

01125
6



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE INGENIERIA

Autoriza la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo académico.

NOMBRE: Alejandro Flores

FECHA: 28 de Mayo 2003

FIRMA: [Signature]

FOTOGRAMETRÍA ANALÍTICA Y DIGITAL.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

T E S I S
PARA OBTENER EL TITULO DE:
INGENIERO TOPOGRAFO Y GEODESTA
QUE PRESENTA:
ALEJANDRO FLORES CEBALLOS

ASESOR DE TESIS: ING. VICTOR MANUEL MOZO Y TENORIO



MEXICO, D. F.

MAYO 2003

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA
DIRECCIÓN GENERAL DE ASISTENCIA TÉCNICA
DIRECCIÓN GENERAL DE ASISTENCIA TÉCNICA

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIRECCIÓN
FING/DCTG/SEAC/UTIT/020/03

Señor
ALEJANDRO FLORES CEBALLOS
Presente

En atención a su solicitud me es grato hacer de su conocimiento el tema que propuso el profesor ING. VICTOR MANUEL MOZO Y TENORIO, que aprobó esta Dirección, para que lo desarrolle usted como tesis de su examen profesional de INGENIERO TOPÓGRAFO Y GEODESTA.

"FOTOGRAMETRÍA ANALÍTICA Y DIGITAL"

- INTRODUCCIÓN
- I. CONCEPTOS FOTOGRAMÉTRICOS
- II. FOTOMETRÍA
- III. CÁMARAS MÉTRICAS Y AVIONES PARA FOTOGRAFÍA AÉREA
- IV. INSTRUMENTOS ANALÍTICOS
- V. RELACIONES DE COORDENADAS EN FOTOGRAMETRÍA
- VI. AEROTRIANGULACIÓN
- VII. RESTITUCIÓN ANALÍTICA
- VIII. CONCLUSIONES

Ruego a usted cumplir con la disposición de la Dirección General de la Administración Escolar en el sentido de que se imprima en lugar visible de cada ejemplar de la tesis el Título de ésta.

Asimismo le recuerdo que la Ley de Profesiones estipula que deberá prestar servicio social durante un tiempo mínimo de seis meses como requisito para sustentar Examen Profesional.

Atentamente
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"

Cd. Universitaria 27 Febrero 2003.

EL DIRECTOR

M.C. GERARDO FERRANDO BRAVO
GFB/GMP/mstg.

AGRADECIMIENTOS

A MIS PAPAS

Gracias por todo lo que han logrado en mí y por depositar ese gran voto de confianza en que podría hacer realidad su sueño, el verme titulado.

GRACIAS POR TODO.

A TI LAURA

Te agradezco todo el apoyo y tus valiosos consejos brindados para la terminación de mi carrera y para la realización de esta tesis. A ti, mi pilar de acero, también te corresponde este logro el cual es de mucho valor para mí. Espero que todos las metas que nos hemos fijado para nuestras vidas se realicen, ya que eres una mujer maravillosa.

Recuerda que eres y serás el amor de mi vida.

TE AMO.

HEIDI ARIAS

Heidi, por fin el sueño hecho realidad, gracias por ese gran apoyo brindado en los momentos más difíciles de la carrera y por ser una amiga incondicional.

ÍNDICE

Introducción	Página
_____	1

Capítulo I

CAPÍTULO I. CONCEPTOS FOTOGRAMÉTRICOS

1. Definición de fotogrametría.	16
2. Historia de la fotogrametría.	16
3. Principios de la fotogrametría analítica.	18
4. Organismos profesionales de la fotogrametría.	20

Capítulo II

CAPÍTULO II. FOTOMETRÍA

1. Aspectos fotogramétricos generales.	22
1.1. Fotometría.	22
1.2. Características de las emulsiones fotográficas.	24
1.3. Estabilidad dimensional.	24
1.4. Terminología sensitométrica.	24
1.5. Iluminación efectiva en las fotografías.	26
1.6. Análisis de la curva sensitométrica.	27
1.7. Sensibilidad de la película.	30
1.8. Sensibilidad espectral.	32
2. Calidad de la imagen.	35
2.1. Difracción.	36
2.2. Resolución óptica y fotográfica.	37
2.3. Contraste y contraste transferido.	41
2.4. Función de expansión del punto.	44
2.5. Función de transferencia de modulación.	46
2.6. Movimiento de la imagen.	47

Capítulo III

CAPÍTULO III. CÁMARAS MÉTRICAS Y AVIONES PARA FOTOGRAFÍA AEREA

1. Breve descripción de los principales aviones fotogramétricos.	49
2. Cámaras aéreas métricas.	49
2.1. Diseño de las cámaras aéreas.	51
2.2. Necesidades de las cámaras aéreas.	54
2.3. Planeamiento de vuelo.	58
3. Calibración de la cámara.	60
3.1. Introducción.	60
3.2. Métodos de laboratorio de calibración de cámaras.	63
3.2.1. Método del goniómetro.	63

3.2.2. Método del multicolimador.	65
3.2.2.1. Resolución por el método del multicolimador.	68
3.3. Métodos de campo y estelar de calibración de cámaras.	71
3.3.1. Método de campo.	71
3.3.1.1. Resolución por el método de campo.	73
3.3.2. Método estelar.	74
3.3.2.1. Resolución por el método estelar.	74
3.4. Resolución analítica de calibración de cámaras.	81
3.4.1. Introducción.	81
3.4.2. Modelos para la distorsión radial y descentrado.	81
3.4.3. Calibración analítica de una sola fotografía.	83
3.5. Calibración de la resolución de una cámara.	88
4. Cámaras métricas terrestres.	91
4.1. Requerimientos de las cámaras métricas terrestres.	91
4.2. Diseño general de las cámaras métricas terrestres.	92
4.2.1. Cámara estereométrica.	92
4.2.2. Cámaras métricas independientes.	93
5. Cámaras de pequeño formato.	94
5.1. Principios de las cámaras.	94
5.2. Cámaras de 35 mm.	95
5.2.1. Cámaras SLR.	96
5.2.2. Cámaras y lentes de 35 mm para SFAP.	96
6. Almacenamiento de la película.	98
7. Copias de películas de fotografías aéreas.	99
7.1. Impresión por contacto.	99
7.2. Impresión por proyección.	100

Capítulo IV

CAPÍTULO IV. INSTRUMENTOS ANALÍTICOS

1. La visión estereoscópica.	101
1.1. La visión estereoscópica natural.	101
1.2. La visión estereoscópica artificial.	102
1.2.1. Instrumentos para la visión estereoscópica.	103
1.2.1.1. Estereoscopio de refracción.	104
1.2.1.2. Estereoscopio de reflexión.	104
1.2.1.3. Anaglifo.	105
1.2.2. Colocación de las fotografías para la visión estereoscópica.	105
2. La paralaje estereoscópica.	107
2.1. Concepto de paralaje. Barra de paralaje.	107
2.2. Medida de la paralaje.	108
2.3. Ecuaciones de la paralaje.	109
3. Monocomparadores y estereocomparadores.	111
3.1. Componentes básicos.	112
3.1.1. Sistema de visión.	112
3.1.2. Sistema de medición.	112
3.1.3. Sistema de registro.	113
3.2. Estereocomparador.	114
3.3. Monocomparador y aparato transferidor de puntos.	115
3.4. Calibración de un comparador.	119

3.4.1. Corrección de errores lineales.	120
3.4.2. Corrección de errores no lineales.	123
4. Restituidor analítico universal.	124
4.1. Conceptos básicos.	125
4.2. Métodos de captura de datos.	127
4.3. Algunas características de los instrumentos y sus accesorios.	129
4.4. Restituidores analíticos simplificados.	132
4.5. Programas internos de los restituidores analíticos.	133

Capítulo V

CAPÍTULO V. RELACIONES DE COORDENADAS EN FOTOGRAMETRÍA

1. Los sistemas de coordenadas.	136
1.1. Sistema de coordenadas fotográfico.	136
1.2. Sistema de coordenadas modelo.	140
1.3. Sistema de coordenadas del espacio objeto.	141
1.3.1. Sistema de coordenadas rectangular Geocéntrico Universal.	141
1.3.2. Sistema de coordenadas rectangular local.	142
2. Transformaciones de coordenadas.	143
2.1. Transformación espacial en dos dimensiones.	143
2.1.1. Transformación conforme.	146
2.1.2. Transformación afin.	147
2.1.3. Transformación polinómica.	147
2.1.4. Transformación proyectiva.	148
2.1.5. Razón cruzada.	148
2.2. Transformación tridimensional.	149
2.2.1. Transformación tridimensional afin.	156
2.2.2. Transformación tridimensional polinómica.	156
2.2.3. Transformación tridimensional proyectiva.	157
2.2.3.1. Introducción.	157
2.2.3.2. La transformación proyectiva en fotogrametría.	159
3. Proyección central en el plano.	161
4. Proyección central en el espacio.	164
5. El caso normal de la restitución con dos fotografías.	170

Capítulo VI

CAPÍTULO VI. AEROTRIANGULACIÓN

1. Introducción.	173
2. Proceso de la aerotriangulación.	175
3. Ajuste del bloque por el método de modelos independientes.	176
3.1. Ajuste planimétrico de un bloque.	176
3.2. Ajuste del bloque espacial.	180
3.3. Precisiones planimétrica y altimétrica para el ajuste de un bloque por modelo independientes.	182
3.3.1. Introducción.	182
3.3.2. Precisión planimétrica.	183
3.3.3. Precisión altimétrica.	188
3.3.4. Precisión planimétrica y altimétrica empírica.	190

3.3.5. Precisión planimétrica y altimétrica de las pasadas de triangulación.	191
3.4. Consideraciones del instrumental.	193
4. Ajuste de un bloque de haces.	194
4.1. Relaciones matemáticas entre las coordenadas imagen y terreno.	195
4.2. Relaciones diferenciales.	197
4.3. Observación y ecuaciones normales para los fotogramas de un bloque.	198
4.4. Solución de las ecuaciones normales.	201
4.5. Incógnitas de la orientación interna y parámetros adicionales.	202
4.6. Precisión, ventajas y desventajas del ajuste de haces.	202
4.7. Casos especiales del ajuste de un bloque de haces.	203
4.7.1. Resección espacial.	203
4.7.2. Orientación de un par de fotografías.	204
4.7.3. Intersección espacial.	205
4.8. Ajuste de un bloque de haces en fotogrametría de objeto cercano.	205
5. Bloque de aerotriangulación por método de modelos independientes. (Ampliación).	207
5.1. Introducción.	207
5.2. Transformación tridimensional de los modelos.	207
5.3. Separación del cálculo de planimetría y altimetría.	210
5.3.1. Cálculo planimétrico.	210
5.3.2. Cálculo altimétrico.	212
5.3.3. Resumen de las ecuaciones de error.	213
5.3.4. Proceso de cálculo.	214
5.4. Proceso de cálculo planimétrico de bloque de aerotriangulación.	216
5.5. Análisis general de la estructura de ecuaciones normales.	220
5.6. Determinación de coordenadas espaciales de los centros de proyección.	221
6. Ajuste de un bloque de haces. (Ampliación).	222
6.1. Aproximaciones iniciales.	222
6.2. Solución de las ecuaciones normales.	223
6.2.1. Con una matriz de banda.	224
6.2.2. Con una matriz hiperdiagonal de borde.	225
6.3. Apuntes sobre la precisión.	226
6.3.1. Precisiones empíricas en una orientación relativa y absoluta de los modelos.	227
6.3.2. Precisión empírica para la orientación común de un par estereoscópico de fotografías, con y sin parámetros adicionales.	228
6.3.3. Precisión empírica de un simple modelo como función de la escala de la foto y el tipo de cámara.	229
6.4. Selección de los parámetros adicionales.	230
6.4.1. Análisis de la correlación entre parámetros libres.	233
6.4.2. Análisis de la determinación.	233
7. Aerotriangulación con apoyo GPS.	234
7.1. Sin puntos de control.	234
7.2. Con algún punto de control.	235
7.2.1. Excentricidad y ajuste.	236
7.2.2. Precisiones.	238
8. Control de calidad y detección de errores groseros.	239
8.1. Control de precisión.	239
8.1.1. Orientación interna.	240
8.1.2. Orientación relativa.	240
8.1.3. Orientación absoluta.	241
8.1.4. Ajuste de un bloque.	241

8.2. Control de fiabilidad.	241
8.2.1. Base teórica.	241
8.2.2. Chequeo de la fiabilidad para alguna tarea fotogramétrica estándar.	245
8.2.2.1. Orientación interna.	246
8.2.2.2. Orientación relativa.	246
8.2.2.3. Orientación absoluta.	247
8.2.2.4. Ajuste de un bloque.	248

Capítulo VII

CAPÍTULO VII. RESTITUCIÓN ANALÍTICA

1. Introducción.	251
2. Producción de la fotogrametría analítica.	252
2.1. Cartografía convencional.	252
2.2. Ortofotos.	253
2.3. Datos numéricos.	253
3. Sistemas de coordenadas fotogramétricas.	254
4. Orientación interna.	255
4.1. Introducción.	255
4.2. Colocación de la fotografía en el comparador.	255
4.2.1. Colocación de la foto de acuerdo al punto principal de la imagen y la orientación de la foto de acuerdo con las marcas fiduciales.	256
4.2.2. Colocación arbitraria de la foto y orientación de acuerdo con las marcas fiduciales.	256
4.2.3. Colocación arbitraria de la foto y orientación de la foto.	257
4.3. Transformación del sistema de coordenadas comparador al sistema fiducial.	260
4.3.1. No se conoce ningún dato de la calibración.	260
4.3.2. Se conoce algún dato de la calibración.	262
4.3.3. Certificado de calibración completo.	263
4.3.4. Fotografía con retícula.	264
4.4. Deformación de la película.	265
4.5. Distorsión de la lente.	267
4.6. Refracción atmosférica.	271
4.7. Curvatura terrestre.	273
5. Resección espacial de una sola fotografía.	274
6. Fotogrametría analítica de doble imagen.	279
6.1. Orientación relativa de un par de imágenes independientes.	279
6.2. Cálculo de las coordenadas modelo.	280
7. Ajuste de sistemas de ecuaciones por el método de mínimos cuadrados.	281
CONCLUSIONES VIII	284
BIBLIOGRAFÍA	286

INTRODUCCIÓN

CAPÍTULO I. CONCEPTOS FOTOGRAMÉTRICOS.

1. Definición de fotogrametría.

La fotogrametría ha sido definida por la Sociedad Americana de Fotogrametría como *“el arte, ciencia, y tecnología de obtener información de confianza sobre objetos físicos y del medio ambiente a través de procesos de grabación, medición e interpretación de imágenes fotográficas y patrones de registro de energía electromagnética y otros fenómenos”*.

Incluida en la definición de fotogrametría existen dos áreas distintas:

- **Fotogrametría métrica o cuantitativa:** Implica mediciones precisas para determinar el tamaño y la forma de los objetos, de forma que los resultados de las mediciones fotogramétricas pueden ser:
 1. Numéricas: Coordenadas de los puntos objeto en el sistema tridimensional de coordenadas.
 2. Trazado: Mapas y planos con detalles planimétricos y contorno de líneas, junto con otras representaciones gráficas de los objetos.
 3. Imágenes: Rectificación de fotografías (ortofotos).
- **Fotogrametría interpretativa o cualitativa:** Para el reconocimiento e identificación de los objetos. En este grupo se incluye:
 1. La fotointerpretación: Estudio de imágenes fotográficas con el propósito de identificar objetos y juzgar su significado.
 2. Sensores remotos: Reconoce e identifica objetos sin contacto físico con ellos.

2. Historia de la fotogrametría.

El filósofo Griego, Aristóteles (350 a. C.) escribió sobre los procesos ópticos de las imágenes.

Posteriormente, Leonardo Da Vinci en el siglo XV publicó ideas sobre las leyes de la perspectiva gráfica.

El primero que escribió sobre el problema de la resección espacial fue J. H. Lambert, en 1759 con su libro “Freie Perspektive”, se proponía algunas ideas fundamentales de fotogrametría antes de la invención de la fotografía.

La fotogrametría la pudieron empezar y desarrollar Deguerre y Niepce, como reporteros en el Paris de 1839. Posteriormente, continuaron los nombres de Arago, Laussedat, Nadar...

En 1859 se da una lectura en la Comisión de la Academia de las Ciencias de París, sobre el método de determinar las coordenadas de los objetos a partir de un par de fotografías por la intersección de los rayos en el espacio.

Respecto a la fotografía terrestre, es el trabajo de dos Alemanes, Sturm y Hauck en 1883 quienes establecieron las relaciones entre la geometría proyectiva y la fotografía. El Alemán A. Meydenbauer es el primero que aplica la palabra fotogrametría, el cual publica en 1893 un artículo sobre este tema.

Carl Pulfrich desarrolla la fotogrametría instrumental y construye el primer estereocomparador en 1901 abriendo el camino a E. Von Orel para la invención del estereoautógrafo en 1909 y, a R. Hugershoff para el desarrollo del aerocartógrafo. Este instrumento consigue por primera vez la posibilidad de dibujar de manera continua la planimetría y los contornos, pero solo para fotogrametría terrestre.

W. Bauersfeld en 1923 extiende el principio del estereoautógrafo y hace posible el trazado de fotografías aéreas. El instrumento resultante se conoció como estereoplanógrafo. En las siguientes décadas, famosas firmas produjeron mejoras en las cámaras fotogramétricas e instrumentos de trazado, mientras el trabajo teórico, sobre todo llevado a cabo por Sebastian Finsterwalder y Otto von Gruber, legaron las aplicaciones de los instrumentos ópticos-mecánicos.

S. Finsterwalder, en una serie de artículos durante 1899 y 1932, estableció la base de la fotogrametría analítica. Ya escribió por entonces de la resección de puntos en el espacio, de los principios de la orientación relativa y absoluta con imágenes de un elemento en dos fotografías.

O. von Gruber, realizó estudios fundamentales en el campo de la fotogrametría relacionados con la resección de puntos en el espacio y el desarrollo de las fórmulas diferenciales de las relaciones proyectivas entre diferentes planos que eran aplicadas por numerosos fotogrametristas en sus trabajos, publicados sus trabajos entre 1930 y 1942. Entre sus publicaciones destacan: "Single and double point resection in space" y "Theory and practice of aerotriangulation".

Earl Church, empezó a publicar en 1930 una serie de boletines de fotogrametría computacional. Numerosos científicos ayudaron a Church en el desarrollo de los problemas de resección espacial, orientación, intersección... Entre los numerosos desarrollos de Church destacan la determinación de las coordenadas de la estación en el aire (perspectiva central) utilizando una posición aproximada y soluciones iterativas, además formuló el método con derivaciones en la notación de los cosenos directores y la notación matricial. Sin embargo, no aplicaba ningún análisis de error sobre las soluciones.

Se realizaron grandes avances en los años posteriores a la II Guerra Mundial, el mérito de los Británicos es el desarrollo del primer sistema operacional de aerotriangulación analítica, cuyo sistema fue descrito por D. W. Arthur en 1955. También durante este período E. H. Thompson contribuyó con procesos analíticos (álgebra y procedimiento matricial), las técnicas reseau y la aerotriangulación por el método de los modelos independientes.

Una gran aportación fue realizada desde Canada por Shut, el cual fue el primero en usar la condición de Coplaneidad, además de analizar los métodos de aerotriangulación.

La rutina de la producción de ortofotos mediante fotografías aéreas comenzó en 1955 siguiendo los trabajos de R. K. Bean.

El mayor empuje de la fotogrametría analítica fue dado desde los Estados Unidos. Algunos trabajos pioneros fueron realizados por Everett Merritt, el cual en 1958 publicó el primer libro sobre fotogrametría analítica. Su trabajo mostraba una gran influencia de Church. Hellmut Schmid desarrollo la fotogrametría analítica aplicando la condición de Colinealidad. Además, su trabajo fue

fundamental en la aplicación del principio de los mínimos cuadrados y su estudio de los errores de propagación en la fotogrametría. Al principio su trabajo se desarrolló en notación vectorial y, posteriormente se analizó con la notación matricial, la cual es considerada estándar en fotogrametría analítica.

Duane Brown, el cual era un discípulo de Schmid, ha realizado la mayor contribución a los principios analíticos como contribución a los problemas de ingeniería:

- Tratamiento de los parámetros de la orientación interior y exterior, tanto si son conocidos o desconocidos.
- Solución a las ecuaciones normales realizando la partición de la matriz, por un lado los elementos de la orientación y por otro los puntos de campo.
- La metodología de introducir los puntos de control terrestres y los parámetros e la estación aérea con apropiados pesos, incluyendo datos auxiliares sin distorsionar el modelo matemático básico.
- Desarrollo de un nuevo comparador.

James B. Case, demostró en 1967, como las ecuaciones estándar de la condición de Colinealidad pueden ser modificadas para manejar algunos sistemas de fotogrametría no convencional.

En muchos países se hicieron diferentes procedimientos para el desarrollo de la fotogrametría analítica, entre ellos destacan: K. Rinner en Austria; G. Konecny y F. Ackermann en Alemania; U. Bartorelli y G. Inghilleri en Italia; K. Ryokichi y T. Oshima en Japón; A. N. Lovanov en la U.R.S.S., además de otros muchos...

3. Principios de la fotogrametría analítica.

La fotogrametría analítica estaría enclavada en el área de la fotogrametría cuantitativa, la cual da soluciones a los problemas con las matemáticas computacionales, utilizando mediciones en determinados puntos de los fotogramas. En general, el modelo matemático está construido para representar las relaciones entre puntos en el espacio objeto y su correspondiente imagen en la fotografía. El principio de perspectiva y de geometría proyectiva está inherente en ello. En el uso convencional, la proyección es central, de forma que la perspectiva central de las lentes de la cámara lleva a la proyección central.

Los fotogrametristas analíticos han tratado de justificar sus esfuerzos en base a que deberían ser capaces de obtener resultados más precisos en el menor tiempo que proporciona el instrumental. De forma que este hecho ha llevado al desarrollo de la aerotriangulación.

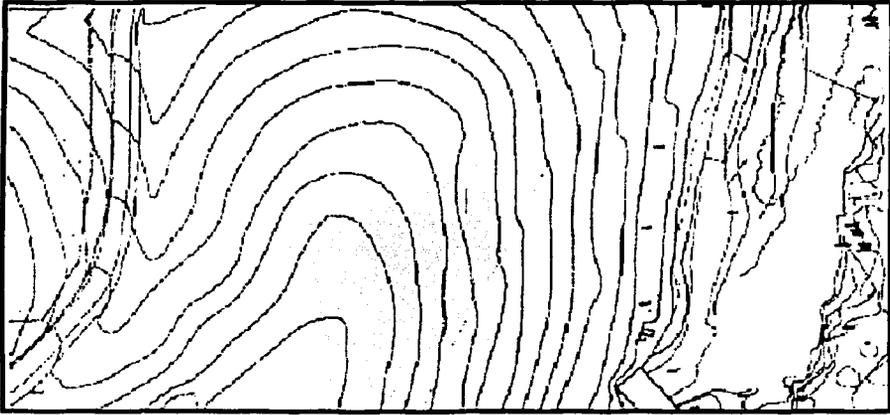
El material básico usado son las fotografías, siendo negativos o positivos. La entrada de datos son el sistema de fotocoordenadas rectangulares en dos dimensiones (x, y). La salida de datos puede ser de varios tipos, como coordenadas terreno (X, Y, Z), elementos de orientación, información derivada en relaciones específicas y condiciones...

El organigrama de trabajo de la fotogrametría implica, en general:

- Objeto: Tierra.
- Instrumental sensor: Cámara u otro sensor. En el caso de la fotogrametría aérea la cámara estaría dentro del avión.
- Medio ambiente: Atmósfera.

- Instrumental de adquisición de datos: Comparador.
- Mecanismos de procesado de los datos: Ordenador, accesorios y modelos matemáticos.
- Operador: Humano.

Cada uno de los apartados anteriores tiene unas limitaciones y aporta unos errores, los cuales es necesario conocer para realizar los distintos productos fotogramétricos con efectividad.



Cartografía obtenida mediante restitución.

Para evitar en la mayor cantidad posible los errores derivados de la fase de la toma fotogramétrica se deberían dar las siguientes condiciones ideales:

- Conocimiento exacto de la altura del avión en el momento de la toma fotográfica.
- El eje óptico de las lentes debería ser vertical en el instante de la exposición.
- La cámara debería estar orientada en su dirección acimutal en el momento de la exposición.
- No debería transmitirse el movimiento del avión en la fotografía en el momento de la exposición.
- Las lentes de la cámara deberían estar libres de distorsiones o cualquier otro tipo de aberraciones.
- Las características métricas de la cámara deben conocerse y deben estar perfectamente ajustada.
- La película fotográfica debería tener una superficie lisa y perfectamente orientada respecto de las lentes en el momento de la exposición.
- La emulsión de la película debería tener una emulsión uniforme y dar una resolución infinita.
- La base de la película debe ser perfectamente estable dimensionalmente.
- Las condiciones atmosféricas durante la toma fotogramétrica deben ser perfectas.

Alguna de las operaciones que acarrea dificultades en el procesamiento de los datos fotogramétricos son:

- Procesado de la película negativa original, es una operación delicada que requiere de unos apropiados tratamientos químicos, de forma que proporcionen gran calidad a la imagen. El mismo cuidado hay que poner en la creación de los positivos.
- Los instrumentos encargados de transferir los detalles de las fotografías al mapa deben disponer de unas excepcionales características ópticas y mecánicas.
- Tener un personal Humano bien cualificado para el proceso de restitución es fundamental para cumplir el objetivo marcado.
- Una mala o deficiente distribución de los puntos de apoyo afectará al resultado del producto fotogramétrico.

Otros errores que se deben tener en cuenta en la realización del proceso fotogramétrico, son los debidos a la naturaleza de la física de la Tierra:

- Si los efectos de la refracción atmosférica y el producido por la distorsión de la lente se pudieran compensar, la perspectiva mostrada en la fotografía sería una proyección ortográfica desde el centro de proyección, y por tanto muchos problemas fotogramétricos se reducirían.
- El efecto producido por la curvatura de la Tierra hay que tenerlo en cuenta en los cálculos fotogramétricos.

4. Organismos profesionales de la fotogrametría.

A continuación se destacan los principales organismos profesionales (nacionales e internacionales) que se dedican al campo de la fotogrametría:

- ISPRS: (International Society for Photogrammetry and Remote Sensing), fundada en 1910. Este organismo organiza conferencias internacionales sobre fotogrametría cada cuatro años. Publican la revista bimensual llamada: "Photogrammetria".
- CIPA: International Committee for Architectural Photogrammetry.
- ICA: International Cartographic Association.
- ASPRS: (American Society of Photogrammetry and Remote Sensing): Fundada en 1934, es la más famosa organización de fotogrametría de los Estados Unidos. Ha publicado el conocido libro: "Manual of Photogrammetry". Publican la revista mensual llamada: "Photogrammetry Engineering".
- ASCE: (American Society of Civil Engineers): Numerosos artículos de topografía y fotogrametría son publicados en su revista de "Journal of the Surveying and Mapping División" en los Estados Unidos.
- OEEPE: (Organisation Européenne d'Etudes Photogrammetriques Experimentales): Organización Europea.
- SELPER: (Sociedad de Especialistas Latinoamericanos en Percepción Remota).
- The Photogrammetry Society: Organismo perteneciente al Reino Unido.
- The Swiss Society of Photogrammetry Image Analysis and Remote Sensing: Suiza.
- The Swedish Society for Photogrammetry and Remote Sensing: Suecia.
- The Finnish Society for Photogrammetry and Remote Sensing: Finlandia.
- Deutsche Gesellschaft für Photogrammetrie und Fernerkundung: Alemania.
- ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie: Suiza.
- Institut für Photogrammetrie, Stuttgart: Alemania.
- Institut für Photogrammetrie, Bonn: Alemania.

- Spanish Society for Cartography, Photogrammetry and Remote Sensing: Sociedad Española de Cartografía, Fotogrametría y Sensores Remotos.

CAPÍTULO II. FOTOMETRÍA.

1. Aspectos fotogramétricos generales.

Las propiedades esenciales del material fotográfico puede resumirse en que es un estrato sensible a la luz sobre un soporte o base. En el pasado el soporte era de vidrio, pero problemas de peso y fragilidad dan paso a las películas las cuales son más ligeras y flexibles.

Posteriormente la base de las películas eran de nitrato de celulosa pero su facilidad a la inflamación hicieron que se investigasen nuevas componentes, de esta manera se tiene en la actualidad bases hechas a base de polímeros sintéticos tales como el polietileno – tereftalato, el cual es un poliéster que resiste muy bien la humedad y además tiene una excelente estabilidad dimensional. En las películas fotogramétricas no solo es importante que los cambios dimensionales sean pequeños, sino de igual magnitud en todas las direcciones.

A continuación se analiza las principales propiedades y características que deben reunir las películas para la realización de fotogrametría aérea.

2. Calidad de la imagen.

Todas las lentes de las cámaras están diseñadas para unas determinadas tareas según los criterios de calidad. La mayoría de las actuales cámaras de 35 mm. son competitivas en precios y calidad, respecto a la calidad estas cámaras pueden conseguir resoluciones de 300 líneas por milímetro, por ejemplo el objetivo de una cámara aérea consigue resoluciones de 80 líneas por milímetro. Esta diferencia es principalmente causada por la diferencia entre una lente de focal 50 mm. y formato de película de 24 x 36 mm. y la lente de cámara aérea con una distancia focal de 150 mm. y película de 230 x 230 mm.. Otra diferencia fundamental entre cámaras de 35 mm. y las aéreas es que esta última debe tener grandes precisiones métricas, de forma que las relaciones entre las diferentes partes de la imagen deben ser precisas y la imagen libre de distorsiones. Por ello se emiten certificados de calibración, y una precisión métrica normal está alrededor de las 3 micras (μm) de distorsión desde las posiciones verdaderas a través de todo el formato.

Hay diferentes valores o características que muestran la calidad de una imagen o fotografía, a continuación se citan:

CAPÍTULO III. CÁMARAS MÉTRICAS Y AVIONES PARA FOTOGRAFÍA AEREA.

1. Breve descripción de los principales aviones fotogramétricos.

A continuación se muestra explica las abreviaturas de las principales características de los aviones fotogramétricos que aparecen en el listado correspondiente (Albertz Kreiling):

- Motores:
 - PE: Motor de émbolo.
 - TC: Motor de émbolo con turbocompresor.
 - TP: Turbohélice.
 - TJ: Turboreactor.
 - TF: Turbosoplante.

- Fabricante de motores:
 - Conti: Continental (USA).
 - DH: De Havilland (GBR).
 - GarAiR: Garrett AiResearch (USA).
 - GE: General Electric (USA).
 - Lycom: Lycoming (USA).
 - P & W: Pratt & Whitney (USA).
 - RR: Rolls Roice (GBR).
 - UACL: United Aircraft of Canada (CAN).

Siguiendo con la numeración de las columnas de la relación de aviones fotogramétricos es:

1. Potencia de despegue.
2. Configuración de las alas:
 - HW: Alas sobreelevadas.
 - MW: Alas medias.
 - LW: Alas bajas.
3. Tipo de tren de aterrizaje:
 - FG: Tren fijo.
 - RG: Tren retráctil.
4. Número de plazas.
5. Peso bruto.
6. Capacidad máxima de carburante.
7. Carga útil, incluido el carburante y la tripulación.
8. Velocidad de ascensión.
9. Altura del techo.
10. Velocidad horizontal.
11. Alcance.
12. Tiempo de vuelo.

2. Cámaras aéreas métricas.

Los dos principales objetivos de la fotografía aérea son la fotogrametría y la fotointerpretación. Para la fotointerpretación, el principal requerimiento es una alta calidad del detalle de reproducción; la definición de la imagen y la resolución de la óptica son las principales exigencias. Una geometría exacta, esto es libre de distorsiones, es menos importante en la fotointerpretación. Para fotogrametría, sin embargo, la geometría es lo más importante como calidad de la imagen. Las cámaras aéreas métricas son por lo tanto las generalmente empleadas. El requerimiento de una geometría exacta fuerza al uso de un obturador central tanto que la orientación interna y externa sean válidas para la fotografía. Las fotografías tomadas con una cámara mediante un obturador focal plano que no tiene esta propiedad, no toman fotografías con cámaras de franja continua, en las cuales la película es movida por el paso de un corte fijo. De manera similar, los escáneres, en los cuales los detalles de la superficie terrestre son registrados línea por línea perpendicular a la dirección de vuelo, primero en cinta magnética y posteriormente transferido a material fotográfico, no posee la propiedad requerida en la fotogrametría normal. Las cámaras multispectrales poseen normalmente de cuatro a seis cámaras individuales, montadas juntas con ejes paralelos en un único ángulo, cada cámara está ajustada para un rango particular de longitud de onda.

El suceso más remarcable de la fotogrametría en los últimos años es debido en gran parte al progreso que se ha hecho en el desarrollo de la precisión de las cámaras. Quizás el desarrollo más

reciente de las cámaras está en la construcción de lentes casi perfectas que resuelven los problemas del poder de resolución de las lentes y consiguen distorsiones casi despreciables.

Las cámaras aéreas se pueden clasificar de diferentes maneras:

- Por el tipo: Enmarcada, panorámica, tira, multibanda.
- Por al campo angular: Angulo normal de 75°, gran-angular de 75° a 100°, super-gran-angular superior a 100°.
- Por la distancia focal: menor a 6 pulgadas, de 6 a 12 pulgadas, mayor a 12 pulgadas.
- Por el uso: Cartografía, reconocimiento...

3. Calibración de la cámara.

3.1. Introducción.

La calibración de la cámara sirve para determinar los elementos de la orientación interna y la distorsión de la lente del objetivo. Como determinación breve de los elementos de la orientación interna pueden ser: La localización del punto principal en la imagen y la distancia principal de la cámara; pero más adelante se definirán muchos más elementos.

El pie de la perpendicular del centro de proyección del plano imagen es tomado como punto principal. Por lo tanto, la longitud de su perpendicular es definida como la distancia principal de la cámara. Sin embargo, estudiando las características geométricas de un objetivo, esta definición no es la adecuada. Hay que introducir otras definiciones como:

Punto principal de autocolimación: (PPA), El punto imagen formado por el objetivo cuando el haz de rayos del espacio objeto es perpendicular al plano imagen.

Punto principal de mejor simetría: (S), La distorsión radial de todas las imágenes geométricas, son debidas al tipo de lente o debidas al efecto de manipulación, deberían ser traídas como simétricas con algún otro punto.

La calibración de una cámara puede ser vista, aproximadamente como lo contrario a la medición de puntos fotogramétricos. En la fotogrametría para la medición de un punto, generalmente se conoce la orientación interna y además se pide las coordenadas de los puntos objeto. En la calibración, por su parte se conoce las coordenadas de los puntos objeto o características geométricas en el espacio objeto y se determina los elementos de la orientación interna.

En general la calibración de una cámara se debe determinar:

- Las tres coordenadas (X_0, Y_0, C) del centro de proyección en el sistema de coordenadas definido por la cámara, o sea el de las marcas fiduciales.
- La distorsión radial.
- La distorsión tangencial.

Las fotografías de los objetivos fotogramétricos antiguos tenían una distorsión radial superior a 30 μm . Los modernos objetivos están prácticamente libres de distorsiones, $\Delta\rho \leq 5 \mu\text{m}$. pero las distorsiones tangenciales y los errores de las fotografías deben tenerse en cuenta también.

Para la definición física del sistema de coordenadas imagen y la correspondiente proyección central, se usa las marcas fiduciales de cada fotografía; la intersección de las líneas opuestas de las marcas fiduciales definen el centro fiducial. Muchas cámaras fotogramétricas son ajustadas de manera que el punto principal de autocolimación y el punto de mejor simetría difieren del centro fiducial con un radio de $20 \leq \mu\text{m}$.

4. Cámaras métricas terrestres.

Las fotografías para fotogrametría terrestre son generalmente tomadas con las cámaras fijadas en posición, los elementos de la orientación externa serán determinados por la topografía de campo. Las fotografías de larga distancia entre la cámara y el objeto son usados en casos especiales, por ejemplo para reconocimiento topográfico e investigaciones de glaciario.

Las aplicaciones más importantes de la fotogrametría de objeto cercano son:

- Arquitectura e ingeniería civil: Reconocimiento de viejos y nuevos edificios, reconocimientos interiores...
- Conservación de monumentos: Registro de fotografías para una futura restauración.
- Arqueología: Documentación y reconocimiento de excavaciones.
- Biofotogrametría: Mediciones de criaturas en vida.
- Fotogrametría forense: Escenas de crímenes, accidentes de tráfico...
- Fotogrametría industrial: Unión de ensamblajes, diseño de automóviles.

6. Almacenamiento de la película.

El almacenamiento de la película aérea tiene tres fases: Película no expuesta, película expuesta y película procesada. Todos los materiales fotográficos son perecederos, y las características de dichos materiales no expuestos cambian lentamente con el paso del tiempo: Pérdida de sensibilidad, disminución del contraste... Para disminuir estos efectos, las películas se deben almacenar en condiciones adecuadas de humedad y temperatura.

- Películas no expuestas: La humedad relativa de las películas no debe exceder nunca el 70 %, por tanto su humedad ideal está comprendida entre un 40 % y un 60 %. Cuando las películas tengan que guardarse durante un periodo grande de tiempo (meses o años) la temperatura debe mantenerse entre los -18°C y los -23°C . Cuando se vayan a usar hay que dejarlas que cojan la temperatura ambiente antes de abrir el contenedor, lo recomendable es esperar 24 horas. Si esto no se cumple se producirá una condensación de la humedad atmosférica sobre la película, creando en el momento de la toma fotográfica pequeños puntos de humedad. También se puede producir ferrotipia, que consiste en que la emulsión se adhiere a la base de la capa adyacente cuando la película está enrollada.
- Película expuesta: Cuando una película ha sido expuesta se la debe revelar lo antes posible. Sin embargo, debido a las condiciones del trabajo no es posible revelarla inmediatamente, entonces se debe seguir unas determinadas condiciones: Sellado de forma que se mantenga refrigerada a 4°C . o menos. Fundamentalmente las películas infrarrojas y de color se deterioran más rápidamente que las no expuestas.
- Película procesada: En climas templados el almacenamiento de películas procesadas no es complicado. El problema se crea en climas donde la humedad relativa es superior al 60 % y la temperatura es superior a 27°C . El nivel ideal de humedad relativa es del 30 % al 40 % y la temperatura de 20°C . Aunque lo que más le afecta a la vida de la película procesada es su procesado, un fijado completo es fundamental seguido de un lavado completo para conservar la máxima permanencia de las imágenes.

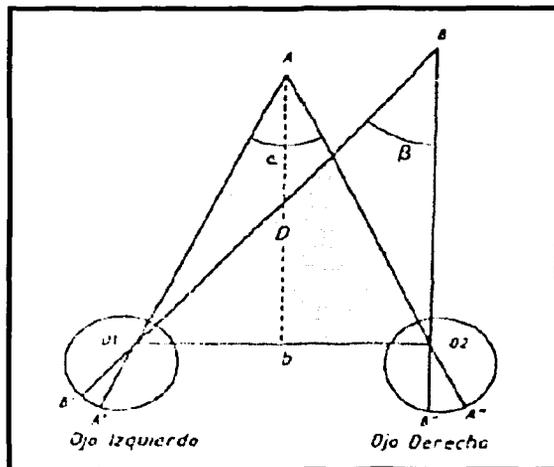
CAPÍTULO IV. INSTRUMENTOS ANALÍTICOS.

La restitución de un modelo espacial formado por un par de fotografías requiere la correspondencia de puntos en las dos fotografías, el procedimiento más conveniente para la restitución, debido a su rapidez y precisión necesita la ayuda de un estereoscopio.

1. La visión estereoscópica.

1.1. La visión estereoscópica natural.

Observando un objeto desde un solo punto de vista, el cerebro no es capaz de formar una imagen tridimensional, o sea una persona tuerta no tiene capacidad de tener la sensación de relieve. La persona que tiene esta discapacidad suplir la deficiencia con la experiencia, por ejemplo sabe que un objeto está más alejado que otro cuando observa que está tapado por este. Por tanto, es necesaria la visión binocular para la formación del relieve, la cual consiste en ver con cada ojo una imagen del objeto y al observarlo desde dos puntos de vista se tiene en el cerebro dos imágenes distintas, de forma que el cerebro las fusiona formando una sola imagen tridimensional.



Distancia mínima para tener percepción del relieve.

La distancia entre las pupilas de los ojos se denomina base, generalmente las personas tienen una base de 65 milímetros. Para que se produzca sensación de relieve el ángulo paraláctico o de convergencia que deben formar las dos visuales debe ser mayor de 30° , para ángulos menores las visuales son casi paralelas y, por tanto el cerebro no es capaz de percibir la sensación de relieve.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2. La paralaje estereoscópica.

2.1. Concepto de paralaje. Barra de paralaje.

La paralaje estereoscópica es el desplazamiento de un objeto inmóvil, que se produce en dos fotografías cuando se realiza la toma de un objeto desde dos puntos de vista causada por el movimiento de la cámara que va en el avión.

3. Monocomparadores y estereocomparadores.

En la fotogrametría informatizada el primer requisito de la instrumentación es la obtención de las coordenadas imagen (x, y) de los puntos de las fotografías. Hay dos principales propuestas en la adquisición de los datos, mediante visión monocular y estereoscópica. Para este propósito, se puede usar los siguientes tipos de instrumentos:

- Comparadores de imagen simple: Monocomparadores.
- Comparadores de imagen doble: Estereocomparadores.
- Instrumentos estereoscópicos usados como comparadores.

4. Restituidor analítico universal.

U. Helava concibió la idea de un restituidor estereoscópico universal, en el cual las relaciones entre las coordenadas imagen y objeto eran generadas en un ordenador digital, y realizó la patente de un prototipo sobre 1957. Pasados 20 años las casas comerciales empezaron a sacar este producto al mercado. Hoy todos los restituidores que se comercializan son analíticos y digitales, en detrimento de los restituidores analógicos. Por ejemplo con un restituidor analógico se consiguen precisiones de 20 μm ., sin embargo con un restituidor analítico se pueden conseguir precisiones de 1 μm .

CAPÍTULO V.

RELACIONES DE COORDENADAS EN FOTOGRAMETRÍA.

1. Los sistemas de coordenadas.

En orden a expresar la proyección central formada por la fotografía de la imagen analítica, las fórmulas son necesarias para expresar las relaciones matemáticas entre los puntos imagen y sus correspondientes puntos objeto. Es necesario establecer el sistema de coordenadas imagen y el sistema de coordenadas objeto tal que los puntos y las estimaciones puedan tener una clara correspondencia.

Hay tres tipos de sistemas de referencia que se pueden usar en Topografía y Cartografía:

- Sistema polar en el plano: En este sistema los puntos están en el plano, y son definidos por distancias y ángulos con respecto a una referencia en el plano.
- Sistema rectangular: Puede ser en dos o en tres dimensiones, donde los puntos pueden estar definidos por distancias lineales de dos ejes mutuamente perpendiculares (dos dimensiones) o por los tres ejes mutuamente perpendiculares (tres dimensiones).
- Sistema esférico: Los puntos están en una superficie esférica o esferoidal definidos por ángulos con respecto a unas determinadas direcciones o planos.

Directamente asociado con el sistema es a menudo necesario un punto o una línea (eje de la cámara...). Por ello, es conveniente usar el giro ω alrededor del eje X , el giro Φ en el eje Y , y el giro X en el eje Z .

Para usar el sistema de coordenadas en fotogrametría analítica puede ser con respecto a una fotografía, un estereomodelo o el correspondiente al objeto. Por consiguiente, uno puede referirse al sistema de coordenadas de la fotografía, modelo u objeto. Deberá estudiarse esto en detalle y sus variaciones.

2. Transformaciones de coordenadas.

Este es a menudo necesario para establecer las relaciones entre dos sistemas de coordenadas en orden a transferir un número de puntos de uno a otro. Hay numerosos métodos de transformación para usarlos en problemas tridimensionales, simplificando versiones las cuales son aplicables al espacio de dos dimensiones. El efecto de transformación de un cuerpo puede ser un simple cambio en localización y disposición (por ejemplo, sin algún cambio en forma y tamaño) o uno completo (por ejemplo, cambio en el tamaño y la forma) o algo intermedio (por ejemplo, variaciones en escala sin cambios en tamaño o localización o disposición).

Debido a que en fotogrametría, se determinan las coordenadas desconocidas de unos puntos respecto a otro sistema de coordenadas, hay que proceder a realizar las transformaciones de coordenadas, estas se realizan con unos puntos conocidos denominados "puntos de control". Las transformaciones pueden ser en dos dimensiones o bidimensionales o en tres dimensiones o tridimensionales. Dentro de las transformaciones bidimensionales existen las transformaciones conformes, afines y proyectivas. En las transformaciones tridimensionales está la transformación de semejanza.

3. Proyección central en el plano.

La transformación proyectiva central expresa la transformación de puntos en el espacio tridimensional para pasarlo al espacio imagen. Ahora se asume que los puntos del espacio objeto (X, Y, Z) deberían estar localizados en un plano, entonces se realiza la transformación de un plano sobre otro plano, lo cual representa las relaciones teóricas de la rectificación. Se parte de:

$$Z = AX + BY + C$$

CAPÍTULO VI. AEROTRIANGULACIÓN.

1. Introducción.

La aerotriangulación analítica es usada para determinar la posición de los puntos de densificación del terreno por métodos de cálculo basados en la medida de coordenadas imagen de fotos aéreas y unos pocos puntos de control, de esta manera se ahorra bastante en el coste económico que supone el apoyo de campo.

La aerotriangulación analítica de una sola pasada fue realizada primeramente por medio de métodos de un restituidor óptico-mecánico (restituidor analógico). Desde la introducción de los ordenadores, el método adoptado para el cálculo de la aerotriangulación ha cambiado por un restituidor analítico, el cual está caracterizado por su alta precisión, alta velocidad, y reducción en el número necesario de puntos de control dentro de unos requerimientos de precisión seguros.

Actualmente también puede hacerse la aerotriangulación de grandes bloques (fotografías, modelos) en restituidores digitales.

Los métodos más rigurosos para el cálculo son el de modelos independientes y el de ajuste de haces, los cuales son usados en el ajuste de un bloque y pueden también ser aplicados al cálculo de una sola pasada. Sin embargo, con respecto a una sola pasada, estos métodos que son más rigurosos no son recomendados para este cálculo. En aerotriangulación, el método analítico de densificación no solamente produce las coordenadas terreno de los puntos de densificación, si no que también proporciona los datos necesarios de orientación, tales como los elementos de la orientación absoluta de la toma fotográfica.

Los métodos de triangulación aérea necesitan suministrar al menos tres puntos de control de campo en cada modelo estereoscópico. Esto es posible para realizar los puentes sin demasiados puntos de campo.

Los resultados de la triangulación aérea con los elementos de orientación de todos los fotogramas o modelos estereoscópicos y las coordenadas X , Y , Z de puntos en el sistema de coordenadas terreno. Los puntos fotogramétricos medidos en este caso pueden ser:

- Puntos señalizados antes del vuelo.
- Señalización de puntos naturales en las fotografías, normalmente acompañadas de un croquis de campo.
- Selección de puntos artificiales marcados en algunos fotogramas.

2. Proceso de la aerotriangulación.

Hay que distinguir tres etapas en la realización de la aerotriangulación:

1. Planificación: En este apartado hay que analizar las alternativas económicas, presupuesto y estudio del personal, también dependiendo del objetivo del trabajo debe fijarse la escala de la fotografía y la precisión.
2. Adquisición de los datos:
2. Tratamiento de los datos:
- 3.

3. Ajuste del bloque por el método de modelos independientes.

El bloque de fotografías tiene un recubrimiento longitudinal del 60 % y transversal del 25 %. El ajuste de una pasada simple por modelos independientes es un caso especial del ajuste general del bloque.

El ajuste del bloque por modelos independientes empieza con las coordenadas modelo obtenidas en las orientaciones relativas numéricas de la formación del modelo estereoscópico. En el curso del ajuste del bloque de modelos individuales será unido al de un modelo simple y simultáneamente transformado en el sistema de coordenadas terreno. El estereomodelo individual es la unidad básica de la aerotriangulación aérea por el método de modelos independientes.

Se trata el ajuste primeramente de forma planimétrica, más o menos como un caso especial del ajuste del bloque general, el cual es un problema espacial en tres dimensiones. Un ajuste

planimétrico puro es un problema plano y por tanto concierne solo a las coordenadas planimétricas X, Y .

5. Bloque de aerotriangulación por método de modelos independientes. (Ampliación).

5.1. Introducción.

El bloque de aerotriangulación por modelos independientes consiste en que cada modelo estereoscópico individual es tomado como unidad, y las coordenadas del punto terreno (punto de enlace) resultante de cada modelo individual son combinados juntos para formar el total, por tanto el ajuste se realiza con el bloque entero. En el caso general de que ambas coordenadas planimétricas y altimétricas sean incluidas en esta clase de cálculo, entonces además de las coordenadas de los puntos terreno, las coordenadas espaciales de la posición de la cámara (centros de proyección) son también requeridas para formar el modelo individual. Para el ajuste conjunto del bloque, cada modelo unidad puede ser rotado, trasladado y cambiado el tamaño, pero las relaciones relativas las cuales conservan sus formas internas permanece invariables. Este tipo de modelo unidad puede ser realizado por un estereopar, o puede consistir en varios estereopares contiguos, es decir, dos, tres, cuatro o mas.

6. Ajuste de un bloque de haces. (Ampliación).

Un problema del ajuste de un bloque por haces es la determinación de las aproximaciones iniciales de las incógnitas y es útil para ir con más detalle a la solución eficiente de un largo sistema de ecuaciones. También se analizará en esta sección las precisiones y los parámetros adicionales

7. Aerotriangulación con apoyo GPS.

El apoyo GPS de los objetos en aerotriangulación es la determinación de coordenadas globales de los centros de proyección de observaciones GPS. Esta aplicación de GPS es la más alta exigencia en la precisión de medición de puntos de control estáticos de medidas realizadas en modo cinemático.

7.1. Sin puntos de control.

El método de medición relativa de puntos para ser usada aquí requiere ser fijado en una posición absoluta, la cual es determinada por medio del código C/A o el código P. Un segundo receptor es montado en el avión. El sistema entero es inicializado en el comienzo de la misión para definir la base GPS, es decir, una longitud directa, en modo estático, sobre un tiempo de 15 minutos. Esta inicialización resuelve las ambigüedades. El número de longitudes de ondas completo contadas en el receptor del avión como marcha de la posición inicial y registro junto con el otro receptor GPS.

8. Control de calidad y detección de errores groseros.

8.1. Control de precisión.

Las mediciones de coordenadas mediante fotogrametría debe satisfacer ciertas expectativas. Por una parte, debe satisfacer las condiciones del proyecto, y por otra parte, debe ser una garantía que los resultados analizados de manera rigurosa están libres de errores groseros. La calidad de control comprende la precisión y veracidad.

Se limita el estudio a la medida de puntos fotogramétricos, los cuales están basados en la medida de coordenadas imagen en instrumentos analíticos o digitales. Dentro del proceso completo hay varios resultados intermedios indicados para chequear la precisión.

CAPÍTULO VII. RESTITUCIÓN ANALÍTICA.

1. Introducción.

A primera vista, una fotografía aérea se parece mucho a un mapa. Sin embargo, hay diferencias desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo:

1. Diferencias cualitativas:
2. Diferencias métricas.

4. Orientación interna.

4.1. Introducción.

Obtenidas las coordenadas comparador, el paso siguiente es obtener las coordenadas imagen de la perspectiva de los mismos puntos medidos en el cliché, para que con ellas y con la distancia focal de la toma, se pueda reconstruir cualquier rayo de la perspectiva definida por la toma fotogramétrica.

Hay que considerar ciertas fuentes de error en el proceso fotogramétrico, que hacen que los puntos imagen no aparezcan en las posiciones teóricas, dadas por las leyes teóricas de la perspectiva:

- El punto principal no coincide con el centro fiducial.
- La película fotogramétrica ha sufrido deformaciones.
- El objetivo está afectado de distorsión.
- Refracción atmosférica.
- Esfericidad terrestre.

Para la obtención de las coordenadas imagen de la perspectiva, se debe considerar las anteriores causas reagrupándolas de forma que las dos primeras fuerzan la realización de una transformación de coordenadas y las tres últimas a corregir las coordenadas ya transformadas, a partir de las expresiones aproximadas que valoran dichas correcciones.

CAPÍTULO I. CONCEPTOS FOTOGAMÉTRICOS.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1. Definición de fotogrametría.

La fotogrametría ha sido definida por la Sociedad Americana de Fotogrametría como *“el arte, ciencia, y tecnología de obtener información de confianza sobre objetos físicos y del medio ambiente a través de procesos de grabación, medición e interpretación de imágenes fotográficas y patrones de registro de energía electromagnética y otros fenómenos”*.

Incluida en la definición de fotogrametría existen dos áreas distintas:

- Fotogrametría métrica o cuantitativa: Implica mediciones precisas para determinar el tamaño y la forma de los objetos, de forma que los resultados de las mediciones fotogramétricas pueden ser:
 1. Numéricas: Coordenadas de los puntos objeto en el sistema tridimensional de coordenadas.
 2. Trazado: Mapas y planos con detalles planimétricos y contorno de líneas, junto con otras representaciones gráficas de los objetos.
 3. Imágenes: Rectificación de fotografías (ortofotos).
- Fotogrametría interpretativa o cualitativa: Para el reconocimiento e identificación de los objetos. En este grupo se incluye:
 1. La fotointerpretación: Estudio de imágenes fotográficas con el propósito de identificar objetos y juzgar su significado.
 2. Sensores remotos: Reconoce e identifica objetos sin contacto físico con ellos.

2. Historia de la fotogrametría.

El filósofo Griego, Aristóteles (350 a. C.) escribió sobre los procesos ópticos de las imágenes.

Posteriormente, Leonardo Da Vinci en el siglo XV publicó ideas sobre las leyes de la perspectiva gráfica.

El primero que escribió sobre el problema de la resección espacial fue J. H. Lambert, en 1759 con su libro “Freie Perspektive”, se proponía algunas ideas fundamentales de fotogrametría antes de la invención de la fotografía.

La fotogrametría pudieron empezar y desarrollar Deguerre y Niepce, como reporteros en el París de 1839. Posteriormente, continuaron los nombres de Arago, Laussedat, Nadar...

En 1859 se da una lectura en la Comisión de la Academia de las Ciencias de París, sobre el método de determinar las coordenadas de los objetos a partir de un par de fotografías por la intersección de los rayos en el espacio.

Respecto a la fotografía terrestre, es el trabajo de dos Alemanes, Sturm y Hauck en 1883 quienes establecieron las relaciones entre la geometría proyectiva y la fotografía. El Alemán A. Meydenbauer es el primero que aplica la palabra fotogrametría, el cual publica en 1893 un artículo sobre este tema.

Carl Pulfrich desarrolla la fotogrametría instrumental y construye el primer estereocomparador en 1901 abriendo el camino a E. Von Orel para la invención del estereoautógrafo en 1909 y, a R. Hugershoff para el desarrollo del aerocartógrafo. Este instrumento consigue por primera vez la posibilidad de dibujar de manera continua la planimetría y los contornos, pero solo para fotogrametría terrestre.

W. Bauersfeld en 1923 extiende el principio del estereoautógrafo y hace posible el trazado de fotografías aéreas. El instrumento resultante se conoció como estereoplanógrafo.

En las siguientes décadas, famosas firmas produjeron mejoras en las cámaras fotogramétricas e instrumentos de trazado, mientras el trabajo teórico, sobre todo llevado a cabo por Sebastian Finsterwalder y Otto von Gruber, legaron las aplicaciones de los instrumentos óptico-mecánicos.

S. Finsterwalder, en una serie de artículos durante 1899 y 1932, estableció la base de la fotogrametría analítica. Ya escribió por entonces de la resección de puntos en el espacio, de los principios de la orientación relativa y absoluta con imágenes de un elemento en dos fotografías.

O. von Gruber, realizó estudios fundamentales en el campo de la fotogrametría relacionados con la resección de puntos en el espacio y el desarrollo de las fórmulas diferenciales de las relaciones proyectivas entre diferentes planos que eran aplicadas por numerosos fotogrametristas en sus trabajos, publicados sus trabajos entre 1930 y 1942. Entre sus publicaciones destacan: "Single and double point resection in space" y "Theory and practice of aerotriangulation".

Earl Church, empezó a publicar en 1930 una serie de boletines de fotogrametría computacional. Numerosos científicos ayudaron a Church en el desarrollo de los problemas de resección espacial, orientación, intersección... Entre los numerosos desarrollos de Church destacan la determinación de las coordenadas de la estación en el aire (perspectiva central) utilizando una posición aproximada y soluciones iterativas, además formuló el método con derivaciones en la notación de los cosenos directores y la notación matricial. Sin embargo, no aplicaba ningún análisis de error sobre las soluciones.

Se realizaron grandes avances en los años posteriores a la II Guerra Mundial, el mérito de los Británicos fue el desarrollo del primer sistema operacional de aerotriangulación analítica, cuyo sistema fue descrito por D. W. Arthur en 1955. También durante este periodo E. H. Thompson contribuyó con procesos analíticos (álgebra y procedimiento matricial), las técnicas reseau y la aerotriangulación por el método de los modelos independientes.

Una gran aportación fue realizada desde Canada por Shut, el cual fue el primero en usar la condición de Coplanidad, además de analizar los métodos de aerotriangulación.

La rutina de la producción de ortofotos mediante fotografías aéreas comenzó en 1955 siguiendo los trabajos de R. K. Bean.

El mayor empuje de la fotogrametría analítica fue dado desde los Estados Unidos. Algunos trabajos pioneros fueron realizados por Everett Merritt, el cual en 1958 publicó el primer libro sobre fotogrametría analítica. Su trabajo mostraba una gran influencia de Church. Hellmut Schmid desarrolló la fotogrametría analítica aplicando la condición de Colinealidad. Además, su trabajo fue fundamental en la aplicación del principio de los mínimos cuadrados y su estudio de los errores de propagación en la fotogrametría. Al principio su trabajo se desarrolló en notación vectorial y,

posteriormente se analizó con la notación matricial, la cual es considerada estándar en fotogrametría analítica.

Duane Brown, el cual era un discípulo de Schmid, ha realizado la mayor contribución a los principios analíticos como contribución a los problemas de ingeniería:

- Tratamiento de los parámetros de la orientación interior y exterior, tanto si son conocidos o desconocidos.
- Solución a las ecuaciones normales realizando la partición de la matriz, por un lado los elementos de la orientación y por otro los puntos de campo.
- La metodología de introducir los puntos de control terrestres y los parámetros de la estación aérea con apropiados pesos, incluyendo datos auxiliares sin distorsionar el modelo matemático básico.
- Desarrollo de un nuevo comparador.

James B. Case, demostró en 1967, como las ecuaciones estándar de la condición de Colinealidad pueden ser modificadas para manejar algunos sistemas de fotogrametría no convencional.

En muchos países se hicieron diferentes procedimientos para el desarrollo de la fotogrametría analítica, entre ellos destacan: K. Rinner en Austria; G. Konecny y F. Ackermann en Alemania; U. Bartorelli y G. Inghilleri en Italia; K. Ryokichi y T. Oshima en Japón; A. N. Lovanov en la U.R.S.S., además de otros muchos...

3. Principios de la fotogrametría analítica.

La fotogrametría analítica estaría enclavada en el área de la fotogrametría cuantitativa, la cual da soluciones a los problemas con las matemáticas computacionales, utilizando mediciones en determinados puntos de los fotogramas. En general, el modelo matemático está construido para representar las relaciones entre puntos en el espacio objeto y su correspondiente imagen en la fotografía. El principio de perspectiva y de geometría proyectiva está inherente en ello. En el uso convencional, la proyección es central, de forma que la perspectiva central de las lentes de la cámara lleva a la proyección central.

Los fotogrametristas analíticos han tratado de justificar sus esfuerzos en base a que deberían ser capaces de obtener resultados más precisos en el menor tiempo que proporciona el instrumental. De forma que este hecho ha llevado al desarrollo de la aerotriangulación.

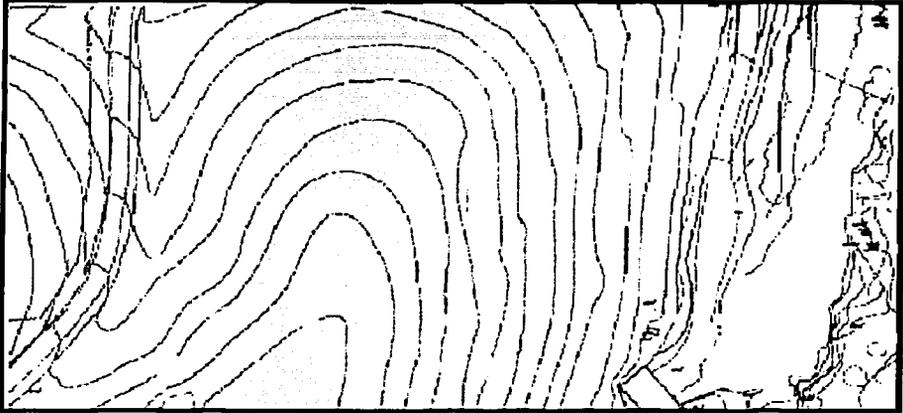
El material básico usado son las fotografías, siendo negativos o positivos. La entrada de datos son el sistema de fotocoordenadas rectangulares en dos dimensiones (x, y). La salida de datos puede ser de varios tipos, como coordenadas terreno (X, Y, Z), elementos de orientación, información derivada en relaciones específicas y condiciones...

El organigrama de trabajo de la fotogrametría implica, en general:

- Objeto: Tierra.
- Instrumental sensor: Cámara u otro sensor. En el caso de la fotogrametría aérea la cámara estaría dentro del avión.
- Medio ambiente: Atmósfera.
- Instrumental de adquisición de datos: Comparador.

- Mecanismos de procesado de los datos: Ordenador, accesorios y modelos matemáticos.
- Operador: Humano.

Cada uno de los apartados anteriores tiene unas limitaciones y aporta unos errores, los cuales es necesario conocer para realizar los distintos productos fotogramétricos con efectividad.



Cartografía obtenida mediante restitución.

Para evitar en la mayor cantidad posible los errores derivados de la fase de la toma fotogramétrica se deberían dar las siguientes condiciones ideales:

- Conocimiento exacto de la altura del avión en el momento de la toma fotográfica.
- El eje óptico de las lentes debería ser vertical en el instante de la exposición.
- La cámara debería estar orientada en su dirección acimutal en el momento de la exposición.
- No debería transmitirse el movimiento del avión en la fotografía en el momento de la exposición.
- Las lentes de la cámara deberían estar libres de distorsiones o cualquier otro tipo de aberraciones.
- Las características métricas de la cámara deben conocerse y deben estar perfectamente ajustada.
- La película fotográfica debería tener una superficie lisa y perfectamente orientada respecto de las lentes en el momento de la exposición.
- La emulsión de la película debería tener una emulsión uniforme y dar una resolución infinita.
- La base de la película debe ser perfectamente estable dimensionalmente.
- Las condiciones atmosféricas durante la toma fotogramétrica deben ser perfectas.

Alguna de las operaciones que acarrea dificultades en el procesamiento de los datos fotogramétricos son:

- Procesado de la película negativa original, es una operación delicada que requiere de unos apropiados tratamientos químicos, de forma que proporcionen gran calidad a la imagen. El mismo cuidado hay que poner en la creación de los positivos.
- Los instrumentos encargados de transferir los detalles de las fotografías al mapa deben disponer de unas excepcionales características ópticas y mecánicas.
- Tener un personal Humano bien cualificado para el proceso de restitución es fundamental para cumplir el objetivo marcado.
- Una mala o deficiente distribución de los puntos de apoyo afectará al resultado del producto fotogramétrico.

Otros errores que se deben tener en cuenta en la realización del proceso fotogramétrico, son los debidos a la naturaleza de la física de la Tierra:

- Si los efectos de la refracción atmosférica y el producido por la distorsión de la lente se pudieran compensar, la perspectiva mostrada en la fotografía sería una proyección ortográfica desde el centro de proyección, y por tanto muchos problemas fotogramétricos se reducirían.
- El efecto producido por la curvatura de la Tierra hay que tenerlo en cuenta en los cálculos fotogramétricos.

4. Organismos profesionales de la fotogrametría.

A continuación se destacan los principales organismos profesionales (nacionales e internacionales) que se dedican al campo de la fotogrametría:

- ISPRS: (International Society for Photogrammetry and Remote Sensing), fundada en 1910. Este organismo organiza conferencias internacionales sobre fotogrametría cada cuatro años. Publican la revista bimensual llamada: "Photogrammetria".
- CIPA: International Committee for Architectural Photogrammetry.
- ICA: International Cartographic Association.
- ASPRS: (American Society of Photogrammetry and Remote Sensing): Fundada en 1934, es la más famosa organización de fotogrametría de los Estados Unidos. Ha publicado el conocido libro: "Manual of Photogrammetry". Publican la revista mensual llamada: "Photogrammetry Engineering".
- ASCE: (American Society of Civil Engineers): Numerosos artículos de topografía y fotogrametría son publicados en su revista de "Journal of the Surveying and Mapping Division" en los Estados Unidos.
- OEEPE: (Organisation Européenne d'Etudes Photogrammetriques Experimentales): Organización Europea.
- SELPER: (Sociedad de Especialistas Latinoamericanos en Percepción Remota).
- The Photogrammetry Society: Organismo perteneciente al Reino Unido.
- The Swiss Society of Photogrammetry Image Analysis and Remote Sensing: Suiza.
- The Swedish Society for Photogrammetry and Remote Sensing: Suecia.
- The Finnish Society for Photogrammetry and Remote Sensing: Finlandia.
- Deutsche Gesellschaft für Photogrammetrie und Fernerkundung: Alemania.
- ETH Zürich, Institut für Geodäsie und Photogrammetrie: Suiza.
- Institut für Photogrammetrie, Stuttgart: Alemania.
- Institut für Photogrammetrie, Bonn: Alemania.

- **Spanish Society for Cartography, Photogrammetry and Remote Sensing: Sociedad Española de Cartografía, Fotogrametría y Sensores Remotos.**

CAPÍTULO II. FOTOMETRÍA.

1. Aspectos fotogramétricos generales.

Las propiedades esenciales del material fotográfico puede resumirse en que es un estrato sensible a la luz sobre un soporte o base. En el pasado el soporte era de vidrio, pero problemas de peso y fragilidad dan paso a las películas las cuales son más ligeras y flexibles.

Posteriormente la base de las películas eran de nitrato de celulosa pero su facilidad a la inflamación hicieron que se investigasen nuevas componentes, de esta manera se tiene en la actualidad bases hechas a base de polímeros sintéticos tales como el polietileno – tereftalato, el cual es un poliéster que resiste muy bien la humedad y además tiene una excelente estabilidad dimensional. En las películas fotogramétricas no solo es importante que los cambios dimensionales sean pequeños, sino de igual magnitud en todas las direcciones.

A continuación se analiza las principales propiedades y características que deben reunir las películas para la realización de fotogrametría aérea.

1.1. Fotometría.

La fotometría se ocupa de la porción de energía radiante total que es percibida por el ojo humano.

La iluminancia de una exposición fotográfica es la luminosidad o cantidad de luz recibida por unidad de área en la superficie del plano imagen durante la exposición.

La unidad de la iluminancia es el lumen por metro cuadrado (lm/m²) o lux. La iluminancia es proporcional a la cantidad de luz que pasa a través de la abertura de las lentes durante la exposición, por tanto es proporcional al área de la abertura. La distancia de la imagen es otro factor que afecta a la iluminancia, ya que el radio de las áreas iluminadas por los rayos de luz que pasan a través de las lentes son directamente proporcionales a sus distancias.

La iluminancia es:

$$E = \frac{I \cdot \cos\theta}{d^2}$$

Siendo:

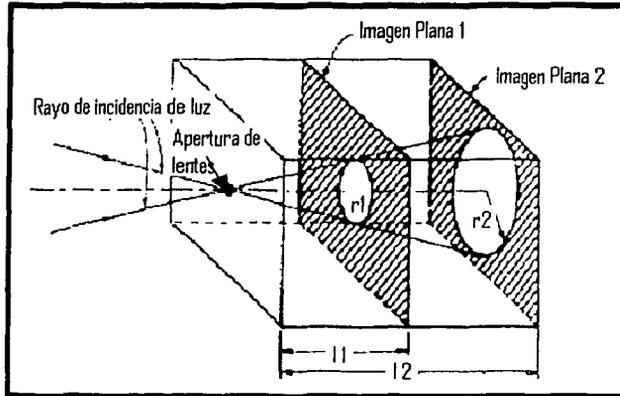
I : Fuente puntual de intensidad.

θ : Angulo de incidencia.

d : Distancia de la fuente a la superficie.

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

La luminancia es la luz emitida en una determinada dirección y se mide en candela por metro cuadrado (cd/m²), la cual es la luminancia producida por una fuente de luz estándar a una distancia de un metro. La candela es la unidad de la intensidad luminosa.

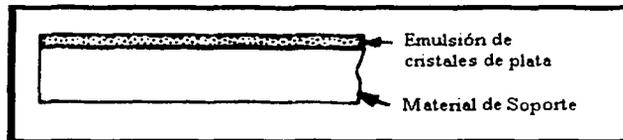


Si $f_2 = 2 \cdot f_1$, entonces, $r_2 = 2 \cdot r_1$. Las áreas (A_1, A_2) son: $A_1 = \pi \cdot r_1^2$ y $A_2 = \pi \cdot r_2^2$

La iluminancia es función de la distancia de la imagen.

1.2. Características de las emulsiones fotográficas.

Las películas fotográficas tienen dos componentes: emulsión y base. La emulsión consiste en unos cristales de haluros de plata que son sensibles a la luz. El soporte es un material que puede ser de papel, plástico o cristal, aunque lo normal es que sea de plástico.



Corte de una sección de una película fotográfica.

Los cristales de haluro de plata tienen la propiedad que cuando se exponen a la luz se debilita la relación entre la plata y el haluro. Una emulsión que ha sido expuesta a la luz contiene una imagen invisible del objeto llamada imagen latente. Cuando la imagen latente es revelada, las áreas de emulsión que han sido expuestas a una luz intensa se ponen oscuras. Las áreas que no han recibido luz se quedan blancas si el soporte es papel blanco (tonalidad clara si el soporte es cristal y transparente si es película de plástico). Por tanto, el grado de oscuridad de las imágenes reveladas está en función de exposición.

Las fotografías aéreas son tomadas con el avión en movimiento, desde 150 a 800 km/h, y algunas veces a grandes alturas a través de la atmósfera. Por tanto, solo puede permitirse un tiempo

de exposición pequeño, desde 1/250 a 1/1000 sg. el efecto de la atmósfera reduce el contraste y cambia los colores.

1.3. Estabilidad dimensional.

La magnitud del cambio dimensional de una película depende de diferentes factores, estos son: su composición química, el espesor de la base y su emulsión, el almacenamiento y el procesado.

Las películas a pesar de tener una gran estabilidad dimensional pueden producir pequeños cambios debidos al tamaño de la emulsión en la base. Estos cambios dimensionales se pueden corregir aumentando el espesor de la base. Los valores del espesor se pueden expresar mediante la relación que existe entre la gelatina y la base r :

$$r = \frac{T_c + T_b}{T_s}$$

Siendo:

T_c : Espesor de la emulsión, valor en micras, μm .

T_b : Espesor del recubrimiento anti-rizo, expresado en μm .

T_s : Espesor de la base, expresado en μm .

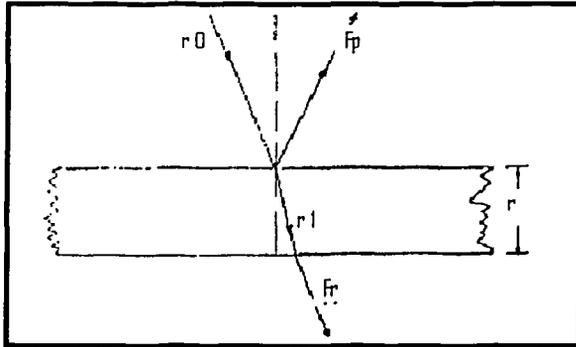
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

El denominado rizamiento de la película es causado por la diferencia en los cambios dimensionales entre la emulsión y la base. Cuando la humedad aumenta el rizamiento disminuye, pero cuando la humedad relativa disminuye y se coloca por debajo del punto de equilibrio entre la base, ocurre que la película pierde humedad, y como la emulsión tiene una contracción mayor que la base, provoca que la emulsión se curve hacia adentro. Este defecto algunas películas delgadas lo corrigen poniendo una capa de gelatina en la parte inferior de la base, de forma que ejerce una fuerza de rizamiento opuesta a la de la emulsión.

1.4. Terminología sensitométrica.

El grado de oscuridad o de atenuación de una película revelada es llamada densidad. A mayor densidad, mayor oscuridad de la película. La densidad de una película es la medida de la cantidad de luz que puede ser transmitida a través de la película, por ejemplo una película oscura no transmite luz y una película blanca transmite casi todo el porcentaje de luz. La opacidad es el recíproco de la transmitancia. La unidad de densidad es el logaritmo de la opacidad. Por ejemplo, si el 10 % de la luz es transmitido, la transmitancia es 1/10, la opacidad es 1/0.10 o sea 10, y la densidad es el logaritmo de 10 o sea 1.

Las cantidades que definen las propiedades sensitométricas de una emulsión son: Absorción, reflectancia y transmitancia. La cantidad de luz que incide en la película y la cantidad transmitida puede ser medida con un instrumento llamado densitómetro. Con el densitómetro se puede diferenciar entre macrodensitometrías y microdensitometrías. En un macrodensitómetro el área de medida suele ser de un diámetro de 1 mm., mientras que en un microdensitómetro el área es de un diámetro de 10 μm . Un densitómetro genera un flujo de luz constante ϕ_0 , y mide la proporción de flujo transmitido ϕ_t , a través de la película.



Parámetros que definen las propiedades sensitométricas.

La función denominada transmitancia o transparencia τ , es:

$$\tau = \frac{\phi_{\tau}}{\phi_o}, \text{ para } (0 \leq \tau \leq 1)$$

La función recíproca es denominada opacidad O :

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\phi_o}{\phi_{\tau}}$$

El logaritmo de la opacidad es la densidad D :

$$D = \log \frac{1}{\tau} = \log O$$

Una densidad de $D=2$ significa que solamente 1/100 del flujo de luz ϕ_o , de lo que incide en la película es transmitido y el 99/100 es absorbido; para $D=1$, un décimo del flujo de luz incidente es transmitida, y para una densidad de $D=0$ indica una completa transparencia o $\tau=1$.

Para la función de reflectancia ρ , es la relación entre el flujo reflejado ϕ_r , y el flujo de luminoso ϕ_o :

$$\rho = \frac{\phi_r}{\phi_o}$$

Y la función de absorción α , es:

$$\alpha = \frac{(\phi_o - \phi_{\tau} - \phi_r)}{\phi_o}$$

Por tanto de lo visto anteriormente se deduce que:

$$\tau + \rho + \alpha = 1$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1.5. Iluminación efectiva en las fotografías.

El término E, se había definido como la iluminancia, pero ¿Cuál es el valor de E en una fotografía aérea?. De la radiación total del Sol que alcanza la atmósfera, aproximadamente sobre una tercera parte es inmediatamente refractada al exterior por la misma atmósfera. El resto de la materia se extiende en la atmósfera (esparciéndose y dispersándose), esto es causado por las moléculas de aire y los aerosoles (partículas suspendidas de polvo desde 0.01 a 100 μm . de diámetro, gotas de vapor de agua, niebla y nubes y cristales de hielo). Las pequeñas longitudes de ondas se dispersan diez veces más intensamente que las longitudes de ondas grandes, por ello se ve el cielo de color azul. El resto de la radiación directa del Sol S_d , el ángulo cenital de incidencia del Sol Z_i , junto con la luz del cielo S_s , forman la radiación solar que ilumina el suelo. Las dos componentes del total de la incidencia sobre el objeto varía en la siguiente proporción para una altitud solar de 50° y sin nubes:

$$\frac{S_d}{S_s} = \frac{3}{1}$$

Las fotografías pueden ser tomadas sin dificultad con un cielo totalmente cubierto de nubes altas, pero esto provoca un mayor grado de dispersión de la iluminación sobre los objetos y reduce el contraste, y reduce la exactitud de las mediciones. Para incrementar el contraste se puede colocar un filtro amarillo en la cámara conforme a las condiciones de la neblina.

En el caso contrario, para reducir el fuerte contraste causado por la cantidad de luz se colocan los mismos filtros amarillos vistos anteriormente en el frente del objetivo. Además las lentes de la cámara están revestidas de una capa antirreflejos.

Un objeto de la superficie absorbe una parte de la luz incidente total y remite (reflexión difusa de una superficie rugosa) el resto, con un ángulo cenital Z_R , sobre la cámara. Esta luz reflejada está sujeta a las dispersiones de la atmósfera y aerosoles, esta dispersión produce los llamados halos de luz.

El efecto del halo se reduce con el aumento de altura de la cámara con respecto del objeto. Las películas con grandes gradaciones (desde $\gamma = 1.4$ a $\gamma = 1.8$) pueden usarse para fotografías a pequeña escala y grandes alturas de vuelo.

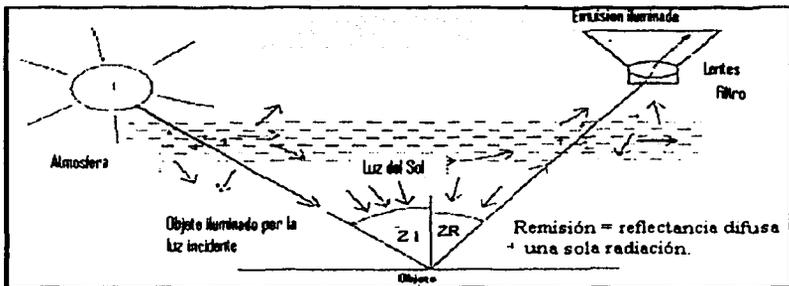


Diagrama de la iluminancia de la emulsión.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

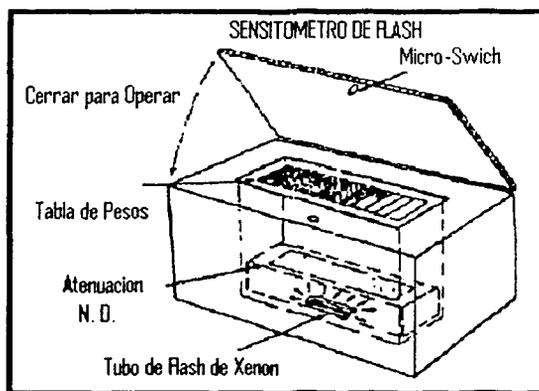
1.6. Análisis de la curva sensitométrica.

La sensitometría es la ciencia que trata la respuesta de los materiales fotográficos a la energía luminosa. La exposición H , se define como el producto de la iluminancia E , que incide en la emulsión, medida en lux (lx), y el tiempo de exposición; por tanto viene expresada en lux por segundos ($lx \cdot sg$).

$$H = E \cdot t$$

La relación entre la exposición H , y la densidad D , de una película negativa o positiva es de gran importancia en la valoración de los materiales fotográficos, procesos y resultados. En un sistema de ejes la densidad se pone en las ordenadas y el logaritmo de la exposición en el eje de las abscisas, de forma que cada emulsión produce una curva característica, la cual es la curva que define al material fotográfico mediante los datos sensitométricos. La fuente de la energía luminosa para la fotografía aérea proviene del Sol, pero para obtener la curva característica de una película aérea hay que ensayarla previamente con un sensitómetro calibrado. El sensitómetro calibrado más conocido y usado en los laboratorios de fotografía es el EG & G Mk 6, que emplea como fuente electrónica calibrada un flash capaz de ofrecer tres duraciones de tiempo: $10^{-2}sg.$, $10^{-3}sg.$ y $10^{-4}sg.$

El esquema de un sensitómetro consiste en una sencilla disposición de la fuente de luz, con la particularidad que tiene la misma característica espectral que la luz solar y también dispone el sensitómetro del plano de exposición. Con un tiempo de exposición constante, se puede tener una serie de pasos de exposición con la ayuda de una tabla maestra de pasos situada en el plano de exposición. La tabla de pasos es una corta franja de película con unas veinte densidades de valor conocido y de tamaño aproximado cada paso de 5×20 mm.. Las tablas de pasos pueden hacerse en el laboratorio o pueden hacerse con un aumento nominal de la densidad de 0.15 en la casa comercial Kodak.

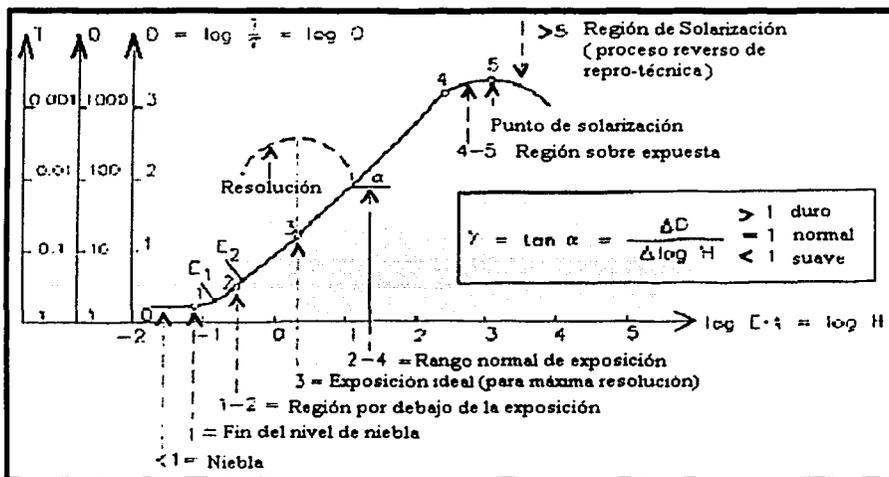


Diseño básico de un sensitómetro de fuente de flash, similar al EG & G Mk 6

Analizando la curva característica se pueden determinar tres regiones principales características en una película correctamente expuesta y revelada: Pie, zona lineal y hombro. Las tres regiones forman una curva en forma de ese "∫". Se puede entender por una exposición correcta cuando el rango de densidades queda en la zona recta de la curva, pero esta definición no es tan sencilla, ya que a veces no se tiene parte recta.

Las zonas de la curva sensitométrica son:

- Nivel de velado: El velado o fog es la densidad de la emulsión no expuesta después del procesado. Un valor normal del nivel de niebla es de 0.07 para una película que ha sido almacenada correctamente, y que no ha sido sometida a excesivo calor durante el proceso anterior y durante el vuelo, y que no ha sobrepasado su fecha de vencimiento. El nivel de velado de una película varía dependiendo del tipo de película, pero lo normal es que esté comprendido entre 0.05 y 0.2 según el procesado.
- Zona de pie: La mínima diferencia de densidad que puede percibirse sin dificultad y puede variar entre los 0.01 hasta los 0.05, dependiendo de la naturaleza de la imagen, y corresponde con el estado de adaptación de los ojos del observador, nivel medio de densidad, grano de la película y conocimiento previo del observador de lo que tiene que buscar. La velocidad efectiva de la velocidad aérea, *EAFS* se puede determinar en esta zona.
- Zona lineal: La máxima resolución en la fotografía se produce en el tercio más bajo de un rango normal de la fotografía, donde la fotografía apenas ha sido expuesta y no se ha empleado demasiado tiempo en el revelado. Por tanto, la exposición de la fotografía debe ser cuidadosamente medida.



Curva característica.

El valor de α , el cual es el ángulo de pendiente de la porción de recta de la curva característica, en el rango normal de la exposición. La graduación depende del material fotográfico y de su edad, del desarrollo químico y del desarrollo de la temperatura y el tiempo.

Si la fotografía está poco expuesta o tiene una densidad mínima estará en la situación del punto 2 (ver dibujo), pero no por debajo de ella, la mayor parte de la fotografía estará cercana a la curva en el punto 3 y la máxima densidad está alrededor del punto 4 pero nunca por encima de él. Modernos contadores de exposición regulan la abertura y el tiempo de exposición automáticamente y advierten si los puntos 2 y 4 han sido pasados. En esos casos, la película debe ser cambiada. Por debajo del punto 2 se denomina pie de la curva y por encima del punto 4 se denomina hombro de la curva. En la figura se puede observar que para una exposición nula la película puede tener algo de densidad. La densidad de una emulsión no expuesta es llamada velo (fog), y en la curva es la densidad correspondiente a la parte baja del pie de la curva. Si una muestra sensitométrica no cubre la región de pie, la exposición del sensitómetro fue excesiva, y si no se puede trazar la región de hombro entonces fue insuficiente.

Las curvas características se emplean para describir las características de las emulsiones fotográficas. La pendiente de la porción recta de la curva sirve para medir el contraste de la película. Cuanto mayor sea la pendiente, mayor será el contraste o cambio de densidad de un determinado rango de exposición. El contraste de una película se expresa por la gradación o valor gamma γ , el consiste en la tangente entre la porción de línea recta de la curva y el eje de abscisa. La gradación gamma γ , está definida por:

$$\gamma = \text{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{\Delta D}{\Delta \log(E \cdot t)}$$

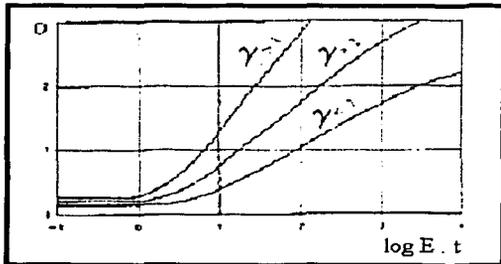
Siendo:

ΔD : Margen de densidad.

$\Delta \log (E \cdot t)$: Margen de exposición.

Si el valor de $\gamma > 1$ se trata de un material fotográfico duro, para $\gamma = 1$ es un material normal y para $\gamma < 1$ es suave. Un valor de $\gamma > 1$ dispone de un material fotográfico que incrementa el contraste, o sea pequeñas diferencias de exposición producen grandes diferencias de densidad. Para valores de $\gamma < 1$ al material también se le denomina blando. Es más difícil una correcta exposición de un material duro que de una película blanda.

Es frecuente el uso de filtros en fotografía para reducir los efectos de deslumbramiento y de dispersión de la luz que provoca el velo en las fotografías. Un filtro polarizado se puede emplear para disminuir los reflejos fuertes de las ondas (reflejo de la luz en zonas acuáticas como mares o lagos).



Representación de la gradación.

- Zona de hombro: Es mejor evitar esta zona en provecho de una buena calidad de la imagen. La región de hombro se relaciona con grandes valores de granularidad.

1.7. Sensibilidad de la película.

La velocidad es una de las más importantes propiedades de los materiales fotográficos destinados para la fotografía aérea. El conocimiento de la velocidad de una película aérea permite señalarla en la cámara para tener un óptimo rendimiento de la imagen.

A través de los años, diferentes criterios sensitométricos han sido empleados para definir la velocidad de las películas en fotografía aérea, algunos basados en el gradiente, otros en la densidad. Respecto a la densidad comentar que la sensibilidad o velocidad de la emulsión de una fotografía está definida por el recíproco de la exposición H_{AD} , la cual produce una diferencia de densidad ΔD , sobre el nivel de velo, bajo condiciones precisas de radiación, exposición y desarrollo:

$$\Delta \log I = \log I_{B} - \log I_{E1} = 1.3$$

Esto produce por otra parte:

$$\Delta D = D_{B} - D_{E1} = 0.8 \pm 0.05$$

Siendo B , un punto de la curva característica entre los puntos 2 y 4 (ver dibujo).

DIN	ASA	H. con diferencias densidad de 0,1
0	0.8	1
1	1	0.79
2	1.2	0.63
3	1.6	0.5
4	2	0.4
5	2.5	0.32
6	3	0.25
7	4	0.2
8	5	0.16
9	6	0.13
10	8	0.1
12	12	0.063
14	20	0.04
16	32	0.025
18	50	0.016
22	125	0.0063
26	320	0.0025
30	800	0.001
40	8000	0.0001

Una tabla comparativa de las velocidades DIN y ASA.

El sistema DIN (German Standards Institute) define el sistema logarítmico, de acuerdo con la ecuación:

$$S_{DIN} = 10 \cdot \log \frac{H_o}{H_{ND, 0.1}}$$

Donde:

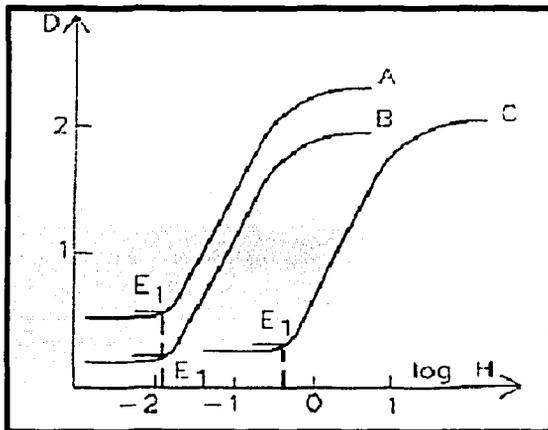
H_o : Unidad de exposición, o sea 1 lx (para luz visible).

H_{ND} : Produce una diferencia de densidad de 1 . 0 = ΔD sobre el nivel de velo, o sea el punto E_1 .

El ASA (American Standard Association) adopta el sistema aritmético en lugar del logarítmico:

$$S_{ASA} = 0.8 \cdot \frac{H_o}{H_{ND, 0.1}}$$

Una película lenta produce unas densidades de exposición más bajas que una película rápida. La curva característica para una película rápida está desplazada en una dirección paralela positiva a la dirección $H \log$.



Curvas características para mismos valores de gamma, pero diferentes velocidades y densidades.

La sensibilidad para películas aéreas que correspondan con el punto E_2 de la curva característica y que esté de acuerdo con las sensibilidades definidas anteriormente es la sensibilidad de velocidad de películas aéreas, $EAFS$:

$$S_{EAFS} = \frac{2}{3} \cdot \log \frac{H_o}{H_{ND=0.3}} = \frac{2 \cdot H}{3} = \frac{H}{1.5}$$

Siendo:

H : Exposición (micro lux por segundo).

ΔD : 0.3 sobre el nivel de velo: La exposición usada en la determinación de la velocidad de las películas aéreas es el punto en el cual la curva característica tiene una densidad de 0.3 unidades sobre la base del velo.

Para productos de diferentes casas comerciales era difícil comparar sus características puesto que tenían criterios diferentes por ello se acordaron unas determinadas condiciones de revelado, tales como el tiempo de revelado, temperatura de revelado, tratamiento y tipo de revelador, esto está definido en la norma americana: ANSI PH2.34- 1969 (American National Standard Method for Determining the Speeds of Monochrome Photographic Negative Films for Aerial Photography), de esta forma es posible la comparación de características entre diferentes productos.

La velocidad efectiva de una película aérea, *EAFS*, tiene la designación prescrita por la norma para películas aéreas negativas en blanco y negro, cuando las condiciones de revelado difieren de las especificadas por la norma. El criterio de sensibilidad básico no varía. También puede determinarse *EAFS* para películas de color e infrarrojas, a las que no se refiere la norma ANSI PH2.34-1969. La sensibilidad de tales películas se determina empíricamente, por lo general mediante vuelos de prueba con cámaras aéreas.

Se dice que una película es más sensible y más rápida cuando requiere poca luz para su exposición. Las películas más rápidas pueden usarse ventajosamente para fotografías donde se mueven los objetos rápidamente.

1.8. Sensibilidad espectral.

La sensibilidad espectral de una emulsión fotográfica indica el grado de sensibilidad para luz de diferentes longitudes de onda del espectro.

El Sol y varias fuentes artificiales tales como focos de luz emiten un basto rango de energía electromagnética. El rango entero de esta energía electromagnética es denominado espectro electromagnético. La velocidad de la energía electromagnética en el vacío es constante y relaciona la frecuencia y la longitud de onda mediante la siguiente expresión:

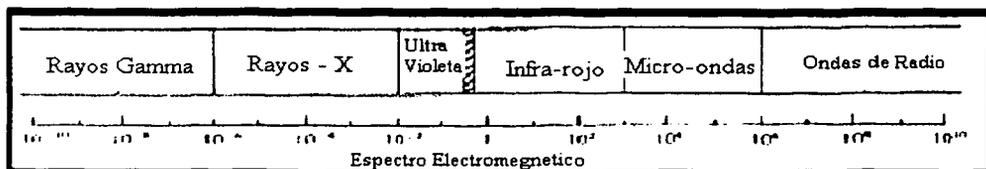
$$c = f \cdot \lambda$$

Siendo:

c : La velocidad de la energía electromagnética en el vacío.

f : Frecuencia.

λ : / Longitud de onda.



Clasificación del espectro electromagnético por su longitud de onda.

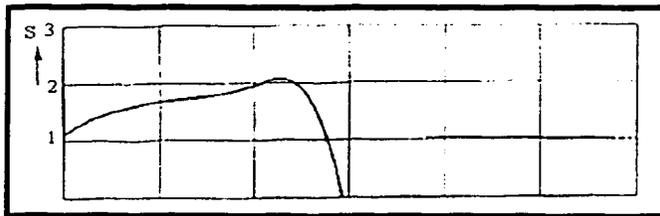
Las capas de las películas de blanco y negro o en color son sensibles a varios productos químicos (mayormente catalizadores) para diferentes longitudes de ondas. La sensibilidad espectral, $S(\lambda)$, define la sensibilidad en función de la longitud de onda λ .

$$\log S(\lambda) = \log \frac{H_o}{H_{N.D.U.}(\lambda)} = \log \frac{S(\lambda)}{S_o}$$

En la fórmula anterior, H_o no es la unidad de exposición, es una exposición de referencia constante respecto de la cual están referidas todas las longitudes de ondas.

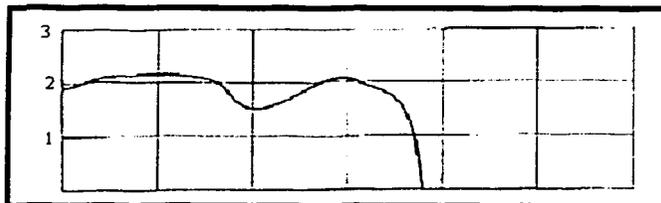
Los tipos de emulsiones son:

- Emulsión ortocromática: Sensible a la luz azul y verde e inapropiado para captar detalles rojos de los objetos. Las emulsiones ortocromáticas se emplean ara la realización de fotogrametría terrestre. Tiene la ventaja de poderse revelar con toda seguridad bajo una luz roja en un cuarto oscuro.



Sensibilidad espectral de una película ortocromática.

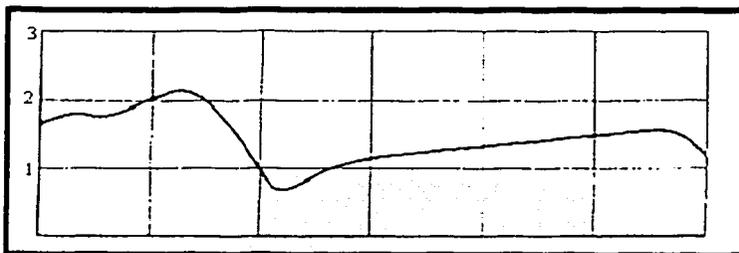
- Emulsión pancromática: Reproduce el rango completo del espectro visible en los correspondientes tonos de gris. Debe ser revelado en completa oscuridad.



Sensibilidad espectral de una película pancromática.

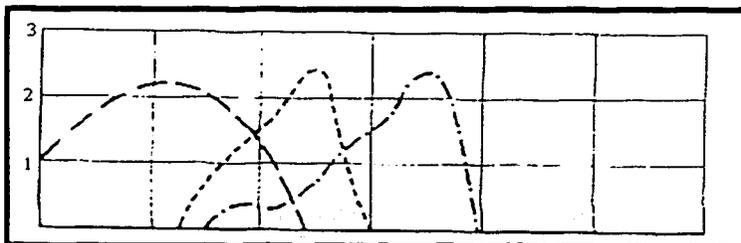
- Emulsiones sensibles al infrarrojo y películas en blanco y negro: Es sensible a las longitudes de ondas del rojo y azul y debe ser expuesta a través de filtros de infrarrojo y aparecen solo los detalles infrarrojos en la fotografías. Debe ser revelado en absoluta oscuridad.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

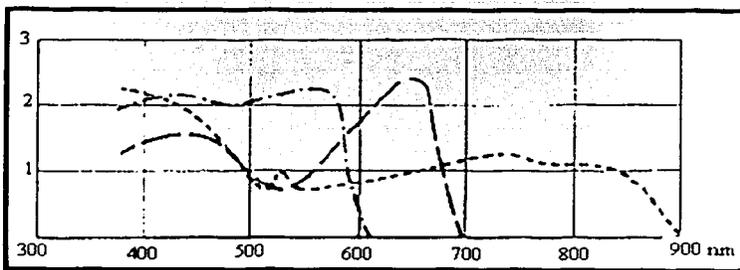


Sensibilidad espectral de una película sensible al infrarrojo.

- Emulsiones en color normal y falso color: Se emplean principalmente para fotointerpretación.

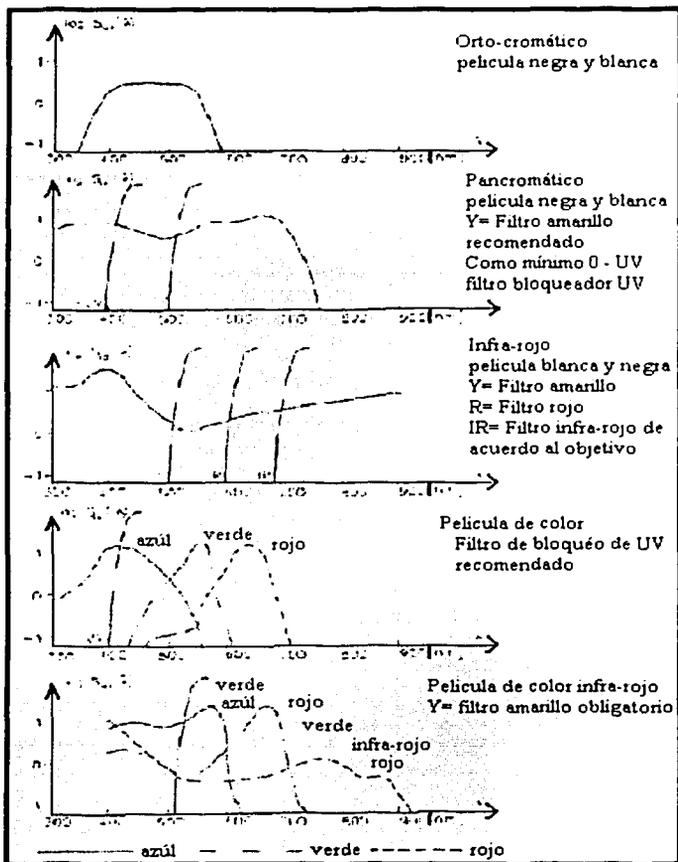


Sensibilidad espectral de una película en color.



Sensibilidad espectral de una película sensible al infrarrojo de color.

El ojo humano es capaz de determinar más tonos y matices de colores que lo mostrados en una fotografía. Las fotografías en color enseñan más información que las realizadas en blanco y negro, y de esta forma es más fácil de interpretar los elementos en las observaciones estereoscópicas. El relativo poco coste adicional de las fotografías en color han justificado su uso para la interpretación.



Sensibilidades espectrales de varios tipos de películas.

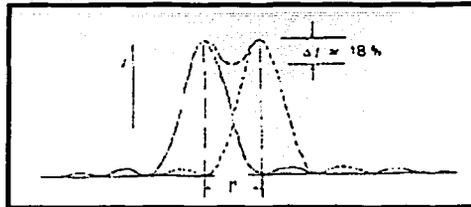
2. Calidad de la imagen.

Todas las lentes de las cámaras están diseñadas para unas determinadas tareas según los criterios de calidad. La mayoría de las actuales cámaras de 35 mm. son competitivas en precios y calidad, respecto a la calidad estas cámaras pueden conseguir resoluciones de 300 líneas por milímetro, por ejemplo el objetivo de una cámara aérea consigue resoluciones de 80 líneas por milímetro. Esta diferencia es principalmente causada por la diferencia entre una lente de focal 50 mm. y formato de película de 24 x 36 mm. y la lente de cámara aérea con una distancia focal de 150 mm. y película de 230 x 230 mm.. Otra diferencia fundamental entre cámaras de 35 mm. y las aéreas es que esta última debe tener grandes precisiones métricas, de forma que las relaciones entre las diferentes partes de la imagen deben ser precisas y la imagen libre de distorsiones. Por ello se emiten certificados de calibración, y una precisión métrica normal está alrededor de las 3 micras (μm) de distorsión desde las posiciones verdaderas a través de todo el formato.

Hay diferentes valores o características que muestran la calidad de una imagen o fotografía, a continuación se citan:

2.1. Difracción.

La onda natural de la luz y la consecuente difracción hace imposible la generación de una abertura circular ideal, por ejemplo la imagen dimensional de un punto.



r: Resolución.
Resolución de dos puntos.

La energía de la onda forma un punto imagen, cuya imagen está distribuida en un disco central de difracción con un 84 % de la energía total, junto con anillos de interferencias alrededor del disco central con el 7%, 3% ... (rápidamente decreciente). En general, la iluminancia E, de los anillos secundarios producen en la emulsión una imagen demasiado pequeña. Además, en el borde del disco central la energía es demasiado baja como para producir una imagen. La experiencia muestra que el diámetro teórico total del disco de difracción central o resolución es:

$$u_{th} (\mu m) = 2.44 \cdot k \cdot \lambda$$

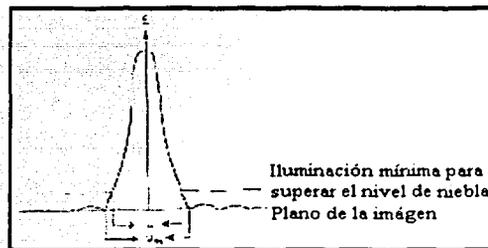
Siendo:

k : Abertura.

λ : Longitud de onda en μm .

Para el diámetro superior, el cual es visible en la fotografía:

$$u = 0.75 \cdot u_{th}$$



La difracción de apertura circular produce una distribución de la iluminancia de una imagen plana

Con un promedio de longitud de onda de la luz visible de $\lambda: 0.55 \mu m$. se deduce el siguiente valor de u:

$$u_{\text{min}} = k = \frac{f}{d}$$

La difracción teórica muestra, que el punto de la imagen fotografiada no puede ser más pequeño (en $\mu\text{m.}$), que el número de la abertura.

Para un valor de $k : 8$, los diferentes valores de la difracción son:

$$u_{\text{m}} = 2.44 \cdot 0.55 \cdot 8 = 11 \mu\text{m}$$

$$u_{\text{min}} = 0.75 \cdot u_{\text{m}} = 8.25 \mu\text{m}$$

La mínima distancia entre dos discos de difracción, los cuales pueden distinguirse como dos puntos esta generalmente especificado como:

$$\delta = \frac{u}{2} = \frac{k}{2}$$

Pero este resultado no puede ser conseguido en la práctica.

2.2. Resolución óptica y fotográfica.

La resolución del proceso de revelado y película es deducida mediante las cartas de ensayos. Los valores del poder de resolución tienen sus limitaciones, las cuales dependen de una serie de variables, entre las variables de vuelo destacan:

- Calidad de la lente de la cámara.
- Abertura relativa empleada.
- Tiempo de exposición.
- Aplanamiento o planeidad de la película.
- Escala de la imagen.
- Vibraciones de la cámara.
- Condiciones atmosféricas.
- Altitud solar.
- Trayectoria de vuelo, con respecto al detalle terrestre.

Las variables de los materiales y procesado:

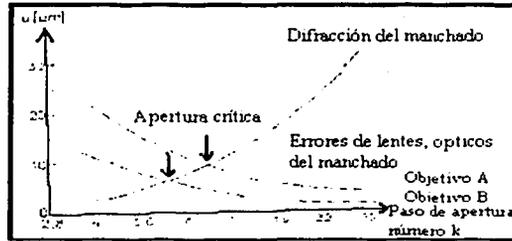
- Tipo de película.
- Historial de almacenamiento de la película.
- Tipo de revelador empleado.
- Tiempo y temperatura de revelado.
- Método de procesado.
- Condiciones de lavado y secado de la película.

La resolución está expresada en líneas/milímetro y especifica cuantas líneas por milímetro pueden distinguirse de su espacio adjunto de igual anchura. El límite de difracción de la separación de los puntos está dado por el valor anteriormente calculado de δ , donde el límite de resolución teórica óptico-fotográfica es:

$$R_{\text{max}} = \frac{10^3 (\mu\text{m} \cdot \text{mm})}{\delta (\mu\text{m})} = \frac{2000}{k} (l \cdot \text{mm})$$

El límite práctico se acercará al límite teórico dependiendo de la calidad de la óptica. La influencia de los errores de las lentes (aberraciones esféricas y cromáticas, astigmatismo...) pueden ser reducidos usando una apertura pequeña, esto es por la eliminación de los rayos de borde, aunque por este procedimiento se incrementa la difracción.

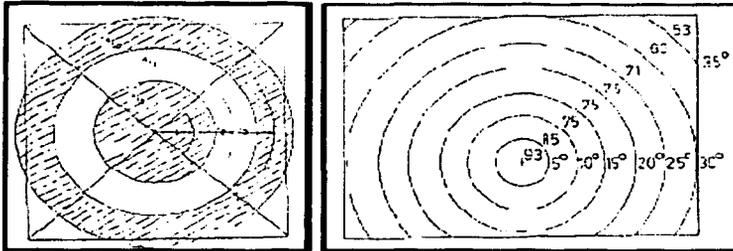
La resolución óptima se alcanza con esa apertura, en la cual la suma de los errores ópticos y la difracción son mínimos. Al punto desde el cual con una apertura más pequeña se incrementaría la difracción, se le denomina apertura crítica.



Determinación de la apertura crítica.

Otro factor decisivo en la fotografía es el grano. En emulsiones no reveladas, los granos son los cristales más pequeños de haluro de plata, mezclados en la gelatina. El tamaño va de unos pocos μm . (en emulsiones de muy baja velocidad, pero alta resolución) a unas pocas μm . (emulsiones de alta velocidad). Después del desarrollo, los granos son grupos de moléculas metálicas de plata con diámetros de 0.5 a 0.2 μm .

En orden a prevenir un exceso de optimismo o de pesimismo en las figuras de resolución, se adopta un valor conocido como la Resolución Promedio del Peso de las Áreas (AWAR), junto con la especificación del contraste, material fotográfico y revelado.



AWAR. La media geométrica de la resolución radial y tangencial está computada en cada anillo.

El método de AWAR implica dividir el campo de la imagen en círculos concéntricos o en zonas alrededor de un punto central. El radio de cada anillo, desde la zona central hacia fuera, aumenta en una cantidad constante, siendo el radio del disco central un tercio del radio del primer anillo, con cada zona encerrando un valor significativo de valores radiales y tangenciales del poder de resolución. La resolución media para cada zona se multiplica por la razón entre el área A de esa zona y el área total del campo de imagen A , y se suman para obtener el AWAR.

$$AW:AR = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{A} \cdot (k_{rad} + k_{tan})^{i-2}$$

Siendo:

n : Número de zonas.

k_{rad}, k_{tan} : Poder resolución de las señales de las imágenes radial y tangencial.

El poder de resolución no es una medida ideal de la imagen pero, es muy popular debido a su simplicidad. El valor del poder de resolución se obtiene mediante un microscópio que, a diferencia de los microdensitómetros, es un instrumento cómodo y relativamente económico, pero introduce un valor de subjetividad en la evaluación, puesto que reduce la validez de una comparación de resultados por diferentes personas. La resolución, R (líneas/mm) puede ser transformada en resolución angular, R_a con la ayuda de la distancia principal, f .

$$R_a = \frac{\cos^2 \tau}{R(f \text{ mm})} \cdot \rho^*$$

Por ejemplo, para un objetivo gran-angular:

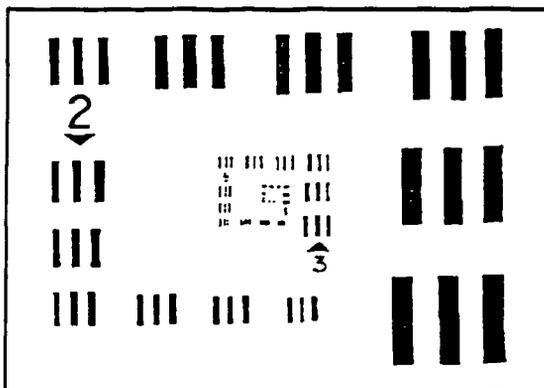
Centro:	R: 931 mm	τ : 0°	$\cos^2 \tau$: 1	R_a : 22"
Esquina:	R: 531 mm	τ : 35°	$\cos^2 \tau$: 0.67	R_a : 26"

Para un objetivo super gran-angular de distancia principal: 45 mm.:

Centro:	R: 1201 mm	τ : 0°	$\cos^2 \tau$: 1	R_a : 38"
Esquina:	R: 351 mm	τ : 59°	$\cos^2 \tau$: 0.26	R_a : 35"

La resolución angular se adopta como medida a la resolución de los ojos. La anatomía de los conos en la retina da unos valores de resolución angular de 20". La resolución real monocular depende de muchos factores fisiológicos y psicológicos y tiene un valor aproximado de 30".

Por otra parte el poder de resolución fotográfica de la emulsión de una película se puede referir por el número de barras y espacios alternativos de igual anchura que puede ser contados como elementos visualmente separados en el espacio de un milímetro. En fotografía la combinación de una barra y un espacio se refiere a una línea o par de líneas, y el poder de resolución está referido a líneas/mm. (l/mm) o par de líneas/mm. (lpr/mm). Una película con un poder de resolución de 30 lpr/mm significa que un observador teóricamente sería capaz de distinguir 60 elementos lineales: 30 líneas y 30 espacios por milímetro cuando la imagen se observa a través de unos determinados aumentos.



Tarjeta tipo para el test del poder de resolución usada para calcular el contraste.

Para resolver el poder de resolución, este se realiza bajo unas estrictas condiciones de laboratorio fotografiando a una tarjeta de resolución estándar. La imagen es visualizada con grandes aumentos para determinar el número de líneas/mm que se pueden medir.

Por ejemplo, la tarjeta que se emplea en los EEUU consiste en grupos de patrones de tres líneas cada uno de forma que el ancho de cada uno decrecen en una magnitud de:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.89089087 \text{ o también. } \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = 0.89125094$$

Por otra parte, la longitud de los elementos es cinco veces el ancho de ellas. El poder de resolución depende en gran medida del contraste de las tarjetas del test, por tanto estos tienen que estar especificados, de forma que las tarjetas están disponibles con los valores de contraste que se señalan a continuación.

- Contraste de las señales altas: El poder de resolución de cada película está dado por el contraste de dos objetos diferentes. Un contraste alto está representado por:

$$K = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1000}{1}$$

Logaritmo del contraste: $= K \log$ diferencia de densidad $\Delta D = 3$.

Dicho contraste corresponde a las líneas y espacios de una tarjeta donde se analiza el test de resolución, y el poder de resolución es la línea más pequeña que puede ser apreciada en la fotografía.

- Contraste de las señales bajas: Está representado por un contraste de:

$$K = \frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{1.6}{1}$$

Logaritmo del contraste: $= K \log$ diferencia de densidad $\Delta D = 0.2$.

Este valor es típico para fotografías a altas altitudes y por tanto una reducción del contraste debido a la atmósfera.

El contraste de las películas se puede usar conjuntamente con las lentes y las *MTF* de las imágenes para estimar el poder de resolución del sistema de la cámara bajo condiciones operacionales.

La diferencia de sensibilidades de películas en blanco y negro son necesarias para permitir que las fotografías sean tomadas en diferentes estaciones del año con unas aperturas óptimas, por ejemplo para conseguir unas fotografías ricas en detalles deben ser tomadas a finales del otoño cuando la luz disponible es pobre. Las películas de infrarrojos, blanco y negro y en color son usadas en fotointerpretación; las películas de infrarrojo y blanco y negro son usadas con el propósito general de películas con niebla (usando filtros amarillos) y para interpretación del suelo (filtro rojo). La combinación de la película y el filtro depende de la aplicación que se pretenda realizar.

El revelado de películas en blanco y negro se puede realizar directamente en el rollo. El equipamiento de este proceso de revelado de fotografías aéreas consiste en tres tanques: Revelado, bañado y fijado. Además, hay un aparato consistente en dos bobinas montadas en un armazón, el cual lleva los tanques y la película está enrollada en una de las bobinas, de forma que se sumerge primero en el tanque del revelado. Por medio de un motor eléctrico o una manivela de mano, la película se va desenrollando y va pasando de una bobina a la otra durante el proceso de revelado. Este proceso de enrollado es repetido para el bañado y fijado de la película. Posteriormente se procede al secado. Las películas aéreas son reveladas en absoluta oscuridad porque son sensibles a todas las longitudes de ondas de la luz visible.

Hay equipos más elaborados para el desarrollo automático del revelado, lavado y secado de los rollos de las películas en blanco y negro. También hay equipos disponibles para el procesado continuo de películas en color.

2.3. Contraste y contraste transferido.

La resolución es teóricamente una deficiente medida de la calidad de la imagen, pero es un valor importante, puesto que suministra la información en la reproducción de los detalles más finos definidos por las diferencias de luminosidad. Solamente el contraste transferido puede dar información de la reproducción de las mayores y menores diferencias de luminosidad y en las variaciones de los efectos de luminosidad en los detalles mayores.

Como se ha visto, la resolución depende en gran medida del contraste, esto es valores de diferentes medidas de $R\alpha$, cuando una persona observa o mide la gráfica de una fotografía con diferentes radios de luminosidad entre las barras y los espacios. Estos diferentes radios de luminosidad pueden ser producidos por la transmisión de la luz a través de las barras blancas y proyectando luz incidente en los espacios oscuros. El contraste entre las barras y los espacios pueden ser cambiados por variación del radio de transmisión o luz incidente.

El contraste absoluto está definido por:

$$K = \frac{I_{Max}}{I_{Min}}, \text{ con } 1 \leq K \leq \infty$$

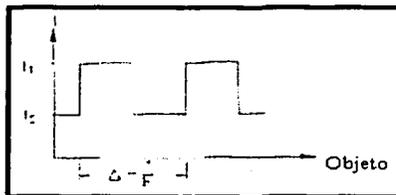
Con I_{Min} , I_{Max} las luminancias para puntos luminosos y puntos de luz baja.

Al decidir el tamaño de las señales, hay que tener cuidado de que se cubran las perspectivas de la resolución. La relación entre el periodo de la señal original R_o , y la señal obtenida R_i , está dada por la escala de la fotografía, E_f .

$$R_o = R_i \cdot E_f = \frac{R_i \cdot f}{H}$$

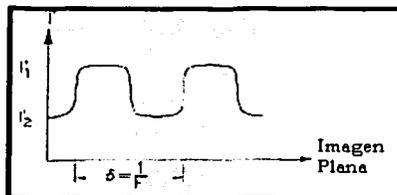
Por ejemplo para un fotografía a escala 1/10000 y una resolución esperada de 40 lpr/mm, la señal debería tener un espesor de 250 mm.

La diferencia de densidad está expresada en escala logarítmica. En la teoría de transferencia de la información, se define el contraste relativo C , referido a la media.



Contraste relativo de un objeto.

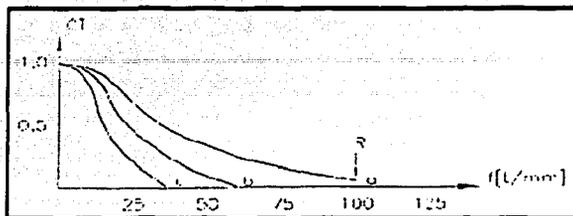
$$C = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}, \text{ donde } 0 \leq C \leq 1$$



Contraste relativo de la imagen.

$$C' = \frac{I'_1 - I'_2}{I'_1 + I'_2}, \text{ donde } 0 \leq C' \leq 1$$

Como se puede observar en el proceso de la imagen se reduce el contraste.



Contraste alto: $K = 1000 : 1$ $\Delta D = 3$ $C' = 0.998$

Contraste medio: $K = 6.3 : 1$ $\Delta D = 0.8$ $C' = 0.73$

Contraste bajo: $K = 1.6 : 1$ $\Delta D = 0.2$ $C' = 0.23$

Función de transferencia del contraste para tres valores diferentes del contraste.

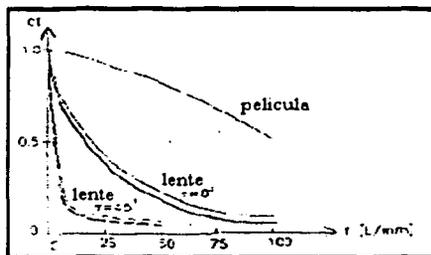
La frecuencia espacial F o f , es el recíproco de la línea de separación Δ o δ , y está dado en número de líneas por unidad de longitud. El contraste transferido es una función de la frecuencia espacial y el contraste:

$$CT = \frac{C'}{C}$$

La función de transferencia del contraste, $CTF = CT(f, C, \dots)$, describe la calidad del sistema óptico de un punto particular de la imagen mejor que una simple especificación de la resolución.

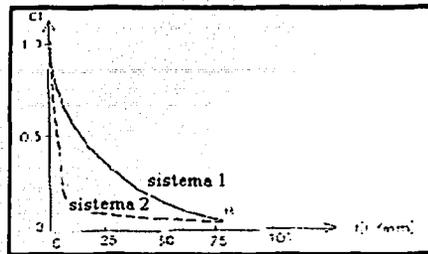
Usualmente normalizado el valor $CTF(0) = 1$.

El contraste no solamente está afectado del sistema óptico, sino también de la atmósfera, los filtros, el material fotográfico y el ojo humano. Cada una de estas influencias tiene su propia función de transferencia del contraste y la función total de transferencia es el producto de las funciones de transferencia individual.



CTF_0 para $\tau = 0^\circ$, $\tau = 45^\circ$ y para película CTF_p . Las líneas anchas son: $CTF_0 \cdot CTF_p$.

En la siguiente figura se muestra como el sistema 2 cede el contraste de la baja frecuencia espacial de manera significativamente mayor que lo hace el sistema 1. La resolución de ambos sistemas es, por casualidad, el mismo, pero no revela la diferencia real entre ellos.



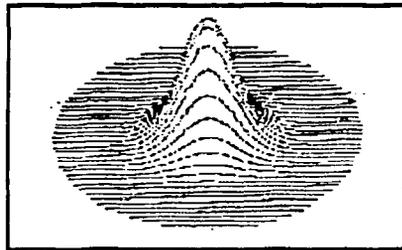
Comparación de los dos sistemas de imágenes.

Si se reemplaza la función de onda cuadrada, por una función senusoidal, se realiza una Función de Transferencia de Modulación (*MTF*).

2.4. Función de expansión del punto.

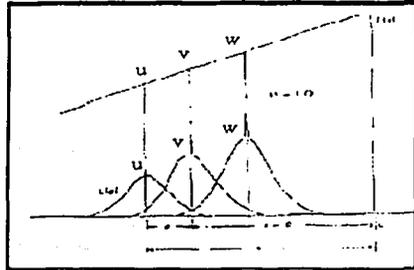
Para una lente limitada por difracción, la imagen de un punto es un patrón de difracción de Airy. El disco central o de Airy contiene el 84 % de la energía total dentro del patrón.

El patrón de difracción de Airy es una función de expansión del punto, *PSF* de una lente limitada por difracción. Pero en general, las *PSF* de las lentes reales son siempre más expandidas que esta, y rara vez son simétricas, excepto para el punto de imagen en el eje principal. Para puntos fuera del eje es necesario hacer un examen de la imagen en más de una dirección.



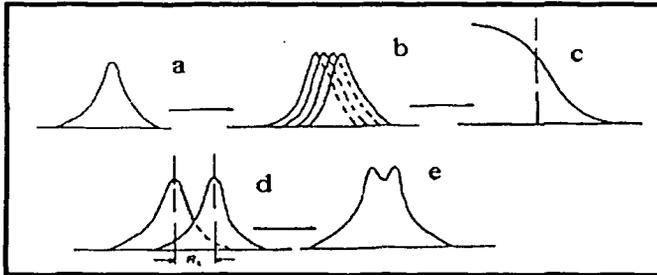
Función de expansión de punto.

La *PSF* resulta difícil de medir experimentalmente, y en la práctica es más conveniente reemplazar una fuente puntual por una fuente lineal, la que puede examinarse con una ranura, por ejemplo con un microdensitómetro. Esto tiene la ventaja de integrar una serie de puntos a lo largo de la longitud de la ranura, con una mayor cantidad de energía disponible para la medición y el resultado es la función de expansión de línea, *LSF*.



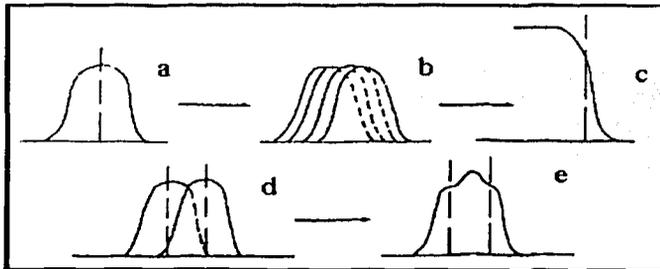
Función de expansión de línea.

Una función de expansión con un alto grado de nitidez se obtiene con la suma de una cantidad de funciones de expansión de bajo poder de resolución de forma que resulta un borde nítido. Pero cuando dos de las funciones se sitúan muy próximas no pueden resolverse, de forma que una lente que muestre este tipo de *PSF* adolecerá de bajo poder de resolución, pero dará un detalle muy nítido de borde.



a: Función de expansión. c: Alta definición de borde. d: Funciones cercanas no puede resolverse.

La función mostrada en la siguiente figura ilustra lo contrario a la anterior. En esta la suma de las *PSF* de cada punto en la imagen resultará en un borde mal definido, dando como resultado una fotografía que parece poco nítida, pero que tiene un alto poder de resolución, como puede observarse cuando se sitúan dos *PSF* próximas entre sí, esto ocurre cuando la depresión entre ellas es superior al 20 % en sus intensidades combinadas. Este es el tipo de imagen que se necesita cuando hay que resolver detalles finos.



b: Suma de las *PSF*. c: Borde mal definido. e: Resolución de dos puntos próximos.

En la práctica, hay variaciones entre las dos figuras mostradas, según la lente, abertura, posición de campo, tipo de película y revelado. Es por ello que a menudo se exigen una determinada cantidad de diferentes tipos de reveladores, según el objetivo buscado.

2.5. Función de transferencia de modulación.

Las funciones de expansión proporcionan información referente al comportamiento de la lente o la emulsión, información que no es disponible a partir de simples datos sobre el poder de resolución, y aunque es teóricamente posible determinarlo en la práctica se hace complicado computarlo. Como consecuencia es más común trasladarse desde el dominio espacial al dominio de frecuencia espacial, usando lo que se conoce como función de transferencia de modulación. *MTF*.

La *MTF* de un material fotográfico indica la fidelidad con el cual un test de señales periódico que tiene una distribución de intensidad senusoidal de la amplitud del contraste es registrado como una función de frecuencia espacial.



Objeto del test senusoidal.

Las señales del test cuando se examinan muestran un perfil de luminancia de bordes cuadradas, por lo que a menudo se denominan señales de onda cuadrada. En la práctica, el test de señales es registrado por el material fotográfico y el revelado de la imagen es realizado con un microdensitómetro y produce un esquema similar al del siguiente dibujo.

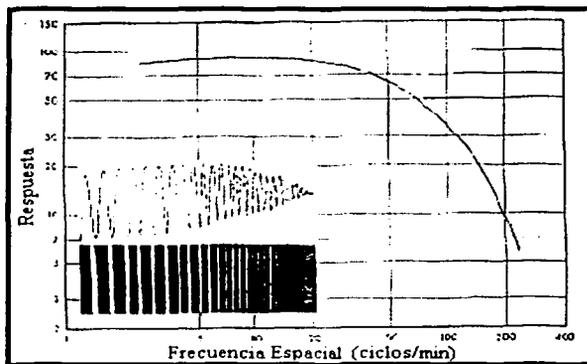


Imagen senusoidal, trazo del microdensitómetro y la curva de *MTF*.

De cada frecuencia, los valores de máxima densidad y mínima densidad son determinados y convertidos a valores de exposición relativa lineal por medio de la curva característica de la emulsión, $HD \log -$. El contraste, o amplitud de cada frecuencia es expresado como modulación de la imagen, y viene dado por la expresión:

$$M_{L(\text{resolución})} = \frac{E_{\text{max}} - E_{\text{min}}}{E_{\text{max}} + E_{\text{min}}} \leq 1$$

Siendo:

E_{min} , E_{max} : Valores de la exposición máximo y mínimo para curva $D \log - H$

Normalmente, la MTF está representada por una gráfica de modulación en un eje y en el otro la frecuencia espacial en ciclos por milímetro. Después, para un propósito práctico, los ciclos/mm. pueden ser equiparados a $lpr/mm.$, la MTF también puede ser pensada como indicativo gráfico de la reducción en contraste el cual ocurre entre los elementos de unas marcas de poder de resolución cuando se hace con una emulsión específica.

La MTF junto con los datos de granularidad y el poder de resolución proporciona información sobre las capacidades de las imágenes de la emulsión; esto es, una emulsión de alto poder de resolución, baja granularidad y buena MTF será aconsejable para registrar pequeños detalles. En este respecto algunas interrelaciones básicas entre MTF y otras propiedades de la estructura de las imágenes son dignas de consideración.

2.6. Movimiento de la imagen.

Un nuevo hecho que afecta a la imagen es debido al movimiento (avance del avión, rotaciones y vibraciones) de la cámara, o movimiento del objeto, durante el tiempo que el obturador está abierto. La teórica imagen del movimiento, u_{th} , resultado del movimiento de avance es:

$$u_{th} = v \cdot t \cdot \frac{c}{h} = \frac{v \cdot t}{m_h}$$

$$u_{th} = \frac{1000 \cdot v \cdot t}{3.6 \cdot m_h}$$

Siendo:

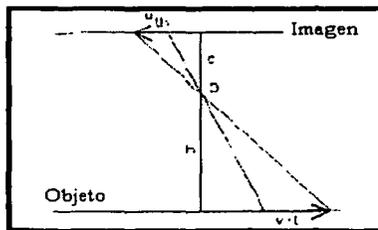
v : Velocidad (km/h)

t : Tiempo de exposición (sg)

u_{th} : Movimiento de la imagen (mm)

m_h : Escala de la imagen.

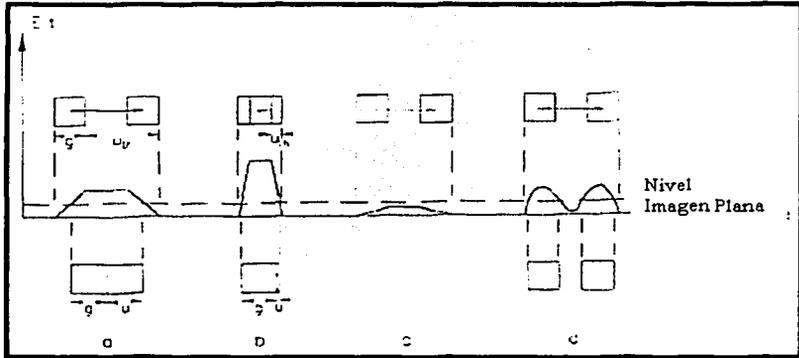
En la práctica, un punto de la fotografía no es un punto ideal, puesto que está movido en la emulsión de la fotografía. Particularmente importante, es la medición de un punto digital en fotogrametría, es la imagen de una señal cuadrada. La imagen de la señal movida en el plano imagen durante el tiempo de la exposición. La imagen de la señal será visible solamente cuando la energía de la luz ha sido recibida.



Movimiento teórico de la imagen.

Si se extrae el tamaño de la señal de la imagen sin movimiento de la imagen la práctica demuestra que solamente la mitad de la imagen teórica es efectiva:

$$u = 0.5 \cdot u_{th} = \frac{140 \cdot v \cdot t}{m_f}$$



- A: Movimiento rápido o tiempo de exposición largo.
 B: Movimiento lento o tiempo de exposición corto.
 C: Insuficiente iluminación (punto en sombra).
 D: Doble imagen causada por la vibración. Tiempo de exposición corto.

Cambio de la imagen como resultado del movimiento de la imagen.

En modernas cámaras aéreas el movimiento de la imagen causada por el movimiento uniforme de avance puede ser compensado por un ordenador que controla el desplazamiento de la placa y la película, con una velocidad durante la exposición de:

$$v' = \frac{c \cdot v}{h}$$

Este tipo de compensación del movimiento elimina las partes más significativas del efecto sobre la imagen, pero no elimina:

- Las tres rotaciones del avión, una montura de una cámara con giroestabilizador es necesario para compensar este efecto.
- Diferencias de alturas del terreno.
- Las variaciones de las velocidades de vuelo.

CAPÍTULO III. CÁMARAS MÉTRICAS Y AVIONES PARA FOTOGRAFÍA AEREA.

1. Breve descripción de los principales aviones fotogramétricos.

A continuación se muestra explica las abreviaturas de las principales características de los aviones fotogramétricos que aparecen en el listado correspondiente (Albertz Kreiling):

- Motores:
 - PE: Motor de émbolo.
 - TC: Motor de émbolo con turbocompresor.
 - TP: Turbohélice.
 - TJ: Turborreactor.
 - TF: Turbosoplante.
- Fabricante de motores:
 - Conti: Continental (USA).
 - DH: De Havilland (GBR).
 - GarAiR: Garrett AiResearch (USA).
 - GE: General Electric (USA).
 - Lycom: Lycoming (USA).
 - P & W: Pratt & Whitney (USA).
 - RR: Rolls Roice (GBR).
 - UACL: United Aircraft of Canada (CAN).

Siguiendo con la numeración de las columnas de la relación de aviones fotogramétricos es:

1. Potencia de despegue.
2. Configuración de las alas:
 - HW: Alas sobreelevadas.
 - MW: Alas medias.
 - LW: Alas bajas.
3. Tipo de tren de aterrizaje:
 - FG: Tren fijo.
 - RG: Tren retráctil.
4. Número de plazas.
5. Peso bruto.
6. Capacidad máxima de carburante.
7. Carga útil, incluido el carburante y la tripulación.
8. Velocidad de ascensión.
9. Altura del techo.
10. Velocidad horizontal.
11. Alcance.
12. Tiempo de vuelo.

2. Cámaras aéreas métricas.

Los dos principales objetivos de la fotografía aérea son la fotogrametría y la fotointerpretación. Para la fotointerpretación, el principal requerimiento es una alta calidad del detalle de reproducción; la definición de la imagen y la resolución de la óptica son las principales exigencias. Una geometría exacta, esto es libre de distorsiones, es menos importante en la fotointerpretación. Para fotogrametría, sin embargo, la geometría es lo más importante como

calidad de la imagen. Las cámaras aéreas métricas son por lo tanto las generalmente empleadas. El requerimiento de una geometría exacta fuerza al uso de un obturador central tanto que la orientación interna y externa sean válidas para la fotografía. Las fotografías tomadas con una cámara mediante un obturador focal plano que no tiene esta propiedad, no toman fotografías con cámaras de franja continua, en las cuales la película es movida por el paso de un corte fijo. De manera similar, los escáneres, en los cuales los detalles de la superficie terrestre son registrados línea por línea perpendicular a la dirección de vuelo, primero en cinta magnética y posteriormente transferido a material fotográfico, no posee la propiedad requerida en la fotogrametría normal. Las cámaras multispectrales poseen normalmente de cuatro a seis cámaras individuales, montadas juntas con ejes paralelos en un único ángulo, cada cámara está ajustada para un rango particular de longitud de onda.

El suceso más remarcable de la fotogrametría en los últimos años es debido en gran parte al progreso que se ha hecho en el desarrollo de la precisión de las cámaras. Quizás el desarrollo más reciente de las cámaras está en la construcción de lentes casi perfectas que resuelven los problemas del poder de resolución de las lentes y consiguen distorsiones casi despreciables.

Las cámaras aéreas se pueden clasificar de diferentes maneras:

- Por el tipo: Enmarcada, panorámica, tira, multibanda.
- Por al campo angular: Angulo normal de 75°, gran-angular de 75° a 100°, super-gran-angular superior a 100°.
- Por la distancia focal: menor a 6 pulgadas, de 6 a 12 pulgadas, mayor a 12 pulgadas.
- Por el uso: Cartografía, reconocimiento...

Las principales cámaras aéreas del mercado que estaban en uso en el año 1978 son las mostradas en la siguiente lista:



CARACTERÍSTICAS DE LAS CÁMARAS AEROFOTOGRAMÉTRICAS

Modelo de Cámara	Uso	Diseño Básico	Tiempo de Ciclo	Longitud Focal	Apertura de Lente	Medida formal	Tipo de disparo	Velocidad del disparo	Peso	Film Mag.	Film Size
T11	Mapeo	Marco	2.5 seg	6"	06.3	9" * 9"	Ambos lentes	1/75 - 1/500 seg	75 lbs	T - 11	9.5"
KC-1A	Mapeo	Marco	2.5 seg	6"	06.3	9" * 9"	Ambos lentes	1/75 - 1/500 seg	80 lbs	T-11 XC - 1	9.5"
XC-1B	Mapeo	Marco	2.5 seg	6"	06.3	9" * 9"	Ambos lentes	1/75 - 1/500 seg	80 lbs	KC - 1B	9.5"
KC-2	Mapeo	Marco	4 seg	6"	06.3	9" * 9"	Ambos lentes	1/100 - 1/800 seg	85 lbs	Integral	9.5"
KC-3	Mapeo	Marco	2.5 seg	88 mm	05.6	9" * 9"	Ambos lentes	1/100 - 1/800 seg	83 lbs	Integral	9.5"
KC-4A	Mapeo	Marco	2.5 seg	6"	05.6	9" * 9"	Ambos lentes	1/25 - 1/400 seg	95 lbs	Integral	9.5"
KC-4B	Mapeo	Marco	2.5 seg	6"	05.6	9" * 9"	Ambos lentes	1/50 - 1/700 seg	95 lbs	KC - 1B	9.5"
XC-6A	Mapeo	Marco	2.5 seg	6"	0.50	9" * 9"	Ambos lentes	1/100 - 1/800 seg	100 lbs	KC - 6	9.5"
KC-B	Mapeo	Marco	2.5 seg	6"	06.3	9" * 9"	Ambos lentes	1/75 - 1/500 seg	80 lbs	KC - 1B	9.5"
K&E Aero View 600	Mapeo	Marco	3.5 seg	6"	06.3	9" * 9"	Ambos lentes	1/150 - 1/500 seg	48 lbs	200, 400	9.5"
K&E Aero View 800	Mapeo	Marco	4.5 seg	8 + 6"	06.3	9" * 9"	Ambos lentes	1/150 - 1/250 seg	54 lbs	200, 400	9.5"
K&E Aero View 1200	Mapeo	Marco	2.5 seg	12"	06.3	9" * 9"	Ambos lentes	1/150 - 1/250 seg	58 lbs	200, 400	9.5"
FS-500	Mapeo	Marco	6"	6"	06.3	9" * 9"	Ambos lentes	1/10 - 1/500 seg	75 lbs	Deseable	9.5"
F-489	Mapeo	Marco	2.0 seg	6"	05.6	9" * 9"	Ambos lentes	1/25 - 1/900 seg	128 lbs	Integral	9.5"
RC-8	Mapeo	Marco	3.5 seg	6"	05.6	9" * 9"	Ambos lentes	1/100 - 1/700 seg muy variable	190 lbs.	RC - 8	9.5"
RC-9	Mapeo	Marco	3.5 seg	88 mm	05.6	9" * 9"	Ambos lentes	1/150 y 1/300 seg	180 lbs	Integral	9.5"
RC-10	Mapeo	Marco	1.6 seg	88 mm	05.6	9" * 9"	Rotatorio	1/100 - 1/1000 seg muy variable	140 kg	Cassette	9.5"
				150 mm	04.0	9" * 9"	Rotatorio				
				150 mm	03.6	9" * 9"	Rotatorio				
				210 mm	04.0	9" * 9"	Rotatorio				
300 mm	04.0	9" * 9"	Rotatorio								
Modelo galileo Santoni	Mapeo	Marco	2.5 seg.	6"	05.6	9" * 9"	Ambos lentes	1/125 seg 1/200 seg 1/300 seg 1/400 seg	80 lbs.	Separado	9.5"
SOM Film	Mapeo	Marco	4 seg.	125 mm	0.62	18 * 18 cm	Ambos lentes	1/75 y 1/100 seg 1/125 y 1/150 seg	75 lbs.	Separado	19 cm
SOM 125 mm	Mapeo	Marco	4 seg.	125 mm	0.62	18 * 18 cm	Ambos lentes	1/75 y 1/100 seg 1/125 y 1/150 seg	200 lbs.	Separado	19 cm
50 M Plana 210 mm	Mapeo	Marco		210 mm	05.0	18 * 18 cm	Rotatorio	1/75 y 1/100 seg 1/150 y 1/200 y 1/250seg	220 lbs.	Separado	19 cm
50 M Plana 210 mm	Mapeo	Marco		300 mm	05.0	18 * 18 cm	Rotatorio	1/75 y 1/100 seg 1/150 y 1/200 y 1/250seg	225 lbs.	Separado	19 cm
RMK 0.5/23	Mapeo	Marco	2.0 seg	25 mm	04.0	9" * 9"	Rotatorio	1/50 - 1/500 seg	60 kg	Separado	9"
	Mapeo	Marco	2.0 seg	150 mm	04.0	9" * 9"	Rotatorio	1/100 - 1/1000 seg	62 kg	Separado	9"
RMK 21/23	Mapeo	Marco	2.0 seg	210 mm	05.6	9" * 9"	Rotatorio	1/100 - 1/1000 seg	45 kg	Separado	9"
RMK 20/23	Mapeo	Marco	2.0 seg	305 mm	05.6	9" * 9"	Rotatorio	1/100 - 1/1000 seg	54 kg	Separado	9"
RMK 60/23	Mapeo	Marco	2.0 seg	610 mm	06.3	9" * 9"	Rotatorio	1/100 - 1/1000 seg	54 kg	Separado	9"
RMK 21/18	Mapeo	Marco	2.5 seg	210 mm	04.0	18 * 18 cm	Rotatorio	1/100 - 1/1000 seg	35 kg	Separado	10"
RMK 11.5/18	Mapeo	Marco	2.5 seg	115 mm	05.0	18 * 18 cm	Rotatorio	1/100 - 1/1000 seg	35 kg	Separado	10"
MRB 21 / 18	Mapeo	Marco	2.5 seg	210 mm	04.0	7" * 7"	Rotatorio	1/100 - 1/1000 seg	35 kg	MRB -K	20 cm
MRB 11.5 / 18	Mapeo	Marco	2.0 seg	115 mm	04.0	7" * 7"	Rotatorio	1/100 - 1/1000 seg	45 kg		20 cm
MRB 15 / 23	Mapeo	Marco	2.0 seg	150 mm	04.5	9" * 9"	Rotatorio	1/100 - 1/1000 seg	63 kg	MRB -K	9.5"
MRB 9 / 23	Mapeo	Marco	2.0 seg	90 mm	05.6	9" * 9"	Rotatorio	1/50 - 1/500 seg	44 kg	MRB -K	9.5"
K - 17 D	Mapeo	Marco	1.25 o 3.5 seg	6"	06.0	9" * 9"	Ambos Lentes	1/75 - 1/225 seg 1/25 - 1/150 seg	29.5 lbs 33 lbs	LA - 50 LA - 33	9.5"
				12"	05.0						
K - 20	Reconocedor de Día	Marco	Manual	6.5"	04.5	4" * 5"	Ambos Lentes	1/25 seg	11 lbs	"	9.5"
				1/250 seg							
								1/500 seg			

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Tipo de Camara	Uso	Diseño Basico	Tiempo de Ciclo	Longitud Focal	Apertura de Lente	Medida formal	Tipo de disparo	Velocidad del disparo	Peso	Film Mag.	Film Size
Marco	2.0 seg	6"	06.3	9" * 9"	Plano Focal	1/150 y 1/300 seg 1/300 y 1/900 seg	Plano Focal	A - 18 A - 28 A - 9B	9.5"	LA - 30 A - 9B LA - 32 A - 25 A - 3B	9.5"
		12"	05.0								
		24"	06.0								
		36"	08.0								
		40"	05.0								
		40"	12.0								
		40"	15.6								
K - 46	Reconocedor de Noche	Marco	0.5 seg.	6" 7"	02.5 02.5	4.5" * 4.5"	Plano Focal	Flash abierto	33.5 lbs	A - 23	5"
K-47	Reconocimiento nocturno	Marco	0.5 seg	12" 24"	02.5 04.0	9" * 9"	Ambos lentes	1/10 - 1/200	50 lbs 60 lbs	LA - 124 A - 28	9.5"
KA - 1	Reconocimiento de dia	Marco	1.75 seg.	12" 24" 36"	06.3 0.60 08.0	9" * 18"	Doble accion intralente	1/25 - 1/300	53 lbs 63 lbs 80 lbs	A - 25 LA - 23	9.5"
KA - 2	Reconocimiento de dia	Marco	0.55 seg.	6" 12" 24"	06.3 04.0 06.0	9" * 9"	Doble accion intralente	1/25 - 1/400	53 lbs 32 lbs 63 lbs	A - 28 LA - 35 LA - 50	9.5"
KA - 3A	Reconocimiento de dia	Marco	0.5 seg.	6"	06.3	9" * 9"	intralente	1/50 - 1/400	24.5 lbs	A - 18 A - 28	9.5"
KA - 18A	Reconocimiento de dia	Strip	—	6" 3" 6"	02.5 06.3 06.3	9" * 9" Std 9" amplias	Slit		75 lbs.	Cassette	9.5"
KA - 20B	Reconocimiento	Marco	0.85 seg	6" 12"	06.3 04.0	9" * 9"	intralente	1/50 - 1/300 1/50 - 1/250	57 lbs 60 lbs	A - 9B	9.5"
KA - 48	Reconocimiento de dia	Panoramico	0.5 seg.	6"	06.3	4.5" * 19"	Slit	1/300 - 1/4000	105 lbs	Especial	9.5"
KA - 52	Reconocimiento de dia	Panoramico	0.17 seg.	3"	04.5	4.5" * 10.8"	Slit	1/300 - 1/2000	85 lbs	Especial	9.5"
KA - 54	Surveillance	Panoramico	0.6 seg	3"	02.8	2.25" * 7.58"		1/50 - 1/2000	135 lbs	Integral	9.5"
KA - 55	Reconocimiento de dia	Panoramico	1.8 seg.	12"	05.6	4.5" * 18.8"	Slit	1/100 - 1/3000	100 lbs	Especial	9.5"
KA - 56	Reconocimiento	Panoramico	0.17 a 1.0 seg	3"	04.5	4.5" * 9.4"		1/90 - 1/3000	90 lbs	Intercambiable	9.5"
KA - 56A	Reconocimiento de dia	Panoramico	0.17 seg	3"	04.5	4.5" * 10.8"	Estatico	1/100 - 1/5000	90 lbs.	Especial	9.5"
KA - 59	Reconocimiento de dia	Panoramico	1.0 seg	12"	05.6	4.5" * 41"	Estatico	1/100 - 1/5000	160 lbs.	Especial	9.5"
KA - 60	Reconocimiento de dia	Panoramico	0.08 a 1.0 seg	3"	02.8	2.25" * 10"		1/100 - 1/10000	25 lbs	Intercambiable	70 mm
KA - 61	Reconocimiento diurno y nocturno	Marco	0.3 seg	52 mm	03.5	2.25" * 2.25"	Ambos lentes	bulbos - 1/500	6 lbs	Integral	70 mm
KB - 8a	Reconocimiento de dia	Marco	0.18seg	1.25"	04.5	2.25" * 2.25"	Plano focal	1/500 1/1000 1/2000 1/4000	9 lbs.	Especial	70 mm
				3"	02.8						
				6"	02.8						
KS - 47	Reconocimiento de dia	Marco	0.18 seg.	1.25"	04.5	2.25" * 2.25"	Plano focal	1/500 1/1000 1/2000 1/4000	15 lbs.	Vacio auto controlable	70 mm
				3"	02.8						
				6"	02.8						
				12"							
KS - 72A	Reconocimiento diurno y nocturno	Marco	0.17 seg.	3"	04.5	4.25" * 4.25"	Plano focal intralente	1/25 - 1/100 1/100 - 1/1000	44 lbs. menos cono focal	Especial	5"
				6"	02.8						
				12"	04.0						
				18"	05.6						
HR-230	Reconocimiento	Marco	0.33 seg	6"	05.6	9" * 9"	Plano focal	1/200 - 1/4000	67 lbs	A-9B	9"
HR-231	Reconocimiento	Marco	1.5 seg.	36"	010	9" * 18"	Intralente	1/25 - 1/500	122 lbs	Plato de contorno especial	9"
HR-233	Reconocimiento	Marco	1.5 seg	24"	08	9" * 9"	Intralente	1/250	100 lbs.	Modo A-9B Plato con contorno	9"
HR-235	Reconocimiento	Marco	2 seg.	12"	05.6	4.5" * 4.5"	Intralente	1/300	22.5 lbs	Integral	9"

50B

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Modelo de Cámara	Uso	Diseño Básico	Tiempo de Ciclo	Longitud Focal	Apertura de Lente	Medida formal	Tipo de disparo	Velocidad del disparo	Peso	Film Mag.	Film Size
HR-236	Reconocimiento	Marco	2 seg.	6"	05.6	4.5" * 4.5"	Intralente	1/250	14.5 lbs	Integral	9"
HR-320	Reconocimiento	Marco	1.65 seg.	40"	05.0	9" * 9"	Plano focal	1/100 - 1/1000	135 lbs	Modo A-9B	9"
LG-77A	Reconocimiento	Marco	0.33 seg.	48"	04.0	4.5" * 4.5"	Plano focal	1/100 - 1/1000	415 lbs	Integral	9"
KA-94A	Reconocimiento	Panoramica	0.25 a 0.08 CPS	24"	04.5	4.5" * 50.3"	---	1/75 - 1/10000	280 lbs	Cassette	9"
KA-97A	Reconocimiento	Panoramica	0.08 a 12 CPS	3"	02.8	2.25" * 9.4"	---	---	150 lbs	Cassette	70 mm
KA-65	Reconocimiento	Panoramica	6 CPS	3"	04.5	4.5" * 9.4" Banda de 4.5"	---	1/100 - 1/5000 1/12 - 1/5000	70 lbs	Integral	9"
KA-66A	Reconocimiento		1-12 CPS	3"	02.8	2.25" * 9.45"	Plano focal	1/100 - 1/10000	26.9 lbs	especial	70 mm
KR-b 8/24E	Reconocimiento de día y noche	Marco	0.2 seg.	80 mm	02.0	71.5 * 71.5 mm 3 cm	Plano focal	1/150 - 1/2000	46 Kg.	Cassette	9"
KR-b 8/24C	Reconocimiento de día y noche	Marco	0.2 seg.	80 mm	02.0	71.5 * 71.5 mm 3 cm	Plano focal	1/150 - 1/2000	11.5 kg	Cassette	9"
KR-b 6/24	Reconocimiento de día y noche	Marco	0.14 seg.	80 mm	02.0	50 * 40 mm 5 cm	Plano focal	1/150 - 1/2000	46 Kg.	Cassette	9"
TR-b 60/24	Reconocimiento	Marco	0.5 seg.	610 mm	04.0	115 * 230 mm	Entre lentes	1/150 - 1/1000	75 kg	Cassette	9"
KA-80A	Mapeo y Reconocimiento	Panoramica	3.5 seg.	24"	03.5	4.5" * 50.25"	Plano focal	0.35 - 29 mseg.	255 lbs.	Integral	9"
KA-801	Mapeo y Reconocimiento	Panoramica	1.7 seg.	24"	03.5	4.5" * 50.25"	Plano focal	0.17 - 9.5 mseg.	280 lbs.	Cassette	9"
KA-83A	Mapeo y Reconocimiento	Panoramica	1.74 seg.	24"	03.5	4.5" * 50.25"	Plano focal	0.18 - 11.2 mseg.	230 lbs.	Integral	9"
F-905	Reconocimiento	Banda	Observaciones	6"	05.6				80 lbs.		9"
Modelo 10	Multiespectro	Marco	2 seg.	150 mm	02.8	2.125" * 4.062"	4 Planos focales	1/65 - 1/150 1/150 - 1/350 1/350 - 1/800	75 lbs.	A-5A A-9B	9"
Modelo 11	Multiespectro	Marco	2 seg.	4"	02.8	3.5" * 3.5" 4 cm	Deslizamiento simple de plano focal	1/65 - 1/150 1/150 - 1/350 1/350-1/800	75 lbs.	A-5A A-9B	9"
Modelo 12	Multiespectro	Marco	2 seg.	6"	02.8	3.5" * 3.5" 4cm	Deslizamiento simple de plano focal Intralente (opcional)	1/65 - 1/150 1/150 - 1/350 1/350-1/800	75 lbs.	A-5A A-9B	9"
Experimental MB-1 Multibanda	Multiespectro	Marco	1 seg.	6" 4"	04.0 04.0	2.25" * 2.25" 2.25" * 2.25"	Cercano a los lentes	1/25 - 1/400	131 lbs. 135 lbs	Modelo D modificado	9"
KA - 89B	Reconocedor de día	Panoramica	1.6 seg.	3"	02.8	2.25" * 9.4"	Plano focal	1/120 - 1/6000	50 lbs.	P/N 1134R100	70 mm
KA - 91B	Reconocedor de día	Panoramica	1.33 seg.	18"	04.0	4.5" * 19"	Captura variable	1/100 - 1/500	160 lbs.	Mag LA-452A Cas LA-453A	9"
KA - 93	Reconocedor de día	Panoramica	0.5 seg. 0.75 seg. 1 seg. 1.25 seg.	24"	05.6	4.5" * 4.0"	Busqueda plana con disparo de captura	1/100 - 1/500	160 lbs.	Mag LA-452A Cas LA-453A	9"
K5-87B	Reconocedor de día y noche	Marco	6 seg.	3" 6" 12" 18"	04.5 02.8 04.0 04.0	4.5" * 4.5"	Plano focal	1/60-1/3000 Plano focal 1/25, 1/50, 1/100 entre lentes	64 lbs. 61.1 lbs. 63.7 lbs. 78.5 lbs	Mag LA-325A Cas LA-354A	9"
K5-116A	Reconocedor de día	Panoramica	1.3 seg. 1.0 seg.	6" 12" 18"	02.8 04.0 04.0	4.5" * 18.9" 4.5" * 29.5" 4.5" * 18.9"	Velocidad variable	1/100 - 1/5000	120 lbs.	Mag LA-452A Cas LA-453A	9"
K5-120A	Reconocedor de día	Panoramica	1 a 12 seg.	3"	02.8	2.25" * 9.4"		1/100 - 1/2000	170 lbs.		70 mm
K5-121A	Reconocedor de día	Marco		1.25" 3" 6"	04.5 02.8 02.8		Plano focal	1/250 - 1/4000			70 mm
K5-127A	Reconocedor de día	Marco	0.5 - 1.5 seg.	66"	08.0	4.5" * 4.5"		1/30 - 1/1500			9"
APOLLO	Captura estelar	Marco	8.5 - 33 seg.	3"	04.5	4.5" * 4.5" 1.25 dia	Entre lentes	1/15 - 1/250 1.5 seg	225 lbs.	Integral	9" 35 mm
MRB 30/2323	Captura	Marco	1.7 - 2.6 seg.	12"	05.6	9" * 9"	Rotatorio	1/100 - 1/10000			

50c

50D

Modelo	Tipo de Cámara	Uso	Diseño Básico	Tiempo de Ciclo	Longitud Focal	Apertura de Lente	Medida formal	Tipo de disparo	Velocidad del disparo	Peso	Film Mag.	Film Size
KA-45A		Reconocedor de día y noche	Marco	1 - 6 seg	6"	02.8	4.5" * 4.5"	Plano focal	1/60 - 1/3000	425 lbs.	Cassette	9"
KA-57A		Reconocedor de día	Panoramica	0.2 seg	3.15"	02.8	2.25" * 8.2"	Plano focal	1/75 - 1/600	189 lbs.	Cassette y cinta	70 mm
KA-58A		Reconocedor de día	Panoramica	0.87 seg	18"	04.0	4.5" * 44.1"	Plano focal	1/100 - 1/3000	387.2 lbs.	Cassette	9"
KA-63A		Verificador de día			58 mm	04.5	2.25" * 9.45"		1/500 - 1/1000		LA-364A	
		Reconocedor de día y nocturno	Marco	3 seg por ciclo	80 mm	05.6	2.25" * 9.45"	Plano D-f	1/2000	60 lbs.	Cassette	9"
KA-68A		Reconocedor de día	Panoramica	1 a 6 por seg	3" biogon	04.5	4.5" * 9.4"	Variable a plano focal	1/92.5 - 1/5000	90 lbs.	Cassette	9"
KA-74A		Reconocedor de día y nocturno	Marco	1.2 o 4 seg 1 o 2 seg.	6"	02.8	4.5" * 4.5"	Plano focal	1/1000 - 1/2000	37 lbs.	LA-384A	9"
KA-76A					6"	02.8				52.5 lbs.	LA-414A	
		Reconocedor de día y nocturno	Marco	6 por seg.	1.75"	05.6	4.5" * 4.5"	Plano focal	1/60 - 1/3000	51.7 lbs.		9"
					3"	04.5				58.2 lbs.	Cassette	
					12"	03.5				68.5 lbs.		
KA-82A		Reconocedor de día	Panoramica	10 seg / ciclo a 1.7 ciclos / seg	12"	03.8	4.5" * 29.3"	Plano focal	1/30 - 1/12000	216.7 lbs.	LA-418A Cassette	9"
KA-88A		Reconocedor de día	Marco	2 seg max	24"	08.0	9" * 9"	Plano focal	1/500 1/1000 1/2000	135 lbs.	Cassette	9"

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

CARACTERÍSTICAS DE LAS PELÍCULAS

Film Load	Film Spools		Mount used	Estatus	name	generalidades	tipo de camara
	Core Dim	Flange Dim					
390"	2.5"	6.25"	Art 25 ; A - 28	Ltd. Std.	Fairchild	Lentes Selectos Meimgon	T - 11
390"	2.5"	6.25"	LS - 58; A - 28 Art 25 ; Art - 21	Ltd. Std.	Fairchild	Lentes Planingon 80.000" altimetro	KC - 1A
390"	2.5"	6.25"	LS - 58; A - 28 Art 25 ; Art - 21	Std.	Fairchild	Distorsion de 10 micras	
250"			Art 24	Dev.	Fairchild	Lentes Planingon	KC - 2
390"	2.5"	6.5"	Art 25 ; A - 28	Std.	Aeroflex	Super lentes aviagon	KC - 3
390"	2.5"	6.5"	LS - 58; A - 28 Art 25	Std.	Fairchild	Lentes Geocon	KC - 4A
390"	2.5"	6.5"	LS - 58; A - 28 Art 25	Exp.	Fairchild	Lentes Geocon	KC - 4B
600"	2.5"	7.25"	LS - 7; LS - 8	Std.	Fairchild	ABC	KC - 6A
390"	2.5"	6.5"	Art 25 ; Art - 21	Std.	Fairchild	Focused for 1R film	KC - 8
200"	2.5"	4"	Aero 2000	Actual	Aero Serv.	Lentes Pricon	K & B Aero View 600
390"	2.5"	6.25"	Aero 2000	Actual	Aero Serv.	Lentes Aerober	K & B Aero View 800
200"	2.5"	4"	Aero 2000	Actual	Aero Serv.	Lentes Merogon	K & B Aero View 1200
390"	2.5"	6.25"	Aero 2000	Actual	Aero Serv.	Lentes Merogon	K & B Aero View 1200
350"	2.5"	6.5"	Suspendida	comercial	Fairchild	Lentes Planingon	FS - 500
700"	2.5"	6.25"	Arreglada	Std.	Fairchild	Gran altitud	F - 489
200"	2.5"	5.25"	Integral	comercial	Wild Heerbrug	Lentes Aviagon	RC - 8
200"	2.5"	5.25"	Integral	comercial	Wild Heerbrug	Super lentes aviagon	RC - 9
500"	2.5"	6.25"	Integral	comercial	Wild Heerbrug	Lentes Intercambiables	RC - 10
360" 180"	2.5"	6.25"	Especial	Std.	Oficina Florencia	Orthogon	Galilea Santoni Mod. VI
50 m	4.35 cm	13.5cm	-	-	SOM paris	Aquiler	Som FILM
96"	-	1.7mm	-	-	SOM paris	Aquiler	SOM 125 mm
Plato 96	Espesor del plato	1.7 mm			SOM Paris	Orthor (orthoscopic)	SOM Plato 216 mm
Plato 96	Espesor del plato	1.7 mm			SOM Paris	Orthor (orthoscopic)	SOM Plato 200 mm
300"	54 mm	168 mm	AS-5	Std.	Carl Zeiss Oberkochen	Pan, color e IR films	RMK a 15/23
300"	54 mm	168 mm	AS-2; AS-3 AS-5 c/adaptador	Std.	Carl Zeiss Oberkochen	Pan, color e IR films	RMK a 15/23
300"	54 mm	168 mm	AS-2; AS-3 AS-5 c/adaptador	Std.	Carl Zeiss Oberkochen	Pan, color e IR films	RMK a 21/23
300"	54 mm	168 mm	AS-2; AS-3 AS-5 c/adaptador	Std.	Carl Zeiss Oberkochen	Pan, color e IR films	RMK a 30/23

50 E

TESIS CON
FALTA DE ORIGEN

Film Load	Film Spools		Mount used	Estatus	name	generalidades	tipo de camara
	Core Dim	Flange Dim					
300"	54 mm	168 mm	AS-2, AS-3 AS-5	Std	Carl Zeiss Oberkochen	Pan. color e IR films	RMK a 60/23
120 m	150 mm	168 mm	AS-1	Limitado Std.	Carl Zeiss Oberkochen	Pan y color	RMK a 21/18
120 m	150 mm	168 mm	AS-1	Limitado Std.	Carl Zeiss Oberkochen		RMK a 11.5/18
120 m			MRB-A	Std.	Zena	Escala de grises en cada fotografia	MRB a 21/1818
120 m			MRB-A	Std.	Zena		MRB a 11.5/1818
120 m 150 m			MRB-A	Std.	Zena	Escala de grises en cada fotografia	MRB a 15/2323
120 m 150 m			MRB-A	Std.	Zena	Escala de grises en cada fotografia	MRB a 9/2323
390"	2.25"	6.25"	A-24	Limitado Std.	Fairchild	Fotografia de proposito gra.	K-170
20"	2.25"	2.5"	Manual	Limitado Std.	Fairchild Oraflex	Manual	K-20
390"	2.25"	6.5"	A-28	Limitado Std.	Fairchild CAS	Proposito general	K-22
390"	2.25"	6.25"	A-28	Std.	Fairchild GE	Flash electronico	K-37
390"	2.25"	6.25"	Art 25; A-28	Std.	Fairchild	Medio a gran altitud	K-38
250"	2.25"	5.6"	A-26	Std.	Hycom	Baja altitud	K-46
390"	2.5"	6.5"	A - 28 ARA-6	Alt. Std	Fairchild	Baja, media y gran altitud	K - 47
390"	2.5"	6.5"	Arreglado	Alt. Std	Fairchild	Media y gran altitud	KA - 1
390"	2.5"	6.5"	Arreglado A - 23	Alt. Std	Fairchild GE	Baja, media y gran altitud	KA - 2
390"	2.5"	6.5"	A - 28	Std.	Fairchild	Media y baja altitud	KA - 3A
250"	2.5"	5.1"	ART 21	Std.	CAS	Baja altitud, gran velocidad IMC - 1° a 30° por seg.	KA - 18A
390"	2.5"	6.5"	Especial		Hycon	Bajo peso, compacto	KA - 20B
1500"			Arreglado		Fairchild	180° rotacion de prisma	KA - 48
900"			Arreglado		Fairchild	180° rotacion de prisma IMC AEC	KA - 52
500"			Estabilizado		Fairchild	Lentes rotatorios	KA - 54
500" a 1500"	2.5"	10.5"	LS - 58; ART - 63		Hycon	90° de rotacion gran altitud AEC	KA - 55

50 F

TESIS CON
 FALTA DE ORIGEN

506

Film Spools							
Film Load	Core Dim	Flange Dim	Mount used	Estatus	name	generalidades	tipo de camara
250" 500" 1000"			Ninguno		Fairchild	Prisma rotatorio	KA - 56
250" a 1000"	2.5"	10.5"	Arreglado o Estab.		Fairchild	Prisma rotatorio AEC 180°	KA - 56A
4000"	2.5"	12"	Arreglado		Isek	Prisma rotatorio 180°	KA - 59
250"					Fairchild	Prisma rotatorio	KA - 60
30"			Manual		Isek	Procesamiento	KA - 61
100"			Arreglado		JA Maurer AEC		KB - 8A
85"			Manual		JA Maurer		KS - 67
250" a 500"			Art - 63; LS - 58		Hycon	AEC proceso de cassette	KS - TIA
390"	2.25"	6.25"	Especial		Hycon		HR-230
1000"	2.25"	10.5"	Arco especial		Hycon	Busqueda obligada con 148° de cobertura	HR-231
390"	2.25"	6.25"	Montaje IMC		Hycon	Busqueda obligada con 90° de cobertura	HR-233
100"	1.25"	3.25"	Especial		Hycon	Extrema gran altitud	HR-235
100"	1.25"	3.25"	Especial		Hycon	Extrema gran altitud	HR-236
390"	2.25"	6.25"	Especial		Hycon	Gran altitud	HR-320
250"	2.25"	4.25"	Especial		Hycon	Gran altitud	LG-TIA
2000"			Arreglada		Fairchild	Media-alta altitud AEC	KA-94A
3000"			Arreglada		Fairchild	Baja altitud, prisma rotatorio, AEC	KA-97A
1000"			Arreglada		Fairchild	Prisma rotatorio, pelicula movil, AEC, FMC	KA-65
250"			Arreglada			Prisma rotatorio, baja	KA-66A
75 m	54 mm	151 mm	Ninguna	Estandar	Carl Zeiss	144° correccion de coseno, IMC operación ejecutada	KR-6, 8/24E
15 m	25 mm	63 mm	Ninguna	Estandar	Carl Zeiss	144° correccion de coseno, IMC operación ejecutada	KR-6, 8/24C
75 m	54 mm	151 mm	Ninguna	Estandar	Carl Zeiss	180° correccion de coseno, IMC	KR-6, 6/24
75 m	54 mm	151 mm	Ninguna	Estandar	Carl Zeiss	Baja altitud.	TR-6, 60/24
6500"	6"	18"	Vib, isolator	Estandar	Itek		KA - 80A
2000"	2.25"	12"	Vib, isolator	Estandar	Itek		KA - 801
2000"	4"	11"	Vib, isolator	Estandar	Itek		KA - 83A
			Arreglada		Fairchild	0.005 seg/línea transmision.	F-905
250"	2.25"	5.8"	RC-8	Estandar	Corp. Spectral	4 lentes con 4 formatos, IMC	Modelo 10

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Film Spools		Mount used	Estatus	Productor	generalidades	tipo de camara
Core Dim	Flange Dim					
2.25"	5.8"	RC-8	Estándar	Especial Data Corp.	4 lentes con 4 formatos IMC en imagen B	Modelo 11
2.25"	5.8"	RC-8	Estándar	Especial Data Corp.	4 lentes con 4 formatos IMC en imagen A	Modelo 12
	3.25"	A-28, LS-58	Experimental	Boller & Chivens	4 canales con division 460 mm, 550 mm, 700 mm, 780 mm	Experimental MB-1 Camara multibanda
		Arreglada	Estándar	Fairchild	Para alta velocidad, vuelo bajo	KA-89B
MS-26565-10		Cabeza giratoria	Estándar	Chicago Aereal Ind.	Gran escala, prisma rotatorio RE-4	KA-91B
		Montada, giro rotat.	Estándar	Chicago Aereal Ind.	Prisma rotatorio, RE-5 y E-111	KA-93B
			Estándar	Chicago Aereal Ind.	Sincronia de iluminacion nocturna en RF-4	KS-87B
		Montada, giro rotat.	Estándar	Chicago Aereal Ind.	Prisma rotatorio pelicula movible	KS-116A
		Arreglada	Estándar	Fairchild	Baja altitud; prisma rotatorio pelicula movible	KS-120A
		Arreglada	Estándar	Chicago Aereal Ind.	RF-5 (Arabia Saudita, Brazil, Jordania)	KS-121A
		Arreglada	Estándar	Chicago Aereal Ind.	Bajo rango RF-4	KS-127A
		Especial	Compacta	Fairchild	15-17 señales de operación	APOLLO
		MRBA	Estándar	Zena		MRB-302523
Spec MS2656-9		Especial	Estándar	Chicago Aereal	Para USN; 1,3 y 12 lentes disponibles	KA-45A
		LA-297 LA-305A	Estándar	Perkis Eleaner	Baja altitud; USN-RASC Lentes gemelos	KA-57A
		LA-301A	Estándar	Perkis Eleaner	Gran altitud; USN RA-5C	KA-58A

504

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

501

Film Load	Film Spools		Mount used	Estatus	Productor	generalidades	tipo de cámara
	Core Dim	Flange Dim					
180"	75" 200"	MS-26565-15 MS-26565-17	Arreglada	Estándar	Chicago Aereal Ind.	Posible reconocedor de día Armada	KA-63A
1000" base delgada			Arreglada		Fairchild	Baja altitud, rotación doble del prima	KA-68A
100" 180"			LA-366A	Estándar	Actron	KS-91A	KA-74A
250"		MS-26565-9	LA-408A LA-409A LA-160A	Estándar	Chicago Aereal Ind.	KS-104A	KA-76A
2000"			Montada en bloque	Estándar	Fairchild	Mediana-gran altitud lentes rotatorios	KA-82A
1500" base delgada			Arreglada		Actron	Mediana-gran altitud 5 posiciones; HC-338A	KA-88A

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2.1. Diseño de las cámaras aéreas.

La mayoría de las cámaras aéreas usadas en el mundo son del tipo enmarcadas, solamente las cámaras panorámicas y de tira o banda no se consideran de este tipo. Una cámara enmarcada es aquella en la que el marco o formato es expuesto a través de las lentes que son fijadas en el plano focal. La exposición puede ser controlada por medio de las lentes del obturador, el plano focal del obturador, la rejilla del obturador o por iluminación del objeto para un pequeño intervalo (fotografía nocturna). La película está sostenida de manera estacionaria en el plano focal durante la exposición, o es movida para compensar el movimiento de la imagen.

Las principales partes de una cámara aérea son:

- Almacén de la cámara: Esta parte de la cámara lleva la película expuesta y la que falta por exponerse y también contiene el mecanismo de avance y de planeidad de la película.

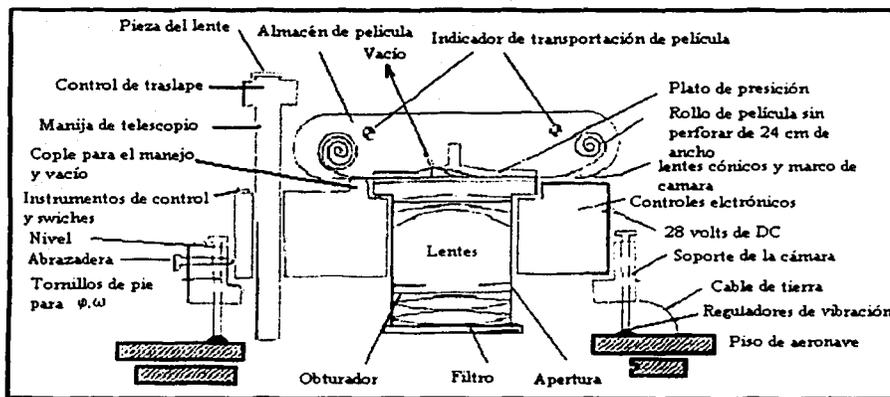
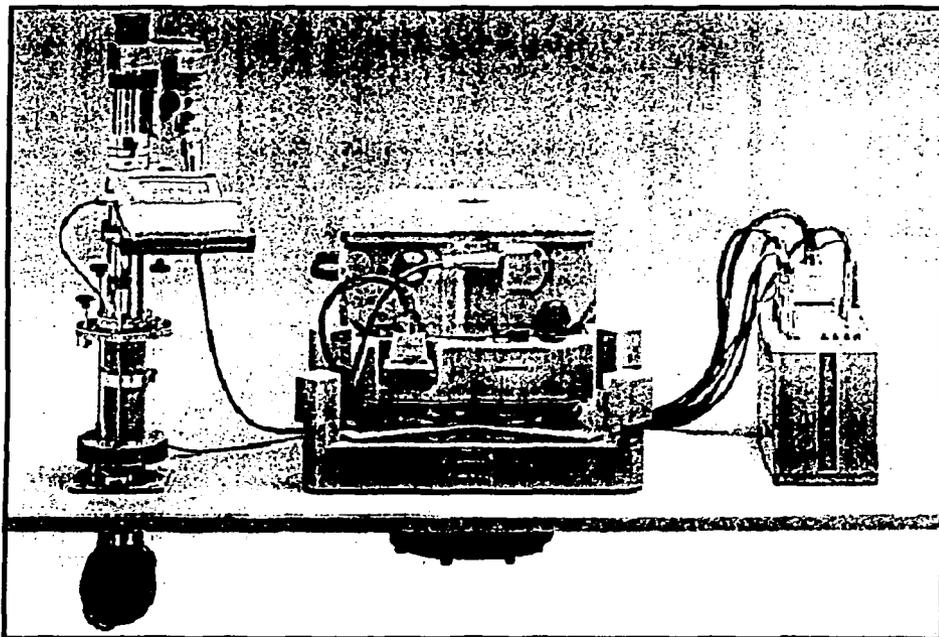


Diagrama esquemático de los principales componentes de una cámara aérea

- Cuerpo de la cámara: Consiste en el mecanismo impulsor de la película, el cual puede ser mediante un motor eléctrico o manualmente.
- Cono de lentes: Contiene las lentes, filtro, obturador y diafragma.
 1. Lentes: Son el elemento más importante de las cámaras aéreas. Las lentes recogen los rayos de luz del espacio objeto y pasando por el foco crea la imagen detrás de la imagen en el llamado plano focal.
 2. Filtro: Su función es la de reducir los efectos de la atmósfera, ayuda a distribuir la luz de manera uniforme en el formato entero y protege a las lentes de averías y polvo.
 3. Obturador y diafragma: Los dos en conjunto regulan la cantidad de luz que es permitido al pasar la luz por el sistema de lentes. El obturador controla el tiempo que se permite pasar a la luz, y el diafragma controla el tamaño de apertura y por tanto el tamaño de haz de luz que se permite pasar por las lentes.
- Plano focal: Es el plano en el cual todos los rayos de luz incidentes pasan por el foco. En fotografía aérea las distancias a los objetos son grandes con respecto a la distancia de la

imagen. Las cámaras aéreas tienen una distancia focal fija a los objetos en el infinito. Esto hace que el plano focal se encuentre a la misma distancia que la longitud focal que se encuentra detrás del punto nodal de las lentes de la cámara. En el plano focal se coloca la película cuando se realiza la exposición.

El punto principal se define como el punto en el plano focal donde una línea perpendicular al plano focal trazada desde el punto nodal trasero de las lentes de la cámara intersecta con el plano focal.



Telescopio. Terminal de control.

Cámara.

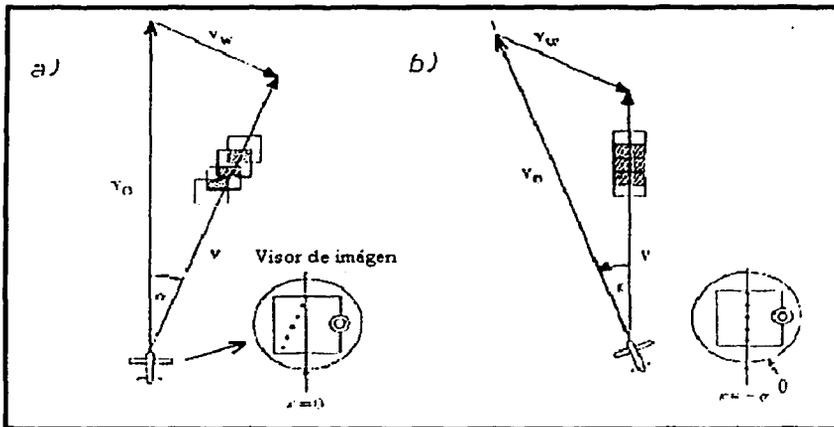
Unidad de control.

Cámara RMK TOP 15/23 DE Zeiss Oberkochen.

La cámara puede ser nivelada manualmente por tornillos niveladores o por control remoto con un telescopio de navegación o incluso completamente automático con un giróscopo. La montura de la cámara está sujeta al suelo del avión por gomas que regulan las vibraciones. El montaje de la cámara en el avión lleva todos los elementos para poderse girar respecto al eje vertical. El cono de lentes está introducido en el grupo de entrada. La película está colocada en el armazón del plano focal del cono de lentes y contiene el rodillo de presión y el mecanismo para la creación de vacío y presión del rodillo contra el armazón del plano focal.

El ciclo de la cámara corre automáticamente después de darle al mando para tomar la primera fotografía y sigue los pasos: exposición (en las cámaras modernas lleva la compensación del movimiento de la imagen), levanta el rodillo de presión, libera el vacío, transporta la película,

avanza el contador del número de fotografía, aplica el vacío de nuevo y presiona el rodillo del armazón del plano focal. La cámara está ahora preparada para otra exposición y espera el pulso de la próxima exposición. Este pulso puede ser generado por el operador (apuntando una simple fotografía) o automáticamente por el control de recubrimiento de una serie de fotografías. El control del recubrimiento está combinado con el visor de la imagen del telescopio. El ciclo de la cámara requiere sobre 1.6 a 2 sg., el cual es el tiempo más corto posible para el intervalo entre dos fotografías.



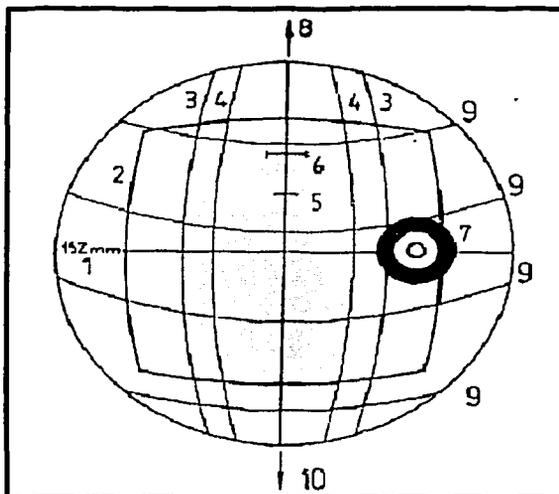
V_a = Vector de la velocidad del avión.
 V_w = Vector de la velocidad del viento.
 V = Vector resultante de la velocidad por encima del suelo.

a: Resultado de la deriva. b: El curso del avión está corregido en $\chi = -\alpha$.

En el visor de la imagen, el operador observa el movimiento aparente del terreno y, además:

- El campo de vista, definido por los encuadres intercambiables los cuales corresponden a los campos de vista de los objetivos individuales.
- Una imagen de la burbuja del nivel, de forma que puede controlarse y reajustarse la nivelación, si es necesario.
- Una cruz central, definida por un punto en blanco (en el momento de la exposición está señalada por una lámpara de control).
- Una línea central, contra la cual puede controlarse y ajustarse el ángulo de deriva de la cámara por observación del movimiento aparente de un punto próximo a esta línea y rotando la cámara sobre el eje vertical hasta que el punto aparezca en su movimiento paralelo a la línea. La cámara estará entonces orientada a lo largo de la trayectoria verdadera de vuelo del avión. Esta línea también sirve para contrastar la trayectoria del avión en la visual de navegación. El operador puede informar de las desviaciones al piloto para requerirle la trayectoria, junto con la información de la velocidad, y juntos pueden corregir interactivamente los errores.
- Un juego de líneas curvas, las cuales sirven como reguladores del recubrimiento. Las líneas deben aparecer para moverse a la misma velocidad que la imagen de la tierra, esto es aparecen para ser fijadas al terreno. Si las líneas se mueven más rápido que la imagen del

terreno, el operador debe bajarlas lentamente, o debe acelerarlas si se están moviendo demasiado lento. Cuando las líneas se mueven a la misma velocidad que la imagen del terreno, las fotografías estarán realizándose a los intervalos oportunos que se requirieron para el recubrimiento.



1. Distancia principal, asegura el buen uso del encuadre. 6. Recubrimiento del 60 %.
 2. Imagen del encuadre. 7. Nivel de burbuja.
 3. Recubrimiento lateral del 20 %.
 4. Recubrimiento lateral del 30 %.
 5. Marca de aviso para apuntar la fotografía. 8. Dirección de vuelo.
 9. Líneas reguladoras del recubrimiento
 10. Dirección del movimiento de las líneas.
- Imagen del visor.**

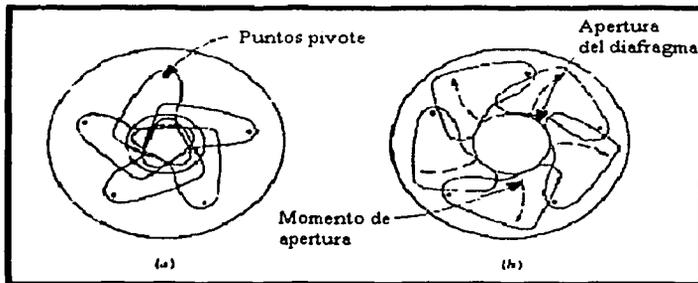
2.2. Necesidades de las cámaras aéreas.

Las cámaras aéreas tienen que ser construidas para ir dentro de los aviones y por tanto deben satisfacer rigurosas condiciones, por ejemplo interferencias de radio, operar con corriente directa de 28 V., e ir montadas de acuerdo con las regulaciones de seguridad aéreas.

Los requisitos de la orientación exterior deben ser conocidos. En fotogrametría terrestre, la orientación externa puede ser determinada en algunos casos, pero esto no es posible cuando las fotografías se realizan desde un avión:

- La cámara debe ser montada de tal modo que pueda ser nivelada con tornillos para asegurar que las inclinaciones de la cámara en ω y ϕ sean menores que $\pm 5'$, límite usual de inclinación para instrumentales analógicos. Estos límites no son aplicables a instrumentales analíticos. Las cámaras modernas son automáticamente niveladas por medio de dos giróscopos de precisión y sensores de nivelación.
- La montura debe tener algún medio de compensación para que la cámara pueda ser alineada a lo largo del suelo del avión ($\chi < 3'$). La cámara por lo tanto debe estar libre de rotaciones en la montura alrededor de sus ejes.

- La dirección de vuelo debe ser determinada y mantenida, además de la altura. Un buen equipo de navegación es, por tanto necesario.
- El planeamiento de vuelo entre fotografías sucesivas debe ser mantenido uniforme o llano.
- El equipo de vuelo (piloto, copiloto, operador de cámara, navegador) deben trabajar como un equipo único que asegure que la posición de las fotografías sean lo más cercanas posible a las posiciones del planeamiento. El avión debe llevar a bordo un sistema de intercomunicación.
- El obturador central para tiempos de exposición cortos (1/150 sg, 1/1000 sg) y con alta eficacia es absolutamente necesario para asegurar una uniforme orientación externa para la fotografía entera.



a. Obturador cerrado.

b. Obturador abierto.

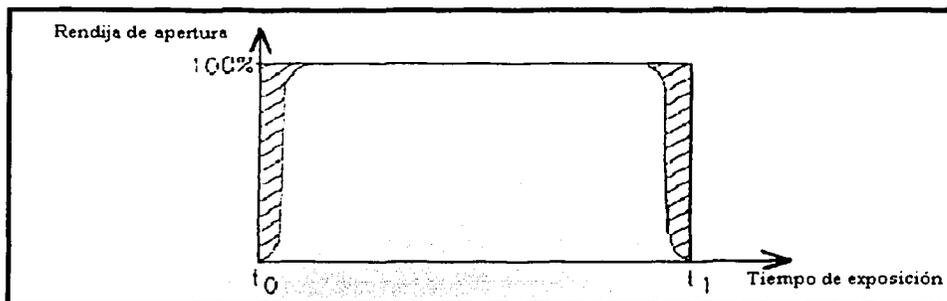
Esquema de un obturador de tipo hoja.

- Las correcciones en el rumbo solamente pueden hacerse entre exposiciones individuales. El operador de la cámara y el piloto necesitan de una señal en la visual en el momento de la exposición.
- El movimiento debido al avance del avión durante la exposición causa movimientos en la imagen, lo cual puede ser compensado por el movimiento de la película. Las marcas fiduciales deben quedar bien definidas.
- El flash de exposición de las marcas fiduciales debe coincidir dentro de 1 msg. con el momento medio de exposición:

$$t_m = 0.5 \cdot (t_0 + t_1)$$

Siendo:

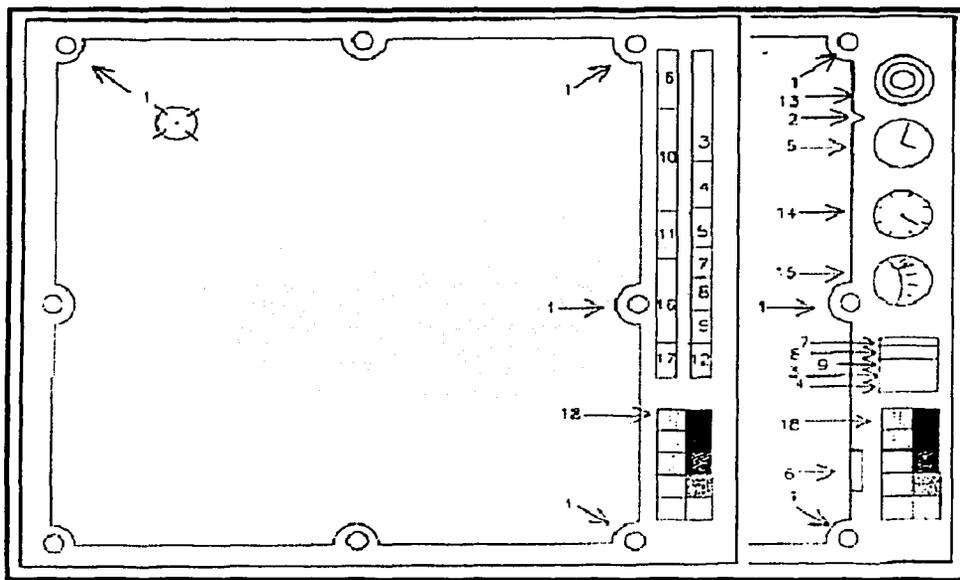
t_m : El tiempo de exposición. Puede ser medido digitalmente o con G.P.S.



El obturador debe ser abierto y cerrado lo más rápido posible.

Con respecto a la orientación interna, las cámaras aéreas difieren de las cámaras terrestres en:

- La distancia principal está casi siempre fijada, aunque el objetivo de la focal no enfoque al infinito, sino más bien a una distancia de 1000 m.
- El formato de la imagen actualmente es de 23 x 23 cm. Esta estandarización reduce el costo de la película, equipos de revelado y restituidor. Este formato grande también asegura buen área de cobertura.
- Para mantener llana la película debe ser sostenida al vacío.
- La diferencia de temperatura entre el aeropuerto (puerta de cierre de la cámara, la posición del avión durante mucho tiempo al Sol) y la altura de trabajo (puerta de apertura de la cámara) es muy grande, una diferencia de 50° C puede ocurrir en un periodo de tiempo pequeño. Medidas especiales deben tomarse para subsanar esa gran diferencia, por tanto se debe usar al máximo materiales con el mismo coeficiente de expansión termal, desviación del aire frío, posibilidad de una puerta de vidrio en el suelo del avión.
- Las marcas fiduciales deben estar iluminadas.
- El número de marcas fiduciales, hasta hoy son generalmente cuatro, es mejorado al incrementarse en ocho, la mitad de ellas en mitad de los lados de las fotografías y la otra mitad en las esquinas donde la influencia de los errores son mayores.
- Una novena marca fiducial, la cual ocupa un lugar asimétrico, no necesita ser iluminada ni tanta precisión como las otras ocho. Sirve para determinar la posición de la fotografía cuando se coloca en un comparador o en un restituidor analítico. Si no se dispone de esta marca, el nivel de burbuja puede servir para el mismo propósito.



- | | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. Ocho marcas fiduciales. | 7. Número de cámara. | 13. Nivel circular. |
| 2. Novena marca, asimétrica. | 8. Distancia principal. | 14. Grosero indicador de altura. |
| 3. Breve nombre del proyecto. | 9. Número de almacén. | 15. Fino indicador de altura. |
| 4. Fecha. | 10. Datos de orientación externa. | 16. Tiempo de exposición. |
| 5. Hora (tiempo). | 11. Recubrimiento. | 17. Movimiento de la imagen. |
| 6. Número de fotografía. | 12. Escala de la fotografía. | 18. Dibujo de grises. |

Datos auxiliares en la imagen de una fotografía digital: Izquierda y fotografía analógica: Derecha.

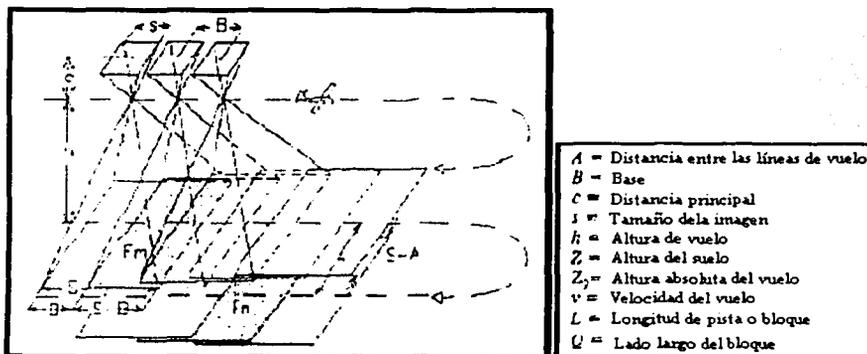
Una extensa gama de datos auxiliares deben ser impresionados con cada fotografía para ayudar al posterior procesado, y organizar el almacenaje de las fotografías. Las cámaras modernas visualizan dos filas de información digital programada en los bordes de las fotografías:

- Número de fotografía.
- El tiempo, para que, por ejemplo, de la combinación del tiempo y la dirección de las sombras, la dirección del Norte pueda ser localizado.
- La altura de vuelo, con una precisión de ± 50 m., a través de la cual la escala de la fotografía puede ser deducida.
- Las coordenadas del centro de proyección.
- Posibilidad de un nivel circular, el cual puede revelar una mala nivelación. Un nivel de burbuja, está afectado por las fuerzas centrífugas en vuelo, tanto que no puede ser usado para medidas aproximadas de la orientación externa.
- La fecha, número de la cámara y almacén o número del rodillo de vacío, proporciona una referencia del vuelo y el certificado de calibración.
- El nombre del proyecto, de forma que se es capaz de deducir el propietario de las fotografías.

- La distancia principal, para la reproducción de la orientación interna y la escala.
- Los datos de la orientación externa si la cámara está combinada con un sistema de posicionamiento global (G.P.S.).
- Un indicador de diferencias de altitudes, está equipado de un estatoscopio.
- Datos de la exposición: abertura, tiempo de exposición y compensación del movimiento de la imagen.

2.3. Plancamiento de vuelo.

En la práctica la fotogrametría aérea está limitada al caso normal o al caso aproximadamente normal para ser realizada. Las desviaciones individuales de las fotografías del caso estricto, son en la práctica, no mayores $\Delta\omega = \pm 5''$, $\Delta\phi = \pm 3''$ y $\Delta\chi = \pm 15''$. Una tolerancia de $\pm 2\%$ en la altura de vuelo es usual, por otro lado la trayectoria del avión, puede estar entre ± 1 cm. en el fotograma.



Geometría del plancamiento de vuelo para terreno llano.

Las simples relaciones geométricas requieren para el plancamiento de vuelo que el terreno sea llano.

Las siguientes relaciones pueden ser calculadas:

Número de escala fotográfica	$m_s = h/c$
Lado de la imagen en el suelo	$S = s \cdot m_s$
Base en la fotografía	$b = B/m_s$
Altura del vuelo desde el suelo	$h = c \cdot m_s$
Altura absoluta de vuelo	$Z_0 = h + Z$
Traslape 1%	$l = \frac{S - B}{S} 100 = \left(1 - \frac{B}{S}\right) 100$
Tamaño de la vuelta %	$q = \frac{S - A}{S} 100 = \left(1 - \frac{A}{S}\right) 100$
Area del suelo en la fotografía	$F_s = S^2 = s^2 \cdot m_s^2$
Línea base para 1% de traslape	$B = S \left(1 - \frac{l}{100}\right)$
Distancia entre la banda de q % del tamaño de la vuelta	$A = S \left(1 - \frac{q}{100}\right)$
Número de modelos en una banda (longitud L)	$n_m = \left[\frac{L}{B} + 1\right]$
Número de fotografías en una banda	$n_f = n_m + 1$
Número de banda en un bloque (ancho Q)	$n_b = \left[\frac{Q}{A} + 1\right]$
Area del modelo estereoscópico	$F_m = (S - B) \cdot S$
Area nueva para cada modelo en el bloque	$F_n = A \cdot B$
Tiempo entre las fotografías	$\Delta t [s] = \frac{B [m]}{v [m/s]} \geq 2.0 \quad (3.7.2)$

3. Calibración de la cámara.

3.1. Introducción.

La calibración de la cámara sirve para determinar los elementos de la orientación interna y la distorsión de la lente del objetivo. Como determinación breve de los elementos de la orientación interna pueden ser: La localización del punto principal en la imagen y la distancia principal de la cámara; pero más adelante se definirán muchos más elementos.

El pie de la perpendicular del centro de proyección del plano imagen es tomado como punto principal. Por lo tanto, la longitud de su perpendicular es definida como la distancia principal de la cámara. Sin embargo, estudiando las características geométricas de un objetivo, esta definición no es la adecuada. Hay que introducir otras definiciones como:

Punto principal de autocolimación: (PPA), El punto imagen formado por el objetivo cuando el haz de rayos del espacio objeto es perpendicular al plano imagen.

Punto principal de mejor simetría: (S), La distorsión radial de todas las imágenes geométricas, son debidas al tipo de lente o debidas al efecto de manipulación, deberían ser traídas como simétricas con algún otro punto.

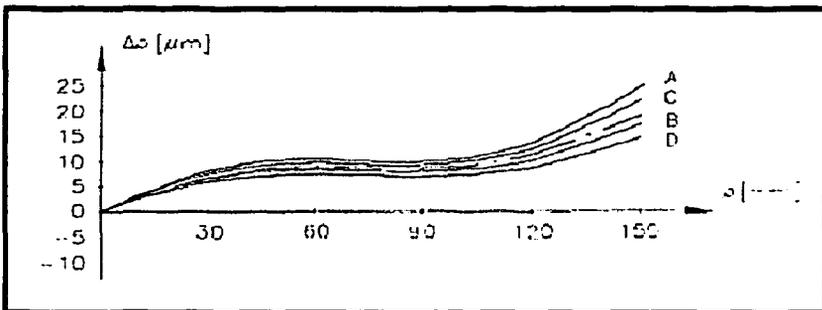
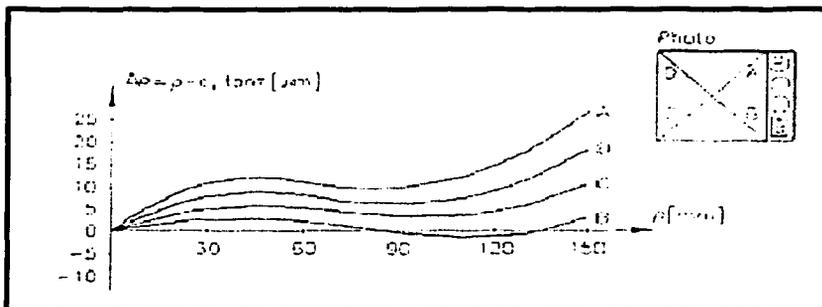
La calibración de una cámara puede ser vista, aproximadamente como lo contrario a la medición de puntos fotogramétricos. En la fotogrametría para la medición de un punto, generalmente se conoce la orientación interna y además se pide las coordenadas de los puntos objeto. En la calibración, por su parte se conoce las coordenadas de los puntos objeto o características geométricas en el espacio objeto y se determina los elementos de la orientación interna.

En general la calibración de una cámara se debe determinar:

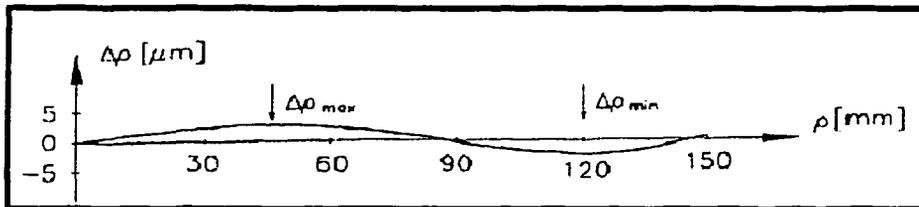
- Las tres coordenadas (X_0, Y_0, C) del centro de proyección en el sistema de coordenadas definido por la cámara, o sea el de las marcas fiduciales.
- La distorsión radial.
- La distorsión tangencial.

Las fotografías de los objetivos fotogramétricos antiguos tenían una distorsión radial superior a $30 \mu\text{m}$. Los modernos objetivos están prácticamente libres de distorsiones, $\Delta\rho \leq 5 \mu\text{m}$. pero las distorsiones tangenciales y los errores de las fotografías deben tenerse en cuenta también.

Para la definición física del sistema de coordenadas imagen y la correspondiente proyección central, se usa las marcas fiduciales de cada fotografía; la intersección de las líneas opuestas de las marcas fiduciales definen el centro fiducial. Muchas cámaras fotogramétricas son ajustadas de manera que el punto principal de autocolimación y el punto de mejor simetría difieren del centro fiducial con un radio de $20 \leq \mu\text{m}$.



Distorsión radial de las cuatro semidiagonales (A, B, C, D), referidas al punto principal de autocolimación. Curvas de la distorsión referida al punto de mejor simetría y su media.



Distorsión radial media con: $|\Delta\rho_{\max}| = |\Delta\rho_{\min}|$.

La calibración de la cámara es un proceso mediante el cual las características geométricas de una cámara individual son determinadas. Esto es realizado en orden a que la fotografía obtenida con la cámara puede ser usada para producir mapas de precisión, donde se realizan mediciones de distancias y desniveles con gran precisión, también pueden ser usadas para realizar ortofotografías. Esto es posible mediante la calibración previa de la cámara. La calidad de las lentes es muy importante, ya que influye sobre una buena definición de la imagen y un correcto posicionamiento de la imagen en el plano de la película.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Después de fabricarse la cámara y previo a su uso, las cámaras aéreas son calibradas cuidadosamente para determinar los valores precisos de algunas constantes. Estas constantes, generalmente referidas como los elementos de la orientación interna, y son determinadas con las fotografías.

No se deben producir grandes distorsiones, la cámara sostiene las lentes fijando la focal en el infinito. Las principales características geométricas son las marcas fiduciales y deben estar fijadas para el control dimensional de la película, o en su defecto debe existir una placa Reseau. La superficie de la película durante la exposición se tiene que mantener plana.

Hay diferentes métodos de calibración de cámaras, y todas difieren en equipos y técnicas; al final los valores de la calibración y sus precisiones son mostradas en el certificado de calibración mediante tablas y gráficos. En general, los métodos de calibración de la cámara pueden clasificarse en dos categorías:

- Métodos de laboratorio:
 1. Método del goniómetro.
 2. Método del multicolimador.
- Métodos de campo:
 1. Método del teodolito: Se fotografían una serie de puntos en el campo cuyas imágenes son líneas rectas, se mide su precisión con un teodolito los ángulos que hay entre los puntos del objeto en la pupila de entrada del objetivo.
 2. Torre elevada de calibración: La cámara se coloca en lo alto de una torre y se fotografía verticalmente de arriba hacia abajo. En el terreno hay muchas señales formando círculos concéntricos, y las coordenadas de esos puntos se han determinado con mucha precisión.
 3. Método estelar: La cámara es dirigida hacia el cielo para fotografiar las estrellas. La orientación de esas estrellas es conocida con una precisión de 1".
 4. Método de calibración con señales de campo: Un gran número de puntos de control son establecidos en el campo. La fotografía aérea en el test de campo es realizada con la cámara para ser calibrada. Los errores residuales son analizados por medio de los métodos de cálculo de la resección espacial o bloque de aerotriangulación.

Los métodos de laboratorio son los más utilizados y los elementos de la orientación interna que pueden ser determinados a través de la calibración de la cámara son:

- Distancia focal equivalente: La distancia focal la cual está cercana al centro de las lentes de la cámara. Se mide esta distancia a lo largo del eje del objetivo.
- Distancia focal media: Parámetro óptico que define la marcha de los rayos minimizando la distorsión radial de toda la imagen.
- Distancia focal calibrada: Es la distancia focal la cual es producida en conjunto de la distribución media o minimización de la distorsión radial de las lentes. Es el valor numérico que se obtiene en la calibración de la distancia focal.
- Distorsión radial de las lentes: Distorsión en la posición de la imagen por las líneas radiales del punto principal. La distorsión radial es simétrica alrededor del centro.
- Distorsión radial calibrada: Valor obtenido de la deformación de la imagen durante el proceso de calibración.
- Distorsión tangencial de las lentes: Distorsión perpendicular en la posición de la imagen por las líneas radiales del punto principal. Normalmente este valor es muy pequeño y

excepto en trabajos muy precisos, generalmente es ignorado. Se produce por la falta de alineación de las lentes.

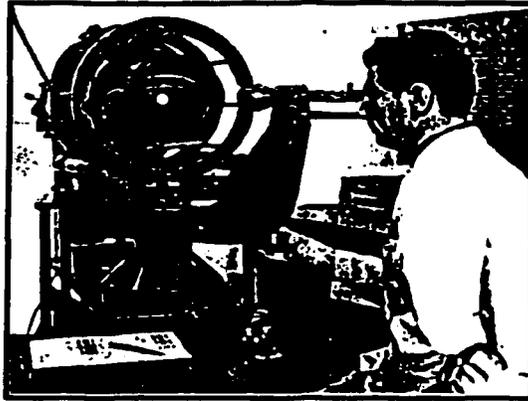
- Distorsión tangencial calibrada: Valor obtenido de la deformación imagen durante el proceso de calibración.
- Localización del punto principal: Las coordenadas del punto principal están dadas con respecto a los ejes fiduciales (x , y). No suele coincidir la intersección de las marcas fiduciales opuestas con el punto principal.
- Distancia entre marcas fiduciales opuestas: Está dado por coordenadas de las marcas fiduciales.
- Angulo de intersección de las marcas fiduciales: Debería ser de $90^\circ \pm 1'$.
- Planeidad del plano focal: No debería ser mayor de ± 0.01 mm. Con respecto al plano.
- Mediciones de la placa reseau: Cuando hay cruces en la película durante la exposición.
- Resolución y Función de Transferencia Optico: Estos valores son determinados para analizar la calidad de la imagen. Se determinan por observación directa y medida de las imágenes por las lentes.
- Polinomio de la distorsión radial: El polinomio puede ser determinado usando las mediciones de los valores de las medias de la distorsión radial.
- Polinomio de la distorsión tangencial: A partir de la distorsión tangencial puede ser deducido el polinomio.

3.2. Métodos de laboratorio de calibración de cámaras.

El método del multicolimador y el método del goniómetro son dos tipos de procedimientos de laboratorio de calibración de cámaras.

3.2.1. Método del goniómetro.

Una fotografía produce un haz espacial de rayos que debe ser congruente al haz en el espacio objeto. O sea, si el haz en el espacio objeto está definido, se puede obtener los elementos de la orientación interna. Cabe señalar que el centro de estos haces debe coincidir con el centro de proyección de la óptica. La calibración mediante goniómetro requiere de un colimador, de forma que la disposición de la imagen en relación a los haces, esto es los tres ángulos de la orientación interna son determinados por observaciones con un colimador. La calibración de la cámara por el método de laboratorio del goniómetro es muy similar al método del multicolimador. El método del goniómetro consiste en el centrado de una placa reticulada precisa en el plano focal de la cámara. La malla es iluminada por la parte trasera y proyectada a través de las lentes de la cámara en su dirección contraria. Los ángulos del enrejado de la placa proyectado son medidos con un goniómetro. La distancia focal calibrada CFL , y la distorsión radial es determinada por medio de la comparación entre las medidas angulares obtenidas en la proyección y sus teóricos ángulos verdaderos.



Goniómetro de autocolimación. Wild AGK.

La metodología de observación de la calibración de una cámara con un goniómetro consiste en observar a través del telescopio T_1 , indicando la posición cero como autocolimación con el telescopio T_2 . La cámara está montada entre los dos telescopios (goniómetro y colimador), la placa de cristal plana con una pequeña superficie reflectante está colocada en el plano imagen (plano focal) de la cámara para este propósito. En el lado del espacio objeto la placa lleva graduaciones precisas.

En la definición precisa de la posición del cero del telescopio T_1 , el observador determina el punto principal de autocalibración, el cual es considerado como el origen de las escalas de las semidiagonales de la imagen observada con el ángulo τ . La distorsión radial óptica puede ser computada por la diferencia:

$$\Delta\rho = \rho - c_o \cdot \tan \tau$$

Siendo:

c_o : El valor conocido de la distancia principal.

Los resultados son generalmente asimétricos, de forma que las curvas no coinciden. Esta asimetría es causada por errores de centrado de los elementos individuales de las lentes, el plano imagen no sea exactamente perpendicular al eje óptico y los errores de las propias lentes que limitan la precisión de la determinación del punto principal de autocolimación. La asimetría puede reducirse en gran medida escogiendo otro eje de referencia, ligeramente diferente el rayo principal de autocolimación, el cual es el punto principal de la mejor simetría.

El cambio de la distancia principal, Δc es computada en el sentido de traer la curva media tan cerca como es posible al eje ρ .

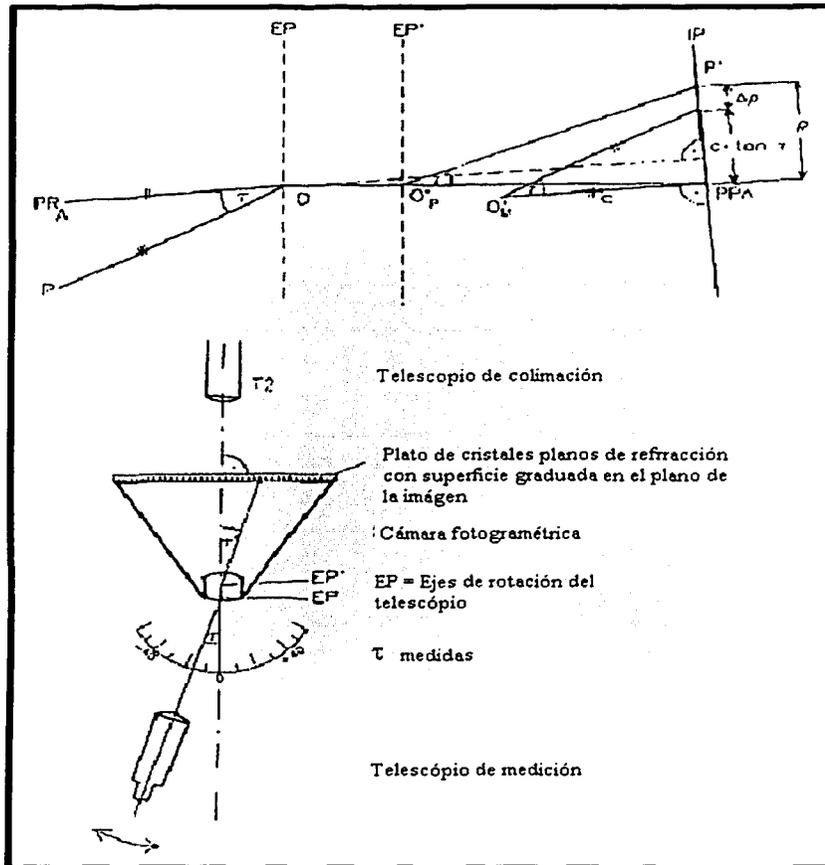
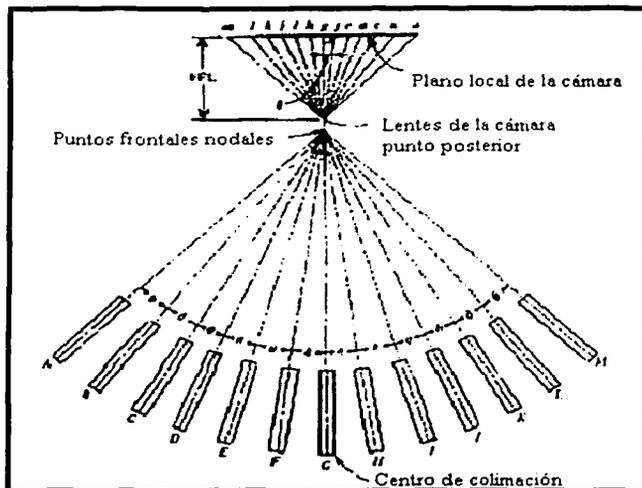


Diagrama esquemático de la calibración con goniómetro.

3.2.2. Método del multicolimador.

Consiste en fotografiar sobre una placa de cristal la imagen proyectada a través de un número de colimadores individuales montados en un preciso conjunto de ángulos conocidos. Un colimador simple consiste en unas lentes con cruces montadas en el plano enfocado del infinito. La cruz de los rayos de la imagen son llevados a través de las lentes del colimador y salen paralelos. Si estos rayos de luz son dirigidos hacia las lentes de una cámara aérea, la cruz estará perfectamente dibujada en el plano focal de la cámara porque las cámaras aéreas están enfocadas para rayos paralelos de luz o sea se construyen para objetos situados a distancias en el infinito.



Calibración de la cámara con trece colimadores.

Un multicolimador para la calibración de una cámara consiste en el montaje de varios colimadores individuales en dos planos verticales individuales. Los colimadores individuales están montados rígidamente, tanto que los ejes ópticos de los colimadores contiguos intersectan con precisión en los ángulos conocidos, en este caso θ . La cámara será calibrada en una posición tal que su plano focal sea perpendicular al eje central del colimador y tal que el punto nodal delantero de las lentes es la intersección de todos los ejes del colimador. En esta orientación, la imagen g del colimador central, la cual es llamada punto principal de autocolimación, pasa muy cerca del punto principal, y también muy cerca de la intersección de las líneas fiduciales (centro de colimación). La cámara está orientada de forma que en el momento de realizarse la exposición de la calibración, las cruces del colimador están a lo largo de la diagonal del formato de la cámara. Las cruces del colimador desde la A hasta la M aparecen en la imagen desde la a hasta la m . En un plano perpendicular a este están las cruces desde la n hasta la y .

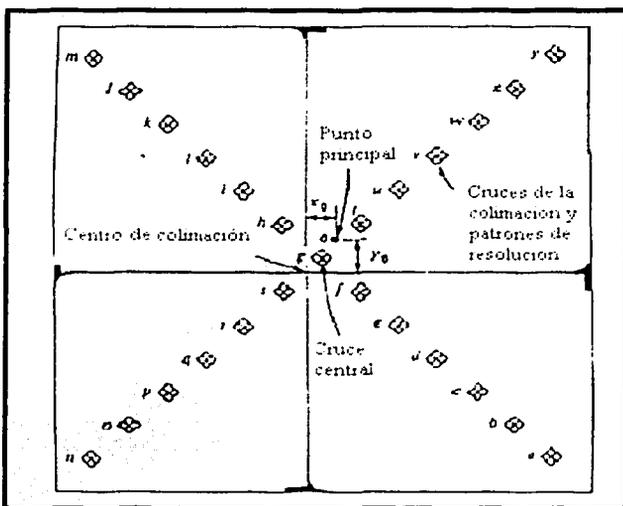


Imagen en la fotografía de las cruces del colimador.

La distancia en la placa de exposición entre las cruces de la imagen son medidas con precisión. La distancia focal equivalente EFL , es la longitud focal la cual tiene las lentes de la cámara en su área central libre de distorsiones. En el plano de la imagen, esta área está considerada como un círculo cuyo centro es la imagen del centro del colimador g , y donde el radio es la distancia media de las imágenes de los cuatro ejes del colimador, f , t , h y s . La distancia focal equivalente es la división entre la media de las cuatro distancias medidas, gf , gt , gh y gs y la tangente de θ :

$$EFL = \frac{gf + gh + gs + gt}{4 \cdot \tan \theta}$$

Basado en la EFL , la distancia teórica del centro del colimador imagen, g al resto de las cruces del colimador pueden medirse. Por ejemplo, las distancias ge , gi , gu y gr deberían ser teóricamente igual a $EFL \cdot \tan 2\theta$. Estas cuatro distancias son medidas, y la distorsión radial de la lente de $2 \cdot \theta$ se obtiene por sustracción de la distancia teórica calculada de la media de las cuatro distancias. Usando esta aproximación, la distorsión de las lentes pueden ser calculadas para cada incremento de θ .

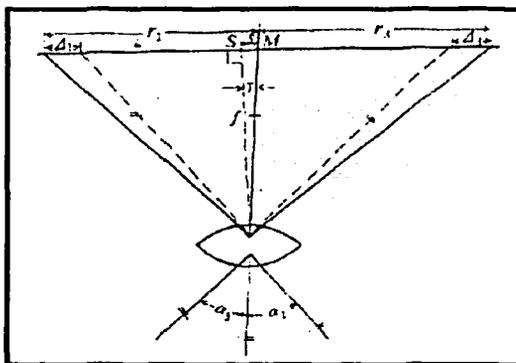
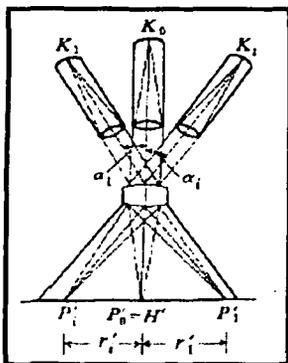
La distancia focal calibrada, CFL de las lentes es una longitud focal la cual produce en conjunto una distribución media de la distorsión radial, y es seleccionada como que la máxima distorsión radial positiva es igual a la máxima distorsión radial negativa. La distancia focal calibrada es el valor que normalmente se usa para los cálculos fotogramétricos, empleando este valor la corrección de distorsión de la lente es abandonado, puesto que se producen unos mínimos

efectos. Cuando se expresa en cualquier apartado la distancia focal, simbolizada por f , es la distancia media focal calibrada.

Si la medición de las distancias para cruces con el mismo ángulo del colimador a través de las cuatro diagonales tienen iguales magnitudes, entonces la distorsión de las lentes determinada es simétrica respecto a la cruz central del colimador. Si la distorsión no es simétrica respecto a la cruz central del colimador, entonces el punto sobre el cual es simétrica se llama punto principal de simetría y puede ser determinado. Sin embargo, excepto para trabajos muy precisos de fotogrametría analítica, el punto principal está tan cerca de la cruz central del colimador, y las distorsiones son casi simétricas, que el punto principal puede considerarse como el punto de simetría para realizar las correcciones de distorsión.

3.2.2.1. Resolución por el método del multicolimador.

Es conocido los ángulos en el espacio objeto del objetivo $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de forma que es realizado por un conjunto de colimadores calibrados y rígidamente fijados (K_0, K_1, \dots, K_n). Además cada colimador es capaz de iluminar su marca. El conjunto de colimadores puede ser localizado en un sector en el plano o puede ser localizado en la forma de los haces de rayos alrededor de K_0 en el espacio. La dirección del colimador central debe coincidir con el eje axial de la cámara. La cámara está orientada con respecto a los multicolimadores y entonces una fotografía es realizada (o más fotografías son tomadas en diferentes orientaciones cuando los colimadores están en un plano). Entonces basados en los datos de las imágenes de las marcas iluminadas y medidas con precisión en el comparador, se pueden obtener los elementos de la orientación interna.



Situación del colimador.

Cuando no hay muchos colimadores y hay solamente un colimador el cual puede rotar alrededor del punto principal del objetivo de la cámara, entonces hay el método de calibración del goniómetro. En este caso, la cámara puede ser colocada en una placa que gira con el goniómetro mientras el colimador está fijo.

El punto M es el centro de referencia de la foto (intersección de las líneas de las correspondientes marcas fiduciales), S es el punto principal de mejor simetría. El diagrama también muestra los dos ángulos α_1, α_2 en el espacio objeto, y las dos correspondientes distancias radiales r_1, r_2 , las cuales son localizadas en la misma línea recta, su distorsión radial Δ_1, Δ_2 , la pequeña

distancia s y su correspondiente ángulo pequeño γ , y la distancia principal f : De la figura anterior se deduce:

$$\Delta_1 = r_1 - s - f \cdot \operatorname{tg}(\alpha_1 - \gamma)$$

$$\Delta_3 = r_3 + s - f \cdot \operatorname{tg}(\alpha_3 + \gamma)$$

Donde:

r_1, r_3 : Son las líneas con longitudes conocidas.

α_1, α_3 : Son los valores medidos por el goniómetro.

En el caso de un multicolimador α_1, α_3 son conocidos los ángulos y r_1, r_3 son valores observados. Los valores f, s, Δ_1, Δ_3 son valores que deben ser determinados. Sin embargo, es posible salvar estos valores cuando ciertas condiciones son introducidas en el cálculo.

Introduciendo las siguientes sustituciones o aproximaciones:

$$f = f_0 + \Delta f, \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \gamma) = \operatorname{tg} \alpha \pm (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \gamma, \quad s = r_0, \quad \gamma = \Delta f = 0$$

y sustituir

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \operatorname{tg} \alpha_3 \approx \frac{r}{f_0}$$

para valores pequeños de los coeficientes Δf y s .

Las ecuaciones anteriores de Δ_1, Δ_3 pueden escribirse:

$$\Delta_1 = r_1 - f_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 - \frac{r}{f_0} \cdot \Delta f - \frac{r^2}{f_0^2} \cdot s$$

$$\Delta_3 = r_3 - f_0 \cdot \operatorname{tg} \alpha_3 - \frac{r}{f_0} \cdot \Delta f + \frac{r^2}{f_0^2} \cdot s$$

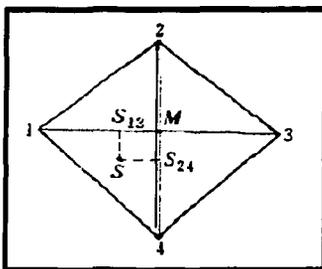
Se conoce que con respecto a dos distancias radiales iguales r , un cambio en Δf causa un cambio igual en la distorsión radial Δ_1, Δ_3 , ambos en signo y valor. Cuando la posición del origen S es cambiada, entonces un cambio ocurre de acuerdo a la distancia r con signos opuestos. Añadiendo y restando las dos ecuaciones, se puede eliminar s e Δf respectivamente:

$$\frac{1}{2}(\Delta_3 + \Delta_1) = \frac{1}{2}(r_3 + r_1) - \frac{1}{2}f_0 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_3 + \operatorname{tg} \alpha_1) - \frac{r}{f_0} \cdot \Delta f$$

$$\frac{1}{2}(\Delta_3 - \Delta_1) = \frac{1}{2}(r_3 - r_1) - \frac{1}{2}f_0 \cdot (\operatorname{tg} \alpha_3 - \operatorname{tg} \alpha_1) - \frac{r^2}{f_0^2} \cdot s$$

Se puede calcular Δf y s basada en una medición simétrica de dos segmentos radiales localizados en la misma diagonal. Además la distancia principal calibrada puede ser escogida con un cierto rango, teniendo que asignarle una cierta condición para Δ . Por tanto, se puede hacer un valor máximo positivo y un valor máximo negativo igual a la distorsión radial, o las áreas de la

curva de la distorsión radial iguales por encima y por debajo del eje x , o se puede obligar a la distorsión de un punto desde una distancia determinada del punto principal a ser cero.



Diagonales de las marcas fiduciales.

Si las mencionadas medidas tomadas en las dos diagonales de la fotografía, las cuales son perpendiculares una de otra, entonces hay dos juegos de valores, f_{13} , s_{13} y f_{24} , s_{24} . Entonces la distancia principal calibrada para la cámara es:

$$f_c = \frac{1}{2} \cdot (f_{13} + f_{24})$$

Los valores s_{13} , s_{24} pueden considerarse como las coordenadas del mejor punto de simetría S con respecto al centro de referencia de las marcas fiduciales M en un sistema de coordenadas con diagonales 1-3 y 2-4.

Se puede completar la distorsión radial de la distancia principal calibrada f_c , con las siguientes ecuaciones, donde $\Delta f = 0$.

$$\left. \begin{aligned} l_{1..} &= r_{1..} - f_c \lg \alpha_{1..} + \frac{r^2}{f_c^2} s_{13} \\ l_{3..} &= r_{3..} - f_c \lg \alpha_{3..} - \frac{r^2}{f_c^2} s_{13} \\ l_{2..} &= r_{2..} - f_c \lg \alpha_{2..} + \frac{r^2}{f_c^2} s_{24} \\ l_{4..} &= r_{4..} - f_c \lg \alpha_{4..} - \frac{r^2}{f_c^2} s_{24} \end{aligned} \right\}$$

Llevando a cabo esta clase de soluciones para todos los puntos, se pueden computar la curva de distorsión a lo largo de las diagonales de la foto con respecto al punto principal de mejor simetría.

Si la localización del punto principal de autocolimación con respecto al centro de referencia de las marcas fiduciales es conocido, se asume que las componentes de los ejes de la diagonal serán

p_{13} y p_{24} , entonces la curva de distorsión obtenida toma el punto principal de autocolimación como origen. En términos de un objetivo ideal, debería ser:

$$p_{13} = s_{13} \text{ y } p_{24} = s_{24}$$

Cuya discrepancia es muy significativa para la evaluación de la calidad de los objetivos.

3.3. Métodos de campo y estelar de calibración de cámaras.

Los métodos de laboratorio del multicolidador y del goniómetro en la calibración de la cámara requiere de equipos caros y precisiones especiales. Una ventaja de los métodos de campo y estelar de calibración de cámaras es que éste equipamiento especial no es necesario. Se han desarrollado diferentes métodos de campo y estelar para la calibración de cámaras:

3.3.1. Método de campo.

Los procedimientos de campo requieren que una serie de dianas sean establecidas y su localización con respecto a la estación de la cámara sean medidas usando técnicas precisas de topografía. Las dianas están colocadas lo suficientemente lejos de la estación de la cámara para que no haya degradación de la imagen. Para el cálculo hay que aplicar la condición de colinealidad, sabiendo que con la calibración de campo se proporcionan los datos mínimos para reconstruir los parámetros internos:

$$(x_o, y_o, k_1, k_2, p_1, p_2, f, \omega, \varphi, \chi, X_o, Y_o, Z_o)$$

de la cámara, por tanto harán falta por lo menos 7 puntos de apoyo, puesto que cada uno genera dos ecuaciones. Recordar que en la cámara aérea el enfoque está fijado en el infinito.

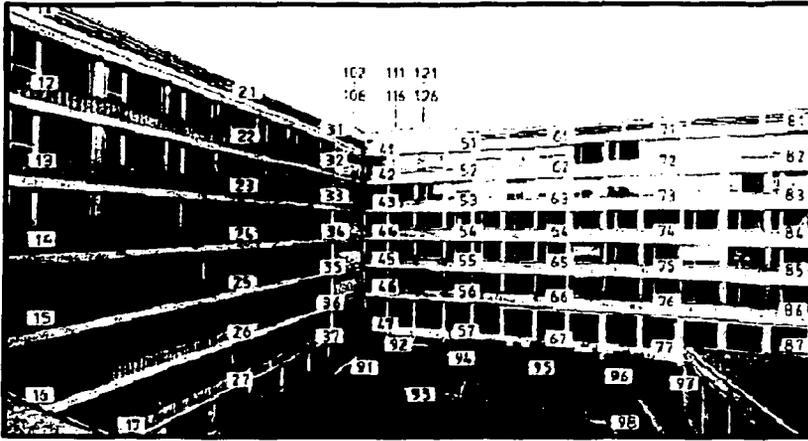
Método básicos de calibración de campo:

- Test de campo para la calibración con puntos de coordenadas conocidas:

Una calibración es a menudo realizada en un test de campo con distribución espacial de puntos en la cual las coordenadas han sido previamente medidas con un error aproximado de 1 mm., en vez de usar un haz espacial de rayos. En este caso, los elementos de la orientación interna y externa de una fotografía son determinados por medio de un ajuste de haces.

El siguiente problema puede ser: Si el campo del test tiene poca profundidad o si el ángulo de campo de la cámara es muy pequeño, los elementos de la orientación interna o externa tienen una correlación muy fuerte, y no pueden ser suficientemente creíble separarlos del cálculo. En un caso extremo, una singularidad puede ocurrir en la solución de las ecuaciones normales. Para tratar con este problema, los elementos de la orientación externa, o al menos algunos de ellos deben ser conocidos por mediciones externas, por ejemplo la posición del centro de proyección en el sistema de coordenadas del campo.

Las cámaras métricas para fotogrametría aérea son calibradas generalmente mediante mediciones con goniómetro, cuando las diferencias de altura en el test de campo son demasiado pequeñas en relación a la altura de vuelo; la calibración parcial de las cámaras aéreas métricas juegan una determinada función. Si un test de campo para fotogrametría terrestre es establecido, se debe tener cuidado en la distribución de puntos, de forma que sean lo más ancho posible en las tres direcciones de coordenadas. El test de campo para la calibración de cámaras es un método muy utilizado en fotogrametría terrestre.



Campo de test.

El proceso en laboratorio de este tipo de calibración sería: Las coordenadas de los puntos objeto son introducidos como observaciones requiriendo correcciones, y las precisiones conocidas, en el ajuste de haces. Esto recibe pequeñas correcciones cada vez.

En orden a eliminar las correcciones entre las coordenadas obtenidas de las observaciones con teodolito, las observaciones originales del teodolito son introducidas en el ajuste, en lugar del obtenido de las coordenadas exactas, para calibraciones en las que se requiere la mayor precisión posible.

Las coordenadas de la posición de la cámara son desconocidas en este tipo de calibración. Se toman cuatro fotografías diferentes desde aproximadamente la misma posición, en orden a incrementar la redundancia del ajuste y proporcionar un suficiente número de puntos, para determinar la distorsión de las lentes, generalmente solo la distorsión radial. Respecto a fotogrametría aérea los investigadores han analizado la calibración de la cámara en vuelo, donde una serie de dianas de control medidas topográficamente con precisión son fotografiadas. La ventaja potencial de este método consiste en calcular las constantes de calibración en el mismo instante que la cámara se está usando y la probabilidad de tener grandes precisiones en la calibración con condiciones normales de campo.

- Calibración de campo con características en el espacio objeto: Otra información en el espacio objeto que puede ser usada para la calibración en lugar de las coordenadas cartesianas de la distribución espacial de puntos es por ejemplo, introducir la condición de ortogonalidad y planeidad, de forma que pueden ser usados como conocimiento de valores aproximados.

Se puede usar para el método un grupo de líneas verticales. Muchos puntos de estas líneas paralelas son seleccionadas y sus coordenadas imagen medidas automáticamente en imágenes digitales. Estas mediciones producen información relevante para la calibración solamente en la dirección vertical. En orden a obtener información relevante en otras direcciones, varias fotografías pueden hacerse y rotar la cámara entre cada fotografía.

- Calibración de campo de puntos de coordenadas desconocidas: La calibración se realiza con varios fotogramas, todos con el mismo marco de encuadre. El sistema consiste en

jugar con las distintas posiciones de la cámara y direcciones. Los puntos objeto deben ser visibles en al menos tres fotogramas. El problema de la escala surge en el ajuste de los haces del bloque y es mejor realizarlo como un ajuste de red libre.

La calibración con puntos de coordenadas desconocidas, o con solamente unos pocos puntos de control, constituye un ajuste de haces libres con desconocimiento de la orientación interna.

3.3.1.1. Resolución por el método de campo.

En los métodos de laboratorio de la calibración de la cámara y análisis de deformación de la película, las condiciones actuales de aerofotogrametría (tales como la temperatura en diferentes partes de la cámara, la temperatura de la cabina, densidad del aire...) y las condiciones de oscuridad de la habitación no pueden tomarse en completa consideración. Como resultado, grandes errores se pueden producir debido por ejemplo, a la densidad del aire causada por el avión en el vuelo debería tomar un cambio en el coeficiente de refracción. El método de calibración de la cámara que se plantea, requiere la toma de varias tomas de acuerdo con ciertas condiciones en el área actual de la fotografía y la observación es realizada en un comparador de alta precisión. Entonces se calcula las correcciones totales de las coordenadas imagen las cuales están influenciadas por toda clase de errores sistemáticos.

Las relaciones matemáticas estrictas entre las coordenadas de los puntos terreno (X, Y, Z) , las coordenadas imagen (x, y) y las coordenadas de la estación fotográfica (X_s, Y_s, Z_s) son:

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 + \Delta x &= -f \frac{a_1(X - X_c) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_2(X - X_c) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)} \\ y - y_0 + \Delta y &= -f \frac{a_2(X - X_c) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_1(X - X_c) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)} \end{aligned} \right\}$$

Donde:

(x_0, y_0) : Son las coordenadas del punto principal de la imagen.

$(\Delta x, \Delta y)$: Son las correcciones del punto imagen.

Linealizando las ecuaciones anteriores:

$$\left. \begin{aligned} a_1 \Delta x + b_1 \Delta y + c_1 \Delta z + a_1' X_c + b_1' Y_s + c_1' Z_s + g_1 \Delta x_0 + h_1 \Delta y_0 + i_1 \Delta z_0 + k_1 \Delta x + l_1 \Delta y - l = r \\ a_2 \Delta x + b_2 \Delta y + c_2 \Delta z + a_2' X_c + b_2' Y_s + c_2' Z_s + g_2 \Delta x_0 + h_2 \Delta y_0 + i_2 \Delta z_0 + k_2 \Delta x + l_2 \Delta y - l = r' \\ + l' \Delta y - l' = r' \end{aligned} \right\}$$

Las correcciones $(\Delta x, \Delta y)$, cambian con la posición de un punto imagen en la foto. Hay dos opciones para la determinación de estas correcciones y el uso de estas correcciones para la solución de problemas fotogramétricos.

1. Las correcciones de algún punto imagen puede ser expresada por las funciones polinómicas de diferente orden:

$$\Delta x = -\bar{x}(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

$$\Delta y = -\bar{y}(k_0 + k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

Donde:

$(\Delta x, \Delta y)$: Distorsión radial simétrica del objetivo.

k_0, k_1, k_2, k_3 : Constantes de la distorsión radial. $r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}$

(x, y) : Coordenadas del punto imagen.

2. Las correcciones $(\Delta x, \Delta y)$, pueden ser determinadas por cada parte de la foto. De forma que cada parte, es considerada la diferencia entre la verdadera corrección de un cierto punto y la corrección media de esa parte es igual o menor que el error medido de las coordenadas del punto imagen en la calibración.

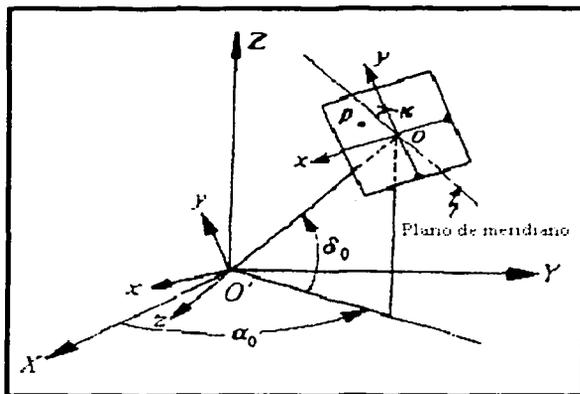
3.3.2. Método estelar.

El haz espacial de rayos es proporcionado por los astros fijos. Las direcciones espaciales están dadas en un catálogo fundamental de estrellas con una precisión mejor a 1". Para establecer las relaciones entre la fotografía y las estrellas, se necesita una precisión de la medida en el tiempo de la exposición, una precisión de nivelación de la cámara y las coordenadas geográficas de la posición de la cámara. Si estas favorables condiciones no pueden ser logradas, la aptitud de la imagen formada por los haces de rayos serán anotadas en el ajuste como valores desconocidos. La calibración mediante las estrellas es solamente posible con cámaras enfocadas al infinito, o al menos cerca del infinito. La refracción atmosférica presenta un problema. La serie de dianas son las estrellas que se deben identificar en la fotografía, que en el instante de hacerse la fotografía se han registrado. La ascensión recta y la declinación de las estrellas pueden ser obtenidos de una efemérides para un instante preciso de la exposición, y también se pueden obtener los ángulos a las estrellas por la posición conocida de la estación de la cámara. Entonces se comparan los ángulos obtenidos por las mediciones precisas de las imágenes de las estrellas con las efemérides. Se han llegado a calibrar cámaras con más de 2000 estrellas observadas. Por último, decir que la calibración estelar se emplea muy poco en fotogrametría.

3.3.2.1. Resolución por el método estelar.

El principio del método de calibración estelar es que las estrellas son fotografiadas con un sistema de coordenadas celeste como sistema de referencia y las coordenadas imagen de las estrellas son medidas con un comparador de precisión.

En la siguiente figura se puede observar que el centro del objetivo de la fotografía es O' . La dirección del eje óptico de la cámara es $O'o$. El sistema de coordenadas rectangulares es $O'XYZ$ con el centro del objetivo en el origen. Como las estrellas están muy lejos puede considerarse como un sistema de coordenadas celeste. La fotografía muestra la posición de la imagen positiva. La ascensión recta y la declinación del punto en la esfera celestial la cual los puntos del eje $O'o$ son α, δ . Los tres ejes en el espacio de coordenadas imagen $O'xyz$ son designados de acuerdo con un sistema de coordenadas de la mano derecha, y C es el ángulo entre el plano meridiano y el eje y de la imagen positiva.



Método de calibración estelar.

Asumiendo el punto P en la figura de una estrella, entonces los componentes del vector $\overrightarrow{OP} = P$ en el sistema de coordenadas celeste son:

$$P = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \cos \alpha \cos \delta \\ K \sin \alpha \cos \delta \\ K \sin \delta \end{pmatrix}$$

Donde α, δ son la ascensión recta y la declinación de la estrella, $K = \sqrt{x^2 + y^2 + f^2}$. Las componentes del vector $\overrightarrow{OP} = P$ en el sistema de coordenadas imagen son:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -f \end{pmatrix}$$

Asumiendo la relación entre los ángulos de rotación en los dos sistemas de coordenadas espaciales, sería: R

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \\ -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \cos \alpha \cos \delta \\ K \sin \alpha \cos \delta \\ K \sin \delta \end{pmatrix}$$

La matriz R puede obtenerse después de tres rotaciones en la transformación del sistema de coordenadas imagen al sistema de coordenadas celeste, primero se rota sobre el eje Z a través de

$\alpha_n + \frac{\delta_n}{2}$, entonces se rota sobre el eje X' (eje X después de la primera rotación) a través de $\delta_n + \frac{\pi}{2}$ y finalmente rotación sobre el ángulo χ :

$$R = R_{\alpha_2} \cdot R_{\delta_2} \cdot R_{\alpha_1} \cdot R_{\delta_1} \cdot R_{\chi} = \begin{bmatrix} \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 & 0 \\ \cos \alpha_2 & \sin \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \delta_2 & -\cos \delta_2 \\ 0 & \cos \delta_2 & -\sin \delta_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 & 0 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ \sin \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sin \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \chi - \cos \alpha_2 \sin \delta_2 \sin \alpha_1 \sin \chi & -\sin \alpha_2 \sin \alpha_1 \sin \chi - \cos \alpha_2 \sin \delta_2 \cos \alpha_1 \cos \chi & -\cos \alpha_2 \cos \delta_2 \cos \alpha_1 \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \cos \chi - \sin \alpha_2 \sin \delta_2 \sin \alpha_1 \sin \chi & \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 \sin \chi - \sin \alpha_2 \sin \delta_2 \cos \alpha_1 \cos \chi & -\sin \alpha_2 \cos \delta_2 \cos \alpha_1 \\ \cos \delta_2 \sin \alpha_1 \sin \chi & \cos \delta_2 \cos \alpha_1 \cos \chi & -\sin \delta_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Por tanto, se obtiene:

$$\alpha_n = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{b_2}{a_2} \right), \quad \delta_n = \sin^{-1}(-c_2), \quad \chi = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{c_2}{c_3} \right)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = R^T \cdot k \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \delta \\ \sin \alpha \cos \delta \\ \sin \delta \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} x &= -f \frac{a_1 A + b_1 B + c_1 C}{a_2 A + b_2 B + c_2 C} \\ y &= -f \frac{a_3 A + b_3 B + c_3 C}{a_2 A + b_2 B + c_2 C} \end{aligned} \right\}$$

Donde $A = \cos \alpha \cos \delta$, $B = \sin \alpha \cos \delta$, $C = \sin \delta$

Las ecuaciones anteriores son las básicas para la calibración de la cámara y A , B , C pueden considerarse como los coeficientes de referencia de la calibración. El propósito de la calibración es determinar: La distancia principal de la cámara f , la localización del punto principal de la imagen en la foto x_0 , y_0 , la distorsión radial Δr , y los elementos angulares de la orientación exterior $\alpha_n, \delta_n, \chi_n$.

La distorsión de la lente del objetivo puede ser expresada por la siguiente ecuación:

$$\Delta r = k_1 r^3 + k_2 r^5 + k_3 r^7$$

Donde $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Entonces las coordenadas después de la corrección de distorsión son:

$$x - \Delta x = r - \frac{1}{r} \Delta r = r \left(1 - \frac{\Delta r}{r} \right) = x \left(1 - k_1 r^2 - k_2 r^4 - k_3 r^6 \right)$$

$$y - \Delta y = y - \frac{y}{r} \Delta r = y \left(1 - \frac{\Delta r}{r} \right) = y \left(1 - k_1 r^2 - k_2 r^4 - k_3 r^6 \right)$$

Siendo en la expresión anterior: $x = x - x_0$ e $y = y - y_0$. Y sustituyendo en

$$\left. \begin{aligned} x &= - \left[\frac{a_1 A + b_1 B + c_1 C}{a_2 A + b_2 B + c_2 C} \right] \\ y &= - \left[\frac{a_3 A + b_3 B + c_3 C}{a_4 A + b_4 B + c_4 C} \right] \end{aligned} \right\}$$

Se obtiene:

$$F_x = (x - \Delta x) - x = 0$$

$$F_y = (y - \Delta y) - y = 0$$

$$\left. \begin{aligned} F_x &= (x - x_0) (1 - k_1 r^2 - k_2 r^4 - k_3 r^6) + \frac{a_1 A + b_1 B + c_1 C}{a_2 A + b_2 B + c_2 C} = 0 \\ F_y &= (y - y_0) (1 - k_1 r^2 - k_2 r^4 - k_3 r^6) + \frac{a_3 A + b_3 B + c_3 C}{a_4 A + b_4 B + c_4 C} = 0 \end{aligned} \right\}$$

Posteriormente, linealizando y agrupando:

$$C = a_1 A + b_1 B + c_1 C$$

$$D = a_2 A + b_2 B + c_2 C$$

$$E = a_3 A + b_3 B + c_3 C$$

Entonces las derivadas parciales de las expresiones generales son:

$$\left. \begin{aligned} -v_x &= a_1 (f + s_2 \Delta x_0 + s_3 \Delta y_0 + s_4 \Delta k_1 + s_5 \Delta k_2 + s_6 \Delta k_3 + s_7 \Delta \alpha) \\ &\quad + s_8 \Delta \delta + s_9 \Delta \kappa + t_1 \\ -v_y &= t_1 (f + t_2 \Delta x_0 + t_3 \Delta y_0 + t_4 \Delta k_1 + t_5 \Delta k_2 + t_6 \Delta k_3 + t_7 \Delta \alpha) \\ &\quad + t_8 \Delta \delta + t_9 \Delta \kappa + t_9 \end{aligned} \right\}$$

Y cada uno de sus componentes:

$$s_1 = \frac{\partial F_1}{\partial f} = \frac{c_1}{W} = -\frac{r}{f}$$

$$s_2 = \frac{\partial F_1}{\partial c_0} = -1$$

$$s_3 = \frac{\partial F_1}{\partial y_0} = 0$$

$$s_4 = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} = (x - x_0)r^2$$

$$s_5 = \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = (y - y_0)r^2$$

$$s_6 = \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = (x - x_0)r^2$$

$$s_7 = \frac{\partial F_1}{\partial x} = f \left\{ W \frac{\partial W}{\partial x} - l \frac{\partial W}{\partial x} \right\} W^{-2}$$

$$= -\frac{l}{f} (c_2x - c_1y) - c_2y - c_1f$$

$$s_8 = \frac{\partial F_1}{\partial y} = f \left\{ W \frac{\partial W}{\partial y} - l \frac{\partial W}{\partial y} \right\} W^{-2}$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha} \frac{r}{\delta_0} \left[\frac{x}{f} (c_2x + c_2y) + c_1f \right]$$

$$s_9 = \frac{\partial F_1}{\partial c} = f \left\{ W \frac{\partial W}{\partial c} - l \frac{\partial W}{\partial c} \right\} W^{-2}$$

$$= -y$$

$$t_1 = \frac{\partial F_2}{\partial f} = \frac{1}{W} = -\frac{y}{f}$$

$$t_2 = \frac{\partial F_2}{\partial x_0} = 0$$

$$t_3 = \frac{\partial F_2}{\partial y_0} = -1$$

$$t_4 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = (x - x_0)r^2$$

$$t_5 = \frac{\partial F_2}{\partial x_2} = (y - y_0)r^2$$

$$t_6 = \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = (y - y_0)r^2$$

$$t_7 = \frac{\partial F_2}{\partial x} = f \left\{ W \frac{\partial W}{\partial x} - l \frac{\partial W}{\partial x} \right\} W^{-2}$$

$$= -\frac{y}{f} (c_2x - c_1y) + c_1r + c_1f$$

$$t_8 = \frac{\partial F_2}{\partial y} = f \left\{ W \frac{\partial W}{\partial y} - l \frac{\partial W}{\partial y} \right\} W^{-2}$$

$$= \frac{1}{\cos \alpha} \frac{r}{\delta_0} \left[\frac{y}{f} (c_1x - c_2y) + c_1f \right]$$

$$t_9 = \frac{\partial F_2}{\partial c} = f \left\{ W \frac{\partial W}{\partial c} - l \frac{\partial W}{\partial c} \right\} W^{-2}$$

$$= x$$

$$\frac{\partial X}{\partial A} = -b_1A + a_2B$$

$$\frac{\partial X}{\partial B} = (-\cos \alpha_0 \cos \delta_0 \sin \kappa) A - \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \sin \kappa \cdot B - \sin \delta_0 \sin \kappa \cdot C$$

$$\frac{\partial X}{\partial C} = a_2A + b_2B + c_2C$$

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -b_2A + a_2B$$

$$\frac{\partial X}{\partial \delta} = -\cos \alpha_0 \cos \delta_0 \cos \kappa \cdot A - \sin \alpha_0 \cos \delta_0 \cos \kappa \cdot B - \sin \delta_0 \cos \kappa \cdot C$$

$$\frac{\partial X}{\partial \kappa} = -a_1A - b_1B - a_1C$$

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -b_2A + a_2B$$

$$\frac{\partial X}{\partial \delta} = \cos \alpha_0 \sin \delta_0 \cdot A + \sin \alpha_0 \sin \delta_0 \cdot B - \cos \delta_0 \cdot C$$

$$\frac{\partial X}{\partial \kappa} = 0$$

Por ilustración, se muestra un detalle del proceso de la obtención de la derivada de

37. partiendo de la función:

$$F = f \frac{Aa_1 + Bb_1 + Cc_1}{Aa_2 + Bb_2 + Cc_2} = f \frac{L}{W}$$

La derivada:

$$\begin{aligned} W dF &= F [A \cos \delta_c \sin \delta_c - B \cos \alpha_c \cos \delta_c] d\alpha \\ &= f [(\cos \alpha_c \cos \delta_c + \sin \alpha_c \sin \delta_c \sin \kappa) A + (\cos \alpha_c \cos \delta_c - \cos \alpha_c \sin \delta_c \sin \kappa) B] d\alpha \end{aligned}$$

O también:

$$\begin{aligned} W dF &= [F (cb_2 A - a_1 B) + f(a_1 B - b_1 A)] d\alpha \\ \kappa &= \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{1}{W} [F(b_1 A - a_1 B) + f(a_1 B - b_1 A)] \end{aligned}$$

Por el uso de la ecuación:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -f \end{bmatrix} = R^2 \cdot K \begin{bmatrix} \cos \delta_c \cos \delta_c \\ \sin \delta_c \cos \delta_c \\ \sin \delta_c \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix}$$

Se obtiene:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{K} (a_1 x + a_2 y - a_3 f) \\ B &= \frac{1}{K} (b_1 x + b_2 y - b_3 f) \\ C &= \frac{1}{K} (c_1 x + c_2 y - c_3 f) \end{aligned}$$

Y:

$$\frac{1}{W} = -\frac{K}{f}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Se obtiene:

$$s_2 = -\frac{f}{f} [(a_1 b_2 - a_2 b_1) x + (a_2 b_3 - b_2 a_3) y] - [(a_1 b_2 - b_1 a_2) y + (b_1 a_3 - a_1 b_3) f]$$

Desde:

$$\left. \begin{aligned} (a_1 b_1 - a_2 b_1) &= \cos \delta_1 \cos \delta_2 = -c_2 \\ (a_2 b_1 - b_2 a_1) &= \cos \delta_1 \sin \delta_2 = c_1 \\ (a_1 b_2 - b_1 a_2) &= -\sin \delta_1 = c_3 \\ (b_1 a_1 - a_1 b_1) &= \cos \delta_1 \cos \delta_1 = c_4 \end{aligned} \right\}$$

Y:

$$F = f \frac{f}{H} = -x$$

Se obtiene:

$$x = \frac{x}{f} (-c_2 x + c_1 y) - c_3 g - c_4 f$$

Por cada una de las estrellas de la imagen se pueden escribir dos ecuaciones. Donde l_x, l_y son valores aproximados. Al menos cinco estrellas son necesarias para el cálculo. De hecho, cada foto tiene docenas de imágenes de estrellas, por tanto el método de mínimos cuadrados debe ser aplicado.

Las estrellas fotografiadas, deberían estar concentradas en el cenit para reducir el efecto de refracción atmosférica al mínimo. Las estrellas se exponen en diferentes tiempos y entonces son fotografiadas de 3 a 5 posiciones diferentes para poder elegir la mejor. En la fotografía, se deben registrar los datos de temperatura, tiempo de exposición, presión del aire, las orientaciones de la cámara y ángulo cenital.

Después que las fotografías han sido procesadas, la dirección de las coordenadas del eje óptico α_0, δ_0 pueden ser calculadas basadas en el registro de la distancia cenital, tiempo, latitud y longitud de la estación de observación de acuerdo con las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \sin \delta_0 &= \sin \varphi \cos Z + \cos \varphi \sin Z \cos A_z \\ \cos \delta_0 &= \frac{\cos Z - \sin \delta_0 \sin \varphi}{\cos \delta_0 \cos \varphi} \\ \alpha_1 &= \alpha - t \\ \theta &= \theta_0 + T + T_u + \lambda \end{aligned} \right\}$$

Donde θ es el tiempo sidereo local, θ_0 es el tiempo sidereo del tiempo medio de Greenwich a las 0^h. T es el tiempo universal de exposición, T_u es la corrección del tiempo sidereo reducido del tiempo medio; φ, λ , son respectivamente la latitud y la longitud de la estación de observación. Z es la distancia cenital del instrumento hacia los puntos. A_z es el acimut del instrumento.

Después que α_0, δ_0 han sido obtenidos, se observa en el catálogo de estrellas y se busca el nombre o número de la estrella la cual corresponde con la imagen, y entonces se coge la efemérides de la escansión recta, declinación, la magnitud del movimiento propio de la estrella...

Para calcular la ascensión recta y la declinación, la posición aparente en el instante de la exposición debe contarse con la influencia de la precesión, nutación y movimientos propios de la estrella, la aberración anual y la aberración diaria. La posición aparente debe ser calculada de acuerdo con la efemérides, o por medio de ordenador.

La corrección de la refracción atmosférica debe realizarse con las coordenadas imagen.

3.4. Resolución analítica de calibración de cámaras.

3.4.1. Introducción.

El acercamiento analítico a la calibración tiene un punto inicial común, esto es, la introducción de modelos analíticos específicos para la distorsión radial y descentrado de la distorsión en las ecuaciones de la fotogrametría proyectiva. Los parámetros que definen las funciones de distorsión son recuperadas simultáneamente con los parámetros proyectivos en un ajuste de mínimos cuadrados conducido por la minimización de la forma cuadrática de los residuales de las mediciones cuantificadas.

3.4.2. Modelos para la distorsión radial y descentrado.

La distorsión, δr de una lente centrada perfectamente, está mostrada por la expresión:

$$\delta r = K_1 \cdot r^3 + K_2 \cdot r^5 + K_3 \cdot r^7 + \dots$$

Siendo:

K_1, K_2, K_3 : Coeficientes de la distorsión radial.

r : Distancia radial referida al punto principal. $r = \left((x - x_p)^2 + (y - y_p)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

x, y : Coordenadas del punto fotografiado en la placa.

x_p, y_p : Coordenadas del punto principal.

Desgraciadamente, las lentes actuales están sujetas a varios grados de descentrado, esto es, el centro de curvatura de su superficie óptica no es exactamente colineal. Este defecto introduce el término de la distorsión de descentrado. Esta distorsión tiene la componente radial y tangencial y analíticamente puede ser descrito por la función:

$$\delta_r = 3 \cdot (J_1 \cdot r^2 + J_2 \cdot r^4 + \dots) \cdot \text{sen}(\phi - \phi_n)$$

$$\delta_t = (J_1 \cdot r^2 + J_2 \cdot r^4 + \dots) \cdot \text{cos}(\phi - \phi_n)$$

Siendo:

δ_r : Componente radial del descentrado de la distorsión.

δ_t : Componente tangencial del descentrado de la distorsión.

J_1, J_2, \dots : Coeficientes del descentrado de la distorsión.

La cantidad ϕ_n es el ángulo entre el eje x positivo de la fotografía y el vector de coordenadas (x, y) del punto fotografiado. Definido por:

$$\phi_n = \arcsen \frac{(x - x_p)}{r} = \arccos \frac{(y - y_p)}{r}$$

La cantidad \emptyset es el ángulo entre el eje x positivo y la línea de referencia limitada por el eje de máxima distorsión tangencial, producido por las lentes de la cámara.

Cuando los elementos de la orientación interna (x_p, y_p, c) y los parámetros de la distorsión radial (K_1, K_2, \dots) y descentrado de la distorsión $(\emptyset, J_1, J_2, \dots)$ son conocidos, la corrección apropiada para la distorsión puede ser aplicada a las coordenadas de la fotografía (x, y) por medio de las expresiones: [3.1.]

$$\Delta x = \bar{x} \cdot (K_1 \cdot r^2 + K_2 \cdot r^4 + \dots) + (P_1 \cdot (r^2 + 2 \cdot \bar{x}^2) + 2 \cdot P_2 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}^2) \cdot (1 + P_3 \cdot r^2 + \dots)$$

$$\Delta y = \bar{y} \cdot (K_1 \cdot r^2 + K_2 \cdot r^4 + \dots) + (2 \cdot P_1 \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} + P_2 \cdot (r^2 + 2 \cdot \bar{y}^2)) \cdot (1 + P_3 \cdot r^2 + \dots)$$

Siendo:

$\Delta x, \Delta y$: Correcciones de los efectos combinados de la corrección radial y descentrado tangencial.

Siendo:

$\Delta x, \Delta y$: Correcciones de los efectos combinados de la corrección radial y descentrado tangencial.

$\bar{x} = x - x_p, \bar{y} = y - y_p$: Coordenadas fotografía referidas al punto principal.

Los valores P_1, P_2, P_3 dependen de los valores del descentrado:

$$P_1 = J_1 \cdot \text{sen} \phi_n$$

$$P_2 = J_1 \cdot \text{cos} \phi_n$$

$$P_3 = \frac{J_2}{J_1}$$

Las relaciones inversas son:

$$\phi_n = \arctan\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$J_1 = (P_1^2 + P_2^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$J_2 = (P_1^2 + P_2^2)^{\frac{1}{2}} \cdot P_3$$

En el proceso analítico de calibración el juego acostumbrado de elementos de la orientación interna (x_p, y_p, c) se le añade los coeficientes de la distorsión radial y descentrado: $K_1, K_2, \dots; P_1, P_2, P_3, \dots$

3.4.3. Calibración analítica de una sola fotografía.

Las ecuaciones proyectivas resultado de una proyección central sin distorsiones puede expresarse de la forma: [3.2.]

$$x - x_p = c \cdot \frac{m_{11} \cdot \lambda + m_{12} \cdot \mu + m_{13} \cdot \nu}{m_{31} \cdot \lambda + m_{32} \cdot \mu + m_{33} \cdot \nu}$$

$$y - y_p = c \cdot \frac{m_{21} \cdot \lambda + m_{22} \cdot \mu + m_{23} \cdot \nu}{m_{31} \cdot \lambda + m_{32} \cdot \mu + m_{33} \cdot \nu}$$

Siendo:

m_n : Elementos de la matriz de orientación.

λ, μ, ν : Cosenos directores del rayo que unen los puntos de la imagen con el objeto.

La expresión específica de los cosenos directores depende de si los puntos son considerados como control especificados en términos de coordenadas tridimensionales (X, Y, Z) o en términos de direcciones (caso de estrellas). Con el control de direcciones las expresiones apropiadas son (expresión analizada en el caso estelar): [3.3.]

$$\lambda = \text{sen} \alpha' \cdot \text{cos} \omega'$$

$$\mu = \text{cos} \alpha' \cdot \text{cos} \omega'$$

$$\nu = \text{sen} \omega'$$

Los ángulos α', ω' , de los puntos de la cámara son medidos en el mismo sentido que el par de ángulos α, ω definiendo la dirección de los ejes de la cámara. Para puntos en el espacio objeto especificado por coordenadas cartesianas las expresiones apropiadas para los cosenos directores son:

$$\lambda = \frac{(X - X^c)}{R}$$

$$\mu = \frac{(Y - Y^c)}{R}$$

$$\nu = \frac{(Z - Z^c)}{R}$$

Donde (X, Y, Z) y (X^c, Y^c, Z^c) son las coordenadas en el espacio objeto del punto y el centro de proyección, respectivamente, y R es la distancia entre esos puntos.

$$R = \left((X - X^c)^2 + (Y - Y^c)^2 + (Z - Z^c)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Para linealizar las expresiones anteriores basta con asumir que los cosenos directores, tienen que ser corregidos del efecto de refracción atmosférica a través de las fórmulas deducidas para ello. Entonces, es posible reemplazar $x - x_p$, $y - y_p$ en el lado izquierdo de la expresión [3.2.] de la proyección:

$$x - x_p = x'' + v_x - x_p + \Delta v$$

$$y - y_p = y'' + v_y - y_p + \Delta v$$

Siendo:

(x'', y'') : Mediciones de los valores de las coordenadas imagen.

(v_x, v_y) : Residuales correspondientes a las coordenadas medidas.

$\Delta x, \Delta y$: Corrección de la distorsión total dada por [3.1.] con la condición que las coordenadas verdaderas (x, y) de las ecuaciones [3.1.] son reemplazadas por las coordenadas medidas (x^c, y^c) .

Cuando la anterior sustitución se realiza, las ecuaciones proyectivas explícitamente implican parámetros de distorsión radial y descentrado junto con los elementos standard de la orientación interna y externa. El término general de los parámetros proyectivos pueden ser usados para denotar colectivamente los nueve elementos clásicos de la orientación,

$(x_p, y_p, c, \alpha, \omega, \kappa, X^c, Y^c, Z^c)$ y los coeficientes de la distorsión radial y descentrado $(K_1, K_2, \dots, P_1, P_2, \dots)$. En la mayoría de los casos con la determinación de dos o tres coeficientes de la distorsión radial y otros dos o tres coeficientes del descentrado son suficientes.

Llegado a este punto es conveniente introducir el símbolo \dot{u}_i para indicar la i° de los nueve parámetros de la proyección interna $\{v_p, v_p, c, K_1, K_2, K_3, P_1, P_2, P_3\}$, y el símbolo \ddot{u}_j , señala seis parámetros de la orientación externa $\{\alpha, \omega, \kappa, X^c, Y^c, Z^c\}$. Es conveniente asumir en principio que el control de la calibración consiste en puntos con coordenadas especificadas (X, Y, Z) antes

que puntos especificados por ángulos (α, ω), este es el caso de puntos de control estelar. Más adelante, los pasos necesarios para la admisión de control direccional será señalado.

Con la simbología adoptada las ecuaciones de la proyección asumen la forma funcional siguiente:

$$\begin{aligned} f_1(x'' + v_x \cdot x''' + v_\mu \cdot \dot{u}_1 \cdot \dot{u}_2 \dots \dot{u}_n; \dot{u}_1 \cdot \dot{u}_2 \dots \dot{u}_n) &= 0 \\ f_2(x'' + v_x \cdot x''' + v_\mu \cdot \dot{u}_1 \cdot \dot{u}_2 \dots \dot{u}_n; \ddot{u}_1 \cdot \ddot{u}_2 \dots \ddot{u}_n) &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones deben ser linealizadas por el proceso usual de expansión de series de Taylor sobre aproximaciones iniciales. Por consiguiente, si \dot{u}_i, \ddot{u}_i , son reemplazados por las aproximaciones además de las correspondientes correcciones de acuerdo con las expresiones: [3.4.]

$$\begin{aligned} \dot{u}_i &= \dot{u}_i''' + \delta \dot{u}_i \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, n \\ \ddot{u}_j &= \ddot{u}_j''' + \delta \ddot{u}_j \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

El par de ecuaciones observadas linealizadas pueden expresarse de forma matricial: [3.5.]

$$\underset{(2,1)}{v_i} + \underset{(2,2)}{\dot{B}_i} \cdot \underset{(2,1)}{\delta} + \underset{(2,6)}{\ddot{B}_i} \cdot \underset{(6,1)}{\delta} = \underset{(2,1)}{\varepsilon_i}$$

En el cual el subíndice i ha sido introducido para referir el punto de control i^* . El vector ε indica las discrepancias proyectivas, las cuales debajo del supuesto de un modelo perfecto, debería ser cero solamente con el ejercicio de mediciones intachables y aproximaciones perfectas de los parámetros proyectivos.

$$\varepsilon_i = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1i} \\ \varepsilon_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x''_i, v_x''_i, \dot{u}_1'''_i, \dot{u}_2'''_i, \dots, \dot{u}_n'''_i; \dot{u}_1'''_i, \dot{u}_2'''_i, \dots, \dot{u}_n'''_i) \\ -f_2(x''_i, v_x''_i, \dot{u}_1'''_i, \dot{u}_2'''_i, \dots, \dot{u}_n'''_i; \ddot{u}_1'''_i, \ddot{u}_2'''_i, \dots, \ddot{u}_n'''_i) \end{pmatrix}$$

Los vectores v_i, δ y δ están comprendidos respectivamente por los residuales de las coordenadas de la placa, correcciones de aproximaciones de los parámetros de la proyección exterior. Los elementos de las matrices \dot{B}_i y \ddot{B}_i , consisten en las derivadas parciales de las ecuaciones de la proyección linealizada con respecto a los parámetros de la proyección interna y externa, respectivamente. Las expresiones de los elementos \dot{B}_i y \ddot{B}_i pueden encontrarse en: **Brown, Duane C.:** "Advanced Methods for the Calibration of Metric Cameras". Syracuse University, Syracuse, 1969.

El ajuste por mínimos cuadrados requiere que las precisiones de las cantidades medidas son especificadas en términos de la matriz covarianza apropiada. La matriz covarianza de las coordenadas medidas de la placa del punto i^* puede ser representado como:

$$A_i = \begin{pmatrix} \sigma_{x_i}^2 & \sigma_{x_i \mu_i} \\ \sigma_{x_i \mu_i} & \sigma_{\mu_i}^2 \end{pmatrix}$$

El hecho que las coordenadas de la placa para un punto dado tengan la posibilidad de ser consideradas correladas (las covarianzas no tienen que ser cero) admite la consideración de

establecer coordenadas por otros instrumentos que los convencionales comparadores (x, y) . Aunque la correlación se admite entre las coordenadas x e y de un punto dado, debería asumirse que no existe correlación entre los errores de diferentes puntos. Por consiguiente, si para un total de n puntos son medidos, la matriz de covarianza de las coordenadas de todos los n puntos pueden ser representados por:

$$\Lambda_{(2n,2n)} = \text{diag} \left(\Lambda_{(2,2)}^1, \Lambda_{(2,2)}^2, \dots, \Lambda_{(2,2)}^n \right)$$

Hay que asumir que los parámetros de la proyectiva tienen la posibilidad de tener restricciones a priori. Esto implica la existencia de ecuaciones de observaciones suplementarias de la forma: [3.6.]

$$\dot{u}_i = \ddot{u}_i'' + v_i \quad (i = 1, 2, \dots, 9)$$

$$\dot{u}_j = \ddot{u}_j'' + v_j \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

En los cuales v_i, v_j , son los residuales correspondientes a los valores a priori de los parámetros proyectivos de $\ddot{u}_i'' - \ddot{u}_j''$. Las matrices de covarianza de los parámetros proyectivos interiores y exteriores pueden ser indicados por $\hat{\Lambda}$ y $\hat{\Lambda}$ respectivamente.

Las aproximaciones iniciales \dot{u}_i''' y \dot{u}_j''' empleadas en el proceso de linealización de las ecuaciones proyectivas no necesitan necesariamente que sean tomadas iguales a los valores a priori \dot{u}_i'', \dot{u}_j'' . Esto significa que dos expresiones diferentes existen para $\dot{u}_i'' - \dot{u}_j''$, dadas con las ecuaciones [3.4.], [3.6.]. La eliminación de $\dot{u}_i'' - \dot{u}_j''$, de estas expresiones produce el siguiente juego de alternativas de ecuaciones de observaciones suplementarias:

$$v_i - \delta \dot{u}_i = \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \dots, 9)$$

$$v_j - \delta \dot{u}_j = \varepsilon_j \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

En los cuales los términos de discrepancias suplementarias $\varepsilon_i, \varepsilon_j$, representan las diferencias entre las aproximaciones arbitrarias de los parámetros proyectivos y los correspondientes valores a priori:

$$\varepsilon_i = \dot{u}_i''' - \dot{u}_i''$$

$$\varepsilon_j = \dot{u}_j''' - \dot{u}_j''$$

La notación de estos sistemas es:

$$v - \delta = \varepsilon$$

$$v - \delta = \tilde{\varepsilon}$$

Donde:

v : Residuos de las coordenadas imagen.

δ : Residuos de los parámetros de la orientación interna.

$\tilde{\delta}$: Residuos de los parámetros de la orientación externa.

δ : Vector de las correcciones para los parámetros de la orientación interna.

$\tilde{\delta}$: Vector de las correcciones para los parámetros de la orientación externa.

ε : Término independiente de las ecuaciones.

$\tilde{\varepsilon}$: Diferencia entre valores medidos y aproximados de la orientación interna.

$\tilde{\varepsilon}$: Diferencia entre valores medidos y aproximados de la orientación externa.

Las dos ecuaciones anteriores junto con el sistema [3.5.] de ecuaciones linealizadas forma el sistema total de ecuaciones de observación para el ajuste por mínimos cuadrados.

El sistema de ecuaciones normales tiene la forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \dot{N} + W' & \bar{N} \\ \bar{N}' & \tilde{N} + \tilde{W}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \\ \tilde{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{c} - W' \cdot \varepsilon \\ \tilde{c} - \tilde{W}' \cdot \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$\dot{N} = \sum_{i=1}^n \dot{B}_i' \cdot W_i \cdot \dot{B}_i$$

$$\bar{N} = \sum_{i=1}^n \dot{B}_i' \cdot W_i \cdot \tilde{B}_i$$

$$\tilde{N} = \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i' \cdot W_i \cdot \tilde{B}_i$$

$$\dot{c} = \sum_{i=1}^n \dot{B}_i' \cdot W_i \cdot \varepsilon_i$$

$$\tilde{c} = \sum_{i=1}^n \tilde{B}_i' \cdot W_i \cdot \tilde{\varepsilon}_i$$

Donde la matriz de pesos está definida por:

$$W_i = \Lambda_i^{-1}, W_i' = \dot{\Lambda}^{-1}, \tilde{W}_i = \tilde{\Lambda}^{-1}$$

Con ello el sistema tiene 15 incógnitas consistentes en 9 de ellos en las correcciones a las aproximaciones a los parámetros interiores (los elementos de δ) y 6 correcciones a las aproximaciones a los parámetros exteriores (los elementos de $\tilde{\delta}$). Las correcciones resultantes de las solución de las ecuaciones normales lleva a una mejora de las aproximaciones las cuales pueden ser empleadas en un proceso iterativo hasta que la convergencia tenga insignificantes pequeñas

correcciones. Cuando δ y δ' sean insignificantes, los residuales de las coordenadas de la placa, parámetros de la proyección interna y parámetros de la proyección externa, pueden ser evaluados como:

$$v_i = \varepsilon_i, v' = \varepsilon', v'' = \varepsilon''$$

En las cuales las discrepancias de los vectores son anotados del juego final de la proyección como constante.

La naturaleza y distribución de los residuales de las coordenadas de la placa son los indicadores primarios de la calidad del ajuste. Idealmente, debería ser aleatorio y libre las tendencias de los sistematismos locales. Falla el sistema ideal si se realizan inadecuaciones del modelo matemático.

La propuesta inicial de las matrices de covarianzas $\hat{\Lambda}$ y $\hat{\Lambda}'$ es para proporcionar un acertado peso dentro del ajuste de los valores a priori de los parámetros proyectivos. Con respecto a algunos parámetros dados surgen tres posibles situaciones:

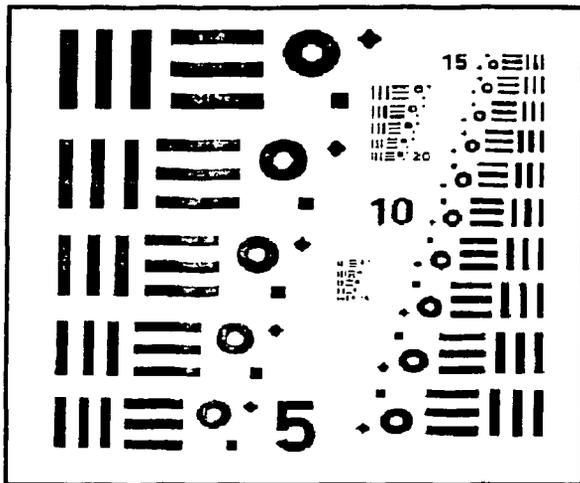
- El parámetro es conocido por adelantado con un alto grado de exactitud.
- El parámetro no es conocido por adelantado con un alto grado de exactitud.
- El parámetro no está dado para un valor preestablecido.

En el primer caso, deberían los valores a priori asumir un apropiado grado de ajuste y unos buenos valores de la matriz de covarianza. En el segundo caso, deberían tratar la aproximación adoptada inicialmente de los parámetros como si fueran un valor priori sujeto a una gran matriz de covarianza, ello debería permitir una libertad completa a los parámetros para el ajuste. En el tercer caso, se deberían tratar los valores para ser enfocados como un valor a priori con una extremada pequeña varianza, esto proporciona a los parámetro un bajo grado de ajuste.

3.5. Calibración de la resolución de una cámara.

Además de la determinación de los elementos de la orientación interna, los métodos de laboratorio la calibración de la cámara también proporciona una evaluación del poder de resolución de la cámara. Como se mencionó en un apartado anterior, hay dos métodos para determinar el poder de resolución de las lentes; uno es el método directo de contar el número máximo de líneas por milímetro que pueden claramente reproducirse por las lentes; la otra es la función de transferencia de modulación, *MTF* de las lentes.

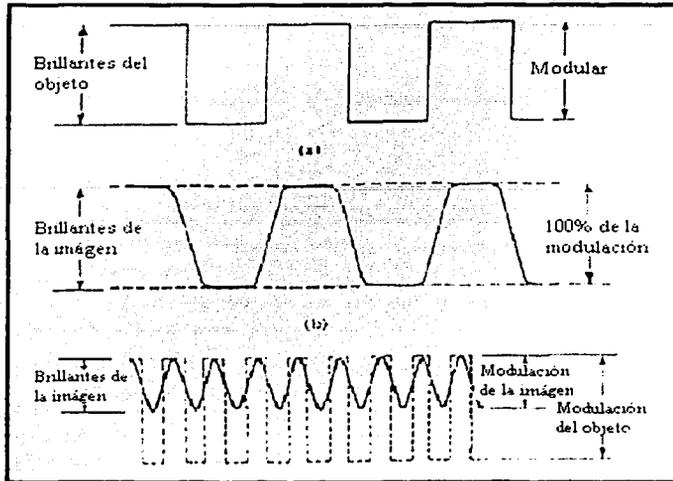
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Patrón del test de resolución para la calibración de una cámara.

El método de calibración empleado para determinar el número de líneas consiste en fotografiar un test patrón de resolución usando una emulsión de muy alta resolución. El test patrón tiene numerosos juegos de pares de líneas (líneas paralelas negras de variados grosores separados por espacios blancos del mismo grosor). La medida de las líneas gruesas de cada juego es su número de líneas por milímetro. La variación del grosor de las líneas en un típico test patrón puede alcanzar de 10 a 80 o más líneas por milímetro. Si el método del multicolimador es usado para calibrar una cámara, el test patrón puede ser proyectado simultáneamente por los colimadores con las cruces de los colimadores formándose en las diagonales de la imagen en el formato de la cámara. Después que la fotografía ha sido realizada, los resultados de las imágenes son analizadas con aumentos para determinar el juego más fino de líneas paralelas las cuales pueden tener la resolución más clara. El promedio de las cuatro resoluciones de cada incremento angular del centro del colimador es anotado en el certificado de calibración.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

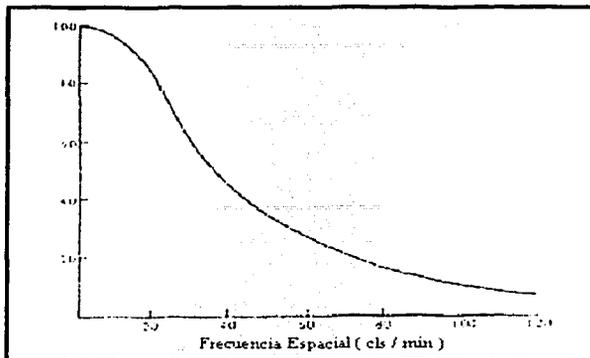


a: Modulación del test objeto. b: Modulación transferida de la imagen para el mismo test objeto. c: Modulación transferida para la imagen teniendo cerrada la frecuencia espacial.

En el procedimiento de contar líneas, con el sucesivo y cada vez menor test patrón, la afinidad de distinguir entre líneas y espacios regularmente disminuidos, y el patrón menor que claramente puede ser percibido llega a ser algo subjetivo. La preferida medida de resolución es por transferencia de modulación.

Para determinar de la transferencia de modulación, se registra la densidad usando un microdensitómetro son tomados a través de un patrón de test similar al usado en el procedimiento de contar líneas. Para líneas gruesas usando espacios anchos, la actual distribución de brillo (variaciones de densidad) a través del patrón objeto debería aparecer como en el apartado a de la anterior figura. Sin embargo, la distribución del brillo medida con un microdensitómetro a través de la imagen de este patrón debería aparecer como la ilustración b de la figura. Hay que hacer notar que los bordes están algo redondeados, pero la amplitud o modulación de las diferencias de brillo es el mismo para el dibujo o patrón imagen como para el objeto original. De este modo para esta frecuencia espacial del patrón, la modulación transferida debe ser de un porcentaje del 100 %. La densidad registrada a través de las imágenes de los sucesivos patrones cada vez más cerrados produce una reducción en la modulación, como se ilustra en el apartado c del dibujo. En este caso, la amplitud es la mitad que en el objeto original, y la modulación transferida es del 50 %.

Por medición de densidades a través de muchos patrones variación espacial de frecuencias, y dibujando los resultados de transferencia de modulación en el eje de ordenadas y la frecuencia espacial en el eje de abscisas, se obtiene una curva igual a la de la siguiente figura:



Curva de la función de transferencia de modulación. MTF.

Las ventajas de la función de transferencia de modulación son, *MTF* : Es un buen indicador de los efectos de borde y también proporciona la capacidad de predecir la resolución que puede ser esperada para cierto grado de detalle. Las curvas *MTF* pueden ser combinadas para diferentes lentes, películas y procesos fotográficos; además, es posible estimar la combinación de efectos para algún determinado sistema de imágenes.

4. Cámaras métricas terrestres.

Las fotografías para fotogrametría terrestre son generalmente tomadas con las cámaras fijadas en posición, los elementos de la orientación externa serán determinados por la topografía de campo. Las fotografías de larga distancia entre la cámara y el objeto son usados en casos especiales, por ejemplo para reconocimiento topográfico e investigaciones de glaciario.

Las aplicaciones más importantes de la fotogrametría de objeto cercano son:

- Arquitectura e ingeniería civil: Reconocimiento de viejos y nuevos edificios, reconocimientos interiores...
- Conservación de monumentos: Registro de fotografías para una futura restauración.
- Arqueología: Documentación y reconocimiento de excavaciones.
- Biofotogrametría: Mediciones de criaturas en vida.
- Fotogrametría forense: Escenas de crímenes, accidentes de tráfico...
- Fotogrametría industrial: Unión de ensamblajes, diseño de automóviles.

4.1. Requerimientos de las cámaras métricas terrestres.

En orden a determinar los elementos de la orientación externa, para controlar el alcance de las fotografías y mediciones de las coordenadas de puntos de control, una cámara métrica terrestre debería tener:

- Centrado forzoso con los goniómetros y las punterías.
- Facilidad de nivelación sobre un trípode.

- Capacidad de movimiento horizontal para leer sus ángulos horizontales y poder fijar una lectura en una determinada posición. Un telescopio para moverlo en el círculo vertical.
- Rotación sobre el eje axial del fotograma.
- Visor de la imagen que define los bordes de la imagen.

Para la recreación de la orientación interna, cada fotografía, debe disponer de:

- Marcas fiduciales.
- Distancia principal.
- La suma adicional a la distancia principal si el foco es cambiado.
- El número de identificación de la cámara, para asegurar el correcto certificado de calibración.

La siguiente información adicional debe llevarla cada fotograma para la organización del trabajo:

- Número de fotograma.
- Identificación de la base: Izquierda es la A y la derecha es la B.
- Identificación del tipo de fotogrametría: Caso normal, desviado a la izquierda, desviado a la derecha, convergente.
- Fecha, tiempo, descripción del objeto.

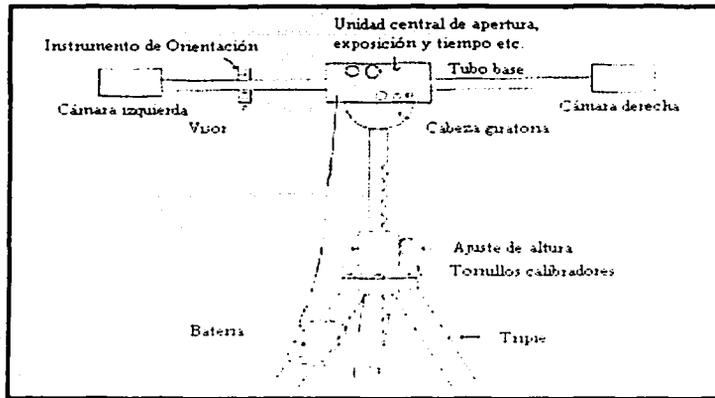
Las siguientes condiciones tienen que ser satisfechas para conseguir los mejores resultados:

- Contador externo de la exposición.
- Elección libre de la apertura y tiempo de exposición.
- Posibilidad de enfocar a la distancia que se encuentre el objeto.
- Sincronización de puesta en marcha de los obturadores de las dos cámaras para fotografías simultáneas de un objeto en movimiento.
- Formato plano.
- Posibilidad de usar películas de rollo y cassettes.
- Placa con presión al vacío para alisar la película.

4.2. Diseño general de las cámaras métricas terrestres.

4.2.1. Cámara estereométrica.

La cámara estereométrica consiste en dos cámaras fijas de manera relativa una de la otra en el caso normal, es denominada base. La base más común es de 120 cm. para distancia a objetos de 5 a 25 m. Son usadas para solucionar accidentes de tráfico, reconocimiento de fachadas. La base es variable con longitudes que van desde los 40 cm. hasta los 2 m.



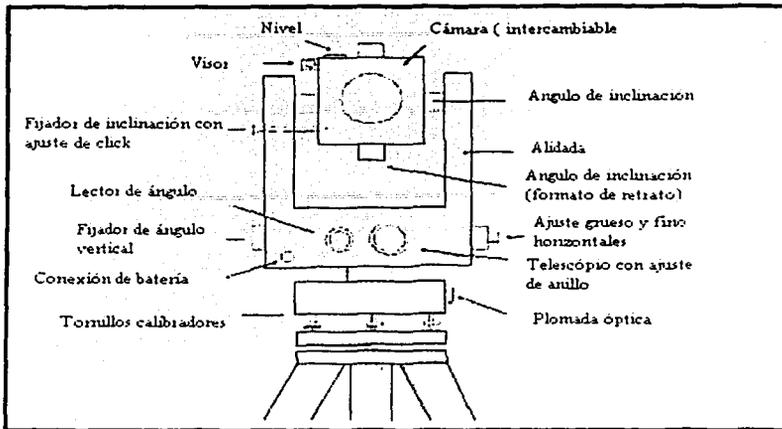
Esquema de una cámara estereométrica.

Algunos tipos de cámaras estereométricas son:

- Wild C 120 y Wild C 40: La longitud de la base varía de 40 cm. hasta 120 cm. La distancia principal es de 64 mm. para planos de fotografías de 64 mm. x 89 mm. La cámara puede girar 200°. La altura de la cámara puede variar de 1.5 m. a 2.5 m.
- Zeiss Oberkochen SMK 120 y Zeiss Oberkochen SMK 40: La longitud de la base varía de 40 cm. hasta 120 cm. La distancia principal es de 60 mm. Para planos de fotografías de 89 mm. x 119 mm.

4.2.2. Cámaras métricas independientes.

Estas cámaras son usadas cuando se requiere máxima precisión y la relación base-distancia debe ser cuidadosamente considerado.



Esquema de una cámara métrica independiente.

Las limitaciones de la cámara son impuestas por la fijeza de la focal. Sin embargo, la distancia al objeto debe estar dentro del rango de la apertura dependiente de la profundidad de campo. Las cámaras métricas universales tienen la posibilidad de intercambio de lentes con longitudes focales diferentes. Las cámaras pueden ser montadas en un goniómetro.

Las cámaras métricas independientes más conocidas son:

- Wild P 31: Esta cámara tiene un sistema universal terrestre de tres cámaras métricas intercambiables. La parte más baja de la cámara lleva el sistema standard de centrado forzoso de Wild. La parte central tiene un simple telescopio para apuntar a la otra estación y la orientación relativa. La alidada puede rotar para fijar los ángulos. También tiene un círculo graduado para determinar las lecturas verticales.
- Wild P 32: Se puede montar en el telescopio de un teodolito Wild T2 y Wild T16. Su distancia principal es de 64 mm. Pude manejar los formatos de las placas de 64 mm. x 89 mm. o de las películas de rollo de 60 mm. x 90 mm. El punto principal se encuentra desplazado 10 mm. La cámara y el telescopio del teodolito pueden girar en el círculo vertical $\pm 33^\circ$ y rotar completamente en el círculo horizontal. La cámara puede rotar sobre sus propios ejes en intervalos de 100° . La distancia standard del enfoque es de 25 m.
- Zeiss Jena UMK: Esta es una cámara métrica universal de precisión de placas de gran formato, 13 cm. x 18 cm., o para películas de rollo no perforadas de 19 cm. de ancho. Un formato utilizable de borde a borde es de 12 cm. x 16,6 cm. para paisaje o retratos. Las marcas fiduciales y datos auxiliares son iluminados eléctricamente. Para la planeidad de la película se recurre a un rodillo de vacío.

5. Cámaras de pequeño formato.

5.1. Principios de las cámaras.

Uno de los componentes más críticos de las cámaras es el sistema de lentes, el cual forma una imagen invertida del objeto en la película. Las lentes son ajustables y para ello tienen un control

del enfoque que permite agudizar la imagen mediante la alteración de la distancia entre las lentes y el plano focal, esta es una condición necesaria para la realización de fotogrametría terrestre y satisfacer la ecuación:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{v} + \frac{1}{u}$$

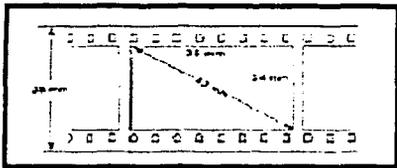
Siendo:

- u : Distancia entre el objeto y las lentes.
- v : Distancia entre las lentes y el plano focal.
- f : Distancia focal de las lentes.

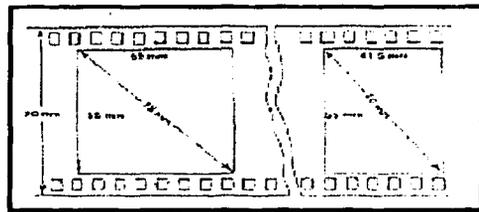
Aunque las distancias u y v son variables, la distancia focal de las lentes es fijada. En fotogrametría aérea esta fórmula no es empleada, excepto para vuelos muy bajos, en condiciones normales la distancia entre el objeto y las lentes se considera infinita, por tanto $v = f$.

La fotografía puede ser observada por medio de un sistema de observación el cual mediante una ventana que muestra la imagen de la visión directa del objeto que forman las lentes. Esta labor se realiza mediante un sistema de espejos y son llamadas cámaras reflex, *SRL* (Single Lens Reflex).

Otro componente de la cámara es la película, en resumen comentar que el tamaño de la película lo determina el formato de la cámara, y generalmente el formato de las cámaras es de 35 mm. y consiste en películas de 36 mm. x 24 mm. Aunque los 35 mm. representan realmente cámaras de pequeño formato, el término también incluye las cámaras que emplean rollos de películas, las cuales tienen formatos de 6 cm. x 9 m., 6 cm. x 6 cm. y 6 cm. x 4,5 cm.



Formato de 35 mm.



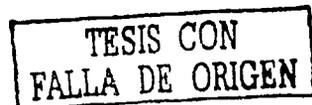
Formato de 70 mm.

La distancia focal es aproximadamente igual a la diagonal del formato de la película.

Como se analizó en otro apartado anterior las fotografías aéreas tienen un sistema para expresar la velocidad de la película, este es el *EAFS*, pero las cámaras de pequeño formato utilizan *SFAP* (Small Format Aerial Photography) basado en el sistema ISO.

5.2. Cámaras de 35 mm.

La cámara de 35 mm. por ahora es la más versátil de todas las cámaras, y representa el sistema más popular de *SFAP* ya que ofrece lo máximo al menor coste. Lógicamente los 35 mm. de las cámaras suponen una desventaja puesto que limita el alcance de las tomas para una escala dada. Para evitar esta desventaja existen las cámaras de fotogrametría aérea que realizan fotografías en un formato de 23 cm. x 23 cm.



Si simplemente se habla de la calidad de la imagen es posible decir que, proporcionando las mejores lentes a la cámara, la mejor película, la mejor ampliación y el mejor procesado es posible hacer un proceso que es igual que la calidad de una fotografía de 23 cm. x 23 cm.. Pero la precisión de la geometría de la ampliación de los 35 mm. ciertamente no es lo suficientemente buena como un gran formato. El principal problema son las cualidades métricas de las lentes de ambas cámaras y las lentes de ampliación, la estabilidad de la ampliadora y la estructura de la imagen del negativo.

5.2.1. Cámaras SLR de 35 mm.

La cámara *SLR* de 35 mm. es la más versátil de todas las cámaras y la elección más popular de fotografías de pequeño formato porque tiene un rango amplio de lentes disponibles, fiabilidad y exactitud a través de la lentes, además de otras ventajas que no se encuentran en otras cámaras.

Los requisitos mínimos aceptables para el uso de una cámara de 35 mm. para *SFAP* son:

- Facilidad de intercambiar las lentes.
- La mejor calidad para las lentes de 24 mm., 28 mm. y 50 mm. de distancia focal.
- Máxima apertura para las lentes.
- Un obturador de velocidad mínima de 1/2000.
- Obturador eléctrico con control remoto y enrollado motorizado de la película.
- Cámara resistente y capaz de hacer las películas con excelente planeidad e incluso al vacío.

5.2.2. Cámaras y lentes de 35 mm para *SFAP*.

El enfoque con el zoom de las lentes es variable con la distancia focal, esto es ideal para muchas aplicaciones, y ello es para conseguir una buena calidad de la imagen.

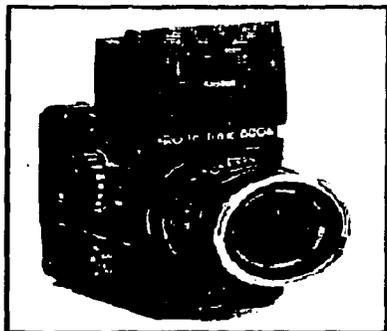
Las casas comerciales dedicadas a la fabricación de cámaras de 35 mm. son: Canon, Nikon, Minolta, Zeiss, Leica y Rollei, todas ellas producen cámaras de muy buena calidad con una serie de altas cualidades de enfoques manuales. Algunas cámaras que se pueden recomendar son:

- Yashica Contax RTS III: La alta calidad *SLR* hace cinco películas por segundo. El obturador es de 1/8000. Tiene sistema de vacío para la planeidad de la película. Las lentes son de la marca Carl Zeiss con la posibilidad de poner distancias focales desde 15 mm. hasta 1000 mm. En test prácticos se han comprobado que tienen grandes precisiones para fotogrametría con una resolución de 300 parejas de líneas por milímetro.
- Leica R7 de 35 mm. *SLR*: Son cámaras excelentes y el modelo R7 es un ejemplo que suele ser recomendado para *SFAP*. El tiempo de exposición más alto es de 1/2000 con un excelente rango de lentes desde 15 mm. hasta 800 mm. de distancia focal.
- Canon F-1 AE y EOS-1: La velocidad tope de exposición es de 1/2000 para la cámara F-1 y de 1/8000 para la cámara EOS-1, esto supone que sea más cara que la F-1. La cámara EOS-1 está recomendada para *SFAP*, no solamente por su excelente juego de lentes sino por su conocida fiabilidad.
- Minolta Dynax 7xi y Dynax 9xi: La cámara 7xi tiene una velocidad tope de exposición de 1/8000 y el modelo 9xi tiene una asombrosa exposición de 1/12000.
- Nikon F-801s y F4: De la amplia gama de cámaras de Nikon se pueden seleccionar estas dos, cuyo tiempo máximo de exposición es de 1/8000. La cámara F-801 s existe en una versión digital.

- Hasselblad: Estas cámaras tienen una larga historia en su manejo para la *SFAP*. Todos los modelos tienen un formato de 56 mm. x 56 mm., los usuales 120, 220 y 70 mm..

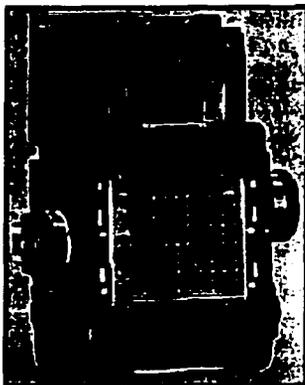
Destacan las siguientes cámaras:

- Hasselblad model 500 EL/M.
 - Hasselblad 200 FC/M.
 - Hasselblad 553 ELX.
 - Hasselblad 205 TCC.
 - Hasselblad 201 F.
 - Hasselblad MK 70.
- Cámaras de reconocimiento Vinten de 70 mm.: Estas cámaras se emplean para reconocimiento militar y espacialmente para reconocimientos tácticos de alta velocidad y altitudes medias y bajas. Pueden realizar hasta 16 películas por segundo. La cámara Vinten de 70 mm. realizó su primera misión de reconocimiento a principio de 1950 a través de la Royal Air Force.
 - Cámaras Pentax 645 SLR: La velocidad tope de exposición es de 1/1000. La característica de la cámara es que tiene calibrada las lentes y placa reseau con marcas fiduciales en las esquinas del plano focal.
 - Rollei Rolleiflex 3003 metric (35 mm.): La película de la cámara Rollei 3003 se coloca sobre una malla de cruces para corregir alguna distorsión de la imagen o la no planeidad de la imagen durante la exposición. La placa con la malla está colocada en el interior de la cámara en frente del plano de la película de forma que las cruces son fotografiadas en el momento de la exposición. Cualquier error que pudiera surgir pueden ser eliminados mediante programas fotogramétricos. La velocidad del obturador es de 1/2000.
 - Rollei Rolleiflex 6006 Metric: En la cámara 6006 todas sus funciones son controladas electrónicamente y las lentes son Zeiss, El obturador está entre las lentes y tiene una velocidad limitada a 1/500. La Rollei 6006 tiene una serie de almacenes intercambiables de formato 6 cm. x 6 cm., incluyendo el tamaño 120 (12 fotogramas), 220(24 fotogramas) y el modelo 70 (70 mm.).



Cámara métrica Rolleiflex 6006.

La versión Metric tiene una placa reticulada (Reseau) con una serie de 11 x 11 cruces de alta precisión, y la disponibilidad de una gran gama de lentes métricas calibradas de Carl Zeiss desde 49 mm. de distancia focal hasta 350 mm.



Placa reseau de 11 x 11 cruces de la cámara Rolleiflex 6006.

6. Almacenamiento de la película.

El almacenamiento de la película aérea tiene tres fases: Película no expuesta, película expuesta y película procesada. Todos los materiales fotográficos son perecederos, y las características de dichos materiales no expuestos cambian lentamente con el paso del tiempo: Pérdida de sensibilidad, disminución del contraste... Para disminuir estos efectos, las películas se deben almacenar en condiciones adecuadas de humedad y temperatura.

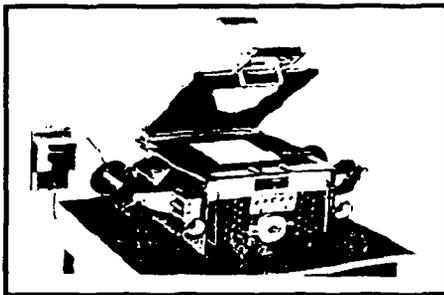
- Películas no expuestas: La humedad relativa de las películas no debe exceder nunca el 70 %, por tanto su humedad ideal está comprendida entre un 40 % y un 60 %. Cuando las películas tengan que guardarse durante un periodo grande de tiempo (meses o años) la temperatura debe mantenerse entre los -18°C y los -23°C . Cuando se vayan a usar hay que dejarlas que cojan la temperatura ambiente antes de abrir el contenedor, lo recomendable es esperar 24 horas. Si esto no se cumple se producirá una condensación de la humedad atmosférica sobre la película, creando en el momento de la toma fotográfica pequeños puntos de humedad. También se puede producir ferrotipia, que consiste en que la emulsión se adhiere a la base de la capa adyacente cuando la película está enrollada.
- Película expuesta: Cuando una película ha sido expuesta se la debe revelar lo antes posible. Sin embargo, debido a las condiciones del trabajo no es posible revelarla inmediatamente, entonces se debe seguir unas determinadas condiciones: Sellado de forma que se mantenga refrigerada a 4°C . o menos. Fundamentalmente las películas infrarrojas y de color se deterioran más rápidamente que las no expuestas.
- Película procesada: En climas templados el almacenamiento de películas procesadas no es complicado. El problema se crea en climas donde la humedad relativa es superior al 60 % y la temperatura es superior a 27°C . El nivel ideal de humedad relativa es del 30 % al 40 % y la temperatura de 20°C . Aunque lo que más le afecta a la vida de la película

procesada es su procesado, un fijado completo es fundamental seguido de un lavado completo para conservar la máxima permanencia de las imágenes.

7. Copias de películas de fotografías aéreas.

7.1. Impresión por contacto.

La impresión por contacto es el proceso directo de hacer el positivo de una película a partir del negativo. El lado de la emulsión del negativo se coloca en contacto directo con la emulsión no expuesta del papel a impresionar o placa de vidrio. Junto a esto se coloca una impresora de contacto y exposición con la emulsión del papel a imprimir o la placa de vidrio hacia la fuente de luz. El equipo está equipado con un mecanismo de cronometraje a través del cual realiza automáticamente la exposición para el tiempo deseado. Hay dos rodillos en cada lado del instrumental que hacen posible el manejo de manera fácil de las bobinas de las fotografías aéreas. La membrana de goma que cubre al material impreso está recubierto mediante aire, de forma que cuando se cierra en el momento de la exposición, todas las partes del negativo son presionadas firmemente sobre la plataforma de cristal. La impresión por contacto es capaz de hacerse automáticamente y la exposición de los negativos aéreos del rollo entero se realiza de manera continua. El positivo se obtiene del mismo tamaño que el negativo.

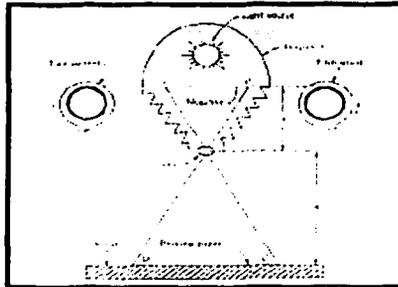


Impresora de contacto: K-30 (Carl Zeiss).

7.2. Impresión por proyección.

Si los positivos que se desean obtener tienen una escala mayor o menor que el tamaño del negativo, el proceso de impresión por proyección es el que se debe emplear.

En este proceso, el negativo es colocado en el proyector de la impresora e iluminado por encima. Los rayos de luz llevan las imágenes de los puntos *c* y *d* del negativo a través de las lentes del proyector, hasta su colocación *C* y *D* en el papel impresionado, el cual está situado en el plano debajo del caballete del proyector. La emulsión del papel impresionado, una vez expuesto, sigue el proceso anteriormente descrito.



Geometría de ampliación con una impresora de proyección.

Las distancias A y B pueden ser variadas tanto que el positivo puede ser impreso a la escala deseada. La razón de alargamiento o reducción del tamaño del negativo o positivo es igual a la razón B/A . El caballete de la impresora del proyector tiene muchos agujeros pequeños a través de los cuales se conecta el sistema de vacío. Cuando se realiza la exposición, el sistema de vacío sostiene el papel de manera lisa de la impresora para que las distorsiones debidas a las torsiones del papel sean evitadas. El caballete y las lentes de algunas ampliadoras son capaces de inclinarse, lo cual hace posible eliminar las distorsiones inherentes a la propia inclinación de la fotografía. Una impresión realizada con la eliminación de las distorsiones debidas a la inclinación tiene la misma geometría que una fotografía vertical y se denomina fotografía rectificada.

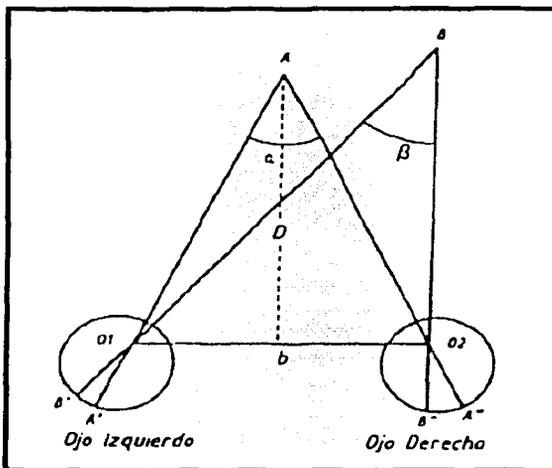
CAPÍTULO IV. INSTRUMENTOS ANALÍTICOS.

La restitución de un modelo espacial formado por un par de fotografías requiere la correspondencia de puntos en las dos fotografías, el procedimiento más conveniente para la restitución, debido a su rapidez y precisión necesita la ayuda de un estereoscopio.

1. La visión estereoscópica.

1.1. La visión estereoscópica natural.

Observando un objeto desde un solo punto de vista, el cerebro no es capaz de formar una imagen tridimensional, o sea una persona tuerta no tiene capacidad de tener la sensación de relieve. La persona que tiene esta discapacidad suple la deficiencia con la experiencia, por ejemplo sabe que un objeto está más alejado que otro cuando observa que está tapado por este. Por tanto, es necesaria la visión binocular para la formación del relieve, la cual consiste en ver con cada ojo una imagen del objeto y al observarlo desde dos puntos de vista se tiene en el cerebro dos imágenes distintas, de forma que el cerebro las fusiona formando una sola imagen tridimensional.



Distancia mínima para tener percepción del relieve.

La distancia entre las pupilas de los ojos se denomina base, generalmente las personas tienen una base de 65 milímetros. Para que se produzca sensación de relieve el ángulo paraláctico o de convergencia que deben formar las dos visuales debe ser mayor de 30° ; para ángulos menores las visuales son casi paralelas y, por tanto el cerebro no es capaz de percibir la sensación de relieve.

A continuación se deduce la agudeza visual estereoscópica o poder separador, la cual es el valor mínimo en la paralaje, a través de la cual una persona puede distinguir profundidad.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{D}$$

Desarrollando:

$$\alpha = \frac{b}{D}$$

Derivando la expresión anterior se obtiene la paralaje estereoscópica, la cual está relacionada con la diferencia de los ángulos paraláticos.

$$d\alpha = -\frac{b}{D^2} \cdot dD$$

Siendo:

$$d\alpha = \beta - \alpha = -Ps$$

Por tanto:

$$Ps = \frac{b}{D^2} \cdot dD$$

Despejando, dD :

$$dD = \frac{D^2 \cdot Ps''}{b \cdot 206265''}$$

Para valores de Ps igual a 30" y b de 65 milímetros:

Distancia ojos-objeto (metros):	1000	500	200	100	10
Diferencial en distancia (metros):	2237	559	89	22	0.22

La máxima distancia para tener sensación de relieve es de 447 metros, a una distancia mayor entre ellos dan la sensación de encontrarse en un plano.

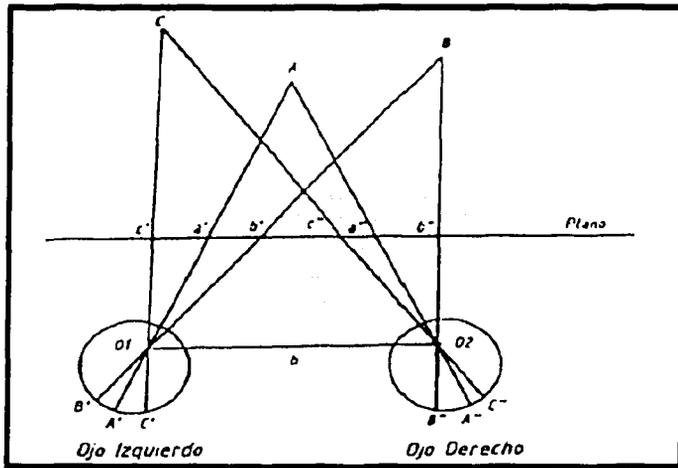
Artificialmente se puede aumentar esta distancia máxima, de forma que se puede apreciar 1 metro de profundidad a una altura de vuelo de 4000 metros.

1.2. La visión estereoscópica artificial.

La visión estereoscópica artificial es la sensación de relieve que tiene una persona al observar dos fotografías de un mismo objeto desde dos puntos de vista, esto es desde los ojos, a través de un instrumento denominado estereoscopio.

En la visión artificial se van a cortar los haces de visión colocando unas fotografías que cumplan las propiedades de la fotogrametría entre los ojos y el objeto.

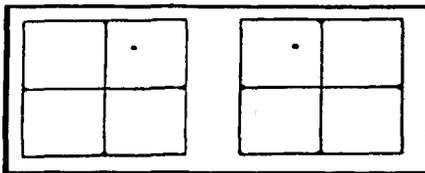
TESIS CON
FALJA DE ORIGEN



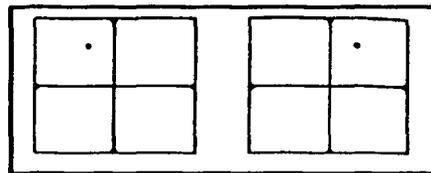
Visión binocular artificial.

Para poder tener sensación de relieve en el cerebro se deben cumplir los siguientes puntos:

- a) Los haces de visión de los ojos se tienen que intersectar en las fotografías dentro de un rango de incertidumbre pequeño. Evitándose la formación de paralajes verticales en la observación de la fotografía.



La visión estereoscópica.



El efecto pseudoscópico.

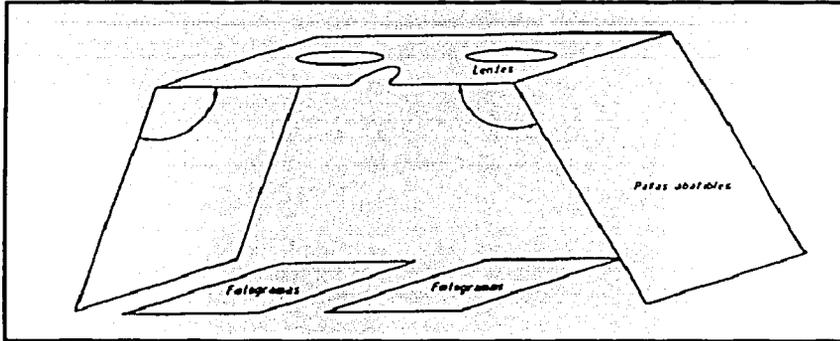
- b) Las fotografías tienen que observarse en la posición en la que fueron realizadas, de forma que en la observación de un mismo objeto el ojo izquierdo debe observar la fotografía donde se encuentre más cercano a la izquierda y el ojo derecho la fotografía donde aparece situado a la derecha. Si se cambia la posición de las fotografías se produce el efecto de la pseudoscopia, esto es, los valles en la realidad se convierten en el momento de la observación estereoscópica en divisorias de las montañas y viceversa.

1.2.1. Instrumentos para la visión estereoscópica.

Se clasifican los instrumentos fotogramétricos según el método de observación en:

1.2.1.1. Estereoscopio de refracción.

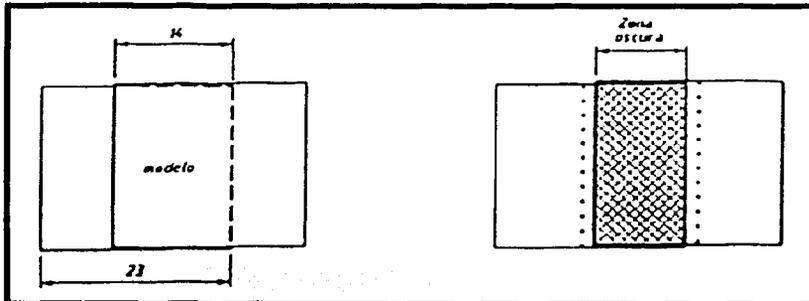
Se conocen con el nombre de estereoscopios de bolsillo y consisten en unas gafas con unos apoyos, que tiene dos lentes convergentes con la misma distancia focal y la posibilidad de separar las lentes una distancia igual a la distancia interpupilar, normalmente 65 milímetros.



Estereoscopio de bolsillo.

Es un método de observación cansado, ya que hay que observar las fotografías convergiendo los haces hacia el infinito, pero la acomodación de la vista se realiza a la distancia de las fotografías.

Los estereoscopios de bolsillo tienen el defecto de no permitir observar todo el recubrimiento longitudinal. La zona que no se puede observar se denomina zona oscura.

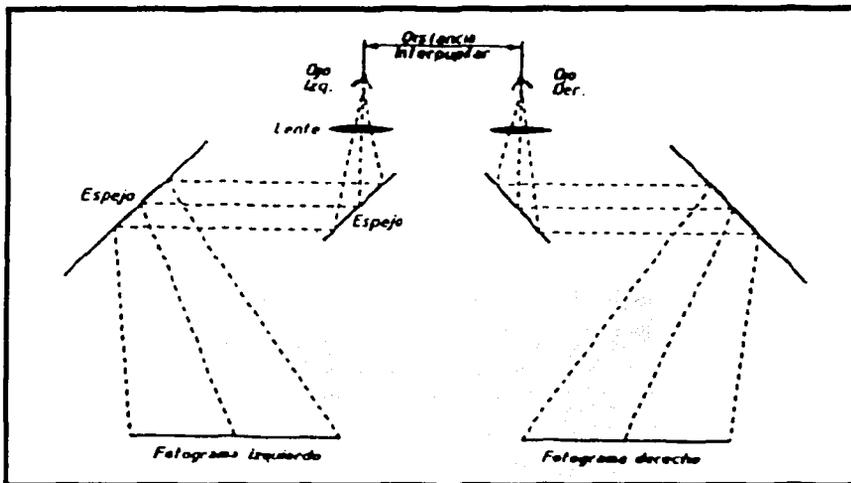


Recubrimiento del 60% en una fotografía de 23 cms. e indeterminación de la zona oscura.

1.2.1.2. Estereoscopio de reflexión.

Se conocen con el nombre de estereoscopios de espejos, y para evitar la zona oscura que producían los estereoscopios de bolsillo se amplía la distancia interpupilar introduciendo dos espejos o un prisma y un espejo formando 45 grados, entre el ocular y las fotografías.

A estos estereoscopios se les pueden acoplar unos oculares con aumentos, denominándose estereoscopios mixtos.



Estereoscopio de espejos con doble juego de espejos y con doble juego de espejo y prisma.

1.2.1.3. Anaglifo.

Se obtienen las fotografías de un objeto desde dos puntos de vista y posteriormente cada fotografía se imprime con un color complementario a la otra haciendo coincidir sus puntos principales. En la impresión la fotografía izquierda tiene el color azul y la fotografía derecha el color rojo, en la observación se colocan lentes coloreadas de forma que el ocular izquierdo es rojo y el ocular derecho es azul.

Los anaglifos tienen la ventaja de poderse observar el par estereoscópico por varias personas a la vez.

Un método muy parecido al anterior, es realizar la observación de las fotografías a través de gafas que proporcionan luz polarizada.

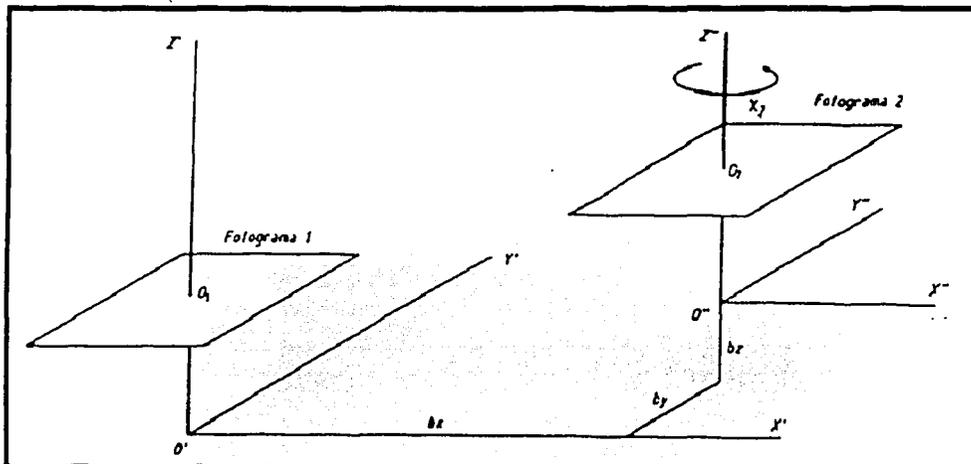
1.2.2. Colocación de las fotografías para la visión estereoscópica.

Los fotogramas se colocan en el plano de la mesa de trabajo, por tanto de los tres giros que se pueden producir al realizar la toma de dos fotografías consecutivas para formar el modelo estereoscópico solo se puede corregir el producido por la deriva del avión.

Para realizar la visión estereoscópica hay que realizar los siguientes pasos:

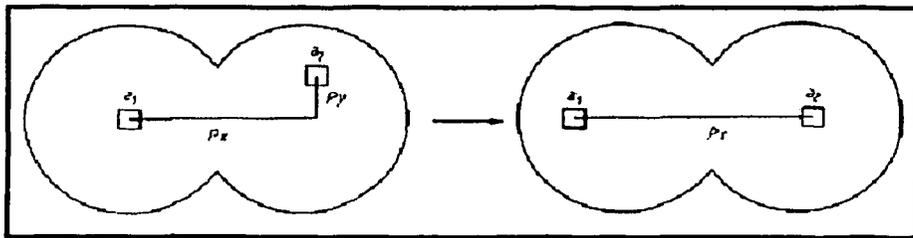
- a) Evitar el efecto pseudoscópico: Hay que colocar las fotografías en la posición en que se realizaron las tomas.

- b) Identificación de los puntos principales: Con la intersección de las marcas fiduciales se determina el punto principal de la fotografía, a continuación se identifica ese punto principal en la otra fotografía, lo que se denomina punto principal conjugado.



χ_2 : Giro de la fotografía debido a la deriva.
Corrección de un fotograma respecto a otro por efecto de la deriva.

- Las distancias entre un punto principal y el conjugado de la fotografía que forma el par estereoscópico es la representación de la base aérea sobre la fotografía.
- c) Corrección de la deriva: Girando una fotografía respecto a la otra y colocando alineados los dos puntos principales y sus conjugados se corrige la deriva.
- d) Colocación de las fotografías separadas la distancia que determina la base del estereoscopio, a continuación se fijan las fotografías a la mesa y se coloca el estereoscopio produciendo unos giros en el plano de la mesa hasta que la imagen en el ocular izquierdo esté en línea con su conjugado en el ocular derecho para que se elimine la paralaje vertical p_y . Este paralaje vertical es debido a que las fotografías del par estereoscópico no están a la misma altura de vuelo o están inclinadas. Y la paralaje horizontal p_x no será constante en el par estereoscópico si el terreno es abrupto y las fotografías no son verticales.



Corrección de la paralaje vertical.

2. La paralaje estereoscópica.

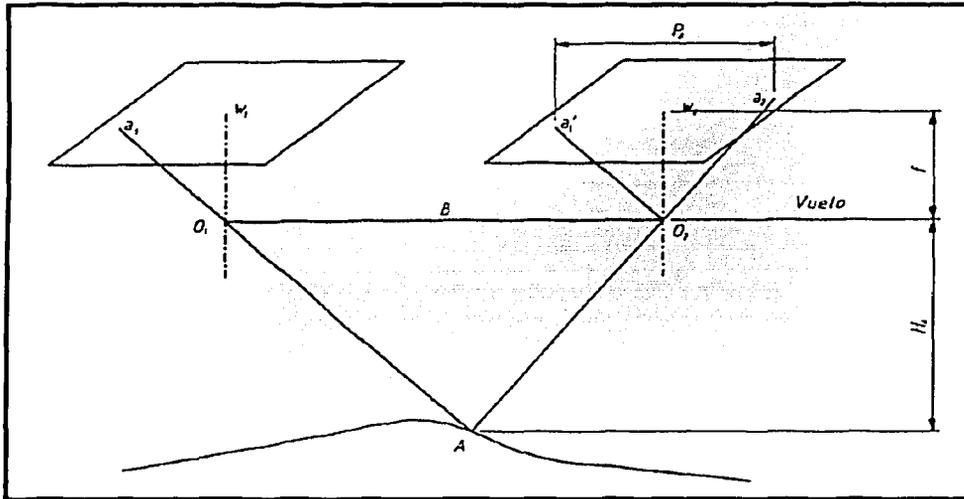
2.1. Concepto de paralaje. Barra de paralaje.

La paralaje estereoscópica es el desplazamiento de un objeto inmóvil, que se produce en dos fotografías cuando se realiza la toma de un objeto desde dos puntos de vista causada por el movimiento de la cámara que va en el avión.

En la figura de la paralaje estereoscópica se deduce que los puntos de toma de la cámara son O_1 y O_2 , el objeto A que está en la superficie terrestre queda impresionado en un fotograma en a_1 y en el otro fotograma en a_2 , por tanto la paralaje es la diferencia entre $a_1 a_2$. Haciendo una sencilla regla de tres se deduce el valor de la paralaje para un punto A .

$$P_A = \frac{B \cdot f}{H_A}$$

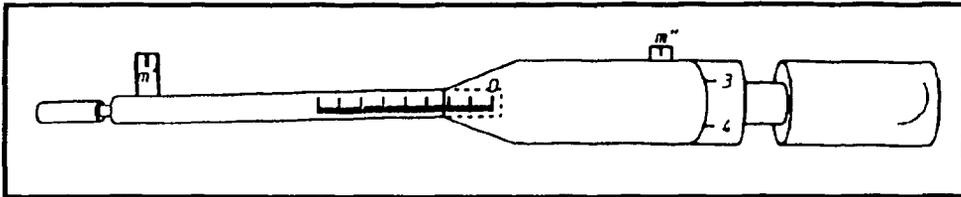
De la fórmula de la paralaje se deduce: cuanto más cerca se encuentre un objeto del punto de toma de la cámara, mayor será el valor de la paralaje. Teniendo en cuenta esto, se puede determinar las altitudes de los puntos mediante medidas de la paralaje.



Paralaje estereográfica.

Como se vio anteriormente, la paralaje estereoscópica tiene una componente horizontal y una componente vertical. La paralaje vertical hay que intentar eliminarla y la paralaje horizontal se determina mediante la barra de paralaje.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Barra de paralaje.

La barra de paralaje es un instrumento sencillo que pretende interpretar sin mucha precisión las fotografías. Si se quiere conseguir grandes precisiones para obtener Cartografía hay que recurrir al empleo de los restituidores.

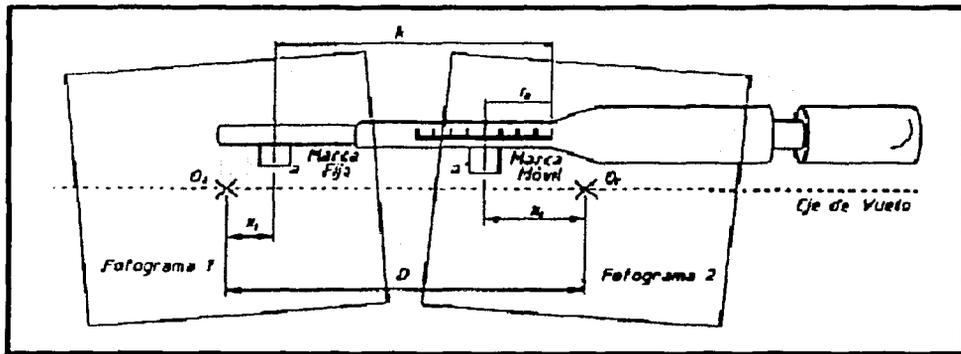
La barra de paralaje consta de dos placas, una fija y otra móvil. Las placas llevan unas marcas, las cuales son las que se ponen encima del punto y su conjugado. En el micrómetro que tiene la barra de paralaje se obtiene las paralajes horizontales con precisiones de hasta la centésima de milímetro.

2.2. Medida de la paralaje.

Para la realización de las medidas de la paralaje se necesita un estereoscopio de espejos y la barra de paralaje.

Se colocan las fotografías en la mesa como se ha explicado en un apartado anterior: 1.2.2. Colocación de las fotografías para la visión estereoscópica.

A continuación se coloca la barra de paralaje encima del par estereográfico, de forma que la placa fija se sitúa encima del punto en la fotografía de la izquierda y la placa móvil se va moviendo hasta colocarla encima de su punto conjugado en la fotografía de la derecha del par estereográfico. Si se observa el par estereográfico a través del estereoscopio deben coincidir las dos marcas de la barra de paralaje, de forma que se vería una sola.



D: Distancia entre los puntos principales. K: Distancia entre la marca izquierda y el índice.
Medición de la paralaje de un punto.

Los valores de D y K son fijos para todas las medidas. La distancia entre la placa móvil de la derecha y el índice del micrómetro es r_a .

La paralaje es:

$$p_A = D - d = x_1 - x_2$$

Siendo:

$$d = K - r_a$$

Por tanto:

$$p_A = D - K + r_a$$

Siendo la constante de la barra.:

$$C = D - K = D - d + r_a$$

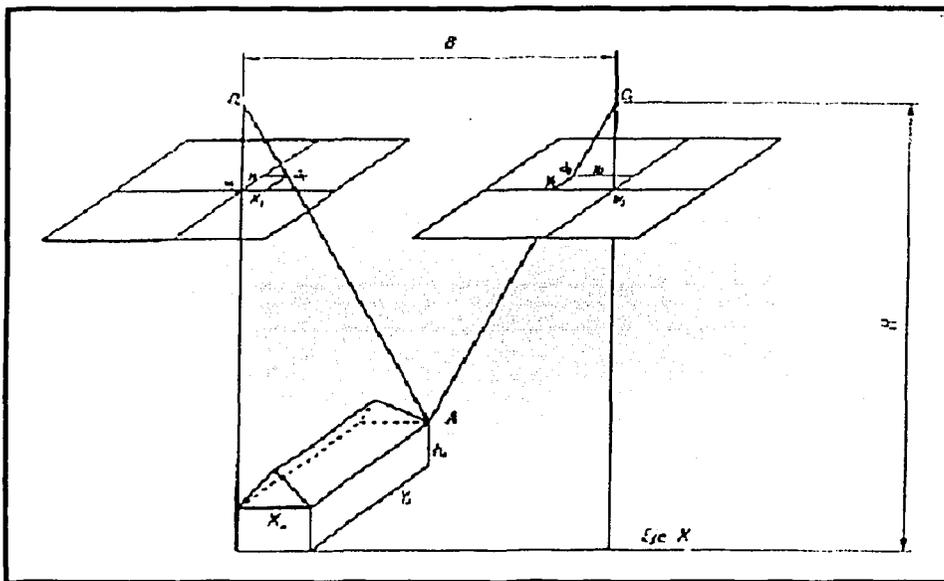
Determinando C con varios puntos sólo hay que leer el índice del micrómetro para determinar la paralaje de cada punto:

$$p_A = C + r_a$$

2.3. Ecuaciones de la paralaje.

Midiendo la paralaje de la forma que se acaba de exponer, se puede determinar las coordenadas de un punto A (X_A , Y_A , h_A), conociéndose previamente la focal, la altura del entro de proyección sobre la superficie de referencia y la base o distancia entre tomas. bservando la figura siguiente se determina la igualdad:

$$\frac{X_A}{X_1} = \frac{Y_A}{Y_1} = \frac{H - h_A}{f}$$



Sistema gráfico para la determinación de las ecuaciones de la paralaje.

Las ecuaciones de la paralaje son:

$$X_A = B \cdot \frac{X_1}{P_A}$$

$$Y_A = B \cdot \frac{Y_1}{P_A}$$

$$h_A = H_A - \frac{B \cdot f}{P_A}$$

La altura de vuelo y la base fotogramétrica se pueden determinar conociendo la lititud de dos puntos S y T, y formando un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$h_S = H - \frac{B \cdot f}{P_S}$$

$$h_T = H - \frac{B \cdot f}{P_T}$$

Una determinación aproximada de la diferencia de altitudes entre dos puntos, mediante la medición de la paralaje es:

$$h_A - h_B = \frac{\Delta p_A^B}{p_A} \cdot H_m$$

Siendo h_B un punto de altitud conocida, H_m la altura media de vuelo y Δp_A^B el incremento de paralajes.

$$\Delta p_A^B = p_A - p_B$$

Si el terreno es llano se puede aproximar: $p_A = b$

$$h_A - h_B = \frac{\Delta p_A^B}{b} \cdot H_m$$

En la determinación de la altitud de un punto se produce una incertidumbre o error que es proporcional a la apreciación del micrómetro en la lectura de la paralaje.

$$dh_A = \frac{H_m^2}{B \cdot f} \cdot dp_A$$

El valor medio de dp_A es de 0.01 milímetros.

3. Monocomparadores y estereocomparadores.

En la fotogrametría informatizada el primer requisito de la instrumentación es la biención de las coordenadas imagen (x, y) de los puntos de las fotografías. Hay dos principales propuestas en la adquisición de los datos, mediante visión monocular y estereoscópica. Para este propósito, se puede usar los siguientes tipos de instrumentos:

- Comparadores de imagen simple: Monocomparadores.
- Comparadores de imagen doble: Estereocomparadores.
- Instrumentos estereoscópicos usados como comparadores.

La determinación numérica de las coordenadas tridimensionales de los puntos del objeto a partir de fotografías empieza con la medida de las coordenadas imagen. Los comparadores son usados para este propósito, un estereocomparador se emplea para el análisis de un par de fotografías o monocomparador para una simple fotografía.

3.1. Componentes básicos.

Los componentes básicos de un instrumento comparador son:

- El sistema de visión.
- El sistema de medición.
- El sistema de registro.

3.1.1. Sistema de visión.

La función del sistema de visión es para poner la medición de la marca flotante en coincidencia con la imagen de la fotografía y para presentar la combinación en los ojos del observador de los apropiados aumentos. Hay varias clases de instrumentos:

- Ocular simple: El sistema de visión es el más simple, usa un objetivo, para enfocar la fotografía iluminada, y un ocular para examinar la combinación de la imagen. Hay varias elaboraciones y variaciones de estos sistemas, por ejemplo, con zoom en los oculares, oculares intercambiables para diferentes aumentos, colocación de prismas para inclinar los oculares y realizar la visión más cómoda.
- Oculares binoculares: Un instrumento con imagen simple, de forma que ambos ojos ven la misma imagen haciendo la observación más comfortable. En instrumentos de doble imagen, los ojos observan una imagen que está fusionada de manera estereoscópica solamente después de hacer un apropiado encuadre.
- Visión de la proyección: En algunos instrumentos, ambas marcas de medición de las coordenadas imagen de la fotografía son proyectadas en una pantalla, sin embargo, donde la visión del observador puede hacerla sin ayuda de elementos ópticos adicionales.

3.1.2. Sistema de medición.

La función del sistema de medición es obtener los datos relevantes (distancias, ángulos y coordenadas) de las fotografías. Los distintos sistemas son:

- Tornillos: El sistema más común de medición son los tornillos o brocas, en combinación con una tuerca. Un largo tambor pegado al final del tornillo, graduado en divisiones decimales debería dar las distancias y coordenadas en la más pequeña unidad del sistema. Por ejemplo, si el grado del tornillo es 1 mm. y las graduaciones del tambor es de 1000 divisiones, cada división representa a 1 μ m. Un contador de revoluciones suplementario muestra las revoluciones completas, correspondientes a las unidades del tornillo, mientras las revoluciones parciales pueden ser leídas con un índice del tambor graduado. Mientras algunos comparadores tienen microscopios para la visión de forma que pueden moverse sobre los fotogramas que están fijos, los modernos tiene fijo el sistema de visión y pueden trasladarse las fotografías. Los movimientos pueden hacerse más rápidos si se les añade un motor para los impulsos. Algunos comparadores tienen un simple tornillo de medida, con el cual, solamente una coordenada puede ser medida en un determinado momento. Después que todos los puntos han sido leídos en la coordenada x, es rotado 90° y la otra coordenada y, es leída. Para hacer esta operación se requiere el doble de tiempo que en el caso de disponer de un doble juego de tornillos, que suele ser lo normal. Los carros de las fotografías pueden rotarse para poner las marcas fiduciales de las fotografías aproximadamente paralelas a los ejes de medida.

Los tornillos de los comparadores pueden tener errores en la observación de las coordenadas causadas por carencia de rectitud y ortogonalidad de los tornillos y efecto de variaciones de temperatura.

- Escalas y micrómetros: El movimiento de las placas debajo del sistema de visión son referidos a las escalas (cristal o metal) paralelas a los ejes de medida. Cuando el punto es observado, la marca de medición puede caer entre dos divisiones enteras de la escala. Un micrómetro mide la traslación necesaria para traer el índice a una división entera. La suma de la división entera de la escala y la lectura del micrómetro muestran el valor completo de la coordenada. En general se usa el principio de comparador Abbe.
- Placa en red o Reseau y micrómetros: Lo básico de la medición aquí es una placa Reseau realizada en cristal con una serie de puntos los cuales se superponen en el fotograma a medir. La placa debe ser previamente calibrada. El incremento del punto más cercano a la red o línea, para un punto de la imagen es medido por medio de micrómetros. La gran ventaja de este sistema es que realizada una calibración, no está sujeta a variaciones debidas al desgaste. El coeficiente de expansión debido a la temperatura es el mismo que en la fotografía (diapositiva o negativo).
- Mediciones en el borde de Ferranti: En este sistema, una longitud enrejada de difracción óptica tiene un número conocido de líneas por unidad de longitud, por ejemplo 2160 líneas por milímetro. Un enrejado tan largo como el eje sobre el que se mide es adjuntado al carro móvil y una pequeña pieza es colocada sobre la reja de la fotografía en la cual se mide. Con dos secciones de las rejas superpuestas con la línea de la estructura, un patrón en el borde Moiré con una aproximación senoidal de la distribución de la densidad es producida por las líneas.
Cuando una rejilla se mueve sobre la otra, el patrón de borde se mueve a través de la rejilla a razón de un ciclo de borde por grado de rejilla. Un juego de celdas de fotografía de silicio de Ferranti es usado, las cuales se realizan por medio de unas lentes especiales y montaje de corte para rejas finas de más de 1000 líneas por milímetro. Un contador electrónico bidireccional de alta velocidad es esencial para la perfecta aplicación de las mediciones con la rejilla Moiré.
Este sistema de medición está libre de fricciones y desgastes. Menores imperfecciones, polvo, arañazos... no tienen efectos apreciables en las lecturas. La señal de cada celda de las fotografías está derivada de una tira de rejilla de 1 cm por 0.25 cm. Las rejillas métricas con estructuras de 2500 líneas por milímetro corresponden a un contador mínimo de 1 μ m. fácilmente asequibles.
- Medidores interferométricos: Este sistema está basado en los fenómenos interferométricos producidos por la superposición de rayos de luz monocromática.

3.1.3. Sistema de registro.

La función del sistema de registro es el registro permanente de todas las mediciones de coordenadas. Los sistemas disponibles son:

- Sistema manual óptico-mecánico: Este es el sistema más simple, el cual supone un registro óptico por el operador y manual por el operador a través de micrómetros, escalas, tambores...del instrumento. Muchos registros manuales consumen tiempo y sujeto a fallos y errores humanos.
- Sistemas automatizados: Permiten identificar puntos, registrar las coordenadas en tarjetas perforadas, cintas magnéticas, disquetes, discos compactos... Este tipo de sistema automático tiene sus ventajas como: El sistema elimina los errores y fallos humanos, incrementa la velocidad de observación, presenta los datos el ordenador.

3.2. Estereocomparador.

Un estereocomparador es usado para medir simultáneamente las coordenadas de los puntos del estereopar de las fotografías. El principio del estereocomparador consiste en colocar dos fotografías en los carros de los comparadores y se mueven mediante un sistema de guías en las dos direcciones de coordenadas perpendiculares.

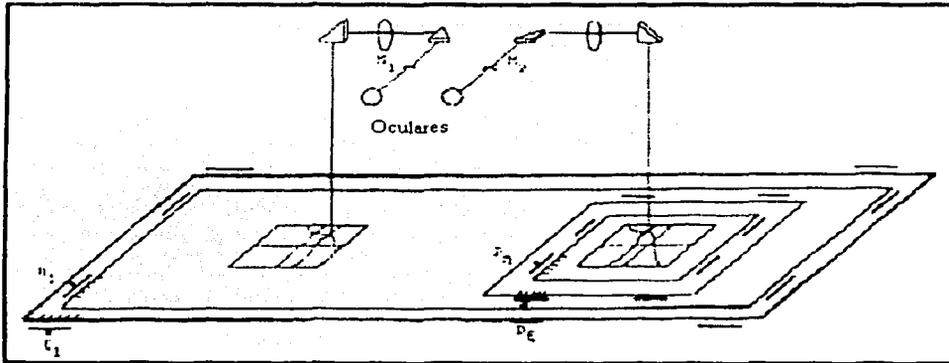
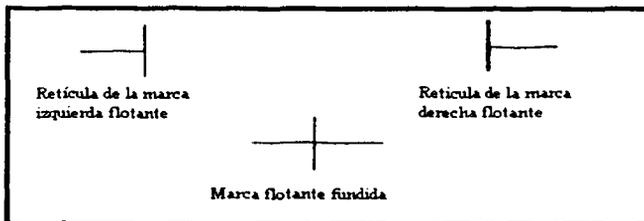


Diagrama esquemático de un estereocomparador.

Las dos marcas de la medición M_1 y M_2 son fijadas en los planos focales de los oculares. El sistema óptico además enfoca en esos planos las imágenes de la fotografía, tal que la medición de las marcas pueden ser agrupadas estereoscópicamente en los puntos objeto.

Los orígenes de los puntos de las escalas, para una medición estereoscópica se encuentra en la parte inferior de las cruces de las coordenadas imagen, ξ_1 y η_1 , mientras que las escalas de las cruces superiores muestran la paralaje $\rho'_1 = \xi_1 - \xi_2$ y $\rho'_2 = \eta_1 - \eta_2$.

Antes de comenzar alguna medición hay que aproximar las fotografías verticalmente, las dos fotografías son rotadas hasta que no exista paralaje vertical y son observadas por el juego de líneas de los puntos principales. Ello es también necesario para medir las coordenadas de la máquina (escalas y rotaciones) de las marcas fiduciales, en orden a transformar las medidas de coordenadas de la máquina de los puntos imagen en el sistema de coordenadas del protocolo de calibración.

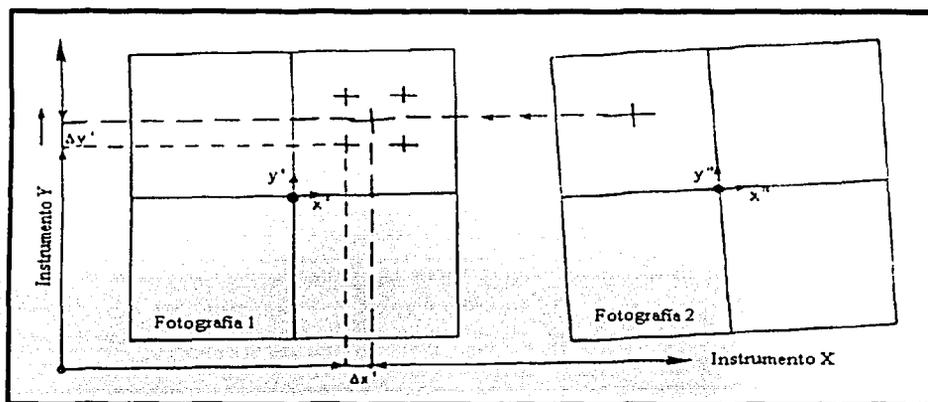


Marca flotante en un estereocomparador (Hilger-Watts).

La visión binocular de las marcas flotantes tiene las cruces divididas por la mitad en los lados izquierdo y derecho, los cuales fusionados estereoscópicamente forman una cruz con los lados paralelos y los ángulos rectos a la base de los ojos.

La medición se puede realizar a través de una placa Reseau de manera que la operación consiste en alinear las líneas de las marcas Reseau del fotograma izquierdo paralelas al eje del instrumento. El fotograma derecho es ajustado de manera que se tenga una visión confortable del área alrededor del punto que se quiere determinar. La lectura estereoscópica es completada cuando el ajuste fino de las dos mitades de las marcas flotantes aparecen como una cruz completa. Las lecturas de las coordenadas (x, y) , de las fotografías son registradas. La mitad de la marca asociada con la fotografía izquierda es llevada sobre la cruz Reseau más cercana y se hace lectura sobre ella.

La diferencia entre la segunda lectura y la primera muestra los incrementos $(\Delta x', \Delta y')$. Hay que añadir las coordenadas calibradas de la placa Reseau de las cruces obtenidas para estos puntos. Para puntos en el terreno (puntos de paso) el proceso tiene que ser repetido para la alineación del fotograma derecho de forma que su línea de cruces Reseau sean paralelas al eje del instrumento, de manera que se obtiene $(\Delta x'', \Delta y'')$ para el fotograma derecho, también hay que añadir las coordenadas Reseau calibradas de las cruces.

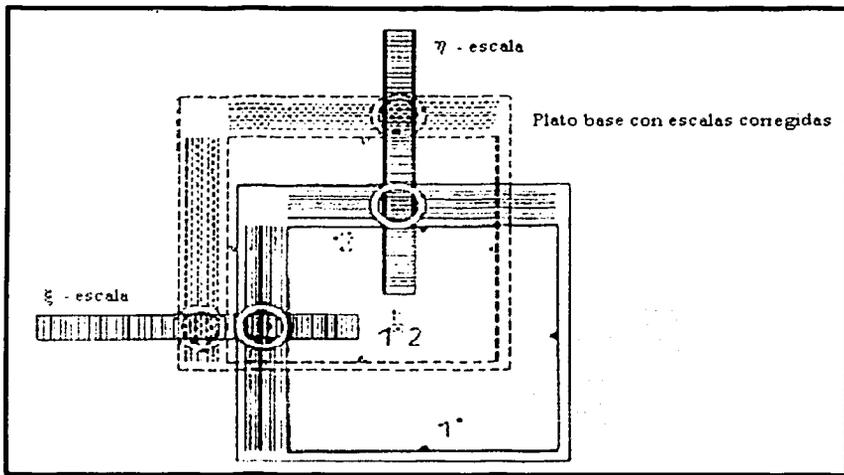


Método de observación de la placa Reseau.

3.3. Monocomparador y aparato transferidor de puntos.

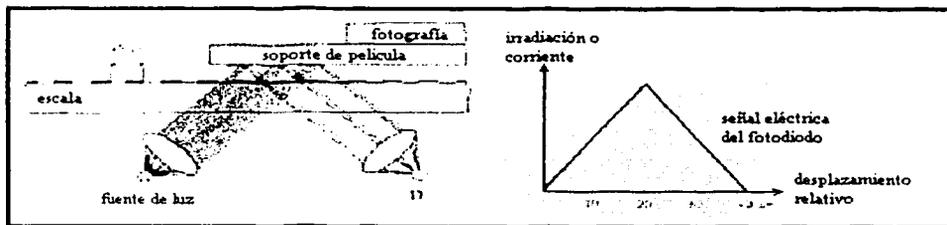
Las dos escalas de los cristales son montadas perpendiculares en una placa base. La fotografía para ser medida es colocada en un carro, el cual puede ser desplazado en las dos direcciones perpendiculares y llevado a la izquierda y hacia arriba en una graduación espacial uniforme. La pulsación de dos generadores lineales miden el desplazamiento del carro de la fotografía. La medición de la marca M es estacionaria en el plano imagen del sistema óptico y es observada, con comodidad, a través de binoculares aunque el observador ve solo una fotografía. Los movimientos relativos de las partes individuales del monocomparador es mostrado en la siguiente

figura, de manera que la medición del punto 1 está en línea discontinua y la medición del punto 2 está en línea continua.



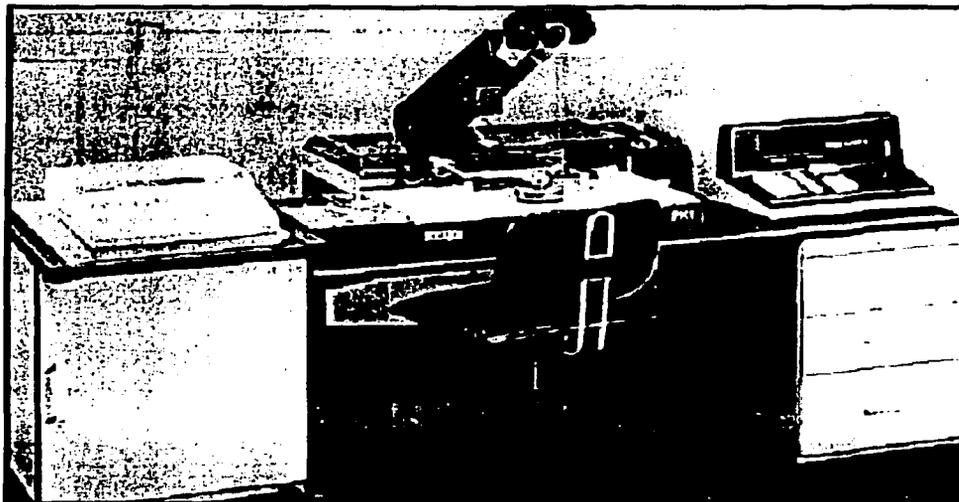
Principio de medida del comparador de Zeiss PK 1.

El pulso del generador lineal merece ser detallado con atención. El ancho y espaciado de las graduaciones de las escalas y los espacios de las marcas de los carros de las fotografías están cada $20 \mu\text{m}$. La luz de una fuente de luz es absorbida completamente por las líneas de los carros, en el resto se reflejan en el espacio entre las graduaciones. Si las graduaciones de las marcas de los carros están desplazadas $10 \mu\text{m}$ a la izquierda, solamente el 25 % de la luz emitida por la fuente de luz será reflejada sobre el fotodiodo D , el cual convierte la irradiancia proporcionalmente a corriente eléctrica. Si las marcas de los carros son desplazadas más a la izquierda, la corriente aumenta. Se alcanza el máximo del 50 % cuando las graduaciones de las marcas de los carros están desplazadas $20 \mu\text{m}$ relativas para la escala que se ha fijado. Un mayor desplazamiento a la izquierda causa la caída de la corriente de nuevo.



Generador lineal de pulsos: (Fotografía, señales de los carros, fuente de luz y fotodiodos se mueven juntos, la escala está fija).

La cifra de mínima y máxima en la corriente del fotodiodo es contado y define las coordenadas imagen en unidades de $20 \mu\text{m}$. La subdivisión en intervalos de 20 pasos de $20 \mu\text{m}$, muestran una cuenta de $1 \mu\text{m}$. es realizada por digitalización de la señal eléctrica. El contador de valores extremos, la digitalización de la señal eléctrica y la conversión en sistema decimal son realizadas en una estación de captura de datos, la cual puede tener un visualizador de coordenadas. La estación de captura de datos envía las coordenadas medidas directamente a un ordenador.

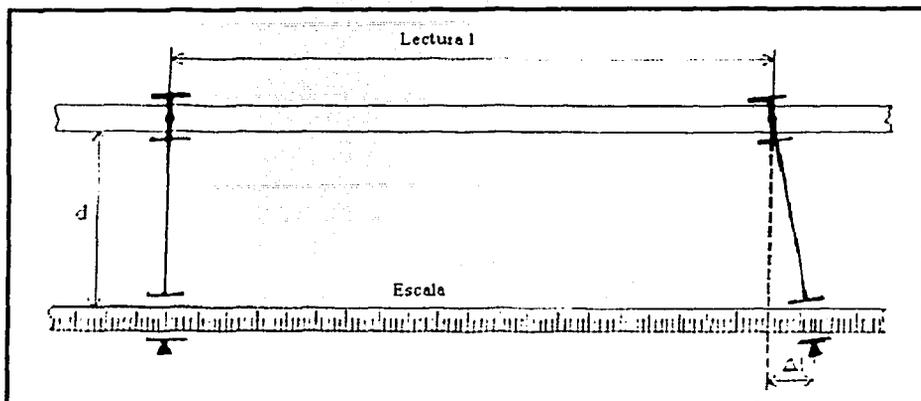


Comparador de precisión de Zeiss PK 1 con una estación de captura de datos

La precisión de un comparador depende del método de construcción, en particular de lo extenso que se satisfaga el llamado principio de comparador Abbe. Esta regla fundamental específica que la longitud a ser medida y la escala de la medición deberían estar en la misma línea recta. Si no están en la misma línea recta, es posible que haya una rotación, por ejemplo, por falta de paralelismo de la guía de transporte de la fotografía produciéndose errores en la longitud de Δl la cual será proporcional a la distancia d entre la escala y la longitud a ser medida, l . Las ventajas de este mecanismo son:

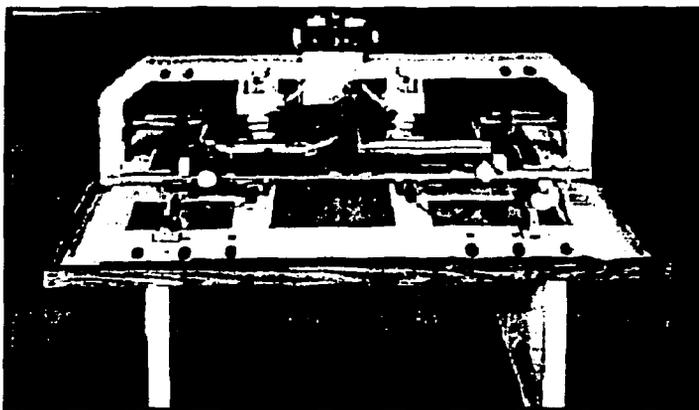
- Los errores de mecanismo de ortogonalidad y rectitud pasan a ocupar una categoría secundaria en las mediciones.
- Si las escalas y diapositivas son del mismo material, esto es de cristal se producen los mismos incrementos de temperaturas en ambas y por tanto se compensa.
- El micrómetro necesita tener solamente la longitud del incremento entre dos divisiones de escala. El micrómetro permite leer hasta $1 \mu\text{m}$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Sistema de medición de longitud que no satisface el principio de comparador Abbe.

El principio de comparador Abbe es satisfecho rigurosamente por el comparador de precisión PK 1 y hay estereocomparadores que también cumplen este principio. Una interesante combinación de un monocomparador y un aparato transferidor de puntos fue desarrollado por Kern con el nombre de CPM 1 (Comparador y Marcador de Puntos). Las dos fotografías son desplazadas bajo las dos marcas de medición estacionarias de la misma manera que se mostró en el diagrama esquemático de un estereocomparador. Dos escalas con codificadores lineales proporciona las coordenadas de los puntos en el fotograma izquierdo, los cuales son almacenados en una estación de captura de datos. Además, dos perforadoras con diámetros de 40, 60 o 100 μm . están girando y señalan en las fotografías con las marcas correspondientes a los puntos de las dos fotografías levantando la emulsión.



Transferidor de puntos estereoscópico de Kern CPM 1 y medición de coordenadas en la foto izquierda.

3.4. Calibración de un comparador.

Las etapas de la fotogrametría analítica son:

- Orientación interna.
- Orientación relativa.
- Orientación absoluta.

En la orientación interna es donde se realiza la medición de las coordenadas fotografía con el monocomparador o el estereocomparador. El objetivo de la orientación interna es la reconstrucción numérica de los haces perspectivos, de forma que las coordenadas de las fotografías estarán depuradas de los errores sistemáticos. La orientación interna consiste en:

- Introducción de los parámetros de la cámara: Punto principal, función de distorsión, distancia focal.
- Observación de las marcas fiduciales.
- Observación de los puntos imagen.
- Cálculo de los parámetros de transformación del sistema comparador al sistema fotográfico (con la medida de las coordenadas de las marcas fiduciales en los dos sistemas).
- Corrección de los errores sistemáticos.
- Obtención de las coordenadas de las fotografías depuradas.
- A partir del centro de proyección y las coordenadas del punto imagen se puede definir el rayo que define el punto en el terreno, mediante las condiciones de colinealidad y coplaneidad, de manera que se entraría en la fase de la orientación relativa.

Por tanto, delimitando el estudio en la calibración de un comparador hay que colocarse en el apartado de la orientación interna, de manera que con el comparador se mide las coordenadas de la fotografía, pero si cambia la fotografía de posición también cambian las coordenadas de los puntos. Lo que se hace es utilizar las coordenadas referidas al sistema fiducial (sistema interno de la propia fotografía) de forma que al variar la posición de esta no cambian sus coordenadas. En la orientación interna después de introducir los parámetros de la cámara y calcular los parámetros de transformación del sistema comparador al sistema fiducial se miden las coordenadas de los puntos de la fotografía.

Los errores en la orientación interna se corrigen en orden inverso a como se han producido, por tanto los pasos a seguir son:

- Calibración del comparador: Obtención de coordenadas comparador corregidas de errores sistemáticos del comparador.
- Paso del sistema instrumental calibrado al fiducial.
- Correcciones debidas a la deformación de la película.
- Corrección de distorsión del objetivo.
- Corrección de refracción atmosférica.
- Corrección de curvatura terrestre.

Aparte de la posibilidad de cometer errores accidentales, los siguientes errores sistemáticos pueden ocurrir en la precisión de un comparador y deben ser corregidos, destacando los errores en los sistemas instrumentales:

- Desplazamiento de los carros del comparador no paralelos a los ejes de medida.
- Errores de afinidad: Diferencia de escala entre los ejes x e y
- Errores de rectitud (curvatura) en los raiiles guías.
- Falta de ortogonalidad de los ejes x e y .

Generalmente la medición es realizada en un restituidor (estereocomparador) o en un monocomparador y es orientado por medio de las marcas fiduciales. Dependiendo de la estructura de un instrumento, las lecturas en un estereocomparador pueden ser N_L, V_L, N_R, V_R o N_L, V_L, P, Q o N_R, V_R, P, Q y el resultado final es N_L, V_L, N_R, V_R . Sus relaciones son:

$$N_R = N_L - p$$

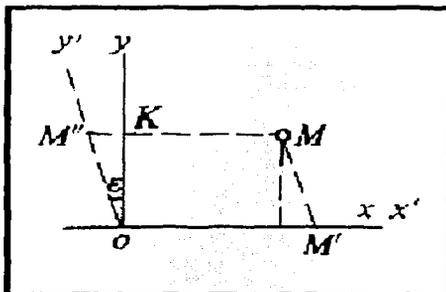
$$V_R = V_L - q$$

Para la calibración de un comparador, primero se tienen que corregir los errores lineales y en una segunda fase se corrigen los errores no lineales.

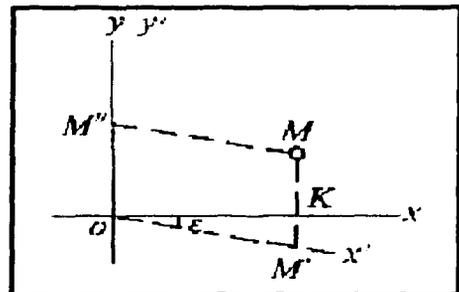
3.4.1. Corrección de errores lineales.

Básicamente, la calibración del comparador es la determinación de la ortogonalidad entre las guías horizontal y vertical y el factor de escala de y a x . Los errores suelen ser pequeños, incluso insignificantes.

Primero se va a analizar la influencia de los errores de ortogonalidad de las guías en la medición de las coordenadas imagen. Supongamos que el movimiento a través de los ejes x e y no son estrictamente ortogonales y forman un ángulo de $\theta \approx 90 + \epsilon$. En este caso, no se mide correctamente las coordenadas rectangulares de un punto imagen (x, y) . Se obtienen coordenadas oblicuas (x', y') . Si se toma el eje x del instrumento como eje básico entonces se tiene la figura a, y las coordenadas angulares oblicuas medidas son: $x' = \angle OM'$ y $y' = \angle OM'' = \angle M''OM$, mientras las correspondientes coordenadas rectangulares son $x = KM$ y $y = OK$.



a. Falta de ortogonalidad (fijo el eje X).



b. Falta de ortogonalidad (fijo el eje Y).

$$X = X' - Y' \cdot \text{sen} \epsilon$$

$$Y = Y' \cdot \text{cos} \epsilon$$

Si el ángulo ϵ es muy pequeño, entonces se puede simplificar:

$$X = X' - Y' \cdot \epsilon$$

$$Y = Y'$$

Si el eje y del instrumento es tomado como eje básico, entonces se tiene la figura b, entonces: $X = OM'$ y $Y = OM''$, y las correspondientes coordenadas rectangulares $x = OK$ y $y = KM$.

$$X = X' \cdot \text{cos} \epsilon$$

$$Y = Y' - X' \cdot \text{sen} \epsilon$$

Y simplificado:

$$X = X'$$

$$Y = Y' - X' \cdot \epsilon$$

Respecto a las correcciones de los factores de escala de x' y de y' pueden ser respectivamente α y β , entonces tomando el eje x como eje básico:

$$X = X' + \alpha X' - \epsilon Y'$$

$$Y = Y' + \beta Y'$$

Con respecto al caso de tener el eje y como eje básico del instrumento:

$$X = X' + \alpha X'$$

$$Y = Y' + \beta Y' - \epsilon X'$$

Para resolver las incógnitas α, β, ϵ , se conocen las coordenadas rectangulares (x, y) de un punto y las coordenadas (x', y') medidas por el instrumento. Se pueden determinar las coordenadas rectangulares usando una placa con marcas, la cual se coloca en el lugar de la fotografía, de forma que la línea horizontal debe ser paralela con el eje x del instrumento. Se asume que el ángulo entre la línea horizontal de la placa con marcas y el eje x del instrumento es θ . Las coordenadas rectangulares de los puntos en la placa son representadas por (x_2, y_2) , entonces las ecuaciones de la transformación de coordenadas, de coordenadas rectangulares de esos puntos en el instrumento son:

$$x = x_2 \cos \theta - y_2 \text{sen} \theta + a$$

$$y = x_2 \text{sen} \theta - y_2 \cos \theta + b$$

Donde los valores de a, b son las coordenadas del origen de la placa en el sistema de coordenadas instrumentales. Asumiendo que las coordenadas de los correspondientes puntos medidos en el instrumento son (x', y') y las correcciones que deberían añadirse son (v', v'') entonces:

$$x = x' + \alpha y' - \varepsilon y'' = x_2 \cos \theta - y_2 \operatorname{sen} \theta + a \Rightarrow x' + x' + \alpha y' - \varepsilon y'' = x_2 \cos \theta - y_2 \operatorname{sen} \theta + a$$

$$y' = y' + \beta y'' = x_2 \operatorname{sen} \theta - y_2 \cos \theta + b \Rightarrow y' + y' + \beta y'' = x_2 \operatorname{sen} \theta - y_2 \cos \theta + b$$

Si el ángulo θ es muy pequeño, entonces las ecuaciones se pueden resumir:

$$x' = a_0 + x_2 - y_2 \theta + -x' - \alpha y' + \varepsilon y''$$

$$y' = b_0 + y_2 + x_2 \theta - y' - \beta y''$$

Hay seis incógnitas, donde a_0, b_0, θ son los valores de la placa del instrumento. Los otros tres valores $\alpha, \beta, \varepsilon$ son los factores del instrumento que se deben determinar. Hay que medir más de cuatro puntos para calcular el sistema. Para eliminar las incógnitas a_0, b_0, θ se adopta un patón regular.

A continuación se analiza otra forma de resolución de los errores lineales empleando una placa reticulada de precisión, compuesta por una rejilla de 25 cruces. De cada uno de esos 25 puntos se disponen de coordenadas placa. Se miden las coordenadas instrumentales de estos puntos y se comparan con las de la retícula (placa).

Se aplica a las coordenadas observadas una transformación para obtener las coordenadas de la retícula. Se aplica un factor de escala, M , una traslación, T una corrección de ortogonalidad, M_r y un giro, M_g . Se calcula (λ_x, λ_y) , que corregirá la falta de uniformidad de escala y g por lo que se obtendrá un error de ortogonalidad de ejes: [4.1.]

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \operatorname{sen} \gamma \\ 0 & \cos \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

Siendo:

(x, y) : Coordenadas placa de los puntos de la retícula.

(\bar{x}, \bar{y}) : Observaciones de las coordenadas de los puntos de la retícula (coordenadas comparador).

Desarrollando:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_x \cdot \cos \alpha & \lambda_y \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \gamma) \\ -\lambda_x \cdot \operatorname{sen} \alpha & \lambda_y \cdot \cos(\alpha + \gamma) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

Con objeto de transformarla en una ecuación lineal se eliminan los senos y los cosenos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Esta expresión es igual a:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \\ T_1 \\ T_2 \end{pmatrix}$$

$$R + K = .I \cdot X$$

Los residuos:

$$R = .I \cdot X - K$$

Se plantea el sistema y se resuelve por mínimos cuadrados, hay 25 puntos en la placa por tanto se dispone de redundancia. Se obtienen los valores: $a_1, b_1, a_2, b_2, T_1, T_2$.

Una vez calculados estos valores se puede determinar: $\lambda_x, \lambda_y, \gamma$.

Siendo los términos:

$$\lambda_x = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$$

$$\lambda_y = (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}$$

$$\gamma = \arctg \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1}$$

Sustituyendo en [4.1.] se obtienen las coordenadas instrumentales corregidas de las deformaciones lineales. Estas coordenadas corregidas se tienen que corregir de deformaciones no lineales mediante un polinomio de 4º grado.

$$X_c = X + P(4)$$

3.4.2. Corrección de errores no lineales.

Se parte de las coordenadas obtenidas en la corrección lineal. Las coordenadas corregidas de las deformaciones no lineales son:

$$\begin{aligned} X_c &= X + a_1 + a_2 \cdot X + a_3 \cdot Y + a_4 \cdot X^2 + a_5 \cdot Y^2 + a_6 \cdot X^3 + a_7 \cdot Y^3 + a_8 \cdot X^4 + a_9 \cdot Y^4 \\ Y_c &= Y + a_{10} + a_{11} \cdot X + a_{12} \cdot Y + a_{13} \cdot X^2 + a_{14} \cdot Y^2 + a_{15} \cdot X^3 + a_{16} \cdot Y^3 + a_{17} \cdot X^4 + a_{18} \cdot Y^4 \end{aligned}$$

Siendo (x, y) , las coordenadas corregidas de errores lineales. Conociendo las coordenadas de la placa libres de errores, se procede a calcular los parámetros, de manera que se sustituye estas coordenadas en (X_c, Y_c) :

$$\begin{pmatrix} 1 & X & Y & X^2 & Y^2 & X^3 & Y^3 & X^4 & Y^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & X & Y & X^2 & Y^2 & X^3 & Y^3 & X^4 & Y^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_{18} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_c - X \\ Y_c - Y \end{pmatrix}$$

Esta ecuación hay que plantearla para cada punto medido de la cuadrícula (placa de vidrio). Si se tiene una cuadrícula de 25 puntos:

$$A_{50 \times 18} \cdot X_{18 \times 1} = K_{50 \times 1}$$

De esta manera se obtienen todos los parámetros. Como se han obtenido los parámetros en función de las coordenadas de la placa (coordenadas de calibración), al sustituir en las ecuaciones los parámetros se van a obtener las coordenadas instrumentales corregidas en el sistema del eje de calibración.

4. Restituidor analítico universal.

U. Helava concibió la idea de un restituidor estereoscópico universal, en el cual las relaciones entre las coordenadas imagen y objeto eran generadas en un ordenador digital, y realizó la patente de un prototipo sobre 1957. Pasados 20 años las casas comerciales empezaron a sacar este producto al mercado. Hoy todos los restituidores que se comercializan son analíticos y digitales, en detrimento de los restituidores analógicos. Por ejemplo con un restituidor analógico se consiguen precisiones de 20 μm., sin embargo con un restituidor analítico se pueden conseguir precisiones de 1 μm.

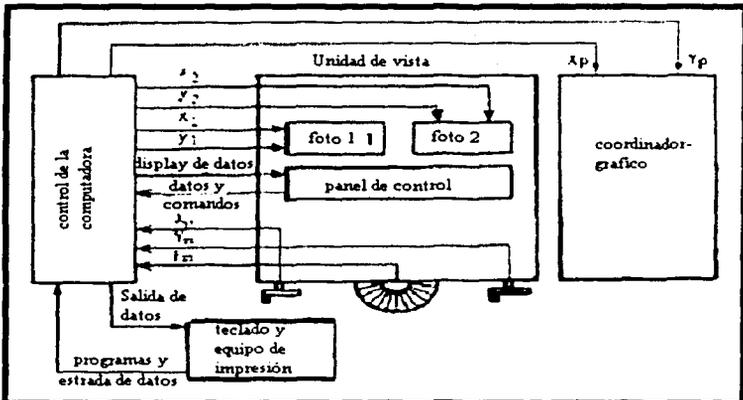


Diagrama de un restituidor analítico.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

4.1. Conceptos básicos.

Un restituidor analítico funciona como un comparador, en el llamado modo comparador, los elementos de orientación para un proceso de captura de datos lineal son también computados.

Restituidor analítico en modo comparador.

El operador observa, como en un estereocomparador, las dos marcas de medida estacionarias, M_1 y M_2 y las dos fotografías que son colocadas en los carros, pueden ser movidos en las dos direcciones perpendiculares con sistemas separados de cruces. El transporte de las fotografías no es movido directamente por los rodillos de mano, sin embargo, pero indirectamente a través del proceso del ordenador. Los generadores de los pulsos de rotación son realizados por los dos rodillos de mano y funciona de un modo similar a un generador de pulsos lineales.

Los generadores de pulsos son contadores en un sistema eléctrico y pasan al proceso del ordenador como incrementos de las coordenadas máquina de x e y . En el modo comparador, esas coordenadas máquina son transmitidas en un rango $1/1$ de las coordenadas imagen $\xi_1 \cdot \eta_1$ y $\xi_2 \cdot \eta_2$:

$$X, Y \stackrel{1:1}{\Rightarrow} \xi_1 \cdot \eta_1, \xi_2 \cdot \eta_2$$

Por ejemplo, los dos carros de las fotografías son desplazados como funciones de las coordenadas imagen de $\xi_1 \cdot \eta_1, \xi_2 \cdot \eta_2$.

Los generadores de impulsos lineales, con una resolución normal de $1 \mu\text{m}$. Son ajustados en el porta fotografías y sirve para definir momentáneamente las posiciones de las fotografías en los carros. Estas coordenadas actuales son comparadas con las coordenadas computadas, o ideales. Las diferencias son transmitidas como una orden para conducir los cuatro servo-motores de los carros de las fotografías, de modo que se reduzcan las diferencias. Este bucle es repetido, en instrumentos modernos, hasta 50 veces en un segundo. El control es instantáneo y el operador tiene la impresión que los movimientos de los rodillos de las manos son transmitidos directamente a través de las varillas de los carros de las fotografías. Un control rápido por medios electrónicos del procesado de los datos y un control digital es llamado proceso en tiempo real y el programa necesario es denominado programa en tiempo real.

El trabajo con un restituidor analítico empieza con la colocación de los fotogramas en los carros; las marcas fiduciales necesitan solamente ser alineadas aproximadamente con las correspondientes marcas en los carros de las fotografías. Para la colocación de la marca flotante en un punto, el operador rota los dos rodillos de mano hasta que la medición de la marca izquierda esté en el punto, por ejemplo, los dos carros de las fotografías se mueven la misma cantidad. Se envía entonces una señal del terminal al carro de la fotografía de la izquierda, y la manilla de mano gira el carro de la derecha, hasta que las rotaciones muevan las marcas y coincidan estereoscópicamente en el punto. El proceso del ordenador tiene las coordenadas imagen $\xi_1 \cdot \eta_1, \xi_2 \cdot \eta_2$ de los puntos imagen P_1 y P_2 .

El operador mide de este modo las coordenadas imagen de las marcas fiduciales, puntos de control y puntos nuevos. Los datos de calibración, por ejemplo, la distancia principal, la coordenadas de calibración de las marcas fiduciales, los parámetros de distorsión de las lentes, y la información requerida para la corrección de los efectos atmosféricos han sido introducidos previamente en el ordenador, tanto que toda la información está ahora disponible para un refinamiento de las coordenadas imagen medidas. Después de este paso, el cual es en efecto de

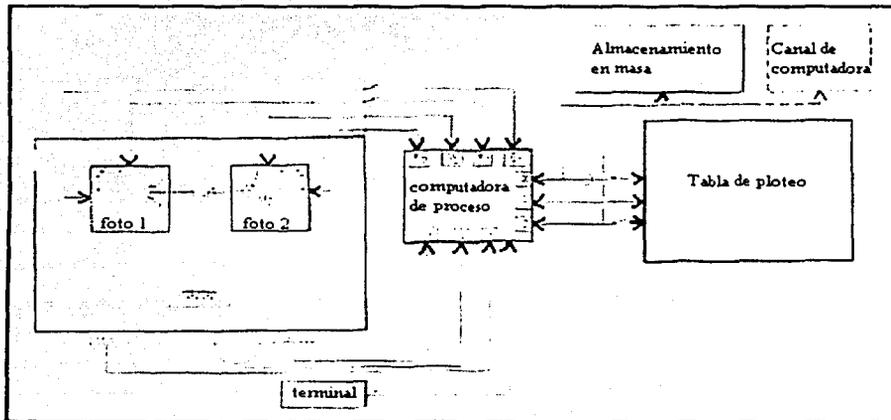
establecimiento numérico de la orientación interna, esto sigue con los elementos de la orientación externa, en un paso o en dos pasos como orientación relativa y absoluta. Las coordenadas objeto de los puntos de control deben, de acuerdo, haber sido introducidos en el ordenador antes de esta etapa.

Para continuar con la captura de datos, el operador ahora cambia al modo modelo, en el cual el disco de pie (también con un generador de pulso de rotación) es gobernado tan bien como los dos rodillos de mano. Los tres generadores de pulsos de rotación comunican las coordenadas máquina (x, y, z) al proceso del ordenador. Las coordenadas objeto (X, Y, Z) ya existen en el ordenador y son relacionadas con las coordenadas máquina por una simple translación, X_u y un cambio de escala, la cual puede ser determinada, por ejemplo, por observación de dos puntos de control:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} + m_M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donde:

m_M : Factor de escala entre modelo y máquina.



Restituidor analítico en modo modelo.

Un arbitrario movimiento de las ruedas de mano y el disco de pie definen, el trío de coordenadas del sistema de coordenadas objeto (X, Y, Z) . El trío de coordenadas pueden transformarse por el conocimiento de los elementos de la orientación interna y externa, de acuerdo a las ecuaciones de una proyección central, en el sistema de coordenadas imagen:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$x, y, z \xrightarrow{\alpha} X, Y, Z \xrightarrow{\beta} \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$$

Siendo:

$$\alpha: \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \\ Z_o \end{pmatrix} + m_M \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\beta: \begin{cases} \xi = \xi_o - c \cdot \frac{r_{11} \cdot (X - X_o) + r_{21} \cdot (Y - Y_o) + r_{31} \cdot (Z - Z_o)}{r_{13} \cdot (X - X_o) + r_{23} \cdot (Y - Y_o) + r_{33} \cdot (Z - Z_o)} \\ \eta = \eta_o - c \cdot \frac{r_{12} \cdot (X - X_o) + r_{22} \cdot (Y - Y_o) + r_{32} \cdot (Z - Z_o)}{r_{13} \cdot (X - X_o) + r_{23} \cdot (Y - Y_o) + r_{33} \cdot (Z - Z_o)} \end{cases}$$

Las condiciones existentes en ese momento llevan los carros de las fotografías a las posiciones correspondientes a las coordenadas imagen del ordenador de acuerdo con las transformaciones expresadas anteriormente. Cuando los rodillos de mano y el disco de pie están continuamente rotando, el bucle empieza con los pulsos (x, y, z) a través de la solución de las ecuaciones de α y β para la salida de los datos de entrada de los cuatro servo-motores de los carros de las fotografías es repetido en muchos instrumentos sobre 50 veces por segundo, una frecuencia que impone duras exigencias en los controles de los mecanismos, la velocidad del ordenador y el programa en tiempo real. Estos requisitos se incrementan para la necesidad de solventar las ecuaciones la proyección central, también para refinar continuamente las coordenadas imagen y eliminar los efectos de la curvatura de la Tierra.

Una operación en el modo modelo, el operador gira los rodillos de mano y el disco de pie tanto que desplaza las dos fotografías debajo de las dos marcas de medida estacionarias, M_1 y M_2 .

Si la secuencia de las coordenadas objeto (X, Y, Z) descritos de este modo como un juego de puntos en la superficie del objeto, el operador verá la marca flotante moviéndose a lo largo de esta línea sobre la superficie del modelo estereoscópico. Es la tarea del operador girar las ruedas de mano y el disco de pie hasta que la marca flotante se coloque en la superficie del modelo estereoscópico.

4.2. Métodos de captura de datos.

Varios métodos de captura de datos pueden ser aplicados en un restituidor analítico, dependiendo de los requisitos de los datos particulares. Los puntos simples pueden ser medidos por el movimientos de la marca flotante, jugando con la marca estereoscópicamente en los puntos y registrando el trío de coordenadas (X, Y, Z) . Si el operador lleva la marca flotante a lo largo de una línea espacial, por ejemplo el borde de una carretera o el borde de una zona forestal, puede registrar una secuencia de coordenadas (X, Y, Z) en una sucesión más o menos rápida (medición de la línea espacial). La altura de la marca flotante se obtiene por medio del disco de pie para un contorno particular de altura, dejando esta altura, se puede trazar el contorno moviendo la marca flotante a lo largo de la superficie del estereomodelo por las ruedas de mano, a la vez que se

Para registrar las coordenadas (X, Y, Z) de cada pequeño incremento de la distancia a lo largo del espacio o líneas de contorno, o a lo largo de un perfil de cada tipo, debiéndose acumular una gran cantidad de datos. El operador generalmente tiene una selección de registros automáticos de intervalos constantes de tiempo o distancia. Con un intervalo constante de tiempo, la densidad de punto debería incrementar automáticamente en áreas difíciles (zonas de grandes curvaturas) donde debería reducirse la velocidad de movimientos. Si la cantidad total de datos es larga, no todas las coordenadas (X, Y, Z) pueden ser almacenadas en la memoria del ordenador. Los datos deberían dividirse en bloques y transferidos a una masa de almacenaje o a una red de ordenadores.

4.3. Algunas características de los instrumentos y sus accesorios.

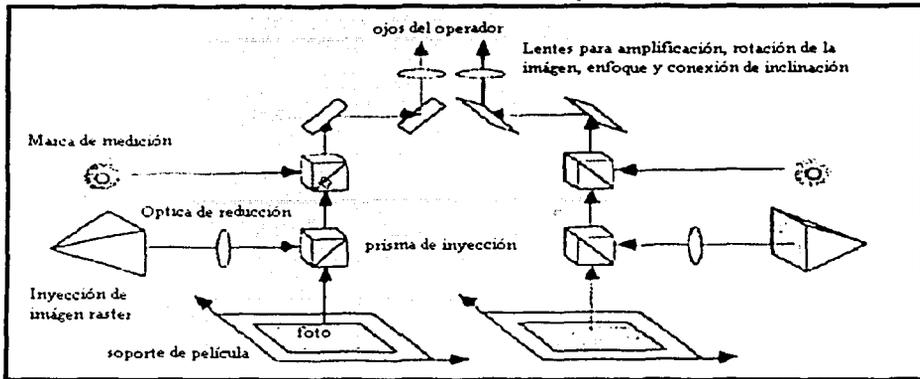
La precisión actual de un restituidor analítico en el mercado está entre los $\pm 1 \mu\text{m}$. y $\pm 4 \mu\text{m}$. en la fotografía. Un buen restituidor analítico, por lo tanto tiene la misma precisión que un comparador, porque en general se adopta el principio del comparador Abbe. Algunos instrumentos adoptan sistemas rotatorios de medida y otros sistemas lineales.

Después del montaje estereoscópico de un punto en modo comparador (y en modo modelo antes de una orientación relativa completa), hablando estrictamente de la paralaje vertical está solamente limpio en este punto. El operador se mueve de este punto, el movimiento mayor será la paralaje vertical, si la desviación del caso normal es grande, será muy preocupante. Si el operador mueve las paralajes verticales en dos puntos cercanos a los puntos principales de las dos fotografías, en modo comparador, la información es ahora asequible para unos bastos giros de fotografías para ser introducido. Estos giros son introducidos para cada carro de fotografías o por dos prismas Dove en la parte óptica.

En algunos instrumentos, después que la paralaje vertical ha sido limpiada en sus cinco puntos en el modo comparador, el sistema realiza una orientación relativa y cambia automáticamente a modo modelo. Ello es lo más fácil para limpiar los residuos de las paralajes verticales en otros puntos. Después de cada nuevo punto, el sistema computa una modificación de la orientación relativa.

Los zooms ópticos son de gran importancia, ello sirve para dar al operador la adaptación de aumentos de las fotografías. También permite observar las fotografías con aumentos diferentes, una característica que puede ser particularmente de gran ayuda en trabajos con fotografías que se desvían una gran cantidad del caso normal (fotogrametría terrestre). Las diferentes perspectivas de los fotogramas izquierdo y derecho pueden producir diferentes escalas para las mismas áreas. Hay dos posibles caminos de construir el sistema de zoom, uno estaría entre los oculares y las marcas de medición y otro entre las marcas de medición y la fotografía. En el primer caso, un cambio de la imagen aumentada además cambia el tamaño aparente de las marcas de medida, este es el caso del siguiente dibujo. En el segundo caso, las marcas de medida no cambian el tamaño, un estado que es más deseable para aumentos diferenciales. Por otro lado, el movimiento de elementos introducidos entre la fotografía y las marcas de medición pueden afectar negativamente sobre la precisión del restituidor analítico.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Formación de la imagen estereoscópica.

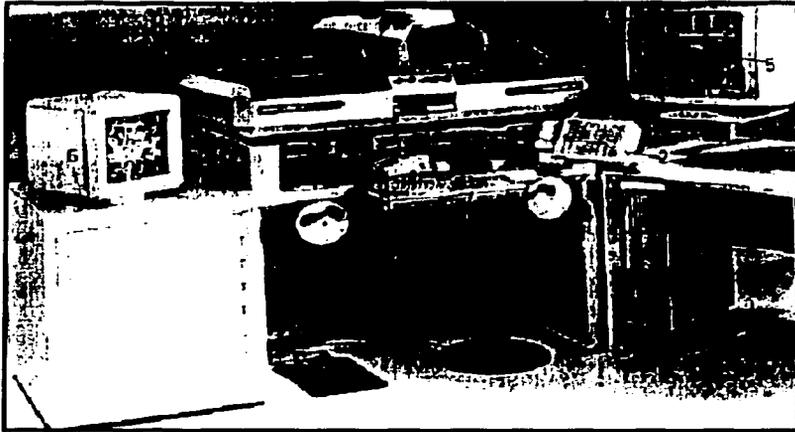
Un accesorio común de los restituidores analíticos es la guía de manos libres en conjunto con el pedal de pie (en algunos instrumentos se instala un pedal de mano). La guía de manos libres (algunas veces referido a un ratón o cursor) consiste en una bola de seguimiento, montada convenientemente de forma mecánica, la cual puede rodar sobre una superficie lisa. La rotación de la bola es detectada mecánicamente y convertida en pulsos x o y los cuales son contados y transferidos (con una razón de transmisión) al proceso del ordenador, de forma que cambia las coordenadas X e Y . El pulso necesario de z es generado por una pequeña rueda de mano unida al ratón. Si el cursor es movido sobre un tablero de digitalización de alta resolución, la posición absoluta es posible con tan buena precisión como la posición relativa. Uno tiene entonces la posibilidad de digitalizar en tres dimensiones en el estereomodelo óptico o digitalizar en dos dimensiones para mapas o planos.

Algunos modelos pueden tener un doble juego de oculares, por ejemplo oculares para una segunda observación que puede estar debajo de la instrucción o que puede asistir a resolver los problemas difíciles de la interpretación del estereomodelo.

El ordenador en un restituidor analítico principalmente tiene el control de los carros de las fotografías en tiempo real. Por otro lado, el ordenador debe ejecutar muchos programas de aplicaciones. En vista a las diferentes demandas en el proceso del ordenador, muchos instrumentos tienen más de un ordenador. La tarea en tiempo real son realizadas por un proceso delicado. Los terminales generalmente están formados por:

- Un teclado, montado enfrente del operador.
- Uno o dos interruptores de pie, o guía de manos libres para la captura de datos.
- Una pantalla alfanumérica para leer los mensajes del ordenador.
- Una ventana para los gráficos.

En algunos pasos de las operaciones, las coordenadas imagen y las coordenadas objeto pueden ser visualizadas en la pantalla del terminal, con la posibilidad también de las coordenadas modelo.



Restituidor analítico Wild BC3.

Muchos instrumentos añaden también una pantalla de gráficos, de manera que muestra rápidamente al operador, los puntos, líneas y superficies capturadas. Esto es necesario para la edición de manera que se puede añadir y borrar cualquier dato. El operador puede en cualquier momento revisar la precisión de los datos capturados. Una pantalla raster proporciona cada fotografía. Cada pantalla visualiza los puntos y líneas capturados, los transforman mediante la apropiada transformación perspectiva del sistema de coordenadas objeto (X, Y, Z) en el sistema de coordenadas imagen $(\xi_1, \eta_1) \leftrightarrow (\xi_2, \eta_2)$. Dos rayos ópticos separados transfieren esas imágenes de los fotogramas a los oculares. El operador ve el modelo en tres dimensiones de los datos superpuestos en el estereomodelo fotográfico.

El número de restituidores analíticos que el mercado presenta es muy alto. Las principales marcas ofrecen más de un modelo en una familia de modelos en los cuales difieren en el tipo de ordenador, las características técnicas y el rango de software. La potencia y el precio de los instrumentos pueden ser adaptados a los requisitos individuales de cada usuario. Las siguientes firmas ofrecen restituidores analíticos (año 1991):

- Adam Technology, Australia: ASP 2000.
- Helava Associates: Estados Unidos: US 2.
- Intergraph, Estados Unidos: InterMap Analytic.
- International Imaging Systems, Estados Unidos: Alpha 2000.
- Leica Heerbrugg, Suiza: SD 2000, Wild BC 3, Kern DSR 14 y DSR 15.
- Matra, Francia: Traster T5.
- Oficien Galileo, Italia: Digicart-40.
- O.M.I., Italia: APC5, ASP-11A.
- Zeiss Oberkochen, Alemania: Planicomp P1, Planicomp P2 y Planicomp P3.

4.4. Restituidores analíticos simplificados.

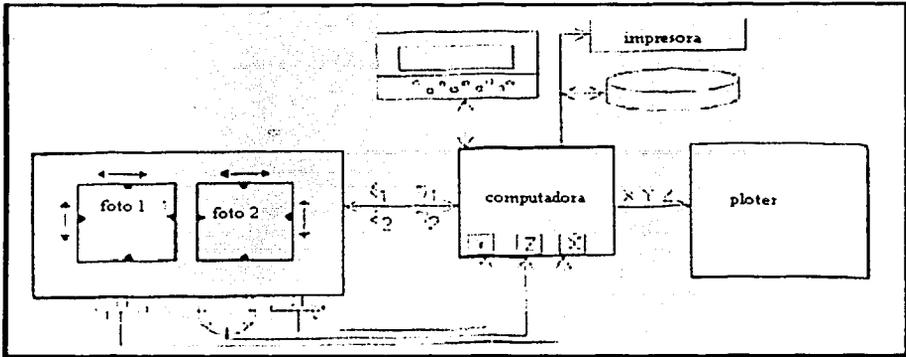


Diagrama esquemático de un restituidor analítico con coordenadas objeto.

Los restituidores analíticos universales se distinguen por su versatilidad en aplicaciones y alta precisión. Algunos comentarios generales son necesarios antes de considerar los ejemplos simplificados de restituidores analíticos. Los principios funcionales de un restituidor analítico con coordenadas objeto como principal información está mostrada en la siguiente figura. La característica particular es que el ordenador lleva los carros de las fotografías en dos direcciones en tiempo real. Esta característica es una condición necesaria para llevar las marcas flotantes y determinar las coordenadas de los objetos. Todo restituidor analítico trata de funcionar principalmente con coordenadas objeto.

En comparación están los restituidores analíticos en los cuales las coordenadas imagen son la principal información. En estos instrumentos hay solo una dirección del flujo de información entre los carros de las fotografías y el ordenador. Los carros de las fotografías son conducidos directamente por el operador y no indirectamente por el ordenador.

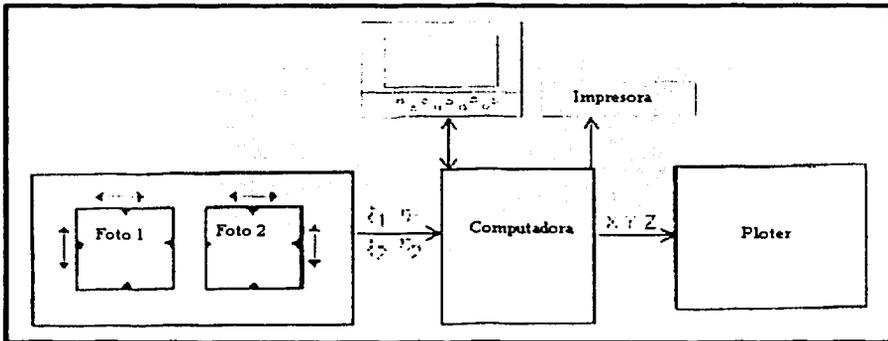


Diagrama esquemático de un restituidor analítico con coordenadas imagen.

Una versión híbrido ocupa una posición intermedia. El carro de la fotografía izquierda es conducida por el operador y el ordenador conduce automáticamente el carro de la fotografía de la derecha.

Un instrumento típico que utiliza las coordenadas imagen es el Zeiss Stereocord G3. Las coordenadas imagen (x_1, y_1) de la fotografía izquierda y las paralajes (p_1, p_2) , son ajustadas por el operador, digitalizadas por generadores de pulsos lineales o rotacionales y los valores transferidos al ordenador. Después los elementos de la orientación interna y las coordenadas terreno de los puntos de control han sido introducidos, la orientación relativa y absoluta es realizada. Por cada punto imagen registrado por el operador, las coordenadas terreno serán computadas, y por ejemplo, las coordenadas (X, Y) pueden ser transferidas a una mesa de dibujo electrónica. Un instrumento con las mismas características y principios es el ofrecido por la oficina Galileo con el nombre de Stereobit. Otros instrumentos híbridos son el de la marca comercial Leica: GIS/VM; La marca Topcon: PA-2000; La marca Zeiss Jena: Kartoflex M.

4.5. Programas internos de los restituidores analíticos.

Los programas que disponen los restituidores analíticos son parte esencial del sistema. La mayoría de los restituidores analíticos se caracterizan por los siguientes programas: Orientación interna; orientación relativa; orientación absoluta; correcciones y ajustes; salvar y restaurar el modelo; información de puntos; modelo digital del terreno; cálculo de áreas, volúmenes y vectores; aerotriangulación:

- Orientación interna: El programa se realiza para el establecimiento de relaciones entre las coordenadas de la fotografía y las coordenadas del modelo y la localización del punto principal de la fotografía. Además incluye este programa la transformación de coordenadas de la fotografía al sistema modelo, de manera que se calculan los parámetros para colocar la fotografía siempre en la misma posición. El punto principal se determina a través de las marcas fiduciales de la fotografía, cuatro u ocho marcas son las utilizadas.
- Orientación relativa: La orientación relativa provee el establecimiento semiautomático del modelo. El programa lleva la plataforma de la foto a la localización teóricamente deseable para quitar la paralaje. El operador debe actuar de la siguiente manera para quitar la paralaje: El valor de la paralaje y su correspondiente localización son almacenados por el ordenador. La eliminación de la paralaje en seis o más sitios, y el ordenador calcula por mínimos cuadrados una solución fiable para el modelo. Las diferentes clases de restituidores analíticos ofrecen variaciones de los conceptos básicos, pero sin embargo, casi todos están basados en las ecuaciones de colinealidad para la orientación.
- Orientación absoluta: Este programa gira o traslada la orientación relativa del modelo para llevarlos a los datos del terreno, y estableciendo un sistema de coordenadas terreno en el modelo. La tarea consiste en localizar con la marca flotante puntos de control identificados en el terreno y en el modelo. Las coordenadas terreno son conocidas y almacenadas en el ordenador. Las coordenadas modelo son registradas automáticamente. Los datos acumulados son utilizados por el ordenador, asumiendo que los datos son adecuados, se resuelve el sistema por mínimos cuadrados. Las nuevas constantes de cada sistema son determinadas y usadas. La fiabilidad de la solución la muestran los residuos. Si se desea se puede realizar en una sola operación la orientación relativa y absoluta.
- Correcciones y ajustes: Una de las grandes ventajas de los restituidores analíticos es la facilidad con la cual el modelo puede ser corregido de errores introducidos por el equipo fotográfico o factores externos. El efecto de cualquier fenómeno afecta al error que puede ser corregido por el programa conveniente si el efecto puede ser expresado

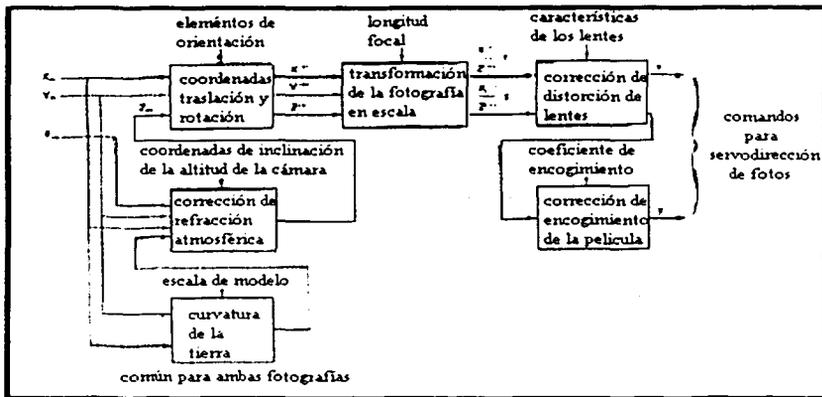
matemáticamente. Por ejemplo, los siguientes efectos son comúnmente proporcionados por los restituidores analíticos: reducción de la película, desplazamiento afin en la película, distorsión de las lentes de la cámara, curvatura de la superficie de la Tierra, refracción atmosférica y errores sistemáticos inherentes en la unidad de medición.

- Salvar y restaurar el modelo: El programa permite determinar las constantes del modelo para ser almacenadas temporalmente o definitivamente en el ordenador a lo largo junto con otros datos pertinentes del modelo. Si un modelo tiene que ser restaurado posteriormente por alguna razón, puede ser realizado en pocos segundos con una precisión constante con el modelo original. Además, el mismo modelo, puede ser movido de un instrumento a otro con idénticas proporciones de captura.
- Información de puntos: La rutina de localizar puntos es muy simple pero valiosa. Ello capacita al operador a entrar en el sistema de coordenadas de la fotografía, modelo o terreno y ver automáticamente el punto designado. Esta capacidad permite al operador reobservar un punto de la imagen con absoluta precisión sin errores de identificación. También permite visualizar la imagen de un punto terreno previa descripción de sus coordenadas.
 - Modelo Digital del Terreno (MDT): Los programas para digitalizar el modelo están expandiendo su uso con automatización de la fotogrametría y procedimientos cartográficos. Sin la fotogrametría analítica, la acumulación de gran cantidad de datos requiere reducir el modelo para tener un juego de coordenadas que si no se haría un proceso tedioso y caro.

Un programa de MDT en un restituidor analítico proporciona una mejora en el procedimiento. La marca flotante es llevada al punto (X, Y) a través de un patrón preestablecido, y el operador es requerido para mantener la marca en el terreno o para detener el programa. Las coordenadas determinadas son transmitidas al ordenador para el posterior procesado. El patrón puede ser variado de acuerdo con las características del terreno.

- Determinación de áreas, volúmenes y vectores: Los programas pueden proporcionar al operador la información necesaria mientras se almacenan las coordenadas de los puntos observados. Consecuentemente el vector determinado por dos puntos y el área y volumen determinado por tres o más puntos pueden ser calculados instantáneamente.
- Aerotriangulación: Los programas de aerotriangulación quizá varíen dependiendo de la casa comercial del restituidor Analítico. Sin embargo, tienen el potencial para incrementar la velocidad y precisión respecto a los procedimientos de los restituidores analógicos. Algunos programas están basados en la teoría de banda continua y otros en la teoría de modelos independientes. Los procedimientos de orientación rápida, la identificación sin ambigüedades de los puntos de paso, corrección de refracción y curvatura terrestre, modelos más acertados y recuerdos inmediatos de modelos previos en caso de mal funcionamiento o errores, todo contribuye a hacer la aerotriangulación aérea con los restituidores analíticos un proceso enormemente mejorado.

El flujo en tiempo real del ordenador para la realización del cálculo de coordenadas de una fotografía es el siguiente: empezando por la parte inferior de la gráfica, la corrección de la curvatura terrestre es lo primero que se debe calcular y depende de las coordenadas modelo (X, Y) y la escala. La corrección de la curvatura terrestre es entonces añadida a la corrección atmosférica o refracción, la cual es una función de las coordenadas modelo, (X, Y) , y E . La corrección atmosférica depende de la distancia radial del punto del modelo respecto al punto nadiral. También en un segundo término, la corrección atmosférica depende de la elevación del modelo.



Flujo principal de una fotografía en el ordenador.

Una vez realizada la corrección atmosférica se designa, Z_m . Ello es la elevación del modelo, E_m modificado por las dos correcciones de elevación. Los tres valores de coordenadas (X_m, Y_m, Z_m) son procesadas en el sistema coordinado de traslaciones y rotaciones para producir las coordenadas (X'', Y'', Z'') , las cuales son el sistema de coordenadas modelo trasladado y rotado. El siguiente bloque de transformaciones de coordenadas es la escala fotográfica. Finalmente, las correcciones distorsión de las lentes es aplicada a ambas fotocoordenadas resultantes.

CAPÍTULO V. RELACIONES DE COORDENADAS EN FOTOGRAMETRÍA.

1. Los sistemas de coordenadas.

En orden a expresar la proyección central formada por la fotografía de la imagen analítica, las fórmulas son necesarias para expresar las relaciones matemáticas entre los puntos imagen y sus correspondientes puntos objeto. Es necesario establecer el sistema de coordenadas imagen y el sistema de coordenadas objeto tal que los puntos y las estimaciones puedan tener una clara correspondencia.

Hay tres tipos de sistemas de referencia que se pueden usar en Topografía y Cartografía:

- Sistema polar en el plano: En este sistema los puntos están en el plano, y son definidos por distancias y ángulos con respecto a una referencia en el plano.
- Sistema rectangular: Puede ser en dos o en tres dimensiones, donde los puntos pueden estar definidos por distancias lineales de dos ejes mutuamente perpendiculares (dos dimensiones) o por los tres ejes mutuamente perpendiculares (tres dimensiones).
- Sistema esférico: Los puntos están en una superficie esférica o esferoidal definidos por ángulos con respecto a unas determinadas direcciones o planos.

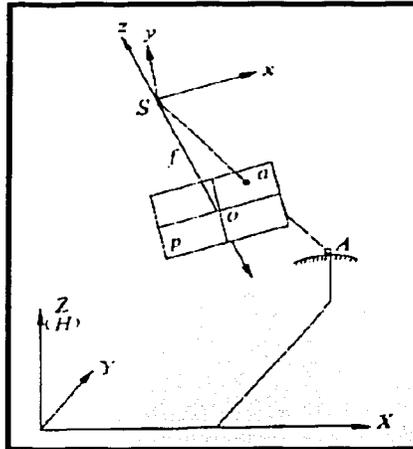
Directamente asociado con el sistema es a menudo necesario un punto o una línea (eje de la cámara...). Por ello, es conveniente usar el giro ω alrededor del eje X , el giro Φ en el eje Y , y el giro X en el eje Z .

Para usar el sistema de coordenadas en fotogrametría analítica puede ser con respecto a una fotografía, un estereomodelo o el correspondiente al objeto. Por consiguiente, uno puede referirse al sistema de coordenadas de la fotografía, modelo u objeto. Deberá estudiarse esto en detalle y sus variaciones.

1.1. Sistema de coordenadas fotográfico.

El sistema de coordenadas imagen es usado para definir la posición espacial de los puntos imagen. La posición de un punto imagen en el plano de la fotografía P , es siempre determinado por las coordenadas en dos dimensiones (x,y) , del punto imagen con su origen en el punto principal o , de la fotografía.

El sistema de coordenadas que relaciona los puntos imagen de la fotografía con el punto en la realidad es el siguiente: El centro perspectivo S es tomado como el origen del sistema de coordenadas imagen. El eje de coordenadas z coincide con la dirección oS y su dirección positiva está en dirección contraria a la fotografía. Los otros dos ejes ortogonales a z que pasan por el punto S son paralelos a los ejes x , y del plano de la fotografía y constituyen el sistema de coordenadas imagen. La coordenada z de cada punto imagen es igual a la distancia principal f de la fotografía y tiene un signo negativo.



Sistema de coordenadas imagen.

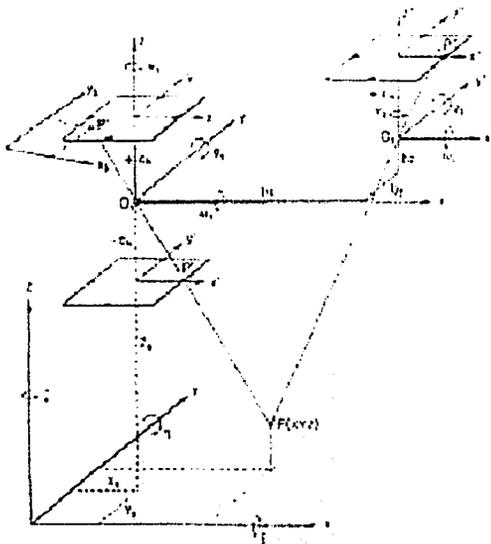
El punto principal debe coincidir con la intersección de las líneas de conexión de las correspondientes marcas fiduciales. La desviación de esta coincidencia (x_0, y_0) a lo largo de las respectivas direcciones de (x, y) puede ser determinado en el proceso de calibración de la cámara. Los valores (x_0, y_0) y f están referidos como elementos de la orientación interna de la fotografía.

En un sistema tridimensional, ortogonal y cuyo origen del sistema está en el centro de perspectiva, y el plano de la fotografía es el (x, y) . El eje óptico de las lentes de la cámara es considerado normal al plano de la fotografía o punto principal, O' . El juego de marcas fiduciales proporciona las referencias (x, y) en las cuales el eje x está generalmente considerado en la dirección de vuelo de la cámara base. El punto principal, O' en el sistema fiducial tiene de coordenadas: $(x_0, y_0, 0)$.

El centro perspectivo, O de las lentes del objetivo se coloca en el eje óptico. Esta distancia entre el plano de la fotografía y el centro perspectivo o de proyección es denominada como distancia focal.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Koordinatensysteme in der Luftbildmessung
 Coordinate systems used in aerial photogrammetry
 Systèmes de coordonnées en photogrammétrie aérienne
 Sistemas de coordenadas en fotogrametría aérea



Sistema de coordenadas fotogramétrico.

Komparatorkoordinaten
 Comparator coordinates
 Coordonnées de comparateur
 Coordenadas de comparador

Ebene Bildkoordinaten im linken/rechten Bild
 Plane image coordinates in left/right-hand photo
 Coordonnées planes dans l'image gauche/droite
 Coordenadas planas de las imágenes izquierda/derecha

Kammerkonstante
 Calibrated focal length
 Distance principale
 Constante focal de la cámara

Koordinatensysteme in der Luftbildmessung
 Coordinate systems used in aerial photogrammetry
 Systèmes de coordonnées en photogrammétrie aérienne
 Sistemas de coordenadas en fotogrametría aérea

Räumliche Bildkoordinaten im linken/rechten Bild
 Three dimensional image coordinates in left/right-hand photo
 Coordonnées spatiales dans l'image gauche/droite
 Coordenadas espaciales de las imágenes izquierda/derecha

Geländepunkt, Bildpunkte
 Ground point, image points
 Point-terrain, point-image
 Punto terreno, puntos imagen

Projektionszentren
 Perspective centers
 Centres de projection
 Centros de proyección

Modellkoordinaten
 Model coordinates
 Coordonnées-machine
 Coordenadas modelo

Basiskonponenten
 Base components
 Composantes de base
 Componentes de la base

Übergängung (Drehung um die y-Achse)
 Transversal tilt (rotation about y-axis)
 Site (rotation autour de l'axe y)
 Inclinación transversal (Giro alrededor del eje y)

Längängung (Drehung um die x-Achse)
 Longitudinal tilt (rotation about x-axis)
 Convergence (rotation autour de l'axe x)
 Inclinación longitudinal (Giro alrededor del eje x)

Kantung (Drehung um die z-Achse)
 Swing (rotation about z-axis)
 Divergement (rotation autour de l'axe z)
 Canto (Giro alrededor del eje z)

x_1, y_1

x_2, y_2

x_3, y_3

L_1

Koordinaten im Paupunktsystem
 Coordinates in the system of the control points
 Coordonnées dans le système des points d'appui
 Coordenadas en el sistema de puntos de apoyo

Nullpunkt des Modellsystems im Endpunktssystem
 Origin of model system in control point system
 Origine de système x, y, z dans le système X, Y, Z
 Origen del sistema modelo en el sistema de puntos de apoyo

Drehung des Modells um die X, Y, Z -Achse
 Rotation of model about X, X, Z -axis
 Rotation du modèle autour des axes X, Y, Z
 Giro del modelo alrededor de los ejes X, Y, Z

x, y, z

x_1, y_1, z_1

O_1, O_2

O_1, O_2

x, y, z

x_1, y_1, z_1

x_1, y_1

x_1, y_1

x_1, y_1

X, Y, Z

X, Y, Z

x, y, z

El centro de proyección tiene de coordenadas: (x_0, y_0, f)

Algún punto imagen, p de la fotografía, en este sistema de coordenadas fiduciales tiene de coordenadas: $(x_p, y_p, 0)$.

El vector que define la localización del punto p con respecto al centro de proyección es:

$$r^i = \begin{pmatrix} x_p - x_0 \\ y_p - y_0 \\ 0 - f \end{pmatrix}$$

En un buen ajuste y corrección de la cámara, las coordenadas fiduciales (x, y) del punto principal son prácticamente cero. Entonces el vector de localización de la imagen puede ser escrito:

$$r^i = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ -f \end{pmatrix}$$

En algunas cámaras, las marcas fiduciales están localizadas en las esquinas de los formatos de las imágenes. Esto corresponde para cada rotación o traslación o ambos en las coordenadas (x, y) de los puntos imagen. Otra variación se presenta cuando los negativos de las fotografías (en lugar de los positivos) son utilizados.

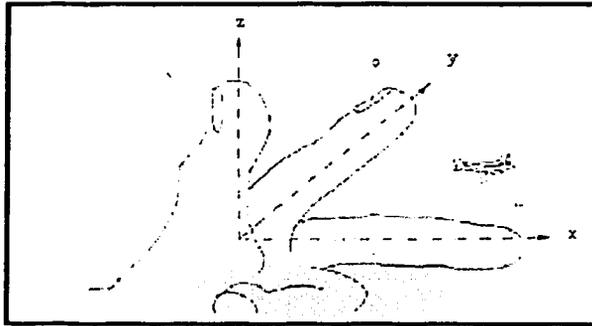
A menudo, como un asunto de conveniencia, el origen del sistema es considerado coincidente con el centro proyectivo. Los componentes del vector de localización de la imagen permanecen en el mismo sitio.

Asociado con este sistema de coordenadas están las rotaciones, (ω, ϕ, X) , alrededor de los ejes (x, y, z) respectivamente. Se obtienen diferentes resultados según el orden de las rotaciones.

La mano izquierda simula la cámara con el dedo central "corazón" apuntando en dirección del vuelo del avión.

Se puede rotar la mano en los tres ejes:

- Rotando tu dedo índice es como si el avión apuntase hacia arriba o hacia abajo. La cámara rota en el eje y . La rotación sobre el eje y es denominada ϕ (phi).
- Rotando el dedo corazón es como si el avión aletease. La cámara rota sobre el eje x . La rotación es denominada ω (omega).
- Rotando sobre el dedo pulgar se simula el giro a derecha e izquierda del avión. La rotación sobre el eje z es denominada X (kappa).



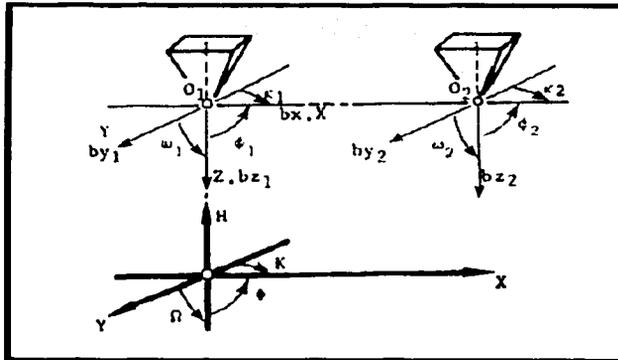
Las tres rotaciones de una simple fotografía.

1.2. Sistema de coordenadas modelo.

Relacionado con el sistema de coordenadas espacial de los puntos imagen en un modelo estereoscópico (establecido matemáticamente o analógicamente con un restituidor), el cual generalmente define la posición con referencia a la base de la cámara o de los ejes del instrumento.

Las coordenadas están definidas por los términos (X, Y, Z) o (X, Y, H) siendo H la altura.

El sistema más usado y preferido es el establecido en el Congreso Internacional de Fotogrametría de 1956 y 1960, como se muestra en la siguiente figura:



Sistema Internacional de coordenadas.

El origen de la proyección central es en la fotografía izquierda. La dirección x coincide con la base de la cámara (o en general con la dirección de vuelo, en el caso de fotogrametría aérea), la dirección z coincide con el eje de la cámara en su posición del cero. Los componentes de la base,

b_x, b_y, b_z coinciden con las direcciones de X, Y, Z respectivamente. Las rotaciones del modelo, ω (alrededor del eje x), ϕ (alrededor del eje y) y χ (alrededor del eje z) son coincidentes con las rotaciones de las fotografías.

Cuando la orientación interior de una proyección central es conocida, la localización de la proyección central en el sistema de coordenadas objeto puede ser únicamente determinada en términos de las coordenadas (X_s, Y_s, Z_s) de su centro de proyección S en el sistema de coordenadas objeto junto con los elementos de orientación angular del sistema de ejes espacial en el sistema de ejes objeto.

Los elementos de la orientación angular son comúnmente representados por tres ángulos independientes, los cuales pueden ser definidos por el sistema de rotación (ω, ϕ, χ) este sistema de rotaciones es a menudo empleado en fotogrametría de dos imágenes. El giro, o ángulo ω se realiza sobre el eje X , el giro ϕ sobre el eje Y , y el giro χ sobre el eje de la cámara. Estas tres rotaciones junto con (X_s, Y_s, Z_s) muestran los elementos de la orientación exterior.

1.3. Sistema de coordenadas del espacio objeto.

Estas se refieren a los sistemas de coordenadas usados para definir las posiciones de los puntos en el espacio objeto, como diferencia de los usados en el sistema imagen y modelo. En el contexto de la Tierra como objeto, hablando en general, se puede considerar uno de los tres sistemas de coordenadas:

- Sistema de coordenadas Geodésico: Latitud, longitud y altitud sobre el elipsoide elegido: (ϕ, λ, h)
- Sistema rectangular Geocéntrico Universal: (X, \bar{Y}, \bar{Z}) .
- Sistema rectangular local: (X, Y, Z)

De ellos, el sistema Geocéntrico no es usado en Fotogrametría Analítica directamente debido a inconvenientes inherentes para tener valores rápidos de unidades no lineales (grados centesimales, grados sexagesimales...). Estos son generalmente convertidos en sistemas rectangulares. Para muchas aplicaciones, sin embargo, donde la curvatura de la Tierra es de menor importancia, puede usarse un sistema de coordenadas plano, por ejemplo, para algún sistema de coordenadas locales.

El punto objeto puede estar definido con referencia a un sistema arbitrario rectangular (X, Y, Z) . Cuando el objeto fotografiado está sobre la superficie terrestre, entonces el eje Z coincide con la dirección cenital del origen del sistema de coordenadas. Los ejes Y, X , forman un plano horizontal, cuyo eje axial puede ser determinado por el sistema de coordenadas terreno empleado, el sistema axial del restituidor o la dirección de vuelo.

1.3.1. Sistema de coordenadas rectangular Geocéntrico Universal.

Este sistema es utilizado para aerotriangulación, particularmente cuando una larga extensión de la superficie terrestre es envuelta. Este es un sistema ortogonal donde el origen es el centro de la Tierra. El plano $\bar{X} \bar{Y}$ contiene el ecuador, el eje \bar{X} pasa a través del

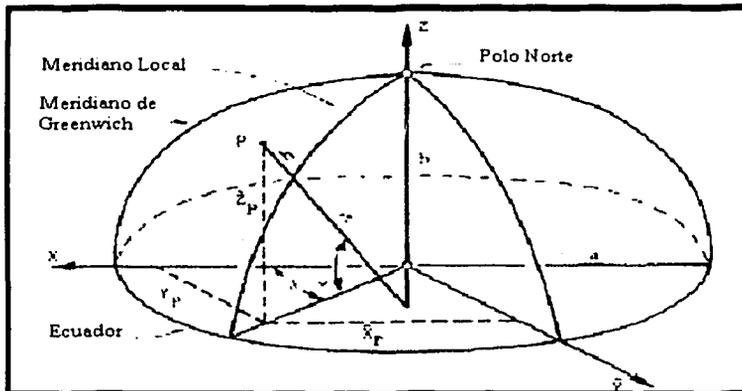
meridiano cero (Greenwich) y el eje \bar{Z} pasa a través del Polo Norte. El eje \bar{Y} coincide con la longitud este de 90° en un sistema de giro a la derecha.

La Tierra puede ser considerada por la representación de un elipsoide de aproximación. El sistema de coordenadas puede expresarse a través de las siguientes fórmulas:

$$\bar{X} = (N + h) \cdot \cos\phi \cdot \cos\lambda$$

$$\bar{Y} = (N + h) \cdot \cos\phi \cdot \text{sen}\lambda$$

$$\bar{Z} = (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \text{sen}\phi$$

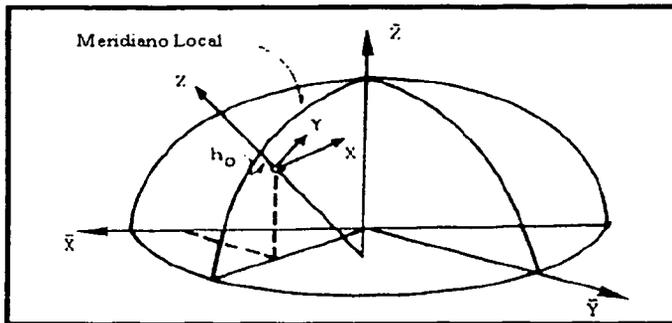


Sistema de coordenadas rectangular Geocéntrico Universal.

1.3.2. Sistema de coordenadas rectangular local.

Este es a menudo el sistema de coordenadas más utilizado en aerotriangulación. Este sistema, mientras conserva todas las características del sistema Geocéntrico, contiene dos ventajas. Primero, porque es local, no necesita llevar demasiados dígitos. A menudo permite a los ordenadores ponerlos en simple precisión con considerable ahorro en la utilización de los ordenadores. Segundo, el eje Z paralelo a la vertical del lugar, la cual simplifica el trabajo, a menudo permite una separación de la planimetría de la elevación.

Este sistema es ortogonal y se mide en sentido de las agujas del reloj. Tiene el sistema su eje Z normal al elipsoide seleccionado en el origen (O). El eje Y coincide con la dirección del Norte y la elevación h_0 del origen es generalmente considerada negativa por comodidad, tanto que todos los puntos en el terreno y las estaciones de las cámaras tienen automáticamente valores positivos.



Sistema de coordenadas rectangular local.

Las coordenadas locales son fácilmente obtenibles de las coordenadas egocéntricas mediante una transformación tridimensional, la cual contiene una traslación, una rotación y posiblemente un cambio de escala.

2. Transformaciones de coordenadas.

Este es a menudo necesario para establecer las relaciones entre dos sistemas de coordenadas en orden a transferir un número de puntos de uno a otro. Hay numerosos métodos de transformación para usarlos en problemas tridimensionales, simplificando versiones las cuales son aplicables al espacio de dos dimensiones. El efecto de transformación de un cuerpo puede ser un simple cambio en localización y disposición (por ejemplo, sin algún cambio en forma y tamaño) o uno completo (por ejemplo, cambio en el tamaño y la forma) o algo intermedio (por ejemplo, variaciones en escala sin cambios en tamaño o localización o disposición).

Debido a que en fotogrametría, se determinan las coordenadas desconocidas de unos puntos respecto a otro sistema de coordenadas, hay que proceder a realizar las transformaciones de coordenadas, estas se realizan con unos puntos conocidos denominados "puntos de control". Las transformaciones pueden ser en dos dimensiones o bidimensionales o en tres dimensiones o tridimensionales. Dentro de las transformaciones bidimensionales existen las transformaciones conformes, afines y proyectivas. En las transformaciones tridimensionales está la transformación de semejanza.

2.1. Transformación espacial en dos dimensiones.

Antes de analizar los distintos tipos de transformaciones, se va a estudiar la rotación en el plano:

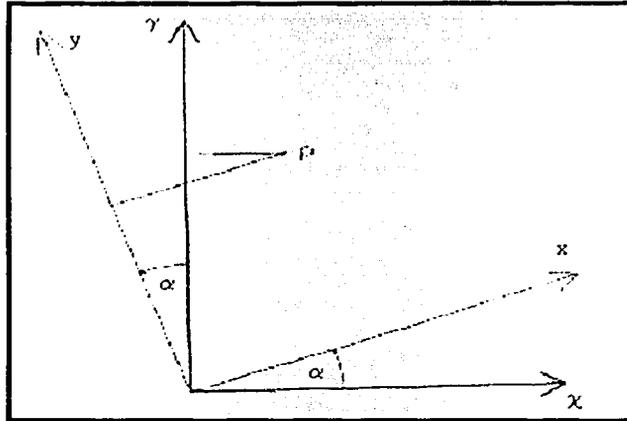
Considerando un punto $P(x, y)$ en un sistema de coordenadas xy rotado por un ángulo relativo α en el sistema de coordenadas XY . Se deduce las coordenadas (X, Y) del punto P en el segundo sistema: [5.1.]

$$X = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \text{sen} \alpha$$

$$Y = x \cdot \text{sen} \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

De forma matricial.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



Rotación en el plano.

Si se introducen los cosenos de los ángulos entre las coordenadas de los ejes: [5.2.]

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(xX) & \cos(yX) \\ \cos(xY) & \cos(yY) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La cual, puede ser escrita de manera escueta, con los símbolos de los vectores y la matriz R , la cual denota ser la matriz de rotación. Esta matriz es cuadrada pero no simétrica. [5.3.]

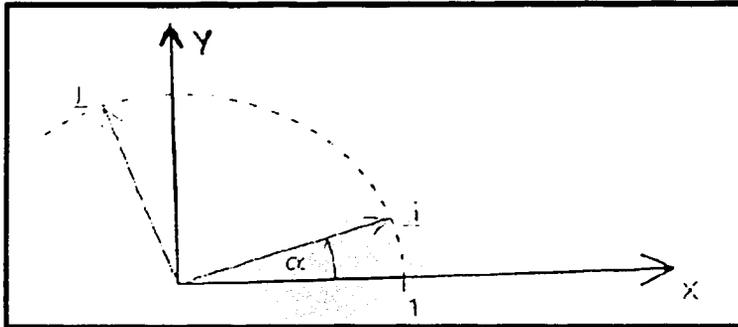
$$X = R \cdot x \qquad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$$

La matriz de rotación tiene unas propiedades características, por ejemplo:

- Condición de ortogonalidad: Si se introduce los vectores i y j a lo largo de los ejes de coordenadas (x, y) y se expresan sus componentes en el sistema (X, Y) se obtiene: [5.4.]

$$i = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$j = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$$



Sistema vectorial.

Los elementos del sistema [5.1.] son los componentes de un vector unitario de la matriz de rotación, r_{ij} .

$$R = (i, j)$$

Los dos vectores unitarios deben ser perpendiculares mutuamente, y deben satisfacer las siguientes condiciones de ortogonalidad:

$$i^T i = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 = r_{11}^2 + r_{21}^2$$

$$j^T j = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 = r_{12}^2 + r_{22}^2$$

$$i^T j = -\cos \alpha \cdot \sin \alpha + \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0 = r_{11} \cdot r_{12} + r_{21} \cdot r_{22}$$

Una matriz que satisfaga las condiciones de ortogonalidad es llamada matriz ortogonal. Los cuatro elementos de la matriz de rotación deben satisfacer las tres condiciones de ortogonalidad, y solamente un parámetro es independiente. En general, este es el ángulo de rotación α .

• Inversión de la matriz de rotación R : Multiplicando la matriz inversa, R^{-1} por la matriz, R , resulta la matriz unidad, I .

$$R^{-1} \cdot R = I$$

Por otro lado, la multiplicación de la matriz transpuesta, R^T por la matriz, R también resulta la matriz unidad, I .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\begin{pmatrix} i' & j' \\ j' & i' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & j \\ j & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i' i & i' j \\ j' i & j' j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, existe la importante relación de la matriz de rotación:

$$R^{-1} = R'$$

• Transformación inversa: Puntos en el sistema (X, Y) pueden ser transformados en el sistema (x, y) a partir de la ecuación, [5.3.]:

$$X = R \cdot x$$

Multiplicando por R' :

$$R' \cdot X = R' \cdot R \cdot x = I \cdot x = x$$

El resultado es:

$$x = R' \cdot X = \begin{pmatrix} r'_{11} & r'_{21} \\ r'_{12} & r'_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Los casos de dos dimensiones pueden ser vistos como la versión simplificada de una de la de tres dimensiones en la cual la tercera coordenada es constante. Las generalidades son mostradas a continuación:

• Paso del sistema polar plano al sistema rectangular (cartesiano):

$$\begin{aligned} X &= r \cdot \cos\theta \\ Y &= r \cdot \sin\theta \end{aligned}$$

Donde:

r : Distancia del punto al origen.

θ : Angulo entre la dirección y el eje X.

• De un sistema rectangular a otro sistema regular:

2.1.1. Transformación conforme.

Es necesario conocer como mínimo las coordenadas de dos puntos en ambos sistemas:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$X = k \cdot \cos \chi \cdot \bar{X} - k \cdot \text{sen} \chi \cdot \bar{Y} + X_o$$

$$Y = k \cdot \text{sen} \chi \cdot \bar{X} + k \cdot \cos \chi \cdot \bar{Y} + Y_o$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} \cos \chi & -\text{sen} \chi \\ \text{sen} \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \end{pmatrix} \quad \ominus$$

También se puede expresar como:

$$X = a_1 \cdot \bar{X} - a_2 \cdot \bar{Y} + a_o$$

$$Y = a_2 \cdot \bar{X} + a_1 \cdot \bar{Y} + b_o$$

Los cuatro parámetros desconocidos son: , a_o , b_o a_1 , a_2 .

2.1.2. Transformación afín.

A esta transformación se le introducen modificaciones respecto a la transformación conforme como las diferentes escalas en cada uno de sus ejes:

$$X = k_{\bar{X}} \cdot \cos \chi \cdot \bar{X} - k_{\bar{Y}} \cdot \text{sen} \chi \cdot \bar{Y} + X_o$$

$$Y = k_{\bar{X}} \cdot \text{sen} \chi \cdot \bar{X} + k_{\bar{Y}} \cdot \cos \chi \cdot \bar{Y} + Y_o$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{\bar{X}} \\ k_{\bar{Y}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \chi & -\text{sen} \chi \\ \text{sen} \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \end{pmatrix}$$

$$X = a_1 \cdot \bar{X} + a_2 \cdot \bar{Y} + a_o$$

Hay seis parámetros desconocidos. También se podría introducir la falta de ortogonalidad de los ejes, β .

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{\bar{X}} \\ k_{\bar{Y}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \chi & -\text{sen} \chi \\ \text{sen} \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\text{sen} \beta \\ 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \end{pmatrix}$$

2.1.3. Transformación polinómica.

Partiendo de la transformación polinómica en tres dimensiones y haciendo el valor de Z constante:

$$X = a_0 + a_1 \cdot \bar{X} + a_2 \cdot \bar{Y} + a_3 \cdot \bar{X}^2 + a_4 \cdot \bar{Y}^2 + a_5 \cdot \bar{X}\bar{Y} + \dots$$

$$Y = b_0 + b_1 \cdot \bar{X} + b_2 \cdot \bar{Y} + b_3 \cdot \bar{X}^2 + b_4 \cdot \bar{Y}^2 + b_5 \cdot \bar{X}\bar{Y} + \dots$$

La versión conforme:

$$X = A_0 + A_1 \cdot \bar{X} + A_2 \cdot \bar{Y} + A_3 \cdot (\bar{X}^2 - \bar{Y}^2) + 2 \cdot A_4 \cdot \bar{X}\bar{Y} + \dots$$

$$Y = B_0 - A_2 \cdot \bar{X} + A_1 \cdot \bar{Y} - A_4 \cdot (\bar{X}^2 - \bar{Y}^2) + 2 \cdot A_3 \cdot \bar{X}\bar{Y} + \dots$$

2.1.4. Transformación proyectiva.

Para trabajar con una simple imagen fotográfica, la proyectividad entre planos puede ser de especial interés. Es un caso de dos dimensiones en el espacio, y el número de coordenadas por cada punto es de dos. De las expresiones tridimensionales se deduce:

$$X = \frac{a'_1 \cdot \bar{X} + a'_2 \cdot \bar{Y} + a'_3}{d'_1 \cdot \bar{X} + d'_2 \cdot \bar{Y} + d'_3} = \frac{a_1 \cdot \bar{X} + a_2 \cdot \bar{Y} + a_3}{d_1 \cdot \bar{X} + d_2 \cdot \bar{Y} + 1}$$

$$Y = \frac{b'_1 \cdot \bar{X} + b'_2 \cdot \bar{Y} + b'_3}{d'_1 \cdot \bar{X} + d'_2 \cdot \bar{Y} + d'_3} = \frac{b_1 \cdot \bar{X} + b_2 \cdot \bar{Y} + b_3}{d_1 \cdot \bar{X} + d_2 \cdot \bar{Y} + 1}$$

Esto indica que la proyectividad entre dos planos es únicamente determinada si un total de ocho coeficientes son conocidos. Esto requiere al menos cuatro puntos donde ambas coordenadas (X, Y) son conocidas en ambos espacios. Después de calcular los coeficientes, pueden ser usados para calcular todos los valores (X, Y) de otros puntos en un plano donde las coordenadas en el otro son conocidas. La única condición que valida estas expresiones es que tres de los puntos usados en la transformación en cada plano no sean colineales.

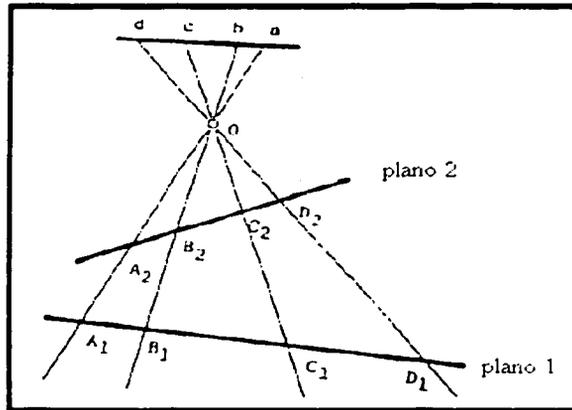
$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \\ d'_1 & d'_2 & d'_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Estas ecuaciones son usadas en el problema de rectificación de fotografías.

2.1.5. Razón cruzada.

El concepto general de proyectividad, la teoría de la razón cruzada, se muestra a continuación: Considerando un haz de rayos originaria de la foto imagen con los puntos a, d, c, b pasando a través del centro proyectivo, O , están localizados en el plano 1 con A_1, B_1, C_1, D_1 y en el plano 2 con A_2, B_2, C_2, D_2 . Por consideración inherente de linealidad de rayos, la siguiente relación de cruces de rayos es establecida:

$$\frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 D_1}{B_1 D_1} = \frac{\text{sen } A_1 O C_1}{\text{sen } B_1 O C_1} : \frac{\text{sen } A_1 O D_1}{\text{sen } B_1 O D_1} = \text{constante}$$



Geometría de la proyectividad de la razón cruzada.

De la misma manera, se puede comprobar que el valor de la constante es la misma para los correspondientes puntos A_2, B_2, C_2, D_2 . En este contexto se puede afirmar que dos figuras son proyectivas cuando sus elementos corresponden y cuando la razón cruzada entre los cuatro elementos en una figura son iguales a los correspondientes de la otra figura con la razón cruzada. Se puede expresar que:

$$\frac{A_1 C_1}{B_1 C_1} : \frac{A_1 D_1}{B_1 D_1} = \frac{A_2 C_2}{B_2 C_2} : \frac{A_2 D_2}{B_2 D_2}$$

Si las coordenadas de los puntos A_1, B_1, C_1, D_1 en el plano 1 son x_1, x_2, x_3, x_4 y los puntos A_2, B_2, C_2, D_2 en el plano 2 son x'_1, x'_2, x'_3, x'_4 .

$$\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2} = \frac{x'_3 - x'_1}{x'_3 - x'_2} : \frac{x'_4 - x'_1}{x'_4 - x'_2}$$

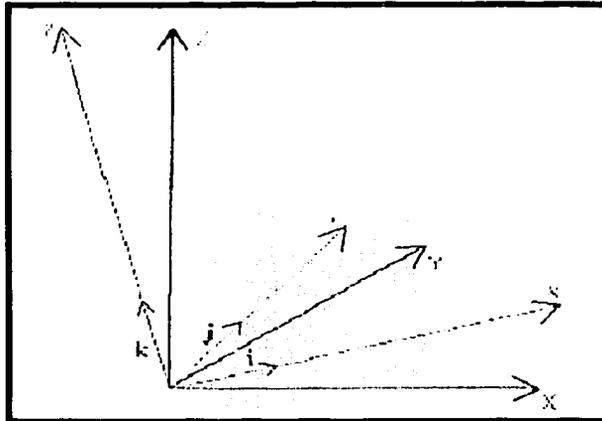
2.2. Transformación tridimensional.

La rotación en el espacio es:

Las ecuaciones [5.2.] pueden extenderse a la transformación de punto P con coordenadas (x, y, z) en un sistema (X, Y, Z) con la ayuda de los cosenos de los ángulos entre los ejes de coordenadas: [5.5.]

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha X) & \cos(\beta X) & \cos(\gamma X) \\ \cos(\alpha Y) & \cos(\beta Y) & \cos(\gamma Y) \\ \cos(\alpha Z) & \cos(\beta Z) & \cos(\gamma Z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$X = R \cdot x \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$



Rotación espacial.

Se introducen los tres vectores unitarios (i, j, k) de [5.5.] de manera análoga a lo realizado en [5.4.] y queda la matriz $R = (i, j, k)$:

$$i = \begin{pmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{pmatrix} = j \times k = \begin{pmatrix} + & r_{22} & r_{23} \\ & r_{32} & r_{33} \\ - & r_{12} & r_{13} \\ + & r_{12} & r_{13} \\ & r_{22} & r_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{22} \cdot r_{33} - r_{32} \cdot r_{23} \\ r_{32} \cdot r_{13} - r_{12} \cdot r_{33} \\ r_{12} \cdot r_{23} - r_{22} \cdot r_{13} \end{pmatrix}$$

$$j = k \times i$$

$$k = i \times j$$

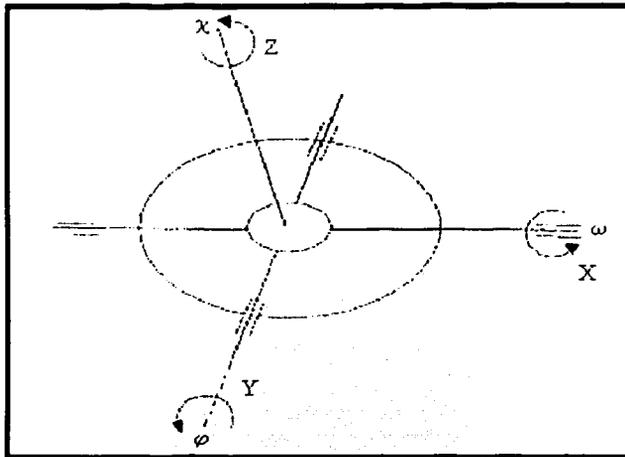
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Se puede ahora derivar al caso espacial siguiendo las condiciones de ortogonalidad de los nueve elementos:

$$i^T i = j^T j = k^T k = 1$$

$$i^T j = i^T k = j^T k = 0$$

Una rotación en el espacio es definida por tres parámetros independientes. En fotogrametría frecuentemente se definen estos tres parámetros como los ángulos de rotación, ω , ϕ , X sobre los tres ejes de coordenadas. Se debe llevar en mente la secuencia de rotaciones, se muestra claramente en una articulación cardan.

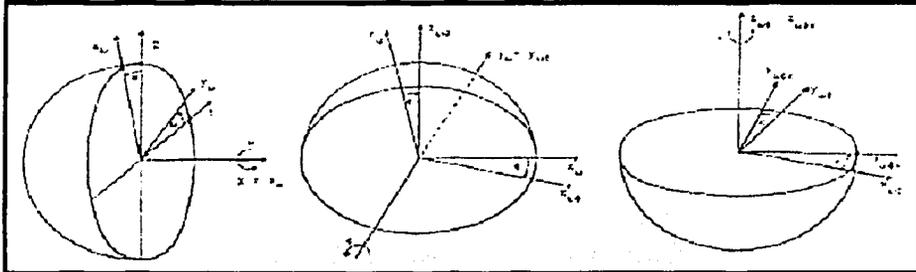


ω : eje primario. ϕ : eje secundario. X : eje terciario.
Rotaciones sobre los ejes de un sistema cardan.

Si una rotación w es aplicada, la posición de los otros dos ejes cambiarán. Si se rota por el ángulo ϕ , sin embargo solamente el eje X es desplazado, pero no el eje ω . Una rotación sobre el eje X no produce cambios en las posiciones de los otros dos ejes. La rotación arbitraria del sistema (x, y, z) de la figura de la rotación espacial, puede ser considerada como el producto final de las tres rotaciones (ω, ϕ, X) , de manera que cada rotación es en dirección contraria a las de las agujas de un reloj cuando se observa la perspectiva a lo largo del correspondiente eje hacia el origen de coordenadas.

Dado un punto P en el sistema de coordenadas (x, y, z) puede ser transformado por las rotaciones ω , ϕ y χ en el sistema (X, Y, Z) . La rotación espacial de la matriz R de la ecuación de transformación [5.5.] entonces tiene la forma: [5.6.]

$$R_{\omega, \phi, \chi}^T = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot \cos\chi & -\cos\theta \cdot \sin\chi & \sin\theta \\ \cos\omega \cdot \sin\chi + \sin\omega \cdot \sin\theta \cdot \cos\chi & \cos\omega \cdot \cos\chi - \sin\omega \cdot \sin\theta \cdot \sin\chi & -\sin\omega \cdot \cos\theta \\ \sin\omega \cdot \sin\chi - \cos\omega \cdot \sin\theta \cdot \cos\chi & \sin\omega \cdot \cos\chi + \cos\omega \cdot \sin\theta \cdot \sin\chi & \cos\omega \cdot \cos\theta \end{pmatrix}$$



Secuencia de las tres rotaciones del sistema de coordenadas.

Se puede interpretar de tres modos diferentes los elementos r_{ik} de la rotación espacial de la matriz R :

- Cosenos de los ángulos espaciales entre los pares de los ejes de los dos sistemas de coordenadas.
- Componentes de los vectores unitarios del sistema relativo de coordenadas rotado al estado superior del sistema de coordenadas.
- Funciones trigonométricas de las rotaciones sobre los tres ejes del sistema cardan.

Las tres secuencias de las rotaciones producen:

$$\begin{aligned} X_1 &= R_1 \cdot X \\ X_2 &= R_2 \cdot X_1 \\ X_3 &= R_3 \cdot X_2 \end{aligned}$$

De manera que las rotaciones totales:

$$X_3 = R_3 \cdot R_2 \cdot R_1 \cdot X = R \cdot X$$

Las tres matrices de rotaciones, R_1 , R_2 y R_3 pueden ser multiplicadas juntas y forman una nueva matriz de rotación. La multiplicación de matrices no es conmutativa, la secuencia debe ser observada estrictamente en la multiplicación.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

La transformación tridimensional también es conocida por transformación de semejanza. Referido al mismo objeto, considera dos sistemas de coordenadas (X, Y, Z) y $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ ambos rectangulares. El más comúnmente usado es la transformación tridimensional que no envuelve cambios de tamaño es simbolizada por: [5.1.]

$$X = k \cdot M^T \cdot \bar{X} + X_0$$

Siendo:

$X = (X \ Y \ Z)^T$: Coordenadas después de la transformación.

$\bar{X} = (\bar{X} \ \bar{Y} \ \bar{Z})^T$: Coordenadas antes de la transformación.

$X_0 = (X_0 \ Y_0 \ Z_0)^T$: Vector de las tres traslaciones entre las coordenadas de

origen (X, Y, Z) y de destino $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$

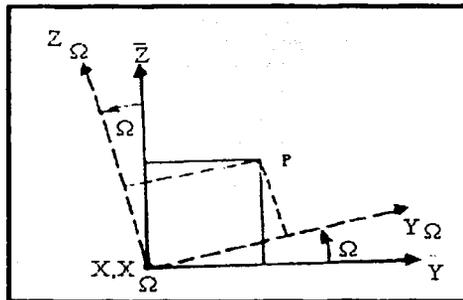
M : Matriz de rotación ortogonal (secuencia de tres rotaciones).

k : Factor de escala.

En orden a estudiar estos detalles, se consideran primero solamente las rotaciones, secuencialmente, ω alrededor del eje \bar{X} , ϕ alrededor del eje \bar{Y} y X alrededor del eje Z .

La primera rotación, ω transforma los ejes \bar{Y} y \bar{Z} en las posiciones Y_ω y Z_ω , respectivamente. Esto está expresado por la matriz de rotación:

$$M_\omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & \text{sen}\omega \\ 0 & -\text{sen}\omega & \cos\omega \end{pmatrix}$$



Primera rotación, ω .

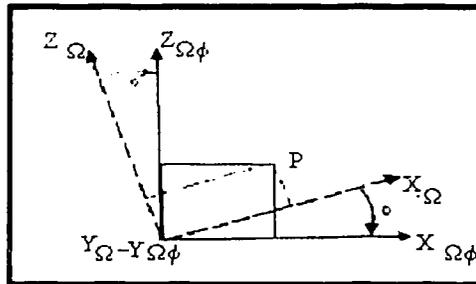
TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Las coordenadas de un punto P , en la primera rotación X_{ω} , Y_{ω} , Z_{ω} son:

$$\begin{aligned} X_{\omega} &= \bar{X} \\ Y_{\omega} &= \bar{Y} \cdot \cos \omega + \bar{Z} \cdot \operatorname{sen} \omega \\ Z_{\omega} &= -\bar{Y} \cdot \operatorname{sen} \omega + \bar{Z} \cdot \cos \omega \end{aligned}$$

La rotación secundaria, ϕ , transforma los ejes X_{ω} y Z_{ω} en las posiciones $X_{\omega\phi}$ y $Z_{\omega\phi}$, respectivamente. Está expresado por:

$$M_{\phi} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & -\operatorname{sen} \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix}$$



Rotación secundaria, ϕ .

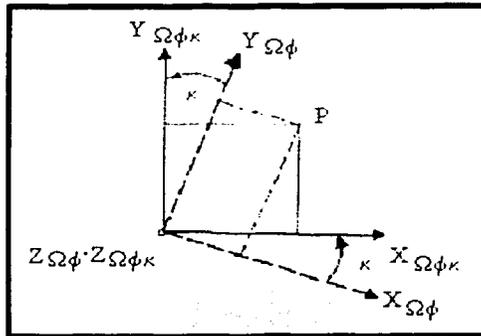
Las coordenadas del mismo punto, P en la doble rotación, $X_{\omega\phi}$, $Y_{\omega\phi}$, $Z_{\omega\phi}$ es:

$$\begin{aligned} X_{\omega\phi} &= X_{\omega} \cdot \cos \phi - Z_{\omega} \cdot \operatorname{sen} \phi \\ Y_{\omega\phi} &= Y_{\omega} \\ Z_{\omega\phi} &= X_{\omega} \cdot \operatorname{sen} \phi + Z_{\omega} \cdot \cos \phi \end{aligned}$$

La tercera rotación, χ , transforma los ejes $X_{\omega\phi}$ y $Y_{\omega\phi}$ en las posiciones $X_{\omega\phi\chi}$ e $Y_{\omega\phi\chi}$, respectivamente. Esto está expresado a través de la matriz de rotación:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$M_{\chi} = \begin{pmatrix} \cos \chi & \text{sen} \chi & 0 \\ -\text{sen} \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Rotación tercera, X .

Las coordenadas del mismo punto, P después de la tercera rotación, $X_{\omega\phi\chi}$, $Y_{\omega\phi\chi}$, $Z_{\omega\phi\chi}$ son:

$$\begin{aligned} X_{\omega\phi\chi} &= X_{\omega\phi} \cdot \cos \chi + Y_{\omega\phi} \cdot \text{sen} \chi \\ Y_{\omega\phi\chi} &= -X_{\omega\phi} \cdot \text{sen} \chi + Y_{\omega\phi} \cdot \cos \chi \\ Z_{\omega\phi\chi} &= Z_{\omega\phi} \end{aligned}$$

Puede notarse que \bar{X} permanece invariable en la primera rotación ya que los ejes \bar{X} y X_{ω} permanecen coincidentes en esta rotación. De manera similar, los ejes Y y Z permanecen invariables en la segunda y tercera rotación, respectivamente.

El efecto final de las tres rotaciones está expresado en la matriz M , siendo:

$$M = M_{\chi} \cdot M_{\phi} \cdot M_{\omega}$$

Los elementos de esta rotación pueden expresarse como:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$M^T = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot \cos\chi & -\cos\theta \cdot \sin\chi & \sin\theta \\ \cos\theta \cdot \sin\chi + \sin\theta \cdot \cos\theta \cdot \cos\chi & \cos\theta \cdot \cos\chi - \sin\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\chi & -\sin\theta \cdot \cos\theta \\ \sin\theta \cdot \sin\chi - \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \cos\chi & \sin\theta \cdot \cos\chi + \cos\theta \cdot \sin\theta \cdot \sin\chi & \cos\theta \cdot \cos\theta \end{pmatrix}$$

La orientación de la matriz M también puede ser considerada como la composición de los cosenos directores, los cuales relacionan los ángulos entre los correspondientes ejes en los dos sistemas, X, Y, Z y $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$. Estos nueve elementos, expresados en términos de los cosenos directores:

$$M^T = \begin{pmatrix} \cos X\bar{X} & \cos Y\bar{X} & \cos Z\bar{X} \\ \cos X\bar{Y} & \cos Y\bar{Y} & \cos Z\bar{Y} \\ \cos X\bar{Z} & \cos Y\bar{Z} & \cos Z\bar{Z} \end{pmatrix}$$

La orientación de la matriz es ortogonal, cumple las siguientes normas:
 $M^{-1} = M^T$ o $M \cdot M^T = M^T \cdot M = I$ (matriz identidad).

2.2.1. Transformación tridimensional afin.

La transformación general descrita en la sección previa asume que la escala en el espacio tridimensional es la misma en cada dirección. Si se asume que existen tres diferentes escalas a lo largo de las tres direcciones, X, Y, Z un caso de afinidad debe ser asumido. En muchos casos, la ecuación [5.1.] puede ser modificada usando:

$$k = \begin{pmatrix} k_{\bar{X}} & k_{\bar{Y}} & k_{\bar{Z}} \end{pmatrix}^T$$

Siendo, $k_{\bar{X}}, k_{\bar{Y}}, k_{\bar{Z}}$ las respectivas escalas de los ejes: $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$.

2.2.2. Transformación tridimensional polinómica.

En vista del error propagado y deformación sistemática del modelo estereoscópico o de la salida final, a menudo la transformación polinómica puede ser conveniente. Pueden ser usados polinomios de varios tipos, dependiendo del modelo matemático más apropiado el fotogrametrista puede hallar el más adecuado. Dos típicos juegos de polinomios en transformaciones tridimensionales pueden ser aplicados. Las coordenadas X, Y, Z pueden ser consideradas después de la transformación, y las coordenadas $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ antes de la transformación.

- Polinomio tridimensional general: (Ghosh: 1975)



$$\begin{aligned}
 X &= a_0 + a_1 \cdot \bar{X} + a_2 \cdot \bar{Y} + a_3 \cdot \bar{Z} + a_4 \cdot \bar{X}^2 + a_5 \cdot \bar{Y}^2 + a_6 \cdot \bar{Z}^2 + a_7 \cdot \bar{X}\bar{Y} + a_8 \cdot \bar{Y}\bar{Z} + a_9 \cdot \bar{X}\bar{Z} \dots \\
 Y &= b_0 + b_1 \cdot \bar{X} + b_2 \cdot \bar{Y} + b_3 \cdot \bar{Z} + b_4 \cdot \bar{X}^2 + b_5 \cdot \bar{Y}^2 + b_6 \cdot \bar{Z}^2 + b_7 \cdot \bar{X}\bar{Y} + b_8 \cdot \bar{Y}\bar{Z} + b_9 \cdot \bar{X}\bar{Z} \dots \\
 Z &= c_0 + c_1 \cdot \bar{X} + c_2 \cdot \bar{Y} + c_3 \cdot \bar{Z} + c_4 \cdot \bar{X}^2 + c_5 \cdot \bar{Y}^2 + c_6 \cdot \bar{Z}^2 + c_7 \cdot \bar{X}\bar{Y} + c_8 \cdot \bar{Y}\bar{Z} + c_9 \cdot \bar{X}\bar{Z} \dots
 \end{aligned}$$

- Polinomio tridimensional, el cual tiene los tres planos conformes: (Mikhail, 1964)

$$\begin{aligned}
 X &= A_0 + A_1 \cdot \bar{X} + A_2 \cdot \bar{Y} + A_3 \cdot \bar{Z} + A_5 \cdot (\bar{X}^2 - \bar{Y}^2 - \bar{Z}^2) + 0 + 2 \cdot A_6 \cdot \bar{X}\bar{Y} + 2 \cdot A_7 \cdot \bar{X}\bar{Z} + \dots \\
 Y &= B_0 - A_2 \cdot \bar{X} + A_1 \cdot \bar{Y} + A_4 \cdot \bar{Z} + A_6 \cdot (-\bar{X}^2 + \bar{Y}^2 - \bar{Z}^2) + 2 \cdot A_7 \cdot \bar{Y}\bar{Z} + 0 + 2 \cdot A_5 \cdot \bar{X}\bar{Y} + \dots \\
 Z &= C_0 + A_3 \cdot \bar{X} - A_4 \cdot \bar{Y} + A_1 \cdot \bar{Z} + A_7 \cdot (-\bar{X}^2 - \bar{Y}^2 + \bar{Z}^2) + 2 \cdot A_6 \cdot \bar{Y}\bar{Z} + 2 \cdot A_5 \cdot \bar{Z}\bar{X} + 0 + \dots
 \end{aligned}$$

Nota: En los dos juegos de transformaciones tridimensionales anteriores los coeficientes a, b, c, A, B, C son constantes. Los 0 son colocados con el propósito de indicar ceros los coeficientes de los términos: $\bar{Y}\bar{Z}$ en X , $\bar{X}\bar{Z}$ en Y y $\bar{X}\bar{Y}$ en Z . Estos polinomios deben emplearse solamente cuando los ángulos de rotación son pequeños.

2.2.3. Transformación tridimensional proyectiva.

2.2.3.1. Introducción.

Ninguno de los dos sistemas de coordenadas con los que se quiere hacer la transformación tienen una relación proyectiva y forman una proyectividad si la correspondencia uno a uno de los elementos de un sistema se relacionan con el otro sistema. Se puede asumir en la práctica que existe uno a uno correspondencia entre el espacio a ser transformado y el espacio que se obtiene de la transformación. Este concepto es fundamental en los problemas de proyecciones. Si esto no es así, uno puede tener, por ejemplo, una línea en un espacio (terreno) correspondiente solo a un punto en el otro espacio (modelo).

$$F(X, Y, Z) = f(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$$

Considerando que X, Y, Z y $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ llevan el mismo sentido.

En estas relaciones, no debería variar el estado de la segunda función respecto a la conjunción con otras funciones. Se puede expresar la relación como:

$$\frac{A_1 \cdot X + A_2 \cdot Y + A_3 \cdot Z + A_4}{D_1 \cdot X + D_2 \cdot Y + D_3 \cdot Z + D_4} = \frac{a_1 \cdot \bar{X} + a_2 \cdot \bar{Y} + a_3 \cdot \bar{Z} + a_4}{d_1 \cdot \bar{X} + d_2 \cdot \bar{Y} + d_3 \cdot \bar{Z} + d_4}$$

Esta expresión tiene 16 incógnitas, de las cuales no todas son independientes. La expresión con incógnitas independientes (solamente once) tiene la forma:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\frac{Y + A_3 \cdot Z + A_4}{A_1 \cdot X + A_2 \cdot Z + 1} = \frac{a_1 \cdot \bar{X} + a_2 \cdot \bar{Y} + a_3 \cdot \bar{Z} + a_4}{d_1 \cdot \bar{X} + d_2 \cdot \bar{Y} + d_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

La correspondencia uno a uno puede ser establecida si solamente once de los puntos son conocidos e identificados en ambos sistemas (modelo y terreno). Se requieren tres ecuaciones independientes para resolver los términos X, Y, Z en los términos de $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ y viceversa. Se necesitan las dos siguientes ecuaciones:

$$\frac{Z + B_3 \cdot X + B_4}{B_1 \cdot Y + B_2 \cdot X + 1} = \frac{b_1 \cdot \bar{X} + b_2 \cdot \bar{Y} + b_3 \cdot \bar{Z} + b_4}{c_1 \cdot \bar{X} + c_2 \cdot \bar{Y} + c_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

$$\frac{X + C_3 \cdot Y + C_4}{C_1 \cdot Z + C_2 \cdot Y + 1} = \frac{c_1 \cdot \bar{X} + c_2 \cdot \bar{Y} + c_3 \cdot \bar{Z} + c_4}{f_1 \cdot \bar{X} + f_2 \cdot \bar{Y} + f_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

Un caso especial de la degeneración de una transformación es conocida como la expresión cúbica obtenida por la adopción de: $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = C_1 = C_2$

$$Y + A_3 \cdot Z + A_4 = \frac{a_1 \cdot \bar{X} + a_2 \cdot \bar{Y} + a_3 \cdot \bar{Z} + a_4}{d_1 \cdot \bar{X} + d_2 \cdot \bar{Y} + d_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

$$Z + B_3 \cdot X + B_4 = \frac{b_1 \cdot \bar{X} + b_2 \cdot \bar{Y} + b_3 \cdot \bar{Z} + b_4}{c_1 \cdot \bar{X} + c_2 \cdot \bar{Y} + c_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

$$X + C_3 \cdot Y + C_4 = \frac{c_1 \cdot \bar{X} + c_2 \cdot \bar{Y} + c_3 \cdot \bar{Z} + c_4}{f_1 \cdot \bar{X} + f_2 \cdot \bar{Y} + f_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

Para siete puntos de transformación la expresión anterior queda de la siguiente manera:

$$X = \frac{c_1 \cdot \bar{X} + c_2 \cdot \bar{Y} + c_3 \cdot \bar{Z} + c_4}{f_1 \cdot \bar{X} + f_2 \cdot \bar{Y} + f_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

$$Y = \frac{a_1 \cdot \bar{X} + a_2 \cdot \bar{Y} + a_3 \cdot \bar{Z} + a_4}{d_1 \cdot \bar{X} + d_2 \cdot \bar{Y} + d_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

$$Z = \frac{b_1 \cdot \bar{X} + b_2 \cdot \bar{Y} + b_3 \cdot \bar{Z} + b_4}{c_1 \cdot \bar{X} + c_2 \cdot \bar{Y} + c_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

Estos siete puntos de transformación, nuevamente degenerado, muestran la transformación de cinco puntos de la siguiente manera:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$X = \frac{a'_1 \cdot \bar{X} + a'_2 \cdot \bar{Y} + a'_3 \cdot \bar{Z} + a'_4}{d'_1 \cdot \bar{X} + d'_2 \cdot \bar{Y} + d'_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

$$Y = \frac{b'_1 \cdot \bar{X} + b'_2 \cdot \bar{Y} + b'_3 \cdot \bar{Z} + b'_4}{d'_1 \cdot \bar{X} + d'_2 \cdot \bar{Y} + d'_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

$$Z = \frac{c'_1 \cdot \bar{X} + c'_2 \cdot \bar{Y} + c'_3 \cdot \bar{Z} + c'_4}{d'_1 \cdot \bar{X} + d'_2 \cdot \bar{Y} + d'_3 \cdot \bar{Z} + 1}$$

Donde:

$$\begin{vmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 & a'_4 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 & b'_4 \\ c'_1 & c'_2 & c'_3 & c'_4 \\ d'_1 & d'_2 & d'_3 & d'_4 \end{vmatrix} \neq 0$$

Los denominadores son los mismos en cada una de las expresiones de X , Y , Z . Esto lleva a la transformación proyectiva a ser utilizada frecuentemente por los fotogrametristas.

2.2.3.2. La transformación proyectiva en fotogrametría.

La transformación lineal más generalizada es la transformación proyectiva, también denominada colineación, la cual expresada de forma tridimensional:

$$x = \frac{a_{11}X + a_{12}Y + a_{13}Z + a_{14}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}}$$

$$y = \frac{a_{21}X + a_{22}Y + a_{23}Z + a_{24}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}}$$

$$z = \frac{a_{31}X + a_{32}Y + a_{33}Z + a_{34}}{a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44}}$$

La transformación proyectiva consiste en tres funciones fraccionales lineales, cuyo denominador es el mismo, y transforma un punto de coordenadas (X, Y, Z) en un espacio tridimensional en otro punto (x, y, z) . Una importante propiedad de la transformación proyectiva es que una curva de una determinada condición es transformada en una curva de esa condición. Por lo tanto, los puntos que pertenecen a una línea son los puntos en otra línea, y un plano expresado por un juego de se expresa en otro plano con otro juego de variables. Por ejemplo, se tiene la ecuación de un plano:

$$AX + BY + CZ + D = 0$$

Y se sustituye en las ecuaciones de la transformación proyectiva, reagrupando posteriormente comprobándose que es la ecuación de un plano.

$$(Aa_{11} + Ba_{21} + Ca_{31} + Da_{41})X + (Aa_{12} + Ba_{22} + Ca_{32} + Da_{42})Y + (Aa_{13} + Ba_{23} + Ca_{33} + Da_{43})Z + (Aa_{14} + Ba_{24} + Ca_{34} + Da_{44}) = 0$$

Otra importante propiedad de la transformación proyectiva es que no hay distinción entre los puntos finitos e infinitos del espacio. Por ejemplo, cuando un punto (X, Y, Z) satisface la condición siguiente:

$$a_{41}X + a_{42}Y + a_{43}Z + a_{44} = 0$$

Puede parecer que el punto que el plano que corresponde a ese punto (x, y, z) se encuentra en el infinito.

La transformación afín es una clase de transformación proyectiva, la cual cumple la condición:

$$a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0 \\ a_{44} \neq 0$$

De forma que la transformación proyectiva se transforma:

$$X = a_{11}X' + a_{12}Y' + a_{13}Z' + a_{14} \\ Y = a_{21}X' + a_{22}Y' + a_{23}Z' + a_{24} \\ Z = a_{31}X' + a_{32}Y' + a_{33}Z' + a_{34}$$

Todavía existe una correspondencia entre puntos, líneas y planos en la transformación afín, pero difiere de la transformación proyectiva general en que los puntos finitos del espacio son transformados en puntos finitos. Después de la transformación afín, el paralelismo entre líneas es conservado, mientras que la perpendicularidad no. Cuando la condición del siguiente determinante es satisfecha en una transformación afín, entonces las figuras deben conservar su área, pero no su forma.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3. Proyección central en el plano.

La transformación proyectiva central expresa la transformación de puntos en el espacio tridimensional para pasarlo al espacio imagen. Ahora se asume que los puntos del espacio objeto (X, Y, Z) deberían estar localizados en un plano, entonces se realiza la transformación de un plano sobre otro plano, lo cual representa las relaciones teóricas de la rectificación. Se parte de:

$$Z = AX + BY + C$$

Sustituyendo en las ecuaciones de la transformación proyectiva:

$$X' = \frac{(a_{11} + a_{13}A)X + (a_{12} + a_{13}B)Y + (a_{14} + a_{13}C)}{(a_{31} + a_{33}A)X + (a_{32} + a_{33}B)Y + (a_{34} + a_{33}C)}$$

$$Y' = \frac{(a_{21} + a_{23}A)X + (a_{22} + a_{23}B)Y + (a_{24} + a_{23}C)}{(a_{31} + a_{33}A)X + (a_{32} + a_{33}B)Y + (a_{34} + a_{33}C)}$$

Y puede simplificarse por:

$$X' = \frac{h_{11}X + h_{12}Y + h_{13}}{h_{31}X + h_{32}Y + h_{33}}$$

$$Y' = \frac{h_{21}X + h_{22}Y + h_{23}}{h_{31}X + h_{32}Y + h_{33}}$$

De otra manera de expresar la expresión anterior es considerar el plano XY donde $Z = 0$, y por tanto las ecuaciones son: [5.9.]

$$X' = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{\xi} + \bar{a}_2 \cdot \bar{\eta} + \bar{a}_3}{\bar{c}_1 \cdot \bar{\xi} + \bar{c}_2 \cdot \bar{\eta} + \bar{c}_3}$$

Los nuevos parámetros introducidos, $\bar{a}_i, \bar{h}_i, \bar{c}_i$ se refieren a los parámetros de las ecuaciones siguientes:

$$\bar{a}_1 = X'_o \cdot r_{31} - Z'_o \cdot r_{11}$$

$$\bar{a}_2 = X'_o \cdot r_{32} - Z'_o \cdot r_{12}$$

.....

Después de dividir las ecuaciones [5.9.] por \bar{c}_3 se tiene la siguiente relación de coordenadas imagen ($\bar{\xi}, \bar{\eta}$) y de coordenadas objeto (X, Y): [5.10.]

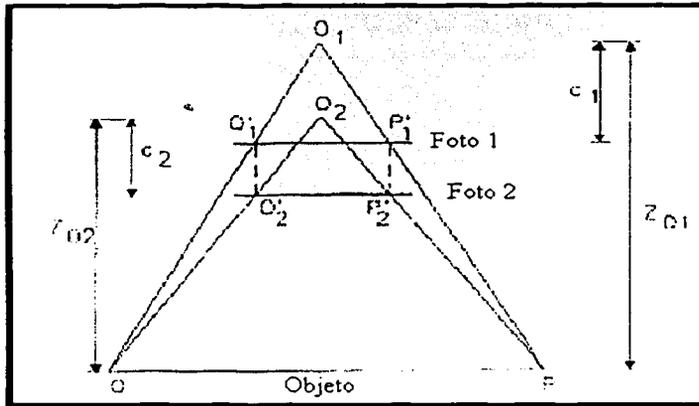


$$X = \frac{a_1 \cdot \xi + a_2 \cdot \eta + a_3}{c_1 \cdot \xi + c_2 \cdot \eta + 1}$$

$$Y = \frac{b_1 \cdot \xi + b_2 \cdot \eta + b_3}{c_1 \cdot \xi + c_2 \cdot \eta + 1}$$

Se puede observar en esas ecuaciones que:

- Un fotograma es suficiente para la reconstrucción del plano objeto.
- Ocho parámetros independientes describen la proyección central de un objeto plano.



Dos fotografías idénticas con diferentes Z_o y c , pero con la misma relación Z_o/c .

La reducción del número de parámetros independientes de nueve a ocho para un objeto plano puede parecer sorprendente. La razón es que en la proyección central de un objeto plano existen relaciones entre los nueve parámetros originales. En el caso especial de que la fotografía se encuentre paralela al objeto plano, la relación entre la distancia principal, c y la coordenada Z_o en el centro de proyección es, en lugar de las dos cantidades independientes es simplemente necesario conocer la relación entre Z_o/c , como se muestra en la figura anterior.

Se puede determinar los ocho parámetros en el caso general y se puede extraer detalles de la fotografía si existen cuatro puntos de control, de manera se sean conocidas sus coordenadas en la imagen y en el objeto. Primero hay que computar los ocho coeficientes de las ecuaciones [5.10.], de manera que se puede calcular las coordenadas objeto (X_i, Y_i) de algún punto medido de coordenadas imagen (ξ_i, η_i).

Existen casos especiales como que el plano imagen sea paralelo al plano objeto, por tanto los giros son: $\omega = \phi = 0$ y la matriz de rotación se reduce a:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \chi & -\operatorname{sen} \chi & 0 \\ \operatorname{sen} \chi & \cos \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Insertando R en la ecuación [5.8.]:

$$X = X_o + \frac{Z_o}{c} \cdot (\cos \chi \cdot (\xi - \xi_o) - \operatorname{sen} \chi (\eta - \eta_o))$$

$$Y = Y_o + \frac{Z_o}{c} \cdot (\operatorname{sen} \chi \cdot (\xi - \xi_o) + \cos \chi (\eta - \eta_o))$$

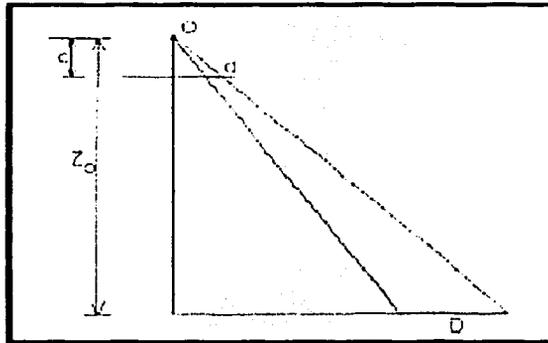
Rescribiendo estas ecuaciones de manera matricial e introduciendo la cantidad $m_b = Z_o/c$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_o \\ Y_o \end{pmatrix} + m_b \cdot \begin{pmatrix} \cos \chi & -\operatorname{sen} \chi \\ \operatorname{sen} \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi - \xi_o \\ \eta - \eta_o \end{pmatrix}$$

En el caso de la siguiente figura, la fotografía es igual que un mapa, por ejemplo muestra el plano objeto reducido en escala. La escala imagen es, m_b :

$$\chi = X_o = Y_o = \xi_o = \eta_o = 0$$

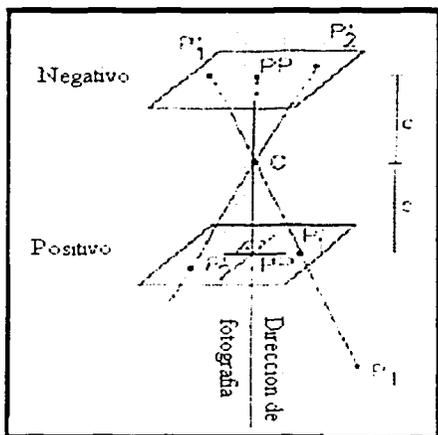
$$\frac{d}{D} = \frac{c}{Z_o} = \frac{1}{m_b} = \text{Constante.}$$



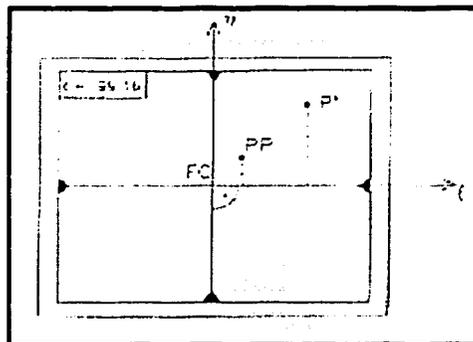
Objeto igual a la fotografía, reducido en escala.

Esto se produce por ejemplo, en los ejes de la fotografía que son perpendiculares a una fachada.

4. Proyección central en el espacio.



Posiciones del positivo y del negativo.



Fotografía fotogramétrica.

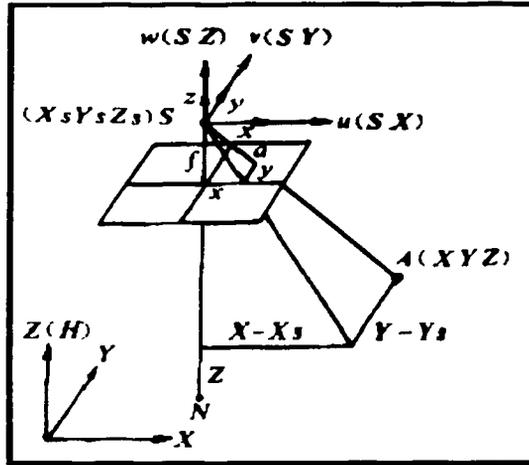
O: Proyección central (posición de la cámara).

PP: Punto principal de coordenadas (ξ_0, η_0) .

c: Distancia principal (constante de la cámara).

FC: Centro fiducial (intersección de unión de las líneas de las marcas fiduciales).

Para reconstruir la posición y forma de los objetos de las fotografías se debe conocer las leyes geométricas por las cuales las imágenes fotográficas son formadas. Las cámaras usadas en fotogrametría producen fotografías, las cuales pueden ser consideradas con suficiente precisión como proyección central de los objetos fotografiados del espacio.



Caso ideal de la fotogrametría.

El sistema de ecuaciones imagen de la proyección central se considera el caso más simple, donde los ejes del sistema de coordenadas imagen son paralelos al sistema de ejes de coordenadas objeto, el cual corresponde al caso de fotografía exactamente vertical. Asumiendo que el eje X es paralelo al eje x en la dirección del vuelo, se consigue formar el siguiente sistema de ecuaciones del punto objeto A :

$$\frac{(X - X_s)}{x} = \frac{(Y - Y_s)}{y} = \frac{(Z - Z_s)}{-f}$$

O también:

$$X - X_s = \lambda \cdot x$$

$$Y - Y_s = \lambda \cdot y$$

$$Z - Z_s = -\lambda \cdot f$$

Siendo λ la escala de la fotografía.

$$\lambda = -\frac{Z - Z_s}{f}$$

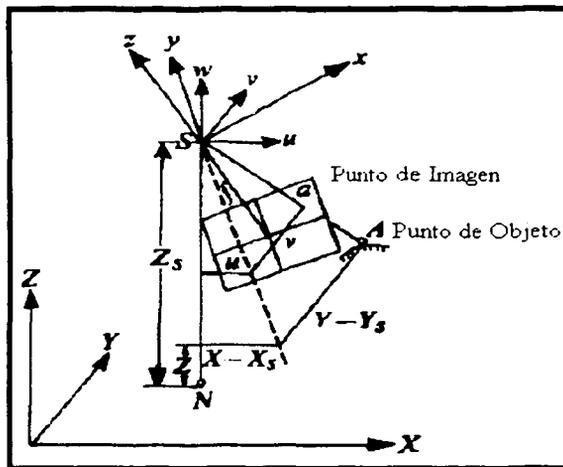
Cuando las coordenadas imagen son conocidas y se quieren determinar las coordenadas objeto se comprueba que una sola fotografía es incapaz de calcular las coordenadas pero se puede indicar su dirección:

$$\frac{X - X_s}{Z - Z_s} = -\frac{x}{f}$$

$$\frac{Y - Y_s}{Z - Z_s} = -\frac{y}{f}$$

En general, los ejes del sistema de coordenadas imagen no son paralelos al sistema objeto. Por tanto, no se puede aplicar el sistema de ecuaciones anteriores y debe sustituirse por las coordenadas (u, v, w) del sistema de coordenadas imagen cuyos ejes son paralelos a los del sistema de coordenadas objeto. Cuando la orientación del sistema de coordenadas imagen es conocido, los valores (u, v, w) pueden determinarse.

Para determinar las relaciones de transformación entre $(x, y, z = -f)$ y (u, v, w) se realiza con el coseno de los ángulos entre los ejes (cosenos directores):



Caso real de la fotogrametría.

	x	y	z (-f)
u	a ₁	a ₂	a ₃
v	b ₁	b ₂	b ₃
w	c ₁	c ₂	c ₃

El sistema de ecuaciones queda de la forma:

$$u = a_1 X + a_2 Y - a_3 f$$

$$v = b_1 X + b_2 Y - b_3 f$$

$$w = c_1 X + c_2 Y - c_3 f$$

De forma matricial:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = R \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -f \end{pmatrix}$$

Siendo R , la matriz de rotación:

$$R = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Ahora el sistema de ecuaciones deducido para el caso ideal de la fotogrametría es empleado:

$$\begin{pmatrix} X - X_s \\ Y - Y_s \\ Z - Z_s \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \lambda \cdot R \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ -f \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 X + a_2 Y - a_3 f \\ b_1 X + b_2 Y - b_3 f \\ c_1 X + c_2 Y - c_3 f \end{pmatrix}$$

Esta es la representación matemática en la cual se indica que un punto del espacio $A(X, Y, Z)$ y su correspondiente punto imagen $a(x, y)$ están en la misma recta pasando por (X_s, Y_s, Z_s) y está referenciado por la condición de colinealidad.

Eliminando λ , de las ecuaciones anteriores se tiene el mismo sistema que:

$$\frac{X - X_s}{Z - Z_s} = -\frac{X}{f} = \frac{a_1 X + a_2 Y - a_3 f}{c_1 X + c_2 Y - c_3 f}$$

$$\frac{Y - Y_s}{Z - Z_s} = -\frac{Y}{f} = \frac{b_1 X + b_2 Y - b_3 f}{c_1 X + c_2 Y - c_3 f}$$

Sustituyendo esta expresión en las anteriores:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

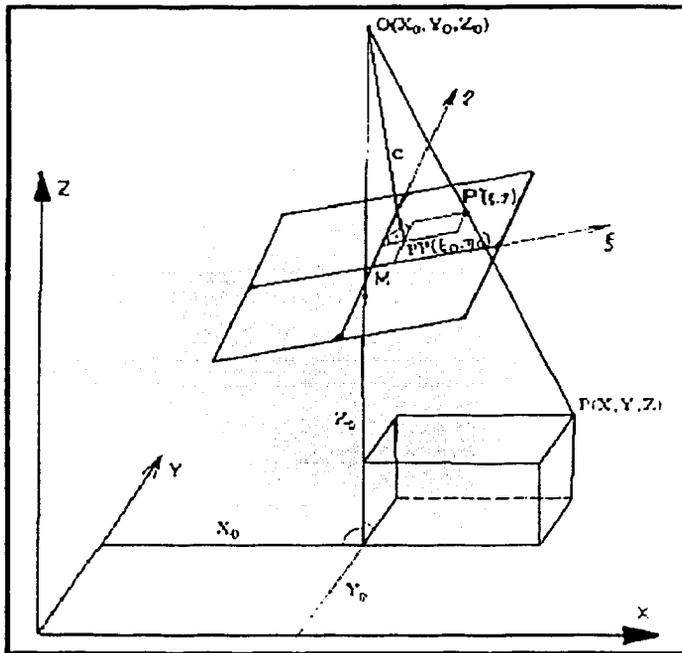
$$R^{-1} \cdot \begin{pmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{pmatrix} = \lambda \cdot R^{-1} \cdot R \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -f \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -f \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ -f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S) \\ a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S) \\ a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S) \end{pmatrix}$$

$$x = -f \cdot \frac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}$$

$$y = -f \cdot \frac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)}$$

Estas ecuaciones son las correspondientes a la proyección central del cálculo de las coordenadas imagen, y están consideradas como las más importantes de la fotogrametría.



Relación entre las coordenadas imagen y las coordenadas objeto.

La relación entre las coordenadas imagen en dos dimensiones (ξ, η) de un punto P' y las coordenadas tridimensionales en el sistema objeto (X, Y, Z) de un punto objeto P y definido matemáticamente con las siguientes expresiones: [5.7.]

$$\xi = \xi_o - c \cdot \frac{r_{11} \cdot (X - X_o) + r_{21} \cdot (Y - Y_o) + r_{31} \cdot (Z - Z_o)}{r_{13} \cdot (X - X_o) + r_{23} \cdot (Y - Y_o) + r_{33} \cdot (Z - Z_o)}$$

$$\eta = \eta_o - c \cdot \frac{r_{12} \cdot (X - X_o) + r_{22} \cdot (Y - Y_o) + r_{32} \cdot (Z - Z_o)}{r_{13} \cdot (X - X_o) + r_{23} \cdot (Y - Y_o) + r_{33} \cdot (Z - Z_o)}$$

Los parámetros r_{ik} son los elementos de la matriz de rotación en el espacio, R la cual en esta caso describe la disposición espacial de la fotografía en el sistema de coordenadas objeto (X, Y, Z) . Los elementos r_{ik} pueden ser expresados como función de tres rotaciones (ω, ϕ, χ) como se mostró en [5.6.].

Las ecuaciones anteriores, [5.7.] se pueden poner como coordenadas objeto (X, Y) : [5.8.]

$$X = X_o + (Z - Z_o) \cdot \frac{r_{11} \cdot (\xi - \xi_o) + r_{12} \cdot (\eta - \eta_o) - r_{13} \cdot c}{r_{31} \cdot (\xi - \xi_o) + r_{32} \cdot (\eta - \eta_o) - r_{33} \cdot c}$$

$$Y = Y_o + (Z - Z_o) \cdot \frac{r_{21} \cdot (\xi - \xi_o) + r_{22} \cdot (\eta - \eta_o) - r_{23} \cdot c}{r_{31} \cdot (\xi - \xi_o) + r_{32} \cdot (\eta - \eta_o) - r_{33} \cdot c}$$

Las ecuaciones [5.7.] muestran que para cada punto objeto hay un correspondiente punto imagen. Las ecuaciones [5.8.] muestran que para cada punto imagen hay infinitamente más posibilidades de puntos objeto. De esta manera se deduce que es imposible reconstruir un objeto espacial de una sola fotografía. Se necesita una segunda fotografía del mismo objeto o información adicional de la coordenada Z (por ejemplo, todos los puntos objeto están en el plano horizontal de altura conocida). Las definiciones de las transformaciones de las ecuaciones [5.7.] [5.8.] requieren conocer los siguientes parámetros independientes (elementos de orientación):

- (ξ_o, η_o) : Coordenadas imagen del punto principal, . PP
- c : distancia principal.

Estos tres parámetros son los elementos de la orientación interna. Definen la posición de la proyección central relativa en el plano imagen. Los seis parámetros de la orientación externa son:

- (X_o, Y_o, Z_o) : Coordenadas objeto de la posición de la cámara.
- (ω, ϕ, χ) : Rotaciones de la fotografía.

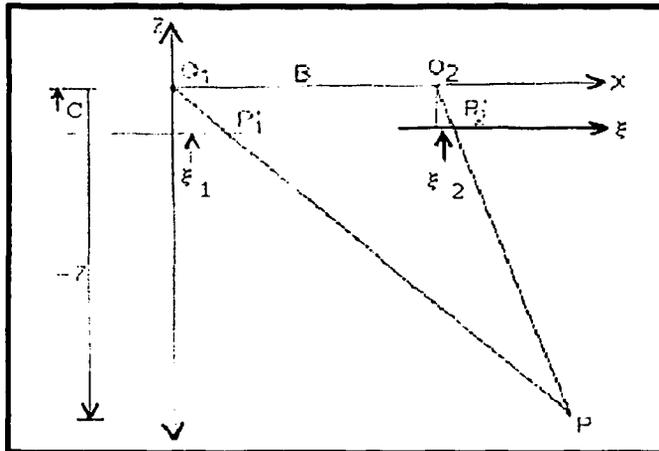
Estos seis parámetros definen la posición y aptitud de la cámara en el sistema de coordenadas objeto.



La definición de la proyección central de una fotografía requiere un total de nueve parámetros, se pueden determinar de diferentes maneras. Las tres constantes de la orientación interna son específicas de particularidad de la cámara y son determinadas por el fabricante de la cámara en las mediciones de laboratorio. Asegura que el punto principal y el centro fiducial son lo más próximo posible de uno a otro ($\xi_o = \eta_o = 0$). Los seis elementos de la orientación externa pueden ser determinados por métodos topográficos si las condiciones lo permiten (en particular, en fotogrametría terrestre). Ellos no pueden ser determinados con suficiente precisión en el modo de fotogrametría aérea y una alternativa, es el método indirecto de usar puntos de control las coordenadas imagen y objeto conocidas. Con una conocida orientación interna se requieren tres puntos de control, de cada punto de control produce dos ecuaciones [5.7.], para la determinación de los seis parámetros de la orientación externa.

5. El caso normal de la restitución con dos fotografías.

La fotogrametría se emplea fundamentalmente para la reconstrucción, o restitución, de objetos espaciales de las fotografías. Dos fotografías de un mismo objeto son necesarias para este propósito. La restitución es particularmente simple si ambos ejes de las cámaras son normales a la base y paralelos entre ellos. Esta condición es extremadamente difícil de alcanzar con fotografías aéreas.



Caso normal.

$$X_{o_1} = Y_{o_1} = Z_{o_1} = X_{o_2} = Y_{o_2} = Z_{o_2} = 0 \quad X_{o_2} = B$$

$$\xi_{o_1} = \eta_{o_1} = \xi_{o_2} = \eta_{o_2} = 0$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \phi_1 = \phi_2 = \chi_1 = \chi_2 = 0$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En el caso normal, la matriz de rotación R [5.6.] para cada fotografía se reduce a la matriz unidad:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones [5.8.], las cuales mostraban la relación entre las coordenadas imagen y objeto:

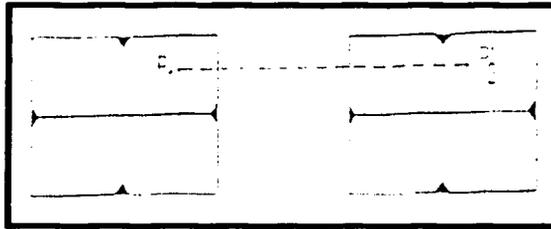
$$X = X_o + (Z - Z_o) \cdot \frac{r'_{11} \cdot (\xi - \xi_o) + r'_{12} \cdot (\eta - \eta_o) - r'_{13} \cdot c}{r'_{31} \cdot (\xi - \xi_o) + r'_{32} \cdot (\eta - \eta_o) - r'_{33} \cdot c}$$

$$Y = Y_o + (Z - Z_o) \cdot \frac{r'_{21} \cdot (\xi - \xi_o) + r'_{22} \cdot (\eta - \eta_o) - r'_{23} \cdot c}{r'_{31} \cdot (\xi - \xi_o) + r'_{32} \cdot (\eta - \eta_o) - r'_{33} \cdot c}$$

Se reducen en el caso normal a las siguientes expresiones para la fotografía 1:

$$X = Z \cdot \frac{\xi_1}{-c}$$

$$Y = Z \cdot \frac{\eta_1}{-c}$$



Dos fotografías sin paralaje en η .

Para la fotografía 2:

$$X = B + Z \cdot \frac{\xi_2}{-c}$$

$$Y = Z \cdot \frac{\eta_2}{-c}$$

TEDES C. S. A.
FALLA DE ORIGEN

Las ecuaciones anteriores de Y para las dos fotografías implican que:

$\eta_1 = \eta_2 \rightarrow \eta_1 - \eta_2 = p_\eta = 0$ de manera que no hay paralaje en η .

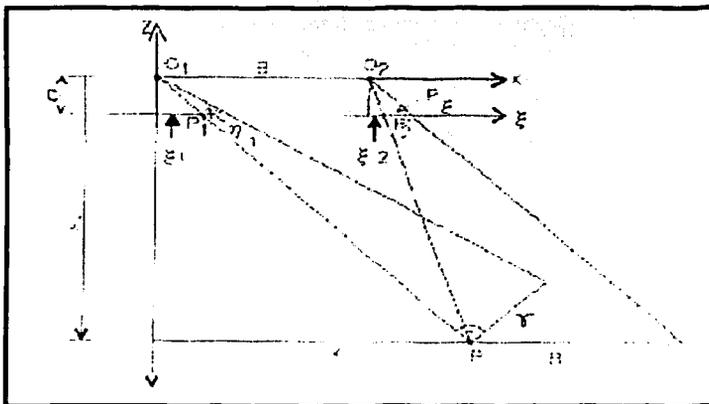
Las ecuaciones finales para la computación de las coordenadas objeto (X, Y, Z) de las coordenadas imagen (ξ, η) se derivan de las ecuaciones anteriores.

$$-Z = \frac{c \cdot B}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{c \cdot B}{p_\xi}$$

$$Y = -Z \cdot \frac{\eta_1}{c} = -Z \cdot \frac{\eta_2}{c} \quad \text{Existe comprobación}$$

$$X = -Z \cdot \frac{\xi_1}{c}$$

La diferencia entre $\xi_1 - \xi_2 = p_\xi$ (paralaje en ξ) puede ser medida directamente en un estereocomparador. Las ecuaciones anteriores también se pueden obtener de forma geométrica:



Determinación geométrica.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO VI. AEROTRIANGULACIÓN.

1. Introducción.

La aerotriangulación analítica es usada para determinar la posición de los puntos de densificación del terreno por métodos de cálculo basados en la medida de coordenadas imagen de fotos aéreas y unos pocos puntos de control, de esta manera se ahorra bastante en el coste económico que supone el apoyo de campo.

La aerotriangulación analítica de una sola pasada fue realizada primeramente por medio de métodos de un restituidor óptico-mecánico (restituidor analógico). Desde la introducción de los ordenadores, el método adoptado para el cálculo de la aerotriangulación ha cambiado por un restituidor analítico, el cual está caracterizado por su alta precisión, alta velocidad, y reducción en el número necesario de puntos de control dentro de unos requerimientos de precisión seguros. Actualmente también puede hacerse la aerotriangulación de grandes bloques (fotografías, modelos) en restituidores digitales.

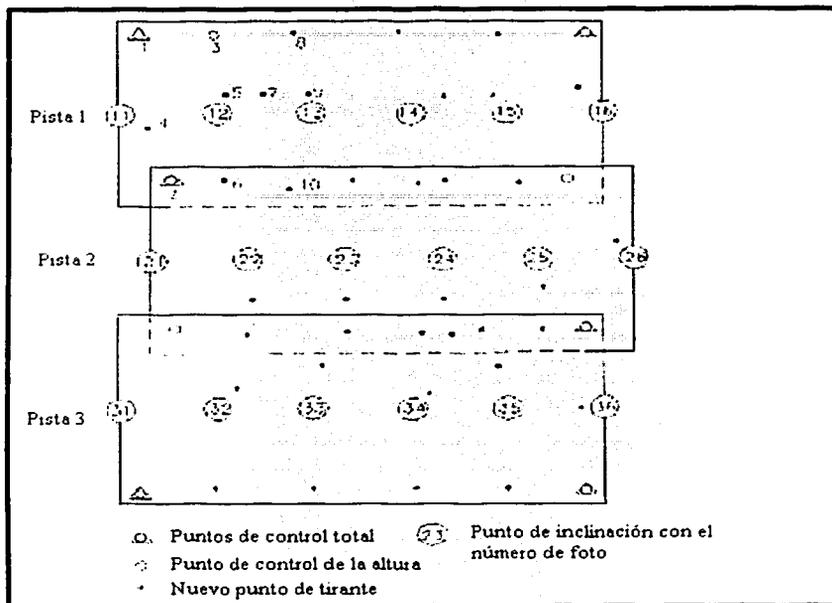
Los métodos más rigurosos para el cálculo son el de modelos independientes y el de ajuste de haces, los cuales son usados en el ajuste de un bloque y pueden también ser aplicados al cálculo de una sola pasada. Sin embargo, con respecto a una sola pasada, estos métodos que son más rigurosos no son recomendados para este cálculo. En aerotriangulación, el método analítico de densificación no solamente produce las coordenadas terreno de los puntos de densificación, si no que también proporciona los datos necesarios de orientación, tales como los elementos de la orientación absoluta de la toma fotográfica.

Los métodos de triangulación aérea necesitan suministrar al menos tres puntos de control de campo en cada modelo estereoscópico. Esto es posible para realizar los puentes sin demasiados puntos de campo.

Los resultados de la triangulación aérea con los elementos de orientación de todos los fotogramas o modelos estereoscópicos y las coordenadas X , Y , Z de puntos en el sistema de coordenadas terreno. Los puntos fotogramétricos medidos en este caso pueden ser:

- Puntos señalizados antes del vuelo.
- Señalización de puntos naturales en las fotografías, normalmente acompañadas de un croquis de campo.
- Selección de puntos artificiales marcados en algunos fotogramas.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Juego de fotografías para el ajuste del bloque.

Los puntos fotogramétricos medidos son usados en las siguientes aplicaciones:

- Determinación de coordenadas de puntos de control en modelos estereoscópicos individuales para la obtención de cartografía u ortofotos.
- Determinación de las coordenadas de gran cantidad de puntos, como por ejemplo el Catastro o la realización de test cartográfico.
- Determinación de las coordenadas de los puntos de control en aplicaciones de ingeniería.

El ejemplo de la figura anterior muestra 18 fotografías en tres pasadas. El recubrimiento longitudinal de las fotografías es del 60 % y el recubrimiento transversal es del 25 %. Para la orientación del juego de fotografías hay 6 puntos de control y 3 puntos altimétricos. Se requiere la orientación de elementos y coordenadas terreno de nuevos puntos. Esos nuevos puntos enlazan modelos de una pasada y pasadas vecinas. Por ejemplo, el nuevo punto 7 está solamente en las fotografías 12 y 13, el nuevo punto 5 está en las fotografías 11, 12 y 13, el punto 6 en las fotografías: 11, 12, 13, 21, 22 y 23.

Se tienen dos técnicas sobre las cuales se pueden tratar los bloques de fotografías. La primera es la orientación numérica de los dos haces de rayos del par estereoscópico de las fotografías involucradas, en esta técnica los 12 elementos de la orientación externa de las dos fotografías y las coordenadas de los nuevos puntos en el par estereoscópico son calculados de las coordenadas conocidas de los puntos de control. El método puede extenderse a un gran número de fotogramas, por ejemplo los 18 fotogramas del ejemplo anterior. Este método es conocido como ajuste del bloque por haces de rayos.

La segunda técnica es la orientación absoluta numérica. Está basada en el supuesto que el modelo estereoscópico ha sido formado por la orientación relativa numérica de los recubrimientos de las dos fotografías. Este estereomodelo es transformado en el sistema de coordenadas terreno con la ayuda de puntos de control. La extensión de la técnica de un simple modelo frente al bloque de modelos supone que todos los modelos del bloque son orientados absolutamente de forma simultánea. El método es conocido como ajuste del bloque por modelos independientes.

Otras clasificaciones de los métodos de aerotriangulación son:

- Según el método de ajuste:
 - Método secuencial: El proceso de triangulación aérea emplea las etapas: A partir de las coordenadas imagen se calculan los modelos, a continuación se realiza la banda y por último las bandas son unidas para formar el bloque.
 - Método simultáneo: Hay un sistema único de ecuaciones que se resuelve de una sola vez. Como resultado del ajuste único por mínimos cuadrados se obtienen los resultados.
- Según el tamaño de agrupación de los modelos:
 - Banda: Ajuste de toda la banda.
 - Bloque: Ajuste de todo el bloque.

2. Proceso de la aerotriangulación.

Hay que distinguir tres etapas en la realización de la aerotriangulación:

1. Planificación: En este apartado hay que analizar las alternativas económicas, presupuesto y estudio del personal, también dependiendo del objetivo del trabajo debe fijarse la escala de la fotografía y la precisión.
 - a. Apoyo de campo: La precisión final del trabajo tiene una relación directa con el número de puntos de apoyo tomados en campo. Por ello, es fundamental decidir el número de puntos y su distribución. Se debe establecer su precisión, la cual estará ligada con el método de apoyo empleado: Apoyo clásico con estación total o con técnicas G.P.S.
 - b. Toma fotográfica: Elección adecuada de la cámara, película y escala de la fotografía. Decisión de los parámetros de la geometría de vuelo: Recubrimientos, altura de vuelo...
2. Adquisición de los datos:
 - a. Preparación de las fotografías realizando las siguientes funciones: Identificar los puntos de apoyo en las fotografías, seleccionar los puntos de paso o enlace sobre los modelos y numerar los puntos. Hay que transferir los puntos de paso o enlace de una banda a sus bandas contiguas (superior o inferior) y a los modelos contiguos, esto puede hacerse con un transferidor de puntos.
 - b. Medición de los puntos: Con el empleo de un monocomparador o un estereocomparador pueden obtenerse las coordenadas fotografía. Si el instrumento es un restituidor analítico pueden también obtenerse las coordenadas modelo.
3. Tratamiento de los datos:
 - a. Cálculo: Precálculo que se hace antes del ajuste final:
 - Obtención de las medias de las observaciones repetidas.
 - Pasar de coordenadas comparador al sistema de marcas fiduciales.

- Corrección de errores sistemáticos de las coordenadas de las fotografías (distorsiones, esfericidad y refracción).
 - Cálculo analítico de los modelos independientes.
 - Comprobación de los puntos de paso mediante la formación de la banda. Se emplea la transformación de semejanza en el espacio.
 - Validez de los puntos de enlace entre pasadas, transformando todas las bandas a una sola o bloque.
 - Comprobación de los puntos de apoyo, mediante preajuste de la banda o del bloque.
 - Determinación de los valores iniciales de los parámetros del ajuste final.
- b. Ajuste de la banda o el bloque: Se pueden indicar los siguientes pasos:
- Ordenar las fotografías o los modelos.
 - Minimización del ancho de banda, puesto que esto limita el tamaño de las ecuaciones a resolver.
 - Formación de la matriz de pesos.
 - Introducción de los parámetros adicionales: Distorsión radial, tangencial...
 - Resolución de las ecuaciones normales.
 - Detección de errores groseros: Manual o mediante programa informático. Hay dos maneras de eliminar los errores groseros después del ajuste: Data snooping y Robust estimator. Ambos analizan después del ajuste el punto que tiene el error, lo elimina y realiza de nuevo el ajuste.
 - Realización de iteraciones hasta completar el ajuste.
- c. Evaluación de los resultados:
- Se estudian los residuos, la varianza y la matriz de varianzacovarianza.
 - En el caso de disponer de puntos de comprobación, se comparan las coordenadas previamente conocidas de estos puntos con las obtenidas por aerotriangulación.

3. Ajuste del bloque por el método de modelos independientes.

El bloque de fotografías tiene un recubrimiento longitudinal del 60 % y transversal del 25 %. El ajuste de una pasada simple por modelos independientes es un caso especial del ajuste general del bloque.

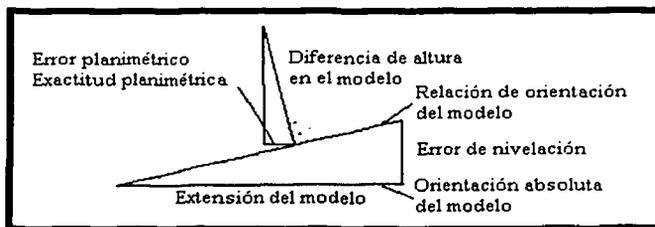
El ajuste del bloque por modelos independientes empieza con las coordenadas modelo obtenidas en las orientaciones relativas numéricas de la formación del modelo estereoscópico. En el curso del ajuste del bloque de modelos individuales será unido al de un modelo simple y simultáneamente transformado en el sistema de coordenadas terreno. El estereomodelo individual es la unidad básica de la aerotriangulación aérea por el método de modelos independientes.

Se trata el ajuste primeramente de forma planimétrica, más o menos como un caso especial del ajuste del bloque general, el cual es un problema espacial en tres dimensiones. Un ajuste planimétrico puro es un problema plano y por tanto concierne solo a las coordenadas planimétricas X, Y .

3.1. Ajuste planimétrico de un bloque.

Se necesita las coordenadas X, Y de nuevos puntos en el sistema de coordenadas terreno. Dando las coordenadas modelo x, y de la orientación relativa y nivelados los modelos individualmente. La nivelación necesita estar de forma aproximada, pero debe estar lo mejor

posible para asegurar que la influencia de la inclinación de las diferentes alturas en las coordenadas x, y sea menor que la precisión fotogramétrica de las coordenadas planimétricas.



Efecto del error de nivelación en las coordenadas planimétricas.

Los modelos pueden ser nivelados, por medio de puntos de control tomados sobre el mapa topográfico. Se escogen como puntos de control en los puntos del modelo estereoscópico donde se tengan las tres coordenadas de forma que pueden ser medidas de manera aproximada en un mapa topográfico. Las coordenadas imagen de esos puntos son medidos y usados, después de la orientación relativa, para computar las correspondientes coordenadas modelo. La orientación absoluta numérica puede ser realizada para nivelar el modelo.

Tomando como referencia el bloque de la primera figura: Los elementos de la orientación externa de los fotogramas 11 y 12 pueden realizarse de los puntos completos de control 1 y 2 junto con el punto de control altimétrico 3. Para ello primero se realiza la orientación relativa numérica y después la orientación absoluta numérica. Una orientación relativa del fotograma 13, mientras el fotograma 12 permanece invariable y se procede a nivelar el estereomodelo de los fotogramas 12 y 13, sin recurrir a los puntos de control. La continuación del resto de los modelos se realiza de la misma manera.

Las coordenadas modelo están por separado, o sea independientes, un sistema de coordenadas local para cada modelo. Cada uno de los sistemas de coordenadas es trasladado y rotado de forma relativa para ponerlo en el sistema de coordenadas terreno y tienen una escala arbitraria.

Un dato inicial para la resolución del problema del bloque es la unión de los modelos individualmente en un bloque en el sistema de coordenadas terreno. Hay por una parte puntos puente en los cuales existen en más de un modelo (puntos 5, 6, 7, 8, y 9), y por otra parte hay las coordenadas del modelo de los puntos de control (puntos 1, 2, 3 y 4).

El ajuste sigue los siguientes pasos:

- Desplazamientos: Dos traslaciones X_u, Y_u .
- Rotación: Angulo X .
- Factor de escala: m .

De forma que:

- Los puntos de enlace del ajuste deben estar lo mejor posible.
- Los desplazamientos residuales de los puntos de control serán lo más pequeños posible.

Las relaciones matemáticas entre las coordenadas modelo y terreno pueden formularse con una transformación plana de semejanza.

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} \cos \chi & -\text{sen} \chi \\ \text{sen} \chi & \cos \chi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Para linealizar la expresión se realiza la sustitución:

$$a = m \cdot \cos \chi$$

$$b = m \cdot \text{sen} \chi$$

El sistema lineal para un bloque de fotografías es definido por una secuencia de transformaciones planas de semejanza:

$$X' = X_u + a \cdot x - b \cdot y$$

$$Y' = Y_u + a \cdot y + b \cdot x$$

El sistema de ecuaciones para un punto de control es:

$$v_x = X_u + a \cdot x - b \cdot y - X'$$

$$v_y = Y_u + a \cdot y + b \cdot x - Y'$$

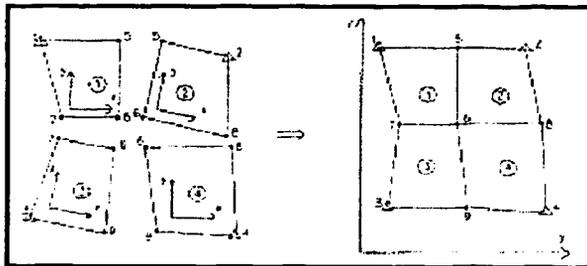
El sistema de ecuaciones para un punto de paso es:

$$v_x = X_u + a \cdot x - b \cdot y - X' - 0$$

$$v_y = Y_u + a \cdot y + b \cdot x - Y' - 0$$

Los valores desconocidos son X_u, Y_u, a, b y X', Y' de los puntos de paso. Las ecuaciones de observación tienen una inusual forma: v_x, v_y y son interpretadas como las correcciones a las coordenadas conocida terreno X, Y y a las observaciones imaginarias "0".

El balance de valores desconocidos y observaciones para la figura siguiente es:



Ajuste de un bloque planimétrico por modelos independientes.

Datos de las coordenadas modelo del ejemplo anterior:

Modelo 1			Modelo 2			Modelo 3			Modelo 4		
Pt. No.	x	y									
1	148.29	373.28	2	316.93	528.43	3	148.29	139.40	4	353.28	125.00
5	374.11	561.87	5	154.24	561.30	6	362.10	842.91	6	148.31	578.42
6	342.77	147.41	6	133.40	143.24	7	159.29	586.85	8	384.34	549.19
7	138.27	151.39	8	335.30	140.28	8	345.67	128.76	9	141.97	149.87

Coordenadas terreno:

Puntos de control del suelo en mts.		
Pt. No.	X	Y
1	4443.81	8338.34
2	7658.37	7993.67
3	4472.07	1071.18
4	8348.54	1316.60

El ajuste del bloque planimétrico por modelos independientes es:

- Valores desconocidos: 4×4 : 16 elementos de transformación: X_u, Y_u, a, b .

5×2 : 10 coordenadas de los puntos de paso (X, Y) .
TOTAL: 26

- Observaciones: $4 \times 4 \times 2$: 32 coordenadas modelo (x, y) .
Hay $32 - 26$: 6 observaciones que son redundantes.

La resolución del sistema es:

	$x_1^0 \ y_1^0 \ z_1^0 \ x_2^0 \ y_2^0 \ z_2^0 \ x_3^0 \ y_3^0 \ z_3^0$	$a^0 \ b^0 \ c^0 \ d^0 \ e^0 \ f^0 \ g^0$	$x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4 \ x_5 \ y_5 \ x_6 \ y_6$	l
Model 1	$x_1^0 \ y_1^0 \ z_1^0$ $x_2^0 \ y_2^0 \ z_2^0$ $x_3^0 \ y_3^0 \ z_3^0$	$a^0 \ b^0 \ c^0 \ d^0 \ e^0 \ f^0 \ g^0$	$x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3$	$l_1 \ l_2 \ l_3$
Model 2	$x_1^0 \ y_1^0 \ z_1^0$ $x_2^0 \ y_2^0 \ z_2^0$ $x_3^0 \ y_3^0 \ z_3^0$	$a^0 \ b^0 \ c^0 \ d^0 \ e^0 \ f^0 \ g^0$	$x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4 \ x_5 \ y_5 \ x_6 \ y_6$	$l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4 \ l_5 \ l_6$
Model 3	$x_1^0 \ y_1^0 \ z_1^0$ $x_2^0 \ y_2^0 \ z_2^0$ $x_3^0 \ y_3^0 \ z_3^0$	$a^0 \ b^0 \ c^0 \ d^0 \ e^0 \ f^0 \ g^0$	$x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4 \ x_5 \ y_5 \ x_6 \ y_6$	$l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4 \ l_5 \ l_6$
Model 4	$x_1^0 \ y_1^0 \ z_1^0$ $x_2^0 \ y_2^0 \ z_2^0$ $x_3^0 \ y_3^0 \ z_3^0$	$a^0 \ b^0 \ c^0 \ d^0 \ e^0 \ f^0 \ g^0$	$x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4 \ x_5 \ y_5 \ x_6 \ y_6$	$l_1 \ l_2 \ l_3 \ l_4 \ l_5 \ l_6$

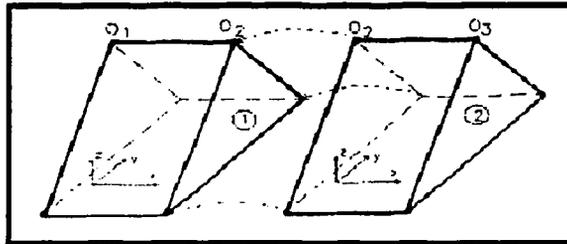
Ecuaciones de observación: Índice superior: Número del modelo, índice inferior: Número de punto.

Si referimos las coordenadas modelo de cada modelo al centroide, dando coordenadas (\bar{X}, \bar{Y}) y se asume que todas las observaciones tienen igual peso, el sistema de ecuaciones normales queda de la manera anterior.

3.2. Ajuste del bloque espacial.

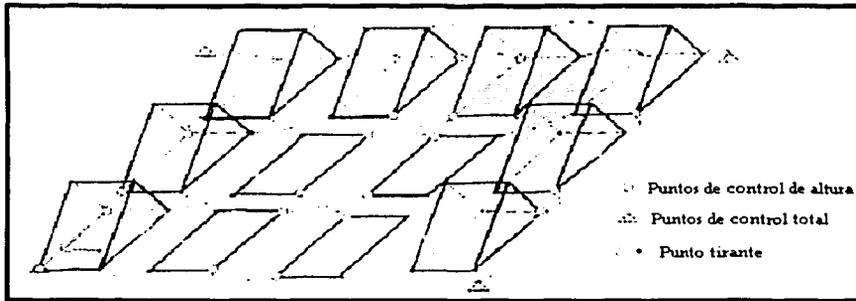
En el ajuste de un bloque espacial se calculan las coordenadas X, Y, Z de los puntos en el sistema de coordenadas terreno. Como datos iniciales se tienen las coordenadas modelo x, y, z de los puntos formados en la orientación relativa. Las coordenadas modelo de los puntos de paso y puntos de control son conocidas, además de las coordenadas de los centros de proyección obtenida de la orientación relativa numérica y la formación del modelo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Conexión de los modelos mediante los centros de proyección.

Los centros de proyección estabilizan las alturas a lo largo de las pasadas. Una estabilización similar perpendicular a las pasadas no es posible, sin embargo es posible como se muestra en la siguiente figura para cadenas de puntos de control perpendicular a las pasadas. Una buena estabilización perpendicular de alturas en el bloque puede hacerse para solapes entre pasadas del 60 %.



Ajuste del bloque espacial por modelos independientes.

El principio del ajuste de un bloque espacial consiste en los puntos de cada modelo son definidos independientemente, el sistema de coordenadas espacial el cual puede ser transformado en el sistema de coordenadas terreno por medio de la orientación absoluta de siete elementos. Para el cálculo simultaneo de la orientación absoluta de todos los modelos del bloque, se dispone por un lado de las coordenadas modelo de los puntos de paso (incluidos los centros de proyección) y por otro lado las coordenadas terreno de los puntos de control.

El ajuste puede ser definido de la siguiente manera. Los modelos son:

- Desplazamientos: Tres traslaciones X_u, Y_u, Z_u .
- Tres rotaciones: Angulos ω, ϕ, χ .
- Factor de escala: m .

De forma que se:

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

- Los puntos de enlace (incluidos los centros de proyección) del ajuste deben estar lo mejor posible.
- Los desplazamientos residuales de los puntos de control serán lo más pequeños posible.

Las relaciones matemáticas entre las coordenadas modelo y terreno se define mediante una transformación de semejanza tridimensional:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = m \cdot R \cdot \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_u \\ Y_u \\ Z_u \end{pmatrix}$$

El formalismo matemático del cálculo simultaneo de los elementos de la orientación absoluta de todos los elementos del bloque es llamado transformación de semejanza de la cadena espacial.

La extensión de la transformación espacial de cadena es en principio exactamente la misma que una transformación plana. En contraste a la transformación plana, una transformación espacial no es lineal. Las ecuaciones de observación para una transformación espacial de cadena depende del método de linealización adoptado.

3.3. Precisiones planimétrica y altimétrica para el ajuste de un bloque por modelo independientes.

3.3.1. Introducción.

La reducción del número de puntos de apoyo o control pierde precisión comparado con la orientación absoluta de cada modelo con cuatro puntos de apoyo. Es fundamental estimar la importancia de la reducción de la precisión.

La más importante conclusión a obtener en la inspección de los resultados es la precisión obtenida, la cual dependerá de múltiples factores, entre ellos los factores decisivos de la precisión son la escala de los fotogramas y la precisión del restituidor (calidad óptica, calidad de la película, claridad de los puntos a identificar, precisión del operador y errores instrumentales).

Se puede definir para cada restituidor un parámetro que englobe todos estos factores y que llamaremos σ_n . Este factor se define como el error medio de una observación de peso unidad. Este factor ha sido tabulado experimentalmente para restituidores de primer orden y el resultado es:

	Planimetría	Altimetría
Aerotriangulación por modelos independientes por métodos analógicos.	30 μm	20 μm
Aerotriangulación por modelos independientes con puntos señalados artificial	10 μm	12 μm
Comparadores y puntos bien señalizados	6 μm	9 μm
Método de haces de rayos	5 μm	
Autocorrección de errores sistemáticos	3 μm	

Los valores de la tabla anterior han sido obtenidos del estudio de resultados de las aerotriangulaciones de prueba obteniendo en cada una de ellas el valor del cómputo de la expresión:

$$\sigma_o = \sqrt{\frac{\sum \varepsilon_i \cdot p}{h}}$$

Siendo:

ε_i : Error residual en el punto i .

p : Peso de la observación i .

h : Redundancia: número de observaciones – número de incógnitas.

El valor de σ_o está referido a la escala de la fotografía, si se desea conocer el valor de σ_o para datos del modelo habrá que multiplicarlo por el factor de escala del modelo. El método más corriente consiste en usar puntos naturales y preseñalizados como puntos de paso. Entre el uso de puntos naturales y el uso de puntos preseñalizados el parámetro σ_o mejora en un factor de 2. Otros factores que intervienen en la precisión final son la geometría de los puntos de apoyo y la geometría del bloque.

Para la definición de la influencia de nuevos parámetros se ha definido unos factores (f, g) de multiplicación al parámetro σ_o del siguiente modo:

$$\eta_y = f \cdot \sigma_o \text{ planimetría}$$

$$\eta_z = g \cdot \sigma_o \text{ altimetría}$$

Donde los parámetros f, g son variables entre 0.8 e ∞ .

En un ajuste del bloque espacial, la precisión planimétrica no está afectada por la precisión de las altitudes del modelo o por el trazado o disposición de los puntos de control altimétricos. De manera similar, la precisión altimétrica es independiente de la precisión de las coordenadas modelo x, y y el trazado o disposición de los puntos de control planimétrico. Las precisiones planimétrica y altimétrica son tratadas separadamente, de forma que los resultados de planimetría son válidos para la planimetría del ajuste de un bloque.

3.3.2. Precisión planimétrica.

Puesto que las coordenadas de los puntos de paso son calculadas por el ajuste de mínimos cuadrados por observaciones indirectas, podemos calcular su precisión, más concretamente los coeficientes de los pesos (cofactores) Q_{xx} y Q_{yy} por inversión de la matriz de ecuaciones normales. Los coeficientes de los pesos Q_{xx} y Q_{yy} son idénticos y se denominan Q_{LL} . La precisión σ_{BL} de las coordenadas X, Y de un punto de paso después de ajuste del bloque es:

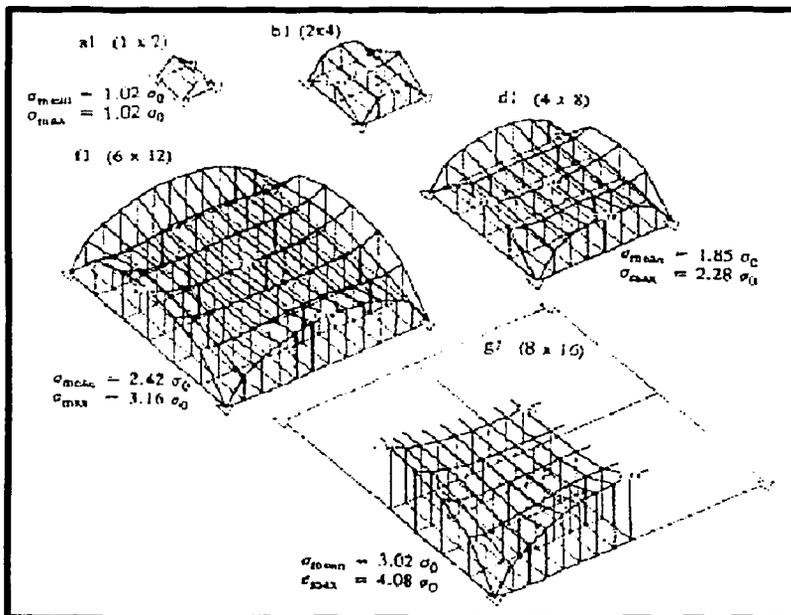
$$\sigma_{BL} = \sigma_o \cdot \sqrt{Q_{LL}} = \sigma_{M.L.} \cdot \sqrt{Q_{LL}}$$

Donde:

σ_o : Es el error medio cuadrático de peso unidad del ajuste, por tanto la precisión

σ_x y σ_{yS} de coordenadas modelo x, y , expresada en el sistema de coordenadas terreno. La cantidad $\sqrt{Q_{11}}$ puede considerarse como un factor el cual multiplicado por la precisión $\sigma_{M, i}$ de las coordenadas X, Y en los modelos individuales, da la precisión planimétrica del bloque $\sigma_{B, i}$.

La siguiente figura muestra los factores Q_{11} para varios tamaños de bloques, cada uno cuenta con los puntos de control en las esquinas del bloque. La cantidad σ_{max} señala el máximo error planimétrico en el bloque, mientras σ_{mean} señala el valor medio cuadrático de la precisión de todos los puntos de paso del bloque.



Precisión planimétrica con cuatro puntos en las esquinas del bloque, para bloques cuadrados $n \times n m$.

Siendo n el número de pasadas y $n m$ el número de modelos por pasada.

Veamos el siguiente ejemplo numérico: Dada una fotografía aérea a escala 1/6000, los modelos son formados en el restituidor analítico y cada uno contiene cuatro puntos de paso señalizados. El bloque está compuesto por 32 modelos (caso d1) y es ajustado por modelos independientes. Se quiere calcular el error medio cuadrático de las coordenadas ajustadas y el valor de la media representativa de la precisión del bloque entero.

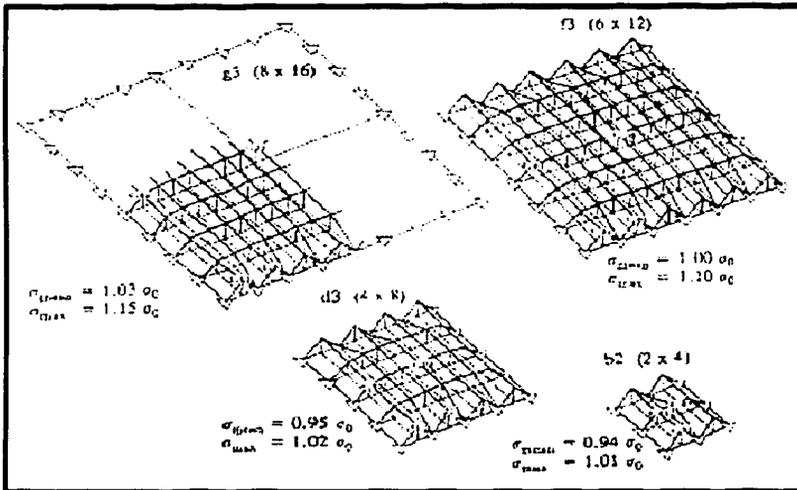
Precisión del modelo simple: $\sigma_{M.L.} = \pm 6\mu m \cdot E = \pm 0.0006 \cdot 6000 = \pm 3.6cm$.

Precisión del bloque (error máximo): $\sigma_{B.L.m\acute{a}x} = \pm 2.28 \cdot 3.6 = \pm 8.2cm$.

Precisión del bloque (error medio): $\sigma_{B.L.medio} = \pm 1.85 \cdot 3.6 = \pm 6.7cm$.

Se puede observar que en la figura anterior que:

- La precisión disminuye significativamente cuando el tamaño del bloque aumenta.
- El mayor error medio cuadrático ocurre en la mitad de los puentes del bloque. Esto es obvio ya que si deseamos incrementar la precisión deberemos suministrar patrones densos de puntos de control de los puentes del bloque. La estrategia mejora si se sigue la siguiente figura:



Precisión planimétrica con un diseño denso de puntos de control a lo largo de los puentes del bloque.

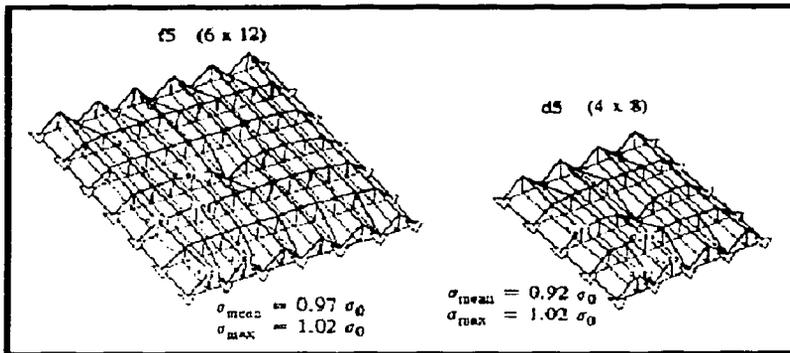
Bloques en forma de cuadriláteros de $N \times X Nm$.

La precisión:

- Es casi independiente del tamaño del bloque.
- Es minuciosa para la precisión de un simple modelo.

Se puede mejorar la precisión con la introducción de puntos de control en el centro del bloque. Pero, los puntos de control dentro del bloque no traen mejoras significativas en cuanto a la precisión.

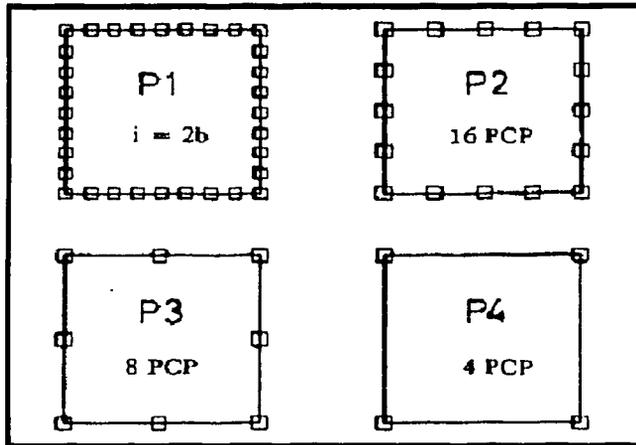
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Precisión

planimétrica con un diseño denso de puntos de control en el puente de los bloques y un punto de control en el centro, para bloques cuadriculados de $n \times X \times Hm$.

Alguna generalización de estos resultados para bloque en forma de cuadrilátero han sido publicado por Ackermann, Ebner y Meissl para los patrones de los puntos de control, como se muestra en la siguiente figura:



Patrones para puntos de control planimétrico. El tamaño de estos bloques es variable: Para P1 el número de puntos de control aumenta con el tamaño del bloque, para P2, P3 y P4 el número es constante. P1 corresponde con la figura de la página 15. P4 corresponde a la figura página 14.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- P1: 2b: $\sigma_{B.L.mean} = (0.70 + 0.29 \cdot \log n_s) \cdot \sigma_{M.L.}$
- P2: 16 puntos planimétricos: $\sigma_{B.L.mean} = (0.83 + 0.02 \cdot n_s) \cdot \sigma_{M.L.}$
- P3: 8 puntos planimétricos: $\sigma_{B.L.mean} = (0.83 + 0.05 \cdot n_s) \cdot \sigma_{M.L.}$
- P4: 4 puntos planimétricos: $\sigma_{B.L.mean} = (0.47 + 0.25 \cdot n_s) \cdot \sigma_{M.L.}$

Siendo n_s el número de pasadas del bloque.

El cuadro anterior muestra la experiencia para bloques cuadrados y recubrimientos del 60% y el 20 %.

Ejemplo: Los puntos de control planimétrico han sido establecidos en fotogrametría en un área de 10 x10 km., con una precisión de coordenadas de ± 10 cm. Estos puntos de control serían puntos naturales para los cuales se asume una incertidumbre de definición de ± 5 cm. Ocho puntos de control de campo existen en el bloque, cuatro en las esquinas y cuatro en mitad de los lados. ¿Qué escala debe ser la aceptable?

- Prueba 1:

Escala de la fotografía: 1/15000.

Distancia entre pasadas de recubrimiento transversal del 25 %.

$$A = 0.23 \cdot 15000 \cdot \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 2590m.$$

$$\text{Número de pasadas } n_s = \left(\frac{10000}{2590} + 1\right) = 5$$

$$\text{Precisión de un simple modelo: } \sigma_{M.L.} = \sqrt{\sigma_w^2(\text{señalizado}) + \sigma_w^2(\text{definición})} = \sqrt{5^2 + 9^2} = \pm 10.3cm.$$

$$\text{Precisión del bloque: } \sigma_{B.L.} = (0.83 + 0.05 \cdot 5) \cdot 10.3 = \pm 11.1cm.$$

- Prueba 2:

Escala de la fotografía: 1/12000.

Distancia entre pasadas de recubrimiento transversal del 25 %.

$$A = 0.23 \cdot 12000 \cdot \left(1 - \frac{25}{100}\right) = 2070m.$$

$$\text{Número de pasadas } n_s = \left(\frac{10000}{2070} + 1\right) = 6$$

$$\text{Precisión de un simple modelo: } \sigma_{M.L.} = \sqrt{\sigma_w^2(\text{señalizado}) + \sigma_w^2(\text{definición})} = \sqrt{5^2 + 7.2^2} = \pm 8.8cm.$$

$$\text{Precisión del bloque: } \sigma_{B.L.} = (0.83 + 0.05 \cdot 6) \cdot 8.8 = \pm 9.9cm$$

Una escala de fotografía de 1/12000 es apropiada para la realización del trabajo.

Las reglas de precisión mostradas anteriormente son válidas, para una aproximación tosca, para bloques cuadrangulares, pero no para casos extremos de una pasada. La igualdad entre la precisión del bloque y la precisión de un simple modelo para bloques con puntos de control densos en los bordes también es bueno si los bordes del bloque son irregulares.

Las precisiones están referidas a los puntos de enlace en las esquinas de los modelos. Los puntos simples, por tanto los puntos que están en un solo modelo, tienen peor precisión. El aumento del número de puntos de paso o enlace tienen poco efecto en la precisión de las coordenadas de puntos simples en el ajuste del bloque.

En el interés de la detección de errores y localización de errores se deberían usar al menos 8 puntos de paso en cada modelo, dos en cada esquina y grupos de al menos dos puntos de control, mejor que el empleo de un simple punto de control.

Para un apoyo escaso el error máximo puede ocurrir en el centro del bloque, aunque debido a que el bloque se encuentra planimétricamente muy tensado desde el borde, lo normal es que el error máximo suceda en el borde. En cualquier caso y con buen apoyo el error máximo en el centro del bloque no es aconsejable que supere los $1.2 \cdot \sigma_o$ y en ningún caso debe llegar a $1.5 \cdot \sigma_o$. Para que esto sea cierto el apoyo planimétrico debe estar en puntos uniformemente separados, colocados cercanos al borde del bloque y en todo el perímetro del bloque.

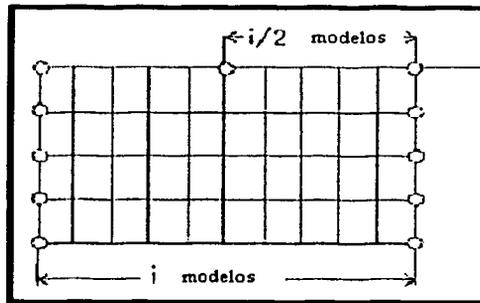
Los errores máximos ocurren en el borde del bloque y la zona interior del bloque es muy estable.

3.3.3. Precisión altimétrica.

La precisión altimétrica después del ajuste del bloque puede ser obtenida de la inversa de la matriz normal de ecuaciones, de la misma manera que la precisión planimétrica.

$$\sigma_{H.L.} = \sigma_o \cdot \sqrt{Q_{LL}} = \sigma_{M.L.} \cdot \sqrt{Q_{LL}}$$

La precisión altimétrica es principalmente dependiente del número de modelos i entre dos cadenas de puntos de control altimétrico (perpendiculares a las pasadas). Es buena práctica para mejorar la precisión altimétrica a lo largo de los puntos superiores e inferiores del bloque la introducción de puntos de control en intervalos de $i/2$ de los puentes de los modelos. El patrón ideal del control altimétrico es:



Patrón ideal para puntos de control altimétrico.

La siguiente figura muestra la relación entre la precisión de altitud de los puntos de las esquinas en los modelos y el número de modelos i que están formando puentes entre las cadenas de

control. Muestra el valor medio cuadrático para el bloque entero (σ_{mean}) y el valor máximo ($\sigma_{m\acute{a}x}$) en la m\`as desfavorable posici3n en el bloque. Las correspondientes ecuaciones son:

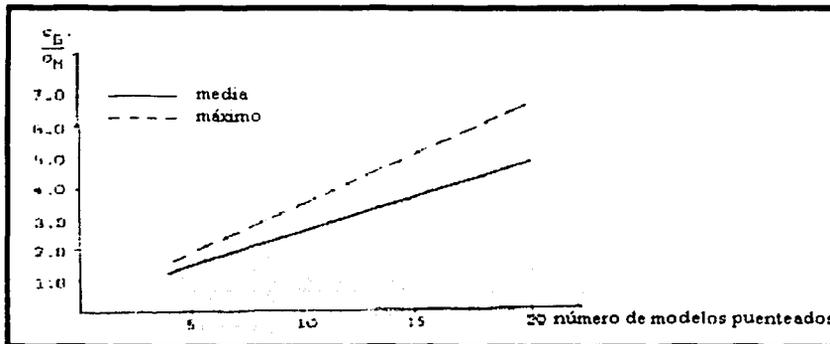
$$\sigma_{B.L.mean} = (0.34 + 0.22 \cdot i) \cdot \sigma_{M.L.}$$

$$\sigma_{B.L.m\acute{a}x} = (0.27 + 0.31 \cdot i) \cdot \sigma_{M.L.}$$

Con $\sigma_{B.L.mean}$ se obtiene:

i	η_z
3b	σ_{α} altimetrica
4b	1.22 σ_{α} altimetrica
6b	1.66 σ_{α} altimetrica
8b	2.10 σ_{α} altimetrica

La deformaci3n altimetrica tiene forma de par\`abola entre los puntos de apoyo. Ser\`a tanto m\`as exagerada cuanto mayor sea la separaci3n entre el apoyo, por tanto i es la separaci3n entre puntos altimetricos.



Precisi3n altimetrica del ajuste del bloque (σ_B) comparada con la precisi3n de un solo modelo (σ_M).

Analicemos el siguiente ejemplo: Dada una fotograf\`a a\`erea a escala 1/6000. Una c\`amara de focal 150 mm. Los puntos de paso est\`an se\`nalizados y se realiza un ajuste del bloque de 72 modelos independientes, con la siguiente configuraci3n:

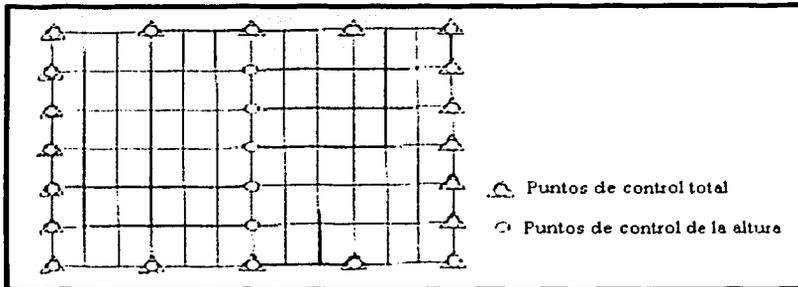
Se calcula el error medio cuadrático del ajuste alimétrico y una representación del valor de la precisión de altura en el bloque completo.

$$\text{Precisión del modelo simple: } \sigma_{M.L.} = 6000 \cdot 15 \cdot 0,00006 = \pm 5,4 \text{ cm.}$$

$$\text{Precisión del bloque (error máximo): } \sigma_{H.L. \text{ máx}} = \pm(0,27 + 0,37 \cdot 6) \cdot 5,4 = \pm 11,5$$

cm.

$$\text{Precisión del bloque (error medio): } \sigma_{H.L. \text{ med}} = \pm(0,34 + 0,22 \cdot 6) \cdot 5,4 = \pm 9 \text{ cm.}$$



Esquema del problema.

Cuando se compara la precisión planimétrica, particularmente con un control denso a través del bloque de puentes, la precisión alimétrica es significativamente menos favorable. Un intervalo de tres modelos entre cadenas en el control alimétrico es el máximo si se desea introducir valores de la precisión menos significativos comparado con un simple modelo, pero entonces afecta de forma contraria a la economía del proceso entero. Como un compromiso entre la precisión y la economía un intervalo de al menos cuatro modelos entre cadenas suele ser lo usual.

En la determinación de errores groseros en el ajuste planimétrico se debe introducir al menos ocho puntos de paso por modelo, dos en cada esquina y suministrar puntos de control en grupos es mejor que puntos aislados. En alimetría el máximo error ocurre en el punto medio entre las cadenas de apoyo.

3.3.4. Precisión planimétrica y alimétrica empírica.

Las precisiones teóricas del bloque de triangulación por modelos independientes están basadas en la premisa de errores accidentales de modelos individuales. Los efectos de la variación de la precisión en un modelo y la existencia indudable de correlaciones resultado del sistema erróneo son ignoradas.

Sin embargo, los test extensivos empíricos de precisión realizados por el chequeo de puntos de campo han confirmado la firmeza esencial de los resultados teóricos, tal que se pueden usar las ecuaciones para planimetría:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- P1: $\sigma_{R.I.mean} = (0.70 + 0.29 \cdot \log n_s) \cdot \sigma_{M.I.}$
- P2: $\sigma_{R.I.mean} = (0.83 + 0.02 \cdot n_s) \cdot \sigma_{M.I.}$
- P3: $\sigma_{R.I.mean} = (0.83 + 0.05 \cdot n_s) \cdot \sigma_{M.I.}$
- P4: $\sigma_{R.I.mean} = (0.47 + 0.25 \cdot n_s) \cdot \sigma_{M.I.}$

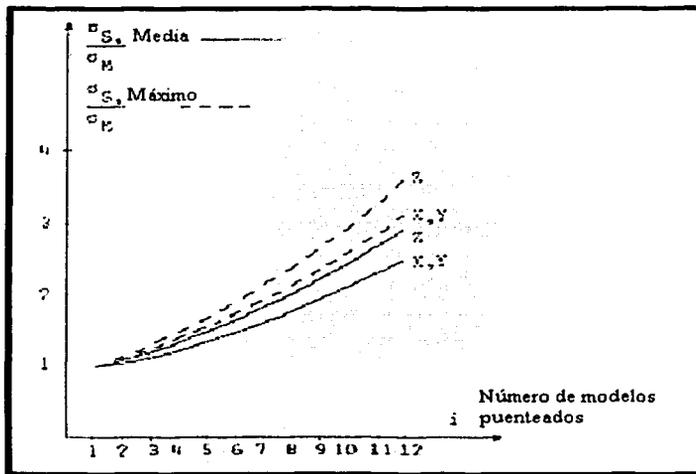
Y las ecuaciones para altimetría:

- $\sigma_{B.Z.mean} = (0.34 + 0.22 \cdot i) \cdot \sigma_{M.Z.}$
- $\sigma_{B.Z.máx} = (0.27 + 0.31 \cdot i) \cdot \sigma_{M.Z.}$

Como aproximaciones del planeamiento del proyecto.

3.3.5. Precisión planimétrica y altimétrica de las pasadas de triangulación.

La precisión de puntos en una pasada ajustada por modelos independientes depende principalmente en el número i de modelos puenteados entre puntos de control. Se está interesado en dos valores, la precisión media $\sigma_{S,mean}$ la cual es representativa de la pasada como un conjunto, y el valor máximo $\sigma_{S,max}$ el error ocurrido entre puntos de control.



Precisión de la triangulación de una pasada σ_S , comparada con la precisión de un solo modelo σ_M .

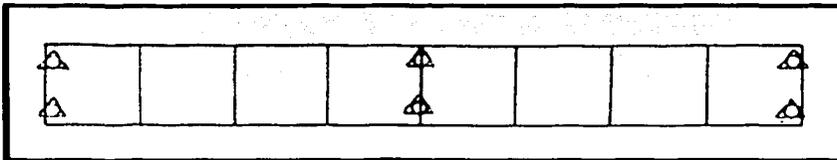
Se debe diferenciar entre puntos señalizados, naturales y artificiales, ello es conveniente para relatar el error medio cuadrático de la pasada de la triangulación, σ_S , con el error medio cuadrático, σ_M de un simple modelo.

Los resultados de los estudios teóricos y empíricos de la precisión de una pasada de una triangulación, la cual, en parte produce grandes valores diferentes son expresadas en la figura anterior. La simplificación extrema está representada en este diagrama que tiene la ventaja de ser práctico para una simple interpretación, hay que señalar que las diferencias de valores mayores al 50 % pueden ocurrir en casos individuales.

Analicemos el siguiente ejemplo numérico: Los puntos señalizados a lo largo de una pasada deben ser medidos con precisión planimétrica, σ_x de ± 3 cm. Y precisión altimétrica σ_z de ± 5 cm. Debido al alto coste económico de la colocación de puntos de control, se pretende colocar el menor número posible. Se usa una cámara de focal 150 mm. Y los puntos de apoyo están al final y en medio de las pasadas.

- Prueba 1:

La escala de la fotografía es 1/4500 con la siguiente distribución de puntos de control:



Precisión del modelo simple:

$$\sigma_{M,x} = 0,00006 \cdot 4500 = \pm 2,7 \text{ cm.}$$

$$\sigma_{M,z} = 0,000006 \cdot 15 \cdot 4500 = \pm 4,0 \text{ cm.}$$

Precisión de la pasada ($i = 4$):

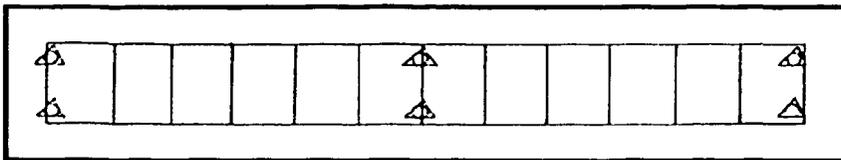
$$\sigma_{S,x} = \pm 2,7 \cdot 1,2 = \pm 3,2 \text{ cm.}$$

$$\sigma_{M,z} = \pm 4,0 \cdot 1,3 = \pm 5,2 \text{ cm.}$$

Los requisitos no son satisfechos.

- Prueba 2:

La escala de la fotografía es 1/3000:



Precisión del modelo simple:

$$\sigma_{M.L.} = 0.0006 \cdot 3000 = \pm 1.8 \text{ cm.}$$

$$\sigma_{M.Z.} = 0.00006 \cdot 15 \cdot 3000 = \pm 2.7 \text{ cm.}$$

Precisión de la pasada ($i = 6$):

$$\sigma_{S.L.} = \pm 1.8 \cdot 1.4 = \pm 2.5 \text{ cm.}$$

$$\sigma_{M.Z.} = \pm 2.7 \cdot 1.6 = \pm 4.3 \text{ cm.}$$

La precisión de la pasada en el centro de los modelos entre los puntos de control es:

$$\sigma_{S.L.} = \pm 1.8 \cdot 1.7 = \pm 3.1 \text{ cm.}$$

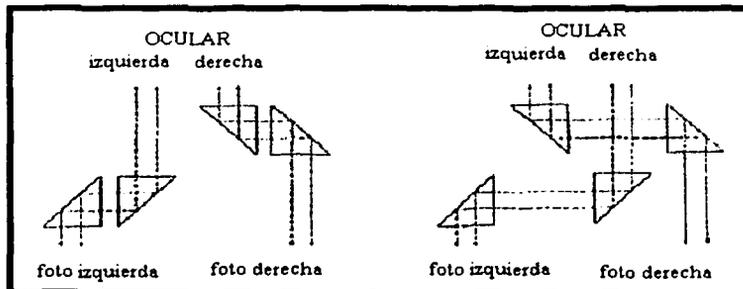
$$\sigma_{M.Z.} = \pm 2.7 \cdot 1.9 = \pm 5.1 \text{ cm.}$$

Los requisitos de la pasada en completo se cumplen, mientras los errores en los modelos entre los puntos de control son apenas mayores que lo permitido. El ejemplo numérico muestra que la reducción en la precisión causada por el incremento del número de puentes es significativamente menor que la mejora en precisión resultado del incremento de la escala de la fotografía.

3.4. Consideraciones del instrumental.

Las mediciones de los fotogramas requieren realizarse sobre un restituidor analítico. Los restituidores analíticos ofrecen varias ventajas en la captura de los datos, algunas de las cuales se discuten a continuación.

El primero de los dos fotogramas de una pasada es colocado en el carro y el restituidor lleva el carro a una posición aproximada a la de las marcas fiduciales. Posteriormente el operador realiza la medición fina de las marcas fiduciales. Después que las coordenadas imagen de todos los puntos en el primer modelo han sido medidas, el ordenador realiza el refinamiento de las coordenadas imagen y la orientación relativa junto con el establecimiento del modelo de las dos fotografías, incluyendo los centros de proyección. El operador entonces sitúa la tercera fotografía de la pasada en el carro del restituidor, en el cual se encuentra la primera fotografía (la segunda fotografía permanece en su sitio). La observación estereoscópica ahora producirá un efecto pseudoscópico, para prevenirlo y producir el efecto estereoscópico, la óptica de observación suministra un cambio de las lentes.



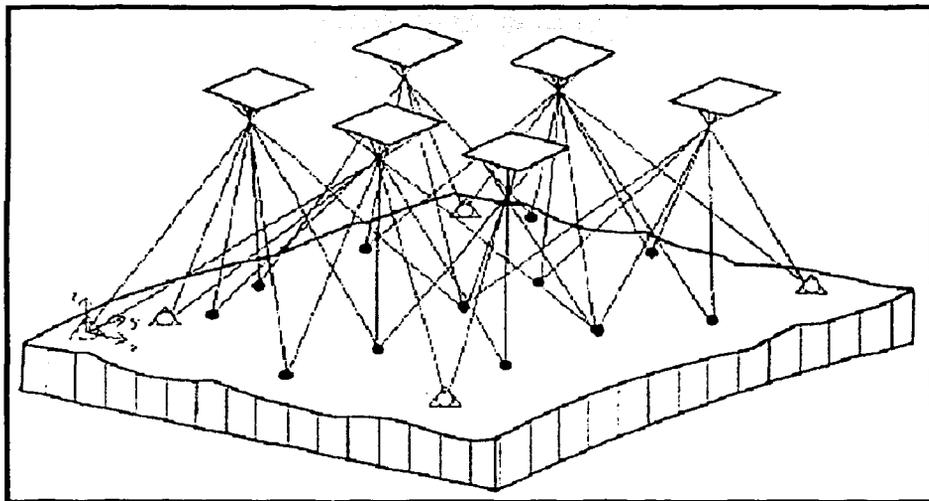
Antes: Izquierda. Después: Derecha. Cambio a la visión estereoscópica.

Después del cambio óptico el operador puede completar las medidas en el modelo estereoscópico formado por los dos últimos fotogramas. Analizando el vuelo realizado en el dibujo de principio de este capítulo se puede ver que la imagen tiene las coordenadas de los puntos 3, 5 y 6 que han sido medidos en el fotograma 12, el ordenador posiciona automáticamente los índices en esos puntos en el fotograma 13. El operador necesita limpiar las paralajes p_x y p_y para medir las coordenadas imagen de esos puntos en el fotograma 13. Los puntos 7, 8, 9 y 10 deben ser medidos manualmente.

Finalmente el ordenador realiza la orientación relativa del segundo modelo de los fotogramas 12 y 13. El resto de la pasada se realiza de manera similar. Es interesante señalar que si el restituidor analítico es usado para aerotriangulación aérea, los puntos artificiales son frecuentemente no marcados. Los puntos son únicamente y precisamente definidos para sus coordenadas imagen. Las mediciones en un restituidor analítico también incluye la comprobación de las medidas mientras los fotogramas son montadas en los carros tal que las correcciones pueden realizarse de manera rápida.

4. Ajuste de un bloque de haces.

En un ajuste de haces de una pasada de un bloque de fotogramas, con al menos el 60 % de recubrimiento longitudinal y el 20 % de recubrimiento transversal, se calculan directamente las relaciones entre las coordenadas imagen y objeto, sin introducir coordenadas modelo como paso intermedio. Los fotogramas son la unidad fundamental en el ajuste de haces.



Principio del ajuste por bloque de haces.

Las coordenadas imagen y la proyección central asociada de la fotografía definen el haz de rayos espacial. Los elementos de la orientación externa de todos los haces del bloque son computados simultáneamente en todos los fotogramas. El dato inicial consiste en coordenadas

imagen de los puntos de paso (puntos que existen en más de una fotografía) junto con las coordenadas imagen y objeto de los puntos de control.

El principio del ajuste puede definirse como: Los haces de los rayos son:

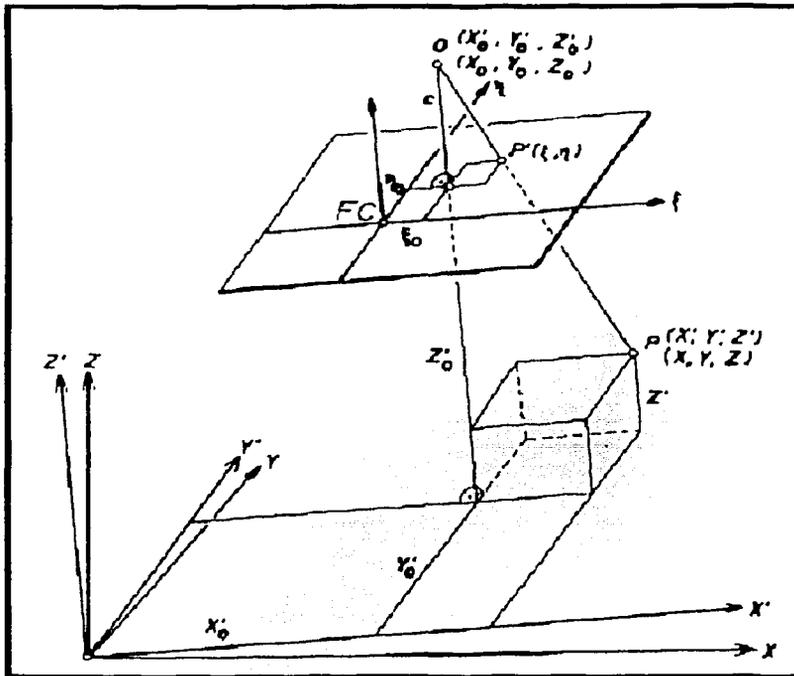
- Desplazamientos: Tres traslaciones X_0 , Y_0 , Z_0 .
- Rotaciones: Tres rotaciones ω , ϕ , χ .

Tal que los haces:

- Intersectan los rayos tan bien como es posible en los puntos de paso.
- Pasan a través de los puntos de control lo más cerca posible.

Antes de realizar el ajuste se debe considerar las relaciones matemáticas entre las coordenadas imagen y las coordenadas objeto o terreno.

4.1. Relaciones matemáticas entre las coordenadas imagen y terreno.



La línea recta conecta el centro de proyección con el punto imagen y el punto objeto, esto es la condición de colinealidad.

En el momento de la exposición de la fotografía el punto objeto P , el centro de proyección O , y el punto imagen P' están en una línea recta. Se introduce un sistema de coordenadas terreno (X', Y', Z') paralelo al sistema de coordenadas imagen $(\xi, \eta, \rho,)$ ($\rho = 0$ para todos los puntos imagen y $r =$ focal (c) para el centro de proyección) y rotado en el espacio para el sistema de coordenadas terreno (X, Y, Z)

La condición de colinealidad de la relación de la línea recta puede ser expresada en el sistema (X', Y', Z') por medio de dos ecuaciones:

$$\frac{\xi - \xi_0}{c} = \frac{X' - X'_0}{Z_0 - Z'}$$

$$\frac{\eta - \eta_0}{c} = \frac{Y' - Y'_0}{Z_0 - Z'}$$

Despejando las coordenadas imagen como valores desconocidos:

$$\xi = \xi_0 - c \cdot \frac{X' - X'_0}{Z' - Z_0}$$

$$\eta = \eta_0 - c \cdot \frac{Y' - Y'_0}{Z' - Z_0}$$

La condición de colinealidad de la relación de la línea recta puede ser expresada en el sistema (X, Y, Z) por medio de dos ecuaciones:

$$\frac{\xi - \xi_0}{c} = \frac{X' - X'_0}{Z_0 - Z'}$$

$$\frac{\eta - \eta_0}{c} = \frac{Y' - Y'_0}{Z_0 - Z'}$$

Despejando las coordenadas imagen como valores desconocidos:

$$\xi = \xi_0 - c \cdot \frac{X' - X'_0}{Z' - Z_0}$$

$$\eta = \eta_0 - c \cdot \frac{Y' - Y'_0}{Z' - Z_0}$$

Las coordenadas X' de los puntos objeto y X'_0 del centro de proyección puede ser reemplazado por X y X_0 del sistema de coordenadas terreno. El sistema (X', Y', Z') tiene una rotación del sistema (X, Y, Z) :

$$\begin{pmatrix} X' - X'_0 \\ Y' - Y'_0 \\ Z' - Z'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

Si se insertan las ecuaciones anteriores, se obtiene la relación entre las coordenadas imagen y terreno. Las ecuaciones anteriores primero deben premultiplicarse por $R^T = R^{-1}$.

$$\xi = \xi_0 - c \cdot \frac{r_{11} \cdot (X - X_0) + r_{21} \cdot (Y - Y_0) + r_{31} \cdot (Z - Z_0)}{r_{13} \cdot (X - X_0) + r_{23} \cdot (Y - Y_0) + r_{33} \cdot (Z - Z_0)} = \xi_0 - c \cdot \frac{Z_X}{N}$$

$$\eta = \eta_0 - c \cdot \frac{r_{12} \cdot (X - X_0) + r_{22} \cdot (Y - Y_0) + r_{32} \cdot (Z - Z_0)}{r_{13} \cdot (X - X_0) + r_{23} \cdot (Y - Y_0) + r_{33} \cdot (Z - Z_0)} = \eta_0 - c \cdot \frac{Z_Y}{N}$$

Entonces el sistema (X', Y', Z') es paralelo al sistema de coordenadas imagen (ξ, η, ρ) y los elementos r_{ij} son:

- Los cosenos de los ángulos entre los ejes de los sistemas de coordenadas imagen y terreno.
- Funciones de los ángulos (ω, φ, X) por los cuales los fotogramas fueron rotados respecto al sistema de coordenadas terreno en el momento de la exposición.

Para simplificar la notación de las relaciones diferenciales siguientes se introducen las abreviaciones Z_X , Z_Y para el numerador y N para el denominador.

4.2. Relaciones diferenciales.

Para una solución mínimo cuadrática se necesita diferenciar los cocientes de las ecuaciones no lineales:

$$\xi = \xi_0 - c \cdot \frac{r_{11} \cdot (X - X_0) + r_{21} \cdot (Y - Y_0) + r_{31} \cdot (Z - Z_0)}{r_{13} \cdot (X - X_0) + r_{23} \cdot (Y - Y_0) + r_{33} \cdot (Z - Z_0)} = \xi_0 - c \cdot \frac{Z_X}{N}$$

$$\eta = \eta_0 - c \cdot \frac{r_{12} \cdot (X - X_0) + r_{22} \cdot (Y - Y_0) + r_{32} \cdot (Z - Z_0)}{r_{13} \cdot (X - X_0) + r_{23} \cdot (Y - Y_0) + r_{33} \cdot (Z - Z_0)} = \eta_0 - c \cdot \frac{Z_Y}{N}$$

De las ecuaciones anteriores, los elementos r_{ij} son función de los ángulos (ω, φ, X) de la matriz de rotación espacial.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial X_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{11}Z_x - r_{11}N) = a_2 & \frac{\partial \eta}{\partial X_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{12}Z_y - r_{12}N) = b_2 \\ \frac{\partial \xi}{\partial Y_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{21}Z_x - r_{21}N) = a_3 & \frac{\partial \eta}{\partial Y_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{22}Z_y - r_{22}N) = b_3 \\ \frac{\partial \xi}{\partial Z_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{31}Z_x - r_{31}N) = a_4 & \frac{\partial \eta}{\partial Z_0} &= -\frac{c}{N^2} (r_{32}Z_y - r_{32}N) = b_4 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \omega} &= -\frac{c}{N} \left\{ ((Y - Y_0)r_{33} - (Z - Z_0)r_{23}) \frac{Z_x}{N} - (Y - Y_0)r_{31} + (Z - Z_0)r_{21} \right\} = a_5 \\ \frac{\partial \eta}{\partial \omega} &= -\frac{c}{N} \left\{ ((Y - Y_0)r_{33} - (Z - Z_0)r_{23}) \frac{Z_y}{N} - (Y - Y_0)r_{32} + (Z - Z_0)r_{22} \right\} = b_5 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \phi} &= \frac{c}{N} \left\{ (Z_x \cos \kappa - Z_y \sin \kappa) \frac{Z_x}{N} + N \cos \kappa \right\} = a_6 \\ \frac{\partial \eta}{\partial \phi} &= \frac{c}{N} \left\{ (Z_x \cos \kappa - Z_y \sin \kappa) \frac{Z_y}{N} - N \sin \kappa \right\} = b_6 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \kappa} &= -\frac{c}{N} Z_x = a_7 & \frac{\partial \eta}{\partial \kappa} &= \frac{c}{N} Z_y = b_7 \\ \frac{\partial \xi}{\partial X} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{11} - Z_x r_{13}) = a_8 & \frac{\partial \eta}{\partial X} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{12} - Z_y r_{13}) = b_8 \\ \frac{\partial \xi}{\partial Y} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{21} - Z_x r_{23}) = a_9 & \frac{\partial \eta}{\partial Y} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{22} - Z_y r_{23}) = b_9 \\ \frac{\partial \xi}{\partial Z} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{31} - Z_x r_{33}) = a_{10} & \frac{\partial \eta}{\partial Z} &= -\frac{c}{N^2} (Nr_{32} - Z_y r_{33}) = b_{10} \end{aligned}$$

4.3. Observación y ecuaciones normales para los fotogramas de un bloque.

Se deben usar los diferenciales de los coeficientes para linealizar las ecuaciones para un ajuste mínimo cuadrático por observaciones indirectas, para nuevos puntos P , donde las coordenadas imagen han sido medidas en los fotogramas con el índice j . Cada medición de puntos imagen genera dos ecuaciones de observación.

$$\begin{aligned}
v_{\xi_{ij}} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_{0j}} \right)^0 \cdot dX_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y_{0j}} \right)^0 \cdot dY_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_{0j}} \right)^0 \cdot dZ_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \omega_j} \right)^0 \cdot d\omega_j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_j} \right)^0 \cdot d\varphi_j + \\
&+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_{0j}} \right)^0 \cdot dX_j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_i} \right)^0 \cdot dX_i + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y_i} \right)^0 \cdot dY_i + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_i} \right)^0 \cdot dZ_i - (\xi_{ij}^0 - \xi_{ij}^v) \\
v_{\eta_{ij}} &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial X_{0j}} \right)^0 \cdot dX_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y_{0j}} \right)^0 \cdot dY_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Z_{0j}} \right)^0 \cdot dZ_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \omega_j} \right)^0 \cdot d\omega_j + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi_j} \right)^0 \cdot d\varphi_j + \\
&+ \left(\frac{\partial \eta}{\partial X_{0j}} \right)^0 \cdot dX_j + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X_i} \right)^0 \cdot dX_i + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y_i} \right)^0 \cdot dY_i + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Z_i} \right)^0 \cdot dZ_i - (\eta_{ij}^0 - \eta_{ij}^v)
\end{aligned}$$

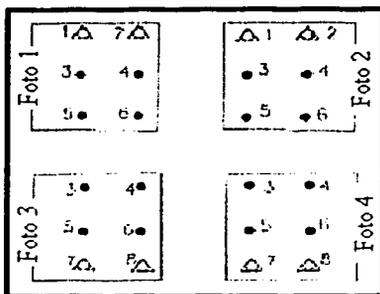
Los valores desconocidos son los seis elementos de la orientación externa del fotograma con el índice j y las tres coordenadas del punto P_i . Si un rayo pasa a través de un punto fijo, los términos dX_i, dY_i, dZ_i desaparecen.

Los cocientes diferenciales $()^0$ son calculados de valores aproximados de los desconocidos de las relaciones diferenciales del apartado anterior: **4.2. Relaciones diferenciales**. Los términos $\bar{\xi}_{ij}$ y $\bar{\eta}_{ij}$ son las coordenadas imagen computadas de las ecuaciones, con la ayuda de las aproximaciones de los valores desconocidos:

$$\begin{aligned}
\bar{\xi}_{ij} &= \xi_{ij}^0 - c \cdot \frac{r_{11} \cdot (X - X_0) + r_{21} \cdot (Y - Y_0) + r_{31} \cdot (Z - Z_0)}{r_{13} \cdot (X - X_0) + r_{23} \cdot (Y - Y_0) + r_{33} \cdot (Z - Z_0)} = \xi_{ij}^0 - c \cdot \frac{Z_X}{N} \\
\bar{\eta}_{ij} &= \eta_{ij}^0 - c \cdot \frac{r_{12} \cdot (X - X_0) + r_{22} \cdot (Y - Y_0) + r_{32} \cdot (Z - Z_0)}{r_{13} \cdot (X - X_0) + r_{23} \cdot (Y - Y_0) + r_{33} \cdot (Z - Z_0)} = \eta_{ij}^0 - c \cdot \frac{Z_Y}{N}
\end{aligned}$$

Las aproximaciones de los valores desconocidos pueden sacarse de varias maneras, por ejemplo, para fotogramas casi verticales $\omega^0 = \varphi^0 = 0$, y X^0 es conocido en el plan de vuelo. El ajuste del bloque por modelos independientes produce las coordenadas X^0, Y^0, Z^0 de los centros de proyección y las coordenadas X^p, Y^p, Z^p de los nuevos puntos.

Un ejemplo con cuatro fotogramas ayudará a aclarar el proceso. El balance de las observaciones e incógnitas es:



Ejemplo con cuatro fotografías.

Coordenadas imagen observadas: $(2 \times 6 \times 4) = 48$

Desconocidas: Coordenadas de los centros de proyección: $4 \times 3 = 12$

Rotaciones: $4 \times 3 = 12$

Coordenadas de los nuevos puntos: $4 \times 3 = 12$

Redundancia: $48 - 36 = 12$

	$X_{01} Y_{01} Z_{01} \omega_1 \phi_1 \kappa_1$	$X_{02} Y_{02} Z_{02} \omega_2 \phi_2 \kappa_2$	$X_{04} Y_{04} Z_{04} \omega_4 \phi_4 \kappa_4$	$X_3 Y_3 Z_3$	$X_6 Y_6 Z_6$	1
v_{411}	$a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$							$(\bar{E}_{11}, \bar{E}_{11}^0)$
v_{011}	$b_1^0 b_2^0 b_3^0 b_4^0$							$(\bar{O}_{11}, \bar{O}_{11}^0)$
	similarly for point 2							
v_{201}	$a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$				$a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$			$(\bar{E}_{21}, \bar{E}_{21}^0)$
v_{021}	$b_1^0 b_2^0 b_3^0 b_4^0$				$b_1^0 b_2^0 b_3^0 b_4^0$			$(\bar{O}_{21}, \bar{O}_{21}^0)$
	similarly for points 4,5,6							
v_{412}	$a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$							$(\bar{E}_{12}, \bar{E}_{12}^0)$
v_{012}	$b_1^0 b_2^0 b_3^0 b_4^0$							$(\bar{O}_{12}, \bar{O}_{12}^0)$
	similarly for point 2							
v_{232}	$a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$				$a_1^0 a_2^0 a_3^0 a_4^0$			$(\bar{E}_{32}, \bar{E}_{32}^0)$
v_{032}	$b_1^0 b_2^0 b_3^0 b_4^0$				$b_1^0 b_2^0 b_3^0 b_4^0$			$(\bar{O}_{32}, \bar{O}_{32}^0)$
	similarly for points 4,5,6							

En notación matricial:

$$v = A \cdot X - l$$

El ecuaciones normales:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$A^T \cdot A \cdot X = A^T \cdot l$$

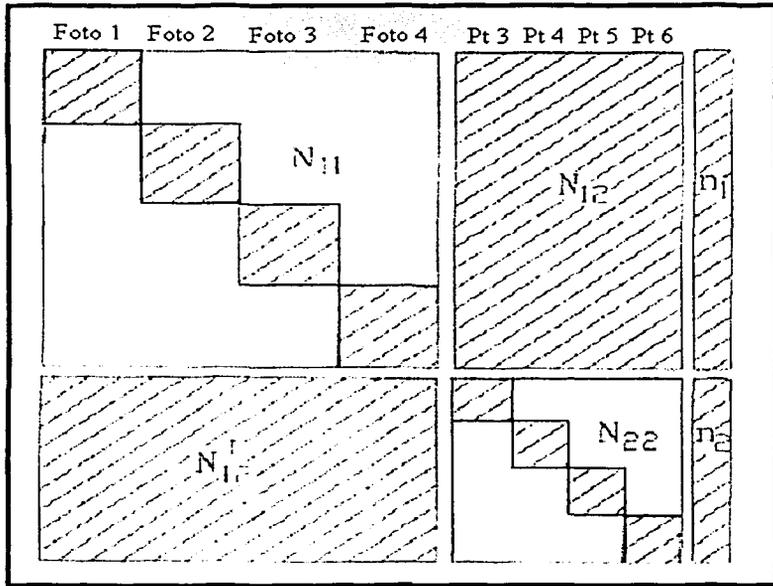
$$N \cdot X = n$$

4.4. Solución de las ecuaciones normales.

La matriz tiene la forma:

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

Las ecuaciones normales del ejemplo anterior tiene la siguiente estructura:



Ecuaciones normales.

Un ajuste produce correcciones de valores aproximados de los elementos de la orientación externa de cada fotograma y las coordenadas aproximadas de los nuevos puntos. Si las aproximaciones son muy pobres, los valores corregidos deben ser tratados como nuevas aproximaciones para un nuevo ajuste. El proceso es repetido hasta que no hay cambios significativos en las incógnitas del ajuste del bloque.

4.5. Incógnitas de la orientación interna y parámetros adicionales.

Las cámaras convencionales de aficionado son a menudo usadas como cámaras fotogramétricas en aplicaciones espaciales de fotogrametría. El mejor método de llevar los resultados de fotografías tomadas con cámaras es numérico por medio del ajuste del bloque de haces.

Se introducen como incógnitas las ecuaciones de observación de los elementos de la orientación interna:

$$v_{\xi\eta} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_{0j}} \right)^0 \cdot dX_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y_{0j}} \right)^0 \cdot dY_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_{0j}} \right)^0 \cdot dZ_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \omega_j} \right)^0 \cdot d\omega_j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_j} \right)^0 \cdot d\varphi_j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \chi_{0j}} \right)^0 \cdot d\chi_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_i} \right)^0 \cdot dX_i + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y_i} \right)^0 \cdot dY_i + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_i} \right)^0 \cdot dZ_i - (\xi_{\eta}^0 - \xi_{\eta}^0)$$

$$v_{\eta\theta} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial X_{0j}} \right)^0 \cdot dX_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y_{0j}} \right)^0 \cdot dY_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Z_{0j}} \right)^0 \cdot dZ_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \omega_j} \right)^0 \cdot d\omega_j + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi_j} \right)^0 \cdot d\varphi_j + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \chi_{0j}} \right)^0 \cdot d\chi_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X_i} \right)^0 \cdot dX_i + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y_i} \right)^0 \cdot dY_i + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Z_i} \right)^0 \cdot dZ_i - (\eta_{\theta}^0 - \eta_{\theta}^0)$$

La solución de las ecuaciones normales $A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot l$ dan los elementos internos de la orientación de la cámara. A mayor número de incógnitas en un ajuste en bloque de haces requiere un mayor número de puntos de control y de paso.

Es típico de las fotografías de cámaras de aficionado que el centro de proyección teórico esté significativamente deformado por las lentes y la distorsión de la película. Estas influencias pueden ser tenidas en cuenta en el ajuste del bloque de haces por introducción correcta de los polinomios en las ecuaciones de observación, donde los coeficientes son determinados en el ajuste. Este ajuste es llamado ajuste del bloque de haces con parámetros adicionales o por autocalibración. La técnica no es usada solamente con cámaras de aficionado sino cada vez más para fotografías tomadas con cámaras propias de fotogrametría. Los parámetros adicionales producen un método extremadamente poderoso de compensación de errores sistemáticos. Esto tiene poca importancia, o sea estos errores sistemáticos ocurren como resultado de las lentes o distorsiones de las películas o como resultado de anomalías de la refracción.

4.6. Precisión, ventajas y desventajas del ajuste de haces.

Aunque el modelo matemático del ajuste del bloque de haces difiere significativamente del ajuste del bloque por modelos independientes (proyección central con las coordenadas imagen como observaciones de un lado y una transformación espacial con las coordenadas modelo como observaciones por otro lado) las normas de precisión para el ajuste de modelos independientes puede ser aplicado, más o menos, para el ajuste del bloque de haces.

La precisión de un simple modelo necesaria para el desarrollo de esas normas pueden ser estimadas por un ajuste de haces del bloque con parámetros adicionales de un bloque regular con el 60 % de recubrimiento longitudinal y el 20 % de recubrimiento transversal, y para puntos señalizados, como:

- Planimetría: $\sigma_{x,y} : \pm 3$ micras en la medición del fotograma.
- Altitud: $\sigma_z : \pm 0.03 \text{ } ^\circ/\infty$ de la distancia al objeto (NA y WA).
 $\sigma_z : \pm 0.04 \text{ } ^\circ/\infty$ de la distancia al objeto (SWA).

El método del ajuste de haces ha permitido desarrollar otras aplicaciones de la aerotriangulación. Por ejemplo, D. C. Brown ha presentado el uso de la técnica para establecer redes densas de puntos en ciudades por medio de fotogrametría.

Por último se puede hacer una lista de las ventajas y desventajas del método de haces con respecto al método de modelos independientes:

- Desventajas:
 1. Problema no lineal, las aproximaciones pueden establecerse después de lentos procesos.
 2. Los instrumentos analógicos no pueden usarse para las mediciones.
 3. Siempre es un problema espacial, no es posible separar el ajuste de la planimetría y el ajuste de la altimetría.
- Ventajas:
 1. Es el método más preciso de aerotriangulación (relaciones directas entre las coordenadas imagen y terreno sin el paso intermedio de la formación del modelo).
 2. Posibilidad simple de extender la técnica de compensación de errores sistemáticos.
 3. Posibilidad simple de incorporar información externa en el ajuste, por ejemplo conocer los elementos de la orientación externa, observaciones de campo como longitudes y ángulos.
 4. Posibilidad de usar cámaras no convencionales y cámaras de aficionado que se pueden emplear en fotogrametría de objeto cercano.

4.7. Casos especiales del ajuste de un bloque de haces.

4.7.1. Resección espacial.

Por resección espacial se puede entender la determinación de los seis elementos de la orientación externa de una fotografía con al menos tres puntos de control (se asume que la orientación interna es conocida).

La teoría de la triangulación del ajuste del bloque abarca la resección espacial como un caso espacial. Las ecuaciones de observación son aplicadas, con los seis términos de la orientación externa:

$$v_{\xi} = \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_{0j}} \right)^0 \cdot dX_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y_{0j}} \right)^0 \cdot dY_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_{0j}} \right)^0 \cdot dZ_{0j} + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \omega_j} \right)^0 \cdot d\omega_j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial \varphi_j} \right)^0 \cdot d\varphi_j +$$

$$+ \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_{0j}} \right)^0 \cdot dZ_j + \left(\frac{\partial \xi}{\partial X_i} \right)^0 \cdot dX_i + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Y_i} \right)^0 \cdot dY_i + \left(\frac{\partial \xi}{\partial Z_i} \right)^0 \cdot dZ_i - (\xi_{\theta} - \xi_{\theta}^0)$$

$$v_{\eta} = \left(\frac{\partial \eta}{\partial X_{0j}} \right)^0 \cdot dX_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y_{0j}} \right)^0 \cdot dY_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Z_{0j}} \right)^0 \cdot dZ_{0j} + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \omega_j} \right)^0 \cdot d\omega_j + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \varphi_j} \right)^0 \cdot d\varphi_j +$$

$$+ \left(\frac{\partial \eta}{\partial Z_{0j}} \right)^0 \cdot dZ_j + \left(\frac{\partial \eta}{\partial X_i} \right)^0 \cdot dX_i + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Y_i} \right)^0 \cdot dY_i + \left(\frac{\partial \eta}{\partial Z_i} \right)^0 \cdot dZ_i - (\eta_{\theta} - \eta_{\theta}^0)$$

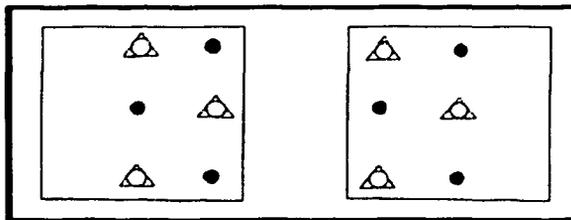
Los valores aproximados de los elementos requeridos en las ecuaciones de observación pueden ser tomados del plan de vuelo o deducidos mediante cálculos.

4.7.2. Orientación de un par de fotografías.

En este proceso se determina de manera computacional los 12 elementos de la orientación externa de un par de fotografías estereoscópicas por medio de puntos de control y puntos de paso. El método, es un caso especial del ajuste de un bloque de haces, es el más preciso de todos los métodos de orientación, este es el proceso normal de la fotogrametría analítica.

Las ecuaciones siguientes deben formarse con las dos fotografías. Cada punto de control produce dos ecuaciones de observación si está en un fotograma, y cuatro ecuaciones si está en los dos fotogramas. Cada nuevo punto produce además de ecuaciones de observación, tres valores desconocidos X , Y , Z .

Ejemplo del balance de observaciones e incógnitas, en el cual se tiene como valores iniciales dos fotografías con tres puntos de control y tres nuevos puntos.



Ejemplo con tres puntos conocidos y tres desconocidos.

- Observaciones: Fotograma 1: 12 coordenadas.
Fotograma 2: 12 coordenadas.

- Incógnitas: 6 rotaciones de los dos fotogramas.
6 coordenadas de los dos centros de proyección.
9 coordenadas X, Y, Z de los tres nuevos puntos.

Redundancia: $24 - 21 = 3$

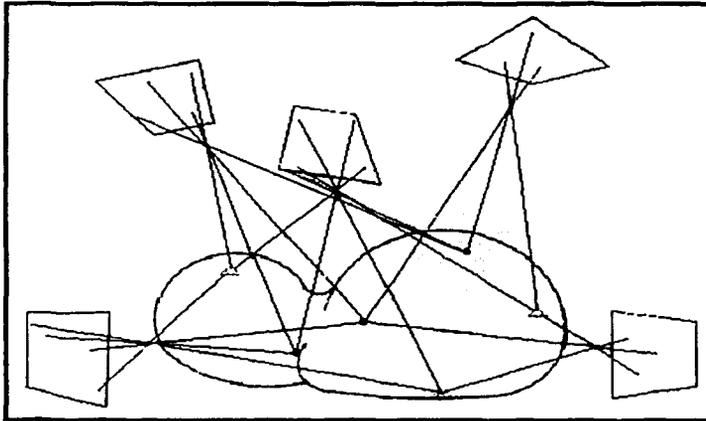
4.7.3. Intersección espacial.

Dando las cuatro coordenadas imagen de un punto en dos fotogramas con la orientación interna y externa conocida, se desea calcular las coordenadas objeto del puntos X, Y, Z . Para un nuevo punto se forman cuatro ecuaciones de observación y solo tres términos son usados en el sistema de ecuaciones que también fue empleado en el sistema de resección espacial, y estos son: dX, dY, dZ . Un sistema de ecuaciones normales con tres incógnitas tiene que ser resuelto por cada nuevo punto.

4.8. Ajuste de un bloque de haces en fotogrametría de objeto cercano.

El juego de fotografías para fotogrametría de objeto cercano son a menudo de diferente anchura de los ejemplos que se han visto hasta ahora, o sea 60 % de recubrimiento longitudinal y 20 % del transversal. En lugar de la fotogrametría de modelos estereoscópicos se dispone de la fotogrametría de haces de rayos o direcciones. Un registro fotográfico simultaneo de las direcciones de los haces espaciales de todos los puntos objeto visibles en las fotografías. Estas direcciones registradas son convertidas en formato digital mediante mediciones sobre las fotografías. Las mediciones son monoculares y los puntos objetos deberían estar señalizados o deberían al menos, consistir en detalles que son fácilmente identificables y medibles con precisión en las fotografías individuales.

Los haces de rayos de las fotografías individuales son anotados junto con los puntos de los objetos comunes como se muestra en la figura.



Red de haces fotogramétricos.

Las posiciones de las cámaras pueden ser las estaciones de topografía. La cámara a menudo se puede emplear situada encima de un trípode, tal que la orientación externa de los haces de los rayos es desconocida. Los criterios básicos de los fotogramas son: Los puntos de objetos individuales deben aparecer en al menos dos fotografías, mejor en tres, y los rayos no deben intersectar en ángulos estrechos, o sea tiene un ángulo agudo.

El ajuste por mínimos cuadrados para redes de haces fotogramétricos es realizado como un ajuste del bloque de haces como el descrito en apartados anteriores. Los valores desconocidos son los seis elementos de la orientación externa de cada fotografía y las tres coordenadas de cada nuevo punto. Algunos puntos de control son requeridos en los bordes de los objetos.

Las coordenadas de campo de las estaciones de las cámaras, o sea los centros de proyección pueden ser usadas como puntos de control. Un ajuste libre de la red sin puntos de referencias topográficas es también concebible, el ajuste requiere al menos una longitud conocida en el objeto. Nuevos puntos a lo largo del plano vertical o del plano horizontal pueden ser usados como control al ajuste.

La precisión del bloque debe estimarse por la regla de las ecuaciones:

- Planimetría: $\sigma_{x,y} : \pm 3$ micras en la medición del fotograma.
- Altitud: $\sigma_z : \pm 0.03 \text{ } ^0/\text{ }_{00}$ de la distancia al objeto (NA y WA).
 $\sigma_z : \pm 0.04 \text{ } ^0/\text{ }_{00}$ de la distancia al objeto (SWA).

Las condiciones necesarias son, sin embargo, que al menos dos rayos intersecten con un ángulo favorable en cada punto objeto y que el bloque entero esté bien observado por puntos de control. El parámetro decisivo de la precisión es la distancia entre la cámara y el objeto.

Ejemplo: Puntos señalizados en un objeto para ser medidos, la cámara tiene una focal de 20 cm. y una distancia de 5 m. desde la cámara al objeto. Se pretende calcular las precisiones esperadas en el trabajo.

- Planimetría, dirección perpendicular al eje de cámara:

$$\sigma_{x,y} : \pm 0.003 \cdot \left(\frac{5}{0.2} \right) = \pm 0.075 \text{ mm.}$$

- Altitud o profundidad: $\sigma_z : \pm 0.00003 \cdot 5000 = \pm 0.15 \text{ mm.}$

Los programas de ajustes deben incluir el cálculo de los errores mínimos cuadráticos de cada nuevo punto de la inversa de la matriz de ecuaciones normales. De este modo se puede detectar las intersecciones de los puntos objeto que son demasiado agudas tanto si hay un número suficiente número de rayos de intersección en un punto como si el número y disposición de los puntos de control son satisfactorias.

La fotogrametría por el método de haces rivaliza en trabajos de objeto cercano con los métodos geodésicos, especialmente para la medida de direcciones por medio de teodolitos. La precisión del ajuste de mediciones espaciales mediante teodolito es generalmente cotizado como un error de dirección. Es por tanto interesante para evaluar el error de dirección para haces



fotogramétrico. Se puede tener una aproximación mediante la medición del error de las coordenadas imagen, por la distancia principal o focal. Se puede asumir $3 \pm$ micras para error de las coordenadas imagen σ_r , la tabla siguiente esta basada en este supuesto y muestra las direcciones de error para varias cámaras de fotogrametría terrestre. La tabla también muestra los ángulos de las fotografías, que son definidas por el formato. La dirección de error σ_d varía, como función de la distancia principal, entre $\pm 6''$ y $\pm 42''$. La mayor precisión corresponde al más pequeño ángulo de campo de los haces.

Cámara	distancia principal c [mm]	Errores de dirección de rayos σ_d [mgon]	Formato [mm x mm]	Angulo de alimentación [gon x gon]
Jenoptik UMK	100	± 1.9	120 x 166	64 x 84
	200	± 0.9	120 x 166	34 x 47
	300	± 0.6	120 x 166	23 x 32
Wild P31	45	± 4.2	92 x 118	94 x 112
	100	± 1.9	84 x 118	44 x 62
	202	± 1.4	83 x 118	23 x 33
Wild P32	64	± 3.0	60 x 80	46 x 64

Error de dirección σ_d/S del ajuste fotogramétrico para un error de las coordenadas imagen $\sigma_r = \pm 3$ micras, junto con el ángulo de campo de los haces después de sustraer 5 mm. del borde del formato.

5. Bloque de aerotriangulación por método de modelos independientes. (Ampliación).

5.1. Introducción.

El bloque de aerotriangulación por modelos independientes consiste en que cada modelo estereoscópico individual es tomado como unidad, y las coordenadas del punto terreno (punto de enlace) resultante de cada modelo individual son combinados juntos para formar el total, por tanto el ajuste se realiza con el bloque entero. En el caso general de que ambas coordenadas planimétricas y altimétricas sean incluidas en esta clase de cálculo, entonces además de las coordenadas de los puntos terreno, las coordenadas espaciales de la posición de la cámara (centros de proyección) son también requeridas para formar el modelo individual. Para el ajuste conjunto del bloque, cada modelo unidad puede ser rotado, trasladado y cambiado el tamaño, pero las relaciones relativas las cuales conservan sus formas internas permanece invariables. Este tipo de modelo unidad puede ser realizado por un estereopar, o puede consistir en varios estereopares contiguos, es decir, dos, tres, cuatro o mas.

5.2. Transformación tridimensional de los modelos.

La fórmula básica en la aerotriangulación del bloque por modelos independientes es la expresada por la transformación tridimensional de un modelo.

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \lambda \cdot R \cdot \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_G \\ Y_G \\ Z_G \end{pmatrix}$$

Donde:

$(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$: Coordenadas fotogramétricas centralizadas de todos los puntos de enlace (incluido los dos centros de proyección) del modelo único. Cuando las coordenadas del centro de gravedad de un modelo son usadas para el cálculo, todos los puntos de enlace son usados (excepto los dos centros de proyección).

(X, Y, Z) : Son los valores ajustados de las coordenadas terreno de todos los puntos.

(X_G, Y_G, Z_G) : Son los valores de traslación del modelo. es decir las coordenadas terreno de los centros de gravedad del modelo.

λ : Factor de escala.

R : Matriz de rotación del modelo, la cual puede expresarse de la forma:

$$R = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2) & -c + \frac{1}{2}ab & b + \frac{1}{2}ac \\ c + \frac{1}{2}ab & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 + b^2 - c^2) & -a + \frac{1}{2}bc \\ -b + \frac{1}{2}ac & a + \frac{1}{2}bc & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 - b^2 + c^2) \end{pmatrix}$$

Ahora se van a introducir los valores aproximados de los valores que se quieren determinar (representados por el subíndice 0) y las correcciones (representadas por el símbolo Δ). El valor de λ puede escribirse como:

$$\lambda = (1 + \Delta\lambda)\lambda_0 = \lambda_0 + \Delta\lambda \cdot \lambda_0$$

Escrito en la forma de las ecuaciones de error:

$$-\begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{pmatrix} = (\lambda_0 + \Delta\lambda \cdot \lambda_0)(\Delta R \cdot R_0) \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_G^0 + \Delta X_G \\ Y_G^0 + \Delta Y_G \\ Z_G^0 + \Delta Z_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}$$

La matriz de rotación anterior se puede tomar de manera aproximada como:

$$\Delta R = \begin{pmatrix} 1 & -\Delta c & \Delta b \\ \Delta c & 1 & -\Delta a \\ -\Delta b & \Delta a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\Delta c & \Delta b \\ \Delta c & 0 & -\Delta a \\ -\Delta b & \Delta a & 0 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la anterior expresión:

$$\begin{aligned}
-\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} &= \lambda_0 \Delta R R_0 \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} + \Delta \lambda \cdot \lambda_0 R_0 \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} X_0^* \\ Y_0^* \\ Z_0^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} \right) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\Delta c & \Delta b \\ \Delta c & 0 & -\Delta a \\ -\Delta b & \Delta a & 0 \end{bmatrix} (\lambda_0 R_0) \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} + \Delta \lambda (\lambda_0 R_0) \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} \\
&\quad + \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + \lambda_0 R_0 \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0^* \\ Y_0^* \\ Z_0^* \end{bmatrix} \\
-\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \Delta \lambda & -\Delta c & \Delta b \\ \Delta c & \Delta \lambda & -\Delta a \\ -\Delta b & \Delta a & \Delta \lambda \end{bmatrix} \lambda_0 R_0 \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix} - \lambda_0 R_0 \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_0^* \\ Y_0^* \\ Z_0^* \end{pmatrix} \right)$$

Las ecuaciones anteriores son convenientes para los puntos de enlace. Con respecto a los puntos de control $(\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z)^T = 0$. Cuando los puntos de control no están exentos de error entonces $(\Delta X \ \Delta Y \ \Delta Z)$ debe permanecer en el cálculo.

La ecuación obtenida anteriormente:

$$-\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \lambda & -\Delta c & \Delta b \\ \Delta c & \Delta \lambda & -\Delta a \\ -\Delta b & \Delta a & \Delta \lambda \end{bmatrix} \lambda_0 R_0 \begin{bmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{bmatrix}$$

Puede escribirse como:

$$-\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{Z} & -\bar{Y} & \bar{X} & | & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{Z} & 0 & \bar{X} & \bar{Y} & | & 0 & 1 & 0 \\ \bar{Y} & -\bar{X} & 0 & \bar{Z} & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta c \\ \Delta \lambda \\ \Delta X_0 \\ \Delta Y_0 \\ \Delta Z_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$$

Por cada punto de enlace de cada modelo, se puede escribir las ecuaciones anteriores, y entonces se forman las ecuaciones normales. Se puede primero eliminar uno de los dos juegos de valores a ser determinados, por ejemplo los parámetros de la orientación por un lado $(\Delta a, \Delta b, \Delta c, \Delta \lambda, \Delta \bar{X}_G, \Delta \bar{Y}_G, \Delta \bar{Z}_G)$ y las coordenadas terreno a ser determinadas por otro lado $(\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$.

5.3. Separación del cálculo de planimetría y altimetría.

En orden a economizar el cálculo y atender a las diferentes necesidades en planimetría y altimetría, generalmente la parte planimétrica y la parte altimétrica pueden ser calculadas por repetidas iteraciones en el ajuste del bloque por modelos independientes de aerotriangulación.

Reordenando la última expresión del apartado anterior, queda:

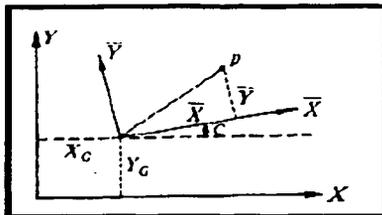
$$-\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 & 0 & \bar{Z} & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 & -\bar{Z} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z} & 0 & 0 & \bar{Y} & \bar{X} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c \\ \Delta \lambda \\ \Delta X_G \\ \Delta Y_G \\ \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta Z_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta Y \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$$

De las ecuaciones anteriores se puede anotar que la matriz de rotación está dividida por una línea de puntos, y en el caso de $\bar{Z} = 0$, entonces el cálculo de las cuatro incógnitas planimétricas $(\Delta c, \Delta \lambda, \Delta X_G, \Delta Y_G)$ pueden separarse del cálculo de las tres incógnitas altimétricas $(\Delta a, \Delta b, \Delta Z_G)$. Aunque los valores de \bar{Z} son generalmente pequeños, no son cero, por tanto la separación de la planimetría de la altimetría es aproximada.

El proceso cíclico de planimetría-altimetría es necesario. Cada vez que se calcula la planimetría sus coordenadas planimétricas son corregidas, y entonces corrige la altimetría de acuerdo con el factor de escala.

5.3.1. Cálculo planimétrico.

No es necesario emplear la proyección central en el cálculo planimétrico. Porque ello mismo es un sistema lineal, no es necesario introducir valores aproximados de todos los parámetros que se pretenden determinar.



Transformación planimétrica.

Transformemos las coordenadas de un punto p , en el sistema de coordenadas $\bar{X} \bar{Y}$ en su correspondiente sistema de coordenadas XY por medio de la traslación \bar{X}_G, \bar{Y}_G , rotando a través del ángulo c , y aplicando el factor de escala λ . Las ecuaciones de transformación son:

$$\begin{aligned} X &= \lambda \cdot \text{cosec} \cdot \bar{X} - \lambda \cdot \text{senc} \cdot \bar{Y} + X_G \\ Y &= \lambda \cdot \text{senc} \cdot \bar{X} + \lambda \cdot \text{cosec} \cdot \bar{Y} + Y_G \end{aligned}$$

Haciendo:

$$\begin{aligned} r &= \lambda \cdot \text{cosec} \\ s &= \lambda \cdot \text{senc} \end{aligned}$$

Entonces:

$$-\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \\ X_G \\ Y_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Esto puede ser usado como sustitución de las correspondientes partes en la ecuación:

$$-\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 & 0 & \bar{Z} & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 - \bar{Z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z} & 0 & 0 & \bar{Y} & \bar{X} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta c \\ \Delta \lambda \\ \Delta X_G \\ \Delta Y_G \\ \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta Z_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \\ l_z \end{pmatrix}$$

Quedando para los puntos de paso:

$$-\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \\ X_G \\ Y_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

La cual puede ser expresada en la forma matricial como:

$$-v = A \cdot I - X + 0$$

Y para los puntos de control:

$$-\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \\ X_G \\ Y_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix}$$

$$-v = A \cdot I - I$$

Cuando las coordenadas de los puntos de control se consideran que tienen errores, entonces se tienen los dos juegos siguientes de ecuaciones con respecto a los puntos de control planimétricos:

$$-\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \\ X_G \\ Y_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + 0 \quad \text{Peso de 1.}$$

Siendo:

$$\lambda : \sqrt{r^2 + s^2}$$

$$\text{tagc} : \frac{\Delta}{r}$$

5.3.2. Cálculo altimétrico.

De la ecuación:

$$-\begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \\ v_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 & 0 & \bar{Z} & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 & -\bar{Z} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{Z} & 0 & 0 & \bar{Y} & \bar{X} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta \lambda \\ \Delta X_G \\ \Delta Y_G \\ \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta Z_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} l_X \\ l_Y \\ l_Z \end{pmatrix}$$

Se puede obtener aproximadamente:

$$-v_Z = (\bar{Y} - \bar{X} \cdot 1) \begin{pmatrix} \Delta a \\ \Delta b \\ \Delta Z_G \end{pmatrix} - \Delta Z - l_Z$$

El término l_Z puede ser calculado por la siguiente ecuación:

$$l_Z = Z_n - \lambda_n \bar{Z} - Z_G''$$

Donde λ_n está resuelta en la parte planimétrica. Con respecto a los puntos de control, $\Delta Z = 0$ en la ecuación anterior.

En el cálculo altimétrico, los centros de proyección deben ser usados como puntos de paso, y \bar{Z} no puede ser abandonado. Por lo tanto, se tienen las siguientes ecuaciones de error con respecto a los centros de proyección:

$$\begin{aligned} -v_X &= +\bar{Z} \cdot \Delta b & -\Delta X & & -l_X \\ -v_Y &= -\bar{Z} \cdot \Delta a & & -\Delta Y & -l_Y \\ -v_Z &= +\bar{Y} \cdot \Delta a - \bar{X} \cdot \Delta b + \Delta Z_G & & & -\Delta Z - l_Z \end{aligned}$$

Donde las coordenadas centralizadas (\bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z}) deberían ser corregidas con los parámetros r , s , X_G , Y_G .

5.3.3. Resumen de las ecuaciones de error.

Con respecto a las observaciones de cada punto, todas las ecuaciones de error de los diferentes métodos de ajuste pueden ser resumidas como:

$$-v_i = A_i l - E X - l_i$$

Donde con respecto a los cálculos planimétricos, hay:

puntos atados

$$A_1 = \begin{bmatrix} -f & X & 1 & 0 \\ X & Y & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \quad t = 0$$

puntos de control

$$A_2 = \begin{bmatrix} -f & X & 1 & 0 \\ X & Y & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}$$

Con respecto a los cálculos altimétricos, hay:

puntos generales atados

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -X & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}, \quad E = 1, \quad x = h_2, \quad t = h_3$$

puntos de control

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -X & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}, \quad E = 1, \quad x = 0, \quad t = h_3$$

control de proyección

$$A = \begin{bmatrix} 0 & +Z & 0 \\ -Z & 0 & 0 \\ 0 & -X & 1 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} -h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}, \quad t = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

5.3.4. Proceso de cálculo.

El proceso es el siguiente:

1. Resolver las coordenadas fotogramétricas centralizadas (\bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z}) de los puntos de enlace y puntos de control en todos los modelos independientes y los valores aproximados

(X_0^* , Y_0^* , Z_0^*) de las coordenadas terreno de sus centros de gravedad. Estas coordenadas han sido calculadas en un único sistema de coordenadas terreno. Cada modelo ha sido nivelado de manera aproximada y escala unificada (factor de escala aproximada a 1). La estación de la cámara (centros de proyección) deben ser introducidos en el ajuste altimétrico como puntos de enlace, pero dejándoles fuera en el cálculo de coordenadas de los centros de gravedad de los modelos individuales.

2. Realizar el ajuste de la parte planimétrica (en la cual los valores aproximados no necesitan ser introducidos), y resolver las coordenadas terreno de todos los puntos de enlace (X, Y).

$$-\begin{pmatrix} v_X \\ v_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \\ X_G \\ Y_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

3. Realizar el ajuste de la parte altimétrica. De forma, que se asigna $a_0 = 0$ $b_0 = 0$ como valores aproximados, y entonces calcular el término constante l_z de las ecuaciones de error siguiendo la ecuación:

$$l_z = Z_0 - \lambda_0 \bar{Z} - Z_G^0$$

Para los puntos de control, coger sus valores conocidos Z_c por Z_0 , mientras que para los puntos de paso, el valor de la altura media de sus modelos independientes son tomados como Z_0 en el primer cálculo. Para λ_0 , el valor del cálculo de la parte planimétrica es tomado de $\lambda : \sqrt{r^2 + s^2}$. Para cada centro de proyección izquierdo y derecho, los errores de las ecuaciones es obtenido de:

$$\begin{aligned} -v_X &= +\bar{Z} \cdot \Delta b & -\Delta X & & -l_X \\ -v_Y &= -\bar{Z} \cdot \Delta a & & -\Delta Y & -l_Y \\ -v_Z &= +\bar{Y} \cdot \Delta a - \bar{X} \cdot \Delta b + \Delta Z_G & & -\Delta Z & -l_Z \end{aligned}$$

A continuación las ecuaciones normales son desarrolladas. Con la solución se obtienen los parámetros Δa , Δb , ΔZ_G de todos los modelos independientes. Se tienen las correcciones a las coordenadas terreno, las cuales son ΔZ con respecto a los puntos de paso, y ΔX , ΔY , ΔZ con respecto a los centros de proyección fotográficos.

4. En este paso se obtiene:

- Los parámetros de cada modelo:

$$\lambda = \sqrt{r^2 + s^2} \quad c = \arctg \frac{s}{r} \quad a_0 + \Delta a = a \quad b_0 + \Delta b = b$$

- Las coordenadas terreno de los centros de gravedad de cada modelo:

$$X_G, Y_G, Z_G^0 + \Delta Z_G = Z_G$$

- Las coordenadas terreno de cada punto son determinadas:

$$X, Y, Z_0 + \Delta Z = Z$$

Y las coordenadas de cada centro de proyección:

$$X_0 + \Delta X = X, Y_0 + \Delta Y = Y, Z_0 + \Delta Z = Z$$

- Llevarlo a una transformación tridimensional:

$$\lambda \cdot R \cdot \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix}$$

Con respecto a las coordenadas centralizadas $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$. Debe emplearse como matriz de rotación:

$$R = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{4}(a^2 - b^2 - c^2) & -c + \frac{1}{2}ab & b + \frac{1}{2}ac \\ c + \frac{1}{2}ab & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 + b^2 - c^2) & -a + \frac{1}{2}bc \\ -b + \frac{1}{2}ac & a + \frac{1}{2}bc & 1 + \frac{1}{4}(-a^2 - b^2 + c^2) \end{pmatrix}$$

Los valores después de la transformación son $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$.

5. Se considera todos los parámetros y coordenadas obtenidas como los nuevos valores aproximados, y se repiten los pasos de manera iterativa en planimetría y en altimetría hasta que las correcciones de los parámetros sean insignificantes. Generalmente, hay cinco iteraciones incluso más.

5.4. Proceso de cálculo planimétrico de bloque de aerotriangulación.

Ahora se representa con más detalle el proceso de cálculo de la aerotriangulación de un bloque planimétrico por modelos independientes. La descripción de este párrafo puede ser vista como una parte del método de modelos independientes con el cálculo separado de planimetría y altimetría, o como una escena de densificación planimétrica independiente.

Referida la ecuación:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \\ X_G \\ Y_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

Con respecto a la forma unificada de las ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \\ X_G \\ Y_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s \\ r \\ X_G \\ Y_G \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix}$$

Queda la expresión:

$$-v = AX + BX - l = (A \mid B) \begin{pmatrix} l \\ X \end{pmatrix} - l$$

Donde para los puntos de paso:

$$v: \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$(A \mid B): \begin{pmatrix} -\bar{Y} & \bar{X} & 1 & 0 & | & -1 \\ \bar{X} & \bar{Y} & 0 & 1 & | & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} l \\ X \end{pmatrix}: \begin{pmatrix} s \\ r \\ X_G \\ Y_G \\ \hline X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$l: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para los puntos de control:

$$X: 0$$

$$l: \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \end{pmatrix}$$

Las referidas ecuaciones normales son:

$$\left(\begin{array}{cc|c} A^T P A & A^T P B & l \\ B^T P A & B^T P B & X \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} A^T P l \\ B^T P l \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} N_{11} & N_{12} & l \\ N_{12}^T & N_{22} & X \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \end{array} \right)$$

Se puede eliminar uno de los dos juegos de incógnitas (t , X) y obtener las ecuaciones normales reducidas:

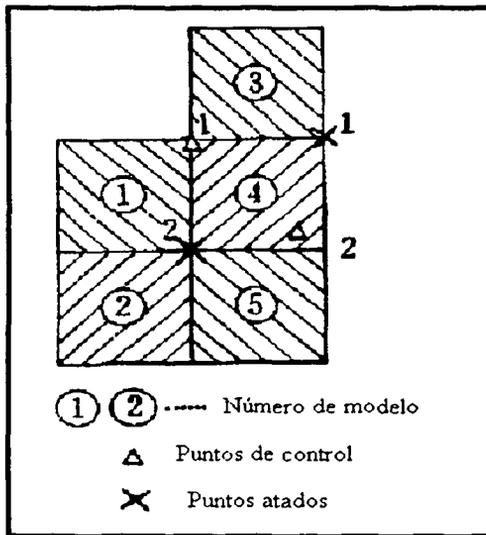
$$\begin{aligned} (N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{12}^T) \cdot t &= (u_1 - N_{12} N_{22}^{-1} u_2) \\ (N_{22} - N_{12}^T N_{11}^{-1} N_{12}) \cdot X &= (u_2 - N_{12}^T N_{11}^{-1} u_1) \end{aligned}$$

Cuando las incógnitas eliminadas son t , entonces se puede obtener sus correspondientes valores usando los puntos conocidos (incluyendo los nuevos puntos) para orientar todos los modelos. Cuando las incógnitas eliminadas son X , entonces se obtienen sus valores a través de las transformaciones de puntos y tomando sus valores medios de las múltiples determinaciones de coordenadas.

Generalmente el número de puntos de paso es mayor que el número de modelos, y por tanto hay más valores de incógnitas de X que de t . A menudo se elimina las incógnitas X y se resuelven los parámetros de transformación por el uso de:

$$(N_{11} - N_{12} N_{22}^{-1} N_{12}^T) \cdot t = (u_1 - N_{12} N_{22}^{-1} u_2)$$

Supongamos que hay una escena de la distribución de puntos siguiente:



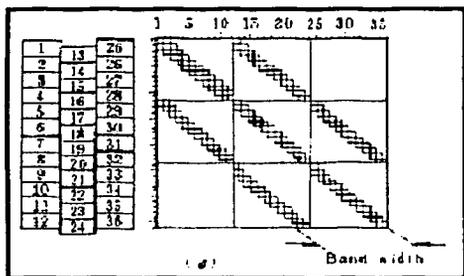
Ejemplo.

Las coordenadas de los puntos de control están consideradas como libres de error, y las ecuaciones de error son (con el sufijo C representamos los puntos de control, el primer número del subíndice representa el número de modelo, y el segundo número el número de punto):

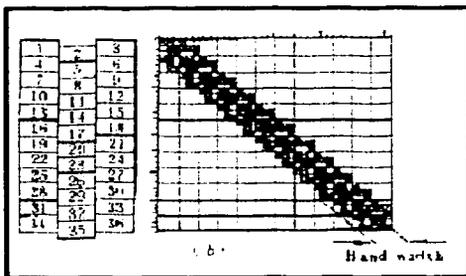
5.5. Análisis general de la estructura de ecuaciones normales. [Wa: 89]

En el cálculo del bloque de aerotriangulación, la estructura de las ecuaciones normales tiene algunas características comunes para diferentes modos de construir los bloques. Se toma el ajuste de los bloques planimétricos con modelos independientes como un ejemplo para ilustrar las características de la estructura de sus ecuaciones normales.

Se supone que hay N pasadas en un bloque, con cada pasada hay n modelos, y el número de puntos de densificación en el ajuste es de m . En cada modelo hay cuatro parámetros de transformación, hay $4 \cdot n \cdot N$ parámetros de transformación en total, y el número de coordenadas desconocidas es de $m \cdot 2$. Por tanto, el número total de incógnitas de las ecuaciones normales es de $(4 \cdot n \cdot N + 2 \cdot m)$. Cogemos un bloque consistente en 36 modelos individuales (3 pasadas con 12 modelos cada una). La estructura de las ecuaciones normales reducidas después de la eliminación de las coordenadas desconocidas es:



a. Modelos numerados en la dirección del vuelo.



b. Numeración modelos perpendicular al vuelo

Las matrices de coeficientes del bloque planimétrico de los parámetros de transformación ($T = s r X_G Y_G$) formado por los modelos en los dos casos están ambas bandas determinadas, pero con diferente ancho de banda. El ancho de banda es un término que se refiere al número de parámetros entre la diagonal y el parámetro más lejano de la banda. En el caso del bloque planimétrico por modelos independientes, cada pequeño cuadrado contiene cuatro parámetros a ser determinados. Es aparente que si no hay puntos de paso para conectar dos modelos, el correspondiente cuadrado está en blanco. Cuando los modelos son numerados en dirección del vuelo, el ancho de banda es $P = 4 \cdot (n + 2)$, en donde n es el número de modelos que contiene una pasada, como en nuestro caso $n = 12$, el ancho de banda es de $P = 4 \cdot 14 = 56$. Si el número de modelos de las pasadas es diferente, el mayor número es tomado para n . En el caso que los modelos sean numerados en dirección perpendicular a la dirección de vuelo, entonces el ancho de banda es de $P = 4 \cdot (N + 2)$, donde N es el número total de pasadas. En nuestro caso, para $N = 3$, el ancho de banda es de $P = 4 \cdot (3 + 2) = 20$.

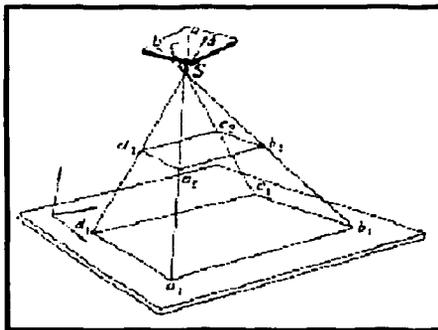
El ancho de banda de la matriz de los coeficientes de las ecuaciones normales tiene una directa muestra en la cantidad de carga de trabajo de ordenador necesaria para resolver las ecuaciones normales. Cuanto más estrecho sea el ancho de banda, mayor ventaja para el cálculo. Por tanto, se debe escoger el modo más propicio para numerar los modelos. Cuando el número de pasadas es más pequeño que el número de modelos de cada pasada, los modelos deben ser

numerados en dirección perpendicular a la dirección de vuelo, en otra situación la dirección paralela a la dirección de vuelo debe ser adoptada.

5.6. Determinación de coordenadas espaciales de los centros de proyección.

En el cálculo se necesita conocer las coordenadas modelo de las dos posiciones de la cámara en cada modelo, por tanto hay el problema de determinar las coordenadas espaciales de los centros de proyección en el restituitor.

Un método para determinar la posición es colocar una placa con marcas en el proyector del restituitor. Cuando se midan las coordenadas modelo (X, Y, Z) de tres marcas monocularmente, y se resuelva para las coordenadas espaciales de los centros de proyección por medio de una simple resección espacial.



Determinación del centro de proyección.

Otro método pone la fotografía en el proyector en lugar de una placa con marcas. Las coordenadas modelo (X, Y) de varios puntos imagen son desplazados una cierta magnitud Z . Los mismos puntos son leídos en la nueva altura, realizándose las lecturas de forma monocular. Los dos puntos del rayo espacial generan las ecuaciones:

$$\frac{X_S - X_{a1}}{X_{a2} - X_{a1}} = \frac{Y_S - Y_{a1}}{Y_{a2} - Y_{a1}} = \frac{Z_S - Z_{a1}}{Z_{a2} - Z_{a1}}$$

También se puede escribir:

$$\begin{aligned} X_S(Z_2 - Z_1)_i - Z_S(X_2 - X_1)_i &= -(X_2Z_1 - X_1Z_2)_i \\ Y_S(Z_2 - Z_1)_i - Z_S(Y_2 - Y_1)_i &= -(Y_2Z_1 - Y_1Z_2)_i \end{aligned}$$

Donde:

i : Representa cada punto a, b, c, d .

(X_S, Y_S, Z_S) : Coordenadas modelo del centro de proyección S .

$(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2)$:Coordenadas modelo para un cierto punto a un determinado valor de Z y en otro valor.

La ventaja de este método es que no es necesaria una placa con señales y el procesado es simple.

6. Ajuste de un bloque de haces. (Ampliación).

Un problema del ajuste de un bloque por haces es la determinación de las aproximaciones iniciales de las incógnitas y es útil para ir con más detalle a la solución eficiente de un largo sistema de ecuaciones. También se analizará en esta sección las precisiones y los parámetros adicionales

6.1. Aproximaciones iniciales.

Para fotogrametría aérea con ejes aproximadamente verticales, se puede considerar que las inclinaciones de la fotografía $\omega = \phi = 0$. La aproximación de $X^0 = 0$, la cual puede ser asumida como constante para todas las fotografías de pasadas paralelas, puede ser tomada de los registros de planeamiento de vuelo o de la vista de todas las fotografías obtenidas después de conclusión de la misión de vuelo. La aproximación inicial de la matriz de rotación para los fotogramas es:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \chi^0 & -\operatorname{sen} \chi^0 & 0 \\ \operatorname{sen} \chi^0 & \cos \chi^0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Las coordenadas aproximadas (X^0, Y^0, Z^0) de los centros de proyección y las coordenadas aproximadas (X^0, Y^0, Z^0) de los nuevos puntos pueden ser obtenidos con la ayuda de la matriz de rotación anterior aplicada a la condición de colinealidad:

$$x = x_0 - c \cdot \frac{r_{11} \cdot (X - X_0) + r_{21} \cdot (Y - Y_0) + r_{31} \cdot (Z - Z_0)}{r_{13} \cdot (X - X_0) + r_{23} \cdot (Y - Y_0) + r_{33} \cdot (Z - Z_0)}$$

$$y = y_0 - c \cdot \frac{r_{12} \cdot (X - X_0) + r_{22} \cdot (Y - Y_0) + r_{32} \cdot (Z - Z_0)}{r_{13} \cdot (X - X_0) + r_{23} \cdot (Y - Y_0) + r_{33} \cdot (Z - Z_0)}$$

Para el sistema de coordenadas en el que el punto principal tiene de coordenadas: $x_0 = y_0 = 0$:

$$(c \cdot r_{11} + x \cdot r_{13}) \cdot X_0 + (c \cdot r_{21} + x \cdot r_{23}) \cdot Y_0 + (c \cdot r_{31} + x \cdot r_{33}) \cdot Z_0 - (c \cdot r_{11} + x \cdot r_{13}) \cdot X -$$

$$(c \cdot r_{21} + x \cdot r_{23}) \cdot Y - (c \cdot r_{31} + x \cdot r_{33}) \cdot Z = 0$$

$$(c \cdot r_{12} + y \cdot r_{13}) \cdot X_0 + (c \cdot r_{22} + y \cdot r_{23}) \cdot Y_0 + (c \cdot r_{32} + y \cdot r_{33}) \cdot Z_0 - (c \cdot r_{12} + y \cdot r_{13}) \cdot X -$$

$$(c \cdot r_{22} + y \cdot r_{23}) \cdot Y - (c \cdot r_{32} + y \cdot r_{33}) \cdot Z = 0$$

Con los condicionantes impuestos anteriormente, la expresión anterior que da simplificada de la siguiente manera:

$$c \cdot \cos \chi^0 \cdot X_0^0 + c \cdot \operatorname{sen} \chi^0 \cdot Y_0^0 + x \cdot Z_0^0 - c \cdot \cos \chi^0 \cdot X^0 - c \cdot \operatorname{sen} \chi^0 \cdot Y^0 - x \cdot Z^0 = 0$$

$$-c \cdot \operatorname{sen} \chi^0 \cdot X_0^0 + c \cdot \cos \chi^0 \cdot Y_0^0 + y \cdot Z_0^0 + c \cdot \operatorname{sen} \chi^0 \cdot X^0 - c \cdot \cos \chi^0 \cdot Y^0 - y \cdot Z^0 = 0$$

Para cada punto imagen medido se obtienen dos ecuaciones como estas. Las incógnitas son: X^0 , Y^0 , Z^0 , X^e , Y^e , Z^e . Si un punto de la imagen corresponde a un punto fijo.

En un bloque de fotografías aéreas hay más ecuaciones que incógnitas y se realiza un ajuste por mínimos cuadrados con los sistemas de ecuaciones anteriores, y en este caso es un sistema de ecuaciones lineales.

Una segunda posibilidad para establecer aproximaciones iniciales para un ajuste de un bloque de haces consiste en la computación previa de un ajuste alternativo de planimetría y altimetría con modelos independientes.

6.2. Solución de las ecuaciones normales.

Un ajuste del bloque de haces produce un sistema de ecuaciones normales con la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{12}^T & N_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}$$

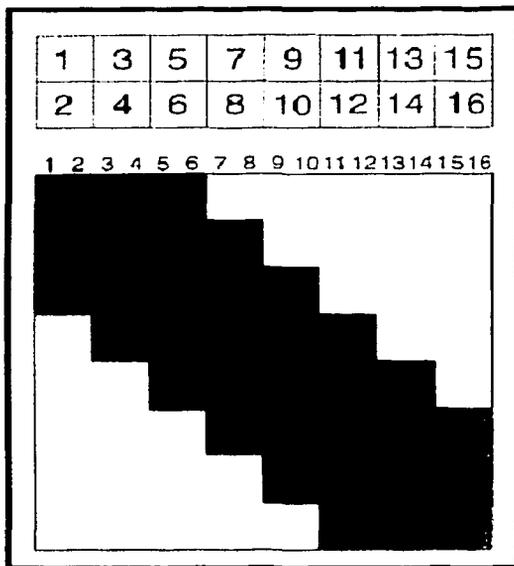
Los términos x_1 son los elementos incógnitas de la orientación externa de las fotografías, y los x_2 son las coordenadas incógnitas de los nuevos puntos. La parte superior izquierda N_{11} es una matriz hiperdiagonal con submatrices cada 6x6 elementos, correspondiendo a los 6 elementos desconocidos de la orientación externa de cada fotografía. La parte inferior derecha N_{22} es una matriz hiperdiagonal con submatrices cada 3x3 elementos, correspondiendo a las 3 coordenadas incógnitas de cada nuevo punto.

La inversión de una matriz hiperdiagonal es particularmente simple: Cada submatriz puede individualmente e independientemente invertirse. Se puede obtener sin demasiado esfuerzo, un sistema de ecuaciones normales eliminando las coordenadas x_2 de los nuevos puntos:

$$(N_{11} - N_{12} \cdot N_{22}^{-1} \cdot N_{12}^T) \cdot x_1 = n_1 - N_{12} \cdot N_{22}^{-1} \cdot n_2$$

Para un bloque grande, esta eliminación del sistema de ecuaciones normales puede ser solamente resolverse con un esfuerzo de cálculo grande y capacidad de almacenamiento. A continuación se muestran dos métodos para reducir este esfuerzo. Ambos métodos son altamente convenientes para bloques de fotografías con pasadas paralelas.

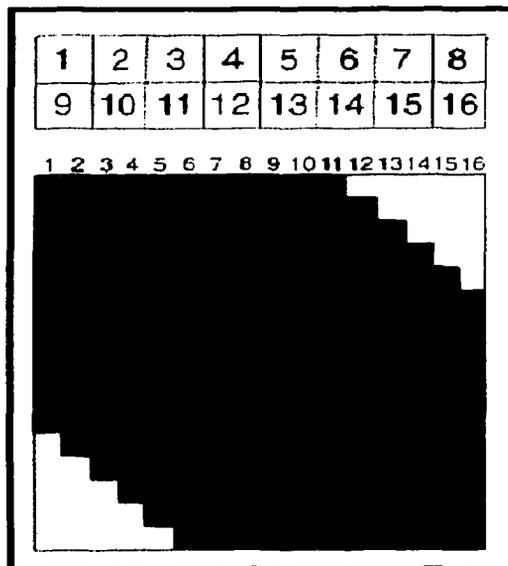
6.2.1. Con una matriz de banda.



Numeración del bloque y ancho de banda. Numeración perpendicular a la pasada.

En este caso, los elementos nulos en la reducción del sistema de ecuaciones normales del apartado anterior debe ser organizado tal que pueden ser ignorados en la solución de las ecuaciones. Los elementos que no son cero forman una matriz con banda. Para un bloque de 2×8 , o sea 16 fotogramas, se obtiene una matriz de ecuaciones normales un ancho de banda de 36 incógnitas, o sea 6 fotogramas por 6 elementos de la orientación externa de cada fotograma. Si se asume un recubrimiento longitudinal de 60 % y transversal del 25% y la numeración de las fotografías perpendicular a la dirección de vuelo.

Si se numeran los fotogramas a lo largo de las pasadas, el ancho de banda será de 66 incógnitas.



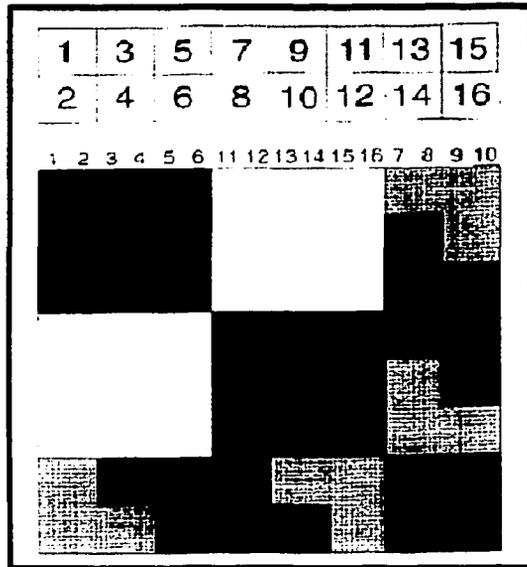
Numeración del bloque y ancho de banda. Numeración a lo largo de la pasada.

6.2.2. Con una matriz hiperdiagonal de borde.

Con este procedimiento se intenta ordenar las incógnitas de modo que se reduce el sistema de ecuaciones normales haciendo una matriz hiperdiagonal de submatrices. Esto no es posible, sin embargo, para realizar una matriz hiperdiagonal pura. Esto queda en suma ocupado muy fuerte de bordes de filas y columnas. El método de solución con una matriz hiperdiagonal de borde es más favorable para un bloque cuadrado que el método mostrado con una matriz de banda. Se muestra un ejemplo con dos pasadas, de forma que los elementos desconocidos de la orientación externa de los fotogramas 1 a 6 son primero ordenados para empezar el sistema de ecuaciones normales:

$$(N_{11} - N_{12} \cdot N_{22}^{-1} \cdot N_{12}^T) \cdot X_1 = u_1 - N_{12} \cdot N_{22}^{-1} \cdot u_2$$

Siguen los elementos desconocidos de la orientación externa de los fotogramas que no tienen puntos comunes con los fotogramas 5 y 6, esto es el caso de los fotogramas 11 a 16. Los elementos desconocidos de la orientación externa de las fotografías que pertenecen a ambos grupos, o sea de 7 a 10, son llevadas a los bordes del sistema de ecuaciones normales. En la siguiente figura se observa el arreglo de borde de la matriz hiperdiagonal.



Formación del bloque y matriz hiperdiagonal de borde.

6.3. Apuntes sobre la precisión.

Tanto las precisiones de un ajuste por modelos independientes como el de bloque de haces siguen la misma norma. La norma esta basada en la precisión de un simple modelo, y la precisión para puntos señalizados en un ajuste de haces es:

- Planimetría: $\sigma_{x,y} = \pm 3$ micras por numero de la escala de la imagen m .
- Altimetría: $\sigma_z = \pm .003 \text{ } ^\circ / \text{m}$ S de la distancia al objeto (NA - WA)
 $= \pm .004 \text{ } ^\circ / \text{m}$ de la distancia al objeto (SWA)

A continuación se muestran las razones para dar dos veces mayor precisión al ajuste de haces comparado con el ajuste por modelos independientes, haciendo las mismas medidas de los puntos de control.

Las precisiones pueden determinarse teóricamente (por medio de la ley general de propagación de errores) o empíricamente. Las figuras empíricas de precisión son obtenidas de la comparación de las coordenadas de un ejercicio práctico en la medida de puntos fotogramétricos con eso se puede chequear las mediciones más significativas. Muchas precisiones empíricas es resultado de contener todas los errores influyentes y son particularmente apreciados por los fotogrametristas. Sin embargo, tienen la desventaja que las influencias accidentales son inherentes en cada experimento individual. Las precisiones teóricas, por otro lado, tienen la desventaja que generalmente no pueden reflejar todos los aspectos del mundo real. Se muestra a continuación los resultados representativos de un estudio empírico de las precisiones deducido por Ackermann.

Un área para la realización del test con puntos señalizados en 47 modelos fueron fotografiados con una cámara Zeiss. Las coordenadas de campo de los puntos señalizados fueron conocidos con una precisión de ± 1 cm. Las coordenadas imagen fueron medidas en un comparador.

6.3.1. Precisiones empíricas en una orientación relativa y absoluta de los modelos.

Los primeros datos son los obtenidos con el estudio empírico que representa un modelo simple después de la orientación relativa y absoluta con cuatro puntos de control en las esquinas del modelo. Esos valores pueden ser tomados como representativos para el modelo simple y formar la base para la precisión estimada para el ajuste de un bloque de modelos independientes. Los siguientes coordenadas de errores medio cuadráticos en una orientación del modelo relativa y absoluta fue obtenida para un gran número de diferencias entre las coordenadas medidas y observadas:

$$\sigma_x = \pm 5.1 \text{ micras por la escala de la foto.}$$

$$\sigma_y = \pm 7.7 \text{ micras por la escala de la foto.}$$

$$\sigma_z = \pm 0.061 \text{ } ^\circ/_{00} \text{ de la altura de vuelo o distancia principal.}$$

Las siguientes conclusiones pueden ser dibujadas se estos y otros estudios empíricos de precisión:

- Las coordenadas Y son menos precisas que las coordenadas X . Puesto que los errores en planimetría son más o menos radiales del centro del modelo y la extensión del modelo en el eje Y es mayor que en el eje X , por ello las coordenadas Y tienden a tener mayor error.

- Una estimación grosera del error medio cuadrático de una coordenada X, Y en un simple modelo es $\sigma_{x,y} = \pm 6$ micras veces la escala de la fotografía, como se muestra en:

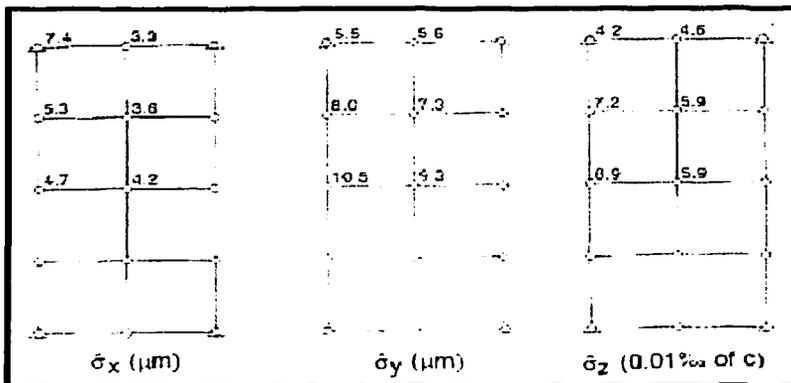
Planimetría: $\sigma_{x,y} : \pm 6$ micras en la medición del fotograma.

Altitud: $\sigma_z : \pm 0.06 \text{ } ^\circ/_{00}$ de la distancia al objeto (NA y WA).

$$\sigma_z : \pm 0.08 \text{ } ^\circ/_{00} \text{ de la distancia al objeto (SWA).}$$

- De manera similar la estimación grosera de errores medio cuadráticos en altura en un simple modelo es $\sigma_z : \pm 0.06 \text{ } ^\circ/_{00}$ de la altura de vuelo.

La distribución de los errores dentro de un modelo simple es interesante, porque de la simetría de la estructura de errores sobre ambos ejes, es suficiente para mostrar una cuarta parte del modelo, seis puntos representativos son mostrados dentro de este cuarto de modelo:



Error medio cuadrático empírico después de la orientación relativa y absoluta (en micras en el fotograma).

Los errores dentro de un simple modelo varían por dos factores, correspondiendo a cuatro factores si tenemos en cuenta los pesos. Estas diferencias pueden ser explicadas, entre otras por dos causas opuestas. Por un lado, la fotogrametría puede ser considerada como un método de interpolación de nuevos puntos de los puntos dados de control, de acuerdo con este principio los errores de un nuevo punto deben incrementarse con la distancia a los puntos de control. Por otra parte, la disminución de la resolución de las fotografías deben incrementar el error hacia el borde de los fotogramas, de acuerdo con este principio, el error debe crecer en los bordes del modelo.

6.3.2. Precisión empírica para la orientación común de un par estereoscópico de fotografías, con y sin parámetros adicionales.

Numerosas deferencias entre valores medidos y conocidos dan los siguientes errores medio cuadráticos de la orientación común de un par estereoscópico de fotografías:

$$\sigma_x = \pm 4.7 \text{ micras por la escala de la foto.}$$

$$\sigma_y = \pm 5.8 \text{ micras por la escala de la foto.}$$

$$\sigma_z = \pm 0.070 \text{ } ^0/_{00} \text{ de la altura de vuelo o distancia principal.}$$

La orientación común, esto es la transformación de coordenadas imagen en coordenadas objeto mediante un solo paso, trae un incremento en la precisión en la dirección de X del 10 % y del 25 % en la dirección del eje Y , relativa para la orientación de dos pasos. La aparente pérdida de precisión en altura es sin duda un resultado de la inevitable deficiencia de los estudios empíricos de precisión.

Un estudio de los errores de coordenadas permite la separación del error total en una componente sistemática σ_s , y en una accidental σ_r :

$$\sigma = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_r^2}$$

	X(μm)	Y(μm)	Z(% of c)
σ	± 4.7	± 5.8	± 0.070
σ_s	± 4.1	± 5.0	± 0.063
σ_r	± 2.4	± 2.8	± 0.029

Error medio cuadrático de la orientación común, con las componentes sistemáticas y accidentales.

Las componentes V_x , V_y que aparecen en las ecuaciones de observación son el resultado de la medición de errores accidentales. Los parámetros adicionales compensan los errores sistemáticos.

La componente sistemática de los errores de coordenadas es muy alto, produciendo coeficientes de correlación superiores a 0.8. Si el resultado final contiene errores sistemáticos grandes, el sistema del modelo matemático, necesita ser mejorado. La orientación común está basada en la condición de colinealidad.

La distorsión residual, la deformación residual de la película y la refracción residual deben ser modelados por parámetros adicionales. Los parámetros adicionales eliminan los componentes sistemáticos tal que solo los errores accidentales permanecen. Estos errores accidentales son, la barrera razonable de un punto medido fotogramétricamente con fotografías métricas actualmente.

6.3.3. Precisión empírica de un simple modelo como función de la escala de la foto y el tipo de cámara.

Después de establecer estos resultados, es obvia la siguiente cuestión: ¿Cómo varía la precisión con la escala de la fotografía?, numerosos estudios empíricos de precisión de varias escalas de fotografías han mostrado que la precisión en las fotografías es constante, es decir un incremento de la escala de la foto puede producir un incremento deseable en la precisión del punto fotogramétrico medido. Esta afirmación no solo se mantiene para las escalas usuales encontradas en fotogrametría aérea, sino para escalas muy grandes de fotogrametría terrestre. Esta relación, que la precisión requerida en la solución del problema puede ser alcanzada simplemente por la adaptación de la distancia de la cámara al objeto, solo se rompe en fotogrametría aérea para escalas grandes de 1/5000 como resultado que salga la imagen borrosa debido al movimiento de la imagen. El sistema compensador del movimiento de la imagen, que actualmente es casi universal, elimina más o menos esta barrera.

Otra cuestión concierne al ángulo óptimo de la cámara, es decir cómo varía la precisión (para escalas de fotos iguales) como función del tipo de cámara (NA, WA, SWA). Las siguientes reglas pueden ser citadas de lo contradictorio en parte resultados de la estudiada precisión empírica:

- La precisión planimétrica no está significativamente afectada por el tipo de cámara. Aunque las fotografías SWA son ligeramente menos precisas que las fotografías NA.
- La precisión de la altura, expresada en partes por mil de la altura de vuelo es casi constante, es decir el incremento en la precisión de la coordenada Z de NA, WA y SWA es

constante con la altura de vuelo, aproximadamente en la razón 1:2:3.6. El enorme incremento teórico en la precisión con SWA no puede ser todavía confirmado mediante estudios empíricos.

6.4. Selección de los parámetros adicionales.

Se pueden introducir parámetros adicionales con los coeficientes f_y y g_y en el modelo matemático básico. Para compensar los errores sistemáticos se introducen los parámetros adicionales mediante una función polinómica, de esta forma se reemplaza los términos de coordenadas del punto principal (x_0, y_0) de la función:

$$x = x_0 - c \cdot \frac{r_{11} \cdot (X - X_0) + r_{21} \cdot (Y - Y_0) + r_{31} \cdot (Z - Z_0)}{r_{13} \cdot (X - X_0) + r_{23} \cdot (Y - Y_0) + r_{33} \cdot (Z - Z_0)}$$

$$y = y_0 - c \cdot \frac{r_{12} \cdot (X - X_0) + r_{22} \cdot (Y - Y_0) + r_{32} \cdot (Z - Z_0)}{r_{13} \cdot (X - X_0) + r_{23} \cdot (Y - Y_0) + r_{33} \cdot (Z - Z_0)}$$

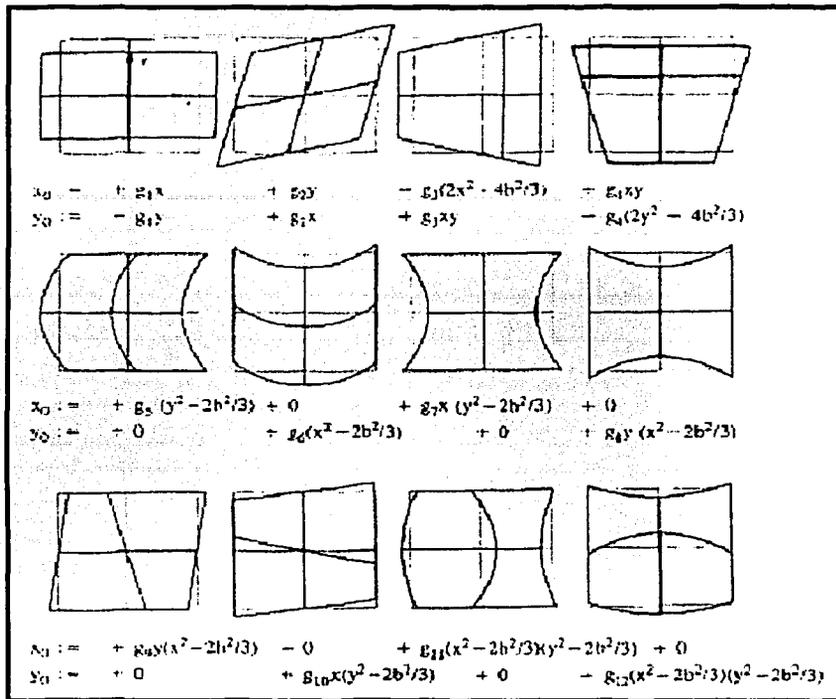
Por los polinomios:

$$x_0 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n f_y \cdot X^i \cdot Y^j$$

$$y_0 = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n g_y \cdot X^i \cdot Y^j$$

Los dos primeros términos $i = 0, j = 0$ son traslaciones, los cuales corresponden a las coordenadas del punto principal $f_{00} = x_0$ y $g_{00} = y_0$

Varios autores han sugerido variados parámetros adicionales para compensar los errores sistemáticos en la triangulación aérea. Para los doce parámetros siguientes se emplean los mismos coeficientes para la x y la y , y se adopta el símbolo g_y . La cantidad b , que aparece en algunas ecuaciones, representa la base de los fotogramas.



Parámetros adicionales y sus efectos sobre la fotografía.

Tal juego de parámetros adicionales, de la figura anterior es aplicado uniformemente para grupos grandes de fotografías aéreas. Tales grupos comprende fotografías que son:

- Revelado, copia y almacenamiento de la misma forma.
- Medidas en el mismo comparador.

Un grupo puede estar formado con diferentes signos de los coeficientes. Para eliminar la refracción asimétrica, la cual puede ocurrir con una cámara montada a un lado del eje central del fuselaje del avión y es modelado por el coeficiente g_4 , los parámetros de ida y regreso de las pasadas son:

$$\text{Idea: } x_0 = +g_4 \cdot xy$$

$$y_0 = -g_4 \left(2x^2 - \frac{4b^2}{3} \right)$$

$$\text{Vuelta: } x_0 = -g_4 \cdot xy$$

$$y_0 = +g_4 \left(2x^2 - \frac{4b^2}{3} \right)$$

Para realizar la compensación de los residuos de la refracción, durante las mediciones fotográficas se debe tener siempre la misma orientación relativa en el sistema de coordenadas de la cámara antes que el sistema de coordenadas terreno.

Los parámetros adicionales de la figura anterior no son particularmente bien adaptados para el modelado de la distorsión residual de las lentes y no es adaptado para el modelado de la distorsión total de las lentes. La distorsión de las lentes es ante todo radial.

Los siguientes parámetros son particularmente convenientes, como $r^2 = \sqrt{x^2 + y^2}$:

$$x_0 = g_{13} x (r^2 - r_0^2)$$

$$y_0 = g_{13} y (r^2 - r_0^2)$$

O también:

$$x_0 = g_{14} x (r^4 - r_0^4)$$

$$y_0 = g_{14} y (r^4 - r_0^4)$$

Siendo el valor r_0 el radio en el cual la distorsión radial es cero.

Si se forma $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ la ecuación anterior de parámetro g_{13} lleva al tercer grado del término polinomial, con el radio variable, para la distorsión. La ecuación de término g_{14} lleva a un término polinomial de quinto orden. Finalmente los siguientes parámetros adicionales modelan la distorsión residual asimétrica o tangencial:

$$x_0 = g_{15} (r^2 + 2x^2)$$

$$y_0 = g_{15} 2xy$$

También:

$$x_0 = g_{16} 2xy$$

$$y_0 = g_{16} (r^2 + 2y^2)$$

Cuando los parámetros adicionales son incorporados al ajuste de un bloque por haces, se empieza con un número relativamente grande de parámetros, y paso a paso, elimina uno o los otros parámetros por medio de los test estadísticos.

6.4.1. Análisis de la correlación entre parámetros libres.

Los parámetros adicionales pueden estar fuertemente correlados entre ellos, particularmente con una disposición esquemática de los puntos en los fotogramas. Un parámetro adicional g_i , el cual tiene una fuerte correlación con otro parámetro adicional g_j o con otro parámetro libre, por ejemplo un coeficiente de correlación mayor a $r_{ij} = 0.9$ debe ser eliminado. El coeficiente de correlación puede ser computado de la matriz cofactor Q_{ii} , o sea la inversa de la matriz normal, por:

$$r_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sqrt{q_{ii} \cdot q_{jj}}}$$

No siempre es cierto que dos incógnitas correladas de manera fuerte puedan ser reemplazadas por una simple incógnita. Por ejemplo, aunque los ángulos X_1 y X_2 en una orientación relativa están fuertemente correlados, ambos tienen una validez ilimitada en el ajuste mínimo cuadrático.

6.4.2. Análisis de la determinación.

Los parámetros adicionales debilitan la condición del sistema normal de ecuaciones y el uso de un excesivo número de parámetros puede incluso llegar a formar un sistema singular. Una medida de la determinación está dada por la relación:

$$B = I - \left[(\text{diag}N) \cdot (\text{diag}N^{-1}) \right]^{-1}$$

Siendo:

B : Matriz diagonal con las mediciones de la determinación.

I : Matriz unidad.

$\text{diag}N$: Diagonal de la matriz de las ecuaciones normales.

El siguiente ejemplo ilustra el concepto de medición de la determinación. Una matriz de ecuaciones normales N para dos incógnitas y la matriz inversa N^{-1} correspondiente:

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

A partir de esto se obtiene la siguiente medida de la determinación:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Si la matriz de ecuaciones normales y su inversa tienen la siguiente forma:

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 2.8 \\ 2.8 & 2 \end{pmatrix} \quad N^{-1} = \begin{pmatrix} 12.5 & -17.5 \\ -17.5 & 25 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 4 & 2.8 \\ 2.8 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12.5 & -17.5 \\ -17.5 & 25 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 0.98 & 0 \\ 0 & 0.98 \end{pmatrix}$$

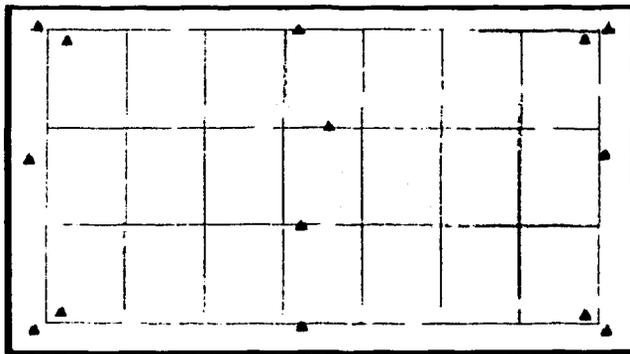
La medida de B de la determinación varía entre 0 (matriz diagonal de la ecuación normal) y 1 (matriz singular de ecuación normal). No debería ser mayor de 0.85 para los parámetros adicionales.

7. Aerotriangulación con apoyo GPS.

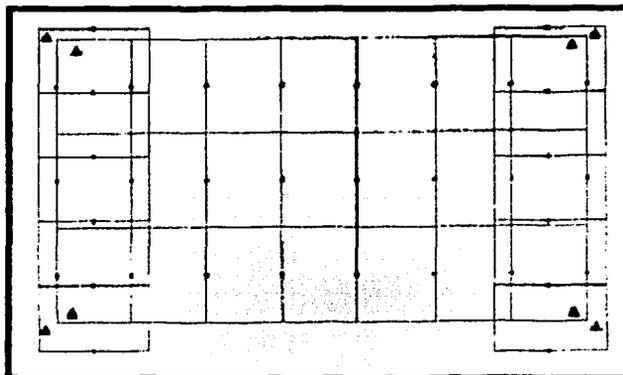
El apoyo GPS de los objetos en aerotriangulación es la determinación de coordenadas globales de los centros de proyección de observaciones GPS. Esta aplicación de GPS es la más alta exigencia en la precisión de medición de puntos de control estáticos de medidas realizadas en modo cinemático.

7.1. Sin puntos de control.

El método de medición relativa de puntos para ser usada aquí requiere ser fijado en una posición absoluta, la cual es determinada por medio del código C/A o el código P. Un segundo receptor es montado en el avión. El sistema entero es inicializado en el comienzo de la misión para definir la base GPS, es decir, una longitud directa, en modo estático, sobre un tiempo de 15 minutos. Esta inicialización resuelve las ambigüedades. El número de longitudes de ondas completo contadas en el receptor del avión como marcha de la posición inicial y registro junto con el otro receptor GPS.



Apoyo tradicional: Dos puntos en las esquinas del bloque y uno por cada 4 o 5 bloques.



Apoyo cinemático: Conexión entre la cámara y el G.P.S. Pasadas transversales adicionales en los bordes

Si la cuenta permanece interrumpida durante la misión entera, es decir ocurre un presunto descuido del ciclo, la base GPS medida para retornarla al avión debe empezar la posición el la misma longitud medida inicialmente. Señalar que los cálculos de los resultados no necesitan ser realizados en tiempo real para aerotriangulación con GPS. Los cálculos pueden ser realizados en el registro de las observaciones después de completarse la misión.

La interrupción del ciclo puede ocurrir a menudo, por ejemplo, cuando el avión gira y se inclina en la horizontal puede perder uno o dos satélites. Otro fenómeno es el efecto multipath, de forma que las ondas pueden reflejarse en la cubierta del avión, con el efecto indeseable de señales reflejadas y recibirlas tan bien como si fueran señales directas. Las señales reflejadas pueden crear gran confusión.

7.2. Con algún punto de control.

Se asume que hay varios puntos de control en la zona de interés, preferiblemente alrededor del perímetro del área de trabajo. Los puntos de control, los cuales básicamente sirven para establecer el datum, pueden servir como control básico de la red o pueden ser medidos por la técnica relativa GPS.

Las señales L1 y L2 son usadas para medir puntos relativos, pero no necesitan de alguna longitud inicial para empezar la misión. El inicio, o la resolución de las ambigüedades es realizada durante el mismo vuelo. Con este propósito, al empezar cada pasada los códigos C/A de las fotografías es registrada simultáneamente en un receptor fijo en el terreno, no necesariamente es un punto de coordenadas conocidas, y en el receptor del avión. Esta información es usada posteriormente en el postproceso para la resolución de ambigüedades.

Las precisiones son de pocos decímetros. Los resultados de las posiciones relativas dentro de una pasada están con una precisión de 2 a 5 cm. Esas precisiones relativas del avión son determinadas con observaciones GPS. En intervalos de un segundo, lo cual corresponde a intervalos espaciales de 50 a 100 metros, dependiendo de la velocidad del avión. Los puntos de control pueden ser conectados por curvas espaciales.

Las veces que los puntos de control fueron registrados son conocidos, y es el mismo tiempo de exposición de las películas, tal que las coordenadas de los puntos de la antena A_i en el momento de la exposición puede ser determinado por interpolación a lo largo de la curva espacial. El tiempo puede ser sincronizado con una precisión de 1 milisegundo.

7.2.1. Excentricidad y ajuste.

Hay que determinar las coordenadas WGS-84 de los centros de proyección P_{0i} de las coordenadas WGS-84 de los puntos de la antena A_i . La excentricidad de los centros de proyección de la cámara de la punto de la antena GPS debe ser medida antes de empezar la misión fotográfica.

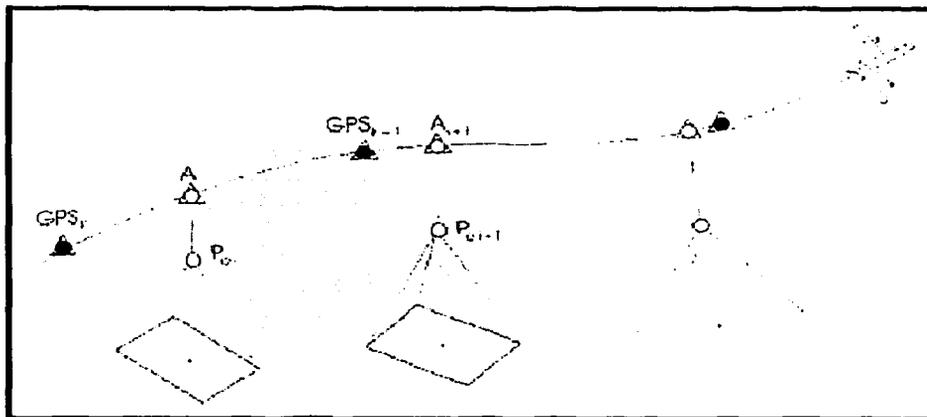
El resultado de las coordenadas (x_i, y_i, z_i) de los centros de la antena en la cámara en el sistema de coordenadas de la cámara.

La posición relativa de la antena del sistema de coordenadas de la cámara debe, al menos en misiones fotográficas de grandes escalas permanecer inalterable durante todo el vuelo. Alternativamente, esta posición debe ser medible. Esta condición puede ser satisfecha de tres modos:

- Después de medir la posición del centro de la antena en el sistema de coordenadas de la cámara, la proa y popa y las inclinaciones laterales de la cámara deben no cambiarse durante el vuelo, ni la deriva de la cámara debe cambiarse.

- Si la deriva de la cámara debe cambiarse durante el vuelo, la antena debe ser montada de forma que sea una extensión en vertical del eje de la cámara

- Si la antena está montada sobre la cola del avión, la cual es una posición recomendada para evitar el efecto multipath, y las rotaciones de la cámara deben introducirse durante el vuelo, estas rotaciones deben registrarse. La posición de la antena en el sistema de coordenadas de la cámara puede calcularse en cada fotograma.



Pasadas de vuelo con posicionamiento GPS: A_i interpolación de la antena. P_{0i} centros de proyección.

A continuación se demuestra paso a paso, como la alta precisión de la información GPS se introduce en la aerotriangulación:

1. Se transforman las coordenadas WGS-84 de los puntos de la antena A_i de cada pasada individual en el sistema tangencial $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$. Se puede usar para este propósito el elipsoide usual del sistema WGS-84. En suma, se introduce una rotación grosera del sistema tangencial de modo que se trae de forma aproximada el eje x en la dirección del vuelo. Se define este sistema como $x' y' z'$. Las coordenadas $\bar{x}' \bar{y}' \bar{z}'$ en el sistema de coordenadas tangencial local son obtenidos de las coordenadas geocéntricas XYZ mediante una traslación y rotación.

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ \bar{z}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\text{sen}\lambda_B & -\text{cos}\lambda_B \text{sen}\phi_B & \text{cos}\lambda_B \text{cos}\phi_B \\ \text{cos}\lambda_B & -\text{sen}\lambda_B \text{sen}\phi_B & \text{sen}\lambda_B \text{cos}\phi_B \\ 0 & \text{cos}\phi_B & \text{sen}\phi_B \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} X - X_B \\ Y - Y_B \\ Z - Z_B \end{pmatrix}$$

Donde el sistema egocéntrico:

$$X : (N + h) \cdot \text{cos}\phi \cdot \text{cos}\lambda$$

$$Y : (N + h) \cdot \text{cos}\phi \cdot \text{sen}\lambda$$

$$Z : (N \cdot (1 - e^2) + h) \cdot \text{sen}\phi$$

2. Se calculan las coordenadas de los centros de proyección Po_i , en el sistema tangencial $\bar{x}' \bar{y}' \bar{z}'$ de cada pasada, donde se requiere conocer los giros de las fotos ω y φ .
Si estos no son conocidos, se puede aproximar a $\omega^* = \varphi^* = 0$.

3. Los centros de proyección en el sistema de coordenadas tangencial de la pasada forma modelos independientes en un sistema de coordenadas local tridimensional. Se llama a estos modelos como GPS modelo.

4. Se transforman los pocos puntos de coordenadas terreno en un sistema tangencial XYZ .

5. Se realiza el ajuste entre:

- Coordenadas imagen observadas

$$x = \bar{x}' + v'_x = x_0 - c \cdot \frac{Z_x}{N}$$

$$y' = \bar{y}' + v'_y = y_0 - c \cdot \frac{Z_y}{N}$$

- GPS modelo.

$$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y' - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} r_{11}(X - X_0) + r_{21}(Y - Y_0) + r_{31}(Z - Z_0) \\ r_{12}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{32}(Z - Z_0) \\ r_{13}(X - X_0) + r_{23}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0) \end{pmatrix}$$

- Las coordenadas $X Y Z$ de puntos de control obtenidos en el paso 2.

$$x = \bar{x} + v'_x = X'$$

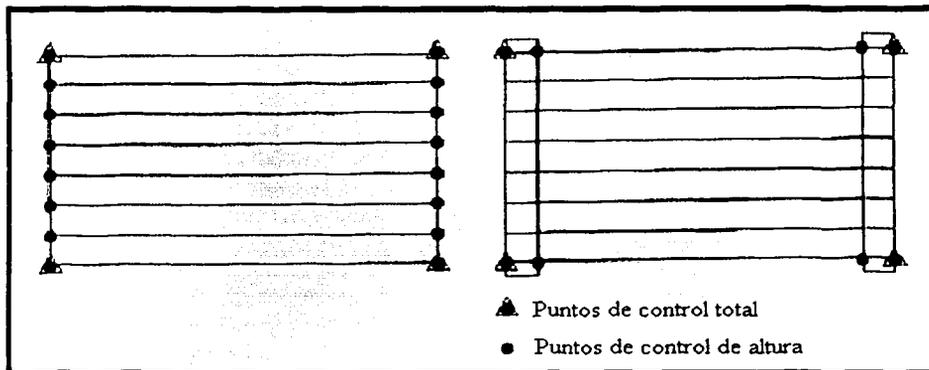
$$y = \bar{y} + v'_y = Y'$$

6. Después de la primera iteración por medio de un ajuste por mínimos cuadrados, se repiten los pasos 2. y 5. con mejora de las aproximaciones de $\omega'' = \varphi'' = 0$.

7. Como resultado final se deben conocer todas las coordenadas $X Y Z$ de todos los puntos en el sistema de coordenadas tangencial creado en el paso 4.

7.2.2. Precisiones.

El método de aerotriangulación aérea descrito trae una enorme estabilidad particularmente en la dirección de las pasadas. En vista a la pobre precisión altimétrica de la aerotriangulación convencional, la cual hasta ahora puede ser compensada por cadenas de puntos de control altimétricos perpendiculares a las pasadas, se está particularmente interesado en la estabilización de alturas por modelos GPS. Un arreglo de los puntos de control de un bloque GPS es dibujado en la siguiente figura:



Puntos de control con apoyo GPS en aerotriangulación. Izquierda: Con dos cadenas de puntos de control altimétricos. Derecha: Con dos pasadas cruzadas.

Las pasadas individuales son estabilizadas por GPS de uno a otro centro de proyección más o menos en línea recta, las inclinaciones laterales de las pasadas están débilmente determinadas. Por esto, cadenas de puntos de control altimétrico son necesarias para los finales de los bloques. Alternativamente, dos pasadas cruzadas pueden ser voladas, las pasadas a parte de puntos de control completos en las esquinas necesitan cuatro puntos de control altimétricos.

Los siguientes errores medios cuadráticos σ_{xy} y σ_z S de la figura anterior han sido obtenidos de las coordenadas de un sistema de coordenadas nacional:

- Bloque con cadena de puntos de control altimétrico al principio y final del bloque:

$$\sigma_{x,y} = \pm 2.1 \cdot E \cdot \sigma_B$$

$$\sigma_z = \pm 2.3 \cdot E \cdot \sigma_B$$

- Bloque con pasadas cruzadas en cada final del bloque:

$$\sigma_{x,y} = \pm 1.5 \cdot E \cdot \sigma_B$$

$$\sigma_z = \pm 2.0 \cdot E \cdot \sigma_B$$

Donde:

E : Escala de las fotografías.

σ_B : Precisión de las coordenadas imagen medidas. Esto es tomado del error medio cuadrático de peso unidad del ajuste del bloque de haces. Esto es de ± 3 micras en el caso más favorable, para puntos naturales puede incrementarse, dependiendo de la escala de la foto, sobre ± 10 micras.

La suposición de las ecuaciones anteriores están basadas en:

- Fotografías de WA, esto es 15 cm. de distancia principal. Con σ_B de 10 micras se obtiene en el primer caso una $\sigma_z = \pm 0.15 \text{ m}$ de la altura de vuelo. En el segundo caso $\sigma_z = \pm 0.13 \text{ m}$ de la altura de vuelo. Para NA, o sea 30 cm. de distancia principal los errores correspondientes son: $\sigma_z = \pm 4.6 \cdot E \cdot \sigma_B$ y $\sigma_z = \pm 4.0 \cdot E \cdot \sigma_B$.
- La precisión de los puntos de control de campo es $\sigma_{p.c.} = E \cdot \sigma_B$. Incluso la precisión de estos puntos es mejorado por un factor 3, la precisión del bloque entero es mejorado solamente por un pequeño porcentaje.
- La precisión de los centros de proyección obtenidos con observaciones GPS es $\sigma_{p.c.} = E \cdot \sigma_B$. La precisión de estos puntos es mejorado por un factor de 3, la precisión del bloque entero es mejorado un 10 % Si la precisión de los centros de proyección están degradados por un factor de 10, eso significa una reducción en la precisión de ajuste del bloque, de valores de $\sigma_{x,y} = \pm 3.5 \cdot E \cdot \sigma_B$ y $\sigma_z = \pm 5.0 \cdot E \cdot \sigma_B$.

8. Control de calidad y detección de errores groseros.

8.1. Control de precisión.

Las mediciones de coordenadas mediante fotogrametría debe satisfacer ciertas expectativas. Por una parte, debe satisfacer las condiciones del proyecto, y por otra parte, debe ser una garantía que los resultados analizados de manera rigurosa están libres de errores groseros. La calidad de control comprende la precisión y veracidad.

Se limita el estudio a la medida de puntos fotogramétricos, los cuales están basados en la medida de coordenadas imagen en instrumentos analíticos o digitales. Dentro del proceso completo hay varios resultados intermedios indicados para chequear la precisión.

8.1.1. Orientación interna.

Antes de entrar en la discusión de los resultados intermedios, debe mencionarse que un control comprensible de la precisión requiere la calibración de la cámara en intervalos de tres años, y particularmente después de un continuado manejo. Un posible método de calibración es tomar fotografías aéreas sobre un test de campo que contiene puntos señalizados con coordenadas conocidas, y se obtiene la orientación interna y externa.

El test de campo para fotografías aéreas son generalmente expuestas para tiempos cortos, puesto que el mantenimiento continuado de la señalización es caro, pero los test de campo para fotogrametría terrestre están permanentemente disponibles. Solamente si la calibración del test de campo coincide con el certificado de calibración del fabricante, dentro de los límites determinados por los errores medios cuadráticos, se puede aceptar el certificado de calibración. Si los dos juegos de resultados no coinciden, una nueva calibración de la cámara por parte del fabricante es conveniente.

Por ejemplo, una cámara fue calibrada con los siguientes resultados: Focal: 100.230 ± 0.0050 mm., $x_0 : 0.029 \pm 0.0030$ mm., $y_0 : 0.025 \pm 0.0044$ mm. El certificado de calibración muestra: Focal: 100.221 ± 0.0025 mm., $x_0 : 0.021 \pm 0.0016$ mm., $y_0 : 0.022 \pm 0.0022$ mm. Estimar si las diferencias observadas pueden ser explicadas por los errores medios cuadráticos (hipótesis nula), o un cambio de calibración ha ocurrido entre los dos test (hipótesis alternativa). Se supone que los errores de ambas calibraciones tienen distribuciones normales, las cantidades del test son:

$$c = \frac{0.009}{\sqrt{0.005^2 + 0.0025^2}} = 1.6$$
$$x_0 = \frac{0.008}{\sqrt{0.003^2 + 0.0016^2}} = 2.4$$
$$y_0 = \frac{0.003}{\sqrt{0.0044^2 + 0.0022^2}} = 0.6$$

Si la hipótesis nula es verdadera, esto es las diferencias no son reales, los límites de confianza para una distribución normal para una probabilidad del 5 % es de ± 2 . Una probabilidad del 5 % significa que hay 1 probabilidad en 20 que la cámara recién calibrada no tenga cambios en la orientación interna. En nuestro caso la cámara debería ser recalibrada.

8.1.2. Orientación relativa.

La precisión de una orientación relativa puede encontrarse de la inversa de matriz de ecuaciones normales y el error medio cuadrático σ_{py} de la paralaje en y . El ajuste produce una estimación de σ_{py} , pero eso es muy incierto debido a la baja redundancia. Si la redundancia es menor de 5, es mejor adoptar un valor para la precisión de la paralaje en y , entre 5 y 10 micras, dependiendo de la calidad de la imagen.

En muchos casos se puede preguntar: ¿Tiene la orientación suficiente precisión?. Esta cuestión es particularmente difícil de responder en ciertos casos cuando la orientación de los puntos

no pueden ser escogidos en posiciones óptimas porque hay grandes extensiones de agua, nubes o grandes áreas de la imagen con escasez de textura. Una situación dificultosa ocurre con modelos estrechos para una superficie peligrosa o valles profundos, donde el recubrimiento puede alcanzar el 80 % o más.

8.1.3. Orientación absoluta.

La determinación de la precisión del cálculo de la orientación absoluta es comparable en principio con el cálculo de la orientación relativa. Desde la distribución de los puntos de control, particularmente cuando esos puntos han sido medidos por topografía, a menudo deja mucho que desear, y la precisión es particularmente interesante cuando la distribución de los puntos de apoyo es pobre, es absolutamente necesario calcular los errores medios cuadráticos en las esquinas del modelo.

8.1.4. Ajuste de un bloque.

Las incógnitas en el ajuste de un bloque son las coordenadas de los nuevos puntos y las precisiones que estos nuevos puntos pueden ser calculadas con los elementos de la diagonal de la inversa de la matriz de ecuaciones normales y el error medio cuadrático de peso unidad.

Muchos programas desarrollados para aerotriangulación no calculan los errores medios cuadráticos de las coordenadas de los nuevos puntos. En realidad, para bloques con una distribución óptima los puntos de enlace y puntos de control el cálculo es innecesario. Para bloques que tienen una distribución pobre de puntos de control y huecos entre los puentes de las pasadas causados por un bajo recubrimiento en regiones de montaña o por carencia de detalles en áreas comunes, un cálculo de los errores medios cuadráticos de las coordenadas de los nuevos puntos deberían formar un importante control de calidad.

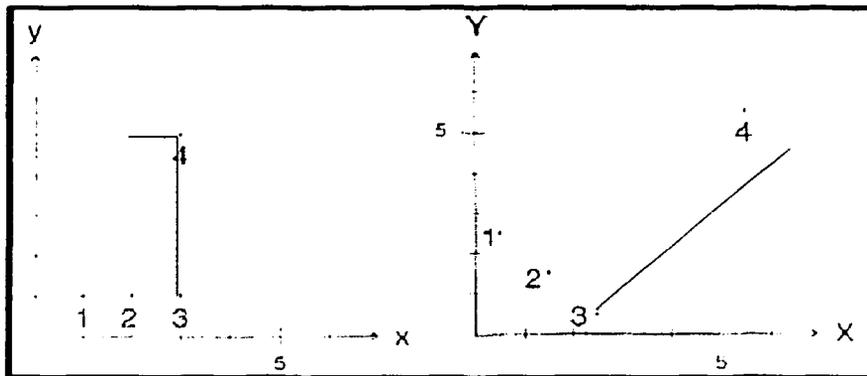
Para ajustes de bloques en fotogrametría terrestre, en el cual la anchura difiere de la disposición de la cámara y distribución irregular de los puntos de enlace y los puntos de control son lo normal, el cálculo de los errores medios cuadráticos de las coordenadas de los nuevos puntos es absolutamente necesario. Incluso un ajuste de un bloque de haces con fotografías convencionales, en la cual los elementos de la orientación interna deben ser incorporados en el ajuste.

8.2. Control de fiabilidad.

8.2.1. Base teórica.

Se presenta un ejemplo de una transformación de semejanza plana, la cual juega, por ejemplo, una gran función en fijar un modelo al control terreno por un ajuste iterativo de planimetría y altimetría. Vemos el método más sencillo de un ajuste mínimo cuadrático con errores no accidentales, pero con errores groseros simples:

Se supone que las observaciones están libres de errores accidentales y que solo una coordenada contiene un error grosero. La siguiente figura muestra puntos con errores en la coordenada x de + 1.0 en el punto 4, y a la derecha los puntos de control.



Trazado de los puntos para una transformación de semejanza con un error en la coordenada X del punto 4.

A continuación se muestran los resultados del ajuste V_x , V_y .

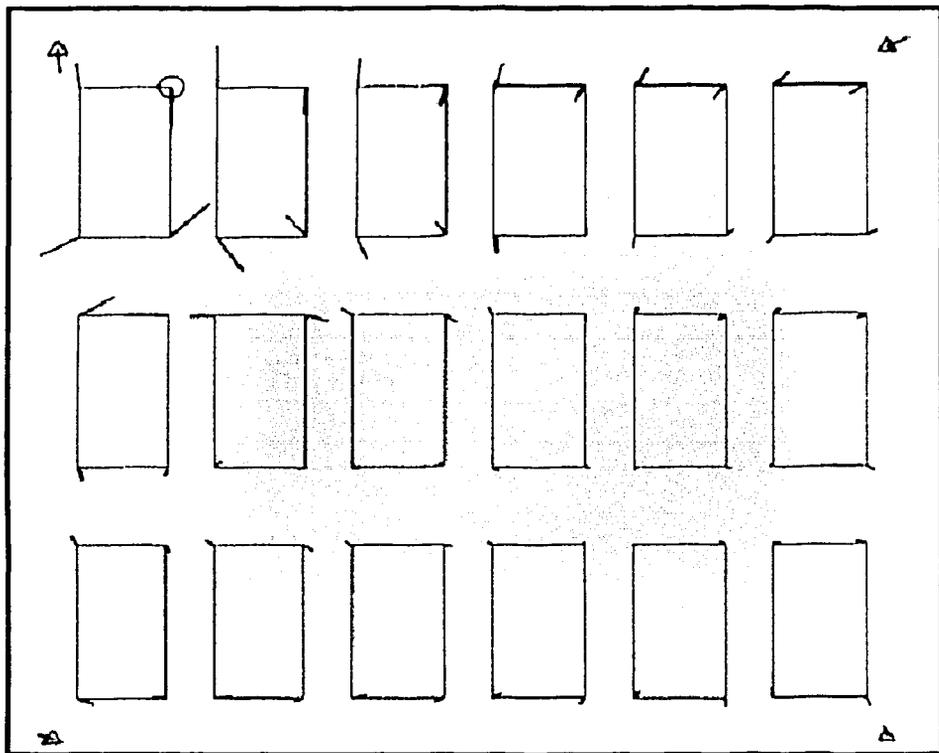
Pkt.	x	y	X	Y	v_x	v_y
1	1	1	0.5	2.5	0.04	0.21
2	2	1	1.5	1.5	0.04	0
3	3	1	2.5	0.5	0.04	-0.21
4	5	5	5.5	5.5	-0.11	0

Resultado de la transformación plana de semejanza.

Los resultados de esta transformación, la cual puede ser extendida a todo el ajuste, permite las siguientes conclusiones:

- Un error grosero en una observación es reflejado solamente como la extensión del límite en la correspondiente corrección. En el ejemplo anterior, el error grosero de 1.0 produce una corrección de solo 0.11.
- La mayor corrección no corresponde con el error grosero. Por ejemplo, los puntos 1 y 3 tienen mayores correcciones, y no el punto 4, el cual tiene el error grosero.

La dificultad de identificar los errores groseros en los datos del ajuste se demuestra con un nuevo ejemplo. La siguiente figura muestra los resultados del ajuste de un bloque planimétrico por modelos independientes, con un error grosero en la coordenada de un modelo.



Efecto de un basto error de las coordenadas modelo en las correcciones del ajuste de un bloque planimético por modelos independientes. El mayor error se ha producido en el punto circular.

Los errores accidentales, que producirían un cálculo más complicado, no se han introducido. Las mismas precisiones se supone que tienen todos los puntos del modelo y todos los puntos de apoyo. Se supone que el error grosero señalado por un círculo es 15 veces mayor que la corrección a realizar.

Para proceder al cálculo se parte de las ecuaciones de observación:

$$v = Ax - l$$

La matriz de pesos $P_n = Q_n^{-1}$ para las observaciones l , la cual es una matriz diagonal, se obtienen las incógnitas x , por medio de la ley de propagación, y la matriz de coeficientes de los pesos Q_n :

$$x = (A^T P_n A)^{-1} A^T P_n l$$

$$Q_{xx} = (A^T P A)^{-1}$$

Una vez calculadas las expresiones anteriores, también se puede obtener la matriz de los coeficientes de los pesos Q_{vv} y las correcciones V :

$$v = (A(A^T P_{II} A)^{-1} A^T P_{II} - I) \cdot l$$

$$Q_{vv} = (A(A^T P_{II} A)^{-1} A^T P_{II} - I) Q_{II} (P_{II} A(A^T P_{II} A)^{-1} A^T - I)$$

Señalar que $P_{II} \cdot Q_{II}$ es igual a la matriz unidad I :

$$Q_{vv} = Q_{II} - A(A^T P_{II} A)^{-1} A^T = Q_{II} - A Q_{xx} A^T$$

Por tanto v , es igual:

$$v = -(Q_{II} - A(A^T P_{II} A)^{-1} A^T) P_{II} l = -(Q_{II} - A Q_{xx} A^T) P_{II} l$$

La relación entre las observaciones l , y las correcciones v , se deduce de las dos últimas ecuaciones:

$$v = -(Q_{vv} P_{II}) \cdot l$$

De este resultado se puede ver las correcciones v ocurren cuando solo errores de observaciones seguras están involucradas Δl , y no errores accidentales.

$$v = -(Q_{vv} P_{II}) \cdot \Delta l$$

La clave de las relaciones entre los errores de las observaciones $l \Delta$ y las correspondientes correcciones falsas v , están por lo tanto en la matriz Q_{vv} .

Para una determinada disposición de puntos se obtiene la matriz Q_{vv} :

$$Q_{vv} = \begin{pmatrix} 0.61 & 0 & -0.32 & -0.07 & -0.25 & -0.14 & -0.04 & 0.21 \\ & 0.61 & 0.07 & -0.32 & 0.14 & -0.25 & -0.21 & -0.04 \\ & & 0.68 & 0 & -0.32 & -0.07 & -0.04 & 0 \\ & & & 0.68 & 0.07 & -0.32 & 0 & -0.04 \\ & & & & 0.61 & 0 & -0.04 & -0.21 \\ & & & & & 0.61 & 0.21 & -0.04 \\ & & & & & & 0.11 & 0 \\ & & & & & & & 0.11 \end{pmatrix}$$

El vector Δl , que contiene el error en la coordenada x del punto 4:

$$(\Delta l)^T = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1.0 \ 0)^T$$

De la ecuación $v_w = -(Q_w P_s) \cdot \Delta l$ se obtiene las correcciones:

$$v^T = (0.04 \ 0.21 \ 0.04 \ 0 \ 0.04 \ -0.21 \ -0.11 \ 0)^T$$

Los elementos de la diagonal principal de la matriz Q_w son los indicadores de la comprobación de las observaciones individuales. Los elementos mayores de la diagonal principal de la matriz Q_w es la mayor de las correcciones y corresponde a los errores groseros de las observaciones. Si, por ejemplo, el error grosero en el ejemplo anterior ha ocurrido en el punto 2, entonces se ve inmediatamente de la matriz Q_w que el ajuste debería absorber solo lo 32 % ($1.0 - 0.68$) del error grosero es mayor que el 89 % ($1.0 - 0.11$) del punto 4. En el ejemplo analizado el punto 4 está muy alejado de los otros tres puntos, que entre sí están muy juntos, por tanto ese dato tiene gran influencia sobre el resultado final y absorbe los errores groseros de manera más fuerte, lo que no ocurre con el punto 2.

Para puntos de control que forman un rectángulo, un deseable estado de la orientación absoluta, los elementos de la diagonal principal de la matriz Q_w son 0.5 para los cuatro puntos, esto se puede obtener de la ecuación $Q_w = Q_s - A Q_{st} A^T$. Los elementos de la diagonal principal deben ser tan grandes como sean posible y diferir lo menos posible uno de otro. Los elementos fuera de la diagonal principal, es decir las correlaciones entre las correcciones, deberían ser lo menor posible.

Es interesante señalar que la traza de la matriz Q_w es 4, lo cual corresponde a la redundancia que es de 4, o sea 8 observaciones menos la incógnitas que son 4. Tomando esta consideración, el peso de la matriz P_s de las observaciones originales, tienen la relación general:

$$\text{traza}(Q_w P_s) = r = \sum r_i$$

Se define r_i como la componente de la redundancia de una observación l_i , tiene los límites $0 \leq r_i \leq 1$, y en el ejemplo numérico analizado el punto 4 tiene una componente de la redundancia de solo 0.11 para cada coordenada, el punto 2 una componente de la redundancia de 0.68. En la práctica la componente de la redundancia r_i debería ser mayor de 0.3.

A parte de este análisis se tendría el ajuste por mínimos cuadrados con errores accidentales y un simple error grosero, la fiabilidad interna y externa, data snooping para la detección de errores groseros y procesos robustos.

8.2.2. Chequeo de la fiabilidad para alguna tarea fotogramétrica estándar.

El chequeo de la fiabilidad debe ser realizada con los datos del proyecto fotogramétrico, del mismo modo que el chequeo de la precisión. Aparte de las peculiaridades de los proyectos individuales, es posible formular afirmaciones de tareas estándar.



8.2.2.1. Orientación interna.

El fijado matemático de las marcas fiduciales para la calibración de las coordenadas es realizada por una transformación de semejanza plana, un transformación afin o una transformación bilineal. Para un buen chequeo de la fiabilidad se debe escoger la transformación con gran redundancia.

Para cuatro marcas fiduciales y una transformación simétrica plana, la redundancia es de cuatro (ocho observaciones menos cuatro incógnitas). Con un acuerdo de marcas fiduciales, la redundancia es distribuida uniformemente sobre las ocho observaciones, tal que cada coordenada imagen tiene una componente de la redundancia de 0.5 para una transformación bilineal con cuatro marcas fiduciales se tiene ocho observaciones y ocho incógnitas, la redundancia es de cero.

Los errores groseros son difíciles de cometer en la medición manual de las marcas fiduciales. El uso de una transformación afin o una transformación bilineal no es particularmente peligrosa, en fotogrametría digital la medición de las marcas fiduciales de manera automática puede producir errores en la medida de las coordenadas imagen, por ejemplo como resultado de un grano de suciedad cercano a la marca fiducial. Particularmente en fotogrametría digital en la que los fotogramas están digitalizados, y las mediciones se realizan rápidamente, se debe usar en todas las circunstancias ocho marcas fiduciales.

8.2.2.2. Orientación relativa.

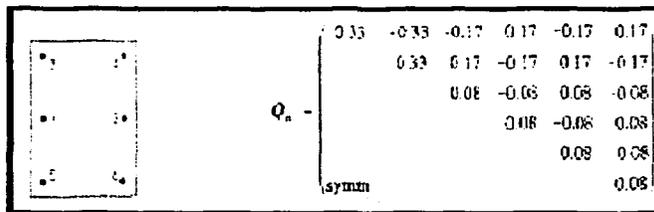


Diagrama esquemático de puntos y matriz Q_w de la orientación relativa de los seis puntos.

La matriz Q_w para una orientación relativa con seis puntos en la posición clásica en una superficie llana:

Se pueden obtener las siguientes conclusiones del chequeo de la fiabilidad en la orientación relativa, en la suposición que la medida de la paralaje tienen todas la misma precisión, es decir $P_v = I$.

- Como resultado de la baja redundancia, $r = 1$, los elementos de la diagonal principal son muy pequeños. La suma de la redundancia de los componentes es igual a 1.
- Los elementos fuera de la diagonal principal en su mayor parte son de la misma magnitud que los elementos de la diagonal principal, es decir las correcciones son completamente correladas entre ellas, o sea $q_{12} \cdot q_{21} = q_{13}^2$. Esta fuerte correlación causa grandes problemas en la búsqueda de errores groseros.
- La absorción de un error grosero en la medición de la paralaje en los puntos 3, 4, 5 y 6 es del 92 %, obtenido de la ecuación $v = -(Q_w P_v) \cdot \Delta l$.

La conclusión que se puede obtener de estos resultados negativos es que en la práctica nunca se debe realizar una orientación relativa con solo seis puntos. Sin embargo, si la medida estereoscópica de la paralaje para el cálculo de la orientación relativa es realizado manualmente interno a un cierto área de la imagen, puede ocurrir que no se midan errores groseros.

Si la calidad de la imagen es pobre, se debe incrementar el número de puntos para hacer la orientación. Por ejemplo, 10 puntos es más que favorable para obtener una matriz Q_w para el chequeo de fiabilidad significativamente mejor.

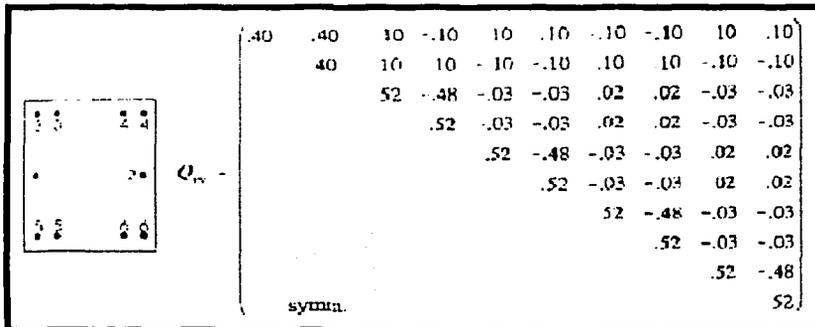


Diagrama esquemático de los puntos y matriz Q_w de la orientación relativa con 10 puntos.

Hay un peligro que en los dobles puntos de más o menos igual error grosero será realizado en ambos puntos. Este peligro puede ser tolerado por hacer la distancia entre los dos puntos algo mayor que el campo de visión del instrumento estereoscópico.

Las condiciones son más extremas en la orientación relativa automática con imágenes digitales. Muchos puntos son usados en la orientación relativa, y gran cantidad de ellos pueden tener errores groseros. Ellos son eliminados mediante estimadores robustos y data snooping.

8.2.2.3. Orientación absoluta.

Si las diferencias de altura no son muy grandes, la transformación de semejanza espacial puede ser dividida en un ajuste planimétrico y altimétrico. El ajuste planimétrico se vio que para cuatro puntos de control formando un rectángulo la redundancia de los componentes era $r = 0.5$. Si hay también cuatro puntos para el ajuste altimétrico, puede ser muy pobre para la fiabilidad interna y externa.

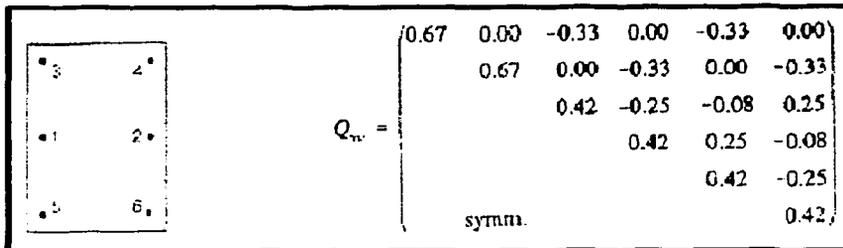
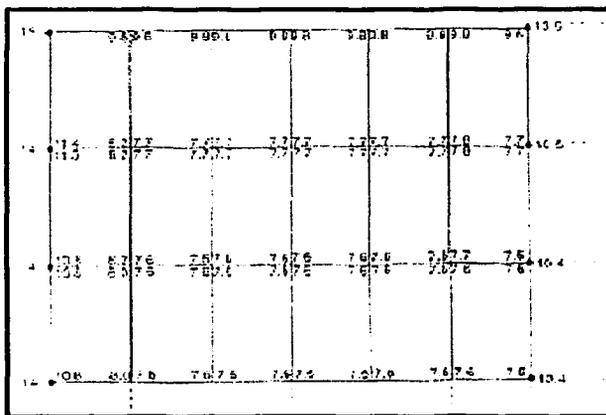


Diagrama esquemático de puntos y matriz Q_m de un ajuste altimétrico con seis puntos.

Las coordenadas modelo y objeto de los puntos de control para una orientación absoluta muy a menudo tiene errores groseros de identificación y/o medición y esto es vital para incrementar las componentes de la redundancia r , mediante la introducción de mayor número de puntos de control.

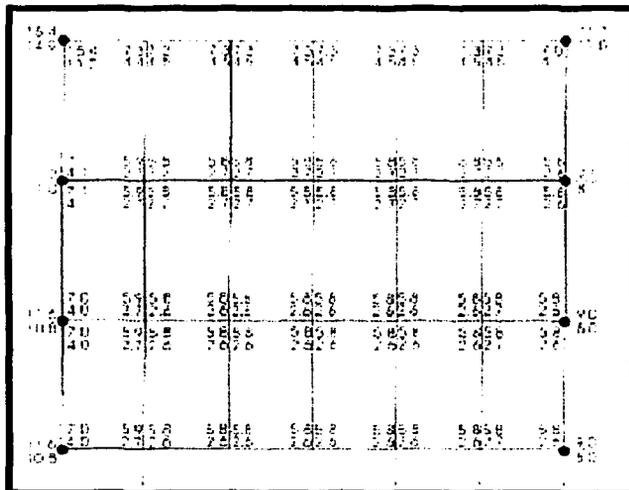
8.2.2.4 Ajuste de un bloque.

El chequeo de la fiabilidad para alturas es sensible al ajuste del bloque. La siguiente figura muestra la fiabilidad interna para un bloque de 72 modelos con cadenas de puntos de control, colocados al final y en medio de cada bloque de modelos independientes. Debido a la simetría solo un cuarto del bloque es mostrado y cada modelo consiste en cuatro puntos de paso solamente. Las coordenadas terreno de los puntos de control fueron tratadas en el ajuste como observaciones requiriendo correcciones y con el mismo peso como las coordenadas terreno transformadas aproximadamente en el sistema de coordenadas terreno. Este proceso es un prerrequisito para las coordenadas terreno de los puntos de control con las correcciones normalizadas v .



Fiabilidad interna de las alturas en un ajuste del bloque con modelos independientes (4 puntos de enlace por modelo).

Los resultados son discretos. La fiabilidad interna de la coordenada z de los puntos del modelo varían entre 7.6 y 11.4 veces el error medio cuadrático de las alturas de los modelos. En la coordenada Z de los puntos de control, un error mayor a 19 veces el error medio cuadrático de la altura puede quedar indetectable en la búsqueda de errores groseros con las correcciones normalizadas. La introducción de seis puntos de enlace en cada modelo, trae una mejora de la fiabilidad interna, pero en una cantidad muy pequeña. Solamente la introducción de cuatro dobles puntos como puntos de enlace en cada modelo produce una fiabilidad interna y externa satisfactoria en todo el bloque.



Fiabilidad interna (dato superior) y fiabilidad externa (dato inferior) de las alturas en el ajuste del bloque por modelos independientes (4 pares de puntos de enlace por modelo).

En la siguiente figura se muestra la fiabilidad interna y externa para las coordenadas planimétricas con cuatro pares de puntos como puntos de enlace en cada modelo.

CAPÍTULO VII. RESTITUCIÓN ANALÍTICA.

1. Introducción.

A primera vista, una fotografía aérea se parece mucho a un mapa. Sin embargo, hay diferencias desde el punto de vista cualitativo y cuantitativo:

1. Diferencias cualitativas:

- Una fotografía tiene siempre más información que el levantamiento topográfico más detallado.
- En la fotografía la información no se encuentre jerarquizada, toda ella aparece con el mismo peso de información.
- En el mapa los detalles pueden presentarse exagerados (signos convencionales), disminuidos o incluso eliminados, de manera convencional.
- La foto es un documento en el que se deja al usuario la libre interpretación. El mapa es un documento donde la información ya está interpretada.
- La fotografía es objetiva y el mapa subjetivo.
- No interacciona con el objeto a medir.

2. Diferencias métricas.

- En el mapa pueden hacerse directamente medidas (ángulos, distancias, desniveles) cuya precisión depende de la escala. En la fotografía no pueden hacerse medidas fiables, puesto que depende de un conjunto de causas particulares que se analizarán en este tema (orientación interna).
- Las fotografías no son documentos métricos y solo pueden transformarse en estos mediante “el método general de la fotogrametría”.

Todas las ventajas que se derivan de las posibilidades de este tipo de registro no tendrían sentido si no existiera un método que permitiera pasar de una información bidimensional, proporcionadas por las fotografías a una información tridimensional que se necesita para determinar la forma, dimensiones y posición en el espacio del objeto a análisis.

Este método conocido con el nombre de “Método general de la Fotogrametría” para el que es necesario dos fotografías tomadas desde dos puntos de vista diferentes y a partir de la reconstrucción de la forma de cada uno de los haces y de su situación en el espacio con respecto a un cierto sistema de referencia, usando el principio de la visión estereoscópica que permite identificar los rayos homólogos de cada haz, es capaz de proporcionar las coordenadas de cada uno de los puntos objeto.

La fotogrametría analítica, ha experimentado un gran avance desde que se han desarrollado nuevas técnicas informáticas, permitiéndose con la informática desarrollar el gran volumen, gestión de los datos y cálculo numérico que la solución analítica necesita.

La solución analítica se basa en las medidas de coordenadas realizadas sobre fotogramas, para poder pasar a través de cálculos a las coordenadas terreno del objeto seleccionado desde dos posiciones distintas.

La metodología analítica reconstruye matemáticamente la forma del haz de rayos, relacionando puntos y líneas en los diferentes sistemas (fotografía, modelo y terreno) y aplicando los principios geométricos existentes en el momento de las tomas fotográficas. Para obtener una solución al sistema, es necesario formular una serie de ecuaciones de condición que relacionen los valores medidos y los parámetros desconocidos. Estas ecuaciones de condición son: Condición de colinealidad, condición de coplaneidad y condición de escala.

La condición de colinealidad, calcula simultáneamente todos los elementos de la orientación de los dos fotogramas, lo que obliga a la intersección de los rayos homólogos y que estos contengan a la vez a los puntos de apoyo.

La condición de coplaneidad realiza la restitución por fases, obteniendo primero los elementos de la orientación relativa, formando con ello la intersección de los rayos homólogos y seguidamente tras el conocimiento de las coordenadas terreno de puntos comunes (modelo-terreno) se realiza una transformación espacial de semejanza.

Las fases de la restitución analítica son:

1. Medición de coordenadas del fotograma en el comparador, obteniéndose las coordenadas comparador.
2. Reconstrucción de los haces de rayos: Obtención de las coordenadas imagen (coordenadas placa, es un sistema plano en el que se añade un tercer eje, el cual es perpendicular al plano de la fotografía, pasando por el centro de proyección al que se considera origen de coordenadas), tras la realización de las correspondientes correcciones debidas a las distorsiones de la cámara, refracción atmosférica y esfericidad terrestre.
3. Cálculo y determinación de todos los elementos de la orientación para los dos fotogramas.
4. Cálculo de las coordenadas terreno.

Los dos primeros pasos son comunes para cualquiera de los dos métodos elegidos para la restitución analítica.

2. Producción de la fotogrametría analítica.

Los principales productos fotogramétricos se pueden agrupar en las siguientes categorías:

2.1. Cartografía convencional.

Quizás la aplicación más conocida de la fotogrametría está en el campo de la Topografía y la Cartografía. La producción de la Cartografía es variada: mapas topográficos, mapas de usos del suelo, cartografía urbana, mapas geológicos, planeamiento urbanístico, arqueología, geomorfología, hidrología...

El objetivo de la Cartografía, en muchos casos es el posterior empleo en la planificación de obras civiles (autovías, puentes, tuberías, líneas eléctricas, embalses, proyectos urbanísticos...). A partir de la restitución de las fotografías se pueden crear los modelos digitales del terreno, de manera que la información de la forma y uso de la superficie terrestre es archivada y posteriormente procesada en los Sistemas de Información Geográfica.

La fotogrametría también puede ser usada para crear densos campos de puntos fijos, los cuales pueden servir como base para el Catastro, por ejemplo la determinación de las coordenadas de los puntos de los linderos. La precisión de las coordenadas puede ser asegurada por la apropiada selección de la escala de la fotografía.

Otra aplicación es la fotogrametría de objetos cercanos, con distancias a los objetos entre 1 y 100 metros, para lo cual se exigen cámaras especiales, particularmente las llamadas estereocámaras. Es usada particularmente en la Arquitectura, medidas de precisión de edificios y objetos de ingeniería, supervisión de operaciones en edificios y documentación de daños en edificios, medidas de deformaciones, medidas cinemáticas...

Por último, se debe mencionar que la medición fotogramétrica sobre fotografías normales es posible, con la ayuda de complejos algoritmos matemáticos. Las medidas son generalmente procesadas en ordenadores. Esta técnica está usándose en la reconstrucción de accidentes de tráfico. Incluso se está usando la fotogrametría de rayos X en el campo de la medicina y la odontología para el diagnóstico y tratamiento de enfermedades.

2.2. Ortofotos.

Las ortofotos difieren de los mapas convencionales en que los detalles son mostrados fotográficamente en lugar de dibujar los signos convencionales. Una ortofoto tiene los atributos básicos de los mapas, esto es un conocimiento de la escala y un conocimiento del sistema de coordenadas. Se puede mejorar cartográficamente añadiendo a la ortofoto signos convencionales, nombres y otros datos de interés.

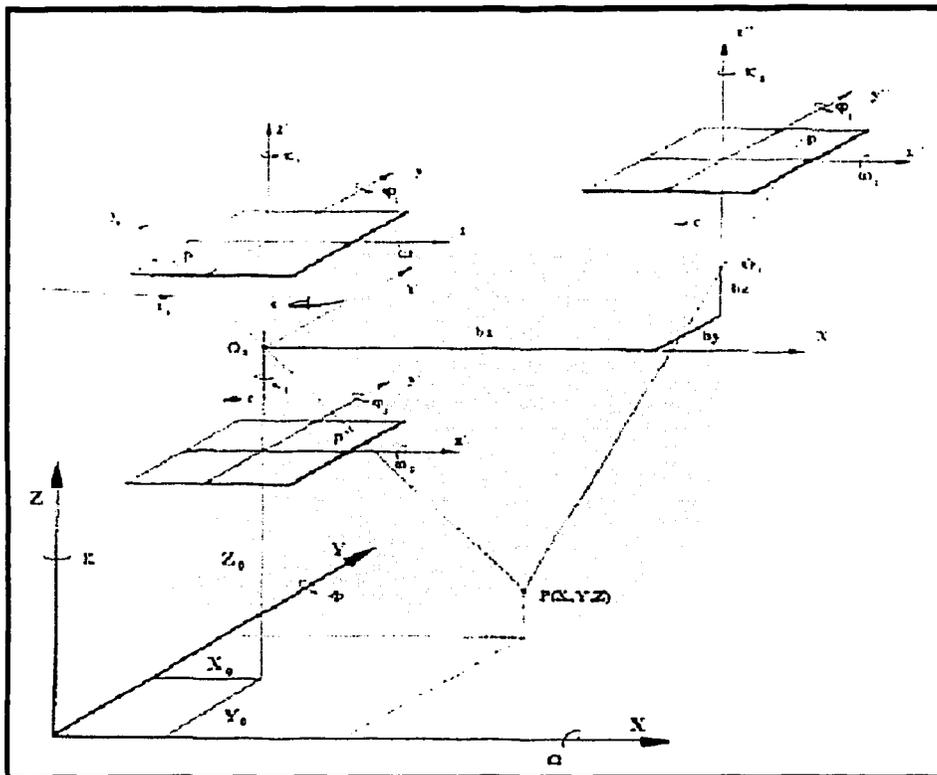
El producto de la rectificación diferencial de las fotografías es la ortofotografía u ortofoto. Con la rectificación se pretende eliminar la inclinación de la fotografía y el relieve del terreno para tener una escala definida en toda la fotografía. Esta operación se consigue con una transformación proyectiva.

2.3. Datos numéricos.

El producto final que se obtenía con la fotogrametría analógica eran los mapas, pero en el momento en que se introdujo la informática en la fotogrametría se podían obtener una serie de productos que hasta entonces se hacían de difícil adquisición como era tener un listado de coordenadas, colecciones de datos o un modelo numérico (distancias, elevaciones, áreas, volúmenes...).

La gran diferencia entre la fotogrametría analógica y la analítica estriba en el cambio que supone el mostrar los datos del terreno por métodos gráficos (mapas) y los mismos datos almacenarlos digitalmente.

3. Sistemas de coordenadas fotogramétricas.



- Coordenadas comparador : (x, y, z)
- Coordenadas placas de la imagen izquierda /derecha (x', y') (x'', y'')
- Constante focal de la cámara : c
- Punto del terreno; puntos imagen : P, p, p''
- Centros de proyección O_1, O_2
- Componentes de la base : b_x, b_y, b_z
- Origen del sistema modelo con respecto al sistema terreno : (X_0, Y_0, Z_0)
- Coordenadas en el sistema de puntos de apoyos(terreno) : (X, Y, Z)
- Coordenadas modelo : (x, y, z)
- Inclinación transversal : ω_1, ω_2
- Inclinación longitudinal : ϕ_1, ϕ_2
- Giro alrededor del eje Z : κ_1, κ_2
- Giro del modelo alrededor de los ejes terreno : Ω, Φ, K

Sistema de coordenadas.

Los sistemas de coordenadas usados en fotogrametría son cartesianos y responden al conjunto de coordenadas que se pueden obtener de un mismo punto del terreno a lo largo de todo el proceso fotogramétrico de restitución.

Siempre que se realice dos tomas fotográficas de un mismo objeto, se dispone los siguientes tipos de coordenadas:

- Coordenadas comparador: (x, y) . Son coordenadas planas referidas a cualquier sistema cartesiano plano de la imagen del punto representado en el cliché. Para cualquier punto del objeto fotografiado se tiene dos pares de coordenadas: Fotograma izquierdo: (x', y') . Fotograma derecho: (x'', y'') .
- Coordenadas imagen: (x', y', c) (x'', y'', c) . Son coordenadas de la imagen de un punto respecto al sistema definido por las marcas fiduciales del fotograma y el eje principal, correspondiendo (x', y') al fotograma izquierdo y (x'', y'') al fotograma derecho.
- Coordenadas modelo: (X, Y, Z) . Coordenadas de un punto en el modelo métrico, obtenido tras realizar la orientación relativa.
- Coordenadas terreno: (X, Y, Z) . Coordenadas de un punto restituido en el sistema definido por los puntos de apoyo, es decir el sistema absoluto de coordenadas.

4. Orientación interna.

4.1. Introducción.

Obtenidas las coordenadas comparador, el paso siguiente es obtener las coordenadas imagen de la perspectiva de los mismos puntos medidos en el cliché, para que con ellas y con la distancia focal de la toma, se pueda reconstruir cualquier rayo de la perspectiva definida por la toma fotogramétrica.

Hay que considerar ciertas fuentes de error en el proceso fotogramétrico, que hacen que los puntos imagen no aparezcan en las posiciones teóricas, dadas por las leyes teóricas de la perspectiva:

- El punto principal no coincide con el centro fiducial.
- La película fotogramétrica ha sufrido deformaciones.
- El objetivo está afectado de distorsión.
- Refracción atmosférica.
- Esfericidad terrestre.

Para la obtención de las coordenadas imagen de la perspectiva, se debe considerar las anteriores causas reagrupándolas de forma que las dos primeras fuerzan la realización de una transformación de coordenadas y las tres últimas a corregir las coordenadas ya transformadas, a partir de las expresiones aproximadas que valoran dichas correcciones.

4.2. Colocación de la fotografía en el comparador.

Los errores que envuelven la orientación de las fotos en un comparador se debe a la desviación entre la medición de coordenadas instrumentales y sus correspondientes coordenadas en

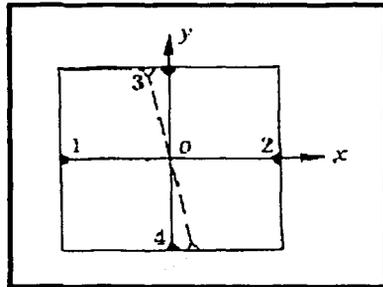
el punto imagen. Esta clase de errores pueden ser particularmente eliminados a través de reducción por medio de la medición de marcas fiduciales en los fotogramas.

4.2.1. Colocación de la foto de acuerdo al punto principal de la imagen y la orientación de la foto de acuerdo con las marcas fiduciales.

La práctica general en este caso es la marca del punto principal en la fotografía, y usando las marcas fiduciales u otros puntos suplementarios, para marcar la dirección del eje x de las coordenadas de la foto. La lectura del comparador es puesta a cero. Entonces la fotografía es colocada de acuerdo con las marcas del punto principal, y orientada de acuerdo con la dirección x de la fotografía.

4.2.2. Colocación arbitraria de la foto y orientación de acuerdo con las marcas fiduciales.

Si las marcas fiduciales están colocadas en las cuatro esquinas del fotograma se sigue el mismo principio que en el caso de estar colocadas en el centro. Las fotos son colocadas respectivamente en la escena izquierda y derecha y son orientadas en la dirección de la línea horizontal fiducial, esto es 1-2.



Colocación del fotograma.

Todas las fotos en una pasada o en un bloque deben ser orientadas con el uso de la misma dirección fiducial, por que los dos ejes de coordenadas definidos por el par respectivo de marcas fiduciales en una foto puede no ser estrictamente ortogonal.

$$x_R = x_L - p$$

$$y_R = y_L - q$$

Mientras se rotan las manivelas de x , y , p , q se observa con precisión las marcas fiduciales 1_l y 1_r , 2_l y 2_r , 3_l y 3_r , y 4_l y 4_r , de las fotos izquierda y derecha sucesivas. Después de cada observación tomar las lecturas x , y , p , q . Generalmente dos lecturas son realizadas y su valor medio es tomado.

$$l_x = \frac{1}{4}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4) + x_o$$

$$l_y = \frac{1}{4}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4) + y_o$$

$$l_p = \frac{1}{4}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 + \bar{p}_4)$$

$$l_q = \frac{1}{4}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2 + \bar{q}_3 + \bar{q}_4)$$

Donde x_o e y_o son las coordenadas del punto imagen principal (orientación interna). Para la escala, se procede a realizar dos veces:

$$l'_x = \frac{1}{4}(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) + x_o$$

$$l'_x = \frac{1}{4}(\bar{x}_3 + \bar{x}_4) + x_o$$

$$l'_y = \frac{1}{4}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2) + y_o$$

$$l'_y = \frac{1}{4}(\bar{y}_3 + \bar{y}_4) + y_o$$

$$l'_p = \frac{1}{4}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2)$$

$$l'_p = \frac{1}{4}(\bar{p}_3 + \bar{p}_4)$$

$$l'_q = \frac{1}{4}(\bar{q}_1 + \bar{q}_2)$$

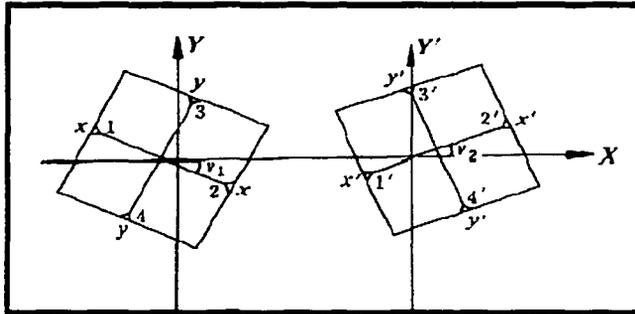
$$l'_q = \frac{1}{4}(\bar{q}_3 + \bar{q}_4)$$

La diferencia entre los dos valores no debe exceder un determinado límite para todo el estereopar.

4.2.3. Colocación arbitraria de la foto y orientación de la foto.

Muchas veces es necesario realizar la orientación con precisión en un instrumento, computar las coordenadas imagen de todos los puntos homólogos y paralajes, y realizar un chequeo. Es suficiente colocar las fotos de manera arbitraria en el comparador y solamente aproximar la orientación tan bien como la vista estereoscópica es obtenida. Algunos instrumentos no están equipados con instrumental de orientación de las fotos, en ese caso, las fotos pueden ser orientadas de manera aproximada, y la visión estereoscópica de puntos homólogos pueden ser realizada con la ayuda de rotación óptica de las imágenes. El procedimiento de observación de un punto imagen es la observación estereoscópica de todas las marcas fiduciales y la selección de puntos terreno, y entonces toma las lecturas. Basado en estas lecturas, el ordenador puede calcular las lecturas iniciales de las escalas, las coordenadas y paralajes de los puntos observados y las correcciones de esas coordenadas y paralajes debido a la falta de exactitud en la orientación de la foto.

La posición de las fotografías después de la orientación aproximada es:



Orientación aproximada.

Donde las coordenadas X, Y representa los ejes del comparador, y x, y y x', y' indican respectivamente los ejes de las fotos izquierda y derecha. Las lecturas después de observar secuencialmente las marcas fiduciales y los puntos imagen homólogos son $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{p}_i, \bar{q}_i$ siendo ($i = 1, 2, 3, 4$) para las marcas fiduciales y $\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}, \bar{q}$ para los puntos topográficos.

Para chequear la calidad de la observación de las marcas fiduciales de todas las fotos, se puede adoptar el método visto anteriormente de comparación o el método de comparación de los valores medidos y sus valores verdaderos de las distancias entre las marcas fiduciales (1 con 2, 3 con 4). Posteriormente, los valores observados $\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{p}_i, \bar{q}_i$ deberían ser reducidos a $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)_l$, $(\bar{x}_i, \bar{y}_i)_R$ y entonces calcular la distancia medida entre las marcas fiduciales 1 y 2 de las fotos izquierda y derecha, respectivamente:

$$l_{(1-2)} = \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}$$

Y la distancia medida entre las marcas fiduciales 3 y 4:

$$l_{(3-4)} = \sqrt{(\bar{x}_4 - \bar{x}_3)^2 + (\bar{y}_4 - \bar{y}_3)^2}$$

Las diferencias de comparación deben estar dentro de unos determinados valores prescritos previamente.

De acuerdo con las escalas I_x, I_y, I_p, I_q , y las coordenadas y paralajes de todos los puntos observados de todos los puntos observados en el sistema de coordenadas instrumentales:

$$\begin{aligned}\bar{X}_L &= \bar{X}_L - l_x \\ \bar{Y}_L &= \bar{Y}_L - l_y \\ \bar{p} &= \bar{p} - l_p \\ \bar{q} &= \bar{q} - l_q\end{aligned}$$

Las coordenadas de la foto derecha es:

$$\begin{aligned}\bar{X}_R &= \bar{X}_L - \bar{p} \\ \bar{Y}_R &= \bar{Y}_L - \bar{q}\end{aligned}$$

En orden a transformar las coordenadas medidas por el instrumento en coordenadas foto, se deben conocer los ángulos ν_1, ν_2 , los cuales pueden ser calculados con referencia en la marca fiducial 1, 2, 3 o 4 con la siguiente ecuación:

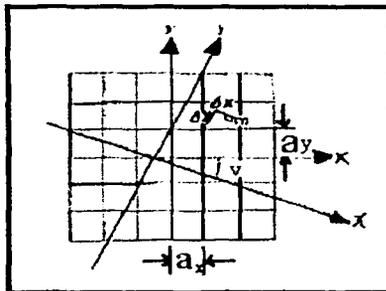
$$\text{sen} \nu_{(1,2)} = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{l_{(1,2)}}$$

Entonces las coordenadas imagen final se obtienen con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x &= \bar{X} \cos \nu + \bar{Y} \text{sen} \nu + x_0 \\ y &= -\bar{X} \text{sen} \nu + \bar{Y} \cos \nu + y_0\end{aligned}$$

El criterio de los resultados obtenidos de las ecuaciones anteriores es que el valor de x de la marca fiducial 3 debería ser el mismo que el de la marca 4, y el valor de y de la marca 1 debería ser igual que el de 2. El criterio es usado para chequear la precisión de cálculo de la orientación de la foto en el comparador, y la calidad de las medidas en los puntos imagen y el cálculo inexacto.

Si las fotos son impresas con una malla de coordenadas, entonces las mediciones de las coordenadas de un punto imagen es realizado con respecto a su punto de la malla más cercano.



Fotografía con malla.

En este caso, para el cálculo de las ecuaciones anteriores, la medida de los incrementos Δx , Δy deben ser usados para sustituir las coordenadas x , y :

$$\Delta x = \Delta \bar{r} \cos v + \Delta \bar{r} \operatorname{sen} v$$

$$\Delta y = -\Delta \bar{r} \operatorname{sen} v + \Delta \bar{r} \cos v$$

Las coordenadas finales de un punto imagen se obtienen de la suma total de las coordenadas de los puntos más cercanos de la malla, los incrementos de las coordenadas, y las coordenadas del punto principal de la imagen:

$$x = x_0 + \Delta x + x_0$$

$$y = y_0 + \Delta y + y_0$$

Con este método se pueden descubrir errores groseros, e incluso eliminarlos.

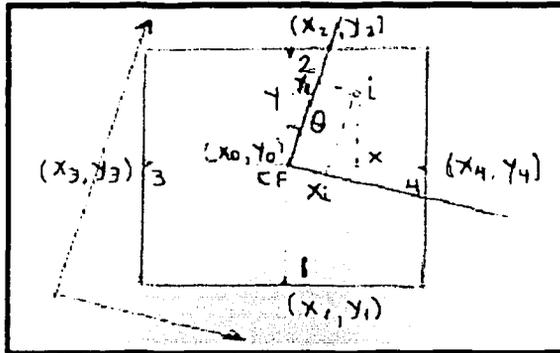
4.3. Transformación del sistema de coordenadas comparador al sistema fiducial.

Se pretende obtener las coordenadas transformadas del punto (x_r, y_r) a partir de las coordenadas comparador (x, y) . Hay que tener en cuenta conjuntamente la no coincidencia de ejes y la deformación de la película.

Se tienen las coordenadas (x, y) instrumentales corregidas de los errores sistemáticos del instrumento, para cada punto imagen. Para pasar al sistema de coordenadas de la fotografía hay que definir el centro fiducial. Las distintas maneras de definirlo son:

4.3.1. No se conoce ningún dato de la calibración.

Se pretende a continuación pasar de coordenadas instrumentales a coordenadas fiduciales y en este caso no se dispone de ningún dato de calibración, por tanto las coordenadas fiduciales son coordenadas instrumentales. Se define el centro fiducial como la media de las coordenadas de las cuatro marcas fiduciales.



Determinación centro fiducial con la media de las cuatro marcas fiduciales.

$$x_o = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}$$

$$y_o = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$$

Para pasar del sistema instrumental al sistema fiducial hay que calcular una rotación, pues ambos sistemas forman un ángulo, θ .

$$\theta_1 = \arctg \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$$

$$\theta_2 = \arctg \frac{x_4 - x_3}{y_4 - y_3}$$

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

Supongamos un punto i de coordenadas:

- Sistema de la fotografía: (x, y)
- Sistema instrumental (medido): (x_i, y_i)

Las coordenadas en el sistema de la fotografía es:

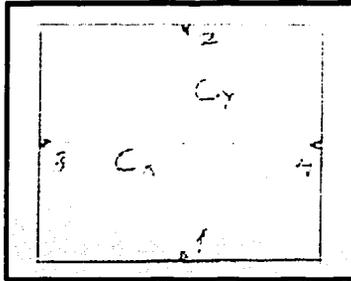
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i - x_o \\ y_i - y_o \end{pmatrix}$$

Las coordenadas (x_o, y_o) son las del centro fiducial referidas al sistema instrumental.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.3.2. Se conoce algún dato de la calibración.

Conociendo una o dos distancias entre las marcas fiduciales: (c_x, c_y) . Como se ha medido las coordenadas fiduciales se puede calcular la distancia entre ellas:



Se conoce las distancias, c_x, c_y .

$$d_{12} = \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right)^{1/2}$$
$$d_{34} = \left((x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 \right)^{1/2}$$

Comparando la distancia calibrada con la distancia medida se obtiene los factores de escala de x y de y .

$$\lambda_x = \frac{c_x}{d_{34}}$$

$$\lambda_y = \frac{c_y}{d_{12}}$$

La deformación en general es:

$$\lambda = \frac{\lambda_x + \lambda_y}{2}$$

Así se puede obtener las coordenadas fiduciales corregidas de los errores de deformación en x y en y , por ejemplo si son uniformes se deben a la deformación de la película.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_x & 0 \\ 0 & \lambda_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_f - x_o \\ y_f - y_o \end{pmatrix}$$

4.3.3. Certificado de calibración completo.

Se dispone de las distancias calibradas de las cuatro marcas fiduciales. Para pasar del sistema instrumental al sistema fiducial se emplea la transformación con 6 parámetros:

$$X_c = a_1 \cdot X + a_2 \cdot Y + a_3$$

$$Y_c = a_4 \cdot X + a_5 \cdot Y + a_6$$

Hay cuatro pares de coordenadas en el sistema instrumental y los mismos cuatro pares de coordenadas en el sistema de calibración (coordenadas de las marcas fiduciales).

Con la transformación afín de 6 parámetros se corrigen del error de escala, del error de ortogonalidad y se aplica una traslación para pasar de un sistema a otro. Con las 8 coordenadas de las marcas fiduciales se plantean 8 ecuaciones con 6 incógnitas. Redundancia de 2 y por tanto se ajusta por mínimos cuadrados.

Otras opciones son:

$$X_c = \frac{a_1 \cdot X + b_1 \cdot Y + c_1}{a_n \cdot X + b_n \cdot Y + 1}$$

$$Y_c = \frac{a_2 \cdot X + b_2 \cdot Y + c_2}{a_n \cdot X + b_n \cdot Y + 1}$$

Otra opción es emplear la fórmula:

$$X_c = X + a_1 + a_2 \cdot X + a_3 \cdot Y + a_4 \cdot X \cdot Y$$

$$Y_c = Y + a_5 + a_6 \cdot X + a_7 \cdot Y + a_8 \cdot X \cdot Y$$

Hay 8 ecuaciones con 8 parámetros, y por tanto no se puede ajustar por mínimos cuadrados. Por tanto no se aconseja usarlos.

Se puede aplicar la fórmula general de las transformaciones bidimensionales:

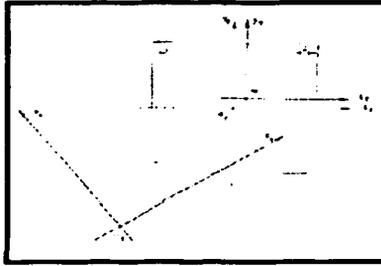
$$X_F = \lambda_x X_k \cos \alpha - \lambda_y Y_k (\cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta) + Tx$$

$$Y_F = \lambda_x X_k \operatorname{sen} \alpha + \lambda_y Y_k (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta) + Ty$$

Siendo, T_x , T_y el desplazamiento del sistema fiducial O_F con respecto al sistema comparador O_k .

$$X_F = aX_k - bY_k + Tx$$

$$Y_F = cX_k + dY_k + Ty$$



Transformación de las coordenadas comparador.

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} X_F \\ Y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_k \\ Y_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} TX \\ TY \end{pmatrix}$$

Las coordenadas transformadas son:

$$X_T = X_F + X_w$$

$$Y_T = Y_F + Y_w$$

Siendo (x_w, y_w) los valores obtenidos por la calibración de la cámara.

4.3.4. Fotografía con retícula.

El sistema más utilizado es el denominado plano focal, el cual consiste en colocar la retícula entre la lente y la película, de forma que al realizar la toma de vistas, la retícula se imprime sobre la propia película. Se puede plantear un polinomio de grado tres:

$$x' = x + a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot y + a_4 \cdot x \cdot y + a_5 \cdot x^2 + a_6 \cdot y^2 + a_7 \cdot x^2 \cdot y + a_8 \cdot x \cdot y^2 + a_9 \cdot x^3 + a_{10} \cdot y^3$$

$$y' = y + b_1 + b_2 \cdot x + b_3 \cdot y + b_4 \cdot x \cdot y + b_5 \cdot x^2 + b_6 \cdot y^2 + b_7 \cdot x^2 \cdot y + b_8 \cdot x \cdot y^2 + b_9 \cdot x^3 + b_{10} \cdot y^3$$

Siendo:

x', y' : Las coordenadas corregidas de las marcas fiduciales.

x, y : Coordenadas instrumentales (observadas) de los puntos medidos.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots$: Coeficientes del modelo de error (incógnitas).

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & y & x \cdot y & x^2 & y^2 & x^2 \cdot y & x \cdot y^2 & x^3 & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x \cdot y & x^2 & y^2 & x^2 \cdot y & x \cdot y^2 & x^3 & y^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ h_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \end{pmatrix}$$

Se plantean las dos ecuaciones para cada punto de la cuadrícula medido y conocido. Con una cuadrícula de 25 puntos se plantea:

$$A \cdot X = K + R$$

$\begin{matrix} 50 \times 20 & 20 \times 1 & 50 \times 1 & 50 \times 1 \end{matrix}$

Se resuelve por mínimos cuadrados y se obtienen los parámetros. Sustituyendo en los dos polinomios obtenemos las coordenadas corregidas de los puntos.

4.4. Deformación de la película.

La deformación de la película es uno de los factores claves que afectan al proceso fotogramétrico. Para una cámara con marcas fiduciales, es muy difícil determinar la deformación de la película. La deformación de la película se manifiesta en cambios en el tamaño de la película en el proceso de formación de la imagen latente. Las leyes que gobiernan la deformación de la película son complejas. Cuando solamente hay cuatro marcas fiduciales en la cámara, solo una transformación de ecuaciones puede ser satisfecha. Añadiendo unas pocas marcas fiduciales en los lados de la película no mejorará mucho, porque esos puntos no pueden dar necesaria fuerza para una determinación fidedigna de los coeficientes de las ecuaciones de corrección en transformaciones complicadas.

El más simple método de corrección para la deformación de la película es medir las distancias d_x' y d_y' entre las correspondientes marcas fiduciales del marco de la película de la cámara en las direcciones x e y . Si los correspondientes valores medidos de esas líneas en el negativo de la película son d_x y d_y , entonces las siguientes ecuaciones pueden ser utilizadas para corregir sus coordenadas observadas x e y .

$$x' = x \cdot \frac{d_x'}{d_x}$$

$$y' = y \cdot \frac{d_y'}{d_y}$$

Cuando las cuatro marcas fiduciales son colocadas en las cuatro esquinas de la foto, el método más preciso es la medición de coordenadas rectangulares (x', y') de todas las marcas fiduciales del marco de la cámara y las correspondientes coordenadas rectangulares (x, y) de las imágenes de las marcas fiduciales en la película. Se puede usar las siguientes ecuaciones de transformación:

$$x' = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{c_1x + c_2y + 1}$$

$$y' = \frac{b_1x + b_2y + b_3}{c_1x + c_2y + 1}$$

La observación de las cuatro marcas fiduciales produce ocho coeficientes en las ecuaciones de transformación. Si hay más de cuatro marcas fiduciales, el método de mínimos cuadrados puede ser aplicado. Generalmente lo más frecuente es usar ecuaciones de transformación polinomial. Su forma general puede ser expresada con la matriz de notación siguiente:

$$x' = x + At$$

Donde:

x : Representa las coordenadas medidas del punto imagen.

x' : Representa las coordenadas del punto imagen después de la transformación.

A : Es la matriz de transformación.

t : Parámetros de transformación.

Por ejemplo:

1. La transformación afin es:

$$\begin{aligned} x' &= x + a_1 + a_2x + a_3y \\ y' &= y + b_1 + b_2x + b_3y \end{aligned}$$

Las cuales corresponden con las siguientes ecuaciones:

$$x' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$t = (a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y \end{pmatrix}$$

2. La transformación lineal conforme de cuatro parámetros:

$$x' = x + a_1 + a_2x + a_3y$$

$$y' = y + b_1 + b_2x + b_3y$$

Lo cual corresponde con las siguientes ecuaciones:

$$t' = (a_1 \quad b_1 \quad a_2 \quad a_3)$$

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & -y \\ 0 & 1 & y & x \end{pmatrix}$$

3. La transformación bilineal de ocho parámetros es:

$$x' = x + a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$$

$$y' = y + b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy$$

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy \end{pmatrix}$$

4. La transformación proyectiva (forma linealizada, ocho parámetros):

$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & 0 & y & 0 & xy & x^2 \\ 0 & 1 & 0 & x & 0 & y & y^2 & xy \end{pmatrix}$$

Desde que la deformación de la película tiene una gran influencia en los resultados del procesamiento fotogramétrico, es necesario para abordar en detalle este asunto. El asunto acostumbrado a este respecto es la aplicación de una placa enrejada impresa en el negativo. A través de las mediciones de los puntos de la red en un comparador, se puede obtener los errores de deformación de la imagen en todos los puntos de la red. Esos errores (incluidos errores de observación) son calculados en dos partes, errores aleatorios y errores sistemáticos. Los errores sistemáticos son los que se quieren determinar y corregir después de manera matemática tales como mejorar la precisión de los datos procesados de los puntos imagen.

Puesto que hay muchos puntos en la red, es posible usar más parámetros de transformación. Por ejemplo, se puede usar la transformación conforme de más alto grado.

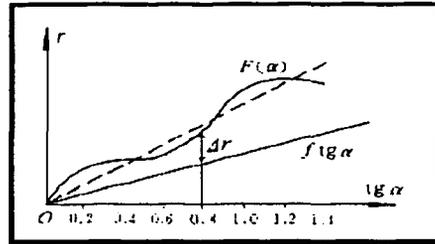
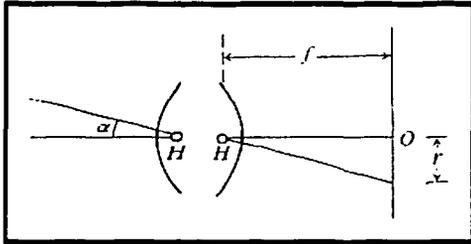
$$.A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x & -y & (x^2 - y^2) & -2xy & (x^3 - 3xy^2) & (y^3 - 3x^2y) \\ 0 & 1 & y & x & 2xy & (x^2 - y^2) & -(y^3 - 3x^2y) & (x^3 - 3xy^2) \end{pmatrix}$$

O la generalmente usada transformación de tercer grado:

$$.A_x = .A_y = \begin{pmatrix} 1 & x & y & xy & x^2 & y^2 & x^2y & xy^2 & x^3 & y^3 \end{pmatrix}$$

4.5. Distorsión de la lente.

Asumiendo que el ángulo entre un rayo de luz y el eje óptico del objetivo de la cámara es α en el espacio objeto, y la distancia radial entre su imagen y el punto principal de la foto es r , entonces cuando $r = f \cdot \operatorname{tg} \alpha$, el objetivo está libre de distorsiones, y f es constante en la cámara (distancia principal).



Distorsión producida por la lente y función de distorsión.

Razones teóricas y técnicas hacen que sea imposible que exista un objetivo sin distorsiones. Asumiendo la distancia radial actual de la imagen que es r , entonces su diferencia es la distorsión de la lente:

$$\Delta r = r - f \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

De la ecuación anterior se deduce que la distorsión de la lente está asociada con la focal de la cámara. Cuando la constante de la cámara se asume que ha cambiado de f a $f + \Delta f$, entonces el cambio en la distorsión es $-\Delta f \cdot \operatorname{tg} \alpha$. La nueva distorsión de los puntos imagen es:

$$\Delta r' = \Delta r - \Delta f \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

En una representación gráfica, en la abscisa se representa $\operatorname{tg} \alpha$, y en la ordenada se representa la función imagen $r = F(\alpha)$. Con respecto a la distancia principal asumida de la cámara, su distorsión es mostrada en la figura como la diferencia Δr , entre la curva $r = F(\alpha)$ y la línea $f \cdot \operatorname{tg} \alpha$. En fotogrametría, lo deseable es que existiera una distorsión en que fuese mínima en toda la imagen. Para este propósito, se puede rotar la línea $f \cdot \operatorname{tg} \alpha$ alrededor del origen O hasta que la posición indicada por la línea discontinua es alcanzada, donde la curva y la línea sean lo más cercanas posibles. Hay diferentes posibilidades de hacerlo:

1. Se puede exigir que la distorsión para una cierta distancia r_0 sea cero. Entonces la distancia principal de la cámara puede ser computada por la siguiente ecuación:

$$f = \frac{r_0}{\operatorname{tg} \alpha_0}$$

Donde r_0 es la correspondiente distancia radial y α_0 es el ángulo incidente en el espacio objeto.

2. Se puede escoger que la suma algebraica de las distorsiones en el campo imagen sea cero:

$$\sum_1^n \Delta r' = 0$$

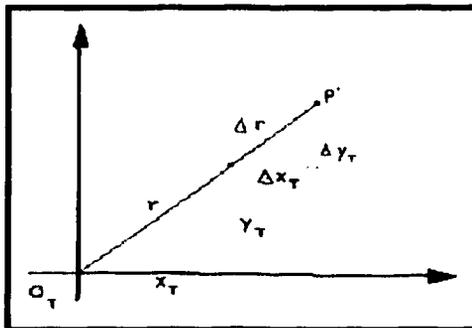
Entonces la ecuación para la determinación de f es:

$$f' = \frac{\sum r'}{\sum \lg \alpha}$$

3. El valor de f puede ser escogido como la suma de los cuadrados de los residuos de las distorsiones para que sean mínimas.

$$f' = \frac{\sum (r' \cdot \lg \alpha)}{\sum \lg^2 \alpha}$$

Se puede comprobar que el método de calibración de la distorsión es puramente un proceso matemático y no supone ningún cambio físico, tales como la focal del objetivo.



Corrección de distorsión, esfericidad y refracción.

Con respecto a la correspondiente distancia principal f , distorsión de la lente Δr puede ser expresada como:

$$\Delta r = k_1 r^3 + k_2 r^5 + k_3 r^7 + \dots$$

Donde r es la distancia radial del punto principal de la imagen al punto imagen, el cual puede ser obtenido de las coordenadas (x, y) del punto imagen:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Comenzando por esta relación básica, se puede determinar la función de distorsión con una distribución de distorsión diferente por usar otra distancia principal $f + \Delta f$. Por ejemplo, se puede hacer la máxima distorsión positiva igual a la máxima distorsión negativa o hacer la distorsión para una cierta distancia radial igual a cero.

Assumiendo que f es cambiado por Δf , y $\frac{\Delta f}{f} = k_a'$, entonces:

$$\Delta r' = \Delta r - \Delta f \cdot \text{tg} \alpha = \Delta r - \frac{\Delta f}{f} \cdot f \cdot \text{tg} \alpha = \Delta r - \frac{\Delta f}{f} (r - \Delta r) = \Delta r (1 - k_a') + k_a' r$$

Sustituyendo en $\Delta r' = k_1 r'^3 + k_2 r'^5 + k_3 r'^7 + \dots$:

$$k_1' = k_1 (1 - k_a')$$

$$k_2' = k_2 (1 - k_a')$$

Entonces:

$$\Delta r' = k_a' r + k_1' r^3 + k_2' r^5 + k_3' r^7 + \dots$$

Donde:

$$\Delta x = \frac{\Delta r'}{r} x \quad \Delta y = \frac{\Delta r'}{r} y$$

Entonces las coordenadas imagen (x', y') después de las correcciones de distorsión son:

$$x' = x - \Delta x = x - \frac{\Delta r'}{r} x = x \left(1 - \frac{\Delta r'}{r} \right) = x (1 - k_a' - k_1' r^2 - k_2' r^4 \dots)$$

$$y' = y - \Delta y = y - \frac{\Delta r'}{r} y = y \left(1 - \frac{\Delta r'}{r} \right) = y (1 - k_a' - k_1' r^2 - k_2' r^4 \dots)$$

La discusión llevada hasta ahora de la distorsión está referida al caso de ser una distorsión radial simétrica, pero algunas veces se debe considerar la distorsión asimétrica.

La teoría de la distorsión asimétrica sostiene que hay dos partes de distorsión asimétrica, esto es, distorsión radial Δr_r , y distorsión tangencial Δr_t :

$$\Delta r_r = 3 \cdot \rho \cdot \text{sen}(\varphi - \varphi_0)$$

$$\Delta r_i = \rho \cdot \text{cos}(\varphi - \varphi_0)$$

Donde:

$$\rho : J_1 r^2 + J_2 r^4 + \dots$$

φ : Angulo entre la dirección radial de un cierto punto imagen (x, y) y la dirección positiva del eje x

$\varphi_0, J_1, J_2 \dots$: Son términos constantes.

Se puede tomar las siguientes ecuaciones para los efectos de la distorsión asimétrica de las coordenadas imagen:

$$\Delta x = \rho_1 (r^2 + 2x^2) + 2\rho_2 xy$$

$$\Delta y = \rho_2 (r^2 + 2y^2) + 2\rho_1 xy$$

Donde:

$$\rho_1 : -J_1 \cdot \text{sen}\varphi_0$$

$$\rho_2 : J_2 \cdot \text{cos}\varphi_0$$

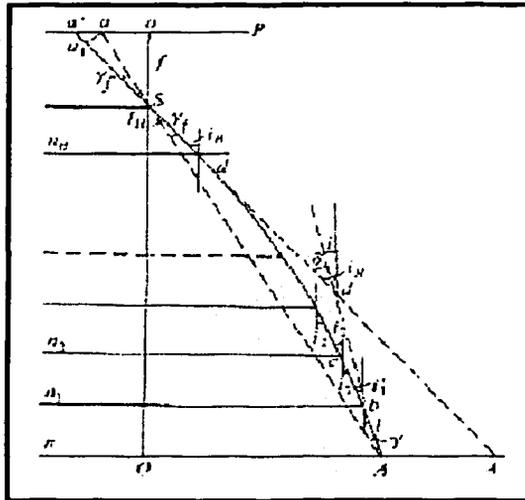
$$r^2 : x^2 + y^2$$

4.6. Refracción atmosférica.

Puesto que la densidad de la atmósfera decrece con el incremento de la altura, el índice de refracción de los rayos de luz pasan a través de la atmósfera vería con la altura. Consecuentemente, un rayo de luz pasando a través de la atmósfera es curva.

Asumiendo que el correcto punto de la imagen de la proyección central de un punto del terreno A es el punto a , el cual es trasladado al punto a' porque el rayo es curvo. El punto a' es localizado en la dirección de la tangente $A'S$ de la luz del rayo curvo pasando a través del punto S , y aa' es el desplazamiento del punto imagen causado por la refracción atmosférica. El ángulo γ , entre el rayo de luz $A'S$ y AS es la desviación angular de la refracción.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Refracción atmosférica.

Imaginemos que la atmósfera está compuesta por infinitas capas de aire con diferentes índices de refracción n, n, n, n, \dots . De acuerdo con las leyes de la refracción y considerando que los ángulos $i_1' = i_1, i_2' = i_2, \dots$:

$$n \cdot \text{sen } i = n_1 \cdot \text{sen } i_1 = n_2 \cdot \text{sen } i_2 \dots = n_H \cdot \text{sen } i_H$$

Lo cual significa que los ángulos de refracción de las últimas capas no tienen nada que hacer con los índices de refracción de las capas intermedias.

Asumiendo la desviación angular del rayo de luz de A a S causado por la refracción es δ , entonces:

$$i_H = i + \delta$$

El resultado del desplazamiento del punto imagen $\Delta r = aa'$ es:

$$\Delta r = aa_1 \cdot \text{sec } i = f \cdot \frac{\text{sen } \gamma_f}{\text{cos } i} \cdot \text{sec } i = f \cdot (1 + tg^2 i) \cdot \gamma_f$$

En el caso de disponer de una atmósfera estándar, γ_f está asociado con la altura de los puntos A y S . Se puede referir en la siguiente tabla los valores aproximados (H es la altura relativa de vuelo).

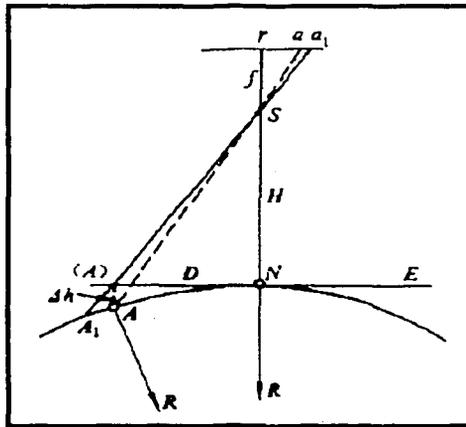
H (k.m)	60°	45°	30°	10°
0.5	2"	1"	1"	0
1.0	4"	3"	2"	0
2.0	9"	5"	3"	1"
3.0	12"	7"	4"	1"
4.0	16"	9"	5"	2"
5.0	18"	11"	6"	2"
10.0	38"	16"	9"	3"

Corrección angular deducida de la altura de vuelo y el ángulo de incidencia. Datos: $\gamma = 10''$.

$$i = 60^\circ \cdot f = 100mm \cdot \Delta r = 0.02 mm.$$

4.7. Curvatura terrestre.

La superficie de la Tierra es una superficie curva mientras que la referencia fotogramétrica es un plano horizontal y tangente o secante a la superficie de la Tierra. Consecuentemente, las imágenes fotogramétricas de los puntos del terreno están desplazadas. Se asume que el plano de referencia es tangente a la superficie de la Tierra en el punto N . La imagen de un punto en el terreno A_1 aparece en la fotografía en a , la cual es equivalente a la imagen del punto (A) en el plano de referencia E . Sin embargo, de acuerdo con la proyección ortográfica, la posición del punto (A) en el terreno debería ser A . La imagen del punto A en la fotografía es a . Por tanto aa , es el desplazamiento del punto imagen en la fotografía.



Corrección de curvatura de la Tierra.

$$\Delta h = -\frac{D^2}{2R}$$

Donde R es el radio de la Tierra.

$$\delta = \alpha \alpha_1 = \frac{\Delta h \cdot r}{H} = -\frac{r^3}{2R} \cdot \frac{H}{f^2}$$

Cuando $f = 100mm.$, $H = 4000m.$, $r = 100mm.$, se obtiene $\delta = 0.03 mm.$
 Por tanto, este efecto algunas veces excede los errores de observación de los puntos imagen.

En relación a dar una seria consideración a esta influencia, algunas veces en bloques de aerotriangulación se toma un sistema de coordenadas rectangulares geocéntricas o un sistema de coordenadas tangente rectangular plana. En este caso, el efecto de la curvatura de la Tierra es automáticamente eliminado.

5. Resección espacial de una sola fotografía.

El problema de la reseción espacial consiste en calcular los giros (ω, φ, X) y el centro de proyección (X_s, Y_s, Z_s) de la cámara a partir de las coordenadas conocidas de ciertos puntos del terreno. Cuando esto es usado para la calibración de la cámara o para otras mediadas precisas, los elementos de la orientación interna (x_0, y_0, f) pueden calcularse de manera simultanea. Alguna de las aplicaciones de este principio son:

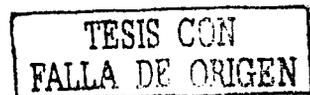
- Para ser usada como una parte del programa en algunos cálculos analíticos de dobles imágenes o el cálculo de la densificación de un bloque fotogramétrico.
- Para ser usada en el cálculo de la orientación externa del ajuste de bases fotogramétrico con la base de las coordenadas terreno obtenidas en el cálculo analítico de las dobles imágenes o de la densificación analítica fotogramétrica.
- Determinación de la distorsión de los objetivos de las lentes de la cámara y sus elementos de la orientación interna por medio de la fotogrametría estelar o cálculo de campo fotogramétrico.

Para solventar los problemas de la reseción espacial de una sola fotografía, se pueden usar la imagen formada por las ecuaciones de la proyección central, a la cual se le añade los elementos de la orientación interna o coordenadas del punto principal (x_0, y_0).

$$x - x_0 = -f \frac{a_1(X - X_s) + b_1(Y - Y_s) + c_1(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} = -f \frac{\bar{X}}{\bar{Z}}$$

$$y - y_0 = -f \frac{a_2(X - X_s) + b_2(Y - Y_s) + c_2(Z - Z_s)}{a_3(X - X_s) + b_3(Y - Y_s) + c_3(Z - Z_s)} = -f \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}$$

El sistema de rotación adoptado es el de los cosenos directores:



$$R = R_\varphi \cdot R_\omega \cdot R_\chi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

Hay que proceder a la linealización del sistema formado anteriormente. A las coordenadas imagen (x, y) hay que añadirle los residuales de su medición (V_x, V_y) . Las coordenadas del terreno son conocidas por tanto se pueden considerar exactas. Sin embargo, cuando los errores de estos valores no son indiferentes, se pueden considerar sus errores o correcciones, y por tanto se considera (V_x, V_y, V_z) . Los parámetros que se quieren determinar son: $X_s, Y_s, Z_s, \omega, \varphi, X, f, x_o, y_o$. Se puede sustituir sus valores por valores aproximados más sus correspondientes incrementos $\Delta X_s, \Delta Y_s, \Delta Z_s, \Delta \omega, \Delta \varphi, \Delta X, \Delta f, \Delta x_o, \Delta y_o$. La forma general de las ecuaciones de error son:

$$v_x - \frac{\partial x}{\partial X_s} v_{X_s} - \frac{\partial x}{\partial Y_s} v_{Y_s} - \frac{\partial x}{\partial Z_s} v_{Z_s} = (x) - x + \frac{\partial x}{\partial X_s} \Delta X_s + \frac{\partial x}{\partial Y_s} \Delta Y_s + \frac{\partial x}{\partial Z_s} \Delta Z_s + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial x}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial x}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial x}{\partial f} \Delta f + \frac{\partial x}{\partial x_o} \Delta x_o$$

$$v_y - \frac{\partial y}{\partial X_s} v_{X_s} - \frac{\partial y}{\partial Y_s} v_{Y_s} - \frac{\partial y}{\partial Z_s} v_{Z_s} = (y) - y + \frac{\partial y}{\partial X_s} \Delta X_s + \frac{\partial y}{\partial Y_s} \Delta Y_s + \frac{\partial y}{\partial Z_s} \Delta Z_s + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \Delta \varphi + \frac{\partial y}{\partial \omega} \Delta \omega + \frac{\partial y}{\partial X} \Delta X + \frac{\partial y}{\partial f} \Delta f + \frac{\partial y}{\partial x_o} \Delta x_o$$

Se supone que todas las coordenadas de los puntos imagen tienen el mismo peso, y con los valores aproximados de las coordenadas imagen se obtiene un valor aproximado inicial para las coordenadas imagen de $(x), (y)$. El sistema de ecuaciones anterior expresado de manera matricial es:

$$A \cdot v = B \cdot x - l$$

Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 1 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

$$l = \begin{pmatrix} l_x \\ l_y \end{pmatrix}$$

$$l_x = x - (x)$$

$$l_y = y - (y)$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} & a_{18} & a_{19} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} & a_{27} & a_{28} & a_{29} \end{pmatrix}$$

$$x^T = (\Delta X_S \quad \Delta Y_S \quad \Delta Z_S \quad \Delta \varphi \quad \Delta \omega \quad \Delta \chi \quad \Delta f \quad \Delta v_o \quad \Delta v_a)$$

Se realizan sobre las ecuaciones:

$$x - x_0 = -f \frac{a_1(X - X_S) + b_1(Y - Y_S) + c_1(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} = -f \frac{\bar{X}}{\bar{Z}}$$

$$y - y_0 = -f \frac{a_2(X - X_S) + b_2(Y - Y_S) + c_2(Z - Z_S)}{a_3(X - X_S) + b_3(Y - Y_S) + c_3(Z - Z_S)} = -f \frac{\bar{Y}}{\bar{Z}}$$

También se puede designar como:

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} X - X_S \\ Y - Y_S \\ Z - Z_S \end{pmatrix}$$

Los valores de los coeficientes es:

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

$$a_{11} = \frac{\partial r}{\partial X_1} = -f \frac{-a_1 \bar{Z} + a_2 \bar{X}}{Z^2} = \frac{1}{Z} \{a_1 f + a_2 (r - r_0)\}$$

$$a_{11} = \frac{\partial r}{\partial X_1} = -\frac{\partial r}{\partial X} = \frac{1}{Z} \{a_1 f + a_2 (r - r_0)\}$$

$$a_{12} = \frac{\partial r}{\partial Y_1} = -\frac{\partial r}{\partial Y} = \frac{1}{Z} \{b_1 f + b_2 (r - r_0)\}$$

$$a_{13} = \frac{\partial r}{\partial Z_1} = -\frac{\partial r}{\partial Z} = \frac{1}{Z} \{c_1 f + c_2 (r - r_0)\}$$

$$a_{21} = \frac{\partial y}{\partial X_1} = -\frac{\partial y}{\partial X} = \frac{1}{Z} \{a_1 f + a_2 (y - y_0)\}$$

$$a_{22} = \frac{\partial y}{\partial Y_1} = -\frac{\partial y}{\partial Y} = \frac{1}{Z} \{b_1 f + b_2 (y - y_0)\}$$

$$a_{23} = \frac{\partial y}{\partial Z_1} = -\frac{\partial y}{\partial Z} = \frac{1}{Z} \{c_1 f + c_2 (y - y_0)\}$$

$$a_{14} = \frac{\partial r}{\partial p_1} = \frac{-f}{Z^2} \left\{ \frac{\partial \bar{X}}{\partial p} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial p} \bar{X} \right\}$$

$$a_{15} = \frac{\partial r}{\partial q_1} = \frac{-f}{Z^2} \left\{ \frac{\partial \bar{X}}{\partial q} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial q} \bar{X} \right\}$$

$$a_{16} = \frac{\partial r}{\partial \kappa_1} = \frac{-f}{Z^2} \left\{ \frac{\partial \bar{X}}{\partial \kappa} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \kappa} \bar{X} \right\}$$

$$a_{21} = \frac{\partial y}{\partial p_1} = \frac{-f}{Z^2} \left\{ \frac{\partial \bar{Y}}{\partial p} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial p} \bar{Y} \right\}$$

$$a_{25} = \frac{\partial y}{\partial q_1} = \frac{-f}{Z^2} \left\{ \frac{\partial \bar{Y}}{\partial q} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial q} \bar{Y} \right\}$$

$$a_{26} = \frac{\partial y}{\partial \kappa_1} = \frac{-f}{Z^2} \left\{ \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \kappa} \bar{Z} - \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \kappa} \bar{Y} \right\}$$

Donde:

$$a_{11} = \frac{\partial x}{\partial \varphi} = + (y - y_0) \sin \omega - \left\{ \frac{(x - x_0)}{f} [(x - x_0) \cos \kappa - (y - y_0) \sin \kappa] + f \cos \kappa \right\} \cos \omega$$

$$a_{12} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} = - f \sin \kappa - \frac{(x - x_0)}{f} [(x - x_0) \sin \kappa + (y - y_0) \cos \kappa]$$

$$a_{13} = \frac{\partial x}{\partial \kappa} = + (y - y_0)$$

$$a_{21} = \frac{\partial y}{\partial \varphi} = - (x - x_0) \sin \omega - \left\{ \frac{(y - y_0)}{f} [(x - x_0) \cos \kappa - (y - y_0) \sin \kappa] - f \sin \kappa \right\} \cos \omega$$

$$a_{22} = \frac{\partial y}{\partial \lambda} = - f \cos \kappa - \frac{(y - y_0)}{f} [(x - x_0) \sin \kappa + (y - y_0) \cos \kappa]$$

$$a_{23} = \frac{\partial y}{\partial \kappa} = - (x - x_0)$$

$$a_{14} = \frac{\partial x}{\partial f} = \frac{z - r_0}{f}$$

$$a_{24} = \frac{\partial y}{\partial f} = \frac{y - y_0}{f}$$

$$a_{15} = \frac{\partial x}{\partial \lambda_0} = + 1$$

$$a_{25} = \frac{\partial y}{\partial \lambda_0} = 0$$

$$a_{16} = \frac{\partial x}{\partial y_0} = 0$$

$$a_{26} = \frac{\partial y}{\partial y_0} = + 1$$

Generalmente cuando se resuelve los elementos de la orientación externa por medio de la teoría de la resección espacial, los elementos de la orientación interna (x_0, y_0, f) son conocidos, por tanto:

$$\Delta x_0 = \Delta y_0 = \Delta f = 0$$

Por tanto, las ecuaciones de error en el caso que los puntos del terreno sean conocidos queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} r_x &= a_{11} \Delta \lambda_x + a_{12} \Delta \lambda_y + a_{13} \Delta Z_x + a_{14} \Delta \varphi + a_{15} \Delta \omega + a_{16} \Delta \kappa - l_x \\ r_y &= a_{21} \Delta \lambda_x + a_{22} \Delta \lambda_y + a_{23} \Delta Z_x + a_{24} \Delta \varphi + a_{25} \Delta \omega + a_{26} \Delta \kappa - l_y \end{aligned}$$

Mientras que las ecuaciones de error de los puntos de control son:

$$\begin{aligned} r_x + a_{11} \Delta \lambda_x + a_{12} \Delta \lambda_y + a_{13} \Delta Z_x &= a_{11} \Delta \lambda_x + a_{12} \Delta \lambda_y + a_{13} \Delta Z_x + a_{14} \Delta \varphi \\ &+ a_{15} \Delta \omega + a_{16} \Delta \kappa - l_x \\ r_y + a_{21} \Delta \lambda_x + a_{22} \Delta \lambda_y + a_{23} \Delta Z_x &= a_{21} \Delta \lambda_x + a_{22} \Delta \lambda_y + a_{23} \Delta Z_x + a_{24} \Delta \varphi \\ &+ a_{25} \Delta \omega + a_{26} \Delta \kappa - l_y \end{aligned}$$

La solución de las ecuaciones normales darán los elementos de la orientación externa de los haces de rayos fotogramétricos.

Los coeficientes a_{ij} del sistema son tomados de los términos de la primera derivada por la fórmula de Taylor y los valores aproximados de las incógnitas son generalmente toscos, el método



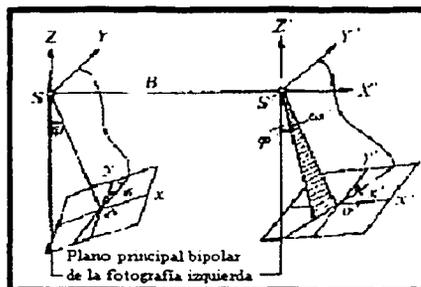
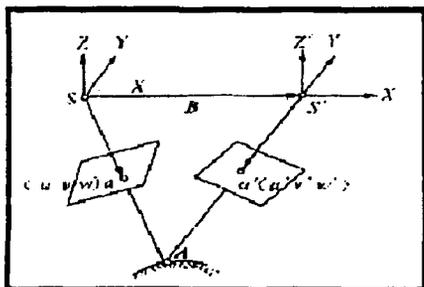
de aproximaciones sucesivas debe ser aplicado en un ordenador. En cada aproximación, el término constante debe ser recalculado y cuando hay cambios sustanciales en la corrección de las incógnitas, lo calculado debe ser llevado también a los valores de los coeficientes. El valor final de un término desconocido es la suma de los valores iniciales y las correcciones obtenidas en las aproximaciones. El número de aproximaciones depende de la precisión requerida en el cálculo, las cuales están relacionadas con los errores de observación de las coordenadas de los puntos imagen. El número usual de iteraciones suele ser de 3 o 4.

6. Fotogrametría analítica de doble imagen.

6.1. Orientación relativa de un par de imágenes independientes.

Uno de los principios básicos de la fotogrametría es la formación del modelo estereoscópico mediante la superposición de dos imágenes. La orientación relativa de las fotografías puede ser determinada a través de la condición que generan dos rayos homólogos en la intersección de cada uno en la fotografía. La orientación relativa puede ser generada mediante dos procesos: colocación de un par de fotos independientes y fotos consecutivas.

La dirección de la base B está tomada temporalmente en el eje X , y la dirección del eje Y es perpendicular al plano epipolar del fotograma izquierdo. Los centros de proyección son S' y S y los puntos homólogos imagen son a, a' .



Orientación mediante la formación de un par de fotografías independientes.

Los elementos de la orientación relativa del par de fotografías son $\varphi, X, \varphi', \omega', X'$. El centro de proyección S es tomado como origen, de forma que la localización de S' y a con respecto de S puede determinarse con los vectores SS' y Sa , además la localización del punto imagen a' con respecto a S' puede ser determinado por el vector $S'a'$. Estos tres vectores forman el mismo plano epipolar y son coplanarios, lo cual significa que su producto escalar-vectorial es cero.

$$SS' \cdot (Sa \times S'a') = 0$$

Expresado en coordenadas es:

$$\begin{vmatrix} B & 0 & 0 \\ u & v & w \\ u' & v' & w' \end{vmatrix} = B \cdot \begin{vmatrix} v & w \\ v' & w' \end{vmatrix} = 0$$

Donde (u, v, w) son las coordenadas espaciales del punto imagen a en el sistema de coordenadas $S - XYZ$, y (u', v', w') son las coordenadas espaciales del punto imagen a' en el sistema de coordenadas $S' - X'Y'Z'$.

6.2. Cálculo de las coordenadas modelo.

Después de la orientación relativa las matrices de rotación y la base entre los centros de proyección son conocidos, lo mismo que el punto de intersección de los rayos homólogos en la posición del modelo. Para evitar la confusión con las correspondientes coordenadas terreno, las coordenadas modelo se representan con la nomenclatura (U, V, W) de forma que los ejes son paralelos a los componentes del vector del punto imagen en el sistema de coordenadas objeto (u, v, w) . El origen del sistema de coordenadas (u, v, w) está localizado en la cámara de posición S , mientras que el origen del sistema de coordenadas (U, V, W) está localizado en el terreno. Las coordenadas de la cámara en la estación S el sistema de coordenadas modelo son (U_s, V_s, W_s) .

Para transformar las coordenadas de un punto imagen a un sistema paralelo del objeto se procede a:

$$\frac{U - U_s}{u} = \frac{V - V_s}{v} = \frac{W - W_s}{w} = N'$$

$$\frac{U - U_{s'}}{u'} = \frac{V - V_{s'}}{v'} = \frac{W - W_{s'}}{w'} = N'$$

Por tanto:

$$u = a_1x + a_2y - a_3f$$

$$v = b_1x + b_2y - b_3f$$

$$w = c_1x + c_2y - c_3f$$

Hay cuatro ecuaciones independientes y tres incógnitas, por tanto hay una redundancia para la realización del ajuste.

Haciendo:

$$B_x = U_s - U_s$$

$$B_z = W_s - W_s$$

Donde B_x es un valor temporal adoptado en la orientación relativa. Se puede resolver N, N' de las relaciones de U, W .

$$N = \frac{w'B_x - u'B_z}{uw' - wu'}$$

$$N' = \frac{wB_x - uB_z}{uw' - wu'}$$

Las coordenadas del punto de intersección son:

$$U = U'_S + Nu$$

$$V = V'_S + Nv$$

$$W = W'_S + Nw$$

El valor de V se puede computar dos veces, por tanto se procede a realizar la media.

$$V = \frac{1}{2} [(U'_S + Nv) + (V'_S + N'v')]$$

7. Ajuste de sistemas de ecuaciones por el método de mínimos cuadrados.

Dado un juego de ecuaciones lineales, las cuales la primera es:

$$l_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$$

Siendo:

a_{ij} : Coeficientes conocidos.

l_i : Términos absolutos conocidos, llamados observaciones.

x_i : Incógnitas del sistema de ecuaciones.

Si hay exactamente u observaciones, tenemos un sistema de ecuaciones lineales para la determinación de las u incógnitas x_i . La solución del juego de ecuaciones, expresado de forma matricial es $l = Ax$, por tanto $x = A^{-1}l$. Pero si hay n observaciones, donde $n > u$, una situación recomendada en orden a proporcionar un chequeo en las observaciones y un incremento en la precisión, entonces hay un problema de ajuste que hay que solventar, por ejemplo, por la introducción de condiciones que la suma de los cuadrados de las correcciones n de las observaciones sea mínimo. El sistema de ecuaciones de observación $l = Ax$ se escribe:

$$V = Ax - l$$

Las u incógnitas x^* , pueden ser determinadas por la condición de mínimo:

$$x'^T V = \text{mínimo} = (Ax - l)^T (Ax - l) = x'^T A^T Ax - 2l^T Ax + l^T l$$

La solución es:

$$\frac{\partial(v^T v)}{\partial \hat{x}} = 2\hat{x}^T A^T A - 2I^T A = 0$$

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T I$$

La matriz $(A^T A)$ es llamada matriz de ecuaciones normales, la matriz A es la matriz de observaciones de las ecuaciones o matriz de diseño. La solución es descrita como el ajuste de observaciones indirectas.

Dos métodos de ajuste por observaciones indirectas son necesarias, la primera da con ecuaciones iniciales no lineales y la segunda con observaciones de precisión diferente.

La primera ecuación de un sistema de ecuaciones no lineales puede ser expresado por:

$$l_i = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Desde el algoritmo de ajuste presupuesto de unas ecuaciones lineales, se reemplaza la ecuación anterior por una aproximación consistente en los primeros términos de la serie de Taylor con valores iniciales $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$:

$$l_i = f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^0 dx_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^0 dx_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^0 dx_n$$

Una comparación de este sistema con $l_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$, muestra las correspondencias siguientes:

$$a_{ik} \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^0$$

: Los términos son formados por diferenciación parcial y se expresa numéricamente por sustitución las aproximaciones $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$. Los resultados son números que corresponden con los coeficientes a_{ik} del caso lineal.

$$l_i \doteq \bar{l}_i - f(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = \bar{l}_i - l_i^0$$

En el cual l_i^0 es el valor obtenido de las aproximaciones y \bar{l}_i son las observaciones verdaderas.

$x_i = \hat{x}_i + dx_i$; Donde dx_i son las pequeñas correcciones a las aproximaciones iniciales x_i^0 .

Las ecuaciones no lineales han sido reducidas a formas lineales, es decir han sido linealizadas y el problema del ajuste ha sido arreglado para formar el sistema de ecuaciones normales:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T I$$

En la segunda extensión del método, se introduce el concepto de la precisión de la medición diferencial en las observaciones l . La precisión es expresada por la desviación estándar de una observación σ , o por la varianza σ^2 . En topografía el término del error medio cuadrático es frecuentemente empleado como desviación estándar. Estas precisiones difieren en que son introducidas en el ajuste de observaciones indirectas mediante los pesos p , y en una matriz de pesos P .

$$P_{ii} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

La mínima condición es entonces $v^T P v = \text{mínimo}$, la cual conduce a la solución:

$$x^* = (A^T P A)^{-1} A^T P l$$

Se puede insertar la incógnita estimada x^* , obtenida de $x^* = (A^T A)^{-1} A^T l$ o del sistema $x^* = (A^T P A)^{-1} A^T P l$ y llevada al sistema $v = A x^* - l$ para calcular las correcciones v de todas las observaciones l . Estas correcciones estimadas pueden ser empleadas para corregir las observaciones.

Por otra parte, se pueden emplear las correcciones v para estimar la desviación estándar o el error medio cuadrático de una observación la cual tiene de peso 1 en la matriz de pesos P :

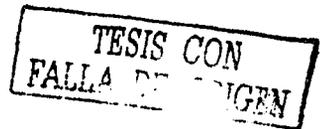
$$\hat{\sigma}_0 = \sqrt{\frac{v^T P v}{n - u}}$$

Con este error medio cuadrático de peso unidad y el llamado coeficiente de pesos q se estima los errores medio cuadráticos individuales de las incógnitas x_i :

$$\hat{\sigma}_{xk} = \hat{\sigma}_0 \cdot \sqrt{q_{kk}}$$

Los pesos de los coeficientes q son simplemente los elementos correspondientes a la diagonal principal de la inversa de la matriz de ecuaciones normales:

$$Q = (A^T P A)^{-1}$$



CONCLUSIONES VIII

La fotogrametría ha sido y sigue siendo una herramienta de suma importancia para múltiples trabajos de interés nacional como lo son:

- Los enlaces carreteros entre estados y municipios.
- Tendidos de líneas de conducción eléctrica.
- Tendido de gasoductos.
- Telecomunicaciones.
- Delimitaciones territoriales, etc.

Hoy en día la fotogrametría juega un papel primordial al momento de la elaboración de los grandes proyectos, debido a que las ventajas que aporta al ingeniero topógrafo son innumerables, ya que con una buena planeación del vuelo se puede obtener precisiones iguales o superiores a los métodos tradicionales de topografía con la grandísima diferencia de que los tiempos de realización de un levantamiento fotogramétrico es por mucho mas pequeño, debido a que la extensión del terreno en estudio es de grandes proporciones se deberá de controlar el vuelo fotogramétrico con apoyo terrestre el cual puede ser de tipo tradicional o con equipo GPS el cual servirá para poder tener una buena directriz de las líneas de vuelo que deberán de tener un excedente de información del proyecto con el objetivo de identificar y plasmar zonas de interés a pesar de que estén fuera del mismo. Una vez tomando en consideración lo anterior y habiendo regresado el camarógrafo con el o los carretes de cinta fotográfica deberán de entregar al laboratorista encargado de la revelación de la cinta fotográfica con información de interés para dicha revelación tales como:

- Cantidad de niebla en la zona de estudio.
- Si fue o no día soleado.
- Si existió polvaderas.
- Si hubo lluvia, etc.

Esta información es determinante para la revelación de la cinta debido a que el laboratorista es la persona que marca el éxito o el fracaso de la compañía contratada para la realización del estudio, debido a que él se encargará de proporcionarle a los negativos a cantidad e intensidad de luz, así como la calidad y cantidad de los productos químicos para la revelación e impresión tales como:

- Revelador
- Suavizante
- Fijador

Una vez que los rollos se han revelado y las fotografías se han impreso, se deberá secar tanto el negativo como el positivo para que por una parte se realice la extracción de la información del área en estudio en el equipo adecuado para la restitución fotogramétrica, por otra parte la realización del mosaico en miniatura y por otra la realización del mosaico rectificado en miniatura, el cual contendrá todas las fotografías del área en estudio sin traslapes, sin marcas fiduciales ni datos del número de foto,

altura de vuelo o escala. Dicho mosaico rectificado es parte del producto final el cual se le hace entrega al cliente.

Al momento de tener el personal indicado los negativos en el restituidor podemos incorporar métodos digitales, los cuales van a ser de utilidad para que posteriormente se pueda manipular la información levantada y se incorporen datos de interés tales como:

- Curvas de nivel.
- Zonas verdes.
- Zonas urbanas.
- Zonas de inundación.
- Zonas propensas a inundación.
- Cuerpos de agua, etc.

La incorporación de las curvas de nivel es determinante ya que sin ellas es imposible que se pueda cuantificar la realización de todo proyecto. Las curvas de nivel de forma general son identificadas cada 2 metros diferenciando las maestras de las auxiliares.

Es en esta fase del proyecto que podemos optar por métodos tradicionales de impresión, como la plumilla graficadora del estereo-restituidor, la información extraída de las fotografías aéreas en estudio únicamente se podrá utilizar el original, el cual podrá ser en papel bond o papel alba nene, al cual si por error es dañada la se tendría que repetir todo el trabajo.

Las ventajas de la fotogrametría digital son impresionantes debido a que una vez que se tiene información determinante para la realización de algún proyecto en posible hoy en día ir introduciendo la información a los sistemas computacionales en programas específicos como en AutoCad que es el más común para manipulación de imágenes de este tipo, procesando la información previamente por otros programas auxiliares los cuales ayudan a la compatibilidad entre datos.

Con la ayuda de la fotogrametría digital es posible determinar con la distinción de colores al momento de la impresión del plano final información crucial para el proyecto, la cual en algunos casos marca las directrices del mismo.

BIBLIOGRAFÍA

- American Society of Photogrammetry: **“Manual of Photogrammetry”**. Volumen 1. Virginia. 1980:
- American Society of Photogrammetry: **“Manual of Photogrammetry”**. Volumen 2. Virginia. 1980:
- González Rivera, Constancio: **“Apuntes de clase de Fotogrametría Analítica”**. Ingeniería en Geodesia y Cartografía de la Politécnica de Madrid:
- Ghosh, Sanjib K.: **“Analytical Photogrammetry”**. Pergamon Press. Estados Unidos. 1979:
- Ghosh, Sanjib K.: **“Phototriangulation”**. Lixington books. Estados Unidos. 1979:
- Herraes Boquera, José: **“Apuntes de clase de Fotogrametría Analítica”**. Ingeniería en Geodesia y Cartografía de la Politécnica de Valencia:
- Pérez, Juan Antonio: **“Apuntes de clase de Fotogrametría Analítica”**. Ingeniería Técnica en Topografía.
- Kraus, Karl. **“Photogrammetry”**. Volumen 1.1992:
- Kraus, Karl. **“Photogrammetry”**. Volumen 2.1992:
- Kreiling, Albert: **“Manual fotogramétrico”**. Wichmann. Alemania.1989:
- Warner, W. S.: **“Small Format Aerial Photography”**. Whittles Publishing. Reino Unido. 1996:
- Wolf, Paul R.: **“Elements of Photogrammetry”**.McGraw-Hill. Estados Unidos. 1974:
- Zhizhou, Wang.: **“Principles of photogrammetry”**. Wuhan Technical University of Surveying and Mapping. Beijing. 1990.