



01188<sup>1</sup>

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA  
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**COMPORTAMIENTO DE FLUJO DE UNA  
BOMBA ELECTROCENTRÍFUGA EN  
PRESENCIA DE UNA Y DOS FASES**

**T E S I S**

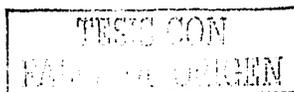
PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE  
**DOCTOR EN INGENIERÍA PETROLERA**

PRESENTA  
**JOSÉ FRANCISCO MARTÍNEZ MENDOZA**

DIRECTORES  
DR. FERNANDO SAMANIEGO VERDUZCO  
DR. FAUSTINO FUENTES NUCAMENDI

CD. UNIVERSITARIA MÉXICO, D.F.

ABRIL DEL 2003





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# **PAGINACIÓN DISCONTINUA**

## RESUMEN

Se presenta un modelo matemático para determinar la carga de una bomba eléctrica sumergible cuando se tiene presencia de gas libre en la succión de la bomba. El modelo se basa en la teoría de flujo a lo largo de una línea de corriente<sup>1</sup> presentado por Sachdeva<sup>2,3</sup>, obteniendo una nueva formulación matemática para los impulsores y difusores para bombas del tipo radial y mixto, considerando sus características geométricas, velocidad de la bomba, y el resbalamiento entre las fases.

En la formulación del modelo se considera que no se tiene prerotación y que los álabes utilizados en los impulsores y difusores son curvados hacia atrás, por lo que el ángulo de los álabes a la salida de cada uno de estos elementos de flujo es menor a 90 grados. Este tipo de álabes son los utilizados en la industria petrolera.

El modelo es resuelto considerando que cada fase fluye en forma independiente, por lo que se plantea una ecuación de conservación de masa y una de movimiento para cada fase, así como, una ecuación de estado para la determinación de la densidad. El sistema de ecuaciones planteado se resuelve aplicando el método de integración de Runge-Kutta y valores de velocidad del líquido, velocidad del gas, presión, fracción de vacío y densidad del gas son obtenidos a lo largo del impulsor y el difusor.

Es mostrado que el incremento de presión a través del difusor no es significativo y prácticamente su función es la de dirigir el flujo hacia la siguiente etapa, por lo que el cálculo de la carga proporcionada por la bomba se realiza considerando únicamente el impulsor. El modelo se validó con datos experimentales en un sistema agua-aire obtenidos por Cirilo<sup>4,5</sup> en 1998, utilizando una bomba electrocentrífuga del tipo radial. El objetivo de esta tesis es determinar cuál es el efecto que se tiene en el comportamiento de una bomba eléctrica sumergible cuando la presión de succión varía y se tiene gas libre en su interior.

## AGRADECIMIENTOS

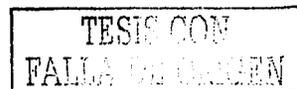
Quiero agradecer a las autoridades de PEMEX por haberme dado la oportunidad seguir preparándome, en especial al Dr. Guillermo Domínguez Vargas por su apoyo para estudiar el doctorado. Les agradezco por su gran apoyo al Dr. Fernando Samaniego Verduzco y al Dr. Faustino Fuentes Nucamendi, quienes me han ayudado desinteresadamente en todo el tiempo que han sido mis asesores. Quiero agradecer también al Dr. Luis Macías Chapa, al Dr. Rodolfo Camacho, al Dr. Jesús Rivera, al Dr. Jaime Cervantes de Gortari y al Dr. James Lea por sus comentarios, pláticas y apoyo que me dieron durante el desarrollo de esta tesis.

Al Dr. Francisco García Hernández por el todo el apoyo brindado para poder concluir la tesis. En verdad muchas personas me ayudaron con sus comentarios para poder concluir esta tesis y les quiero agradecer su ayuda, Ing. Yukihiro Minami Koyama, Ing Antonio Cifuentes, Dr. Kiyoshi Minemura, Dr. Rogelio González Oropeza, Ing. Horacio Zúñiga Puente, Ing José Luis Martínez Galván, y en general a todas aquellas personas que por descuido no mencione pero que me apoyaron.

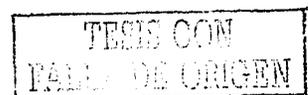
Le doy gracias a Dios por que ha permitido que llegue hasta el final de la meta que me propuse cuando inicie este trabajo. A mi esposa Clarisse quiero agradecerle por su apoyo incondicional al estar conmigo en todo momento y darme ánimos para seguir adelante. A mis hijos Josafat y Vania quienes han sido motivo de constante aliento, les doy las gracias por apoyarme y estar a mi lado.

## CONTENIDO

	Página
TÍTULO .....	i
RESUMEN .....	ii
AGRADECIMIENTOS .....	iii
CONTENIDO .....	iv
LISTA DE FIGURAS .....	vi
CAPITULO 1 INTRODUCCIÓN.....	1
CAPITULO 2 ANTECEDENTES.....	3
CAPITULO 3 REVISIÓN DE LITERATURA.....	8
CAPITULO 4 MODELO MATEMÁTICO PARA EL COMPORTAMIENTO DE FLUJO PARA DE UNA SOLA FASE.....	27
CAPITULO 5 MODELO MATEMÁTICO PARA EL COMPORTAMIENTO DE FLUJO DE DOS FASES.....	39
RESULTADOS .....	48
CONCLUSIONES .....	59
NOMENCLATURA .....	60
REFERENCIAS .....	62
APÉNDICE A - Cálculo de la Variación de la Presión en el Interior de un Impulsor de Flujo Mixto, con Álabes Curvados Hacia Atrás.....	66
APÉNDICE B - Cálculo de la Variación del Radio con Respecto a la Coordenada de Línea de Corriente "s".....	71
APÉNDICE C - Cálculo de la Variación del Área Normal al Flujo en el Interior de un Impulsor.....	73



APÉNDICE D - Cálculo del Radio de Curvatura de Un Impulsor de Flujo Radial con Álabes Curvados Hacia Atrás.....	76
APÉNDICE E - Fuerzas que Actúan Sobre el Fluido a lo Largo de una Línea de Corriente.....	79
APÉNDICE F - Listado del programa.....	85
APÉNDICE G- Pruebas de Calibración para la Bomba GN2100.....	105
APÉNDICE H - Datos Experimentales de la Bomba GN2100.....	106
APÉNDICE I - Factores de las Placas de Orificio.....	110
APÉNDICE J - Curvas Experimentales Obtenidas con los Datos de Cirilo.....	111
APÉNDICE K - Análisis Dimensional de $\frac{C_d}{r_b}$ .....	112



## LISTA DE FIGURAS

	página
Figura 1 - Impulsor giratorio y difusor estacionario que componen una etapa de la bomba.....	3
Figura 2 - Triángulo de velocidad a la entrada de un impulsor.....	5
Figura 3 - Triángulo de velocidad a la salida de un impulsor.....	5
Figura 4 - Efecto del ángulo "β" a la salida del impulsor en la curva característica.....	6
Figura 5 - Volumen de control para máquinas que rotan.....	10
Figura 6 - Solución del modelo propuesto por Sachdeva.....	20
Figura 7 - Instalaciones experimentales utilizadas por Cirilo.....	24
Figura 8 - Flujo en una sola dimensión a lo largo de una línea de corriente.....	28
Figura 9 - Dirección de flujo a través de una etapa de bomba radial.....	28
Figura 10 - Dirección de flujo a través de una etapa de bomba mixta.....	29
Figura 11 - Vista del impulsor en el plano r-z.....	31
Figura 12 - Volumen de control para flujo de dos fases.....	41
Figura 13 - Variación de presión en el interior del impulsor en una fase.....	49
Figura 14 - Variación de presión en el interior del difusor en una fase.....	49
Figura 15 - Variación de presión en el interior del impulsor en dos fases.....	50
Figura 16 - Variación de presión en el interior del difusor en dos fases.....	50
Figura 17 - Variación de la fracción de gas en el interior del impulsor en una fase.....	51
Figura 18 - Variación de la fracción de gas en el interior del difusor en dos fases.....	51
Figura 19 - Variación de la relación de las velocidades gas-líquido en el interior	

del impulsor en dos fases.....	52
Figura 20 - Variación de la relación de las velocidades gas-líquido en el interior del difusor en dos fases.....	52
Figura 21 - Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent = 100 lb/pg <sup>2</sup> , $\alpha_{ent}$ = 8%.....	53
Figura 22 - Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent = 200 lb/pg <sup>2</sup> , $\alpha_{ent}$ = 12%.....	53
Figura 23 - Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent = 300 lb/pg <sup>2</sup> , $\alpha_{ent}$ = 10%.....	54
Figura 24 - Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent = 300 lb/pg <sup>2</sup> , $\alpha_{ent}$ = 15%.....	54
Figura 25 - Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent = 400 lb/pg <sup>2</sup> , $\alpha_{ent}$ = 10%.....	55
Figura 26 - Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent = 400 lb/pg <sup>2</sup> , $\alpha_{ent}$ = 15%.....	55
Figura 27 - Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent = 400 lb/pg <sup>2</sup> , $\alpha_{ent}$ = 18%.....	56
Figura 28 - Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent = 500 lb/pg <sup>2</sup> , $\alpha_{ent}$ = 10%.....	56
Figura 29 - Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent = 500 lb/pg <sup>2</sup> , $\alpha_{ent}$ = 15%.....	57
Figura 30 - Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent = 100 lb/pg <sup>2</sup> , $\alpha_{ent}$ = 18%.....	57
Figura A-1 - Triángulo infinitesimal formado en el plano r- $\theta$ .....	66

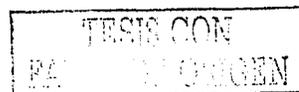


Figura B-1 - Volumen de control para máquinas que rotan.....	71
Figura B-2 - Diferencial del volumen de control.....	72
Figura C-1 - Canal de flujo formado por dos álabes en el interior de un impulsor del tipo radial.....	73
Figura D-1 – Radio de curvatura en función del radio de entrada y salida del Impulsor.....	76

# CAPITULO 1

## INTRODUCCIÓN

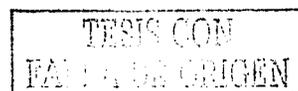
El comportamiento de una bomba centrífuga en presencia de dos fases ha sido particularmente motivo de estudio por la industria nuclear desde los años 70, debido a que estos tipos de bombas son empleadas para enfriar sus reactores y ha sido probado experimentalmente que su eficiencia disminuye cuando bombean líquido y aire simultáneamente. Estas bombas son grandes y de una sola etapa y no obstante el tiempo que llevan utilizándose continúan investigándose experimentalmente, por que aún hay mucha incertidumbre y desconocimiento en el estudio del flujo de dos fases en su interior. Las bombas utilizadas por la industria petrolera en el sistema artificial de bombeo electrocentrífugo son de múltiples etapas y cada etapa es de dimensiones pequeñas, a diferencia de las utilizadas en la industria nuclear. Estas bombas están diseñadas para manejar líquidos; sin embargo, bajo ciertas condiciones de operación dentro de los pozos su eficiencia se reduce al pasar gas libre a través de ellas. El gas libre que entra a las bombas provoca anomalías de flujo y hace que la carga que generan se reduzca, debido principalmente a la segregación de las fases líquida y gaseosa dentro de sus etapas y por el resbalamiento que se presenta entre las dos fases. Cuando el gas libre en el interior de la bomba llega a ser demasiado, origina condiciones de inestabilidad y produce lo que se conoce como candados de gas, los cuales hacen que la bomba no sea capaz de generar ninguna carga. La industria petrolera cuenta con poca investigación experimental publicada referente al flujo de dos fases en el interior de las bombas, probablemente debido a sus dimensiones. El tamaño de una etapa es pequeño y más lo son aún los canales por donde el fluido fluye, esto impide que se pueden realizar estudios experimentales en laboratorio a como se hacen con tuberías; en donde por observación puede llegarse a determinar los tipos de patrón de flujo que se presentan.

Los diseños industriales de bombas utilizan la dinámica de fluidos computacional, pero pocos son los simuladores que lo hacen de una manera técnicamente correcta. Además, el tiempo de máquina que consumen es considerable y a esto se le debe añadir que para fines de un diseño industrial normal, los impulsores y difusores se



diseñan por separado dado las condiciones de flujo altamente complejas y transitorias que se presentan en las fronteras de ambos.

En la actualidad, para los diseños de bombas electrocentrifugas una bomba se selecciona suponiendo que no existe resbalamiento entre la fase líquida y gaseosa, o corrigiendo el comportamiento de las etapas de la bomba basados en datos de campo, o simplemente con base en la experiencia<sup>6</sup>. Existen correlaciones para determinar el comportamiento de las bombas eléctricas sumergibles, pero estas no consideran las características geométricas de la bomba ni sus condiciones de operación. Debido a lo anterior el objetivo de esta tesis es determinar cual es el efecto que se tiene en el comportamiento del tipo de bombas eléctricas sumergibles utilizadas por la industria petrolera cuando la presión de succión varía y se tiene gas libre en su interior. El modelo propuesto se basa en el procedimiento planteado por Sachdeva<sup>2</sup>, con una nueva formulación de las ecuaciones utilizadas en el cálculo de la carga de los impulsores y difusores para el modelo de una y dos fases, basada en álabes curvados hacia atrás.



## CAPITULO 2

### ANTECEDENTES

Las bombas centrífugas reciben este nombre debido a que en su operación utilizan una fuerza centrífuga generada por la rotación de un impulsor en su interior. El líquido entra al impulsor por el centro, circula radialmente hacia fuera, y se descarga a través de la circunferencia del rodete hacia la carcaza. Durante esta circulación, el líquido recibe energía de los álabes del rodete, dando por resultado un aumento tanto en la presión como en la velocidad. En la industria petrolera se utilizan bombas centrífugas sumergibles multietapas, en donde cada etapa consiste de un impulsor rotatorio y un difusor estacionario<sup>6</sup>. En este tipo de bombas todos los impulsores están montados en una flecha y todos rotan a la misma velocidad

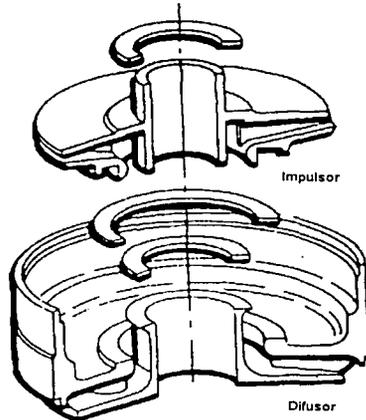


Figura 1. Impulsor giratorio y difusor estacionario que componen una etapa de la bomba.

### CLASIFICACIÓN DE LAS BOMBAS

Las bombas pueden clasificarse de acuerdo a la trayectoria del líquido a través del interior del impulsor en radiales, mixtas y axiales, o de acuerdo al tipo de carcaza en voluta y difusor. Las bombas de tipo voluta, tienen la carcaza en forma de espiral que

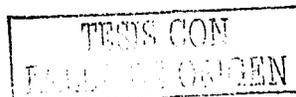
se expande progresivamente, de tal modo que, la velocidad del líquido se reduce gradualmente al ir abandonando el impulsor hacia la tubería de descarga, efectuándose de esta manera, la transformación de la energía de velocidad a energía de presión. En la bomba del tipo difusor el líquido que sale del impulsor, con una velocidad mucho mayor a la que entró, es recibido por un sistema de álabes fijos que lo dirigen a la parte central del impulsor siguiente, tratándose de bombas multietapas. El difusor debe estar diseñado para disminuir la velocidad al fluido proveniente del impulsor y cambiar parte de la energía cinética a energía potencial<sup>7,8</sup>.

### MOVIMIENTO DEL LÍQUIDO EN LAS BOMBAS CENTRÍFUGAS

El flujo a través de la etapa de una bomba es altamente complicado, debido a que ocurre en tres dimensiones ( $r, \theta, z$ ) y un análisis completo, como comenta Dixon<sup>9</sup>, presenta problemas del grado más alto de complejidad. Sin embargo, una solución aproximada para modelar el flujo puede realizarse utilizando una sola dimensión, considerando que todas las condiciones de flujo son uniformes a través de una cierta sección transversal de flujo<sup>1</sup>.

### CURVAS DE CARGA CARACTERÍSTICA

Experimentalmente si se colocan dos manómetros uno en la carga y otro en la descarga de la bomba y se hace pasar diferentes gastos desde un mínimo hasta un máximo, midiendo las lecturas de los manómetros para cada gasto, es posible obtener una representación gráfica de la carga o presión generada contra el gasto. Esta gráfica conocida como curva característica de la bomba no ha podido calcularse, para una o dos fases, mediante algún procedimiento o modelo matemático, debido a que el comportamiento de flujo del fluido en el interior de la bomba es muy complejo. En el interior de la bomba se presenta efectos tales como el de resbamiento, turbulencia y recirculación, entre los más importantes. Así como a la entrada y salida de los impulsores se presentan efectos de choque y de prerotación.



## TRIANGULOS DE VELOCIDAD

Para el análisis del flujo en una sola dimensión en el interior de un impulsor, es necesario tener claro el significado físico de las velocidades que intervienen en el movimiento del líquido en el interior de una bomba, así como el de los ángulos que forman los vectores de velocidad.

Velocidad absoluta ( $V$ ), es la que percibiría un observador quieto a través de un cuerpo transparente de la bomba. Velocidad relativa ( $W$ ), es la que percibiría un observador que fuera transportado por el impulsor en el interior de la bomba. Velocidad periférica o tangencial ( $U$ ), es con la que gira el impulsor. Ángulo  $\alpha$ , es el formado entre la velocidad absoluta y la velocidad periférica. Ángulo  $\beta$ , es el formado por la dirección negativa de la velocidad periférica y la velocidad relativa. Todas las velocidades y ángulos antes mencionados, pueden ser representados tanto a la entrada como a la salida del impulsor mediante triángulos, los cuales comúnmente se les conoce como triángulos de velocidad, figuras 2 y 3.

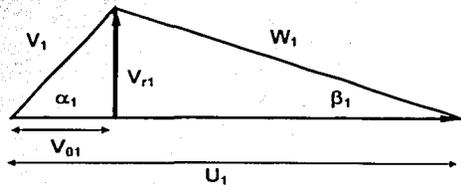


Figura 2. Triángulo de velocidad a la entrada de un impulsor.

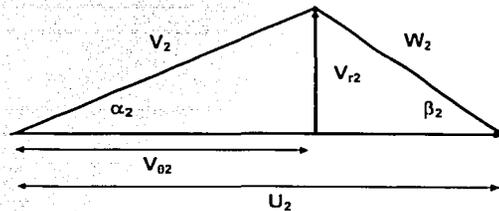


Figura 3. Triángulo de velocidad a la salida de un impulsor.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### INFLUENCIA DEL ANGULO DEL ALABE EN LA CURVA CARACTERÍSTICA

Como ha sido mostrado por Church<sup>10</sup>, los ángulos ( $\beta_2$ ) de los álabes a la salida de los impulsores tienen una gran influencia en la forma de las curvas características de una bomba. Dada la importancia de estos ángulos, la forma de los álabes se clasifican de acuerdo a su valor.  $\beta_2 < 90^\circ$ , significa que los impulsores tienen álabes curvados hacia atrás, condición que proporciona un buen rendimiento.  $\beta_2 = 90^\circ$ , expresa que los álabes son rectos a la salida, lo cual proporciona una carga constante para cualquier valor de gasto, sin embargo, el rendimiento es bajo.  $\beta_2 > 90^\circ$ , indica que la forma de los álabes es curvada hacia delante y se tiene un muy mal rendimiento. (Fig. 4).

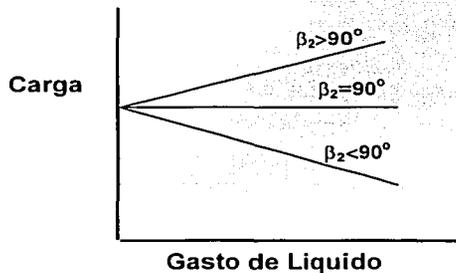
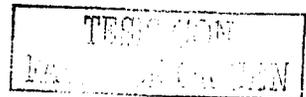


Figura 4. Efecto del ángulo " $\beta$ " a la salida del impulsor en la curva característica.

## PREROTACIÓN

Una bomba centrífuga se construye de modo que en el punto de diseño no exista la prerotación. De acuerdo al trabajo de Furuya<sup>1</sup>, cuando se trabaja en el punto de diseño o cerca de éste, las pérdidas de energía existentes en el interior del impulsor se minimizan y la trayectoria del fluido puede considerarse como una línea de corriente que sigue la trayectoria de los álabes. Sin embargo, esto deja tener validez conforme el flujo dentro del impulsor se aleja del punto de diseño. Cuando se saca la máquina del punto óptimo o diseño se cambia la componente radial de la velocidad absoluta con lo cual aparece una situación caótica que trastorna la condición óptima, introduciéndose la pérdida o caída del rendimiento de la bomba. Esto se debe a que el fluido no ingresa tangencialmente al álabe, lo que hace que el ángulo alfa ya no sea  $90^\circ$ . Actualmente no existe el diseñador de bombas que se ponga como condición tener prerotación en el punto de operación. En caso que se tenga prerotación es posible analizar el problema teóricamente, pero debe comprobarse por medio de estudio de laboratorio debido a que no tendría ningún sentido trabajar con valores de ángulos de alfa y beta a la entrada del impulsor que no puedan ser validados.



## CAPITULO 3

### TRABAJOS PREVIOS

Se han publicado numerosos trabajos que tratan el tema del comportamiento de bombas centrífugas en presencia de dos fases<sup>1,11,12,13</sup>; sin embargo, sólo se tiene registro de tres trabajos realizados en la industria petrolera, ya que la mayoría de los otros trabajos están relacionados con la industria nuclear. A continuación se presenta un resumen breve de los trabajos más importantes, que sientan las bases para el entendimiento de la mecánica de flujo de dos fases en las bombas centrífugas.

**Murakami y Minemura<sup>11</sup> (1974)**, registraron fotográficamente el movimiento de aire y los patrones de flujo dentro de un impulsor. La velocidad de la bomba varió en un rango de 1020 a 2050 rpm. Se observó que incrementando la velocidad el diámetro de las burbujas disminuye e incrementando la fracción de vacío aumenta. También se observó que al incrementar la velocidad de la bomba se puede incrementar la cantidad de gas a manejar, probablemente debido al hecho de que el aire se rompe en finas burbujas, por la alta velocidad del impulsor en su entrada. Cuando la fracción de vacío es pequeña las burbujas fluyen uniformemente distribuidas; sin embargo, al incrementarse las burbujas empiezan a acumularse, llegando al punto en que se empiezan a tener vibraciones causando una condición de flujo inestable, de modo tal que si se incrementa aún más la cantidad de gas en la entrada la bomba puede llegar a dejar de operar.

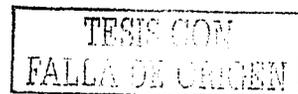
**Patel y Runstadler<sup>12</sup> (1978)**, realizaron mediciones y observaciones del comportamiento de flujo en dos fases (aire-agua) en un modelo a escala 1/20, de una bomba de enfriamiento utilizada en la industria nuclear. Los autores mostraron experimentalmente que la carga desarrollada a la salida del impulsor es casi igual a la carga total de la bomba para cuando se tiene coeficientes de flujo altos y bajos. Esto significa que el difusor con álabes contribuye muy poco a la carga total de la bomba. En este trabajo se concluye que se tienen presentes dos regímenes de flujo dentro del impulsor; el primer régimen ocurre cuando se tienen en la entrada fracciones de vacío pequeñas, de tal forma que el fluido es una mezcla homogénea y la degradación de

carga es pequeña, el segundo régimen ocurre cuando la fracción de vacío es incrementada de modo que de flujo homogéneo se pasa a un flujo con grandes vacíos y burbujas en el impulsor, causando grandes degradaciones en la carga. Basándose en sus experimentos los autores dan una explicación de la dinámica de flujo que se lleva a cabo en el interior de la bomba, postulando que el comportamiento de la bomba puede explicarse considerando el resbalamiento entre las fases.

**Lea y Bearden<sup>13</sup> (1982)**. Este es el primer estudio que se publicó en la industria petrolera de los Estados Unidos, referente al comportamiento de las bombas electrocentrifugas sumergibles en presencia de gas libre. En este trabajo no se desarrolló ningún modelo matemático, pero se realizaron experimentos que muestran cualitativamente el comportamiento de tres diferentes tipos de bombas electrocentrifugas. Los fluidos que se utilizaron fueron aire-agua y CO<sub>2</sub>-diesel. Como resultado de este estudio los autores presentan las conclusiones siguientes: a) El comportamiento de la bomba es una función de la fracción de gas y la presión de entrada; b) Cuando la fracción de gas a la entrada de la bomba rebasa ciertos límites críticos, su operación empieza a ser inestable; los límites críticos encontrados para las pruebas de aire-agua a 25 lb/pg<sup>2</sup>, fueron de 10% de volumen de gas y para el caso de las pruebas realizadas con CO<sub>2</sub>-diesel a 50 lb/pg<sup>2</sup>, fue de casi 15% de volumen de gas; c) El uso de un impulsor de flujo mixto, comparado con uno radial, es más eficiente en el manejo de gas.

Este trabajo presenta curvas que muestran que al aumentar la velocidad de rotación de la bomba, la presión de descarga se incrementa y aunque los autores no lo concluyen, esto reduce la degradación de carga.

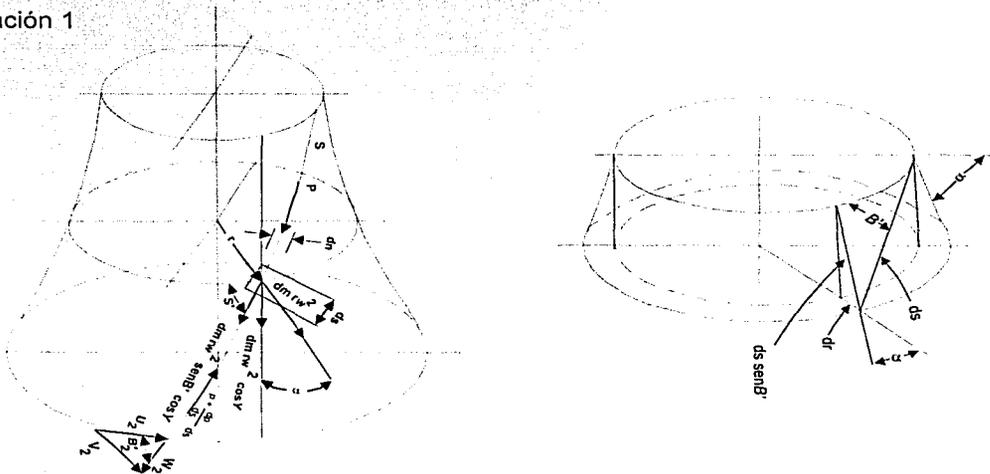
**Furuya<sup>1</sup> (1985)**, desarrolló un modelo analítico en una sola dimensión para determinar el comportamiento de una bomba en presencia de dos fases. Supone que la trayectoria del líquido y la del gas es la misma en las condiciones de diseño, debido a que en esta situación las líneas de corriente siguen la forma de los álabes. El autor tomó en cuenta la geometría de la bomba, la fracción de vacío, el resbalamiento entre las fases y el tipo de patrón de flujo para el desarrollo del modelo; sin embargo, no consideró los efectos compresibles del gas y el efecto del aglutinamiento de las



burbujas. En su desarrollo, para el modelo de dos fases, no se considera explícitamente ninguna formulación para la determinación de las pérdidas por fricción o cualquier otro tipo de pérdida mecánica; las pérdidas de carga se incluyen en forma implícita ya que toma en cuenta la carga real obtenida para una sola fase. El modelo proporciona buenos resultados a las condiciones de diseño, pero tiene ciertas desviaciones fuera de esta condición debido a que la trayectoria de las líneas de corriente no siguen la forma de los álabes. De acuerdo a los resultados obtenidos de este trabajo la degradación de carga de la bomba es producto de tres mecanismos diferentes: 1) el incremento de la velocidad relativa del líquido a la salida de la bomba; 2) la velocidad de resbalamiento entre la fase líquida y la fase gaseosa, y 3) la variación de la fracción de vacío a largo de los pasajes de flujo entre los álabes. Sin embargo, es claro que si no existiera resbalamiento entre las fases, los puntos 1 y 3 no tendrían sentido físico.

A continuación se presentan las ecuaciones más importantes en las que está basado el modelo.

Furuya con base en el volumen de control mostrado en la figura 5 y como resultado de realizar un balance de cantidad de movimiento para las dos fases formuló la ecuación 1



**Figura 5. Volumen de control para máquinas que rotan.**

$$dm_L \frac{dw_L}{dt} + dm_b \frac{dw_b}{dt} = dm \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\beta) \cdot \cos(\gamma) - \frac{\partial p}{\partial s} ds \cdot dn \quad ; \quad \dots (1)$$

basándose en la suposición de que todas las cantidades en la ecuación anterior cambian a lo largo de la línea de corriente, e integrando desde la succión a la descarga denotando por los subíndices 1 y 2, respectivamente, se obtiene:

$$\left[ (1-\alpha_2) \rho_L \frac{w_{2L}^2 - u_2^2}{2} + \alpha_2 \rho_b \frac{w_{2b}^2 - u_2^2}{2} + p_2 \right] - \left[ (1-\alpha_1) \rho_L \frac{w_{1L}^2 - u_1^2}{2} + \alpha_1 \rho_b \frac{w_{1b}^2 - u_1^2}{2} + p_1 \right] + \int_1^2 \left( \rho_L \frac{w_L^2 - u^2}{2} - \rho_b \frac{w_b^2 - u^2}{2} \right) \frac{d\alpha}{ds} \cdot ds = 0 \quad \dots (2)$$

donde:

$\beta$  = ángulo geométrico de la coordenada "s" formado con el círculo cuyo centro es el centro de rotación.

$\gamma$  = ángulo geométrico formado por la línea meridional de la superficie de corriente y el plano horizontal.

$dm_L, dm_b$  = masa del líquido y masa de la burbuja.

$dn, ds$  = incrementos infinitesimales en las en la dirección normal a la línea de corriente y en la dirección de la línea de corriente, respectivamente.

$W_L, W_b$  = velocidad relativa del líquido y la burbuja en el impulsor a lo largo de la línea de corriente (m/s).

$u_1, u_2$  = velocidad periférica a la entrada y salida del impulsor (m/s).

$\alpha_1, \alpha_2$  = fracción de vacío a la entrada y salida del impulsor (frac.).

$p_1, p_2$  = presión a la entrada y salida del impulsor (lb/pg<sup>2</sup>).

la Ec. 2 es considerada como la ecuación de Bernoulli para impulsores rotando bajo condiciones de flujo de dos fases, sin considerar pérdidas de carga tales como fricción.

La degradación de carga para dos fases,  $\Delta H_{ip}$ , fue relacionada como la suma del incremento de energía de la fase líquida,  $\Delta H_L$ , y el incremento de energía de la fase de gas,  $\Delta H_g$ .

$$\Delta H_{ip} \cdot m_{ip} = \Delta H_L \cdot m_L + \Delta H_g \cdot m_b \quad \dots (3)$$

aplicando la ecuación de la energía y considerando un fluido ideal, incompresible y que no hay transferencia de calor, la Ec. 3 puede escribirse como:

$$\Delta H_{ip} = \frac{p_2 - p_1}{\rho_L g} + \frac{v_{2L}^2 - v_{1L}^2}{2g} (1-x) + \frac{p_2 - p_1}{\rho_g g} + \frac{v_{2b}^2 - v_{1b}^2}{2g} x \quad \dots (4)$$

donde:

$m_{ip}, m_L, m_b$  = Gasto másico de dos fases, líquido y burbuja, respectivamente.

$\rho_L, \rho_b$  = Densidad del líquido y del gas, respectivamente.

$$m_{ip} = m_L + m_b \quad \dots (5)$$

$$m_L = dn \cdot (1-\alpha) \cdot w_L \cdot \rho_L \quad \dots (6)$$

$$m_b = dn \cdot \alpha \cdot w_b \cdot \rho_b \quad \dots (7)$$

$$x = \frac{m_b}{m_{ip}} \quad \dots (8)$$

sustituyendo la Ec. 4 en la Ec. 2 se obtiene:

$$\Delta H_{ip} = \left\{ \frac{(1-\alpha_2)\rho_L}{\rho_{ip}g} \frac{w_{2L}^2 - w_2^2}{2} + \frac{\alpha_2\rho_b}{\rho_{ip}g} \frac{w_{2b}^2 - w_2^2}{2} \right\} - \left\{ \frac{(1-\alpha_1)\rho_L}{\rho_{ip}g} \frac{w_{1L}^2 - w_1^2}{2} + \frac{\alpha_1\rho_b}{\rho_{ip}g} \frac{w_{1b}^2 - w_1^2}{2} \right\} + \frac{v_{2L}^2 - v_{1L}^2}{2g} (1-x) + \frac{v_{2b}^2 - v_{1b}^2}{2g} x - \frac{1}{\rho_{ip}g} \int_1^2 \left( \rho_L \frac{w_L^2 - u^2}{2} - \rho_b \frac{w_b^2 - u^2}{2} \right) \frac{d\alpha}{ds} ds. \quad \dots (9)$$

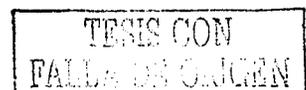
para poder resolver la Ec. 9 es necesario conocer la velocidad relativa de cada fase y la fracción de vacío a lo largo de la línea de corriente en el interior del impulsor, para

conseguir esto se combina la ecuación de cantidad de movimiento sobre una burbuja, Ec. 10, y la ecuación de cantidad de movimiento para las dos fases, Ec. 1.

$$\rho_b w_b \frac{\partial w_b}{\partial s} + \frac{1}{2} \rho_L \left( w_b \frac{\partial w_b}{\partial s} - w_L \frac{\partial w_L}{\partial s} \right) = - \frac{\partial p}{\partial s} + \rho_b \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\beta) \cdot \cos(\gamma) + \frac{C_d}{r_b} \frac{3}{8} \rho_L (w_L - w_b) |w_L - w_b| \dots (10)$$

Al combinar estas ecuaciones, el término de la presión,  $\frac{\partial p}{\partial s}$ , desaparece quedando una ecuación diferencial en función de la fracción de vacío únicamente. Esta ecuación se resuelve y la fracción de vacío es sustituida en la Ec. 10 ó en la Ec. 1, para el cálculo de la presión a lo largo de la línea de corriente. Para determinar las velocidades relativas de cada fase se utilizan las Ecs. 6 y 7. Los valores de  $C_d$  y  $r_b$  utilizados en este trabajo fueron los mismos que utilizó Hench y Johnston<sup>14</sup> para flujo burbuja y Zuber y Hench<sup>15</sup> para flujo caótico-turbulento. Sin embargo, no es correcto utilizar estos valores debido a que las condiciones experimentales bajo las que fueron obtenidos son diferentes a las que se tienen en un impulsor. Para flujo burbuja y de acuerdo a Hench y Johnston la sensibilidad relativa de los resultados obtenidos en sus experimentos en el rango de interés es muy pequeña. Un error de hasta el 50% en la determinación del tamaño de la burbuja,  $r_b$ , o el coeficiente de arrastre,  $C_d$ , no afecta los resultados. Sin embargo, ha sido mostrado por Minemura<sup>16</sup> que el tamaño de las burbujas es función de la velocidad de rotación y que tamaños de burbuja muy pequeños si afectan los resultados. Para el caso de flujo caótico turbulento, Zuber y Hench realizaron sus experimentos en un ducto de área constante donde la velocidad del agua neta era cero y el aire viajaba hacia arriba a través del agua a condiciones de presión atmosférica. Por lo que resulta muy cuestionable que su correlación empírica se utilice en un impulsor que rota, con canales de flujo de área variable y paredes curvas.

Turpin y Colaboradores<sup>17</sup> (1986), utilizaron los resultados experimentales de Lea y Bearden para desarrollar dos tipos de correlaciones empíricas; la primera para predecir la degradación de carga en dos fases como una función de la presión de succión, la relación aire-liquido y el gasto de liquido; la segunda correlación fue desarrollada para predecir la región de operación inestable de la bomba como una



función de la relación aire-líquido y la presión de succión de la bomba. La primera correlación muestra una declinación exponencial de la carga cuando se incrementa la relación aire-líquido y la segunda correlación muestra que cuando se tiene un valor menor a uno al evaluarla, se obtendrá una operación estable de la bomba y se estará trabajando a la derecha del punto de mejor eficiencia. Los mejores resultados para la predicción de la curva de carga se obtienen para volúmenes bajos de gas a presiones de succión bajas y para volúmenes altos de gas con presiones altas de succión. Las predicciones de la carga no son buenas cuando se tienen altos volúmenes de gas, con presiones de succión bajas. Sin embargo, las predicciones más inexactas se obtienen en la zona de más baja eficiencia de la bomba; esto es mientras más a la izquierda se esté del punto de máxima eficiencia.

Sachdeva<sup>2,3</sup> (1988) utilizó los datos experimentales obtenidos por Lea y Bearden para desarrollar un modelo matemático dinámico que calcula la variación de la carga de una bomba electrocentrífuga en presencia de dos fases; este es el único modelo publicado hasta la fecha en la industria petrolera. El modelo considera flujo en régimen permanente, en una sola dirección, las características geométricas de la bomba para la determinación de la carga y una sola etapa; utiliza los datos promedio de la entrada y salida de la bomba, debido a que no se contó con un perfil de presión a través de la bomba. La degradación de la carga en dos fases se obtiene al restar la diferencia entre la carga teórica de una sola fase y la carga teórica de dos fases a la carga real de la bomba publicada por el fabricante, correspondiente a una fase. A continuación se presentan las ecuaciones más importantes en las que está basado el modelo, así como algunas de sus consideraciones más importantes.

#### Modelo de Una Fase, sin considerar Fricción.

La ecuación utilizada para la cantidad de movimiento en régimen permanente de un fluido incompresible, que fluye radialmente hacia fuera en el canal de un impulsor, con un ángulo de salida de 90 grados es:

$$\rho_L \left( V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{V_\theta^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r, \quad \dots (11)$$

donde  $V_r$  ,  $V_\theta$  y  $V_z$  son las componentes de la velocidad en la dirección radial, tangencial y axial respectivamente. Considerando que solo se tiene flujo en la dirección radial y despreciando los efectos de la gravedad, la ecuación anterior se reduce a:

$$\rho_L V_r \frac{dV_r}{dr} - \rho_L \frac{V_\theta^2}{r} = - \frac{dp}{dr} \quad , \quad \dots (12)$$

que expresándola en unidades prácticas y en coordenadas de línea de corriente se obtiene:

$$\frac{g}{\rho_L} \frac{dp}{dz} = \frac{V_\theta^2}{r} \frac{dr}{dz} - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (V_r^2) \quad ; \quad \dots (13)$$

para resolver esta ecuación se utilizan las relaciones siguientes:

$$\frac{dr}{dz} = j \text{ Sen } \beta(r) \text{ Cos } \gamma(r) \quad . \quad \dots (14)$$

$$V_{rL} = W_L \text{ Sen } \beta(r) \text{ Cos } \gamma(r) \quad . \quad \dots (15)$$

$$A_z = A_r \text{ Sen } \beta(r) \text{ Cos } \gamma(r) \quad . \quad \dots (16)$$

$$\beta(r) = M(r - r_1) + \beta_2 \quad . \quad \dots (17)$$

$$M = \frac{\beta_2 - \beta_1}{r_2 - r_1} \quad . \quad \dots (18)$$

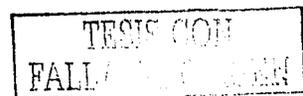
$$\gamma(r) = \gamma \quad . \quad \dots (19)$$

$$V_\theta = \Omega r \quad . \quad \dots (20)$$

El modelo propuesto por el autor puede aplicarse para un impulsor y para un difusor considerando  $j=1$  y  $j=-1$  respectivamente, pero tiene validez únicamente cuando el ángulo  $\beta$  de los álabes a la salida del impulsor o difusor es igual a 90 grados. Sin embargo, los datos que fueron empleados para probar el modelo corresponden al tipo de bombas que se utilizan en la industria petrolera, en donde el ángulo  $\beta$  a la salida de los álabes del impulsor es menor a 90 grados. A este tipo de álabes se les conoce como curvados hacia atrás.

La ecuación para la determinación del incremento de presión estática a lo largo de la línea de corriente del impulsor es:

$$\frac{g}{\rho_L} \frac{dp}{dz} = \Omega^2 r \frac{dr}{dz} + \cos^2 \gamma \left[ \frac{1}{A_z} \frac{dA_z}{dz} - \cos \beta(r) M \cos[\gamma] \right] \quad , \quad \dots (21)$$



$$z = \frac{1}{M \cos [\gamma]} \left[ \log \tan \frac{M(r-r_2)+\beta_2}{2} - \log \tan \frac{M(r_1-r_2)+\beta_2}{2} \right] ; \quad \dots (22)$$

y para el caso del difusor:

$$\frac{g}{\rho_L} \frac{dp}{dz} = \cos^2 \gamma (W_L \sin \beta)^2 \left[ \frac{1}{A_z} \frac{dA_z}{dz} + \cos \beta (r) M \cos [\gamma] \right] , \quad \dots (23)$$

$$z = \frac{1}{M \cos [\gamma]} \left[ \log \tan \frac{M(r-r_2)+\beta_2}{2} - \log \tan \frac{M(r-r_2)+\beta_2}{2} \right] ; \quad \dots (24)$$

resolviendo estas ecuaciones se puede determinar el perfil de presiones a lo largo de la línea de corriente. Sin embargo; el autor no presenta la forma en que se determina  $\frac{dA_z}{dz}$  y la forma en que obtiene la coordenada de línea de corriente "z", al integrar  $\frac{dr}{dz}$  no es correcta.

#### Modelo de Una Fase considerando Fricción.

$$\frac{g}{\rho_L} \frac{dp}{dz} = \frac{V_0^2}{r} \frac{dr}{dz} - \frac{1}{2} \frac{d}{dz} (V_r^2) - \left( \frac{dp}{dz} \right)_f . \quad \dots (25)$$

El gradiente de presión por fricción  $\left( \frac{dp}{dz} \right)_f$  se define como:

$$\left( \frac{dp}{dz} \right)_f = \frac{\rho_L V_L^2 f}{2} \quad \dots (26)$$

donde el factor de fricción "f" para el caso del impulsor es:

$$f = \left( \frac{f_c}{f_s} \right) \left( \frac{f_r}{f_{st}} \right) f_b \quad \dots (27)$$

y para el difusor:

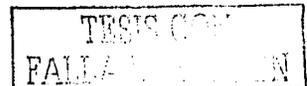
$$f = \left( \frac{f_c}{f_s} \right) f_b \quad \dots (28)$$

donde:

f = factor de fricción.

$f_c$  = factor de fricción por curvatura.

$f_r$  = factor de fricción por rotación.



$f_b$  = factor de fricción de Blasius.

$f_s$  ,  $f_{st}$  = factor de fricción de tuberías rectas en estado estacionario.

En esta forma para el impulsor se corrige el factor de fricción tomando en cuenta los efectos de rotación y de curvatura. Sin embargo, no consideró la corrección por la forma del canal de flujo. La base teórica para la superposición de factores en forma multiplicativa no es clara y en esta forma, el efecto de los factores de fricción se reduce; además está incompleta la ecuación, por que al multiplicarlos lo que se obtiene es

$$f = \left( \frac{f_c f_r}{f_b} \right) . \quad \dots (29)$$

### Modelo de Dos Fases

Se plantea una ecuación de balance de masa y una de cantidad de movimiento para cada fase. Se considera un comportamiento ideal del gas y su densidad se calcula como en un proceso adiabático.

$$\frac{d}{dz} [W_g \alpha \rho_g A_z] = 0 \quad \dots (30)$$

$$\frac{d}{dz} [W_L (1-\alpha) \rho_L A_z] = 0 \quad \dots (31)$$

$$\rho_g V_{rg} \frac{\partial V_{rg}}{\partial z} = \rho_g \Omega^2 r \frac{\partial r}{\partial z} + F_{mv} + F_i + \left( \frac{dp}{dz} \right)_r \quad \dots (32)$$

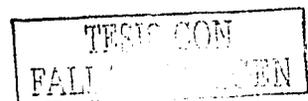
$$\rho_L V_{rL} \frac{\partial V_{rL}}{\partial z} = \rho_L \Omega^2 r \frac{\partial r}{\partial z} - F_{mv} - F_i + \left( \frac{dp}{dz} \right)_r \quad \dots (33)$$

$$\frac{p}{\rho_g^\gamma} = \text{constante} \quad \dots (34)$$

Para la fase gas

$$F_{mv} = -0.5 \rho_L V_g \frac{d}{dr} (V_g - V_L) \quad \dots (35)$$

$$F_i = \frac{3 C_d}{8 r_b} \frac{1}{(1-\alpha)^{1.75}} \rho_L |V_L - V_g| (V_L - V_g) \quad \dots (36)$$



$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_f = f_{ip} \frac{\rho_g W_g^2}{d_h \alpha} \quad \dots (37)$$

Para la fase líquida

$$F_{mv} = -0.5 \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right) \rho_L V_g \frac{d}{dr} (V_g - V_L) \quad \dots (38)$$

$$F_i = -\frac{3}{8} \frac{C_d}{r_b} \frac{\alpha}{(1-\alpha)^{2.78}} \rho_L |V_L - V_g| (V_L - V_g) \quad \dots (39)$$

$$\left(\frac{dp}{dz}\right)_f = f_{ip} \frac{\rho_L W_g^2}{d_h (1-\alpha)} \quad \dots (40)$$

$$\frac{C_d}{r_b} = 2.62 \times 10^{-25} \frac{P_{in}^{11.17}}{\alpha_{in}^{1.41} Q_L^{0.10}}$$

donde:

$F_{mv}$ ,  $F_i$  y  $\left(\frac{dp}{dz}\right)_f$  = fuerzas de masa virtual, fuerza interfacial y gradiente de presión

por fricción para cada fase, respectivamente.

$\gamma$  = exponente adiabático del gas.

$A_z$  = área normal a la dirección del flujo. (m<sup>2</sup>)

$f_{ip}$  = factor de fricción de las dos fases.

$d_h$  = diámetro hidráulico. (m)

$\alpha_{in}$  = Fracción de vacío a la entrada de la etapa promedio. (porcentaje)

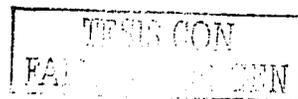
$Q_L$  = Gasto de líquido. (bpd)

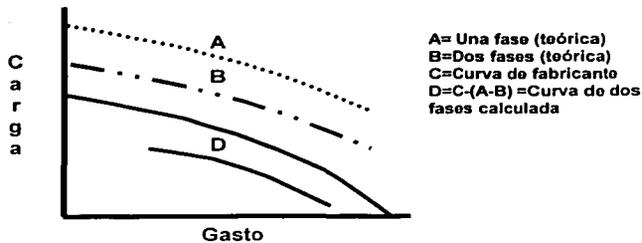
$P_{in}$  = Presión de entrada a la entrada de la etapa promedio. (psia)

En esta formulación la limitación que se tiene es que las ecuaciones de cantidad de movimiento para cada fase se plantean bajo la misma base que para una sola fase, es decir, consideran que el ángulo de salida "β" es de 90 grados. El autor no aclara si se considera prerotación a la entrada de la bomba. El factor de fricción se calcula como si

se tuviera una mezcla homogénea. Aunque se incluye comportamiento del difusor, no se considera en los cálculos para determinar la carga entregada por la bomba. Esto se debe a que entre el impulsor y el difusor se tienen fenómenos que no pueden simularse en una sola dimensión y principalmente a que el impulsor causa del 80% al 100% de la degradación de la carga. No considerar los efectos del difusor significa un pequeño error en el cálculo de la carga, pero es correcto no incluirlo por que en esta forma se evita realizar suposiciones con respecto a las condiciones de entrada al difusor; que no podrían ser validadas experimentalmente. El autor en este trabajo, trata de evitar el uso de correlaciones empíricas que no puedan ser comprobadas experimentalmente en el tipo de canales de los impulsores. No hay ningún estudio en la industria petrolera que se haya publicado para determinar los patrones de flujo y sus fronteras en los impulsores de una bomba electrocentrífuga por tal motivo, utilizar correlaciones empíricas que se han obtenido en geometrías de flujo diferentes a la de los impulsores de estas bombas, no es confiable. Para darle solución a esta situación y con los datos experimentales obtenidos por Lea<sup>14</sup>, la variable  $C_d/r_b$ , que se presenta en la fuerza de arrastre interfacial fue correlacionada; para incorporar todos los efectos desconocidos que afectan el flujo en las bombas incluyendo los patrones de flujo. Esto se hizo por un procedimiento de ensayo y error suponiendo valores de  $C_d/r_b$  hasta que la degradación de carga calculada en cada punto, fue igual a la degradación de carga de los datos. En esta forma los valores  $C_d/r_b$  encontrados fueron correlacionados mediante un análisis de regresión múltiple. Sin embargo, las constantes obtenidas en este análisis no son correctas. Porque correlacionan datos experimentales obtenidos con una bomba de álabes curvados hacia atrás, con un modelo basado en álabes rectos a la salida. El modelo necesita ser modificado para utilizarse con álabes curvados hacia atrás y correlacionar nuevamente a la variable  $C_d/r_b$ .

El procedimiento para determinar la variación en el comportamiento de las curvas características para una y dos fases que utilizó Sachdeva se ilustra gráficamente en la Fig. 6 y consistió de los siguientes pasos:





**Figura 6. Solución del modelo propuesto por Sachdeva.**

1. La curva (A) se obtiene resolviendo el modelo para una sola fase. No se espera que esta curva coincida con la curva real de la bomba debido a que la mayoría de las pérdidas que se presentan en el impulsor no han sido consideradas. Por esta razón se le llamó curva teórica de la bomba para una fase.
2. La curva (B) se obtiene resolviendo las ecuaciones del modelo para dos fases. Esta es la curva teórica de la bomba para dos fases.
3. La curva (C) es la curva característica real de la bomba para una sola fase que proporcionada el fabricante.
4. La curva (D) se obtiene restando a cada punto de la curva (C) la diferencia entre la curva (A) y la (B) en el mismo punto. Esta curva representa la degradación de carga debido a la presencia de gas libre en la bomba.

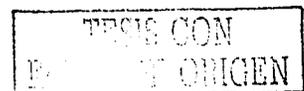
Este procedimiento se considera una buena aproximación para determinar la degradación de carga para dos fases, por que de esta forma se evita utilizar el uso de correlaciones empíricas que no fueron desarrolladas para las geometrías de los canales de los impulsores. En esta tesis este procedimiento es utilizado, por que aún cuando existen actualmente simuladores complejos que pueden resolver el flujo turbulento que ocurre en el interior de los impulsores, todavía están muy lejos de poder ser aplicados eficazmente en el rango de fracciones de gas con que se trabaja en la industria petrolera.

**Minemura y Kinoshita<sup>18</sup> (1995)**, investigaron el efecto del ángulo de los álabes de salida de una bomba electrocentrífuga en su comportamiento bajo condiciones de flujo de una y dos fases. Los fluidos de trabajo fueron aire-agua y los ángulos de salida varían entre 35 y 90 grados. Para el caso de una sola fase se obtuvieron diferentes curvas de comportamiento para cada uno de los ángulos de salida utilizados, resultando la carga máxima para un ángulo de salida de 90 grados. Para el caso del comportamiento de dos fases, al incrementarse la fracción de vacío se obtuvo menor degradación en las curvas de comportamiento al aumentar el ángulo de salida. El grado menor de degradación se obtuvo con un ángulo de 90 grados a la salida; quizá una explicación para este comportamiento es que las burbujas de aire en el canal del impulsor, son eliminadas por el flujo "jet" de la fase líquida a la salida del impulsor. Otras conclusiones importantes de este trabajo fueron: a) a mayor velocidad de rotación de la bomba su comportamiento es mejor para altos valores de la fracción de vacío; b) a mayor presión de succión de la bomba el comportamiento de la bomba es mejor.

**Noghrehkar<sup>19</sup> (1995)**, Este trabajo es una extensión del modelo de Furuya para considerar el efecto de condensación a altas temperaturas y presiones de mezclas vapor-agua. El modelo de dos fluidos planteado se usó para predecir la carga de dos fases de una bomba, de tamaño normal y a escala, de la industria nuclear y fue resuelto a lo largo de una línea de corriente, considerando la ecuación de continuidad para el líquido y el gas, así como la ecuación de movimiento y de energía para la mezcla de dos fases. El autor consideró que los patrones de flujo existentes dentro del impulsor de la bomba son flujo burbuja y caótico turbulento. Para flujo tipo burbuja realizó las mismas consideraciones que Hench y Johnston, fracciones de vacío menores a 0.25 y relaciones del coeficiente de arrastre entre el radio de la burbuja menor a  $340.2 \text{ m}^{-1}$ . Para el caso de fracciones de vacío mayores a 0.35, flujo caótico turbulento, se utilizó la correlación de Zuber y Hench. Para la frontera entre la fracción de vacío de 0.25 y 0.35 se utilizó interpolación lineal. Las bombas utilizadas son del tipo voluta y en los cálculos únicamente el impulsor fue tomado en cuenta. El autor muestra que los resultados obtenidos para una bomba a escala no pueden ser extrapolados para una bomba de geometría mayor. Patel y Runstadler<sup>12</sup> encontraron que el

escalamiento no es aplicable en flujo de dos fases. Es encontrado también que el efecto de condensación a altas temperaturas y presiones disminuye la degradación de carga de la bomba. En este trabajo no se considera pérdidas por fricción a través de los canales de flujo del impulsor y ningún otro tipo de pérdida fue tomado en cuenta. Al igual que en el trabajo de Furuya, es cuestionable el uso de las correlaciones empíricas utilizadas. No se detalla como varía la geometría de la bomba, por lo que se supone que es conocida. No se dice si se consideró la pre-rotación.

**Minemura y colaboradores<sup>20</sup> (1998)** Extendieron el trabajo presentado por Furuya para determinar la carga de una bomba del tipo voluta en presencia de dos fases. El trabajo fue validado con datos experimentales de agua-aire, para fracciones de vacío de 1% a 20% y presiones de succión bajas del orden de la presión atmosférica. Para la determinación de la carga de dos fases el modelo primero calcula la variación de energía proporcionada por el impulsor, y posteriormente determina los cambios de energía provocados por la voluta. Las pérdidas de presión en el impulsor y la voluta consisten de pérdidas de presión por fricción, pérdidas de presión por choque del fluido y pérdidas por expansión brusca. Las pérdidas por fricción se calculan utilizando las expresiones que se utilizan para tuberías cuando fluye la fase líquida únicamente pero no se tomó en cuenta su curvatura y que además rotan. Para el cálculo del coeficiente de fricción interfacial en el impulsor, diferentes ecuaciones fueron utilizadas pero las que mejor resultados les dieron fueron las de Hench-Johnston para flujo burbuja y Zuber-Hench para flujo caótico turbulento. Sin embargo, estas ecuaciones fueron obtenidas por sus autores para un elemento estacionario y con una geometría diferente de los canales de flujo del impulsor. Para la transición del impulsor a la voluta se calculó las variaciones de energía que se tiene debido al efecto de resbalamiento, ocasionado a un número finito de álabes, y al efecto de expansión brusca de los fluidos. Relaciones para una sola fase fueron utilizadas en los cálculos, debido a que no se cuenta con relaciones para dos fases. Fue encontrado que la transición del patrón de flujo burbuja a flujo caótico turbulento ocurre a una fracción de vacío mayor de 0.08 y menor de 0.14. Sin embargo, debido a que ha sido probado que el concepto de escalamiento no aplica para bombas cuando se tiene flujo en dos fases, este rango es válido exclusivamente para bombas de las mismas dimensiones del experimento.

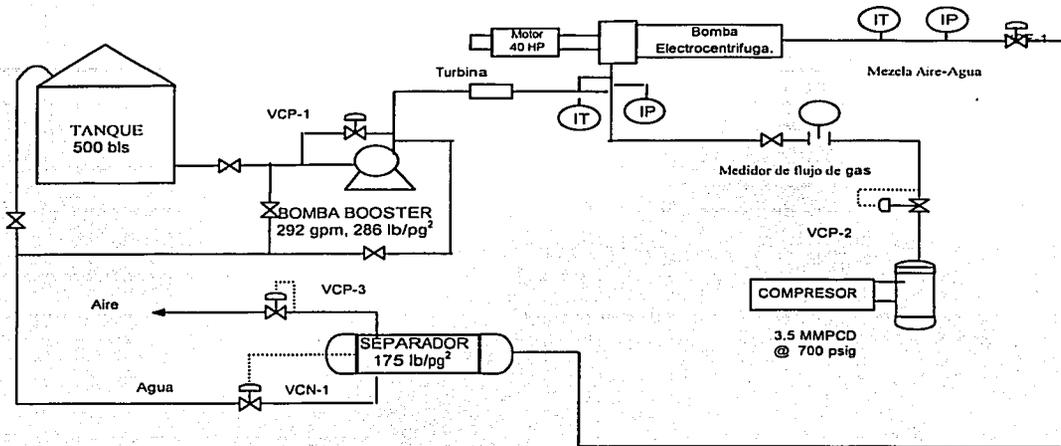


Este modelo no es aplicable al tipo de bombas de la industria petrolera debido a que a la salida del impulsor tienen un difusor con álabes y no una voluta. Además no se tiene una expansión tan brusca como es el caso impulsor voluta. Las relaciones empíricas utilizadas para el coeficiente de fricción interfacial no son aplicables por haber sido obtenidos en diferentes geometrías y los rangos de transición entre patrones de flujo no pueden tomarse como válidos debido a que las dimensiones de la bomba utilizadas son diferentes a las usadas en la industria petrolera.

Pak y Lee<sup>21</sup> (1998) Utilizaron un método de volumen finito tridimensional para predecir las características del flujo turbulento en dos fases, agua-aire, en el interior del impulsor de una bomba centrífuga. La variación de la presión, perfiles de velocidad para cada fase y fracciones de vacío fueron determinados resolviendo las ecuaciones de continuidad, Navier Stokes, y un modelo de flujo turbulento de dos ecuaciones para el cálculo del esfuerzo de Reynolds. Los cálculos fueron realizados en una retícula de 16 x 16 x 62 puntos utilizando la información experimental de Minemura<sup>11</sup>. Sin embargo, el modelo considera únicamente el patrón de flujo tipo burbuja y el modelo de turbulencia es aplicado para la fase líquida únicamente. El efecto que tiene la turbulencia en el interior del impulsor al cambiar el patrón de flujo no se modeló y, por lo tanto, valores estándares de varias constantes del modelo de turbulencia fueron utilizadas. A pesar de que los resultados obtenidos son consistentes con los resultados experimentales de Minemura para una fracción de vacío de 0.05, es reconocido que el flujo turbulento en el interior del impulsor es muy complejo debido a que es significativamente afectado por las curvaturas de las líneas de corriente y la rotación. Este trabajo muestra que mucho trabajo hace falta para modelar el flujo de dos fases en régimen turbulento considerando otros patrones de flujo, por lo que este modelo no puede ser aplicado directamente en la industria petrolera además que hace falta incorporar el efecto del difusor con álabes.

Cirilo<sup>4,5</sup> (1998) realizó el estudio más reciente que ha sido publicado en la industria petrolera, los fluidos de trabajo utilizados fueron agua y aire, y a diferencia del estudio de Lea y colaboradores la presión máxima a la entrada de la bomba fue de 500 lb/pg2.

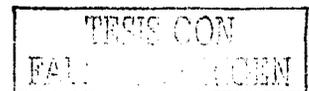
La Fig. 7 muestra las instalaciones experimentales utilizadas por Cirilo, el autor emplea tres tipos diferentes de bombas, dos con impulsores del tipo mixto y una del tipo radial.



- IP – Interruptor de presión.
- IT – Interruptor de temperatura.
- VCF – Válvula controladora de flujo.
- VCN – Válvula controladora de nivel
- VCP – Válvula controladora de presión.

**Figura 7. Instalaciones experimentales utilizadas por Cirilo<sup>4,5</sup>.**

Las pruebas consistieron en variar el gasto de líquido hasta obtener como mínimo cuatro puntos experimentales, normalmente siete, sobre la curva de comportamiento de la bomba para diferentes combinaciones de presión de entrada y fracción de gas. El gasto de gas se incrementó hasta alcanzar la degradación en el comportamiento de la bomba, iniciándose la surgencia o bien se presentó el candado de gas. En todos los casos la información experimental de las pruebas se obtiene bajo condiciones de flujo estabilizado. La información experimental que se midió después de dos minutos de haber alcanzado condiciones de flujo estabilizado fue: 1) presión diferencial, temperatura y presión corriente abajo del medidor de flujo de orificio para el cálculo del



gasto de gas; 2) presión y temperatura de succión y descarga de la bomba; 3) gasto de líquido; 4) torque y revoluciones por minuto aplicadas a la bomba por el motor. La carga producida por la bomba se define como:

$$H = 144 \frac{\Delta p}{n \rho_m} \dots (41)$$

donde:

$\Delta p$  = Incremento de presión a través de la bomba (lb/pg<sup>2</sup>).

$n$  = Número de etapas instaladas en la bomba.

$\rho_m$  = Densidad de la mezcla (agua-aire) (lb/pie<sup>3</sup>), y

$$\rho_m = \frac{\rho_{\text{aire,prom}} Q_{\text{aire,prom}} + \rho_{\text{agua}} Q_{\text{agua}}}{\rho_{\text{aire,prom}} Q_{\text{agua}}} \dots (42)$$

donde:

$\rho_{\text{aire,prom}} = \frac{p M}{z R T}$  es la densidad del aire promedio entre la entrada y salida de la bomba.

$M$  = Peso molecular del aire.

$R$  = Constante universal de los gases.

$z$  = Factor de supercompresibilidad de los gases.

$\rho_m$  = Densidad promedio de la mezcla agua-aire.

En el apéndice J se muestran las curvas experimentales obtenidas para la bomba radial GN2100 utilizando los datos experimentales de Cirilo. El autor mediante conceptos físicos explica cualitativamente la tendencia observada en estas curvas y presenta la siguiente correlación, para determinar la máxima fracción de gas que permite que la bomba opere en condiciones estables, como una función de la presión de succión a la entrada.

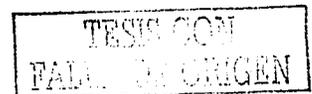
$$\alpha = 1.87 p^{0.4342} \dots (43)$$

Sin embargo, no incluye ningún modelo matemático que permita realizar predicciones cuantitativas. Como resultado del estudio se presentan las conclusiones siguientes: a)



para una cierta presión de succión se produce una degradación en la carga conforme se incrementa la fracción de gas. La fracción máxima de gas que puede manejar la bomba es función de la presión de succión y de su geometría. Para las bombas utilizadas se obtuvieron valores máximos para la fracción de gas de 28% en las de tipo mixto y 18% para el tipo radial, ambas medidas a una presión de 500 lb/pg<sup>2</sup>; b) una pendiente positiva en la curva de carga de la bomba de dos fases puede representar una operación inestable de la bomba; c) los datos experimentales apoyan la existencia de tres patrones de flujo diferentes, homogéneo, burbuja y caótico turbulento; d) el manejo del gas en una bomba es función de la geometría. En los apéndices G y H se encuentran los resultados experimentales obtenidos por Cirilo para el caso de la bomba del tipo radial, los cuales se utilizan para validar el modelo que se presenta en esta tesis.

**Tremante y Moreno<sup>22</sup> (2002)** Para comprender el comportamiento del flujo de dos fases de una bomba axial y en esta forma mejorar su funcionamiento utilizaron un simulador de dinámica de fluidos computacional llamado CFX-40. Las ecuaciones de movimiento (Navier Stokes) en régimen turbulento acopladas con las ecuaciones de conservación de masa fueron resueltas, considerando la viscosidad del fluido y la compresibilidad del gas. Debido a que no hay modelos industriales estándar para flujo de dos fases en régimen turbulento a como los hay para una fase, utilizan generalizaciones de modelos de una fase y del esfuerzo de Reynolds para resolver su modelo. El modelo es resuelto únicamente para fracciones de gas de hasta 20% y es determinado que para ángulos de álabes grandes se presenta flujo estratificado. El trabajo no detalla cuales fueron los fluidos de trabajo, las condiciones de operación de los datos experimentales ni las características geométricas de la bomba. Sin embargo, deja claro que aún en este tipo de bombas (axiales) la simulación del flujo en régimen turbulento esta dentro del estado del arte.



## CAPITULO 4

### MODELO MATEMÁTICO PARA EL COMPORTAMIENTO DE FLUJO DE UNA SOLA FASE

En la actualidad el uso de simuladores numéricos que utilizan la dinámica de fluidos computacional (CFD) para el diseño de bombas centrífugas, ha llegado a ser una herramienta de uso común en el análisis y diseño de los impulsores. Sin embargo, para el caso de difusores con álabes, los diseños tienden a estar basados en métodos empíricos. Una de las restricciones más importantes para que los métodos basados en CFD no sean ampliamente usados en el diseño de difusores con álabes, se debe a que el flujo en la entrada del difusor proveniente del impulsor, es inestable y tridimensional, de modo que las condiciones de frontera para el difusor son extremadamente complejas<sup>24</sup>. Indudablemente la naturaleza tridimensional del impulsor puede modelarse, pero son pocos los simuladores existentes que lo pueden hacer de una manera técnicamente adecuada. Para un diseño correcto de un impulsor y un difusor, se deben modelar en forma conjunta y tomar en consideración la naturaleza inestable del flujo, para esto requiere de simuladores sofisticados, tiempos considerables de máquina y costos muy elevados, que van más allá de los recursos de un diseño industrial normal<sup>25</sup>. Para cálculos del tipo industrial el diseño de los impulsores y difusores se considera por separado.

Por lo antes expuesto se considera que no es adecuado plantear un modelo basado en simuladores altamente sofisticados, puesto que no podría aplicarse de una manera práctica y económica en los simuladores existentes en la industria petrolera, para el diseño del sistema de bombeo electrocentrífugo. Por esta razón, el modelo que se desarrolla a continuación es un modelo sencillo y confiable, que puede ser incorporado en los simuladores existentes de sistemas artificiales de producción y además, realiza modificaciones fundamentales al único modelo publicado<sup>2,3</sup> en la industria petrolera para flujo en dos fases en una bomba electrocentrífuga.

Suposiciones del modelo:

- 1) El flujo de líquido a través de los canales de los impulsores y difusores, en condiciones de diseño, sigue la forma del mismo álabes como si fuera un hilo o línea de corriente<sup>1</sup>. (Fig. 8)

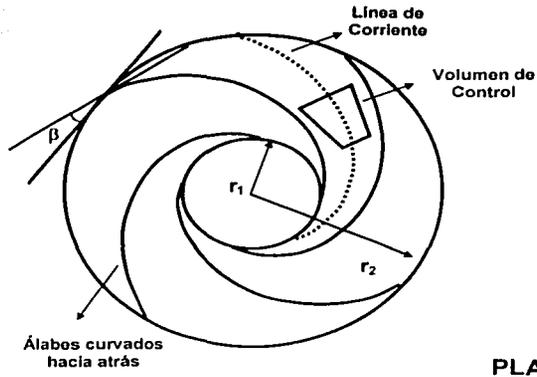


Figura 8. Flujo en una sola dimensión a lo largo de una línea de corriente.

- 2) Para impulsores del tipo radial la variación de la velocidad en el sentido axial es cero.

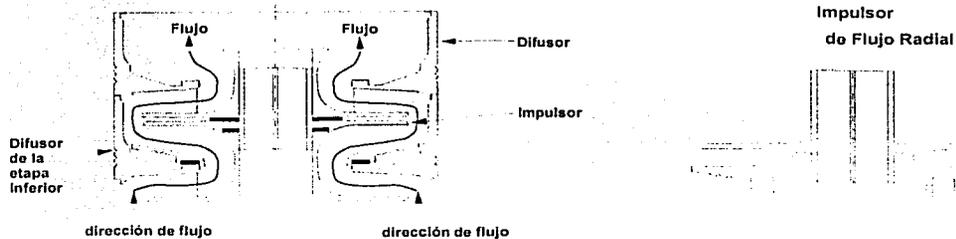


Figura 9. Dirección de flujo a través de una etapa de bomba radial.

- 3) No hay prerotación a la entrada de los álabes.  
 4) El efecto de la gravedad es despreciable.

Como se mencionó anteriormente, las condiciones de flujo a través de cierta sección transversal son uniformes, por lo que tomando en consideración la suposición 1, la variación de la velocidad en la dirección teta ( $\theta$ ) es cero. Para el caso de un impulsor del tipo radial las suposiciones 1 y 2 implican que la velocidad del fluido varía

únicamente en la dirección radial y para el caso de un impulsor del tipo mixto, la velocidad del fluido varía en el sentido axial y radial. (Fig. 10)

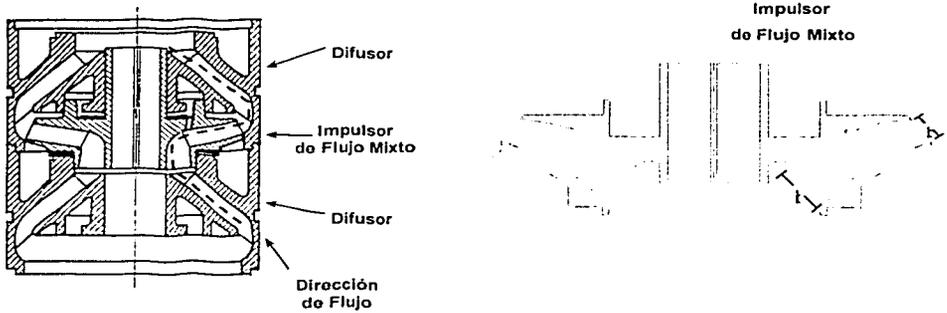


Figura 10. Dirección de flujo a través de una etapa de bomba mixta.

#### SOLUCION DEL MODELO DE UNA FASE

Tomando en cuenta las suposiciones anteriores, se utilizan las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas, considerando que la viscosidad vale cero o que el fluido no tiene fricción, en combinación con relaciones obtenidas del triángulo de velocidades Figs. 2 y 3, para obtener la ecuación de la variación de presión a lo largo de la línea de corriente ( ver Apéndice A) la cual está dada por la ecuación siguiente:

$$\frac{g_c}{\rho_L} \frac{dp}{ds} = \Omega^2 r \frac{dr}{ds} - \frac{1}{2} \frac{dW^2}{ds} \quad \dots (44)$$

Esta es una ecuación general que aplica para cualquier valor del ángulo  $\beta$ , a diferencia de la ecuación utilizada por Sachdeva, que solamente aplica para un ángulo  $\beta = 90^\circ$

$$\frac{g_c}{\rho_L} \frac{dp}{ds} = \Omega^2 r \frac{dr}{ds} - \frac{1}{2} \frac{dV_r^2}{ds} \quad \dots (45)$$

Para la determinación de la velocidad relativa del líquido,  $W$ , a lo largo de la línea de corriente, se utiliza la ecuación de continuidad

$$\dot{M}_L = W_L A_n \rho_L = V_r A_r \rho_L \quad \dots (46)$$

donde

$$A_r = 2\pi b r \quad \dots (47)$$

### IMPULSOR DEL TIPO MIXTO

En los impulsores del tipo de flujo mixto (Fig. 10) el movimiento del fluido se lleva a cabo en el plano  $(r, \theta, z)$ , por lo que tomando en consideración la geometría del impulsor la Ec. 44, se escribe como:

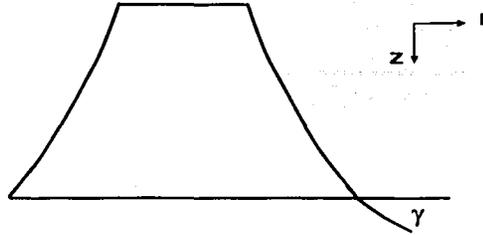
$$\frac{g_c}{\rho_L} \frac{dp}{ds} = \Omega^2 r \frac{dr}{ds} + W^2 \frac{1}{A_n} \frac{dA_n}{ds} \quad \dots (48)$$

donde (ver Apéndice C)

$$\frac{1}{A_n} \frac{dA_n}{ds} = \left( \frac{dr}{ds} \right)^3 \left[ \frac{\cos \beta[r]}{\sin^3 \beta[r]} \frac{d\beta}{dr} - \frac{\sin \gamma[r]}{\cos^3 \gamma} \frac{d\gamma}{dr} \right] + \left( \frac{dr}{ds} \right) \frac{1}{r} + \frac{1}{b} \frac{db[r]}{dr} \quad \dots (49)$$

$$\frac{dr}{ds} = j \left( \sqrt{1 + \cot^2 \beta[r] + \tan^2 \gamma[r]} \right)^{-1} \quad \dots (50)$$

**Línea de Corriente**



**Figura 11. Vista del impulsor en el plano r-z.**

**IMPULSOR DEL TIPO RADIAL**

En los impulsores del tipo radial el movimiento del fluido se lleva a cabo únicamente en el plano  $(r, \theta)$  (Fig. 8), lo que significa que el ángulo  $\gamma$ , formado por las meridianales de la superficie de corriente y el plano horizontal (Fig. 11) es cero, por lo que la Ec. (49) se simplifica y la expresión para el cálculo de la variación de presión dentro del impulsor a lo largo de la línea de corriente "s", tomando en consideración ésta geometría específica es:

$$\frac{g_c}{\rho_L} \frac{dp}{ds} = \Omega^2 r \frac{dr}{ds} + W^2 \frac{1}{A_n} \frac{dA_n}{ds} \quad \dots (51)$$

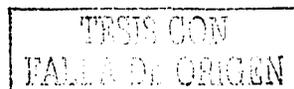
$$\frac{1}{A_n} \frac{dA_n}{ds} = \cos \beta[r] \frac{d\beta[r]}{dr} + \frac{\text{sen} \beta[r]}{b} \frac{db[r]}{dr} + \frac{\text{sen} \beta[r]}{r} \quad \dots (52)$$

$$\frac{dr}{ds} = j \text{sen} \beta[r] \quad \dots (53)$$

$$\beta[r] = M(r - r_1) + \beta_1 \quad \dots (54)$$

$$M = \frac{\beta_2 - \beta_1}{r_2 - r_1} \quad \dots (55)$$

$$b[r] = M_1(r - r_1) + b_1 \quad \dots (56)$$



$$M_1 = \frac{b_2 - b_1}{r_2 - r_1} \quad \dots (57)$$

Las Ecs. 48 a la 53 se resolvieron numéricamente utilizando el método de integración de Runge-Kutta. Debido a que no se contó con la variación del ángulo  $\beta$  y la altura del impulsor "b" a lo largo de la línea de corriente, se consideró un comportamiento lineal de estas variables. Cuando  $j = 1$  la solución obtenida corresponde a los impulsores y cuando  $j = -1$  para los difusores.

Aún cuando se utiliza un método de integración numérica, es interesante resaltar que si la Ec. 53 se resuelve en forma exacta, la ecuación resultante para el caso de un difusor es:

$$s = -\frac{1}{M} \left( \ln \left[ \tan \frac{\beta[r]}{2} \right] - \ln \left[ \tan \frac{\beta_1}{2} \right] \right) \quad \dots (58)$$

A diferencia la ecuación presentada por Sachdeva, para la misma Ec. 53 es:

$$s = \frac{1}{M} \left( \ln \left[ \tan \frac{\beta[r]}{2} \right] - \ln \left[ \tan \frac{\beta_1}{2} \right] \right)^{-1} \quad \dots (59)$$

Como puede apreciarse, la ecuación presentada por Sachdeva se obtuvo en forma errónea.

Si a la Ec. 48 se le quitan las pérdidas por fricción, se obtiene:

$$\frac{g_c}{\rho_L} \frac{dp}{ds} = \Omega^2 r \frac{dr}{ds} - \frac{1}{2} \frac{dW^2}{ds} - \left( \frac{dp}{ds} \right)_f \quad \dots (60)$$

donde  $\left( \frac{dp}{ds} \right)_f$  es el gradiente de pérdidas por fricción, definido por:

$$\left( \frac{dp}{ds} \right)_f = f \frac{\rho_L W^2}{2D_h} \quad \dots (61)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La sección transversal del canal del impulsor o el difusor puede considerarse como rectangular, por lo que de acuerdo a la definición del diámetro hidráulico:

$$D_h = \frac{4 \pi r b}{2 \pi r + n b} \quad \dots (62)$$

El factor de fricción,  $f$ , no puede calcularse simplemente como si se tratara de una tubería de sección circular, debido a que es necesario tomar en cuenta que el canal del impulsor tiene una curvatura dada, está rotando y es de sección rectangular; por tal motivo para el cálculo del factor de fricción en un impulsor, es necesario corregirlo por cada una de las causas expuestas y para el cálculo del factor de fricción de un difusor, se consideran los mismos efectos excepto el de rotación.

A continuación se presenta una descripción de cómo calcular el factor de fricción para cada uno de las causas mencionados anteriormente.

#### Factor de fricción por curvatura

Ito<sup>25</sup> realizó experimentos y presentó resultados para el cálculo del factor de fricción en régimen laminar, turbulento y la transición entre ellos; en tuberías curvas de sección transversal circular.

Para la transición entre régimen turbulento y laminar se define un número de Reynolds crítico, que depende de la relación entre el radio de curvatura ( $r_c$ ) y el radio hidráulico ( $r_o$ ).

a)  $\frac{r_c}{r_o} < 860$  :

$$(Re)_{\text{crítico}} = 2 \left( \frac{r_o}{r_c} \right)^{0.32} \times 10^4 \quad \dots (63)$$

b)  $\frac{r_c}{r_o} \geq 860$  :

$$(Re)_{\text{crítico}} = 2.3 \times 10^3 \quad \dots (64)$$

Si  $Re > (Re)_{\text{crítico}}$  se tiene flujo turbulento; en caso contrario se tiene flujo laminar.

Para flujo turbulento, Ito ha propuesto dos métodos para el cálculo del factor de fricción:

1) Ley de Distribución de velocidades a la potencia 1/7

$$a) 300 > \text{Re} \left( \frac{r_o}{r_c} \right)^2 > 0.034$$

$$\frac{f_c}{f_b} = \frac{0.029 + 0.304 \left[ \text{Re} \left( \frac{r_o}{r_c} \right)^2 \right]^{-0.25}}{0.316 \left( \frac{r_c}{r_o} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Re}^{-0.25}} ; \quad \dots (65)$$

$$b) \text{Re} \left( \frac{r_o}{r_c} \right)^2 \leq 0.034 :$$

$$\frac{f_c}{f_b} \equiv 1 ; \quad \dots (66)$$

$$c) \text{Re} \left( \frac{r_o}{r_c} \right)^2 \geq 300 :$$

$$\frac{f_c}{f_b} = \left[ \text{Re} \left( \frac{r_o}{r_c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{20}} . \quad \dots (67)$$

2) Ley de Distribución de velocidades logarítmica

$$a) Y^2 \left( \frac{r_o}{r_c} \right)^2 < 12 :$$

$$\frac{f_c}{f_b} = \frac{0.0323 + 1.6 \left[ Y^2 \left( \frac{r_o}{r_c} \right)^2 \right]^{-1.27}}{0.316 \left( \frac{r_c}{r_o} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Re}^{-0.25}} ; \quad \dots (68)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$b) Y^2 \left( \frac{r_o}{r_c} \right)^{\frac{1}{2}} > 5.3 \quad :$$

$$\frac{1}{f_c} = 2.11 \log_{10} \left[ \text{Re} \left( \frac{r_c}{r_o} \right)^{\frac{1}{2}} f_c^{1.5} \right] - 0.23 \quad , \quad \dots (69)$$

donde Y está definido por la Ec. (70):

$$Y^2 e^Y = \text{Re} \left( \frac{r_c}{r_o} \right)^{\frac{1}{2}} \quad . \quad \dots (70)$$

Los dos métodos proporcionan resultados similares, por esta razón el método de la ley de distribución de potencias es el que se utilizó en esta tesis. El mismo método fue utilizado por Sachdeva.

Para Flujo Laminar

Si  $\frac{r_c}{r_o} \geq 860$  entonces el valor de  $\left( \frac{f_c}{f} \right)$  es igual a 1, esto significa que el factor de fricción en un tubo de sección transversal circular con curvatura se calcula igual que si no la tuviera.

Si  $\frac{r_c}{r_o} < 860$  el autor presenta una gráfica con diferentes curvas para el cálculo de  $\left( \frac{f_c}{f} \right)$  se recomienda utilizar la curva obtenida por White<sup>26</sup>, debido a que es la que ajusta el mayor número de puntos de los resultados experimentales

Factor de fricción por rotación

Ito<sup>27</sup> realizó experimentos y presentó formulas empíricas para el cálculo de factores de fricción en régimen laminar, turbulento y la transición entre ellos; en tuberías rectas de sección transversal circular. Para determinar el tipo de flujo se calcula el número de Reynolds crítico ( $\text{Re}_{\text{critico}}$ ), llamado así por el autor para determinar el tipo de flujo, y se compara con el número de Reynolds (Re) para tuberías rectas de sección transversal

circular. Si  $Re > (Re)_{\text{critico}}$  se tiene flujo turbulento, en caso contrario se tiene flujo laminar.

La transición entre régimen turbulento y laminar se define con base en  $(Re)_{\text{critico}}$  y un número de Reynolds basado en la velocidad angular  $Re_{\Omega} = \frac{\Omega d_h^2}{\nu}$

a)  $28 < Re_{\Omega} < 2.0 \times 10^3$  :

$$(Re)_{\text{critico}} = 1.07 Re_{\Omega}^{0.23} \times 10^3 \quad ; \quad \dots (71)$$

b)  $Re_{\Omega} \leq 28$  :

$$(Re)_{\text{critico}} \cong 2.3 \times 10^3 \quad \dots (72)$$

Para flujo turbulento es necesario calcular el parámetro  $K_l = \frac{Re^2}{Re}$

a)  $1 < K_l < 15$

$$\frac{f_r}{f_b} = 0.942 + 0.058 K_l^{0.282} \quad ; \quad \dots (73)$$

b)  $K_l \leq 1$  :

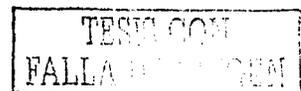
$$\frac{f_r}{f_b} \cong 1 \quad ; \quad \dots (74)$$

c)  $K_l > 15$  :

$$\frac{f_r}{f_b} = 0.924 K_l^{0.05} \quad \dots (75)$$

donde  $f_b$  es el factor de fricción de Blasius, para tuberías rectas en estado estacionario y régimen turbulento, y es expresado como  $f_b = 0.3164 Re^{-0.24}$

Para flujo laminar es necesario calcular el parámetro  $K_L = Re_{\Omega} Re$



$$a) 2.2 \times 10^2 < K_L < 10^7 \text{ y } \frac{Re_\Omega}{Re} < 0.5 ;$$

$$\frac{f_r}{f} = 0.0883 K_L^{0.25} (1 + 11.2 K_L^{-0.325}) ; \quad \dots (76)$$

$$b) K_L < 2.2 \times 10^2 \text{ y } \frac{Re_\Omega}{Re} < 0.5 ;$$

$$\frac{f_r}{f} \cong 1 \quad \dots (77)$$

$$c) \frac{Re_\Omega}{Re} > 0.5 ;$$

$$\frac{f_r}{f} = \frac{0.0672 Re_\Omega^{0.5}}{1 - 2.11 Re_\Omega^{-0.5}} \quad \dots (78)$$

donde  $f$  es el factor de fricción, para tuberías rectas en estado estacionario y régimen laminar, y es expresado como  $f = \frac{64}{Re}$ .

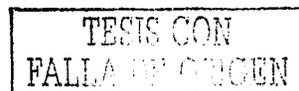
Factor de fricción de forma

Jones<sup>28</sup> en su trabajo muestra que el cálculo del factor de fricción, en régimen laminar y turbulento para ductos de sección transversal rectangular, puede realizarse utilizando un número de Reynolds modificado ( $Re^*$ ).

$$Re^* = \left[ \frac{2}{3} + \frac{11 \cdot b}{24 \cdot a} \left( 2 - \frac{b}{a} \right) \right] Re \quad \dots (79)$$

donde  $Re$  es el número de Reynolds para régimen laminar o turbulento utilizado en tuberías rectas de sección transversal circular.

Para flujo laminar



$$\frac{f_a}{f} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{11b}{24a} \left(2 - \frac{b}{a}\right)} \quad \dots (80)$$

Para Flujo Turbulento

$$\frac{f_a}{f_b} = \frac{1}{\left[\frac{2}{3} + \frac{11b}{24a} \left(2 - \frac{b}{a}\right)\right]^{0.25}} \quad \dots (81)$$

En esta tesis el factor de fricción total se calculó utilizando la siguiente ecuación:

Factor de fricción total = Factor de fricción de una tubería recta de sección transversal circular x (Factor de fricción de forma + factor de fricción de curvatura + factor de fricción de rotación).

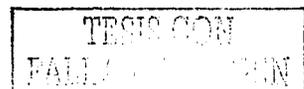
Esta forma de calcular el factor de fricción permite considerar cada uno de los efectos que se presentan en un impulsor o difusor de una bomba centrífuga sumergible..

Una vez que se ha calculado el incremento de presión se puede estimar la carga generada por la etapa utilizando la ecuación:

$$H = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} + \frac{p_2 - p_1}{\rho g} \quad \dots (82)$$

donde  $V_1$  y  $V_2$  son la velocidad absoluta a la entrada y a la salida del impulsor, respectivamente.

En el apéndice F se presenta el programa para el cálculo de la carga generada por un impulsor del tipo radial, el programa fue desarrollado utilizando el paquete Matemática.



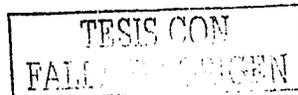
## CAPITULO 5

### MODELO MATEMÁTICO PARA EL COMPORTAMIENTO DE FLUJO DE DOS FASES EN UNA BOMBA CENTRÍFUGA

El flujo de dos fases en el interior de una bomba centrífuga se considera aún dentro del estado del arte, debido a que no se ha aclarado la interacción de las dos fases, a través de los canales de los álabes en los impulsores y difusores de una etapa. La industria nuclear ha realizado experimentos para entender la mecánica de flujo de los fluidos en el interior de la bomba y el por que de la degradación de carga en dos fases; los resultados reportados por Minemura<sup>11</sup> y Patel<sup>12</sup> concluyen que la degradación de carga en la bomba cuando se manejan dos fases es ocasionada principalmente por el resbalamiento existente entre la fase líquida y la fase gaseosa.

Cuando la fracción de gas rebasa cierto limite se deja de tener patrón de flujo homogéneo para tener patrón de flujo burbuja y posteriormente dependiendo del incremento en la fracción de gas se tiene la transición a flujo caótico turbulento. Las bombas que se utilizan en la industria nuclear son diferentes en tipo y tamaño a los que se emplean en la industria petrolera; por esta razón el modelo que se plantea a continuación está basado en conceptos fundamentales del transporte de los fluidos tales como ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento en una sola dimensión. Como ya se mencionó, el modelar en una sola fase el flujo a través de los impulsores y difusores es un problema altamente complejo, aún para los simuladores modernos; por esta razón el tratar de modelar el flujo en dos fases se convierte en un problema difícil, que requiere un conocimiento pleno de la interacción de las dos fases en el interior de la bomba, tema que actualmente todavía no se conoce completamente. Para elegir el modelo de dos fases, se debe tomar en cuenta que la degradación en la carga de la bomba se debe principalmente al resbalamiento entre las fases, lo cual impide considerar un modelo homogéneo, en donde las velocidades de las fases sean las mismas.

En este caso, se podría considerar el modelo de deriva, el cual es un caso especial del modelo homogéneo, en donde si se considera el resbalamiento entre las fases, o un modelo de dos fluidos en donde se considera que cada fase fluye en forma



independiente a la otra. Para el planteamiento de un modelo de deriva, es necesario conocer expresiones empíricas que permitan determinar la relación existente entre la velocidad de una fase con respecto a la otra, además de que es necesario conocer bastante bien el tipo de patrón de flujo que se tenga así como la transición entre ellos, en el interior de los canales de flujo de una bomba. Actualmente, no se cuenta en la literatura con información referente a relaciones empíricas para relacionar las velocidades de las fases con algún patrón de flujo en el interior de los canales de flujo de la bomba, y esto tal vez sea imposible de obtener, dadas las dimensiones tan pequeñas de estos canales.

El modelo de dos fluidos considera que cada fase puede modelarse en forma separada con ecuaciones propias y aún cuando se requiere de ecuaciones constitutivas para relacionar las dos fases, este modelo está físicamente más fundamentado, ya que considera para cada fase las fuerzas que intervienen en su movimiento. Por esta razón, en esta tesis se desarrolla a continuación un modelo de dos fluidos utilizando ecuaciones de conservación de masa y de movimiento para cada fluido, planteadas sobre el volumen de control mostrado en la Fig. 8, las cuales se acoplarán mediante relaciones interfaciales. Para la formulación del modelo se empleará la teoría de flujo en una sola dimensión en la misma forma a como se procedió para el modelo de una sola fase.

Para el modelo de dos fases se considera:

- 1) No hay transferencia de masa ni de calor entre las fases. Esta suposición se considera válida, porque el tiempo que tardan las burbujas de gas en recorrer el impulsor es muy pequeño, en el orden de fracciones de segundo<sup>9</sup>.
- 2) Velocidad del líquido = velocidad del gas a la entrada del impulsor<sup>12,13</sup>.

TESIS CON  
FALLA DE CUBRER

## SOLUCIÓN DEL MODELO

Para plantear el modelo de dos fases se considera que el líquido y el gas fluyen en la bomba en forma continua, por lo que se puede desarrollar un modelo de dos fluidos<sup>29,30</sup>, utilizando las ecuaciones de conservación de masa y de movimiento para cada fluido<sup>31</sup>, las cuales se acoplan mediante relaciones interfaciales<sup>32</sup>. Las ecuaciones de continuidad y movimiento para cada una de las fases se formulan con base en un volumen de control que tiene la misma forma que el mostrado en la Fig. 8 y que para el caso de dos fases se visualiza de la siguiente forma:

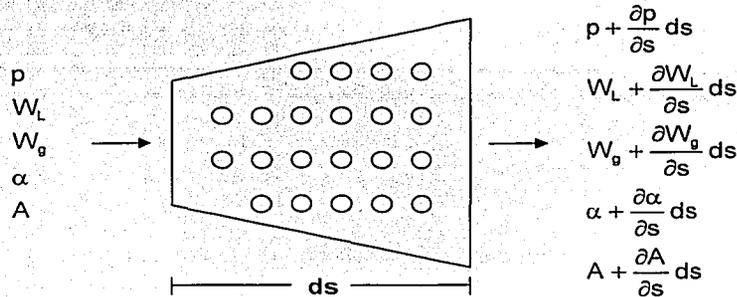


Figura 12. Diferencial de volumen de control para flujo de dos fases.

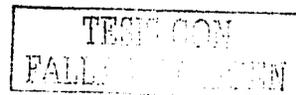
### DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE CONTINUIDAD PARA EL LÍQUIDO Y EL GAS A LARGO DE UNA LÍNEA DE CORRIENTE.

#### Líquido

Masa del líquido que entra al volumen de control - Masa del líquido que sale del volumen de control = Masa del líquido que se acumula en el volumen de control.

$$|W_L A_L \rho_L|_s - |W_L A_L \rho_L|_{s+\Delta s} = \frac{1}{\Delta t} \Delta s [(\rho_L A_L)_{t+\Delta t} - (\rho_L A_L)_t]$$

.... (83)



Tomando límites conforme la dimensión del volumen de control y el intervalo de tiempo tienden a cero,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left[ \frac{|W_L(1-\alpha)A\rho_L|_s - |W_L(1-\alpha)A\rho_L|_{s+\Delta s}}{\Delta s} \right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{|\rho_L(1-\alpha)A|_{t+\Delta t} - |\rho_L(1-\alpha)A|_t}{\Delta t} \right] \dots (84)$$

se obtiene:

$$-\frac{\partial}{\partial s} [W_L(1-\alpha)\rho_L A] = \frac{\partial}{\partial t} [\rho_L(1-\alpha)A] \dots (85)$$

Considerando régimen permanente el término del lado derecho se hace cero, por lo tanto

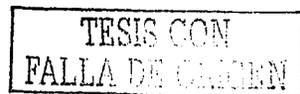
$$\frac{d}{ds} [W_L(1-\alpha)\rho_L A] = 0 \dots (86)$$

Desarrollando las derivadas se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [W_L(1-\alpha)\rho_L A] &= W_L \frac{d}{ds} [(1-\alpha)\rho_L A] + (1-\alpha)\rho_L A \frac{\partial W_L}{\partial s} \\ &= (1-\alpha)\rho_L A \frac{dW_L}{ds} + W_L \frac{d}{ds} [(1-\alpha)\rho_L A + \rho_L A \frac{d}{ds} [(1-\alpha)]] \\ &= (1-\alpha)\rho_L A \frac{dW_L}{ds} - W_L \rho_L A \frac{d\alpha}{ds} + W_L(1-\alpha) \frac{d}{ds} [\rho_L A] \\ &= (1-\alpha)\rho_L A \frac{dW_L}{ds} - W_L \rho_L A \frac{d\alpha}{ds} + W_L(1-\alpha) \left[ \rho_L \frac{dA}{ds} + A \frac{d\rho_L}{ds} \right] \dots (87) \end{aligned}$$

Dividiendo la Ec. 87 por  $[W_L(1-\alpha)\rho_L A]$  y simplificando términos, se obtiene la ecuación de continuidad para el líquido en régimen permanente:

$$\frac{d}{ds} [W_L(1-\alpha)\rho_L A] = \frac{1}{W_L} \frac{dW_L}{ds} - \frac{1}{1-\alpha} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{A} \frac{dA}{ds} + \frac{1}{\rho_L} \frac{d\rho_L}{ds} = 0 \dots (88)$$



## Gas

Siguiendo el mismo procedimiento que para la fase líquida se obtiene la ecuación de continuidad para el gas en régimen permanente.

$$\frac{d}{ds} [W_G \alpha \rho_G A] = 0 \quad \dots (89)$$

$$\frac{d}{ds} [W_G \alpha \rho_G A] = \frac{1}{W_G} \frac{dW_G}{ds} + \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{ds} + \frac{1}{A} \frac{dA}{ds} + \frac{1}{\rho_G} \frac{d\rho_G}{ds} = 0 \quad \dots (90)$$

## DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA EL LÍQUIDO Y EL GAS A LARGO DE UNA LÍNEA DE CORRIENTE.

Para el desarrollo de las ecuaciones de movimiento se considerarán las fuerzas que actúan sobre el volumen de control. Estas fuerzas han sido detalladas en el apéndice B y son:

## Líquido

Velocidad de entrada - Velocidad de salida + Suma de fuerzas que actúan = 0  
de cantidad de de cantidad de sobre el volumen de control  
movimiento movimiento

..... (91)

$$\begin{aligned} & \left[ (\rho_L W_L)(W_L A_L) \right]_s - \left[ (\rho_L W_L)(W_L A_L) \right]_{s+\Delta s} + \left[ p_L A_L \right]_s - \left[ p_L A_L \right]_{s+\Delta s} + \left[ \rho_L g A_L \Delta s \right] \\ & - \left[ \tau_L p_L \Delta s \right] + \left[ \rho_L A_L \Delta s \Omega^2 r \frac{dr}{ds} \right] - \left[ \frac{3}{8r_b} \alpha \rho_L C_d |W_L - W_g| (W_L - W_g) A \Delta s \right] \\ & - \left[ C_{mv} \rho_L \alpha \left( W_L \frac{dW_L}{ds} - W_G \frac{dW_G}{ds} \right) A \Delta s \right] - \left[ p_L A_L \right]_s - \left[ p_L A_L \right]_{s+\Delta s} = 0 \end{aligned}$$

..... (92)

Dividiendo entre  $A \Delta s$  tomando el límite cuando  $\Delta s$  se aproxima a cero.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} [\rho_L(1-\alpha)W_L W_L] = & -\frac{d}{ds} [\rho_L(1-\alpha)] + [\rho_L(1-\alpha)g] - \tau_L \frac{p_L}{A} \\ & + \rho_L(1-\alpha)\Omega^2 r \frac{dr}{ds} - \frac{3}{8r_b} \alpha \rho_L C_d |W_L - W_g| (W_L - W_g) \\ & - C_{mv} \rho_L \alpha \left( W_L \frac{dW_L}{ds} - W_G \frac{dW_G}{ds} \right) + p_i \frac{d}{ds} (1-\alpha) \end{aligned} \quad \dots (93)$$

Expandiendo el lado izquierdo de la Ec. 93

$$\frac{d}{ds} [\rho_L(1-\alpha)W_L W_L] = \underbrace{W_L \frac{d}{ds} [\rho_L(1-\alpha)W_L]}_{\text{Ecuación de Continuidad}} + \rho_L(1-\alpha)W_L \frac{dW_L}{ds} \quad \dots (94)$$

el primer término del lado derecho de la Ec. 94 es la ecuación de continuidad, por lo que sustituyendo la Ec. 89 se obtiene:

$$\frac{d}{ds} [\rho_L(1-\alpha)W_L W_L] = \rho_L(1-\alpha)W_L \frac{dW_L}{ds} \quad \dots (95)$$

Expandiendo el primer término de la Ec. 93

$$-\frac{d}{ds} [\rho_L(1-\alpha)] = -(1-\alpha) \frac{d\rho_L}{ds} - \rho_L \frac{d}{ds} (1-\alpha) \quad \dots (96)$$

En un impulsor la fuerza centrífuga es muchas veces mayor que la fuerza de gravedad, por lo que el segundo término del lado derecho de la Ec. 93 puede considerarse despreciable.

$$\rho_L(1-\alpha)\Omega^2 r \frac{dr}{ds} \gg [\rho_L(1-\alpha)g] \quad \dots (97)$$

Considerando  $p_i = p_L$  y sustituyendo las Ecs. 95, 96 y 97 en la Ec. 93 se obtiene la ecuación de movimiento para la fase líquida en régimen permanente.

$$\rho_L(1-\alpha)W_L \frac{dW_L}{ds} = -(1-\alpha) \frac{dp}{ds} - \frac{f_L \rho_L W_L^2}{2g_c D_h} + \rho_L(1-\alpha)\Omega^2 r \frac{dr}{ds} - \frac{3}{8r_b} \alpha \rho_L C_d |W_L - W_g| (W_L - W_g) - C_{mv} \rho_L \alpha \left( W_L \frac{dW_L}{ds} - W_G \frac{dW_G}{ds} \right) \dots (98)$$

**Gas**

Siguiendo el mismo procedimiento que para la fase liquida se obtiene la ecuación de movimiento para el gas en régimen permanente.

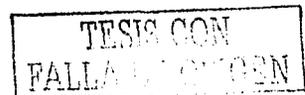
$$\rho_G \alpha W_G \frac{dW_L}{ds} = -\alpha \frac{dp}{ds} - \frac{f_G \rho_G W_G^2}{2g_c D_h} + \rho_G \alpha \Omega^2 r \frac{dr}{ds} + \frac{3}{8r_b} \alpha \rho_L C_d |W_L - W_g| (W_L - W_g) + C_{mv} \rho_L \alpha \left( W_L \frac{dW_L}{ds} - W_G \frac{dW_G}{ds} \right) \dots (99)$$

La fuerza de masa virtual aplica únicamente para patrón de flujo tipo burbuja. Sin embargo, debido a que se desconoce las fronteras de los patrones de flujo no se eliminará en los cálculos, y como se explicara posteriormente cualquier efecto no considerado en el flujo se contemplara en el valor de  $\frac{C_d}{r_b}$ .

La ecuación de continuidad muestra que la densidad del gas varía a lo largo de la línea de corriente; por tal motivo se debe utilizar una ecuación de estado para el cálculo de la densidad del gas; en particular se empleará la ecuación de los gases reales.

$$p V = z R T \dots (100)$$

Las Ecs. 88, 90, 98, 99, 100 conforman un conjunto de cinco ecuaciones y cinco incógnitas, el cual al resolverlo se obtienen:  $\frac{dp}{ds}$ ,  $\frac{dW_L}{ds}$ ,  $\frac{dW_g}{ds}$ ,  $\frac{d\alpha}{ds}$ ,  $\frac{d\rho_g}{ds}$ ; posteriormente



estas derivadas se integran numéricamente para obtener su variación a través del impulsor.

La carga para dos fases es determinada utilizando la siguiente ecuación<sup>1</sup>:

$$H_{2\text{fases}} = x H_g + (1 - x)H_L \quad \dots (101)$$

donde

$x$  = calidad.

$H_L$  = Carga del líquido.

$H_g$  = Carga del gas.

Para la determinación de la carga del líquido y del gas, se utilizan las presiones calculadas en la integración numérica y las velocidades absolutas de cada una de las fases respectivamente.

Una vez que se tiene la carga para el modelo de una y dos fases se aplica el procedimiento de solución de Sachdeva. (ver Fig. 6)

Para poder resolver el sistema de cinco ecuaciones planteado es necesario conocer el valor de  $\frac{C_d}{l_b}$ , pero para esto se requiere conocer que patrones de flujo se tienen en el

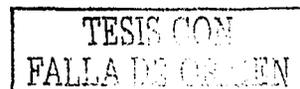
interior de los canales de flujo del impulsor y determinar alguna expresión o correlación para calcularlo. Debido a que en la literatura no se cuenta con correlaciones empíricas para su cálculo, se considera que no tendría validez utilizar expresiones que hayan sido obtenidas para otras geometrías de flujo; por que se obtendrían resultados que no se pueden demostrar experimentalmente. Por esta razón, y debido a que es prácticamente imposible realizar algún tipo de medición experimental para su determinación, debido al tamaño tan reducido de los canales de los impulsores; se selecciona esta variable como variable de correlación. Así esta variable puede incorporar no solo a los patrones de flujo, sino también incluir los efectos que se han dejado de considerar dada su complejidad tales como: turbulencia y los efectos de recirculación entre los más importantes, esta misma consideración fue utilizada por Sachdeva. Para la determinación de la correlación es necesario hacer uso de los resultados

experimentales obtenidos por Cirilo<sup>4,5</sup>. Para cada gasto se suponen diferentes valores de este parámetro, hasta que la degradación de la carga teórica sea igual a la degradación de la carga real y posteriormente, estos valores se correlacionan con los datos experimentales. Cirilo en sus experimentos encontró que la presión, la fracción de vacío y el gasto a la entrada de la bomba, son las variables que más influyen en su comportamiento; por esta razón el parámetro  $\frac{C_d}{r_b}$  se correlaciona en esta tesis en función de esas variables (ver Apéndice K). Observaciones similares fueron las que realizó Sachdeva<sup>2</sup> respecto a los resultados experimentales de Lea y Bearden<sup>14</sup>.

$$\frac{C_d}{r_b} = 0.20274 \frac{P_{en}^{1.07658}}{\alpha_{en}^{1.12145} Q_L^{0.279932}} \dots (102)$$

donde:

- $P_{en}$  = Presión a la entrada de la etapa promedio. (psia)
- $\alpha_{en}$  = Fracción de vacío a la entrada de la etapa promedio. (porcentaje)
- $Q_L$  = Gasto de líquido. (bpd)



## RESULTADOS

El modelo desarrollado en este trabajo para flujo en una y dos fases se resolvió empleando el método de integración numérica de Runge Kutta, utilizando la información siguiente de una bomba del tipo radial (Fig. 8):

Impulsor.

$$\beta_1 = 14^\circ, \beta_2 = 39^\circ, r_1 = 21.59 \text{ mm}, r_2 = 50.8 \text{ mm}, b = 4.25 \text{ mm}$$

Difusor.

$$\beta_1 = 21^\circ, \beta_2 = 90^\circ, r_1 = 51.054 \text{ mm}, r_2 = 22.55 \text{ mm}, b = 4.75 \text{ mm}$$

Las figuras siguientes muestran los resultados obtenidos por medio del modelo, para condiciones en que se simula el flujo a través de los canales de un impulsor y difusor de una etapa. La dirección del flujo a través de cada uno de estos elementos es de  $r_1$  a  $r_2$ . En el caso del impulsor para  $s=0$  el radio adquiere un valor igual a  $r_1$  y para un valor de  $s=\text{máximo}$  el radio adquiere un valor igual a  $r_2$ . En el caso del difusor para  $s=\text{máximo}$  el radio adquiere un valor igual a  $r_1$  y para un valor de  $s=0$  el radio adquiere un valor igual a  $r_2$ .

Al resolver el modelo el ángulo de entrada  $\beta_1$  es calculado y resulta diferente al ángulo de entrada  $\beta_1$  del fabricante, esto es debido a que se considera que la entrada del fluido al álabe es sin prerotación.

Las Figs. 13 y 14 muestran la variación de la presión en una sola fase, pudiendo observarse que el impulsor proporciona el mayor incremento de presión y esto es de esperarse, debido al efecto de la fuerza centrífuga que se genera en el interior del impulsor. El difusor debido a que es un elemento estacionario proporciona muy poca presión.

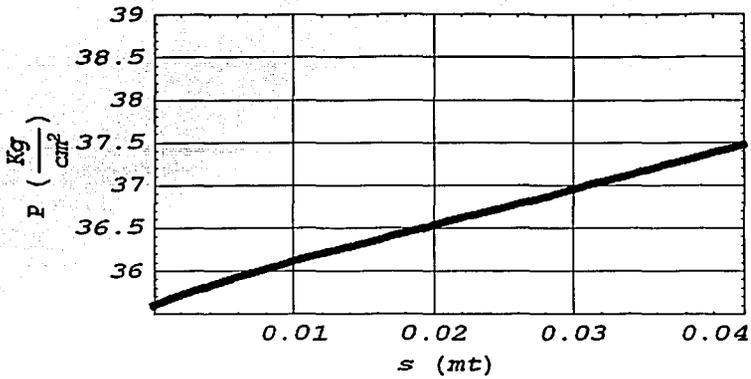


Figura 13. Variación de presión en el interior del impulsor en una fase, para condiciones de flujo.

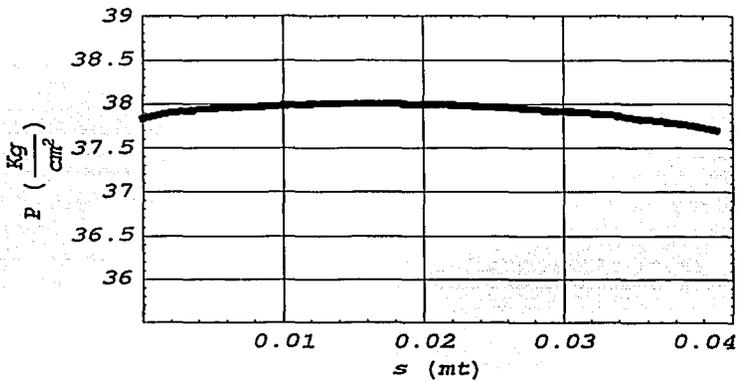


Figura 14. Variación de presión en el interior del difusor en una fase, para condiciones de flujo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Las Figuras 15 a la 20 presentan el comportamiento de flujo en dos fases. Es interesante observar que el incremento de presión en dos fases, en el interior del impulsor Fig. 15, es menor al que se lleva a cabo en una sola fase, lo cual es razonable debido al resbalamiento que ocurre entre las fases, que origina una mayor caída de presión. La influencia en el flujo del difusor respecto al impulsor parece tener menos efecto en dos fases Fig. 16, lo cual coincide con los resultados experimentales realizados por Patel<sup>12</sup>.

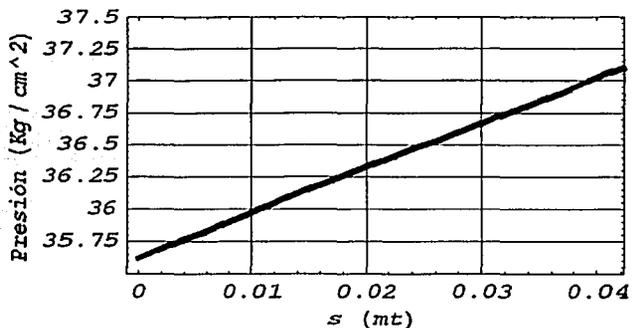


Figura 15. Variación de presión en el interior del impulsor, para condiciones de flujo en dos fases.

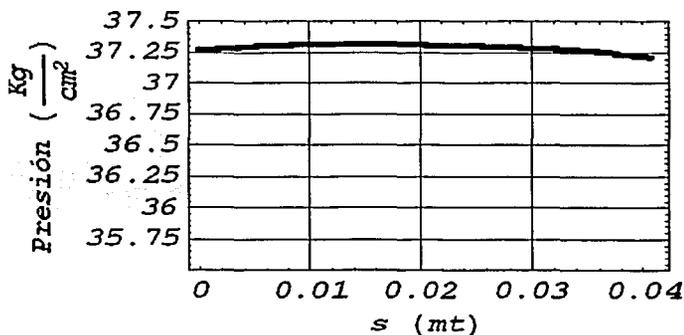


Figura 16. Variación de presión en el interior del difusor, para condiciones de flujo en dos fases.

TESIS  
FALLA DE UN

El comportamiento de la fracción de vacío, Fig. 17, muestra que la fracción de gas se incrementa, esto trae como consecuencia que se reduzca el área de flujo del líquido, teniendo mayor volumen de gas.

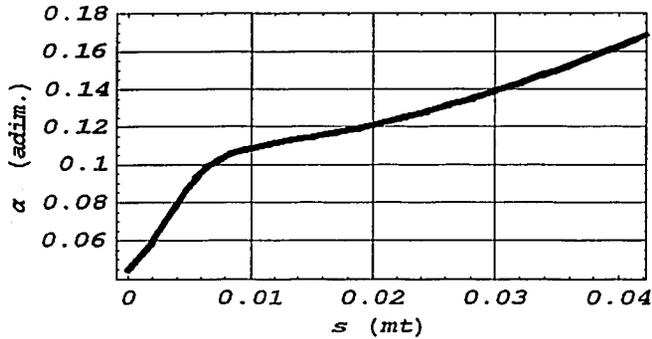


Figura 17. Variación de la fracción de gas en el interior del impulsor en dos fases.

En la Fig. 18 se presenta el efecto contrario, al no existir un efecto importante de la presión el gas tiene más libertad para moverse de modo tal que la fase líquida sufre un retraso. Esto trae como resultado una reducción del área de flujo del gas y por consiguiente un decremento de la fracción de gas en el difusor.

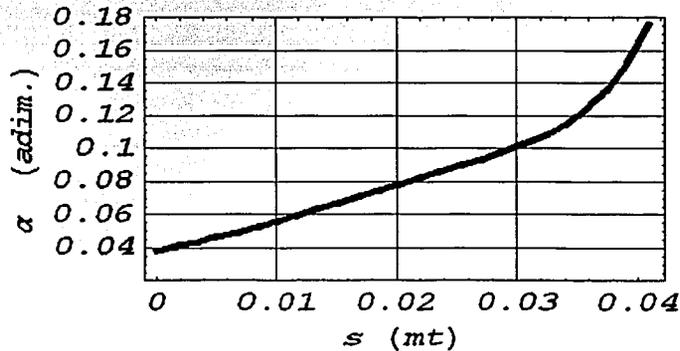
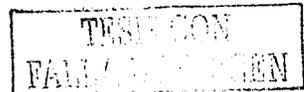


Figura 18. Variación de la fracción de gas en el interior del difusor en dos fases.



La relación de velocidad gas-líquido mostrada en la Fig. 19 se reduce por un incremento en la velocidad del líquido, y la Fig. 20 presenta valores mayores que los de la Fig. 19, debido al incremento en la velocidad del gas. Como ya se explicó, esto se debe a la reducción en las áreas de flujo ocasionadas por la variación de la fracción de gas.

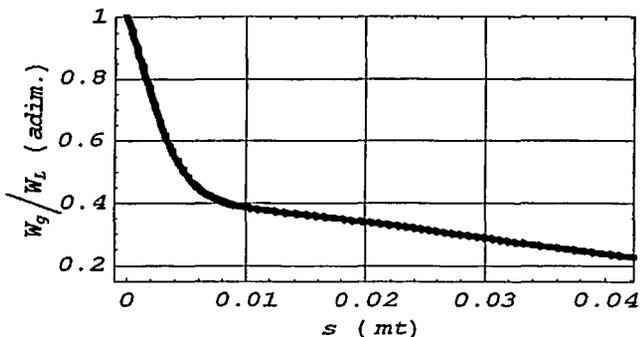


Figura 19. Variación de la relación de velocidades gas-líquido en el interior del impulsor, para condiciones de flujo en dos fases.

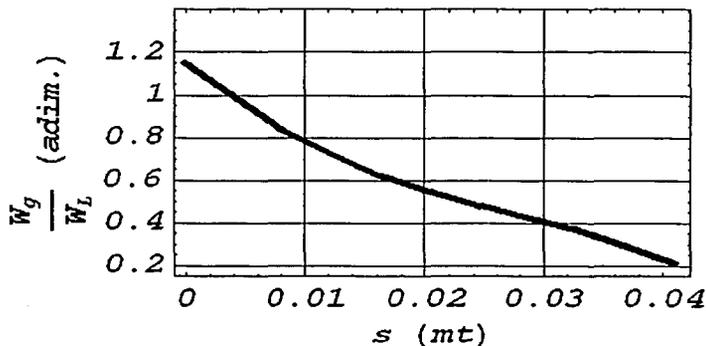


Figura 20. Variación de la relación de velocidades gas-líquido en el interior del difusor, para condiciones de flujo en dos fases.

Los resultados obtenidos permiten darnos cuenta que el difusor es un elemento importante para redirigir el flujo al impulsor siguiente; sin embargo, el incremento de presión del sistema impulsor-difusor, etapa, es básicamente causado por el impulsor.

Una vez que se ha determinado el comportamiento de presiones anterior, la carga proporcionada por una etapa de la bomba se calcula aplicando la Ec. 86 La Figs.21 a la 31 muestran una comparación de los resultados calculados por el modelo con respecto a los resultados reales experimentales, reportados por Cirilo.

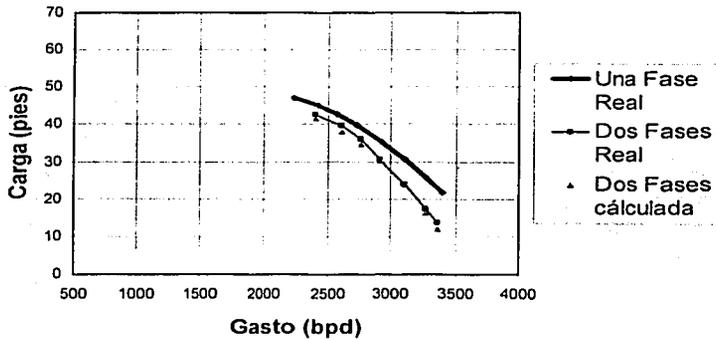


Figura 21. Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent= 100 lb/pg<sup>2</sup>,  $\alpha_{ont}$ = 8%.

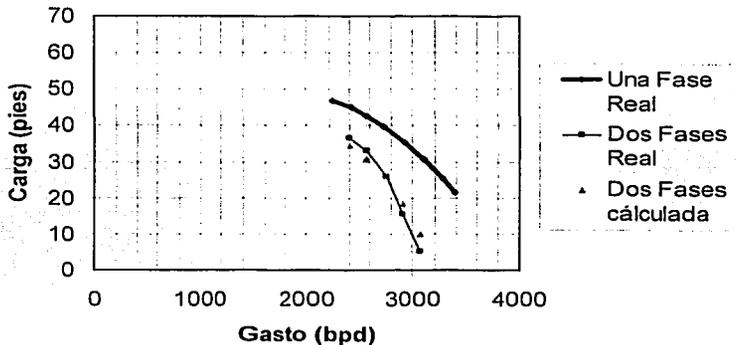


Figura 22. Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent= 200 lb/pg<sup>2</sup>,  $\alpha_{ont}$ = 12%.

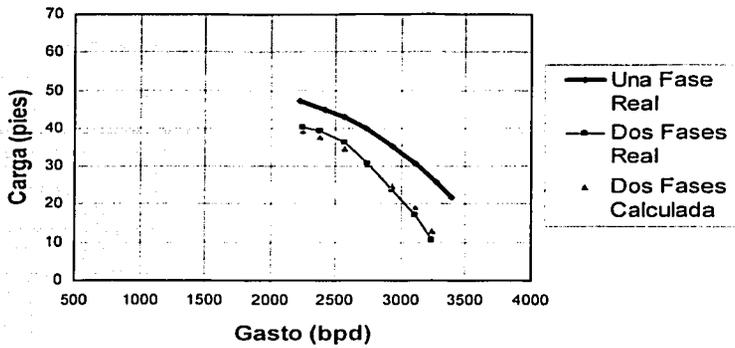


Figura 23. Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent= 300 lb/pg<sup>2</sup>,  $\alpha_{ent}$ = 10%.

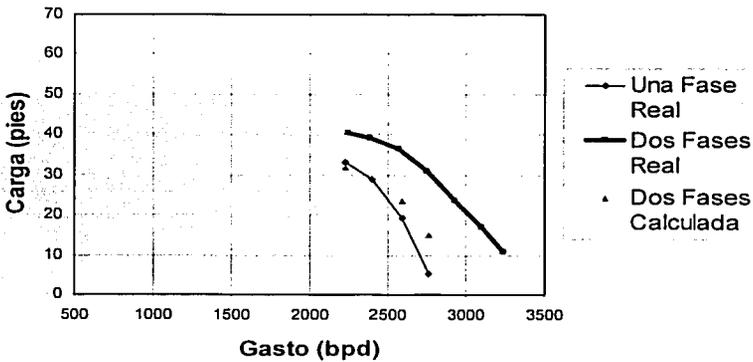


Figura 24. Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent= 300 lb/pg<sup>2</sup>,  $\alpha_{ent}$ = 15%.

TESIS CON  
FALLA DE ENTRENAMIENTO

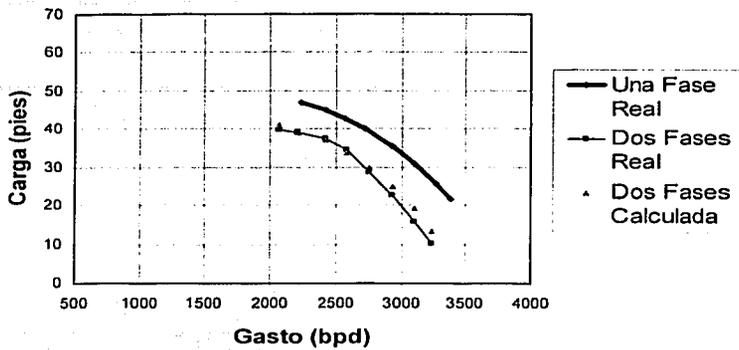


Figura 25. Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent= 400 lb/pg<sup>2</sup>,  $\alpha_{ont}= 10\%$ .

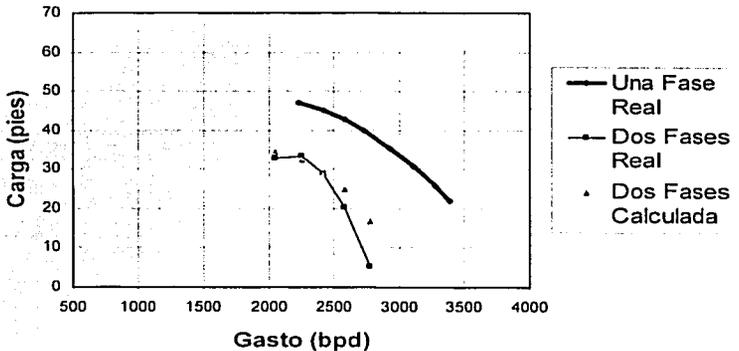


Figura 26. Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent= 400 lb/pg<sup>2</sup>,  $\alpha_{ont}= 15\%$ .

TESIS CON  
FALLA EN EL ENTEN

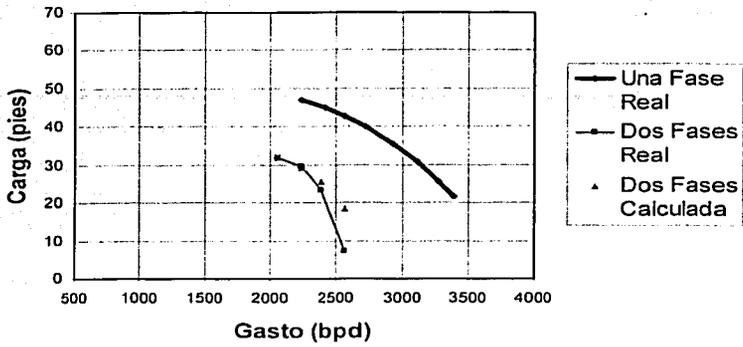


Figura 27. Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent= 400 lb/pg<sup>2</sup>,  $\alpha_{ont} = 18\%$ .

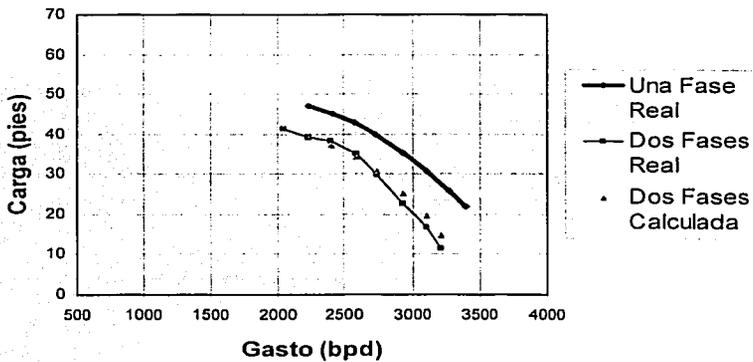


Figura 28. Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent= 500 lb/pg<sup>2</sup>,  $\alpha_{ont} = 10\%$ .

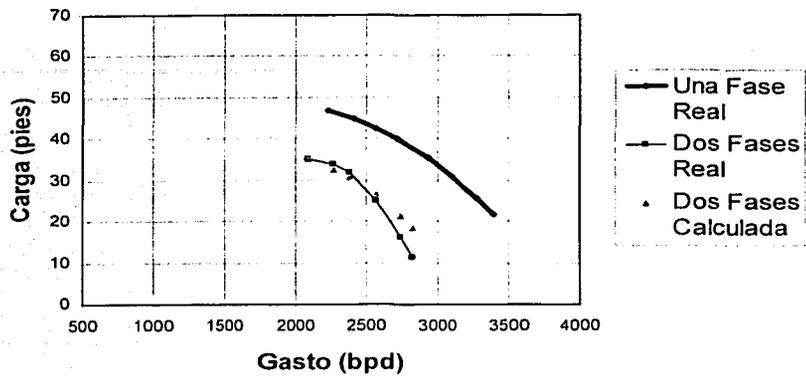


Figura 29. Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent= 500 lb/pg<sup>2</sup>,  $\alpha_{ont}$ = 15%.

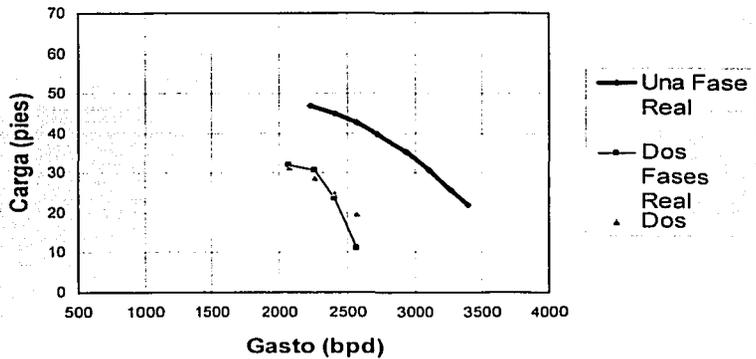
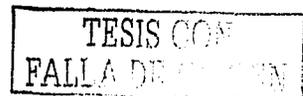


Figura 30. Predicciones del modelo para la Bomba GN2100, Pent= 500 lb/pg<sup>2</sup>,  $\alpha_{ont}$ = 18%.

El factor de fricción que se calcula es mayor al que se tiene si se considera una tubería circular lo cual coincide con los resultados obtenidos por Ito, para el caso de tuberías curvas y que rotan. Para el caso de una sección rectangular también el factor de fricción calculado es mayor y es de esperarse debido a que se tiene mayor fluido en contacto con las paredes. Como se mencionó anteriormente, dado el tamaño y la geometría de los impulsores o difusores utilizados en la industria petrolera es prácticamente imposible determinar las fronteras de los patrones de flujo existentes entre las fases, efectos de recirculación, el tamaño de las burbujas, etc.; por esta razón se decidió desarrollar la correlación empírica que implícitamente incluya todo lo que se desconoce, o que no puede medirse. Los coeficientes de correlación obtenidos en esta tesis son diferentes a los que obtuvo Sachdeva. La evaluación de la correlación se considera físicamente correcta, ya que al incrementarse la fracción de vacío en la entrada de la bomba el valor de  $\frac{C_d}{r_b}$  disminuye, lo cual es correcto, ya que esto significa que el tamaño de las burbujas es mayor y se puede inferir que para valores grandes de este parámetro se tendrá mayor estabilidad de la bomba.

Los resultados del modelo muestran un buen ajuste con respecto a los datos experimentales. Sin embargo, es sumamente recomendado que en un futuro se realicen más experimentos cubriendo otros tipos de fluidos, para de esta forma validar que el procedimiento seguido en este trabajo es aplicable a cualquier tipo de fluidos.

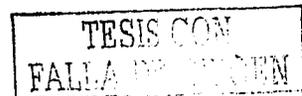
En la industria petrolera este modelo puede aplicarse si se cuenta con la información mínima de los impulsores que se utilizó en este trabajo. Esta información de ninguna forma viola los derechos de patente que se tengan sobre la construcción de los impulsores, debido a que no se estaría proporcionando la geometría de los canales formados por los álabes. Por el contrario, contando con estos datos e información experimental de campo, se puede llegar a determinar cuales son los ángulos de salida de los álabes que permitieran minimizar la degradación de carga de las curvas características en presencia de dos fases, lo cual permitiría disminuir la degradación de carga de las bombas en presencia de dos fases.



## CONCLUSIONES

El propósito principal esencial de esta tesis ha sido presentar un nuevo modelo y su solución para el flujo de fluidos en una y dos fases, a través de una bomba electrocentrífuga. Con base en los resultados de esta tesis se pueden establecer las conclusiones siguientes:

- 1) Se desarrolló un modelo para el cálculo de la degradación de carga en bombas electrocentrífugas.
- 2) El único modelo publicado para bombas electrocentrífugas, aplicable a la industria petrolera, se ha corregido en su formulación teórica y empleado nuevas ecuaciones para la modelación del flujo en el interior de los canales de las bombas.
- 3) La correlación empírica obtenida para el parámetro  $\frac{C_d}{r_b}$  presenta sentido físico con los resultados experimentales, y permitió incluir implícitamente efectos complejos de flujo que no pueden ser determinados experimentalmente.
- 4) El modelo desarrollado para una fase es un modelo sencillo, el cual puede utilizarse como base para el cálculo de la degradación de carga en dos fases.
- 5) El modelo para el cálculo de la degradación de carga en dos fases puede aplicarse a bombas del tipo radial o mixto, siempre y cuando se cuente con información mínima de la geometría de los impulsores y difusores, la cual debe ser proporcionada por los fabricantes.
- 6) El propósito principal de esta tesis se ha cumplido, desarrollando un modelo que puede ser utilizado por los ingenieros de la industria petrolera para determinar de una forma sencilla la degradación de carga de una bomba electrocentrífuga en presencia de dos fases.
- 7) Más experimentos deben llevarse a cabo, para poder entender mejor la complejidad del flujo de dos fases a través de los canales de flujo de los impulsores.



## NOMENCLATURA

Símbolo	Descripción	Unidades
$A, A_n$	= Área normal a la línea de corriente.	$m^2$
$A_r$	= Área radial.	$m^2$
$A_d$	= Área proyectada de una burbuja esférica. ( $\pi r^2$ )	$m^2$
$A_g$	= Área ocupada por el gas.	$m^2$
$C_d$	= Coeficiente de arrastre.	adim.
$C_{mv}$	= Coeficiente de masa virtual.	adim.
$d_b$	= Diámetro de la burbuja.	m
$D_h$	= Diámetro hidráulico del impulsor o difusor.	m
$D/D_t$	= Derivada total.	
$f$	= Factor de fricción en régimen laminar.	adim.
$f_b$	= Factor de fricción de Blasius.	adim.
$f_c$	= Factor de fricción por curvatura.	adim.
$f_g$	= Factor de fricción por geometría.	adim.
$f_r$	= Factor de fricción por rotación.	adim.
$g$	= Aceleración de la gravedad.	$m/s^2$
$g_c$	= Componente de la gravedad en la dirección radial.	$m/s^2$
$g_c$	= Factor de conversión de unidades.	$kg\cdot m/(kg_f\cdot s^2)$
$M$	= Peso molecular.	$lb/(lb\text{-mol})$
NALA	= Número de álabes.	
$P$	= Perímetro	m
$p$	= Presión.	$lb/pg^2$
$r$	= Distancia al eje de rotación del impulsor o difusor.	m
$r_b$	= Radio de la burbuja	m
$r_c$	= Radio de curvatura de los álabes del impulsor o difusor.	m
$r_o$	= Radio hidráulico	m
$R$	= Constante universal de los gases.	$lb/pg^2\text{-pie}^3/(^\circ R\text{-lb-mol})$
$Re$	= Número de Reynolds.	adim.
$Re_\Omega$	= Número de Reynolds angular.	adim.

s	= coordenada de línea de corriente.	m
T	= Temperatura.	°F
$V_b$	= Volumen de una burbuja esférica. ( $4/3\pi r^3$ )	m <sup>3</sup>
V	= Velocidad absoluta.	m/s
$V_0$	= Componente vectorial de la velocidad absoluta en la dirección tangencial.	m/s
$V_r$	= Componente vectorial de la velocidad absoluta en la dirección radial.	m/s
W	= Velocidad relativa de la fase líquido o gas respecto a la línea de corriente.	m/s
$W_r$	= Velocidad relativa del líquido respecto a la línea de corriente en la dirección radial.	m/s
$W_0$	= Velocidad relativa del líquido respecto a la línea de corriente en la dirección teta.	m/s
$W_z$	= Velocidad relativa del líquido respecto a la línea de corriente en la dirección zeta.	m/s
x	= Gasto másico de gas/Gasto másico total.	adim.
X	= Parámetro de Lockhart-Martinelli.	adim.
z	= Factor de compresibilidad del gas.	adim.
$\alpha$	= Fracción de vacío del gas.	fracción
$\alpha_p$	= Fracción de perímetro del líquido.	fracción
$\beta$	= Ángulo del álabe.	grados
$\gamma$	= Ángulo formado por las líneas meridionales de la superficie de corriente y el plano horizontal.	grados
$\rho$	= Densidad.	Kg/m <sup>3</sup>
$\mu$	= Viscosidad.	Kg/(m seg)
$\Omega$	= Velocidad angular.	rpm

#### Subíndices

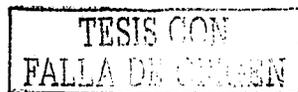
1	= Entrada.
2	= Salida.
L	= Líquido.
g	= Gas.

## REFERENCIAS

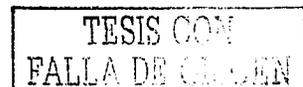
1. Furuya, O., "An Analytical Model for Prediction of Two-Phase (Noncondensable) Flow Pump Performance", ASME Journal of Fluids Engineering, Vol. 107, pp. 139-147 (1985).
2. Sachdeva, R., "Two-Phase Flow Through Electric Submersible Pumps", tesis doctoral, Universidad de Tulsa (1989).
3. Sachdeva, R., Doty, D.R. y Schmidt, Z., "Performance of Electric Submersible Pumps in Gassy Wells", SPE Production & Facilities, Feb., pp. 55-60 (1994).
4. Cirilo, R., "Air-Water Flow Through Electric Submersible Pumps", Tesis de Maestria, Universidad de Tulsa (1998).
5. Cirilo, R. y Doty, D., "Gas-Liquid Flow Through Electric Submersible Pumps", SPE Gulf Coast Section-ESP Workshop, Abril, pp. 1-13 (1999).
6. CENTRILIFT, *Submersible Pump Handbook*, (1994)
7. Tuzson, J., "Interpretation of Impeller Flow Calculations", Journal of Fluids Engineering, Vol. 115, pp 463-467 (1993).
8. Douglas, J.F., Gasiorek, J.M. y Swaffield, J.A., *Fluid Mechanics*, Tercera edicion (1995).
9. Dixon, S. L., *Fluid Meclhanics and Thermodynamics of Turbomachinery*, Butterworth Heinermann, Cuarta Edición (1998).
10. Church, A., *Centrifugal Pump and Blowers*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, N.Y. (1972).
11. Minemura, K. y Murakami, M., "A Theoretical Study on Air Bubble Motion in a Centrifugal Pump Impeller", Journal of Fluids Engineering, Vol. 102 pp. 446-455 (1980).
12. Patel, B. R. y Runstadler, P. W. Jr., "Investigations Into The Two-Phase-Flow Behavior Of Centrifugal Pumps", ASME Symposium On Polyphase Flow in Turbomachinery, San Francisco California, Dic 11-15 (1978).
13. Lea, J. F., "Effect of Gaseous Fluids on Submersible Pump Performance", JPT, dic. (1982), pp 2922-2930.
14. Hench, E. J., Johnston, P., J., "Two dimensional Diffuser Performance With Subsonic, Two-Phase, Air-Water Flow", ASME Journal of Basic Engineering, pp. 105-121 (1972).

15. Zuber, N., y Hench, J. E., "Steady State and Transient Void Fraction of Bubbling Systems and Their Operating Limits. Part I, Steady State Operation," General Electric Report No. 62GL100, 1962.
16. Murakami, M. y Minemura, K., "Effects of Entrained air on the Performance of a Centrifugal Pump Impeller, First Report – Performance and Flow Conditions," Bulletin of ASME, Vol.17, No. 110, pp.1047-1055.
17. Turpin, J. L., Lea, J.F. y Bearden, J. L., "Gas Liquid Through Centrifugal Pumps-Correlation of Data", Third International Pump Symposium, Texas A&M, Universidad de Tulsa (1996).
18. Minemura, K., Kinoshita, K. y Ihara, M., "Effects of Outlet Blade Angle of Centrifugal Pump on the Pump Performance Under Air-Water Two-Phase Flow Conditions", ASME Pipeline Engineering, PD-Vol. 69 (1995).
19. Noghrehkar, G. R. y Kawaji., "Investigation of Centrifugal Pump Performance Under Two Phase-Flow Conditions", ASME Journal of Fluids Engineering, Vol 117 , pp 129-137 (1995).
20. Minemura, K., Uchiyama, T., Soda, S., Egashira, K., "Prediction of Air-Water Two-Phase Flow Performance of a Centrifugal Pump Based on One-Dimensional Two-Fluid Model", Journal of Fluids Engineering Transactions of the ASME 1998, Vol. 120, pp. 327-334.
21. Pak, E., T., Lee, J., C., "Performance and Pressure Distribution Changes in a Centrifugal Pump Under Two-Phase Flow", Proc Instn Mech Engrs, Vol. 212, pp. 165-171 Part A.
22. Tremante, A., Moreno, N., Rey, R., Noguera, R., "Numerical Turbulent Simulation of the Two-Phase Flow (liquid/gas) through a Cascade of an Axial Pump", Journal of Fluid Engineering Transactions of the ASME 2002, Vol 124, pp. 371-376.
23. Eisele, K., Zhang, Z. y Casey, M.V., "Flow Analysis in a Pump Diffuser-Part 1:LDA and PVT Measurements of the Unsteady Flow", Transactions of the ASME, Vol. 119, pp.968-977 (1997).
24. Muggly, F. A., Eisele, K. Casey, M. V. y Güllich, J., "Flow Analysis in a Pump Diffuser –Part 2: Validation and Limitations of CFD for Diffusers Flows", Transactions of the ASME, Vol. 119, pp.978-984 (1997).

25. Ito, H., "Friction Factors for Turbulent Flow in Curved Pipes", *Journal of Basic Engineering* June (1959), pp.123-134.
26. White, C. M., "Streamline Flow Through Curved Pipes", *Proceedings of the Royal Society (London), Ser. A Vol. 123*, pp. 645-663 (1929).
27. Ito, H. y Nanbu, K., "Flow in Rotating Straight Pipes of Circular Cross Section", *Journal of Basic Engineering*, pp.383-394 (1971).
28. Jones, O., "An Improvement in the Calculation of Turbulent Friction in Rectangular Ducts", *Journal of Fluids Engineering*, June (1976), pp. 173-181.
29. Wallis, G. B., *One-Dimensional Two-Phase Flow*, McGraw-Hill, 1969
30. Yadigaroglu, G. y Lahey, R.T. Jr., "On the Various Forms of the Conservation Equations in Two-Phase Flow", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol. 2, pp.477-494 (1975).
31. Ritcher, H. J., "Separated Two-Phase Flow Model: Application to Critical Two-Phase Flow", *Int. Journal of Multiphase Flow*, Vol 9, No. 5, pp. 511-530. (1983)
32. Drew, A. D., y Lahey, R.T. Jr., "Application of General Constitutive Principles to the Derivation of Multidimensional Two-Phase Flow Equations", *Int. J. Multiphase Flow*, Vol 5, pp. 243-264 (1979).
33. García, A. F., "Fundamentos para el Diseño del Impulsor, Voluta y Flecha de una Bomba Centrífuga de Tipo Radial", Universidad La Salle, Tesis Profesional, septiembre (1998).
34. Drew, A. y Lahey, R. T., "The Virtual Mass and Lift Force on a Sphere in Rotating y Straining Inviscid Flow", *International Journal of Multiphase Flow*, Vol 13, No. 1, pp 113-121 (1987).
35. Crowe C., Sommerfeld M. y Tsuji Y., *Multiphase Flows with Droplets and Particles*, Tercera edición (1998).
36. Ishii, M. y Zuber, N., "Drag Coefficient and Relative Velocity in Bubbly, Droplets or Particulate Fluids", *AIChE Journal*, Vol. 25, No. 5, pp. 843-855 (1960).
37. Carver, M.B., "Numerical Computation of Phase Separation in two Fluid Flow", *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 106, pp. 147-153. (1984)
38. Carlson, RELAP5/MOD3 Code Manual, Volume IV: Models y Correlations, NUREG/CR-5535, U.S. Nuclear Regulatory Comissions, Junio (1990).



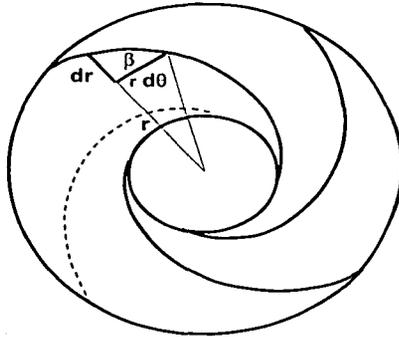
39. Taitel, Y. y Duckler, A. G., "A Model for Predicting Flow Regime Transitions in Horizontal Gas-Liquid Flow", *AIChE Journal*, Vol. 22, No. 1, pp. 47-55 (1976).
40. Park, J. W., Drew, D. A., Lahey, R.T., "The Analysis of Void Wave Propagation in Adiabatic Monodispersed Bubbly Two-Phase Flows Using an Ensemble Averaged Two-Fluid Model", *International Journal Of Multiphase Flow* 24, pp. 1205-1244 (1998).
41. Hatta, N., "Predictable Model for Characteristics of One Dimensional Solid-Gas-Liquid Three-Phase Mixtures Flow Along a Vertical Pipeline With an Abrupt Enlargement in Diameter", *ASME Journal of Fluids Engineering*, Vol. 121, pp. 330-342 (1999).
42. Mataix C., *Mecánica de Fluidos y Maquinas Hidráulicas*, Harper & Row Publishers Inc., (1970).
43. Wilson, B. L., "Gas Handling Centrifugal Pumps", *Submersible Pumps Workshop* 1998.
44. Tamm, A., Ludwig, B. S., "Numerical, Experimental and Theoretical Analysis of the Individual Efficiencies of a Centrifugal Pump"; *Proceedings of ASME FEDSM'01*, New Orleans, Louisiana, Mayo 29-Junio 1, 2001.



## APÉNDICE A

Cálculo de la Variación de la Presión en el Interior de un Impulsor de Flujo Mixto, con Álabes Curvados hacia atrás.

De la Fig. A-1:



**Figura A-1. Triángulo infinitesimal formado en el plano r-θ.**

$$\text{Tan } \beta[r] = \frac{dr}{r d\theta} ; \quad \dots (A.1)$$

ó:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{r \text{Tan} \beta} \quad \dots (A.2)$$

Tratando al triángulo infinitesimal como un triángulo de velocidades

$$\text{Tan } \beta[r] = \frac{W_r}{W_\theta} \quad \dots (A.3)$$

Igualando las Ecs. A.1 y A.3 se obtiene:

$$\frac{W_r}{W_\theta} = \frac{dr}{r d\theta} ; \quad \dots (A.4)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

ó:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{W_\theta}{r W_r} \quad \dots (A.5)$$

Igualando las Ecs. A.5 y A.2 se obtiene:

$$\frac{W_\theta}{r W_r} = \frac{1}{r \tan \beta[r]} \quad \dots (A.6)$$

ó:

$$\frac{W_\theta}{W_r} = \frac{1}{\tan \beta[r]} \quad \dots (A.7)$$

Consideremos ahora que la presión en el interior del impulsor es función del radio, del ángulo  $\theta$  y de la longitud axial,  $p = p(r, \theta, z)$ , por lo que aplicando la definición de diferencial total se puede escribir

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dr} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dr} \quad \dots (A.9)$$

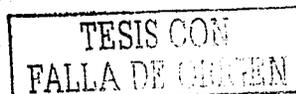
Para resolver esta ecuación se van a utilizar las ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas, considerando que  $V_r = V(r)$  y  $V_\theta = V(r)$  y  $V_z = V(r)$

$$-\frac{\partial p}{\partial r} = -\rho_L \frac{V_\theta^2}{r} + \rho_L V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} \quad \dots (A.10)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial \theta} = -\rho_L r V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \rho_L V_r V_\theta \quad \dots (A.11)$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_L V_z \frac{\partial V_z}{\partial r} \quad \dots (A.12)$$

Sustituyendo las Ecs. A.10, A.11 y A.12 en la Ec. A.9 se obtiene:



$$\frac{dp}{dr} = \rho_L \frac{V_0^2}{r} - \rho_L V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \left[ \rho_L r V_r \frac{\partial V_0}{\partial r} + \rho_L V_r V_0 \right] \frac{d\theta}{dr} - \left[ \rho_L V_z \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] \frac{dz}{dr} \quad \dots (A.13)$$

Sustituyendo la Ec. A.5 en la Ec. A.13 se obtiene:

$$\frac{dp}{dr} = \rho_L \frac{V_0^2}{r} - \rho_L V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \left[ \rho_L r V_r \frac{\partial V_0}{\partial r} + \rho_L V_r V_0 \right] \frac{W_0}{r W_r} - \left[ \rho_L V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] \frac{W_z}{W_r} \quad \dots (A.14)$$

Simplificando términos

$$\frac{dp}{dr} = \rho_L \frac{V_0^2}{r} - \frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W_r^2}{\partial r} + \rho_L W_0 \frac{\partial V_0}{\partial r} + \rho_L \frac{V_0 W_0}{r} - \frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W_z^2}{\partial r} \quad \dots (A.15)$$

A partir del triángulo de velocidades mostrado en la Fig. 3, se obtiene que  $V_0 = U - W_0$ , por lo que sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{dp}{dr} = \rho_L \frac{V_0^2}{r} - \frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W_r^2}{\partial r} + \rho_L r W_0 \left[ \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial W_0}{\partial r} \right] + \rho_L \frac{V_0(U - V_0)}{r} - \frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W_z^2}{\partial r} \quad \dots (A.16)$$

Realizando los productos de los términos entre corchetes y paréntesis se obtiene:

$$\frac{dp}{dr} = \rho_L \frac{V_0^2}{r} - \frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W_r^2}{\partial r} + \rho_L W_0 \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W_0^2}{\partial r} + \frac{\rho_L V_0 U}{r} - \frac{\rho_L V_0^2}{r} - \frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W_z^2}{\partial r} \quad \dots (A.17)$$

Eliminando términos y agrupando:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho_L}{2} \frac{\partial}{\partial r} (W_r^2 + W_0^2 + W_z^2) + \rho_L W_0 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\rho_L V_0 U}{r} \quad \dots (A.18)$$

$W = W_r^2 + W_0^2 + W_z^2$ , por lo que sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior se obtiene:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W^2}{\partial r} + \rho_L W_0 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\rho_L V_0 U}{r} \quad \dots (A.19)$$

TESIS CON  
FALLA DE CALIFICACIÓN

Aplicando la definición  $U = \Omega r$  se obtiene:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W^2}{\partial r} + \rho_L W_0 \Omega + \rho_L V_0 \Omega \quad \dots (A.20)$$

Sustituyendo la definición para  $V_0$  en esta expresión:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W^2}{\partial r} + \rho_L W_0 \Omega + \rho_L (U - W_0) \Omega \quad \dots (A.21)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W^2}{\partial r} + \rho_L W_0 \Omega + \rho_L U \Omega - \rho_L W_0 \Omega \quad \dots (A.22)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\rho_L}{2} \frac{\partial W^2}{\partial r} + \rho_L \Omega^2 r \quad \dots (A.23)$$

Esta ecuación anterior escrita en unidades prácticas se expresa como:

$$\frac{g_c}{\rho_L} \frac{dp}{dr} = \Omega^2 r - \frac{1}{2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \quad \dots (A.24)$$

Aplicando la regla de la cadena

$$\frac{g_c}{\rho_L} \frac{dp}{ds} \frac{ds}{dr} = \Omega^2 r - \frac{1}{2} \frac{\partial W^2}{\partial s} \frac{ds}{dr} \quad \dots (A.25)$$

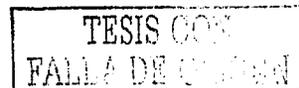
Debido a que  $W$  es función de  $r$  únicamente, la derivada  $\frac{\partial W^2}{\partial r}$  puede expresarse como  $\frac{dW^2}{dr}$ ; por lo tanto:

$$\frac{g_c}{\rho_L} \frac{dp}{ds} \frac{ds}{dr} = \Omega^2 r - \frac{1}{2} \frac{dW^2}{ds} \frac{ds}{dr} \quad \dots (A.26)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación por  $\frac{dr}{ds}$  se obtiene:

$$\frac{g_c}{\rho_L} \frac{dp}{ds} = \Omega^2 r \frac{dr}{ds} - \frac{1}{2} \frac{dW^2}{ds} \quad \dots (A.27)$$

Esta ecuación permite determinar la variación de la presión en el interior de un impulsor de flujo mixto con álabes curvados hacia atrás.



Es importante observar que si en la Ec. A.9, no se considera el término  $\frac{\partial p}{\partial z} \frac{dz}{dr}$  y se sigue el mismo procedimiento se llega a la Ec. A.27, con lo que se demuestra que es una ecuación general que se puede utilizar tanto para impulsores del tipo mixto como radial.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## APÉNDICE B

### CÁLCULO DE LA VARIACIÓN DEL RADIO CON RESPECTO A LA COORDENADA DE LINEA DE CORRIENTE "S".

Furuya<sup>1</sup> con base en un volumen de control para máquinas que rotan formuló una ecuación para calcular la variación del radio con respecto a la coordenada de línea de corriente "S". Esta ecuación fue utilizada por Sachdeva<sup>2,3</sup> en su modelo.

$$\frac{dr}{ds} = \text{sen } \beta' \cos \gamma$$

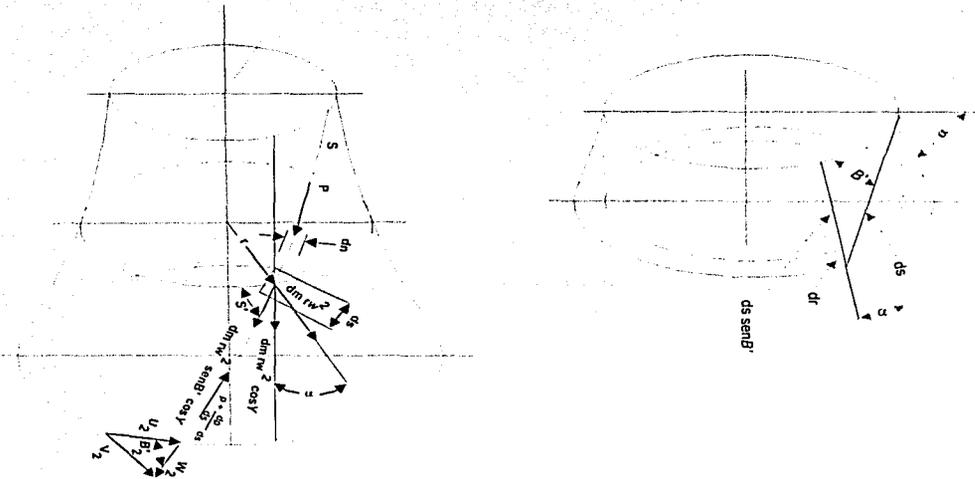
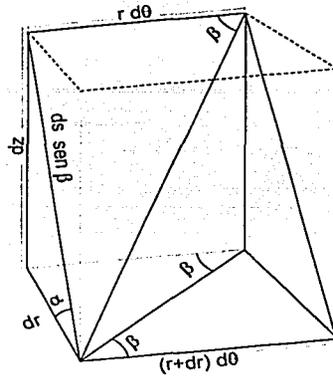


Figura B-1. Volumen de control para un impulsor del tipo mixto.

La ecuación de Furuya<sup>1</sup> puede utilizarse siempre y cuando se conozca la variación del ángulo "  $\beta'$  " en el plano (r- $\theta$ -z). Sin embargo, si lo que se conoce es el ángulo " $\beta$ " en el plano (r- $\theta$ ) la formulación siguiente puede emplearse.

Con base en la Fig. B-1 puede obtenerse la Fig. siguiente:



**Figura B-2. Diferencial de volumen de control.**

A partir de las relaciones geométricas de esta Fig. B-2, se pueden establecer las expresiones siguientes:

$$\text{sen } \beta = \frac{dr}{ds_1} \quad ; \quad \dots (B.1)$$

$$(ds)^2 = \left( \frac{dr}{\text{sen } \beta} \right)^2 + (dz)^2 \quad ; \quad \dots (B.2)$$

$$\left( \frac{ds}{dr} \right)^2 = \left( \frac{1}{\text{sen } \beta} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \quad ; \quad \dots (B.3)$$

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{\left( \frac{1}{\text{sen } \beta} \right)^2 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2} \quad ; \quad \dots (B.4)$$

$$\frac{ds}{dr} = \sqrt{\frac{1}{\text{sen}^2 \beta} + \tan^2 \gamma} \quad \dots (B.5)$$

TESIS CON  
FALSA ORIGEN

## APÉNDICE C

### CÁLCULO DE LA VARIACIÓN DEL ÁREA NORMAL AL FLUJO EN EL INTERIOR DE UN IMPULSOR

Se considera un impulsor del tipo radial que tiene álabes curvados hacia atrás y que el flujo de un fluido a través de uno de los canales formados por los álabes se puede visualizar, como se muestra en la Fig. C-1.

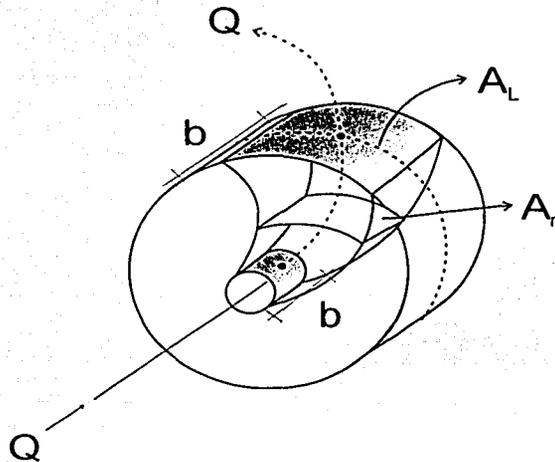


Figura C-1. Canal de flujo formado por dos álabes en el interior de un impulsor del tipo radial.

De la ecuación de continuidad se tiene:

$$Q_L = V_r A_L = W A_n \quad \dots (C.1)$$

$$A_n = \frac{Q_L}{W} \quad \dots (C.2)$$

$$W = (V_r^2 + V_0^2)^{1/2} \quad \dots (C.3)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

donde:

$V_r$  = Velocidad del fluido en la dirección radial.

$V_0$  = Velocidad del fluido en la dirección  $\theta$ .

$W$  = Velocidad normal al área de flujo del fluido.

$A_L$  = Área lateral del impulsor.

$A_n$  = Área perpendicular al flujo.

Del apéndice B para un impulsor del tipo radial se tiene que:

$$\frac{dr}{ds} = \text{sen } \beta = \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \beta}\right)^{-1/2} \quad \dots \text{ (C.4)}$$

$$\tan \beta = \frac{V_r}{V_0} \quad \dots \text{ (C.5)}$$

$$\frac{dr}{ds} = \left(1 + \frac{V_0^2}{V_r^2}\right)^{-1/2} = \frac{V_r}{(V_r^2 + V_0^2)^{1/2}} \quad \dots \text{ (C.6)}$$

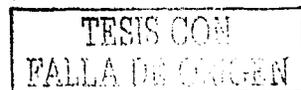
$$A_n = \frac{Q_L}{V_r} \frac{V_r}{(V_r^2 + V_0^2)^{1/2}} \quad \dots \text{ (C.7)}$$

$$A_n = A_L \left(\frac{dr}{ds}\right) \quad \dots \text{ (C.8)}$$

Procediendo de la misma manera para el caso de un impulsor del tipo mixto se llega a la misma ecuación C.8.

Para el caso de un impulsor del tipo radial

$$A_n = (2 \Pi r b)(\text{sen } \beta) \quad \dots \text{ (C.9)}$$



Derivando la Ec. C.9

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{dA_n}{dr} \right) &= (2 \pi r b) \frac{d}{dr} (\text{sen } \beta) + (\text{sen } \beta) \frac{d}{dr} (2 \pi r b) \\
 &= (2 \pi r b) (\cos \beta) \left( \frac{d\beta}{dr} \right) + (\text{sen } \beta) (2 \pi r) \left( \frac{db}{dr} \right) + (\text{sen } \beta) (2 \pi b) \\
 &= (2 \pi r b) (\text{sen } \beta) \left[ \left( \frac{\cos \beta}{\text{sen } \beta} \right) \left( \frac{d\beta}{dr} \right) + \left( \frac{1}{b} \right) \left( \frac{db}{dr} \right) + \left( \frac{1}{r} \right) \right] \dots (C.10)
 \end{aligned}$$

$$\left( \frac{1}{A_n} \right) \left( \frac{dA_n}{dr} \right) = \left( \frac{1}{\tan \beta} \right) \left( \frac{d\beta}{dr} \right) + \left( \frac{1}{b} \right) \left( \frac{db}{dr} \right) + \left( \frac{1}{r} \right) \dots (C.11)$$

aplicando la regla de la cadena

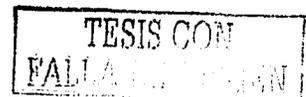
$$\left( \frac{1}{A_n} \right) \left( \frac{dA_n}{ds} \right) = \left( \frac{dr}{ds} \right) \left[ \left( \frac{1}{\tan \beta} \right) \left( \frac{d\beta}{dr} \right) + \left( \frac{1}{b} \right) \left( \frac{db}{dr} \right) + \left( \frac{1}{r} \right) \right] \dots (C.12)$$

sustituyendo la expresión para  $\left( \frac{dr}{ds} \right)$  dada por la Ec. C.4

$$\left( \frac{1}{A_n} \right) \left( \frac{dA_n}{ds} \right) = (\cos \beta) \left( \frac{d\beta}{dr} \right) + \left( \frac{\text{sen } \beta}{b} \right) \left( \frac{db}{dr} \right) + \left( \frac{\text{sen } \beta}{r} \right) \dots (C.13)$$

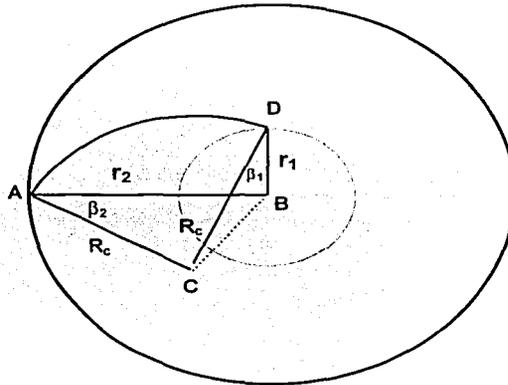
Procediendo de la misma forma, para un impulsor del tipo mixto, se obtiene:

$$\left( \frac{1}{A_n} \right) \left( \frac{dA_n}{ds} \right) = \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 \left[ \left( \frac{\cos \beta}{\text{sen}^3 \beta} \right) \left( \frac{d\beta}{dr} \right) - \left( \frac{\text{sen } \gamma}{\cos^3 \gamma} \right) \left( \frac{d\gamma}{dr} \right) + \left( \frac{1}{b} \right) \left( \frac{db}{dr} \right) + \left( \frac{1}{r} \right) \right] \dots (C.14)$$



## APÉNDICE D

### CÁLCULO DEL RADIO DE CURVATURA DE UN IMPULSOR DE FLUJO RADIAL CON ÁLABES CURVADOS HACIA ATRÁS.



**Figura D-1. Radio de curvatura en función del radio de entrada y salida del impulsor.**

Puede observarse de la Fig. D-1 que a partir del arco que va desde  $r_1$  a  $r_2$ , se pueden trazar dos triángulos<sup>33</sup>, el triángulo ABC y el triángulo CDB; si aplica la ley de los cósenos a cada uno de los triángulos, se obtiene:

$$(CB)^2 = r_2^2 + R_c^2 - 2 r_2 R_c \cos(\beta_2) \quad \dots (D.1)$$

$$(CB)^2 = r_1^2 + R_c^2 - 2 r_1 R_c \cos(\beta_1) \quad \dots (D.2)$$

igualando las Ecs. D.1 y D.2, se obtiene:

$$r_2^2 + R_c^2 - 2 r_2 R_c \cos(\beta_2) = r_1^2 + R_c^2 - 2 r_1 R_c \cos(\beta_1) \quad \dots (D.3)$$

TESIS CON  
 FALLA DE CUBIEN

agrupando términos en la Ec. D.3 se obtiene el radio de curvatura:

$$R_c = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2 (\cos(\beta_2) - r_1 \cos(\beta_1))} \quad \dots (D.4)$$

Esta ecuación es válida para triángulos de tamaño finito, pero puede aplicarse para triángulos de tamaño infinitesimal si las variables  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  se sustituyen por  $r$ ,  $(r + dr)$ ,  $\beta$  y  $(\beta + d\beta)$ , respectivamente.

Realizando las sustituciones en el numerador y denominador de la Ec. D.4, se obtiene:

$$r_2^2 - r_1^2 = (r + dr)^2 - r^2 = 2 r dr \quad ; \quad \dots (D.5)$$

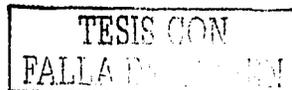
$$\begin{aligned} r_2 (\cos(\beta_2) - r_1 \cos(\beta_1)) &= 2 (r + dr)(\cos(\beta + d\beta) - r \cos(\beta)) \\ &= 2 (r [\cos(\beta + d\beta) - \cos(\beta)] + dr \cos(\beta + d\beta)) \\ &= 2 (r [\cos(\beta) \cos(d\beta) - \sin(\beta) \sin(d\beta) - \cos(\beta)] \\ &\quad + dr [\cos(\beta) \cos(d\beta) - \sin(\beta) \sin(d\beta)]) \end{aligned} \quad \dots (D.6)$$

considerando que  $\sin(d\beta) > d\beta$ ,  $\cos(d\beta) > 1$  y que el producto de diferenciales  $(dr)(d\beta)$  es un valor muy pequeño que puede despreciarse, la Ec. D.6 se simplifica a:

$$\begin{aligned} r_2 (\cos(\beta_2) - r_1 \cos(\beta_1)) &= 2(-r d\beta \sin(\beta) + dr \cos(\beta)) \\ &= 2 r d\beta \sin(\beta) \left( \frac{1}{r \tan(\beta)} - \frac{d\beta}{dr} \right) \end{aligned} \quad \dots (D.7)$$

sustituyendo las Ecs. D.7 y D.5 en la Ec. D.4 y simplificando se obtiene:

$$R_c = \frac{1}{\sin(\beta) \left( \frac{1}{r \tan(\beta)} - \frac{d\beta}{dr} \right)} \quad \dots (D.8)$$



Ésta es la expresión para el cálculo del radio de curvatura considerando arcos formados con diferenciales de radio, como el mostrado en la Fig. 11 del Apéndice A.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## APÉNDICE E

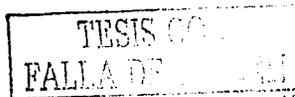
### FUERZAS QUE ACTUAN SOBRE EL FLUIDO A LO LARGO DE UNA LÍNEA DE CORRIENTE.

Cuando se tiene gas y líquido fluyendo en el interior de una bomba electrocentrífuga, las fuerzas que actúan sobre los fluidos son las siguientes:

- Fuerza de masa virtual<sup>34,35</sup>.
- Fuerza de arrastre interfacial<sup>36</sup>.
- Fuerza centrífuga<sup>10</sup>.
- Fuerza de gravedad.
- Fuerza de fricción<sup>37,38</sup>.
- Fuerza de presión.

A continuación se discuten cada una de estas fuerzas.

**Fuerza de masa virtual ( $F_{mv}$ ):** Cuando una burbuja de gas se acelera, se induce una fuerza de resistencia sobre ella. Esta fuerza es causada por cambios en la cantidad de movimiento del líquido que rodea la burbuja. Al incorporarse una burbuja a la trayectoria de un líquido en movimiento la velocidad del líquido alrededor de la burbuja y la velocidad de la burbuja misma se modifican, como si se tuviera una masa de gas diferente. La fuerza de masa virtual es la fuerza requerida para acelerar la masa aparente de gas cuando las velocidades relativas cambian. Experimentalmente se ha obtenido, para burbujas esféricas indeformables, que esta fuerza es igual a la mitad de la masa del líquido desplazado por la aceleración de la burbuja. De acuerdo a Drew<sup>34</sup> esta fuerza puede expresarse como:



ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

$$F_{mv} = C_{mv} m_L \left( \frac{DW_L}{Dt} - \frac{DW_G}{Dt} \right) \frac{1}{g_c} \quad \dots (E.1)$$

Expresando la fuerza por unidad de volumen se obtiene:

$$F_{mv} = \alpha C_{mv} \rho_L \left( \frac{DW_L}{Dt} - \frac{DW_G}{Dt} \right) \frac{1}{g_c} \quad \dots (E.2)$$

Se utiliza el valor de  $C_{mv} = 0.5$  cuando se consideran burbujas esféricas. Noghrehkar<sup>19</sup> expone que cuando la fracción de vacío,  $\alpha$ , es mayor a 0.35 se tiene condiciones de flujo caótico - turbulento y el valor de  $C_{mv}$  debe ser cero, ya que esta fuerza se aplica solamente para burbujas "discretas".

**Fuerza de arrastre interfacial ( $F_i$ ):** Una burbuja esférica moviéndose a través de un fluido experimenta una fuerza de arrastre si su velocidad relativa respecto al fluido es constante. Comúnmente esta fuerza es expresada como:

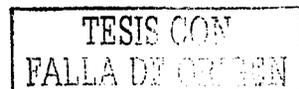
$$F_D = -0.5 C_D \rho_L (W_G - W_L) |W_G - W_L| \frac{A_d}{g_c} \quad \dots (E.3)$$

donde:

$A_d$  es el área proyectada de una burbuja esférica, sobre un plano horizontal, lo cual resulta en un círculo.

Si  $F_D$  es expresada por unidad de volumen, se obtiene la fuerza de arrastre interfacial que fue discutida por Ishii<sup>36</sup>:

$$F_i = \frac{F_D \alpha}{V_b} = -\frac{3}{8} \frac{C_D}{r_b} \rho_L (W_G - W_L) |W_G - W_L| \frac{\alpha}{g_c} \quad \dots (E.4)$$



**Fuerza Centrifuga (F<sub>c</sub>):** los fluidos dentro del impulsor de la bomba tienen un movimiento rotativo; la fuerza centrifuga que experimentan debido a su velocidad puede expresarse :

$$F_c = \rho \Omega^2 r \frac{dr}{ds} \frac{1}{g_c} \quad \dots (E.5)$$

Para el caso del gas la fuerza centrifuga puede ser expresada por:

$$F_c = \alpha \rho_g \Omega^2 r \frac{dr}{ds} \frac{1}{g_c} \quad \dots (E.6)$$

Para el caso del liquido la fuerza centrifuga puede ser expresada por:

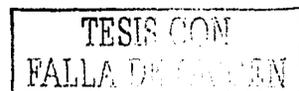
$$F_c = (1-\alpha) \rho_L \Omega^2 r \frac{dr}{ds} \frac{1}{g_c} \quad \dots (E.7)$$

Experimentalmente se ha determinado que en un sistema donde los fluidos están sometidos a una velocidad angular alta, la fuerza centrifuga es varias veces mayor a la fuerza de gravedad, por lo que la fuerza de gravedad despreciable.

Para el caso del movimiento de los fluidos en el interior de un difusor, la fuerza centrifuga no debe considerarse debido a que el difusor es un elemento fijo, es decir no tiene rotación.

**Fuerza de Gravedad (F<sub>g</sub>):** Debido a que los fluidos dentro del difusor no tienen un movimiento rotativo esta fuerza debe considerarse, para el caso del impulsor, como ya se mencionó, en la sección del desarrollo de las ecuaciones de movimiento para el líquido y el gas a largo de una línea de corriente, esta fuerza no se toma en cuenta.

La fuerza de gravedad para la fase de gas se expresa en la forma siguiente:



$$F_{GG} = \alpha \rho_g \frac{g}{g_c} \quad \dots (E.8)$$

Para el caso del liquido la fuerza de gravedad puede ser expresada por:

$$F_{GL} = (1 - \alpha) \rho_L \frac{g}{g_c} \quad \dots (E.9)$$

**Fuerza de Fricción (F<sub>f</sub>):** Para la determinación de esta fuerza se analizaron dos opciones:

- 1) Utilizando el multiplicador de dos fases utilizado por Martinelli<sup>38</sup>, para cuando se tienen fases separadas y considerando que solamente fluye la fase líquida.

$$F_f = \phi^2 \frac{f_L \rho_L W_L^2}{2g_c D_h} \quad \dots (E.10)$$

donde:

$$\phi^2 = 1 + \frac{20}{X} + \frac{1}{X^2} \quad ; \quad \dots (E.11)$$

$$X = \left( \frac{1 - x}{x} \right)^{0.9} \left( \frac{\mu_g}{\mu_L} \right)^{-0.1} \left( \frac{\rho_g}{\rho_L} \right)^{0.5} \quad ; \quad \dots (E.12)$$

El factor de fricción  $f_L$  se calcula en la misma forma que se hizo para una sola fase.

2) Utilizando una relación del factor de fricción para cada fase, con respecto al factor de fricción que se tendría si fluyera una sola fase.

$$\frac{f_L}{f_{bL}} = \frac{C \left( \frac{\rho_L Q_L D_{nL}}{A_L \mu_L} \right)^{-n}}{C \left( \frac{\rho_L Q_L D_h}{A \mu_L} \right)^{-n}} = \left( \frac{A D_{nL}}{A_L D_h} \right)^{-n} \quad \dots (E.13)$$

donde:

$C = 0.046$  para flujo turbulento y  $16$  para flujo laminar.

$n = 0.02$  para flujo turbulento y  $1$  para flujo laminar.

$D_{nL}$  es el diámetro hidráulico para la fase líquida y se evalúa como:

$$D_{nL} = 4 \frac{A_L}{S_L} \quad \dots (E.14)$$

$D_n$  es el diámetro hidráulico para una fase como si esta fluyera sola:

$$D_n = 4 \frac{A}{S} \quad \dots (E.15)$$

$$\left( \frac{D_{nL}}{D_n} \right)^{-n} = \left( \frac{A_L S}{A S_L} \right)^{-n} \quad \dots (E.16)$$

Para tuberías horizontales de diámetro pequeño, aplicando el procedimiento propuesto por Duckler y Taitel<sup>39</sup>, se obtiene que para el patrón de flujo burbuja la fracción de área de líquido es aproximadamente 0.82 veces la fracción del perímetro de líquido. De lo anterior, se concluye que el error que se cometerá al suponer que la fracción de vacío de líquido es aproximadamente igual a la fracción de perímetro de líquido no es considerable. Esta misma aproximación es utilizada en el programa RELAP5<sup>38</sup> utilizado en la industria nuclear. Así, la Ec. E.17 se simplifica a  $D_n = D_{nL}$ , por lo que sustituyendo este resultado en la Ec. E.14 se obtiene :

$$f_L = \frac{f_{bL}}{(1-\alpha)^{-n}} \quad \dots (E.17)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Procediendo del mismo modo para la fase de gas se tiene:

$$f_G = \frac{f_{bG}}{(\alpha)^m} \quad \dots (E.18)$$

Los factores de fricción  $f_{bL}$  y  $f_{bG}$  se calculan en la misma forma a como se calculó el factor de fricción para una sola fase.

La forma más correcta en la determinación del factor de fricción es calcularlo de acuerdo al patrón de flujo que se presente en los canales de flujo, pero esto requiere de un conocimiento pleno de éstos y de sus fronteras para poder desarrollar así relaciones constitutivas específicas. Sin embargo, debido al desconocimiento de estos, el factor de fricción puede calcularse haciendo uso de ecuaciones clásicas, teniendo en cuenta de que será sólo una aproximación. Esto mismo fue planteado por Park<sup>40</sup> para un modelo de dos fluidos.

Considerando lo anterior, para cálculo del factor de fricción se seleccionó la opción 1 debido a que este tipo de formulación es utilizada con buenos resultados en el modelo RELAP5 que es utilizado en la industria nuclear y también ha sido utilizado por Minemura<sup>20</sup>. No hay que olvidar que el modelo de dos fluidos considera que las dos fases fluyen en forma "continua" por lo que cada fase puede ser tratada en forma separada.

Aún cuando la opción 2 se considera buena aproximación para flujo burbuja, se requiere de conocer la fracción de perímetro mojado para otros patrones de flujo; si se desea aplicar de forma general.

**Fuerza de Presión ( $F_P$ ):** esta es la fuerza que se produce debido al gradiente de presión. La fuerza de presión por unidad de volumen de cada fase es:

$$F_{PL} = (1 - \alpha) \frac{dp_L}{ds} \quad \dots (E.19)$$

$$F_{PG} = \alpha \frac{dp_G}{ds} \quad \dots (E.20)$$



## APÉNDICE F

### PROGRAMA PARA EL CALCULO DE LA CARGA EN UN IMPULSOR DEL TIPO RADIAL

#### 1. Definición de Variables.

AL: Área Lateral ( $m^2$ )

b: Altura del impulsor (mts)

$d_h$ : diámetro hidráulico (mts)

f: Factor de fricción (adimensional)

H: carga  $\left(\frac{mts}{etapa}\right)$

NALA: número de álabes

NETA: número de etapas

P: presión de entrada a la bomba  $\left(\frac{lb}{pg^2}\right)$

PM: Perímetro mojado (mts)

$Q_L$ : Gasto de líquido  $\left(\frac{m^3}{s}\right)$

r: Radio del impulsor (mts)

$r_c$ : Radio de curvatura (mts)

$r_h$ : Radio hidráulico (mts)

SG: gravedad específica del agua a condiciones estandar (agua = 1)

$\rho_L$ : densidad del agua  $\left(\frac{Kgm}{m^3}\right)$

$g_c$ : Constante gravitacional

Nre: Número de Reynolds (adimensional)

V: Velocidad absoluta  $\left(\frac{m}{s}\right)$

Slip: Velocidad de resbalamiento  $\left(\frac{m}{s}\right)$

U: Velocidad tangencial  $\left(\frac{m}{s}\right)$

WL: Velocidad relativa  $\left(\frac{m}{s}\right)$

$\Omega$ : Velocidad de rotación (rpm)

$\mu$ : Viscosidad  $\left(\frac{Kgm}{m \cdot s}\right)$

#### Subíndices

1: Entrada al impulsor

2: Salida del impulsor

TESIS CON  
FALLA DE CHEQUEO

## APÉNDICE F

### PROGRAMA PARA EL CALCULO DE LA CARGA EN UN IMPULSOR DEL TIPO RADIAL

#### 1. Definición de Variables.

- AL : Área Lateral ( $m^2$ )  
b : Altura del impulsor (mts)  
 $d_h$  : diámetro hidráulico (mts)  
f : Factor de fricción (adimensional)  
H : carga  $\left(\frac{mts}{etapa}\right)$   
NALA : número de álabes  
NETA : número de etapas  
P : presión de entrada a la bomba  $\left(\frac{lb}{pg^2}\right)$   
PM : Perímetro mojado (mts)  
 $Q_L$  : Gasto de líquido  $\left(\frac{m^3}{s}\right)$   
r : Radio del impulsor (mts)  
 $r_c$  : Radio de curvatura (mts)  
 $r_h$  : Radio hidráulico (mts)  
SG : gravedad específica del agua a condiciones estandar (agua = 1)  
 $\rho_L$  : densidad del agua  $\left(\frac{Kgm}{m^3}\right)$   
 $g_c$  : Constante gravitacional  
Nre : Número de Reynolds (adimensional)  
V : Velocidad absoluta  $\left(\frac{m}{s}\right)$   
Slip : Velocidad de resbaleamiento  $\left(\frac{m}{s}\right)$   
U : Velocidad tangencial  $\left(\frac{m}{s}\right)$   
WL : Velocidad relativa  $\left(\frac{m}{s}\right)$   
 $\Omega$  : Velocidad de rotación (rpm)  
 $\mu$  : Viscosidad  $\left(\frac{Kgm}{m \cdot s}\right)$
- Subíndices**  
1 : Entrada al impulsor  
2 : Salida del impulsor

TESIS CON  
FALLA DE CUBIEN

```

Ω = 3500 * (2 * N[π]) / 60; (*rad/seg*)
μ = 0.001; (*Kgm/m.s*)
ρL = 1000; (*Kgm/m3*)
SG = 1;
gc = 9.807;
NRLA = 7;
b1 = 0.007; (*mts*)
b2 = 0.00425; (*mts*)
β1 = 14.00 * N[π] / 180; (*rad*)
r1 = 0.02159; (*mts*)
β2 = 39 * N[π] / 180;
r2 = 0.0508; (*mts*)
M = (β2 - β1) / (r2 - r1);
M1 = (b2 - b1) / (r2 - r1);
U1 = Ω * r1;
U2 = Ω * r2;
limitez = Log[Cot[β1/2] Tan[1/2 (Mr2 - Mr1 + β1)]] / M;
deltaz = limitez / 5;
Listavalteor = {};
Print[TableForm[{" QL ", "HReduc", " P" }, {" (m3/d) ", "(mts)", "(lb/pg2)"}]];

Do[
  grafz = {};

  (* Cálculo de la presión considerando las pérdidas por fricción *)

  (* Cálculo del diámetro hidráulico de una sección rectangular*)

  β1 = ArcTan[QL[[1, y]] / (U1 + 2 * N[π] * r1 * b1)];
  M = (β2 - β1) / (r2 - r1);
  limitez = Log[Cot[β1/2] Tan[1/2 (Mr2 - Mr1 + β1)]] / M;
  deltaz = limitez / 5;
  β = M (r[z] - r1) + β1;
  b = M1 * (r[z] - r1) + b1;
  Base = (2 * N[π] * r[z]) / NRLA;
  Altura = b;
  AL = Base * Altura;
  PM = 2 * (Base + Altura);
  dh = (4 * AL) / PM;

  (* Cálculo del factor de fricción en una tubería circular,
  recta y sin rugosidad, considerando regimen turbulento *)

```

```
Nre =  $\rho_L \cdot \omega L [z] \cdot d_h / \mu;$ 
f = 0.316 / Nre0.25;
```

*(\* Cálculo del factor de fricción en una tubería circular, recta,  
y sin rugosidad que esta rotando, considerando regimen turbulento \*)*

```
Nre0 =  $\rho_L \cdot \Omega \cdot d_h^2 / \mu;$ 
Kc = Nre02 / Nre;
fr = 0.942 * Kc0.05;
```

```
(*Which[
Kc<1, fr=1., (<Kc&&Kc<15, fr=0.942+0.058*Kc0.0282, Kc>15, fr= 0.942*Kc0.05,
True,
Print["El valor del factor de fricción por rotación tiene conflicto verificalo"]
];*)
```

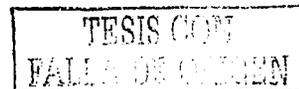
*(\* Cálculo del factor de fricción corregido por curvatura  
considerando regimen turbulento\*)*

```
rh = dh / 2;
rc = 1 / (Sin[β] * (1 / (r[z] * Tan[β]) - M));
```

```
frc = (Nre * (rh / rc)2)0.05;
(*Which[
Nre * (rh / rc)2 > 300., frc = (Nre * (rh / rc)2)0.05, 0.034 < Nre * (rh / rc)2 && Nre * (rh / rc)2 < 300.,
frc = (Nre0.25 * (0.029 + 0.304 * (Nre * (rh / rc)2)-0.25)) / (0.316 * (rc / rh)0.5),
Nre * (rh / rc)2 < 0.034, frc=1.,
True,
Print["El valor del factor de fricción por curvatura tiene conflicto verificalo"]
];*)
```

*(\* Cálculo del factor de fricción para una geometría rectangular \*)*

```
φ = 2 / 3 + 11 / 24 * Altura / Base * (2 - Altura / Base);
DL = φ * dh;
reym = (ρL * ωL [z] * DL) / μ;
fg = (1 / (1.14 - 2 * Log[10, 21.25 / reym0.9]))2;
```



```

Vz1 = Qz[[1, Y]] / (2 * N[π] * r1 * b1);
VT1 = U1 - Vz1 / Tan[β1];
ALFA1 = 90;
If[Abs[VT1 - Cos[ALFA1 * N[π] / 180]] <= 0.00001, V1 = Vz1, V1 = VT1 / Cos[ALFA1 * N[π] / 180]];
W1 = (Vz1^2 + (U1 - VT1)^2)^0.5;
Vz2 = Qz[[1, Y]] / (2 * N[π] * r2 * b2);
VT2 = U2 - Vz2 / Tan[β2];
ALFA2 = ArcTan[Vz2 / VT2] * 180 / N[π];
V2 = VT2 / Cos[ALFA2 * N[π] / 180];

```

```
fcorr = f * (fr + frc + fg);
```

(\* Cálculo de la variación de la Presión,  
Velocidad Relativa y el Radio respecto a la trayectoria "z" \*)

```

SolutionP = NDSolve[{P'[z] == ρL / (gc * 100^2) *
  (Ω^2 * r[z] * Sin[β] + WL[z]^2 * (Sin[β] / r[z] + M1 * Sin[β] / b + M * Cos[β]) - 1 * fcorr * WL[z]^2 / (2 * dh))},
  P[0] == 0, WL'[z] == -WL[z] * (Sin[β] / r[z] + M1 * Sin[β] / b + M * Cos[β]),
  WL[0] == WL1, r'[z] == Sin[M * (r[z] - r1) + β1], r[0] == r1}, {P, WL, r},
  {z, 0, limitez}, WorkingPrecision -> 24, Method -> RungeKutta, MaxSteps -> 5000];

```

(\* Gráfica de la presión contra la coordenada de trayectoria de la línea de corriente \*)

```

Plot[Evaluate[P[z] /. SolutionP],
  {z, 0, limitez}, PlotRange -> Automatic, PlotStyle -> PointSize[0.02],
  GridLines -> Automatic, Frame -> True,
  PlotLabel -> StyleForm["Variación de Presión en el interior de un Impulsor"],
  TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 10, FontWeight -> "Bold"},
  FrameLabel -> {"Z (mts)", "P (Kg / cm²)", None, None}];

```

```

For[i = limitez, i <= 0, i--,
  Pres = First[Evaluate[P[i] /. SolutionP]]; radio = First[Evaluate[r[i] /. SolutionP]];
  W2 = First[Evaluate[WL[limitez] /. SolutionP]];
  P1 = First[Evaluate[P[0] /. SolutionP]];

```

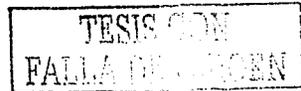
(\* Cálculo de la velocidad y factor de resbalamiento \*)

```
P2 = First[Evaluate[P[limitez] /. SolutionP]];

```

$$H0 = \frac{(P2 - P1) * 100^2}{\rho_L};$$

$$H1 = \left( \frac{(P2 - P1) * 100^2}{\rho_L} + \frac{(V2^2 - V1^2)}{2 * gc} \right);$$



```

Print[" ZETA=", i, " radio=", radio, " Beta3 =",  $\beta_3$ , " U2=", U2,
      " facres=", facres, " VT1=", U1, " ALFA1=", ALFA1, " V2=", V2, " V3=", V3,
      " P2=", P2, " P=", P, " Pres = 14.223, " W3=", W3, " P3=", P3, " H=", H, " H3=", H3];

i += deltaZ]

```

```

AppendTo[Listavalteor, Q1[[1, y]] * 86400 / 0.159];
P2 = Pres;

```

```

AppendTo[Listavalteor, H0 / 0.3048];
Print[TableForm[{{Q1[[1, y]], H0, P2 * 14.223, (P2 * 14.223 * 6894.75729317)}}], {Y, 1, 8, 1}
];

```

(\* Gráfica de la carga generada por una etapa contra el gasto \*)

```

HT = ListPlot[Partition[Listavalteor, 2],
  GridLines -> Automatic, Frame -> True,
  PlotJoined -> True, PlotRange -> Automatic, PlotStyle -> Thickness[.015],
  PlotLabel -> StyleForm[""],
  TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 14, FontWeight -> "Bold"},
  FrameLabel ->
  {"Gasto (m3/s)", "Carga (pie/etapa)", "CARGA GENERADA POR UNA ETAPA", None}];

```

(\* Gráfica de la carga empirica generada por una etapa contra el gasto \*)

```

(*Listavalempi={0,58.352,617.143,56.901,1028.571,
  55.714,1371.429,53.934,1714.286,52.022,1920.0,50.835,2228.571,47.077,
  2434.286,44.835,2845.3714,37.385,3154.286,29.407,3531.429,17.077,3840.0,6};*)

Listavalempi =
{0, 54.5, 727.0, 51.7, 880.0, 51.2, 1473.0, 48.0, 2016.0, 42.5, 2559.0, 31.0, 3103.0, 11.0};

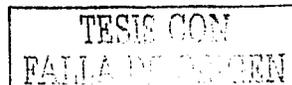
```

```

ME = ListPlot[Partition[Listavalempi, 2],
  GridLines -> Automatic, Frame -> True,
  PlotJoined -> True, PlotRange -> Automatic, PlotStyle -> Thickness[.015],
  PlotLabel -> StyleForm[""],
  TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 14, FontWeight -> "Bold"},
  FrameLabel ->
  {"Gasto (  $\frac{m^3}{seg}$  )", "Carga (pie)", "BOMBRA GN2100, 1 ETAPA y 3500 rpm", None}];

```

```
Show[HT, ME];
```



(PROGRAMA PARA EL  
CALCULO DE LA CARGA EN UN IMPULSOR DEL TIPO RADIAL  
EN DOS FASES\*)

1. Definicion de Variables.

Coearb:  $\frac{C_d}{\tau_b}$  (Adimensional)

$C_{mv}$ : Coeficiente de masa virtual (Adimensional)

DAlfaz: Derivada de la fracción de vacío con respecto a "z"  $\left(\frac{d\alpha}{dz}\right)$

DAz:  $\left(\frac{1}{A_s} \frac{dA_s}{dz}\right)$

DDengz: Derivada de la densidad del gas con respecto a "z"  $\left(\frac{d\rho_g}{dz}\right)$

DPresz: Derivada de la presión con respecto a "z"  $\left(\frac{dp}{dz}\right)$

DVgazsz: Derivada de la velocidad del gas con respecto a "z"  $\left(\frac{dW_g}{dz}\right)$

DVliqz: Derivada de la velocidad del líquido con respecto a "z"  $\left(\frac{dW_l}{dz}\right)$

$h_w$ : Presión diferencial en pulgadas de agua a 60 °F

K: Constante de la placa de orificio

NALA: Número de álabes

NETAP: Número de etapas

PENT, P: Presión de entrada a la bomba (psig)

POUT: Presión de descarga a la bomba (psig)

Ps: Presión de separación (psig)

Pc: Presión pseudocrítica (psia)

Pe: Presión estática medida corriente abajo (psig)

$Q_{agua}$ : Gasto de agua (gpm)

$Q_g$ : Gasto de aire  $\left(\frac{m^3}{d} @ c. s. \right)$

$Q_{genc}$ : Gasto de aire a condiciones de entrada de la bomba  $\left(\frac{m^3}{d}\right)$

Pesomol: Peso Molecular del gas

R: Constante universal de los gases  $\left(\frac{psia \cdot pie^3}{R \cdot lb \cdot mol}\right)$

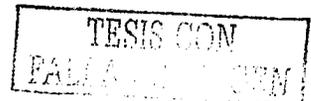
TIN: Temperatura a la entrada de la bomba (F)

T, Te: temperatura del aire (°F)

ZETA: factor de supercompresibilidad del aire

$\Omega$ : Velocidad de rotación (rpm)

$\mu_l$ : Viscosidad del líquido  $\left(\frac{Kg_m}{m \cdot s}\right)$



$\mu_g$ : Viscosidad del gas  $\left(\frac{Kg_m}{m \cdot s}\right)$

$\gamma_g$ : Gravedad específica del aire a condiciones estandar

$\rho_{ge}$ : Densidad del gas a la entrada de la bomba  $\left(\frac{Kg_m}{m^3}\right)$

$\rho_{agua}$ : Densidad del agua  $(lb_m/ pie^3)$

$\rho_g$ : Densidad del aire  $(lb_m/ pie^3)$

Date [ ]

Clear [AL, Altura, h, b1, b2, BASE, Coarb, Cmv, DALfaz, DAz, DDengz, DPresz, DVgasz,  
DVliqz, f, Fa, Fc, Ff, Fmv, fr, fracaire, frc, limitez, M, M1, NALA, NETAP, Nre, P, PENT,  
Pesamol, PM, POUT, PRE, Pc, Pe, Ps, P2, r, R, r1, r2, T, z, ZETA,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\beta 1$ ,  $\beta 2$ ,  $\Omega$ ,  $\gamma$ ,  $\rho_{ge}$ ];

(\* Datos geométricos de la bomba \*)

$\Omega = 3500 * (2 * N[r]) / 60$ ; (\*rad/seg\*)

$b1 = 0.007$ ; (\*mts\*)

$b2 = 0.00425$ ; (\*mts\*)

$\beta 1 = 14.0 * N[r] / 180$ ; (\*rad\*)

$r1 = 0.02159$ ; (\*mts\*)

$\beta 2 = 39.0 * N[r] / 180$ ;

$r2 = 0.0508$ ; (\*mts\*)

$U1 = \Omega * r1$ ;

NALA = 7;

NETAP = 35;

(\* Datos de la medición de la bomba \*)

K = (174.5 174.5 174.5 174.5 174.5 174.5 174.5 174.5 307.7 307.7 307.7 307.7 307.7);

PENT = (506.5 200.0 203.0 201.0 203.0 197.0 203.0 200.0 200.0 200.0 202.0 200.0 203.0);

Pe = (506.5 310.0 310.0 310.0 310.0 310.0 308.0 310.0 305.0 305.0 305.0 308.0 308.0);

Ps = 120;

Qagua = (65.0 70.5 75.0 79.5 85.5 90.5 95.5 99.0 70.0 75.0 80.5 85.0 89.5);

TIN = (82.0 81.0 81.0 81.0 80.0 80.0 80.0 80.0 82.0 82.0 82.0 82.0 81.0);

Te = (64.0 64.0 64.0 64.0 64.0 64.0 63.0 60.0 64.0 64.0 64.0 64.0 64.0);

hw = (146.0 45.0 52.0 59.0 66.0 74.0 83.0 90.0 22.5 26.0 29.5 33.5 36.5);

$\Omega = 3500 * \frac{2 * N[r]}{60}$ ; (\*  $\frac{rad}{seg}$  \*)

$\rho_L = 1000$ ; (\*  $\frac{Kg_m}{m^3}$  \*)

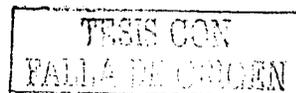
$\gamma = 1.0$ ;

$g_c = 9.807$ ;

R = 10.73; (\*  $\left(\frac{psia \cdot pie^3}{lb \cdot mol}\right)$  \*)

Pesamol = 28.97;

$Q_{agua} = Q_{agua} * \left(\frac{3.7854}{1000} * 60 * 24\right)$ ;



(\* Cálculo del factor de supercompresibilidad del aire. \*)

ZETA[T\_, P\_] :=

Module[{Pc, Tc, Tb, ω, S, α, A, B, x, Y, Z, z1, z2, z3, z4},

(\*Ecuación de Estado de Redlich-Kwong y Soave\*)

(\* Pc= Presión Crítica (psi)

Tc= Temperatura Crítica (R)

P= Presión (psia)

T= Temperatura (R)

Tb= Temperatura de bullición (R)

Z= Factor de Compresibilidad

(la mayor raíz es la que interesa en el caso de la fase gaseosa)

\*)

Pc = 547.2; (\*aire\*)

Tc = (-221.32 + 459.67); (\*aire\*)

Tb = (-317.62 + 459.67); (\*aire\*)

ω = 0.42748 \* Tb \*  $\left( \frac{\text{Log}[10, Pc] - 1.167}{Tc - Tb} \right) - 1.0;$

S = 0.480 + 1.574 ω - 0.176 ω<sup>2</sup>;

α1 =  $\left[ 1 + S \left( 1 - \left( \frac{T + 459.67}{Tc} \right)^{0.5} \right) \right]^2;$

A = 0.42748  $\frac{\alpha1 * P + Tc^2}{Pc * (T + 459.67)^2};$

B = 0.08664  $\frac{P * Tc}{Pc * (T + 459.67)};$

x = Solve[Z<sup>3</sup> - Z<sup>2</sup> + Z (A - B - B<sup>2</sup>) - (A B) == 0, Z];

y = Z /. x;

If[ToString[Head[y[[1]]]] == "Complex", z1 = (0), z1 = (y[[1]]);

If[ToString[Head[y[[2]]]] == "Complex", z2 = (0), z2 = (y[[2]]);

If[ToString[Head[y[[3]]]] == "Complex", z3 = (0), z3 = (y[[3]]);

z4 = Max[z1, z2, z3];

z4]; (\*termina la rutina de zeta\*)

Lisimp2f = {};

Print[TableForm[{" Q<sub>L</sub> ", "H", " P", {" (bl/d) ", "(pies)", "(Kg/cm<sup>2</sup>)" } }];

Do [

$\beta_1 = \text{ArcTan} \left[ \frac{\text{Log}[2, 4]}{0.6400} \right];$

$M = \frac{\beta_2 - \beta_1}{r_2 - r_1};$

$M_1 = \frac{b_2 - b_1}{r_2 - r_1};$

$\beta = M (r[z] - r_1) + \beta_1;$

$b = M_1 (r[z] - r_1) + b_1;$

$DRz = (2 * N[\pi] * r[z] * b * \text{Sin}[\beta]) + \left( \text{Cos}[\beta] * M * \frac{\text{Sin}[\beta]}{b} * M_1 + \frac{\text{Sin}[\beta]}{r[z]} \right);$

TESIS CON  
FALLA DE OBRER

$$\text{limitez} = \frac{\text{Log}\left[\text{Cot}\left[\frac{\beta 1}{2}\right] \text{Tan}\left[\frac{1}{2} (\text{Mr}2 - \text{Mr}1 + \beta 1)\right]\right]}{M};$$

$$\text{deltaz} = \frac{\text{limitez}}{5};$$

$$T = \text{TIN}[[1, i]];$$

$$P = \text{PENT}[[1, i]];$$

(\* Cálculo de la viscosidad del líquido \*)

$$\mu_L = \text{Exp}[1.003 - 0.01479 T + 0.00001982 T^2] * 0.001;$$

(\* Cálculo de la viscosidad del aire \*)

$$\mu_g = 0.000002669 \frac{(\text{Pesomol} * \left(\frac{T-32}{1.8} + 273.15\right))^{0.5}}{3.711^2 \left(1.147 \left(\frac{T-32}{1.8} + 273.15\right)^{-0.145} + \left(\frac{T-32}{1.8} + 273.15\right)^{-2}\right)};$$

(\* Cálculo del gasto de aire \*)

$$Q_g = K[[1, i]] * \sqrt{520 * h_w[[1, i]] * \left(\frac{\text{Pe}[[1, i]] + 14.7}{\text{Te}[[1, i]] + 460.0}\right) * (0.3048)^3};$$

(\* Cálculo del gasto de de aire a las cond. de entrada \*)

$$\text{FACTORZ} = \text{ZETA}[T, P];$$

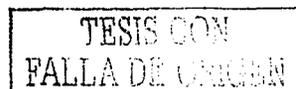
$$Q_{\text{gent}} = Q_g * \text{FACTORZ} * \left(\frac{14.7}{P}\right) * \left(\frac{T + 460}{520}\right);$$

(\* Cálculo de la densidad del gas a la entrada de la bomba \*)

$$\rho_{\text{ge}} = \frac{P * \text{Pesomol}}{\text{FACTORZ} * R * (T + 460)} * \left(\frac{1}{2.2046 * 0.3048^3}\right);$$

(\* Cálculo de la fracción de aire a la entrada de la bomba \*)

$$\text{fracaire} = \frac{Q_{\text{gent}}}{Q_{\text{gent}} + Q_{\text{agua}}[[1, i]]};$$



( \* Cálculo de la velocidad del aire a la entrada de la bomba \* )

$$\text{Velogas} = \frac{Q_{\text{gas}}}{86400 (2 N[\pi] r1 b1) \text{fracaire Sin}[\beta 1]};$$

( \* Cálculo del diámetro hidráulico de una sección rectangular. \* )

$$\text{Base} = \frac{2 * N[\pi] * r[z]}{\text{HALA}};$$

$$\text{Altura} = M1 * (r[z] - r1) + b1;$$

$$\text{AL} = \text{Base} * \text{Altura};$$

$$\text{PM} = 2 * (\text{Base} + \text{Altura});$$

$$d_h = \frac{4 * \text{AL}}{\text{PM}};$$

( \* Cálculo del factor de fricción en una tubería circular recta y sin rugosidad, considerando regimen turbulento \* )

$$\text{Nre} = \frac{\rho L W_L [z] d_h}{\mu L};$$

$$f = \frac{0.046}{\text{Nre}^{0.20}};$$

( \* Cálculo del factor de fricción corregido por curvatura, considerando regimen turbulento \* )

$$r_h = \frac{d_h}{2};$$

$$r_c = \frac{1}{\text{Sin}[\beta] * \left( \frac{1}{z[\pi] + \text{Tan}[\beta]} - M \right)};$$

$$\text{frc} = \left( \text{Nre} * \left( \frac{r_h}{r_c} \right)^2 \right)^{0.05};$$

( \* Which[

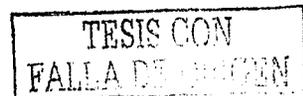
$\text{Nre} * (r_h/r_c)^2 \geq 300$ ,  $\text{frc} = (\text{Nre} * (r_h/r_c)^2)^{0.05}$ ,  $0.034 < \text{Nre} * (r_h/r_c)^2 \leq 300$ ,

$\text{frc} = (\text{Nre}^{0.25} * (0.029 + 0.304 * (\text{Nre} * (r_h/r_c)^2)^{-0.25})) / (0.316 * (r_c/r_h)^{0.5})$ ,

$\text{Nre} * (r_h/r_c)^2 \leq 0.034$ ,  $\text{frc} = 1$ ,

True,

Print["El valor del factor de fricción por *curvatura* tiene conflicto verificalo"]  
]; \* )



(\* Cálculo del factor de fricción en una tubería circular, recta y sin rugosidad que esta rotando, considerando regimen turbulento \*)

$$Nre_{\Omega} = \frac{\rho_L \Omega d_h^2}{\mu_L (1 - \alpha)} ; *$$

$$Nre_{\Omega} = \frac{\rho_L \Omega d_h}{\mu_L} ;$$

$$K_t = \frac{Nre_{\Omega}^2}{Nre} ;$$

$$fr = 0.942 * K_t^{0.05} ;$$

(\*Which[

$K_t < 1, fr = 1.;$  ( $K_t < 15, fr = 0.942 + 0.058 * K_t^{0.0282}, K_t > 15, fr = 0.942 * K_t^{0.05};$

True,

Print["El valor del factor de fricción por rotación tiene conflicto verificalo"]

]; \*)

(\* Cálculo del factor de fricción para una geometría rectangular \*)

$$\phi = 2/3 + 11/24 * \text{Altura} / \text{Base} * (2 - \text{Altura} / \text{Base});$$

$$D_L = \phi * d_h;$$

$$re_{ym} = \frac{\rho_L W_L[z] D_L}{\mu_L} ;$$

$$fg = (1 / (1.14 - 2 * \text{Log}[10, 21.25 / re_{ym}^{0.9}]))^2 ; *$$

$$fg = \frac{1}{\phi^{0.20}} ;$$

(\* Cálculo del factor de fricción corregido por rotación y curvatura, considerando regimen turbulento \*)

$$fcorr = f * (fr + frc + fg);$$

(\* Cálculo del multiplicador de dos fases \*)

$$\text{Calidad} = \frac{Q_{\text{gase}} \rho_{\text{gase}}}{Q_{\text{gase}} \rho_{\text{gase}} + Q_{\text{liquida}} [[1, i]] \rho_L} ;$$

$$\text{Paramx} = \left( \frac{1 - \text{Calidad}}{\text{Calidad}} \right)^{0.9} \left( \frac{\mu_g}{\mu_L} \right)^{-0.1} \left( \frac{\rho_g[z]}{\rho_L} \right)^{0.5} ;$$

$$m2fases = 1 + \frac{20}{\text{Paramx}} + \frac{1}{\text{Paramx}^2} ;$$

Cocarb = 1000;

Cnv = 0.50;

$$Fa = \frac{3}{8} \frac{\alpha[z]}{(1-\alpha[z])^{1.70}} \rho_L \text{Cocarb Abs}[W_L[z] - W_g[z]] (W_L[z] - W_g[z]);$$

$$(*Fa = \frac{3}{8} \alpha[z] \rho_L \text{Cocarb Abs}[W_L[z] - W_g[z]] (W_L[z] - W_g[z]); *)$$

$$Emv = Cnv \rho_L \alpha[z] (W_L[z] DVliqz - W_g[z] DVgasz);$$

$$(*Emv = Cnv \rho_L \alpha[z] ((2 W_g[z] - W_L[z]) DVliqz - W_g[z] DVgasz); *)$$

$$Ff = m2fases * \frac{fcorr * \rho_L * W_L[z]^2}{2 * d_h};$$

(\* Solución del sistema de ecuaciones \*)

```
Solsistema = Factor[Solve[
  1
  --- DVliqz - 1
  --- DALfaz +
  W_L[z]
  Daz
  == 0,
  1
  --- DDengz + 1
  --- DALfaz +
  A_g[z]
  +
  Daz + 1
  --- DVgasz
  W_g[z]
  == 0,
  (rho_L (1 - alpha[z]) W_L[z] DVliqz) + ((1 - alpha[z]) g_c 100^2 DPresz) - rho_L (1 - alpha[z]) Omega^2 r[z] Sin[beta] + Fa + Emv + Ff == 0,
  (A_g[z] alpha[z] W_g[z] DVgasz) + (alpha[z] g_c 100^2 DPresz) - A_g[z] alpha[z] Omega^2 r[z] Sin[beta] - Fa - Emv + Ff
  == 0,
  g_c 100^2 ( DPresz - PRE[z]
  --- 1.4 DDengz )
  A_g[z]
  == 0
], {DALfaz, DDengz, DVgasz, DVliqz, DPresz}];
```

(\* Solución de las derivadas con condiciones iniciales aplicando el metodo de Runge Kutta \*)

```
SolDerivadas = NDSolve[
  {First[PRE'[z] == DPresz /. Solsistema], PRE[0] == P
  --- 14.223, First[W_L'[z] == DVliqz /. Solsistema],
  W_L[0] == Velogas, First[W_g'[z] == DVgasz /. Solsistema], W_g[0] == Velogas,
  First[A_g'[z] == DDengz /. Solsistema], A_g[0] == rho_g, First[alpha'[z] == DALfaz /. Solsistema],
  alpha[0] == fracaire, r'[z] == Sin[M*(r[z] - r1) + beta], r[0] == r1}, {PRE, W_L, W_g, A_g, alpha, r},
  {z, 0, limitez}, WorkingPrecision -> 3, Method -> RungeKutta, MaxSteps -> 5000];
```

P1 = PRE[0];

P2 = Evaluate[PRE[limitez] /. SolDerivadas];

$$H = \frac{(P2 - P1) * 100^2}{\rho_L};$$

(\* Solución de las derivadas con condiciones iniciales aplicando el metodo de Runge Kutta \*)

```
SolDerivadas = NDSolve[{First[PRE'[z] == DPresz /. SolSistema],
PRE[0] == P / 14.223, First[WL'[z] == DVliqz /. SolSistema],
WL[0] == Velogas, First[Wg'[z] == DVgasz /. SolSistema], Wg[0] == Velogas,
First[αg'[z] == DDenzg /. SolSistema], αg[0] == ρge, First[α'[z] == DAlfaz /. SolSistema],
α[0] == fracaire, r'[z] == Sin [N * (r[z] - r1) + β1], r[0] == r1}, {PRE, WL, Wg, αg, α, r},
{z, 0, limitez}, WorkingPrecision -> 3, Method -> RungeKutta, MaxSteps -> 5000];
```

```
Print["Fracaire = ", fracaire, " Qagua = ", Qagua[1, 1],
" Qgent = ", μl, " PRE[limitez] = ", First[Evaluate[PRE[limitez] /. SolDerivadas]],
" WL[limitez] = ", First[Evaluate[WL[limitez] /. SolDerivadas]],
" Wg[limitez] = ", First[Evaluate[Wg[limitez] /. SolDerivadas]],
" α[limitez] = ", First[Evaluate[α[limitez] /. SolDerivadas]],
" limitez = ", limitez, " αg[limitez] = ", First[Evaluate[αg[limitez] /. SolDerivadas]]];
```

(\* Gráfica de la variación de la presión a lo largo de la línea de corriente \*)

```
Plot[Evaluate[PRE[z] /. SolDerivadas], {z, 0, limitez}, PlotStyle -> Thickness[.015],
GridLines -> Automatic, Frame -> True,
PlotLabel -> StyleForm["VARIACIÓN DE PRESIÓN EN EL INTERIOR DE UN IMPULSOR"],
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 14, FontWeight -> "Bold"},
FrameLabel -> {"s (m)", "Presión (Kg/cm2)", None, None}];
```

(\* Gráfica de la fracción de vacío a lo largo de la línea de corriente \*)

```
Plot[Evaluate[α[z] /. SolDerivadas], {z, 0, limitez}, PlotStyle -> Thickness[.015],
GridLines -> Automatic, Frame -> True,
PlotLabel -> StyleForm["VARIACIÓN DE LA FRACCIÓN DE VACÍO EN EL INTERIOR DE UN IMPULSOR"],
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 14, FontWeight -> "Bold"},
FrameLabel -> {"s (m)", "α (adim.)", None, None}];
```

(\* Gráfica de la velocidad del líquido a lo largo de la línea de corriente \*)

```
Plot[Evaluate[WL[z] /. SolDerivadas], {z, 0, limitez}, PlotStyle -> Thickness[.015],
GridLines -> Automatic, Frame -> True,
PlotLabel -> StyleForm["VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD DEL LÍQUIDO EN EL INTERIOR DE UN IMPULSOR"],
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 14, FontWeight -> "Bold"},
FrameLabel -> {"s (m)", "WL (m/s)", None, None}];
```

(\* Gráfica de la variación de la velocidad del gas a lo largo de la línea de corriente \*)

```
Plot[Evaluate[Wg[z] /. SolDerivadas], {z, 0, limitez}, PlotStyle -> Thickness[.015],
GridLines -> Automatic, Frame -> True,
PlotLabel -> StyleForm["VARIACIÓN DE LA VELOCIDAD DE GAS EN EL INTERIOR DE UN IMPULSOR"],
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 14, FontWeight -> "Bold"},
FrameLabel -> {"s (m)", "Wg (m/s)", None, None}];
```

(\* Gráfica de la variación de la densidad a lo largo de la línea de corriente \*)

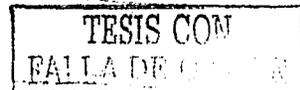
```
Plot[Evaluate[ρg[z] /. SolDerivadas], {z, 0, limitez}, PlotStyle -> Thickness[.015],
GridLines -> Automatic, Frame -> True,
PlotLabel -> StyleForm["VARIACIÓN DE LA DENSIDAD DEL GAS EN EL INTERIOR DE UN IMPULSOR"],
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 14, FontWeight -> "Bold"},
FrameLabel -> {"s (m)", "ρg (Kg / m ^3)", None, None}];
```

(\* Gráfica de la relación de velocidades a lo largo de la línea de corriente \*)

```
graprelvelgl = {};
For[j = 0, j <= limitez,
Relvelgl = First[Evaluate[Wg[j] /. SolDerivadas]] / First[Evaluate[WL[j] /. SolDerivadas]];
(*Relvelgl =
First[Evaluate[WL[j] /. SolDerivadas]] - First[Evaluate[Wg[j] /. SolDerivadas]]; *)
AppendTo[graprelvelgl, j];
AppendTo[graprelvelgl, Relvelgl];
j += deltax];

ListPlot[Partition[graprelvelgl, 2],
GridLines -> Automatic, Frame -> True,
PlotJoined -> True, PlotRange -> Automatic, PlotStyle -> Thickness[.015],
PlotLabel -> StyleForm["RELACIÓN DE VELOCIDADES EN EL INTERIOR DE UN IMPULSOR"],
TextStyle -> {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 14, FontWeight -> "Bold"},
FrameLabel -> {"s (m)", "Wg / WL (adim.)", None, None}];
```

```
(*Print["Fracaire= ",fracaire," Qagua= ",
Qagua[[1,i]], " PRE[limitez]= ",First[Evaluate[PRE[limitez] /. SolDerivadas]],
" Coearb= ",Coearb, " WL[limitez]= ",First[Evaluate[WL[limitez] /. SolDerivadas]],
" Wg[limitez]= ",First[Evaluate[Wg[limitez] /. SolDerivadas]], " α[limitez]= ",
First[Evaluate[α[limitez] /. SolDerivadas]], " limitez= ",limitez, " ρg[limitez]= ",
First[Evaluate[ρg[limitez] /. SolDerivadas]]];
```



```
AppendTo[ListImp2f, Osqua[[1, 1]] * 1000 / 159];  
AppendTo[ListImp2f, H / 0.3048]; *)
```

```
, {i, 1, 1, 1}  
];
```

(\* Gráfica de la carga generada por una etapa contra el gasto

```
HT=ListPlot[Partition[ListImp2f, 2],  
  GridLines -> Automatic, Frame -> True,  
  PlotJoined -> True, PlotRange -> Automatic, PlotStyle -> Thickness[.015],  
  PlotLabel -> StyleForm[" "],  
  TextStyle -> (FontSlant -> Italic, FontSize -> 14, FontWeight -> Bold),  
  FrameLabel ->  
  { "Gasto (bl/d)", "Carga (pie/etapa)", "CARGA GENERADA POR UNA ETAPA", None]; *)
```

---

# PROGRAMA PARA EL CALCULO DE LA CARGA EN UN IDIFUSOR DEL TIPO RADIAL

## 1. Definición de Variables.

---

AL: Área Lateral ( $m^2$ )

b: Altura del difusor (mts)

$d_h$ : diámetro hidráulico (mts)

f: Factor de fricción (adimensional)

H: carga  $\left(\frac{mts}{etapa}\right)$

NETA: número de etapas

NALA: número de álabes

P: presión de entrada a la bomba  $\left(\frac{lb}{pg^2}\right)$

PM: Perímetro mojado (mts)

$Q_L$ : Gasto de liquido  $\left(\frac{m^3}{s}\right)$

SG: gravedad específica del agua a condiciones estandar (agua = 1)

$\rho_L$ : densidad del agua  $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$

$G_c$ : Constante gravitacional

r: Radio del difusor (mts)

NRe: Número de Reynolds (adimensional)

V: Velocidad absoluta  $\left(\frac{m}{s}\right)$

U: Velocidad tangencial  $\left(\frac{m}{s}\right)$

WL: Velocidad relativa  $\left(\frac{m}{s}\right)$

$\Omega$ : Velocidad de rotacion (rpm)

$\mu$ : Viscosidad  $\left(\frac{Kg}{m \cdot s}\right)$

### Subíndices

1: Entrada al difusor

2: Salida del difusor

---

```

Date[ ]
(* Cálculo
del perfil de velocidad y presión a través de un difusor*)

ClearAll[γ, β, β1, r2, r1, M, b, r, Ω, WL, Hoja];
Q_L =
( 0.00000001 0.00162 0.00471 0.00671 0.008102 0.01171 0.02171 0.03171 0.04171 0.04571 0.01071
):
(*m^3/sec*)
Ω = 0 * (2 * N[π] / 60; (*rad/sec*))
μ = 0.001; (*Kg_m/m.s*)
ρ_L = 1000; (*Kg_m/m^3*)
SG = 1;
g_c = 9.801;
NALA = 9;
b1 = 0.00425; (*mts*)
b2 = 0.007; (*mts*)
β1 = 21.00 * N[π] / 180; (*rad*)
r1 = 0.051054; (*mts*)
β2 = 90.0 * N[π] / 180;
r2 = 0.0225552; (*mts*)
M = (β2 - β1) / (r2 - r1);
M1 = (b2 - b1) / (r2 - r1);
U1 = Ω * r1;
U2 = Ω * r2;
limitez = -Log[Cot[β1/2] Tan[1/2 (Mr2 - Mr1 + β1)]] / M;
deltaz = limitez / 5;
Hoja = {};
Print[TableForm[{" Q_L ", "H_Ruler", " P", " P"},
{ " (m^3/d) ", " (mts)", "(lb/pg^2)", "(N/m^2)" }]];

Do[

(* Cálculo
de la presión considerando las pérdidas por fricción *)

(* Cálculo
del diámetro hidráulico de una sección rectangular*)
β = M (r[z] - r1) + β1;
b = M1 * (r[z] - r1) + b1;
Base = (2 * N[π] * r[z]) / NALA;
Altura = b;
NL = Base * Altura;
PM = 2 * (Base + Altura);
d_h = (4 * NL) / PM;

```

TESIS CON  
 FALLA DE CUBIEN

(\* Cálculo del factor de fricción en una tubería circular, recta y sin rugosidad, considerando régimen turbulento \*)

$$\text{Nre} = \rho_L * \text{VL}[z] * d_h / \mu;$$

$$f = 0.316 / \text{Nre}^{0.25};$$

(\* Cálculo del factor de fricción corregido por curvatura considerando régimen turbulento \*)

$$r_h = d_h / 2;$$

$$r_c = 1 / (\text{Sin}[\beta] * (1 / (r[z] * \text{Tan}[\beta]) - R));$$

$$\text{frc} = (\text{Nre} * (r_h / r_c)^2)^{0.05};$$

Which[ Nre \* (r\_h / r\_c)^2 >= 300., frc = (Nre \* (r\_h / r\_c)^2)^{0.05},  
 0.034 < Nre \* (r\_h / r\_c)^2 && Nre \* (r\_h / r\_c)^2 < 300.,

$$\text{frc} = (\text{Nre}^{0.25} * (0.029 + 0.304 * (\text{Nre} * (r_h / r_c)^2)^{-0.25})) / (0.316 * (r_c / r_h)^{0.5});$$

Nre \* (r\_h / r\_c)^2 <= 0.034, frc = 1.,

True, Print["El valor del factor de fricción por curvatura tiene conflicto verificalo"]  
 ];

(\* Cálculo del factor de fricción para una geometría rectangular \*)

$$\phi = 2 / 3 + 11 / 24 * \text{Altura} / \text{Base} * (2 - \text{Altura} / \text{Base});$$

$$D_L = \phi * d_h;$$

$$\text{reym} = (\rho_L * \text{VL}[z] * D_L) / \mu;$$

$$f_g = (1 / (1.14 - 2 * \text{Log}[10, 21.25 / \text{reym}^{0.9}]))^2;$$

(\* Cálculo del factor de fricción corregido por rotación considerando régimen turbulento \*)

$$\text{fcorr} = f * (\text{frc} + f_g);$$

$$V_{z1} = Q_L[[1, y]] / (2 * N[\pi] * r1 * b1);$$

$$VT1 = U1 - V_{z1} / \text{Tan}[\beta1];$$

$$\text{ALFA1} = \text{ArcTan}[V_{z1} / VT1] * 180 / N[\pi];$$

$$V1 = VT1 / \text{Cos}[\text{ALFA1} * N[\pi] / 180];$$

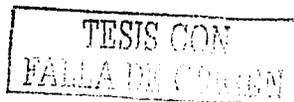
$$\text{WL1} = (V_{z1}^2 + (U1 - VT1)^2)^{0.5};$$

$$V_{z2} = Q_L[[1, y]] / (2 * N[\pi] * r2 * b2);$$

$$VT2 = U2 - V_{z2} / \text{Tan}[\beta2];$$

$$\text{ALFA2} = \text{ArcTan}[V_{z2} / VT2] * 180 / N[\pi];$$

$$V2 = VT2 / \text{Cos}[\text{ALFA2} * N[\pi] / 180];$$



(\* Cálculo de la variación de la Presión, Velocidad  
Relativa y el Radio respecto a la trayectoria "z" \*)

```

SolutionP = NDSolve[{P'[z] == -ρL / (gc * 100^2) *
  (VL[z]^2 * (Sin[β] / r[z] + M1 * Sin[β] / b + M * Cos[β]) +
  1 * fcorr *  $\frac{VL[z]^2}{2 d_h}$ )},
  P[0] == 0,
  VL'[z] == VL[z] * (Sin[β] / r[z] + M1 * Sin[β] / b + M * Cos[β]),
  VL[0] == VL1, r'[z] == -Sin[M * (r[z] - r1) + β1], r[0] == r1},
  {P, VL, r}, {z, 0, limitez},
  WorkingPrecision -> 24, Method -> RungeKutta, MaxSteps -> 5000];

Plot[Evaluate[P[z] /. SolutionP], {z, 0, limitez},
  PlotRange -> {{0, 0.05}, {0, 5}}, PlotStyle -> PointSize[0.02],
  GridLines -> Automatic,
  Frame -> True, PlotLabel -> StyleForm[
  "Variación de Presión en el interior de un Difusor"],
  TextStyle ->
  {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 10, FontWeight -> "Bold"},
  FrameLabel -> {"Z (mts)", "P ( $\frac{Kg}{cm^2}$ )", None, None}];

For[i = 0, i <= limitez, Pres = First[Evaluate[P[i] /. SolutionP]];
  radio = First[Evaluate[r[i] /. SolutionP]];
  Velo = First[Evaluate[VL[i] /. SolutionP]];
  P1 = Evaluate[P[0] /. SolutionP];

  (*Print[" ZETA=", i, " radio=",
  radio, " Beta =", M (radio-r1)+β1, " V1=", V1,
  " Velo=", Velo, " V2=", V2, " P=", Pres * 14.223,
  " limitez=", limitez, " deltaz=", deltaz]; *)

  i += deltaz];

AppendTo[Hoja, OL[[1, Y]]];
P2 = Pres;

(* Cálculo de la Carga del difusor *)

H = ((P2 - P1) * 100^2) / ρL;

```

```

AppendTo[Hoja, Last[{}]];
Print[TableForm[
  {{QL[[1, y]], H, P2 * 14.223, (P2 * 14.223 * 6894.75729317)}}]],
  {y, 1, 5, 1}
];
ListPlot[Partition[Hoja, 2],
  GridLines -> Automatic, Frame -> True,
  PlotJoined -> True,
  PlotRange -> Automatic, PlotStyle -> Thickness[.015],
  PlotLabel -> StyleForm[""],
  TextStyle ->
  {FontSlant -> "Italic", FontSize -> 14, FontWeight -> "Bold"},
  FrameLabel ->
  {"Gasto ( $\frac{m^3}{seg}$ )", "Carga ( $\frac{mts}{etapa}$ )", None, None}]

```

---

## APÉNDICE G

**Tabla G-1. Resultados experimentales de las pruebas de calibración en una fase para la bomba GN2100.**

Gasto de Líquido (gpm)	Presión Entrada (psig)	Presión Descarga (psig)	Temp. Entrada (°F)	Temp. Salida (°F)	Velocidad (rpm)	Potencia (HP)
0	115	1000	80	90	3560	24.3
18	137	1000	80	90	3560	26.5
30	130	975	80	90	3555	29.1
40	122	940	80	90	3555	31.5
50	117	906	80	90	3550	35.3
56	70	841	80	90	3555	37.8
65	87	801	80	90	3540	39.9
71	115	795	80	90	3530	41.5
83	110	677	80	90	3530	41.1
92	106	552	80	90	3535	40.5
103	98	357	80	90	3535	39.5
112	87	178	80	90	3535	39.3

TESIS CON  
FALLA DE CEMENTO

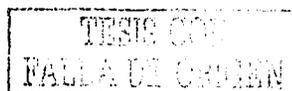
## APÉNDICE H

**Tabla H-1. Resultados experimentales de las pruebas en dos fases para la bomba GN2100 a una  $P_{ont}=25 \text{ lb/pg}^2$ .**

TURBINA	ROTÁMETRO			BOMBA ELÉCTRICA SUMERGIBLE					
	Gasto de Líquido	Presión	Lectura	Temp..	Presión Entrada	Presión Descarga	Temp. Entrada	Temp. Salida	Velocidad
(gpm)	(psig)	(---)	(°F)	(psig)	(psig)	(°F)	(°F)	(rpm)	(HP)
50	25	16	88	24	730	85	91	3550	35.3
65	25	21	88	24	700	85	91	3540	39.3
71	25	23	88	24	670	85	91	3535	40.1
75	25	25	88	24	640	85	91	3535	40.09
84	25	28	86	24	530	85	91	3540	40.9
89	25	30	87	24	370	85	91	3545	37.9

**Tabla H-2. Resultados experimentales de las pruebas en dos fases para la bomba GN2100 a una  $P_{ont}=100 \text{ lb/pg}^2$ .**

TURBINA	ROTÁMETRO			BOMBA ELÉCTRICA SUMERGIBLE					
	Gasto de Líquido	Presión	Lectura	Temp.	Presión Entrada	Presión Descarga	Temp. Entrada	Temp. Salida	Velocidad
(gpm)	(psig)	(---)	(°F)	(psig)	(psig)	(°F)	(°F)	(rpm)	(HP)
60.0	104	33	93	100	810	91	100	3545	38.1
64.5	107	36	97	101	790	90	100	3540	39.3
73.0	108	40	98	103	740	91	100	3540	40.7
80.5	107	44	98	103	670	90	99	3540	41.1
85.5	107	47	98	101	601	90	98	3540	41.1
91.0	106	50	98	100	525	90	98	3540	40.7
96.0	105	53	98	99	450	88	97	3545	40.2
70.0	110	60	96	102	730	94	102	3540	39.5
76.0	112	65	96	100	685	94	102	3535	40.5
80.5	115	69	97	101	630	93	102	3535	40.5
85.0	116	73	97	100	550	93	101	3540	40.1
90.5	118	77	97	100	450	93	101	3540	38.9
95.5	121	81	98	100	350	92	100	3545	37.9
98.0	122	83	98	100	295	92	100	3545	37.1

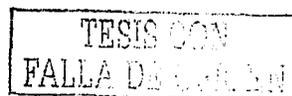


**Tabla H-3. Resultados experimentales de las pruebas en dos fases para la bomba GN2100 a una  $P_{ont}=200 \text{ lb/pg}^2$ .**

TURBINA	MEDIDOR DE ORIFICIO				BOMBA ELÉCTRICA SUMERGIBLE					
	Gasto de Líquido	Diám.	Presión	Pres. Difer.	Temp.	Presión Entrada	Presión Descarga	Temp. Entrada	Temp. Salida	Veloc.
(gpm)	(pg)	(psig)	("H <sub>2</sub> O)	(°F)	(psig)	(psig)	(°F)	(°F)	(rpm)	(HP)
65.0	0.1875	310	39.0	64	203	810	81	91	3545	39.3
70.5	0.1875	310	45.0	64	200	785	81	90	3545	40.5
75.0	0.1875	310	52.0	64	203	745	81	90	3545	41.1
79.5	0.1875	310	59.0	64	201	675	81	90	3550	40.7
85.5	0.1875	310	66.0	64	203	580	80	90	3550	39.5
90.5	0.1875	310	74.0	64	200	470	80	90	3550	38.3
95.5	0.1875	308	83.0	63	197	365	80	90	3555	37.3
99.0	0.1875	310	90.0	60	200	285	80	90	3555	36.1
70.0	0.2500	305	22.5	64	200	725	82	91	3550	39.3
75.0	0.2500	305	26.0	64	200	670	82	91	3550	39.3
80.5	0.2500	305	29.5	64	202	570	82	91	3555	38.1
85.0	0.2500	308	33.5	64	200	420	82	91	3560	34.5
89.5	0.2500	308	36.5	64	203	275	81	91	3650	34.1

**Tabla H-4. Resultados experimentales de las pruebas en dos fases para la bomba GN2100 a una  $P_{ont}=300 \text{ lb/pg}^2$ .**

TURBINA	MEDIDOR DE ORIFICIO				BOMBA ELÉCTRICA SUMERGIBLE					
	Gasto de Líquido	Diám.	Presión	Pres. Difer.	Temp.	Presión Entrada	Presión Descarga	Temp. Entrada	Temp. Salida	Veloc.
(gpm)	(pg)	(psig)	("H <sub>2</sub> O)	(°F)	(psig)	(psig)	(°F)	(°F)	(rpm)	(HP)
65.5	0.25	375	22.0	70	303	885	86	94	3545	39.1
69.5	0.25	375	25.5	70	302	865	85	93	3545	39.5
75.0	0.25	375	29.0	70	303	825	85	93	3545	40.1
80.0	0.25	375	33.5	70	300	740	85	92	3545	39.9
85.5	0.25	374	38.0	70	298	635	85	92	3550	38.6
90.5	0.25	375	42.5	70	302	545	85	92	3555	37.7
94.5	0.25	375	48.0	70	301	450	85	92	3555	36.3
65.0	0.25	425	50.0	70	303	760	85	95	3550	36.9
70.0	0.25	425	58.0	70	305	705	85	95	3550	38.1
75.0	0.25	423	67.0	70	303	565	85	95	3555	35.9



**Tabla H-5. Resultados experimentales de las pruebas en dos fases para la bomba GN2100 a una  $P_{ent}=400 \text{ lb/pg}^2$ .**

TURBINA	MEDIDOR DE ORIFICIO				BOMBA ELÉCTRICA SUMERGIBLE					
	Gasto de Líquido (gpm)	Diám. (pg)	Presión (psig)	Pres. Difer. ( $"\text{H}_2\text{O}$ )	Temp. ( $^{\circ}\text{F}$ )	Presión Entrada (psig)	Presión Descarga (psig)	Temp. Entrada ( $^{\circ}\text{F}$ )	Temp. Salida ( $^{\circ}\text{F}$ )	Veloc. (rpm)
60.5	0.250	470	28.0	65	403	970	72	81	3540	37.5
64.5	0.250	465	33.0	65	401	960	72	81	3540	39.2
70.5	0.250	465	38.0	65	403	940	72	80	3540	40.2
75.5	0.250	465	44.0	65	400	890	72	80	3535	40.6
80.5	0.250	465	50.0	64	403	810	72	80	3540	39.8
85.5	0.250	463	56.0	64	400	720	70	78	3545	38.8
90.5	0.250	463	62.0	64	403	625	70	77	3545	37.2
94.5	0.375	468	70.0	64	400	540	70	77	3545	36.4
60.0	0.375	465	14.0	64	403	850	79	86	3550	35.3
65.5	0.375	466	16.0	69	403	860	78	84	3550	37.1
70.5	0.375	468	19.0	68	401	795	78	84	3545	37.0
75.0	0.375	468	21.5	68	400	675	78	84	3550	35.1
81.0	0.375	463	25.0	68	403	470	76	82	3560	31.3
60.0	0.375	465	18.5	72	403	830	82	90	3550	34.9
65.0	0.375	465	21.0	72	402	800	82	90	3550	35.7
69.5	0.375	465	25.0	72	400	710	82	90	3550	34.5
75.0	0.375	465	29.0	72	400	495	80	88	3560	29.3

**Tabla H-6. Resultados experimentales de las pruebas en dos fases para la bomba GN2100 a una  $P_{ont}=500 \text{ lb/pg}^2$ .**

TURBINA	MEDIDOR DE ORIFICIO				BOMBA ELÉCTRICA SUMERGIBLE					
	Gasto de Líquido	Diám.	Presión	Pres. Difer.	Temp.	Presión Entrada	Presión Descarga	Temp. Entrada	Temp. Salida	Veloc.
(gpm)	(pg)	(psig)	("H <sub>2</sub> O)	(°F)	(psig)	(psig)	(°F)	(°F)	(rpm)	(HP)
60.0	0.250	585	33.0	80	501	1085	91	100	3550	37.1
65.0	0.250	585	38.0	81	500	1060	91	98	3545	38.2
70.0	0.250	585	45.0	81	503	1045	91	98	3545	39.4
75.5	0.250	585	50.0	80	500	995	91	98	3545	39.8
80.0	0.250	587	58.0	81	503	925	90	97	3545	39.1
85.5	0.250	587	65.0	81	501	820	90	97	3550	37.8
90.5	0.250	590	73.0	81	500	735	90	96	3550	37.2
94.0	0.250	590	83.0	81	500	660	90	96	3550	36.3
61.0	0.375	545	17.5	82	503	985	96	103	3550	35.3
66.0	0.375	545	20.5	82	502	965	96	102	3550	36.5
69.5	0.375	545	23.0	82	504	940	96	102	3550	37.3
75.0	0.375	545	27.0	80	503	840	95	101	3550	36.2
80.0	0.375	545	31.0	80	501	715	94	100	3555	34.9
82.5	0.375	545	32.0	80	500	650	93	100	3555	33.3
60.5	0.375	570	25.0	80	505	930	101	110	3560	34.5
66.0	0.375	580	28.0	80	503	910	101	111	3555	35.5
70.5	0.375	592	33.0	80	502	810	102	110	3555	34.2
75.0	0.375	597	37.0	80	501	645	100	107	3565	31.1

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## APÉNDICE I

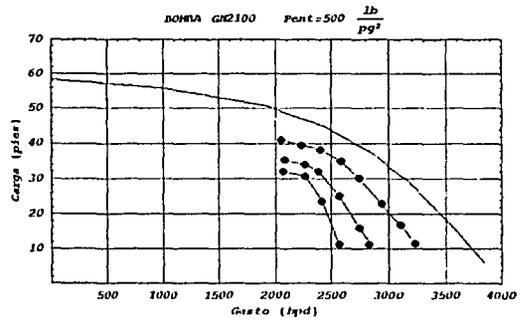
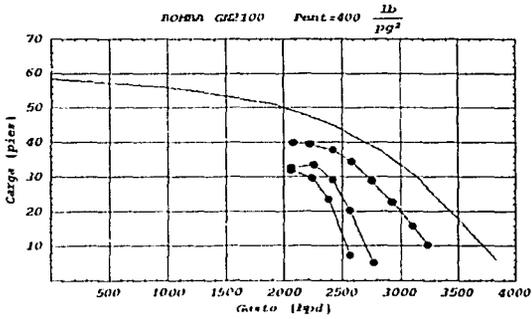
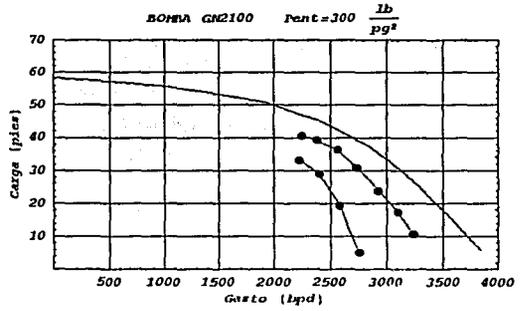
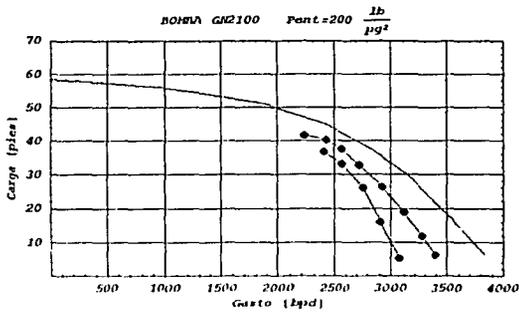
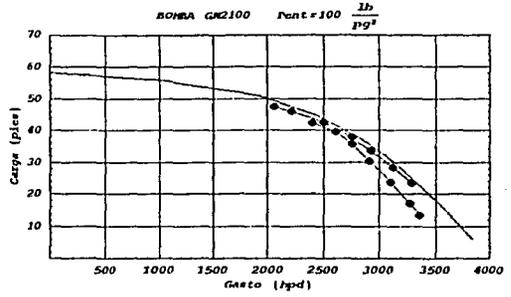
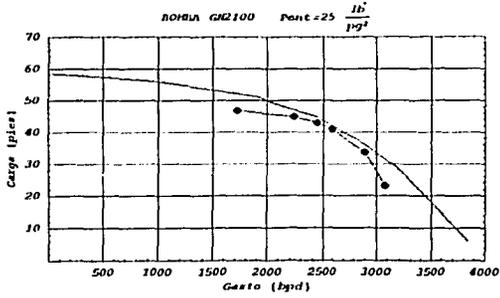
### FACTORES DE LA PLACA DE ORIFICIO

Presión y temperatura base 14.7 lb/pg<sup>2</sup> y 60 °F, respectivamente.

Diámetro (pg)	Factor K (---)
0.1875	174.5
0.2500	307.7
0.3125	479.9
0.3750	689.4

## APÉNDICE J

### CURVAS EXPERIMENTALES OBTENIDAS CON LOS DATOS DE CIRILO



## APÉNDICE K

### ANÁLISIS DIMENSIONAL DE $\frac{C_d}{r_b}$

El análisis dimensional es una técnica mediante la cual se deduce información acerca de un fenómeno, basándose en la premisa de que éste puede describirse mediante una ecuación dimensionalmente homogénea entre variables. Mediante este análisis es posible determinar la forma de ecuaciones físicas a partir de las variables principales que intervienen en un problema de flujo y de sus dimensiones, así como determinar las dimensiones de coeficientes empíricos.

Como ha sido discutido por Ishi y Zúber<sup>34</sup> el valor de  $\frac{C_d}{r_b}$  es función del patrón de flujo, el cual para el caso de las bombas electrocentrifugas depende del valor del gasto del líquido, la presión de entrada a la bomba, la fracción de vacío, la velocidad de rotación de la bomba, las dimensiones de los canales de flujo, propiedades de los fluidos, etc.

En esta tesis se realiza un análisis dimensional, realizado para determinar la forma que debe de tener  $\frac{C_d}{r_b}$ , considerando que es función de la presión, gasto, propiedades de los fluidos (densidad, viscosidad, tensión superficial), área que ocupa el gas y el área de la sección transversal de los canales de la bomba.

#### Paso 1

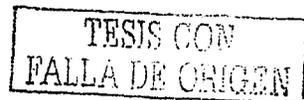
$$\frac{C_d}{r_b} = \frac{C_d}{r_b} (p, Q, \rho_L, \rho_G, \mu_L, \mu_G, A_G, A, \sigma) \quad \dots \quad (K.1)$$

#### Paso 2

El sistema de unidades elegido es [FLT] por lo que escribiendo cada variable en función de estas dimensiones se tiene:

$$p \text{ [FL}^{-2}\text{]}; \quad Q \text{ [L}^3\text{T}^{-1}\text{]}; \quad \rho \text{ [FL}^{-4}\text{T}^2\text{]}; \quad \mu \text{ [FL}^{-2}\text{T]}; \quad A \text{ [L}^2\text{]}; \quad \sigma \text{ [FL}^{-1}\text{]};$$

#### Paso 3



$$\frac{C_d}{r_b} = K \rho^a Q^b \rho_L^c \rho_G^d \mu_L^e \mu_G^f A_G^g A^h \sigma^i \quad \dots \quad (K.2)$$

donde :

K = constante

Expresando la Ec. (K.2) en función de las dimensiones de cada variable:

$$[L^{-1}] = K [FL^{-2}]^a [L^3T^{-1}]^b [FL^{-4}T^2]^c [FL^{-4}T^2]^d [FL^{-2}T]^e [FL^{-2}T]^f [L^2]^g [L^2]^h [FL^{-1}]^i \quad \dots \quad (K.3)$$

#### Paso 4

$$F: 0 = a + c + d + e + f + i$$

$$L: -1 = -2a + 3b - 4c - 4d - 2e - 2f + 2g + 2h - i$$

$$T: 0 = -b + 2c + 2d + e + f$$

Resolviendo el sistema planteado para a, b y h se tiene:

$$a = -c - d - e - f - i$$

$$b = 2c + 2d + e + f$$

$$h = -\frac{1}{2} - 2c - 2d - \frac{3}{2}e - \frac{3}{2}f - \frac{1}{2}i - g$$

sustituyendo estos resultados en la Ec. K.3, agrupando y simplificando términos se tiene:

$$\frac{C_d}{r_b} = K [\rho^{-c-d-e-f-i}] [Q^{2c+2d+e+f}] [\rho_L^c] [\rho_G^d] [\mu_L^{e+f}] [A_G^{-0.5-2c-2d-1.5e-1.5f-0.5i-0}] [A^g] [\sigma^i] \quad \dots \quad (K.4)$$

$$\frac{C_d}{r_b} = K \left( \frac{Q^2 \rho_L}{\rho A_G^2} \right)^c \left( \frac{Q^2 \rho_G}{\rho A_G^2} \right)^d \left( \frac{Q \mu_L}{\rho A_G^{1.5}} \right)^e \left( \frac{Q \mu_G}{\rho A_G^{1.5}} \right)^f \left( \frac{Q \mu_G}{\rho A_G^{1.5}} \right)^f \left( \frac{\sigma}{\rho A_G^{0.5}} \right)^i \left( \frac{A_G}{A} \right)^g \left( \frac{1}{A_G} \right)^{0.5} \quad \dots \quad (K.5)$$

la Ec. K.5 puede ser reagrupada en la siguiente forma:

$$\frac{C_d}{r_b} = K \underbrace{\left( \frac{Q^2 \rho_L}{A_G^2} \right)^c \left( \frac{Q^2 \rho_G}{\rho A_G^2} \right)^d \left( \frac{\mu_L}{\rho A_G^{1.5}} \right)^e \left( \frac{Q \mu_G}{\rho A_G^{1.5}} \right)^f \left( \frac{Q \mu_G}{\rho A_G^{1.5}} \right)^f \left( \frac{\sigma}{\rho A_G^{0.5}} \right)^i \left( \frac{1}{A_G} \right)^{0.5}}_K \left( \frac{1}{\rho} \right)^g (Q)^e \left( \frac{A_G}{A} \right)^g$$

.... (K.6)

$$\frac{C_d}{r_b} = K' \left( \frac{1}{p} \right)^c (Q)^e \left( \frac{A_g}{A} \right)^g \quad \dots (K.7)$$

$K'$ ,  $c$ ,  $e$  y  $g$  son constantes que deben ser encontradas empíricamente, por lo que la Ec. K.7 puede escribirse como:

$$\frac{C_d}{r_b} = K' \frac{p^c}{Q^e \alpha^g} \quad \dots (K.8)$$

donde  $\alpha$  es la fracción de vacío del gas y se define como  $\frac{A_g}{A}$

Para la obtención de la correlación empírica se supusieron diferentes valores de  $\frac{C_d}{r_b}$  hasta que la degradación de carga calculada fuera igual a la obtenida con los datos medidos. Los valores de  $K'$ ,  $c$ ,  $e$  y  $g$  determinados mediante análisis de regresión múltiple son los siguientes:  $c=1.07658$ ,  $e=1.12145$ ,  $g=0.279932$  y  $K'=0.20274$ . 72 datos experimentales se utilizaron para obtener la correlación y el valor del coeficiente de correlación (R) fue de 89.4%

Esta ecuación empírica implícitamente involucra condiciones complejas de flujo debido a que considera parámetros de flujo que no pueden determinarse relacionados con el flujo a través de los canales de los impulsores de la bomba, tales como los patrones de flujo, la transición de un patrón de flujo a otro, los efectos de turbulencia, el efecto de resbalamiento ocasionado por tener un número de álabes finito para dos fases, el tamaño de las burbujas, etc.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN