441 (2000).
- [14] T. Diemer and M. Hadley, *Class. Quantum Grav.* **16** 3567 (1999).

- [15] P. Rajarajan, *Solitons and Instantons* (North Holland Press, Amsterdam, 1988).
- [16] P.A.M. Dirac, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A133** 60 (1931).
- [17] J. Baez and J. P. Muniain, *Gauge Fields, Knots and Gravity*, (World Scientific Publishing, 1994).
- [18] M. Göckeler and T. Schücker, *Differential geometry, gauge theories, and gravity*, (Cambridge University Press, 1987).
- [19] Y. Aharonov and D. Bohm, *Phys. Rev.* **115** 485 (1959); D. Visniewsky and Y. Aharonov, *Ann. Phys.* **45** 479 (1967).
- [20] Y. Aharonov and J. Anandan, *Phys. Rev. Lett.* **58** 1593 (1987) ; J. Anandan and Y. Aharonov, *Phys. Rev. D* **38** 1863 (1988); J. Anandan, *Phys. Lett. A* **195** 284 (1998).
- [21] M. L. Good, *Phys. Rev.* **121** 311 (1961); L. Stodolsky, *Gen. Rel. Grav.* **11** 391 (1979); A. Corichi and M. Pierri, *Phys. Rev. D* **51** 5870 (1995); D. V. Ahluwalia and C. Burgard, *Gen. Rel. Grav.* **28** 1161 (1996); *Gen. Rel. Grav.* **29** 681 (1997); D. V. Ahluwalia, *Gen. Rel. Grav.* **29** 1491 (1997); K. Konno and M. Kasai, *Prog. Theor. Phys.* **100** 1145 (1998); J. Wudka, *Phys. Rev. D* **64** 065009 (2001); M. Adak, T. Dereli, and L. H. Ryder, *Class. Quantum Grav.* **18** 1503 (2001); C. Chryssomalakos and D. Sudarsky, *Gen. Rel. Grav.* **35** 605 (2003).
- [22] A. W. Overhauser and R. Collela, *Phys. Rev. Lett.* **33** 1237 (1974); R. Collela, A. W. Overhauser, and S. A. Werner, *Phys. Rev. Lett.* **34** 1472 (1975).
- [23] L. Patiño and H. Quevedo, *Mod. Phys. Lett.* **A18** 1331 (2003).
- [24] L. Patiño "Quantum effects from topological conditions in solutions to Einstein equation", en *Proceedings of the IV Workshop on Gravitation and Mathematical Physics* (Revista Mexicana de Física, 2003), en prensa.
- [25] J. Wheeler, *Phys. Rev.* **97** (1955) 511; *Geometrodynamics* (Academic, New York and London, 1962).
- [26] M. Hadley, *Class. Quantum Grav.* **17** 4187 (2000).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

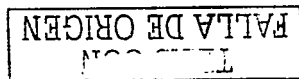
- [27] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette y M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics* (Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1982).
- [28] F. W. Warner *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups* (Graduate Text in Mathematics, Springer, 1996)
- [29] R.M. Wald, *General Relativity*, (The university of Chicago Press, 1984).
- [30] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, 1974).
- [31] K. Hagiwara *et al.*, *Phys. Rev.* **D66** 010001 (2002).
- [32] E. E. W. Burundis *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **75** 21 (1995).
- [33] C. Nash y S. Sen, *Topology and Geometry for Physicists* (Academic Press, 1992).
- [34] H. Quevedo, *Phys. Rev.* **D39** 2904 (1989).
- [35] K. S. Thorne, *Phys. Rev.* Vol. 138, Num. 1B, p.p. B251, (1965).
- [36] H. Quevedo y M. Ryan, "Generating cosmological solutions from known solutions" en *Mathematical and Quantum Aspects of Relativity and Cosmology*, Editado por S. Cotsakis y G. W. Gibbons (Springer-Verlag, Berlin, 2000).
- [37] O. Obregon, H. Quevedo y M. Ryan, *Phys. Rev.* **D65** (2001).
- [38] B. K. Berger and D. Garfinkle, *Phys. Rev. D* **57**, 4767 (1998).
- [39] S. Hawking, "The event horizon", en *Black Holes* eds. B. Dewitt y C. Dewitt (Gordon and Breach, 1973).
- [40] J. D. Bekenstein, *Int. J. Mod. Phys.* **A17S1** 21(2002).
- [41] V. Mukhanov, *Pis. Eksp. Teor. Fiz.* **44** 50 (1986) [*JETP letters* **44**, 63 (1986)] y en *Complexity, Entropy and the Physics of Information*, SFI Studies in the Science of Complexity, vol. III, ed. W. H. Zurek (Addison Wesley, New York 1990).
- [42] J. Cortez, D. Nuñez y H. Quevedo, *Int. J. Theo. Phys.* **40** (2001) 251.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- [43] A. Ashtekar, *Phys. Rev D* **50** 4944 (1994).
- [44] J. D. Bekenstein, *Lett. Nuovo Cim.* **4** 737 (1972).
- [45] S. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **43** 199 (1975).
- [46] G. t'Hooft, in: *Salamfestschrift: A collection of talks*, edited by A. Ali, J. Ellis, and S. Randjbar-Daemi (World Scientific, Singapore, 1993), gr-qc/9310026.
- [47] L. Susskind, *J. Math. Phys.* **36** 6377 (1995).
- [48] W. Fischler and L. Susskind, *Holography and cosmology*, hep-th/9806039.
- [49] R. Bousso, *JHEP* 9906 (1999) 028.
- [50] O. Nojiri, S. Odintsov, O. Obregon, H. Quevedo and M. Ryan, *Mod. Phys. Lett. A* **16** 1181 (2001).
- [51] J. Cortez, L. Patiño and H. Quevedo, "The field-to-particle transition problem", en Proceedings of the First Mexican School on Experimental and Theoretical Physics, Eds. A. Macias *et. al.*, (Kluwer Publishers, 2002).
- [52] F. Nettel, *Espacios de curvatura constante y el grupo conforme* (Tesis de Licenciatura), ICN-UNAM (2003), en redacción.
- [53] J. Maldacena, *Int. J. Theor. Phys.* **38** (1999) 1113; J. L. Petersen, *Int. J. Mod. Phys. A* **14** 3587 (1999).
- [54] I. Savonije and E. Verlinde, *Phys. Lett. B* **507** 305 (2001).
- [55] S. Gubser, I. Klebanov y A. Polyakov, *Phys. Lett. B* **428** 105 (1998); E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2** 253 (1998).
- [56] E. Verlinde, *On the holographic principle in a radiation dominated universe*, hep-th/0008140.
- [57] M.R. Setare, *Mod. Phys. Lett. A* **17** 2889 (2002); M.R. Setare, R. Mansouri, *Holographic Thermodynamic on the Brane in Topological Reissner-Nordström de Sitter Space*, hep-th/0210252.
- [58] E. Kolb and M. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, 1990).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- [59] J. L. Cardy, *Nucl. Phys. B* **270** 967 (1986).
- [60] E. Wang, E. Abdalla and R. Su, *Phys. Lett. B* **503** 394 (2001).
- [61] D. Youm, *Phys. Lett. B* **531**, 276 (2002).
- [62] I. Brevik and S. D. Odintsov, *Phys. Rev. D* **65** 067302 (2002).
- [63] I. Brevik, *Phys. Rev. D* **65** 127302 (2002).
- [64] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1973).
- [65] M. P. Ryan and L. C. Shepley, *Homogeneous relativistic cosmologies* (Princeton University Press, Princeton, 1975).
- [66] O. Nojiri, S. Odintsov, O. Obregon, H. Quevedo and M. Ryan, *Mod. Phys. Lett. A* **16** 1181 (2001).
- [67] M. Gutperle and A. Strominger, *J. High Energy Phys.* JHEP 0204018 (2002); see also A. Sen, *J. High Energy Phys.* JHEP 0204048 (2002), F. Leblond and A. W. Peet, *SD-brane gravity fields and rolling tachyons*, hep-th/0303035, and references therein.
- [68] F. Quevedo, *Class. Quant. Grav.* **19** 5721 (2002).
- [69] D. Youm, *Mod. Phys. Lett. A* **16** 1263 (2001).
- [70] D. Youm, *Mod. Phys. Lett. A* **16** 1327 (2001).
- [71] C. Cadeau and E. Woolgar, *Class. Quant. Grav.* **18** 527 (2001).
- [72] E. Abdala, M.C.B. Abdala y K.D. Rothe, *Non-perturbative methods in 2-dimensional quantum field theory* (World Scientific, Singapore, 1991).
- [73] W. Marciano y H. Pagels, *Phys. Rep.* **36C** 137 (1978); F.J. Ynduráin, *Quantum Chromodynamics* (Springer-Verlag, Berlin, Alemania, 1983).
- [74] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.* **59B** 79 (1975).
- [75] A.A. Belavin y A.M. Polyakov, *JETP Lett.* **22** 245 (1975); A. D'Adda, M.Lusher y P. Di Vecchia, *Nucl. Phys.* **B146** 63 (1978).



- [76] C. Misner, *Phys. Rev.* **D18** 4510 (1978); M. Hirayama, H. Chia Tze, J. Ishida y T. Kawabe, *Phys. Lett.* **A66** 352 (1978); A. Ashtekar y V. Husain, *Int. J. Mod. Phys* **D7** 549 (1998); J. Cortez, D. Nuñez y H. Quevedo, *Int. J. Theo. Phys.* **40** 251 (2001).
- [77] A.P. Balachandran, A. Stern y G. Trahern, *Phys. Rev.* **D19** 2416 (1978); A.P. Balachandran, G. Marmo, B.S. Skagerstam y A. Stern, *Classical Topology and Quantum States* (World Scientific, 1991).
- [78] D. Nuñez, H. Quevedo and A. Sánchez, *Rev. Mex. Fis.* **44** 440 (1998).