

00323  
26



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ANALOGÍA ENTRE EL VIDRIO DE ESPÍN Y LA RED NEURONAL DE HOPFIELD

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE FÍSICO PRESENTA: SILVESTRE ASCENSIÓN GARCÍA SÁNCHEZ



DIRECTOR:

DR. RAÚL MAURICIO RECHTMAN SCHRENZEL



2003



FACULTAD DE CIENCIAS SECCION ESCOLAR

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A



Universidad Nacional  
Autónoma de México



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



REPUBLICA DE CHILE  
 MINISTERIO DE EDUCACIÓN

la Dirección General de Bibliotecas  
 a difundir en formato electrónico e impreso  
 el contenido de mi trabajo receptor

NOMBRE: Silvestre Ascención  
García Sánchez

FECHA: 16/06/03

FIRMA: Silvestre Ascención

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
 Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
 Facultad de Ciencias  
 Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Analogía entre el vidrio de Espín y la red neuronal de hopfield"

realizado por Silvestre Ascención García Sánchez

con número de cuenta 9455744-4, quien cubrió los créditos de la carrera de Física

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario Dr. Raúl Mauricio Rechtman Schrenzel

Propietario Dr. Mariano López de Haro

Propietario Dr. Rosalío Fernando Rodríguez Zepeda

Suplente

Suplente Dr. José Luis Mateos Trigos

Dr. Luis Felipe del Castillo Davila

Consejo Departamental de



Patricia Goldstein Menaghe  
 DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENAGHE CIENCIAS  
 Coordinadora de Licenciatura de Física

A mi hijo

**Silvestre Damián**

por enseñarme el orgullo de ser padre

A mi esposa y mi suegra

**Zac Nicthee y Elizabeth**

por su amor y comprensión en todo momento

A mis padres y hermanos

**Silvestre, Rosalba, Rafael, Agueda y Anel**

por formar parte en todos los días de mi vida

A mis amigos

**Juan Carlos y Alfredo**

por brindarme una amistad invaluable y ser como un par de hermanos

A mis sinodales

**Mariano, Rosalío, José Luis, Raúl y Luis Felipe**

por formar parte de este trabajo

Un agradecimiento especial a el

**Dr. Mariano López de Haro**

por abrirme las puertas y darme su apoyo en todo momento

Los sabios son los que buscan la sabiduría; los necios piensan ya haberla encontrado.

**Bonaparte, Napoleón**

# Indice

## RESUMEN

<b>0</b>	<b>INTRODUCCION</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>LA NEURONA ARTIFICIAL</b>	<b>4</b>
1.1	La Neurona Biológica	4
1.2	La Neurona Artificial	5
1.3	Modelo Determinista de McCulloch y Pitts (Variación)	8
<b>2</b>	<b>RED ARTIFICIAL DE N NEURONAS QUE INTERACCIONAN</b>	<b>9</b>
2.1	Red Artificial de N neuronas que Interaccionan	9
2.2	Espacio de Configuraciones	11
2.3	Función H	11
	2.3.1 Vecindad	12
	2.3.2 Extremos relativos	13
2.4	Dinámica de una sola Neurona	16
2.5	Dinámica del Sistema	17
	2.5.1 Funcionamiento síncrono	18
	2.5.2 Funcionamiento asíncrono	18
2.6	Estabilidad y Convergencia	19
<b>3</b>	<b>LA RED NEURONAL DE HOPFIELD (MODELO DETERMINISTA)</b>	<b>21</b>
3.1	Modelo de Hopfield	21
	3.1.1 Almacenamiento de un solo patrón	22
	3.1.2 Almacenamiento de varios patrones	24
	3.1.3 Capacidad de almacenamiento	25
<b>4</b>	<b>ANALOGIAS ENTRE SISTEMAS MAGNETICOS Y LA RNH</b>	<b>29</b>
4.1	Modelo de Ising para Sistemas Magnéticos	29
4.2	Equilibrio Termodinámico a Bajas Temperaturas	31
4.3	Analogía del Modelo de Hopfield con el Ferromagnetismo	32
4.4	Vidrio de Espín	32
4.5	Analogía del Modelo de Hopfield con el Vidrio de Espín	33

<b>5</b>	<b>RED DE HOPFIELD EN EQUILIBRIO TERMODINAMICO</b>	<b>34</b>
5.1	Red de Hopfield en Equilibrio Termodinámico	35
5.1.1	Magnetización promedio por espín	36
5.1.2	Estabilidad	39
5.2	Análisis a Baja Temperatura	39
5.3	Estado Paramagnético	41
5.4	Estados de Mattis	41
5.5	Realizaciones Simétricas	42
5.5.1	Estabilidad	45
5.6	Realizaciones Asimétricas	49
5.7	Conclusiones	49
<b>6</b>	<b>MODELO DE HOPFIELD ESTOCASTICO</b>	<b>52</b>
6.1	Modelo Estocástico de McCulloch y Pitts	52
6.2	Modelo de Hopfield Estocástico	53
6.2.1	Interpretación de los resultados	53
<b>7</b>	<b>RESULTADOS Y CONCLUSIONES</b>	<b>55</b>
7.1	Implementación del Modelo de Hopfield	55
7.2	Conclusiones	60
	<b>APENDICE A</b>	<b>66</b>
A.1	Distribución de Probabilidad	66
A.2	Funciones sobre la Distribución de Probabilidad	67
A.2.1	Producto	67
A.2.2	Suma	68
A.2.3	Cálculo de momentos	69
A.3	Ecuaciones de Punto Silla	71
A.4	Realizaciones Simétricas (Análisis a Baja Temperatura)	73
A.5	Análisis de las Variables $Q_i$	75
	<b>APENDICE B</b>	<b>79</b>
	<b>REFERENCIAS</b>	<b>81</b>

## Resumen

En el presente trabajo se analiza el comportamiento de la Red Neuronal de Hopfield (RNH) haciendo uso del modelo artificial de neurona de *McCulloch y Pitts*, en base a dos funciones de activación, la primera determinista y la segunda aleatoria. La segunda de ellas no solo mejora el funcionamiento de la RNH, sino que requiere para su formulación de una incursión en la mecánica estadística, por lo que su estudio es de particular importancia tanto en el campo de la física aplicada como en el de las redes neuronales.

## **Capítulo Cero**

# **Introducción**

El estudio de los sistemas complejos ha tenido un gran auge en las últimas décadas, de hecho ocupará el centro de la vida intelectual en el presente siglo. Un sistema complejo, es aquél que requiere para su descripción completa del conocimiento y técnicas interdisciplinarias. Las Redes Neuronales Artificiales forman parte de este tipo de sistemas, requiriendo en su estudio algunas ciencias tradicionales como, la biología, ciencias de la computación, física y matemáticas, así como algunas ramas de la ingeniería.

El estudio de las Redes Neuronales Artificiales (RNA's) encuentra sus bases en la neurociencia, sin embargo, no se relaciona con el estudio de redes de neuronas biológicas. El modelado del cerebro humano es un campo diferente, y a pesar de que algunas veces describe analogías biológicas, el objetivo primario es lo que las redes artificiales pueden hacer y por qué. En concreto, las RNA's son una gran colección de modelos matemáticos que emulan algunas propiedades que se observan en el sistema nervioso humano, con la finalidad de imitar el proceso de aprendizaje que en él se lleva a cabo.

Dentro de los trabajos más importantes se encuentra el de Hopfield sobre redes de neuronas con conexiones simétricas. Este tipo de redes, no asemejan en nada el comportamiento de una red de neuronas biológicas, sin embargo, sus propiedades permiten utilizarla como sistema de almacenamiento de memoria. Este hecho, hace que el estudio de la red de Hopfield sea de gran importancia, debido a que se ha demostrado que en los procesos de orden superior que ocurren en el cerebro humano, la memoria es parte fundamental.

El presente trabajo tiene como tema central el estudio de la Red Neuronal de Hopfield, pero no pierde de vista, que ésta solo es una clase particular de red neuronal, por lo que en la medida de lo posible y cuando se considere oportuno, se mencionará y hará referencia a otros modelos, con la finalidad de ampliar el conocimiento e interesar al lector en la teoría de las redes neuronales.

La analogía entre el modelo de Hopfield y el vidrio de espín, no es una simple coincidencia, tiene sus antecedentes en una gran cantidad de trabajos (entre otros se encuentran los de, Cragg et al., 1954; Cowan, 1967; Grossberg, 1967; Amari, 1972; Wilson et al., 1972; Little et al., 1975), y en las propiedades del vidrio de espín, que lo distinguen de lo que se conoce como magnetismo ordinario (p.e., paramagnetismo, ferromagnetismo, etc.). Aunque la analogía es estricta en principio, cuando el concepto de temperatura es introducido, ésta se vuelve formal, siendo esta formalidad la que permite una aplicación útil en el modelo de Hopfield.

Son tres los objetivos que se persiguen en este trabajo; el primero de ellos es didáctico, y consiste en exponer con profundidad y mediante un análisis particular y detallado el modelo de Hopfield, yendo más allá de lo que la bibliografía puede ofrecer respecto al tema. El segundo, es mostrar cómo se lleva a cabo la incursión de la mecánica estadística en la teoría de las redes neuronales, específicamente a través de la red de Hopfield. El tercero y último, es proporcionar un criterio sencillo que determine las condiciones necesarias y suficientes, bajo las que el modelo de Hopfield opera correctamente (específicamente, con la regla de Hebb), así como exhibir sus limitaciones.

## **ORGANIZACIÓN DE LA TESIS**

**Capítulo I. La Neurona Artificial.** Se describe de manera breve la fisiología y comportamiento básico de la neurona biológica, para después elaborar un modelo matemático sencillo de neurona artificial, conocido como modelo de McCulloch y Pitts.

**Capítulo II. Red Artificial de N Neuronas que Interaccionan.** Se analiza el comportamiento dinámico de una red de neuronas con conexiones simétricas, al definir conceptos y formular teoremas basados en la estructura particular del sistema y en las teorías del cálculo vectorial y de los sistemas dinámicos. Así mismo, se definen dos tipos

de funcionamiento: síncrono y asíncrono, siendo este último el más natural en una red de neuronas biológicas y el que a la vez permite caracterizar de manera clara el comportamiento dinámico de este sistema.

**Capítulo III. Red Neuronal de Hopfield (Modelo Determinista).** Se analiza con detalle el modelo original propuesto por Hopfield. El sistema así definido es de utilidad en el almacenamiento de memoria, siempre y cuando no exceda un límite en la capacidad de almacenamiento; sin embargo, existe la posibilidad de error en la reconstrucción debido a la presencia de patrones no deseados, lo que limita su utilidad.

**Capítulo IV. Analogías entre Sistemas Magnéticos y la RNH.** Se describe de manera cualitativa e informal la analogía entre la red de Hopfield y algunos modelos simples de materiales magnéticos en equilibrio térmico a bajas temperaturas, situación que se logra al suponer a la red de Hopfield como un arreglo hipotético de espines.

**Capítulo V. Red de Hopfield en Equilibrio Termodinámico.** Se analiza a la red de Hopfield en equilibrio termodinámico, con la finalidad de conocer las configuraciones estables del sistema.

**Capítulo VI. Modelo de Hopfield Estocástico.** Se define el modelo estocástico de McCulloch y Pitts, en base al cual la red neuronal de Hopfield presenta mejoras notables en su funcionamiento.

**Capítulo VII. Resultados y Conclusiones.** Se muestra mediante un sencillo ejemplo, la diferencia entre el modelo de Hopfield determinista y el estocástico, concluyendo, que efectivamente el segundo de ellos proporciona mejoras notables respecto al primero. Así mismo, se presenta un criterio que determine la aplicabilidad del modelo de Hopfield para una realización particular de patrones y se exhiben sus limitaciones.

## Capítulo Uno

# La Neurona Artificial

### 1.1. LA NEURONA BIOLÓGICA

Las **neuronas** son la unidad estructural básica del cerebro humano. Con ellas se construye el complejo conjunto de nuestras percepciones y sentidos, son la raíz de nuestros sentimientos y de nuestra conducta y definen la estructura lógica de nuestros razonamientos. El cerebro humano está compuesto de aproximadamente  $10^{11}$  neuronas que son de diferentes tipos, sin embargo sus características anatómicas y la forma en que interactúan mutuamente es, en todos los casos, muy semejante. En la fig.1-1 se muestra un diagrama esquemático de una neurona. Esta consiste de un cuerpo celular llamado **soma** que se prolonga en un árbol frondoso de filamentos muy delgados llamados **dendritas**, sin embargo, dentro de toda esta complejidad se distingue uno más largo y grueso llamado **axón** que a su vez ramifica o arboriza su extremidad en filamentos delgados. Este árbol de filamentos conecta entre sí distintas neuronas mediante **sinapsis** o **uniones sinápticas**. Las terminales receptoras de estas uniones sobre otras neuronas pueden encontrarse sobre las dendritas o el cuerpo celular. El axón de una neurona típica realiza unos cuantos centenares de sinapsis con otras neuronas.

La transmisión de señales de una neurona a otra se lleva a cabo en la sinapsis, esto consiste de un complicado proceso químico en el que sustancias transmisoras específicas son liberadas por la neurona emisora en la unión sináptica. El efecto que esto produce, es aumentar o disminuir el **potencial eléctrico** en el cuerpo de la neurona receptora. Si el potencial es mayor a un **umbral** se dice que la neurona está en estado **excitado**, si el potencial es menor al umbral se dice que la neurona está en estado **inhibido**. Siempre que la neurona biológica está en el estado excitado, ésta envía un

pulso o **potencial de acción** de magnitud y duración fijas a lo largo de su axón. El pulso se ramifica a través de la arborización axonal y es transmitido a las sinapsis que ésta mantiene con otras neuronas, desencadenando de nueva cuenta los procesos químicos que tendrán como finalidad excitar o inhibir a estas neuronas (Hertz et al., 1991; Perazzo, 1994).

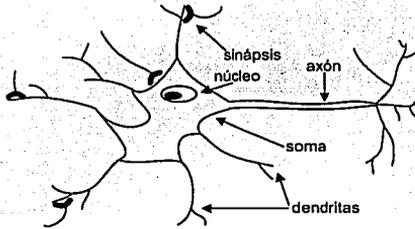


Figura 1-1. Diagrama esquemático de una neurona típica.

## 1.2. LA NEURONA ARTIFICIAL

Con la finalidad de establecer un modelo matemático sencillo que tome solo las características funcionales de la neurona, se define a  $v$  como el **potencial eléctrico interno** de la neurona y a  $\theta$  como su umbral. Entonces, si  $v > \theta$  la neurona estará excitada y si  $v < \theta$  la neurona estará inhibida. Lo anterior define a la neurona como una unidad de dos estados. Si se denota con la letra  $s$  el estado de la neurona y se asocia un valor numérico a cada uno de ellos, +1 (estado excitado) y -1 (estado inhibido), será posible establecer la siguiente relación entre  $s$  y  $(v, \theta)$

$$s = \begin{cases} +1 & \text{si } v > \theta \\ -1 & \text{si } v < \theta \end{cases} \quad (1.1)$$

Suponga a continuación que se tiene una sola neurona, a la que se llamará neurona  $i$ . Así, su potencial interno  $v_i = v_{int}$ , donde  $v_{int}$  es un potencial intrínseco característico de cada neurona. Suponga ahora, la presencia de una neurona  $j$  que realiza sinapsis con  $i$ , si  $j$

está excitada modificará a  $v_i$ , ya sea aumentando o disminuyendo su valor. Este efecto representa un incremento en  $v_i$ , y se denotará por  $\Delta v_i$ . Suponiendo, que  $\Delta v_i = w_{ij} s_j$ , con  $w_{ij}$  representando la magnitud de la acción de  $j$  sobre  $i$ , se tendrá que  $v_i = v_{int} + w_{ij} s_j$ . De tal forma, que si  $w_{ij} > 0$ , su efecto será aumentar el valor de  $v_i$  y la sinapsis recibirá el nombre de **sinapsis excitatoria**, si por el contrario  $w_{ij} < 0$ , su efecto será disminuir el valor de  $v_i$  y en consecuencia recibirá el nombre de **sinapsis inhibitoria**. Se sigue con esto, que si un conjunto de  $N$  neuronas realizan sinapsis con  $i$ , el potencial interno  $v_i$  estará dado por

$$v_i = v_{int} + \sum_{j=1}^N w_{ij} s_j . \quad (1.2)$$

Debido a que  $v_{int}$  es una constante, por simplicidad se supondrá que es igual a 0, de forma tal que

$$v_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} s_j . \quad (1.3)$$

Por otro lado, si se define la función

$$G(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} , \quad (1.4)$$

y se toma en cuenta (1.3), será posible describir (1.1) para la neurona  $i$  en términos de  $v_i$ ,  $G$  y  $\theta_i$ , de la siguiente manera

$$s_i = G(v_i - \theta_i) = G\left(\sum_{j=1}^N w_{ij} s_j - \theta_i\right) . \quad (1.5)$$

Figura 1-2. Representación gráfica de  $G(x)$ .

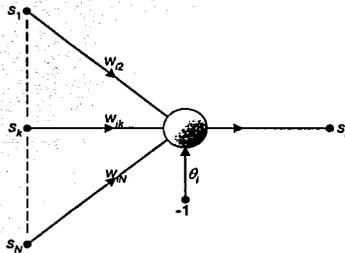
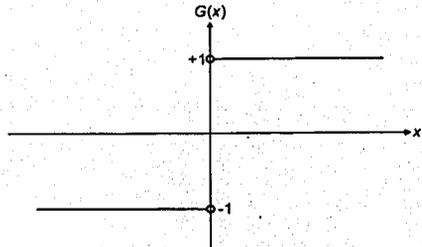


Figura 1-3. Modelo de McCulloch y Pitts.

La ec.(1.5) proporciona un modelo simple de neurona como una unidad bipolar de umbral. Específicamente, el modelo calcula una suma pesada de sus entradas provenientes de otras unidades, y obtiene una salida de +1 o -1 dependiendo de si la suma está arriba o debajo de cierto umbral. Este modelo de neurona artificial fue propuesto por McCulloch y Pitts (1943)<sup>1</sup>. Cuando las entradas en la fig.1-3 no provienen de otras unidades, el sistema se denomina **perceptrón de Rosenblatt**, en honor a Rosenblatt (1962) quién lo estudió por primera vez.

<sup>1</sup> En el modelo original de McCulloch y Pitts los estados de la neurona son de +1(excitado) y 0(inhibido)

### 1.3. MODELO DETERMINISTA DE MCCULLOCH Y PITTS (VARIACION)

Por otro lado, en algunas redes de neuronas es indispensable conocer la evolución en el tiempo de los estados de las neuronas, como por ejemplo, en la Máquina de Boltzmann (Hinton et al., 1983, 1986; Ackley et al., 1985) o en la Máquina de Campo Promedio (Peterson et al., 1987), y en particular en la Red de Hopfield (Hopfield, 1982). Por tanto, su dependencia con respecto a él podrá hacerse explícita, así, (1.5) puede escribirse como

$$s_i(t+1) = G(v_i(t) - \theta_i) = G\left(\sum_{j=1}^N w_{ij} s_j(t) - \theta_i\right). \quad (1.6)$$

Donde el tiempo  $t$  ha sido tomado como discreto. Así, se entenderá por  $s_i(t)$  el estado de la neurona  $i$  al tiempo  $t$ ,  $w_{ij}$  el **peso sináptico** de la sinapsis que une a  $j$  con  $i$ ,  $v_i(t)$  el potencial interno de  $i$  al tiempo  $t$ ,  $\theta_i$  como el umbral de la neurona  $i$  y  $G$  la **función de activación** de la neurona.

Hasta el momento nada se ha dicho acerca de lo que sucede cuando  $v_i = \theta_i$ . En el modelo de McCulloch y Pitts se propone la modificación de  $G(x)$ , tal que  $G(x) = +1$  si  $x \geq 0$ , pero esto rompe con la simetría de los estados, ya que implica una tendencia de las neuronas por estar preferentemente en estado excitado (no existe motivo a priori para suponer esto). Un modelo más natural se obtiene si se supone que la neurona no cambia de estado cuando  $v_i = \theta_i$ , con lo que (1.6) se modifica de la siguiente manera

$$s_i(t+1) = \begin{cases} G(v_i(t) - \theta_i) & \text{si } v_i(t) - \theta_i \neq 0 \\ s_i(t) & \text{si } v_i(t) - \theta_i = 0 \end{cases}. \quad (1.7)$$

En lo siguiente, por simplicidad se denotará por modelo de McCulloch y Pitts **determinista** (para una revisión completa ver Grossberg, 1967; Cohen et al., 1983; Hopfield, 1984a), el propuesto en (1.7), entendiéndose que este representa una variación en la función de activación del modelo original.

## Capítulo Dos

# Red Artificial de N neuronas que Interaccionan

En este capítulo, se describe y caracteriza el comportamiento dinámico de una red de  $N$  neuronas que interaccionan con conexiones sinápticas simétricas, haciendo uso del modelo determinista de McCulloch y Pitts. Para lograrlo, se definen algunos conceptos que toman en cuenta la estructura particular del sistema, también, se enuncian y demuestran algunos teoremas propuestos. El capítulo concluye al mostrar que el sistema de  $N$  neuronas, bajo condiciones generales será convergente, siempre y cuando evolucione de manera **asíncrona**, de otra forma, si evoluciona de manera **síncrona**, este no puede ser caracterizado.

### 2.1. RED ARTIFICIAL DE N NEURONAS QUE INTERACCIONAN

Considérese una red de  $N$  neuronas que interaccionan, tal y como se muestra en la fig.2-1.

El estado de la red está dado por

$$\mathbf{s} = [s_1, \dots, s_k, \dots, s_N]^T, \quad (2.1)$$

donde  $s_k$  representa el estado de la  $k$ -ésima neurona y  $\mathbf{s}$  se denominará **vector de estado** del sistema. En lo siguiente, con la finalidad de ahorrar notación y evitar confusiones, las cantidades con subíndice (superíndice)  $(i, j)$  serán válidas para las  $N$  neuronas de la red, y aquéllas con subíndice (superíndice)  $k$ , solo para la  $k$ -ésima

neurona. De la fig.2-1 se observa que una neurona no interactuona consigo misma, en otras palabras no existe auto interacción, por lo que  $w_{ii}=0$ . De acuerdo con lo anterior, los  $w_{ij}$  cumplen con la siguiente condición

$$w_{ij} = (1 - \delta_{ij})w_{ij}, \quad (2.2)$$

donde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (2.3)$$

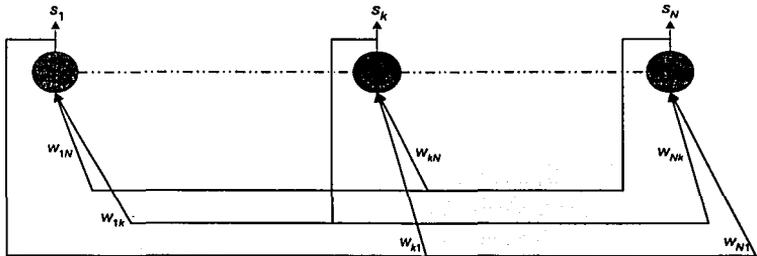


Figura 2-1. Red artificial de  $N$  neuronas que interactúan.

También, se ha supuesto que el umbral  $\theta=0$  (en virtud, que esta cantidad no tiene implicaciones interesantes en el funcionamiento de la red de Hopfield), de manera que  $v_i - \theta = v_i$ , donde  $v_i$  es de acuerdo con (1.3) igual a

$$v_i = \sum_{j=1}^N w_{ij} s_j. \quad (2.4)$$

Esta descripción, permite definir la cantidad

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & w_{1k} & \cdots & w_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{k1} & \cdots & 0 & \cdots & w_{kN} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{N1} & \cdots & w_{Nk} & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

como la **matriz de pesos sinápticos**, y la cantidad  $\mathbf{v}=\mathbf{W}\cdot\mathbf{s}$ , como el **vector de potencial interno**, que es un vector que contiene de manera ordenada el potencial interno de la neurona 1 a la  $N$ .

## 2.2. ESPACIO DE CONFIGURACIONES

Obsérvese a continuación que  $s_i=\{+1,-1\}$ , esto implica que  $\mathbf{s}$  puede adquirir un total de  $2^N$  configuraciones. Estos  $2^N$  arreglos posibles de  $\mathbf{s}$ , definen el **Espacio de Configuraciones** del sistema, que puede pensarse de manera gráfica como los vértices de un hipercubo de dimensión  $N$  con centro en el origen.

## 2.3. FUNCION H

A continuación, se define la función

$$H[s_1, \dots, s_k, \dots, s_N] = -\frac{1}{2} \sum_i s_i v_i = -\frac{1}{2} \sum_{ij} w_{ij} s_i s_j, \quad (2.6)$$

donde se ha utilizado (2.4). La función  $H$  es una función cuadrática del vector de estado que asocia un valor real a cada una de las  $2^N$  configuraciones posibles de  $\mathbf{s}$ .  $H$  también puede ser escrita en forma vectorial como

$$H[\mathbf{s}] = -\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{2} \mathbf{s} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{s}. \quad (2.7)$$

En virtud de que  $H$  es una forma cuadrática y debido a la restricción impuesta a matriz  $\mathbf{W}$  en (2.2), esta solo puede ser indefinida, es decir, adquiere cualquier valor real (para una

revisión sobre formas cuadráticas ver Barbolla et al., 1998). Dadas las características de  $H$ , está podría ser no acotada. En nuestro caso es fácil ver que siempre lo es, ya que  $|w_{ij}| \leq K$  para  $K = \max(|w_{ij}|)$ , cuando esta condición se satisface,  $|H| \leq KN(N-1)/2$ .

P.D. que si  $|w_{ij}| \leq K$  para  $K > 0 \Rightarrow |H| \leq KN(N-1)/2$

### Demostración

$$|H| = \frac{1}{2} \left| \sum_{ij} w_{ij} s_i s_j \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{ij} |w_{ij} s_i s_j| = \frac{1}{2} \sum_{ij} |w_{ij}| |s_i| |s_j| = \frac{1}{2} \sum_{i,j} |w_{ij}| = \frac{K}{2} \sum_{i,j} 1 = \frac{KN(N-1)}{2}. \quad (2.8)$$

Como el presente estudio se limita al caso de matrices simétricas, (2.2) se escribe para este caso en particular como

$$w_{ij} = (1 - \delta_{ij}) w_{ij}. \quad (2.9)$$

### 2.3.1. Vecindad

El espacio de configuraciones consiste de  $2^N$  vectores, la distancia entre dos de ellos se define como

$$d_h(\xi, \mathbf{x}) = \frac{1}{4} (\xi - \mathbf{x}) \cdot (\xi - \mathbf{x}), \quad (2.10)$$

esta distancia proporciona el número de elementos en que difieren  $\xi, \mathbf{x}$ , sin importar en qué componente. Esta, es la llamada **distancia de Hamming**. La distancia de Hamming, sólo puede tomar valores enteros entre 0 y  $N$ , siguiéndose que para  $\xi$  dado, el número de configuraciones  $\mathbf{x}$  que satisfacen  $d_h(\xi, \mathbf{x}) = r$  es igual a las combinaciones de  $N$  elementos tomados de  $r$  en  $r$ ,

$$\binom{N}{r} = \frac{N!}{r!(N-r)!} \quad r=0,1,\dots,N. \quad (2.11)$$

Una realización particular de  $d_h(\xi, \mathbf{x})=r$  se obtiene cuando estos vectores difieren en las primeras  $r$  componentes; en cuyo caso

$$\xi - \mathbf{x} = \underbrace{[\pm 2, \pm 2, \dots, \pm 2, 0, \dots, 0]}_r \underbrace{[0, \dots, 0]}_{N-r}$$

Tomando todas las combinaciones posibles se obtiene (2.11). Se observa, que para  $r=0$ ,  $\mathbf{x}=\xi$ , por lo que una vecindad de tamaño  $r$  alrededor de  $\xi$ , es el conjunto de vectores que satisfacen  $1 \leq d_h(\xi, \mathbf{x}) \leq r$ , que de acuerdo con (2.11) está dada por

$$\Omega(r) = \sum_{\alpha=1}^r \frac{N!}{\alpha! (N-\alpha)!} \quad (2.12)$$

Tal vecindad, será denotada como,  $V_\xi^r = \{\mathbf{x} | 1 \leq d_h(\xi, \mathbf{x}) \leq r\}$ .

### 2.3.2. Extremos Relativos

De la teoría del cálculo vectorial, se tienen las siguientes definiciones;

**Definición 2.1.** Se dice que  $H$  tiene un máximo local en  $\xi \Leftrightarrow H[\xi] \geq H[\mathbf{x}]$ .

**Definición 2.2.** Se dice que  $H$  tiene un mínimo local en  $\xi \Leftrightarrow H[\xi] \leq H[\mathbf{x}]$ .

Donde  $\mathbf{x} \in V_\xi^r$ . La vecindad de menor tamaño corresponde a  $r=1$ , y está formada por  $N$  vectores, en cuyo caso se satisfacen los siguientes teoremas;

**Teorema 2.1.**  $\xi$  es un máximo local de  $H$  si y solo si  $\xi v_i^r \leq 0$ .

**Teorema 2.2.**  $\xi$  es un mínimo local de  $H$  si y solo si  $\xi v_i^r \geq 0$ .

Para demostrar estos resultados, se empieza por obtener la expresión para la diferencia  $H[\mathbf{x}] - H[\xi]$ , con este fin, se define el vector

$$\Delta \xi = \mathbf{x} - \xi. \quad (2.13)$$

Utilizando (2.6) y (2.13) se tiene que  $H[\mathbf{x}]$  es igual a

$$H[\mathbf{x}] = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} + \Delta\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{W}(\boldsymbol{\xi} + \Delta\boldsymbol{\xi}). \quad (2.14)$$

Desarrollando (2.14) y agrupando términos, se sigue que

$$H[\mathbf{x}] = -\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{W} \cdot [\boldsymbol{\xi} + \Delta\boldsymbol{\xi}] - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{W} \cdot \Delta\boldsymbol{\xi} - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\xi}. \quad (2.15)$$

Debido a que el último término del lado derecho de la igualdad es  $H[\boldsymbol{\xi}]$ , (2.15) puede escribirse como

$$H[\mathbf{x}] - H[\boldsymbol{\xi}] = -\frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{W} \cdot [\boldsymbol{\xi} + \Delta\boldsymbol{\xi}] - \frac{1}{2}\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{W} \cdot \Delta\boldsymbol{\xi}. \quad (2.16)$$

El último término del lado derecho de la igualdad en (2.16) puede expresarse en la forma

$$\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{W} \cdot \Delta\boldsymbol{\xi} = (\mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\xi})^T \cdot \Delta\boldsymbol{\xi} = \Delta\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \boldsymbol{\xi}. \quad (2.17)$$

Como  $\mathbf{W}$  es simétrica,  $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}$ . Sustituyendo (2.17) en (2.16) y agrupando términos se obtiene que

$$H[\mathbf{x}] - H[\boldsymbol{\xi}] = -\Delta\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{W} \cdot \boldsymbol{\xi} - \frac{1}{2}\Delta\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{W} \cdot \Delta\boldsymbol{\xi}. \quad (2.18)$$

Por otro lado, las componentes de (2.13) son

$$\Delta\xi_i = \begin{cases} 0 & \text{si } x_i = \xi_i \\ -2\xi_i & \text{si } x_i \neq \xi_i \end{cases}, \quad (2.19)$$

donde se ha usado que si  $x_i \neq \xi_i$ , entonces  $x_i = -\xi_i$ . Sustituyendo (2.19) en (2.18) se sigue que

$$H[\mathbf{x}] - H[\xi] = 2 \sum_i \xi_i \left( \sum_j w_{ij} v_j^i - \sum_j w_{ij} \xi_j \right), \quad (2.20)$$

donde por (\*) se entiende la suma sobre  $i$  tal que  $\Delta \xi_i \neq 0$ . La primer suma entre paréntesis es  $v_j^i$ , y el superíndice  $\xi$  en  $v_j^i$  implica que  $v_j$  ha sido evaluado en  $\mathbf{s} = \xi$ , siguiéndose que

$$H[\mathbf{x}] - H[\xi] = 2 \sum_i \xi_i \left( v_i^i - \sum_j w_{ij} \xi_j \right). \quad (2.21)$$

Una situación particular resulta cuando ambos vectores difieren en todas sus componentes, o sea  $\mathbf{x} = -\xi$ ; en este caso, el término entre paréntesis se anula, obteniendo así que  $H[\mathbf{x}] - H[\xi] = 0$ . Este hecho dice que la función  $H$  es simétrica, es decir, para todo  $\mathbf{s}$  se cumple que  $H[\mathbf{s}] = H[-\mathbf{s}]$ . Si los vectores  $\mathbf{x}, \xi$  difieren solo en la  $k$ -ésima componente,  $\Delta \xi_k \neq 0$  y  $\Delta \xi_i \Delta \xi_j = 0$ , para  $i, j \neq k$ , siguiéndose de (2.21) que

$$H[\mathbf{x}] - H[\xi] = 2 \xi_k v_k^k - 2 w_{kk} \xi_k \xi_k = 2 \xi_k v_k^k, \quad (2.22)$$

donde sea ha hecho uso de (2.9). Si  $\mathbf{x}^i$  es el vector que difiere con respecto a  $\xi$  en la  $i$ -ésima componente, entonces  $\mathbf{x}^i \in V_2^1$ , por lo que de (2.22) se tiene que

$$H[\mathbf{x}^i] - H[\xi] = 2 \xi_i v_i^i. \quad (2.23)$$

Con este resultado y las Defs. 2.1 y 2.2, se siguen de conformidad los Teos. 2.1 y 2.2, y se deriva el siguiente corolario:

**Corolario 2.1.** Si  $\xi$  es tal que cumple con  $\xi_i v_i^i = 0$ , entonces no es posible determinar si es un extremo relativo.

Los resultados anteriores proporcionan las condiciones necesarias y suficientes para que  $\xi$  sea un extremo relativo de  $H$ , siempre que no se cumpla  $\xi_i v_i^i = 0$ . Por la propiedad de simetría de  $H$ , se observa que si  $\xi$  es un extremo relativo también lo será  $-\xi$ .

## 2.4. DINAMICA DE UNA SOLA NEURONA

El estado de la  $i$ -ésima neurona al tiempo  $t+1$  es, de acuerdo con (1.7)

$$s_i(t+1) = \begin{cases} G(v_i(t) - \theta_i) & \text{si } v_i(t) - \theta_i \neq 0 \\ s_i(t) & \text{si } v_i(t) - \theta_i = 0 \end{cases}$$

que al suponer  $\theta_i=0$ , toma la forma

$$s_i(t+1) = \begin{cases} G(v_i(t)) & \text{si } v_i(t) \neq 0 \\ s_i(t) & \text{si } v_i(t) = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

donde el potencial interno  $v_i$  al tiempo  $t$ , es de acuerdo con (1.4) igual a

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^N w_{ij} s_j(t).$$

Si se define la razón de cambio  $\Delta s_i(t)$  como

$$\frac{\Delta s_i(t)}{\Delta t} = \frac{s_i(t+1) - s_i(t)}{t+1 - t} = s_i(t+1) - s_i(t) = \Delta s_i(t), \quad (2.25)$$

es posible mostrar que el producto  $v_i(t)s_i(t) \geq 0$ , si y solo si  $s_i(t+1) = s_i(t)$ ; en tanto que  $v_i(t)s_i(t) < 0$  si y solo si  $s_i(t+1) = -s_i(t)$ . Para ello, supóngase primero que  $v_i(t)s_i(t) \geq 0$ . Si la igualdad se cumple,  $v_i(t) = 0$  y de (2.24) se sigue que  $s_i(t+1) = s_i(t)$ . Cuando se cumple la desigualdad se tienen dos posibilidades:

- a. Si  $s_i(t) = 1 \Rightarrow v_i(t) > 0$  y por (2.23)  $G(v_i(t)) = 1 \Rightarrow s_i(t+1) = 1 = s_i(t)$
- b. Si  $s_i(t) = -1 \Rightarrow v_i(t) < 0$  y por (2.23)  $G(v_i(t)) = -1 \Rightarrow s_i(t+1) = -1 = s_i(t)$

Por lo tanto, si  $v_i(t)s_i(t) \geq 0 \Rightarrow s_i(t+1) = s_i(t)$ . Por otra parte, cuando  $v_i(t)s_i(t) < 0$  se tienen las dos siguientes posibilidades;

- c. Si  $s_i(t)=1 \Rightarrow v_i(t) < 0 \Rightarrow s_i(t+1) = -1 = -s_i(t)$
- d. Si  $s_i(t) = -1 \Rightarrow v_i(t) > 0 \Rightarrow s_i(t+1) = 1 = -s_i(t)$

Por lo que, si  $v_i(t)s_i(t) < 0 \Rightarrow s_i(t+1) = -s_i(t)$ . Para mostrar que estas condiciones son necesarias y suficientes, supóngase que  $s_i(t+1) = s_i(t)$ . De (2.24) se observa que esto siempre será cierto si  $v_i(t) = 0$ , en tanto si  $v_i(t) \neq 0$  existen dos posibilidades:

- e. Si  $s_i(t+1) = s_i(t) = 1 \Rightarrow G(v_i(t)) = 1 \Rightarrow v_i(t) > 0 \Rightarrow v_i(t)s_i(t) > 0$
- f. Si  $s_i(t+1) = s_i(t) = -1 \Rightarrow G(v_i(t)) = -1 \Rightarrow v_i(t) < 0 \Rightarrow v_i(t)s_i(t) > 0$

Con lo que, si  $s_i(t+1) = s_i(t) \Rightarrow v_i(t)s_i(t) \geq 0$ . Si ahora se supone que  $s_i(t+1) = -s_i(t)$  se tendrán las dos posibilidades siguientes:

- g. Si  $s_i(t+1) = -s_i(t) = 1 \Rightarrow G(v_i(t)) = 1 \Rightarrow v_i(t) > 0 \Rightarrow v_i(t)s_i(t) < 0$
- h. Si  $s_i(t+1) = -s_i(t) = -1 \Rightarrow G(v_i(t)) = -1 \Rightarrow v_i(t) < 0 \Rightarrow v_i(t)s_i(t) < 0$

Seguándose que, si  $s_i(t+1) = -s_i(t) \Rightarrow v_i(t)s_i(t) < 0$ . Este resultado, permite escribir (2.25) como

$$\Delta s_i(t) = \begin{cases} 0 & \Leftrightarrow v_i(t)s_i(t) \geq 0 \\ -2s_i(t) & \Leftrightarrow v_i(t)s_i(t) < 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

## 2.5. DINAMICA DEL SISTEMA

El estado del sistema al tiempo  $t$  está dado por el vector

$$\mathbf{s}(t) = [s_1(t), \dots, s_k(t), \dots, s_N(t)]^T. \quad (2.27)$$

La evolución en el tiempo del vector de estado  $\mathbf{s}(t)$  se basa en la regla dinámica (2.24), mediante la cual es posible definir dos tipos de funcionamiento, **síncrono** y **asíncrono**. No obstante el tipo de funcionamiento, si al tiempo  $t$  se conoce el estado de cada neurona  $s_i(t)$  y su potencial interno  $v_i(t)$ , es posible definir con ayuda de los resultados obtenidos en la sección anterior lo siguiente:

**Definición 2.3.**  $s(t)$  es un punto fijo del sistema si y solo si  $v_i(t)s_i(t) \geq 0$ .

**Definición 2.4.**  $s(t)$  es un estado inestable del sistema si y solo si no es punto fijo.

Y con el tipo de funcionamiento será posible determinar la evolución en el tiempo del sistema. De la Def.2.3, los Teos.2.1, 2.3, y el Cor.2.1 se sigue el teorema:

**Teorema 2.3.** Si  $\xi$  es un mínimo local de  $H$  entonces es un punto fijo del sistema.

### 2.5.1. Funcionamiento Sincrono

Se dirá que se tiene funcionamiento sincrónico, cuando la regla dinámica (2.24) se aplica de manera simultánea a las  $N$  neuronas de la red.

### 2.5.2. Funcionamiento Asíncrono

Se define como funcionamiento asíncrono, cuando (2.24) se aplica siguiendo un orden aleatorio sin repetición, este tipo de funcionamiento es el que asemeja más el comportamiento biológico de las neuronas, en virtud que éstas no actualizan sus estados con el mismo retardo ( $t \rightarrow t+1$ ). Para ilustrar como se lleva a cabo dicho proceso, se empieza por definir la variable aleatoria  $z_1$  que adquiere los valores de  $(1, 2, \dots, N)$  con una distribución de probabilidad uniforme  $p_1 = 1/N$ . Supóngase ahora, que  $z_1$  ha adquirido el valor  $j_1$ , tal que  $j_1 \in (1, 2, \dots, N)$ , se sigue con esto, que el vector de estado al tiempo  $t+1$  está dado por

$$s(t+1) = [s_1(t), \dots, s_{j_1}'(t), \dots, s_N(t)]^T, \quad p_1 = \frac{1}{N}, \quad z_1 = (1, 2, \dots, N), \quad (2.28)$$

donde la notación primada implica que el estado de la neurona  $j_1$  ha sido actualizado de acuerdo con (2.24). Posteriormente se define la variable  $z_2 = (1, 2, \dots, N) - j_1$ , con distribución  $p_2 = 1/(N-1)$ ; esta nueva variable ya no toma en cuenta el valor  $j_1$ , por lo que sólo adquiere

los  $N-1$  restantes, además nótese que la distribución de probabilidad de  $z_2$  también es uniforme. Siguiendo con esta metodología se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}(t+2) &= [s_1(t), \dots, s'_{j_1}(t), s'_{j_2}(t), \dots, s_N(t)]^T, \rho_2 = \frac{1}{N-1}, z_2 = (1, 2, \dots, N) - j_1 \\
 &\vdots \\
 \mathbf{s}(t+r) &= [s_1(t), \dots, s'_{j_1}(t), \dots, s'_{j_r}(t), \dots, s_N(t)]^T, \rho_r = \frac{1}{N-r+1}, z_r = (1, 2, \dots, N) - (j_1, \dots, j_{r-1})
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

de tal forma que al tiempo  $t+N$ , los estados de las  $N$  neuronas han sido actualizados. El análisis anterior permite definir para este caso, la regla dinámica

$$s_i(t+r+1) = \begin{cases} \text{si } i = k \Rightarrow \begin{cases} G(v_i(t+r)) & \text{si } v_i(t+r) \neq 0 \\ s_i(t+r) & \text{si } v_i(t+r) = 0 \end{cases} \\ \text{si } i \neq k \Rightarrow s_i(t+r+1) = s_i(t+r) \end{cases} \tag{2.30}$$

La probabilidad de que el estado de la  $k$ -ésima neurona al tiempo  $t+r$  sea actualizado está dada por

$$\rho_r = \frac{1}{N-r+1}, \tag{2.31}$$

donde  $0 \leq r \leq N$ .

## 2.6. ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA

Se evalúa a continuación  $H$  en  $\mathbf{s}(t)$ , obteniendo que

$$H[t] = H[\mathbf{s}(t)] = -\frac{1}{2} \mathbf{s}^T(t) \mathbf{W} \mathbf{s}(t). \tag{2.32}$$

Si el sistema evoluciona con **funcionamiento sincrónico**, y se supone de manera estricta que  $\mathbf{s}(t+1) \neq \mathbf{s}(t)$ , se sigue de (2.21) que

$$H[t+1] - H[t] = 2 \sum_i s_i(t) v_i(t) - 2 \sum_i s_i(t) \sum_j w_{ij} s_j(t). \quad (2.33)$$

El primer término del lado derecho de la igualdad, siempre es negativo, en virtud de (2.26) y (2.19), el segundo término contiene una versión incompleta de  $v_i(t)$ , representado por la suma sobre  $j$ , y su caracterización requiere el conocimiento de  $w_{ij}$ , concluyendo así, que nada puede ser dicho de (2.33).

Por otro lado, si el sistema evoluciona con **funcionamiento asíncrono**, se substituye  $t$  por  $t+r$  en (2.33). Haciendo uso de (2.22), y suponiendo estrictamente que  $s_k(t+r+1) = s_k(t+r)$ , se obtiene que

$$H[t+r+1] - H[t+r] = 2s_k(t+r)v_k(t+r), \quad (2.34)$$

siguiéndose que  $H[s(t+r)]$  es una función monótona decreciente. Así pues, el sistema converge hacia los mínimos locales de  $H$ . En conclusión, si el sistema evoluciona con funcionamiento asíncrono es posible concluir el análisis con el siguiente teorema;

**Teorema 2.4.**  $\xi$  es un atractor del sistema si y sólo si es un mínimo local de  $H$ , con dominio de atracción  $x \in V_\xi^r$ , donde  $r$  puede ser mayor que 1.

El Teo.2.4 es válido si se denota de manera estricta como mínimo local de  $H$ , el vector  $\xi$  tal que  $\xi_i v_i^2 \geq 0$ , donde la igualdad no está permitida, y como punto fijo solamente, el vector  $\xi$  tal que  $\xi_i v_i^2 = 0$ . Por último obsérvese que si  $\xi$  es un atractor del sistema, por simetría también lo será  $-\xi$ .

## Capítulo Tres

# La Red Neuronal de Hopfield (Modelo Determinista)

Dentro de los problemas básicos a resolver por las Redes Neuronales Artificiales, se encuentra el de la **memoria asociativa**. Éste consiste, en almacenar un conjunto  $p$  de patrones  $\xi_i^\mu$ , de tal forma que al ser presentado un nuevo patrón  $x_i$ , la red responda produciendo el patrón  $\xi_i^\mu$  que en distancia de Hamming se encuentre más cercano a  $x_i$ . En esta descripción los patrones son identificados por el superíndice  $\mu=1,2,\dots,p$ , y las neuronas de la red por el subíndice  $i=1,2,\dots,N$ . Tanto  $\xi_i^\mu$  como  $x_i$  adquieren solo los valores de +1 o -1.

### 3.1. MODELO DE HOPFIELD

El modelo que será utilizado para resolver el problema de la memoria asociativa, es el sistema conocido como Red Neuronal de Hopfield (**RNH**) (Hopfield, 1982), la estructura de esta red, es idéntica a la analizada en el capítulo anterior con dinámica asincrónica, por lo que en este modelo resulta claro que los patrones  $\xi_i^\mu$  deben ser atractores del sistema y además ser únicos. En lugar de estudiar el problema de la memoria asociativa para una realización particular de patrones, Hopfield estudió el problema de patrones aleatorios con distribución de probabilidad

$$P\{\xi_i^\mu\} = \prod_{(\mu,i)} p(\xi_i^\mu), \quad (3.1)$$

donde

$$p(\xi_i^\mu) = \frac{1}{2} [\delta(\xi_i^\mu - 1) + \delta(\xi_i^\mu + 1)], \quad (3.2)$$

con la finalidad de obtener condiciones de funcionamiento general. La variable aleatoria  $\xi_i^\mu$  adquiere con igual probabilidad los valores de +1 y -1, además de no estar correlacionada con ningún otro elemento del conjunto  $\{\xi_i^\mu\}$  (ver ec.(3.1)). Los patrones  $\xi_i^\mu$  serán atractores del sistema si son mínimos locales de  $H$ , para esto es necesario encontrar alguna configuración  $w_j$  que lo haga. El análisis que sigue a continuación se lleva a cabo en principio para una realización particular de  $\xi_i^\mu$ , y posteriormente, se introduce el caso de patrones aleatorios.

### 3.1.1. Almacenamiento de un solo patrón

Para motivar una elección adecuada de los  $w_j$ , se considera el problema simple de almacenar un solo patrón. La condición para que éste sea un mínimo local de  $H$ , es que  $\xi_j v_j^r \geq 0$ . Sin embargo, esto no garantiza que todas las configuraciones cercanas converjan a  $\xi_j$ , por lo que es necesaria la restricción estricta  $\xi_j v_j^r > 0$ . Se propone entonces, una  $w_j$  de la forma

$$w_j = (1 - \delta_j) \frac{1}{N} \xi_j \xi_j, \quad (3.3)$$

y se muestra que efectivamente el problema se resuelve. Se empieza por calcular  $v_i^r$ , tal que  $d_n(\mathbf{x}, \xi) = r$  para  $r=0, 1, \dots, N$ , siguiéndose que

$$v_i^r = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (1 - \delta_j) \xi_j \xi_j x_j = \frac{1}{N} \xi_i \sum_{j=1}^N \xi_j x_j - \frac{1}{N} x_i. \quad (3.4)$$

Si  $x_j = \xi_j$ , entonces el producto  $\xi_j x_j = 1$  contribuye con el valor  $N-r$  en la sumatoria, en tanto que si  $x_j \neq \xi_j$ , entonces el producto  $\xi_j x_j = -1$  contribuye con el valor de  $-r$ , se sigue con esto que

$$v_i^* = \xi_i \left( \frac{N-2r}{N} \right) - \frac{1}{N} x_i, \quad (3.5)$$

y multiplicando por  $x_i$ , se llega a que

$$x_i v_i^* = x_i \xi_i \left( \frac{N-2r}{N} \right) - \frac{1}{N}, \quad (3.6)$$

donde existen dos posibilidades

$$x_i v_i^* = \begin{cases} \frac{N-2r-1}{N} & \text{si } x_i = \xi_i \\ -\frac{N-2r+1}{N} & \text{si } x_i = -\xi_i \end{cases}. \quad (3.7)$$

Si  $r=0$ ,  $x_i = \xi_i$  para toda  $i$ , se sigue de (3.7) que

$$\xi_i v_i^* = \frac{N-1}{N}. \quad (3.8)$$

En virtud de que siempre  $N > 1$ ,  $\xi_i v_i^* > 0$ . Cuando  $r=N$ ,  $x_i = -\xi_i$  para toda  $i$ , obteniendo así que

$$-\xi_i v_i^* = \frac{N-1}{N}, \quad (3.9)$$

siendo este resultado consecuencia de la simetría de  $H$ . Para verificar si existen mínimos locales o puntos fijos cuando  $0 < r < N$ , se analizan los siguientes casos:

1. Si  $N-2r-1 \geq 0 \Rightarrow -(N-2r+1) < 0 \Rightarrow r \leq (N-1)/2$ , entonces,
  - a.  $x_i v_i^* \geq 0$  si  $x_i = \xi_i$ .
  - b.  $x_i v_i^* < 0$  si  $x_i = -\xi_i$ .
2. Si  $-(N-2r+1) \geq 0 \Rightarrow N-2r-1 < 0 \Rightarrow r \geq (N+1)/2$ , entonces,
  - a.  $x_i v_i^* < 0$  si  $x_i = \xi_i$ .
  - b.  $x_i v_i^* \geq 0$  si  $x_i = -\xi_i$ .

Si  $N$  es impar  $r=(N-1)/2$  y  $r=(N+1)/2$  existen, y 1,2 representan todos los casos posibles. En tanto, si  $N$  es par, existe aún otro caso,

3. Si  $r=N/2 \Rightarrow N-2r+1=N-2r-1=-1/N$ , entonces,
  - a.  $x_i v_i^* < 0$  para toda  $i$ .

Se concluye con esto, que los únicos mínimos locales en  $H$  son  $s=\xi, -\xi$ , y que además no existen puntos fijos en el sistema, por lo que cualquier estado inicial converge hacia el patrón y su configuración simétrica. Siguiendo con la simetría de  $H$ , resulta claro que el dominio de atracción para estos mínimos locales es simétrico. Para esto basta con observar, que si el estado inicial  $s(0)=x$  es tal que  $d_h(x, \xi) \leq (N-1)/2$ , se sigue de 1 que si  $x_i$  cambia, la  $d_h(x, \xi)$  disminuye, por lo que  $x$  converge hacia  $\xi$ ; en tanto que si  $d_h(x, \xi) \geq (N+1)/2$ , se sigue de 2 que la  $d_h(x, \xi)$  aumenta, y  $x$  converge hacia  $-\xi$ . Se concluye así, que si  $N$  es impar el dominio de atracción para ambas configuraciones está bien definido, y además es simétrico. Por otro lado, si  $N$  es par falta por definir el dominio al que pertenecen las configuraciones con  $r=N/2$ . De 3 se observa que éstas no tienen un dominio definido, y que convergen con igual probabilidad hacia ambos atractores.

La  $w_{ij}$  propuesta en (3.3) resuelve el problema de la memoria asociativa para un solo patrón si se acepta que el patrón es irrecuperable cuando más de la mitad de las neuronas en el patrón de inicial son diferentes.

### 3.1.2. Almacenamiento de varios patrones

Cuando se desea almacenar varios patrones, resulta lógico pensar en hacer  $w_{ij}$  una superposición de términos como en (3.3), uno por cada patrón, es decir

$$w_{ij} = (1 - \delta_{ij}) \frac{1}{N} \sum_{\mu} \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu} \quad \mu=1, 2, \dots, p. \quad (3.10)$$

Esta forma de calcular los pesos sinápticos es muy parecida a la **Regla de Hebb** (Hebb, 1949), y que tiene su origen en el comportamiento biológico de las neuronas.

En lugar de evaluar  $v_i^r$  para toda  $\mathbf{x}$  como en el caso de un solo patrón, se evalúa en  $x_i = \xi_j^r$ , es decir, en el  $\nu$ -ésimo patrón, con la finalidad de obtener bajo qué condición éste será un mínimo local de  $H$ . Se sigue con esto que

$$v_i^r = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \xi_i^\mu \sum_{j=1}^N (1 - \delta_{ij}) \xi_j^\mu \xi_j^r, \quad (3.11)$$

y desarrollando se llega a

$$v_i^r = \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^p \sum_{j=1}^N \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_j^r - \frac{p}{N} \xi_i^r. \quad (3.12)$$

Separando el  $\nu$ -ésimo término de la suma sobre  $\mu$ , se obtiene que

$$v_i^r = \left( \frac{N-p}{N} \right) \xi_i^r + \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq \nu}^p \sum_{j=1}^N \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_j^r, \quad (3.13)$$

y multiplicando por  $\xi_i^r$ , se sigue que

$$\xi_i^r v_i^r = \left( \frac{N-p}{N} \right) \xi_i^r + \xi_i^r \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq \nu}^p \sum_{j=1}^N \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_j^r. \quad (3.14)$$

Se observa, que si  $N > p$  y el término de la sumatoria es del mismo signo que  $\xi_i^r$ , la cantidad en (3.14) será siempre positiva, en tanto que si es de signo opuesto a  $\xi_i^r$  y mayor en magnitud a  $(N-p)/N$ , el patrón se vuelve inestable.

### 3.1.3. Capacidad de Almacenamiento

De acuerdo con la sección anterior, la restricción  $N > p$  es indispensable para el correcto funcionamiento de la RNH, sin embargo, como se verá a continuación siempre será necesaria una restricción mas fuerte. Para verificar esto, defínase la variable (ver Hertz et al., 1991)

$$C_i^* = -\xi_i^* \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{j=1}^N \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu} \xi_j^{\nu} . \quad (3.15)$$

Si  $C_i^* < (N-p)/N$  para toda  $i$ , entonces el patrón será mínimo local de  $H$ . Ahora bien, si se toma en cuenta la hipótesis de patrones aleatorios (ver ec.(3.1)), se sigue que  $C_i^*$  es una variable aleatoria con distribución binomial (ver Apéndice A), con promedio cero y varianza  $p/N$ , suponiendo por simplicidad en los cálculos que  $p \gg 1$ . Si se supone  $N \gg p$ , entonces  $(N-p)/N \approx 1$ , siguiéndose que si  $P(C_i^* \geq 1) < 1$ , entonces  $\xi_i^* \nu_i^* > 0$  con probabilidad cercana a 1. En virtud que  $N \gg p \gg 1$ ,  $C_i^*$  puede ser aproximada a una distribución normal con varianza y promedio igual a la binomial. Siguiéndose así, que la  $P(C_i^* \geq 1)$  es igual a

$$P(C_i^* \geq 1) = P_{\text{error}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_1^{\infty} e^{-y^2/2\sigma^2} dy , \quad (3.16)$$

donde  $\sigma^2 = p/N$ . En la fig.3-1 se muestra la gráfica de la distribución normal para varios valores de  $p/N$ ; se observa que conforme  $p/N \rightarrow 0$ ,  $P_{\text{error}} \rightarrow 0$ . Manipulando un poco la integral, se llega a que

$$P_{\text{error}} = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{erf} \left( \frac{1}{\sqrt{2\sigma^2}} \right) \right] = \frac{1}{2} \left[ 1 - \text{erf} \left( \sqrt{N/2p} \right) \right], \quad (3.17)$$

donde

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du . \quad (3.18)$$

En el límite de  $N \rightarrow \infty$ , es posible utilizar la expansión asintótica de la función de error

$$1 - \text{erf}(z) \rightarrow \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi z}} \quad (z \rightarrow \infty), \quad (3.19)$$

donde  $z = (N/2p)^{1/2}$ .

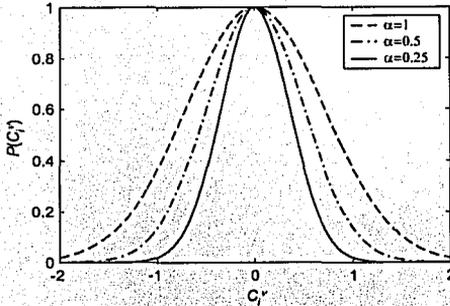


Figura 3-1. Gráfica de la distribución de la variable  $C_i^*$  para varios valores de  $\alpha = p/N$ .

Tomando en cuenta la aproximación en (3.19) y aplicando el logaritmo natural a (3.17), se obtiene que

$$\ln(P_{\text{error}}) \approx \ln\left(\frac{e^{-(N/2p)}}{\sqrt{2\pi N/p}}\right) = -\frac{N}{2p} - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{N}{2p}\right) - \frac{1}{2} \ln \pi \quad (3.20)$$

$$\ln(P_{\text{error}}) \approx -\frac{N}{2p}, \quad (3.21)$$

donde en (3.21) se han tomado en cuenta los términos que sobreviven para  $N$  grande. Un buen criterio, sería el de aceptar que cada neurona de cada patrón tenga una probabilidad mayor al 99% de ser fija, siguiéndose con esto la condición

$$(1 - P_{\text{error}})^{Np} > 0.99. \quad (3.22)$$

Esta condición, se sigue del hecho que el conjunto  $\{C_i^*\}$  es un conjunto de variables aleatorias independientes (ver Apéndice A). Utilizando la expansión binomial y tomando en cuenta que  $P_{\text{error}} < 1$ , se obtiene que

$$1 - NpP_{\text{error}} > 0.99 \rightarrow P_{\text{error}} < \frac{0.01}{Np}, \quad (3.23)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

aplicando el logaritmo natural a la desigualdad anterior, y utilizando (3.22), se sigue que

$$-\frac{N}{2p} < \ln 0.01 - \ln Np. \quad (3.24)$$

En el límite de  $N \rightarrow \infty$ , es posible hacer la aproximación  $\ln(Np) = \ln N^2$ , llegando así a que

$$p < \frac{N}{4 \ln N}. \quad (3.25)$$

El criterio en (3.25) proporciona un límite en la capacidad de almacenamiento del sistema, que garantiza que los patrones almacenados sean atractores de la red. Sin embargo, falta por ver si es que existen otras configuraciones estables en el sistema. Para lograr este objetivo, será necesario suponer a la red de neuronas como un arreglo de espines, como se verá en los siguientes capítulos.

## Capítulo Cuatro

# Analogías entre Sistemas Magnéticos y la RNH

Existe una estrecha analogía entre la Red Neuronal de Hopfield y algunos modelos simples de materiales magnéticos en equilibrio termodinámico. La analogía se sigue de manera cualitativa en el presente capítulo, al suponer a la red de Hopfield como un arreglo hipotético de espines.

### 4.1. MODELO DE ISING PARA SISTEMAS MAGNETICOS

Una descripción simple de un material magnético es suponer, que éste consiste de un conjunto de imanes atómicos ubicados en una red regular, que representa la estructura cristalina del material (los metales son cristales en este sentido). El término espín será utilizado para estos imanes atómicos, cuyo nombre proviene del origen mecánico cuántico de los momentos magnéticos. El espín puede apuntar en varias direcciones, y el número de direcciones posibles depende del tipo de átomo. Particularmente simple, es el caso de átomos con espín 1/2, en los que solo dos direcciones son posibles. Esto es representado de manera sencilla en el **Modelo de Ising** (Colin, 1972) por la variable  $s_i$  para cada lugar  $i$  de la red, con valores permitidos de  $\pm 1$ . Se dice que el espín está orientado "hacia arriba" si  $s_i=+1$  y "hacia abajo" si  $s_i=-1$ .

La analogía entre los espines del modelo de Ising y el estado de una neurona en la red resulta obvia, además de haber utilizado el mismo símbolo  $s_i$  en ambas. Así, el estado excitado en la neurona corresponde al de espín "hacia arriba" en el imán y el estado inhibido al de espín "hacia abajo".

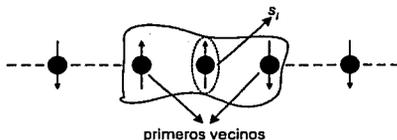


Figura 4-1. Modelo de espines de Ising en una dimensión. El estado  $s_i=+1$  es representado por el espín "hacia arriba" en la red, y el estado  $s_i=-1$  por el espín "hacia abajo".

Originalmente éste modelo fue propuesto como un modelo para el ferromagnetismo. La energía correspondiente a este sistema en presencia de un campo magnético local  $u_i$  está dada por

$$H = -\frac{1}{2} \sum_i u_i s_i, \quad (4.1)$$

donde  $u_i$  actúa sobre el  $i$ -ésimo espín de la red, y consiste de un campo externo  $\theta$  aplicado por el experimentador, más un campo interno producido por los demás espines de la red. La contribución de cada átomo al campo interno que actúa sobre una ubicación dada es proporcional a su propio espín. De esta forma, al agregar las contribuciones de todos los átomos vecinos, se obtiene el campo magnético local

$$u_i = w \sum_j^* s_j + \theta. \quad (4.2)$$

La **constante de intercambio**  $w$  mide la magnitud de la interacción entre espines, ésta siempre es positiva en el caso ferromagnético, y decrece exponencialmente con la distancia, por lo que en la suma el símbolo (\*) indica que esta se lleva a cabo sobre los primeros vecinos (para una revisión completa ver Kagánov et al., 1985; Mattis, 1988). Si se substituye (4.2) en (4.1) se obtiene

$$H = -\frac{1}{2} \sum_i s_i (w \sum_j^* s_j + \theta). \quad (4.3)$$

Por otro lado, si la constante  $w$  es negativa, entonces el modelo corresponde al del antiferromagnetismo. Además, cabe mencionar que dependiendo de la estructura

particular del material, el número de primeros vecinos puede variar (para una revisión completa ver Kittel, 1966).

#### 4.2. EQUILIBRIO TERMODINAMICO A BAJAS TEMPERATURAS

A continuación, se aísla e introduce a la red de espines de Ising en un baño de calor a temperatura constante, con la finalidad de mantener al sistema en equilibrio termodinámico. A bajas temperaturas (cerca del cero absoluto), ya no es válida la descripción clásica de la sección anterior (en el sentido estricto), y el análisis debe seguirse desde el punto de vista de la mecánica cuántica, donde la interpretación que se le da al espín es diferente. Sin embargo, es obvio que no se pretende llevar al cero absoluto un pedazo de cerebro (es ilógico). El significado de la temperatura dentro del contexto de las redes neuronales es diferente al de la temperatura física (como se verá en el capítulo VI). Por otro lado, la descripción clásica de dos estados de espín en el modelo de Ising, es la que resulta apropiada para la realización de una analogía con el modelo de Hopfield. Es por eso, que en lo siguiente la analogía con el modelo de Ising es completamente formal (en particular a bajas temperaturas). Así, cuando se hable de temperatura, se entenderá que no se trata de la temperatura física, sino de un parámetro, que solo adquiere sentido dentro del contexto de las redes neuronales artificiales.

En análisis que se sigue a continuación mediante el modelo de Ising, es válido solo en el sentido cualitativo. A bajas temperaturas, cada espín en la red tiende a alinearse paralelamente a su campo local (ver Mandl, 1971), en otras palabras; la condición  $u_i s_i > 0$  se cumple para cada espín en la red. En el caso del ferromagnetismo, interesa conocer el comportamiento de la red en ausencia de campo externo, ya que si  $\theta$  es lo suficientemente grande como para desprestigiar el campo local producido por las interacciones con átomos vecinos, el fenómeno se reduce al del **paramagnetismo** (ver Reif, 1965). Por esto, de aquí en adelante se supone  $\theta=0$ , y se define a  $v_i$  como el campo interno. Bajo esta restricción, resulta claro de la fig.4-1 que los espines de la red tienden a alinearse paralelamente. No obstante, la estructura particular de la red, es posible mostrar que para cualquier estructura cristalina (regular o irregular), el comportamiento cualitativo es el mismo si se hace uso de la **teoría de campo promedio** (para una revisión completa ver Reif, 1965). Esta, es la característica que distingue al ferromagnetismo, además

obsérvase, que en esta configuración la energía adquiere un mínimo global. De esta forma, existe un estado preferente del sistema, que es el de mínima energía y se denomina **estado estable**.

#### 4.3. ANALOGÍA DEL MODELO DE HOPFIELD CON EL FERROMAGNETISMO

Si se almacena un solo patrón en la red de Hopfield, la función  $H$  estará dada de acuerdo con (2.6) y (3.3) por

$$H = -\frac{1}{2N} \sum_i \sum_{j \neq i} \xi_i \xi_j s_i s_j . \quad (4.4)$$

A continuación, hágase el cambio de variable  $\eta_i = \xi_i s_i$  para toda  $i$ , con esto se sigue que

$$H = -\frac{1}{2N} \sum_i \sum_{j \neq i} \tau_i \tau_j , \quad (4.5)$$

y donde  $\eta$  adquiere los valores de  $\pm 1$ . Si se supone, la existencia de un arreglo de espines  $\eta$  con energía dada por (4.5), se observa de inmediato que ésta corresponde a la de un ferromagneto con constante de intercambio  $w=1/N$ , así, en equilibrio termodinámico a bajas temperaturas los espines  $\eta$  se alinean paralelamente, lo que se logra claramente si  $\xi_i = s_i$  para toda  $i$ . De esta forma, el patrón almacenado (mínimo global de  $H$ ) corresponde vía una transformación (conocida como transformación de Mattis, ver Mattis, 1976) al estado ferromagnético.

#### 4.4. VIDRIO DE ESPIN

Hace algunos años, con el fin de estudiar las interacciones en materiales magnéticos, se buscó diseñar un material magnético de propiedades sencillas. Para esto, a un material no magnetizable se le introdujeron impurezas magnéticas; la sorpresa fue que dicho material resultó con características muy parecidas a las de los vidrios (Perazzo, 1994) y a este nuevo material, se le llamó **vidrio de espín**. Una descripción breve de un vidrio de

espín, es que éste presenta una mezcla aleatoria de interacciones ferrromagnéticas y antiferromagnéticas, debido a que los imanes atómicos tienden a ubicarse de manera aleatoria en la red, es decir, los espines no tienen un orden preferido (se dice que el sistema se encuentra **frustrado**) y en consecuencia existirá una mezcla aleatoria en el signo de las interacciones (para una revisión completa ver Binder et al., 1986; Weissman, 1993).

#### **4.5. ANALOGÍA DEL MODELO DE HOPFIELD CON EL VIDRIO DE ESPÍN**

Procediendo de manera similar al de la sección 4.3, considere ahora el caso en que se almacenan  $p$  patrones aleatorios con distribución de probabilidad dada en (3.1) y (3.2) en la red de Hopfield. Con esto, los pesos sinápticos  $w_{ij}$  son también variables aleatorias (ver ec.(3.10)) que adquieren valores positivos y negativos con distribución de probabilidad binomial (ver Apéndice A). En ausencia de campo externo la analogía del modelo de Hopfield con el vidrio de espín es casi completa. Los pesos sinápticos corresponden a las interacciones en el arreglo, el potencial interno de la neurona al campo interno que actúa sobre el espín, la función  $H$  a la energía, la condición de estabilidad en el vidrio de espín (y en general para cualquier arreglo de espines) en equilibrio termodinámico a baja temperatura, es la misma que la condición de localidad estricta en la red de Hopfield (ver Teo.2.2). No obstante, la estrecha analogía entre estos modelos, el número y forma de las configuraciones estables en el vidrio de espín dependen de la distribución de probabilidad de  $w_{ij}$ , además, su determinación solo puede lograrse si se analiza su modelo mecánico estadístico.

Bajo la restricción  $p/N=0$  los  $p$  patrones almacenados en la red de Hopfield serán estables, sin embargo, esto no garantiza que sean los únicos. Es por eso, que en lo siguiente se considera a la red de Hopfield como un arreglo hipotético de espines en equilibrio termodinámico y se estudia desde un punto de vista mecánico estadístico, con el objeto de conocer en su totalidad la forma de las configuraciones estables del sistema.

## Capítulo Cinco

# Red de Hopfield en Equilibrio Termodinámico

En el presente capítulo se estudia el comportamiento de la red de Hopfield en equilibrio termodinámico bajo la restricción  $p/N \approx 0$ , teniendo como objetivo, determinar los estados estables de la red a temperatura finita. Para esto, es necesario conocer la magnetización por espín, afortunadamente existe la solución exacta de este modelo (ver Amit et al., 1985) y está dada por

$$\langle s_i \rangle = \tanh \left( \beta \frac{1}{N} \sum_{\mu} \sum_j \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu} \langle s_j \rangle \right),$$

donde la notación  $\langle \rangle$  indica promedio termodinámico y  $\beta = 1/kT$ , donde  $k$  es la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura del sistema. En lo siguiente, se supone  $k=1$ , con lo que  $\beta = 1/T$ , situación que es usual, ya que el parámetro  $k$  sólo redefine unidades.

El sistema presenta 3 estados diferentes, en primer lugar, si  $T > 1$  el estado del sistema es el **paramagnético**. En segundo lugar, si  $0.46 < T < 1$  el estado de la red es el equivalente termodinámico al **ferromagnético** vía una transformación de Mattis (mediante el cambio de variable  $\tau_i = \xi_i^{\mu} s_i$ ), en virtud que solo los estados  $\langle s_i \rangle = m \xi_i^{\mu}$  para  $|m| < 1$  son estables, éstos se denominan también **estados de Mattis**. En tercer lugar, para  $0 < T < 0.46$  el estado es el del **vidrio de espín**, y los estados estables son de la forma

$$\langle s_i \rangle = \tanh \left[ \sum_{\mu} m^{\mu} \xi_i^{\mu} \right], \text{ para } |m^{\mu}| \leq 1,$$

siendo un caso particular los **estados de Mattis**. Al resto de las realizaciones se les denominará **estados espurios**.

## 5.1. RED DE HOPFIELD EN EQUILIBRIO TERMODINAMICO

La energía correspondiente al modelo de Hopfield está dado por

$$H = -\frac{1}{2N} \sum_{\mu} \sum_{j} (1 - \delta_{\mu j}) \xi_j^{\mu} \xi_j^{\mu} s_j s_j = -\frac{1}{2N} \sum_{\mu} \sum_{j} \xi_j^{\mu} \xi_j^{\mu} s_j s_j + \frac{p}{2}, \quad (5.1)$$

donde  $\xi_j^{\mu}$  es una variable aleatoria independiente con distribución de probabilidad dada por (3.1) y (3.2). El sistema se estudia en el límite termodinámico, es decir, cuando  $N \rightarrow \infty$ , por lo que la energía libre promedio por espín

$$f(\beta) = -\lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N\beta} \langle \langle \ln Z \rangle \rangle \right], \quad (5.2)$$

donde  $Z$  es la distribución canónica (para una revisión completa ver McQuarrie, 1976) y la notación  $\langle \langle \rangle \rangle$  indica promedio sobre la distribución de  $\{\xi_j^{\mu}\}$ . La distribución canónica está dada por

$$Z = \prod_{\{\mu\}} e^{-\beta H}, \quad (5.3)$$

donde

$$\prod_{\{\mu\}} = \sum_{s_1=1} \cdots \sum_{s_{N-1}=1} \cdots \sum_{s_N=1} \cdot \quad (5.4)$$

La obtención de  $\langle \langle \ln Z \rangle \rangle$  requiere el uso del **método de réplicas** (para una revisión completa sobre este método ver Kirkpatrick et al., 1978; Provost et al., 1983; Binder et al., 1986; Weissman, 1993) donde el análisis resulta bastante elaborado. Sin embargo,

debido a la hipótesis  $p/N \approx 0$ , será posible proceder de manera más simple como se verá más adelante.

### 5.1.1. Magnetización Promedio por Espín

Antes de analizar el caso general de patrones aleatorios, se obtienen  $f(\beta)$  y  $\langle s_i \rangle$  para una realización particular de  $\{\xi_i^\mu\}$ , por lo que se empieza por obtener la expresión para  $Z$ . Se sigue entonces, de (5.1) y (5.3) que

$$Z = \prod_{\{s\}} \theta \left[ \frac{\beta \sigma}{2} \frac{\beta}{2N} \sum_{\mu} \left( \sum_i \xi_i^\mu s_i \right)^2 + \beta \sum_{\mu} \sigma^\mu \sum_i \xi_i^\mu s_i \right] = e^{-\beta p/2} \prod_{\{s\}} \prod_{\mu} \theta \left[ \frac{\beta}{2N} \left( \sum_i \xi_i^\mu s_i \right)^2 + \beta \sigma^\mu \sum_i \xi_i^\mu s_i \right]. \quad (5.6)$$

En la ec.(5.6), se ha supuesto la presencia de un campo externo en cada lugar de la red de la forma

$$\theta_i = \sum_{\mu} \theta^\mu \xi_i^\mu, \quad (5.7)$$

que podrá ser hecho cero en cualquier momento. Haciendo uso de la identidad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta^{-ax^2 \pm bx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \theta^{b^2/4a}, \quad (5.8)$$

en (5.6), para  $a = \beta N/2$ ,  $b^\mu = \beta \sum_i \xi_i^\mu s_i$  y  $x = m^\mu$ , se obtiene

$$Z = \left( \frac{\beta N}{2\pi} \right)^{p/2} e^{-\beta p/2} \prod_{\{s\}} \prod_{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} dm^\mu \theta \left[ \frac{\beta N}{2} (m^\mu)^2 + \beta (m^\mu \cdot \sigma^\mu) \sum_i \xi_i^\mu s_i \right]. \quad (5.9)$$

Introduciendo notación vectorial para las  $p$  componentes de  $\xi_i^\mu$ ,  $m^\mu$  y  $\theta^\mu$ , se sigue que

$$Z = \left( \frac{\beta N}{2\pi} \right)^{p/2} e^{-\beta p/2} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\mu} dm^\mu \theta \left[ \frac{\beta N}{2} m^2 + \sum_i m \cdot \xi_i (2 \cosh[\beta(m \cdot \theta) \xi_i]) \right], \quad (5.10)$$

donde se ha hecho uso de la definición del coshx. Si se define la función

$$F(\beta, \mathbf{m}) = \frac{\rho}{2N} + \frac{1}{2} \mathbf{m}^2 - \frac{1}{N\beta} \sum_I \ln \{ 2 \cosh[\beta(\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\xi}_I] \}, \quad (5.11)$$

la ec.(5.10) puede ser escrita en términos de  $F$  como

$$Z = \left( \frac{\beta N}{2\pi} \right)^{\rho/2} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{\mu} d\mathbf{m}^{\mu} e^{-\beta N F(\beta, \mathbf{m})}. \quad (5.12)$$

En el límite de  $N \rightarrow \infty$  (ver Apéndice A), la integral es dominada por los mínimos locales de  $F$ , con lo que es posible obtener la expresión para la energía libre promedio por espín

$$f(\beta) = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N\beta} \ln Z = \frac{\rho}{2N} + \frac{1}{2} \mathbf{m}^2 - \frac{1}{N\beta} \sum_I \ln \{ 2 \cosh[\beta(\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\xi}_I] \}, \quad (5.13)$$

donde  $\mathbf{m}$  es un mínimo local de  $F$  para  $\beta$  fija. Se sigue con esto, que  $\mathbf{m}$  debe satisfacer las ecuaciones de punto silla  $\partial F / \partial \mathbf{m}^{\mu} = 0$ , por lo que

$$\mathbf{m} = \frac{1}{N} \sum_I \boldsymbol{\xi}_I \tanh[\beta(\mathbf{m} + \boldsymbol{\theta}) \cdot \boldsymbol{\xi}_I]. \quad (5.14)$$

Por otro lado, de (5.6) se obtiene la siguiente expresión para la  $\partial \ln Z / \partial \theta^{\nu}$

$$-\frac{1}{\beta N} \frac{\partial \ln Z}{\partial \theta^{\nu}} = - \frac{\sum_I \frac{1}{N} \sum_I \xi_I^{\nu} s_I e^{\left\{ -\beta/2 + \frac{\rho}{2N} \sum_I \left( \sum_I \xi_I^{\nu} s_I \right)^2 + \beta \sum_{\mu} \theta^{\mu} \sum_I \xi_I^{\mu} s_I \right\}}}{Z}. \quad (5.15)$$

La ec.(5.15) es válida para toda  $\mu$ , siguiéndose que

$$-\frac{1}{\beta N} \frac{\partial \ln Z}{\partial \theta^{\mu}} = - \left\langle \frac{1}{N} \sum_I \xi_I^{\mu} s_I \right\rangle = - \frac{1}{N} \sum_I \xi_I^{\mu} \langle s_I \rangle. \quad (5.16)$$

Luego, de (5.13) se obtiene

$$-\frac{1}{\beta N} \frac{\partial \ln Z}{\partial \theta^m} = -\frac{1}{N} \sum_i \xi_i^m \tanh[\beta(m + \theta) \cdot \xi_i], \quad (5.17)$$

siguiéndose de manera clara que

$$\langle s_i \rangle = \tanh(\beta m \cdot \xi_i), \quad (5.18)$$

y de (5.18) y (5.14) que

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \xi_i \langle s_i \rangle, \quad (5.19)$$

donde, una vez obtenida la expresión para la magnetización por espín en (5.18), el campo externo es hecho cero, es decir,  $\theta=0$ . Tomando esto en consideración, intercambiando el subíndice  $i$  por  $j$  en (5.19) y substituyendo su valor en (5.18) se obtiene

$$\langle s_i \rangle = \tanh \left( \beta \frac{1}{N} \sum_j \xi_j \langle s_j \rangle \cdot \xi_i \right) = \tanh \left( \beta \frac{1}{N} \sum_{\mu} \sum_j \xi_j^{\mu} \xi_i^{\mu} \langle s_j \rangle \right). \quad (5.20)$$

Para una realización particular de  $\xi_i^{\mu}$ ,  $f(\beta)$  y  $m$  se obtienen al evaluar íntegramente (5.13) y (5.14). Por otro lado, cuando  $\xi_i^{\mu}$  es una variable aleatoria esto ya no es posible, sin embargo, siempre que  $p/N \neq 0$ , la suma  $(1/N) \sum_i$  en (5.13) y (5.14) puede ser reemplazada por el promedio sobre la distribución de  $\{\xi_i\}$  (para una revisión completa ver Hemmen, 1982), siguiéndose que

$$f(\beta) = \frac{1}{2} m^2 - \frac{1}{\beta} \langle \langle \ln [2 \cosh(\beta m \cdot \xi)] \rangle \rangle \quad (5.21)$$

$$m = \langle \langle \xi \tanh(\beta m \cdot \xi) \rangle \rangle. \quad (5.22)$$

Así, la magnetización por espín, seguirá estando dada por (5.20).

### 5.1.2. Estabilidad

Para que  $\mathbf{m}$  sea un mínimo local de  $F$ , no basta con resolver la ec.(5.22), también es necesario que los eigenvalores de la matriz

$$A^{\mu\nu} = \frac{\partial^2 F}{\partial m^\nu \partial m^\mu} = \delta^{\mu\nu} - \beta(\delta^{\mu\nu} - Q^{\mu\nu}), \quad (5.23)$$

donde

$$Q^{\mu\nu} = \langle\langle \xi^\mu \xi^\nu \tanh^2(\beta \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi}) \rangle\rangle, \quad (5.24)$$

sean positivos. Si esto sucede, las realizaciones en (5.22) serán mínimos locales (estables) de  $F$ , de lo contrario serán puntos silla (inestables).

### 5.2. ANALISIS A BAJA TEMPERATURA

A baja temperatura, cuando  $\beta \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow 0$ ), es posible aplicar los límites

$$\tanh(\beta \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi}) \rightarrow \text{Sgn}(\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi}) \quad (5.25)$$

y

$$\frac{1}{\beta} \ln[2 \cosh(\beta \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi})] = \frac{1}{\beta} \ln(e^{\beta \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi}} + e^{-\beta \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi}}) \rightarrow \frac{1}{\beta} |\beta \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi}| = |\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\xi}|, \quad (5.26)$$

donde

$$\text{Sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (5.27)$$

De esta forma, (5.21) y (5.22) se escriben como

$$f = \frac{1}{2} m^2 - \langle \langle |m \cdot \xi| \rangle \rangle \quad (5.28)$$

$$m = \langle \langle \xi \text{Sgn}(m \cdot \xi) \rangle \rangle. \quad (5.29)$$

Expandiendo a  $f$  en series de Taylor alrededor de  $m=0$ , se obtiene que

$$f = -\frac{1}{2} m^2, \quad (5.30)$$

donde se ha hecho uso de las igualdades

$$\frac{\partial f}{\partial m^\mu} = m^\mu - \langle \langle \xi^\mu \text{Sgn}(m \cdot \xi) \rangle \rangle \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^\nu \partial m^\mu} = \delta^{\mu\nu} - 2\delta^{\mu\nu} \langle \langle m \cdot \xi \rangle \rangle. \quad (5.32)$$

De (5.28) y (5.30) se sigue que

$$m^2 = \langle \langle |m \cdot \xi| \rangle \rangle. \quad (5.33)$$

Por otro lado, de (5.22) y (5.29) resulta claro que  $|m^\mu| \leq 1$ , siendo posible mostrar que  $m$  obedece la cota  $m^2 \leq 1$ . Para esto, se hace uso de (5.33) y la desigualdad de Cauchy-Schwartz, obteniendo así

$$m^2 = \langle \langle |m \cdot \xi| \rangle \rangle \leq \langle \langle (m \cdot \xi)^2 \rangle \rangle^{1/2} = \left[ \sum_{\mu, \nu} m^\mu m^\nu \langle \langle \xi^\mu \xi^\nu \rangle \rangle \right]^{1/2} = (m^2)^{1/2}. \quad (5.34)$$

Este resultado implica claramente que  $m^2 \leq 1$ , donde la igualdad se cumple cuando  $m$  posee una sola componente, en este caso se observa a partir de (5.30) que  $f$  posee un mínimo global.

### 5.3. ESTADO PARAMAGNETICO

La realización más simple en (5.22) corresponde a  $\mathbf{m}=\mathbf{0}$ , que permanece estable mientras  $T>1$ . Cuando esto sucede, se observa a partir de (5.18) que el promedio  $\langle s_i \rangle = 0$ , es decir,  $s_i$  apunta "hacia arriba" y "hacia abajo" con igual probabilidad. Este, es el **estado paramagnético** del sistema. Para verificar que esto ocurre, se expande en series de Taylor la  $\mu$ -ésima componente de (5.22) alrededor de  $\mathbf{m}=\mathbf{0}$ ,

$$m^\mu = \beta m^\mu - \frac{1}{3} \beta^3 (m^\mu)^3 + O(m^4). \quad (5.35)$$

Si  $\beta \leq 1$  ( $T \geq 1$ ), es posible aproximar (5.35) hasta el término cúbico, siguiéndose que

$$(m^\mu)^3 \approx 3T^2(1-T), \quad (5.36)$$

donde es fácil ver que  $m^\mu=0$  para  $T \geq 1$ . Luego, de (5.23) se obtiene que

$$A^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu}(1-\beta), \quad (5.37)$$

es una matriz diagonal, con eigenvalores  $\lambda=1-\beta$ , que son positivos para  $T>1$ , esto implica que la solución  $\mathbf{m}=\mathbf{0}$  se vuelve inestable a la temperatura  $T_c=1$ , donde realizaciones con  $\mathbf{m} \neq \mathbf{0}$  aparecen. En lo siguiente se denotará con  $n$  la dimensionalidad de estas realizaciones, donde  $n$  especifica el número de componentes  $m^\mu \neq 0$ .

### 5.4. ESTADOS DE MATTIS

Se analiza a continuación las realizaciones con  $n=1$ , estas son de la forma

$$\mathbf{m} = m(0, \dots, 1, \dots, 0), \quad (5.38)$$

para toda  $\mu$ , existiendo un total de  $2p$  soluciones de este tipo, siguiéndose a partir de (5.21) y (5.22) que

$$f(\beta) = \frac{1}{2} m^2 - \frac{1}{\beta} \ln[2 \cosh(\beta m)] \quad (5.39)$$

y

$$m = \tanh(\beta m), \quad (5.40)$$

y de (5.18), que la magnetización por espín es igual a

$$\langle s_i \rangle = \xi_i^{\mu} \tanh(\beta m) = m \xi_i^{\mu}. \quad (5.41)$$

Este estado, es el equivalente termodinámico vía una transformación de Mattis (si se hace  $\eta = \xi_i^{\mu} s_i$ ) al estado ferromagnético. Estas realizaciones, mantienen una correlación finita con los patrones almacenados y su energía es de  $-1/2$  a temperatura cero, que corresponde al mínimo global de  $f$  de acuerdo con lo estudiado en la sección 5.2. En lo siguiente, a estas realizaciones se les referirá como *estados de Mattis*.

## 5.5. REALIZACIONES SIMÉTRICAS

Una clase particularmente simple de realizaciones en (5.22) son aquellas en las que las  $n$  componentes no nulas de  $\mathbf{m}$  son de igual magnitud, siendo una realización particular

$$\mathbf{m} = m_n (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_n, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{p-n}), \quad (5.42)$$

siguiéndose que para  $n$  dada existen un total de  $2^n [p! / n!(p-n)!]$  realizaciones de esta forma. De (5.21) se sigue que

$$f_n = \frac{n}{2} m_n^2 - \frac{1}{\beta} \langle \ln[2 \cosh(\beta m_n z_n)] \rangle, \quad (5.43)$$

donde  $z_n = x - (n-x) = 2x - n$ , con  $x$  igual al número de  $\xi_i^{\mu}$  positivas y  $n-x$  igual al número de  $\xi_i^{\mu}$  negativas. Esto implica a su vez que  $F$  depende de la única variable  $m_n$ , por lo que la

condición de **punto crítico** (que es el análogo a la condición de punto silla en el caso de una sola variable) para este caso particular se reduce a  $dF/dm_n=0$ . Se sigue entonces que

$$m_n = \frac{1}{n} \langle \langle z_n \tanh(\beta m_n z_n) \rangle \rangle \quad (5.44)$$

$$y$$

$$\langle s_i \rangle = \tanh(\beta m_n z_n^i), \quad (5.45)$$

donde el superíndice  $i$  en  $z_n^i$  denota que la suma se lleva sobre la  $i$ -ésima componente de  $\xi^i$ . La solución en (5.43) representa para  $n > 1$  estados que son una mezcla igual de varios patrones. Se analiza a continuación el comportamiento de estas realizaciones cerca de  $T_c$ , para esto se expande en series de Taylor (5.44) alrededor de  $m_n=0$ , obteniendo (ver Apéndice A)

$$m_n = \frac{\langle \langle z_n^2 \rangle \rangle}{n} (\beta m_n) - \frac{\langle \langle z_n^4 \rangle \rangle}{3n} (\beta m_n)^3 + O(m_n^5) = (\beta m_n) - \frac{3n-2}{3} (\beta m_n)^3 + O(m_n^5), \quad (5.46)$$

y siguiéndose que cerca  $T_c$

$$m_n^2 \approx \frac{3t}{3n-2}, \quad (5.47)$$

donde  $t=1-T$ . Se concluye así, que  $T_c$  es la temperatura en la que aparecen las realizaciones simétricas. Si ahora se expande  $f_n$  alrededor de  $m_n=0$  y se utiliza (5.47), se obtiene que

$$f_n = -\frac{1}{\beta} \ln 2 + \frac{\langle \langle z_n^2 \rangle \rangle}{2} (1-\beta) m_n^2 + \frac{\langle \langle z_n^4 \rangle \rangle}{12} \beta^3 m_n^4 + O(m_n^6) \quad (5.48)$$

y

$$\tilde{f}_n \equiv \beta f_n + \ln 2 \approx -\frac{n}{2} (1-T) (\beta m_n)^2 + \frac{n(3n-2)}{12} (\beta m_n)^4 \approx -\frac{3nt^2}{4(3n-2)}. \quad (5.49)$$

observándose que la energía libre es una función monótona creciente de  $n$ , por lo que cerca de  $T_c$  el mínimo de la energía corresponde a los estados de Mattis. Por otro lado, cerca de  $T=0$ , es posible utilizar las expresiones en (5.29) y (5.30), siguiéndose con esto que

$$f_n = -\frac{1}{2}nm_n^2 \quad (5.50)$$

y

$$m_n = \frac{1}{n} \langle \langle z_n \text{Sgn}(m_n z_n) \rangle \rangle = \frac{1}{n} \langle \langle |z_n| \rangle \rangle, \quad (5.51)$$

donde se han utilizado las definiciones  $\text{Sgn}(x)$  y  $|x|$ , y observado que

$$z_n \text{Sgn}(m_n z_n) = \begin{cases} z_n & \text{si } m_n z_n > 0 \\ 0 & \text{si } m_n z_n = 0 = |z_n| \\ -z_n & \text{si } m_n z_n < 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

De esta forma, las realizaciones para  $n$  par son (ver Apéndice A)

$$\begin{aligned} m_{2k} &= \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \\ f_{2k} &= -\frac{2k}{2^{4k+1}} \binom{2k}{k}^2, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (5.53)$$

y para  $n$  impar

$$\begin{aligned} m_{2k+1} &= \frac{1}{2^{2k}} \binom{2k}{k} \\ f_{2k+1} &= -\frac{2k+1}{2^{4k+1}} \binom{2k}{k}^2, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (5.54)$$

La sucesión  $f_n$  tiene como cota inferior  $f_1 = -0.5$  y como cota superior  $f_2 = -0.25$ . La secuencia  $f_{2k}$  es monótona decreciente con respecto a  $k$ , mientras que la secuencia  $f_{2k+1}$  es

monótona creciente, ambas poseen el límite común:  $-1/\pi$ , conforme  $k \rightarrow \infty$ . En conclusión, se obtiene el siguiente orden en la energía para las realizaciones simétricas

$$f_1 < f_3 < f_5 < \dots < f_x \dots < f_6 < f_4 < f_2. \quad (5.55)$$

### 5.5.1. Estabilidad

Para determinar la estabilidad de las realizaciones simétricas, se hace uso (5.23), de donde se sigue que

$$A = A^{\mu\mu} = 1 - \beta(1 - q) \quad (5.56)$$

y

$$Q^{\mu\nu} = q = \langle \langle \tanh^2(\beta m_n z_n) \rangle \rangle, \quad (5.57)$$

para toda  $\mu$ . En virtud que todas las realizaciones simétricas para  $n$  dada son equivalentes, se analiza sin pérdida de generalidad la estabilidad para la realización particular (5.42), siguiéndose para este caso que los elementos no diagonales de la matriz  $A^{\mu\nu}$  son de la forma

$$A^{\mu\nu} = \beta Q = \beta \langle \langle \xi^\mu \xi^\nu \tanh^2(\beta m_n z_n) \rangle \rangle, \quad (5.58)$$

para  $\mu, \nu \leq n$ . Se tiene con esto que la matriz  $A^{\mu\nu}$  es igual a

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A & \beta Q & \beta Q & \dots & \dots & \beta Q & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta Q & A & \beta Q & \dots & \dots & \beta Q & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta Q & \beta Q & A & \dots & \dots & \beta Q & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \beta Q & \beta Q & \beta Q & \dots & \dots & A & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & A & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & A & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & A \end{pmatrix}. \quad (5.59)$$

que puede ser llevada a la forma equivalente

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A + \beta(n-1)Q & \beta Q & \beta Q \dots & \dots \beta Q & 0 & 0 \dots & \dots 0 \\ 0 & A - \beta Q & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 \\ 0 & 0 & A - \beta Q \dots & \dots 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \dots A - \beta Q & 0 & 0 \dots & \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & A & 0 \dots & \dots 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & A \dots & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \dots 0 & 0 & 0 \dots & \dots A \end{pmatrix}, \quad (5.60)$$

después de aplicar los siguientes pasos:

1. Se suman las columnas 2- $n$  a la primer columna.
2. Se resta el primer renglón a los renglones 2- $n$ .

La forma equivalente en (5.60) es una matriz triangular superior, por lo que su determinante está dado por el producto de los elementos de la diagonal principal, siguiéndose de manera fácil que  $A^{(n)}$  posee tres grupos de eigenvalores:

1. Un eigenvalor no degenerado

$$\lambda_1 = 1 - \beta(1-q) + \beta(n-1)Q, \quad (5.61)$$

que corresponde a las fluctuaciones longitudinales en la amplitud de  $m_n$ .

2. Un eigenvalor con degeneración  $p-n$

$$\lambda_2 = 1 - \beta(1-q), \quad (5.62)$$

correspondiente a fluctuaciones en direcciones donde más patrones pueden mezclarse.

3. Y un eigenvalor con degeneración  $n-1$

$$\lambda_3 = 1 - \beta(1-q) - \beta Q, \quad (5.63)$$

relacionado con fluctuaciones anisotrópicas en el espacio de los  $n$  patrones.

El menor de los eigenvalores es  $\lambda_3$ , en virtud de que  $Q$  es positivo para todo  $T < 1$  (ver Apéndice A), por lo que este eigenvalor determina la estabilidad de las realizaciones. Se analiza ahora, el comportamiento de los eigenvalores cerca de  $T_c$ , para esto se expanden en series de Taylor  $q$  y  $Q$  alrededor de  $m_n=0$ , truncando las series en el término cúbico se obtiene que

$$q \approx \langle\langle z_n^2 \rangle\rangle (\beta m_n)^2 = n(\beta m_n)^2 \approx \frac{3nt}{3n-2} \quad (5.64)$$

y

$$Q \approx \langle\langle (\xi^\mu + \xi^\nu) z_n \rangle\rangle (\beta m_n)^2 = 2(\beta m_n)^2 \approx \frac{2q}{n}, \quad (5.65)$$

donde se ha hecho uso de (5.47). Sustituyendo (5.64) y (5.65) en las ecs.(5.61)-(5.63), se obtiene que

$$\lambda_1 = 1 - \beta + \beta[q + (n-1)Q] \approx -t + q + (n-1)Q \approx 2t > 0, \quad (5.66)$$

$$\lambda_2 = 1 - \beta(1-q) \approx -t + q \approx \frac{2t}{3n-2} > 0 \quad (5.67)$$

y

$$\lambda_3 = 1 - \beta(1-q) - \beta Q \approx -t + q - Q \approx -\frac{4t}{3n-2} < 0, \quad (5.68)$$

siguiéndose así, que cerca de  $T_c$  sólo la realización con  $n=1$  es estable. Esto se debe a que para los estados de Mattis  $Q=0$ , por lo que su estabilidad la determina el único eigenvalor  $\lambda_2$  que es positivo cerca de  $T_c$ .

Para analizar el comportamiento de los eigenvalores cerca de  $T=0$ , se utilizan el límite  $\tanh(\beta m_n z_n) \rightarrow \text{Sgn}(m_n z_n)$  y las ecuaciones (ver Apéndice A)

$$q = \langle\langle \text{Sgn}^2(m_n z_n) \rangle\rangle, \quad (5.69)$$

$$q + (n-1)Q = \frac{1}{n} \langle \langle z_n^2 \text{Sgn}^2(m_n z_n) \rangle \rangle \quad (5.70)$$

$$\text{y}$$

$$q - Q = \langle \langle \text{Sgn}^2(m_n z_{n-2}) \rangle \rangle. \quad (5.71)$$

Si  $n$  es impar, tanto  $z_n$  como  $z_{n-2}$  son distintos de cero, siguiéndose de (5.69)-(5.71) que  $q = q + (n-1)Q = q - Q = 1$ , y de (5.61)-(5.63) que  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ , es decir, las realizaciones simétricas impares son estables cerca de  $T=0$ . Por otro lado, si  $n$  es par  $z_n$  y  $z_{n-2}$  tienen una probabilidad finita de ser cero, por lo que  $q = 1 - P(z_n=0)$ ,  $q + (n-1)Q = 1$  y  $q - Q = 1 - P(z_{n-2}=0)$ , siguiéndose con esto que  $\lambda_1 = 1$  y que  $\lambda_2, \lambda_3$  son proporcionales a  $-\beta$ , es decir, las realizaciones simétricas pares son inestables aún cerca de  $T=0$ . El resultado anterior implica que las soluciones simétricas pares permanecen inestables para toda  $T$ , en tanto que las impares llegan a ser estables debajo de cierta temperatura,  $0 < T_n < 1$ , dada por el cambio de signo de  $\lambda_3$ . Para encontrar dicha temperatura se empieza por igualar a cero (5.63), obteniéndose

$$T_n = 1 - (q - Q) = 1 - \langle \langle \tanh^2(\beta m_n z_{n-2}) \rangle \rangle, \quad (5.72)$$

donde se ha hecho uso de (5.71). Haciendo el cambio de variable  $x = m_n T_n$ , se sigue que (5.44) y (5.72) pueden ser escritos como

$$x T_n = \frac{1}{n} \langle \langle z_n \tanh(x z_n) \rangle \rangle \quad (5.73)$$

$$\text{y}$$

$$T_n = 1 - \langle \langle \tanh^2(x z_{n-2}) \rangle \rangle. \quad (5.74)$$

Substituyendo  $T_n$  en (5.73) se sigue la igualdad

$$x \left( 1 - \langle \langle \tanh^2(x z_{n-2}) \rangle \rangle \right) = \frac{1}{n} \langle \langle z_n \tanh(x z_n) \rangle \rangle. \quad (5.75)$$

De esta forma, al resolver (5.75) para  $x$  y posteriormente al sustituir su valor en (5.73) se encuentra  $T_n$ . Soluciones numéricas de estas ecuaciones arrojan los siguientes resultados para  $n=3,5,7,9$

$N$	$T_n$
3	0.460
5	0.385
7	0.344
9	0.317

Tabla 5-1. Soluciones numéricas a (5.73) para diferentes valores de  $n$ .

Conforme  $n \rightarrow \infty$ ,  $T_n \rightarrow 0$ , es decir sólo las soluciones simétricas impares con  $n$  pequeña permanecen estables.

## 5.6. REALIZACIONES ASIMÉTRICAS

Existen también realizaciones asimétricas estables, sin embargo su caracterización no resulta del todo clara. Afortunadamente ha sido posible mostrar (por ensayo y error) que dichas realizaciones permanecen estables solo para  $0 < T < 0.452$ , justamente debajo de la temperatura  $T=0.460$ , a la cual la realización simétrica para  $n=3$  se vuelve inestable. Incluso conforme la simetría decrece estas realizaciones pierden su estabilidad a una temperatura cada vez menor.

## 5.7. CONCLUSIONES

La magnetización por espín está dada por (5.20), ésta, corresponde a las ecuaciones de campo promedio (para una revisión completa ver Reif, 1965), esto es, el término de la sumatoria corresponde a el campo interno en la posición  $i$  de la red debido a los espines vecinos. De esta forma, (5.20) puede ser escrita en la forma compacta como

$$\langle s_i \rangle = \tanh(\beta v_i), \quad (5.76)$$

donde

$$v_i = \frac{1}{N} \sum_{\mu} \xi_i^{\mu} \xi_j^{\mu} (s_j) \quad (5.77)$$

Por otro lado, el espín  $s_i$  es una variable aleatoria que adquiere los valores de +1 y -1 y con promedio dado por (5.76), siguiéndose de manera fácil que la probabilidad de adquirir dichos valores está dada por

$$s_i := \begin{cases} +1 & \text{con probabilidad } g(v_i) \\ -1 & \text{con probabilidad } 1-g(v_i) \end{cases} \quad (5.78)$$

donde

$$g(x) = \frac{1}{1 + e^{-2\beta x}} \quad (5.79)$$

La notación ( $:=$ ) en (5.78) dice que no se trata de una igualdad, sino de una regla estadística. A partir de (5.78) y (5.79) se observa claramente que si  $v_i=0$ , entonces el espín  $s_i$  tiene igual probabilidad de apuntar "hacia arriba" y "hacia abajo". Esta situación se presenta de manera radical cuando  $T>1$  ( $m=0$ ), en este caso, es fácil ver de (5.18) que el campo interno en cada lugar  $i$  de la red es cero, no existiendo configuración estable. Cuando  $0<T<1$ , empiezan a aparecer configuraciones en las que  $v_i$  no se anula, y en las que  $s_i$  empieza a tener una probabilidad mayor de estar o no alineado con su campo interno, más aún, en el límite cuando  $\beta \rightarrow \infty$  ( $T \rightarrow 0$ ),  $g(v_i) \rightarrow 1(0)$  si  $v_i > 0$  ( $v_i < 0$ ), el espín tiene la probabilidad de 1 de estar alineado o en dirección opuesta a su campo interno, siguiéndose de (5.25) y (5.76) que la magnetización por espín está dada por

$$s_i := \begin{cases} +1 & \text{si } v_i > 0 \\ 0 & \text{si } v_i = 0 \\ -1 & \text{si } v_i < 0 \end{cases} \quad (5.80)$$

donde la igualdad se sigue siempre que  $v_i \neq 0$ , en tal situación la regla en (5.80) es exactamente igual a la función de activación  $G$  (ver ec.(1.4)). Es decir, a temperatura baja el espín en el modelo de Ising decide su orientación en la misma forma que la neurona decide su estado, en virtud de la correspondencia que existe entre campo interno en el modelo de Ising y potencial interno en el modelo de neurona artificial. Este hecho, justifica el suponer a la red de Hopfield como un arreglo hipotético de espines, ya que permite conocer en su totalidad los mínimos locales estrictos de  $H$  (configuraciones estables en el arreglo), situación que sería prácticamente imposible de inferir mediante el uso de la condición de mínimo local estricto (ver Teo.2.2).

Por otro lado, cuando  $v_i = 0$  la igualdad no se cumple en (5.80) y el significado es completamente estadístico, el espín no tiene una orientación definida, situación que contrasta con el modelo artificial de neurona donde siempre existe un estado definido. Esto implica el considerar también las soluciones para las que  $v_i \geq 0$ , es decir, cuando un número parcial de espines se encuentran alineados con su campo interno y el resto no tiene una orientación definida, ya que dichas configuraciones son también atractores en la red de Hopfield. Sin embargo, éstas ya no serán de importancia en la dinámica de la red de Hopfield si se introduce el modelo estocástico de McCulloch y Pitts (como se verá en el próximo capítulo), por lo que, las configuraciones estables en el arreglo hipotético de espines serán los únicos atractores en la red de Hopfield.

## Capítulo Seis

# Modelo de Hopfield Estocástico

En el análisis del capítulo anterior quedó de manifiesto la importancia de la mecánica estadística en el análisis del modelo de Hopfield, ya que permite encontrar los mínimos locales estrictos de  $H$ , que tan importantes son en el comportamiento dinámico del sistema. Sin embargo, la utilidad de la mecánica estadística no queda ahí, es posible obtener mejoras notables en el funcionamiento del sistema si se introduce una función de activación no determinista en el modelo de neurona artificial.

### 6.1. MODELO ESTOCÁSTICO DE MCCULLOCH Y PITTS

A nivel biológico la neurona emite señales con magnitud variable, existiendo retrasos en la sinapsis, y fluctuaciones en la liberación de las sustancias transmisoras. Esto, puede pensarse intuitivamente como la presencia de ruido interno (para una revisión completa ver Little, 1989), es decir, en realidad la función de activación en la neurona es aleatoria. Resulta lógico pensar por el análisis hecho con anterioridad, que la función de activación será modelada por la  $\tanh x$  y la presencia de ruido en la neurona por  $\beta$ . Por supuesto, el parámetro  $\beta$  no está relacionado con la temperatura física, éste simplemente controla el nivel de ruido en la neurona. Para fines prácticos y dentro del contexto de las redes neuronales se define a  $T$  como la temperatura y a  $\beta$  como

$$\beta = \frac{1}{T}, \quad (6.1)$$

donde  $k$  ha sido suprimido, en virtud que  $T$  no se refiere a la temperatura física. Esta analogía que es por conveniencia matemática en el modelo de Hopfield (ya que permite

sacar al sistema de los estados espurios cuando  $0.46 < T < 1$ ), también permite simular la presencia de ruido en circuitos neuronales (para una revisión completa ver Denker, 1986; Graf et al., 1986).

Entonces, el modelo de neurona artificial con función de activación aleatoria, se denominará **modelo de McCulloch y Pitts estocástico** (para una revisión completa ver Amari, 1990; Peretto, 1984). Así, el estado de la neurona evolucionará en el tiempo a través de promedios.

## 6.2. MODELO DE HOPFIELD ESTOCASTICO

El modelo estocástico de McCulloch y Pitts, será de utilidad en el modelo de Hopfield siempre que se garantice la convergencia del sistema a los estados estables. Efectivamente esto sucede, desafortunadamente una demostración formal esta fuera del alcance de este trabajo, por lo que solo se supone que sucede y se demuestra mediante algunas simulaciones en el siguiente capítulo.

### 6.2.1. Interpretación de los resultados

En el intervalo de temperatura  $0.46 < T < 1$  solo son estables los estados de Mattis, éstos mantienen una correlación finita con los patrones almacenados, situación que resulta evidente cuando se hace el cambio de variable  $\tau_i = \xi_i^m s_i$  en (5.41). Así,  $\langle \eta \rangle = m$ , siguiéndose de manera clara que el factor de correlación es  $m$  y que el estado del sistema es el análogo al del ferromagnetismo. La solución numérica a (5.40) arroja el siguiente resultado para  $m$  que puede apreciarse en la gráfica de la fig.6-1, para el intervalo  $0 < T < 1$ . De la figura se observa que para  $T=0.47$ ,  $m \approx 0.97$ , siguiéndose así de (5.78) que la probabilidad de que  $s_i = \xi_i^m$  es aproximadamente 0.98, es decir, solo el 2% las neuronas tendrá un estado diferente al del patrón almacenado (correlación casi perfecta), existiendo un total de configuraciones igual a la combinación de  $N$  elementos tomados de  $0.02N$  en  $0.02N$  (ver ec.(2.11)) compatibles con el estado de Mattis. De esta forma, si  $T=0.47$ , es posible sacar al sistema de los estados espurios y además lograr que este converja a configuraciones con distancia de Hamming de aproximadamente cero respecto a los

patrones almacenados, así, las mejoras que resultan de utilizar el modelo estocástico son notables.

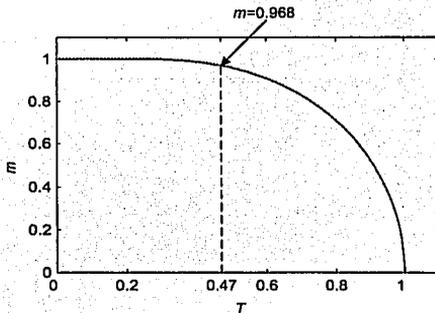


Figura 6-1. Solución numérica a la ec.(5.40) para el intervalo  $0 < T < 1$ .

Sin embargo, el tomar una de las configuraciones compatibles con el estado estable en la convergencia del sistema, resulta en una gran inversión de tiempo para un algoritmo de cómputo que desee implementar el modelo de Hopfield estocástico, por lo que en la convergencia y aún para  $T > 0$ , se supondrá una correlación perfecta con el estado estable, es decir, solo una configuración posible. En el caso de los estados de Mattis, está será precisamente el patrón almacenado. Esta interpretación, no requiere un excesivo esfuerzo computacional, y resulta de mayor utilidad en el modelo de Hopfield.

# Resultados y Conclusiones

### 7.1. IMPLEMENTACION DEL MODELO DE HOPFIELD

A continuación se mencionan los pasos que deben seguirse en la implementación del modelo de Hopfield (para una revisión completa del algoritmo, ver el Apéndice B)

1. **Almacenamiento.** La etapa de almacenamiento se lleva a cabo haciendo uso de la regla de Hebb (ver ec.(3.10)).
2. **Recuperación.** Se verifica que los patrones previamente almacenados sean mínimos locales estrictos de  $H$  (ver Teo.2.2), si lo son, la recuperación es perfecta, en caso contrario se dirá que es imperfecta.
3. **Reconstrucción.** Se presenta a la red al tiempo  $t=0$  un nuevo patrón  $x_i$  diferente a los patrones almacenados  $\xi^{\mu}$ , se aplica entonces, de manera iterativa la regla determinista en (2.30) (funcionamiento asíncrono) hasta que el sistema converja a una configuración estable. Si el sistema converge al patrón almacenado que en distancia de Hamming es más cercano a  $x_i$ , existe la reconstrucción, en cualquier otro caso no existe. En el caso del modelo estocástico, solo se cambia la regla determinista por la función de activación estadística en (5.20) para un valor de  $T$  fijo.

Dentro de las aplicaciones más comunes de la red de Hopfield, se encuentra la de la recuperación y reconstrucción de imágenes. En este caso, los patrones a almacenar son imágenes binarias, y los patrones presentados a la red en la etapa de reconstrucción serán versiones incompletas o contaminadas con ruido (como se verá a continuación) de las imágenes almacenadas. Con el objeto de mostrar dicha aplicación, se almacena en

una red de Hopfield de 4800 (para un número mayor de neuronas, la etapa de reconstrucción se vuelve demasiado lenta, tan solo en este caso, la recuperación por patrón llevó un total de 24hrs., en una pc con velocidad de procesamiento de 1GHz y 256MB de memoria ram) neuronas el conjunto de imágenes que se muestra en la fig.7-1.

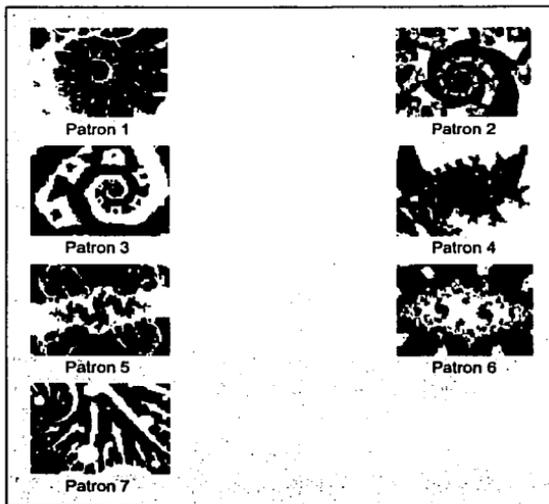


Figura 7-1. Patrones almacenados en una red de Hopfield de 4800 neuronas. Las imágenes que se muestran, son imágenes de fractales reconstruidos sobre una malla binaria de 60X60 píxeles.

Cada píxel en la imagen es asociada con el estado de una neurona en la red. Específicamente, el píxel negro representa el estado inhibido en la neurona y el blanco el de excitado. La energía correspondiente a cada uno de los patrones se muestra en la tabla 7-1.

	Patrón 1	Patrón 2	Patrón 3	Patrón 4	Patrón 5	Patrón 6	Patrón 7
H	-2546.1	-2545.2	-2483.4	-2577.7	-2729.0	-2625.9	-2469.8

Tabla 7-1. Valor de H correspondiente a los patrones almacenados en memoria.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La etapa de recuperación se siguió de manera perfecta. Por otro lado, la etapa de reconstrucción se probó al presentar a la red los siguientes patrones (referirse a la fig.7-2)

- (1) El Patrón 7 contaminado con ruido aleatorio uniforme en un 30%, es decir, 30% de los píxeles fueron cambiados de manera aleatoria.
- (2) Una versión incompleta del estado espurio que resulta de la mezcla simétrica de los patrones 1,2,3 (3% de los píxeles fueron cambiados de blanco a negro en la parte superior de la imagen).
- (3) Una versión incompleta del estado espurio anterior (16.5% de los píxeles fueron cambiados de blanco a negro en la parte superior e inferior de la imagen).

Con el modelo de Hopfield determinista se obtuvieron los resultados siguientes

1	Patrón 1	Patrón 2	Patrón 3	Patrón 4	Patrón 5	Patrón 6	Patrón 7	
$dH_{ini}$	2364	2360	2359.4	2244	2351	2369	1440	
$dH_{fin}$	2382	2338	2385	2050	2249	2241	0	
2	Patrón 1	Patrón 2	Patrón 3	Patrón 4	Patrón 5	Patrón 6	Patrón 7	Espurio
$dH_{ini}$	1107	899	1442	2381	1966	2244	2349	130
$dH_{fin}$	1091	813	1394	2273	2062	2354	2321	0
3	Patrón 1	Patrón 2	Patrón 3	Patrón 4	Patrón 5	Patrón 6	Patrón 7	Espurio
$dH_{ini}$	1390	1382	1599	2458	1477	1739	2038	791
$dH_{fin}$	1404	1414	1437	2506	1105	1397	2174	957

**Tabla 7-2.** Distancia de Hamming de los patrones presentados a la red con respecto a los patrones almacenados. En la tabla se muestra la distancia respecto a la configuración inicial ( $dH_{ini}$ ), y la distancia respecto a la configuración final ( $dH_{fin}$ ), que es obtenida una vez que el sistema converge.

De los resultados anteriores, se observa que en (1) existe reconstrucción, en virtud de que el sistema converge hacia el patrón almacenado con el que mantiene la menor distancia de Hamming. Por otro lado, en (2) y (3) no existe reconstrucción, ya que el sistema converge hacia estados espurios. En particular, de (2) y (3) se sigue que si el sistema inicia muy cerca de un estado espurio, este converge hacia él (ver figs.7-2 y 7-3), esto se debe, a que los estados espurios tienen un valor de  $H$  mayor que el de los patrones almacenados, en consecuencia su dominio de atracción es menor.

En la fig.7-2 se muestra de manera gráfica la evolución del sistema en la fase de reconstrucción, y en la fig.7-3 el comportamiento de  $H$ , se observa como  $H$  es una función estrictamente decreciente del vector de estado (que concuerda con el análisis del capítulo 2), y también que los estados espurios poseen un valor de  $H$  mayor que el de los patrones almacenados.

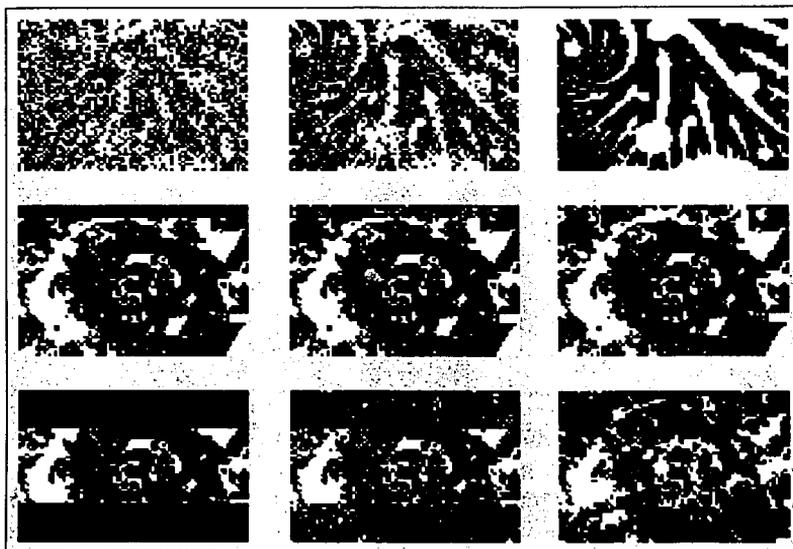


Figura 7-2. Etapa de reconstrucción en el modelo de Hopfield determinista. Las imágenes a la izquierda representan el estado inicial del sistema, las del centro un estado intermedio y las de la derecha el estado final.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

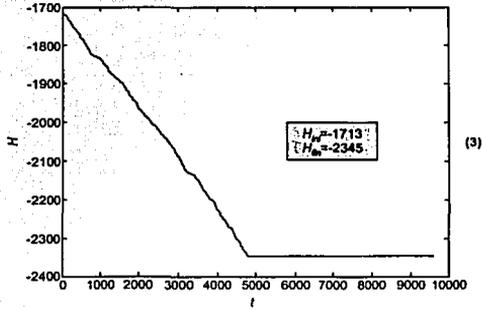
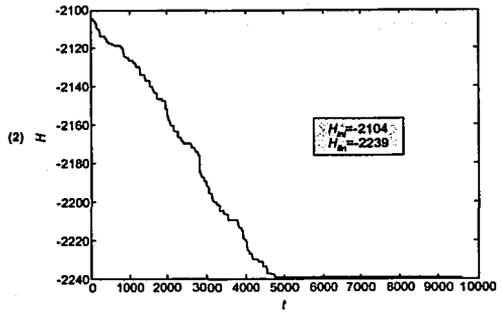
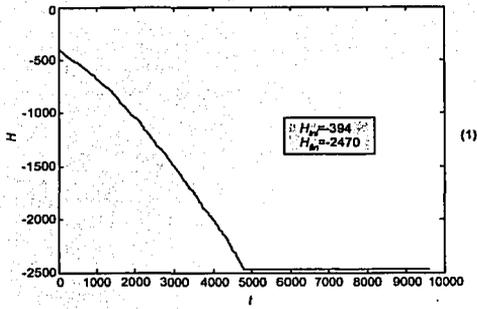


Figura 7-3. Comportamiento de  $H$  en la etapa de reconstrucción del modelo de Hopfield determinista. En la figura también se muestra el valor inicial de  $H$  ( $H_{in}$ ) y su valor final ( $H_{fin}$ ).

Por otro lado, aplicando el modelo de Hopfield estocástico con valor de  $T=0.47$ , se obtuvieron los resultados que se muestran en la fig.7-4.

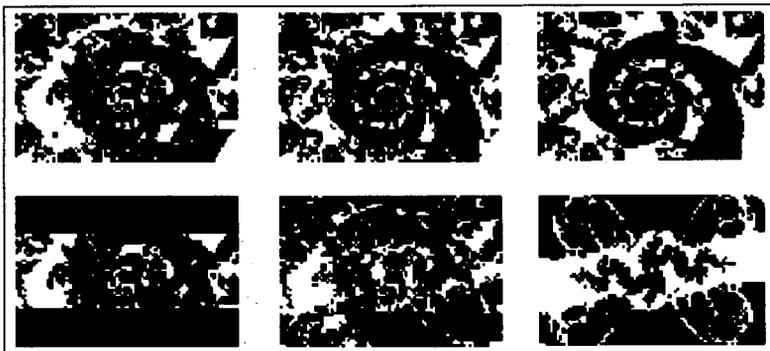


Figura 7-4. Etapa de reconstrucción con el modelo de Hopfield estocástico, se observa como el sistema converge solo hacia los patrones almacenados en memoria.

La reconstrucción se llevó a cabo solo sobre (2) y (3). Es fácil ver, que los estados espurios ya no son estables, y que el sistema solo converge hacia patrones almacenados. No obstante, las notables mejoras que resultan al adoptar este modelo, de la tabla 7-2, y las figs.7-1 y 7-4 es posible verificar que sigue sin existir reconstrucción para (3).

## 7.2. CONCLUSIONES

El modelo de Hopfield basa su análisis en el almacenamiento de patrones aleatorios, en los que cada elemento (estado de la  $i$ -ésima neurona) de los patrones almacenados es una variable aleatoria que adquiere con igual probabilidad los valores de +1 y -1, además de no estar correlacionada con ningún otro elemento del conjunto (ver ecs. (3.1) y (3.2)) Esto implica, que la correlación entre el mismo elemento en patrones diferentes es cero, es decir,  $\langle\langle \xi_i^{\mu} \xi_i^{\nu} \rangle\rangle$  para  $\mu \neq \nu$  y para toda  $i$ .

El suponer el almacenamiento de patrones aleatorios, no solo es por conveniencia matemática, también permite obtener condiciones funcionamiento generales, por ejemplo,

una capacidad de almacenamiento máxima  $p_{max}=N/4 \ln N$  (ver ec.(3.25)), un factor de ruido  $T=0.47$  en el modelo estocástico, con el que las únicas configuraciones estables serán los patrones almacenados. Sin embargo, ¿cuando son aplicables los resultados anteriores a una realización particular de patrones?, como en el caso presente. Aún en esta situación, es posible darle un sentido estadístico al problema, como se ve a continuación. Con este fin, defínase

$$r_{\mu\nu} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j^\mu \xi_j^\nu. \quad (7.1)$$

El factor  $r_{\mu\nu}$  así definido, trae la idea de correlación entre patrones almacenados, ya que si  $r_{\mu\nu}=0$ , entonces el número de elementos en que difieren  $\xi^\mu$  y  $\xi^\nu$ , es igual a  $N/2$  (patrones no correlacionados), además de (7.1), es claro que  $|r_{\mu\nu}| \leq 1$ , así, conforme  $r_{\mu\nu} \rightarrow 1$ , existirá una correlación positiva perfecta entre los patrones, y cuando  $r_{\mu\nu} \rightarrow -1$ , la correlación será perfectamente negativa (el patrón y su configuración simétrica). Observe, que (7.1) es simplemente el producto punto normalizado entre los patrones  $\xi^\mu$  y  $\xi^\nu$ , por lo que se concluye que no habrá correlación entre patrones si es almacenado un conjunto ortogonal de ellos.

Por otro lado, la correlación tiene repercusiones importantes en la condición de mínimo local y en el valor de  $H$ . Para observar dicho efecto, se empieza por rescribir (3.14) en términos de  $r_{\mu\nu}$

$$\xi_i^\nu v_i^\nu = \left( \frac{N-p}{N} \right) + \sum_{\mu\nu} \xi_i^\nu \xi_i^\mu r_{\mu\nu}. \quad (7.2)$$

De (7.2), se sigue que el peor caso se obtiene cuando todos los términos en la sumatoria son negativos y el mejor cuando todos son positivos. De esta forma, es posible acotar el producto  $\xi_i^\nu v_i^\nu$  entre los valores

$$\left( \frac{N-p}{N} \right) - \alpha_\nu \leq \xi_i^\nu v_i^\nu \leq \left( \frac{N-p}{N} \right) + \alpha_\nu, \quad (7.3)$$

donde

$$\alpha_v = \sum_{\mu \neq v} |r_{\mu v}|, \quad (7.4)$$

es la suma de los valores absolutos de la correlación del  $v$ -ésimo patrón con los patrones restantes. De (7.3) se sigue que  $\xi^v$  será un mínimo local de  $H$  si se cumple que

$$N(1 - \alpha_v) > p. \quad (7.5)$$

Si la correlación entre patrones es grande, (7.5) podría no satisfacerse, pero aún con una correlación pequeña podría incumplirse, si el número de patrones es grande. Por otro lado, de (7.3) se sigue que el valor de  $H$  está contenido en el intervalo

$$-\frac{N}{2} \left[ (1 + \alpha_v) - \frac{p}{N} \right] \leq H \leq -\frac{N}{2} \left[ (1 - \alpha_v) - \frac{p}{N} \right]. \quad (7.6)$$

En el límite cuando  $\alpha_v \rightarrow 0$ ,  $H \rightarrow -N/2(1 - p/N)$ , si  $p/N \approx 0$ ,  $H \rightarrow -N/2$ , siguiéndose de conformidad los resultados obtenidos en el capítulo 5 (ver ecs. (5.30) y (5.34)), en tanto, si  $p/N \rightarrow 1$  ( $H \rightarrow 0$ ), así, los patrones irán perdiendo su dominio de atracción, además de que seguramente habrá configuraciones estables con mayor valor de  $H$  y el sistema perderá su funcionalidad en la etapa de reconstrucción. Cuando  $\alpha_v \neq 0$ , el valor de  $H$  estará contenido en una vecindad con centro en  $-N/2$ , donde el tamaño de dicha vecindad la determina  $\alpha_v$ , así, a mayor  $\alpha_v$ , mayor será el intervalo en que  $H$  puede variar respecto de  $-N/2$ , lo que repercute aumentando o disminuyendo su dominio de atracción. De (7.6), también se observa que si  $\alpha_v \geq 1$ , ya no será posible garantizar la estabilidad del patrón, en virtud que  $H$  podría ser positiva (ver Teo.2.2). A continuación, se muestra en la tabla 7-3, el valor de  $\alpha_v$ , para las imágenes de la fig.7-1.

	Patrón 1	Patrón 2	Patrón 3	Patrón 4	Patrón 5	Patrón 6	Patrón 7
$\alpha$	0.4379	0.4698	0.3442	0.5804	0.7892	0.5658	0.3229

Tabla 7-3. Valor de  $\alpha$  correspondiente a los patrones almacenados en memoria.

De las tablas 7-1 y 7-3, se sigue que el mayor desplazamiento de  $H$  con respecto a  $-N/2$  corresponde a el patrón 5, que posee también el mayor valor de  $\alpha$ , y el menor desplazamiento a el patrón 7, que posee el menor valor de  $\alpha$ . Sin embargo, esto no quiere decir que siempre se cumpla, basta con observar que el desplazamiento de  $H$  en el patrón 1 es mayor que el de 2, a pesar de que  $\alpha_2 > \alpha_1$ , para saber exactamente cual será el desplazamiento de  $H$  para el  $\nu$ -ésimo patrón, es necesario conocer la correlación que existe entre el  $i$ -ésimo elemento (neurona) de dicho patrón y el  $i$ -ésimo elemento de los demás patrones almacenados (ver ec.(7.2)).

En todos los patrones, resulta claro que el desplazamiento de  $H$  fue hacia la izquierda de la vecindad, lo que les permite tener un dominio de atracción mayor, siendo más beneficiado el patrón 5, situación que se ve reflejada en la fig.7-2. Con la finalidad de mostrar que el patrón 5 tiene el mayor dominio de atracción, se generaron 1000 patrones de manera aleatoria, tal que la distancia de Hamming con respecto a los patrones almacenados no excediese el valor de  $N/2$ , esto con la finalidad de evitar en lo posible que el sistema converja hacia configuraciones simétricas. En la fig.7-5 se muestra la frecuencia con que la distancia de Hamming de los patrones almacenados respecto a los patrones generados fue mínima.

Después de aplicar el modelo estocástico de Hopfield con  $T=0.47$ , se observaron los resultados que se muestran en la fig.7-6. Es claro que el sistema no siempre converge al patrón almacenado que esta a menor distancia de Hamming del patrón inicial, de hecho existe una preferencia el sistema por ir hacia el patrón 5. Esto limita la reconstrucción en el modelo de Hopfield.

Del análisis anterior, resulta claro que el límite en la capacidad de almacenamiento y la poca correlación entre patrones almacenados son condiciones necesarias pero no suficientes, deben darse al mismo tiempo para garantizar el correcto funcionamiento de la red de Hopfield como memoria asociativa, si esto se satisface, el análisis teórico hecho para patrones aleatorios será válido para una realización particular de patrones. La necesidad de la poca correlación (pseudo ortogonalidad) entre patrones almacenados es consecuencia directa de la regla de Hebb (ver ec.(3.10)) utilizada en el cálculo de los

pesos sinápticos, y es lo que hace el análisis teórico con patrones aleatorios lo suficientemente robusto como para obtener condiciones de funcionamiento generales.

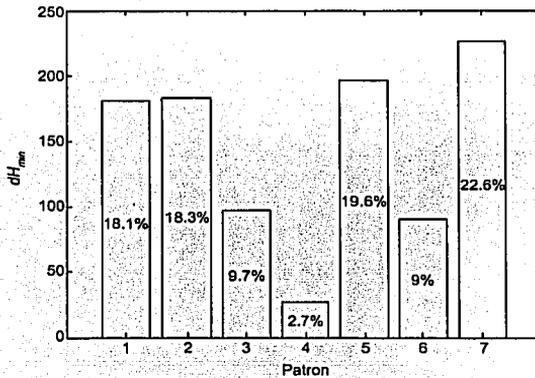
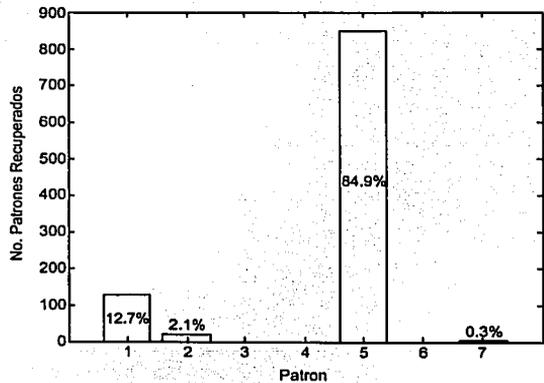


Figura 7-5. Frecuencia con la distancia de Hamming de los patrones almacenados respecto a los patrones generados es mínima.

Figura 7-6. Resultados obtenidos en la etapa de reconstrucción.



Existen variaciones en la regla de Hebb, que permiten obtener buenos resultados con patrones correlacionados (para una revisión completa ver Personnaz et al., 1985) y altamente correlacionados (para una revisión completa ver Cortes et al., 1987; Krogh et al., 1988; Parga et al., 1986; Gutfreund, 1988), sin embargo, todas coinciden en que el límite en la capacidad de almacenamiento sea  $p/N \approx 0$ , lo que implica necesariamente el uso de redes con un gran número de neuronas para poder tener un número de patrones almacenados considerable y no solo unos cuantos. Por supuesto, esto hace que la herramienta de la mecánica estadística sea la adecuada en el desarrollo teórico de estos sistemas, en virtud que está diseñada para predecir el comportamiento de sistemas formados por una gran cantidad de individuos. Sin embargo, esto no es de utilidad en la construcción de máquinas inteligentes, ya que el espacio que ocupa cada procesador (neurona) en un integrado es considerable. Así, mientras el avance en el análisis teórico pueda parecer prometedor, la implementación física de tales computadoras es desalentadora. Cabe mencionar, que este problema no es propio de la red de Hopfield, sino de la teoría de las redes neuronales en su conjunto.

Existen dos limitantes exclusivas en el modelo de Hopfield, la primera de ellas resulta bastante lógica, y es que debido a que la neurona solo adquiere dos estados, su uso solo se limita al caso patrones binarios (en el caso particular de imágenes, solo permite dos colores). Sin embargo, esta puede ser resuelta si se utiliza el modelo de Hopfield continuo (para una revisión completa ver Grossberg, 1990). La segunda de ellas, se debe a que la reconstrucción de patrones en la red de Hopfield, se limita a el caso de versiones incompletas o contaminadas con ruido aleatorio, en las que es posible tener un control absoluto de la distancia de Hamming, sin embargo, el cerebro humano también es capaz de reconstruir imágenes a partir de rotaciones, homotecias, etc., situaciones con las que la red de Hopfield no tiene control. Existe otra teoría, que es capaz de solucionar dicho problema y que encuentra sus bases en el apartado de la física conocido como sinérgica, esta se conoce con el nombre de **computación sinérgica** (para una revisión completa ver Hakken, 1991).

# Apéndice A

## A.1. DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD

Sea  $\{\xi_i^{\mu} | (\mu, i) = 1, 2, \dots, n\}$  un conjunto de variables aleatorias independientes con distribución de probabilidad

$$P\{\xi_i^{\mu}\} = \prod_{\mu, i} p(\xi_i^{\mu}), \quad (\text{A.1})$$

donde

$$p(\xi_i^{\mu}) = \frac{1}{2} \delta(\xi_i^{\mu} - 1) + \frac{1}{2} \delta(\xi_i^{\mu} + 1). \quad (\text{A.2})$$

Definiendo  $x$  como el número de  $\xi_i^{\mu} = 1$ , se sigue que el número de  $\xi_i^{\mu} = -1$  es igual a  $n-x$ , lo que permite definir la distribución de probabilidad (A.1) como una binomial

$$P(\omega, x, n) = \binom{n}{x} \omega^x (1-\omega)^{n-x}, \quad (\text{A.3})$$

donde  $x$  es una variable aleatoria que adquiere los valores de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , y donde  $\omega = 1/2$ . De aquí en adelante cualquier promedio que se lleve a cabo sobre las distribuciones (A.1)-(A.3) será denotado por  $\langle \rangle$ .

## A.2. FUNCIONES SOBRE LA DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD

Cualquier función sobre el conjunto  $\{\xi_i^\mu\}$  escrita en términos de  $x$ , es una variable aleatoria con distribución binomial dada por (A.3). Tal es el caso de la suma y el producto

$$y = c \prod_{\mu,j} \xi_i^\mu \quad (\text{A.4})$$

$$z = \sum_{\mu,j} \xi_i^\mu, \quad (\text{A.5})$$

donde  $c$  es una constante.

### A.2.1. Producto

La variable aleatoria  $y$  se escribe en términos de  $x$  como

$$y = c 1^x (-1)^{n-x} = c (-1)^{n-x}. \quad (\text{A.6})$$

Sin embargo, resulta más simple calcular su promedio y varianza a partir de (A.1) y (A.2)

$$\langle\langle y \rangle\rangle = \left\langle\left\langle c \prod_{\mu,j} \xi_i^\mu \right\rangle\right\rangle = c \prod_{\mu,j} \langle\langle \xi_i^\mu \rangle\rangle = 0 \quad (\text{A.7})$$

$$\langle\langle y^2 \rangle\rangle = \left\langle\left\langle \left( c \prod_{\mu,j} \xi_i^\mu \right)^2 \right\rangle\right\rangle = c^2, \quad (\text{A.8})$$

Además, un conjunto  $\{y\}$  de variables aleatorias es independiente, si sus elementos difieren al menos en una componente. Para ilustrar de manera sencilla esta aseveración, supóngase que se tienen las variables aleatorias  $y_1, y_2$ , tal que

$$y_1 = c_1 \xi_1^1 \xi_1^2 \xi_1^3 \quad (\text{A.9})$$

$$y_2 = c_2 \xi_1^1 \xi_1^2 \xi_1^4, \quad (\text{A.10})$$

siguiéndose con esto que

$$\langle\langle y_1, y_2 \rangle\rangle = \langle\langle (c_1 \xi_1^1 \xi_1^2 \xi_1^3) (c_2 \xi_1^1 \xi_1^2 \xi_1^4) \rangle\rangle = c_1 c_2 \langle\langle \xi_1^3 \xi_1^4 \rangle\rangle = 0, \quad (\text{A.11})$$

concluyendo así, que la covarianza entre estas variables es cero, por lo que son independientes.

## A.2.2. Suma

La variable  $z$  es escrita en términos de  $x$  como

$$z = x - (n - x) = 2x - n, \quad (\text{A.12})$$

también, para esta variable resulta sencillo calcular su promedio y varianza a partir de (A.1) y (A.2)

$$\langle\langle z \rangle\rangle = \left\langle\left\langle \sum_{\mu,j} \xi_j^\mu \right\rangle\right\rangle = \sum_{\mu,j} \langle\langle \xi_j^\mu \rangle\rangle = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\langle\langle z^2 \rangle\rangle = \left\langle\left\langle \left( \sum_{\mu,j} \xi_j^\mu \right)^2 \right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle \sum_{\mu,j} \sum_{\alpha,j} \xi_j^\mu \xi_j^\alpha \right\rangle\right\rangle = \sum_{(\mu,j) \neq (\alpha,j)} \langle\langle \xi_j^\mu \xi_j^\alpha \rangle\rangle + \sum_{(\mu,j) = (\alpha,j)} \langle\langle \xi_j^\mu \xi_j^\alpha \rangle\rangle = n. \quad (\text{A.14})$$

Esta variable, también puede ser representada por una suma sobre un conjunto  $\{y\}$  de variables aleatorias independientes, en este caso se sigue de manera sencilla que el promedio es cero y la varianza igual a  $c^2 n$ . Esta situación se presenta en (3.10) y (3.16), donde

$$w_{ij} = (1 - \delta_{ij}) \frac{1}{N} \sum_{\mu} \xi_i^\mu \xi_j^\mu$$

$$C_{ij}^r = -\xi_i^r \frac{1}{N} \sum_{\mu \neq \nu} \sum_{j \neq l} \xi_i^\mu \xi_j^\mu \xi_l^\nu \xi_j^\nu,$$

siguiéndose que la varianza para  $w_{ij}$  es igual a  $p/N^2$  y para  $C_i^r$   $(p-1)(N-1)/N^2$ . El conjunto  $\{C_i^r\}$ , tal que  $\mu=1,2,\dots,p$ , e  $i=1,2,\dots,N$ , es un conjunto de variables aleatorias independientes; para mostrarlo obsérvese que el factor de correlación es igual a

$$\langle\langle C_i^{\mu_1} C_i^{\mu_2} \rangle\rangle = \frac{1}{N^2} \left\langle\left\langle \left( \sum_{\mu,\mu_1,j_1} \xi_i^{\mu_1} \xi_j^{\mu} \xi_j^{\mu_1} \right) \left( \sum_{\mu,\mu_2,j_2} \xi_i^{\mu_2} \sum_{\mu,\mu_2,j_2} \xi_j^{\mu} \xi_j^{\mu_2} \right) \right\rangle\right\rangle \quad (\text{A.15})$$

$$\langle\langle C_i^{\mu_1} C_i^{\mu_2} \rangle\rangle = \frac{1}{N^2} \langle\langle \xi_i^{\mu_1} \xi_i^{\mu_2} \rangle\rangle \left\langle\left\langle \left( \sum_{\mu,\mu_1,j_1} \xi_j^{\mu} \xi_j^{\mu_1} \right) \left( \sum_{\mu,\mu_2,j_2} \xi_j^{\mu} \xi_j^{\mu_2} \right) \right\rangle\right\rangle = 0. \quad (\text{A.16})$$

para  $\mu_1 \neq \mu_2$  y  $j_1 \neq j_2$ .

Por otro lado, de (3.17) se tiene que

$$P(C_i^r < 1) = 1 - P_{\text{error}}, \quad (\text{A.17})$$

representa la probabilidad de que la  $i$ -ésima neurona del  $\nu$ -ésimo patrón sea recuperada. En tanto que la probabilidad de que los  $p$  patrones sean recuperados está dada por

$$P(\{C_i^r\} < 1) = \prod_{\mu} P(C_i^{\mu} < 1) = (1 - P_{\text{error}})^{np}, \quad (\text{A.18})$$

en virtud de que el conjunto  $\{C_i^r\}$  es independiente.

### A.2.3. Cálculo de Momentos

Para calcular el tercer y cuarto momento de la variable  $z$ , es preferible utilizar la distribución binomial (A.3) a partir del siguiente método

$$\langle\langle x(x-1)\dots(x-r) \rangle\rangle = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} x(x-1)\dots(x-r) \omega^x (1-\omega)^{n-x} \quad (\text{A.19})$$

$$= \sum_{x=r+1}^n \frac{n!}{(x-r-1)!(n-x)!} \omega^x (1-\omega)^{n-x} \quad (\text{A.20})$$

$$= \omega^{r+1} \sum_{x=r+1}^n \frac{n!}{(x-r-1)(n-r-1-(x-r-1))} \omega^{x-r-1} (1-\omega)^{n-x} \quad (\text{A.21})$$

$$\langle\langle x(x-1)\dots(x-r) \rangle\rangle = \omega^{r+1} n(n-1)\dots(n-r) \sum_{x=r+1}^n \binom{n-r-1}{x-r-1} \omega^{x-r-1} (1-\omega)^{n-x}. \quad (\text{A.22})$$

Al hacer  $y=x-r-1$ ,  $m=n-r-1$ , se obtiene que

$$\langle\langle x(x-1)\dots(x-r) \rangle\rangle = \omega^{r+1} n(n-1)\dots(n-r) \sum_{y=0}^m \binom{m}{y} \omega^y (1-\omega)^{m-y} \quad (\text{A.23})$$

$$\langle\langle x(x-1)\dots(x-r) \rangle\rangle = \omega^{r+1} n(n-1)\dots(n-r). \quad (\text{A.24})$$

Se sigue entonces, de (A.24) que

$$\langle\langle x \rangle\rangle = n\omega. \quad (\text{A.25})$$

Se tiene que  $x^2$  puede ser escrita como,  $x^2=x(x-1)+x$ , siguiéndose de (A.24) y (A.25) que

$$\langle\langle x^2 \rangle\rangle = \langle\langle x \rangle\rangle + \langle\langle x(x-1) \rangle\rangle = n\omega + n(n-1)\omega^2. \quad (\text{A.26})$$

Luego  $x^3=x(x-1)(x-2)+3x^2-2x$  y de (A.24), (A.25) y (A.26) se obtiene que

$$\langle\langle x^3 \rangle\rangle = \langle\langle x(x-1)(x-2) \rangle\rangle + 3\langle\langle x^2 \rangle\rangle - 2\langle\langle x \rangle\rangle \quad (\text{A.27})$$

$$\langle\langle x^3 \rangle\rangle = n\omega + 3n(n-1)\omega^2 + n(n-1)(n-2)\omega^3. \quad (\text{A.28})$$

Por último,  $x^4=x(x-1)(x-2)(x-3)+6x^3-11x^2+6x$  siguiéndose de (A.24), (A.25), (A.26) y (A.28) que

$$\langle\langle x^4 \rangle\rangle = \langle\langle x(x-1)(x-2)(x-3) \rangle\rangle + 6\langle\langle x^3 \rangle\rangle - 12\langle\langle x^2 \rangle\rangle + 9\langle\langle x \rangle\rangle \quad (\text{A.29})$$

$$\langle\langle x^4 \rangle\rangle = n\omega + 7n(n-1)\omega^2 + 6n(n-1)(n-2)\omega^3 + n(n-1)(n-2)(n-3)\omega^4. \quad (\text{A.30})$$

Tomando en cuenta que  $\omega=1/2$ , se sigue que

$$\langle\langle x \rangle\rangle = \frac{n}{2} \quad (\text{A.31})$$

$$\langle\langle x^2 \rangle\rangle = \frac{n}{4}(n+1) \quad (\text{A.32})$$

$$\langle\langle x^3 \rangle\rangle = \frac{n^2}{8}(n+3) \quad (\text{A.33})$$

$$\langle\langle x^4 \rangle\rangle = \frac{n}{16}(n^3 + 6n^2 + 3n - 2). \quad (\text{A.34})$$

Haciendo uso de las igualdades (A.31)-(A.34) se obtiene que

$$\langle\langle z^3 \rangle\rangle = 2^{-n} \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (2x-n)^3 = 2^{-n} \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (8x^3 - 12x^2n + 6xn^2 - n^3) \quad (\text{A.35})$$

$$= 8\langle\langle x^3 \rangle\rangle - 12n\langle\langle x^2 \rangle\rangle + 6n^2\langle\langle x \rangle\rangle - n^3 \quad (\text{A.36})$$

$$= 8\frac{n^2}{8}(n+3) - 12n\frac{n}{4}(n+1) + 6n^2\frac{n}{2} - n^3 \quad (\text{A.37})$$

$$\langle\langle z^3 \rangle\rangle = 0 \quad (\text{A.38})$$

$$\langle\langle z^4 \rangle\rangle = 2^{-n} \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (2x-n)^4 = 2^{-n} \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (16x^4 - 32nx^3 + 24n^2x^2 - 8n^3x + n^4) \quad (\text{A.39})$$

$$= 16\langle\langle x^4 \rangle\rangle - 32n\langle\langle x^3 \rangle\rangle + 24n^2\langle\langle x^2 \rangle\rangle - 8n^3\langle\langle x \rangle\rangle + n^4 \quad (\text{A.40})$$

$$= 16\frac{n}{16}(n^3 + 6n^2 + 3n - 2) - 32n\frac{n^2}{8}(n+3) + 24n^2\frac{n}{4}(n+1) - 8n^3\frac{n}{2} + n^4 \quad (\text{A.41})$$

$$\langle\langle z^4 \rangle\rangle = n(3n-2). \quad (\text{A.42})$$

### A.3. ECUACIONES DE PUNTO SILLA

Para resolver la ec.(5.15) se utiliza el método de *steepest descent*, que es utilizado principalmente en el caso de funciones complejas analíticas. Para aplicar este método, es necesario cumplir con las condiciones de *Debye*, siendo satisfechas siempre que

$$\frac{\partial F}{\partial m^\mu}(\beta, \mathbf{m}_0) = 0. \quad (\text{A.43})$$

Para  $\beta$  fija, en virtud que  $F$  es una función de variable real. Expandiendo en series de Taylor  $F$  alrededor de  $\mathbf{m}_0$  y tomando en consideración (A.43), se obtiene que

$$F(\beta, \mathbf{m}) = F(\beta, \mathbf{m}_0) + Hf(\beta, \mathbf{m}_0) + O(\mathbf{m}_0^3), \quad (\text{A.44})$$

donde la función hessiana  $Hf(\beta, \mathbf{m}_0)$  está dada por

$$Hf(\beta, \mathbf{m}_0) = \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \frac{\partial^2 F(\beta, \mathbf{m}_0)}{\partial m^\mu \partial m^\nu} (m^\mu - m_0^\mu)(m^\nu - m_0^\nu). \quad (\text{A.45})$$

En el límite de  $N \rightarrow \infty$  la integral en (5.15) es dominada por los puntos cercanos a  $\mathbf{m}_0$ , por lo que una buena aproximación para  $F$  resulta del truncar la serie en (A.44) hasta el término cuadrático, en este caso  $\mathbf{m}_0$  recibe el nombre de **punto silla** y (A.43) ecuación de punto silla, donde el término proviene del comportamiento de las funciones cuadráticas. En particular si  $F(\beta, \mathbf{m}_0)$  es un mínimo local, la integral será dominada por este punto, en virtud de que los términos de mayor valor desaparecen rápidamente con la exponencial, siguiéndose con esto, que  $F(\beta, \mathbf{m})$  puede aproximarse mediante la función cuadrática

$$F(\beta, \mathbf{m}) = F(\beta, \mathbf{m}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_0)^2, \quad (\text{A.46})$$

que claramente posee un mínimo local en  $\mathbf{m}_0$ . Substituyendo (A.46) en (5.15) se obtiene que

$$Z = \left( \frac{\beta N}{2\pi} \right)^{N/2} e^{-\beta N F(\beta, \mathbf{m}_0)} \prod_{\mu} \int_{-\infty}^{\infty} dm^\mu e^{-\frac{\beta N}{2} (m^\mu - m_0^\mu)^2} = e^{-\beta N F(\beta, \mathbf{m}_0)}. \quad (\text{A.47})$$

#### A.4. REALIZACIONES SIMÉTRICAS (ANÁLISIS A BAJA TEMPERATURA)

Para obtener la expresión para las ecs. (5.52) y (5.53), se procede de la siguiente manera

$$\langle\langle z_n \rangle\rangle = \left\langle \left\langle z_n \left[ -1 + 2 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{j\theta} \theta^{j\alpha_n} \right) \right] \right\rangle \right\rangle, \quad (\text{A.48})$$

donde se han utilizado las siguientes definiciones para la transformada de Fourier y su inversa

$$Y(j\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} y(z_n) \theta^{-j\alpha_n} dz_n \quad (\text{A.49})$$

$$y(z_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(j\theta) \theta^{j\alpha_n} d\theta. \quad (\text{A.50})$$

De (A.49) se tiene con facilidad que la transformada de Fourier para la función escalón unitario  $u(z_n)$  [4], está dada por  $1/j\theta$ , por lo que de (A.48) y (A.50) se sigue que

$$\langle\langle z_n \rangle\rangle = \langle\langle z_n [-1 + 2u(z_n)] \rangle\rangle. \quad (\text{A.51})$$

Luego, de la definición de escalón unitario obtiene que

$$z_n [-1 + 2u(z_n)] = \begin{cases} z_n & \text{si } z_n > 0 \\ 0 & \text{si } z_n = 0 = |z_n| \\ -z_n & \text{si } z_n < 0 \end{cases}, \quad (\text{A.52})$$

concluyendo así, que la igualdad se cumple en (A.48).

Desarrollando (A.48) se sigue que

$$\langle\langle z_n \rangle\rangle = -\langle\langle z_n \rangle\rangle + \left\langle \left\langle z_n \left[ \frac{1}{j\theta} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta} \theta^{j\alpha_n} \right] \right\rangle \right\rangle = \frac{2^{-n}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta} \left[ -\frac{d}{d\theta} \right] \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} \theta^{j\theta(2x-n)} \quad (\text{A.53})$$

$$= -\frac{2^{-n}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta} \left[ \frac{d}{d\theta} \right] \theta^{-i\theta} (1 + \theta^{2i\theta})^n = -\frac{2^{-n}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta} \left[ \frac{d}{d\theta} \right] 2^n \cos^n \theta \quad (\text{A.54})$$

$$\langle\langle |z_n| \rangle\rangle = \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{\theta} \sin \theta \cos^{n-1} \theta = \frac{n}{2^{2k}} \binom{2k}{k}, \quad (\text{A.55})$$

donde  $k=n/2$  para  $n$  par y  $k=(n-1)/2$  para  $n$  impar.

A continuación se muestra que  $f_{2k}$ , ec.(5.55), es una función monótona decreciente con  $k$  y que  $f_{2k+1}$ , ec.(5.56), es una función monótona creciente con  $k$ . Con este fin, se utiliza la siguiente identidad

$$\binom{2k+2}{k+1} = \frac{2(2k+1)}{k+1} \binom{2k}{k}. \quad (\text{A.56})$$

Con esto, es posible escribir

$$f_{2k+3} - f_{2k+1} = \frac{2k+1}{2^{4k+1}} \binom{2k}{k} \left[ 1 - \frac{(2k+1)(2k+3)}{4(k+1)^2} \right] > 0 \quad (\text{A.57})$$

$$f_{2k+2} - f_{2k} = \frac{2k}{2^{4k+1}} \binom{2k}{k} \left[ 1 - \frac{(2k+1)^2}{4k(k+1)} \right] < 0. \quad (\text{A.58})$$

concluyendo así con la demostración.

Es claro que ambas secuencias, ecs.(5.55) y (5.56), tienen un límite común conforme  $k \rightarrow \infty$ . Para calcular este límite se utiliza la fórmula de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi} (n+1)^{n+1/2} e^{-(n+1)}, \quad (\text{A.59})$$

dando, la forma asintótica para  $m_n$ , con  $n$  par

$$m_n = 2^{-n} \binom{n}{n/2} = (2/n\pi)^{1/2}. \quad (\text{A.60})$$

El valor límite para  $f_n$  es entonces obtenido al sustituir (A.60) en (5.52)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = -\frac{1}{\pi}. \quad (\text{A.61})$$

#### A.5. ANALISIS DE LAS VARIABLES Q,q

Se muestra a continuación que la variable aleatoria Q es positiva para toda  $T < 1$ . Para esto, obsérvese la propiedad siguiente de  $z_n$

$$\begin{aligned} z_n + 2 \Big|_x &= 2x - n + 2 = 2x - (n - 2) \\ z_n - 2 \Big|_{n-x} &= 2(n - x) - n - 2 = -2x + n - 2 = -[2x - (n - 2)] = -(z_n + 2) \Big|_x \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Luego, de (5.60) se tiene que

$$Q = \left\langle \left\langle \xi^\mu \xi^\nu \tanh^2(\beta m_n z_n) \right\rangle \right\rangle, \quad (\text{A.63})$$

siguiéndose que Q puede ser expresada en términos de dos variables aleatorias independientes

$$Q = \left\langle \left\langle (-1)^{z_2 - y} \tanh^2 \beta m_n [z_{n-2} + z_2] \right\rangle \right\rangle, \quad (\text{A.64})$$

donde

$$z_{n-2} = \sum_{\alpha \neq \mu, \nu} \xi^\alpha = 2x - (n - 2) \quad z_2 = \xi^\mu + \xi^\nu = 2y - 2. \quad (\text{A.65})$$

De (A.64) y (A.65) se sigue que

$$Q = 2^{-n} \sum_{x=0}^{n-2} \binom{n-2}{x} \left\{ \sum_{y=0}^2 \binom{2}{y} (-1)^{z_2 - y} \tanh^2 \beta m_n [z_{n-2} + z_2] \right\} \quad (\text{A.66})$$

$$Q = 2^{-n} \sum_{x=0}^{n-2} \binom{n-2}{x} \{ \tanh^2 \beta m_n [z_{n-2} - 2] - 2 \tanh^2 \beta m_n [z_{n-2}] + \tanh^2 \beta m_n [z_{n-2} + 2] \}. \quad (\text{A.67})$$

De (A.62), la propiedad de simetría de la combinatoria y la  $\tanh^2$  y se obtiene que

$$Q = 2^{-n+1} \sum_{x=0}^{n-2} \binom{n-2}{x} \{ \tanh^2 \beta m_n [z_{n-2} + 2] - \tanh^2 \beta m_n [z_{n-2}] \}. \quad (\text{A.68})$$

La expresión en (A.68) puede ser llevada a la forma equivalente

$$Q = 2^{-n+1} \sum_{x=0}^{n-2} \binom{n-2}{x} \{ \tanh^2 \beta m_n |z_{n-2} + 2| - \tanh^2 \beta m_n |z_{n-2}| \}, \quad (\text{A.69})$$

donde

$$|z_{n-2} + 2| = \begin{cases} (z_{n-2} + 2) & \text{si } x \geq \frac{n-4}{2} \\ -(z_{n-2} + 2) & \text{si } x < \frac{n-4}{2} \end{cases} \quad (\text{A.70})$$

$$|z_{n-2}| = \begin{cases} z_{n-2} & \text{si } x \geq \frac{n-2}{2} \\ -z_{n-2} & \text{si } x < \frac{n-2}{2} \end{cases} \quad (\text{A.71})$$

en virtud de que  $\tanh^2 y = \tanh^2 |y|$ . La función  $\tanh^2 |y|$  es una función monótona decreciente en el intervalo  $(-\infty, 0)$  y es monótona creciente en el intervalo  $(0, \infty)$ , por lo que se tienen las propiedades siguientes:

- Si  $y_1, y_2 \in (-\infty, 0) \Rightarrow \tanh^2 |y_1| - \tanh^2 |y_2| > 0 \Leftrightarrow -y_1 + y_2 < 0$ .
- Si  $y_1, y_2 \in (0, \infty) \Rightarrow \tanh^2 |y_1| - \tanh^2 |y_2| > 0 \Leftrightarrow y_1 - y_2 > 0$ .

De (A.70) y (A.71) se sigue que:

- Si  $x \in [0, (n-4)/2) \Rightarrow -(z_{n-2} + 2) + z_{n-2} = -2 < 0$ .

- Si  $x \in \{(n-2)/2, n-2\} \Rightarrow (z_{n-2}+2) - z_{n-2} = 2 > 0$ .

Concluyéndose que si  $x \in [0, (n-4)/2] \cup \{(n-2)/2, n-2\} \Rightarrow Q > 0$ . Si  $x \in [(n-4)/2, (n-2)/2]$ , existen dos posibilidades, que  $n$  sea par o impar, si  $n$  es par,  $n$  es de la forma  $2k$  para  $k=1, 2, \dots$ , y ambos valores en el intervalo existen, siguiéndose de (A.69) que

$$\tanh^2 2\beta m_n \left[ \binom{2k-2}{k-1} - \binom{2k-2}{k-2} \right] > 0. \quad (\text{A.72})$$

En virtud de que la combinatoria adquiere un máximo en  $x=k-1$ . Si  $n$  es impar,  $n$  es de la forma  $2k+1$  para  $k=1, 2, \dots$ , siguiéndose que  $x$  solo adquiere el valor de  $k-1$  en el intervalo  $[(n-4)/2, (n-2)/2]$ . De (A.69) se obtiene para este caso particular que

$$\binom{2k-1}{k-1} [\tanh^2 \beta m_n - \tanh^2 \beta m_n] = 0, \quad (\text{A.73})$$

concluyéndose así, que la  $Q$  es positiva para toda  $T < 1$ .

La variable aleatoria  $q$  también puede expresarse en términos de  $z_{n-2}$  y  $z_2$ , siguiéndose de (A.66)-(A.68) que

$$q = 2^{-n+1} \sum_{x=0}^{n-2} \binom{n-2}{x} (\tanh^2 \beta m_n [z_{n-2} + 2] + \tanh^2 \beta m_n [z_{n-2}]), \quad (\text{A.74})$$

con lo que se obtiene la expresión siguiente para la diferencia  $q-Q$

$$q - Q = \langle \langle \tanh^2(\beta m_n z_{n-2}) \rangle \rangle. \quad (\text{A.75})$$

Para obtener una expresión para la suma  $q+(n-1)Q$ , se procede de la siguiente manera. Se define la variable aleatoria

$$D = \frac{1}{n} \langle \langle z_n^2 \tanh^2(\beta m_n z_n) \rangle \rangle. \quad (\text{A.76})$$

De la definición de  $z_n$  se sigue que

$$z_n^2 = \left( \sum_{\mu=1}^n \xi^\mu \right)^2 = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n \xi^\mu \xi^\nu = \sum_{\mu \neq \nu} \xi^\mu \xi^\nu + n. \quad (\text{A.77})$$

Substituyendo (A.77) en (A.76) se obtiene que

$$D = \frac{1}{n} \sum_{\mu \neq \nu} \langle \langle \xi^\mu \xi^\nu \tanh^2(\beta m_n z_n) \rangle \rangle + \langle \langle \tanh^2(\beta m_n z_n) \rangle \rangle = q + (n-1)Q, \quad (\text{A.78})$$

siguiéndose que

$$\frac{1}{n} \langle \langle z_n^2 \tanh^2(\beta m_n z_n) \rangle \rangle = q + (n-1)Q. \quad (\text{A.79})$$

# Apéndice B

Se muestra a continuación, el programa utilizado en la implementación del modelo de Hopfield, éste se realizó en Matlab en la versión 6.1 R.12

```
% IMPLEMENTACION DE LA RED NEURONAL DE HOPFIELD

%----- DECLARIACION DE CONSTANTES -----
clear;
clf;
N=4800;           % Numero de neuronas
p=7;             % Numero de patrones almacenados
noisy=3;         % Numero de patrones contaminados
Nx=60;
Ny=80;
%----- CAPTURA DE PATRONES DESDE UN ARCHIVO DE TEXTO -----
fid=fopen('pats.doc','r');
for mu=1:p
    Ecsi(mu,:)=fscanf(fid,'%d',[1,N]); % Patrones a Almacenar
end
fclose(fid);

fid=fopen('patsn1.doc','r');
for tap=1:noisy
    X(tap,:)=fscanf(fid,'%d',[1,N]); % Patrones Contaminados
end
fclose(fid);
%----- ETAPA DE ALMACENAMIENTO -----
W=0;
for mu=1:p
    W=W+1/N*(Ecsi(mu,:)'*Ecsi(mu,:)-eye(N));
end
%----- ETAPA DE RECUPERACION Y CALCULO DE H -----
count1=1;
for mu=1:p
    count=0;
    V=(W*S(mu,:))';
    H=-0.5*Ecsi(mu,:)*V';
    for i=1:N
        disc=V(i)*Ecsi(mu,i);
        if 0<disc
            count=count+1;
        end
    end
    if count==N
        Atractor(count1)=mu;
        count1=count1+1;
    end
end
```

```

end
%----- ETAPA DE RECONSTRUCCION -----
%*****MODELO DE HOPFIELD DETERMINISTA*****
fid=fopen('patsrd.doc','w');
for tap=1:noisy
    Snew=X(tap,:);
    ord=randperm(N);
    ord=[ord,ord,ord,ord,ord,ord,ord,ord,ord,ord,ord,ord,ord,ord];
    t=0; tau=1;
    while t<N
        Sold=Snew;
        fprintf(fid,'%2d',Sold);
        for i=1:N
            if i==ord(tau)
                Vnew(i)=W(i,:)*Sold';
                if Vnew(i)*Sold(i)~-0
                    Snew(i)=hardlims(Vnew(i));
                else
                    Snew(i)=Sold(i);
                end
            end
            else
                Snew(i)=Sold(i);
            end
        end
        dh=(Snew-Sold)*(Snew-Sold)';
        if dh==0
            t=t+1;
        else
            t=0;
        end
        tau=tau+1;
    end
    hot(tap)=tau;
end
fclose(fid);
%*****MODELO DE HOPFIELD ESTOCASTICO*****
fid=fopen('patsre.doc','w');
T=0.47;
beta=1/T;
for tap=1:noisy
    Sold=X(tap,:);
    Snew=tanh(beta*W*Sold)';
    dh=(Snew-Sold)*(Snew-Sold)';
    count=1;
    while dh>=1e-006
        Sold=Snew;
        Sat=hardlims(Sold);
        fprintf(fid,'%2d',Sat);
        Snew=tanh(beta*W*Sold)';
        dh=(Snew-Sold)*(Snew-Sold)';
        count=count+1;
    end
end
fclose(fid);

```

# Referencias

- Ackley, D.H., G.E. Hinton, and T.J. Sejnowski, *A learning algorithm for Boltzmann machines*, Cognitive Science 9, 147-169, 1985.
- Amari, S., *Characteristics of random nets of analog neuron-like elements*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC-2, 643-657, 1972
- Amari, S., *Mathematical foundations of neurocomputing*, Proceedings of the IEEE 78, 1443-1463, 1990.
- Amit, D.J., H. Gutfreund, and H. Sompolinsky, *Spin-glass models of neural networks*, Physical Review A, Vol.32, 2, 1007-1018, 1985.
- Barbolla, R., and P. Sanz, *Algebra lineal y teoria de matrices*, PRENTICE IBERIA, S.R.L., 144,418-419,425, 1998.
- Binder, K., and A.P. Young, *Spin glasses: Experimental facts, theoretical concepts, and open questions*, Reviews of Modern Physics, Vol.58, 4, 801-975, 1986.
- Cohen, M.A., and S. Grossberg, *Absolute stability of global pattern formation and parallel memory storage by competitive neural networks*, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics SMC-13, 815-826, 1983.
- Colin J. Thompson, *Mathematical Statistical Mechanics*, Colin J. Thompson, 116-144, 1972.
- Cortes, C., A. Krogh, and J.A. Hertz, *Hierarchical Associative Networks*, Journal of Physics A, 20, 4449-4455, 1987.
- Cowan, J.D., *A Mathematical Theory of Central Nervous Activity*, Ph.D. Thesis, University of London, UK, 1967.
- Cragg, B.G., and H.N.V. Tamperley, *Memory: The analogy with ferromagnetic hysteresis*, Brain, 78, 304-316, 1955.
- Denker, J., *Neural Network Refinements and Extensions*, New York: American Institute of Physics, 121-128, 1986.
- Graf, H.P., L.D. Jackel, R.E. Howard, B. Straughn, J.S. Denker, W. Hubbard D.M. Tennant, and D. Schwartz, *VLSI Implementation of a Neural Network Memory with Several Hundreds of Neurons*, New York: American Institute of Physics, 182-187, 1986.
- Grossberg, S., *Nonlinear difference-differential equations in prediction and learning theory*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A., 58, 1329-1334, 1967.
- Grossberg, S., *Content-addressable memory storage by neural networks: A general model and global Liapunov method*, In Computational Neuroscience, Cambridge, MA: MIT Press, 56-65, 1990.
- Gutfreund, H., *Neural Networks with Hierarchically Correlated Patterns*, Physical Review A, 37, 570-577, 1988.
- Hakken, H., *Synergetics Computers and Cognition*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991.

- Hebb, D.O., *The Organization of Behaviour: A Neuropsychological Theory*, New York: Wiley, 1949.
- Hemmen, J.L., *Classical Spin-Glass Model*, *Physical Review Letters*, Vol.49, 6, 409-412, 1982.
- Hertz, J., K. Anders, and R.G. Palmer, *Introduction to the theory of neural computation*, Addison-Wesley Publishing Company, The Advanced Book Program, 1-5, 1991.
- Hinton, G.E., and T.J. Sejnowski, *Optimal perceptual inference*, Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, Washington, D.C., 448-453, 1983.
- Hinton, G.E., and T.J. Sejnowski, *Learning and relearning in Boltzmann machines*, In *Parallel Distributed Processing: Explorations in Microstructure of Cognition* (D.E. Rumelhart and J.L. McClelland, eds.), Cambridge, MA: Mit Press, 1986.
- Hopfield, J.J., *Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities*, Proceedings of the National Academy of Sciences, **79**, 2554-2558, 1982.
- Hopfield, J.J., *Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the U.S.A., **81**, 3088-3092, 1984a.
- Kagánov, M., and V. Tsukérnik, *La Naturaleza del Magnetismo*, Editorial Mir, 65-69, 1985.
- Kirkpatrick, S., and D. Sherrington, *Infinite-ranged models of spin-glasses*, *Physical Review B*, Vol.17, **11**, 4384-4403, 1978.
- Kittel, C., *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley & Sons, Inc., 1-32, 1966.
- Krogh, A., and J.A. Hertz, *Mean Field Analysis of Hierarchical Associative Networks with Magnetization*, *Journal of Physics A*, **21**, 2211-2224, 1988.
- Little, W.A., and G.L. Shaw, *A statistical theory of short and long term memory*, *Behavioral Biology*, **14**, 115-133, 1975.
- Little, W.A., *The Evolution of Non-Newtonian views of brain function*, *Concepts in Neuroscience*, Vol.1, **1**, 149-164, 1989.
- Mandl, F., *Statistical Physics*, John Wiley & Sons Inc., 69-76, 1971.
- Mattis, D.C., *Solvable spin systems with random interactions*, *Physics Letters*, Vol.56A, **5**, 421-422, 1976.
- Mattis, D.C., *The theory of magnetism*, Berlin: Springer, 33-55, 82-116, 1988.
- McCulloch, W.S., and Pitts, *A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity*, *Bulletin of Mathematical Biophysics*, **5**, 115-113, 1943.
- McQuarrie, D.A., *Statistical Mechanics*, Halliday Lithograph Corporation, 35-46, 1976.
- Parga, N., and M.A. Virasoro, *The Ultrametric Organization of Memories in a Neural Network*, *Journal de Physique (Paris)*, **47**, 1857-1864, 1986.
- Perazzo, J.R., *De Cerebros mentes y máquinas*, FONDO DE CULTURA ECONOMICA DE ARGENTINA, S.A., 49-66, 125-144, 1994.
- Peretto, P., *Collective properties of neural networks: A statistical physics approach*, *Biological Cybernetics* **50**, 51-62, 1984.
- Personnaz, L., I. Guyon, and G. Dreyfus, *Information Storage and Retrieval in Spin-Glass-Like Neural Networks*, *Journal de Physique Lettres (Paris)*, **46**, 359-365, 1985.

Peterson, C., and J.R. Anderson, *A mean field theory learning algorithm for neural networks*, *Complex Systems* **1**, 995-1019, 1987.

Provost, J.P., and G. Vallee, *Ergodicity of the Coupling Constants and the Symmetric n-Replicas Trick for a Class of Mean-Field Spin-Glass Models*, *Physical Review Letters*, Vol.50, **8**, 598-600, 1983.

Reif, F., *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill, 257-262, 429-432, 1965.

Rosenblatt, F., *Principles of Neurodynamics*, New York: Spartan, 1962.

Weissman, M.B., *What is a spin glass? A glimpse via mesoscopic noise*, *Reviews of Modern Physics*, Vol.65, **3**, 829-839, 1993.

Wilson, H.R., and J.D. Cowan, *Excitatory and inhibitory interactions in localized populations of model neurons*, *Journal of Biophysics*, **12**, 1-24, 1972.