

00321



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

//

FACULTAD DE CIENCIAS

"La frontera eficiente PUT/CALL"

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

A C T U A R I A

P R E S E N T A :

GRICELDA CEDILLO RAMIREZ

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARIA ARACELI BERNABE ROCHA



DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES



2003

FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACION DISCONTINUA



UNIVERSIDAD NACIONAL
VENEZOLANA
MATZ

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"La frontera eficiente PUT/CALL"

realizado por Gricelda Cedillo Ramírez

con número de cuenta 09329374-3, quién cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario Dra. María Araceli Bernabé Rocha

Propietario Dr. Arturo Lorenzo Valdés

Propietario Mat. Adrián Girard Islas

Suplente M. en E. Bárbara Ruth Trejo Becerril

Suplente Act. Omar Saavedra Sánchez

M. Araceli Bernabé Rocha

Arturo Lorenzo Valdés

Bárbara Ruth Trejo Becerril
Omar Saavedra Sánchez

Consejo Departamental de Matemática

M. en C. José Antonio Flores Díaz

M. en C. José Antonio Flores Díaz

MATEMÁTICAS

3

Con todo mi amor

a Dios

a mis padres Oscar e Isabel

a mi hermano Oscar y

a mi E. T. Adalberto

Agradecimientos

Aprovecho este espacio para agradecer a todas las personas que me han brindado su apoyo en la realización de este trabajo:

A Dios por siempre estar cerca de mí y darme la oportunidad de conocer personas maravillosas.

A mis padres Oscar Cedillo e Isabel Ramírez por sus enseñanzas, por su esfuerzo, por su apoyo incondicional en todos mis proyectos, por siempre estar dispuestos a escucharme y darme un buen consejo.

A mi hermano Oscar por llenar mi vida de nobleza, alegría y buenos sentimientos.

Kathya por descubrir junto a ti lo que es realmente la amistad y por el valioso apoyo en la parte de programación de este trabajo.

Alejandro por tu amistad y cariño incondicional.

Araceli por todo el tiempo dedicado a este trabajo, por la paciencia que me tuviste, por compartir conmigo tus conocimientos, por esas lecciones de vida, y sobre todo por ser más que un director de tesis.

Adrián por todos tus consejos y apoyo, no solo en este trabajo.

A los miembros del jurado por el tiempo empleado en la revisión de este trabajo y por sus valiosos comentarios.

A la UNAM y sus maestros por el privilegio de ser universitaria.

A ti Vi por todo lo que significa para mí y por llenar estos diez años de mi vida de nobleza y amor.

Gracias a todos.

INDICE

Introducción	i
Capítulo I Selección de Portafolios de Inversión	1
I.1 Rendimiento del portafolio	2
I.2 Varianza del portafolio	4
I.3 El Conjunto Factible	5
I.4 El Conjunto de Mínima Varianza	9
I.5 El Conjunto Eficiente	10
I.6 El Modelo de Markowitz	12
I.7 Modelo Matemático	13
I.8 Problemas del Modelo	14
Capítulo II La Frontera Eficiente Put/Call	16
II.1 La Valuación a Futuro en el cálculo del riesgo	16
Representación de la Valuación a Futuro	19
Probabilidad de los escenarios	22
Cuantificación del Riesgo	23
El Benchmark como Parámetro de Referencia	23
II.2 Valuación a Futuro y Benchmark	25

	Posiciones "por arriba" y "por abajo"	25
II.3	Construcción de la Frontera Eficiente Put/Call	28
	Contratos call y put	28
	Valor call y valor put	29
	Rendimiento y Riesgo	31
	Frontera Eficiente Put/Call	32
II.4	El Modelo Put/Call	35
Capítulo III	Modelación de la Frontera Eficiente Put/Call	37
III.1	Notación	38
III.2	Modelación del Valor Call y el Valor Put de un portafolio	40
III.3	Formulación Matemática del Modelo Put/Call	44
III.4	Modelación de la Liquidez Finita	46
III.5	Desarrollo numérico	48
	Función Objetivo	57
	Restricciones	60
	Solución	62
	Portafolio eficiente con ventas en corto	67
	Modelo de Markowitz	70
	Solución	73
Conclusiones	75
Anexos		
	Opciones	77
	Planteamiento del modelo Put/Call en AMPL	83
	Planteamiento del modelo de Markowitz en AMPL	95
Bibliografía	98

Indice de Figuras, Tablas y Gráficas

Fig. 1.	Plano Riesgo-Rendimiento	5
Fig. 2.	Combinación de Inversión	6
Fig. 3.	Propiedad 1 del Conjunto Factible	7
Fig. 4.	Propiedad 2 del Conjunto Factible	8

F

Fig. 5.	Conjunto de Mínima Varianza	10
Fig. 6.	Conjunto Eficiente	11
Fig. 7.	Distribución de los Rendimientos de dos portafolios A y B	24
Fig. 8.	Portafolio Eficiente	33
Fig. 9.	Conjunto Eficiente	34
Fig. 10.	Frontera Eficiente	38
Fig. 11.	Posiciones de una opción call europea	81
Fig. 12.	Posiciones de una opción put europea	82
Tabla 1.	Valuación a Futuro bajo cada escenario	26
Tabla 2.	Diferencias positivas y negativas entre $V_P^f(X)$ y $V_P^f(B)$	27
Tabla 3.	Valores Call y Valores Put del portafolio X bajo cada escenario	30
Tabla 4.	Rendimiento y Riesgo de X	32
Tabla 5.	Notación de Variables y Parámetros	39
Tabla 6.	Rendimiento de cada instrumento bajo cada escenario E_j ...	49
Tabla 7.	Valuación a Futuro (Matriz M_{ij})	50
Tabla 8.	Rendimiento de cada instrumento bajo la tasa de rendimiento del benchmark r_j	51
Tabla 9.	Valuación a Futuro del benchmark (Matriz B_{ij})	52
Tabla 10.	Diferencias entre M_{ij} y B_{ij}	53
Tabla 11.	Valores Call y Valores Put de cada instrumento bajo cada escenario	55
Tabla 12.	Estimación de ganancias y pérdidas de cada instrumento ...	56
Tabla 13.	Composición del portafolio óptimo	63
Tabla 14.	Composición de diferentes portafolios óptimos	64
Tabla 15.	Portafolios Eficientes	64
Tabla 16.	Cantidades x_i arbitrarias	66
Tabla 17.	Composición de diferentes portafolios óptimos (con ventas en corto)	68
Tabla 18.	Portafolios Eficientes (con ventas en corto)	69
Tabla 19.	Portafolio Eficiente sin ventas en corto (Modelo de Markowitz)	73
Gráfica 1.	Posiciones : valor de X vs valor de B	26
Gráfica 2.	Valores Call y Valores Put del portafolio X	30
Gráfica 3.	Valores Call y Valores Put del instrumento 2	54
Gráfica 4.	Frontera Eficiente Put/Call	65
Gráfica 5.	Portafolios Eficientes y Factibles	67
Gráfica 6.	Frontera Eficiente Put/Call (con ventas en corto)	70

INTRODUCCION

Cuando se toman decisiones, las personas son forzadas a elegir entre objetivos competitivos. En el medio financiero los inversionistas, por ejemplo, basan su operación asumiendo que a rendimientos mayores corresponden precios y niveles de riesgo mayores. Determinar la inversión óptima dentro del conjunto de alternativas competitivas, requiere establecer las condiciones y necesidades de cada inversionista. Así, si se desea obtener el máximo rendimiento sin exceder un nivel de riesgo fijo, se deberá identificar un portafolio en el *conjunto eficiente*. Uno de los modelos clásicos para determinar la frontera eficiente es el de Markowitz (1952), el cual emplea a la media y a la varianza de los rendimientos como medidas para cuantificar el rendimiento y el riesgo de una inversión. Bajo este enfoque, los portafolios que proporcionan el máximo rendimiento para un nivel de desviación estándar son los portafolios eficientes.

A pesar de que el modelo de Markowitz es muy popular, las medidas estadísticas que emplea presentan serios inconvenientes, tales como el supuesto de normalidad en la distribución de los rendimientos y el que los portafolios son estáticos en el tiempo. Además, se debe mencionar la

complejidad computacional que representa el considerar un gran número de instrumentos de inversión factibles.

Como alternativa al modelo de Markowitz surge un nuevo enfoque para determinar la frontera eficiente, que utiliza un parámetro de referencia (*benchmark*) como meta u objetivo de inversión, el cual permite cuantificar el riesgo y el rendimiento de un portafolio mediante el uso de una nueva metodología, la Valuación a Futuro. Esta metodología emplea una medida de riesgo basada no únicamente en información derivada del pasado sino también en la información que pudiera surgir de posibles eventos futuros, representada mediante la consideración de escenarios en un horizonte de tiempo. Se realiza una comparación entre los posibles valores futuros de un portafolio y los de un *benchmark*, en donde se tiene una ganancia si el valor del portafolio es mayor al del *benchmark* y una pérdida si el valor es menor. Dichas ganancias y pérdidas del portafolio corresponden desde el punto de vista financiero, a los pagos generados por una "opción de compra" (*call*) o una "opción de venta" (*put*), respectivamente. Entonces, un portafolio será considerado eficiente si maximiza su *valor call* sujeto a que su *valor put* no exceda un valor fijo. Bajo este criterio se determina la *frontera eficiente Put/Call*.

En este trabajo, basado en el artículo "*The Put/Call Efficient Frontier*" (ver Dembo [7]), se presentan las bases y la técnica para determinar la frontera eficiente dentro del contexto de la Valuación a Futuro.

Antes de abordar el tema principal, se inicia en el Capítulo I con una introducción a los conceptos básicos de la teoría de portafolios, con el fin de llegar al planteamiento de la frontera eficiente, y a su aplicación bajo el modelo tradicional de Markowitz.

En el Capítulo II, se introduce el concepto *benchmark* como parámetro de referencia y los conceptos básicos de la metodología de la Valuación a Futuro a la vez que se desarrolla un ejemplo en el cual se pueden apreciar los conceptos teóricos desde un punto de vista numérico.

El modelo matemático, cuya solución determina la frontera eficiente, es desarrollado en el Capítulo III, en donde se generalizan los conceptos básicos

de la Valuación a Futuro y se da la expresión del modelo de la frontera eficiente Put/Call. Asimismo, en este capítulo se incluye un ejemplo numérico donde se muestra la metodología y se determinan portafolios eficientes Put/Call.

Al final, se encuentran las conclusiones obtenidas a partir de los resultados tanto teóricos como numéricos. Además, se incluyen tres anexos que complementan el trabajo: el primero contiene un resumen sobre opciones (put/call) vistas como contratos financieros, el segundo y el tercero contienen el planteamiento del modelo de la frontera eficiente Put/Call y el planteamiento del modelo de Markowitz respectivamente desde un punto de vista numérico, empleando un programa computacional para obtener las soluciones numéricas.

Capítulo I. Selección de Portafolios de Inversión

El proceso que consiste en colocar fondos o ahorros en determinados instrumentos con el propósito de que su valor aumente o produzca un rendimiento (o ganancia), se le conoce como *inversión*. Así, podemos entender por *invertir* el postergar satisfacer la necesidad presente o actual de un individuo por la posibilidad de adquirir un beneficio mayor en el futuro (a corto, mediano o largo plazo).

Determinar en que instrumentos invertir dinero o fondos de manera óptima es una actividad complicada cuya modelación ha permitido el empleo de diversas ramas de la matemática y ha dado origen al tema de *selección de portafolio (o cartera)*. La selección de portafolios de inversión es el estudio de cómo invertir de forma óptima los recursos de acuerdo a las necesidades y requerimientos de un inversionista.

La selección de un portafolio implica, como primer paso, determinar y caracterizar las alternativas que están al alcance del inversionista, estas alternativas constituyen su *conjunto de oportunidades*. Por lo general, un

inversionista tiene limitadas sus posibilidades de inversión ya sea por el monto a invertir, por su aversión al riesgo o simplemente por sus preferencias, las cuales pueden ser completamente subjetivas. Así, el conjunto de oportunidades de inversión es también conocido como *conjunto factible*, al considerar únicamente como posibilidades de selección aquellas entre las cuales el inversionista puede elegir.

1.1 Rendimiento del portafolio.

En un momento determinado, todo inversionista se encuentra con varios instrumentos de inversión entre los cuales elegir, la combinación entre ellos le permitirá formar una gran cantidad de portafolios posibles. En general, si se tienen n instrumentos de inversión y x_i es la proporción del monto total de inversión destinado al instrumento i , entonces se pueden formar varios portafolios con sólo modificar las proporciones x_i de cada instrumento.

Como es de esperarse, un empleo óptimo supone la colocación del monto total de inversión, lo que se puede garantizar pidiendo que la suma de las proporciones sea igual a uno, es decir,

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

Pensar que una inversión es buena o adecuada a nuestras necesidades tiene implícito la determinación de una medida de utilidad, una medida que permite la comparación entre los posibles portafolios y preserva nuestras preferencias de inversión. Muy frecuentemente esta medida es el rendimiento del

portafolio, cuya magnitud depende de factores tales como el tipo de transacción u operación, del periodo de inversión o del riesgo que ésta pueda presentar durante dicho periodo.

El rendimiento de un portafolio puede ser expresado como la suma ponderada de los rendimientos individuales de cada instrumento que lo compone, así,

$$r_p = x_1 r_1 + x_2 r_2 + \dots + x_n r_n$$

donde r_p representa el rendimiento del portafolio y r_i el rendimiento del instrumento i .

Por lo general, el rendimiento es una tasa variable de los instrumentos y su movimiento refleja el comportamiento de los mercados así como sus tendencias. Es por esto, que cuando se habla del rendimiento de un instrumento se hace pensando en un estimador estadístico de él, por lo general su valor esperado. Así, al considerar el rendimiento esperado del portafolio $E(r_p)$, se hace referencia al promedio ponderado de los rendimientos esperados de cada uno de los instrumentos, es decir

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(r_i)$$

donde $E(r_i)$ representa el rendimiento esperado del instrumento i .

1.2 Varianza del portafolio.

La incertidumbre en el comportamiento del rendimiento de los instrumentos ha derivado en la inquietud por cuantificar el riesgo que se tiene al invertir en ellos, considerando que entre más incertidumbre existe el instrumento es más riesgoso.

Desde el inicio de la teoría de portafolios, la volatilidad se ha considerado como la medida de riesgo más adecuada. La volatilidad, estadísticamente estimada como la desviación estándar de los rendimientos $\sigma(r_i)$ refleja la dispersión de los datos con respecto a su media.

La varianza del rendimiento del portafolio $\sigma^2(r_p)$ se calcula como

$$\sigma^2(r_p) = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \sigma^2(r_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 2x_i x_j Cov(r_i, r_j), \quad i \neq j$$

donde $\sigma^2(r_i)$ es la varianza del rendimiento del instrumento i y

$$Cov(r_i, r_j) = \rho_{ij} \sigma(r_i) \sigma(r_j)$$

representa la covarianza entre los rendimientos r_i , r_j y, ρ_{ij} denota el factor de correlación entre ellos.

I.3 El Conjunto Factible.

La selección de portafolios es realizada sobre el conjunto factible con base en el valor de medidas estadísticas básicas asociadas a cada portafolio, como son el rendimiento esperado y la desviación estándar.

La relación riesgo-rendimiento de una oportunidad de inversión puede ser representada en el plano, donde cada punto $(\sigma(r), E(r))$ denota una posición de inversión en un instrumento individual con un riesgo asociado $\sigma(r)$ y un rendimiento esperado $E(r)$. Así, en la figura, el instrumento representado por A tiene una desviación estándar de $\sigma(r_A)$ y un rendimiento esperado $E(r_A)$.

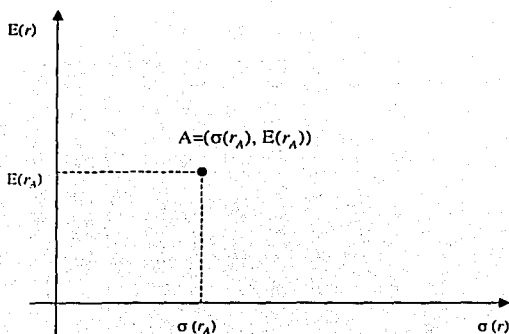


Fig. 1. Plano Riesgo-Rendimiento.

Una inversión individual también puede ser obtenida como combinación entre portafolios. Así, dados dos portafolios A y B , se puede obtener a $C = x_A A + x_B B$ como una combinación lineal de los instrumentos individuales que componen a A y B (x_A y x_B corresponden a la porción de inversión en cada portafolio).

Gráficamente, C con desviación estándar¹ $\sigma(r_C)$ y rendimiento esperado² $E(r_C)$ está situado sobre la curva que une a A con B .

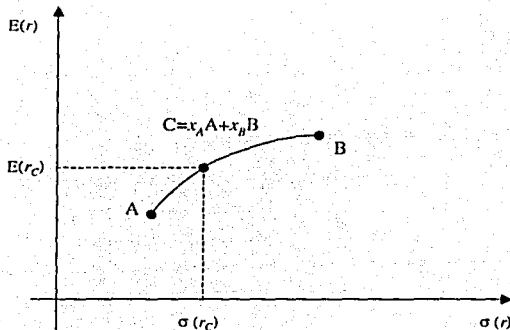


Fig. 2. Combinación de Inversión.

$$\sigma^2(r_C) = \sigma^2(x_A A + x_B B) = x_A^2 \sigma^2(r_A) + x_B^2 \sigma^2(r_B) + 2x_A x_B \text{Cov}(r_A, r_B),$$

¹ donde $x_A + x_B = 1 \Rightarrow x_B = 1 - x_A$.

$$^2 E(r_C) = E(x_A A + x_B B) = x_A E(r_A) + x_B E(r_B).$$

Entonces, se puede decir que cualquier combinación de inversión entre dos instrumentos (portafolios) del conjunto factible es también una oportunidad de inversión en dicho conjunto.

En el plano riesgo-rendimiento, el conjunto factible satisface dos propiedades importantes:

Propiedad 1 El conjunto factible es convexo.

Demostración.

Decir que el conjunto es convexo implica mostrar que para cualesquiera dos portafolios en el conjunto, una combinación de inversión entre ellos también es un portafolio factible.

Como se observó anteriormente, si se tienen dos portafolios factibles A y B , una combinación de inversión entre ellos, corresponde a un punto sobre el segmento de curva que los une. Por lo tanto, el conjunto es convexo.

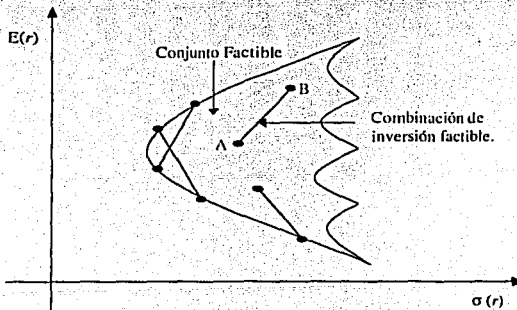


Fig. 3. Propiedad 1 del Conjunto Factible.

Propiedad 2

Si se tienen al menos tres instrumentos (no perfectamente correlacionados y con diferente rendimiento esperado), el conjunto factible es una región bidimensional.

Demostración.

Como se sabe por la propiedad (1) una combinación de inversión de dos portafolios factibles definen un conjunto de portafolios factibles (curva entre ellos). Por lo tanto, un portafolio D , obtenido como una combinación de inversión entre B y C , está sobre la curva que los une. A su vez, si se combina D con A , se obtendrá una curva de portafolios factibles. Como D es cualquier punto sobre la curva entre B y C , la familia de todas estas oportunidades de inversión forman una región sólida bidimensional.

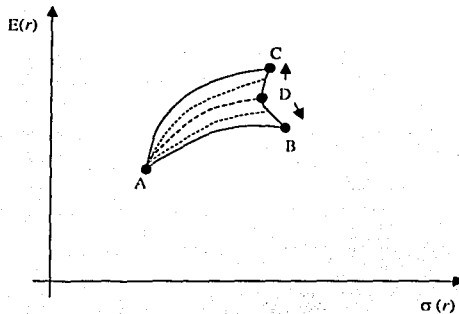


Fig. 4. Propiedad 2 del Conjunto Factible.

1.4 El Conjunto de Mínima Varianza.

Como es de suponerse, un inversionista preferirá algunos portafolios de inversión sobre otros. Dado un nivel de rendimiento esperado, preferirá aquel portafolio con el menor riesgo y dado un nivel de riesgo o desviación estándar preferirá aquel con mayor rendimiento esperado

Sin importar la composición de los portafolios factibles, algunos de ellos están ubicados sobre el perímetro del conjunto, el cual se denomina Conjunto de Mínima Varianza (CMV).

Cada punto en el conjunto de mínima varianza representa un portafolio compuesto de instrumentos factibles que satisfacen el siguiente criterio.

Dado un nivel particular de rendimiento esperado, el portafolio en el conjunto de mínima varianza tiene la menor desviación estándar (varianza) que puede ser alcanzada por cualquier instrumento (portafolio) con el mismo nivel de rendimiento.

El conjunto de mínima varianza puede ser dividido en dos partes - superior e inferior - a partir del punto que representa al portafolio con el menor nivel de desviación estándar posible, es decir, el portafolio de mínima varianza global (PMV). Así, los portafolios más atractivos o deseados por los inversionistas

son los que se ubican en la parte superior y los menos atractivos en la parte inferior.

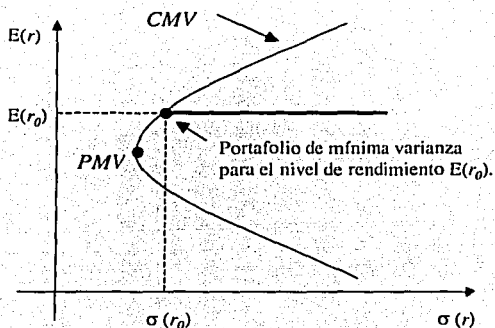


Fig. 5. Conjunto de Mínima Varianza.

1.5 El Conjunto Eficiente.

La parte superior del conjunto de mínima varianza es conocida como el **Conjunto Eficiente**, ya que todos los portafolios de este conjunto satisfacen que:

Dado un nivel particular de desviación estándar (varianza), el portafolio en el conjunto eficiente tiene el mayor rendimiento esperado que puede ser alcanzado por cualquier otro portafolio bajo el mismo nivel de desviación estándar.

Gráficamente, mientras los portafolios A y B satisfacen el criterio para el conjunto de mínima varianza (la menor desviación estándar, dado un nivel de rendimiento esperado), únicamente B satisface el criterio para el conjunto eficiente (el mayor rendimiento esperado, dado un nivel de desviación estándar).

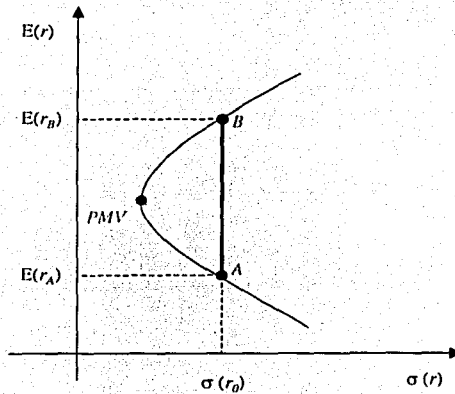


Fig. 6. Conjunto Eficiente.

1.6 El Modelo de Markowitz.

Harry Markowitz³, considerado como uno de los fundadores de la economía financiera moderna, debido a sus trabajos pioneros sobre la elección de carteras. Planteó un modelo para la elección de una cartera de valores en condiciones de incertidumbre en el cual reducía aquella a un dilema bidimensional: el ingreso esperado y la varianza.

El modelo de Harry M. Markowitz se basa principalmente en que una inversión es óptima siempre y cuando la rentabilidad deseada por el inversor se consiga a un nivel de riesgo mínimo. El gran descubrimiento de Markowitz fue averiguar que combinando dos o más valores es posible conseguir una mejor relación rentabilidad - riesgo, medido este último por la desviación típica. El punto de partida es la aversión natural del inversor hacia el riesgo, es decir entre dos inversiones con la misma rentabilidad se preferirá aquella con menor riesgo y, por una inversión con más riesgo el inversor exigirá también una mayor rentabilidad.

³Economista estadounidense Premio Nobel 1990. Nació el 24 de agosto de 1927 en Chicago. Cursó estudios en la Universidad de Chicago, donde se doctoró en 1954. Trabajó desde 1952 hasta 1963 en la Rand Corporation, y posteriormente se incorpora a la Universidad de Yale. Fue profesor en la City University of New York, obtiene el Premio Nobel de Economía en 1990, compartido con Merton M. Miller y William F. Sharpe por su trabajo pionero en la teoría de la economía financiera.

1.7 Modelo Matemático.

El modelo matemático de Markowitz para la construcción de portafolios eficientes emplea técnicas generales de programación lineal o cuadrática para determinar los óptimos al maximizar el rendimiento esperado dado un nivel de riesgo.

Si se estiman los rendimientos, varianzas de cada activo y las covarianzas de cada par de activos, es posible identificar el conjunto factible y sobre todo una frontera de inversiones eficiente, en la que se maximicen los rendimientos y se minimicen los riesgos. Para determinar la frontera eficiente de inversiones es necesario encontrar las proporciones (x_1, \dots, x_n) que determinen la composición de los portafolios eficientes, es decir se requiere resolver el siguiente problema de optimización:

$$\text{Maximizar} \quad E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(r_i)$$

Sujeto a

$$\sigma^2(r_p) = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \sigma^2(r_i) + \sum_{i,j=1}^n 2x_i x_j \text{Cov}(r_i, r_j) = c, \quad i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

donde

- $E(r_p)$ es el rendimiento esperado del portafolio y $E(r_i)$ el rendimiento esperado de cada uno de los instrumentos del portafolio.
- $\sigma^2(r_p)$ es la varianza del rendimiento esperado del portafolio, $\sigma^2(r_i)$ es la varianza del rendimiento esperado de cada instrumento y $Cov(r_i, r_j)$ es la covarianza que existe entre cada par de instrumentos que integran el portafolio.

Este modelo se enfoca explícitamente en la operación entre el rendimiento esperado y la varianza de un portafolio. Una vez formulado el modelo de Markowitz, se puede resolver y obtener una solución numérica específica (es decir, un portafolio óptimo) al obtener las proporciones (x_1, \dots, x_n) que maximizan el rendimiento esperado del portafolio para cada nivel posible de riesgo. El modelo de Markowitz no garantiza determinar un portafolio óptimo único, sino una serie de portafolios eficientes, cada uno de los cuales maximiza el rendimiento para un nivel específico de riesgo.

1.8 Problemas del Modelo.

El modelo de Markowitz, referenciado muy frecuentemente en el medio financiero, permite encontrar portafolios eficientes, sin embargo presenta varios inconvenientes prácticos.

A pesar de que la media y la varianza se utilizan frecuentemente como los mejores estimadores del rendimiento y riesgo respectivamente, presentan serios inconvenientes. La utilización de supuestos que son comúnmente

violados, tales como el de normalidad en los rendimientos, y que los portafolios son estáticos en el tiempo. En lo que se refiere a la parte computacional, construir la frontera eficiente bajo este enfoque para portafolios con un número grande de instrumentos se vuelve complicado, pues el trabajo para la construcción de la matriz de varianza y covarianza aumenta considerablemente.

Dados los inconvenientes presentados por el Modelo de Markowitz debido al empleo inadecuado de medidas estadísticas, se presenta un enfoque alternativo a la conceptualización de la frontera eficiente. Dicho enfoque plantea encontrar un portafolio dinámico y no estático, que bajo ciertos posibles eventos futuros, los rendimientos esperados de este portafolio sean lo más parecido a un objetivo o meta de inversión, representada por un portafolio *benchmark*.

Capítulo II. La Frontera Eficiente Put / Call

Este nuevo enfoque del concepto de Frontera Eficiente hace uso del marco de trabajo "*Mark to Future*" o Valuación a Futuro, por lo que resulta conveniente hacer una breve descripción de él.

II.1 La Valuación a Futuro en el cálculo del riesgo.

A diferencia de las medidas de riesgo, comúnmente usadas en instituciones financieras, que utilizan datos históricos o predictivos⁴, la Valuación a Futuro emplea una medida de riesgo enfocada en eventos futuros.

⁴ Como son el cálculo del VaR (Valor en Riesgo) mediante escenarios históricos o bien mediante el método de Monte Carlo.

La Valuación a Futuro trata de unir diferentes fuentes de riesgo correlacionadas y captar sus efectos en el cálculo de los diferentes tipos de riesgo - de mercado, de liquidez, de crédito, entre otros - (ver Jorion [13]) empleado para propósitos de asignación de capital en la selección de portafolios.

Como el riesgo es la consecuencia de un futuro incierto, la Valuación a Futuro emplea una medida de riesgo basada no únicamente en información derivada de hechos acontecidos, sino también en información de posibles eventos futuros "*escenarios*", no obstante que el día de mañana puede ser radicalmente diferente al día de hoy y que un evento "inusual" es difícil de predecir.

En el marco de la Valuación a Futuro, los escenarios sirven como una herramienta para visualizar o describir los posibles valores de parámetros que afectan el rendimiento de un portafolio en un horizonte de tiempo determinado.

Los escenarios son la esencia de la cuantificación del riesgo, unen varias fuentes de riesgo y permiten el desarrollo de medidas que las incluyen. Omitir eventos relevantes y dar mayor importancia a otros podría conducir a medidas inadecuadas y conclusiones erróneas, ya que la cuantificación del riesgo depende de los posibles eventos futuros y de que éstos sean descritos mediante los escenarios.

No obstante, la cuantificación del riesgo no sería posible si no se contara con la capacidad que tiene una institución financiera de conocer el valor actual de los instrumentos. Base sobre la cual se cuantificarán o estimarán los movimientos de los precios de los activos en el futuro y de donde se derivarán las posibles pérdidas.

Asimismo, para la cuantificación del riesgo, se requiere conocer el horizonte de tiempo sobre el cual se realiza la inversión, ya que de ello dependerá el tipo de análisis de los movimientos en el mercado. Así, si una inversión se realiza

a dos meses, un análisis de variaciones diarias resultará irrelevante cuando se observa que la volatilidad mensual es casi nula.

Por lo anterior, el cálculo del riesgo puede ser resumido en los cinco puntos siguientes:

1. *Conocer el valor actual de los activos o instrumentos, es decir, realizar el **Mark-to-Market** o **Valuación a Mercado**.*
2. *Determinar el horizonte de tiempo de inversión.*
3. *Considerar un rango amplio de escenarios que describa posibles eventos futuros, incluyendo escenarios extremos. Si se requiere, se puede asignar una distribución de probabilidad a los escenarios, es decir, hacer del escenario una elección explícita.⁵*
4. *Evaluar el portafolio en el horizonte de tiempo definido bajo todos y cada uno de los escenarios futuros, es decir, realizar la **Valuación a Futuro**.*
5. *Calcular la máxima pérdida esperada que se podría presentar en el horizonte de tiempo definido bajo un cierto nivel de confianza (calcular el VaR).*

⁵ Probabilidad de los escenarios, pág. 22.

Representación de la Valuación a Futuro

Pero, ¿cómo se valúa a futuro?. Dado que la valuación de los instrumentos bajo cada escenario puede ser dada en forma vectorial, una valuación a futuro se representa como un vector de números, uno para cada escenario j en el horizonte de tiempo. Así, si los vectores V_M y E_j contienen la valuación a mercado y el rendimiento bajo el escenario j de cada uno de los instrumentos, respectivamente, entonces la i -ésima entrada de V_F está determinada por:

$$V_F^j = V_M^i + V_M^i E_j^i \quad (1)$$

es decir, el rendimiento generado por cada instrumento bajo el movimiento de mercado captado en el escenario j .

Ejemplo

Si se cuenta con tres instrumentos ($i=1, 2$ y 3) que tienen valores de mercado, representados en el vector

$$V_M = \begin{bmatrix} 5 \\ 5.3 \\ 4.9 \end{bmatrix}$$

y si los rendimientos semestrales generados por cada uno de ellos en un periodo de 2 años ($j=1, 2, 3, 4$) son los que se representan en los siguientes vectores:

$$E_1 = \begin{bmatrix} .2 \\ .1 \\ .05 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} .1 \\ .12 \\ .11 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} .01 \\ .21 \\ .28 \end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix} .2 \\ .31 \\ .41 \end{bmatrix}$$

entonces, la valuación a futuro de los instrumentos bajo cada escenario se determina como:

$$V_F^1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 5.3 \\ 4.9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5(.2) \\ 5.3(.1) \\ 4.9(.05) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5.83 \\ 5.145 \end{bmatrix},$$

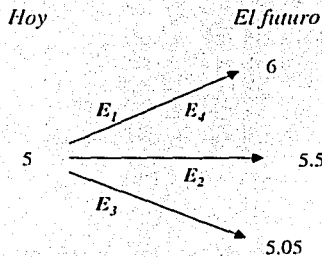
en forma similar

$$V_F^2 = \begin{bmatrix} 5.5 \\ 5.936 \\ 5.439 \end{bmatrix} \quad V_F^3 = \begin{bmatrix} 5.05 \\ 6.413 \\ 6.272 \end{bmatrix} \quad V_F^4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 6.943 \\ 6.904 \end{bmatrix}$$

La valuación anterior puede ser resumida en una matriz M , donde cada columna j representa la valuación a futuro V_F^j bajo cada escenario. En este caso

$$M = \begin{bmatrix} 6 & 5.5 & 5.05 & 6 \\ 5.83 & 5.936 & 6.413 & 6.943 \\ 5.145 & 5.439 & 6.272 & 6.904 \end{bmatrix}$$

La interpretación de ésta matriz refleja los posibles movimientos de mercado de los instrumentos dados los escenarios. Por ejemplo, centrando la atención en el primer instrumento (renglón 1 de M), se observa que con un valor a mercado de 5 unidades monetarias (primer entrada del vector V_M), la valuación a futuro señala que su valor para el siguiente semestre podría aumentar a 6, 5.5 o bien 5.05 (ver la figura siguiente).



Desde luego esto no necesariamente ocurrirá, ya que depende de que los escenarios considerados efectivamente hayan captado todos y cada uno de los posibles movimientos de mercado.

Probabilidad de los escenarios

Los movimientos de mercado pueden provocar que el precio de un instrumento tenga un comportamiento a la alza, pero ¿qué tan probable es que su precio tenga uno u otro valor?. Como se puede observar en el ejemplo anterior, no todos los movimientos (captados por los escenarios) tienen la misma probabilidad de ocurrencia. Así, el valor 6 es señalado como un valor posible por dos escenarios distintos mientras que el 5.5 y 5.05 únicamente por uno.

En muchas ocasiones la probabilidad de ocurrencia entre un valor y otro no obedece únicamente a la probabilidad muestral (casos posibles / casos totales), sino a una función de distribución de probabilidad que recoge el conocimiento o la sensibilidad del inversionista, es decir, si por alguna razón se considera que el escenario j tiene más probabilidad de ocurrir que el escenario k , entonces una probabilidad mayor p_j deberá ser asignada al escenario j ($p_j > p_k$). Por lo tanto, es necesario establecer para cada escenario una probabilidad que refleje el conocimiento y las expectativas de cada inversionista. En ocasiones se puede considerar a todos los escenarios igualmente probables o se puede emplear un suavizamiento exponencial (asignando mayor probabilidad a los escenarios que captan información más reciente a la fecha de la valuación).

Sea cual sea el método para asignar la probabilidad, ésta puede ser representada en un vector p en donde la entrada p_j representa la probabilidad asignada al escenario j .

Cuantificación del Riesgo

Una vez establecidas las probabilidades, se está en condiciones de (dado un instrumento) cuantificar el riesgo que representa su inversión. Cabe mencionar, que la cuantificación del riesgo financiero es un tema complejo que requiere determinar el objetivo y alcance de los resultados, de los factores de riesgo a considerar y de la metodología a emplear. Hoy en día, no existe el método o la fórmula para calcular el riesgo, en la literatura se puede encontrar un gran número de artículos de investigación que muestran métodos nuevos o la adaptación de alguno ya existente para cuantificar el riesgo de algún instrumento específico o un tipo de riesgo en particular (ver Jorion, [13]). Por ello, cada institución ya sea financiera o no, determina a partir de sus necesidades, conocimientos e investigaciones, la mejor metodología para cuantificar el riesgo, ya que lo importante no es cómo se calcula sino que los resultados muestren cuál es el valor del riesgo al cual se encuentra expuesta la institución.

No obstante que la metodología de Valuación a Futuro fue definida y desarrollada en el marco del cálculo del riesgo (ver Dembo [5]), en este trabajo se emplea para determinar el conjunto de portafolios de inversión eficientes; por ello, no se presenta la forma en que se realiza dicho cálculo.

El Benchmark como Parámetro de Referencia

La importancia del cálculo del riesgo radica no sólo en la metodología empleada para su cuantificación si no en la interpretación que se dé al resultado obtenido.

Así, si se tienen dos portafolios *A* y *B*; el primero con un monto de inversión de 10 mdd. (millones de dólares) y el segundo con uno de 20 mdd., y si su riesgo, calculado bajo la misma metodología y los mismos parámetros, en términos porcentuales con respecto al monto de inversión es 20% para ambos

portafolios (es decir, se puede esperar para *A* una pérdida máxima no mayor a 2 mdd y para *B* una no mayor de 4 mdd), ¿cuál de los portafolios es preferible?

Es claro que esta información no es suficiente para tomar una decisión, ya que no basta con comparar la cuantificación del riesgo de cada portafolio, porque puede suceder que el comportamiento histórico de los rendimientos de *A* muestre mayor probabilidad de obtener ganancias que los de *B*, en cuyo caso se debería optar por una inversión en *A*.

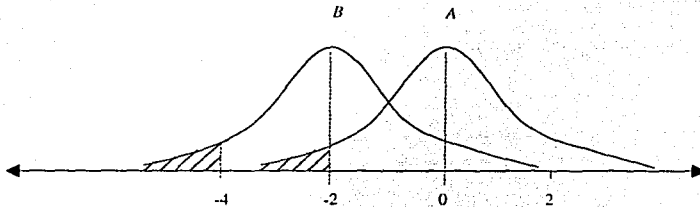


Fig. 7. Distribución de los Rendimientos de dos portafolios *A* y *B*

Por lo tanto, se puede afirmar que el riesgo como medida no es absoluta en la comparación y determinación de instrumentos o portafolios de inversión. Su interpretación y la de los factores que lo generan son los que en algún momento permiten modificar las carteras para lograr los objetivos que se establecen, sean estos menores niveles de riesgo o mayores rendimientos.

Por consiguiente, en ocasiones es preferible establecer un parámetro de referencia "*benchmark*" contra el cual se mide el rendimiento de un portafolio.

El benchmark es considerado como una meta u objetivo de ganancias, o bien como un portafolio modelo, es decir, el portafolio que a cualquier inversionista le gustaría tener, o por lo menos que el nivel de rendimiento que su portafolio genere, esté muy cerca de los del benchmark.

II.2 Valuación a Futuro y Benchmark.

Una vez establecido un benchmark, la Valuación a Futuro se calcula sobre un portafolio que consiste de una posición larga (compra) en el portafolio original y una corta (venta) en el benchmark.

Posiciones "por arriba" y "por abajo"

El enfoque de Valuación a Futuro considera una comparación adicional entre el valor del "portafolio original" X y el del benchmark B bajo cada escenario. Dada esta comparación, se determinan posiciones "*por abajo*" del valor del benchmark (cuando el valor de X es menor al valor de B) o "*por arriba*" (cuando el valor de X es mayor al valor de B).

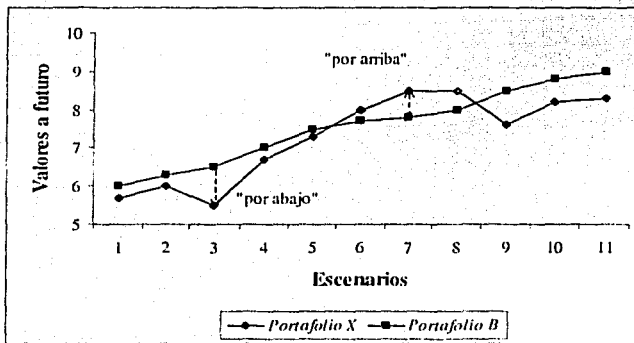
Para ejemplificar el cálculo de las posiciones, supóngase que se cuenta con el "portafolio original" X , el benchmark B y 11 escenarios ($j=1, 2, \dots, 11$) y que

bajo cada escenario se obtiene la valuación a futuro de X y B , que se muestra en la tabla siguiente.

Portafolios	Escenarios										
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}
$V_F(X)$	5.7	6	5.5	6.7	7.3	8	8.5	8.5	7.6	8.2	8.3
$V_F(B)$	6	6.3	6.5	7	7.5	7.7	7.8	8	8.5	8.8	9

Tabla 1. Valuación a Futuro bajo cada escenario.

Ahora bien, si se grafican los valores mostrados en la valuación anterior, se observarán las posiciones "por abajo" y "por arriba" del valor de B .



Gráfica I. Posiciones: valor de X vs valor de B .

De lo anterior, se pueden definir los siguientes conceptos:

Definición 1. Sean X y B dos portafolios, con B benchmark. Si $V_F^j(X)$ es mayor que $V_F^j(B)$, entonces la diferencia positiva ($V_F^j(X) - V_F^j(B)$) entre estos valores es una posición “por arriba” de B .

Por el contrario, si $V_F^j(X)$ es menor que $V_F^j(B)$, entonces la diferencia negativa ($V_F^j(X) - V_F^j(B)$) entre estos valores es una posición “por abajo” de B .

En la siguiente tabla se puede observar el valor de las diferencias positivas y negativas entre X y B , las cuales corresponden a las posiciones por arriba y por abajo mostradas en la gráfica anterior.

Diferencia entre X y B	Escenarios										
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}
$V_F(X) - V_F(B)$	-0.3	-0.3	-1	-0.3	-0.02	0.3	0.7	0.5	-0.9	-0.6	-0.7

Tabla 2. Diferencias positivas y negativas entre $V_F^j(X) - V_F^j(B)$.

II.3 Construcción de la Frontera Eficiente Put/Call.

Contratos call y put

Desde el punto de vista financiero, las posiciones “por arriba” o “por abajo” de un portafolio con respecto al valor a futuro de un benchmark pueden ser asociadas a los pagos generados por una “**opción de compra**”⁶ (call) o a una “**opción de venta**”⁷ (put), respectivamente.

Cabe señalar que en el medio financiero la terminología: opción de compra y opción de venta, es aplicable a contratos financieros⁸. Sin embargo, para el desarrollo de este trabajo, se empleará la terminología anglosajona “**call**” y “**put**”, como términos que pueden ser generalizados de la siguiente forma:

Definición 2. *Un contrato será call cuando su poseedor gana si el subyacente⁹ sube, y un put cuando gana si el subyacente baja.*

⁶ Una opción de compra es un contrato en donde el comprador adquiere el derecho más no la obligación de comprar un bien subyacente en el futuro a cambio del pago de una prima.

⁷ Una opción de venta es un contrato en donde el comprador adquiere el derecho más no la obligación de vender un bien subyacente en el futuro a cambio del pago de una prima.

⁸ Ver Anexo: Opciones.

⁹ El bien subyacente no necesariamente es un bien tangible ya que en el mercado existen opciones sobre subyacentes no tangibles, como lo son los índices de mercado.

Con esta terminología se puede establecer una analogía entre los contratos call y put y las posiciones por arriba y por abajo de un portafolio.

Valor call y valor put

Con base en los conceptos anteriores, un portafolio X que presenta una posición por arriba de un benchmark B bajo un escenario j , representa un contrato call bajo ese escenario, al generar una ganancia sobre el valor del benchmark. Por el contrario, si X presenta una posición por abajo de B bajo ese escenario, entonces representará un contrato put, al generar una pérdida sobre el benchmark.

De lo anterior, se puede realizar una definición formal del *Valor Call* y *Valor Put*.

Definición 3. *Sea X un portafolio de inversión y B un portafolio benchmark, entonces, se define el **Valor Call de X bajo el escenario j** ($j=1, \dots, m$), como la diferencia positiva entre ($V_F^j(X) - V_F^j(B)$), es decir,*

$$\text{Valor Call}'(X) = \text{Max} \{ V_F^j(X) - V_F^j(B), 0 \}$$

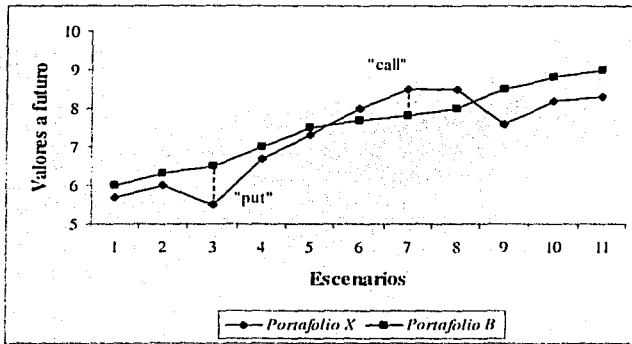
*Y al **Valor Put de X bajo el escenario j** ($j=1, \dots, m$), como la diferencia negativa entre ($V_F^j(X) - V_F^j(B)$), es decir,*

$$\text{Valor Put}'(X) = \text{Max} \{ V_F^j(B) - V_F^j(X), 0 \}$$

Para ilustrar estos conceptos considérense los valores de la siguiente tabla y su representación gráfica, en ella se puede observar las posiciones por arriba y por abajo definidas como valores call y put.

Valores	Escenarios										
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}	E_{11}
Call	0	0	0	0	0	0.3	0.7	0.5	0	0	0
Put	0.3	0.3	1	0.3	0.2	0	0	0	0.9	0.6	0.7

Tabla 3. Valores Call y Valores Put del portafolio X bajo cada escenario.



Gráfica 2. Valores Call y Valores Put del portafolio X bajo cada escenario.

Rendimiento y Riesgo

En estos momentos, contamos con la herramienta necesaria para definir el rendimiento y el riesgo de un portafolio X sobre un benchmark B .

Definición 4. *Sea X un portafolio de inversión y B un portafolio benchmark. El Rendimiento de X sobre B se define como la suma de los valores call de X bajo todos y cada uno de los escenarios de valuación, es decir,*

$$\text{Rendimiento}(X) = \sum_{j=1}^m \text{Valor Call}^j(X)$$

Y, el Riesgo de X sobre B se define como la suma de los valores put de X bajo todos y cada uno de los escenarios, es decir,

$$\text{Riesgo}(X) = \sum_{j=1}^m \text{Valor Put}^j(X)$$

donde m es el número de escenarios de valuación.

Ahora, es posible calcular el valor del rendimiento y el riesgo de X sobre B bajo todos los escenarios del ejemplo anterior. Así, dichos valores se muestran en la siguiente tabla.

	<i>Rendimiento</i>	<i>Riesgo</i>
<i>Portafolio X</i>	1.5	4.3

Tabla 4. Rendimiento y Riesgo de X .

Frontera Eficiente Put/Call

Una vez introducidas las definiciones anteriores, se puede plantear un modelo alternativo al modelo de Markowitz para la elección de una cartera de valores en condiciones de incertidumbre, el cual será reducido nuevamente a un dilema bidimensional: el valor put y call asociado a cada portafolio.

En este nuevo enfoque, el objetivo es determinar dentro del conjunto de portafolios factibles, aquellos que componen la frontera eficiente Put/Call, entendiéndose por portafolio eficiente aquel que satisface la siguiente condición.

Definición 5. Dado B un portafolio benchmark y un nivel fijo de valor put. Un portafolio se dice eficiente, si tiene el máximo valor call esperado (rendimiento) que puede alcanzar cualquier otro portafolio con el mismo nivel de valor put (riesgo) bajo el mismo benchmark.

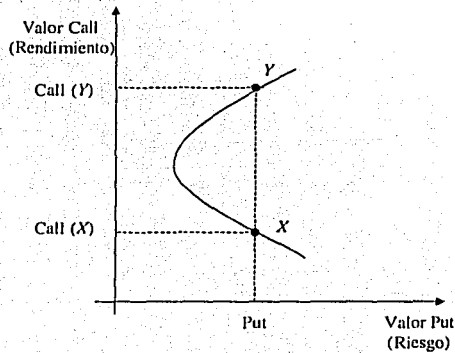


Fig. 8. Portafolio Eficiente.

Entonces, la frontera eficiente Put/Call estará determinada por todos aquellos portafolios que a partir del portafolio de mínimo riesgo PMR^{10} , al asumir un

¹⁰ El PMR es el portafolio que tiene asociado el menor nivel de riesgo posible de entre todos los portafolios del conjunto eficiente.

nivel k de riesgo (valor put), proporcionen el máximo nivel l de rendimiento esperado (valor call).

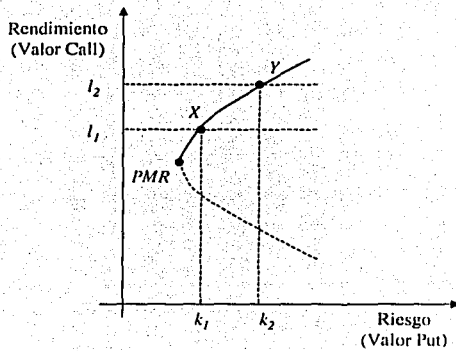


Fig. 9. Conjunto Eficiente.

II.4 El Modelo Put / Call.

El modelo Put/Call desarrollado por Ron Dembo¹¹, emplea la Valuación a Futuro para la determinación de portafolios eficientes. La gran aportación de Dembo al concepto general de frontera eficiente, es incorporar un parámetro de referencia al concepto riesgo-rendimiento y determinar los portafolios eficientes bajo la valuación de escenarios históricos.

El modelo matemático Put/Call a diferencia del de Markowitz emplea técnicas generales de programación no lineal para determinar los óptimos sobre un benchmark al maximizar el valor Call dado un nivel fijo de valor Put. Para determinar la frontera eficiente de inversiones es necesario encontrar las

¹¹ Presidente y jefe ejecutivo funcionario de la compañía Algorithmics, fundada por él en 1989, Algorithmics es actualmente la empresa líder a nivel mundial en la administración de riesgo financiero. Ron S. Dembo Cuenta con una distinguida carrera académica (entre sus grados académicos se encuentran: un B.Sc. en Ingeniería de la Universidad de Witwatersrand, Johannesburg (1969), un M.Sc. en Ingeniería Química del Instituto de Tecnología Technion-Israel (1972), y un Ph.D. en Investigación de Operaciones de la Universidad de Waterloo, Ontario (1975)) y ha colaborado en las facultades de varias universidades del mundo. De 1976 a 1986 se desarrolló como profesor adjunto y asociado en investigación de operaciones en ciencias de la computación de la Universidad de Yale y como profesor invitado en investigación de operaciones del Instituto de Tecnología de Massachusett. Dembo a publicado aproximadamente 50 artículos técnicos sobre finanzas y optimización matemática. Su último libro "Seeing Tomorrow", el cual escribió con Andrew Freeman, explica cómo aplicar la administración del riesgo en la vida diaria y en la toma de decisiones en los negocios.

cantidades (x_1, \dots, x_n) que determinen la composición de los portafolios eficientes, es decir se requiere resolver el siguiente problema:

Maximizar *El valor Call*
Sujeto a *El valor Put $\leq k$;*
Restricciones de liquidez

donde k es constante.

El *Modelo Put/Call* incorpora las restricciones de liquidez¹², de las que se habla más adelante, de tal manera que logra mantener la simplicidad computacional del modelo.

En general, la función de utilidad de una inversión cuantifica lo atractivo de un portafolio. Por lo tanto, esta función identifica la eficiencia del portafolio que es más deseable para un inversionista, en el sentido de proveer el mejor rendimiento relativo al obtenido por el benchmark.

¹² Ver Capítulo III. 4.

Capítulo III. Modelación de la Frontera Eficiente

Put / Call

La frontera eficiente bajo el enfoque de Markowitz o el Put/Call sirve como herramienta para identificar el portafolio óptimo de acuerdo a las metas de inversión, preferencias al riesgo, horizonte de inversión y requerimientos de liquidez, entre otros.

La construcción de la *Frontera Eficiente Put/Call*, como se señaló en el capítulo anterior, puede modelarse matemáticamente como la solución a un problema de optimización que garantiza la obtención del máximo nivel esperado de valor call, siempre y cuando el valor put no se exceda en k unidades. Así, mientras k crece a partir de cero los valores de la solución óptima definen la frontera eficiente.

La frontera eficiente no solamente puede ser construida maximizando el valor call dado un valor put = k , sino también minimizando el valor put sujeto a obtener un nivel específico del valor call = l , siempre que éste sea mayor al *PMR*.

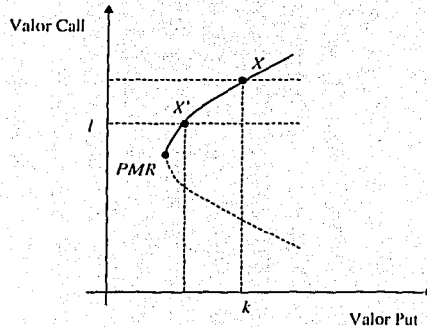


Fig. 10. Frontera Eficiente.

III.1 Notación.

Antes de iniciar con el desarrollo del modelo matemático de optimización, es necesario establecer ciertos supuestos y estandarizar la notación correspondiente.

En adelante se supondrá que se tienen n instrumentos factibles de inversión y por lo tanto, un portafolio queda especificado al determinar las cantidades de inversión x_i ($i=1, \dots, n$) en cada uno de ellos resumidas en el vector x .

Por otro lado, si los posibles comportamientos del mercado para un periodo de inversión son captados en m escenarios, entonces el escenario E_j ($j=1, \dots, m$) representará una de las posibles variaciones y p_j la probabilidad de ocurrencia de dicho escenario.

Sin perder generalidad y tal como sucede en la práctica, se puede considerar al portafolio benchmark como un instrumento libre de riesgo, es decir un instrumento con rendimientos constantes sobre cada escenario.

Los datos iniciales del modelo y su notación pueden ser resumidos en la siguiente tabla, en donde además se especifican sus características estructurales.

Notación	Definición	Elementos	Dimensión
V_M	Valor actual de los instrumentos de inversión en el mercado. (V_M^i = valor de mercado del instrumento i)	V_M^i	$n \times 1$
M	Valuación a futuro (M_{ij} = valor a futuro del instrumento i en el escenario j).	M_{ij}	$n \times m$
p	Probabilidades a priori de los escenarios.	p_j	$m \times 1$
r	Nivel o tasa de rendimiento del benchmark.	r_j	$m \times 1$
B	Valuación a Futuro del benchmark (B_{ij} = valor a futuro del instrumento i bajo el rendimiento r_j).	B_{ij}	$n \times m$
x_L	Límite inferior de la posición.	(x_{Lj})	$n \times 1$
x_U	Límite superior de la posición.	(x_{Uj})	$n \times 1$
x	Tamaño o cantidad de inversión (variables de decisión).	x_i	$n \times 1$
put	Pérdida relativa del portafolio con respecto al benchmark (Valor Put).	put_j	$m \times 1$
call	Ganancia relativa del portafolio con respecto al benchmark (Valor Call).	$call_j$	$m \times 1$

Tabla 5. Notación de Variables y Parámetros.

III.2 El Valor Call y el Valor Put de un portafolio.

Con base en la notación anterior, el valor de mercado de un portafolio X se determina fácilmente como la suma ponderada por la cantidad de inversión de los valores de mercado de cada instrumento que lo componen, es decir:

$$\sum_{i=1}^n V_M^i x_i = \mathbf{V}_M^T \mathbf{x}$$

Sin embargo, determinar el valor a futuro de un portafolio requiere primeramente determinar el valor a futuro bajo cada escenario de todos los instrumentos que lo componen. Dado que el valor a futuro del portafolio X bajo el escenario j , se define como la suma ponderada por la cantidad de inversión del valor a futuro de cada uno de los instrumentos bajo el mismo escenario, es decir:

$$\sum_{i=1}^n M_{ij} x_i$$

entonces, el valor a futuro bajo cada escenario j del portafolio X se obtiene mediante el producto

$$\mathbf{M}^T \mathbf{x}$$

Ahora bien, si en lugar de invertir en el portafolio X se prefiere realizar la inversión en el benchmark, el valor a futuro de la cantidad de inversión x_i bajo el rendimiento r_j , estará determinado por:

$$(V_M^i + r_j V_M^i) x_i$$

y por consiguiente el valor a futuro de la inversión X bajo el benchmark y escenario j estará determinado como:

$$\sum_{i=1}^n B_{ij} x_i$$

donde

$$B_{ij} = V_M^i + r_j V_M^i \quad (2)$$

Así, el valor a futuro de la inversión X bajo el benchmark y cada escenario j se puede obtener mediante

$$\mathbf{B}^T \mathbf{x}$$

De la definición de valor call (pág. 29), se puede determinar el valor call del portafolio X bajo cada escenario j , como:

$$call_j = \text{Max} \left[\sum_{i=1}^n (M_{ij} - B_{ij}) x_i, 0 \right]$$

En una generalización, el valor call del portafolio X bajo todos los escenarios ($j=1, \dots, m$) queda determinado mediante:

$$\text{call} = \text{Max}[(\mathbf{M}^T - \mathbf{B}^T)\mathbf{x}, 0]$$

De forma similar, se puede generar la ecuación que determina el valor put del portafolio X para cada escenario j :

$$\text{put}_j = \text{Max}\left[\sum_{i=1}^n (B_{ij} - M_{ij})x_i, 0\right]$$

y para el valor put del portafolio X bajo todos y cada uno de los escenarios ($j=1, \dots, m$) la expresión correspondiente es:

$$\text{put} = \text{Max}[(\mathbf{B}^T - \mathbf{M}^T)\mathbf{x}, 0]$$

Como se puede observar, existe una relación entre el **call** y el **put** de un portafolio, por lo que su diferencia representa la ganancia neta obtenida por el portafolio X sobre el benchmark.

Obsérvese que:

$$\text{call}_j - \text{put}_j = \text{Max}\left[\sum_{i=1}^n (M_{ij} - B_{ij})x_i, 0\right] - \text{Max}\left[\sum_{i=1}^n (B_{ij} - M_{ij})x_i, 0\right]$$

Si $M_{ij} - B_{ij} \geq 0$

$$call_j - put_j = \sum_{i=1}^n (M_{ij} - B_{ij})x_i - 0 = \sum_{i=1}^n (M_{ij} - B_{ij})x_i$$

y si por el contrario, $M_{ij} - B_{ij} \leq 0$

$$call_j - put_j = 0 - \sum_{i=1}^n (B_{ij} - M_{ij})x_i = \sum_{i=1}^n (M_{ij} - B_{ij})x_i$$

Por lo tanto

$$call - put = (M^T - B^T)x \quad (3)$$

Esta relación junto con las condiciones

$$\begin{aligned} call &\geq 0 \\ put &\geq 0 \\ call^T put &= 0 \end{aligned} \quad (3^*)$$

determinan el valor call y el valor put de un portafolio X a través de todos los escenarios. Por lo que a la ecuación (3) se le conoce como la restricción de

seguimiento y al conjunto de ecuaciones (3*) como la restricción complementaria.

III.3 Formulación Matemática del Modelo Put/Call.

Una vez desarrollado los conceptos del valor Call y Put de un portafolio, se está en posibilidades de formular matemáticamente la determinación de la frontera eficiente Put/Call.

Como se ha señalado, determinar la frontera eficiente Put/Call equivale a buscar maximizar el valor call del portafolio, lo que significa determinar la composición del portafolio que garantiza obtener el máximo rendimiento bajo cada escenario j .

Recuérdese que los escenarios intentan modelar el posible comportamiento del precio (o rendimiento) de los instrumentos y que la probabilidad de ocurrencia entre uno y otro puede variar, por lo que determinar cual es el valor para un portafolio bajo el escenario j debe, y de hecho, va asociado a una probabilidad a priori de ocurrencia (p_j).

Por lo tanto, el rendimiento esperado de un portafolio tiene la expresión:

$$p^T \text{call}$$

donde, p^T representa el vector transpuesto de probabilidades a priori de los escenarios.

Como es bien sabido, todo rendimiento va acompañado de un riesgo de inversión, el cual aunque no es deseable se intenta controlar al pedir que el valor put de la inversión no rebase un cierto nivel que debe corresponder al grado de aversión al riesgo que tiene el inversionista, es decir, se debe garantizar que:

$$p^T \text{put} \leq k$$

donde k es el nivel establecido.

Por lo tanto, la formulación matemática del modelo que permite determinar los portafolios que componen la frontera eficiente Put/Call se establece como:

Maximizar $p^T \text{call}$

Sujeto a

$$p^T \text{put} \leq k$$

$$\text{call} \geq 0$$

$$\text{put} \geq 0$$

Obsérvese que este modelo aunque resuelve el problema, no incluye cuestiones operativas como lo son algunas relacionadas con el volumen de operación de cada instrumento, el cual influye directamente en el precio de éstos. Así, es factible agregar algunas consideraciones que restrinjan las posibilidades de inversión como lo son las restricciones de liquidez.

III.4 Modelación de la Liquidez Finita.

Cuando se construyen portafolios, los inversionistas están normalmente restringidos en términos de las operaciones que pueden realizar. Por ejemplo, ellos deben respetar las limitaciones impuestas por las restricciones de liquidez, montos de inversión y lotes de venta de los mercados financieros.

En general, el tamaño de la operación crece en la misma proporción que la de la inversión por costo unitario, es decir, existen límites en el tamaño de las operaciones (o transacciones) que se pueden realizar derivadas de disposiciones regulatorias o del monto de inversión con el que se cuenta. Este tipo de restricciones afecta directamente el precio que se puede conseguir en una transacción, por lo que los mercados son conocidos por tener liquidez finita.

Para modelar la liquidez finita dentro del análisis, se establecen límites de operación en donde se garantiza que el precio unitario se mantiene constante, es decir, se fija el límite inferior $(x_L)_i$ y superior $(x_U)_i$ para cada una de las posiciones. Por lo tanto, las condiciones de liquidez en el modelo de optimización se pueden establecer mediante las desigualdades:

$$(x_L)_i \leq x_i$$

$$(x_U)_i \geq x_i$$

para la posición sobre cada uno de los instrumentos ($1 \leq i \leq n$).

Así, el modelo para determinar los portafolios eficientes sobre la frontera Put/Call queda especificado mediante:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar} && \mathbf{p}^T \text{call} \\ & \text{sujeto a} && \\ & && \mathbf{p}^T \text{put} \leq k \\ & && \text{call} \geq 0 \\ & && \text{put} \geq 0 \\ & && \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \\ & && \text{y } k \geq 0 \text{ cte.} \end{aligned}$$

III.5 Desarrollo numérico.

La intención al incluir el siguiente ejemplo numérico es mostrar la aplicación de la metodología desarrollada a lo largo del presente trabajo así como las diferencias conceptuales entre el modelo de Markowitz y el Put/Call.

Para efectos del desarrollo, supóngase que se tienen 15 instrumentos de inversión factibles ($i= 1, \dots, 15$) y sus precios o valores de mercado están contenidos en el vector \mathbf{V}_M .

$$\mathbf{V}_M = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 12.5 \\ 8.0 \\ 4.5 \\ 9.0 \\ 2.5 \\ 3.5 \\ 5.0 \\ 6.0 \\ 8.5 \\ 11.0 \\ 9.5 \\ 7.5 \\ 10.5 \\ 7.0 \end{bmatrix}$$

Para conocer el valor a futuro de los instrumentos es necesario conocer el posible comportamiento de sus rendimientos, lo cual se realiza mediante la generación de escenarios de rendimientos. Para este caso se supondrá que dicho comportamiento, en un horizonte de tiempo de un año, es captado en 10 escenarios E_j ($j=1, \dots, 10$); todos ellos conteniendo información para cada uno de los 15 instrumentos.

Instrumentos	Escenarios									
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
1	0.400	0.300	0.450	0.100	0.000	-0.150	-0.050	0.170	0.220	0.130
2	0.180	0.200	0.290	0.390	0.210	0.000	0.080	0.020	0.330	0.160
3	-0.075	0.110	0.045	0.410	0.650	0.740	0.025	0.070	0.260	0.370
4	0.323	0.125	0.150	0.003	0.056	0.590	0.121	0.089	0.273	0.530
5	-0.132	-0.133	-0.093	0.126	0.527	0.620	0.418	0.358	0.580	0.388
6	0.300	0.250	0.470	0.250	0.100	0.210	0.150	0.320	0.250	0.740
7	0.228	0.348	0.278	0.158	0.068	-0.061	-0.151	-0.071	0.008	-0.261
8	0.060	0.100	0.250	0.670	0.510	0.780	0.420	0.160	0.100	0.130
9	-0.076	-0.186	0.050	0.463	0.613	0.643	-0.020	0.016	0.636	0.270
10	0.150	0.142	0.264	0.510	0.179	0.151	0.312	0.114	0.492	0.470
11	0.250	0.200	0.350	0.200	0.050	-0.050	-0.100	0.270	0.320	0.230
12	0.180	0.300	0.342	0.129	0.218	-0.088	0.103	0.359	0.574	0.644
13	-0.210	0.570	-0.050	0.090	0.180	0.210	0.800	0.300	0.330	0.290
14	0.050	0.150	0.084	0.013	0.083	0.434	0.440	0.054	0.304	0.494
15	-0.008	-0.230	-0.184	0.088	0.025	0.700	0.321	-0.057	0.248	0.700

Tabla 6. Rendimiento de cada instrumento bajo cada escenario E_j .

Cabe aclarar que no obstante que en la práctica la probabilidad asignada a los escenarios es distinta, en este caso y únicamente por simplicidad numérica se ha considerado a todos los escenarios igualmente probables, es decir, $p_j=0.1$ para todo $1 \leq j \leq m$.

Modelación de la Frontera Eficiente Put / Call

Con el valor de mercado y los rendimientos bajo cada uno de los escenarios, se está en posibilidades de obtener la valuación a futuro de cada uno de los instrumentos (ecuación (1), pág. 19) mediante el cálculo de la matriz M .

Instrumentos	Escenarios									
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
1	14.000	13.000	14.500	11.000	10.000	8.500	9.500	11.700	12.200	13.300
2	14.750	10.000	16.125	17.275	15.125	12.500	13.500	12.785	16.635	14.500
3	7.400	8.880	8.360	11.280	13.200	13.920	8.200	8.560	10.080	10.960
4	25.955	25.062	25.173	24.517	24.245	27.155	23.955	24.785	25.730	26.885
5	7.810	7.800	8.160	10.140	13.750	14.58	12.770	12.230	14.220	12.500
6	3.250	3.125	3.675	1.875	2.750	1.975	2.875	3.300	3.125	4.350
7	4.300	4.720	4.475	4.055	3.740	3.285	2.970	3.250	3.530	2.585
8	14.700	14.500	16.250	8.350	7.550	8.900	7.100	5.800	5.500	5.650
9	5.540	4.880	6.300	8.780	9.680	9.860	5.880	6.100	9.820	7.620
10	9.775	7.285	10.750	12.835	10.025	9.790	11.155	9.470	12.685	12.495
11	13.750	13.200	14.850	13.200	11.550	10.450	9.900	13.970	14.520	13.530
12	11.210	12.950	12.750	10.750	11.575	10.340	10.485	12.915	14.960	15.625
13	5.925	11.775	7.125	8.175	8.850	8.075	13.500	9.750	9.975	9.675
14	11.025	12.075	11.385	10.645	11.380	15.060	15.120	11.070	13.695	15.375
15	6.950	5.390	5.710	7.620	7.180	11.900	9.250	6.600	8.740	11.900

Tabla 7. Valuación a Futuro (Matriz M_j).

Una vez calculada M , es necesario conocer cual será el rendimiento que generará una inversión en el benchmark bajo cada uno de los escenarios, considerando una cantidad unitaria de inversión, bajo cada instrumento.

La tasa de rendimiento del benchmark para cada escenario ($j=1, \dots, 10$) se representa en el vector r



$$r = \begin{bmatrix} 0.10 \\ -0.05 \\ 0.17 \\ 0.29 \\ 0.31 \\ 0.46 \\ 0.18 \\ 0.22 \\ 0.39 \\ 0.49 \end{bmatrix}$$

y los rendimientos que se generan para cada instrumento en una inversión de este tipo, se muestran en la siguiente tabla.

Instrumentos	Tasa de Rendimiento del benchmark									
	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}
1	1.000	-0.500	1.700	2.900	3.100	4.600	1.800	2.200	3.900	4.900
2	1.250	-0.625	2.125	3.625	3.875	5.750	2.250	2.750	4.875	6.125
3	0.800	-0.400	1.360	2.320	2.480	3.680	1.440	1.760	3.120	3.920
4	0.450	-0.225	0.765	1.305	1.395	2.070	0.810	0.990	1.755	2.205
5	0.900	-0.450	1.530	2.610	2.790	4.140	1.620	1.980	3.510	4.410
6	0.250	-0.125	0.425	0.725	0.775	1.150	0.450	0.550	0.975	1.150
7	0.350	-0.175	0.595	1.015	1.085	1.610	0.630	0.770	1.365	1.715
8	0.500	-0.250	0.850	1.450	1.550	2.300	0.900	1.100	1.950	2.450
9	0.600	-0.300	1.020	1.740	1.860	2.760	1.080	1.320	2.340	2.940
10	0.850	-0.425	1.445	2.465	2.635	3.910	1.530	1.870	3.315	4.165
11	1.100	-0.550	1.870	3.190	3.410	5.060	1.980	2.420	4.290	5.390
12	0.950	-0.475	1.615	2.755	2.945	4.370	1.710	2.090	3.705	4.655
13	0.750	-0.375	1.275	2.175	2.325	3.450	1.350	1.650	2.925	3.675
14	1.050	-0.525	1.785	3.045	3.255	4.830	1.890	2.310	4.095	5.145
15	0.700	-0.350	1.190	2.030	2.170	3.220	1.260	1.540	2.730	3.430

Tabla 8. Rendimiento de cada instrumento bajo la tasa de rendimiento del benchmark r_j .

Ahora, se debe calcular el valor a futuro del benchmark de cada uno de los 15 instrumentos de inversión bajo cada uno de los rendimientos r_j mediante el cálculo de la matriz **B** (ecuación (2), pág. 41).

Instrumentos	Escenarios									
	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7	E_8	E_9	E_{10}
1	11.000	9.500	11.700	12.900	10.000	14.600	11.800	22.200	13.900	14.900
2	13.750	11.375	14.625	16.125	15.125	18.250	14.750	15.250	17.375	18.375
3	8.800	7.600	9.360	10.320	13.200	11.680	9.440	9.760	11.120	11.920
4	9.950	4.775	5.235	5.305	4.245	6.570	5.310	5.490	6.255	6.705
5	9.900	8.550	10.53	11.610	13.750	13.140	10.620	10.980	12.510	13.410
6	2.750	2.375	2.925	3.325	2.750	3.650	2.950	3.050	3.475	3.650
7	3.850	3.325	4.095	4.515	3.740	5.110	4.130	4.270	4.865	5.215
8	5.500	4.750	5.850	6.450	7.550	7.300	5.900	6.100	6.950	7.450
9	6.600	5.700	7.020	7.740	9.680	8.760	7.080	7.320	8.340	8.940
10	9.350	8.075	9.945	10.965	10.025	12.410	10.030	10.370	11.815	12.665
11	12.100	10.450	12.870	14.190	11.550	16.060	12.980	17.050	15.290	16.390
12	10.450	9.025	11.115	12.255	11.575	13.870	11.210	11.590	13.205	14.155
13	8.250	7.125	8.775	9.675	8.850	10.950	8.850	9.150	10.425	11.175
14	11.550	9.975	12.285	13.545	11.380	15.330	12.390	12.810	14.595	15.645
15	7.700	6.650	8.190	9.030	7.180	10.220	8.260	8.540	9.730	10.430

Tabla 9. Valuación a Futuro del benchmark (Matriz B_{ij}).

A continuación se realiza la comparación entre los valores a futuro M_{ij} y los valores a futuro del benchmark B_{ij} , es decir, se realiza el cálculo de la diferencia entre ambos valores. Dichas diferencias se muestran en la siguiente tabla.

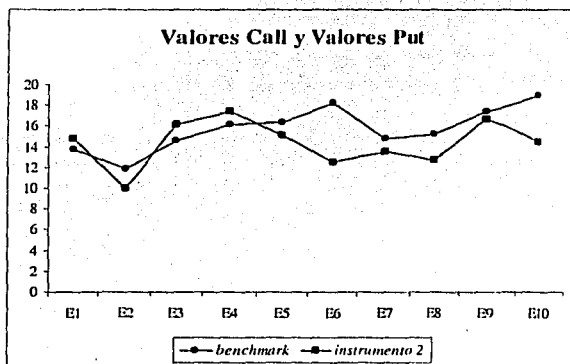
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Instrumentos	Escenarios									
	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10
1	3.000	3.500	2.800	-1.900	-3.100	-6.100	-2.300	-10.500	-1.700	-1.600
	1.000	-1.875	1.500	1.250	-1.250	5.750	-1.250	2.500	-0.740	4.425
3	-1.400	1.280	-1.000	0.960	2.720	2.240	-1.240	-1.200	-1.040	-0.960
	1.005	0.787	-0.090	-1.287	-1.650	0.585	-1.355	0.705	-0.525	0.180
5	-2.090	-0.750	-2.370	-1.470	1.960	1.440	2.150	1.250	1.710	-0.910
	0.500	0.760	0.750	-1.350	-0.525	-1.675	0.225	0.250	0.350	0.700
7	0.450	1.395	0.380	-0.460	-0.845	-1.825	-1.160	-1.020	-1.335	-2.630
	-0.800	-0.250	0.400	1.900	1.000	1.500	1.200	0.300	1.450	1.800
9	-1.060	-0.820	-0.720	1.040	1.820	1.100	-1.200	-1.220	1.480	-1.320
	0.425	-1.790	0.805	-1.875	-1.100	2.820	0.125	0.900	0.870	0.170
11	1.650	2.750	1.980	-0.990	-2.860	-5.610	-3.080	-3.080	-0.770	-2.860
	0.760	3.325	1.635	-1.325	-0.870	3.530	0.725	1.325	1.755	1.470
13	-2.325	4.650	-1.650	-1.500	-0.975	-2.875	4.650	0.600	-0.450	-1.500
	0.525	2.100	-0.900	2.900	-2.375	0.270	2.730	0.740	0.900	0.270
15	-0.760	-1.260	-2.480	-1.410	-1.99	1.680	0.990	-1.640	-0.990	1.470

Tabla 10. Diferencias entre M_{ij} y B_{ij} .

Como se puede observar, la tabla anterior muestra diferencias positivas y negativas, las positivas definen el valor call de cada instrumento bajo cada escenario y las negativas el valor put.

Lo anterior se puede apreciar gráficamente. Si se considera la gráfica conjunta de los valores call y put del instrumento 2 y el benchmark bajo cada escenario, se observan las ocasiones en las cuales el benchmark obtiene una mayor ganancia a la generada por el instrumento 2 y viceversa.



Gráfica 3. Valores Call y Valores Put del instrumento 2.

En la siguiente página, la tabla 11 muestra los valores call y put que presenta cada instrumento bajo cada escenario j , los cuales serán utilizados para calcular el rendimiento (suma de los valores call) y el riesgo (suma de los valores put) de cada instrumento.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Modelación de la Frontera Eficiente Put / Call

Instrumentos	Valores	Escenarios									
		E ₁	E ₂	E ₃	E ₄	E ₅	E ₆	E ₇	E ₈	E ₉	E ₁₀
1	Call	3.000	3.500	2.800	0	0	0	0	0	0	0
	Put	0	0	0	1.900	3.100	6.100	2.300	10.500	1.700	1.600
2	Call	1.000	0	1.500	1.250	0	0	0	0	0	0
	Put	0	1.875	0	0	1.250	5.750	1.250	2.500	0.740	4.425
3	Call	0	1.280	0	0.960	2.720	2.240	0	0	0	0
	Put	1.400	0	1.000	0	0	0	1.240	1.200	1.040	0.960
4	Call	1.005	0.787	0	0	0	0.585	0	0	0	0.180
	Put	0	0	0.090	1.287	1.650	0	1.355	0.705	0.525	0
5	Call	0	0	0	0	1.960	1.440	2.150	1.250	1.710	0
	Put	2.090	0.750	2.370	1.470	0	0	0	0	0	0.910
6	Call	0.500	0.750	0.750	0	0	0	0.225	0.250	0	0.700
	Put	0	0	0	1.350	0.525	1.675	0	0	0.350	0
7	Call	0.450	1.295	0.380	0	0	0	0	0	0	0
	Put	0	0	0	0.460	0.845	1.825	1.160	1.020	1.335	2.630
8	Call	0	0	0.400	1.900	1.000	1.600	1.200	0	0	0
	Put	0.800	0.250	0	0	0	0	0	0.300	1.450	1.800
9	Call	0	0	0	1.040	1.820	1.100	0	0	1.480	0
	Put	1.060	0.820	0.720	0	0	0	1.200	1.220	0	1.320
10	Call	0.425	0	0.805	1.870	0	0	1.125	0	0.870	0
	Put	0	1.790	0	0	1.110	2.620	0	0.900	0	0.170
11	Call	1.630	2.750	1.980	0	0	0	0	0	0	0
	Put	0	0	0.990	2.860	5.610	3.080	3.080	0.770	2.860	0
12	Call	0.760	3.325	1.635	0	0	0	1.325	1.755	1.470	0
	Put	0	0	0	1.525	0.870	3.530	0.725	0	0	0
13	Call	0	4.650	0	0	0	0	4.650	0.600	0	0
	Put	2.325	0	1.650	1.500	0.975	2.875	0	0	0.450	1.500
14	Call	0	2.100	0	0	0	0	2.730	0	0	0
	Put	0.525	0	0.900	2.900	2.375	0.270	0	1.740	0.900	0.270
15	Call	0	0	0	0	0	1.680	0.990	0	0	1.470
	Put	0.760	1.260	2.480	1.410	1.990	0	0	1.940	0.990	0

Tabla 11. Valores Call y Valores Put de cada instrumento bajo cada escenario.

Como se mencionó antes, con la información de la tabla anterior se pueden estimar las ganancias y pérdidas probables que proporcionará individualmente cada instrumento, dichas cantidades se muestran en la siguiente tabla.

Instrumento	Rendimiento	Riesgo
1	9.30	27.20
2	3.75	17.79
3	7.20	6.84
4	2.55	5.61
5	8.51	7.59
6	3.17	3.90
7	2.22	9.27
8	6.10	4.60
9	5.44	6.34
10	5.09	6.59
11	6.38	19.25
12	10.27	6.65
13	9.90	11.27
14	4.83	9.88
15	4.14	10.83

Tabla 12. Estimación de ganancias y pérdidas de cada instrumento.

Una vez obtenida toda la información anterior, nos enfocaremos en resolver el problema de estudio de este trabajo: "Determinar la frontera eficiente Put/Call". Para esto se encontrará el portafolio que bajo un cierto nivel de riesgo, proporcione el máximo rendimiento, es decir, determinar las cantidades de inversión x_i de cada instrumento ($i=1, \dots, 15$), que maximicen el valor call (rendimiento), con la restricción de que el valor put (riesgo) sea menor o igual a un valor k y que las restricciones de liquidez se satisfagan.

Por lo tanto, antes de escribir el problema a resolver es necesario establecer los límites de las posiciones, así sea

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\mathbf{x}_L = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y \quad \mathbf{x}_U = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Es evidente que los límites de la posición no permiten ventas en corto.

Función Objetivo

Para poder identificar un portafolio eficiente es necesario resolver el siguiente problema de programación no lineal:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar } \mathbf{p}^T \mathbf{call} \\
 & \text{sujeto a} \\
 & \mathbf{p}^T \mathbf{put} \leq k \\
 & \mathbf{x}_l \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_u \\
 & \text{para } k \geq 0 \text{ cte.}
 \end{aligned}$$

Donde cada una de las entradas del vector **call** está definida por:

$$call_j = \text{Max} \left[\sum_{i=1}^{15} (M_{ij} - B_{ij}) x_i, 0 \right]$$

Así,

$$call_1 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} 3.000x_1 + x_2 - 1.400x_3 + 1.005x_4 - 2.090x_5 + 0.500x_6 + 0.450x_7 - 0.800x_8 - 1.060x_9 \\ + 0.425x_{10} + 1.650x_{11} + 0.760x_{12} - 2.325x_{13} - 0.525x_{14} - 0.760x_{15} \end{array} , 0 \right]$$

$$call_2 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} 3.500x_1 - 1.875x_2 + 1.280x_3 + 0.787x_4 - 0.750x_5 + 0.750x_6 + 1.395x_7 - 0.250x_8 \\ - 0.820x_9 - 1.790x_{10} + 2.750x_{11} + 3.325x_{12} + 4.650x_{13} + 2.100x_{14} - 1.260x_{15} \end{array} , 0 \right]$$

$$call_3 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} 2.800x_1 + 1.500x_2 - x_3 - 0.090x_4 - 2.370x_5 + 0.750x_6 + 0.380x_7 - 0.400x_8 - 0.720x_9 \\ + 0.805x_{10} + 1.980x_{11} + 1.630x_{12} - 1.650x_{13} - 0.900x_{14} - 2.480x_{15} \end{array} , 0 \right]$$

$$call_4 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -1.900x_1 + 1.250x_2 + 0.960x_3 - 1.287x_4 - 1.470x_5 - 1.350x_6 - 0.460x_7 + 1.900x_8 \\ + 1.040x_9 + 1.870x_{10} - 0.990x_{11} - 1.525x_{12} - 1.500x_{13} - 2.900x_{14} - 1.410x_{15} \end{array} \right] \cdot 0$$

$$call_5 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -3.100x_1 - 1.250x_2 + 2.720x_3 - 1.650x_4 + 1.960x_5 - 0.525x_6 - 0.845x_7 + x_8 \\ + 1.820x_9 - 1.110x_{10} - 2.860x_{11} - 0.870x_{12} - 0.975x_{13} - 2.375x_{14} - 1.990x_{15} \end{array} \right] \cdot 0$$

$$call_6 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -6.100x_1 - 5.750x_2 + 2.240x_3 + 0.585x_4 + 1.440x_5 - 1.675x_6 - 1.825x_7 + 1.600x_8 \\ + 1.100x_9 - 2.620x_{10} - 5.610x_{11} - 3.530x_{12} - 2.875x_{13} - 0.270x_{14} + 1.680x_{15} \end{array} \right] \cdot 0$$

$$call_7 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -2.300x_1 - 1.250x_2 - 1.240x_3 - 1.355x_4 + 2.150x_5 + 0.225x_6 - 1.160x_7 + 1.200x_8 \\ - 1.200x_9 + 1.125x_{10} - 3.080x_{11} - 0.725x_{12} + 4.650x_{13} + 2.730x_{14} + 0.990x_{15} \end{array} \right] \cdot 0$$

$$call_8 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -10.500x_1 - 2.500x_2 - 1.200x_3 - 0.705x_4 + 1.250x_5 + 0.250x_6 - 1.020x_7 - 0.300x_8 \\ - 1.220x_9 - 0.900x_{10} - 3.080x_{11} + 1.325x_{12} + 0.600x_{13} - 1.740x_{14} - 1.640x_{15} \end{array} \right] \cdot 0$$

$$call_9 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -1.700x_1 - 0.740x_2 - 1.040x_3 - 0.525x_4 + 1.710x_5 - 0.350x_6 - 1.335x_7 + 1.450x_8 \\ + 1.480x_9 + 0.870x_{10} - 0.770x_{11} + 1.775x_{12} - 0.450x_{13} - 0.090x_{14} - 0.990x_{15} \end{array} \right] \cdot 0$$

$$call_{10} = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -1.600x_1 - 4.425x_2 - 0.960x_3 + 0.180x_4 - 0.910x_5 + 0.700x_6 - 2.630x_7 - 1.800x_8 \\ - 1.320x_9 - 0.170x_{10} - 2.860x_{11} + 1.470x_{12} - 1.500x_{13} - 0.270x_{14} + 1.470x_{15} \end{array} \right] \cdot 0$$

y p^T call es la suma ponderada por 0.1 que es la probabilidad a priori asignada a cada escenario.

Restricciones

Las restricciones del problema son:

$$put_j = \text{Max} \left[\sum_{i=1}^{15} (B_{ij} - M_{ij})x_i, 0 \right]$$

donde

$$put_1 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -3.000x_1 - x_2 + 1.400x_3 - 1.005x_4 + 2.090x_5 - 0.500x_6 - 0.450x_7 + 0.800x_8 + 1.060x_9 \\ -0.425x_{10} - 1.650x_{11} - 0.760x_{12} + 2.325x_{13} + 0.525x_{14} + 0.760x_{15} \end{array} \right] 0$$

$$put_2 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} 3.500x_1 + 1.875x_2 - 1.280x_3 - 0.787x_4 + 0.750x_5 - 0.750x_6 - 1.395x_7 + 0.250x_8 \\ + 0.820x_9 + 1.790x_{10} - 2.750x_{11} + 3.325x_{12} - 4.650x_{13} - 2.100x_{14} + 1.260x_{15} \end{array} \right] 0$$

$$put_3 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} -2.800x_1 - 1.500x_2 + x_3 + 0.090x_4 + 2.370x_5 - 0.750x_6 - 0.380x_7 + 0.400x_8 + 0.720x_9 \\ -0.805x_{10} - 1.980x_{11} - 1.630x_{12} + 1.650x_{13} + 0.900x_{14} + 2.480x_{15} \end{array} \right] 0$$

$$put_4 = \text{Max} \left[\begin{array}{l} 1.900x_1 - 1.250x_2 - 0.960x_3 + 1.287x_4 + 1.470x_5 + 1.350x_6 + 0.460x_7 - 1.900x_8 \\ -1.040x_9 - 1.870x_{10} + 0.990x_{11} + 1.525x_{12} + 1.500x_{13} + 2.900x_{14} + 1.410x_{15} \end{array} \right] 0$$

$$put_5 = Max \left[\begin{array}{l} 3.100x_1 + 1.250x_2 - 2.720x_3 + 1.650x_4 - 1.960x_5 + 0.525x_6 + 0.845x_7 - x_8 \\ -1.820x_9 - 1.110x_{10} + 2.860x_{11} + 0.870x_{12} + 0.975x_{13} + 2.375x_{14} + 1.990x_{15} \end{array} \right] 0$$

$$put_6 = Max \left[\begin{array}{l} 6.100x_1 + 5.750x_2 - 2.240x_3 - 0.585x_4 - 1.440x_5 + 1.675x_6 + 1.825x_7 - 1.600x_8 \\ -1.100x_9 + 2.620x_{10} + 5.610x_{11} + 3.530x_{12} + 2.875x_{13} + 0.270x_{14} - 1.680x_{15} \end{array} \right] 0$$

$$put_7 = Max \left[\begin{array}{l} 2.300x_1 + 1.250x_2 + 1.240x_3 + 1.355x_4 - 2.150x_5 - 0.225x_6 + 1.160x_7 - 1.200x_8 \\ + 1.200x_9 - 1.125x_{10} + 3.080x_{11} + 0.725x_{12} - 4.650x_{13} - 2.730x_{14} - 0.990x_{15} \end{array} \right] 0$$

$$put_8 = Max \left[\begin{array}{l} 10.500x_1 + 2.500x_2 + 1.200x_3 + 0.705x_4 - 1.250x_5 - 0.250x_6 + 1.020x_7 + 0.300x_8 \\ + 1.220x_9 + 0.900x_{10} + 3.080x_{11} - 1.325x_{12} - 0.600x_{13} + 1.740x_{14} + 1.640x_{15} \end{array} \right] 0$$

$$put_9 = Max \left[\begin{array}{l} 1.700x_1 + 0.740x_2 + 1.040x_3 + 0.525x_4 - 1.710x_5 + 0.350x_6 + 1.335x_7 + 1.450x_8 \\ -1.480x_9 - 0.870x_{10} + 0.770x_{11} - 1.775x_{12} + 0.450x_{13} + 0.090x_{14} + 0.990x_{15} \end{array} \right] 0$$

$$put_{10} = Max \left[\begin{array}{l} 1.600x_1 + 4.425x_2 + 0.960x_3 - 0.180x_4 + 0.910x_5 - 0.700x_6 + 2.630x_7 + 1.800x_8 \\ + 1.320x_9 + 0.170x_{10} + 2.860x_{11} - 1.470x_{12} + 1.500x_{13} + 0.270x_{14} - 1.470x_{15} \end{array} \right] 0$$

y las restricciones de liquidez están representadas en las siguientes 15 desigualdades:

$$0 \leq x_1 \leq 5$$

$$0 \leq x_2 \leq 2$$

$$0 \leq x_3 \leq 4$$

$$0 \leq x_4 \leq 6$$

$$0 \leq x_5 \leq 3$$

$$0 \leq x_6 \leq 5$$

$$0 \leq x_7 \leq 7$$

$$0 \leq x_8 \leq 1$$

$$0 \leq x_9 \leq 2$$

$$0 \leq x_{10} \leq 1$$

$$0 \leq x_{11} \leq 4$$

$$0 \leq x_{12} \leq 6$$

$$0 \leq x_{13} \leq 8$$

$$0 \leq x_{14} \leq 7$$

$$0 \leq x_{15} \leq 3$$

Solución

Como se puede observar, las características del problema (función objetivo no lineal, 10 restricciones no lineales y 15 lineales) obligan a recurrir a un paquete computacional para resolverlo. En este caso, se recurrió al programa LANCELOT (AMPL input) quien a partir del servidor NEOS versión 4.0 obtuvo la solución óptima para cada una de las k fijadas.

Así, para $k=2.5$ u.m. la composición del portafolio óptimo (con un valor call de \$5.2367 u.m.) fue:

K=2.5	
Función Objetivo: 5.236956667	
x_1	0
x_2	0
x_3	4
x_4	0
x_5	3
x_6	0
x_7	0
x_8	1
x_9	0
x_{10}	0
x_{11}	0
x_{12}	6
x_{13}	0.0728889
x_{14}	0
x_{15}	0

Tabla 13. Composición del portafolio óptimo.

Como se puede apreciar, la solución indica que se debe invertir sólo en los instrumentos 3, 5, 8, 12 y 13; y que el número de activos que se deben comprar de cada tipo son:

Instrumento	No. de activos
3	4
5	3
8	1
12	6
13	0.073

Como es de suponerse, el valor de la función objetivo y la composición del portafolio cambiará para distintos valores de k . Cada uno de los portafolios óptimos será un elemento de la frontera eficiente Put/Call.

Para mostrarlo, se determinaron los portafolio eficientes para $k=5$, $k=10$ y $k=20$. Los resultados obtenidos así como la composición del portafolio para cada valor k se encuentran registrados en la siguiente tabla.

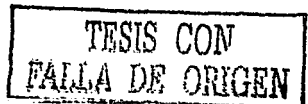
Función	$K=2.5$	$K=4$	$K=5$	$K=7$	$K=9$	$K=10$	$K=14$	$K=20$
Objetivo	5.236957	6.666345	7.623972	9.539226	11.454480	12.232276	13.484768	14.124170
x_1	0	0	0	0	0	0	0	0
x_2	0	0	0	0	0	0	0	0
x_3	4	4	4	4	4	0	0	0
x_4	0	0	0	0	0	0	0	0
x_5	3	3	3	3	3	3	3	3
x_6	0	0	0	0	0	0	5	5
x_7	0	0	0	0	0	0	0	0
x_8	1	1	1	1	1	0.90817	0	0
x_9	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{10}	0	0	0	0	0	1	1	1
x_{11}	0	0	0	0	0	0	0	0
x_{12}	6	6	6	6	6	6	6	6
x_{13}	0.07289	1.95588	3.08582	5.34571	7.60559	8	8	8
x_{14}	0	0	0	0	0	0	4.07795	7
x_{15}	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 14. Composición de diferentes portafolios óptimos.

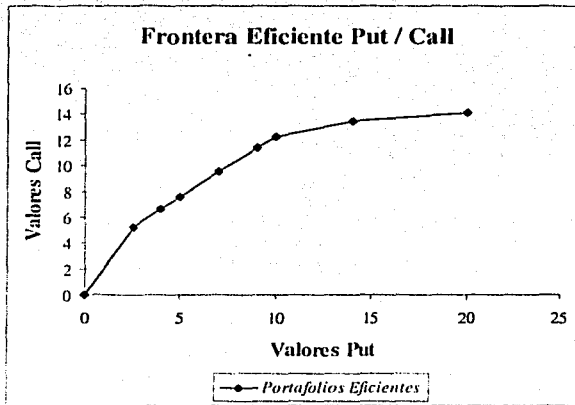
Si únicamente nos enfocamos a la relación **call-put** de cada portafolio, se observa que el valor **call** se incrementa en la medida que el **put** lo hace.

Función Objetivo	0	2.5	4	5	7	9	10	14	20
Objetivo	0	5.236957	6.666345	7.623972	9.539226	11.45448	12.23228	13.48477	14.12417

Tabla 15. Portafolios Eficientes.



Una vez obtenidos estos datos, es posible construir la frontera eficiente Put/Call como se muestra en la siguiente gráfica.



Gráfica 4. Frontera Eficiente Put / Call.

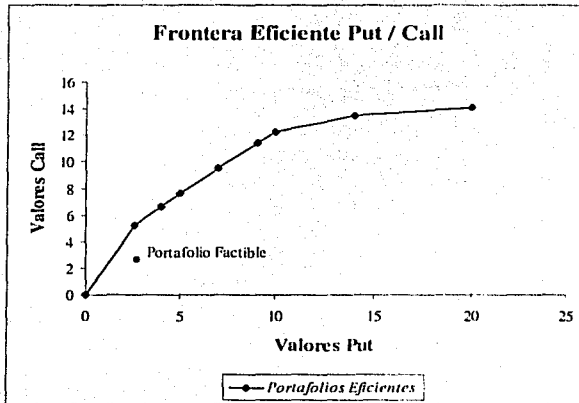
Cada punto de la frontera eficiente tiene una correspondencia con la composición de un portafolio, por lo que un cambio en las cantidades x_i de cada instrumento corresponde a un nuevo portafolio, no necesariamente eficiente, observemos este hecho.

Tómese un portafolio arbitrario que satisfaga los límites de operación x_L y x_U previamente establecidos, digamos:

Portafolio arbitrario	
x_1	0
x_2	0
x_3	2
x_4	0
x_5	3
x_6	5
x_7	0
x_8	1
x_9	2
x_{10}	10
x_{11}	2
x_{12}	2
x_{13}	0
x_{14}	1
x_{15}	0

Tabla 16. Cantidades x_i arbitrarias.

En este caso, el portafolio satisface tener un valor put de 2.958 y un valor call de \$2.983, si se localizan estos valores en la gráfica anterior, se observará que este punto no pertenece a la frontera eficiente sino que está por debajo de ella. Por lo tanto, el portafolio es factible pero no proporciona el máximo rendimiento bajo el nivel de riesgo $k=2.958$.



Gráfica 5. Portafolios Eficientes y Factibles.

Portafolio eficiente con ventas en corto

En el caso anterior, dado el límite inferior de operación $x_L=0$, no se permitió la posibilidad de realizar ventas en corto. El incluir ventas en corto permite obtener mayor versatilidad en el tipo de operaciones para obtener mayores ganancias. Obsérvese lo que sucede al cambiar el vector x_L , en el ejercicio anterior, por el vector:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ -6 \\ -2 \\ -4 \\ -5 \\ -7 \\ -10 \\ -8 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \\ -3 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Si se asume que los demás datos quedan invariantes, las soluciones óptimas, es decir, las composiciones de los portafolios que genera el máximo rendimiento bajo diferentes niveles de riesgo k , están especificadas en la siguiente tabla.

Función	$K = -25$	$K = -50$	$K = -75$	$K = -100$	$K = -25$	$K = -50$	$K = -100$
Objetivo	20.74280	21.35945	21.64354	21.86117	22.63109	23.34417	23.34417
x_1	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
x_2	0	0	0	0	0	0	0
x_3	-1	2.51009	3.45706	4	4	4	4
x_4	-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
x_5	3	3	3	3	3	3	3
x_6	4	4	4	4	4	4	4
x_7	-5	-5	-5	-5	-5	-5	-5
x_8	1	1	1	1	1	1	1
x_9	-10	-10	-10	-9.52795	-2.88960	2	2
x_{10}	-3.15930	-8	-8	-8	-8	-8	-8
x_{11}	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
x_{12}	6	6	6	6	6	6	6
x_{13}	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2
x_{14}	-3	-3	-3	-3	-3	-3	-3
x_{15}	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 17. Composición de diferentes portafolios óptimos (con ventas en corto).

Cómo se observa, para un nivel de riesgo $k= 2.5$ el rendimiento generado es \$22,63109 que es mayor al \$5,23695 obtenido cuando no se permitieron ventas en corto.

Para este caso en particular se tiene que la posibilidad de realizar ventas en corto en los instrumentos 1, 4, 7, 9, 10, 11, 13, 14 y 15.

<i>Instrumento</i>	<i>No. de activos</i>
1	2
4	6
7	5
9	2.8896
10	8
11	1
13	2
14	3
15	9

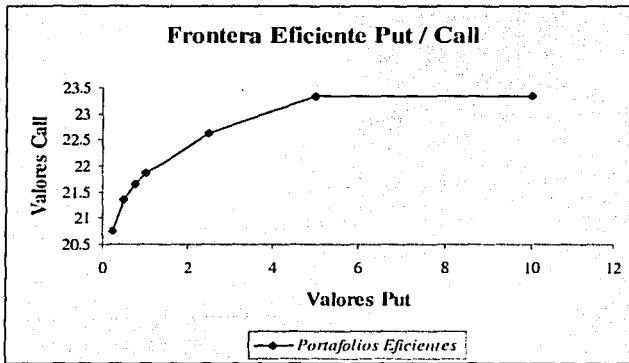
Esto permite generar una mayor ganancia que si no se hubiera permitido este tipo de operación.

No obstante que el valor call se incrementa cuando se permiten las ventas en corto, el comportamiento de la relación call-put de cada portafolio se mantiene así, observamos que el valor call se incrementa en la medida que el put lo hace.

	0.25	0.5	0.75	1	2.5	5	10
Función Objetivo	20.7427977	21.3594534	21.6435443	21.8611737	22.6310887	23.34417	23.34417

Tabla 18. Portafolios Eficientes (con ventas en corto).

A partir de los valores anteriores es posible construir la frontera eficiente Put / Call, donde cada punto de la frontera eficiente tiene una correspondencia con la composición del portafolio.



Gráfica 6. Frontera Eficiente Put / Call (con ventas en corto).

Modelo de Markowitz

No obstante que el contexto bajo el cual se obtiene la frontera eficiente Put/Call y el modelo clásico de Markowitz es diferente, es conveniente realizar un ejemplo numérico y analizar los resultados obtenidos bajo ambos modelos.

Bajo los mismos datos iniciales que fueron desarrollados los ejemplos anteriores, considérese el problema de determinar la frontera eficiente bajo el modelo de Markowitz, es decir,

$$\text{Maximizar} \quad E(r_p) = \sum_{i=1}^n x_i E(r_i)$$

Sujeto a

$$\sigma^2(r_p) = \sum_{i=1}^n (x_i)^2 \sigma^2(r_i) + \sum_{i,j=1}^n 2x_i x_j \text{Cov}(r_i, r_j) = c, \quad i \neq j$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1$$

donde

$$E(r_p) = 0.157x_1 + 0.223x_2 + 0.548x_3 + 0.625x_4 + 0.459x_5 + 0.372x_6 + 0.626x_7 + 0.834x_8 \\ + 0.783x_9 + 0.497x_{10} + 0.172x_{11} + 0.558x_{12} + 0.251x_{13} + 0.456x_{14} + 0.590x_{15}$$

$$\sigma^2(r_p) = \sum_{i=1}^{15} (x_i)^2 \sigma^2(r_i) + \sum_{i,j=1}^{15} 2x_i x_j \text{Cov}(r_i, r_j), \quad i \neq j$$

es igual a:

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(r_p) = & 0.037x_1^2 + 0.027x_2^2 + 0.097x_3^2 + 0.086x_4^2 + 0.046x_5^2 + 0.090x_6^2 + 0.039x_7^2 + 0.047x_8^2 \\
 & + 0.023x_9^2 + 0.047x_{10}^2 + 0.024x_{11}^2 + 0.047x_{12}^2 + 0.083x_{13}^2 + 0.043x_{14}^2 + 0.074x_{15}^2 + 2x_1x_2(-0.014) \\
 & + 2x_1x_3(-0.023) + 2x_1x_4(-0.015) + 2x_1x_5(-0.033) + 2x_1x_6(0.046) + 2x_1x_7(0.025) + 2x_1x_8(-0.020) \\
 & + 2x_1x_9(-0.014) + 2x_1x_{10}(-0.026) + 2x_1x_{11}(0.025) + 2x_1x_{12}(-0.033) + 2x_1x_{13}(-0.026) + 2x_1x_{14}(-0.027) \\
 & + 2x_1x_{15}(-0.032) + 2x_2x_3(0.025) + 2x_2x_4(0.018) + 2x_2x_5(0.022) + 2x_2x_6(-0.026) + 2x_2x_7(-0.014) \\
 & + 2x_2x_8(-0.001) + 2x_2x_9(0.003) + 2x_2x_{10}(0.023) + 2x_2x_{11}(-0.004) + 2x_2x_{12}(0.023) + 2x_2x_{13}(-0.005) \\
 & + 2x_2x_{14}(0.024) + 2x_2x_{15}(0.033) + 2x_3x_4(-0.002) + 2x_3x_5(0.030) + 2x_3x_6(-0.060) + 2x_3x_7(-0.024) \\
 & + 2x_3x_8(-0.037) + 2x_3x_9(0.007) + 2x_3x_{10}(0.042) + 2x_3x_{11}(-0.014) + 2x_3x_{12}(0.030) + 2x_3x_{13}(0.020) \\
 & + 2x_3x_{14}(0.024) + 2x_3x_{15}(0.061) + 2x_4x_5(0.011) + 2x_4x_6(-0.009) + 2x_4x_7(-0.026) + 2x_4x_8(0.028) \\
 & + 2x_4x_9(0.018) + 2x_4x_{10}(0.008) + 2x_4x_{11}(-0.012) + 2x_4x_{12}(0.011) + 2x_4x_{13}(0.012) + 2x_4x_{14}(0.003) \\
 & + 2x_4x_{15}(0.014) + 2x_5x_6(-0.035) + 2x_5x_7(-0.031) + 2x_5x_8(0.013) + 2x_5x_9(0.014) + 2x_5x_{10}(0.035) \\
 & + 2x_5x_{11}(-0.015) + 2x_5x_{12}(0.047) + 2x_5x_{13}(0.020) + 2x_5x_{14}(0.039) + 2x_5x_{15}(0.050) + 2x_6x_7(0.016) \\
 & + 2x_6x_8(-0.004) + 2x_6x_9(-0.010) + 2x_6x_{10}(-0.042) + 2x_6x_{11}(0.034) + 2x_6x_{12}(-0.036) + 2x_6x_{13}(-0.015) \\
 & + 2x_6x_{14}(-0.027) + 2x_6x_{15}(-0.044) + 2x_7x_8(-0.011) + 2x_7x_9(-0.014) + 2x_7x_{10}(-0.024) + 2x_7x_{11}(0.020) \\
 & + 2x_7x_{12}(-0.032) + 2x_7x_{13}(-0.022) + 2x_7x_{14}(-0.030) + 2x_7x_{15}(-0.038) + 2x_8x_9(0.015) + 2x_8x_{10}(0.002) \\
 & + 2x_8x_{11}(-0.013) + 2x_8x_{12}(0.013) + 2x_8x_{13}(0.017) + 2x_8x_{14}(0.007) + 2x_8x_{15}(-0.005) + 2x_9x_{10}(0.011) \\
 & + 2x_9x_{11}(-0.009) + 2x_9x_{12}(0.015) + 2x_9x_{13}(0.038) + 2x_9x_{14}(0.006) + 2x_9x_{15}(0.016) + 2x_{10}x_{11}(-0.007) \\
 & + 2x_{10}x_{12}(0.036) + 2x_{10}x_{13}(0.008) + 2x_{10}x_{14}(0.028) + 2x_{10}x_{15}(0.006) + 2x_{11}x_{12}(-0.015) + 2x_{11}x_{13}(-0.022) \\
 & + 2x_{11}x_{14}(-0.010) + 2x_{11}x_{15}(-0.010) + 2x_{12}x_{13}(0.021) + 2x_{12}x_{14}(0.040) + 2x_{12}x_{15}(0.050) + 2x_{13}x_{14}(0.006) \\
 & + 2x_{13}x_{15}(0.025) + 2x_{14}x_{15}(0.043)
 \end{aligned}$$

y

$$c = 2.5$$

Solución

Como se observa, las características de este nuevo planteamiento son completamente distintas a las de la frontera eficiente Put/Call (función objetivo lineal, 1 restricción no lineal y 15 lineales). Al igual que en el caso anterior, se recurrió al programa LANCELOT (AMPL input) para obtener la solución óptima.

El valor de la función objetivo (máximo rendimiento) y la composición del portafolio óptimo, se puede observar en la siguiente tabla, donde se observa la solución obtenida para el caso en que no se permiten ventas en corto.

	$K = 2.5$
Función Objetivo	0.83400061
x_1	0
x_2	0
x_3	0
x_4	0
x_5	0
x_6	0
x_7	0
x_8	1
x_9	0
x_{10}	0
x_{11}	0
x_{12}	0
x_{13}	0
x_{14}	0
x_{15}	0

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Tabla 19. Portafolio Eficiente sin ventas en corto (Modelo de Markowitz).

Los resultados obtenidos en ambos modelos (Put/Call y Markowitz) son completamente distintos. En el contexto teórico no se pueden comparar las ganancias, ya que ni siquiera el nivel de riesgo (2.5) puede ser considerado un factor común en ambos planteamientos ya que en el modelo de Markowitz, las medidas son absolutas y en el Put/Call las medidas son relativas a un parámetro de referencia.

CONCLUSIONES

En el medio financiero la toma de decisiones es una actividad diaria y trascendente, pues en ellas recaen el éxito o fracaso de una inversión. El popular modelo de Markowitz, con todo y sus limitantes, ha servido como una alternativa para determinar inversiones óptimas dentro de un conjunto de oportunidades, es decir, aquella que independientemente de las necesidades individuales de cada inversionista proporcione el mayor rendimiento posible y garantice la menor exposición al riesgo.

El modelo de la Frontera Eficiente Put/Call, desarrollado bajo el enfoque de la Valuación a Futuro, no presenta las limitaciones del modelo de Markowitz. Esta nueva metodología considera que los mercados no son estáticos al incluir escenarios históricos y la valuación a mercado; además de incorporar un concepto vanguardista en el medio financiero, el "*benchmark*". Ahora, la eficiencia de los portafolios se mide con respecto al comportamiento del benchmark; el rendimiento conceptualizado como el **call** garantiza obtener mejores rendimientos que el benchmark y el **put** que los rendimientos (o pérdidas) no sean inferiores a las obtenidas por el mismo parámetro de referencia.

En este trabajo, se consideró una versión simple del modelo Put/Call, en un horizonte de tiempo de un solo periodo y con algunas restricciones de operación (liquidez). No obstante, el modelo puede ser desarrollado para más periodos e incluir otras restricciones operativas como lo son las presupuestales.

Aunque se incluyó el modelo de Markowitz como preámbulo a la presentación del modelo Put/Call, la intención no es determinar cual es el mejor modelo. Como se pudo observar en los ejercicios numéricos, son incomparables, no sólo en los resultados obtenidos sino en el contexto teórico bajo el cual se desarrollan. Por eso, la funcionalidad de uno y otro es determinada por el responsable en la toma de decisiones.

Así, el modelo Put/Call puede ser considerado para cuestiones regulatorias, donde las autoridades intentan estandarizar el tipo de inversión o el nivel de riesgo de sus carteras. En este contexto el modelo de Markowitz no es aplicable, ya que las autoridades no están facultadas para intervenir en el tipo de inversión que realizan las instituciones financieras.

OPCIONES

Una opción es un contrato, en el cual el poseedor adquiere el derecho mas no la obligación de comprar o vender algún bien subyacente a un precio determinado ("precio de ejercicio" o "strike price") en una fecha o fechas futuras determinadas ("fecha de expiración" o "fecha de ejercicio") a cambio del pago de una prima.

La terminología call/put apareció inicialmente en el mercado de opciones sobre acciones, en el que estaba muy claro que las opciones daban el derecho a comprar acciones (call) o vender acciones (put). Hoy en día existen muchos más tipos de opciones (sobre divisas, futuros, swaps, etc.), pero la terminología sigue siendo la misma.

"Calls" y "Puts"

Existen dos tipos básicos de opciones desde el punto de vista de quien adquiere el derecho a ejercer (comprar o vender): opción call y opción put.

Una opción call, da al poseedor de la opción el derecho mas no la obligación de comprar el bien subyacente a un precio determinado en una fecha o fechas futuras determinadas.

Una opción put, da al poseedor de la opción el derecho mas no la obligación de vender el bien subyacente a un precio determinado en una fecha o fechas futuras determinadas.

Opciones "europeas" y "americanas"

Otra distinción entre los tipos de opción concierne a las fechas en las que está permitido ejercer los derechos que otorga la opción.

Una opción europea puede ser ejercida únicamente en su fecha de ejercicio.

Una opción americana puede ser ejercida en cualquier fecha anterior y hasta su fecha de ejercicio.

La distinción tiene orígenes históricos, en Estados Unidos las primeras opciones sobre acciones que se operaron en Chicago se podían ejercer en cualquier día hasta su vencimiento, de ahí que se les diera el nombre de americanas, mientras que en la Bolsa de Londres era tradicional que las opciones se pudieran ejercer únicamente el día de vencimiento, denominadas europeas para distinguirlas de las primeras.

Hoy en día la distinción geográfica existe únicamente en el nombre; tanto en América como en Europa y Asia es posible operar con opciones americanas y europeas.

Posiciones de las opciones

Para cualquier contrato de opciones existen dos posiciones:

Posición larga: cuando el inversionista compra el derecho a comprar o vender un subyacente.

Posición corta: cuando el inversionista vende el derecho a comprar o vender un subyacente.

Por lo tanto, dentro de la operación con opciones se pueden distinguir las siguientes posiciones:

Call largo: cuando el inversionista compra el derecho a comprar un subyacente.

Call corto: cuando el inversionista vende el derecho a comprar un subyacente.

Put largo: cuando el inversionista compra el derecho a vender un subyacente.

Put corto: cuando el inversionista vende el derecho a vender un subyacente.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Ejemplo

Supóngase que se adquiere una *opción call europea* sobre algún bien subyacente.

Sea k = precio de ejercicio (strike price).

S_T = valor del subyacente al tiempo de vencimiento.

T = tiempo de vencimiento.

c = prima.

El *comprador del call* ejercerá su derecho si $S_T > k$ y no lo ejercerá si $S_T \leq k$.

Por lo tanto, la ganancia para una *posición larga* en una opción call europea estará determinada por

$$\text{Max}(S_T - k, 0)$$

Sabemos que en cualquier operación, para todo comprador de calls existe un vendedor, es decir alguien que asume la *posición corta*, cuya ganancia dependerá del no ejercicio del call largo, determinada por

$$-\text{Max}(S_T - k, 0) = \text{Min}(k - S_T, 0)$$

En la siguiente figura se ilustra lo anterior.

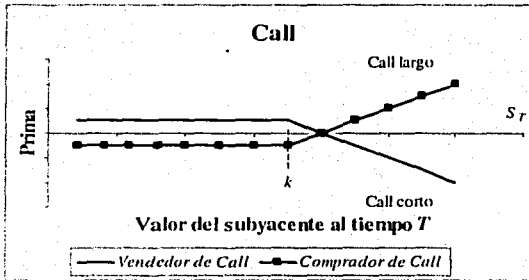


Figura 11. Posiciones de una opción call europea.

Si se adquiere una *opción put europea* sobre algún bien subyacente. El *comprador del put* ejercerá su derecho si $S_T < k$ y no lo ejercerá si $S_T \geq k$.

Por lo tanto, la ganancia para una *posición larga* en una opción put europea está determinada por:

$$\text{Max}(k - S_T, 0)$$

SIN
FALLA DE ORIGEN

Para todo comprador de put existe un vendedor, es decir alguien que asume la *posición corta*, cuya ganancia dependerá del no ejercicio del put largo, determinada por

$$-Max(k - S_T, 0) = Min(S_T - k, 0)$$

La siguiente figura ilustra lo anterior.

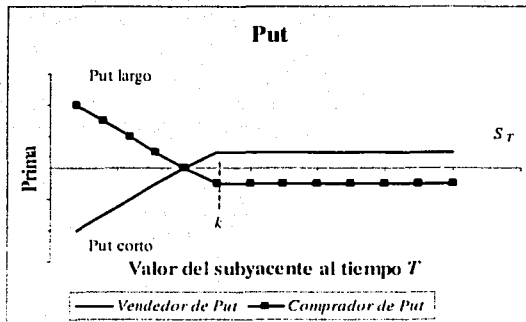


Figura 12. Posiciones de una opción put europea.

Cabe mencionar que en el caso de una *opción americana*, diariamente se tendrían gráficas de este estilo, en donde S_t representa el valor del subyacente al tiempo t con $t \leq T$.

PLANTEAMIENTO DEL MODELO PUT / CALL EN AMPL

A continuación se presenta la implementación en AMPL (A modeling Lenguaje for Mathematical Programing) del modelo de optimización para la construcción de la Frontera Eficiente Put/Call (sin permitir ventas en corto).

```
param n integer;  
param m integer;  
  
set I := {1..n};  
set J := {1..m};  
  
param E{i in I, j in J};  
param r{j in J};  
param q{i in I};  
param l{i in I};  
param up{i in I};  
param p{j in J};  
var x{i in I};
```

Planteamiento del Modelo Put / Call en AMPL

var u{j in J}=max (0,sum {i in I} (((E[i,j]*q[i])+q[i])-((r[j]*q[i])+q[i]))*x[i]);
 var d{j in J}=max (0,sum {i in I} (((r[j]*q[i])+q[i])-((E[i,j]*q[i])+q[i]))*x[i]);

maximize rend:sum {j in J} p[j]*u[j];
 s.t. ries:sum {j in J}(p[j]*d[j])<=20;
 s.t. lim{i in I}:l[i]<= x[i]<=up[i];

data;

param n:=15;
 param m:=10;

param E:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10:=
1	0.400	0.300	0.450	0.100	0.000	-0.150	-0.050	0.170	0.220	0.130
2	0.180	-0.200	0.290	0.390	0.210	0.000	0.080	0.020	0.330	0.160
3	-0.075	0.110	0.045	0.410	0.650	0.740	0.025	0.070	0.260	0.370
4	0.323	0.125	0.150	0.003	-0.056	0.590	-0.121	-0.059	0.273	0.530
5	-0.132	-0.133	-0.093	0.126	0.527	0.620	0.418	0.358	0.580	0.388
6	0.300	0.250	0.470	-0.250	0.100	-0.210	0.150	0.320	0.250	0.740
7	0.228	0.348	0.278	0.158	0.068	-0.061	-0.151	-0.071	0.008	-0.261
8	-0.060	-0.100	0.250	0.670	0.510	0.780	0.420	0.160	0.100	0.130
9	-0.076	-0.186	0.050	0.463	0.613	0.643	-0.020	0.016	0.636	0.270
10	0.150	-0.142	0.264	0.510	0.179	0.151	0.312	0.114	0.492	0.470
11	0.250	0.200	0.350	0.200	0.050	-0.050	-0.100	0.270	0.320	0.230
12	0.180	0.300	0.342	0.129	0.218	0.088	0.103	0.359	0.574	0.644
13	-0.210	0.570	-0.050	0.090	0.180	0.210	0.800	0.300	0.330	0.290
14	0.050	0.150	0.084	0.013	0.083	0.434	0.440	0.054	0.304	0.464
15	-0.008	-0.230	-0.184	0.088	0.025	0.700	0.321	-0.057	0.248	0.700

param r:=

1 0.1
 2 -0.05
 3 0.17
 4 0.29
 5 0.31
 6 0.46
 7 0.18
 8 0.22
 9 0.39
 10 0.49;

Planteamiento del Modelo Put / Call en AMPL

param q:=

1 10
2 12.5
3 8
4 4.5
5 9
6 2.5
7 3.5
8 5
9 6
10 8.5
11 11
12 9.5
13 7.5
14 10.5
15 7;

param l:=

1 0
2 0
3 0
4 0
5 0
6 0
7 0
8 0
9 0
10 0
11 0
12 0
13 0
14 0
15 0;

param up:=

1 5
2 2
3 4
4 6
5 3

Planteamiento del Modelo Put / Call en AMPL

```
6 5
7 7
8 1
9 2
10 1
11 4
12 6
13 8
14 7
15 3;
```

param p:=

```
1 0.1
2 0.1
3 0.1
4 0.1
5 0.1
6 0.1
7 0.1
8 0.1
9 0.1
10 0.1;
```

Las soluciones obtenida con el método de solución LANCELOT por medio del servidor de internet NEOS son las siguientes:

Para $k=2.5$

LANCELOT: problem solved.

17 iterations; objective 5.236956667

M = 1, N = 16, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 18, NGCALL = 16

x [*] :=

```
1 0
2 0
3 4
4 0
5 3
```

Planteamiento del Modelo Put / Call en AMPL

```
6 0
7 0
8 1
9 0
10 0
11 0
12 6
13 0.0728889
14 0
15 0
;
```

Para k=4

LANCELOT: problem solved.

14 iterations; objective 6.666344661

M = 1, N = 16, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 15, NGCALL = 14

x [*] :=

```
1 0
2 0
3 4
4 0
5 3
6 0
7 0
8 1
9 0
10 0
11 0
12 6
13 1.95588
14 0
15 0
;
```

Planteamiento del Modelo Put / Call en AMPL

Para k=5

LANCELOT: problem solved.

27 iterations; objective 7.62397178

M = 1, N = 16, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 28, NGCALL = 25

```
x [*] :=  
1 0  
2 0  
3 4  
4 0  
5 3  
6 0  
7 0  
8 1  
9 0  
10 0  
11 0  
12 6  
13 3.08582  
14 0  
15 0  
;
```

Para k=7

LANCELOT: problem solved.

23 iterations; objective 9.539226017

M = 1, N = 16, nstacks = 1, NEL = 20, NG = 11

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 24, NGCALL = 22

```
x [*] :=  
1 0  
2 0  
3 4  
4 0  
5 3  
6 0  
7 0  
8 1
```

Planteamiento del Modelo Put / Call en AMPL

```
9 0
10 0
11 0
12 6
13 5.34571
14 0
15 0
;
```

Para k=9

LANCELOT: problem solved.

29 iterations; objective 11.45448025

M = 1, N = 16, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 30, NGCALL = 26

x [*] :=

```
1 0
2 0
3 4
4 0
5 3
6 0
7 0
8 1
9 0
10 0
11 0
12 6
13 7.60559
14 0
15 0
;
```

Para k=10

LANCELOT: problem solved.

11 iterations; objective 12.23227609

M = 1, N = 16, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11

Planteamiento del Modelo Put / Call en AMPL

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 12, NGCALL = 12

```
x [*] :=  
1 0  
2 0  
3 0  
4 0  
5 3  
6 0  
7 0  
8 0.908174  
9 0  
10 1  
11 0  
12 6  
13 8  
14 0  
15 0  
;
```

Para k=14

LANCELOT: problem solved.

15 iterations; objective 13.4847675

M = 1, N = 16, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 16, NGCALL = 16

```
x [*] :=  
1 0  
2 0  
3 0  
4 0  
5 3  
6 5  
7 0  
8 0  
9 0  
10 1  
11 0  
12 6
```

Planteamiento del Modelo Put / Call en AMPL

```
13 8
14 4.07795
15 0
;
```

Para k=20

LANCELOT: problem solved.

7 iterations; objective 14.12417

M = 1, N = 16, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 8, NGCALL = 8

x [*] :=

```
1 0
2 0
3 0
4 0
5 3
6 5
7 0
8 0
9 0
10 1
11 0
12 6
13 8
14 7
15 0
;
```

Permitiendo ventas en corto los límites de operación inferior serían sustituidos por:

param l:=

```
1 -2
2 0
3 1
4 -6
```

Planteamiento del Modelo Put / Call en AMPL

5 -2
6 -4
7 -5
8 -7
9 -10
10 -8
11 -1
12 0
13 -2
14 -3
15 -9;

Y las soluciones serían las siguientes:

Para $k=2.5$
LANCELOT: problem solved.
14 iterations; objective 22.63108869
 $M = 1$, $N = 16$, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11
20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.
NFCALL = 15, NGCALL = 14
x [*] :=
1 -2
2 0
3 4
4 -6
5 3
6 -4
7 -5
8 1
9 -2.8896
10 -8
11 -1
12 6
13 -2
14 -3
15 -9
;

Para k=5

LANCELOT: problem solved.

17 iterations; objective 23.34417

M = 1, N = 16, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 18, NGCALL = 17

x [*] :=

1 -2
2 0
3 4
4 -6
5 3
6 -4
7 -5
8 1
9 2
10 -8
11 -1
12 6
13 -2
14 -3
15 -9

;

Para k=10

LANCELOT: problem solved.

17 iterations; objective 23.34417

M = 1, N = 16, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 18, NGCALL = 17

x [*] :=

1 -2
2 0
3 4
4 -6
5 3
6 -4
7 -5
8 1

Planteamiento del Modelo Put / Call en AMPL

```
9 2
10 -8
11 -1
12 6
13 -2
14 -3
15 -9
;
```

Para k=20

LANCELOT: problem solved.

17 iterations; objective 23.34417

M = 1, N = 16, nslacks = 1, NEL = 20, NG = 11

20 nontrivial linear maps reduce 300 variables to 20.

NFCALL = 18, NGCALL = 17

x [*] :=

```
1 -2
2 0
3 4
4 -6
5 3
6 -4
7 -5
8 1
9 2
10 -8
11 -1
12 6
13 -2
14 -3
15 -9
;
```

PLANTEAMIENTO DEL MODELO DE MARKOWITZ EN AMPL

A continuación se presenta la implementación en AMPL (A modeling Lenguaje for Mathematical Programing) del modelo de optimización para la construcción de la Frontera Eficiente del modelo de Markowitz (sin ventas en corto).

```
param n integer;  
param m integer;  
  
set I:={ 1..n};  
set J:={ 1..m};  
  
param C{i in I, j in J};  
param E{i in I};  
param l{i in I};  
param up{i in I};  
var x{i in I};
```

Planteamiento del Modelo de Markowitz en AMPL

maximize rend:sum{i in I} (x[i]*E[i]);
s.t. var:sum{i in I, j in J} ((x[i]*C[i,j])*x[j])<=2.5;
s.t. pesos:sum{i in I} x[i]=1;

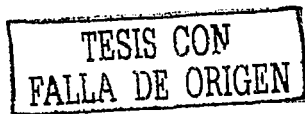
data;
param n:=15;
param m:=15;

param C:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15 =
1	0.0372	-0.0143	-0.0232	-0.0149	-0.0331	0.0463	0.0249	-0.0290	-0.0139	-0.0259	0.0251	-0.0334	-0.0256	-0.0267	-0.0324
2	-0.0143	0.0271	0.0250	0.0180	0.0224	-0.0264	-0.0136	-0.0013	0.0031	0.0230	-0.0037	0.0225	-0.0053	0.0238	0.0332
3	-0.0232	0.0250	0.0973	-0.0021	0.0295	-0.0601	-0.0240	-0.0386	0.0074	0.0422	-0.0143	0.0301	0.0202	0.0240	0.0612
4	-0.0149	0.0180	-0.0021	0.0864	0.0115	-0.0085	-0.0265	0.0276	0.0176	0.0079	-0.0121	0.0111	0.0121	0.0027	0.0135
5	-0.0331	0.0224	0.0295	0.0115	0.0465	0.0353	-0.0318	0.0135	0.0145	0.0354	-0.0151	0.0469	0.0203	0.0393	0.0500
6	0.0463	-0.0264	-0.0601	-0.0085	-0.0353	0.0907	0.0163	0.0044	-0.0095	-0.0429	0.0341	-0.0357	-0.0152	-0.0270	-0.0435
7	0.0249	-0.0136	-0.0240	-0.0265	-0.0318	0.0163	0.0391	0.0114	-0.0138	0.0244	0.0119	-0.0320	-0.0225	-0.0299	-0.0383
8	-0.0290	-0.0013	0.0036	0.0276	0.0135	0.0444	-0.0114	0.0468	0.0149	0.0021	0.0134	0.0133	0.0173	0.0074	-0.0054
9	-0.0139	0.0031	0.0074	0.0136	0.0145	-0.0095	-0.0138	0.0149	0.0231	0.0105	-0.0093	0.0147	0.0384	0.0061	0.0162
10	-0.0259	0.0230	0.0422	0.0079	0.0354	0.0429	-0.0244	0.0021	0.0105	0.0468	0.0070	0.0558	0.0075	0.0284	0.0057
11	0.0251	-0.0037	-0.0143	-0.0121	0.0151	0.0341	0.0119	0.0134	-0.0093	-0.0070	0.0236	-0.0151	-0.0220	-0.0098	-0.0098
12	-0.0334	0.0225	0.0301	0.0111	0.0469	0.0357	0.0320	0.0133	0.0147	0.0358	-0.0151	0.0473	0.0208	0.0396	0.0506
13	-0.0256	-0.0053	0.0202	0.0121	0.0203	-0.0152	-0.0225	0.0171	0.0384	0.0075	-0.0220	0.0208	0.0832	0.0059	0.0245
14	-0.0267	0.0238	0.0240	0.0027	0.0393	-0.0270	-0.0299	0.0074	0.0061	0.0284	0.0098	0.0396	0.0059	0.0438	0.0431
15	-0.0324	0.0332	0.0612	0.0135	0.0500	0.0435	-0.0383	0.0054	0.0162	0.0057	-0.0098	0.0396	0.0245	0.0431	0.0737

param E:=

- 1 0.157
- 2 0.223
- 3 0.548
- 4 0.625
- 5 0.459
- 6 0.372
- 7 0.626
- 8 0.834
- 9 0.783
- 10 0.497
- 11 0.172
- 12 0.558
- 13 0.251
- 14 0.456
- 15 0.59;



Las soluciones obtenidas con el método de solución LANCELOT por medio del servidor de internet NEOS son las siguientes:

Para $k=2.5$
LANCELOT: problem solved.
7 iterations; objective 0.8340006153
 $M = 2$, $N = 16$, $nslacks = 1$, $NEL = 15$, $NG = 3$
 $NFCALL = 8$, $NGCALL = 8$

x [*] :=

1 0
2 0
3 0
4 0
5 0
6 0
7 0
8 1
9 0
10 0
11 0
12 0
13 0
14 0
15 0
;

BIBLIOGRAFIA

- [1] Best Philip.
"Implementing Value at Risk"
England: John Wiley and Sons, Ltd, 1998.

- [2] Canavos, George C.
"Probabilidad y Estadística: Aplicaciones y Métodos"
México: McGraw-Hill, 1986.

- [3] Cheney, John M.
"Fundamentals of Investments"
West, St. Paul, 1992.

- [4] Cohen Jerome, B; Zinbarg Edward, D. and Zeikel, Arthur.
"Investment Analysis and Portfolio Management"
United States of America: Richard D. Irwin, Inc, 1987.

- [5] Dembo, Ron
"Marking to Future"
Algorithmics, 1997.

- [6] Dembo, Ron.
"Risk, Regret and Return"
Algorithmics, 1997.

- [7] Dembo, Ron and Mausser, Helmut.
"The Put/Call Efficient Frontier"
Algorithmics, 2000.

- [8] Elton Edwin J. and Gruber Martin J.
"Modern Portfolio Theory and Investment Analysis"
New York: John Wiley and Sons, Inc, 1995.

- [9] Haugen, Robert A.
"Modern Investment Theory"
New Jersey: Prentice Hall, 1993.

- [10] Hillier, Frederick S. and Liberman, Gerald J.
"Introducción a la Investigación de Operaciones"
México: McGraw-Hill, 1997.
- [11] Hull, John C.
"Introduction to Futures and Options Markets"
New Jersey: Prentice Hall, 1998.
- [12] Hull, John C.
"Options, Futures and Other Derivatives"
New Jersey: Prentice Hall, 2000.
- [13] Jorion, Philippe.
"Value at Risk: The new Benchmark for Managing Financial Risk"
New York: McGraw-Hill, 2001.
- [14] Luenberger David G.
"Investment Science"
New York: Oxford University Press, Inc, 1998.
- [15] Maginn, John L. and Tuttle, Donald L.
"Managing Investment Portfolios a Dynamic Process"
New York: Warren, Gorham and Lamont, 1990.

- [16] Márquez Diez-Canedo, Javier
"Carteras de Inversión"
México: Limusa, 1981.
- [17] Robert, Fourer; David M. Gay and Brian W. Kernighan.
"AMPL, A Modeling Lenguaje for Mathematical Programming"
Northwestern University, AT&T Bell Laboratories, Boyd & Fraser
Publishing Company, The Scientific Press Series, 1993.
- [18] Rodríguez de Castro J.
"Introducción al Análisis de Productos Financieros Derivados,
Futuros-Opciones-Forwards-Swaps"
México: Limusa, 1997.

Páginas consultadas en Internet:

Algorithmics
<http://www.algorithmics.com>

NEOS Solvers
<http://www-neos.mcs.anl.gov/>