

00324
30



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**ANALISIS DE ORBITAS PERIODICAS EN UNA FAMILIA DE
FUNCIONES CONFORMES POR PEDAZOS.**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
JUAN PABLO ROMERO MENDEZ



DIRECTOR DE TESIS: M. EN C. MANUEL CRUZ LOPEZ

2003



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Juan Pablo Romero Méndez

FECHA: 12 - JUNIO - 03

FIRMA: Juan Pablo Romero Méndez

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Análisis de órbitas periódicas en una familia de funciones conformes por pedazos

realizado por Juan Pablo Romero Méndez

con número de cuenta 9777048-2 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

M. en C. Manuel Cruz López

Propietario

Dr. Adolfo Guillot Santiago

Propietario

Dr. Javier Páez Cárdenas

Suplente

M. en C. Ana Irene Ramírez Galarza

Suplente

Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco

Consejo Departamental de

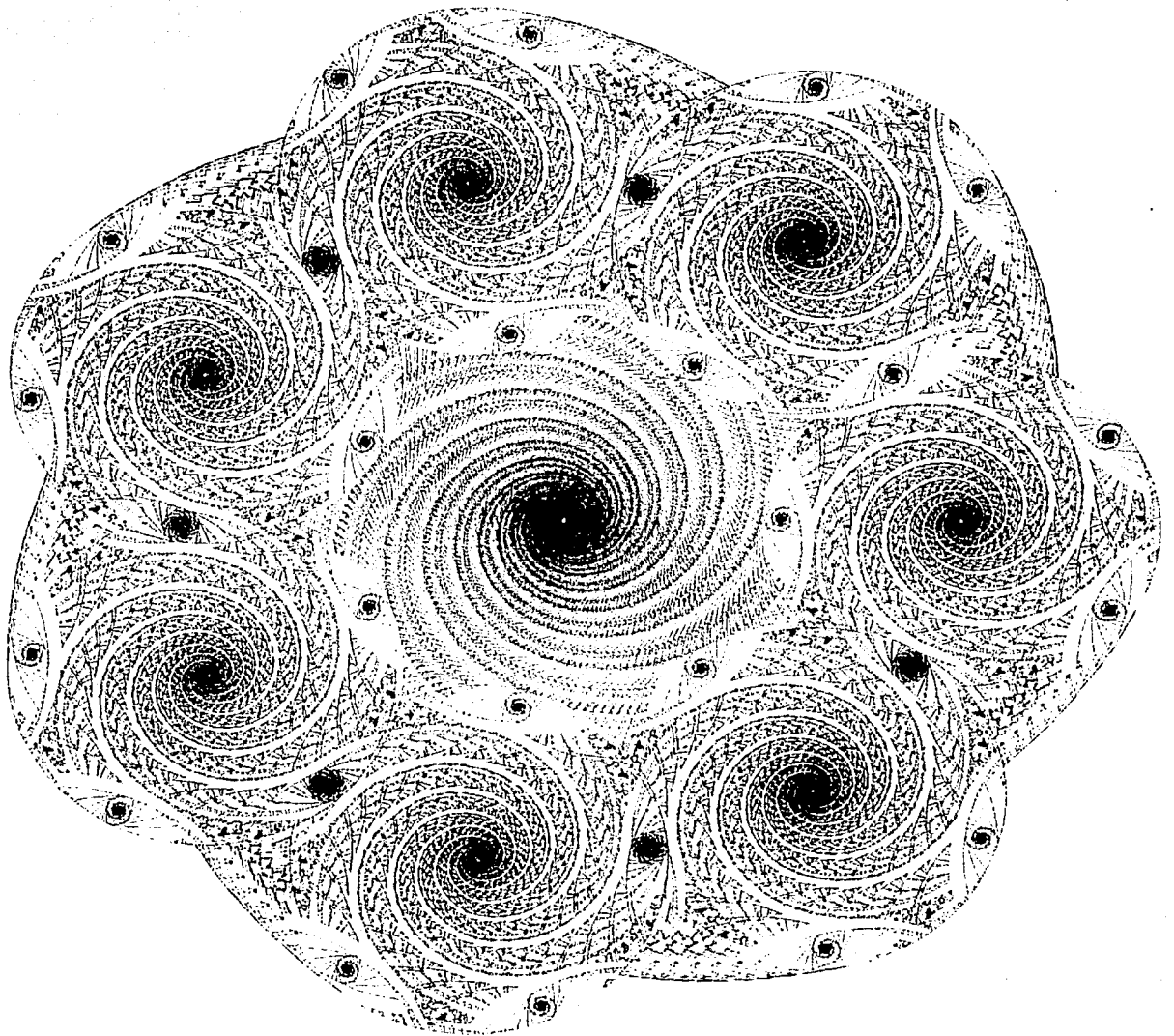
Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

CONSEJO DEPARTAMENTAL

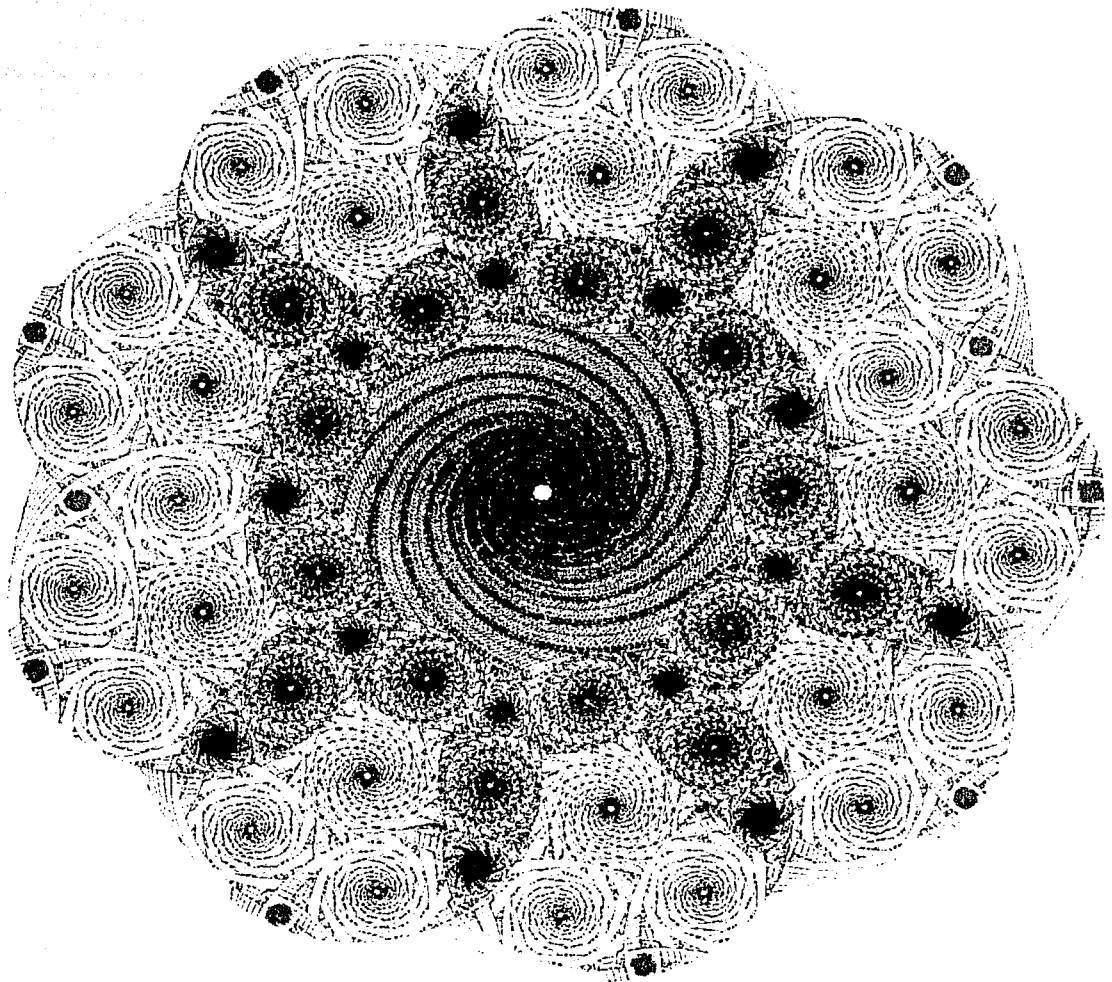
MATEMÁTICAS

2



2-1

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Prólogo

Una *isometría por pedazos* es una función definida por partes tal que cada una de las funciones constituyentes es una isometría en su dominio de definición.

El objetivo al estudiar este tipo de sistemas es determinar el comportamiento a largo plazo de las órbitas de puntos. El análisis aquí está marcado por el hecho de que en general la función no es ni siquiera continua en cierta región, mucho menos diferenciable u holomorfa.

Los sistemas de isometrías por pedazos surgen en contextos tan variados como el estudio de ciertas ecuaciones diferenciales polinomiales, teoría de foliaciones, billares matemáticos, e incluso en una rama de la ingeniería eléctrica conocida como teoría de filtros digitales [Goe].

El comportamiento de estos sistemas puede ser bastante complicado y es por ello que en este trabajo hemos adoptado un enfoque simplificador, el cual consiste en estudiar una familia de funciones conformes por pedazos que poseen cierta contracción y parametrizadas por un número ≤ 1 que determina la contracción y tal que cuando el parámetro es 1 entonces tenemos la isometría por pedazos (esto se explica con todo detalle en el capítulo 2).

Una herramienta invaluable en el estudio de los sistemas iterados es la computadora. El primer paso que nos planteamos en la realización de esta tesis consistió en la construcción de un programa que permitiera visualizar el comportamiento nuestro sistema. El resultado es un programa interactivo cuyo código está disponible gratuitamente bajo la licencia GPL. Por el momento no tiene una página oficial, pero lo podremos distribuir con gusto a cualquier persona interesada.

La estructura de la tesis es la siguiente: en el capítulo 1 se analizan brevemente distintos tipos de sistemas dinámicos; las pruebas y la descripción detallada se dejan a la bibliografía. En el capítulo 2 se introduce propiamente la familia de funciones sobre la que hemos trabajado. Aquí hay una sección de ejemplos que nos muestra el tipo de dinámica que podemos encontrar en esta familia de funciones. También se introduce la partición generada por el itinerario, que es la principal herramienta usada para calcular los puntos periódicos. El capítulo 3 empieza con una breve descripción de cierta clase de palabras, que dan lugar a las órbitas periódicas más simples, en un cierto sentido. En la segunda sección de este capítulo se hace un análisis más detallado de las órbitas periódicas que surgen al iterar nuestra función, y se proponen 2 algoritmos para calcular de manera exacta los puntos periódicos bajo ciertas condiciones. En la última sección se hacen algunas observaciones finales y se lanzan algunas conjeturas.

Finalmente en el apéndice se hace una breve descripción del programa de computadora, se comenta algo sobre las técnicas que se usaron y se describen los problemas que se presentaron durante la creación del programa.

Juan Pablo Romero Méndez

México, D.F., mayo de 2003

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a Lucy y a Wilson por todo su apoyo a lo largo de estos (muchos) años; también a Rodrigo por haberme soportado y por hacer interesantes las sobremesas domingueras; y a toda la familia por su cariño (incluso a distancia).

Por supuesto debo agradecer a Manuel su paciencia y sus ánimos.

Muchas gracias a Ana Irene, por todo su apoyo y su confianza. A Javier Páez y Oscar Palmas, por ser excelentes profesores. También a Adolfo Guillot por haber aceptado ser sinodal.

Claramente la facultad no sería lo mismo sin los cuates: Omar, Pablo, Monse, Oscar, Alexei, la Vero, la Elsa, Pepe, el Cruz, Pável, Canek, y todos los demás.

A Sol y a Susana por estar ahí siempre.

A Ivette, por tantas cosas...

Lista de símbolos

- \mathbb{N} Los números naturales
- $\mathbb{N}^\infty = \bigcup_{k>0} \mathbb{N}^k$
- \mathbb{Z} Los números enteros
- \mathbb{R} Los números reales
- \mathbb{C} Los complejos
- $\hat{\mathbb{C}}$ La esfera de Riemann, $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
- $\text{Or}(x)$ La órbita del punto x
- $\text{Card}(A)$ La cardinalidad del conjunto A
- Σ_2 El conjunto de todas las secuencias infinitas (unilaterales) de ceros y unos, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.
- D El disco cerrado de radio 1 y con centro en 2, $\overline{B_1(2)}$.
- C La frontera de D , ∂D .
- \mathbb{D} El disco cerrado de radio 1 y centro en el origen.
- $\Omega(F_{\alpha,\beta})$ La partición generada por el itinerario.
- Ω_n La n -ésima partición generada por el itinerario.
- $\Omega|_D$ Los elementos de $\Omega(F_{\alpha,\beta})$ que viven en D .
- ζ_n^k La k -ésima raíz n -ésima raíz de la unidad.
- $\varphi_n = f^n \circ g$
- $\psi_{m_1, \dots, m_k} = \varphi_{m_1} \circ \dots \circ \varphi_{m_k}$
- p_{m_1, \dots, m_k} el punto fijo de ψ_{m_1, \dots, m_k} .

Índice

| | |
|--|-----------|
| Prólogo | 3 |
| Agradecimientos | 4 |
| Lista de símbolos | 5 |
| 1 Conceptos generales | 7 |
| 1.1 Definiciones | 7 |
| 1.2 Ejemplos de sistemas dinámicos | 9 |
| 1.2.1 Dinámica de las transformaciones de Möbius | 9 |
| 1.2.2 Sistemas dinámicos simbólicos | 9 |
| 1.2.3 Dinámica de $f(z) = z^2$ | 12 |
| 1.2.4 Isometrías por pedazos | 14 |
| 2 Una familia de funciones conformes por pedazos en $\hat{\mathbb{C}}$ | 15 |
| 2.1 Ejemplos | 17 |
| 2.2 La partición generada por el itinerario | 19 |
| 2.3 La forma de los itinerarios | 21 |
| 3 Análisis de órbitas periódicas | 23 |
| 3.1 Los puntos fijos de $f^n \circ g$ | 23 |
| 3.2 Órbitas periódicas | 28 |
| 3.2.1 $F_{\alpha, \beta}^n$ es una función definida por partes | 28 |
| 3.2.2 Como encontrar todos los puntos periódicos de $F_{\alpha, \beta}$ | 31 |
| 3.3 Comentarios finales | 33 |
| Apéndice A. El programa de computadora | 34 |
| Bibliografía | 36 |

Capítulo 1

Conceptos generales

En este capítulo se hace una breve mención de algunos sistemas dinámicos que guardan cierta relación con la familia de funciones que se estudia a partir del capítulo 2. No se desarrolla ninguna prueba (en algunos casos se mencionan ciertos argumentos), tan solo se hacen las definiciones apropiadas y se comentan algunos resultados. En algunas partes se refiere al lector interesado a la bibliografía.

1.1 Definiciones

Un sistema dinámico consta de 3 elementos:

1. Un espacio X , llamado *espacio de fase* o *espacio de estados*; que puede ser un espacio topológico, métrico, una variedad, etc.
2. Un conjunto T , que corresponde al "tiempo". Este puede ser \mathbb{Z} o \mathbb{Z}^+ , en cuyo caso el sistema se denomina *de tiempo discreto*; o bien \mathbb{R} o \mathbb{R}^+ y en este caso el sistema se denomina *de tiempo continuo*.
3. Una función $F: X \times T \rightarrow X$, que satisface las condiciones:

$$\text{a) } F(x, 0) = x$$

$$\text{b) } F(x, s+t) = F(F(x, s), t)$$

Si $T = \mathbb{R}$ o \mathbb{R}^+ , F se llama un *flujo*. Se dice que el sistema es *reversible* si F es biyectiva.

Intuitivamente, el espacio de fase corresponde al conjunto de todos los posibles estados en los que se puede encontrar un determinado sistema. La idea es predecir cual será la tendencia a largo plazo del sistema, si conocemos su estado actual y la regla que determina la evolución. Históricamente el estudio de los sistemas dinámicos ha sido motivado por consideraciones prácticas, y se usa (entre otras cosas) como herramienta para modelar la evolución en el tiempo de sistemas físicos. Se han estudiado sistemas como el decaimiento radiactivo, reacciones químicas, crecimiento de poblaciones, etc.

Dado un espacio X y una función $f: X \rightarrow X$ podemos definir el sistema dinámico *generado* por f como la función $F: X \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow X$ definida por $F(x, n) := f^n(x)$.

La *órbita hacia adelante* de un punto $x_0 \in X$ determinada por f es el conjunto $\text{Or}(x_0) := \{f^i(x_0) : \forall i \in \mathbb{Z}^+\}$. Una *preórbita* de x_0 es una secuencia $\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0$ tal que $f(x_{-n-1}) = x_{-n}$ para cada $n \geq 0$. En general, un punto puede no tener ninguna preórbita o puede tener muchas preórbitas. Una *órbita completa* es una secuencia $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ tal que $f(x_i) = x_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}$.

Una órbita es *periódica* si $f^n(x_0) = x_0$ para algún $n > 0$. Al entero más pequeño que cumpla esta condición se le llama el *período* de la órbita. Los puntos periódicos de período 1 se llama *puntos fijos*. A las órbitas periódicas también se les llama *ciclos*.

Una órbita es *eventualmente periódica* si $f^{m+n}(x) = f^m(x)$ para algún $m \geq 0$ y algún $n \geq 0$.

Denotamos por $\text{Per}_n(f)$ al conjunto de puntos periódicos de f de período n (no necesariamente mínimo). Es decir, el conjunto de puntos fijos de f^n . También definimos $\text{Per}(f) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Per}_n(f)$.

Un sistema dinámico topológico $f: X \rightarrow X$ se llama *topológicamente transitivo* si existe un punto $x \in X$ tal que su órbita $\text{Or}(x)$ es densa en X . Se puede probar que si X es un espacio métrico separable, localmente compacto, entonces f es topológicamente transitivo \Leftrightarrow para cualquier par de abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe un entero N (que depende de (U, V)) tal que $f^N(U) \cap V \neq \emptyset$ (cf. [KH96]).

Una propiedad relacionada es la siguiente: X se llama *topológicamente mezclante* si para cada par ordenado U, V de abiertos no vacíos existe n_0 tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.

Dos funciones continuas $f: M \rightarrow M$ y $g: N \rightarrow N$ se llaman *conjugadas topológicamente* si existe un homeomorfismo $h: M \rightarrow N$ tal que $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Una función $g: N \rightarrow N$ es un *factor topológico* (o simplemente *factor*) de $f: M \rightarrow M$ si existe una función continua y suprayectiva $h: M \rightarrow N$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Esta función h se llama una *semiconjugación*.

Si dos funciones son conjugadas, entonces son completamente equivalentes en términos de su dinámica. Por ejemplo, la conjugación h establece una biyección entre $\text{Per}_n(f)$ y $\text{Per}_n(g)$. También se puede probar que f es topológicamente transitiva si y solo si g lo es.

Si E es un espacio métrico, y $f: E \rightarrow E$ es una función, se dice que f presenta *dependencia sensible a las condiciones iniciales* si existe $\delta > 0$ tal que, para cualquier $x \in E$ y cualquier vecindad V de x , existen $y \in V$ y $n \geq 0$ tales que $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

Una condición más fuerte que la dependencia sensible a las condiciones iniciales se llama *expansividad*. Decimos que $f: E \rightarrow E$ es *expansiva* si existe $\delta > 0$ tal que, para cualesquiera 2 puntos $x, y \in E$, $x \neq y$, existe n para el cual $|f^n(x) - f^n(y)| > \delta$.

En el contexto de la definición anterior, f se llama *caótica* si:

- a) Presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales.
- b) Es topológicamente transitiva.
- c) Los puntos periódicos son densos en E .

1.2 Ejemplos de sistemas dinámicos

1.2.1 Dinámica de las transformaciones de Möbius [JS97]

Una transformación de Möbius es una función $T: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Por conveniencia supongamos que $ad - bc = 1$. La traza $\text{tr}(T)$ de T es $a + d$.

Si $c \neq 0$, resolviendo la ecuación $T(z) = z$ obtenemos las soluciones

$$z = \frac{a \pm \sqrt{4bc + (a-d)^2} + d}{2c}.$$

Las soluciones son distintas a menos que $4bc + (a-d)^2 = 0$, en cuyo caso la ecuación tiene una raíz doble y un único punto fijo. Usando que $ad - bc = 1$, entonces la condición anterior se convierte en $(a+d)^2 - 4 = 0$, así que T tiene únicamente un punto fijo z_0 si y solo si $\text{tr}^2(T) = 4$.

Si $c = 0$, entonces $T(\infty) = \infty$ y $ad = 1$, por lo que $T(z) = a^2z + ab$ y existe otro punto fijo $z = \frac{ab}{1-a^2}$ $\Leftrightarrow a^2 \neq 1$ (o equivalentemente, si $(a+d)^2 \neq 4$). Si $a^2 = 1$ tenemos que $T(z) = z \pm b$, y si $b \neq 0$ (en cuyo caso es la identidad) T tiene un único punto fijo ∞ .

La conclusión de todo esto es que si $\text{tr}(T)^2 \neq 4$ entonces T tiene 2 puntos fijos, y si $\text{tr}(T)^2 = 4$ y $T \neq \text{Id}$ entonces T tiene un solo punto fijo en $\hat{\mathbb{C}}$.

Esto también prueba que cualquier transformación de Möbius con más de 2 puntos fijos es la identidad.

Se puede probar que si $\text{tr}^2(T) = 4$ (así que T tiene un solo punto fijo z_0) entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(z) = z_0$. Si $\text{tr}^2(T) \neq 4$ entonces T tiene dos puntos fijos z_0 y z_1 ; aquí hay 2 posibilidades: si $0 \leq \text{tr}^2(T) < 4$ entonces $T^n(z)$ no tiene límite para $z \neq z_0, z_1$ y si $\text{tr}^2(T) > 4$ o $\text{tr}^2(T) < 0$ o $\text{tr}^2(T) \notin \mathbb{R}$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} T^n(z) = z_i$ donde z_i es alguno de los dos puntos fijos.

1.2.2 Sistemas dinámicos simbólicos

Consideremos el conjunto $\Sigma_2 := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Σ_2 es el conjunto de todas las secuencias infinitas de ceros y unos, y se llama el *shift completo* en los dos símbolos 0 y 1. Podemos darle a Σ_2 la topología producto si consideramos a cada $\{0, 1\}$ con la topología discreta. También podemos definir una métrica d , dada por

$$d(s, t) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}.$$

Esta serie converge y es efectivamente una métrica [Dev89].

Dados $s, t \in \Sigma_2$, se puede probar que $s_i = t_i$ para $i = 0, \dots, n \Leftrightarrow d(s, t) \leq 1/2^n$. Esto es, dos secuencias son cercanas una de la otra si y solo si coinciden en sus primeras n entradas.

La función *shift* (corrimiento) $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ está dada por $s_0s_1\dots \mapsto s_1s_2\dots$. En otras palabras, $\sigma(s)_i = s_{i+1}$. Esta función tiene varias propiedades:

- Es 2 a 1, pues la secuencia $s_1s_2\dots$ puede provenir tanto de $1s_1\dots$ como de $0s_1\dots$.
- Es continua.
- Los puntos periódicos de σ corresponden exactamente a las secuencias de la forma $s_0\dots s_{n-1}s_0\dots s_{n-1}\dots$. Hay 2^n palabras de longitud n en dos símbolos, así que σ tiene 2^n puntos periódicos de periodo n .
- $\text{Per}(\sigma)$ es denso en Σ_2 . Dado $s = s_0s_1\dots$, consideremos la secuencia $t_n := s_0\dots s_n s_0\dots s_n\dots$, es decir, la secuencia formada al repetir las primeras n entradas de s . Debido a la propiedad mencionada arriba de la métrica en Σ_2 , vemos que $d(s, t_n) \leq 1/2^n$. Esto significa que $t_n \rightarrow s$.
- σ es topológicamente transitiva. Para ver esto definimos s^* como la secuencia formada de la siguiente manera: primero concatenamos todos los bloques de longitud 1 (esto es, 0 y 1), después concatenamos todos los bloques de longitud 2 (00, 01, 10, 11), posteriormente los de longitud 3, y así sucesivamente.
Dada una secuencia $s = s_0s_1\dots$ y $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon > 1/2^{n_0}$, y por construcción algún punto de la órbita de s^* será tal que $\sigma^{k_0}(s^*) = s_0\dots s_{n_0}\dots$, de tal forma que $d(s, \sigma^{k_0}(s^*)) \leq \varepsilon$.
- σ presenta dependencia sensible a las condiciones iniciales (de hecho es expansiva). Esto es inmediato, porque dadas 2 secuencias distintas s y t , por definición existe n tal que $s_n \neq t_n$, y por lo tanto $d(\sigma^n(s), \sigma^n(t)) \geq 1/2$.
- σ es caótica.

Consideremos ahora un contexto un poco más general (siguiendo a [LM95]).

Sea \mathcal{A} un conjunto finito, llamado el *alfabeto*. Al conjunto $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ de todas las secuencias bi-infinitas de elementos de \mathcal{A} se le llama el *\mathcal{A} -shift completo*. Explícitamente

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} := \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} : x_i \in \mathcal{A}\}.$$

El r -shift completo es el shift completo sobre el alfabeto $\{0, 1, \dots, r-1\}$. Por ejemplo, Σ_2 es el 2-shift completo.

Una *palabra* (o *bloque*) es una secuencia finita de símbolos de \mathcal{A} . Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ denotamos al bloque de x que empieza en la coordenada i y termina en la j ($i \leq j$) como

$$x_{[i, j]} := x_i x_{i+1} \dots x_j.$$

Si $x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ y w es un bloque sobre \mathcal{A} , decimos que w *aparece* en x si existen índices i, j tales que $w = x_{[i, j]}$. Sea \mathcal{F} una colección de bloques sobre \mathcal{A} . Para cada \mathcal{F} de este tipo, definimos $\mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ como el subconjunto de secuencias en $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ que *no* contienen ningún bloque en \mathcal{F} .

Un *espacio shift* es un subconjunto X de un shift completo $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ tal que $X = \mathcal{X}_{\mathcal{F}}$ para alguna colección \mathcal{F} de bloques prohibidos sobre \mathcal{A} .

Sea X un subconjunto de un shift completo, y sea $B_n(X)$ el conjunto de todos los bloques de longitud n que aparecen en puntos en X . El *lenguaje* de X es la colección

$$B(X) := \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n(X).$$

Igual que en el caso de Σ_2 definimos el mapeo *shift* como la función $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ dada por $\sigma(x)_i = x_{i+1}$. También podemos definir una métrica

$$\rho(x, y) := \begin{cases} 2^{-k} & \text{si } x \neq y \text{ y } k \text{ es maximal tal que } x_{[-k, k]} = y_{[-k, k]} \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Usando la topología generada por esta métrica se pueden caracterizar los espacios shift (6.1.21 [LM95]):

Teorema. Un subconjunto de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ es un espacio shift si y solo si es compacto e invariante bajo el shift.

En lugar de secuencias bi-infinitas podemos considerar secuencias infinitas por un lado, en cuyo caso el shift completo es el espacio $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Todas las definiciones son idénticas, excepto por la métrica, en cuyo caso no podemos tomar bloques centrales, sino más bien bloques de la forma $x_{[0, k]}$. Al 2-shift unilateral completo lo denotaremos también por Σ_2 .

Una de las principales fuentes de interés en la dinámica simbólica es su uso para representar otros sistemas dinámicos.

Una *partición topológica* de un espacio M es una colección finita $\mathcal{P} = \{P_0, \dots, P_{r-1}\}$ de abiertos ajenos tales que $M = \overline{P_0} \cup \dots \cup \overline{P_{r-1}}$.

Supongamos que (M, ϕ) es un sistema dinámico invertible, y $\mathcal{P} = \{P_0, \dots, P_{r-1}\}$ una partición topológica de M . Sea $\mathcal{A} = \{0, \dots, r-1\}$. Decimos que una palabra $w = a_1 \dots a_n$ está *permitida* por (\mathcal{P}, ϕ) si $\bigcap_{j=1}^n \phi^{-j}(P_{a_j}) \neq \emptyset$. Sea también $\mathcal{L}_{\mathcal{P}, \phi}$ la colección de palabras permitidas por (\mathcal{P}, ϕ) . Se puede checar que $\mathcal{L}_{(\mathcal{P}, \phi)}$ es el lenguaje de un espacio shift, y por la proposición 1.3.4 de [LM95], existe un único espacio shift $X_{(\mathcal{P}, \phi)}$ cuyo lenguaje es $\mathcal{L}_{(\mathcal{P}, \phi)}$. Llamamos a $X_{(\mathcal{P}, \phi)}$ el *sistema dinámico simbólico correspondiente* a (\mathcal{P}, ϕ) .

Para cada $x \in X_{\mathcal{P}, \phi}$ y cada $n \geq 0$ existe un abierto

$$D_n(x) := \bigcap_{k=-n}^n \phi^{-k}(P_{x_k}) \in M.$$

Obtenemos una secuencia que decrece con la n , $\overline{D_0}(x) \supseteq \overline{D_1}(x) \supseteq \overline{D_2}(x) \supseteq \dots$. Por lo tanto, $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{D_n}(x) \neq \emptyset$. Si para cada $x \in X_{(\mathcal{P}, \phi)}$ la intersección $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{D_n}(x)$ consta de un solo punto entonces decimos que \mathcal{P} nos da una *representación simbólica* de (M, ϕ) . En este caso llamamos a \mathcal{P} una *partición de Markov* de (M, ϕ) .

Si \mathcal{P} es una partición de Markov de (M, ϕ) , entonces existe un mapeo $\pi: X_{\mathcal{P}, \phi} \rightarrow M$ que manda un punto $x = (x_i)$ al único elemento en la intersección $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{D_n}(x)$. Llamamos a x una *representación simbólica* de $\pi(x)$. En este caso se puede probar que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} X_{(\mathcal{P}, \phi)} & \xrightarrow{\sigma} & X_{(\mathcal{P}, \phi)} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ M & \xrightarrow{\phi} & M \end{array}$$

También se puede probar que π es continua y suprayectiva, así que es una semiconjugación. Asociada a π tenemos una función $\Phi: M \rightarrow X_{(\mathcal{P}, \phi)}$ definida por

$$\Phi(p)_i := k \quad \text{si } \phi^i(p) \in P_k$$

Esta función se llama el *itinerario* de p . El itinerario satisface $\pi \circ \Phi = \text{Id}$, pero en general no es suprayectiva (pag 13).

El resultado que muestra como se pueden usar las representaciones simbólicas para entender los sistemas dinámicos que ellas representan es el siguiente (6.5.9 [LM95]):

Proposición. Supongamos que \mathcal{P} proporciona una representación simbólica del sistema dinámico invertible (M, ϕ) . Para cada una de las siguientes propiedades, si $(X_{(\mathcal{P}, \phi)}, \sigma)$ tiene la propiedad, entonces también (M, ϕ) la tiene.

- Transitividad topológica.
- Es topológicamente mezclante.
- El conjunto de puntos periódicos es denso.

1.2.3 Dinámica de $f(z) = z^2$

El comportamiento interesante de f se presenta cuando $z \in S^1$, pues si $|z| > 1$ entonces $f^n(z) \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ y si $|z| < 1$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = 0$. Por otra parte, si $z \in S^1$ entonces z es de la forma e^{it} y $f(e^{it}) = e^{i2t} \in S^1$.

Sea $I' := [0, 1] / \sim$ con $1 \sim 0$ y $x \sim x$ ($x \neq 0, 1$). I' es homeomorfo a $S^1 := \{e^{2\pi it}; t \in [0, 1)\}$ por medio de la identificación $\varphi: e^{2\pi it} \mapsto t$. Dado $t \in I'$, tenemos que $t \mapsto \varphi^{-1}(t) = e^{2\pi it} \mapsto f \circ \varphi^{-1}(t) = e^{4\pi it} \mapsto \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(t) = 2t$, así que f es topológicamente conjugada a $t \mapsto 2t \pmod{1}$. I' es un espacio métrico. Explícitamente, sea

$$\rho(x, y) := \min \{|x - y|, |1 - x + y|, |1 + x - y|\}.$$

En términos de φ , $\rho(\varphi(w), \varphi(v))$ es la longitud del menor arco entre w y v .

Si $f^n(z) = z$ entonces $z^{2^n} = z$, y $z^{2^n-1} = 1$, de tal forma que cada raíz de la unidad de orden $2^n - 1$ es un punto periódico de f con período n . Como hay exactamente $2^n - 1$ tales raíces, entonces $\text{Per}_n(f) = 2^n - 1$. Además, para cada n , las n -ésimas raíces de la unidad están uniformemente distribuidas sobre el círculo, y a medida que n se hace más grande la distancia entre cada raíz tiende a cero. Esto significa que los puntos periódicos de f son densos en S^1 .

Veamos que f es topológicamente transitiva. Consideremos los intervalos binarios $\Delta_n^k := \left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n} \right]$ para $n \in \mathbb{N}$ y $k = 0, 1, \dots, 2^n - 1$. Sea $x = 0.x_1x_2\dots$ la representación binaria de $x \in [0, 1]$. Entonces $2x = x_1x_2x_3\dots = 0.x_2x_3\dots \pmod{1}$, y $f(x) = 0.x_2x_3\dots \pmod{1}$.

Sea $k = k_1\dots k_n$ la representación binaria del entero k (tal vez con algunos ceros al inicio). Observemos que para k entre 0 y $2^n - 1$, k se puede representar con n dígitos (por ejemplo, $2^3 = 1000$, y si $k < 8$, k se puede representar con 3 dígitos). También notemos que como $k = k_1 2^{n-1} + k_2 2^{n-2} + \dots + k_n 2^0$, entonces $k/2^n = k_1 2^{-1} + \dots + k_n 2^{-n}$ cuya representación binaria es $0.k_1\dots k_n$. El intervalo Δ_n^k podemos denotarlo como $[0.k_1\dots k_n, 0.k_1\dots k_n + 2^{-n}]$. Esto muestra que $x \in \Delta_n^k$ si y solo si sus primeros n dígitos coinciden con los n dígitos de k ; es decir, si $x_i = k_i$ para $i = 1, \dots, n$. Los dígitos siguientes pueden tomar cualquier valor (0,1), y entonces $f^n(x) = f^n(0.k_1\dots k_n x_{n+1}\dots) = k_1\dots k_n x_{n+1}\dots = 0.x_{n+1}x_{n+2}\dots \pmod{1}$; esto es, $f^n(\Delta_n^k) = S^1$. Además, cada intervalo $I \subset S^1$ contiene algún intervalo binario, por lo que $f^n(I) = S^1$ para algún n . Por lo tanto, para cada par de conjuntos abiertos U, V existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Esto nos dice que f es topológicamente transitiva.

f también es expansiva (la distancia entre 2 puntos cercanos se duplica con cada iteración), así que es caótica.

El mapeo $\pi: \Sigma_2 \rightarrow I'$ dado por $x_1x_2\dots \mapsto 0.x_1x_2\dots$ es continuo y suprayectivo, sin embargo no es invertible, debido a que cualquier racional binario $m/2^n$ tiene dos representaciones binarias distintas, una con ceros y otra con unos al final. De hecho, la región de no invertibilidad es densa en el intervalo, ya que es el conjunto de los racionales binarios. π es una semiconjugación entre el shift $\sigma: \Sigma_2 \rightarrow \Sigma_2$ y f , pues claramente $\pi \circ \sigma = f \circ \pi$.

Subdividamos I' en dos intervalos $E_0 := [0, 1/2)$ y $E_1 := [1/2, 1)$. Para cada $x \in I'$ el itinerario $\Phi: I' \rightarrow \Sigma_2$ de x satisface que $\Phi^n(x)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } \varphi^n(x) \in E_0 \\ 1 & \text{si } \varphi^n(x) \in E_1 \end{cases}$. En este caso $\Phi(x)$ es la secuencia de dígitos en la expansión binaria de x .

Una situación que se presenta aquí es que, debido a la ambigüedad en la representación binaria de los reales (como ya mencionamos antes), en general hay 2 secuencias que representan a cada racional. Por ejemplo, $0.1000\dots$ representa al mismo número que $0.011111\dots$. Esto tiene la consecuencia de que la imagen del mapeo itinerario no es un espacio shift porque no es compacta. Por ejemplo, la secuencia $0.01000\dots, 0.01100\dots, 0.01110\dots, \dots$ de puntos en la imagen del itinerario converge a la secuencia $0.01111\dots$, que no vive en la imagen. Afortunadamente en muchos casos esta ambigüedad no daña la utilidad de la representación binaria. Por otra parte, la compactación de $\text{Im } \Phi$ sí es un espacio shift; de hecho es el espacio $X_{(\mathcal{P}, f)}$ definido antes y se puede pensar como el menor espacio shift que contiene a la imagen del itinerario.

La partición $\{E_0, E_1\}$ resulta ser de Markov, así que podríamos usar las ideas de dinámica simbólica para probar los resultados anteriores.

1.2.4 Isometrías por pedazos

Sea X un subconjunto de \mathbb{R}^2 y $\mathcal{P} := \{P_1, \dots, P_n\}$ una partición de X . A los elementos P_i de la partición se les llama *átomos*.

Una *isometría por pedazos* es un par (T, \mathcal{P}) , donde $T: X \rightarrow X$ es una función tal que su restricción a cada átomo es una isometría euclidiana.

La función itinerario $\Phi: X \rightarrow \Sigma_n$ de X al n -shift Σ_n codifica la órbita hacia adelante de un punto x , y se define de tal forma que $\Phi(x)_i = k$ si $T^i(x) \in P_k$. Una *celda* es un conjunto maximal de itinerario constante. Si una celda tiene un itinerario eventualmente periódico la llamamos una *celda racional*. El complemento de las celdas racionales es el conjunto de puntos con itinerarios irracionales; a veces se le llama el *conjunto excepcional* E .

El principal problema no resuelto respecto a las isometrías por pedazos consiste en determinar el tamaño del conjunto E . En todos los casos conocidos en los que es posible calcular la medida de Lebesgue de E esta es cero.

Capítulo 2

Una familia de funciones conformes por pedazos en $\hat{\mathbb{C}}$

Sea \mathbb{D} el disco unitario cerrado con centro en el origen.

Definición 2.1. Una función $F: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ se denomina conforme por pedazos si existe una familia de subconjuntos $\mathcal{D} := \{D_n\}_{n \geq 0}$ de la esfera, llamada el dominio de conformidad de F , tal que:

1. $\bigcup_{n \geq 1} \overline{D_n} = \hat{\mathbb{C}}$,
2. $F: D_n \rightarrow F(D_n)$ es conforme para cada n ,
3. Para cada $D_n \in \mathcal{D}$, F se extiende conformemente en una vecindad de $\overline{D_n}$, $F: \overline{D_n} \rightarrow \overline{F(D_n)}$ es biyectiva, y
4. ∂D_n y $\partial(F(D_n))$ son curvas suaves a pedazos.

Sea $D := \overline{B_1(2)}$ el disco cerrado de radio 1 y con centro en 2 y sea $C := \partial D$. Definamos $F_{\alpha, \beta}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ como

$$F_{\alpha, \beta}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{si } z \notin D \\ g(z) & \text{si } z \in D \end{cases}$$

donde $f(z) := \alpha z$ y $g(z) := 2\alpha(1 - \beta) + \alpha\beta z$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $|\alpha| \leq 1$, $|\beta| = 1$. El espacio de parámetros en este caso es $\mathbb{D} \times S^1$, que es un toro sólido.

Geoméricamente esta función opera del siguiente modo: los puntos fuera del disco D simplemente son multiplicados por α ; si $|\alpha| = 1$ entonces esto es una rotación por un ángulo $\arg(\alpha)$ respecto al origen y si $|\alpha| < 1$ entonces el efecto de multiplicar por α es una rotación y una contracción. Explícitamente, si $z = r e^{it}$ entonces $f(z) = \alpha z = |\alpha| r e^{i(t + \arg(\alpha))}$. Algo que se aprecia inmediatamente es que $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = 0$.

La función g podemos descomponerla en dos partes: $z \mapsto \beta(z - 2) + 2$ que es una rotación alrededor del 2 por un ángulo $\theta = \arg(\beta)$ (recordemos que $\beta \in S^1$), y $z \mapsto \alpha z$; de tal forma que g es una rotación alrededor del 2 seguido de una rotación alrededor del origen y de una contracción.

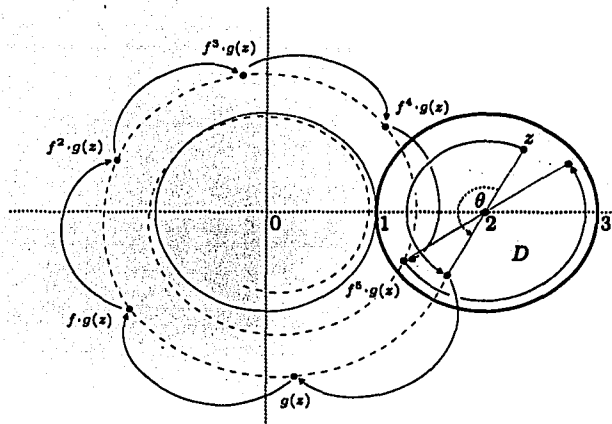


Figura 2.1.

Esta función es conforme por pedazos, biyectiva y conforme en $D \cup (\hat{\mathbb{C}} \setminus D)$, pero discontinua en ∂D .

Podemos definir la función inversa $F_{\alpha, \beta}^{-1}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ como

$$F_{\alpha, \beta}^{-1}(z) := \begin{cases} f^{-1}(z) & \text{si } z \notin F_{\alpha, \beta}(D) \\ g^{-1}(z) & \text{si } z \in F_{\alpha, \beta}(D) \end{cases}$$

donde $f^{-1}(z) = \frac{z}{\alpha}$ y $g^{-1}(z) = \frac{z - 2\alpha(1-\beta)}{\alpha\beta}$.

En el caso de las funciones conformes por pedazos, los dominios de conformidad nos proporcionan una partición y una codificación naturales.

Definición 2.2. El mapeo itinerario $I: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \Sigma_2$ asociado a $F_{\alpha, \beta}$ es la función que en cada entrada es:

$$I(z)_i := \begin{cases} 1 & \text{si } F_{\alpha, \beta}(z)^i \in D \\ 0 & \text{si } F_{\alpha, \beta}(z)^i \notin D \end{cases}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2.1 Ejemplos

Si $|z| < 1$, entonces $F_{\alpha,\beta}(z) = \alpha z$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^n z = 0$. Similarmente, si $|z| > 3$, la órbita de z eventualmente ingresará al disco $B_3(1)$. Por esta razón, podemos limitarnos a estudiar las órbitas de puntos en el anillo $A := \{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$. Por otra parte, el origen siempre¹ es un punto fijo atractor, así que de aquí en adelante no lo consideraremos más.

La dinámica de $F_{\alpha,\beta}$ puede complicarse mucho, especialmente cuando $|\alpha| \rightarrow 1$. En esta sección trataremos de mostrar algunos ejemplos que ilustren situaciones "típicas".

La situación más simple ocurre cuando $|\alpha| < 1/3$. En este caso la imagen de cualquier punto en A cae en D , así que toda la órbita hacia adelante queda atrapada en D y el punto converge al origen.

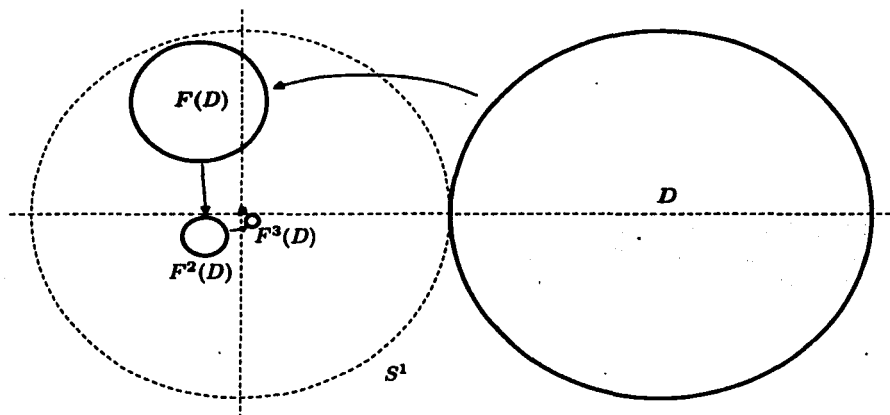


Figura 2.2.

Otro fenómeno ocurre cuando $1/3 \leq |\alpha| < 1/\sqrt{3}$. En este caso hay algunos argumentos de α para los cuales aparece un punto fijo.

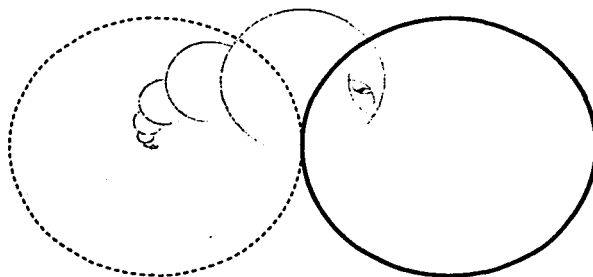


Figura 2.3.

1. i.e. Para cualquier valor de (α, β) .

Si $\arg(\alpha)$ es más o menos cercano a alguna de las raíces primitivas n -ésimas de la unidad y $|\alpha| > 1/\sqrt[3]{3}$ entonces podemos encontrar un punto de período n en D . Por ejemplo para $n=5$, $\alpha = 0.206 \cdot e^{2\pi i 0.935}$, $\beta = -1$.

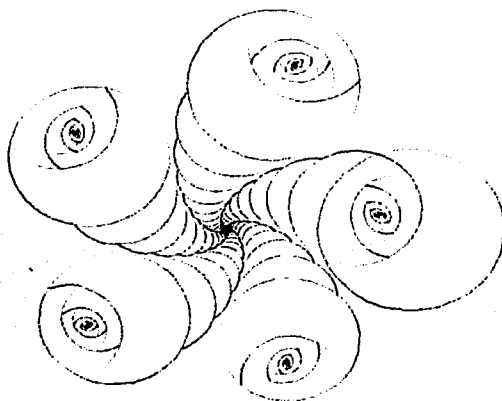


Figura 2.4.

Cuando $|\alpha|$ se acerca a 1 entonces basta una pequeña desviación de la raíz de la unidad para que aparezcan puntos de distintos períodos.

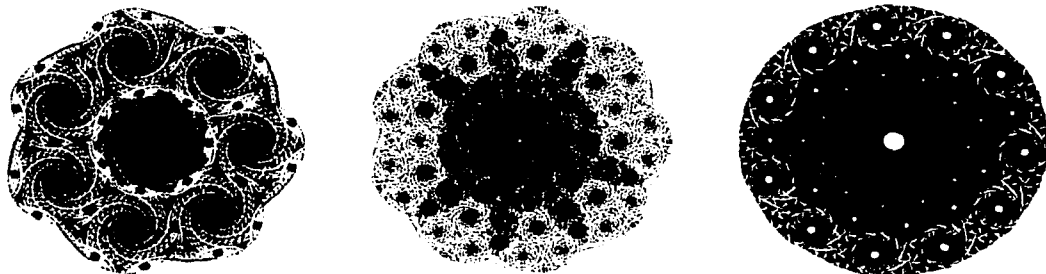


Figura 2.5.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2.2 La partición generada por el itinerario

Sea $\mathcal{D} = \{I_0, I_1\} := \{\hat{\mathbb{C}} \setminus D, D\}$.

Definición 2.3. Para cada secuencia finita de longitud $n+1$, $a_0 \dots a_n$ con $a_i \in \{0, 1\}$ construimos un conjunto

$$I_{a_0 \dots a_n} := \{z \in \hat{\mathbb{C}} : I(z) = (a_0 a_1 \dots a_n \dots)\}$$

y también

$$\Omega_n := \{I_{a_0 \dots a_n} : (a_0, \dots, a_n) \in \{0, 1\}^{n+1}\}.$$

Esto es, $z \in I_{a_0 \dots a_n}$ si y solo si $z \in I_{a_0}$, $F_{\alpha, \beta}(z) \in I_{a_1}, \dots, F_{\alpha, \beta}^n(z) \in I_{a_n}$, de tal forma que

$$I_{a_0 \dots a_n} = I_{a_0} \cap F_{\alpha, \beta}^{-1}(I_{a_1}) \cap \dots \cap F_{\alpha, \beta}^{-n}(I_{a_n}) = I_{a_0 \dots a_{n-1}} \cap F_{\alpha, \beta}^{-n}(I_{a_n}). \quad (2.1)$$

Analicemos los primeros pasos de esta construcción.

$I_0 = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : I(z) = (0 \dots)\} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : z \notin D\}$, $I_1 = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : I(z) = (1 \dots)\} = \{z \in \hat{\mathbb{C}} : z \in D\}$. I_0 e I_1 son simplemente D y $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$, tal como los definimos al principio de la sección; por lo tanto $\Omega_0 = \{D, \hat{\mathbb{C}} \setminus D\}$.

Ω_1 consta de 4 elementos: $\{I_{00}, I_{01}, I_{10}, I_{11}\}$. I_{00} es el conjunto de puntos $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : z \notin D, F_{\alpha, \beta}(z) \notin D\}$. I_{01} es el conjunto $\{z \in \hat{\mathbb{C}} : z \notin D, F_{\alpha, \beta}(z) \in D\}$, etc.

Por definición, $I_{a_0 \dots a_n 0}$ es el conjunto $\{z \in I_{a_0 \dots a_n} : F_{\alpha, \beta}^{n+1}(z) \in \hat{\mathbb{C}} \setminus D\}$ y $I_{a_0 \dots a_n 1} = \{z \in I_{a_0 \dots a_n} : F_{\alpha, \beta}^{n+1}(z) \in D\}$. Entonces

$$\begin{aligned} I_{a_0 \dots a_n 0} \cup I_{a_0 \dots a_n 1} &= \left(I_{a_0 \dots a_n} \cap F_{\alpha, \beta}^{-(n+1)}(I_0) \right) \cup \left(I_{a_0 \dots a_n} \cap F_{\alpha, \beta}^{-(n+1)}(I_1) \right) \\ &= I_{a_0 \dots a_n} \cap \left(F_{\alpha, \beta}^{-(n+1)}(I_0) \cup F_{\alpha, \beta}^{-(n+1)}(I_1) \right) \\ &= I_{a_0 \dots a_n} \cap F_{\alpha, \beta}^{-(n+1)}(I_0 \cup I_1) \\ &= I_{a_0 \dots a_n} \end{aligned}$$

y de la misma forma

$$\begin{aligned} I_{a_0 \dots a_n 0} \cap I_{a_0 \dots a_n 1} &= \left(I_{a_0 \dots a_n} \cap F_{\alpha, \beta}^{-(n+1)}(I_0) \right) \cap \left(I_{a_0 \dots a_n} \cap F_{\alpha, \beta}^{-(n+1)}(I_1) \right) \\ &= I_{a_0 \dots a_n} \cap F_{\alpha, \beta}^{-(n+1)}(I_0 \cap I_1) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

También observemos que alguna de estas componentes puede ser vacía (por ejemplo, si $F_{\alpha, \beta}(I_{a_0 \dots a_n}) \subset D$ entonces $I_{a_0 \dots a_n 0} = \emptyset$).

Lo anterior muestra que Ω_{n+1} es un refinamiento de Ω_n y para cada n tenemos una partición formada por a lo más 2^{n+1} conjuntos.

Denotamos por $\Omega(F_{\alpha,\beta})$ a la partición generada por estos refinamientos. Un elemento $V \in \Omega(F_{\alpha,\beta})$ es una intersección $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} V_i$ con $V_i \in \Omega_i$. Para ver un poco la forma de estas componentes, tomemos $I_{a_0 \dots a_n} \in \Omega_n$ y $I_{b_0 \dots b_m} \in \Omega_m$. Supongamos que $n < m$. Por (2.1), tenemos que

$$I_{a_0 \dots a_n} = I_{a_0} \cap F_{\alpha,\beta}^{-1}(I_{a_1}) \cap \dots \cap F_{\alpha,\beta}^{-n}(I_{a_n})$$

y

$$\begin{aligned} I_{b_0 \dots b_n \dots b_m} &= I_{b_0} \cap F_{\alpha,\beta}^{-1}(I_{b_1}) \cap \dots \cap F_{\alpha,\beta}^{-n}(I_{b_n}) \cap \dots \cap F_{\alpha,\beta}^{-m}(I_{b_m}) \\ &= I_{b_0 \dots b_n} \cap F_{\alpha,\beta}^{-(n+1)}(I_{b_{n+1}}) \cap \dots \cap F_{\alpha,\beta}^{-m}(I_{b_m}) \end{aligned}$$

Ahora bien, $I_{b_0 \dots b_n} \in \Omega_n$ así que $I_{a_0 \dots a_n} \cap I_{b_0 \dots b_n} \neq \emptyset$ si y solo si $a_0 \dots a_n = b_0 \dots b_n$. Por lo tanto

$$I_{a_0 \dots a_n} \cap I_{b_0 \dots b_n \dots b_m} = \begin{cases} \emptyset & \text{si } a_0 \dots a_n \neq b_0 \dots b_n \\ I_{b_0 \dots b_n \dots b_m} & \text{de otra forma} \end{cases}$$

Dados dos puntos $z, w \in I_{a_0 \dots a_n}$ en la misma componente de Ω_n el itinerario de z y el de w coinciden hasta la posición n ; es decir $I(z)|_{[0,n]} = I(w)|_{[0,n]}$. Dados $z, w \in V \in \Omega(F_{\alpha,\beta})$, $I(z) = I(w)$. Ésta es la propiedad que nos interesa de $\Omega(F_{\alpha,\beta})$, que sus componentes están formadas por puntos que tienen el mismo itinerario. Hay que señalar que los elementos de Ω_n no necesariamente son conexos.

$\Omega(F_{\alpha,\beta})$ es la partición inducida por la relación de equivalencia $z \sim w \Leftrightarrow I(z) = I(w)$, así que podemos extender el itinerario a una función inyectiva $\tilde{I}: \Omega(F_{\alpha,\beta}) \rightarrow \Sigma_2$.

Lema 2.4. Sean $\partial\Omega_n := \bigcup_{W \in \Omega_n} \partial W$ y $\Lambda_n := \bigcup_{i=0}^n F_{\alpha,\beta}^{-i}(C)$. Entonces $\partial\Omega_n = \Lambda_n$.

Demostración. Por inducción sobre n . Para $n=0$, $\partial\Omega_0 = C$. Ahora supongamos que $\partial\Omega_n = \Lambda_n$. Cada $W \in \Omega_n$ contiene un cierto número de elementos de Ω_{n+1} , sin embargo cada componente de W contiene a lo más 2, digamos $W = W_0 \cup W_1$, con $F_{\alpha,\beta}^{n+1}(W_0) \in I_0$ y $F_{\alpha,\beta}^{n+1}(W_1) \in I_1$. Esto significa que $F_{\alpha,\beta}^{n+1}(W) \cap C \neq \emptyset$, y por lo tanto $C' := F_{\alpha,\beta}^{-(n+1)}(C) \cap W \neq \emptyset$. Pero C' tiene que vivir en $\partial\Omega_{n+1}$ porque de otro modo existiría un punto $x \in C'$ tal que $x \in V$ con V un abierto totalmente contenido en W_1 (digamos), lo que implicaría que $F_{\alpha,\beta}^{n+1}(V) \subset I_1$. Pero $F_{\alpha,\beta}^{n+1}|_{W_1}$ es un homeomorfismo, así que $F_{\alpha,\beta}^{n+1}(V)$ es abierto y vive en el interior de I_1 . Esto contradice el hecho de que $F_{\alpha,\beta}^{n+1}(x) \in C$. Este mismo razonamiento lo aplicamos a todos los $F_{\alpha,\beta}^{-(n+1)}(C) \cap U \neq \emptyset$ con $U \in \Omega_n$. Además $F_{\alpha,\beta}^{-(n+1)}(C) = \bigcup_{W \in \Omega_n} F_{\alpha,\beta}^{-(n+1)}(C) \cap W$, así que $F_{\alpha,\beta}^{-(n+1)}(C) \subset \partial\Omega_{n+1}$.

Para el regreso, notemos que $\partial\Omega_{n+1} \supset \partial\Omega_n$ para todo $m < n+1$. Si $x \in \partial\Omega_{n+1}$ entonces $x \in \partial\Omega_m$ para algún $m < n+1$. Supongamos que m es el menor entero con esa propiedad. Por un argumento similar al del párrafo anterior vemos que $F_{\alpha,\beta}^m(x) \in C$ y $x \in F_{\alpha,\beta}^{-m}(C) \subset \Lambda_{n+1}$. \square

Este lema es importante porque nos dice como podemos visualizar $\partial\Omega_n$; simplemente tenemos que pintar el n -ésimo iterado hacia atrás de C sin borrar los anteriores.

Definición 2.5. Denotemos por $\Omega(F_{\alpha,\beta})|_D$ al conjunto $\{W \in \Omega(F_{\alpha,\beta}) : W \subset D\}$.

Lema 2.6. $\Omega(F_{\alpha,\beta})|_D$ es un conjunto finito.

Demostración. En [Cru03] se establece que ∞ es el único punto de acumulación de secuencias $\{a_n \in F_{\alpha,\beta}^{-n}(C)\}$.

Consideremos el conjunto $T := \{D \cap F_{\alpha,\beta}^{-n}(C)\}_{n>0}$. Si T es infinito entonces podemos extraer una sucesión infinita $\{t_n \in D \cap F_{\alpha,\beta}^{-n}(C)\}_{n>0} \subset D$. Como D es compacto, entonces $\{t_n\}$ tiene un punto de acumulación en D . Sin embargo esto no puede suceder, así que T es finito. Entonces existe $N > 0$ tal que $D \cap F_{\alpha,\beta}^{-n}(C) = \emptyset \forall n > N$. Sea N' el número de elementos de $\Omega_N|_D$. En la prueba del lema anterior se vio que si existe $W \in \Omega_N|_D$ tal que W se puede escribir como $W_0 \cup W_1$ con $W_i \neq \emptyset$ y $W_i \in \Omega_m|_D$, $m > N$, entonces $F_{\alpha,\beta}^{-m}(C) \cap W \neq \emptyset$. Por lo tanto $\text{Card}(\Omega_n|_D) = N' \forall n > N$ y $\Omega(F_{\alpha,\beta})|_D = \Omega_N|_D$. \square

2.3 La forma de los itinerarios

El siguiente cálculo nos permite saber cuántas veces a lo más tenemos que iterar un punto z ($|z| < 3$) para saber si su órbita entró en \mathbb{D} o en D . Esto es especialmente importante en la implementación del algoritmo para calcular los puntos periódicos.

Sea $z \in D$. Si iteramos z , pueden ocurrir dos cosas:

1. Que $F_{\alpha,\beta}^j(z) \notin D$ para $j \geq 1$. Esto es, $I(z) = 10^\infty$. En este caso,

$$F_{\alpha,\beta}^j(z) = f^{j-1} \circ g(z) = 2\alpha^j(1-\beta) + \alpha^j\beta z.$$

Claramente $F_{\alpha,\beta}^n(z) \rightarrow 0$.

Como $g(z) = \alpha(\beta(z-2)+2)$, entonces $|g(z)| = |\alpha| \cdot |\beta(z-2)+2| \leq |\alpha| \cdot (|z-2|+2)$. Pero $z \in D \Leftrightarrow |z-2| < 1$, así que $|g(z)| \leq |\alpha| \cdot (|z-2|+2) \leq 3 \cdot |\alpha|$. Por lo tanto:

$$|F_{\alpha,\beta}^j(z)| = |f^{j-1} \circ g(z)| = |\alpha^{j-1} \cdot g(z)| = |\alpha^{j-1}| \cdot |g(z)| \leq 3 \cdot |\alpha|^j$$

La desigualdad $3|\alpha|^j < 1$ se cumple si $j > \frac{-\log(3)}{\log|\alpha|} = -\log_{|\alpha|}(3)$. Sea K_α el menor entero mayor que $-\log_{|\alpha|}(3)$ (la parte entera más 1). Esto nos dice cuantas veces tenemos que multiplicar por α para que cualquier punto en D caiga en \mathbb{D} , de tal forma que si $I(z) = 10^{K_\alpha} \dots$, entonces podemos asegurar que $I(z) = 10^\infty$

Podemos concluir que no existen itinerarios con palabras de la forma $10^l 1$ si $l > K_\alpha$, así que K_α nos da una cota superior para el número de palabras de la forma $10^m 1$ que pueden surgir al iterar $F_{\alpha, \beta}(D)$.

2. Que exista $n \geq 1$ tal que $F_{\alpha, \beta}^n(z) \in D$ (es decir, $I(z) = 10^{n-1} 1 \dots$). Sea $M_\alpha := \{n \in \mathbb{N} : I(z) = 10^n 1 \dots, \text{ con } z \in D\}$. Convengamos en que $M_\alpha = \{m_1, \dots, m_k\}$. Por el punto anterior, $k < K_\alpha$.

En [Cru03] se prueba que todas las órbitas son eventualmente periódicas. Por lo tanto los itinerarios son de la forma $10^{m_{i_1}} 10^{m_{i_2}} 1 \dots 10^{m_{i_n}} 10^\infty$, con $m_{i_j} \in M_\alpha$ o de la forma $10^{m_{i_1}} 10^{m_{i_2}} 1 \dots 10^{m_{i_n}} 10^{m_{\mu(1)}} 10^{m_{\mu(2)}} \dots$ donde $\mu: \mathbb{N} \rightarrow M_\alpha$ es periódica.

Capítulo 3

Análisis de órbitas periódicas

3.1 Los puntos fijos de $f^n \circ g$

En esta sección analizaremos los puntos periódicos de $F_{\alpha, \beta}$ cuando $F_{\alpha, \beta}^n$ tiene la forma $f^{n-1} \circ g$.

Solamente en esta sección fijemos $\beta = -1$. Esta suposición por supuesto conlleva una buena simplificación en las fórmulas; sin embargo creemos que la dinámica obtenida es "genérica", en el sentido de que podemos hallar situaciones con la misma complejidad que para otros valores de β .

El tipo órbitas que estamos considerando (de itinerario $10^k 1 \dots$) sólo tiene un representante en D . Los otros representantes son los puntos fijos de las funciones $\{f^{n-1} \cdot g \cdot f, f^{n-2} \cdot g \cdot f^2, \dots, g \cdot f^n\}$, así que podemos restringirnos a analizar al representante de cada órbita que vive en D .

Para empezar hagamos algunas definiciones. Sea $\zeta_n := e^{2\pi i/n}$ la primera n -ésima raíz de la unidad y sea $F_\alpha := F_{\alpha, -1}$.

Despejando α de $f^n \circ g(z) = z$ vemos que el punto fijo de $f^n \circ g$ es de la forma $\frac{4\alpha^{n+1}}{1 + \alpha^{n+1}}$. Esta expresión solo depende de α , así que determina una función $p_n: \mathbb{D} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por

$$p_n(\alpha) := \frac{4\alpha^{n+1}}{1 + \alpha^{n+1}}$$

y que satisface $f^n \circ g(p_n(\alpha)) = p_n(\alpha)$ para toda $\alpha \in \mathbb{D}$.

En esta sección analizamos la pregunta: ¿para cuales $\alpha \in \mathbb{D}$ se cumple que $p_n(\alpha)$ es un punto fijo

de F_α^{n+1} ?

Como se explica en la siguiente sección, $F_\alpha^{n+1}(z) = f^n \circ g(z)$ si y solo si $z \in I_{10^n}$. Así que $F_\alpha^{n+1}(p_n(\alpha)) = p_n(\alpha) \Leftrightarrow I(p_n(\alpha)) = 10^n 10^n \dots \Leftrightarrow p_n(\alpha) \in I_{10^n}$.

Por lo tanto, el problema es determinar el conjunto

$$E_n := \{\alpha \in \mathbb{D} : I(p_n(\alpha)) = 10^n \dots\} = \{\alpha \in \mathbb{D} : F_\alpha^{n+1}(p_n(\alpha)) = p_n(\alpha)\}.$$

Observemos que

$$E_n = \{\alpha \in \mathbb{D} : p_n(\alpha) \in I_1\} \cap \{\alpha \in \mathbb{D} : g(p_n(\alpha)) \in I_0\} \cap \dots \cap \{\alpha \in \mathbb{D} : f^{n-1} \circ g(p_n(\alpha)) \in I_0\}.$$

También notemos que si $\alpha \in E_n$ entonces automáticamente $f^n \circ g(p_n(\alpha)) \in I_1$ de nuevo (porque $f^n \circ g(p_n(\alpha)) = p_n(\alpha)$).

Los conjuntos E_n pueden ser bastante complicados, así que nos contentaremos con analizar el conjunto $B_n := \{\alpha \in \mathbb{D} : p_n(\alpha) \in I_1\}$. Esto nos dará alguna idea sobre las regiones en \mathbb{D} en las cuales podemos esperar encontrar puntos periódicos de cierto período.

Antes de perdernos en las cuentas, veamos algunos ejemplos que ilustran el comportamiento general perfectamente.

Fijemos $n = 2$, de tal forma que $p_2(\alpha) = \frac{4\alpha^3}{1+\alpha^3}$. Inmediatamente podemos deducir varias cosas:

- p_2 es una función 3 a 1.
- Tiene 3 polos en S^1 que corresponden a las 3 soluciones de la ecuación $\alpha^3 = -1$.
- $p_2(0) = 0$; $p_2(1) = 2$.
- p_2 tiene 3 inversas, que se obtienen al despejar α en $z = \frac{4\alpha^3}{1+\alpha^3}$. Estas inversas son

$$\left\{ \frac{z^{1/3}}{(4-z)^{1/3}}, -\frac{(-1)^{1/3} z^{1/3}}{(4-z)^{1/3}}, \frac{(-1)^{2/3} z^{1/3}}{(4-z)^{1/3}} \right\}$$

El conjunto B_2 se ve de esta forma:

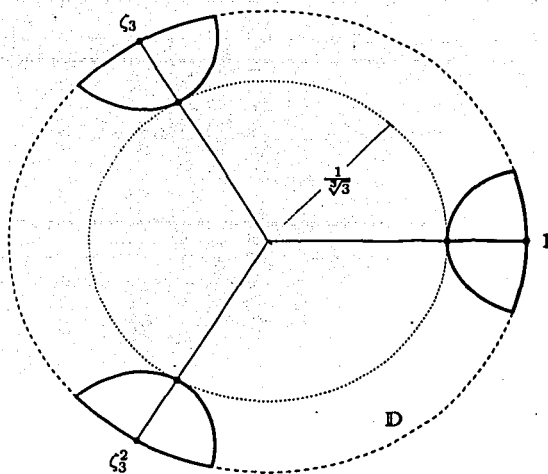


Figura 3.1.

p_2 opera de esta manera (en cada una de las 3 componentes de B_2):

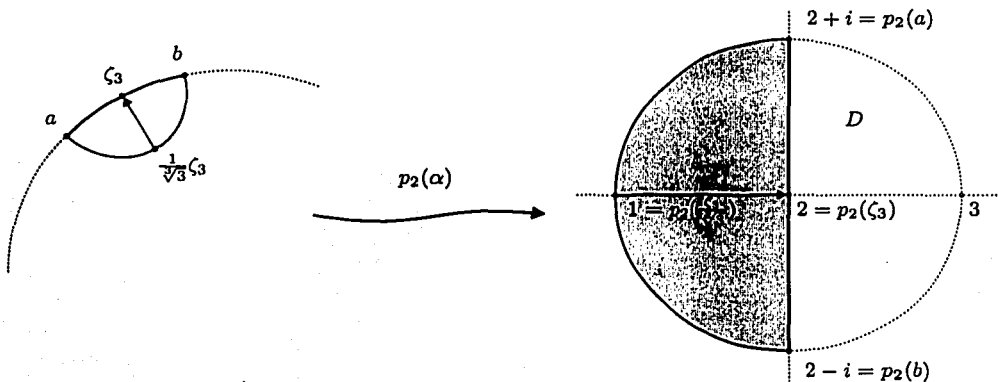


Figura 3.2.

Una situación importante que hay que señalar es que los puntos $\left\{ \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \frac{\zeta_3}{\sqrt[3]{3}}, \frac{\zeta_3^2}{\sqrt[3]{3}} \right\}$ (que son la preimagen del 1 bajo p_2) son los puntos de B_3 de menor norma. Por lo tanto, si $\alpha \in D$ y queremos saber si existen puntos periódicos de orden 3, entonces sólo tenemos que observar $|\alpha|$. Si $|\alpha| < 1/\sqrt[3]{3}$ entonces podemos concluir que *no hay puntos periódicos de orden 3*.

La otra conclusión inmediata es que los puntos periódicos de orden 3 que son puntos fijos de $f^2 \circ g$ viven en el semidisco $\{z \in D: \text{Re}(z) \leq 2\}$ (que es la parte gris en la figura 3.2).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Ahora consideremos el caso general.

La primera observación es que $p_n(t \cdot \zeta_{n+1}^k) = \frac{4}{1+1/t^{n+1}} \in \mathbb{R}$, con $t \in \mathbb{R}$. Esto es, p_n manda los rayos $t \cdot \zeta_{n+1}^k$, $t > 0$ en el eje real positivo. También vemos que $p_n(\zeta_{n+1}^k) = \frac{4}{1+1} = 2$ y que $p_n(1/3^{1/n+1} \zeta_{n+1}^k) = 1$.

Despejando α^{n+1} de $p_n(\alpha) = z$ obtenemos $\alpha^{n+1} = \frac{z}{4-z}$. Esta ecuación tiene $n+1$ soluciones, dadas por $q_n^k(z) := \zeta_{n+1}^k \cdot \left(\frac{z}{4-z}\right)^{1/(n+1)}$, con $0 \leq k \leq n$.

q_n^k mapea la recta $2+t\mathbf{i}$ en S^1 :

$$\begin{aligned} q_n^k(2+t\mathbf{i}) &= \zeta_{n+1}^k \cdot \left(\frac{2+t\mathbf{i}}{4-2-t\mathbf{i}}\right)^{1/(n+1)} \\ &= \zeta_{n+1}^k \cdot \left(\frac{2+t\mathbf{i}}{4-t\mathbf{i}}\right)^{1/(n+1)} \\ &= \zeta_{n+1}^k \cdot \left(\frac{2+t\mathbf{i}}{|4-t\mathbf{i}|}\right)^{2/(n+1)} \\ &= \zeta_{n+1}^k \cdot \left(\frac{2+t\mathbf{i}}{\sqrt{4+t^2}}\right)^{2/(n+1)} \end{aligned}$$

pero $\left|\frac{2+t\mathbf{i}}{\sqrt{4+t^2}}\right| = \frac{4}{4+t^2} + \frac{t^2}{4+t^2} = 1$, así que $q_n^k(2+t\mathbf{i}) \in S^1$. q_n^k mapea el intervalo $[2-t\mathbf{i}, 2+t\mathbf{i}]$ en un arco con centro en ζ_{n+1}^k y extremos $\left\{ \zeta_{n+1}^k \cdot \left(\frac{2-\mathbf{i}}{\sqrt{5}}\right)^{2/(n+1)}, \zeta_{n+1}^k \cdot \left(\frac{2+\mathbf{i}}{\sqrt{5}}\right)^{2/(n+1)} \right\}$.

A modo de ejemplo dibujemos $\partial B_0 \cup \dots \cup \partial B_{10}$:

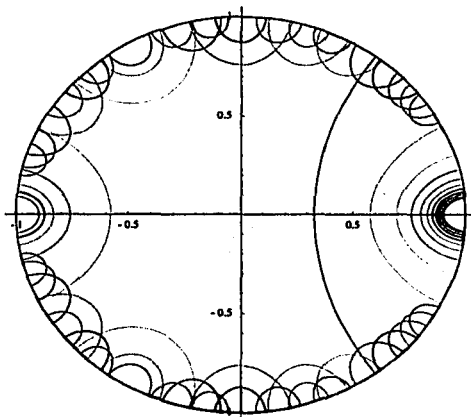


Figura 3.3.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

con cada δB_n de un color distinto.

Aquí podemos ver que hay regiones en las que podemos encontrar una única órbita periódica de período 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. En el caso de la órbita de período 8 (en azul-morado en la gráfica), la región en la que aparece siempre está contenida en la unión de otras regiones, así que en ningún caso hay una única órbita de período 8 (en azul):

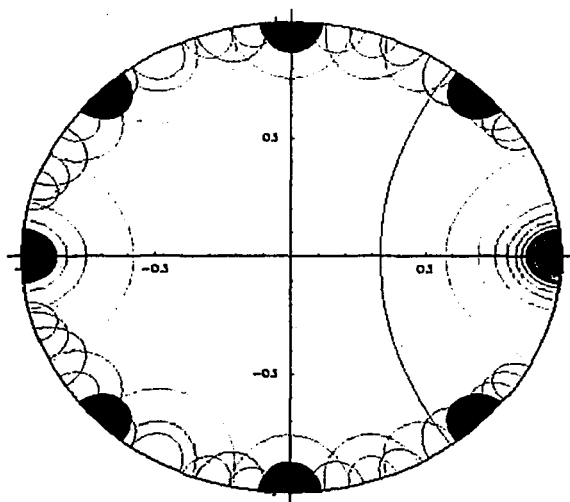


Figura 3.4.

Como mencionamos antes, si $|\alpha| \leq 1/3^{1/i}$ entonces a lo más existen órbitas de período i .

También al principio de la sección se mencionó que encontrar de forma explícita los conjuntos E_n es bastante más complicado que los B_n , la razón es la siguiente: para determinar el conjunto $\{\alpha \in \mathbb{D} : g(p_n(\alpha)) \in I_0\}$ (que es la segunda intersección de E_n) tenemos que resolver la ecuación

$$\begin{aligned} z &= g \circ p_n(z) \\ &= 4 - \frac{4\alpha^{n+2}}{1 + \alpha^{n+1}}. \end{aligned}$$

Esto es equivalente a $\alpha^{n+2} - \alpha^{n+1}(1 - z/4) - 1 = 0$.

Como ejemplo, supongamos que $n = 1$, de tal forma que la ecuación es $\alpha^3 - \alpha^2(1 - z/4) - 1 = 0$. En este caso podemos despejar α y haciendo

$$\alpha_0 := 928 - 48z + 12z^2 - z^3 + 24\sqrt{3}\sqrt{496 - 48z + 12z^2 - z^3}^{1/3}$$

obtenemos las 3 soluciones

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{12} \left(4 - z + \frac{(z-4)^2}{\alpha_0} + \alpha_0 \right) \\ \alpha &= \frac{1}{12} \left(4 - z - \frac{(1+i\sqrt{3})(z-4)^2}{\alpha_0} + (1-i\sqrt{3})\alpha_0 \right) \\ \alpha &= \frac{1}{12} \left(4 - z - \frac{(1-i\sqrt{3})(z-4)^2}{\alpha_0} + (1+i\sqrt{3})\alpha_0 \right)\end{aligned}$$

El ejemplo $n=2$ que analizamos al principio se vuelve más o menos inmanejable, y para $n \geq 3$ nos queda una ecuación de 5° grado o más.

3.2 Órbitas periódicas

En esta sección examinaremos el comportamiento de las órbitas periódicas dentro del disco D . Esto es suficiente, porque en caso de haber un punto periódico z en $\hat{\mathbb{C}} \setminus D$, alguno de los iterados de z tiene que ingresar a D en algún momento (en caso contrario z convergería a 0).

3.2.1 $F_{\alpha,\beta}^n$ es una función definida por partes

Consideremos la expresión

$$F_{\alpha,\beta}^n(z) = F_{\alpha,\beta} \circ \dots \circ F_{\alpha,\beta}(z). \quad (3.1)$$

Si la evaluamos en algún $z_0 \in D$ específico, obtenemos una secuencia de f 's y g 's. Por ejemplo, si $n=7$ la secuencia podría ser $F_{\alpha,\beta}^7(z_0) = f \circ f \circ f \circ g \circ f \circ g \circ g(z_0)$. Observemos que $F_{\alpha,\beta}(z_0) = g(z_0)$ porque $z_0 \in D$.

En (3.1) agrupemos todas las secuencias de f 's; el ejemplo queda así: $F_{\alpha,\beta}^7(z_0) = f^3 \circ g \circ f^1 \circ g \circ f^0 \circ g(z_0)$. Cuando aparezcan dos g seguidas ($g \circ g$) insertamos un f^0 ($g \circ f^0 \circ g$).

En general $F_{\alpha,\beta}^n(z) = f^{m_1} \circ g \circ \dots \circ f^{m_k} \circ g(z)$ para ciertos m_1, \dots, m_k (y necesariamente $m_1 + \dots + m_k + k = n$).

Para simplificar un poco la notación, hagamos las siguientes definiciones

$$\varphi_k(z) := f^k \circ g(z) = 2\alpha^{k+1}(1-\beta) + \alpha^{k+1}\beta z,$$

$\sigma_t: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, con $1 \leq t \leq k$ y dada por

$$\sigma_t(m_1, \dots, m_k) := t + m_1 + \dots + m_k$$

y $\sigma(m_1, \dots, m_k) := \sigma_k(m_1, \dots, m_k)$.

Si $\mathbf{m} := (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$, definamos

$$\psi_{\mathbf{m}}(z) := \varphi_{m_1} \circ \dots \circ \varphi_{m_k}$$

así que (3.1) podemos escribirla como

$$F_{\alpha, \beta}^n(z) = f^{m_1} \circ g \circ \dots \circ f^{m_k} \circ g(z) = \varphi_{m_1} \circ \dots \circ \varphi_{m_k} = \psi_{m_1, \dots, m_k}(z)$$

para algunos m_1, \dots, m_k con $m_1 + \dots + m_k + k = n$.

Se puede probar que

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{m}}(z) &= 2(1-\beta) \sum_{i=1}^k \alpha^{\sigma_i(\mathbf{m})} \beta^{i-1} + \alpha^{\sigma_k(\mathbf{m})} \beta^k z \\ &= 2(1-\beta)(\alpha^{m_1+1} + \alpha^{m_1+m_2+2} \beta + \dots + \alpha^{m_1+\dots+m_k+k} \beta^{k-1}) + \alpha^{m_1+\dots+m_k+k} \beta^k z \end{aligned}$$

Por lo tanto, un punto periódico z_0 de período $m_1 + \dots + m_k + k$ satisface $\psi_{m_1, \dots, m_k}(z_0) = z_0$. Podemos despejar a z_0 y encontrar la forma explícita del punto en función de los m_i :

$$z_0 = \frac{2(1-\beta) \sum_{i=1}^k \alpha^{\sigma_i(\mathbf{m})} \beta^{i-1}}{1 - \alpha^{\sigma_k(\mathbf{m})} \beta^k}. \quad (3.2)$$

Esto también nos muestra una convención para nombrar a los puntos periódicos: sea p_{m_1, \dots, m_k} el punto periódico de período $m_1 + \dots + m_k + k$ que es punto fijo de ψ_{m_1, \dots, m_k} . Observemos que *todos* los puntos periódicos de $F_{\alpha, \beta}$ tiene esta forma.

La expresión (3.2) depende de (m_1, \dots, m_k) , α y β . Por lo tanto, para cada $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_k) \in \mathbb{N}^k$ obtenemos una función $p_{\mathbf{m}}: \mathbb{D} \times S^1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por

$$p_{\mathbf{m}}(\alpha, \beta) := \frac{2(1-\beta) \sum_{i=1}^k \alpha^{\sigma_i(\mathbf{m})} \beta^{i-1}}{1 - \alpha^{\sigma_k(\mathbf{m})} \beta^k}$$

y por construcción, $\psi_{\mathbf{m}}(p_{\mathbf{m}}(\alpha, \beta)) = p_{\mathbf{m}}(\alpha, \beta)$ para todo $(\alpha, \beta) \in \mathbb{D} \times S^1$.

En el párrafo anterior construimos 2 familias de funciones:

$$\{\psi_{\mathbf{m}}: \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^\infty} \text{ y } \{p_{\mathbf{m}}: \mathbb{D} \times S^1 \rightarrow \hat{\mathbb{C}}\}_{\mathbf{m} \in \mathbb{N}^\infty}.$$

Ahora bien, ¿cual es la relación entre $F_{\alpha, \beta}^{\sigma(\mathbf{m})}$ y $\psi_{\mathbf{m}}$? La respuesta es: $F_{\alpha, \beta}^{\sigma(\mathbf{m})}(z) = \psi_{\mathbf{m}}(z)$ si y solo si $z \in I_{10^{m_k} 10^{m_{k-1}} \dots 10^{m_1}}$. Recordando que los elementos de $\Omega_{\sigma(\mathbf{m})}$ se caracterizan por tener itinerario constante hasta la $\sigma(\mathbf{m})$ -ésima entrada, vemos que $F_{\alpha, \beta}^{\sigma(\mathbf{m})}(z)$ se puede pensar como una función definida por partes y cuyos dominios de definición son los elementos de $\Omega_{\sigma(\mathbf{m})|_{\mathbb{D}}}$.

Por ejemplo, estos son los casos $n = 0, 1, 2$.

Si $n = 0$ entonces $\Omega_0|_D = \{I_1\}$ y la función es la propia $F_{\alpha,\beta}$ restringida a $I_1 = D$

$$F_{\alpha,\beta}(z) = \psi_0(z) = g(z) \text{ si } z \in I_1$$

Si $n = 1$ entonces $\Omega_1|_D = \{I_{10}, I_{11}\}$ y la función es

$$F_{\alpha,\beta}^2(z) = \begin{cases} \psi_1(z) = f \circ g(z) & \text{si } z \in I_{10} \\ \psi_{0,0}(z) = g \circ g(z) & \text{si } z \in I_{11} \end{cases}$$

Si $n = 2$ entonces $\Omega_2|_D = \{I_{100}, I_{101}, I_{110}, I_{111}\}$ y la función es

$$F_{\alpha,\beta}^3(z) = \begin{cases} \psi_2(z) = f \circ f \circ g(z) & \text{si } z \in I_{100} \\ \psi_{1,0}(z) = f \circ g \circ g(z) & \text{si } z \in I_{110} \\ \psi_{0,1}(z) = g \circ f \circ g(z) & \text{si } z \in I_{101} \\ \psi_{0,0,0}(z) = g \circ g \circ g(z) & \text{si } z \in I_{111} \end{cases}$$

En general la función es de la forma

$$F_{\alpha,\beta}^n(z) = \begin{cases} \psi_{v_1}(z) & \text{si } z \in I_{v_1} \\ \dots & \dots \\ \psi_{v_q}(z) & \text{si } z \in I_{v_q} \end{cases} \quad (3.3)$$

donde q es el número de elementos en $\Omega_n|_D$, $v_i \in \{0, 1\}^n$, $\sigma(v_i) = n$ y v_i' se obtiene a partir de v_i del siguiente modo: si $v_i = (m_1, \dots, m_k)$ entonces v_i' es $10^{m_k} \dots 10^{m_1}$.

Dado n , consideremos el conjunto $\sigma^{-1}(n) = \{m \in \mathbb{N}^\infty : \sigma(m) = n\}$. Este conjunto es finito y está en correspondencia 1 a 1 con $\{\psi_m\}_{m \in \sigma^{-1}(n)}$.

En vista de (3.3) y notando que los puntos fijos de una función definida por partes son los puntos fijos de cada una de las funciones componentes (en los dominios adecuados), podemos concluir que los puntos fijos de $F_{\alpha,\beta}^n$ son simplemente los puntos fijos p_{v_i} de cada uno de los ψ_{v_i} , tales que $p_{v_i} \in I_{v_i}$.

Dicho de otra forma, si queremos encontrar los puntos periódicos de $F_{\alpha,\beta}$ de período n , inmediatamente tenemos un conjunto de candidatos:

$$\{p_m(\alpha, \beta)\}_{m \in \sigma^{-1}(n)}$$

que son los puntos fijos de la familia $\{\psi_m\}_{m \in \sigma^{-1}(n)}$.

Para que uno de estos puntos $p_m(\alpha, \beta)$ sea un punto fijo de $F_{\alpha,\beta}^n$ se necesita que

$$p_{m_1, \dots, m_k}(\alpha, \beta) \in I_{10^{m_k} \dots 10^{m_1}}$$

Esto sugiere una forma de encontrar los puntos periódicos de período n :

1. Calculamos $\Omega_n|_D$.
2. Etiquetamos cada elemento de acuerdo al itinerario que sigue (hasta la posición n -ésima).
3. Calculamos $P := \{p_m(\alpha, \beta)\}_{m \in \sigma^{-1}(n)}$.
4. Para cada $p_m \in P \cap D$:
 - a) escogemos el $W \in \Omega_n|_D$ tal que $p_m \in W$,
 - b) checamos si la etiqueta de W corresponde con la m . Si esto es cierto entonces p_m es un punto periódico.

Algunas observaciones sobre este método:

- Durante el cálculo de $\Omega_n|_D$, está implícito el conocimiento del itinerario de cada elemento.
- Para checar si un candidato realmente es punto periódico solo tenemos que comparar etiquetas.
- Dado $\Omega_n|_D$, el cálculo de $\Omega_{n+1}|_D$ se puede realizar de manera "incremental".
- A pesar de que los puntos periódicos encontrados son correctos, hay una manera mucho más directa de encontrar *todos* los puntos periódicos si conocemos $\Omega(F_{\alpha, \beta})|_D$ (ver la siguiente sección).

3.2.2 Como encontrar todos los puntos periódicos de $F_{\alpha, \beta}$

Si nos proponemos encontrar las órbitas periódicas de todos los períodos que aparecen para (α, β) dados, entonces un problema es que no sabemos exactamente hasta qué n buscar. Sin embargo si sabemos que $\Omega(F_{\alpha, \beta})|_D$ es finito, lo que significa que $\Omega(F_{\alpha, \beta})|_D = \Omega_n|_D$ para cierta n . La condición que buscamos para terminar el proceso es $F_{\alpha, \beta}^{-n}(C) \cap \overline{B}_3(0) = \emptyset$; la razón es que si $|z| > 3$ entonces $|F_{\alpha, \beta}^{-n}(z)| > 3$ para todo n .

Usando el hecho de que $\Omega(F_{\alpha, \beta})|_D$ es finito, se puede concluir que el conjunto de órbitas periódicas también es finito:

Sea $z \in D$. Definamos una función

$$r(z) := \begin{cases} \min \{n > 0 : F_{\alpha, \beta}^n(z) \in D\} \\ \infty & \text{si el mínimo no existe} \end{cases}$$

que efectivamente cuenta el número de veces que hay que iterar z para que regrese a D .

Sea $B := \{z \in D : F_{\alpha, \beta}^n(z) \text{ no converge al } 0\}$. Observemos que $r|_B : B \rightarrow \mathbb{N}$, así que podemos definir una función $G : B \rightarrow B$ como $G(z) := F_{\alpha, \beta}^{r(z)}(z)$. G es la función de "primer retorno" a D para $F_{\alpha, \beta}$.

Sea $A := \{A_1, \dots, A_m\}$ el subconjunto de $\Omega(F_{\alpha, \beta})|_D$ cuyos elementos no convergen al cero. Por tanto $B = \cup A_i$. Consideremos también a la función $\mathcal{A} : B \rightarrow A$ que asigna a $z \in B$ el A_i tal que $z \in A_i$.

Sea $A_i \in A$. Como todos los puntos de A_i tienen el mismo itinerario, para cada n , $F_{\alpha, \beta}^n(A_i)$ está completamente dentro o completamente fuera de D . Además, para cada $n > 0$ existe $m \geq n$ tal que $F_{\alpha, \beta}^m(A_i) \subset D$. De la misma forma, para cada par $i, j \leq m$, con $i \neq j$, A_i tiene un itinerario distinto del de A_j (por definición). Así que cada vez que $F^n(A_i) \subset D$, $F^n(A_i)$ está completamente contenido en algún A_j . Consideremos la secuencia

$$A_i \rightarrow \mathcal{A}(G(A_i)) \rightarrow \mathcal{A}(G^2(A_i)) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}(G^{m+1}(A_i)).$$

Esta es una secuencia de la forma $A_{j_0=i} \rightarrow A_{j_1} \rightarrow \dots \rightarrow A_{j_{m+1}}$, en la que $A_{j_i} = \mathcal{A}(G^i(A_i))$ y en donde $G(A_{j_i}) \subset A_{j_{i+1}}$. Únicamente hay m componentes en A , así que $\mathcal{A}(G^{m+1}(A_i)) = \mathcal{A}(G^j(A_i))$ para algún $1 \leq j \leq m$. De hecho, es posible que incluso $\mathcal{A}(G^l(A_i)) = \mathcal{A}(G^j(A_i))$ para $l < m+1$. Sea l el menor entero que satisfice esta condición. Esto nos permite dividir a los A_i en dos clases: aquellos tales que $\mathcal{A}(G^l(A_i)) = A_i$ y aquellos para los cuales $\mathcal{A}(G^l(A_i)) \neq A_i$. Los primeros tienen un itinerario periódico y los segundos uno casi-periódico. De esto podemos concluir 2 cosas:

Proposición 3.1.

1. El período máximo de las órbitas periódicas de G es m (en cuyo caso habrá una sola órbita periódica).
2. El número máximo de órbitas periódicas que puede haber para G es m (y las órbitas son puntos fijos).
3. Existe un número finito de órbitas periódicas para $F_{\alpha, \beta}$.

Como mencioné antes, si conocemos $\Omega(F_{\alpha, \beta})|_D$ entonces hay una manera bastante directa de encontrar todos los puntos periódicos. La idea es la misma que se usó en la proposición anterior: en la secuencia

$$A_i \rightarrow \mathcal{A}(G(A_i)) \rightarrow \mathcal{A}(G^2(A_i)) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}(G^{m+1}(A_i))$$

sea l el menor entero positivo que satisfice $\mathcal{A}(G^l(A_i)) = \mathcal{A}(G^j(A_i))$ para algún $1 \leq j \leq l \leq m$. Entonces tenemos el ciclo

$$\mathcal{A}(G^j(A_i)) \rightarrow \mathcal{A}(G^{j+1}(A_i)) \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}(G^l(A_i))$$

Supongamos que conocemos los itinerarios de cada A_i . El itinerario de $\mathcal{A}(G^j(A_i))$ no puede ser 10^∞ porque A_i no converge al cero. Entonces debe ser de la forma $10^{m_0}1\dots$ para algún m_0 . Haciendo lo mismo para cada $\mathcal{A}(G^{j+s}(A_i))$ con $s=0, \dots, l-1$, tenemos una secuencia $\{m_0, \dots, m_{l-1}\}$ de tal forma que el itinerario de $\mathcal{A}(G^{j+s}(A_i))$ es $10^{m_s}1\dots$

Pero $F_{\alpha,\beta}^{m_i+1}(\mathcal{A}(G^{j+s}(A_i))) \subset \mathcal{A}(G^{j+s+1}(A_i))$, así que el itinerario de $\mathcal{A}(G^j(A_i))$ es

$$10^{m_0}1\dots10^{m_{l-1}}10^{m_0}1\dots10^{m_{l-1}}\dots$$

Si hacemos $m := (m_0, \dots, m_{l-1})$ entonces vemos que $F_{\alpha,\beta}^{\sigma(m)}(z) = \psi_m(z)$ para toda $z \in \mathcal{A}(G^j(A_i))$. Como $\mathcal{A}(G^j(A_i)) \supset \psi_m(\mathcal{A}(G^j(A_i))) \supset \psi_m^2(\mathcal{A}(G^j(A_i))) \supset \dots$ y $\text{Diam}(\psi_m^n(\mathcal{A}(G^j(A_i)))) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, entonces $\psi_m^n(z)$ converge a alguna $z_0 \in \mathcal{A}(G^j(A_i))$ cuando $n \rightarrow \infty$. Además $\psi_m^n(z_0) = z_0$, así que $z_0 = p_m$.

Solo queda por resolver un problema práctico. Definimos A como el subconjunto de $\Omega(F_{\alpha,\beta})|_D$ cuyos elementos no convergen al cero. ¿Como podemos decidir cuales elementos convergen al cero y cuales no? Aquí estamos suponiendo que conocemos los itinerarios de los elementos de $\Omega(F_{\alpha,\beta})|_D$ hasta una cierta n . Esto es bastante plausible porque como $\Omega(F_{\alpha,\beta})|_D = \Omega_m|_D$ para alguna m , entonces basta conocer los primeros $m+1$ símbolos de los itinerarios en $\Omega(F_{\alpha,\beta})|_D$ para poder distinguir una celda de otra. Bueno, recordemos que dada α podemos calcular M_α de tal forma que si el $|z| \leq 3$ y $I(z) = 10^{K_\alpha} \dots$ entonces $F_{\alpha,\beta}^{K_\alpha+1}(z) \in \mathbb{D}$. Esto es, solo necesitamos conocer los primeros $K_\alpha+1$ símbolos del itinerario de $z \in D$ para saber si converge al cero o regresa a D . Si regresa a D entonces no podemos concluir nada, pero eventualmente $F_{\alpha,\beta}^n(z)$ entrará en \mathbb{D} o caerá en un ciclo.

3.3 Comentarios finales

Como mencioné al inicio, el objetivo final de esta investigación es comprender completamente la dinámica de la familia en el caso $|\alpha| < 1$, con miras a extender los resultados a la situación $|\alpha| = 1$. En este trabajo nos hemos limitado a analizar la forma de las órbitas periódicas; sin embargo se pueden plantear ya varias cuestiones que serán abordadas en una siguiente fase.

Una situación que se observa en el programa es que cuando $|\alpha| \rightarrow 1$ entonces el número de órbitas periódicas crece tanto como se desee (aparentemente). De hecho parece haber una relación entre $|\alpha|$ y $\text{Card}(\text{Per}(F_{\alpha,\beta}))$; por ejemplo una conjetura sería que al menos para palabras de la forma $f^n \circ g$ siempre es posible encontrar $\alpha \in \mathbb{D}$ de tal forma que $p_n(\alpha)$ es un punto fijo de $F_{\alpha,\beta}^{n+1}$ (para cualquier n).

Otro aspecto que necesita examinarse con detalle es bajo que condiciones surgen puntos periódicos que son puntos fijos de palabras de la forma $f^{m_1} \circ g \circ \dots \circ f^{m_k} \circ g$.

También sería extremadamente útil poder dar una cota para $\text{Card}(\Omega(F_{\alpha,\beta})|_D)$ que dependa explícitamente de (α, β) .

Finalmente queda por examinar la transición entre $|\alpha| < 1$ y $|\alpha| = 1$.

Apéndice A

El programa de computadora

El programa está hecho en el lenguaje C++, y utiliza la biblioteca Qt de trolltech (<http://www.trolltech.com>) para el manejo de la interfaz gráfica. Toda la programación fue hecha en Linux; sin embargo existen versiones (aunque no libres) de Qt para MS-Windows y MacOS, así que en principio se podría compilar el programa para que pudiera ejecutarse en estas plataformas.

La ventana principal contiene 3 "paneles"; el primero pinta $\bigcup_{i=0}^n F_{\alpha,\beta}^{-i}(C)$, el segundo $\bigcup_{i=0}^n F_{\alpha,\beta}^i(C)$ y el tercero $\bigcup_{i=-n}^n F_{\alpha,\beta}^i(C)$.

Además contiene controles para seleccionar los parámetros (α, β) . Usando el mouse es posible hacer "zoom" en alguna región en particular; también es posible agregar puntos y líneas arbitrarias e iterarlos hacia adelante o hacia atrás independientemente del panel en el que se encuentren.

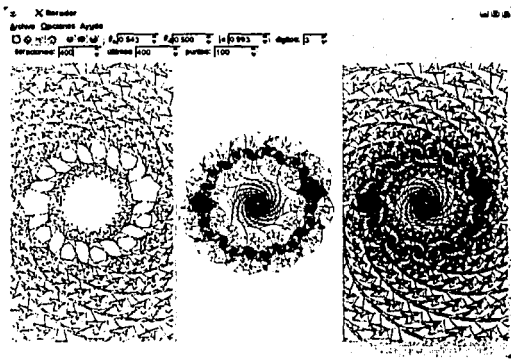


Figura A.1.

La función principal del programa es calcular $F_{\alpha,\beta}^n(D)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Se manejan de manera separada los casos $n \geq 0$ y $n < 0$.

Se definen varias clases:

Segmento Representa un arco de círculo.

IRegion Es una lista de objetos **Segmento** y representa una elemento de la partición Ω_n . La rutina principal es **divide**, que determina si la región ha intersectado a $F_{\alpha,\beta}(D)$ y determina las nuevas regiones que se formaron a partir de esta intersección. Si la región es $W \in \Omega_n$, entonces calcula los $\{W_i\} \subset \Omega_{n+1}$ tales que $W_i \subset W$.

Grafica Esta clase contiene toda la información necesaria para iterar $F_{\alpha,\beta}$ o $F_{\alpha,\beta}^{-1}$. Se encarga de llamar a la función **divide** de **IRegion** para cada elemento $W \in \Omega_n$. También maneja la interacción del mouse.

FuncBase, FuncF y FuncFi **FuncBase** representa la función $F_{\alpha,\beta}$, y contiene rutinas para evaluar f ó g . En realidad es una clase base; las clases derivadas **FuncF** y **FuncFi** son las que realmente se usan para evaluar $F_{\alpha,\beta}$ y $F_{\alpha,\beta}^{-1}$, respectivamente. Aquí se usa una técnica interesante que se conoce como *The Curiously Recursive Template Pattern*, y consiste en que **FuncBase** es una clase parametrizada por alguna clase derivada. En las funciones que necesitan evaluar $F_{\alpha,\beta}$ simplemente se usa un objeto de la clase base y no de las derivadas como normalmente se haría. Esto tiene la ventaja de que se evita el uso de llamadas a funciones virtuales que en C++ son menos eficientes que las llamadas a funciones normales.

Una de las limitaciones del programa es que en algunas situaciones se puede perder rápidamente precisión al hacer los cálculos. Esto ocurre por ejemplo cuando se magnifica la imagen muchas veces, o cuando Ω_n no deja de crecer al aumentar n ($|\alpha| \approx 1$). Afortunadamente es fácil observar cuando los cálculos son incorrectos.

Bibliografía

- [Cru03] Manuel Cruz. The dynamics of a piecewise conformal two-parameter family. 2003.
- [Dev89] Robert L. Devaney. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Addison-Wesley, 2nd edition, 1989.
- [Goe] Arek Goetz. Piecewise isometries - an emerging area of dynamical systems.
- [JS97] Gareth A. Jones y David Singerman. *Complex Functions, an algebraic and geometric viewpoint*. Cambridge University Press, 1997.
- [KH96] Anatole Katok y Boris Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*. Cambridge University Press, 1996.
- [LM95] Douglas Lind y Brian Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, 1995.

