

00323

69



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"ESPARCÍMETRO DE LUZ VISIBLE PARA SUPERFICIES RUGOSAS BIDIMENSIONALES"

Biblioteca de la
trabajo electrónico e impreso el
trabajo recepcional.

Oscar Gabriel
Rodríguez Herrera
29/09/2003

Rodríguez H. Oscar G.

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE
F I S I C O
P R E S E N T A
OSCAR GABRIEL RODRÍGUEZ HERRERA

DIRECTOR DE TESIS: DR. NEIL CHARLES BRUCE DAVIDSON



FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION DE ASESORIA

A



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



REPUBLICA NACIONAL
DE EL SALVADOR
1949

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Esparsímetro de luz visible para superficies rugosas bidimensionales"

realizado por Rodríguez Herrera Oscar Gabriel

con número de cuenta 9432483-5 quien cubrió los créditos de la carrera de Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Propietario Dr. Neil Charles Bruce Davidson

Propietario Dr. Enrique López Moreno

Propietario Dr. Salvador Cuevas Cardona

Suplente Dra. Martha Rosete Aguilar

Suplente Dr. Arnulfo Martínez Dávalos

Neil Bruce
Enrique López Moreno
Rosete Aguilar Martha

Consejo Departamental de Física

Patricia Goldstein Menache
DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

B

Agradecimientos.

Quiero agradecer a mi madre, Maricela, por todo el apoyo que me ha dado durante todos estos años. Gracias por tolerarme durante tanto tiempo.

A mi abuelita Hermelinda, que siempre ha estado dispuesta a darme su cariño sin esperar nada a cambio.

A mis hermanos Eric y Daniel, cuya influencia ha ayudado a modelar distintos aspectos de mi vida.

A mi tía Lourdes, que durante años ha fungido en el papel de madre emergente (como los bateadores en el Béisbol).

A mis tías Leticia y Hermelinda, que siempre han sido un ejemplo de integridad y apoyo incondicional.

A mis tíos Carlos, Benjamín y José que han estado conmigo siempre que los he necesitado.

A mis primos José, Samuel, Aarón, Bárbara, Ernesto, Nancy, Gustavo, Víctor, Antonio, Carlos, Marcos, Gustavo y Benjamín, con quienes he compartido desde juegos hasta interesantes discusiones.

A mis amigos Alfredo, Adrián, Manuel, Alejandro, Luis, Francisco, Carlos, Rafael y Emmanuel, que me han acompañado y ayudado en diferentes etapas de mi vida.

Al Dr. Neil Bruce y a la Dra. Martha Rosete, por haberme ayudado y orientado durante el largo proceso que implica realizar un trabajo de tesis.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, mi *alma mater*, que me ha dado educación y una comprensión mejor del país y del mundo en el que vivimos.

También agradezco el apoyo de la UNAM que, a través del PROBETEL, me otorgó una beca para concluir la tesis en el menor tiempo posible.

Contenido.

Capítulo 1. Antecedentes.

1.1 Introducción.....	1
1.2 Referencias.....	5

Capítulo 2. Diseño y construcción del esparcímetro.

2.1 Diseño óptico del esparcímetro.....	9
2.2 Geometría del diseño óptico del esparcímetro.....	9
2.3 Parámetros de la elipse.....	10
2.4 La resolución del sistema.....	17
2.5 Alineación del espejo elíptico e identificación de sus focos.....	21
2.6 Montaje y alineación de la platina de movimiento rotacional.....	23
2.7 Localización del eje óptico y alineación del sistema de lentes.....	26
2.8 Montaje y alineación de las platinas lineales y la cámara CCD.....	28
2.9 Alineación del divisor de haz y determinación del segundo foco en la dirección ortogonal al eje óptico.....	29
2.10 Montaje y alineación del espejo director y del láser.....	31
2.11 Calibración del sistema.....	32
2.12 Referencias.....	34

Capítulo 3. Pruebas de funcionamiento.

3.1 Primeras pruebas.....	35
3.2 Resultados de las pruebas.....	38
3.3 Pruebas con una superficie rugosa unidimensional.....	41
3.4 Referencias.....	46

Capítulo 4. Teoría de la polarización en el esparcímetro.

4.1 Efectos de la polarización.....	47
4.2 Estudio geométrico de la polarización.....	48
4.3 Reflectancia de un material general.....	61
4.4 Referencias.....	70

Capítulo 5. Conclusiones y trabajo a futuro.

5.1 Conclusiones.....	71
5.2 Trabajo a futuro.....	71
5.3 Referencias.....	72

Apéndice A. Automatización de la adquisición de datos.....	73
--	----

D

Capítulo 1

Antecedentes

1.1 Introducción.

El esparcimiento es el fenómeno que se presenta cuando las ondas son desviadas por obstáculos que tienen un tamaño del mismo orden que la longitud de onda de las ondas incidentes. Es responsable de fenómenos tales como la coloración del cielo y de las nubes^[1], entre otros. El estudio del esparcimiento en superficies rugosas es de importancia no sólo en ciencias básicas, sino también para aplicaciones en ingeniería. Es aplicable en situaciones como la detección de objetos mediante el uso de radar^[2], el control de calidad en el proceso de fabricación de circuitos integrados^[3], el esparcimiento de sonar^{[4]-[5]}, la percepción remota^[6], etc.

Recientemente se han desarrollado métodos para calcular el esparcimiento de ondas en superficies rugosas. Algunos de estos métodos se basan en la aproximación de *Rayleigh* y la teoría de perturbación^{[7]-[9]}. Otros se basan en la aproximación de *Kirchhoff*^{[10]-[14]} y en métodos numéricos como el método de extinción^{[15]-[17]}. Sin embargo, estas teorías deben ser probadas y para ello se han diseñado y construido diferentes sistemas.

Existen dos tipos de sistemas para medir la luz esparcida por superficies rugosas. Los primeros en aparecer constan de un detector colocado al final de un brazo de aproximadamente 1 m de largo con la superficie en su eje de giro (ver figura 1)^[18].

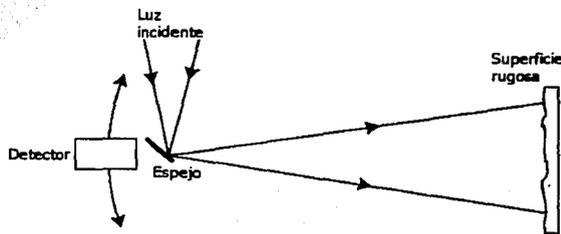


Figura 1. Esparcímetero de brazo largo.

El detector gira alrededor de la superficie haciendo mediciones de la luz esparcida por ésta cada grado o medio grado hasta completar todo el hemisferio frontal de la superficie (es decir, gira un arco de 180°). Este tipo de sistemas tienen dos inconvenientes: el primero es que solamente son útiles para medir la luz esparcida en un plano. El segundo es que el tiempo de barrido, para un ángulo de incidencia dado, es alrededor de 15 minutos, por lo que el proceso de caracterización de la superficie toma mucho tiempo.

El otro tipo de sistemas tienen un espejo que se usa para colectar la luz esparcida por la superficie y dirigirla hacia un detector. Estos arreglos tienen el inconveniente de que, para enviar la luz al detector, se necesita de espejos y lentes que presentan aberraciones y es necesario corregirlas.

En la literatura se encuentran ejemplos de sistemas de este tipo que trabajan con longitudes de onda en el infrarrojo. En uno de estos sistemas^[19] se tiene un láser que apunta hacia la superficie (colocada en uno de los focos de un espejo elíptico que tiene una inclinación de 30° respecto a la vertical) a un ángulo que puede ser controlado. La luz esparcida es colectada por el espejo elíptico y enviada a un detector ubicado cerca del otro foco. Frente al detector hay un diafragma que impide el paso de luz que no haya sido reflejada en el espejo elíptico. Un arreglo circular de pequeños detectores (que dan un ángulo sólido de observación de aproximadamente 0.1 sr) envía la señal a una computadora para su análisis (ver figura 2). Este sistema ha reportado buenos resultados en las mediciones de partículas con tamaños dentro de un intervalo de 50-200 nm, así como en defectos de superficies rugosas.

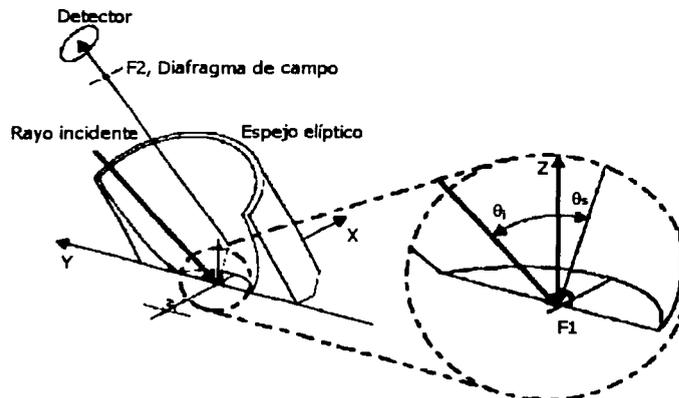


Figura 2. Esparcimetro con espejo elíptico a 30° de inclinación.

Otro sistema^[20] consta de una fuente infrarroja, un espejo elipsoidal, una lente de enfoque y un arreglo de detectores. El haz (cuyo ángulo de incidencia puede ser controlado) es dirigido hacia el espejo elíptico, ahí es reflejado hacia la superficie que está en la posición del primer foco. La luz esparcida es colectada por el espejo y dirigida hacia el segundo foco. Finalmente, el haz pasa por una lente, colocada cerca del segundo foco, que lo enfoca en un arreglo de detectores conectados a una computadora (ver figura 3). Este sistema fue diseñado para funcionar en un rango de 8-12 μm y ha dado buenos resultados en aplicaciones industriales.

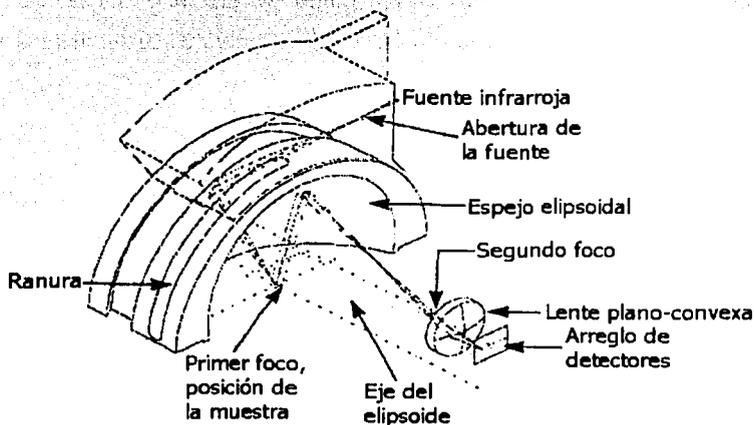


Figura 3. Esparcímeter infrarrojo de fuente móvil con espejo elíptico.

Un tercer sistema^[21] tiene un haz láser que es dirigido hacia un espejo parabólico (de manera que el haz sea paralelo a su eje óptico) por un espejo móvil a 45° del eje de la parábola. Después de reflejarse en la parábola, el haz incide en la superficie a un ángulo que dependerá de la posición del espejo móvil. Rotando la superficie alrededor del eje de la parábola se puede estudiar su perfil desde varios ángulos. La luz esparcida por la superficie es recolectada por otro espejo móvil (también orientado a 45°) que puede ser rotado alrededor del eje de la parábola (ver figura 4). Con esto, en principio, se puede medir la luz esparcida en todo el hemisferio sobre la superficie. Para la fecha de su publicación este sistema apenas había empezado a dar algunos resultados experimentales.

También existe un sistema^[22] que emplea un arreglo de espejos planos, parabólicos y elípticos, así como un interferómetro y un detector, para hacer las mediciones. La idea básica de este sistema es la siguiente: una fuente infrarroja emite un haz que es dirigido por un espejo

parabólico hacia otro espejo parabólico que se encarga de colimarlo. El haz colimado entra en un interferómetro que lo modula para que el sistema pueda funcionar con diferentes longitudes de onda dentro del intervalo del infrarrojo. Una vez que el haz modulado sale del interferómetro, incide en otro espejo parabólico que lo enfoca en un espejo plano cuyo ángulo respecto a la dirección del haz, determinará el ángulo de incidencia sobre la superficie. El haz reflejado por este último espejo, es dirigido hacia un espejo elíptico que lo hace incidir en la superficie de interés. La radiación infrarroja esparcida por la superficie es captada por otro espejo elíptico que la dirige hacia otro espejo plano. Éste refleja el haz hacia otro espejo elíptico que, finalmente, lo dirige hacia el detector (ver figura 5). Este sistema trabaja en un rango de $\sim 1.4 - 16 \mu\text{m}$, aproximadamente.

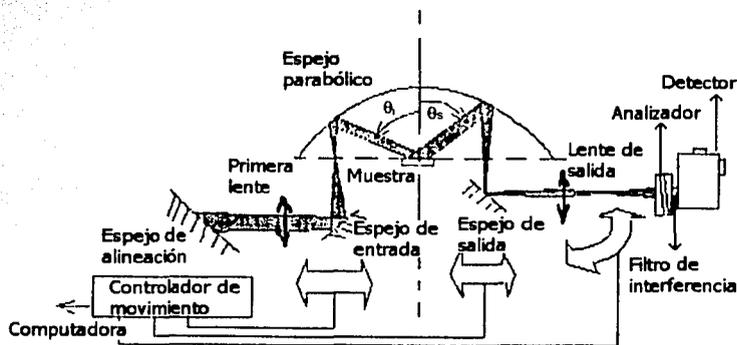


Figura 4. Esparcímetero infrarrojo con espejo parabólico.

Los arreglos anteriores fueron diseñados para trabajar en el infrarrojo debido a que, a estas frecuencias, las aberraciones presentes son menores en relación con la longitud de onda. Sin embargo, todos ellos solamente son útiles para medir rugosidades del mismo orden, o mayores, que la longitud de onda utilizada. En consecuencia, estos sistemas no pueden ser utilizados para medir rugosidades del orden de algunas décimas de micra.

El sistema que se propone en esta tesis es del mismo tipo que los anteriores, pero con la ventaja de que trabaja para todas las longitudes de onda en la región del espectro visible y también en el infrarrojo cercano.

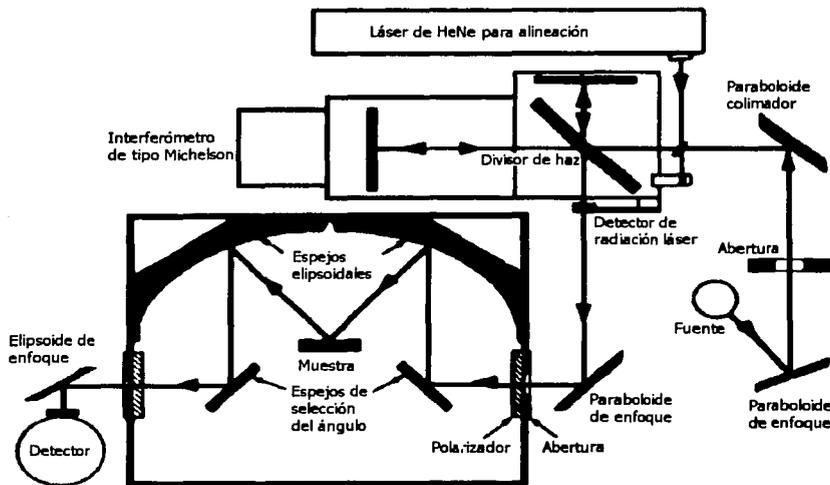


Figura 5. Esparcímetero infrarrojo con interferómetro y arreglo de espejos.

Es importante mencionar que el problema de esparcimiento se escala con la longitud de onda, es decir, una longitud de onda dos veces más grande que la original se esparcirá de la misma manera en una superficie con escala dos veces más grande. Esto sugiere que se pueden usar este tipo de experimentos con luz visible para simular procesos de radar, sonar y percepción remota si se utiliza el escalamiento adecuado.

En esta tesis se presentan el diseño, la construcción, la calibración y las primeras pruebas de un esparcímetero para superficies rugosas bidimensionales. Así mismo, se muestran los primeros resultados arrojados por el sistema para superficies unidimensionales y se hace un análisis teórico de los efectos de la polarización de la luz sobre las mediciones. Este análisis permitirá obtener, en el futuro, más información sobre la geometría y las propiedades físicas de los materiales que se analicen.

1.2 Referencias.

1. R. Greenler, "Rainbows, Halos and Glories", Cambridge University Press, Cambridge, (1991), cap. 5.

2. C.T. Swift, editor, "Special issue on radio oceanography", IEEE Trans. Antennas Propagation, AP-25, (1977), 1-3.
3. T.A. Germer, "Measurement of lithographic overlay by light scattering ellipsometry", Surface Scattering and Diffraction for Advanced Metrology II, Zu Han Gu y A.A. Maradudin, editores, Proceedings SPIE, 4780, (2002), 72-79.
4. O. Bergem, E. Pouliquen, G. Canepa y N.G. Pace, "Time evolution of seafloor scatter. II. Numerical and experimental evaluation", J. Acoust. Soc. Am., 105, (1999), 3142-3150.
5. E. Pouliquen, O. Bergem y N.G. Pace, "Time evolution of seafloor scatter. I. Concept", J. Acoust. Soc. Am., 105, (1999), 3136-3141.
6. A. Ishimaru, "Wave propagation and scattering in random media", IEEE Press, New York, (1997), cap. 22.
7. E.I. Thorsos y D.R. Jackson, "The validity of the perturbation approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum", J. Acoust. Soc. Am., 86, (1989), 261-277.
8. J.M. Soto-Crespo, M. Nieto-Vesperinas y A.T. Friberg, "Scattering from slightly rough random surfaces: a detailed study on the validity of the small perturbation method", J. Opt. Soc. Am. A, 7, (1990), 1185-1201.
9. J.A. Sánchez-Gil, A.A. Maradudin y E.R. Méndez, "Limits of validity of 3 perturbation theories of the specular scattering of light from one-dimensional, randomly rough dielectric surfaces", J. Opt. Soc. Am., 12, (1995), 1547-1558.
10. P. Beckmann and A. Spizzichino, "The scattering of light from rough surfaces", Pergamon, New York, (1963).
11. E.I. Thorsos, "The validity of the Kirchhoff approximation for rough surface scattering using a gaussian roughness spectrum", J. Acoust. Soc. Am., 83, (1988), 78-92.
12. N.C. Bruce y J.C. Dainty, "Multiple scattering from rough dielectric and metal surfaces using the Kirchhoff approximation", J. Mod. Opt., 38, (1991), 1471-1481.
13. A. Ishimaru y J.S. Chen, "Scattering from very rough metallic and dielectric surfaces: a theory based on the modified Kirchhoff approach", Waves in Random Media, 1, (1991), 21-34.

14. J.A. Ogilvy, "Theory of wave scattering from random rough surfaces", Hilger, London, (1991).
15. A.A. Maradudin, T. Michel, A.R. McGurn y E.R. Méndez, "Enhanced backscattering of light from a random grating", *Annals of Physics*, **203**, (1990), 255-307.
16. M. Saillard y D. Maystre, "Scattering from metallic and dielectric rough surfaces", *J. Opt. Soc. Am. A*, **7**, (1990), 982-990.
17. M. Nieto-Vesperinas y J.M. Soto-Crespo, "Light diffracted intensities from very deep gratings", *Phys. Rev. B*, **38**, (1988), 7250-7259.
18. K.A. O'Donnell y E.R. Méndez, "Experimental study of scattering from characterized random surfaces", *J. Opt. Soc. Am. A*, **4**, (1987), 1194-1205.
19. T. Rinder y H. Rothe, "Modeling of an ARS sensor system in spatial and time domain", *Surface Scattering and Diffraction for Advanced Metrology II*, Zu Han Gu and A.A. Maradudin, Editors, *Proceedings SPIE*, **4780**, (2002), 115-125.
20. P. Mattison, M. Dombrowski y J. Lorenz, "The Hand-Held Directional Reflectometer: An angular imaging device to measure BRDF and HDR in real-time", Part of the SPIE Conference on Scattering and Surface Roughness II, *Proceedings SPIE*, **3426**, (1998), 240-251.
21. S. Mainguy, M. Olivier, M. Josse y M. Guidon, "Description and calibration of a fully automated infrared scatterometer", *Optical Scatter: Applications, Measurement and Theory*, *Proceedings SPIE*, **1530**, (1991), 269-282.
22. J.N. Ford, K. Tang y R.O. Buckius, "Fourier Transform Infrared System Measurement of the Bidirectional Reflectivity of Diffuse and Grooved Surfaces", *J. of Heat Transfer*, **117**, (1995), 955-962.

Capítulo 2

Diseño y construcción del esparcímetero

2.1 Diseño óptico del esparcímetero.

El diseño óptico del esparcímetero está basado en un sistema catadrióptico, es decir, un sistema formado con un espejo elíptico y un arreglo refractor de lentes esféricas. El espejo elíptico colecta y refleja la luz esparcida por una superficie rugosa bidimensional, esta luz se capta con un sistema refractor que, finalmente, enfoca los rayos paralelos, esparcidos en diferentes direcciones por la superficie rugosa, en un detector CCD.

En este capítulo se hace un análisis de la geometría del diseño óptico para determinar la dimensión del detector para un ángulo de esparcimiento conocido, esto se hace con el fin de poder evaluar las limitaciones en cuanto a las especificaciones del diseño óptico. También se muestra el cálculo para determinar la resolución del sistema y el proceso de montaje y alineación del sistema.

2.2 Geometría del diseño óptico del esparcímetero.

La figura 1 muestra un segmento de elipse en donde F_1 y F_2 corresponden al primer y segundo foco, respectivamente. La pupila de entrada del sistema óptico se encuentra localizada en la superficie rugosa (colocada en el primer foco de la elipse, F_1). Del foco F_1 se han dibujado los rayos principales correspondientes a algunos de los haces de rayos paralelos que son esparcidos por la superficie rugosa. Los rayos principales son reflejados por el espejo elíptico hacia el segundo foco de la elipse, F_2 .

Supongamos que en el segundo foco de la elipse colocamos una lente delgada positiva, la cual tiene como objetivo que los rayos de cada haz de rayos paralelos esparcidos sean enfocados en un punto sobre el CCD. Los rayos principales pasan por dicha lente sin desviarse e inciden sobre el CCD. Como puede verse en la figura, si conocemos el ángulo U_p , que hace el rayo principal que sale a 90° respecto al eje óptico cuando incide en la lente delgada, así como la

distancia a la que se coloca el detector de la lente, XCD , podemos calcular el tamaño del CCD que estará dado por:

$$XCH = XCD \tan U_p \quad (1)$$

En la siguiente sección, se presentan las relaciones básicas que permitirán escribir el ángulo U_p , así como la distancia XCD , en términos de parámetros conocidos de la elipse y de la lente, para finalmente poder evaluar XCH .

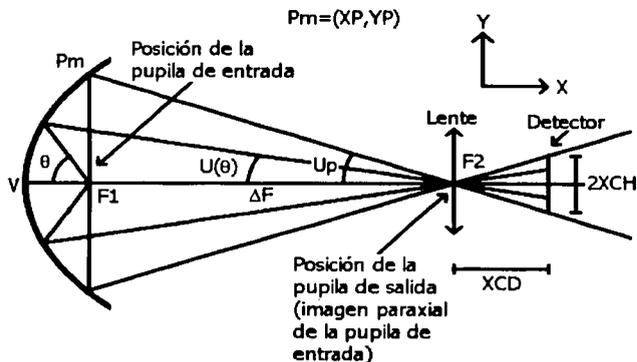


Figura 1. Diagrama general del diseño del esparcímeter.

2.3 Parámetros de la elipse.

Sea R el radio de curvatura de la elipse, Q su curvatura, K su constante de conicidad, ε su excentricidad, A su semidiámetro mayor y B su semidiámetro menor.

Se tiene que las siguientes relaciones se satisfacen^[1]:

$$\varepsilon = \sqrt{-K} \quad (2)$$

La distancia entre el vértice V y el primer foco de la elipse está dada por:

$$F1 = \frac{1}{(1+\varepsilon)Q} \quad (3)$$

y la distancia entre V y el segundo foco es:

$$F2 = \frac{1}{(1-\varepsilon)Q} \quad (4)$$

El semidiámetro mayor es de la forma:

$$A = \frac{F1 + F2}{2} \quad (5)$$

Sustituyendo las expresiones para los focos en la expresión para el semidiámetro mayor tenemos:

$$A = \frac{\frac{1}{(1+\varepsilon)Q} + \frac{1}{(1-\varepsilon)Q}}{2} = \frac{1}{(1-\varepsilon^2)Q} \quad (6)$$

Y el semidiámetro menor está dado por:

$$B = \sqrt{F1F2} \quad (7)$$

Entonces, sustituyendo las expresiones para los focos en la expresión para el semidiámetro menor, se llega a que:

$$B = \sqrt{\frac{1}{(1+\varepsilon)Q} \cdot \frac{1}{(1-\varepsilon)Q}} = \sqrt{\frac{1}{(1-\varepsilon^2)Q^2}} \quad (8)$$

que se puede expresar como:

$$B^2 = \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)Q^2} \quad (9)$$

Por otro lado, la separación entre los focos es igual a:

$$\Delta F = F_2 - F_1 = \frac{1}{(1 - \varepsilon)Q} - \frac{1}{(1 + \varepsilon)Q} \quad (10)$$

de donde:

$$\Delta F = \frac{2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)Q} \quad (11)$$

Ahora bien, si se coloca un sistema cartesiano (con ejes coordenados X-Y) en el vértice más cercano al foco F1 de la elipse, y se toma el punto P_m sobre la elipse, que corresponde al rayo principal que hace 90° con el eje óptico, se tiene que:

$$\frac{(A - F_1)^2}{A^2} + \frac{YP^2}{B^2} = 1 \quad (12)$$

donde F_1 es la coordenada en X del punto P_m y YP su coordenada en Y. Despejando a YP de la ecuación (12) se llega a que:

$$YP^2 = B^2 - \frac{B^2(A - F_1)^2}{A^2} = \frac{2F_1AB^2 - F_1^2B^2}{A^2} = F_1 \frac{B^2(2A - F_1)}{A^2} \quad (13)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior las expresiones para A y B^2 dadas por las ecuaciones (6) y (9), respectivamente, se obtiene:

$$YP^2 = F1 \frac{\frac{1}{(1-\varepsilon^2)Q^2} \left(2 \frac{1}{(1-\varepsilon^2)Q} - F1 \right)}{1} \quad (14)$$

$$\frac{1}{(1-\varepsilon^2)^2 Q^2}$$

Si ahora se sustituye la expresión (3) para el foco F1 se encuentra que:

$$YP^2 = \frac{1}{(\varepsilon+1)Q} \left(\frac{2}{(1-\varepsilon^2)Q} - \frac{1}{(\varepsilon+1)Q} \right) (1-\varepsilon^2) \quad (15)$$

Pero esta ecuación se puede reducir a:

$$YP = \frac{1}{Q} \quad (16)$$

Esta relación quiere decir que la distancia del punto P_m al foco es igual al radio de curvatura en el vértice.

Una vez conocidas las distancias YP y ΔF se puede calcular el ángulo U_p de la siguiente manera (ver figura 1):

$$\tan U_p = \frac{YP}{\Delta F} = \frac{\frac{1}{Q}}{\frac{2\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)Q}} = \frac{1-\varepsilon^2}{2\varepsilon} \quad (17)$$

Por otro lado, si llamamos XPR al radio de la pupila de salida, se tiene que la apertura numérica de la lente en el espacio imagen, XNA , es igual a:

$$XNA = \frac{XPR}{XCD} \quad (18)$$

Si se conoce la abertura numérica de la lente en el espacio imagen, entonces la distancia de la lente al detector está dada por:

$$XCD = \frac{XPR}{XNA} \quad (19)$$

Además, se tiene que la tangente del ángulo U_p , es igual a:

$$\tan U_p = \frac{XCH}{XCD} \quad (20)$$

Despejando XCH (la altura en el detector) y sustituyendo la expresión para la distancia entre la lente y el CCD (XCD) se llega a que:

$$XCH = XCD \tan U_p = \frac{XPR}{XNA} \tan U_p \quad (21)$$

de donde:

$$XCH = \frac{XPR}{XNA} \frac{(1 - \varepsilon^2)}{2\varepsilon} \quad (22)$$

Como ya se mencionó anteriormente, la pupila de entrada se encuentra localizada en la superficie rugosa (que a su vez está localizada en el primer foco de la elipse). La pupila de salida es la imagen de la pupila de entrada y se encuentra localizada en la lente que está colocada en el segundo foco de la elipse.

Se puede mostrar que la relación entre el radio de la pupila de entrada, EPR , y el radio de la pupila de salida está dada por^[2]:

$$\frac{XPR}{EPR} = \frac{F2}{F1} \quad (23)$$

Esta expresión se puede obtener a partir de que la pupila de salida es la imagen paraxial de la pupila de entrada de la siguiente forma: en la figura 1 se puede ver que la distancia objeto de la pupila de entrada respecto al espejo es:

$$s_o = -F1 \quad (24)$$

y la distancia imagen es:

$$s_i = F2 \quad (25)$$

Entonces, dado que la magnificación está definida como^[2]:

$$M_T = -\frac{s_i}{s_o} \quad (26)$$

se cumple la ecuación (23) ya que XPR es el radio de la imagen de EPR .

Sustituyendo las expresiones para las distancias focales, obtenemos que el radio de la pupila de salida es de la forma:

$$XPR = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} EPR \quad (27)$$

Como se puede ver, dado el diámetro de la pupila de entrada en el primer foco de la elipse, el diámetro de la pupila de salida depende solamente de la excentricidad de la elipse.

Finalmente, sustituyendo la ecuación (27) en la (22) se obtiene:

$$XCH = \frac{1+\varepsilon \cdot EPR (1-\varepsilon^2)}{1-\varepsilon \cdot XNA \quad 2\varepsilon} \quad (28)$$

que se puede expresar como:

$$XCH = \frac{EPR (1 + \varepsilon)^2}{XNA - 2\varepsilon} \quad (29)$$

Esta última ecuación muestra que, dados el tamaño de la pupila de entrada en el primer foco y la abertura numérica, el tamaño del detector solo depende de la excentricidad de la elipse.

Si se quisiera que el esparcímetero enfocara toda la luz esparcida en un CCD de 8.8mm×6.6mm, tendría que tomarse en cuenta que el tamaño más pequeño de la cámara CCD se obtiene cuando $\varepsilon = 1$, en cuyo caso, la elipse se degenera en una parábola y el segundo foco se encuentra localizado en infinito. Bajo tales circunstancias, se tiene que el semidiámetro del detector es igual a:

$$XCH = 2 \frac{EPR}{XNA} \quad (30)$$

Si el radio de la pupila de entrada es igual a 2mm entonces, para una CCD de 8.8mm de diámetro, la abertura numérica de la lente tiene que ser igual a:

$$XNA = 2 \frac{EPR}{XCH} = 2 \frac{2mm}{4.4mm} = 0.91 \quad (31)$$

Sin embargo, existen al menos dos razones importantes para no seleccionar este diseño de esparcímetero. La primera es que, para un ángulo de esparcimiento de 90°, el diámetro de la lente tiene que ser mayor que el diámetro del espejo parabólico y, de acuerdo con lo obtenido anteriormente, el diámetro de la parábola para un ángulo de esparcimiento de 90° es igual al radio de curvatura paraxial. Pero este radio de curvatura no puede ser muy pequeño (lo que ayudaría a disminuir el tamaño de la lente) ya que se necesita espacio para la montura de la superficie rugosa.

La segunda razón, aún más importante que la primera, es que un sistema con una abertura numérica cercana a uno, convierte el arreglo en un sistema óptico complejo generalmente formado por un número grande de lentes^[3]. Esto es importante porque aumenta el costo del instrumento, no solo por el número de lentes sino que al tener más componentes ópticas generalmente es necesario aumentar la calidad de sus superficies.

Por tal motivo, se decidió que la imagen de la luz esparcida se formara en un plano de mayor diámetro que la cámara CCD, aunque esto signifique tener que mover la cámara para cubrir todo el plano imagen.

Al permitir que el plano imagen fuera de mayor diámetro que la cámara y que la cámara se moviera para registrar toda la imagen, se decidió que la abertura numérica de la lente tuviera un valor tal, que el diseño óptico fuera lo más sencillo posible.

Por lo tanto, se decidió hacer un sistema óptico con una abertura numérica de 0.182 (y un radio del diafragma de abertura, dado por la zona iluminada en la superficie, de 2mm), en el que la cámara CCD se tiene que mover a cuatro posiciones diferentes en la dirección horizontal y tres posiciones diferentes en la dirección vertical, a fin de cubrir todo el plano imagen.

2.4 La resolución del sistema.

La complejidad del sistema óptico depende de la longitud de onda, el campo de visión, el ancho de banda espectral y la resolución. Para una resolución en el ángulo de esparcimiento dada, mientras más grande sea la abertura numérica del sistema óptico auxiliar, la resolución requerida en el plano imagen será mayor. Es decir, mientras más grande sea la abertura numérica, son más las aberraciones del sistema auxiliar que tendrán que ser corregidas^[3].

En la sección anterior se encontró que el tamaño del plano imagen, que queda determinado por la altura en la imagen de los rayos que salen de la superficie a 90°, era:

$$XCH = \frac{XPR}{XNA} \frac{(1 - \epsilon^2)}{2\epsilon} \quad (32)$$

Sin embargo, para conocer la altura en el plano imagen de un rayo que sale de la superficie a un ángulo cualquiera, se debe partir de la ecuación general de una elipse con centro en el punto $(A,0)$, ya que el origen del sistema de coordenadas está en un vértice de la elipse. Dicha ecuación es:

$$\frac{(X-A)^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1 \quad (33)$$

Nótese que la coordenada X puede expresarse como (ver figura 1):

$$X = F1 - \frac{Y}{\tan \theta} \quad (34)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3), (6), (8) y (34) en la ecuación (33), y despejando Y se obtiene:

$$Y = \frac{\varepsilon \cot \theta - \sqrt{1 + \cot^2 \theta}}{-Q - Q \cot^2 \theta + \varepsilon^2 Q \cot^2 \theta} \quad (35)$$

Por otro lado, se puede evaluar la inclinación de un rayo que va del punto de intersección con la elipse al segundo foco (ver figura 1) mediante la expresión:

$$\tan U(\theta) = \frac{Y}{\Delta F + \frac{Y}{\tan \theta}} \quad (36)$$

Sustituyendo las ecuaciones (10) y (35) en la ecuación anterior se llega a que:

$$\tan U(\theta) = \frac{(-1 + \varepsilon^2) \csc \theta (-\varepsilon \cos \theta + 1)}{-2\varepsilon + \varepsilon(-1 + \varepsilon^2) \cot^2 \theta + (-1 + \varepsilon^2) \cot \theta \csc \theta} \quad (37)$$

De las ecuaciones (1) y (37) se obtiene:

$$XCH = XCD \left(\frac{(-1 + \varepsilon^2) \csc \theta (-\varepsilon \cos \theta + 1)}{-2\varepsilon + \varepsilon(-1 + \varepsilon^2) \cot^2 \theta + (-1 + \varepsilon^2) \cot \theta \csc \theta} \right) \quad (38)$$

Finalmente, se sustituyen las ecuaciones (19) y (23) en la ecuación anterior, dando como resultado:

$$XCH = \frac{EPR (1 + \varepsilon)}{XNA (1 - \varepsilon)} \left(\frac{(-1 + \varepsilon^2) \csc \theta (-\varepsilon \cos \theta + 1)}{-2\varepsilon + \varepsilon(-1 + \varepsilon^2) \cot^2 \theta + (-1 + \varepsilon^2) \cot \theta \csc \theta} \right) \quad (39)$$

que es la altura de cualquier rayo principal en el plano imagen.

El tamaño máximo para las aberraciones está determinado por la separación, en el plano imagen, de dos rayos principales que partan de la superficie rugosa a una distancia igual a la resolución angular ($\Delta\theta$) que se requiere en el esparcímtero. Este tamaño es equivalente a la resolución lineal en el plano imagen, que puede ser evaluada derivando la ecuación (39) con respecto a θ y multiplicando por la resolución del ángulo de esparcimiento $\Delta\theta$, esto es:

$$\text{resolución_lineal} = \frac{dXCH(\theta)}{d\theta} \Delta\theta \quad (40)$$

que da como resultado:

$$\text{resolución_lineal} = \left(\frac{ERP}{XNA} \right) \left(\frac{(1 + \varepsilon)^2 \csc^4 \theta}{8} \right) \times \left(\frac{8 - 4\varepsilon^2 + 4\varepsilon^4 + 4\varepsilon^2(-3 + \varepsilon^2) \cos 2\theta - 2\varepsilon^3 \csc^3 \theta \sin 2\theta + 2\varepsilon^3 \csc \theta \sin 4\theta + \varepsilon^3 \csc^3 \theta \sin 4\theta}{(-2\varepsilon + \varepsilon(-1 + \varepsilon^2) \cot^2 \theta + (-1 + \varepsilon^2) \cot \theta \csc \theta)^2} \right) (\Delta\theta) \quad (41)$$

En la figura 2 se muestra la gráfica de la resolución lineal contra el ángulo del rayo esparcido por la superficie cuando se toma un radio de la pupila de entrada (ERP) de 2mm y una resolución del ángulo de esparcimiento ($\Delta\theta$) de 1° . Se presentan los casos cuando la abertura numérica (XNA) toma los valores 0.2, 0.25, 0.5 y 1.0.

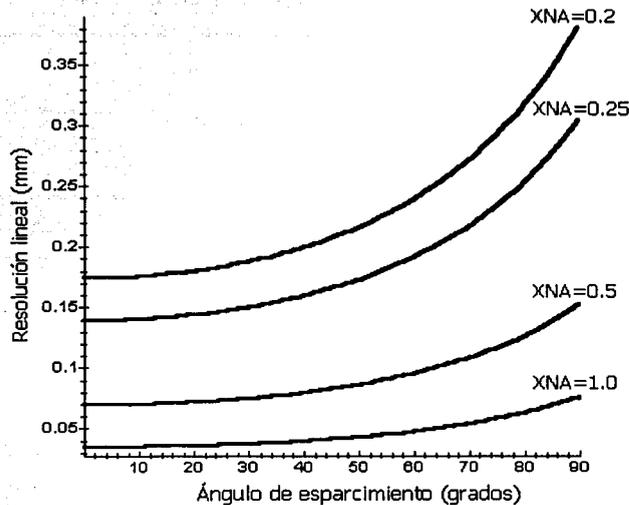


Figura 2. Gráfica de la resolución del sistema para diferentes valores de la apertura numérica.

Como se puede ver en la figura, la resolución lineal varía como función de θ , donde la mejor resolución requerida está cerca del eje óptico, es decir, a 0° . En el ejemplo presentado en la figura 2 se puede observar que si se requiere una resolución angular para el ángulo de esparcimiento de 1° , entonces, para un sistema con una apertura numérica de 1.0, la resolución lineal es 0.035mm (las aberraciones del sistema tienen que ser suficientemente pequeñas para obtener una imagen de, a lo más, 0.035mm) mientras la resolución lineal para un sistema con una apertura numérica de 0.5 es de 0.07mm.

Cabe hacer notar que cuando se trabaja en el espectro visible, si se quiere que el sistema óptico auxiliar sea simple y de bajo costo, es necesario mantener la apertura numérica baja. Esto significa que es más conveniente incrementar el tamaño del plano imagen y por lo tanto, barrerlo con el CCD. Mientras más grande sea el plano imagen, que significa mayor número de pasos para barrerlo completamente, será más pequeña la apertura numérica del sistema óptico auxiliar.

A partir del análisis anterior, y en términos del costo, se diseñó un sistema óptico con una apertura numérica igual a 0.182. La tabla I muestra los parámetros del diseño final (la

nomencatura corresponde a la señalada en la figura 9a). Las distancias están en mm, K es la constante de conicidad del espejo elíptico y f_i es la distancia focal de la i -ésima lente.

Tabla I. Parámetros del diseño final.

d_1	d_2	d_3	d_4	f_1	f_2	f_3	K
227.1	35.5	22.4	11.1	97.8	97.6	68.5	-0.5

2.5 Alineación del espejo elíptico e identificación de sus focos.

Para alinear el espejo elíptico¹ que se utilizó en el sistema óptico del esparcímtero, primero se alineó el láser con la ayuda de dos puntas de metal. Dichas puntas, colocadas a la misma altura y sobre la misma recta, deben ser iluminadas por el haz láser justo en su parte superior, sin importar que tan separadas estén entre sí. Sin embargo, mientras más lejos esté una punta de la otra, será mejor la alineación debido a que, si la distancia entre las puntas es pequeña y la inclinación del haz es poca para ser notada a esa distancia, se puede pensar que el haz está alineado cuando en realidad no lo está.

Una vez que el láser estuvo alineado, se montó el espejo elíptico en un soporte de forma circular (especialmente construido para ello) y se colocó de manera que el láser pasara aproximadamente por su centro. Para alinearlos, se utilizó el hecho de que si el espejo está colocado de manera que su eje coincida con el eje óptico del sistema (es decir, con la línea imaginaria que pasa por las dos puntas) y el láser se mueve en una dirección (ya sea horizontal o vertical) sin moverlo en la otra, se observará que el haz que incide en el espejo y el haz reflejado por éste, están en el plano horizontal o vertical, según corresponda, definido por el eje óptico y el haz incidente.

Esto se hizo en las direcciones vertical y horizontal con ayuda de los micrómetros de la montura del láser. Estos micrómetros permiten el movimiento en un plano (sagital o meridional) que es independiente del movimiento en el otro.

Para localizar los focos del espejo, se montó una de las puntas de manera que quedara paralela al plano de la mesa y a la altura del eje óptico. Esta punta se colocó (desde la parte posterior

¹ El espejo elíptico que se utilizó es un espejo de Opti-Forms modelo E 213-2.

del espejo elíptico) a una distancia igual a la primera distancia focal del espejo², cuidando que el filo de la punta estuviera en el centro del haz que marcaba el eje óptico (ver figura 3a). Después se cambió de posición el láser, se dirigió hacia esta punta de manera que el haz incidiera en el espejo, y se observó en qué posición se enfocaba el haz reflejado. Este punto indicaba la posición del segundo foco así que se utilizó la otra punta para señalarlo (ver figura 3b).

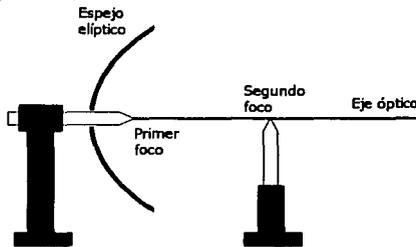


Figura 3a. Colocación de las puntas de alineación.

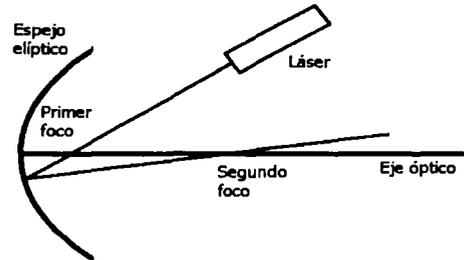


Figura 3b. Localización de los focos de la elipse.

Para verificar que los puntos que se tenían identificados fueran en realidad los dos focos del espejo elíptico, se colocó el láser de manera que el haz pasara por el segundo foco a un ángulo tal que incidiera en la superficie del espejo elíptico. Bajo tales condiciones, y si los focos estaban bien identificados, se debería observar que el haz que pasa por el segundo foco y es reflejado en el espejo, también pasa por el primero (ver figura 4).

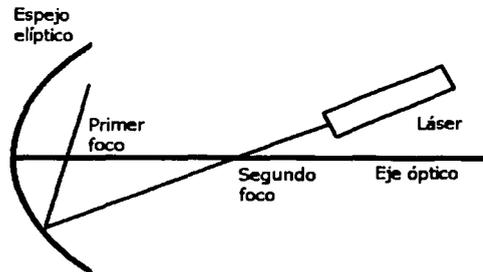


Figura 4. Comprobación de la posición de los focos.

² Se considera primer foco al foco más cercano al espejo y en consecuencia el foco más lejano es considerado segundo foco.

De esta manera se pudo hacer un ajuste fino a la posición de los focos del espejo dado que en este caso, el ancho del haz que llega al primer foco es menor que el ancho que llega al segundo foco cuando el haz original pasa por el primero. Lo anterior se debe observar para diferentes posiciones del láser, siempre y cuando el haz pase por el segundo foco e incida en el espejo, así que se verificó que esto ocurriera para diferentes ángulos de incidencia del láser.

Posteriormente, se observó que cuando las dos puntas están en la posición de los focos, las imágenes de éstas en el espejo elíptico se superponen³. Esto facilita la localización de uno de los focos si conocemos la posición del otro, hecho que resultó ser muy útil para alinear la platina de movimiento rotacional, ya que para esto se tuvo que mover en varias ocasiones la punta que señalaba la posición del primer foco.

2.6 Montaje y alineación de la platina de movimiento rotacional.

Para montar la platina rotacional⁴ se construyó una pieza en forma de L que se sujeta por su lado más largo a la platina y por el más corto se introduce un poste que permite regular la altura. También se construyeron una pequeña montura con una cavidad que se usaría para colocar la superficie que se quisiera analizar, y un juego de tres brazos. Uno de los brazos se atornilló a un costado de la platina y los otros dos a la parte móvil de ésta. Cada brazo contaba con un perno en su extremo que se acoplaba con un orificio en la montura de la superficie. El brazo colocado al costado de la platina servía como soporte de manera que el perno en su extremo era el eje de giro de la superficie (ver figura 5).

Una vez montado el sistema mecánico que permitiría la rotación de la superficie, se colocó un espejo plano en la cavidad de la montura. Este espejo se utilizó para alinear la platina. El proceso de alineación se basó en que, si el espejo plano está en la posición del primer foco, con la cara plateada dirigida hacia el espejo elíptico, un haz que pase por el segundo foco, e incida en la superficie del espejo elíptico, irá al primer foco donde se reflejará en el espejo plano para después volver a reflejarse en el espejo elíptico y salir reflejado en dirección hacia el segundo foco.

³ Después de analizarlo se concluyó que esto era de esperarse ya que, para un objeto colocado en uno de los focos, el espejo elíptico forma la imagen en la posición del otro.

⁴ La platina rotacional es una platina fabricada por Newport modelo SR50CC.

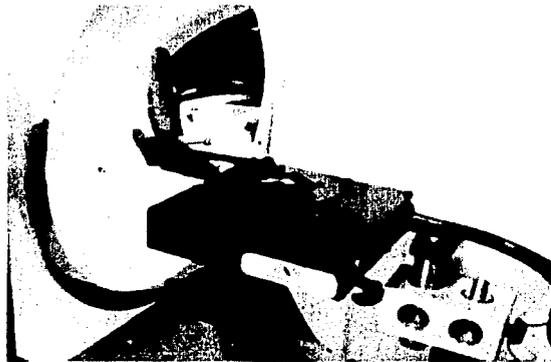


Figura 5. Montaje de la platina de movimiento rotacional.

Sin embargo, para este sistema se necesitaba que el haz que salía del espejo elíptico (después de las reflexiones ya mencionadas) se dirigiera al segundo foco sin importar el ángulo de incidencia de la luz en la superficie, es decir, se necesitaba que el eje de giro del espejo estuviera exactamente en la posición del primer foco (ver figura 6).

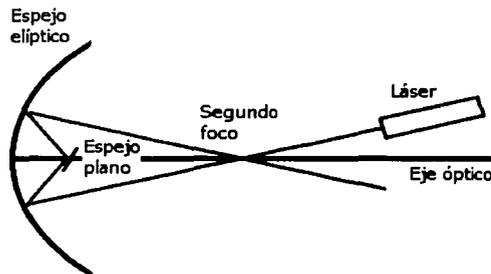


Figura 6. Colocación del eje de giro del espejo plano en la posición del primer foco.

Esto debe ser así porque, de acuerdo con el diseño del sistema, el haz debe estar dirigido hacia el segundo foco al momento de entrar al sistema de lentes sin importar la orientación angular de la superficie y esto sólo es posible si el eje de giro de la superficie está en la posición del primer foco.

Para alinear la platina rotatoria, ésta se colocó de manera que el espejo plano estuviera más o menos centrado en la punta que señalaba la posición del primer foco, con su superficie ortogonal al eje óptico del sistema⁵. Después, se acercó la platina al espejo elíptico hasta que la superficie del espejo plano estuvo en contacto con el filo de la punta, se quitó esta última y se fijó la posición de la platina. Enseguida, se encendió el láser que estaba apuntando hacia el segundo foco a un ángulo tal que incidía en el espejo elíptico y se observó por dónde pasaba el haz que salía del espejo elíptico tras ser reflejado en el espejo plano. Se notó que este haz no pasaba por el segundo foco y se concluyó que eso se debía a que la superficie del espejo no estaba exactamente en la posición del foco. Para corregir la posición se movió el espejo plano sobre la línea del eje óptico hasta que el haz reflejado por el espejo elíptico pasó por el segundo foco.

Una vez hecho esto, se hizo girar el espejo plano hasta una posición angular arbitraria (pero siempre cumpliendo la condición de que el haz reflejado por el espejo plano incidiera en el espejo elíptico) y se observó que el haz reflejado por el espejo elíptico no pasaba por el segundo foco. Esto se debía a que, a pesar de que la posición de la platina a lo largo del eje óptico era correcta, el eje de giro no estaba centrado en el primer foco. Esto se verificó haciendo girar el espejo a una posición diferente y viendo que se presentaba una desviación similar del haz reflejado respecto al segundo foco. Entonces, teniendo la superficie a un ángulo donde la desviación del haz reflejado era máxima, y conservando la posición de la platina sobre el eje óptico, ésta se movió sobre la mesa en dirección ortogonal al eje hasta que el rayo reflejado pasó por el segundo foco. Entonces, se giró el espejo hasta un ángulo diferente y se repitió el mismo procedimiento. Después, se regresó el espejo plano a la primera posición angular y se verificó que el haz saliente siguiera pasando por el segundo foco. Esto se repitió varias veces y para diferentes ángulos del espejo plano. Al igual que en el paso anterior de la alineación, también se repitió este procedimiento para diferentes ángulos de incidencia del haz láser en el espejo elíptico dado que, como este ajuste se hacía a mano, era necesario asegurarse que la alineación fuera la mejor posible.

⁵ Esta condición se pidió para tener más o menos el mismo rango de ángulos posibles en las dos direcciones a las que se puede girar la platina rotacional.

2.7 Localización del eje óptico y alineación del sistema de lentes.

Para volver a localizar el eje óptico del sistema, de manera que fuera posible alinear el sistema de lentes, se colocó el láser atrás del espejo elíptico y se apuntó hacia el espejo que estaba en la posición del primer foco. Después, se giró el espejo plano a un ángulo arbitrario, con la condición de que el haz reflejado por éste incidiera en el espejo elíptico, y se ajustó la posición del haz incidente hasta que el haz reflejado pasó por el segundo foco. De acuerdo con las propiedades de los elipsoides, esto indicaba que el haz incidente estaba dirigido hacia la posición del primer foco. Después, se quitó el espejo plano y se observó por dónde pasaba el haz láser, ya sin ser reflejado, respecto al segundo foco. Como el haz pasaba a un lado del segundo foco, se colocó de nuevo el espejo plano, se cambió de posición el láser y se repitieron los mismos pasos. Esto se hizo en varias ocasiones hasta que el haz láser pasó por la posición del segundo foco en ambas situaciones (es decir, cuando el espejo plano estaba en su posición y cuando había sido removido). De esta forma, se pudo localizar el eje óptico del sistema (ver figuras 7a y 7b).

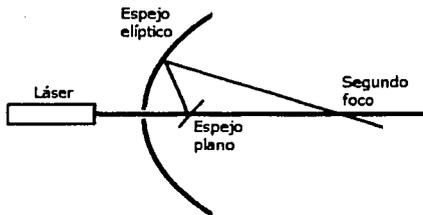


Figura 7a. Localización del eje óptico con el espejo plano.

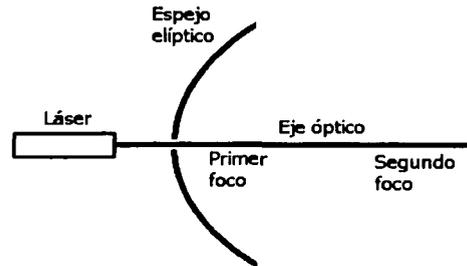


Figura 7b. Localización del eje óptico sin el espejo plano.

Para alinear el sistema de lentes se diseñaron unas monturas que permitieron colocarlas en un riel de manera que los ejes ópticos de las tres lentes quedarán alineados después de montadas, sin necesidad de hacer más ajustes. El riel se montó sobre unos postes para que se pudiera regular la altura del eje óptico de las lentes. Cada lente fue colocada en su montura y sobre el

riel (ver figura 8). Se quitó el espejo plano de la platina rotacional y se encendió el láser para tener el eje óptico señalado por el haz.

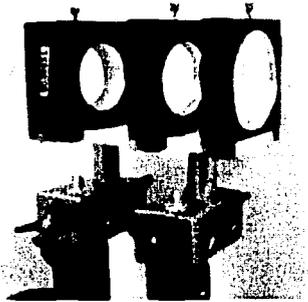


Figura 8. Monturas y riel para el sistema de lentes.

Se sabe que cuando un haz de luz incide en una interfase, se tiene que una parte de la luz es reflejada y la otra parte transmitida (para las lentes casi toda la luz es transmitida). Usando este hecho, se colocaron las lentes a una altura tal que el haz incidente y los haces reflejados por las caras de las lentes estuvieran a la misma altura (el reflejo de las lentes se podía observar en el tubo del láser) y con esto, se pudo ver que los ejes de las lentes estaban a la misma altura que el eje óptico del sistema.

Para centrar las lentes en el eje óptico del sistema, se orientó el riel de manera que los reflejos de todas las lentes se superpusieran con el haz incidente. Entonces, como todos los reflejos estaban a la misma altura que el haz incidente y además se superponían con él, se concluyó que las lentes estaban centradas en el eje óptico (ver figura 9b).

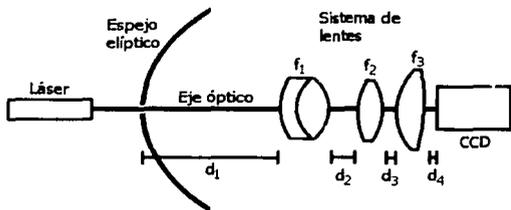


Figura 9a. Parámetros del esparcímeter.

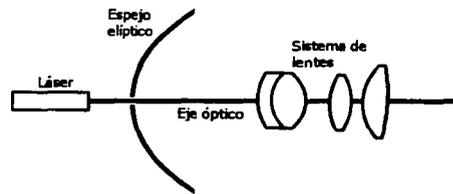


Figura 9b. Alineación del sistema de lentes.

2.8 Montaje y alineación de las platinas lineales y la cámara CCD.

Las tres platinas de movimiento lineal que se utilizaron en el esparcímetero⁶ fueron acopladas de manera que en conjunto permitieran tener movimiento sobre los ejes X, Y y Z⁷. Para esto, se diseñó una pieza en forma de L que se atornilló por su lado más corto a la placa móvil de la platina que estaría encargada del movimiento en la dirección Y. El lado más largo⁸ se sujetó a la parte trasera de la platina de dirección X.

La platina que daría movimiento en la dirección Z, se colocó con ayuda de otra pieza en forma de L (que se construyó de forma similar a la anterior, pero con diferentes dimensiones) sobre la placa móvil de la platina de dirección X, de manera que su tornillo pasara por el agujero que ésta tiene en el centro. Por último, la cámara CCD⁹ se atornilló por su parte inferior a una placa plana de forma rectangular que a su vez se sujetó a la platina de dirección Z (ver figuras 10a y 10b).

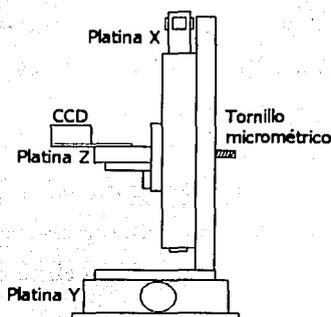


Figura 10a. Diagrama del arreglo de platinas.

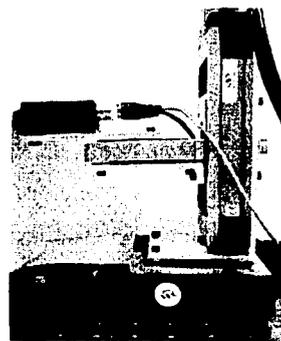


Figura 10b. Fotografía del arreglo de platinas.

⁶ Dos de ellas, automáticas, fabricadas por Newport con modelos M-UTMCC1HL y M-UTM1DD, y la otra manual fabricada por Edmund Industrial Optics.

⁷ Se considera eje Y al que es ortogonal al eje óptico y paralelo al plano de la mesa, eje Z al que está sobre el eje óptico y eje X al que es ortogonal al eje óptico y al plano de la mesa.

⁸ Este lado de la placa se diseñó con una ventana que permitiera pasar el tornillo micrométrico de una tercera platina que fue utilizada para ajustar la distancia de la CCD al sistema de lentes, es decir, para colocarla en la posición del plano imagen.

⁹ Cámara CCD fabricada por SONY, modelo XC-ST70.

Una vez hecho esto, se colocó el arreglo de las platinas y la cámara de manera que la CCD estuviera perpendicular al eje óptico y a una distancia del sistema de lentes tal que la cámara quedara prácticamente en el foco del sistema. Entonces, haciendo un ajuste fino, se lograría tener la cámara en la posición exacta del plano imagen.

Para determinar si la CCD se encontraba en el foco del arreglo de lentes, se midió la distancia entre el detector (es decir, el chip CCD) y la última superficie del sistema de lentes, para ajustarla a la distancia que debían tener de acuerdo con el diseño. Después, se prendieron el láser y la cámara (con el espejo plano en la posición del primer foco) y se observó la imagen de la luz reflejada. Se movió la cámara hacia atrás y hacia delante (a lo largo del eje óptico) para ver en qué posición la imagen estaba mejor enfocada. Esta posición se dejó fija y otra vez se midió la distancia entre la CCD y el sistema de lentes para verificar que la distancia focal que se determinó por observación directa correspondiera con la distancia dada en el diseño.

2.9 Alineación del divisor de haz y determinación del segundo foco en la dirección ortogonal al eje óptico.

El método de alineación del divisor¹⁰ de haz consistió en colocarlo entre la platina rotacional y el sistema de lentes de tal manera que el haz proveniente del láser (habiendo removido con anterioridad el espejo plano que estaba en el primer foco) incidiera cerca del centro del divisor¹¹ y que el rayo reflejado saliera en dirección ortogonal al eje óptico.

Para esto, se colocó una de las puntas en la dirección ortogonal al eje óptico del sistema y la otra punta se colocó sobre la misma dirección pero a una distancia mayor. Cuando el divisor se encuentra a 45° del eje óptico, se debe observar que el haz reflejado pasa por ambas puntas así que, se ajustó manualmente la posición del divisor hasta que el haz pasó por las dos puntas (ver figura 11a). Durante este ajuste se observó que el haz pegaba en un lugar más alto de la pantalla que se utilizó para visualizarlo, a medida que ésta se iba alejando. Esto se debía a que el divisor de haz no estaba exactamente sobre el plano perpendicular al plano de la mesa sino que estaba ligeramente inclinado. Sin embargo, esto fue relativamente fácil de solucionar ya

¹⁰ El divisor utilizado fue un divisor de película delgada fabricado por Edmund Industrial Optics con número de parte A39-493.

¹¹ Se quería que el haz incidiera cerca del centro del divisor porque de esta manera se podría tener un rango angular similar en las dos direcciones en las que se apuntaría el haz hacia el divisor.

que solamente se cambió la orientación del divisor hasta que el haz en la pantalla estuvo a la misma altura para diferentes distancias.

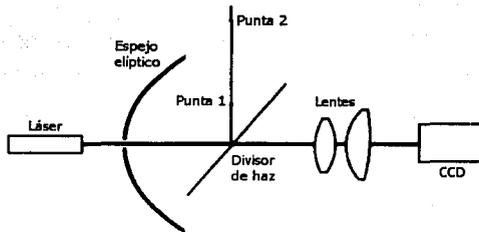


Figura 11a. Determinación de la dirección ortogonal al eje óptico.

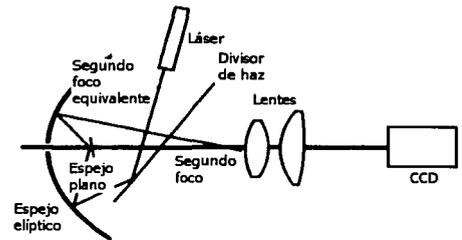


Figura 11b. Comprobación de la posición del segundo foco equivalente.

Para encontrar el segundo foco equivalente¹² se colocó una de las puntas en la posición del segundo foco, que está sobre el eje óptico, y la otra punta en la dirección ortogonal. Se observó en el divisor la imagen por reflexión de la punta que se encontraba sobre el eje y se movió la punta que estaba en la dirección ortogonal del eje hasta que la imagen transmitida de esta punta y la reflejada de la otra se superpusieron¹³. El tener las dos imágenes superpuestas indicaba que ambas puntas estaban en posiciones ortogonales pero equivalentes respecto al divisor. Cabe mencionar que la punta que indicaba la posición del segundo foco equivalente estaba colocada horizontalmente para facilitar la alineación del espejo director (como se explica en la siguiente sección).

Posteriormente, se cambió el láser a una posición apropiada para que el haz pasara por el segundo foco equivalente e incidiera en el divisor, y se observó que el haz saliente del espejo elíptico pasara por la posición del segundo foco para distintos valores de la dirección angular del espejo plano (ver figura 11b). De esta forma se pudo confirmar que la posición de la punta en dirección ortogonal al eje óptico era la posición equivalente, respecto al divisor, del segundo foco del espejo elíptico.

¹² Es decir, el punto en la dirección ortogonal al eje óptico que respecto al divisor de haz es equivalente a la posición del segundo foco.

¹³ Para este paso, se retiró la primera lente del sistema para que la imagen por reflexión que se observaba en el divisor de haz, no estuviera alterada por la presencia del doblete.

2.10 Montaje y alineación del espejo director y del láser.

El espejo¹⁴ que se usa para dirigir el haz incidente hacia el divisor, se colocó en la posición del segundo foco equivalente, es decir, el segundo foco que está en la dirección ortogonal al eje óptico. Para esto, se fabricó una placa que permite unir la montura del espejo con una platina rotacional¹⁵. Esta última, cuenta con un orificio en el que se puede introducir un poste para regular su altura.

Para alinear el espejo director, se siguió el siguiente procedimiento: primero, se colocó el espejo a un ángulo de 90° según la escala de la platina rotacional (por la forma en que se colocó su montura, este ángulo era el más apropiado para usarse como referencia). Después, se acercó el espejo a la punta que indicaba la posición del segundo foco equivalente hasta que estuvieron prácticamente en contacto, se retiró la punta y se observó en qué zona del espejo incidía el haz reflejado por el divisor. Luego se movió el espejo en dirección paralela al eje óptico, para que el haz incidiera sobre él justo en la posición del eje de rotación de la platina (la placa que une ambas componentes fue diseñada especialmente para que el eje de rotación quedara centrado sobre la cara plateada del espejo). Se movió el espejo en dirección ortogonal al eje óptico hasta que la imagen por transmisión del punto donde incidía el láser se superpuso con la imagen por reflexión de la punta colocada en el segundo foco y se giró la montura del espejo hasta que el haz incidente y el reflejado se superpusieron, es decir, hasta que se tuvo incidiera normal del haz respecto a la superficie del espejo. Esto garantizó que, para esta posición angular, la superficie del espejo plano era paralela al eje óptico y en consecuencia, se puede usar esta posición como referencia. Posteriormente se giro la platina a varios ángulos arbitrarios, y se verificó que el haz incidente siguiera pegando en la misma posición y que las imágenes se siguieran superponiendo.

Con lo anterior, se tenía cierta seguridad de que el eje de giro del espejo estaba sobre el eje de rotación, sin embargo, era necesario verificarlo. Para esto, se colocó frente al espejo plano, en dirección normal a éste, un láser auxiliar (ver figura 12a):

¹⁴ Espejo con montura fabricado por Edmund Industrial Optics con número de parte A37-923.

¹⁵ Fabricada por Edmund Industrial Optics con número de parte A33-465.

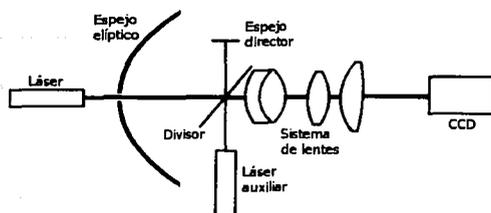


Figura 12a. Uso del láser auxiliar para la alineación final del láser principal.

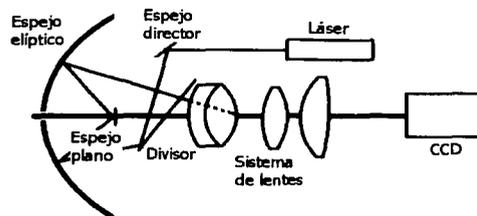


Figura 12b. Colocación final del láser principal.

Este láser se encendió y se alineó de manera que incidiera sobre el espejo director en el mismo punto en el que incidía el haz del láser principal. Se apagó el láser principal y se observó que, para distintos ángulos del espejo direccional, el haz reflejado por éste (y posteriormente reflejado por el divisor sobre el espejo elíptico) se dirigiera hacia el primer foco. Una vez verificado esto, se reubicó el láser principal de manera que quedara paralelo al eje óptico e incidiera sobre el espejo director en el mismo punto en el que incidía el haz del láser auxiliar. Se apagó el láser auxiliar y se observó que el haz reflejado en el espejo director se dirigiera al primer foco, después de las reflexiones necesarias, para cualquier ángulo del espejo director que hiciera incidir el haz sobre el divisor. También se verificó que esto ocurriera para diferentes ángulos de la superficie¹⁶ para que, a cualquier ángulo de ésta y del espejo direccional, se cumpliera que el haz reflejado fuera hacia la posición del primer foco (ver figura 12b). Con lo anterior, se concluyó el montaje y la alineación del sistema.

Para finalizar esta sección, en la figura 13 se incluye una fotografía del sistema completo.

2.11 Calibración del sistema.

La calibración del sistema es importante para el análisis de las imágenes obtenidas porque nos da el valor del factor de conversión de la posición de un punto sobre la imagen a su equivalente angular, que es la información que nos interesa.

¹⁶ Es decir, el espejo plano colocado en el primer foco del espejo elíptico.

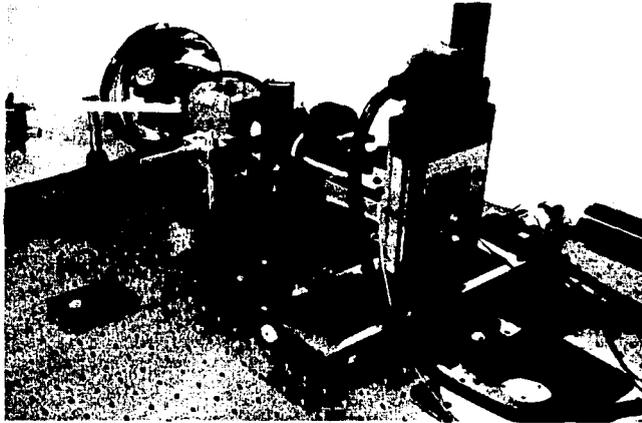


Figura 13. Fotografía del esparcímetro.

Este proceso se realizó de la siguiente manera: primero, con el láser encendido y el espejo plano en la posición del primer foco, se giró la platina de movimiento rotacional hasta un ángulo de -42.3° ¹⁷. Después, se localizó con la CCD la imagen del haz y se tomó la lectura de la posición en el controlador de la platina lineal que le da movimiento a la cámara, tomando como referencia la posición en la que la imagen se encontraba en el centro del CCD. Se giró la platina un ángulo de 2° y se localizó otra vez la imagen para después tomar la lectura de su posición. Se hizo lo mismo para cada giro de 2° de la platina rotacional hasta alcanzar los 39.7° ¹⁸. La figura 14 muestra los datos obtenidos en el proceso de calibración así como la gráfica del polinomio y el polinomio que se les ajustó.

En la imagen se puede apreciar que hay una zona en la que no se tienen datos, esta zona corresponde al centro del espejo en el que hay un orificio que viene de fábrica.

El inverso de la pendiente de la tangente a la gráfica de la función ajustada en el ángulo al que se está observando, es el factor de conversión que se necesita para el análisis de las imágenes.

¹⁷ Este es el ángulo mínimo al que se puede observar debido a las limitaciones del sistema.

¹⁸ Este ángulo corresponde al máximo ángulo de observación que se puede obtener en el sistema.

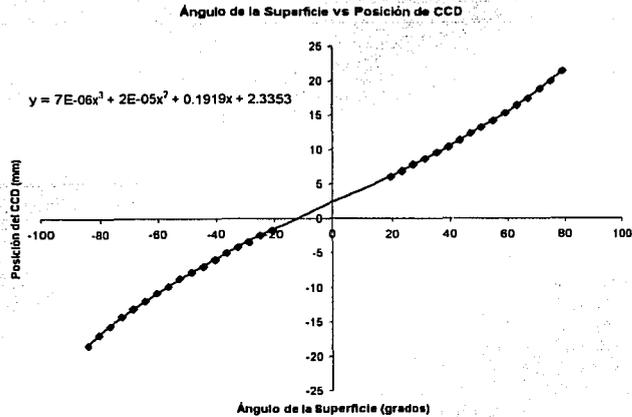


Figura 14. Gráfica de calibración del sistema.

2.12 Referencias.

1. R. Kingslake, "Lens Design Fundamentals", Academic Press, 303-304, USA, (1978).
2. E. Hetch, "Optics", Addison-Wesley, 3rd. Edition, USA, (1998).
3. M.J. Kidger, "Fundamental Optical Design", SPIE Press, Washington, (2001).

Capítulo 3

Pruebas de funcionamiento

3.1 Primeras Pruebas.

Para determinar si el sistema funcionaba de manera apropiada se hicieron algunas pruebas mediante la obtención de los patrones de difracción de diferentes pinholes. Un pinhole es una abertura circular con radio del orden de unas cuantas decenas de micras. Este tamaño es apenas dos ordenes de magnitud mayor que la longitud de onda de la luz del láser utilizado por lo que, de acuerdo con la teoría clásica de la óptica, se debe presentar difracción (un tamaño de la abertura similar a la longitud de onda de la luz incidente es una de las condiciones necesarias para tener difracción).

Por simplicidad, se hizo incidir el haz láser sobre la abertura a un ángulo de 0° , es decir, las pruebas se hicieron a incidencia normal. Esto simplifica la expresión para la distribución de intensidades del patrón de difracción facilitando el análisis posterior de las imágenes.

Para la adquisición de imágenes se construyó una montura especial que permite colocar un pinhole en la posición del primer foco del sistema. Una vez que el pinhole se colocó en esa posición, se apuntó el láser hacia la abertura y se localizó el patrón de difracción que se formaba en el plano imagen.

El análisis de las imágenes se hizo utilizando las herramientas que incluye el programa *MATLAB 5.3*. Este programa permite hacer cortes a lo largo de una o varias direcciones dentro de una imagen. Los datos obtenidos de esta manera pueden ser graficados o almacenados como listas de números para su posterior análisis. La forma en que *MATLAB* obtiene información sobre la distribución de intensidades dentro de una imagen se basa en escoger un pixel de referencia a partir del cual serán comparados todos los demás pixeles dentro del corte elegido y se les asignará un valor de intensidad relativo al valor del pixel de referencia.

En el análisis que se hizo, se tomaron los datos obtenidos por *MATLAB* de cortes en las direcciones X y Y¹ para cada imagen. Estos datos se ajustaron para tener una intensidad

¹ Sobre la imagen se considera eje Y al que está en dirección vertical y el eje X es el horizontal.

máxima unitaria y una intensidad mínima nula. También se les hizo un ajuste para que la gráfica que se obtenía estuviera centrada en el cero (de esta manera, sería posible compararla con la función de *Airy* correspondiente colocándolas en la misma gráfica).

Cabe mencionar que el fabricante de los pinholes garantiza el tamaño de los orificios dentro de un intervalo de incertidumbre de $\pm 5 \mu\text{m}$. Debido a esto, se midió el diámetro de cada orificio por difracción directa para tener su valor real como una referencia con la cual comparar el valor obtenido con el sistema.

El método de análisis de las imágenes fue el siguiente: como ya se mencionó, a cada fotografía se le hicieron dos cortes, uno en la dirección 'X' y el otro en la dirección 'Y'. Los valores de la posición contra la intensidad de cada corte fueron almacenados y posteriormente graficados. De las gráficas se obtuvieron las posiciones del máximo principal y del primer mínimo. Esta diferencia de posiciones Δx (en pixels), se convirtió a una diferencia angular $\Delta\theta$ (en *radianes*) mediante la siguiente expresión:

$$\Delta\theta = \frac{8.8\pi}{768 \cdot 180} m \Delta x \quad (1)$$

donde m es la pendiente de la curva de calibración (en $^\circ/\text{mm}$). Las constantes aparecen porque en el CCD se tienen 768 pixels en 8.8 mm y porque el resultado se quería expresado en radianes.

Ahora bien, se sabe que en el patrón de *Airy* la mitad del ancho del máximo principal Δr_0 (es decir, la posición del primer mínimo) está dada por la expresión^[1]:

$$\Delta r_0 = 1.22 \frac{\lambda z}{a} \quad (2)$$

donde λ es la longitud de onda, a es el diámetro del pinhole y z es la distancia del orificio al punto de observación. Despejando a se obtiene:

$$a = 1.22 \frac{\lambda z}{\Delta r_0} \quad (3)$$

que se puede expresar como:

$$a = 1.22 \frac{\lambda}{\Delta\theta} \quad (4)$$

Este cambio es posible debido a que, como se está trabajando en la región de difracción de *Fraunhofer*, el cociente entre Δr_0 y z es pequeño, y puede ser expresado como una separación angular.

Por lo tanto, de la ecuación (4), como λ y $\Delta\theta$ son conocidas, se puede obtener el diámetro, a , del pinhole.

Los diámetros obtenidos de esa forma se compararon con los obtenidos por difracción directa, y de esa manera se pudo determinar si los resultados del sistema coincidían con los valores conocidos.

El mismo procedimiento se repitió para los cortes en X y en Y^2 con el fin de verificar que la imagen fuera simétrica. Esto resultó cierto ya que, para cada imagen, el radio que se obtenía en la dirección X era prácticamente el mismo que se obtenía en la dirección Y , salvo una diferencia que cae dentro del intervalo de incertidumbre de cada medición.

También se repitió el procedimiento anterior para diferentes ángulos del pinhole respecto al eje óptico del sistema (que equivale a diferentes ángulos de la superficie cuando se obtienen los patrones por reflexión). Esto era necesario para probar que el sistema funcionara bien a diferentes ángulos de observación puesto que, de acuerdo con el diseño, la calidad de la imagen es distinta para diferentes ángulos. De hecho, se sabe que a un ángulo de observación entre 60° y 80° se produce la peor imagen debido a que las aberraciones son mayores en este intervalo. Por otro lado, a un ángulo de 40° las aberraciones se reducen y se tiene que la imagen es mejor que a otros ángulos. Como se verá más adelante, esto se observó cuando se hizo el análisis de las imágenes obtenidas con una superficie rugosa unidimensional como muestra.

² Para el análisis de los cortes en Y cambian los valores de algunas constantes ya que, en esa dirección se tienen 494 pixels en 6.6mm.

3.2 Resultados de las pruebas.

Como se mencionó anteriormente, el análisis de resultados se hizo con las herramientas del programa *MATLAB 5.3*. En esta sección se presentan los resultados de estos análisis.

En la figura 1a, se puede observar una de las imágenes que se obtuvieron con el sistema para el pinhole de $15\ \mu\text{m}$. Las figuras 1b y 1c muestran las gráficas de los valores experimentales para los cortes en X y Y, respectivamente, comparados con la gráfica del patrón de *Airy* correspondiente.

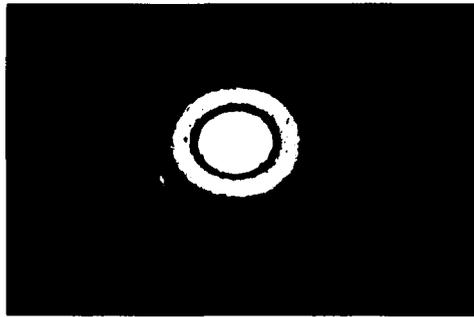


Figura 1a. Patrón de difracción del pinhole de $15\ \mu\text{m}$.

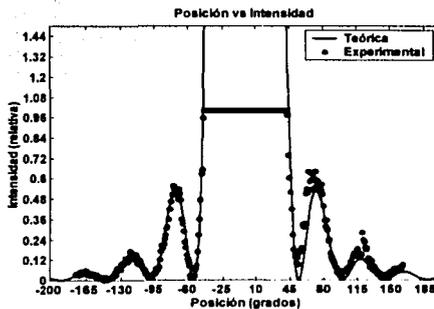
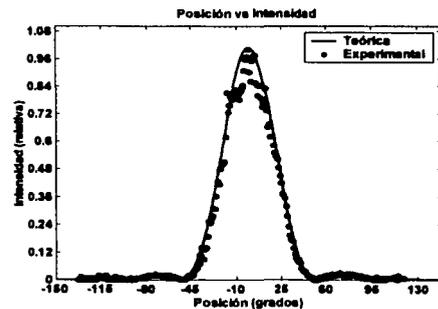


Figura 1b. Comparación de los máximos secundarios de la gráfica teórica con los datos experimentales para el pinhole de $15\ \mu\text{m}$.



Gráfica 1c. Comparación del máximo principal de la gráfica teórica con los datos experimentales para el pinhole de $15\ \mu\text{m}$.

En la figura 1b se muestran los primeros máximos secundarios omitiendo el máximo principal, debido a que su intensidad es tan grande, comparada con la de los otros máximos, que cuando

aparecen los máximos secundarios la región del máximo principal está saturada y no es posible obtener información de esa zona del CCD. Por otro lado, en la figura 1c se muestra el máximo principal una vez que se redujo la intensidad para que pudiera ser observado³. En esta figura, se puede ver que los máximos secundarios son mucho menos intensos que el máximo principal.

Es fácil ver que, a pesar del ruido⁴ en las mediciones, en ambos casos el comportamiento de los valores experimentales es el que se esperaba de acuerdo con la teoría de difracción. El valor del diámetro del pinhole obtenido por medición directa es de $18.2 \pm 0.4 \mu\text{m}$ mientras que el valor que se obtuvo de las gráficas anteriores es de $18.26 \pm 0.47 \mu\text{m}$. Como se puede ver, ambos valores coinciden dentro del intervalo de incertidumbre de la medición directa y la diferencia entre ambos es sólo del 0.33% de este valor, por lo que se puede concluir que el resultado obtenido de la imagen del sistema es correcto ya que ambos valores están dentro de los límites de los errores.

Ahora bien, en la figura 2a se muestra la imagen del patrón de difracción para el pinhole de 25 μm . En las figuras 2b y 2c se muestran las gráficas de los valores experimentales comparados con la gráfica de la expresión matemática correspondiente.



Figura 2a. Patrón de difracción del pinhole de 25 μm .

³ En las figuras correspondientes al pinhole de 25 μm , las gráficas b y c representan lo mismo que las correspondientes a este caso.

⁴ Este ruido puede aparecer por diferentes razones como: presencia de partículas de polvo en la superficie de los elementos ópticos, reflexiones parásitas que se superpongan con la imagen, alguna fuente externa de luz (como el monitor de la computadora), etc.

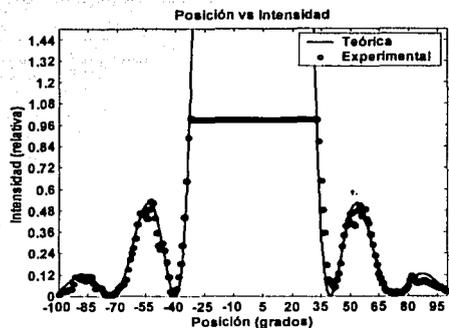


Figura 2b. Comparación de los primeros máximos de la gráfica teórica con los datos experimentales para el pinhole de 25 μm .

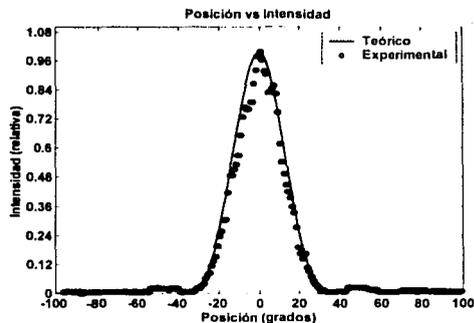


Figura 2c. Comparación del máximo principal de la gráfica teórica con los datos experimentales para el pinhole de 25 μm .

En este caso, de los datos experimentales se obtiene un diámetro para la abertura circular de aproximadamente $28.84 \pm 0.46 \mu\text{m}$ mientras que el valor medido por difracción directa es $28.2 \pm 0.4 \mu\text{m}$. Es decir, la diferencia entre ambos valores es de apenas 2.27% del valor medido por difracción directa y coinciden dentro de los intervalos de errores. Por lo tanto, se puede pensar que el valor obtenido de la imagen del sistema está bien.

Como una última prueba por transmisión, se utilizó un cabello humano en el sistema. De acuerdo con el principio de *Babinet*^[1], si lo colocamos frente al haz láser se debe producir un patrón de difracción similar al de una rendija de ancho igual al ancho del cabello y, en consecuencia, podemos usar este hecho para determinarlo.

El procedimiento para esta prueba fue el mismo que en las anteriores, a diferencia de que en este caso se colocó el cabello en la montura construida para los pinholes. En la figura 3a, se muestra la imagen del patrón de difracción del cabello obtenida con el sistema.

La figura 3b es la comparación entre las gráficas de la expresión teórica para el patrón de difracción de una rendija y los datos experimentales.

El análisis se hizo tomando en la imagen la distancia entre dos mínimos consecutivos, ya que a partir de esa información se puede obtener el ancho del cabello. Dicha distancia está dada por:

$$\Delta x = \frac{\lambda z}{a} \quad (5)$$

donde a es el ancho de la rendija (o en este caso del cabello), λ la longitud de onda y z la distancia de la rendija a la pantalla. Despejando a y cambiando el cociente entre Δx y z por su equivalente angular, se llega a que:

$$a = \frac{\lambda}{\Delta\theta} \quad (6)$$



Figura 3a. Patrón de difracción del cabello.

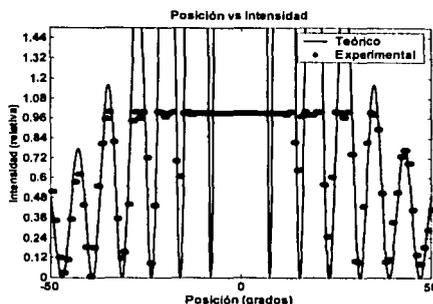


Figura 3b. Comparación entre algunos máximos de la gráfica teórica y los datos experimentales para el cabello.

Para este caso, el ancho obtenido del sistema es $102.93 \pm 0.41 \mu\text{m}$ y el medido por difracción directa es $102.8 \pm 0.6 \mu\text{m}$. Como se puede ver, estos valores son muy similares y la diferencia entre ellos ($\sim 0.1\%$) queda dentro del intervalo de incertidumbre de la medición directa. Por lo tanto, podemos concluir que el sistema funciona apropiadamente.

3.3 Pruebas con una superficie rugosa unidimensional.

La superficie rugosa que se utilizó para probar el sistema, es una superficie con distribución de alturas de tipo gaussiana^[2] donada por el CICESE de Ensenada, Baja California. Este tipo de superficies esparcen la luz en un plano y dan una distribución de intensidad con forma de una gaussiana, es decir, la intensidad de la luz reflejada es mayor en el centro y va disminuyendo conforme nos alejamos de él. Los parámetros de la superficie utilizada son: $a = 6.75 \mu\text{m}$ y

$\sigma = 0.75043 \mu\text{m}$ donde a es la desviación estándar de la distribución de correlación de las distancias entre los distintos picos de la superficie y σ es la desviación estándar de la distribución de alturas. Estos parámetros fueron medidos con un aparato de contacto de apuntador *Talystep*⁵.

Para realizar las mediciones, se siguió un procedimiento similar al de las otras pruebas, es decir, se colocó la superficie en la montura y se estableció su posición angular para después obtener en la cámara la imagen de la luz esparcida.

Este procedimiento se hizo para diferentes ángulos de incidencia con el fin de comparar los resultados con el modelo teórico en distintas situaciones. Los ángulos de incidencia que se estudiaron fueron 0° , 20° , 40° y 65° . En cada caso se obtuvieron imágenes que posteriormente fueron analizadas con una metodología similar a la utilizada en las primeras pruebas. Después, se graficaron los datos obtenidos del corte para compararlos con la gráfica que se obtiene del modelo teórico (basado en la aproximación de *Kirchhoff*) para una superficie con los mismos parámetros que la superficie utilizada. A continuación se presentan los resultados.

Para un ángulo de incidencia de 0° , se obtuvo la siguiente imagen⁶:

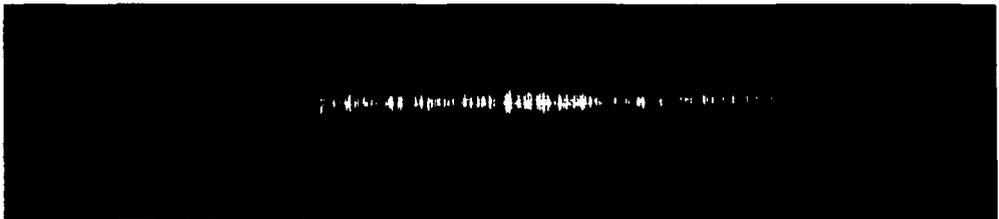


Figura 4a. Patrón de esparcimiento de la superficie unidimensional para incidencia a 0° .

⁵ Para más información sobre este aparato se puede visitar el sitio oficial del fabricante en: <http://www.taylor-hobson.com/usa/surtronicduo.htm>

⁶ La figura 4a muestra la imagen de la luz esparcida por la superficie tal como se obtuvo con el sistema.

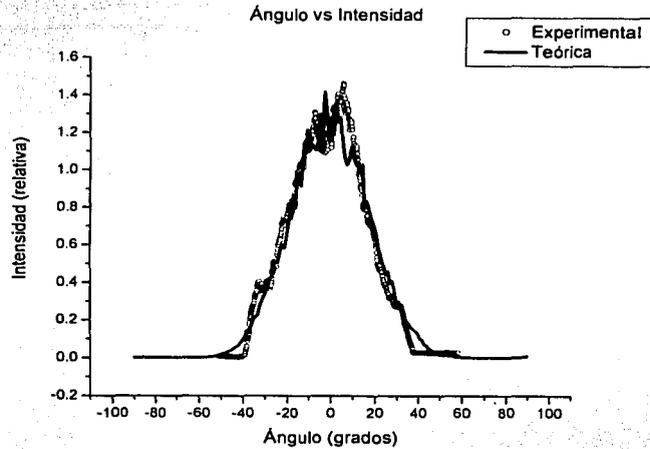


Figura 4b. Comparación entre la gráfica teórica y los datos experimentales para incidencia normal.

La Figura 4b es la comparación entre la gráfica obtenida del corte en la imagen dada por el sistema y la obtenida con el modelo teórico. Como se puede ver, el comportamiento de la intensidad que se obtuvo con el sistema es similar al comportamiento que se esperaba y, además, ambos picos tienen anchos similares (la diferencia entre los anchos de ambos picos es del 1.86% del valor teórico). Es importante mencionar que los datos experimentales que se muestran en la gráfica no corresponden a los datos tal como se obtuvieron con el sistema ya que, debido al *speckle*⁷, los datos originales daban una gráfica muy ruidosa. Para reducir este ruido se hizo un promedio de 50 puntos sobre todos los datos de la gráfica, es decir, para cada punto en la gráfica, se tomaban 25 puntos a su izquierda y 25 a su derecha y se hacía un promedio entre todos ellos. El valor promedio así obtenido se asignaba al punto original. Estos promedios se hicieron sobre un ángulo de $\sim 2^\circ$ con el programa Origin 6.1⁸.

Ahora, para incidencia a 20° se obtuvo⁹:

⁷ El *speckle* es un fenómeno que se presenta debido a la gran coherencia temporal del láser. Se manifiesta como un patrón de interferencia que incluye zonas claras y oscuras dentro del haz.

⁸ El mismo procedimiento se siguió para hacer el análisis de todas las imágenes de la superficie rugosa unidimensional.

⁹ La figura 5a muestra la imagen, obtenida con el sistema, del patrón de esparcimiento de la superficie.

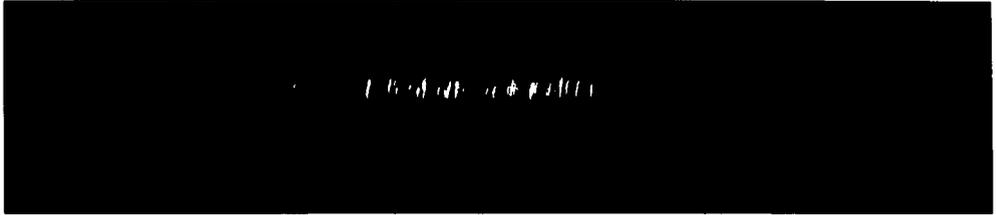


Figura 5a. Patrón de espaciamiento en la superficie unidimensional para incidencia a 20° .

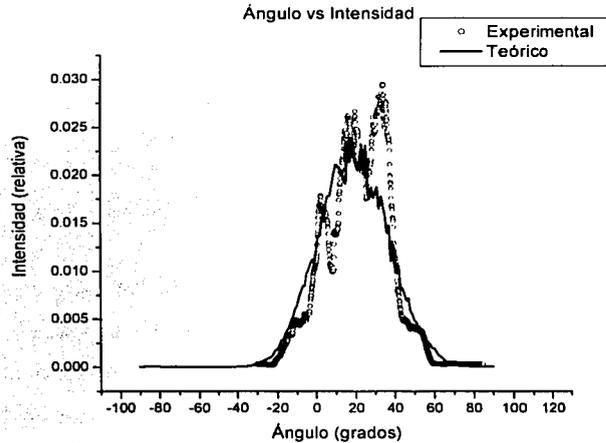


Figura 5b. Comparación entre la gráfica teórica y los datos experimentales para incidencia a 20° .

En este caso, también se observa que el comportamiento de la intensidad, según la imagen del sistema, es similar a su comportamiento de acuerdo con el modelo teórico y, una vez más, los anchos de ambos picos son similares (en este caso, la diferencia entre ambos anchos es del 2.09% del ancho del pico teórico).

La figura 6 muestra la comparación entre experimento y teoría para incidencia a 40° . Como se puede apreciar, en este caso también se tiene que el comportamiento es como el esperado para una superficie de las características de la muestra de prueba. Sin embargo, los anchos de ambos picos difieren en 11.86% del ancho del pico teórico. Una posible explicación de esto es

que la variación en este caso se puede deber a que este ángulo de observación está en el intervalo dónde las aberraciones que se esperan, de acuerdo con el diseño, son mayores¹⁰.

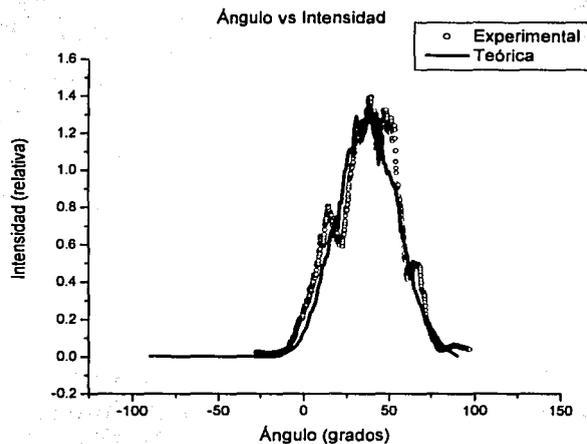


Figura 6. Comparación entre la gráfica teórica y los datos experimentales para incidencia a 40°.

Por último, para incidencia a 65° tenemos:

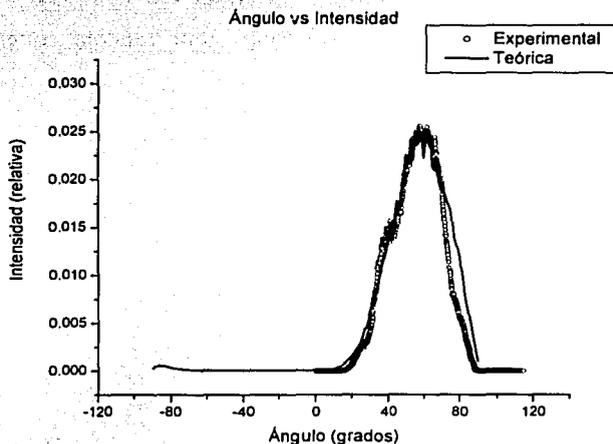


Figura 7. Comparación entre la gráfica teórica y los datos experimentales para incidencia a 65°.

¹⁰ Como ya se mencionó, este intervalo va de los 60° a los 80°.

En este último caso también se nota que el comportamiento de los datos experimentales es como el esperado de acuerdo con el modelo teórico con que se cuenta. La diferencia entre el ancho a altura media de ambos picos es del 8.05% del valor del pico teórico, sin embargo, en este caso el ángulo de observación también corresponde a un ángulo dentro del intervalo de mayores aberraciones.

Para todos los casos anteriores también se hizo un análisis estadístico de tipo χ^2 para tener una medida de qué tan parecidas son las gráficas teóricas de las experimentales. Con este análisis se encontró que el máximo valor de χ^2 se tiene para el caso de incidencia a 40° tomando un valor de 1.19×10^{-2} , lo cual nos indica que, en general, los valores experimentales son bastante parecidos a los valores teóricos.

Debido a que en todas las pruebas se observó que las imágenes obtenidas por el sistema se comportan de manera similar a como se esperaba, se llegó a la conclusión de que el sistema arroja resultados satisfactorios de acuerdo con la teoría.

3.4 Referencias.

1. E. Hetch, "Optics", Addison-Wesley, 3rd. Edition, USA, (1998).
2. S.A. Ogilvy, "Theory of wave scattering from random rough surfaces", Hilger, London, (1991).

Capítulo 4

Teoría de la polarización en el esparcímetro

4.1 Efectos de la polarización.

En el estudio del esparcimiento en superficies rugosas, es importante hacer un análisis de los efectos de la polarización de la luz. Esto es de trascendencia debido a que cada vez que un haz de luz es reflejado, puede cambiar su estado de polarización dependiendo de las propiedades del material en el que se refleja y de la forma de su superficie. Sin embargo, a pesar de la importancia de los cambios de polarización, en este trabajo solamente se incluye un análisis teórico de éstos debido a la falta del equipo necesario para medirlos, quedando pendiente su estudio experimental para un trabajo futuro.

Cuando un haz de luz incide en un material, el valor del cociente entre el índice de refracción del medio en el que viaja y el índice de refracción del medio sobre el que incide, así como el ángulo de incidencia, determinan el comportamiento posterior del haz. Es decir, dependiendo del valor de este cociente, así como el valor del ángulo de incidencia, el haz puede ser transmitido o reflejado. Por ejemplo, cuando se tiene un material con índice de refracción real (un material transparente), la luz será casi completamente transmitida para ángulos de incidencia pequeños, a excepción de una pequeña parte que será reflejada. Sin embargo, cuando se tiene un material con índice de refracción complejo¹, como en el caso de los metales, la luz será casi completamente reflejada.

Por otro lado, la polarización de la luz se puede ver como la suma de dos componentes, una paralela al plano de incidencia, p , y la otra ortogonal a éste, s . El valor de los coeficientes de *Fresnel*⁽¹⁾ que determinan la proporción de la energía incidente que es reflejada y la que es transmitida, es diferente para cada una de estas componentes de la polarización, de ahí la importancia de conocer el valor de estos coeficientes para cada componente.

¹ Cuando un material tiene índice de refracción complejo, la parte real está asociada a la refracción de la luz y la parte imaginaria a la absorción.

El análisis que aquí se presenta se basa en la siguiente idea: para cada rayo reflejado en la superficie rugosa, se define un plano ortogonal al rayo sobre el cual se tomarán las componentes de polarización. Este plano está definido por los vectores \hat{H} y \hat{V} , donde \hat{H} es un vector unitario ortogonal al rayo pero paralelo al plano de la mesa y \hat{V} es un vector unitario que es ortogonal tanto al vector \hat{H} como al rayo. Cuando el rayo incide en el espejo elíptico, se debe analizar la polarización en términos de las componentes paralela, p , y ortogonal, s , al plano de incidencia ya que, como ya se mencionó, es para estas componentes para las que están dados los coeficientes de *Fresnel*. Esto implica una transformación entre el sistema $\hat{H}-\hat{V}$ y el sistema del plano de incidencia, $\hat{p}-\hat{s}$. Dicha transformación no es más que una rotación (ver figura 1).

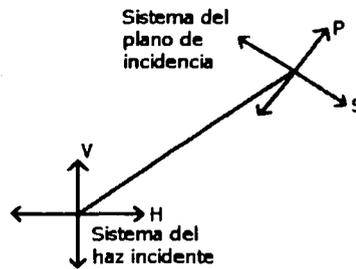


Figura 1. Rotación del sistema de referencia para estudiar el cambio de polarización.

Una vez que el rayo ha sido reflejado, se define el sistema $\hat{H}'-\hat{V}'$ que, de la misma manera que el sistema $\hat{H}-\hat{V}$, es ortogonal al rayo. La manera de pasar entre el nuevo sistema y el sistema del plano de incidencia es, nuevamente, una rotación.

En este capítulo se presenta la forma explícita de los vectores que determinan cada plano, en términos del punto de incidencia del rayo en el espejo. Así mismo, se presenta la forma que tienen los coeficientes de *Fresnel* para cada componente de polarización.

4.2 Estudio geométrico de la polarización.

El análisis de los efectos de la polarización dentro del esparcímtero se basó en las propiedades geométricas de los elipsoides. La figura 2 muestra la geometría del problema e indica el vector

normal a la superficie, \hat{n} , el vector que representa al haz incidente, \hat{s} , el vector que va del origen al punto de incidencia y la orientación y sentido de los ejes X, Y y Z.

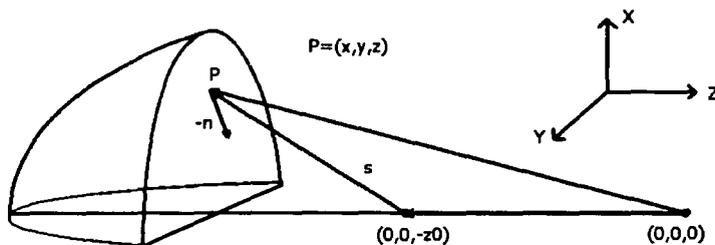


Figura 2. Diagrama que muestra la geometría del problema.

La ecuación de un elipsoide de revolución con centro en el origen y cuyo eje de giro está sobre el eje Z es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (1)$$

Si consideramos esta ecuación como la curva de nivel $f(x,y,z)=1$ de una función $f: \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}$ entonces:

$$f(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad (2)$$

El gradiente de esta función define un vector ortogonal a su superficie en cada punto y está dado por:

$$\nabla f = \left(\frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{a^2}, \frac{2z}{c^2} \right) \quad (3)$$

de donde:

$$\|\nabla f\| = \frac{2}{a^2} \sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^4 z^2} \quad (4)$$

Por lo tanto, el vector unitario normal a la superficie del elipsoide en el punto (x, y, z) es:

$$\hat{n} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^4 z^2}} \left(x, y, \left(\frac{a}{c}\right)^2 z \right) \quad (5)$$

Por otro lado, si \vec{s} es el vector que va del primer foco, con coordenadas $(0, 0, -z_0)$, al punto de incidencia (x, y, z) , el vector unitario en esa dirección estará dado por:

$$\hat{s} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} (x, y, z + z_0) \quad (6)$$

Ambos vectores definen el plano de incidencia. El ángulo de incidencia del haz en el espejo (medido desde la normal) es el ángulo entre \hat{s} y \hat{n} , que está dado por:

$$\cos \alpha = \hat{n} \cdot \hat{s} \quad (7)$$

ya que los dos vectores son unitarios. Sustituyendo las expresiones para cada vector tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 z(z + z_0)}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^4 z^2} \sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} \quad (8)$$

pero sobre el elipsoide se tiene que:

$$x^2 + y^2 = a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} \quad (9)$$

de donde, la ecuación (8) se reduce a:

$$\cos \alpha = \frac{a^2 \left(1 + \frac{zz_0}{c^2}\right)}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}} \sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + (z + z_0)^2}} \quad (10)$$

que es la expresión para el ángulo de incidencia. Como se puede ver, esta ecuación no tiene dependencia en x ni en y , solamente depende de z . Esto es comprensible si consideramos que el elipsoide tiene simetría de revolución por lo que, para una z dada, la línea que va del primer foco al punto de incidencia, describe un cono.

Ahora se buscará expresar el vector de incidencia \hat{s} , en términos del ángulo que hace en el plano y - z , θ , y el que hace respecto a la dirección ortogonal a este plano, ϕ .

En la figura 3, se presenta un esquema de la forma como están dados los ángulos del vector de incidencia.

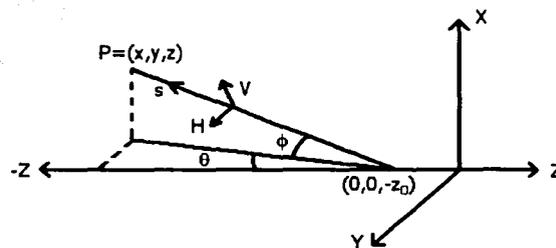


Figura 3. Coordenadas del rayo incidente como función de sus ángulos directores.

De la figura, se puede ver que el vector de incidencia estará dado por:

$$\hat{s} = (\sin \phi, -\sin \theta \cos \phi, -\cos \theta \cos \phi) \quad (11)$$

donde θ y ϕ están dadas por:

$$\theta = \arctan\left(\frac{s_y}{s_z}\right) \quad (12)$$

y

$$\phi = \arctan\left(\frac{s_x}{\sqrt{s_y^2 + s_z^2}}\right) \quad (13)$$

para s_x , s_y y s_z las componentes del vector incidente \hat{s} . Sin embargo, la ecuación (12) solamente es válida para ángulos menores que 90° . Si se tiene un ángulo mayor, dicha ecuación estará dando el valor del complemento del ángulo de interés por lo que en esa región, es necesario introducir un signo menos dentro del argumento de la función inversa de la tangente para obtener el valor del ángulo que nos interesa.

Por otro lado, también es necesario encontrar los vectores horizontal y vertical, correspondientes a cada vector de incidencia. Dichos vectores son de la siguiente forma (ver figura 3):

$$\hat{H} = (0, \cos\theta, -\sin\theta) \quad (14)$$

y

$$\hat{V} = (\cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \sin\phi \cos\theta) \quad (15)$$

Ahora bien, como se conocen los dos vectores que generan el plano de incidencia, se puede encontrar el vector ortogonal a este plano haciendo el producto cruz entre ellos, es decir:

$$\vec{s}_{local} = \hat{s} \times \hat{n} \quad (16)$$

de donde, se obtiene:

$$\vec{s}_{local} = \left(\frac{\cos \phi \left(y \cos \theta - \frac{a^2}{c^2} z \sin \theta \right) - \left(x \cos \theta \cos \phi + \frac{a^2}{c^2} z \sin \phi \right)}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}}, \frac{y \sin \phi + x \sin \theta \cos \phi}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \right) \quad (17)$$

La norma de \vec{s}_{local} se puede calcular fácilmente usando la siguiente relación:

$$\|\vec{s}_{local}\| = \|\hat{s} \times \hat{n}\| = \sin \alpha \quad (18)$$

ya que \hat{s} y \hat{n} son unitarios y α es el ángulo de incidencia dado por la ecuación (10). De las dos últimas expresiones, se puede ver que:

$$\hat{s}_{local} = \left(\frac{\cos \phi \left(y \cos \theta - \frac{a^2}{c^2} z \sin \theta \right) - \left(x \cos \theta \cos \phi + \frac{a^2}{c^2} z \sin \phi \right)}{\sin \alpha \sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}}, \frac{y \sin \phi + x \sin \theta \cos \phi}{\sin \alpha \sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \right) \quad (19)$$

De manera similar, se puede encontrar el vector que determina la dirección de polarización paralela al plano de incidencia. Este vector estará definido de la siguiente manera:

$$\hat{p}_{local} = \hat{n} \times \hat{s}_{local} \quad (20)$$

Haciendo este producto se obtiene que el vector paralelo al plano de incidencia es de la forma:

$$\vec{p}_{local} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \left(y s_{lz} - \frac{a^2}{c^2} z s_{ly}, \frac{a^2}{c^2} z s_{lx} - x s_{lz}, x s_{ly} - y s_{lx} \right) \quad (21)$$

En la ecuación anterior, se han llamado s_{lx} , s_{ly} y s_{lz} a las componentes del vector \hat{s}_{local} con el fin de escribir \vec{p}_{local} en forma abreviada. La norma de \vec{p}_{local} está dada por:

$$\|\vec{p}_{local}\| = \|\hat{n} \times \hat{s}_{local}\| = 1 \quad (22)$$

ya que ambos vectores son unitarios y ortogonales. Por lo tanto, el vector unitario en la dirección paralela al plano de incidencia estará dado por:

$$\hat{p}_{local} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \left(y s_{lz} - \frac{a^2}{c^2} z s_{ly}, \frac{a^2}{c^2} z s_{lx} - x s_{lz}, x s_{ly} - y s_{lx} \right) \quad (23)$$

Una vez conocidos los vectores que determinan las direcciones paralela y ortogonal al plano de incidencia, se debe encontrar el ángulo de rotación que permite pasar del sistema definido por los vectores \hat{H} y \hat{V} al sistema definido por \hat{p}_{local} y \hat{s}_{local} .

El ángulo de rotación entre ambos sistemas está dado por la siguiente expresión:

$$\theta_r = \arccos(\hat{H} \cdot \hat{s}_{local}) \quad (24)$$

Sustituyendo las expresiones para cada vector y reduciendo la expresión se encuentra que:

$$\theta_r = \arccos \left(\frac{x \cos \phi + \left(\frac{a^2}{c^2} z \cos \theta + y \sin \theta \right) \sin \phi}{\sin \alpha \sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \right) \quad (25)$$

Conocido el ángulo de rotación, se puede pasar de cualquier vector en el sistema $\hat{H}-\hat{V}$ al sistema $\hat{p}_{local}-\hat{s}_{local}$ mediante la matriz de rotación:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix} \quad (26)$$

es decir, si se tiene un vector de coordenadas (h, v) en el sistema $\hat{H}-\hat{V}$, después de la rotación se tendrá un vector (p_l, s_l) en el sistema $\hat{p}_{local}-\hat{s}_{local}$, que estará dado por:

$$\begin{pmatrix} p_l \\ s_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_r & \sin \theta_r \\ -\sin \theta_r & \cos \theta_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix} \quad (27)$$

de donde:

$$p_l = h \cos \theta_r + v \sin \theta_r \quad (28)$$

y

$$s_l = -h \sin \theta_r + v \cos \theta_r \quad (29)$$

Después de que el rayo haya sido reflejado en el espejo, su dirección hará un ángulo θ' en un plano paralelo al plano y-z y un ángulo ϕ' en la dirección ortogonal a ese plano (ver figura 4).

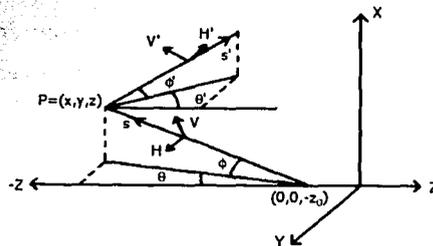


Figura 4. Coordenadas del rayo reflejado como función de sus ángulos directores.

En base a estos ángulos, las componentes del vector reflejado se pueden escribir como:

$$\hat{s}' = (\sin \phi', \cos \phi' \sin \theta', \cos \phi' \cos \theta') \quad (30)$$

y también, se puede encontrar que los vectores \hat{H}' y \hat{V}' para este caso son:

$$\hat{H}' = (0, -\cos \theta', \sin \theta') \quad (31)$$

y

$$\hat{V}' = (\cos \phi', -\sin \phi' \sin \theta', -\sin \phi' \cos \theta') \quad (32)$$

El ángulo de rotación que permite pasar del sistema $\hat{p}_{local} - \hat{s}_{local}$ al sistema $\hat{H}' - \hat{V}'$ está dado por:

$$\theta_r' = \arccos(\hat{H}' \cdot \hat{s}_{local}) \quad (33)$$

de donde:

$$\theta_r' = \arccos(s_{iz} \sin \theta' - s_{iy} \cos \theta') \quad (34)$$

Conocido el ángulo de rotación entre ambos sistemas, como en el caso anterior, se puede escribir esa transformación como una matriz de la siguiente forma:

$$R' = \begin{pmatrix} \cos \theta_r' & \sin \theta_r' \\ -\sin \theta_r' & \cos \theta_r' \end{pmatrix} \quad (35)$$

Es decir, un vector (p_i, s_i) en el sistema $\hat{p}_{local} - \hat{s}_{local}$ tendrá coordenadas (h', v') en el sistema $\hat{H}' - \hat{V}'$ dadas por:

$$\begin{pmatrix} h' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_{r'} & \sin \theta_{r'} \\ -\sin \theta_{r'} & \cos \theta_{r'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ s_i \end{pmatrix} \quad (36)$$

dando como resultado:

$$h' = p_i \cos \theta_{r'} + s_i \sin \theta_{r'} \quad (37)$$

y

$$v' = -p_i \sin \theta_{r'} + s_i \cos \theta_{r'} \quad (38)$$

Con esto, es posible determinar el ángulo de rotación entre el plano $\hat{p}_{local} - \hat{s}_{local}$ y el plano $\hat{H}' - \hat{V}'$. Sin embargo, todavía falta determinar los ángulos ϕ' y θ' . Para esto, es necesario conocer la dirección del rayo reflejado.

La dirección del rayo reflejado está dada por^[2]:

$$\bar{s}' = \hat{s} - 2(\hat{s} \cdot \hat{n})\hat{n} \quad (39)$$

es decir:

$$\bar{s}' = \hat{s} - 2 \cos \alpha \hat{n} \quad (40)$$

Por lo tanto:

$$\hat{s}' = \frac{\bar{s}'}{\|\bar{s}'\|} \quad (41)$$

será el vector unitario en la dirección del rayo reflejado. Las componentes del vector \vec{s}' están dadas por:

$$s_x' = x \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + (z + z_0)^2}} - \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \right) \quad (42)$$

$$s_y' = y \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + (z + z_0)^2}} - \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \right) \quad (43)$$

y

$$s_z' = z \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + (z + z_0)^2}} - \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + \frac{a^4 z^2}{c^4}}} \right) + \frac{z_0}{\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2} + (z + z_0)^2}} \quad (44)$$

de donde:

$$\|\vec{s}'\| = \sqrt{(s_x')^2 + (s_y')^2 + (s_z')^2} \quad (45)$$

y entonces, el vector \hat{s}' estará dado por:

$$\hat{s}' = \frac{(s_x', s_y', s_z')}{\sqrt{(s_x')^2 + (s_y')^2 + (s_z')^2}} \quad (46)$$

Ahora es posible escribir los ángulos ϕ' y θ' en términos de las componentes de \hat{s}' . Dichos ángulos estarán dados por las siguientes ecuaciones:

$$\phi' = \arctan\left(\frac{s_x'}{\sqrt{s_y'^2 + s_z'^2}}\right) \quad (47)$$

y

$$\theta' = \arctan\left(\frac{s_y'}{s_z'}\right) \quad (48)$$

De manera similar que para el valor de θ , cuando θ' es mayor que 90° se debe introducir un signo menos en el argumento de la función inversa de la tangente ya que si no se hiciera esto, se obtendría el valor del complemento del ángulo de interés.

Para tener una idea de cómo son los valores de los ángulos de rotación de los sistemas respecto a los cuales se mide la polarización, para las distintas zonas del elipsoide, se hicieron unas gráficas en escala de grises que representan las entradas de la matriz de rotación. Las gráficas son las siguientes:

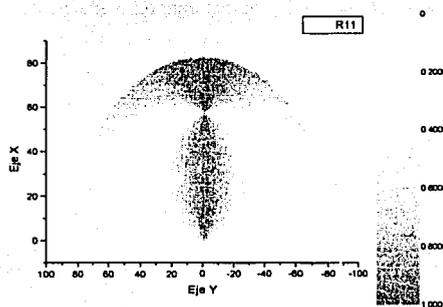


Figura 5. Primera componente de la matriz de la primera rotación.

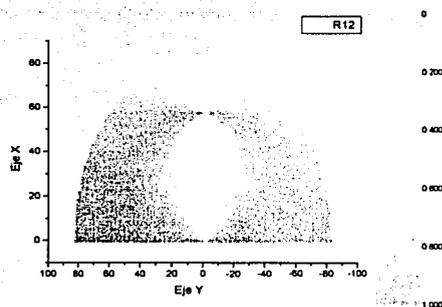


Figura 6. Segunda componente de matriz de la primera rotación.

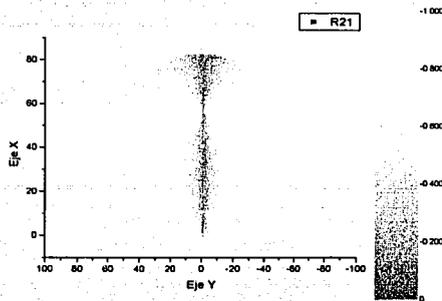


Figura 7. Tercera componente de la matriz de la primera rotación.

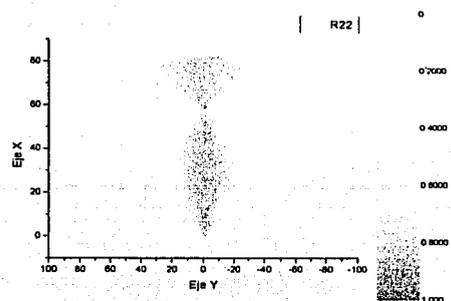


Figura 8. Cuarta componente de la matriz de la primera rotación.

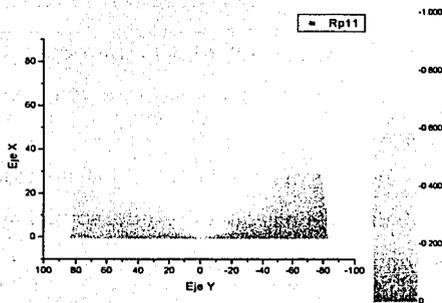


Figura 9. Primera componente de la matriz de la segunda rotación.

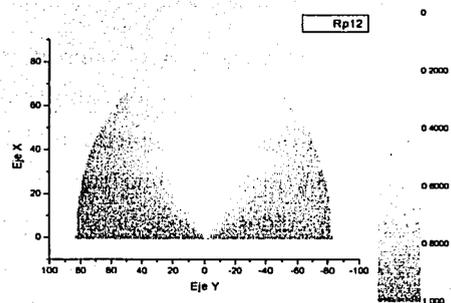


Figura 10. Segunda componente de la matriz de la segunda rotación.

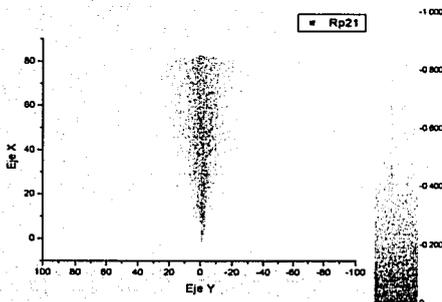


Figura 11. Tercera componente de la matriz de la segunda rotación.

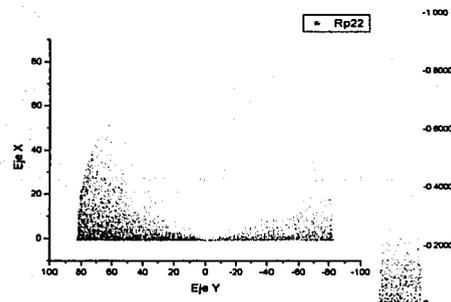


Figura 12. Cuarta componente de la matriz de la segunda rotación.

En las figuras anteriores, se han llamado R_y a las componentes de la matriz que describe la rotación del sistema $\hat{H}-\hat{V}$ cuando lo pasamos al sistema $\hat{p}_{local}-\hat{s}_{local}$. Por otro lado, las componentes de la segunda matriz de rotación (es decir, la que permite pasar del sistema $\hat{p}_{local}-\hat{s}_{local}$ al sistema $\hat{H}-\hat{V}$) se han llamado Rp_{ij} . La escala de grises está dada de manera que las zonas más claras corresponden a las zonas en las que cada componente es mínima y las zonas más oscuras corresponden a las zonas donde son máximas.

4.3 Reflectancia de un material general.

El coeficiente de *Fresnel* que determina qué proporción de la luz incidente es reflejada, es conocido con el nombre de reflectancia. Este coeficiente está dado, en términos de los índices de refracción del medio de incidencia y del material, así como de los ángulos de incidencia y refracción, de la siguiente forma^[2]:

$$R_{\parallel} = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t} \quad (49)$$

para la componente de polarización paralela al plano de incidencia y:

$$R_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (50)$$

para la componente ortogonal. En las expresiones anteriores n_1 es el índice de refracción del medio de incidencia y n_2 el del material sobre el que incide el haz (ver figura 13).

En el caso más general, es decir, el caso en el que n_2 es un número complejo, si tomamos el primer medio como aire ($n_1 = 1$), estas ecuaciones se pueden expresar de una forma útil como se muestra a continuación.

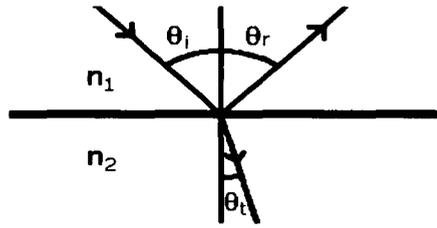


Figura 13. Esquema de la interfase entre dos medios con diferente índice de refracción.

Partiendo de la ley de *Snell*:

$$\sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (51)$$

y como n_2 , que es una cantidad compleja, puede escribirse de la siguiente manera:

$$n_2 = n + ik \quad (52)$$

entonces:

$$\sin \theta_t = \frac{\sin \theta_i}{n + ik} \quad (53)$$

Sustituyendo la ecuación (52) en la (49) se llega a que:

$$R_{\parallel} = \frac{(n + ik) \cos \theta_i - \cos \theta_t}{(n + ik) \cos \theta_i + \cos \theta_t} \quad (54)$$

Multiplicando la ecuación anterior por su complejo conjugado, se obtiene:

$$|R_1|^2 = \frac{(n^2 + k^2) \cos^2 \theta_i + |\cos \theta_i|^2 - \cos \theta_i (\cos \theta_i (n - ik) + (\cos \theta_i)^* (n + ik))}{(n^2 + k^2) \cos^2 \theta_i + |\cos \theta_i|^2 + \cos \theta_i (\cos \theta_i (n - ik) + (\cos \theta_i)^* (n + ik))} \quad (55)$$

Considérese la siguiente identidad:

$$\cos \theta_i = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i} \quad (56)$$

Si se sustituye la ecuación (53) para $\sin \theta_i$ en la ecuación (56), ésta puede escribirse como:

$$\cos^2 \theta_i = 1 - \frac{\sin^2 \theta_i}{(n + ik)^2} \quad (57)$$

Después, se define $\cos \theta_i$ como^[3]:

$$\cos \theta_i = q e^{i\gamma} \quad (58)$$

donde:

$$q^4 = \left(1 - \frac{(n^2 - k^2)}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i \right)^2 + \left(\frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i \right)^2 \quad (59)$$

y

$$\frac{1}{\tan 2\gamma} = \frac{1 - \frac{(n^2 - k^2)}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i}{\frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i} \quad (60)$$

La deducción de las ecuaciones (59) y (60) se muestra en el Apéndice B. Por otro lado, se tiene la siguiente relación:

$$a^*b + b^*a = 2(\operatorname{Re}(a)\operatorname{Re}(b) + \operatorname{Im}(a)\operatorname{Im}(b)) \quad (61)$$

donde a y b son números complejos. De la ecuación (58), se puede ver que:

$$|\cos\theta_i| = q, \quad (62)$$

$$\operatorname{Re}(\cos\theta_i) = q \cos\gamma \quad (63)$$

y

$$\operatorname{Im}(\cos\theta_i) = q \sin\gamma \quad (64)$$

Usando las ecuaciones (59)-(64), se obtiene que la ecuación (55) se puede expresar como:

$$|R_1|^2 = \frac{(n^2 + k^2)\cos^2\theta_i + q^2 - 2q\cos\theta_i(n\cos\gamma + k\sin\gamma)}{(n^2 + k^2)\cos^2\theta_i + q^2 + 2q\cos\theta_i(n\cos\gamma + k\sin\gamma)} \quad (65)$$

Separando los términos y completando los cuadrados de manera apropiada, esta ecuación puede ser escrita como:

$$|R_1|^2 = \frac{(n\cos\theta_i - q\cos\gamma)^2 + (k\cos\theta_i - q\sin\gamma)^2}{(n\cos\theta_i + q\cos\gamma)^2 + (k\cos\theta_i + q\sin\gamma)^2} \quad (66)$$

De la ecuación anterior, se puede demostrar que R_1 puede expresarse de la siguiente forma:

$$R = \frac{(n \cos \theta_i - q \cos \gamma) + i(k \cos \theta_i - q \sin \gamma)}{(n \cos \theta_i + q \cos \gamma) - i(k \cos \theta_i + q \sin \gamma)} \quad (67)$$

Finalmente, multiplicando el numerador y el denominador de esta última ecuación por el complejo conjugado del denominador, se puede ver que el coeficiente de reflexión para la componente paralela al plano de incidencia puede escribirse como:

$$R_{\parallel} = \frac{(n^2 \cos^2 \theta_i - q^2 \cos^2 \gamma) - (k^2 \cos^2 \theta_i - q^2 \sin^2 \gamma) + 2i(nk \cos^2 \theta_i - q^2 \sin \gamma \cos \gamma)}{(n \cos \theta_i + q \cos \gamma)^2 + (k \cos \theta_i + q \sin \gamma)^2} \quad (68)$$

Esta expresión solamente depende del ángulo de incidencia y del índice de refracción del medio sobre el que incide la luz, es decir, depende de parámetros que, en principio, son conocidos.

De manera similar, se puede encontrar una expresión equivalente para la componente ortogonal al plano de incidencia. Se comienza sustituyendo la ecuación (52) en la (50) y haciendo nuevamente $n_1 = 1$, de donde:

$$R_{\perp} = \frac{\cos \theta_i - (n + ik) \cos \theta_t}{\cos \theta_i + (n + ik) \cos \theta_t} \quad (69)$$

Multiplicando la relación anterior por su complejo conjugado se obtiene:

$$|R_{\perp}|^2 = \frac{\cos^2 \theta_i + (n^2 + k^2) \cos^2 \theta_t - \cos \theta_i ((n - ik) \cos^* \theta_t + (n + ik) \cos \theta_t)}{\cos^2 \theta_i + (n^2 + k^2) \cos^2 \theta_t + \cos \theta_i ((n - ik) \cos^* \theta_t + (n + ik) \cos \theta_t)} \quad (70)$$

Por otro lado, se tiene la identidad:

$$ab + a^* b^* = 2(\operatorname{Re}(a) \operatorname{Re}(b) - \operatorname{Im}(a) \operatorname{Im}(b)) \quad (71)$$

donde a y b son dos números complejos cualesquiera. Entonces, sustituyendo las ecuaciones (62), (63) y (64) en la ecuación (70), y usando la ecuación (71), se llega a que:

$$|R_{\perp}|^2 = \frac{\cos^2 \theta_i + (n^2 + k^2)q^2 - 2q \cos \theta_i (n \cos \gamma - k \sin \gamma)}{\cos^2 \theta_i + (n^2 + k^2)q^2 + 2q \cos \theta_i (n \cos \gamma - k \sin \gamma)} \quad (72)$$

Nuevamente, si se separan los términos y se completan los cuadrados apropiadamente se llega a que:

$$|R_{\perp}|^2 = \frac{(\cos \theta_i - (nq \cos \gamma - kq \sin \gamma))^2 + (nq \sin \gamma + kq \cos \gamma)^2}{(\cos \theta_i + (nq \cos \gamma - kq \sin \gamma))^2 + (nq \sin \gamma + kq \cos \gamma)^2} \quad (73)$$

Entonces, de la ecuación anterior, se puede expresar R_{\perp} como:

$$R_{\perp} = \frac{(\cos \theta_i - (nq \cos \gamma - kq \sin \gamma)) - i(nq \sin \gamma + kq \cos \gamma)}{(\cos \theta_i + (nq \cos \gamma - kq \sin \gamma)) + i(nq \sin \gamma + kq \cos \gamma)} \quad (74)$$

Por último, si se multiplican el numerador y el denominador de la ecuación (74) por el complejo conjugado del denominador, se llega a que:

$$R_{\perp} = \frac{(\cos^2 \theta_i - (nq \cos \gamma - kq \sin \gamma)^2) - (kq \cos \gamma + nq \sin \gamma)^2 - 2i \cos \theta_i (kq \cos \gamma + nq \sin \gamma)}{(\cos \theta_i + (nq \cos \gamma - kq \sin \gamma))^2 + (kq \cos \gamma + nq \sin \gamma)^2} \quad (75)$$

Esta última ecuación, al igual que la obtenida para la componente paralela, da una forma del coeficiente de reflexión en términos del ángulo de incidencia y del índice de refracción del material, que puede ser fácilmente utilizada.

El análisis anterior se hizo con la finalidad de poder conocer la polarización de la luz inmediatamente después de ser reflejada en la superficie rugosa. Para esto, es necesario conocer como cambia la polarización (como función del punto de incidencia) cuando el haz es

reflejado en el espejo elíptico, ya que después de esta reflexión es cuando la luz será detectada y su polarización será analizada.

Para el esparcímetro presentado en esta tesis, se utilizó un espejo de *Rhodio* que tiene un índice de refracción $n = 2.1643 + i5.6156$ para luz roja ($\lambda = 632.8\text{nm}$)^[4]. En las figuras 14, 15, 16 y 17 se muestra la forma de la dependencia de cada componente del coeficiente de reflexión como función del ángulo de incidencia.

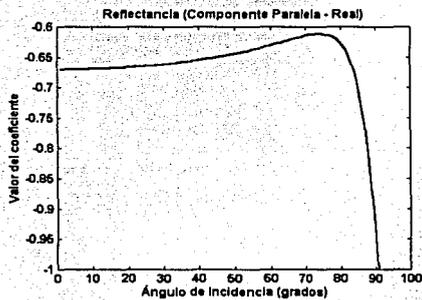


Figura 14. Dependencia de la parte real de la componente paralela de la reflectancia con el ángulo de incidencia.

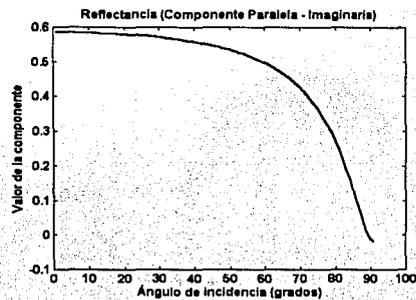


Figura 15. Dependencia de la parte imaginaria de la componente paralela de la reflectancia con el ángulo de incidencia.

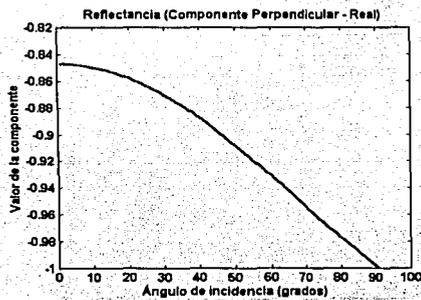


Figura 16. Dependencia de la parte real de la componente perpendicular de la reflectancia con el ángulo de incidencia.

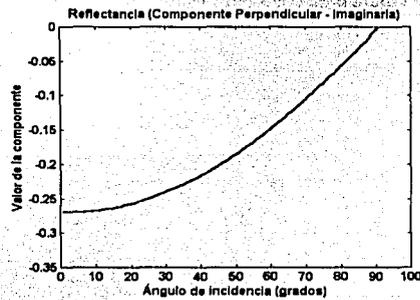


Figura 17. Dependencia de la parte imaginaria de la componente perpendicular de la reflectancia con el ángulo de incidencia.

En estas figuras se puede ver que para ambas componentes la parte real alcanza su valor mínimo (-1) a un ángulo de incidencia de 90° y, a ese mismo ángulo, la parte imaginaria alcanza un valor de 0.

Así mismo, se tiene que a 0° la parte imaginaria es mínima para la componente perpendicular y máxima para la componente paralela, mientras que la parte real es máxima para la componente perpendicular y tiende a -0.67 para la componente paralela.

Ahora, si se grafican los coeficientes de *Fresnel* en escala de grises (como se hizo con las matrices de rotación), se puede tener una idea de las zonas del espejo elíptico en las que los coeficientes son más grandes o más pequeños. Las gráficas son las siguientes:

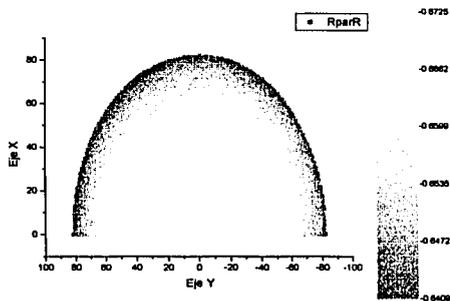


Figura 18. Parte real de la componente paralela de la reflectancia para cada punto sobre el elipsoide.

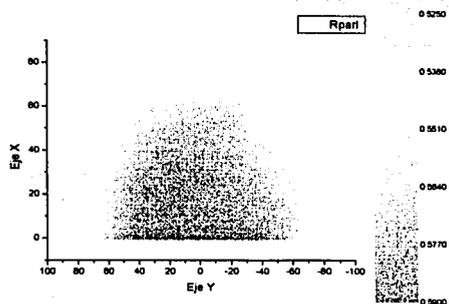


Figura 19. Parte imaginaria de la componente paralela de la reflectancia para cada punto sobre el elipsoide.

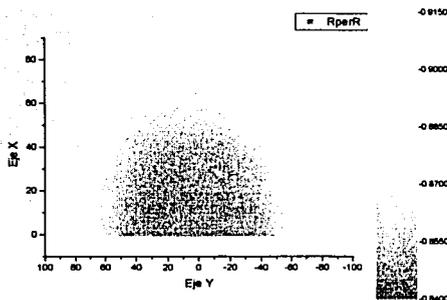


Figura 20. Parte real de la componente perpendicular de la reflectancia para cada punto sobre el elipsoide.

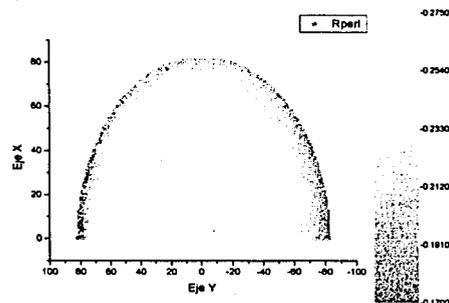


Figura 21. Parte imaginaria de la componente perpendicular de la reflectancia para cada punto sobre el elipsoide.

En las figuras anteriores se llamó *RparR* a la parte real del coeficiente de reflexión para la componente paralela al plano de incidencia, *RparI* a la parte imaginaria del mismo

coeficiente, R_{perR} a la parte real del coeficiente correspondiente a la componente perpendicular al plano de incidencia y R_{perI} a la parte imaginaria de ese coeficiente. La escala de grises está dada de la misma forma que en las gráficas de la primera rotación.

Por último, en las siguientes gráficas se muestran las componentes de la matriz final que incluye los efectos de ambas rotaciones y el efecto de la reflexión en el espejo. La escala de grises, igual que en las gráficas de las matrices de rotación, está dada de manera que las zonas en las que cada componente es mínima son las más claras y las zonas más oscuras corresponden a aquellas donde cada componente alcanza su valor máximo.

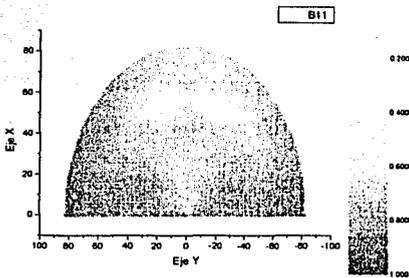


Figura 22. Primera componente de la matriz de polarización para cada punto sobre el elipsoide.

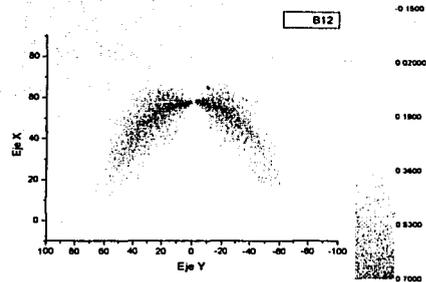


Figura 23. Segunda componente de la matriz de polarización para cada punto sobre el elipsoide.

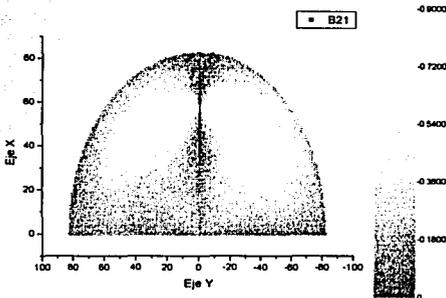


Figura 24. Tercera componente de la matriz de polarización para cada punto sobre el elipsoide.

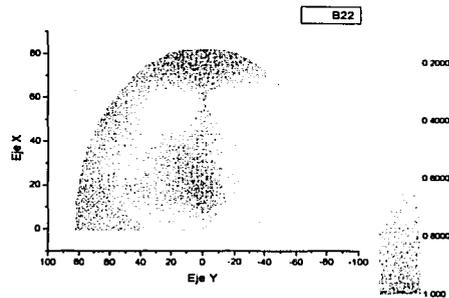


Figura 25. Cuarta componente de la matriz de polarización para cada punto sobre el elipsoide.

En esta última matriz, la componente B_{11} representa la porción de la luz que incide con polarización \hat{H} y sale del sistema con la misma polarización, B_{12} representa la luz que incide con polarización \hat{H} y sale del sistema con polarización \hat{V} , B_{21} es la porción de luz que incide con polarización \hat{V} y sale con polarización \hat{H} y B_{22} representa a la luz que incide con polarización \hat{V} y es reflejada con la misma polarización \hat{V} .

4.4 Referencias.

1. E. Hecht, "Optics", Addison-Wesley, 3rd Edition, USA, (1998).
2. W.T. Welford, "Aberrations of Optical Systems", Adam Hilger, Great Britain, (1991).
3. M. Born and E. Wolf, "Principles of Optics", Cambridge University Press, 7th Edition, USA, (1999).
4. E. Palik, "Handbook of Optical Constants of Solids", Academic Press, USA, (1985).

Capítulo 5

Conclusiones y trabajo a futuro

5.1 Conclusiones.

En esta tesis se presentó el diseño, construcción y primeras pruebas de un esparcímetro que, a diferencia de los reportados anteriormente, trabaja en todo el rango del visible así como en el infrarrojo cercano. El diseño es original y ha demostrado ser útil para mediciones de rugosidades unidimensionales en el orden de algunas micras.

Como se mencionó en el Capítulo 2, el hecho de aumentar el tamaño del plano imagen redujo el costo del sistema óptico necesario en el esparcímetro, haciéndolo más atractivo para aplicaciones en la industria.

A lo largo del Capítulo 3 se hizo hincapié en que los resultados obtenidos con este sistema concuerdan con los resultados obtenidos por otros métodos. Esto es importante porque nos da cierta certidumbre sobre los resultados del sistema y, de esta manera, se puede empezar a utilizar para analizar muestras que no hayan sido previamente caracterizadas.

Es importante mencionar que la máxima resolución alcanzada durante las pruebas del sistema fue de 0.3° siendo que el valor máximo de la resolución, de acuerdo con el diseño, es de 0.1° . Sin embargo, la máxima resolución que se obtuvo se alcanzó sin ningún problema, es decir, en las imágenes que se obtuvieron se veía una clara separación entre los picos de intensidad. De lo anterior, se concluye que se pueden resolver separaciones angulares aún menores a las logradas en estas pruebas. Por lo tanto, se espera que en futuras mediciones el sistema alcance una resolución cercana a la máxima resolución dada por el diseño.

5.2 Trabajo a futuro.

A pesar de que los resultados obtenidos hasta ahora son consistentes con lo que se esperaba y se ajustan a los obtenidos con otros métodos, aún falta por hacer una de las pruebas más

importantes que consiste en probar el sistema con una superficie rugosa bidimensional ya que, después de todo, el sistema se diseñó precisamente para caracterizar este tipo de superficies.

También queda pendiente probar el sistema con luz de otras longitudes de onda, aunque no se espera que cambien los resultados dado que el sistema de lentes fue diseñado para trabajar bien a cualquier longitud de onda en el intervalo del visible y del infrarrojo cercano.

Se deberán hacer ajustes al sistema para poder medir los estados de polarización tanto de la luz incidente como de la luz detectada en el CCD. Para esto, será necesario agregar al sistema elementos tales como polarizadores, que permitan conocer estos estados de polarización. Una vez que se haya logrado esto, se podrá pensar incluso en medir los elementos de la matriz de *Muller*^{[1][2]}, lo que hará más rápida la caracterización de superficies desconocidas.

En resumen, aún hay mucho trabajo por hacer para que el sistema sea capaz de caracterizar completamente superficies rugosas.

5.3 Referencias.

1. M. Born and E. Wolf, "Principles of Optics", Cambridge University Press, 7th Edition, USA, (1999).
2. N.C. Bruce, "Calculations of the Muller matrix for scattering of light from two-dimensional surfaces", *Waves in Random Media*, **8**, (1998), 15-28.

Apéndice A.

Automatización de la adquisición de datos.

Para automatizar la adquisición de datos en el esparcímetro, se escribió un programa en lenguaje C++ con ayuda del compilador *Microsoft Visual C++ 6.0*. Dicha aplicación se encarga de controlar el movimiento de tres platinas, así como de la activación oportuna de la cámara CCD para la adquisición de imágenes que posteriormente son analizadas.

Debido a que se quería que la interfase del programa fuera amigable para el usuario, se pensó en hacer un programa basado en las aplicaciones convencionales del sistema operativo *Windows*. Aquí fue muy útil la ayuda del compilador de *Visual C++* ya que éste permite la fácil creación de ventanas de diálogo y de control para programas que serán corridos en el sistema *Windows*. Cabe mencionar que en el compilador de *Microsoft*, el diseño gráfico de un programa es tan simple como pegar los controles (incluidos en el compilador) en la posición que se quiera dentro de la ventana.

Para construir el programa, primero se creó un espacio de trabajo y se eligió el tipo de ventana que se usaría en la aplicación. Las opciones son: ventana de diálogo, de interacción o de ayuda. En este caso se eligió una ventana de diálogo debido a que los parámetros del programa serán siempre los mismos. En la ventana de diálogo, se incluyeron tres controles del tipo *Check Box* y dos del tipo *Button*. Los controles *Check Box* fueron usados para que el usuario determine qué acción quiere que el programa realice. Las tres opciones son:

- 1) *Activar control de movimiento.*
- 2) *Activar control de cámara.*
- 3) *Activar todos los controles.*

Se configuraron los controles *Button* para que el usuario decidiera empezar con la adquisición de datos o salir de la aplicación.

Una vez que se tenían todos los controles colocados en la zona de la ventana que se quería, se crearon las variables necesarias para establecer la acción de cada control y, posteriormente, se introdujo el código fuente para cada uno de ellos.

Es importante aclarar que el código fuente de la parte gráfica de la aplicación fue elaborado en su totalidad por el compilador de *Visual C++* (de aquí la conveniencia de hacer el programa con este compilador).

Una ventaja dentro del compilador de *Visual C++* es que permite introducir, de manera automática, comentarios sobre las partes del programa que se crean cuando diseñamos la interfase gráfica. Esto puede ser de mucha utilidad para los programadores inexpertos ya que dichos comentarios permiten conocer de manera sencilla la acción de algunas de las funciones más utilizadas para la programación orientada a objetos en lenguaje *C++*.

También es importante que el código que se escriba incluya el mayor número de comentarios que sea posible dado que, si en algún momento posterior es necesario hacer cambios al código del programa, será más sencillo encontrar las partes que necesiten ser modificadas si los comentarios al código son claros y oportunos (esto es, en general, una buena práctica en la programación).

El código del programa para el control de movimiento se basa en un conjunto de librerías especiales para el control de tarjetas *GPIB*¹ (dichas librerías se pueden encontrar en la documentación incluida con la tarjeta o pueden ser descargadas de la página de *Internet* de *National Instruments* en www.ni.com). Estas librerías permiten hacer llamados a un conjunto de funciones predefinidas capaces de realizar tareas de comunicación básica con el dispositivo conectado a la tarjeta (comúnmente llamadas comandos de entrada y salida).

En esta parte del código es necesario incluir los archivos de cabecera "*windows.h*" y "*decl-32.h*" así como el archivo "*gpib-32.obj*". Dichos archivos incluyen las definiciones de las funciones y constantes básicas que permiten comunicarse con los instrumentos que son compatibles con las tarjetas *GPIB*.

Algunas de estas funciones (las más importantes) son:

- 1) *ibwrt*: Escribe comandos en el instrumento, es decir, es la función encargada de indicar al instrumento la acción a realizar.
- 2) *ibclr*: Permite vaciar el *Buffer* antes de escribir en él y después de terminado el intercambio de comandos con el instrumento.

¹ La tarjeta que se utilizó es una PCI-GPIB fabricada por National Instruments, y se conectó a un controlador Newport modelo ESP300.

- 3) *ibrd*: Lee del *Buffer* la respuesta del instrumento y de esta manera permite un proceso interactivo de comunicación.
- 4) *ibonl*: Permite cerrar o terminar la comunicación con el instrumento. Es necesario hacer esto al final de cada aplicación ya que, de otra forma, no sería posible volver a comunicarse con el instrumento (a menos que se apagara y se volviera a encender) dado que éste estaría esperando comunicación con la primera aplicación que le hizo un llamado.
- 5) *ibdeb*: Permite definir los parámetros de importancia que necesita conocer el *Sistema Operativo (SO)* para poder controlar el instrumento. Dichos parámetros se dan en una sola variable definida por el programador.
- 6) *ibcnll*: Nos permite terminar la cadena enviada al instrumento o la cadena enviada por el instrumento para que ésta pueda ser interpretada por el *SO*.

Como ya se mencionó, para poder controlar el instrumento es necesario incluir los valores para los parámetros de control, tales parámetros son los siguientes:

- 1) *Tamaño del Buffer de lectura*. Esto es importante para establecer el máximo número de caracteres a ser leídos del instrumento.
- 2) *Índice de la tarjeta*. Asignado por el *SO*. También llamado número de interfase. Le indica a la aplicación con cuál tarjeta *GPIB* (en caso de que exista más de una en el sistema) debe conectarse para establecer comunicación con el instrumento.
- 3) *Dirección primaria del instrumento*. Asignada por el *SO*. Permite a la aplicación establecer a cual instrumento (en caso de que estén conectados más de un instrumento a la misma tarjeta) se deben enviar los comandos introducidos por el usuario.
- 4) *Tiempo máximo de espera para respuesta del instrumento*. Después de un tiempo igual a éste, si el sistema no recibe respuesta del instrumento o recibe una respuesta que no es válida, automáticamente corta la comunicación.

En lo correspondiente a la adquisición de imágenes se encontró que, junto con el programa *Intellicam* (que se puede usar para controlar la cámara CCD), se incluye un conjunto de librerías especiales para *Visual C++ 6.0* que permiten controlar de manera sencilla la

adquisición de imágenes. Este conjunto de librerías definen un grupo de funciones (incluidas en el archivo de cabecera "*mil.h*") que hacen relativamente fácil la tarea de crear un programa para la adquisición y el almacenamiento de imágenes con la cámara CCD.

Las funciones más importantes para el control de la cámara mediante la tarjeta *Matrox Meteor II* son las siguientes:

- 1) *MappAllocDefault*: Esta función permite establecer los valores estándar de las variables a ser utilizadas (este proceso es conocido como inicialización).
- 2) *MdigGrab*: Permite la adquisición de imágenes desde la cámara y las conserva en el *Buffer* hasta que se finaliza la aplicación.
- 3) *MbufSave*: Nos permite guardar una imagen, que esté en el *Buffer*, en un archivo binario siempre y cuando éste sea de alguno de los formatos propios de los programas de *Matrox* (tales formatos son *mim*, *tif* y *raw*).
- 4) *MappFreeDefault*: Libera y vacía el contenido del *Buffer* para cada una de las variables introducidas.

Lo anterior es, a grandes rasgos, lo que se hizo para automatizar la adquisición de datos en el esparcímetro.

Apéndice B.

Cálculo de los valores de q^4 y $\tan 2\gamma$.

En el capítulo 4 se expresó el coseno del ángulo de refracción como un número complejo en forma exponencial, es decir, se expresó como:

$$\cos \theta_1 = qe^{i\gamma} \quad (1)$$

ya se dijo que los valores de q^4 y $\tan 2\gamma$ estaban dados por las ecuaciones (59) y (60) del mismo capítulo. En este apéndice se deducen dichos valores para mostrar que están dados por las ecuaciones mencionadas.

La ley de *Snell*, cuando el medio en el que viaja la luz antes de incidir en la interfase es aire (es decir, $n_1 = 1$), se expresa como:

$$\sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad (2)$$

En la ecuación anterior, el seno del ángulo de refracción estará dado por:

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n_2} \quad (3)$$

ya que, en general, n_2 es un número complejo. La expresión anterior puede escribirse de la siguiente manera:

$$\sin \theta_2 = \frac{(n - ik) \sin \theta_1}{(n^2 + k^2)} \quad (4)$$

de donde:

$$\cos \theta_i = \sqrt{1 - \frac{(n^2 - k^2) \sin^2 \theta_i}{(n^2 + k^2)^2} + \frac{2ink \sin^2 \theta_i}{(n^2 + k^2)^2}} \quad (5)$$

Pero, como se mencionó en el capítulo 4, el $\cos \theta_i$ se puede escribir como:

$$\cos \theta_i = qe^{i\gamma} \quad (6)$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (5) y (6) se tiene:

$$\cos^2 \theta_i = 1 - \frac{(n^2 - k^2) \sin^2 \theta_i}{(n^2 + k^2)^2} + \frac{2ink \sin^2 \theta_i}{(n^2 + k^2)^2} \quad (7)$$

y

$$\cos^2 \theta_i = q^2 e^{i2\gamma} \quad (8)$$

La ecuación anterior se puede describir como:

$$\cos^2 \theta_i = q^2 \cos 2\gamma + iq^2 \sin 2\gamma \quad (9)$$

Igualando la ecuación (7) con la (9) se obtiene que:

$$q^2 \cos 2\gamma = 1 - \frac{(n^2 - k^2) \sin^2 \theta_i}{(n^2 + k^2)^2} \quad (10)$$

y

$$q^2 \sin 2\gamma = \frac{2nk \sin^2 \theta_i}{(n^2 + k^2)^2} \quad (11)$$

Sumando el cuadrado de las ecuaciones (10) y (11) se llega a que:

$$q^4 = \left(1 - \frac{(n^2 - k^2)}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i \right)^2 + \left(\frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i \right)^2 \quad (12)$$

Finalmente, haciendo el cociente de la ecuación (10) entre la (11) se obtiene:

$$\frac{1}{\tan 2\gamma} = \frac{1 - \frac{(n^2 - k^2)}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i}{\frac{2nk}{(n^2 + k^2)^2} \sin^2 \theta_i} \quad (13)$$

Con lo anterior queda demostrado que las ecuaciones (59) y (60) del capítulo 4, usadas en el cálculo de los coeficientes de reflexión, son correctas.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA