00324
11

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

" LAS CONICAS A TRAVES DE LUGARES GEOMETRICOS, CONSTRUIDAS CON CABRI ".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

H U G O E S P I N O S A P E R E Z

DIRECTOR DE TESIS: JULIETA DEL CAMEN VERDUGO DIAZ
DIRECTOR DE TESIS: [illegible]BERTO BRISEÑO AGUIRRE

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

1

PAGINACION DISCONTINUA

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVFNMA DE
MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Las cónicas a través de lugares geométricos, construidas con Cabri"

realizado por Hugo Espinosa Pérez

con número de cuenta 7023997-1, quien cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Mat. Julieta del Carmen Verdugo Díaz	
Director de Tesis Propietario	Mat. Luis Alberto Briseño Aguirre	
Propietario	Dr. Luz Manuel Santos Trigo	
Suplente	Dr. Oscar Alfredo Palmas Velasco	
Suplente	M. en C. Francisco Struck Chávez	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. JOSÉ ANTONIO GÓMEZ ORTEGA

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1. a

Las cónicas a través de lugares geométricos, construidas con Cabri.

Hugo Espinosa Pérez

UNAM

1. b

Con respeto a mis maestros:
Francisco Zubieta Russi y Mari Carmen Azorín.
Por lo que de su saber, no he olvidado.

Agradecimientos a:

Donata Pérez, mi madre, quien sabe del dicho: ganar el pan con el sudor de su frente.

Dora Espinosa, Eloy Espinosa, Yolanda Espinosa, Dario Espinosa y Eduardo Espinosa, con quienes me une la sangre y el deseo de ser.

María Antonieta Rubalcaba, quien hizo posible que fuéramos posibles.

Eva Sánchez, quien comparte conmigo alegrías y tristezas.

Hewi Espinosa, quien un día se volvió esclavo de las letras.

Yoatzin Espinosa, a quien la ira no llegue a su corazón.

Cointa González y Juan Sánchez, mis suegros, con quienes aprendí a utilizar las manos.

Juana, Teresa, María, Raúl, Angel, Javier, Roberto y Pilar, todos Sánchez, quienes son parte de mi otra familia.

Fortino Escareño, quien me dio un libro y no teme a los gerundios.

Eduardo Mancera, quien me propuso un esquema que organizara este trabajo.

Manuel Santos, a quien le gustaron los problemas y escribimos un artículo.

Bernardo Camou, quien desde Uruguay dio solución e hizo suyo el problema 11.

Olivia González, quien me proporcionó una licencia de Cabri Geometre.

Jorge Galicia, quien es mi compadre y compartimos las primeras materias en la Facultad.

Didia Rico, quien leyó este trabajo y compartimos las últimas materias en la Facultad.

Alicia Ávila, quien sabe de enseñar matemáticas a los niños.

David Block, quien con Juan Carlos disfrutamos de la música los viernes de un tiempo.

María Teresa Campos, quien es mi amiga y sabe de mi deseo de titularme.

Silvia García, a quien le gusta la geometría analítica y me dio un libro.

Claudia Navarro, quien dio punto final a este trabajo.

Francisco Struck, sinodal de este trabajo, quien miró mis avances en geometría.

Oscar Palmas, sinodal de este trabajo, a cuya lectura tuve que mejorarlo.

Julieta Verdugo, quien creyó en este trabajo y accedió dirigirlo.

Luis Briseño, quien dirigió este trabajo, cuyas preguntas y sugerencias le dieron claridad.

La Facultad de Ciencias, donde se seguirán formando los buenos matemáticos de México.

La Universidad Nacional Autónoma de México, cuyo viejo reglamento, me permitió llegar.

1. C

Índice

1. d

Proemio

¿Es posible estudiar las cónicas a partir de propiedades relacionadas con la geometría euclidiana? No fue la pregunta que dio origen a este trabajo, sin embargo, es aquella que de una u otra manera teje y entreteje las ideas que nos llevaron a plantear problemas que dieran origen a las cónicas.

Al encontrar que ciertas construcciones realizadas con regla y compás, generaban alguna cónica, nos dimos cuenta que el uso de estos instrumentos tendrían que ser revalorados, aunque ahora se trataba de una regla y un compás virtuales dados por el programa de computadora Cabri Geometre, que permiten realizar trazos con una precisión que no se logra con los instrumentos clásicos; asimismo, esos "instrumentos" posibilitan, según las necesidades del problema, realizar la misma construcción las veces que se considere necesario.

Si este reconocimiento fue importante para este trabajo, el hecho de demostrar mediante argumentos de geometría euclidiana, que una cierta curva generada a partir de una construcción llevada a cabo con "regla y compás", era una cónica, nos alentó a la búsqueda de construcciones similares. No siempre fue posible lograr este propósito: la demostración de que las curvas generadas en el problema 11 del segundo capítulo, corresponden a las cónicas, tiene su fundamento en resultados de geometría analítica. Lo hemos incluido porque fue el primer problema que al dar movimiento a un cierto punto de la construcción nos llevó a generar todas las cónicas.

El hecho de buscar que la demostración de la "conicidad" de una curva estuviera centrada en resultados de geometría euclidiana nos llevó a funcionalizar algunos de los resultados de esta geometría. Digamos que para nosotros cobraron sentido teoremas como: Las tangentes trazadas desde un punto exterior a una circunferencia son iguales o la mediatriz de un segmento es el conjunto de puntos que equidistan de sus extremos, etcétera.

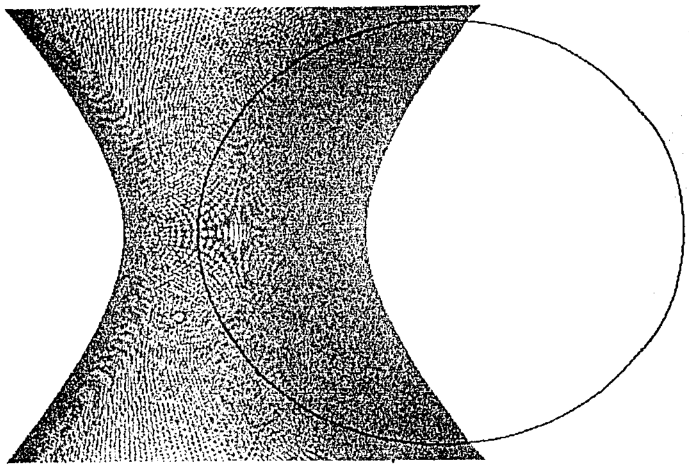
Si las ideas expuestas anteriormente fueron determinantes para proponernos el trabajo que aquí se consigna, la siguiente cuestión fue vital a nuestro interés: ¿cuántas veces habíamos utilizado las definiciones de las cónicas para resolver algún problema relacionado con estas curvas?, con seguridad fueron muchas; el hecho fue que los problemas que resolvimos nos aclararon el porque la definición de cónica, es una buena definición; esto es, como el lugar geométrico que describe un punto que se mueve sujeto a cierta condición; por ejemplo, la parábola como el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que su distancia a una recta fija situada en el plano, es siempre igual a su distancia a un punto fijo del plano que no pertenece a la recta.

En este trabajo la mayoría de las demostraciones están ligadas a las definiciones de las cónicas, aunque también hacemos uso de otros resultados como la propiedad de las tangentes.

En el primer capítulo hacemos un breve recorrido por los comandos básicos del programa Cabri Geometre, que permita agilizar la lectura de los dos capítulos siguientes.

En el segundo capítulo, el fundamental para nuestro trabajo, exponemos once problemas que generan las cónicas. Son dos tipos de problemas que abordamos: problemas en los que la construcción está sujeta a ciertas condiciones y, problemas en que la construcción está dada. Si bien el último capítulo contiene una serie de problemas para que un futuro lector los resuelva, hemos considerado pertinente incorporar en este capítulo algunos de estos problemas, que se derivan de los once que aquí se discuten.

Como señalamos en el párrafo anterior, el último capítulo está constituido por problemas que proponemos; unos porque no los hemos resuelto o que hemos resuelto pero consideramos serán de interés para un lector de este trabajo.



Declaración de principios

Es importante la idea, pero es más importante lo que se puede hacer con la idea.

En una de las sesiones que tuve con la profesora Julieta Verdugo y el profesor Luis Briseño para analizar algunos aspectos de este trabajo, me hicieron la siguiente pregunta: ¿Cuál es la metodología que utilizaste para generar las cónicas? La pregunta me hizo escribir esta declaración de principios, en la cual espero dar cuenta de los caminos (no de una metodología) que me llevaron a construir las cónicas mediante un programa como Cabri.

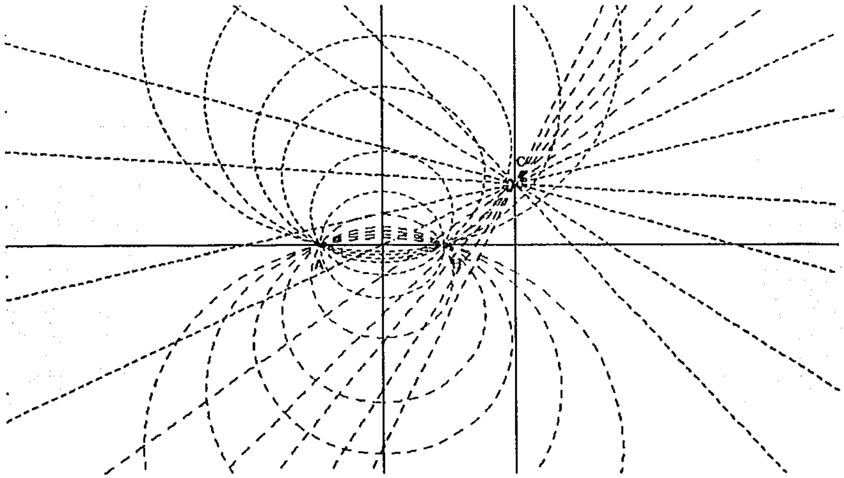
En principio, estuve interesado en resolver problemas relacionados con construcciones geométricas. Sin embargo, problemas en los que la construcción que se pide realizar está sujeta a condiciones dadas, fueron los que me llevaron al estudio de las cónicas a partir de elementos de geometría euclidiana.

He elegido tres problemas que servirán para ilustrar los caminos que me condujeron, desde la determinación de la cónica, hasta la demostración de que efectivamente era una cónica. Mostraré la forma en que realicé las construcciones y haré los comentarios pertinentes en los que pondré de manifiesto las ideas que me guiaron.

- *Problema 1. Trazar una circunferencia que pase por dos puntos fijos A y B, cuyo centro O esté sobre una recta l. (Francisco Zubieta Russi)*

La construcción es sencilla de realizar: El centro de la circunferencia tiene que estar sobre la mediatriz del segmento AB y, debe coincidir con el punto de intersección de la mediatriz con la recta *l*. Una vez realizada la construcción, observé que la recta en la cual se quiere que esté el centro de la circunferencia que se desea trazar puede tener cualquier inclinación (respecto a la posición del segmento AB). De esta manera, tracé varias rectas y en cada una localicé el centro de una circunferencia de mayor o menor diámetro que la primera, que también satisface las condiciones del problema.

Más adelante me di cuenta que el resultado era válido aun cuando la recta *l* fuera paralela a la mediatriz de AB. En este caso, el radio de la circunferencia es infinito. En la figura que se muestra a continuación, la circunferencia de radio infinito está representada por la línea que pasa por los puntos A y B. El punto C es un punto a partir del cual se trazan las distintas rectas en las que tienen su centro las circunferencias que satisfacen las condiciones del problema.



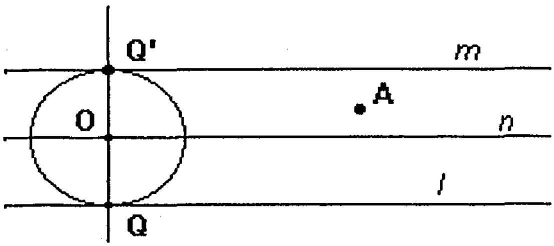
El problema fue resuelto utilizando el programa de manera estática, es decir, como si tuviese una regla, un compás y una hoja en blanco en la cual realizar los trazos; aunque sin la precisión que ofrece el programa.

- *Problema 2. Dadas dos rectas l y m paralelas y un punto A entre ellas, construir una circunferencia tangente a las dos rectas que pase por el punto A.*

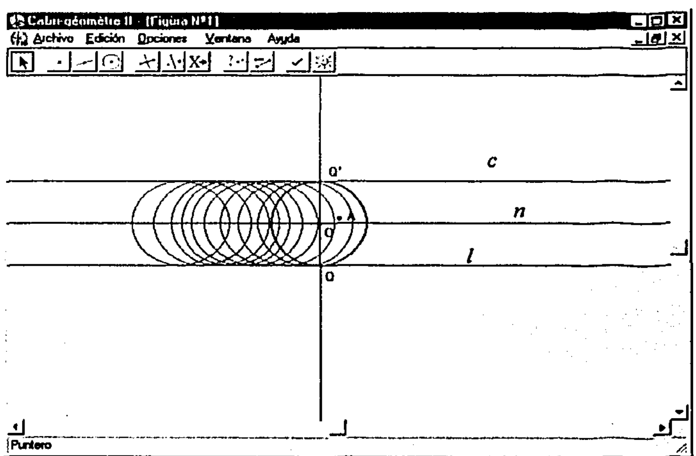
La construcción que plantea el problema me llevó a utilizar el movimiento. A continuación expongo cómo utilicé esta posibilidad que ofrece el programa.

En primer lugar, el centro de la circunferencia a trazar tiene que estar en una paralela que equidiste de las rectas *l* y *m*. Con esta idea, elegí un punto Q en *l* y tracé en ese punto una perpendicular a *l*. Llamaré Q' el punto en que la perpendicular intersecta a la recta *m*. La paralela (*n*) que equidista de *l* y *m* es la mediatriz de QQ'.

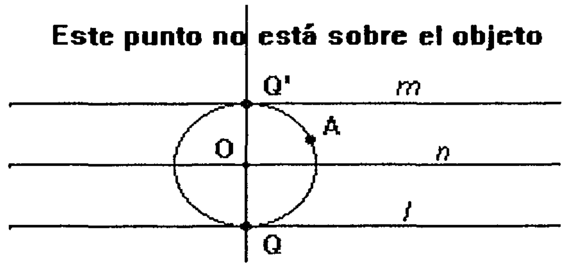
En segundo lugar, el radio de la circunferencia buscada debe ser igual a la mitad del segmento QQ'. Así, con ese radio y centro O (punto medio de QQ'), tracé una circunferencia, como se observa en la siguiente figura.



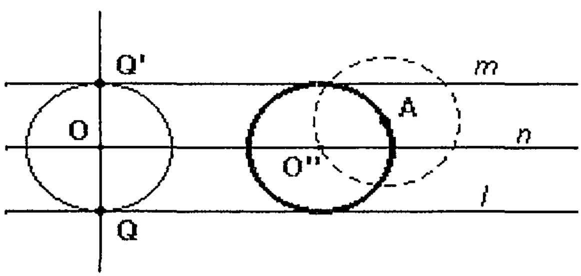
Como el punto Q se puede desplazar sobre la recta *l*, al mover este punto, la circunferencia de centro O mantiene la condición de ser tangente (por construcción) a las rectas *l* y *m*. De modo que al desplazar Q, en algún punto O" de la recta *n*, la circunferencia con ese centro tocará al punto A. En la figura que se muestra a continuación, se activó el comando "traza" para la circunferencia de manera que al desplazar el punto Q, la circunferencia va dejando su huella, es decir, un conjunto de circunferencias tangentes a *l* y *m*.



Como se dijo antes, alguna de esas circunferencias pasará por el punto A. Al realizar el desplazamiento hasta que a "ojo" la circunferencia quede sobre A, parece que se obtiene la solución del problema, sin embargo, al activar el comando "pertenece", esto es, se pregunta si el punto A está sobre la circunferencia, el programa indica que no, como se muestra en seguida.

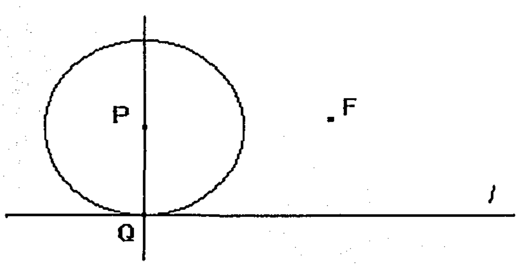


Sin embargo, esta situación me permitió trazar la circunferencia que se pide: De acuerdo a la figura, si A estuviera sobre la circunferencia, la distancia OA debe ser la misma que la distancia OQ. En consecuencia para resolver el problema, tracé mediante el comando "compás" una circunferencia de centro A y radio OQ. El punto O", en que dicha circunferencia corta a la recta *n*, (en realidad la corta en dos puntos) es el centro de la circunferencia solución del problema. En la figura que se muestra abajo aparece sólo una de las circunferencias que son tangentes a *l* y *m* que pasa por el punto A.

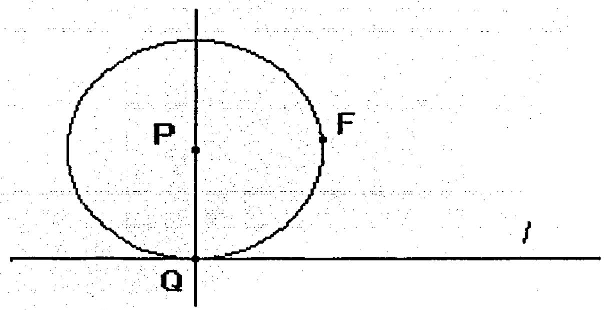


Como he mostrado, la posibilidad de mover el punto Q sobre la recta *l* fue la clave para que me percatase de cómo construir la circunferencia que el problema plantea.

- *Problema 3. Dada una recta l y un punto F fuera de la recta, construir una circunferencia tangente a la recta que pase por el punto F.*



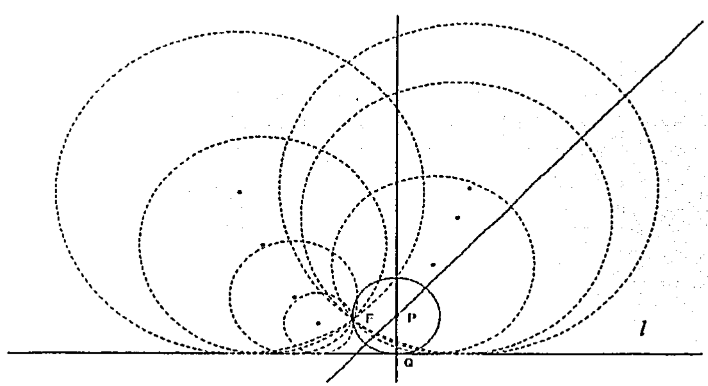
Para realizar la construcción, de manera análoga al *problema 2*, construí una circunferencia que fuera tangente a la recta en un punto Q, como la que se muestra en la figura.

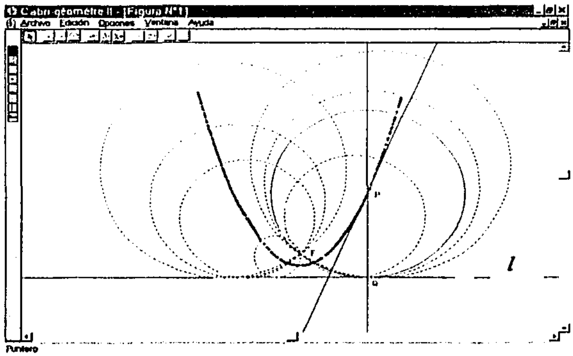


A continuación desplacé el punto Q hasta que a "ojo" la circunferencia tocara el punto F. En la figura siguiente se observa la circunferencia de centro P en una posición tal que parece satisfacer las condiciones del problema.

La observación de esta figura me llevó a la construcción: dado que Q y F deben estar sobre la circunferencia, entonces P debe equidistar de ambos puntos. Es decir, P debe ser la intersección de la mediatriz de QF y la perpendicular a *l* levantada en Q. Así, el problema se resuelve al trazar la mediatriz del segmento QF. El punto P, intersección de la mediatriz y la perpendicular a *l* levantada en Q, es el centro de la circunferencia tangente a *l* que pasa por el punto F, su radio es PQ = PF.

Una vez que encontré la solución al problema, me di cuenta que había más de una solución: Para cada punto Q de la recta *l* se puede realizar la construcción indicada anteriormente. En la siguiente figura se muestran algunas de estas circunferencias.

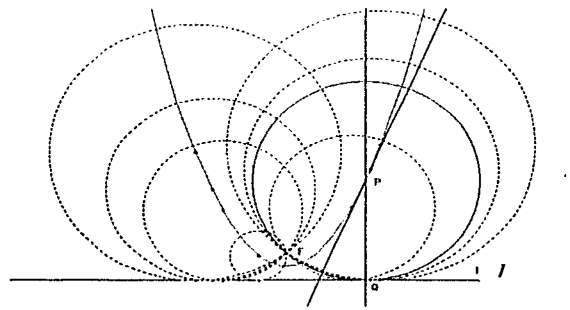


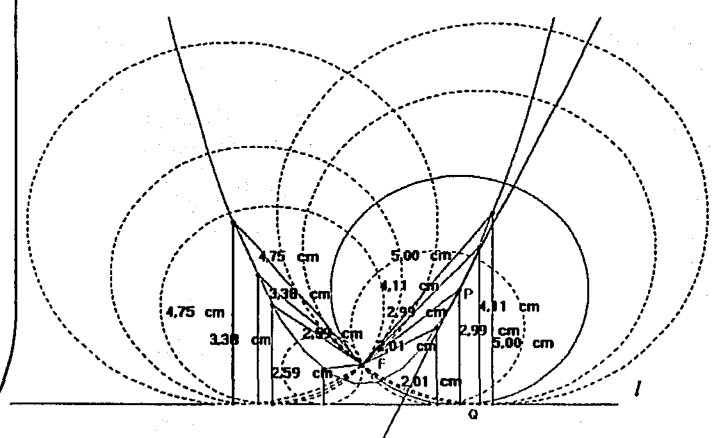


Cuando observé la disposición de los centros de las circunferencias me pareció que estaban sobre una parábola. Al activar el comando "traza" para el punto P y mover Q sobre la recta *l*, observé la huella que describe lo que parece ser el de una parábola, como se observa en la figura.

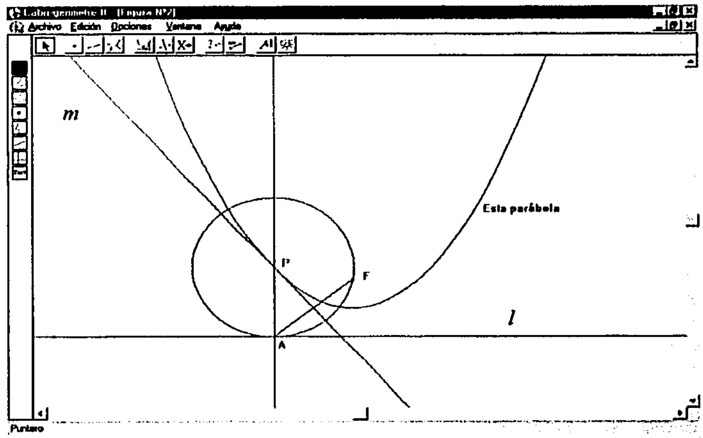
Al activar el comando "lugar geométrico" para el punto P, la parábola apareció en la pantalla. Como se muestra a continuación.

La figura evidencia que el foco de la parábola es el punto F y la recta *l* su directriz. Para verificar empíricamente que la apreciación era correcta, utilicé el comando "distancia longitud" que permite medir entre otros objetos geométricos, un segmento o la distancia entre dos puntos. En la figura siguiente se observa que la medida de las distancias de los centros de las circunferencias a la recta *l* y al punto F es igual para cada par de medidas.

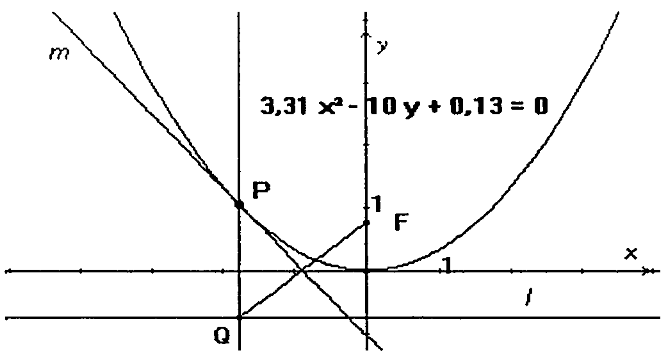




Naturalmente lo anterior no es una demostración, pero es una buena razón para suponer que la curva es una parábola. El programa proporciona otras evidencias: al trazar la curva mediante el comando "cónica" y señalarla con el puntero, el programa escribe el nombre de la cónica de que se trata. Ver la figura de arriba.



Por otra parte, al activar el comando "ecuación y coordenadas" el programa proporciona la ecuación de la curva. La ecuación depende del sistema cartesiano definido por el programa. Este sistema puede ser modificado y en consecuencia la ecuación. En la siguiente figura el origen del sistema cartesiano se llevó de manera que coincida con el vértice de la parábola.

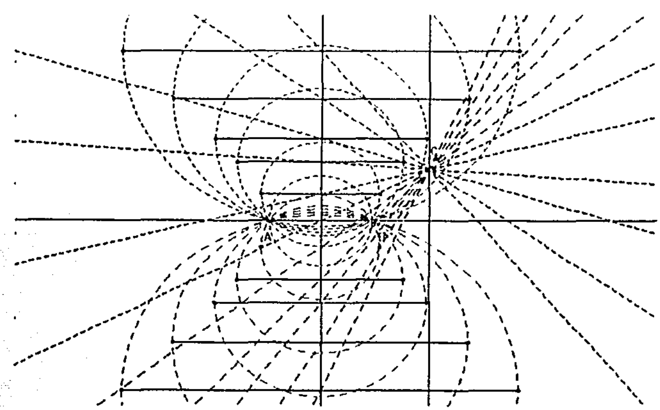


Pero las evidencias del programa no constituyen una prueba, ésta se construye con argumentos lógicos. Una de las primeras ideas que tuve para la demostración fue utilizar un sistema cartesiano y obtener la ecuación, tal y como se mostraba en la pantalla. Abandoné esta idea cuando me di cuenta que la prueba era directa: sólo se requiere aplicar la definición de parábola y utilizar resultados de geometría euclidiana, como se muestra a continuación:

Por construcción, PQ = PF (P está en la mediatriz de QF) y dado que PQ es perpendicular a *l* en el punto Q, se satisface la definición de una parábola de foco el punto F y directriz la recta *l*. Este resultado muestra que el lugar geométrico de P, centro de la circunferencia que es tangente a la recta *l* que pasa por el punto F, es una parábola cuando Q varía en la recta *l*.

La sencillez de esta demostración y el procedimiento que me llevó a encontrarla, me motivó a buscar otros problemas que llevaran a determinar alguna cónica como lugar geométrico de algún punto, cuya demostración fuera de la misma naturaleza que la anterior. En principio no tenía idea de cuáles podrían ser. Me propuse regresar con otra óptica a los problemas que había resuelto.

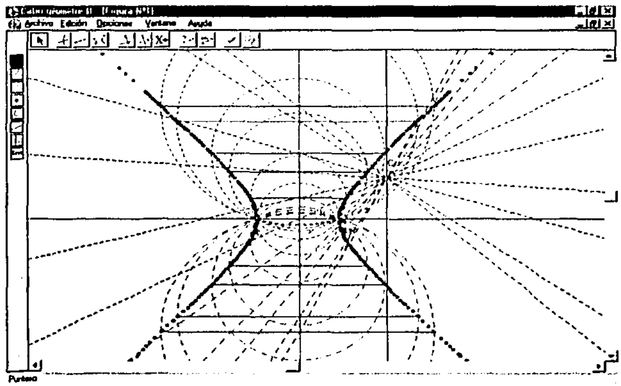
La situación anterior me planteó el problema de dar movimiento a las construcciones. Así en el problema: *Trazar una circunferencia que pase por dos puntos fijos A y B tal que su centro pertenezca a una recta l.* Al observar la configuración de las circunferencias que ta y que satisfacen las condiciones del problema, noté que los puntos extremos de los diámetros perpendiculares a la mediatriz de AB de las circunferencias que pasan por los puntos A y B, se iban alejando simétricamente respecto a la mediatriz del segmento AB.



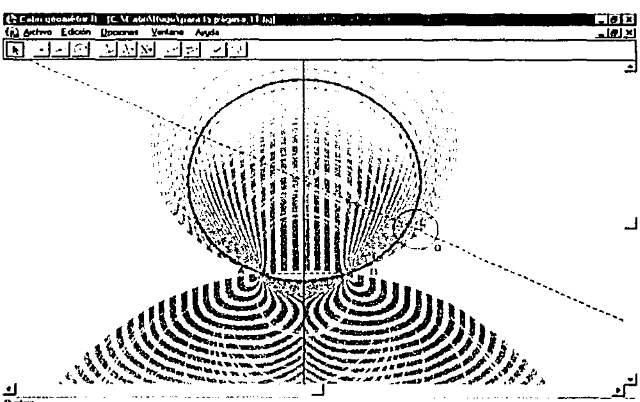
Al trazar los diámetros y marcar sus puntos extremos, no tuve duda de que los puntos debían estar sobre una hipérbola. Es importante señalar que mi observación fue producto de una mera intuición, en el caso de este problema resultó cierta; no siempre fue así. Quizás sea lamentable no dejar en este trabajo las más de mis equivocaciones. En la figura anterior se puede observar mi apreciación.

Al "tomar" con el ratón una de las rectas en las cuales está uno de los centros de las circunferencias que pasan por los puntos dados y, al activar el comando "traza " para los puntos que son extremos del diámetro de la circunferencia y mover la recta, la huella de esos puntos parecen corresponderse a la de una hipérbola, como se muestra a continuación

Sin embargo, no me era posible utilizar el comando "lugar geométrico". Este comando requiere de dos puntos: el que se mueve con la construcción y describe la curva y el que hace que la construcción se mueva.



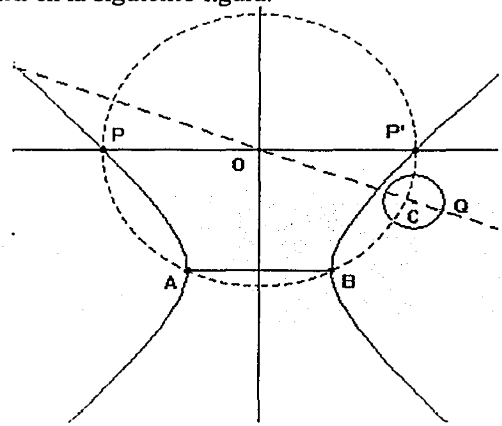
La solución la encontré construyendo una circunferencia auxiliar de centro C y radio arbitrario, de manera que la recta *l* esté definida a partir del punto C y de un punto Q que se tome sobre la circunferencia de centro C. Al hacer que Q recorra la circunferencia en la cual fue definida, la recta así trazada gira alrededor del punto C.



Una vez trazada la circunferencia que satisface las condiciones del problema, al mover Q, se van generando todas las circunferencias que pasan por los puntos A y B tal que cada una tiene su centro una recta, como se muestra en la figura.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

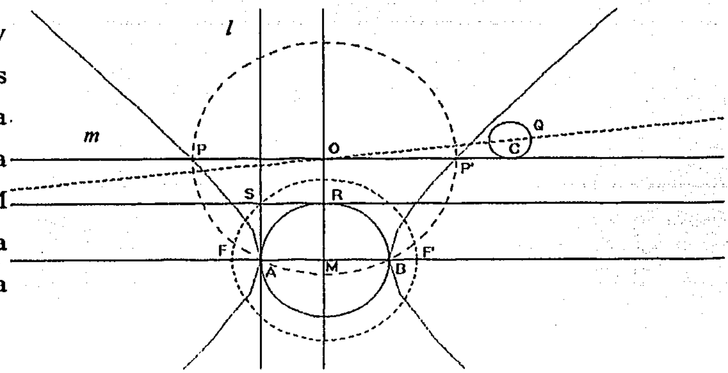
En esta situación, me fue posible utilizar el comando "lugar geométrico" que permite que el programa muestre la curva que describen los puntos P y P'(extremos del diámetro de una de las circunferencias que pasa por los puntos A y B) cuando Q recorre la circunferencia de centro C, como se muestra en la siguiente figura.



Como en el caso del problema que dio lugar a la parábola, utilicé los comandos "cónica" y "ecuación y coordenadas", en cada caso, el programa indicaba que se trataba de una hipérbola, además equilátera (el programa así lo señala), pero ¿dónde se hallan los focos? No hubo otra que ir a los libros y leer o preguntar a otros. Un hecho salió a la luz: si se conocen los vértices A y B de una hipérbola equilátera, al trazar:

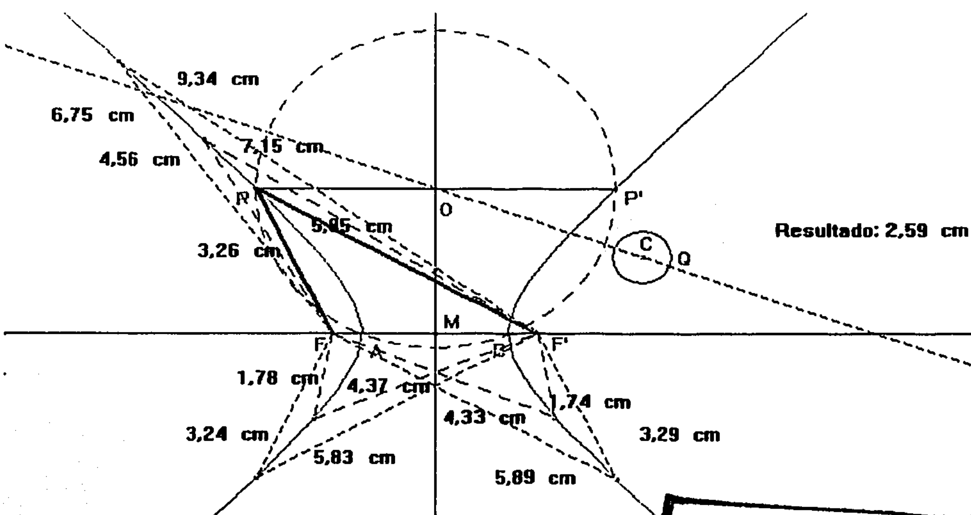
- *La circunferencia de centro M y radio MA, donde M es punto medio del segmento AB.*
- *Una paralela (l) a la mediatriz de AB, levantada en uno de los vértices de la hipérbola, por ejemplo el vértice A.*
- *La perpendicular (m) a la recta l trazada en uno de los puntos (R) en que la circunferencia de centro M y radio MA corta a la mediatriz de AB y*
- *La circunferencia de centro M y radio MS, donde S es punto de intersección de las rectas l y m respectivamente.*

Se localizan los focos (F y F') de la hipérbola. Estos puntos corresponden a la intersección de la circunferencia de centro M y radio MS, con la recta AB, como se muestra en la figura:

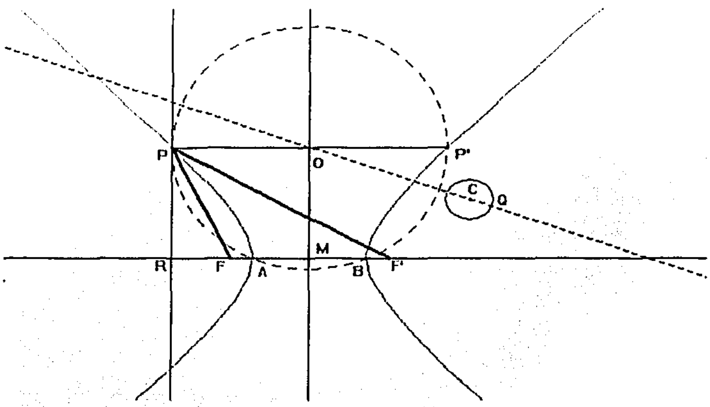


La construcción anterior me permitió utilizar el comando "distancia y longitud" para verificar empíricamente que la diferencia de las distancias a los focos a por ejemplo, el punto P es constante. En efecto, al mover el punto Q en la circunferencia de centro C, la diferencia de las distancias es la misma para cualquier posición de Q en la circunferencia.

En la figura que se muestra a continuación, se trazaron varios segmentos que unen a los focos de la hipérbola con distintos puntos de la misma. Se puede ver que para cada par de medidas la diferencia es la misma, en este caso, igual a 2.59.



Las evidencias eran contundentes, pero había que establecer la demostración. Pasó buen tiempo antes de que diera con la prueba. Ésta se derivó de un resultado de geometría euclidiana: Si de un punto exterior a una circunferencia se trazan a ella una secante y una tangente, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa. En la siguiente figura la recta PR es tangente en P a la circunferencia y la recta AB es secante a la circunferencia de centro O



La siguiente observación me permitió escribir la demostración: al desplazar Q sobre la circunferencia de centro C, la secante AB se mantiene fija y las distancias PR, RA y RB varían. Entonces, al establecer un sistema cartesiano, tal que el eje Y coincida con la mediatriz de AB y el eje X con la recta AB, la relación que se deriva del resultado enunciado anteriormente, se puede escribir en términos de x y y. Al hacer que:

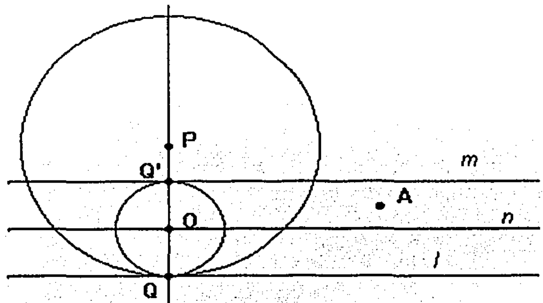
$PR = y$; $MR = -x$ y $AB = 2a$ obtenemos: $MA = a = MB$; $RA = (-x - a)$ y $RB = (a - x)$ y dado que $PR/RA = RB/PR$ entonces: $PR^2 = (RA)(RB) = (-x - a)(a - x)$ que representa la ecuación de una hipérbola equilátera.

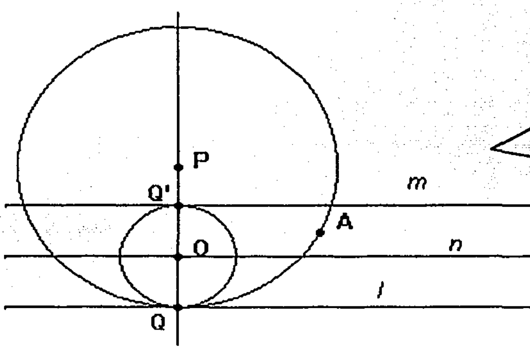
Si bien tuve necesidad de utilizar un sistema cartesiano, la demostración tiene su fundamento en un resultado de geometría euclidiana, que de alguna manera correspondía al tipo de demostración que había encontrado para el caso de la parábola.

Otra idea que utilicé para encontrar problemas que dieran lugar a cónicas, fue resolver un mismo problema utilizando distintos procedimientos. En el segundo capítulo de este trabajo, se discute ampliamente un problema que resolví de varias maneras tal que una de las construcciones da lugar a varias parábolas. Para ilustrar, mostraré cómo al resolver mediante otro procedimiento el problema:

- *Dadas dos rectas paralelas y un punto A entre las dos rectas, construir una circunferencia tangente a las dos rectas y que pase por el punto A*, se generó una parábola.

Al observar la construcción auxiliar que me había servido para resolver el problema,
Me percaté que si trazaba una circunferencia que tuviera su centro P en la recta QQ' (perpendicular en Q a la recta *l*), como la que se muestra.

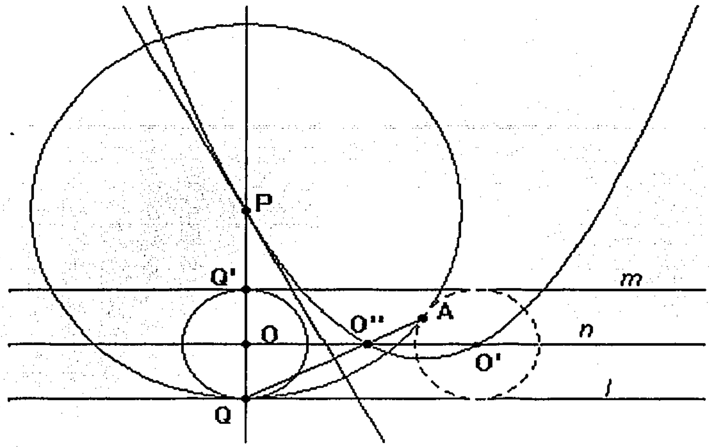




Al desplazar el punto Q sobre la recta *l*; en cierto momento la circunferencia de centro P toca el punto A, como se muestra a continuación.

La configuración anterior me recordó el problema: *Dada una recta l y un punto A fuera de la recta, construir una circunferencia tangente a la recta pase por el punto A,* en que el lugar geométrico del punto P, centro de la circunferencia que es solución del problema describe una parábola.

Así, en el caso del problema que me ocupa, al trazar la parábola, ésta intersecta a la recta *n* en dos puntos O' y O'' y, dado que cada punto de la parábola equidista de la recta *l* y del punto A, entonces, por ejemplo, la circunferencia de centro O' y radio O'A es solución del problema, como se muestra en la siguiente figura,

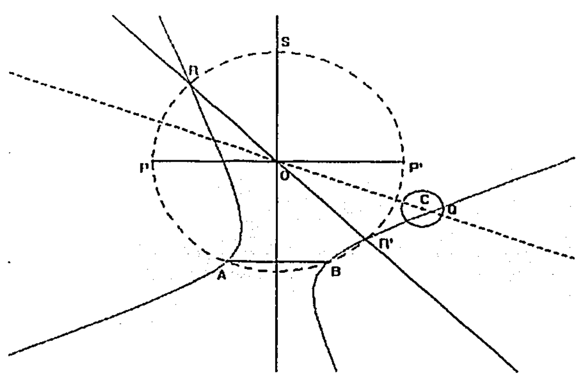


La solución anterior no es posible llevarla a cabo utilizando regla y compás, la construcción puede realizarse, como he mostrado, mediante un Programa como Cabri.

Para finalizar esta Declaración de principios, quiero señalar una idea que me ayudó a descubrir si en una construcción algún punto de ella generaba una cónica. El secreto: activar para un punto de la construcción el comando "lugar geométrico" y ver si aparece alguna cónica. La idea parece muy simple, sin embargo, hay que decir que cada vez la intuición para visualizar si un punto dado generaba una cónica es asunto que poco o poco fui desarrollando. Un ejemplo:

En la construcción del problema:

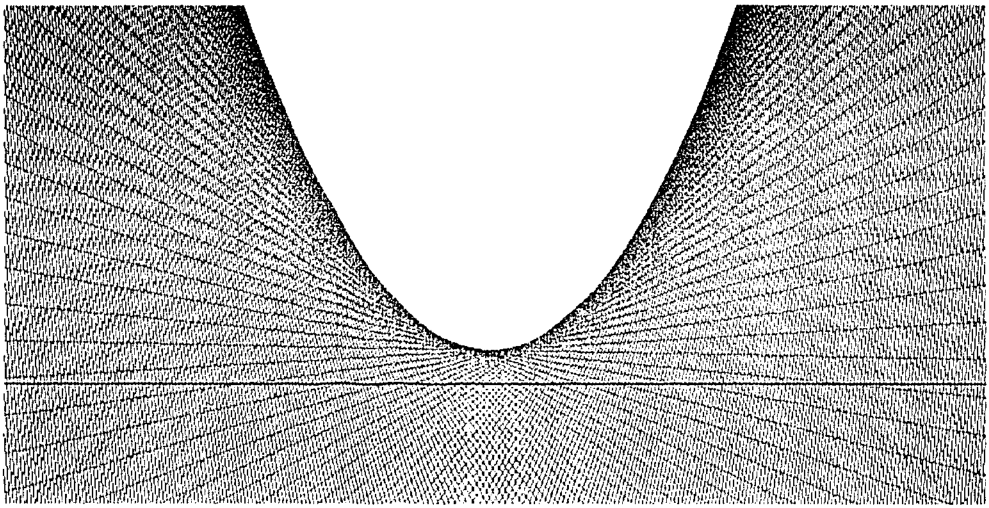
- *Trazar una circunferencia que pase por dos puntos fijos A y B y que tenga su centro en una recta l.*



al trazar la bisectriz del ángulo POS, ésta corta a la circunferencia de centro O en los puntos R yR'. Al activar el comando "lugar geométrico" para esos puntos, se observa que los puntos de referencia describen una hipérbola, como se muestra en la figura de la página anterior

El problema ahora es demostrar que la curva que se observa es efectivamente una hipérbola, y lo proponemos al lector.

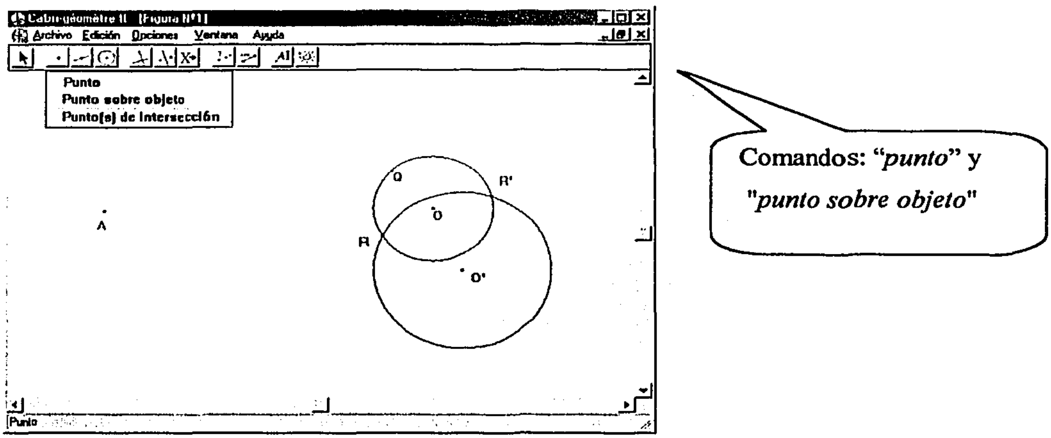
Finalmente, cabe decir que las construcciones y demostraciones de la "conicidad" de las curvas que se consideran en esta tesis, tienen tras de sí un trabajo similar al que en estas líneas he intentado describir.



Capítulo I
Los comandos de Cabri

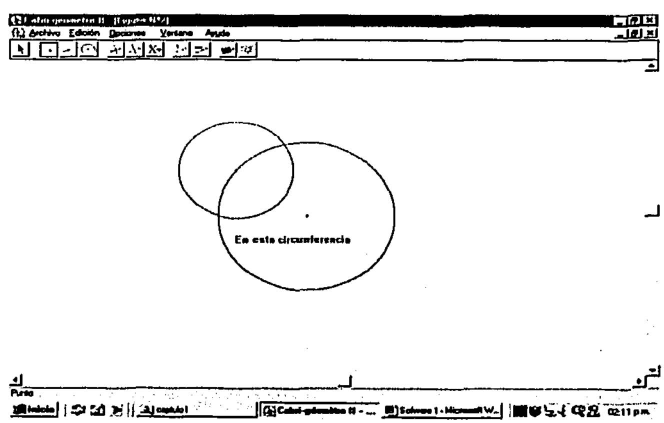
Euclides estaba en reposo, hoy está en movimiento.

En este breve capítulo mostraremos algunas propiedades del programa Cabri que nos permitieron generar las cónicas; no seremos exhaustivos, ya que no se trata de presentar un manual para utilizarlo. La cuestión es dejar en claro aquellos comandos que permitan hacer una lectura ágil a los dos capítulos siguientes, que por otro lado, son la parte sustantiva de este trabajo.



El primer comando permite marcar puntos en cualquier parte de la pantalla. Mediante los dos comandos podemos marcar puntos sobre algún objeto geométrico: rectas, segmentos, polígonos, etc.

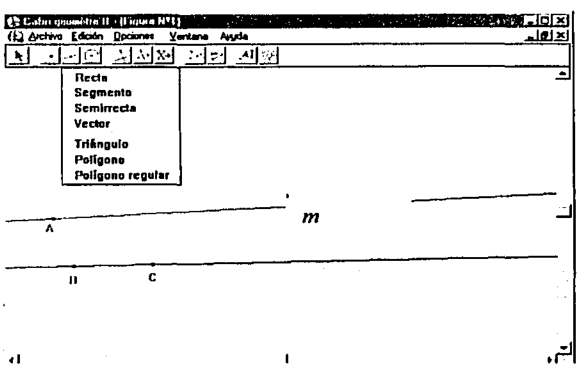
En este caso, en la pantalla aparece una pregunta acerca del lugar en el cual deseamos marcar el punto, por ejemplo, En esta circunferencia, como se muestra en la figura.



El segundo comando es particularmente útil cuando en algún proceso de construcción en la pantalla tenemos varios objetos geométricos y, queremos marcar un punto en alguno de ellos.

El hecho de que algún punto se haya definido en un objeto geométrico mediante alguno de los dos comandos, permite que el punto se pueda desplazar sobre ese objeto, este hecho nos permitirá dar movimiento a las construcciones, como lo mostraremos más adelante.

Comando "*Punto(s) de intersección*". Resulta conveniente utilizarlo si queremos marcar un punto en el que se cortan dos figuras geométricas que se encuentran entre otras y no es fácil indicar con el puntero el lugar de la intersección. Por otra parte, si utilizamos este comando, automáticamente se marcan todos los puntos en los cuales se intersectan dos objetos geométricos Los puntos R y R', intersección de las dos circunferencias que muestra la figura de arriba fueron marcados con este comando.



Del siguiente conjunto sólo nos referiremos a los comandos: "*recta*", "*segmento*", "*triángulo*" y "*polígono*".

Comando "*recta*". Permite trazar líneas rectas a partir de dos procedimientos que llamaremos: **Recta punto dirección y Recta punto punto.**

Recta punto dirección: Se requiere de un punto (no es necesario haberlo marcado antes) y una dirección. Para trazar la recta, activamos el comando "*recta*" y en cualquier lugar de la pantalla o sobre algún objeto geométrico marcamos un punto, de esta manera aparecerá en la pantalla un punto y una parte de una línea, requerimos ahora definir una dirección, ésta se elige moviendo el ratón. En la figura de arriba, la recta *l* fue trazada a partir del punto A y eligiendo, como hemos indicado, una cierta dirección.

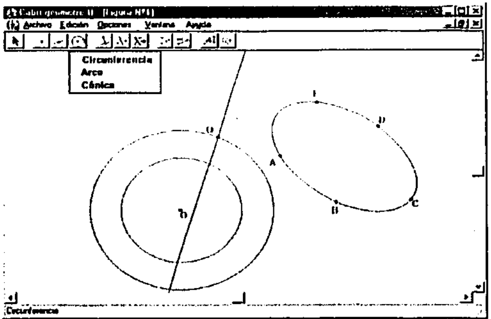
Una recta como *l*, construida mediante este comando, es tal que si movemos el punto A, la recta se desplaza en paralelo respecto a la dirección establecida inicialmente. Si deseamos modificar la dirección de la recta, podemos "tomarla" (para ello es necesario desactivar el comando que estemos utilizando) y con el ratón desplazarla a una nueva dirección.

Recta punto-punto. Para trazar la recta mediante este procedimiento necesitamos dos puntos. De manera análoga que en el caso anterior, también podemos desplazar la recta de manera que se mantiene la dirección de la recta original. Para modificar la dirección de la recta es necesario mover alguno de los dos puntos, al hacerlo la recta gira en torno al otro punto.

Es importante señalar que en un programa como Cabri, la recta se puede considerar como una circunferencia de radio infinito.

Comando "*segmento*". Un segmento puede trazarse en cualquier parte de la pantalla; sobre una recta, sobre otro segmento o sobre el lado de algún polígono. Se necesitan dos puntos, que pueden definirse al momento de trazar el segmento.

Comandos "*triángulo*" y "*polígono*". En este programa, si por ejemplo se trazan tres rectas que se intersecten dos a dos, los puntos de intersección definen un triángulo, sin embargo, el programa no reconoce a ese triángulo como un objeto geométrico. Para que este objeto sea reconocido como tal, se requiere trazar el triángulo mediante cualquiera de los comandos "*triángulo*" o "*polígono*", en cualquier caso para trazar el polígono hay que activar el comando y señalar cada uno de los vértices del polígono, en el caso del comando "polígono", se requiere marcar dos veces el primer punto.



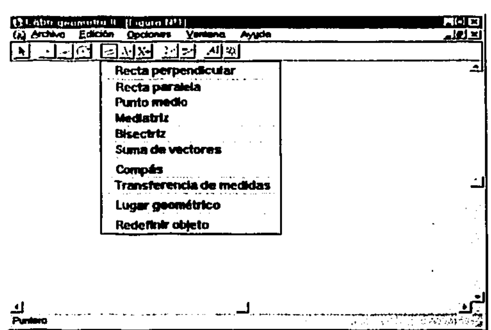
Del siguiente grupo de comandos sólo nos referiremos a dos de ellos: "*Circunferencia*" y "*Cónica*"

Comando "*Circunferencia*". Como sabemos, para trazar una circunferencia necesitamos de un punto y un radio, sin embargo, si trazamos una mediante este comando, no requerimos previamente establecer el punto y el radio. Al activar el comando, elegimos en la pantalla o en algún objeto geométrico, el punto que será el centro y, con el ratón al desplazarlo, establecemos el radio.

Una circunferencia así trazada, si desplazamos su centro, la circunferencia se desplaza de manera que su radio es constante. El radio de una circunferencia construida mediante este procedimiento, podemos modificarlo si "tomamos" con el ratón la circunferencia y la desplazamos hasta la distancia que convenga a nuestro interés, en este caso el centro de la circunferencia permanece fijo.

Comando "*cónica*". Permite trazar hipérbolas, elipses, circunferencias y parábolas. Al activar el comando, el trazo se realiza al marcar uno a uno los cinco puntos que definen a una cónica. En este trabajo, una vez que hemos construido una cierta cónica, utilizamos este comando sólo para tener una mejor definición de la curva.

Del siguiente grupo de comandos comentaremos el funcionamiento de algunos de ellos y nos detendremos para hacer algunas precisiones a los comandos "*lugar geométrico*", "*traza*" y "*animación*" que hemos incluido en este grupo.



Comandos "*Perpendicular*" y "*Paralela*". El trazo de una perpendicular o una paralela requiere de un punto y una recta o un segmento. Para trazar, por ejemplo una perpendicular, necesitamos marcar primero el punto y después la recta a la que se quiere trazar. También podemos proceder a la inversa, es decir, primero señalar la recta a la que se quiere trazar la perpendicular y después el punto desde donde se va a trazar.

Comandos "*Punto medio*" y "*Mediatriz*". Si se tiene un segmento, el lado de un polígono o dos puntos que se hayan definido previamente; para localizar el punto medio o la mediatriz, lo podemos hacer de dos formas: señalar el segmento, el lado del polígono o marcar cada uno de los dos puntos entre los que se quiere localizar el punto medio o la mediatriz.

Comando "*Bisectriz*". Si deseamos trazar la bisectriz de un ángulo AOB necesitamos marcar los tres puntos, de manera que el segundo punto que se marque sea precisamente el vértice del ángulo.

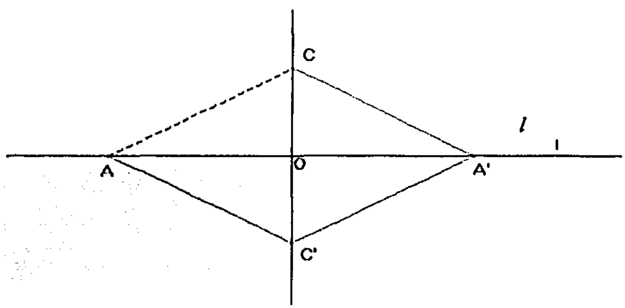
Comando "*Compás*". Este comando es muy útil cuando se trata de trazar una circunferencia de la cual se conoce el radio y su centro. Para trazarla, necesitamos marcar el segmento (éste tiene que haberse trazado previamente) que representa la medida del radio y después el punto que va a ser su centro. También podemos proceder de manera inversa. Si no se ha trazado el segmento, para trazar la circunferencia podemos marcar los puntos que son extremos de la distancia que corresponde al radio y después señalamos el punto que será el centro de la circunferencia.

Comandos "*Lugar geométrico*", "*traza*" y "*animación*". Aunque los dos últimos comandos no aparecen en este grupo, los vamos a considerar ya que estos comandos permiten conocer la trayectoria que describen un punto, una recta, una circunferencia o un segmento. Dada la importancia que para este trabajo revisten estos comandos, ilustraremos la forma en que los hemos utilizado para resolver ciertos problemas. **Cabe decir que en este capítulo haremos un uso empírico de los comandos, de manera que no daremos demostración alguna de que las curvas que se muestran realmente representan lo que se dice.**

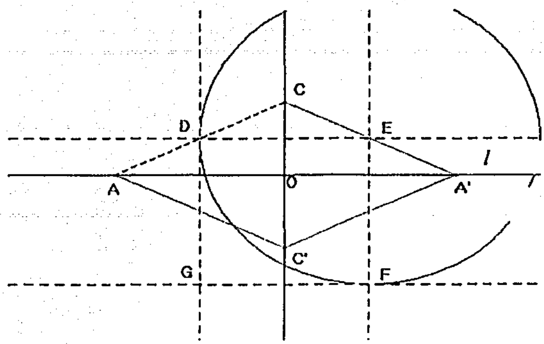
- Problema: *Inscribir en un rombo dado, un cuadrado cuyos lados sean paralelos a las diagonales del rombo*. (Levy S. Shively, Ph. D.)

Construcción

- *Trazar una recta l y en ella elegir un punto fijo O.*
- *Trazar en O una perpendicular a la recta l.*
- *Elegir un punto A distinto de O en la recta l y un punto C distinto de O en la perpendicular a la recta l trazada en O.*
- *Localizar A' simétrico de A respecto de O, asimismo, localizar C' simétrico de C respecto de O.*
- *Trazar el cuadrilátero AC'A'C que corresponde al rombo en el cual se inscribirá el cuadrado.*



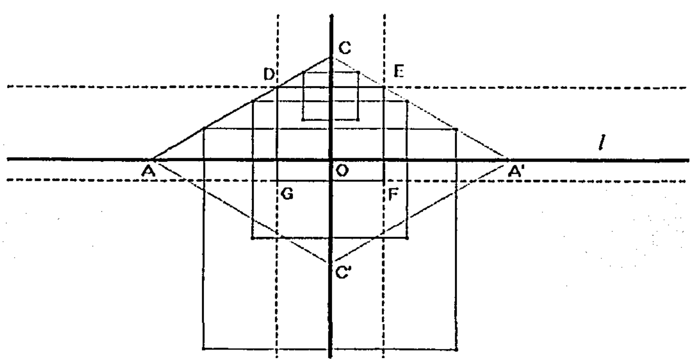
- *Trazar el segmento AC.*
- *En el segmento AC elegir un punto D que recorra el segmento (punto sobre el objeto). Podríamos haber elegido D sobre el lado AC del rombo, en este caso, el punto se podría mover sobre su perímetro.*
- *Trazar en D una paralela a la recta l. La paralela cortará al lado A'C en un punto E.*
- *Trazar en E y en D rectas perpendiculares a la recta l.*
- *Trazar una circunferencia con centro en E y radio ED, ésta cortará a la perpendicular a la recta l trazada en D en dos puntos. Llamar F al punto que esté más cercano al punto C'.*
- *Trazar en F una paralela a la recta l. Esta paralela intersectará en un punto G a la perpendicular l trazada en D.*



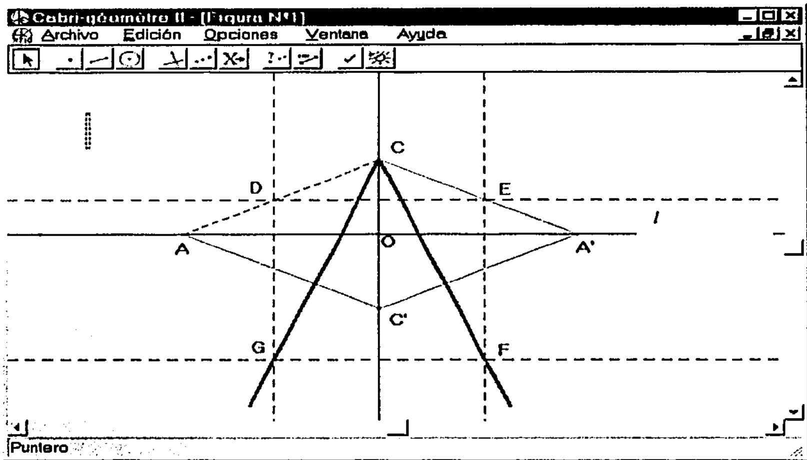
Los puntos D, E, F y G definen, por construcción, un cuadrado, como se muestra en la figura.

Hemos elegido el punto D de manera que se puede mover a lo largo del segmento AC. El movimiento lo podemos realizar de dos formas: tomando con el ratón el punto D y moverlo sobre el segmento o activando para el punto D el comando "*animación*"; esta segunda opción hace que D se desplace continuamente sobre el segmento.

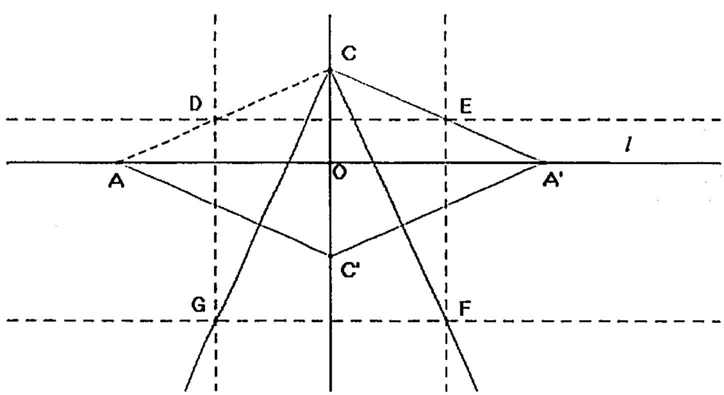
Para cualquier posición que ocupe D en el segmento AC, se tendrá un cuadrado tal que sus lados son paralelos a las diagonales del rombo. Algunos de estos cuadrados se muestran en la siguiente figura:



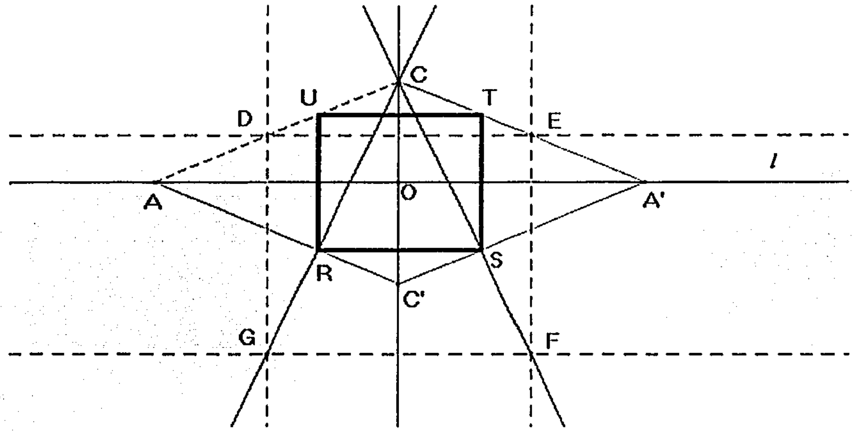
Podemos observar que necesariamente habrá un cuadrado que tiene todos sus vértices sobre el perímetro del rombo. En esta situación, si activamos para los puntos F y G el comando "*traza*" y movemos el punto D sobre el segmento en el cual fue definido, mediante el comando "*animación*", los puntos anteriores dejarán su "huella", tal y como se muestra en la siguiente figura:



El resultado que se observa en la figura nos hace ver que parece que cada uno de los puntos F y G se mueven sobre una recta. Para observar la curva activamos para los puntos F y G el comando "*lugar geométrico*". En la pantalla observaremos los segmentos sobre los que se mueven los puntos F y G respectivamente.



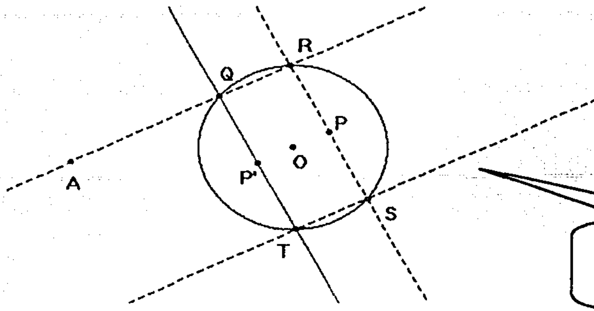
Como se observa, para resolver el problema necesitamos localizar los puntos (R y S) intersección del lugar geométrico de F y G con los segmentos AC' y C'A'. Para localizar estos puntos necesitamos trazar las rectas CG y CF. Es importante señalar que no es posible trazar los puntos de intersección de los segmentos que representan el lugar geométrico de F y G con el perímetro del rombo; el programa no los considera como objetos geométricos. El cuadrado requerido es el de lado RS. En la siguiente figura se muestra la construcción.



Veamos cómo a partir de una construcción que proponemos, los comandos "*traza*", "*lugar geométrico*" y "*animación*" nos permiten conjeturar que una cierta línea es la envolvente de una hipérbola y, que un cierto punto de la construcción es el lugar geométrico de una curva llamada: *Lemniscata de Bernoulli.*

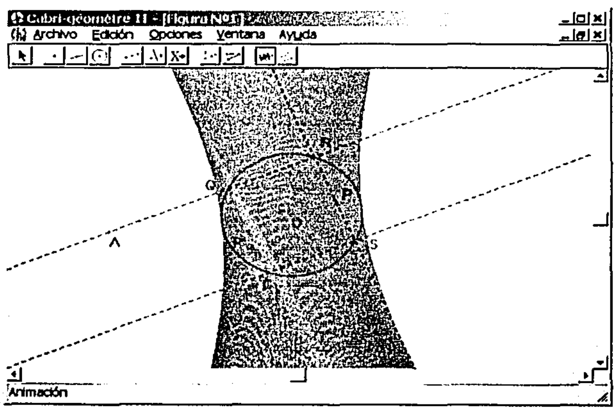
Construcción:

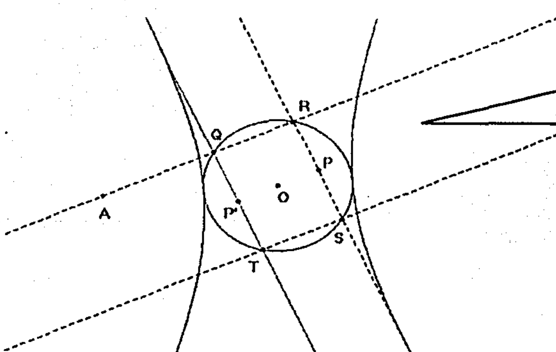
- Trazar una circunferencia de centro O y radio r y, considerar un punto A que esté fuera del círculo.
- *Elegir un punto Q que recorra la circunferencia.*
- *Trazar la recta AQ: Ésta cortará a la circunferencia en un punto R.*
- *Trazar en R y Q perpendiculares a la recta AQ. Cada una de estas perpendiculares cortará a la circunferencia en los puntos S y T respectivamente.*
- *Trazar la recta ST.*
- *Trazar los puntos P y P', puntos medios de los segmentos RS y QT respectivamente.*



La figura muestra la construcción

Si activamos para el punto Q el comando "*animación*" y, el comando "*traza*" para la recta QT, observaremos que al recorrer el punto Q la circunferencia, la "huella" de la recta QT va delineando la “envoltura” de una hipérbola, como se muestra en la siguiente figura.

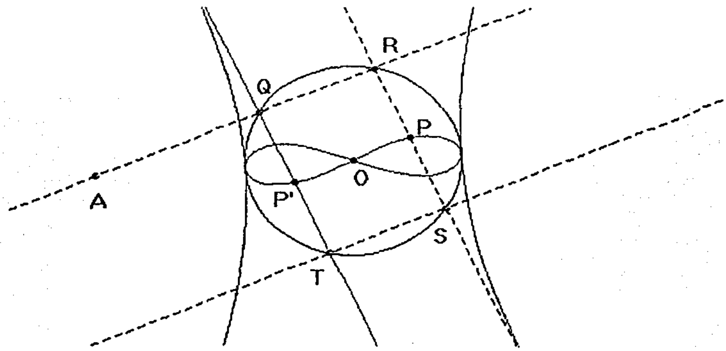




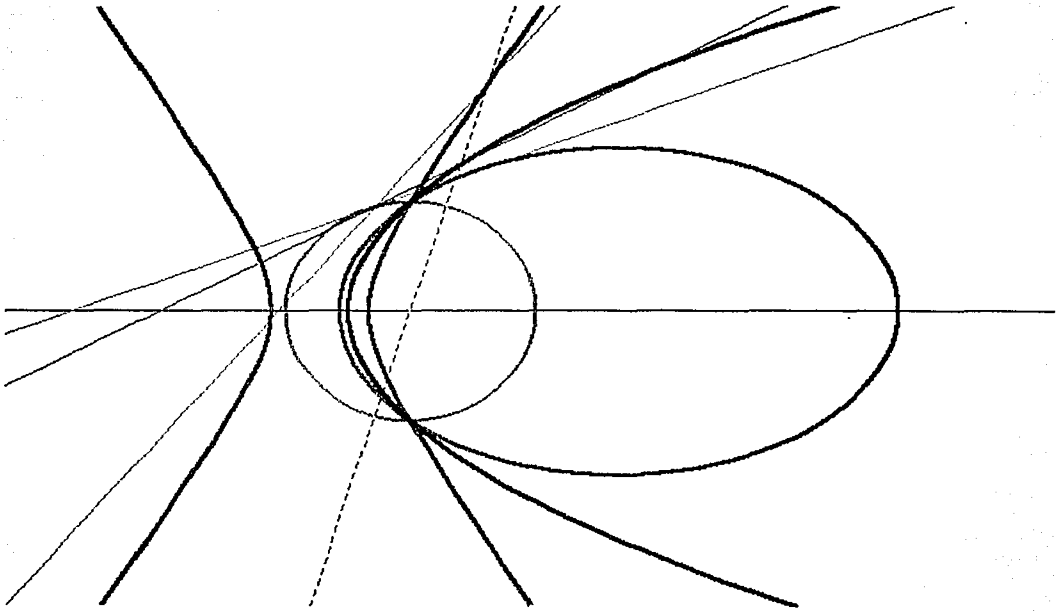
Al activar el comando "*lugar geométrico*" para la recta QT, en la pantalla aparecerá una hipérbola.

Es de mencionar que en este caso sobre la hipérbola no es posible marcar algún punto; para que esto sea posible se requiere que la curva sea generada por un punto.

Por otra parte, podremos observar que al activar el comando *"Lugar geométrico"* para el punto P o P' aparecerá la *Lemniscata de Bernoulli*, como se muestra:



En el capítulo siguiente tendremos ocasión para valorar estos comandos.



Capítulo II
Los once problemas

Aquel que desdeña la Geometría de Euclides, es como el hombre que, al regresar de tierras extrañas, menosprecia su propia casa.
H. G. Forder.

En este capítulo desarrollaremos once problemas que determinan cónicas: la circunferencia, la hipérbola, la parábola y la elipse, en ciertos casos la recta aparece cómo una cónica degenerada. Si bien el tercer capítulo de este trabajo contiene una serie de problemas para que un futuro lector los resuelva, hemos considerado pertinente proponerle algunos problemas, que se derivan de la mayoría de los once que se discuten en este capítulo, aquellos que están indicados con un asterisco corresponden a los que no logramos demostrar..

Son dos tipos de problemas que abordamos:

I.- Problemas en los que, dadas ciertas condiciones, se pide realizar una construcción, posteriormente, se trata de conocer la curva (el lugar geométrico) que describe un cierto punto (o recta) de la construcción que lleva a resolver el problema.

II.- Problemas en que la construcción está dada y se pide hallar el lugar geométrico de un punto o recta de la misma construcción.

Iniciaremos la exposición con los problemas del primer tipo, para ello discutiremos un problema el cual lo resolvimos utilizando varios procedimientos, que por otro lado, tenían que llevarse a cabo utilizando los instrumentos clásicos griegos: la regla y el compás. En este caso una regla y un compás dado por el programa Cabri. El problema es el siguiente:

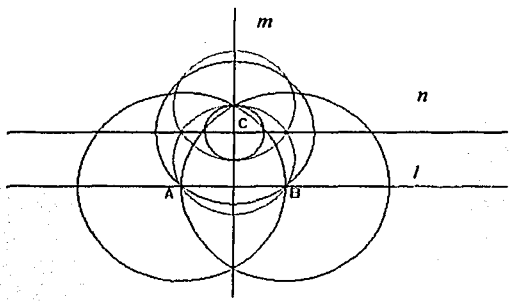
- *Dada una recta l y un punto C fuera de ella, construir una recta paralela a l que pase por C.*

La forma de resolver el problema nos hizo ver que teníamos una concepción de una geometría estática, esto es, el problema lo considerábamos resuelto cuando la figura que se trazaba en la pantalla satisfacía las condiciones establecidas. El programa lo utilizábamos de manera similar al trazo que se efectúa con lápiz y papel en el que las figuras no pueden modificarse. Pronto nos dimos cuenta que un Programa dinámico como Cabri ofrece la posibilidad de descubrir otros resultados que no estaban presentes en la construcción. Veamos cinco construcciones que permiten resolver el problema en cuestión.

Primera construcción

Si C es el punto fuera de la recta *l*, el procedimiento que utilizamos es el clásico, esto es:

- *Trazar desde C una perpendicular a la recta l que llamaremos m.*
- *En C trazar una perpendicular a la recta m que llamaremos n.*



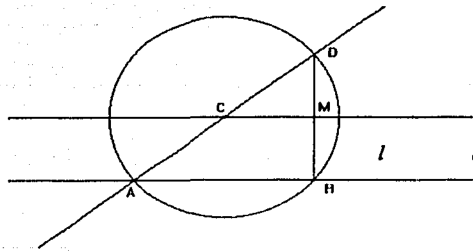
La recta *n* es la paralela que se deseaba construir como se observa en la figura.

La figura muestra todos los trazos con regla y compás necesarios para construir la paralela. En las siguientes construcciones sólo mostraremos los trazos convenientes para los fines que perseguimos.

Segunda construcción

En este caso, la idea que seguimos fue construir un triángulo rectángulo ABD de manera que C fuera punto medio de la hipotenusa, y el cateto AB del triángulo esté sobre la recta *l*.

- *Elegir en l un punto A cualquiera y trazar la recta AC.*
- *Trazar una circunferencia de centro C y radio CA. Esta circunferencia cortará a la recta l en un punto B y, a la recta AC en un punto D.*
- *Unir AB y BD, el triángulo ABD es un triángulo rectángulo.*
- *Localizar el punto medio del lado BD, llamarlo M y trazar la recta CM.*



La recta CM es la paralela a *l* que se quería construir. La figura muestra la construcción.

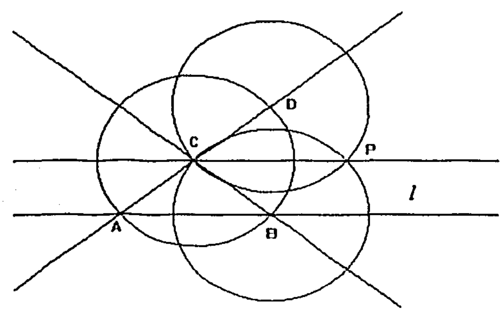
Como se puede observar, el que la recta CM sea paralela a la recta *l*, es una consecuencia del inverso del Teorema de Thales aplicado al triángulo ABD; sólo tenemos que considerar que C es punto medio de AD y que M lo es de BD.

Tercera construcción

En este caso, la construcción que proponemos es trazar un triángulo isósceles ABC tal que los vértices A y B estén sobre la recta *l* y los ángulos en A y B sean congruentes.

- *Elegir en l un punto A cualquiera y trazar la recta AC.*
- *Trazar una circunferencia con centro en C y radio CA, esta circunferencia cortará a la recta l en un punto B y a la recta AC en un punto D.*
- *Unir BC.*

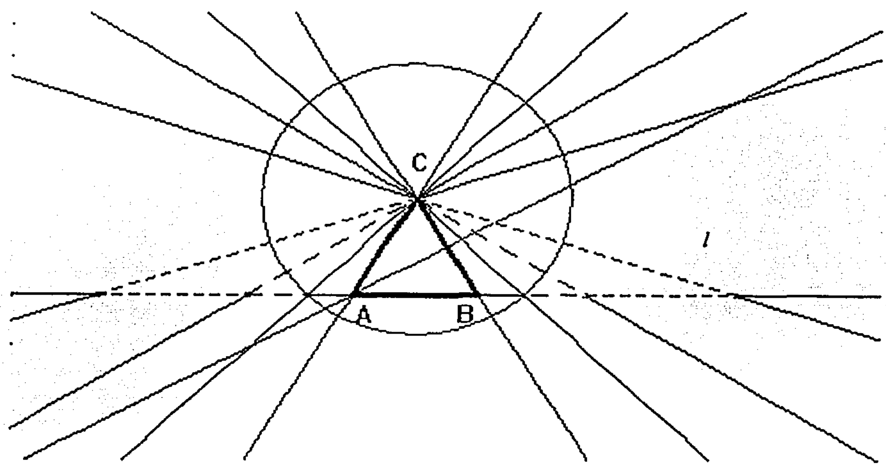
El triángulo ABC así construido es el que se deseaba trazar.



Si aceptamos como un hecho que en cualquier triángulo isósceles ABC (donde los ángulos en A y B son congruentes), la bisectriz externa del ángulo en C es paralela al lado AB del triángulo, entonces la bisectriz del ángulo DCB es la paralela a la recta *l* que pasa por el punto C.

Una vez que realizamos la construcción anterior, observamos que el punto A lo podíamos desplazar a lo largo de *l* y que de esta manera obteníamos un conjunto infinito de triángulos isósceles; tal que uno de esos triángulos correspondía a un triángulo equilátero. Entonces una pregunta que nos hicimos fue la siguiente: ¿En qué punto A de la recta *l* se obtiene ese triángulo ABC equilátero?

Los triángulos isósceles y el equilátero que se muestran en la siguiente figura son resultado de desplazar el punto A; en cada caso trazamos las rectas correspondientes que definen los respectivos triángulos.

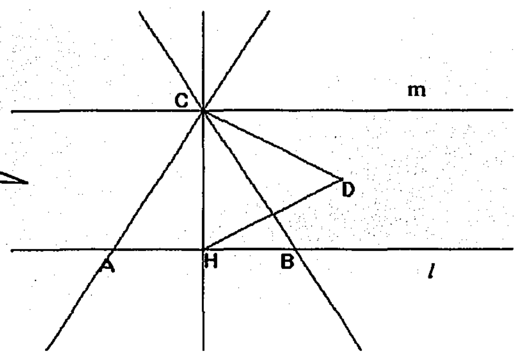


Fue así que a partir de la tercera construcción propusimos la cuarta construcción: *Trazar un triángulo equilátero ABC tal que los vértices A y B estén sobre la recta l.* El trazo de la paralela a la recta *l*, se realiza mediante el mismo procedimiento que seguimos en la tercera construcción.

Cuarta construcción

- *Trazar desde C una perpendicular a la recta l. La perpendicular cortará a la recta en un punto H.*
- *Trazar el triángulo equilátero CHD que tenga a CH como lado.*
- *Trazar la bisectriz del ángulo DCH. La bisectriz cortará a la recta l en un punto B.*
- *Localizar A, simétrico de B respecto de H.*
- *Unir CA.*

En el triángulo ABC es el triángulo que queríamos construir, como se muestra en la figura.



La recta *m* es bisectriz exterior del ángulo en C del triángulo ABC y por tanto paralela a l.

Las cuatro construcciones precedentes implican un conocimiento apriori de lo que deseábamos construir, de manera que directamente realizamos la construcción que se quería. Este uso del programa es bastante limitado para las posibilidades de movimiento que ofrece un programa como Cabri.

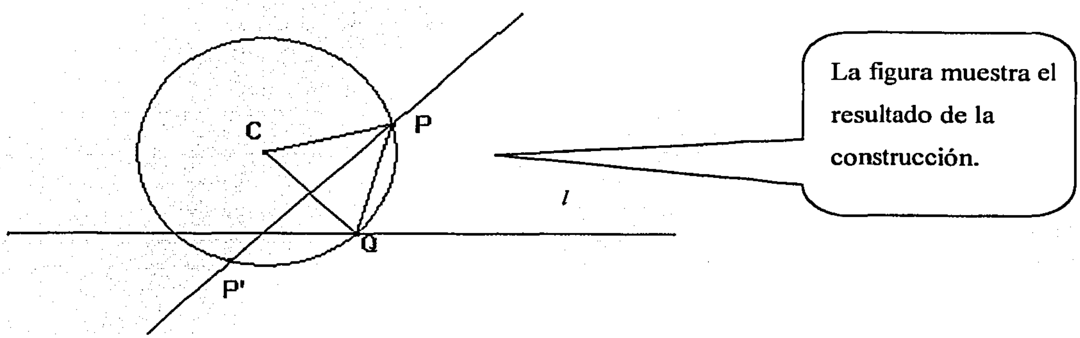
Ya la tercera construcción nos permitió dar movimiento a la figura y nos llevó a proponer una que no habíamos considerado. Enseguida mostraremos el quinto procedimiento para trazar la paralela, con éste, iniciamos la exposición del tipo de problemas de construcción sujetas a condiciones dadas, a partir de las cuales se generan las cónicas. Los resultados los enunciaremos como teoremas (de los cuales daremos prueba), pero estos teoremas, como se verá más adelante, son el resultado de un proceso de descubrimiento propiciado por la posibilidad que ofrece el Programa para mover ciertos puntos claves en la construcción.

Quinta construcción. Problema 1

Al igual que la cuarta construcción, se trata de construir un triángulo equilátero ABC tal que los vértices A y B estén sobre la recta *l*. En este caso, la idea es construir un triángulo equilátero auxiliar CQP de lado CQ, (el vértice Q de este triángulo está sobre la recta *l* y puede moverse a lo largo de ella). El asunto es aprovechar la posibilidad de mover el punto Q y que el triángulo CQP será siempre equilátero. Veamos cómo se puede llevar a cabo la construcción.

@ *Elegir en la recta l un punto Q que la recorra (punto sobre el objeto).*

@ *Construir un triángulo equilátero CQP de manera que el segmento CQ sea un lado de ese triángulo.*



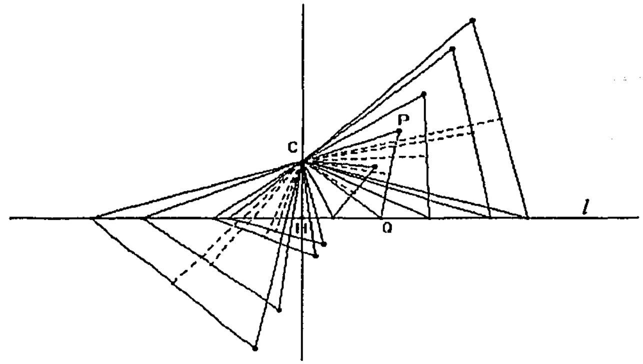
El triángulo equilátero CQP se construyó como se indica a continuación:

@ *Trazar la mediatriz del segmento CQ (en este caso utilizamos el comando "mediatriz" del programa)*

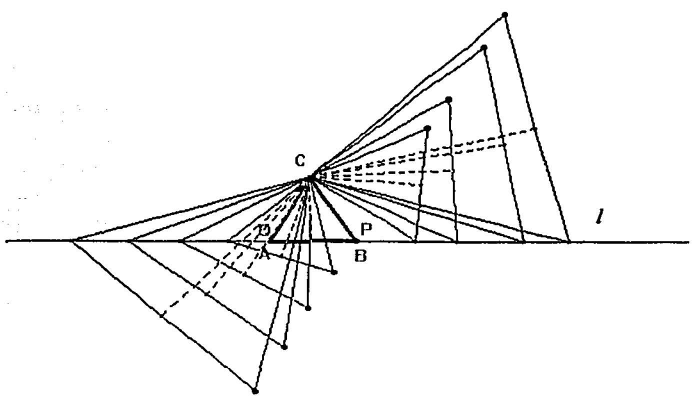
@ *Trazar una circunferencia con centro en C y radio CQ, esta circunferencia cortará a la mediatriz de CQ en dos puntos P y P'.*

Los puntos C, Q y P determinan el triángulo equilátero (los puntos C, Q y P' también definen otro triángulo equilátero). Consideraremos el triángulo CQP.

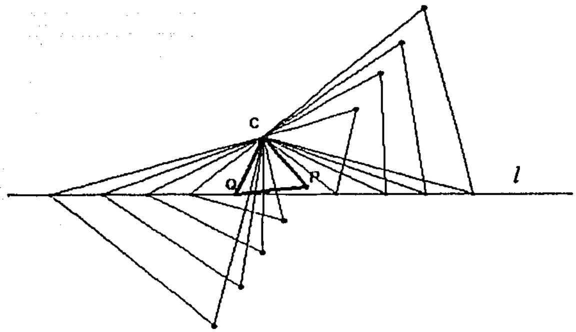
Dado que Q lo hemos elegido de manera que es un punto cualquiera de la recta *l*, resultará que no necesariamente el vértice P del triángulo equilátero CQP estará sobre la recta *l*. Ahora bien, al hacer que Q recorra la recta, notaremos que el triángulo se transforma en otros triángulos que



también son equiláteros cuyos lados son mayores o menores que el segmento inicial CQ, como los que se muestran en la figura:

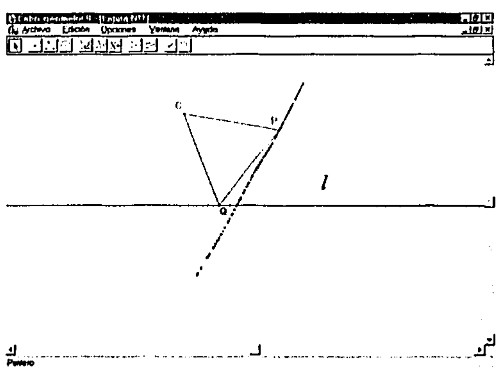


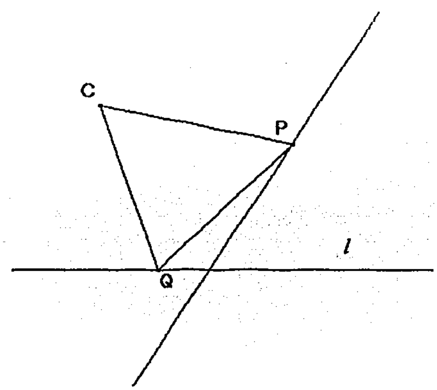
Al trazar desde C la altura de cada uno de los triángulos, observaremos que cuando el pie de la altura, trazada del punto C al lado QP de cada uno de los triángulos, se aproxima al pie (H) de la perpendicular a la recta *l* trazada en C, el vértice P de algún triángulo CQP se acerca a la recta *l*. Entonces en cierto momento, algún punto B de la recta *l* coincidirá con el punto P, de manera que el triángulo ABC será el que se quiere trazar. A es el simétrico de B respecto de H, como se observa en la siguiente figura.



El problema se centra en conocer el punto B de la recta *l* con el cual coincidirá el punto P. Así el triángulo equilátero se podrá construir si localizamos la intersección de la recta *l* con la curva que describe el lugar geométrico del punto P cuando Q recorre la recta. Observemos la figura de la izquierda.

Notemos que los puntos P de los triángulos CQP parece que están alineados. Al activar para el punto P el comando" *Traza*" y hacer que Q recorra la recta *l*, se visualizará que la "huella" que deja el punto P parece ser una recta. Al activar para el mismo punto el comando "*lugar geométrico*", en la pantalla aparecerá la recta. Ver las figuras siguientes:

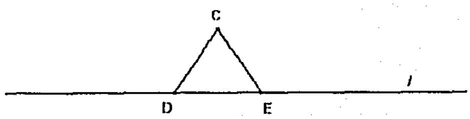




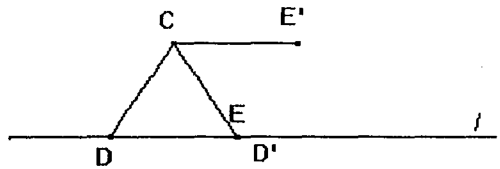
El resultado da lugar al siguiente:

Teorema 1.1 Dada una recta l y C un punto fijo que no está en ella , el lugar geométrico de los puntos P tales que el triángulo CQP es equilátero, cuando Q varía en la recta l, es una recta.

Demostración

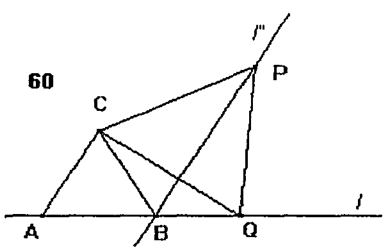


De acuerdo a la cuarta construcción, podemos construir un triángulo equilátero, tal que dos de sus vértices estén sobre la recta *l* y C sea su tercer vértice. Llamemos D y E a tales vértices, como se muestra en la figura.



Rotemos los segmentos CD y CE un ángulo igual a 60° respecto de C, llamemos D' y E' a los puntos que corresponden en la rotación a los puntos D y E. Observemos que los puntos D' E' y C definen uno de los triángulos equiláteros tales que tienen un vértice en la recta *l;* el triángulo DEC también es otro de esos triángulos, como se muestra en la siguiente figura.

Por otra parte, los puntos D' y E' definen una recta que se correspondería con el resultado de rotar la recta *l* un ángulo de 60° respecto al punto C.

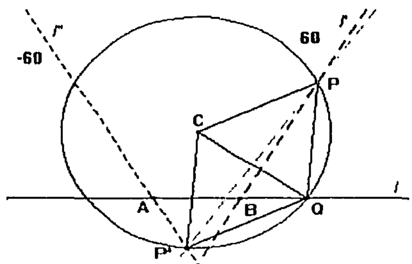


Ahora bien, consideremos un punto Q de la recta *l* y rotémoslo un ángulo de 60° respecto el punto C. Si llamamos P al punto que le corresponde a Q en la rotación, es claro que P estará en la recta D'E'', la misma que *l*' y, el triángulo QPC es equilátero para cualquier punto Q de la recta *l*; es decir, el lugar geométrico de P, es precisamente la recta *l'*, que es lo que se quería demostrar. La figura muestra el resultado.

La construcción descrita anteriormente la llevamos a cabo considerando al punto P para construir el triángulo equilátero CQP. Recordemos que la mediatriz de CQ y la circunferencia de centro C se intersectan en los puntos P y P' (Ver figura de la página 37).

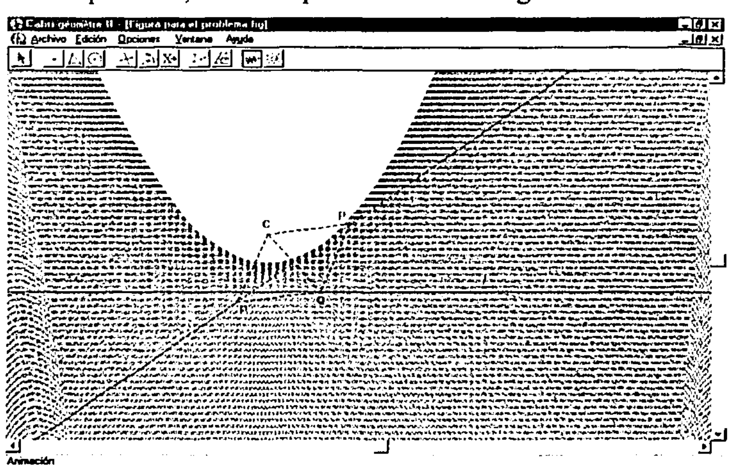
Si hubiésemos considerado P' habríamos definido el triángulo equilátero CQP'. Un análisis similar a la demostración del teorema anterior nos permite establecer el siguiente:

Teorema 1.2 Dada la recta l y un punto C que no está sobre l, el lugar geométrico de P' (P' vértice del triángulo equilátero CQP') cuando Q varía en la recta l, es otra recta (l'') que corta a l en un punto A. La recta l'' es el resultado de rotar l en sentido negativo un ángulo de 60° respecto al punto C.

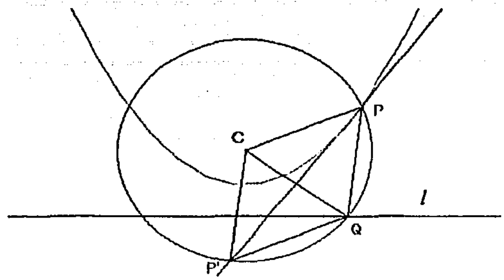


La figura muestra los resultados establecidos en los *teoremas 1.1 y 1.2*. Las líneas punteadas representan el lugar geométrico de P y P' respectivamente.

En el proceso de construcción del lugar geométrico de P y P' notamos que cuando hacíamos que Q recorriera la recta *l*, la mediatriz de CQ se "inclinaba", es decir, cuando el segmento CQ es perpendicular a *l*, la mediatriz es paralela a esa recta. Cuando CQ está a la derecha de C la mediatriz, con relación a la recta *l*, se "inclina" hacía arriba; lo mismo sucede cuando el segmento CQ está a la izquierda de C. Si activamos para la mediatriz el comando "traza", y movemos el punto Q sobre la recta *l*, en la pantalla observaremos que se "dibuja" la "envoltura" de una parábola, como la que se muestra enseguida.



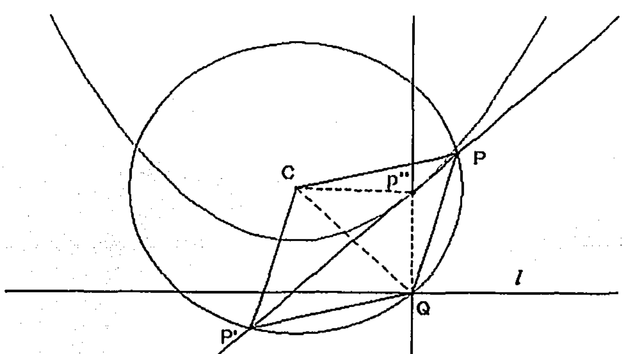
Al activar para la mediatriz de CQ el comando" *lugar geométrico*" en la pantalla aparecerá delineada una parábola.



Dado que la parábola ha sido generada por una recta en movimiento, no es posible marcar puntos en ella, podemos decir que la curva es "virtual", el programa no la considera como un objeto geométrico, por lo que no podemos señalar puntos en la curva. Para que ello sea posible es necesario que la curva sea generada por un punto. A continuación mostraremos cómo determinar ese punto.

@ *Trazar en Q una perpendicular a la recta l. La perpendicular cortará a la recta PP' en un punto P''.* Este punto es el que genera la parábola. El resultado lo enunciamos como el siguiente:

@ *Teorema 1.3. Dada la recta l, C un punto fuera de ella y un punto Q cualquiera de la recta, el lugar geométrico de P'' (intersección de la mediatriz de CQ y la perpendicular a l levantada en Q) cuando Q varía en la recta l, es una parábola de foco el punto C y directriz la recta l.*

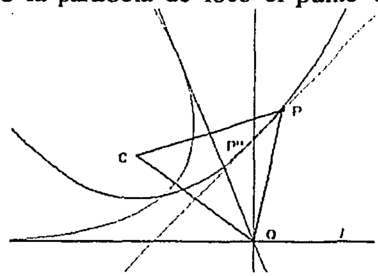


Demostración

P" está en la mediatriz de CQ, por tanto equidista de C y de Q. Por construcción, la recta QP" es perpendicular a *l*. Es decir, se satisface la definición de una parábola de foco C y directriz la recta *l*.

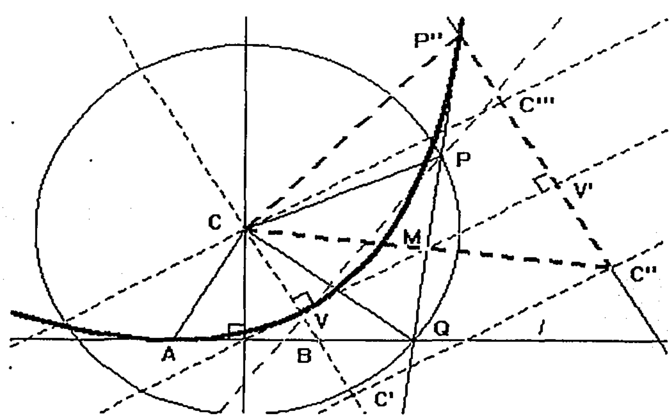
Por otra parte, observemos que para cualquier punto Q en *l*, los ángulos P'P"C y QP"P' son congruentes, esto es la mediatriz satisface la propiedad que tienen las tangentes a una parábola, es decir: el segmento CP" y la perpendicular bajada desde P" a la directriz *l* forman ángulos iguales con la mediatriz en el punto P". Este resultado muestra que efectivamente la mediatriz de CQ es la envolvente de la parábola de foco el punto C y directriz la recta *l*.

Si en la construcción anterior trazamos la mediatriz de CP, como se muestra en la figura.



Demuestre que la mediatriz del lado CP es la envolvente de la parábola que se obtiene al rotar la parábola generada por el punto P", un ángulo igual a 60° respecto al punto C.

Los resultados anteriores nos llevaron a conjeturar que la recta PQ podría generar otra parábola. Es el caso, aunque es necesario que determinemos el punto que describe la parábola. En la figura siguiente se muestra la construcción para determinar tal punto:



En la figura:

- M es punto medio de la cuerda PQ.
- H es intersección de la recta *l* y la perpendicular a *l* trazada desde el punto C.
- V es el vértice de la parábola. Es la intersección del lado BC del triángulo equilátero ABC solución del *problema* 1.con la recta HM.
- V' es simétrico de V respecto de M.
- C" es intersección de la paralela a HM por C', con la perpendicular a HM por V'.
- La recta V'C" es perpendicular a la recta HM (fue trazada levantando en V' una perpendicular a la recta HM)
- C' es simétrico de C respecto de V.
- La recta C'C" es paralela a la recta HM.
- C'" es simétrico de C" respecto de V'.
- P'" (punto que genera la parábola) es intersección de la recta C"V' y la recta PQ.

Enunciamos el siguiente:

Teorema 1.4. Dada la recta l, C un punto fuera de ella y un punto Q cualquiera de l, el lugar geométrico de P", cuando Q varía en la recta l, es una parábola de foco el punto C y directriz la recta C'C".

Demostración

Los triángulos CVM y V'MC" son congruentes: por construcción VM = MV'; los ángulos C"V'M y CVM son rectos (también por construcción) y los ángulos CMV y V'MC" son iguales (son opuestos al vértice M). Al aplicar el criterio de congruencia ALA se obtiene el resultado señalado.

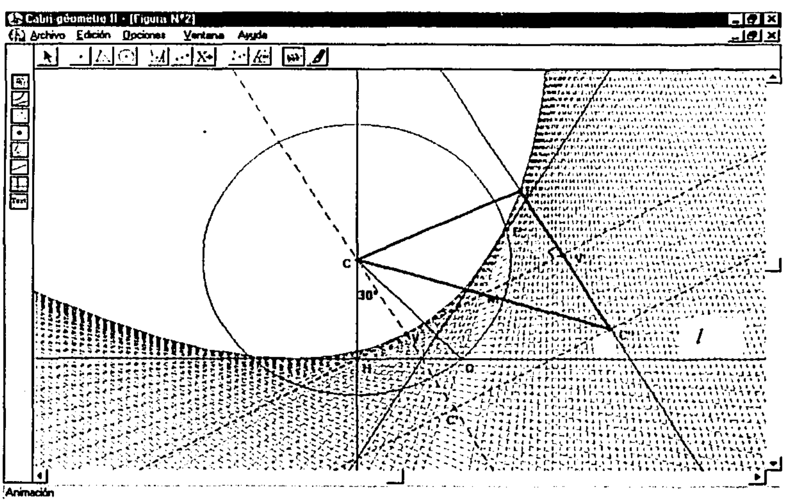
De acuerdo a la construcción, el cuadrilátero CC'C"C'" es un rectángulo en el que M (por construcción) es su centro de simetría, en consecuencia el segmento CC'" es una de las diagonales de ese rectángulo, por tanto M es punto medio del segmento CC''', es decir los puntos C, M y C'' están alineados.

Por otra parte, afirmamos que CC'' es perpendicular a la recta QP: Sabemos que QP es cuerda de la circunferencia de centro C y M es su punto medio. Entonces CC'' pasa por M. Dado que toda recta que pase por el centro de una circunferencia que bisecta a una cuerda es perpendicular a esa cuerda; entonces la recta CC'' es perpendicular a QP.

Los resultados anteriores nos muestran que CM = MC''; concluimos que QP es mediatriz de CC'' y, si recordamos que P''' está sobre la recta QP, deducimos que el triángulo CC''P''' es isósceles, de donde P'''C es igual a P'''C''.

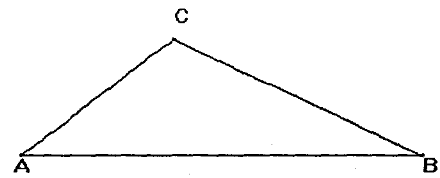
Los hechos mostrados anteriormente muestran que se satisface la definición de una parábola de foco el punto C y directriz la recta C'C''.

De acuerdo a lo anterior, los ángulos C'P'''M y C''P'''M' son congruentes, esto es la mediatriz satisface la propiedad que tienen las tangentes a una parábola, por lo que la recta QP es tangente a la parábola y en consecuencia es su envolvente. La figura siguiente muestra la traza de la recta QP cuando Q varía sobre la recta *l*.



El siguiente problema lo resolveremos de dos formas, la primera es una solución estática en la que el programa se utiliza como si se tuviera una regla y compás usual. La segunda solución pone en juego el movimiento.

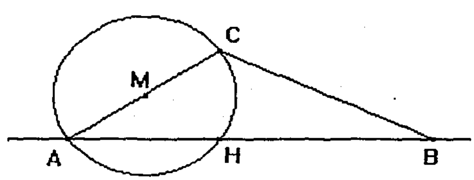
- *Problema 2. Dado el triángulo ABC, encontrar el pie de la altura H que corresponde al vértice C, sin utilizar la construcción de la perpendicular al lado AB.*

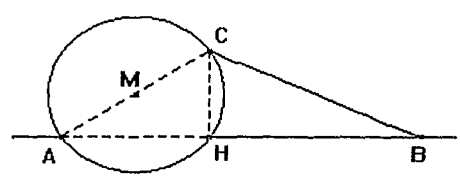


Primera solución

- *Trazar M, punto medio de AC.*
- *Trazar una circunferencia con centro en M y radio MC. La circunferencia cortará al lado AB en un punto H.*

El punto H es el pie de la altura del punto C al lado AB, como se muestra en la primera figura.





En la segunda figura, se ha trazado con líneas punteadas el triángulo AHC. Éste es un triángulo rectángulo.

Dado que la perpendicular a una recta trazada de un punto fuera de ella es única, necesariamente H es el pie de la perpendicular que se quería encontrar.

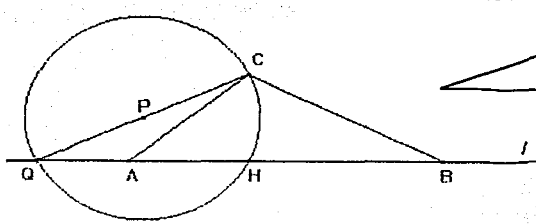
Segunda construcción

El procedimiento que seguimos es esencialmente el mismo que se utilizó antes, en este caso, la idea es trazar una recta l en la cual se pueda mover un punto. Esta construcción permite obtener una recta y una hipérbola como el lugar geométrico de ciertos puntos.

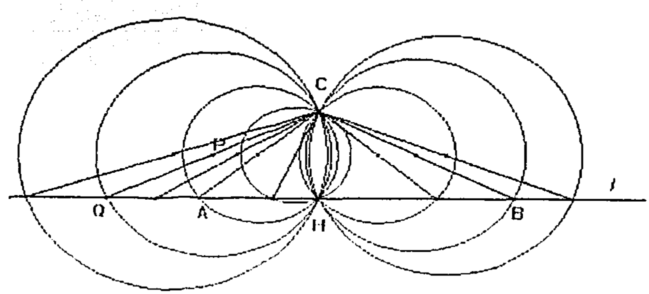
Construcción

- *Trazar la recta que pase por A y B. Llamar l a dicha recta.*
- *Elegir en la recta l un punto Q distinto de A y de B que la recorra y trazar el segmento QC.*
- *Localizar P, punto medio de QC.*
- *Trazar una circunferencia de centro P y radio PQ = PC. Esta circunferencia cortará a la recta l en un punto H.*

Afirmamos que H es el pie de la altura. Observemos la siguiente figura.



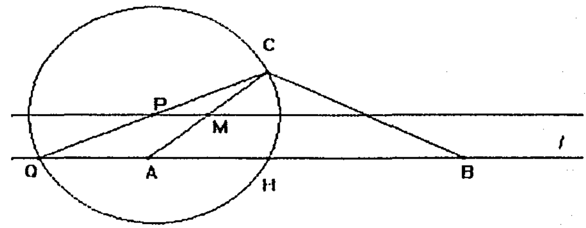
El argumento para afirmar que H es el pie de la perpendicular es esencialmente el mismo que se dio en la primera construcción.



Dado que elegimos Q de manera que recorra la recta l, podemos preguntarnos sobre lo que sucede con H si hacemos que Q se aproxime o se aleje de, por ejemplo, el punto A. Al hacer que Q recorra la recta l, observaremos que el punto H es fijo; esto es, las circunferencias que tengan como diámetro un segmento CQ con Q en la recta l, tienen en común a los puntos C y H respectivamente. La figura de arriba muestra seis de esas circunferencias.

Observemos que parece que los centros de las circunferencias están alineados. En efecto, el resultado lo enunciamos como:

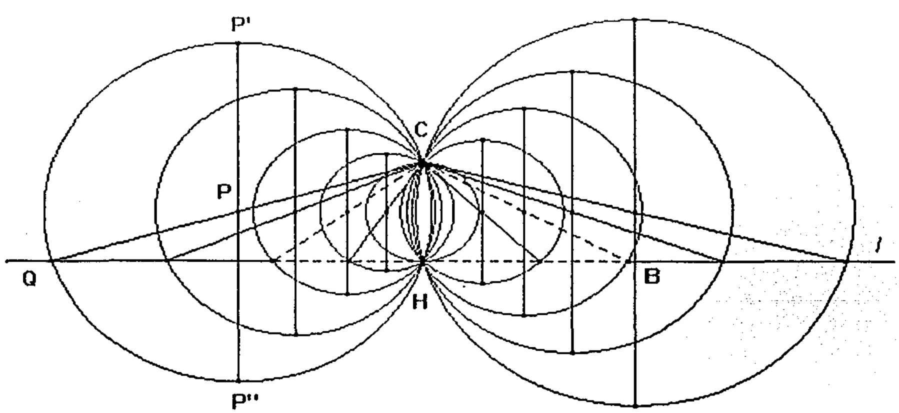
@ *Teorema 2.1. Dada una recta l, un punto C fuera de l y un punto Q sobre l, el lugar geométrico de P (punto medio del segmento QC) cuando Q varía en la recta l, es la recta paralela a l que pasa por P.*

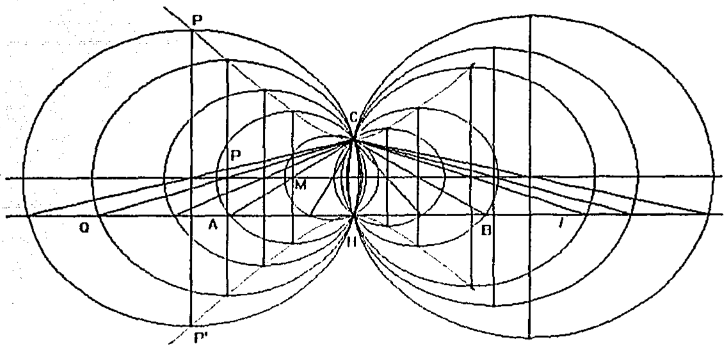


Demostración.

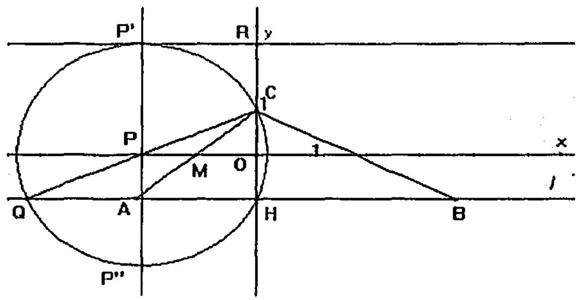
Sea M punto medio de AC, dado que P es punto medio de QC, entonces el Teorema de Thales, aplicado al triángulo ACQ nos garantiza que la recta PM es paralela a la recta *l*.

Ahora bien, observemos que al hacer que Q recorra la recta *l*, los puntos C y H permanecen fijos, de manera que se tiene un conjunto infinito de circunferencias que pasan por C y H que tienen su centro en la recta PM, asimismo, podemos observar que los puntos P' y P" de diámetros perpendiculares a *l* se alejan o se acercan simétricamente respecto a esta recta, como se muestra a continuación.





La disposición de los puntos P' y P" nos hace conjeturar que están sobre una hipérbola. Al activar el comando lugar geométrico para los puntos P y P' se observa lo que parece ser una hipérbola como la que se muestra. La observación es correcta, pero además el programa indica que se trata de una hipérbola equilátera. Enunciamos el siguiente:



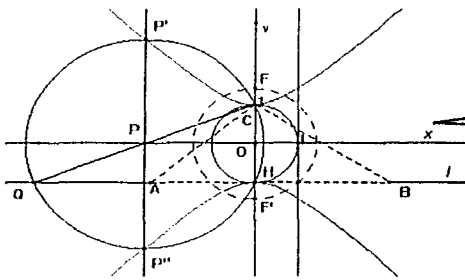
@ *Teorema 2.2. Dada una recta l, un punto Q cualquiera de la recta, un punto fijo C que no está en la recta y H, pie de la perpendicular a l trazada en el punto C; el lugar geométrico de P' (extremo del diámetro perpendicular a l de la circunferencia de centro P, punto medio de CQ y radio PQ = PC) cuando Q varía en la recta l, es una rama de una hipérbola equilátera. P" (el otro extremo del diámetro) describe la otra rama. Observe la figura de arriba.*

Hemos introducido un sistema cartesiano de manera que el eje *Y* coincida con la perpendicular a *l* levantada en el punto H y, el eje *X* coincida con la recta que es el lugar geométrico de P cuando Q recorre la recta *l*. En la figura también se observa que en P' se ha trazado una perpendicular al diámetro P'P", ésta corta al eje Y en un punto R. Con estos datos damos la siguiente:

Demostración.

Por construcción P'R es tangente a la circunferencia en el punto P'. Por geometría sabemos que si de un punto exterior a una circunferencia se traza a ella una secante y una tangente, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa. Al aplicar el resultado anterior tendremos: $P'R^2 = (RH)\ (RC)$.

Si hacemos $P'R = x$; $OR = y$, y $CH = 2a$, al sustituir estas relaciones en la expresión anterior obtenemos: $P'R^2 = (RH)\ (RC) \Rightarrow x^2 = (y + a)(y - a) = y^2 + a^2$, expresión que representa la ecuación de una hipérbola equilátera.

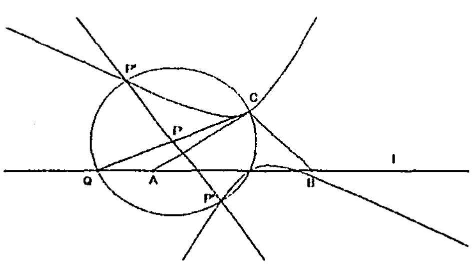


En la figura se puede observar una forma para localizar los focos de la hipérbola:

Vale la pena señalar que la construcción del pie de la altura del triángulo ABC desde el vértice C, que dio origen a los dos resultados anteriores, nos permitió establecer el punto H el cual resulta fijo y que junto con el punto C permite definir la construcción que genera la recta y la hipérbola.

En la construcción que dio lugar a los resultados anteriores realicemos la siguiente construcción:

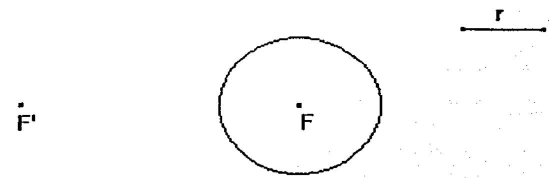
- *En P (punto medio de QC) trazar una perpendicular al lado AC del triángulo ABC. Llamar P' y P'' a los puntos en los que la perpendicular intersecta a la circunferencia.*



- *Demuestre que cuando Q varía en la recta *l*, el lugar geométrico de P' es una rama de hipérbola. P''describe la otra rama de la hipérbola.

El siguiente problema nos permitirá mostrar como al dar movimiento a una construcción estática nos permite generar hipérbolas, elipses, circunferencias y una recta.

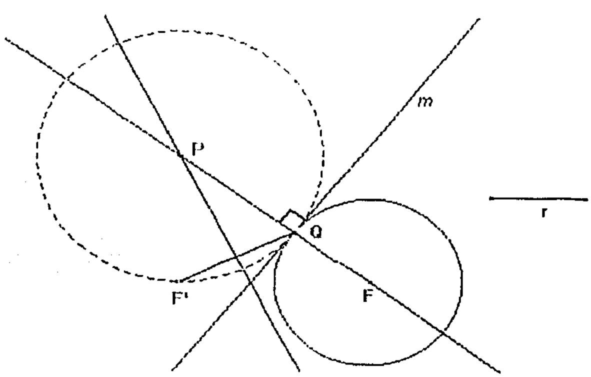
- *Problema 3. Dada una circunferencia de centro F y radio r y un punto F' en el plano, construir una circunferencia que pase por F' y sea tangente a la circunferencia dada.*



Consideremos F' exterior al circulo.

Solución estática

- *Elegir un punto Q en la circunferencia y trazar la recta FQ.*
- *Trazar en Q la perpendicular (m) a la recta FQ*
- *Trazar el segmento F'Q y su mediatriz. La mediatriz cortará a la recta FQ en un punto P.*
- *Trazar la circunferencia de centro P y radio PQ.*

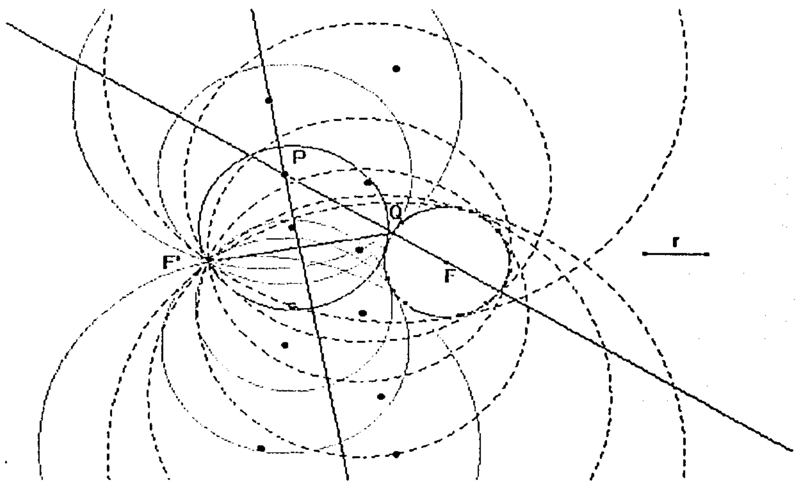


La circunferencia de centro P y radio PF' = PQ es la que satisface las condiciones del problema. La figura muestra la construcción.

La validez de la construcción es inmediata: P equidista de F' y de Q por estar en su mediatriz. Por otra parte, por construcción la recta *m* es perpendicular en Q a la recta FQ , y dado que P está en la recta FQ, entonces necesariamente la circunferencia de centro P es tangente en Q a la de centro F.

Construcción dinámica

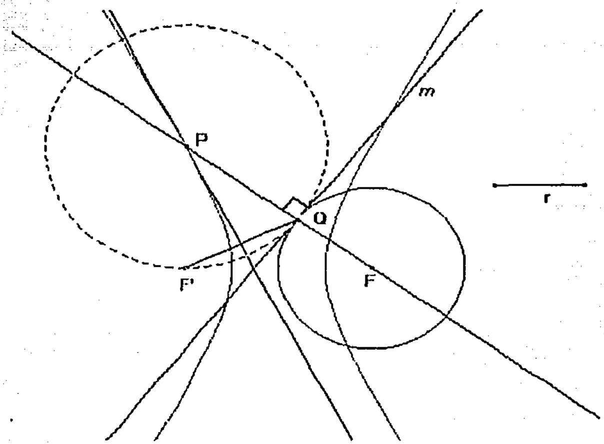
La construcción anterior nos permite dar movimiento a la misma. Así, el punto Q es tal que se ha tomado en la circunferencia (punto sobre objeto). Esto posibilita que podamos mover el punto Q. Al poner en movimiento ese punto, vía el comando "*animación*", observaremos que la construcción seguirá siendo válida, de manera que se obtiene un conjunto infinito de circunferencias tangentes a la de centro F que pasan por F', como las que se muestran a continuación.



Observemos que unas circunferencias tangentes, las trazadas con línea punteada, son tales que la circunferencia de centro F es interior a ellas y en otras, es el caso de las circunferencias trazadas en línea continua, es exterior.

Por otra parte, podemos observar que los centros de las circunferencias tangentes a la de centro F, parece que están sobre una hipérbola. La observación es correcta, si activamos para el punto P el comando "*lugar geométrico*", en la pantalla aparecerá la hipérbola. El resultado lo enunciamos como:

@ *Teorema 3.1. Dada una circunferencia de centro F y un punto F' exterior a ese círculo, el lugar geométrico de P (centro de la circunferencia tangente a la de centro F), cuando Q varía en la circunferencia dada, es una hipérbola cuyos focos son F y F'.*



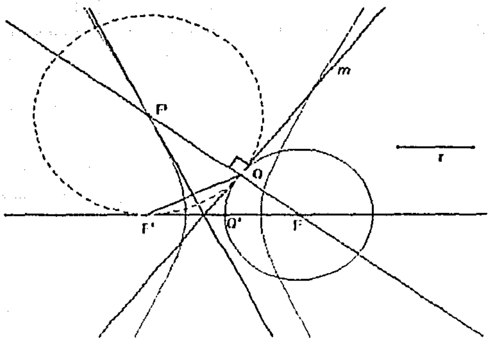
Demostración

P está en la mediatriz del segmento F'Q por tanto equidista de sus extremos.
Analicemos la siguiente diferencia: $|PF - PF'|$.

Dado que PF' = PQ y que PF = PQ + QF, la diferencia anterior la podemos escribir como sigue: $|PF - PF'| = |(PQ + QF) - PF'| = |(PQ + QF) - PQ| = |QF| = r$.

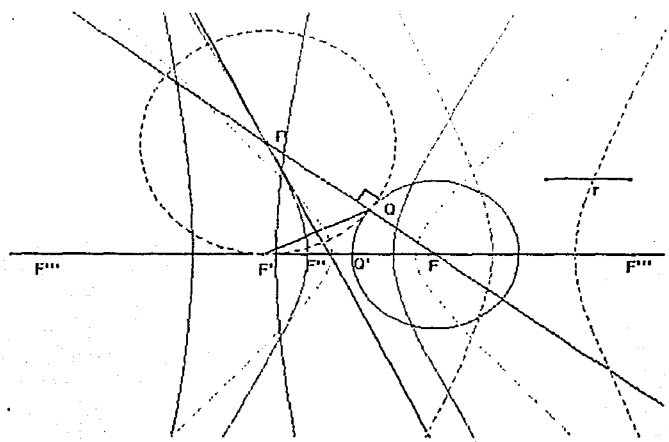
Pero r es constante, es el radio de la circunferencia dada, entonces se satisface la definición de una hipérbola de focos F y F'.

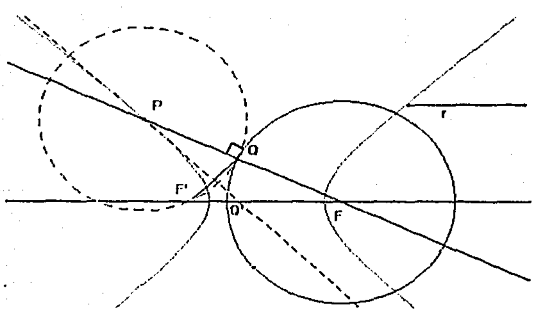
El punto F' fue elegido en el plano con la condición de que no esté dentro del círculo de centro F. Si desplazamos F' de manera que satisfaga la condición anterior, observaremos que la hipérbola se transformará en otra hipérbola y en otra hipérbola y así sucesivamente. Es decir, obtendremos un conjunto infinito de hipérbolas que tienen a F como foco común. En todos los casos la diferencia: $|PF - PF'|$ es igual al radio de la circunferencia de centro el punto F.



Con la finalidad de controlar el movimiento del punto F', podemos definirlo en una recta, ésta la podemos trazar de la siguiente manera: En la circunferencia de centro F elegimos un punto Q' (*punto sobre objeto*), por tanto Q' podrá desplazarse sobre ella. Trazamos la recta FQ', en esta recta podemos ahora elegir el punto F'. La figura muestra la construcción de la hipérbola.

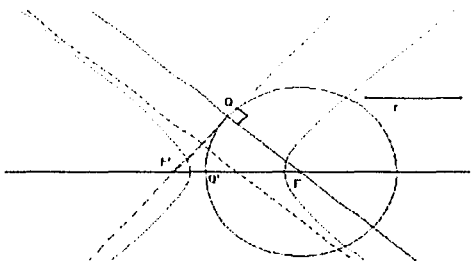
Al desplazar F' sobre la recta FQ' de manera que siempre quede fuera del círculo de centro F, como lo hemos señalado anteriormente, observaremos cómo la hipérbola se transforma en otra hipérbola y en otra. La siguiente figura muestra cuatro de ellas.

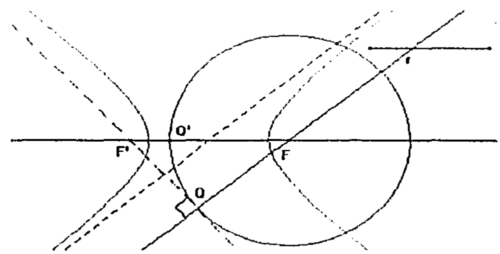




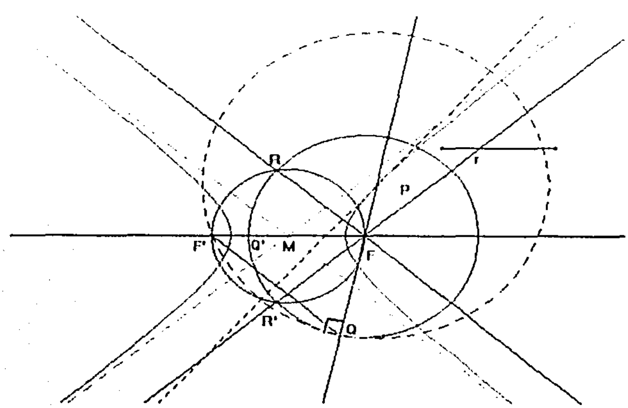
Analicemos la trayectoria que sigue el punto P al describir la hipérbola. Observemos la figura:

Al desplazar el punto Q en el sentido de las manecillas del reloj, P recorre la parte superior izquierda de la rama de la hipérbola; cuando la recta FQ es paralela a la mediatriz de F'Q , el punto P "coincidirá" con el punto del infinito en la dirección de la recta FQ; al seguir desplazando el punto Q, la intersección de las recta FQ y la mediatriz de F'Q (el punto P) aparecerá en la parte inferior de la rama derecha de la hipérbola. Esto es, cuando la mediatriz de F'Q y la recta FQ son paralelas, la mediatriz de F'Q es una de las asíntotas de la hipérbola. Existe otra posición en la que las rectas anteriores también son paralelas, como en el caso anterior, la mediatriz de F'Q, es la otra asíntota. En las figuras se muestran los dos casos.



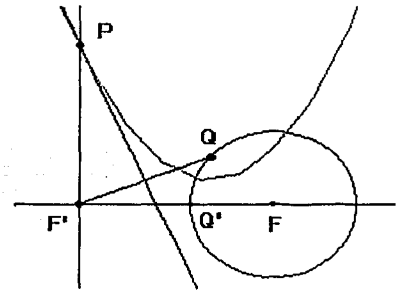


En los casos anteriores, los centros de las circunferencias tangentes a la circunferencia de centro F coinciden con el punto del infinito en la dirección de la recta FQ', por esta razón las circunferencias tangentes en Q son rectas. Los puntos de tangencia los localizamos al trazar las tangentes del punto F' a la circunferencia de centro F. Si llamamos R y R' a tales puntos, las paralelas trazadas en el punto M (punto medio de F'F) a las rectas FR y FR' corresponden a las asíntotas de la hipérbola, como se muestra a continuación.

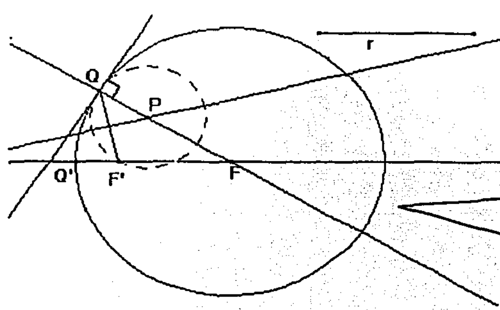


La construcción de la circunferencia que es solución del problema, pasó por tomar un punto Q en la circunferencia de centro F y un punto F' en la recta FQ', así como trazar el segmento FQ y su mediatriz.

- Demuestre que cuando F' varía en la recta *l*, la mediatriz del segmento QF es la envolvente de una parábola de foco Q y directriz la recta FQ'.

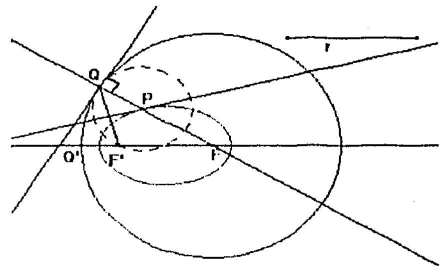


En relación a las cuatro hipérbolas mostradas en la *página 54*, algunos puntos F' están a la derecha de la circunferencia de centro F y otros a su izquierda. De manera natural surge la siguiente pregunta: ¿Qué sucede si F' está dentro del círculo de centro F? Un Programa dinámico como el que utilizamos es tal que si movemos el punto F' hasta que esté dentro del círculo de centro F, la construcción seguirá siendo válida, es decir, las condiciones del *problema 3* se seguirán cumpliendo, sólo que la circunferencia de centro P es ahora tangente interiormente a la de centro F. Ver la siguiente figura.



Por otra parte, observaremos que la hipérbola se habrá transformado en una elipse. Resultado que enunciamos mediante el siguiente:

@ *Teorema 3.2. Dada una circunferencia de centro F y un punto F' interior al círculo de centro F, el lugar geométrico de P (centro de la circunferencia tangente a la circunferencia dada) cuando Q varía en la circunferencia de centro F, es una elipse de focos F y F'.*

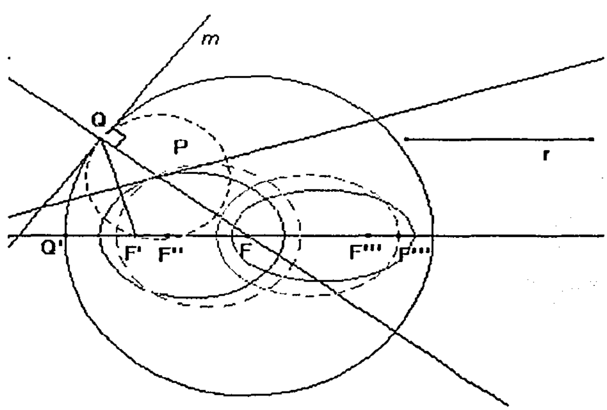


Demostración

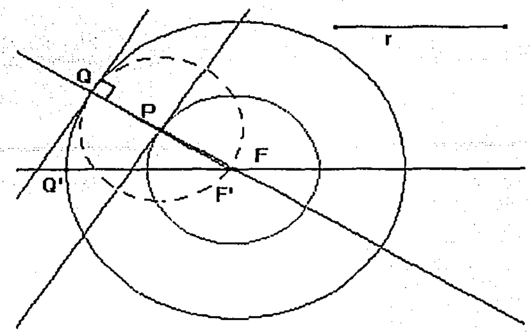
P está en la mediatriz del segmento F'Q, por tanto equidista de sus extremos. Analicemos la siguiente suma PF' + PF.

Dado que PF' = PQ y que PF = FQ – PQ: La suma anterior la podemos escribir como sigue: PF' + PF = PF' + (FQ – PQ) = PQ + (FQ – PQ) = FQ = r. Como r es constante (es el radio de la circunferencia dada), se satisface la definición de una elipse de focos F y F'.

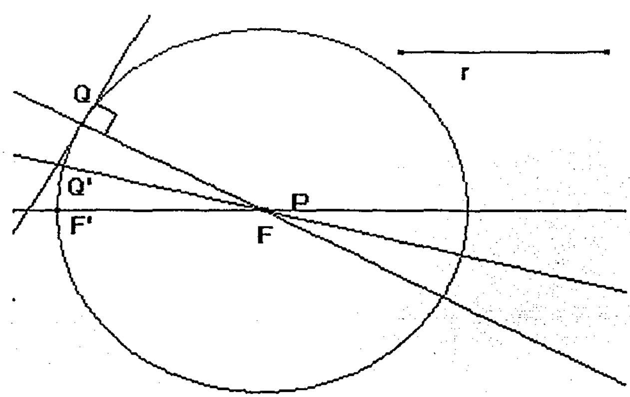
Ahora bien, ¿qué sucederá si movemos F' de manera que permanezca dentro del círculo de centro F pero sin coincidir con F? Observaremos que la elipse se transforma en otra elipse y en otra y así sucesivamente, esto es, se obtendrá un conjunto infinito de elipses que tienen a F como uno de sus focos. En cada caso, la suma F'P + FP es constante e igual al radio de la circunferencia de centro F. La figura siguiente muestra algunas de estas elipses.



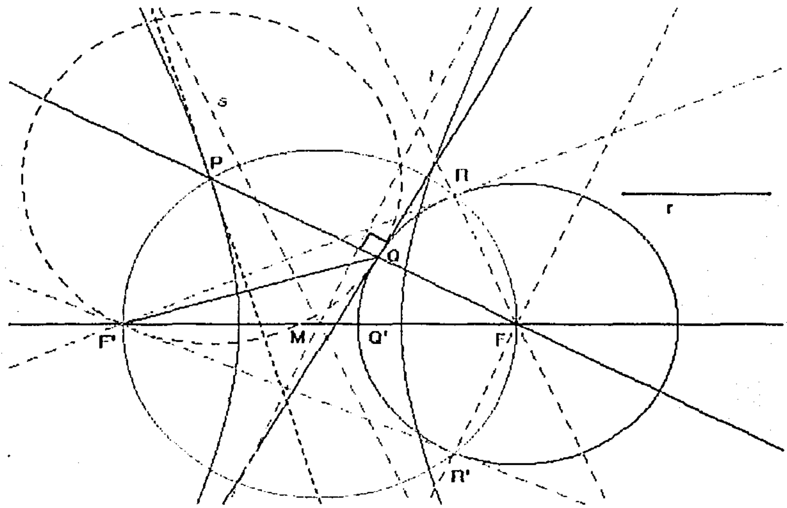
¿Y qué sucederá si hacemos que F' coincida con el punto F? La elipse se transformará en una circunferencia de centro F' = F y radio igual a la mitad del radio de la circunferencia de centro F. En la siguiente figura se muestra una elipse de focos F y F' donde los puntos están muy próximos uno del otro.



Es claro que cuando el punto F' está fuera del círculo de centro F, al mover el punto F' hacia el punto F, en algún momento coincidirá con el punto Q', en este caso el segmento F'Q se transforma en una cuerda de la circunferencia de centro F, de manera que su mediatriz necesariamente pasa por el punto F. Observemos que este punto de intersección se corresponde con el punto P, por lo que el lugar geométrico de P, cuando Q varía en la circunferencia de centro F, es precisamente el punto F, como se muestra en la siguiente figura:



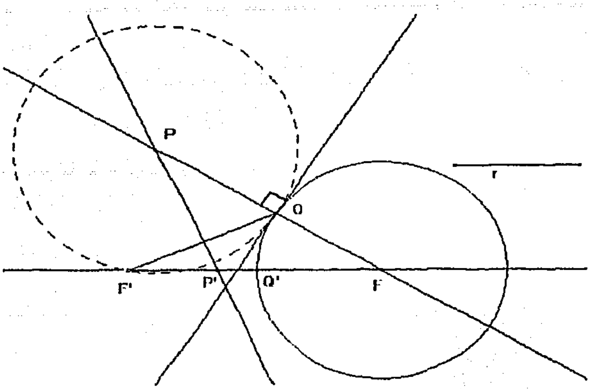
Finalmente, hay un caso que necesitamos analizar, cuando F' "coincide" con el punto del infinito en la dirección de la recta FQ'. Observemos la siguiente figura.



Las rectas F'R y F'R' son tangentes a la circunferencia de centro F en los puntos R y R' respectivamente; las rectas s y t son las asíntotas de la hipérbola.

Cuando F' "coincide" con el punto del infinito en la dirección de FQ', las rectas FR y F'R' serán paralelas y los puntos R y R' estarán ubicados en la perpendicular a la recta F'F levantada en el punto F. Si llamamos *u* la perpendicular indicada anteriormente, las rectas FR' y FR coincidirá con la recta *u*.

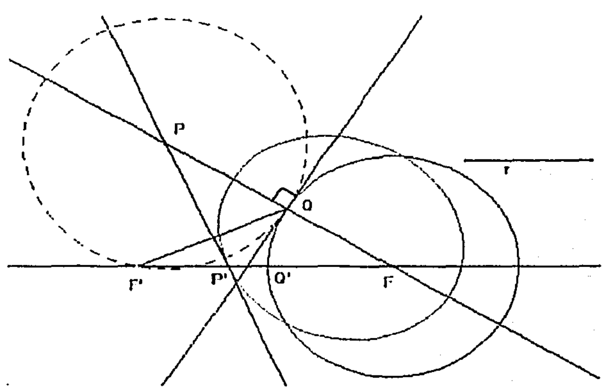
Dado que las asíntotas de la hipérbola son paralelas a las rectas FR' y FR cuando éstas coincidirán con la recta *u*, las asíntotas se transformarán en una recta paralela a esta recta, de manera que la hipérbola se transformará en dos rectas paralelas.



Recordemos que Q' fue definido en la circunferencia de centro F, esta situación nos permite moverlo sobre ella. Al mover Q', la recta FQ' también se moverá. Dado que F' lo hemos elegido de manera que esté sobre la recta FQ', entonces F' se puede mover sobre esa recta y gira con ella. Consideremos el caso en que F' está fuera del círculo de centro F. Por otro lado, la mediatriz del segmento F'Q corta a la recta FQ' en un punto P'. obsérvese la figura de arriba:

Si activamos para P' el comando "*traza*" y hacemos, mediante el comando "*animación*" que Q' recorra la circunferencia de centro F, observaremos que P' describe una elipse. El resultado lo enunciamos como:

@ *Teorema 3.3. Dadas una circunferencia de centro F, una recta FQ' (Q' punto de la circunferencia de centro F) y un punto F' (F' sobre la recta FQ' pero fuera del círculo de centro F); el lugar geométrico de P' (intersección de la recta FQ' y la mediatriz de FQ) es una elipse de focos Q y F cuando Q' varia en la circunferencia de centro F.*

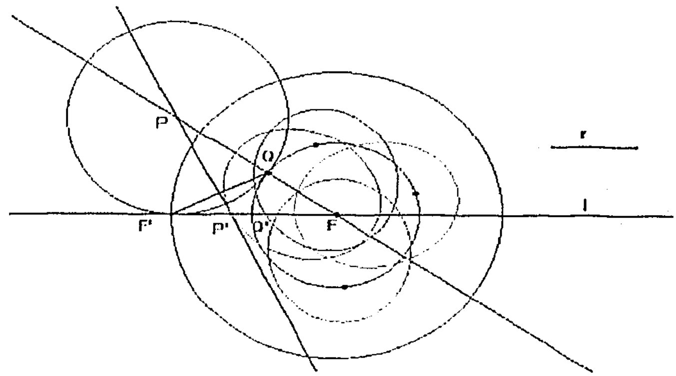


Demostración.

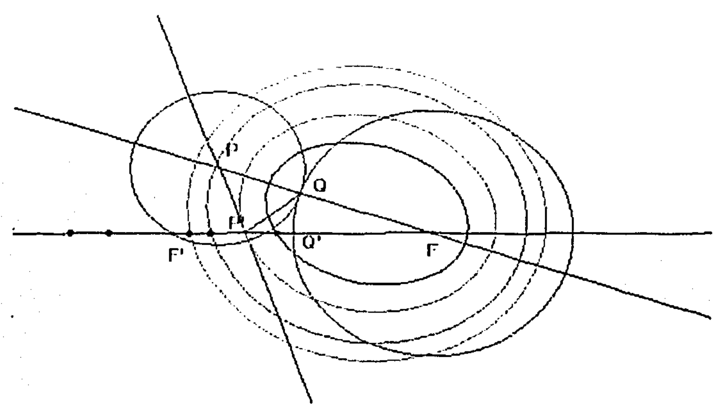
Analicemos la suma P'Q + P'F. Observemos que P'Q = P'F', P' está en la mediatriz de F'Q, entonces podemos escribir la suma anterior como sigue:

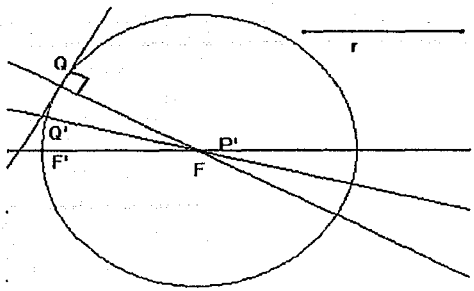
P'F + P'F' = FP'+ P'F' = FF' el cual es constante porque F y F' son fijos en cada dirección. Por lo que se satisface la definición de una elipse de focos Q y F.

El resultado anterior también será válido si Q ocupa otra posición en la circunferencia de centro F, por lo que podemos asegurar que los puntos de la circunferencia de centro F corresponden a uno de los focos de elipses congruentes a la elipse de focos F y Q. La figura muestra cuatro de esas elipses.



Podemos preguntarnos lo que sucede con la elipse de focos F y Q si desplazamos el punto F' sobre la recta FQ'. Al mover el punto en cuestión, observaremos que si F' está fuera del círculo de centro F, se obtiene un conjunto infinito de elipses homofocales (Q y F), como las que se muestran en la siguiente figura.

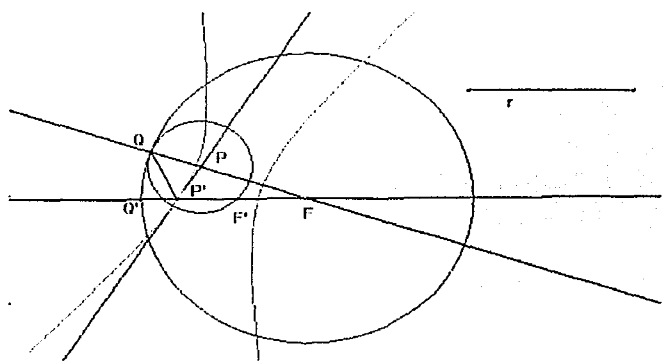




Cuando F' coincide con Q', el punto P' coincide con F, ya que el segmento F'Q se transforma en una cuerda de la circunferencia de centro F, de manera que su mediatriz necesariamente pasa por el punto F. Este punto se corresponde con el punto P, por lo que el lugar geométrico de P', para cualquier punto Q' en la circunferencia de centro F, es precisamente el punto F, como se muestra en la siguiente figura

Si F' está dentro del círculo de centro F la elipse se transforma en una hipérbola, lo cual expresamos mediante el siguiente:

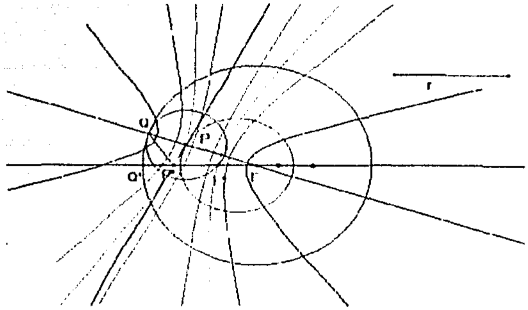
@ *Teorema 3.4. Dadas una circunferencia de centro F, una recta FQ' (Q' en la circunferencia de centro F) y un punto F' (F' sobre la recta FQ' pero dentro del círculo de centro F); el lugar geométrico de P' (intersección de la recta FQ' y la mediatriz de FQ) es una hipérbola de focos Q y F, cuando Q' varía en la circunferencia de centro F.*



Demostración.

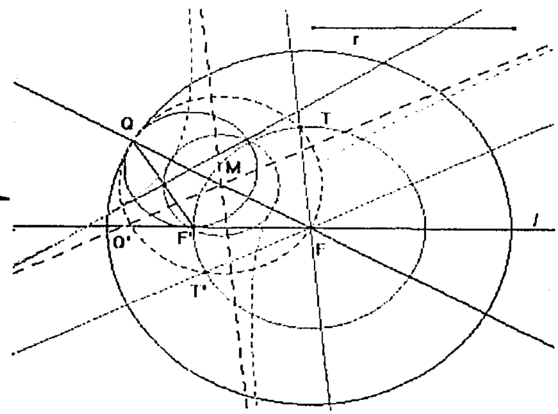
Consideremos la diferencia: $|P'F - P'Q|$. Dado que P'Q = P'F' (P' está en la mediatriz de F'Q) y que P'F = P'F + FF', podemos escribir la diferencia anterior como sigue:

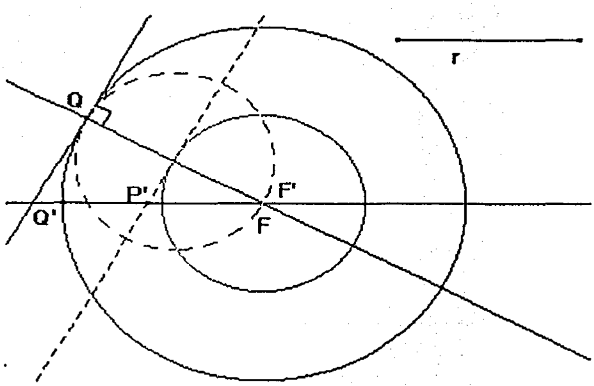
$|P'F - P'Q| = |P'F + FF' - P'Q| = |P'Q + FF' - P'Q| = |FF'|$ pero FF' es constante, es el radio de la circunferencia de centro F'. Por tanto se satisface la definición de una hipérbola de focos F y Q.



Si hacemos que F' recorra la recta FQ' de manera que permanezca dentro de la circunferencia de centro F, notaremos que se obtiene un conjunto infinito de hipérbolas homofocales (Q y F). La figura siguiente muestra algunas de ellas.

La figura muestra las asíntotas de la hipérbola.

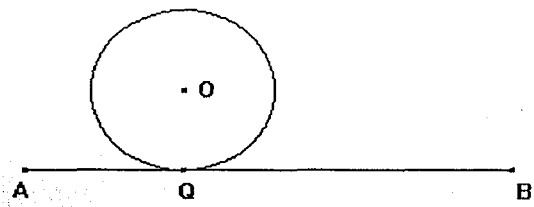




Veamos lo que sucede cuando F' coincide con F. En este caso la mediatriz de F'Q se transforma en la mediatriz de FQ, entonces la hipérbola se transforma en una recta, precisamente aquella que es tangente a la circunferencia de centro F y radio la mitad de r, (r es el radio de la circunferencia de centro F).

El siguiente problema resulta de interés ya que permite observar cómo, al dar movimiento a un cierto punto de la construcción, una cónica se transforma de una hipérbola, a una elipse, de ésta a una circunferencia, de esta circunferencia a una elipse, de esta curva a una parábola, para transformarse a continuación en una hipérbola y finalmente en una recta.

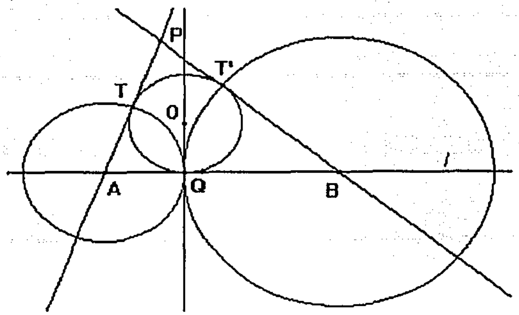
- *Problema 4. Dada la base AB de un triángulo ABP y la circunferencia de centro O, tangente en Q a la base, construir el triángulo de tal forma que la circunferencia de centro O le sea inscrita.*



La determinación de las cónicas está ligada a la forma en que llevemos a cabo la construcción. La idea es proponer una construcción en la cual se pueda hacer variar la medida de la base del triángulo; para ello se requiere, por ejemplo, que el vértice A cambie de posición respecto de B. Esta posibilidad se hace efectiva si elegimos en una recta los puntos A y B de manera que estos puntos se puedan mover en ella. Veamos una forma de resolver el problema.

Construcción

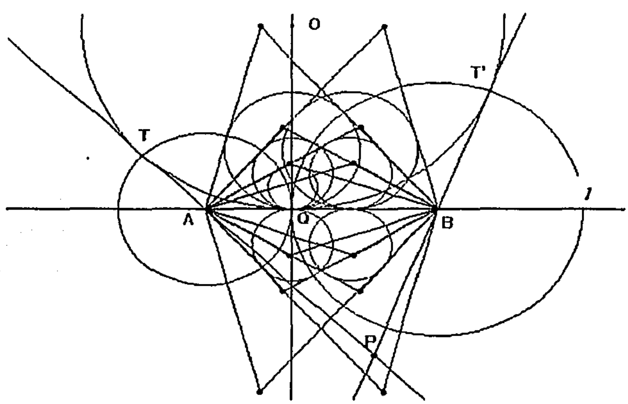
- *Trazar una recta l y en ella elegir dos puntos A y B distintos que recorran la recta.*
- *En la misma recta, pero entre A y B, elegir un punto Q. En Q levantar una perpendicular a l.*
- *En la perpendicular a l levantada en Q, elegir un punto O que recorra esa recta y, trazar una circunferencia con centro O y radio OQ.*
- *Trazar dos circunferencias: una con centro A y radio AQ y otra con centro B y radio BQ. Estas circunferencias cortarán respectivamente a la circunferencia de centro O, en los puntos T y T'.*
- *Trazar las rectas AT y BT'. Las rectas se cortarán en un punto P.*



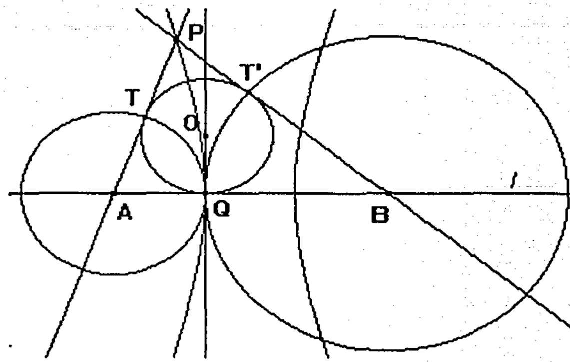
Los puntos A, B y P son los vértices del triángulo buscado y la circunferencia de centro O es su circunferencia inscrita. La figura muestra la construcción.

La demostración de la validez de la construcción, se sigue de la propiedad de igualdad que tienen las tangentes a una circunferencia trazadas por un punto exterior a ella: AQ es tangente a la circunferencia de centro O (por construcción) y dado que AQ = AT (por construcción) entonces la recta AT es tangente a la misma circunferencia. Análogamente, la recta BT' es tangente a la circunferencia de centro O.

De acuerdo a la construcción, hemos definido a O de manera que podemos hacer que recorra la recta perpendicular a *l* levantada en Q. Al mover O sobre esa recta, obtendremos triángulos ABP*s* de mayor o menor perímetro que el inicial y cada uno tendrá su circunferencia inscrita de centro O. Lo anterior también será cierto si O se encuentra en el semiplano inferior respecto a *l*. La siguiente figura muestra algunos de esos triángulos .



En la figura anterior se puede observar que los vértices P de los triángulos ABP están sobre una hipérbola, resultado que enunciamos mediante el siguiente:



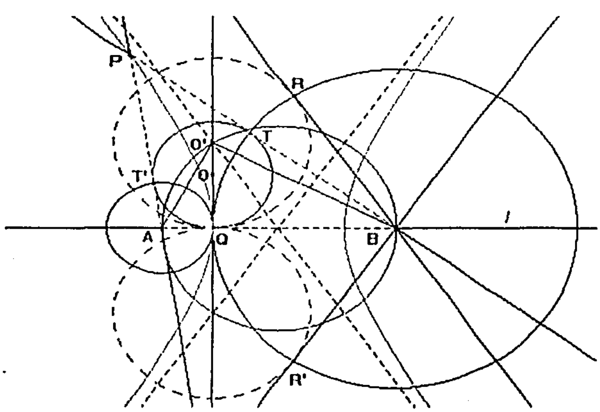
@ *Teorema 4.1. El lugar geométrico de P (tercer vértice del triángulo ABP que tiene al segmento AB como base y a O como centro de la circunferencia inscrita), cuando O varía en la recta que es perpendicular a l en el punto Q, (Q punto de la recta l), es una hipérbola de focos A y B.*

Demostración

TA = AQ; T'B = BQ y PT = PT'. (Igualdad de las tangentes a una circunferencia trazadas por un punto exterior a ella). Analicemos la siguiente diferencia: $|PB - PA|$.
Observemos que PA = PT + TA y PB = PT' + T'B, podemos entonces escribir la diferencia como sigue:

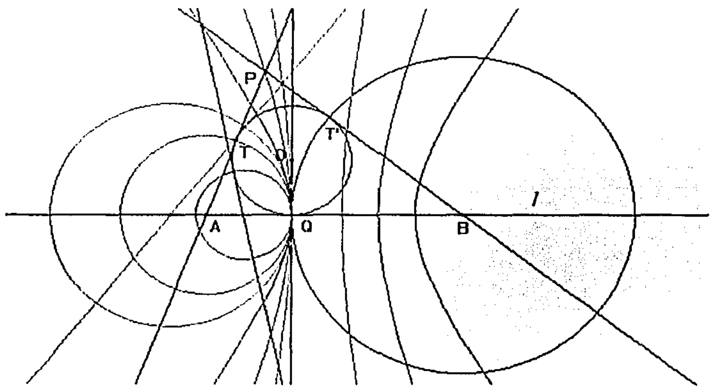
$$|PB - PA| = |PT' + T'B - (PT + TA)| = |PT' + T'B - (PT' + TA)| = |T'B - TA| =$$

$= |BQ - AQ|$, esta última diferencia es constante: representa la diferencia de los segmentos BQ y AQ y, dado que estos segmentos son constantes, la diferencia también lo es. En consecuencia se satisface la definición de una hipérbola de focos A y B.



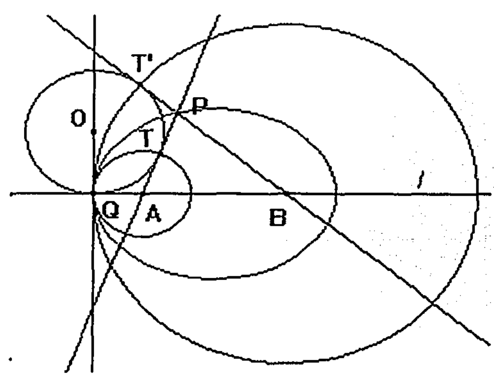
Un análisis similar al que hicimos en el *problema 3*, nos permite construir las asíntotas de la hipérbola. La figura muestra los trazos necesarios.

La construcción fue hecha de manera que es posible modificar la longitud de la base AB del triángulo ABP. Esto lo podemos hacer ya que hemos elegido a los puntos A y B de manera que recorran la recta *l*. Si movemos por ejemplo el punto A de tal forma que se aproxime al punto Q, la hipérbola se transformará en otra hipérbola y en otra y así sucesivamente. Esto es, se obtendrá un conjunto infinito de hipérbolas que tienen a B como foco común. La siguiente figura muestra algunas de estas curvas.



Podemos preguntarnos: ¿qué sucede con la curva que representa el lugar geométrico de P cuando A está a la derecha de Q? o ¿qué sucede si A coincide con B? Al hacer que A esté a la derecha de Q, observaremos que la hipérbola se habrá transformado en una elipse. En este caso la circunferencia de centro O no es inscrita al triángulo ABP; es tangente a la prolongación a los lados del triángulo. Enunciamos el siguiente:

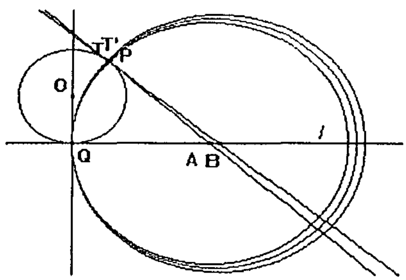
Teorema 4.2. El lugar geométrico de P (vértice del triángulo ABP, que tiene a la circunferencia de centro O como tangente a las rectas l, AP y BP) y Q un punto de la recta l, cuando O varía en la recta perpendicular a l, es una elipse de focos A y B.



Demostración

Analicemos la suma: PA + PB. Observemos que PA = PT + TA y que PB = T'B – T'P, por lo que podemos escribir la suma anterior como: PA + PB = PT + TA + (T'B – T'P), dado que PT = PT', la suma la escribimos de la siguiente manera:

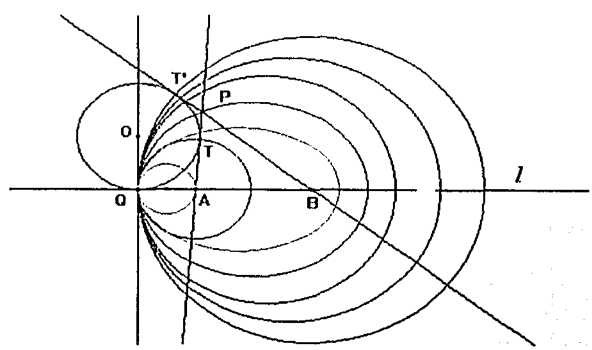
PA + PB = PT' + TA + (T'B – PT') = TA + T'B. Como TA = QA y T'B = QB tenemos que PA + PB = QA + QB. Esta suma es constante, representa la suma de dos segmentos constantes, por lo que se satisface la definición de una elipse de focos A y B.



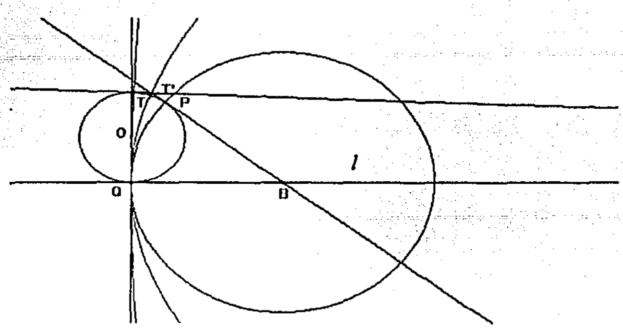
Es claro que cuando A coincide con B la elipse tiene un solo foco, por lo que se transformará en una circunferencia de centro B y radio BT' = AT. En la figura, A y B están próximos uno del otro y se observa como la elipse es muy "parecida" a la circunferencia de centro B.

En este caso el triángulo ABP se transforma en un triángulo de área cero igual al segmento BT'.

Se habrá notado que si A no coincide con B, al desplazar el punto A sobre la recta *l* de manera que permanezca a la derecha de Q, obtendremos un conjunto infinito de elipses de foco común el punto B, como las que se muestran en la figura:

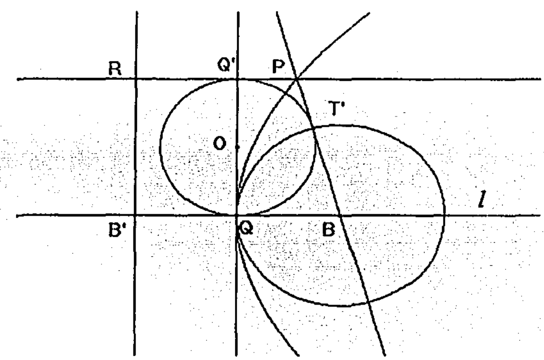


Por otra parte, observemos que cuando A se aleja de B hacia el punto del infinito en la dirección de *l*, la recta AT tiende a ser paralela a la recta *l*, y la circunferencia de centro A y radio AQ tiende a convertirse en la recta QO, como se muestra en la figura



Cuando A "coincide" con el punto del infinito en la dirección de la recta *l*, la recta AT será paralela a *l*, la circunferencia de centro A coincidirá con la recta OQ y, el lugar geométrico de P parece transformarse en una parábola. Enunciamos el siguiente:

Teorema 4.3. El lugar geométrico de P (en este caso el vértice A del "triángulo" ABP es el punto del infinito), que tiene a la circunferencia de centro O como tangente a las rectas l, AP y BP) cuando O en la recta OQ, es una parábola de foco B, cuya directriz es la perpendicular a l levantada en el punto B' (B' simétrico de B respecto de Q).



En la figura:

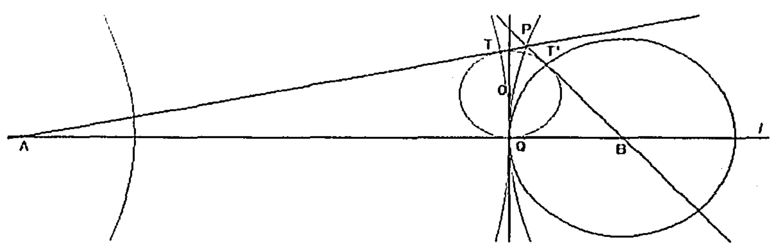
- Q' es intersección de la circunferencia de centro O y la perpendicular a *l* levantada en Q.
- Q'P es tangente en Q' a la circunferencia de centro O (corresponde a la recta AT).

Demostración

PB = PT' + T'B y PR = PQ' + Q'R, Por otra parte, PQ' = PT' y (tangente trazada a la circunferencia de centro B desde un punto exterior); Q'R = QB' = QB (por construcción) y T'B = BQ (son radios de la misma circunferencia). De acuerdo a lo anterior se tiene que:
PB = PT' + T'B = PQ' + QB y PR = PQ' + Q'R = PQ' + QB' = PQ' + Q'R = PQ'. + Q'B

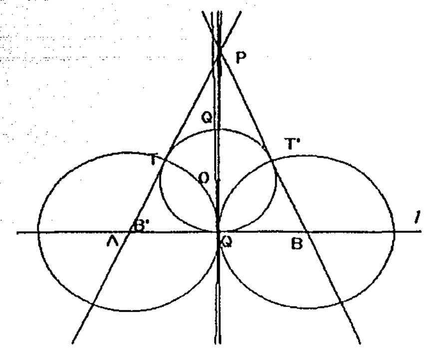
Lo que muestra que PB = PR, por tanto se satisface la definición de una parábola de foco B y directriz la recta B'R.

En la construcción, el punto A lo desplazamos de izquierda a derecha respecto el punto Q, de manera que cuando la hipérbola se transforma en elipse, el punto A está a la derecha de Q. Si activamos el comando animación para el punto A y hacemos que recorra la recta *l* como hemos indicado, después de que el punto A "coincide" con el punto el infinito en la dirección de *l*, notaremos que la curvatura de la circunferencia de centro A habrá cambiado, como se muestra en la siguiente figura.



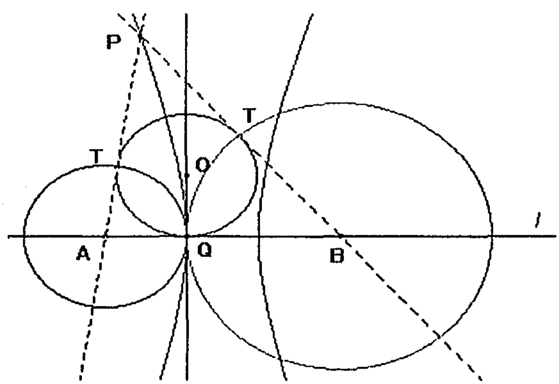
Lo anterior se debe a que el punto A se encuentra ahora a la izquierda del punto Q. Por otra parte, observaremos que la parábola se habrá transformado en una hipérbola; resultado que hemos considerado en el *teorema 4.1*. Cuando el punto A coincide con B', (simétrico de B respecto de Q), notaremos que el lugar geométrico de P es una recta. El resultado se enuncia como:

Teorema 4.4. Si A es simétrico de B respecto de Q, el lugar geométrico de P (vértice del triángulo ABP que tiene a la circunferencia de centro O como inscrita), cuando O varía en la recta OQ, es una recta (la mediatriz del segmento AB).



Demostración

Dado que A coincide con B' (simétrico de B respecto de Q), el triángulo ABP tiene que ser isósceles, por tanto P debe estar en la mediatriz de AB.

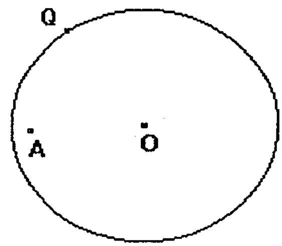


La construcción del triángulo que tiene a la circunferencia de centro O como inscrita, se llevó a cabo trazando primero una recta *l* y en ella se ubicaron los puntos A, Q y B de manera que recorren la recta *l*. Por otra parte, demostramos que, dependiendo de la posición de A en la recta *l*, el lugar geométrico de P es una hipérbola, una elipse, una circunferencia, una recta o una parábola

Demuestre que, cuando O varía en la recta OQ y, dependiendo de la posición de Q en la recta *l*, el lugar geométrico de P es: una elipse, una hipérbola o una recta.

El siguiente problema es interesante ya que, con un poco de "experimentación", se obtienen elipses, hipérbolas, parábolas y círculos.

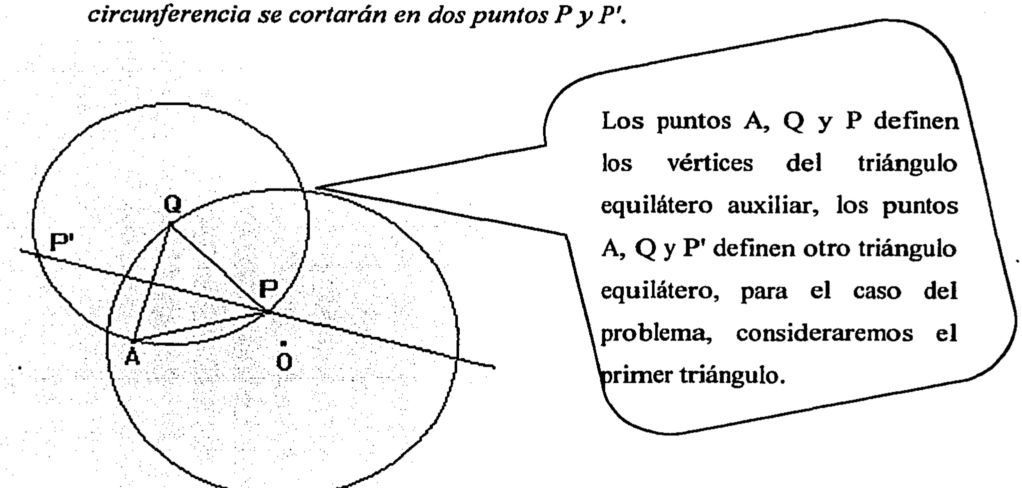
- *Problema 5. Dada una circunferencia de radio r y centro O así como un punto A en el plano, construir un triángulo equilátero ASS' tal que los vértices S y S' se encuentren sobre la circunferencia.*

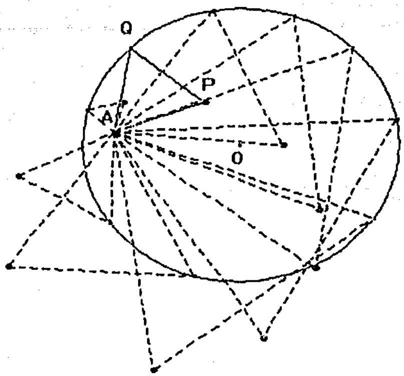


Consideremos el punto A interior al círculo. La solución del problema la daremos a partir de construir un triángulo equilátero APQ auxiliar, cuyo lado mida el segmento AQ y Q sea un punto cualquiera de la circunferencia.

Construcción del triángulo equilátero auxiliar.

- *Elegir un punto Q sobre la circunferencia.*
- *Trazar el segmento AQ y su mediatriz.*
- *Trazar la circunferencia de centro Q y radio QA. La mediatriz y la circunferencia se cortarán en dos puntos P y P'.*

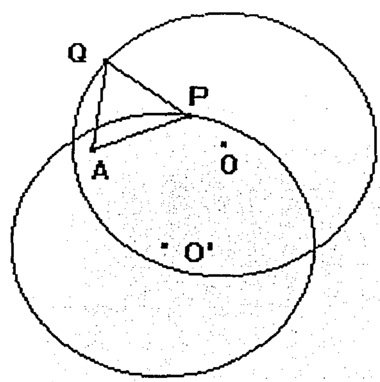




Al mover Q en la circunferencia obtendremos un conjunto infinito de triángulos equiláteros En la figura se muestran algunos:

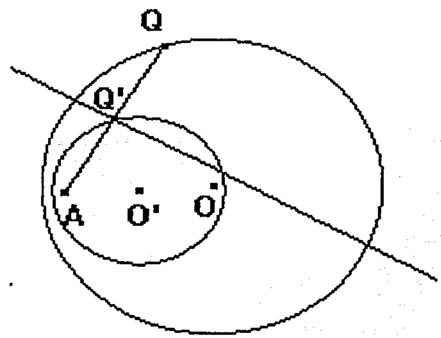
Necesariamente, habrá un punto Q' en la circunferencia tal que el vértice P de algún triángulo equilátero APQ' intersectará a la circunferencia. El asunto es determinar ese punto. Como se observa en la figura de arriba, los puntos Ps (vértices de los triángulos equiláteros) parece que están sobre una circunferencia, de manera que el punto que requerimos, es aquel que es intersección de la curva que describe P con la circunferencia de centro O. Enunciamos el siguiente:

© *Teorema 5.1 Dada la circunferencia de centro O y radio r, un punto Q de la circunferencia y un punto A dentro del circulo; el lugar geométrico de P (vértice del triángulo equilátero APQ de lado AQ) cuando Q varía en la circunferencia, es una circunferencia de centro O' y radio r.*



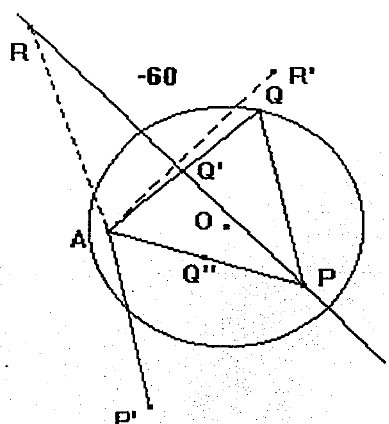
Demostración. El resultado requiere de probar los siguientes lemas.

Lema 1. Dada una circunferencia de centro O y radio r y Q, punto de la circunferencia, así como un punto A interior al círculo; el lugar geométrico de Q' (punto medio de AQ), cuando Q varía en la circunferencia de centro O, es una circunferencia de radio igual la mitad de r y centro O' (punto medio del segmento AO)



Demostración

Para cualquier posición de Q en la circunferencia de centro O, Q' es punto medio del segmento AQ. Notemos que la razón AQ'/AQ es constante (igual a 1 /2), por otra parte, A es un punto fijo. Entonces la circunferencia de centro O' (punto medio de AO) es el resultado de aplicar a la circunferencia de centro O una homotecia de razón 1 /2 y centro de homotecia el punto A. Lo anterior muestra que el lugar geométrico de Q' es precisamente la circunferencia que tiene como centro O'. El que O' sea centro de la circunferencia homotética a la de centro O, se sigue de la definición de homotecia.



Lema2: Dado un triángulo equilátero AQP y la mediatriz del lado AQ. Consideremos un punto R en esa mediatriz. Sea R' el resultado de rotar R un ángulo igual a –60° respecto al punto A. Afirmamos que R' está sobre la mediatriz de AP.

En la figura:

- R está en la mediatriz de AQ.
- El segmento AR' es el resultado de rotar el segmento AR un ángulo igual a –60° respecto al punto A.
- Q' es punto medio de AQ.
- Q" es punto medio de AP
- AP' es resultado de rotar el segmento AP un ángulo igual a –60° respecto al punto A

Probaremos que R' está sobre la mediatriz de AP

Demostración

Es claro que si rotamos la mediatriz del segmento AQ un ángulo igual a –60° respecto al punto A, obtendremos una recta *l*, que por el momento, desconocemos la posición que tendrá respecto al segmento AP.

Consideremos los puntos R', Q" y P', estos puntos deben estar sobre la mediatriz de AP en razón de que los puntos R, Q' y P están sobre la mediatriz de AQ. Veamos:

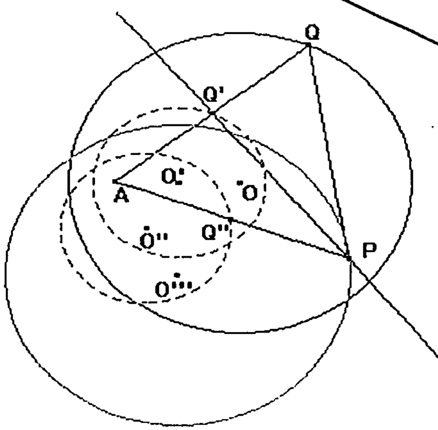
En primer lugar, al rotar el segmento AQ', un ángulo igual a –60° con respecto al punto A, este segmento coincidirá con AQ": el ángulo Q'AQ" es de 60°. Dado que el triángulo APQ es equilátero, a Q' le corresponde en la rotación el punto Q".

En segundo lugar, el segmento AP', que resulta de rotar el segmento AP un ángulo igual a –60° respecto al punto A, y el segmento AP mismo, definen el triángulo equilátero AP'P, que tiene a AP y AP' como lados. Así a P le corresponde en la rotación el punto P'.

En tercer lugar, los puntos Q' y P definen una recta y dado que estos puntos están sobre la mediatriz de AQ, al rotar esta mediatriz un ángulo igual a –60° respecto el punto A, entonces los puntos Q" y P' que le corresponden en la rotación definen una recta. Ahora bien, notemos que el cuadrilátero AQPP' es un rombo en el que la recta P'Q'' es su mediatriz (también mediatriz del triángulo APQ). De acuerdo a lo anterior, la recta P'Q'' debe coincidir con la recta que es mediatriz del segmento AP.

Dado que R está sobre la mediatriz de AQ, entonces R' debe estar sobre la mediatriz de AP, que era lo que se deseaba demostrar.

Demostración del teorema

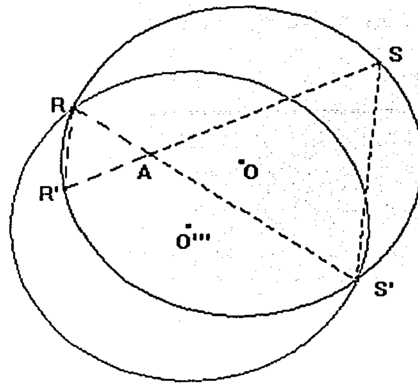


Observemos que el punto Q' satisface las condiciones del *lema 1*: A punto fijo, la razón AQ/AQ' es igual a 1/2, para Q en la circunfernferencia de centro O; en consecuencia, el lugar geométrico de Q' cuando Q varía en la circunferencia de centro O, es la circunferencia de centro O' y radio r/2.

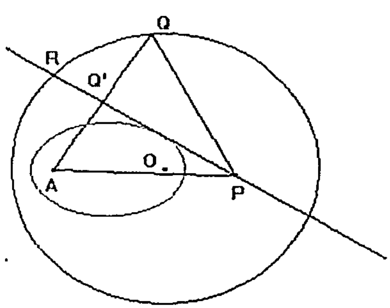
De acuerdo al *lema 2*, al punto Q' le corresponde el punto Q'' al rotar la mediatriz de AQ un ángulo de –60° respecto al punto A. Dado que Q' describe una circunferencia, entonces el punto Q'' describirá también una circunferencia de centro O'' y radio O''A, que resulta de rotar la circunferencia de centro O' un ángulo igual a –60° respecto el punto A.

Por otra parte, observemos que cuando Q'' varía en la circunferencia de centro O'', la razón AP/AO'' es constante e igual a 2 y, dado que A es un punto fijo, podemos concluir que P describe una curva homotética de razón 2 a la circunferencia de centro O'', con centro de homotecia el punto A; es decir, una circunferencia de centro O''' y radio r, lo que demuestra el teorema.

Las circunferencias de centro O y centro O''' se intersectan en los puntos R y S' respectivamente; en particular estos puntos son vértices de triángulos equiláteros que tienen dos de sus vértices en la circunferencia de centro O. La solución al *problema 5* se consigue al trazar los triángulos equiláteros ASS' y ARR' como se muestran en la figura.

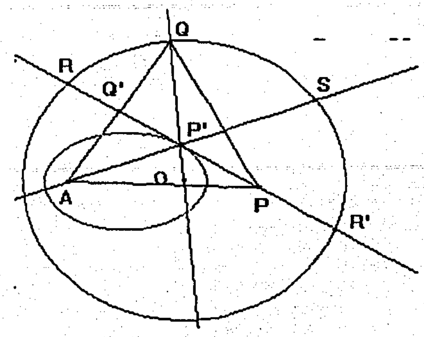


Al hacer que Q recorra la circunferencia de centro O notaremos que la mediatriz de AQ se "inclina". Así al activar para esa recta el comando *"lugar geométrico"*, observaremos en la pantalla una elipse. La figura siguiente muestra el resultado.



La elipse se ha generado con la mediatriz de AQ, por lo que es necesario que localicemos el punto P' que la genera. Es relativamente sencillo localizar ese punto, para ello podemos remitirnos al *problema 3,* en el cual se trataba de *construir una circunferencia tangente a otra dada y que pase por un punto interior al círculo*, (ver página 57). En el caso de este problema, P' es el centro de la circunferencia que es tangente en Q a la de centro O y pasa por A. El resultado lo enunciamos de la siguiente manera:

@ *Teorema 5.2 Dada una circunferencia de centro O y radio r y un punto Q de la circunferencia, así como un punto A interior al círculo, el lugar geométrico de P' (intersección de la recta OQ con la mediatriz del lado AQ) cuando Q varía en la circunferencia de centro O, es una elipse de focos A y O.*



En la figura

- El punto P' es intersección de la mediatriz de AQ y la recta OQ.
- El punto S es intersección de la recta AP' con la circunferencia.
- Los puntos R y R' son intersección de la mediatriz de AQ con la circunferencia.

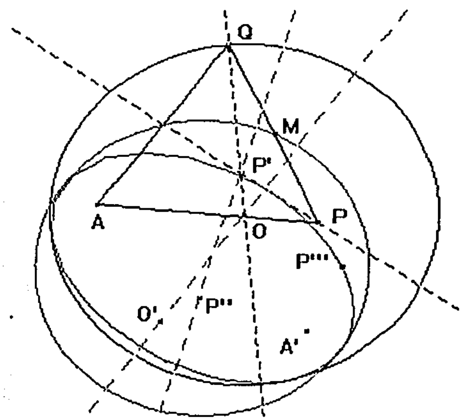
Demostración

Analicemos la suma P'A + P'O. Como P' equidista de A y de Q (P' está en la mediatriz de AQ) tendremos que P'A = P'Q. La suma anterior la escribiremos como:
P'A + P'O = P'Q + P'O = OQ. Como OQ es constante (es el radio de la circunferencia de centro O), se satisface la definición de una elipse de focos A y O.

Por otra parte, los ángulos AP'R y SP'P son iguales (son opuestos por el vértice). Análogamente los ángulos RP'Q y OP'P son iguales. Por otro lado, los ángulos QP'R y AP'R son iguales (la recta RR' es mediatriz de AQ). De acuerdo a estos resultados, cuando Q varía en la circunferencia de centro O los ángulos AP'R y OP'P son iguales, por lo que satisface la propiedad que tienen las tangentes a una elipse (los segmentos que unen un punto P' de una elipse con sus focos forman ángulos iguales con la tangente a la elipse trazada en el punto P'). Por tanto la recta RR' que corresponde a la mediatriz de AQ es tangente a la elipse para cualquier punto P'. Hemos demostrado el siguiente:

Teorema 5.3 Dada una circunferencia de centro O y radio r y un punto Q de la circunferencia, así como un punto A interior al círculo, la mediatriz del lado AQ del triángulo equilátero APQ, cuando Q varía en la circunferencia de centro O, es la envolvente de la elipse de focos A y O.

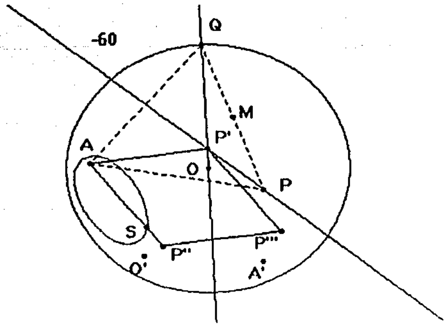
En la siguiente figura se han trazado las rectas P'P" y OO'



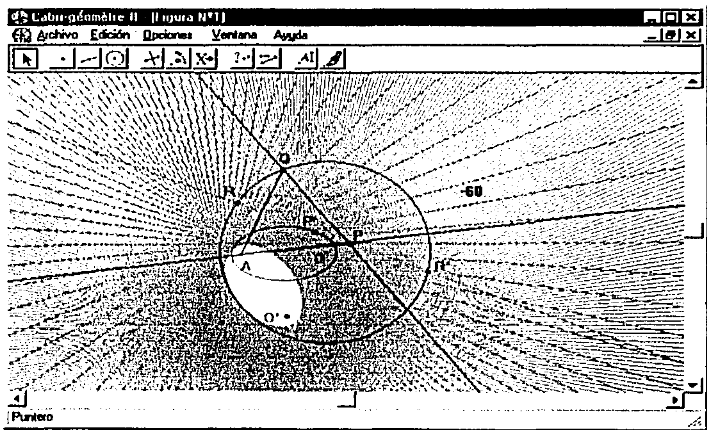
Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia de centro O, el lugar geométrico de P''' (se obtiene al reflejar el punto A sobre la recta P'P"), es una elipse de focos A y A', (A' se obtiene al reflejar el punto A sobre la recta OO').

Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia de centro O, el lugar geométrico de M (punto medio de PQ), es otra circunferencia.

*En la figura anterior los puntos A, P', P" y P''' definen un rombo de ángulos agudos de 60°. Demuestre que si S es un punto del perímetro del rombo, el lugar geométrico de S, cuando Q varía en la circunferencia de centro O, es una elipse que tiene al punto A como uno de sus focos. Ver la figura siguiente.

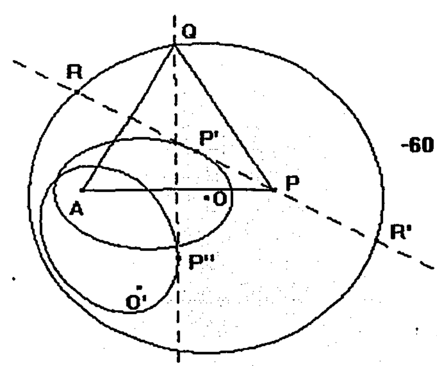


El resultado del *teorema 5.3* nos llevó a conjeturar que la mediatriz del lado AP también generaba otra elipse. Si activamos el comando "*traza*" para la recta y el comando "*animación*" para el punto Q, aparecerá delineada la elipse de focos A y O' (O' es el centro de la circunferencia que es lugar geométrico del punto P) donde la mediatriz de AP es su envolvente. La figura siguiente muestra el hecho anterior.



Necesitamos localizar el punto que genera la elipse. En el enunciado del siguiente teorema indicamos cómo hallar este punto.

Teorema 5.4 Dada una circunferencia de centro O de radio r y un punto Q punto de la circunferencia, así como un punto A interior al círculo. El lugar geométrico de P'' (punto que resulta de rotar P', intersección de la mediatriz de AQ con la recta OQ, un ángulo igual a –60° respecto al punto A), es una elipse de focos A y O'.

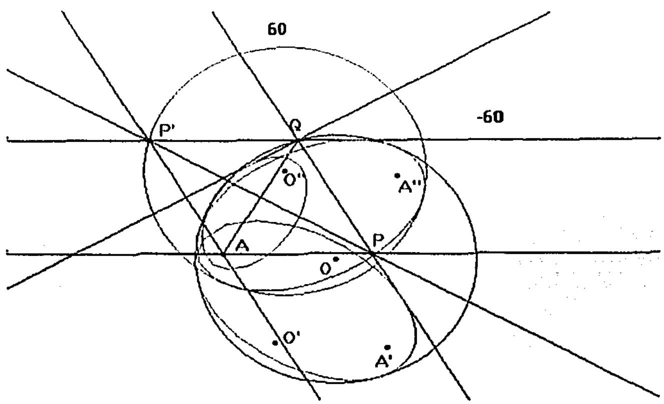


Demostración del Teorema

Sabemos que P' es un punto que está en la mediatriz de AQ, por tanto al ser rotado un ángulo igual a –60° respecto al punto A, de acuerdo al *lema 2*, se corresponderá con un punto P" que se encuentra sobre la mediatriz de AP.

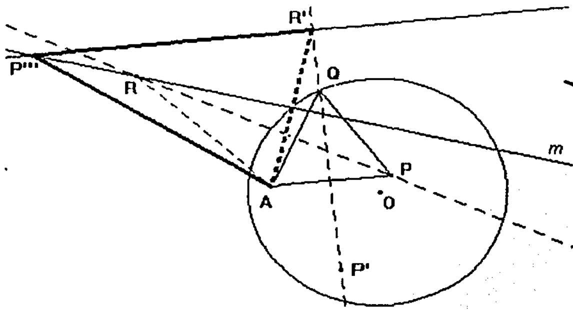
Por otra parte, sabemos que P' describe una elipse para cualquier punto Q de la circunferencia de centro O, por lo que P" también describirá otra elipse, ésta se obtiene al rotar la elipse generada por P' un ángulo igual a –60° respecto al punto A. Los focos de la elipse generada por P" son A y O' (O' es el centro de la circunferencia que es el lugar geométrico de P).

Para trazar triángulo ASS' solución del problema construimos el triángulo equilátero APQ auxiliar, la misma construcción permite definir el triángulo equilátero AQP' como se muestra en la siguiente figura:



- Demuestre que:
  - Cuando Q varía en la circunferencia de centro O, el lugar geométrico de P' es una circunferencia de centro O" (se obtiene al rotar el punto O un ángulo igual a 60° respecto al punto A) y radio igual a la de centro O.
  - Cuando Q varía en la circunferencia de centro O, la recta QP' es la envolvente de una elipse de focos A y A". La elipse se obtiene al rotar la elipse de focos A y A' un ángulo igual a –60° respecto al punto A.

- Cuando Q varía en la circunferencia de centro O, cuando Q varía en la circunferencia de centro O la mediatriz del segmento AP' es la envolvente de la elipse de focos A y O".



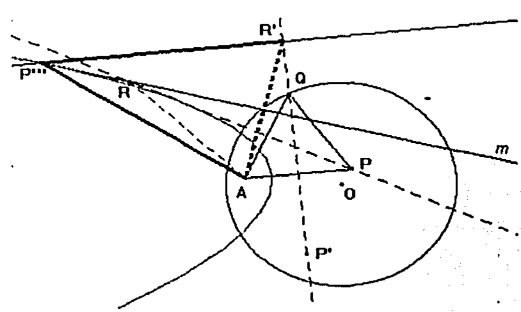
La figura muestra la construcción que sirvió para ilustrar la demostración del lema 2.

En la figura

- R es un punto de la mediatriz de AQ
- La recta *m* es mediatriz al segmento AR' (necesariamente pasa por R)
- P''' es intersección de la recta *m* y la perpendicular a la mediatriz e AP levantada en el punto R'.

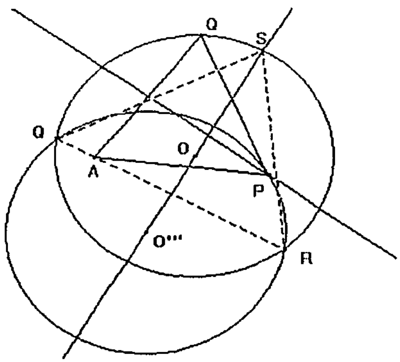
Si activamos el comando "*animación*" para el punto R (el cual fue definido en la mediatriz de AQ y el comando "*traza*" para el punto P''', observaremos que este punto describe una parábola. Enunciamos el siguiente:

Teorema 5.5. Dadas las condiciones de la construcción anterior, el lugar geométrico de P''' (intersección de la recta m y la perpendicular a la mediatriz de AR' levantada en el punto R') cuando R varía la mediatriz de AQ', es una parábola de foco A y directriz la mediatriz de AP.



❀ **Demostración.**

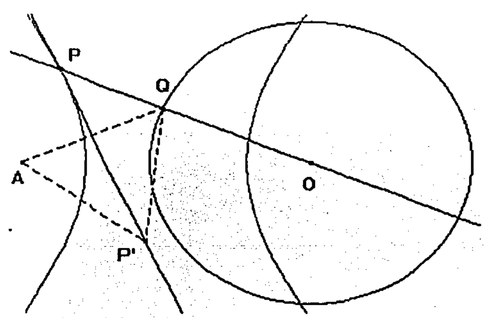
El triángulo AR'P''' es isósceles en razón de que: P'''A = P'''R' (P''' está en la mediatriz de AR'). Dado que por construcción, R'P''' es perpendicular a la mediatriz de AR', se satisface la definición de una parábola de foco A y directriz la mediatriz de AP.



Hemos considerado el caso en que el punto A está dentro de la circunferencia de centro O. Si el punto A está en la circunferencia entonces el problema 5 se reduce a construir un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia en que el punto Q es uno de sus vértices. Como se muestra en la figura:

Si el punto A está fuera del círculo, la solución del *problema 5* depende de la existencia de la intersección de las circunferencias de centro O y O': La construcción que da solución al problema cuando A está fuera, es similar a la realizada cuando el punto A está dentro del círculo. Con el uso del Programa, basta con tomar con el ratón el punto A y llevarlo hasta que el punto quede fuera; al realizar el procedimiento anterior, notaremos que la elipse se habrá transformado en una hipérbola. Enunciamos el siguiente:

☺ *Teorema 5.6. Dada una circunferencia de centro O y radio r, un punto Q de la circunferencia y un punto A fuera del círculo dado, el lugar geométrico de P' (intersección de la recta OQ con la mediatriz del lado AQ) cuando Q varía en la circunferencia de centro O, es una hipérbola de focos A y O.*



Demostración

Analicemos la diferencia: $|P'A - P'O|$

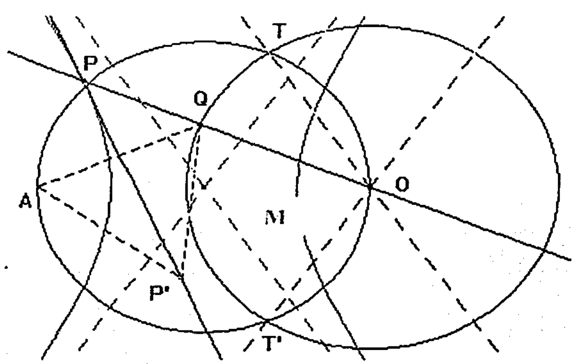
Como $P'A = P'Q$ (P' está en la mediatriz de AQ) y $P'O = P'Q - OQ$, la diferencia la escribimos de la siguiente manera:

$|P'A - P'O| = |P'Q - (P'Q - OQ)| = |OQ| = OQ$. Como OQ es el radio de la circunferencia dada, la diferencia es constante, por lo que se satisface la definición de una hipérbola de focos A y O.

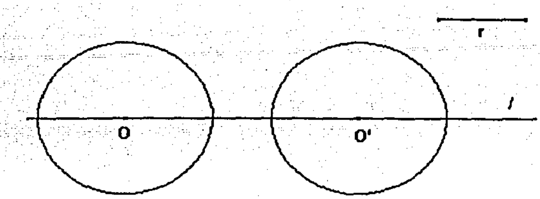
Un análisis similar al que hicimos en el *problema 3* nos permite concluir que las asíntotas de la hipérbola se localizan al trazar:

- *Las tangentes, desde A, a la circunferencia de centro O.*
- *Si llamamos T y T' a los puntos de tangencia, las rectas que unen el punto O con los puntos T y T' y,*
- *Las paralelas en el punto M (punto medio del segmento AO) a las rectas FT y FT' respectivamente.*

La siguiente figura muestra el resultado de los trazos indicados anteriormente.



- *Problema 6. Dadas dos circunferencias de igual radio, cuyos centros O y O' están sobre una recta l, construir una circunferencia tangente a las dos dadas.*



La solución del problema que daremos es general, es decir, no importa si los radios de las circunferencias son iguales o diferentes. Si aceptamos el teorema que dice: si una circunferencia tiene su centro en el eje radical de dos circunferencias de centro O y O' y corta a una de las dos circunferencias ortogonalmente, entonces necesariamente cortará a la otra también ortogonalmente. Entonces la construcción que daremos pasa por trazar el eje radical de las circunferencias dadas. El problema general: *Dadas dos circunferencias de diferente radio, cuyos centros O y O' están sobre una recta l, construir una circunferencia tangente a las dos dadas,* lo proponemos para ser resuelto.

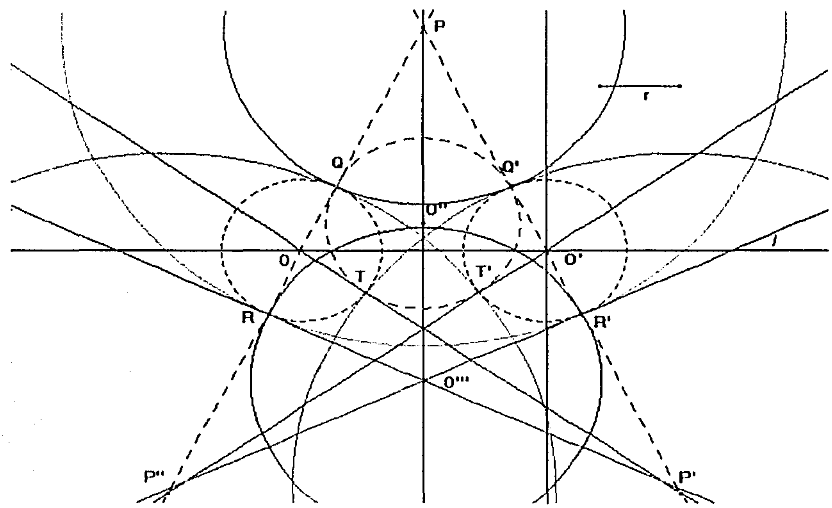
Consideremos el caso en el que las circunferencias no se intersectan y tienen el mismo radio. El eje radical coincide con la mediatriz de OO'.

Construcción

- *Elegir dos puntos O y O' en la recta l, con centros en O y O' mediante el comando compás trazar dos circunferencias de radio r.*
- *Trazar la mediatriz de O'O.*
- *En una de las circunferencias, por ejemplo la de centro O, elegir un punto Q (si trazáramos en O una perpendicular a l el punto Q no debe estar sobre dicha perpendicular) y trazar la recta OQ; ésta corta a la circunferencia de centro O en R.*
- *Reflejar los puntos Q y R sobre la mediatriz de OO'. Llamar Q' y R' a los puntos resultados de la reflexión. Estos puntos estarán sobre la circunferencia de centro O'.*

- *En Q y en R trazar perpendiculares a la recta OQ, estas rectas cortarán a la mediatriz de O'O en O'' y O''' respectivamente.*
- *Trazar dos circunferencias, una con centro en O'' y radio O''Q y otra con centro en O''' y radio O'''R. La primera circunferencia cortará a la de centro O en el punto T.*
- *Reflejar sobre la mediatriz de OO' el punto T. Llamar T' a tal punto el cual estará en la circunferencia de centro O'.*
- *Trazar las rectas O'Q', OT, O'T'. Las rectas O'Q' y OT se cortarán en un punto P'. Las rectas OQ y O'T' se cortarán en un punto P''.*
- *Trazar las circunferencias de centro P y radios PQ y PR. Asimismo, trazar las circunferencias de centros P' y P'' y radios P'Q' y P''Q respectivamente.*

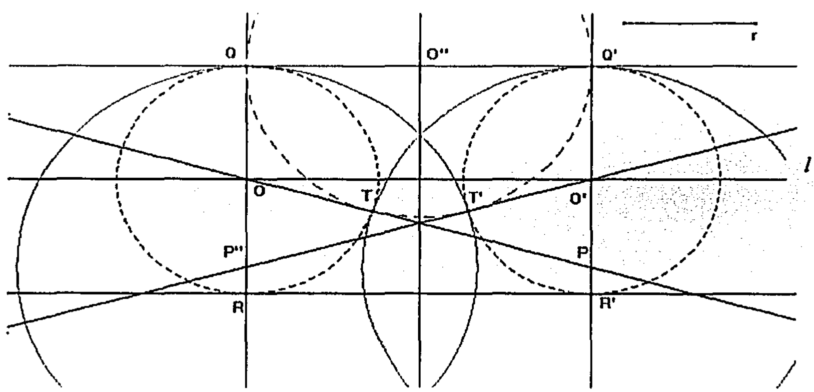
Las circunferencias de centros P, P' y P'' son los tres tipos de circunferencias que satisfacen las condiciones del problema, como se muestra en la siguiente figura.



La validez de la construcción resulta de las siguientes consideraciones: Por construcción, los centros de las circunferencias de centro O'' y O''' están sobre el eje radical de las circunferencias de centro O y O', dado que también por construcción la circunferencia de centro O'' corta a la de centro O ortogonalmente; de acuerdo al teorema que enunciamos en los comentarios previos, también cortará ortogonalmente a la de centro O'. Los resultados anteriores nos permiten concluir que las rectas OT y O'T', son tangentes a la circunferencia de centro O y la recta O'Q' es tangente a la circunferencia de centro O'. De igual manera las rectas O'''R' y O'''R son tangentes a las circunferencias de centros O y O'.

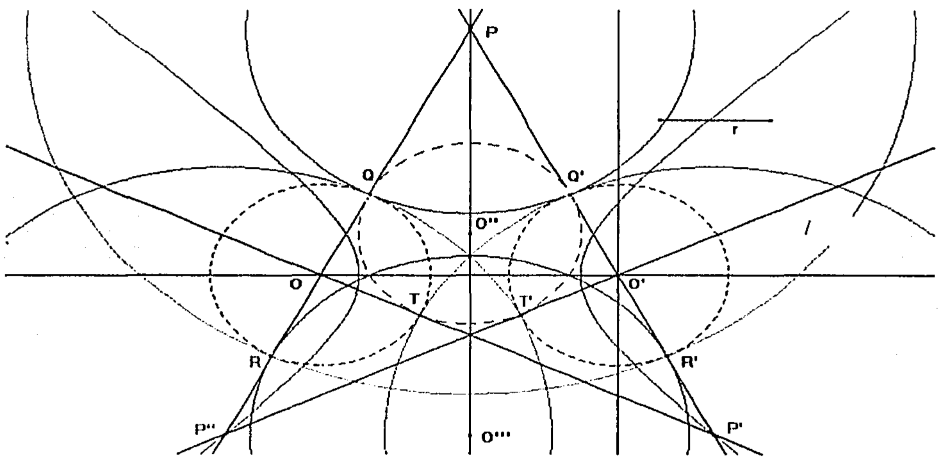
Los resultados anteriores y la propiedad que tienen las tangentes a una circunferencia trazadas desde un punto exterior, nos permiten concluir que: PQ = PQ', PR = PR'. Lo anterior muestra que la circunferencia de centro P y radio PQ es tangente en Q y Q' a las de centro O y O'; asimismo, la de centro P y radio OR es tangente en R y R' a las circunferencias de centro O y O'. De igual manera las circunferencias de centro P' y P'' son tangentes en T y T' a las circunferencias de centro O y O'.

En la construcción tomamos el punto Q de manera que no estuviese sobre la perpendicular a la recta *l* levantada en O. Esta condición no es necesaria. En el caso de que Q esté sobre la perpendicular a la recta *l*, las circunferencias de centro P son tales que P es el punto al infinito en la dirección de *l*, de manera que dichas circunferencias son rectas. Así la circunferencia de radio PQ = PQ' es tangente en Q y Q' a las de centro O y O' y la circunferencia de radio PR = PR' es tangente en R y R' a las mismas circunferencias, como se muestra a continuación.



Como lo mostramos en las figuras de arriba, son tres tipos de circunferencias tangentes a las circunferencias de centros O y O'. Unas son tangentes exteriores, otras son tangentes tales que las circunferencias dadas le son interiores y, otras son tales que una de las circunferencias de centros O y O' está dentro a la circunferencia que le es tangente y otra de las circunferencias es tangente externamente. De esta manera, cuando Q recorre la circunferencia de centro O, los puntos P, P' y P'' no sólo recorren la mediatriz de OO'; también describen otra curva, a saber, una hipérbola.

Teorema 6.1 Dadas dos circunferencias de radio r que no se intersectan, cuyos centros O y O' están sobre una recta l, el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a las dos circunferencias dadas, cuando Q varía en la circunferencia de centro O. son una recta (la mediatriz de OO') y una hipérbola de focos O y O'.

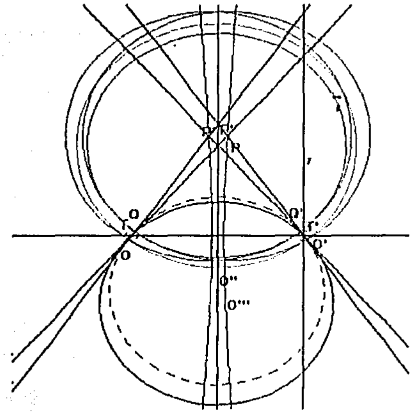


Demostración (hipérbola)

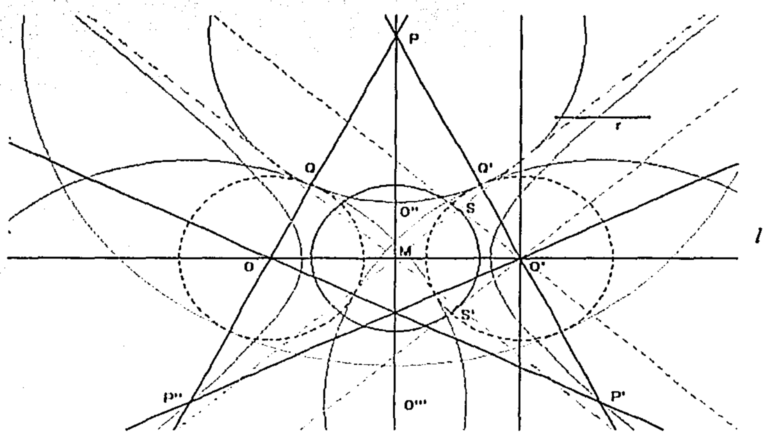
La diferencia $|P'O - P'O'|$ es constante: $P'O' = P'R' + R'O'$ y $P'O = P'T + TO$; $R'O' = O'T$; $P'Q' = P'T$ y $P'Q' = P'R' + R'O' + O'Q'$; así la diferencia la podemos escribir como se muestra a continuación:

$|P'O - P'O'| = |(P'T + TO) - (P'R' + R'O')| = |(P'R' + R'O' + O'Q' + TO) - (P'R' + R'O')| =$
$= |O'Q' + TO| = 2r$; que representa la suma de los radios de las circunferencias dadas, por lo que se satisface la definición de una hipérbola de focos O y O'.

Notemos que cuando el radio (r) de las circunferencias dadas tiende a cero la hipérbola se transforma en la mediatriz de OO', como se muestra a continuación.



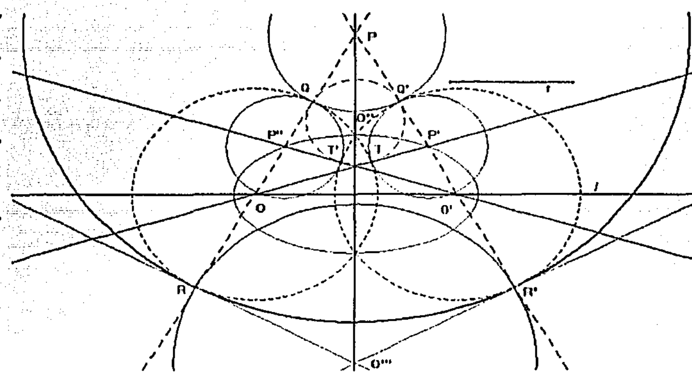
Por otra parte, como en el caso del *problema 3*, cuando por ejemplo, el punto O' tiende al punto del infinito en la dirección de la recta *l*, la hipérbola se transforma en dos rectas paralelas.



Un análisis similar al que hicimos en el *problema 3*, nos lleva a determinar las asíntotas de la hipérbola, como se muestra en la figura.

El problema se planteó de manera que las circunferencias de centro O y O' no se intersectan. Consideremos el caso en el que se intersectan. Si hacemos que, por ejemplo, la circunferencia de centro O se desplace hasta que corte a la de centro O', notaremos que la hipérbola se transforma en una elipse. Resultado que enunciamos como:

@ *Teorema 6.2. Dadas dos circunferencias de radio r que se intersectan y cuyos centros O y O' están sobre una recta l, el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a las dos circunferencias dadas, cuando Q varía en la circunferencia de centro O, es una recta (la mediatriz de OO') y una elipse de focos O y O'*

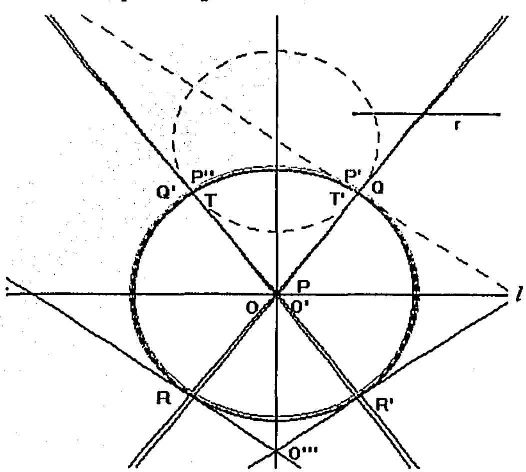


Demostración

Analicemos la siguiente suma: P'O' + P'O. Por un lado Tenemos que:

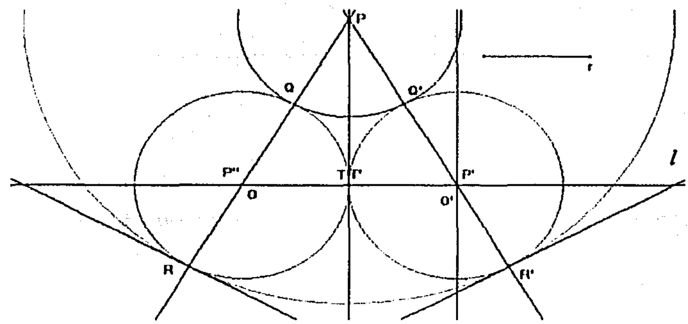
P'O' = R'Q' – P'Q' – O'R' y P'O = P'T' + T'O , por otro, P'T' = P'Q' y T'O = O'R'. Entonces la suma la podemos escribir como sigue:

P'O' + P'O = R'Q' – P'Q' – O'R' + P'T' + T'O = R'Q' – P'Q' –Q'R' + P'Q' + Q'R' = R'Q' = 2r que representa el doble del radio de las circunferencias de centros O y O'. Es decir, la suma es constante, por lo que se satisface la definición de una elipse de focos O y O'.



Si los centros de las dos circunferencias coinciden, la elipse se transforma en una circunferencia de centro O = O' y radio r. Como se muestra.

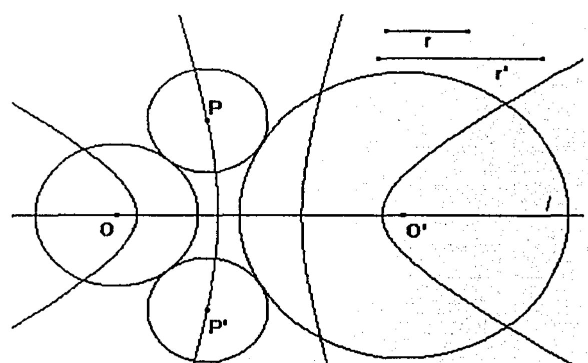
Analicemos el caso en que las circunferencias de centros O y O' son tangentes. Observemos la siguiente figura.



Como se observa, las circunferencias de centros P' y P'' coinciden con las de centros O y O' respectivamente y, el lugar geométrico de P es la mediatriz de OO' y el lugar geométrico de P' y P'' son los puntos O y O', cuando Q varía en la circunferencia de centro O.

Enseguida planteamos para ser resueltos los siguientes problemas:

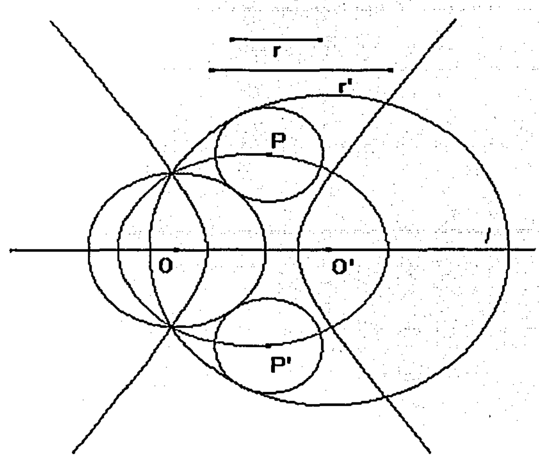
- Dadas dos circunferencias de diferente radio que no se intersectan, cuyos centros O y O' están sobre una recta *l*. Demuestre que el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a las dos circunferencias dadas, son dos hipérbolas que tienen como focos a los puntos O y O'.



Sugerencia:

- *Trace una recta l y en ella elija dos puntos O y O' que la recorran y trace las circunferencias con esos centros.*
- *Trace el eje radical de las circunferencias y utilice las ideas que establecimos en los teoremas del problema 6.*

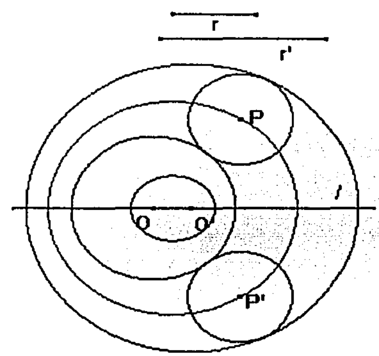
Demuestre que dadas dos circunferencias de diferente radio que se intersectan, cuyos centros O y O' están sobre una recta *l*; el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a las dos circunferencias dadas, es una hipérbola y una elipse que tienen como focos a los puntos O y O'.



Sugerencia:

- Utilice la construcción sugerida en el problema anterior y mueva, por ejemplo, el punto O de manera que la circunferencia de ese centro intersecte a la de centro O'

Demuestre que dadas dos circunferencias de diferente radio, una contenida en otra, cuyos centros O y O' están sobre una recta *l*; el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a las dos circunferencias dadas, son dos elipses que tienen como focos a los puntos O y O'.



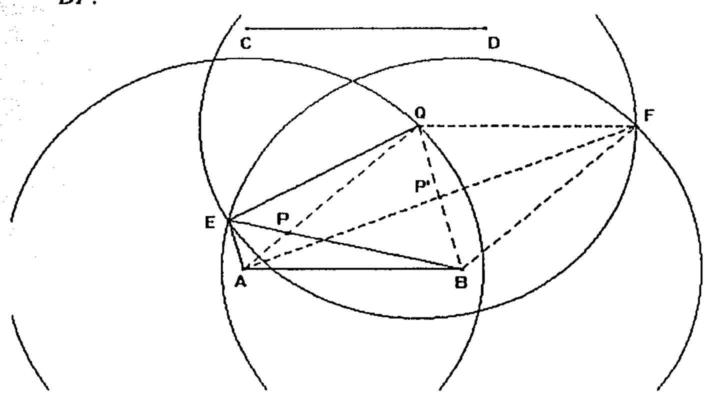
Sugerencia:

- Utilice la construcción sugerida y mueva, por ejemplo, el punto O hasta que la circunferencia de ese centro quede contenida en la de centro O'.

Los problemas que desarrollaremos a continuación corresponden a aquellos en que la construcción está dada y, posteriormente se pide hallar el lugar geométrico de un cierto punto de la misma. Estos problemas fueron desarrollados tomando como base los problemas anteriores. El punto central es que la construcción sea tal que al mover un cierto punto de la misma, algunas de sus propiedades se mantengan. En este caso, los verdaderos problemas se establecen en el planteamiento de los teoremas; por esta razón, nos referimos como *construcción* a las indicaciones que dan. Cabe señalar que hemos continuado con la numeración que dimos a los *problemas*.

- ***Construcción 7.** Dados los segmentos distintos AB y CD ($AB < CD$) fijos, realizar la construcción:*

- *Trazar la circunferencia de centro A y radio CD.*
- *Trazar la circunferencia de centro B y radio CD.*
- *En la circunferencia de centro A elegir un punto Q (punto sobre el objeto) que la recorra y trazar una circunferencia de centro Q y radio AB. Esta circunferencia cortará en dos puntos a la de centro B, considerar. Llamar E y F a tales puntos.*
- *Trazar los segmentos AE, BQ, BE, EQ y AQ. Asimismo, Trazar los segmentos AF, QF, BF.*

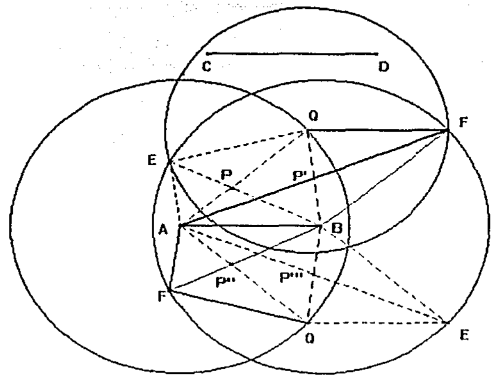


La construcción nos lleva a obtener dos tipos de cuadriláteros: el de vértices ABQE y el de vértices ABFQ el cual es un paralelogramo.

Las diagonales de los cuadriláteros se intersectan en P y P' respectivamente.

Dada la construcción, los lados AE , BQ del primer cuadrilátero así como las diagonales AF y BQ del segundo no son constantes, de manera que cuando Q se encuentra en el semiplano superior, respecto al segmento AB, las intersecciones de los cuadriláteros existen.

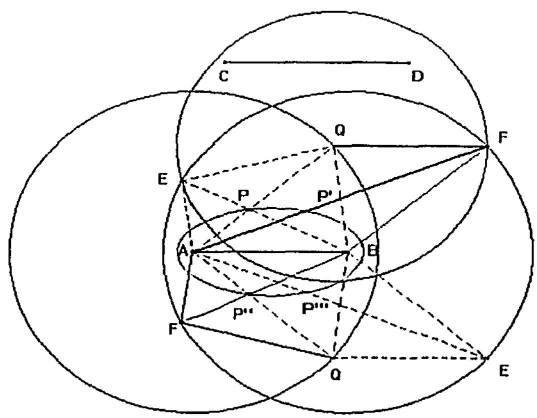
Cuando Q se encuentra en el semiplano inferior, el cuadrilátero ABQE ubicado en ese mismo semiplano, se transforma en un paralelogramo congruente al definido en ese semiplano. Asimismo, el paralelogramo ABFQ se transforma en el cuadrilátero ABQE ubicado en el semiplano inferior, como se muestra en la figura:



Como se observa, P" es intersección de los segmentos AQ y BF.

Este punto se corresponde con el punto P' que es intersección de las diagonales del cuadrilátero ABQE. El punto P"' es intersección de los segmentos AE y BQ del cuadrilátero ABEQ ubicado en el semiplano inferior. Este punto se corresponde con P'.

De acuerdo a la construcción, el cuadrilátero ABQE (ubicado en el semiplano superior) es tal que AB = QE y AQ = BE. Asimismo, en el cuadrilátero ABQF (ubicado en el semiplano inferior) se tiene que los segmentos AB = QF y AQ = BF. Por otra parte, notaremos que al mover el punto Q sobre la circunferencia de centro A, el punto P describe la mitad superior (respecto al segmento AB) de una elipse y el punto P" describe la mitad inferior (respecto al segmento AB) de la misma elipse. Enunciamos el siguiente:



@ *Teorema 7.1 Dados los cuadrilátero ABQE (definido en el semiplano superior respecto al segmento AB) y ABQF (definido en el semiplano inferior respecto al segmento AB) se tiene AB = QE, AQ = BE; AB = QF y AQ = BF; el lugar geométrico de P (intersección de los segmentos AQ y BF) cuando Q varía en la circunferencia de centro A, es una elipse de focos A y B* (N. B. Vasíliev, V. L. Gutenmájer).

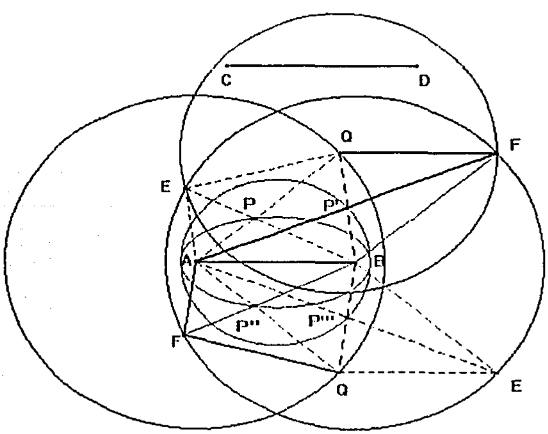
Demostración

Consideremos el punto P de la primera figura. Los triángulos EBQ y AQB son congruentes (LLL), por tanto sus ángulos son iguales, en particular $\angle QAB = \angle QEB$ son iguales. De la igualdad anterior tenemos que $\angle PAB = \angle QEP$.

Los triángulos EPQ y BPA son congruentes: De acuerdo al resultado anterior $\angle PAB = \angle QEP$, por otra parte, $\angle APB = \angle QPE$ (son opuestos por el vértice), por tanto el $\angle PQE = \angle ABP$ Dado que AB = QE, el criterio de congruencia ALA nos permite concluir que los triángulos EPQ y BPA son congruentes.

Consideremos AP + PB. Como PB = PQ entonces AP + PB = AP + PQ = AQ = r, (por construcción). Dado que r es constante, se satisface la definición de una elipse de focos A y B.

La demostración de que P" describe la otra mitad de la elipse es semejante a la demostración anterior.

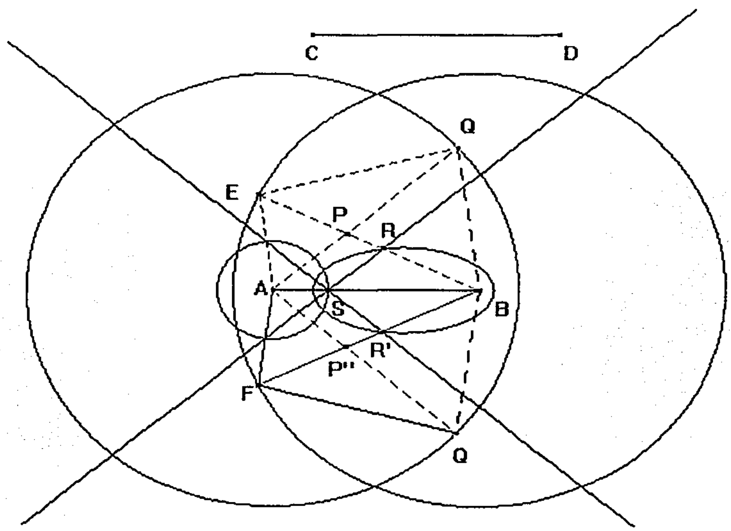


Dadas las condiciones de la *Construcción 7*.

- Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia de centro A, el lugar geométrico de P' y P" es una circunferencia de centro M (punto medio de AB) y radio MP'.

Dadas la condiciones de la *Construcción 7*. Realizar la siguiente construcción:

- *Trazar una circunferencia de centro A y radio r menor que AP. La circunferencia cortará al segmento AB en un punto S.*
- *Trazar en S una paralela al segmento AQ (ubicado en el semiplano superior respecto al segmento AB). La paralela cortará al segmento BP en un punto R.*
- *Trazar en S una paralela al segmento AQ (ubicado en el semiplano inferior respecto al segmento AB). La paralela cortará al segmento P''B en un punto R'.*



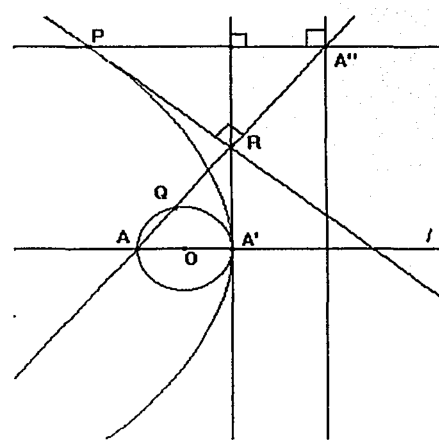
Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia de centro A y radio AQ, el lugar geométrico de R y R', es una elipse de focos S y B.

- *Construcción 8. Dada una recta l y una circunferencia de radio r cuyo centro O está sobre la recta l, realizar la siguiente construcción:*

  - *Sean A y A' los puntos de intersección de la recta l y la circunferencia de centro O.*
  - *Elegir en la circunferencia un punto Q (punto sobre el objeto) que la recorra y trazar la recta AQ.*

- *En A' levantar una perpendicular a la recta l. La perpendicular intersectará a la recta AQ en un punto R.*
- *En R trazar una perpendicular a AQ.*
- *Obtener A", simétrico de A respecto de R.*
- *Por A" trazar una paralela a la recta A'R. La paralela intersectará en un punto P a la perpendicular a la recta AQ levantada en R.*
- *Trazar en A" una paralela a la recta A'R.*

Al mover el punto Q sobre la circunferencia, el punto P describe una parábola.



Teorema 8.1. Dada una recta l y una circunferencia de radio r cuyo centro O está sobre la recta l. Sean: A y A' los puntos de intersección de la recta l y la circunferencia de centro O; R intersección de la perpendicular a l levantada en A' y la recta AQ así como A" simétrico de A respecto de R. El lugar geométrico de P,(intersección de la perpendicular a la recta AQ, levantada en R y la perpendicular a la recta A' R, levantada en A"), cuando Q varía en la circunferencia de centro O, es una parábola de foco A y directriz la paralela a la recta A'R trazada en A".

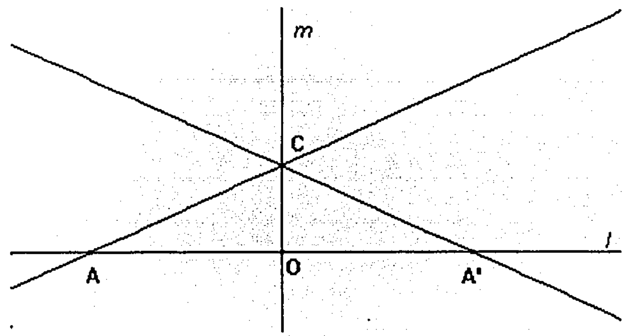
Demostración.

A" es simétrico de A respecto de R. Como la recta RP es perpendicular a la recta AQ (por construcción) entonces la recta RP es mediatriz del segmento AA". En consecuencia el triángulo AA"P es un triángulo isósceles; por tanto PA = PA".

Dado que la recta A"P es perpendicular a la recta A'R (por construcción), entonces se satisface la definición de una parábola de foco A y directriz la paralela a la recta A'R trazada en el punto A".

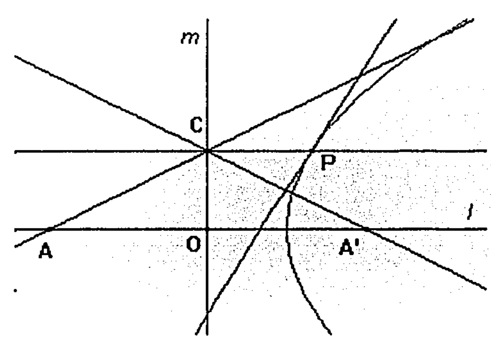
- *Construcción 9. Dada una recta l y O un punto en l que la recorre (punto sobre el objeto), realizar la siguiente construcción:*

- *En O levantar una perpendicular (m) a la recta l.*
- *Elegir en l un punto A (punto sobre el objeto) distinto de O que la recorra. De igual manera considerar en m un punto C distinto de O que la recorra.*
- *Obtener A' simétrico de A respecto de O.*
- *Trazar las rectas AC y A'C.*



Los puntos A, A' y C, para cualquier posición de A en la recta *l* y de C en la recta *m* definen un triángulo isósceles. Si trazamos la mediatriz de A'C y en C trazamos una perpendicular a la recta *m*, la perpendicular cortará a la mediatriz de A'C en un punto P. Al recorrer C la recta *l* (los puntos A, O y A' permanecen fijos), el punto P describe una parábola.

- *Teorema 9.1 Dado el triángulo AA'C trazado como se indicó en la construcción 9. El lugar geométrico de P (intersección de la mediatriz de A'C con la perpendicular a la recta m trazada en C), cuando C varía en la recta m, es una parábola de foco A' y directriz la recta m.*

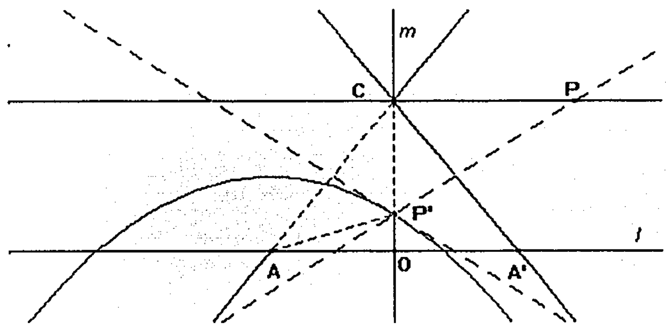


Demostración.

Dado que P está sobre la mediatriz de A'C; PA' = PC y como CP es perpendicular a *m*, entonces se satisface la definición de una parábola de foco A' y directriz la recta *m*.

En el triángulo AA'C sus mediatrices de intersectan en un punto P', este punto describe una parábola cuando O recorre la recta *l*. En este caso el punto A permanece fijo.

@ *Teorema 9.2. En las condiciones de la construcción 9, las mediatrices del triángulo AA'C se cortan en un punto P'. El lugar geométrico P' cuando O varía en la recta l, es una parábola de foco A y directriz la recta CP.*

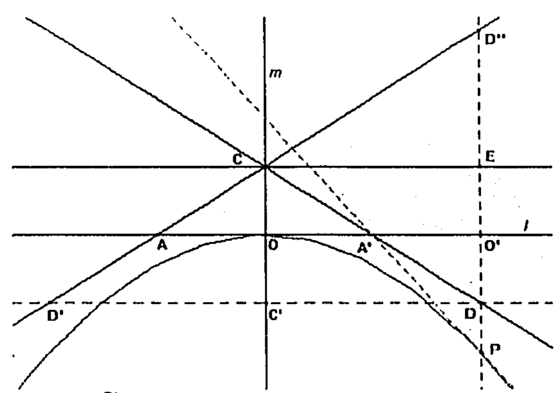


Demostración.

P' es intersección de las mediatrices del triángulo AA'C, en consecuencia P'A = P'C. Por otra parte, por construcción, la recta CP es perpendicular a la recta *m*, por lo que se satisface la definición de una parábola de foco A y directriz la recta CP.

Si en el triángulo AA'C, trazamos la altura al lado AC y en O' (simétrico de O respecto de A') trazamos una perpendicular a *l*, esta perpendicular cortará a la altura trazada al lado AC, en un punto P. Al hacer que el punto A recorra la recta *l*, el punto P describirá una parábola. En este caso permanecen fijos los puntos O y C.

@ *Teorema 9.3. En las condiciones de la construcción 9. El lugar geométrico de P, tal que P es intersección de la altura trazada al lado AC y la perpendicular a la recta l, trazada en O' (O' simétrico de O respecto de A'), cuando A varía en la recta l, es una parábola de foco C' y directriz la recta CE.*



En la figura:

- O' es simétrico de O respecto de A'.
- D es intersección de la recta A'C y la perpendicular a *l* trazada en O'.
- C' es simétrico de C respecto de O.
- La recta CE es paralela a *l*. (en C trazamos una perpendicular a *m*).
- D' es intersección de la recta C'D con la recta AC.
- D" es intersección de la perpendicular a *l* trazada en O' y la recta AC.

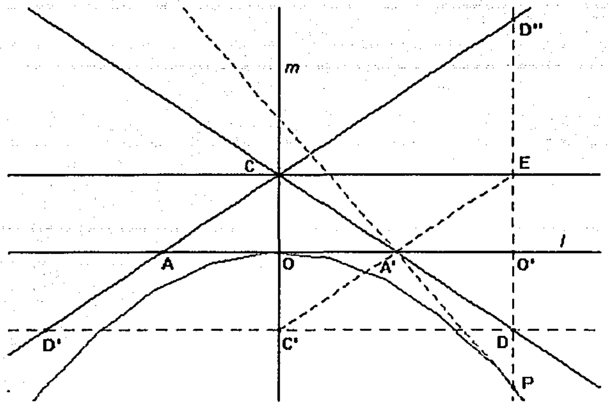
Demostración

Los triángulos OA'C y O'A'D son congruentes: Por un lado, $\angle$ OA'C = $\angle$ O'A'D (son opuestos por el vértice) y dado que los ángulos A'OC y A'O'D son rectos (por construcción), tendremos que $\angle$ A'CO = $\angle$A'DO'. Por otro lado, como O'A = A'O' (por construcción). El criterio de congruencia ALA nos permite concluir que los triángulos OA'C y O'A'D son congruentes; en particular se tendrá DO' = OC.

Dado que por construcción, C'O = OC (C' es simétrico C respecto de O) se tiene que; DO' = C'O y como las rectas CC' y O'D son perpendiculares a *l*, entonces la recta C'D es paralela a *l*.

El triángulo D'DC es isósceles: los triángulos D'DC y AA'C tienen un ángulo común ($\angle$A'CA) y D'D es paralelo a *l*, entonces los triángulos son semejantes, dado que la recta *m* es mediatriz del segmento AA', también lo será del triángulo D'DC, es decir, el triángulo D'DC es isósceles, en consecuencia D'C' = C'D.

Dado que por construcción, las CC' y DO' son paralelas, es sencillo probar que los segmentos CC' y ED" son congruentes. Por lo anterior, E es punto medio del segmento DD" (DE = C'C = ED"). Dado que C' es punto medio del segmento D'D, se tendrá que, de acuerdo al inverso del teorema de Thales aplicado al triángulo D'DD", el segmento C'E es paralelo a la recta AC, como se muestra en la siguiente figura.

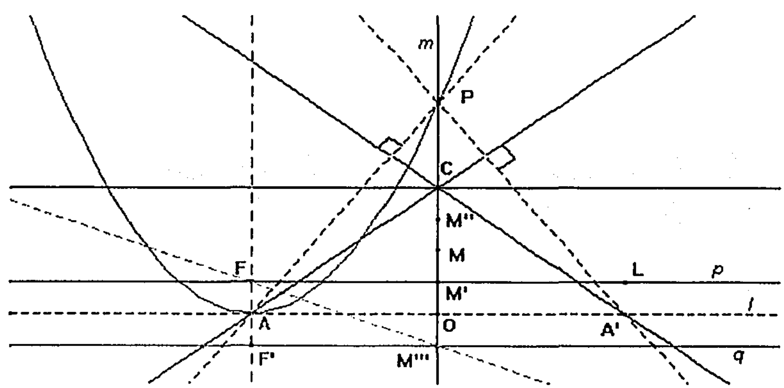


Como la recta A'P es perpendicular a la recta AC, también lo será al segmento C'E. Es decir, la recta A'P es mediatriz del segmento C'E. Por otra parte, es sencillo probar que: C'A' = A'E.

Los resultados anteriores nos permiten concluir que el triángulo C'PE es isósceles, por tanto los segmentos C'P y EP son iguales y dado que EP es perpendicular a la recta *l*, se satisface la definición de una parábola de foco C' y directriz la recta CE.

Si en la *construcción 9* trazamos las alturas del triángulo AA'C, éstas se intersectan en un punto P. Al hacer que O recorra la recta *l*, el punto P describirá una parábola. Enunciamos el siguiente:

@ *Teorema 9.4 En las condiciones de la construcción 9. Las alturas del triángulo AA'C se intersectan en un punto P, el lugar geométrico de P, ortocentro del triángulo AA'C, cuando O varía en la recta l, es una parábola de foco el punto F y directriz la recta q.*



En la figura:

- M es punto medio del segmento OC.
- M' es punto medio de MO.
- M'' es simétrico de M' respecto de M.
- M''' es simétrico de M' respecto de O.
- La recta *p* se trazó perpendicular a la recta *m* en el punto M'.
- La recta *q* se trazó perpendicular a la recta *m* en el punto M'''.
- F es intersección de la recta *p* con la perpendicular a *l*, levantada en el punto A.
- F' es intersección de la recta *q* con la perpendicular a *l*, levantada en el punto A

La demostración del teorema requiere de la siguiente construcción y demostración del lema que se deriva de ella.

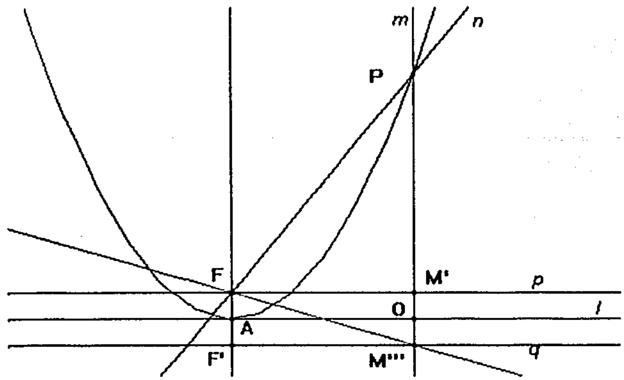
Construcción:

Consideremos tres rectas paralelas l, p y q tal que p y q están a la misma distancia de l. Bajo estas condiciones realizar la siguiente construcción.

- *Considerar en la recta l dos puntos: A fijo y O tal que recorra la recta.*
- *Levantar respectivamente en el punto A y en el punto O perpendiculares a la recta l. La perpendicular en el punto O cortará a la recta p en un punto M' y a la recta q en el punto M'''. La perpendicular trazada en A, cortará a la recta p en un punto F y a la recta q en un punto F'.*
- *Trazar la recta FM'''.*
- *Reflejar la recta FF' sobre la recta FM'''. La recta n resultado de la reflexión, cortará en un punto P a la recta m.*

Al hacer que O recorra la recta *l*, el punto P describe una parábola.

- *Lema: Dada la* ***construcción A****, el lugar geométrico del punto P (intersección de la perpendicular a la recta l levantada en O y la recta n, resultado de la reflexión de la recta FF' respecto a la recta FM''',cuando O varía en la recta l, es una parábola de foco F y directriz la recta q.*



Demostración.

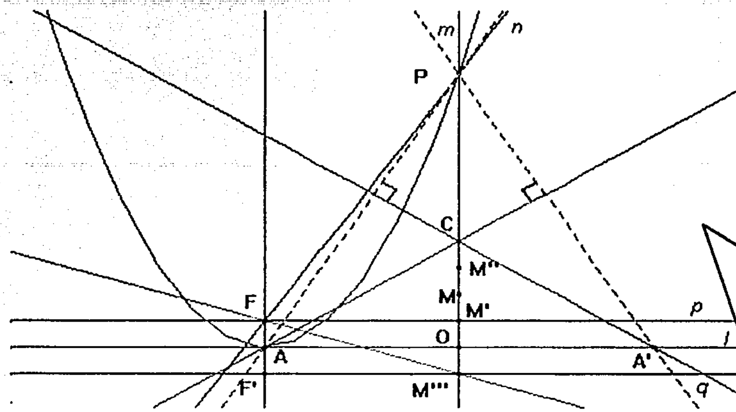
El $\angle$ M'''FF' = $\angle$ PFM''' (por construcción). Dado que $\angle$ PM''F = $\angle$ M'''FF' (son ángulos alternos internos) entonces $\angle$ M'''FP = $\angle$ PM'''F, en consecuencia el triángulo M'''FP es isósceles, por lo que PF = PM'''. Por construcción PO es perpendicular a la recta *l*, entonces se satisface la definición de una parábola cuya directriz es la recta *q* y foco el punto F.

A continuación mostraremos que la construcción anterior nos permite definir el triángulo AA'C a que hace alusión el *teorema 9.4* y, que el punto P de la misma construcción se corresponde con el ortocentro del triángulo AA'C definido en la *construcción 9*.

Dadas las condiciones iniciales de la ***construcción*** *A, realizar los siguientes trazos:*

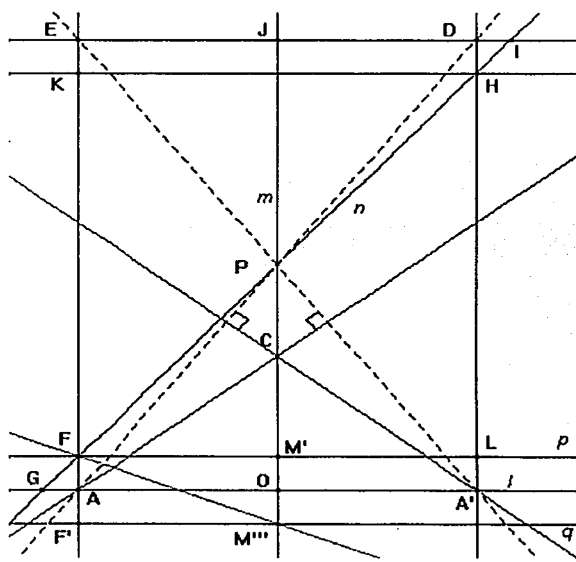
- *Localizar A' simétrico de A respecto de O.*
- *Llamar M' a la intersección de la recta m con la recta p.*
- *Localizar: M simétrico de O respecto de M'; M'' simétrico de M respecto de M' y C simétrico de M respecto de M''.*
- *Trazar las rectas AC y A'C*

En la siguiente figura se observa el resultado.



Observemos que los puntos A, A' y C definen un triángulo isósceles. Por otro lado, notemos que el punto C se ha localizado de manera que OC = 4OM'. Las características de este triángulo corresponden a las del triángulo AA'C generado en la *construcción 9.*

Demostración del teorema.



Demostraremos que el punto P, intersección de la recta *m* y la recta *n*, resultado de reflejar la recta FF' respecto a la recta FM''', también es el ortocentro del triángulo AA'C.

En la figura:

- El punto E es intersección de la altura trazada desde A' al lado AC con la recta FF'.
- L es intersección de la recta *p* y la perpendicular a *l* levantada en A'.
- El punto D es intersección de la altura trazada desde A al lado A'C con la recta A'L.

- El punto H es intersección de la recta *n*, resultado de reflejar la recta FF' sobre la recta FM''' y de la perpendicular a la recta *l* levantada en A'.
- En H se trazó una paralela a *l*. El punto K es intersección de esta paralela con la recta AF.
- I es intersección de la recta *n*, resultado de reflejar la recta FF' sobre la recta FM''' con la recta ED.
- J es intersección de la recta ED con la recta *m*.
- El punto G es intersección de la recta *n*, resultado de reflejar la recta FF' sobre la recta FM''', con la recta *l*.

Vamos a suponer que la recta *n*, resultado de reflejar la recta FF' sobre la recta FM''', intersecta a la recta *m* en un punto P'. Demostraremos que P' coincide con el punto P, ortocentro del triángulo AA'C.

Es sencillo probar que los triángulos A'DA y A'EA son congruentes, por lo que AE es igual A'D. Podemos entonces afirmar que la recta ED es paralela a la recta *l*. Los resultados anteriores nos permiten concluir que el cuadrilátero AA'DE es un rectángulo en el que P es su centro de simetría. A partir del resultado anterior, es sencillo probar que los triángulos GOP y JPI también son congruentes.

Demostraremos que los triángulos GAF y DIH son congruentes. Es fácil demostrar que son semejantes. Veamos por qué son congruentes:

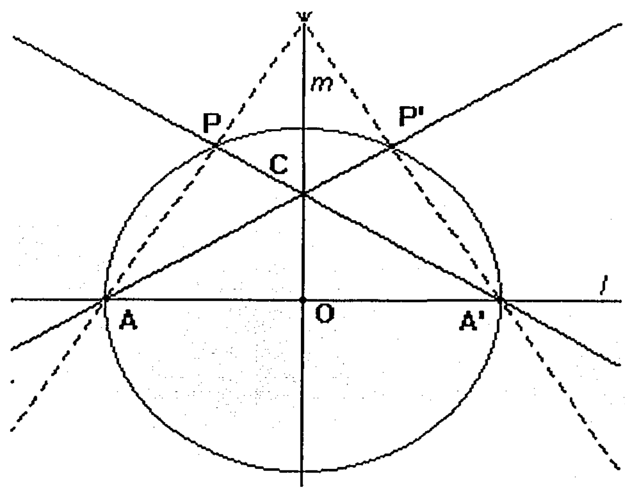
Dado que los triángulos GOP y JPI son congruentes, entonces los lados JI y GO son iguales. Pero JI = JD + DI y GO = GA + AO, y como AO = JD entonces GA = DI. Este resultado nos conduce a la congruencia de los triángulos GAF y DIH, Por lo que FA = DH. Dado que cuando O recorre la recta *l*, FA se mantiene constante, también DH se mantendrá constante, es decir los segmentos FA y DH son constantes para cualquier posición de O en la recta *l*.

Como consecuencia del resultado anterior y de que por construcción HK es paralelo a la recta *l*, tendremos que FA = LA' = DH = EK; entonces el cuadrilátero FLHK es un rectángulo en el que la recta FH es una de sus diagonales.

Sabemos que AA'DE es un rectángulo que tiene a P como centro de simetría, y dada la forma en que se obtuvo el rectángulo FLHK, necesariamente este rectángulo tendrá a P como centro de simetría, es decir P' coincide con P. De acuerdo al *lema*, P describe una parábola de foco F y directriz la recta *q*.

En la construcción del *problema 9*, al trazar las alturas a los lados AC y A'C del triángulo AA'C, interceptarán a las rectas AC y A'C en P y P' respectivamente. Al mover el punto C sobre la recta *m*, los puntos P y P' describirán un círculo, lo que da lugar al siguiente:

☺ *Teorema 9.5. En las condiciones de la construcción del problema 9. Las alturas de los lados AC y A'C del triángulo AA'C intersectan a las rectas AC y A'C en P y P' respectivamente, el lugar geométrico de P y P', cuando C varía en la recta m, es una circunferencia de centro O y radio OA = OA'.*

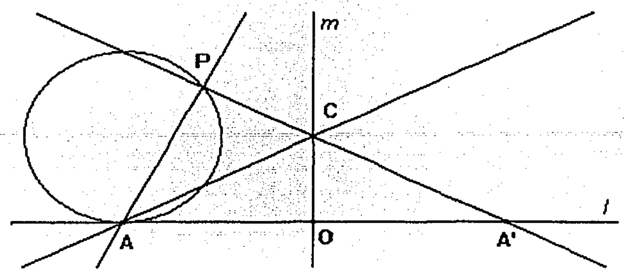


Demostración

Los puntos A y A' son fijos y, para cualquier posición de C en la recta *m*, los ángulos A'PA y A'P'A son rectos. En consecuencia, P y P' están sobre la circunferencia de centro O y radio OA.

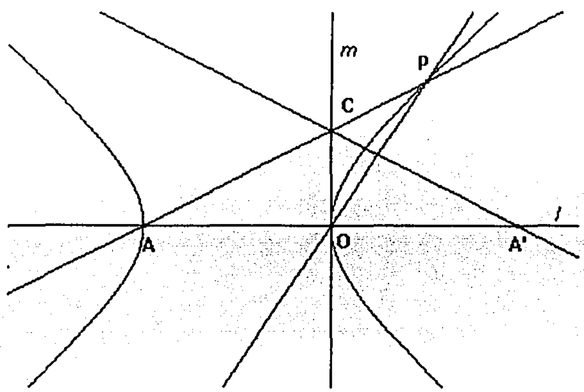
Dado el triángulo AA'C trazado como se indicó en la *construcción 9.* Realizar la siguiente construcción:

@ *Trazar en A la perpendicular al lado A'C. La perpendicular cortará a la recta A'C en un punto P.*



Demuestre que cuando O varía en la recta *l*, el lugar geométrico de P es una circunferencia.

Dado el triángulo AA'C trazado como se indicó en la *construcción 9.* Realizar la siguiente construcción:



@ *Trazar en O la perpendicular al lado A'C. La perpendicular cortará a la recta AC en un punto P.*

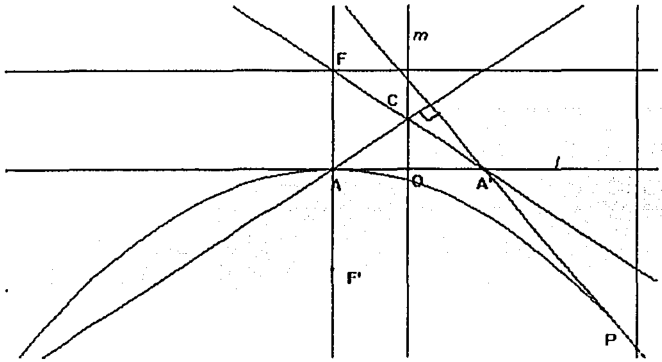
Demuestre que cuando C varía en la recta *l*, el lugar geométrico de P es una hipérbola.

Dado el triángulo AA'C trazado como se indicó en la en la *construcción 9.* Realice los siguientes trazos:

@ *Localice A" simétrico de A respecto de A'.*

@ *Trace en A" una perpendicular a la recta l.*

@ *Trace la altura al lado AC del triángulo AA'C. La altura intersectará a la ¿perpendicular a l levantada en A" en un punto P.*

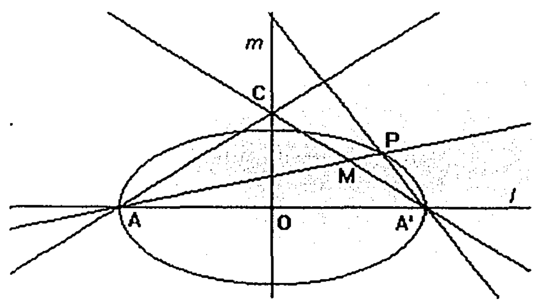


Demuestre que cuando O varía en la recta *l*, el lugar geométrico de P es una parábola de foco F' (simétrico de B respecto de A, donde B es la intersección de la perpendicular a *l* levantada en A y la recta A'C) y directriz la paralela a *l* trazada en F.

Dado el triángulo AA'C trazado como se indicó en la en la *construcción 9*, realice la siguiente construcción.

@ *Localice M punto medio del lado A'C y trace la mediana que pasa por ese punto.*

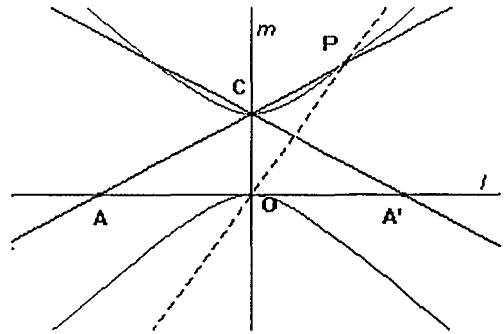
@ *Trace la altura al lado AC del triángulo AA'C. La altura intersectará a la mediana que pasa por M en un punto P.*



*Demuestre que cuando C varía en la recta OC, el lugar geométrico de P es una elipse.

Si en la construcción del triángulo isósceles AA'C del *problema 9*, trazamos en O una perpendicular al lado A'C, la perpendicular corta a la recta AC en un punto P. Al mover el punto O sobre la recta *l*, el punto P describe una hipérbola. Enunciamos el siguiente:

- *Teorema 9.6. En las condiciones de la construcción del problema 9. La perpendicular al lado A'C levantada en el punto O, intersectará a la recta AC en un punto P, el lugar geométrico de P, cuando A varía en la recta l, es una hipérbola.*

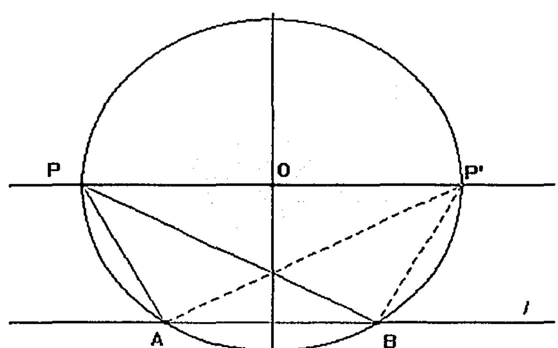


La demostración la daremos a partir de realizar la siguiente construcción y considerar el resultado del problema que se encuentra en la *página 4* de este trabajo.

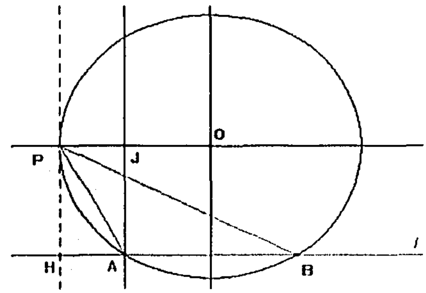
- ***Construcción**. Dados A y B dos puntos fijos, construir el triángulo ABP seudorectángulo, esto es, un triángulo ABP tal que: ∠PAB = ∠ABP + 90°.* (Luciano Olabarrieta S. I.)

Construcción.

- *Trazar una recta l y, elegir en ella dos puntos distintos A y B.*
- *Construir la mediatriz de AB.*
- *Elegir en la mediatriz un punto O que la recorra.*
- *Trazar una circunferencia con centro en O y radio OA = OB.*
- *Trazar en O una paralela a la recta l. Esta paralela cortará a la circunferencia en dos puntos P y P'. El segmento PP' es diámetro de la circunferencia de centro O.*
- *Trazar el triángulo ABP. Este es el triángulo seudorectángulo que se deseaba construir.*



También el triángulo ABP' satisface las condiciones del problema, como se muestra en la figura.



El triángulo ABP es seudorectángulo en razón de los siguientes hechos:

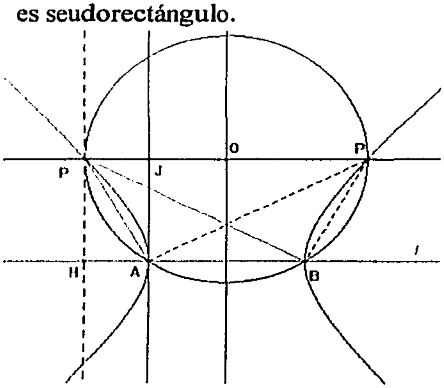
En la figura:

- En P se trazó una perpendicular a la recta *l*. En consecuencia es tangente en P a la circunferencia.
- H es intersección de la tangente trazada en P y la recta *l*. La recta PH es perpendicular a la recta *l*.
- En A se trazó una perpendicular a *l*.
- J es la intersección de la perpendicular a *l* levantada en A y la recta OP.

Dado que PH es tangente en P a la circunferencia y HB es una secante entonces se tendrá que: $PH^2 = PA \times PB$, es decir, los triángulos HBP y HAP son semejantes, en consecuencia los ángulos ABP y APH son iguales.

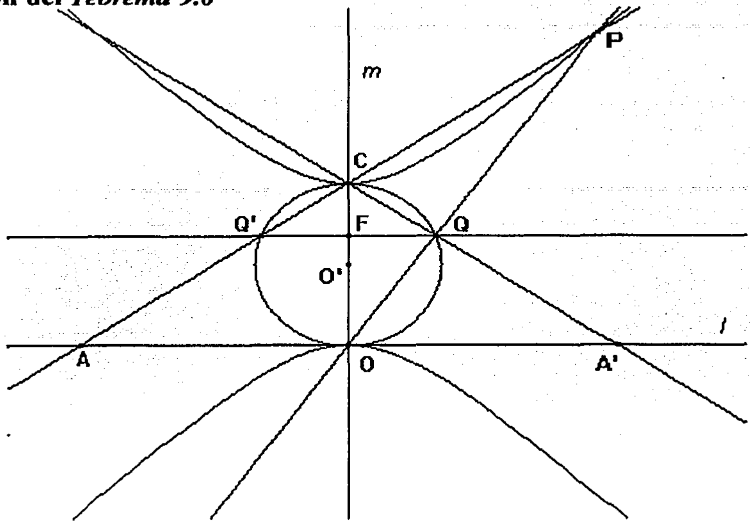
Por otra parte, el cuadrilátero HAJP por construcción es un rectángulo, de manera que los ángulos: APH y PAJ son iguales. En consecuencia los ángulos PAJ y ABP son iguales.

Por otra lado, $\angle PAB = 90° + \angle PAJ \Rightarrow \angle PAB = 90° + \angle ABP$. Concluimos que el triángulo ABP es seudorectángulo.



El problema: *trazar una circunferencia que pase por dos puntos fijos A y B cuyo centro O esté sobre una recta l. (Francisco Zubieta Russi)* que se encuentra en la *página 4* de este trabajo nos llevó a encontrar que el lugar geométrico de P, cuando Q varía en la mediatriz de AB, es una hipérbola equilátera, como se muestra en la figura:

Demostración del *Teorema 9.6*



Consideremos la figura anterior. Sea Q el punto de intersección de la recta A'C con la perpendicular a esta recta levantada en O. Dado que el ángulo OQC es recto (por construcción), es sencillo probar que el lugar geométrico de Q, cuando A varía en la recta *l*, es la circunferencia de centro O' (punto medio de CO).

Trazar en Q una paralela a *l*, ésta cortará a la recta AC en un punto Q', y a la recta *m* en un punto F. Los puntos Q', Q y C definen un triángulo semejante al triángulo AA'C: comparten el ángulo A'CA y de acuerdo al teorema de Thales los triángulos Q'QC y AA'C son semejantes.

Si consideramos que la recta *m* es mediatriz del triángulo AA'C, también lo será del triángulo Q'QC. Por tanto el punto F es punto medio del segmento Q'Q. De acuerdo al resultado anterior tendremos Q'F= FQ y CQ = CQ'.

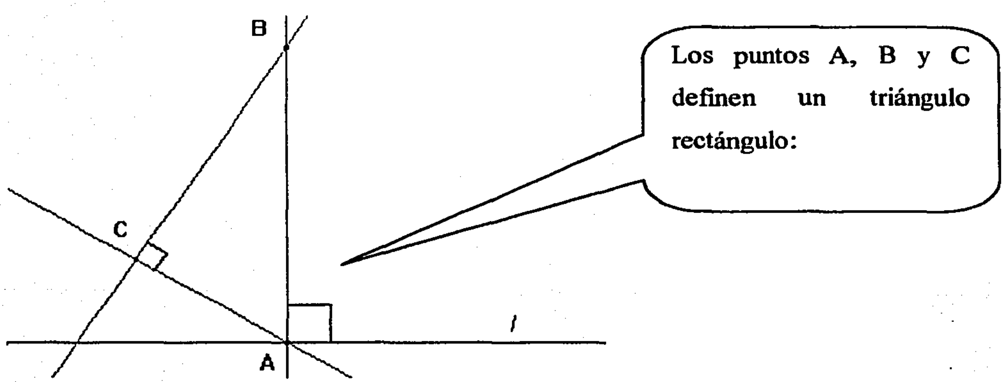
Por otra parte, los triángulos OCQ' y OCQ son congruentes: Los ángulos OCQ' y OCQ son iguales; además CQ' = CQ y CO = CO. Al aplicar el criterio de congruencia LAL, obtendremos el resultado; por tanto el ángulo CQ'O es recto. En consecuencia Q' debe también estar sobre la circunferencia de centro O'.

Es claro que el ángulo Q'FC es recto. Ahora bien, $\angle$ FCP = $\angle$ Q'FC + $\angle$ CQ'F ya que $\angle$ FCP es exterior del triángulo CQ'F. Por tanto podemos concluir que: $\angle$ FCP = 90°+$\angle$ CQ'F. Por otro lado, $\angle$ CQ'F = $\angle$ COQ (abarcan el mismo arco) entonces $\angle$ FCP = 90° + $\angle$ COQ o lo que es lo mismo $\angle$ OCP = 90° + $\angle$COQ.

Los resultados muestran que el triángulo PCO es seudorectángulo tal que los vértices C y O son fijos. De acuerdo al resultado del problema al que hemos hecho referencia, P describe una hipérbola equilátera.

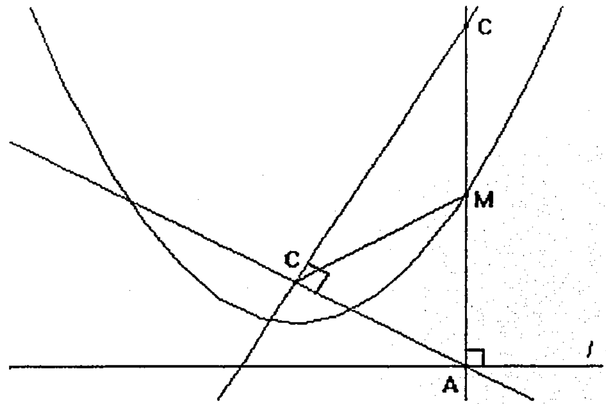
- *Construcción 10. Dada una recta l y un punto C que no esté en la recta, realizar la siguiente construcción:*

  - *Elegir en l un punto cualquiera A (punto sobre el objeto) y trazar en ese punto una perpendicular a l.*
  - *Trazar la recta AC.*
  - *Trazar en C una perpendicular a la recta AC. Esta perpendicular cortará en un punto B a la perpendicular a l levantada en A.*



El punto A se tomó de manera que podemos moverlo sobre la recta *l*, en cada posición de A en la recta, se tiene un triángulo rectángulo ACB distinto. Consideremos M, punto medio de AB. Al mover A sobre la recta *l*, M describe una parábola, lo que nos permite formular el siguiente:

@ *Teorema 10.1. Dado un triángulo rectángulo ACB tal que A es un punto de la recta l, AB es perpendicular a l y C es un punto fijo que no está en la recta; el lugar geométrico de M (punto medio del lado BC) cuando A varía en la recta l, es una parábola cuyo foco es C y directriz la recta l:* (Luciano Olabarrieta S. I.)



En la figura,

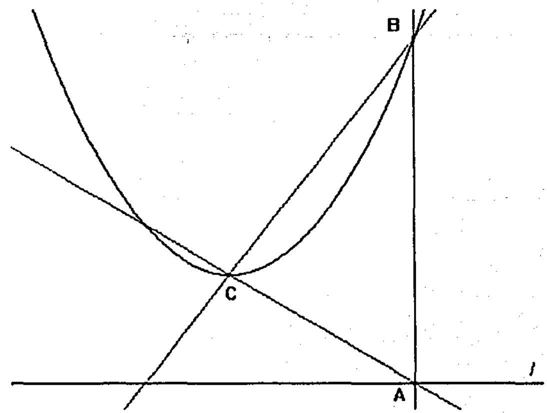
- M es punto medio de AB.
- CM es mediana del triángulo ACB.

Demostración

Como CM es mediana del triángulo rectángulo ABC, entonces MA = MC = MB. Estas igualdades se mantienen para cualquier punto A de la recta l y, dado que AB es perpendicular a *l*, se satisface la definición de una parábola cuyo foco es C y directriz la recta *l*.

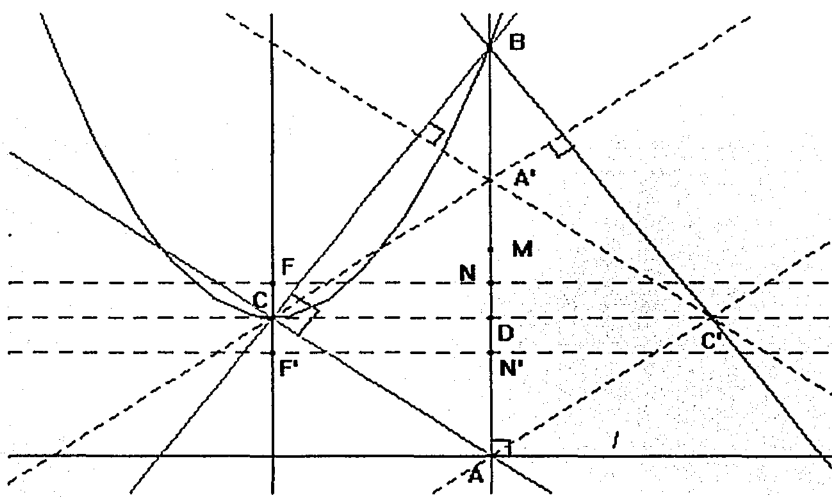
Por otra parte, al mover el punto A sobre la recta *l* notaremos que el punto B también describe una parábola.

@ *Teorema 10.2. Dado un triángulo rectángulo ACB tal que A es un punto cualquiera de la recta l, AB es perpendicular a l y C es un punto fijo que no está en la recta; el lugar geométrico de B cuando A varia en la recta l, es una parábola.(Luciano Olabarrieta S. I.).*



Demostración

La demostración la daremos a partir de considerar el resultado del *teorema 9.4.* Analicemos los trazos realizados a partir de la construcción que dio origen a este problema:



En la figura:

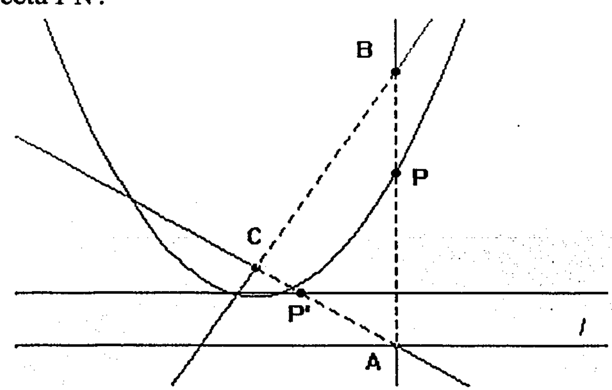
- El triángulo ABC es aquel que dio lugar al problema
- En C se trazó una paralela a la recta *l*. Esta paralela corta a la recta AB en un punto D.
- El punto C' es simétrico de C respecto de D. Asimismo, el punto A' es simétrico e A respecto de D.
- El punto M es punto medio de DA', de igual forma el punto N es punto medio de MD.
- El punto N' es simétrico de N respecto del punto D.
- En N se trazó una paralela a la recta *l*. Esta paralela corta a la perpendicular a *l* levantada en B en el punto F.
- Se trazaron las rectas CA, C'A' y C'B

Observemos que, por construcción, el cuadrilátero de vértices C, A, C' y A' es un rombo, por lo que las rectas AC y A'C' son paralelas. Dado que la recta CB es perpendicular a la recta AC, entonces la recta A'C' es perpendicular a la recta CB. Podemos concluir que la recta CB es una de las alturas del triángulo CC'A'.

Por construcción el triángulo CC'A' es isósceles y por otra parte, la recta AB es perpendicular a la recta CC', en consecuencia es altura de este triángulo: De acuerdo al resultado anterior, B es el ortocentro del triángulo CC'A'.

De acuerdo a los resultados anteriores la recta C'B es la otra altura del triángulo CC'B. Observemos que los puntos M, N, D, N' y F satisfacen las condiciones de la construcción del *teorema 9.4*. En consecuencia cuando A varía en la recta *l*, el lugar geométrico del punto B es una parábola de foco el punto F y directriz la recta F'N'.

Dadas las condiciones de la *Construcción 10,* trazar el triángulo ACB. Considere un punto P sobre su perímetro.



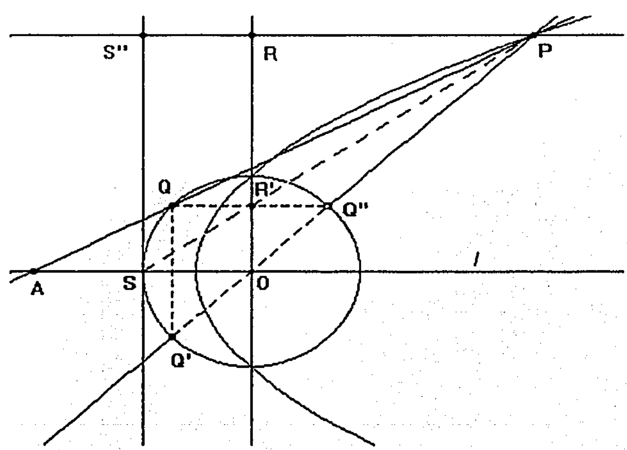
*Demuestre que cuando A varía en la recta *l*, si P está sobre el segmento AB o BC, el lugar geométrico de P, es una parábola.

*Demuestre que cuando A varía en la recta *l*, si P' está sobre el lado AC, el lugar geométrico de P, es una recta paralela a *l*.

- *Construcción 11. Dada una circunferencia de radio r que tiene su centro O sobre una recta l, realizar la siguiente construcción:*
- *Llamar S y S' a la intersección de la recta l y la circunferencia.*
- *Considerar en l un punto A, distinto de O que recorra la recta y considerar un punto Q en la circunferencia de centro O que la recorra.*
- *Reflejar Q sobre la recta l para obtener el punto Q'.*
- *Trazar las rectas AQ y Q'O. Estas rectas se intersectarán en un punto P.*

Cuando Q recorre la circunferencia de centro O y, dependiendo de la posición de A, respecto de O, en la recta *l*, el punto P describirá: una elipse, una hipérbola, una parábola, una recta o una circunferencia. A continuación daremos la demostración del caso de la parábola.

- *Teorema 11.1. Dada una circunferencia de radio r que tiene su centro O sobre una recta l. Sean S y S' las intersecciones de la circunferencia y la recta; A el simétrico de O respecto de S; cuando Q varía en la circunferencia de centro O, el lugar geométrico de P, intersección de las rectas AQ y Q'O, es una parábola de foco O y directriz la recta SS''.*



En la figura:

- En P se trazó una paralela a la recta l, y en S se trazó una perpendicular a la recta l.
- S" es intersección de la paralela a la recta l trazada en el punto P y la perpendicular a la recta l, levantada en S.
- Q" es intersección de la recta Q'O con la circunferencia.
- R es intersección de la perpendicular a l levantada en el punto O con la recta PS".
- R' es intersección de la perpendicular a l levantada en el punto O con el segmento QQ".

Demostración:

Afirmamos que el segmento QQ" es paralelo a l y R' es su punto medio: El triángulo Q"QQ' es un triángulo rectángulo (Q'Q" es un diámetro y Q está en la circunferencia); como QQ' es perpendicular a l (por construcción) entonces QQ" es paralela a l. Por otro lado, QQ" es una cuerda y la recta OR es perpendicular a l (por construcción) y pasa por el centro de la circunferencia; necesariamente bisecta a QQ" en R'.

Los triángulos AOP y QQ'P son semejantes: QQ" es paralelo a AO. y tienen un ángulo común (el ángulo OPA); el teorema de Thales nos lleva al resultado señalado. Por otra parte, el segmento PS es mediana del triángulo AOP; dada la conclusión anterior, PS debe cortar en R' a QQ"; de manera que S, R' y P están alineados.

Los resultados anteriores nos permiten afirmar que los triángulos SOP y R'Q"P son semejantes.

Observemos también que los triángulos PRO y Q"R'O son semejantes: el ángulo ROP es común y los ángulos PRO y Q"R'O son rectos; entonces los ángulos OPR y OQ"R' son iguales.

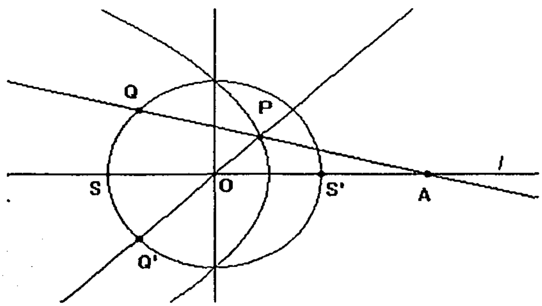
Los dos últimos resultados nos permiten establecer las siguientes proporciones:

SO/PO = R'Q"/PQ" PR/PO = Q"R'/Q"O. Como Q"O = SO (son radios de la misma circunferencia se tiene PR/PO = Q"R'/SO de donde:

SO x PQ" = PO x R'Q"   y   PR x SO = PO x R'Q".

De estas igualdades concluimos que: SO x PQ" = PR x SO. De esta igualdad se deduce que los segmentos PQ" y PR son iguales . Al agregar SO a cada miembro de esta igualdad se obtiene:
PQ" + SO = PR + SO $\Rightarrow$ PQ" + Q"O = PR + S"R $\Rightarrow$ PO = PS".

Dado que PS" es perpendicular a la recta SS", se satisface la definición de una parábola de foco O y directriz la recta SS".

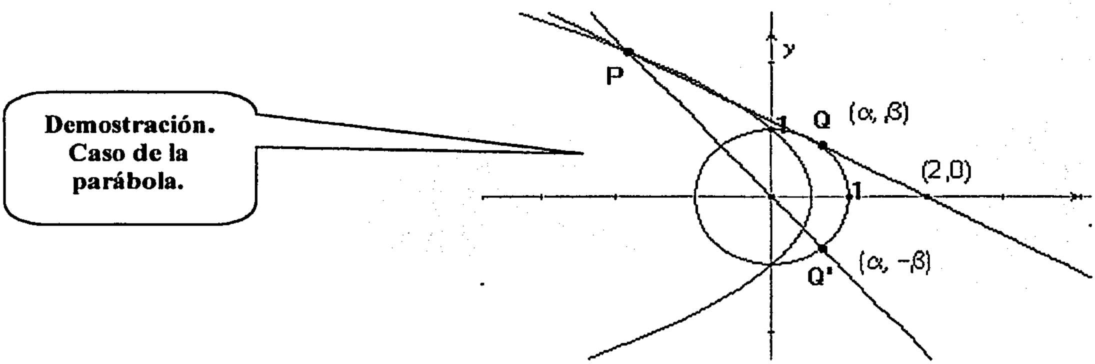


De manera análoga se puede probar que si A es simétrico de O respecto de S', al realizar una construcción similar a la propuesta en el *teorema 12.1* se obtiene otra parábola como la que se muestra en la figura:

Finalizaremos este capítulo dando una demostración de los resultados señalados en la *construcción 11*, que es distinta a las que hemos desarrollado hasta ahora. Daremos una demostración centrada en consideraciones propias de la geometría analítica clásica, que nos fue proporcionada por el profesor uruguayo Bernardo Camou.

@ *Teorema 11.2. En un sistema cartesiano, sea un punto A de coordenadas (a, o) que recorre el eje X y una circunferencia de centro en el origen y radio uno. Si Q es un punto cualquiera de la circunferencia, el lugar geométrico de P (punto de intersección de la recta AQ con la recta OQ' (Q' se obtiene al reflejar Q sobre el eje X) cuando Q varía en la circunferencia es una:*

- *Parábola, si A tiene coordenadas (2,0) o (–2,0)*
- *Elipse, si A está en alguno de los intervalos abiertos* (–2, –∞) *o* (2, ∞)
- *Hipérbola, si A si A está en alguno de los intervalos abiertos* (–2, 0) *o* (0, 2).
- *Circunferencia, precisamente la de centro O si* | *a* | → ∞.
- *Recta, aquella que es perpendicular a l en el punto O, si* | *a* | → 0.



En la figura:

- Q tiene coordenadas (α, β) y es un punto que está en la circunferencia.
- Q' (resultado de reflejar Q sobre el eje X) también está en la circunferencia. Tiene coordenadas (α,–β).
- A es simétrico de (0,0) con respecto a (1,0). Tiene coordenadas (2,0).

La circunferencia tiene su centro en el origen del sistema cartesiano y el radio es uno, por lo que su ecuación es: $x^2 + y^2 = 1$. De acuerdo a las coordenadas de los puntos A, Q y Q', las ecuaciones de las rectas AQ y Q'O serán respectivamente: $y = \beta\,(x-2)/(\alpha-2)$ y $y = -\beta x/\alpha$

Al resolver este sistema de ecuaciones respecto a α y β obtendremos:

$\alpha = x/(x-1)$ y $\beta = y/(1-x)$.

Como Q pertenece a la circunferencia de centro O, se debe verificar que: $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Al sustituir en esta expresión el valor de α y β hallados antes, obtendremos: $(x/(x-1))^2+(y/(1-x))^2 = 1$. Al desarrollar encontraremos que:

$(y/(1-x))^2+(x/(x-1))^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 + y^2 = x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow y^2 = -2x + 1$

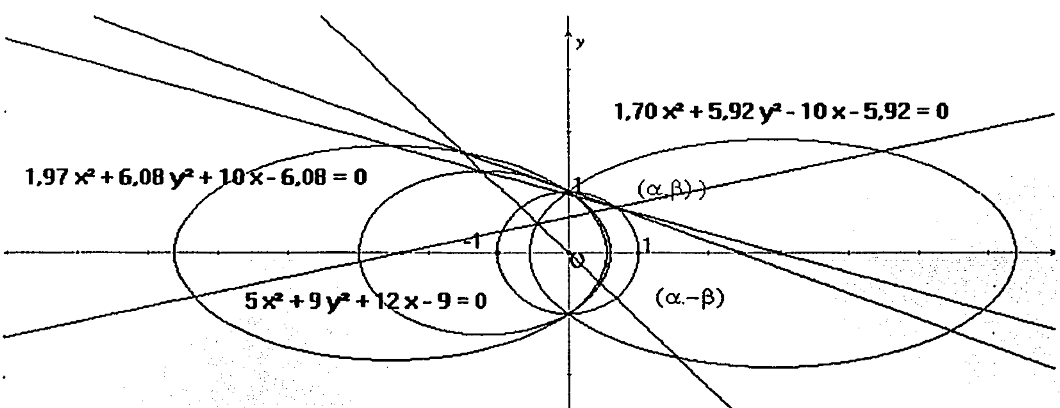
$\Rightarrow x = -y^2/2 + 1/2$. Está última expresión corresponde a la ecuación de una parábola.

Demostración para todas las cónicas

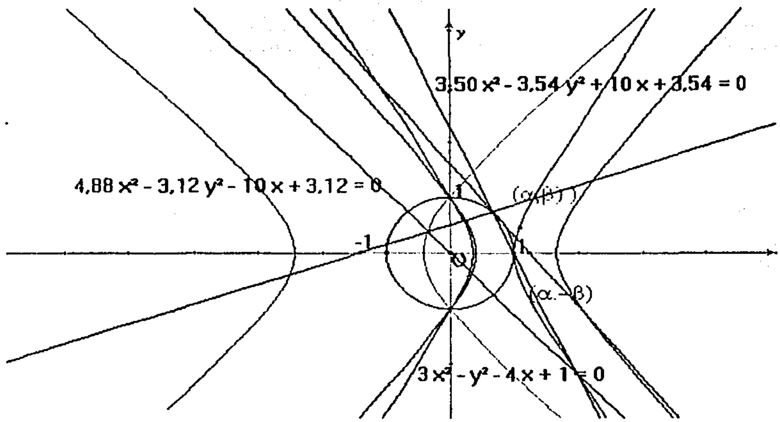
Consideremos el caso en que A es un punto cualquiera de la recta *l*. Las coordenadas de dicho punto serán: $(a,0)$. Al realizar el mismo procedimiento que seguimos para el caso de la parábola, esto es, obtener las ecuaciones de las rectas OQ y AQ y resolver el sistema de ecuaciones respecto a α y β, se tendrá que: $\alpha = ax/(2x - a)$ y $\beta = ay/(a - 2x)$

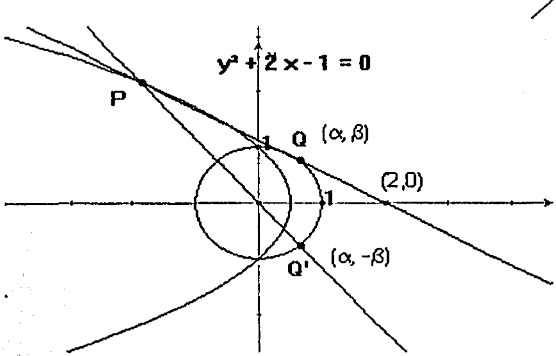
Al sustituir estos valores en $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ y desarrollar la expresión se concluye que:
$(a^2 - 4)x^2 + a^2y^2 + 4ax - a^2 = 0$. Esta expresión representa la ecuación de una de las cónicas. La ecuación de la cónica respectiva depende de los valores que tome a, así:

Si $a^2 - 4 > 0 \Rightarrow a^2 > 4 \Rightarrow a > 2$ o $a < -2$, entonces, en este caso, los coeficientes de x^2 y y^2 son positivos por lo que $(a^2 - 4)x^2 + a^2y^2 + 4ax - a^2 = 0$ representa la ecuación de una elipse. La siguiente figura muestra algunas de estas curvas.



Si $a \neq 0$ y $a^2 - 4 < 0 \Rightarrow a^2 < 4 \Rightarrow |a| < 2 \Rightarrow -2 < a < 2$, entonces el coeficiente de x^2 es negativo y el de y^2 es positivo, por lo que $(a^2 - 4)x^2 + a^2y^2 + 4ax - a^2 = 0$ representa la ecuación de una hipérbola, como las que se muestran en la figura.



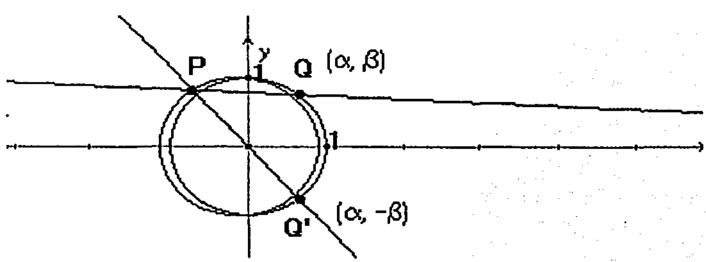


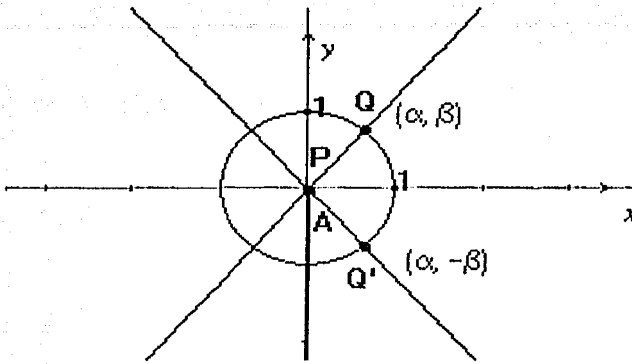
Si $a = -2$ o $a = 2$; como lo habíamos mostrado: $(a^2 - 4)x^2 + a^2y^2 + 4ax - a^2 = 0$ representa la ecuación de una parábola. La figura muestra el caso en que $a = 2$

Si $a \neq 0$ y $a \to \infty$ entonces en la diferencia $a^2 - 4$ podemos considerar sólo a^2 de manera que la expresión $(a^2 - 4)x^2 + a^2y^2 + 4a\,x - a^2 = 0$ queda aproximada por: $a^2x^2 + a^2y^2 + 4ax - a^2 = 0$

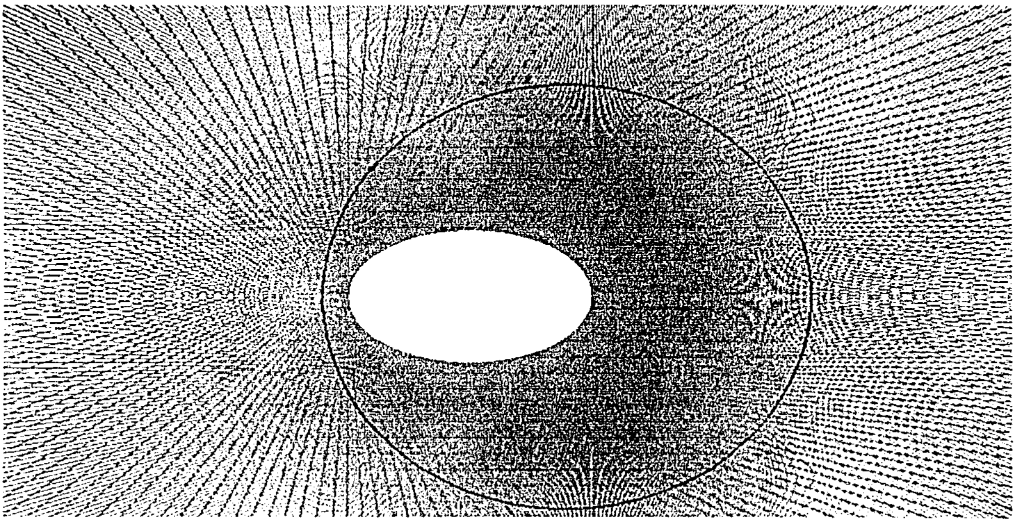
Al dividir entre a^2 la expresión $a^2x^2 + a^2y^2 + 4ax - a^2$ se obtiene $x^2 + y^2 + (4x)/a - 1 = 0$.

Si $a \to \infty$ entonces $(4x)/a \to 0$ de manera que se obtiene la expresión $x^2 + y^2 - 1 = 0$ que representa la ecuación de una circunferencia de centro en el origen y radio uno. En la figura se muestra una elipse muy parecida a la circunferencia de centro O.





Si $a \to 0$ entonces $(a^2 - 4)x^2 + a^2y^2 + 4ax - a^2 = 0$ se reduce a $-4x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ que representa la ecuación de la recta que coincide con el eje Y, como se muestra en la figura.



Capítulo III
Problemas propuestos

Moverse, es el problema.

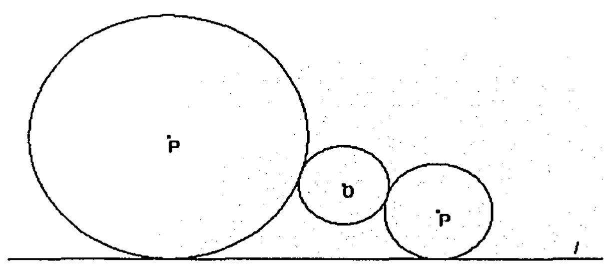
En este capítulo proponemos una serie de problemas que llevan a generar las cónicas. Cabe decir que la mayoría de los que hemos incluido en este capítulo, sólo permiten generar una de las cónicas.

En el planteamiento de ciertos problemas damos alguna sugerencia para ser desarrollados, es el caso de aquellos que sabemos cómo realizar la construcción o la demostración. De aquellos que no tienen sugerencia, unos porque consideramos no son difíciles de probar o construir y otros porque desconocemos la demostración y nos gustaría que se nos haga llegar alguna. Estos últimos problemas están señalados con un asterisco. En principio, estamos interesados en conocer demostraciones cuyos argumentos sean de geometría euclidiana; pero será decisión de quien los aborde hacer caso a nuestro interés o seguir su propio camino.

Los problemas van acompañados de alguna figura que los ilustra, sin embargo, aquellos (son los menos) que se proponen para realizar una construcción se han ocultado los trazos que llevan a realizarla.

Problemas

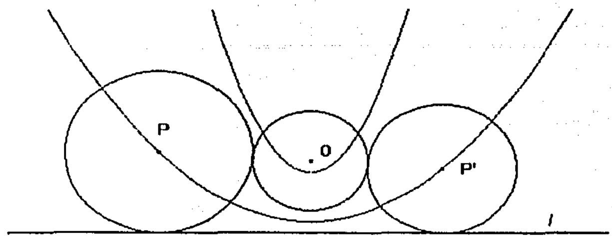
- Dada una recta l y una circunferencia de centro O y radio r que no intersecta a la recta, construir una circunferencia que sea tangente tanto a la recta como a la circunferencia dada.

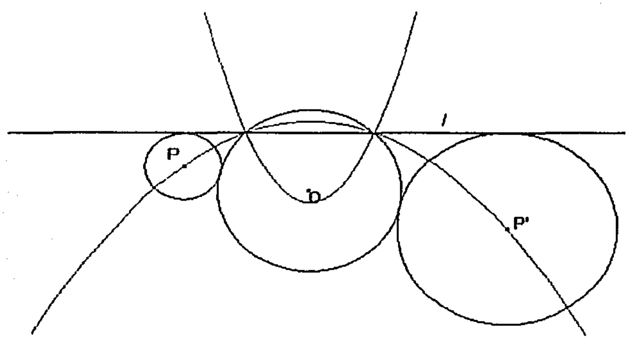


Sugerencia:

- Considere un punto Q que recorra la circunferencia de centro O y en ese punto construya una circunferencia que satisfaga las condiciones planteadas.

- Demuestre que el lugar geométrico de P y P' centros de las circunferencias tangentes a la circunferencia y a la recta dada, son dos parábolas tales que el foco de ambas es O (centro de la circunferencia dada) y, la directriz de cada una es paralela a la recta *l*.





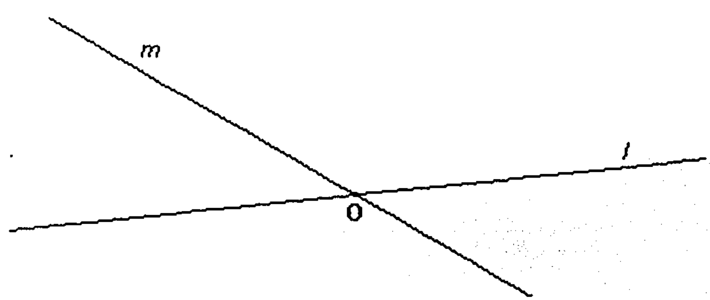
- Demuestre que si la circunferencia corta a la recta *l* el lugar geométrico de P y P', centros de las circunferencias tangentes a la circunferencia y a la recta dada, son dos parábolas tal que, con respecto a la recta *l*, una se abre hacia arriba y otra hacia abajo-

- Dadas dos rectas *l* y *m* que se intersectan en un punto O, trazar una circunferencia que sea tangente a las dos rectas dadas.

Sugerencia:

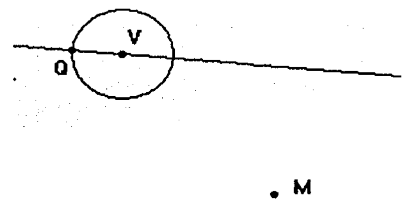
- Trazar una circunferencia de centro O y radio OQ tal que Q recorra la recta *l*.

- Demuestre que dadas dos rectas *l* y *m* que se intersectan en un punto O, cuando Q varía en la recta *l*, el lugar geométrico de P, centro la circunferencia tangente a *l* y *m*, son las bisectrices de los ángulos que forman las rectas *l* y *m*.



Dado el vértice V de un rectángulo y M, punto medio del lado no contiguo al vértice dado del rectángulo, construir el rectángulo. De todos los rectángulos que cumplen con las condiciones del problema, encuentre el de área máxima.

Sugerencia:

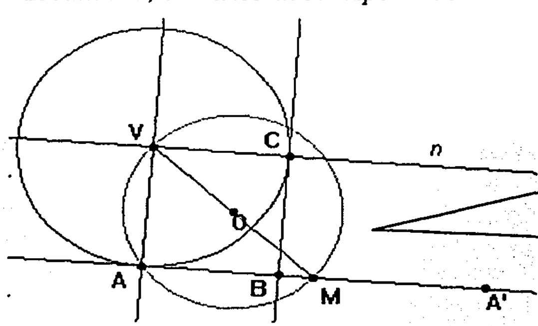


- *Trace una circunferencia con centro en V y radio r.*
- *Elija un punto Q que recorra la circunferencia y trace la recta VQ.*
- *Trace el rectángulo.*
- Haga que Q recorra la circunferencia, observe los vértices del rectángulo, ¿qué describen?

Dado el vértice V de un cuadrado y el punto medio M del lado no contiguo al vértice dado, construir el cuadrado.

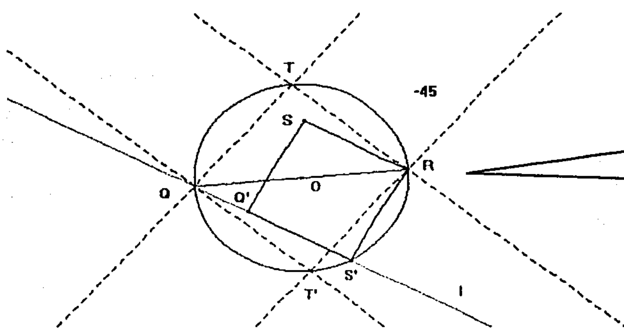
Sugerencia:

- *Trace el segmento VM y localice O, punto medio de este segmento.*
- *Trace la circunferencia de centro O y radio OV = OM.*
- *Elija en la circunferencia de radio OV un punto A que la recorra y trace la recta VA.*
- *Trace las rectas MA y VA.*
- *En V, trace la perpendicular a la recta VA y llámela n.*
- *Trace la circunferencia de centro A y radio VA, ésta perpendicular cortará C a n.*
- *En C, trace la perpendicular a la recta n, está cortará en B a la recta MA.*
- *Trace el cuadrado VABC.*
- *Localice A', simétrico de A respecto de M.*



- **Haga que A recorra la circunferencia de centro V y radio OA, observe los vértices del cuadrado y el punto A', ¿qué describen?**

- ¿Cuál es lugar geométrico de los vértices B y D de un cuadrado de vértices Q, B, R y D, cuando Q varía en la recta *l* y, R es un vértice fijo que no está en la recta? (N.B Vasíliev, V. L. Gutenmájer).

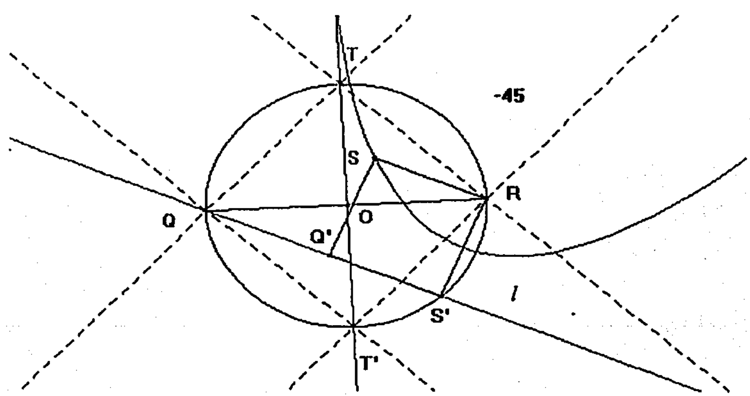


- Considere el caso en que Q y R son vértices opuestos del cuadrado.

Sugerencia:

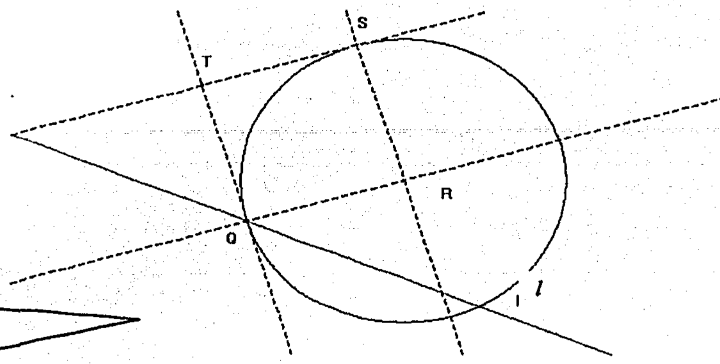
- El cuadrilátero Q'S'RS es uno de los cuadrados que cumple con las condiciones. Observe que S' es punto fijo, ¿por qué?
- ¿Qué sucederá si rota la recta *l* un ángulo igual a –45° respecto al punto S'?

- Demuestre que cuando Q varía en la recta *l*, la recta TT' es la envolvente de una parábola cuyo foco es el punto R y directriz la recta *l*.



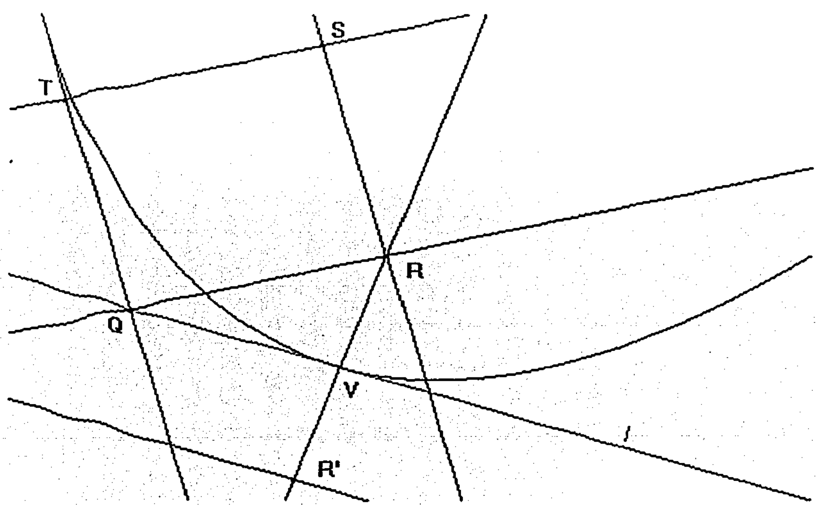
Sugerencia:

- Localice el punto P que describe la parábola.



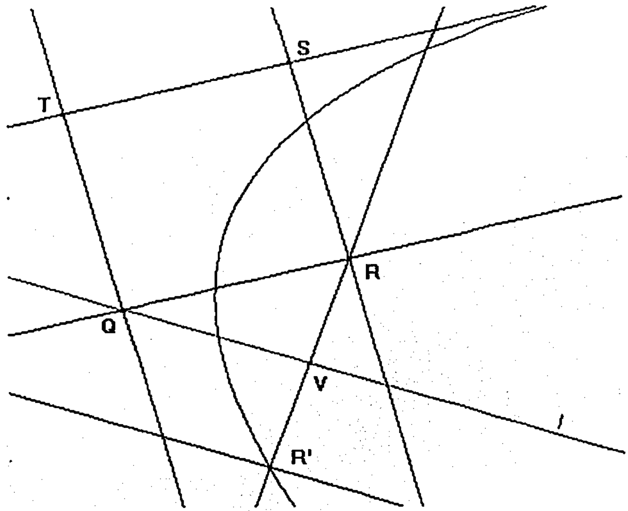
- Considere el caso en que Q y R son vértices contiguos del cuadrado.

Demuestre que cuando Q varía en *l*, la recta QT es la envolvente de una parábola de foco R y directriz la recta paralela a *l* trazada en R'; donde R' es simétrico de R respecto de V y V es intersección de la recta *l* y la perpendicular a esta recta trazada en el punto R.

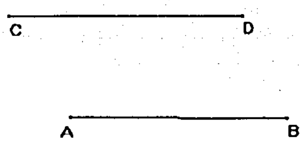


Sugerencia:

- Si el segmento RQ es rotado un ángulo igual –90° respecto al punto R ¿Qué posición, respecto de la posición original del mismo segmento, tendrá el resultado del segmento rotado?



Demuestre que cuando Q varía en la recta *l*, la recta TS es la envolvente de una parábola que es resultado de rotar la parábola, cuya envolvente es la recta TQ, un ángulo igual a –90° respecto al punto R.



Dada la base AB de un triángulo ABP y un segmento CD que representa la suma de los otros dos lados del triángulo, construir el triángulo.

Sugerencia:

- *Trace el segmento CD y considere en él un punto Q que lo recorra.*
- *Trace los segmentos CQ y QD.*
- *Trace el segmento AB.*
- *A partir de los segmentos AB, CQ, y QB, construya el triángulo ABP*

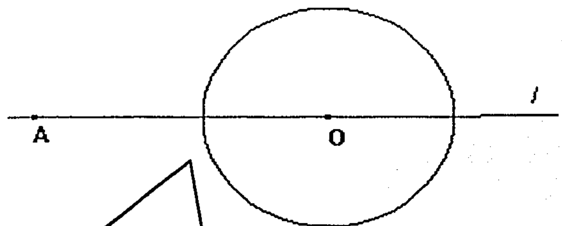
- Demuestre que cuando Q varía en el segmento CD (excepto C y D), el lugar geométrico de P es una elipse de focos A y B.

- Dada la diagonal AC de un rectángulo ABCD y su perímetro, construir el rectángulo.

Sugerencia:

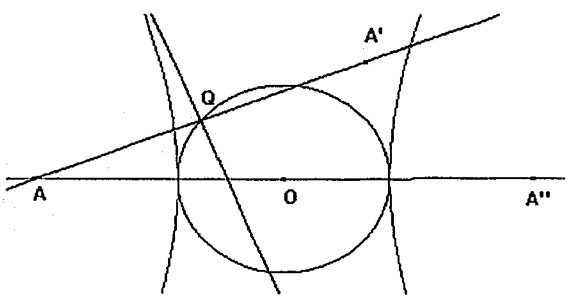
- Analice cuándo tiene solución el problema y utilice el problema anterior.

- Dada una circunferencia de radio r que tiene su centro O en una recta *l*, y un punto A cualquiera de la recta *l*, que se encuentra fuera del círculo de centro O; localizar en la circunferencia un punto Q que sea punto medio del segmento AP y, P esté en la circunferencia. (H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer).



Sugerencia:

- *Considere en la circunferencia un punto Q que la recorra y trace la recta AQ*
- *Localice A' simétrico de A respecto de Q.*

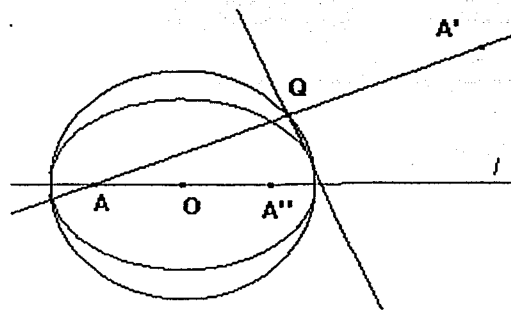


- Dada las condiciones del problema anterior, demuestre que cuando Q varía en la circunferencia, la perpendicular a la recta AQ levantada en Q, es la envolvente de una hipérbola de focos A y A", donde A" es simétrico de A respecto de O.

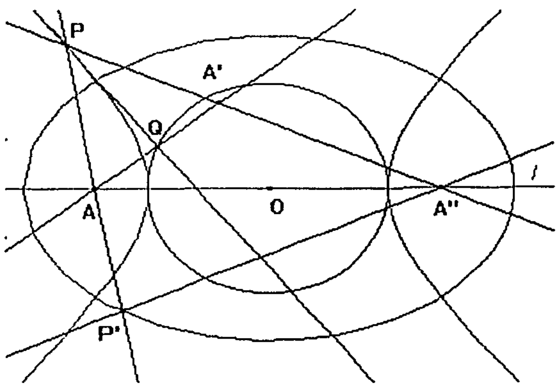
Sugerencia:

- Cuando Q varía en la circunferencia, ¿cuál es el lugar geométrico de A'?, ¿qué representa A" del lugar geométrico de A'?

Analice el caso en el que A se encuentra dentro del círculo de centro O y demuestre que cuando Q varía en la circunferencia, la perpendicular a la recta AQ trazada en Q, es la envolvente de una elipse de focos A y A"



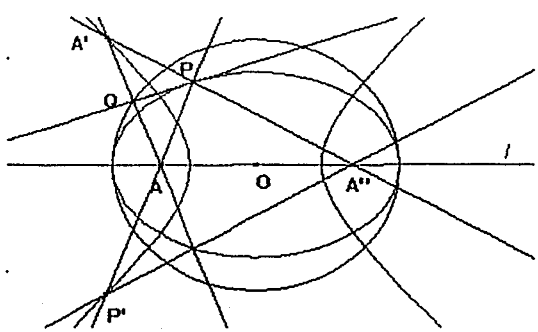
- En la construcción del problema anterior, cuando A se encuentra fuera del círculo, realice la siguiente construcción:



- *Trace la recta A"A', ésta intersectará a la perpendicular a la recta AQ trazada en Q, en un punto P.*
- *Refleje la recta A"A' sobre la recta l, la recta resultante cortará a la recta AP en un punto P'.*

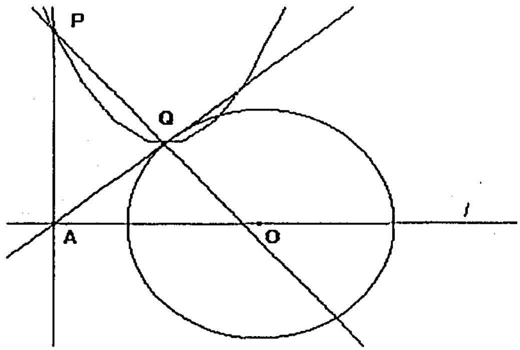
- Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia, el lugar geométrico de P' es una elipse de focos A y A".

- Analice el caso en que A se encuentra dentro del círculo y demuestre que cuando Q varía en la circunferencia, el lugar geométrico de P' (intersección de la recta AP y la recta resultado de reflejar la recta A'A" sobre la recta *l*, es una hipérbola de focos A y A'.



Dada la construcción inicial de los problemas anteriores realice los siguientes trazos:

@ *Trazar en A una perpendicular a la recta l. La perpendicular intersectará a la perpendicular a la recta AQ levantada en Q, en un punto P.*



Demuestre que cuando A varía en la recta *l*, el lugar geométrico de P es una parábola.

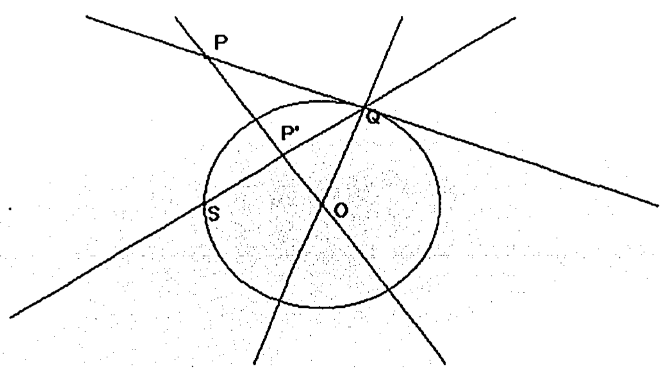
Dada una circunferencia de centro O y radio r, realice la siguiente construcción:

@ *Elija en la circunferencia un punto fijo S y un punto Q que la recorra.*

@ *Trace en Q una tangente a la circunferencia.*

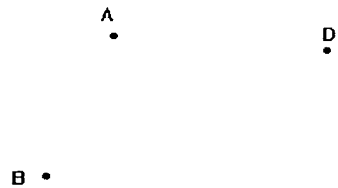
@ *Trace la recta SQ.*

@ *Trace en O una perpendicular a la recta SQ. La perpendicular intersectará a la recta SQ en un punto P' y a la tangente a la circunferencia trazada en Q, en un punto P.*



- Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia de centro O, el lugar geométrico de P es una recta, precisamente la tangente en S a la circunferencia.
- Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia, el lugar geométrico de P' es otra circunferencia.

- Dados tres puntos medios A, B y D de los lados de un paralelogramo, construir el paralelogramo. (Levi S. Shively, Ph. D.).

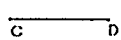


Sugerencia:

- *Localice el punto medio de BD y llámelo O.*
- *Encuentre el cuarto punto medio del paralelogramo y llámelo C.*
- *Localice los puntos medios M y M' de AB y AD respectivamente.*
- *Trace las rectas OM y OM'.*
- *En la recta MO elija un punto Q que la recorra y localice Q' simétrico de Q respecto de C.*

- Si Q varía en la recta OM, ¿cuál es el lugar geométrico de Q'?
- Use el resultado anterior para localizar los vértices del paralelogramo.

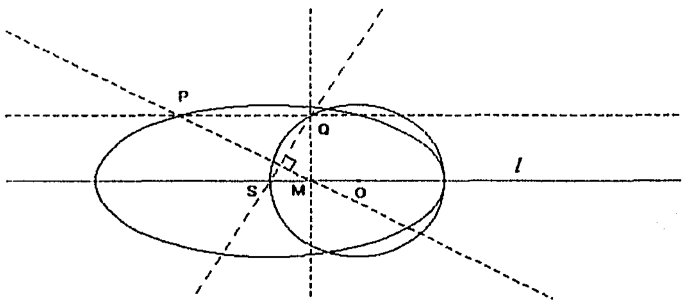
- Dada la base AB y la longitud (CD) de la mediana de un triángulo ABP construir el triángulo. Considere los dos casos posibles. En cada caso encuentre el triángulo de mayor área.

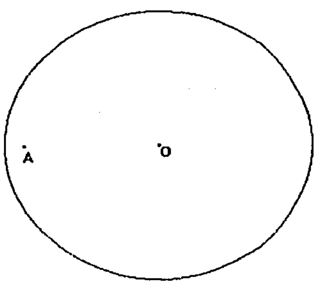


Realice la siguiente construcción:

- *Trace una recta l*
- *Trace una circunferencia de centro O tal que O esté sobre la recta l. La circunferencia intersectará a la recta en dos puntos. Llámelos S y S'.*
- *En la circunferencia elija un punto Q que la recorra y trace la recta SQ.*
- *Trace en Q una perpendicular a l. La perpendicular cortará a l en un punto M.*
- *Trace en M una perpendicular a la recta SQ.*
- *Trace en Q una paralela a l. La paralela cortará a la perpendicular a la recta SQ levantada en M, en un punto P.*

*Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia, el lugar geométrico de P es una elipse cuyo eje mayor es dos veces el diámetro de la circunferencia y, el eje menor mide el diámetro de la misma circunferencia.



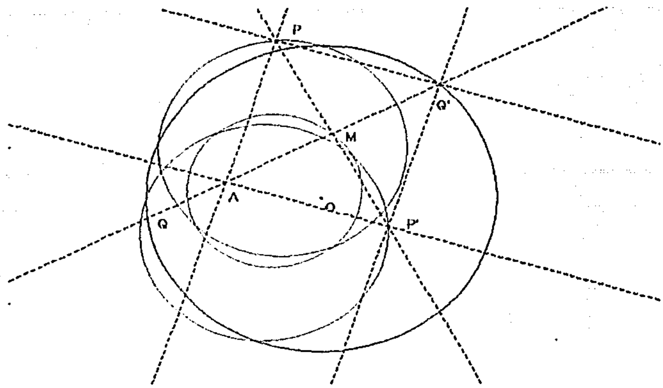


- Dada una circunferencia de centro O y radio r y un punto A dentro del círculo, construir un cuadrado tal que tenga dos de sus vértices contiguos en la circunferencia y A sea también vértice del mismo.

Sugerencia:

- *Considere en la circunferencia un punto Q que la recorra y trace la recta AQ, ésta cortará a la circunferencia en un punto Q'.*
- *Localice el punto M, punto medio de AQ' y trace la mediatriz de AQ', está cortará a la circunferencia en dos puntos P y P'.*

- *Construya un cuadrado de lado AP.*



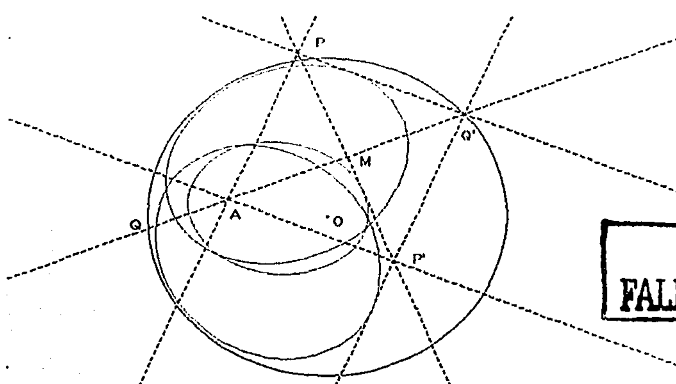
Haga que Q recorra la circunferencia de centro O. Observe los vértices del cuadrado, ¿qué describen?

Demuestre que:

- Cuando Q varía en la circunferencia de centro O, el lugar geométrico de P es una circunferencia.
- Cuando Q varía en la circunferencia de centro O, el lugar geométrico de P" es otra circunferencia.
- Cuando Q varía en la circunferencia de centro O, el lugar geométrico de M es una circunferencia.

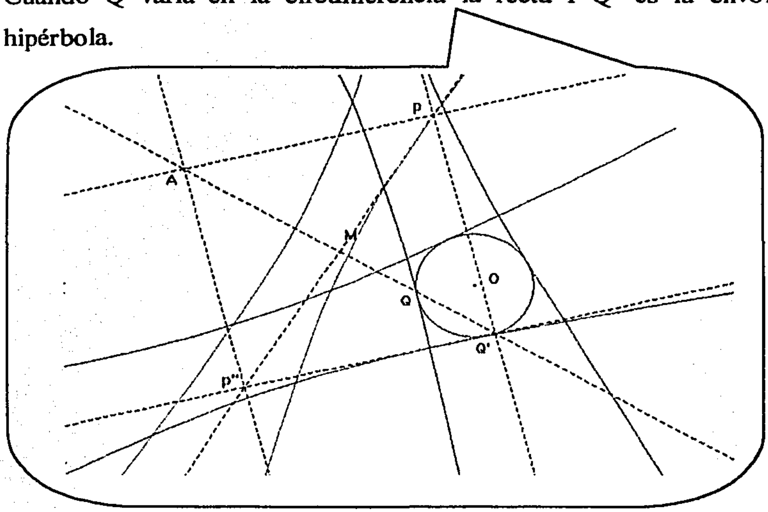
Dadas las condiciones de la construcción anterior demuestre que:

- Cuando Q varía en la circunferencia, la mediatriz de AQ' es la envolvente de una elipse.
- Cuando Q varía en la circunferencia, la recta PQ' es la envolvente de una elipse.
- Cuando Q varía en la circunferencia la recta P'Q' es la envolvente de una elipse



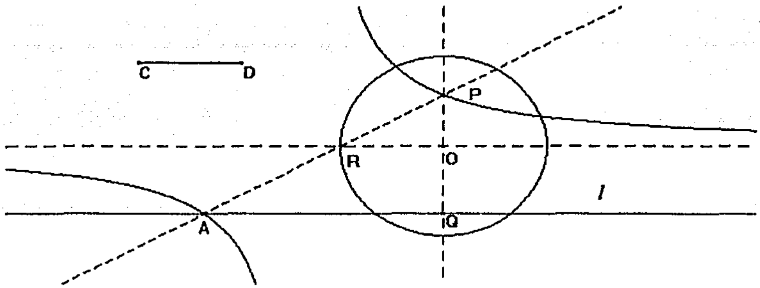
*Dadas las condiciones del problema anterior, analice el caso en que el punto A se encuentra fuera del círculo y demuestre que si existe solución al problema:

- Cuando Q varía en la circunferencia, la mediatriz de AQ es la envolvente de una hipérbola.
- Cuando Q varía en la circunferencia, la recta PQ' es la envolvente de una hipérbola.
- Cuando Q varía en la circunferencia la recta P'Q' es la envolvente de una hipérbola.



Realice la siguiente construcción:

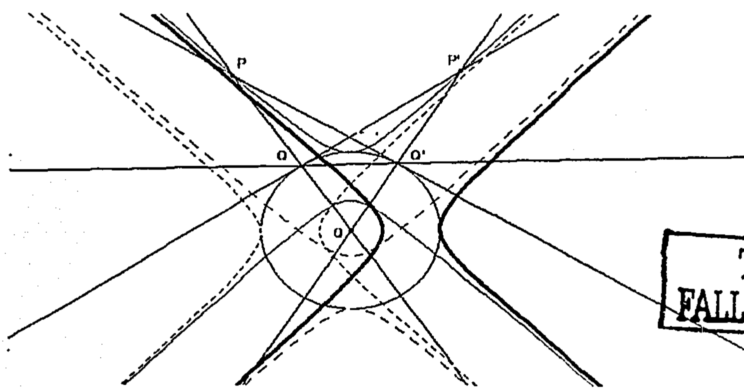
- *Trace un segmento CD.*
- *Trace una recta l. Elija en ella un punto A fijo y un punto Q que la recorra.*
- *En Q levante una perpendicular a la recta l.*
- *En la perpendicular a l levantada en Q elija un punto fijo O y trace en ese punto una paralela a la recta l.*
- *Trace una circunferencia de centro O y radio CD. La circunferencia cortará a la paralela a l trazada en O en dos puntos elija el punto que está próximo al punto A y llámelo R.*
- *Trace la recta AR. La recta intersectará a la perpendicular a la recta l trazada en Q en un punto P.*



*Demuestre que cuando Q varía en la recta *l*, el lugar geométrico de P es una hipérbola.

Realice la siguiente construcción:

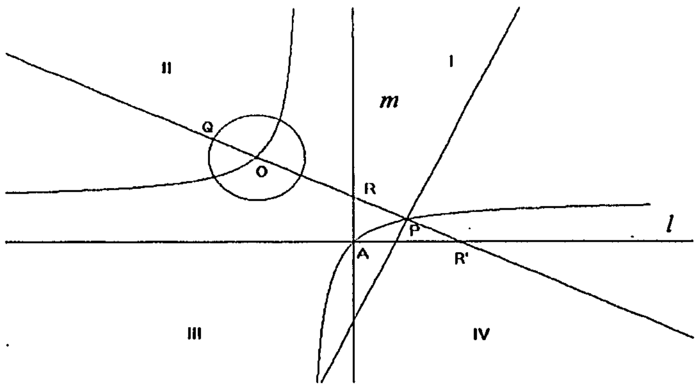
- *Trace una circunferencia de centro O y radio r.*
- *Elija un punto Q en la circunferencia que la recorra y trace la recta OQ.*
- *En Q trace una tangente a la circunferencia.*
- *Trace una recta a partir del punto Q y una dirección, tal que al desplazar el punto Q sobre la circunferencia, la recta se desplace en paralelo respecto a su posición original. La recta cortará a la circunferencia en un punto Q'.*
- *Trace la recta OQ', ésta intersectará a la tangente a la circunferencia trazada en el punto Q, en el punto P.*
- *Trace en Q' una tangente a la circunferencia, está intersectará a la recta OQ en un punto P'.*



*Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia, el lugar geométrico de P y P' son cuatro ramas de hipérbolas (las exteriores a la circunferencia).

Realice la siguiente construcción:

- *Trace dos rectas l y m perpendiculares en un punto A. Las rectas dividen el plano en cuatro cuadrantes.*
- *En uno de los cuadrantes, por ejemplo en el II, trace una circunferencia de centro O y radio r tal que no intersecte a las dos rectas l y m.*
- *En la circunferencia elija un punto Q que la recorra y trace la recta QO, ésta cortará a la recta m en un punto R y a la recta l en un punto R'.*
- *Obtenga P, punto medio del segmento RR'.*

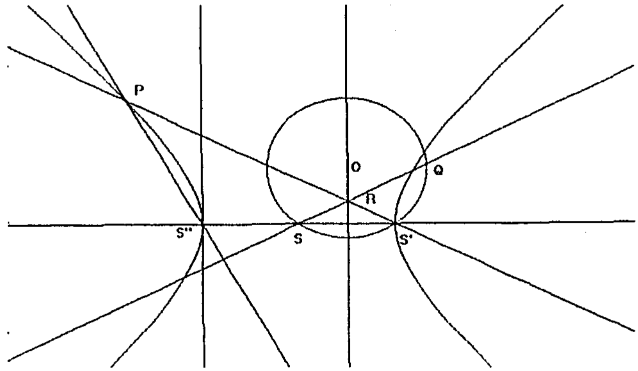


*Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia, el lugar geométrico de P es una hipérbola.

Realice la siguiente construcción:

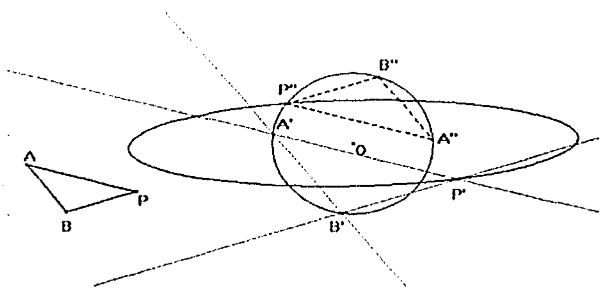
- *Trace una circunferencia de centro O y radio r.*
- *Elija en la circunferencia dos puntos fijos distintos S y S' y trace la recta SS'.*
- *Trace la mediatriz de SS'*
- *Elija en la circunferencia un punto Q que la recorra y trace la recta SQ, esta recta intersectará a la mediatriz de SS' en un punto R.*
- *Trace la recta S'R y obtenga S'' simétrico de S' respecto de S.*

Trace en S" una perpendicular a la recta SQ. La perpendicular intersectará a la recta SR en un punto P.



*Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia, el lugar geométrico de P es una hipérbola.

Dado un triángulo ABP y una circunferencia de centro O y radio r. La siguiente construcción permite, mediante el uso de un programa dinámico como Cabri, inscribir en la circunferencia un triángulo A"B"P"semejante al triángulo ABP.



Elija en la circunferencia un punto A' que recorra la circunferencia y trace en A' una paralela al lado AB tal que al desplazar el punto A' sobre la circunferencia, la paralela mantenga la misma dirección que la del lado AB . La paralela cortará a la circunferencia en un punto B'

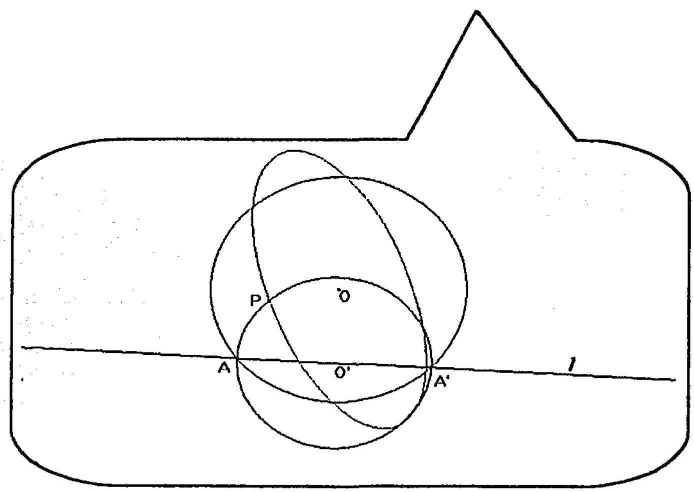
Trace en A' una paralela al lado AP.

Trace en B' una paralela al lado BP. Esta paralela cortará a la paralela al lado AP trazada en A', en un punto P'.

*Demuestre que cuando A' varía en en la circunferencia de centro O, el lugar geométrico de P' es una elipse.

Realice la siguiente construcción:

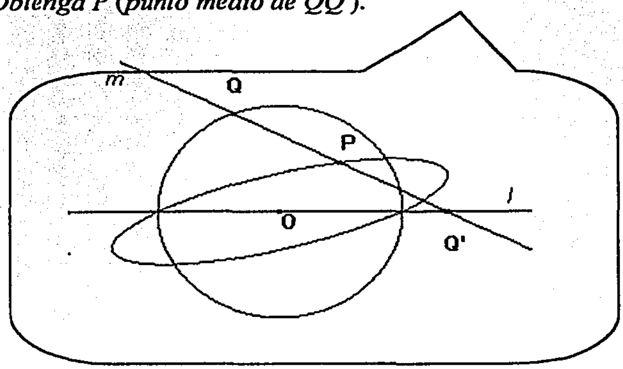
- *Trace una circunferencia de centro O y radio r.*
- *Elija un punto A que recorra la circunferencia y trace una recta l definida por el punto A y una dirección, tal que cuando A se desplace sobre la circunferencia, la recta l se mueva en paralelo respecto a su posición original. La recta así trazada cortará a la circunferencia en un punto A'.*
- *Localice O' (punto medio de AA') y trace la circunferencia de centro O' y radio O'A.*
- *Elija un punto P en la circunferencia de centro O.*



*Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia de centro O, el lugar geométrico de P es una elipse.

Realice la siguiente construcción:

- *Trace una recta l.*
- *Trace una circunferencia de radio r que tenga su centro O en la recta l.*
- *Elija en la circunferencia un punto Q que la recorra y trace una recta m (no paralela a l) definida por el punto Q y una dirección, de manera que si Q recorre la circunferencia, la recta m se desplace en paralelo respecto a su posición original. La recta m cortará a la recta l en un punto Q'.*
- *Obtenga P (punto medio de QQ').*

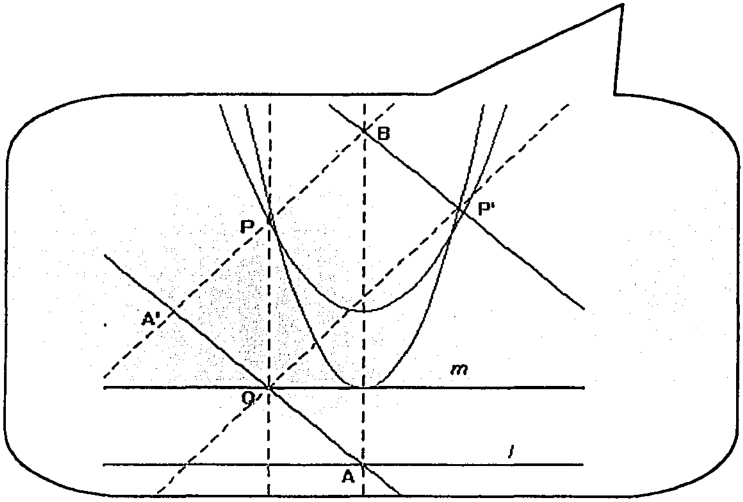


*Demuestre que cuando Q varía en la circunferencia, el lugar geométrico de P (punto medio del segmento QQ') es una elipse.

Realice la siguiente construcción:

- *Trace dos rectas l y m paralelas.*
- *En l elija un punto A fijo y en m un punto Q que la recorra.*
- *Trace en A y en Q perpendiculares a la recta l.*
- *Trace la recta AQ y obtenga A' simétrico de A respecto de Q.*
- *Trace en A' una perpendicular a la recta AQ. La perpendicular cortará a la perpendicular a la recta l levantada en Q en un punto P y, a la perpendicular a la recta l levantada en A en un punto B.*

- *Trace en B una perpendicular a la recta A'P. La perpendicular cortará a la perpendicular a la recta AQ levantada en Q, en un punto P'.*

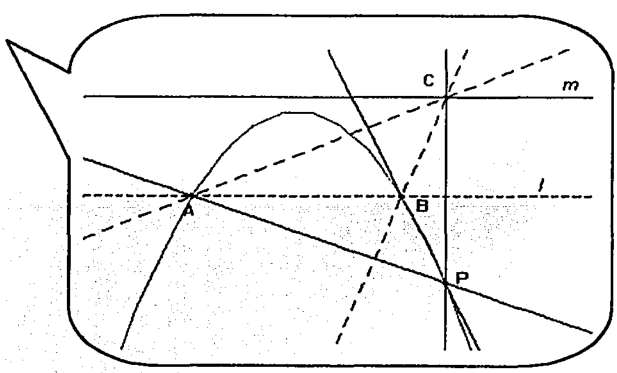


*Demuestre que cuando Q varía en la recta *m*, el lugar geométrico de P, es una parábola.

*Demuestre que cuando Q varía en la recta *m*, el lugar geométrico de P' es una parábola.

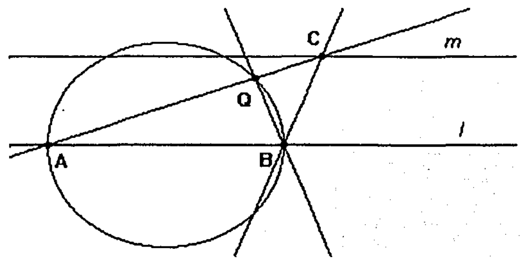
Realice la siguiente construcción.

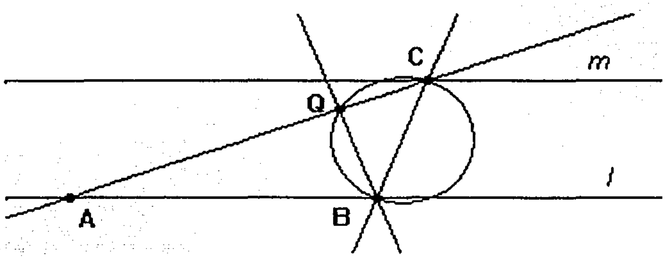
- *Trace dos rectas l y m que sean paralelas.*
- *En la recta l elija dos puntos A y B que la recorran y en la recta m un punto C que la recorra. Los puntos A, B, C definen un triángulo*
- *Trace las rectas AC y BC.*
- *Trace las alturas del triángulo ABC. Las alturas se intersectarán en un punto P.*



*Demuestre que cuando C varía en la recta *m*, el lugar geométrico de P es una parábola.

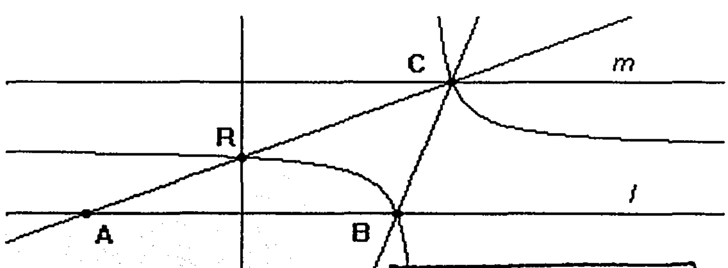
En la construcción anterior, la altura trazada desde el punto B corta a la recta AC en un punto Q. Demuestre que cuando C varía en la recta *m*, el lugar geométrico del punto Q es una circunferencia.





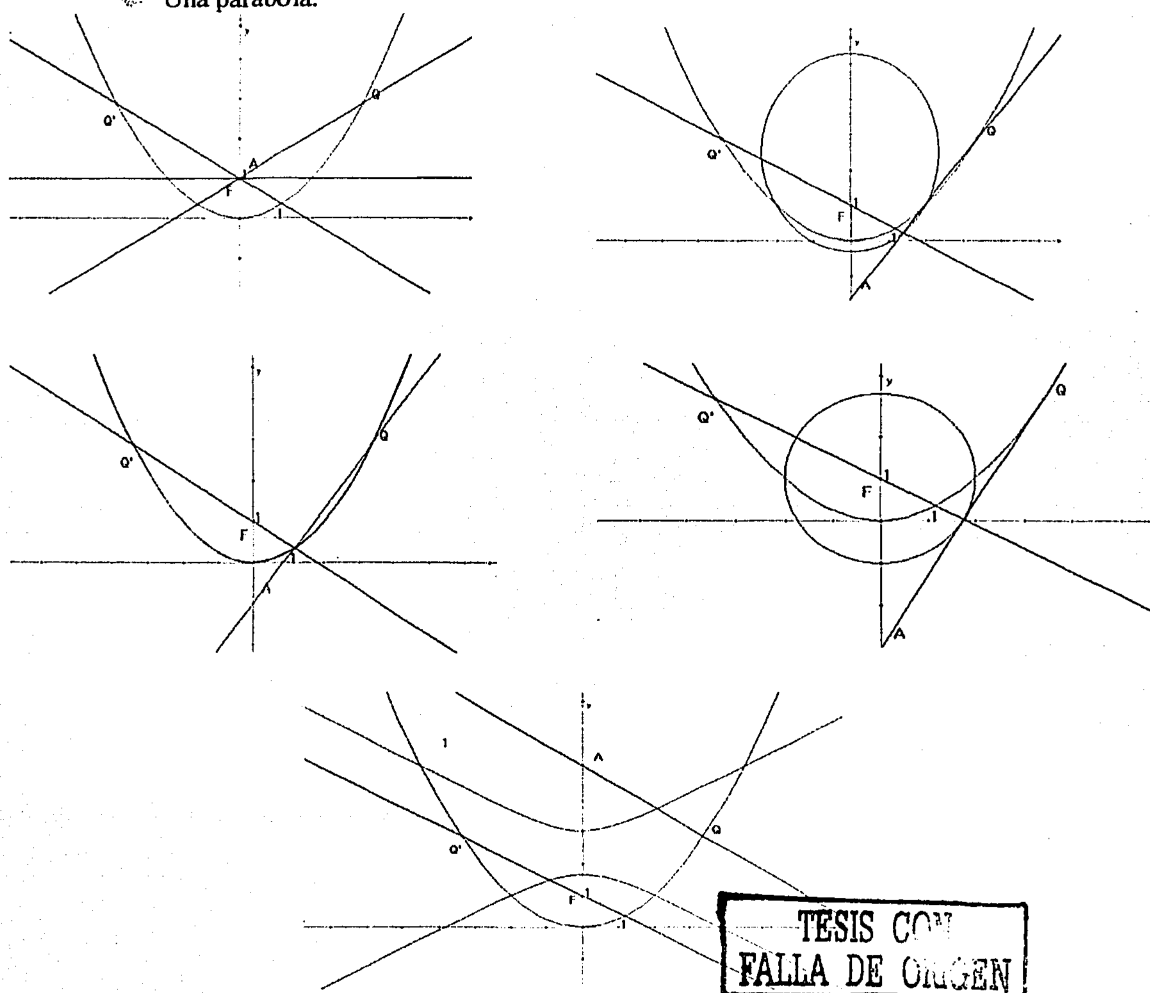
En la construcción anterior la altura trazada desde el punto B, corta a la recta AC en un punto Q. Demuestre que cuando A varía en la recta *l*, el lugar geométrico de Q es una circunferencia.

*En la construcción anterior trazar la mediatriz de AB, ésta corta a la recta AC en un punto R. Demuestre que cuando A varía en la recta *l*, el lugar geométrico de R es una hipérbola.



- Sea un sistema cartesiano, un punto A cualquiera del eje Y de coordenadas (0,y) y, una parábola de vértice en el origen y foco el punto F de coordenadas (0,1). Si Q es un punto cualquiera de la parábola. Demuestre que el lugar geométrico de P (punto de intersección de la recta AQ con la recta Q'F (Q' se obtiene al reflejar Q sobre el eje Y), cuando Q varía en la parábola, es, dependiendo de la posición de A en el eje Y: (Manuel Santos Trigo, Hugo Espinosa Pérez)

- Una recta.
- Una elipse.
- Una parábola.
- Una circunferencia.
- Una hipérbola.



Conclusiones:

Este trabajo representa el encuentro y desarrollo de una idea: estudiar las cónicas a partir de resultados de la geometría de Euclides. La mayoría de los problemas que hemos presentado (aún el problema 11), nos permiten concluir que valió la pena caminar por los teoremas Euclidianos.

En este caminar, el Programa dinámico Cabri Geometre jugó un papel importante; por un lado, nos proporcionó una "regla" y un "compás", cuya precisión para el trazo nos llevó a conjeturar algunos de los resultados que contiene este trabajo. Asimismo, nos dotó una suerte de laboratorio en el cual "experimentar" con los objetos geométricos. Pero sobre todo, nos posibilitó descubrir y proponer resultados que antes no se habían considerado.

Sin embargo, hay un aspecto fundamental en matemáticas que el Programa Cabri no proporciona (ni tiene por qué hacerlo): la demostración. La demostración es el reto que se ofrece a quien, como nosotros, de pronto en la pantalla de la computadora, se nos aparecía alguna cónica. La demostración, como el punto que culmina un descubrimiento, cobró sentido. Las evidencias proporcionadas por el Programa, no son argumentos lógicos. Los matemáticos y nosotros como aprendices, necesitábamos de resultados ajenos a los ojos, a los sentidos; requeríamos de razones sustentadas en hechos considerados por la comunidad matemática como válidos. Nosotros, como hemos dicho, elegimos basarnos en los Euclidianos.

Esperamos que este trabajo guarde el sueño de algún aprendiz de matemático, y no el sueño de los justos. Si este deseo fuera, invitamos a este aprendiz a usar un programa de geometría dinámica y, caminar al encuentro y búsqueda de otros resultados. Por nuestra parte decimos: seguro que no hemos agotado, seguro que se mostrará sorprendido de lo que encuentre.

Bibliografía

Se cita la bibliografía de acuerdo al orden de importancia para este trabajo.

- Vasíliev N. B., Gutenmájer V. L. Curvas y rectas. Mir. URSS. 1980.
- Olabarrieta Luciano, S. I. Ejercicios de geometría moderna. Artes gráfica Grijelmo. Bilbao 1944.
- Zubieta Russi Francisco. Geometría razonada y trigonometría. Edición del autor. México 1965.
- Shively Levi S. PH. D. Introducción a la Geometría Moderna. C.E.C.C.S.A. México 1984.
- Eves Howard. Estudio de las Geometrías. UTEHA. México 1971.
- Lehmann Charles H. Geometría Analítica. UTEHA. México 1974.
- Wentworth Jorge y Smiht David Eugenio. Geometría Plana y del espacio. Ginn y Compañía. Boston USA 1915.
- Fernández Márquez P. Dibujo Líneal geométrico y de Proyecciones. Tratado elemental. Edición del autor. México 1964.
- Carrega Jean-Claude. Théorie de corps la regle et le compas. Hermann des sciencies et des arts. París. 1981.
- Coxeter H. S. M y Greitzer S. Retorno a la Geometría. Colección La tortuga de Aquiles. DLS-Euler. Madrid. 1994.
- Euclides Elementos de Geometría. Versión de José Álvarez Lazo: México. UNAM. 1992.
- Pogorélov A. V. Geometría elemental. Mir. URSS. 1974.