24021
29

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES "ACATLAN"

MODELO UNIFACTORIAL PARA OPCIONES REALES EN LA EXPLORACION DE PETROLEO

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

LICENCIADO EN MATEMATICAS APLICADAS Y COMPUTACION

PRESENTA:

PATRICIA LOPEZ RIVERA

ASESOR : LIC. ANDRES HERNANDEZ

JUNIO, 2003

A

Mi dedicatoria a ustedes como una pequeña manifestación de mi sentir...gracias por su apoyo.

A Dios,

A mis padres -Antonia R. y Eugenio L.-,

A mis hermanos -Adrián, Teresa y Belem-,

A Juan Bujanos W. y Ángel S.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional Autónoma de México por abrirme las puertas de sus planteles -ENP N.7 y ENEP ACATLAN-, a todos mis profesores y amigos por las enseñanzas compartidas.

Mi total agradecimiento al Programa de Investigación en Matemáticas Aplicadas y Computación del Instituto Mexicano del Petróleo, por el apoyo en lo económico, en el uso de sus instalaciones así como de información necesaria para la realización de este trabajo de Tesis.

Y un especial agradecimiento al Dr. Vicente A. Soriano Ramírez del Grupo de Investigación en Matemáticas Financieras, por compartir conmigo sus conocimientos.

Gracias al Lic. Andrés Hernández Balderas por todo su apoyo.

Índice

Introducción.

En el mundo actual rodeado de grandes y recurrentes devaluaciones, crisis, riesgos e incertidumbre, los directivos financieros de las empresas se ven, no pocas veces, envueltos en las interrogantes: ¿Cómo evaluar las oportunidades de negocios que se les presentan?, ¿Serán buenas o no?, ¿Se deben tomar o no?. Así, la evaluación y valoración de las oportunidades en los negocios se vuelve cada vez más indispensable, puesto que, en este mundo cambiante es muy arriesgado tomar decisiones sin un previo análisis.

Usualmente, los estudios de proyectos de inversión que utilizan las herramientas tradicionales de evaluación se desarrollan en un entorno económico estable, es decir, que han probado ser útiles en condiciones de certeza, que no consideran el riesgo ni la incertidumbre. En función de este nuevo entorno, se presenta el estudio de las opciones reales como un camino alternativo para la valoración de proyectos; dichas opciones nos otorgan el derecho u obligación para tomar una decisión en uno o más puntos en el futuro (por ejemplo, invertir o no invertir, vender o no vender).

Las opciones reales son un tema poco estudiado en las universidades y que resulta hoy día una novedad en el ambiente empresarial, aún más, no existe una amplia bibliografía en castellano sobre este tema, que pueda facilitar su comprensión y aplicación, sobre todo cuándo las opciones están implícitas en las finanzas corporativas.

Aunado a lo anterior, se debe considerar el hecho de que las opciones financieras tienen en nuestro país un escaso desarrollo basado principalmente en el desconocimiento de las mismas. Con todo y que el uso de opciones nos permite adoptar nuevas posiciones de negocio y proporciona un camino adecuado para afrontar y solucionar los problemas comunes de las finanzas corporativas. Por otra parte, esta flexibilidad financiera está constituida por la evaluación, selección de inversiones y la valoración de fuentes financieras.

PAGINACION DISCONTINUA

Actualmente, en la práctica cada vez adquiere más adeptos y la Teoría de Valoración de Opciones Financieras y, en particular, de las Opciones Reales ha adquirido una relevancia significativa como herramientas fundamentales para la toma de decisiones.

Por todo lo anterior este trabajo tiene como propósito, dar a conocer la teoría de las opciones financieras, sus conceptos más importantes y los modelos de valoración que utilizan para poder aplicarlos al estudio concreto de las opciones reales, en el ambiente práctico y específico de la exploración petrolera. En el cual, se pueden citar casos en los que se han detenido esfuerzos de exploración porque sus estimaciones de la cantidad de petróleo en la tierra y/o de los rasgos geológicos de las reservas de petróleo no presentan un buen panorama en cuanto a ganancias.

Es así que, las compañías –en este caso las petroleras– deben buscar estrategias que les permitan mantener un nivel de producción a pesar de ciertas contingencias. La óptima creación, diseño e instrumentación de las mismas da la posibilidad de generar un mayor valor para competir en este entorno globalizador y continuamente cambiante.

Por todo ello, el objetivo principal de esta tesis es desarrollar un modelo unifactorial mediante el cual y, de manera formal, se establezca el uso de las opciones reales; esperando que las descripciones y aplicaciones sobre el tema sean de utilidad cotidiana para la generalidad de inversionistas. Pero, particularmente en la industria de extracción de recursos y de energía. Enfocados a esas industrias deseamos mostrar la utilidad y eficiencia que tiene este modelo en la exploración del petróleo.

Este trabajo se ha organizado en tres partes, la primera de ellas (primero, segundo y tercer capítulo), tiene como finalidad mostrar la teoría de las opciones financieras, la importancia que tienen tanto la fórmula desarrollada por Black & Scholes como la metodología de los árboles binomiales en la valoración de dichas opciones.

Cabe mencionar que en este trabajo me limito a estudiar las estrategias de cobertura simples con opciones, no se considera el estudio de las estrategias de cobertura avanzadas, ni los instrumentos sintéticos que con las opciones se pueden elaborar, ya que estos temas requieren de un conocimiento total y exacto del mercado de instrumentos financieros derivados, y que no es el objetivo de este trabajo.

La segunda parte (capítulo cuarto), tiene como objetivo mostrar el potencial de las opciones reales, como un camino alterno de valoración de proyectos. Cabe resaltar que las opciones reales no son una herramienta separada, sino un complemento a las herramientas actuales de valoración de proyectos de inversión, que ayuda a tener una mejor visión estratégica. También nos presenta a la incertidumbre como generadora de oportunidades de negocio y de inversión poniendo un ejemplo en la refinería y extracción de crudo. En el apartado se señalan y analizan cinco procesos de solución con las opciones reales.

En la tercera parte (quinto y sexto capítulo), se presenta el desarrollo del modelo de opciones reales para evaluar las inversiones en explotación de recursos naturales cuando se toma de manera conjunta el precio y la incertidumbre técnico-geológica. Por un lado, el riesgo en el precio se refiere al valor de salida en el mercado mientras que el riesgo técnico-geológico se aplica a las reservas, inversiones en desarrollo y estructura de costes. Los movimientos brownianos en tiempo continuo son empleados para modelar los procesos con incertidumbre suponiendo que los precios de salida futuros de mercado se modelan de esta manera, y un nivel de riesgo técnico-geológico declinante simula el comportamiento de las inversiones en exploración cuando éstas son llevadas a cabo. En el caso de encontrar un yacimiento económicamente factible, hay una fase de investigación en desarrollo, que es seguido por una fase de extracción. Todas las fases son optimizadas de manera contingente en presencia de las incertidumbres antes mencionadas.

Los modelos actuales sólo consideran el riesgo en el precio de mercado pero, no otros factores que intervienen de manera decisiva en la producción del recurso. Este tipo de modelos son sencillos y eficientes cuando hay un mercado de futuros, incluso si hay un portafolios de activos que son negociados de manera perfectamente correlacionada con los precios *spot* del recurso pero, si fallan estas premisas la modelización no es adecuada. El modelo que aquí presentamos tiene la virtud de mantener una estructura simple al colapsar el precio del recurso y la incertidumbre técnico-geológica a manera de tratamiento unifactorial.

El modelo originado por Eduardo Schwartz agrega, a la literatura creciente de opciones reales, un elemento importante para proponer evaluación de inversiones bajo incertidumbre. La diferencia fundamental con la que se ha desarrollado esta tesis es que, E. Schwartz ha considerado un modelo con fuentes de incertidumbre independientes de manera probabilista mientras que aquí se explora, por vez primera, la eventual dependencia probabilista de ambas en la variable colapsada. Existen muchas referencias del tema: Majd y Pindyck ([Ma-Pi] 1989) quienes incluyen el efecto de la curva de aprendizaje que considera la producción acumulada que reduce los costes unitarios, Trigeorgis ([Tr2] 1993) que combina las opciones reales y sus interacciones con la flexibilidad financiera, McDonald y Siegel ([Mc-Si] 1986) y Majd y Pindyck ([Ma-Pi] 1987) quienes optimizan la tasa de inversión, y He y Pindyck ([He-Pi] 1992) y Cortazar y Schwartz ([Co-Sc] 1993) quienes determinan dos variables de control óptimas. Otros autores han analizado la incertidumbre de muchos activos subyacentes, incluyendo las tasas de intercambio (Dixit ([Di] 1989)), los costes (Pindyck ([Pi] 1993)) y los recursos. Finalmente, muchos tipos de recursos han sido modelados usando este tipo de ideas, incluyendo las inversiones en recursos naturales, la adopción de nuevas tecnologías medioambientales, y las opciones estratégicas y competitivas (Trigeorgis ([Tr3] 1996, [Tr4] 2000), Brennan y Trigeorgis ([Br-Tr] 2000), y Dixit y Pindyck ([Di-Py] 1994)).

Al final de esta última parte (capítulo 6), he considerado adecuado agregar la descripción de algunos métodos numéricos y la importancia que tienen resolviendo problemas con opciones reales, presentando un caso-proyecto, con la opción de invertir en el futuro dependiente de un precio con rendimiento estocástico y, en base a este planteamiento se analizan los valores resultantes para cada caso (simulación, árboles binomiales y diferencias finitas) los cuales, llevan a interesantes conclusiones.

Parte I

La Teoría de Opciones.

Capítulo 1

Posiciones y Estrategias de Inversión.

El último decenio ha sido testigo de un crecimiento impresionante de los llamados *mercados financieros secundarios o de derivados*, no sólo en cuanto a volumen, sino también en cuanto a la diversidad de los productos que en ellos se negocian.

La matemática que se precisa para el correcto manejo de los nuevos instrumentos financieros es avanzada y muy rica. Más aún, las innovaciones permanentes de estos mercados requieren de una nueva matemática dando así lugar a un nuevo campo de investigación.

El objetivo de este capítulo es describir los aspectos básicos de las matemáticas de los productos derivados y, particularmente, de los contratos de *opciones*. Aquí se analiza tanto el fundamento económico de los modelos usados como la matemática que se requiere para su análisis, aunque pondremos énfasis en el proceso de modelización.

1.1 Historia y Desarrollo de las Opciones.

Las opciones, históricamente, surgieron como un contrato para cubrir el riesgo sobre un cargamento fletado, como especulación sobre el precio de las cosechas, etc. Todos estos contratos se realizaban entre dos partes sin la necesidad de acudir a ningún tipo de mercado intervenido por un mediador que regulase las características del mismo, sino que se acomodaba a las necesidades de cada uno que quedaban plasmadas en las cláusulas de un contrato. Este tipo de mercado llamado *over the counter* (*OTC*), que se traduce como "no organizado", es utilizado en la actualidad por muchas instituciones financieras para cubrir riesgos sobre tipos de interés o sobre rentabilidad en sus productos como por ejemplo, fondos de inversión. Las ventajas de esta modalidad, son muchas y derivan de la libertad entre las partes de fijar las condiciones del contrato. Sin embargo este tipo de mercado tiene grandes limitaciones debido a la escasa liquidez , ya que su posible venta es complicada y, normalmente, hasta su vencimiento no se puede realizar el contrato. También presenta el inconveniente de que el comprador está asumiendo el riesgo de insolvencia del emisor del contrato de opción, sin ningún tipo de fondo o aval que respalde la operación.

Por estos motivos durante el siglo XX, específicamente en los años 70, comienzan a aparecer los primeros mercados organizados siendo el pionero el *Chicago Board Options Exchange* que comenzó regulando el intercambio de opciones sobre valores bursátiles. Desde esta fecha hasta nuestros días han ido apareciendo mercados similares en todos los países desarrollados.

Actualmente en nuestro país existen lugares especializados para el manejo de las opciones en sus diferentes facetas y cuya información acerca de cómo establecer este tipo de contratos la podemos obtener en una manera sencilla a través de diferentes sitios en Internet[1].

1.2 Planteamiento

Es septiembre; para finales de año vislumbra la posibilidad de participar en un negocio. Esta participación requerirá liquidez por su parte y usted se plantea conseguir esa liquidez convirtiendo la cartera de acciones de PEMEX que posee. En principio se le presentan dos alternativas.

Una primera alternativa consiste en liquidar su cartera *ahora* e invertir el total en

[1] Información más completa en el sitio web: http://www.mexder.com.mx.

instrumentos de rentabilidad fija asegurada como Bonos del Ahorro Nacional (préstamos al Estado) con vencimiento en diciembre. Sin embargo, el mercado, más concretamente las acciones de PEMEX —aun cuando sean de alta rentabilidad—, manifiestan una *volatilidad* preocupante; es decir, su rentabilidad *ha ido oscilando* de manera ostensible alrededor de la renta media. Pero muy bien podría ocurrir que justo durante diciembre el precio de las acciones no fuese alto. De manera que *la alternativa más rentable conlleva más riesgos.* Lo que, ciertamente, no debe sorprender. Pero, ¿qué hacer?

Podemos asegurarnos contra ese riesgo comprando *opciones de venta* u *opciones put.* Dado que una opción *put* sobre un cierto activo, como acciones de PEMEX, es un contrato que otorga a su comprador el derecho, pero no la obligación, a *vender* a un *precio de ejercicio* fijo, K, en una *fecha de vencimiento*[2], una acción de ese activo. La fecha de vencimiento será en nuestro caso diciembre. De esta manera garantizamos un precio K para nuestras acciones.

Por supuesto, el derecho absoluto que supone una *put* tiene un precio. En otros términos, el emisor de la *put* asume riesgos ajenos por una *prima/precio.* ¿A cuánto debe ascender el importe de esa prima? Si el precio es muy alto, al inversor —usted— no le compensará, mientras que si el precio es muy bajo el emisor de la *put* asume un riesgo sin contrapartidas suficientes que le permitan cubrir el mismo.

¿Hay un precio de equilibrio en el que ambas partes estén de acuerdo? Este es común como el *problema de valoración.* Y la respuesta es que *sí.* Es importante señalar que cualquier procedimiento que justifique el precio de la prima debe llevar aparejado de algún modo la especificación de una estrategia de inversión (o al menos, la confirmación de la existencia de una) que permita al emisor cubrir sus riesgos. Este es *el problema de cobertura* y, como veremos, existe un precio que cumple los requisitos anteriores.

En otras palabras, un *put* es un instrumento financiero *derivado*, es decir, su valor depende del valor de otro activo al que se le conoce como *subyacente*; en el ejemplo anterior las acciones de PEMEX. Necesidades de inversión, de cobertura y también intereses especuladores promueven un crecimiento incesante del número y variedad de productos derivados que se negocian en el mercado.

Paralelo, aunque no exactamente simétrico, es el contrato de *opción de compra* u *opción call.* Como bien se ha mencionado, una *call* es un contrato que da a su comprador

[2] Llamada también *fecha de maduración.*

el derecho, pero no la obligación, de comprar a un precio de ejercicio establecido. Los contratos anteriores se dicen de tipo *europeo* porque sólo se pueden ejercer en la fecha de vencimiento. El contrato, en cambio, se llama *americano* si el detentador de la *put* puede ejercer su derecho de venta en cualquier momento anterior a la fecha de vencimiento. Tampoco el precio de ejercicio tiene por qué estar determinado de antemano y, por ejemplo, podría ser el valor medio, aritmético o geométrico de las cotizaciones hasta su vencimiento. Este tipo de contratos se conocen como *opciones asiáticas*. Conviene resaltar que las denominaciones geográficas anteriores no tienen nada que ver con el lugar donde se negocian los instrumentos.

El comprador de la *put* quizá crea que la cotización de las acciones subyacentes pueden bajar y en cualquier caso le resultará de interés si así sucede. El vendedor, por otro lado, espera/desea que las acciones suban. Es esta contraposición de opiniones diversas sobre la tendencia futura la que hace posible la existencia de un mercado.

Las opciones constituyen también un instrumento especulativo. Por ejemplo: una *call* sobre el índice IPC de la Bolsa Mexicana de Valores (BMV) con vencimiento el 20 de diciembre de 2001 con precio de ejercicio de 4.550 puntos cotiza hoy una prima de 50 puntos. Hoy el IPC está a 4.400 puntos. Si al vencimiento el IPC alcanza los 4.650, la *call* le rinde a su poseedor 100 puntos: una ganancia de 50, es decir, un rendimiento del 100%. El poseedor de una cesta de acciones que replique la composición del IPC, sin embargo, alcanza sólo una rentabilidad de $\frac{150}{4.400} \times 100\%$, es decir, del 3.4%. A este fenómeno se le conoce en la jerga financiera como *apalancamiento*. Por supuesto, si al vencimiento el IPC vale 4.549, el poseedor de la *call* pierde el total de su inversión: la prima. Por cierto, 1 punto es una cantidad fija p en el mercado (por ejemplo: 100 pesetas en España, 10 pesos en México o 1 dólar en EU).

1.3 Evolución de un activo.

Nuestro objetivo es valorar una *call*. El valor de una *call* depende de la evolución del activo subyacente. Por ello, primero centraremos nuestra atención en especificar un modelo para esa evolución.

Tenemos dada una unidad de tiempo, por ejemplo, el día. Por R denotaremos el tipo de interés por unidad de tiempo compuesto según esa unidad. El valor del activo cambia sólo en los instantes de $n = 1, 2, \cdots$ y permanece constante en los intervalos $[n, n+1]$. El valor del activo que se alcanza en el instante n se denotará por S_n. El instante de tiempo presente es 0. Nos interesa la evolución hasta el instante de tiempo N, que supondremos es el vencimiento de la *call*.

En el modelo más simple supondremos que el activo tiene una rentabilidad central, que no media, por unidad de tiempo m y una dispersión sobre ese valor central σ. La notación intenta sugerir que m es una rentabilidad media y que σ es una desviación típica (o estándar) de esa rentabilidad. Pero obsérvese que no hemos introducido ninguna probabilidad. Es importante señalar que el caso $\sigma = 0$ es simplemente el de la evolución de un activo sin riesgo (que rinde m), y que en ese caso debe ocurrir que $m = R$. De esta manera vemos que la evolución que postulamos consiste en añadir un riesgo, una oscilación, a un activo que tiene una rentabilidad determinista. Es decir, postulamos que la evolución del activo de tiempo n al tiempo $n+1$ sólo admite dos estados posibles:

$$S_{n+1} - S_n = S_n \times (m \pm \sigma).$$

Si denotamos por X_n una variable que toma los valores ± 1, entonces podemos representar los posibles valores de S_{n+1} en la forma

$$S_{n+1} = S_n(1 + m + \sigma X_n)$$

o bien,

$$S_{n+1} = S_0 \Pi_{j=1}^{n}(1 + m + \sigma X_j).$$

Implícitamente estamos considerando el espacio muestral que consiste de las listas de $+1$'s y -1's de longitud N.

Cada inversionista, en principio, si toma como base este modelo y deberá calibrar a su gusto los parámetros m y σ y adjudicará además probabilidades subjetivas a cada tira de X_j's.

Es una hipótesis fundamental que el mercado que estudiamos es *eficiente*. Esto significa varias cosas, pero en particular quiere decir que el precio de un activo en un momento dado recoge toda la información sobre el activo disponible en ese instante, y que, por tanto, la evolución futura de un activo depende sólo del precio actual y no de la trayectoria seguida hasta ese instante. En otras palabras, las probabilidades a asignar a las transiciones deben hacer que el *proceso* S_n sea markoviano.

Supondremos incluso que las X_j son independientes e idénticamente distribuidas, lo que por supuesto garantiza la markovianidad. Digamos que $\mathbb{P}(X_j = +1) = p$, de manera que el modelo contiene tres parámetros m, σ, p a determinar por el inversionista.

Este tipo de modelos para la evolución de activos en mercados financieros fueron introducidos por Bachelier (ver [Ba])en su tesis doctoral *Theorie de la spéculation*, en París, en 1900. Bachelier, sin embargo, postula que el propio valor del activo, y no su rentabilidad, sigue un camino aleatorio. Mas aún, Bachelier analiza la evolución continua del proceso de evolución de S_t y para ello *crea el concepto y el primer desarrollo teórico del movimiento browniano* en una frase bien conocida: "El movimiento browniano, una joya de la física moderna, es un descubrimiento botánico cuya teoría matemática tiene su origen en las ciencias sociales". Pero, en primer lugar, la evolución anterior depende de la subjetividad de cada inversionista. Y, en segundo, lugar, el modelo no incorpora el aspecto económico fundamental, a saber, que si $\sigma = 0$, entonces $m = R$. Antes, de manera literaria aunque correcta, hemos comentado que eso se debía a que si σ es cero, entonces nuestro activo no tiene riesgo y debe ser un préstamo sin riesgo. La argumentación económica que justifica este razonamiento se basa en la noción fundamental de *arbitraje*, o mejor, de que en un mercado *eficiente* las oportunidades de arbitraje duran muy poco tiempo.

1.4 Arbitraje.

El diccionario de la Academia define arbitraje como: operación de cambio de valores mercantiles, en la que se busca la ganancia aprovechando la diferencia de precios entre unas plazas y otras. En el sentido más técnico que emplearemos, denominaremos *oportunidad de arbitraje* a una estrategia de inversión con capital inicial cero que *garantiza* un rendimiento positivo. En el mercado financiero operan un gran número de personas dedicadas al arbitraje dedicados a localizar y explotar oportunidades de arbitraje. Estas oportunidades de arbitraje duran poco tiempo y se compensan unas con otras, dada la efectividad de los arbitrajistas. Es una hipótesis razonable, cuando se está pronosticando a medio plazo, suponer que tales oportunidades no existen. Los creadores del arbitraje cumplen pues una importante función sanitaria en los mercados financieros.

Si $s = 0$, pero $m > R$, entonces se crea una oportunidad de arbitraje: simplemente compramos una unidad de activo con dinero que hemos pedido prestado. Al cabo de N unidades de tiempo tenemos garantizada una ganancia igual al valor del activo menos el valor del préstamo a devolver. Es decir, una ganancia de $(m - R)(1 + R)^N$ (que tiene crecimiento exponencial). Si fuera $m < R$ el argumento es análogo, siempre y cuando tengamos en cuenta la posibilidad de un *short-selling*, es decir, de *ventas al descubierto*, en suma que uno puede vender acciones que no tiene (responsabilizándose de su rentabilidad). Aunque claro, si s es pequeño, entonces debiera darse que m es próximo a R. De hecho, es fácil ver (con una argumento similar al anterior) que si no hay oportunidad de arbitraje, entonces $|m - R| \leq s$.

Pero, ¿cómo incorporar de manera eficaz la ausencia de oportunidad de arbitraje en la valoración de opciones? A este punto insatisfactorio se llegó en el siglo pasado alrededor de los años sesenta con Samuelson (ver [Sa]), quien modeló por vez primera la rentabilidad como un recorrido aleatorio, o lo que es lo mismo, postuló que los activos siguen recorridos aleatorios *geométricos*.

1.5 Utilización de las Opciones y sus Estrategias.

Hasta ahora hemos hablado de la compra de opciones financieras,pero para poder efectuar un contrato de compra de opciones se necesita la otra parte, la parte vendedora de opciones. Cada una de las partes, tiene una serie de derechos y obligaciones, los cuales, quedan detallados en la figura 1.1.

El comprador de una opción, tanto sea de venta como de compra, abre una posición

	Comprador Posición long	Vendedor Posición short
Opción de compra *call.*	- Derecho a comprar el activo subyacente al precio de ejercicio. - Pérdida máxima = Prima pagada. - Ganancia máxima = Ilimitada	-Obligación a vender el activo subyacente al precio de ejercicio - Pérdida máxima = Prácticamente ilimitada. - Ganancia máxima = Prima cobrada.
Opción de compra *put*	-Derecho a vender el activo subyacente al precio de ejercicio. - Pérdida máxima = Prima pagada. - Ganancia máxima = Ilimitada	- Obligación de comprar el activo subyacente al precio de ejercicio - Pérdida máxima = Prácticamente ilimitada. - Ganancia máxima = Prima cobrada.

Figura 1.1: Derechos y obligaciones.

en el mercado llamada *Long* (Larga). Por contra el vendedor de una opción tanto sea de venta como de compra abre una posición en el mercado llamada *Short* (Corta).

Esta posición se mantendrá así hasta su vencimiento en la que la opción será ejercida o no, o bien hasta que la cubramos con una operación de signo contrario. Por ejemplo, si abrimos una posición *Short Call* (vendemos una opción de compra) y en un momento determinado decidimos cerrar nuestra posición, deberíamos efectuar un *Long Call* (comprar una opción de compra) sobre el mismo activo, con igual precio de ejercicio y vencimiento. De ésta manera cancelaríamos nuestra posición en el mercado. Más del 95 por ciento de los contratos finalizan por cobertura antes del vencimiento. En las siguientes figuras se muestran de una manera gráfica los perfiles de ganancias en sus diferentes casos ya mencionados en la figura (1.1).

Los resultados de las diferentes posiciones se representan mediante gráficos de doble

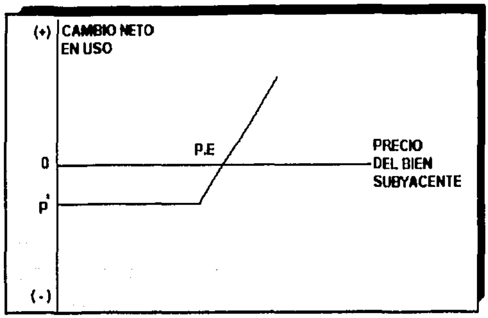

Figura 1.2: Perfil de ganancias para el comprador de la opción call.

entrada: cotización/resultados, que son típicos en la literatura sobre opciones.

1.5.1 Utilización de las Opciones Financieras.

Una vez que ya sabemos por los apartados anteriores lo que es una opción, deberíamos conocer que hacer con ellas. Esencialmente, podemos usar las opciones por tres motivos: como cobertura de riesgos, con fines de especulación/inversión, o como instrumento para efectuar arbitrajes.

a) **La opción como instrumento de cobertura.** La opción quizá sea el mejor instrumento para cubrir cualquier riesgo sobre el precio del *Activo Subyacente*. Con la opción estamos traspasando el riesgo de pérdida a un tercero mientras conservamos en nuestro poder la posibilidad de seguir obteniendo beneficios, en caso de una evolución favorable de los precios. Se pueden imaginar como una Póliza de Seguro; pagamos una prima a cambio de cubrir un riesgo, si el evento productor del riesgo no se materializa, continuaríamos disfrutando del bien asegurado, perdiendo solo la prima pagada. La cobertura con otros instrumentos, como por ejemplo: futuros, implicaría que estaríamos transfiriendo, tanto nuestros riesgos de pérdida, como la posibilidad de obtener beneficios en el caso que los mismos se produjeran.

Una estrategia de cobertura con opciones, por tanto, tendría como objeto la protección de una posible pérdida sobre un *Activo* o *Pasivo*, de nuestra propiedad, de manera que

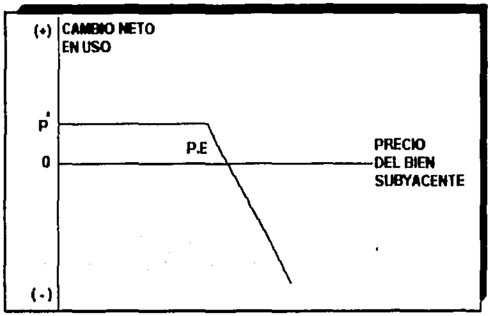

Figura 1.3: Perfil de ganancias para el vendedor de la opción call.

la pérdida obtenida en una determinada posición sea compensada por la ganancia de la otra. Las estrategias de cobertura más simples son:

1.- La cobertura de un Activo con la **compra** de una opción de venta (*put*) sobre el mismo -conocida como "**call sintética**"-. Nos permite limitar las pérdidas, como máximo al importe de la prima pagada, en caso de que el activo que poseemos baje por debajo del Precio de Ejercicio, permitiendo ganancias ilimitadas, caso de que nuestro Activo, suba por encima del Precio de Ejercicio. Siendo esta ganancia algo inferior a la mera tenencia del Activo, por la prima pagada al comprar la opción de venta.

2.- La cobertura de un Activo mediante la **venta** de una opción de compra (*call*) sobre el mismo -conocida como "**call cubierta**"-. Sin conseguir la protección total sobre el Activo, como hemos mencionado en el caso anterior, la "call cubierta", aminoraría los efectos producidos por una eventual caída de la cotización de nuestros Activos, retrasando la entrada en pérdida de los mismos, quedando limitados, a cambio; los posibles beneficios a obtener en caso de que nuestros Activos superen el Precio de Ejercicio, debido a que la opción de compra (*call*) que hemos vendido nos sería ejercida. Suele ser una estrategia muy utilizada por gestoras de fondos o inversores institucionales, sobre todo en periodos de relativa calma en los mercados financieros o con movimientos no muy amplios de los mismos, tanto para aumentar los ingresos

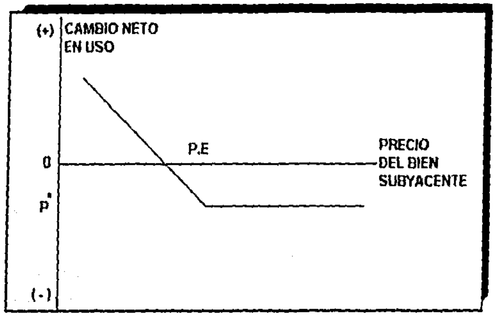

Figura 1.4: Perfil de ganancias para el comprador de la opción put.

proporcionados por la mera posesión de los títulos, como para retrasar la entrada en pérdida de sus carteras.

b) La opción como instrumento de inversión/especulación. Las opciones ofrecen al usuario de las mismas, un amplio abanico de posibilidades, si es capaz de anticipar correctamente, los potenciales movimientos de los precios o la volatilidad del Activo Subyacente.

Las estrategias posibles son prácticamente ilimitadas, dependiendo sólo de la mayor o menor aversión al riesgo del inversor/especulador y de su imaginación, dado que las posibles combinaciones son enormes. Aquí sólo examinaremos algunas a modo de ejemplo para que podamos comprender sus mecanismos y fines.

En principio podríamos clasificar estas estrategias como:

Estrategias simples:

- Compra de un *call*: Si pensamos que el Activo Subyacente subirá.
- Compra de un *put*: Si queremos anticiparnos a una bajada del mercado.
- Emisión de un *call*: Si creemos que el precio del Subyacente bajará.
- Emisión de un *put*: Si opinamos que el mercado está en una clara fase alcista.

Estrategias complejas:

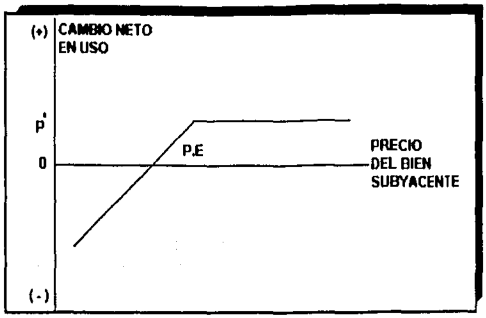

Figura 1.5: Perfil de ganancias para el vendedor de la opción put.

Las estrategias complejas reciben nombres curiosos en función de la figura que se dibuja en los gráficos de resultados/cotización. Así nos encontramos con estrategias llamadas: *butterfly* (mariposa), *strangle* (cuna), *straddle* (cono), *condor*, etc. Mencionando sólo aquellas que son las más utilizadas tenemos:

Straddle. Si creemos, que tras un cierto tiempo de una cierta estabilidad en las cotizaciones del mercado bursátil, éstas, van sufrir una variación sin que sepamos a ciencia cierta hacia donde se va a dirigir, si hacia el alza o a la baja, podríamos montar una estrategia con opciones financieras a base de comprar un *call* y un *put*, sobre el mismo precio de ejercicio, lo más cercano posible al precio del mercado en ese momento.

Spread. Si creemos que el mercado se irá decantando hacia posiciones levemente bajistas, con oscilaciones pequeñas, pero siempre hacia abajo, podíamos montar una estrategia denominada *Bear Spread* (Diferencial Bajista), para intentar conseguir el máximo de beneficios de la coyuntura del mercado. Los beneficios que podemos obtener son limitados a cambio de limitar también nuestras pérdidas. La estrategia sería montada en base vender un *put* con precio de ejercicio menor que la actual cotización del subyacente y comprar un *put* con precio de ejercicio mayor que el subyacente.

c) La opción como instrumento de arbitraje. El arbitraje es una operación financiera que trata de sacar partido de las ineficiencias de los mercados, para conseguir una ganancia, sin soportar como contrapartida, riesgo alguno. Esta "máquina de hacer

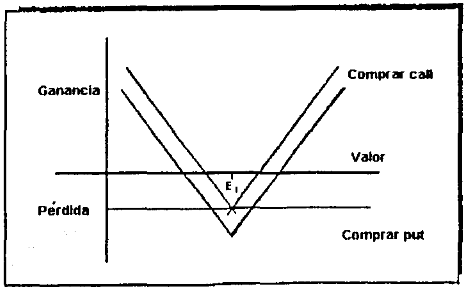

Figura 1.6: Estrategia Straddle.

dinero", conseguirá atraer a un número suficiente de inversores, para que en poco tiempo se vuelva a equilibrar el mercado, impidiendo la realización de nuevos arbitrajes, para el activo en cuestión.

Esta técnica requiere una presencia continua en el mercado y una enorme rapidez de intervención, así como una amplia información, lo que las relegaría casi al uso exclusivo de grandes profesionales. Las opciones financieras como cualquier otro Activo en un mercado de libre competencia, se rigen por la ley de la oferta y la demanda. No obstante, existen unas limitaciones al valor de un *call* o un *put*, que caso de rebasarse podría propiciar una operación de arbitraje.

1.6 Factores que afectan en el Precio de una Opción.

Hasta ahora se ha analizado el valor de las opciones a su fecha de ejercicio. En estos casos, el valor depende del precio de ejercicio y del precio del activo subyacente.

Sin embargo, se estima de especial interés conocer cuáles son los factores que afectan el valor de una opción en cualquier momento antes de su fecha de ejercicio. En este sentido, si bien son varios los que entran en consideración, se explicaron los seis más importantes; sin perjuicio de efectuar algunas consideraciones sobre otros factores de presencia menos

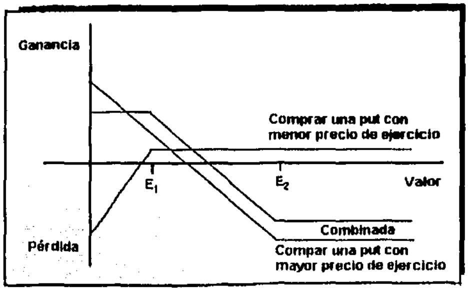

Figura 1.7: Estrategia Spread.

permanente, pero que en determinadas oportunidades llegan a influir.

El desarrollo de su explicación se hará individualmente. Los seis principales son los siguientes:

- Volatilidad;
- Precio corriente del activo;
- Precio de ejercicio;
- Fecha de ejercicio;
- Tasas de interés;
- Dividendos en efectivo.

La volatilidad. Es un concepto fundamental en el mercado de opciones. Tengamos en cuenta, que de no existir volatilidad, con productos cuyos precios prácticamente fueran fijos, no tendría razón de existir los mercados de futuros y opciones. La volatilidad se podría definir como una *medida de dispersión del activo subyacente.* A mayor volatilidad mayor probabilidad que se ejerza la opción, por tanto este factor influye en un mayor precio en la opción, tanto de compra (*Call*), como de venta (*Put*).

Ejemplo. Se tienen dos acciones A y B, cuyas funciones de distribución de la retribución de las mismas con opciones *call*, vienen dadas por las figuras 1.8 y 1.9.

Se tendrá que la acción B es más volátil que la A, por lo que, potencialmente. Tiene más oportunidad de tener una mayor o menor retribución. Esto significa que durante el

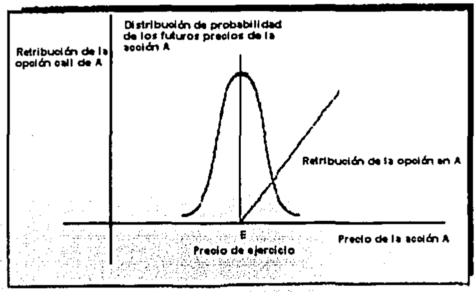

Figura 1.8: Gráfica de la medida de dispersión, ejemplo A.

período de duración de la opción *call*, mayor es su valor relativo al activo.

Si se trata de la opción *put*, el tenedor de una de ellas se beneficia cuando el precio decrece o tiene su riesgo limitado cuando crece. Por lo tanto, *el valor de las puts y calls crece en la medida en que la volatilidad de los activos también lo hacen.*

Es conveniente ver un poco más de la volatilidad. Los límites dentro de los cuales puede operar el valor de una opción vienen expuestos en la figura 1.10

La bisectriz que fija el límite superior se da cuando el valor de la opción toma el valor de la acción, pero no puede ir más allá. Dado que la opción no puede valer menos que cero, aun en el caso en que el valor de ejercicio sea mayor que el valor de la acción, es probable que el valor de la misma esté por encima del valor teórico que marca el límite inferior. Esto lleva a que sus valores estén por debajo de su valor máximo, pero por encima de su valor teórico, tomando la forma A y B que se muestra en la figura 1.11.

Precio Corriente del Activo. Cuando, por ejemplo, las acciones no tienen el valor en Y_0, las opciones tampoco. Esto lleva a mostrar que el valor de una opción crece en la medida en que el precio de la acción también crece. Ello se debe a que aumenta la probabilidad de que la opción sea ejercitada hasta que llega a un punto en que el precio de la acción es tan alto que el precio de ejercicio se vuelve casi operando en certidumbre. Es por lo tanto, de resaltar que el *valor de la opción call crece cuando lo hace el precio del activo.*

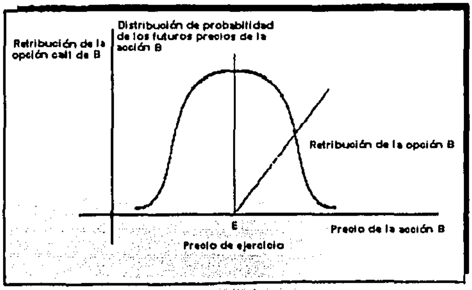

Figura 1.9: Gráfica de la medida de dispersión, ejemplo B.

Consecuentemente, *el valor de una opción put crece cuando el precio del activo en cuestión disminuye.*

Precio de ejercicio. Cuanto mayor sea el precio de ejercicio de la opción que deseamos adquirir, en comparación con el precio actual del subyacente, menor será la prima que debamos pagar por la compra de nuestra opción dado que la probabilidad de que podamos ejercer nuestra opción será más baja. Por el contrario, la compra de un *put*, nos resultará mas cara cuanto mayor sea el precio de ejercicio en relación a la cotización actual del subyacente, pues existe una mayor probabilidad que ejerzamos nuestra opción de venta (*put*).

Fecha de ejercicio. Este factor opera en forma similar a la volatilidad. Cuanto mayor sea la vida de una opción, mayores serán las probabilidades de que ocurran sucesos inesperados. Por lo tanto, *cuanto mayor sea el plazo (o más dilatada, la fecha de ejercicio), el valor de las opciones call o put tenderá a ser mayor.*

Tasas de interés. Los efectos sobre el valor de las opciones, en el caso de las tasas de interés, se visualizan al pensar que el valor del precio de ejercicio es menor en términos de valor presente, si dicha tasa es más alta. Opera, en este sentido, de la misma forma que si tuviera un menor precio de ejercicio. De allí que *si la tasa de interés crece, orienta un mayor valor de las opciones call.*

Si se sigue el mismo razonamiento, se llega a la conclusión inversa en caso de tener una opción *put.*

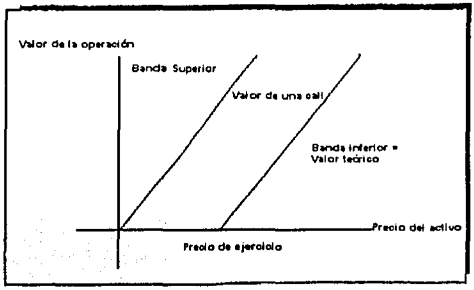

Figura 1.10: Límites de operación del valor de una opción.

Factores determinantes	Put	Call
Volatilidad	+	+
Precio Corriente del activo	-	+
Precio de ejercicio	+	-
Fecha de ejercicio	+	+
Tasa de interés	-	+
Dividendos en efectivo	+	-

Tabla 1.1: Efectos de un incremento de los principales factores determinantes del valor de una opción.

Dividendo en efectivo. Finalmente, este factor también tiene sus efectos, por ejemplo: al ser pagados en una fecha adelantada a la de la expiración. Esto hará que el precio del activo se reduzca, lo que es bueno para quien tiene una opción *put*, y no lo es para el tenedor de una opción *call*.

De allí que el valor de las opciones *call* decrece ante la existencia de dividendos anticipados y el de los *put* crece.

La tabla(1.1) sintetiza los principales efectos.

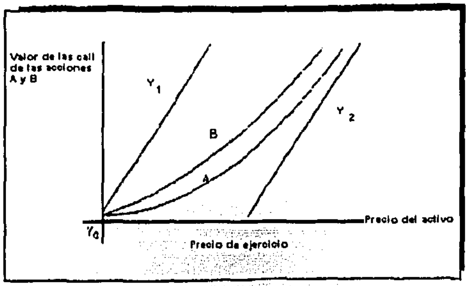

Figura 1.11: Posiciónes de los valores de la opción.

1.6.1 Opciones sobre Tipos de Interés.

Se ha establecido un pequeño apartado para las opciones sobre tipos de interés, dado que, aunque todo lo dicho para las opciones, hasta ahora, también lo es para este tipo de opciones, en ocasiones el significado de un *call* o un *put*, para este tipo de activo es algo más confuso por la diferente naturaleza del activo subyacente.

Como las demás opciones, una opción sobre tipos de interés da derecho a su tenedor a invertir a un tipo de interés (precio de ejercicio), en una fecha determinada (vencimiento de la opción), por un plazo estipulado. En la mayoría de mercados organizados, las opciones sobre tipos de interés tienen como subyacente, fundamentalmente:

- Futuros sobre tipos de interés bancarios. Corto Plazo.
- Futuros sobre títulos nacionales (es un título teórico, con características estandarizadas y que no existe en la realidad). Largo Plazo.

Los defensores de los mercados de opciones fundamentan sus argumentos, en que el contrato de opción contribuye a la redistribución del riesgo existente en el mercado. En este sentido un comprador y un vendedor de opciones, adoptan unas exposiciones al riesgo distintas de las que mantenían antes de utilizar la opción.

No obstante, las opciones tienen un riesgo muy superior al Activo del cual derivan. Una inversión en opciones puede perderse totalmente en poco tiempo de no vigilarse cuidadosamente. De ahí, que haya quien compare los contratos de opciones con una lotería,

	Cotización futuros	Volat.Esp.Alta	Volat.Esp.Moderada
Tipos de Int. al alza.	baja	compra put	venta call
Tipos de Int. a la baja.	alta	compra call	compra put

Tabla 1.2: En la tabla se puede observar la relación entre las fluctuaciones del tipo de interés, tanto a largo como a corto plazo y su repercución en la cotización del mercado de futuros.

que en el caso de no acertar el número se pierde el importe jugado; en caso de acertar hasta el último número recuperaría el importe jugado, en el caso de la opción se recupera parte o la totalidad de la prima pagada y solo algunos afortunados son recompensados por la diosa fortuna, tocándoles la lotería, es decir ganando en el mercado de opciones.

1.7 Volatilidad.

La volatilidad es la palabra más usada y quizá menos entendida en el mundo de las opciones. Volatilidad simplemente significa movimiento, pero este concepto no es asimilado bien por los operadores de acciones y futuros, los cuales están acostumbrados a pensar en términos de dirección y no de variabilidad. Un 10% arriba y un 10% abajo son iguales en términos de volatilidad, pero no para aquél poseedor de un activo para el que un 10% para arriba es "bueno" y un 10% para abajo es "malo".

Al operador de opciones también le interesa la dirección del mercado. Pero a diferencia con el operador de contado, el operador de opciones está también muy interesado en la variabilidad del mercado. Si el mercado de contado no fluctúa demasiado, las opciones disminuirán de valor debido a que se reduce la probabilidad de que el mercado se desplace hacia un determinado precio de ejercicio. En resumen, la volatilidad es la medida de la variabilidad del mercado. Los mercados que varían poco son mercados de baja volatilidad, los mercados que varían mucho son mercados de alta volatilidad. Entonces se intuye que algunos mercados son más volátiles que otros.

Si se puede cuantificar la volatilidad futura del mercado e introducirla en un modelo teórico de valoración, cualquier valor obtenido será tanto más fiable que si simplemente hubiésemos ignorado la volatilidad por lo que es necesario algún método para cuantificar el componente de volatilidad y así poder introducirlo en el modelo de forma numérica.

1.7.1 Tipos de Volatilidad.

La volatilidad puede ser determinista, es decir, volatilidad constante que no cambia en el tiempo o lo hace de forma cierta. Este tipo de volatilidad es normalmente estimada por la desviación típica (σ) de la serie de rentabilidades del activo. Basta con cambiar el número de datos (100, 200, 500) o la frecuencia de los mismos (diarios, semanales, mensuales) para darnos cuenta que las estimaciones obtenidas varían y, en ocasiones, de forma sustancial.

La volatilidad también puede ser estocástica; volatilidad que cambia en el tiempo de forma incierta. Este tipo de volatilidad es normalmente estimada usando un modelo econométrico tipo ARCH o GARCH (ver pág.143) entre otros.

Un caso particular de estos modelos, cada vez más utilizados por gestores, "risk-managers" o "traders"; son los de medias móviles y medias móviles exponenciales. La media móvil es una media aritmética de las volatilidades históricas durante un periodo determinado donde cada dato tiene igual importancia que los otros. La media móvil exponencial da más peso a las observaciones más recientes.

Considerando la manera general anterior de especificar los tipos de volatilidad podemos plantear otra clasificación más particular:

• **Volatilidad Futura:** La que realmente habrá en el futuro (esto ha sido fácil de explicar, sí fuera igual de fácil de determinar, las opciones no se utilizarían).

• **Volatilidad Histórica:** Refleja el comportamiento de un activo subyacente en el pasado. La experiencia aprendida del comportamiento en el pasado y valorada en el momento presente.

En donde, tanto la volatilidad futura como la histórica estarán condicionadas por el intervalo de tiempo escogido y según las características del activo. por ejemplo; en una acción no es lo mismo tomar un intervalo de 5 meses que de cinco años y no es igual considerar solo los cierres, aperturas o precios cada 10 minutos.

En la mayoría de los casos nos encontraremos con el dato de tres meses.

• **Volatilidad Implícita:** el mercado valora la volatilidad del activo e integra este valor en el precio de la opción en el mercado. El resto de los factores que intervienen en el cálculo del valor teórico de la opción son conocidos: Precio del subyacente, precio de ejercicio, tiempo a vencimiento, dividendos y tipos de interés.

La volatilidad implícita refleja las expectativas del mercado sobre la volatilidad del activo subyacente hasta el vencimiento de la opción, también se la conoce como "Volatilidad de mercado". Está en continuo cambio pues continuamente cambia la prima.

1.7.2 Volatilidad en Mercados Financieros.

Los mercados financieros operan de manera casi continua, de modo que la cotización de un activo queda mejor representada por un proceso continuo S_t, donde t es ahora un número real positivo.

Queremos hacer que la unidad de tiempo empleada tienda hacia cero. Pongamos que la unidad de tiempo tiene tamaño Δt en términos de un año (en el caso de cotización diaria $\Delta t = \frac{1}{365}$). Sea T el instante de vencimiento que escribimos $T = N\Delta t$, donde N es un número natural. Así que $N \to \infty$ equivale a $\Delta t \to 0$. Supondremos que el tipo de interés anual compuesto continuamente es R, de manera que en el modelo de tiempo discreto debemos tomar un tipo de interés $R_N = R\Delta t$. Así $(1 + R_N)^N - e^{R}T$.

La volatilidad anual de un activo se define como la *desviación típica de los rendimientos anuales*. Se suele denotar por σ y se expresa en *tantos por cientos*. Es decir,

$$\sigma = \text{desviación típica } \left(\frac{S_{\text{al año}}}{S_{\text{hoy}}}\right).$$

Y con las hipótesis de independencia y de distribución idéntica anteriores:

$$\sigma\sqrt{\Delta t} = \text{desviación típica} \left(\frac{S_t + \Delta t}{S_t}\right).$$

Haciendo que $\Delta t \to 0$ se obtiene bajo una probabilidad (con riesgo-neutro) P que se torna imposible la oportunidad de arbitraje:

1. La cotización del activo se rige por la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_t(Rdt + \sigma DB_t).$$

En particular, bajo esa probabilidad el rendimiento medio del activo es el marcado por el tipo de interés sin riesgo.

2. El valor en tiempo t, V_t de una *call* con vencimiento T y precio de ejercicio K viene dado por la fórmula de Black-Scholes (para más detalles ver capítulo 2).

$$V_t = E_P\left((S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t\right) = e^{-\beta T} S_t \Phi(d_+) - e^{-R(T-t)} K \Phi(d_-), \tag{1.1}$$

donde $\mathcal{F}_t$ es la filtración natural del movimiento browniano (es decir, $\mathcal{F}_t$ representa la información generada por las cotizaciones hasta el tiempo t), Φ es la función de distribución de la normal estándar y

$$d_\pm = \frac{\log\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(R \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

3. V_t satisface la ecuación de evolución

$$\frac{\partial V_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_t}{\partial S^2} + RS\frac{\partial V_t}{\partial S} - R = 0. \tag{1.2}$$

Que mediante el cambio de variables

$$e^x = \frac{S}{K}$$

$$\tau = (T-t)\frac{1}{2}\sigma^2$$

$$V_t = e^{\alpha x + \beta t} W_t,$$

donde α y β son constantes adecuadas, reduce la ecuación (1.2) a

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}.$$

El lector informado reconocerá el papel de la *fórmula de Feynman-Kac* en que la solución de una ecuación en derivadas parciales como (1.2) pueda expresarse mediante esperanzas condicionadas como las de (1.1).

Es fundamental observar que en la fórmula (1.1) sólo aparece σ y que no aparece la rentabilidad media del activo. Se trata de un hecho contraintuitivo (en los años setenta) característico de la mística asociada con la fórmula de Black-Scholes.

Por otro lado, hemos pasado ligeramente sobre un hecho básico. La definición de σ no especificó bajo que probabilidad debía calcularse ésta: sobre la probabilidad "real" o sobre la probabilidad "objetiva=riesgo-neutro". La razón es que *a posteriori* da igual, esto es una consecuencia importante del conocido teorema de cambio de probabilidad de Cameron-Martin/Girsanov del cálculo estocástico.

¿Y las opciones americanas? Basta decir que desde el punto de vista de las ecuaciones en derivadas parciales su valoración y la decisión de cuándo ejercer constituyen un *problema de frontera libre* y se trata de un *problema de tiempo óptimo de parada* de una *submartingala*.

Capítulo 2

El ambiente de Black-Scholes.

En 1973 Fischer Black publicó con su colaborador Myron Scholes el artículo germinal: *The pricing of options and corporate liabilities.* Este artículo supuso una verdadera revolución en los mercados financieros y en su paralelo análisis académico, y creando un nuevo paradigma: *el entorno Black-Scholes* en donde la volatilidad de un activo calculada implícitamente a partir de la cotización de un derivado y de la fórmula de Black-Scholes desempeña hoy día el mismo papel de calibre de comparación que el TAE/TIR en las obligaciones o bonos. Conviene resaltar, pues es relevante al desarrollo que vamos a explicar a continuación, que Fischer Black se licenció en física (cuántica), se doctoró en matemática aplicada e investigó en economía financiera, tanto desde el mundo académico, como desde empresas de consultoría e inversión. Black murió en 1995. A ambos se les concedió el premio Nobel de Economía en 1997 por esa línea original de investigación.

2.1 El análisis de Black-Scholes.

El artículo de Black-Scholes propuso una fórmula de valoración de opciones que resolvía todas las dificultades anteriores. Una fórmula a la vez matemáticamente elegante y extraordinariamente aplicable. La publicación de este artículo no pudo ser más oportuna, pues ese mismo año abrió sus puertas en Chicago el primer mercado organizado de derivados. Como ya hemos indicado anteriormente el crecimiento de este tipo de mercados sigue siendo impresionante. El mercado español MEFF comenzó a operar en 1990 y tiene dos sedes: Barcelona, renta fija, y Madrid, renta variable. El mercado secundario mexicano comenzó en 1996 con su sede del Distrito Federal.

La argumentación de Black-Scholes es como sigue. Analicemos un primer período de tiempo. Sea V el valor *ahora* de un producto derivado sobre un activo subyacente cuyo valor designamos por S. Transcurrida una unidad de tiempo la cotización del activo tiene dos posibilidades $S_{\pm} = (1 + m \pm s)S$; análogamente el valor del derivado tendrá dos posibles valores, V_{pm}, que dependerán de cuál tomemos anteriormente. El valor del derivado sólo puede depender del precio en el momento del activo y no de la historia pasada de éste. Formamos una cartera con una unidad de derivado, una cantidad α por determinar de activo vendido al descubierto y una cantidad β, también por determinar, de dinero que pedimos prestado. Esta cartera tiene dos posibibles evaluaciones: si $+s$, entonces valdrá

$$V_{+} - \alpha S(1 + m + s) - \beta(1 + R);$$

mientras que si $-s$, entonces valdrá:

$$V_{-} - \alpha S(1 + m + s) - \beta(1 + R).$$

Resolviendo un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, -podemos escoger α y β para que los posibles valores de la cartera sean 0- Obtenemos:

$$\alpha = \frac{V_{+} - V_{-}}{2S_s}$$

$$\beta = \frac{(1 + m + s)V_{-} - (1 + m - s)V_{+}}{2s(1 + R)}.$$

Pero la ausencia de oportunidad de arbitraje obliga entonces a que con esos valores de α y β se tenga que el valor inicial de la cartera sea cero, es decir:

$$V - \alpha S - \beta = 0.$$

Si en esta identidad se sustituyen los valores de α y β se obtiene la expresión

$$V = \frac{1}{(1+R)}(p_+V_+ + p_-V_-), \tag{2.1}$$

donde $p_\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{R-m}{2s}$. Esta fórmula es fundamental, así que analicemos su contenido. En primer lugar, observemos que $0 \leq p_\pm \leq 1$ y que $p_+ + p_- = 1$. Es decir, *podemos considerar* a p_+ y p_- como probabilidades complementarias, de subida y de bajada. En segundo lugar, nos dice qué valor ahora del derivado es el valor medio, el valor esperado *actualizado*, de sus valores futuros. En otros términos, el valor actual del derivado es el valor actual actuarial calculado respecto de la probabilidad objetiva $\mathbb{P}(X_j = \pm 1) = p_\pm$ para cada j. Pero al vencimiento el valor derivado es perfectamente conocido. Por ejemplo, si se trata de una *call*, tendremos que

$$V_{\text{call}} = E_p((S_N - K)^+)\frac{1}{(1+R)^N}. \tag{2.2}$$

Puesto que la distribución de probabilidad es conocida, esta fórmula permite calcular (todavía en función de m y s) el valor de la *call* de manera explícita, de hecho, un sencillo cálculo da:

$$V_{\text{call}} = S \cdot \mathbb{P}(B(N, p'_+) > A) - K(1+R)^{-N} \cdot \mathbb{P}B(N, p_+) > A), \tag{2.3}$$

donde $B(N, q)$ representa una distribución binomial de parámetros N (el número de repeticiones) y q (la probabilidad de éxito), donde $p'_+ = p_+\left(\frac{(1+m+S)}{1+R}\right)$ y donde A es una cierta expresión que involucra a S, R, K, m y s.

Conviene resaltar que la sucesión de los valores actualizados de cualquier derivado (incluido el propio activo) constituye una *martingala* respecto a la probabilidad introducida (y con respecto a la filtración natural).

Obsérvese que las probabilidades subjetivas han sido sustituidas por las probabilidades objetivas que dependen de m y s. Conviene insistir en que la objetividad de estas probabilidades estriba en que se calculan explícitamente a partir de m y s, los cuales representan los estados posibles de evolución, aunque en ninguna medida se supone que las probabilidades objetivas se ajusten a la evolución real. Insistimos pues en que las probabilidades objetivas *no suponen ninguna predicción futura sobre la evolución del activo.* Las probabilidades subjetivas de un inversionista podrían representar realmente la evolución del activo, pero es imposible saberlo.

Pero no sólo se ha reducido el número de parámetros (!aún se reducirá más!), sino que, además, en el valor obtenido estarán de acuerdo el emisor y el tomador del contrato de opción si coinciden en su apreciación de m y s. Y es que el argumento anterior también nos dice cómo debe cubrirse el emisor de una *call*, al crear una cartera equivalente. Para describir la *cobertura* con precisión necesitamos el concepto de una "cartera autofinanciada".

Consideramos una cartera que consta de una cantidad de activo subyacente y una cantidad de activo sin riesgo (este segundo tiene una rentabilidad segura dada por el tipo de interés R). Denotemos por α_n y β_n, a la cantidad de activo subyacente y la cantidad de activo sin riesgo en la cartera, *justo después* del instante $n-1$. La cartera se irá *redistribuyendo dinámicamente* según evoluciones el mercado. En el instante n, antes de que cambie la cotización del activo, el valor de la cartera es

$$V_n = \alpha_n S_n + \beta_n (1+R)^n.$$

Justo después del instante n redistribuimos la cartera, pero sin cambiar su valor, o, en otros términos, sin aportar fondos ni consolidar beneficios. Esta es la *regla de autofinanciación.* De manera que también se tiene

$$V_n = \alpha_{n+1} S_n + \beta_{n+1} (1+R)^n.$$

Una *estrategia de inversión* es pues una regla para decidir los valor de α_n y β_n basándose sólo en la información disponible hasta incluyendo la cotización del instante $n-1$.

Es fácil comprobar, y constituye un hecho fundamental, que los valores actualizados de una cartera autofinanciada constituyen una martingala respecto de P. Una primera consecuencia es que cualquier cartera autofinanciada que cubra, por ejemplo, a una *call*, es decir, con $V_N \geq (S_N - K)^+$ satisface

$$V_0 = (1+R)^{-N} E_p(V_N) \geq (1+R)^{-N} E_p((S_n - K)^+) = V_{\text{call}};$$

es decir, *el valor inicial de la cartera* es al menos el ya definido por V_{call}. De manera que para cubrir una *call* hace falta al menos una inversión de V_{call}. Por tanto, *el emisor de la call debe exigir al menos* V_{call}.

Esto ya nos dice que si el tomador y el emisor de la *call* coinciden en su apreciación de m y s, entonces coincidirán en que el precio debe ser V_{call}. También puede verse fácilmente, de acuerdo a lo explicado con anterioridad, que hay una única estrategia de inversión autofinanciada que con valor inicial V_{call} cubre la *call* (exactamente).

Asombra la elegancia y eficacia del argumento de Black-Scholes. Pero aún hay más: las binomiales de las fórmulas anteriores "exigen" matemáticamente que pasemos al límite.

2.1.1 Black-Scholes y las Volatilidades Implícitas.

Muchas estrategias con opciones, para poder tener beneficio, requieren una valoración precisa de la volatilidad. Por tanto, un operador de opciones necesita algún método para determinar si sus expectativas sobre la volatilidad se cumplen realmente en el mercado. A diferencia de las estrategias direccionales, cuyo éxito o fracaso puede verse inmediatamente observando la variación de los precios, para las volatilidades no ocurre lo mismo. El operador debe analizar si está introduciendo una correcta volatilidad en el modelo teórico de valoración.

El modelo de Black-Scholes es un modelo continuo en el tiempo. Considera que la volatilidad el activo subyacente es constante y continua durante la vida de la opción. Estas dos premisas significan que los posibles precios del subyacente al vencimiento de la opción, tienen una distribución lognormal.

Podemos por tanto resumir las premisas más importantes que rigen los movimientos de precios en el modelo de Black-Scholes:

1. Los cambios de los precios del activo subyacente son aleatorios y no pueden ser manipulados artificialmente, ni es posible predecir de antemano la dirección hacia la que se van a mover los precios.

2. La variación porcentual de los precios de un activo subyacente está normalmente distribuida.

3. Debido a que la variación de los precios del activo subyacente se considera continuamente compuesta, los precios del mismo a vencimiento tendrán una distribución lognormal.

4. La media de la distribución lognormal estará localizada en el precio del futuro del activo subyacente.

El punto importante aquí es que el modelo de Black-Scholes tiene en consideración que los cambios en los precios son aleatorios y que su dirección no es predecible. Esto no quiere decir que la no predictibilidad sea un requisito al utilizar el modelo de Black-Scholes. Sin embargo, la predicción de los precios está enfocada a la magnitud de los cambios en los precios en lugar de en la dirección de los mismos.

2.1.2 La distribución Lognormal de los Precios.

Una de las principales suposiciones bajo las cuales se centra la formula de Black-Scholes es que los precios se distribuyen siguiendo una distribución lognormal.

¿Porqué los precios se presentan de esta manera? ¿Cuáles son las suposiciones razonables sobre el comportamiento que los precios accionarios tienen en el tiempo? Claramente el precio de una acción (o cualquier otro recurso financiero arriesgado) es incierto. ¿Cuál es su distribución? Una manera de contestar esta pregunta es a su vez preguntarnos cuáles son las propiedades estadísticas razonables de un precio accionario. Aquí está cinco de estas propiedades a considerar:

• El precio accionario es incierto. Dado el precio hoy, no sabemos el precio mañana.

• Los cambios en los precios de las acciones son continuos. Encima de los periodos cortos de tiempo, los cambios en el precio de una acción son muy pequeños.

• Los precios accionarios nunca pueden ser cero. Obviamente excluimos los casos de compañías "muertas".

• La media que tienen los precios de una acción tiende a aumentar con el tiempo. Note la palabra "tiende": no se sabe que esta media durante un tiempo más largo llevarán a una media más alta; sin embargo, se espera esa tenencia ya que hablando de la compra y venta de las opciones esto repercute en un riesgo mayor para los vendedores de opciones y mayor posibilidad de beneficio para los compradores de las mismas, por lo que es lógico pensar que la media incrementará igualmente.

• La incertidumbre asociada con el poseer una acción también tiende a incrementarse mientras más tiempo la acción sea conservada. Así, dado el precio de la acción hoy, la variación de ésta es pequeña; sin embargo su variación en un mes es más grande y en un año será aun más alta.

En general, la distribución lognormal asume que el logaritmo natural de la tasa bruta de retorno del precio del bien subyacente entre el tiempo t y el tiempo $t + \Delta t$ (es decir, $\log\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right)$) sigue una distribución normal con una media de μ y una desviación estándar de σ por unidad de tiempo ($\Delta t = 1$):

$$\log\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right) = \mu\Delta t + \sigma z\sqrt{\Delta t},$$

donde z es una variable aleatoria con una distribución normal estándar (media = 0 y desviación estándar = 1). Por lo tanto:

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp\left(\mu\Delta t + \sigma z\sqrt{\Delta t}\Delta t\right).$$

Esto significa que, si no existiera incertidumbre ($\sigma = 0$), el precio de la acción crecería con certeza a la tasa exponencial μ por unidad de tiempo. Pero cuando hay incertidumbre ($\sigma > 0$), la distribución lognormal nos dice que aunque el precio tiende a aumentar a la tasa μ por unidad de tiempo, no se puede decir con certeza que va a aumentar a dicha tasa en el futuro.

2.1.3 El modelo clásico de Black-Scholes.

El llamado modelo de Black-Scholes es una simplificación del ambiente Black-Scholes. Este es bien conocido y ampliamente utilizado en la práctica, con aproximaciones mas o menos eficientes. La principal razón para utilizarlo es que el cociente coste/beneficio al emplear una versión simple sobre otras mas complejas es significativo. Específicamente, la cantidad de mayor interés es la asociada a la volatilidad de los retornos del *stock* denominada por σ. El Black-Scholes clásico supone que σ es constante, y la evidencia empírica sugiere que la primera generalización es más precisa para datos muestrales en el modelo de volatilidad estocástica, donde σ es determinada como la solución de otra ecuación diferencial estocástica (EDE). Adicionalmente, el Black-Scholes clásico a veces provee una solución adecuada de la valoración de precios. Debido a esto y otras razones centramos nuestra atención en el modelo de Black-Scholes clásico.

2.2 Hipótesis clásicas del modelo de Black-Scholes.

- El mercado consiste de negociaciones continuas, dentro de una economía perfectamente elástica. Una economía perfectamente elástica significa que la media del proceso conduce al precio del stock de manera que no se vea afectado por los swings en la demanda, o equivalentemente que todos los inversores son agentes que influyen en el precio. Los activos son stocks (que evolucionan bajo riesgo), efectivo (que no tienen riesgo), y un derivado (definido en término del precio del stock en la madurez).

- La hipótesis de mercado eficiente: toda la información acerca de la ejecución del pasado del stock está contenida en el precio del stock S, la cual es observable por todos los participantes del mercado. Esto significa que el precio del stock es un proceso de Markov.

- No existen costes de transacción.

- El stock puede ser infinitamente subdividido y las ventas en corto están permitidas, *i.e.* las posesiones fraccionarias o negativas del stock están permitidas en lapsos cortos de tiempo.

- La tasa de interés libre de riesgo r continuamente compuesta es constante.

- Se supone que los precios del stock evolucionan de acuerdo a la EDE:

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B.$$

donde μ y σ son constantes, y B es un movimiento browniano estándar.

- El precio de una opción al tiempo t, el cual podemos escribir como $V(t, S)$ es una función determinista de t y S.

2.2.1 La ecuación $\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B$.

La ecuación

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B,$$

se refiere a veces como el supuesto del movimiento browniano geométrico del modelo de Black-Scholes. Esto es porque la solución de esta ecuación es:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B},$$

que crece con un comportamiento geométrico manejado por el movimiento browniano. Para ver esto, defina $Y = f(t, S) = log(S)$. Entonces usando el lema de Itô, tenemos:

$$f_t = 0; \quad f_S = 1/S, \quad f_{SS} = -1/S^2$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y &= \mathrm{d}f(t, S) = \left(f_t + \mu S f_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS}\right) \mathrm{d}t + \sigma S f_S \mathrm{d}B \\ &= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$i.e. \quad \log(S) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B.$$

Al integrar esta suma de ecuaciones diferenciales lineales obtenemos:

$$\log(S_t) - \log(S_0) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) t + \sigma B_t$$

$$i.e. \quad S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma B}.$$

Note que desafortunadamente para el caso determinista, la derivada de $\log(S)$ no es $1/S$. Por ello se obtienen otras expresiones que consideran la aparición de nuevos términos de incertidumbre. En este caso μ representa la tasa promedio de crecimiento del stock y σ la incertidumbre con la que evoluciona. Resulta sencillo checar que, usando la técnica de la función generadora de momentos

$$\mathbb{E}_t S_T = S_t e^{\mu(T-t)}.$$

Primera aproximación para derivar el modelo de Black-Scholes.

El precio del stock y el efectivo libre de riesgo evolucionan como sigue:

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W, \quad \text{y}$$

$$\frac{\mathrm{d}B}{B} = r\mathrm{d}t.$$

Usando el lema de Itô se obtiene

$$\mathrm{d}V = \left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + \mu S V_S\right)\mathrm{d}t + \sigma S V_S \mathrm{d}W.$$

Donde, si queremos construir un portafolios replicante autofinanciado (x, y) de efectivo x y stock y para esta opción. El valor de este portafolios es

$$\pi = xB + yS.$$

En tiempo continuo, ser autofinanciado significa que

$$\mathrm{d}\pi = x\mathrm{d}B + y\mathrm{d}S.$$

Para replicar, nosotros queremos que tanto V como π siguen a las mismas EDEs.

$$\mathrm{d}\pi = (xrB + y\mu S)\,\mathrm{d}t + y\sigma S\mathrm{d}W.$$

Por lo que al expresar a la volatilidad en términos de $\mathrm{d}V$ y $\mathrm{d}\pi$, y si se hace $y = V_S$, entonces se expresa en términos de la deriva, para obtener

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} = xrB.$$

Con esta elección, $\pi = V$, se puede escribir $xB = \pi - yS = V - SV_S$. Al sustituir estas variables en la ecuación anterior se obtiene

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0.$$

que es la ecuación de Black-Scholes.

Segunda aproximación para derivar el modelo de Black-Scholes.

Aquí exhibimos un método cuya idea ha sido presentada por Wilmott, Howison y Dewynne.

$$\frac{\mathrm{d}S}{S} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W.$$

Ahora el lema de Itô permite obtener como antes:

$$\mathrm{d}V = \left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + \mu S V_S\right)\mathrm{d}t + \sigma S V_S \mathrm{d}W.$$

Y también construimos el portafolios

$$\Pi = V - \Delta S,$$

que consiste de una opción y un corto de stock ΔS. Entonces el cambo instantáneo queda definido mediante

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\Pi &= \mathrm{d}V - \Delta \mathrm{d}S. \\ &= \left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + \mu S\left(V_S - \Delta\right)\right)\mathrm{d}t + \sigma S\left(V_S - \Delta\right)\mathrm{d}W. \end{aligned}$$

Elegimos $\Delta = V_S$ a modo de eliminar el término que contiene a la diferencial estocástica $\mathrm{d}W$. Ahora el portafolios crece con una tasa determinista. Mediante un argumento de no arbitraje, esta tasa debería ser igual a r, *i.e.*

$$\mathrm{d}\Pi = \left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS}\right)\mathrm{d}t = r\Pi \mathrm{d}t = r\left(V - SV_S\right)\mathrm{d}t.$$

Al reordenar esta ecuación obtenemos finalmente la de Black-Scholes

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0.$$

En el método 1 se elige un portafolios autofinanciado de efectivo y stock para replicar la opción. En el método 2, elegimos un portafolios de la opción y el stock para replicar efectivo.

¿Qué es la Delta-cobertura contra un riesgo?

En el lenguaje financiero, la opción delta se refiere al monto de stock necesario para cubrir la posición de la opción. Esto se muestra de manera explícita en el método 2, donde $\Delta = V_S$ es el monto de stock que se requiere para ser vendido y hacer del portafolios Π instantaneamente libre de riesgo. En el método 1, la delta viene dada por $y = V_S$ y aquí este es el monto del stock que necesita para ser *comprado*, puesto que nosotros estamos replicando la opción y no el efectivo como en el método 2. En el mundo perfecto de Black-Scholes donde la incertidumbre es manejada por un movimiento browniano estándar y el tiempo es continuo, la cobertura-delta es una estrategia perfecta. De manera mas real, la cobertura-delta elimina una carga de incertidumbre del orden del riesgo. Ver Bjork para una descripción más detallada de otros tipos de cobertura como la neutral-Gamma.

Tercera aproximación para derivar el modelo de Black-Scholes.

En la medida del mercado $\mathbb{P}$,

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW = r dt + \sigma \left(dW + \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right).$$

Si $\frac{\mu - r}{\sigma}$ es suficientemente bien comportado (y esto para el caso del parámetro constante dentro del caso del Black-Scholes clásico) , podemos reescribir $dW + \frac{\mu - r}{\sigma} dt$ como $d\tilde{W}$, un movimiento browniano estándar bajo una medida de probabilidad equivalente (y en este caso única) $\tilde{\mathbb{P}}$. Esto es una consecuencia del teorema de Girsanov. Bajo esta nueva medida

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma d\tilde{W}.$$

Puesto que la tasa promedio de crecimiento del stock bajo esta nueva medida es r, reconocemos a $\tilde{\mathbb{P}}$ como la medida ajustada al riesgo. De hecho, puede ser verificado que el proceso de precios relativos $Z = B^{-1}S$ es una martingala bajo esta medida. Ahora que si $V(t, S)$ es el precio de una opción, entonces el lema de Itô nos proporciona

$$dV = \left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S \right) dt + \sigma S V_S dW.$$

En la medida ajustada al riesgo, todos los activos crecen a la tasa promedio r, *i.e.* podemos escribir

$$\tilde{\mathbb{E}}[\mathrm{d}V] = \left(V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S\right)\mathrm{d}t = rV\mathrm{d}t.$$

integrando hasta el instánte t y reorganizando los términos se obtiene la ecuación de Black-Scholes

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0.$$

Precio de Mercado del riesgo o cociente de Sharpe.

En la medida del mercado, μ representa la tasa promedio de crecimiento del stock. Puesto que el stock tiene riesgo, esperamos que $\mu > r$. La diferencia $\mu - r$ mide el monto del riesgo inherente en el stock. De esa manera σ, es la medida de volatilidad, o riesgo en sentido amplio del mercado. La cantidad

$$\frac{\mu - r}{\sigma}.$$

por tánto, representa el retorno en exceso sobre la tasa libre de riesgo para el stock, normalizado por la volatilidad del mercado. Este es llamado el precio de mercado del riesgo.

Resolviendo la EDP de Black-Scholes.

La EDP de Black-Scholes es

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0,$$

sujeta a las condiciones en el borde

$$V(T, S(T)) = \Psi(S(T)).$$

Aquí, $V(t, S)$ es el precio del derivado al tiempo t, y este es igual a su valor dado el precio del stock al tiempo T obtenido mediate una función determinista en el tiempo correspondiente. Reconocemos de inmediato que se trata de una ecuación diferencial parcial *backward* de Kolmogorov, y también que la solución viene dada por

$$V(t,S) = e^{r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\Psi(S(T))\right].$$

Aquí, usamos la medida $\mathbb{Q}$ puesto que la correspondiente ecuación diferencial estocástica es

$$\frac{dS}{S} = r dt + \sigma dW.$$

La deriva es r, que significa que estamos en una medida ajustada al riesgo. La solución de esta ecuación diferencial estocástica es

$$S(T) = S(t)\exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma W_{T-t}\right\}.$$

Esto bajo la medida $\mathbb{Q}$, $S(T)$ está distribuida lognormal con parámetros $\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)$ y $\sigma^2(T-t)$, condicional a $S(t)$. En principio, al menos podemos evaluar la esperanza y el precio del derivado en un paso.

Existe por supuesto otro camino para resolver la EDP de Black-Scholes, al transformar esto en la ecuación estándar del calor. Esta aproximación ya la hemos presentado en el primer capítulo.

2.2.2 Valoración del precio de un Call europeo usando Black-Scholes.

Como bien se ha dicho con antelación, una opción call europea es un contrato que da el derecho (pero no la obligación) para comprar una unidad del stock subyacente para un precio predeterminado K, llamado el precio de *strike*, en una fecha futura especificada llamada la fecha de madurez, pero no antes, (por tanto europea a ms no poder). El pago de la call europea es

$$\Psi(S) = \max\{S-K, 0\}.$$

Black y Scholes han mostrado que el precio de una tal opción viene dado por

$$C(t,S,T,K) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2).$$

donde $\Phi(\cdot)$ denota la distribución acumulativa de una variable aleatoria gaussiana estándar $\mathcal{N}(0,1)$, y

$$d_{1,2} = \frac{\log(S/K) + (r \mp \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Demostración: Para probar esto, usamos la solución de Kolmogorov

$$C(t,S,T,K) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\max(S-k,0)\right].$$

Denotemos por $\omega_X(x)$ a la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria X. Entonces

$$\begin{aligned} C &= e^{-r(T-t)}\int_0^\infty \max\{S-K,0\}\,\omega_S(S)\mathrm{d}S \\ &= e^{-r(T-t)}\int_K^\infty (S-K)\omega_S(S)\mathrm{d}S \\ &= e^{-r(T-t)}\int_K^\infty S\omega_S(S)\mathrm{d}S - Ke^{-r(T-t)}\int_K^\infty \omega_S(S)\mathrm{d}S \\ &= \text{Término I} - \text{Término II} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Término II} &= Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}\left(S(T) > K\right) \\ &= Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}\left(\mathrm{Log}(S(T)) > \mathrm{Log}(K)\right) \\ &= Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}\left[\mathrm{Log}(S(t)) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\phi > \mathrm{Log}(K)\right] \\ &= Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}\left[\phi > \frac{\mathrm{Log}(K/S(t)) - \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] \\ &= Ke^{-r(T-t)}\mathbb{P}\left[\phi > -\frac{\mathrm{Log}(K/S(t)) - \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] \\ &= Ke^{-r(T-t)}\left(1 - \Phi(-d_2)\right) \\ &= Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Término I} &= e^{-r(T-t)}\int_K^\infty S\omega_S(S)\mathrm{d}S \\ &= e^{-r(T-t)}\int_{\mathrm{Log}(K)}^\infty e^Y\omega_Y(Y)\mathrm{d}Y \end{aligned}$$

donde $Y = \mathrm{Log}(S)$. Puesto que Y se distribuye normal.

$$\text{Término I} = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}\int_{\mathrm{Log}(K)}^\infty \exp\left(Y - \frac{\left[Y - \left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)\mathrm{d}Y$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{\mathrm{Log}(K)}^{\infty} \exp\left(Y - \frac{[Y-\mu_Y]^2}{2\sigma_Y^2}\right) \mathrm{d}Y \\
&= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{\mathrm{Log}(K)}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2}\left(-2\sigma_Y^2 Y + Y^2 - 2\mu_Y Y + \mu_Y^2\right)\right) \mathrm{d}Y \\
&= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{\mathrm{Log}(K)}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2}\left(Y^2 - 2(\mu_Y + \sigma_Y^2)Y + \right.\right. \\
&\qquad \left.\left.(\mu_Y + \sigma_Y^2)^2 - (\mu_Y + \sigma_Y^2)^2 + \mu_Y^2\right)\right) \mathrm{d}Y \\
&= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{\mathrm{Log}(K)}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2}\left(\left[Y - (\mu_Y + \sigma_Y^2)\right]^2 - (\mu_Y + \sigma_Y^2)^2 + \mu_Y^2\right)\right) \mathrm{d}Y \\
&= \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{}} \int_{\mathrm{Log}(K)}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2}\left(\left[Y - (\mu_Y + \sigma_Y^2)\right]^2 - 2\mu_Y\sigma_Y^2 - \sigma_Y^4\right)\right) \mathrm{d}Y \\
&= e^{\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2} \frac{e^{-r(T-t)}}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{\mathrm{Log}(K)}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2}\left(Y - (\mu_Y + \sigma_Y^2)\right)^2\right) \mathrm{d}Y
\end{aligned}
$$

Por un lado tenemos que

$$
\begin{aligned}
\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2 &= \log(S(t)) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t) + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t) \\
&= \log(S(t)) + r(T-t).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
e^{-r(T-t)} e^{\mu_Y + \frac{1}{2}\sigma_Y^2} = e^{\log(S(t))} = S(t).
$$

Por otro lado, si escribimos

$$
\begin{aligned}
U &= Y - \left(\mu_Y + \sigma_Y^2\right) \\
&= Y - \log(S(t)) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t).
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}} \int_{\mathrm{Log}(K)}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_Y^2}\left[Y - (\mu_Y + \sigma_Y^2)\right]^2\right) \mathrm{d}Y \\
&\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} \int_{\mathrm{Log}(K) - \log(S(t)) - (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}^{\infty} \exp\left(-\frac{U^2}{2\sigma_Y^2}\right) \mathrm{d}U.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si denotamos por $Z = U/\sigma_Y$, entonces la anterior integral nos permite obtener una expresión equivalente:

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\mathrm{Log}(K/S(t)) - \left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \mathrm{d}Z \\
= \; & \mathbb{P}\left[\pi > \frac{\mathrm{Log}(K/S(t)) - \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right] \\
= \; & \mathbb{P}[\phi > -d_1] \\
= \; & 1 - \Phi(-d_1) \\
= \; & \Phi(d_1).
\end{aligned}
$$

Por todo lo anterior, se tiene que

$$\text{Término I} = S\Phi(d_1).$$

Al sumar los términos I y II, obtenemos el resultado

$$C(t, S; T, K) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2). \quad \square$$

¿Porqué el parámetro μ no aparece en la fórmula de Black-Scholes?.

Los precios de los derivados usando Black-Scholes en términos del activo subyacente. Si queremos el precio del stock mismo, crean la necesidad de conocer a μ. Los retornos del stock se suponen con distirbución normal, y una de esas distribuciones puede ser descrita completamente mediante su media y su varianza. Puesto que al final se toman los valores esperados, podemos saber el primer momento de los retornos, de tal manera que ahora el precio del derivado resulta explícitamente dependiente del precio del stock mismo y del segundo momento de los retornos, en otras palabras, de la volatilidad.

Existe una analogia clara entre la definición de un patrón de medida (lineal por ejemplo, una vara) con ella se puede medir la longitud precisamente en términos de varas, simplemente se compara el patrón unidad (la vara) con la longitud del objeto o terreno a medir. Black-Scholes directamente no proporciona el precio del stock, sin embargo esta utiliza el precio del activo subyacente como dado y los precios de los derivados en términos del precio del subyacente del stock.

Días simulados	250
Precio Inicial	30
Media μ	10%
Volatilidad σ	20%

Tabla 2.1: Datos para la generación de la simulación —ver Figura 2.1 —.

Un ejemplo:

Podemos utilizar una simulación Monte Carlo para obtener distintos valores de "z". Para fines expositivos se muestra la figura 2.1 con el resultado obtenido de la simulación de precios accionarios para 250 días considerando, a manera de ejemplo, un precio accionario inicial de 30, con una media de 10% así como una desviación estándar de 20%.

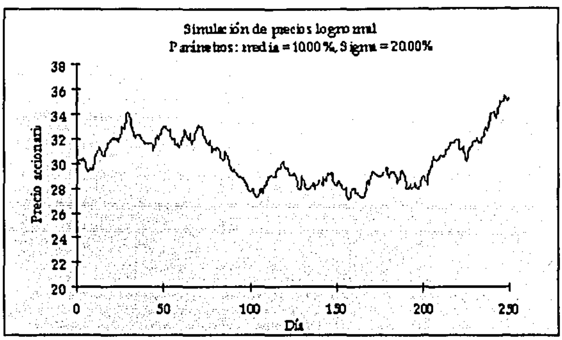

Figura 2.1: Simulación de precios (Excel).

Ecuación Diferencial de Black-Scholes.

Este modelo de valoración de opciones es uno de los más conocidos e interesantes. En 1973 cuando, coincidiendo con la apertura del CBOE (*Chicago Board Options Exchange*), Fisher Black y Myron Scholes sacaron a luz el primer modelo de valoración de opciones de tipo europeo teniendo como activo subyacente el valor de contado de la acción o índice elegidos sin pago de dividendos.

Fórmula de Black-Scholes para opciones sobre futuros.

La cotización del premio de una opción de compra se determina por la siguiente fórmula:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2)$$

donde:

$d_1 = \dfrac{\left[\ln\left(\frac{S}{X}\right)+\left(\frac{r+\sigma^2}{2}\right)T\right]}{\sigma\sqrt{T}}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

$C =$ Prima de la opción call.

$S =$ Cotización del activo subyacente.

$T =$ Tiempo hasta la expiración.

$r =$ Tipo de interés sin riesgo.

$X =$ Precio de ejercicio.

$\sigma^2 =$ Volatilidad de mercado (desviación estándar de los retornos de mercado en base anualizada).

$\ln =$ Logaritmo neperiano.

$N(d_1) =$ Función de distribución normal estándar.

$N(d_2) =$ Función de distribución normal estándar

Por el teorema de *put-call-parity*, una put con los mismos datos de tiempo T y precio de ejercicio X estipulados en el contrato accionario tenemos que $P = C - S + Xe^{-rt}$, sustituyendo C tenemos:

$$P = Xe^{-rt}N(d_2) - SN(-d_1).$$

S	**51.00**
X	**50.00**
T	**1**
Interés	**8.00%**
Precio designado call	**6.00**

Table 2.2: Datos para la simulación representada en la Figura 2.2.

Ejemplo 2:

El aplicar la fórmula propuesta por Black-Scholes no es difícil y de hecho el calcular la volatilidad es un simple despeje, igualmente fácil de representar en una hoja de cálculo. Un problema común en le precio de una opción es el siguiente: Dado un precio C para una opción Call, y dada una determinada cotización del activo subyacente S, una tasa de interés r, tiempo de expiración, y un precio de ejercicio X, determinar la volatilidad implícita (σ). En la siguiente figura se ilustra este proceso para un ejemplo ficticio:

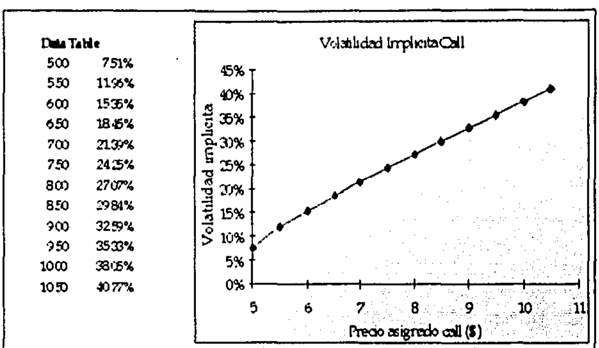

Figure 2.2: Simulación del valor de la volatilidad.

Es claro ver que la volatilidad correspondiente al precio designado de 6 es igual a un valor de 15.35.

Capítulo 3

El modelo Binomial.

La valoración de la opción determina el valor del proyecto o la oportunidad de inversión. La fórmula más conocida para llevar a cabo dicha valoración es, como ya se ha mencionado ampliamente en el capítulo anterior, la desarrollada por Black-Scholes que es la solución a un problema de cálculo estocástico. Seguidamente, Cox, Ross y Rubinstein desarrollaron un método binomial para ésta valoración que confía en los mismos principios económicos de arbitraje y con la ventaja de que, además de ser muy intuitivo, utiliza una matemática muy sencilla. Con esta aproximación simplificada, la mecánica para calcular el valor de una opción se reduce a recorrer hacia atrás un árbol de decisión, como hecho para un análisis de flujos de caja descontados o un análisis de decisión.

3.1 El modelo Binomial: la aproximación discreta y las bases de la aproximación numérica.

3.1.1 Nociones básicas.

El modelo binomial ilustra una manera de obtener el precio de las opciones en tiempo discreto. Supongamos que el tiempo corre entre 0 y T en N pasos de igual longitud δt.

El mercado consiste de 3 activos: un stock S, efectivo B y un derivado V.

La dinámica para la evolución temporal para esos tres activos se modela a través de:

- **Stock.**- Este es el activo que evoluciona bajo riesgo, es decir, su valor no exacto al tiempo $t+\delta t$ no es conocido si conoce el valor al tiempo t. Denotemos otra vez al precio al tiempo t de este activo por S_t. Dado[1] S_t, suponemos que $S_{t+\delta t}$ pueden tomar sólo dos valores, de ahí la etiqueta de binomial: $S-u$ (cuando el estado sube) o S_d (cuando el estado baja).

- **Efectivo.**- Este es un activo libre de riesgo. Denote por r_t a la tasa libre de riesgo prevaleciente entre los instantes t y $t+\delta t$. Supongamos que r_t es conocida al tiempo t. Si B_t es el valor conocido[2] de la cantidad de efectivo al tiempo t, entonces supondremos que

$$B_{t+\delta t} = B_t e^{r_t \delta t}.$$

  Sin pérdida de generalidad supondremos que $B_0 = 1$. Posteriormente especializaremos mucho más a nuestro modelo. Usualmente se supone que r_t es determinista, *i.e.* conocida al tiempo 0.

- **Derivado.**- Un derivado o un activo contingente sobre un stock es un activo que deriva el valor desde aquel subyacente que evoluciona bajo riesgo (el stock, en este caso). Al tiempo T, este valor (en términos del stock subyacente) no es ambiguo. En otras palabras, $V_T = \Psi(S_T)$, donde Ψ es conocido. Nuestro objetivo principal es establecer el precio y la cobertura para este derivado en cada instánte del tiempo $t > T$, y en particular al tiempo 0.

Otros objetivos secundarios son los siguientes:

- Precio y cobertura del derivado.

[1] La suposición implícita es que S_t es conocido seguramente al tiempo t. Un proceso de tal naturaleza se llama $\mathcal{F}_t-$*adaptado*. Un proceso se dice $\mathcal{F}_t-$*adaptado* si puede ser conocido su resultado al tiempo t. Observar que la primera vez que un movimiento browniano entra en un conjunto abierto es $\mathcal{F}_t-$*adaptado* pero la primera vez que sale no.

[2] Un tal proceso r_t es llamado proceso *predictible* o *predecible*. Observe que r_t es un proceso compuesto o *continuamente compuesto*. En ocasiones esta ecuación puede ser escrita como $B_{t+\delta t} = (1 + r_t\delta t)B_t$. En este caso, reemplace $e^{r_t\delta t}$ por $1 + r_t\delta t$ en todas las fórmulas.

- Iniciar el modelo binomial de tal manera que este converja al límite continuo por la derecha si los pasos temporales se hacen arbitrariamente pequeños.

3.1.2 El modelo binomial a un período.

El análisis a un período fundamenta la base del establecimiento del precio binomial. Sea S el precio del stock al tiempo 0. Al tiempo t, el precio del stock puede tomar alguno de los dos valores S_u si éste se mueve hacia arriba o S_d si éste se mueve hacia abajo.

$$S \quad \text{al tiempo } t = 0 \longrightarrow S_u \quad \text{o} \quad S_d \quad \text{en } t = 1.$$

Queremos establecer el precio y la cobertura de este stock.

Observe que aún no se ha especificado ningunos valores para la probabilidad. La principal razón es que el precio y la cobertura, por lo menos en principio, parecen ser independientes (en este modelo binomial) de las probabilidades asignadas para ir hacia arriba o hacia abajo. Este punto es importante y deberá ser discutido a fondo posteriormente.

Suponga que el pago del derivado es (bien conocido porque pudo ser observado) V_u si $S_1 = S_u$ y V_d si $S_1 = S_d$.

3.1.3 La interpretación intuitiva.

Un aspecto crucial es que se debe fijar una posición en el valor del derivado V mediante una elección apropiada de stock y de efectivo. Es necesario tomar una posición al tiempo 0 y mantenerla firme hasta llegado el tiempo 1, y dado que se ha elegido esa posición el valor al tiempo 1 es igual al valor de la opción: V_u si $S_1 = S_u$ y V_d si $S_1 = S_d$.

De manera formal, queremos construir un portafolios *autofinanciado* y *replicante* de stocks y efectivo para el derivado.

Un portafolios (x, y) es una combinación de un monto de efectivo x y una cantidad y de stocks. Un portafolios *autofinanciado* es aquel cuyo valor cambia sólo cuando los activos subyacentes registran cambios (y no por cambios en los montos de esos activos y efectivos). Dentro del contexto del modelo binomial a un período, el término autofinanciado significa que podemos adoptar una posición al tiempo 0 y si ésta es elegida, terminaremos el período sin hacer modificaciones a esa decisión y siempre trabajaremos con ella hasta el instánte 1. Esa elección correcta es llamada replicación. Un portafolios *replicante* es aquel cuyos valores se ven reflejados o siguen al valor destino (en este caso el del derivado) exactamente sobre el tiempo. Este es construido para tener el mismo valor terminal que su derivado. Por *no arbitraje*[3], este tiene por lo tanto el mismo valor que su derivado y todas las veces hasta la madurez.

3.1.4 Construyendo un portafolios replicante y autofinanciado.

Considere un portafolios $\Pi = (x, y)$ elegido al tiempo $t = 0$, que contiene x cantidad de efectivo e y de stock. El portafolios no es modificado hasta el tiempo $t = 1$. El valor al tiempo $t = 0$ es

$$\pi_0 = x + yS.$$

Al tiempo $t = 1$, el precio del stock puede moverse hacia arriba o hacia abajo. Efectivo, además, el riesgo crece con una tasa r sin importar lo que suceda. Puesto que no cambia x e y (*autofinanciado*), el valor Π al tiempo $t = 1$ es

$$\begin{aligned} \pi_1 &= \pi_u e^r + yS_u \quad \text{si } S_1 = S_u \text{ (estado hacia arriba)},\\ \pi_1 &= \pi_d e^r + yS_d \quad \text{si } S_1 = S_d \text{ (estado hacia abajo)}. \end{aligned}$$

Ahora que, para tener la seguridad de que el portafolios Π marcha, estipulamos que $\pi_u = V_u$ y $\pi_d = V_d$ (*replicación*), *i.e.* elegir x e y tales que

$$\begin{aligned} xe^r + yS_u &= V_u\\ xe^r + yS_d &= V_d. \end{aligned}$$

Este sistema de 2 ecuaciones lineales con 2 variables (x e y). Dado que la matriz de los coeficientes es no-singular, y $V_u \neq V_d$, esta tiene una única solución

$$x = \frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d} e^{-r} \quad ; \quad y = \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d}.$$

[3]Si dos activos tienen el mismo valor terminal, ellos deberían tener el mismo valor inicial o un perfil de ventas más caras o de compras mas baratas. Formalmente, un portafolios π se dice que exhibe arbitraje, si $\pi_0 \leq 0$ y $\mathbb{P}[\pi_T > 0] = 1$ o $\pi_0 < 0$ y $\mathbb{P}[\pi_T \geq 0] = 1$.

Con esta elección, π_1 siempre tiene el mismo valor que V_1. El hecho de tener no-arbitraje implica que V_0 debería de ser igual a π_0, *i.e.*

$$V_0 = \frac{S_u V_d - S_d V_u}{S_u - S_d} e^{-r} + \frac{V_u - V_d}{S_u - S_d} S. \tag{3.1}$$

Este es el precio explícito de la ecuación al tiempo $t = 0$. Por hipótesis, siempre sobre el lado derecho es conocido. El método de construcción de un portafolios autofinanciado y replicante también nos permite obtener -de paso- una estrategia de cobertura explícita relativa a un monto de efectivo x y una cantidad de stock y.

Hemos construido un portafolios de un monto de efectivo x y con una cantidad de y stocks que replica al valor del derivado al tiempo 1. Resuelto para x e y, bajo la condición de no-arbitraje, el precio del derivado al tiempo $t = 0$ es $x + yS$ y la estrategia de cobertura es $\pi_0 = (x, y)$.

3.2 La martingala del precio.

3.2.1 Probabilidades ajustadas al riesgo: definiendo la medida de la martingala.

La expresión en (3.1) puede ser reescrita como sigue:

$$V_0 = e^{-r} \left\{ \frac{Se^r - S_d}{S_u - S_d} V_u + \frac{S_u - Se^r}{S_u - S_d} V_d \right\}.$$

Observar que los coeficientes de V_u y V_d suman 1. Adicionalmente, proveen $\log(S_d) < r < \log(S_u)$, esos coeficientes son estríctamente positivos. Dos coeficientes positivos que suman 1 deberían ser interpretados como dos probabilidades. Reconociendo este hecho, definimos

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \tfrac{Se^r - S_d}{S_u - S_d} \\ \tilde{q} &= 1 - \tilde{p} = \tfrac{S_u - Se^r}{S_u - S_d}. \end{aligned}$$

$\tilde{p}$ puede ser interpretado como la probabilidad de ir hacia el estado de subida y $1 - \tilde{p}$ la probabilidad de que se mueva hacia abajo. Con esta definición de probabilidades, podemos escribir:

$$V_0 = e^{-r}\{\tilde{p}V_u + (1-\tilde{p})V_d\} = e^{-r}\tilde{\mathbb{E}}_0[V_1].$$

Aquí, $\tilde{\mathbb{E}}_0[\cdot]$ denota la esperanza tomada con respecto a las probabilidades $\{\tilde{p}, 1-\tilde{p}\}$, y evaluada usando toda la información al tiempo 0. Esta interpretación puede ser traducida a un discurso claro: "el valor presente del derivado es igual a su valor futuro esperado descontado, *dado* que (y no podemos aclararlo mejor), la esperanza es tomada con respecto a las probabilidades especialmente elegidas $\{\tilde{p}, 1-\tilde{p}\}$".

El conjunto de probabilidades $\tilde{\mathbb{P}} = \{\tilde{p}, 1-\tilde{p}\}$ es llamado la medida de probabilidad ajustada al riesgo, y las probabilidades son llamadas probabilidades riesgo-ajustadas. Esto debido a que bajo esta medida, se tiene que

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbb{E}}_0[V_1] &= e^r V_0 \quad \text{(como se ha mostrado anteriormente)},\\
\tilde{\mathbb{E}}_0[S_1] &= e^r S_0,\\
\tilde{\mathbb{E}}_0[B_1] &= B_1 = e^r B_0 \quad \text{(por la definición y además es independiente de la medida)},
\end{aligned}$$

y por ello, además, bajo la medida riesgo-ajustada *todos* los activos se *espera* que crezcan al menos a la misma tasa libre de riesgo r.

De hecho, una interpretación plena para establecer el precio del derivado puede ser reformulada como sigue: *el valor presente de un derivado es igual a su valor terminal esperado descontado por el riesgo ajustado, donde las esperanzas son calculadas usando toda la información disponible hasta el tiempo presente.* Esto es bien conocido por los economistas como la hipótesis de *esperanzas racionales.*

$$\tilde{\mathbb{E}}_0[S_1] = \tilde{p}S_u + (1-\tilde{p})S_d \doteq e^r S \quad \Rightarrow \quad \tilde{p} = \frac{Se^r - S_d}{S_u - S_d}. \tag{3.2}$$

La medida $\tilde{\mathbb{P}}$ se llama a veces la *medida de la martingala*[4], es llamada así porque el proceso de precios relativos $Z_t = B_t^{-1}S_t$ y $U_t = B_t^{-1}V_t$ son martingalas bajo $\tilde{\mathbb{P}}$. La razón por la que hay que trabajar de manera cuidadosa con los precios relativos es que el proceso estocástico de los precios relativos de un activo mide su ejecución comparada con

[4] Una martingala es un proceso constante en valor esperado, *i.e.* :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[|M_t|] < +\infty \quad \forall t, \quad y \quad \mathbb{E}_t[M_{t+T}] = M_t.$$

Observar que siempre, y de manera implícita especificamos una medida de probabilidad (en este caso $\mathbb{Q}$) en la definición de una martingala.

una cuenta bancaria libre de riesgo. En un mundo ajustado al riesgo, la ejecución relativa de un activo con riesgo (comparado con uno que no lo tiene) debería ser constante. Este es un enunciado establecido desde el principio de no-arbitraje. *La martingala del precio* es el nombre que se le da a la siguiente versión de nuestras ecuaciones del precio:

$$V_t = \tilde{\mathbb{E}}_t\left[(B.T/B_t)^{-1}V_T\right] = \tilde{\mathbb{E}}_t\left[\Psi(S_T)\exp\left(\int_t^T r(s)\mathrm{d}s.\right)\right]$$

lo cual es justamente la definición de una martingala escrita al modo tradicional.

3.2.2 Medida del mercado y medida de la martingala.

Las actuales probabilidades hacia arriba y hacia abajo deberían en general ser distintas de las asignadas por $\tilde{\mathbb{P}}$. Las actuales probabilidades definen la *medida del mercado* $\mathbb{P} = \{p, 1-p\}$. La medida riesgo-ajustada es, por lo tanto, una construcción matemática conveniente. Es útil comenzando porque puede ser utilizada para establecer correctamente el precio de los derivados a partir del precio del propio stock, desechando cualquier interpretación subjetiva de los precios futuros del stock, intuitivamente, esto es porque su definición incorpora los movimientos de los precios futuros (recordemos que $\tilde{p}$ depende de S_u y S_d). En este sentido, esto depende de los posibles valores futuros, por otra parte, S_u y S_d se van agregando, y con ello el modelo de precios quedaría totalmente determinado. Por contra, usando $\mathbb{P}$ se puede conseguir una aproximación del precio porque, de manera llana, habremos "descontado" la incertidumbre: primero porque la elección de S_u y S_d y en seguida por la de la probabilidad p.

3.3 Martingala del precio.

Los conceptos de probabilidades riesgo-ajustadas y martingala del precio son válidos en un marco de mayor generalidad que para el caso del modelo binomial a un período descrito en esta sección. De hecho, en lo que sigue describimos un procedimiento que puede ser utilizado para establecer el precio de los activos que razonablemente se comporten como activos contingentes:

- Dado el proceso de precio del stock $S_t \in \mathcal{F}_t$, una cuenta de efectivo libre de riesgo $B_t \in \mathcal{F}_{t-}$ y un derivado seguro V_t con un pago bien definido $V_T = \Psi(S_T)$, todos observados bajo la medida subjetiva del mercado $\mathbb{P}$.
- Construir el proceso de precios descontados del stock $Z_t = B_t^{-1}S_t$.
- Hacer la única medida de martingala equivalente (si ésta existe - ver abajo $\tilde{\mathbb{P}}$).
- $V_t = B_t\tilde{\mathbb{E}}_t[B_T^{-1}V_T] = B_t\tilde{\mathbb{E}}_t[B_T^{-1}\Psi(S_T)]$.

Este proceso marcha también con tasas de interés estocásticas, tanto como las esperanzas sean bien definidas.

Hemos visto dos métodos para obtener los precios de los derivados: mediante la construcción de un portafolios autofinanciado y replicante, y por el descuento bajo la medida de la martingala. Existe una conexión íntima entre los mercados con libre arbitraje completos[5] y las únicas medidas[6] equivalentes de martingalas. (incluir algunas referencias). Por todo lo anterior, enunciamos el principal resultado:

$$\begin{array}{ccc} \text{Mercado completo} & \Leftrightarrow & \text{existe una única medida} \\ \text{con libre arbritaje} & & \text{de martingala equivalente.} \end{array}$$

La existencia de una tal medida de martingala implica el no-arbitraje, y la unicidad de esta medida implica completitud, es decir, unicidad del precio.

[5]Un mercado completo es aquel en donde siempre es posible comprar y vender un activo.

[6]Las dos medidas de probabilidad $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ se dice que son equivalentes si en ellas se ha convenido que es imposible

$$\mathbb{P}(A) = 0 \quad \text{sí y sólo si} \quad \mathbb{Q}(A) = 0.$$

3.4 Un Modelo Binomial Multiperíodo.

3.4.1 Generalidades.

El modelo binomial multiperíodo es una extensión directa de la versión de un período descrita anteriormente. El procedimiento para precios de activos contingentes aparece a continuación:

- V_T está dada en cada nodo terminal del árbol.
- Usando el modelo de un solo período para el precio de un derivado en cada nodo hasta el penúltimo paso temporal $T - \delta t$.
- Repetir este procedimiento del precio hacia atrás un paso cada vez hasta encontrar al precio al tiempo 0.

3.4.2 Precio de una Opción Europea.

Como es bien conocido, una opción europea es aquella que puede ser ejercida en la fecha de expiración T. En esta sección, ilustramos el modelo multiperíodo al desarrollar de manera explícita la ecuación del precio para opciones europeas sobre un árbol binomial particular. Sea el valor terminal de la opción la cantidad $V_T = \Psi(S_T)$.

Suponga que el árbol queda descrito como sigue: pongamos que la tasa de interés es constante r. Si el precio del stock al tiempo t es S_t, entonces el precio del stock al tiempo $t+\delta t$ puede asumir dos valores: $S_t u$ o $S_t d$, donde u y d son constantes a lo largo del tiempo. Esta especificación particular tiene la propiedad computacional que las probabilidades de la martingala son las mismas para cada nodo del árbol. Entonces se puede checar que

$$\tilde{p} = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d}.$$

Ahora suponga que el tiempo actual es $t_n = n\delta t$, y el precio actual del stock es S_n.

El número de pasos temporales total es $N-n$. En cada uno de ellos, el precio del stock puede ir hacia arriba (con un factor u) o hacia abajo (con un factor d). El precio final del stock (al tiempo $N\delta t = T$) por lo tanto, está ligado al conjunto

$$S_N = \left\{ S_{N,i} = S_n u^i d^{N-n-i} \quad : \quad i = 0, 1, \cdots, N-n. \right\}.$$

Por todo ello se concluye que el valor de la opción europea es el conjunto

$$V_N = \left\{ \Psi(S_n u^i d^{N-n-i}) \quad : \quad i = 0, 1, \cdots, N-n \right\}.$$

Siendo $\tilde{p}$ la probabilidad ajustada al riesgo de un movimiento hacia arriba. S_n puede evolucionar a $S_{N,i}$ mediante una sucesión consistente de i movimientos hacia arriba y $N-n-i$ movimientos hacia abajo. La probabilidad de riesgo-ajustada de estos hechos está dada por

$$\binom{N-n}{i} \tilde{p}^i (1-\tilde{p})^{N-n-i}.$$

El valor presente de la opción es el pago esperado descontado bajo esta medida. A partir de la teoría desarrollada anteriormente, obtenemos que

$$V_n = e^{r(N-n)\delta t} \sum_{i=0}^{N-n} \binom{N-n}{i} \tilde{p}^i (1-\tilde{p})^{N-n-i} \Psi(S_n u^i d^{N-n-i}).$$

3.4.3 Precio de una Opción Americana.

Como es bien conocido, una opción americana es aquella que puede ser ejercida en cualquier instánte del tiempo t anterior al tiempo de la maduración. Puesto que este da al poseedor mas derechos que una opción europea, esperamos tener por ello también cierto valor agregado. En particular, el valor de una opción americana nunca puede ser menor que el pago, puesto que éste siempre es posible que se realice el pago inmediatamente al ser ejercido.

El hecho de una pronta ejecución hace que las valorizaciones de las opciones americanas sobre un árbol binomial sean marginalmente más difíciles. La modificación es que ahora pueden ser ejercidas en cualquier nodo, tal que para cada nodo es necesario probar cuando éste es óptimo para poseer por un período mas, o ejercitarlo de inmediato.

El valor para una opción americana queda por lo tanto dado por

$$V_T = \Psi(S_T)$$
$$V_t = \max\left\{\Psi(S_t), e^{-r}\tilde{\mathbb{E}}_t[V_{t+1}]\right\}.$$

Aquí, $\Psi(S)$ es la función pago. Si la opción es poseída hasta la madurez, entonces el pago es $\Psi(S_T)$. De otro modo, tenemos la posible elección: podemos ejercer inmediatamente y realizar $\Psi(S_t)$, o elegir esta alternativa en el siguiente paso temporal. Como es usual, trabajamos en retroceso en el tiempo.

3.5 Límites continuos en el tiempo desde árboles binomiales.

En esta sección estudiamos el modelo binomial en un límite en tiempo continuo. La principal pregunta es: obtener una especificación en tiempo continuo para la evolución del precio del stock (o de cualquier otro proceso estocástico), es por ello que deberíamos construir un árbol binomial que converja a este proceso a medida que los pasos temporales se hagan suficientemente pequeños.

3.5.1 La difusión límite de Feller.

Sea Z_i con $i = 1, \cdots, N$ una familia de variables aleatorias Bernoulli

$$\mathbb{P}[Z_i = 1] = p$$
$$\mathbb{P}[Z_i = -1] = q = 1 - p.$$

Una conclusión directa es que

$$\mathbb{E}[Z_i] = pq$$
$$\mathrm{Var}[Z_i] = 4pq.$$

Ahora construimos el árbol binomial. Dado que el tiempo evoluciona desde 0 a $T = N\Delta t$ en N pasos iguales de longitud Δt, con $t_n = n\Delta t$. Sea X_n el valor de una variable aleatoria al tiempo t_n. Dada $X_n = x$, especificamos que $X_{n+1} = x + \Delta x$ con probabilidad

p y $x-\Delta x$ con probabilidad $q = 1-p$, y que los incrementos sucesivos son independientes. Si $X_0 = x_0$ es dado, entonces podemos escribir el proceso $\{X_n\}$ en términos de la variable aleatoria Bernoulli anterior como

$$X_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n} Z_i \Delta x.$$

Como los incrementos son independientes se verifica que

$$\mathbb{E}_0 X_n = x_0 + \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[Z_i]\Delta x = x_0 + n(p-q)\Delta x,$$

$$\mathrm{Var}_0 X_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[Z_i](\Delta x)^2 = 4npq(\Delta x)^2.$$

Aquí mantenemos a T fijo y hacemos que $N \longrightarrow \infty$ de tal manera que el proceso $\{X_n\}_{n=0}^{N}$ converge a un límite continuo $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[X_{t+\tau}\right] = \mu\tau \\ &\mathrm{Var}_t\left[X_{t+\tau}\right] = \sigma^2\tau. \end{aligned}$$

donde μ y σ son constantes. En otras palabras, queremos elegir parámetros Δx , Δt y p tales que el proceso en tiempo discreto descrito anteriormente converge a un límite continuo en tiempo X_t con media instantánea μ y varianza instantánea σ^2.

Sin pérdida de generalidad, si $x_0 = 0$ las expresiones para la media y la varianza se reescriben como

$$\mathbb{E}_0[X_n] = X_0 + \frac{t_n}{\Delta t}(p-q)\Delta x,$$

$$\mathrm{Var}_0[X_n] = 4\frac{t_n}{\Delta t}pq(\Delta x)^2.$$

Ahora, al tomar el límite cuando Δx, $\Delta t \longrightarrow 0$ se obtiene que $\mathbb{E}_0[X_n]$ y $\mathrm{Var}_0[X_n]$ están acotados. Mas específicamente,

$$\mathbb{E}_0[X_n] \longrightarrow \mu t \quad ; \quad \mathrm{Var}_0[X_n] \longrightarrow \sigma^2 t.$$

En virtud de que tiene varianza finita entonces el cociente $\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}$ es también acotado. Por lo tanto si escribimos

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \sigma^2 \quad \text{lo cual implica que} \quad \Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}.$$

Como la media es finita se tiene también que

$$(p-q)\frac{\Delta x}{\Delta t} = \mu,$$

y sustituyendo a Δx nos permite obtener

$$(2p-1)\sigma\sqrt{\Delta t} = \mu.$$

Finalmente al reordenar los términos esto a

$$p = \frac{1}{2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma},$$

$$q = \frac{1}{2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}.$$

De manera que el proceso discreto converge a un proceso en tiempo continuo con media μ y varianza σ^2 por unidad de tiempo, dado que el paso temporal y la medida de probabilidad satisfagan:

$$\Delta x = \sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$p, q = \frac{1}{2} \pm \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}.$$

Note que esto está escrito en términos del paso temporal, y no se puede tomar cualquier árbol binomial. Es necesario elegir el tamaño del paso y las probabilidades de una forma especial para ser consistentes con el límite en tiempo continuo.

3.6 Aplicación a las finanzas en tiempo continuo.

En finanzas, modelamos los retornos de los stocks más que los precios de los stocks mismos. La razón es que a 10 unidades monetarias cambia un stock negociado a 1000 unidades monetarias y es menos significativo que el mismo cambio de un stock negociado a 50 unidades monetarias. En tiempo continuo, el retorno sobre un stock es definido como dS/S, y esta es una cantidad que modelamos como un movimiento browniano con media μ y volatilidad σ^2.

En tiempo discreto, además, los retornos quedan definidos a través de las series en diferencias de los precios transformados por el logaritmo

$$X_t = \log S_{t-1} - \log S_t = \log\left(\frac{S_{t-1}}{S_t}\right).$$

Esto puede ser justificado matemáticamente mediante la aproximación

$$\log\left(\frac{S_{t-1}}{S_t}\right) = \log\left(1 + \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t}\right) = \log\left(1 + \frac{\Delta S_t}{S_t}\right) \sim \frac{\Delta S_t}{S_t}.$$

Otra manera de justificar el uso de los logaritmos de los precios queda motivado por el propio hecho de que una cuenta de efectivo libre de riesgo genera $B_n = (1+r)^n$ en tiempo discreto. Al graficar $\log B_t$ da una línea recta, lo que refleja el hecho de que el crecimiento del dinero a una tasa constante, debería estar relacionado con la gráfica de e^{rt}, este hecho está fundado en la premisa de que puede ser identificado de manera sencilla y visual a líneas rectas más que a gráficas exponenciales).

Por todo lo anterior, si deseamos modelar los retornos como un movimiento browniano aritmético con media μ y volatilidad σ^2, entonces el árbol binomial debería tener la siguiente especificación:

$$X = \begin{cases} X + \sigma\sqrt{\Delta x} & \text{con probabilidad} \quad p = \frac{1}{2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}, \\ X - \sigma\sqrt{\Delta x} & \text{con probabilidad} \quad q = \frac{1}{2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}, \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$S = \begin{cases} Se^{\sigma\sqrt{\Delta x}} & \text{con probabilidad} \quad p = \frac{1}{2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}, \\ Se^{-\sigma\sqrt{\Delta x}} & \text{con probabilidad} \quad q = \frac{1}{2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}. \end{cases}$$

Parte II

Opciones Reales en Petróleo.

Capítulo 4

Teoría de Opciones Reales.

El estudio de las Opciones Reales es uno de los desarrollos más importantes en el análisis de decisiones de negocios de los últimos cien años. Por primera vez, se cuenta con un marco que integra a todas las decisiones de dirección bajo una forma extrema de incertidumbre, la técnica más conocida casi siempre es la de caminatas aleatorias, que es (aproximadamente) el comportamiento visto en los mercados financieros y, en el cual, los fenómenos económicos nos presentan otra visión como mercados comerciales altamente competitivos. El análisis con Opciones Reales nos permite integrar nuestras decisiones de inversión, operaciones y desinversiónes, incluyendo un cambio del mercado.

4.1 Introducción al Análisis con Opciones Reales.

Una de las diferencias más relevantes entre las Opciones Reales y los métodos de análisis tradicionales es que, en el análisis tradicional de flujos descontados o de los árboles de decisión, usando una alta tasa de descuento ajustada al riesgo hacemos proyecciones del futuro y tratamos a estas proyecciones como si resultaran plenamente ciertas. Por otro lado, el análisis con Opciones Reales considera que el futuro es impredecible y que sólo sabemos el estado del mercado día a día (más la tasa en la cual el estado diario es un valor perdido como una guía al futuro) , además de usar una tasa de descuento libre de riesgo.

También, podemos tener más de un factor aleatorio o fuente de incertidumbre, en el caso de la explotación de recursos existe la fuente de incertidumbre financiera del precio del producto y la incertidumbre técnica generada por los riesgos de la explotación de ese producto (estos pueden ser independientes o no en el sentido probabilista pero afectan las decisiones).

Por otra parte, contar con opciones compuestas nos permite establecer 'cadenas' de opciones en las cuales el pago de la primera opción es el valor de adquisición de la siguiente opción de la cadena.

El estudio de las Opciones Reales utiliza muchas herramientas financieras. Las variaciones, las funciones de pago, los vencimientos y tipos de opciones se extienden a su equivalente en Opciones Reales. Sin embargo, la diferencia clave entre una opción financiera y una Opción Real es que una decisión acerca de una opción financiera no altera el valor de la empresa mientras que una decisión con opciones reales debería cambiar los recursos y, por tanto, el valor de ella.

El análisis de opciones es un proceso lógico de decisión, que de preferencia, cuantitativamente compara los beneficios y dificultades de diferentes alternativas de solución.

Estas técnicas o métodos cuantitativos y cualitativos para la toma de decisiones son unas herramientas de gran apoyo a la gestión gerencial de una organización sobre todo, en situaciones de gran incertidumbre.

4.2 Los métodos clásicos de valoración comparados con Opciones Reales.

El objeto del presupuesto de capital es encontrar proyectos de inversión cuya rentabilidad supere al coste de llevarlos a cabo. El principal problema, dejando a un lado el de la determinación del costo de oportunidad del capital del proyecto, es el de la valoración del activo que se creará al realizar la inversión (una fábrica, un barco, una refinería, etcétera). Así, cuando valoramos un proyecto de inversión realizamos una previsión de los flujos de caja que promete generar en el futuro y procedemos a calcular su valor actual con objeto de poder comparar, en un momento determinado del tiempo (el actual), el valor global de dichos flujos de caja con respecto al desembolso inicial que implica la realización de dicho proyecto. Uno de los criterios de comparación más comúnmente empleados en las empresas es el del valor presente neto (VPN) que, además, es el criterio más acorde al objetivo general de todo directivo: la maximización del valor de la empresa para el accionista; puesto que indica exactamente cuanto aumentará de valor una empresa si realiza el proyecto que se está valorando. Su ecuación general es la siguiente:

$$\text{VPN} = -A + \sum_{j=1}^{n} \frac{FC_j}{(1+k)^j}. \tag{4.1}$$

donde el desembolso inicial del proyecto viene representado por A, los diversos flujos de caja por FC_j, el horizonte temporal del proyecto por n, y la tasa de descuento (el coste de oportunidad del capital) apropiada al riesgo del proyecto por k. Este criterio considera factible un proyecto de inversión cuando el VAN es positivo, es decir, cuando la totalidad de los flujos de caja esperados descontados a una tasa apropiada al riesgo del proyecto supera al coste de realizarlo. Por el contrario, si el VPN fuese negativo, sería no aconsejable llevar a cabo el proyecto.

Sin embargo, es necesario tener en cuenta que cuando se analiza un proyecto de inversión bajo la óptica del criterio de valoración VPN se están realizando una serie de supuestos que afectan al resultado obtenido. Los principales son:

H_1.- Los flujos de caja que el proyecto promete generar pueden reemplazarse por sus valores medios esperados y éstos se pueden tratar como valores conocidos desde el principio del análisis. Este supuesto implica ignorar que la directiva puede alterarlos al adaptar su gestión a las condiciones imperantes en el mercado durante toda la vida del proyecto. Esta flexibilidad crea valor para el proyecto de inversión, valor que el método VPN, por ejemplo, es incapaz de reflejar.

H_2.- La tasa de descuento es conocida y constante, dependiendo únicamente del riesgo del proyecto. Lo que implica suponer que el riesgo es constante, suposición falsa en la mayoría de los casos, puesto que el riesgo depende de la vida que le quede al proyecto y de la rentabilidad actual del mismo a través del efecto del apalancamiento operativo. Por tanto, la tasa de descuento varía con el tiempo y, además, es incierta.

H_3.- La necesidad de proyectar los precios esperados a lo largo de todo el horizonte temporal del proyecto es algo imposible o temerario en algunos sectores, porque la gran variabilidad de aquéllos obligaría a esbozar todos los posibles caminos seguidos por los precios al contado a lo largo del horizonte de planificación. Como esto es muy difícil de hacer, de cara a la aplicación del VPN, arbitrariamente se eligen unos pocos de los muchos caminos posibles.

En resumen, las principales limitaciones del VPN surgen por realizar una analogía entre una cartera de bonos sin riesgo y un proyecto de inversión real. Mientras que la analogía apropiada dependerá del tipo de proyecto analizado, así en el caso de los recursos naturales, en los proyectos de I + D y en otros tipos de proyectos reales las opciones financieras resultan ser una mejor analogía que las carteras de bonos.

El desafío para el analista financiero consiste en la elección de un activo cuyo valor es conocido y cuyas características sean lo más parecidas posibles al activo cuyo valor es necesario determinar. Como esto implica un elemento de juicio, el presupuesto de capital es más un arte que una ciencia, aunque después de la lectura de determinados libros de texto parezca, equivocadamente, que todo el problema se circunscribe a la mera aplicación de la regla del descuento de los flujos de caja esperados.

En todo caso, los métodos clásicos de valoración de proyectos, que son idóneos cuando se trata de evaluar decisiones de inversión que no admiten demora (ahora o nunca), subvaloran al proyecto si éste posee una flexibilidad operativa (se puede hacer ahora, o más adelante, o no hacerlo) u oportunidades de crecimiento contingentes. Lo que sucede cuando la directiva puede sacar el máximo partido del riesgo de los flujos de caja. Por tanto, *la posibilidad de retrasar un desembolso inicial irreversible puede afectar profundamente la decisión de invertir. Esto, también, erosiona la sencilla regla del valor actual neto, y desde aquí el fundamento teórico de los típicos modelos de inversión neoclásicos.*

Esto último nos lleva a redefinir la regla de decisión del VPN que, recordemos, recomendaba aceptar un proyecto cuando el valor de una unidad de capital era superior o igual a su coste de adquisición e instalación. Esta regla es incorrecta porque ignora el coste de oportunidad de ejecutar la inversión ahora, renunciando a la opción de esperar para obtener nueva información. Por tanto, para que un proyecto de inversión sea efectuable el valor actual de los flujos de caja esperados deberá exceder a su coste de adquisición e instalación, al menos, en una cantidad igual al valor de mantener viva la opción de inversión.

Como veremos a lo largo de este capítulo, la valoración de proyectos a través de la metodología de las opciones reales se basa en que la decisión de invertir puede ser alterada fuertemente por: la irreversibilidad, la incertidumbre y el margen de maniobra del decisor.

4.3 Los proyectos de inversión analizados como opciones reales.

La posibilidad de realizar un proyecto de inversión tiene un gran parecido con una opción para comprar una acción. Como bien se ha dicho a lo largo de este escrito, ambos implican el derecho, pero no la obligación, de adquirir un activo pagando una cierta suma de dinero en cierto momento o, incluso, antes. Por ejemplo, recordemos que una opción de compra y su sistema de valoración a través de la fórmula de Black & Scholes para las opciones de tipo europeo que no pagan dividendos, se basa en cinco variables: el precio de la acción S, el precio de ejercicio E, el tiempo hasta el vencimiento T, la tasa de interés sin riesgo r y la desviación típica de los rendimientos de la acción σ.

Por su parte, la mayoría de los proyectos de inversión implican la realización de un desembolso para comprar o realizar un activo; lo que es análogo a ejercer una opción. Así (ver tabla 4.1), la cantidad invertida es el precio de ejercicio E y el valor del activo comprado o producido es el precio de la acción S, el tiempo que la empresa puede esperar sin perder la oportunidad de invertir es el tiempo hasta el vencimiento T, y el valor del riesgo del proyecto viene reflejado por la desviación típica de los rendimientos de la acción σ. El valor temporal viene dado por la tasa de interés sin riesgo r_f.

La posibilidad de postponer una inversión proporciona a la empresa un tiempo adicional para examinar la tendencia de los acontecimientos futuros reduciendo, al mismo tiempo, la posibilidad de incurrir en costosos errores debido a que los acontecimientos se han desarrollado en contra de lo previsto. Cuanto mayor sea el intervalo de tiempo T, que se tiene de margen para demorar la decisión final, mayor será la posibilidad de que los acontecimientos se desarrollen de forma favorable aumentando la rentabilidad del proyecto. Es evidente, que si dichos acontecimientos fuesen contrarios a los intereses del decisor, éste renunciaría a realizar el proyecto evitando así una pérdida innecesaria.

En cuanto al riesgo asociado al proyecto σ, es preciso señalar que cuanto más grande sea más valiosa será la opción sobre la inversión. Ello se debe a la asimetría existente entre pérdidas y ganancias; así, un aumento de las operaciones hará aumentar la positividad del VPN mientras que un gran descenso de aquéllas no necesariamente hará que el VPN

Proyecto de inversión	Variable	Opción de Compra
Desembolsos requeridos para adquirir el activo	E	Precio de ejercicio
Valor de los activos operativos que se van a adquirir	S	Precio de la acción
Longitud del tiempo que se puede demorar la decisión de inversión	T	Tiempo hasta el vencimiento
Riesgo del activo operativo subyacente	σ^2	Varianza de los rendimientos
Valor temporal del dinero	r_f	Tasa de interés sin riesgo

Tabla 4.1: Significado de los elementos de una opción financiera y los de una opción real.

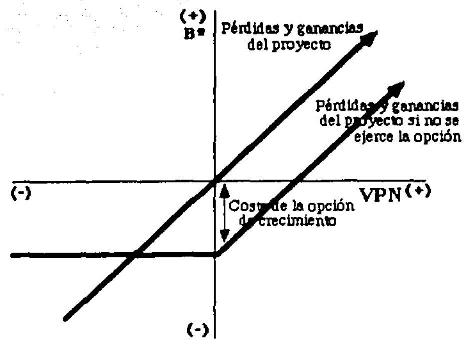

Figura 4.1: Asimetría de perdidas y ganancias.

sea negativo (porque, en este caso, se pueden eliminar las pérdidas al no ejercer la opción de inversión (ver fig. 4.1). Claro que hay que tener en cuenta que aunque un aumento del riesgo del proyecto puede aumentar el valor de la opción, en el contexto del presupuesto de capital, podría aumentar el coeficiente de volatilidad beta del activo y reducir el valor actual neto del escenario base a través del incremento de la tasa de descuento. Por ello, habrá casos en que el aumento de valor de la opción supere al descenso del VPN básico pero existirán otros en que ocurra exactamente lo contrario. Concretando, un aumento del valor de la opción de invertir no significa que aumente el deseo de hacerlo, puesto que el aumento del riesgo reduce el deseo de invertir (o retrasa la decisión de inversión) debido a que el incremento en el valor de la oportunidad de inversión se debe, precisamente, al valor de la espera. Por tanto, el aumento del valor de la opción de inversión refleja exactamente la necesidad de esperar todo lo que se pueda antes de proceder a realizar el proyecto de inversión.

Por la misma razón un aumento del tipo de interés sin riesgo r_f produce un descenso del valor del activo (al penalizar el valor actual de los flujos de caja esperados) y, al mismo tiempo, reduce el valor actual del precio de ejercicio. Por lo general, pero no siempre, el efecto neto resultante induce a pensar que un aumento del tipo de interés sin riesgo provoca un ascenso del valor de los proyectos con opciones de expansión (esto es, que un aumento del tipo de interés sin riesgo suele reducir con más fuerza el valor actual del precio de ejercicio que el valor del activo).

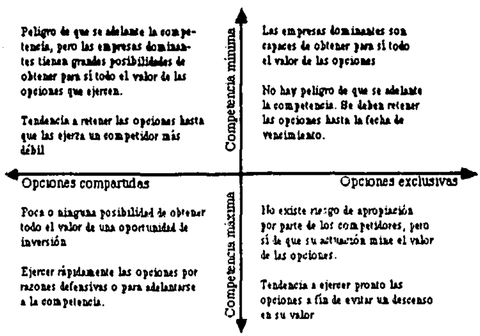

Figura 4.2: Recomendaciones para el ejercicio de la opción.

Kester observó que las empresas tienden a comprometer fondos en las inversiones más pronto que tarde, a pesar de la posibilidad de diferir en el tiempo dicho compromiso. La razón estriba en que una opción es más valiosa cuando se posee en exclusiva que cuando es compartida porque los competidores pueden replicar las inversiones de la empresa consiguiendo con ello la reducción de la rentabilidad del proyecto. Así que éste último se realizará antes de la fecha de vencimiento de la opción siempre que el coste de su diferimiento supere al valor sacrificado al ejercer la opción de inversión anticipadamente. Esto suele ocurrir cuando (ver figura 4.2.):

a) Las opciones son compartidas

b) El VPN del proyecto es alto

c) Los niveles de riesgo y de tipo de interés son bajos

d) Hay una gran competitividad en el sector

4.4 Relación entre los proyectos de inversión y las opciones a través de su valoración.

Como ya vimos anteriormente la regla de decisión del VPN dice que un proyecto es factible *siempre* que su VPN sea positivo lo que se produce cuando el valor actual de los flujos netos de caja esperados, $VA(FC)$, supera al valor actual de los desembolsos necesarios para realizar el proyecto, $VA(A)$. Podríamos reescribir la regla anterior y ponerla en forma de cociente con lo que obtendríamos el valor del índice de rentabilidad IR:

$$\mathrm{I\,R} = \frac{\mathrm{VA(FC)}}{\mathrm{VA(A)}} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{VA(E)}} = \begin{cases} \text{factible si} & \mathrm{IR} > 1, \\ \text{no factible si} & \mathrm{IR} \leq 1, \end{cases} \tag{4.2}$$

obsérvese como utilizando las variables que vimos en la tabla 4.1, el $VA(FC)$ puede ser sustituido por S -el valor actual del activo- y, a su vez, el $VA(A)$ puede sustituirse por $VA(E)$ -el valor actual del precio de ejercicio. Hay que resaltar que el VPN y el IR en la fecha de vencimiento de la opción coinciden a la hora de decidir si un proyecto es o no efectuable, lo que no tiene porqué ocurrir antes de la misma.

$$\text{Opciones de compra} = \begin{cases} \text{dentro del dinero si ocurre que} & \mathrm{IR} > 1, \\ \text{fuera del dinero si ocurre que} & \mathrm{IR} < 1, \end{cases} \tag{4.3}$$

De la misma forma, una opción de compra será ejercida siempre que $S >$ VA(E), es decir, siempre que (en este caso la opción de compra se denomina dentro del dinero). Por tanto, el sistema tradicional para decidir si se invierte en un proyecto de inversión es el mismo que para decidir si se ejerce una opción de compra. El IR incluye cuatro de las cinco variables que analizamos en la tabla 4.1: S, E, r_f y T. Además, el valor de la opción tiene una relación directa con el valor del IR puesto que cuanto más grande sea éste último más valdrá aquélla.

Si una decisión de inversión no puede retrasarse, tanto la opción de compra como el proyecto se pueden analizar utilizando el clásico método del VPN. Pero si tal posibilidad existiese nos encontraríamos ante una opción que aún no ha vencido, en este caso el IR (o el VPN) siguen siendo importantes pero ahora necesitamos incorporar en la valoración el riesgo del proyecto σ.

La variabilidad, por unidad de tiempo, de los rendimientos del proyecto viene medida por la varianza de sus rendimientos σ^2. Si la multiplicamos por la cantidad de períodos de tiempo que aún quedan hasta el vencimiento obtendremos la varianza acumulada, $\sigma^2 T$, que mide cuanto podrían variar las cosas antes de llegar al final del horizonte temporal a lo largo del que podemos tomar la decisión de invertir. Cuanto mayor sea la varianza acumulada mayor será el valor de la opción.

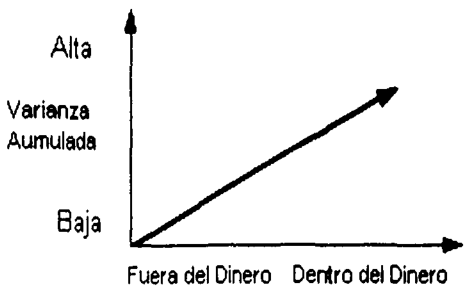

Figure 4.3: El valor de la opción de compra aumenta en la dirección de las flechas y se expresa como porcentaje del activo subyacente.

Tanto la varianza acumulada como el IR son suficientes para valorar una opción de compra europea. Las opciones de inversión para las que σ ó T sean cero no tendrán varianza acumulada y podrán valorarse a través del clásico VPN; pero si no son nulas éste último método dará resultados falsos al subvalorar el valor actual de los flujos de caja esperados.

Los diferentes casos que se pueden dar atendiendo al valor de su IR, de su VPN y de su varianza acumulada son los seis mostrados en la figura 4.4.

Así, siguiendo el orden de las agujas de un reloj comenzamos por la zona I en la que se encuentran las opciones "dentro del dinero" que tienen un VPN positivo y cuya varianza acumulada es baja (debido a que prácticamente no varía el valor del activo subyacente o

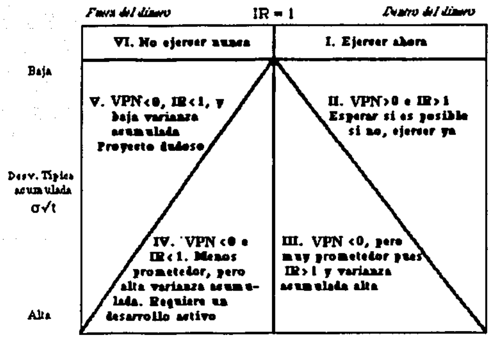

Figura 4.4: Diferentes casos en los que se considera en IR, VPN y la varianza acumulada.

a que el vencimiento está muy próximo), en este caso lo ideal es acometer el proyecto ya, puesto que no hay ninguna ganancia en demorarlo.

Si las opciones son dentro del dinero, su VPN es positivo y la varianza acumulada es grande nos encontraremos en la zona II, en cuyo caso lo ideal es postponer la decisión de invertir pues es muy probable que el valor del activo subyacente aumente con el tiempo. La excepción a esta regla viene dada en el caso de que el activo subyacente se deprecie con el tiempo debido, por ejemplo, a la acción de la competencia o porque ya está produciendo flujos de caja, lo que impulsaría a realizar la inversión antes de su vencimiento. Efectivamente, a veces es preferible ejercer anticipadamente las opciones de compra americanas, que pagan dividendos, en lugar de esperar a su vencimiento, dado que se consigue el dinero de éstos y se previene la erosión del valor de la opción aunque se renuncia al interés sobre el precio de ejercicio (la mayoría de las opciones reales son parecidas a las opciones de compra americanas con reparto de dividendos, por ello es muy importante conocer el funcionamiento de éstas últimas).

En la zona III figuran los proyectos que poseyendo un VPN negativo, tienen opciones dentro del dinero y su varianza acumulada es muy grande. En este caso al ser IR $>$ 1 lo indicado es esperar y comprobar si S y E varían, si no fuese así se dejaría expirar la opción sin ejercerla (es decir, no se realizaría el proyecto), pero en otros casos el desarrollo de los acontecimientos puede acabar haciendo interesante el realizar el proyecto en las cercanías de la fecha tope para ello. Veamos un ejemplo de este caso.

Ejemplo:

Nos encontramos ante la posibilidad de realizar un proyecto de inversión cuyo desembolso inicial es de 1.000.000 de dólares. Este desembolso puede realizarse ahora mismo o demorarse hasta tres años en el tiempo sin variar su cantidad. El valor actual de los flujos de caja que se espera genere este proyecto es de 900.000 dólares. La desviación típica de los rendimientos sobre el valor actual de los flujos de caja es del 40%. El tipo de interés sin riesgo es del 5%.

El valor actual neto toma, por tanto un valor:

$$VPN = -1.000.000 + 900.000 = -100.000 < 0 \qquad \text{No efectuar.}$$

La empresa dispone de una opción de compra, que expira dentro de tres años, con un precio de ejercicio de 1.000.000 dólares sobre un activo subyacente cuyo valor medio es de 900.000 dólares. El IR para esta opción, en la fecha de vencimiento, es igual a:

$$\mathrm{IR} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{VA(E)}} = \frac{900,000}{1,000,000(1.05)^{-3}} = 1.0418 \tag{4.4}$$

La varianza acumulada es igual a $\sigma^2 \cdot T = 0.42 \cdot 3 = 0.48$

La desviación típica acumulada es $\sigma = 0.6928$.

Una opción con las características anteriores toma un valor del 28.8% del subyacente, es decir, $0.288 \times 900.000 = 259.200$ dólares.

El VPN total de esta inversión es igual a:

$$\text{VPN total} = \text{VPN básico} + \text{opción de diferir} = -100.000 + 259.200 = 159.200 \text{ dólares} > 0$$

Esto significa que si realizásemos hoy el proyecto de inversión perderíamos 100.000 dólares, pero si postponemos la decisión hasta un máximo de tres años es muy posible que las condiciones cambien y aquél llegue a proporcionar una ganancia. Así, aunque el $VPN < 0$, el IR > 1, o lo que es lo mismo aunque E $>$ S, el VA(E) $<$ S. Lo que quiere decir que esperamos que el valor del activo subyacente aumente a una tasa superior al tipo de interés sin riesgo en los próximos tres años, posibilidad que viene reflejada en el valor de la opción. Concretando, el valor actual neto total es positivo porque el valor de la opción de diferir el proyecto es suficiente para contrarrestar y superar la negatividad del VPN básico.

En la zona IV aparecen los proyectos de inversión que tienen un VPN negativo, un IR < 1 pero aún disponen de una alta varianza acumulada, que puede resultar beneficiosa a la larga si se demora la realización de aquél a la espera de que mejore el valor del activo antes de la fecha de vencimiento de la opción. En la zona V las características del proyecto son similares al de la zona anterior salvo que la variabilidad del activo subyacente es menor lo que prácticamente desaconseja la realización del proyecto. Por último, en la zona VI se encuentran los proyectos que teniendo un $VPN < 0$ y un IR < 1 carecen de riesgo, lo que significa que no se deben ejercer bajo ningún concepto.

Para terminar, señalaremos que conforme el tiempo transcurra, la incertidumbre (variabilidad) se irá reduciendo y nos iremos desplazando hacia arriba en la figura 4.4. Por tanto, los gestores tendrán dos misiones: intentar desplazar los proyectos de inversión hacia la derecha antes de que el tiempo transcurra totalmente; y, mientras tanto, intentar evitar los posibles errores al ejecutar sus decisiones.

4.4.1 Las opciones y el valor de la empresa.

Es evidente la lógica de la valoración de las opciones de crecimiento cuando se aplica a la totalidad de la empresa. Así, el valor de ésta última vendrá dado por el valor actual de los flujos de caja futuros proyectados para las operaciones existentes (más el valor actual de la desgravación fiscal debida al coste de la deuda) más el valor de las opciones implícitas en sus operaciones (I + D, inversiones internacionales, etc.) y el valor de las opciones de compra y de venta que pueden haberse acumulado como resultado de la financiación del negocio (éstas surgen con el transcurso del tiempo en, por ejemplo, las obligaciones con capacidad de amortización anticipada, warrants, etc., al variar los tipos de interés, los de cambio, el precio de las acciones,...). Por tanto:

$$\text{Valor de la empresa} = \text{VA de las operaciones actuales} + \text{VA de la desgravación fiscal}$$

$$\pm \text{VA de las opciones existentes sobre la financiación de la empresa} +$$

$$+ \text{VA de las opciones en I + D,}$$

$$\text{operaciones internacionales, actividades mineras, flexibilidad operativa, etc.}$$

4.5 La utilización de las opciones reales.

La utilización de esta aproximación ha aportado una mayor comprensión en la formulación y articulación de las decisiones sobre la conveniencia o no de acometer un proyecto de inversión pero, curiosamente, su implantación ha acarreado variados problemas, muchos de los cuáles, todavía siguen sin ser solucionados satisfactoriamente. Aunque, una de sus utilidades estriba en que a la hora de realizar un análisis ayuda a mantenerse alerta sobre si éste representa una respuesta exacta a un problema simplificado (o aproximado), o una respuesta aproximada a un problema exacto. Veamos algunas de ellas.

4.5.1 La simplificación de proyectos complejos.

La mayoría de los proyectos de inversión productivos son complejos; muchos de ellos, además, incorporan una combinación de activos y opciones en los que los gerentes se enfrentan a una serie de decisiones secuenciales. Este enfoque ayuda a simplificar dicho problema haciéndolo más fácilmente comprensible y posibilitando su resolución analítica.

La mayoría de los problemas con opciones reales pueden ser descompuestos en una o varias opciones de compra simples. Una guía útil al simplificar consiste en buscar la incertidumbre más importante sobre la que los gerentes toman su decisión. En muchos casos, la resolución de una pequeña serie de incertidumbres determinará el resultado y podremos tomar alguna decisión sin conocer el proyecto en su totalidad.

Otro enfoque interesante consiste en construir simplificaciones tales que el proyecto resultante pueda valorarse y sea dominante o dominado en relación al proyecto real. Si el proyecto simplificado es dominado (vale menos) por el real lo podremos utilizar como un límite inferior del valor del proyecto. Si, por el contrario, fuese dominante (vale mas) lo utilizaríamos como límite superior de aquél. En algunos casos es posible construir y calcular ambos tipos de límites.

4.5.2 La estimación de la volatilidad.

Hay tres posibles formas de estimar la volatilidad del rendimiento del activo subyacente de la opción implícita en el proyecto de inversión.

Adivinar.- El coeficiente de volatilidad β y el riesgo total σ están positivamente correlacionados en una gran muestra de activos operativos, es decir, aquéllos que tengan grandes betas tendrán un mayor riesgo total. Los proyectos individuales suelen tener mayores volatilidades que una cartera diversificada de los mismos proyectos pero, obsérvese, que una volatilidad del $20-30\%$ anual no es demasiado alta para un proyecto individual.

Utilizar datos históricos.- En algunos sectores la volatilidad puede estimarse a través de los datos históricos de los rendimientos de las inversiones. En otros casos, además, las volatilidades implícitas pueden calcularse a través de los precios de mercado de las opciones sobre acciones. Aunque es necesario realizar algún tipo de ajuste porque, por ejemplo, los rendimientos de las acciones están apalancados y son más volátiles que los rendimientos de los activos subyacentes.

Simular.- A través de la simulación Montecarlo y de las proyecciones sobre escenarios futuros en una hoja de cálculo se pueden extraer distribuciones de probabilidad de los rendimientos proyectados.

4.5.3 Comprobar los modelos y las distribuciones.

Las distribuciones de los rendimientos de los activos subyacentes en el caso de las opciones reales no siempre siguen una distribución de tipo logonormal tal y como exige el modelo de valoración de Black–Scholes. Una aproximación a este problema es estudiar el sesgo que tiene la distribución simplificada con relación a la distribución real e interpretar el resultado como un límite, superior o inferior, del valor actual del proyecto. Otro camino consiste en aplicar un modelo de valoración apropiado a dicha distribución real, aunque éste tipo de modelos suele ser muy complejo y de poca utilidad en el campo de las opciones reales.

A veces, el problema procede de que los supuestos del modelo Black–Scholes no se cumplen en las opciones reales y las cinco (o seis si incluimos los dividendos) variables básicas de dicho modelo son insuficientes a la hora de lidiar con las opciones reales. Por ejemplo, dicho modelo supone que el activo subyacente es negociado continuamente y, sin embargo, hay activos reales que se negocian muy poco o nunca. En estos casos el análisis a través de los árboles de decisión, aunque formalmente no es valoración de opciones, puede permitir un mejor tratamiento de la incertidumbre que el VPN convencional.

4.5.4 La interpretación de los resultados.

La simplificación es esencial si se quiere realizar un análisis que resulte de alguna utilidad. Por otra parte, alguna sofisticación es importante a la hora de interpretar los resultados lo que implica la realización de algún análisis de sensibilidad y la calificación de las inferencias. Así, por ejemplo, cuando tenemos que valorar un proyecto complicado lo simplificamos lo suficiente como para verlo como una opción de compra europea y lo valoramos a través de las cinco variables clásicas; posteriormente, después de situarlo en la figura 4.4, le volveremos a añadir algo de complejidad de cara a realizar un análisis de sensibilidad, lo que nos ayudará a comprender cuáles son las principales variables que gobiernan su comportamiento.

4.6 Ejemplo de opciones reales: Refinería y extracción de crudo.

Imagínese una compañía petrolera que, durante un año, tiene el derecho a explotar un terreno determinado debido a la posibilidad de que éste tenga reservas de crudo. Denominaremos A_0 a los pagos provenientes de los costes de exploración, de la construcción de caminos y de la creación de otras infraestructuras necesarias. Por otro lado, A_1 representará a los desembolsos necesarios para hacer frente a un nuevo sistema de procesamiento; pagos que tendrán lugar con posterioridad a los de A_0. A partir del último pago la compañía estará en disposición de generar los flujos de caja operativos.

Durante el proceso de construcción la gerencia puede tomar diversas decisiones con arreglo a las condiciones del mercado del crudo como, por ejemplo:

a) Puede seguir adelante con el proyecto.

b) Puede reducir la escala de producción un $c\%$, ahorrando una porción del último pago AC si nos encontramos ante un mercado débil.

c) Se podría diseñar el proceso de producción de forma flexible. Es decir, si los precios aumentasen por encima de lo previsto, la tasa de producción podría incrementarse en un $x\%$ desembolsando una cantidad adicional A_E.

d) En cualquier momento la gerencia podría liquidar su inversión obteniendo su valor residual o dedicándola a otra utilización alternativa.

Se utilizará este ejemplo para ir analizando diversos tipos de opciones reales, y su forma de valorarlos, en los siguientes epígrafes. Pero antes de ello, pongámosle algunas cifras a nuestro caso.

Así, supongamos que tenemos la oportunidad de invertir ahora mismo $A_0 = 104$ (millones de dólares) en el proyecto consistente en la extracción de crudo. Además, hemos calculado que el valor actual de los flujos de caja esperados de dicho proyecto dentro de un período puede ser de $VA_1^+ = 180$ millones si los precios del petróleo ascienden, o puede alcanzar un valor de $VA_1^- = 60$ millones si los precios cayesen. En principio, se asigna la misma probabilidad a ambas situaciones (figura 4.5). Además, los proyectos similares a éste, en plazo y en riesgo, están proporcionando un rendimiento $k = 20\%$, mientras que el tipo de interés libre de riesgo es $r_f = 8\%$.

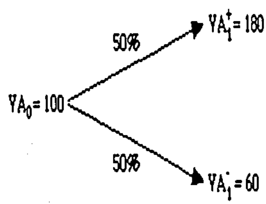

Figura 4.5: Se muestra, de manera gráfica, la asiganción de probabilidades para cada situación.

Evidentemente, si calculamos el VPN del proyecto en el instante inicial obtendremos un valor negativo:

$$\text{VPN} = -\text{A}_0 + \text{VA}_0 = -104 + \frac{(0.5 \times 180) + (0.5 \times 60)}{1 + 0.2} = -104 + 100 = -4 < 0 \quad (4.5)$$

este valor del VPN básico indicaría la necesidad de rechazar el proyecto de inversión al no tener en cuenta el valor de las opciones implícitas.

Ahora bien, tales opciones pueden ser valoradas si realizamos un proceso de valoración que sea neutral al riesgo a través del cual el valor actual de cualquier derecho contingente puede ser calculado utilizando sus valores futuros esperados (utilizando las probabilidades neutrales al riesgo) descontados al tipo de interés libre de riesgo r_f.

Esto es así, porque si nosotros tenemos una opción cualquiera sobre el proyecto, por ejemplo la de diferirlo un período, sólo ejerceremos ese derecho cuando obtengamos un beneficio y renunciaremos a él en el caso contrario; es decir, no habrá riesgo. Mientras que si decidimos realizar el proyecto en la actualidad, podemos ganar 46 millones o perder 54 millones con la misma probabilidad; es decir, estamos asumiendo un riesgo. Por ello, en el primer caso, al carecer de riesgo, utilizaremos para descontar los flujos de caja futuros el tipo de interés libre de riesgo y, además, recalcularemos las probabilidades de dichos flujos para adaptarlas a la nueva situación sin que alteren el resultado inicial (en ausencia de las opciones reales, claro está). De tal manera que las probabilidades neutrales al riesgo de que los precios asciendan p y de que desciendan $1 - p$ surgen de despejar p en la siguiente expresión:

$$\text{VA}_0 = \frac{\text{VA}_1^+ p + \text{VA}_1^- (1-p)}{1 + r_f} \quad (4.6)$$

$$p = \frac{(1 + r_f)\text{VA}_0 - \text{VA}_1^-}{\text{VA}_1^+ + \text{VA}_1^-} = \frac{(1 + 0.08) \times 100 - 60}{180 - 60} = 0.4. \quad (4.7)$$

En este mundo neutral al riesgo el valor actual del proyecto E_0, o el valor de los derechos de los accionistas, será igual a:

$$\text{E}_0 = \frac{p\text{E}_1^+ + (1-p)\text{E}_1^-}{1 + r_f} \quad (4.8)$$

donde E_1^+ indica el valor del proyecto (suponiendo neutralidad con respecto al riesgo) dentro de un período en el caso de que aumenten los precios, y E_1^- lo mismo, en el caso de que éstos desciendan. Estos valores nos van a ser muy útiles a la hora de estimar el valor de las opciones reales. Con objeto de comprobar que en ausencia de opciones reales el valor del VPN por este procedimiento sigue siendo el mismo, baste decir que en este caso $E_1^+ = VA_1^+ = 180$ y que $E_1^- = VA_1^- = 60$ y que el valor actual es igual a:

$$E_0 = \frac{pE_1^+ + (1-p)E_1^-}{1+r_f} = \frac{0.4 \times 180 + 0.6 \times 60}{1 + 0.08} = 100. \tag{4.9}$$

Así, el valor es el mismo tanto si lo calculamos con las probabilidades subjetivas asociadas (50% de alza o descenso de los precios) y con un tipo de descuento acorde al riesgo (el 20%), como si lo obtenemos a través de unas probabilidades neutrales al riesgo (40% y 60%, respectivamente, para el alza y el descenso) y con un tipo de descuento libre de riesgo (8%). Estas probabilidades neutrales al riesgo son las que a partir de ahora utilizaremos al estimar el valor de las diversas opciones reales.

Seguidamente, vamos a analizar la valoración de diversas opciones reales que pueden encontrarse en los proyectos de inversión productivos y vamos a hacerlo de forma individualizada, es decir, estudiaremos cada opción como si sólo existiese esa opción real y ninguna más. Pero el lector debe estar avisado de que en los proyectos de inversión puede haber varias opciones reales simultáneamente por lo que si ha entendido bien el proceso de su valoración individual podrá estimar su valor conjunto con pequeños ajustes. Si el proyecto resultara muy complejo le remitimos al 4.5.1 anterior.

4.6.1 La opción de diferir una inversión.

La posesión del derecho temporal sobre el terreno proporciona la posibilidad de diferir el proyecto de inversión durante un año con objeto de reducir la incertidumbre sobre el comportamiento de los precios del petróleo en el futuro próximo. Así, si el precio del crudo aumenta suficientemente a lo largo del año, al final del mismo la directiva procederá a invertir A1 ejerciendo su opción a extraer el crudo. La creación de valor un instante antes de expirar su derecho es igual a:

$$E_1 = \text{Máx}\,[VA_1 - A_1, 0] \tag{4.10}$$

lo que quiere decir que la opción de diferir es similar a una opción de compra americana sobre el valor actualizado de los flujos de caja esperados del proyecto VA y cuyo precio de ejercicio es A_1 debido a que la realización anticipada del proyecto implica renunciar a la opción de diferirlo, el valor de ésta última actúa como un coste de oportunidad, justificando la realización del proyecto sólo cuando el valor actual de los flujos de caja excede del valor actual del desembolso inicial por una cantidad importante (cantidad que representa el valor de la opción de diferimiento).

Así A_1 será igual a $104 \times 1,08 = 112,32$ millones de dólares, mientras que los valores actuales del proyecto dentro de un año, en el caso de neutralidad al riesgo, se calculan aplicando la ecuación (4.10):

$$E_1^+ = \text{Máx}\left[VA_1^+ - A_1; 0\right] = \text{Máx}\left[180 - 112,32; 0\right] = 67,68$$

$$E_1^- = \text{Máx}\left[VA_1^- - A_1; 0\right] = \text{Máx}\left[60 - 112,32; 0\right] = 0.$$

El valor total del proyecto, opción de diferimiento incluida, se calcula a través de la ecuación 4.8:

$$E_0 = \frac{pE_1^+ + (1-p)E_1^-}{1+r_f} = \frac{0.4 \times 67.6 + 0.6 \times 0}{1+0.08} = 25.07 \tag{4.11}$$

por tanto, si ahora quisiéramos conocer el valor de la opción de diferir el proyecto no tendríamos más que restarle a su valor total (25.07 millones de dólares) su propio VPN básico (-4 millones de dólares) con lo que obtendríamos un valor de la opción de diferimiento del proyecto de 29,07 millones de dólares:

$$\text{Opción de diferir} = VPN \text{ total} - VPN \text{ básico} = 25,07 - (-4) = 29,07 \text{ mill. dólares.}$$

Como el valor actual de los flujos de caja esperados es de 100 millones de dólares, quiere decir que el valor de la opción de diferir es igual al 29% del valor de dichos flujos. Un valor importante.

4.6.2 La opción de ampliar una inversión.

Si los precios, u otras condiciones del mercado, resultan ser mucho más favorables que lo inicialmente esperado, la dirección podría acelerar sus planes de expansión de la producción (en un x%) incurriendo en un coste adicional AE. Esto es lo mismo que adquirir una opción de compra sobre una parte adicional del proyecto base con un precio de ejercicio igual a A_E.

Por tanto, la oportunidad de inversión con la opción de ampliación incorporada puede ser contemplada como un proyecto de inversión base VA más una opción de compra sobre una inversión futura:

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{VA}_1 + \mathrm{Máx}\left[x\mathrm{VA}_1 - \mathrm{A_E}; 0\right]. \tag{4.12}$$

La opción de ampliar la escala productiva puede ser estratégicamente importante de cara a posibilitar a la compañía la capitalización de las futuras oportunidades de crecimiento. Esta opción, que sólo será ejercida cuando el comportamiento futuro del mercado se vuelva claramente favorable, puede hacer que un proyecto de inversión aparentemente desaconsejable (basado en el VPN básico) tenga un valor positivo

Volviendo a nuestro ejemplo, supongamos que la empresa tiene la oportunidad de acelerar la tasa de producción en un 50% más ($x = 0.5$) incurriendo en un desembolso adicional posterior de 40 millones de dólares $\mathrm{A_E}$, siempre que las condiciones posteriores resulten ser claramente favorables.

Así, transcurrido un año el equipo directivo puede elegir entre continuar con la escala de producción actual o ampliarla 1.5 veces pagando una cantidad adicional:

$$\mathrm{E}_1^+ = \mathrm{VA}_1^+ + \mathrm{Máx}\left[x\mathrm{VA}_1^+ - \mathrm{A_E}; 0\right] = 180 + \mathrm{Máx}\left[180 \times 0.5 - 40; 0\right] = 230 \text{ (ampliar)}$$

$$\mathrm{E}_1^- = \mathrm{VA}_1^- + \mathrm{Máx}\left[x\mathrm{VA}_1^- - \mathrm{A_E}; 0\right] = 60 + \mathrm{Máx}\left[60 \times 0.5 - 40; 0\right] = 60 \text{ (no ampliar)}$$

El valor total del proyecto E_0, opción de ampliación incluida, será igual a:

$$\mathrm{E}_0 = \frac{p\mathrm{E}_1^+ + (1-p)\mathrm{E}_1^-}{1+r_f} - \mathrm{A}_0 = \frac{0.4 \times 230 + 0.6 \times 60}{1+0.08} - 104 = 14.5 \text{ mill. de dólares} \tag{4.13}$$

y el valor de la opción de ampliar tendrá un valor de 18,5 millones de dólares (el 18,5% del valor actual de los flujos de caja):

$$\text{Opción de ampliar} = \text{VPN total} - \text{VPN básico} = 14.5 - (-4) = 18,5 \text{ mill. dólares.}$$

Un claro ejemplo de este tipo de opciones es el proceso de inversión por etapas seguido por los fondos de inversión en capital-riesgo. Así, de cara a reducir su riesgo, dichos fondos van invirtiendo dinero en la empresa paso a paso, con la condición de que la etapa previa haya proporcionado un resultado aceptable; de esta manera van ejerciendo las diversas opciones de ampliación de su inversión. En caso contrario, si el resultado fuese desfavorable, siempre puede ejercer la opción de abandonar el proyecto (véase el epígrafe 4.6.5). En conclusión, la inversión por etapas les permite obtener las opciones de crecimiento y de abandono y de decidir cuál ejercen según sea la información que vayan recogiendo a lo largo del horizonte de planificación.

4.6.3 La opción para reducir una inversión.

En este apartado vamos a ver el caso contrario al contemplado en el anterior. Si las condiciones del mercado resultasen ser peores que las esperadas, la compañía podría operar con menor capacidad productiva e, incluso, podría optar por reducirla en un $c\%$, lo que le permitiría ahorrar parte de los desembolsos iniciales previstos A_r. Esta flexibilidad para reducir las pérdidas se puede contemplar como una opción de venta sobre parte (un $c\%$) del proyecto inicialmente previsto, con un precio de ejercicio igual al ahorro de los costes potenciales A_r, y que viene proporcionada por

$$\text{Máx}\left[A_r - cVA_1; 0\right]. \tag{4.14}$$

Este tipo de opción puede resultar muy útil en el caso de la introducción de nuevos productos en mercados inciertos, o en el caso de tener que elegir entre tecnologías o plantas industriales con diferentes relaciones construcción-mantenimiento en cuanto a costes (por ej., se podría elegir una planta de bajo coste de construcción pero alto coste de mantenimiento, que permitiese la reducción de éste último en caso de que la demanda no respondiese adecuadamente).

Supongamos que en nuestra explotación petrolífera el desembolso inicial de 104 millones de dólares se puede dividir en dos pagos: 50 millones ahora y 58.32 millones el año próximo (esta cantidad surge de calcular el valor futuro de los 54 millones restantes: 54 x 1.08 = 58.32). De esta última cifra 18.32 millones serán costes fijos y el resto variables, que se pueden subdividir en 33.32 millones de publicidad y 6.68 de mantenimiento.

Al transcurrir un año, el equipo directivo tiene la opción de reducir la escala productiva a la mitad ($c = 0.5$) desembolsando en dicho instante sólo 25 millones de dólares (con lo que se ahorrará 33.32 millones al eliminar totalmente los gastos en publicidad). Opción que ejercerá siempre que las ventas sean claramente inferiores a lo previsto. Es decir, el valor actual global será igual a:

$$E_1 = (VA_1 - A_1) + \text{Máx}\left[A_r - cVA_1; 0\right] \tag{4.15}$$

sustituyendo las variables por las cifras de nuestro ejemplo obtendremos:

$$E_1^+ = \left(VA_1^+ - A_1\right) + \text{Máx}\left[A_r - cVA_1^+; 0\right] =$$

$$= (180 - 58.32) + \text{Máx}\,[33.32 - 0.5x180; 0] = 121.68 \text{ mill. de dólares (no reducir)}$$

$$E_1^- = \left(VA_1^- - A_1\right) + \text{Máx}\left[A_r - cVA_1^-; 0\right] =$$

$$= (60 - 58.32) + \text{Máx}\,[33.32 - 0.5 \times 60; 0] = 5 \text{ mill. de dólares (reducir)}$$

El valor del proyecto, opción de reducción incluida, es igual a:

$$E_0 = \frac{pE_1^+ + (1-p)E_1^-}{1 + r_f} - A_0 = \frac{0.4 \times 121.68 + 0.6 \times 5}{1 + 0.08} - 50 = -2.16 \text{ mill. de dólares} \tag{4.16}$$

y, por tanto, el valor de la opción de reducir la producción alcanza un valor de:

Opción de reducir = VPN total – VPN básico = −2.16 − (−4) = 1.84 mill. dólares.

4.6.4 La opción de cerrar temporalmente las operaciones.

En cierto tipo de industrias como las de extracción de recursos naturales (minería, petróleo, gas, etc.). o en la planificación y construcción de industrias cíclicas, moda, bienes de consumo, etc., existe la posibilidad de detener temporalmente la totalidad del proceso productivo cuando los ingresos obtenidos son insuficientes para hacer frente a los costes variables operativos (como los de mantenimiento, por ejemplo) y de volver a producir cuando la situación se haya invertido.

Por tanto, podemos contemplar las operaciones anuales como opciones de compra de los ingresos de ese año C y cuyo precio de ejercicio viene dado por los costes variables operativos A_v. El valor de dichas opciones se puede calcular a través de la siguiente expresión:

$$\text{Máx}\,[C - A_v; 0]\,. \tag{4.17}$$

Volvamos a tomar los datos del punto anterior con alguna información adicional. Así, supongamos que la directiva puede realizar un primer pago de 50 millones de dólares y un segundo pago al final del año de 58.32 millones. Este último se subdivide en 25 millones de costes de mantenimiento (20 de costes fijos y el resto de costes variables) y 33.32 millones de costes de publicidad (todos variables). Es decir, los costes fijos totales representan 20 millones de dólares y los variables son 38.32 millones.

Supongamos que al final del año 1 se espera que los ingresos sean iguales al 30% del valor actual del proyecto en dicho instante $C = 0.3\mathrm{VA}_1$, es decir:

$$C^+ = 0.3\mathrm{VA}^+ = 0.3 \times 180 = 54.$$

$$C^- = 0.3\mathrm{VA}^- = 0.3 \times 60 = 18.$$

Si la gerencia desea conseguir dichos ingresos deberá incurrir en 38.32 millones de costes variables. Así, pues, aquélla tiene la opción de hacerse con el valor del proyecto VA (neto de costes fijos AF) menos los costes variables, o bien abandonarlo temporalmente recibiendo a cambio el valor del proyecto menos los ingresos a los que se renuncia C:

$$\mathrm{E}_1 = \text{Máx}\left[\mathrm{VA}_1 - \mathrm{A}_v; \mathrm{VA}_1 - C\right] - \mathrm{AF} = (\mathrm{VA}_1 - \mathrm{AF}) - \text{Min}\left[\mathrm{A}_v; C\right]. \qquad (4.18)$$

Sustituyendo las variables por sus valores, obtendremos:

$$\mathrm{E}_1^+ = \left(\mathrm{VA}_1^+ - \mathrm{AF}\right) - \text{Min}\left[\mathrm{A}_v; C^+\right] = (180 - 20) - \text{Min}\,[38.32; 54] = 121,68 \text{ (continuar)}$$

$$\mathrm{E}_1^- = \left(\mathrm{VA}_1^- - \mathrm{AF}\right) - \text{Min}\left[\mathrm{A}_v; C^-\right] = (60 - 20) - \text{Min}\,[38.32; 18] = 22 \text{ (abandonar)}$$

El valor del proyecto, opción de cierre temporal incluida, es igual a:

$$\mathrm{E}_0 = \frac{p\mathrm{E}_1^+ + (1-p)\mathrm{E}_1^-}{1 + r_f} - \mathrm{A}_0 = \frac{0.4 \times 121.68 + 0.6 \times 22}{1 + 0.08} - 50 = 7.29 \text{ mill. de dólares} \qquad (4.19)$$

y, por tanto, el valor de la opción aisladamente considerada alcanzará un valor de:

$$\text{Opción de cerrar temporalmente} = \text{VPN total} - \text{VPN básico} = 7.29 - (-4) =$$

$$= 11.29 \text{ mill. de dólares}$$

Un ejemplo típico de este tipo de opción es el de la explotación de una mina de carbón. Su dueño cerrará temporalmente las operaciones de extracción del mineral no cuando el precio de mercado de la tonelada de carbón sea inferior a su coste de extracción, sino cuando la pérdida sea tan grande que contrarreste los costes de cerrar temporalmente la mina. Mientras ello no ocurra, aún perdiendo dinero, la seguirá explotando. Por una razón similar, una vez cerrada procederá a reabrirla cuando el beneficio obtenido supere a los costes de reapertura.

4.6.5 La opción de cerrar definitivamente las operaciones.

La gerencia no tendrá que seguir incurriendo en costes fijos si no se vislumbra una mejora del precio del petróleo o existen otras causas que aconsejen el abandono definitivo del proyecto. Esto es, la directiva tiene una opción para abandonar el proyecto a cambio de su valor residual (éste puede ser su valor de liquidación, la venta de la compañía, etc.). Dicha opción de venta sobre el valor actual del proyecto VA es de tipo americano, cuyo precio de ejercicio es el valor residual o el de la mejor alternativa posible VR, y capacita a la directiva a recibir:

$$\mathrm{VA} + \mathrm{Máx}\,[\mathrm{VR} - \mathrm{VA}; 0] = \mathrm{Máx}\,[\mathrm{VA}; \mathrm{VR}]\,. \tag{4.20}$$

Así, supongamos que el valor residual de la empresa de explotación petrolífera (o el de su mejor alternativa) se distribuye según el esquema temporal mostrado en la figura 4.6.

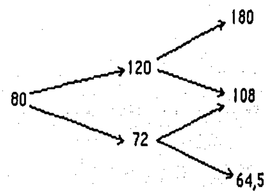

Figura 4.6: Distribución del valor residual de la empresa.

En el que se puede observar como el valor residual actual ($\mathrm{VR}_0 = 80$ millones) es inferior al valor actual del proyecto ($\mathrm{VA}_0 = 100$ millones), puesto que si esto no fuese así la directiva habría optado directamente por no acometer éste último; además tiene la misma tasa de rendimiento interno que el proyecto 20% y una menor varianza (así, si las cosas van bien no será óptimo abandonar tempranamente el proyecto, pero si van mal podría ser aconsejable). Por tanto, el valor del proyecto para los accionistas será:

$$\mathrm{E}_1^+ = \mathrm{Máx}\left[\mathrm{VA}_1^+; \mathrm{VR}_1^+\right] = \mathrm{Máx}\,[180; 120] = 180 \text{ (continuar)}$$

$$\mathrm{E}_1^- = \mathrm{Máx}\left[\mathrm{VA}_1^-; \mathrm{VR}_1^-\right] = \mathrm{Máx}\,[60; 72] = 72 \text{ (abandonar)}$$

El valor del proyecto, opción de abandono incluida, será:

$$E_0 = \frac{pE_1^+ + (1-p)E_1^-}{1+r_f} - A_0 = \frac{0.4 \times 180 + 0.6 \times 72}{1+0.08} - 104 = 2.67 \text{ mill. de dólares} \quad (4.21)$$

y, por tanto, el valor de la opción de abandonar totalmente la producción es igual a:

$$\text{Opción de cerrar} = \text{Valor total} - \text{VPN básico} = 2.67 - (-4) = 6.67 \text{ mill. de dólares}$$

Este tipo de opciones, aparece en muchos tipos de negocios. Por ejemplo, los capitalistas-riesgo cuando comprometen una determinada cantidad de dinero en una nueva empresa lo suelen hacer por etapas, lo que les permite mantener la opción de abandonar el proyecto en cuanto consideren que su futuro es bastante oscuro. De hecho, la principal razón de racionar el dinero invertido a través de su reparto por etapas es precisamente el mantenimiento de la opción de abandono.

El valor de la opción de abandono aumenta: a) cuanto mayor sea la incertidumbre sobre el valor futuro del negocio; b) cuanto mayor sea la cantidad de tiempo de que se dispone para ejercer dicha opción; c) cuanto mayor sea la relación entre el valor de abandono del proyecto (su valor de liquidación) respecto de su valor continuado (valor actual de los flujos de caja libres restantes menos la inversión adicional a realizar).

4.6.6 El caso de dos períodos.

Vamos a aprovechar este epígrafe para comentar que, evidentemente, la valoración del proyecto de inversión o de las propias opciones no se limita sólo al próximo período sino que se puede extrapolar a períodos posteriores. Vamos a ver, por ejemplo, cómo se podría hacer este cálculo para los dos próximos años en el caso que estamos analizando aquí.

Para calcular el valor del proyecto al final del año 1 es necesario recordar que el valor actual del mismo en dicho instante podía ser o bien $VA_1^+ = 180$ millones, o bien $VA_1^- = 60$ millones según que las cosas fuesen bien o mal, respectivamente. Obsérvese que el factor de crecimiento del valor del proyecto es del 1.8 y el de decrecimiento es del 0.6 (ver la figura 4.7).

En el caso de que las condiciones sean optimistas el $VA_2^{++} = VA_1^+ \times 1.8 = 324$ millones, si son intermedias el $VA_2^{+-} = VA_1^+ \times 0.6 = 108$ millones, mientras que si fuesen pesimistas

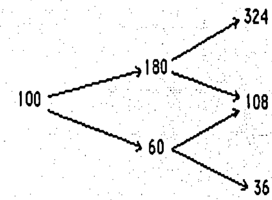

Figura 4.7: Posibles valores del proyecto.

$VA_2^{--} = VA_1^- \times 0.6 = 36$ millones. Por tanto, los posibles valores del proyecto al final del año 2, con la posibilidad de abandonarlo totalmente, serían:

$$E^{++} = \text{Máx}\left[VA_2^{++}; VR_2^{++}\right] = \text{Máx}\,[324; 180] = 324 \text{ millones (continuar)}$$

$$E^{+-} = \text{Máx}\left[VA_2^{+-}; VR_2^{+-}\right] = \text{Máx}\,[108; 108] = 108 \text{ millones}$$

$$E^{--} = \text{Máx}\left[VA_2^{--}; VR_2^{--}\right] = \text{Máx}\,[36; 64.5] = 64.5 \text{ millones (abandonar)}$$

Con estos datos se puede calcular el valor del proyecto al final del año 1 si las condiciones son optimistas:

$$E_1^+ = \frac{pE_2^{++} + (1-p)E_2^{+-}}{1+r_f} = \frac{0.4 \times 324 + 0.6 \times 108}{1+0.08} = 180 \text{ mill. de dólares} \qquad (4.22)$$

y si son pesimistas:

$$E_1^- = \frac{pE_2^{+-} + (1-p)E_2^{--}}{1+r_f} = \frac{0.4 \times 108 + 0.6 \times 64.5}{1+0.08} = 75.8 \text{ mill. de dólares} \qquad (4.23)$$

Por tanto, el valor del proyecto, opción de abandono incluida, será:

$$E_0 = \frac{pE_1^+ + (1-p)E_1^-}{1+r_f} - A_0 = \frac{0.4 \times 180 + 0.6 \times 75.8}{1+0.08} - 104 = 4.78 \text{ mill. de dólares} \qquad (4.24)$$

y, por tanto, el valor de la opción de abandonar totalmente la producción es igual a:

Opción de cerrar = Valor total − VPN básico = $4.78 - (-4) = 8.78$ mill. de dólares.

Obsérvese que, como ya señalamos anteriormente, al tener en cuenta un mayor plazo de tiempo el valor de la opción es mayor lo que es lógico puesto que el valor de las opciones aumenta con el horizonte temporal.

Parte III

Exploración de Recursos.

Capítulo 5

Opciones Reales para la exploración de un campo petrolero.

En este capítulo, desarrollamos un modelo de Opciones Reales para evaluar las inversiones en explotación de recursos naturales cuando se toman en cuenta de manera conjunta el precio y la incertidumbre técnico-geológica. Después de una sucesión de etapas de exploración, hay una inversión en desarrollo y una fase de extracción. Todas las fases son optimizadas de manera contingente sobre la incertidumbre de los precios y la técnico-geológica.

Muchas opciones reales podrían ser consideradas, entre otras, la opción de *timing* para la inversión en desarrollo. También hay muchos esquemas de inversión flexible para las etapas de exploración, por lo que cuando un yacimiento es desarrollado, hay opciones de cierre, apertura y abandono para la fase de extracción. Nuestro modelo conserva una estructura de evaluación relativamente simple al colapsar el precio y la incertidumbre técnico-geológica en un modelo unifactorial.

5.1 Modelando la decisión de inversión en exploración.

La exploración de los recursos naturales típicamente involucra los siguientes estados dentro de un esquema de inversión en la que están asociados los eventos de éxito y fracaso.

Los estados de una exploración típica aparecen en la siguiente figura

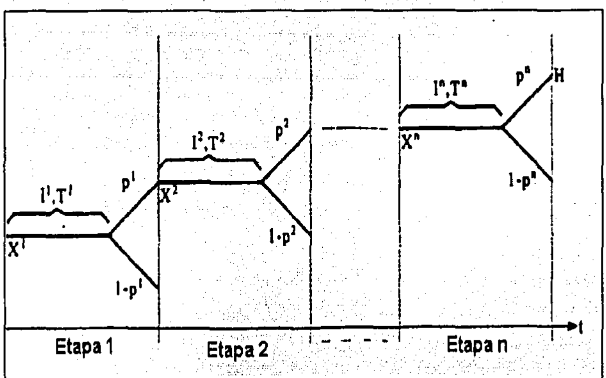

Figura 5.1: Etapas de la exploración.

Con la notación siguiente:

X^j El valor del proyecto de exploración en un punto inicial en el estado j,

I^j El valor presente de la inversión durante el estado j,

T^j El tiempo de exploración del estado j,

p^j La probabilidad de éxito en el estado j, y

H El valor del proyecto al final de los estados de exploración, condicional al éxito.

Como es bien conocido, un proyecto de exploración cuyo valor es X puede ser modelado como una opción infinitamente compuesta que puede ser ejercida continuamente cuando la inversión en exploración ha sido asumida. Por ello, y para dotar de flexibilidad al proyecto, es necesario hacer la suposición que en cualquier punto del tiempo la inversión puede ser detenida y cerrada dependiendo del valor esperado (del proyecto). Todo ello deviene fundamentalmente en una dependencia de datos técnicos y geológicos como será explicado posteriormente.

Dado el carácter contingente al éxito en la exploración, el proyecto puede ser desarrollado al invertir un valor presente (si estuviera diferido) de I_d^j durante un tiempo de desarrollo de T_d^j. Esos valores dependen de las características del yacimiento encontrado. Sin embargo, debe ser considerada una opción de perpetuidad en el *timing* para permitir la inversión de desarrollo. Por lo tanto, la desición será hecha en base a si existe o no posibilidad de detener la inversión en desarrollo.

Cuando la inversión en desarrollo es concluida, el yacimiento entra en la fase de extracción, por lo que el modelo clásico de Brennan y Schwartz (85) resulta de gran ayuda para modelar esta fase, considerando opciones de apertura, cierre y abandono.

5.2 Modelando el precio y riesgo técnico-geológico.

Los prospectos de exploración de recursos naturales son inversiones de alto riesgo porque no sólo tienen precios de salida (que han sido ampliamente modelados) con una incertidumbre enorme, sino que también poseen cantidades y costes de producción en desarrollo asociadas al conocimiento del campo, e inclusive de investigación.

5.2.1 Precios del recurso y el riesgo de los yacimientos.

El riesgo en los precios de los recursos han sido ampliamente modelados usando modelos con no arbitraje en tiempo continuo. Recientemente los modelos multifactoriales de precios han sido considerados como prometedores para explicar el comportamiento del precio (Schwartz [Sc] (1997), Cortazar et al [Co-Sc-Ri] (1999)]. Para hacer más sencilla la exposición en esta Tesis se usa un modelo unifactorial estándar con tasa de conveniencia constante y tasas neutrales al riesgo para precios constantes.

La ecuación que modela el riesgo en los precios viene dada por

$$\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{P}} = (r - c)\mathrm{d}t + \sigma_{\mathrm{P}}\mathrm{d}\beta_t \tag{5.1}$$

donde,

P= es el precio *Spot* por un barril producido,

r= es la tasa de interés libre de riesgo,

$c=$ es la tasa de conveniencia por producir un barril, y
$\sigma=$ es la volatilidad del retorno por producir un barril.

5.2.2 Riesgo de precio del recurso.

Los supuestos básicos para el análisis de riesgo del precio del recurso incluyen, por un lado a la consideración de un esfuerzo de producción constante[1], y por otro lado, a la suma de las producciones de cada uno de los yacimientos para obtener la producción total del campo descrita por

$$\mathcal{W}_t^{\omega} = \sum_{j=1}^{t} \alpha_j(t)\pi_j(t) \tag{5.2}$$

donde $\alpha_j(t)$ denota a la proporción de la participación del yacimiento j en el volumen total producido.

Dado que el riesgo precio es constante durante las tres fases del proyecto (exploración, desarrollo y extracción) y que el riesgo técnico-geológico es mucho más alto durante la fase de exploración que en las restantes etapas, entonces este último (el riesgo técnico geológico) puede ser descompuesto en dos porciones:

1.- La primera de ellas la que se refiere al éxito o fallo para encontrar un yacimiento económicamente factible, y

2.- la otra relacionada con las características particulares del yacimiento encontrado.

Por una parte, mientras que en la primera parte han sido utilizados modelos discretos usando probabilidades de éxito/fracaso en cada una de las etapas de exploración, en la segunda, se definen los niveles de reserva que contiene cada yacimiento, las inversiones desarrolladas, los esquemas de producción y las estructuras de costes.

Concretamente, antes de adoptar cualquier inversión en exploración, la incertidumbre sobre el valor de la reserva final esperada –condicionado al éxito–, debe ser reducida al menos a un nivel adecuado. De esta manera, las características del yacimiento –concebido hasta ese momento como un prospecto– son desconocidas casi en su totalidad y, pueden ir desde un modesto yacimiento hasta un paraíso de recursos. Por todo lo anterior, el marco de las opciones reales para inversiones en exploración permite establecer cuales deberían

[1] Determinada por los planes de producción estatales.

asumirse de manera óptima bajo la consideración conjunta de los valores (el financiero y el técnico-geológico) del yacimiento.

Las inversiones en exploración analizadas permiten establecer que la incertidumbre sobre las características finales del yacimiento decrece conforme se ha decidido ejecutar el proyecto y, por lo tanto, a partir de ese momento el riesgo en el precio es comparativamente mas importante. Existen conclusiones similares para minas, y sólo el riesgo en el precio cuando la inversión en desarrollo inicia es el único factor de incertidumbre. Es claro que un modelo de inversión en una exploración apropiada debería agregar a este el riesgo del precio y el efecto del declive del riesgo técnico geológico.

La fuente de incertidumbre técnico-geológico posee diferentes aproximaciones. La primera alternativa pasa por definir un vector de variables técnico-geológicas que afectan al valor del yacimiento, en otras palabras, se define un proceso estocástico específico para cada uno de ellos. Por ello el valor del yacimiento es una función del precio de salida S y de las variables técnicas del yacimiento, $\overline{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$, lo cual debería incluir la inversión en desarrollo, la tasa de extracción, los costes, etc. Entonces, el valor del yacimiento esperado queda definido por $\mathbb{H}(S, \pi_1, \pi_2, \cdots, \pi_N)$. Por supuesto, el modelo incrementa su complejidad con la dimensión del vector de características $\overline{\pi}$ debido a la información requerida para especificar el proceso multivariado para las variables de estado, y el esfuerzo agregado para resolver un modelo multifactorial.

Con esta aproximación simple y razonable se abordan muchos casos y la herramienta obtenida es abarcable técnicamente. La información obtenida de los ingenieros geólogos y petroleros generalmente posee un perfil de proceso multivariado para las características relevantes del yacimiento. A partir de éste se determinan subconjuntos representativo de tipos de yacimientos posibles (perfiles de yacimientos o grupos de yacimientos), con sus probabilidades de éxito, que permiten clasificar al grupo de prospectos y trabajar con clases de yacimientos haciendo más sencillo el estudio. Cada tipo de yacimiento usa los parámetros que establece el modelo de Brennan y Schwartz ([Br-Sc1] 1985), incluyendo los montos de inversión en desarrollo y los esquemas de producción (*i.e.* montos y costes), incluidos los de apertura y cierre. Con esos datos se analiza el valor de cada uno de los posibles yacimientos como una función del precio de salida del modelo de Brennan y Schwartz [Br-Sc1] (1985) y mediante el uso de las probabilidades condicionales para cada tipo de yacimiento es obtenido, tanto el valor esperado del yacimiento (como una función de los precios de salida) así, como la distribución empírica inicial de valores de los yacimientos que definen al riesgo técnico-geológico.

El proceso del riesgo técnico-geológico queda definido por la variable de estado π. De ella se tiene la distribución empírica inicial asociada a este riesgo (de hecho se obtiene al usar la probabilidad inicial del activo) y supondremos que después de la inversión en operación concluye cuando esta incertidumbre residual técnico-geológica no exista. En ausencia de mejor información sobre las características particulares del proceso de exploración el supuesto que la incertidumbre técnico-geológica inicial es reducida cuando la inversión en exploración es ejercida viene a ser básico en este análisis.

Por lo tanto, el valor de un yacimiento queda definido como una función del precio de salida *spot* S y, del riesgo técnico-geológico π. De hecho, ambos factores tradicionalmente son supuestos independientes y, en muchos casos, pueden ser colapsados en una sola variable de estado Z. Esto hace que el modelo sea simple de implementar ser una aproximación razonable al valor del proyecto.

Para formalizar el modelo hay que suponer que el factor de riesgo técnico-geológico $\overline{\pi}$ (por ejemplo el monto de crudo en un yacimiento) sigue un movimiento browniano con media cero y volatilidad constante como sigue:

$$\frac{\mathrm{d}\pi}{\pi} = \sigma_\pi \mathrm{d}\mathcal{B}_t^\pi.$$

En principio, el riesgo técnico-geológico es un factor independiente del precio *spot* de salida S, en otras palabras,

$$\mathbb{E}\left[\left(\mathcal{B}_{t+h}^S - \mathcal{B}_t^S\right) \cdot \left(\mathcal{B}_{t+h}^\pi - \mathcal{B}_t^\pi\right)\right] = 0, \qquad \forall t > 0, h > 0. \tag{5.3}$$

Y como bien se ha mencionado antes, el valor del yacimiento, denotado por $\mathbb{H}(S, \pi)$, es modelado como una función del precio de salida S y la variable técnica-geológica, π, *i.e.*

$$Z = \mathrm{F}(S, \overline{\pi}).$$

Al aplicar el Lema de Ito y mediante el uso de las ecuaciones anteriores es obtenida la dinámica de la variable colapsada reflejada por la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}Z = \left(F_S S(r-c) + \frac{1}{2}F_{SS}S^2\sigma_S^2 + \frac{1}{2}F_{SS}S^2\sigma_S^2\right)\mathrm{d}t + F_S S\sigma_S \mathrm{d}\mathcal{B}_t^S + F_\pi \pi \sigma_\pi \mathrm{d}\mathcal{B}_t^\pi. \tag{5.4}$$

De hecho, la fusión de ambas variables se consigue mendiante $Z = S\pi$, lo que es equivalente a suponer que los incrementos de cualquiera de los dos factores (S ó $\overline{\pi}$) inciden en incrementos en el valor de la variable colapsada y se ven reflejados en el valor del yacimiento. Algunas simplificaciones permiten expresar el proceso para esta nueva variable de estado como

$$\frac{\mathrm{d}Z}{Z} = (r-c)\mathrm{d}t + \sigma_S \mathrm{d}B_t^S + \sigma_\pi \mathrm{d}B_t^\pi. \tag{5.5}$$

Esta nueva variable se entiende como el precio del recurso modificado por su coste asociado al riesgo debido a su extracción con la misma deriva que la original, S, pero con un incremento en la volatilidad

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_\pi^2}.$$

En la mayoría de los proyectos –la ecuación anterior– representa una aproximación conveniente. Para otros, no es sólo una buena aproximación sino que es exacta. Este es el caso, por ejemplo, de aquellos en donde $\overline{\pi}$ representa la reserva total de los yacimientos, K_1 es una constante que depende de la tasa de extracción y K_2 es un coste fijo. Entonces el valor del proyecto $\mathbb{H}$ queda definido por

$$\mathbb{H}(S,\pi) = K_1 S\pi + K_2$$

si la ecuación de independencia es válida.

La estrategia central para reducir la complejidad del modelo en la fase de exploración está basada en colapsar el riesgo técnico-geológico en un sólo factor, con una volatilidad apropiada (incrementada). Es conveniente porque permite que la representación del riesgo técnico-geológico esté ligada a los efectos del precio y se vean enteramente reflejados sobre el valor del yacimiento. Por una parte, el que todos esos factores sean ortogonales al factor del mercado (representados en este modelo por los precios del recurso) permite una reducción en el espacio de estados con una pequeña pérdida de exactitud. Por otra parte, retienen la posibilidad de hacer consideraciones de yacimientos individuales durante la fase de la extracción. Usualmente al contar con conocimiento adicional sobe la inversión en exploración el modelado del riesgo técnico-geológico, para cada caso particular, debe ser ajustado.

Existe interés por establecer las opciones reales de producción basadas en la ocurrencia de ciertos escenarios eventuales, por ello es particularmente interesante tener en cuenta el momento en el que los precios alcancen un umbral de conveniencia m (el llamado *umbral de inconveniencia de los precios bajos*) a partir del que se ha de tomar una decisión asociada a la opción real adecuada para adaptar el proyecto de inversión en exploración.

$$\mathrm{T}_q = \inf\left\{t > 0 \ : \ \mathcal{W}_t^{\omega} = \mathcal{W}_q^{*}\right\}. \tag{5.6}$$

- Si $q = 0$ se ejerce la opción real de abandonar
- Si $q = 1$ se ejerce la opción real de cerrar.
- Si $q = 2$ se ejerce la opción real de reiniciar.

Eventualmente estos tiempos de parada son alcanzados, por lo que $\mathrm{T}_q < +\infty$. De no ser así, *i.e.* si nunca llegaran a ocurrir, se escribe $\mathrm{T}_q = +\infty$.

Mediante la ocurrencia de esos tiempos se indica el ejercicio o ejecución financiera de las opciones reales permitiendo con ello el uso de la flexibilidad agregada al proyecto, en ese sentido el valor del proyecto para la producción de petróleo adquiere la forma

$$\mathbb{H}(\mathrm{P}, \pi) = \Phi\bar{\alpha} \cdot \pi^{T} + \Psi, \tag{5.7}$$

donde, Φ es una constante dependiente de la tasa fija de producción (por yacimiento) y Ψ es el coste fijo.

5.3 La extracción óptima de los yacimientos.

En el ambiente anterior ahora estamos interesados en la optimización de la tasa de extracción del recurso. Por lo que denotaremos por e_j a la tasa fija de producción (por yacimiento) y por S_j a la cantidad de recurso extraido. Ambas cantidades relacionadas por

$$\dot{S}_j(t) = -e_j(t). \tag{5.8}$$

En particular para la utilidad y la función de producción se tienen dadas por:

$$\mathrm{u}(\mathrm{K}) \doteq \frac{1}{\gamma_j}\mathrm{K}_j^{\gamma_j}. \tag{5.9}$$

$$\mathrm{F}(S_j, e_j) \doteq S_j^{\alpha_j} e_j^{\beta_j}. \tag{5.10}$$

cuyos parámetros

$$\gamma_j < 1, \qquad \alpha_j > 0, \qquad \beta_j > 0, \quad \text{y} \quad \alpha_j > 0 + \beta_j < 0$$

nos permiten establecer las propiedades clásicas para ambas funciones.

Para la utilidad se tiene que

$$u'(0) = \infty, \qquad u'(K) > 0 \qquad \text{y} \qquad u''(K) < 0,$$

mientras que para la función de producción hay que observar que

$$F \uparrow, \qquad F \geq 0 \qquad (= 0 \text{ en } K = 0).$$

donde, por supuesto K_j es el consumo del producto obtenido desde el yacimiento j, que indica que ante precios de salida de recurso S grandes se tiene una conveniencia grande también.

Ante la hipótesis de imposibilidad de almacenamiento del producto el consumo debe ser igual al monto usado, por lo que

$$S_j^{\alpha_j}(t)e_j^{\beta_j} - K_j(t) = 0. \tag{5.11}$$

Por otra parte, la tasa de interés afecta como penalización para establecer el problema de maximizar la utilidad total esperada

$$V_I(\omega) = \mathbb{E}\left[\int_I u(K_j(t), \mathcal{W}_t^\omega) exp(-rt) dt\right] \tag{5.12}$$

sujeto a las condiciones en el borde

$$S(a) = S_a \qquad \text{y} \qquad S(b) = S_b \quad (< S_a).$$

Por todo lo anterior, el Principio del Máximo nos permite obtener las trayectorias óptimas descritas por las siguientes expresiones

$$c_j^*(t) = \frac{E_j\beta_j}{(\alpha_j + \beta_j)(-E_j t + G_j)^{-\frac{\alpha_j}{\alpha_j+\beta_j}}} \tag{5.13}$$

$$K_j^*(t) = \left(\frac{E_j\beta_j}{(\alpha_j + \beta_j)}\right)^{\beta_j} \doteq cte. \tag{5.14}$$

en donde,

$$\mathrm{G}_j \doteq (S_a)^{-\frac{\alpha_j+\beta_j}{\beta_j}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{E}_j \doteq -\frac{1}{b}\left(S_b^{-\frac{\alpha_j+\beta_j}{\beta_j}} - S_a^{-\frac{\alpha_j+\beta_j}{\beta_j}}\right)$$

Con esas trayectorias se obtiene el valor del proyecto desarrollado.

Antes de que la exploración comience, hay un conjunto de yacimientos alternativos que eventualmente podrían ser obtenidos y que convertirían en exitosa a la fase de exploración. Cada uno de los ℓ posibles yacimientos poseen una probabilidad asociada de éxito, condicionada al éxito en la exploración, α^i tal que:

$$\sum_{i=1}^{\ell} \alpha^i = 1.$$

Lo que da una idea de la distribución en probabilidad de los yacimientos considerados potencialmente exitosos ante la exploración.

5.4 Valor del proyecto desarrollado.

Para calcular el valor del proyecto de exploración se ha de comenzar por establecer el valor de los yacimientos alternativos que deberían ser obtenidos si la exploración resulta exitosa. Entonces, evaluamos la decisión de invertir en el desarrollo para concluir la valoración de la fase de exploración.

Por un lado, mediante el uso del modelo de Brennan-Schwartz [Br-Sc1] (1985) se obtiene la ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} &\max_{e_j}\left\{\tfrac{1}{2}\mathrm{V}^j_{ww}\mathrm{W}^2\sigma_w^2 + (r-c_j)\mathrm{W}\mathrm{V}^j_w - e_j(\mathrm{W}-m^j) - (r+\lambda)\mathrm{V}^j,\right.\\ &\left.\tfrac{1}{2}Z^j_{ww}W^2\sigma_w^2 + (r-c_j)WZ^j_w - Z^j_Q - (r+\lambda)Z^j\right\} = 0. \end{aligned} \tag{5.15}$$

que junto con las condiciones en el borde

$$\mathrm{V}^j_w(\mathrm{W}_1^{*j},\mathrm{Q}) = \begin{cases} \mathrm{Z}^j_w(\mathrm{W}_1^{*j},\mathrm{Q}) & \text{si} \quad \mathrm{Z}^j(\mathrm{W}_1^{*j},\mathrm{Q}) - \mathrm{K}_1^j \geq 0, \\ 0 & \text{en} \quad \text{otro caso.} \end{cases}$$

$$\mathrm{Z}^j(\mathrm{W}_0^{*j},\mathrm{Q}) \leq \mathrm{V}^j(\mathrm{W}_2^{*j},\mathrm{Q}),$$

$$\mathrm{V}^j(\mathrm{W},0) = 0, \qquad \mathrm{Z}^j(S,0) = 0, \qquad \mathrm{V}^j(0,\mathrm{Q}) = 0, \qquad \mathrm{Z}^j(0,\mathrm{Q}) = 0.$$

Y finalmente,

$$\lim_{W\uparrow\infty} V^j_{ww}(S,Q) = 0, \qquad y \qquad \lim_{W\uparrow\infty} Z^j_{ww}(S,Q) = 0.$$

nos permite caracterizar al valor del proyecto en términos de la dinámica de una ecuación diferencial parcial con condiciones en el borde tipo Dirichlet.

Aquí utilizamos la siguiente notación:

- V^j para el valor del yacimiento j cuando es usado,
- Z^j para el valor del yacimiento j cuando no es usado,
- Q para la cantidad de reservas,
- e^j para la tasa de producción del yacimiento j,
- W^{*j}_q para el precio crítico abajo del cual es óptimo abandonar ($q = 0$), cerrar ($q = 1$) y reiniciar ($q = 2$),
- Φ^j_c para el coste por cerrar el yacimiento j,
- Ψ^j_o para el coste por usar el yacimiento j.
- m^j para el coste anual del mantenimiento por resguardar el yacimiento sin usarlo,
- λ el riesgo -país-.

Al sustituir la tasa de extracción óptima y el consumo óptimo entendemos el nuevo problema de inversión optimizado en esos parámetros, *i.e.* ante la elección de los parámetros

$$e_j = e^*_j \qquad y \qquad K^j_1 = c^{*j}_1.$$

Se obtiene que, por una parte, a un período la tasa de extracción debe superar $\mathcal{W}_j \leq e^*_j$, pero por otra, de no ser así, se propone la opción de compra de un yacimiento j.

Por ello el valor del proyecto viene dado por las contribuciones de los valores de los yacimientos que componen el campo petrolero como sigue

$$V_C = \Sigma^{\ell}_{j=1} \mathcal{W}_j V^j. \tag{5.16}$$

Observación:

La solución está caracterizada como la única solución de la ecuación diferencial parcial y además:

Estados	Inversión	Tipo exploración	p(E)
e_1	3	1	0.2
e_2	15	3	0.3
e_3	12	2	0.3
e_4	12	2	0.8

Tabla 5.1: Fases de exploración.

- Si los datos de la E.D.P. son continuos entonces es la única solución de la viscosidad.
- Si los datos son C^1 entonces la solución es C^3.
- Existe dependencia continua tanto de la condición inicial como de los datos.

5.5 Resultados

La aplicación es posible a proyectos con prospectos de explotación de recursos en general. Sin embargo, en particular, para aquellos casos en los que se tiene muchos prospectos de exploración disponibles para compañías de petróleo. En lo que sigue se presenta –bajo datos ficticios– un caso específico y se ofrecen los resultados al resolver el modelo de exploración usando métodos numéricos de diferencias finitas implícitas.

El prospecto que se presenta considera que antes de la exploración, los geólogos tienen un plan de inversión en exploración con cuatro fases de exploración, cada uno de éstas permite establecer un esquema de inversión y probabilidades de éxito (ver Tabla 1). En caso de fallo de alguna de las etapas entonces la exploración será abandonada. Por otro lado, en caso de éxito el proyecto debería se detenido o terminado, dependiendo del valor esperado del yacimiento. Este valor esperado se debe a la influencia conjunta de los precios y de las características técnico-geológicas del yacimiento.

Ante la falla de algún yacimiento en la exploración entonces, la producción es abandonada. Sin embargo, existen otras alternativas como 'ser detenido' o 'abandonado', dependiendo del valor del yacimiento. Hay que hacer énfasis en que también el valor esperado varía según el precio o las características técnico-geológicas del yacimiento por lo

Depósito E.MUS$	Valor S/O	Op.Operativas	Op.Desarr.	Op.Exp	Val.Total
500	-11.4	6.7	2.9	3.2	1.37
1000	-6.29	5.5	2.25	1.6	3.01
1500	-1.95	4.7	1.8	0.6	5.2
2000	-2.26	4.2	1.5	0.2	8.09

Tabla 5.2: Clasificación de yacimientos.

que se hace necesario el uso de las clasificaciones de yacimientos y su acometida mediante diferentes opciones reales generando, la flexibilidad necesaria. Ello se muestra en la tabla 5.2.

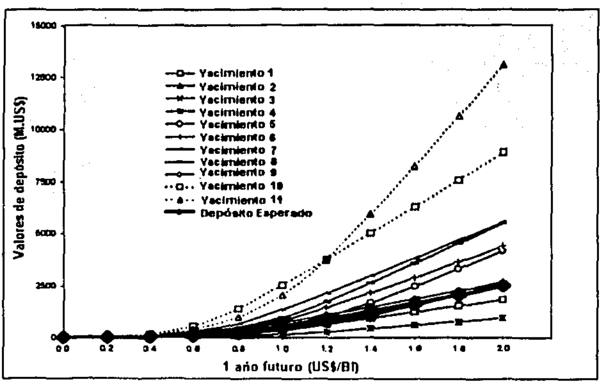

Figura 5.2: Gráfico de los valores de depósito esperados a un período.

5.6 Extensiones.

La hipótesis de independencia resulta, como poco, débil debido a que claramente los precios de producción, el riesgo técnico-geológico y el precio *spot* de salida S están íntimamente ligados o correlacionados entre sí. Por lo tanto (5.3), puede ser modificada y, al aplicar el Lema de Ito y siguiendo el mismo camino que el descrito anteriormente se obtiene la dinámica aleatoria 'modificada' de la variable colapsada reflejada por la ecuación diferencial estocástica:

$$\mathrm{d}\mathcal{Z} = \left(\mathrm{F}_S S(r-c) + \frac{1}{2}\mathrm{F}_{SS}S^2\sigma_S^2 + \frac{1}{2}\mathrm{F}_{SS}S^2\sigma_S^2\right)\mathrm{d}t + \mathrm{F}_S S\sigma_S \mathrm{d}\mathcal{B}_t^S + \mathrm{F}_\pi \pi\sigma_\pi \mathrm{d}\mathcal{B}_t^\pi + 2\mathrm{F}_{\pi S}\pi S\rho_{\pi S}\mathrm{d}\mathcal{B}_t^{\mathcal{Z}}. \tag{5.17}$$

De hecho, la fusión de las variables $Z = S\pi$ tal como se ha hecho anteriormente permiten establecer el valor del yacimiento. Después de algunas simplificaciones se recupera la dinámica de la variable de estado

$$\frac{\mathrm{d}Z}{Z} = (r-c)\mathrm{d}t + \sigma_S \mathrm{d}\mathcal{B}_t^S + \sigma_\pi \mathrm{d}\mathcal{B}_t^\pi + 2\mathrm{F}_{\pi S}\mathcal{Z}\rho_{\pi S}\mathrm{d}\mathcal{B}_t^{\mathcal{Z}}. \tag{5.18}$$

Esta nueva variable se entiende como el precio del recurso modificado por su coste asociado al riesgo debido a su extracción con la misma deriva que la original, S, pero con un incremento en la volatilidad

$$\sigma_Z = \frac{\sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_\pi^2 - 2\rho_{\pi S}}}{\sigma_S \sigma \pi}.$$

Con lo que la ecuación diferencial cuya solución es el valor del proyecto desarrollado. Por lo que, al calcular el valor del proyecto de exploración mediante la modificación dada por la no independencia probabilista del modelo de Brennan-Schwartz para obtener la ecuación diferencial parcial

$$\begin{aligned} &\max_{e_j}\left\{\tfrac{1}{2}\mathrm{V}^j_{ww}\mathrm{W}^2\sigma_w^2 + (r-c_j)\mathrm{W}\mathrm{V}^j_w - e_j(\mathrm{W}-m^j) - (r+\lambda)\mathrm{V}^j + 2\mathrm{V}_{wQ}w^t\rho w,\right. \\ &\left.\tfrac{1}{2}Z^j_{ww}W^2\sigma_w^2 + (r-c_j)WZ^j_w - Z^j_Q - (r+\lambda)Z^j\right\} = 0. \end{aligned} \tag{5.19}$$

con las mismas condiciones en el borde.

El proceso de aproximación numérica mediante el método de diferencias finitas implícitas es bastante mas complicado que aquél descrito en el capítulo anterior y que resulta un tema de investigación para trabajo futuro y que por lo tanto no seaborda aquí.

Capítulo 6

Aproximación Numérica.

En este capítulo se describen de manera global algunos métodos numéricos y su adecuada participación resolviendo problemas de opciones reales. Se discuten aproximaciones alternativas y algunos indicios de aplicación mediante procedimientos de inducción, con evolución *hacia delante* y *hacia atrás*, que tienen un lugar en la valoración de las opciones reales.

Un caso-proyecto con la opción de invertir en el futuro dependiente de un precio con rendimiento estocástico es evaluado usando árboles binomiales, diferencias finitas, y simulación. La solución analítica dada por Black-Scholes para este problema es usado como referencia. Los cuatro métodos proporcionan resultados muy parecidos.

Algunas extensiones de esos métodos de simulación son adecuados tanto para opciones de tipo americano, como para la solución de Brennan y Schwartz a su problema de valoración clásico. Los beneficios de este acercamiento, con su mejor modelo de manejo de incertidumbre compleja y el camino-dependiente de los flujos de dinero, también son discutidos.

6.1 Las Aproximaciones Numéricas.

6.1.1 Valoración de la Opción Real Europea por Procedimientos Numéricos

Ciertos problemas de demandas contingentes pueden ser resueltos a través de expresiones analíticas con expresiones exactas, pero esto no ocurre con la mayoría de ellos. De no encontrar una solución analítica entonces, lo ideal es el uso de métodos numéricos. Para ilustrar esta discusión de las aproximaciones numéricas alternativas y su comparación con una simulación normal, definimos un simple problema de valoración de opciones reales y se resuelve usando diferentes métodos.

Suponga que se quiere valorar un proyecto con flujos del dinero en efectivo dependiente de un precio de rendimiento estocástico, S. Sin pérdida de generalidad, y para hacer más simple la exposición puede suponer que la inversión inicial es nula, *i.e.* $T_0 = 0$ pero que requiere de una inversión I_1 veces T_1 lo cual, de ser realizado, genera flujos de dinero en efectivo con un valor presente en T_1 de $V(S)$. Dependiendo de este valor $V(S)$ el gerente puede decidir no invertir en T_1, en tal caso el proyecto debe ser abandonado en un valor de liquidación cero. El valor de este proyecto puede planearse como una opción *Call* escrita sobre $V(S)$ con precio de ejercicio I_1 y tiempo de maduración T_1.

Para hallar el valor de este proyecto es posible usar la bien conocida fórmula de Black y Scholes para una opción *call*, bajo ciertos supuestos. Entre ellos, que S es un recurso comercializable, que los mercados sean completos y permitan realizar cobertura en contra del riesgo del precio, del rendimiento y, sobretodo, suponiendo que sus precios de retorno están bien modelados por un movimiento browniano con tasas de interés y volatilidad constantes. De ser válidos estos supuestos, entonces no hay necesidad de acudir a los procedimientos numéricos.

Sin embargo, la mayoría de los modelos de opciones reales, no tienen una solución analítica en forma exacta. Hay muchas razones para quě ésto suceda, ello incluye a los modelos de incertidumbre más complejos y a las especificaciones de la flexibilidad de los proyectos. En estos casos, para valorar la demanda contingente también deben usarse procedimientos de solución numérica.

Hay muchos métodos numéricos que pueden usarse para valorar una demanda contingente de tipo europeo. De hecho, podemos mencionar procedimientos de simulaciones normales Monte Carlo como las más conocidas y, para discutir sus ventajas comparativas y desventajas, resolvemos el problema anterior mediante el uso de tres procedimientos numéricos alternativos: árboles binomiales, diferencias finitas, y simulación. Supondremos lo que Black y Scholes sostienen para tener una solución analítica que pueda usarse como una referencia para nuestros métodos numéricos aproximados.

Concretamente, supondremos que los precios de "riesgo−ajustado" siguen un movimiento browniano geométrico con una especificación de discretización como sigue:

$$\Delta S = rS\Delta t + \sigma S\sqrt{\Delta t}\mathcal{Z} \tag{6.1}$$

Ante la elección de los parámetros :

- $r = 0.10$,
- $\sigma = 0.2$,
- Δt son intervalos o pasos de tiempo,
- $\mathcal{Z}$ son variables aleatorias con una distribución normal estándar para cada tiempo fijo.

El proyecto de la inversión descrito antes tiene la especificación siguiente:

- $\mathrm{V}(S) = aS + b$
- $a = 10$
- $b = 0$
- $\mathrm{I}_1 = 10$

- $T_0 = 0$
- $T_1 = 1$

Como bien se ha mencionado antes, el valor de esta opción real puede ser directamente obtenida usando Black y Scholes, dado que el valor del proyecto con un precio de rendimiento inicial de 1 es \$1.30. Resolver este problema de valoración implica el uso de las tres aproximaciones numéricas alternativas.

6.1.2 Árboles Binomiales.

Las aproximaciones a través de árboles discretos de procesos estocásticos y su uso en la valoración de la opción han sido propuestas por Cox [Co-Ro-Ru], Rendleman y Barter [Re-Ba], y Sharpe [Sha]. Dado que, hemos tratado en el Capítulo 3 el tema de árboles binomiales, sólo recordaremos la generalidad de sus fundamentos. Los árboles binomiales suponen que esa incertidumbre en cualquier estado puede ser representada a través de dos estados alternativos. Estos dos estados se definen de tal modo que jugando con la distribución de los precios implícitos tan estrechamente vinculados con la distribución de probabilidad de la variable continua del estado subyacente. El proceso estocástico para modelar el precio del rendimiento es reacondicionado para restringir los valores y las probabilidades de los dos estados de igual manera que el retorno del precio esperado sobre el próximo intervalo de tiempo sea igual a $r\Delta t$ y que su volatilidad sea $\sigma\Delta t^{\frac{1}{2}}$. Una solución pasa por definir los dos valores para la variable de estado como S_u y S_d, con probabilidades p y $(l - p)$, respectivamente. Por otra parte,

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{6.2}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{6.3}$$

por lo que también

$$d = \frac{1}{u}.$$

Y una expresión alternativa para la probabilidad en término de los valores anteriores viene dada por

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}. \tag{6.4}$$

Dependiendo de la exactitud requerida es posible determinar el tamaño del intervalo de tiempo Δt, o equivalentemente, el número de subintervalos de la partición del tiempo total de madurez. En nuestro caso el tiempo de la madurez es $T_1 = 1$, y se ha dividido en en 10 subintervalos, por lo tanto, ponemos $\Delta t = \frac{1}{10}$. Una vez que el árbol binomial es obtenido y, por lo tanto, la distribución del precio subyacente también, la valoración del derivado (en nuestro caso el proyecto de la inversión) puede ser entendido como una demanda contingente en precio del rendimiento.

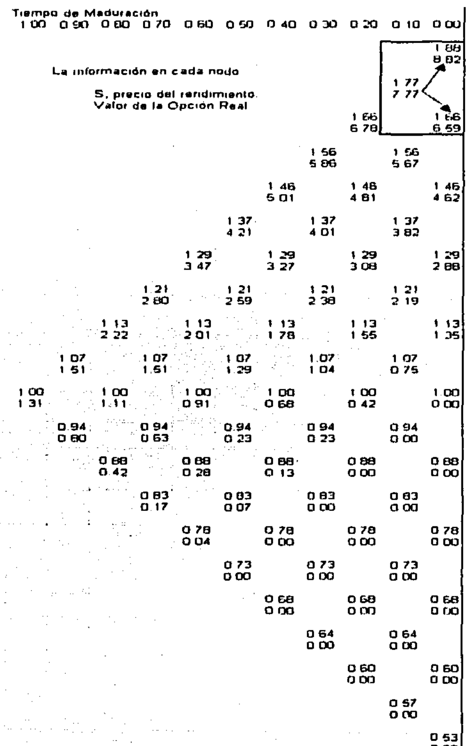

Figure 6.1: Árbol binomial.

La figura 6.1 presenta una solución del árbol binomial para nuestro problema de valoración de inversión. Un vector bidimensional que especifica en cada nodo del binomio, tanto al precio del rendimiento, como al valor de la opción. Obtener esos valores de la opción conduce al cálculo del flujo de dinero en el tiempo de maduración (T_1) a través de

$$\text{Max}\,(V(S) - I_1; 0)\,.$$

Estos valores se presentan en negritas al derecho extremo en 6.1.

El siguiente paso deriva en calcular el valor de la opción para cada uno de los nodos anteriores. Por ejemplo, en la parte superior en una esquina de la figura 6.1 se presenta una caja con tres nodos. El valor de la opción de 7.77 se calcula como el valor de la opción esperado en los dos siguientes nodos usando las probabilidades de riesgo neutral

$$\text{Valor de la Opción} = [p * 8.82 + (1-p)6.59]\, e^{r\Delta t} = 7.77.$$

El procedimiento se repite columna a columna de derecha a izquierda. El último nodo representa el valor de la opción actual de 1.31 por un precio del rendimiento inicial de 1. Esta opción es muy similar a nuestro valor de la solución analítico de Black y Scholes.

6.1.3 Diferencias Finitas

Una alternativa, a los árboles binomiales, es usar diferencias finitas para resolver la ecuación de valoración. En este caso, podemos usar condiciones normales de no arbitraje para derivar una ecuación diferencial parcial para el valor de la demanda contingente. Para nuestro problema de opciónes reales, la ecuación diferencial estándar Black-Scholes cuya solución es precisamente el valor de la opción real $\mathbb{H}(S,t)$ es:

$$\frac{1}{2}\mathbb{H}_{ss}S^2\sigma^2 + rS\mathbb{H}_s - r\mathbb{H} + \mathbb{H}_t = 0. \tag{6.5}$$

Con las siguientes condiciones de maduración en el borde:

$$\mathbb{H}(S, t = T_1) = \text{Max}\,[V(S) - I_1; 0]\,. \tag{6.6}$$

Aquí S es una concentración del estado, de tal manera que:

$$\mathbb{H}(0,t) = 0. \tag{6.7}$$

En 1977, Eduardo Schwartz propuso la discretización de todas las variables de estado para el procedimiento de diferencias finitas, poniendo el valor de las demandas contingentes en el límite, reemplazando la primera y segunda derivada por una aproximación de diferencias finitas y, resolviendo usando una versión discreta de la ecuación diferencial parcial que representa la ecuación de valoración hacia atrás (*backward*). Hay dos aproximaciones de las diferencias finitas básicas: el método implícito y explícito. Aunque el anterior es más robusto, nosotros llevamos a cabo el último por las razones expuestas.

En nuestro problema, el valor del proyecto es una función de dos variables de estado: el precio del rendimiento, S, y el tiempo de maduración, T. El tiempo es discreto en M intervalos, y el precio S en N intervalos. La ecuación diferencial de Black y Scholes es reemplazada por las aproximaciones de la diferencias siguientes:

$$\Delta S = \frac{S_{\max}}{\mathrm{N}}. \tag{6.8}$$

$$\Delta \mathrm{T} = \frac{\mathrm{T}_1}{\mathrm{M}}. \tag{6.9}$$

También la derivada se discretiza mediante,

$$\mathbb{H}_s = \frac{\mathbb{H}_{i+1,j+1} - \mathbb{H}_{i+1,j-1}}{2\Delta S}. \tag{6.10}$$

y para la de segundo orden se tiene:

$$\mathbb{H}_{ss} = \frac{\mathbb{H}_{i+1,j+1} - 2\mathbb{H}_{i+1,j} + \mathbb{H}_{i+1,j-1}}{\Delta S^2}. \tag{6.11}$$

mientras que para la derivada temporal,

$$\mathbb{H}_t = \frac{\mathbb{H}_{i+1,j} - \mathbb{H}_{i,j}}{\Delta t}. \tag{6.12}$$

Una vez que estas aproximaciones se sustituyen en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$a_j\mathbb{H}_{i+1,j-1} + b_j\mathbb{H}_{i+1,j} + c_j\mathbb{H}_{i+1,j+1} = \mathbb{H}_{i,j}. \tag{6.13}$$

Más precisamente,

$$a_j = \frac{1}{1+r\Delta t}\left[-\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right]. \tag{6.14}$$

$$b_j = \frac{1}{1+r\Delta t}(1 - \sigma^2 j^2 \Delta t). \tag{6.15}$$

$$c_j = \frac{1}{1+r\Delta t}\left[\frac{1}{2}rj\Delta t + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t\right]. \tag{6.16}$$

Así, dado el conocimiento de los valores de la demanda contingente en $i+1$ el obtener los valores en i resulta sencillo. Por una parte, existe una condición al límite que da valores iniciales en $i = \mathrm{M}$, y hace posible trabajar hacia atrás, es decir, desde $i = \mathrm{M}$ hasta $i = 0$.

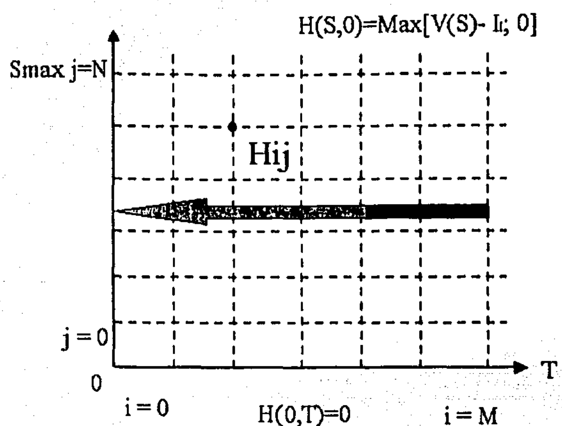

Figura 6.2: Discretización del estado del espacio .

La figura 6.2 presenta una solución obtenida mediante las diferencias finitas, y muestra el valor de la inversión. Las tres columnas del lado derecho calculan las constantes necesarias y en la siguiente columna, aparecen los valores a la izquierda, y el de la opción real en el límite Es posible programar el cálculo de la opción real en el límite:

$$\text{Valor Opción en la fecha de Maduración} = \mathrm{Max}(V(S) - I_1; 0).$$

Finalmente, se presenta el valor del proyecto para cada precio inicial (cuando el tiempo de maduración es 1). Para un precio del rendimiento inicial de 1, el valor de la opción calculado es 1.30, nuevamente muy similar a nuestros resultados anteriores.

Valor de la Opción Real															
	Tiempo de Maduración (l)														
j	Precio	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	aj	bj	cj
20	2.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10.0	10	0.6931	-0.5941	0.8911
19	1.9	9.2	9.3	9.2	9.3	9.2	9.2	9.2	9.2	9.1	9.1	9	0.6208	-0.4396	0.8089
18	1.8	8.6	8.4	8.5	8.4	8.4	8.3	8.3	8.2	8.2	9.1	8	0.5525	-0.2931	0.7307
17	1.7	7.6	7.7	7.6	7.6	7.5	7.4	7.4	7.3	7.2	8.1	7	0.4881	-0.1545	0.6564
16	1.6	6.8	6.7	6.7	6.6	6.6	6.5	6.4	6.3	6.2	7.1	6	0.4277	-0.0238	0.5861
15	1.5	5.9	5.8	5.7	5.7	5.6	5.5	5.4	5.3	5.2	6.1	5	0.3713	0.0990	0.5198
14	1.4	4.9	4.8	4.8	4.7	4.6	4.5	4.4	4.3	4.2	5.1	4	0.3188	0.2139	0.4574
13	1.3	4.0	3.9	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.3	3.2	4.1	3	0.2703	0.3208	0.3990
12	1.2	3.0	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5	2.4	2.3	2.2	3.1	2	0.2257	0.4198	0.3446
11	1.1	2.1	2.0	1.9	1.8	1.7	1.6	1.5	1.3	1.2	2.1	1	0.1851	0.5109	0.2941
10	1.0	1.3	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8	0.7	0.6	0.4	1.1	0	0.1485	0.5941	0.2475
9	0.9	0.7	0.6	0.5	0.4	0.4	0.3	0.2	0.1	0.1	0.2	0	0.1158	0.6693	0.2050
8	0.8	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0871	0.7366	0.1663
7	0.7	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0624	0.7960	0.1317
6	0.6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0416	0.8475	0.1010
5	0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0248	0.8911	0.0743
4	0.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0119	0.9267	0.0515
3	0.3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0030	0.9545	0.0327
2	0.2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	-0.0020	0.9743	0.0178
1	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	-0.0030	0.9861	0.0069
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0	0.0000	0.9901	0.0000

Figura 6.3: Solución de diferencias finitas para una inversión con una Opción Real Europea.

6.1.4 Simulación

En el año de 1977, Boyle [Boy] propuso una aproximación por simulación Monte Carlo para la valoración de la opción europea. El método está basado en la idea, en donde, simulando las trayectorias de los precios pueden aproximarse por distribuciones de probabilidad de los valores finales del recurso. Se calculan los flujos de efectivo de la opción para cada simulación y entonces se hacen los promedios. El flujo del dinero promedio descontado, usando la tasa de interés libre de riesgo, representa un punto estimado del valor de la opción.

Hay varias maneras de aumentar la exactitud de la estimación, la más simple es incrementar el número de trayectorias simuladas. La eficacia también puede ser mejorada usando técnicas de reducción de la varianza, incluyendo las aproximaciones a la variable de control y variables de prueba (*test variables*) (ver Hammersley y Handscomb [Ha-Ha]).

A continuación resolvemos nuestro problema de opciones reales.

	Tiempo de maduración (i)											
Corrida	**1.0**	**0.9**	**0.8**	**0.7**	**0.6**	**0.5**	**0.4**	**0.3**	**0.2**	**0.1**	**0.0**	**V(S)**	**VPN**
1	1.00	0.98	0.98	0.91	1.00	0.99	0.95	0.97	0.95	0.91	0.88	0.00	0.00
	1.00	1.04	1.06	1.16	1.06	1.09	1.16	1.16	1.20	1.28	1.34	3.44	1.56
2	1.00	0.98	0.99	1.11	1.13	1.11	1.23	1.19	1.26	1.27	1.31	3.12	1.98
	1.00	1.04	1.05	0.95	0.94	0.98	0.89	0.94	0.91	0.91	0.90	0.00	1.49
3	1.00	0.98	1.07	1.09	1.06	1.01	1.06	1.00	1.06	1.08	1.25	2.50	1.30
	1.00	1.04	0.97	0.97	1.01	1.08	1.05	1.13	1.09	1.08	0.94	0.00	1.37
4	1.00	0.93	0.89	0.90	0.88	0.75	0.77	0.82	0.90	0.80	0.72	0.00	1.28
	1.00	1.09	1.16	1.17	1.22	1.43	1.41	1.34	1.24	1.40	1.58	5.81	1.68
5	1.00	0.92	0.88	0.72	0.68	0.64	0.60	0.59	0.60	0.67	0.70	0.00	1.30
	1.00	1.10	1.17	1.41	1.52	1.63	1.77	1.84	1.85	1.65	1.60	6.01	1.89
10	1.00	1.00	1.02	0.99	0.96	1.09	0.99	0.94	0.89	0.90	0.88	0.00	1.29
	1.00	1.02	1.02	1.07	1.12	1.00	1.11	1.18	1.27	1.29	1.33	3.33	1.43
15	1.00	1.07	1.08	1.15	1.09	1.14	1.24	1.43	1.45	1.54	1.61	6.10	1.33
	1.00	0.95	0.96	0.92	0.98	0.96	0.89	0.77	0.78	0.75	0.73	0.00	1.44
20	1.00	0.91	0.93	0.93	0.93	0.94	0.92	0.94	1.01	1.13	1.18	1.75	1.32
	1.00	1.11	1.11	1.13	1.16	1.16	1.22	1.21	1.15	1.03	1.01	0.10	1.37
25	1.00	1.10	1.10	1.06	1.13	1.18	1.23	1.24	1.35	1.35	1.35	3.53	1.31
	1.00	0.92	0.94	0.99	0.95	0.92	0.90	0.91	0.85	0.86	0.88	0.00	1.34
30	1.00	1.05	1.02	1.05	1.09	1.08	1.13	1.07	1.04	1.12	1.18	1.82	1.30
	1.00	0.97	1.01	1.01	0.99	1.02	0.99	1.06	1.11	1.05	1.01	0.15	1.30

Figura 6.4: Solución por simulación para una inversión con una Opción Real Europea.

La figura 6.4 muestra a simulación para valorar la opción real. Cada ejecución comienza con un precio de rendimiento inicial de 1, y usando una serie específica de números aleatorios, una trayectoria de precios es calculada. Por ejemplo, la primera trayectoria del precio acaba (tiempo de madurez de la opción) con un precio de rendimiento de 0.88. La siguiente columna de la derecha muestra los pagos finales de la opción para ese precio específico. Dado que, para ese precio el proyecto se abandonaría, el valor de la opción es cero.

Para llevar acabo la técnica de reducción de varianza de la variable de prueba, el siguiente renglón en la figura 6.4 muestra la trayectoria del precio usando los mismos números aleatorios anteriores, pero con un cambio de signo. Dado que nuestros números aleatorios iniciales eran tales que el precio del rendimiento en la fecha de maduración era bajo (0.88), pero cambiando los signos de los números aleatorios este segundo renglón proporciona una trayectoria con el precio del rendimiento en la fecha de maduración alto (1.34). Para este nuevo precio de rendimiento la opción es ahora valiosa y proporciona un flujo del dinero en efectivo de 3.44. Es fácil ver que un promedio de estas dos filas proporcionan una estimación de varianza baja de los flujos de dinero actuales que usando simplemente una sola fila.

Solo una ves, un número adecuado de trayectorias de precios se genera, el valor de la opción real puede ser calculado descontando los flujos promedio de dinero de la opción, libres de riesgo. Puede verse que en nuestro caso con una serie de sólo 30 trayectorias del precios independientes (60 renglones incluyendo sus valores de prueba) podemos obtener un mismo valor de cierre para nuestro problema de opción real (1.30). En la mayoría de los casos es necesario hacer un número mayor de corridas de simulaciones para obtener estimaciones exactas.

6.1.5 Comparando procedimientos numéricos alternativos.

Hemos presentado aplicaciones de tres aproximaciones numéricas alternativas al mismo problema de opciónes reales. Cada uno de ellos tienen sus propios méritos y son especialmente útiles para ciertos tipos específicos de problemas de valoración.

Quizá el factor más importante, una vez elegido el acercamiento numérico apropiado es el tipo de opción que estamos intentando valorar. La simulación normal es un procedimiento de inducción hacia adelante, y como tal presenta problemas para valorar opciones de tipo americano. En situaciones en las que la estrategia óptima no es de conocida de antemano, los procedimientos de simulación no pueden valorar estas opciones correctamente. Como se dijo, muchas opciones reales permiten decisiones de mercados para cambiar la producción o niveles de inversión en diferentes puntos del tiempo, y se modela por consiguiente como opciones americanas. Las diferencias finitas y árboles binomiales, por otro lado, son procedimientos de la inducción dirigidos hacia atrás que pueden determinar políticas del ejercicio óptimas, valorando correctamente estas opciones americanas.

La debilidad en la simulación, manejando opciones americanas, se vuelve importante cuando hay trayectorias dependientes de flujos de dinero. Por ejemplo, los pagos de impuestos actuales normalmente dependen de ganancias del pasado y presentan una dificultad por todos los procedimientos de la inducción dirigidos hacia atrás. Siempre es posible evitar este problema definiendo nuevas variables de estado que representan un camino de información dependiente, pero esto puede aumentar la complejidad del modelo de una manera sustancial. Por consiguiente, en la presencia de camino-dependiente de los flujos del dinero en efectivo, la simulación es un mucho mejor procedimiento que los procedimientos de inducción dirigidos hacia atrás.

La principal característica que hace a la simulación tan atractiva es su habilidad para cubrir la incertidumbre de una manera muy simple. La reciente tendencia en modelar la incertidumbre de los precios usando modelos de multi-factores es más sencillo de llevar a cabo usando simulación que usando otros acercamientos numéricos. Algo similar puede decirse en el uso de procesos estocásticos complejos para modelar la dinámica de éstos factores de riesgo, que también son más simples usando simulación.

Finalmente, el hecho que el costo de la informática ha estado bajando dramáticamente en los últimos años y que esta tendencia no muestra ninguna señal de debilitarse en un futuro cercano, se presenta una perspectiva favorable para el uso creciente de la simulación. Es más, su inconveniente mayor. la incapacidad para manejar opciones del tipo americano con éxito, ha sido tema para nuevas investigaciónes en recientes años, como se describirá en la sección siguiente. Con costos computacionales más bajos podemos esperar manejar el aumento en la complejidad en los modelos, y obtener un uso reforzado en técnicas de simulación.

6.2 Simulación para Opciones Americanas.

Como ya se ha mencionado antes, han surgido inumerables y recientes esfuerzos por extender las técnicas de la simulación Monte Carlo para resolver opciones de tipo Americano. Éstos incluyen a Barraquand y Martineau [Bar], Longstaff y Schwartz [Lo-Sc], y otros. Estos métodos intentan combinar la simplicidad de inducción hacia adelante con la habilidad de determinar el ejercicio óptimo de la opción de inducción dirigida hacia atrás. En esta sección se hará énfasis en la intuición básica de este nuevo acercamiento y en la próxima sección los resultados de su aplicación al clásico modelo de Brennan y Schwartz [Br-Sc] y [Br-Sc1] para evaluar inversiones del recursos naturales.

Por una parte, Longstaff y Schwartz [Lo-Sc] proponen un nuevo, y prometedor, procedimiento para resolver opciones americanas. Su aproximación consiste en estimar una función esperada de los pagos finales dependiente de cada fecha para el valor siguiente de la opción americana, y comparando este valor con su valor de ejercicio. Siempre que el valor del ejercicio sea más grande que el valor siguiente de la opción debe ser ejercida de manera óptima, mientras en el caso opuesto no sucedería. Con ello, se estima una función esperada de los pagos finales que ha ejecutado mil caminos de variables de estado, y en una segunda fase es posbile hacer un análisis de la inducción dirigido hacia atrás; cuándo es óptimo para el ejercicio. En un punto cualquiera en el tiempo (empezando del final) cada camino genera una observación de la optimalidad de ejercer o no para ese camino. Usando regresiones locales cruzadas es posible estimar cuándo es óptimo, para el ejercicio, la fecha dada y los valores de las variables de estado, y resuelve recursivamente hacia atrás.

Otro acercamiento (usado en la próxima sección), propuesto por Barraquand y Martineau [Bar] se ha aplicado para resolver algunas opciones financieras. Su principal visión es que, en la mayoría de los casos, es posible una discretización y la reducción de la dimensión del problema de valoración, y todavía conseguir aproximaciones bastante buenas. Por ejemplo, de tener un un proceso multi-factorial para una variable de estado S, el procedimiento requiere hacer unas mil simulaciones de Monte Carlo en S y, agrupar los valores obtenidos en una serie fija de "cajas". Entonces, haciendo sucesivas pruebas de simulaciónes es posible determinar empíricamente las probabilidades de la transición entre las cajas sucesivas y finalmente, para resolver hacia atrás el proceso de valoración usando cada caja (ver 6.6) como una unidad de decisión.

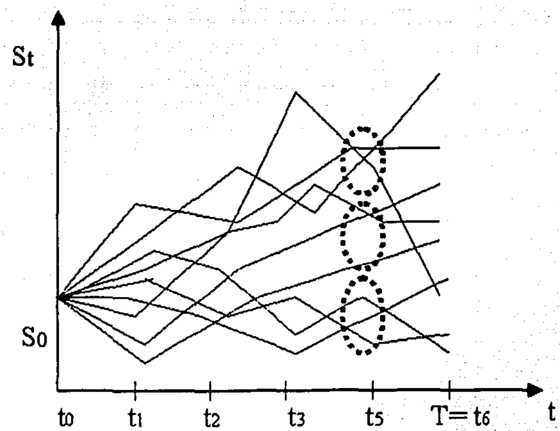

Figura 6.5: Caminos de la simulación para la variable de estado incierta y agrupadas en las cajas.

El éxito de esta metodología es la selección de las variables de estado uni-factoriales que representarán todas las variables de estado en el problema. Como señala Broadie y Glasserman [Br-Gl], este procedimiento no asegura convergencia cuando, por ejemplo, hay óptima separación de los sectores de ejercicio. En este caso, los futuros incrementos en el número de cajas uni-dimensionales no pueden determinar la política del ejercicio óptimo, como la figura 6.7 muestra.

Para reducir este problema, Raymar y Zwecher recomiendan agregar una segunda dimensión a la caja que agrupa el proceso, para que el estado de la economía pueda ser representado por más de un vector uni-dimensional.

La mayoría de la literatura para resolver opciones americanas por simulación se ha concentrado en valorar opciones financieras. En la próxima sección se ilustrará el uso del procedimiento de Barraquand y Martineau [Bar] para el funcionamiento más óptimo de un yacimiento, siguiendo el modelo de Brennan y Schwartz. Por un lado, ya Cortazar y

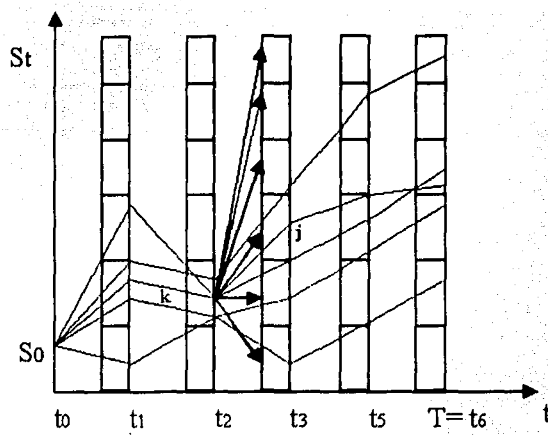

Figura 6.6: Determinación de las probabilidades de transición entre las Cajas.

Schwartz [Cor-Sch] incluyen otras aplicaciones de simulación a las opciones reales, quién resuelve por el cronometrado óptimo de una inversión de desarrollo en una reserva de petróleo usando el procedimiento Barraquand y Martineau [Bar], y actualmente Cortazar, Acosta y Osorio comparan las diferentes alternativas de simulación para valorar opciones reales.

6.2.1 Inversiones del Recurso Naturales : Resolviendo el Problema del yacimiento usando Simulación de Monte Carlo.

El Modelo y Procedimiento de Solución.

La mayoría de las inversiones reales ha implantado opciones americanas en su función de flujo de dinero. Siempre que las inversiones puedan retrasarse, extenderse a fechas diferentes, suspender y/o reanudar la producción, el cronometraje óptimo de esta decisión

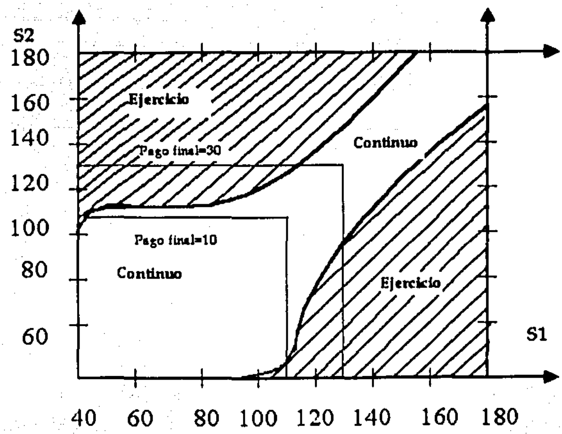

Figura 6.7: Ejemplo de separación de regiones de ejercicio Óptimas.

es crucial para la maximización del valor de recurso.

En esta sección se usa el procedimiento de la simulación Barraquand y Martineau [Bar] para resolver el modelo de Brennan y Schwartz para, a su vez, valorar un yacimiento que involucra varias opciones americanas. En este modelo, el valor del yacimiento depende de los flujos de efectivo descontados de la producción futura y, de que los precios del petróleo siguen un proceso estocástico. El yacimiento tiene reservas de petróleo finitas Q, una escala tecnológica constante de retorno con un promedio de costos de producción A(Q), una estructura de impuestos flexible, un diverso riesgo de expropiación e incluso opciones americanas, la flexibilidad para detener temporalmente o reanudar la producción (con costos asociados) o para, abandonar el yacimiento. El propio yacimiento tiene una tasa de producción máxima en la que produce óptimamente (ver Sección 5.3 que aparece en la página 104) o una tasa máxima de cierre.

Brennan y Schwartz resuelven su modelo por inducción dirigida hacia atrás usando aproximaciones numéricas de diferencias finitas para las ecuaciones diferenciales parciales que describen el valor del yacimiento. Se comienza el proceso de valoración conociendo las condiciones del límite, incluyendo el escenario al tiempo cero para el valor del yacimiento, cuando el recurso es exhausto, o si el precio del rendimiento se vuelve cero.

Los elementos importantes para resolver problemas semejantes de opciónes reales por simulación son: 1) la definición de una reja o retícula de valoración apropiada, con cada nodo representa un estado markoviano del yacimiento susceptible a ser resuelto por inducción dirigida hacia atrás, y 2) la discretización del proceso de precios de riesgo-neutral para simular posibles caminos de precios.

Primero, para definir la retícula de valoración, el valor del yacimiento en cualquier momento puede verse como dependiente del precio del petróleo —sobre las reservas restantes— y, en suma, si el yacimiento es abierto o cerrado. Es conveniente discretizar las reservas totales en las unidades de producción, q. Cada unidad de producción representa el rendimiento total del recurso extraido que se producirá después de una decisión que se considera se ha hecho y antes de una nueva revisión en si, o no, continuar haciendo la producción.

Dependen del estado actual del yacimiento la realización de las próximas fases factibles. Por ejemplo, si el yacimiento está abierto y tiene n unidades de reservas de petróleo (cada una de las q barriles de crudo) el administrador del yacimiento podría decidir mantenerlo abierto (reduciendo luego - el escenario de las reservas a $n - 1$ unidades), para cerrar el yacimiento (con escenarios de reservas similares pero un entorno económico de precios depauperado), o para abandonar el yacimiento de manera definitiva. Cada decisión está asociada con los flujos de efectivo diferentes. En el primer, caso el flujo de efectivo es igual a los réditos menos los costos de producción. En el segundo, el cierre y el mantenimiento cuesta, y en el tercer caso es cero.

Al tomar la decisión óptima en cada estado del yacimiento se calcula el valor esperado de cada alternativa de decisión, que, a su vez, depende de las probabilidades de la transición para los cambios en los precios del petróleo y en el valor de continuación óptimo para cualquiera de las tres decisiones.

El segundo elemento a resolver por simulación, semejante al problema de la evaluación, es la definición del proceso estocástico que modela la incertidumbre. Para obtener las probabilidades de cambio del precio hay que especificar el proceso estocástico de precios. Por esta razón, Brennan y Schwartz asumen una caminata aleatoria para el riesgo —en donde el precio del recurso tiene retornos ajustados—. Discretizamos este proceso usando la ecuación siguiente:

$$\Delta S = (r - k)S\Delta t + \sigma S\sqrt{\Delta t}B_t. \tag{6.17}$$

donde S es el precio del recurso, r la tasa de interés libre de riesgo (real), k el rendimiento de conveniencia, σ la volatilidad de ingresos del precio, Δt incrementos en el tiempo, y B_t es un proceso estocástico browniano estándar. Dada la experiencia en la creación de modelos, se sabe que es posible que un proceso de reversión a la media para los precios del recurso podría ser un mejor modelo para estos casos, sin embargo resultarí costoso en cuanto a su desempeño. Es usual el empleo de caminatas aleatorias, por una parte porque es más barato y por otra para medir el rendimiento comparativamente con el método de diferencias finitas también muy empleado por sus bajos costos en ejecución. En lo que sigue, se discuten las posibles extensiones de modelos que tienen en cuenta este problema.

Siguiendo a Barraquand y Martineau, para obtener un número discreto de estados de precios que de manera adecuada representen este proceso estocástico, se ha realizado una primera serie de ejercicios de simulación. Para cada intervalo de tiempo, ΔT, todos los caminos de precios se ordenan y se agrupan en 200 cajas, cada una con el mismo número de observaciones. Se calcula el promedio, máximo y mínimo de precios en cada caja. Se realizan sucesivas simulaciónes y se calculan las probabilidades de la transición entre las cajas y los intervalos de tiempo sucesivos.

Una vez que las probabilidades de la transición se obtienen, la inducción dirigida hacia atrás usa el espacio de estados discreto que incluye, tanto a los precios, como a los estados del yacimiento. La retícula debe ser resuelta por inducción dirigida hacia atrás. Suponiendo que el yacimiento está abierto y tiene 2 unidades de producción, las flechas indican los estados factibles que podrían alcanzarse con algunas probabilidades no nulas. Se ha resuelto la retícula empezando por el final y trabajamos hacia atrás para determinar la política operacional óptima para cada valor del vector estatal.

Valor del Yacimiento y la Política Óptima.

La exactitud del método de simulación son tan buenos como aquellos obtenidos por diferencias finitas en Brennan y Schwartz.

Puede verificarse que el método de la simulación proporciona excelentes aproximaciones.

La política óptima obtenida por el método de simulación está ilustrado en la figura 6.8.

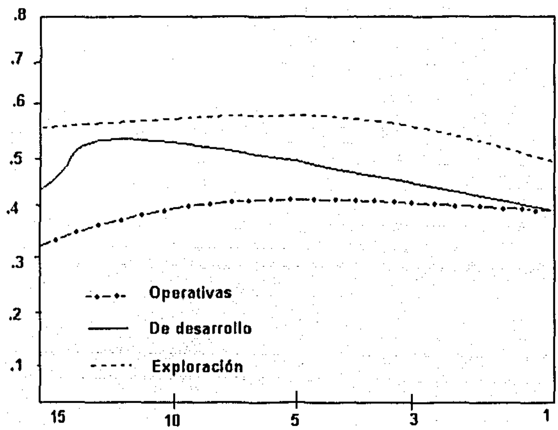

Figura 6.8: Precios Spot para ejercer las diferentes opciones reales.

Estos resultados son razonablemente cercanos a la política óptima dada por las diferencias finitas, como se puede observar en la figura 6.9, la cual compara el inicio crítico de los precios obtenidos por diferencias finitas y por simulación.

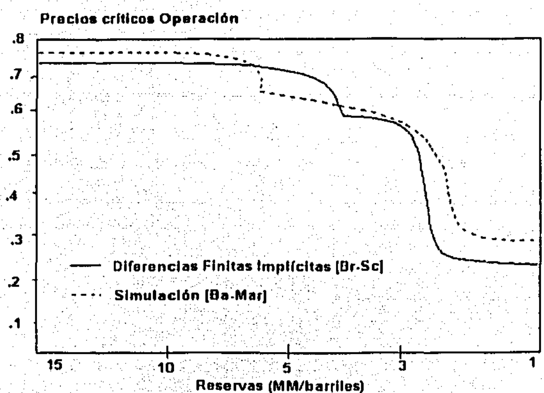

Figura 6.9: Precios críticos de uso de las opciones reales usando simulaciones y diferencias finitas.

Extensión del modelo.

La principal contribución de los procedimientos de simulación para resolver problemas de opciones reales es, su habilidad para manejar modelos que incrementan su complejidad. Se mencionarán algunos ejemplos de modelos extendidos que pueden ser fácilmente acoplados para usar estos procedimientos.

El primer tipo de posible extensión se trata de la modelación de incertidumbre. Hay una bibliografía extensa sobre las especificaciones y el número apropiado de factores de riesgo que pueden ser usados en los procesos estocásticos que definen incertidumbre. El proceso modelado a través de caminatas aleatorias en la sección anterior fue sencillamente usada en el modelo de Brennan y Schwartz, y posee una suposición fuerte considerando el arte de la investigación en los precios de productos. Dado que esa simulación es mucho más eficiente para resolver problemas con procesos con multi-factores, pueden extenderse modelos de simulación sencillos pero que permiten integrar especificaciones de procesos más complejos.

Un segundo tipo de posible extensión es tratar de modelar con activos derivados. La última sección ya consideró un modelo extendido (sobre el de Brennan y Schwartz) con la inclusión de la variable temporal como variable de estado. Esto incluso, permite modelar información dependiente del tiempo, como la inflación del costo o las concesiones de tiempo finito para su misma producción. Podrían ser consideradas otras extensiones del modelo de activos derivados fácilmente.

Finalmente, otras extensiones son posibles. El propio acercamiento modelado puede ser generalizado. Por ejemplo, las dimensiones adicionales de las variables de estado podrían permitir una definición más rica de la política óptima o una fuente de valor considerable en inversiones de opciones reales.

Conclusiones.

A lo largo de este trabajo se ha enfocado el esfuerzo en mostrar una metodología de análisis de los proyectos de inversión que, complementa a la utilizada por los métodos de valoración consistentes en el descuento de los flujos de caja a una tasa acorde a su riesgo. Efectivamente, el método del valor presente neto -principal representante de la metodología del descuento de flujos de caja-, infravalora los proyectos de inversión que incorporan consideraciones de tipo estratégico.

La metodología de valoración consistente en incluir las diversas opciones reales, llamadas así para distinguirlas de las opciones financieras, permite incorporar la flexibilidad empresarial a un método que prácticamente carece de ella (salvo que sea ayudado con técnicas como los árboles de decisión o la simulación). Esto es, permite tener en cuenta al momento idóneo para realizar el proyecto, la capacidad de aumentar la producción, la posibilidad de reducirla e incluso de abandonar el proyecto en plena realización como forma de reducir las pérdidas, etcétera.

En conclusión, la valoración de proyectos a través de las opciones reales, tiene el potencial no sólo de ayudar a integrar el presupuesto de capital con la planificación estratégica, sino también a ofrecer un método consistente de análisis de la totalidad de la dirección financiera y empresarial (involucrando tanto decisiones financieras como reales).

Así, aprovechando las ventajas de las opciones reales, se desarrolló un modelo dentro de este ambiente para evaluar exploración de recursos naturales cuando se juntan la incertidumbre en el precio y el riesgo técnico-geológico. Al colapsar ambas fuentes de incertidumbre, en un modelo de un solo factor y, con ello se ha obtenido el valor esperado con el que hemos simplificado el cálculo, mientras retenemos la flexibilidad operacional.

El modelo considera que el esquema de inversión en exploración puede ser detenido y/o concluido en cualquier momento dependiendo de los flujos futuros esperados. Estos flujos dependen del precio actual del recurso y las expectativas técnico-geológicas. Por lo tanto, las fases de exploración son concluidas cuando el proyecto es modelado con la flexibilidad y posibilidad de postergar tanto las inversiones en desarrollo, como las desarrolladas al contar con la opción de cerrar o reabrir la producción.

También, se ha presentado una aportación con este modelo al considerar la eventual dependencia probabilista entre las fuentes de incertidumbre (precio del recurso e incertidumbre técnico-geológica) en la variable colapsada, todo esto, como resultado de una adaptación del modelo original de Brennan y Schwartz ([Br-Sc1] 1985) para evaluar las inversiones en recursos naturales. Existen escritos para desarrollar campos de petróleo sobre software (*cajas negras*) implementado por empresas privadas basados en las ideas de Paddock, Siegel, y Smith ([Pa-Si-Sm] 1988), y Cortazar y Casassus ([Co-Ca] 1998). Otros modelos para evaluación de petróleo sobre activos contingentes petroleros han sido incluidos pero con poca profundidad en Smith y MoCardle ([Sm-Mc1] 1998, [Sm-Mc2] 1999), Lehman ([Le] 1989), y Trigeorgis ([Tr1] 1990).

Al finalizar este trabajo, se ha mantenido una apreciación global de la simulación y su adecuado uso resolviendo problemas de opciones reales. Se discuten acercamientos numéricos alternativos para valorar los recursos y mostrar que ambos procesos de inducción, hacia adelante y hacia atrás, tienen un lugar en la valoración de las opciones reales.

Para resaltar los méritos relativos de los diferentes métodos numéricos, un caso-proyecto con la opción de invertir en el futuro dependiente de un rendimiento estocástico ha sido evaluado usando árboles binomiales, diferencias finitas, y simulación. Dado que el proyecto puede modelarse como una opción call europea, la solución analítica de Black y Scholes fue usada como una referencia. Los cuatro métodos proporcionaron resultados similares.

Métodos tradicionales de simulación, aunque muy eficientes para resolver opciones de tipo europeo, han sido considerados inadecuados en la práctica para resolver opciones de tipo americano, el principal inconveniente para su uso en valoración de opciones reales. Recientes investigaciones, sin embargo, han propuesto extensiones de la simulación que combina procesos dirigidos hacia adelante y hacia atrás para valorar las opciones de tipo americano. Presentándo también, una aplicación de estos métodos de simulación extendidos para resolver el problema clásico de valoración del modelo de yacimientos de Brennan y Schwartz. Los beneficios de esta aproximación, con su mejor manejo de modelos de incertidumbre compleja y caminos dependientes del flujo de dinero, también fueron discutidos.

Parte IV

Anexos.

Anexo A: Glosario.

Una *opción* es un contrato que nos da derecho a comprar o vender un activo a un precio determinado, en una determina fecha. Por la posibilidad de ejercer dicho derecho el comprador de la *opción*, viene obligado a pagar al vendedor de la misma un precio o prima. Queremos subrayar que el poseedor de la *opción* tiene el derecho pero no el deber, de ejercitar dicha *opción*. éstas son los instrumentos más sencillos, aunque también más flexibles y sofisticados para administrar riesgos. En los mercados financieros internacionales, se comercian opciones sobre acciones, divisas, instrumentos de deuda y contratos de futuros.

De la definición de opción, podemos especificar que existen dos tipos de contratos según si el objeto sea la compra o la venta de un bien o activo, que son llamados:

• **Opciones de compra o** *Calls*: esta opción es la que da el derecho, más no la obligación, de comprar cierta cantidad de un bien a un determinado precio, para ejercerse durante un cierto periodo.

• **Opciones de venta o** *Puts* : por el contrario de la opción *Call.* La variedad de *Put* le da al tenedor el derecho, más no la obligación, de vender un activo a un cierto precio en una determinada fecha.

Los elementos básicos que configuran un contrato de opción serían:

• **Activo subyacente**: es el bien o activo sobre el que se tiene derecho de compraventa. Pudiendo ser materias primas (petróleo, oro, café, etc.) o bien instrumentos financieros (acciones, tipos de interés, divisas, etc.)

• **Precio de ejercicio**: es el precio al que la parte compradora puede optar para su compra o venta, y al que la otra parte está obligada a vender o comprar. Según la relación entre la cotización del Activo y su precio de ejercicio podemos hablar de opciones:

out the money (fuera de dinero). Cuando el precio de ejercicio esta por encima de la cotización del Activo Subyacente, en el caso de un *call*, o por debajo en el caso de un *put*.

at the money (en el dinero). Cuando el Precio de Ejercicio y la cotización del Activo son iguales.

in the money (dentro de dinero). Cuando la cotización del Activo Subyacente es superior al de ejercicio, en el caso de un *call*, o inferior a éste en el caso de un *put*.

- **Fecha de vencimiento:** es el momento en el que se puede optar por realizar la transacción.
- **Prima:** es el precio de la opción que se paga a la parte que emite el derecho por el riesgo asumido por las posibles variaciones del precio de mercado del activo subyacente.
- **Opción europea:** es aquella en la cual el derecho sólo se ejerce en la fecha de su vencimiento.
- **Opción americana:** es aquella en la que el derecho puede ejercerse en cualquier momento hasta la fecha del vencimiento.

Se ha proporcionado la terminología básica utilizada en las transacciones con opciones, pero posiblemente sea necesario introducir un ejemplo llevado más a la cotidianidad de los que no estamos involucrados en el mundo financiero.

La manera más sencilla para entender la esencia de un contrato con opciones es estableciendo su similitud con una póliza de seguro. Por ejemplo, si alguien desea asegurar su automóvil contra riesgos de accidentes durante un año, le paga a una compañía aseguradora una prima (cuyo monto dependerá de la probabilidad de que el accidente suceda). A cambio, la aseguradora le paga cierta cantidad de dinero, si éste tiene un accidente durante el año. Si no lo tiene, pierde su prima y nada más. Aunque no acostumbramos pensar de esa manera, la prima de seguro que se compra es una opción. De hecho, la compañía aseguradora vendió una opción de recibir cierta cantidad de dinero, la cual sólo puede ejercer si tiene un accidente.

Esto llevado al mundo financiero sería, por ejemplo, un inversionista con acciones de IBM quiere proteger su precio de venta. Puede pagar una prima por una opción de venta (opción *put*), esto es, para adquirir el derecho de vender sus acciones a un precio dado -el precio de ejercicio- durante un periodo determinado. Si el precio de las acciones de IBM baja hasta el precio de ejercicio, o incluso por debajo de éste, el inversionista estará protegido. Puede vender sus acciones al precio más alto, de acuerdo con el contrato de opciones. Sin embargo, si el precio de las acciones se mantiene por arriba del precio de ejercicio, la opción expira sin haberse utilizado, y el inversionista sólo pierde la prima. Así como la compañía de seguros gana una prima por asumir un riesgo de accidente, el vendedor de la opción recibe una prima por el riesgo de una caída en el precio de las acciones.

Anexo B: Evaluación del Modelo de Black & Scholes.

B.1.- Modelos de Volatilidad Estocástica.

A diferencia de los modelos estadísticos clásicos con varianza homoscedástica como los gaussianos para los que la incertidumbre es siempre estática, estos modelos de varianza heteroscedástica lo que hacen es definir un modo operacional de "incertidumbre dinámica" en la forma de ráfagas de volatilidad que barren de forma recurrente el balance de opinión dominante en los mercados sobre las expectativas de rentabilidad futura.

El pasado de una serie puede afectar al futuro de distintas maneras. A continuación presentamos varios modelos que presentan características diversas en función de como sea afectado por el pasado.

Un primer modelo que caracterice la dinámica de la volatilidad de un activo puede ser el siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma^2}{\sigma^2} = \mu \mathrm{d}t + \xi \mathrm{d}\omega$$

La tasa de inercia de la varianza sigue una distribución normal con media μ y varianza ξ. Esta es la aproximación seguida por Hull & White en 1987. Un modelo más avanzado y muy conocido es el denominado GARCH usado por Engle, Kane y Noh en 1993.

Las volatilidades altas tienden a estar concentradas en el tiempo (en inglés a esto se le llama "clustering"). Otros modelos de la misma familia tienen en cuenta, además, otra característica de la dinámica de los activos financieros: la naturaleza asimétrica de la volatilidad. Volatilidad asimétrica significa que la volatilidad puede ser afectada de forma diferente tanto por rendimientos positivos como por negativos. Los rendimientos negativos (mayores y más infrecuentes) llevan a incrementos mayores en la volatilidad futura.

La utilización de modelos de valoración que tomen en cuenta estas dos características ("clustering" y asimetría) supone, además de avances académicos, la posibilidad de valorar las opciones más correctamente ya que ambas características surgen precisamente de la realidad de los mercados financieros.

Estas dos características son fácilmente incorporadas en un modelo tipo ARCH con sus posteriores refinamientos tales como GARCH, EGARCH, AGARCH y VGARCH, todos ellos modelos econométricos de gran éxito empírico.

B.2.- Modelos ARCH, GARCH y AGARCH.

En muchas ocasiones en economía se habla de sucesos condicionados o de generación de expectativas a partir de los movimientos relativos que se produjeron en el pasado. Por ejemplo, todo el mundo relaciona inmediatamente la estabilidad o la inestabilidad en los mercados financieros con su comportamiento inmediatamente anterior, produciéndose fuertes ondas en la evolución de sus variables que, después de un gran sobresalto que frecuentemente dura días, tienden a retomar una senda de evolución tranquila. A cualquiera se le ocurre entonces que, en variables como éstas, el comportamiento en el momento actual responde a una expectativa generada sobre el valor de cambio producido en el momento precedente; es decir, a un valor esperado condicionado por la varianza del período anterior.

En la teoría clásica de series temporales (metodología de Box-Jenkins), el desarrollo estadístico se realiza a partir de un proceso estocástico estacionario; es decir, de un proceso con:

- Media constante.
- Varianza constante.
- Correlación entre dos observaciones distintas igual a la de otras dos cualquiera separadas por la misma distancia (mismo número de períodos).

El estudio de la componente de varianza constante es un fenómeno menos extendido y, no tener en cuenta una posible no constancia de este componente, puede suponer diversos problemas estadísticos cuando se estiman modelos econométricos (problemas ligados con la eficiencia de los parámetros estimados y su fuerte volatilidad ante el amplio intervalo de confianza en el que se mueven).

Determinar un patrón de comportamiento estadístico para la varianza es el cometido de los modelos Autorregresivos condicionales heteroscedásticos: ARCH. Engle (1982) es el autor de una primera aproximación a la varianza condicional del tipo que describiremos más adelante. Después de estos hay una amplia familia de sofisticaciones del modelo inicial que darán nombre a los modelos GARCH, IGARCH, EARCH, TARCH, SWARCH, QS-ARCH, APARCH, FACTOR-ARCH, ...

En el artículo seminal de los modelos ARCH, Engle cita tres situaciones que motivan y justifican el modelado de la heteroscedasticidad condicional Autorregresiva (nombre por él mismo dado).

Estas serían las siguientes:

1.- La experiencia empírica nos lleva a contrastar períodos de amplia varianza de error seguidos de otros de varianza más pequeña. Es decir, el valor de la dispersión del error respecto a su media cambia en el pasado, por lo que es lógico pensar que un modelo que atienda en la predicción a los valores de dicha varianza en el pasado servirá para realizar estimaciones más precisas.

2.- En segundo lugar, Engle expone la validez de estos modelos para determinar los criterios de posesión o venta de activos financieros. Los agentes económicos deciden esta cuestión en función de la información proveniente del pasado respecto al valor medio de su rentabilidad y la volatilidad que ésta ha tenido. Con los modelos ARCH se tendrían en cuenta estos dos condicionantes.

3.- El modelo de regresión ARCH puede ser una aproximación a un sistema más complejo en el que no hubiera factores de innovación con heteroscedasticidad condicional. Los modelos estructurales admiten, en multitud de ocasiones, una especificación tipo ARCH infinito que determina con parámetros cambiantes, lo que hace a este tipo de modelos capaces de contrastar la hipótesis de permanencia estructural que supone una de las hipótesis de partida y condición necesaria para la validez del modelo econométrico tradicional.

En definitiva, la clave de estos modelos está en considerar la información pasada de la variable y su volatilidad observada como factor altamente explicativo de su comportamiento presente y, por extensión lógica, de su futuro predecible. Estadísticamente, esta conclusión se refleja en tener en cuenta la esperanza condicional (conocida y fija la información hasta el momento inmediatamente anterior) del cuadrado de una variable (la expresión de su varianza si su media es nula). Descripción de los modelos **ARCH, GARCH y AGARCH:**

• **Modelo Autorregresivo Condicional Heteroscedástico, ARCH (1). Engle (1982)**

$$h_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

La varianza de la serie depende de un término constante δ_0 y del rendimiento al cuadrado de la serie en el periodo anterior multiplicado por un parámetro δ_1. Es décir, del rendimiento de la serie neto de factores predecibles (neto de tendencia). Si la serie sigue una caminata aleatoria entonces ε_t coincide con el rendimiento de la serie en t. Si los rendimientos de la serie siguen un proceso autorregresivo de primer orden (AR1) $y_t = a + by_{t-1}$ entonces ε_t será el rendimiento neto de la serie en t para $y_t = a + by_{t-1} + \varepsilon_t$ eliminando a y b. ARCH (p)

$$h_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \delta_p \varepsilon_{t-p}^2$$

La varianza de la serie depende de un término constante δ_0 y de rendimientos al cuadrado pasados de la serie multiplicados por sus respectivos parámetros.

• **Modelo Autorregresivo Condicional Heteroscedástico Generalizado, GARCH. Bollerslev (1986)**

$$h_t^2 = \delta_0 + \delta_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \Theta_1 h_{t-1}^2$$

La varianza de la serie depende de un término constante δ_0 y del rendimiento al cuadrado de la serie en el periodo anterior multiplicado por un parámetro δ_1 y de la varianza de la serie en el periodo anterior multiplicada por un parámetro Θ_1.

• **Modelo Autorregresivo Condicional Heteroscedástico Generalizado Asimetrico, AGARCH(1,1).**

$$h_t^2 = \delta_0 + \Theta_1 h_{t-1}^2 + \delta_1 (\varepsilon_{t-1} + \Psi)^2 .$$

Este modelo introduce efectos asimétricos a través del parámetro Ψ.

Si $\Psi > 0$, los rendimientos positivos influyen más en la volatilidad futura de la serie que los negativos.

Si $\Psi < 0$, los rendimientos negativos influyen más en la volatilidad futura de la serie que los positivos.

Si $\Psi = 0$, los rendimientos negativos y positivos influyen igualmente en la volatilidad futura de la serie, es decir, estamos hablando de un modelo GARCH(1,1). GARCH y AGARCH pueden incorporar más retardos en: h_{t-1}^2 y en ε_{t-1}.

Anexo C: Movimiento browniano

C.1.- El movimiento browniano.

La pregunta obligada es: ¿Qué es un proceso continuo?. Para definirlo se hará siguiendo una guía de tres principios. Primero un valor real que es tomado se puede expresar con funciones arbitrarias y cualquier número real se puede considerar como un valor. Segundo, el valor puede cambiar de un momento a otro; y tercero, el proceso cambia continuamente, el valor no puede dar saltos instantáneos. En otras palabras, si el valor cambia de 1 a 1.05 debe haber pasado por todos los valores que se encuentran en medio, aunque rápidamente.

Al menos como un punto de inicio se puede insistir en que los índices de mercado de valores se comportan de esta manera. Aún cuando se mueven en una forma aguzada, no es poco real (u objetivo) decir que, muestran un comportamiento de proceso continuo.

Y tan anterior como Bachelier en 1900 (ver [Ba]), quien analizó el movimiento del mercado de valores de París, las observaciones han ido aún más lejos y se compararon los precios con un proceso continuo especial - el proceso seguido por un movimiento aleatorio de las partículas de gas, o mejor conocido como el movimiento browniano.

Localmente la similitud puede ser impresionante. Ambos muestran el mismo perfil y las mismas similitudes bajo los cambios de la escala, la trayectoria nunca se suaviza conforme aumenta. Pero podríamos decir que a un nivel intuitivo, la estructura global de los índices, observados en la figura 2.1, son diferentes. Los índices accionarios crecen, se hacen más "ruidosos" conforme pasa el tiempo, y no se vuelven negativos. El movimiento browniano no puede ser toda la historia. Sin embargo, éste probará ser un componente remarcablemente efectivo para construir procesos continuos y localmente ser un movimiento más real.

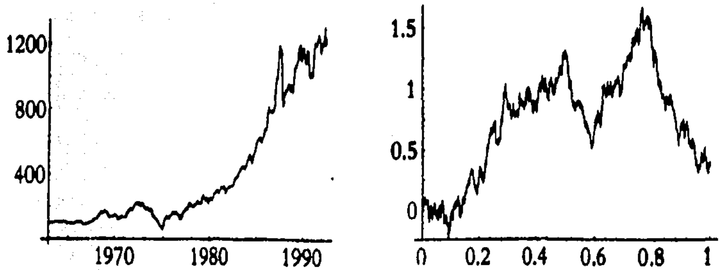

Figura 7.1: Índices accionarios y movimiento browniano.

Construyendo el movimiento browniano.

Robert Brown, con toda seguridad, no fue el primero en descubrir el movimiento que lleva su nombre. A consecuencia de sus viajes se fue interesando en la investigación de los coloides, y en la cuidadosa observación de preparaciones microscópicas en el estudio de los mecanismos de reproducción en las plantas.

El comportamiento errático del polen suspendido en una solución lo asoció a las teorías vitalistas de la vida, haciendo defensa de que este movimiento era propio de la materia viviente, y relacionado con los mecanismos de la reproducción. Sin embargo, en sus trabajos finales concluye que el movimiento errático observado era de *naturaleza mecánica* y no dependía del carácter orgánico ni inorgánico de los objetos microscópicos observados. Esto ocurría en el año 1828.

Parecía claro la no existencia de un modelo matemático para este movimiento: la Matemática y la Física del siglo XIX no estaban lo suficientemente desarrolladas para atacar el fenómeno. Fue necesario esperar los trabajos de Einstein, en 1905, para su modelación. Y la barrera fundamental que impedía el conocimiento del movimiento browniano era justamente el determinismo clásico de la Mecánica de Newton. ésta aseguraba que todo movimiento debía tener por causa una fuerza. Einstein usando la teoría molecular cinética de la materia prueba que dicho movimiento se produce sin que medie la acción de fuerza externa alguna. Su razonamiento es de una sencillez extrema: si los granos de polen en suspensión se mueven es porque las moléculas del líquido chocan con ellos, las moléculas a su vez están en movimiento constante por efecto de fuerzas externas al líquido (interacciones moleculares o, incluso, por cambios producidos en los niveles de energía en la estructura subatómica). De este modo Einstein llegó a la conclusión de que el *movimiento browniano es un fenómeno intrínseco a la materia.*

Propuesta de un modelo con trayectoria estocástica.

Supongamos que X_t denota la trayectoria de una partícula que está *sometida a choques* con moléculas (por ejemplo, dentro de un fluido); el desplazamiento de esta partícula, en un intervalo de tiempo de longitud Δt se mide mediante $X_{t+\Delta t} - X_t$, luego este desplazamiento, aparte de deberse a la velocidad de la partícula en ese momento, se agregará otro que puede ser proporcional a un desplazamiento, debido a interacciones azarosas, denotado por $\Delta B = B_{t+\Delta t} - B_t$. Supongamos que $X_t = x$ y que la velocidad en el tiempo t y en la posición x, es $\mu(t, x)$, se tendrá entonces que:

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \mu(t, x)\Delta t + \sigma(t, x)\Delta B \tag{7.1}$$

siendo $\sigma(t, x)$ el factor aleatorio de proporción que eventualmente puede depender del tiempo t y la posición x. Digamos que el desplazamiento se explica por una parte determinista, el primer término de la suma en el lado derecho de (7.1), y por una parte aleatoria, indicada por el segundo término del lado derecho de (7.1). De manera más general,

$$X_{t+\Delta t} - X_t = \mu(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, X_t)\Delta B \tag{7.2}$$

Observemos que si $\Delta B = B_{t+\Delta t} - B_t$ obedece las leyes de alguna probabilidad, se tendrá que, en definitiva, $X_{t+\Delta t} - X_t$, y por ende X_t, será una variable aleatoria.

Ahora bien, si X_t -fijo t- es una variable aleatoria, entonces una posible trayectoria, conforme a la ley de probabilidad que la rige, se denotará por $X_t(\omega)$, donde ω es el resultado obtenido del espacio de probabilidad en que se sustenta la variable X_t. Salvo cuando sea absolutamente necesario, la trayectoria de $X_t(\omega)$ la denotaremos simplemente por X_t.

El Movimiento browniano unidimensional y su modelación.

Supongamos que $\{B_t\}_{t\geq 0}$ es una colección de variables aleatorias, diremos que este proceso es un movimiento browniano si tiene las siguientes propiedades:

i) Para $0 \leq s < t < \infty$, $B_t - B_s$ es una variable aleatoria normalmente distribuida con media 0 y varianza $t - s$.

ii) Para $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n < \infty$, $\left\{B_{t_0}; B_{t_k} - B_{t_{k-1}}\right\}_{k=1}^{n}$ es un conjunto de variables aleatorias independientes.

Recordemos que una variable aleatoria Y se distribuye normalmente con media μ y varianza σ^2 (que denotaremos por $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) si la ley de probabilidad es:

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}t \tag{7.3}$$

de manera que la propiedad (i) nos dice que para $0 \leq s < t$

$$\mathbb{P}(B_t - B_s \leq a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} \mathrm{d}x \tag{7.4}$$

y la propiedad (ii) nos dice que para $0 \leq t_0 < t_1 < ... < t_n < \infty$, se tiene que:

$$\mathbb{P}\left(B_{t_0} - B_{t_1} \leq a_1, B_{t_2} - B_{t_1} \leq a_2, \cdots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}} \leq a_n\right) = \Pi_{j=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}} \leq a_j\right).$$

La complejidad de estas propiedades matemáticas es aparente ya que son realmente sencillas de interpretar (o modelar).

Sea $0 < t_1 < t_2 < t_3 \cdots < t_n$, intentaremos crear una posible trayectoria para cada valor de t_i, esto es $B_0, B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_n}$. Supongamos que $B_0 = 0$ por hipótesis, ¿cómo se obtiene B_{t_1}?, para esto acudimos a la variable aleatoria $B_{t_1} - B_0$, donde sabemos que un posible valor para este incremento sigue una distribución normal $\mathcal{N}(0, t_1)$, luego generamos un valor aleatorio según esta distribución y así obtenemos un valor para B_{t_1}. Para generar el valor de B_{t_2}, acudimos al incremento $B_{t_2} - B_{t_1}$ (observemos que ya sabemos el valor de B_{t_1}, digamos $B_{t_1} = w_1$) que es obtenido mediante la generación de un número aleatorio según una distribución $\mathcal{N}(0, t_2 - t_1)$, sea este número k_2, esto es $B_{t_2} - B_{t_1} = k_2$, de modo que $B_{t_2} = k_2 + B_{t_1} = k_2 + w_1$, y así continuamos con el proceso. De modo que para generar una posible trayectoria de este movimiento browniano, se generan, en forma independiente (garantizado por la propiedad (ii)) los incrementos $\mathcal{B}_1 = B_{t_1}$, $\mathcal{B}_2 = B_{t_2} - B_{t_1}$, $\mathcal{B}_3 = B_{t_3} - B_{t_2}$,..., y se calcula la trayectoria mediante:

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \\ B_{t_1} &= \mathcal{B}_1 \\ B_{t_2} &= \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_1 \\ B_{t_3} &= \mathcal{B}_3 + \mathcal{B}_2 + \mathcal{B}_1 \\ &\vdots \\ B_{t_n} &= \mathcal{B}_n + \mathcal{B}_{n-1} + \cdots + \mathcal{B}_1 \end{aligned}$$

sin olvidar que cada $\mathcal{B}_i$ se ha obtenido de una distribución $\mathcal{N}(0, t_i - t_{i-1})$, los cálculos que en general son más sencillos en cuanto se establezca que la diferencia entre los tiempos $(t_i - t_{i-1})$ sea constante, esto es $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, $\forall i$, de modo que $\mathcal{B}_i$ se genera mediante una distribución $\mathcal{N}(0, \Delta t)$, $\forall i$.

C.2.- El movimiento browniano como modelo de mercado.

En base a lo analizado podrían surgir algunas dudas acerca del movimiento browniano como modelo global para un comportamiento accionario, pero éste no tiene porque usarse por sí mismo. El movimiento browniano divaga, tiene media cero, mientras que las acciones de una compañía normalmente crecen a alguna tasa - históricamente esperamos que los precios aumenten aunque sea por la inflación-. Pero podemos incluir una desviación artificial. Por ejemplo el proceso $S_t = B_t + \mu_t$, para una constante μ que refleja el crecimiento nominal, es llamado crecimiento browniano con desviación. Y si parece muy ruidoso, o insuficientemente ruidoso, podemos balancear el movimiento browniano con algún factor: por ejemplo $S_t = \sigma B_t + \mu_t$, para un factor σ de ruido constante.

Así, el proceso tiene crecimiento ascendente a largo plazo, como lo deseamos. Pero en este caso en particular tenemos de inmediato una falla. El proceso se hizo negativo, lo que definitivamente no deseamos para el precio de las acciones. Aunque podemos ser más afortunados en delinear movimientos brownianos para nuestros fines. Consideremos por ejemplo, que tomamos la exponencial de nuestro proceso

$$X_t = \exp\left(\sigma B_t + \mu_t\right).$$

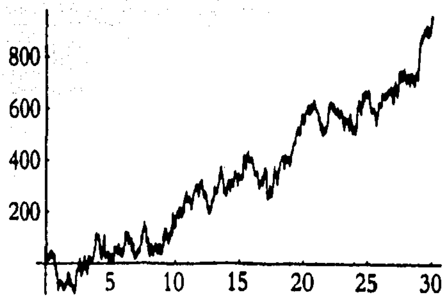

Figura 7.2: Representación gráfica de la información obtenida del mercado de valores.

Ahora reflejemos el crecimiento exponencial a largo plazo del Mercado de valores. No es sorprendente que este proceso sea bien conocido y que comúnmente se le llame movimiento browniano exponencial con desviación, o algunas veces movimiento browniano geométrico con desviación. No es el único modelo para acciones pero es sencillo y confirma que es una prueba fundamental efectiva.

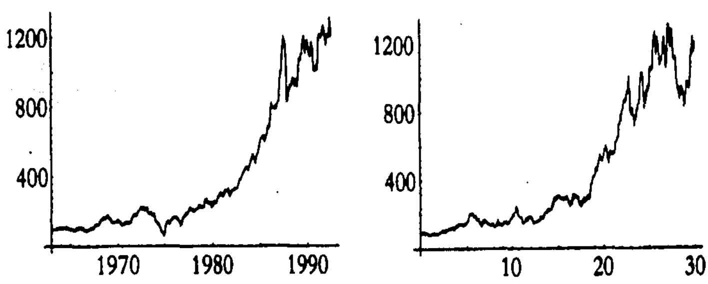

Figura 7.3: Índices accionarios y Movimiento browniano exponencial.

Puede ser poderoso el delinear el movimiento browniano con funciones, pero da lugar a una peligrosa complejidad. La figura 2.4 muestra una percepción gráfica de un punto cualquiera:

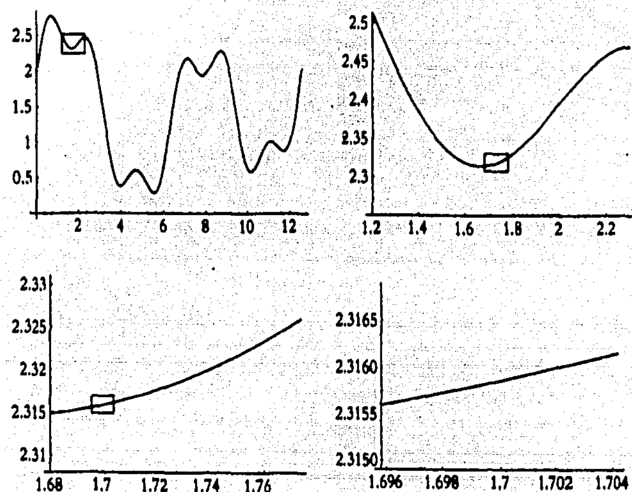

Figura 7.4: Amplificación prógresiva alrededor de un punto cualquiera.

Leyendo la gráfica de derecha a izquierda y línea por línea, cada pequeño cuadro se expande hasta formar el marco de la siguiente gráfica. Conforme el proceso continua, la sección de la gráfica se hace más suave y recta hasta que finalmente es una pequeña línea recta. A pesar de su comportamiento global extraño, las funciones diferenciables son de hecho construidas para segmentos de líneas rectas.

Con una construcción Newtoniana (Ver Anexo A), se puede decidir construir una familia de funciones especificando como se construye localmente a partir de nuestra piedra fundamental, la línea recta.

Escribiendo el cambio en el valor de una función Newtoniana f en un intervalo de tiempo t de una longitud infinitesimal dt como:

$$\mathrm{d}f_t = \mu_t \mathrm{d}t$$

en donde μ_t en nuestra función de escala, la pendiente de la desviación de la línea recta amplificada en t.

Diferencial Estocástica.

Contrario a lo anterior un movimiento browniano no produce una línea recta.

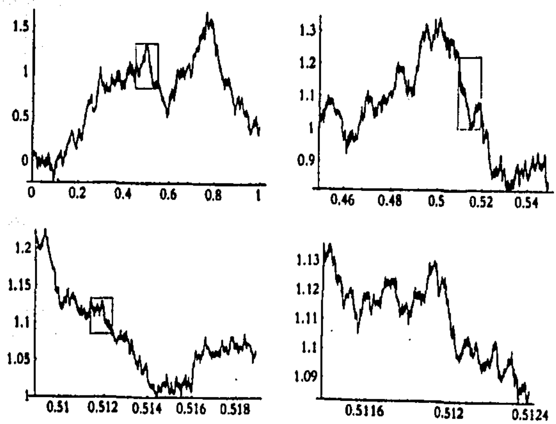

Figura 7.5: Acercamiento progresivo del movimiento browniano.

En la figura 2.5 se muestra como cada cuadro aumentado genera una nueva gráfica y es también un movimiento browniano igual de ruidoso.

Por supuesto esta autosimilitud es ideal como piedra fundamental -podemos construir movimientos brownianos globales de muchos segmentos de movimiento brownianos locales- . Y se puede, además, construir procesos aleatorios generales a partir de pequeños segmentos de movimientos brownianos (con escalas adecuadas), también podemos incluir funciones Newtonianas.

Concluyendo lo anterior, está claro que si deseamos estudiar cómo se desarrolla un proceso complicado que aparece en la naturaleza, en una máquina, en la sociedad o tal vez en un mundo matemático ideal. Analizamos primero lo que ocurre "localmente", es decir, en una porción pequeña, para un cambio pequeño de tal o cual variable del fenómeno. Al proceder así tal vez podamos aplicar algún principio característico del proceso que nos permita una formulación matemática del modo como se relacionan las diferentes variables del proceso. Tal formulación aparece a menudo en forma de *ecuaciones diferenciales*, es decir, ecuaciones en las que figura una función y sus derivadas y se desea saber cómo o cuál es la función o funciones que la satisfacen. Al hacerlo sabremos cómo se comporta el fenómeno, no ya "localmente", sino "globalmente".

Los casos en los que de la ecuación diferencial, que expresa el desarrollo local del fenómeno, se puede pasar a escribir una fórmula que exprese el desarrollo global son escasos. En la mayor parte de los casos esto no es posible y hay que conformarse con tratar de demostrar que existe solución y de dar, mediante el estudio de la ecuación diferencial misma, un procedimiento de cálculo que permita al computador en tiempo razonable proporcionarnos una solución numérica del problema. Para efectos prácticos, esto es suficiente. Así, por ejemplo, es posible escribir el conjunto de ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento de los astros del sistema solar, calcular y predecir los eclipses y demás fenómenos que tendrán lugar.

Sin embargo, hay cuestiones que necesitan otros métodos matemáticos y el campo de las ecuaciones diferenciales es amplísimo. Las ecuaciones diferenciales en las que se busca una o varias funciones de una sola variable se llaman *ecuaciones diferenciales ordinarias.* Aquellas en las que se busca una o varias funciones de varias variables, apareciendo las derivadas parciales de ellas con respecto a sus diversas variables, son *ecuaciones en derivadas parciales.* En ambos casos pueden ser ecuaciones lineales, que corresponden a situaciones en las que la respuesta del sistema bajo estudio es proporcional al estímulo introducido en él, o bien ecuaciones no lineales, en las que no existe tal proporcionalidad. Con frecuencia las ecuaciones lineales constituyen una aproximación suficiente a la realidad, pero en determinadas ocasiones la naturaleza - como es nuestra problemática de los índices accionario- se comporta de modo decisivamente no lineal. La teoría de ecuaciones no lineales constituye uno de los campos más atractivos hoy día dentro del análisis.

Introducción a las Ecuaciones diferenciales Estocásticas.

En párrafos anteriores(ver página 150) se ha descrito ya el movimiento de una partícula suspendida en un fluido, y que estaba influenciado por dos fuerzas. La primera, correspondía a un movimiento no aleatorio (determinista) generado por la naturaleza subyacente del flujo del fluido o inducida por alguna fuerza externa impuesta sobre el sistema. La segunda, colisiones y/o relaciones de interacciones con otras partículas originan movimientos aleatorios que actúan en tiempos de corta duración, y que a menudo se describen correctamente por las fluctuaciones de un movimiento browniano. De manera que, para un periodo de tiempo desde t hasta $t + \Delta t$, el desplazamiento de la partícula se puede aproximar por:

$$X_{t+\Delta t} - X_t \approx \mu(t, X_t) + \sigma(t, X_t)\Delta B \tag{7.5}$$

Donde $X_t \approx X_t(\omega) = x$ es la localización de la partícula en el tiempo t. Aquí $\mu(x,t)$ es la velocidad instantánea del fluido en el tiempo t y en la posición x mientras que el cambio incremental asociado a un movimiento browniano, B_t, está representado por $\Delta B_t = B_{t+h} - B_t$, y $h > 0$, que mide la varianza incremental asociada con las colisiones del proceso X_t.

Ahora bien, la ecuación (7.5) se puede escribir en notación diferencial al hacer que $h \downarrow 0$, obtendremos a:

$$\mathrm{d}X_t = \mu(X_t, t) + \sigma(X_t, t)\mathrm{d}B_t \tag{7.6}$$

y esta es una ecuación diferencial estocástica. Si obviáramos la palabra "estocástica", que se debe a la diferencial $\mathrm{d}B$, estaríamos tentados a integrar en el sentido clásico de Riemann-Stieltjes, para obtener alguna "solución" para X_t, esto es:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_z, z)\mathrm{d}z + \int_0^t \sigma(X_z, z)\mathrm{d}B_z \tag{7.7}$$

sin embargo la segunda integral, que diremos integral estocástica, no puede recibir el tratamiento clásico, toda vez que el proceso browniano B_t no es de "variación acotada". Entonces la integral estocástica $\int \sigma(X_t, t)\mathrm{d}W_t$ deberá tener un tratamiento especial. Existen dos versiones para el tratamiento de esta integral, digamos entonces que hay dos tipos de integrales estocásticas: *la integral de Itô*, y *la integral de Stratonovich.*

De momento nuestro interés será la identificación de algún fenómeno real que se pueda modelar según la ecuación (7.6).

Procesos Estocásticos.

Los procesos estocásticos forman parte de la metodología con la que se trata de abordar algunos fenómenos que ocurren fuera del equilibrio. En muchas situaciones los parámetros característicos de ciertos sistemas se ven fuertemente afectados por cambios en las condiciones ambientales. De este modo las fluctuaciones externas pueden inducir un comportamiento muy variable en algunas cantidades que no permite considerarlas como deterministas, que más bien se ajusta al de un proceso estocástico.

El procedimiento habitual para establecer modelos de estos sistemas con parámetros altamente variables, es el de incluir los procesos estocásticos como perturbaciones, llamadas *ruido*, a, los parámetros deterministas del sistema. Una de las características fundamentales de los modelos con ruido es que se puede llegar a alterar muy profundamente el comportamiento cualitativo del sistema, apareciendo nuevos fenómenos bastante alejados de nuestra intuición determinista.

Así, un procesos estocástico X tendrá tanto un término Newtoniano con base en dt y un término browniano con base en el incremento infinitesimal de B que llamamos dB_t . El término browniano de X puede tener factor de ruido σ_t , y entonces el cambio infinitesimal de X_t es:

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

Como en el caso Newtoniano, la desviación μ_t puede depender del tiempo t. E incluso también puede ser aleatorio, depender de los valores de X (y de hecho de B) o tomar como variable al tiempo t. Y por supuesto, también lo puede hacer de σ_t. Dichos procesos, como X y σ, cuyos valores en un tiempo t pueden depender de la historia de $\mathcal{F}_t$, pero no el futuro, son procesos adaptados al movimiento browniano.

Llamamos a σ_t la varianza o volatilidad del proceso X en el tiempo t y a μ_t la media o deriva de X en t.

Matemáticamente, un proceso estocástico es una martingala con respecto a una secuencia de conjuntos de información disponible $\{\mathcal{F}_t\}_{t\leq 0}$, si el valor X_t posee la siguiente propiedad matemática:

$$\mathbb{E}\left[X_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = X_t \tag{7.8}$$

Y un proceso estocástico Y_t es un juego justo si posee la propiedad:

$$\mathbb{E}\left[Y_{t+1}|\mathcal{F}_t\right] = 0 \tag{7.9}$$

La fórmula (7.8) afirma que si el proceso X_t es una martingala, la mejor predicción del valor X_{t+1} que puede ser realizada basándose en la información actualmente disponible $\mathcal{F}_t$ consistirá en mantener el valor X_t. Esto es cierto para cualquier valor posible incluido en el conjunto de información $\mathcal{F}_t$. Igualmente, la ecuación (7.9) establece que si Y_t es un juego justo la predicción correspondiente será cero para cualquier valor posible de $\mathcal{F}_t$. Es obvio que X_t es una martingala sí y sólo sí $X_{t+1} - X_t$ es un juego justo. Los modelos de la martingala y el juego justo son dos nombres para la misma caracterización matemática del equilibrio en los mercados financieros. Así, el movimiento de las tasas de rentabilidad constituirá un juego justo sí una serie íntimamente relacionada con el precio (la serie del precio actual más los dividendos futuros acumulados descontadas hacia atrás en el presente a un tipo de interés fijo) es una martingala.

La integral de Itô.

Se definen de manera similar a la integral de Riemann como en el cálculo determinista, en otras palabras, como el límite de una aproximación con sumas discretas

$$I_N = \sum_{n=0}^{N-1} f\left(t_n, \mathcal{B}_{t_n}\right)\left[\mathcal{B}_{t_{n+1}} - \mathcal{B}_{t_n}\right] \longrightarrow \int_0^T f\left(t, \mathcal{B}_t\right) \mathrm{d}\mathcal{B}_t = I \qquad \text{cuando N} \uparrow \infty.$$

Observe que la función está evaluada en su primera entrada en el punto t_n que es el punto del extremo izquierdo del subintervalo de la partición se puede elegir creada para crear la suma parcial I_N a diferencia del caso determinista, donde la elección del punto para evaluar a la función puede ser arbitraria con tal que se elija cualquier punto del subintervalo (y, de ser integrable la función, siempre converge al mismo límite), en el caso de la integral de Itô la elección del extremo izquierdo es necesaria, pues de otro modo obtendremos otra definción de integral (por ejemplo, si elige el punto medio obtendrá la de Stratonovich). Esta peculiaridad es característica de las integrales estocásticas, y pueden dar diferentes respuestas. Como hemos dicho anteriormente, la definición de

Itô usa el extremo izquierdo, mientras que la definición de Stratonovich utiliza el punto medio $(t_{n+1} - t_n)/2$de cada subintervalo. Una ventaja de la integral de Stratonovich es que el cálculo de Newton clásico traduce de manera directa los resultados del caso determinista. Además, la definición de Itô es más relevante dentro de las aplicaciones de las Finanzas por su propiedad robusta de ser no anticipativo (es decir sólo conocemos los precios al inicio de cada período y no a medio camino hacia el futuro). Como bien puede observar, la virtud de la integral de Itô I radica en que es una variable aleatoria, que para simplificar enormemente esta exposición pensaremos como el límite de la suma de variables aleatorias normales (para t fijo, el proceso $\mathcal{B}_t$ resulta ser una normal), con lo que estamos hablando (en el ambiente de esta explicación simple) de una variable aleatoria normalmente distribuida que puede ser caracterizada a través de su media y su varianza.

Los principales propiedades de la integral de Itô son:

1.- $\mathbb{E}\left[\int_0^T f(t,\mathcal{B}_t)\mathrm{d}\mathcal{B}_t\right] = 0,$

2.- $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f(t,\mathcal{B}_t)\mathrm{d}\mathcal{B}_t\right)\left(\int_0^T g(t,\mathcal{B}_t)\mathrm{d}\mathcal{B}_t\right)\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[f(t,\mathcal{B}_t)g(t,\mathcal{B}_t)\right]\mathrm{d}t$

Una consecuencia inmediata de la propiedad de isometría, *i.e.*

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f(t,\mathcal{B}_t)\mathrm{d}\mathcal{B}_t\right)^2\right] = \int_0^T \mathbb{E}\left[f(t,\mathcal{B}_t)^2\right]\mathrm{d}t.$$

Lema de Itô.

Es la regla de diferencial asociada a la noción de integral de Itô, por ello es la base de las reglas de cálculo de los procesos estocásticos. En otras palabras, si el proceso estocástico $\mathcal{X}_t$ evoluciona según la dinámica infinitesimal dada por la ecuación

$$\mathrm{d}\mathcal{X}_t = \mu_t\mathrm{d}t + \sigma_t\mathrm{d}\mathcal{B}_t$$

donde μ_t y σ_t son funciones $\mathcal{F}_t$−adaptados , *i.e.* conocidos sus valores al tiempo t, y si $f(t,x)$ es continuamente diferenciable al menos una vez el primer argumento y dos veces el segundo, entonces $f(t,\mathcal{X}_t)$ es también un proceso $\mathcal{F}_t$−adaptado, y

$$\mathrm{d}f(t,\mathcal{X}_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t,\mathcal{X}_t) + \mu_t\frac{\partial f}{\partial x}(t,\mathcal{X}_t) + \frac{1}{2}\sigma_t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,\mathcal{X}_t)\right)\mathrm{d}t + \sigma_t\frac{\partial f}{\partial x}(t,\mathcal{X}_t)\mathrm{d}\mathcal{B}_t$$

Donde, un camino para derivar el lema de Itô es la expansión de Taylor de f, utilizando el hecho que $\mathrm{d}\mathcal{B}_t^2 \longrightarrow \mathrm{d}t$ cuando $\mathrm{d}t \longrightarrow 0$, y reteniendo los términos de orden $\mathrm{d}t$.

Funciones Generadoras de Momentos.

Si X es una v.a. entonces se define la función generadora de momentos como

$$\begin{aligned} M_X(\theta) &= \mathbb{E}\left[e^{\theta X}\right] \\ &= \mathbb{E}\left[1+\theta X+\frac{1}{2!}\theta^2X^2+\frac{1}{3!}\theta^3X^3+\cdots+\frac{1}{n!}\theta^nX^n+\cdots\right] \\ &= 1+\theta\mathbb{E}[X]+\frac{1}{2!}\theta^2\mathbb{E}\left[X^2\right]+\frac{1}{3!}\theta^3\mathbb{E}\left[X^3\right]+\cdots+\frac{1}{n!}\theta^n\mathbb{E}[X^n]+\cdots \end{aligned}$$

El $k-$ésimo momento de la v.a. X es la $k-$ésima derivada de la función generadora de momentos, evaluada en $\theta=0$. Un resultado particularmente relevante en finanzas es que la función generadora de momentos de una distribución normal. Es decir, si $X \approx \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, entonces

$$M_X(\theta)=e^{\theta\mu+\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}.$$

En efecto, dada la hipótesis de distribución de X entonces se tiene que

$$X=\mu+\sigma\Phi, \qquad \text{tal que } \Phi\sim\mathcal{N}(0,1),$$

entonces

$$M_X(\theta)=\mathbb{E}\left[e^{\theta X}\right]=\mathbb{E}\left[e^{\theta(\mu+\sigma\Phi)}\right]=e^{\theta\mu}\mathbb{E}\left[e^{\theta\sigma\Phi}\right].$$

Ello establece la relación entre la Normal unitaria y cualquier otra normal. En virtud de ello es suficiente con calcular la función generadora de momentos de la normal unitaria como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[e^{\theta\Phi}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\theta x}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}\left(x^2-2\theta x+\theta^2-\theta^2\right)}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2+\frac{1}{2}\theta^2}\mathrm{d}x \\ &= e^{\frac{1}{2}\theta^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}\mathrm{d}u \qquad \text{donde } u=x-\theta, \\ &= e^{\frac{1}{2}\theta^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$M_X(\theta)=\mathbb{E}\left[e^{\theta X}\right]=e^{\theta\mu}\mathbb{E}\left[e^{\theta\sigma X}\right]=e^{\theta\mu+\frac{1}{2}\theta^2\sigma^2}.$$

Ecuación de Kolmogorov Retrógrada.

Esta relaciona la solución de la ecuación diferencial parcial

$$\begin{cases} F_t + \frac{1}{2}\sigma(t,x)^2 F_{xx} + \mu(t,x)F_x + r(t)F = 0 & \text{en -},\\ F(T,x) = \Psi(x) & \text{sobre } \partial\text{-}. \end{cases}$$

con la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$\mathrm{d}x = \mu(t,x)\mathrm{d}t + \sigma(t,x)\mathcal{B}_t.$$

Considere la función

$$H(t,x) = F(t,x)\exp\left(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right) = F(t,x)R(t) \in \mathcal{F}_t.$$

Ya que $R(t)$ depende únicamente del tiempo, la regla de diferenciación para el producto se aplica

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= F\mathrm{d}R + R\mathrm{d}F \\ &= rFR\mathrm{d}t + R\left(\left\{F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{xx} + \mu F_x\right\}\mathrm{d}t + \sigma F_x\sigma\mathcal{B}_t\right) \\ &= R\left[F_t + \frac{1}{2}\sigma^2 F_{xx} + \mu F_x + rF\right] + \sigma R F_x \mathrm{d}\mathcal{B}_t \end{aligned}$$

El primer término de la suma se anula debido a que F es solución de la EDP. Por ello de forma integrada se obtiene que

$$H(T,X_t) - H(t,X_t) = \int_t^T \sigma(s,x)R(s)F_x(s,x)\mathrm{d}\mathcal{B}_s.$$

Al tomar la esperanza tenemos por lo tanto que $\mathbb{E}\left[\mathrm{d}\mathcal{B}_s\right] = 0$, se obtiene

$$H(t,X_t) = \mathbb{E}_t\left[H(T,X_t)\right]$$

y ello implica que

$$F(t,x)\exp\left(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right) = \mathbb{E}_t\left[F(T,x)\exp\left(\int_0^T r(s)\mathrm{d}s\right)\right]$$

y en consecuencia también que

$$F(t,x) = \mathbb{E}_t\left[\Psi(x)\exp\left(\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right)\right].$$

En otras palabras, siendo x la solución de la EDE entonces

$$\mathrm{d}x = \mu(t,x)\mathrm{d}t + \sigma(t,x)\mathcal{B}_t.$$

entonces la solución de la EDP

$$\begin{cases} F_t + \frac{1}{2}\sigma(t,x)^2 F_{xx} + \mu(t,x)F_x + r(t)F = 0 & \text{en - ,} \\ F(T,x) = \Psi(x) & \text{sobre } \partial\text{- .} \end{cases}$$

está dada por

$$F(t,x) = \mathbb{E}_t\left[\Psi(x)\exp\left(\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right)\right].$$

La extensión al tratamiento de tasas libres de riesgo r aleatorias es inmediata.

Bibliografía

[Au] Aubin, J.-P. *L'analyse non linéaire et ses motivations économiques*, MASSON, 1984.

[B-J] Box,G.E.P. y Jenkins,G.M. ,*Time Series Analysis, Forecasting and Control*, San Francisco, Holden-Day, 1976.

[B-S] Black, Fischer, y M Scholes *The princing of options and corporate liabilities, Journal of political economy*, Vol. 81, (1973).

[Ba] Bachelier, L.,*Theorie de la speculation, -On the Random Character of Stock Market Prices-*. The MIT Press. Cambridge, Mass.1964.

[Bar] Barraquand,J. y Martineau,D. Numerical Valuation of 1−Dimensional Multivariate American Securities, *Journal of Financial and Quantitative Analysls*, vol. 30, no. **3**, 383- 405, 1995.

[Bo] Bollerslev, Tim. Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of econometrics*, 1986.

[Boy] Boyle P. Options: A Monte Carlo Approach, *Journal of Financial Economics*, no. 4. págs. 323- 338, 1977.

[Br-Ma] Bruck, J. y Malliaris, H. *Introduction to Stochastic Analysis*, Addison Wesley, Londres, 1985.

[Br-Sc1] Brennan,M.J. y Schwartz,E.S. Evaluating Natural Resource Investments. *Journal of Business*, Vol. 58, **2**, 135-157, 1985.

[Br-Sc] Brennan,M. y Schwartz,E. A New Approach to Evaluating Natural Resource Investments. En CHEW. Donald (ed.): *The New Corporate Finance*. McGraw Hill. Nueva York. 1993. Págs.: 98-107.

[Br-Tr] Brennan,M.J. y Trigeorgis,L. Project Flexibility, Agency and Competition: New developments oil the theory and application of real options, Brennan and Trigeorgis (Eds). *Oxford University Press*, New York, 2000.

[Br-Gl] Broadie,M. y Glasserman,P. Monte Carlo Methods for Pricing Hight-Dimensional American Options: An Overview, Journal of Financial Economics, vol. 40, no. 2, 1997.

[Co-Ca] Cortazar,G. y Casassus J. Optimal Timing of a Mine Expansion: Implementing a Real Options Model, *The Quarlerly Reviews of Economics and Finance*, Vol. 3, 8, Special Issue, 755-769,1988.

[Co-Sc-Ri] Cortazar,S., Schwartz,E.S., Riera F. Market-based Forecasts of Commodities Prices using Futures, *1999 FMA European Conference*, 3-4 June, Barcelona, Spain, 1999.

[Co-Ro-Ru] Cox,J.S., Ross,S. y Rubinstein,M. Option Pricing: A Simplified Approach, *Journal of Financial Economics*, no. 7, p. 229-64, 1979.

[Co-Sc] Cortazar,G., y Schwartz E.S. A Compound Option Model of Production and Intermediate Inventories, *Journal of Business*, 1993, Vol.66, 4, 517-540, 1993.

[Cor-Sch] Cortazar,G. y Schwartz,E. Monte Carlo Evaluation Model of an Undeveloped Oil Field, *Journal of Energy Finance and Development*, vol. 3, no. 1, págs.73- 84, 1998.

[Da] Das *Poisson-Gaussian Processes y the Bond Markets*, 1998.

[Di] Dixit,A. Entry and Exit Decisions under Uncertainty, *Journal of Political Economy*, Vol. 97, 20-638, 1989.

[Di-Py] Dixit,A. y Pyndick,R. *Investment under Uncertainty.* Princeton University Press. Princeton (NJ). 1994.

[Di-Py02] Dixit,A. y Pindyck,R. *The Options Approach to Capital Investment.* Harvard Business Review. Mayo-Junio. Págs. 105-115. 1995.

[En] Engle, Robert. F.,*Modelling the persistence of conditional variances.* Econometrica, 50,(1987).

[En-Ho] Engle, Robert. F., Hong C, Kane A. y Noh J. *Arbitrage valuation of variance forecasts with simulated options.* Advances in Futures and Options Research, 1993.

[En-Ng] Engle, Robert. F. y Ng V. K., *Measuring and testing the impact of news on volatility.* The Journal of Finance, 1993.

[Fu] Fu,M.C. & Wu,R. Optimal Exercise Policies and Simulation-Based Valuation for American-Asian Options, *Working Paper*, University of Maryland at College Park, 30 pp. April 2000.

[He-Pi] He,H., y Pindyck,R. Investment in Flexible Production Capacity, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 6, 575-599, 1972.

[Ha-Ha] Hammersley,J.M. y Handscomb,D.C. Monte Carlo Methods, *Methuen*, London, 1964.

[Hu-Wh] Hull J. y White A.,The pricing of options on assets with stochastic volatilities. *Journal of Finance*, 1987.

[Ke] Kester,W.C. *Turning Growth Options Into Real Assets* en AGGARWAL, Raj (ed.): Capital Budgeting Under Uncertainty. Cap. 11. Prentice Hall. Englewood Cliffs (NJ). 1993.

[Ke02] Kester,W.C. *An Options Approach to Corporate Finance*, en ALTMAN, Edward (ed.): Handbook of Corporate Finance. John Wiley. Nueva York. Cap.5. 1986.

[La-La] Lamberton, B. and Lapeirè, J.F. Financial Models, 1985.

[La-Las] Lamoreux C. G. y Lastrapes W. D.,Persistence in variance, structural change, and the GARCH model. *Journal of Business & Economic Statistics*, 1990.

[La-Las02] Lamoreux C. G. y Lastrapes W. D.,Forecasting stock-return variance: toward an understanding of stochastic implied volatilities. *The Review of Financial Studies*, 1993.

[La-Ke] Law,A.M. & Kelton,H. Simulation Modeling and Analysis, McGraw-Hill, Inc., 3rd Edition, 760 pp, 2000.

[Le] Lehman, J. Valuing Oilfield Investments using Option Pricing Theory, *Proceedings of the Society of Petroleum Engineers*, SPE 18923, 125-136, 1989.

[Lo-Sc] Longstaff,F. y Schwartz,E. Valuing American Options By Simulation: A Simple Least- Squares Approach, *Tibe John E. Anderson Graduate School of Management at UCLA*, Finance Working Paper no. 25 - 98, 1998.

[Ma-Pi] Majd,S., y Pindyck,R. Time to Build, Option Value, and Investment Decisions, *Journal of Financial Economics*, Vol. 18, 7-27, 1987.

[Mc-Si] Mcdonald,R. y Siegel,D. The Value of Waiting to Invest, *The Journal of Economics*, November 1986.

[Pa-Si-Sm] Paddock,J.L., Siegel,D.W., and Smith,J.L. (1988) Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases. *Quarteriy Journal of Economics*, Vol. 103, 3, 479-508, 1988.

[Pi] Pindyck,R. Investment of Uncertain Cost, *Journal of Financial Economies*, Vol. 34, 53-76, 1993.

[Re-Ba] Rendíeman R.J. y Barter B.J. Two State Option Pricing. *Journal of Finance*, no. 34,pp. 1092-1110, 1979.

[Sa] Samuelson A. Paul.*Maximum Principles in Analytical Economics*, Analytical Economics Research, 1972.

[Sc] Schwartz, E.S. The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging, *Journal of Finance*, vol.52, no. 3, pp.923-973, july 1997.

[Sha] Sharpe W.F. Investments. *Prentice- Hall*, Englewood Cliffs, N.J., 1978.

[Sm-Mc1] Smith, J., McCardle, K. Valuing oil properties: integrating option pricing and decision analysis approaches, *Operations Research*, Vol. 46, 2, 198-2 17, 1998.

[Sm-Mc2] Smith. J., McCardle, K. Options in the Real World: lessons learned in evaluating oil and gas investments, *Operations Research*, Vol. 47, 1. 1-15, 1999.

[Tr1] Trigeorgis,L. A Real Options application in natural resource investments, *Advances in Futures and Options Research*, Vol. 4, 153-164, 1990.

[Tr2] Trigeorgis,L. Real Options and Interactions with Financial Flexibility, *Financial Management*, Vol. 22, 3, 202-224,1993.

[Tr] Trigeorgis,L. (ed.) *Real Options in Capital Investments.* Praeger. Westport (Conn). 1995.

[Tr3] Trigeorgis,L. Real Options: Managerial Flexibility atid Strategy in Resource Allocation, *MIT Press*, Cambridge, 1996.

[Tr4] Trigeorgis,L. Real Opuotis and Business Strategy: Applications lo Decision Making, Trigeorgis (Ed.) *Risk Books*, London, 2000.

[We-Co] Weston,J.F. y Copeland,T. *Managerial Finance.* Dryden Press. Fort Worth (Texas).Cap. 13.(5a. de.). 1992.