



003624
12
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

PROGRAMA DE POSGRADO EN CIENCIAS FÍSICAS

DINAMICA DE UN GRIFO GOTEANTE
ALIMENTADO POR FLUJO VARIABLE

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

P R E S E N T A :

OSCAR MARTINEZ ALVARADO

DIRECTOR DE TESIS: DR. EDUARDO RAMOS

pcf

MEXICO, D. F.

pcf

JUNIO 2003

posgrado en ciencias físicas
u n a m

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**A Isis, por todos los caminos
que hemos recorrido juntos.**

**A mis padres, por su apoyo
incondicional a un extraño
proyecto de vida.**

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Eduardo Ramos quien, como director de esta tesis, hizo las más importantes contribuciones y sugerencias para lograr el resultado final que aquí presento. Asimismo, agradezco al Dr. Raúl Rechtman quien, junto con Eduardo Ramos, tuvo la paciencia para discutir y analizar los resultados presentados en esta tesis.

Muchas gracias al Dr. Alejandro Rodríguez Valdés por el soporte que me ha brindado dentro de su grupo de trabajo durante el periodo de maestría y tesis, pues sin las facilidades que me otorgó, tanto académicas como económicas, este trabajo no habría sido posible.

Debo agradecer también a la Universidad Nacional Autónoma de México a través de su Dirección General de Estudios de Posgrado por la beca recibida para realizar los estudios de maestría, y al Instituto de Ingeniería de la misma universidad y, en especial, a la Coordinación de Procesos Industriales y Ambientales de este instituto por la beca otorgada y por todo el apoyo recibido para que esta tesis pudiera llegar a buen término.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Contenido

CONTENIDO	7
NOTACIÓN	9
RESUMEN	11
ABSTRACT	11
1. INTRODUCCIÓN	13
1.1 El grifo goteante	15
1.2 La ebullición en capilares	16
1.3 Sistemas dinámicos con perturbaciones periódicas débiles	18
2. EL MODELO LAGRANGIANO	21
2.1 Descripción del modelo	21
2.2 Gotas en equilibrio estático	24
2.3 El grifo goteante con flujo constante	26
3. GOTEJO CON FLUJO VARIABLE	31
3.1 Preliminares	31
3.2 Periodo de oscilación de suministro aproximadamente igual al doble del tiempo promedio de formación de una gota	33
3.3 Periodo de oscilación de suministro aproximadamente igual a la mitad del tiempo promedio de formación de una gota	36
3.4 Periodo de suministro cercano por la izquierda al doble del tiempo promedio de formación de una gota	36
3.5 Periodo de suministro cercano por la derecha al doble del tiempo promedio de formación de una gota	37
3.6 Variación lenta del flujo de alimentación	38

4. EL MODELO DINÁMICO DE BAJA DIMENSIÓN	41
4.1 Preliminares	41
4.2 Flujo constante	42
4.3 Flujo dependiente del tiempo	45
Exploración del espacio frecuencia-amplitud	50
Comportamiento cerca de la resonancia	53
Comportamiento cuasiperiódico	55
4.4 Relación con los resultados del modelo lagrangiano	57
Cálculo de la frecuencia natural del sistema	57
5. CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	63
5.1 Conclusiones y recomendaciones	63
5.2 Trabajo futuro	65
APÉNDICE A. ALGORITMO PARA LA SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DEL MODELO LAGRANGIANO	67
APÉNDICE B. CÓDIGOS FUENTE	71
A.1 Modelo lagrangiano con flujo variable	71
A.2 Modelo dinámico de baja dimensión con flujo variable	87
REFERENCIAS	91

Notación

A, B	parámetros del modelo dinámico de baja dimensión	S_c	sección transversal relativa crítica para el desprendimiento
F, G, \dots	mapeos	S_j	superficie de la j -ésima sección cónica
f_{ap4}	fracción de tiempo con comportamiento aproximadamente periódico con periodo cuatro	s_j	eigenvalor de un jacobiano
g	aceleración de la gravedad	S_{min}	sección transversal relativa mínima
h	exponente de Lyapunov	T	energía cinética
h_1	máximo exponente de Lyapunov	t	tiempo
K	amplitud	t_0	unidad de tiempo
k, l, m	frecuencias angulares	T''	superficie tórica n -dimensional
K_1, K_2, \dots	amplitud umbral para atenuación de caos	T_n	tiempo entre los desprendimientos de dos gotas consecutivas
K_{ent}	amplitud mínima necesaria para entrar a una ventana periódica	T_1, T_2, \dots	órbita periódica
K_{sal}	amplitud mínima necesaria para salir de una ventana periódica	t_{ap4}	tiempo con comportamiento aproximadamente periódico con periodo cuatro
L	función lagrangiana	t_{dn}	tiempo para el desprendimiento de la n -ésima gota
l_0	unidad de longitud	U	amplitud del modo oscilatorio en el modelo dinámico de baja dimensión
M	número de discos	U_g	energía potencial gravitatoria
m_0	unidad de masa	U_s	energía superficial
n	número de evento	v	velocidad
P	presión	V	volumen
q	potencia	v_0	velocidad del fluido en la salida del tubo
Q	flujo	V_c	volumen crítico
\mathbb{R}	conjunto de los números reales	v_{max}	velocidad máxima
R	función de disipación de Rayleigh	v_{min}	velocidad mínima
r	radio	x_0	condición inicial
r_0	radio del tubo	y_0	desplazamiento inicial tangente a la condición inicial x_0
R_1, R_2	radios de curvatura principales de una gota axisimétrica	y_n	evolución de y_0
r_{mi}	radio mínimo		
\mathbb{R}^n	espacio euclideo n -dimensional		

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Z	crecimiento de la gota	θ_n	fase normalizada de la perturbación al tiempo $t_{d,n}$
z	posición vertical	ρ	densidad
z_h	longitud de la gota	$\rho(x)$	densidad natural invariante
z_j	posición vertical del j -ésimo disco	ρ_g	densidad de gas
\dot{z}_j	velocidad del j -ésimo disco	ρ_l	densidad de líquido
ΔK	resolución en K	ρ_m	densidad del medio
$\Delta\omega/\omega_1$	resolución en ω/ω_1	τ	periodo
$\Delta\xi_j$	volumen del j -ésimo disco	τ_0	tiempo promedio para la formación de una gota
Γ	coeficiente de tensión superficial	τ_1	periodo fundamental
$\delta(x)$	función delta de Dirac	τ_f	escala de tiempo para la formación de una gota
ε_0	flujo dependiente del tiempo en el modelo dinámico de baja dimensión	τ_n	escala de tiempo para el desprendimiento
ε_0	flujo en el modelo dinámico de baja dimensión	ω	frecuencia del modo oscilatorio en el modelo dinámico de baja dimensión; frecuencia de la oscilación de flujo
η	viscosidad	ω_1	frecuencia fundamental
η_m	viscosidad del medio	ξ	volumen
λ	coeficiente de amortiguamiento		
θ, ϕ, ψ	ángulos		

Resumen

Se estudió numéricamente el efecto de una variación armónica del flujo de alimentación sobre un sistema de goteo. Se usaron dos diferentes aproximaciones: un modelo basado en un enfoque lagrangiano de las ecuaciones hidrodinámicas y un modelo dinámico de baja dimensión que reproducía la esencia del primero con la ventaja de requerir mucho menor poder de cómputo para su análisis. En ambos casos se encontró que el sistema dinámico en tiempo continuo se tornaba intermitente cuando la frecuencia de la oscilación del flujo era cercana a la frecuencia natural del sistema. En el caso del modelo dinámico de baja dimensión no sólo fue posible estabilizar órbitas periódicas inestables incrustadas en el atractor caótico del sistema con flujo constante cuando la perturbación y el sistema se encontraban en resonancia, sino también órbitas cuasiperiódicas con dos frecuencias fundamentales fuera de ese atractor cuando la amplitud y la frecuencia de la perturbación eran las apropiadas.

Abstract

The effect of a harmonic variation of the feeding flow on a dripping system has been numerically studied. Two approaches were used: a model based on a Lagrangian point of view of the hydrodynamical equations and a dynamical model which reproduces the essence of the first with the advantage that it requires less computational power. In both cases it was found that the continuous-time dynamical system becomes intermittent when the flow oscillation frequency was near the natural frequency of the system. In the case of the dynamical model it was possible not only to stabilize unstable periodic orbits embedded on the chaotic attractor of the system when the perturbation and the system were at resonance, but also to stabilize two-frequency quasiperiodic orbits away from the attractor when suitable perturbation amplitudes and frequencies were used.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1. Introducción

Aunque el estudio de la dinámica no lineal y el caos inició desde los últimos años del siglo XIX con los estudios de mecánica celeste del matemático francés Henri Poincaré, ha sido sólo durante las últimas décadas que se ha extendido el interés dentro de la comunidad científica por el estudio de la dinámica no lineal y se han reconocido sus repercusiones en los campos de tradicional interés para la ciencia, en gran parte debido al desarrollo de las computadoras. Así, fenómenos que hasta hace poco, bajo el paradigma del determinismo absoluto, eran desdénados y hasta rechazados por los científicos, han encontrado cabida y han podido ser descritos con las ideas y técnicas matemáticas desarrolladas a partir de los trabajos de Poincaré, Arnold, Fiegunbaum y muchos otros (ver, por ejemplo, Lichtenberg & Lieberman, 1983; Guckenheimer & Holmes, 1986; Ott, 1990; Drazin, 1992). De esta forma, la teoría de sistemas no lineales ha demostrado tener una muy amplia variedad de aplicaciones no sólo en física y matemáticas sino también en ciencias sociales, ciencias biológicas, ciencias de la Tierra e ingeniería. Los fenómenos que pueden ser descritos por esta disciplina incluyen materias tan diversas como la variación de los precios, el crecimiento de la población, la propagación de genes, la fisiología de las células nerviosas, la regulación de los latidos cardíacos, algunas reacciones químicas, las transiciones de fase, el comportamiento de algunos circuitos electrónicos, &c.

Las ecuaciones de la dinámica de fluidos son ecuaciones no lineales que han motivado gran parte de la investigación sobre caos en sistemas disipativos. Probablemente dos de los campos más intensamente estudiados sean la transición a la turbulencia y la convección de Rayleigh-Bénard, aunque pueden encontrarse muchos otros. Algunos de los fenómenos no lineales que son de importancia en el contexto del presente trabajo son los flujos influenciados por tensión superficial y su tendencia a romperse en gotas (Eggers, 1997). Estos son procesos con una poderosa acción sobre nuestra vida diaria debido a sus múltiples aplicaciones tecnológicas. Las burbujas, por ejemplo, están presentes en varios dispositivos usados en tratamientos de aguas, metalurgia y plantas químicas, así como en aplicaciones médicas tales como oxigenadores de sangre; también son utilizadas como trazadores de fluidos biológicos en equipos de ultrasonido y como vectores para transferir fármacos a lugares determinados del organismo (Lohse, 2003). Por su parte, la formación de gotas es importante en las industrias química y farmacéutica, donde se requieren dosis precisas. La industria de las computadoras también aplica la formación de gotas en dispositivos periféricos tales como las impresoras de inyección de tinta y los modernos graficadores donde la ebullición, fenómeno aún más complicado que no sólo involucra la influencia de la tensión superficial sino también la transición de fase líquido-vapor, también encuentra aplicación. Este último proceso es utilizado ampliamente en equipos para la industria energética tales como los generadores de vapor debido a su alta eficiencia para

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

transferir calor. A pesar de todo esto, la descripción de estos fenómenos se ha mantenido en un nivel apenas superior al empírico y una teoría general aún no ha sido desarrollada.

Este trabajo tiene como principal objeto de estudio la dinámica del goteo a tiempos mucho mayores comparados con el tiempo de formación de una gota cuando el flujo de alimentación es variable en el tiempo, y forma parte de un proyecto de mayor alcance cuyo objetivo es la comprensión de los procesos involucrados en la formación de burbujas en un capilar como resultado de la ebullición del líquido que lo llena. Se ha observado que el flujo de vapor es dependiente del tiempo como consecuencia de la entrada de líquido al capilar cada vez que ocurre el desprendimiento de una burbuja lo cual da lugar a la formación de paquetes de líquido debido a inestabilidades de la película formada sobre la superficie interna del capilar (Ramos *et al.*, 1997; García *et al.*, 2001; Acharya *et al.*, 2003). Uno de los objetivos a largo plazo del proyecto sobre la dinámica de burbujas es modificar el modelo utilizado en esta investigación tomando en cuenta las diferencias y similitudes entre los procesos de formación de gotas y burbujas.

En las secciones restantes de este capítulo se presenta una revisión sobre el estado del arte referente a la dinámica del grifo goteante, a la dinámica de la ebullición en tubos capilares y a la perturbación periódica de sistemas dinámicos. En el capítulo 2 se describe el modelo matemático usado para describir un grifo goteante en esta investigación y se delinea el método numérico para solucionar las ecuaciones resultantes. Posteriormente se hace el análisis de las ecuaciones de una gota en equilibrio para usar las soluciones como base en ulteriores explicaciones. Al final del capítulo 2, se muestran algunos ejemplos del comportamiento de un sistema de goteo cuando éste es alimentado por un flujo constante, validando al mismo tiempo el código computacional desarrollado durante el curso de la presente investigación.

El capítulo 3 es la parte medular del presente trabajo. Después de una explicación acerca de los métodos de análisis, aparecen los resultados obtenidos al estudiar cinco casos en los cuales el flujo es variado débilmente y de forma armónica. En únicamente uno de ellos –aquél que se obtiene cuando la perturbación y el sistema oscilan con frecuencias muy similares– ocurre una modificación apreciable de la dinámica llevando al sistema de un comportamiento aparentemente caótico a otro mucho más regular. Esto es un resultado que confirma el trabajo previo sobre sistemas dinámicos perturbados realizado por otros grupos de investigación.

En el capítulo 4 se presenta un modelo que a pesar de ser más simple que el modelo lagrangiano, descrito en el capítulo 2, captura la esencia de la dinámica del fenómeno. La extrema sencillez de este modelo permitió llevar a cabo una exploración más extensa de las posibilidades en el comportamiento del sistema y extraer conclusiones más amplias. Con este modelo se descubrieron regímenes sin contraparte en el modelo lagrangiano, al menos para los valores de los parámetros utilizados. Estas conclusiones y las posibles líneas de investigación derivadas de este trabajo, incluyendo aquellas con miras a cumplir con el objetivo del proyecto sobre dinámica de burbujas, se establecen en el capítulo 5.

Por último, en el Apéndice A se explican los detalles del método numérico utilizado para la solución de las ecuaciones del modelo lagrangiano, mientras que los códigos fuente completos de los programas computacionales en lenguaje Fortran 90 se puede consultar en el Apéndice B.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.1 El grifo goteante

Un grifo goteante es un sistema compuesto por un tubo vertical continuamente alimentado de agua o algún otro líquido con un flujo tan pequeño que el fluido es forzado a formar gotas bajo la acción de fuerzas de tensión superficial. Shaw (1984) estudió este sistema y encontró que se comporta como un sistema periódico o como un sistema caótico dependiendo del valor del flujo de alimentación que funge como parámetro de control (Shaw, 1984; Martien *et al.*, 1985).

Después de Shaw, numerosos investigadores han trabajado sobre este sistema tanto de forma experimental como teórica y numérica, y han encontrado una gran variedad de fenómenos asociados a la dinámica no lineal del sistema. En la parte experimental, Sartorelli *et al.* (1994) encontraron la existencia de crisis de frontera y dos tipos de intermitencia: la primera relacionada con bifurcaciones tangentes, y la segunda, con saltos en el comportamiento entre atractores periódicos pares; Pinto *et al.* (1995) observaron una bifurcación de Hopf secundaria para flujos cercanos al flujo continuo o chorro, mientras que Katsuyama & Nagata (1999) realizaron una exploración de un intervalo amplio de flujos volumétricos y lograron construir un diagrama de bifurcación del fenómeno variando micrométricamente el flujo por medio del calentamiento controlado del agua en la salida del tubo.

Desde el punto de vista de la teoría y las simulaciones numéricas, se han adoptado diferentes modelos tratando de reproducir la dinámica del fenómeno. El mismo Shaw (1984) fue el primero en proponer el modelo más usado hasta el momento: el modelo de oscilador con masa variable, el cual ha sido posteriormente modificado por Sánchez-Ortiz *et al.* (1995) y por D'Innocenzo & Renna (1997). Ilarraza-Lomel *et al.* (1999), haciendo uso del modelo del oscilador de masa variable, propusieron una forma de controlar un grifo goteante por medio de pequeñas variaciones de la viscosidad del fluido dependientes del comportamiento del sistema (control de lazo cerrado) basándose en el método OGY de control de caos propuesto por Ott *et al.* (1990).

Con enfoques diferentes, Gonçalves *et al.* (1998) construyeron una máquina *x* topológica para analizar algunos conjuntos experimentales de datos recabados durante experimentos de goteo y estimar su complejidad en la forma de una tasa de entropía de Markov, mientras que Tufaile *et al.* (1999) produjeron diagramas de bifurcación permitiendo que el tanque de almacenamiento se vaciara cuasiestáticamente conforme caían las gotas e intentaron emular algunos de las características observadas a través de parejas de mapeos logísticos con interacción y sin interacción.

Siguiendo una línea con más fundamentos físicos y partiendo de las ecuaciones de la dinámica de fluidos, Fuchikami *et al.* (1999) propusieron un modelo numérico lagrangiano para simular la formación de una gota y lo aplicaron al caso del grifo goteante reproduciendo detalladamente sus características dinámicas. Kiyono & Fuchikami (1999) usaron el modelo numérico lagrangiano de Fuchikami y colaboradores para proponer una versión mejorada del modelo de oscilador de masa variable introducido por Shaw (1984). Couillet *et al.* (2000) y Riera (2000) hicieron un análisis de estabilidad de las ecuaciones hidrodinámicas alrededor del volumen crítico de una gota, más allá del cual no existen gotas estáticas, y encontraron que el desprendimiento de la gota se debe básicamente a una bifurcación silla-nodo. Además, propusieron un modelo dinámico de baja dimensión con la

forma de un mapeo de primer retorno con el cual lograron construir un diagrama de bifurcación similar a aquéllos obtenidos tanto experimentalmente (Katsuyama & Nagata, 1999) como mediante métodos numéricos (Fuchikami *et al.*, 1999). Ambravaneswaran *et al.* (2000), usaron un modelo unidimensional basado en una aproximación de chorro delgado de las ecuaciones de Navier-Stokes axisimétricas (Eggers & DuPont, 1994) y analizaron el diagrama de bifurcación y algunos efectos tales como la histéresis. Finalmente, Kiyono *et al.* (2002) propusieron un potencial mediante el cual puede ser descrita la dinámica del grifo goteante.

Con todo este trabajo como sustento, el grifo goteante se ha convertido en un paradigma de comportamiento no lineal en sistemas físicos debido en gran parte a la facilidad que representa construir un dispositivo experimental para su estudio.

1.2 La ebullición en capilares

La transición de fase de líquido a vapor en contenedores tiene lugar en fisuras o cavidades en las paredes del contenedor que actúan como sitios de nucleación (Collier, 1972). Tratando de profundizar en la dinámica de este proceso, se han realizado varios estudios experimentales sobre la ebullición dentro de capilares (Ramos *et al.*, 1997; García *et al.*, 2001; Acharya *et al.*, 2003). Asimismo, algunos modelos teóricos para predecir las propiedades estadísticas de los datos que los experimentos han arrojado han sido propuestos aunque ninguno de ellos ha demostrado ser capaz de explicar completamente las observaciones (Cordonet *et al.*, 2001). Otros grupos han realizado diferentes experimentos usando láseres para calentar puntualmente sitios de nucleación artificiales sobre placas metálicas (Shoji & Takagi, 2001; Zhang & Shoji, 2003).

Ramos *et al.* (1997) usaron un capilar de 1.6 mm de diámetro interno y una longitud efectiva de 8 mm con un alambre de Nicromel de 250 μm colocado en el fondo del capilar para que actuara como la fuente de calor adicional requerido para la ebullición del líquido. El capilar fue colocado dentro de un vaso de 3 litros lleno con agua destilada a 96 °C. En este experimento se encontraron tres comportamientos cualitativamente diferentes. Para potencias $q < 0.66$ mW, la tensión superficial y las fuerzas de flotación se encuentran balanceadas y el sistema despliega un comportamiento estático con burbujas que permanecen por varios segundos en el extremo abierto del capilar antes de desprenderse o colapsarse. Aproximadamente en $q \approx 0.66$ mW ocurre una bifurcación de tal forma que para potencias en el intervalo $0.66 < q < 10.6$ mW el sistema forma paquetes de cuatro a siete burbujas con el mismo periodo separados por la última burbuja de cada uno de ellos seguida de una sola burbuja de periodo más corto. Para potencias $q > 10.6$ mW el sistema muestra un comportamiento aproximadamente periódico.

Acharya *et al.* (2003) usaron un contenedor de 3.5 litros lleno con agua destilada a 98 °C, y dos diámetros en sus capilares: 1.23 mm y 1.40 mm, y cuatro longitudes diferentes: 40 mm, 50 mm, 60 mm y 80 mm. El calor requerido para la ebullición fue proporcionado por un alambre de Constantan de 254 μm de diámetro colocado sobre el eje del capilar. Lo que se encontró en este caso fue que para potencias bajas ($q \approx 14$ W/m) el desprendimiento de las burbujas era periódico mientras que para potencias cada vez más altas el proceso se volvía de periodo dos, periodo tres, &c.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Las principales diferencias entre estos dos experimentos fueron que en el primer caso – cuando la resistencia fue colocada en el fondo del capilar– había una sola interfase líquido-vapor, mientras que en el segundo caso –cuando la resistencia fue colocada a lo largo del eje del capilar– existían dos interfaces relevantes: una en el fondo del capilar y otra en la parte alta de la burbuja. Sin embargo, ambos experimentos revelan interesantes comportamientos debido al ingreso de películas delgadas de líquido en el capilar cuando las burbujas se desprenden. La consecuencia de esto es la formación de paquetes de líquido dentro del capilar que interrumpen el suministro de vapor y provocan la interrupción del tren de burbujas en el caso del experimento de Ramos *et al.* (1997) y García *et al.* (2001), y la bifurcación de tres ramas en el experimento de Acharya *et al.* (2003).

Existen importantes similitudes entre el goteo y la producción de burbujas desde un capilar. Tanto un sistema de goteo como uno de ebullición capilar consisten en columnas de fluido que sufren discontinuidades y rupturas debidas a la acción conjunta de fuerzas de tensión superficial y fuerzas volumétricas. Estas últimas están representadas por la gravedad, en el caso de las gotas, y por fuerzas de flotación, en el caso de las burbujas. Otro aspecto que muestra el parentesco entre ambos procesos es el hecho de que, desde el punto de vista de la dinámica no lineal, los dos tienen la posibilidad de comportarse de forma periódica o caótica dependiendo del valor del flujo de alimentación.

Por otro lado, también existen diferencias entre ambos sistemas de las cuales quizá la más evidente es la razón de densidades ρ/ρ_m donde ρ es la densidad del fluido interno y ρ_m es la densidad del medio circundante. En el caso de una gota con $\frac{\rho}{\rho_m} > 1$, la simetría arriba-abajo cerca del desprendimiento se destruye notablemente, mientras que para una burbuja con $\frac{\rho}{\rho_m} < 1$, el desprendimiento se muestra mucho más simétrico (Peregrine *et al.*, 1990).

La razón de viscosidades η/η_m , donde η es la viscosidad de la gota o de la burbuja y η_m es la viscosidad del medio, es otro parámetro que sirve para diferenciar entre los dos casos:

$\frac{\eta}{\eta_m} > 1$ para una gota; $\frac{\eta}{\eta_m} < 1$ para una burbuja. La importancia de este parámetro en la dinámica del proceso radica en que el valor de la viscosidad determina la capacidad del fluido para disipar energía y amortiguar la acción de fuerzas deformantes de tensión superficial.

Otra diferencia, no obvia, pero esencial, es la continuidad del flujo de alimentación: en un grifo goteante es relativamente sencillo mantener un flujo constante; en cambio, en un sistema de burbujeo capilar esto resulta más complicado por la inevitable entrada de material al tubo de salida en forma de películas delgadas de líquido.

Con base en las analogías expuestas y considerando las diferencias discutidas se concluyó que el estudio de un grifo goteante con suministro dependiente del tiempo podría aportar información relevante para entender el burbujeo. Con esta idea en mente, en este trabajo se simuló numéricamente un grifo goteante alimentado por un flujo dependiente del tiempo de forma armónica con un periodo cercano al tiempo promedio de formación de una gota para un flujo constante elegido con base en criterios de conveniencia para el cálculo numérico. La amplitud de la oscilación del suministro de material se escogió de tal forma que el

sistema se encontrara en todo momento en una región caótica considerando el diagrama de bifurcación con flujo constante. Una continuación natural de la investigación presente será generalizar los modelos y los códigos usados para el análisis de este sistema a los casos del burbujeo y de la ebullición capilar.

1.3 Sistemas dinámicos con perturbaciones periódicas débiles

A partir de la década pasada se inició la investigación de la respuesta de sistemas dinámicos al perturbar débilmente y de manera periódica alguno de sus parámetros o al someterlos a la acción de fuerzas adicionales periódicas débiles. Estas operaciones se han revelado como formas alternativas de control de caos de lazo abierto en contraposición al control de lazo cerrado o con retroalimentación propuesto por primera vez por Ott *et al.* (1990). Sin embargo, aún no se ha comprendido completamente el mecanismo por el cual una órbita periódica es estabilizada a través de una perturbación débil en el sistema. Hasta el momento la principal desventaja del método de control de caos de lazo abierto por resonancia débil es la dificultad de estabilizar una órbita específica. No obstante, al menos para el sistema de Rössler se ha demostrado que el control por perturbaciones periódicas puede ser orientada a un cierto objetivo de tal manera que se establece una órbita dada (Tereshko & Shchekinova, 1998).

La respuesta del mapeo logístico $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ al perturbar el parámetro a fue una de las primeras en ser analizadas: Se varió el parámetro de control sobre dos valores discretos únicos $a = \{A, B\}$ en secuencias tanto periódicas como estocásticas. Esto condujo a caos temprano, es decir, caos para valores muy bajos del parámetro a (Rössler *et al.*, 1989). Cuando la modulación se volvió continua y periódica se encontraron efectos de resonancia dentro de un intervalo de frecuencias alrededor de la frecuencia natural del sistema. Estos efectos se caracterizaban por la modificación de la dinámica del sistema aún con valores relativamente bajos de la amplitud de la perturbación (Rössler *et al.*, 1991).

Mirus & Sprott (1999) exploraron el efecto de perturbaciones periódicas no necesariamente débiles sobre una amplia variedad de sistemas de diferentes dimensiones tales como la ecuación logística (una dimensión), el sistema de Lorenz (tres dimensiones), las ecuaciones de Rössler (tres dimensiones), un modelo de celdas de Lorenz acopladas (96 dimensiones), las ecuaciones de Yoshida (nueve dimensiones) y una red neuronal (64 dimensiones). En todos los casos la frecuencia óptima para controlar el sistema con la mínima amplitud resultó ser la frecuencia de la órbita periódica inestable estabilizada. También pudo establecerse que una frecuencia dada era capaz de estabilizar a más de una órbita periódica y que para amplitudes superiores el sistema se trababa con la perturbación y se estabilizaban órbitas periódicas de características diferentes a las incrustadas en el atractor caótico original.

Existen pocos trabajos conducentes a la explicación del fenómeno. En el caso particular de un oscilador forzado de Rayleigh con un diodo se ha mostrado que aparentemente la atenuación del caos tiene lugar a través de una bifurcación silla-nodo cuando el sistema al ser perturbado atraviesa ventanas periódicas (Tamura *et al.*, 1999). Por otra parte, al perturbar el término cúbico β en la ecuación de Duffing-Holmes $\ddot{x} + \gamma\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = A \cos(\omega t)$, que describe a una barra magnetoelástica biestable oscilando

entre dos imanes, se ha usado con éxito el método de Melnikov (ver, por ejemplo, Lichtenberg & Lieberman, 1983 o Guckenheimer & Holmes, 1986) para predecir de forma analítica la existencia de un valor crítico para la amplitud de la perturbación a partir del cual el sistema se estabiliza (Lima & Pettini, 1990). Esto parece ser verdad para el sistema estudiado en el presente trabajo aunque también se encontró una cota superior de la amplitud más allá de la cual, el sistema pierde estabilidad nuevamente. Chacón (2001) también usó el método de Melnikov para hacer un análisis más general aplicable a sistemas dinámicos originalmente no autónomos con dos perturbaciones armónicas y, estableció condiciones para la supresión y la amplificación del caos.

La ecuación de Duffing-Holmes se ha utilizado también para investigar el papel que juega la diferencia de fases entre el forzante del sistema y una débil perturbación. Esto condujo a demostrar que eligiendo apropiadamente la diferencia de fase era posible reducir el umbral de la amplitud de la perturbación para lograr un control efectivo del caos (Qu *et al.*, 1995). Estas investigaciones sobre el efecto de la diferencia de fase también llevaron a la descripción, en términos de una diferencia de fase dependiente del tiempo, de un nuevo tipo de intermitencia caracterizada por la alternancia de movimiento regular y movimiento caótico y causada por una pequeña desviación de la frecuencia de resonancia. Este nuevo tipo de intermitencia, que Qu y sus colaboradores han llamado “efecto breathing”, ha sido observada experimentalmente al trabajar con una barra magnetoelástica biestable (Fronzoni *et al.*, 1991).

Como una referencia más cercana al problema del goteo como sistema con efectos no lineales, Kiyono & Fuchikami (2000) desestabilizaron una órbita periódica (cuando los parámetros eran constantes), y estabilizaron una órbita inestable de periodo uno incrustada dentro del atractor caótico del sistema con parámetros constantes, haciendo oscilar el flujo en el modelo lagrangiano para simular un grifo goteante descrito en la sección anterior. En este trabajo también se usa el modelo lagrangiano y el método de solución planteado por Fuchikami *et al.* (1999) para explorar de manera más extensa el comportamiento del grifo goteante. A diferencia del trabajo de Kiyono & Fuchikami, no se ha logrado la estabilización de una órbita de periodo uno, sino de una órbita de periodo dos. Esto es debido únicamente a diferencias en los valores de los parámetros tanto del sistema físico como del método numérico utilizado.

El poder de cómputo y el tiempo requeridos para llevar a cabo una simulación usando el modelo lagrangiano hacen necesario el uso de modelos más sencillos para un estudio más completo del fenómeno. Kiyono & Fuchikami emplearon con este propósito una variante del modelo de oscilador de masa variable para el grifo goteante y le agregaron una fuerza periódica externa que tomó el lugar de la variación armónica en el flujo. Mediante un análisis detallado de la sección de Poincaré mostraron que la estabilización de la una órbita se debía a una bifurcación homoclinica (Wiggins, 1990) en el espacio de fases que tenía lugar al incrementar la amplitud de la fuerza periódica externa. En el caso del presente trabajo no se usó ningún modelo de masa-resorte, sino que se centró la atención sobre un nuevo modelo basado en un sistema dinámico que recrea las características observadas en el atractor reconstruido del fenómeno. El uso de este modelo más sencillo permitió un análisis muy completo del comportamiento del sistema en diferentes intervalos tanto de la frecuencia de la perturbación como de su amplitud dando lugar al hallazgo de sorprendentes comportamientos.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2. El modelo lagrangiano

2.1 Descripción del modelo

En esta investigación el goteo fue simulado numéricamente a través del modelo lagrangiano propuesto por Fuchikami *et al.* (1999), que considera que la gota se compone de un conjunto de discos horizontales de volumen constante pero forma variable cuyo movimiento es descrito por una función lagrangiana y las ecuaciones de movimiento que de ella se derivan. Este modelo ha sido utilizado por Kiyono & Fuchikami (1999) para mejorar el modelo del oscilador de masa variable presentado originalmente por Shaw (1984). Asimismo, Riera (2000) y Couillet *et al.* (2000) utilizaron las ecuaciones discretas linealizadas del modelo lagrangiano para estudiar el comportamiento de los eigenvalores de una gota cerca del volumen crítico más allá del cual se pierde la estabilidad de una gota estática. De esta forma encontraron que la pérdida de estabilidad tiene lugar a través de una bifurcación silla-nodo.

El modelo de Fuchikami se basa en las siguientes suposiciones:

- i)* el fluido es incompresible,
- ii)* la geometría de la gota es axisimétrica,
- iii)* la componente horizontal de la velocidad es despreciable en comparación con la componente vertical,
- iv)* la componente vertical de la velocidad depende únicamente de la posición vertical,

Una quinta suposición implícita en el modelo es que el fluido externo es inviscido y de densidad despreciable, de manera que la única influencia que ejerce es a través de la tensión superficial. Esto, obviamente, es una de las primeras modificaciones que requerirá el modelo en el momento de ser aplicado al caso de la dinámica de burbujas pues en este caso tanto la densidad como la viscosidad del fluido exterior es mayor que la del propio sistema.

Estas suposiciones son asintóticamente válidas para gotas delgadas de viscosidad alta (Couillet *et al.*, 2000), aunque las simulaciones realizadas con el modelo concuerdan bien aun con resultados experimentales que incluyen casos con viscosidad baja (Peregrine *et al.*, 1990; Katsuyama & Nagata, 1999).

Las suposiciones (*iii*) y (*iv*) implican que no existe intercambio de fluido a través de ningún plano horizontal que se encuentre fijo a la gota. En caso de que hubiera flujo a través de planos horizontales se generaría recirculación y por lo tanto, componentes radiales de velocidad distintas de cero y componentes verticales de velocidad dependientes de la

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

posición horizontal. De esta manera, la posición vertical z del plano puede cambiar permaneciendo constante el volumen debajo de él, mientras que el volumen en la parte superior se incrementa de acuerdo a la tasa establecida por el flujo de suministro Q . Esta característica permite considerar al volumen de fluido ξ debajo de la coordenada vertical z como variable lagrangiana durante el tiempo de vida de la gota; esto es, durante el tiempo comprendido entre el inicio de la formación y su desprendimiento. Considerando el eje z dirigido hacia abajo, el volumen ξ está dado por

$$\xi(z, t) = \int_z^{z_0(t)} \pi r^2(\zeta, t) d\zeta \quad \dots (1)$$

En esta expresión $r(z, t)$ es el radio de la gota en la posición z al tiempo t , y z_0 es la longitud total de la gota (ver figura 1).

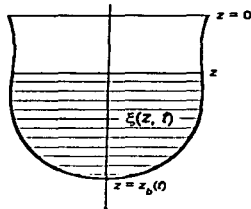


Figura 1. Definición de variables en el modelo lagrangiano.

El lagrangiano del sistema estará dado por $L = T - U_g - U_r$, donde T es la energía cinética, U_g es la energía potencial gravitatoria, y U_r es la energía potencial debida a la tensión superficial. Tanto la energía del fluido exterior como la disipación viscosa que en su seno podría ocurrir son nulas ya que, como se mencionó antes, éste se considera de densidad y viscosidad despreciables.

La energía cinética está dada por

$$T = \frac{\rho}{2} \int_0^{z_0(t)} v^2 d\xi \quad \dots (2)$$

donde ρ es la densidad del fluido, $\xi_0(t) \equiv \xi(0, t)$, y $v \equiv \frac{\partial z(\xi, t)}{\partial t}$. Por su parte, las energías potenciales, gravitatoria y de superficie, respectivamente, pueden ser expresados como (Fuchikami *et al.*, 1999)

$$U_g = -\rho g \int_0^{z_0(t)} z(\xi, t) d\xi \quad \dots (3)$$

$$U_r = \Gamma \int_0^{z_0(t)} \sqrt{4\pi z'^2 + \frac{(z'')^2}{(z')^4}} d\xi \quad \dots (4)$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

donde g es la aceleración de la gravedad y Γ es el coeficiente de tensión superficial. Las variables primadas quedan definidas como $z' \equiv \frac{\partial z(\xi, t)}{\partial \xi}$ y $z'' \equiv \frac{\partial^2 z(\xi, t)}{\partial \xi^2}$.

Las fuerzas disipativas dependientes de la velocidad pueden describirse mediante una función de disipación de Rayleigh, R (Fuchikami *et al.*, 1999)

$$R = \frac{\dot{\gamma}}{2} - \frac{3}{2} \eta \int_0^{\xi_0} \left(\frac{\partial v(z, t)}{\partial z} \right)^2 d\xi \quad \dots (5)$$

Aquí, η es la viscosidad y $\dot{\gamma}$ es la tasa de disipación de la energía cinética del fluido (Landau & Lifshitz, 1991).

La solución numérica de las ecuaciones se realiza suponiendo que la gota está dividida en M discos horizontales. De esta forma, el volumen del j -ésimo disco está dado por

$$\Delta \xi_j(t) = \int_{z_j}^{z_{j+1}} \pi r^2(\zeta, t) d\zeta \quad \dots (6)$$

Por las mismas razones por las cuales el volumen debajo de la coordenada vertical z es una variable lagrangiana, este volumen permanece constante a lo largo de la formación y desarrollo de la gota hasta que ésta se desprende.

La expresión discreta de la energía cinética toma la forma

$$T = \frac{\rho}{2} \sum_{j=1}^M \dot{z}_j^2 \Delta \xi_j \quad \dots (7)$$

donde el punto indica derivada con respecto al tiempo. Las expresiones para las energías potenciales se escriben entonces como

$$U_g = -\rho g \sum_{j=1}^M z_j \Delta \xi_j \quad \dots (8)$$

$$U_\Gamma = \Gamma \sum_{j=1}^M S_j \quad \dots (9)$$

donde $S_j = S_j(z_{j-1}, z_j, z_{j+1})$ es la superficie de la gota en el intervalo $[(z_{j-1}+z_j)/2, (z_j+z_{j+1})/2]$, modelada como una sección cónica (ver apéndice A). Por último, para la función de disipación de Rayleigh se tiene

$$R = -\frac{3}{2} \eta \rho \sum_{j=1}^M \left(\frac{\dot{z}_j - \dot{z}_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \right)^2 \Delta \xi_j \quad \dots (10)$$

Las unidades se normalizaron de tal forma que $\Gamma = \rho = g = 1$ (Fuchikami *et al.*, 1999; Coulet *et al.*, 2000; Riera, 2000); bajo este criterio se eligieron $l_0 \equiv \sqrt{\Gamma/\rho g}$ como unidad de longitud, $m_0 \equiv \rho l_0^3$ como unidad de masa y $t_0 \equiv \sqrt{l_0/g}$ como unidad de tiempo las cuales quedan como $l_0 = 0.27$ cm, $m_0 = 0.020$ g y $t_0 = 0.017$ s si se consideran, por ejemplo, las propiedades físicas del agua a 20 °C.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Las ecuaciones que rigen el movimiento son las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial z_j} = \frac{\partial R}{\partial \dot{z}_j} \quad \dots (11)$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, susceptible de ser transformado en un sistema autónomo de primer orden, sujeto a la condición en la frontera de entrada de fluido o aumento de volumen en el primer disco, para lo cual se prescribe un gasto $Q = \pi r_0^2 v_0$ donde r_0 es el radio del tubo, que durante toda la investigación se consideró $r_0 = 0.916$ (que corresponde a un tubo de 5 mm de diámetro interno en unidades normalizadas), y v_0 es la velocidad del líquido al salir del mismo. La geometría del dominio de integración es libre y constituye, por lo tanto, parte de la solución. Todo esto constituye un sistema dinámico M -dimensional, donde M oscila entre 200 y 500 dependiendo de la fase del desarrollo de la gota. El sistema de ecuaciones diferenciales se resuelve utilizando un método Runge-Kutta de cuarto orden con ajuste del paso de tiempo (Fuchikami *et al.*, 1999; Press *et al.*, 1992). Para determinar el momento del desprendimiento de la gota se observa el radio de la columna de líquido en los cuellos formados y se compara con el radio del tubo; si la sección transversal relativa $S_{min} = (r_m/r_0)^2$ es menor que un valor crítico S_c , la parte inferior se separa y se reinicia la simulación a partir de la forma resultante. Una descripción más detallada del procedimiento numérico y el código completo del programa en lenguaje Fortran 90 se encuentran en los apéndices A y B, respectivamente.

2.2 Gotas en equilibrio estático

Antes de describir el comportamiento dinámico del goteo, se hará un breve análisis de una gota en equilibrio estático pues las características de las soluciones de las ecuaciones de equilibrio tienen consecuencias importantes para el problema de interés.

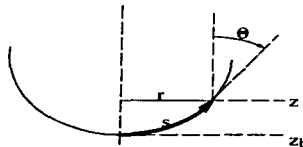


Figura 2. Definición de variables en una gota en equilibrio estático.

En equilibrio estático, la forma de la gota queda determinada por el balance entre la fuerza de gravedad y la tensión superficial. La presión hidrostática está dada por

$$P = \rho g z \quad \dots (12)$$

donde z es la posición vertical con la dirección positiva dirigida hacia abajo y medida desde la salida del capilar, ρ es la densidad del fluido, y g es la aceleración de la gravedad.

Entonces, el equilibrio entre la presión hidrostática y la tensión superficial, puede expresarse como:

$$P = \Gamma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad \dots (13)$$

donde Γ es el coeficiente de tensión superficial, y R_1 y R_2 son los radios de curvatura principales. Si se definen las variables de la manera ilustrada en la figura 2 se encuentran las siguientes relaciones para R_1 y R_2

$$\frac{1}{R_1} = - \frac{d\theta}{ds} \quad \dots (14)$$

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad \dots (15)$$

Usando unidades normalizadas se puede establecer el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{ds} = \frac{\cos \theta}{r} \\ \frac{dz}{ds} = - \cos \theta \\ \frac{dr}{ds} = \sin \theta \end{cases} \quad \dots (16)$$

La primera de estas ecuaciones surge del equilibrio de fuerzas (ec. 12) mientras que las dos últimas son relaciones geométricas. Para el caso que nos ocupa, las "condiciones iniciales" son, para $s = 0$, $\theta(0) = \pi/2$, $z(0) = z_h$ y $r(0) = 0$, donde z_h es la presión en la parte inferior de la gota la cual, gracias a la elección de unidades, es numéricamente igual a la longitud de la gota. La integración de estas ecuaciones se realizó usando un método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso de tiempo constante hasta cumplir con la condición $r = r_0$, donde r_0 es el radio interior del capilar.

La figura 3 muestra los resultados de la integración en una gráfica de longitud de gota contra volumen para un cierto valor de r_0 . En ella puede notarse la existencia de un volumen crítico V_c más allá del cual no existen soluciones para (16). Justo por debajo del volumen crítico ($4.78 < V < 5.23$) existen dos soluciones una de las cuales, aquella correspondiente a una longitud de gota menor, es estable mientras que la que corresponde a la longitud mayor es inestable. Esto puede verse mejor si se analizan los eigenvalores de (11), las ecuaciones de movimiento de Lagrange (Riera, 2000; Coulet *et al.*, 2000). Los estados sobre la rama que parte del origen tiene eigenvalores s_j tales que $\text{Re}(s_j) < 0$ indicando estabilidad. Por otro lado, las formas que se encuentran sobre las ramas superiores tienen al menos un eigenvalor tal que $\text{Re}(s_j) > 0$, lo cual corresponde a estados de equilibrio inestable. La forma correspondiente a V_c tiene un eigenvalor s_j tal que $\text{Re}(s_j) =$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

0 marcando el punto de bifurcación. Claramente se trata de una bifurcación silla-nodo la cual da lugar a la dinámica característica del gotico: si una gota es alimentada por un cierto flujo, ésta alcanzará eventualmente el volumen crítico y perderá estabilidad debido a que la parte real de uno de los eigenvalores se vuelve positivo en la bifurcación silla-nodo.

En el caso de la descripción de una burbuja en el seno de un líquido formándose en la punta de un capilar vertical con salida hacia arriba las consideraciones planteadas serían las mismas excepto porque la densidad ρ tendría que ser cambiada por la diferencia $|\rho - \rho_m|$ donde ρ_m indica la densidad del medio circundante.

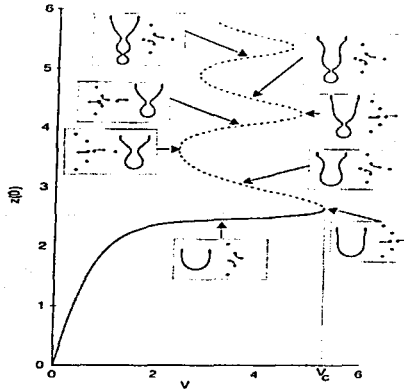


Figura 3. Gráfica de longitud, $z_b = z(0)$, contra volumen para gotas en equilibrio estático. V_c denota el volumen crítico más allá del cual es imposible obtener formas en equilibrio. De las dos ramas que surgen hacia la izquierda a partir de él, únicamente la rama inferior describe formas de equilibrio estable. Los recuadros muestran el espectro de eigenvalores de (11). Desde el punto de vista de la teoría de bifurcaciones, V_c puede considerarse el punto crítico de una bifurcación silla-nodo (Tomado de Riera, 2000).

2.3 El grifo goteante con flujo constante

El modelo numérico lagrangiano tiene la capacidad de predecir la forma de las gotas con gran detalle (ver figura 9 en Fuchikami *et al.*, 1999 y comentarios sobre la misma). Un ejemplo de una sucesión de estados para $r_0 = 0.916$ y $v_0 = 0.0809$, en unidades normalizadas, se muestra en la figura 4. El primer desprendimiento ocurre a $t = 20.4$

mientras que el segundo tiene lugar a $t = 41.3$. Nótese que después del desprendimiento de la primera gota, se desprenden dos gotas satélite cuyos volúmenes son menores al 1% del volumen de la primera gota, razón por la cual las gotas satélite fueron despreciados en todo el análisis subsecuente.

Como se mencionó anteriormente, un grifo goteante es capaz de comportarse de forma regular o de forma caótica dependiendo del valor del flujo que lo alimenta. Una herramienta útil para mostrar la diversidad de comportamientos de un sistema determinado es el diagrama de bifurcación. La cantidad física que se mide normalmente en los experimentos de goteo es el tiempo entre gotas $T_n = t_{d,n+1} - t_{d,n}$, donde $t_{d,n}$ es el tiempo en que ocurre el desprendimiento de la gota n , y $t_{d,n+1}$, el tiempo en que ocurre el desprendimiento de la gota $n+1$. El parámetro de bifurcación generalmente empleado es el flujo Q o la velocidad v_0 , que están relacionados entre sí por un factor constante. De esta forma, el diagrama de bifurcación de goteo muestra la velocidad de flujo en el eje de las abscisas y los tiempos entre gotas sobre la órbita correspondiente en el eje de las ordenadas. La figura 5 muestra un diagrama de bifurcación del goteo típico. Una característica interesante de este diagrama es la forma en que parece repetirse la misma estructura lobulada conforme aumenta el valor del parámetro, aunque los tiempos lógicamente se van haciendo más cortos conforme la velocidad de salida del líquido aumenta. Este hecho también fue observado experimentalmente por Katsuyama & Nagata (1999). En la misma figura 5 también se indica con una flecha el intervalo que se analizó en este trabajo, *i.e.* el intervalo comprendido entre $v_0 = 0.0809$ y $v_0 = 0.0825$, el cual se encuentra completamente dentro de un mismo lóbulo.

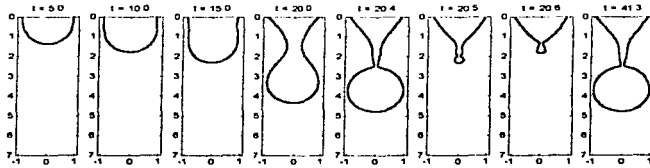


Figura 4. Formas consecutivas de gotas $v_0 = 0.916$ y $v_0 = 0.0809$, ambas en unidades normalizadas.

Dentro de este intervalo el sistema es aparentemente caótico como lo muestran las gráficas T_n vs n (figura 6) para a) $v_0 = 0.0809$, b) $v_0 = 0.0817$ y c) $v_0 = 0.0825$. Los mapeos de primer retorno T_{n+1} vs T_n para los mismos valores de v_0 (figura 7) pueden considerarse como un mapeo de Poincaré del sistema o como un mapeo bidimensional $(T_n, T_{n+1}) \rightarrow (T_{n+1}, T_{n+2})$, de manera que lo que en ellos se observa es una estructura topológicamente equivalente al atractor de dicho mapeo. Siguiendo la secuencia puede apreciarse una variación continua de este atractor cuando se incrementa el parámetro v_0 . De acuerdo con la forma de estos mapeos, parece factible describir al sistema por medio de un mapeo unidimensional $T_{n+1} = G(T_n)$ donde $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a pesar de la patente dispersión alrededor de una hipotética curva de ajuste. La posibilidad de usar un mapeo

unidimensional para la descripción del sistema es consecuencia de la fuerte contracción que aletra el espacio de fases durante la evolución del sistema. La dispersión aparentemente aleatoria de los puntos en el mapeo de Poincaré puede deberse a que la contracción no es infinita; sin embargo, el número de los eventos registrados no es suficientemente grande para revelar una estructura fractal ($R_{max} < 500$).

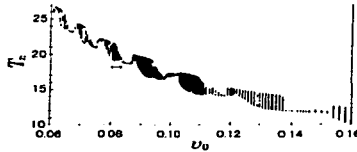


Figura 5. Diagrama de bifurcación para el grifo goteante (tomado de Fuchikami et al., 1999). El intervalo indicado es aproximadamente (0.0809, 0.0825).

En los tres casos, la recta $T_{n+1} = T_n$ interseca al atractor una sola vez indicando la presencia de una órbita de periodo uno T^* inestable, considerando que la pendiente del mapeo en esos puntos $\left| \frac{dG}{dT} \right|_{T^*} > 1$. Por otro lado, aunque ninguna serie de eventos (figura 6) muestra signos

de intermitencia, el mapeo correspondiente a $v_0 = 0.0817$ aparentemente contiene un punto tangente con la recta $T_{n+1} = T_n$ y una acumulación de puntos alrededor él. También son notorios dos puntos, ubicados en (19.6, 21.4) y (21.4, 19.6), alrededor de los cuales parece acumularse una gran cantidad de puntos.

La frecuencia con que un intervalo determinado es visitado por una órbita caótica generada a partir de condiciones iniciales típicas puede ser descrita por una función llamada densidad natural invariante $\rho(x)$ (Ott, 2000). En el caso de un mapeo unidimensional $x_{n+1} = F(x_n)$ donde $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la densidad invariante natural puede ser definida como

$$\rho(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \delta(x - x_n) \quad \dots (17)$$

donde $\delta(x)$ representa la función delta de Dirac; numéricamente se puede calcular en la forma de un histograma. En la figura (8) se presentan las densidades naturales invariantes $\rho(T)$ de los tres casos: siendo discontinuas en todo punto, muestran las características típicas de un mapeo caótico unidimensional con máximos suaves y refuerzan la afirmación de que el grifo goteante simulado es caótico para estos valores de v_0 . Es notable cómo se distribuyen los eventos conforme aumenta el gasto. Cuando $v_0 = 0.0809$, el máximo se ubica en el valor más alto del intervalo $T \cong 21.5$. Cuando la velocidad del flujo en el tubo aumenta a $v_0 = 0.0817$ el máximo más prominente se encuentra en $T \cong 21.5$ aunque un máximo secundario ha comenzado a desarrollarse en la zona inferior del intervalo ($T \cong 19.5$). Finalmente, con una velocidad en el tubo $v_0 = 0.0825$, el máximo de la zona inferior a superado a aquél en la zona superior. Esto corresponde perfectamente a la

estructura de los lóbulos en el diagrama de bifurcación, pues cada uno de ellos inicia con comportamiento periódico de periodo uno con un valor de T_n alto y finaliza con comportamiento periódico de periodo uno con un valor de T_n bajo.

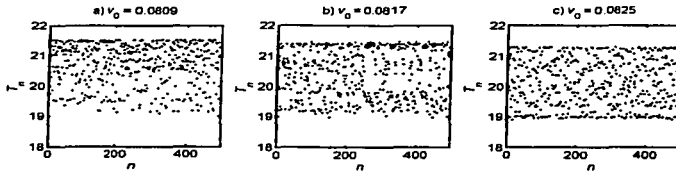


Figura 6. Series de eventos para los flujos constantes: a) $v_0 = v_{min} = 0.0809$; b) $v_0 = v_m = 0.0817$, y c) $v_0 = v_{max} = 0.0825$.

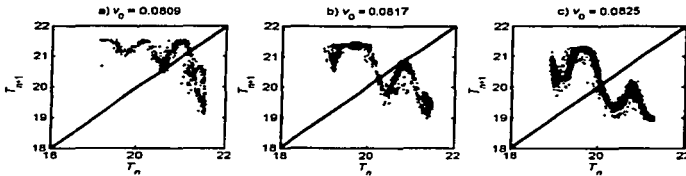


Figura 7. Mapeos de primer retorno para los flujos constantes: a) $v_0 = v_{min} = 0.0809$; b) $v_0 = v_m = 0.0817$, y c) $v_0 = v_{max} = 0.0825$.

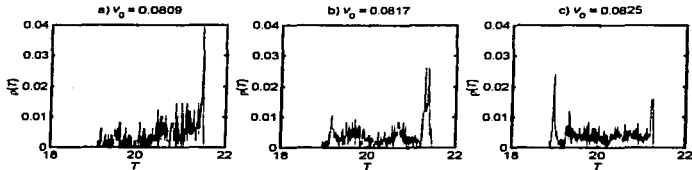


Figura 8. Densidades naturales invariantes para los flujos constantes: a) $v_0 = v_{min} = 0.0809$; b) $v_0 = v_m = 0.0817$, y c) $v_0 = v_{max} = 0.0825$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3. Goteo con flujo variable

3.1 Preliminares

Como se mencionó en la sección 2.1 la discretización de las ecuaciones del modelo lagrangiano da lugar a un sistema dinámico autónomo M -dimensional con $200 < M < 500$. A pesar de este hecho, es posible describir los resultados a través de un mapeo de primer retorno bidimensional $(T_n, T_{n+1}) \rightarrow (T_{n+1}, T_{n+2})$, el cual puede ser considerado como un mapeo de Poincaré del sistema. Al introducir la dependencia del tiempo de uno de los parámetros, en este caso del flujo de alimentación, el sistema se vuelve no autónomo.

Un sistema no autónomo $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ donde $\mathbf{F}: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ siempre puede transformarse en un sistema autónomo $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{G}(\mathbf{y})$ con \mathbf{G} tal que $\mathbf{G}: \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ haciendo la identificación $\mathbf{y} = [\mathbf{x}, \theta] \in \mathbb{R}^{m+1}$, estableciendo $\theta(0) = 0$ y reescribiendo la ecuación original

como $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(\mathbf{x}, \theta) \\ 1 \end{bmatrix}$ con lo cual se hace $\theta = t$ para $t > 0$. Esto significa que el sistema no

autónomo m -dimensional se transforma en un sistema autónomo $(m+1)$ -dimensional. Un mapeo de Poincaré de un sistema tal pasará entonces de ser $(m-1)$ -dimensional a ser m -dimensional. Ahora bien, considerando que al hacer que la velocidad del fluido en la salida del tubo varíe en el tiempo el grifo goteante se convierte de sistema autónomo en sistema no autónomo, las consideraciones anteriores pueden aplicarse en él; esto es, el mapeo de Poincaré que anteriormente era un mapeo bidimensional debe transformarse en un mapeo tridimensional, siendo la tercera variable el tiempo mismo o, al menos, una variable proporcional a él. Además, y únicamente por claridad en la presentación de los resultados, esta variable se normalizará a la unidad eligiéndola de la siguiente forma:

$\theta_n = \frac{\omega t_{d,n}}{2\pi} \bmod 1 = \frac{t_{d,n}}{\tau} \bmod 1$, donde $\omega = 2\pi/\tau$ es la frecuencia angular de la variación de v ,

y $t_{d,n}$ es el tiempo de desprendimiento de la gota n ; esto significa que θ_n tendrá el papel de una fase. Las dos variables restantes serán las anteriormente empleadas T_n y T_{n+1} . De esta forma el mapeo tridimensional que describirá al sistema será $(T_n, T_{n+1}, \theta_n) \rightarrow (T_{n+1}, T_{n+2}, \theta_{n+1})$.

El flujo se varió armónicamente con un periodo τ similar al periodo natural del sistema τ_0 y una amplitud tal que el sistema se mantuviera dentro del intervalo $v \in [0.0809, 0.08025]$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

dentro del cual, como ya se ha demostrado, el sistema se comporta de forma aparentemente caótica, según el diagrama de bifurcación para flujo constante (ver figuras 5 - 8). La función con la cual se describió esta variación fue

$$v(t) = v_0 + K \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau}\right) \quad \dots (18)$$

donde v_0 es el valor medio del flujo alrededor del cual oscila la variación, K es la amplitud de la variación y τ es su periodo. Para todos los casos presentados en esta sección se usará $v_0 = 0.0817$. Usando los valores de la serie de tiempo con flujo constante correspondiente a este valor se encontró un tiempo promedio para la formación de una gota $\tau_0 = 20.3$.

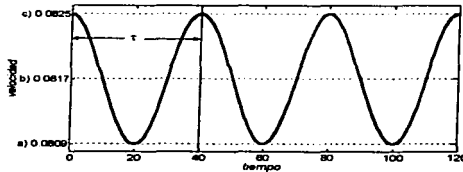


Figura 9. Variación de la velocidad del flujo a la salida del tubo. Las velocidades a) $v_{min} = 0.0809$; b) $v_0 = 0.0817$, y c) $v_{max} = 0.0825$, corresponden a los mapas de primer retorno de la figura 7.

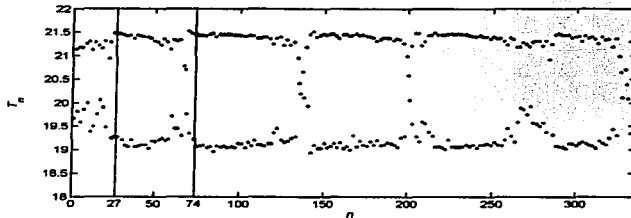


Figura 10. Gráfica T_n vs n para flujo oscilatorio con $v_0 = 0.0817$, y $\tau = 40$. Las líneas verticales discontinuas limitan el intervalo de tiempo que abarca la figura 14.

En las siguientes secciones de este capítulo se presentan y analizan los resultados de simulaciones para flujos de alimentación con diversos periodos. Para mostrar lo que ocurre cuando el periodo del flujo de alimentación es cercano al tiempo promedio de formación de una gota τ_0 , se eligieron periodos aproximadamente iguales al doble y a la mitad de τ_0 .

Posteriormente y con base en los resultados obtenidos en estos dos primeros casos, se investiga lo que ocurre cuando el periodo del flujo de alimentación se acerca al doble de τ_0 tanto por la izquierda como por la derecha. Finalmente se describe lo que ocurre cuando el periodo del flujo de alimentación es grande comparado con el tiempo de formación de una gota; es decir, cuando el flujo de alimentación sufre una variación relativamente lenta.

3.2 Periodo de oscilación de suministro aproximadamente igual al doble del tiempo promedio de formación de una gota

En el primer caso analizado, que será considerado como caso base, se usó un periodo $\tau = 40 \approx 2\tau_0$; es decir, el flujo era capaz de tomar aproximadamente todos los valores posibles de forma ascendente o descendente antes de que se desprendiera la siguiente gota aunque esto también dependía de la diferencia de fases entre el sistema y el flujo. Este será considerado como caso base y su periodo de denotara como τ^* . La amplitud empleada fue $K = 0.0008$ con la cual se tenían como cotas inferior y superior precisamente a $v_{min} = 0.0809$ y $v_{max} = 0.0825$ (figura 9). Como condición inicial se tomó la forma de equilibrio estático correspondiente a una longitud de gota $z_0 = 2.20$ en un tubo de radio $r_0 = 0.916$, todo en unidades normalizadas. Al observar la gráfica T_n vs n (figura 10) se encontró que el sistema presentaba intermitencia entrando a un estado altamente ordenado de periodo dos interrumpido por ráfagas caóticas muy breves (comprendiendo de tres a cuatro eventos), a pesar de que, como se señaló antes, en todo momento el flujo se mantiene en valores para los cuales un sistema con flujo constante presentaría comportamiento caótico. En la figura 11 se presenta el atractor del mapeo tridimensional. Es notable la formación de tres ramas, correspondientes a los estados más visitados, y varios puntos dispersos entre ellas, correspondientes a las ráfagas caóticas. Para entender mejor la dinámica del sistema, se ha proyectado este atractor sobre los planos $T_n - T_{n+1}$ y $T_n - \theta_n$. La proyección sobre el plano $T_n - T_{n+1}$ (figura 12) muestra muy claramente que los puntos en las ráfagas caóticas siguen un comportamiento muy similar al observado en el caso con $v_0 = 0.0817$ constante (ver figura 7b). También son fácilmente distinguibles dos puntos alrededor de los cuales se acumulan la mayoría de los eventos; es importante señalar sin embargo que los puntos alrededor de los cuales se concentran los puntos en este caso no son los mismos que los que se mencionaron cuando se describió el atractor del caso con $v_0 = 0.0817 =$ constante pues su ubicación es distinta.

La proyección sobre el plano $T_n - \theta_n$ (figura 13) tiene también características interesantes. En ella aparecen las tres ramas del atractor en la forma de dos curvas (considerando que la variable θ_n es periódica) unidas por dos nubes de puntos dispersos con fase aproximadamente constante. Antes de discutir esta figura se mostrará de manera gráfica la forma como se mueve el sistema en la proyección sobre el plano $T_n - \theta_n$ del espacio de fases. En la figura 14 se ve la evolución del sistema cada dos eventos dentro del lapso señalado con líneas punteadas verticales en la figura 10. El punto y el triángulo rojo señalan al último y al penúltimo desprendimiento de cada recuadro. Lo primero que debe señalarse es la existencia de una diferencia de fases constante o casi constante entre los dos eventos. La segunda observación importante es que cada punto se mueve lentamente sobre las franjas verticales (movimiento regular) y muy rápido sobre las nubes horizontales que las

conectan (movimiento caótico). La constancia aproximada de la fase que se tiene cuando el sistema cruza la nube caótica indica que durante esos instantes el sistema se mueve en promedio con la misma frecuencia que el flujo oscilatorio impuesto.

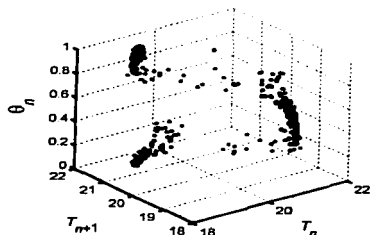


Figura 11. Atractor del sistema en un mapeo de Poincaré.

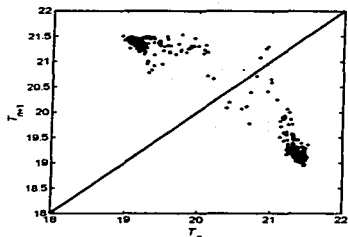


Figura 12. Proyección sobre el plano $T_n - T_{n+1}$ del atractor para $v_0 = 0.0817$, y $\tau = 40$.

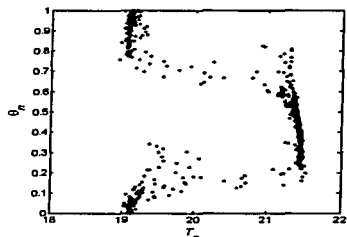


Figura 13. Proyección sobre el plano $T_n - \theta_n$ del atractor para $v_0 = 0.0817$, y $\tau = 40$.

Si se usan condiciones iniciales diferentes los resultados obtenidos son los mismos. Por ejemplo, usando como condición inicial la forma de equilibrio estático correspondiente a una longitud de gota $z_b = 2.25$ se obtienen las gráficas de la figura 15. Una característica que en este caso es notoria es la ocasional extensión de los brazos del atractor. Este efecto se debe a incursiones anormales del sistema hacia el atractor caótico como la que ocurre alrededor de $n = 150$ en la figura 15a. Esto también puede observarse en el caso anterior, alrededor de $n = 275$ en la figura 10 aunque el efecto es casi imperceptible porque la incursión es muy corta.

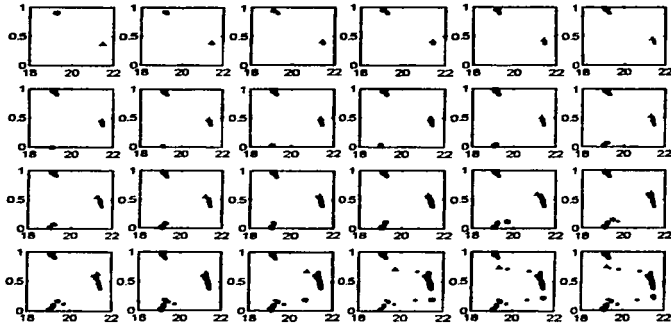


Figura 14. Evolución del sistema en el plano $\theta_n - T_n$, en el intervalo comprendido entre $n = 27$ y $n = 74$, indicado en la figura 10. El círculo y el triángulo en rojo indican a los puntos último y penúltimo de cada recuadro, el cual está separado del anterior por dos pasos. El orden es de izquierda a derecha y de arriba abajo. Los ejes en todos los recuadros son: vertical, θ_n ; horizontal, T_n .

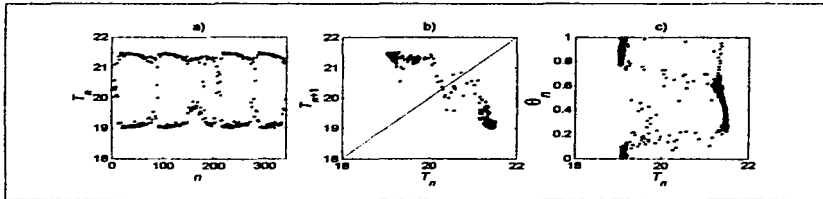


Figura 15. Goteo con flujo oscilatorio con $\nu_0 = 0.0617$, y $\tau = 40$ usando una gota estática de longitud $z_0 = 2.25$ como condición inicial: a) Gráfica T_n vs n , b) Proyección sobre el plano $T_n - T_{n-1}$ del atractor, y c) Proyección sobre el plano $T_n - \theta_n$ del atractor.

Un comportamiento similar a éste fue observado cuando se estudió el efecto de una modulación periódica en el parámetro de bifurcación del mapeo logístico dentro de un intervalo de periodo dos (Rössler *et al.*, 1991). Se observó que después de un cierto valor crítico de la frecuencia muy cerca de la resonancia, aparecía un atractor de forma y

comportamiento similar al presentado aquí. Se concluyó que el desplazamiento del sistema sobre las dos curvas se debía básicamente a la pequeña diferencia existente entre las frecuencias del sistema y del parámetro oscilante. Esta misma interpretación puede hacerse en el caso del sistema goteante. Esto puede aprovecharse para hacer un cálculo de la frecuencia natural del sistema. La deducción del cálculo y el cálculo mismo se diferirán hasta el final del siguiente capítulo (ver sección 4.3).

3.3 Período de oscilación de suministro aproximadamente igual a la mitad del tiempo promedio de formación de una gota

En el segundo caso se utilizó un período $\tau = 10 \approx \tau_0/2$. De esta manera, el flujo realizaba aproximadamente dos oscilaciones completas antes de que cayera la siguiente gota. El atractor correspondiente se presenta en la figura 16. Sobre el plano $T_n - T_{n+1}$ se aprecia la misma estructura del caso con $v_0 = 0.0817$ sin perturbar excepto porque no hay puntos acumulados donde antes parecía existir una tangencia entre el atractor y la recta $T_{n+1} = T_n$. En cambio, los otros dos puntos donde se concentraban los puntos en el caso con flujo constante sí permanecen. La proyección sobre el plano $T_n - \theta_n$ no muestra ninguna estructura a simple vista y parece estar formada de una sola nube caótica.

Los siguientes dos casos se eligieron de forma que ilustraran lo que ocurre cerca de $\tau^* = 40$ correspondiente al caso 1 donde se observó claramente una regularización del sistema.

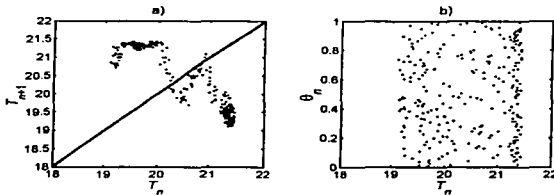


Figura 16. Proyecciones sobre los planos a) $T_n - T_{n+1}$, y b) $T_n - \theta_n$ del atractor obtenido con flujo oscilante de período $\tau = 10$.

3.4 Período de suministro cercano por la izquierda al doble del tiempo promedio de formación de una gota

Para el tercer caso se eligió $\tau = 36$ para determinar qué ocurría cuando el período del sistema se aproxima a $\tau^* = 40$ por la izquierda. En esta situación, la dispersión de puntos con respecto al atractor del sistema original ($v_0 = 0.0817 = \text{constante}$) es mayor (figura

17a). A pesar de esto se mantiene la concentración de puntos alrededor de los puntos (19.6, 21.4) y (21.4, 19.6). La proyección sobre el plano $T_n - \Theta_n$, sin embargo, no parece mostrar ningún patrón de comportamiento definido (figura 17b).

3.5 Periodo de suministro cercano por la derecha al doble del tiempo promedio de formación de una gota

Un acercamiento a $\tau^* = 40$ por la derecha usando $\tau = 44$ tiene exactamente las mismas características que el caso anterior en el que la frecuencia se aproximaba a $\tau = 40$ por la izquierda: dispersión notable de la proyección del atractor sobre el plano $T_n - T_{n+1}$ alrededor del atractor del sistema original ($v_0 = 0.0817 = \text{constante}$) y ningún patrón regular apreciable en la proyección sobre el plano $T_n - \Theta_n$.

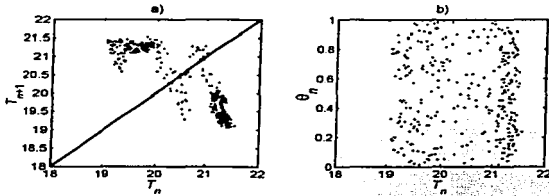


Figura 17. Proyecciones sobre los planos a) $T_n - T_{n+1}$, y b) $T_n - \Theta_n$, del atractor obtenido con flujo oscilante de periodo $\tau = 36$.

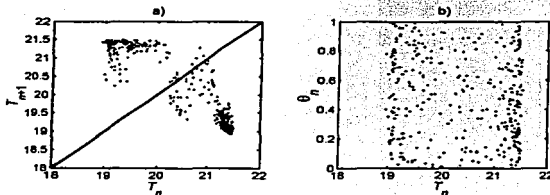


Figura 18. Proyecciones sobre los planos a) $T_n - T_{n+1}$, y b) $T_n - \Theta_n$, del atractor obtenido con flujo oscilante de periodo $\tau = 44$.

3.6 Variación lenta del flujo de alimentación

Si el periodo de la oscilación es mucho mayor al periodo de formación de una gota la dispersión de los puntos con respecto al atractor del sistema con flujo constante es muy notoria, tanto que una descripción a través de un mapeo unidimensional sería poco apropiada. Esto es debido a que el sistema pasa mucho tiempo lejos del valor medio de la oscilación ($v_0 = 0.0817$) y por lo tanto, tiene mayor oportunidad de acercarse a diferentes atractores. Esto queda muy bien ilustrado en la figura 19 donde aparece la proyección sobre el plano $T_n - T_{n+1}$ del atractor correspondiente a un flujo oscilatorio con periodo $\tau = 160 \approx 8\tau_0$ (rombos negros) junto a los atractores obtenidos con flujos constantes $v_0 = 0.0809$ (puntos azules) y $v_0 = 0.0825$ (puntos rojos). Es muy claro que todos los puntos caen dentro del área limitada por estos dos últimos atractores.

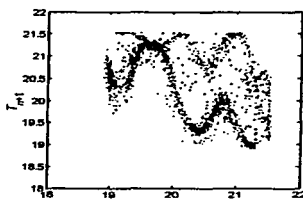


Figura 19. Proyección sobre el plano $T_n - T_{n+1}$ (rombos negros) para flujo oscilante de periodo $\tau = 160$ mostrado junto al atractor correspondiente a $v_0 = 0.0809 = \text{constante}$ (puntos azules) y $v_0 = 0.0825 = \text{constante}$ (puntos rojos).

Estos resultados llevan a especular que si la frecuencia de la perturbación es suficientemente baja la serie de eventos y el atractor estarán constituidos por un híbrido que exhibirá los comportamientos de las diferentes regiones del diagrama de bifurcación para velocidades constantes que sean recorridas por la oscilación. Así, por ejemplo, si la oscilación en la velocidad recorriera alternativamente una zona caótica, una ventana periódica y nuevamente una zona caótica, la serie de eventos debería mostrar una forma de intermitencia formada por un comportamiento inicial caótico seguido de comportamiento periódico y nuevamente movimiento caótico. Además, los tiempos del inicio de cada clase de movimiento debería corresponder con el paso de la perturbación sobre las diferentes regiones. Esto ya ha sido observado en el mapeo logístico y aun en el grifo goteante (Kantz, 2003).

Como comentario final es necesario mencionar que el tiempo requerido para la simulación de la dinámica del goteo con el modelo numérico lagrangiano es aproximadamente de 3 horas por cada gota utilizando un procesador alpha a 600 MHz para realizar los cálculos. Esto tiene como consecuencia que las simulaciones usando este modelo sean muy costosas a pesar de los buenos resultados que arroja y obliga a buscar modelos más sencillos que

permitan hacer inferencias sobre el comportamiento esperado al menos de manera cualitativa. Existen dos modelos de este tipo: el modelo del oscilador de masa variable (Shaw, 1984) con todas sus variantes, y un mapeo unidimensional basado sobre un modelo dinámico de baja dimensión (Couillet *et al.*, 2000). En el capítulo siguiente se obtendrán resultados a partir de éste último para aprovechar la sencillez en el planteamiento de este modelo y explorar sus posibilidades en el estudio del sistema de interés.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4. El modelo dinámico de baja dimensión

4.1 Preliminares

El excesivo tiempo requerido para llevar a cabo las simulaciones con el modelo lagrangiano hizo prohibitivo continuar con su exploración. Fue por eso que resultó importante contar con un modelo que a pesar de ser mucho más simple, permitiera la simulación del sistema que estudiamos en poco tiempo. El modelo dinámico de baja dimensión elegido fue propuesto por Couillet *et al.* (2000; ver también Riera, 2000) y a continuación se hace una breve descripción del mismo.

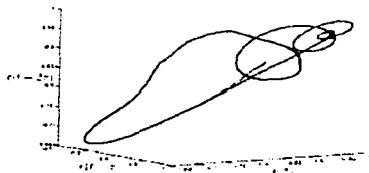


Figura 20. Reconstrucción del espacio de fases de un sistema goteante (Tomado *et al.*, 2000).

Con el fin de reconstruir el espacio de fases del goteo se observó, como única variable medida, el radio de la gota en una posición adecuada tal que éste fuera continuo para todo tiempo, y se utilizó el método de los retardos después de resolver (11) numéricamente durante un tiempo mucho mayor que el tiempo de formación de una sola gota (Couillet *et al.*, 2000). Lo que se obtuvo (figura 20) fue un espacio de fases con dos zonas cualitativamente diferentes: una larga excursión durante la cual ocurre el desprendimiento y una zona más compacta de oscilaciones amortiguadas cerca del punto de bifurcación silla-nodo. La larga excursión corresponde al desprendimiento y tiene una escala de tiempo, $\tau_n \sim \sqrt{\rho r_0^3 / \Gamma}$, donde ρ es la densidad del fluido, r_0 es el radio del tubo en la salida y Γ es el coeficiente de tensión superficial. Esta escala de tiempo es universal e independiente del

flujo de alimentación (Eggers, 1997), y mucho más pequeña que la escala de tiempo para la formación de la gota $\tau_f = \frac{r_0}{v_0}$, donde v_0 es la velocidad del fluido en la salida del tubo; estas características le quitan relevancia en el proceso de goteo (Coulet *et al.*, 2000). Por su parte, la zona de oscilaciones amortiguadas es de importancia central en el proceso, pues modifican el tiempo en el que ocurre la inestabilidad y la bifurcación silla-nodo. Cuando el flujo de alimentación es suficientemente pequeño, las oscilaciones son amortiguadas rápidamente de manera que la inestabilidad de la gota queda totalmente determinada por el volumen crítico, que actúa como punto de bifurcación silla-nodo; sin embargo, conforme aumenta el flujo, la tasa de amortiguamiento de las oscilaciones no es suficiente para eliminarlas por completo provocando que la inestabilidad ocurra antes o después de alcanzar el volumen crítico. Esto da origen al caos dentro del sistema (Coulet *et al.*, 2000).

4.2 Flujo constante

Basados en este análisis, Coulet *et al.* (2000, ver también Reira, 2000) propusieron un modelo muy simple que no obstante, describe el comportamiento de este sistema de forma cualitativa. Este modelo consiste en un modo oscilatorio amortiguado y una función que describe el crecimiento de la gota.

$$\begin{cases} \partial_t U = (i\omega - \lambda)U \\ \partial_t Z = \epsilon_0 + Z^2 \end{cases} \quad \dots (19)$$

$U = X + iY$ corresponde a un modo oscilatorio amortiguado de frecuencia ω y coeficiente de amortiguamiento λ , mientras que ϵ_0 es un parámetro análogo al flujo. Estas ecuaciones modelan la dinámica del flujo alrededor de la bifurcación silla-nodo. Para construir un mapeo de primer retorno se considera esta dinámica únicamente dentro de un paralelepípedo de lados $2A \times 2A \times 2B$ con centro en el origen. De esta forma, un punto de la trayectoria ubicado en (X_n, A, Z_n) será transportado a (X_{n+1}, Y_n, B) a través de la solución de la primera ecuación de (19)

$$\begin{cases} X_{n+1} = (X_n \cos(\omega T_n) - A \sin(\omega T_n)) \exp(-\lambda T_n) \\ Y_{n+1} = (X_n \sin(\omega T_n) + A \cos(\omega T_n)) \exp(-\lambda T_n) \end{cases} \quad \dots (20)$$

Aquí T_n es el tiempo que tarda el sistema de ir de (X_n, A, Z_n) a (X_{n+1}, Y_n, B) y está dado por la solución del recíproco de la segunda ecuación en (19) integrado entre $Z = Z_n$ y $Z = B$

$$T_n = \frac{\text{angtan}(B/\sqrt{\epsilon_0}) - \text{angtan}(Z_n/\sqrt{\epsilon_0})}{\sqrt{\epsilon_0}} \quad \dots (21)$$

Como se mencionó anteriormente, la dinámica inherente al desprendimiento sigue una ley universal y es independiente de las condiciones iniciales. Esto es aprovechado para simular esta parte del proceso simplemente como una reinyección del flujo hacia la zona de la bifurcación a través del mapeo $X_{n+1} \rightarrow X_n, -Y_{n+1} \rightarrow Z_n$, el cual corresponde a una rotación rígida alrededor del eje X' llevando al punto desde el plano horizontal $Z = B$ hasta

el plano vertical $Y = A$. Finalmente, todo el proceso puede ser conjuntado en un único mapeo de primer retorno

$$\begin{cases} T_n = \frac{\text{angtan}(B/\sqrt{\epsilon_0}) - \text{angtan}(Z_n/\sqrt{\epsilon_0})}{\sqrt{\epsilon_0}} \\ X_{n+1} = (X_n \cos(\omega T_{n+1}) - A \text{sen}(\omega T_{n+1})) \exp(-\lambda T_{n+1}) \\ Z_{n+1} = -(X_n \text{sen}(\omega T_{n+1}) + A \cos(\omega T_{n+1})) \exp(-\lambda T_{n+1}) \end{cases} \quad \dots (22)$$

Un diagrama de bifurcación típico para este mapeo se muestra en la figura 21, en la cual puede observarse también un comportamiento cualitativamente similar a los obtenidos tanto experimentalmente (ver figura 4 en Katsuyama *et al.*, 1999) como con el modelo lagrangiano (figura 5).

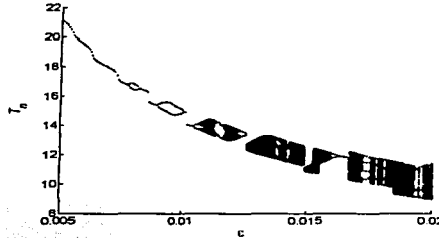


Figura 21. Diagrama de bifurcación típico generado por (22) con ϵ_0 constante; $\omega = 4.24$, $\lambda = 0.34$, $A = 0.60$, $B = 1.00$.

Para la caracterización del tipo de movimiento, *i.e.* caótico o regular, se usó el máximo exponente de Lyapunov. Un mapeo N -dimensional tiene N o menos exponentes de Lyapunov definidos como (Ott, 2000)

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|y_n|}{|y_0|} \right) \quad \dots (23)$$

donde y_0 es un desplazamiento infinitesimal tangente a la condición inicial x_0 , y y_n representa su evolución. Una elección arbitraria de y_0 conducirá típicamente al valor del máximo exponente de Lyapunov h_1 . Si el sistema es caótico, entonces el desplazamiento infinitesimal crece y $h_1 > 0$; si el sistema presenta comportamiento regular, entonces el desplazamiento infinitesimal decrece y $h_1 < 0$. El cálculo del máximo exponente de Lyapunov se llevó a cabo mediante el habitual método de renormalización (Benettin *et al.*, 1980).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

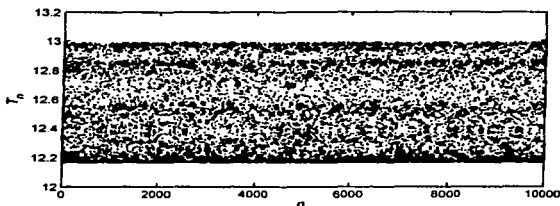


Figura 22. Serie de eventos T_n vs n : $\omega = 4.24$, $\lambda = 0.34$, $\epsilon_0 = 0.012945$, $A = 0.60$, $B = 1.00$.

Antes de iniciar el análisis con parámetros dependientes del tiempo se muestra un ejemplo con ϵ_0 constante que servirá como punto de referencia para el análisis de la siguiente sección. Con base en el estudio previo de Riera (2000), los valores elegidos para los parámetros fueron $\omega = 4.24$, $\lambda = 0.34$, $\epsilon_0 = 0.012945$, $A = 0.60$, $B = 1.00$ con los cuales se consigue que el sistema se comporte de manera caótica con un exponente de Lyapunov máximo $h_1 = 0.5548$. Esto puede apreciarse de manera gráfica en la serie de eventos T_n vs n (figura 22), donde se presenta un comportamiento completamente irregular con los tiempos entre gotas T_n distribuidos dentro del intervalo (12.169, 12.986), y en el mapeo de primer retorno (figura 23a). A pesar de que éste último sigue siendo aproximadamente unidimensional, muestra una estructura doble muy fina (figura 23b). La densidad invariante natural (figura 24) es discontinua en todo punto y posee varios máximos de los cuales los cuatro principales se ubican en $T = 12.170$, $T = 12.561$, $T = 12.865$ y $T = 12.981$. Como se apuntó desde el capítulo 2, estas características son propias de mapeos unidimensionales caóticos.

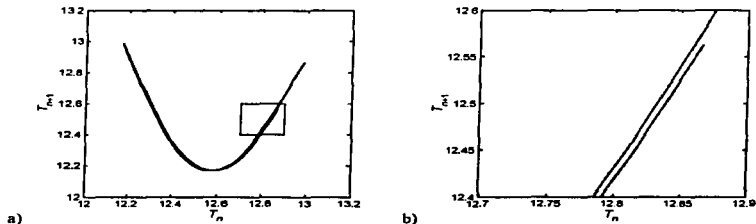


Figura 23. a) Mapa de primer retorno T_{n+1} vs T_n ; $\omega = 4.24$, $\lambda = 0.34$, $\epsilon_0 = 0.012945$, $A = 0.60$, $B = 1.00$; b) Ampliación del recuadro en a).

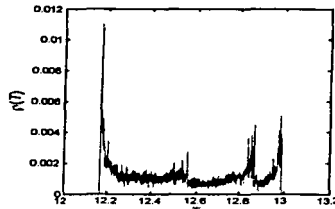


Figura 24. Densidad natural invariante $\rho(T)$:
 $\omega = 4.24$, $\lambda = 0.34$, $c_0 = 0.012945$, $A = 0.60$,
 $B = 1.00$.

4.3 Flujo dependiente del tiempo

El sistema dinámico (19) definido en la sección anterior sirvió como base para el análisis cualitativo de los resultados obtenidos con el modelo lagrangiano. ϵ es el parámetro análogo al gasto y por esta razón fue el parámetro perturbado armónicamente:

$$\epsilon(t) = \epsilon_0 + K \cos\left(\frac{2\pi}{\tau} t\right) \quad \dots (24)$$

donde ϵ_0 es el valor medio de $\epsilon(t)$, K es la amplitud de la modulación y τ es su periodo. Esta modificación invalida la primera de las expresiones en (22): para calcular T_n ahora es necesario integrar numéricamente la segunda ecuación de (19) tomando en cuenta la dependencia temporal de $\epsilon(t)$. Para la integración se usó un método de Runge-Kutta de cuarto orden con paso de tiempo ajustable.

Las dos ampliaciones del diagrama de bifurcación muestran la región explorada, la cual estuvo centrada en $c_0 = 0.012945$ (figura 25). Puede notarse que esta región es caótica a pesar de la existencia de varias ventanas periódicas. En el primer caso analizado se usaron los valores $K = 3.5 \times 10^{-5}$ y $\tau = 12.66$. Tanto ω y λ como A y B conservaron los valores usados en el caso independiente del tiempo. Cuando se emplea $\epsilon(t)$ definido por la ecuación (21) y con los parámetros citados anteriormente se encuentra una reducción del exponente de Lyapunov máximo obteniéndose $h_1 = 0.2541$. El cálculo de este invariante se realizó usando la expresión (23) mediante el método de renormalización (Benettin *et al.*, 1980) considerando el mapeo tridimensional $(X_n, Z_{n+1}, \theta_n) \rightarrow (X_{n+1}, Z_{n+2}, \theta_{n+1})$ definido por (22)

calculando a T_n como se describe en el párrafo anterior y definiendo a $\theta_n \equiv \frac{t_{d,n}}{\tau} \bmod 1$,

donde $\omega = 2\pi/\tau$ es la frecuencia angular de la variación de v , y $t_{d,n}$ es el tiempo de desprendimiento de la gota n .

En la gráfica T_n vs n (figura 26) puede vislumbrarse la causa de esta reducción: el sistema se comporta de manera intermitente pasando abruptamente de un estado aproximadamente periódico de periodo cuatro a un estado caótico y viceversa. El periodo cuatro muestra una subestructura formada por bifurcaciones de doblamiento de periodo directas e inversas. Esta forma de intermitencia es similar al efecto de "breathing" descrito en estudios sobre el comportamiento de sistemas caóticos con perturbaciones armónicas débiles muy cerca de entrar en resonancia (Qu *et al.*, 1995), excepto porque en el caso presente no es posible identificar ningún periodo que dé indicación sobre la diferencia entre las frecuencias de la perturbación y del sistema.

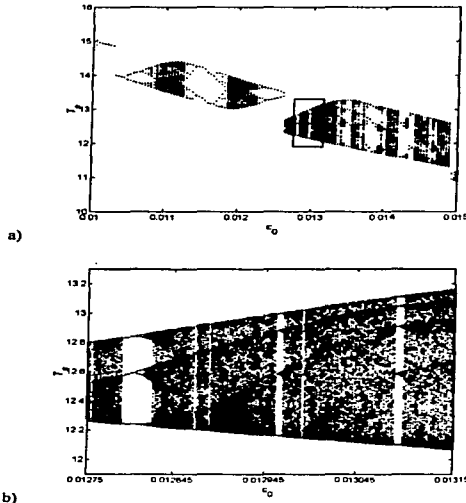


Figura 25. a) Diagrama de bifurcación típico generado por (19) con $\epsilon = \epsilon_0 = \text{constante}$; los parámetros son los mismos que en la figura 21. b) Región explorada: ampliación del recuadro en a); el centro de la exploración fue $\epsilon_0 = 0.012945$ y la máxima amplitud empleada fue $K = 1 \times 10^{-4}$.

El mapeo de Poincaré correspondiente aparece en la figura 27. También en este caso es posible apreciar franjas definidas sobre una nube de puntos dispersos. Al proyectar el atractor del mapeo sobre el plano $T_n - T_{n+1}$ (figura 28) se observa una estructura muy similar a la obtenida en el caso con parámetros constantes. Tomando en cuenta que la órbita

aparentemente estabilizada es de periodo cuatro, y con el fin de profundizar un poco más en la identificación de las diferencias y similitudes entre ambas estructuras, se decidió utilizar la cuarta composición de esta proyección (figura 29), y la gráfica análoga para el caso con parámetros independientes del tiempo (figura 30).

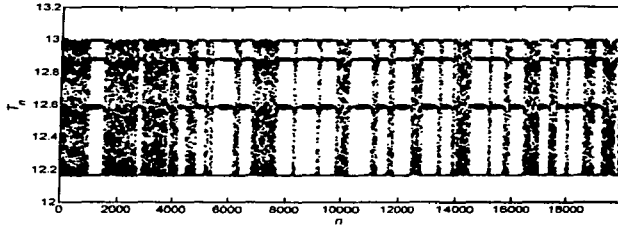


Figura 26. Serie de eventos T_n vs n con ϵ variable: $\epsilon_0 = 0.012945$, $K = 3.5 \times 10^{-5}$ y $\tau = 12.66$.

En la cuarta composición para el caso con $\epsilon = \epsilon_0 =$ constante se encuentra la causa de los cuatro picos principales de la densidad natural invariante: el mapeo se encuentra muy próximo a una bifurcación tangente. Esta bifurcación es precisamente la generadora de la ventana periódica que se observa en el diagrama de bifurcación. La cuarta composición para $\epsilon(t)$ posee una estructura muy similar excepto porque existe una mayor dispersión de puntos alrededor del atractor no perturbado. Esta sutil diferencia provoca que el mapeo del sistema con parámetros variables sí corte a la recta $T_{n+4} = T_n$ dando lugar a puntos fijos estables por intervalos. Esto parece confirmar la observación de que la reducción del caos a través de una débil perturbación armónica del sistema es debida a la presencia de ventanas periódicas y bifurcaciones tangentes (Tamura *et al.*, 1999).

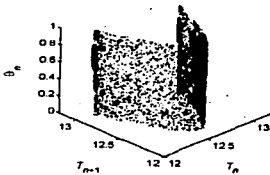


Figura 27. Atractor del sistema en un mapeo de Poincaré: $\epsilon_0 = 0.012945$, $K = 3.5 \times 10^{-5}$ y $\tau = 12.66$.

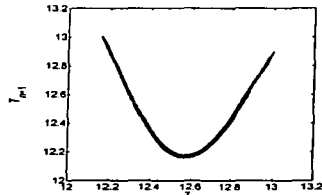


Figura 28. Proyección del atractor de la figura 27 sobre el plano $T_n - T_{n+1}$.

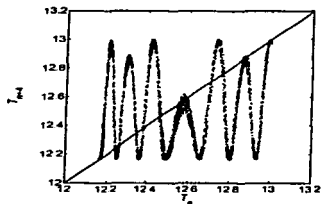


Figura 29. Cuarta composición del mapeo de primer retorno con ε variable: $\varepsilon_0 = 0.012945$, $K = 3.5 \times 10^{-5}$ y $\tau = 12.66$.

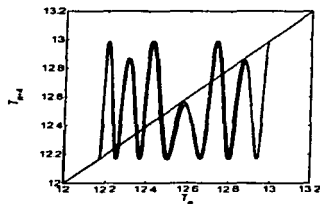


Figura 30. Cuarta composición del mapeo (22) con $\varepsilon = \varepsilon_0 = 0.012945 \approx$ constante

La proyección sobre el plano $T_n - \theta_n$ del atractor (figura 31) revela que las franjas de periodicidad aproximada tiene una estructura fina formada por sucesiones de bifurcaciones por doblamiento de período directas e inversas. A diferencia de lo ocurrido en el caso simulado con el modelo lagrangiano, esta vez las cuatro franjas son paralelas y la fase siempre disminuye de tal forma que el sistema nunca aparenta tener la misma frecuencia que la perturbación. De manera semejante a lo que se encontró con el modelo lagrangiano, los periodos caóticos y aproximadamente regulares se suceden sin traslape (figura 33) durante algunos ciclos aunque también ocurren episodios anómalos durante los cuales el intervalo caótico invade la región supuestamente regular (figura 34).

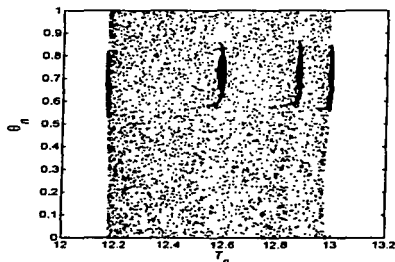


Figura 31. Proyección del atractor de la figura 27 sobre el plano $T_n - \theta_n$.

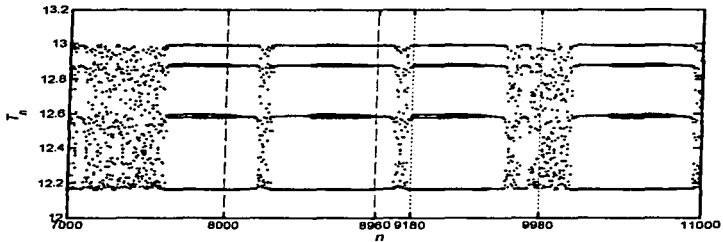


Figura 32. Fragmento de la serie de eventos de la figura 26, desde $n = 7000$ hasta $n = 11000$. Las líneas a trazos limitan el intervalo analizado en la figura 33; las líneas punteadas delimitan el intervalo analizado en la figura 34.

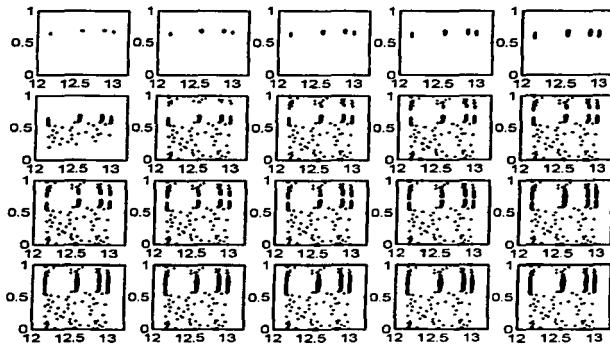


Figura 33. Evolución del sistema en el plano $\theta_n - T_n$ en el intervalo comprendido entre $n = 8000$ y $n = 8960$, limitado por líneas a trazos en la figura 32. Cada recuadro está separado del anterior por 48 pasos. Los ejes en todos los recuadros son: vertical, θ_n ; horizontal, T_n .

Exploración del espacio frecuencia-amplitud

De acuerdo con las investigaciones reportadas en la literatura, la reducción del caos se consigue cuando la perturbación débil de algún parámetro del sistema se encuentra en resonancia con la frecuencia natural de alguna órbita periódica inestable incrustada en el atractor caótico del sistema. Para determinar el periodo de la órbita próxima a ser estabilizada simplemente se sumaron los valores de los cuatro tiempos entre gotas que forman la órbita periódica $T_1 = 12.164$, $T_2 = 12.583$, $T_3 = 12.876$, $T_4 = 12.993$; el resultado es un periodo fundamental $\tau_1 = 50.616$. Para comprobar esto se realizó una exploración extensiva del espacio paramétrico $(\omega/\omega_1, K)$, donde $\omega = 2\pi/\tau$ y $\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau_1} = 0.12413$, en la cual se calcularon el máximo exponente de Lyapunov $h_1(\omega/\omega_1, K)$ y la fracción del tiempo en que el sistema es aproximadamente periódico con periodo cuatro.

$$f_{\text{per4}}(\omega/\omega_1, K) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} t_{\text{per4}}(t, \omega/\omega_1, K) \quad \dots (25)$$

donde t es el tiempo total y t_{per4} es el tiempo durante el cual la órbita se comporta en forma aproximadamente periódica con periodo cuatro. Para determinar el tiempo en que el sistema se comporta de manera aproximadamente periódica se consideraron los intervalos que cumplieran con la relación $|T_{n+4} - T_n| < \delta$. El valor de $\delta = 0.045$ se determinó considerando el ancho máximo de las subestructuras que aparecen en la serie de eventos (figura 32).

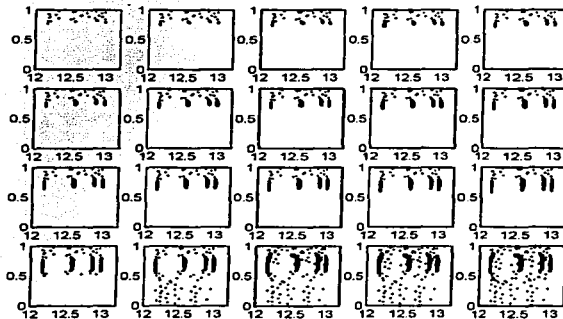


Figura 34. Evolución del sistema en el plano $\theta_n - T_n$ en el intervalo comprendido entre $n = 9180$ y $n = 9980$, limitado por líneas punteadas en la figura 32. Cada recuadro está separado del anterior por 40 pasos. Los ejes en todos los recuadros son: vertical, θ_n ; horizontal, T_n .

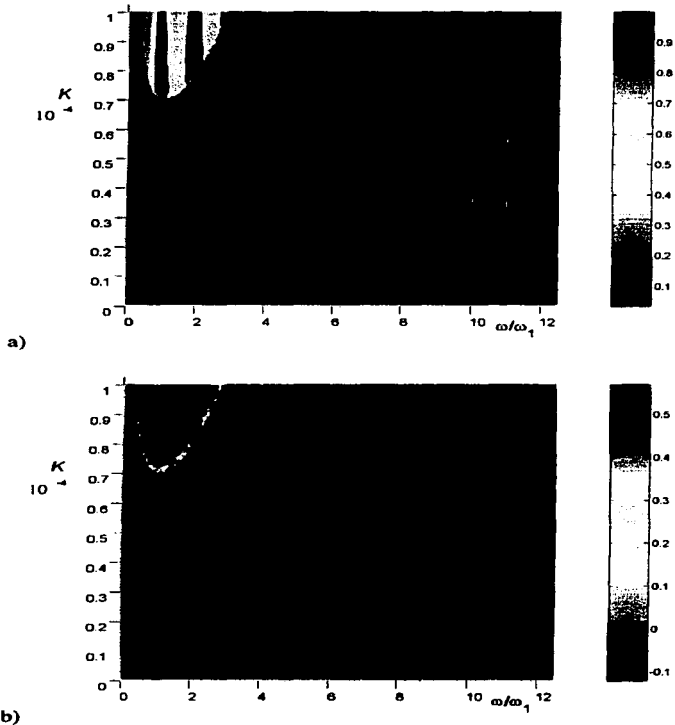


Figura 35. Resultados de la exploración del espacio paramétrico $(\omega/\omega_1, K)$: a) fracción de tiempo con periodicidad aproximada, f_{per} , y b) máximo exponente de Lyapunov, h_1 .

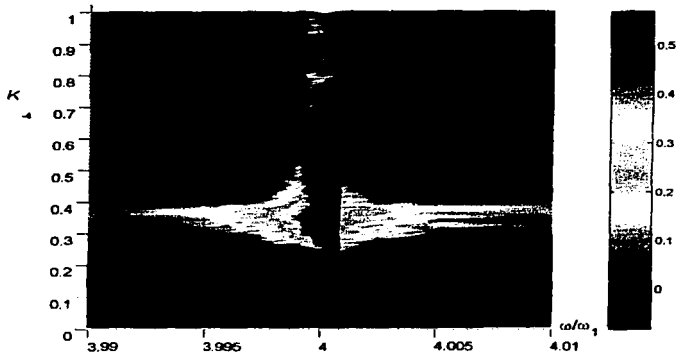


Figura 36. Máximo exponente de Lyapunov h_1 como función de la amplitud de la perturbación K y de su frecuencia relativa ω/ω_1 alrededor de $\omega/\omega_1 = 4$. a) $\omega/\omega_1 = 3.998$, $K = 3.5 \times 10^{-5}$; b) $\omega/\omega_1 = 3.999$, $K = 3.6 \times 10^{-5}$; c) $\omega/\omega_1 = 3.9995$, $K = 3.6 \times 10^{-5}$; d) $\omega/\omega_1 = 4.0$, $K = 3.6 \times 10^{-5}$; e) $\omega/\omega_1 = 4.0005$, $K = 3.6 \times 10^{-5}$; f) $\omega/\omega_1 = 4.0008$, $K = 3.6 \times 10^{-5}$.

Los intervalos explorados fueron $0 < \omega/\omega_1 < 12$ y $0 < K < 10^{-4}$ con una resolución de $\Delta(\omega/\omega_1) = 5.0 \times 10^{-5}$ en ω/ω_1 y $\Delta K = 5 \times 10^{-7}$ en K ; para cada pareja $(\omega/\omega_1, K)$ se usaron series de 10000 puntos. Los resultados se presentan en la figura 35. El máximo exponente de Lyapunov reproduce exactamente los resultados obtenidos al calcular la fracción de tiempo $f_{\omega_{res}}$, excepto en una zona contenida por la región $0.25 < \omega/\omega_1 < 3$, $7 \times 10^{-5} < K < 1 \times 10^{-4}$. Esto indica que en casi todo el espacio paramétrico explorado la perturbación resonante estabiliza una órbita de periodo aproximadamente cuatro.

Como se esperaba, el máximo exponente de Lyapunov es mínimo, y la fracción de tiempo $f_{\omega_{res}}$ es máxima, cuando ω/ω_1 es un número entero, esto es, cuando el sistema y la perturbación se encuentran en resonancia. La regularización del sistema, i.e. la reducción de h_1 o el incremento de $f_{\omega_{res}}$, inicia a partir de un cierto valor umbral de la amplitud K que depende de la frecuencia ω siendo mayor conforme mayor es ω/ω_1 . Aquí es interesante notar que la ventana de periodo cuatro inicia en $\varepsilon = 0.012957$ y termina en $\varepsilon = 0.012961$. Esto significa que para entrar a la ventana periódica es necesario una mínima amplitud $K_{ent} = 1.2 \times 10^{-5}$ y para atravesarla se requiere que la amplitud sea $K \geq K_{sal} = 1.2 \times 10^{-5}$. Sin embargo para $\omega = \omega_1$, $\omega = 2\omega_1$ y $\omega = 3\omega_1$, los umbrales de la amplitud para regularizar el comportamiento resultaron ser, respectivamente, $K_1 = 0.6 \times 10^{-5} < K_{ent}$, $K_2 = 0.65 \times 10^{-5} < K_{ent}$ y $K_3 = 0.9 \times 10^{-5} < K_{ent}$. Esto indica que, al menos para estas frecuencias, el sistema no atraviesa en ningún momento la ventana periódica del sistema original.

Comportamiento cerca de la resonancia

En esta sección se analiza más profundamente lo que ocurre cerca de la resonancia. Específicamente, se estudia lo que ocurre alrededor de $\omega/\omega_1 = 4.0$. La figura 36 es una ampliación de la figura 35 alrededor de este valor. Lo primero que es necesario hacer notar es que el movimiento periódico del sistema no se limita al eje $\omega/\omega_1 = 4.0$, sino que abarca toda una franja desde $\omega/\omega_1 \cong 3.9994$ hasta $\omega/\omega_1 \cong 4.0007$ para $K > 2.8 \times 10^{-5}$ (región azul). Dentro de esta franja, el exponente de Lyapunov máximo toma valores $h_1 < 0.06$. Es sorprendente el hecho de que el exponente máximo sea positivo; sin embargo, esto puede ser debido únicamente al tiempo finito empleado en su cálculo. Por ejemplo, en la figura 37 se muestra una serie de eventos del caso $K = 6.0 \times 10^{-5}$, $\omega/\omega_1 = 3.9995$. Al inicio del movimiento tiene lugar un estado transitorio seguido de otro permanente de periodo cuatro aparentemente sin posibilidad de cambiar, por lo que se esperaría un exponente de Lyapunov máximo negativo. No obstante, el exponente de Lyapunov máximo calculado resulta ser $h_1 = 0.0281 > 0$ por efecto del transitorio inicial.

La intermitencia análoga al efecto “breathing” observada numéricamente en la ecuación de Duffing perturbada débilmente (Qu *et al.*, 1995) se observa en el sistema de interés de este estudio en el intervalo $0.06 < h_1 < 0.40$ (regiones amarilla y verde). Es muy importante resaltar que el tipo de intermitencia aquí reportado es diferente a los bien conocidos tipos I, II y III que ocurren cuando el sistema pasa a través de una bifurcación de silla-nodo, de Hopf subcrítica o de doblamiento inverso de periodo, respectivamente (Pomeau & Manneville, 1980), pues en todos esos casos lo que se tiene es que el sistema pasa de tener un movimiento aparentemente periódico a otro caótico. En el caso que aquí se presenta, siempre presenta variaciones de una oscilación a la siguiente dando lugar a lóbulos que recuerdan bifurcaciones de doblamiento de periodo directas e inversas, así como bifurcaciones silla-nodo (ver figura 38). Qu *et al.* (1995) han encontrado una explicación para este peculiar comportamiento en términos de una diferencia de fase dependiente del tiempo. Si el sistema se mantiene en perfecta resonancia y se analiza el efecto de la diferencia de fase sobre el comportamiento se encuentra que éste es sensible al parámetro anterior y que dependiendo del valor de éste último se obtiene movimiento caótico o regular. Cuando existe una diferencia entre la frecuencia de resonancia y la frecuencia del forzante $\Delta\omega$ lo suficientemente pequeña, la diferencia de fase se vuelve dependiente del tiempo pero con una tasa de variación ínfima de tal forma que la variación de la fase puede considerarse cuasiestática. El sistema recorre todos los estados posibles dando como resultado un nuevo movimiento periódico de periodo $\tau_n = 2\pi/\Delta\omega$ compuesto de intervalos caóticos y regulares dependiendo de la diferencia de fase correspondiente a cada instante.

En el caso que aquí se estudia no ha sido posible identificar ningún periodo que pudiera dar infromación sobre la diferencia entre la frecuencia de resonancia y la frecuencia de la perturbación $\Delta\omega$. Esto se debe muy probablemente a que $\Delta\omega$ no es lo suficientemente pequeña para que sea posible considerar a la variación de la fase como cuasiestática lo cual depende básicamente del tiempo que tarda el sistema en llegar a su estado permanente sea este estable, periódico, cuasiperiódico o caótico. $\Delta\omega$ no puede hacerse arbitrariamente pequeña pues, como se señaló antes, la región de movimiento periódico no se limita a la recta $\omega/\omega_1 = 4.0$, sino que ocupa el intervalo $3.9994 < \omega/\omega_1 < 4.0007$.

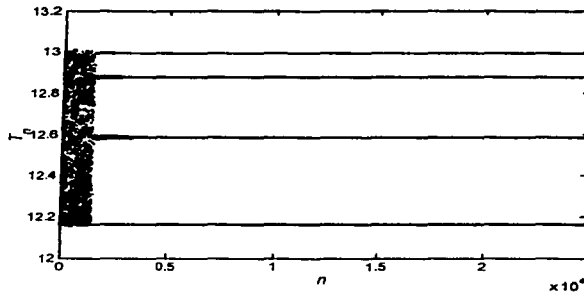


Figura 37. Serie de tiempo para $K = 6.0 \times 10^{-3}$, $\omega/\omega_1 = 3.9995$ con un exponente de Lyapunov máximo $h_1 = 0.0281 > 0$.

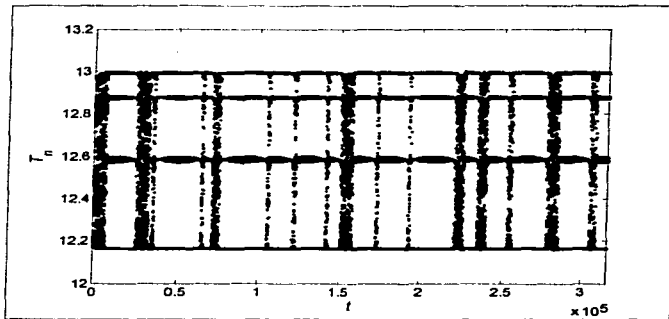


Figura 38. Serie de tiempo para $K = 3.5 \times 10^{-3}$, $\omega/\omega_1 = 3.999$ con un exponente de Lyapunov máximo $h_1 = 0.1065 > 0$. En esta figura se aprecia la intermitencia que tiene lugar cerca de la resonancia.

Comportamiento cuasiperiódico

Ahora se analizará la zona contenida por la región $0.25 < \omega/\omega_1 < 3$, $7 \times 10^{-5} < K < 1 \times 10^{-4}$ donde, como se mencionó antes, ocurre un fenómeno interesante, pues el máximo exponente de Lyapunov y la fracción de tiempo con periodicidad cuatro aproximada muestran una discrepancia. Para tener una idea más clara de lo que pasa se han graficado tanto la serie de eventos como la sección de Poincaré de dos casos representativos.

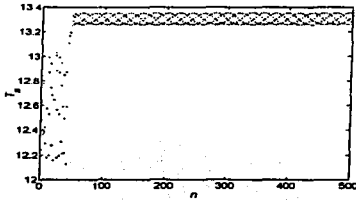


Figura 39. Serie de eventos T_n vs n : $\epsilon_0 = 0.012945$, $\omega = \omega_1$, $K = 9 \times 10^{-5}$.

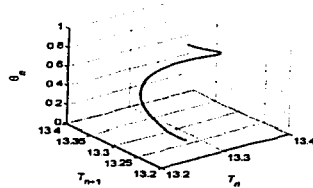


Figura 40. Sección de Poincaré del atractor: $\epsilon_0 = 0.012945$, $\omega = \omega_1$, $K = 9 \times 10^{-5}$.

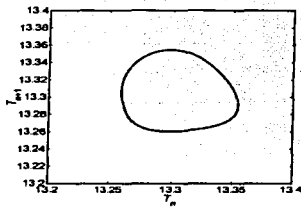


Figura 41. Proyección del atractor sobre el plano $T_n - T_{n+1}$: $\epsilon_0 = 0.012945$, $\omega = \omega_1$, $K = 9 \times 10^{-5}$.

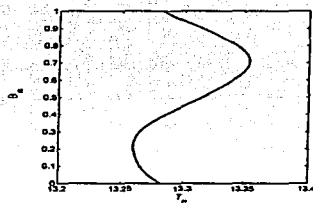


Figura 42. Proyección del atractor sobre el plano $T_n - \theta_n$: $\epsilon_0 = 0.012945$, $\omega = \omega_1$, $K = 9 \times 10^{-5}$.

En primer lugar se analizó el caso $\omega = \omega_1$, $K = 9 \times 10^{-5}$, para el cual se calculó un exponente de Lyapunov máximo $h_1 = 0.0009$ y una fracción de tiempo $f_{\omega_1} = 0.9977$. Después de un corto transitorio ($n < 50$) que se desenvuelve en el intervalo usual $T_n \in (12.2, 13)$, aparece un nuevo estado estacionario en un intervalo diferente y más reducido $T_n \in (13.26, 13.35)$ (figura 39). El atractor es una curva cerrada en el espacio de fases (figura 40), considerando que $\theta_n = 1$ es equivalente a $\theta_n = 0$. Para comprobar que esto es así basta observar las

proyecciones sobre los planos $T_n - T_{n+1}$ (figura 41) y $T_n - \theta_n$ (figura 42). Por lo tanto el subespacio sobre el cual caen los puntos del mapeo de Poincaré tiene la topología de un toro $T^2 \subset \mathbb{R}^3$ que resultaría de la intersección del hiperplano $Z = B$ con el toro $T^3 \subset \mathbb{R}^4$ sobre el cual se movería el sistema.

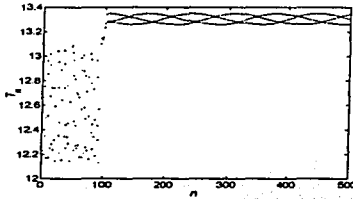


Figura 43. Serie de eventos T_n vs n : $\epsilon_0 = 0.012945$, $\omega = 1.25\omega_1$, $K = 9 \times 10^{-3}$.

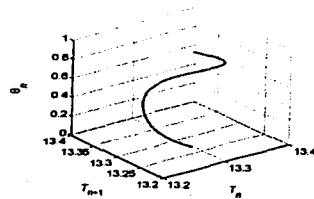


Figura 44. Sección de Poincaré del atractor: $\epsilon_0 = 0.012945$, $\omega = 1.25\omega_1$, $K = 9 \times 10^{-3}$.

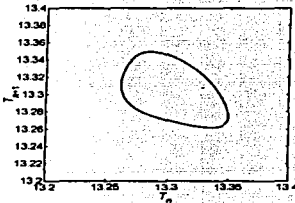


Figura 45. Proyección sobre el plano $T_n - T_{n+1}$: $\epsilon_0 = 0.012945$, $\omega = 1.25\omega_1$, $K = 9 \times 10^{-3}$.

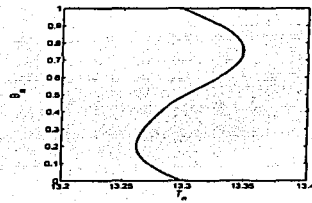


Figura 46. Proyección del atractor sobre el plano $T_n - \theta_n$: $\epsilon_0 = 0.012945$, $\omega = 1.25\omega_1$, $K = 9 \times 10^{-3}$.

Un toro $T^3 \subset \mathbb{R}^4$ puede describirse por tres ángulos $\theta = 2\pi kt$, $\phi = 2\pi lt$, $\psi = 2\pi mt$ donde k, l, m son reales. La sección de Poincaré para un sistema moviéndose sobre este subespacio puede construirse sobre el hiperplano $\theta = 0$ atravesado por el sistema cada vez que $2\pi kt = 2\pi n$ para $n = 1, 2, 3, \dots$ La n -ésima intersección del flujo con la sección de Poincaré será $\phi_n = 2\pi \frac{l}{k} n$, $\psi_n = 2\pi \frac{m}{k} n$ y se ubicará sobre un toro $T^2 \subset \mathbb{R}^3$. Dependiendo de si l/k y m/k son racionales o irracionales existen dos posibilidades. La más sencilla de ellas es que ambos cocientes sean racionales, lo cual implica que m/l también es racional y que el sistema es periódico. La segunda posibilidad es que tanto l/k como m/k sean irracionales en cuyo caso, el cociente m/l puede ser racional o irracional. Si es irracional el sistema pasará arbitrariamente cerca de cualquier punto sobre el toro T^2 después de un tiempo

suficientemente largo y el comportamiento del sistema será cuasiperiódico con tres frecuencias fundamentales. Si es racional el resultado será una curva cerrada sobre el toro T^2 que indicará un comportamiento cuasiperiódico con dos frecuencias fundamentales; esto último es precisamente lo que ocurre en el estado analizado.

Para el segundo ejemplo se usaron $\omega = 1.25\omega_1$, $K = 9 \times 10^{-5}$, con un exponente de Lyapunov máximo $h_1 = 0.003$ y una fracción de tiempo $f_{avr} = 0.4239$. Por las mismas razones expuestas en los párrafos precedentes, se puede decir que este nuevo caso también es cuasiperiódico con dos frecuencias fundamentales (figuras 44 – 46); sin embargo, existe una diferencia en la serie de eventos (figura 43) pues ahora parecen formarse tres hebras sinusoidales mientras que en el caso anterior se formaban cuatro. Esta es la explicación de la discrepancia entre h_1 y f_{avr} .

4.4 Relación con los resultados del modelo lagrangiano

Cálculo de la frecuencia natural del sistema

Como se había adelantado desde el capítulo anterior, es posible usar la serie de tiempo de un caso cercano a la resonancia para hacer un cálculo aproximado de la frecuencia natural del sistema ω_1 .

Se supondrá que la diferencia entre la frecuencia de resonancia $\omega_r = n\omega_1$, donde $n = 1, 2, \dots$ y la frecuencia de la oscilación ω es suficientemente pequeña para llevar al sistema a intermitencia, y se denotará por $\Delta\omega$. De esta forma se puede escribir

$$\Delta\omega = \omega - n\omega_1 \quad \dots (26)$$

Esta expresión puede reescribirse en términos del periodo de la oscilación $\tau = 2\pi/\omega$ y el periodo natural del sistema $\tau_1 = 2\pi/\omega_1$ como

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau_1} \left(\frac{\tau_1}{\tau} - n \right) \quad \dots (27)$$

Por definición

$$\tau_1 = t_{d,n+P} - t_{d,n} \quad \dots (28)$$

donde $t_{d,n}$ es el tiempo en que ocurre el desprendimiento de la n -ésima gota y P es el periodo aparente del movimiento. Dividiendo entre τ , esta última expresión puede ponerse en función de $\theta_n = \frac{t_{d,n}}{\tau} \bmod 1$

$$\frac{\tau_1}{\tau} = \theta_{n+P} - \theta_n + \frac{P}{G} \quad \dots (29)$$

tomando en cuenta el efecto de tomar el módulo 1; G es el número de gotas esperadas por oscilación. El último término del miembro derecho es debido únicamente a la operación módulo (mod) que aparece en la definición de θ_n .

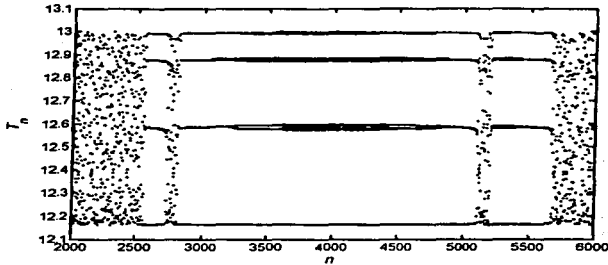


Figura 47. Serie de eventos T_n vs n , $2000 < n < 6000$: $\varepsilon_0 = 0.012945$, $K = 3.5 \times 10^{-5}$, $\omega/\omega_1 = 3.999$. Nótese como en el intervalo $3000 < n < 5000$ existe un periodo de comportamiento aproximadamente periódico de periodo $P = 4$.

Sustituyendo (25) en (23) resulta finalmente

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{\tau} \left(1 - \frac{n}{\theta_{n+P} - \theta_n + P/G} \right) \quad \dots (30)$$

Con esta expresión resulta muy sencillo calcular la frecuencia y el periodo naturales del sistema

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{\tau} \cdot \frac{1}{\theta_{n+P} - \theta_n + P/G} \quad \dots (31)$$

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \tau \cdot (\theta_{n+P} - \theta_n + P/G) \quad \dots (32)$$

Estas expresiones son válidas tanto para el modelo lagrangiano como para el modelo dinámico de baja dimensión y en general para cualquier modelo dinámico que presente intermitencia y corrimiento de fase θ_n durante su evolución.

Como ejemplo de la utilidad de estas expresiones se usó el modelo dinámico de baja dimensión con una perturbación centrada sobre $\varepsilon_0 = 0.012945$ de amplitud $K = 3.5 \times 10^{-5}$ y frecuencia relativa $\omega/\omega_1 = 3.999$ correspondiente a un periodo $\tau = 12.6572$ sabiendo de antemano que la frecuencia natural del sistema es $\omega_1 = 0.1241$. La diferencia $(\theta_{n+4} - \theta_n)$ se tomó como el promedio sobre el intervalo $3000 < n < 5000$ donde el sistema presenta comportamiento aproximadamente periódico de periodo $P = 4$ (figura 47). El tiempo promedio para la formación de una gota es $\tau_0 = 12.6359$ por lo cual $G \approx 1$ gota/oscilación. Con toda esta información se encuentra una frecuencia calculada $\omega_1^c = 0.1241$ y un periodo

$\tau_1^* = 50.6237$. Los resultados son contundentes, mostrando una comparación exacta en la frecuencia y con un error de 0.015 % en el periodo.

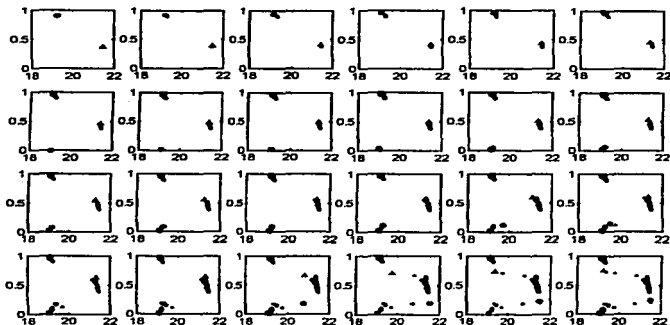


Figura 48. Evolución del sistema en el plano $\theta_n - T_n$, en el intervalo comprendido entre $n = 27$ y $n = 74$, indicado en la figura 10. El círculo y el triángulo en rojo indican a los puntos último y penúltimo de cada recuadro, el cual está separado del anterior por dos pasos. Los ejes en todos los recuadros son: vertical, θ_n ; horizontal, T_n . (Figura 14 repetida)

El mismo cálculo se llevó a cabo para una serie simulada por medio del modelo lagrangiano con una velocidad en el interior del tubo oscilando alrededor de $v_0 = 0.0817$ con una amplitud $K = 8.0 \times 10^{-4}$ y un periodo $\tau = 40$. Con estos parámetros el sistema entra en intervalos que muestran un comportamiento aparentemente periódico de periodo $P = 2$ (caso 1, secc. 3.1). Para el cálculo de la diferencia $(\theta_{n+2} - \theta_n)$ se buscó un intervalo donde el sistema fuera bien comportado en el sentido de que el incremento de fase entre un evento y el siguiente fuese aproximadamente constante. Estas características se encontraron en el intervalo $27 < n < 60$ por lo cual fue seleccionado (ver figura 48). Como se mencionó en el capítulo 3, el tiempo promedio para la formación de una gota es tal que $\tau \approx 2\tau_g$; es decir, $G \approx 2$. Con estos datos se obtienen $\omega_1^* = 0.1549$ y $\tau_1^* = 40.55$. Para tener un punto de comparación se calculó el periodo fundamental de este proceso sumando los tiempos entre gotas que forman el periodo dos: $T_1 = 19.05$ y $T_2 = 21.43$. Esto dio como resultado un periodo fundamental $\tau_1 = 40.48$.

Se hicieron simulaciones con flujos oscilando con estos dos periodos y se encontró que en ambos casos el sistema era más regular que con $\tau = 40$ aunque no se regularizaba por

completo. Las series de eventos (figura 49) muestran cómo, después de un transitorio de aproximadamente 100 gotas para $\tau = 40.48$ y 100 gotas para $\tau = 40.55$, el sistema entra en un movimiento de periodo dos muy constante, interrumpido en muy pocas ocasiones por ráfagas caóticas. Los mapeos de Poincaré del atractor (figura 50) están formados en ambos casos por dos franjas fácilmente distinguibles sobre una nube caótica mucho más tenue que en los casos anteriores. La existencia de las franjas indica que aún existe una diferencia de frecuencias entre el sistema y la oscilación del flujo de alimentación.

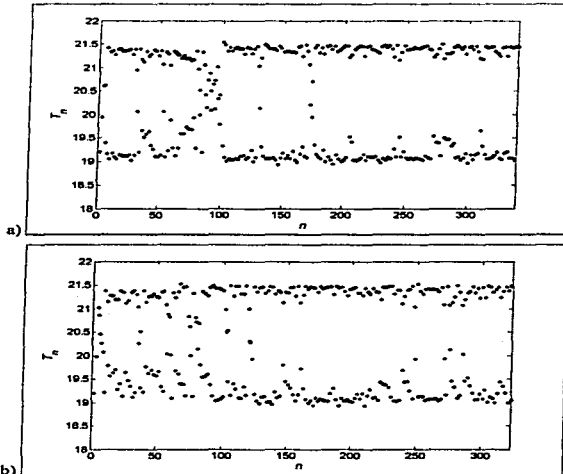


Figura 49. Series de eventos para dos simulaciones de un grifo goteante con flujo oscilatorio con amplitud $K = 8 \times 10^{-4}$ y periodos a) $\tau = 40.48$, y b) $\tau = 40.55$, usando el modelo lagrangiano.

Estos resultados ponen de manifiesto dos puntos importantes. El primero de ellos es la dificultad práctica que podría suponer ajustar la frecuencia de la oscilación del flujo exactamente a la frecuencia natural del sistema en el caso de un grifo goteante real. Esto puede deberse a la dispersión existente en los datos lo cual hace imposible determinar con suficiente exactitud el periodo fundamental aunque es posible que exista otro valor del flujo medio donde esta dispersión sea menor. A pesar de esto, aparentemente sí es posible regularizar el sistema dentro de cierto margen de error, que podrá ser aceptable o no dependiendo del hipotético proceso del cual formara parte el sistema goteante.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Evidentemente hace falta verificar estos resultados numéricos a través de la experimentación.

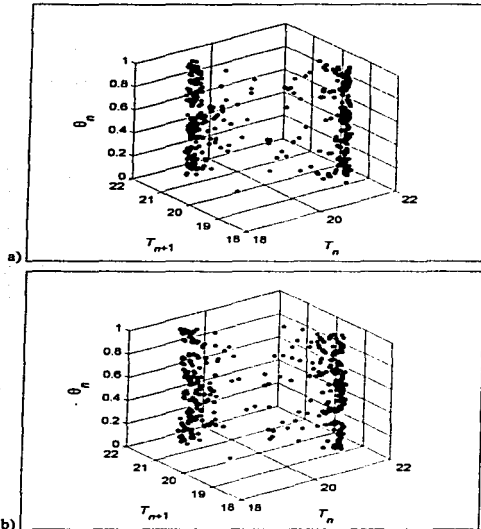


Figura 50. Mapeos de Poincaré para dos simulaciones de un grifo goteante con flujo oscilatorio con amplitud $K = 8 \times 10^{-4}$ y periodos a) $\tau = 40.48$, y b) $\tau = 40.55$, usando el modelo lagrangiano.

El segundo punto que se manifiesta en los últimos resultados es la sobresimplificación que el modelo dinámico de baja dimensión significa para el sistema real, prescribiendo como constantes a la frecuencia de oscilación de la masa remanente después del desprendimiento de la gota y al coeficiente de amortiguamiento. En realidad estos parámetros pueden depender del tamaño de la gota formada en relación al volumen pendiente antes de su desprendimiento, y estar sujetos a perturbaciones adicionales si se forman gotas satélite, pues esto hace que la masa pendiente cambie tanto en forma como en volumen.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

5. Conclusiones y trabajo futuro

5.1 Conclusiones y recomendaciones

Con anterioridad se había demostrado que el modelo lagrangiano es útil para simular tanto la forma de una gota individual como el comportamiento de un sistema goteante para tiempos mucho mayores que el tiempo de formación de una gota única (Fuchikami *et al.*, 1999).

En este trabajo se ha usado este modelo para estudiar lo que ocurriría con un grifo goteante si el flujo que lo alimentara oscilara en el tiempo. Este problema se heredó del caso de la ebullición capilar donde se tienen flujos intrínsecamente variables en el tiempo debido a la entrada de líquido al capilar en los momentos en que ocurren los desprendimientos de las burbujas. Para hacer el estudio se desarrolló por completo el código fuente del programa con base en las recomendaciones publicadas (Fuchikami *et al.*, 1999), y se hicieron las modificaciones adecuadas para tener flujo oscilatorio. Se buscó que la oscilación del flujo fuera tal que en todo momento el sistema se encontrara en una región caótica considerando el diagrama de bifurcación para flujo constante.

Se analizaron cinco casos para observar el comportamiento cuando el periodo de la oscilación era similar al tiempo promedio para la formación de una gota. Los resultados mostraron que, cuando la frecuencia de la oscilación era suficientemente alta, el sistema perturbado actuaba de forma muy similar al sistema no perturbado. Por el contrario, cuando la frecuencia de la oscilación era suficientemente baja, es decir, cuando la variación del flujo era suficientemente lenta, el atractor del sistema en el espacio de fases se engrosaba para abarcar el espacio delimitado por los atractores correspondientes a los casos en que el flujo tenía un valor constante igual a las cotas superior e inferior de la oscilación. Uno de los resultados más interesantes fue la regularización del sistema hacia un comportamiento periódico interrumpido por intervalos caóticos muy breves cuando la frecuencia de la oscilación del flujo era cercana a la frecuencia natural del sistema de goteo.

Esto llevó a la conclusión de que es posible estabilizar una órbita periódica inestable de un grifo goteante haciendo oscilar el flujo de alimentación con una frecuencia cercana a la frecuencia correspondiente de la órbita estabilizada y con una amplitud apropiada. No obstante, hasta este momento no se ha encontrado un método para estabilizar una órbita específica a voluntad.

El modelo lagrangiano requiere un tiempo de cómputo excesivo para la simulación de un solo caso. Para extender los resultados logrados con este modelo, se utilizó un modelo

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

diferente y más sencillo, llamado modelo dinámico de baja dimensión debido a que está basado en un sistema dinámico de dimensión tres o cuatro que reproduce las características esenciales del movimiento de un grifo goteante (Coullet *et al.*, 2000). El parámetro del modelo correspondiente al flujo de alimentación se hizo oscilar armónicamente.

La sencillez del modelo dinámico de baja dimensión hizo posible llevar a cabo una exploración exhaustiva del sistema variando tanto la frecuencia ω como la amplitud K de la oscilación. Los resultados no solo confirmaron lo encontrado con el modelo lagrangiano sino que llevaron a nuevas conclusiones:

- i)* Cuando la frecuencia de oscilación del flujo era igual a un múltiplo de la frecuencia natural del sistema ω_1 ; *i.e.* cuando ambas frecuencias se hallaban en resonancia, y la amplitud de la oscilación tenía un valor apropiado, el atractor del sistema se convertía en un ciclo límite.
- ii)* Cuando $|n\omega_1 - \omega| < \Delta\omega_{c1}(n, K)$, $n = 1, 2, \dots$ donde $\Delta\omega_{c1}(n, K)$ es un valor umbral definido por el sistema dependiente de n y de K , y la amplitud de la oscilación era apropiada, el atractor del sistema seguía siendo un ciclo límite; es decir, la estabilización del ciclo límite se conseguía en intervalos de valores para la frecuencia de la oscilación de flujo centrados cada uno sobre las frecuencias de resonancia: $n\omega_1 - \Delta\omega_{c1}(n, K) < \omega < n\omega_1 + \Delta\omega_{c1}(n, K)$, $n = 1, 2, \dots$ Este es un resultado no reportado hasta este momento en la literatura.
- iii)* Cuando $\Delta\omega_{c1}(n, K) < |n\omega_1 - \omega| < \Delta\omega_{c2}(n, K)$, $n = 1, 2, \dots$ donde $\Delta\omega_{c2}(n, K)$ es un segundo valor umbral dependiente de n y de K , y la amplitud de la oscilación era apropiada, el sistema desplegaba intermitencia. Los intervalos de tiempo con comportamiento aproximadamente periódico eran más largos conforme la frecuencia se aproximaba a una resonancia. Ya existen estudios que reportan haber encontrado un nuevo tipo de intermitencia, llamado efecto "breathing", en sistemas dinámicos perturbados armónicamente, el cual se caracteriza por generar una clase movimiento periódico compuesto por intervalos caóticos e intervalos periódicos cuando la diferencia entre las frecuencias natural e impuesta es suficientemente pequeña. Aparentemente, en el caso de interés no se consiguió generar este movimiento periódico debido a que el comportamiento del sistema se volvía periódico antes de que la diferencia entre las frecuencias fuera suficientemente pequeña. Cuando el sistema se encuentra en este régimen es posible calcular la frecuencia natural del sistema ω_1 a través de la expresión

$$\omega_1 = \frac{\omega}{\theta_{n+P} - \theta_n + P/G}$$

donde θ_n es la fase en el momento del n -ésimo desprendimiento y está definida por $\theta_n \equiv \frac{t_{d,n}}{\tau} \text{ mod } 1$, $t_{d,n}$ es el tiempo en que ocurre el n -ésimo desprendimiento y $\tau = 2\pi/\omega$ es el periodo de la oscilación del flujo, P es el periodo del movimiento próximo a ser estabilizado, y G es el número de gotas por cada oscilación en el flujo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- iv) Cuando $|\omega_1 - \omega| > \Delta\omega_{c2}(n, K)$ el sistema era caótico con un atractor muy similar al que se obtuvo manteniendo el flujo constante.
- v) Se encontró también una región del espacio paramétrico $(\omega/\omega_1, K)$ donde el sistema era cuasiperiódico con dos frecuencias fundamentales. En este régimen el atractor del sistema ocupaba una región del espacio de fases distinta y de dimensiones significativamente menores que las de la región ocupada por el sistema con parámetros constantes; es decir, la órbita estabilizada no es una órbita incrustada en el atractor correspondiente al sistema con parámetros constantes. Esto puede constituir una posibilidad de que el sistema de goteo pueda formar parte de procesos cuyos márgenes de tolerancia sean reducidos o donde se necesiten variados regímenes de operación, pues bastaría con ajustar la oscilación del flujo para modificar su comportamiento. Una desventaja fácilmente identificable, sin embargo, es que hasta el momento es imposible decidir qué órbita será estabilizada, lo cual hace necesario un estudio previo del sistema de goteo para adaptarlo a las necesidades del diseño. Esto podría ser resuelto pronto pues ya existen trabajos publicados en este sentido aunque éstos se refieren a sistemas más sencillos.

Una diferencia importante con los estudios previos sobre sistemas dinámicos con perturbaciones armónicas débiles resonantes es que en aquellos casos fue posible estabilizar diversas órbitas periódicas inestables incrustadas en el atractor caótico correspondiente ajustando la frecuencia de la perturbación a la frecuencia de la órbita estabilizada. En la presente investigación únicamente se logró estabilizar un tipo de órbita cuando ésta estaba en resonancia con la perturbación del flujo aún cuando se exploró un intervalo amplio tanto de la frecuencia de la oscilación como de su amplitud.

Con todo esto puede decirse que el comportamiento de un sistema goteante con suministro variable de líquido está lejos de ser trivial revelándose en el presente trabajo tan rico como el caso con flujo constante mostrando comportamiento caótico, intermitente, periódico y cuasiperiódico dependiendo de la frecuencia y la amplitud de la perturbación en el flujo. El modelo dinámico de baja dimensión es, sin embargo, demasiado sencillo y únicamente es útil como una guía sobre el posible comportamiento de un sistema goteante al variar los parámetros de la oscilación del flujo: amplitud y frecuencia por lo que es de suma importancia continuar el trabajo teórico con modelos sofisticados como el modelo lagrangiano. También es necesario realizar trabajo experimental para comprobar que estos comportamientos realmente se verifican en el mundo físico. Un posible experimento con flujo armónico podría llevarse a cabo imponiendo una variación armónica de la temperatura del agua de alimentación justo en la salida del tubo. Esto ya se ha implementado para explorar el comportamiento del grifo goteante con flujo constante y construir el diagrama de bifurcación experimental (Katsuyama & Nagata, 1999).

5.2 Trabajo futuro

Como se planteó desde los primeros párrafos, este trabajo es parte de un proyecto más amplio cuyo objetivo a largo plazo es la descripción de procesos de ebullición en capilares en los cuales se tienen de forma inherente flujos dependientes del tiempo. Con este objetivo

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

en mente, en el futuro inmediato se intentará la construcción de un modelo lagrangiano para la hidrodinámica involucrada en la formación de burbujas en un tubo capilar.

Como se ha apuntado anteriormente, describir una burbuja en el seno de un líquido formándose cuasiestáticamente en la punta de un capilar vertical con salida hacia arriba es un problema relativamente sencillo pues basta con hacer las mismas consideraciones planteadas para el caso de la gota estática considerando el eje z dirigido hacia arriba y sustituyendo la densidad del fluido ρ por la diferencia $|\rho - \rho_m|$ donde ρ_m denota a la densidad del medio.

La descripción dinámica es una cuestión más complicada. La modificación más importante es la inclusión del fluido externo como parte del sistema. Esto significa tomar en consideración la densidad y la viscosidad del medio e incluir la energía cinética y la disipación viscosa que ocurre en su seno, para lo cual es necesario encontrar expresiones apropiadas de estas variables como función de la variable lagrangiana elegida; es decir, como función del volumen de la burbuja sobre el plano z en el instante t , $\xi(z, t)$. Esto será tema de estudios futuros.

Apéndice A. Algoritmo para la solución numérica de las ecuaciones del modelo lagrangiano

A continuación se presenta el algoritmo empleado para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales (11) que describen la dinámica del goteo.

Como condición inicial se utiliza una de las formas estables obtenidas al resolver el caso estático. Esta gota se divide horizontalmente en M discos de modo que sus volúmenes están dados por

$$\Delta \xi_j = \int_{z_{j-1}}^{z_j} \pi r^2(\zeta, t) d\zeta; \quad j = 1, 2, \dots, M \quad \dots (A1)$$

Aquí, $\{z_j\}$ son las coordenadas de los planos horizontales que limitan a los diferentes discos; este conjunto debe cumplir en todo momento con la siguiente relación

$$0 \leq z_1 < z_2 < \dots < z_{M-1} < z_M \equiv z_b \quad \dots (A2)$$

La energía cinética y la energía potencial gravitatoria son

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \dot{z}_j^2 \Delta \xi_j \quad \dots (A3)$$

$$U_g = - \sum_{j=1}^M z_j \Delta \xi_j \quad \dots (A4)$$

Por su parte, la función de disipación de Rayleigh discreta es

$$R = - \frac{3}{2} \eta \sum_{j=1}^M \left(\frac{\dot{z}_j - \dot{z}_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} \right)^2 \Delta \xi_j \quad \dots (A5)$$

En estas expresiones se usó el hecho de que $\xi = \rho = \Gamma = 1$ debido a la elección de unidades.

La energía superficial presenta mayores dificultades, ya que involucra derivadas espaciales de orden superior a uno. Para obtener una expresión discreta útil para la simulación se considera a la superficie como compuesta de superficies cónicas acopladas. El área en el intervalo $[(z_{j-1} + z_j)/2, (z_j + z_{j+1})/2]$ es

$$S_j = \pi(r_j + r_{j+1}) \sqrt{\frac{(z_{j+1} - z_{j-1})^2}{4} + (r_j - r_{j+1})^2}; \quad j = 2, 3, \dots, M-1 \quad \dots (A6)$$

En los intervalos $[0, z_1/2]$, $[z_1/2, (z_1+z_2)/2]$ y $[(z_{M-1}+z_M)/2, z_M/2]$ las expresiones válidas son, respectivamente

$$S_0 = \pi(r_0 + r_1) \sqrt{\frac{z_1^2}{4} + (r_0 - r_1)^2} ; j = 0 \quad \dots (A7)$$

$$S_j = \pi(r_j + r_{j+1}) \sqrt{\frac{z_{j+1}^2}{4} + (r_j - r_{j+1})^2} ; j = 1 \quad \dots (A8)$$

$$S_M = \pi r_M \sqrt{\frac{(z_M - z_{M-1})^2}{4} + r_M^2} ; j = M \quad \dots (A9)$$

En términos de las ecuaciones (A6) - (A9), el potencial $U_\Gamma = \Gamma S$ se calcula como

$$U_\Gamma = \Gamma \sum_{j=1}^M S_j \quad \dots (A10)$$

Las ecuaciones de movimiento que deben resolverse son

$$\begin{cases} \dot{z}_j = v_j \\ \dot{v}_j = f_j(\{z_j\}, \{r_j(z_j, z_{j-1})\}, \{v_j\}) ; j = 1, 2, \dots, M \end{cases} \quad \dots (A11)$$

Las funciones f_j se derivan de las ecuaciones de movimiento de Lagrange y están dadas por

$$f_j = \frac{1}{\Delta \xi_j} \left\{ -\frac{\partial U_\pi}{\partial z_j} - \frac{\partial U_\Gamma}{\partial z_j} + \frac{\partial R}{\partial v_j} \right\}; j = 1, 2, \dots, M \quad \dots (A12)$$

El incremento del volumen en el primer disco está determinado por el flujo volumétrico Q , que corresponde a una velocidad del líquido en el interior del tubo $v_0 = \frac{Q}{\pi r_0^2}$.

La solución dinámica inicia con el cálculo de los valores medios del radio r_j del j -ésimo disco por medio de las expresiones

$$r_1 = \sqrt{\frac{\Delta \xi_1}{\pi z_1}} \quad \dots (A13)$$

$$r_j = \sqrt{\frac{\Delta \xi_j}{\pi(z_j - z_{j-1})}} ; j = 2, 3, \dots, M \quad \dots (A14)$$

Inicialmente se establecen las velocidades de todos los discos iguales a la velocidad en la salida del tubo en $t = 0$

$$v_j(t = 0) = v_0 ; j = 1, 2, \dots, M \quad \dots (A15)$$

Posteriormente, se ajusta el paso de tiempo tentativo y se sustituye por aquél que produzca el menor error posible siguiendo el procedimiento descrito por Press et al. (1992).

Una vez obtenido el paso de tiempo óptimo se integra el sistema de ecuaciones diferenciales (A11) para un paso de tiempo y se analiza la solución buscando:

- i) que la relación (A2) se cumpla,
- ii) que el volumen del primer disco $\Delta \tilde{\xi}_1$ se mantenga por debajo de una cota superior, y
- iii) que la razón entre el ancho del disco y su radio no sobrepase cierto valor.

Si la condición i) no se cumple, el paso de tiempo se reduce; si las condiciones ii) o iii) no son satisfechas, el número de discos aumenta una unidad.

Finalmente, se considera que ha ocurrido un desprendimiento de gota cuando el radio de alguno de los discos en un cuello es menor que un radio mínimo r_m y la sección transversal relativa $S_{min} \equiv (r_m/r_0)^2$ es menor que un valor crítico S_c . En este momento la parte inferior se separa. Evidentemente en este caso también es necesario reajustar el valor de M y redefinir las variables.

Una vez reajustadas las variables se procede a calcular los nuevos valores para los radios, considerando que el volumen de cada disco se mantiene constante y se establece el nuevo valor para $v_0(r)$. Finalmente, se repite el proceso a partir del ajuste del paso de tiempo.

20

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndice B. Códigos fuente

A.1 Modelo lagrangiano con flujo variable

A continuación se presenta el código fuente del programa modelo_goteo usado para simular el goteo con base en las ecuaciones (11) y el algoritmo para su solución presentado en el Apéndice A, así como los módulos, las subrutinas y las funciones necesarias para su ejecución:

```

module types
implicit none

double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0

type :: registro
double precision :: z
double precision :: xi
double precision :: v
end type registro

end module types

program modelo_goteo
! Programa de simulación de un grifo goteante con
! flujo armónico basado en una aproximación
! lagrangiana de las ecuaciones hidrodinámicas
! (Fuchikami et al., 1999).

! AUTOR: Oscar Martínez Alvarado
! FECHA: Agosto 2002

use types

double precision :: radio, v_0t

type(registro), dimension(0:4800) :: arreglo
type(registro), dimension(0:4800) :: ardttdt
type(registro), dimension(0:4800) :: arr2xdt

integer :: N, NN

double precision :: r_0, z_0, v_0, etha
double precision :: dt, epsilon
double precision :: r_j
double precision :: t, tn, tnp1, tm1

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```

double precision :: r_min
double precision :: z_r, xi_max, xi_div

double precision :: v_min, v_max, T_0
double precision :: err_max, del_0, s
double precision :: valor

integer :: j, k
integer(8) :: i, n_div, n_rpt

integer :: ierror

real :: t_ini, t_fin

logical :: intercambio, ruptura, despliegue, grabacion

common // r_0, z_0, v_0, etha

call cpu_time(t_ini)

open (UNIT=10, FILE='hsfc_1.txt', STATUS='REPLACE', ACTION='WRITE', IOSTAT=ierror)

20 format('t = ', E15.8)

despliegue = .FALSE.
grabacion = .TRUE.

! Valores de los parámetros del sistema de goteo
t = 0.D0 ! tiempo
r_0 = 9.16D-1 ! radio del tubo
z_0 = -4.D0 ! longitud de la columna de fluido dentro del tubo
v_min = 8.10D-2 ! velocidad mínima
v_max = 8.24D-2 ! velocidad máxima
T_0 = 4.0D+1 ! periodo de la perturbación
etha = 2.D-3 ! viscosidad del fluido
dt = 1.D-6 ! paso de tiempo
epsilon = 4.D-3 ! parámetro de ruptura
del_0 = 1.D-6 ! precisión del método de Runge-Kutta
s = 0.9 ! factor
z_r = 2.D-1 ! máxima razón z/r

v_0 = v_0t(t, v_min, v_max, T_0)

! forma inicial de la gota
call forma_inicial(arreglo, N, Pi/2.D0, 2.5D0, 1.D-3, 2.D-2)

arreglo(0)%z = z_0
arreglo(0)%xi = -Pi*z_0**2+arreglo(1)%xi
arreglo(0)%v = v_0

! cálculo del volumen total
! cálculo del volumen para el incremento del número de discos
xi_t = 0.D0
xi_max = 0.D0
do j = 1, N
    xi_t = xi_t + arreglo(j)%xi
    if(arreglo(j)%xi.GT.xi_max) xi_max = arreglo(j)%xi
enddo
xi_div = xi_max/2.D0

write(10,30) xi_t, arreglo(N)%z
write(10,35) r_0, v_0

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```

write(10,32) eiha
write(10,33) epsilon, del_0

write(10,40) zxr, xi_div

write(10,*) N

30 format(' xi = ', E11.4, ', zb = ', E11.4)
35 format(' r_0 = ', E11.4, ', v_0 = ', E11.4)
32 format(' eiha = ', E11.4)
33 format(' epsilon = ', E11.4, ', del_0 = ', E11.4)

40 format(' zxr = ', E11.4, ', xi_div = ', E11.4)

! inicialización de los vectores auxiliares arrdt y arr2xdt
do j = 0, N
  arrdt(j) = arreglo(j)
  arr2xdt(j) = arreglo(j)
enddo

! cálculo de la evolución de la gota
ruptura = .FALSE.
i = 0
n_div = 0
n_rpt = 0
tm1 = 0.00

! condicion de termino
do while(n_rpt.LT.1000000)

! ajuste del paso de tiempo
err_max = 0.00
call evolucion(N, dt, arreglo, arrdt)
call evolucion(N, dt, arrdt, arrdt)
call evolucion(N, 2.00*dt, arreglo, arr2xdt)
do j = 0, N
  if(abs((arrdt(j)%z-arr2xdt(j)%z)/arrdt(j)%z).GT.err_max) then
    err_max = abs((arrdt(j)%z-arr2xdt(j)%z)/arrdt(j)%z)
  else if(abs((arrdt(j)%v-arr2xdt(j)%v)/arrdt(j)%v).GT.err_max) then
    err_max = abs((arrdt(j)%v-arr2xdt(j)%v)/arrdt(j)%v)
  endif
enddo

if(err_max.GT.0.0) then
  if(err_max.GT.del_0) then
    dt = s*dt*(del_0/err_max)**0.25
  else
    dt = s*dt*(del_0/err_max)**0.20
  endif
endif

call evolucion(N, dt, arreglo, arreglo)

! despliegue de datos parciales
t = t+dt
i = i+1

v_0 = v_0(t, v_min, v_max, T_0)

! incremento del número de discos
if(arreglo(1)%xi.GT.xi_div) then
  if(N+1.LE.4800) then

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```

write(10,*) 'incremento del número de discos'
write(10,20) i
write(10,*) N+1
N = N+1
do j = N, 2, -1
  arreglo(j) = arreglo(j-1)
enddo
arreglo(1)%z = 0.00
arreglo(1)%v = v_0
arreglo(1)%xi = 0.00
arreglo(0)%z = z_0
arreglo(0)%v = v_0
arreglo(0)%xi = -F1*z_0*r_0**2
do j = 0, N
  ardt(d(j)) = arreglo(j)
  arr2xdt(j) = arreglo(j)
enddo
else
  write(10,*) 'Espacio de arreglo insuficiente'
  stop
endif
endif

! división de discos
do j = 2, (N-N/5)
  r_j = radio(arreglo(j)%xi, arreglo(j-1)%z, arreglo(j)%z)
  if((arreglo(j)%z-arreglo(j-1)%z)/r_j.GT.zzr) then
    n_div = n_div+1
    if(N+1.LE.4800) then
      N = N+1
      do k = N, j+1, -1
        arreglo(k) = arreglo(k-1)
      enddo
      arreglo(j)%z = (arreglo(j)%z+arreglo(j-1)%z)/2.00
      arreglo(j)%xi = arreglo(j)%xi/2.00
      arreglo(j+1)%xi = arreglo(j)%xi
      do k = j, N
        ardt(d(k)) = arreglo(k)
        arr2xdt(k) = arreglo(k)
      enddo
    else
      write(10,*) 'Espacio de arreglo insuficiente'
      stop
    endif
  endif
endif
enddo

! ruptura de la gota
do j = 2, (N-N/5)
  r_j = radio(arreglo(j)%xi, arreglo(j-1)%z, arreglo(j)%z)
  if((r_j/r_0)**2.LT.epsilon) then
    ruptura = .TRUE.
    NN = j-1
  endif
endif
enddo

if(ruptura) then
! grabacion del tiempo de ruptura
if((t-tm).GT.1.D0) then
  open (UNIT=50, FILE='stfc4055_1.agl', STATUS='OLD', POSITION='APPEND', &
    ACTION='WRITE', IOSTAT=ierror)
  write(50,50) i

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN


```

50 format(E15.8)
close(50)
tm1 = t
endif

N = NN
n_rpt = n_rpt + 1
write(10,*) 'ruptura', n_rpt
write(10,20) t
write(10,*) N
ruptura = .FALSE.

call cpu_time(t_fin)

write(10,*) 'tiempo:', t_fin-t_ini, 'seg'

endif

enddo

write(10,20) t

write(*,*) 'fin de tarea...'
write(10,*) 'fin de tarea...'

call cpu_time(t_fin)

write(*,*) 'tiempo:', t_fin-t_ini, 'seg'
write(10,*) 'tiempo:', t_fin-t_ini, 'seg'

close(10)

end program modelo_goteo

subroutine evolucion(N, dt, arm, armp1)
use types

implicit none

double precision :: dz_jdt, dv_1dt, dv_2dt, dv_jdt, dv_mdt, dv_ndt
integer, intent(in) :: N
double precision, intent(in) :: dt
type(registro), dimension(0:4800), intent(in) :: arm
type(registro), dimension(0:4800), intent(out) :: armp1

double precision, dimension(9600) :: A, B, C, D

double precision :: r_0, z_0, v_0

double precision :: z_aux

integer :: j

common // r_0, z_0, v_0

! cálculo del vector A
do j = 1, N
A(j) = dt*dz_jdt(arm(j)%v)
if(.E.Q.1) then
A(N+1) = dt*dv_1dt(arm(0)%z, arm(1)%z, arm(2)%z, arm(3)%z, &

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```

arm(0)%v, arm(1)%v, arm(2)%v, arm(0)%xi, arm(1)%xi, arm(2)%xi, arm(3)%xi)
else if(EQ.2) then
  A(N-2) = dt*dv_2dt(arm(1)%z, arm(2)%z, arm(3)%z, arm(4)%z, &
  arm(1)%v, arm(2)%v, arm(3)%v, arm(1)%xi, arm(2)%xi, arm(3)%xi, arm(4)%xi)
  else if(EQ.N-1) then
    A(2*N-1) = dt*dv_mdt(arm(N-3)%z, arm(N-2)%z, arm(N-1)%z, arm(N)%z, &
    arm(N-2)%v, arm(N-1)%v, arm(N)%v, arm(N-2)%xi, arm(N-1)%xi, arm(N)%xi)
  else if(EQ.N) then
    A(2*N) = dt*dv_ndt(arm(N-2)%z, arm(N-1)%z, arm(N)%z, &
    arm(N-1)%v, arm(N)%v, arm(N-1)%xi, arm(N)%xi)
  else
    A(N+j) = dt*dv_jdt(arm(j-2)%z, arm(j-1)%z, arm(j)%z, arm(j+1)%z, arm(j+2)%z, &
    arm(j-1)%v, arm(j)%v, arm(j+1)%v, arm(j-1)%xi, arm(j)%xi, arm(j+1)%xi, arm(j+2)%xi)
  endif
enddo

! cálculo del vector B
do j = 1, N
  B(j) = dt*dz_jdt(arm(j)%v+A(N+j)/2.DO)
  if(j.EQ.1) then
    z_aux = arm(0)%z+dt*v_0/2.DO
    B(N+1) = dt*dv_1dt(z_aux, arm(1)%z+A(1)/2.DO, arm(2)%z+A(2)/2.DO, arm(3)%z+A(3)/2.DO, &
    arm(0)%v, arm(1)%v+A(N+1)/2.DO, arm(2)%v+A(N+2)/2.DO, arm(0)%xi, Pl'r_0**2*(z_aux-z_0), arm(2)%xi,
    arm(3)%xi)
  else if(j.EQ.2) then
    z_aux = arm(0)%z+dt*v_0/2.DO
    B(N+2) = dt*dv_2dt(arm(1)%z+A(1)/2.DO, arm(2)%z+A(2)/2.DO, arm(3)%z+A(3)/2.DO, arm(4)%z+A(4)/2.DO,
    &
    arm(1)%v+A(N+1)/2.DO, arm(2)%v+A(N+2)/2.DO, arm(3)%v+A(N+3)/2.DO, Pl'r_0**2*(z_aux-z_0), arm(2)%xi,
    arm(3)%xi, arm(4)%xi)
  else if(j.EQ.N-1) then
    B(2*N-1) = dt*dv_mdt(arm(N-3)%z+A(N-3)/2.DO, arm(N-2)%z+A(N-2)/2.DO, arm(N-1)%z+A(N-1)/2.DO,
    arm(N)%z+A(N)/2.DO, &
    arm(N-2)%v+A(2*N-2)/2.DO, arm(N-1)%v+A(2*N-1)/2.DO, arm(N)%v+A(2*N)/2.DO, arm(N-2)%xi, arm(N-1)%xi,
    arm(N)%xi)
  else if(j.EQ.N) then
    B(2*N) = dt*dv_ndt(arm(N-2)%z+A(N-2)/2.DO, arm(N-1)%z+A(N-1)/2.DO, arm(N)%z+A(N)/2.DO, &
    arm(N-1)%v+A(2*N-1)/2.DO, arm(N)%v+A(2*N)/2.DO, arm(N-1)%xi, arm(N)%xi)
  else
    B(N+j) = dt*dv_jdt(arm(j-2)%z+A(j-2)/2.DO, arm(j-1)%z+A(j-1)/2.DO, arm(j)%z+A(j)/2.DO, &
    arm(j+1)%z+A(j+1)/2.DO, arm(j+2)%z+A(j+2)/2.DO, arm(j-1)%v+A(N+j-1)/2.DO, arm(j)%v+A(N+j)/2.DO, &
    arm(j+1)%v+A(N+j+1)/2.DO, arm(j-1)%xi, arm(j)%xi, arm(j+1)%xi, arm(j+2)%xi)
  endif
enddo
enddo

! cálculo del vector C
do j = 1, N
  C(j) = dt*dz_jdt(arm(j)%v+B(N+j)/2.DO)
  if(j.EQ.1) then
    z_aux = arm(0)%z+dt*v_0/2.DO
    C(N+1) = dt*dv_1dt(z_aux, arm(1)%z+B(1)/2.DO, arm(2)%z+B(2)/2.DO, arm(3)%z+B(3)/2.DO, &
    arm(0)%v, arm(1)%v+B(N+1)/2.DO, arm(2)%v+B(N+2)/2.DO, arm(0)%xi, Pl'r_0**2*(z_aux-z_0), arm(2)%xi,
    arm(3)%xi)
  else if(j.EQ.2) then
    z_aux = arm(0)%z+dt*v_0/2.DO
    C(N+2) = dt*dv_2dt(arm(1)%z+B(1)/2.DO, arm(2)%z+B(2)/2.DO, arm(3)%z+B(3)/2.DO, arm(4)%z+B(4)/2.DO,
    &
    arm(1)%v+B(N+1)/2.DO, arm(2)%v+B(N+2)/2.DO, arm(3)%v+B(N+3)/2.DO, Pl'r_0**2*(z_aux-z_0), arm(2)%xi,
    arm(3)%xi, arm(4)%xi)
  else if(j.EQ.N-1) then
    C(2*N-1) = dt*dv_mdt(arm(N-3)%z+B(N-3)/2.DO, arm(N-2)%z+B(N-2)/2.DO, arm(N-1)%z+B(N-1)/2.DO,
    arm(N)%z+B(N)/2.DO, &

```

```

arm(N-2)%v+B(2*N-2)/2.DO, arm(N-1)%v+B(2*N-1)/2.DO, arm(N)%v+B(2*N)/2.DO, arm(N-2)%xi, arm(N-1)%xi,
arm(N)%xi)
  else if(j.EQ.N) then
    C(2*N) = dt*dv_ndt(arm(N-2)%z+B(N-2)/2.DO, arm(N-1)%z+B(N-1)/2.DO, arm(N)%z+B(N)/2.DO, &
    arm(N-1)%v+B(2*N-1)/2.DO, arm(N)%v+B(2*N)/2.DO, arm(N-1)%xi, arm(N)%xi)
  else
    C(N+j) = dt*dv_jdt(arm(j-2)%z+B(j-2)/2.DO, arm(j-1)%z+B(j-1)/2.DO, arm(j)%z+B(j)/2.DO,
    arm(j+1)%z+B(j+1)/2.DO, &
    arm(j+2)%z+B(j+2)/2.DO, arm(j-1)%v+B(N+j)/2.DO, arm(j)%v+B(N+j)/2.DO, arm(j+1)%v+B(N+j+1)/2.DO, &
    arm(j-1)%xi, arm(j)%xi, arm(j+1)%xi, arm(j+2)%xi)
  endif
enddo

```

! cálculo del vector D

```

do j = 1, N
  D(j) = dt*dz_jdt(arm(j)%v+C(N+j))
  if(j.EQ.1) then
    z_aux = arm(0)%z+dt*v_0
    D(N+1) = dt*dv_1dt(z_aux, arm(1)%z+C(1), arm(2)%z+C(2), arm(3)%z+C(3), &
    arm(0)%v, arm(1)%v+C(N+1), arm(2)%v+C(N+2), arm(0)%xi, PI*r_0**2*(z_aux-z_0), arm(2)%xi, arm(3)%xi)
  else if(j.EQ.2) then
    z_aux = arm(0)%z+dt*v_0
    D(N+2) = dt*dv_2dt(arm(1)%z+C(1), arm(2)%z+C(2), arm(3)%z+C(3), arm(4)%z+C(4), &
    arm(1)%v+C(N+1), arm(2)%v+C(N+2), arm(3)%v+C(N+3), PI*r_0**2*(z_aux-z_0), arm(2)%xi, arm(3)%xi,
    arm(4)%xi)
  else if(j.EQ.N-1) then
    D(2*N-1) = dt*dv_mdt(arm(N-3)%z+C(N-3), arm(N-2)%z+C(N-2), arm(N-1)%z+C(N-1), arm(N)%z+C(N), &
    arm(N-2)%v+C(2*N-2), arm(N-1)%v+C(2*N-1), arm(N)%v+C(2*N), arm(N-2)%xi, arm(N)%xi)
  else if(j.EQ.N) then
    D(2*N) = dt*dv_ndt(arm(N-2)%z+C(N-2), arm(N-1)%z+C(N-1), arm(N)%z+C(N), &
    arm(N-1)%v+C(2*N-1), arm(N)%v+C(2*N), arm(N-1)%xi, arm(N)%xi)
  else
    D(N+j) = dt*dv_jdt(arm(j-2)%z+C(j-2), arm(j-1)%z+C(j-1), arm(j)%z+C(j), arm(j+1)%z+C(j+1),
    arm(j+2)%z+C(j+2), &
    arm(j-1)%v+C(N+j-1), arm(j)%v+C(N+j), arm(j+1)%v+C(N+j+1), arm(j-1)%xi, arm(j)%xi, arm(j+1)%xi,
    arm(j+2)%xi)
  endif
enddo

```

! cálculo de los valores siguientes

```

do j = 1, N
  armp1(j)%z = arm(j)%z+(A(j)+2.DO*B(j)+2.DO*C(j)+D(j))/6.DO
  armp1(j)%v = arm(j)%v+(A(N+j)+2.DO*B(N+j)+2.DO*C(N+j)+D(N+j))/6.DO
enddo

```

! cálculo de los valores siguientes en el primer disco

```

armp1(1)%xi = arm(1)%xi+PI*v_0*dt*r_0**2
armp1(0)%z = arm(0)%z + v_0*dt

```

end subroutine evolucion

```

double precision function radio(xi, z_i, z_j)
implicit none
double precision, parameter :: PI = 3.14159265359DO

```

```

double precision, intent(in) :: xi, z_i, z_j

```

```

radio = sqrt(xi*(PI*(z_j-z_i)))

```

end function radio

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

```

double precision function superficie(z_i, z_k, r_j, r_k)
implicit none
double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0

double precision, intent(in) :: z_i, z_k, r_j, r_k
superficie = PI*(r_j+r_k)*sqrt(((z_k-z_i)**2/4+(r_j-r_k)**2)
end function superficie

double precision function dS_Odz_1(z_1, xi_1p)
implicit none
double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0

double precision :: radio, superficie

double precision :: z_1, xi_1p
double precision :: r_1, S_0
double precision :: r_0

common // r_0

r_1 = radio(xi_1p, 0.D0, z_1)
S_0 = superficie(0.D0, z_1, r_0, r_1)

dS_Odz_1 = PI**2*(r_0+r_1)**2*(z_1+2.D0*r_1*(r_0-r_1)/z_1)/(4.D0*S_0)-r_1*S_0/(2.D0*z_1*(r_0+r_1))
end function dS_Odz_1

double precision function dS_1dz_1(z_1, z_2, xi_1p, xi_2)
implicit none
double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0

double precision :: radio, superficie

double precision, intent(in) :: z_1, z_2, xi_1p, xi_2
double precision :: r_1, r_2, S_1
double precision :: r_0

common // r_0

r_1 = radio(xi_1p, 0.D0, z_1)
r_2 = radio(xi_2, z_1, z_2)
S_1 = superficie(0.D0, z_2, r_1, r_2)

dS_1dz_1 = S_1*(r_2/(z_2-z_1)-r_1/z_1)/(2.D0*(r_1+r_2))-PI**2*(r_1+r_2)**2*(r_1-r_2)*(r_2/(z_2-z_1)+r_1/z_1)/(2.D0*S_1)
end function dS_1dz_1

double precision function dS_1dz_2(z_1, z_2, xi_1p, xi_2)
implicit none
double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0

double precision :: radio, superficie

```

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

```

double precision, intent(in) :: z_1, z_2, xl_1p, xl_2
double precision :: r_1, r_2, S_1
double precision :: r_0

common // r_0

if(xl_1p.GT.0.D0) then
  r_1 = radio(xl_1p, 0.D0, z_1)
else
  r_1 = r_0
endif

r_2 = radio(xl_2, z_1, z_2)

S_1 = superficie(0.D0, z_2, r_1, r_2)

dS_1dz_2 = (PI**2*(r_1+r_2)**2*(z_2*(z_2-z_1)+2.D0*r_2*(r_1-r_2))/S_1-2.D0*r_2*S_1/((r_1+r_2)))/(4.D0*(z_2-z_1))

end function dS_1dz_2

double precision function dS_ndz_n(z_m, z_n, xl_n)
implicit none
double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0

double precision :: radio, superficie

double precision, intent(in) :: z_m, z_n, xl_n
double precision :: r_n, S_n

r_n = radio(xl_n, z_m, z_n)
S_n = superficie(z_m, z_n, r_n, 0.D0)

dS_ndz_n = (PI**2*r_n**2*((z_n-z_m)**2-2.D0*r_n**2)/S_n-2.D0*S_n)/(4.D0*(z_n-z_m))

end function dS_ndz_n

double precision function dS_kdz_j(z_j, z_k, z_l, xl_k, xl_j)
implicit none
double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0

double precision :: radio, superficie

double precision, intent(in) :: z_j, z_k, z_l, xl_k, xl_j
double precision :: r_k, r_l, S_k

r_k = radio(xl_k, z_j, z_k)
r_l = radio(xl_j, z_k, z_l)

S_k = superficie(z_j, z_l, r_k, r_l)

dS_kdz_j = (PI**2*(r_k+r_l)**2*(2.D0*r_k*(r_k-r_l)-(z_j-z_l)*(z_l-z_k))/S_k+2.D0*S_k*r_k/(r_k+r_l))/(4.D0*(z_k-z_j))

end function dS_kdz_j

double precision function dS_jdz_j(z_l, z_j, z_k, xl_j, xl_k)
implicit none

```



```

double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0
double precision :: radio, superficie
double precision, intent(in) :: z_j, z_j, z_k, xi_j, xi_k
double precision :: r_j, r_k, S_j

r_j = radio(xi_j, z_j, z_j)
r_k = radio(xi_k, z_j, z_k)

S_j = superficie(z_j, z_k, r_j, r_k)

dS_jdz_j = S_j*(r_k/(z_k-z_j)-r_j/(z_j-z_i))/(2.D0*(r_j+r_k))-PI**2*(r_j+r_k)**2*(r_j-r_k)*(r_k/(z_k-z_j)+r_j/(z_j-
z_i))/(2.D0*S_j)
end function dS_jdz_j

double precision function dS_jdz_j(z_h, z_j, z_j, xi_j, xi_j)
implicit none
double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0

double precision :: radio, superficie
double precision, intent(in) :: z_h, z_j, z_j, xi_j, xi_j
double precision :: r_j, r_j, S_j

r_j = radio(xi_j, z_h, z_j)
r_j = radio(xi_j, z_j, z_j)

S_j = superficie(z_h, z_j, r_j, r_j)

dS_jdz_j = (PI**2*(r_j+r_j)**2*((z_j-z_h)*(z_j-z_j)-2.D0*r_j*(r_j-r_j))/S_j-2.D0*S_j*r_j/(r_j+r_j))/(4.D0*(z_j-z_j))
end function dS_jdz_j

double precision function dS_ndz_m(z_m, z_n, xi_n)
implicit none
double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0

double precision :: radio, superficie
double precision, intent(in) :: z_m, z_n, xi_n
double precision :: r_n, S_n

r_n = radio(xi_n, z_m, z_n)

S_n = superficie(z_m, z_n, r_n, 0.D0)

dS_ndz_m = (PI**2*r_n**2*(2.D0*r_n**2-(z_n-z_m)**2)/S_n+2.D0*S_n)/(4.D0*(z_n-z_m))
end function dS_ndz_m

double precision function dU_gdz_j(xi_j)
implicit none

double precision, intent(in) :: xi_j

dU_gdz_j = -xi_j

```

```

end function dU_gdz_j

double precision function dU_sigdz_1(z_1, z_2, z_3, xi_1p, xi_2, xi_3)
implicit none
double precision :: dS_0dz_1, dS_1dz_1, dS_kdz_j
double precision, intent(in) :: z_1, z_2, z_3, xi_1p, xi_2, xi_3
dU_sigdz_1 = dS_0dz_1(z_1, xi_1p) + dS_1dz_1(z_1, z_2, xi_1p, xi_2) + dS_kdz_j(z_1, z_2, z_3, xi_2, xi_3)
end function dU_sigdz_1

double precision function dU_sigdz_2(z_1, z_2, z_3, z_4, xi_1p, xi_2, xi_3, xi_4)
implicit none
double precision :: dS_1dz_2, dS_jdz_j, dS_kdz_j
double precision, intent(in) :: z_1, z_2, z_3, z_4, xi_1p, xi_2, xi_3, xi_4
dU_sigdz_2 = dS_kdz_j(z_2, z_3, z_4, xi_3, xi_4) + dS_jdz_j(z_1, z_2, z_3, xi_2, xi_3) + dS_1dz_2(z_1, z_2,
xi_1p, xi_2)
end function dU_sigdz_2

double precision function dU_sigdz_j(z_h, z_i, z_j, z_k, z_l, xi_l, xi_j, xi_k, xi_l)
implicit none
double precision :: dS_ldz_j, dS_jdz_j, dS_kdz_j
double precision, intent(in) :: z_h, z_i, z_j, z_k, z_l, xi_l, xi_j, xi_k, xi_l
dU_sigdz_j = dS_kdz_j(z_j, z_k, z_l, xi_k, xi_l) + dS_jdz_j(z_i, z_j, z_k, xi_j, xi_k) + dS_ldz_j(z_h, z_j, z_l, xi_l)
end function dU_sigdz_j

double precision function dU_sigdz_m(z_k, z_l, z_m, z_n, xi_l, xi_m, xi_n)
implicit none
double precision :: dS_ldz_j, dS_jdz_j, dS_ndz_m
double precision, intent(in) :: z_k, z_l, z_m, z_n, xi_l, xi_m, xi_n
dU_sigdz_m = dS_ndz_m(z_m, z_n, xi_n) + dS_jdz_j(z_l, z_m, z_n, xi_m, xi_n) + dS_ldz_j(z_k, z_l, z_m, xi_l,
xi_m)
end function dU_sigdz_m

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```

double precision function dU_sigdz_n(z_j, z_m, z_n, xl_m, xl_n)
implicit none

double precision :: dS_ndz_n, dS_idz_j

double precision, intent(in) :: z_l, z_m, z_n, xl_m, xl_n
dU_sigdz_n = dS_ndz_n(z_m, z_n, xl_n) + dS_idz_j(z_l, z_m, z_n, xl_m, xl_n)
end function dU_sigdz_n

double precision function dRdv_j(z_l, z_j, z_k, v_l, v_j, v_k, xl_j, xl_k)
implicit none

double precision, intent(in) :: z_l, z_j, z_k, v_l, v_j, v_k, xl_j, xl_k
double precision :: r_0, z_0, v_0, etha

common // r_0, z_0, v_0, etha

dRdv_j = -3.D0*etha*((v_j-v_l)*xl_j/(z_j-z_l)**2-(v_k-v_l)*xl_k/(z_k-z_l)**2)
end function dRdv_j

double precision function dRdv_n(z_m, z_n, v_m, v_n, xl_n)
implicit none

double precision, intent(in) :: z_m, z_n, v_m, v_n, xl_n
double precision :: r_0, z_0, v_0, etha

common // r_0, z_0, v_0, etha

dRdv_n = -3.D0*etha*xl_n*(v_n-v_m)/(z_n-z_m)**2
end function dRdv_n

double precision function dz_jdt(v_j)
implicit none

double precision, intent(in) :: v_j

dz_jdt = v_j

end function dz_jdt

double precision function dv_1dt(z_0, z_1, z_2, z_3, v_0, v_1, v_2, xl_1, xl_1p, xl_2, xl_3)
implicit none

double precision :: dU_gdz_j, dU_sigdz_1, dRdv_j, dU_gamdz_1

double precision, intent(in) :: z_0, z_1, z_2, z_3, v_0, v_1, v_2, xl_1, xl_1p, xl_2, xl_3

if(xl_1p.GT.1.D0) then
dv_1dt = (-dU_gdz_j(xl_1p)-dU_sigdz_1(z_1, z_2, z_3, xl_1p, xl_2, xl_3)+dRdv_j(0.D0, z_1, z_2, v_0, v_1,
v_2, xl_1p, xl_2))/xl_1p
else
dv_1dt = 0.D0
endif
end function dv_1dt

```



```
double precision function dv_2dt(z_1, z_2, z_3, z_4, v_1, v_2, v_3, xi_1p, xi_2, xi_3, xi_4)
implicit none
```

```
double precision :: dU_gdz_j, dU_sigdz_2, dRdv_j, dU_gamdz_j
```

```
double precision, intent(in) :: z_1, z_2, z_3, z_4, v_1, v_2, v_3, xi_1p, xi_2, xi_3, xi_4
```

```
dv_2dt = (-dU_gdz_j(xi_2)-dU_sigdz_2(z_1, z_2, z_3, z_4, xi_1p, xi_2, xi_3, xi_4)+ &
dRdv_j(z_1, z_2, z_3, v_1, v_2, v_3, xi_2, xi_3))/xi_2
end function dv_2dt
```

```
double precision function dv_jdt(z_h, z_l, z_j, z_k, z_l, v_l, v_j, v_k, xi_l, xi_j, xi_k, xi_l)
implicit none
```

```
double precision :: dU_gdz_j, dU_sigdz_j, dRdv_j, dU_gamdz_j
```

```
double precision, intent(in) :: z_h, z_l, z_j, z_k, z_l, v_l, v_j, v_k, xi_l, xi_j, xi_k, xi_l
```

```
dv_jdt = (-dU_gdz_j(xi_j)-dU_sigdz_j(z_h, z_l, z_j, z_k, z_l, xi_l, xi_j, xi_k, xi_l)+ &
dRdv_j(z_l, z_j, z_k, v_l, v_j, v_k, xi_j, xi_k))/xi_j
end function dv_jdt
```

```
double precision function dv_mdt(z_k, z_l, z_m, z_n, v_l, v_m, v_n, xi_l, xi_m, xi_n)
implicit none
```

```
double precision :: dU_gdz_j, dU_sigdz_m, dRdv_j, dU_gamdz_j, dU_gamdz_m
```

```
double precision, intent(in) :: z_k, z_l, z_m, z_n, v_l, v_m, v_n, xi_l, xi_m, xi_n
```

```
dv_mdt = (-dU_gdz_j(xi_m)-dU_sigdz_m(z_k, z_l, z_m, z_n, xi_l, xi_m, xi_n)+dRdv_j(z_l, z_m, z_n, v_l, v_m,
v_n, xi_m, xi_n))/xi_m
end function dv_mdt
```

```
double precision function dv_ndt(z_l, z_m, z_n, v_m, v_n, xi_m, xi_n)
implicit none
```

```
double precision :: dU_gdz_j, dU_sigdz_n, dRdv_n, dU_gamdz_n
```

```
double precision, intent(in) :: z_l, z_m, z_n, v_m, v_n, xi_m, xi_n
```

```
dv_ndt = (-dU_gdz_j(xi_n)-dU_sigdz_n(z_l, z_m, z_n, xi_m, xi_n)+dRdv_n(z_m, z_n, v_m, v_n, xi_n))/xi_n
end function dv_ndt
```

```
subroutine presentar(file, N, t, arreglo, grabacion, despliegue)
```

```
use types
```

```
implicit none
```

```
double precision :: radio
```

```
integer, intent(in) :: file, N
```

```
double precision, intent(in) :: t
```

```
type(registro), dimension(0:4800), intent(in) :: arreglo
```

```
logical, intent(in) :: grabacion, despliegue
```

```
double precision :: r_j
```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

```

double precision :: r_0, z_0, v_0
integer :: j

common // r_0, z_0, v_0

10 format(' ', E11.4, ' ', E11.4)

do j = 0, N
  if(j.EQ.0) then
    if(grabacion) write(file, 10) r_0, 0.DO
    r_j = r_0
  else if(j.EQ.1) then
    if(arreglo(1)%xi.GT.0.DO) then
      r_j = radio(arreglo(j)%xi, 0.DO, arreglo(j)%z)
    else
      r_j = r_0
    endif
  else
    if(grabacion) write(file, 10) r_j, arreglo(1)%z/2.DO
  else
    r_j = radio(arreglo(j)%xi, arreglo(j-1)%z, arreglo(j)%z)
    if(grabacion) write(file, 10) r_j, (arreglo(j)%z+arreglo(j-1)%z)/2.DO
  endif
endif
if(grabacion) write(file, 10) 0.DO, arreglo(N)%z
endsubroutine presentar

double precision function v_Dt(t, v_min, v_max, T_0)
implicit none

double precision, parameter :: PI = 3.14159265359DO

double precision, intent(in) :: t, v_min, v_max, T_0

v_Dt = 5.D-1*((v_max+v_min)+(v_max-v_min)*cos(2.DO*PI*t/T_0))

end function v_Dt

subroutine forma_inicial(arreglo, N, theta_i, z_i, r_j, h)
! determinación de la forma inicial usando
! un algoritmo runge-kutta de cuarto orden
! autor: oscar martínez alvarado
! fecha: 27 de mayo de 2002

use types

! derivadas con respecto a s
! (funciones)
double precision :: theta_dot
double precision :: z_dot
double precision :: r_dot

type(registro), dimension(0:4800), intent(out) :: arreglo
integer, intent(out) :: N
double precision, intent(in) :: theta_i, z_i, r_j, h

type(registro), dimension(0:4800) :: invarr

double precision :: r_j, r_k, theta_k, theta_l
double precision :: r_0, z_0, v_0

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```

double precision :: at, bt, ct, dt
double precision :: az, bz, cz, dz
double precision :: ar, br, cr, dr

integer :: i, j, k l Indices

common // r_0, z_0, v_0

invarr(1)%z = z_0
invarr(1)%xi = 0.00
invarr(1)%v = v_0

r_j = r_l
theta_k = theta_l

! método de runge-kutta de cuarto orden

j = 1
do
  at = h*theta_dot(theta_k, invarr(j)%z, r_j)
  az = h*z_dot(theta_k)
  ar = h*r_dot(theta_k)

  bt = h*theta_dot(theta_k+at/2.0, invarr(j)%z+az/2.0, r_j+ar/2.0)
  bz = h*z_dot(theta_k+at/2.0)
  br = h*r_dot(theta_k+at/2.0)

  ct = h*theta_dot(theta_k+bt/2.0, invarr(j)%z+bz/2.0, r_j+br/2.0)
  cz = h*z_dot(theta_k+bt/2.0)
  cr = h*r_dot(theta_k+bt/2.0)

  dt = h*theta_dot(theta_k+ct, invarr(j)%z+cz, r_j+cr)
  dz = h*z_dot(theta_k+ct)
  dr = h*r_dot(theta_k+ct)

  theta_l = theta_k + (at + 2.0*bt + 2.0*ct + dt)/6.00
  invarr(j+1)%z = invarr(j)%z + (az + 2.0*bz + 2.0*cz + dz)/6.00
  r_k = r_j + (ar + 2.0*br + 2.0*cr + dr)/6.00
  invarr(j+1)%v = v_0

! cálculo del volumen
invarr(j)%xi = pi*(invarr(j)%z-invarr(j+1)%z)*(r_j**2+r_k**2)/2.0

theta_k = theta_l
r_j = r_k
j = j+1

if(r_k.GT.r_0) then
  exit
endif
enddo

write(10,*) '%e_r = ', 100.00*(r_k/r_0-1.00)

N = j
do j = 1, N
  arreglo(j) = invarr(N-j+1)
  arreglo(j)%z = arreglo(j)%z-invarr(N)%z
enddo

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```

end subroutine forma_inicial

double precision function theta_dot(theta, z, r)
! temporal derivative of theta
! autor: oscar martinez alvarado
! fecha: 12 de mayo de 2002

implicit none

double precision, intent(in) :: theta
double precision, intent(in) :: z
double precision, intent(in) :: r

theta_dot = cos(theta)/r - z

end function theta_dot

double precision function z_dot(theta)
! temporal derivative of z
! autor: oscar martinez alvarado
! fecha: 12 de mayo de 2002

implicit none

double precision, intent(in) :: theta

z_dot = -cos(theta)

end function z_dot

double precision function r_dot(theta)
! temporal derivative of r
! autor: oscar martinez alvarado
! fecha: 12 de mayo de 2002

implicit none

double precision, intent(in) :: theta

r_dot = sin(theta)

end function r_dot

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A.2 Modelo dinámico de baja dimensión con flujo variable

El siguiente es el código fuente del programa usado para obtener los resultados del modelo lagrangiano con ε variable. En este mismo código se calculan las series de tiempo, el exponente de Lyapunov máximo calculado a través de la expresión

$$h_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{|y_n|}{|y_0|} \right)$$

donde y_0 es un desplazamiento infinitesimal arbitrario tangente a la condición inicial x_0 , y y_n representa su evolución, y la fracción del tiempo en que el sistema es aproximadamente periódico con periodo cuatro,

$$f_{ap4}(\omega/\omega_1, K) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} t_{ap4}(t, \omega/\omega_1, K) \quad \dots (22)$$

donde t es el tiempo total y t_{ap4} es el tiempo durante el cual la órbita se comporta en forma aproximadamente periódica con periodo cuatro.

```

program modelo_dinamico
! Programa de simulación de un grifo goteante con
! flujo armónico basado en un modelo dinámico de baja dimensión
! (Coulet et al., 2000).

! AUTOR: Oscar Martínez Alvarado
! FECHA: Diciembre 2002

implicit none
double precision, parameter :: PI = 3.14159265359D0

double precision :: next_T

double precision :: A, B, omega, lambda
double precision :: e_0, K, tau, ny
double precision :: x_0, z_0
double precision :: x_pr0, z_pr0, x_pr1, z_pr1
double precision :: T_pr, time_pr0, time_pr1, time_s, frac_s
double precision :: delta
double precision, dimension(40000) :: T, theta
double precision, dimension(0:40000) :: x, z, time
double precision :: dx, dz, dtime
double precision :: dist_0, dist_1, r
double precision :: suma, lyap_e
integer :: i, l, m, lmax, mmax, N
integer :: ierror

10 format(' ', E15.8, ' ', E15.8, ' ', E15.8, ' ', E15.8)
20 format(' ', i6, ' ', E15.8, ' ', E15.8, ' ', E15.8, ' ', E15.8, ' ', E15.8)

open(UNIT=10, FILE='lyaps_18.dat', STATUS='REPLACE', ACTION='WRITE', IOSTAT=ierror)

e_0 = 1.2945D-2
omega = 4.24D0

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

```

lambda = 3,4D-1
x_0 = 8.D-1
z_0 = 0.D0

dx = 1.D-5
dz = 1.D-5
dtime = 1.D-5

A = 6.D-1
B = 1.D0

delta = 4.5D-2
N = 25000

K = 3.5D-5
ny = 4.0035D0/5.0616D+1
tau = 1.D0/ny

x(0) = x_0
z(0) = z_0

x_pr0 = x_0 + dx
z_pr0 = z_0 + dz

time(0) = 0.D0
time_pr0 = time(0) + dtime
time_s = 0.D0

dist_0 = dsqrt(dx**2+dz**2+dtime**2)
suma = 0.D0

do i = 1, N
  T(i) = next_T(z(i-1), B, time(i-1), e_0, K, tau)
  x(i) = (x(i-1)*dcos(omega*T(i))-A*dsin(omega*T(i)))**exp(-lambda*T(i))
  z(i) = -(x(i-1)*dsin(omega*T(i))+A*dcos(omega*T(i)))**exp(-lambda*T(i))

  T_pr = next_T(z_pr0, B, time_pr0, e_0, K, tau)
  x_pr1 = (x_pr0*dcos(omega*T_pr)-A*dsin(omega*T_pr))**exp(-lambda*T_pr)
  z_pr1 = -(x_pr0*dsin(omega*T_pr)+A*dcos(omega*T_pr))**exp(-lambda*T_pr)

  time(i) = time(i-1) + T(i)
  time_pr1 = time_pr0 + T_pr

  theta(i) = time(i)/tau - floor(time(i)/tau)

  dist_1 = dsqrt((x(i)-x_pr1)**2+(z(i)-z_pr1)**2+(time(i)-time_pr1)**2)

  r = dist_0/dist_1

  suma = suma + dlog(1/r)

  x_pr0 = r*x_pr1 + (1.D0-r)*x(i)
  z_pr0 = r*z_pr1 + (1.D0-r)*z(i)
  time_pr0 = r*time_pr1 + (1.D0-r)*time(i)

  if(.GT.4)then
    if(dabs(T(i)-T(i-4)).LT.delta) then
time_s = time_s + T(i)
    endif
  endif
enddo

```

TESTS CON
 FALLA DE ORIGEN

```

lyap_e = suma/N

write(10,10) tau, K, time_s/time(N), lyap_e
write(10,20) (i, x(i), z(i), theta(i), T(i), time(i)), i = 1, N)
close(10)
end program modelo_dinamico

double precision function next_T(Z_0, B, t_0, e_0, K, tau)
implicit none

double precision :: avance
double precision, intent(in) :: Z_0, B, t_0, e_0, K, tau

double precision :: h
double precision :: err_max, del_0, S
double precision :: t_1, t_2
double precision :: Z, t

h = (B - Z_0)/150.D0
del_0 = 1.D-5
S = 8.D-1
Z = Z_0
t = t_0

do while(Z.LT.B)
    err_max = 0.D0
    t_1 = avance(Z, t, h, e_0, K, tau)
    t_2 = avance(Z, t, 2.D0*h, e_0, K, tau)
    if(dabs((t_1-t_2)/t_1).GT.err_max) then
        err_max = dabs((t_1-t_2)/t_1)
    endif

    if(err_max.GT.0.0) then
        if(err_max.GT.del_0) then
            h = S*h*(del_0/err_max)**0.25
        else
            h = S*h*(del_0/err_max)**0.20
        endif
    endif

    if(Z+h.GT.B) then
        h = B-Z
    endif

    t = avance(Z, t, h, e_0, K, tau)
    Z = Z + h
enddo

next_T = t-t_0
end function next_T

double precision function avance(Z, t, h, e_0, K, tau)
implicit none

double precision :: dt_dz

double precision, intent(in):: Z, t, h, e_0, K, tau
double precision :: A, B, C, D

```

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

```

A = h*dt_dz(Z, t, e_0, K, tau)
B = h*dt_dz(Z+h/2.DO, t+A/2.DO, e_0, K, tau)
C = h*dt_dz(Z+h/2.DO, t+B/2.DO, e_0, K, tau)
D = h*dt_dz(Z+h, t+C, e_0, K, tau)

```

```

avance = t + (A + 2.DO*B + 2.DO*C + D)/6.DO

```

```

end function avance

```

```

double precision function dt_dz(Z, t, e_0, K, tau)
implicit none

```

```

double precision, parameter :: PI = 3.14159265359DO

```

```

double precision, intent(in):: Z, t, e_0, K, tau

```

```

dt_dz = 1/(e_0+K*dcos(2.DO*PI*t/tau)+Z**2)

```

```

end function dt_dz

```

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Referencias

- Acharya, N., M. Sen & E. Ramos: 2003, Periodicity and bifurcations in capillary tube boiling with a concentric heating wire, *Int. J. Heat Mass Transfer* **46** (8), 1425
- Ambravaneswaran, B., S.D. Phillips & O.A. Basaran: 2000, Theoretical analysis of a dripping faucet, *Phys. Rev. Lett.* **85** (25), 5332
- Braiman Y. & I. Goldhirsch: 1991, Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbations, *Phys. Rev. Lett.* **66** (20), 2545
- Chacon, R.: 2001, Maintenance and suppression of chaos by weak harmonic perturbations: a unified view, *Phys. Rev. Lett.* **86** (9), 1737
- Collier, J.G.: 1972, *Convective boiling and condensation*, McGraw-Hill, Nueva York
- Cordonet A., R. Lima & E. Ramos: 2001, Two models for the dynamics of boiling in a short capillary tube, *Chaos* **11** (2), 344
- Coulet, P., L. Mahadevan & C. Riera: 2000, Return map for the chaotic dripping faucet, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* No.139
- Benettin, G., L. Galgani, A. Giorgilli & J.M. Strelcyn: 1980, Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: a method for computing all of them, *Meccanica* **15**, 21
- D'Innocenzo A. & L. Renna: 1997, Modeling leaky faucet dynamics, *Phys. Rev. E* **55** (6), 6776
- Drazin, P.G.: 1997, *Nonlinear systems*, Cambridge Texts in Appl. Math. **10**, Cambridge University Press, Nueva York
- Eggers, J.: 1997, Nonlinear dynamics and breakup of free-surface flows, *Rev. Mod. Phys.* **69** (3), 865
- Eggers, J. & T.F. Dupont: 1994, Drop formation in a one-dimensional approximation of the navier-Stokes equation, *J. Fluid Mech.* **262**, 205
- Fronzoni, L., M. Giocondo & M. Pettini: 1991, Experimental evidence of suppression of chaos by resonant parametric perturbations, *Phys. Rev. A* **43** (12), 6483
- Fuchikami N., S. Ishioka & K. Kiyono: 1999, Simulation of a dripping faucet, *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** (4), 1185
- García, J.M., G. Hernández-Cruz, E. Ramos & R. Rechtman: 2001, Visualization of capillary boiling, *Exp. Fluids* **30**, 359

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- Gonçalves W.M., R.D. Pinto, J.C. Sartorelli & M.J. de Oliveira: 1998, Inferring statistical complexity in the dripping faucet experiment, *Physica A* 257, 385
- Guckenheimer, J. & P.J. Holmes: 1986, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields*, 2ª edn. *Appl. Math. Sci.* 42, Springer-Verlag, Nueva York
- Ilarraza-Lomel A., C.M. Arizmendi & A.L. Salas-Brito: 1999, Controlling a leaky tap, *Phys. Lett. A* 259, 115
- Kantz, H.: 2003, Artículo en preparación.
- Katsuyama T. & K. Nagata: 1999, Behavior of the dripping faucet over a wide range of the flow rate, *J. Phys. Soc. Jpn.* 68 (2), 396
- Kiyono, K. & N. Fuchikami: 1999, Dripping faucet dynamics clarified by an improved mass-spring model, *J. Phys. Soc. Jpn.* 68 (10), 3259
- Kiyono, K. & N. Fuchikami: 2000, *Taming a chaotic dripping faucet via a global bifurcation* (arXiv:nlin.CD/0012059)
- Kiyono, K., T. Katsuyama, T. Masunaga & N. Fuchikami: 2002, *Picture of the low-dimensional structure in chaotic dripping faucets* (arXiv:nlin.CD/0210003)
- Landau, L.D. & E.M. Lifshitz: 1991, *Mecánica de Fluidos, Curso de Física Teórica 6*, Reverté, España
- Lichtenberg, A.J. & M.A. Lieberman: 1983, *Regular and Stochastic Motion*, *Appl. Math. Sci.* 38, Springer-Verlag, Nueva York
- Lima R. & M. Pettini: 1990, Suppression of chaos by resonant parametric perturbations, *Phys. Rev. A* 41 (2), 726
- Lohse, D.: 2003, Bubble puzzles, *Physics Today* 56 (2), 36
- Martien P., S.C. Pope, P.L.Scott & R.S. Shaw: 1985, The chaotic behavior of the leaky faucet, *Phys. Lett. A* 110, 399
- Mirus K.A. & J.C. Sprott: 1999, Controlling chaos in low- and high-dimensional systems with periodic parametric perturbations, *Phys. Rev. E* 59 (5), 5313
- Ott, E.: 2000, *Chaos in dynamical systems*, Cambridge University Press, USA
- Ott, E., C. Grebogi & J. Yorke: 1990, Controlling chaos, *Phys. Rev. Lett.* 64 (11), 1196
- Peregine, D.H., G. Shoken & A. Symon: 1990, The bifurcation of liquid bridges, *J. Fluid Mech.* 212, 25
- Pomeau, Y & P. Manneville: 1980, Intermitent transition to turbulence in dissipative dynamical systems, *Comm. Math. Phys.* 74, 189
- Press, W.H., S.A. Teukolski, W.T. Vetterling & B.P. Flannery: 1992, *Numerical Recipes in C*, 2ª ed., Cambridge University Press
- Pinto, R.D., W.M. Gonçalves, J.C. Sartorelli & M.J. de Oliveira: 1995, Hopf bifurcation in a leaky faucet experiment, *Phys. Rev. E* 52 (6), 6896
- Qu, Z., G. Hu, G. Yang & G. Qin: 1995, Phase effects in taming nonautonomous chaos by weak harmonic perturbations, *Phys. Rev. Lett.* 74 (10), 1736

- Ramos, E., P. Parmananda, G. Hernández-Cruz & M. Sen: 1997, Dynamics of boiling from a short capillary tube, *Exp. Heat Transfer* **10**, 273
- Riera, C.: 2000, *Structures localisées et dynamique du goutte-à-goutte*, Tesis doctoral, Université de Nice-Sophia Antipolis
- Rössler, J., M. Kiwi, B. Hess & M. Markus: 1989, Modulated nonlinear processes and a novel mechanism to induce chaos, *Phys. Rev. A* **39** (11), 5954
- Rössler, J., E. Lazo & M. Kiwi: 1991, Effect of a resonant periodic perturbation on nonlinear processes, en Cordero P. & B. Nachtergaele (eds.), *Nonlinear phenomena in fluids, solids and other complex systems*, Elsevier Science Publishers
- Sánchez-Ortiz, G.I. & A.L. Salas-Brito: 1995, Strange attractors in a relaxation oscillator model for the dripping water faucet, *Phys. Lett. A* **203**, 300
- Sartorelli, J.C., W.M. Gonçalves & R. Pinto: 1994, Crisis and intermittence in a leaky-faucet experiment, *Phys. Rev. E* **49** (5)
- Shaw, R.: 1984, *The Dripping Faucet as a Model Chaotic System*, Aerial Press, Santa Cruz, CA
- Shoji, M. & Y. Takagi: 2001, Bubbling features from a single artificial cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer* **44**, 2763
- Tamura, T., N. Inaba & J. Miyamichi: 1999, Mechanism for taming chaos by weak harmonic perturbations, *Phys. Rev. Lett.* **83** (19), 3824
- Tereshko, V. & E. Shechkinova: 1998, Resonant control of the Rössler system, *Phys. Rev. E* **58** (1), 423
- Tufaile A., R.D. Pinto, W.M. Gonçalves & J.C. Sartorelli: 1999, Simulations in a dripping faucet experiment *Phys. Lett. A* **255**, 58
- Wiggins, S: 1990, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Text in Appl. Math. **2**, Springer-Verlag, Nueva York
- Zhang, L. & M. Shoji: 2003, Nucleation site interaction in pool boiling on the artificial surface, *Int. J. Heat Mass Transfer* **46**, 513

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN