

01173
8



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA
DE MEXICO**

**FACULTAD DE INGENIERIA
DIVISION DE ESTUDIOS DE POSGRADO**

**ESTUDIO NUMERICO DEL PROBLEMA CONJUGADO DE LA
CONVENCION NATURAL EN UNA CAVIDAD CUADRADA**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN INGENIERIA (MECANICA)

P R E S E N T A :

FAUSTO ALEJANDRO SANCHEZ CRUZ

DIRECTOR DE TESIS: DR. FRANCISCO SOLORIO ORDAZ



Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas
UNAM a difundir en formato electrónico el
contenido de mi trabajo
MEXICO, D. F. NOMBRE: Fausto Alejandro
Sánchez Cruz
FECHA: 6 de Mayo de 2003
FIRMA: [Firma]

MAYO 2003

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Agradecimientos:

Un profundo y sincero agradecimiento a mis profesores del Departamento de Termoenergía y Mejoramiento Ambiental, de la Facultad de Ingeniería. De ellos he recibido todo el apoyo, la confianza y la atención durante la realización de mis estudios.

Con gratitud al Dr. Francisco Javier Solorio Ordaz, con quién he tenido el privilegio de estudiar y colaborar.

Al Dr. Rubén Ávila Rodríguez, por su apoyo, observaciones y consejos, mismos que permitieron llevar a cabo el presente trabajo numérico.

Al Dr. Jaime Gonzalo Cervantes de Gortari, por sus atenciones y acertados consejos, que indudablemente han permitido mejorar la calidad de este trabajo.

Al Dr. Federico Méndez Lavielle, de quién he recibido un gran apoyo y motivación para continuar avanzado en mi preparación profesional.

Al Dr. Abraham Medina Ovando, por la confianza y el apoyo otorgados para el desarrollo de una nueva etapa en mi vida académica.

A todos Ustedes, gracias por su dirección y por distinguirme con su amistad.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, por las incontables oportunidades de superación que ofrece a sus estudiantes y académicos.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por el apoyo que recibí a lo largo de la realización de mis estudios de maestría.

El presente trabajo fue apoyado por la DGAPA-UNAM a través del proyecto PAPIIT No. IN101101.



Dedicatoria:

A mi esposa Erika Teresa, por el apoyo, el cariño y la paciencia que me motivan a ser mejor.

A mis padres, Faustino Sánchez y Esther Cruz, de quienes he aprendido el valor de la responsabilidad y el respeto. Gracias por sus incontables muestras de apoyo.

A mis hermanos, Esther, Rocío y Alberto, por el tiempo tan valioso que compartimos.

A mis sobrinos César Augusto y Erick Fabián, el amanecer de la vida.

A la familia Sánchez.

A la familia Gutiérrez Belmont.

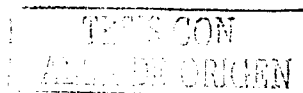
A mis compañeros y amigos Melesio Sánchez y Erick Luna.

A todos mis amigos de la Facultad de Ingeniería.

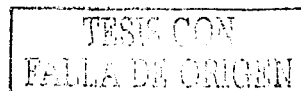
TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Índice General

1 ANTECEDENTES	8
1.1 GENERALIDADES	8
1.2 CAVIDADES RECTANGULARES	10
1.2.1 CAVIDADES RECTANGULARES VERTICALES	11
1.2.2 CAVIDADES RECTANGULARES HORIZONTALES	19
1.2.3 CAVIDADES RECTANGULARES CON PAREDES CONDUCTORAS	27
1.2.4 PROBLEMA CONJUGADO DE CONDUCCIÓN-CONVECCIÓN EN CAVIDADES RECTANGULARES	34
1.3 OTRAS CONFIGURACIONES FÍSICAS DE INTERÉS	40
1.4 OBJETIVOS DEL TRABAJO	41
2 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y MÉTODO DE SOLUCIÓN	42
2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	42
2.1.1 MODELO FÍSICO DE INTERÉS	43
2.1.2 ECUACIONES DE TRANSPORTE CONVECTIVO	44
2.1.3 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA	45
2.1.4 PARÁMETROS ADIMENSIONALES DEL FENÓMENO	47
2.2 SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA	50
2.2.1 MÉTODO DE SOLUCIÓN	50
2.2.2 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES	51
2.2.3 ALGORITMO DE SOLUCIÓN	56
2.2.4 SOLUCIÓN AL PROBLEMA CONJUGADO	60



2.2.5	ECUACIONES NODALES DE FRONTERA	68
2.2.6	SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS	73
2.2.7	NÚMERO DE NUSSELT PROMEDIO	74
2.2.8	ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA DEL MÉTODO NUMÉRICO	75
2.2.9	SIMULACIÓN DE UN PROBLEMA PUBLICADO. COMPARACIÓN DE RESULTADOS	78
3	RESULTADOS	83
3.1	DEPENDENCIA CON EL NÚMERO DE RAYLEIGH	84
3.2	EFECTO DE LA TEMPERATURA INICIAL DEL SISTEMA	88
3.3	EFECTO DE LA RELACIÓN DE CONDUCTIVIDADES TÉRMICAS	94
3.4	NÚMERO DE NUSSELT	101
4	CONCLUSIONES Y COMENTARIOS	105



RESUMEN

El estudio de la convección natural dentro de cavidades cerradas continúa siendo de gran interés debido a las posibilidades de aplicación práctica asociadas con este fenómeno. Sistemas de recepción de radiación solar, disipadores de calor en dispositivos electrónicos y sistemas para el ahorro de energía en edificios son algunos ejemplos de estas aplicaciones.

La aportación de esta investigación reside en mejorar el conocimiento del proceso natural de la transferencia de calor dentro de las cavidades cerradas al incluir el análisis de la interacción que existe entre el fluido y las paredes que lo confinan.

En este trabajo se presentan los resultados de la simulación numérica de la convección natural en el estado permanente dentro de una cavidad cerrada sujeta a una diferencia de temperaturas entre sus paredes superior e inferior. Se toma en consideración el espesor y la conductividad térmica finita de las paredes laterales. Bajo estas condiciones resulta un problema acoplado de conducción en las paredes y convección en el fluido. La cavidad es de sección cuadrada y se considera un flujo bidimensional e incompresible, con propiedades del fluido constantes, excepto para el término de flotación que se calcula empleando la aproximación de Boussinesq. Las ecuaciones de continuidad, cantidad de movimiento y energía se resuelven numéricamente usando el método de volúmenes finitos tanto en el fluido como en el sólido. El modelo numérico del problema acoplado se probó en consistencia numérica y se compararon sus resultados con los reportados en otro trabajo numérico previo.

Los resultados que se presentan corresponden a números de Rayleigh dentro del rango 10^4 a 10^7 , el número de Prandtl constante e igual a 0.7, la relación entre el espesor de las paredes laterales y la longitud de la cavidad igual a 0.2 y la relación entre la conductividad térmica de la pared y la del fluido para valores de 1, 5 y 10. Se incluyen los campos de velocidades en el fluido y los de temperaturas en las paredes y el fluido. Adicionalmente se reporta el número de Nusselt para las diferentes condiciones estudiadas.

NOMENCLATURA

c_p	Calor específico a presión constante, J/kgK
g	Aceleración de la gravedad, m/s ²
Gr	Número de Grashof, $\frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$
h	Coefficiente convectivo de transferencia de calor promedio, W/m ² K
H	Altura de la cavidad, m
k	Conductividad térmica del fluido, W/mK
k_w	Conductividad térmica de la pared, W/mK
L	Longitud de la pared, m
Nu	Número de Nusselt promedio, $\frac{hL}{k}$
P	Presión, Pa
Pr	Número de Prandtl, $\frac{\nu}{\alpha}$ ó $\frac{\mu c_p}{k}$
q	Calor transferido por convección, W
q''	Flujo de calor por convección, W/m ²
Ra	Número de Rayleigh, $\frac{g\beta L^3 \Delta T}{\nu \alpha}$
t	Tiempo, s
T	Temperatura, K
T_C	Temperatura en la superficie fría, K
T_H	Temperatura en la superficie caliente, K
T_{ini}	Temperatura inicial, K
u	Componente de la velocidad en dirección- x , m/s
v	Componente de la velocidad en dirección- y , m/s
x	Coordenada espacial en el eje horizontal, m
y	Coordenada espacial en el eje vertical, m

GRIEGAS

- α Difusividad térmica, m^2/s
 β Coeficiente de expansión térmica, $\frac{1}{K}$
 ϵ Espesor de la pared, m
 μ Viscosidad dinámica, $N\cdot s/m^2$
 ν Viscosidad cinemática, m^2/s
 ρ Densidad, kg/m^3
 θ Temperatura adimensional, $\frac{T-T_C}{T_H-T_C}$

SUBÍNDICES

- C Fría
 H Caliente
 w Pared

INTRODUCCIÓN

El estudio de la transferencia de calor debida a la convección natural dentro de contenedores cerrados es uno de los tópicos que ha recibido mayor interés por parte de los investigadores en tiempos recientes. Esto se debe principalmente a que el conocimiento de los fenómenos de transporte involucrados en la convección natural en flujos confinados encuentra aplicaciones prácticas en una gran variedad de sistemas, tales como las ventanas de doble cristal, los aislamientos de doble pared, los sistemas de enfriamiento de circuitos electrónicos, el almacenamiento y la conservación de energía solar, reactores nucleares, la obtención de materiales por medio del crecimiento de cristales, entre otros.

La convección natural en flujos confinados es el resultado de una compleja interacción entre el fluido y las paredes que lo confinan, cuando se encuentran en contacto térmico entre sí. De esta manera, las características de la convección natural dependen simultáneamente de varios factores, tales como la geometría de las paredes, las propiedades físicas del fluido, la diferencia de temperatura entre las paredes y el fluido y la ubicación de las paredes a través de las que existe transferencia de calor.

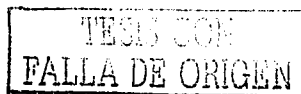
En las investigaciones sobre convección natural en cavidades se han supuesto flujos bidimensionales y tridimensionales. Las geometrías estudiadas incluyen cavidades cúbicas, cavidades rectangulares con diferentes relaciones de aspecto, cilindros, cavidades de formas triangulares, anulares y otras; además, el efecto de la inclinación de las cavidades también ha sido analizado. De particular importancia resulta la posición de las paredes a través de las que fluye el calor. La mayoría de los estudios en cavidades rectangulares están dirigidos a situaciones en las que las paredes fría y caliente se encuentran en lados opuestos. Existen trabajos que reportan resultados en cavidades con las paredes adiabáticas horizontales y las paredes verticales con transferencia de calor. Otra opción consiste en tener las paredes verticales adiabáticas, la pared caliente abajo y la pared fría en la parte superior; esta configuración da lugar al fenómeno conocido como convección de Rayleigh-Bénard. La mayor parte de las investigaciones relacio-

nadas con la convección natural en cavidades está dirigida al estudio de los patrones de flujo y a la obtención del coeficiente de transferencia de calor ya sea local o global, tanto con métodos numéricos como experimentales.

La presente investigación está dirigida al estudio de la convección natural dentro de una cavidad cerrada de sección cuadrada, flujo bidimensional y en estado permanente. La pared superior tiene una temperatura baja, la pared inferior una temperatura alta; las paredes verticales tienen una conductividad térmica finita, un cierto espesor y se encuentran aisladas térmicamente en sus superficies externas. Cuando se imponen dichas condiciones de frontera, el fenómeno de convección dentro de la cavidad se acopla con el fenómeno de difusión en las paredes verticales, es decir, el movimiento convectivo y la distribución de temperaturas dentro de las paredes verticales son mutuamente dependientes.

Para realizar el análisis del fenómeno en cuestión se hace uso de un código numérico que permite simular las condiciones acopladas de convección en el fluido y difusión de calor en las paredes. La simulación numérica se lleva a cabo para diferentes valores del número de Rayleigh, obteniéndose de esta manera el campo de velocidades, la distribución de temperaturas, tanto en el fluido como en las paredes verticales, y coeficiente de transferencia de calor local para las diferentes condiciones elegidas.

La tesis se desarrolla en cuatro capítulos. En el primero, se presenta un panorama general de las investigaciones acerca del fenómeno de la convección natural en cavidades. En el capítulo dos, se detalla la manera en la que se estudió el fenómeno. En el capítulo tres, se muestran las gráficas de los campos de velocidades, de temperaturas y los coeficientes de transferencia de calor global. Adicionalmente, se presenta un análisis del efecto de la magnitud de la conductividad térmica de las paredes verticales y del espesor de las mismas sobre los patrones de flujo y la transferencia de calor. En el capítulo cuatro, se presentan las conclusiones y algunos comentarios generales, además de las sugerencias para el desarrollo de trabajos futuros. Finalmente, se mencionan las referencias y bibliografía adicional.



Capítulo 1

ANTECEDENTES

1.1 GENERALIDADES

El estudio de la convección natural en cavidades resulta de interés debido a la variedad de aplicaciones prácticas que estos conocimientos pueden encontrar. Los confinamientos que contienen a un fluido son componentes importantes en una gran cantidad de sistemas geofísicos y de ingeniería, por lo que aún hoy son tema de actualidad y representa un reto, como lo refleja el gran esfuerzo que se ha realizado durante las últimas tres décadas en la investigación de este tema.

En el caso de la convección natural en flujos externos, se considera que el tamaño del ambiente fluido que rodea la superficie sólida es de tal magnitud, que lejos de dicha superficie, éste no se afecta por los flujos convectivos cercanos a la superficie. Esto conduce a una simplificación importante en el análisis, en virtud de que las condiciones externas a la región del flujo quedan especificadas como independientes del flujo. Por otro lado, en los sistemas de convección natural interna, los flujos adyacentes a las superficies están inevitablemente acoplados con el flujo en el interior. Como consecuencia de esta complejidad, los problemas de convección natural interna



han recibido menos atención que los flujos externos.

La convección natural en cavidades cerradas y parcialmente cerradas ocurre en muchas aplicaciones de ingeniería. Los aislamientos térmicos de edificios frecuentemente consisten en huecos de aire en paredes de capas múltiples. La reducción de pérdidas de calor en los colectores solares involucra a la convección natural entre la parte caliente del sistema de absorción de energía solar y la cubierta transparente. El enfriamiento de componentes que generan calor en las industrias eléctricas y nucleares es de vital importancia. Los procesos de fundición y solidificación ocurren con frecuencia en regiones cerradas, y los efectos de la convección natural en la región líquida tiene un efecto significativo sobre la calidad del crecimiento de los cristales. Por otro lado, las cavidades parcialmente cerradas son de particular interés en flujos convectivos en habitaciones, los cuales han sido extensamente estudiados en la investigación del fuego y el diseño de edificios, así como en hornos, almacenes de energía y otros varios sistemas industriales.

Según sea la aplicación de interés, la forma geométrica de las cavidades varía desde formas regulares hasta caprichosas. En la literatura se encuentra reportada una importante variedad de geometrías y condiciones físicas; cavidades cuadradas, rectangulares, triangulares, cilíndricas, anulares, esféricas, entre otras. La geometría de mayor interés debido a su simplicidad y aplicación práctica es la rectangular, y el efecto de la relación de aspecto H/L (altura/longitud) sobre los fenómenos de transporte es de particular importancia.

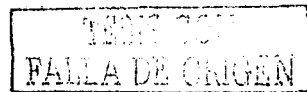
Con relación a las cavidades rectangulares, en general se tienen dos configuraciones básicas [6]. La primera es conocida como *cavidad rectangular vertical*, y corresponde al caso en el que la diferencia de temperaturas se presenta entre las paredes verticales; la segunda, llamada *cavidad rectangular horizontal*, se refiere al caso en donde la diferencia de temperaturas se tiene entre las paredes horizontales. En ambas situaciones las paredes restantes pueden ser adiabáticas o conductoras perfectas. Las llamadas *paredes conductoras perfectas* indican que las paredes tienen una caída de temperatura lineal desde la temperatura alta hasta la temperatura baja. Los análisis de transferencia de calor en cavidades rectangulares, tanto horizontales como verticales,

han sido escasamente dirigidas al estudio de casos con paredes conductoras perfectas, siendo los de paredes adiabáticas los más analizados.

Recientemente se han realizado estudios en condiciones tridimensionales, para los cuales, el movimiento convectivo se vuelve bastante más complejo [19]. También se ha analizado el error en el que se incurre con la suposición de flujos bidimensionales y se ha encontrado que en la mayor parte de las aplicaciones prácticas, los resultados obtenidos suponiendo este tipo de condiciones proporcionan una muy buena estimación de los fenómenos de transporte dentro de las cavidades [6]. Los estudios de la transferencia de calor han cubierto tanto los casos de flujos laminares como turbulentos. La metodología empleada para el tratamiento de este tipo de fenómenos incluye a las mediciones experimentales, los cálculos numéricos, y en los casos más simples, los análisis teóricos.

1.2 CAVIDADES RECTANGULARES

La suposición de flujo bidimensional en cavidades verticales, horizontales e inclinadas ha sido extensamente empleada, debido a la considerable simplificación que representa si se compara con un análisis de transporte tridimensional. Frecuentemente, una cavidad puede ser muy larga en una de sus dimensiones. Entonces, una representación bidimensional se puede aplicar en la región central. Aunque los flujos internos de convección natural de interés en aplicaciones prácticas, tales como el crecimiento de cristales, los colectores solares, son generalmente tridimensionales, los resultados con la suposición de flujo bidimensional son frecuentemente satisfactorios. El esfuerzo y el costo involucrados en extender el análisis de dos a tres dimensiones son considerables con frecuencia. Consecuentemente, mucha de la información sobre flujos internos ha sido obtenida por medio de análisis en dos dimensiones y comparada con resultados experimentales [6]. Sin embargo, en los años recientes ha existido un incremento significativo



en la cantidad de análisis tridimensionales.

1.2.1 CAVIDADES RECTANGULARES VERTICALES

Una cavidad rectangular vertical se define, convencionalmente, como una cavidad limitada por dos superficies verticales mantenidas a diferentes temperaturas. Las dos superficies restantes son con frecuencia consideradas como aisladas o con su temperatura variando linealmente entre aquellas correspondientes a las superficies verticales. La Figura 1-1 muestra un bosquejo de un sistema de este tipo, además de la nomenclatura empleada.

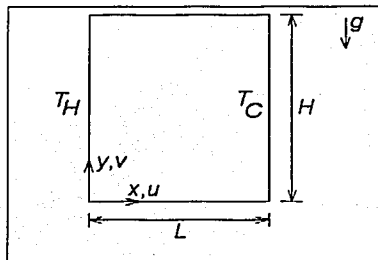


Figura 1-1: Bosquejo y sistema coordenado de una cavidad rectangular vertical. T_H , temperatura alta; T_C , temperatura baja; H , altura; g , gravedad; L , longitud.

Los aspectos de interés son la razón de transferencia de calor entre las paredes, y la naturaleza de los flujos que se presentan, particularmente, la variedad de regímenes de flujo que ocurren dependiendo de las condiciones de la cavidad. Las ecuaciones que modelan el fenómeno son las ecuaciones de conservación de la masa, cantidad de movimiento, y energía. Cuando se supone que el fluido es newtoniano, el flujo es laminar y bidimensional, en estado permanente, y se desprecian los efectos de la radiación térmica y la disipación viscosa, y se aplica la aproximación de Boussinesq, las ecuaciones se reducen a las que se muestran a continuación.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1.2)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g\beta (T - T_C) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (1.3)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (1.4)$$

Las condiciones de frontera para el caso de la cavidad rectangular vertical con paredes horizontales adiabáticas son:

$$\text{En } x = 0 \text{ y } 0 \leq y \leq H: \quad u = v = 0 \quad \text{y} \quad T = T_H \quad (1.5)$$

$$\text{En } x = L \text{ y } 0 \leq y \leq H: \quad u = v = 0 \quad \text{y} \quad T = T_C \quad (1.6)$$

$$\text{En } y = 0, H \text{ y } 0 \leq x \leq L: \quad u = v = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0 \quad (1.7)$$

Por otra parte, si las paredes horizontales tienen una distribución lineal de temperatura desde la temperatura baja hasta la alta, entonces, $T = T_H - (T_H - T_C) \frac{y}{L}$ sustituye a $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ en la condición de frontera mostrada en (1.7).

Es posible adimensionalizar las ecuaciones (1.1) a (1.4) y las condiciones de frontera (1.5) a (1.7) mediante las variables adimensionales:

$$X = \frac{x}{L}; Y = \frac{y}{H}; U = \frac{uL}{\alpha}; V = \frac{vL}{\alpha}; \theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C}; P^* = \frac{PL^2}{\rho\alpha^2} \quad (1.8)$$

y demostrar que los parámetros adimensionales que caracterizan el fenómeno son el número de Rayleigh Ra_L , el número de Prandtl Pr , y la relación de aspecto H/L . Estos parámetros se pueden obtener también realizando un análisis dimensional del fenómeno.

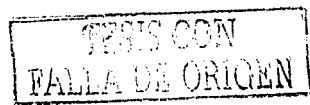
Una recopilación extensa de investigaciones acerca de la convección en cavidades puede encontrarse en el libro de Gebhart *et al.* [6]. Resulta conveniente comentar algunos aspectos



interesantes de este texto con relación a los resultados reportados en distintos estudios de la convección en cavidades rectangulares verticales.

Entre las primeras investigaciones se encuentra un análisis detallado de Batchelor (1954)¹. Él consideró valores de H/L desde 5 hasta ∞ . Se utilizó un método de perturbaciones para valores de Ra pequeños, y se concluyó que si H/L es grande y $Ra < 1000$, la transferencia de calor es ligeramente superior a la correspondiente a una conducción pura. Se encontró que cuando $H/L \rightarrow \infty$ y Ra tiene cualquier valor, la conducción es el único mecanismo de transferencia de calor. Para valores altos de Ra , se supuso que el núcleo en la región interior de la cavidad, lejos de la capa límite de las paredes, era isotérmico y que giraba como un cuerpo sólido. Estos resultados de Batchelor se compararon con un estudio experimental presentado por Mull y Raiher (1930), encontrándose buena correspondencia entre ambos. Los estudios experimentales de Eckert y Carlson (1961) para aire en los que variaron la relación H/L desde 2.1 hasta 46.7 y el número de Rayleigh desde 200 hasta 2×10^5 y de los de Elder (1965) para aceite silicón de Pr de 1000, contribuyeron de una manera importante al conocimiento de los flujos y los mecanismos de transferencia de calor. Para valores bajos de Ra , la conducción fue dominante y se encontró una distribución lineal de temperaturas entre las paredes verticales en la región lejana a los bordes superior e inferior. Los efectos convectivos resultaron ser significativos cerca de estos bordes. Para valores altos de Ra , se presentaron capas límite en las paredes verticales y el núcleo fue estable y linealmente estratificado. Elder (1965) varió la relación H/L entre 1 y 60 y el número de Rayleigh alrededor de 10^8 . Se determinaron las distribuciones de temperatura y velocidad. Se agregó polvo de aluminio en el fluido para que el movimiento de las partículas indicara el patrón de flujo. La superficie superior de la cavidad estaba abierta a la atmósfera. Para valores de Ra menores de 1000 se observó una circulación de una sola celda, correspondiente al régimen de conducción. Elder también estudió la transición del flujo laminar al turbulento, y observó la propagación de perturbaciones en el flujo hacia arriba del lado de la superficie caliente y hacia abajo del lado de la fría. La turbulencia surgió

¹Las fechas entre paréntesis que se encuentran en este párrafo no son referencias de la presente tesis, sino del libro de Gebhart *et al.*



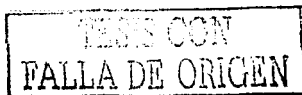
alrededor de $Ra = 10^9$.

A través de las diferentes investigaciones que se han realizado para las cavidades rectangulares verticales, tanto experimentales como numéricas, se ha encontrado que los patrones de flujo y la razón de transferencia de calor resultan altamente dependientes de la variación del número de Rayleigh y de la relación de aspecto, siendo la dependencia del número de Prandtl relativamente menos importante. Bejan [1] menciona en su libro que en general se han reportado cuatro diferentes regímenes en estado permanente. La Figura 1-2, muestra los cuatro regímenes que se describen a continuación.

I. Régimen de conducción. En este caso la temperatura varía linealmente a través de la cavidad; entonces, la transferencia de calor entre las dos paredes laterales (por unidad de longitud en la dirección z de la Figura 1-1) es del orden de $kH\Delta T/L$. El gradiente horizontal de temperatura $\Delta T/L$ genera una circulación lenta en el sentido de las manecillas del reloj; sin embargo, la contribución a la transferencia de calor de este flujo es insignificante.

II. Régimen de cavidad alta ($H/L > 1$). En la mayoría de los casos, la temperatura varía linealmente entre las dos paredes laterales. La transferencia de calor es del orden de $kH\Delta T/L$, como en el caso precedente. La circulación del flujo en el sentido de las manecillas del reloj se caracteriza por distintas capas en la vecindad de las paredes superior e inferior.

III. Régimen de alto número de Rayleigh (régimen de capa límite). Las capas límite térmicas verticales se forman a lo largo de las paredes laterales. La razón de transferencia de calor a través de la cavidad es del orden de $(k/\delta_T) H\Delta T$, donde δ_T es el espesor de la capa límite térmica. Las paredes adiabáticas horizontales son delineadas por distintas capas térmicas. La mayor parte del fluido en la cavidad (el núcleo) está relativamente estancado y estratificado



térmicamente.

IV. Régimen de cavidad de poca altura ($H/L < 1$). El mecanismo de transferencia de calor es dominado por la presencia de capas límite verticales; por lo tanto, su orden de magnitud es nuevamente $(k/\delta_r) H \Delta T$. Esta escala representa el límite superior debido a que el largo núcleo horizontal de la cavidad provee un efecto adicional de aislamiento. En esta región, las dos secciones del contra flujo horizontal tienen un buen contacto térmico, resultando un aislamiento efectivo en la dirección izquierda-derecha.

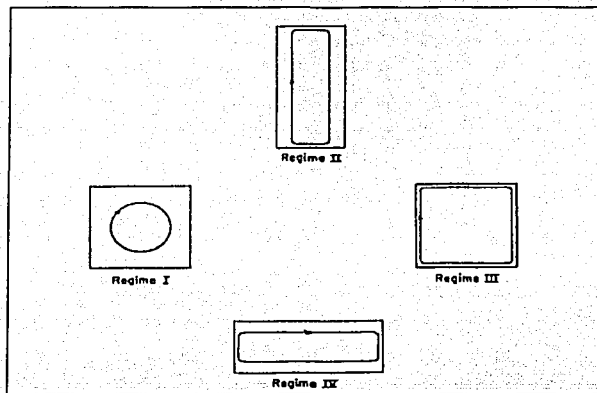


Figura 1-2: Patrones de flujo de los regímenes I a IV. Tomada de Bejan [1].

Además, Bejan [1], presenta una gráfica a manera de sumario de diferentes resultados obtenidos en varias investigaciones para cavidades rectangulares verticales. La Figura 1-3, tomada de [1] muestra cómo afectan la relación de aspecto y el número de Rayleigh a la razón de transferencia de calor.

Por otra parte, resulta conveniente mencionar los aspectos más relevantes de algunos trabajos realizados en cavidades verticales, revisados durante la etapa de investigación de esta

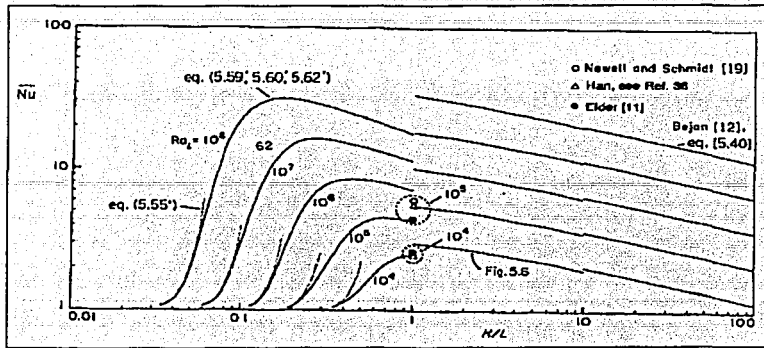


Figura 1-3: Número de Nusselt en función del número de Rayleigh y de la relación de aspecto H/L , para cavidades verticales. Tomada de Bejan [1].

tesis.

Seki, Inaba y Fukusako [26], utilizando diversos tipos de fluido, realizaron una observación visual de los flujos convectivos en una cavidad vertical esbelta con las paredes horizontales adiabáticas. Analizaron cualitativamente el efecto de la relación de forma y del número de Prandtl sobre la aparición de los diferentes patrones de flujo encontrados dentro de un rango de $10^7 \leq Ra_H \leq 10^{11}$. Los autores encontraron que los flujos son moderadamente dependientes del número de Prandtl y que los patrones de flujo se transforman fácilmente de laminares a flujos en transición (que presentan flujo turbulento en parte de la capa límite) conforme se incrementa el ancho de la cavidad. Para el caso de H/L de 30 la transición ocurre a $Ra_H = 6 \times 10^9$ mientras que para H/L de 4.4 ocurre alrededor de $Ra_H = 1.5 \times 10^9$. Además, en este trabajo se estimó la transferencia de calor para relaciones de forma de 6 a 30 y números de Prandtl entre 4 y 12500. Se reportaron las siguientes correlaciones para el número de Nusselt promedio:

Para la región laminar

$$Nu_H = 0.36 Pr^{0.051} (H/L)^{-0.11} Ra_H^{0.25} \quad (1.9)$$

y en la región de transición

$$Nu_H = 0.096Pr^{0.051} Ra_H^{0.3} \quad (1.10)$$

Newell y Schmidt [17], presentaron un estudio numérico para la convección natural laminar en una cavidad rectangular llena de aire ($Pr = 0.7$), en estado permanente, con calentamiento por una pared vertical, el enfriamiento por la pared opuesta y las paredes restantes adiabáticas. Las relaciones de forma estudiadas son 1, 2.5, 10, para números de Grashof, Gr_L , en el rango de 4×10^6 a 1.4×10^5 . Para el caso de H/L de 20, el rango de Gr_L es de 8×10^3 a 4×10^4 . Los resultados para el número de Nusselt promedio fueron correlacionados de la siguiente manera:

Para $H/L = 1$

$$Nu_L = 0.0547Gr_L^{0.397} \quad (1.11)$$

Para $2.5 \leq H/L \leq 20$

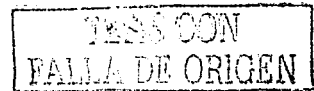
$$Nu_L = 0.155Gr_L^{0.315} (H/L)^{-0.265} \quad (1.12)$$

Estos resultados fueron comparados de forma favorable con datos experimentales reportados con anterioridad por Batchelor, Elder, Eckert y Carlson, entre otros.

Un estudio semejante al anterior es el reportado por Yin, Wung y Chen [30], quienes experimentalmente analizan una cavidad rectangular angosta vertical llena de aire con relación de forma de 4.9 a 78.7, y con Gr_L de 1.5×10^3 a 7×10^6 . Se analizaron las distribuciones de temperatura en el fluido y se reconocieron los regímenes de conducción, transición y de capa límite. Los autores sugieren la siguiente correlación para el número de Nusselt global:

$$Nu_L = 0.21Gr_L^{0.269} (H/L)^{-0.131} \quad (1.13)$$

Ozoe, Ohmuro, Mouri, Mishima, Sayama y Churchill [18], por medio de mediciones con Laser-Doppler, analizaron una cavidad vertical de baja profundidad. Las condiciones de estudio fueron $Ra_H = 1.52 \times 10^8$ y $Pr = 9.08$. Obtuvieron los perfiles de velocidad en las direcciones vertical y horizontal. Encontraron el régimen de capa límite en la región cercana a las paredes y un núcleo prácticamente estancado, siendo estos resultados similares a los reportados en análisis



numéricos anteriores. Estudiaron la distribución de temperaturas con el uso de termopares. En la región interna a la cavidad, utilizaron una punta de prueba móvil. Realizaron una visualización por medio del método de iluminación con fenolftalina, observando las diferentes celdas en el fluido. Encontraron así que el movimiento era prácticamente bidimensional dentro de la capa límite a lo largo de la placa caliente, y que el flujo horizontal a lo largo de la placa superior consistía de celdas giratorias longitudinales debidas probablemente a la fuerza centrífuga generada por el cambio de dirección del flujo.

Otro trabajo interesante es el que presentaron Ramesh y Venkateshan [23], en el que estudiaron experimentalmente una cavidad de sección cuadrada. La dimensión de la cavidad en la dirección perpendicular a la sección cuadrada es lo suficientemente grande como para considerar un flujo bidimensional. Una de las paredes verticales es calentada, la otra enfriada y las restantes son adiabáticas. El fluido en estudio fue aire y se utilizó un interferómetro diferencial comercial. Con la ayuda de este aparato óptico fue posible determinar el coeficiente de transferencia de calor a lo largo de las superficies. En este estudio se hace una discusión detallada de la metodología empleada por los autores para alcanzar las condiciones de aislamiento en las paredes horizontales, situación que resulta complicada de obtener experimentalmente. Además, en este trabajo se presenta una correlación para el número de Nusselt promedio, válida para números de Grashof entre 5×10^4 y 2×10^6 , misma que se presenta a continuación:

$$Nu_L = 0.56Gr_L^{0.195} \quad (1.14)$$

Un estudio numérico de una cavidad rectangular vertical fue presentado por Ismail y Scalon [10]. El rango de H/L fue de 1 a 10 y el número de Rayleigh entre 10^3 y 10^6 . El objetivo principal de los autores fue mostrar la aplicación del Método del Elemento Finito en los problemas de transferencia de calor. Los resultados encontrados de esta manera fueron comparados con otros obtenidos por De Vahl Davis [5], los cuales por cierto, son considerados como punto de comparación en este tipo de configuración física. A partir de un análisis detallado de los resultados, los autores encontraron muy favorable la comparación tanto para los patrones de flujo como para el coeficiente de transferencia de calor, incluso los perfiles de velocidad para las

direcciones vertical y horizontal muestran una buena comparación con resultados publicados por De Vahl Davis.

Con relación a la configuración conocida como cavidad rectangular vertical, existen trabajos dirigidos al estudio de la turbulencia. Sólo por mencionar uno, Tian y Karayiannis [27] presentaron un estudio de este tipo. De manera experimental, los autores analizaron el caso de aire como flujo interno en la cavidad. Empleando anemometría Laser-Doppler midieron los perfiles de velocidad horizontal y vertical para un número de Rayleigh igual a 1.58×10^9 . Bajo estas condiciones, según lo reportan los autores, se presenta una convección natural de baja turbulencia. Haciendo uso de una punta de termopar, la cual podía trasladarse dentro de la cavidad, determinaron los perfiles de temperatura en el fluido. La longitud de la cavidad en la dirección perpendicular a la sección rectangular era mucho mayor que su altura H y su anchura L , lo que permitía la presencia de un flujo bidimensional en el plano medio. Encontraron que bajo las condiciones de estudio se tiene un régimen de capa límite y que el núcleo se encuentra estancado y estratificado. Se presentaron cuatro vórtices, los dos mayores en tamaño cercanos a las paredes verticales y los otros dos cercanos a las paredes horizontales. Se calcularon los esfuerzos cortantes en las paredes a partir de la medición de las velocidades dentro de la capa límite. Se obtuvieron perfiles de velocidad similares en las cercanías de superficies caliente y fría, además, el número de Nusselt promedio relativo a la superficie caliente mostró una buena comparación con aquel de la superficie fría.

1.2.2 CAVIDADES RECTANGULARES HORIZONTALES

Una cavidad rectangular horizontal se define, convencionalmente, como una cavidad limitada por dos superficies horizontales mantenidas a diferentes temperaturas. Las dos superficies restantes son con frecuencia consideradas como aisladas o con su temperatura variando linealmente entre aquellas correspondientes a las superficies horizontales. En la Figura 1-4 se muestra un bosquejo de un sistema de este tipo, cuando la cavidad se calienta por abajo.

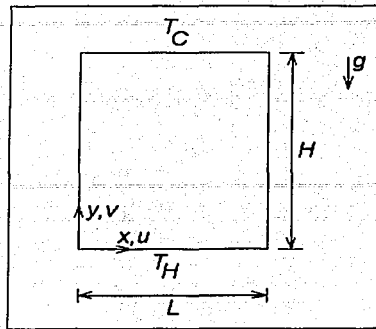


Figura 1-4: Cavity rectangular horizontal calentada por abajo.

Las ecuaciones que modelan el fenómeno en cuestión son las mismas que para el caso de la cavity vertical, es decir las ecuaciones 1.1 a 1.4 y los parámetros adimensionales nuevamente son el número de Prandtl, el número de Rayleigh y la relación de forma H/L . Las condiciones de frontera para la condición de calentamiento por abajo y paredes verticales adiabáticas son:

$$\text{En } x = 0, L \text{ y } 0 \leq y \leq H : u = v = 0 \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (1.15)$$

$$\text{En } y = 0 \text{ y } 0 \leq x \leq L : u = v = 0 \quad T = T_H \quad (1.16)$$

$$\text{En } y = H \text{ y } 0 \leq x \leq L : u = v = 0 \quad T = T_C \quad (1.17)$$

Ahora, si las paredes verticales tienen una distribución lineal de temperaturas desde la temperatura caliente hasta la fría, entonces la condición $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ de (1.15) cambia por $T = T_H - (T_H - T_C) \frac{x}{L}$.

La diferencia fundamental entre las cavidades cerradas calentadas por un lado y las cavidades calentadas por abajo es que en las calentadas por un lado, tan pronto como se impone una pequeña diferencia de temperaturas ($T_H - T_C$) entre las paredes laterales, el flujo inducido por la flotación se presenta. Por el contrario, en las cavidades calentadas por abajo, la diferencia

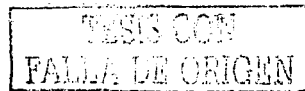
de temperaturas impuesta debe exceder un valor crítico finito antes de que sean detectados los primeros indicios de movimiento del fluido. Para el caso de las llamadas cavidades rectangulares horizontales, si el calentamiento es por la parte superior, se tienen condiciones estables, lo que conlleva a una situación de conducción pura en el fluido.

Cuando el calentamiento es por abajo y la cavidad es muy larga en las direcciones de x y z (plano horizontal), la condición para el inicio de la convección está dada por el número de Rayleigh crítico de $Ra_H \approx 1708$. Inmediatamente después de que se supera el valor crítico del número de Rayleigh, el flujo presenta rollos bidimensionales giratorios de sección transversal casi cuadrada. Este patrón de flujo es comúnmente conocido como celdas de Bénard o convección de Bénard. El flujo de celdas se vuelve considerablemente más complicadas cuando el número de Rayleigh excede en uno o más ordenes de magnitud su valor crítico. Los rollos bidimensionales se transforman en celdas tridimensionales, las cuales aparecen de forma hexagonal cuando se les mira desde arriba. A números de Rayleigh aún mayores, las celdas se multiplican haciéndose más delgadas y eventualmente el flujo se vuelve oscilatorio y turbulento.

Cuando se tienen valores del número de Rayleigh menores al crítico, el fluido es casi estático, y la temperatura decrece linealmente desde T_H hasta T_C . La transferencia de calor a través del fluido es por conducción pura y entonces el número de Nusselt promedio es igual a la unidad² ($Nu_H = 1$). El valor crítico de 1708 se refiere estrictamente a una cavidad horizontal infinitamente larga. Para otras configuraciones horizontales existen criterios diferentes con un valor del Rayleigh crítico del orden de 10^3 [3, 4]. Cuando el número de Rayleigh es varios ordenes de magnitud mayor que su valor crítico, la convección se vuelve turbulenta. En el régimen turbulento, el núcleo del fluido permanece prácticamente a la temperatura media de las superficies horizontales, mientras que dentro de una capa de fluido delgada cercana a las

²En efecto, si en un fluido existe un gradiente unidimensional de temperaturas y no existe flujo convectivo, entonces el calor se transfiere a través del fluido únicamente por difusión. Además, si el fluido es isotrópico, con propiedades constantes y se encuentra en condiciones de estado permanente, entonces: $h\Delta T = -k\frac{\partial T}{\partial y}$, y para este caso $h\Delta T = k\frac{\Delta T}{H}$, donde h es el coeficiente promedio de transferencia de calor por convección y H es la altura.

Entonces, $h = \frac{k}{H}$, y si el número de Nusselt promedio está definido como $Nu_H = \frac{hH}{k}$, resulta que: $Nu = \left(\frac{k}{H}\right)\frac{H}{k} = 1$.



paredes horizontales, ocurren caídas de temperatura del orden de $(T_H - T_C) / 2$.

Nuevamente se recomienda la extensa recopilación de investigaciones acerca de la convección en cavidades horizontales que se encuentra en el libro de Gebhart *et al.* [6]. De este texto se mencionan a continuación algunos aspectos interesantes. Entre los primeros estudios en cavidades rectangulares horizontales se encuentran los de Soberman (1958)³, Silverston (1958) y Globe *et al.* (1959). En este último estudio se reporta la correlación empírica para el Nusselt promedio:

$$Nu_H = 0.069 Ra_H^{1/3} Pr^{0.074} \quad (1.18)$$

que cubre los rangos 0.02 a 8750 para los números de Prandtl y 3×10^5 a 7×10^9 para los números de Rayleigh. Además, se encontró una dependencia despreciable del número de Nusselt con respecto a la relación de forma H/L . Posteriormente Rossby (1969) sugirió que la transición al flujo turbulento ocurre para un número de Rayleigh de alrededor de $Ra_H \approx 14000 Pr^b$, donde b tiene un valor aproximado de 0.6 para Pr mucho mayores que uno. Cuando Pr es pequeño no existen condiciones de flujo permanente para valores de Ra_H superiores al Rayleigh crítico y si Ra_H aumenta el flujo siempre es turbulento. O'Toole y Silverston (1961) sugirieron la siguiente correlación para el número de Nusselt promedio en flujo turbulento:

$$Nu_H = 0.104 Ra_H^{0.305} Pr^{0.084} \quad \text{para} \quad Ra > 10^5 \quad (1.19)$$

Hollands *et al.* (1975) correlacionaron sus propios datos experimentales y los de otros estudios y encontraron que si $Ra < 10^6$, para los casos de aire y agua, los números de Nusselt promedio están dados por:

$$Nu_H = 1 + 1.44 \left[1 - \frac{1708}{Ra_H} \right] + \left[\left(\frac{Ra_H}{5830} \right)^{1/3} - 1 \right] \quad \text{para aire} \quad (1.20)$$

³Nuevamente, las fechas entre paréntesis que se encuentran en este párrafo no son referencias de la presente tesis, sino del libro de Gebhart *et al.*



$$Nu_H = 1 + 1.44 \left[1 - \frac{1708}{Ra_H} \right] + \left[\left(\frac{Ra_H}{5830} \right)^{1/3} - 1 \right] + 2 \left(\frac{Ra_H^{1/3}}{140} \right) \left(1 - \ln \frac{Ra_H^{1/3}}{140} \right) \quad \text{para agua} \quad (1.21)$$

donde los términos entre paréntesis se toman como cero si tienen valores negativos. En el caso de que el Rayleigh sea menor al valor crítico, la transferencia de calor ocurre por conducción y el número de Nusselt es igual a uno.

Posteriormente el mismo Hollands [8] presentó un par de correlaciones para determinar el número de Nusselt promedio, una para cavidades horizontales y la otra para capas horizontales (cavidades horizontales con $H/L \rightarrow 0$) válidas para un amplio rango del número de Prandtl. Las correlaciones se obtuvieron ajustando los resultados proporcionados anteriormente por otros varios investigadores. Para la capa horizontal, ($H/L \rightarrow 0$) sugirió:

$$Nu_H = 1 + [1 - 1708/Ra]^* \left[k_1 + 2 \left(Ra^{1/3}/k_2 \right) \left(1 - \ln \left(Ra^{1/3}/k_2 \right) \right) \right] + \left[(Ra/5830)^{1/3} - 1 \right]^* \quad (1.22)$$

donde los paréntesis cuadrados con un punto: $[\]^*$, indican que sólo se toman en cuenta estos términos cuando el argumento dentro del paréntesis es positivo, si el argumento es negativo se toman como cero. Los parámetros k_1 y k_2 son funciones del número de Prandtl. El autor sugirió que:

$$k_1 = 1.44 \left(1 + 0.018/Pr + 0.00136/Pr^2 \right) \quad (1.23)$$

$$k_2 = 75 \exp \left(1.5 Pr^{-1/2} \right) \quad (1.24)$$

y para las cavidades horizontales, Hollands realizó dos modificaciones a la ecuación (1.22) para que ésta se ajustara a los datos disponibles para cavidades. La primera consiste en reemplazar el 1708 en el segundo término por el Rayleigh crítico, Ra_c , apropiado a la cavidad en cuestión; la segunda, en multiplicar el tercer término por un cierto factor de tal forma que ese término contribuya sólo cuando $Ra > Ra_c$, mientras se mantiene el valor asintótico correcto para altos

Ra . La ecuación modificada para el número de Nusselt promedio es:

$$Nu = 1 + [1 + x_1^{-3}]^* [k_1 + 2x_2^{(1-\ln x_2)}] + [x_3 - 1]^* [1 - \exp(-0.95 [x_1 - 1]^*)] \quad (1.25)$$

donde $x_i = (Ra/Ra_i)^{1/3}$, con $Ra_1 = Ra_c$; $Ra_2 = k_2^3$; y $Ra_3 = 5930$.

El autor comenta que para el caso de las cavidades horizontales, no todos los datos disponibles en la literatura se ajustan completamente a la ecuación (1.25), sin embargo, la mayoría de ellos lo hace. Los datos correspondientes a las cavidades rectangulares largas mostraron las máximas desviaciones (hasta 25% de la ecuación (1.25)). De esta forma, si se conoce el valor del número de Rayleigh crítico Ra_c para una cierta cavidad horizontal, es posible determinar el número de Nusselt promedio a partir de las correlaciones presentadas por Hollands. Afortunadamente, existen trabajos en los que se encuentran reportados los valores críticos del Rayleigh para este tipo de cavidades [3,4].

Catton [4] realizó una investigación acerca del inicio de la convección dentro de cavidades tridimensionales rectangulares calentadas por abajo. La investigación se realizó para analizar el inicio de la convección natural en un fluido confinado con superficies perfectamente conductoras por arriba y abajo, y por cuatro paredes verticales formando un rectángulo, con conductividades térmicas arbitrarias. A partir de las ecuaciones que modelan el fenómeno, Catton obtuvo las ecuaciones linealizadas de perturbación y utilizó el método de Galerkin para resolver el problema de valores propios para el número de Rayleigh. El valor propio más pequeño es el número de Rayleigh crítico. Un resultado notable en este trabajo fue el análisis del efecto que tienen las admitancias de las paredes laterales, $C = \frac{\alpha_f L}{\alpha_w l_w}$, (donde α_f es la difusividad térmica del fluido y α_w la de las paredes; L es la altura y l_w es el espesor de las paredes) sobre el número de Rayleigh crítico. Se encontró que cuando la forma de la cavidad se aproxima a una ranura (larga y angosta), el Rayleigh crítico para paredes verticales conductoras es hasta veinte veces mayor respecto al caso de paredes verticales aislantes. Por otra parte, cuando la base de la cavidad es cuadrada el incremento es de sólo tres veces. En general, para paredes con conductancia baja el Rayleigh crítico es menor que para los casos con conductancia alta. Finalmente, se encontró una buena comparación entre los resultados que predice esta investigación y otros resultados

teóricos y experimentales.

Existen muchos estudios recientes con relación a las cavidades rectangulares horizontales publicados en las revistas especializadas. En la actualidad se muestra una tendencia hacia el estudio de los fenómenos tridimensionales. Pallares *et al.* [19], presentaron un estudio numérico del flujo tridimensional en una cavidad cúbica calentada por abajo, enfriada por arriba y con las paredes verticales adiabáticas. El estudio se realizó para Pr igual a 0.71, 10 y 130, cuando $Ra \leq 10^6$. El objetivo principal de este estudio fue el de observar con detalle los diferentes patrones de flujo que se presentaron en el estado permanente con flujo laminar. Los autores reportaron siete diferentes estructuras y analizaron las condiciones para las cuales surgen cada una de ellas, encontrando que la estabilidad intrínseca a estos patrones depende de los valores de los números de Rayleigh y Prandtl.

Lir y Lin [16] presentaron un trabajo experimental dirigido a la observación de los patrones de flujo en una convección de Rayleigh-Bénard dentro de una cavidad rectangular. La anchura y la profundidad (en el plano horizontal) de la cavidad, fueron mucho mayores que su altura. Se estudió el caso del aire y se realizó la observación con la ayuda de humo de incienso. Con el uso de la luz de un retroproyector se generó una hoja de luz de unos 2 mm de espesor. Se puso especial interés en la observación de los patrones convectivos para números de Rayleigh ligeramente inferiores y superiores al valor crítico. Se obtuvieron fotografías de los patrones giratorios en forma de rollos característicos de esta convección. Las imágenes obtenidas muestran los patrones de flujo del estado permanente o estadísticamente permanente para número de Rayleigh de 1500 a 4000. Además, se muestra cómo evoluciona la formación de los vórtices con el tiempo, hasta que se alcanza el estado permanente. Las imágenes obtenidas permitieron una vista frontal y una vista superior de la cavidad. Fue posible observar los patrones en forma de rollos paralelos giratorios. La Figura 1-5 muestra un par de fotografías tomadas del trabajo de Lir y Lin.

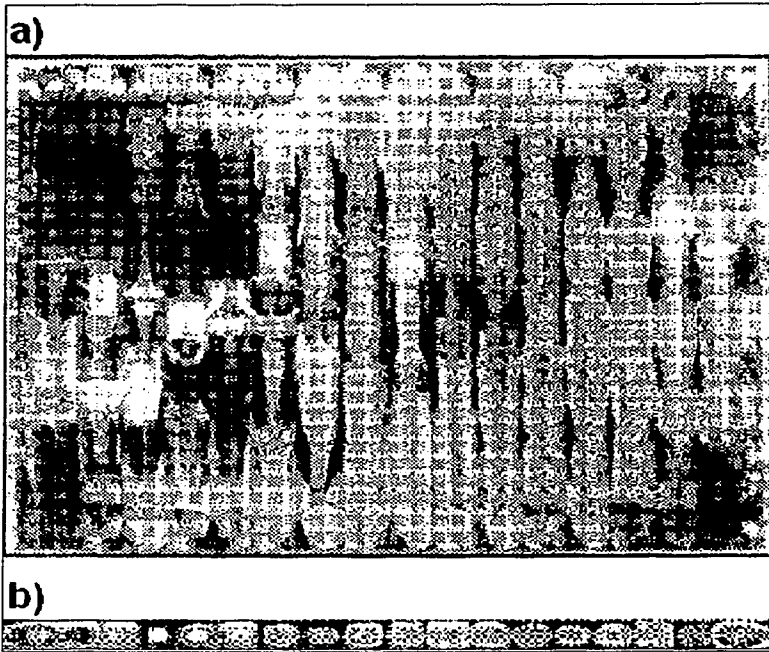


Figura 1-5: a) Vista superior de la cavidad que muestra los patrones en forma de rollos paralelos, b) vista frontal de la cavidad. $Re_H = 2500$. Tomadas de Lir *et al.* [16].

1.2.3 CAVIDADES RECTANGULARES CON PAREDES CONDUCTORAS

Hasta este punto se ha tratado el problema de las cavidades rectangulares con dos de sus paredes opuestas isotérmicas y las otras dos adiabáticas. Sin embargo, resulta interesante analizar el efecto que produce la presencia de las *paredes conductoras perfectas* en lugar de las paredes adiabáticas. El nombre de paredes conductoras perfectas se refiere al hecho de que dichas paredes tienen una distribución lineal de temperaturas desde el valor de T_H hasta T_C . Para ambos casos, cavidades rectangulares verticales y horizontales, las condiciones de frontera impuestas por las paredes conductoras perfectas modifican de manera importante los patrones de flujo, la transferencia de calor y el valor crítico del número de Rayleigh.

Catton y Edwards [2] realizaron uno de los primeros intentos por estudiar el efecto de las paredes conductoras sobre la convección dentro de las cavidades cerradas. Estos autores llevaron a cabo un estudio experimental cuyos objetivos fueron conocer los números de Rayleigh críticos, para el inicio del movimiento convectivo, y el efecto de las paredes conductoras sobre los valores del Nusselt. La cavidad tenía forma cilíndrica en posición vertical, fue calentada por abajo y enfriada por arriba. Analizaron y compararon los dos casos: pared vertical conductora y adiabática. En el estudio se varió la relación de forma de la cavidad L/d , (L es la altura del cilindro y d es el diámetro del mismo), desde 0.03 hasta 2.5. Para obtener experimentalmente los valores altos de la relación de forma, los autores introdujeron dentro de la cavidad cilíndrica un panel hexagonal. El diámetro hidráulico de los hexágonos fue igual al diámetro del círculo inscrito por el mismo, de tal manera que los cilindros hexagonales resultaron una buena aproximación a los cilindros circulares. Para los casos en los que se trabajó con el panel dentro de la cavidad, se realizó un análisis para determinar la transferencia de calor relativa a un sólo cilindro. Las imágenes de la Figura 1-6 muestran los valores de los números de Rayleigh críticos de acuerdo a la relación de aspecto. También se indican los valores del Rayleigh para los cuales las paredes laterales afectan al número de Nusselt en aproximadamente 5%.

Como se puede observar, para los dos casos, paredes conductoras y paredes adiabáticas, el

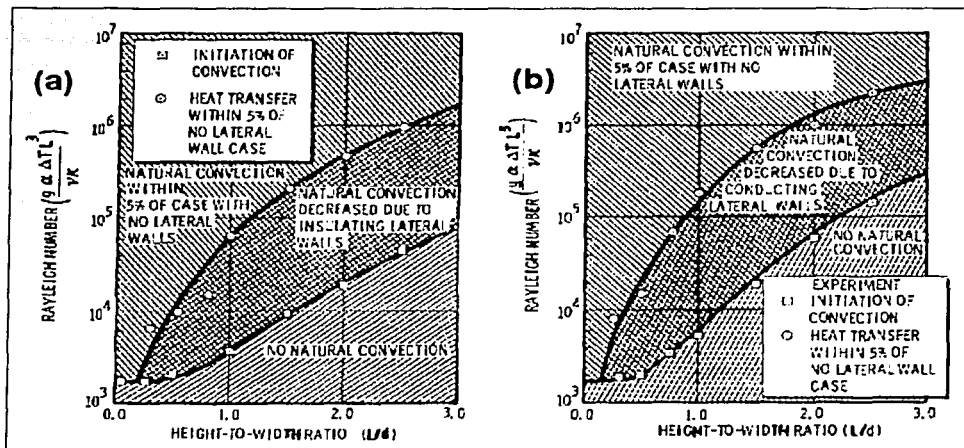


Figura 1-6: Región de influencia de la relación de forma sobre la transferencia de calor para (a) paredes adiabáticas, (b) paredes conductoras. Tomadas de Catton [2].

efecto de una relación L/d alta es el retraso en el inicio de la convección. Además, para el inicio de la convección con una relación de forma alta y paredes conductoras, se necesita un número de Rayleigh mayor, comparado con el necesario para la misma relación de forma pero con paredes adiabáticas.

Leong *et al.* [13] realizaron recientemente estudios experimentales relacionados con los efectos de las paredes conductoras sobre la transferencia de calor en cavidades cúbicas. En este estudio la cavidad se llenó de aire, dos de las superficies opuestas se mantuvieron a temperaturas T_H y T_C , respectivamente, mientras que las cuatro superficies restantes tuvieron una variación lineal desde T_H hasta T_C . Además, se estudió el efecto de la inclinación φ de la cavidad para valores de 0° , 45° y 90° . La Figura 1-7 muestra un esquema del modelo físico estudiado en [13].

El objetivo de esta investigación fue la obtención de soluciones confiables en estado permanente para un número de Rayleigh de 4×10^4 de tal manera que pudieran ser utilizadas para validar códigos numéricos de mecánica de fluidos computacional. En este trabajo se hace

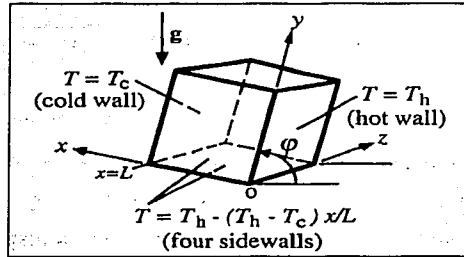


Figura 1-7: Esquema del modelo experimental estudiado por Leong *et al.* [13].

una descripción muy detallada de la metodología experimental que se utilizó, y se discute la confiabilidad del modelo construido, poniendo especial interés en la estimación de los errores y en la exactitud de las soluciones. A partir del análisis de los posibles factores que introducen errores en el experimento y en las mediciones, determinaron el número de Nusselt con un error máximo del 1%. Resulta importante mencionar que en este trabajo se obtuvo el valor del Rayleigh crítico para φ de 0° (calentado por abajo) y se comparó con el valor teórico de 6974 estimado por Catton [3] para la misma configuración física. Para una temperatura media de 295 K se obtuvieron valores del Rayleigh crítico de 6969 ± 144 con $\Delta T = 9.5$, y 7058 ± 119 con $\Delta T = 5.4$ K. El valor teórico de 6974 se encuentra dentro del rango del error experimental para los dos valores experimentales. Adicionalmente, al comparar los resultados experimentales del Nusselt con otros numéricos, se encontraron diferencias dentro de $\pm 0.3\%$.

Posteriormente Leong *et al.* [14] avanzaron en su investigación basándose en la metodología experimental reportada en [13] y presentaron la continuación de este trabajo. El objeto de este nuevo estudio fue el de cubrir valores para el número de Rayleigh de 10^4 , 10^5 , 10^6 , 10^7 y 10^8 , para inclinaciones φ de 0° , 45° y 90° . Del análisis de los posibles errores en los resultados experimentales, se estimó que los valores para el número de Nusselt se encontraron dentro de un límite de confiabilidad del 95%. Los autores recomiendan las siguientes ecuaciones para el número de Nusselt promedio de acuerdo a las diferentes combinaciones de inclinación y Rayleigh

estudiadas.

$$\text{Para } \varphi = 90^\circ \quad 10^4 \leq Ra_L \leq 10^8 \quad Nu_L = 0.08461 Ra_L^{0.3125} \quad (1.26)$$

$$\text{Para } \varphi = 45^\circ \quad 10^4 \leq Ra_L \leq 10^5 \quad Nu_L = 0.07309 Ra_L^{0.3358} \quad (1.27)$$

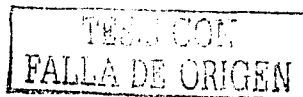
$$10^6 \leq Ra_L \leq 10^8 \quad Nu_L = 0.1492 Ra_L^{0.2955} \quad (1.28)$$

$$\text{Para } \varphi = 0^\circ \quad 10^4 \leq Ra_L \leq 10^5 \quad Nu_L = 1 + 2.5135 \times 10^{-5} Ra_L^{0.3358} \quad (1.29)$$

$$10^5 \leq Ra_L \leq 10^8 \quad Nu_L = 0.1194 Ra_L^{0.3021} \quad (1.30)$$

Un aspecto interesante en los experimentos de este trabajo fue el hecho de que para un Ra de 10^5 y $\varphi = 0^\circ$ (calentado por abajo), se encontraron dos soluciones diferentes para el estado permanente, cada una de ellas teniendo diferentes números de Nusselt para la superficie fría. Observando esta multiplicidad de soluciones, los autores resolvieron el problema numéricamente. De la simulación numérica tridimensional se obtuvieron dos posibles soluciones para el mismo valor $Ra_L = 10^5$, cada una de ellas reflejo de la otra; es decir que si se rota una de ellas 180° se obtiene la otra, como lo muestra la Figura 1-8. De esta manera, cuando uno de los dos números de Nusselt corresponde a la superficie fría, la otra aplica a la superficie caliente y viceversa. En la simulación numérica la aparición de una u otra solución dependió del tamaño de malla, y en la práctica cada solución o patrón de flujo aparece dependiendo de la distribución de temperatura inicial. Finalmente, se encontró que para números de Rayleigh mayores a 10^8 se necesitan modelos de prueba turbulentos.

Aún más reciente es el trabajo experimental presentado por Pallares *et al.* [20]. En éste, los autores analizaron la evolución de los patrones convectivos dentro de una cavidad cúbica calentada por abajo. Se estudiaron dos casos, el primero con las cuatro paredes verticales adiabáticas y el segundo con paredes conductoras. El análisis se realizó para números de Rayleigh moderados, $Ra \leq 8 \times 10^4$, y utilizaron aceite silicón ($Pr=130$). La topología y los campos de velocidades de las estructuras se determinaron por medio de visualización y velocimetría por imágenes de partículas (PIV), para valores de Rayleigh entre 5×10^3 y 8×10^4 . Debido a que la condición de paredes laterales perfectamente conductoras implica un perfil vertical de



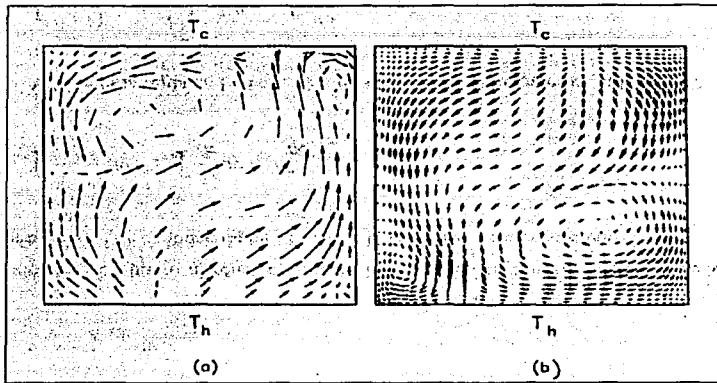


Figura 1-8: Campo de velocidades en el plano vertical de simetría calculado para $\varphi = 0^\circ$ y $Ra = 10^5$. Los tamaños de malla fueron (a) $15 \times 15 \times 7$ y (b) $30 \times 30 \times 14$. Tomada de Leong *et al.* [14].

temperaturas lineal, el espesor y el material de las paredes verticales deben de ser tales que la influencia de la convección no penetre en ellas afectando la distribución lineal de temperaturas. Esta condición en las paredes laterales puede ser caracterizada por la conductancia definida como:

$$C = \frac{k_f L}{k_w d_w} \quad (1.31)$$

donde k_f y k_w son las conductividades térmicas del fluido y de las paredes, respectivamente, L es la dimensión vertical de la cavidad y d_w es el espesor de las paredes laterales. La ecuación 1.31 establece que una pared delgada ($d_w/L \rightarrow 0$), o poco conductora ($k_w/k_f \rightarrow 0$), favorece el aislamiento ($C \rightarrow \infty$) cuando las paredes laterales de la cavidad se aíslan externamente. Para disminuir C , favorecer la conducción, y obtener el perfil lineal de temperaturas en las paredes laterales, se debe de incrementar el espesor de dichas paredes; además, el efecto de la convección no penetrará lateralmente en estas paredes si son lo suficientemente gruesas. En el estudio [20], las paredes verticales tuvieron un espesor del doble de la altura de la cavidad, y se aislaron por la parte externa. El espesor de las paredes se eligió así porque anteriormente Pallares *et al.*, habían

presentado un estudio numérico para una cavidad bidimensional de sección cuadrada [21], en el que demostraron que es posible despreciar la influencia del movimiento convectivo sobre el perfil lineal de temperaturas que se establece dentro de las paredes laterales, cuando el espesor de éstas es igual o mayor que la altura de la cavidad. Para realizar la velocimetría se sembraron partículas de látex de $1.1 \mu\text{m}$ de diámetro. Las imágenes se tomaron en secciones verticales con una cámara digital a razón de 30 imágenes por segundo y se procesaron por computadora con una resolución de 410×410 píxeles. Las imágenes se dividieron en zonas de interrogación uniformemente distribuidas de 35×35 píxeles cada una. Se realizaron correlaciones cruzadas entre dos imágenes. Con los intervalos de tiempo apropiados entre imágenes, se obtuvieron los desplazamientos de las partículas de entre 2 a 10 píxeles. Los experimentos se realizaron dentro de un rango para el número de Rayleigh entre 5000 y 8×10^4 , y se utilizaron pasos de 10^4 , en el rango de $10^4 \leq Ra \leq 8 \times 10^4$. Una vez que se alcanzó el Rayleigh máximo, se inició la etapa de descenso del Ra también en pasos de 10^4 con el fin de determinar los efectos de histéresis. En este análisis experimental [20] se estudiaron las condiciones reportadas en el trabajo numérico anterior de Pallares *et al.* [19] en el que se reportaron los patrones que se muestran en la Figura 1-9. El objeto de esto fue el determinar experimentalmente los rangos de Ra para los cuales los patrones reportados en el trabajo numérico [19] son estables. Tanto para el caso de las paredes verticales adiabáticas como para el de conductoras, se analizó la evolución de los patrones de flujo. Los resultados para la secuencia y transiciones de los patrones de flujo, de acuerdo al valor del número de Rayleigh se muestran en las Figuras 1-10a para el caso de las paredes adiabáticas y 1-10b para las paredes conductoras.

Como es posible observar en estas últimas figuras, en la etapa de retorno a las condiciones de menor número de Rayleigh se presentó el efecto de histéresis. El patrón S4 que no aparece en la Figura 1-10 es un patrón altamente inestable que evoluciona inevitablemente a otro más estable. Se mostró así, que los resultados experimentales y los numéricos tridimensionales (anteriormente reportados por los mismos autores) se ajustan de manera favorable, y que los patrones reportados numéricamente sí se presentan físicamente.

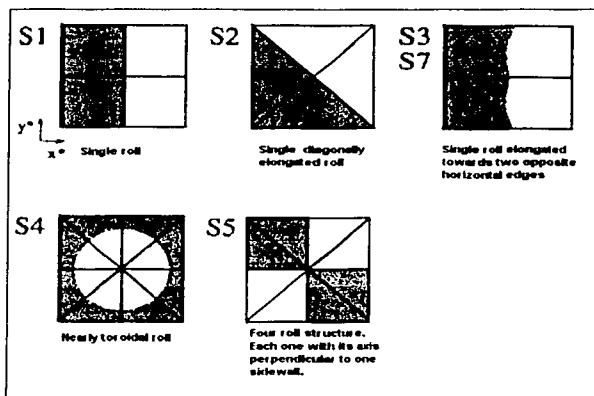


Figura 1-9: Patrones convectivos dentro de la cavidad. ■ Flujo ascendente, □ flujo descendente, -- eje del vórtice, — plano vertical de simetría. Tomada de Pallares *et al.* [20].

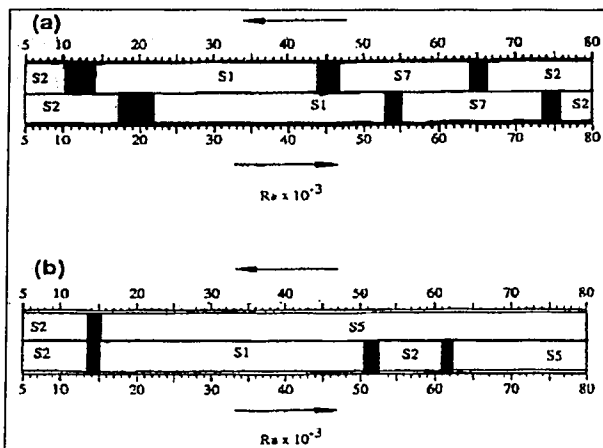


Figura 1-10: Secuencia y transiciones de los patrones de estado permanente en las cavidades cúbicas con paredes verticales (a) adiabáticas y (b) conductoras. Tomada de Pallares *et al.* [20].

1.2.4 PROBLEMA CONJUGADO DE CONDUCCIÓN-CONVECCIÓN EN CAVIDADES RECTANGULARES

En todos los estudios mencionados hasta este punto se ha supuesto que las paredes se encuentran en alguno de tres casos: pared isotérmica, distribución lineal de temperaturas o condición de aislamiento. Sin embargo en muchas situaciones prácticas, especialmente aquellas involucradas con el diseño de aislantes térmicos, la distribución de temperaturas dentro de las paredes (de espesor finito) puede diferir de estos tres casos y tener un efecto importante sobre el flujo de convección natural dentro de la cavidad. Esto constituye el motivo principal que ha llevado a los investigadores a resolver los comúnmente llamados *problemas conjugados de conducción-convección*. Estos problemas tienen la particularidad de que la conducción en el sólido y la convección en el fluido son mutuamente dependientes. De esta manera, la solución del sistema fluido depende de aquella en la región sólida y viceversa.

Kaminski y Prakash [11] resolvieron numéricamente un problema conjugado de conducción-convección para una cavidad bidimensional de sección cuadrada. El objeto principal del estudio fue examinar el efecto de la conducción en una de las paredes sobre la convección. Tres de las paredes de la cavidad se supusieron de espesor cero, y la restante, la pared vertical derecha de un espesor t . La Figura 1-11 muestra un bosquejo del modelo en cuestión. Las paredes horizontales están aisladas, la superficie vertical izquierda a temperatura uniforme T_C , y la superficie exterior de la pared vertical derecha a temperatura uniforme T_H . El fluido tiene una conductividad térmica k y la pared k_w .

Para analizar el fenómeno tomando en consideración la conducción en la pared, se plantearon tres modelos diferentes. En el primero, el caso conjugado completo, se supuso que la conducción dentro del sólido era completamente bidimensional. En el segundo, unidimensional, se supuso que la conducción en la pared era únicamente en la dirección horizontal. En el tercero, de parámetros concentrados, se supuso que la intercara sólido-fluido tenía temperatura uniforme. Se estudiaron los casos de $Pr = 0.7$ (aire) para números de Rayleigh entre 10^3 y 10^7 . Para el modelo conjugado completo, se resolvieron numéricamente las ecuaciones de la convección

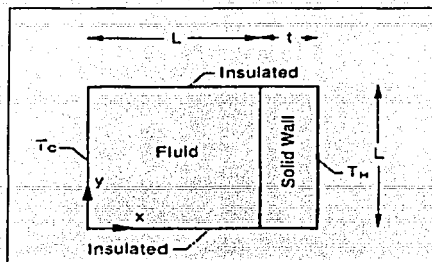


Figura 1-11: Modelo del problema analizado por Kaminski y Prakash. Tomada de Kaminski *et al.* [11].

y la conducción de manera simultánea empleado el método de los volúmenes finitos. La idea planteada por Patankar [22] consiste básicamente en resolver simultáneamente el flujo en la cavidad y la conducción en la pared tomando como dominio computacional tanto la región sólida como la fluida. Para la parte sólida se asigna una viscosidad de un valor muy alto, de tal manera que la velocidad de esta región es cero. Esto se tratará con mayor detalle posteriormente en la sección dedicada a la solución numérica del problema estudiado en esta tesis.

Para el segundo modelo, conducción unidimensional en la pared, se supone que el calor dentro de la pared sólo se conduce en la dirección horizontal. De esta manera, en la interfaz sólido-líquido es posible igualar la conducción de calor del lado del fluido con el calor conducido unidimensionalmente en la pared sólida de espesor t , de la siguiente forma: *en la interfaz*, $-k(\partial T/\partial x)_{\text{fluido}} = k_w(T - T_H)/t$; obteniendo así la condición de frontera para el fluido en la posición de la interfaz. El resultado es que el efecto de la conducción en la pared queda incluido en esta condición de frontera, por lo que ya no es necesario resolver la ecuación de la difusión de calor en la pared para calcular el flujo convectivo. Esta suposición lleva a un ahorro considerable de trabajo computacional.

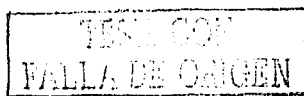
El tercer modelo, de parámetros concentrados, se puede utilizar para estimar la transferencia de calor total a través de la cavidad. En este modelo está implícita la suposición de que la

interfaz sólido-fluido se mantiene a una temperatura uniforme T_i . Si se estima el calor que se transfiere por convección a través de la cavidad con una diferencia de temperaturas ($T_i - T_C$) a partir de alguna correlación (para una cavidad de espesores de pared cero), y se calcula el calor que se conduce en la pared con una diferencia de temperaturas ($T_H - T_i$); se obtienen dos ecuaciones que pueden ser resueltas de manera iterativa para obtener la temperatura de la interfaz T_i y el calor total que fluye a través de la cavidad.

Los autores reportaron que el problema conjugado completo, con conducción bidimensional en la pared, estuvo gobernado por cuatro parámetros; el número de Grashof, el número de Prandtl, el espesor adimensional t/L y la relación de conductividades k_w/k . Los resultados encontrados mostraron que el parámetro combinado $k_w L / kt$, resultó más adecuado que los dos parámetros por separado, además de que los resultados dependieron muy poco de L/t .

Se comparó el resultado para el modelo conjugado completo con el correspondiente a la situación en la que todas las paredes tienen espesor cero, Figura 1-12. Para el modelo conjugado completo se encontró que, además de la caída de temperaturas en la pared, la temperatura en la intercara sólido-fluido no fue uniforme y esta no-uniformidad afectó el flujo. En el reporte se mostró también una comparación entre los resultados correspondientes a los modelos conjugado completo y unidimensional de conducción en la pared, como lo muestra la Figura 1-13. Comparando las líneas de corriente y las isoterms, se puede observar que los resultados para estos dos casos son casi idénticos. Se concluyó entonces que para las condiciones estudiadas, el modelo unidimensional es un buen sustituto del análisis conjugado bidimensional. Los resultados estimados por los tres modelos para el número de Nusselt mostraron que los modelos conjugado completo y unidimensional de conducción en la pared predicen prácticamente el mismo valor, y que el modelo de parámetros concentrados da una pequeña diferencia de ± 3 a 4%.

En general se encontró que, cuando todos los demás parámetros se fijan, el efecto de reducir ($k_w L / kt$) es la disminución de la temperatura de la intercara. Este resultado se debe a que una reducción de ($k_w L / kt$) implica una conducción pobre a través de la pared, por lo que la caída de la temperatura dentro de ésta debe ser mayor. Finalmente, se concluyó que para números de



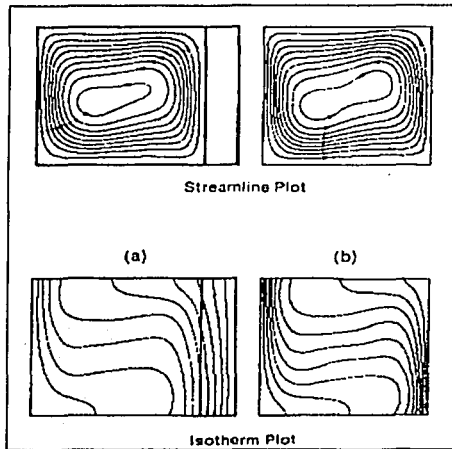


Figura 1-12: Líneas de corriente e isothermas para $Gr = 10^5$ y $t/L = 0.2$. (a) Modelo conjugado bidimensional, $(k_w L / k t) = 5$; (b) solución para paredes isotérmicas de espesor cero, $(k_w L / k t) = \infty$. Tomada de Kaminski *et al.* [11].

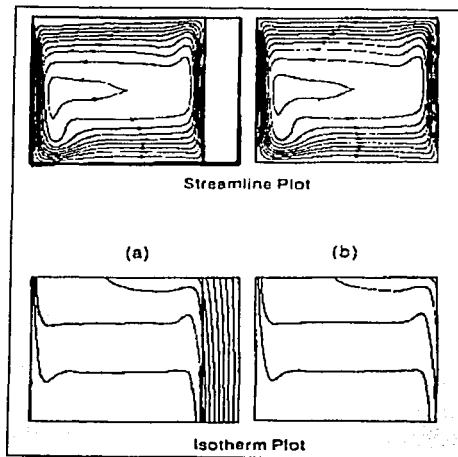
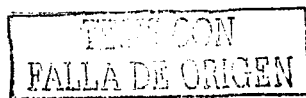


Figura 1-13: Líneas de corriente e isotermas para $Gr = 10^7$, $(k_w L/kt) = 5$, $t/L = 0.2$. (a) Modelo conjugado bidimensional; (b) modelo de conducción unidimensional en las paredes. Tomada de Kaminski *et al.* [11].

Grashof mayores a 10^5 , la distribución de temperaturas en la pared es bidimensional, y que la temperatura en la intercara no es uniforme. Sin embargo, para el rango cubierto por el estudio, los modelos de conducción unidimensional en la pared y parámetros concentrados ofrecen dos buenas alternativas, más sencillas que el modelo conjugado bidimensional.

Existen trabajos más recientes en los que se estudian problemas conjugados de conducción-convección. Liaqat y Baytas [15] estudiaron la convección natural laminar y bidimensional en una cavidad cuadrada con las cuatro paredes de espesor y conductividad térmica de valor finito. Se supuso que el fluido interno generaba calor y que las superficies exteriores de las paredes se mantuvieron a temperatura constante. Esto resultó en un problema conjugado de convección y conducción con generación de calor. Este tipo de problemas es de gran interés en geofísica, astrofísica y en el estudio de la seguridad de sistemas de energía nuclear. Por medio del método de volúmenes finitos se discretizaron las ecuaciones que modelan el fenómeno, y se resolvieron de manera simultánea para las paredes sólidas y para el fluido. Se simuló numéricamente el estado transitorio hasta alcanzar las soluciones de estado permanente, las cuales fueron analizadas. El estudio se realizó para un número de Prandtl de 7.0 y números de Rayleigh entre 10^7 y 10^{12} . En este trabajo se obtuvieron las líneas de corriente y las isotermas, tanto para el fluido como para las paredes. El objetivo principal de los autores fue mostrar la importancia de la solución de los problemas conjugados en situaciones de interés práctico.

Finalmente, es importante mencionar los esfuerzos que se siguen haciendo por analizar los problemas conjugados. Ha y Jung [7] resolvieron un problema conjugado tridimensional en el que se analizó una cavidad cúbica que se calienta por una pared vertical, se enfría por la pared opuesta, y las paredes restantes son adiabáticas. Adicionalmente, dentro de la cavidad se supuso la presencia de un cuerpo centrado de forma cúbica que generaba calor. Se estudiaron dos diferentes condiciones de la razón de generación de calor del sólido interno. Las ecuaciones que modelan el fenómeno se discretizaron empleando el método de los volúmenes finitos y se resolvieron numéricamente. En el reporte se presentaron los vectores de velocidad, las líneas de corriente y las isotermas, todas ellas para planos a diferentes profundidades respecto a las tres



direcciones X, Y, Z. Además, se presentó la distribución del número de Nusselt local sobre las superficies fría y caliente para las dos condiciones de generación de calor. Se encontró que, como podría esperarse, la presencia del cuerpo generador de calor produce una variación importante en el número de Nusselt local respecto al caso en el que no existe dicho cuerpo.

1.3 OTRAS CONFIGURACIONES FÍSICAS DE INTERÉS

Los arreglos de las cavidades pueden ser muy variados. Se han realizado estudios de cavidades rectangulares abiertas con diferentes inclinaciones. La particularidad de las cavidades abiertas es que existe una interacción más directa entre la cavidad y su medio ambiente, el flujo es libre de entrar y salir de la cavidad. Estas cavidades pueden ser bidimensionales o tridimensionales. En estudios recientes se ha incluido el efecto de la radiación sobre la transferencia de calor en cavidades tanto cerradas como abiertas [24]. Además, para ambos tipos de cavidad existen varias posibilidades de calentamiento y enfriamiento. Según sean las superficies a través de las que se transfiere el calor; sea la superior, la inferior, las laterales, o una combinación de ellas, las condiciones del flujo y la razón de transferencia de calor son diferentes.

Desde luego, para las cavidades existe una diversidad importante de formas geométricas. Por mencionar sólo algunas, se han realizado estudios en cavidades triangulares, cilíndricas, en cavidades esféricas, en anillos entre dos cilindros concéntricos o excéntricos, en espacios entre esferas concéntricas o excéntricas, entre otros. Además, existe la posibilidad de que las cavidades estén parcialmente divididas, situación que resulta de especial interés en el diseño de espacios habitacionales.

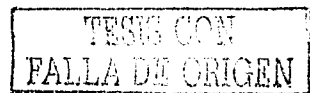
Entonces, el estudio de la transferencia de calor en sistemas confinados ofrece una gama extensa de posibilidades que aún tienen que ser estudiadas, desde luego, con el objetivo principal de conocer mejor la física que gobierna estos fenómenos, y así poder dar a estos conocimientos

una aplicación práctica.

1.4 OBJETIVOS DEL TRABAJO

Como se mencionó a lo largo de este capítulo, el efecto de las paredes verticales conductoras perfectas ya ha sido estudiado con anterioridad. Sin embargo, ésta no deja de ser una suposición ideal, pues se produce cuando el espesor o la conductividad térmica de las paredes tienen valores muy grandes. Esto difiere de manera importante de las condiciones de muchas situaciones de aplicación práctica. Cuando las magnitudes del espesor de las paredes y la conductividad térmica tienen valores finitos, los fenómenos convectivos en el fluido y difusivos en las paredes pueden diferir de manera significativa, tanto de la condición de paredes adiabáticas como de la de paredes conductoras perfectas. El efecto del espesor y la conductividad térmica finitos de las paredes verticales no ha sido estudiado con la suficiente atención.

Entonces, en este trabajo se propone el estudio de la convección natural dentro de una cavidad cerrada, bidimensional, de sección cuadrada, calentada por abajo y enfriada por arriba, con paredes verticales de un cierto espesor y conductividad térmica, de tal forma, que el flujo convectivo afecte de manera importante la distribución de temperaturas dentro de las paredes y se presente un problema conjugado de conducción-convección en la cavidad. Bajo estas circunstancias, se espera que dentro de las paredes verticales exista una distribución bidimensional de temperaturas, misma que esté en mutua dependencia con la convección en el fluido. Las superficies horizontales superior e inferior son isotérmicas con temperaturas baja y alta, respectivamente, mientras que las paredes verticales se encuentran aisladas en su superficie externa. El análisis se realiza a partir de una simulación numérica, e incluye la obtención de los campos de velocidades, las distribuciones de temperaturas en las paredes y en el fluido, y la determinación de los números de Nusselt promedio para las diferentes condiciones estudiadas.

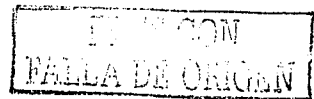


Capítulo 2

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA Y MÉTODO DE SOLUCIÓN

2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para iniciar con la descripción del trabajo, primero resulta necesario establecer con detalle las características de la situación física abordada, a fin de dejar bien expuestas las suposiciones y condiciones con las que se desarrolla el fenómeno. Entonces, es posible reducir adecuadamente las ecuaciones fundamentales y establecer las condiciones de frontera que definen a nuestro problema.



2.1.1 MODELO FÍSICO DE INTERÉS

En el planteamiento y la solución del problema se considera el caso general de una cavidad rectangular cerrada, bidimensional, de altura H y longitud L , pero los resultados numéricos que se presentan en este trabajo corresponden únicamente al caso de la sección cuadrada (relación de aspecto $H/L = 1$). La cavidad es cerrada y está formada por dos paredes horizontales de espesor cero y dos paredes verticales de espesor finito ϵ , según se muestra en la Figura 2-1.

La pared superior de la cavidad se mantiene a una temperatura baja T_C y la inferior a una temperatura alta T_H . Las dos paredes verticales se encuentran aisladas por su superficie exterior. La conductividad térmica del fluido que llena la cavidad es k y la de las paredes laterales es k_w . Se considera que las cuatro paredes son rígidas y que la inclinación de la cavidad es de cero grados. En este estudio se plantea la solución para el caso de una cavidad rectangular con una relación de forma $H/L = 1$. Los efectos de la transferencia de calor por radiación se desprecian. En la Figura 2-1 también se muestran las direcciones de los ejes coordenados y la dirección de la aceleración de la gravedad. Se considera que las propiedades del fluido son constantes, excepto la densidad en el término de flotación, es decir, se aplica la aproximación de Boussinesq.

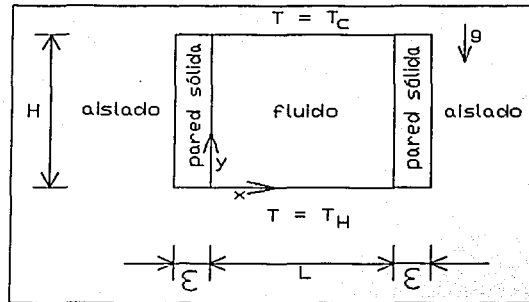


Figura 2-1: Modelo de la cavidad estudiada

Entonces, se desea conocer los patrones convectivos, la distribución de temperaturas (en las paredes y en la cavidad), y el número de Nusselt global. Para tal fin se propone el uso de un código numérico para la solución de las ecuaciones que modelan el fenómeno y la determinación de las condiciones del sistema convectivo.

2.1.2 ECUACIONES DE TRANSPORTE CONVECTIVO

En este estudio, el interés estuvo dirigido hacia el análisis del estado permanente en régimen laminar. Con el código numérico se resolvió el estado transitorio, pero sólo se analizó la solución del estado permanente.

Las ecuaciones que modelan el fenómeno de la transferencia de calor por convección natural para flujo incompresible, en variables primitivas son [1]:

Continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

Ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección x:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.2)$$

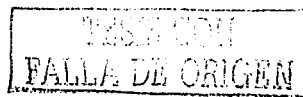
Ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección y

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g\beta (T - T_C) + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2.3)$$

Ecuación de la energía:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.4)$$

En las ecuaciones (2.1) a (2.4), x y y son las coordenadas espaciales y t es el tiempo; u y v



son las componentes de la velocidad en las direcciones de x y y , respectivamente; P es la presión, T es la temperatura del fluido y T_C es la temperatura fría de la superficie superior; y finalmente β , g , α , ρ , ν son el coeficiente de expansión volumétrica, la aceleración de la gravedad, la difusividad térmica, la densidad y la viscosidad cinemática del fluido, respectivamente.

Para la región sólida, la distribución de temperaturas está gobernada por la ecuación de difusión de calor, que para el caso bidimensional con propiedades físicas constantes es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{1}{\alpha_w} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.5)$$

en esta última ecuación, α_w es la difusividad térmica del material de la pared.

Resulta un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Para el caso de interés, es necesario satisfacer simultáneamente las ecuaciones para el fluido (2.1) a (2.4) y la ecuación para las paredes sólidas (2.5).

2.1.3 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA

Como se ha comentado, las condiciones del estado permanente son las que se analizan en esta investigación. Tal solución se obtuvo a partir de simular el estado transitorio hasta obtener las condiciones que ya no cambian con el tiempo.

Las condiciones de frontera que se aplican a las ecuaciones diferenciales (2.1) a (2.5) son las que definen el problema que se desea resolver. Adicionalmente, también deben establecerse las condiciones iniciales; éstas definen la situación en la que se encuentra el sistema inicialmente.

Las condiciones iniciales y de frontera para las ecuaciones de transporte convectivo (2.1) a

(2.4) son:

Condiciones iniciales, $t \leq 0$:

$$u = v = 0; \quad T = T_C \quad \text{para todo el espacio} \quad (2.6)$$

Condiciones de frontera, $t > 0$:

Para la velocidades:

$$\text{En } x = 0, L \text{ y } 0 \leq y \leq H: \quad u = v = 0 \quad (2.7)$$

$$\text{En } y = 0, H \text{ y } 0 \leq x \leq L: \quad u = v = 0 \quad (2.8)$$

Para las temperaturas:

$$\text{En } y = 0 \text{ y } 0 \leq x \leq L: \quad T = T_H \quad (2.9)$$

$$\text{En } y = H \text{ y } 0 \leq x \leq L: \quad T = T_C \quad (2.10)$$

Además las ecuaciones de transporte convectivo (2.1) a (2.4) quedan ligadas a la ecuación de difusión de calor por medio de las condiciones de frontera de las dos interfaces verticales sólido-fluido. En estas superficies, las temperaturas y los flujos de calor deben de ser continuos. Estas últimas condiciones se pueden expresar como:

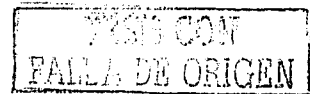
$$\text{En } x = 0 \text{ y } 0 \leq y \leq H: \quad T_{x=0-} = T_{x=0+} \quad (2.11)$$

$$\text{En } x = L \text{ y } 0 \leq y \leq H: \quad T_{x=L-} = T_{x=L+} \quad (2.12)$$

$$\text{En } x = 0 \text{ y } 0 \leq y \leq H: \quad k_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{x=0-} = k \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{x=0+} \quad (2.13)$$

$$\text{En } x = L \text{ y } 0 \leq y \leq H: \quad k \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{x=L-} = k_w \left(\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T'}{\partial y} \right)_{x=L+} \quad (2.14)$$

Las condiciones iniciales y de frontera para las regiones sólidas, ecuación (2.5):



Condiciones iniciales, $t \leq 0$:

$$T = T_C \quad \text{para toda la región} \quad (2.15)$$

Condiciones de frontera, $t > 0$:

$$\text{En } y = 0 \text{ y } -\varepsilon \leq x \leq 0 : \quad T = T_H \quad (2.16)$$

$$\text{En } y = 0 \text{ y } L \leq x \leq L + \varepsilon : \quad T = T_H \quad (2.17)$$

$$\text{En } y = H \text{ y } -\varepsilon \leq x \leq 0 : \quad T = T_C \quad (2.18)$$

$$\text{En } y = H \text{ y } L \leq x \leq L + \varepsilon : \quad T = T_C \quad (2.19)$$

$$\text{En } x = -\varepsilon \text{ y } 0 \leq y \leq H : \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.20)$$

$$\text{En } x = L + \varepsilon \text{ y } 0 \leq y \leq H : \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (2.21)$$

Además, nuevamente para las interfaces se aplican las condiciones de temperatura de las ecuaciones (2.11) a (2.14).

2.1.4 PARÁMETROS ADIMENSIONALES DEL FENÓMENO

El análisis dimensional permite plantear favorablemente el estudio de los fenómenos físicos, sugiriendo formas adimensionales de las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema. Al contar con modelos matemáticos que se encuentran en función únicamente de parámetros adimensionales, por semejanza, es posible generalizar los resultados de una manera muy satisfactoria. Así mismo, mediante el análisis dimensional es posible separar las variables que se deben considerar de aquellas que conviene descartar.

Mediante la aplicación del teorema Π de Buckingham y el teorema de homogeneidad dimensional es posible obtener los parámetros adimensionales que intervienen en el fenómeno en cuestión [28]. El análisis dimensional demuestra que para el fenómeno estudiado en este trabajo

el número de Nusselt está en función de cuatro parámetros: el espesor adimensionalizado de la pared, $(\frac{x}{L})$, la relación de conductividades térmicas, $(\frac{k_w}{k})$, y los números de Rayleigh y Prandtl.

Por otro lado, también es posible conocer los parámetros adimensionales a partir de la adimensionalización de las ecuaciones que modelan el fenómeno. El estudio que aquí se presenta está dirigido al análisis del estado permanente. Se sugiere entonces simplificar las ecuaciones (2.1) a (2.5) a su forma de estado permanente. Posteriormente, estas ecuaciones junto con sus condiciones de frontera se adimensionalizan por medio de un cambio de variables. Se proponen las siguientes variables adimensionales:

$$X = \frac{x}{L} \quad Y = \frac{y}{L} \quad U = \frac{uL}{\alpha} \quad V = \frac{vL}{\alpha} \quad P^* = \frac{PL^2}{\rho\alpha^2} \quad \theta = \frac{T - T_c}{T_H - T_c} \quad (2.22)$$

Aplicando el cambio de variable se encuentra que las ecuaciones en forma adimensional para el movimiento convectivo son:

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2.23)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (2.24)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P^*}{\partial Y} + \text{Pr} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) + \text{Ra Pr } \theta \quad (2.25)$$

$$U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \quad (2.26)$$

sujetas a las siguientes condiciones de frontera:

$$\text{En } Y = 0 \text{ y } 0 \leq X \leq 1: \quad U = 0; \quad V = 0; \quad \theta = 1 \quad (2.27)$$

$$\text{En } Y = 1 \text{ y } 0 \leq X \leq 1: \quad U = 0; \quad V = 0; \quad \theta = 0 \quad (2.28)$$

y para las intercaras:

$$\text{En } X = 0 \text{ y } 0 \leq Y \leq 1: \quad U = 0; \quad V = 0; \quad (2.29)$$

$$\text{además, } \theta_{X=0^-} = \theta_{X=0^+}; \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{X=0^+} = \frac{k_w}{k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{X=0^-}$$

$$\text{En } X = 1 \text{ y } 0 \leq Y \leq 1: \quad U = 0; \quad V = 0; \quad (2.30)$$

$$\text{además, } \theta_{X=1^-} = \theta_{X=1^+}; \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{X=1^-} = \frac{k_w}{k} \left(\frac{\partial \theta}{\partial X} + \frac{\partial \theta}{\partial Y} \right)_{X=1^+}$$

y la ecuación de difusión de calor dentro de las paredes:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} = 0 \quad (2.31)$$

sujeta a las condiciones:

$$\text{En } Y = 0 \text{ y } -\frac{\varepsilon}{L} \leq X \leq 0: \quad \theta = 1 \quad (2.32)$$

$$\text{En } Y = 0 \text{ y } 1 \leq X \leq 1 + \frac{\varepsilon}{L}: \quad \theta = 1 \quad (2.33)$$

$$\text{En } Y = 1 \text{ y } -\frac{\varepsilon}{L} \leq X \leq 0: \quad \theta = 0 \quad (2.34)$$

$$\text{En } Y = 1 \text{ y } 1 \leq X \leq 1 + \frac{\varepsilon}{L}: \quad \theta = 0 \quad (2.35)$$

$$\text{En } X = -\frac{\varepsilon}{L} \text{ y } 0 \leq Y \leq 1: \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (2.36)$$

$$\text{En } X = 1 + \frac{\varepsilon}{L} \text{ y } 0 \leq Y \leq 1: \quad \frac{\partial \theta}{\partial X} = 0 \quad (2.37)$$

además, nuevamente para las interfaces se aplican las condiciones de temperatura de las ecuaciones (2.29) y (2.30).

Del análisis precedente, se observa que los parámetros adimensionales que aparecen en las ecuaciones y en las condiciones de frontera son cuatro: el espesor adimensionalizado de la pared ($\frac{\varepsilon}{L}$), la relación de conductividades térmicas ($\frac{k_w}{k}$), y los números de Rayleigh y Prandtl. Estos mismos parámetros ya habían sido estimados a partir del análisis dimensional.

2.2 SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA

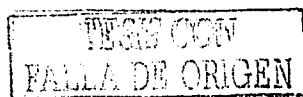
2.2.1 MÉTODO DE SOLUCIÓN

Para obtener la solución de las ecuaciones que modelan el fenómeno se hizo uso de un código numérico. Éste fue capaz de resolver simultáneamente las ecuaciones relativas a la difusión de calor en las paredes y al movimiento convectivo en cavidad. En esta sección se presenta el método que emplea dicho programa, el algoritmo de solución y las características del mismo.

Algún tiempo atrás, el Dr. Rubén Ávila¹ desarrolló un código que utilizó para simular numéricamente el estado transitorio de la convección natural dentro de una cavidad bidimensional de sección cuadrada. En el programa se definen las condiciones iniciales y las condiciones de frontera en las cuatro paredes, y es posible determinar los campos de velocidades y temperaturas en el flujo, además de estimar el flujo de calor a través de las paredes. El código se encuentra programado en el lenguaje FORTRAN, y permite resolver numéricamente las ecuaciones de la convección discretizadas con el método de los volúmenes finitos. Con la ayuda del Dr. Ávila se planteó la posibilidad de modificar dicho programa. Las modificaciones al programa se dirigieron hacia la solución del problema conjugado de conducción-convección que se trata en este trabajo. Así fue que se tomó como base este programa y se estudiaron con detalle las rutinas que lo integran, buscando hacer las modificaciones que permitieran la solución simultánea de las ecuaciones para el fluido y el sólido.

Como ya se mencionó, el programa resuelve las ecuaciones discretizadas con el método de los volúmenes finitos. Esta aproximación permite el estudio de geometrías arbitrarias de una forma muy satisfactoria. El método consiste en integrar las ecuaciones diferenciales de conservación sobre un volumen finito V confinado por una superficie S . La integral de volumen

¹Dr. Rubén Ávila Rodríguez es profesor e investigador del Departamento de Termoenergía y Mejoramiento Ambiental de la Facultad de Ingeniería de la UNAM.



se convierte en una integral de superficie para el vector de flujo a través del teorema de la divergencia de Gauss. La integral de superficie se desarrolla para cada una de las superficies del volumen finito. Entonces, para cada superficie, se integran los flujos difusivo y convectivo, suponiendo que estos son constantes a través de la diferencial de superficie normal a ellos. De esta forma, los términos convectivos quedan en función la propiedad de interés, y los términos difusivos en función de las derivadas espaciales de primer orden, evaluadas en las superficies del volumen finito. Para determinar el valor de las variables en las interfaces de los volúmenes finitos se acostumbra utilizar una interpolación, y para sus derivadas se utilizan expresiones en diferencias finitas. Cabe mencionar que existen varios tipos de interpolaciones y de expresiones en diferencias finitas para las derivadas, y los errores de truncación y difusión numérica dependen de la selección que se haga.

En lo que respecta a la derivada temporal, existe también una variedad de métodos que toman en cuenta la variación temporal de las variables. Sólo por mencionar los de uso más común, se tiene la discretización a partir de un tiempo anterior, conocido como método de dos niveles de tiempo; y la discretización a partir de dos tiempos anteriores, conocido como método de tres niveles de tiempo. Para el método de dos niveles de tiempo, se supone una distribución lineal de la variable con respecto al tiempo; si las derivadas espaciales se calculan en el tiempo t^n se obtiene un método explícito, si se calculan en el tiempo t^{n+1} se tiene un método implícito, y cuando las derivadas espaciales y temporales se estiman en el tiempo $\frac{t^n + t^{n+1}}{2}$ se obtiene el método implícito conocido como Método de Crank-Nicolson. Este último es de especial utilidad cuando se requiere una gran exactitud de la derivada temporal.

2.2.2 DISCRETIZACIÓN DE LAS ECUACIONES

El objetivo de la mecánica de fluidos computacional es la solución numérica de las ecuaciones diferenciales parciales que modelan el comportamiento de la variables dependientes de interés (velocidad, temperatura, concentración, etc.). Estas variables en general obedecen a un

principio de conservación, cuya ecuación tiene la siguiente forma [22]:

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}}_A + \underbrace{\frac{\partial(\rho u_i \phi)}{\partial x_i}}_B = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)}_C + \underbrace{S_\phi}_D \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (2.38)$$

donde ϕ es la variable dependiente, Γ es el coeficiente de difusión y S es el término fuente.

Los cuatro términos en la ecuación diferencial general son:

- A término temporal
- B transporte convectivo de ϕ
- C transporte difusivo de ϕ
- D término fuente

La variable dependiente ϕ se puede sustituir por una variedad de cantidades, tales como la fracción de masa de diferentes especies químicas, la entalpía o la temperatura, una componente de la velocidad, la energía cinética turbulenta, entre otras. Según sea la variable dependiente de la que se trate, el coeficiente de difusión y el término fuente, tendrán un significado físico apropiado. El procedimiento para llevar la ecuación diferencial de interés a la forma general, ecuación (2.38), consiste en manipularla hasta que, para la variable dependiente elegida ϕ , el término temporal, el convectivo y el difusivo tengan la forma estándar que se muestra en (2.38). El coeficiente de $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ en el término de difusión se toma como la expresión para Γ , y los demás términos del miembro derecho conforman en conjunto el llamado término fuente S .

Frecuentemente, el término fuente S es una función de la variable dependiente ϕ , y en ese caso, para desarrollar las ecuaciones discretizadas sería deseable conocer su dependencia. De manera formal, sólo es posible tomar en cuenta una dependencia lineal. Esto se debe a que la solución de las ecuaciones discretizadas se obtiene por medio de las técnicas empleadas para la solución de ecuaciones algebraicas lineales. Entonces, en el caso de que la relación entre el término fuente S y la propiedad ϕ no sea lineal, es necesario llevar a cabo una linealización.

Así, el término fuente queda de la forma:

$$S = S_C + S_P \phi_P \quad (2.39)$$

donde S_C es la parte constante de S , y S_P es el coeficiente de ϕ_P .

Las ecuaciones que modelan el fenómeno, ecuaciones (2.1) a (2.5), se manipulan para obtener la forma general, ecuación (2.38). Las ecuaciones obtenidas se discretizan por medio del método de los volúmenes finitos y se obtienen los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes a cada una de ellas. Para la discretización de los términos convectivos se utilizó el esquema UPWIND, el cual corresponde a una interpolación de orden cero. Para el caso de los términos difusivos se emplearon diferencias finitas centrales. Además, la derivada temporal se discretizó empleando el método implícito de dos tiempos.

Para desarrollar las ecuaciones discretizadas, se definen los siguientes términos:

$$\begin{aligned} X &= i\Delta x; & i &= 1, 2, \dots, NI; \\ Y &= j\Delta y; & j &= 1, 2, \dots, NJ; \\ t &= n\Delta t, & n &= 0, 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (2.40)$$

y con la discretización de las ecuaciones, las variables continuas u, v, T y P se transforman en las variables discretas $u_{i,j}^n, v_{i,j}^n, T_{i,j}^n$ y $P_{i,j}^n$.

Entonces, la ecuación de la energía (2.5) para $t = n + 1$ tiene la siguiente forma:

$${}^T A_{P_{i,j}}^{n+1} T_{i,j}^{n+1} = {}^T A_{E_{i,j}}^{n+1} T_{i+1,j}^{n+1} + {}^T A_{W_{i,j}}^{n+1} T_{i-1,j}^{n+1} + {}^T A_{N_{i,j}}^{n+1} T_{i,j+1}^{n+1} + {}^T A_{S_{i,j}}^{n+1} T_{i,j-1}^{n+1} + {}^T B_{i,j}^{n+1} \quad (2.41)$$

donde:

$${}^T A_{E_{i,j}}^{n+1} = \frac{\Gamma_e \Delta y_j}{(\delta x)_e} + [-(\rho_e u_{i+1,j}) \Delta y_j, 0] \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned}
{}^T A_{W_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_w \Delta y_j}{(\delta x)_w} + [[(\rho_w u_{i,j}) \Delta y_j, 0]] \\
{}^T A_{N_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_n \Delta x_i}{(\delta y)_n} + [[-(\rho_n v_{i,j+1}) \Delta x_i, 0]] \\
{}^T A_{S_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_s \Delta x_i}{(\delta y)_s} + [[(\rho_s v_{i,j}) \Delta x_i, 0]]
\end{aligned}$$

donde $\Gamma = \frac{k}{c_p}$, y el operador $[[a, b]]$ selecciona al de mayor entre a y b ;

$$\begin{aligned}
{}^T B_{i,j}^{n+1} &= {}^T A_{P_{i,j}}^o T_{i,j}^n, & {}^T A_{P_{i,j}}^o &= \frac{\rho_{i,j}^n \Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t} \\
{}^T A_{P_{i,j}}^{n+1} &= {}^T A_{E_{i,j}}^{n+1} + {}^T A_{W_{i,j}}^{n+1} + {}^T A_{N_{i,j}}^{n+1} + {}^T A_{S_{i,j}}^{n+1} + {}^T A_{P_{i,j}}^o
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Por otro lado, la ecuación (2.2) de la cantidad de movimiento en la dirección x queda de la siguiente manera:

$${}^u A_{P_{i,j}}^{n+1} u_{i,j}^{n+1} = {}^u A_{E_{i,j}}^{n+1} u_{i+1,j}^{n+1} + {}^u A_{W_{i,j}}^{n+1} u_{i-1,j}^{n+1} + {}^u A_{N_{i,j}}^{n+1} u_{i,j+1}^{n+1} + {}^u A_{S_{i,j}}^{n+1} u_{i,j-1}^{n+1} - (P_{i,j} - P_{i-1,j}) \Delta y_j + {}^u B_{i,j}^{n+1} \tag{2.44}$$

donde:

$$\begin{aligned}
{}^u A_{E_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_e \Delta y_j}{(\delta x)_e} + [[-(\rho_e u_{i+1,j}) \Delta y_j, 0]] \\
{}^u A_{W_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_w \Delta y_j}{(\delta x)_w} + [[(\rho_w u_{i,j}) \Delta y_j, 0]] \\
{}^u A_{N_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_n \Delta x_i}{(\delta y)_n} + [[-(\rho_n v_{i,j+1}) \Delta x_i, 0]] \\
{}^u A_{S_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_s \Delta x_i}{(\delta y)_s} + [[(\rho_s v_{i,j}) \Delta x_i, 0]]
\end{aligned} \tag{2.45}$$

donde $\Gamma = \mu$, y el operador $[[a, b]]$ selecciona al de mayor entre a y b ;

$$\begin{aligned}
{}^u B_{i,j}^{n+1} &= {}^u S_C \Delta x_i \Delta y_j + {}^u A_{P_{i,j}}^o u_{i,j}^n & {}^u A_{P_{i,j}}^o &= \frac{\rho_{i,j}^n \Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t} \\
{}^u A_{P_{i,j}}^{n+1} &= {}^u A_{E_{i,j}}^{n+1} + {}^u A_{W_{i,j}}^{n+1} + {}^u A_{N_{i,j}}^{n+1} + {}^u A_{S_{i,j}}^{n+1} + {}^u A_{P_{i,j}}^o - {}^u S_P \Delta x_i \Delta y_j
\end{aligned} \tag{2.46}$$

En este caso, ${}^u S_C = {}^u S_P = 0$. Aunque estos dos términos son nulos, resulta conveniente dejarlos indicados por las razones que se expondrán más adelante, en la sección SOLUCIÓN

AL PROBLEMA CONJUGADO.

La ecuación (2.3) de la cantidad de movimiento en la dirección y es la siguiente:

$${}^v A_{P_{i,j}}^{n+1} v_{i,j}^{n+1} = {}^v A_{E_{i,j}}^{n+1} v_{i+1,j}^{n+1} + {}^v A_{W_{i,j}}^{n+1} v_{i-1,j}^{n+1} + {}^v A_{N_{i,j}}^{n+1} v_{i,j+1}^{n+1} + {}^v A_{S_{i,j}}^{n+1} v_{i,j-1}^{n+1} - (P_{i,j} - P_{i,j-1}) \Delta x_i + {}^v B_{i,j}^{n+1} \quad (2.47)$$

donde:

$$\begin{aligned} {}^v A_{E_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_e \Delta y_j}{(\delta x)_e} + [(-(\rho_e u_{i+1,j}) \Delta y_j, 0]] \\ {}^v A_{W_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_w \Delta y_j}{(\delta x)_w} + [[(\rho_w u_{i,j}) \Delta y_j, 0]] \\ {}^v A_{N_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_n \Delta x_i}{(\delta y)_n} + [[-(\rho_n v_{i,j+1}) \Delta x_i, 0]] \\ {}^v A_{S_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_s \Delta x_i}{(\delta y)_s} + [[(\rho_s v_{i,j}) \Delta x_i, 0]] \end{aligned} \quad (2.48)$$

donde $\Gamma = \mu$, y el operador $[[a, b]]$ selecciona al de mayor entre a y b ;

$$\begin{aligned} {}^v B_{i,j}^{n+1} &= {}^v S_C \Delta x_i \Delta y_j + {}^v A_{P_{i,j}}^o v_{i,j}^n, \\ {}^v S_C &= g\beta(T_{i,j} - T_C), \quad {}^v A_{P_{i,j}}^o = \frac{\rho_{i,j}^n \Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t} \\ {}^v A_{P_{i,j}}^{n+1} &= {}^v A_{E_{i,j}}^{n+1} + {}^v A_{W_{i,j}}^{n+1} + {}^v A_{N_{i,j}}^{n+1} + {}^v A_{S_{i,j}}^{n+1} + {}^v A_{P_{i,j}}^o - {}^v S_P \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned} \quad (2.49)$$

En este caso, ${}^v S_P = 0$. Aunque este término es nulo, al igual que en la ecuación de la cantidad de movimiento de la dirección x , resulta conveniente dejarlo indicado por las razones que se expondrán más adelante, en la sección SOLUCIÓN AL PROBLEMA CONJUGADO. La discretización de la ecuación (2.1) de la conservación de la masa se discute en la siguiente sección dedicada a la descripción del algoritmo empleado para la solución del problema.

2.2.3 ALGORITMO DE SOLUCIÓN

El campo de velocidades que se determine por medio de las ecuaciones (2.41) a (2.49) debe también satisfacer la ecuación de continuidad. Además, este campo debe ser físicamente posible. Esto se logra por medio del uso del algoritmo conocido como SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations), presentado por Patankar [22]. Este método permite calcular el campo de flujo de tal manera que éste, además de satisfacer las ecuaciones de movimiento, también se ajusta a una distribución de presiones físicamente posible. Los pasos que constituyen el método se describen brevemente a continuación.

Primero. Se propone un *campo de presiones supuesto* $P_{i,j}^*$.

Segundo. Se aplican las ecuaciones de la cantidad de movimiento en las direcciones x y y para determinar las *velocidades supuestas* u^* y v^* , que corresponden al *campo de presiones supuesto* $P_{i,j}^*$. Esto es, con $P_{i,j}^*$ se resuelven las ecuaciones:

$$u^* A_{P_{i,j}}^{n+1} u_{i,j}^{*n+1} = u^* A_{E_{i,j}}^{n+1} u_{i+1,j}^{*n+1} + u^* A_{W_{i,j}}^{n+1} u_{i-1,j}^{*n+1} + u^* A_{N_{i,j}}^{n+1} u_{i,j+1}^{*n+1} + u^* A_{S_{i,j}}^{n+1} u_{i,j-1}^{*n+1} - (P_{i,j}^* - P_{i-1,j}^*) \Delta y_j + u^* B_{i,j}^{n+1} \quad (2.50)$$

junto con las ecuaciones:

$$v^* A_{P_{i,j}}^{n+1} v_{i,j}^{*n+1} = v^* A_{E_{i,j}}^{n+1} v_{i+1,j}^{*n+1} + v^* A_{W_{i,j}}^{n+1} v_{i-1,j}^{*n+1} + v^* A_{N_{i,j}}^{n+1} v_{i,j+1}^{*n+1} + v^* A_{S_{i,j}}^{n+1} v_{i,j-1}^{*n+1} - (P_{i,j}^* - P_{i,j-1}^*) \Delta x_i + v^* B_{i,j}^{n+1} \quad (2.51)$$

donde:

$$\begin{aligned} u^* A_{E_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_e \Delta y_j}{(\delta x)_e} + [[-(\rho_e u_{i+1,j}^*) \Delta y_j, 0]] \\ u^* A_{W_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_w \Delta y_j}{(\delta x)_w} + [[(\rho_w u_{i,j}^*) \Delta y_j, 0]] \\ u^* A_{N_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_n \Delta x_i}{(\delta y)_n} + [[-(\rho_n v_{i,j+1}^*) \Delta x_i, 0]] \\ u^* A_{S_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_s \Delta x_i}{(\delta y)_s} + [[(\rho_s v_{i,j}^*) \Delta x_i, 0]] \end{aligned} \quad (2.52)$$

con $\Gamma = \mu$.

$$\begin{aligned} u^* B_{i,j}^{n+1} &= u^* S_C \Delta x_i \Delta y_j + u^* A_{P_{i,j}}^o u_{i,j}^{*n}, & u^* A_{P_{i,j}}^o &= \frac{\rho_{i,j}^n \Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t} \\ u^* A_{P_{i,j}}^{n+1} &= u^* A_{E_{i,j}}^{n+1} + u^* A_{W_{i,j}}^{n+1} + u^* A_{N_{i,j}}^{n+1} + u^* A_{S_{i,j}}^{n+1} + u^* A_{P_{i,j}}^o - u^* S_P \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned} \quad (2.53)$$

Como se mencionó anteriormente, $u^* S_C = u^* S_P = 0$; además de que:

$$\begin{aligned} v^* A_{E_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_e \Delta y_j}{(\delta x)_e} + [[- (\rho_e u_{i+1,j}^*) \Delta y_j, 0]] \\ v^* A_{W_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_w \Delta y_j}{(\delta x)_w} + [[(\rho_w u_{i,j}^*) \Delta y_j, 0]] \\ v^* A_{N_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_n \Delta x_i}{(\delta y)_n} + [[- (\rho_n v_{i,j+1}^*) \Delta x_i, 0]] \\ v^* A_{S_{i,j}}^{n+1} &= \frac{\Gamma_s \Delta x_i}{(\delta y)_s} + [[(\rho_s v_{i,j}^*) \Delta x_i, 0]] \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde $\Gamma = \mu$.

$$\begin{aligned} v^* B_{i,j}^{n+1} &= v^* S_C \Delta x_i \Delta y_j + v^* A_{P_{i,j}}^o v_{i,j}^{*n}, & v^* S_C &= g\beta(T_{i,j} - T_C), & v^* A_{P_{i,j}}^o &= \frac{\rho_{i,j}^n \Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t} \\ v^* A_{P_{i,j}}^{n+1} &= v^* A_{E_{i,j}}^{n+1} + v^* A_{W_{i,j}}^{n+1} + v^* A_{N_{i,j}}^{n+1} + v^* A_{S_{i,j}}^{n+1} + v^* A_{P_{i,j}}^o - v^* S_P \Delta x_i \Delta y_j \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde, $v^* S_P = 0$, y se deja indicada por las razones antes expuestas.

Se supone que las *velocidades correctas* u y v , se pueden obtener a partir de la suma de las *velocidades supuestas* u^* y v^* más las *velocidades de corrección* u' y v' , es decir que:

$$\begin{aligned} u_{i,j} &= u_{i,j}^* + u'_{i,j} \\ v_{i,j} &= v_{i,j}^* + v'_{i,j} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Las *velocidades de corrección* u' y v' se relacionan con el *campo de presiones de corrección* $P'_{i,j}$, de la siguiente manera:

$$u'_{i,j} = u^* d_{i,j} (P'_{i-1,j} - P'_{i,j}) \quad \text{con} \quad u^* d_{i,j} = \frac{\Delta y_j}{u^* A_{P_{i,j}}} \quad (2.57)$$

$$v'_{i,j} = v^* d_{i,j} (P'_{i,j-1} - P'_{i,j}) \quad \text{con} \quad v^* d_{i,j} = \frac{\Delta x_i}{v^* A_{P_{i,j}}}$$

sustituyendo las ecuaciones (2.57) en las ecuaciones (2.56) se obtienen las *ecuaciones de corrección de velocidad*, mismas que tienen la forma:

$$u_{i,j} = u^*_{i,j} + u^* d_{i,j} (P'_{i-1,j} - P'_{i,j}) \quad (2.58)$$

$$v_{i,j} = v^*_{i,j} + v^* d_{i,j} (P'_{i,j-1} - P'_{i,j})$$

El campo $P'_{i,j}$ se determina a partir de la llamada *ecuación de corrección de la presión*. Es importante recordar que la *ecuación de corrección de la presión* es en realidad una forma de la ecuación de continuidad. En efecto, si se discretiza la ecuación de continuidad se obtiene:

$$\frac{(\rho_{i,j}^{n+1} - \rho_{i,j}^n) \Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t} + (\rho_e u_{i+1,j} - \rho_w u_{i,j}) \Delta y + (\rho_n v_{i,j+1} - \rho_s v_{i,j}) \Delta x = 0 \quad (2.59)$$

ahora, sustituyendo las expresiones dadas por las *ecuaciones de corrección de velocidad* (2.58) en la ecuación de continuidad discretizada, ecuación (2.59), se obtiene la *ecuación de corrección de la presión*, misma que se muestra a continuación:

$$P' A_{P_{i,j}}^{n+1} P'^{n+1}_{i,j} = P' A_{E_{i,j}}^{n+1} P'^{n+1}_{i+1,j} + P' A_{W_{i,j}}^{n+1} P'^{n+1}_{i-1,j} + P' A_{N_{i,j}}^{n+1} P'^{n+1}_{i,j+1} + P' A_{S_{i,j}}^{n+1} P'^{n+1}_{i,j-1} + P' B_{i,j}^{n+1} \quad (2.60)$$

donde:

$$P' A_{P_{i,j}}^{n+1} = \rho_e u^* d_{i+1,j} \Delta y_j \quad (2.61)$$

$$P' A_{W_{i,j}}^{n+1} = \rho_w u^* d_{i,j} \Delta y_j$$

$$P' A_{N_{i,j}}^{n+1} = \rho_n v^* d_{i,j+1} \Delta x_i$$

$$P' A_{S_{i,j}}^{n+1} = \rho_s v^* d_{i,j} \Delta x_i$$

$$P' B_{i,j}^{n+1} = \frac{(\rho_{i,j}^n - \rho_{i,j}^{n+1}) \Delta x_i \Delta y_j}{\Delta t} + [\rho_w u^*_{i,j} - \rho_e u^*_{i+1,j}] \Delta y + [\rho_s v^*_{i,j} - \rho_n v^*_{i,j+1}] \Delta x$$

$$P' A_{P_{i,j}}^{n+1} = P' A_{E_{i,j}}^{n+1} + P' A_{W_{i,j}}^{n+1} + P' A_{N_{i,j}}^{n+1} + P' A_{S_{i,j}}^{n+1}$$

Tercero. Cuando ya se han calculado u^* y v^* , éstas se sustituyen en la *ecuación de correc-*

ción de la presión, ecuación (2.60), para determinar el campo $P'_{i,j}$.

Cuarto. La presión correcta $P_{i,j}$ es igual a la suma de la presión supuesta $P^*_{i,j}$ más la presión de corrección $P'_{i,j}$, es decir que:

$$P_{i,j} = P^*_{i,j} + P'_{i,j} \quad (2.62)$$

Sin embargo, resulta conveniente utilizar un coeficiente de bajo relajación α_P para la presión de corrección. Esto se hace con el objetivo de evitar cambios abruptos en el cálculo de la presión correcta, mismos que pueden llevar a la divergencia de la solución, entonces:

$$P'_{i,j} = \alpha_P P'_{i,j} \quad (2.63)$$

Quinto. Los nuevos valores de $P'_{i,j}$ obtenidos con la aplicación de la bajo relajación se aplican a las ecuaciones de corrección de velocidad, ecuaciones (2.58), para determinar u y v . En el cálculo iterativo para la determinación de $u_{i,j}$ y $v_{i,j}$, también resulta conveniente el uso de factores de bajo relajación. Se elijen los factores α_u y α_v para $u_{i,j}$ y $v_{i,j}$, respectivamente.

Sexto. Los valores de u y v así calculados, se sustituyen en la ecuación de la energía, ecuación (2.41), para determinar la distribución de temperaturas $T_{i,j}$. En este caso, se hace uso del coeficiente de bajo relajación α_T , para el cálculo iterativo de $T_{i,j}$.

Séptimo. Si no se satisface el criterio de convergencia, la presión correcta calculada $P_{i,j}$ se propone como la presión supuesta $P^*_{i,j}$ y se repiten los pasos de manera iterativa hasta alcanzar la convergencia.

La condición de error máximo permitido para considerar que se ha alcanzado la convergencia (y que por lo tanto el flujo calculado es el correcto), está basada en observar la magnitud del término de generación de masa $P' B_{i,j}^{n+1}$ de la ecuación de la corrección de la presión. Para

considerar que se ha alcanzado la convergencia, el término de generación de masa debe tender a un valor muy cercano a cero para todos los volúmenes de control. Para asegurar que el término fuente es suficientemente pequeño en todos los volúmenes de control, la sumatoria de los valores absolutos de los términos $B_{i,j}^{n+1}$ de todos los volúmenes de control debe ser menor que valor de la generación máxima permitida, elegida con anterioridad.

2.2.4 SOLUCIÓN AL PROBLEMA CONJUGADO

Hasta este punto no se ha mencionada lo relativo al método empleado para la solución del problema conjugado. La mutua dependencia entre la conducción en la pared sólida y la convección en el fluido, representa un problema de transferencia de calor en el que ambas, la conducción en las paredes y la convección en el fluido, deben ser consideradas, desde luego, con un ajuste adecuado en la interfaz sólido-fluido. El cálculo por separado de las soluciones de las regiones sólida y fluida requeriría el uso de un procedimiento iterativo para el cumplimiento de la condición en la interfaz. Patankar [22], presenta algunas sugerencias diferentes para el manejo de los problemas conjugados de transferencia de calor.

Una alternativa consiste en resolver el problema utilizando un sólo dominio que incluya a las dos regiones, sólida y fluida, con las superficies externas coincidiendo con la frontera del dominio. Así, las condiciones de frontera para la velocidad y la temperatura pueden ser fácilmente aplicadas en la superficie externa de las paredes. En este caso, el procedimiento de cálculo descansa en la habilidad que se tenga para manejar los grandes cambios en el valor del coeficiente del término difusivo Γ . Cuando se resuelven las ecuaciones de la velocidad, se hace que Γ sea igual a la viscosidad del fluido para los puntos que están dentro de la región fluida, mientras que para los puntos que se encuentran en la región sólida, Γ se iguala a un número "muy grande" (muy alta viscosidad). Esto asegura que las velocidades nulas se presenten en toda la región sólida, y de esta manera, la región fluida experimenta la condición



de frontera correcta. Por otra parte, para dar solución a la ecuación de la energía, se especifica Γ empleando las conductividades del sólido y del fluido en sus respectivas regiones. El sistema así definido se resuelve como un problema de difusión-convección a través de todo el dominio de cálculo, pero, dado que las velocidades en la región sólida son cero, el cálculo en la región sólida se reduce a la conducción pura. Ya que la condición de continuidad del flujo de calor han sido automáticamente satisfecha en la interfaz sólido-fluido, la solución obtenida incluye la distribución de temperaturas en el sólido y en el fluido. Al realizar el cálculo de esta manera, la interfaz sólido-fluido es simplemente una región más del interior del dominio de la malla, y se trata como cualquier otra interfaz entre dos volúmenes de control.

Es importante mencionar que los cambios abruptos en el coeficiente difusivo Γ entre volúmenes de control vecinos, pueden conducir a una estimación errónea de los términos difusivos en la interfaz y en algunos casos puede causar la no convergencia del método. Por esta razón es necesario hacer alguna modificación que permita un manejo adecuado de tales cambios. En particular, es necesario poner especial atención en las interfaces entre dos volúmenes con propiedades significativamente diferentes. Una opción es el uso de la llamada *media armónica* de los valores de las propiedades de los puntos en cuestión.

Existe otra opción para manejar los problemas conjugados de transferencia de calor. Esta consiste en seleccionar y *bloquear* los volúmenes de control que se encuentran dentro de la región sólida [22]. Las paredes sólidas se obtienen al *bloquear* de manera selectiva una serie de volúmenes rectangulares, de tal manera que la geometría de la zona bloqueada se aproxime a la forma de las paredes. La *operación de bloqueo* permite establecer los valores conocidos de la variable o variables dependientes ϕ de interés en los volúmenes de control. Es decir, con la *operación de bloqueo* es posible fijar en los volúmenes de control que se seleccionen, los valores que uno desee para las variables dependientes (velocidades, temperaturas, concentraciones, etc.). Por ejemplo, si la región inactiva representa un sólido sin movimiento, las componentes de la velocidad se deben igualar a cero; si por otro lado, representa una frontera isotérmica, se debe establecer la temperatura conocida en la región de volúmenes de control inactivos. Para asegurar que

los valores descados se fijan en los volúmenes de control seleccionados, se recomienda el *uso de grandes valores para los términos fuente* de dichos volúmenes.

En el código numérico que se utilizó para la obtención de los resultados que se presentan en este trabajo de Tesis, se hizo uso de la *media armónica* para el manejo adecuado de la variación de los coeficientes difusivos en los volúmenes de control que forman la intercara sólido-fluido. Además, con el objetivo de establecer la condición de velocidad nula en la región sólida, se aplicó el método de *bloqueo de volúmenes de control utilizando términos fuente grandes*. Resulta entonces adecuado detallar los fundamentos e implicaciones de estos dos métodos.

USO DE LA MEDIA ARMÓNICA PARA LOS TÉRMINOS Γ

El uso de la media armónica permite manejar adecuadamente los cambios abruptos en los coeficientes difusivos entre volúmenes de control vecinos. En la posición de la interfaz, una mala estimación de los coeficientes difusivos en la ecuación de la energía, resulta en un cálculo erróneo del flujo de calor; y en la ecuación de la cantidad de movimiento, en una mala estimación de los efectos viscosos. Para salvar este problema, se aplicó el método de la media armónica para determinar el valor adecuado de los coeficientes difusivos de las ecuaciones de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento.

La no uniformidad en las propiedades difusivas de un material puede surgir de la no homogeneidad del mismo. En el tratamiento que se presenta a continuación, el coeficiente de difusión Γ en la ecuación diferencial general para ϕ , se maneja en la forma en la que se manejaría la conductividad térmica k , en un sistema conductivo unidimensional.

El procedimiento más estable para obtener la conductividad térmica k_e en la intercara e , supone una variación lineal de k entre los puntos P y E , según se muestra en la Figura 2-2.



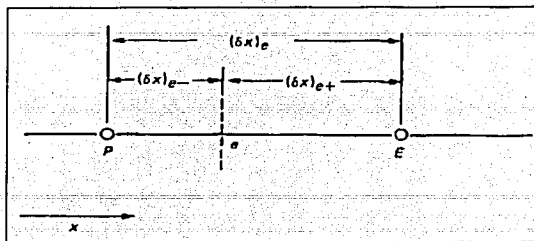


Figura 2-2: Distancias asociadas con la interfase e .

Entonces,

$$k_e = f_e k_P + (1 - f_e) k_E \quad (2.64)$$

donde el factor de interpolación f_e , es una relación definida en términos de las distancias mostradas en la figura. Así:

$$f_e \equiv \frac{(\delta x)_{e+}}{(\delta x)_e} \quad (2.65)$$

Si la intercara e estuviera en el punto medio entre los puntos P y E , f_e sería igual 0.5, y k_e sería la media aritmética de k_P y k_E .

Más adelante se muestra que en algunos casos esta formulación sencilla conduce a implicaciones incorrectas, y que no es capaz de manejar de manera adecuada los cambios abruptos de la conductividad. Afortunadamente, existe una alternativa mejor con una simplicidad comparable.

Para desarrollar esta alternativa, se reconoce que no es de interés primario el valor local de la conductividad en la intercara e . El objetivo principal es obtener una buena representación del flujo de calor a través de la intercara:

$$q_e = \frac{k_e (T_P - T_E)}{(\delta x)_e} \quad (2.66)$$

La expresión deseada para k_e es aquella que conduce a una estimación correcta de q_e .

Se supone que el volumen de control que rodea al punto P , se compone de un material de conductividad uniforme k_P , y el que rodea a E de un material de conductividad k_E . Para la *zona compuesta* entre los puntos P y E , un análisis unidimensional (sin fuentes), conduce a:

$$q_e = \frac{T_P - T_E}{\frac{(\delta x)_{e-}}{k_P} + \frac{(\delta x)_{e+}}{k_E}} \quad (2.67)$$

Una combinación de las ecuaciones (2.65) a (2.67) conduce a

$$k_e = \left(\frac{1 - f_e}{k_P} + \frac{f_e}{k_E} \right)^{-1} \quad (2.68)$$

Cuando la intercara se coloca en el punto medio entre P y E , se tiene que $f_e = 0.5$, entonces:

$$k_e^{-1} = 0.5 (k_P^{-1} + k_E^{-1}) \quad (2.69)$$

o bien,

$$k_e = \frac{2k_P k_E}{k_P + k_E} \quad (2.70)$$

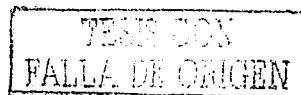
La ecuación (2.70) muestra que k_e es la *media armónica* de k_P y k_E , en lugar de la media aritmética que resultaría de la ecuación (2.64) para un valor de $f_e = 0.5$.

La efectividad de esta última formulación, ecuación (2.70), se puede observar fácilmente en los dos casos límite siguientes:

1. Cuando $k_E \rightarrow 0$, entonces de la ecuación (2.68):

$$k_e \rightarrow 0 \quad (2.71)$$

Esto implica que el flujo de calor en la intercara de un aislante es cero, como debe ser. La formulación de la media aritmética, por otro lado, habría estimado un flujo diferente de cero



para esta situación.

2. Cuando $k_P \gg k_E$, entonces:

$$k_e \rightarrow \frac{k_E}{f_e} \quad (2.72)$$

Este resultado tiene dos implicaciones: Primera, indica que la conductividad de la intercara k_e no depende del todo de k_P . Esto podría esperarse, pues una alta conductividad del material alrededor del punto P ofrecería una resistencia despreciable, en comparación con el material alrededor de E (la formulación de la media aritmética habría retenido el efecto de k_P sobre k_e). Segunda, k_e no es igual a k_E , sino $1/f_e$ veces k_E . Un análisis sencillo de este punto muestra lo apropiado de esta segunda implicación. El propósito es obtener una estimación correcta de q_e a través de la ecuación (2.66), entonces sustituyendo la ecuación (2.72) en (2.66), se obtiene:

$$q_e = \frac{k_E (T_P - T_E)}{(\delta x)_{e+}} \quad (2.73)$$

Así, cuando $k_P \gg k_E$, la temperatura T_P prevalece hasta la intercara e , y la caída de temperaturas ($T_P - T_E$), realmente tomará lugar en la distancia $(\delta x)_{e+}$. Entonces, el flujo de calor correcto estará dado por la ecuación (2.73). En otras palabras, el factor f_e en la ecuación (2.72) puede verse como un coeficiente para compensar el uso de la distancia nominal $(\delta x)_e$ en la ecuación (2.66).

El análisis de los dos casos límite anteriores mostró que la formulación de la media armónica puede manejar satisfactoriamente los cambios abruptos en la conductividad. La ecuación (2.68) recomendada para la interfaz se obtuvo a partir del análisis de una situación de estado permanente, sin términos fuente y unidimensional, para la cual, la conductividad varía de una forma discreta de un volumen de control al siguiente. Sin embargo, aun en situaciones con términos fuente diferentes de cero, o con variación continua de la conductividad, esta formulación resulta mucho mejor que la aproximación de la media aritmética.

Para obtener la solución del problema que se analizó en este trabajo, se utilizó la formulación

de la media armónica. A partir de la Figura 2-1, es posible observar que las variaciones de las propiedades físicas se presentan en las intercarras verticales, $x = 0, L$. Las propiedades físicas presentan variaciones abruptas en la dirección del eje x , mientras que se mantienen constantes en la dirección de y . Así, sólo es necesario considerar la variación en la dirección x (misma que se ha comentado). Entonces, para el caso particular en el que la intercara se encuentra en el punto medio entre los volúmenes de control vecinos designados como (i, j) y $(i + 1, j)$, la ecuación (2.68) aplicada al coeficiente difusivo Γ establece que en la intercara este del volumen de control (i, j) :

$$\Gamma_e = \frac{2\Gamma_{i,j}\Gamma_{i+1,j}}{\Gamma_{i,j} + \Gamma_{i+1,j}} \quad (2.74)$$

mientras que la intercara del oeste:

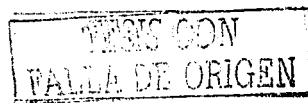
$$\Gamma_w = \frac{2\Gamma_{i-1,j}\Gamma_{i,j}}{\Gamma_{i-1,j} + \Gamma_{i,j}} \quad (2.75)$$

Las ecuaciones (2.74) y (2.75) se aplicaron sustituyendo $\Gamma = \mu$ en las ecuaciones de la conservación de la cantidad de movimiento y $\Gamma = k/c_p$ en la ecuación de la energía.

BLOQUEO DE LOS VOLÚMENES DE CONTROL CON EL USO DE TÉRMINOS FUENTE GRANDES

Como se comentó, este método permite ajustar el valor de la variable dependiente de interés ϕ (velocidad, temperatura, concentración, etc) a un valor conocido, en los volúmenes de control seleccionados. Por medio de este método se ajustaron a un valor de cero las velocidades dentro de la región sólida de una manera sencilla y satisfactoria. A continuación se presentan algunos detalles del método.

Como se recordará, el procedimiento para llevar la ecuación diferencial de interés a la forma general, consiste en manipularla hasta que, para la variable dependiente elegida ϕ , el término temporal, el convectivo y el difusivo tengan la forma estándar que se muestra en la ecuación



(2.38). El coeficiente de $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ en el término de difusión se toma como la expresión para Γ , y los demás términos del miembro derecho conforman en conjunto el llamado término fuente S . Además, la única manera de considerar el término fuente de manera formal es si se supone como una función lineal de la propiedad en cuestión ϕ , y en caso de que la relación entre el término fuente S y la propiedad ϕ no sea lineal, es necesario llevar a cabo una linealización. Así, el término fuente queda de la forma:

$$S = S_C + S_P \phi_P \quad (2.76)$$

donde S_C es la parte constante de S , y S_P es el coeficiente de ϕ_P .

Normalmente, uno puede asignar valores conocidos de la variable independiente ϕ únicamente en los puntos de la frontera. Sin embargo, es posible hacer que cualquier valor que se desee para ϕ , se obtenga como parte de la solución en los puntos internos de la malla. Esto se logra manipulando los términos S_C y S_P en los puntos en cuestión. Si se hace que:

$$S_C = 10^{30} \phi_{P,deseado} \quad (2.77)$$

$$S_P = -10^{30} \quad (2.78)$$

donde $\phi_{P,deseado}$ es el valor deseado de ϕ , y 10^{30} denota un número lo suficientemente grande como para hacer que los otros términos en la ecuación discretizada para ϕ se consideren como despreciables. Al ser tan grande los términos fuente, la consecuencia es que éstos dominan la ecuación de discretización, de tal suerte que se puede considerar que para estos puntos la ecuación discretizada es:

$$S_C + S_P \phi_P \approx 0 \quad (2.79)$$

por la tanto,

$$\phi_P = -\frac{S_C}{S_P} = \phi_{P,deseado} \quad (2.80)$$

Es decir, el valor deseado de ϕ_P se obtiene como parte de la solución para los puntos seleccionados. En general, este procedimiento se puede utilizar para representar obstáculos o

islas en el dominio de cálculo, colocando condiciones de frontera "internas".

Para el caso que se estudió en este trabajo, resultó necesario bloquear los volúmenes de control de tal manera que las dos componentes de la velocidad u y v fueran nulas en las regiones correspondientes a las paredes sólidas. En la región del sólido, en las ecuaciones de la conservación de la cantidad de movimiento para las direcciones x y y , (ecuaciones 2.44 y 2.47), $u_{P,deseada} = v_{P,deseada} = 0$, por lo que:

$$u_{SC} = v_{SC} = 10^{30} \cdot 0 = 0 \quad (2.81)$$

$$u_{SP} = v_{SP} = -10^{30} \quad (2.82)$$

Adicionalmente, con la finalidad de asegurar un flujo de masa igual a cero a través de los volúmenes de control ubicados dentro de las paredes, se igualaron a cero las velocidades en las interfaces de estos volúmenes de control, esto es:

$$u_e, i,j = u_w, i,j = u_n, i,j = u_s, i,j = v_e, i,j = v_w, i,j = v_n, i,j = v_s, i,j = 0 \quad (2.83)$$

dentro de la región sólida.

2.2.5 ECUACIONES NODALES DE FRONTERA

A continuación se muestran las ecuaciones nodales que se utilizaron para colocar las condiciones de frontera a las ecuaciones discretizadas de la energía, de la corrección de presión y de las dos componentes de la velocidad.

Las ecuaciones para la temperatura en los nodos frontera son:

En la pared de arriba, para $j = NJ - 1$ se conoce que $T_{i,NJ} = T_C$, así:

$$\begin{aligned} & {}^T A_{P_{i,NJ-1}}^{n+1} T_{i,NJ-1}^{m+1} - {}^T A_{E_{i,NJ-1}}^{n+1} T_{i+1,NJ-1}^{m+1} - {}^T A_{W_{i,NJ-1}}^{n+1} T_{i-1,NJ-1}^{m+1} - {}^T A_{S_{i,NJ-1}}^{n+1} T_{i,NJ-2}^{m+1} \\ &= {}^T A_{N_{i,NJ-1}}^{n+1} T_C + {}^T B_{i,NJ-1}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.84)$$

en la pared de abajo, para $j = 2$ se conoce que $T_{i,1} = T_H$, así:

$$\begin{aligned} & {}^T A_{P_{i,2}}^{n+1} T_{i,2}^{m+1} - {}^T A_{E_{i,2}}^{n+1} T_{i+1,2}^{m+1} - {}^T A_{W_{i,2}}^{n+1} T_{i-1,2}^{m+1} - {}^T A_{N_{i,2}}^{n+1} T_{i,3} \\ &= {}^T A_{S_{i,2}}^{n+1} T_H + {}^T B_{i,2}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.85)$$

en la pared de la izquierda, para $i = 2$ se conoce que $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, por lo que $T_{2,j} = T_{1,j}$, así:

$$\left({}^T A_{P_{2,j}}^{n+1} - {}^T A_{W_{2,j}}^{n+1} \right) T_{2,j}^{m+1} - {}^T A_{E_{2,j}}^{n+1} T_{3,j}^{m+1} - {}^T A_{N_{2,j}}^{n+1} T_{2,j+1} - {}^T A_{S_{2,j}}^{n+1} T_{2,j-1} = {}^T B_{2,j}^{n+1} \quad (2.86)$$

en la pared de la derecha, para $i = NI - 1$ se conoce que $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, por lo que $T_{NI,j} = T_{NI-1,j}$, así:

$$\begin{aligned} & \left({}^T A_{P_{NI-1,j}}^{n+1} - {}^T A_{E_{NI-1,j}}^{n+1} \right) T_{NI-1,j}^{m+1} - {}^T A_{W_{NI-1,j}}^{n+1} T_{NI-2,j}^{m+1} - {}^T A_{N_{NI-1,j}}^{n+1} T_{NI-1,j+1} \\ & \quad - {}^T A_{S_{NI-1,j}}^{n+1} T_{NI-1,j-1} = {}^T B_{NI-1,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Las ecuaciones de los nodos frontera para la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección x son:

En la pared de arriba, para $j = NJ - 1$ se conoce que $u_{i,NJ} = 0$, así:

$$\begin{aligned} & {}^u A_{P_{i,NJ-1}}^{n+1} u_{i,NJ-1}^{n+1} - {}^u A_{E_{i,NJ-1}}^{n+1} u_{i+1,NJ-1}^{n+1} - {}^u A_{W_{i,NJ-1}}^{n+1} u_{i-1,NJ-1}^{n+1} - {}^u A_{S_{i,NJ-1}}^{n+1} u_{i,NJ-2}^{n+1} \\ &= - (P_{i,NJ-1} - P_{i-1,NJ-1}) \Delta y_{NJ-1} + {}^u B_{i,NJ-1}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.88)$$

en la pared de abajo, para $j = 2$ se conoce que $u_{i,1} = 0$, así:

$${}^u A_{P_{i,2}}^{n+1} u_{i,2}^{n+1} - {}^u A_{E_{i,2}}^{n+1} u_{i+1,2}^{n+1} - {}^u A_{W_{i,2}}^{n+1} u_{i-1,2}^{n+1} - {}^u A_{N_{i,2}}^{n+1} u_{i,3} = - (P_{i,2} - P_{i-1,2}) \Delta y_2 + {}^u B_{i,2}^{n+1} \quad (2.89)$$

en la pared de la izquierda, para $i = 2$ se conoce que $u_{1,j} = 0$, así:

$${}^u A_{P_{2,j}}^{n+1} u_{2,j} - {}^u A_{E_{2,j}}^{n+1} u_{3,j}^{n+1} - {}^u A_{N_{2,j}}^{n+1} u_{2,j+1} - {}^u A_{S_{2,j}}^{n+1} u_{2,j-1} = -(P_{2,j} - P_{1,j}) \Delta y_j + {}^u B_{2,j}^{n+1} \quad (2.90)$$

en la pared de la derecha, para $i = NI - 1$ se conoce que $u_{NI,j} = 0$, así:

$$\begin{aligned} & {}^u A_{P_{NI-1,j}}^{n+1} u_{NI-1,j}^{n+1} - {}^u A_{W_{NI-1,j}}^{n+1} u_{NI-2,j}^{n+1} - {}^u A_{NNI-1,j}^{n+1} u_{NI-1,j+1} - {}^u A_{S_{NI-1,j}}^{n+1} u_{NI-1,j-1} \\ & = -(P_{NI-1,j} - P_{NI-2,j}) \Delta y_j + {}^u B_{NI-1,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Para la ecuación de la cantidad de movimiento en la dirección y , las condiciones de frontera son:

En la pared de arriba, para $j = NJ - 1$ se conoce que $v_{i,NJ} = 0$, así:

$$\begin{aligned} & {}^v A_{P_{i,NJ-1}}^{n+1} v_{i,NJ-1}^{n+1} - {}^v A_{E_{i,NJ-1}}^{n+1} v_{i+1,NJ-1}^{n+1} - {}^v A_{W_{i,NJ-1}}^{n+1} v_{i-1,NJ-1}^{n+1} - {}^v A_{S_{i,NJ-1}}^{n+1} v_{i,NJ-2}^{n+1} \\ & = -(P_{i,NJ-1} - P_{i,NJ-2}) \Delta x_i + {}^v B_{i,NJ-1}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.92)$$

en la pared de abajo, para $j = 2$ se conoce que $v_{i,1} = 0$, así:

$${}^v A_{P_{i,2}}^{n+1} v_{i,2}^{n+1} - {}^v A_{E_{i,2}}^{n+1} v_{i+1,2}^{n+1} - {}^v A_{W_{i,2}}^{n+1} v_{i-1,2}^{n+1} - {}^v A_{N_{i,2}}^{n+1} v_{i,3} = -(P_{i,2} - P_{i,1}) \Delta x_i + {}^v B_{i,2}^{n+1} \quad (2.93)$$

en la pared de la izquierda, para $i = 2$ se conoce que $v_{1,j} = 0$, así:

$${}^v A_{P_{2,j}}^{n+1} v_{2,j} - {}^v A_{E_{2,j}}^{n+1} v_{3,j}^{n+1} - {}^v A_{N_{2,j}}^{n+1} v_{2,j+1} - {}^v A_{S_{2,j}}^{n+1} v_{2,j-1} = -(P_{2,j} - P_{2,j-1}) \Delta x_2 + {}^v B_{2,j}^{n+1} \quad (2.94)$$

en la pared de la derecha, para $i = NI - 1$ se conoce que $v_{NI,j} = 0$, así:

$$\begin{aligned} & {}^v A_{P_{NI-1,j}}^{n+1} v_{NI-1,j}^{n+1} - {}^v A_{W_{NI-1,j}}^{n+1} v_{NI-2,j}^{n+1} - {}^v A_{NNI-1,j}^{n+1} v_{NI-1,j+1} - {}^v A_{S_{NI-1,j}}^{n+1} v_{NI-1,j-1} \\ & = -(P_{NI-1,j} - P_{NI-1,j-1}) \Delta x_{NI-1} + {}^v B_{NI-1,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.95)$$

Ahora, para la ecuación de la corrección de la presión, las ecuaciones nodales de frontera son:

En la pared de arriba, para $j = NJ - 1$ se conoce que $v_{i,NJ} = 0$, así $P' A_{N_{i,NJ-1}}^{n+1} = 0$ y $v_{i,NJ}^* = 0$:

$$\begin{aligned} & P' A_{P_{i,NJ-1}}^{n+1} P'_{i,NJ-1}^{n+1} - P' A_{E_{i,NJ-1}}^{n+1} P'_{i+1,NJ-1}^{n+1} - P' A_{W_{i,NJ-1}}^{n+1} P'_{i-1,NJ-1}^{n+1} - P' A_{S_{i,NJ-1}}^{n+1} P'_{i,NJ-2}^{n+1} \\ & = P' B_{i,NJ-1}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.96)$$

donde $P' A_{P_{i,NJ-1}}^{n+1} = P' A_{E_{i,NJ-1}}^{n+1} + P' A_{W_{i,NJ-1}}^{n+1} + P' A_{S_{i,NJ-1}}^{n+1}$

en la pared de abajo, para $j = 2$ se conoce que $v_{i,1} = 0$, así $P' A_{S_{i,2}}^{n+1} = 0$ y $v_{i,1}^* = 0$:

$$P' A_{P_{i,2}}^{n+1} P'_{i,2}^{n+1} - P' A_{E_{i,2}}^{n+1} P'_{i+1,2}^{n+1} - P' A_{W_{i,2}}^{n+1} P'_{i-1,2}^{n+1} - P' A_{N_{i,2}}^{n+1} P'_{i,3}^{n+1} = P' B_{i,2}^{n+1} \quad (2.97)$$

donde $P' A_{P_{i,2}}^{n+1} = P' A_{E_{i,2}}^{n+1} + P' A_{W_{i,2}}^{n+1} + P' A_{N_{i,2}}^{n+1}$

en la pared de la izquierda, para $i = 2$ se conoce que $u_{1,j} = 0$, así $P' A_{W_{2,j}}^{n+1} = 0$ y $u_{1,j}^* = 0$:

$$P' A_{P_{2,j}}^{n+1} P'_{2,j}^{n+1} - P' A_{E_{2,j}}^{n+1} P'_{3,j}^{n+1} - P' A_{N_{2,j}}^{n+1} P'_{2,j+1}^{n+1} - P' A_{S_{2,j}}^{n+1} P'_{2,j-1}^{n+1} = P' B_{2,j}^{n+1} \quad (2.98)$$

donde $P' A_{P_{2,j}}^{n+1} = P' A_{E_{2,j}}^{n+1} + P' A_{N_{2,j}}^{n+1} + P' A_{S_{2,j}}^{n+1}$

en la pared de la derecha, para $i = NI - 1$ se conoce que $u_{NI,j} = 0$, así $P' A_{E_{NI-1,j}}^{n+1} = 0$ y $u_{NI,j}^* = 0$:

$$\begin{aligned} & P' A_{P_{NI-1,j}}^{n+1} P'_{NI-1,j}^{n+1} - P' A_{W_{NI-1,j}}^{n+1} P'_{NI-2,j}^{n+1} - P' A_{N_{NI-1,j}}^{n+1} P'_{NI-1,j+1}^{n+1} - P' A_{S_{NI-1,j}}^{n+1} P'_{NI-1,j-1}^{n+1} \\ & = P' B_{NI-1,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.99)$$

donde $P' A_{P_{NI-1,j}}^{n+1} = P' A_{W_{NI-1,j}}^{n+1} + P' A_{N_{NI-1,j}}^{n+1} + P' A_{S_{NI-1,j}}^{n+1}$

CONDICIONES INICIALES

Según se pudo observar durante el desarrollo y análisis del problema que se presenta en este trabajo, la solución del estado permanente depende fuertemente de las condiciones iniciales. La situación física que se analiza en este trabajo resulta ser bastante inestable, por esta razón, las condiciones iniciales del sistema determinan las características del flujo convectivo y de la transferencia de calor que se alcanzan en el estado permanente. En esta investigación las condiciones iniciales para la velocidad fueron:

$$u_{i,j}^0 = v_{i,j}^0 = 0 \quad \text{para todo el sistema}$$

y para la temperatura, se eligieron dos condiciones iniciales diferentes:

1a. Todo el sistema (fluido y sólido) con temperatura igual a la temperatura baja, es decir:

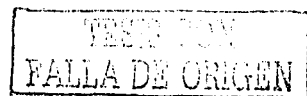
$$T_{i,j}^0 = T_C \quad \text{para todo el sistema}$$

2a. Todo el sistema con la temperatura igual a la temperatura alta, así:

$$T_{i,j}^0 = T_H \quad \text{para todo el sistema}$$

Entonces, las dos condiciones iniciales para la temperatura definen dos problemas diferentes en la etapa temprana del estado transitorio. La primera condición implica un problema de calentamiento del fluido. Por otra parte, la segunda condición representa el problema del enfriamiento del fluido.

El objeto de este trabajo no es analizar de forma detallada el estado transitorio ni estudiar la dependencia de la solución del estado permanente sobre las condiciones iniciales; en realidad está dirigida al estudio del fenómeno conjugado de conducción-convección y a la aplicación de estos conocimientos para el cálculo de la transferencia de calor dentro de la cavidad bidimensional en estado permanente. Sin embargo, al encontrarse que para las dos condiciones iniciales elegidas,



estas soluciones difieren de manera importante, resulta interesante observar las diferencias que existen entre los patrones convectivos encontrados y en la transferencia de calor estimada.

2.2.6 SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

Para dar solución al sistema de ecuaciones algebraicas lineales resultantes de la discretización de la ecuaciones diferenciales que modelan el fenómeno, se utilizó el método línea por línea descrito por Patankar [22]. Este es una combinación del método directo TDMA para una dimensión (TriDiagonal-Matrix Algorithm), conocido también como algoritmo de Thomas, y el método de Gauss-Seidel. El método de línea por línea consiste en elegir una línea de la malla (por decir, en la dirección y), suponer que a partir de la iteración anterior se conocen los valores de la variable ϕ a lo largo de las líneas vecinas (las vecinas, en la dirección x , de los puntos sobre la línea elegida), y resolver para la variable a lo largo de la línea elegida por medio de TDMA. Entonces, se continúa este procedimiento para todas las líneas en una dirección y se repite el procedimiento para las líneas en las otras direcciones. El procedimiento se ilustra mejor con la Figura 2-3.

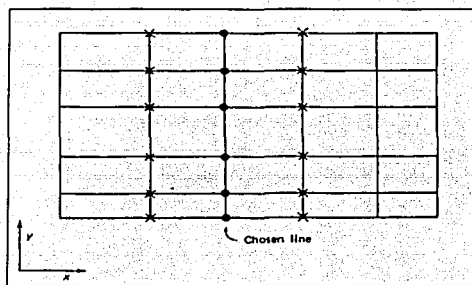


Figura 2-3: Representación del método línea por línea.

Se consideran las ecuaciones discretizadas para los puntos de la malla a lo largo de la línea elegida. Ellas contienen el valor de la variable ϕ en los puntos de la malla (mostrados con

crucetas) a lo largo de las dos líneas vecinas. Si estas variables se sustituyen por sus valores (de la iteración anterior), las ecuaciones para los puntos de la malla (mostrados con *puntos*) a lo largo de la línea elegida aparecen como ecuaciones para una situación unidimensional, es posible entonces usar el TDMA.

2.2.7 NÚMERO DE NUSSELT PROMEDIO

Desde el punto de vista práctico, la cantidad que resulta de mayor interés es el calor total transferido a través de las superficies horizontales de la cavidad. El calor total transferido se puede expresar en términos del número de Nusselt promedio, el cual se define a continuación:

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (2.100)$$

donde Nu es el número de Nusselt promedio, h es el coeficiente promedio de transferencia de calor convectivo, y k es la conductividad térmica del fluido. Además,

$$h = \frac{q}{A(T_H - T_C)} \quad (2.101)$$

donde q es el calor total que se transfiere a través de la superficie (en el caso de estudio, las paredes horizontales), A es el área de transferencia ($A = L \times 1$), T_H es la temperatura alta (en la superficie horizontal inferior) y T_C es la temperatura baja (en la superficie horizontal superior).

Entonces, sustituyendo (2.101) en (2.100):

$$Nu = \frac{q}{k(T_H - T_C)} \quad (2.102)$$

A partir de la solución numérica es posible conocer el calor q de la siguiente manera. Si q'' es el flujo de calor local, entonces

$$dq = q'' dA = q'' \cdot (1) \cdot dx \quad (2.103)$$

por lo que integrando (2.103):

$$q = \int_0^L q' dx \quad (2.104)$$

donde, para la superficie horizontal inferior:

$$q' = -k \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (2.105)$$

y para la superficie horizontal superior:

$$q' = -k \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_{y=H=L} \quad (2.106)$$

Así, a partir de la integración numérica del flujo de calor local que se obtuvo de la simulación, se determinaron numéricamente los valores de los números de Nusselt promedio para las dos superficies horizontales.

2.2.8 ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA DEL MÉTODO NUMÉRICO

CRITERIO DE CONVERGENCIA

Dado que el método de línea por línea utilizado para obtener la solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales es iterativo, resulta necesario establecer de forma adecuada el criterio que se utiliza para suponer que el algoritmo converge a la solución. En el programa se utilizó el criterio que se comenta a continuación.

Durante la etapa iterativa (antes de alcanzar la convergencia) se obtienen valores para $u_{i,j}^n$, $v_{i,j}^n$, $T_{i,j}^n$ y $P_{i,j}^n$ que en realidad no satisfacen favorablemente las ecuaciones discretizadas correspondientes al punto (i, j) , ecuaciones (2.41), (2.44), (2.47), (2.60). Es decir, si en estas ecuaciones se sustituyen los valores de $u_{i,j}^n$, $v_{i,j}^n$, $T_{i,j}^n$ y $P_{i,j}^n$ hasta ese momento calculados, no se

obtienen las igualdades establecidas por dichas ecuaciones. Ahora, si las ecuaciones discretizadas se arreglan igualándolas a cero se obtienen ecuaciones de la forma:

$$0 = {}^\phi A_{E_{i,j}}^{n+1} \phi_{i+1,j}^{n+1} + {}^\phi A_{W_{i,j}}^{n+1} \phi_{i-1,j}^{n+1} + {}^\phi A_{N_{i,j}}^{n+1} \phi_{i,j+1}^{n+1} + {}^\phi A_{S_{i,j}}^{n+1} \phi_{i,j-1}^{n+1} - {}^\phi A_{P_{i,j}}^{n+1} \phi_{i,j}^{n+1} + {}^\phi B_{i,j}^{n+1} \quad (2.107)$$

donde ϕ es la variable en cuestión, u, v, T o P .

Si en esta última ecuación se sustituyen los valores calculados para la variable ϕ en la etapa iterativa, se encuentra que la igualdad a cero no se satisface. El valor absoluto del número que se obtenga en el lado izquierdo de la ecuación (2.107), que llamaremos *residual*, es una medida de error en la solución encontrada hasta ese momento. Cuando la solución calculada es la adecuada, el residual tiene un valor muy cercano a cero. Entonces, si se evalúan los residuales para cada punto de la malla y se suman los valores absolutos de todos ellos, es posible tener un parámetro que indica la exactitud de la solución obtenida hasta ese momento.

Así, el criterio elegido para evaluar la convergencia del algoritmo consistió en la observación del valor de la suma de los valores absolutos de los residuales de los puntos de toda la malla. Este criterio se aplica de manera separada para las cuatro ecuaciones discretizadas: la ecuación de la energía, las de la cantidad de movimiento en las direcciones x y y , y la de la corrección de presión. Entonces se consideró que se había alcanzado la convergencia cuando, para las cuatro ecuaciones, la sumatoria de los valores absolutos de residuales de todos los puntos de la malla fue menor un valor máximo permitido. El valor elegido para éste fue del orden de 10^{-5} .

ESTUDIO DE LA INDEPENDENCIA DE MALLA

La consistencia de un esquema numérico de solución está relacionado con el refinamiento de la malla. Por esta razón es necesario analizar la influencia que tiene el tamaño de malla sobre la solución que se obtiene. Se estudió entonces la influencia de la densidad de malla en la obtención

de la solución del problema conjugado de interés. Se simuló la condición de $Ra = 10^5$, $Pr = 0.7$, $\frac{k_w}{k} = 10$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $T_{ini} = T_C$, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.01$. La Figura 2-4 muestra los resultados de estado permanente obtenidos para el número de Nusselt promedio en las caras fría y caliente con mallas de 42×30 , 56×40 , 70×50 , 84×60 , 98×70 y 112×80 . Se observa que los valores del número de Nusselt promedio tienden asintóticamente a un valor, y que para la malla de 112×80 , el porcentaje de variación es menor al 1.2%, como se observa en la Tabla 2.1.

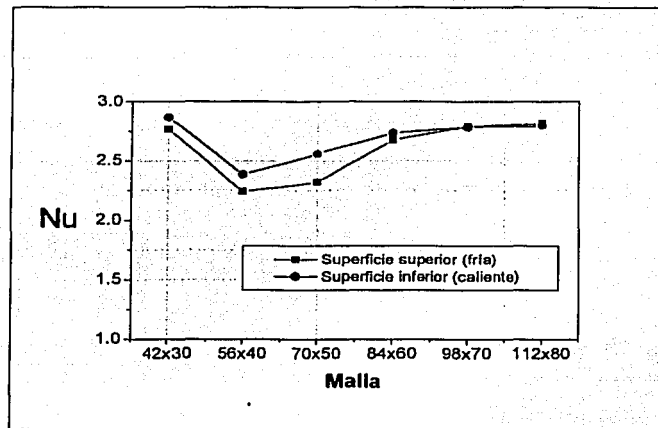


Figura 2-4: Variación del número de Nusselt promedio para diferentes densidades de malla. $Ra = 10^5$, $Pr = 0.7$, $\frac{k_w}{k} = 10$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $T_{ini} = T_C$, con pasos de tiempo $\Delta t = 0.01$.

De esta forma, se eligió un mallado de 112×80 para las simulaciones, pues esta densidad de malla mostró ser considerablemente aceptable tanto por los resultados obtenidos como por el tiempo de cómputo requerido.

Tabla 2.1: Influencia del refinamiento de malla sobre el valor del Nusselt promedio para $Ra = 10^5$, $Pr = 0.7$, $kw = 10k$, $\varepsilon = 0.2L$ y pasos de tiempo $\Delta t = 0.01$

Malla	Nu (cara fría)	Nu (cara caliente)	%Dif (cara fría)	%Dif (cara caliente)
42x30	2.757	2.860	-	-
56x40	2.240	2.384	-23.1	-19.9
70x50	2.314	2.557	3.2	6.7
84x60	2.677	2.736	13.6	6.5
98x70	2.790	2.782	4.1	1.6
112x80	2.82	2.796	1.1	0.5

2.2.9 SIMULACIÓN DE UN PROBLEMA PUBLICADO. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Con el objetivo de observar el desempeño que tiene el código numérico para la determinación de la solución del problema conjugado, se compararon sus resultados con otros que han sido publicados con anterioridad. Se resolvió el problema conjugado de conducción-convección en estado permanente que resulta cuando se tiene una cavidad bidimensional de sección cuadrada y logitud L , con la pared vertical derecha de espesor finito ε y las paredes restantes de espesor despreciable. Las paredes horizontales son adiabáticas, la cavidad se calienta desde la superficie externa de la pared vertical derecha y se enfría por la pared opuesta. En general, la conductividad térmica de la pared k_w es diferente a la correspondiente al fluido k . Se obtuvieron los campos de velocidades y temperaturas, además del valor del número de Nusselt promedio. Los resultados se compararon con los que presentaron Kaminski y Prakash [11]. Estos autores analizaron el caso de la cavidad llena de aire ($Pr = 0.7$). La Figura 2-5 muestra un esquema del problema analizado.

Kaminski y Prakash encontraron que los parámetros que caracterizan dicho fenómeno son el número de Grashof, $Gr = \frac{g\beta\Delta T L^3}{\nu^2}$, y la relación $\left(\frac{k_w L}{k\varepsilon}\right)$, cuando el número de Prandtl es constante. La Tabla 2.2 muestra de forma comparativa los valores del número de Nusselt promedio para diferentes valores de los dos parámetros mencionados, cuando $\frac{\varepsilon}{L} = 0.2$. Se observa que la diferencia entre los resultados es mínima, incluso para valores grandes del parámetro

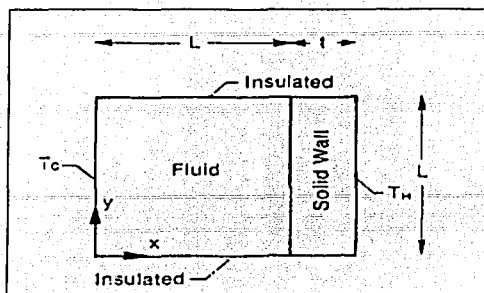


Figura 2-5: Esquema del problema analizado por Kaminski y Prakash [11].

$\frac{k_w L}{k_c}$. Esto indica que el programa que se empleó en este trabajo responde adecuadamente a los cambios abruptos de las propiedades físicas en las interfaces sólido-fluido, además de que la dificultad que representa la continuidad del flujo de calor en la interfaz sólido-fluido se resuelve favorablemente.

Con el fin de hacer una comparación cualitativa, en las Figuras 2-6 a 2-9 se muestran los resultados presentados por Kaminski y Prakash [11] acompañados por los obtenidos en el presente trabajo.

Después de haber realizado las comparaciones anteriores, se encuentra que las semejanzas cualitativas y cuantitativas entre los resultados son favorables.

En resumen, se ha revisado el método numérico que resuelve las ecuaciones de transporte convectivo dentro de una cavidad rectangular. También se ha presentado el método que permite la solución del problema conjugado de conducción-convección y se puso a prueba el código numérico empleado para mostrar su desempeño en la solución de un problema conjugado publicado en la literatura especializada. De los resultados obtenidos, se encuentra que el código numérico es confiable para la realización del estudio del problema conjugado de transferencia

Tabla 2.2: Comparación de los valores del Nusselt promedio calculados en el presente trabajo con los estimados por Kaminski y Prakash.

Gr	$\frac{k_w L}{k_c}$	Nu (Kaminski [11])	Nu	%Dif.
10^5	5	2.08	2.078	-0.09
	25	3.42	3.49	2.0
	50	3.72	3.81	2.4
10^6	5	2.87	2.8	-2.4
	25	5.89	5.91	0.34
	50	6.81	6.9	1.32
5×10^6	5	3.35	3.27	-2.4
	25	8.07	8.21	1.7
	50	9.86	10.2	3.4
10^7	5	3.53	3.43	-2.8
	25	9.08	9.27	2.1
	50	11.39	11.9	4.5

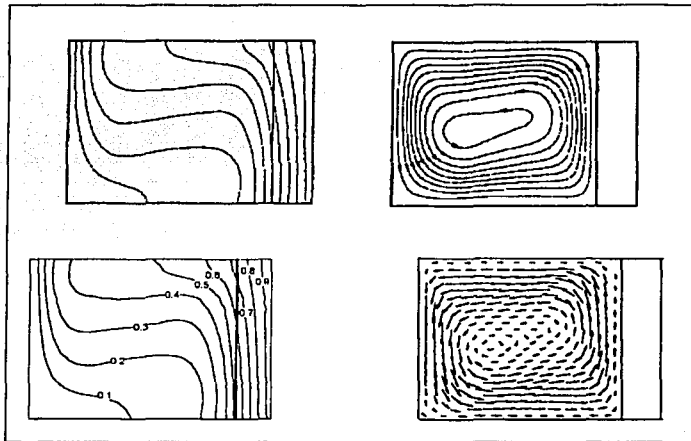


Figura 2-6: $Gr = 10^5$, $Pr = 0.7$, $\frac{k_w L}{k_c} = 5$, $\frac{t}{L} = 0.2$. Arriba. Resultados obtenidos por Kaminski y Prakash [11]. Abajo. Resultados obtenidos en el presente trabajo.

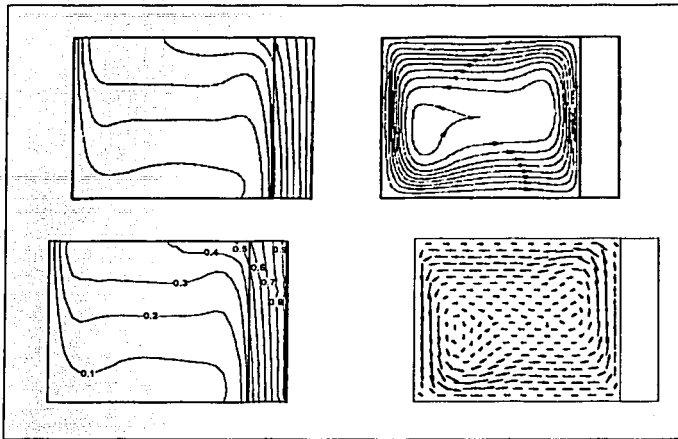


Figura 2-7: $Gr = 10^6$, $Pr = 0.7$, $\frac{k_w L}{kt} = 5$, $\frac{t}{L} = 0.2$. Arriba. Resultados obtenidos por Kaminski y Prakash [11]. Abajo. Resultados obtenidos en el presente trabajo.

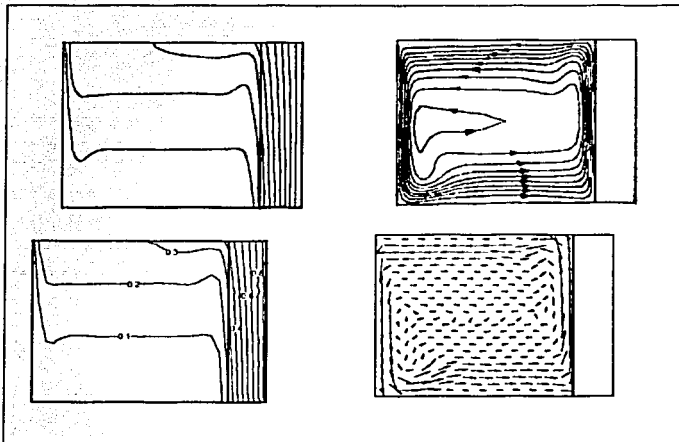


Figura 2-8: $Gr = 10^7$, $Pr = 0.7$, $\frac{k_w L}{kt} = 5$, $\frac{t}{L} = 0.2$. Arriba. Resultados obtenidos por Kaminski y Prakash [11]. Abajo. Resultados obtenidos en el presente trabajo.

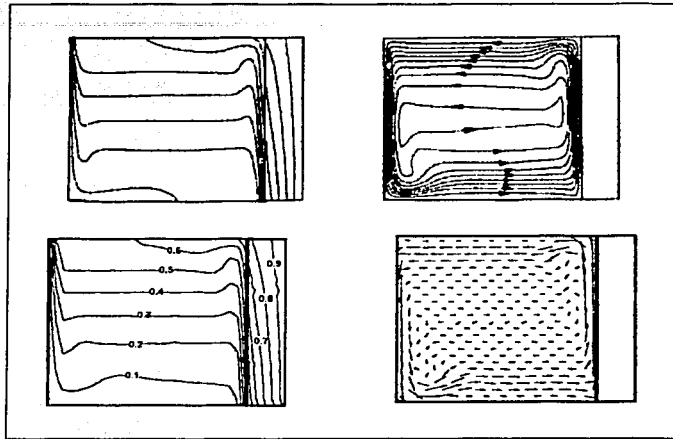


Figura 2-9: $Gr = 10^7$, $Pr = 0.7$, $\frac{k_m L}{k_f l} = 25$, $\frac{l}{L} = 0.2$. *Arriba*. Resultados obtenidos por Kaminski y Prakash [11]. *Abajo*. Resultados obtenidos en el presente trabajo.

de calor, motivo del presente trabajo.

Capítulo 3

RESULTADOS

Como se mencionó con anterioridad, el código numérico utilizado resuelve las ecuaciones de la mecánica de fluidos para las variables primitivas: temperatura, presión y velocidades en las direcciones x y y . El objetivo de este trabajo fue el de obtener resultados representativos del fenómeno en cuestión. Entonces, resultó necesario establecer de forma adecuada las condiciones de frontera, de tal manera que los parámetros representativos resultantes (espesor de la pared adimensionalizado, relación de conductividades térmicas, números de Rayleigh y Prandtl) permitieran un buen análisis de los resultados.

Los parámetros empleados para reportar los resultados se definen de la siguiente manera:

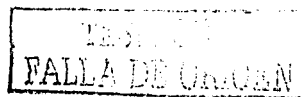
$$Nu = \frac{hL}{k} \quad \text{Número de Nusselt promedio} \quad (3.1)$$

$$Ra = \frac{g\beta L^3 \Delta T}{\nu\alpha} \quad \text{Número de Rayleigh} \quad (3.2)$$

$$Pr = \frac{c_p \mu}{k} \quad \text{Número de Prandtl} \quad (3.3)$$

$$\frac{k_w}{k} \quad \text{Relación de conductividades térmicas} \quad (3.4)$$

$$\frac{\varepsilon}{L} \quad \text{Espesor de pared adimensionalizado} \quad (3.5)$$



en todos ellos las propiedades físicas se evalúan a la temperatura media T_m entre la temperatura alta T_H y la temperatura baja T_C , es decir:

$$T_m = \frac{T_H + T_C}{2} \quad (3.6)$$

El presente estudio se realizó para el caso en el que la cavidad es de sección cuadrada de longitud L , con el espesor adimensionalizado de las paredes laterales constante, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, y el número de Prandtl constante, $Pr = 0.7$. Por otro lado, el rango para el número de Rayleigh fue $10^4 \leq Ra \leq 10^7$, y se eligieron tres valores diferentes para la relación de las conductividades térmicas, $\frac{k_w}{k} = 1.0, 5.0, 10.0$. De esta forma, se supuso que sería posible analizar satisfactoriamente la dependencia del fenómeno sobre sus principales parámetros.

Adicionalmente, para la presentación gráfica de los resultados, resulta conveniente adimensionalizar la temperatura de la siguiente forma:

$$\theta = \frac{T - T_C}{T_H - T_C} \quad (3.7)$$

y a las componentes u y v de la velocidad en las direcciones de x y y como: $\frac{uL}{\alpha}$ y $\frac{vL}{\alpha}$.

3.1 DEPENDENCIA CON EL NÚMERO DE RAYLEIGH

Las condiciones del flujo dentro de la cavidad y la distribución de temperaturas cambian de manera importante con el número de Rayleigh, como es posible observar en las Figuras 3-1 a 3-4. En estas imágenes se presentan los campos de velocidades, las isotermas en las paredes laterales y dentro de la cavidad, además de los perfiles de velocidad para las direcciones x y y . Para observar la influencia de Rayleigh, se muestra una secuencia de imágenes en las que el parámetro que cambia es el Rayleigh mientras que $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_w}{k} = 5.0$, $T_{ini} = T_C$ se mantienen constantes. Las condiciones del flujo para bajos números de Rayleigh, Figura 3-1.a, se caracterizan por tener dos vórtices simétricos alargados en la dirección vertical, además, las

isotermas se presentan muy bien delineadas, y aún paralelas en las zonas cercanas a las paredes y dentro de ellas, Figura 3-1.b. Esto permite pensar que la difusión de calor dentro de la cavidad representa una parte importante de la transferencia de calor.

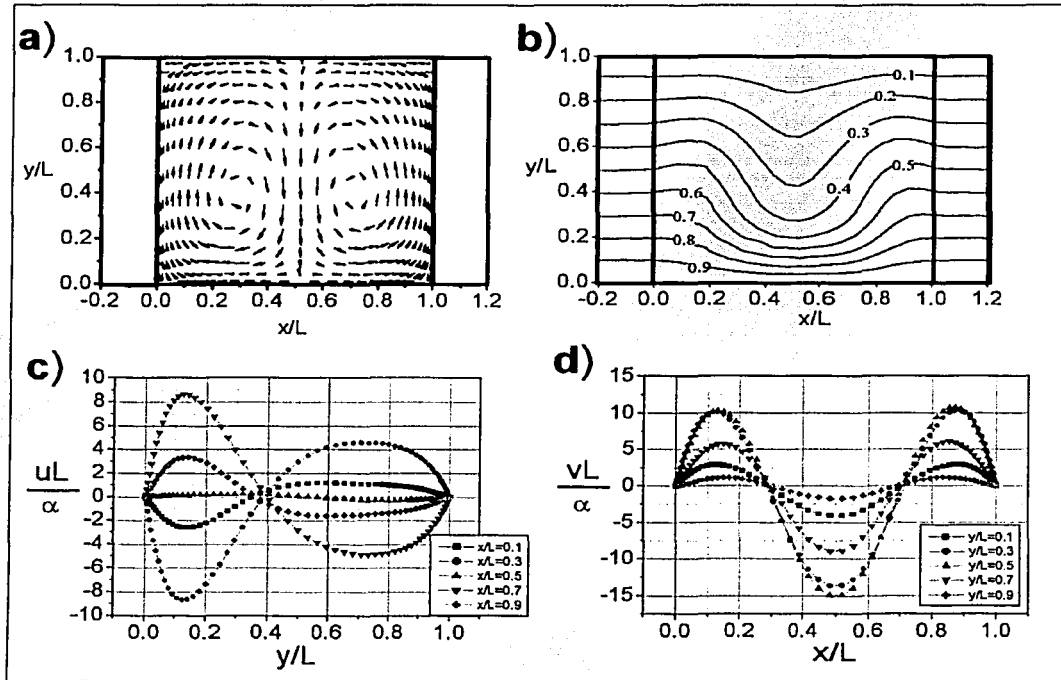


Figura 3-1: Resultados para $Ra = 10^4$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_w}{k} = 5.0$, $T_{ini} = T_C$. a) Campo de velocidades, b) isotermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

Conforme el número de Rayleigh es mayor (alrededor de 10^5), el flujo se vuelve más complejo, como se muestra en la Figura 3-2.a. El flujo presenta cuatro vórtices y la distribución de temperatura dentro de la cavidad muestra que la transferencia de calor dentro de la cavidad es gobernada por la convección natural, Figura 3-2.b.

Si el número de Rayleigh se encuentra alrededor de 10^6 , Figura 3-3, las condiciones del

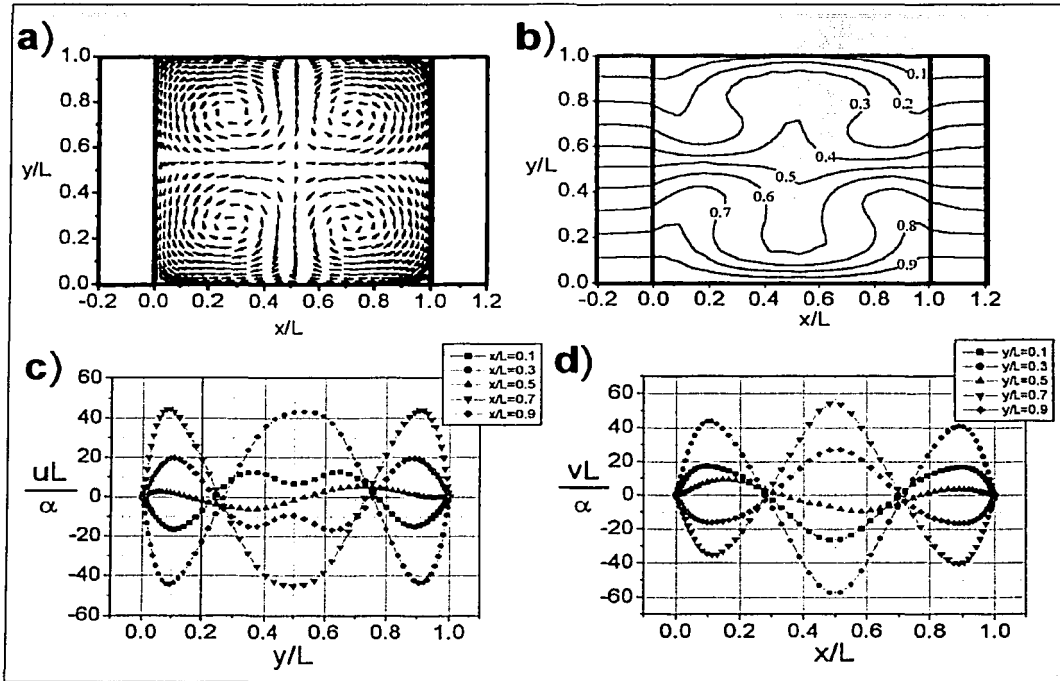


Figura 3-2: Resultados para $Ra = 10^5$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_w}{k} = 5.0$, $T_{ini} = T_C$. a) Campo de velocidades, b) isotermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

flujo aún se caracterizan por la presencia de cuatro vórtices. Sin embargo, la distribución de temperaturas dentro de la cavidad es complicada. En la parte superior de la cavidad, la temperatura disminuye muy lentamente, mientras, cerca de la superficie horizontal inferior se observa una condición de capa límite térmica, donde la temperatura cae rápidamente.

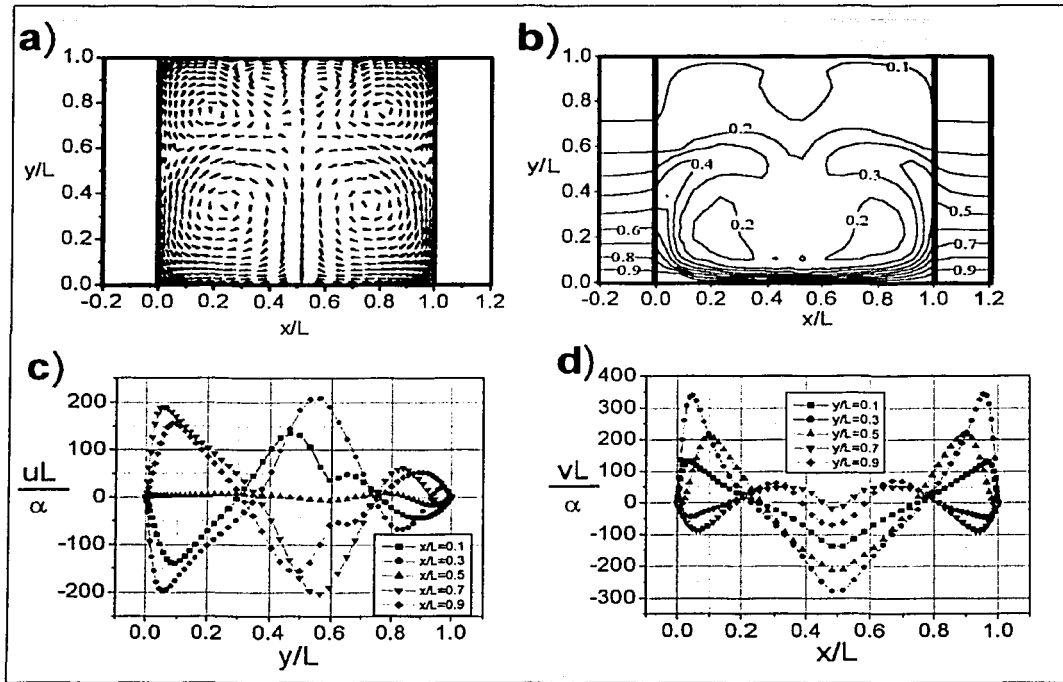


Figura 3-3: Resultados para $Ra = 10^6$, $\frac{\xi}{L} = 0.2$, $\frac{k_w}{k} = 5.0$, $T_{ini} = T_C$. a) Campo de velocidades, b) isothermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

El valor más alto para el número de Rayleigh en este estudio es de 10^7 , condición que se muestra en la Figura 3-4. Para esta condición, el fluido, casi en su totalidad, gira dentro de un vórtice inclinado sobre la diagonal de la cavidad. Este vórtice es el principal responsable de la transferencia de calor dentro de la cavidad. Como se observa en la imagen de las isothermas,

3-4.b, la temperatura de la mayor parte del fluido es relativamente baja (θ alrededor de 0.3), y se observan condiciones de capa límite térmica cerca de las cuatro paredes de la cavidad.

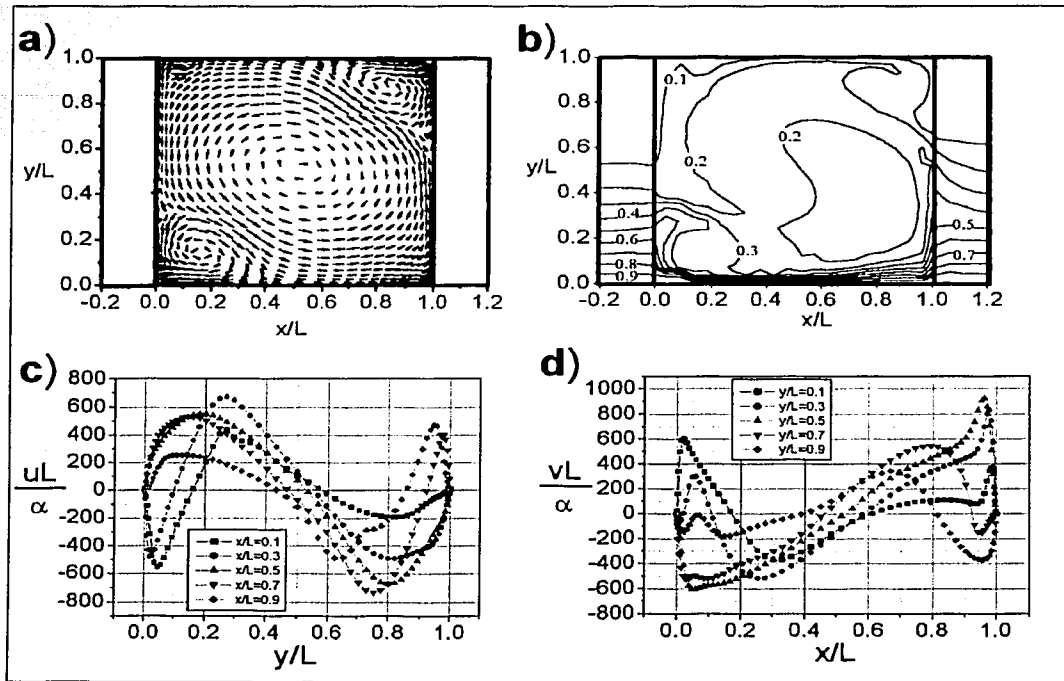


Figura 3-4: Resultados para $Ra = 10^7$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_w}{k} = 5.0$, $T_{ini} = T_C$. a) Campo de velocidades, b) isotermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

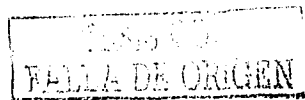
3.2 EFECTO DE LA TEMPERATURA INICIAL DEL SISTEMA

Durante la realización de las simulaciones numéricas se encontró que en algunos casos existe multiplicidad de soluciones de estado permanente, es decir, se observó que para las mismas

condiciones de frontera puede existir más de una solución en el estado permanente. Para analizar este fenómeno, se dejó que el programa simulara el estado transitorio hasta llegar a la solución permanente, concluyéndose que las soluciones para el sistema y las condiciones de frontera analizadas son altamente dependientes de las condiciones iniciales. Se encontraron dos soluciones, al menos para el rango de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. La diferencia de soluciones se presenta dependiendo de la condición inicial para la temperatura de todo el sistema T_{ini} , ya sea que se asigne la temperatura de la pared fría T_C , o la de la pared caliente, T_H . La Figura 3-5 presenta los resultados para la condición $Ra = 5 \times 10^4$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_w}{k} = 5.0$, $T_{ini} = T_C$ y la Figura 3-6 para las mismas condiciones, sólo que en ésta $T_{ini} = T_H$.

Si se observa con atención, se encuentra que en realidad ambos flujos no son independientes. En efecto, el flujo resultante a partir de la condición inicial de temperatura fría es igual al flujo resultante de la condición inicial de temperatura caliente, sólo que el flujo se encuentra rotado 180° . Esta doble solución se debe a que el flujo en estudio es altamente inestable, por lo que el sentido y las características finales del flujo dependen fuertemente del sentido del flujo en las etapas tempranas del movimiento. Entonces, las dos diferentes condiciones iniciales estudiadas definen dos problemas diferentes de transferencia de calor en la etapa inicial del fenómeno; una es el calentamiento y la otra el enfriamiento del fluido. Aunque en este estudio sólo se está interesado en los resultados del estado permanente, es necesario observar la importancia que tiene la condición inicial de temperaturas sobre las condiciones finales del flujo. Si se estudiara una condición física más estable (como la cavidad rectangular vertical con paredes horizontales adiabáticas), la solución del estado permanente, podría incluso ser independiente de la condición inicial de temperaturas; sin embargo, el sistema analizado, en sí resulta muy inestable, razón por la que los movimientos en la etapa temprana del fenómeno determinan las condiciones finales del flujo.

Desde luego, existen ciertas condiciones para las cuales es posible obtener flujos con características muy semejantes en el estado permanente, independientemente de cual haya sido la condición inicial de la temperatura del sistema. Las Figuras 3-7.a y 3-8.a muestran dos condiciones de flujo de estado permanente muy parecidas. Estas Figuras, presentan los resultados obtenidos para $Ra = 10^5$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_w}{k} = 1.0$, la primera se obtuvo a partir de la condición $T_{ini} = T_C$ y la segunda con $T_{ini} = T_H$.



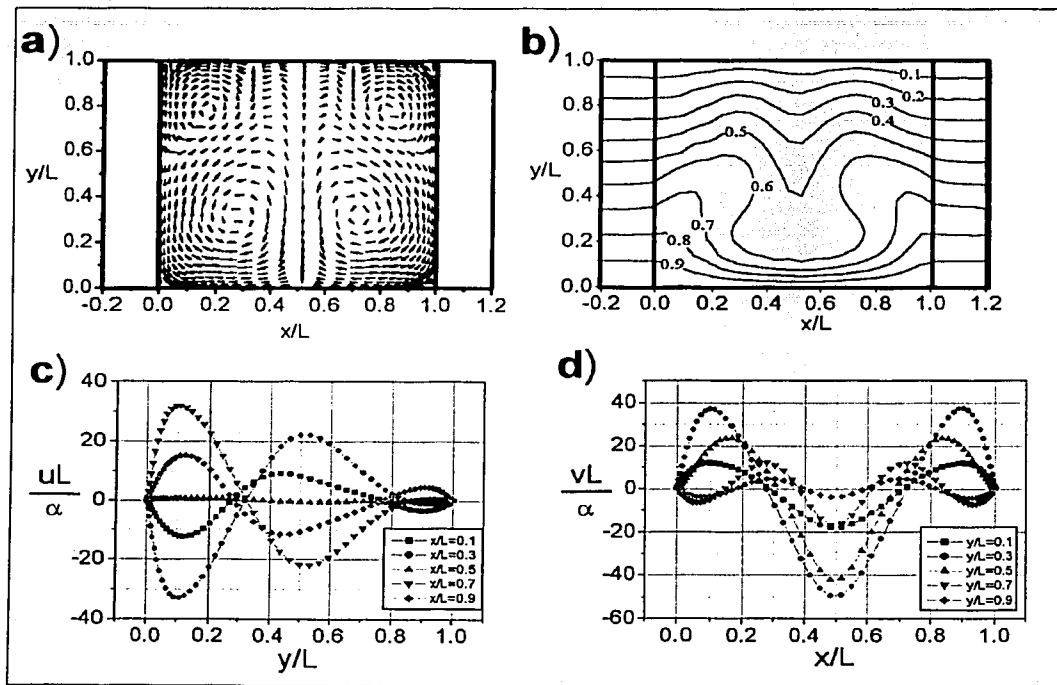


Figura 3-5: Resultados para $Ra = 5 \times 10^4$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_m}{k} = 5.0$, $T_{ini} = T_C$. a) Campo de velocidades, b) isothermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

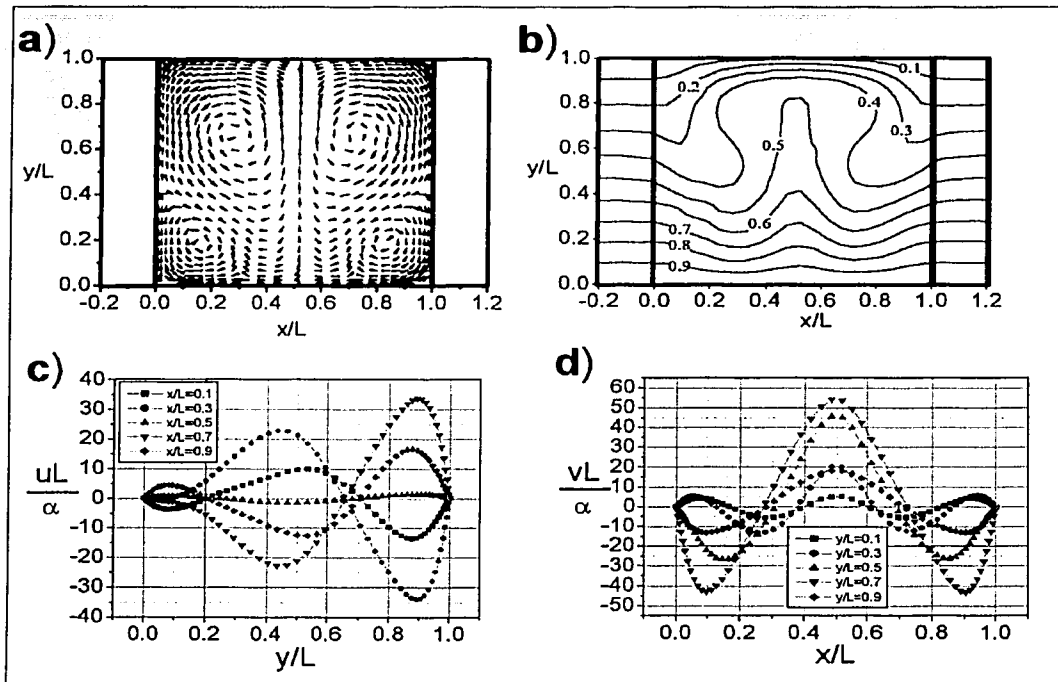


Figura 3-6: Resultados para $Ra = 5 \times 10^4$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_w}{k} = 5.0$, $T_{ini} = T_H$. a) Campo de velocidades, b) isothermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

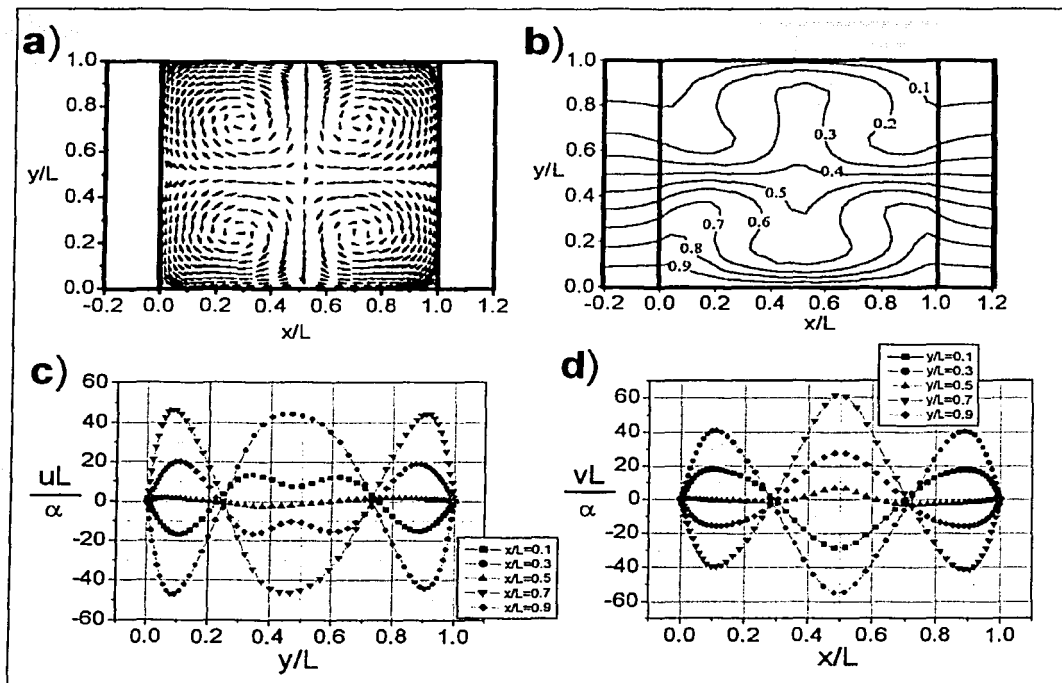


Figura 3-7: Resultados para $Ra = 10^5$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_m}{k} = 1.0$, $T_{ini} = T_C$. a) Campo de velocidades, b) isothermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

Las imágenes de las isotermas para estas mismas dos condiciones muestran ciertas diferencias, encontrándose que para la que se obtuvo con $T_{ini} = T_H$, Figura 3-8.b, presenta las isotermas más anchas en la parte inferior de la cavidad, tanto en el fluido como en las paredes, situación diferente a la mostrada en la Figura 3-7.b.

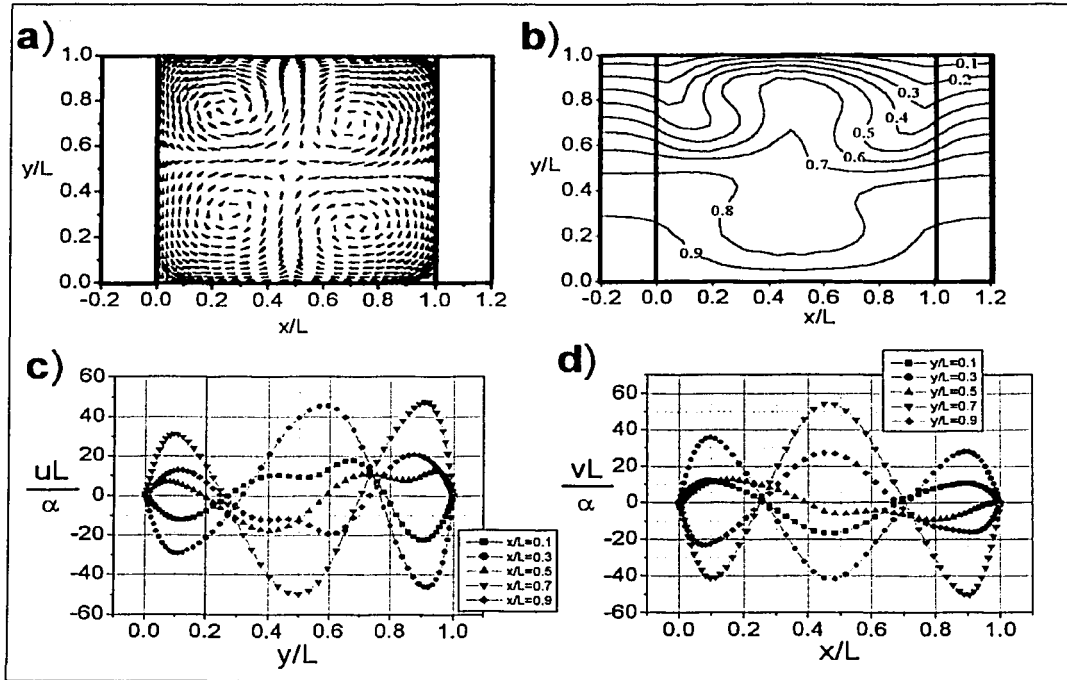


Figura 3-8: Resultados para $Ra = 10^5$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_w}{k_f} = 1.0$, $T_{ini} = T_H$. a) Campo de velocidades, b) isotermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

3.3 EFECTO DE LA RELACIÓN DE CONDUCTIVIDADES TÉRMICAS

La relación de conductividades térmicas entre las paredes conductoras y el fluido es de particular importancia en este problema acoplado de transferencia de calor.

En este punto resulta adecuado mencionar que durante el desarrollo del estado transitorio, la relación de difusividades ($\frac{\alpha_w}{\alpha}$), (donde α_w es la difusividad térmica de la pared y α la del fluido), es el parámetro que resulta adecuado para describir la condición del flujo de calor impuesta en la interfase. Pero, bajo las condiciones de estado permanente, el parámetro idóneo se reduce a la relación de conductividades térmicas ($\frac{k_w}{k}$), y en éste trabajo, éste es el parámetro que se empleó para caracterizar los resultados obtenidos para el estado permanente.

Para la cavidad en estudio, si la conductividad térmica de las paredes fuera infinita, entonces la temperatura dentro de éstas sería una función lineal de y , con un valor de T_H cuando $y = 0$, y T_C cuando $y = H$, es decir, $T = T_H - \left(\frac{T_H - T_C}{H}\right)y$; si por el contrario, la conductividad térmica de las paredes fuera cero, se tendría la condición adiabática. En esta investigación se considera que la conductividad térmica de las paredes laterales es finita y relativamente pequeña, y debido al acoplamiento, la relación entre ésta y la conductividad del fluido es un parámetro muy importante pues es determinante en el establecimiento de la distribución de temperatura en la interfaz sólido-fluido, es decir, la condición de frontera de la temperatura en la interfaz.

Para observar el efecto que tiene el incremento en el valor de la relación de conductividades térmicas hay que mirar con detalle la distribución de las temperaturas dentro de las paredes laterales. La Figura 3-9 presenta los resultados para $Ra = 10^4$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $T_{int} = T_C$, y una relación de conductividades $\frac{k_w}{k} = 1.0$, mientras que la Figura 3-10 muestra los resultados para las mismas condiciones pero con $\frac{k_w}{k} = 10.0$. En la Figura 3-9.b se observa que el ancho de las isotermas dentro de las paredes es más o menos igual para todas ellas, aunque no son paralelas entre sí. El hecho de que el ancho de las isotermas sea más o menos igual, indica que casi se establece la condición de conducción perfecta en las paredes. Esto se debe a que aunque la conductividad de las paredes es baja, la convección dentro de la cavidad no es muy importante todavía ($Ra = 10^4$), por lo que la difusión es el principal medio de transferencia de calor.

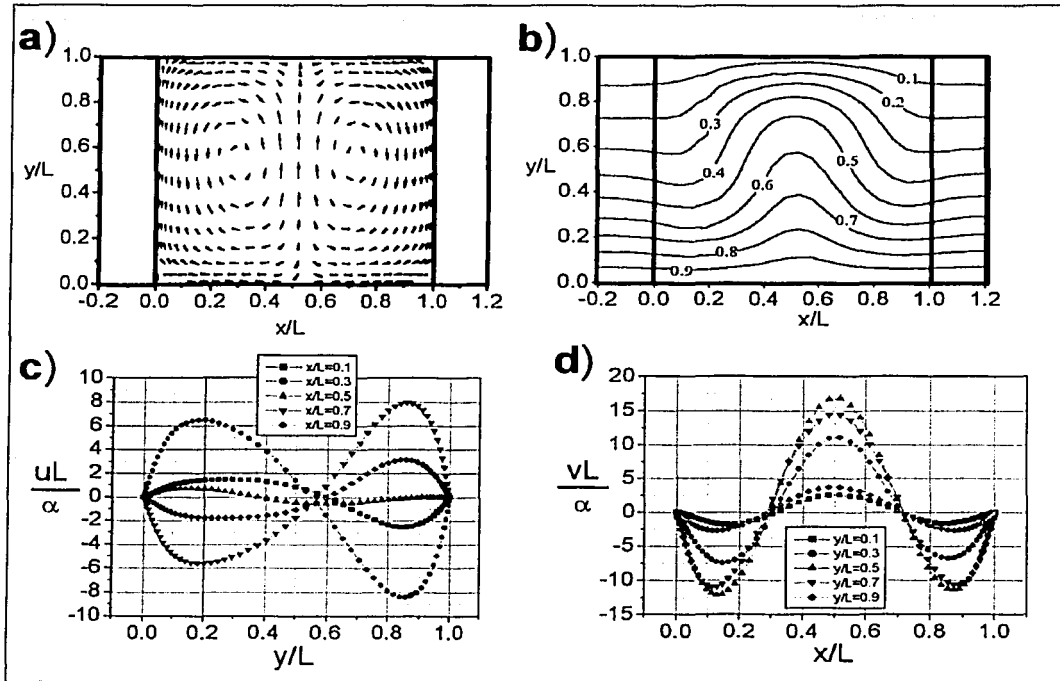


Figura 3-9: Resultados para $Ra = 10^4$, $\frac{\xi}{L} = 0.2$, $\frac{k\mu}{k} = 1.0$, $T_{ini} = T_C$. a) Campo de velocidades, b) isothermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

Por otra parte, de la observación de la Figura 3-10.b se tiene que el ancho de las isoterms dentro de las paredes es igual para todas ellas. Además, las isoterms dentro de las paredes son perfectamente paralelas entre sí. Entonces, es posible considerar que para este caso se ha establecido la condición de paredes conductoras perfectas, desde luego, como resultado de una buena conductividad térmica de las paredes y de que el flujo convectivo no es muy intenso todavía.

Adicionalmente, es importante hacer notar que el sentido en el que giran los vórtices en la Figura 3-9.a es contrario al sentido de los vórtices en 3-10.a. Para estas dos figuras la condición inicial de temperatura del sistema es $T_{ini} = T_C$, pero para la Figura 3-9, $\frac{k_w}{k} = 1$ y para la Figura 3-10, $\frac{k_w}{k} = 10$. Entonces, en este caso la diferencia en el sentido de los vórtices no está relacionada con la condición inicial de temperaturas, sino con el valor de la relación de conductividades térmicas, $\frac{k_w}{k}$. Este punto se discute con detalle más adelante.

Ahora se analizan los resultados que se muestran en la Figura 3-11 para las condiciones $Ra = 10^4$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $T_{ini} = T_H$, $\frac{k_w}{k} = 1.0$ y en la Figura 3-12 para las mismas condiciones pero con $\frac{k_w}{k} = 10.0$. En la imagen de las isoterms, Figura 3-11.b, las isoterms dentro de las paredes y en las zonas del fluido cercanas a la interfaz tienen espesores visiblemente diferentes. En la parte inferior de la cavidad las isoterms son anchas y disminuyen su espesor en la dirección de y , además, es posible observar que dentro de las paredes las isoterms no son paralelas. Así, se concluye que no existe el perfil lineal de temperaturas dentro de las paredes, característico de la condición de paredes perfectamente conductoras, esto como resultado de la baja conductividad térmica de las paredes.

Finalmente, si se analizan los resultados de la Figura 3-12.b, se encuentra que dentro de las paredes las isoterms son prácticamente paralelas entre sí, además, el espesor de todas ellas es el mismo. El hecho de que la conductividad de la pared sea alta ha favorecido la aparición del perfil lineal de temperaturas dentro de las paredes.

Nuevamente, es importante resaltar que el sentido de los vórtices de la Figura 3-11.a es diferente al mostrado en la Figura 3-12.a, a pesar de que ambos corresponden a las mismas condiciones, excepto que $\frac{k_w}{k}$ en el segundo caso es 10 veces mayor que en el primero.

En conclusión, las características finales del flujo son altamente dependientes de los parámetros adimensionales del fenómeno. En este trabajo se estudió la dependencia con: el número

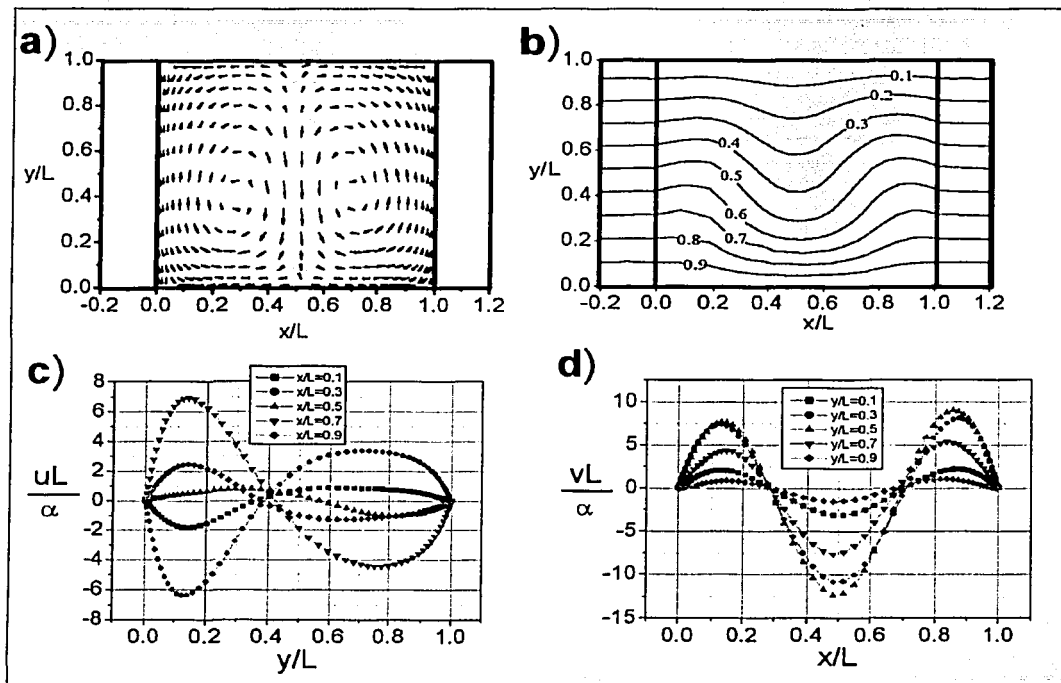


Figura 3-10: Resultados para $Ra = 10^4$, $\frac{\xi}{L} = 0.2$, $\frac{k_{\mu}}{k} = 10.0$, $T_{ini} = T_C$. a) Campo de velocidades, b) isothermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

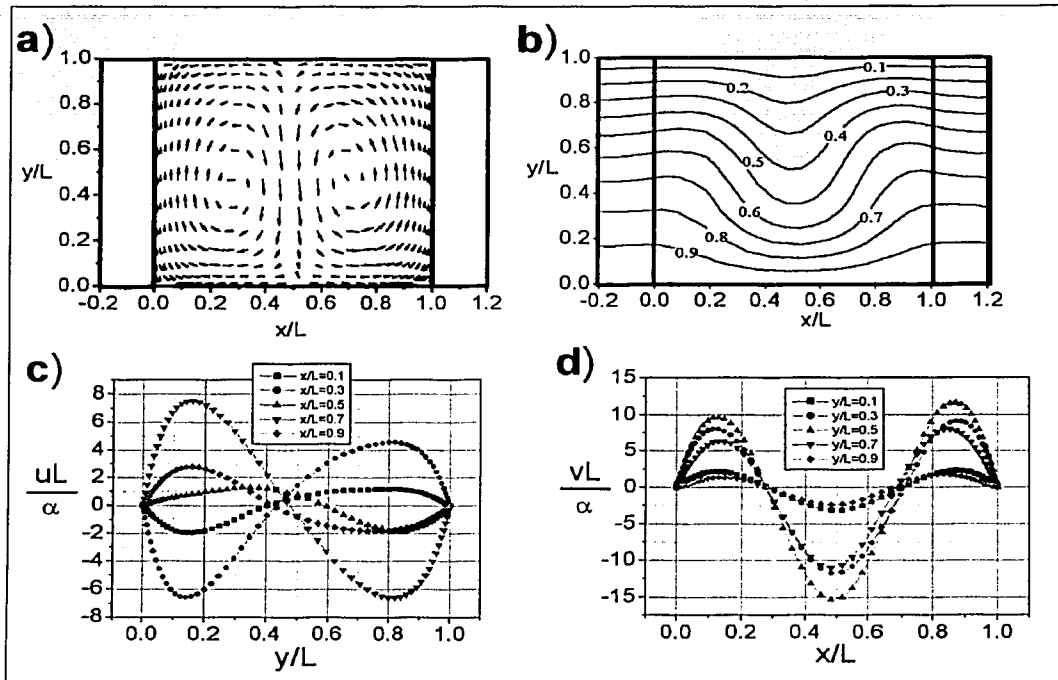


Figura 3-11: Resultados para $Ra = 10^4$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_{\mu}}{k} = 1.0$, $T_{ini} = T_H$. a) Campo de velocidades, b) isothermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

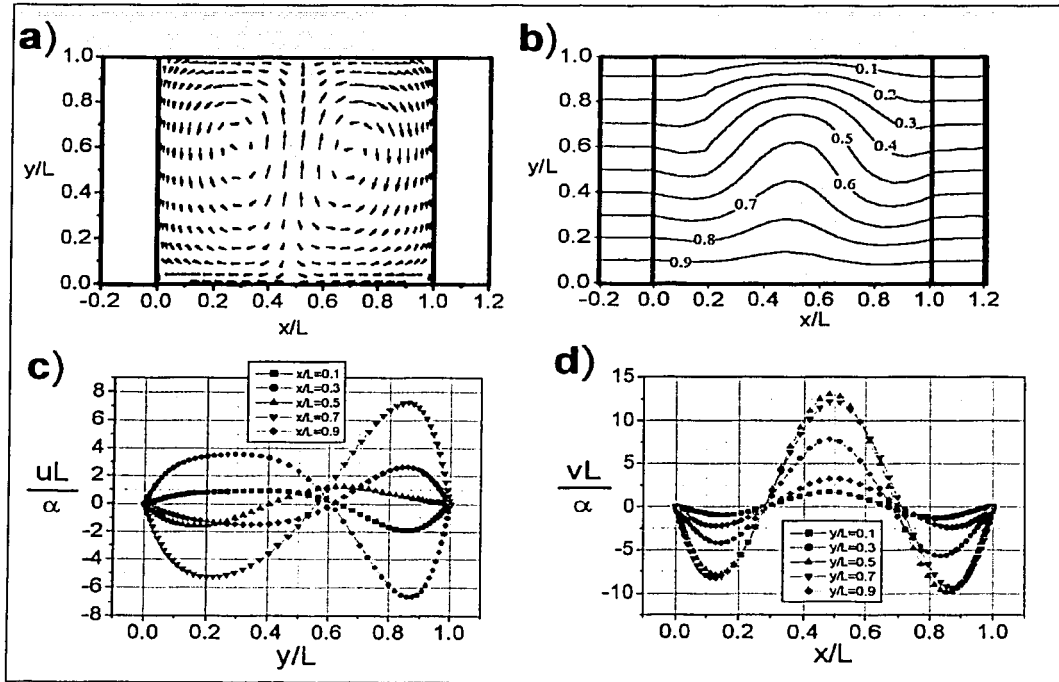


Figura 3-12: Resultados para $Ra = 10^4$, $\frac{\epsilon}{L} = 0.2$, $\frac{k_w}{k} = 10.0$, $T_{ini} = T_H$. a) Campo de velocidades, b) isothermas, c) perfiles de velocidad en la dirección x , d) perfiles de velocidad en la dirección y .

de Rayleigh, con la relación de conductividades térmicas y con las condiciones iniciales de temperatura del sistema. Además, como fue posible observar, el sentido de los vórtices depende no sólo de la condición inicial de temperatura sino también de la relación de conductividades térmicas entre las paredes y el fluido.

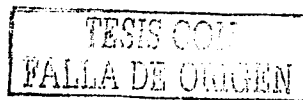
Cuando el flujo dentro de la cavidad es lento, alrededor de $Ra = 10^4$, el flujo se caracteriza por tener dos vórtices simétricos de la escala de L , mismos que mueven el fluido a lo largo de las paredes verticales. A partir de la observación de los resultados obtenidos para los campos de velocidades y las distribuciones de temperatura dentro de la cavidad, es posible predecir el sentido de estos vórtices. Para números de Rayleigh relativamente bajos, $Ra \leq 5 \times 10^5$, las condiciones del flujo del estado permanente son especialmente dependientes del movimiento del fluido en la etapa temprana del estado transitorio, y son precisamente la condición inicial de temperaturas del sistema y la relación de difusividades térmicas, $\frac{\alpha_w}{\alpha}$, las que determinan esta etapa.

Como ya se comentó, durante el desarrollo del estado transitorio, la relación de difusividades $\frac{\alpha_w}{\alpha}$, es el parámetro adecuado para describir la condición del flujo de calor impuesta en la interfase, y es ésta relación la que permite explicar la diferencia en el sentido de los vórtices.

Supóngase que la temperatura inicial de todo el sistema es igual a la temperatura de la pared fría. Entonces, la transferencia de calor comienza por la parte inferior de la cavidad. Ahora, si la difusividad térmica α_w de las paredes verticales es baja (relación de difusividades térmicas baja), como en la Figura 3-9, el fluido se calienta primero en la parte central de la superficie inferior, ya que las paredes aún tienen la temperatura baja. Por lo tanto el movimiento comienza siendo ascendente por el centro y esta tendencia se mantiene hasta el estado permanente.

Ahora, supóngase que la temperatura inicial de todo el sistema es nuevamente igual a la temperatura de la pared fría. La transferencia de calor comienza por la parte inferior de la cavidad. Si ahora la difusividad térmica de las paredes es alta (relación de difusividades térmicas alta), como en la Figura 3-10, el fluido se calienta primero por las paredes verticales, pues el fluido aún tiene la temperatura baja. Por lo tanto el movimiento comienza siendo ascendente por las paredes; esta tendencia se mantiene hasta el estado permanente.

Por otra parte, supóngase ahora que la temperatura inicial de todo el sistema es igual a la temperatura de la pared caliente. Entonces, la transferencia de calor comienza por la parte



superior de la cavidad. Si la difusividad térmica de las paredes verticales es baja (relación de difusividades térmicas baja), como en la Figura 3-11, el fluido se enfría primero en la parte central de la superficie superior, ya que las paredes aún tienen la temperatura alta. Por lo tanto el movimiento comienza siendo descendente por el centro; esta tendencia se mantiene hasta el estado permanente.

Finalmente, supóngase que la temperatura inicial de todo el sistema nuevamente es igual a la temperatura de la pared caliente. La transferencia de calor comienza por la parte superior de la cavidad. Si ahora la difusividad térmica de las paredes es alta (relación de difusividades térmicas alta), como en la Figura 3-12, el fluido se enfría primero por las paredes verticales, pues el fluido aún tiene la temperatura alta. Así, el movimiento comienza siendo descendente por las paredes; tendencia que se mantiene hasta el estado permanente.

3.4 NÚMERO DE NUSSELT

El aspecto de interés práctico de la solución de este problema es la determinación de la transferencia de calor, la cual está dada por el número de Nusselt promedio. Como se ha descrito, la distribución de temperaturas y las condiciones del flujo convectivo cerca de la pared horizontal superior es muy diferente a aquellas en las zonas cercanas a la pared inferior. Por lo tanto, la transferencia de calor es diferente entre dichas superficies, y resulta conveniente conocer ambas.

En la Figura 3-13 se muestra el número de Nusselt promedio como función del número de Rayleigh para la condición inicial de temperatura igual a la temperatura fría, $T_{ini} = T_C$. La Figura 3-13.a corresponde a la transferencia de calor en la superficie horizontal superior y la Figura 3-13.b a la inferior. En ambos casos se incluyen tres curvas, cada una de ellas corresponde a valores diferentes de la relación de conductividades térmicas, $\frac{k_w}{k}$. Por otro lado, la Figura 3-14 presenta el número de Nusselt promedio para el rango de Rayleigh cubierto en este estudio, cuando la condición inicial de temperatura es igual a la temperatura caliente, $T_{ini} = T_H$, y para las tres relaciones de conductividad térmica estudiadas; la imagen 3-14.a corresponde a la superficie superior y la Figura 3-14.b a la inferior.

De las gráficas del número de Nusselt se observa que, para valores iguales del número de Rayleigh, la transferencia de calor depende en gran medida de la relación de conductividades

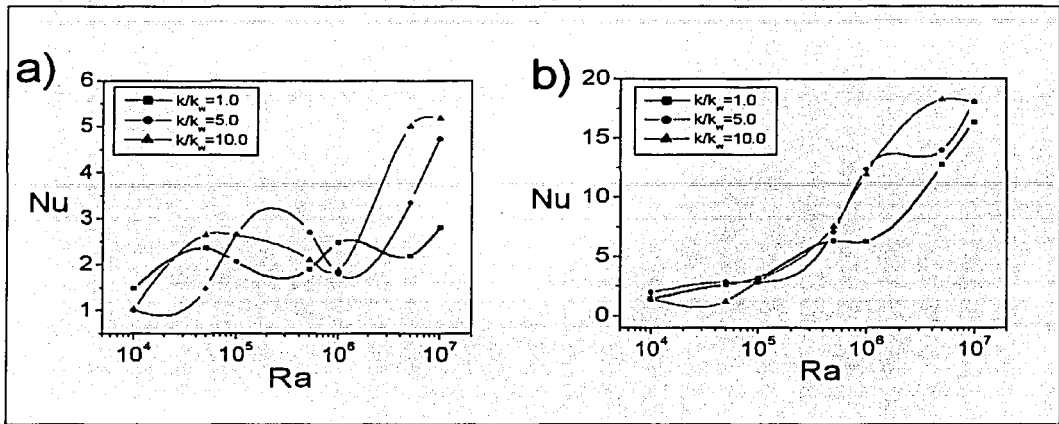


Figura 3-13: Número de Nusselt promedio cuando la temperatura inicial del sistema es $T_{ini} = T_C$. a) En la superficie horizontal superior, b) en la superficie horizontal inferior.

térmicas y de las condiciones iniciales de temperatura. Como ya se ha visto, ambos parámetros juegan un papel muy importante en el desarrollo del fenómeno y por consecuencia en la forma en la que se transporta el calor.

Es importante mencionar que dada la complejidad del fenómeno, las formas de los patrones convectivos del estado permanente son inestables y muy sensibles a pequeños cambios en los parámetros adimensionales del fenómeno. Por esta razón resulta muy complicado el poder predecir cómo será la transferencia de calor con la variación de cualquiera de ellos. Esta situación se observa claramente en las Figuras 3-13 y 3-14, donde la transferencia de calor muestra cambios muy importantes como resultado de las diferentes configuraciones de los patrones convectivos. Este comportamiento se debe a que las distribuciones de temperatura en las intercarras sólido-fluido verticales, es decir, las condiciones de frontera de temperatura para el fluido en las paredes verticales, dependen del flujo convectivo y vice versa. El fenómeno se convierte en intercambio de información muy complicado entre las paredes y el fluido.

Sólamete con fines de referencia, en la Figura 3-14.a se incluyen las gráficas de las corre-

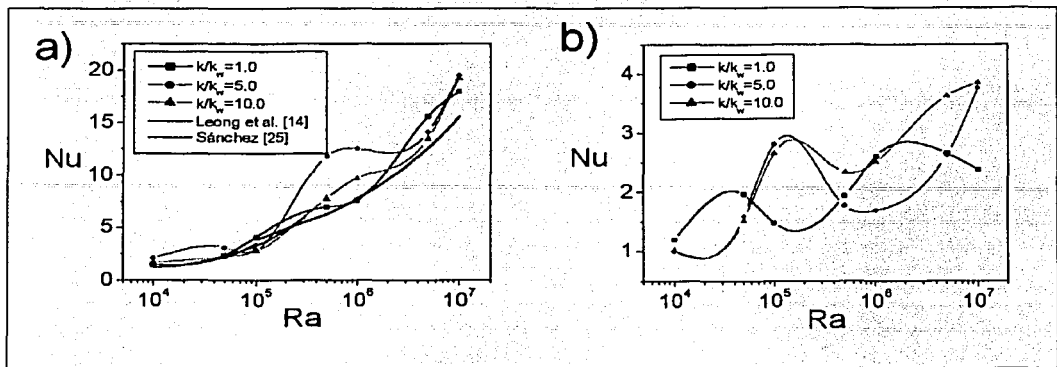


Figura 3-14: Número de Nusselt promedio cuando la temperatura inicial del sistema es $T_{ini} = T_H$. a) En la superficie horizontal superior, b) en la superficie horizontal inferior.

laciones para el número de Nusselt promedio sugeridas por Leong *et al.* [14] y Sánchez [25]. Ambas investigaciones se realizaron experimentalmente, y aunque ninguna de las dos corresponde exactamente al caso que se estudió en este trabajo de tesis, representan una buena oportunidad para observar cómo se modifica la transferencia de calor para varias condiciones diferentes. Los resultados de Leong *et al.* corresponden a los de una cavidad cúbica llena de aire, calentada por abajo, enfriada por arriba y con distribución lineal de temperatura en sus cuatro paredes verticales. Por otra parte, los resultados de Sánchez corresponden a una cavidad cúbica llena de glicerina ($Pr \approx 14000$), calentada por abajo, enfriada por arriba, dos paredes verticales opuestas adiabáticas y las otras dos con un espesor adimensionalizado $\frac{\delta}{L} = 0.125$ y una relación de conductividades térmicas sólido-fluido $\frac{k_w}{k} \approx 50$. La Figura 3-14.a muestra que cuando el número de Rayleigh es menor que 10^5 los números de Nusselt promedio para todos los casos son muy cercanos, pero para valores mayores de Ra los valores de Nu difieren de manera importante. En general, el coeficiente de transferencia de calor convectivo promedio es menor para las cavidades cúbicas respecto a la bidimensional aquí estudiada. Sin embargo, cuando $\frac{k_w}{k} = 10$ para la cavidad bidimensional, el número de Nusselt es cercano al correspondiente a la cavidad cúbica con distribución lineal en las paredes verticales (estudiada por Leong). Esto se debe a que k_w es grande respecto a k , lo que provoca que el flujo de calor a través de las paredes

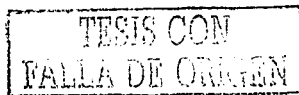
laterales de la cavidad bidimensional se lleve a cabo principalmente en la dirección vertical, y que la distribución de temperaturas en las paredes sea cercana a la distribución lineal, es decir, a la condición de paredes conductoras perfectas. Además, como se menciona en Leong *et al.* [14], parece ser que la condición de frontera de temperatura que experimenta el fluido es más decisiva sobre la transferencia de calor que el hecho de que el flujo sea bidimensional o tridimensional. Adicionalmente, el hecho de que el número de Nusselt para el flujo bidimensional sea mayor que el correspondiente al tridimensional quizá sería de esperarse, pues la cavidad cúbica tiene dos paredes adicionales, mismas que afectan al flujo ejerciendo un mayor esfuerzo cortante y frenando el movimiento convectivo [14].

Capítulo 4

CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

El problema de la transferencia de calor dentro de cavidades ha sido ampliamente estudiado para situaciones en las que se considera que las condiciones de las paredes son conocidas, ya sea temperatura conocida o flujo de calor conocido. En algunos de los trabajos que se han realizado hasta ahora se ha estudiado el efecto que tiene la conducción de las paredes sobre la convección. En el caso más analizado se supone la llamada condición de paredes conductoras perfectas. En una pared conductora perfecta, la temperatura de la pared varía linealmente desde la temperatura baja hasta la alta. Esta suposición ha permitido conocer más detalladamente, tanto numéricamente como experimentalmente el fenómeno de la convección dentro de cavidades. Numéricamente no existe mayor complicación, solamente se impone en la pared un perfil lineal de temperatura desde la temperatura alta hasta la baja. Experimentalmente, exige que la conductividad térmica de la pared sea alta y que el espesor sea mayor o igual a la longitud de la cavidad.

Por otro lado, en muchos problemas prácticos en realidad no se conocen las condiciones de temperatura en la frontera del fluido. Una cavidad real tiene paredes de espesor y conductividad térmica finitos; además, por lo general se conocen las condiciones de temperatura en la parte



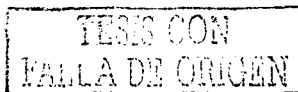
externa de la cavidad. Entonces, si se desea conocer la convección dentro de la cavidad, es necesario considerar a las paredes como parte de la solución del problema. Este problema es conocido como problema conjugado de conducción - convección y se caracteriza por la mutua dependencia que existe entre la convección y la distribución de temperaturas dentro de las paredes.

Existen algunas técnicas que han probado ser muy efectivas para dar solución numérica a los problemas conjugados de transferencia de calor. Cuando se utilizan volúmenes finitos, el método básicamente consiste en resolver numéricamente las ecuaciones discretizadas para la mecánica de fluidos y la transferencia de calor para la zona de las paredes y la del fluido como un sólo campo. Dentro de las paredes únicamente existe difusión de calor, por lo tanto, es necesario eliminar los términos convectivos en esta zona.

Para simular la región sólida es común utilizar el método de bloqueo de nodos o la suposición de una viscosidad muy grande en dicha zona. Con esto se asegura que en la solución se obtengan velocidades nulas en la región de las paredes. Por otra parte, es necesario que el flujo de calor en la intercara sea evaluado adecuadamente. En la interfaz las propiedades físicas cambian abruptamente, por lo que el valor de los coeficientes difusivos de los nodos que forman la intercara se calculan mediante el uso de la llamada media armónica de los coeficientes difusivos de los nodos vecinos en la dirección en la que cambian las propiedades.

De esta forma, fue posible obtener una solución de manera simultánea para el sólido y el fluido, además de que se aseguró que la interacción entre ambas zonas fuera evaluada convenientemente. Esto se hizo evidente cuando se obtuvo la solución para un problema conjugado de transferencia de calor que se encuentra reportado en la literatura, encontrándose un buen acuerdo entre los resultados.

Para el problema conjugado de transferencia de calor dentro de la cavidad que se presenta



en este trabajo, se encontró que los parámetros adimensionales son los números de Nusselt, Prandtl y Rayleigh, además del espesor de la pared adimensionalizado con la longitud, y la relación de conductividades térmicas entre el sólido y el fluido. De esta forma, el estudio se realizó para un número de Prandtl igual a 0.7, un espesor de las paredes adimensionalizado igual a 0.2, la relación de conductividades térmicas igual a 1, 5 y 10. El rango para el número de Rayleigh en esta investigación fue de $10^4 \leq Ra \leq 10^7$. Con esta selección para los parámetros adimensionales se obtuvieron los resultados que permitieron analizar el efecto de la variación de los mismos sobre los patrones convectivos y la transferencia de calor.

A partir del análisis de los resultados obtenidos es posible apuntar las siguientes conclusiones:

Las condiciones del flujo dentro de la cavidad y la distribución de temperaturas cambian de manera importante con el número de Rayleigh. Las condiciones del flujo para bajos números de Rayleigh, se caracterizan por tener dos vórtices simétricos alargados en la dirección vertical, las isothermas muy bien delineadas y paralelas dentro de las paredes y en el fluido adyacente a las mismas, lo que permite pensar que la difusión de calor dentro de la cavidad representa una parte importante de la transferencia de calor. Conforme el número de Rayleigh es mayor (alrededor de 10^5), el flujo se vuelve más complejo. El flujo presenta cuatro vórtices y la distribución de temperaturas dentro de la cavidad muestra que la transferencia de calor dentro de la cavidad es gobernada por la convección natural. Si el número de Rayleigh tiene un valor alrededor de 10^6 , las condiciones del flujo aún se caracterizan por la presencia de cuatro vórtices y la distribución de temperaturas dentro de la cavidad es más complicada. En la parte superior de la cavidad, la temperatura disminuye muy lentamente, mientras, cerca de la superficie horizontal inferior se observa una condición de capa límite térmica, donde la temperatura cae rápidamente. Cuando $Ra = 10^7$, el fluido, casi en su totalidad, gira dentro de un vórtice inclinado sobre la diagonal de la cavidad. Este vórtice es el principal responsable de la transferencia de calor dentro de la cavidad. La temperatura de la mayor parte del fluido es relativamente baja ($\theta \approx 0.3$), y se observan condiciones de capa límite térmica cerca de las cuatro paredes de la cavidad.

Se encontró que en algunos casos existe multiplicidad de soluciones de estado permanente,

debido a que las soluciones para el sistema y las condiciones de frontera analizadas son altamente dependientes de las condiciones iniciales. Se encontraron al menos dos soluciones para el rango de $10^4 \leq Ra \leq 10^6$. La diferencia de soluciones se presenta dependiendo de la condición inicial de la temperatura de todo el sistema, ya sea igual a la temperatura de la pared fría, o la de la pared caliente. Se observó que en realidad ambos flujos no son independientes, el flujo resultante a partir de la condición inicial de temperatura fría es igual al flujo resultante de la condición inicial de temperatura caliente, sólo que el flujo se encuentra rotado 180° . El sentido y las características finales del flujo dependen fuertemente del sentido del flujo en las etapas tempranas del movimiento. Además, las dos diferentes condiciones iniciales estudiadas definen dos problemas diferentes de transferencia de calor en la etapa inicial del fenómeno; una es el calentamiento y la otra el enfriamiento del fluido. En este estudio sólo se está interesado en los resultados del estado permanente, pero es conveniente hacer notar la importancia que tiene la condición inicial de temperatura sobre las condiciones finales del flujo. Existen además, ciertas condiciones para las cuales es posible obtener flujos con características muy semejantes en el estado permanente, independientemente de cual haya sido la condición inicial de la temperatura del sistema.

La relación de conductividades térmicas entre las paredes conductoras y el fluido es de particular importancia en este problema acoplado de transferencia de calor. Durante el estado transitorio, la relación de difusividades $\frac{\alpha_w}{\alpha_f}$, es el parámetro que resulta adecuado para describir la condición del flujo de calor impuesta en la interfase. Pero, bajo las condiciones de estado permanente, el parámetro se reduce a la relación de conductividades térmicas $\frac{k_w}{k_f}$, parámetro que se empleó para caracterizar los resultados obtenidos para el estado permanente.

La conductividad térmica de las paredes laterales es finita y relativamente pequeña, y la relación entre ésta y la conductividad del fluido es un parámetro muy importante en la solución del estado permanente, pues determina la forma en la que se establece la distribución de temperaturas en la interfaz sólido-fluido, es decir, la condición de frontera de la temperatura

en la interfaz.

El efecto que tiene el incremento en el valor de la relación de conductividades térmicas se observa más claramente dentro de las paredes laterales. Cuando la conductividad de las paredes es baja y la convección dentro de la cavidad no es muy importante ($Ra = 10^4$), el ancho de las isothermas dentro de las paredes aparece aproximadamente igual para todas ellas, aunque éstas no son completamente paralelas entre sí. Esto indica que prácticamente se establece la condición de conducción perfecta en las paredes, además de que la difusión es el principal medio de transferencia de calor.

Cuando existe una buena conductividad térmica de las paredes y el flujo convectivo no es muy intenso ($Ra = 10^4$), el ancho de las isothermas dentro de las paredes es igual para todas ellas. Además, las isothermas dentro de las paredes son perfectamente paralelas entre sí. Entonces, es posible concluir que se establece la condición de paredes conductoras perfectas.

Si el número de Rayleigh está alrededor de 10^5 , y la relación de conductividades es baja, las isothermas tienen espesores diferentes. En la parte inferior de la cavidad las isothermas son anchas y disminuyen su espesor en la dirección de y ; además, es posible observar que dentro de las paredes, las isothermas no son paralelas. Así, se concluye que dentro de las paredes no existe el perfil lineal de temperaturas característico de la condición de paredes perfectamente conductoras, esto como resultado de la baja conductividad térmica de las paredes. Por otro lado, si la relación de conductividades incrementa, las isothermas son prácticamente paralelas entre sí, además, el espesor de todas ellas es el mismo. El aumento en la conductividad térmica de las paredes favorece la aparición del perfil lineal de temperaturas dentro de ellas.

Adicionalmente, es importante notar que existen casos para los cuales los sentidos de los vórtices no obedecen a la condición inicial de temperaturas, sino a las diferentes relaciones de conductividad térmica. Aún más, se observó que el sentido de los vórtices depende tanto de

la condición inicial de temperatura como de la relación de conductividades térmicas entre las paredes y el fluido.

A partir del análisis de los resultados obtenidos para los campos de velocidades y las distribuciones de temperatura dentro de la cavidad, es posible hacer conjeturas que permiten predecir el sentido de los vórtices para números de Rayleigh relativamente bajos. Cuando $Ra \leq 5 \times 10^5$, las condiciones del flujo en el estado permanente son especialmente dependientes del movimiento del fluido en la etapa temprana del estado transitorio. La condición inicial de temperatura del sistema y la relación de difusividades térmicas, $\frac{\alpha_w}{\alpha}$, son las que determinan el movimiento en esta etapa. La relación de difusividades $\frac{\alpha_w}{\alpha}$, es el parámetro que permite describir la condición del flujo de calor impuesta en la interfaz durante el desarrollo del estado transitorio, y es esta relación la que permite explicar las diferencias en los sentidos de los vórtices.

Cuando la temperatura inicial de todo el sistema es igual a la temperatura de la pared fría, la transferencia de calor comienza por la parte inferior de la cavidad. Si la difusividad térmica α_w de las paredes verticales es baja (relación de difusividades térmicas baja), el fluido se calienta primero en la parte central de la superficie inferior, pues las paredes aún tienen la temperatura baja. De esta forma, el movimiento comienza siendo ascendente por el centro y esta tendencia se mantiene hasta el estado permanente.

Ahora, si la temperatura inicial de todo el sistema es nuevamente igual a la temperatura de la pared fría, la transferencia de calor comienza por la parte inferior de la cavidad. Si ahora la difusividad térmica de las paredes es alta (relación de difusividades térmicas alta), el fluido se calienta primero por las paredes verticales, pues el fluido aún tiene la temperatura baja, y por lo tanto, el movimiento comienza siendo ascendente por las paredes y este movimiento se mantiene hasta el estado permanente.

Por otra parte, cuando la temperatura inicial de todo el sistema es igual a la temperatura

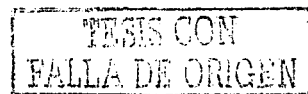
de la pared caliente, la transferencia de calor comienza por la parte superior de la cavidad. Si la difusividad térmica de las paredes verticales es baja (relación de difusividades térmicas baja), el fluido se enfría primero en la parte central de la superficie superior, ya que las paredes aún tienen la temperatura alta. Así, el movimiento comienza siendo descendente por el centro y la tendencia se mantiene hasta el estado permanente.

Finalmente, si la temperatura inicial de todo el sistema nuevamente es igual a la temperatura de la pared caliente, la transferencia de calor comienza por la parte superior de la cavidad. Si ahora la difusividad térmica de las paredes es alta (relación de difusividades térmicas alta), el fluido se enfría primero por las paredes verticales, pues el fluido aún tiene la temperatura alta. Así, el movimiento comienza siendo descendente por las paredes, tendencia que se mantiene hasta el estado permanente.

Por otra parte, las condiciones del flujo convectivo cerca de las paredes horizontales superior e inferior son muy diferentes, y por lo tanto, la transferencia de calor es diferente entre dichas superficies. Las gráficas del número de Nusselt permiten observar que para valores iguales del número de Rayleigh, la transferencia de calor depende en gran medida de la relación de conductividades térmicas y de las condiciones iniciales de temperatura. Estos dos parámetros son particularmente importantes en el desarrollo del fenómeno y determinan la forma en la que se transporta el calor.

Las formas de los patrones convectivos del estado permanente son inestables y muy sensibles a pequeños cambios en los parámetros adimensionales del fenómeno. Por esta razón, resulta muy complicado el poder predecir el comportamiento de la transferencia de calor con la variación de cualquiera de estos parámetros.

Por otro lado, con fines de referencia, se compararon los resultados calculados en este trabajo con dos diferentes correlaciones empíricas correspondientes a cavidades cúbicas calentadas por



abajo y enfriadas por arriba. La primera correlación corresponde al caso en el que las cuatro paredes verticales tienen distribuciones lineales de temperatura [14]. La segunda, al caso en el que dos de las paredes verticales opuestas son adiabáticas y las otras dos tienen un espesor adimensionalizado $\frac{\epsilon}{L} = 0.125$ y una relación de conductividades térmicas sólido-fluido $\frac{k_w}{k} \approx 50$ [25]. Se encontró que cuando $\frac{k_w}{k} = 10$ para la cavidad bidimensional, los números de Nusselt son muy cercanos a los correspondientes a una cavidad cúbica con distribución lineal de temperaturas en las paredes verticales (estudiada por Leong *et al.* [14]). Dado que k_w es grande respecto a k , el flujo de calor a través de las paredes laterales de la cavidad bidimensional se lleva a cabo principalmente en la dirección vertical, y la distribución de temperaturas en las paredes es cercana a la distribución lineal, es decir, a la condición de paredes conductoras perfectas. Además, para estos casos, parece ser que la condición de frontera de la temperatura es más decisiva sobre la transferencia de calor que el hecho de que el flujo sea bidimensional o tridimensional, como lo sugiere Leong [14]. También, el número de Nusselt promedio para el flujo bidimensional es mayor que el correspondiente al tridimensional, lo que quizá sería de esperarse, pues la cavidad cúbica tiene dos paredes adicionales, mismas que afectan al flujo ejerciendo un mayor esfuerzo cortante y frenando el movimiento convectivo [14].

En el problema conjugado, la condición de frontera de temperatura para el fluido depende del flujo convectivo y vice versa, de esta manera, el fenómeno se convierte en intercambio de información muy complicado entre las paredes y el fluido, mismo que es difícil de describir y predecir, especialmente cuando el problema estudiado es muy inestable como el caso que se presenta en este trabajo. Sin embargo, los resultados presentados ilustran de una manera práctica y conveniente la forma en la que la transferencia de calor se lleva a cabo dentro de la cavidad de estudio. Además, los resultados han permitido conocer mejor la manera en la que interactúan el fluido y el sólido en los problemas de convección.

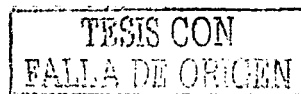
Las recomendaciones en relación a posibles trabajos futuros están encaminados a una mayor atención a la etapa transitoria del fenómeno. En esta etapa, la interacción entre la difusión en el sólido y la convección resulta ser un objeto de estudio muy importante e interesante por la

repercusión que tiene para el establecimiento de las condiciones del estado permanente. Otro aspecto es la inclinación de la cavidad, que como se ha mencionado, es determinante en el fenómeno convectivo y desde luego en la difusión de calor dentro de las paredes conductoras. Se recomienda también el estudio del efecto de la variación del número de Prandtl y de otros valores para el espesor de la pared. Además, el estudio de los fenómenos tridimensionales aparece como una opción importante, con muchas posibilidades de aplicación práctica.

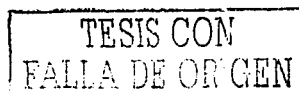
Finalmente, es importante reconocer las bondades que tiene la simulación numérica para el estudio de los fenómenos de transferencia de calor, pues resulta ser una herramienta muy útil al dar solución a problemas de interés teórico y práctico. La información que se presenta en este trabajo es de especial valor porque en general los modelos de transferencia de calor conjugados son más apegados a la realidad, y el mejor conocimiento del cómo se realizan los fenómenos de transporte permitirán una aplicación más eficiente de estos conocimientos en situaciones prácticas.

Bibliografía

- [1] Bejan, A. Convection Heat Transfer. Second Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, USA, 1995.
- [2] Catton, I., Edwards, D.K., Effect of side walls on natural convection between horizontal plates heated from below. Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 89, pp. 295-299, 1967.
- [3] Catton, I. Convection in a closed rectangular region: the onset of motion. Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 92, pp. 186, 1970.
- [4] Catton, I. Effect of wall conduction on the stability of a fluid in a rectangular region heated from below. Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 94, pp. 446-452, 1972.
- [5] Vahl Davis, G. Natural convection of air in a square cavity: a bench mark numerical solution. International Journal of Numerical Methods in Fluids 3, pp. 249-264, 1983.
- [6] Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R., Sammakia, B. Bouyancy-Induced Flows and Transport. Hemisphere Publishing Corporation, 1988, pp. 725-814.
- [7] Ha, M.Y., Jung, M.J. A numerical study on three-dimensional conjugate heat transfer of natural convection and conduction in a differentially heated cubic enclosure with a heat-generating cubic conducting body. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 4229-4248, 2000.
- [8] Hollands, K.G.T. Multi-Prandtl number correlation equations for natural convection in layers and enclosures. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 27, No. 3 pp. 466-468, 1984.



- [9] Incropera, F.P., DeWitt, D.P. Fundamentals of Heat and Mass transfer. Fourth Edition. John Wiley & Sons, Inc. New York, USA. 1996.
- [10] Ismail, K.A.R., Scalon, V.L. A finite element free convection model for the side wall heated cavity. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 43, pp. 1373-1389, 2000.
- [11] Kaminski, D.A., Prakash, C. Conjugate natural convection in a square enclosure: effect of conduction in one of the vertical walls. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 29, No. 12 pp. 1979-1988, 1986.
- [12] Kays, W.M., Crawford, M.E. Convective Heat and Mass Transfer, Mc Graw-Hill, New York, 1980.
- [13] Leong, W.H., Hollands, K.G.T., Brunger, A.P. On a physically-realizable benchmark problem in internal natural convection. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 41, pp. 3817-3828, 1998.
- [14] Leong, W.H., Hollands, K.G.T., Brunger, A.P. Experimental Nusselt numbers for a cubical-cavity benchmark problem in natural convection. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 42, pp. 1979-1989, 1999.
- [15] Liaqat, A., Baytas, A.C. Conjugate natural convection in a square enclosure containing volumetric sources. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 44, pp. 3273-3280, 2001.
- [16] Lir, J.T., Lin, T.F. Visualization of roll patterns in Rayleigh-Bénard convection in a rectangular shallow cavity. International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 44, pp. 2889-2902, 2001.
- [17] Newell, M.E., Schmidt, F.W. Heat transfer by laminar natural convection within rectangular enclosures. Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 92, pp. 159-167, 1970.
- [18] Ozoe, H., Ohmuro, M., Mouri A., Mishima, S., Sayama, H., Churchill, S.W. Laser-Doppler Measurements of the velocity along a heated vertical wall of a rectangular enclosure. Journal of Heat Transfer, Trans. ASME, Vol. 105, pp. 782-788, 1983.



- [19] Pallares, J., Grau, F.X., Giralt, F. Flow transitions in laminar Rayleigh-Bénard convection in a cubical cavity at moderate Rayleigh numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 753-769, 1999.
- [20] Pallares, J., Arroyo, M.P., Grau, F.X., Giralt, F. Experimental laminar Rayleigh-Bénard convection in a cubical cavity at moderate Rayleigh and Prandtl numbers. *Experiments in Fluids*, Vol. 31, pp. 208-218, 2001.
- [21] Pallares, J., Grau, F.X., Giralt, F. Efecto térmico de las paredes laterales sobre el flujo Rayleigh Bénard. In: Doblaré M, Correas J.M., Alarcón, E., Gavete L., Pastor M. Proc. III Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería, Vol. 2, 1996, Zaragoza, España.
- [22] Patankar, S.V., *Numerical Heat and Fluid Flow*. Mc Graw-Hill, New York, USA, 1980.
- [23] Ramesh, N., Venkateshan, S.P. Experimental study of natural convection in a square enclosure using differential interferometer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 1107-1117, 2001.
- [24] Ramesh, N., Merzkirch, W. Combined convective and radiative heat transfer in side-vented open cavities. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, Vol. 22, pp. 180-187, 2001.
- [25] Sánchez, J. M. Estudio experimental de la convección natural en una cavidad cúbica con paredes conductoras. Tesis de Maestría. División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería. UNAM. 2003.
- [26] Seki, N., Fukusako, Sh., Inaba, H. Visual observation of natural convection in a narrow vertical cavity. *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 84, part 4, pp 695-704, 1978.
- [27] Tian, Y.S., Karayiannis, T.G. Low turbulence natural convection in an air filled square cavity. Part I: the thermal and fluid flow fields. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, pp. 849-866, 2000.
- [28] White, F.M. *Fluid Mechanics*. Fourth Edition. Mc Graw-Hill, Inc., New York.
- [29] White, F.M. *Viscous Fluid Flow*. Second Edition. Mc Graw-Hill, Inc., New York.

- [30] Yin, S.H., Wung, T.Y., Chen, K. Natural convection in an air layer enclosed within rectangular cavities. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 21, pp. 307-315, 1978.