



00365
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO 6

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

FACULTAD DE CIENCIAS

"TEORÍA ESPECTRAL DE GRÁFICAS"

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A
ANTONIO DANIEL RIVERA LÓPEZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. JOSÉ ANTONIO DE LA PEÑA MENA

MAYO, DE 2003

MÉXICO, D.F.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN DISCONTINUA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico el contenido de mi trabajo excepcional.

NOMBRE: Antonio Daniel

Rivera López

FECHA: 7/ Mayo / 2003

FIRMA: [Firma]

Agradecimientos

Agradezco al IMATE-UNAM las atenciones brindadas durante mi estancia como estudiante de esta institución y la beca de lugar que se me otorgó en el mismo.

Al Dr. Michael Barot, a la Dra. Martha Takane, al Dr. Christof Geiss y al Dr. Dieter Vossieck, por su valioso apoyo demostrado en todo momento.

Quiero hacer un agradecimiento especial a mi director de tesis, el Dr. José Antonio de la Peña Mena por los conocimientos transmitidos y el apoyo brindado que hicieron posible la realización de este trabajo.

A cada uno de los miembros de mi comité tutorial, les agradezco sus valiosos comentarios que enriquecieron la realización de este trabajo.

Al CONACyT, por la beca que se me otorgó para la realización de mis estudios de maestría.

A mi esposa María Elena Lárraga por todo su apoyo y su amor.

A mi familia y a todas las personas que de alguna forma colaboraron en la realización de esta tesis.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Índice general

Introducción	1
1. Gráficas y Operadores	5
1.1. Espacios métricos y topológicos	5
1.2. El Espectro de Transformaciones Lineales Acotadas	7
1.2.1. Operadores adjuntos y normales	7
1.2.2. El espectro de un operador	10
1.2.3. Transformaciones del Espectro	11
1.3. El espectro de un operador hermitiano	13
1.4. El operador adyacencia de una gráfica infinita y su espectro.	15
1.4.1. El espectro de una gráfica Δ	16
2. LA CUBIERTA DE GALOIS DE UNA GRÁFICA.	21
3. RADIO ESPECTRAL Y CUBIERTAS DE GALOIS	28
3.1. La constante isoperimétrica y el crecimiento de grupos	31
3.2. Divisores Frontales	36
4. GRUPOS NO MANEJABLES Y DESCOMPOSICIÓN PARADÓJICA	40
4.1. Breve Introducción a los Espacios Topológicos y Medibles.	40
4.2. Los espacios $L^p(X, \mu)$	42
4.3. G-Conjuntos y Descomposición Paradójica	44
4.4. Conjuntos Equivalentes por partes.	45
4.5. El Teorema de König y el Teorema de la División.	47
4.6. Descomposición Paradójica.	49
4.7. Algunos grupos no manejables	54
Bibliografía	57

Introducción

Este trabajo es un intento por recopilar información sobre grupos manejables y no manejables y la relación que éstos guardan con el espectro de una gráfica infinita.

La primera motivación para considerar el espectro de un operador proviene del caso finito, es decir, cuando V es un \mathbb{k} -espacio vectorial de dimensión finita, y $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal. Una condición necesaria y suficiente para que el operador A no sea invertible es que su determinante se anule, un concepto que no tiene generalización a espacios de dimensión infinita. En el caso de dimensión finita, el determinante de $A - \lambda I$ ($\lambda \in \mathbb{k}$) es un polinomio en λ , cuyas raíces son exactamente los valores propios de A . Por lo tanto, en el caso de dimensión finita, el espectro de un operador lineal es exactamente el conjunto de sus valores propios.

Sin embargo, el concepto de valor propio no necesita definirse en términos del determinante. De acuerdo con la definición geométrica, un número complejo λ es un valor propio de una transformación lineal $A : V \rightarrow V$ (V un espacio con producto interno) si existe un vector $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$. Equivalentemente: λ es valor propio de A si existe un vector unitario x ($\|x\| = 1$) tal que $\|Ax - \lambda x\| = 0$.

En el caso general, diremos que el espectro de la transformación lineal A , $Spec(A)$, es el conjunto de todos los números complejos λ tales que $A - \lambda I$ no es invertible. Y λ es un valor propio aproximado de A si para todo $\varepsilon > 0$ existe un vector $x \neq 0$ tal que $\|Ax - \lambda x\| < \varepsilon \|x\|$, al conjunto de todos los valores propios aproximados de A lo denotamos $\Pi(A)$.

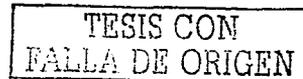
Nos interesa sobre todo, el espectro de una transformación lineal asociada a una gráfica Δ con conjunto de vértices Δ_0 , y cuyo conjunto de aristas es $\Delta_1 \subseteq \Delta_0 \times \Delta_0$. A las gráficas infinitas Δ con $\deg(u) < \infty$ para cada $u \in \Delta_0$ (donde $\deg(u)$ es el número de aristas que terminan en u), las llamaremos gráficas localmente finitas. A cada gráfica localmente finita Δ podemos asociarle una matriz infinita $A_\Delta = (a_{uv})$, llamada matriz de adyacencia de Δ , donde a_{uv} ($u \neq v$) es el número de aristas entre el vértice u y el vértice v , y a_{uu} es dos veces el número de lazos en u .

Si

$$M_\Delta := \sup\{\deg(u) | u \in \Delta_0\} < \infty,$$

entonces podemos ver a A_Δ como una transformación lineal acotada (existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_\Delta x\| \leq M \|x\|$ para todo x), definida en el espacio l^2 de todas las sucesiones complejas $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tales que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$. Siempre supondremos que, $M_\Delta < \infty$.

Obviamente definiremos el espectro de una gráfica Δ , $Spec(\Delta)$ como el espectro de la transfor-



mación lineal A_Δ , algunas de las propiedades del operador A_Δ y del $Spec(\Delta)$ son tratadas ampliamente en [PT, M1, M2, MW, Mu, MO, BM, Ta].

Nos interesa calcular el radio espectral $\rho(A_\Delta) := \sup\{|\lambda| : \lambda \in Spec(A_\Delta)\}$ de operadores asociados a gráficas infinitas Δ .

Uno de los primeros resultados sobre el radio espectral de una gráfica, es el siguiente (ver por ejemplo [2]):

El operador adyacencia A_Δ de una gráfica Δ es acotado (existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\|A_\Delta x\| \leq M \|x\|$ para todo x) si y sólo si $M_\Delta < \infty$. En este caso

$$Spec(A_\Delta) \subseteq [-M_\Delta, M_\Delta]$$

Otro resultado importante, es calcular el radio espectral a partir de una sucesión de subgráficas.

Sean F_1, F_2, \dots subgráficas de una gráfica Δ , decimos que la sucesión F_1, F_2, \dots converge a Δ , $F_n \rightarrow \Delta (n \rightarrow \infty)$, si para cada arista $e \in \Delta_1$ podemos encontrar un número $N = N(e)$ tal que $e \in (F_n)_1$ para cada $n \geq N(e)$.

Así, dada una sucesión F_1, F_2, \dots de subgráficas de Δ que convergen a Δ ; el radio espectral de Δ está dado por

$$\rho(\Delta) := \rho(A_\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(F_n)$$

(ver [Ta, M2]).

Sea Δ una gráfica, con conjunto de vértices Δ_0 y conjunto de aristas Δ_1 , y un subconjunto X de Δ_0 , definimos ∂X como el subconjunto de aristas de Δ que terminan exactamente en un vértice de X . Definimos la constante isoperimétrica $i(\Delta)$, como

$$i(\Delta) = \inf\left\{\frac{|\partial X|}{|X|} : X \text{ subconjunto finito de } \Delta_0\right\}$$

Para gráficas Δ con $deg(x) = k$, para toda $x \in \Delta_0$, es decir, gráficas con valencia k existe un resultado importante para nosotros: Si Δ es una gráfica infinita, conexa con valencia k , entonces $\rho(\Delta) = k$ si y sólo si $i(\Delta) = 0$ (ver [M2, M1, MW]).

Sea Δ una gráfica y G un grupo de automorfismos de Δ actuando libremente sobre Δ , es decir, si para algún $x \in \Delta_0$ se tiene $gx = x$ (ó para algún $\alpha \in \Delta_1$ se tiene $g\alpha = \alpha$), entonces $g = 1$. Decimos que un morfismo suprayectivo $\pi : \Delta \rightarrow \Delta'$ es una cubierta de Galois definida por G si:

(i) $\pi g = \pi$ para cada $g \in G$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

(ii) Para cada $x \in \Delta_0$ ($\alpha \in \Delta_1$) tenemos $\pi^{-1}\pi(x) = Gx$ y $\pi^{-1}\pi(\alpha) = G\alpha$.

Si G es un grupo finitamente generado y S es un conjunto finito de generadores tal que $1 \notin S$. Definimos la gráfica de Cayley $\Delta = \Delta(G, S)$ como la gráfica cuyos vértices son $\Delta_0 = G$, y cuyas aristas son de la forma $g \xrightarrow{s} sg$ para cada $g \in G$ y $s \in S$. Así, G es un grupo de automorfismos actuando libremente sobre Δ .

Un grupo G con una gráfica de Cayley Γ se llama *manejable* si $i(\Gamma) = 0$.

Sea $\pi : \Delta \rightarrow \Delta'$ una cubierta de Galois definida por un grupo G de automorfismos de Δ y supongamos que Δ' es finita. Si el grupo G es manejable, entonces $\rho(\Delta) = \rho(\Delta')$. Este es el resultado más importante en este trabajo, la demostración puede consultarse en [PT, Ta].

Para poder entender y desarrollar este último resultado necesitaremos de muchos más conceptos y resultados de los anteriormente mencionados. Así este trabajo se desarrolla en cuatro capítulos, cuyo contenido describiremos a continuación.

En el capítulo I, introducimos la mayor parte de los conceptos y las herramientas básicas. Damos algunas nociones elementales de espacios métricos y espacios de Hilbert, como convergencia, y transformaciones lineales acotadas sobre espacios de Hilbert. Y lo más importante, desarrollamos algunas propiedades del espectro de las transformaciones lineales acotadas sobre espacios de Hilbert.

Esto nos proporciona la herramienta necesaria para definir y obtener nuestros primeros resultados sobre operadores asociados a gráficas infinitas.

En un espacio de Hilbert H , podemos calcular el radio espectral $\rho(A)$ de una transformación lineal acotada $A : H \rightarrow H$, como la norma de la transformación lineal A , $\|A\| := \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\}$. Más aún, la transformación lineal asociada a un gráfica infinita será acotada si y sólo si $M_\Delta < \infty$.

Para tratar de entender el concepto de cubierta (ver [Ta]), en el capítulo II damos algunos conceptos básicos sobre cubiertas y algunas de sus propiedades fundamentales.

Una vez desarrollados todos estos conceptos, entramos a la parte central de este trabajo.

En el capítulo III damos una breve introducción a los grupos manejables incluyendo las condiciones de Følner (ver [P, Pi]):

Sea G un grupo localmente compacto y consideremos la medida de Haar dada por la cardinalidad y denotada por $|\cdot|$. Sean $U, V \subseteq G$ denotaremos con $U\Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$ a la diferencia simétrica.

Consideremos las siguientes propiedades que caracterizan a los grupos manejables:

(F) [resp. F*] Para todo subconjunto compacto K [resp. subconjunto finito S] de G y para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto medible U en G tal que $0 < |U| < \infty$ y $\frac{|aU\Delta U|}{|U|} < \varepsilon$ (donde $aU\Delta U = (aU \setminus U) \cup (U \setminus aU)$ es la diferencia simétrica) para cada $a \in K$ [resp. cada $a \in S$].

(WF) Para todo subconjunto compacto K de G y para todo $\varepsilon > 0$, existen subconjuntos medibles U y N en G tales que $0 < |U| < \infty$, $|N| < \infty$, y $\frac{|aU\Delta U|}{|U|} < \varepsilon$ para cada $a \in K \setminus N$.

(SF) [resp. (SF*)] Para todo subconjunto compacto K [resp. subconjunto finito S] de G y para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto medible U en G tal que $0 < |U| < \infty$ y $\frac{|KU\Delta U|}{|U|} < \varepsilon$ [resp. $\frac{|FU\Delta U|}{|U|} < \varepsilon$].

Después relacionamos grupos finitamente generados con gráficas por medio de la gráficas de Cayley.

Como una consecuencia de las condiciones de Følner y la definición de la constante isoperimétrica tenemos que:

Dado un grupo G finitamente generado dotado con la topología discreta y S un conjunto finito de generadores. Decimos que el grupo G es manejable si y sólo si la constante isoperimétrica de su gráfica de Cayley es cero.

Para finalizar, en el capítulo IV se incluye la caracterización de grupos no manejables: Un grupo G es no manejable si y sólo si G admite una descomposición paradójica, es decir, si existe una partición $\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}$ de G y elementos $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ de G tales que

$$\{x_1 A_1, \dots, x_m A_m\} \text{ y } \{y_1 B_1, \dots, y_n B_n\}$$

son particiones de G . La referencias principales para este capítulo son [P, Pi].

Capítulo 1

Gráficas y Operadores

En este capítulo, vamos a introducir el material necesario para definir el espectro de un operador lineal.

Nos interesa sobre todo estudiar el espectro del operador lineal definido por la matriz de adyacencia A asociada a una gráfica Δ infinita. Toda la teoría de operadores lineales y su espectro está basada principalmente en las referencias [H, T].

1.1. Espacios métricos y topológicos

Definición 1 (a) Una colección τ de subconjuntos de un conjunto X , se dice que es una topología en X si τ tiene las siguientes propiedades:

(i) $\emptyset \in \tau$ y $X \in \tau$.

(ii) Si $V_i \in \tau$ para $i = 1, \dots, n$, entonces $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_n \in \tau$.

(iii) Si $\{V_\alpha\}$ es una colección arbitraria de miembros de τ , entonces $\bigcup V_\alpha \in \tau$.

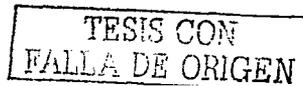
(b) Si τ es una topología en X , entonces (X, τ) es llamado un espacio topológico, y los miembros de τ son llamados conjuntos abiertos en X .

(c) Si (X, τ_1) y (Y, τ_2) son espacios topológicos y f es una función de X en Y , entonces decimos que f es continua si $f^{-1}(V) \in \tau_1$ para todo $V \in \tau_2$.

Definición 2 (a) Una colección \mathfrak{M} de subconjuntos de un conjunto X es llamada una σ -álgebra en X si \mathfrak{M} tiene las siguientes propiedades:

(i) $X \in \mathfrak{M}$.

(ii) Si $A \in \mathfrak{M}$, entonces $A^c \in \mathfrak{M}$, donde A^c es el complemento de A relativo a X .



(iii) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y si $A_n \in \mathfrak{M}$ para $n = 1, 2, \dots$, entonces $A \in \mathfrak{M}$.

(b) Si \mathfrak{M} es una σ -álgebra en X , entonces (X, \mathfrak{M}) es llamado un espacio medible, los miembros de \mathfrak{M} son llamados conjuntos medibles en X .

(c) Si X es un espacio medible, Y es un espacio topológico y f es una función de X en Y , entonces f se dice medible si $f^{-1}(V)$ es un conjunto medible en X para cada V conjunto abierto en Y .

Recordemos que un espacio métrico (X, d) está formado por un conjunto X y una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, con las siguientes propiedades:

- (a) $0 \leq d(x, y) < \infty$ para todo $x, y \in X$.
- (b) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- (c) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
- (d) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y \in X$.

Si X es un \mathbb{k} -espacio vectorial ($\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$), y $\|\cdot\| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ (donde \mathbb{R}^+ denota el conjunto de los reales no negativos) una función, a $(X, \|\cdot\|)$ se le llama un espacio normado si:

- (a) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.
- (b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ para toda $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{k}$.
- (c) $\|x\| = 0$ implica que $x = 0$.

Dada una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio métrico (X, d) decimos que $\{x_n\}$ converge a x , con $x \in X$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geq n_0, d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión en un espacio métrico (X, d) . Se dice que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n, m \geq n_0$, tenemos que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Decimos que el espacio métrico (X, d) es completo si toda sucesión de Cauchy converge en X .

Un espacio con producto interno está formado por un \mathbb{k} -espacio vectorial H ($\mathbb{k} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$) y una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{k}$ tal que:

- (a) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$. (La barra denota conjugación compleja).
- (b) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ si $x, y, z \in H$.

(c) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ si $x, y \in H$ y $\alpha \in \mathbb{k}$.

(d) $\langle x, x \rangle \geq 0$ para todo $x \in H$.

(e) $\langle x, x \rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

Si $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ es un espacio con producto interno podemos definir una norma sobre H definida como

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$$

y una métrica definida por la norma

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

Así H es también un espacio métrico.

Definición 3 Un espacio con producto interno $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se dice que es un espacio de Hilbert si H es completo como espacio métrico.

1.2. El Espectro de Transformaciones Lineales Acotadas

Sean X un espacio de Hilbert. A lo largo de esta sección cuando escribamos la palabra "operador" nos referiremos a una transformación lineal $A : X \rightarrow X$, que es acotada ($\exists \alpha > 0$ tal que $\|Ax\| \leq \alpha \|x\|$, para todo $x \in X$). Recordemos que una transformación lineal es continua si y sólo si A es acotada.

Una forma lineal sobre un espacio vectorial complejo X , es una función lineal $f : X \rightarrow \mathbb{C}$.

Una forma hermitiana sobre un espacio vectorial complejo X , es una función $f : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tal que:

(i) Si fijamos $y \in X$, $f(\alpha x_1 + \beta x_2, y) = \alpha f(x_1, y) + \beta f(x_2, y)$ para todo $x_1, x_2 \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

(ii) Si fijamos $x \in X$, $f(x, \alpha y_1 + \beta y_2) = \bar{\alpha} f(x, y_1) + \bar{\beta} f(x, y_2)$ para todo $y_1, y_2 \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

1.2.1. Operadores adjuntos y normales

Si X es un espacio de Hilbert y $A : X \rightarrow X$ un operador, denotamos por

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\},$$

a la norma de A .

Teorema 4 Sea X un espacio de Hilbert, $A : X \rightarrow X$ un operador y $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$, $\varphi(x, y) = \langle Ax, y \rangle$.

(a) Si $A : X \rightarrow X$ es un operador y $\varphi(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ para todo $x, y \in X$, entonces φ es una forma hermitiana acotada y

$$\|\varphi\| = \sup\{|\langle Ax, y \rangle| : \|x\| = 1, \|y\| = 1\} = \|A\|$$

(donde $|\langle Ax, y \rangle|$ denota el módulo del complejo $\langle Ax, y \rangle$).

(b) Sea φ una forma hermitiana acotada sobre X , entonces existe un único operador A tal que $\varphi(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ para todo $x, y \in X$

Demostración. (a) Si $A : X \rightarrow X$ es un operador y $\varphi(x, y) = \langle Ax, y \rangle$, entonces

$$|\varphi(x, y)| \leq \|A\| \|x\| \|y\|$$

por lo tanto $\|\varphi\| \leq \|A\|$. La otra desigualdad se demostrará en la prueba del inciso (b).

(b) Si φ es una forma hermitiana acotada sobre X , para cada x tenemos que $\overline{\varphi_x(y)} = \overline{\varphi(x, y)}$ es una forma lineal acotada y por el teorema de representación de Riesz (ver por ejemplo [H]), para cada $x \in X$ existe un único vector x_0 tal que $\overline{\varphi_x(y)} = \langle x_0, y \rangle$ para todo $y \in X$. Definimos $A : X \rightarrow X$, $Ax = x_0$. La unicidad de A es obvia.

Ahora como

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \varphi(x, Ax) \leq \|\varphi\| \|x\| \|Ax\|$$

tenemos que $\|Ax\| \leq \|\varphi\| \|x\|$ para todo $x \in X$. Entonces $\|A\| \leq \|\varphi\|$. ■

Teorema 5 Si A es un operador sobre un espacio de Hilbert X , entonces existe un único operador $A^* : X \rightarrow X$, llamado el operador adjunto de A , tal que $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ para todo $x, y \in X$; A^* es tal que $\|A^*\| = \|A\|$.

Demostración. Escribamos $\varphi(x, y) = \langle Ax, y \rangle$ y $\psi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ para toda $x, y \in X$. Por el teorema anterior, φ es una forma hermitiana acotada, y esto implica que ψ es una forma lineal acotada con $\|\psi\| = \|\varphi\| = \|A\|$. Entonces por (b) del teorema anterior tenemos que existe un único operador A^* tal que $\psi(x, y) = \langle A^*x, y \rangle$ para todo $x, y \in X$ y es tal que $\|A^*\| = \|\psi\| = \|A\|$. Y finalmente tenemos:

$$\langle Ax, y \rangle = \varphi(x, y) = \overline{\psi(x, y)} = \overline{\langle A^*y, x \rangle} = \langle x, A^*y \rangle.$$

■

Sean $A, B : X \rightarrow X$ operadores sobre un espacio de Hilbert X , entonces:

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- (i) $A^{**} = A$,
- (ii) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*$,
- (iii) $(A + B)^* = A^* + B^*$,
- (iv) $(AB)^* = B^*A^*$;

Definición 6 Decimos que un operador A es normal si $AA^* = A^*A$ y es hermitiano si $A^* = A$.

Proposición 7 Un operador $A : X \rightarrow X$ es normal si y sólo si $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para toda $x \in X$.

Demostración. Como

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle$$

y,

$$\|A^*x\|^2 = \langle A^*x, A^*x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle.$$

Si A es normal entonces $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para todo $x \in X$.

Ahora, si $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para toda $x \in X$, tenemos que:

$$\langle (A^*A - AA^*)x, x \rangle = 0$$

para todo $x \in X$.

Tomando $B = A^*A - AA^*$, tenemos

$$\langle B(x+y), x+y \rangle = 0$$

para toda $x, y \in X$, de donde obtenemos que:

$$\langle Bx, y \rangle + \overline{\langle Bx, y \rangle} = 0.$$

para toda $x, y \in X$.

Afirmamos que $\langle Bx, y \rangle = 0$ para toda $x, y \in X$.

En efecto, si suponemos que existen $x, y \in X \setminus \{0\}$, $x \neq y$, tales que $\langle Bx, y \rangle \neq 0$. Entonces $0 \neq \langle Bx, iy \rangle \in \mathbb{R}$, y como

$$\langle Bx, iy \rangle + \overline{\langle Bx, iy \rangle} = 0.$$

Obtenemos $\langle Bx, y \rangle = 0$, una contradicción.

Por lo tanto A es normal. ■

1.2.2. El espectro de un operador

Definición 8 Un operador $A : X \rightarrow X$ es un operador invertible si existe un operador $B : X \rightarrow X$ tal que $AB = BA = 1_X$.

Si A es invertible, entonces A^* es invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Teorema 9 ([H] pág. 38) Para un operador $A : X \rightarrow X$ las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A es invertible.
- La imagen de A es densa en X (con la norma asociada a X) y existe un número $\alpha > 0$ tal que $\|Ax\| \geq \alpha \|x\|$ para toda $x \in X$.

Definición 10 El espectro $\text{Spec}(A)$, de un operador $A : X \rightarrow X$, es el conjunto de todos los números complejos λ para los cuales $\lambda I - A$ no es invertible.

Definición 11 Sea X un espacio de Hilbert y $A : X \rightarrow X$ un operador.

- Decimos que un número complejo λ es un valor propio aproximado del operador A si para cada $\varepsilon > 0$ existe un vector unitario x ($\|x\| = 1$) tal que $\|Ax - \lambda x\| < \varepsilon$. Es fácil verificar que este requerimiento es equivalente a decir que para cada $\varepsilon > 0$ existe un vector $x \neq 0$ tal que $\|Ax - \lambda x\| < \varepsilon \|x\|$.

- El espectro aproximado $\Pi(A)$, de un operador A , es el conjunto de todos los valores propios aproximados de A .

Teorema 12 Si A es un operador, entonces $\Pi(A) \subseteq \text{Spec}(A)$.

Demostración. Si $\lambda \notin \text{Spec}(A)$, entonces $\lambda I - A$ es invertible y tenemos

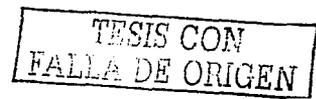
$$\begin{aligned} \|x\| &= \|(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x\| \\ &\leq \|(\lambda I - A)^{-1}\| \|(\lambda I - A)x\| \end{aligned}$$

para cada vector x . Esto implica que $\|(\lambda x - Ax)\| \geq \varepsilon \|x\|$, con $\varepsilon = \frac{1}{\|(\lambda I - A)^{-1}\|}$, para cada vector x . Así para cada $\lambda \notin \text{Spec}(A)$ tenemos que $\lambda \notin \Pi(A)$. ■

Teorema 13 Si $A : X \rightarrow X$ es un operador normal, entonces $\Pi(A) = \text{Spec}(A)$.

Demostración. Por el teorema anterior basta probar que $\text{Spec}(A) \subseteq \Pi(A)$. Si $\lambda \notin \Pi(A)$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|\lambda y - Ay\| \geq \varepsilon \|y\|$ para cada vector $y \in X$. Ahora como

$$(\lambda I - A)^* = \bar{\lambda} I - A^*$$



($\bar{\lambda}$ es el conjugado complejo de λ) y A es normal entonces $\lambda I - A$ es operador normal. Sabemos que un operador A es normal si y sólo si $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para todo $x \in X$; en particular como $\lambda I - A$ es un operador normal entonces:

$$\|\bar{\lambda}y - A^*y\| = \|\lambda y - Ay\| \geq \varepsilon \|y\| \text{ para cada } y \in X.$$

Ahora para probar que $\lambda \notin \text{Spec}(A)$, es decir, que $\lambda I - A$ es invertible, por el Teorema 9 sólo nos resta probar que la imagen de $\lambda I - A$ es densa en X o lo que es equivalente que el complemento ortogonal de $\text{Im}(\lambda I - A)$ sea cero. Para esto, sea $y \in X$ tal que y es un elemento del complemento ortogonal de $\text{Im}(\lambda I - A)$, entonces $0 = \langle (\lambda I - A)x, y \rangle = \langle x, (\bar{\lambda}I - A^*)y \rangle$ para toda $x \in X$, de aquí que $\bar{\lambda}y - A^*y = 0$. Y como $\|\lambda y - Ay\| \geq \varepsilon \|y\|$ se deduce que $y = 0$. Por lo tanto, $\text{Im}(\lambda I - A)$ es densa en X . ■

1.2.3. Transformaciones del Espectro

Es interesante observar el comportamiento del espectro de un operador cuando éste es sujeto a varias transformaciones elementales.

En esta sección examinaremos el comportamiento del espectro con respecto a la formación de polinomios, inversos, y adjuntas.

Teorema 14 Si A es un operador y p es un polinomio, entonces

$$\text{Spec}(p(A)) = p(\text{Spec}(A)) = \{p(\lambda) : \lambda \in \text{Spec}(A)\}.$$

Demostración. Para cada número complejo λ_0 existe un polinomio q tal que

$$p(\lambda_0) - p(\lambda) = (\lambda_0 - \lambda)q(\lambda)$$

idénticamente en λ . Se sigue que

$$p(\lambda_0) - p(A) = (\lambda_0 - A)q(A).$$

Afirmamos que si $\lambda_0 \in \text{Spec}(A)$, entonces $B = (\lambda_0 - A)q(A)$ no es invertible. Si B fuera invertible, entonces

$$\begin{aligned} (\lambda_0 I - A)q(A)B^{-1} &= BB^{-1} = 1 \\ &= B^{-1}B = B^{-1}q(A)(\lambda_0 I - A), \end{aligned}$$

es decir, $(\lambda_0 I - A)$ también sería invertible. Esto significa que $p(\lambda_0) - p(A)$ no es invertible, es decir, $p(\lambda_0) \in \text{Spec}(p(A))$ por lo tanto

$$p(\text{Spec}(A)) \subseteq \text{Spec}(p(A)).$$

Ahora supongamos que $\lambda_0 \in \text{Spec}(p(A))$, y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de la ecuación $p(\lambda) = \lambda_0$.

Así que

$$\lambda_0 I - p(A) = \alpha(\lambda_1 I - A) \dots (\lambda_n I - A)$$

con α un número complejo distinto de cero, y como $\lambda_0 \in \text{Spec}(p(A))$, es decir, $\lambda_0 I - p(A)$ no es invertible entonces, al menos para un j , $1 \leq j \leq n$, $\lambda_j I - A$ no es invertible, es decir, $\lambda_j \in \text{Spec}(A)$ y $p(\lambda_j) = \lambda_0$, así que $\lambda_0 \in p(\text{Spec}(A))$ y por lo tanto $\text{Spec}(p(A)) \subseteq p(\text{Spec}(A))$. ■

Teorema 15 Si un operador A es invertible, entonces

$$\text{Spec}(A^{-1}) = (\text{Spec}(A))^{-1} = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \text{Spec}(A)\}$$

Demostración. Observemos que decir que A es invertible es lo mismo que decir que

$$0 \notin \text{Spec}(A),$$

así el símbolo $(\text{Spec}(A))^{-1}$ tiene sentido.

La igualdad

$$\lambda^{-1} I - A^{-1} = -(\lambda I - A)\lambda^{-1} A^{-1}$$

muestra que si $\lambda \notin \text{Spec}(A)$, es decir, $\lambda I - A$ es invertible, entonces $\lambda^{-1} I - A^{-1}$ es invertible, así que $\lambda^{-1} \notin \text{Spec}(A^{-1})$. En otras palabras $\text{Spec}(A^{-1}) \subseteq (\text{Spec}(A))^{-1}$. Para demostrar la contención inversa vamos usar la contención que ya conocemos,

$$\text{Spec}(A^{-1}) \subseteq (\text{Spec}(A))^{-1}.$$

Ahora si ponemos A en lugar de A^{-1} tenemos $\text{Spec}(A) \subseteq (\text{Spec}(A^{-1}))^{-1}$ y así

$$(\text{Spec}(A))^{-1} \subseteq \text{Spec}(A^{-1}).$$

■
Teorema 16 Si A es un operador, entonces $\text{Spec}(A^*) = (\text{Spec}(A))^* = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \text{Spec}(A)\}$.

Demostración. Si $\lambda \notin \text{Spec}(A)$, es decir $\lambda I - A$ es invertible, entonces $\bar{\lambda} I - A^*$ es invertible, y por lo tanto $\bar{\lambda} \notin \text{Spec}(A^*)$. Esto prueba que $\text{Spec}(A^*) \subseteq (\text{Spec}(A))^*$. La otra contención como antes se obtiene substituyendo A^* por A . ■

1.3. El espectro de un operador hermitiano

Si aplicamos el Teorema 16 a un operador hermitiano, éste nos dice que el espectro de un operador hermitiano es simétrico con respecto al eje real. En realidad la situación es mucho más simple.

Teorema 17 *Si A es un operador hermitiano, entonces $\text{Spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$, donde \mathbb{R} el conjunto de los números reales.*

Demostración. Sea $\lambda \in \text{Spec}(A)$. Si $\lambda \notin \mathbb{R}$, entonces, para cada $x \in X$, $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 < |\lambda - \bar{\lambda}| \|x\|^2 &= |\langle (\lambda I - A)x, x \rangle - \langle \bar{\lambda} I - A)x, x \rangle| \\ &= |\langle (\lambda I - A)x, x \rangle - \langle x, (\lambda I - A)x \rangle| \\ &\leq 2 \|\lambda x - Ax\| \|x\|; \end{aligned}$$

Ahora de acuerdo con el Teorema 13 tenemos que $\Pi(A) = \text{Spec}(A)$, y por lo tanto para cada $\varepsilon > 0$, existe un $x \neq 0$ tal que $\|Ax - \lambda x\| < \varepsilon \|x\|$. Si tomamos $\varepsilon < |\lambda - \bar{\lambda}|/2$ obtenemos una contradicción. ■

Teorema 18 *Si un operador A es tal que $\|1_X - A\| < 1$, entonces A es invertible.*

Demostración. Si escribimos $\|1_X - A\| = 1 - \alpha$, tal que $0 < \alpha \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \|x - (x - Ax)\| \\ &\geq \|x\| - \|(1_X - A)x\| \\ &\geq \|x\| - (1 - \alpha) \|x\| = \alpha \|x\| \end{aligned}$$

para cada $x \in X$. Se sigue del Teorema 9 que es suficiente mostrar que la imagen de A es densa en X , para demostrar que A es invertible. Estableceremos la densidad de la imagen de A probando que si y es un elemento arbitrario de X y

$$\delta_y = \inf \{ \|y - x\| : x \in \text{Im}(A) \},$$

entonces $\delta_y = 0$. Supongamos que $\delta_y > 0$. Si $\alpha = 1$, entonces $A = 1_X$. Si $\alpha \neq 1$, tomamos $x \in \text{Im}(A)$ tal que $\|y - x\| < \delta_y + \varepsilon$, con $\varepsilon < \frac{\delta_y \alpha}{1 - \alpha}$. Así tenemos que

$$\begin{aligned} (1 - \alpha) \|y - x\| &< (1 - \alpha)(\delta_y + \varepsilon) \\ &< (1 - \alpha)\left(\delta_y + \frac{\delta_y \alpha}{1 - \alpha}\right) = \delta_y. \end{aligned}$$

Pero como $x, A(y-x) \in \text{Im}(A)$, tenemos que $x + A(y-x) \in \text{Im}(A)$, entonces

$$\begin{aligned} \delta_y &\leq \|(y-x) - A(y-x)\| \\ &\leq \|1_X - A\| \|(y-x)\| \\ &= (1-\alpha) \|(y-x)\| < \delta_y. \end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción. ■

Teorema 19 Si A es un operador, entonces $\text{Spec}(A)$ es un subconjunto compacto del plano complejo; si $\lambda \in \text{Spec}(A)$, entonces $|\lambda| \leq \|A\|$.

Demostración. Si $\lambda_0 \notin \text{Spec}(A)$, es decir, $\lambda_0 I - A$ es invertible, entonces

$$\begin{aligned} \|1_X - (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda I - A)\| &= \|(\lambda_0 I - A)^{-1}[(\lambda_0 I - A) - (\lambda I - A)]\| \\ &\leq \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| |\lambda_0 - \lambda| \end{aligned}$$

y así $\|1_X - (\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda I - A)\| < 1$ cuando $|\lambda_0 - \lambda|$ es suficientemente pequeño. Ahora por el Teorema 18 sabemos que $(\lambda_0 I - A)^{-1}(\lambda I - A)$ es invertible y por lo tanto que $(\lambda I - A)$ es invertible cuando $|\lambda_0 - \lambda|$ es suficientemente pequeño. Ahora recordemos que un conjunto S en el plano complejo es abierto si y sólo si para cada $x \in S$, existe una bola $B_\epsilon(x) \subseteq S$. Así, lo que acabamos de probar es que el complemento de $\text{Spec}(A)$ es un conjunto abierto en el plano complejo; por lo que $\text{Spec}(A)$ es un conjunto cerrado en el plano complejo. Ahora sólo falta ver que $\text{Spec}(A)$ es un conjunto acotado. Si $|\lambda| > \|A\|$, entonces $\|\frac{1}{\lambda}A\| < 1$ y nuevamente por el Teorema 18 $1_X - \frac{1}{\lambda}A$ es invertible, es decir, $\lambda \notin \text{Spec}(A)$. Por lo tanto si $\lambda \in \text{Spec}(A)$, entonces $|\lambda| \leq \|A\|$. ■

El siguiente resultado nos permite calcular la norma de un operador hermitiano por medio del espectro del operador.

Teorema 20 Si A es un operador hermitiano, entonces

$$\|A\| = \sup \{|\lambda| : \lambda \in \text{Spec}(A)\} = \rho(A), \text{ llamado el radio espectral de } A.$$

Demostración. Sabemos por el Teorema 19 que $\rho(A) \leq \|A\|$. Por otra parte si mostramos que $\|A^2\| \in \text{Spec}(A^2)$; entonces de acuerdo con los Teoremas 13 y 14 tenemos que $\pm \|A\| \in \text{Spec}(A)$. Ahora probaremos que $\|A^2\| \in \text{Spec}(A^2)$.

$$\|A^2x - \lambda^2x\|^2 = \|A^2x\|^2 - 2\lambda^2\|Ax\|^2 + \lambda^4\|x\|^2$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$ (ya que A es un operador hermitiano). Si $\{x_n\}$ es una sucesión de vectores unitarios tal que

$$\|Ax_n\| \rightarrow \|A\|,$$

y si $\lambda = \|A\|$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|A^2x_n - \lambda^2x_n\| &\leq (\|A\| \|Ax_n\|)^2 - 2\lambda^2 \|Ax_n\|^2 + \lambda^4 \\ &= \lambda^4 - \lambda^2 \|Ax_n\|^2 \rightarrow 0 \end{aligned}$$

y de aquí que en efecto $\|A^2\| \in \text{Spec}(A^2)$. ■

1.4. El operador adyacencia de una gráfica infinita y su espectro.

Sea $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1)$ una gráfica localmente finita con

$$\Delta_0 = \mathbb{N}$$

(\mathbb{N} el conjunto de números naturales). Entonces la matriz de adyacencia (infinita) asociada a Δ , $A = A(\Delta) = (a_{ij})$, puede definirse tal que su entrada (i, j) con $i \neq j$, a_{ij} es igual al número de aristas entre los vértices i, j ($i, j \in \mathbb{N}$), y a_{ii} es dos veces el número de lazos en i .

Para cada vértice $i \in \Delta_0$ definimos $\text{deg}(i)$ como el número de aristas que terminan en i . Siempre supondremos que $\text{deg}(i) < \infty$, más aún sólo consideraremos gráficas con

$$M_\Delta = \sup\{\text{deg}(i) : i \in \Delta_0\} < \infty.$$

Definición 21 Sea Δ una gráfica infinita, decimos que Δ es una gráfica acotada si

$$M_\Delta < \infty.$$

Sea l^2 el espacio de Hilbert de todas las sucesiones $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de números complejos tales que $\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^2$ converge, con el producto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i \bar{y}_i$$

donde $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $y = (y_i)_{i \in \mathbb{N}}$.

Cuando Δ es una gráfica acotada, podemos considerar $A := A_\Delta$ como el operador (recordemos que para nosotros operador significa transformación lineal acotada) sobre l^2 definido por $\langle Ae_i, e_j \rangle = a_{ij}$.

Teorema 22 *El operador adyacencia A de una gráfica Δ es acotado (y así definido en todas partes y hermitiano sobre l^2) si y sólo si $M_\Delta < \infty$. En este caso, $\|A\| \leq M_\Delta$, y $\text{Spec}(A) \subseteq [-M_\Delta, M_\Delta]$.*

Demostración. Supongamos que A es un operador acotado, es decir, existe $M \in \mathbb{R}$ con $M < \infty$ tal que $\|A\| \leq M$ y como $\|Ae_i\| \geq \text{deg}(v_i)$, entonces $\text{deg}(v_i) \leq M$. Ahora supongamos que Δ es acotada, entonces por el teorema de Schur ([T], pág. 328)

$$\|A\| \leq M_\Delta.$$

Finalmente sabemos que $\text{Spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$, ya que A es hermitiano y definido en todas partes sobre l^2 y como $\rho(A) = \|A\| \leq M_\Delta$ entonces $\text{Spec}(A) \subseteq [-M_\Delta, M_\Delta]$. ■

1.4.1. El espectro de una gráfica Δ .

El espectro $\text{Spec}(\Delta)$ de la gráfica Δ está definido como el espectro del operador adyacencia $A = A_\Delta$.

Siendo A un operador, su espectro $\text{Spec}(A)$ es el siguiente

$$\text{Spec}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A \text{ es un operador no invertible}\},$$

donde I denota el operador identidad en l^2 .

Como A es un operador hermitiano, sabemos que $\text{Spec}(A) \subseteq \mathbb{R}$ y que $\text{Spec}(A)$ coincide con el conjunto de valores propios aproximados $\Pi(A)$ (ver Teoremas 13, 17), es decir,

$$\text{Spec}(A) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{R} : \text{ existe una sucesión } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ en } l^2 \\ \text{ con } \|x\| = 1, \text{ tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} \|A(x_n) - \lambda(x_n)\| = 0 \end{array} \right\}.$$

El radio espectral $\rho(\Delta)$ de Δ está definido como el radio espectral de A , es decir, $\rho(\Delta) := \rho(A) = \sup\{|\lambda| / \lambda \in \text{Spec}(A)\}$.

Sea Δ una gráfica acotada. Entonces:

- (a) $\rho(\Delta) \in \text{Spec}(A)$.
- (b) $\rho(\Delta) = \|A_\Delta\| = \sup\{|\langle A_\Delta(x), x \rangle| / x \in l^2, \|x\| = 1\}$.
- (c) $\text{Spec}(\Delta) \subseteq [-M_\Delta, M_\Delta]$.

Definición 23 *Sea F_1, F_2, F_3, \dots , una sucesión de subgráficas de Δ .*

Decimos que esta sucesión converge a Δ , en símbolos $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \Delta$, si para cada arista $\alpha \in \Delta$, existe $N = N(\alpha)$ tal que $\alpha \in (F_n)_1$, para cada $n \geq N(\alpha)$.

Teorema 24 Sean Δ una gráfica acotada y F_1, F_2, F_3, \dots una sucesión de subgráficas de Δ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = \Delta$. Denotamos por $A_n = A_{F_n}$ y $A = A_\Delta$ los correspondientes operadores de adyacencia.

Entonces los operadores A_n convergen fuertemente a A , es decir, para cada $x \in l^2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$.

Demostración. Denotamos las entradas de la matriz de adyacencia de F_m por m_{ij} ; más precisamente

$$m_{ij} = \begin{cases} \langle A_m e_i, e_j \rangle & \text{si } i, j \in (F_m)_0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Por teorema 22, $\|A\| \leq M_\Delta$ y $\|A_m\| \leq M_\Delta$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Sean $x = (x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios, definamos $x^{(m)} = (x_i^{(m)})_{i \in \mathbb{N}}$, donde

$$x_i^{(m)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq m \\ x_i & \text{si } i > m \end{cases}$$

Escojamos un $l \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\|x^{(l)}\| < \frac{\varepsilon}{2M_\Delta}$. Como las gráficas F_n convergen a Δ ; entonces podemos encontrar un número $L \in \mathbb{N}$ tal que $m_{ij} = a_{ij}$ para toda $m \geq L$ y cada $i \leq l$. Entonces para $m \geq L$, se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \|Ax - A_m x\| &= \|Ax^{(l)} - A_m x^{(l)}\| \\ &\leq \|Ax^{(l)}\| + \|A_m x^{(l)}\| \\ &\leq M_\Delta \|x^{(l)}\| + M_\Delta \|x^{(l)}\| \\ &\leq M_\Delta \frac{\varepsilon}{2M_\Delta} + M_\Delta \frac{\varepsilon}{2M_\Delta} = \varepsilon. \end{aligned}$$

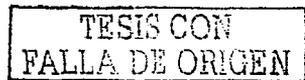
Por lo tanto tenemos, $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$ ■

Teorema 25 Sean Δ una gráfica acotada y F_1, F_2, F_3, \dots una sucesión de subgráficas que convergen a Δ . Entonces

$$\rho(\Delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(F_n). \quad (1)$$

Demostración. Como Δ es acotada. Por la proposición anterior $\{A_n\}$ converge fuertemente a A y por lo tanto, para cada $x \in l^2$ con $\|x\| = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle A_n x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle. \quad (2)$$



Podemos escoger a x tal que $|\langle Ax, x \rangle|$ esté arbitrariamente cerca de $\|A\|$, donde

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x \rangle| : \|x\| = 1\}.$$

Entonces de (2) y de que $\rho(\Delta) = \|A\|$, obtenemos

$$\rho(\Delta) = \|A\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \rho(F_n). \quad (3)$$

Ahora se demostrará que $\rho(\Delta) \geq \rho(F)$ para cualquier subgráfica finita F de Δ . Sea F' la gráfica inducida de Δ tal que tiene como conjunto de vértices $F'_0 = F_0$. Sabemos que $\rho(F) \leq \rho(F')$, ya que ambas gráficas son finitas. Sea x' un vector propio de norma uno, el cual corresponde al valor propio $\lambda = \rho(F')$ de F' , y sea x la inclusión de x' en l^2 . Entonces, como las matrices de adyacencia son no negativas,

$$\rho(\Delta) = \|A\| \geq \|Ax\| \geq \|A_{F'}x'\| = \rho(F') \geq \rho(F).$$

Si todas las gráficas F_1, F_2, \dots son finitas obtenemos

$$\rho(\Delta) \geq \sup\{\rho(F_n)/n : n \in \mathbb{N}\} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \rho(F_n). \quad (4)$$

Esto nos dice que $\|A\| = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|A_n\|$. Más aún,

$$\rho(\Delta) = \sup\{\rho(F) : F \text{ es subgráfica finita de } \Delta\}, \quad (5)$$

pues siempre podemos escoger subgráficas finitas que convergen a Δ .

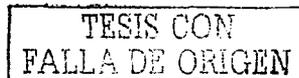
Ahora, como cualquier subgráfica de F_n es también subgráfica de Δ , concluimos por (5) que $\rho(F_n) \leq \rho(\Delta)$ también para subgráficas infinitas F_n de Δ . Por lo tanto (4) es cierto en el caso general. Por (3) y (4), se tiene el resultado. ■

Corolario 26 Sea Δ una gráfica acotada entonces:

(a)

$$\begin{aligned} \rho(\Delta) &= \sup\{\rho(F) : F \text{ es subgráfica finita de } \Delta\} \\ &= \sup\{\rho(F) : F \text{ es subgráfica de } \Delta\}. \end{aligned}$$

(b) Sean $\Delta' \subseteq \Delta$ gráficas (no necesariamente finitas), entonces $\rho(\Delta') \leq \rho(\Delta)$.



Sea Δ una gráfica conexa y acotada.

Recordemos que un camino (no orientado) de longitud m de u a v es una sucesión

$$\gamma = (z_0, \beta_1, z_1; \dots; z_{m-1}, \beta_m, z_m)$$

con $z_{i-1} \xrightarrow{\beta_i} z_i$ tal que $z_0 = u$ y $z_m = v$. Para cada camino γ definiremos formalmente γ^{-1} como $\gamma^{-1} = (z_m, \beta_m, z_{m-1}; \dots; z_1, \beta_1, z_0)$ (es decir, recorreremos γ en sentido contrario).

Otra manera de verlo es la siguiente:

Sea Δ una gráfica. Una orientación (s, e) de Δ , es una pareja de funciones $s, e : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$ tal que para cada arista $i \xrightarrow{\alpha} j$ tenemos que $\{i, j\} = \{s(\alpha), e(\alpha)\}$. Si $e(\alpha) = s(\alpha)$, entonces α es un lazo.

Un carcaj (o gráfica dirigida) es una pareja $(\Delta, (s, e))$, donde Δ es una gráfica y (s, e) es una orientación de Δ . Denotamos este carcaj por $\overrightarrow{\Delta}$ y llamamos a Δ la gráfica subyacente de $\overrightarrow{\Delta}$.

Sea $\overrightarrow{\Delta} = (\Delta, (s, e))$ un carcaj. Recordemos que la orientación de Δ está determinada por las funciones $s, e : \Delta_1 \rightarrow \Delta_0$.

Dada una arista $i \xrightarrow{\alpha} j$ con $s(\alpha) = i$ y $e(\alpha) = j$, definimos formalmente α^{-1} con $s(\alpha^{-1}) = j$ y $e(\alpha^{-1}) = i$. Un camino (no orientado) de longitud n de u a v es una sucesión $\gamma = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ tal que $\beta_i = \alpha_i$ ó α_i^{-1} para alguna arista α_i y $u = s(\beta_1), e(\beta_1) = s(\beta_2), \dots, e(\beta_n) = v$. Definimos $s(\gamma) = u$ y $e(\gamma) = v$.

Si A denota la matriz de adyacencia de Δ , las matrices potencia $A^n = (a_{uv}^{(n)})$, están bien definidas para $n \in \mathbb{N}$, $a_{uv}^{(n)}$ es el número de caminos de longitud n de u a v .

Teorema 27 Sea Δ una gráfica conexa y acotada. Entonces para cada $u, v \in \Delta_0$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_{uv}^{(n)}}$ existe y es igual a $\rho(\Delta)$, el radio espectral de Δ .

Demostración. Sea (F_n) una sucesión de subgráficas finitas de Δ , tal que $\Delta = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$, con cada F_n conexa y $F_n \subseteq F_{n+1}$. Entonces sabemos que (ver Teorema 25) $\rho(\Delta) = \sup \rho(F_n)$.

Sea $A_{F_n} = (a_{ij}^{(n)})$. Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq \rho(\Delta) - \rho(F_n) < \varepsilon.$$

Sabemos del caso finito que (ver [Ta])

$$\rho(F_n) = \sup_k \sqrt[k]{a_{ij}^{(n)(k)}}$$

Tomemos $m \in \mathbb{N}$ con

$$0 \leq \rho(F_n) - \sqrt[m]{a_{ij}^{(n)(m)}} < \varepsilon.$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Como $a_{ij}^{(m)} \geq a(F_n)_{ij}^{(m)}$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \rho(\Delta) - \sqrt[m]{a_{ij}^{(m)}} \\ &< (\rho(\Delta) - \rho(F)) + (\rho(F) - \sqrt[m]{a(F_n)_{ij}^{(m)}}) \\ &< 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\rho(\Delta) \leq \limsup_l \sqrt[l]{a_{ij}^{(l)}}$. La otra desigualdad se sigue de que en general $a_{ij} \leq \rho(\Delta)^l$ (pues $a_{ij}^{(l)} = a(F_m)_{ij}^{(l)}$ para m suficientemente grande). ■

Capítulo 2

LA CUBIERTA DE GALOIS DE UNA GRÁFICA.

En este capítulo estudiaremos las cubiertas de Galois de gráficas y sus principales propiedades, el material que desarrollaremos aquí nos permitirá establecer las bases para estudiar más propiedades espectrales de matrices de adyacencia de gráficas finitas e infinitas.

Este capítulo se basa principalmente en [PT, Ta].

Definición 28 Un morfismo $\varphi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ de gráficas es una función $\varphi : \overline{\Delta}_0 \rightarrow \Delta_0$ y $\varphi : \overline{\Delta}_1 \rightarrow \Delta_1$ tal que $\varphi(i \xrightarrow{\alpha} j) = \varphi(i) \xrightarrow{\varphi(\alpha)} \varphi(j)$.

Sea $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ un morfismo de gráficas, diremos que π es *sobre* si para cada arista $\alpha \in \Delta_1$, existe $\beta \in \overline{\Delta}_1$ tal que $\pi(\beta) = \alpha$.

Sea G un grupo de automorfismos de la gráfica $\overline{\Delta}$ actuando libremente en $\overline{\Delta}$, es decir, si para algún $g \in G$, existe $x \in \Delta_0$ (resp. $\alpha \in \Delta_1$) tal que $g(x) = x$ (resp. $g(\alpha) = \alpha$), entonces $g = 1$.

Definición 29 Un morfismo sobre, $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$, es una cubierta de Galois definida por el grupo G , si G actúa libremente sobre $\overline{\Delta}$ y se cumplen las siguientes dos propiedades:

- (i) $\pi g = \pi$ para cada $g \in G$.
- (ii) Para cada $x \in \overline{\Delta}_0$ (resp. $\alpha \in \overline{\Delta}_1$) $\pi^{-1}\pi(x) = Gx$ (resp. $\pi^{-1}\pi(\alpha) = G\alpha$).

Lema 30 Sea $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G . Supongamos que Δ es una gráfica finita. Entonces

- (a) $\overline{\Delta}$ es una gráfica acotada (ver Definición 21).
- (b) G es un grupo finitamente generado.

Demostración. (a) Basta observar que si $i \in \overline{\Delta}_0$, entonces $\deg_{\overline{\Delta}}(i) = \deg_{\Delta}(\pi(i)) < \infty$.

(b) La siguiente construcción sigue a [CoMc, B]. Denotemos las órbitas de G en $\overline{\Delta}_0$ por $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, donde $n = |\Delta_0|$. Veremos que existe una subgráfica conexa y plena W de $\overline{\Delta}$ tal que $|W \cap \Omega_i| = 1$, para $1 \leq i \leq n$.

Por inducción construiremos subgráficas conexas W_i de $\overline{\Delta}$, de forma que W_i tiene i vértices, $i \leq n$ y la intersección $W_i \cap \Omega_j$ tiene a lo más 1 vértice para toda $j = 1, \dots, n$. Entonces $W = W_n$ será la gráfica que buscamos.

Sea $u_0 \in \overline{\Delta}$, $W_1 := \{u_0\}$ y supongamos definida W_i , ($i < n$). Tenemos que $\pi(W_i)$ es una subgráfica conexa de Δ con i puntos. Luego, existen $\overline{u}_i \in \Delta_0 \setminus (\pi(W_i))_0$ y una arista $\overline{\alpha}_i$ tales que $\overline{u}_i \xrightarrow{\overline{\alpha}_i} x = \pi(x_i)$ con $x_i \in (W_i)_0$. Entonces existe una arista $u_i \xrightarrow{\alpha_i} x_i$ de forma que $\pi(\alpha_i) = \overline{\alpha}_i$. La subgráfica plena y conexa W_{i+1} de $\overline{\Delta}$ con vértices $(W_i)_0 \cup \{u_i\}$ intersecciona cada órbita Ω_j en a lo más 1 vértice.

Entonces $|W_0| = n$; $W_0 \cap g(W_0) = \emptyset$ si $g \neq 1$; $\overline{\Delta}_0 = \bigcup_{g \in G} g(W_0)$ (pues $|W_0 \cap \Omega_i| = 1$, $1 \leq i \leq n$, y G define a π).

Sea S el conjunto de todos los elementos $1 \neq g \in G$ tales que las subgráficas disjuntas W y $g(W)$ son adyacentes en $\overline{\Delta}$ (esto es, tales que existe una arista $u \xrightarrow{\alpha} v$ con $u \in W$ y $v \in g(W)$). En este caso escribimos $g(W) \text{---} W$. Como $\overline{\Delta}$ es acotada (por (a)) y W es finita, entonces S es finito. Más aún, Δ conexa implica que S genera a G , ya que $\pi^{-1}\pi(\alpha) = G\alpha$, $\alpha \in \overline{\Delta}_1$; $\pi^{-1}\pi(x) = Gx$, $x \in \overline{\Delta}_0$; y $g(W) \text{---} g'(W)$ si y sólo si $g^{-1}g' \in S$.

Por lo tanto, G es un grupo finitamente generado. ■

Lema 31 Sea $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción del grupo G . Sea (s, e) una orientación en Δ . Entonces existe una orientación $(\overline{s}, \overline{e})$ de $\overline{\Delta}$ que satisface:

- (i) $\pi\overline{s} = s\pi$ y $\pi\overline{e} = e\pi$;
- (ii) $\overline{s}g = g\overline{s}$ y $\overline{e}g = g\overline{e}$, para toda $g \in G$.

Demostración. Para cada arista $\alpha \in \Delta_1$, escogemos una arista $i \xrightarrow{\overline{\alpha}} j$ en $\overline{\Delta}_1$ tal que $\pi(\overline{\alpha}) = \alpha$. Definamos $\overline{s}(\overline{\alpha})$ y $\overline{e}(\overline{\alpha})$ con las siguientes propiedades: $\pi(\overline{s}(\overline{\alpha})) = s(\alpha)$ y $\pi(\overline{e}(\overline{\alpha})) = e(\alpha)$, $\{\overline{s}(\overline{\alpha}), \overline{e}(\overline{\alpha})\} = \{i, j\}$.

Para cada $g \in G$, tenemos $\overline{s}(g(\overline{\alpha})) = g(\overline{s}(\overline{\alpha}))$ y $\overline{e}(g(\overline{\alpha})) = g(\overline{e}(\overline{\alpha}))$.

Están bien definidas por construcción y por que si $g(\overline{\alpha}) = \overline{\alpha}$ entonces $g = 1$. ■

Sea $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción del grupo G . Fijemos (s, e) una orientación de Δ y $(\overline{s}, \overline{e})$ una orientación de $\overline{\Delta}$ que satisface las propiedades (i) y (ii) del lema anterior.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Para cada arista $\alpha \in \overline{\Delta}$, definamos $\pi(\alpha^{-1}) = \pi(\alpha)^{-1}$. Para un camino de longitud m , $\gamma = (z_0, \beta_1, z_1; \dots; z_{m-1}, \beta_m, z_m)$ en $\overline{\Delta}$, definimos $\pi(\gamma) = (\pi(z_0), \pi(\beta_1), \pi(z_1); \dots; \pi(z_{m-1}), \pi(\beta_m), \pi(z_m))$ un camino de longitud m en Δ .

Proposición 32 π tiene la propiedad del levantamiento único de caminos, esto es, para cada camino δ en Δ y cada vértice $i \in \overline{\Delta}_0$ con $\pi(i) = s(\delta)$, existe un único camino $\overline{\delta}$ en $\overline{\Delta}$ que satisface $\overline{\pi}(\overline{\delta}) = i$ y $\pi(\overline{\delta}) = \delta$.

Demostración. Por inducción es suficiente demostrar la propiedad del levantamiento único para caminos de longitud 1 (es decir, para aristas).

Existencia: Sea $u \xrightarrow{\alpha} v \in \Delta_1$ tal que $s(\alpha) = u$ y $e(\alpha) = v$. Sea $i \in \overline{\Delta}_0$, $\pi(i) = u$. Como π es sobre, existe una arista $a \xrightarrow{\gamma} b \in \overline{\Delta}_1$ con $\pi(a) = u$, por lo tanto, existe $g \in G$, con $g(a) = i$. Entonces $i \xrightarrow{g(\gamma)} g(b)$ es una arista en $\overline{\Delta}$ con $\pi(g(\gamma)) = \alpha$. Denotemos $\beta := g(\gamma)$ y $j := g(b)$.

Si $i = \overline{\pi}(\beta)$, entonces ponemos $\overline{\alpha} = \beta$. Si $i = \overline{\pi}(\beta)$, entonces $\pi(j) = v = e(\alpha) = \pi(\overline{\pi}(\beta)) = \pi(i)$, por lo tanto existe $h \in G$ tal que $h(j) = i$. Entonces $\overline{\alpha} = h(\beta)$ satisface $\overline{\pi}(\overline{\alpha}) = h(\overline{\pi}(\beta)) = i$.

Unicidad: Si $\alpha' \in \Delta_1$ es otra arista que satisface $\overline{\pi}(\alpha') = i$ y $\pi(\alpha') = \alpha$, entonces $g(\overline{\alpha}) = \alpha'$ para algún $g \in G$. Así obtenemos $i = \overline{\pi}(\alpha') = \overline{\pi}(g(\overline{\alpha})) = g(\overline{\pi}(\overline{\alpha})) = g(i)$, y como G actúa libremente sobre $\overline{\Delta}$, $g = 1$. ■

Corolario 33 Sea $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por el grupo G . Sean $\overline{A} = A_{\overline{\Delta}}(\overline{a}_{ij})$ (resp. $A = A_{\Delta} = (a_{ij})$) la matriz de adyacencia de $\overline{\Delta}$ (resp. Δ). Para cada $i, j \in \overline{\Delta}_0$ y $m \geq 1$ tenemos

$$\sum_{t: \pi(t) = \pi(j)} a_{it}^{(m)} = a_{\pi(i)\pi(j)}^{(m)}$$

y

$$\sum_{t: \pi(t) = \pi(i)} a_{tj}^{(m)} = a_{\pi(i)\pi(j)}^{(m)}$$

Donde $A^m = (a_{uv}^{(m)})$ es la matriz potencia de A . Recordemos que $a_{uv}^{(m)}$ es el número de caminos de longitud m de u a v en Δ .

Demostración. Sean $i, j \in \overline{\Delta}_0$. Denotemos por $\overline{W}_{(i,j)}^{(m)}$ (resp. $W_{(\pi(i),\pi(j))}^{(m)}$) el conjunto de todos los caminos de longitud m de i a j en $\overline{\Delta}$ (resp. de $\pi(i)$ a $\pi(j)$ en Δ). La Proposición 32 da una biyección

$$\bigcup_{t: \pi(t) = \pi(j)} \overline{W}_{(i,t)}^{(m)} \rightarrow W_{(\pi(i),\pi(j))}^{(m)}$$

por el levantamiento único de caminos. Y como las matrices potencia $\overline{A}^m = (\overline{a}_{ij}^{(m)})$ y $A^m = (a_{ij}^{(m)})$ están bien definidas (es decir, $\overline{a}_{ij}^{(m)}, a_{ij}^{(m)} < \infty$), $a_{ij}^{(m)}$ es el número de caminos de longitud m de i a j y las gráficas que consideramos siempre son acotadas.

Así tenemos que

$$\sum_{\pi(i)=\pi(j)} \overline{a}_{it}^{(m)} = a_{\pi(i)\pi(j)}^{(m)}$$

La otra igualdad es similar. ■

Ejemplo 34 a) Sea $\overline{\Delta}$ una gráfica y G un grupo de automorfismos de $\overline{\Delta}$ actuando libremente sobre $\overline{\Delta}$. Definamos la gráfica cociente $\overline{\Delta}/G$ como la gráfica cuyos vértices son las órbitas Gx , $x \in \overline{\Delta}_0$ y cuyas aristas son órbitas de la forma $G\alpha : Gx \rightarrow Gy$ para cada arista $x \xrightarrow{\alpha} y$ de $\overline{\Delta}$. Claramente el morfismo de gráficas $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \overline{\Delta}/G$, $\alpha \mapsto G\alpha$, es una cubierta de Galois definida por la acción de G .

(b) Sea G un grupo finitamente generado. Sea S un conjunto finito de generadores, tal que $1 \notin S$. La gráfica de Cayley $\Delta = (G, S)$ tiene como conjunto de vértices $\Delta_0 = G$ y para cada $g \in G$ y $s \in S$, una arista $g \xrightarrow{s} gs$. Entonces G es un grupo de automorfismos de Δ que actúa libremente sobre Δ . La gráfica cociente Δ/G es un bouquet de $|S|$ lazos. Observemos que Δ es gráfica regular (es decir, el grado de todos los vértices es el mismo).

Las siguientes proposiciones son versiones para gráficas de resultados bien conocidos en Topología Algebraica (ver por ejemplo [Ma, Pc]).

Proposición 35 Consideremos el diagrama conmutativo (ver fig.2.1) de cubiertas de Galois donde π está definido por la acción de un grupo G . Entonces,

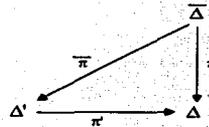


Figura 2.1:

- (i) $G = \{f \in \text{Aut}(\overline{\Delta}); \pi f = \pi\}$;
- (ii) Existe $N \triangleleft G$ tal que N define a $\overline{\pi}$ y G/N define a π' .

Recíprocamente,

Proposición 36 Sea $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G . Entonces si N es un subgrupo normal de G , existe un diagrama conmutativo de cubiertas de Galois como en la figura 2.1 donde N define a $\overline{\pi}$ y G/N define a π' .

Demostración. Sea Δ' la gráfica cociente $\overline{\Delta}/N$ (ver Ejemplo 34(a)), entonces G/N actúa libremente sobre Δ' . En efecto, si $\overline{y} \in G/N$ y $Nx \in \Delta'_0$ (resp. $N\alpha \in \Delta'_1$) son tales que $Nx = \overline{y}(Nx) := Ng(x)$ (resp. $N\alpha = \overline{y}(N\alpha) := Ng(\alpha)$) entonces existe $h \in N$ tal que $g(x) = h(x)$ (resp. $g(\alpha) = h(\alpha)$), luego, como G actúa libremente en $\overline{\Delta}$, $\overline{y} = \overline{1}$. Definimos $\overline{\pi} : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta'$ como en (Ejemplo 34(a)).

Construiremos $\pi' : \Delta' \rightarrow \Delta$ cubierta de Galois definida por la acción de G/N . Sea $Nx \in \Delta'_0$ (resp. $N\alpha \in \Delta'_1$), definamos $\pi'(Nx) = \pi(x)$ (resp. $\pi'(N\alpha) = \pi(\alpha)$). π' está bien definida y satisface $\pi'\overline{y} = \pi'$, $\overline{y} \in G/N$, $\pi'^{-1}\pi'(Nx) = G/N(Nx)$ (resp. $\pi'^{-1}\pi'(N\alpha) = G/N(N\alpha)$), pues π es cubierta de Galois. ■

Definición 37 Un grupo G es residualmente finito si y sólo si para cada $x \in G$, $x \neq 1$ existe un subgrupo normal N_x de índice finito en G con $x \notin N_x$.

Ejemplo 38 Como ejemplos de grupos residualmente finitos tenemos a los grupos libres, los grupos finitos, entre otros, ver [M2, Pe].

Definición 39 Sea $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G . Una factorización (finita) de π , es una cubierta de Galois $\pi' : \Delta' \rightarrow \Delta$ (con Δ' gráfica finita) de forma que existe un diagrama conmutativo de cubiertas de Galois como en la Figura 2.1.

Proposición 40 Sea $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo G residualmente finito donde Δ es una gráfica finita.

Entonces, dada $\Delta' \subseteq \overline{\Delta}$ una subgráfica finita de $\overline{\Delta}$, existe una factorización finita de $\pi = \pi'\overline{\pi}$, de forma que $\overline{\pi}| : \Delta' \rightarrow \overline{\Delta}$ es inyectiva. Como en la Figura 2.2.

Más aún, si $\Delta' \subseteq \overline{\Delta}$ es una subgráfica plena, entonces podemos encontrar dicha factorización finita de tal forma que $\overline{\pi}(\Delta') \subseteq \overline{\Delta}$ es subgráfica plena de $\overline{\Delta}$.

Demostración. a) Sea $S := \{g \in G; g \neq 1, g(\Delta') \cap \Delta' \neq \emptyset\}$, demostraremos que S es un conjunto finito. Supongamos que S es infinito, como Δ' es finita, existe $x \in \Delta'_0$ y $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ sucesión de elementos distintos en S y $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ en Δ'_0 tales que $g_m(y_m) = x$, otra vez como Δ' es finita existen $y \in \Delta'_0$ y una subsucesión $(y_{m_l})_{l \in \mathbb{N}}$ de $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tales que $y_{m_l} = y$, para toda l .

Tomemos $l \neq l'$, por lo anterior $g_{m_l}(y) = g_{m_{l'}}(y)$.

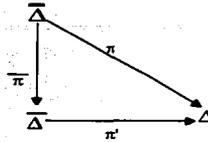


Figura 2.2:

Como G actúa libremente sobre $\overline{\Delta}$, tenemos que $g_{ml} = g_{ml}'$, una contradicción. Por lo tanto, S es un conjunto finito. Por Definición 37, existe $N \triangleleft G$ subgrupo normal de índice finito tal que $N \cap S = \emptyset$. Por proposición (36), obtenemos un diagrama conmutativo de cubiertas de Galois (como el de la Fig. 2.1) con $\overline{\pi}$ (resp. π') definida por N (resp. G/N).

b) Falta demostrar que $\overline{\pi} : \Delta' \rightarrow \Delta$ es inyectiva. En efecto, si $x \neq y \in \Delta'_0$ son tales que $\overline{\pi}(x) = \overline{\pi}(y)$ entonces $y \in Nx$ y existe $h \in N$ tal que $y = h(x)$, luego $h \in N \cap S = \emptyset$, contradicción.

c) Ahora, si $\Delta' \subseteq \overline{\Delta}$ es una subgráfica plena, escojamos $\Delta'' \subseteq \overline{\Delta}$ la subgráfica plena de $\overline{\Delta}$ cuyo conjunto de vértices es $\Delta'_0 \cup \{x \in \overline{\Delta}_0; \exists y \in \Delta'_0, y \xrightarrow{\alpha} x\}$. Entonces $\Delta' \subseteq \Delta''$ es una gráfica finita (pues Δ' lo es y $\overline{\Delta}$ es acotada), y por lo anterior, existe una factorización finita de π , de tal forma que $\overline{\pi} : \Delta'' \rightarrow \overline{\Delta}$ es inyectiva; por lo tanto, $\overline{\pi} : \Delta' \rightarrow \overline{\Delta}$ también lo es.

Además, $\overline{\pi}(\Delta')$ es subgráfica plena de $\overline{\Delta}$: pues supongamos que $x \xrightarrow{\alpha} y \in \overline{\Delta}$, $x, y \in (\overline{\pi}(\Delta'))_0$. Tomemos $\overline{x}, \overline{y} \in \Delta'_0$ tales que $\overline{\pi}(\overline{x}) = x$ y $\overline{\pi}(\overline{y}) = y$. Por la propiedad del levantamiento único de caminos (en $\overline{\pi}$), existe $\overline{x} \xrightarrow{\overline{\alpha}} z$ en $\overline{\Delta}$ (de hecho, en Δ'') tal que $\pi(\overline{x}) = \alpha$, entonces $\overline{\pi}(z) = y = \overline{\pi}(\overline{y})$, pero $\overline{\pi}$ es inyectiva en Δ'' , por lo tanto $\overline{y} = z$, y como Δ' es plena en $\overline{\Delta}$, entonces $\overline{x} \in \Delta'_1$, esto es $\alpha \in \overline{\pi}(\Delta')$. ■

Definición 41 Decimos que una cubierta de Galois $\pi : \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ definida por un grupo G es cubierta universal de Δ , si cualquier otra cubierta de Galois $\pi' : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ es una factorización de π . Es decir, existe una cubierta de Galois $\overline{\pi} : \tilde{\Delta} \rightarrow \overline{\Delta}$ con $\pi' \overline{\pi} = \pi$. Además, si $x \in \tilde{\Delta}_0$ y $y \in \overline{\Delta}_0$ son tales que $\pi(x) = \pi'(y)$, entonces existe una única \overline{x} , con $\overline{\pi}(x) = y$.

Observemos que una cubierta universal de Δ es única hasta isomorfía.

Sea Δ una gráfica acotada, fijemos una orientación $\overline{\Delta}$ para Δ . Para cada arista $x \xrightarrow{\alpha} y$ en Δ con orientación $x \xrightarrow{\alpha} y$ en $\overline{\Delta}$, llamamos $x \xrightarrow{\alpha^{-1}}$ y a la flecha de orientación contraria. Un camino en

Δ de x a y es una sucesión

$$\gamma = (x|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m|y),$$

de forma que β_i es α o α^{-1} para alguna flecha α en $\overline{\Delta}$ y el final de β_i es el principio de β_{i+1} , con x el principio de β_1 y y el final de β_m . Este camino tiene longitud m . Definimos el producto de dos caminos $\gamma_1 = (x|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m|y)$, $\gamma_2 = (z|\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_m|w)$, como

$$\gamma_2\gamma_1 = (x|\beta_1, \dots, \beta_m, \beta'_1, \dots, \beta'_m|w) \text{ si } z = y.$$

Sea $x \in \Delta_0$. Tomemos C_x el conjunto de todos los caminos (no orientados) γ de x a x , es decir $\gamma = (x|\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m-1}, \beta_m|x)$.

Denotamos por \sim la relación de equivalencia en C_x inducida por las siguientes relaciones elementales:

(a) Si $\gamma \in C_x$, entonces $\gamma\gamma^{-1} \sim \tau_x$ y $\gamma^{-1}\gamma \sim \tau_x$, donde τ_x es el camino trivial en x (es decir, $\tau_x = (x||x)$).

(b) Si $u \sim v$, entonces $w'uw \sim w'vw$.

La relación \sim se llama *homotopía*.

Esta relación y el producto de caminos son compatibles en el siguiente sentido:

Si $u_0 \sim u_1$ y $v_0 \sim v_1$, entonces $u_0v_0 \sim u_1v_1$.

Claramente, el conjunto de las clases de equivalencia de todos los caminos de x a x forma un grupo libre. Este grupo se llama el *grupo fundamental* de Δ (con base x) y se denota por $\Pi(\Delta, x)$.

Si Δ es conexa, si $x, y \in \Delta_0$, entonces $\Pi(\Delta, x)$ es isomorfo a $\Pi(\Delta, y)$.

Definamos el grupo fundamental de Δ , $\Pi_1(\Delta) = \Pi(\Delta, x)$ para cualquier $x \in \Delta_0$.

Así de lo anterior tenemos que:

Teorema 42 *El grupo fundamental de una gráfica conexa Δ es un grupo libre. (En particular, es residualmente finito ver ejemplo 38)*

Como referencia sobre grupos fundamentales ver por ejemplo [Ma].

Capítulo 3

RADIO ESPECTRAL Y CUBIERTAS DE GALOIS

Este capítulo veremos el tema principal de este trabajo. Vamos a ver cómo la cubierta de Galois, $\pi : \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ definida por el grupo G , se relaciona con el radio espectral de las gráficas $\bar{\Delta}$ y Δ , y el importante papel que juega el grupo G .

Las referencias de este capítulo son [PT, Ta, MO, BM].

Empezaremos dando algunos ejemplos de cubiertas de Galois y sus radios espectrales.

Ejemplo 43 (a) Sea Δ la gráfica de la fig.3.1.

Sea $n \in \mathbb{N}$, consideremos las gráficas de la fig.3.2. Existen únicos morfismos que son cubiertas de Galois $\pi_n : \Delta_n \rightarrow \Delta$ definidos por \mathbb{Z}_n , y $\pi_\infty : \Delta_\infty \rightarrow \Delta$ definido por \mathbb{Z} .

Es conocido que $\text{Spec}(\Delta) = \{2\}$, $\text{Spec}(\bar{\Delta}_n) = \{2 \cos \frac{2\pi}{n} j; j = 1, \dots, n\}$, ver [CDS](2.1).

Como veremos después $\rho(\Delta) = \rho(\Delta_n) = \rho(\Delta_\infty) = 2$.

(b) Consideremos el morfismo de gráficas de la fig.3.3. Donde los puntos indicados por 1 (resp. 2) son enviados a a (resp. a b). Por tanto, $\pi : \Delta \rightarrow \Delta'$ es una cubierta de Galois definida por



Figura 3.1:

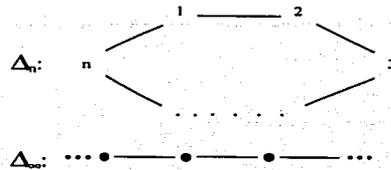


Figura 3.2:

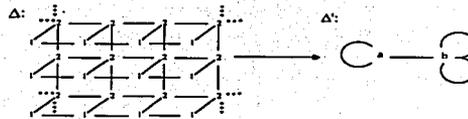


Figura 3.3:

la acción de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. El radio espectral de Δ es la raíz maximal del polinomio $x^2 - 6x + 7$, entonces $\rho(\Delta') = 3 + \sqrt[3]{2}$, y como veremos después $\rho(\Delta) = 3 + \sqrt[3]{2}$.

(c) Sea G el grupo libre en dos generadores a, b . Sea Δ la gráfica de Cayley $\Delta(G, \{a, b\})$ (ver fig. 3.4). Por el ejemplo (a) de la pág. 24, tenemos que $\pi: \Delta \rightarrow \Delta'$ es una cubierta de Galois.

Entonces $\rho(\Delta') = 4$ y $\text{Spec}(\Delta) = [-2\sqrt[3]{3}, 2\sqrt[3]{3}]$ (ver [MW]). En particular $\rho(\Delta) < \rho(\Delta')$.

Proposición 44 Sea $\pi: \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois. Entonces

$$\rho(\overline{\Delta}) \leq \rho(\Delta) \leq \rho(\overline{\Delta})^2.$$

Demostración. (a) Sean $u \in \Delta_0$ e $i \in \overline{\Delta}_0$ tales que $\pi(i) = u$. Por Corolario 33, $\overline{a_{ii}^{(m)}} \leq a_{uu}^{(m)}$. Ahora por Teorema 27, tenemos

$$\rho(\overline{\Delta}) = \limsup_m \sqrt[m]{\overline{a_{ii}^{(m)}}} \leq \limsup_m \sqrt[m]{a_{uu}^{(m)}} = \rho(\Delta).$$

(b) Sean u e i como antes. Con la misma notación de la demostración del Corolario 33, definimos la función $\varphi: W_{(u,u)}^{(m)} \rightarrow \overline{W}_{(i,i)}^{(2m)}$. Para $\gamma = (x_0 | \beta_1, \dots, \beta_m | x_m) \in W_{(u,u)}^{(m)}$ tomamos un levantamiento

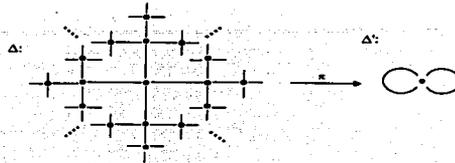


Figura 3.4:

de γ en $\overline{\Delta}$,

$$\overline{\gamma} = (\overline{x}_0 | \overline{\beta}_1, \dots, \overline{\beta}_m | \overline{x}_m) \in \overline{W}_{(i,j)}^{(m)}.$$

Escribimos $\overline{\gamma} =: (\overline{\beta}_1, \dots, \overline{\beta}_m)$ si no hay confusión.

Definimos $\varphi(\gamma) = (\overline{\beta}_1, \dots, \overline{\beta}_m, \overline{\beta}_m^{-1}, \dots, \overline{\beta}_1^{-1})$.

Claramente φ es inyectiva. Entonces por Teorema 27,

$$\begin{aligned} \rho(\Delta) &= \limsup_m \sqrt[m]{a_u^{(m)}} \\ &\leq \limsup_m \sqrt[m]{\overline{a}_{ii}^{(2m)}} \\ &= \limsup_m \sqrt[2m]{\overline{a}_{ii}^{(2m)}} \leq \rho(\overline{\Delta})^2. \end{aligned}$$

■

Proposición 45 Sea $\pi : \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por el grupo G . Si $\overline{\Delta}$ es una gráfica finita, entonces

- (a) $\text{Spec}(\Delta) \subseteq \text{Spec}(\overline{\Delta})$. Más aún, el polinomio $\det(\lambda I - A_\Delta)$ divide a $\det(\lambda I - A_{\overline{\Delta}})$.
 (b) $\rho(\Delta) = \rho(\overline{\Delta})$.

Demostración. (a) Sean $\overline{A} = A_{\overline{\Delta}} = (\overline{a}_{ij})$ y $A = A_\Delta = (a_{ij})$ las respectivas matrices de adyacencia. Observemos que $\overline{\Delta}$ finita implica que Δ es finita. Para probar el resultado es suficiente construir una base de $\mathbb{C}^{\overline{\Delta}_0}$ donde la matriz \overline{A} tome la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} A & * \\ 0 & * \end{bmatrix}.$$

Para cada $s \in \Delta_0$ definimos el vector $v^{(s)} \in \mathbb{C}^{\overline{\Delta}_0}$ tal que

$v_j^{(s)} := 1$ si $\pi(j) = s$ y 0 de otro caso. Claramente, los vectores $v^{(s)}$ ($s \in \Delta_0$) son linealmente independientes. Más aún, por Corolario 33,

$$(\overline{Av}^{(s)})_j = \sum_{k \in \Delta_0} \overline{a}_{jk} v_k^{(s)} = \sum_{\pi(k)=s} \overline{a}_{jk} = a_{\pi(j)s}.$$

Por lo tanto, $\overline{Av}^{(s)} = \sum_{t \in \Delta_0} a_{st} v^{(t)}$, es decir, los vectores $v^{(s)}$ ($s \in \Delta_0$) son una base de un subespacio de $\mathbb{C}^{\overline{\Delta_0}}$ invariante bajo \overline{A} , así obtenemos (a).

(b) Es consecuencia de la Proposición 44. ■

Proposición 46 Sea $\pi: \overline{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por la acción de un grupo finito G . Donde Δ no necesariamente es una gráfica finita. Entonces $\rho(\overline{\Delta}) = \rho(\Delta)$.

Demostración. Sea $(F_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subgráficas finitas y plenas de $\overline{\Delta}$ tal que $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = \overline{\Delta}$. Sea $F'_m = \pi(F_m)$ la subgráfica finita de Δ obtenida como la imagen de F_m . Entonces $\lim_{m \rightarrow \infty} F'_m = \Delta$.

Consideremos \hat{F}_m , la subgráfica inducida de $\overline{\Delta}$ cuyo conjunto de vértices es $G(F_m)_0$. \hat{F}_m es finita, pues F_m es finita y el grupo G es finito. La restricción $\pi|: \hat{F}_m \rightarrow F'_m$ es una cubierta de Galois definida por G . Entonces por Teorema 25 y Proposición 44, se tiene que

$$\rho(\Delta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(\hat{F}_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} \rho(F'_m) = \rho(\Delta).$$

■

3.1. La constante isoperimétrica y el crecimiento de grupos

Definición 47 (a) Sea Δ una gráfica y $X \subseteq \Delta_0$, la frontera ∂X de X es el conjunto de aristas en Δ que tienen un vértice en X y el otro en $\Delta_0 \setminus X$.

(b) La constante isoperimétrica $i(\Delta)$ de Δ es una medida de la expansión de la gráfica. Se define como

$$i(\Delta) = \inf \left\{ \frac{|\partial X|}{|X|} : X \subseteq \Delta_0, X \text{ es un subconjunto finito de } \Delta_0 \right\},$$

si Δ es una gráfica infinita. Si Δ es finita,

$$i(\Delta) = \min \left\{ \frac{|\partial X|}{|X|} : X \subseteq \Delta_0, |X| \leq \frac{1}{2} |\Delta_0| \right\}.$$

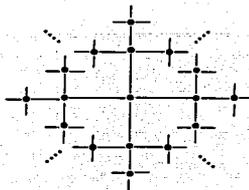


Figura 3.5:

Ejemplo 48 (a) Sea $\Delta_n : 1-2-3-\dots-n$, $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} i(\Delta_n) = 0.$$

(b) Sea $\tilde{\Delta}$ como en la fig 3.5. De [M1] sabemos que

$$i(\tilde{\Delta}) \geq \frac{4^2(4 - 2\sqrt[3]{3})}{4^2 - 4 - (4 - 2\sqrt[3]{3})} > 1.$$

Si F es una subgráfica de Δ , denotamos por $int(F)$ al conjunto de puntos interiores de F . Esto es, sea $i \in F_0$, $i \in int(F)$ si y sólo si para cada arista $i-j$ en Δ , $j \in F_0$.

Sea Δ una gráfica k -regular, (es decir, $deg(x) = k, \forall x \in \Delta_0$). Sabemos de [M1] que: $i(\Delta) = 0$ si y sólo si $\rho(\Delta) = k$. Es por esto que estamos interesados en estudiar gráficas Δ , con $i(\Delta) = 0$.

Es por esto que nos interesa la siguiente clasificación de grupos manejables G (ver [P, Pi]).

Sea G un grupo finitamente generado, le asociamos la topología discreta, así G es un grupo localmente compacto. Además denotemos por $| \cdot |$ la medida dada por la cardinalidad.

Un grupo localmente compacto G es llamado grupo *manejable* si este admite una media invariante sobre $L^\infty(G)$ (ver [Pi]). Pero como esto no nos brinda la información que estamos buscando, no entraremos en detalles.

Sean U, V conjuntos. definimos la diferencia simétrica de conjuntos, $U\Delta V = (U \setminus V) \cup (V \setminus U)$, donde $U \setminus V = \{x \in U : x \notin V\}$.

Las condiciones de Følner (ver [Pi]):

Sea G un grupo localmente compacto. Lo siguiente es equivalente:

(i) G es manejable.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

(ii) Para cada subconjunto finito S de G y para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto $U \subseteq G$ medible tal que $0 < |U| < \infty$ y $\frac{|aU \Delta U|}{|U|} < \varepsilon$ para cada $a \in S$.

(iii) Para cada subconjunto finito S de G y para cada $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto $U \subseteq G$ medible tal que $0 < |U| < \infty$ y $\frac{|SU \Delta U|}{|U|} < \varepsilon$.

Proposición 49 Sea G un grupo finitamente generado, localmente compacto con la topología discreta, S un conjunto finito de generadores y $\Gamma = (G, S)$ la gráfica de Cayley de G y (ver Ejemplo 34, pág 24) S . Entonces G es manejable si y sólo si $i(\Gamma) = 0$.

Demostración. Supongamos que el grupo G es manejable.

Para cada subconjunto finito U de G tenemos $|\partial U| \leq 2|S_0 U \setminus U|$, donde $S_0 = S \cup S^{-1}$. Así $\frac{|\partial U|}{|U|} \leq 2 \frac{|S_0 U \setminus U|}{|U|}$, ahora por el inciso (ii) de las condiciones de Følner, para todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto medible U de G tal que:

$0 < |U| < \infty$ y $\frac{|S_0 U \setminus U|}{|U|} < \frac{\varepsilon}{2}$. Por lo tanto existe U finito tal que, para todo $\varepsilon > 0$ tenemos que $\frac{|\partial U|}{|U|} < \varepsilon$, es decir, $i(\Gamma) = 0$.

Ahora supongamos que $i(\Gamma) = 0$, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un subconjunto finito U de G tal que $\frac{|\partial U|}{|U|} < \varepsilon$. Por el inciso (i) de las condiciones de las condiciones de Følner, basta demostrar que para cada $a \in G$ y para todo $\varepsilon > 0$, existe un subconjunto $U \subseteq G$ medible tal que $0 < |U| < \infty$ y $\frac{|aU \Delta U|}{|U|} < \varepsilon$.

Ahora como G es finitamente generado y $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ es un conjunto finito de generadores, para cada $a \in G$, $a = s_1^{r_1} \dots s_n^{r_n}$.

Afirmamos que $|aU \setminus U| \leq \sum_{i=1}^n r_i |s_i U \setminus U|$. Esta afirmación se demuestra fácilmente por inducción, observando que:

$$\begin{aligned} a_n U &\subseteq (a_n U \setminus U) \cup U \\ a_{n-1} a_n U &\subseteq a_{n-1} (a_n U \setminus U) \cup a_{n-1} U \\ &\subseteq a_{n-1} (a_n U \setminus U) \cup (a_{n-1} U \setminus U) \cup U \end{aligned}$$

y así sucesivamente obtenemos

$$a_1 \dots a_n U \subseteq a_1 \dots a_{n-1} (a_n U \setminus U) \cup \dots \cup a_1 (a_2 U \setminus U) \cup a_1 U.$$

Por lo tanto tenemos

$$a_1 \dots a_n U \setminus U \subseteq a_1 \dots a_{n-1} (a_n U \setminus U) \cup \dots \cup a_1 (a_2 U \setminus U) \cup a_1 U \setminus U,$$

y como $f : b(a_n U \setminus U) \rightarrow (a_n U \setminus U)$, $ba_n u \mapsto a_n u$ es una función inyectiva tenemos que

$$|a_1 \dots a_n U \setminus U| \leq \sum_{i=1}^n |a_i U \setminus U|. \text{ Por lo tanto } |aU \setminus U| \leq \sum_{i=1}^n r_i |s_i U \setminus U|.$$

Tomando una U conveniente y observando que $|S_0 U \setminus U| \leq |\partial U|$, podemos concluir que $\frac{|aU \setminus U|}{|U|} < \varepsilon/2$. Sólo nos falta probar que $\frac{|U \setminus aU|}{|U|} < \varepsilon/2$, para esto basta observar que la siguiente es una función inyectiva, $g : U \setminus aU \rightarrow a^{-1}U \setminus U$, $u \mapsto a^{-1}u$. ■

Consideremos la cubierta $\pi : \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$, con Δ finita. Recordemos que Δ es una gráfica acotada, G un grupo finitamente generado (ver Lema30). También recordemos que:

$$M_\Delta = \sup\{\deg(x) : x \in \Delta_0\} < \infty.$$

Denotemos las órbitas de G en $\bar{\Delta}_0$ por $\Omega_1, \dots, \Omega_n$. Por la demostración del Lema30, existe una subgráfica conexa y plena W de $\bar{\Delta}$ tal que $|W \cap \Omega_i| = 1$, para $1 \leq i \leq t$, con $|W_0| = t$; además si S es el conjunto de todos los elementos $1 \neq g \in G$ tales que las subgráficas disjuntas W y $g(W)$ son adyacentes en $\bar{\Delta}$, (esto es, existen $v \in W_0$, $u \in (g(W))_0$ y $v \xrightarrow{\alpha} u$ en $\bar{\Delta}$, escribimos $W \xrightarrow{\alpha} g(W)$), entonces S es finito y genera a G .

Lema 50 Con la notación anterior, $i(\Delta) \leq M_\Delta i(\Gamma)$.

Demostración. Sea F una subgráfica inducida finita de Γ . Consideremos la subgráfica inducida L de Δ tal que tiene como vértices $L_0 = \bigcup_{g \in F_0} g(W_0)$. Entonces tenemos que $|L_0| \geq t |F_0|$.

Ahora consideremos la función $\varphi : L_0 \setminus \text{int}(L) \rightarrow F_0 \setminus \text{int}(F)$, $a \mapsto g_a$, tal que $a \in g_a(W_0)$. Esta función está bien definida: si $a \in L_0 \setminus \text{int}(L)$, existe una arista $a \xrightarrow{\alpha} b$ con $b \notin L_0$. Por lo tanto $g_a^{-1}g_b \in S$, y tenemos una arista $g_a \xrightarrow{\alpha} g_b$ en Γ . Y como $b \notin L_0$, entonces $g_b \notin F_0$.

Claramente $\varphi^{-1}(g) \subseteq g(W_0)$. Por lo tanto $|L_0 \setminus \text{int}(L)| \leq t |F_0 \setminus \text{int}(F)|$. Tenemos

$$|\partial L| \leq M_\Delta |L_0 \setminus \text{int}(L)| \leq M_\Delta t |F_0 \setminus \text{int}(F)| \leq M_\Delta t |\partial F|.$$

■

En particular, si $i(\Gamma) = 0$ entonces $i(\Delta) = 0$ y podemos encontrar una sucesión de subgráficas finitas $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de Δ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \Delta$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial L_n|}{|L_n|} = 0$.

Teorema 51 Sea Δ una gráfica conexa, finita y $\pi : \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$ una cubierta de Galois definida por un grupo manejable G , entonces:

- (a) $\text{Spec}(\Delta) \subseteq \text{Spec}(\bar{\Delta})$
- (b) $\rho(\Delta) = \rho(\bar{\Delta})$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Demostación. Sean $\bar{A} = A_{\bar{\Delta}} = (\bar{a}_{ij})$, $A = A_{\Delta} = (a_{ij})$, y $l = |\Delta_0|$.

(a) Sea $\lambda \in \text{Spec}(\Delta)$. Demostraremos que $\lambda \in \text{Spec}(\bar{\Delta})$. Para este propósito construiremos una sucesión $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ en l^2 con $\|y^{(n)}\| = 1$ y tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Ay^{(n)} - \lambda y^{(n)}\| = 0$.

Como G es manejable, por Lema50, y Proposición49, $i(\bar{\Delta}) = 0$, entonces sea $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de subgráficas plenas y finitas de $\bar{\Delta}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\partial L_n|}{|L_n|} = 0$ y la función

$$\Delta_0 \rightarrow \mathbb{N}, s \mapsto |\pi^{-1}(s) \cap (L_n)_0| \quad (1)$$

es constante para cada $n \in \mathbb{N}$, ver demostración de Lema50 y la notación anterior a este.

Como Δ es una gráfica finita, podemos encontrar un vector $x \gg 0$ ($x_i > 0$) $\forall i$ que satisfice $Ax = \lambda x$ y $\|x\| = 1$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $x^{(n)} \in l^2$ tal que $x_i^{(n)} = x_{\pi(i)}$ si $i \in (L_n)_0$ y $x_i^{(n)} = 0$ de otra forma. Entonces $y^{(n)} = \frac{x^{(n)}}{\|x^{(n)}\|} \in l^2$ y $\|y^{(n)}\| = 1$. Para $i \in \text{int}(L_n)$ tenemos que $\bar{a}_{ij} = 0$ para cada $j \notin (L_n)_0$. Así,

$$\begin{aligned} (\bar{A}x^{(n)})_i &= \sum_{j \in (L_n)_0} \bar{a}_{ij} x_j^{(n)} = \sum_{s \in \Delta_0} \left(\sum_{\pi(j)=s} \bar{a}_{ij} \right) x_s \\ &= \sum_{s \in \Delta_0} a_{s\pi(i)} x_s = (Ax)_{\pi(i)} = \lambda x_i^{(n)}. \end{aligned}$$

Si $(Ax^{(n)})_i \neq \lambda x_i^{(n)}$, entonces $i \in (L_n)_0 \setminus \text{int}(L_n)$ ó $i \notin (L_n)_0$ pero existe $j \in (L_n)_0 \setminus \text{int}(L_n)$ tal que $\bar{a}_{ji} x_j^{(n)} \neq 0$, (pues si $i \notin (L_n)_0$, $x_i^{(n)} = 0$; pero $\bar{A}(x^{(n)})_i \neq 0$). En ambos casos

$$|(\bar{A}x^{(n)})_i - \lambda x_i^{(n)}| \leq tM_{\bar{\Delta}}. \quad (2)$$

En efecto, si $i \in (L_n)_0 \setminus \text{int}(L_n)$, entonces $(\bar{A}x^{(n)})_i - \lambda x_i^{(n)} = - \sum_{s \in \Delta_0} \left(\sum_{\substack{\pi(j)=s \\ j \notin (L_n)_0}} \bar{a}_{ij} \right) x_s$. El otro caso es similar.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \|\bar{A}x^{(n)} - \lambda x^{(n)}\| &= \sqrt{\sum_{i \notin \text{int}(L_n)} |(\bar{A}x^{(n)})_i - \lambda x_i^{(n)}|^2} \\ &\leq \frac{tM_{\bar{\Delta}}}{(2)} \sqrt{|(L_n \setminus \text{int}(L_n))_0|} \\ &\leq tM_{\bar{\Delta}} \sqrt{2} \frac{|\partial(L_n)_0|}{|L_n|}. \end{aligned}$$

Por (1), como $\|x\| = 1$, tenemos que $\|x^{(n)}\|^2 = \frac{|(L_n)_0|}{|\Delta_0|} \sum_{s \in \Delta_0} |x_s|^2 = \frac{|(L_n)_0|}{|\Delta_0|}$. Entonces obtenemos

$$\|\bar{A}y^{(n)} - \lambda y^{(n)}\| \leq \sqrt{2} tM_{\bar{\Delta}} \frac{|\partial(L_n)_0|}{|L_n|}.$$

Por lo tanto, $\lambda \in \text{Spec}(\overline{\Delta})$.

(b) En particular, $\rho(\Delta) \in \text{Spec}(\overline{\Delta})$ y por Proposición 44, tenemos que $\rho(\Delta) = \rho(\overline{\Delta})$. ■

Como veremos en el capítulo cuatro, el grupo libre en 2 generadores no es manejable. Sin embargo podemos calcular explícitamente el radio espectral de su gráfica de Cayley. Como veremos a continuación $\rho(\Delta) = 2\sqrt[3]{3}$.

3.2. Divisores Frontales

Todo el material que se desarrolla a continuación, acerca de divisores frontales está basado en [MO].

Sea Δ una gráfica localmente finita conexa, y sea $D = (d_{ij})$ una matriz con coeficientes enteros. Decimos que D es un divisor frontal de Δ si existe una partición de Δ_0 en clases V_1, V_2, V_3, \dots tales que

(1) Para cada par i, j y cada $v \in V_i$ existen exactamente d_{ij} vértices en V_j que son adyacentes con v , y

(2) Para cada i , el conjunto V_i es finito.

Sea Δ una gráfica finita, $\theta = \{C_1, C_2, \dots, C_s\}$ una partición de $\Delta_0 = \{1, 2, \dots, n\}$. Definimos la matriz característica P de θ , por $P_{xj} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in C_j \\ 0 & \text{si } x \notin C_j \end{cases}$.

En el caso en que la gráfica Δ es finita tenemos el siguiente resultado:

Proposición 52 Sea Δ una gráfica finita. Si Δ tiene un divisor frontal D (D asociado a la partición θ) entonces:

(a) Si A es la matriz de adyacencia de Δ , entonces $AP = PD$.

(b) El polinomio característico de A , φ_D , es divisor de φ_A , es decir, el espectro de A contiene al espectro de D .

Demostración. (a) $(AP)_{xj} = \sum_{y \in \Delta_0} A_{xy} P_{yj} = \sum_{\substack{x, y \in C_j \\ (x, y) \in \Delta_1}} A_{xy}$ (donde $(x, y) \in \Delta_1$ significa que x, y son adyacentes en Δ).

Ahora como D es un divisor frontal, $(AP)_{xj} = (AP)_{yj} \forall x, y \in C_i$.

Finalmente como, $(PD)_{xj} = \sum_{k=1}^s P_{xk} D_{kj} = D_{ij} = \sum_{\substack{x, y \in C_j \\ (x, y) \in \Delta_1}} A_{xy}$.

(b) Notemos que p_1, \dots, p_k las columnas de P , son linealmente independientes en \mathbb{R}^n . Sea $p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n$ una base de \mathbb{R}^n .

Como $AP = PD$, tenemos $Ap_i = \sum D_{ji}p_j$. Así la matriz A en la base $p_1, \dots, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n$ es

$$\begin{bmatrix} D & * \\ 0 & X \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $\varphi_A(t) = \det(tI - A) = \det(tI_k - D) \det(tI_{n-k} - X)$. ■

Para gráficas infinitas existe un resultado similar.

Teorema 53 (ver [MO]) Sea Δ una gráfica acotada, D un divisor frontal de Δ , D^\sim la matriz determinada por $(D^\sim)_{ij} = \sqrt{\frac{n_i}{n_j}} D_{ij}$, donde n_k es la cardinalidad del conjunto V_k , y $k = 1, 2, 3, \dots$. Entonces $\text{Spec}(D^\sim) \subseteq \text{Spec}(\Delta)$.

Recordemos que una gráfica Δ es regular por distancia si para cada $i, j, k \in \mathbb{N}$ y para cada par de vértices $x, y \in \Delta_0$ que están a distancia i , el número de vértices $z \in \Delta_0$ para los cuales $d(x, z) = j$ y $d(z, y) = k$ (d es la distancia en Δ) es independiente de x, y . Denotamos este número por p_{jk}^i .

Sea Δ una gráfica regular por distancia, sin lazos ni aristas múltiples, con parámetros p_{jk}^i descritos anteriormente. Denotemos por n_i el número de vértices que están a distancia i de un vértice fijo $x \in \Delta_0$. Notese que n_i es independiente de x .

Supongamos que los vértices de Δ están numerados, $\Delta_0 = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$. Definamos matrices de ceros y unos A_0, A_1, A_2, \dots por $(A_k)_{ij} = 1$ si $d(v_i, v_j) = k$, y 0 de otra forma. Como Δ no tiene lazos ni aristas múltiples, A_1 es la matriz de adyacencia de Δ .

Ahora definamos matrices infinitas P_0, P_1, P_2, \dots con entradas $(P_k)_{ij} = p_{jk}^i$ y matrices $P_0^\sim, P_1^\sim, P_2^\sim, \dots$ con entradas $(P_k^\sim)_{ij} = \left(\frac{n_i}{n_j}\right)^{\frac{1}{2}} p_{jk}^i$.

Tomemos la siguiente gráfica $\Delta^{(k)}$, tiene como vértices los vértices de Δ y unimos dos vértices $x, y \in \Delta_0^{(k)}$ con una arista si $d(x, y) = k$ en Δ . Consideremos a A_k como la matriz de adyacencia de $\Delta^{(k)}$. Fijemos un vértice arbitrario $x \in \Delta_0^{(k)}$, y para cada $i = 0, 1, 2, \dots$ sea V_i el conjunto de vértices que están a distancia i de x en Δ . Es fácil verificar que la matriz P_k es un divisor frontal de $\Delta^{(k)}$ correspondiente a la partición $\Delta_0^{(k)} = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup \dots$. Entonces por Teorema 53 vemos que $\text{Spec}(P_k^\sim) \subseteq \text{Spec}(A_k)$. Más aún:

Teorema 54 (Teorema 2.6 de [MO]) Sea Δ una gráfica regular por distancia, localmente finita. Entonces para cada k , se tiene que $\text{Spec}(P_k^\sim) = \text{Spec}(A_k)$.

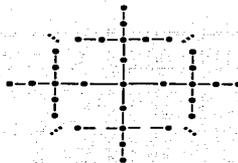


Figura 3.6:

Ahora vamos a usar este teorema para determinar el espectro de ciertas gráficas regulares por distancia.

Sea T un árbol con las siguientes características:

Los vértices de T se dividen en dos conjuntos:

- (a) T_{v_1} el conjunto de vértices de T que tienen valencia $s + 1$.
- (b) T_{v_2} el conjunto de vértices que tienen valencia $\frac{r}{s}$.
- (c) Si $x, y \in T_{v_i}$, $i = 1, 2$, entonces x, y no son adyacentes.

Para cada par de números naturales r, s tal que s divide a r , construimos la gráfica $T(r, s)$.

La gráfica $T(r, s)$ se obtiene del árbol T como sigue:

El conjunto de vértices de $T(r, s)$ es T_{v_2} , y unimos a dos vértices $x, y \in T(r, s)$ si x, y están a distancia dos en T .

Ejemplo: Así $T(4, 1)$ es la gráfica de la fig.3.5 y se obtiene del árbol de la fig.3.6.

Es fácil ver que $n_0 = 1$, y para cada $i > 0$, $n_i = r(r-s)^{i-1}$. Como $P_1^{-1} = (s-1)I + (r-s)^{\frac{1}{2}}R$, donde I es la matriz identidad y

$$R = \begin{bmatrix} \delta & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \rho & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \end{bmatrix},$$

donde $\rho = \left[\frac{r}{(r-s)}\right]^{\frac{1}{2}}$ y $\delta = -\frac{(s-1)}{(r-s)^{\frac{1}{2}}}$.

Sea λ un valor propio de R , $x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2$ el correspondiente vector propio. Es fácil probar que $x_k = a\mu^{k-1}$, $k \geq 2$, para algún μ tal que $|\mu| < 1$ y $\lambda = \mu + \frac{1}{\mu}$. Las primeras dos filas de R dan lugar a las siguientes igualdades $x_1 = \frac{a}{\rho}$ y $(\rho^2 - 1)\mu^2 + \delta\mu - 1 = 0$. Esta ecuación cuadrática

siempre tiene raíces reales, una de ellas tiene valor absoluto menor que 1 si y sólo si $s(s+1) > r$. En este caso $\mu = -\frac{(r-s)^{\frac{1}{2}}}{s}$. Así el espectro de $T(r, s)$ es igual al intervalo

$$[-2(r-s)^{\frac{1}{2}} + s - 1, 2(r-s)^{\frac{1}{2}} + s - 1],$$

con un punto adicional aislado $\lambda_0 = -\frac{r}{s}$ si y sólo si $k := \frac{r}{s} < s + 1$.

Y finalmente como la gráfica generada por el grupo libre F_2 en dos generadores coincide con la gráfica $T(4,1)$, entonces el espectro de Δ en este caso es $[-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]$.

Capítulo 4

GRUPOS NO MANEJABLES Y DESCOMPOSICIÓN PARADÓJICA

4.1. Breve Introducción a los Espacios Topológicos y Medibles.

Definición 55 Sea X un espacio topológico.

(a) Un conjunto $E \subseteq X$ es cerrado si su complemento E^c es abierto. (Así \emptyset y X son cerrados, unión finita de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, e intersección de conjuntos cerrados es cerrado.)

(b) La cerradura \overline{E} de un conjunto $E \subseteq X$ es el conjunto cerrado más pequeño en X que contiene a E . (El siguiente argumento prueba la existencia de \overline{E} : La colección Ω de todos los subconjuntos cerrados de X que contienen a E es no vacía, ya que $X \in \Omega$; sea \overline{E} la intersección de todos los miembros de Ω .)

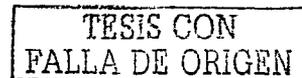
(c) Un conjunto $K \subseteq X$ es compacto si cada cubierta abierta de K contiene una subcubierta finita. Más explícitamente, K es compacto si dada $\{V_\alpha\}$ una colección de conjuntos abiertos cuya unión contiene a K , entonces existe una subcolección finita de $\{V_\alpha\}$ que también contiene a K .

(d) Una vecindad V de un punto $p \in X$ es un subconjunto abierto de X que contiene a p .

(e) X es un espacio de Hausdorff si dados $p, q \in X$, con $p \neq q$, existen U, V vecindades de p y q respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$.

(f) X es localmente compacto si cada punto de X tiene una vecindad cuya cerradura es un compacto.

Obviamente, cada espacio compacto es localmente compacto.



Una familia \mathfrak{M} de subconjuntos de un conjunto X es una σ -álgebra si satisface las siguientes condiciones:

- (i) $\emptyset, X \in \mathfrak{M}$.
- (ii) Si $A \in \mathfrak{M}$ entonces $A^c \in \mathfrak{M}$.
- (iii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión de elementos en \mathfrak{M} , entonces

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}.$$

Una medida μ es:

(a) *aditiva contable* si dada una colección $\{A_i\}$ contable, disjunta, de elementos de \mathfrak{M} , entonces

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(b) *aditiva finita* si dada una colección $\{A_i\}_{1 \leq i \leq n}$ finita, disjunta, de elementos de \mathfrak{M} , entonces

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Un *espacio medible* es un par (X, \mathfrak{M}) , donde X es un conjunto y \mathfrak{M} es una σ -álgebra. Los elementos de \mathfrak{M} son llamados *conjuntos medibles*.

Definición 56 (a) una medida positiva es una función aditiva contable $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, \infty)$, donde \mathfrak{M} es una σ -álgebra.

Suponemos que $\mu(A) < \infty$ para al menos un $A \in \mathfrak{M}$.

(b) Un espacio con medida es un espacio medible el cual tiene una medida positiva definida sobre la σ -álgebra de sus conjuntos medibles.

(c) Una medida compleja es una función $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow \mathbb{C}$ aditiva contable, definida sobre una σ -álgebra \mathfrak{M} .

Teorema 57 Sea μ una medida positiva sobre una σ -álgebra \mathfrak{M} . entonces:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$.

(b) $\mu(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ si A_1, \dots, A_n son elementos de \mathfrak{M} disjuntos por pares.

(c) $A \subseteq B$ implica $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{M}$.

(d) $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$ cuando $n \rightarrow \infty$ si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathfrak{M}$,

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots$$

(e) $\mu(A_n) \rightarrow \mu(A)$ cuando $n \rightarrow \infty$ si $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \in \mathfrak{M}$,

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots,$$

y $\mu(A_1)$ es finito.

4.2. Los espacios $L^p(X, \mu)$.

Sea X un conjunto y $A \subseteq X$, χ_A denotará la función característica de A ,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Sea X un espacio localmente compacto. Denotamos por $\mathcal{M}(X)$ al espacio de todas las medidas complejas sobre X , por $\mathcal{M}^1(X)$ al espacio de todas las medidas complejas acotadas sobre X . $\mathcal{M}_+^1(X)$ denotará el subespacio de $\mathcal{M}^1(X)$ de todas las medidas positivas. Denotamos por $M^1(X)$ al conjunto convexo formado por las medidas de probabilidad sobre X , es decir, todas las $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$ para las cuales $\mu(X) = 1$. La medida de Dirac $\delta_a \in M^1(X)$ en $a \in X$ es definida por $\delta_a(A) = \chi_A(a)$ para cada $A \subseteq X$ medible. Denotamos por $D^1(X)$ al conjunto de las medidas de Dirac sobre X .

Supongamos que $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$. Escribimos $\mathcal{L}(X, \mu)$ para denotar al espacio de todas las funciones con valores complejos que son μ -medibles sobre X .

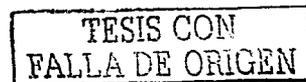
Consideremos ahora al espacio $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ de todas las funciones f con valores complejos y μ -medibles sobre X (es decir, funciones $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $f^{-1}(U)$ es medible para todo $U \subseteq \mathbb{C}$ abierto), para las cuales $|f|$ es acotada μ -casi en todas partes (es decir, existe $A \subseteq X$ tal que $\mu(A) = 0$ y $|f(x)| \leq r < \infty, \forall x \in X \setminus A$).

$\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ es el conjunto de clases de equivalencia en $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$, donde $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ son identificadas si $|f_1 - f_2| = 0$ μ -casi en todas partes. Así $\mathcal{L}^\infty(X, \mu)$ es equipado con la norma $\|f\|_\infty = \sup |f|$, $f \in \mathcal{L}^\infty(X, \mu)$.

Para $p \in (1, \infty)$, $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ es el espacio de todas las funciones con valores complejos, μ -medibles sobre X tales que:

$$\int_X |f|^p = \int_X |f(x)|^p d\mu(x) < \infty.$$

(Ver por ejemplo [Pi])



$L^p(X, \mu)$ es el conjunto de clases de equivalencia en $L^p(X, \mu)$, donde uno identifica a $f_1, f_2 \in L^p(X, \mu)$ si:

$$\int_X |f_1 - f_2|^p = \int_X |f_1(x) - f_2(x)|^p d\mu(x) = 0$$

Así $L^p(X, \mu)$ es equipado con la norma definida por

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}, f \in L^p(X, \mu).$$

Si $p \in (1, \infty)$, definimos $p' \in (1, \infty)$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; también ponemos $p' = \infty$ si $p = 1$. Si $1 \leq p < \infty$, $L^p(X)^* = L^{p'}(X)$; la dualidad está dada por la relación

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x)g(x) d\mu(x)$$

para $f \in L^p(X)$, $g \in L^{p'}(X)$. En el caso $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(X)$ y $g \in L^{p'}(X)$, ponemos

$$\langle f|g \rangle = \langle f, \bar{g} \rangle.$$

Si $1 \leq p < \infty$, definimos $L^p(X, \mu) = \{f \in L^p_+(X, \mu) : \|f\|_p = 1\}$.

Definición 58 Un conjunto G con una operación binaria $*$ y una familia de subconjuntos de G se llama grupo topológico si

- 1) $(G, *)$ es un grupo;
- 2) (G, τ) es un espacio topológico;
- 3) Las funciones $g_1 : (G, \tau) \times (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ y $g_2 : (G, \tau) \rightarrow (G, \tau)$ dadas por $g_1(x, y) = x * y$ y $g_2(x) = x^{-1}$ son continuas, donde x^{-1} es el inverso de x .

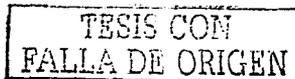
Un grupo localmente compacto G es un grupo topológico (G, τ) que es localmente compacto con respecto a la topología τ .

Consideremos como antes al espacio $L^{\infty}_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ de todas las funciones $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ μ -medibles sobre X para las cuales $|f|$ es acotada μ -casi en todas partes.

$L^{\infty}_{\mathbb{R}}(X, \mu)$ es el conjunto de clases de equivalencia en $L^{\infty}_{\mathbb{R}}(X, \mu)$.

Definición 59 Sea G un grupo localmente compacto, X un subespacio real ($X_{\mathbb{R}}$ denotará un subespacio real) de $L^{\infty}_{\mathbb{R}}(G)$ con $\chi_G \in X$ (χ_G es la función característica en G). Un funcional lineal real M sobre X es llamado una media sobre X si la siguiente propiedad se cumple:

- (i) $\forall f \in X_{\mathbb{R}} \inf f \leq M(f) \leq \sup f$.



Sea G un grupo localmente compacto y sea X un subespacio de $L^\infty(G)$. Decimos que X es invariante por izquierda si $af \in X$ ($af(g) = f(ag)$) cuando $f \in X$ y $a \in G$.

Si G es un grupo localmente compacto, X un subespacio real de $L^\infty(G)$ con $\chi_G \in X$ que es invariante por izquierda. Una media M sobre X es llamada una *media invariante* por izquierda si $\forall f \in X$ y $\forall a \in G$ $M(af) = M(f)$.

Definición 60 Un grupo localmente compacto G es llamado grupo manejable si este admite una media invariante sobre $L^\infty(G)$.

Proposición 61 Si el grupo G admite estructura de grupo localmente compacto para dos topologías τ_1 y τ_2 tales que τ_1 es más fina que τ_2 , entonces la manejabilidad de (G, τ_1) implica la manejabilidad de (G, τ_2) . En particular, un grupo G localmente compacto, el cual es manejable con la topología discreta, es manejables (ver [Pi]).

En el Capítulo 3 estudiamos la situación de una cubierta de Galois $\pi : \Delta \rightarrow \Delta'$ definida por el grupo G , con Δ' finita. Si el grupo G es manejable, entonces $\rho(\Delta) = \rho(\Delta')$. En este capítulo veremos algunas propiedades de los grupos no manejables. Nos interesa sobre todo la caracterización de grupos no manejables por la existencia de una descomposición paradójica.

4.3. G-Conjuntos y Descomposición Paradójica

Definición 62 Un conjunto A es llamado un G -conjunto izquierdo si para cada $x \in G$ tenemos una transformación $f_x : A \rightarrow A$, $a \mapsto xa$, tal que $y(xa) = (yx)a$ para toda $a \in A$, $x, y \in G$.

Definición 63 Sean G un grupo, X un G -conjunto izquierdo con $ex = x$ para tado $x \in X$, y $A \subseteq X$. Una medida invariante para (G, X, A) es una medida aditiva finita $\mu : \mathbb{P}(X) \rightarrow [0, \infty)$ tal que $\mu(xB) = \mu(B) \forall x \in G$, $B \in \mathbb{P}(X)$ y $\mu(A) = 1$.

Definición 64 Un conjunto A admite una descomposición paradójica si existe una partición

$$\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}$$

de A y elementos $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ de G tales que

$$\{x_1 A_1, \dots, x_m A_m\} \text{ y } \{y_1 B_1, \dots, y_n B_n\}$$

son particiones de A .

Observación 65 Si tal descomposición existe, entonces no existe una medida invariante para (G, X, A) . Si μ fuera tal medida, entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \mu(A) = \sum_{i=1}^m \mu(A_i) + \sum_{j=1}^n \mu(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^m \mu(x_i A_i) + \sum_{j=1}^n \mu(y_j B_j) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i=1}^m x_i A_i\right) + \mu\left(\bigcup_{j=1}^n y_j B_j\right) \\ &= \mu(A) + \mu(A) = 2. \end{aligned}$$

Una contradicción.

Esta es la implicación fácil del Teorema de Tarski:

Teorema de Tarski: Existe una medida μ invariante para (G, X, A) si y sólo si A no admite una descomposición paradójica.

La implicación converso es mucho más difícil y la probaremos, desarrollando todo lo que necesitamos para esta prueba en las secciones posteriores.

4.4. Conjuntos Equivalentes por partes.

Definición 66 Sea G un grupo y X un G -conjunto izquierdo con $ex = x, \forall x \in X$. Decimos que dos subconjuntos A y B de X son G -**equivalentes por partes** si existen particiones $\{A_1, \dots, A_m\}$ y $\{B_1, \dots, B_m\}$ de A y B respectivamente y elementos s_1, \dots, s_m de G , tales que $s_i A_i = B_i$, para $1 \leq i \leq m$. Si A y B son equivalentes por partes, entonces escribimos $A \cong B$. Decimos que $A \lesssim B$ si $A \cong C$ para algún subconjunto C de B .

Proposición 67 (i) \cong es una relación de equivalencia.

(ii) Sean A y $B \in \mathbb{P}(X)$ ($\mathbb{P}(X)$ es el conjunto potencia de X) tales que $A \lesssim B$ y $B \lesssim A$. Entonces $A \cong B$.

Demostración. La demostración del inciso (i) es clara.

La demostración del inciso (ii) está basada en la demostración del Teorema de Cantor-Bernstein (sobre cardinalidad) y la presentamos a continuación:

Supongamos que $\{X_1, \dots, X_m\}$, $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ son particiones de X, Y respectivamente, tales que existen f_1, \dots, f_m , y g_1, \dots, g_n , con $\{f_1 X_1, \dots, f_m X_m\}$, $\{g_1 Y_1, \dots, g_n Y_n\}$ particiones de X_0, Y_0 respectivamente; donde $Y_0 \subseteq Y$, y $X_0 \subseteq X$.

Definimos

$$\begin{aligned} f &: X \rightarrow Y_0 \\ x &\mapsto f_j x, \quad x \in X_j \\ g &: Y \rightarrow X_0 \\ y &\mapsto g_i y, \quad y \in Y_i. \end{aligned}$$

Para $E \subseteq X$, definimos $E' \subseteq X$ por

$$E' = X \setminus g(Y \setminus f(E)) \quad ((1))$$

Claramente,

$$E \subseteq F \subseteq X \Rightarrow E' \subseteq F' \quad ((2))$$

Sea $\mathcal{D} = \{E : E \subseteq X, E \subseteq E'\}$, $\emptyset \in \mathcal{D}$. Sea $D = \bigcup \mathcal{D}$, la unión de todos los conjuntos que están en \mathcal{D} . Para cada $E \in \mathcal{D}$, $E' \subseteq D'$ por (2), así $E \subseteq D'$. De donde $D \subseteq D'$ y nuevamente por (2) $D' \subseteq (D)'$, por lo tanto $D' \in \mathcal{D}$, es decir, $D' \subseteq D$. Y concluimos que $D' = D$.

Por (1)

$$D' = D = X \setminus g(Y \setminus f(D)), \quad X \setminus D = g(Y \setminus f(D)).$$

Claramente, $X \setminus D \subseteq X_0$. Ahora definamos, para $1 \leq j \leq n$, y $1 \leq i \leq m$, $A_j = D \cap X_j$, $A_{n+i} = g_i(Y_i \setminus f(D))$, $h_j = f_j$, $h_{n+i} = g_i^{-1}$.

Así

$$\{A_1, \dots, A_n\}$$

es partición de D ,

$$\{A_{n+1}, \dots, A_{n+m}\}$$

es partición de $X \setminus D$,

$$\{h_1 A_1, \dots, h_n A_n\}$$

es partición de $f(D)$, y

$$\{h_{n+1} A_{n+1}, \dots, h_{n+m} A_{n+m}\}$$

es partición de $Y \setminus f(D)$. Por lo tanto $X \cong Y$. ■

4.5. El Teorema de König y el Teorema de la División.

Esta sección la dividimos en tres partes, para tratar de facilitar el desarrollo de las demostraciones.

Sean G y X como antes. El siguiente resultado será llamado el *Teorema de la División* (para conjuntos equivalentes por partes), ya que es la versión de equivalencia por partes del siguiente hecho aritmético: Si $a, b \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, y $ra = rb$, entonces $a = b$.

Primera parte.

Teorema 68 (El Teorema de la División). Sean $A_1, \dots, A_r, B_1, \dots, B_r \in \mathbb{P}(X)$ tales que:

(a) $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$ cuando $i \neq j$;

(b) $A_i \cong A_1$ y $B_i \cong B_1 \forall i$;

(c) $(\bigcup_{i=1}^r A_i) \cong (\bigcup_{i=1}^r B_i)$

Entonces $A_1 \cong B_1$.

Este resultado fue probado por Banach y Tarski en el caso cuando r es una potencia de 2. El caso general depende del Teorema de König y la daremos en la tercera parte de esta sección.

Para facilitar la exposición es conveniente expresar el Teorema de König en términos de teoría de gráficas.

Una gráfica bipartita Δ consta de dos conjuntos de vértices X, Y y un conjunto de aristas E tales que:

(i) $X \cap Y = \emptyset$.

(ii) $E \subseteq X \times Y$. Por lo tanto podemos denotar a $\Delta = (X, Y, E)$.

Definición 69 Sea (X, Y, E) una gráfica bipartita, un emparejo entre dos subconjuntos $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ es un subconjunto F de E , tal que cada $a \in A$ [$b \in B$] es un punto extremo de exactamente un $f \in F$ y los puntos extremos de cada $f \in F$ están en $A \cup B$.

Segunda parte.

Teorema 70 (El Teorema de König) Sea (X, Y, E) una gráfica bipartita k -regular. Entonces existe un emparejo entre X y Y .

Demostración. Sea $\Delta_0 = X \cup Y$. Para $S \subseteq \Delta_0$, sea $N(S)$ el conjunto de vértices en Δ_0 unidos por una arista a un punto de S . Consideremos dos casos:

Caso 1: La gráfica Δ es finita. Por la k -regularidad, $k|X| = |E| = k|Y|$ así que $|X| = |Y| = n$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

(a) Afirmamos que $|N(S)| \geq |S|$ para toda $S \subseteq X$. El número de aristas que unen vértices en S con vértices en $N(S)$ es $k|S|$. Así $\sum_{t \in N(S)} n_t = k|S|$, donde n_t es el número de aristas que unen a $t \in N(S)$ con miembros de S . Si $|N(S)| < |S|$, entonces $n_t > k$ para algún t , lo cual es imposible.

(b) Ahora probaremos que existe un empate entre X, Y . Sean A, B subconjuntos de X, Y que admiten un empate F con $|F|$ la máxima posible. Supongamos que $A \neq X$ y sea $x \in X \setminus A$. Consideremos el conjunto Z de puntos $z \in \Delta$ para los cuales existe un camino (e_1, \dots, e_n) con las siguientes propiedades:

(1) El camino une a x con z ,

(2) Si la arista $e_i \in F$ entonces $e_{i+1} \notin F$ y $e_{i+2} \in F$. Y si $e_i \in E \setminus F$ entonces $e_{i+1} \notin E \setminus F$ y $e_{i+2} \in E \setminus F$.

Si $x = a_0, a_1, \dots, a_n = z$ son los vértices asociados con tal camino, entonces todos los vértices de X, a_2, a_4, \dots , están en A (excepto x) y todos los vértices de Y, a_1, a_3, \dots están en B excepto posiblemente z . Supongamos que $z \in Y$. Mostraremos por la maximalidad de F que el vértice z está en B . En efecto $n = 2k + 1$ es impar, y si $z \notin B$ y tomamos $F' = (F \setminus \{e_2, e_4, \dots, e_{2k}\}) \cup \{e_1, e_3, \dots, e_n\}$ entonces F' es un empate de $A \cup \{x\}$ con $B \cup \{z\}$ y $|F'| = |F| + 1 > |F|$, contradiciendo la maximalidad de F . Así $T = Z \cap Y \subseteq B$. Sea $S = Z \cap X$. Es fácil checar que $T = N(S)$ y que $|T| = |S| - 1$. Entonces $|N(S)| < |S|$, contradiciendo la afirmación (a).

Así $A = X, B = Y$ como queríamos.

Caso 2: La gráfica Δ es infinita. Definamos la siguiente relación en Δ , si $x, y \in \Delta$ decimos que x está relacionado con y , xRy , si existe un camino que une a x con y . Esta relación R es una relación de equivalencia en Δ , y por la k -regularidad, cada clase de equivalencia es una gráfica contable, k -regular bipartita. Por lo tanto podemos encontrar un empate para cada clase, entonces podemos encontrar un empate para Δ . Así podemos suponer que Δ es numerable y que cada par de vértices está conectado por un camino.

Sea $(x, y) \in X \times Y$ y definamos los subconjuntos Z_i de Δ por $Z_1 = \{x, y\} \cup N(\{x, y\})$, $Z_{i+1} = N(Z_i)$. Claramente, por conexidad, $\Delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$. Sea $X_i = X \cap Z_i$, $Y_i = Y \cap Z_i$. Notemos que $Z_i \subseteq Z_{i+1}$, así que $X_i \subseteq X_{i+1}, Y_i \subseteq Y_{i+1}$. Sea $j \geq 1$. Adicionando nuevos vértices a X_j, Y_j y nuevas aristas, obtenemos una gráfica finita bipartita k -regular (X'_j, Y'_j, E'_j) .

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Por el caso 1, existe un empate entre X'_j y Y'_j . Para $i < j$, este empate induce un empate de X_i con un subconjunto de Y .

Un i -empate es un empate entre X_i y un subconjunto de Y . Lo anterior muestra que existe un i -empate para toda i . Si $i < j$, M_j es un j -empate, entonces M_j induce un i -empate $M_j|_{X_i}$. Como el conjunto de 1 -empates es finito, existen r -empates M_r^1 ($r \geq 1$) tal que $M_r^1|_{X_1} = M_1^1$. Sea $M_1 = M_1^1$. Similarmente existen r -empates M_r^2 ($r \geq 2$) tal que $M_2^2|_{X_1} = M_1$ y $M_r^2|_{X_2} = M_2^2$. Sea $M_2 = M_2^2$. Un obvio argumento de inducción produce una sucesión $\{M_i\}$ de i -empates con $M_{i+1}|_{X_i} = M_i$. Entonces $M = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ es un empate para X y Y . ■

Tercera parte

Demostración. (Prueba del Teorema de la División). Sea G un grupo y X un G -conjunto con $ex = x$ para toda $x \in X$. Sean r, A_i, B_i como en (i). Sean $\phi_i : A_i \rightarrow A_1, \psi_i : B_i \rightarrow B_1$, y $\phi : \bigcup_{i=1}^n A_i \rightarrow \bigcup_{i=1}^n B_i$ las biyecciones de equivalencia por partes asociadas con (b) y (c) de (i). Tomemos ϕ_1, ψ_1 como los mapeos identidad. Definamos una gráfica bipartita r -regular (X_1, Y_1, E_1) como sigue. Sea $X_1 = A_1 \times \{0\}, Y_1 = B_1 \times \{1\}$. (La razón de incluir los " $\times \{0\}$ " y " $\times \{1\}$ " es para asegurar que X_1 y Y_1 sean disjuntos). Trazamos una arista que une a $(a, 0) \in X_1$ con $(b, 1) \in Y_1$ para cada par i, j tal que $\phi\phi_i^{-1}(a) \in B_j$ y $\psi_j\phi_i^{-1}(a) = b$. Por el Teorema de König, existe un empate M para X_1 y Y_1 . Para $a \in A_1$, sea $\alpha(a) \in B_1$ tal que $(\alpha(a), 1)$ es el otro punto extremo de la arista en M que contiene a $(a, 0)$. Entonces $\alpha(a) = \psi_j\phi\phi_i^{-1}(a)$ para algún par i, j . Ya que ψ_j, ϕ y ϕ_i^{-1} están dados por G -traslaciones, $\alpha(a)$ es de la forma $y_{j,m}s_kx_{i,l}^{-1}a$. Solo hay un número finito de posibilidades para los $y_{j,m}, s_k$ y $x_{i,l}$ en G , y obtenemos una partición K_1, \dots, K_q de A_1 y elementos z_p , cada uno de la forma $y_{j,m}s_kx_{i,l}^{-1}$, tales que $\{z_1K_1, \dots, z_qK_q\}$ es una partición de B_1 . Así $A_1 \cong B_1$. ■

4.6. Descomposición Paradójica.

Sea (G, X, A) como antes.

El teorema de Tarski nos dice que:

Existe una medida μ invariante para (G, X, A) si y sólo si A no admite una descomposición paradójica.

Sea $\mathcal{D} = \{B \subseteq X : \text{existen } n \in \mathbb{N} \text{ y } s_1, \dots, s_n \in G \text{ tales que } B \subseteq \bigcup_{i=1}^n s_i A\}$. Los elementos de \mathcal{D} son llamados acotados. Sabemos que existe una medida invariante sobre (G, X, A) si y sólo si existe una medida ν sobre \mathcal{D} , aditiva finita, G -invariante positiva, con $\nu(A) = 1$.



LIBRO DE VENTA
BIBLIOTECA

En la descomposición paradójica de A , mostraremos que tres particiones de A están involucradas. Por esto, es conveniente tener varias copias disjuntas de A disponibles. Por esta razón, introducimos $Y = X \times \mathbb{N}^*$, donde X está identificado con $X \times \{1\}$ y $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sea $\pi(\mathbb{N}^*)$ el grupo de permutaciones de \mathbb{N}^* (es decir, el grupo de mapeos biyectivos de \mathbb{N}^*). Sea $H = G \times \pi(\mathbb{N}^*)$, entonces H actúa sobre Y por medio de la fórmula:

$$(s, p)(x, n) = (sx, p(n)), \quad (s, p) \in H, \quad (x, n) \in Y.$$

Sea I la permutación identidad sobre \mathbb{N}^* . Entonces (e, I) es la identidad de H y $(e, I)y = y$ para toda $y \in Y$. Sea

$$\mathcal{N} = \{C \in \mathcal{P}(Y) : C \subseteq B \times F \text{ para algún } B \in \mathcal{D}, F \in \mathcal{F}(\mathbb{N}^*)\},$$

donde $\mathcal{F}(\mathbb{N}^*) = \{N \subseteq \mathbb{N}^* : N \text{ es finito}\}$.

Claramente, \mathcal{N} es H -invariante y es una σ -álgebra de subconjuntos de Y .

Ahora asociaremos la existencia de una medida invariante para (G, X, A) con una descomposición paradójica para A . Para esto desarrollaremos las equivalencias necesarias para demostrar el Teorema de Tarski. La referencia principal en este capítulo y en esta sección es [Pi].

Proposición 71 *Existe una medida invariante para (G, X, A) si y sólo si existe una medida ν finitamente aditiva, positiva, y H -invariante sobre \mathcal{N} con $\nu(A) = 1$.*

Demostración. Cada $N \in \mathcal{N}$ puede ser escrito de forma única

$$\bigcup_{i=1}^r C_i \times \{j_i\}$$

donde $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_r$, $C_i \in \mathcal{D}$ y cada $C_i \neq \emptyset$. Nótese que si $(S, p) \in H$, entonces

$$(s, p)(N) = \bigcup_{i=1}^r sC_i \times \{k_i\}$$

donde los k_i son distintos. Cada medida invariante ν para \mathcal{D} da lugar a una medida invariante ξ sobre \mathcal{N} , donde

$$\xi(N) = \sum_{i=1}^r \nu(C_i).$$

Ahora probaremos el converso. Dada una medida invariante ξ , sobre \mathcal{N} , obtenemos una medida invariante ν sobre $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{N}$ por restricción y por identificación de cada $s \in G$ con $(s, I) \in H$.

■

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Escribimos $N_1 \cong N_2$ en \mathcal{N} cuando N_1 y N_2 son H -equivalentes por partes. Sabemos que \cong es una relación de equivalencia sobre \mathcal{N} .

Sea $\Sigma = \mathcal{N}/\cong$, y $\tau : \mathcal{N} \rightarrow \Sigma$ la sobreyección canónica. Sea $\alpha = \tau(A)$, damos estructura de semigrupo abeliano a Σ como sigue. Sean N_1 y $N_2 \in \mathcal{N}$, entonces existe $h \in H$ tal que $h(N_1) \cap N_2 = \emptyset$. Definimos $N_1 +_h N_2 = h(N_1) \cup N_2$.

Uno puede checar que si $N_1 \cong N'_1$, $N_2 \cong N'_2$, y $k \in H$ es tal que $k(N'_1) \cap N'_2 = \emptyset$, entonces $N_1 +_h N_2 \cong N'_1 +_k N'_2$. De aquí que tenga sentido definir el elemento $\tau(N_1) + \tau(N_2)$ ($\tau : \mathcal{N} \rightarrow \Sigma$), igualándolo con el elemento $\tau(N_1 +_h N_2)$. Es fácil verificar que Σ es semigrupo abeliano bajo el mapeo $(\sigma, \tau) \mapsto (\sigma + \tau)$.

El próximo resultado reduce el problema de medida para (G, X, A) a la existencia de cierto homomorfismo $f : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ tal que $f(\alpha) = 1$.

Proposición 72 *Existe una medida invariante para (G, X, A) si y sólo si existe un homomorfismo $f : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ tal que $f(\alpha) = 1$.*

Demostración. Supongamos que existe una medida invariante ν para (H, Y, A) . De que $\nu(N_1) = \nu(N_2)$ si $N_1 \cong N_2$ en \mathcal{N} , se sigue que podemos definir un mapeo $f : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ dado por $f(\tau(N)) = \nu(N)$, $N \in \mathcal{N}$.

Si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ con $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, entonces $\nu(N_1 \cup N_2) = \nu(N_1) + \nu(N_2)$.

Respecto a la definición de adición en Σ , vemos que f es un homomorfismo con $f(\alpha) = 1$.

Ahora supongamos que $g : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ es un homomorfismo con $g(\alpha) = 1$. Para $N \in \mathcal{N}$, definimos $\xi(N) = g(\tau(N))$. Entonces $\xi(A) = 1$ y $\xi(hN) = \xi(N)$ para toda $h \in H$ y $N \in \mathcal{N}$, ya que $N \cong hN$. Si $N_1, N_2 \in \mathcal{N}$ con $N_1 \cap N_2 = \emptyset$, entonces $\tau(N_1 \cup N_2) = \tau(N_1) + \tau(N_2)$, obtenemos por lo tanto que $\xi(N_1 \cup N_2) = \xi(N_1) + \xi(N_2)$. Obviamente $\xi(\emptyset) = 0$, así que ξ es una medida finitamente aditiva, positiva H -invariante sobre \mathcal{N} con $\xi(A) = 1$. Finalmente usamos la Proposición 71 para completar la prueba. ■

Sea S un semigrupo abeliano. Decimos que $s \leq t$ en S para $s, t \in S$, si $s = t$ ó si existe $\omega \in S$ tal que $s + \omega = t$.

Proposición 73 (ver [Pi]) *Sea T un subsemigrupo del semigrupo abeliano S y $F : T \rightarrow [0, \infty)$ un homomorfismo (es decir una función aditiva). Sea $e \in T$ tal que $F(e) = 1$ y para cada $s, t \in S$, existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $s \leq nt$. Entonces existe un homomorfismo $g : S \rightarrow [0, \infty)$ con $g(t) = F(t) \forall t \in T$ si y sólo si $F(s) \leq F(t)$ cuando $s, t \in T$ y $s \leq t$ en S .*

Ahora continuemos con la prueba del teorema de Tarski.



Proposición 74 Existe una medida invariante para (G, X, A) si y sólo si $k\alpha \neq l\alpha$, cuando $k, l \in \mathbb{N}^*$ con $k \neq l$.

Demostración. Supongamos que existe una medida invariante para (G, X, A) . Por (ii) existe un homomorfismo $f : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$ tal que $f(\alpha) = 1$. Si $k, l \in \mathbb{N}^*$ con $k \neq l$, entonces $f(k\alpha) = k$, $f(l\alpha) = l$, así que $k\alpha \neq l\alpha$.

Inversamente, supongamos $k\alpha \neq l\alpha$ cuando $k, l \in \mathbb{N}^*$ con $k \neq l$. Sea $T = \{n\alpha : n \in \mathbb{N}^*\}$. Entonces T es un subsemigrupo de Σ . Si $\beta \in T$, entonces existe exactamente un $n \in \mathbb{N}^*$ con $\beta = n\alpha$. Definimos $F : T \rightarrow [0, \infty)$ por $F(\beta) = n$. Obviamente F es un homomorfismo y $F(\alpha) = 1$. Ahora mostraremos que las hipótesis de la proposición anterior se satisfacen reemplazando S, e con Σ, α .

Sea $\gamma \in \Sigma$. Debemos probar que existe $\delta \in \Sigma$ y $r \in \mathbb{N}^*$ tal que $\gamma + \delta = r\alpha$. Para demostrarlo, sea $C \in \mathcal{N}$ tal que $\tau(C) = \gamma$. Podemos escribir a C como unión disjunta finita de conjuntos $B_m \times \{m\}$, donde $B_m \in \mathcal{D}$ y como $\tau(C) = \sum \tau(B_m)$, podemos suponer que $C \in \mathcal{D}$. Así, $C \subseteq \bigcup_{i=1}^r s_i A$ para algunos $s_i \in G$. Escribiendo a C como unión disjunta

$$\bigcup_{i=1}^r C'_i,$$

con $C'_i \subseteq s_i A$ siempre podemos encontrar $h_i \in H$ tal que $h_i(s_i A) \cap h_j(s_j A) = \emptyset$ si $i \neq j$. Sea $B'_i = h_i(s_i A) \setminus h_i(C'_i)$ y $B' = \cup B'_i$. Entonces $\gamma + \tau(B') = r\alpha$ y podemos tomar $\delta = \tau(B')$.

Ahora mostraremos que si $s, t \in T$ con $s \leq t$ en Σ , entonces $F(s) \leq F(t)$. Supongamos que $s = n\alpha$ y $t = m\alpha$ con $s \leq t$ en Σ ; si $n \leq m$ no hay nada que probar. Supongamos que $n > m$; sea $C_n, C_m \in \mathcal{N}$ con $\tau(C_n) = n\alpha$, $\tau(C_m) = m\alpha$. De que $n\alpha = m\alpha + (n - m)\alpha$, se sigue que $C_m \lesssim C_n$. De que $s \leq t$, podemos encontrar $\beta \in \Sigma$ con $n\alpha + \beta = m\alpha$, y se deduce que $C_n \lesssim C_m$.

Por la segunda parte de esta sección, tenemos $C_n \cong C_m$ y $n\alpha = m\alpha$. Pero por hipótesis, $n\alpha \neq m\alpha$ ya que $n \neq m$. Así, $n \leq m$ y $F(s) \leq F(t)$. Aplicando la Proposición 73, existe un homomorfismo $g : \Sigma \rightarrow [0, \infty)$, con $g(\alpha) = 1$ que extiende a F . Por lo tanto la Proposición 72 implica que existe una medida invariante para (G, X, A) . ■

Proposición 75 Existe una medida invariante para (G, X, A) si y sólo si $\alpha \neq 2\alpha$.

Demostración. Por la proposición anterior, sólo necesitamos demostrar que si $\alpha \neq 2\alpha \implies k\alpha \neq l\alpha$ cuando $k \neq l$ en \mathbb{N}^* . Supongamos entonces que $\alpha \neq 2\alpha$ y que existen $k, l \in \mathbb{N}^*$ con $k \neq l$, tal que $k\alpha = l\alpha$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $k < l$. Sea $l = k + r$ con $r \geq 1$, entonces

$$k\alpha = (k + r)\alpha, \quad (k + r)\alpha = (k + 2r)\alpha, \quad \blacksquare$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

y obtenemos $k\alpha = (k + pr)\alpha$, $\forall p \geq 1$. Tomando $p = k$, $k\alpha = k[(1 + r)\alpha]$. Por el Teorema de la División, $\alpha = (1 + r)\alpha$. Si $r = 1$ entonces $\alpha = 2\alpha$ lo cual es una contradicción. Si $r > 1$, sumamos $(r - 1)\alpha$ a ambos lados de la igualdad y entonces $\alpha = (1 + r)\alpha$, es decir, $r(\alpha) = r(2\alpha)$ y nuevamente aplicando el Teorema de la División obtenemos $\alpha = 2\alpha$ lo que es también una contradicción. ■

Teorema 76 (Teorema de Tarski). *Existe una medida invariante para (G, X, A) si y sólo si A no admite una descomposición paradójica (con respecto a G).*

Demostración. Si existe una medida invariante para (G, X, A) , entonces por observación 65, A no admite una descomposición paradójica.

Ahora, supongamos que G no admite una descomposición paradójica. Por (v), es suficiente demostrar que $\alpha \neq 2\alpha$. Supongamos lo contrario, que $\alpha = 2\alpha$. Entonces $A \cong A \cup (A \times \{2\})$ en \mathcal{N} con respecto a H (recordando que se identifica A con $A \times \{1\}$). Por lo tanto, existe una partición $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n$ de A y elementos

$$\{(s_1, p_1), \dots, (s_m, p_m), (t_1, q_1), \dots, (t_n, q_n)\}$$

de H tales que $p_i(1) = 1$, $q_i(1) = 2$ y

$$\{(s_1, p_1)A_1, \dots, (s_m, p_m)A_m, (t_1, q_1)B_1, \dots, (t_n, q_n)B_n\}$$

es una partición de $A \cup (A \times \{2\})$. Por lo tanto $\{s_1A_1, \dots, s_mA_m\}$ y $\{t_1B_1, \dots, t_nB_n\}$ son particiones de A y A admite una descomposición paradójica. Lo cual es una contradicción. ■

El teorema de Tarski aplicado a (G, G, G) en lugar de (G, X, A) da la siguiente caracterización de grupos manejables.

Corolario 77 *El grupo G es no manejable si y sólo si existe una partición*

$$\{A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_n\}$$

de G y elementos $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n$ de G tales que $\{x_1A_1, \dots, x_mA_m\}$ y $\{y_1B_1, \dots, y_nB_n\}$ son particiones de G .

Demostración. Supongamos que G no admite una descomposición paradójica. Entonces por el teorema de Tarski existe una medida invariante $\mu : \mathcal{P}(G) \rightarrow [0, \infty]$ para (G, G, G) .

Sea χ_E la función característica de $E \subseteq G$. Definamos $m(\chi_E) = \mu(E)$ para cada $E \subseteq G$.

Más generalmente podemos definir m sobre el espacio V generado por

$$\{\chi_E : E \subseteq G\}$$

$$m \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i} \right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(\chi_{E_i}) \quad (\alpha_i \in \mathbb{C}, E_i \subseteq G).$$

Ahora como m es continua en V y V es denso en $L^\infty(G)$, podemos extender m a todo $L^\infty(G)$. Por lo tanto m es una media invariante sobre $L^\infty(G)$. Por lo tanto G es manejable. ■

4.7. Algunos grupos no manejables

Definición 78 Una función f sobre un espacio medible X cuyo rango consiste sólo de un número finito de puntos distintos en \mathbb{C} , es llamada una función simple.

Sea μ una medida no negativa sobre X . Denotamos por $\zeta(X, \mu)$ al espacio de todas funciones simples μ -medibles con valores complejos sobre X .

El siguiente Teorema es una de las caracterizaciones, para grupos manejables que se encuentran en [Pi].

Teorema 79 Un grupo G localmente compacto, es manejable si y sólo si

$$\sup \sum_{i=1}^n (f_i - a_i f_i) \geq 0$$

cuando $f_1, f_2, \dots, f_n \in \zeta(X, \mu)$, y $a_1, \dots, a_n \in G$.

Proposición 80 El grupo discreto (con la topología discreta) F_2 en dos generadores a y b no es manejable.

Demostración. Supongamos que M es una media invariante por izquierda sobre $L^\infty(F_2)$. Sea A el subconjunto de todos los elementos en F_2 que, escritos como palabras reducidas, admiten un primer factor de la forma a^n ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). Entonces A , bA , b^2A son conjuntos disjuntos y

$$3M(\chi_A) = M(\chi_A) + M(\chi_{bA}) + M(\chi_{b^2A}) \leq M(\chi_{F_2}) = 1$$

de aquí que $M(\chi_A) \leq \frac{1}{3}$.

Por otra parte, $A \cup aA = F_2$ y por lo tanto

$$1 = M(\chi_{F_2}) \leq M(\chi_A) + M(\chi_{aA}) = 2M(\chi_A)$$

entonces $M(\chi_A) \geq \frac{1}{2}$. Tenemos una contradicción. ■

También podemos dar una descomposición paradójica de F_2 . Para

$$u \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$$

sea E_u el conjunto de elementos en F_2 cuya forma reducida inicia con u . Sea

$$C = \{y^{-1}, y^{-2}, \dots\}$$

y obtenemos la siguiente descomposición paradójica:

$$A_1 = E_a, A_2 = E_{a^{-1}}, B_1 = E_b, B_2 = E_{b^{-1}} \setminus C, B_3 = C \cup \{e\},$$

$$x_1 = a^{-1}, x_2 = e, y_1 = b^{-1}, y_2 = e, y_3 = b^{-1}.$$

Proposición 81 Sea G el grupo libremente generado por elementos a_1, \dots, a_n con ($n \geq 2$) de orden p_i ($i = 1, \dots, n$). Entonces G es no manejable (con la topología discreta) excepto para $n = 2$ y $p_1 = 2, p_2 = 2$.

Demostración. Para $i = 1, \dots, n$, sea A_i el subconjunto de G que consiste de e y todos los elementos que se escriben como palabras reducidas que no inician con a_i^k ($k = 1, \dots, p_i - 1$).

(a) Supongamos que $n \geq 3$ y sea $h = \sum_{i=1}^n (-\chi_{A_i} + a_i^{-1} \chi_{A_i})$. Entonces

$$\sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(e) = n, \sum_{i=1}^n (a_i^{-1} \chi_{A_i})(e) = 0$$

y

$$\sum_{i=1}^n (-\chi_{A_i} + a_i^{-1} \chi_{A_i})(e) = -n.$$

Si $x \neq e$,

$$\sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(x) = n - 1 \text{ y } \sum_{i=1}^n (a_i^{-1} \chi_{A_i})(x) \leq 1$$

entonces

$$\sum_{i=1}^n (-\chi_{A_i} + a_i^{-1} \chi_{A_i})(x) \leq -n + 2 \leq -1.$$

(b) Supongamos que $n = 2$ y $a_1^2 \neq e$. Sea

$$h = 3(-\chi_{A_1} + a_1^{-1} \chi_{A_1}) + 2(-\chi_{A_1} + a_1^{-2} \chi_{A_1}) + 4(-\chi_{A_2} + a_2^{-1} \chi_{A_2}).$$

Tenemos así que $h(e) = -3 - 2 - 4 = -9$, $h(a_1^2) = 3 - 4 = -1$, $h(a_1^2) = 2 - 4 = -2$, $h(a_2) = -3 - 2 + 4 = -1$. Si una palabra reducida x en G inicia con $a_1^{k_1}$ ($2 < k_1 < p_1$), tenemos que $h(x) = -4$; si x inicia con $a_2^{k_2}$ ($1 < k_2 < p_2$), tenemos $h(x) = -3 - 2 = -5$. De aquí que $h \leq -\chi_G$.

En ambos casos la no manejabilidad se sigue de la Teorema 79 ■

Corolario 82 Sea G el grupo compacto (manejable) de rotaciones $SO(3, \mathbb{R})$ de la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 . Entonces G_d (el grupo G con la topología discreta) es no manejable.

Demostración. Consideremos las rotaciones

$$a = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

y sea H el subgrupo de G generado por a y b . Tenemos $a^2 = b^3 = e$ y también

$$ba = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b^2a = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se puede verificar fácilmente por inducción que, para toda $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $n_1, \dots, n_k \in \{1, 2\}$, el elemento $b^{n_1} a b^{n_2} \dots a b^{n_k} a$ en H tiene la forma

$$\frac{1}{2^k} \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \sqrt{3} \\ q_1 & p_4 & q_2 \sqrt{3} \\ q_3 \sqrt{3} & p_5 \sqrt{3} & q_4 \end{bmatrix}$$

donde p_1, p_2, p_3, p_4 , y p_5 son enteros pares y q_1, q_2, q_3 y q_4 son enteros impares. De aquí que este elemento difiere de e y a ; no existe una relación de la forma $a^{\varepsilon_1} b^{n_1} a b^{n_2} \dots b^{n_k} a^{\varepsilon_2} = e$ con $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n_1, \dots, n_k \in \{1, 2\}$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$. Así H es no manejable por Proposición 81.

Ahora como cada subgrupo cerrado H de un grupo manejable G es manejable, ver por ejemplo [Pi]. Entonces G es no manejable. ■

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Bibliografía

- [AR] Auslander Maurice, Reiten Idun and Sverre O. Smalø, Galois Action on Rings and Finite Galois Covering. *Math. Scand.* 65 5-32 (1989).
- [B] Babai, L.: Some application of graph contractions, *J. Graph Theory* 1, 125-130 (1977).
- [BM] Biggs N. L., Mohar B. and Shawe-Taylor John, The spectral radius of infinite graphs, *Bull. London Math. Soc.* 20: 116-120 (1988).
- [BG] Bongarts K. and Gabriel P. Covering Spaces in Representation Theory, *Invent. Math.* 65, 331-378(1982).
- [CDS] Cvetkovic, D.M. Doob, M. and Sachs, H.: *Spectra of graphs*, Academic Press, New york (1979).
- [Gal] Gabriel P., The Universal Cover of a Representation Finite Algebra. *Proc. Puebla 1980. Springer Lect. Notes* 903, 68-105.
- [GoMc] Godsil, C.D. and McKay, B.D.: The dimension of a graph, *Quart J. Math. Oxford* (2), 31, 423-427 (1980)
- [H] Halmos P. R., *Introduction to Hilbert Spaces and the Theory of Spectral Multiplicity*, Chelsea, New York, 1951.
- [Iw] Iwasawa, Kenkishi. On some types of topological groups. *Ann. of Math.* 50, 507-558 (1949).
- [Ma] Massey, W.S.: *Introducción a la topología algebraica*. Ed. Reverté, España (1972).
- [M1] Mohar. B. Isoperimetric Inequalities, growth and the spectrum of graphs, *Linear Algebra Appl.* 103:119-131(1988).
- [M2] The Spectrum of an infinite graph, *Linear Algebra Appl.* 48 (1982).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

- [MO] Mohar B. and Matjaž Omladič, Divisors and the Spectrum of Infinite Graphs, *Linear Algebra Appl.* 91:99-106 (1987).
- [MW] Mohar B. and Woess W. A survey on Spectra of Infinite Graphs, *Bull. London Math. Soc.* 21:209-234 (1989).
- [Mu] Müller Vladimir, On the Spectrum of an Infinite Graph, *Linear Algebra Appl.* 93:187-189 (1987).
- [Os1] Ol 'shanskii, A. Yu, Infinite Simple Noetherian Group Without Torsion. *Math. USSR-Izv.* 15 531-588 (1980).
- [Os2] Ol 'shanskii, A. Yu, On the problem of the existence of an invariant mean on a group, *Russian Math. Surveys* 35 180-181 (1980).
- [P] Paterson Alan. T. Amenability, *Mathematical Surveys and Monographs Number 29*, American Mathematical Society, 1988.
- [Pe] de la Peña, J.A.: La cubierta universal de un carcaj con relaciones. Tesis (Maestría), México, D.F. (1982).
- [PT] de la Peña. J.A., Takane M. The spectral radius of the Galois covering of a finite graph. *Linear Algebra Appl.* 160(1992), 175-188.
- [Pi] Pier J. P., *Amenable Locally Compact Groups*, Wiley 1984.
- [Ta] Takane M. (Tesis de Doctorado) Propiedades espectrales de las matrices de Coxeter y las matrices de adyacencia de las álgebras hereditarias de tipo salvaje. México, 1992.
- [T] Taylor A. E., *Introduction to Functional Analysis*, Wiley, New York, 1958.

