

PROGRAMA DE POSGRADO DE MAESTRÍA Y
DOCTORADO EN INGENIERÍA

**RESPUESTA NO LINEAL DE CUBIERTAS COLGANTES
ANTE LA ACCIÓN DEL VIENTO**

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN INGENIERÍA
(ESTRUCTURAS)

PRESENTA

RAFAEL FLORES VERA

DIRECTOR DE TESIS

ING. NEFTALÍ RODRÍGUEZ CUEVAS

CIUDAD UNIVERSITARIA, MÉXICO D.F.

MAYO 2003

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

a



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

DEDICATORIAS

A mi padre, de quien estoy orgulloso por ver la forma en que cumplió su ciclo en esta vida.

A mi madre, quien siempre ha luchado por su familia.

A mis hermanos, quienes indudablemente, con tantos años de convivencia, han influido en mi persona.

A mis amigos y compañeros, quienes le dan ese sabor especial a la escuela y a la vida misma.

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico o impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Rafael Flores Veva

FECHA: 22 de Mayo de 2003

FIRMA: [Firma]

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

b

AGRADECIMIENTO:
Se agradece el apoyo económico recibido por parte del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, con el cual ha sido posible la realización de los estudios que concluyen con esta tesis.

RECONOCIMIENTO
Se reconocen las facilidades otorgadas por el Instituto de Ingeniería
de la Universidad Nacional Autónoma de México,
durante la realización de mis estudios de maestría y de esta tesis.

Resumen

Las estructuras formadas por redes de cables resultan atractivas desde un punto de vista estético, pero también práctico, ya que pueden adoptar geometrías curvas y a la vez cubrir grandes claros con peso mínimo. Tales estructuras muestran efecto no lineal debido a grandes desplazamientos, y presentan tres distintos comportamientos: *rigidización estructural* causada por un aumento en las cargas, *flexibilización estructural* provocada por incrementos de carga, y *comportamiento dual*, es decir, algunos elementos de la estructura se rigidizan al mismo tiempo que otros se flexibilizan al aumentar las cargas.

En este trabajo se expone de manera detallada la metodología para la formulación teórica “exacta” no lineal, que permite definir la matriz de rigidez del elemento cable, así como también la forma en que participa cada matriz elemental en la formación de la matriz global de una estructura.

Para desarrollar una sensibilidad cuantitativa, además de la información cualitativa proporcionada por el desarrollo teórico, se estudia detalladamente su aplicación a una cubierta colgante bajo la acción del viento en diversas direcciones. Los resultados muestran las diferencias entre efectuar un análisis lineal y otro no-lineal, así como también se muestra el efecto que tienen los ciclos de carga y descarga que el viento ejerce sobre la estructura.

Con el propósito de proporcionar una visión más general del comportamiento de cubiertas colgantes, se estudian aspectos adicionales a los que presenta la estructura original. Se plantean situaciones en las que hay diversas curvaturas y preesfuerzos en los cables que forman las cubiertas. De forma cuantitativa se aprecia la diferencia entre la existencia de apoyos fijos y apoyos deformables. También se describe el comportamiento estructural cuando algún miembro pierde totalmente su tensión. Por otro lado, se comparan los resultados entre modelos detallados y modelos simplificados. Finalmente, se muestran otras geometrías y estructuraciones a las que se puede recurrir para diseñar cubiertas colgantes.

Abstract

Cable structures are attractive, from an aesthetic and also practical point of view, since they can adopt curved geometries, and, at the same time, they can cover long spans with minimum weight. Such structures show non linear structural behavior due to large displacements, and they can be classified into three groups: structures that become stiffer when increasing loads, structures that become softer when increasing loads, and structures that show both characteristics, some elements become stiffer and others become softer when increasing loads.

This work presents in a detailed way the methodology for the "exact" non linear theoretical formulation, that allows the definition of the stiffness matrix of each cable element, explaining both the contribution and location within the overall structural stiffness matrix of the individual element stiffness.

To develop a quantitative sensitivity, besides the qualitative information provided by the theoretical development, a detailed application for a specific hanging roof under the action of the wind in several directions is studied. The results show the differences between making a non linear and linear analysis, as well it is shown the effect that the wind produces during loading and unloading processes.

With the purpose of providing a more general vision of the behavior of hanging roofs, additional aspects are studied, besides those analyzed in the original structure. Different curvatures and pre-tensions in cables are analyzed. Differences between the use of fixed and unfixed supports are studied in a quantitative way. The structural behavior is also described when a member loses totally its tension. In addition, results are compared between detailed models and simplified models. Finally, other geometries are shown to help in the design of hanging roofs.

Notación

A	Área transversal del elemento cable. Área tributaria expuesta al viento
A, B	Extremos inicial y final del elemento cable, respectivamente
A	Función cuadrática aplicada sobre los desplazamientos u, v y w
$[AA]$	Matriz de transformación entre las fuerzas locales y las fuerzas básicas
α	Factor de variación de la velocidad del viento con la altura
a_1, a_2	Parámetros de la ecuación cuadrática que determinan las curvaturas de los cables de forma y de carga, respectivamente
α_i	Ángulo formado entre la horizontal y el segmento i de un cable de carga
β_j	Ángulo formado entre la horizontal y el segmento j de un cable de forma
C_p	Coefficientes de presión del viento
c	Constante arbitraria
Δ	Desplazamiento(s)
$\{dE\}$	Diferencial total de los desplazamientos básicos, expresado en forma matricial
$\{dU\}$	Vector de las derivadas de los desplazamientos locales
$\{dL\}$	Vector de incrementos en las cargas externas
$\{d\}$	Matriz de conexión entre los cambios incrementales de las fuerzas locales y entre los cambios incrementales de los desplazamientos locales
$\{dR\}$	Representación matricial de los cambios incrementales en las fuerzas locales
$[\delta Xa], [\delta Xb]$	Aproximaciones lineal y de segundo orden de la configuración desplazada de la estructura
δ	Altura gradiente, en el diseño por viento
d_1	Distancia a lo largo del eje X, entre el origen coordenado X, Y y el centro de la cubierta
d_2	Distancia a lo largo del eje Y, entre el origen coordenado X, Y y el centro de la cubierta
Dx, Dy, Dz	Desplazamientos producidos por el viento, en las direcciones X, Y, Z
e	Desplazamiento básico o longitudinal del elemento A-B
$\{E\}$	Representación vectorial de los desplazamientos básicos o longitudinales
E	Módulo de Young
Evc	Empuje total vertical producido por los cables de carga, dirigido hacia arriba
Evf	Empuje total vertical producido por los cables de forma, dirigido hacia abajo.
Fx_a, Fy_a, Fz_a	Componentes del vector de fuerzas externas en el extremo A del elemento cable A-B, en el sistema global de coordenadas
Fx_b, Fy_b, Fz_b	Componentes del vector de fuerzas externas en el extremo B del elemento cable A-B, en el sistema global de coordenadas
$f(x, y)$	Función que define la geometría de la cubierta
F_u	Esfuerzo último de los cables que forma la cubierta
F_c	Factor de tamaño, en el diseño por viento
F_{rz}	Factor de rugosidad y altura, en el diseño por viento
F_c	Factor de topografía, en el diseño por viento
F_a	Factor de exposición, en el diseño por viento

F	Fuerzas de diseño por viento
$f_1(x)$	Función que determina la geometría de los cables de forma
$f_2(y)$	Función que determina la geometría de los cables de carga
$[K]$	Matriz de rigidez del elemento cable A-B
$[k]$	Porción no lineal de $[K]$, en coordenadas locales
$[K]_r$	Matriz de rigidez de toda la estructura
$[K_o]$	Matriz de rigidez inicial
L_o	Longitud inicial del elemento cable A-B
l_p, m_p, n_p	Cosenos directores del eje P, referidos al sistema global de coordenadas
l_q, m_q, n_q	Cosenos directores del eje Q, referidos al sistema global de coordenadas
l_r, m_r, n_r	Cosenos directores del eje R, referidos al sistema global de coordenadas
$\{L\}$	Vector de cargas externas aplicadas al elemento cable A-B, en coordenadas globales
$[L]$	Vector de cargas externas, en coordenadas globales
$[L_o]$	Vector de las fuerzas internas, en coordenadas globales
n	Número de segmentos en los que se divide un cable de forma
m	Número de segmentos en los que se divide un cable de carga
P_1, P_2, etc	Fuerzas concentradas
P, Q, R	Ejes del sistema local de coordenadas
P	Fuerza básica o axial del elemento A-B
$\{p\}$	Representación vectorial de las fuerzas básicas o axiales
P_o	Preesfuerzo en el elemento A-B
Pof_j	Preesfuerzo que posee el segmento j de un cable de forma
Poc_i	Preesfuerzo que posee el segmento i de un cable de carga
q_z	Presión dinámica de base
$\{R\}$	Vector de carga en el elemento A-B, en coordenadas locales
R, S, T	Componentes del vector de carga en coordenadas locales
Rc_i	Empuje vertical producido por el desequilibrio entre las fuerzas de los cables de carga que concurren en el nudo i
r	Espaciamiento entre cables de carga
s	Espaciamiento entre cables de forma
$[T]$	Matriz de transformación de coordenadas, también conocida como matriz de rotación
$\{U\}$	Vector de los desplazamientos del elemento cable A-B, en coordenadas locales
u, v, w	Componentes del vector de desplazamientos del elemento cable A-B, en coordenadas locales
U_x, U_y, U_z	Desplazamientos producidos por el viento, en las direcciones X, Y, Z
V_R	Velocidad regional del viento
V_D	Velocidad de diseño por viento
X, Y, Z	Ejes del sistema global de coordenadas
X_A, Y_A, Z_A	Coordenadas globales del extremo A del elemento cable A-B
X_B, Y_B, Z_B	Coordenadas globales del extremo B del elemento cable A-B

$\{X\}$	Vector de desplazamientos globales de los extremos del elemento cable
x_a, y_a, z_a	Componentes del vector de desplazamientos globales, en el extremo A del elemento cable
x_b, y_b, z_b	Componentes del vector de desplazamientos globales, en el extremo B del elemento cable

Í N D I C E

Resumen		ii
Abstract		iii
Notación		iv
Capítulo I	INTRODUCCIÓN	I
Capítulo II	ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS FORMADAS POR CABLES	2
2.1	Fenómenos no lineales	2
2.2	Tipos de estructuras a las que es posible aplicar el método teórico "exacto"	4
2.3	Análisis del elemento cable	7
2.3.1	Sistema global de coordenadas y cosenos directores	
2.3.2	Cargas y desplazamientos en los sistemas global y local	
2.3.3	Transformaciones de las fuerzas y desplazamientos locales a fuerzas y desplazamientos globales	
2.3.4	Desplazamientos básicos y fuerzas básicas	
2.3.5	Transformación de los desplazamientos básicos parciales a desplazamientos locales parciales	
2.3.6	Transformación de las fuerzas básicas a fuerzas locales	
2.3.7	Transformación de las fuerzas básicas parciales a fuerzas locales parciales	
2.3.8	Transformación de las fuerzas básicas a fuerzas globales	
2.3.9	Transformación de los desplazamientos globales parciales en fuerzas globales parciales	
2.3.10	Matriz de rigidez incremental para el elemento cable	
2.4	Contribución de la matriz de rigidez del elemento a la matriz de rigidez total de la estructura	18
2.5	El método de solución de las ecuaciones de equilibrio no-lineal	20
2.6	Procedimiento alternativo: Análisis P- Δ	22
	Referencias y bibliografía	24
Capítulo III	ESTUDIO DE LA CUBIERTA DE LA ALBERCA OLÍMPICA "FRANCISCO MÁRQUEZ" CON APOYOS FIJOS	25
3.1	Introducción	25
3.2	Características generales de la estructura	25
3.3	Modelo para pruebas en túnel de viento	26
3.4	Determinación de las superficies de presión y de las fuerzas producidas por el viento	27
3.5	Determinación del estado de preesfuerzo que mantiene en equilibrio la geometría inicial	30
3.6	Análisis de la estructura bajo efecto del viento	33
3.6.1	Viento en dirección Sur	
3.6.2	Viento en dirección SE15°	

3.6.3	Viento en dirección SE30°	
3.6.4	Viento en dirección SE45°	
3.6.5	Viento en dirección SE60°	
3.6.6	Viento en dirección SE75°	
3.6.7	Viento en dirección Este	
3.6.8	Resumen de resultados obtenidos para los siete estados de carga	
3.7	Análisis de la estructura bajo efectos de carga y descarga del viento	51
3.8	Aplicación gradual de las cargas	54
3.9	Comparación entre los resultados de análisis lineales y no lineales	57
	Referencias	60
Capítulo IV	VARIANTES DE LA CUBIERTA DE LA ALBERCA OLIMPICA "FRANCISCO MÁRQUEZ"	61
4.1	Importancia de la curvatura en el comportamiento estructural de la cubierta	61
	4.1.1 Estimación del empuje vertical de los cables debido a su preesfuerzo	
	4.1.2 Comparación de resultados para distintas curvaturas	
4.2	Importancia del nivel de preesfuerzo inicial	70
4.3	Descarga axial total de algunos miembros de la cubierta	76
4.4	Apoyos con rigidez lineal finita	76
4.5	Simplificación del criterio de análisis de la cubierta	78
	Bibliografía	79
Capítulo V	COMENTARIOS FINALES	80
Apéndice A	RESULTADOS DE PRUEBAS EN TÚNEL DE VIENTO	82
Apéndice B	OTRAS FORMAS GEOMÉTRICAS Y ESTRUCTURALES PARA CUBIERTAS COLGANTES	86

Capítulo I INTRODUCCIÓN

Las estructuras formadas por redes de cables resultan atractivas desde un punto de vista estético, pero también práctico, ya que pueden adoptar geometrías curvas y a la vez cubrir grandes claros, con cantidades mínimas de acero en la estructura portante. Estos sistemas pueden usarse como superestructuras, tal es el caso de las cubiertas colgantes y puentes atirantados, o bien pueden servir de apoyo a otros sistemas principales, como es el caso de torres y mástiles atirantados.

Un elemento cable provee la forma estructural más simple, ya que solo presenta rigidez en dirección axial. Sin embargo un sistema más complejo, que contiene varios elementos cable, muestra un comportamiento no-lineal debido a grandes cambios en geometría. Estos considerables cambios en geometría producen una alteración en la rigidez del sistema, el cual se puede volver más o menos rígido, según sea el estado de cargas.

Es significativo el hecho de que los cables no pueden soportar ni transmitir fuerzas de compresión, por lo que se debe notar que cuando un miembro se lleva a un nivel de tensión nula, este miembro dejará de contribuir a la rigidez total de la estructura. Esta es otra característica no lineal de los elementos cable.

Debe resaltarse que la rigidez inicial es proporcionada por un preesfuerzo en los elementos, y como un claro ejemplo de la importancia del preesfuerzo, están las cuerdas de una raqueta de tenis, las cuales forman un sistema de alta rigidez que permiten dar un fuerte impulso a una pelota.

El comportamiento no lineal de estructuras de cables, hace que la hipótesis de pequeños desplazamientos deje de ser válida. Es por ello que se necesitan planteamientos que consideren los grandes desplazamientos, además de la incapacidad de transmisión de fuerzas de compresión.

En este trabajo se plantea la formulación teórica exacta de la matriz del elemento cable y se hace una aplicación a una estructura específica, la cual es la cubierta de la Alberca Olímpica Francisco Márquez de la ciudad de México.

En este trabajo solo se considera la acción media del viento. Los efectos dinámicos de la interacción del viento sobre la estructura no son abordados en este trabajo.

Capítulo II ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS FORMADAS POR CABLES

2.1 Fenómenos no-lineales

En muchos problemas de ingeniería estructural, es válido considerar fenómenos de tipo lineal, es decir el análisis de estos problemas considera que hay una relación lineal o proporcional entre las fuerzas externas aplicadas a una estructura y los desplazamientos que ésta sufre. Este hecho se representa con la relación de Hooke, $F = k\Delta$; ya sea que esta relación se presente en forma escalar, matricial o tensorial, el fenómeno se considera lineal, mientras k sea invariante con respecto a los niveles de fuerzas internas o externas, y/o de los niveles de desplazamientos o deformaciones de una estructura.

Sin embargo, hay un número importante de fenómenos en los que las relaciones lineales son inadecuadas para definir correctamente el comportamiento de algunas estructuras. En estos casos es necesario proveer formulaciones matemáticas no-lineales, que logren estimaciones más cercanas a la realidad.

Las fuentes de no-linealidad, se pueden clasificar de la siguiente manera:

- a) Comportamiento no-lineal del material, o
- b) Comportamiento no-lineal por geometría, o
- c) Combinación de ambos efectos.

En este capítulo se estudian aquellas fuentes de no-linealidad que corresponden al inciso b. Para aquellas estructuras que su comportamiento no-lineal sea atribuible a cambios geométricos de gran magnitud, es posible diferenciarlas según su comportamiento estructural en otros tres grupos:

- i) Estructuras que presentan rigidización al aumentar el nivel de cargas.
- ii) Estructuras que presentan flexibilización al aumentar el nivel de cargas.
- iii) Estructuras que presentan efectos combinados, es decir, algunos miembros se flexibilizan y otros se rigidizan cuando aumentan las cargas.

Por lo tanto, el cambio en las frecuencias y formas de vibrar de una estructura formada por cables, depende del estado de cargas que se presente.

Esta última clasificación depende no solo de la forma estructural adoptada, sino también de las cargas y su forma de aplicación, ya que una misma estructura puede clasificarse en uno u otro grupo, con solo variar el sentido de las cargas.

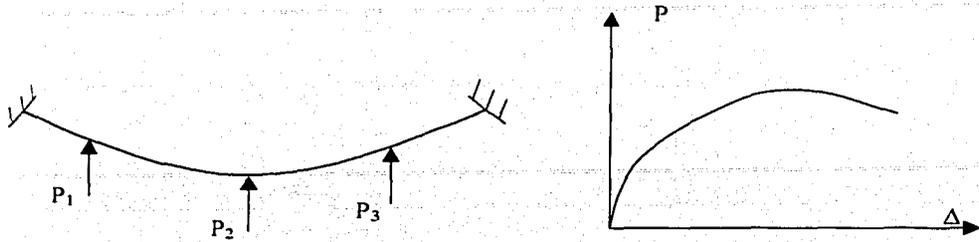


Figura 2.1 Ejemplo de estructura que muestra un efecto de flexibilización, al aumentar las cargas

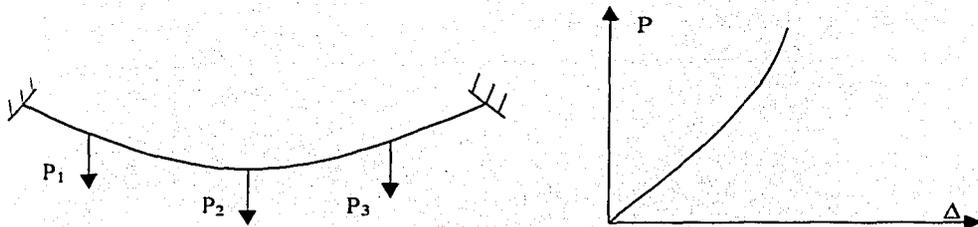


Figura 2.2 Ejemplo de estructura que muestra un efecto de rigidización, al aumentar las cargas

2.2 Tipos de estructuras a las que es posible aplicar el método teórico “exacto”

El método que se presenta en este capítulo sirve para analizar algunos tipos de estructuras, como los que se enlistan a continuación:

- Puentes colgantes o atirantados
- Cubiertas colgantes
- Torres y mástiles atirantados
- Estructuras inflables
- Estructuras de anclaje para pozos o buques petroleros

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Puentes colgantes

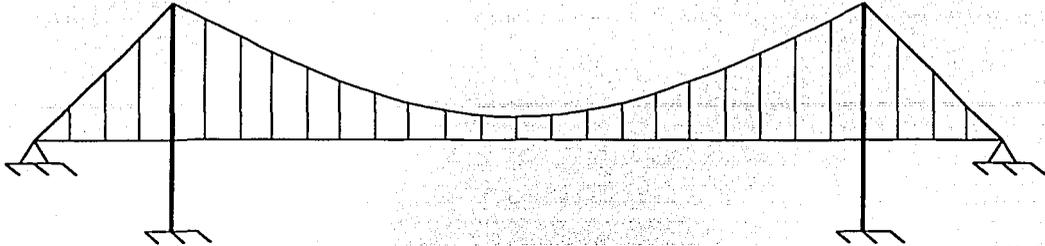


Figura 2.3 Puente colgante

En el ejemplo mostrado en la figura 2.3, los elementos superiores y los verticales se pueden modelar como elementos cable. Las columnas verticales y la cubierta inferior se diseñan como elementos que tienen, además de la rigidez axial, rigidez a la flexión y torsión.

Para los elementos cable es indispensable tomar en cuenta el nivel de preesfuerzo, ya que éste determina una fracción importante de la rigidez del sistema.

Cubiertas colgantes

Para estas estructuras, las superficies curvas de las cubiertas se discretizan con barras de eje recto, que se modelan como cables, para los cuales aplica el procedimiento que se describe en este capítulo.

Las condiciones de apoyo se pueden lograr mediante restricciones rígidas o parcialmente rígidas. En este último caso, habrá que considerar las constantes elásticas de los apoyos.

Este tipo de estructuración es ligera y puede lograrse rigidez importante para soportar adecuadamente los efectos del viento. La rigidez se logra mediante un preesfuerzo en los cables.

En la figura 2.4 se muestra un ejemplo de la cubierta colgante del estadio olímpico de Munich, en ella se aprecia el claro que cubre esta estructura. En el capítulo tres se hará un estudio detallado de una cubierta que cubre un claro de 100 m x 100 m.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

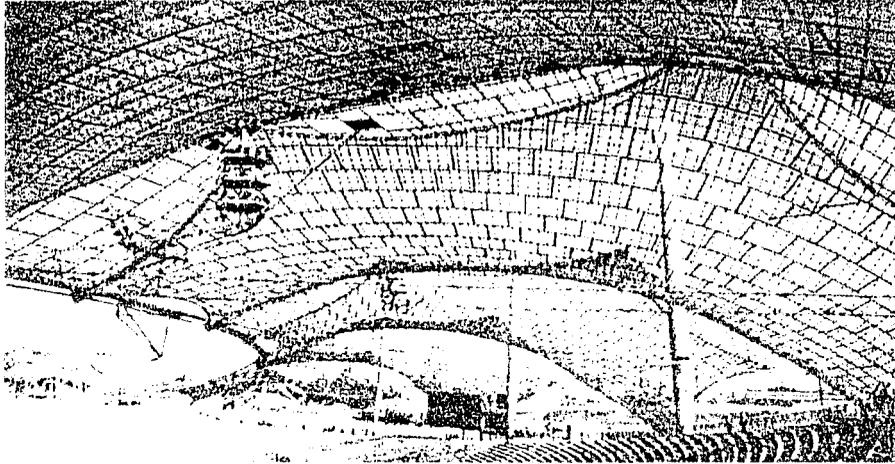


Figura 2.4 Ejemplo de una cubierta colgante (ref. 1)

Torres y mástiles atirantados dentro y fuera del agua

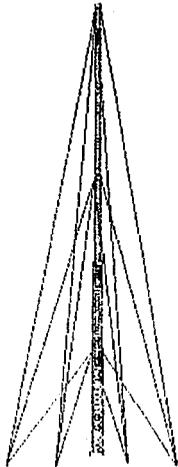


Figura 2.5 Torre atirantada

En este ejemplo de una torre atirantada, las retenidas se modelan como elementos cable, a los cuales se les aplica el procedimiento que se desarrolla en este capítulo.

Los elementos de la torre son barras que tienen tanto rigidez axial, como a la flexión. Los cables tienen dos funciones principales. La primera consiste en reducir las fuertes reacciones que tendrían las barras ante cargas laterales, como las que produce el viento o la corrientes marítimas, y a la vez disminuir los desplazamientos laterales. La segunda función que proporcionan las retenidas, es modificar los periodos y formas naturales de vibración, disminuyendo así los efectos dinámicos sobre la torre.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Estructuras inflables

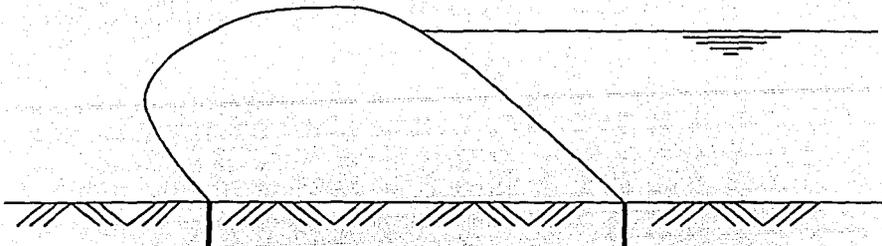


Figura 2.6 Barrera inflable para formar un dique temporal

La figura 2.6 ilustra una sección transversal deformada de una estructura inflable, la cual puede funcionar como un dique temporal, mientras la configuración desplazada permita captar el agua del embalse.

La forma estructural se logra al inflar la membrana, la cual se puede discretizar mediante elementos cable. Esta estructura requiere de apoyos firmes, ya que por ser muy ligera no es capaz de contrarrestar con su peso propio el empuje del agua.

Con el fin de conocer la forma desplazada final, se realiza un análisis por etapas. Primero se analizan las distintas etapas del inflado, sin considerar el empuje del agua. Una vez que se tenga la forma final de la membrana totalmente inflada, se procede a hacer un análisis final que considere el empuje del agua. El propósito de este análisis es conocer las fuerzas internas que se desarrollan en los elementos cable, y también conocer la forma desplazada de la estructura, y así saber si se tendrá la altura requerida para evitar un desbordamiento del líquido.

Un estudio más detallado de este tipo de estructuras se puede consultar en la ref. 1.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2.3 Análisis del elemento cable

Esta sección trata la formulación no-lineal geométrica de la matriz de rigidez para un elemento cable en el espacio tridimensional, el cual está sujeto a grandes desplazamientos; también se incluye en la matriz de rigidez, la contribución de la pretensión de dicho elemento.

2.3.1 Sistema global de coordenadas y cosenos directores

La figura 2.7 muestra la posición de un elemento dentro de un sistema de coordenadas X, Y, Z. La posición de dicho elemento A-B queda determinada por sus ternas de coordenadas X_A, Y_A, Z_A para el extremo A, y X_B, Y_B, Z_B para el extremo B. La longitud inicial del elemento se define, en el sistema global de coordenadas, mediante:

$$L_0 = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2} \quad (2.1)$$

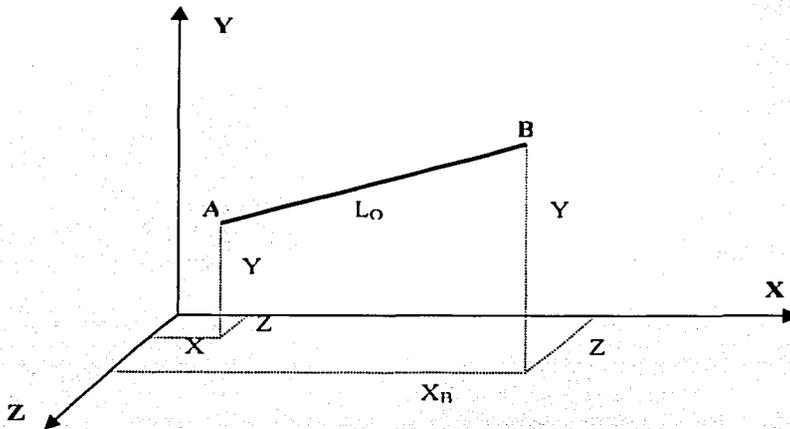


Figura 2.7. Sistema global de coordenadas

Las coordenadas de la barra en un sistema local de coordenadas, definido por los ejes P, Q y R, se muestra en la figura 2.8. El eje P coincide con el eje longitudinal del elemento, en el estado no deformado, mientras que el eje Q es ortogonal al eje P, y finalmente el eje R está en la dirección del producto cruz de dos vectores contenidos en P y Q, es decir, P, Q y R forman un sistema coordenado ortogonal.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

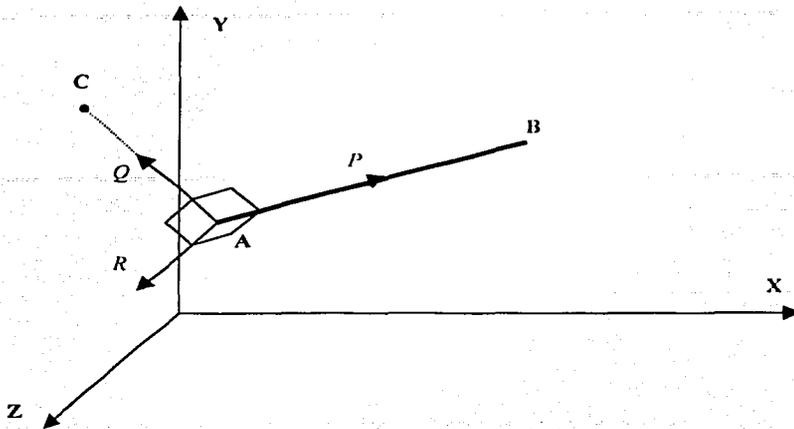


Figura 2.8. Sistema local de coordenadas locales

Los cosenos directores de los ejes P, Q y R, referidos al sistema global X, Y, Z se definen a continuación.

Para el eje P:

$$l_p = \frac{X_B - X_A}{L_o}; \quad m_p = \frac{Y_B - Y_A}{L_o}; \quad n_p = \frac{Z_B - Z_A}{L_o} \quad (2.2)$$

Para el eje Q:

$$l_q = \frac{X_C - X_A}{L_o}; \quad m_q = \frac{Y_C - Y_A}{L_o}; \quad n_q = \frac{Z_C - Z_A}{L_o} \quad (2.3)$$

En este caso, las coordenadas X_C , Y_C , Z_C se refieren a las coordenadas de un punto cualquiera alojado en el eje Q, a una distancia mayor que cero, desde el punto A.

Finalmente los cosenos directores del eje R, están dados por la regla de la mano derecha:

$$l_r = (m_p \cdot n_q - n_p \cdot m_q); \quad m_r = (n_p \cdot l_q - l_p \cdot n_q); \quad n_r = (l_p \cdot m_q - m_p \cdot l_q) \quad (2.4)$$

2.3.2 Cargas y desplazamientos en los sistemas global y local

El vector de cargas externas que se aplica en los extremos del elemento A-B (figura 2.9), y al referirse al sistema global de coordenadas, está dado por:

$$\{L\} = \{F_{x_a}, F_{y_a}, F_{z_a}, F_{x_b}, F_{y_b}, F_{z_b}\} \quad (2.5)$$



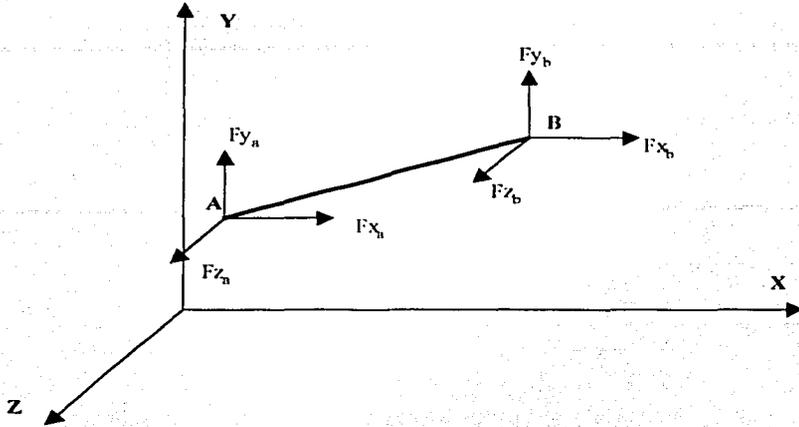


Figura 2.9. Fuerzas en los extremos del elemento A-B, en coordenadas globales

El vector de desplazamientos correspondiente, aplicado a los extremos del elemento A-B, (figura 2.10) y también referido al sistema global de coordenadas, se expresa mediante:

$$\{X\} = \{x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b\} \quad (2.6)$$

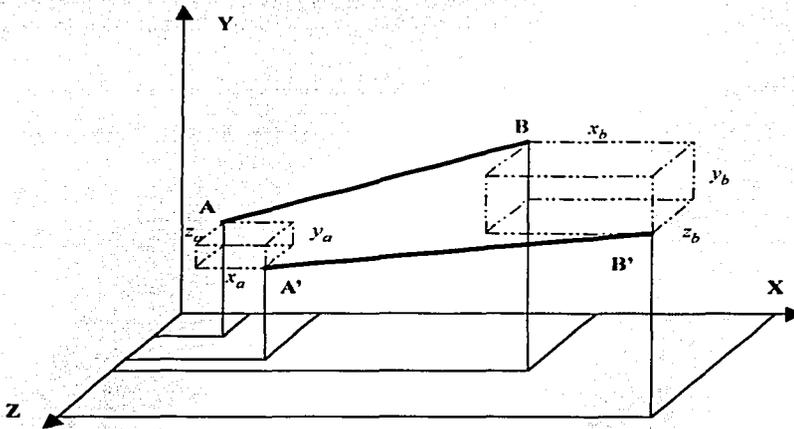


Figura 2.10. Desplazamientos globales en los extremos del elemento A-B

El objetivo fundamental en la formulación matricial del método de las rigideces busca conectar al vector de cargas globales externas, $\{L\}$, el cual incluye todas las cargas externas

aplicadas en los extremos de todos los elementos de la estructura. con el vector de desplazamientos globales de las juntas, $\{X\}$. Dicho vector $\{X\}$ define los desplazamientos globales de todos los elementos y la posición final de los extremos de los elementos de toda la estructura.

Esta conexión entre las cargas globales y los desplazamientos globales se logra a través de la matriz de rigidez $[K]$.

$$\{L\} = [K]\{X\} \quad (2.7)$$

En el desarrollo de la matriz de rigidez $[K]$ se consideran los efectos no-lineales debido a grandes desplazamientos.

El propósito de haber definido previamente un sistema local de coordenadas (P, Q, R), es buscar definir las "fuerzas locales" y los "desplazamientos locales" para el elemento A-B. El vector de carga que se aplica a los extremos del elemento A-B y referido al sistema local de coordenadas está dado por:

$$\{R\} = \{R, S, T\} \quad (2.8)$$

donde R es igual a la fuerza actuante a lo largo del eje longitudinal P , S es la fuerza que actúa en la dirección del eje Q , y T es la fuerza que actúa en la dirección del eje R . Este grupo de fuerzas se muestra en la figura 2.11

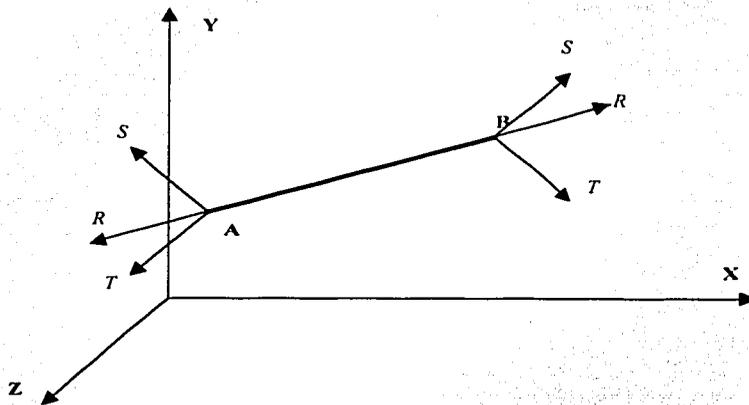


Figura 2.11. Fuerzas en los extremos del elemento A-B, en coordenadas locales

El vector de desplazamientos aplicado al elemento A-B y referido al sistema local de coordenadas, está dado por:

$$\{U\} = \{u, v, w\} \quad (2.9)$$

donde u es igual al desplazamiento a lo largo del eje P, v es aquel desplazamiento que ocurre en la dirección del eje Q, y w es el desplazamiento en la dirección del eje R. Este conjunto de desplazamientos se aprecian en la figura 2.12

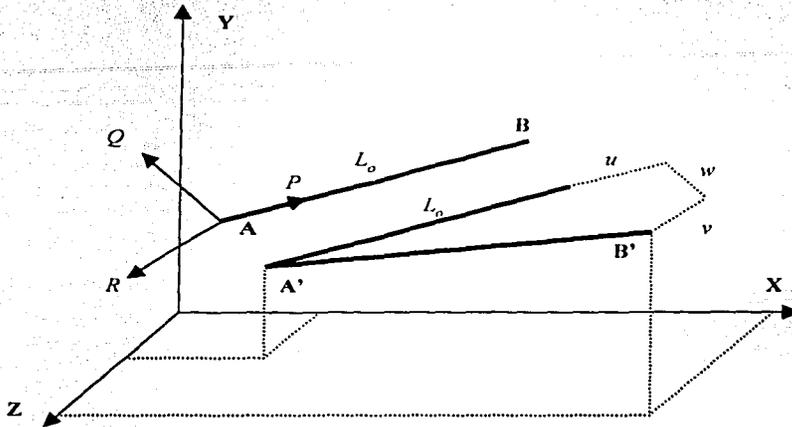


Figura 2.12. Desplazamientos locales en los extremos del elemento A-B

2.3.3 Transformaciones de las fuerzas y desplazamientos locales a fuerzas y desplazamientos globales

Los desplazamientos en coordenadas locales del elemento se conectan con los desplazamientos globales a través de la matriz de transformación (o matriz de rotación) $[T]$, la cual está compuesta por los cosenos directores, aquellos que se definieron en las expresiones 2.2, 2.3 y 2.4.

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_p & -m_p & -n_p & l_p & m_p & n_p \\ -l_q & -m_q & -n_q & l_q & m_q & n_q \\ -l_r & -m_r & -n_r & l_r & m_r & n_r \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

La expresión anterior satisface la compatibilidad de desplazamientos en los extremos del elemento, en forma matricial se escribe como:

$$\{U\} = [T] \times \{X\} \quad (2.11)$$

El correspondiente vector de fuerzas globales y el vector de fuerzas locales se relacionan de manera similar, a fin de satisfacer las condiciones de equilibrio en los extremos del elemento:

$$\{L\} = [T]^T \times \{R\} \quad (2.12)$$

donde $[T]^T$ es la traspuesta de la matriz de rotación $[T]$. En forma expandida, dicha ecuación se escribe como:

$$\begin{Bmatrix} Fx_a \\ Fy_a \\ Fz_a \\ Fx_b \\ Fy_b \\ Fz_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_p & -l_q & -l_r \\ -m_p & -m_q & -m_r \\ -n_p & -n_q & -n_r \\ l_p & l_q & l_r \\ m_p & m_q & m_r \\ n_p & n_q & n_r \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} R \\ S \\ T \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

2.3.4 Desplazamientos básicos y fuerzas básicas

El desplazamiento básico del elemento está dado por la extensión del mismo, medido a lo largo del eje axial deformado.

$$e = A(u, v, w) = \sqrt{(L_o + u)^2 + v^2 + w^2} - L_o \quad (2.14)$$

En forma condensada, la ecuación 2.14 se puede escribir como:

$$[E] = A\{U\} \quad (2.15)$$

donde $[E]$ desplazamiento básico del elemento, representado como una matriz de 1x1
 A función cuadrática aplicada sobre los desplazamientos u, v y w
 $\{U\}$ vector de desplazamientos locales del elemento

este sistema de desplazamientos básicos e intermedios se muestra en la figura 2.13.

Las fuerzas básicas del elemento están en función de los desplazamientos básicos y de la pre-tensión que pudiera tener el elemento:

$$P = P_o + \left(\frac{EA}{L_o} e \right) \quad (2.16)$$

Esta expresión se puede escribir en forma reducida, como:

$$[dE] = [AA] \times \{dU\} \quad (2.18)$$

2.3.6 Transformación de las fuerzas básicas a fuerzas locales

La traspuesta de $[AA]$ se usa para relacionar las fuerzas locales con las fuerzas básicas, a fin de satisfacer las condiciones de equilibrio en los extremos del elemento, por lo que se tiene:

$$[R] = [AA]^T \times [P] \quad (2.19)$$

que en forma expandida se escribe como:

$$\begin{bmatrix} R \\ S \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_o + u \\ L_o + e \\ v \\ L_o + e \\ w \\ L_o + e \end{bmatrix} \times [P] \quad (2.20)$$

2.3.7 Transformación de las fuerzas básicas parciales a fuerzas locales parciales

Las ecuaciones 2.19 y 2.20 proveen la relación entre las fuerzas locales y las fuerzas básicas en términos absolutos. Al igual que antes, será conveniente desarrollar las derivadas totales de las fuerzas locales R , S , T con respecto a las fuerzas básicas P y a los desplazamientos locales u , v , w . La definición de derivada total (solo los términos lineales), ahora en forma matricial, queda de la siguiente manera

$$\begin{bmatrix} dR \\ dS \\ dT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial u} & \frac{\partial R}{\partial v} & \frac{\partial R}{\partial w} \\ \frac{\partial S}{\partial u} & \frac{\partial S}{\partial v} & \frac{\partial S}{\partial w} \\ \frac{\partial T}{\partial u} & \frac{\partial T}{\partial v} & \frac{\partial T}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{bmatrix}$$

Al desarrollar las derivadas totales de R , S , T , se debe tener en cuenta que e y P son funciones de u , v , w . Por lo tanto podemos escribir:

$$\begin{bmatrix} dR \\ dS \\ dT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_o + u}{L_o + e} \frac{\partial P}{\partial u} + P \frac{\partial}{\partial u} \frac{L_o + u}{L_o + e}, & \frac{L_o + u}{L_o + e} \frac{\partial P}{\partial v} + P \frac{\partial}{\partial v} \frac{L_o + u}{L_o + e}, & \frac{L_o + u}{L_o + e} \frac{\partial P}{\partial w} + P \frac{\partial}{\partial w} \frac{L_o + u}{L_o + e} \\ \frac{v}{L_o + e} \frac{\partial P}{\partial u} + P \frac{\partial}{\partial u} \frac{v}{L_o + e}, & \frac{v}{L_o + e} \frac{\partial P}{\partial v} + P \frac{\partial}{\partial v} \frac{v}{L_o + e}, & \frac{v}{L_o + e} \frac{\partial P}{\partial w} + P \frac{\partial}{\partial w} \frac{v}{L_o + e} \\ \frac{w}{L_o + e} \frac{\partial P}{\partial u} + P \frac{\partial}{\partial u} \frac{w}{L_o + e}, & \frac{w}{L_o + e} \frac{\partial P}{\partial v} + P \frac{\partial}{\partial v} \frac{w}{L_o + e}, & \frac{w}{L_o + e} \frac{\partial P}{\partial w} + P \frac{\partial}{\partial w} \frac{w}{L_o + e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix}$$

el miembro de la derecha de esta expresión se puede separar en dos sumandos, donde el segundo, que es el que contiene los operadores $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$, $\frac{\partial}{\partial w}$ aplicados a la matriz $[\mathbf{AA}]^T$, se puede desarrollar. Por lo que se puede describir como:

$$\begin{bmatrix} dR \\ dS \\ dT \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{L_o + u}{L_o + e} \\ \frac{v}{L_o + e} \\ \frac{w}{L_o + e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} & \frac{\partial P}{\partial v} & \frac{\partial P}{\partial w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{P(v^2 + w^2)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pv(L_o + u)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pw(L_o + u)}{(L_o + e)^3} \\ \frac{-Pv(L_o + u)}{(L_o + e)^3} & \frac{P((L_o + u)^2 + w^2)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pvw}{(L_o + e)^3} \\ \frac{-Pw(L_o + u)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pvw}{(L_o + e)^3} & \frac{P((L_o + u)^2 + v^2)}{(L_o + e)^3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

que en forma matricial condensada se puede escribir como:

$$[\mathbf{dR}] = [\mathbf{AA}]^T \times [\partial P] + [\mathbf{d}] \times \{\mathbf{dU}\} \quad (2.22)$$

si:

$$[\partial P] = \frac{EA}{L_o} \times [\mathbf{dE}] \quad (2.23)$$

pero la ecuación 2.18 da la definición de $[\mathbf{dE}]$, por lo que se obtiene:

$$[\partial P] = \frac{EA}{L_o} \times [\mathbf{AA}] \times \{\mathbf{dU}\} \quad (2.24)$$

Así la ecuación 2.22, al factorizar $\{\mathbf{dU}\}$, se transforma en:

$$[\mathbf{dR}] = \left\{ [\mathbf{AA}]^T \times \frac{EA}{L_o} \times [\mathbf{AA}] + [\mathbf{d}] \right\} \times \{\mathbf{dU}\} \quad (2.25)$$

que en forma expandida se escribe:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} dR \\ dS \\ dT \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{L_o + u}{L_o + e} \\ \frac{v}{L_o + e} \\ \frac{w}{L_o + e} \end{Bmatrix} \times \frac{EA}{L_o} \times \begin{bmatrix} \frac{L_o + u}{L_o + e} & \frac{v}{L_o + e} & \frac{w}{L_o + e} \end{bmatrix} \\
 + \begin{bmatrix} \frac{P(v^2 + w^2)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pv(L_o + u)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pw(L_o + u)}{(L_o + e)^3} \\ \frac{-Pv(L_o + u)}{(L_o + e)^3} & \frac{P((L_o + u)^2 + w^2)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pvw}{(L_o + e)^3} \\ \frac{-Pw(L_o + u)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pvw}{(L_o + e)^3} & \frac{P((L_o + u)^2 + v^2)}{(L_o + e)^3} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} du \\ dv \\ dw \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.3.8 Transformación de las fuerzas básicas a fuerzas globales

Mediante la ecuación 2.12, la cual conecta las fuerzas globales con las fuerzas locales, conjuntamente con la ecuación 2.19, la cual relaciona las fuerzas locales con las fuerzas básicas, conduce a:

$$\{\mathbf{L}\} = [\mathbf{T}]^T \times [\mathbf{AA}]^T \times \mathbf{P} \tag{2.27}$$

que en forma expandida es:

$$\begin{Bmatrix} Fx_a \\ Fy_a \\ Fz_a \\ Fx_b \\ Fy_b \\ Fz_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_p & -l_q & -l_r \\ -m_p & -m_q & -m_r \\ -n_p & -n_q & -n_r \\ l_p & l_q & l_r \\ m_p & m_q & m_r \\ n_p & n_q & n_r \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{L_o + u}{L_o + e} \\ \frac{v}{L_o + e} \\ \frac{w}{L_o + e} \end{Bmatrix} \times [\mathbf{P}] \tag{2.28}$$

Las ecuaciones 2.11, 2.15 y 2.16 pueden combinarse con la ecuación 2.27, que en forma matricial se escribe:

$$\{\mathbf{L}\} = [\mathbf{T}]^T \times [\mathbf{AA}]^T \times \left[\mathbf{P}_o + \left(\frac{EA}{L_o} \times \mathbf{A} \{[\mathbf{T}] \times \{\mathbf{X}\}\} \right) \right] \tag{2.29}$$

que en forma expandida se escribe como:

$$\begin{Bmatrix} FX_a \\ FY_a \\ FZ_a \\ FX_b \\ FY_b \\ FZ_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_p & -l_q & -l_r \\ -m_p & -m_q & -m_r \\ -n_p & -n_q & -n_r \\ l_p & l_q & l_r \\ m_p & m_q & m_r \\ n_p & n_q & n_r \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \frac{L_o + u}{L_o + e} \\ \frac{v}{L_o + e} \\ \frac{w}{L_o + e} \end{Bmatrix} \times \left\{ P_o + \left(\frac{EA}{L_o} \right) \times \left(\sqrt{(L_o + u)^2 + v^2 + w^2} - L_o \right) \right\}$$

$$\begin{bmatrix} -l_p & -m_p & -n_p & l_p & m_p & n_p \\ -l_q & -m_q & -n_q & l_q & m_q & n_q \\ -l_r & -m_r & -n_r & l_r & m_r & n_r \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \\ x_b \\ y_b \\ z_b \end{Bmatrix}$$

(2.30)

2.3.9 Transformación de los desplazamientos globales parciales en fuerzas globales parciales

La ecuación 2.7 representa la relación entre las fuerzas globales y los desplazamientos globales en términos absolutos. Pero conviene desarrollar las derivadas de las fuerzas globales, con respecto a las derivadas de los desplazamientos globales.

Las ecuaciones 2.10, 2.11, 2.12 y 2.13 conectan a las fuerzas globales con las fuerzas locales y a los desplazamientos locales con los desplazamientos globales. Estas expresiones son lineales, así que los correspondientes cambios incrementales resultan:

$$[dU] = [T] \times [dX] \quad (2.31)$$

$$[dL] = [T]^T \times [dR] \quad (2.32)$$

Si se sustituye 2.31 en 2.25, y a su vez 2.25 en 2.32, la ecuación 2.32 se expande de la siguiente manera:

$$[dL] = [T]^T \times \underbrace{\left\{ [AA]^T \times \frac{EA}{L_o} \times [AA] + [d] \right\}}_{[K]} \times [T] \times [dX] \quad (2.33)$$

donde $[K]$ representa la matriz de rigidez incremental.

2.3.10 Matriz de rigidez incremental para el elemento cable

$$\begin{aligned}
 [\mathbf{K}] &= \begin{bmatrix} -l_p & -l_q & -l_r \\ -m_p & -m_q & -m_r \\ -n_p & -n_q & -n_r \\ l_p & l_q & l_r \\ m_p & m_q & m_r \\ n_p & n_q & n_r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{L_o + u}{L_o + e} \\ \frac{L_o + e}{L_o + e} \\ \frac{v}{L_o + e} \\ \frac{w}{L_o + e} \end{bmatrix} \times \frac{EA}{L_o} \times \begin{bmatrix} L_o + u & v & w \\ L_o + e & L_o + e & L_o + e \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} \frac{P(v^2 + w^2)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pv(L_o + u)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pw(L_o + u)}{(L_o + e)^3} \\ \frac{-Pv(L_o + u)}{(L_o + e)^3} & \frac{P((L_o + u)^2 + w^2)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pvw}{(L_o + e)^3} \\ \frac{-Pw(L_o + u)}{(L_o + e)^3} & \frac{-Pvw}{(L_o + e)^3} & \frac{P((L_o + u)^2 + v^2)}{(L_o + e)^3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -l_p & -m_p & -n_p & l_p & m_p & n_p \\ -l_q & -m_q & -n_q & l_q & m_q & n_q \\ -l_r & -m_r & -n_r & l_r & m_r & n_r \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Esta expresión provee los incrementos en la matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$, y se usa para relacionar los incrementos en las fuerzas globales $[\mathbf{dL}]$, con los incrementos en los desplazamientos globales $[\mathbf{dX}]$. Lo cual se representa mediante:

$$[\mathbf{dL}] = [\mathbf{K}] \times [\mathbf{dX}] \tag{2.35}$$

2.4 Contribución de la matriz de rigidez del elemento a la matriz de rigidez total de la estructura

La sección anterior mostró la formulación no-lineal de la matriz de rigidez para un elemento cable en el espacio. Ahora, en esta sección se explica la contribución de la matriz de cada uno de los elementos cable, y la manera en que forman la matriz de rigidez total de una estructura.

Pueden existir métodos alternos para formar la matriz de rigidez total de una estructura, una vez obtenidas las matrices de cada elemento. Sin embargo, aquí se presenta un método que se considera claro y relativamente fácil de programar.

Para cualquier modelo estructural, los miembros y los nodos se numeran de manera secuencial. La matriz de rigidez de una estructura, combina la contribución de las rigideces de cada miembro de manera ordenada.

Para un cable en el espacio se tienen tres grados de libertad en cada extremo del elemento. Los desplazamientos de ambos extremos representan un subconjunto del vector de desplazamientos globales de la estructura $\{\mathbf{X}\}$; dicho subconjunto se representa por otro vector,

definido como $(x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b)$. La contribución de la rigidez de cada cable puede dividirse en dos grupos, asociados a cada extremo de un miembro.

En la sección anterior, la contribución de rigidez de cada elemento está dada por la expresión:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{T}]^T \times \left\{ [\mathbf{AA}]^T \times \frac{EA}{L_o} \times [\mathbf{AA}] + [\mathbf{d}] \right\} \times [\mathbf{T}] \quad (2.36)$$

que representa la contribución de rigidez de ambos extremos en coordenadas globales. Ahora resulta útil definir lo siguiente:

$$[\mathbf{k}] = \left\{ [\mathbf{AA}]^T \times \frac{EA}{L_o} \times [\mathbf{AA}] + [\mathbf{d}] \right\} \quad (2.37)$$

en la cual $[\mathbf{k}]$ representa la parte no-lineal de la matriz de rigidez de un elemento en coordenadas locales. Así, al describir de forma distinta:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{T}]^T \times [\mathbf{k}] \times [\mathbf{T}] \quad (2.38)$$

Antes se hizo notar que la matriz de rotación o de transformación $[\mathbf{T}]$, se obtiene a partir de los cosenos directores

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} -l_p & -m_p & -n_p & l_p & m_p & n_p \\ -l_q & -m_q & -n_q & l_q & m_q & n_q \\ -l_r & -m_r & -n_r & l_r & m_r & n_r \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

pero esta matriz hace referencia a los dos extremos de un elemento, lo que resulta en el doble de columnas que de filas. Así que, es posible particionarla en dos submatrices cuadradas, donde cada submatriz hace referencia a cada extremo de la barra. Por lo tanto:

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_i, \mathbf{T}_j] \quad (2.40)$$

así, la contribución de rigidez de cada extremo, en coordenadas globales, está dada por:

$$[\mathbf{K}_{ii}] = [\mathbf{T}_i]^T \times [\mathbf{k}] \times [\mathbf{T}_i] \quad (2.41)$$

para el extremo i , y

$$[\mathbf{K}_{jj}] = [\mathbf{T}_j]^T \times [\mathbf{k}] \times [\mathbf{T}_j] \quad (2.42)$$

para el extremo j .

Los términos adicionales de rigidez también contribuyen a la matriz de rigidez total, y representan la influencia de rigidez que un extremo tiene sobre el otro. Así que estas "rigideces cruzadas" se calculan como:

$$[\mathbf{K}_{ij}] = [\mathbf{T}_i]^T \times [\mathbf{k}] \times [\mathbf{T}_j] \quad (2.43)$$

$$[\mathbf{K}_{ji}] = [\mathbf{T}_j]^T \times [\mathbf{k}] \times [\mathbf{T}_i] \quad (2.44)$$

Estos términos de "rigidez cruzada" ocupan una posición simétrica dentro de la matriz total de la estructura, por lo que tienen la siguiente propiedad:

$$[\mathbf{K}_{ji}] = [\mathbf{K}_{ij}]^T \quad (2.45)$$

De manera esquemática, los términos $[\mathbf{K}_{ii}]$, $[\mathbf{K}_{jj}]$, $[\mathbf{K}_{ji}]$ y $[\mathbf{K}_{ij}]$, se ensamblan de la siguiente manera:

$$[\mathbf{K}]_T = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & [\mathbf{K}_{ii}] & \dots & \dots & [\mathbf{K}_{ij}] & \dots \\ \dots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ \dots & [\mathbf{K}_{ji}] & \dots & \dots & [\mathbf{K}_{jj}] & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

La distribución de las submatrices dentro de la matriz general de la estructura depende de la numeración de los nudos. Cada submatriz, para un cable en el espacio, tiene una dimensión de 3x3.

Se debe resaltar que la matriz $[\mathbf{K}]_T$ es simétrica y que todos los términos contenidos en su diagonal principal son mayores a cero. En una estructura en que algún elemento presenta la condición de que la fuerza axial es menor o igual a cero, la contribución de los elementos escalares de las submatrices $[\mathbf{K}_{ii}]$, $[\mathbf{K}_{jj}]$, $[\mathbf{K}_{ji}]$ y $[\mathbf{K}_{ij}]$ dentro de la matriz $[\mathbf{K}]_T$ debe ser cero. Esto último es una fuente de no-linealidad para estructuras que se forman mediante cables, ya que estos miembros no pueden soportar ni transmitir fuerzas de compresión.

2.5 El método de solución de las ecuaciones de equilibrio no-lineal

En esta sección se explica el método de solución por el cual, la matriz de rigidez incremental, definida por las ecuaciones 2.33 y 2.34, se usa para analizar el desequilibrio existente entre las fuerzas externas y las fuerzas internas, y además, para determinar la configuración desplazada de la estructura.

El método de solución es el de Newton-Rhapson, el cual es iterativo y tiene una rápida tasa de convergencia.

Se comienza el proceso con una matriz de rigidez inicial $[K_0]$, que corresponde a la rigidez que posee la estructura cuando está en una configuración no desplazada, es decir, en esta etapa se supone que las condiciones iniciales, generadas por el preesfuerzo y el peso propio de la estructura, mantienen a la estructura en equilibrio y le proporcionan un nivel de rigidez inicial.

La primera solución a las ecuaciones de equilibrio se obtiene al resolver la siguiente ecuación:

$$\{[L] - [L_0]\} = [K_0] \times [\delta X_0] \quad (2.47)$$

donde

$[L]$ = Vector de cargas externas, en coordenadas globales

$[L_0]$ = Vector de las fuerzas internas, en coordenadas globales

Para la configuración no desplazada de la estructura, el vector de fuerzas internas $[L_0]$ representa las fuerzas axiales de pre-tensión, proyectadas en los nudos que definen a cada barra y expresadas en coordenadas globales. Así, la expresión $\{[L] - [L_0]\}$ representa el desequilibrio en la estructura. La expresión 2.47 representa el primer incremento de carga que se debe aplicar a la estructura, la cual en esta etapa posee una rigidez $[K_0]$.

A partir de los valores de $[K_0]$ y de $\{[L] - [L_0]\}$ se resuelve la ecuación 2.47, con lo cual se obtiene el valor de $[\delta X_0]$, que es la primera aproximación o aproximación lineal a la configuración desplazada de la estructura.

Con esta configuración desplazada de la estructura, los valores de las fuerzas axiales en los miembros cambian de $[L_0]$ a $[L_1]$, ya que se producen cambios en las longitudes de los cables. Estos cambios se calculan con la siguiente expresión:

$$[L_1] = [T]^T \times [AA]^T \times [P] \quad (2.48)$$

que es la misma que las ecuaciones 2.27, 2.29 o 2.30.

Debido a lo anterior, la matriz de rigidez cambia también, ya que es altamente dependiente de los valores de estas fuerzas axiales, y pasa de $[K_0]$ a $[K_1]$.

Con los nuevos valores de rigidez y fuerzas internas, se plantea la siguiente ecuación:

$$\{[L] - [L_1]\} = [K_1] \times [\delta X_1] \quad (2.49)$$

El proceso continúa sucesivamente, recalculando las matrices que corresponden a cada configuración desplazada de la estructura. Se dice que el método converge si $\{[L] - [L_n]\} \rightarrow \{0\}$, y la configuración desplazada final de la estructura será:

$$[X] = [\delta X_1] + [\delta X_2] + \dots + [\delta X_n] \quad (2.50)$$

En algunas ocasiones, cuando $[L]$ es grande o la estructura es muy flexible, se recomienda aplicar las cargas en etapas, para que el método no tenga problemas de convergencia.

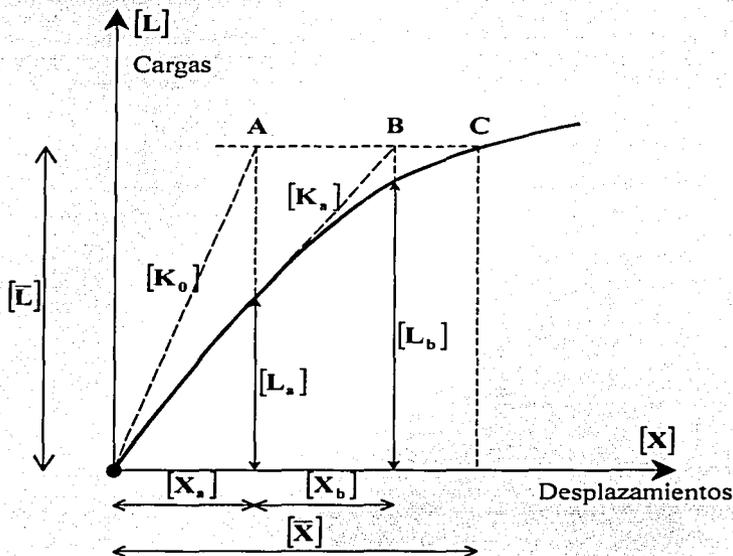


Figura 2.14 El método de desplazamientos tangenciales de Newton-Raphson

Por otra parte, para considerar la incapacidad de los cables, de transmitir fuerzas de compresión, se debe dar una instrucción al programa de análisis, para que a todos aquellos miembros con $P < 0$ se les asigne $P = 0$, con lo cual $[d] = [0]$ (ver ecuaciones 2.33 y 2.34).

2.6 Procedimiento alternativo: Análisis P-Δ

Algunos programas comerciales pueden ofrecer la opción PΔ para realizar el análisis estructural. En esta sección se explicará un procedimiento alternativo con el uso del programa SAP2000 (ref. 2), el cual ofrece resultados muy similares a aquellos obtenidos con la teoría expuesta en las secciones 2.4, 2.5 y 2.6.

La opción de análisis PΔ toma en cuenta el efecto de las fuerzas axiales, de compresión o de tensión, en la rigidez transversal a flexión y a cortante. Los criterios de estabilidad estructural

establecen que las fuerzas axiales de compresión reducen la rigidez transversal de los elementos, mientras que las fuerzas de tensión producen el efecto contrario.

El efecto que tienen las fuerzas axiales en la rigidez transversal de un elemento está descrito por una función que depende de la relación de la fuerza axial aplicada en el elemento y la carga crítica de Euler. Los desplazamientos transversales de estas barras obedecen a funciones hiperbólicas para fuerzas de tensión, funciones trigonométricas para fuerzas de compresión y funciones cúbicas para carga axial nula.

El programa SAP2000 toma en cuenta estos fenómenos y modifica los valores de la matriz de rigidez según sea el nivel de fuerzas axiales definidos en la opción $P\Delta$. Sin embargo, el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio se realiza bajo la suposición de pequeños desplazamientos. Esto significa que los resultados obtenidos son válidos si la configuración desplazada de la estructura es similar a la no desplazada. En algunas estructuras, como las cubiertas colgantes, esta consideración puede diferir mucho de la realidad, por lo que será necesario realizar análisis sucesivos, donde en cada etapa se tomen en cuenta los desplazamientos que se produjeron en la etapa anterior.

El procedimiento a realizar se puede clasificar en dos etapas. En ambas etapas se deben realizar análisis iterativos.

a) Primera etapa

En la primera etapa se define la configuración estructural estable de inicio, es decir, se calcula cual debe ser la distribución de las tensiones en los cables para que la estructura mantenga la geometría del diseño arquitectónico, bajo cargas permanentes. Esta configuración geométrica y de tensiones, será la que determine la rigidez que tendrá la estructura para soportar otros estados de carga no permanentes.

Además de las cargas permanentes, se deben declarar las fuerzas de pre-tensión de diseño, tanto como *prestress*, como también *P-delta force*. Seguramente esta combinación de estados de cargas no estarán en equilibrio total, sino que una vez realizado el análisis, existirán desplazamientos y cambios en las fuerzas axiales. Estos cambios en fuerzas axiales se suman a las pre-tensiones de diseño y se elabora un nuevo archivo de entrada que considere estos cambios, tanto en preesfuerzo como en fuerza $P\Delta$. Se realiza un nuevo análisis y se espera que esta ocasión los desplazamientos y los cambios en fuerzas axiales sean menores que en el primero, nuevamente estos cambios en fuerzas axiales se suman a las fuerzas axiales anteriores y se realiza otro análisis. El proceso se repite hasta que ya no existan cambios importantes en la geometría de la estructura.

b) Segunda etapa

En la segunda etapa se estudian los demás estados de carga, como por ejemplo las cargas de viento. Es importante señalar que para esta segunda etapa deben considerarse tanto las cargas permanentes, como las cargas vivas, además de las pre-tensiones obtenidas en la etapa anterior.

El proceso se realiza de forma similar a la primera etapa, con la única diferencia de que ahora si se deben considerar los cambios en geometría. Es decir, de la misma forma en que se sumaron los cambios en las fuerzas axiales en la primera etapa, en la segunda etapa se deberán sumar, además, los desplazamientos que se generan en cada iteración. De esta forma, en cada iteración se inicia con una configuración geométrica distinta, que será igual a la configuración desplazada de la iteración anterior. El proceso termina cuando los cambios en geometría ya no son importantes.

Se debe poner especial atención al hecho de que un cable no puede transmitir fuerzas de compresión. Así que al detectar cualquier cable en compresión, éste debe ser eliminado, lo que trae como consecuencia una importante redistribución de las fuerzas. De cualquier manera, el programa SAP2000 muestra un mensaje de inestabilidad cuando algún miembro de la estructura tiene una carga de compresión mayor a la carga crítica, la cual es de por sí muy pequeña ya que usualmente las secciones transversales usadas para cables poseen un momento de inercia muy pequeño. De esta manera surgen valores no positivos en los elementos de la diagonal principal de la matriz de rigidez de la estructura, con lo que el proceso numérico se detiene.

Referencias

1. "Air-Supported Structures"; American Society of Civil Engineers; ASCE 17-96
2. "SAP2000 Analysis Reference V7.4"; Computers and Structures, Inc.; Chapter XVII

Bibliografía

1. Peter Broughton y Paul Ndumbaro; "The analysis of cable and catenary structures"; Thomas Telford; 1994
2. Postkitt T. J.; "Numerical solution of non-linear structures"; Journal of the Structural Division, ASCE; 1967, 93, No. ST4, Proc. Paper 5362



Capítulo III ESTUDIO DE LA CUBIERTA DE LA ALBERCA OLÍMPICA "FRANCISCO MÁRQUEZ" CON APOYOS FIJOS

3.1 Introducción

En este capítulo se aplica la teoría expuesta en el capítulo anterior a una estructura específica: la cubierta de la Alberca Olímpica "Francisco Márquez".

Fundamentalmente lo que se busca estudiar en este capítulo es el comportamiento de la cubierta ante acciones externas, por lo que se consideró como modelo básico a la cubierta con apoyos fijos.

3.2 Características generales de la estructura

Los datos con los cuales se elaboró el modelo estructural, son los siguientes:

- La cubierta cubre un claro rectangular de 101.60 m en dirección este-oeste y 99.60 m en dirección norte-sur. Se ha adoptado como convención, que la fachada sur coincida con el eje X, y la fachada oeste con el eje Y.
- La geometría inicial de la superficie se representa mediante la función:

$$f(x, y) = \frac{125}{41334} (y - 49.8)^2 - \frac{125}{64516} (x - 50.8)^2 + 23.315$$

con las coordenadas x , y en metros

- Los cables portantes o de carga tienen dirección paralela al eje Y, están formados por $12 \phi 7\text{mm}@ 1.59\text{m}$, por lo que existen 63 líneas de estos cables, y cada una de las líneas está dividida en 48 segmentos. Estos cables tienen un preesfuerzo nominal igual a 5415 Kg/cm^2 , es decir 25 ton.
- Los cables de forma tienen dirección paralela al eje X, están formados por $4 \phi 7\text{mm}@ 2.075\text{m}$, por lo que existen 47 líneas de estos cables, y cada línea está dividida en 64 segmentos. Estos cables tienen un preesfuerzo nominal igual a 3050 Kg/cm^2 , es decir 4.7 ton.
- Los cables son de acero de alta resistencia, con un esfuerzo último $F_u = 15000 \text{ Kg/cm}^2$.
- En total la estructura consta de 3181 nudos, de los cuales, aquellos que están en la periferia (220 nudos), son los nudos de apoyo. El total de los elementos cable de forma y de carga es 6032 elementos.
- El peso propio de la cubierta se estimó en 81 Kg/m^2 más 2.7 Kg/m^2 del peso de los cables. A este peso se asocia una masa para calcular las propiedades dinámicas de la estructura.

La geometría de la cubierta está representada en las figuras 3.1a y 3.1b

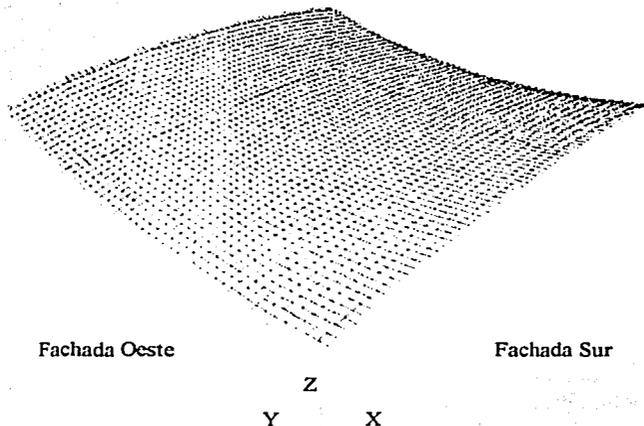


Fig. 3.1a Modelo Estructural de la Alberca Olímpica

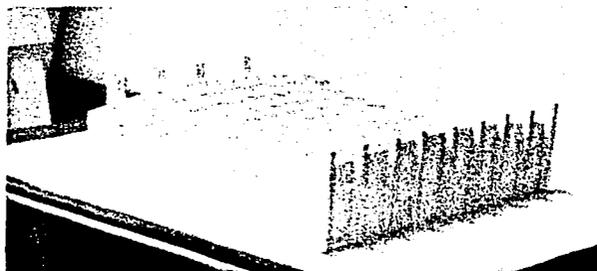


Fig. 3.1b Modelo a escala de la Alberca Olímpica

3.3 Modelo para pruebas en túnel de viento

Se elaboró un modelo físico en acrílico para realizar pruebas en túnel de viento. El modelo se instrumentó en 24 puntos, en los cuales se colocaron sensores para medir la distribución de presiones, tanto en las orillas como en el interior del modelo (ver figura 3.2).

Las mediciones se realizaron en el túnel de viento del Instituto de Ingeniería de la UNAM. El régimen del viento para todas las pruebas fue laminar, ya que en este trabajo no se estudian efectos dinámicos. En estas pruebas se analizaron siete direcciones del viento; el modelo se giró cada 15° , con lo que se abarcó un total de 90° . Para cada dirección del viento se realizaron cuatro pruebas, y en cada prueba se promediaron 200 mediciones por punto, con el fin de tener una muestra representativa de presiones que tenga una distribución normal en todos los puntos instrumentados.

En el apéndice A se muestran los resultados de las pruebas realizadas en el túnel de viento.

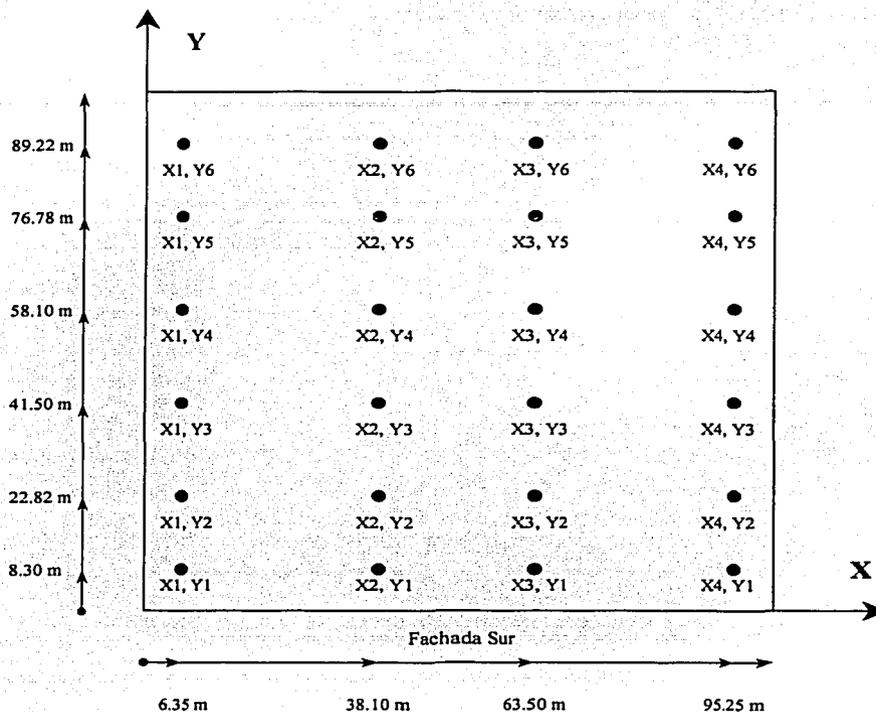


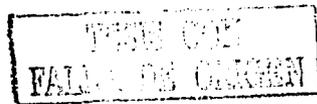
Figura 3.2 Distribución de los sensores de medición

3.4 Determinación de las superficies de presión y de las fuerzas producidas por el viento

Con base en las presiones medidas en los 24 puntos instrumentados, se ajustaron superficies de presión para cada dirección del viento, mediante el programa MATLAB (ref. 1).

Originalmente se trataron de realizar los ajustes con series dobles de Fourier, lo cual arrojó resultados poco confiables debido a que se colocaron pocos puntos para este tipo de superficies.

El procedimiento que se adoptó para hacer los ajustes definitivos fue un proceso numérico que realiza ajuste bicúbico (ref. 1 y 2 de este capítulo), ya que este método resultó ser el más rápido y confiable de todos los estudiados. Fuera de la malla de medición de presiones se extrapolaron los datos. Las superficies de presión para las diversas direcciones de ataque del



viento se muestran en las figuras 3.4 a 3.24, junto a las configuraciones desplazadas correspondientes, en la sección 3.6.

El procedimiento que se siguió en este trabajo para calcular las fuerzas de diseño debidas al viento fue el que establece la ref. 3, y que se aplica a continuación.

Cálculo de la velocidad de diseño

La velocidad regional para la ciudad de México, en el sitio de la cubierta se consideró igual a:

$$V_R = 39 \text{ m/seg}$$

Se consideró:

topografía "tipo 3"	
estructura del "grupo A"	(Alta seguridad)
clasificación "tipo 4"	(Estructura muy sensible al efecto del viento)
estructura "clase C"	(Por las dimensiones de la estructura)

$$\text{Factor de exposición, } F_a = F_c \cdot F_z$$

$$F_c = 0.90$$

$$F_z = 1.56 \left(\frac{z}{\delta} \right)^\alpha$$

$$\alpha = 0.156$$

$$\delta = 390 \text{ m}$$

Se consideró una altura media $z = 25.815 \text{ m}$, correspondiente a las esquinas de la cubierta.

$$\text{Por lo tanto, } F_a = 0.918$$

$$\text{Factor de topografía local, } F_T = 1.0$$

No se tomó un factor de incremento por efecto de ráfagas, ya que se realiza un estudio detallado, con pruebas en túnel de viento.

Finalmente, la velocidad de diseño para la cubierta resultó igual a:

$$V_D = F_T \cdot F_a \cdot V_R$$

$$V_D = 35.8 \text{ m/seg}$$

Cálculo de las fuerzas debidas al viento

La presión dinámica de base es

$$q_z = 0.048 \cdot V_D^2 = 61.52 \text{ Kg/m}^2$$

Las fuerzas se calcularon como

$$F = q_z \cdot C_p \cdot A$$

donde

“ C_p ” son los coeficientes locales de presión obtenidos en las pruebas realizadas en el túnel de viento.

“ A ” es el área tributaria.

Áreas tributarias

El área exacta de la superficie se calculó como:

$$A_e = \iint_S \left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} dy dx = 10333 m^2$$

y el área vista en planta se calcula como un rectángulo de 101.6 m por 99.6 m, lo que da un área de

$$A_s = 10119 m^2$$

Se tiene un error medio del 2% al considerar el área como un rectángulo visto en planta. Con esta información se justifica el proponer las áreas tributarias para todos los nudos como:

$$\text{Área tributaria por nudo} = 1.02 \times 3.175 \text{ m} \times 4.15 \text{ m} = 13.44 m^2$$

Descomposición ortogonal de las fuerzas debidas al viento

Dado que las fuerzas son normales a la superficie, se calcularon las componentes en cada dirección ortogonal. Para realizar lo anterior, fue necesario recordar que el vector gradiente es normal a las superficies de nivel, así que se enuncia el teorema que establece esto (ref. 4).

“Sea $g: R^3 \rightarrow R$ una aplicación C^1 y sea (x_0, y_0, z_0) un punto sobre la superficie de nivel S definida por $g(x, y, z) = K$, para una constante K . Entonces $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ es normal a la superficie de nivel”

Se puede pensar que la superficie de la cubierta sea una superficie de nivel:

$$0 = g(x, y, z) = \frac{125}{41334} (y - 49.8)^2 - \frac{125}{64516} (x - 50.8)^2 - z$$

entonces, el vector unitario normal n a la superficie es:

$$n = \frac{\nabla g}{|\nabla g|}$$

dado el sistema de referencia, todos los vectores normales tienen su tercera componente apuntando hacia abajo (porque la derivada parcial de g con respecto a z es siempre igual a -1). Y como la convención que se manejó establece que las presiones tienen signo positivo, mientras que las succiones son de signo negativo, entonces las presiones se dirigirán hacia abajo, y las succiones hacia arriba, lo que es compatible con el sistema de referencia que se usó en el programa para el análisis estructural.

3.5 Determinación del estado de preesfuerzo que mantiene en equilibrio la geometría inicial

En esta sección se estudia la distribución real de preesfuerzo que mantiene a la estructura sin desplazamientos bajo cargas permanentes. Esta distribución depende del preesfuerzo de diseño.

Inicialmente se propone un estado de preesfuerzo de diseño. No hay una regla para determinar este estado, pero se buscará tener presente los siguientes aspectos:

- El preesfuerzo de diseño y las cargas permanentes serán iguales y de sentido contrario para que estos estados de carga estén cerca del equilibrio.
- Se buscará que los niveles de esfuerzo se mantengan en intervalos aceptables bajo cargas permanentes y se debe tener presente el efecto de las cargas no permanentes, como el viento, que produce principalmente efectos de succión. Para ello se deja un margen mayor en los cables de forma, que serán los que se opongan al levantamiento, mientras que los cables portantes se descargarán parcialmente.
- El preesfuerzo es la variable que determina la rigidez de la estructura para soportar otros estados de carga.

Como se menciona arriba, la pre-tensión de diseño para los cables portantes se consideró igual a 36.1% del esfuerzo último, F_u , mientras que para los cables de forma se aceptó 23.3% de F_u . Con esta información y con la geometría general se procedió a realizar el análisis.

El primer análisis mostró que la estructura no está en equilibrio con la combinación de las cargas permanentes y el preesfuerzo, ya que hay desplazamientos y cambios en las fuerzas axiales de los cables. Estos cambios en fuerzas axiales se suman algebraicamente a las fuerzas axiales anteriores, para formar un nuevo estado de preesfuerzo, con el cual se procede a realizar un segundo análisis. El segundo análisis muestra que la estructura todavía no está en equilibrio con la combinación de carga en cuestión. Mediante el procedimiento anterior se realiza el número de iteraciones necesarias hasta obtener desplazamientos pequeños.

Después de tres análisis sucesivos se obtuvo la siguiente distribución de preesfuerzo, que es la que mantiene a la estructura en equilibrio bajo cargas permanentes.

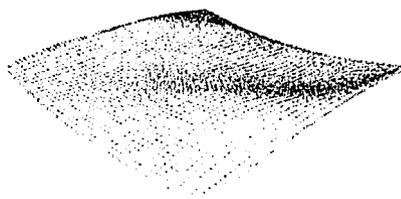
Tabla 3.1 Distribución de pretensiones bajo carga permanente

<i>Cables de forma</i>	
Esfuerzo medio, %Fu	20.3
Esfuerzo máximo, %Fu	20.6
Esfuerzo mínimo, %Fu	20.2
Desviación estándar del esfuerzo, % Fu	0.11
<i>Cables portantes o de carga</i>	
Esfuerzo medio, %Fu	36.1
Esfuerzo máximo, %Fu	37.1
Esfuerzo mínimo, %Fu	35.6
Desviación estándar del esfuerzo, % Fu	0.47

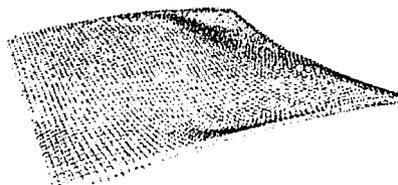
Los periodos y formas de vibrar de los diez primeros modos, para la configuración no desplazada, se muestran en la tabla 3.2 y en las figuras 3.3a y 3.3b.

Tabla 3.2 Periodos de las formas de vibrar en la configuración no desplazada

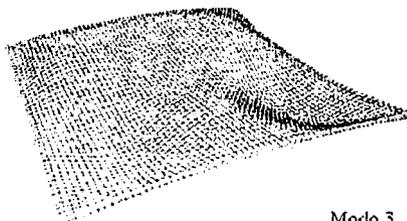
Modos de vibrar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Periodo (seg)	2.250	2.160	2.020	1.920	1.740	1.690	1.640	1.590	1.580	1.530



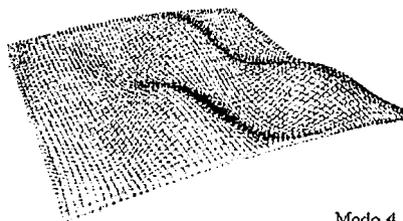
Modo 1
2.25 seg



Modo 2
2.16 seg

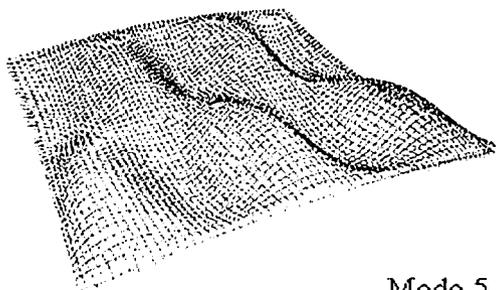


Modo 3
2.02 seg

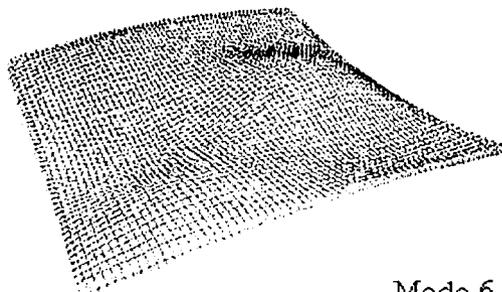


Modo 4
1.92 seg

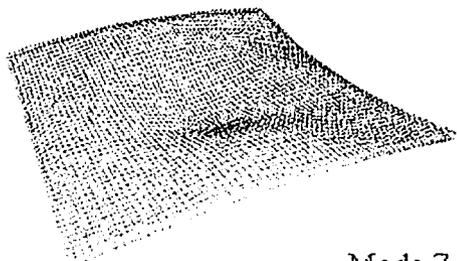
Figura 3.3a Modos de vibrar de la configuración no-desplazada



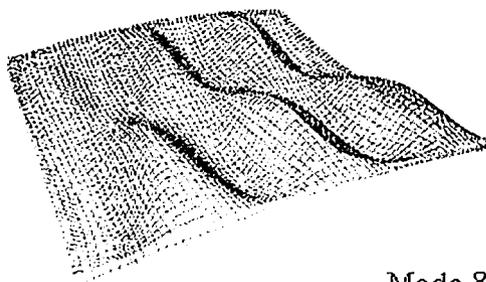
Modo 5
1.74 seg



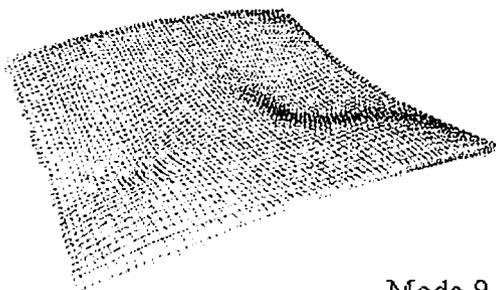
Modo 6
1.69 seg



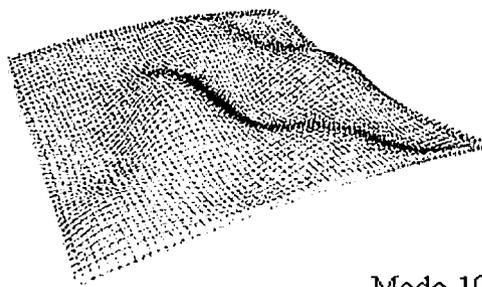
Modo 7
1.64 seg



Modo 8
1.59 seg



Modo 9
1.58 seg



Modo 10
1.53 seg

Figura 3.3b Modos de vibrar de la configuración no-desplazada

3.6 Análisis de la estructura bajo efecto del viento

Como se mencionó, la estructura se analizó para siete direcciones del viento. En todas las direcciones se usó la distribución de preesfuerzo calculada en la sección anterior como estado inicial para soportar las cargas de viento.

En las páginas 34 a 47 se muestran gráficos para cada dirección del viento, que relacionan los coeficientes de presión con los desplazamientos verticales de la cubierta; asimismo se aprecian las configuraciones desplazadas y los valores estadísticos de desplazamientos y fuerzas axiales que se generan en la estructura, por causa del viento. Todas las direcciones se cargaron con el 100% de la fuerza del viento de diseño en su respectiva dirección, a excepción del viento Este, el cual solo se cargó al 90%, ya que mas allá de ese punto se comienzan a descargar axialmente algunos miembros. Los comentarios de la información contenida en las páginas 34 a 47 se encuentran en la sub-sección 3.6.8.

Se debe mencionar que los problemas analizados en este trabajo son de carácter determinista, y no se involucran aspectos de incertidumbre. Por tanto, los valores estadísticos (media, máximo, mínimo y desviación estándar) de fuerzas y desplazamientos, sirven para resumir el comportamiento de la cubierta ante la acción del viento. Es decir, para cada caso de carga, el valor medio de los desplazamientos en dirección i , se obtiene como un promedio aritmético de los desplazamientos en la dirección i , de todos los nudos libres de la estructura. El valor máximo de los desplazamientos en la dirección i es el mayor desplazamiento en la dirección i positiva, mientras que el valor mínimo es el de mayor magnitud en la dirección negativa. La desviación estándar de los desplazamientos en la dirección i se obtiene como el promedio aritmético de los cuadrados de las diferencias entre los desplazamientos de cada punto y la media de los desplazamientos, es decir, se hace uso de la fórmula de desviación estándar poblacional.

Como se mencionó anteriormente, el comportamiento dinámico de la cubierta queda fuera de los alcances de este trabajo, sin embargo, en las tablas 3.2 a 3.9 se han incluido los valores de los diez primeros modos de vibrar, con la intención de que esta información sirva de referencia para quienes estén interesados en profundizar en el tema.

3.6.1 Viento en dirección Sur

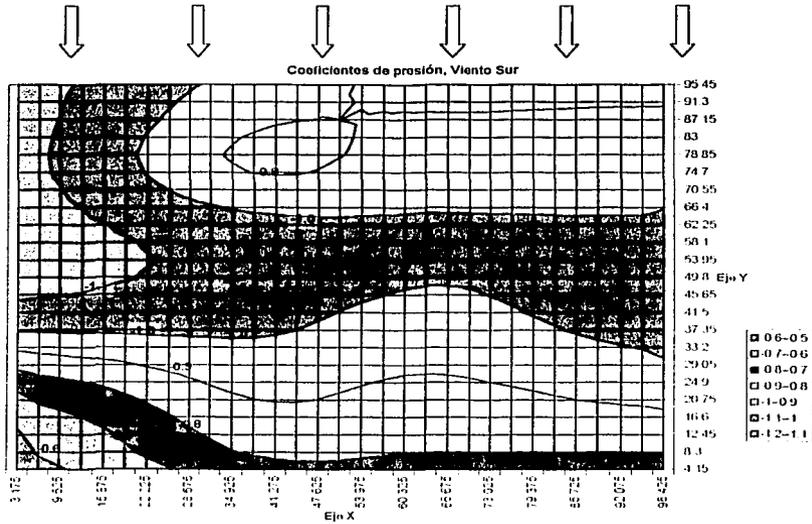


Figura 3.4 Coeficientes de presión, Viento Sur

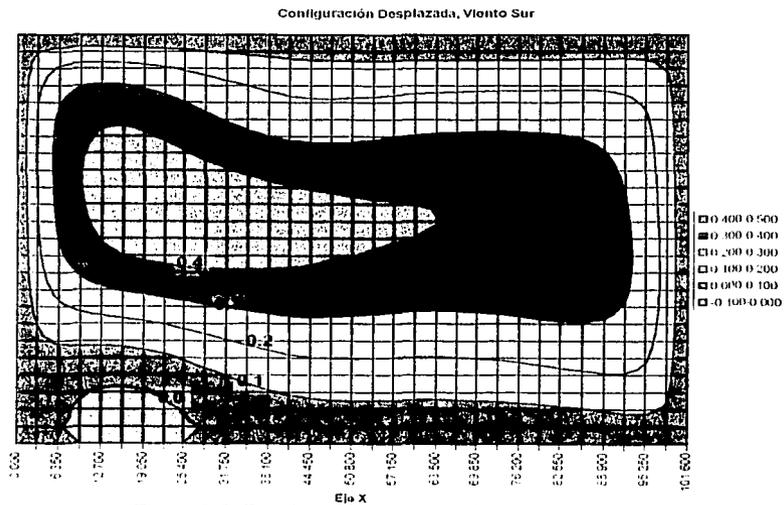


Figura 3.5 Desplazamientos verticales (m), Viento Sur

TESIS C.A.I
 FALLA DE ORIGEN

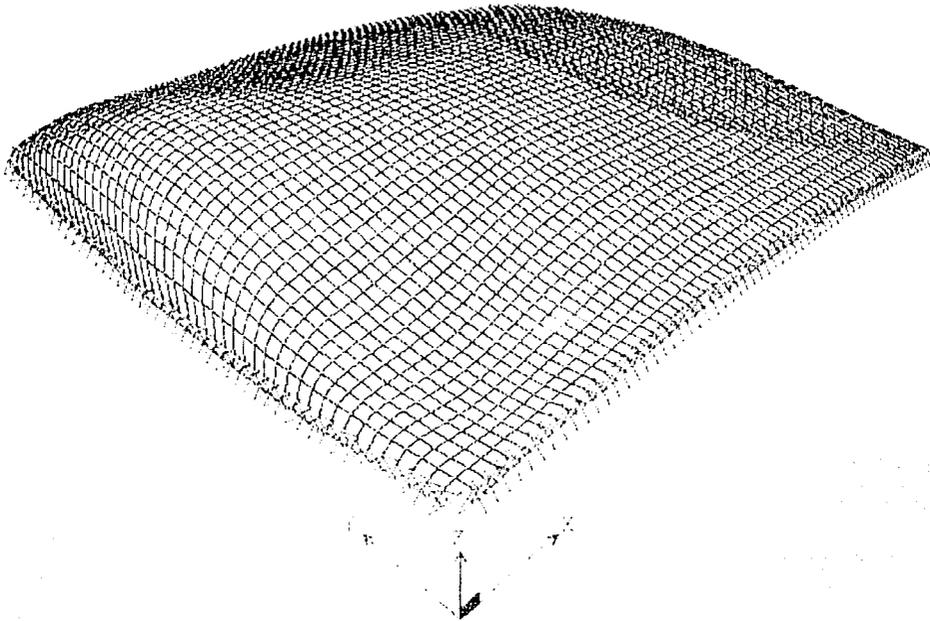


Figura 3.6 Configuración desplazada, Viento Sur

Tabla 3.3 Resultados principales para viento Sur

Cables de forma		
Esfuerzo medio =	32.4	% Fu
Esfuerzo max =	40.0	% Fu
Esfuerzo min =	20.2	% Fu
Desv Esfuerzo =	5.7	% Fu

Cables de carga		
Esfuerzo medio =	17.3	% Fu
Esfuerzo max =	30.8	% Fu
Esfuerzo min =	15.0	% Fu
Desv Esfuerzo =	3.1	% Fu

Desplazamientos	Ux (m)	Uy (m)	Uz (m)
max =	0.044	0.027	0.473
min =	-0.060	-0.067	-0.026
medio =	-0.001	-0.012	0.225
desv est =	0.025	0.021	0.142

Modos de vibrar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Período (seg)	2.920	2.800	2.290	2.250	2.190	2.040	1.890	1.730	1.710	1.670

SIS CON
FALLA DE ORIGEN

3.6.2 Viento en dirección S15°E

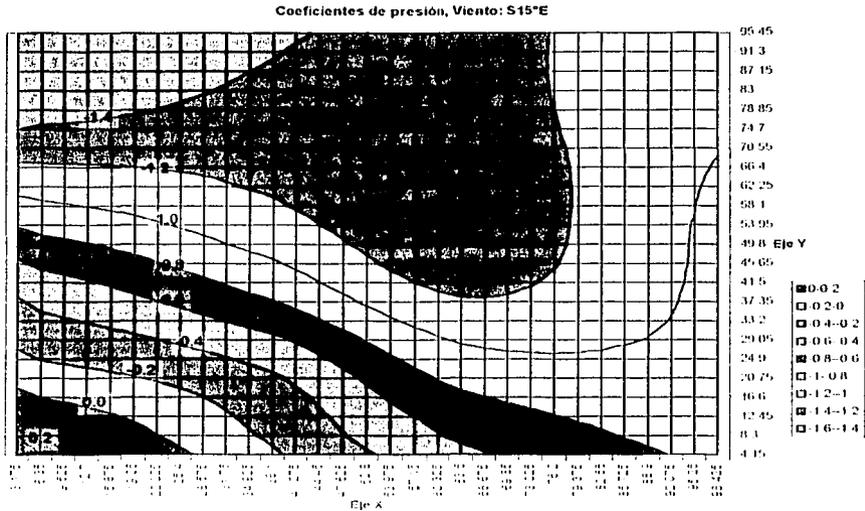


Figura 3.7 Coeficientes de presión, Viento S15°E

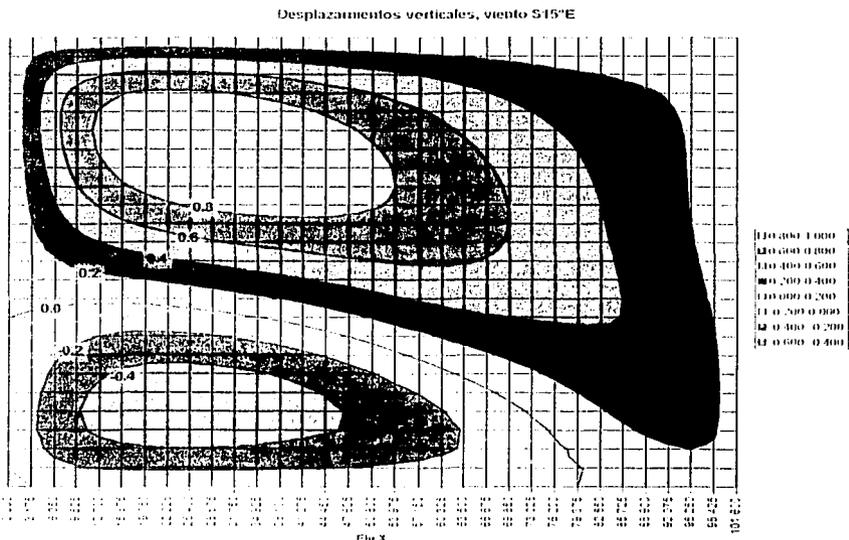


Figura 3.8 Desplazamientos verticales (m), Viento S15°E

SIS CON
 FALLA DE ORIGEN

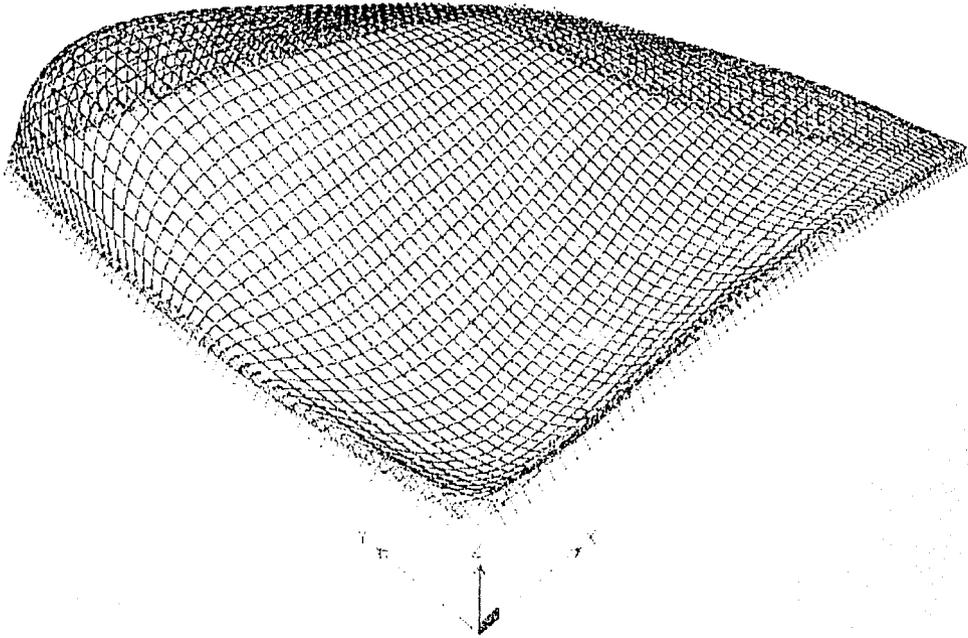


Figura 3.9 Configuración deformada. Viento S15°E

Tabla 3.4 Resultados principales para viento S15°E

Cables de forma			Cables de carga		
Esfuerzo medio =	33.9	% Fu	Esfuerzo medio =	17.3	% Fu
Esfuerzo max =	63.1	% Fu	Esfuerzo max =	33.2	% Fu
Esfuerzo min =	10.1	% Fu	Esfuerzo min =	11.1	% Fu
Desv Esfuerzo =	16.2	% Fu	Desv Esfuerzo =	6.0	% Fu

Desplazamientos	Ux (m)	Uy (m)	Uz (m)
max =	0.078	0.058	1.004
min =	-0.117	-0.218	-0.633
medio =	0.006	-0.080	0.246
desv est =	0.045	0.068	0.379

Modos de vibrar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Periodo (seg)	2.980	2.770	2.390	2.250	2.180	2.000	1.870	1.840	1.730	1.710

3.6.3 Viento en dirección S30°E

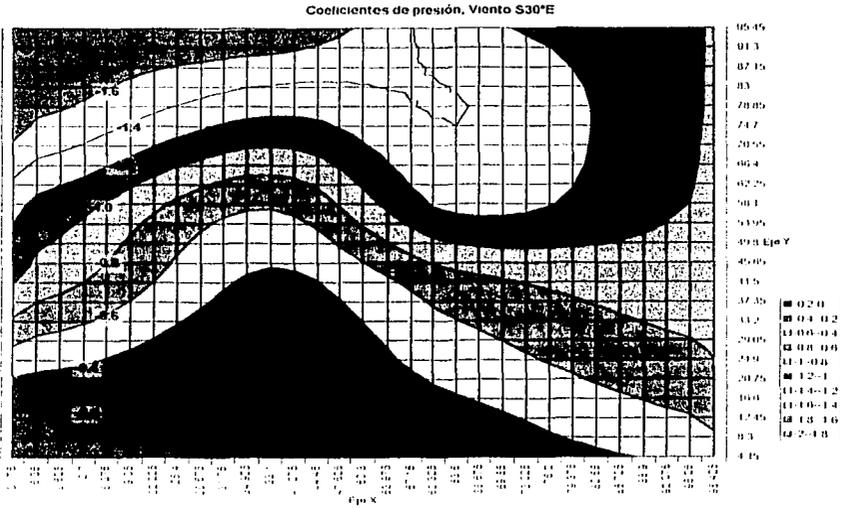


Figura 3.10 Coeficientes de presión, Viento S30°E

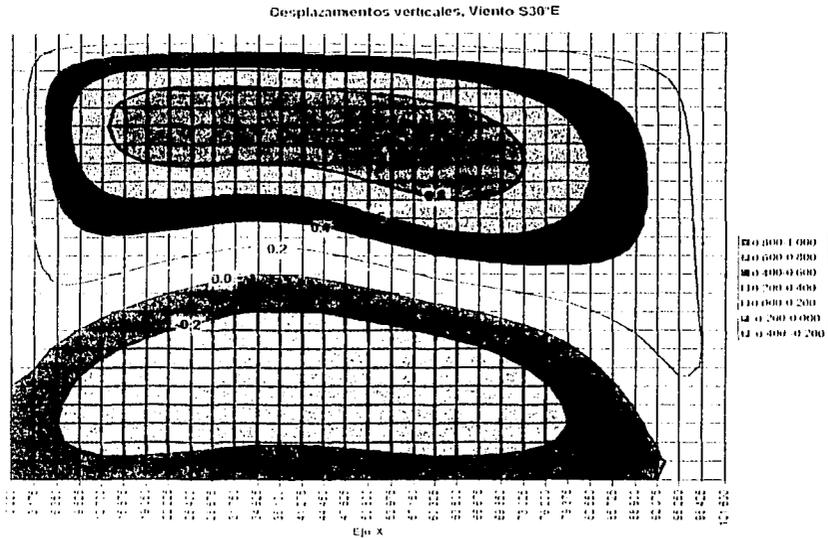


Figura 3.11 Desplazamientos verticales (m), Viento S30°E

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

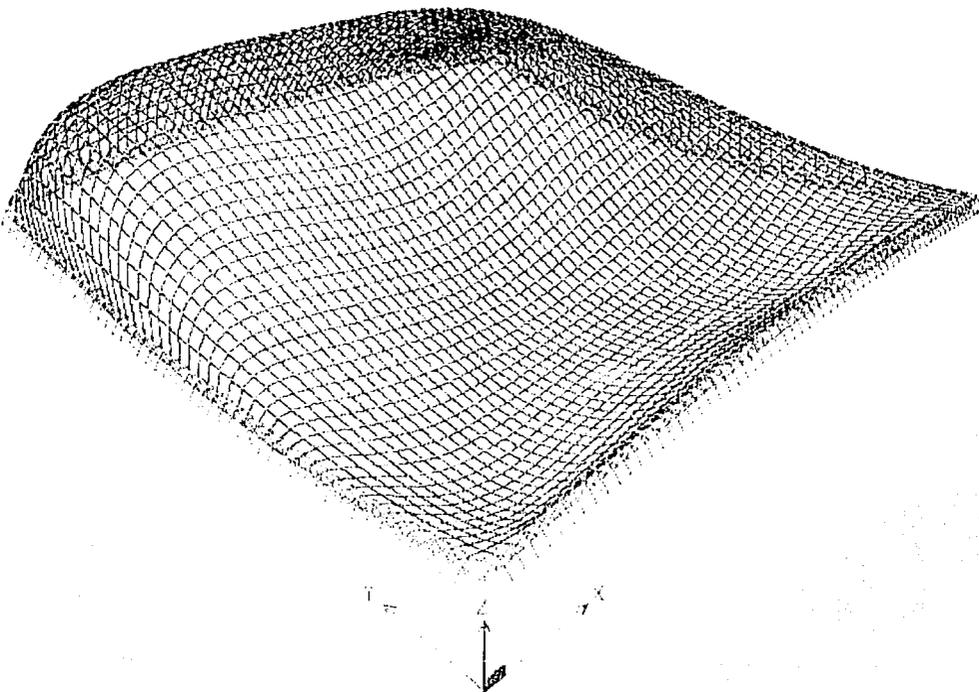


Figura 3.12 Configuración desplazada, Viento S30°E

Tabla 3.5 Resultados principales para viento S30°E

	Cables de forma			Cables de carga		
Esfuerzo medio =	33.9	% Fu		Esfuerzo medio =	17.3	% Fu
Esfuerzo max =	63.2	% Fu		Esfuerzo max =	33.1	% Fu
Esfuerzo min =	10.2	% Fu		Esfuerzo min =	11.1	% Fu
Desv Esfuerzo =	15.2	% Fu		Desv Esfuerzo =	5.0	% Fu

Desplazamientos	Ux (m)	Uy (m)	Uz (m)
max =	0.058	0.025	0.941
min =	-0.100	-0.212	-0.394
medio =	0.004	-0.094	0.213
desv est =	0.034	0.059	0.386

Modos de vibrar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Periodo (seg)	2.760	2.580	2.190	2.120	1.960	1.930	1.800	1.720	1.690	1.620

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

3.6.4 Viento en dirección SE45°

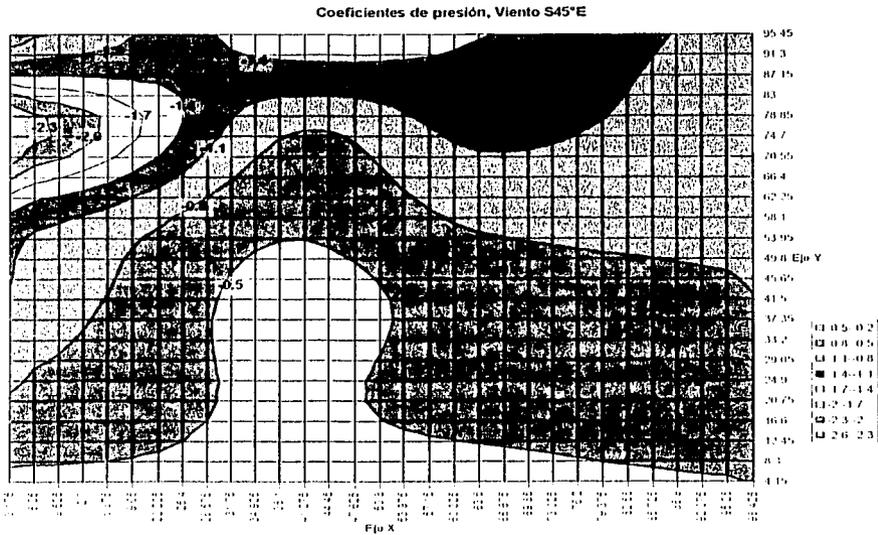


Figura 3.13 Coeficientes de presión, Viento S45°E

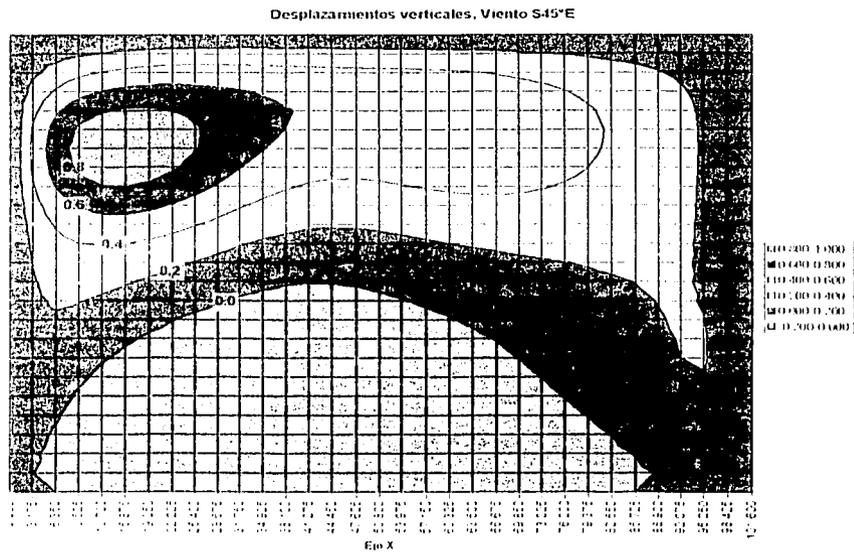


Figura 3.14 Desplazamientos verticales (m), Viento S45°E

TESIS C.U.N
 FALLA DE CUBEN

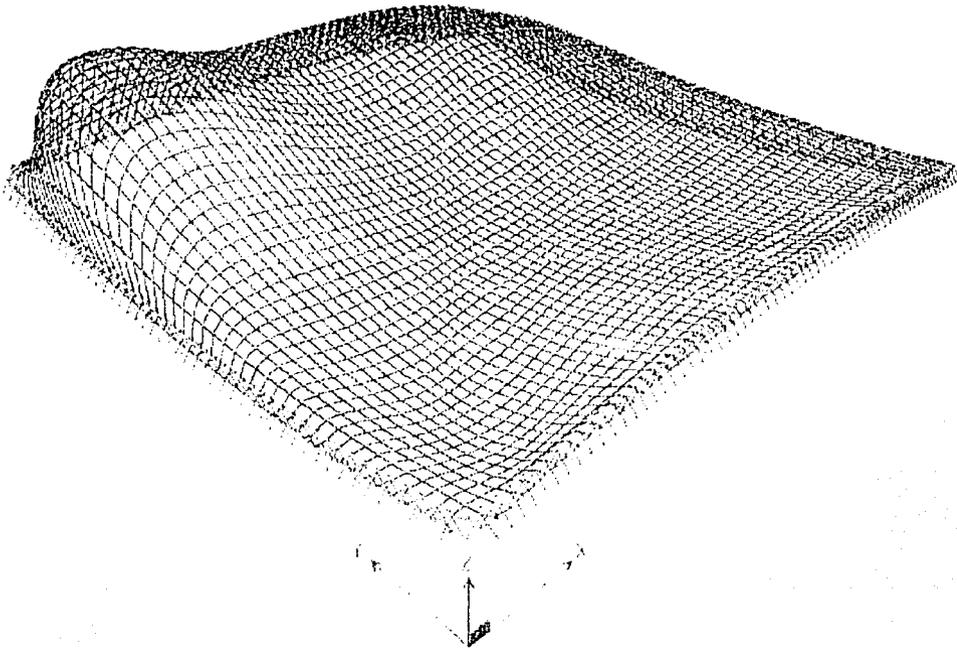


Figura 3.15 Configuración desplazada, Viento S45°E

Tabla 3.6 Resultados principales para viento S45°E

	Cables de forma			Cables de carga		
Esfuerzo medio =	30.7	% Fu	Esfuerzo medio =	20.4	% Fu	
Esfuerzo max =	62.6	% Fu	Esfuerzo max =	31.3	% Fu	
Esfuerzo min =	11.4	% Fu	Esfuerzo min =	16.3	% Fu	
Desv Esfuerzo =	14.3	% Fu	Desv Esfuerzo =	2.8	% Fu	

Desplazamientos	Ux (m)	Uy (m)	Uz (m)
max =	0.040	0.024	0.962
min =	-0.136	-0.186	-0.143
medio =	-0.007	-0.056	0.192
desv est =	0.033	0.045	0.247

Modos de vibrar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Periodo (seg)	2.760	2.560	2.210	2.060	2.010	1.900	1.800	1.750	1.670	1.610

3.6.5 Viento en dirección SE60°

Coefficientes de presión, Viento S60°E

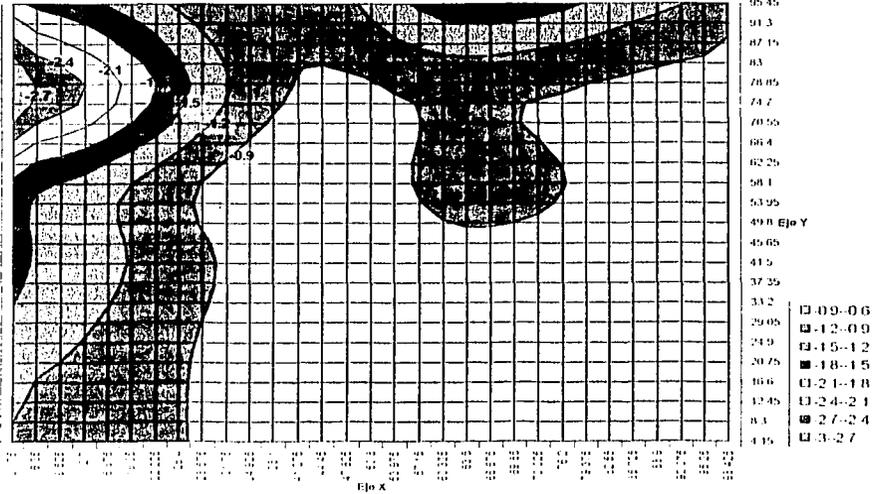


Figura 3-16 Coeficientes de presión, Viento S60°E

Desplazamientos verticales, Viento S60°E

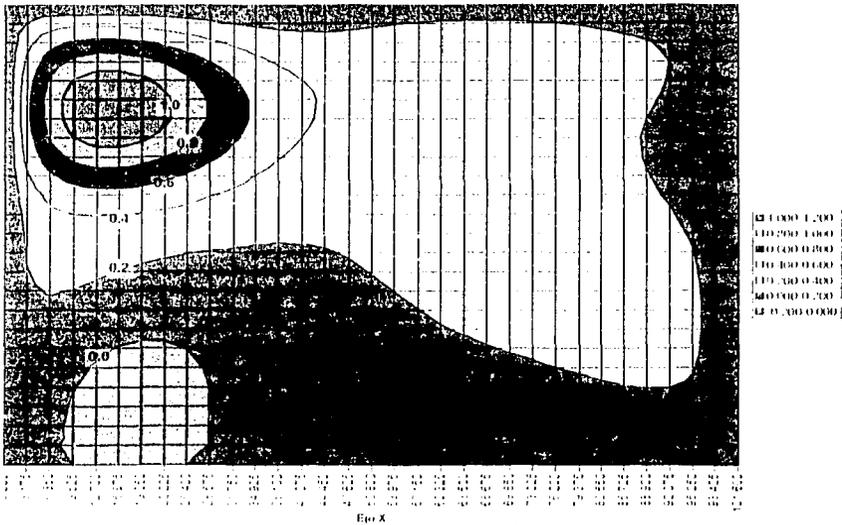


Figura 3-17 Desplazamientos verticales (m), Viento S60°E

TRABAJO CON FALLA DE ORIGEN

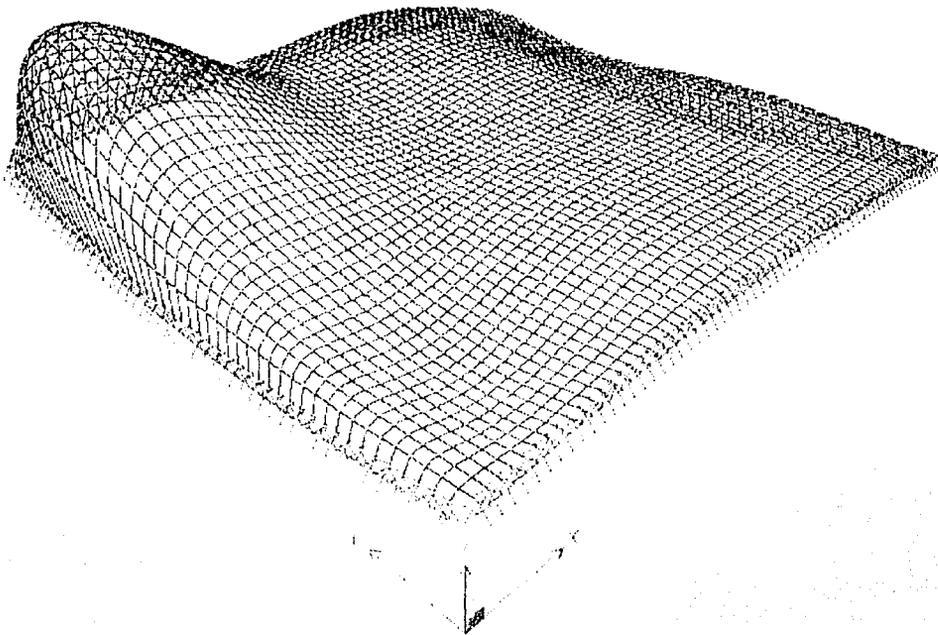


Figura 3.18 Configuración desplazada, Viento S60°E

Tabla 3.7 Resultados principales para viento S60°E

	Cables de forma			Cables de carga	
Esfuerzo medio =	33.6	% Fu	Esfuerzo medio =	16.6	% Fu
Esfuerzo max =	48.7	% Fu	Esfuerzo max =	32.3	% Fu
Esfuerzo min =	19.8	% Fu	Esfuerzo min =	4.9	% Fu
Desv Esfuerzo =	8.1	% Fu	Desv Esfuerzo =	6.4	% Fu

Desplazamientos	Ux (m)	Uy (m)	Uz (m)
max =	0.044	0.033	1.214
min =	-0.193	-0.237	-0.072
medio =	-0.012	-0.038	0.243
desv est =	0.044	0.052	0.228

Modos de vibrar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Periodo (seg)	2.930	2.740	2.410	2.180	2.070	2.010	1.990	1.840	1.760	1.670

1000
FALLA DE ORIGEN

3.6.6 Viento en dirección SE75°

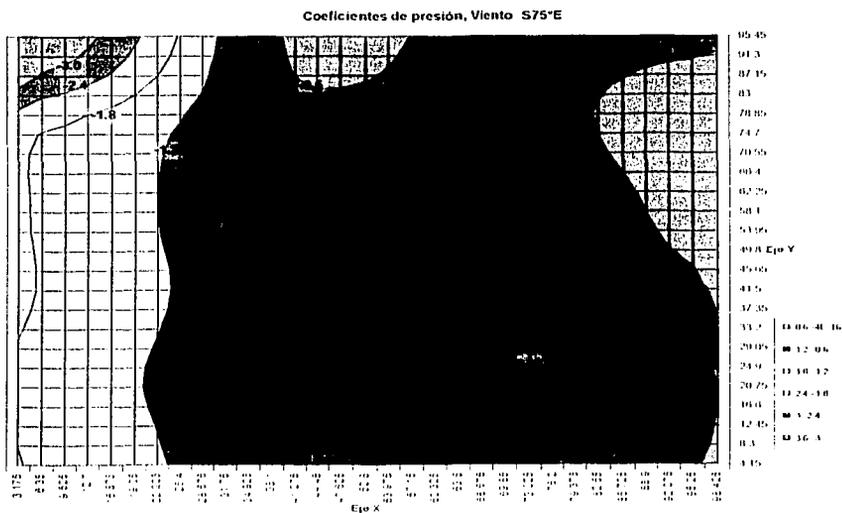


Figura 3.19 Coeficientes de presión, Viento S75°E

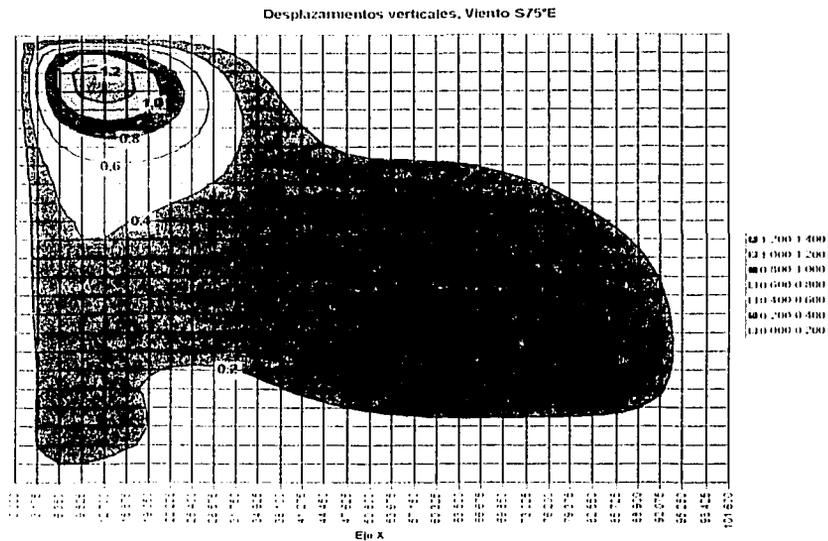


Figura 3.20 Desplazamientos verticales (m), Viento S75°E

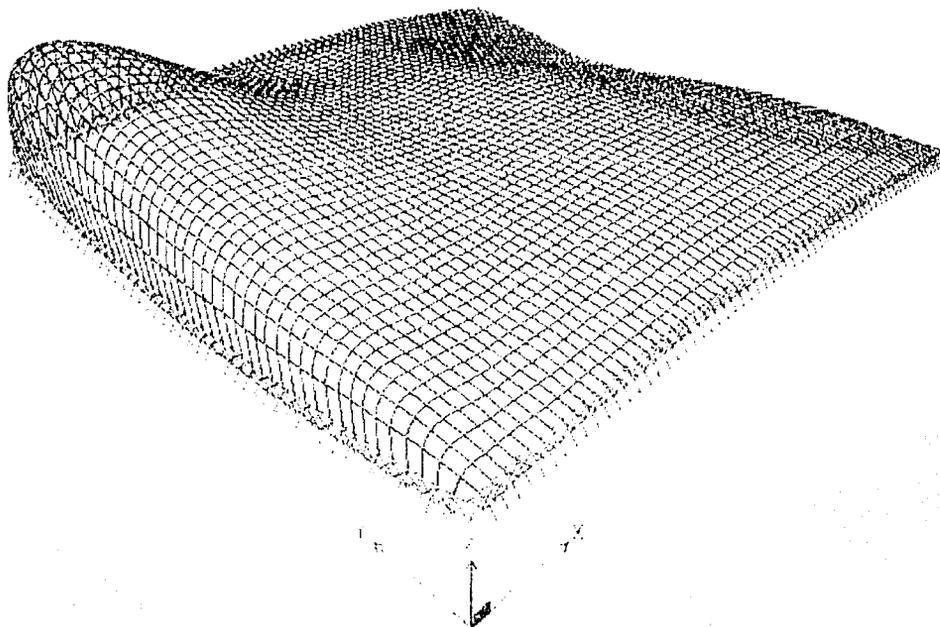


Figura 3.21 Configuración desplazada. Viento S75°E

Tabla 3.8 Resultados principales para viento S75°E

	Cables de forma			Cables de carga		
Esfuerzo medio =	33.3	% Ft		Esfuerzo medio =	17.7	% Fu
Esfuerzo max =	44.6	% Fu		Esfuerzo max =	33.9	% Fu
Esfuerzo min =	21.8	% Fu		Esfuerzo min =	1.2	% Fu
Desv Esfuerzo =	4.2	% Fu		Desv Esfuerzo =	7.6	% Fu

Desplazamientos	Ux (m)	Uy (m)	Uz (m)
max =	0.033	0.053	1.349
min =	-0.254	-0.300	-0.006
medio =	-0.022	-0.010	0.236
desv est =	0.046	0.054	0.206

Modos de vibrar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Periodo (seg)	3.000	2.680	2.470	2.280	2.080	2.060	2.000	1.900	1.860	1.760

3.6.7 Viento en dirección Este

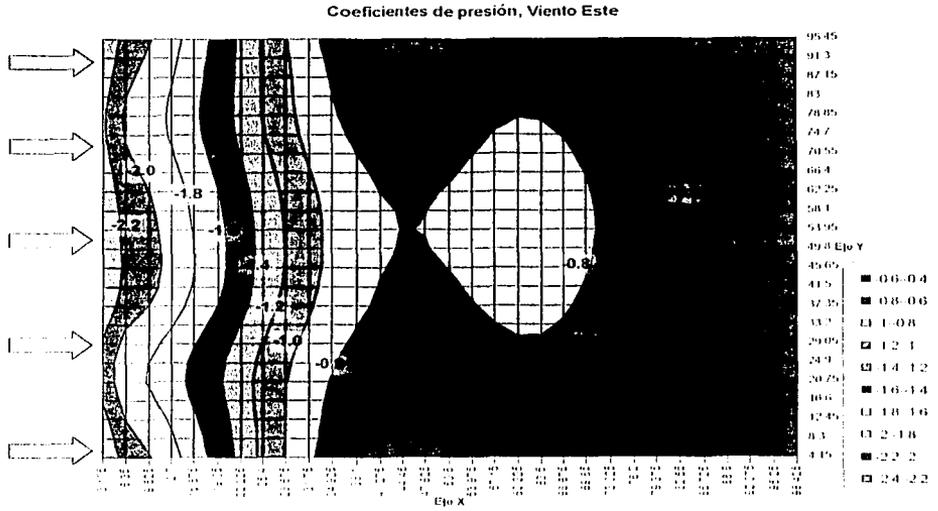


Figura 3.22 Coeficientes de presión, Viento Este

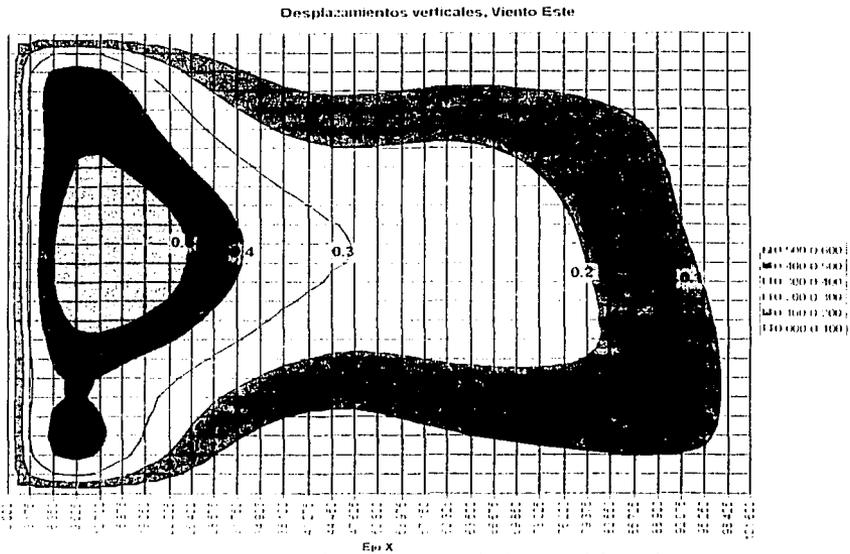


Figura 3.23 Desplazamientos verticales (m), Viento Este

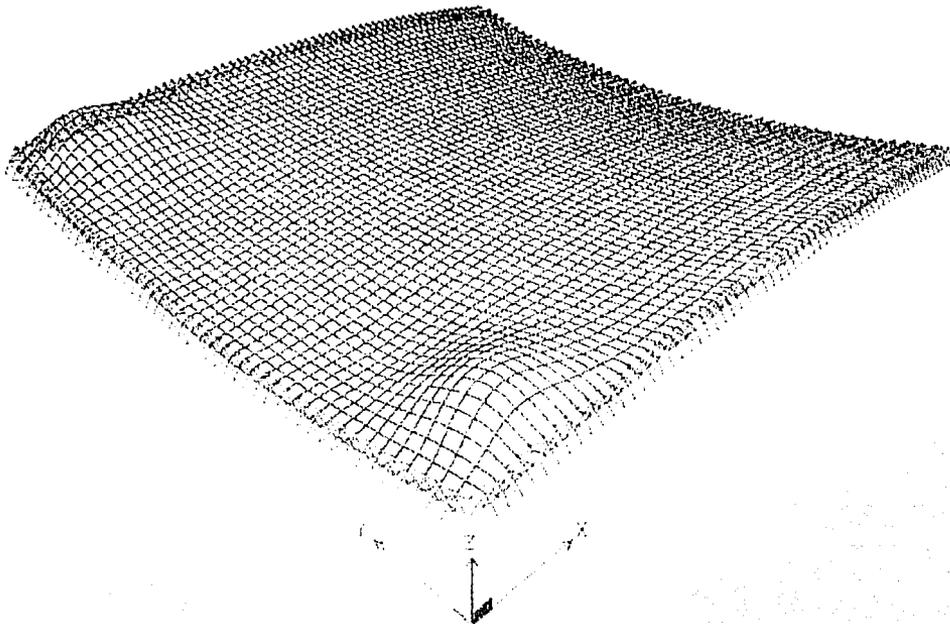


Figura 3.24 Configuración desplazada, Viento Este

Tabla 3.9 Resultados principales para viento Este

	Cables de forma			Cables de carga		
Esfuerzo medio =	33.1	% Fu		Esfuerzo medio =	19.2	% Fu
Esfuerzo max =	38.7	% Fu		Esfuerzo max =	34.6	% Fu
Esfuerzo min =	22.0	% Fu		Esfuerzo min =	0.9	% Fu
Desv Esfuerzo =	4.1	% Fu		Desv Esfuerzo =	8.4	% Fu

Desplazamientos	Ux (m)	Uy(m)	Uz(m)
max =	0.021	0.087	0.600
min =	-0.105	-0.095	0.000
medio =	-0.025	-0.002	0.208
desv est =	0.033	0.025	0.162

Modos de vibrar	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Periodo (seg)	2.970	2.610	2.430	2.200	2.090	2.030	1.970	1.870	1.800	1.710

3.6.8 Resumen de resultados obtenidos para los siete estados de carga

En esta sección se comparan los resultados más destacados obtenidos para todas las direcciones de viento analizadas, así también para la configuración no desplazada de la estructura. Como se mencionó anteriormente, la carga del viento en la dirección 'Este' solo se aplicó hasta un 90% de la carga total, ya que el 100% producía descargas axiales en algunos miembros, caso que se explicará mas adelante.

En la figura 3.25 se muestran los valores de los esfuerzos medios en los cables para los distintos ángulos de ataque del viento, así como para la configuración no desplazada de la estructura. En dicha figura se observa que en la configuración no desplazada, el valor medio de los esfuerzos en los cables de carga es del 36 % del esfuerzo último (F_u) y en los cables de forma es del 20 % F_u , mientras que bajo la acción del viento la situación se invierte, ya que son los cables de forma los mas esforzados con valores medios cercanos al 32 % F_u , comparados con un 17 % F_u en los cables de carga. Esta inversión de esfuerzos se explica porque los cables de carga y de forma tienen curvaturas opuestas, de tal forma que los cables de carga soportarán todas las cargas dirigidas hacia abajo, mientras que los cables de forma soportarán todas las cargas que se dirigen hacia arriba, como aquellas que produce el viento.

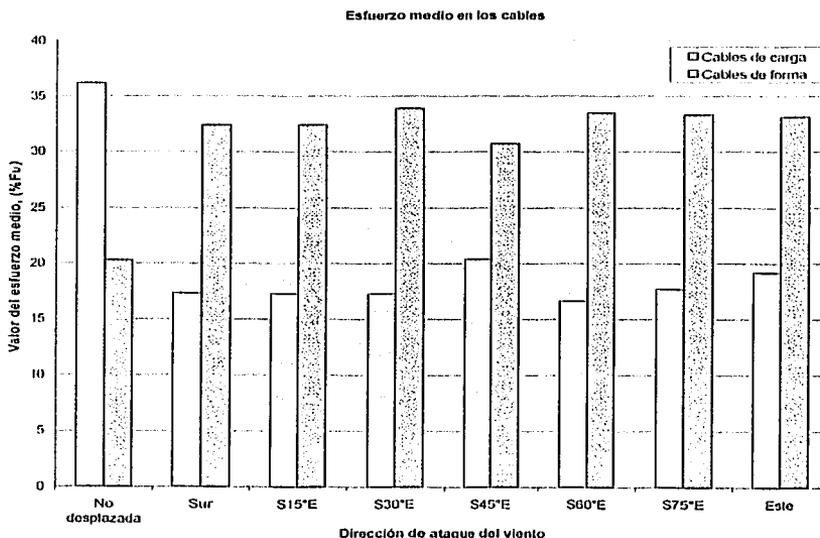


Fig. 3.25 Esfuerzo medio en los cables para los diversos estados de carga

En la figura 3.26 se muestran las desviaciones estándar de los esfuerzos en los cables. En ella se observa que para las primeras cinco direcciones del viento, desde la 'Sur' hasta la 'S60°E', la dispersión de los valores de los esfuerzos en los cables de forma es mayor que la de los cables de carga, con las mayores dispersiones para viento 'S30°E' y 'S45°E'; mientras que para viento 'S75°E' y 'Este' son los cables de carga los que presentan una dispersión mayor.

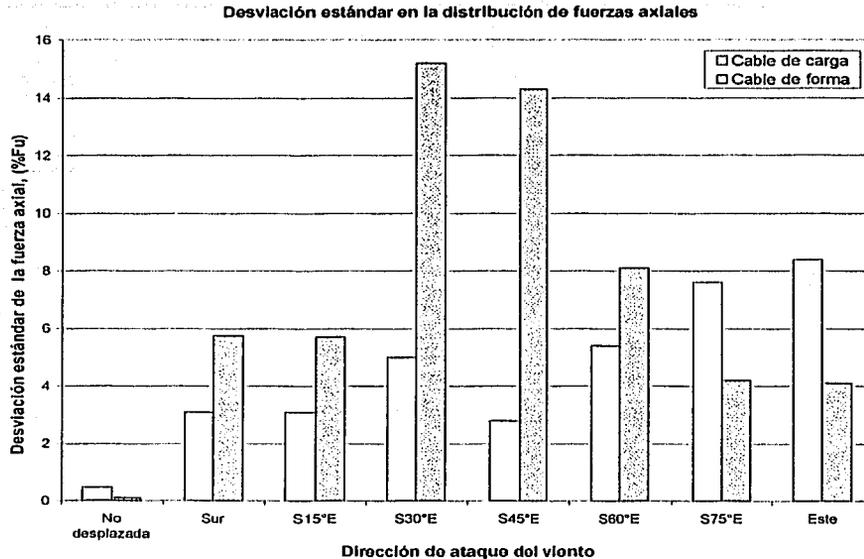


Fig. 3.26 Desviación estándar del esfuerzo en los cables, para los diversos estados de carga

En la figura 3.27 se muestran valores estadísticos de los desplazamientos verticales. En esta gráfica se aprecia que el desplazamiento medio es similar en magnitud para todas los ángulos de ataque del viento, ya que oscila entre los 19 y 24 centímetros. Sin embargo, donde si se muestran grandes diferencias es en los valores máximos y mínimos, ya que el valor máximo (1.35 m) ocurre para viento "S75°E", y el valor mínimo (-0.53m) ocurre para viento "S15°E". Las desviaciones estándar máximas ocurren para "S15°E" y "S30°E".

En la figura 3.28 se grafican los trabajos desarrollados por las fuerzas del viento para cada dirección estudiada. Por definición, el trabajo es el producto de las fuerzas aplicadas, por los desplazamientos que recorren dichas fuerzas, por lo que se obtiene mayor trabajo en la combinación de máximos desplazamientos y fuerzas. Por lo anterior, el trabajo desarrollado en dirección vertical es el máximo. De todas las direcciones analizadas, la "S15°E" es la que desarrolló mayor trabajo con 235 ton-m en dirección vertical, mientras que la mínima cantidad de trabajo desarrollado fue de 145 ton-m en el caso [de viento "Sur".

Para finalizar el resumen de resultados, en la figura 3.29 se muestra el cambio de los periodos de vibración de la estructura, al pasar de la configuración no desplazada a las configuraciones desplazadas para cada dirección de viento analizadas.

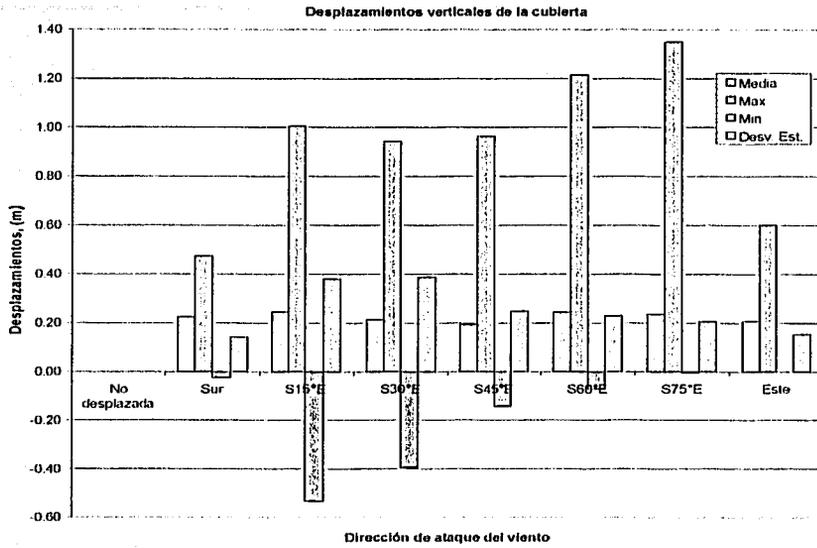


Fig. 3.27 Desplazamientos verticales de la cubierta para los diversos estados de carga

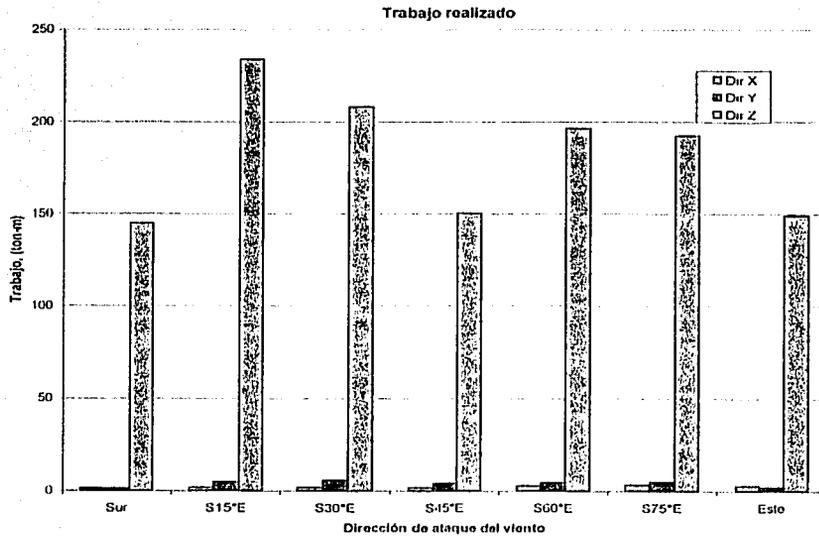


Fig. 3.28 Trabajo realizado para cada dirección de viento

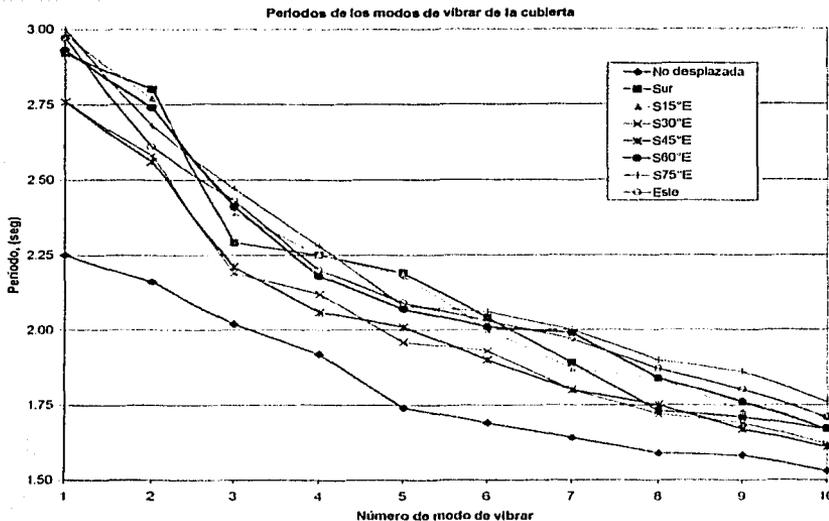


Fig. 3.29 Periodos de los diez primeros modos de vibrar para los distintos ángulos de ataque del viento

3.7 Análisis de la estructura bajo efectos de carga y descarga del viento

Debido a que la cubierta presenta un comportamiento no lineal, resulta de interés estudiar el efecto que produce el viento sobre la estructura, al someterla a ciclos de carga y descarga.

No se pretende analizar todas las direcciones del viento. Por lo tanto, de forma arbitraria se decidió estudiar únicamente la dirección de viento Sur, y se realizaron tres ciclos de carga y descarga. En las figuras de esta sección se resume el comportamiento estructural obtenido en tres aspectos: desplazamientos, elementos mecánicos y periodos de vibrar. Los resultados presentados en las figuras 3.30 a 3.32 se refieren a la configuración adoptada por la estructura después de descargarla.

En la figura 3.30 se muestra el comportamiento de los desplazamientos verticales bajo acciones iteradas de carga y descarga. Se puede observar que conforme los ciclos de carga y descarga aumentan, el valor medio de los desplazamientos aumenta en valor absoluto y se dirige hacia abajo, es decir, la estructura 'se cuelga' cada vez más. Se aprecia un comportamiento similar pero de cambios mas bruscos para los desplazamientos mínimos (desplazamientos máximos dirigidos hacia abajo). Para los desplazamientos máximos (máximos positivos) se nota un incremento en su valor conforme aumentan los ciclos de carga y descarga. Como una consecuencia de que los desplazamientos máximos y mínimos se alejen de la media, se tiene que la desviación estándar de los desplazamientos aumenta conforme se realizan mas ciclos de carga y descarga.

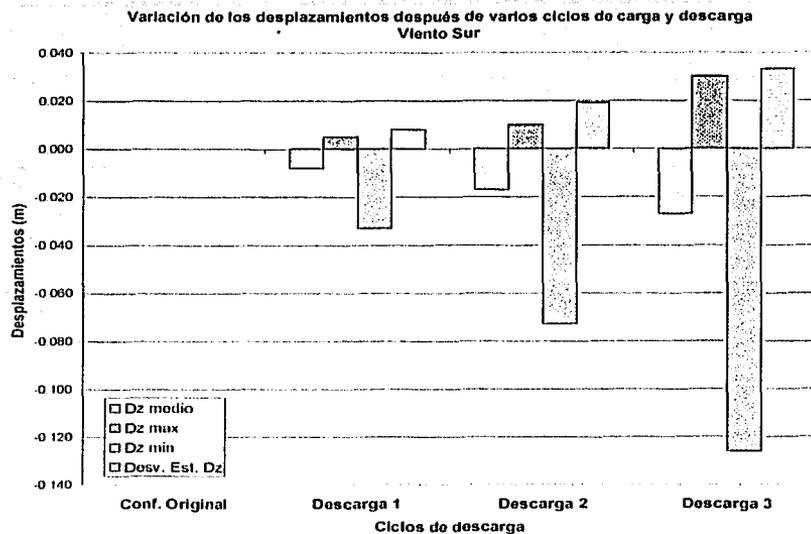


Fig. 3.30 Desplazamientos verticales de la cubierta para varios ciclos de carga y descarga, viento Sur

En la figura 3.31 se muestran los esfuerzos medios, máximos y mínimos para los cables de carga y de forma. Los valores de esfuerzo están representados como un porcentaje del esfuerzo último. Es interesante notar que los valores medio, máximo y mínimo de los cables de carga, así como el valor máximo de los cables de forma, permanecen prácticamente constantes después de descargar a la estructura en los diferentes ciclos. Sin embargo, los valores de esfuerzo medio y mínimo para los cables de forma muestran un importante decremento conforme aumenta el número de ciclos.

Es posible decir que los incrementos en desplazamientos (fig. 3.30) se atribuye a la pérdida de tensión en los cables de forma (fig. 3.31). Es más, debido a la tendencia decreciente en el valor mínimo en los cables de forma, se esperaba que el siguiente ciclo de carga y descarga presentara elementos con pérdida total de tensión, lo cual produciría una redistribución de tensiones en los miembros de la estructura.

La figura 3.32 muestra la variación en los periodos de vibrar de la estructura cuando ésta se descarga, es decir, al completar cada ciclo de carga y descarga. Se muestra, como consecuencia lógica de la pérdida de tensión en los cables de forma y del aumento en los desplazamientos, el aumento en los valores de los periodos de vibrar de la estructura. En pocas palabras, la estructura se flexibiliza conforme se somete a varios ciclos de carga y descarga.

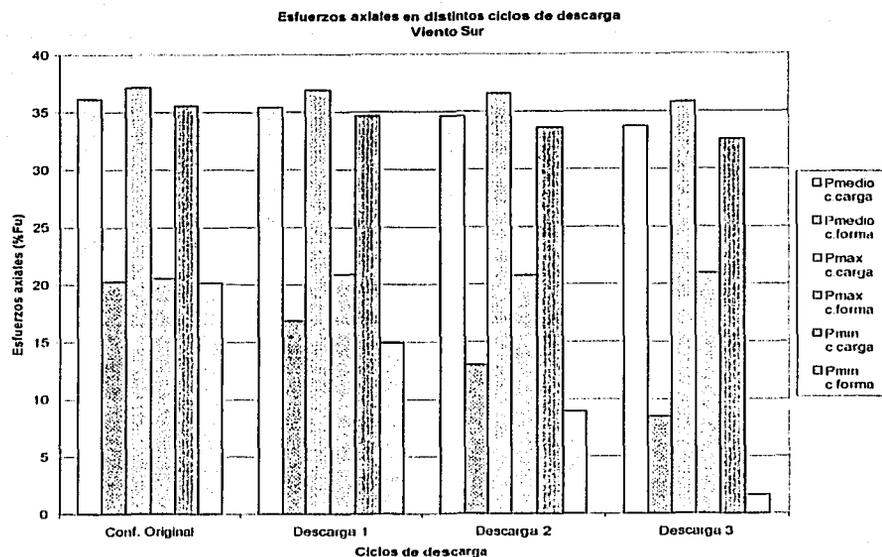


Fig. 3.31 Variación de los esfuerzos axiales para varios ciclos de carga y descarga, viento Sur

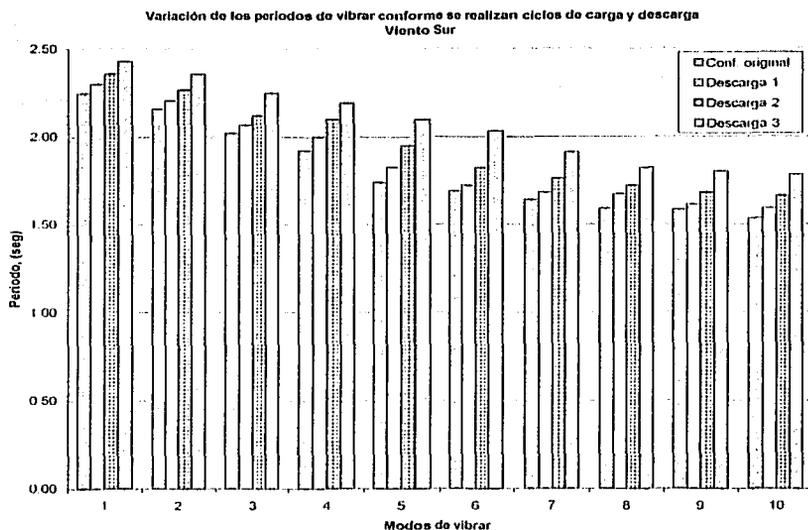


Fig. 3.32 Variación de los periodos de vibrar para varios ciclos de carga y descarga, viento Sur

3.8 Aplicación gradual de las cargas

En algunas estructuras, en especial en aquellas donde existe una gran flexibilidad estructural, es necesario realizar gradualmente el proceso de carga, para evitar posibles problemas de no convergencia, si se usa el método que se presentó en el capítulo anterior.

La convergencia del método no fue problema para el ejemplo que se estudia en este capítulo, pero se decidió analizar por etapas dos estados de carga, cuando el viento actúa en la dirección 'Sur' y en la dirección 'S30°E', con incrementos del 20% de la carga de diseño por viento, hasta estar próximos a la descarga de algún miembro. El propósito de esta sección es mostrar la no linealidad de la respuesta de la cubierta en estudio.

En la figura 3.33 se muestra el comportamiento de la media de los desplazamientos verticales para los dos estados de carga mencionados. Como se observa en la gráfica, es posible decir que en el rubro de los desplazamientos medios, el comportamiento es cuasi-lineal, al menos hasta el 140% de la carga de diseño. En el caso de viento S30°E, a partir de este nivel de carga se nota un cambio en la pendiente de la curva.

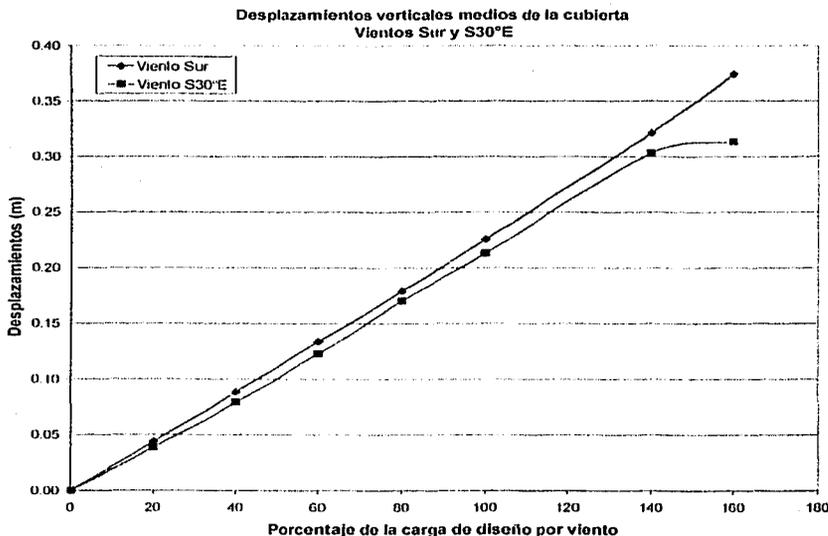


Fig. 3.33 Comparación de los desplazamientos verticales medios de la cubierta, para viento 'Sur' y 'S30°E'

En las figuras 3.34 y 3.35 se aprecia el cambio gradual en los valores medios de las tensiones en los cables para vientos 'Sur' y 'S30°E', respectivamente. Para viento 'Sur', el proceso tiene un comportamiento prácticamente lineal, mientras que para viento 'S30°E', los cables de forma exhiben un claro comportamiento no lineal.

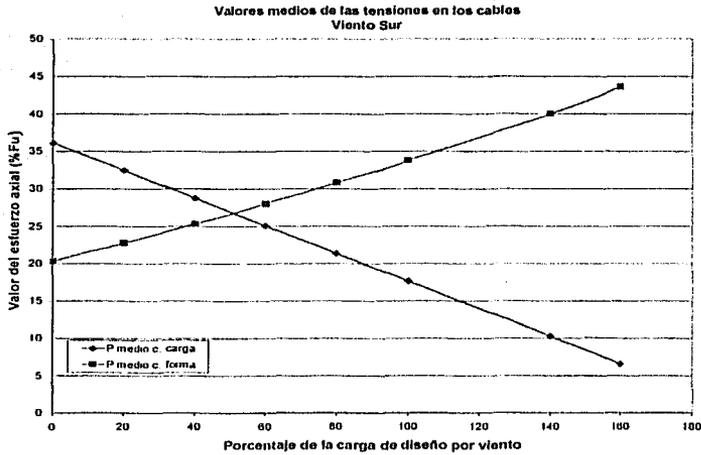


Fig. 3.34 Valores medios de las tensiones en los cables, Viento Sur

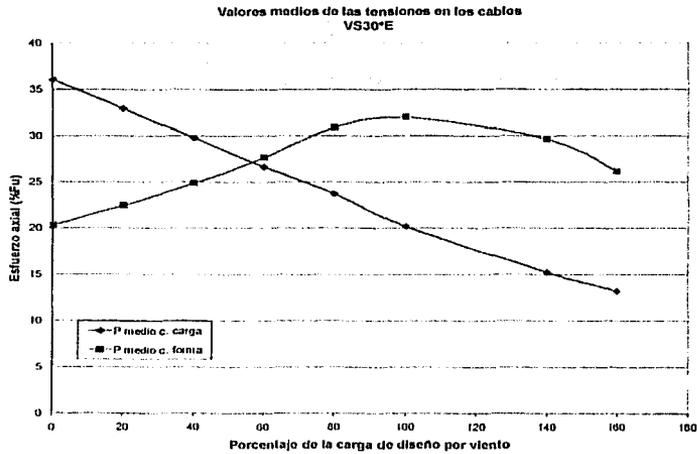


Fig. 3.35 Valores medios de las tensiones en los cables, Viento S30°E

En las figuras 3.36 y 3.37 se aprecia el cambio gradual en los valores mínimos de las tensiones en los cables para vientos 'Sur' y 'S30°E', respectivamente. Para viento 'Sur', el proceso tiene un comportamiento prácticamente lineal, mientras que para viento 'S30°E', los cables de forma exhiben un claro comportamiento no lineal.

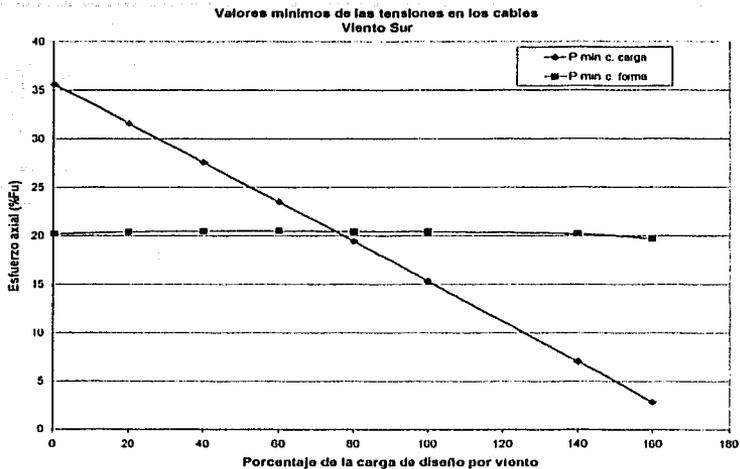


Fig. 3.36 Valores mínimos de las tensiones en los cables, Viento Sur

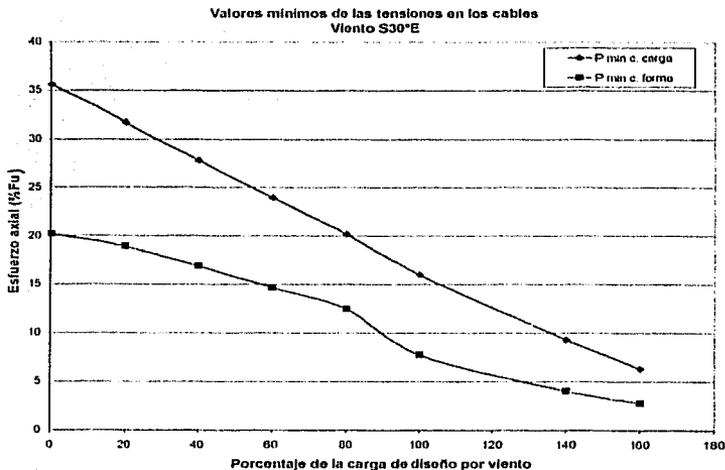
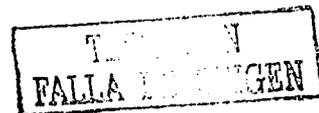


Fig. 3.37 Valores mínimos de las tensiones en los cables, Viento S30°E

Como resumen de esta sección, se descubrió que el comportamiento no lineal recae principalmente en los cables de forma, ya que estudiados por separado, son éstos los que muestran el comportamiento no lineal.



3.9 Comparación entre los resultados de análisis lineales y no lineales

En esta sección se busca mostrar la diferencia entre realizar análisis lineales y realizar análisis no lineales, para todas las direcciones de viento estudiadas.

Como se mencionó anteriormente, el análisis de primer orden o lineal, plantea las ecuaciones de equilibrio con base en la configuración no desplazada de la estructura, al suponer que los desplazamientos son pequeños y que no se necesita replantear las ecuaciones de equilibrio.

Cuando es necesario replantear las ecuaciones de equilibrio sobre la configuración no desplazada, se dice que se realizará un análisis no lineal geométrico o de segundo orden. Esto sucede, cuando el desequilibrio de fuerzas existente entre el sistema de ecuaciones resuelto en la configuración no desplazada y aquel resuelto sobre la configuración desplazada, es lo suficientemente grande como para producir desplazamientos importantes.

En la figura 3.38 se muestran en forma comparativa los resultados lineales con aquellos no lineales, para el valor medio de los desplazamientos verticales. En la figura se aprecia que los valores medios de los desplazamientos obtenidos con un análisis no lineal, sobrepasan a aquellos obtenidos con un análisis lineal, por un pequeño margen.

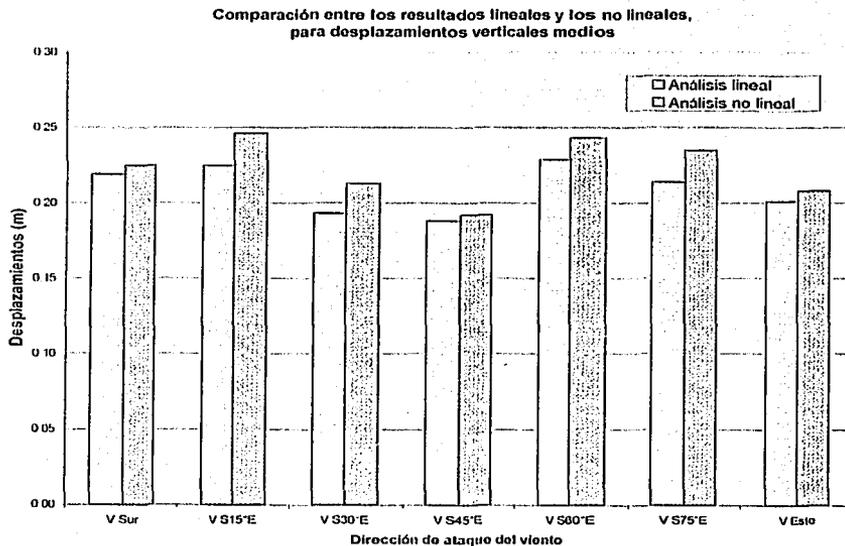


Fig. 3.38 Comparación entre los resultados lineales y los no lineales, para los desplazamientos verticales medios



Los resultados de la figura 3.38 parecen no justificar un análisis no lineal, pero como se muestra en la gráfica 3.39, para los análisis no lineales se aprecia una mayor dispersión de los desplazamientos de la estructura. Es decir, en promedio, los desplazamientos de primer orden son casi iguales a los de segundo orden, sin embargo, la configuración desplazada de segundo orden muestra mayores amplitudes que la de primer orden.

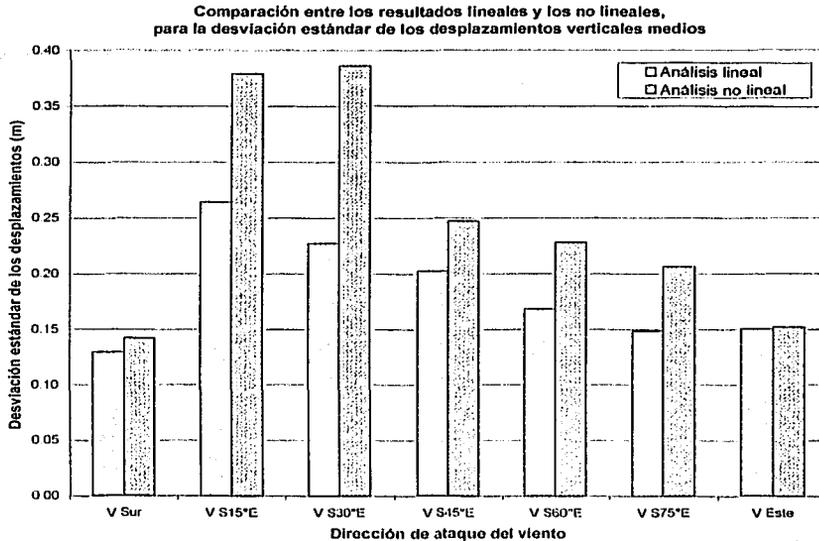


Fig. 3.39 Comparación entre los resultados lineales y los no lineales, para la desviación estándar de los desplazamientos verticales

Los esfuerzos axiales medios en los cables de carga no muestran una diferencia notable entre los análisis lineales y los no lineales, tal como se aprecia en la figura 3.40.

Por otro lado, los esfuerzos axiales medios en los cables de forma tampoco muestran diferencias apreciables entre los análisis de lineales y no lineales, tal como se aprecia en la figura 3.41.

No obstante el hecho de que las fuerzas axiales medias son similares en los dos tipos de análisis, al igual que en los desplazamientos, la dispersión de las fuerzas axiales es mayor en el caso de análisis no lineal.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

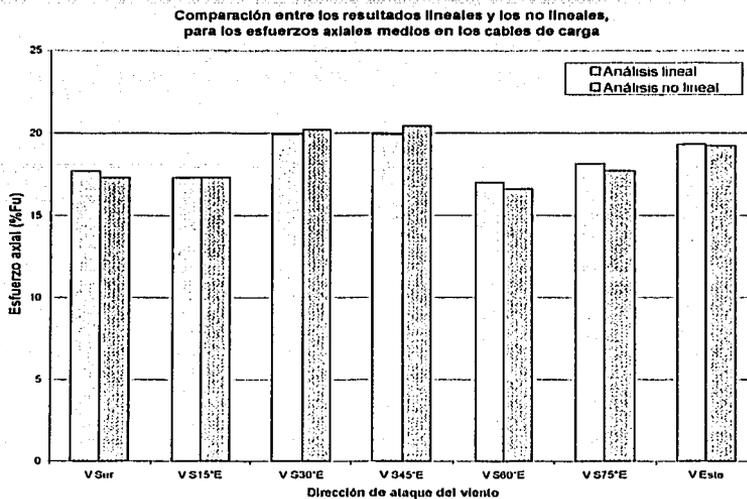


Fig. 3.40 Comparación entre los resultados lineales y los no lineales, para los esfuerzos medios en los cables de carga

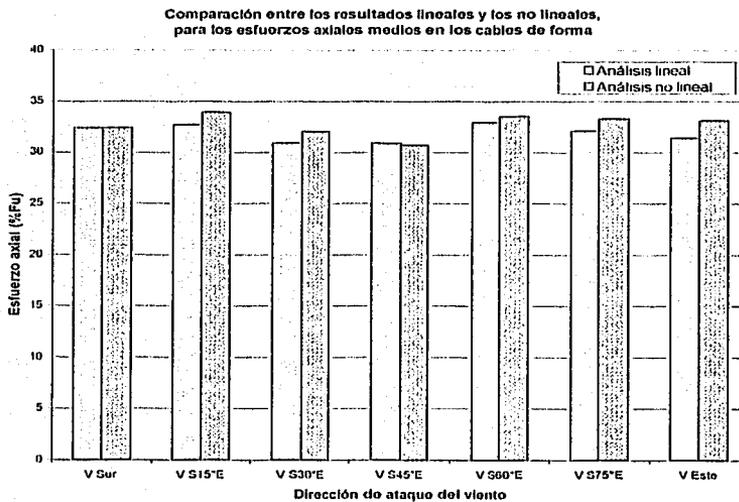
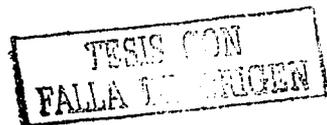


Fig. 3.41 Comparación entre los resultados lineales y los no lineales, para los esfuerzos medios en los cables de forma

Referencias

1. "Using Matlab"; Chapter 5; Matlab ver. 5.0: The Math Works Inc., 1996
2. Hiroshi Akima; "Algoritmo 760"; Transactions on Mathematical Software; Vol. 22, No. 3; Septiembre 1996; p. 357-361
3. "Manual de Diseño de Obras Civiles - Diseño por viento"; Comisión Federal de Electricidad; 1993
4. J. E. Marsden, A. J. Tromba; "Cálculo Vectorial"; Editorial Addison Wesley Longman; Cuarta edición; 1998



Capítulo IV VARIANTES DE LA CUBIERTA DE LA ALBERCA OLIMPICA "FRANCISCO MÁRQUEZ"

Una estructura está sujeta a varios factores que alteran su comportamiento, donde algunos de ellos tienen mayor importancia que otros en la respuesta total. Es por esta razón que se estudia el efecto de aquellos que más influyen en el comportamiento de la cubierta.

Naturalmente, el primer paso consiste en identificar los factores que intervienen en la respuesta estructural. Luego, reconocer aquellos que son los de más peso y tratar de separarlos para estudiarlos de forma individual, para ver el efecto que tienen sobre la estructura y posteriormente sumar todos esos efectos.

Este capítulo permite tener una visión más general del comportamiento de las cubiertas colgantes. Para tener un punto de comparación, las variables que se estudian en este capítulo, se refieren a la estructura estudiada en el capítulo anterior.

Las variables que se analizan en este capítulo son aquellas que se consideraron de mayor interés en el estudio, ya que deben delimitarse los alcances de cualquier trabajo de investigación, para no hacerlo interminable.

Los aspectos a analizar, adicionales a los del capítulo anterior, son: el efecto de la curvatura en los cables, la importancia del nivel de preesfuerzo inicial, la descarga axial de algunos elementos, la existencia de apoyos que no son infinitamente rígidos, y la simplificación del modelado estructural.

4.1 Importancia de la curvatura en el comportamiento estructural de la cubierta

Resulta natural pensar que la curvatura de los cables está relacionada con la distribución de preesfuerzo, y por ende, con la rigidez de la cubierta, ya que como se explicó en el capítulo dos, la rigidez de este tipo de estructuras depende totalmente de la geometría y del preesfuerzo.

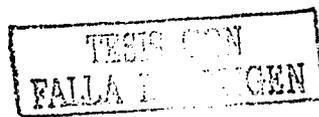
Inicialmente en esta sección se estudia la capacidad de empuje vertical que tienen los cables en función de su curvatura y su preesfuerzo. Posteriormente se mostrarán comparativamente los resultados que produce un mismo estado de carga al actuar sobre estructuras que difieren en curvatura y en sus distribuciones de preesfuerzo.

4.1.1 Estimación del empuje vertical de los cables debido a su preesfuerzo

Para realizar la estimación del empuje producido por el preesfuerzo de los cables, se recurre a una estructura de características similares a las de la Alberca Olímpica, es decir que cumpla con lo siguiente:

- la cubierta debe estar descrita por una función $f(x, y)$:

$$z = f(x, y) = a_2(y - d_2)^2 - a_1(x - d_1)^2 + c \quad (4.1)$$



o bien

$$z = f(x, y) = f_2(y) + f_1(x) + c \quad (4.2)$$

para $0 \leq x \leq 2d_1$ y $0 \leq y \leq 2d_2$,

- se tienen $m-1$ líneas de cables de forma, divididos en n segmentos, donde cada línea describe una parábola de segundo grado paralela al eje X, con concavidad hacia abajo y que está definida por $f_1(x)$, y donde cada segmento de cable tiene una pre-tensión igual a Pof_j , $j = 1, 2, \dots, n$
- se tienen $n-1$ líneas de cables de carga divididos en m segmentos, donde cada línea describe una parábola de segundo grado paralela al eje Y, con concavidad hacia arriba y que está definida por $f_2(y)$, y donde cada segmento de cable tiene una pre-tensión igual a Poc_i , $i = 1, 2, \dots, m$

Con las consideraciones anteriores, se procede a aislar un nudo cualquiera de un cable de carga y a establecer el equilibrio.

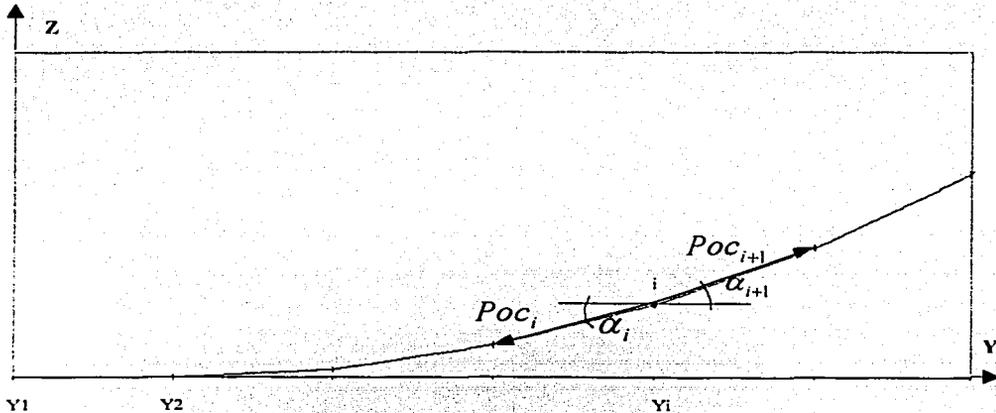


Figura 4.1. Planteamiento del equilibrio en el nudo i

Al plantear el equilibrio vertical del nudo "i", se tiene:

$$Rc_i = Poc_{i+1} \cdot \text{sen} \alpha_{i+1} - Poc_i \cdot \text{sen} \alpha_i \quad (4.3)$$

donde:

Rc_i es el empuje vertical producido por el desequilibrio entre las fuerzas de los cables de carga que concurren en el nudo i .

Poc_i y Poc_{i+1} son las fuerzas de pre-tensión en los cables que están antes y después del nudo i , respectivamente.

α_i y α_{i+1} son los ángulos formados entre la horizontal y los segmentos de cable que están antes y después de nudo i , respectivamente.

Puesto que los segmentos de cable son cuerdas de una parábola de segundo grado, el ángulo α que forma un segmento de cable con la horizontal, es el mismo ángulo que forma la tangente de la parábola en el punto medio del intervalo que define a la cuerda. Además, debido a que los segmentos de cable están igualmente espaciados a lo largo de Y , por intervalos de longitud s , se tiene la siguiente expresión para calcular el valor de α

$$\begin{aligned} \tan \alpha_i &= \frac{df_2}{dy} \left(y_i - \frac{s}{2} \right) \\ \tan \alpha_{i+1} &= \frac{df_2}{dy} \left(y_i + \frac{s}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Al suponer que el preesfuerzo no varía entre segmentos de cable, lo cual está muy próximo de ser verdad para segmentos 'cortos' y para curvaturas 'suaves', se tiene lo siguiente:

$$Rc_i = POC_i (\text{sen} \alpha_{i+1} - \text{sen} \alpha_i) \quad (4.5)$$

Ya que se plantea el equilibrio en las $m-2$ juntas que describen la parábola de un cable de carga, y dado que se tienen $n-1$ cables de carga, el empuje vertical, Evc , que producen todos los cables de carga será igual a:

$$Evc = (n-1) \cdot POC \cdot \sum_{i=1}^{m-2} (\text{sen} \alpha_{i+1} - \text{sen} \alpha_i) \quad (4.6)$$

Se obtiene una expresión análoga para los cables de forma, que es como sigue:

$$Evf = (m-1) \cdot Pof \cdot \sum_{j=1}^{n-2} (\text{sen} \beta_{j+1} - \text{sen} \beta_j) \quad (4.7)$$

con

$$\begin{aligned} \tan \beta_j &= \frac{df_1}{dx} \left(x_j - \frac{r}{2} \right) \\ \tan \beta_{j+1} &= \frac{df_1}{dx} \left(x_j + \frac{r}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde

Evf Empuje total vertical producido por los cables de forma, dirigido hacia abajo.

- P_{of} Es la fuerza de pre-tensión, que se supone constante a lo largo de todos los segmentos de los cables de forma.
- β_j y β_{j+1} son los ángulos formados entre la horizontal y los segmentos de cable que están antes y después del nudo j , respectivamente.
- r Es la distancia, medida horizontalmente, que define la longitud de cada segmento de cable de forma.

Para finalizar con esta sub-sección se presentan gráficamente las relaciones entre la curvatura y el empuje vertical, y también entre el preesfuerzo y el empuje vertical.

En la figura 4.2 se muestra la relación que existe entre las curvaturas, definidas por los parámetros a_1 y a_2 de la ecuación cuadrática, y los empuje verticales totales E_{yf} y E_{vc} producidos por todos los cables de forma y los de carga, respectivamente. Asimismo, se consideró una pre-tensión de una tonelada, tanto en los cables de carga como en los de forma. En este gráfico se puede apreciar que dicha relación es no lineal, aún para curvaturas 'suaves'.

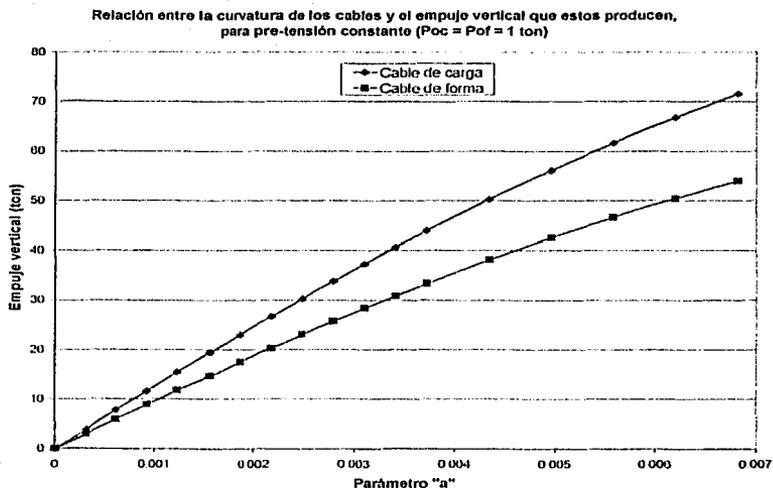


Figura 4.2 Relación entre la curvatura de los cables y el empuje vertical que producen

En la figura 4.3 se grafica la relación existente entre los niveles de preesfuerzo y los empujes verticales totales E_{yf} y E_{vc} , producidos por los cables de forma y de carga, respectivamente. Para calcular estas relaciones, las cuales son lineales, se consideraron las mismas curvaturas que tienen los cables de la estructura estudiada en el capítulo tres, y que corresponden a los valores de $a_1=0.00194$ y $a_2=0.00302$.

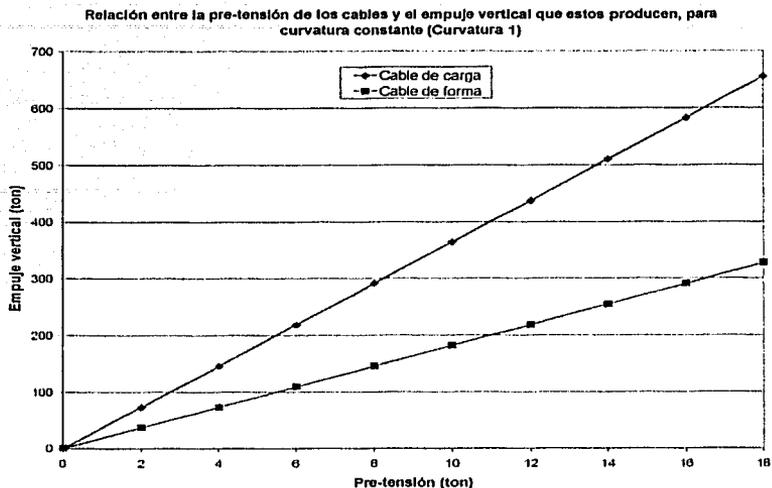


Figura 4.3 Relación entre la pre-tensión de los cables y el empuje vertical que producen

4.1.2 Comparación de resultados para distintas curvaturas

En esta sub-sección se estudian y se comparan tres cubiertas con curvaturas distintas. Las tres estructuras se comparan bajo un mismo estado de carga, que es la acción del viento en dirección S30°E. Los parámetros que determinan las curvaturas se muestran en la tabla 4.1.

Tabla 4.1 Parámetros que definen las distintas curvaturas estudiadas

	a_1	a_2	a_2/a_1
A) Curvatura 1	0.00194	0.00302	1.56
B) Curvatura 2	0.00256	0.00399	1.56
C) Curvatura 3	0.00364	0.00302	0.83

La primera curvatura es aquella que tiene la geometría original estudiada en el capítulo 3. La segunda curvatura se obtuvo al multiplicar por un factor de 1.32 a los dos parámetros que determinan la curvatura 1, para mantener así la misma relación a_2/a_1 . Para la estructura C se utilizó el mismo valor de a_2 que en el caso A, pero se buscó una relación $a_2/a_1 < 1$. En las figuras 4.4 y 4.5 se muestran las diferentes curvaturas.

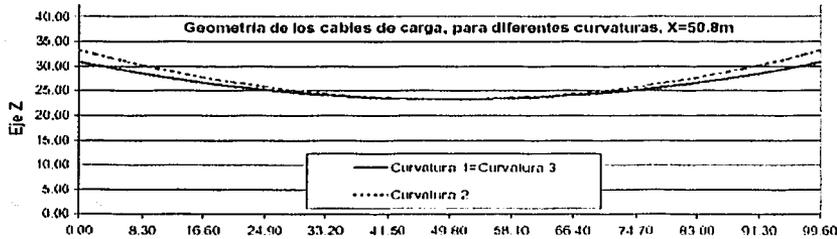


Figura 4.4 Comparación de las distintas curvaturas en los cables de carga

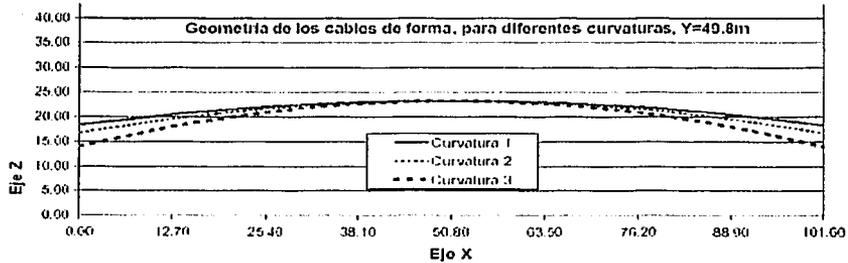


Figura 4.5 Comparación de las distintas curvaturas en los cables de forma

Para cada una de las curvaturas se tiene una distribución distinta de presfuerzos en los cables. En las figuras 4.6 y 4.7 se muestran los esfuerzos medios en los cables y sus respectivas desviaciones estándar que mantienen en equilibrio a la estructura, bajo peso propio.

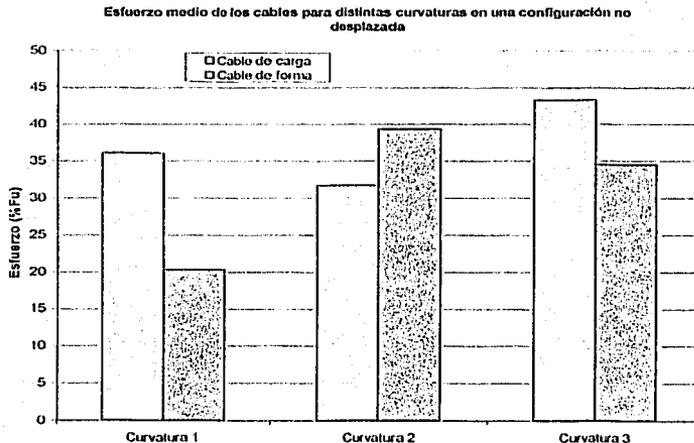


Figura 4.6 Esfuerzo medio en los cables para distintas curvaturas, en la configuración no desplazada

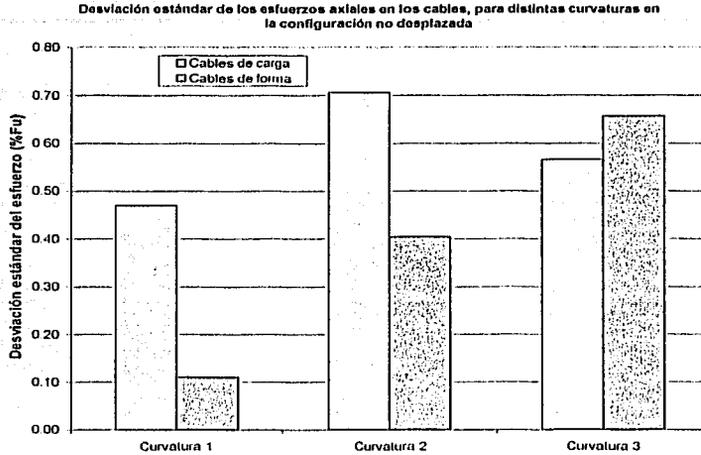


Figura 4.7 Desviación estándar del esfuerzo en los cables para distintas curvaturas, en la configuración no desplazada

En la figura 4.8 se muestran los periodos de vibración de las primeras cinco formas modales de las estructuras en su estado inicial, en cada una de las tres curvaturas estudiadas. La gráfica muestra que las primeras dos curvaturas propuestas tienen periodos de vibrar similares, mientras que en el caso de curvatura tres se presenta una mayor rigidez, por lo que se puede esperar que en esa estructura se presenten menores desplazamientos, cuando se someta a un estado de carga.

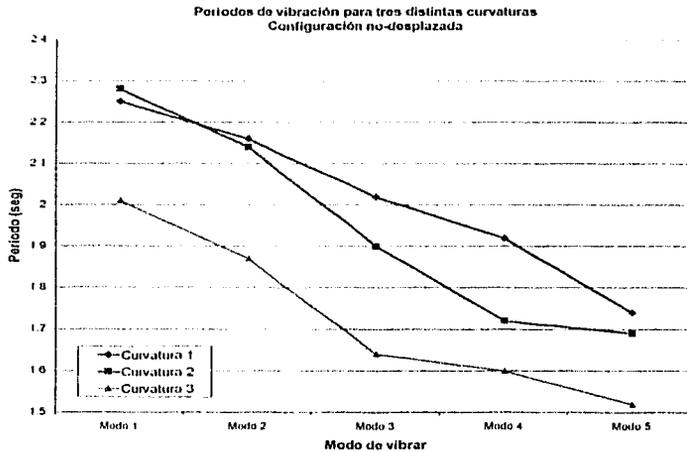


Figura 4.8 Periodos de vibración para estructuras con curvatura distinta, en posición inicial

Ya que el estado inicial de preesfuerzo varía según se cambia la curvatura de la cubierta, esto provoca cambios en la rigidez estructural inicial, lo cual significa que se trata de diferentes estructuras. De esta manera, cada estructura con su propia curvatura, responderá de manera distinta para un mismo estado de carga.

En la figura 4.9 se muestra una estadística de los desplazamientos de la cubierta cuando la estructura se somete al estado de carga mencionado. En esta figura se aprecia que la cubierta con curvatura 2 es la que presenta menor desplazamiento vertical medio, aunque la cubierta con curvatura 3 es la que presenta menor dispersión en los desplazamientos verticales, como consecuencia de que esta es la estructura más rígida.

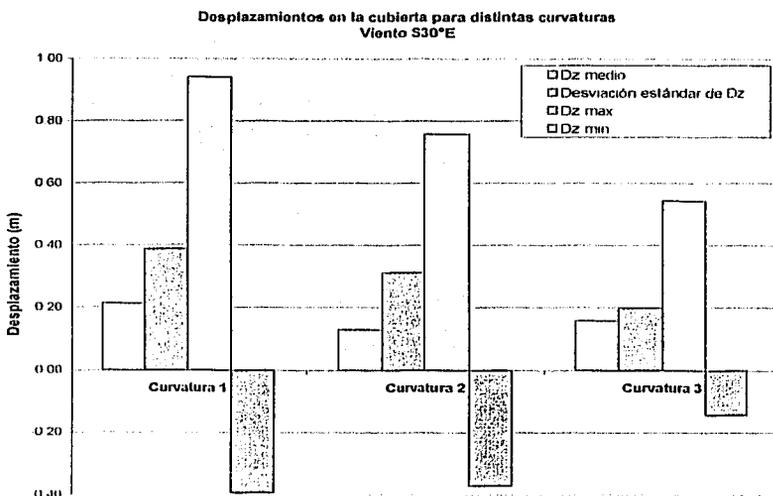


Figura 4.9 Desplazamientos para cubiertas con distintas curvaturas, viento S30°E

En las figuras 4.10 y 4.11 se muestran valores estadísticos del comportamiento de los cables, para estructuras con distintas curvaturas al ser sometidas a un mismo estado de carga, que es la acción del viento S30°E.

Por otro lado, en la figura 4.12 se muestran los períodos de vibración de las primeras cinco formas modales, que presentan las estructuras, una vez que han sido deformadas por la acción del viento, el cual actúa en dirección S30°E.

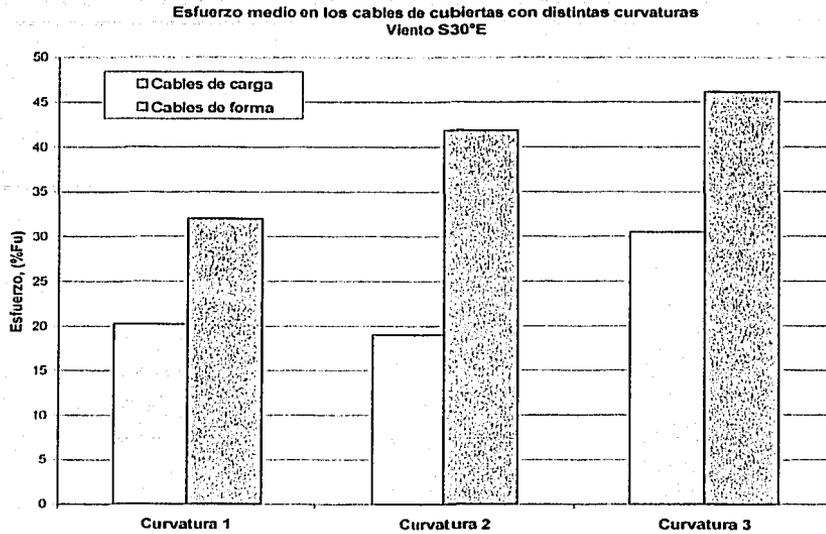


Figura 4.10 Esfuerzos axiales medios en los cables para diversas curvaturas, viento S30°E

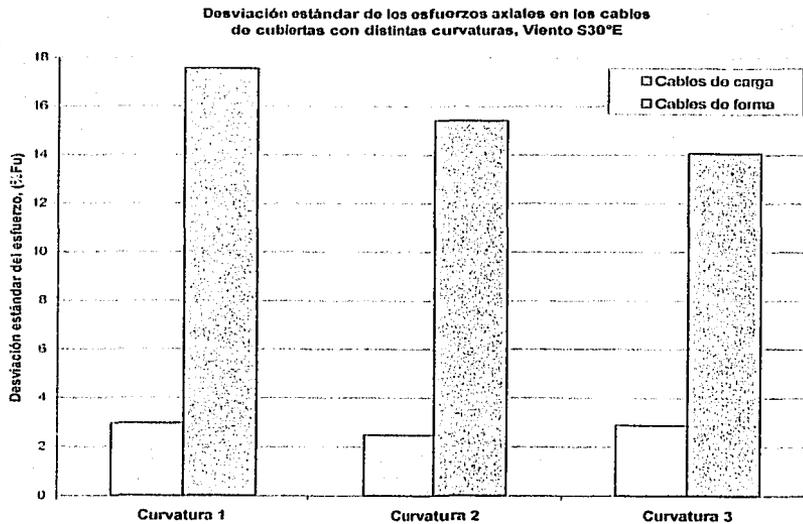


Figura 4.11 Desviaciones estándar del esfuerzo axial para diversas curvaturas, viento S30°E

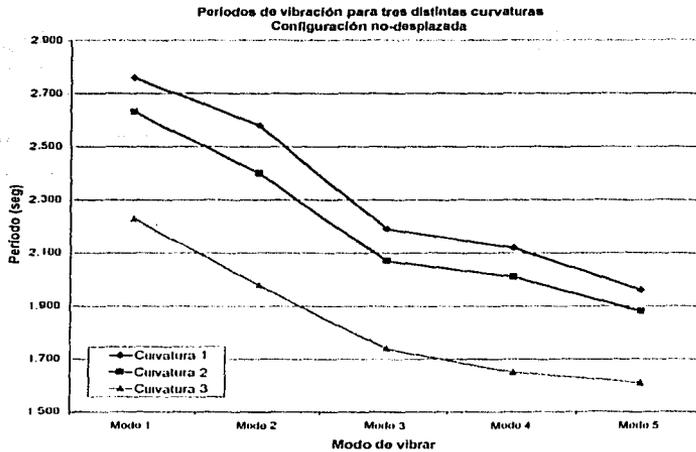


Figura 4.12 Periodos de vibración para estructuras con curvatura distinta

La conclusión más importante de esta sección es que el nivel de curvatura en los cables presenta una relación no lineal con el empuje vertical que éstos producen (ver figura 4.2). De manera que un aumento en la curvatura de los cables significa un aumento en el empuje vertical.

En la sub-sección 4.1.1 se estableció teóricamente esta relación, al estudiar aisladamente el comportamiento de cada uno de los cables, los de forma y los de carga. Sin embargo, en la sección 4.1.2 se estudió el comportamiento de tres estructuras, donde existe una interacción entre los cables de forma, los de carga y el peso propio. Esta interacción consiste en que la suma de los empujes verticales de los cables (de carga y de forma) debe estar siempre en equilibrio con el peso propio. Por lo anterior, se concluye que cualquier alteración en la curvatura, por razones de equilibrio, implica cambios en los niveles de preesfuerzo en los cables. Así, puede haber una infinidad de combinaciones de curvatura, donde cada combinación de curvaturas presente diversas combinaciones de preesfuerzo, que mantengan a la estructura en equilibrio con el peso propio.

4.2 Importancia del nivel de preesfuerzo inicial

Como se mencionó en el capítulo anterior, es posible la existencia de distintos estados de preesfuerzo que mantengan a la estructura en equilibrio con su peso propio, pero no cualquier estado de preesfuerzo se mantiene en equilibrio con el peso propio. Por ello, en esta sección se proponen cinco estados de preesfuerzo que se mantengan en equilibrio con las cargas muertas, para una misma curvatura de la cubierta. Una vez obtenidas esas cinco configuraciones no desplazadas (o en equilibrio), se someten a un mismo estado de carga (viento S30°E). Con ello se pretende observar el efecto que tiene el nivel de preesfuerzo inicial sobre la respuesta estructural.

Los preesfuerzos propuestos son las siguientes:

Tabla 4.2 Distintos niveles de preesfuerzo estudiados

	P_{of} (%Fu)	P_{oc} (%Fu)
1) Estado de preesfuerzo A	12.816	34.876
2) Estado de preesfuerzo B	20.3	36.1
3) Estado de preesfuerzo C	25.827	37.017
4) Estado de preesfuerzo D	38.837	39.160
5) Estado de preesfuerzo E	51.845	41.304
6) Estado de preesfuerzo F	64.858	43.452

La condición de preesfuerzo B se estudió en el capítulo tres, y no se mostrarán nuevamente sus resultados. Los valores de preesfuerzo en los otros niveles se determinaron por incrementos iguales de preesfuerzo.

Inicialmente se muestran las condiciones en que se encuentra la estructura en su configuración no-desplazada, para cada uno de los diversos niveles de preesfuerzo propuestos.

Las figuras 4.13 y 4.14 muestran los valores medios y las desviaciones estándar de las fuerzas axiales en los cables para cada configuración no-desplazada; mientras que en la figura 4.15 se muestran los períodos de las primeras cinco formas de vibrar, cuando la estructura está en equilibrio con su peso propio, para cada estado de preesfuerzo.

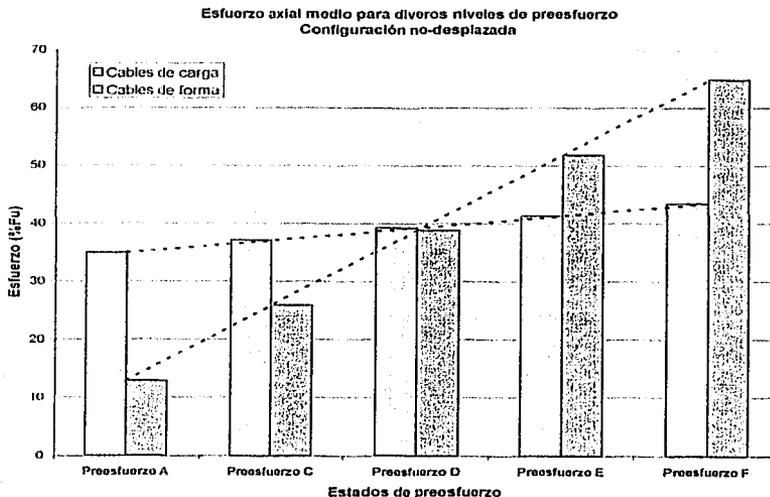


Figura 4.13 Esfuerzo axial medio en distintos estados de preesfuerzo, configuración no-desplazada

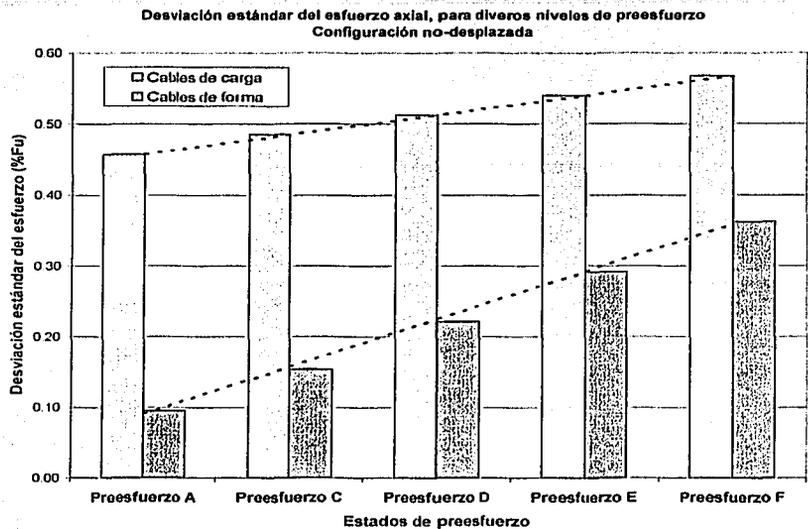


Figura 4.14 Desviación estándar del esfuerzo axial en las configuraciones no-desplazada, para los distintos niveles de preesfuerzo

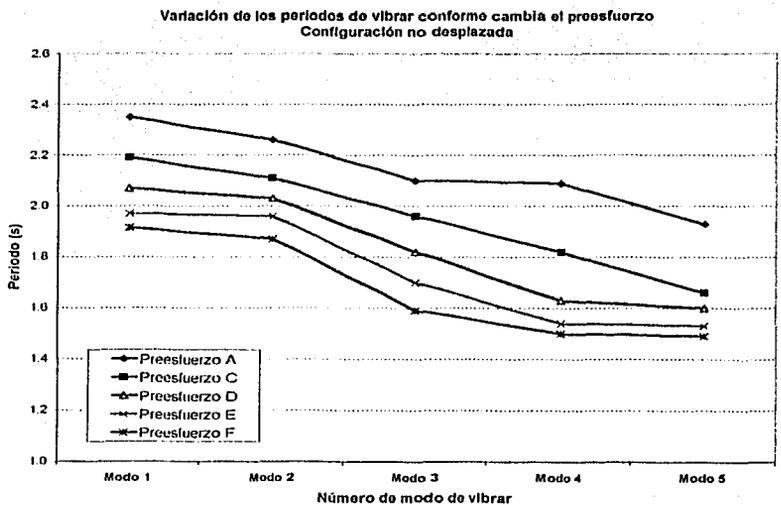


Figura 4.15 Períodos de vibrar de las configuraciones no desplazadas, para los distintos niveles de preesfuerzo

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Una vez descritas gráficamente las condiciones en que se encuentra la estructura en su configuración no-deformada, para cada uno de los estados de preesfuerzo, ahora se procede a evaluar el efecto que el viento produce sobre cada una de las condiciones de preesfuerzo.

En las figuras 4.16 y 4.17 se muestran los estadísticos de los desplazamientos producidos por el viento S30°E. La tendencia mostrada (línea continua) en la figura 4.16 es ligeramente no lineal, y resulta obvio que para mayor preesfuerzo, existe menor desplazamiento.

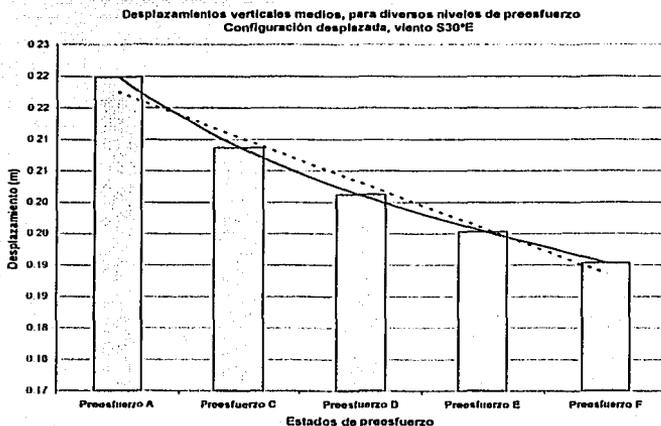


Figura 4.16 Desplazamientos verticales medios para diferentes niveles de preesfuerzo, viento S30°E

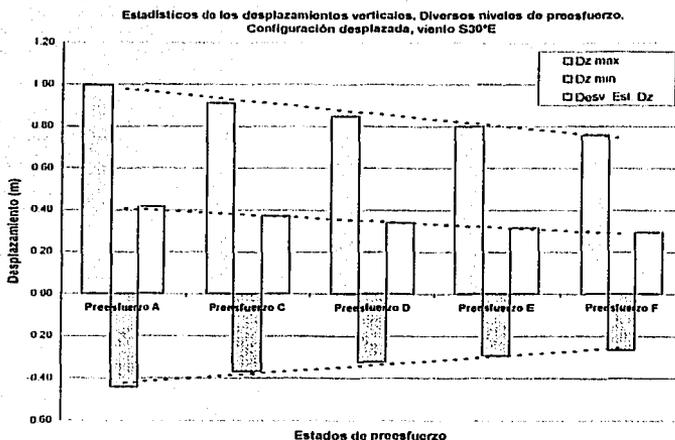


Figura 4.17 Estadísticos de los desplazamientos verticales para diferentes niveles de preesfuerzo, viento S30°E

En las figuras 4.18 a 4.20 se muestran los valores estadísticos más destacados de los esfuerzos axiales en los cables producidos por el viento S30°E, para los distintos niveles de preesfuerzo. Nuevamente la tendencia que muestran las gráficas es ligeramente no lineal.

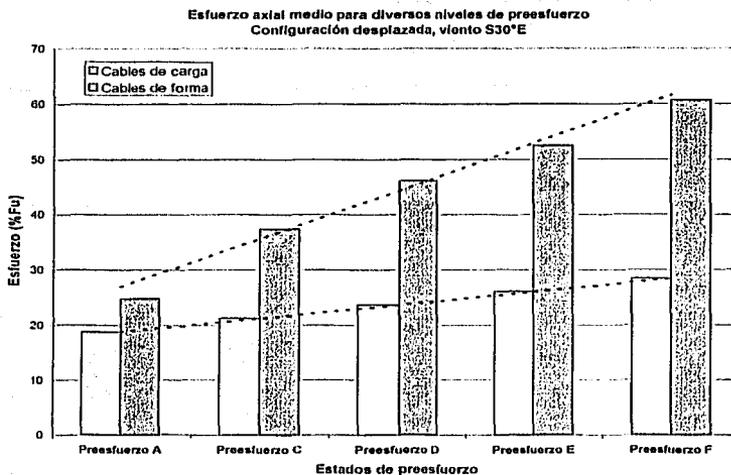


Figura 4.18 Esfuerzo axial medio para diversos niveles de preesfuerzo, viento S30°E

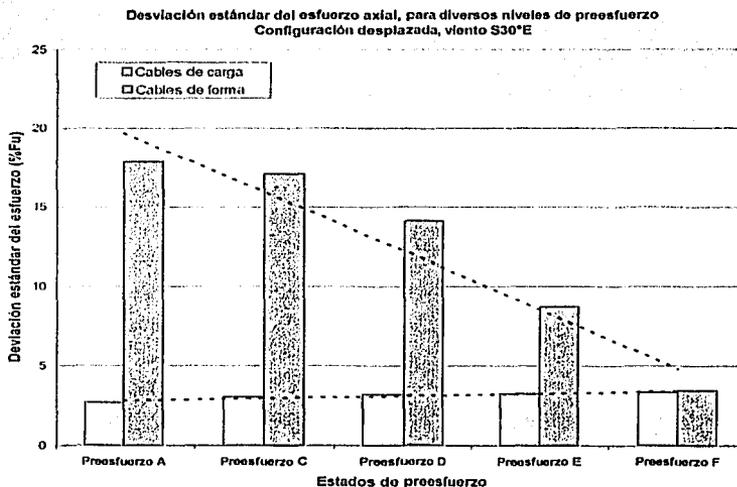


Figura 4.19 Desviación estándar del esfuerzo axial para diversos niveles de preesfuerzo, viento S30°E

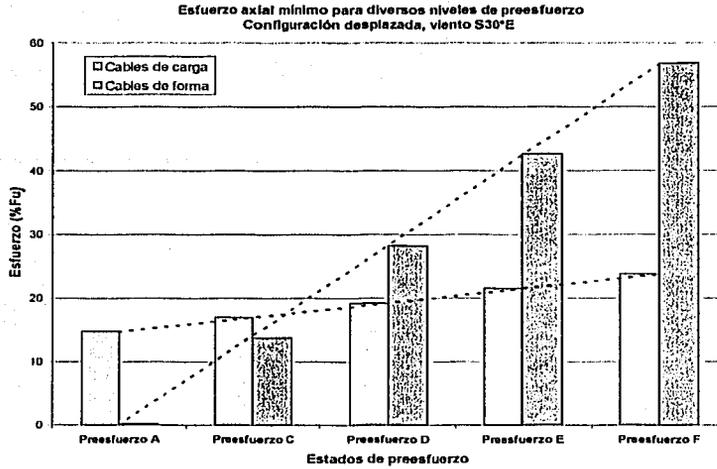


Figura 4.20 Esfuerzo axial mínimo para diversos niveles de preesfuerzo, viento S30°E

Finalmente, la figura 4.21 muestra el valor de los períodos de vibración para las primeras cinco formas modales de cada caso estudiado. El comportamiento de los desplazamientos (figuras 4.16 y 4.17) muestra que para mayores niveles de preesfuerzo, hay una mayor rigidez estructural. Al comparar las figuras 4.15 y 4.21, se aprecia la flexibilización debida al efecto del viento.

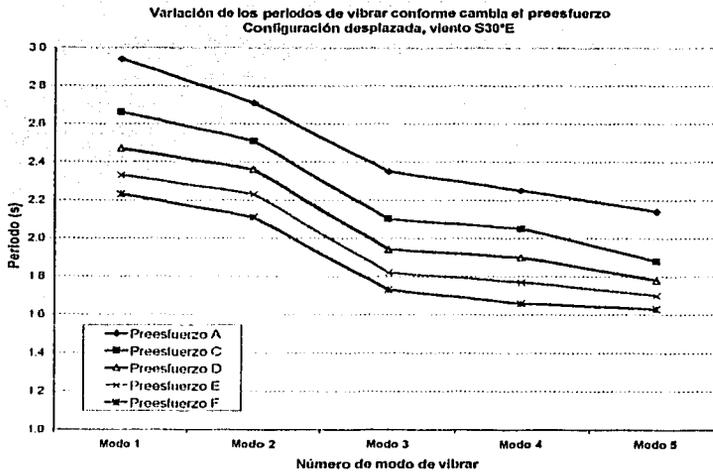


Figura 4.21 Períodos de vibrar para los diversos estados de preesfuerzo, viento S30°E

4.3 Descarga axial total de algunos miembros de la cubierta

Conforme se carga la estructura, algunos cables pierden su tensión, mientras que otros la aumentan. El proceso para hallar la descarga axial total de algún miembro puede ser muy laborioso y poco práctico, ya que se deben dar pequeños incrementos en carga, hasta encontrar el punto exacto en el que un miembro se descarga axialmente. En ese momento, dicho miembro debe eliminarse de la estructura, ya que no contribuye más, ni a la rigidez de la estructura ni a la transmisión de fuerza de compresión. Si la ausencia de este elemento no causa la inestabilidad de la estructura, se procede a dar otros pequeños incrementos de cargas externas, hasta encontrar el siguiente elemento que se descarga axialmente y eliminarlo de la estructura, y así sucesivamente.

Se observó que la eliminación de un miembro produce la aceleración en la descarga axial de algunos miembros vecinos, los cuales al descargarse axialmente, deben ser eliminados de la estructura, lo que produce que se descarguen más rápidamente los elementos vecinos. Este proceso se repite sucesivamente hasta alcanzar la inestabilidad estructural.

Es posible que la descarga axial total de un cable no produzca la inestabilidad de la estructura, sin embargo, dicha descarga axial puede conducir a un rápido proceso que provoque la inestabilidad de la estructura, aún para pequeños incrementos de carga.

Por lo anterior, es de interés establecer el nivel de carga que produce la descarga axial total del primer elemento, ya que a partir de ese punto, estructuras semejantes a la estudiada en este trabajo no son capaces de resistir incrementos importantes de carga.

4.4 Apoyos con rigidez lineal finita

En los modelos estudiados se supuso que la cubierta está soportada perimetralmente por apoyos que impiden cualquier traslación. Sin embargo, la cubierta de la Alberca Olímpica "Francisco Márquez" está soportada perimetralmente por traveses de borde, las cuales se apoyan en columnas.

Debido a la gran cantidad de conexiones y de elementos que forman el sistema de soporte de la cubierta, el modelado completo de la estructura resulta muy elaborado. Sin embargo, en esta sección se muestra el efecto que tiene la existencia de apoyos que no impiden totalmente los desplazamientos. Para ello se ha tratado de reproducir la existencia de las traveses de borde, las columnas y sus retenidas.

En la figura 4.22 se muestra una vista general del modelo estructural completo, mientras que en la figura 4.23 solo se observa la estructura de soporte.

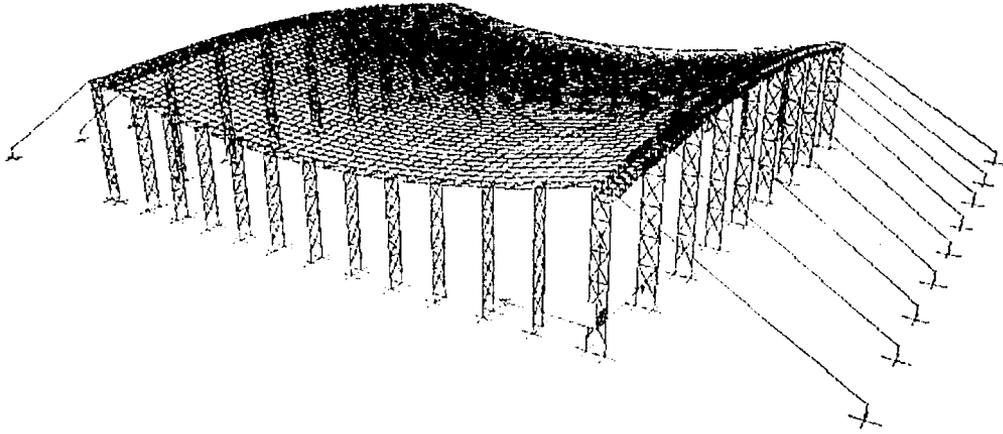


Figura 4.22 Vista general de la estructura con sus soportes

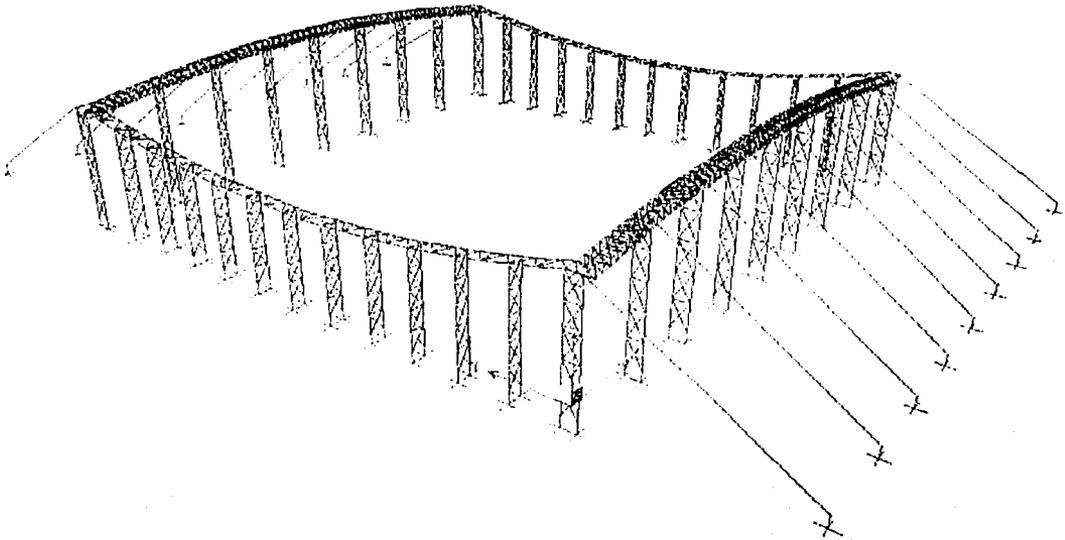


Figura 4.23 Vista de la estructura que soporta a la cubierta

Para ilustrar el efecto que el sistema de soporte tiene sobre el comportamiento de la cubierta, en la tabla 4.3 se muestran los resultados del análisis de la estructura cuando el viento actúa en la dirección S30°E. En esta tabla se comparan los resultados obtenidos en esta sección con aquellos obtenidos en capítulo tres, donde los bordes no se desplazaron.

Tabla 4.3 Comparación de resultados

	Caso A Estructura con apoyos fijos	Caso B Estructura con trabe de borde	Relación Caso B / Caso A
<i>Desplazamientos verticales, Dz (m)</i>			
Dz medio	0.213	0.273	1.28
Desv. Estándar Dz	0.386	0.409	1.06
Dz máximo	0.941	1.026	1.09
Dz mínimo	-0.394	-0.327	0.83
<i>Esfuerzos en los cables de forma (%Fu)</i>			
Esfuerzo medio	32.0	30.1	0.94
Desv. Est. esfuerzo	17.6	15.7	0.89
Esfuerzo máximo	57.1	52.0	0.91
Esfuerzo mínimo	7.7	7.7	0.97
<i>Esfuerzos en los cables de carga (%Fu)</i>			
Esfuerzo medio	20.2	20.6	1.02
Desv. Est. esfuerzo	3.0	2.9	0.97
Esfuerzo máximo	30.8	31.1	1.01
Esfuerzo mínimo	16.0	16.3	1.02

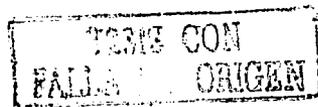
La tabla anterior muestra que la cubierta tiene un levantamiento medio 28% más elevado que cuando existen apoyos fijos, mientras que la dispersión de los desplazamientos indica solo un incremento del 6%. En cuanto a los esfuerzos en los cables de forma, se ve que la configuración B tiene una disminución con respecto a la configuración A, mientras que los esfuerzos en los cables de carga se mantienen casi iguales en ambas configuraciones.

Debe tenerse en cuenta que a diferencia del análisis con apoyos fijos, en la condición B no se pudo obtener un estado de preesfuerzo que mantuviera a la estructura sin deformaciones iniciales. Estas deformaciones, a pesar de ser pequeñas, son permanentes y afectan el comportamiento de la estructura para otros estados de carga.

Sin embargo, en el proceso de construcción y pre-tensado de la cubierta, se llevó un control de la geometría de diseño, con lo que se trató de minimizar estas deformaciones permanentes. Este control consistió en verificar que las columnas no tuvieran inclinaciones y que los cables mantuvieran la curvatura propuesta.

4.5 Simplificación del criterio de análisis de la cubierta

Inicialmente se utilizó un programa de cálculo que está basado en la teoría expuesta en las secciones 2.4, 2.5 y 2.6, el cual tiene algunas limitaciones de capacidad de grados de libertad y velocidad de ejecución. Por lo anterior se procedió a simplificar el modelo estructural; se redujo a la mitad los números de líneas de cables de carga y de forma, y se duplicó el área de cada cable, así como su preesfuerzo. Con las simplificaciones mencionadas, se trabajó con un modelo de 1480 miembros (en lugar de 6032) y de 821 nudos (en lugar de 3181). Los resultados obtenidos



con las simplificaciones mencionadas, y aquellos obtenidos sin simplificaciones, mostraron diferencias del orden de 5%.

Por lo anterior se concluye que la simplificación realizada resulta ser válida, y ahorra tiempo de cálculo y memoria en el ordenador.

Además, el uso de dos programas de cómputo que utilizan diferentes algoritmos para el cálculo de las rigideces, y que proporcionan los mismos resultados, permite decir que son confiables los resultados obtenidos.

Bibliografía

1. Peter Broughton y Paul Ndumbaro; "The analysis of cable and catenary structures"; Thomas Telford; 1994
2. "SAP2000 Analysis Reference V7.4"; Computers and Structures, Inc.; 2000; Chapter XVII
3. N. Esquillan e Y. Saillard; "Hanging Roofs"; North Holland Publishing Company; 1963

TESIS
FALLA DE ORIGEN

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Capítulo V COMENTARIOS FINALES

- Los métodos de análisis planteados en el capítulo dos sirven para cualquier estructura construida con elementos cable. El método del análisis Pdelta que efectúa el programa SAP2000 es mas general, sin embargo, los elementos cable se modelan como elementos *frame*, los cuales pueden transmitir fuerzas de compresión, por lo que debe revisarse que la fuerza axial de compresión en cada cable, no sobrepase en valor absoluto a la fuerza de pre-tensión asignada a cada elemento.
- En este trabajo se analizan solo el peso propio, el preesfuerzo y el empuje estático de las fuerzas causadas por el viento, ya que se consideran las más importantes para este tipo de estructuras. Sin embargo, cualquier condición de carga estática que quiera ser revisado, puede seguir el mismo procedimiento que se utilizó a lo largo de este trabajo.
- Los efectos de carácter dinámico pueden llegar a ser importantes, pero quedan fuera de los alcances de este trabajo, por lo que solo se muestran las formas modales y los periodos de vibración.
- Una misma velocidad de viento produce distintas configuraciones de superficies de presión alrededor de la cubierta (ver sección 3.6), según la dirección en la que actúe el viento. Cada dirección tiene efectos distintos sobre la estructura. Los valores medios de desplazamientos y esfuerzos son muy similares en todas las direcciones estudiadas; sin embargo, las diferencias en el comportamiento estructural para las distintas direcciones del viento están reflejadas en los valores de dispersión de los esfuerzos y los desplazamientos.
- Los valores estadísticos de esfuerzos y desplazamientos para el análisis de la acción del viento Sur y del viento Este son similares. La única diferencia radica en la dispersión de los valores de los esfuerzos en los cables de carga. Debido a ello, se tienen dos comportamientos muy distintos, ya que en el primer análisis, la estructura puede ser capaz de resistir mas del 160% de la carga de diseño por viento, mientras que en la segunda condición de análisis, solo se puede resistir hasta un 90%.
- Los efectos de carga y descarga en cubiertas colgantes pueden provocar que se produzcan desplazamientos permanentes, los cuales se acumulan entre ciclos. A estos desplazamientos permanentes le acompañan sus respectivos esfuerzos. En particular, para la estructura estudiada en el capítulo tres, se observó que la estructura se ‘cuelga’ entre ciclo y ciclo.
- Los desplazamientos y fuerzas axiales obtenidos mediante un análisis no lineal geométrico, son mayores que los obtenidos mediante un análisis lineal. Sin embargo, los distintos parámetros que ayudan a entender el comportamiento estructural, no se ven afectados en la misma proporción. La información presentada en la sección 3.9 muestra que los desplazamientos medios obtenidos mediante un análisis no lineal, son ligeramente mayores a los obtenidos mediante un análisis lineal, mientras que los valores de las desviaciones estándar de los desplazamientos obtenidos mediante análisis no lineal, son

considerablemente mayores a aquellos de primer orden. Esto indica que la superficie media de los desplazamientos permanece casi igual sin importar si el análisis es lineal o no lineal, mientras que el análisis no lineal, comparado con el análisis lineal, muestra una amplificación de los desplazamientos que hay por arriba y por debajo de dicha superficie media.

- El empuje vertical de los cables depende directamente de la curvatura y del preesfuerzo que tengan los mismos. La relación *curvatura-empuje* es no lineal, mientras que la relación *preesfuerzo-empuje* es lineal.
- La curvatura de los cables determina la manera en que se distribuye el preesfuerzo, el cual debe equilibrar a las cargas permanentes. La curvatura y el nivel de preesfuerzo determinan la rigidez inicial de la estructura. Cuanto mayor sean las fuerzas de tensión en los cables, mayor será la rigidez de la estructura.
- Cuando se deforma la estructura, se produce una redistribución en las tensiones de los cables, y con ello, también se produce un cambio en las formas modales y períodos de vibración. Como consecuencia, cada estado de carga determina nuevas formas modales en la estructura.
- Durante el proceso de carga de la estructura analizada en este trabajo, la pérdida de tensión axial en algún miembro no necesariamente significa la inestabilidad de la estructura, pero sí indica un punto importante, a partir del cual se iniciará la acelerada descarga axial de los miembros vecinos, hasta llegar a la inestabilidad.
- En la sección 4.4 se muestran las diferencias entre la existencia de apoyos infinitamente rígidos y parcialmente rígidos. Como era de esperar, al quitar rigidez en los apoyos, la estructura se flexibiliza, y con ello se producen mayores desplazamientos. Sin embargo, modelar la rigidez real de los apoyos es una tarea complicada, debido a la existencia de muchos elementos de conexión y a los procesos constructivos.
- El método teórico "exacto" y el del análisis Pdelta efectuado con el programa SAP2000 proporcionan prácticamente los mismos resultados, a pesar de que la formación de las matrices de rigidez se realiza de distinta manera. En el primer método, la formación de las matrices de rigidez de cada elemento cable esta basada en el uso de los diferenciales totales de los desplazamientos en los extremos de los miembros. Para el segundo método, las fuerzas axiales, declaradas con la opción Pdelta, afectan la matriz de rigidez en función del valor de la fuerza de Euler; mientras que los grandes cambios en geometría se consideran por medio de análisis sucesivos, en donde cada configuración desplazada de una etapa es la configuración no-desplazada de la etapa siguiente.



Apéndice A RESULTADOS DE PRUEBAS EN TÚNEL DE VIENTO

Con el fin de ilustrar el procedimiento que se siguió al aplicar el método experimental, para evaluar las presiones producidas por el viento sobre el modelo a escala, se muestran en las tablas siguientes, los resultados obtenidos en los 24 puntos instrumentados del modelo, para las direcciones analizadas.

En las tablas aparecen en cada columna, la identificación de coordenadas de cada punto de medición. Para cada punto instrumentado se muestra el valor medio, la desviación estándar, el valor máximo, y el valor mínimo de las presiones medidas durante las pruebas, así como el coeficiente de presión. En la dos columnas inferiores de cada tabla aparecen los datos de medición en el punto central de la cubierta, y en el tubo Pitot colocado en la sección de pruebas.

Los coeficientes locales de presión en cada punto, se obtuvieron al dividir la presión media en cada punto, entre el valor medio de la presión de estancamiento en el tubo Pitot.

Todos los datos de presión están dados en libras por pulgada cuadrada (PSI), y fueron obtenidos para una velocidad de viento de 28.9 m/s.

A partir de los coeficientes locales de presión, se realizaron ajustes para determinar las superficies de presión, tal como se indica en la sección 3.4. Dichas superficies de presión se muestran en la sección 3.6.

Viento Sur

	x1,y1	x2,y1	x3,y1	x4,y1	x1,y2	x2,y2	x3,y2	x4,y2
Media:	-0.0276	-0.0369	-0.0365	-0.0367	-0.0337	-0.0417	-0.0400	-0.0424
Desv Est. Pob:	0.0045	0.0026	0.0035	0.0038	0.0034	0.0020	0.0020	0.0031
max:	-0.0176	-0.0300	-0.0283	-0.0267	-0.0261	-0.0370	-0.0338	-0.0339
min:	-0.0414	-0.0434	-0.0451	-0.0464	-0.0440	-0.0467	-0.0470	-0.0510
Coef. de presión:	-0.6060	-0.8088	-0.7997	-0.8055	-0.7399	-0.9145	-0.8778	-0.9289
	x1,y3	x2,y3	x3,y3	x4,y3	x1,y4	x2,y4	x3,y4	x4,y4
Media:	-0.0488	-0.0472	-0.0445	-0.0475	-0.0513	-0.0485	-0.0464	-0.0461
Desv Est. Pob:	0.0024	0.0018	0.0014	0.0032	0.0020	0.0021	0.0015	0.0029
max:	-0.0431	-0.0424	-0.0409	-0.0396	-0.0457	-0.0441	-0.0434	-0.0400
min:	-0.0567	-0.0517	-0.0486	-0.0564	-0.0573	-0.0567	-0.0510	-0.0534
Coef. de presión:	-1.0697	-1.0340	-0.9756	-1.0421	-1.1253	-1.0638	-1.0180	-1.0106
	x1,y5	x2,y5	x3,y5	x4,y5	x1,y6	x2,y6	x3,y6	x4,y6
Media:	-0.0506	-0.0405	-0.0435	-0.0445	-0.0508	-0.0423	-0.0410	-0.0415
Desv Est. Pob:	0.0026	0.0021	0.0014	0.0029	0.0029	0.0024	0.0016	0.0030
max:	-0.0451	-0.0351	-0.0400	-0.0388	-0.0450	-0.0369	-0.0368	-0.0355
min:	-0.0571	-0.0453	-0.0485	-0.0520	-0.0589	-0.0474	-0.0450	-0.0478
Coef. de presión:	-1.1091	-0.8871	-0.9543	-0.9746	-1.1145	-0.9278	-0.8997	-0.9095
	centro	T. Pitot						
Media:	-0.0443	0.0456						
Desv Est. Pob:	0.0016	0.0009						
max:	-0.0402	0.0475						
min:	-0.0490	0.0431						
Coef. de presión:	-0.9721	1.0000						

Viento SE, 15°

	x1,y1	x2,y1	x3,y1	x4,y1	x1,y2	x2,y2	x3,y2	x4,y2
Media:	0.0082	-0.0095	-0.0260	-0.0353	-0.0069	-0.0171	-0.0370	-0.0399
Desv Est. Pob:	0.0012	0.0014	0.0019	0.0020	0.0010	0.0019	0.0017	0.0015
max:	0.0109	-0.0057	-0.0211	-0.0290	-0.0041	-0.0126	-0.0327	-0.0351
min:	0.0050	-0.0143	-0.0329	-0.0396	-0.0097	-0.0230	-0.0410	-0.0437
Coef. de presión:	0.1982	-0.2292	-0.6296	-0.8557	-0.1667	-0.4148	-0.8968	-0.9673
	x1,y3	x2,y3	x3,y3	x4,y3	x1,y4	x2,y4	x3,y4	x4,y4
Media:	-0.0218	-0.0367	-0.0515	-0.0409	-0.0401	-0.0489	-0.0553	-0.0414
Desv Est. Pob:	0.0021	0.0018	0.0017	0.0012	0.0028	0.0012	0.0017	0.0011
max:	-0.0161	-0.0322	-0.0454	-0.0377	-0.0331	-0.0454	-0.0519	-0.0388
min:	-0.0268	-0.0410	-0.0557	-0.0443	-0.0469	-0.0523	-0.0605	-0.0444
Coef. de presión:	-0.5292	-0.8906	-1.2481	-0.9906	-0.9716	-1.1853	-1.3397	-1.0035
	x1,y5	x2,y5	x3,y5	x4,y5	x1,y6	x2,y6	x3,y6	x4,y6
Media:	-0.0587	-0.0532	-0.0524	-0.0449	-0.0722	-0.0575	-0.0527	-0.0442
Desv Est. Pob:	0.0020	0.0016	0.0014	0.0012	0.0028	0.0017	0.0013	0.0012
max:	-0.0525	-0.0499	-0.0489	-0.0416	-0.0641	-0.0540	-0.0476	-0.0409
min:	-0.0638	-0.0579	-0.0568	-0.0481	-0.0802	-0.0619	-0.0566	-0.0483
Coef. de presión:	-1.4233	-1.2903	-1.2701	-1.0883	-1.7510	-1.3925	-1.2782	-1.0708
	centro	T. Pitot						
Media:	-0.0459	0.0413						
Desv Est. Pob:	0.0013	0.0008						
max:	-0.0414	0.0433						
min:	-0.0492	0.0391						
Coef. de presión:	-1.1124	1.0000						

Viento SE, 30°

	x1,y1	x2,y1	x3,y1	x4,y1	x1,y2	x2,y2	x3,y2	x4,y2
Media:	-0.0040	-0.0103	-0.0125	-0.0226	-0.0175	-0.0098	-0.0202	-0.0311
Desv Est. Pob:	0.0017	0.0010	0.0010	0.0011	0.0016	0.0009	0.0011	0.0012
max:	0.0000	-0.0073	-0.0096	-0.0200	-0.0128	-0.0073	-0.0173	-0.0284
min:	-0.0082	-0.0132	-0.0150	-0.0256	-0.0212	-0.0125	-0.0231	-0.0342
Coef. de presión:	-0.0953	-0.2428	-0.2940	-0.5321	-0.4129	-0.2311	-0.4755	-0.7315
	x1,y3	x2,y3	x3,y3	x4,y3	x1,y4	x2,y4	x3,y4	x4,y4
Media:	-0.0379	-0.0154	-0.0311	-0.0385	-0.0488	-0.0264	-0.0534	-0.0424
Desv Est. Pob:	0.0020	0.0009	0.0016	0.0010	0.0018	0.0012	0.0016	0.0010
max:	-0.0314	-0.0129	-0.0271	-0.0359	-0.0444	-0.0235	-0.0481	-0.0396
min:	-0.0424	-0.0182	-0.0353	-0.0410	-0.0545	-0.0304	-0.0580	-0.0449
Coef. de presión:	-0.8919	-0.3619	-0.7317	-0.9062	-1.1488	-0.6206	-1.2569	-0.9982
	x1,y5	x2,y5	x3,y5	x4,y5	x1,y6	x2,y6	x3,y6	x4,y6
Media:	-0.0681	-0.0504	-0.0597	-0.0440	-0.0729	-0.0665	-0.0574	-0.0440
Desv Est. Pob:	0.0028	0.0013	0.0016	0.0010	0.0035	0.0023	0.0018	0.0010
max:	-0.0581	-0.0464	-0.0549	-0.0416	-0.0635	-0.0608	-0.0531	-0.0413
min:	-0.0752	-0.0534	-0.0637	-0.0467	-0.0840	-0.0733	-0.0627	-0.0466
Coef. de presión:	-1.6045	-1.1869	-1.4064	-1.0370	-1.7164	-1.5649	-1.3505	-1.0367
	centro	T. Pitot						
Media:	-0.0246	0.0425						
Desv Est. Pob:	0.0013	0.0010						
max:	-0.0211	0.0448						
min:	-0.0276	0.0389						
Coef. de presión:	-0.5791	1.0000						

Viento SE, 45°

	x1,y1	x2,y1	x3,y1	x4,y1	x1,y2	x2,y2	x3,y2	x4,y2
Media:	-0.0222	-0.0201	-0.0197	-0.0240	-0.0323	-0.0196	-0.0274	-0.0316
Desv Est. Pob:	0.0017	0.0010	0.0015	0.0012	0.0014	0.0013	0.0009	0.0010
max:	-0.0182	-0.0176	-0.0143	-0.0206	-0.0287	-0.0162	-0.0256	-0.0291
min:	-0.0271	-0.0224	-0.0239	-0.0281	-0.0360	-0.0231	-0.0296	-0.0343
Coef. de presión:	-0.5133	-0.4644	-0.4555	-0.5544	-0.7459	-0.4540	-0.6326	-0.7301
	x1,y3	x2,y3	x3,y3	x4,y3	x1,y4	x2,y4	x3,y4	x4,y4
Media:	-0.0412	-0.0174	-0.0279	-0.0332	-0.0510	-0.0242	-0.0366	-0.0377
Desv Est. Pob:	0.0017	0.0009	0.0009	0.0010	0.0016	0.0007	0.0014	0.0012
max:	-0.0377	-0.0151	-0.0254	-0.0308	-0.0470	-0.0222	-0.0331	-0.0336
min:	-0.0461	-0.0212	-0.0305	-0.0357	-0.0553	-0.0262	-0.0407	-0.0401
Coef. de presión:	-0.9529	-0.4010	-0.6445	-0.7673	-1.1795	-0.5586	-0.8463	-0.8709
	x1,y5	x2,y5	x3,y5	x4,y5	x1,y6	x2,y6	x3,y6	x4,y6
Media:	-0.1047	-0.0367	-0.0512	-0.0406	-0.0522	-0.0587	-0.0576	-0.0432
Desv Est. Pob:	0.0029	0.0010	0.0014	0.0011	0.0035	0.0015	0.0017	0.0010
max:	-0.0969	-0.0345	-0.0472	-0.0375	-0.0461	-0.0553	-0.0532	-0.0406
min:	-0.1133	-0.0398	-0.0542	-0.0430	-0.0655	-0.0624	-0.0635	-0.0458
Coef. de presión:	-2.4190	-0.8480	-1.1820	-0.9393	-1.2070	-1.3564	-1.3304	-0.9992
	centro	T. Pitot						
Media:	-0.0205	0.0433						
Desv Est. Pob:	0.0008	0.0010						
max:	-0.0185	0.0454						
min:	-0.0229	0.0407						
Coef. de presión:	-0.4747	1.0000						

Viento SE, 60°

	x1,y1	x2,y1	x3,y1	x4,y1	x1,y2	x2,y2	x3,y2	x4,y2
Media:	-0.0473	-0.0330	-0.0320	-0.0291	-0.0525	-0.0319	-0.0363	-0.0342
Desv Est. Pob:	0.0025	0.0010	0.0010	0.0014	0.0017	0.0012	0.0012	0.0013
max:	-0.0399	-0.0306	-0.0293	-0.0259	-0.0478	-0.0286	-0.0331	-0.0277
min:	-0.0555	-0.0368	-0.0353	-0.0344	-0.0573	-0.0359	-0.0404	-0.0371
Coef. de presión:	-1.1323	-0.7884	-0.7652	-0.6963	-1.2561	-0.7633	-0.8694	-0.8185
	x1,y3	x2,y3	x3,y3	x4,y3	x1,y4	x2,y4	x3,y4	x4,y4
Media:	-0.0612	-0.0322	-0.0352	-0.0343	-0.0646	-0.0293	-0.0407	-0.0303
Desv Est. Pob:	0.0023	0.0017	0.0008	0.0010	0.0014	0.0010	0.0011	0.0009
max:	-0.0568	-0.0279	-0.0332	-0.0320	-0.0609	-0.0265	-0.0383	-0.0283
min:	-0.0688	-0.0379	-0.0372	-0.0366	-0.0691	-0.0316	-0.0435	-0.0325
Coef. de presión:	-1.4626	-0.7706	-0.8426	-0.8196	-1.5452	-0.7013	-0.9731	-0.7255
	x1,y5	x2,y5	x3,y5	x4,y5	x1,y6	x2,y6	x3,y6	x4,y6
Media:	-0.1123	-0.0397	-0.0398	-0.0323	-0.0886	-0.0397	-0.0584	-0.0418
Desv Est. Pob:	0.0049	0.0008	0.0010	0.0013	0.0195	0.0016	0.0021	0.0020
max:	-0.0984	-0.0375	-0.0372	-0.0292	-0.0551	-0.0355	-0.0527	-0.0361
min:	-0.1251	-0.0418	-0.0425	-0.0365	-0.1416	-0.0436	-0.0641	-0.0467
Coef. de presión:	-2.6858	-0.9486	-0.9510	-0.7732	-2.1191	-0.9496	-1.3978	-1.0009
	centro	T. Pitot						
Media:	-0.0272	0.0418						
Desv Est. Pob:	0.0007	0.0011						
max:	-0.0248	0.0446						
min:	-0.0290	0.0382						
Coef. de presión:	-0.6504	1.0000						

Viento SE, 75°

	x1,y1	x2,y1	x3,y1	x4,y1	x1,y2	x2,y2	x3,y2	x4,y2
Media:	-0.0735	-0.0369	-0.0335	-0.0280	-0.0691	-0.0350	-0.0373	-0.0290
Desv Est. Pob:	0.0041	0.0009	0.0007	0.0009	0.0035	0.0008	0.0008	0.0009
max:	-0.0638	-0.0352	-0.0316	-0.0251	-0.0606	-0.0329	-0.0348	-0.0242
min:	-0.0824	-0.0391	-0.0353	-0.0310	-0.0781	-0.0371	-0.0401	-0.0312
Coef. de presión:	-1.6314	-0.8200	-0.7440	-0.6214	-1.5347	-0.7767	-0.8285	-0.6449
	x1,y3	x2,y3	x3,y3	x4,y3	x1,y4	x2,y4	x3,y4	x4,y4
Media:	-0.0789	-0.0365	-0.0358	-0.0280	-0.0767	-0.0336	-0.0389	-0.0244
Desv Est. Pob:	0.0030	0.0011	0.0008	0.0008	0.0035	0.0014	0.0010	0.0008
max:	-0.0700	-0.0329	-0.0335	-0.0261	-0.0702	-0.0285	-0.0362	-0.0221
min:	-0.0866	-0.0390	-0.0377	-0.0302	-0.0850	-0.0369	-0.0412	-0.0269
Coef. de presión:	-1.7512	-0.8104	-0.7955	-0.6221	-1.7023	-0.7468	-0.8646	-0.5415
	x1,y5	x2,y5	x3,y5	x4,y5	x1,y6	x2,y6	x3,y6	x4,y6
Media:	-0.0827	-0.0359	-0.0346	-0.0218	-0.1416	-0.0310	-0.0316	-0.0263
Desv Est. Pob:	0.0037	0.0011	0.0007	0.0009	0.0101	0.0007	0.0011	0.0014
max:	-0.0765	-0.0326	-0.0320	-0.0198	-0.1186	-0.0291	-0.0295	-0.0235
min:	-0.0937	-0.0387	-0.0364	-0.0243	-0.1659	-0.0331	-0.0348	-0.0303
Coef. de presión:	-1.8357	-0.7966	-0.7679	-0.4850	-3.1431	-0.6876	-0.7023	-0.5838
	centro	T. Pitot						
Media:	-0.0322	0.0450						
Desv Est. Pob:	0.0011	0.0010						
max:	-0.0296	0.0482						
min:	-0.0354	0.0423						
Coef. de presión:	-0.7158	1.0000						

Viento Este

	x1,y1	x2,y1	x3,y1	x4,y1	x1,y2	x2,y2	x3,y2	x4,y2
Media:	-0.0917	-0.0289	-0.0312	-0.0270	-0.0832	-0.0327	-0.0340	-0.0262
Desv Est. Pob:	0.0031	0.0011	0.0007	0.0008	0.0028	0.0012	0.0006	0.0008
max:	-0.0854	-0.0262	-0.0269	-0.0242	-0.0749	-0.0290	-0.0320	-0.0238
min:	-0.0989	-0.0323	-0.0332	-0.0290	-0.0891	-0.0354	-0.0355	-0.0283
Coef. de presión:	-2.0597	-0.6480	-0.7004	-0.6052	-1.8682	-0.7332	-0.7641	-0.5885
	x1,y3	x2,y3	x3,y3	x4,y3	x1,y4	x2,y4	x3,y4	x4,y4
Media:	-0.0952	-0.0380	-0.0376	-0.0237	-0.0944	-0.0388	-0.0391	-0.0210
Desv Est. Pob:	0.0036	0.0008	0.0010	0.0008	0.0032	0.0010	0.0010	0.0007
max:	-0.0831	-0.0349	-0.0349	-0.0215	-0.0833	-0.0353	-0.0368	-0.0194
min:	-0.1033	-0.0399	-0.0397	-0.0255	-0.1032	-0.0413	-0.0425	-0.0228
Coef. de presión:	-2.1366	-0.8527	-0.8431	-0.5332	-2.1202	-0.8713	-0.8770	-0.4710
	x1,y5	x2,y5	x3,y5	x4,y5	x1,y6	x2,y6	x3,y6	x4,y6
Media:	-0.0881	-0.0340	-0.0360	-0.0208	-0.0915	-0.0309	-0.0319	-0.0233
Desv Est. Pob:	0.0035	0.0013	0.0007	0.0007	0.0036	0.0008	0.0007	0.0007
max:	-0.0805	-0.0303	-0.0342	-0.0192	-0.0845	-0.0278	-0.0290	-0.0214
min:	-0.0972	-0.0373	-0.0384	-0.0230	-0.1031	-0.0329	-0.0338	-0.0253
Coef. de presión:	-1.9780	-0.7630	-0.8090	-0.4660	-2.0535	-0.6939	-0.7167	-0.5226
	centro	T. Pitot						
Media:	-0.0350	0.0445						
Desv Est. Pob:	0.0007	0.0011						
max:	-0.0329	0.0466						
min:	-0.0368	0.0414						
Coef. de presión:	-0.7848	1.0000						

Apéndice B OTRAS FORMAS GEOMÉTRICAS Y ESTRUCTURALES PARA CUBIERTAS COLGANTES

En este apéndice se muestran diversas formas geométricas y estructurales de cubiertas colgantes que han sido construidas en diversas partes del mundo, o bien, que forman parte de proyectos aún no construidos. Se espera que este pequeño compendio de estructuras alimente la imaginación del lector, para dar soluciones a problemas relacionados con las cubiertas colgantes.

Las herramientas y técnicas utilizadas a lo largo de este trabajo, sirven para analizar las cubiertas que se muestran en este apéndice, y también para todas las estructuras que utilizan elementos cable. Algunas estructuras, como la de la figura B6, no están construidas con cables, pero debido a que son estructuras sujetas a grandes desplazamientos, pueden ser analizadas con la opción Pdelta incluida en algunos programas de cómputo.

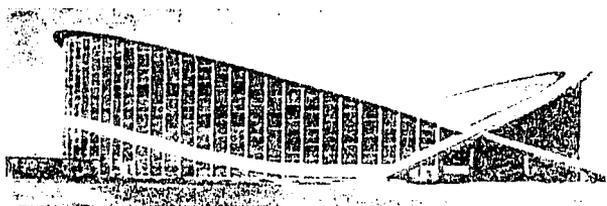


Figura B1 La Arena Raleigh de Novicki, U. S. A. (ref. 1)



Figura B2 El pabellón de Francia en una exposición en Bruselas (ref. 1)



Figura B3 La pista de Hockey de Yale, en New Haven, Connecticut (ref. 1)

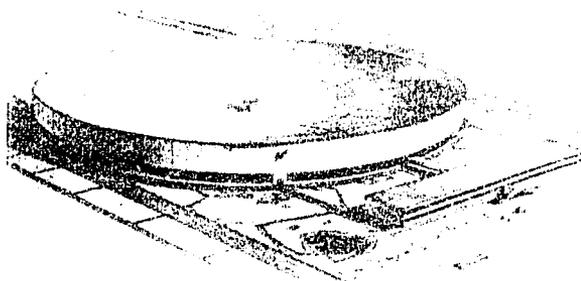


Figura B4 Propuesta de edificio industrial con 200m de diámetro (ref. 1)



Figura B5 Hangar de 71 m de claro (ref. 1)



Figura B6 Centro de comercio internacional de Tokio con 50 m de diámetro (ref. 1)

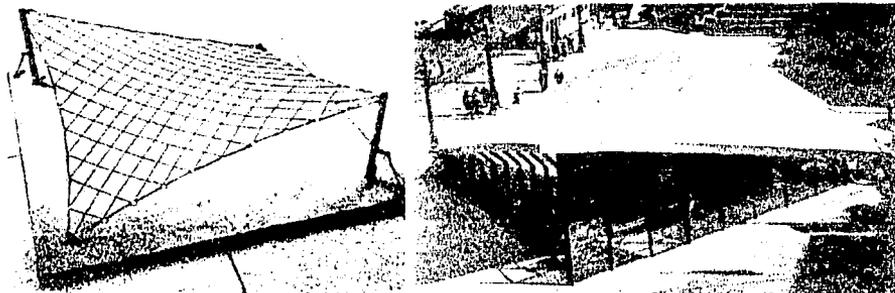
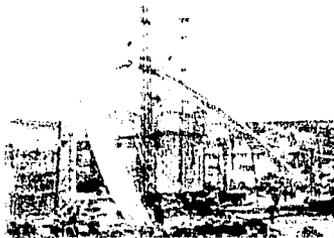


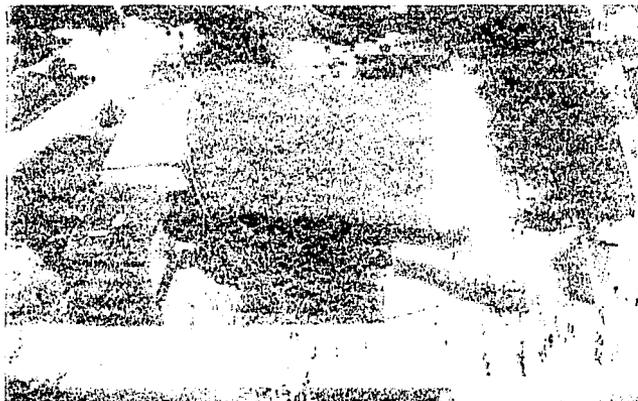
Figura B7 Cubierta con forma hiperbólica para un centro de información en Bruselas (ref. 1)



a) Modelo a escala



b) Montaje del arco principal



c) Vista de la estructura terminada

Figura B8 Teatro y cine de pantallas múltiples en la ciudad de Praga (ref. 1)

Referencia

1. N. Esquillan e Y. Saillard; "Hanging Roofs"; North-Holland Publishing Company; 1963