00324
40

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

COHOMOLOGIA DE GAVILLAS SOBRE VARIEDADES COMPLEJAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C O

P R E S E N T A :

O M A R V I G U E R A S H E R R E R A

DIRECTOR DE TESIS: DR. ENRIQUE JAVIER ELIZONDO HUERTA

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2003

A

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVENOMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Omar Vigueras Herrera
FECHA: 1 de abril 2003
FIRMA:

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Cohomología de Gavillas sobre Variedades Complejas

realizado por Omar Vigueras Herrera

con número de cuenta 09410152-8, quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Enrique Javier Elizondo Huerta	Javier Elizondo
Propietario	Dr. Santiago López de Medrano Sánchez	
Propietario	Dr. Pedro Luis del Angel Rodríguez	
Suplente	Dr. José Luis Cisneros Molina	
Suplente	M. en C. Paulino Preciado Babb	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

II

Cohomología de Gavillas sobre Variedades Complejas

Agradecimientos

En este pequeño espacio, quisiera rendir un sincero tributo a quienes me han apoyado y soportado durante mi vida académica: la Profra. María Candelaria Cruz quién, tuvo una gran influencia en la escritura de este trabajo. El M. en C. José Ildefonso Sánchez Torres, quien me mostró el vasto mundo de la Matemática. Mis profesores de la facultad, a quienes debo todo lo que se. El Dr. E. Javier Elizondo Huerta, mi asesor, por soportar mis excesos de confianza y por todo su apoyo. El Dr. Santiago López de Medreano Sánchez, que es el mejor ejemplo que puedo tener. Los doctores Pedro Luis del Angel Rodríguez y José Luis Cisneros Molina y el M. en C. Paulino Preciado Babb, por leer este trabajo.

A mi familia, GRACIAS. Mi madre Lú, de quien aprendí lo que significa ser humano. Efrén, mi padre, quien me enseñó el valor del trabajo. Y mi hermano, Ivan, por esos momentos de risa y emociones.

De manera especial, quisiera agradecer a todos mis amigos porque son parte fundamental de mi vida.

Quiero dedicar este trbajo a dos de las personas más importantes en mi vida: Karla, porque me enseñaste a vivir de una manera distinta. Jetzel, por creer en mi y ser parte fundamental de este logro.

Índice General

Introducción

Dentro del estudio de variedades, uno de los principales problemas es obtener información global a partir de la información local que tenemos, o verificar si alguna propiedad local que se tenga se puede extender a toda la variedad. En 1945, *Jean Leray* introdujo la *Teoría de Gavillas* como la herramienta para tratar este problema, cuyo principio es asociar a cada subconjunto abierto de la variedad una serie de objetos llamados *secciones*, los cuales nos dan información de dicho subconjunto. Si tenemos intersecciones no vacías de abiertos y las secciones asociadas a cada uno de ellos se pueden "pegar" de manera coherente, entonces podemos obtener un objeto definido en todos ellos. Dicho proceso no siempre es posible, ya que el "pegado" de las secciones no siempre se puede realizar. Una de las formas de garantizar el "pegado" de las secciones es asociar, a una gavilla dada sobre una variedad, una nueva gavilla llamada *gavilla de secciones discontinuas*, la cual se contruye vía el *espacio étalé asociado a la gavilla dada.* Como su nombre lo indíca, las secciones de dicha gavilla son funciones discontinuas definidas sobre el abierto, con valores en el espacio étalé asociado a la gavilla dada. A partir de estas dos gavillas podemos formar una resolución, que llamarémos *resolución canónica suave*, tal resolución nos permite definir los *grupos de cohomología con coeficien-*

Índice General

Introducción

Dentro del estudio de variedades, uno de los principales problemas es obtener información global a partir de la información local que tenemos, o verificar si alguna propiedad local que se tenga se puede extender a toda la variedad. En 1945, *Jean Leray* introdujo la *Teoría de Gavillas* como la herramienta para tratar este problema, cuyo principio es asociar a cada subconjunto abierto de la variedad una serie de objetos llamados *secciones*, los cuales nos dan información de dicho subconjunto. Si tenemos intersecciones no vacías de abiertos y las secciones asociadas a cada uno de ellos se pueden "pegar" de manera coherente, entonces podemos obtener un objeto definido en todos ellos. Dicho proceso no siempre es posible, ya que el "pegado" de las secciones no siempre se puede realizar. Una de las formas de garantizar el "pegado" de las secciones es asociar, a una gavilla dada sobre una variedad, una nueva gavilla llamada *gavilla de secciones discontinuas*, la cual se contruye vía el *espacio étalé asociado a la gavilla dada.* Como su nombre lo indíca, las secciones de dicha gavilla son funciones discontinuas definidas sobre el abierto, con valores en el espacio étalé asociado a la gavilla dada. A partir de estas dos gavillas podemos formar una resolución, que llamarémos *resolución canónica suave*, tal resolución nos permite definir los *grupos de cohomología con coeficien-*

tes en la gavilla asociados a la variedad, estos grupos nos permiten obtener información geométrica global de la variedad.

En el capítulo 1 se da un panorama global de variedades con estructura así como de haces vectoriales, lo que nos permite usar la teoría en torno del operador *derivada exterior* para poder construir resoluciones de gavillas sobre variedades complejas. Para tener una mejor y más amplia visión de este capítulo ver [War83], [Sor69], [GR65].

En el capítulo 2 damos una pequeña y rústica exposición de teoría de gavillas con lo necesario para construir el espacio étalé y así poder definir la resolución de una gavilla. En [Ten75] y [God64] se dan las correctas contrucciones usando *teoría de Categorías.*

En el capítulo 3 construimos la resolución canónica de una gavilla para después definir los grupos de cohomología, demostramos algunas propiedades sobre ellos y finalmente se demuestran los teoremas de de Rham y Dobeault como consecuencia del teorema 3.2.4.

Este trabajo está basado en los dos primeros capítulos de [Wel80], y se complementa con el resto de la bibliografía.

Capítulo 1

Variedades y Haces Vectoriales

1.1 Variedades

En el desarrollo de este trabajo nos enfocaremos a los campos de números reales y complejos, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, respectivamente, y denotaremos por K a cualquiera de ellos.

Si $D \subset K^n$ es abierto, nos interesaremos en los siguientes espacios de funciones sobre D:

1. Para $K = \mathbb{R}$:

   (a) $\mathcal{E}(D)$ denotará al conjunto de funciones con valores reales tales que las derivadas parciales de todos los órdenes existen y son continuas en todos los puntos de D.

   (b) $\mathcal{A}(D)$ denotará al conjunto de funciones analíticas con valores reales; es decir, $\mathcal{A}(D) \subset \mathcal{E}(D)$, y $f \in \mathcal{A}(D)$ si y sólo si la expansión de Taylor de f converge en una vecindad de cualquier punto de D.

2. Para $K = \mathbb{C}$,

$\mathcal{O}(D)$ denotará el conjunto de las *funciones holomorfas* con valores complejos sobre D, es decir, si $(z_1, ..., z_n)$ son coordenadas en $\mathbb{C}^n$, entonces $f \in \mathcal{O}(D)$ si y sólo si cerca de cada punto $z^0 \in D$, f puede ser representada por una serie de potencias convergente de la forma:

$$f(z) = f(z_1, ...z_n) = \sum_{\alpha_1,...,\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1,...,\alpha_n}(z_1 - z_1^0)^{\alpha_1} \cdots (z_n - z_n^0)^{\alpha_n}.$$

Recordemos que una *variedad topológica, X, de dimensión n*, es un espacio topológico de Hausdorff con una base numerable tal que para cada punto $x \in X$ existe una vecindad de él que es homeomorfa a un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$; es decir, si $x \in U \subseteq X$, abierto, existe un homeomorfismo $h : U \longrightarrow U'$, con $U' \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto.

Ahora, supongamos que $\mathcal{S}$ es una de las tres familias de funciones definidas anteriormente, y denotaremos como $\mathcal{S}(D)$ a las funciones de $\mathcal{S}$ definidas en un conjunto abierto $D \subset K^n$.

Definición 1.1.1. Una estructura de tipo $\mathcal{S}$, sobre una variedad topológica M de *dimensión k*, denotada $\mathcal{S}_M$, es una familia de funciones continuas definidas sobre conjuntos abiertos de M con valores en K, tales que:

(a) Para cada $p \in M$, existe una vecindad abierta U de p y un homeomorfismo $h : U \longrightarrow U'$, donde U' es un abierto en K^n, tales que para cualquier conjunto abierto $V \subset U$

$$f : V \longrightarrow K \in \mathcal{S}_M \text{ si y sólo si } f \circ h^{-1} \in \mathcal{S}(h(V)).$$

(b) Si $f : U \longrightarrow K$, donde $U = \bigcup_i U_i$ y U_i es abierto en M, entonces $f \in \mathcal{S}_M$ si y sólo si $f|_{U_i} \in \mathcal{S}_M$ para cada i.

Cuando a una variedad se le puede asociar una estructura, decimos que es una *variedad con estructura* $\mathcal{S}$ y la denotamos $(M, \mathcal{S}_M)$, y a los elementos de $\mathcal{S}_M$ los llamamos *funciones de tipo* $\mathcal{S}$ sobre M. Un subconjunto abierto $U \subset M$ y un homeomorfismo $h : U \longrightarrow U' \subset K^n$ que cumplen (a), son llamados *un sistema coordendo de tipo* $\mathcal{S}$.

En particular, para nuestras tres clases de funciones hemos definido:

(a) $\mathcal{S} = \mathcal{E}$: *variedades diferenciables*,

(b) $\mathcal{S} = \mathcal{A}$: *variedades analíticas reales*,

(c) $\mathcal{S} = \mathcal{O}$: *variedades complejas*,

Definición 1.1.2. (a) Un morfismo de tipo $\mathcal{S}$, $F : (M, \mathcal{S}_M) \longrightarrow (N, \mathcal{S}_N)$, es una aplicación continua, $F : M \longrightarrow N$, tal que:

$$f \in \mathcal{S}_N \text{ implica que } f \circ F \in \mathcal{S}_M$$

(b) Un isomorfismo de tipo $\mathcal{S}$ es un morfismo de tipo $\mathcal{S}$, $F : (M, \mathcal{S}_M) \longrightarrow (N, \mathcal{S}_N)$, tal que $F : M \longrightarrow N$ es un homeomorfismo y:

$$F^{-1} : (N, \mathcal{S}_N) \longrightarrow (M, \mathcal{S}_M) \text{ es un morfismo de tipo } \mathcal{S}.$$

Si en una variedad con estructura, $(M, \mathcal{S}_M)$, tenemos dos sistemas coordenados, $h_1 : U_1 \longrightarrow K^n$ y $h_2 : U_2 \longrightarrow K^n$, tales que $U_1 \cap U_2 \neq \phi$, entonces:

1. $h_2 \circ h_1^{-1} : h_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow h_2(U_1 \cap U_2)$ es un isomorfismo de tipo $\mathcal{S}$ sobre subconjuntos abiertos de $(K^n, \mathcal{S}_{K^n})$.

De modo converso, si tenemos una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, sobre una variead topológica M, y una familia de homeomorfismos $\{h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow U'_\alpha \subset K^n\}_\alpha$ que satisfacen (1), entonces podemos definir una estructura de tipo $\mathcal{S}$ sobre M de la siguiente forma: sea $\mathcal{S} = \{f : U \longrightarrow K\}$, tal que U es abierto en M y $f \circ h_\alpha^{-1} \in \mathcal{S}(h_\alpha(U \cap U_\alpha))$ para toda $\alpha \in A$; es decir, las funciones en $\mathcal{S}_M$ son los ´pullbacks´ de funciones de tipo $\mathcal{S}$ compuestos con los homeomorfismos $\{h_\alpha\}_{\alpha\in A}$. La colección $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ es llamada un *atlas* para $(M, \mathcal{S}_M)$.

Ejemplo 1.1.3. *El espacio Proyectivo*: Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre K, entonces $\mathbb{P}(V)$:={el conjunto de los subespacios vectoriales de V de dimensión 1}, es llamado el *espacio proyectivo* de V. Vamos a considerar, en especial, a los espacios proyectivos:

$$\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \text{ y } \mathbb{P}_n(\mathbb{C}) := \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1}).$$

Sea $\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ dada por:

$\pi(x) = \pi(x_0, ..., x_n)$:={el subespacio generado por $x = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$}.

La aplicación π es sobre; de hecho $\pi|_{S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:|x|=1\}}$ es sobre. Si dotamos a $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ con la topología cociente, inducida por la aplicación π, entonces $U \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ es abierto si y sólo si $\pi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. De ésto tenemos que π es continua. Si consideramos dos puntos $p, q \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ y sus imágenes inversas $\pi^{-1}(p)$ y $\pi^{-1}(q)$, entonces podemos tomar el ángulo que forman los dos subespacios generados por p y q y fijarnos en la tercera parte de éste para formar dos "conos" con $\pi^{-1}(p)$ y $\pi^{-1}(q)$ como centros, y bajo la aplicación π tenemos vecindades de p y q que no se intersectan, por lo tanto $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ es un espacio de Hausdorff con una base numerable. Como

$$\pi|_{S^n} : S^n \longrightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$$

es continua y sobre, entonces es una identificación, por lo tanto $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ es compacto.

Si $x = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, entonces definimos

$$\pi(x) = [x_0, ..., x_n]$$

Decimos que $(x_0, ..., x_n)$ son *coordenadas homogéneas* de $[x_0, ..., x_n]$. Si $(x'_0, ..., x'_n)$ es otra colección de coordenadas homogéneas de $[x_0, ...x_n]$, entonces $x_i = tx'_i$ para alguna $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, ya que $[x_0, ..., x_n]$ es el subespacio generado por $(x_0, ...x_n)$ ó $(x'_0, ..., x'_n)$. De aquí tenemos que $\pi(x) = \pi(tx)$ para $t \in \mathbb{R} - \{0\}$. Usando coordendas homogéneas, podemos dar una estructura diferenciable a $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ de la siguiente manera:

Sea $U_\alpha = \{S \in \mathbb{P}_n(\mathbb{R}) \mid S = [x_0, ..., x_n] \text{ y } x_\alpha \neq 0\}$, para $\alpha = 0, ..., n$. Cada U_α es abierto y $\mathbb{P}_n(\mathbb{R}) = \bigcup_{\alpha=0}^n U_\alpha$, ya que $(x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$. Definimos la aplicación $h_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$h_\alpha([x_0, ..., x_n]) = (\tfrac{x_0}{x_\alpha}, ..., \tfrac{x_{\alpha-1}}{x_\alpha}, \tfrac{x_{\alpha+1}}{x_\alpha}, ..., \tfrac{x_n}{x_\alpha}) \in \mathbb{R}^n$$

Veamos que h_α es continua. Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, y consideramos al conjunto $h_\alpha^{-1}(V) \subset \mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ y un punto P en él. Ahora, consideramos al subespacio de dimensión 1 generado por $h_\alpha(P)$, como V es abierto existe una bola abierta $B_r(h_\alpha(P))$, con centro en $h_\alpha(P)$, totalmente contenida en V, escogemos un punto $q \in B_r(h_\alpha(P))$ distinto de $h_\alpha(P)$, y formamos un "cono" girando el subespacio de dimensión 1 generado por q al rededor del subespacio generado por $h_\alpha(P)$, y nos fijamos en la intersección $U = B_r(h_\alpha(P)) \cap V$, entonces $h^{-1}(U)$ está totalmente contenido en $h_\alpha^{-1}(V)$, por lo tanto $h_\alpha^{-1}(V)$ es abierto en $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$, de lo que tenemos que h_α es un homeomorfismo para cada α.

Si tenemos dos sistemas coordenados (h_α, U_α) y (h_β, U_β), entonces la función $h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ es continua e inclusive diferenciable por la definición de los homeomorfismos h_α.

1.2 Haces Vectoriales

Definición 1.2.1. Una Aplicación continua $\pi : E \longrightarrow X$, de un espacio de Hausdorff sobre otro, es llamada un *haz vectorial sobre K de rango r*, si las siguientes condiciones se satisfacen:

a) $E_p := \pi^{-1}(p)$, para $p \in X$, es un espacio vectorial sobre K de dimensión r, donde E_p es llamada la *fibra de p*.

b) Para cada $p \in X$, hay una vecindad U de p y un homeomorfismo

$$h : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times K^r$$

tal que $h(E_p) \subseteq \{p\} \times K^r$, y h^p, definida por la composición

$$h^p : E_p \xrightarrow{h} \{p\} \times K^r \xrightarrow{proy.} K^r$$

es un isomorfismo de espacios vectoriales. A la pareja (U, h) le llamaremos *trivialización local*.

En un haz vectorial sobre K, $\pi : E \longrightarrow X$, E es conocido como el *espacio total* y a menudo decimos que E es un haz vectorial sobre X.

Consideremos dos trivializaciones locales (U_α, h_α) y (U_β, h_β) y la aplicación

$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times K^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times K^r.$$

Ahora, si $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, h^p_α y h^p_β son isomorfismos de espacios vectoriales (*i.e.*, son lineales y tienen inverso), entonces

$$h^p_\alpha \circ (h^p_\beta)^{-1} : K^r \longrightarrow K^r$$

es una transformación lineal invertible, es decir,

$$\left[h^p_\alpha \circ (h^p_\beta)^{-1}\right] \in \mathsf{GL}(\mathsf{r}, \mathsf{K})$$

donde $\left[h^p_\alpha \circ (h^p_\beta)^{-1}\right]$ es la matriz asociada a $h^p_\alpha \circ (h^p_\beta)^{-1}$; y podemos definir $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathsf{GL}(\mathsf{r}, \mathsf{K})$ por:

$$g_{\alpha\beta}(p) = \left[h^p_\alpha \circ (h^p_\beta)^{-1}\right],$$

donde la matríz $\left[h^p_\alpha \circ (h^p_\beta)^{-1}\right]$ está considerada con respecto a la base canónica de K^r.

A las funciones $g_{\alpha\beta}$ les llamamos *funciones de transición* del haz vectorial, $\pi : E \longrightarrow X$, con respecto a las dos trivializaciones locales (h_α, U_α) y (h_β, U_β).

Sobre $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ tenemos la composición de las funciones:

$$h_\alpha \circ h_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times K^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times K^r$$

$$h_\beta \circ h_\gamma^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times K^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times K^r$$

$$h_\gamma \circ h_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times K^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma) \times K^r$$

Donde $(h_\alpha \circ h_\beta^{-1}) \circ (h_\beta \circ h_\gamma^{-1}) \circ (h_\gamma \circ h_\alpha^{-1}) = Id$.

Entonces:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(p) g_{\beta\gamma}(p) g_{\gamma\alpha}(p) &= Id \\ g_{\alpha\alpha}(p) &= Id \quad en \quad U_\alpha \end{aligned} \tag{1.1}$$

Definición 1.2.2. Un haz vectorial sobre K de rango r, $\pi : E \longrightarrow X$, es un *haz vectorial con estructura* $\mathcal{S}$ si E y X son variedades con estructura $\mathcal{S}$, π es un morfismo de tipo $\mathcal{S}$ y las trivializaciones locales son isomorfismos de tipo $\mathcal{S}$.

Nota 1.2.3. Supongamos que sobre una variedad M con estructura $\mathcal{S}$ tenemos una cubierta abierta $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$, y que para cada intersección no vacía ordenada, está asignada una función de tipo $\mathcal{S}$,

$$g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathsf{GL(r, K)}$$

que satisface las condiciones de compatibilidad 1.1. Entonces podemos construir un haz vectorial, $E \xrightarrow{\pi} X$, que tenga a éstas como funciones de transición.

Sea $\widetilde{E} = \coprod_\alpha (U_\alpha \times K^r)$ la unión disjunta y la equipamos con la topología producto; si $dim M = n$, consideramos el espacio $K^n \times K^r$ con la topología producto, es decir; todo abierto de $K^n \times K^r$ es de la forma $A \times B$, con $A \subseteq K^n$ abierto y $B \subseteq K^r$ abierto. Así podemos ver que $\widetilde{E}$ es un espacio de Hausdorff.

Si $p \in \widetilde{E}$, entonces es de la forma $p = (x, v)$ con $x \in U_\alpha$ para algún α y $v \in K^r$, por lo tanto definimos la aplicación

$$\widetilde{h} : \widetilde{E} \longrightarrow K^n \times K^r$$

como $\widetilde{h}(p) := (h \times id)(x, v) = (h(x), v)$, donde h es una carta de U_α.

Si $A \times B \subseteq K^n \times K^r$ es abierto, entonces

$$(\widetilde{h})^{-1}(A \times B) = (h^{-1} \times id)(A \times B) = h^{-1}(A) \times B$$

y como h es homeomorfismo, entonces $(\breve{h})^{-1}(A) \times B$ es abierto en $\breve{E}$, por lo tanto $\breve{h}$ es continua y su inversa también es continua porque h es homeomorfismo, por lo tanto $\breve{h}$ lo es.

Así, $\breve{E}$ tiene una estructura $\mathcal{S}$ de forma natural.

Definimos la siguiente relación en $\breve{E}$: $(x,v) \backsim (y,w)$, con $(x,v) \in U_\beta \times K^r$ y $(y,w) \in U_\alpha \times K^r$ si y sólo si $y = x$ y $w = g_{\alpha\beta}(x)v$. Entonces:

Como $g_{\alpha\alpha} = Id$ en U_α, $x = y$ y $v = Id(v)$, tenemos que $(x,v) \backsim (y,v)$.

Supongamos que $(x,v) \backsim (y,w)$, como $g_{\alpha\beta}$ es invertible entonces $v = (g_{\alpha\beta}(x))^{-1}w$ y $y = x$ por lo tanto $(y,w) \backsim (x,v)$.

Ahora, sí $(x,v) \backsim (y,w)$ y $(y,w) \backsim (z,u)$, con $(x,v) \in U_\beta \times K^r$, $(y,w) \in U_\alpha \times K^r$ y $(z,u) \in U_\gamma \times K^r$, entonces $y = x$, $z = y$ y $w = g_{\alpha\beta}(x)v$, $u = g_{\gamma\alpha}(y)w$ por lo cual tenemos que $u = g_{\gamma\alpha}g_{\alpha\beta}v$, y ésto implica que $(x,v) \backsim (z,u)$.

Por lo anterior $\backsim$ está bien definida, y por lo tanto $\backsim$ es relación de equivalencia.

Ahora, consideremos el espacio $E = \widehat{E}/\backsim$ equipado con la topología cociente, y sean x y y dos puntos en E distintos; consideramos las imagenes inversas de estos puntos bajo la aplicación canónica $p : \breve{E} \longrightarrow E$; como $\breve{E}$ es un espacio de Hausdorff[1], entonces existen vecindades, U y V, de $p^{-1}(x)$ y $p^{-1}(y)$, respectivamente, que no se intersecan, entonces $p(U)$ y $p(V)$ no se intersecan, por lo tanto E es un espacio de Hausdorff y tiene la misma estructura que $\breve{E}$.

Sea $\pi : E \longrightarrow X$ la aplicación que manda a un representante (x,v), de un punto $p \in E$, a su primer coordenada, entonces $\pi^{-1}(x)$ es de la forma

[1] Realmente la condición necesaria es que sea un espacio normal, pero por construcción lo es.

(x, v) con $v \in K^r$; es decir, lo podemos ver como $\{x\} \times K^r$, y si definimos $(x, v) + (x, u) = (x, v + u)$, $c(x, v) = (x, cv)$ con $c \in K$, entonces podemos dar una estructura de espacio vectorial a $\pi^{-1}(x)$ que es isomorfo a K^r, por lo tanto E es un haz vectorial de rango r.

Ejemplo 1.2.4. *El haz Tangente.* Sea M una variedad diferenciable. Si f y g están definidas sobre M y son C^∞ cerca de un punto $p \in M$ y coinciden en alguna vecindad más pequeña de p, entonces decimos que son equivalentes. Si tomamos al conjunto de clases de equivalencia bajo esta relación, podemos ver que es equivalente a definirlo como el *límite directo*(ver [Rot79]):

$$\mathcal{E}_{M,p} := \varinjlim_{p \in U \subset M} \mathcal{E}_M(U)$$

con U abierto, y lo llamaremos el *álgebra de gérmenes de funciones diferenciables en el punto $p \in M$*.

Sean $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{E}_{M,p}$, definimos $(\bar{f} + \bar{g})(p)$ y $(\bar{f}\bar{g})(p) = \bar{f}(p)\bar{g}(p)$ para dar una estructura de anillo a $\mathcal{E}_{M,p}$.

Consideramos el homomorfismo $\phi : \mathbb{R} \times \mathcal{E}_{M,p} \longrightarrow \mathcal{E}_{M,p}$, dado por $\phi(k, \bar{f}) = k\bar{f}$ y vemos que también podemos considerar a $\mathcal{E}_{M,p}$ como un *módulo* sobre $\mathbb{R}$, es decir, un espacio vectorial real.

Definimos una *derivación* de $\mathcal{E}_{M,p}$ como un homomorfismo de espacios vectoriales $D : \mathcal{E}_{M,p} \longrightarrow \mathbb{R}$, con la siguiente propiedad:

$$D(fg)(p) = D(f)g(p) + f(p)D(g),$$

donde $f(p)$ y $g(p)$ denotan la evaluación de un gérmen en p.

El espacio tangente a M en p, es el espacio vectorial de todas las derivaciones de $\mathcal{E}_{M,p}$, el cual denotaremos por $T_p(M)$.

Como M es variedad diferenciable, podemos encontrar un difeomorfismo $h : U \longrightarrow U'$, donde $p \in U \subset M$ es vecindad de p y $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto.

Definimos $h^* : \varepsilon_{\mathbb{R}^n}(V) \longrightarrow \varepsilon_M(h^{-1}(V))$ como $h^*f(x) = f \circ h(x)$ donde $V \subset U$, y su inversa está dada por $(h^{-1})^*g(y) = g \circ h^{-1}(y)$. Notamos que:

$$\begin{aligned} (h^{-1})^*(h^*f(x)) &= (h^{-1})^*(f \circ h(x)) \\ &= (h^{-1})^*(f(y)) \\ &= f \circ h^{-1}(y) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^*((h^{-1})^*g(y)) &= h^*(g \circ h^{-1}(y)) \\ &= h^*(g(x)) \\ &= g \circ h(y) \\ &= g(y) \end{aligned}$$

Por lo tanto $h^* : \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n}(V) \longrightarrow \mathcal{E}_M(h^{-1}(V))$ es un isomorfismo de álgebras definido por h.

Si tomamos el límite directo, entonces h^* induce un isomorfismo de álgebras

$$H : \mathcal{E}_{\mathbb{R}^n, h(p)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{E}_{M,p}$$

dado por $H(f) = f \circ h$, donde h es el difeomorfismo definido anteriormente.

Si $D \in T_{h(p)}(\mathbb{R}^n)$, entonces $D = D' \circ H$, donde $D' \in T_p(M)$ y $D(f) = D' \circ H(f) = D'(f \circ h)$, por lo tanto hemos encontrado un isomorfismo entre las derivaciones

$$h_* : T_p(M) \longrightarrow T_{h(p)}(\mathbb{R}^n)$$

$$D' \mapsto D' \circ H$$

De aquí se puede demostrar que $\frac{\partial}{\partial x_j}$ son derivaciones de $\mathcal{E}_{\mathbb{R}^n,h(p)}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ y el conjunto $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ es una base de $T_{h(p)}(\mathbb{R}^n)$ (ver [War83]), entonces $T_{h(p)(\mathbb{R}^n)}$ es un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$ para cada $p \in M$. Ahora, supongamos que $f : M \longrightarrow N$ es una función diferenciable, entonces hay una aplicación natural

$$df_p : T_p(M) \longrightarrow T_{f(p)}(N)$$

definida por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}_{M,p} \arrow[dr, "D_p"'] & & \mathcal{E}_{N,f(p)} \arrow[ll, "f^*"'] \arrow[dl, "D_p \circ f^* = df_p(D_p)"] \\ & \mathbb{R} & \end{tikzcd}$$

donde $D_p \in T_P(M)$, y f^* es definida analogamente a h^*. Construyamos ahora el haz tangente a M. Sea

$$T(M) = \coprod_{p \in M} T_p(M)$$

y definimos $\pi : T(M) \longrightarrow M$ por $\pi(v) = p$ si $v \in T_p(M)$. Sea $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}$ un atlas para M, y sea $T(U_\alpha) = \pi^{-1}(U_\alpha)$. Supongamos que $v \in T_p(M) \subset T(U_\alpha)$, entonces $dh_{\alpha,p}(v) \in T_{h_\alpha(p)}(\mathbb{R}^n)$, por lo que

$$dh_{\alpha,p}(v) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{h_\alpha(p)}$$

donde $\xi_j \in \mathcal{E}_M(U_\alpha)$. Definimos

$$\psi_\alpha : T(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

como $\psi_\alpha(v) = (p, \xi_1(p), \ldots, \xi_n(p))$.

Sea $(p, x_1, \ldots, x_n) \in U_\alpha \times \mathbb{R}^n$, entonces existe $v \in T(U_\alpha)$ tal que $\pi(v) = p$.

Si $v \in T_p(M)$, tal que $\psi_\alpha(v) = (p, 0, \ldots, 0)$, entonces $\xi_i(p) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$, por lo tanto $dh_{\alpha,p}(v) = 0$, pero $dh_{\alpha,p}$ es un isomorfismo de espacios vectoriales, entonces ψ_α es biyectiva.

Ahora, sea

$$\psi_\alpha^p : T_p(U_\alpha) \xrightarrow{\psi_\alpha} \{p\} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{proy.} \mathbb{R}^n$$

la composición, que es sobre, y como ψ_α es inyectiva, entonces ψ_α^p es inyectiva, por lo tanto ψ_α^p es un isomorfismo.

Definimos las funciones de transición

$$g_{\alpha\beta} : U_\beta \cap U_\alpha \longrightarrow \mathsf{GL}(\mathsf{n}, \mathbb{R})$$

por $g_{\alpha\beta}(p) = \psi_\alpha^p \circ (\psi_\beta^p)^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, entonces $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}$ son las trivializaciones locales. Ahora, para dar una topología a $T(M)$, definimos $U \subset T(M)$ abierto si y sólo si $\psi_\alpha(U \cap T(U_\alpha))$ es abierto en $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ para cada α, lo cual sucede ya que

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

es un difeomorfismo cuando $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$; y como las funciones de transición son difeomorfismos, entonces podemos dar una estructura diferencialble a $T(M)$.

Definición 1.2.5. Sea $\pi : E \longrightarrow X$ un haz vectorial de tipo $\mathcal{S}$ y $U \subset X$ un conjunto abierto. Entonces la restricción de E a U es el haz de tipo $\mathcal{S}$

$$\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$$

y se denota $E|_U$.

Definición 1.2.6. Sean E y F haces vectoriales de tipo $\mathcal{S}$ sobre X. Entonces un *homomorfismo de haces de tipo* $\mathcal{S}$,

$$f : E \longrightarrow F$$

es un morfismo de tipo $\mathcal{S}$ de los espacios totales que preserva las fibras y es lineal en K sobre cada una de ellas; es decir, f conmuta con las proyecciones y es un homomorfismo lineal sobre K cuando se restringe a las fibras. Un *isomorfismo de haces de tipo* $\mathcal{S}$ es un homomorfismo de haces que es un isomorfismo de los espacios totales y es un isomorfismo sobre K en las fibras.

Definición 1.2.7. Una *sección de tipo* $\mathcal{S}$ de un haz de tipo $\mathcal{S}$, $E \xrightarrow{\pi} X$, es un morfismo de tipo $\mathcal{S}$, $s : X \longrightarrow E$ tal que

$$\pi \circ s = Id_X$$

donde Id_X es la identidad en X; es decir, s lleva a un punto en X a su fibra en E. Denotamos a las secciones de tipo $\mathcal{S}$ de E sobre X como $\mathcal{S}(X, E)$. $\mathcal{S}(U, E)$ denotará a las secciones de tipo $\mathcal{S}$ de E_U sobre $U \subset X$, en otras palabras, $\mathcal{S}(U, E) = \mathcal{S}(U, E|_U)$.

1.3 Variedades Casi Complejas

Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita, y supongamos que $J : V \longrightarrow V$ es un isomorfismo tal que $J^2 = -Id$. A tal J se le llama una *estructura compleja* sobre V. Sean V y J dados con la propiedad anterior; definimos

$$(\alpha + i\beta)v := \alpha v + \beta J v, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Si $u, v \in V$ y $\alpha + i\beta, \quad a + ib \in \mathbb{C}$, entonces:

1.

$$\begin{aligned}(\alpha + i\beta)(u + v) &= \alpha(u + v) + \beta J(u + v)\\ &= \alpha u + \alpha v + \beta J u + \beta J v\\ &= (\alpha u + \beta J u) + (\alpha v + \beta J v)\\ &= (\alpha + i\beta)u + (\alpha + i\beta)v\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}((\alpha + i\beta)(a + ib))u &= ((a\alpha - b\beta) + i(a\beta + b\alpha))u\\ &= (a\alpha - b\beta)u + (a\beta + b\alpha)Ju\\ &= a\alpha u - b\beta u + a\beta J u + b\alpha J u\\ &= \alpha(au + bJu) + \beta(aJu - bu)\\ &= \alpha(au + bJu) + \beta J(au + bJu)\\ &= (\alpha + i\beta)(au + bJu)\\ &= (\alpha + i\beta)((a + ib)u)\end{aligned}$$

Entonces hemos definido una multiplicación por escalares complejos en V, por lo tanto V es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. De modo converso, sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, y $J : V \longrightarrow V$ dado por $J(v) = iv$. Si $\beta = \{v_1 \dots v_n\}$ es una base de V y $v \in V$, entonces $v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$ con $\alpha_j \in \mathbb{C}$

para $j = 1, 2, \ldots, n$. Consideremos el conjunto $\gamma = \{v_1, \ldots, v_n, iv_1, \ldots, iv_n\}$ y para cada j, $\alpha_j = a_j + ib_j$, con $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, entonces

$$v = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = \sum_{j=1}^{n} (a_j + ib_j) v_j = \sum_{j=1}^{n} (a_j v_j + b_j i v_j)$$

por lo tanto γ genera a V.

Ahora, si tenemos una combinación lineal $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + b_1 i v_1 + \cdots + b_n i v_n = 0$, de elementos de γ, entonces $(a_1 + ib_1) v_1 + \cdots + (a_n + ib_n) v_n = 0$ por lo que cada $a_j + ib_j = 0$ por lo tanto $a_j = b_j = 0$. De lo anterior tenemos que γ es un conjunto linealmente independiente, y por consiguiente, es una base de V visto como espacio vectorial real.

Por otro lado, si $v \in V$ y nos fijamos en el elemento $-iv \in V$, tenemos que $J(-iv) = v$, por lo tanto J es sobre; y si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y $v_1, v_2 \in V$ vemos que $J(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha J(v_1) + \beta J(v_2)$.

Ejemplo 1.3.1. Sea $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) | z_j \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, n\}$, con $z_j = a_j + ib_j$, donde $a_j, b_j \in \mathbb{R}$; entonces, a cada $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ lo podemos identificar con $(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Si multiplicamos a $z \in \mathbb{C}^n$ por el escalar i obtenemos

$$iz = i(z_1, \ldots, z_n) = i(a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n) = (ia_1, -b_1, \ldots, ia_n, -b_n)$$

lo cual induce una aplicación $J : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$J(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n) = (-b_1, a_1, \ldots, -b_n, a_n)$$

y vemos que $J^2 = -Id$, ésta es la *estructura compleja canónica* de $\mathbb{R}^{2n}$.

Ejemplo 1.3.2. Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ una variedad compleja y $x \in X$, sea $T_x(X)$ el espacio tangente complejo a $(X, \mathcal{O}_X)$ en x. Denotamos por $(X_0, \mathcal{E}_{X_0})$ a la variedad diferencialble subyacente de $(X, \mathcal{O}_X)$; es decir, induce una estructura diferenciable en el espacio topológico X; y sea $T_x(X_0)$ el espacio tangente real a X_0 en x.

Sea (h, U) un sistema coordenado holomorfo tal que $x \in U$. Entonces $h(x) = (z_1(x), \ldots, z_n(x)) = (a_1(x) + ib_1(x), \ldots, a_n(x) + ib_n(x))$, donde $a_j(x), b_j(x) \in \mathbb{R}$; definimos $\breve{h} : U \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ por

$$\breve{h}(x) = (a_1(x), b_1(x), \ldots, a_n(x), b_n(x))$$

y como (h, U) es un sistema holomorfo, entonces a_j, b_j son funciones analíticas reales, en particular, son diferenciables, por lo que $(\breve{h}, U)$ es un sistema coordenado diferenciable para X_0 en x.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $h(x) = 0$, y consideramos los espacios tangentes $T_0(\mathbb{C}^n)$ y $T_0(\mathbb{R}^{2n})$, donde $\mathbb{R}^{2n}$ tiene la estructura compleja canónica. Si $\{\frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial z_n}\}$ es una base para $T_0(\mathbb{C}^n)$ y sabemos que $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j})$, entonces $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}\}$ es una base para $T_0(\mathbb{R}^{2n})$, además $T_0(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}^n$, $T_0(\mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{2n}$ y $\mathbb{C}^n \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^{2n}$, sean σ, τ y ψ tales isomorfismos, entonces la composición $\sigma \circ \psi \circ \tau^{-1} = \gamma : T_0(\mathbb{C}^n) \longrightarrow T_0(\mathbb{R}^{2n})$ es un isomorfismo. De aquí tenemos que $\breve{J}_0 = \tau^{-1} \circ J_0 \circ \psi \circ \sigma$, es la estructura compleja de $T_0(\mathbb{R}^{2n})$ inducida por J_0, que es la estrucutra compleja canónica de $\mathbb{R}^{2n}$. Nos falta demostrar que dicha estructura compleja es independiente del sistema coordenado que se escoja. Sea (h', V) otro sistema coordenado como el anterior, con $h' : V \longrightarrow V' \subset \mathbb{C}^n$, entonces consideramos un biholomorfismo $f : U' \longrightarrow V'$ tal que $f(0) = 0$. Si denotamos $f(z) = w$ y lo escribimos con partes real e imaginaria tenemos:

$$f(x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) = (u_1(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) +$$
$$iv_1(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n), \ldots, u_n(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) + iv_n(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n))$$

donde $x_j, y_j, u_j(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n), v_1(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n) \in \mathbb{R}$ y u_j, v_j son funciones diferenciables. La función f es un cambio de coordenadas holomorfo sobre X; y las funciones u_j, v_j son un cambio de coordenadas diferenciable sobre X_0.

Ahora, sea J la estructura compleja canónica en $\mathbb{R}^{2n}$, debemos mostrar que J conmuta con la diferencial de f, que es una matriz de $2n \times 2n$ formada por bloques de 2×2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_\beta} & \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \end{pmatrix}$$

con $\alpha, \beta = 1, ..., n$; y como f es holomorfa, entonces

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} & -\frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} & \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \end{pmatrix}$$

La matriz asociada a J tiene la forma de una matriz de $2n \times 2n$, con bloques de 2×2 de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sobre la diagonal y cero fuera de ella, entonces

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} & \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} & -\frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} \\ \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} & \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} & -\frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} \\ \frac{\partial v_\alpha}{\partial y_\beta} & \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la estructura compleja inducida en $T_x(X_0)$ es la misma para cada sistema de coordenadas en x.

Sea V un espacio vectorial real con estructura compleja J, y consideramos al espacio $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, la *complexificación* de V. Vimos anteriormente que J sólo es lineal en $\mathbb{R}$ y queremos extenderlo a $\mathbb{C}$ sobre $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de la siguiente manera:

$$\bar{J} : V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

dada por

$$\bar{J}(v \otimes \alpha) = J(v) \otimes \alpha, \quad v \in V, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

1. $\bar{J}(v \otimes (z + w)) = J(v) \otimes (z + w) = J(v) \otimes z + J(v) \otimes w$

2. $\bar{J}(v \otimes \lambda z) = J(v) \otimes (\lambda z) = \lambda(J(v) \otimes z)$

por lo tanto $\bar{J}$ es lineal sobre $\mathbb{C}$; entonces, por la propiedad del producto tensorial, también es lineal en $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

De hecho, $\bar{J}^2(v \otimes \alpha) = J^2(v) \otimes \alpha = -v \otimes \alpha = -1(v \otimes \alpha)$, por lo tanto $\bar{J}^2 = -Id$, es decir, $\bar{J}$ es un isomorfismo. Queremos encontrar los valores propios de $\bar{J}$, para ello vemos que $\bar{J}^4 = Id$ y $\bar{J}^5 = \bar{J}$, entonces: queremos los escalares $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $\bar{J}(v \otimes z) = \lambda(v \otimes z)$,

$$\bar{J}^5(v \otimes z) = \lambda(v \otimes z) = \bar{J}^4(J(v \otimes z)) = \bar{J}^4(\lambda(v \otimes z)) = \lambda \bar{J}^4(v \otimes z)$$

repitiendo este proceso llegamos a $\lambda^5(v \otimes z) = \lambda(v \otimes z)$, por lo que tenemos $\lambda^5 = \lambda$ y ésto implica que $\lambda^4 = 1$, y las únicas posibilidades son $1, -1, i, -i$, pero si consideramos que $\bar{J}^2 + Id = 0$ y $\bar{J}^2 + Id = (\bar{J} + iId)(\bar{J} - iId)$ entonces

$$0 = det(\bar{J}^2 + Id) = det[(\bar{J} + iId)(\bar{J} - iId)] = det(\bar{J} + iId)det(\bar{J} - iId)$$

y como trabajamos sobre $\mathbb{C}$, sabemos que si $z \in \mathbb{C}$, con parte imaginaria distinta de cero, es raíz de un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$, entonces su conjugado también lo es, por lo tanto $i, -i$ son valores propios de $\bar{J}$. Ahora, si nos fijamos que $(\bar{J}+Id)(\bar{J}-Id) = \bar{J}^2 - Id = -2Id$, entonces $det(-2Id) \neq 0$, por lo tanto $1, -1$ no son valores propios.

Sea $V^{1,0}$ el espacio correspondiente al valor propio i, y $V^{0,1}$ el correspondiente a $-i$. Ambos son subespacios de $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Si $(u \otimes z_1) \in V^{1,0}$ y $(v \otimes z_2) \in V^{0,1}$ son tales que $\bar{J}(u \otimes z_1) = \bar{J}(v \otimes z_2)$ entonces $i(u \otimes z_1) = -i(v \otimes z_2)$, por lo que $-(u \otimes z_1) = (v \otimes z_2)$, lo que implica $(u \otimes z_1) + (v \otimes z_2) = 0$, como $\bar{J}$ es isomorfismo $0 = \bar{J}(0) = \bar{J}((u \otimes z_1) + (v \otimes z_2)) = \bar{J}(u \otimes z_1) + \bar{J}(v \otimes z_2) = i(u \otimes z_1) - i(u \otimes z_1) = i(u \otimes z_1) + i(u \otimes z_1) = 2i(u \otimes z_1)$, por lo tanto $(u \otimes z_1) = (v \otimes z_2) = 0$, entonces $V^{1,0} \cap V^{0,1} = 0$.

Como $V^{1,0}, V^{0,1}$ son subespacios de $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, supongamos que $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \oplus W$, con W otro subespacio de $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ tal que $W \cap (V^{1,0} \oplus V^{0,1}) = 0$. Como J es un isomorfismo, entonces $J(V^{1,0}) = V^{1,0}$, $J(V^{0,1}) = V^{0,1}$ y $J(W) = W$, si consideramos $J|_W : W \longrightarrow W$, $J|_W$ no puede tener valores propios, ya que los únicos valores de este tipo para J son $i, -i$, pero como trabajamos sobre $\mathbb{C}$, sabemos que todo polinomio tiene al menos una raíz, y en particular, el polinomio característico de $J|_W$ tiene raices distintas de $i, -i$, lo cual es una contradicción, por lo tanto $W = 0$ y entonces

$$V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$$

Definimos la conjugación en $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ como $\overline{v \otimes z} = v \otimes \bar{z}$, para $v \in V$, $z \in \mathbb{C}$. Ahora, si $v \otimes z \in V^{1,0}$, entonces $\overline{v \otimes z} = v \otimes \bar{z}$ y $J(v \otimes z) = i(v \otimes z) = v \otimes iz$, por lo que $\overline{v \otimes iz} = v \otimes (-i\bar{z}) = -i(v \otimes \bar{z}) \in V^{0,1}$, por lo tanto la conjugación en $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ define un isomorfismo $V^{1,0} \xrightarrow{\cong} V^{0,1}$.

Denotamos por V_J al espacio vectorial complejo obtenido de V a través de J, dados al principio de la sección. Sea $\varphi : V_J \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, dada por

$\varphi(v) = v \otimes 1 - J(v) \otimes i$, entonces: $\varphi(v+u) = (v+u) \otimes 1 - J(v+u) \otimes i = v \otimes 1 + u \otimes 1 - J(v) \otimes i - J(u) \otimes i = \varphi(v) + \varphi(u)$ y $\varphi(zv) = \varphi((\alpha+i\beta)v) = \varphi(\alpha v + \beta Jv) = v \otimes \alpha + Jv \otimes \beta - Jv \otimes i\alpha + v \otimes i\beta = v \otimes (\alpha + i\beta) + Jv \otimes (\beta - i\alpha) = v \otimes z - Jv \otimes i(\alpha + i\beta) = v \otimes z - Jv \otimes iz = z(v \otimes 1) - z(Jv \otimes i) = z\varphi(v)$, por lo tanto φ es lineal sobre $\mathbb{C}$. Ahora, $\bar{J}(v \otimes 1 - Jv \otimes i) = Jv \otimes 1 + v \otimes i = i(Jv \otimes (-i) + v \otimes 1) = i(v \otimes 1 - Jv \otimes i)$, por lo que $\varphi(V_J) \subseteq V^{1,0}$. Nos faltaría ver que $\breve{\varphi} : V_J \longrightarrow V^{1,0}$ es epimorfismo, para ello sea $w \otimes z \in V^{1,0}$ tal que $Jw \otimes z = w \otimes iz$ si y sólo si $-Jw \otimes iz = w \otimes z$; entonces sea $v = \frac{z}{2}w = \frac{1}{2}(\alpha w + \beta Jw)$ lo que implica $v \otimes 1 - Jv \otimes i = \frac{1}{2}(w \otimes \alpha + Jw \otimes \beta - Jw \otimes i\alpha + w \otimes i\beta) = \frac{1}{2}(w \otimes z + Jw \otimes iz) = w \otimes z$. Por lo tanto $\breve{\varphi}$ es epimorfismo. Y sabemos que $dim_{\mathbb{C}} V_J = dim_{\mathbb{C}} V^{1,0} = n$, de lo que tenemos $V_J \cong V^{1,0}$.

Denotamos a $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ como V_C y consideramos las álgebras exteriores $\wedge V_C$, $\wedge V^{1,0}$ y $\wedge V^{0,1}$.

Como $V^{1,0}, V^{0,1} \subset V_C$ entonces $\wedge V^{1,0}, \wedge V^{0,1} \subset \wedge V_C$.

Sea $\wedge^{p,q} V$ es subespacio de $\wedge V_C$ generado por los elementos de la forma $u \wedge w$, donde $u \in \wedge^p V^{1,0}$ y $w \in \wedge^q V^{0,1}$. Como $\wedge V_C$ es un álgebra exterior, lo podemos considerar como un anillo graduado, y por lo tanto $\wedge V_C = \wedge^0 V_C \oplus \wedge^1 V_C \oplus \cdots \oplus \wedge^{2n} V_C$ donde $n = dim_{\mathbb{C}} V^{1,0}$, pero además sabemos que $V_C = V^{1,0} \oplus V^{0,1}$, entonces (ver [Lan93], pag. 736.)

$$\wedge V_C = \sum_{r=0}^{2n} \sum_{p+q=r} \wedge^{p,q} V$$

Definición 1.3.3. Sea X una variedad diferenciable de dimensión $2n$. Supongamos que J es un isomorfismo diferenciable de haces vectoriales $J : T(X) \longrightarrow T(X)$ tal que $J_x : T_x(X) \longrightarrow T_x(X)$ es una estructura compleja para $T_x(X)$; es decir, $J^2 = -I$, donde I es el isomorfismo identidad en el haz vectorial $T(X)$. Entonces J es llamada una *estructura casi compleja* para la variedad diferencial X. Si X está equipada con una estructura J tal, entonces (X, J) es llamada una *variedad casi compleja.*

Proposición 1.3.4. *Una variedad compleja X, induce una estructura casi compleja en su variedad diferecial subyacente.*

Demostración. Vimos anteriormente que para cada punto $x \in X$ hay una estructura compleja inducida sobre $T_x(X_0)$, donde X_0 es la variedad diferencial subyacente de X. Falta demostrar que la aplicación

$$J_x : T_x(X_0) \longrightarrow T_x(X_0), \quad x \in X_0$$

es una aplicación C^∞ con respecto a cada x.

Sea (U, h) un sistema local de coordenadas holomorfas tal que $x \in U$; por el ejemplo 1.2.4, obtenemos la trivialización local para $T(X_0)$ sobre U como sigue: $\pi : T(X_0) \longrightarrow X_0$ está dada por $\pi(v) = x$ si $v \in T_x(X_0)$, $T(U) = \pi^{-1}(U)$ y $\psi : T(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^{2n}$ está dada por

$$\psi(v) = (x, \xi_1(x), \eta_1(x), \ldots, \xi_n(x), \eta_n(x)),$$

es biyectiva y preserva las fibras; entonces, si $T(X_0|_U)$ es la restricción de $T(X_0)$ a U, es decir, $\pi_{T(U)} : T(U) \longrightarrow U$, tenemos que $T(X_0)|_U \overset{\psi}{\cong} U \times \mathbb{R}^{2n} \overset{(h\times id)}{\cong} h(U) \times \mathbb{R}^{2n}$, y denotamos $\gamma = (h \times id) \circ \psi$, con $z_j = x_j + iy_j$ las coordenadas de $h(U)$. Entonces la aplicación $J|_U$, que es la estructura compleja de $T(X_0|_U)$ inducida por la estructura compleja canónica, $\tilde{J}$, de $\mathbb{R}^{2n}$, está definida como

$$J|_U = \gamma^{-1} \circ (id \times \tilde{J}) \circ \gamma$$

por lo que podemos considerar la aplicación

$$(id \times \tilde{J}) : h(U) \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow h(U) \times \mathbb{R}^{2n}$$

donde $\tilde{J}(\xi_1, \eta_1, \ldots, \xi_n, \eta_n) = (-\eta_1, \xi_1, \ldots, -\eta_n, \xi_n)$ y cada coordenada es una función diferenciable, por lo tanto J es diferenciable.

$\square$

Sea X una variedad diferenciable de dimensión m, sea $T(X)_C = T(X) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ y sea $T^*(X)_C$ la complexificación del haz cotangente [2].

Podemos formar el álgebra exterior $\wedge T^*(X)_C$, y denotamos a las secciones de este haz vectorial como

$$\mathcal{E}^r(X)_C = \mathcal{E}(X, \wedge^r T^*(X)_C)$$

A este conjunto lo llamamos las *formas diferenciables de grado r con valores complejos* sobre X. Si tenemos el operador diferencial exterior $d : \mathcal{E}^r(X) \longrightarrow \mathcal{E}^{r+1}(X)$, podemos extenderlo a $\mathcal{E}^r(X)_C$, y tenemos la sucesión

$$\varepsilon^0(X)_0 \xrightarrow{\bar{d}} \varepsilon^1(X)_C \xrightarrow{\bar{d}} \cdots \xrightarrow{\bar{d}} \varepsilon^m(X)_C \longrightarrow 0$$

donde $\bar{d}$ es la extensión de d y $\bar{d}^2 = 0$.

Supongamos ahora que (X, J) es una variedad casi compleja. Extendemos J a un isomorfismo de haces $\tilde{J}$ que es lineal en $\mathbb{C}$ y en cada fibra tiene valores propios i y $-i$. Sean $T(X)^{1,0}$ el haz asociado al valor i y $T(X)^{0,1}$ el asociado a $-i$. Definimos la conjugacion en $T(X)_C$, a través de las fibras, como

$$Q : T(X)_C \longrightarrow T(X)_C$$

[2]Si para cada $p \in X$, la fibra $T_p^*(M)$ es el dual de $T_p(M)$, entonces el espacio $T^*(M)$ es llamdo el *haz cotangente de M*

y, como en la contrucción anterior, Q es un isomorfismo, de hecho también tenemos que $T(X)_J \cong T(X)^{1,0}$.

Sean $T^*(X)^{1,0}$, $T^*(X)^{0,1}$ los haces duales. Consideramos las álgebras exteriores de ellos, $\wedge T^*(X)_C$ $\wedge T^*(X)^{1,0}$ y $\wedge T^*(X)^{0,1}$, y como en la construcción anterior también tenemos que

$$T^*(X)_C = T^*(X)^{1,0} \oplus T^*(X)^{0,1}$$

con inyecciones naturales $\wedge T^*(X)^{1,0} \hookrightarrow \wedge T^*(X)_C$ y $\wedge T^*(X)^{0,1} \hookrightarrow \wedge T^*(X)_C$, y denotamos por $\wedge^{p,q}T^*(X)$ al haz cuya fibra es $\wedge^{p,q}T^*_x(X)$. El conjunto de fibras de este haz son las *formas diferenciables de tipo (p,q) con valores complejos* sobre X, y lo denotamos

$$\mathcal{E}^{p,q}(X) = \mathcal{E}(X, \wedge^{p,q}T^*(X)).$$

De hecho tenemos que

$$\varepsilon^r(X) = \sum_{p+q=r} \varepsilon^{p,q}(X).$$

Definición 1.3.5. Sea $E \longrightarrow X$ un haz de tipo $\mathcal{S}$ de rango r, y sea $U \subset X$ abierto. Un *marco para E sobre U*, es un conjunto de r secciones de tipo $\mathcal{S}$, $\beta = \{s_1, \ldots, s_r\}$, con $s_j \in \mathcal{S}(U, E)$, tales que β es una base para E_x, con $x \in U$.

Sea (U, H) una trivialización local, entonces

$$h : E|_U \xrightarrow{\cong} U \times K^n$$

lo que induce un isomorfismo

$$h_* : \mathcal{S}(U, E|_U) \longrightarrow \mathcal{S}(U, U \times K^n).$$

Consideremos las funciones con valores vectoriales

$$e_j : U \longrightarrow U \times K^n, \quad con \quad i = 1, \ldots, n$$

dadas por $e_j(x) = (x, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, donde el uno aparece en el lugar j, entonces $\{h_*^{-1}(e_1), \ldots, h_*^{-1}(e_n)\}$ es una base para E_U ya que h es un isomorfismo que preserva las fibras y lleva bases en bases. Por lo anterior, cada haz vectorial de tipo $\mathcal{S}$ admite un marco para alguna vecindad de cualquier punto en el espacio base.

Sea (X, J) una variedad casi compleja como antes, y sea $\{w_1, \ldots, w_n\}$ un marco local sobre algún abierto $U \subset X$, para $T^*(X)^{1,0}$, entonces $\{Q(w_1), \ldots, Q(w_n)\}$ es un marco local para $T^*(X)^{0,1}$. Si consideramos al conjunto $\{w^I \wedge Q(w^J)\}$ con $|I| = p$ y $|J| = q$, se puede probar que es un marco local para $\wedge^{p,q}T^*(X)$, y entonces cualquier sección $s \in \varepsilon^{p,q}(X)$ puede ser escrita, en U, como

$$s = \Sigma a_{IJ} w^I \wedge Q(w^J)$$

donde $a_{IJ} \in \varepsilon^0(U)$ y $|I| = p$, $|J| = q$.

De aquí tenemos que

$$ds = \Sigma(da_{IJ} w^I \wedge Q(w^J) + a_{IJ} d(w^I \wedge Q(w^J)))$$

con d el operador diferencial exterior y $|I| = p$, $|J| = q$.

Ahora, $\varepsilon^r(X)$ se descompone en suma directa de subespacios $\{\varepsilon^{p,q}\}$ y consideramos los operadores proyección $\pi_{p,q} : \varepsilon^r \longrightarrow \varepsilon^{p,q}$, con $p + q = r$.

En general se tiene

$$d : \varepsilon^{p,q}(X) \longrightarrow \varepsilon^{p+q+1}(X) = \sum_{r+s=p+q+1} \varepsilon^{r,s}(X)$$

si restringimos d a cada $\varepsilon^{p,q}$. Definimos

$$\partial : \varepsilon^{p,q}(X) \longrightarrow \varepsilon^{p+1,q}(X)$$

$$\bar{\partial} : \varepsilon^{p,q}(X) \longrightarrow \varepsilon^{p,q+1}(X)$$

por $\partial = \pi_{p+1,q} \circ d$ y $\bar{\partial} = \pi_{p,q+1} \circ d$.
Y notamos que $\bar{\partial}^2 = 0$.

Capítulo 2

Teoría de Gavillas

2.1 Pregavillas y Gavillas

Definición 2.1.1. Una pregavilla $\mathcal{F}$, de conjuntos (grupos, anillos, módulos) sobre un espacio topológico X, es:

(a) Una asignación, para cada conjunto abierto no vacío $U \subset X$, de un conjunto (grupo, anillo, módulo) $\mathcal{F}(U)$.

(b) Una colección de funciones (homomorfismos de grupos, anillos o módulos) llamados homomorfismos restricción

$$r_V^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

para cada par de conjuntos abiertos tales que $V \subset U$, que satisfacen:

1) $r_U^U = id_U$

2) Para $W \subset V \subset U$, $r_W^U = r_W^V \circ r_V^U$.

Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son pregavillas sobre X, entonces un *morfismo de pregavillas* $h : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$, es una colección de funciones (homomorfismos de grupos, anillos o módulos) $h_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ para cada conjunto abierto U en X, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, "h_U"] \arrow[d, "r_V^U"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "r'^U_V"] \\ \mathcal{F}(V) \arrow[r, "h_V"'] & \mathcal{G}(V) \end{tikzcd}$$

con $V \subset U \subset X$. Si cada h_U es un isomorfismo, entonces h es un isomorfismo de gavillas (ver [Ten75], pag. 10).

Se dice que $\mathcal{F}$ es una subpregavilla de $\mathcal{G}$ si las funciones h_U son inclusiones.

A los elementos de $\mathcal{F}(U)$ les llamaremos secciones de $\mathcal{F}$ sobre U.

Nota 2.1.2. Como nuestro enfoque es hacia las preavillas con cierta estructura algebraica, requerimos que las subpregavillas tengan la subestructura inducida, y los homomorfismos preserven dicha estructura.

Definición 2.1.3. Una pregavilla $\mathcal{F}$ es llamada una gavilla si para cada colección U_i de subconjuntos abiertos de X, con $U = \bigcup U_i$, $\mathcal{F}$ satisface que:

Axioma S_1: Si s y $t \in \mathcal{F}(U)$ y $r^U_{U_i}(s) = r^U_{U_i}(t)$ para toda i, entonces $s = t$.

Axioma S_2: Si $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ y si, para $U_i \bigcap U_j \neq \phi$ tenemos que $r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(s_j)$ para toda i, entonces existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $r^U_{U_i}(s) = s_i$ para toda i.

Ejemplo 2.1.4. Sean X y Y dos espacios topológicos y denotamos como $\mathcal{C}_{X,Y}(U)$ al conjunto $\{f : U \longrightarrow Y | f \text{ es continua}\}$, donde $U \subset X$, y definimos

$$r_V^U : \mathcal{C}_{X,Y}(U) \longrightarrow \mathcal{C}_{X,Y}(V), \text{ con } V \subset U, \text{ como}$$
$$r_V^U(f) = f|_V$$

Así, $\mathcal{C}_{X,Y}$ es pregavilla sobre X. Ahora, sean $f, g \in \mathcal{C}_{X,Y}(U)$ y supongamos que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, U_i abierto para toda i, y que $r^U_{U_i}(f) = r^U_{U_i}(g)$ para toda $i \in I$, entonces:

$$f|_{U_i} = r^U_{U_i}(f) = r^U_{U_i}(g) = g|_{U_i} \text{ para toda } i, \text{ por lo tanto } f = g.$$

Por otro lado, sea $f_i \in \mathcal{C}_{X,Y}(U_i)$ y supongamos que $r^{U_i}_{U_i \bigcap U_j}(f_i) = r^{U_j}_{U_i \bigcap U_j}(f_j)$ para toda i, con $U_i \bigcap U_j \neq \phi$, es decir:

$$f_i|_{U_i \bigcap U_j} = f_j|_{U_i \bigcap U_j}.$$

Entonces podemos definir $f : U \longrightarrow Y$ como $f(x) = f_i(x)$ si $x \in U_i$; ahora, si $V \subseteq Y$ es abierto entonces $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V)$, además para cada i tenemos que $f_i^{-1}(V) \subset U_i$ y por lo tanto $\bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(V) \subset \bigcup_{i \in I} U_i = U$, como cada f_i es continua entonces $f_i^{-1}(V)$ es abierto y la unión de ellos es un abierto, por lo tanto f es continua.

Por lo anterior $\mathcal{C}_{X,Y}(U)$ es una gavilla de conjuntos sobre X.

Ejemplo 2.1.5. Sea X una variedad de dimensión n con estructura $\mathcal{S}$. Entonces, si definimos $\mathcal{S}_X$ como

$$\mathcal{S}_X(U) := \mathcal{S}(U),$$

las funciones $\mathcal{S}$ sobre U, nos define una subgavilla de $\mathcal{C}_{X,Y}$ si tomamos a $Y = K$, donde $K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$.

Definición 2.1.6. Sea $\mathcal{R}$ una pregavilla de anillos conmutativos y sea $\mathcal{M}$ una pregavilla de grupos abelianos, ambas sobre un espacio topológico X. Supongamos que para cualquier conjunto abierto $U \subset X$, $\mathcal{M}(U)$ puede tener una estructura de módulo sobre $\mathcal{R}(U)$ tal que si $\alpha \in \mathcal{R}(U)$ y $f \in \mathcal{M}(U)$, entonces

$$r_V^U(\alpha f) = \rho_V^U(\alpha) r_V^U(f)$$

para cada abierto $V \subset U$, donde r_V^U y ρ_V^U son los homorfismos restricción de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{R}$ respectivamente. Entonces $\mathcal{M}$ es llamada una *pregavilla de módulos sobre* $\mathcal{R}$. Más aún, si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{R}$ son gavillas, entonces $\mathcal{M}$ es una *gavilla de módulos sobre* $\mathcal{R}$.

Ejemplo 2.1.7. Sea $E \longrightarrow X$ un haz vectorial con estructura $\mathcal{S}$. Entonces definimos una pregavilla, $\mathcal{S}(E)$, por $\mathcal{S}(E)(U) = \mathcal{S}(U, E)$, para $U \subset X$, abierto, junto con los homomorfismos restricción dados por $r_V^U(f) = f|_V$, con $f \in \mathcal{S}(E)(U)$ y $V \subset U$. De hecho, $\mathcal{S}(E)$ es una subgavilla de $\mathcal{C}_{X,Y}$ si consideramos a $Y = E$, y es llamada la *gavilla de secciones* $\mathcal{S}$ *del haz vectorial* E. En general, podemos dar, a $\mathcal{S}(E)$, una estructura de gavilla de módulos sobre $\mathcal{S}_X$, para un haz vectorial $E \longrightarrow X$ con estructura $\mathcal{S}$, siguiendo la definición 2.1.6.

Si $\mathcal{F}$ es una gavilla sobre un espacio espacio topológico X y $U \subset X$ es abierto, denotamos por $\mathcal{F}|_U$ a la *restricción* de $\mathcal{F}$ a U, es decir, dada una gavilla sobre X, podemos definir una gavilla sobre cualquier subconjunto abierto.

Definición 2.1.8. Sea $\mathcal{R}$ una gavilla de anillos conmutativos sobre un espacio topológico X.

1. Definimos $\mathcal{R}^p$, para $p \geq 0$ como la pregavilla

$$U \longrightarrow \mathcal{R}^p := \underbrace{\mathcal{R}(U) \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}(U)}_{\text{p términos}}.$$

$\mathcal{R}^p$ es una gavilla de módulos sobre $\mathcal{R}$, definida término a término y es llamada la *suma directa de* $\mathcal{R}$. Cuando $p = 0$, el módulo es 0.

2. Si $\mathcal{M}$ es una gavilla de módulos sobre $\mathcal{R}$ tal que $\mathcal{M} \cong \mathcal{R}^p$ para $p \geq 0$, entonces se dice que $\mathcal{M}$ es una *gavilla de módulos libre.*

3. Si $\mathcal{M}$ es una gavilla de módulos sobre $\mathcal{R}$ tal que cada $x \in X$ tiene una vecindad U tal que $\mathcal{M}|_U$ es libre, entonces se dice que $\mathcal{M}$ es *localmente libre.*

Teorema 2.1.9. *Sea $X = (X, \mathcal{S})$ una variedad con estructura $\mathcal{S}$. Entonces existe una correspondencia $1-1$ entre haces vectoriales con estructura $\mathcal{S}$, sobre X, y gavillas de módulos localmente libres sobre $\mathcal{S}$.*

Demostración. La correspondencia está dada por

$$E \longrightarrow \mathcal{S}(E)$$

Como E es un haz vectorial, entonces, para cada $x \in X$ existe una vecindad, U de x, tal que $E|_U$ es homeomorfo a $U \times K^r$, donde r es el rango de E, esto implica que $\mathcal{S}(E|_U) = \mathcal{S}(E)|_U$ es isomorfo a $\mathcal{S}(U \times K^r)$. Sea $V \subset U$ abierto, y $f \in \mathcal{S}(U \times K^r)(V)$ si y sólo si $f(x) = (x, g(x))$, donde $g : V \longrightarrow K^r$ es un morfismo $\mathcal{S}$. Entonces $g = (g_1, \ldots, g_r)$, $g_i \in \mathcal{S}(V)$ con $i = 1, \ldots r$, y sea

$$h : \mathcal{S}(U \times K^r)(V) \longrightarrow \underbrace{\mathcal{S}_U(V) \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_U(V)}_{(r) \text{ veces}}$$

dada por $h(f) = (g_1, \ldots, g_r)$. Ahora, sea $f \in \mathcal{S}(U \times K^r)(U)$ tal que $h(f) = (0, \ldots, 0)$, entonces $g \equiv 0$, por lo tanto $f(x) = (x, 0)$ es la función cero en $U \times K^r$, luego entonces $ker(h) = 0$. Sea $g = (g_1, \ldots, g_r) \in \mathcal{S}_U(V) \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_U(V)$, entonces para cualquier sección $\varphi \in \mathcal{S}(E)(V)$ definimos $f = (\varphi, g)$, por lo tanto h es un isomorfismo, y $\mathcal{S}(E)$ es una gavilla de módulos localmente libre sobre $\mathcal{S}_X$.

Supongamos que $\mathcal{L}$ es una gavilla de módulos localmente libre sobre $\mathcal{S}$. Entonces podemos encontrar una cubierta abierta $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ de X tal que

$$g_\alpha : \mathcal{L}|_{U_\alpha} \longrightarrow \mathcal{S}^r|_{U_\alpha}$$

es un isomorfismo para algún $r > 0$ [1], entonces como X es conexo, tenemos que, para $\alpha, \beta \in I$ tales que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$, $\mathcal{S}^r|_{U_\alpha \cap U_\beta} = \mathcal{S}^{r'}|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ si y sólo si $r = r'$, por lo tanto r no depende de $\alpha \in I$. Definimos un automorfismo

$$g_\alpha \circ g_\beta^{-1} : \mathcal{S}^r|_{U_\alpha \cap U_\beta} \longrightarrow \mathcal{S}^r|_{U_\alpha \cap U_\beta}$$

que determina una aplicación invertible de funciones con valores "vectoriales" $(g_{\alpha\beta})_{U_\alpha \cap U_\beta}$, que escribimos como

$$(g_{\alpha\beta})_{U_\alpha \cap U_\beta} : (\mathcal{S}(U_\alpha \cap U_\beta))^r \longrightarrow (\mathcal{S}(U_\alpha \cap U_\beta))^r$$

que es una matriz no singular de rango r, con funciones en $\mathcal{S}(U_\alpha \cap U_\beta)$ como entradas; es decir, $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathsf{GL}(\mathsf{r}, \mathsf{K})$, donde $g_{\alpha\beta} = [g_\alpha \circ g_\beta^{-1}]$, las cuales son las funciones de transición de un haz vectorial E. Entonces podemos definir un haz vectorial E como $\widetilde{E} = \bigcup_\alpha (U_\alpha \times K^r)$ haciendo la identificación $(x, \xi) \backsim (x, g_{\alpha\beta}(x)\xi)$ si $x \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$.

$\square$

[1] Sabemos que si A es un anillo conmutativo finitamente generado, entonces $A^n \cong A^m$ si y sólo si $m = n$.

2.2 Resolución de Gavillas

Definición 2.2.1. a) Un espacio étalé sobre un espacio topológico X, es un espacio topológico Y junto con una función continua y sobre, $\pi : Y \longrightarrow X$, tal que π es un homeomorfismo local.

b) Una sección de un espacio étalé, $Y \xrightarrow{\pi} X$, sobre un conjunto abierto $U \subset X$, es una función continua $f : U \longrightarrow Y$ tal que $\pi \circ f = id_U$. El conjunto de secciones sobre U es denotado por $\Gamma(U, Y)$.

Sean X un espacio topológico y $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre X. Definimos:

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U),$$

donde el límite directo se toma con respecto a los homomorfismos restricción de $\mathcal{F}$. $\mathcal{F}_x$ es llamado el tallo de $\mathcal{F}$ en x.

Existe una aplicación natural $r_x^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$ que lleva a un elemento de $\mathcal{F}(U)$, a su clase de equivalencia en $\mathcal{F}_x$. Sea $s \in \mathcal{F}(U)$, entonces $s_x := r_x^U(s)$ es llamado el germen de s en x.

Sean $\widetilde{\mathcal{F}} = \bigcup_{x \in X} \mathcal{F}_x$ y $\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow X$ la proyección que lleva a puntos de $\mathcal{F}_x$ en su correspondiente x.

Queremos que $\widetilde{\mathcal{F}}$ sea un espacio étalé. Para darle una topología a $\widetilde{\mathcal{F}}$, definimos, para cada $s \in \mathcal{F}(U)$, la función

$$\widetilde{s} : U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}, \text{ donde } \widetilde{s}(x) = s_x, \text{ para cada } x \in U.$$

Sea $\{\widetilde{s}(U)\}$ una base para la topología de $\widetilde{\mathcal{F}}$, donde $U \subset X$ es abierto y $s \in \mathcal{F}(U)$. Sean $x \in U \subset X$, U abierto, y $s_x \in \widetilde{s}(U) \subset \widetilde{\mathcal{F}}$.

$$\widetilde{s}^{-1}(\widetilde{s}(U)) = \{x \in U | \widetilde{s}(x) = s_x \in \widetilde{s}(U)\} = U$$

Por lo tanto $\widetilde{s}$ es continua.

Ahora, $\pi^{-1}(U) = \{s_x \in \widetilde{\mathcal{F}} | x \in U\}$, que es precisamente $\widetilde{s}(U)$, y es abierto en $\widetilde{\mathcal{F}}$. Entonces π es continua.

De lo anterior tenemos que π y $\widetilde{s}$ son inversos locales, es decir, π es homeomorfismo local y por consiguiente $\widetilde{\mathcal{F}}$ es el espacio étalé asociado a $\mathcal{F}$ sobre X.

Además de asociar un espacio étalé $\widetilde{\mathcal{F}}$ a una pregavila $\mathcal{F}$, hemos asociado una gavilla a $\mathcal{F}$ llamada *gavilla de secciones de* $\widetilde{\mathcal{F}}$. A esta gavilla le llamamos *gavilla generada por* $\mathcal{F}$.

Existe un morfismo de pregavillas denotado por $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \bar{\mathcal{F}}$, dado por $\tau_U(s) = \widetilde{s}$, y donde $\bar{\mathcal{F}}$ denota a la gavilla de secciones del espacio étalé asociado a $\mathcal{F}$. Recordemos que los morfismos de pregavillas son familias de morfismos definidos sobre los abiertos del espacio, en este caso tenemos $\tau_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \bar{\mathcal{F}}(U)[:= \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}})]$.

Teorema 2.2.2. *Si $\mathcal{F}$ es una gavilla, entonces $\tau : \mathcal{F} \longrightarrow \bar{\mathcal{F}}$ es un isomorfismo de gavillas.*

Demostración. 1. τ_U es inyectivo:

Sean $s, s' \in \mathcal{F}(U)$ y supongamos que $\tau_U(s) = \tau_U(s')$.

Entonces $[\tau_U(s)](x) = [\tau_U(s')](x)$ para toda $x \in U$, es decir:

$$s_x = r_x^U(s) = r_x^U(s') = s'_x \text{ para toda } x \in U.$$

Por la definición de límite directo, existe $V \subset X$, vecindad de x, tal que $r_V^U(s) = r_V^U(s')$, y esto pasa para cada $x \in U$; por lo tanto, podemos cubrir a U con conjuntos abiertos U_i, con $i \in I$, tales que $r_{U_i}^U(s) = r_{U_i}^U(s')$ para toda i, como $\mathcal{F}$ es gavilla, entonces $s = s'$.

2. τ_U es suprayectivo:

   Sea $\sigma \in \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}})$. Entonces, para cada $x \in U$, existen $V \subset X$, vecindad de x y $s \in \mathcal{F}(V)$ tales que $\sigma(x) = s_x = [\tau_V(s)](x)$. Como las secciones de un espacio étalé son inversos locales para π, entonces cualesquiera dos secciones que coincidan en un punto deben de coincidir en alguna vecindad de ese punto. De aquí tenemos que, para alguna $V^* \subset X$, vecindad de x, $\sigma|_{V^*} = \tau_V(s)|_{V^*} = \tau_{V^*}(r^V_{V^*}(s))$ para toda $x \in U$. Entonces, analogamente al inciso anterior, cubrimos a U con vecindades U_i, $i \in I$, tales que existe $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ con $\tau_{U_i}(s_i) = \sigma|_{U_i}$.

   Más aún, tenemos que $\tau_{U_i}(s_i) = \tau_{U_j}(s_j)$ en $U_i \bigcap U_j$ y $r^{U_i}_{U_i \bigcap U_j}(s_i) = r^{U_j}_{U_i \bigcap U_j}(s_j)$ y como $\mathcal{F}$ es gavilla y $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $r^U_{U_i} = s_i$. Entonces $\tau(s)|_{U_i} = \tau_{U_i}(r^U_{U_i}(s)) = \tau_{U_i}(s_i) = \sigma|_{U_i}$, por lo tanto $\tau_U(s) = \sigma$

$\square$

Nota 2.2.3. Dado que nuestro propósito es distinto a desarrollar la teoría de gavillas, algunas de las propiedades de las mismas serán usadas sin mención previa y remitiremos a [Ten75], para una correcta construcción.

Definición 2.2.4. Sea $\mathcal{F}$ una pregavilla sobre un espacio topológico X y sea $\overline{\mathcal{F}}$ la gavilla de secciones del espacio étalé, $\widetilde{\mathcal{F}}$, asociado a $\mathcal{F}$. Entonces $\overline{\mathcal{F}}$ es la *gavilla generada por* $\mathcal{F}$.

Definición 2.2.5. Supongamos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son gavillas de grupos abelianos sobre un espacio X, con $\mathcal{G}$ una subgavilla de $\mathcal{F}$, y sea $\mathcal{Q}$ la gavilla generada por la pregavilla $U \longrightarrow \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$, ver[Ten75]. Entonces $\mathcal{Q}$ es llamada *la gavilla cociente de* $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$, y se denota $\mathcal{F}/\mathcal{G}$.

Definición 2.2.6. Si $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son gavillas de grupos abelianos sobre X y

$$\mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C}$$

es una sucesión de morfismos de gavillas, entonces esta sucesión es *exacta en* $\mathcal{B}$ si la sucesión inducida en tallos

$$\mathcal{A}_x \xrightarrow{g_x} \mathcal{B}_x \xrightarrow{h_x} \mathcal{C}_x$$

es exacta para toda $x \in X$, lo cual tiene sentido ya que el límite directo preserva la estructura algebraica ver [Rot79]; es decir, para cada $U \subset X$ abierto, $\mathcal{A}(U)$, $\mathcal{B}(U)$ y $\mathcal{C}(U)$ son grupos abelianos y por lo tanto $\mathcal{A}_x$, $\mathcal{B}_x$ y $\mathcal{C}_x$, son grupos abelianos. Una *sucesión exacta corta* es una sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

que es exacta en $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, donde 0 denota la gavilla constante cero.

Ejemplo 2.2.7. Sea X una variedad compleja y conexa. Sea $\mathcal{O}$ la gavilla de funciones holomorfas sobre X y sea $\mathcal{O}^*$ la gavilla de funciones holomorfas que no se anulan en ningún punto de X, la cual es una gavilla de grupos abelianos bajo la multiplicación.

Tenemos la sucesión: $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \longrightarrow 0$, donde $\mathbb{Z}$ es la gavilla constante de enteros, i es la inclusión, y $\exp : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^*$ está definido por:

$$\exp_U(f)(z) = \exp(2\pi i f(z)).$$

Sea g_x un gérmen en un punto x, para una vecindad simplemente conexa de x, U, y algún representante $g \in \mathcal{O}^*(U)$ del gérmen, podemos definir $f \in \mathcal{O}(U)$ como $f = \frac{1}{2\pi i} \log g$, de tal forma que $f_x = (\frac{1}{2\pi i} \log g)_x$ para alguna rama de la función logaritmo, lo que nos resulta $\exp_x(f_x) = g_x$ (donde $\exp_x : \mathcal{O}_x \longrightarrow \mathcal{O}_x^*$).

Ahora, si denotamos como I a la identidad del grupo abeliano $\mathcal{O}^*$ y g es un representante, entonces $f_x = (\frac{1}{2\pi i}\log g)_x$ implica que $\exp_x(f_x) = I$, por lo tanto si f es un representante de f_x tenemos que: $\exp_U(f)(z) = \exp(2\pi i f(z)) = \exp(\log g(z)) = g(z)$, y como g es un representante de la identidad, existe $U \subset X$, abierto, tal que $g \in \mathcal{O}(U)$ es la identidad de $\mathcal{O}(U)$, es decir:

$$\exp(2\pi i f(z)) \equiv g(z) \equiv 1,$$

para toda $z \in U$ y para todo representante de f_x sobre una vecindad conexa de X, donde 1 es la identidad en el grupo abeliano $\mathcal{O}(U)$. Por lo tanto f es constante en U y de hecho debe ser un entero ya que $\exp(f) = \exp(2\pi i f) = \cos(2\pi f) + i\sin(2\pi f)$

Por lo tanto el núcleo de $\exp_x$ es $\mathbb{Z}$, de lo que tenemos que la sucesión es exacta.

Una *gavilla graduada* es una familia de gavillas indexadas por enteros, $\mathcal{F}^* = \{\mathcal{F}^\alpha\}_{\alpha\in\mathbf{Z}}$. Una *sucesión de gavillas* es una gavilla graduada conectada por morfismos de gavillas:

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}^0 \xrightarrow{\alpha_0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{\alpha_1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{\alpha_2} \mathcal{F}^3 \longrightarrow \cdots . \qquad (2.1)$$

Definición 2.2.8. 1. Una *gavilla diferencial* es una sucesión de gavillas donde la composición de cualquier par de aplicaciones es cero, es decir $\alpha_{j+1} \circ \alpha_j = 0$ en 2.1.

2. Una *resolución* de una gavilla $\mathcal{F}$ es una sucesión exacta de gavillas de la forma

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^0 \longrightarrow \mathcal{F}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{F}^m \longrightarrow \cdots,$$

la cual denotaremos simbolicamente por:

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^*,$$

donde las aplicaciones están implícitas.

Ejemplo 2.2.9. Sea X una variedad diferenciable de dimensión m, y sea ε^p_X la gavilla de formas diferenciables de grado p con valores reales. Entonces, si consideramos la gavilla constante $\mathbb{R}$, tenemos que $\mathbb{R} \xrightarrow{i} \varepsilon^0_X$ es una inclusión, y sabemos que si $f \in \varepsilon^0_X$ y $df \equiv 0$ entonces f es constante, por lo que, si consideramos la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} \varepsilon^0_X \xrightarrow{d} \varepsilon^1_X \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \varepsilon^m_X \longrightarrow 0$$

donde d es el operador diferencial exterior, la sucesión es exacta en ε^0_X. Ahora, sabemos que $d^2 = 0$, por lo tanto $\varepsilon^{r-1}_X \subset Ker(\varepsilon^r_X \xrightarrow{d} \varepsilon^{r+1}_X)$. Pero el *lema de Poincaré* nos dice que *si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio "estrellado", y $f \in \varepsilon^p_X(U)$ es tal que $df = 0$, entonces existe $u \in \varepsilon^{p-1}_X(U)$ tal que $df = u$* (ver [Spi65]), es decir, la sucesion es exacta en $\varepsilon^p_X(U)$. Si consideramos la sucesión inducida en tallos en $x \in X$, también es exacta ya que hemos encontrado abiertos $U \subset X$, con $x \in U$, donde las funciones anteriores están bien definidas. Por ésto, tenemos que la sucesión anterior es una resolución de la gavilla constante $\mathbb{R}$.

Ejemplo 2.2.10. Sea X una variedad topológica, y sea G la gavilla constante sobre X donde G es un grupo abeliano. Sea $S^p(U,G)$ el *grupo de cocadenas singulares* en $U \subset X$ con coeficientes en G; es decir, si $S_p(U,\mathbb{Z})$ denota al grupo abeliano libre generado por los *simplejos singulares de grado* p sobre U entonces los elementos de $S^p(U,G)$ son funciones que a cada simplejo singular de grado p le asocia un elemento de G. Sea $\delta : S_{p+1}(U,G) \longrightarrow S_p(U,G)$ el operador frontera usual, y sea $S^p(G)$ la gavilla sobre X generada por la pregavilla $U \mapsto S^p(U,G)$ donde el morfismo *cofrontera*, $d : S^p(U,G) \longrightarrow S^{p+1}(U,G)$, está dado por

$$df(\sigma) = f(\delta\sigma)$$

con $f \in S^p(U,G)$ y σ un simplejo grado de longitud $(p+1)$ sobre U. De hecho si $f \in S^{p-1}(U,G)$ esto implica que $d(df) \in S^{p+1}(U,G)$, entonces sea $\sigma \in S_{p+2}(U,G)$, por lo tanto $d(df)(\sigma) = df(\delta\sigma) = f(\delta(\delta\sigma)) = f(0) = 0$, por lo que $d \circ d = d^2 = 0$. De hecho, si consideramos U como la bola unitaria, tenemos que por el *Teorema de la Invarianza Homotópica*[2],

$$\frac{Ker(S^p(U,G) \longrightarrow S^{p+1}(U,G))}{Im(S^{p-1}(U,G) \longrightarrow S^p(U,G))} = 0,$$

lo que quiere decir que la sucesión

$$\cdots \longrightarrow S^{p-1}(U,G) \longrightarrow S^p(U,G) \longrightarrow S^{p+1}(U,G) \longrightarrow \cdots$$

es exacta, y por ende, la siguiente sucesión también es exacta

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{i} \mathcal{S}^0(G) \xrightarrow{\delta} \mathcal{S}^1(G) \xrightarrow{\delta} \mathcal{S}^2 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \mathcal{S}^M(G) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

donde i es la inclusión, es decir, a cada $k \in G$ le asociamos el gérmen en x

[2]Revisar *Algebraic Topology*, Edwin Spanier, Springer-Verlag, 1966.

de la función sobre X con valor constante k. Entonces

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{S}^*(G)$$

es una resolución para la gavilla constante G.

Si consideramos cadenas C^∞ sobre una variedad diferenciable entonces la sucesión anterior sigue siendo exacta y se escribe

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{S}^0_\infty(G) \xrightarrow{\delta} \mathcal{S}^1_\infty(G) \xrightarrow{\delta} \mathcal{S}^2_\infty \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \mathcal{S}^m_\infty(G) \xrightarrow{\delta} \cdots$$

y se denota como

$$0 \longrightarrow G \longrightarrow \mathcal{S}^*_\infty(G).$$

Ejemplo 2.2.11. Sea X una variedad compleja de dimensión n, y sea $\varepsilon^{p,q}$ la gavilla de formas (p,q) con valores complejos sobre X. Consideramos la sucesión de gavillas

$$0 \longrightarrow \Omega^p \xrightarrow{\bar{\partial}} \varepsilon^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \varepsilon^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \varepsilon^{p,1} \longrightarrow 0$$

donde $p \geq 0$ está fijo y Ω^p se define como el núcleo del morfismo $\varepsilon^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \varepsilon^{p,1}$, que son las *formas holomorfas de grado p.*

Analogamente al Lema de Poicaré, existe una versión para formas holomorfas de grado p (revisar [Sor69], pags. 164-167): *Si w es una forma de tipo (p,q) definida en un polidisco $\Delta \in \mathbb{C}^n$, y $\bar{\partial}(w) = 0$, entonces existe una forma u de tipo (p,q-1), tal que para todo punto $x \in \Delta$ existe un polidisco más pequeño $\Delta' \subset \Delta$, con $x \in \Delta'$, tal que $\bar{\partial}u = w$ en Δ'.* Por lo tanto

$$0 \longrightarrow \Omega^p \longrightarrow \varepsilon^{p,*}$$

es una resolución para la gavilla Ω^p.

Definición 2.2.12. 1. Supongamos que $\mathcal{L}^*$ y $\mathcal{M}^*$ son gavillas diferenciables. Entonces un *homomorfismo* $f : \mathcal{L}^* \longrightarrow \mathcal{M}^*$ es un sucesión de homomorfismos $f_j : \mathcal{L}^j \longrightarrow \mathcal{M}^j$ que conmutan con las diferenciales de $\mathcal{L}^*$ y $\mathcal{M}^*$.

2. Un *homomorfismo de resoluciones* de gavillas es un homomorfismo de las gavillas difereciales subyacentes; es decir, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}^* \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{B} & \longrightarrow & \mathcal{B}^* \end{array}$$

Ejemplo 2.2.13. Sea X una variedad diferenciable y sean

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \varepsilon^*$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{S}^*_\infty(\mathbb{R})$$

dos resoluciones de $\mathbb{R}$ dadas por los ejemplos anteriores. Definimos $I_U : \varepsilon^*(U) \longrightarrow \mathcal{S}^*_\infty(U, \mathbb{R})$ como el homomorfismo dado por la integración de formas diferenciables sobre cadenas diferenciables; es decir

$$I_U(\varphi)(c) = \int_c \varphi$$

donde c es una cadena diferenciable y, por lo tanto, $I_U(\varphi) \in \mathcal{S}^*_\infty(\mathbb{R})$. Usando el teorema de *Stokes* (revisar [Spi65]), se puede demostrar que I conmuta con los morfismos de las resoluciones.

Capítulo 3

Cohomología de Gavillas

Nuestro propósito ahora es definir los *grupos de cohomología* asociados a una variedad, los cuáles proporcionan información geométrica de la variedad.
Consideremos una sucesión exacta corta de gavillas:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

por lo que la sucesión:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_x \longrightarrow \mathcal{B}_x \longrightarrow \mathcal{C}_x \longrightarrow 0$$

es exacta para toda $x \in X$.

Quisiéramos saber si la sucesión:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Sean $f, g \in \mathcal{A}(X)$ tales que coinciden en $\mathcal{B}(X)$, esto implica que para toda $x \in X$ el tallo de la imagen de f coincide con el tallo de la imagen de

g, como la sucesión de los tallos es exacta, las imágenes vienen de tallos que coinciden en $\mathcal{A}_x$, es decir $f_x = g_x$ para toda $x \in X$, por lo tanto $f = g$ y considerando secciones globales la aplicación $\mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$ es inyectiva.

Por otro lado, si en el ejemplo 2.2.7, consideramos $X = \mathbb{C} - \{0\}$ entonces, dada $g \in \mathcal{O}^*(U)$, con U un disco de radio $r > 0$ centrado en el origen, podemos definir $f = \frac{1}{2\pi i}\log g$ en $\mathcal{O}(U)$, pero dada $g \in \mathcal{O}^*(X)$ no podemos definir $f = \frac{1}{2\pi i}\log g$ en $\mathcal{O}(X)$, ya que tendríamos que "quitar" un rayo que parte de $\{0\}$, de lo que tenemos que no necesariamente la aplicación $\mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(X)$ es sobre. Este es el problema que queremos abordar: ¿cuándo la sucesión de secciones globales es exacta?

3.1 La Resolución Canónica de una Gavilla

Sea $\mathcal{F}$ una gavilla sobre un espacio X y sea $S \subset X$ un conjunto cerrado. Sea

$$\mathcal{F}(S) := \varinjlim_{S \subset U} \mathcal{F}(U),$$

donde el límite directo corre sobre los subconjuntos abiertos que contienen a S. Llamaremos a $\mathcal{F}(S)$ el conjunto (grupo abeliano, módulo, etc.) de secciones (continuas) sobre S y lo denotaremos como $\Gamma(S, \mathcal{F})$.

Definición 3.1.1. Una gavilla $\mathcal{F}$, sobre un espacio X, es *suave* si para cualquier subconjunto cerrado, $S \subset X$, la aplicación restricción

$$\mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}(S)$$

es sobre; es decir, cualquier sección de $\mathcal{F}$ sobre S puede ser extendida a una sección de $\mathcal{F}$ sobre X.

Nota 3.1.2. Por simplicidad, en lo que resta de esta sección, asumiremos que trabajamos con *gavillas de grupos abelianos sobre un espacio paracompacto de Hausdorff X.*

Veamos entonces que la gavilla $\mathcal{E}_X$ de funciones diferenciables sobre una variedad diferenciable X, es suave.

Lema 3.1.3. *Sean $S \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto compacto y $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto tal que $S \subset U$. Entonces existe una función C^∞, f, con soporte*[1] *compacto contenido en U, tal que $0 \leq f(x) \leq 1$ para toda x y $f(x) = 1$ para $x \in S$.*

Demostración. Supongamos primero que $S = \{x \in \mathbb{R}^n | \parallel x \parallel \leq r\}$ y $U = \{x \in \mathbb{R}^n | \parallel x \parallel < R\}$, con $0 < r < R$. Definimos la función

$$g(t) = \begin{cases} e^{-(t-r)^{-1}} e^{-(t-R)^{-1}} & \text{si} \quad r < t < R \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que es diferenciable en el intervalo abierto (r, R). Entonces la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{\int_{\|x\|}^{R} g(t)\,dt}{\int_{r}^{R} g(t)\,dt}$$

es diferenciable en el mismo intervalo.

Si $\parallel x \parallel < r$, entonces

$$f(x) = \frac{\int_{\|x\|}^{r} g(t)\,dt + \int_{r}^{R} g(t)\,dt}{\int_{r}^{R} g(t)\,dt}$$

[1] Definimos al *soporte* de una función f, con dominio sobre un abierto U, y denotado $sop f$ como el conjunto cerrado más pequeño tal que $f(x) = 0$ si $x \notin sop f$.

pero $g(t) = 0$ si $\| x \| < r$, por lo tanto $f(x) = 1$.

Si $R < \| x \|$, entonces

$$f(x) = \frac{\int_{\|x\|}^{R} g(t)dt}{\int_{r}^{R} g(t)dt} = \frac{-\int_{R}^{\|x\|} g(t)dt}{\int_{r}^{R} g(t)dt}$$

pero $g(t) = 0$ si; $R < \| x \|$; es decir, $f(x) = 0$.

En general, sean $S_i \subset U_i$ bolas sólidas concéntricas tales que $S = \cup_{i \in I} S_i$ y $U_i \subset U$. Sean F_i las funciones que satisfacen el enunciado del lema para S_i y U_i. Como S es compacto, sólo necesitamos un número finito de S_i y U_i. Entonces la función

$$\varphi(x) = 1 - \prod_i (1 - f_i(x))$$

está bien definida y satisface las mismas condiciones para S y U.

□

Definición 3.1.4. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una cubierta abierta localmente finita de una variedad diferenciable X. Un conjunto $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de funciones C^∞ sobre X, es llamado una *partición C^∞ de la unidad* subordinada a la cubierta $\mathcal{U}$, si:

1. $\varphi_\alpha \geq 0$ para toda $\alpha \in A$
2. $sop\varphi_\alpha \subset U_\alpha$
3. $\sum_{\alpha \in A} \varphi_\alpha(p) = 1$, para cada $p \in X$.

Lema 3.1.5. *Sea X una variedad diferenciable y sea $\mathcal{U}$ una cubierta de X localmente finita. Entonces existe una partición C^∞ de la unidad subordinada a $\mathcal{U}$*

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento de $\mathcal{U}$, entonces, por el lema anterior existen funciones C^∞, f_j con $j \in J$, tales que

$$f_j(p) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad p \in \overline{V_j} \\ 0 & \text{si} \quad p \notin U_j \end{cases}$$

Entonces definimos, para cada $p \in X$

$$f(p) = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(p)$$

y la suma tiene sólo un número finito de términos distintos de cero, por lo tanto podemos definir

$$g_j(p) = \frac{f_j}{f(p)}$$

y tenemos que $g_j(p) \geq 0$ para toda $j \in J$, $sop\ g_j \subset U_j$ y $\sum_{j \in J} g_j(p) = \sum_{j \in J} \frac{f_j(p)}{f(p)} = \frac{1}{f(p)} \sum_{j \in J} f_j(p) = 1$ para todo $p \in X$.

$\square$

Teorema 3.1.6. *Sean X una variedad diferenciable y $p \in X$. Cada gérmen en $\mathcal{F}_p$ está representado por una función diferenciable en todo X.*

Demostración. Sea f una función diferenciable en una vecindad de p. Sea (U, h) una carta de X que contiene a p y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h(p) = 0$. Por el lema 3.1.3, sabemos que existen $S \subset X$ un conjunto compacto, $U \subset X$ un conjunto abierto tal que $S \subset U$ y g una función C^∞ definida en U, tal que $sop\ g \subset U$, $g(p') = 1$ para $p' \in S$ y $0 \leq g \leq 1$ sobre U. Definimos la función $\bar{f}$ sobre X como

$$\bar{f}(p') = \begin{cases} f(h^{-1}(g(p')h_1(p'), \ldots, g(p')h_n(p'))) & \text{si} \quad p' \in U \\ f(p) & \text{si} \quad p' \in X \setminus U \end{cases}$$

entonces $\bar{f}$ es diferenciable sobre toda X y, como $\bar{f}|_S = f$, entonces $\bar{f}$ y f representan al mismo gérmen de $\mathcal{F}_p$

$\square$

Por lo anterior tenemos que la gavilla de funciones diferenciables sobre una variedad es suave.

Teorema 3.1.7. *Si $\mathcal{A}$ es una gavilla suave y*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{g} \mathcal{B} \xrightarrow{h} \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de gavillas, entonces la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}(X) \xrightarrow{g_X} \mathcal{B}(X) \xrightarrow{h_X} \mathcal{C}(X) \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

es exacta.

Demostración. Sea $c \in \mathcal{C}(X)$. Como la sucesión de gavillas es exacta, entonces para cada $x \in X$ existe U, vecindad de x, y una $b \in \mathcal{B}(U)$ tales que $h_U(b) = c|_U$, donde $c|_U$ es la restricción de $c \in \mathcal{C}(X)$ a U.

Cubrimos a X con una familia $\{U_i\}_{i\in I}$ de conjuntos abiertos tales que exista $b_i \in \mathcal{B}(U_i)$ que satisfaga que $h_{U_i}(b_i) = c|_{U_i}$.

Como X es paracompacto, existe un refinamiento local, $\{S_i\}_{i\in I}$ de $\{U_i\}$ que sigue cubriendo a X y tal que todos sus elementos son conjuntos cerrados. Consideramos el conjunto de todas las parejas (b, S), donde S es una unión de conjuntos en $\{S_i\}$ y $b \in \mathcal{B}(S)$ satisface que $h_S(b) = c|_S$. Decimos que $(b, S) \leq (b', S')$ si $S \subset S'$ y $b'|_S = b$, así, el conjunto de tales pares queda parcialmente ordenado. Por el *lema de Zorn* existe un elemento máximo en este conjunto, es decir, existe un conjunto máximo, S y una sección $b \in \mathcal{B}(S)$ tal que $h_S(b) = c|_S$.

Ahora supongamos que $S \neq X$, esto implica que existe $S_j \in \{S_i\}$ tal que $S_j \nsubseteq S$. Si consideramos la intersección $S \cap S_j$, tenemos que

$$h_{S \cap S_j}(b - b_j) = h_{S \cap S_j}(b) - h_{S \cap S_j}(b_j) = c|_{S \cap S_j} - c|_{S \cap S_j} = 0.$$

Como la sucesión (3.1) es exacta en $\mathcal{B}(X)$, entonces la gavilla $Im(g_X) = Ker(h_X)$ por lo tanto existe una sección $a \in \mathcal{A}(S \bigcap S_j)$, tal que $g(a) = (b - b_j)$. Como $\mathcal{A}$ es suave, podemos extender a a todo X, es decir, existe $\widetilde{a} \in \mathcal{A}(X)$ tal que $\widetilde{a}|_{S \cap S_j} = a$, entonces podemos definir $\widetilde{b} \in \mathcal{B}(S \cup S_j)$ como:

$$\widetilde{b} = \begin{cases} b \quad sobre \quad S \\ b_j + g(\widetilde{a}) \quad sobre \quad S_j \end{cases}$$

De aquí tenemos que $h(\widetilde{b}) = c|_{S \cup S_j}$, por lo que S no es máximo, lo cual es una contradicción al lema de Zorn.

Así $S = X$ y entonces, dado $c \in \mathcal{C}(X)$ existe $b \in \mathcal{B}(X)$ tal que $h_x(b) = c$, por lo tanto la sucesión (3.1) es exacta.

□

Corolario 3.1.8. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son suaves y*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0 \tag{3.2}$$

es exacta, entonces $\mathcal{C}$ es suave.

Demostración. Sea $S \subset X$ un conjunto cerrado, como la sucesión (3.2) es exacta, entonces para cada $x \in X$ la sucesión:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}_x \xrightarrow{\varphi_x} \mathcal{B}_x \xrightarrow{\psi_x} \mathcal{C}_x \longrightarrow 0$$

es exacta.

Por lo tanto $\mathcal{A}|_S$ y $\mathcal{B}|_S$ son gavillas suaves sobre S, de aquí tenemos que la sucesión:

$$0 \longrightarrow \mathcal{A}|_S \longrightarrow \mathcal{B}|_S \longrightarrow \mathcal{C}|_S \longrightarrow 0$$

es exacta, esto induce un diagrama conmutativo[2] y por el teorema 3.1.7 los renglones son exactos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(S) \arrow[r] & \mathcal{B}(S) \arrow[r] & \mathcal{C}(S) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}(X) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{B}(X) \arrow[r] \arrow[u] & \mathcal{C}(X) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}$$

Entonces, si $c \in \mathcal{C}(S)$ existe $b \in \mathcal{B}(S)$ tal que la imagen de b es c y como $\mathcal{B}$ es suave, existe $\widetilde{b} \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\widetilde{b}|_S = b$ y como cada cuadrado conmuta, entonces la imagen de $\widetilde{b}$ en $\mathcal{C}(X)$ restringida a S es c, por lo tanto $\mathcal{C}$ es suave.

□

Corolario 3.1.9. *Si*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_0 \longrightarrow \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2 \longrightarrow \cdots \tag{3.3}$$

es una sucesión exacta de gavillas suaves, entonces la sucesión inducida de secciones

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_0(X) \longrightarrow \mathcal{S}_1(X) \longrightarrow \mathcal{S}_2(X) \longrightarrow \cdots$$

[2] Recordar la definición de morfismo entre gavillas.

es exacta.

Demostración. Sea $\mathcal{K}_i = Ker(\mathcal{S}_i \longrightarrow \mathcal{S}_{i+1})$, la gavilla asociada al núcleo de la aplicación $\mathcal{S}_i \longrightarrow \mathcal{S}_{i+1}$, como la sucesión 3.3 es exacta, entonces tenemos sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{S}_i \longrightarrow \mathcal{K}_{i+1} \longrightarrow 0$$

Para $i = 0$ tenemos que $\mathcal{K}_1 = \mathcal{S}_0$ y $\mathcal{S}_0$ es suave; entonces, por el teorema 3.1.7 tenemos sucesiones cortas inducidas:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_1(X) \longrightarrow \mathcal{S}_1(X) \longrightarrow \mathcal{K}_2(X) \longrightarrow 0 \tag{3.4}$$

Si reescribimos esta sucesión, tenemos:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_0(X) \longrightarrow \mathcal{S}_1(X) \longrightarrow \mathcal{K}_2(X) \longrightarrow 0$$

entonces, por el corolario anterior, $\mathcal{K}_2(X)$ es suave; haciendo inducción, $\mathcal{K}_i$ es suave para toda i, por lo que obtenemos sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_i(X) \longrightarrow \mathcal{S}_i(X) \longrightarrow \mathcal{K}_{i+1}(X) \longrightarrow 0 \tag{3.5}$$

Donde $\mathcal{K}_i = \mathcal{S}_{i-1}$, por lo tanto, juntando las sucesiones 3.4 y 3.5 para toda i, tenemos una sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}_0(X) \longrightarrow \mathcal{S}_1(X) \longrightarrow \mathcal{S}_2(X) \longrightarrow \cdots$$

□

Construyamos ahora una resolución suave para cualquier gavilla sobre un espacio topológico X.

Sean $\mathcal{S}$ una gavilla dada y $\widetilde{\mathcal{S}} \xrightarrow{\pi} X$ el espacio étalé asociado a $\mathcal{S}$. Sea $U \subset X$ un conjunto abierto. Definimos la pregavilla $\mathcal{C}^0(\mathcal{S})$ como sigue:

$$\mathcal{C}^0(\mathcal{S})(U) = \{f : U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}} | \pi \circ f = 1_U\}.$$

Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta de U, entonces:

1. Sean $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S})(U)$ y supongamos que $r^U_{U_i}(f) = r^U_{U_i}(g)$ para toda i, donde $r^U_{U_i} : \mathcal{C}^0(\mathcal{S})(U) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S})(U_i)$.

   Si $r^U_{U_i}(f) = r^U_{U_i}(g)$, entonces $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ para toda i, por lo tanto $f = g$.

2. Supongamos que $f_i \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S})(U_i)$ y si para $U_i \cap U_j \neq \phi$ tenemos que $r^{U_i}_{U_i \cap U_j}(f_i) = r^{U_j}_{U_i \cap U_j}(f_j)$ para toda i, j entonces definimos $f : U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}$ como:

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x) & si \quad x \in U_i \\ f_j(x) & si \quad x \in U_j \end{cases}$$

   entonces $r^U_{U_i}(f) = f_i$ para toda i.

De 1 y 2 tenemos que $\mathcal{C}^0(\mathcal{S})$ es una gavilla llamada *gavilla de secciones discontinuas de $\mathcal{S}$ sobre X*, de hecho, siguendo la demostración del teorema 2.2.2, esta gavilla es isomorfa a la gavilla de secciones continuas sobre X, del espacio étalé asociado a $\mathcal{C}^0(\mathcal{S})$.

Para cada $U \subset X$, abierto, sea $i : \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S})(U)$ dada por: $i(s) = \widetilde{s}$, donde $\widetilde{s} : U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{S}}$ es continua y además $\pi \circ \widetilde{s} = id_U$, por lo tanto i es una inclusión, por lo que tenemos:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{i} \mathcal{C}^0(\mathcal{S}).$$

Sea $\mathcal{F}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{S})/\mathcal{S}$, entonces para cada $U \subset X$ abierto, $\mathcal{F}^1(\mathcal{S})(U) = \mathcal{C}^0(\mathcal{S})(U)/\mathcal{S}(U)$ está bien definido ya que $\mathcal{S}$ es subgavilla de $\mathcal{C}^0(\mathcal{S})$, por lo que $\mathcal{F}^1(\mathcal{S})$ es una pregavilla, y análogamente, $\mathcal{F}^1(\mathcal{S})$ es una gavilla isomorfa a la gavilla de secciones continuas, del espacio étalé asociado a $\mathcal{F}^1(\mathcal{S})$, sobre X.

Ahora definimos $\mathcal{C}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{S}))$, y por inducción:

$$\mathcal{F}^i = \mathcal{C}^{i-1}(\mathcal{S})/\mathcal{F}^{i-1}(\mathcal{S}) \quad \text{y} \quad \mathcal{C}^i(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^i(\mathcal{S})).$$

Por lo tanto tenemos las sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{F}^1(\mathcal{S}) \longrightarrow 0 \tag{3.6}$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^i(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^i(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{F}^{i+1}(\mathcal{S}) \longrightarrow 0. \tag{3.7}$$

En 3.6 tenemos $\mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S})$ y $\mathcal{F}^1(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^0(\mathcal{S})/\mathcal{S}$, y en 3.7 tenemos que $\mathcal{F}^i(\mathcal{S}) \hookrightarrow \mathcal{C}^i(\mathcal{S})$ y $\mathcal{F}^{i+1}(\mathcal{S}) = \mathcal{C}^i(\mathcal{S})/\mathcal{F}^i(\mathcal{S})$, por lo tanto podemos formar la siguiente sucesión exacta larga:

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^2(\mathcal{S}) \longrightarrow \cdots$$

que llamaremos la *resolución canónica de $\mathcal{S}$*, abreviamos la sucesión escribiendo

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{S}). \tag{3.8}$$

Sea $U \subset X$ abierto, y consideramos $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S})(U)$, podemos definir $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S})(X)$ como:

$$\widetilde{f} = \begin{cases} f & en \quad U \\ 0 & en \quad X - U \end{cases}$$

por lo tanto, dado $f \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S})(U)$, existe $\widetilde{f} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{S})(X)$ tal que $\widetilde{f}|_U = f$ lo que implica que $\mathcal{C}^0(\mathcal{S})$ es una gavilla suave para cualquier gavilla $\mathcal{S}$, y por esta razón llamaremos a 3.8 la resolución canónica suave de $\mathcal{S}$.

Ahora supongamos que $\mathcal{S}$ es una gavilla sobre un espacio X y consideremos la resolución canónica suave dada por 3.8. Tomando secciones globales (recordemos que existe un isomorfismo de gavillas), 3.8 induce una sucesión de la forma

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{S}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{C}^0(\mathcal{S})) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{C}^1(\mathcal{S})) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{C}^q(\mathcal{S})) \longrightarrow \cdots \tag{3.9}$$

Esta sucesión es exacta en $\Gamma(X,\mathcal{C}^0(\mathcal{S}))$ y si $\mathcal{S}$ es suave, entonces es exacta dondequiera por el corolario 3.1.9.

Denotamos $C^*(X,\mathcal{S}) := \Gamma(X,\mathcal{C}^*(\mathcal{S}))$, y reescribimos 3.9 en la forma

$$0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{S}) \longrightarrow \mathcal{C}^*(X,\mathcal{S}).$$

3.2 Grupos de Cohomología

Definición 3.2.1. Sea $\mathcal{S}$ una gavilla sobre un espacio topológico X, y denotamos

$$H^q(X,\mathcal{S}) := H^q(C^*(X,\mathcal{S})),$$

donde $H^q(C^*(X,\mathcal{S}))$ es el q-ésimo grupo derivado del complejo de cocadenas C^*, es decir:

$$H^q(C^*(X,\mathcal{S})) = \frac{Ker(C^q(X,\mathcal{S}) \longrightarrow C^{q+1}(X,\mathcal{S}))}{Im(C^{q-1}(X,\mathcal{S}) \longrightarrow C^q(X,\mathcal{S}))}, \text{ donde } C^{-1} = 0.$$

Los grupos abelianos $H^q(X, \mathcal{S})$ están definidos para $q \geq 0$ y son llamados *los grupos de cohomología de gavillas* del espacio X de grado q con coeficientes en $\mathcal{S}$.

Teorema 3.2.2. *Sea X un espacio topológico de Hausdorff paracompacto. Entonces:*

1. *Para cualquier gavilla $\mathcal{S}$ sobre X.*

   (a) $H^0(X, \mathcal{S}) = \Gamma(X, \mathcal{S})(= \mathcal{S}(X))$.

   (b) Si $\mathcal{S}$ es suave, entonces $H^q(X, \mathcal{S}) = 0$ para $q \geq 0$

2. *Para cualquier morfismo de gavillas, $h : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, existe un homomorfismo de grupos para cada $q \geq 0$*

$$h_q : H^q(X, \mathcal{A}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{B})$$

   tal que:

   (a) $h_0 = h_X : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$.

   (b) h_q es la aplicación identidad si h es la aplicación identidad, con $q \geq 0$.

   (c) $g_q \circ h_q = (g \circ h)_q$ para toda $q \geq 0$, si $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ es un segundo morfismo de gavillas.

3. *Para cada sucesión exacta de gavillas*

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$$

existe un homomorfismo de grupos

$$\delta^q : H^q(X,\mathcal{C}) \longrightarrow H^{q+1}(X,\mathcal{A})$$

para toda $q \geq 0$, tal que:

(a) La sucesión inducida

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathcal{A}) \to H^0(X,\mathcal{B}) \to H^0(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X,\mathcal{A}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^q(X,\mathcal{A}) \to H^q(X,\mathcal{B}) \to H^q(X,\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X,\mathcal{A}) \to \cdots$$

es exacta.

(b) Un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{A}' \arrow[r] & \mathcal{B}' \arrow[r] & \mathcal{C}' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

induce un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^0(X,\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X,\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(X,\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(X,\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & H^0(X,\mathcal{A}') \arrow[r] & H^0(X,\mathcal{B}') \arrow[r] & H^0(X,\mathcal{C}') \arrow[r] & H^1(X,\mathcal{A}') \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Demostración. 1. (a)

$$\begin{aligned} H^0(X,\mathcal{S}) &= \frac{Ker(C^0(X,\mathcal{S}) \longrightarrow C^1(X,\mathcal{S}))}{Im(C^{-1}(X,\mathcal{S}) \longrightarrow C^0(X,\mathcal{S}))} \\ &= \frac{Ker(C^0(X,\mathcal{S}) \longrightarrow C^1(X,\mathcal{S}))}{Im(0 \longrightarrow C^0(X,\mathcal{S}))} \\ &= Ker(C^0(X,\mathcal{S}) \longrightarrow C^1(X,\mathcal{S})) = \Gamma(X,\mathcal{S}) \end{aligned}$$

ya que $0 \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{S}) \longrightarrow C^0(X,\mathcal{S}) \longrightarrow C^1(X,\mathcal{S}) \cdots$ es exacta en $C^0(X,\mathcal{S})$.

(b) Como $\mathcal{S}$ es suave, por 3.1.9 la sucesión

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{S}) \longrightarrow C^0(X, \mathcal{S}) \longrightarrow C^1(X, \mathcal{S}) \longrightarrow \cdots$$

es exacta dondequiera, por lo tanto

$$Ker(C^q(X, \mathcal{S}) \longrightarrow C^{q+1}(X, \mathcal{S})) = Im(C^{q-1}(X, \mathcal{S}) \longrightarrow C^q(X, \mathcal{S}))$$

es decir, $H^q(C^*(X, \mathcal{S})) = 0$ para $q \geq 0$.

Antes de probar 2 y 3, veremos que un morfismo de gavillas induce un morfismo de complejos de cocadenas

$$h^* : C^*(X, \mathcal{A}) \longrightarrow C^*(X, \mathcal{B}).$$

Para cada $U \subset X$, abierto, h define un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(U) \arrow[r, "h_U"] \arrow[d, "r_x^U"'] & \mathcal{B}(U) \arrow[d, "r_x^U"] \\ \mathcal{A}_x \arrow[r, "h_x"] & \mathcal{B}_x \end{tikzcd} \tag{3.10}$$

Queremos definir un morfismo de gavillas $h^0 : \mathcal{C}^0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{B})$; es decir, queremos que $s \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A})(U)$ implique $s : U \longrightarrow \breve{\mathcal{A}}$ dada por $s(x) = \bar{s}_x$ para alguna $\bar{s} \in \mathcal{A}(U)$, entonces $h_U^0(s) : \breve{\mathcal{A}} \longrightarrow \breve{\mathcal{B}}$, y está dada por $(h_U^0(s))(x) = (\overline{h_U^0(s)})_x$, por lo tanto definimos $[h^0(s)](x) = h_x(s(x)) = h_x(\bar{s}_x) = (h \circ \bar{s})_x$.

Este morfismo está bien definido ya que si $g \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A})(U)$ es tal que $g(x) = f_x$, entonces existe $V \subset U$, abierto, y $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{A}(U)$, tales que $r_V^U(\bar{f}) = \bar{r}_V^U(\bar{g})$. Entonces podemos definir $h^0 : \mathcal{C}^0(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{B})$ como $h^0(s_x) = h^0(s(x)) = (h \circ s)(x) = (h \circ s)_x$, $s \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A})$.

Ahora queremos encontrar un morfismo de $\mathcal{C}^0(\mathcal{A})/\mathcal{A}$ en $\mathcal{C}^0(\mathcal{B})/\mathcal{B}$ tal que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "h"] & \mathcal{C}^0(\mathcal{A}) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "h^0"] & \mathcal{C}^0(\mathcal{A})/\mathcal{A} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{B} \arrow[r, "j"] & \mathcal{C}^0(\mathcal{B}) \arrow[r, "\pi_2"] & \mathcal{C}^0(\mathcal{B})/\mathcal{B} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si $\bar{s} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A})/\mathcal{A}$ y $\bar{s} \notin \mathcal{A}$ entonces existe $\hat{s} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{A})$ tal que $\pi_1(\hat{s}) = \bar{s}$ y por lo tanto $(\pi_2 \circ h^0)(\hat{s}) \in \mathcal{C}^0(\mathcal{B})/\mathcal{B}$. Si $\bar{s} \in \mathcal{A}$ entonces $(\pi_2 \circ j \circ h)(\bar{s}) = 0$ en $\mathcal{C}^0(\mathcal{B})/\mathcal{B}$. Entonces existe un morfismo $\widetilde{h^0} : \mathcal{C}^0(\mathcal{A})/\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{B})/\mathcal{B}$ que hace conmutar el diagrama, y como $\mathcal{C}^0(\mathcal{A})/\mathcal{A} = \mathcal{F}^1(\mathcal{A})$ y $\mathcal{C}^0(\mathcal{B})/\mathcal{B} = \mathcal{F}^1(\mathcal{B})$ son gavillas, entonces $\widetilde{h^0}$ induce un morfismo

$$h^1 : \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{A})) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{B}))$$

donde $\mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{A})) = \mathcal{C}^1(\mathcal{A})$ y $\mathcal{C}^0(\mathcal{F}^1(\mathcal{B})) = \mathcal{C}^1(\mathcal{B})$.

Siguiendo este proceso y considerando secciones globales, tenemos que para $q \geq 0$ hay un morfismo

$$h^q : \mathcal{C}^q(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}^q(\mathcal{B}),$$

de complejos de cocadenas.

Ahora continuamos con la demostración del teorema.

2. Sabemos que $\mathcal{C}^q(\mathcal{A})(X) \cong \Gamma(X, \mathcal{C}^q(\mathcal{A}))$ y $\mathcal{C}^q(\mathcal{B})(X) \cong \Gamma(X, \mathcal{C}^q(\mathcal{B}))$. Sean σ_q y τ_q tales isomorfismos para cada $q \geq 0$, y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(X, \mathcal{A}) \arrow[r, "\alpha_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"] & C^q(X, \mathcal{A}) \arrow[r, "\alpha_q"] \arrow[d, "f_q"] & C^{q+1}(X, \mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "f_{q+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(X, \mathcal{B}) \arrow[r, "\beta_{q-1}"] & C^q(X, \mathcal{B}) \arrow[r, "\beta_q"] & C^{q+1}(X, \mathcal{B}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde $f_q = \tau_q^{-1} \circ h^q \circ \sigma_q$.

Sea $x \in Ker(\alpha_q)$. Esto implica que $(f_q \circ \alpha_q)(x) = 0$, por lo cual $(\beta_q \circ f_{q+1})(x) = 0$, por lo tanto $f_q(x) \in Ker(\beta_q)$, luego entonces $f_q(Ker(\alpha_q)) \subset Ker(\beta_q)$.

Ahora, sea $x \in Im(\alpha_{q-1})$. Entonces existe $y \in C^{q-1}(X, \mathcal{A})$ tal que $\alpha_{q-1}(y) = x$, y $(\beta_{q-1} \circ f_{q-1})(y) = f_q(x)$. De aquí tenemos que $f_{q-1}(y) \in Im(\beta_{q-1})$ y por lo tanto $f_q(Im(\alpha_{q-1})) \subset Im(\beta_{q-1})$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Im(\alpha_{q-1}) \arrow[r, "i"] & Ker(\alpha_q) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2 \circ f_q"'] & Ker(\alpha_q)/Im(\alpha_{q-1}) \arrow[dl, dashed] \\
 & Ker(\beta_q)/Im(\beta_{q-1}) &
\end{tikzcd} \tag{3.11}$$

donde i es la inclusión y π_i es la proyección canónica, con $i = 1, 2$, por la propiedad universal del *conúcleo*[3] existe un único homomorfismo de grupos $h_q : H^q(X, \mathcal{A}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{B})$ tal que el diagrama conmuta.

(a) Por 1, inciso a), tenemos que: $\Gamma(X, \mathcal{S}) = Ker(C^0(X, \mathcal{S}) \longrightarrow C^1(X, \mathcal{S})) = H^0(X, \mathcal{S})$ para cualquier gavilla $\mathcal{S}$, por lo tanto $h_0 : \Gamma(X, \mathcal{A}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{B})$, es decir $h_0 : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{B}(X)$.

(b) Si h es la aplicación identidad, entonces, para $q \geq 0$, $f_q = id$, por lo tanto $h_q = id$, para $q \geq 0$.

(c) Si $g : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ es otro morfismo de gavillas, hacemos la misma contrucción para el homomorfismo $g_q : H^q(X, \mathcal{B}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{C})$, y

[3] Revisar "Foundations of Module and Ring Theory, A Handbook for Study and Research". Robert Wisbauer. Gordon and Breach Science Publishers; pag. 49.

tenemos un diagrama conmutativo de la forma:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(X,\mathcal{A}) \arrow[r, "\alpha_{q-1}"] \arrow[d, "f_{q-1}"'] & C^{q}(X,\mathcal{A}) \arrow[r, "\alpha_{q}"] \arrow[d, "f_{q}"'] & C^{q+1}(X,\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d, "f_{q+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(X,\mathcal{B}) \arrow[r, "\beta_{q-1}"] \arrow[d, "\varphi_{q-1}"'] & C^{q}(X,\mathcal{B}) \arrow[r, "\beta_{q}"] \arrow[d, "\varphi_{q}"'] & C^{q+1}(X,\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{q+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C^{q-1}(X,\mathcal{C}) \arrow[r, "\gamma_{q-1}"] & C^{q}(X,\mathcal{C}) \arrow[r, "\gamma_{q}"] & C^{q+1}(X,\mathcal{C}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

y el diagrama 3.11 se rescribe en la forma

$$\begin{tikzcd}
Im(\alpha_{q-1}) \arrow[r, "i"] & Ker(\alpha_q) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_3\circ\varphi_q\circ f_q"'] & Ker(\alpha_q)/Im(\alpha_{q-1}) \arrow[dl, dashed] \\
 & Ker(\gamma_q)/Im(\gamma_{q-1}) &
\end{tikzcd}$$

por lo tanto $g_q \circ h_q = (g\circ h)_q$ para toda $q \geq 0$.

3. Sea $0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de gavillas. Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "h"] \arrow[d] & \mathcal{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^0(\mathcal{A}) \arrow[r, "h^0"] \arrow[d] & C^0(\mathcal{B}) \arrow[r, "f^0"] \arrow[d] & C^0(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^1(\mathcal{A}) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{B}) \arrow[r] \arrow[d] & C^1(\mathcal{C}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{tikzcd}$$

Queremos demostrar que $Ker(f^0) = Im(h^0)$; es decir, hay que demostrar que en la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow (C^0(\mathcal{A}))_x \xrightarrow{h^0_x} (C^0(\mathcal{B}))_x \xrightarrow{f^0_x} (C^0(\mathcal{C}))_x \longrightarrow 0$$

pasa que $Ker(f_x^0) = Im(h_x^0)$; entonces, sea $b_x \in Im(h_x^0)$ lo que implica que existe $a_x \in (\mathcal{C}^0(\mathcal{A}))_x$ tal que $h_x^0(a_x) = (h \circ a)_x = b_x$. Calculamos $f_x^0(h_x^0(a_x)) = f_x^0((h \circ a)_x) = (f \circ h \circ a)_x = 0$ por lo tanto $f_x^0(b_x) = 0$; es decir, $b_x \in Ker(f_x^0)$, entonces $Im(h_x^0) \subseteq Ker(f_x^0)$.

Por otro lado, sea $b_x \in Ker(f_x^0)$, esto es, $0 = (f \circ \bar{b})_x = f_x^0(b_x)$, entonces existe $V \subset X$ tal que $(f \circ \bar{b})|_V = 0$ y tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}(V) \arrow[r, "h_V"] \arrow[d, "r_x^V"'] & \mathcal{B}(V) \arrow[r, "f_V"] \arrow[d, "\bar{r}_x^V"'] & \mathcal{C}(V) \arrow[d, "\bar{r}_x^V"'] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}_x \arrow[r, "h_x"] & \mathcal{B}_x \arrow[r, "f_x"] & \mathcal{C}_x \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde el segundo renglón es exacto y $\bar{r}_x^V(\bar{b}) = \bar{b}_x$ y $\bar{r}_x^V(f_V(b)) = f_x(r_x^V(\bar{b})) = 0$. Pero $Im(h_x) = Ker(f_x)$ implica que existe $a_x \in \mathcal{A}_x$ tal que $h_x(a_x) = \bar{b}_x$ y $b_x = \bar{r}_x^V(\bar{b}) = \bar{r}_x^V(h_V(a)) = h_x(r_x^V(a)) = h_x(a_x) = h \circ a)_x = h_x(a(x)) = [h^0(a)](x)$, por lo tanto $b_x \in Im(h_x^0)$.

Siguiendo este proceso, tenemos que cada renglón es exacto, de lo que resulta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{A}) \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{C}^*(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

que es una sucesión exacta de resoluciones de gavillas. Tomando secciones globales y fijándonos que estas resoluciones son suaves por construcción, por el corolario 3.1.9 tenemos que

$$0 \longrightarrow C^*(\mathcal{A}) \longrightarrow C^*(\mathcal{B}) \longrightarrow C^*(\mathcal{C}) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de complejos de cocadenas de grupos abelianos, es decir, tenemos un diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
C^{q-1}(X,\mathcal{A}) \arrow[r, "f_{q-1}"] \arrow[d, "\alpha_{q-1}"'] & C^{q-1}(X,\mathcal{B}) \arrow[r, "g_{q-1}"] \arrow[d, "\beta_{q-1}"'] & C^{q-1}(X,\mathcal{C}) \arrow[d, "\gamma_{q-1}"'] \\
C^{q}(X,\mathcal{A}) \arrow[r, "f_{q}"] \arrow[d, "\alpha_{q}"'] & C^{q}(X,\mathcal{B}) \arrow[r, "g_{q}"] \arrow[d, "\beta_{q}"'] & C^{q}(X,\mathcal{C}) \arrow[d, "\gamma_{q}"'] \\
C^{q+1}(X,\mathcal{A}) \arrow[r, "f_{q+1}"] \arrow[d] & C^{q+1}(X,\mathcal{B}) \arrow[r, "g_{q+1}"] \arrow[d] & C^{q+1}(X,\mathcal{C}) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
\tag{3.12}
$$

donde los renglones son exactos.

Supongamos que $c \in Ker(\gamma_q)$, esto implica que existe $b \in C^q(X,\mathcal{B})$ tal que $g_q(b) = c$, y consideramos al elemento $\beta_q(b)$, entonces $\gamma_q(g_q(b)) = g_{q+1}(\beta_q(b))$, por lo tanto $\beta_q(b) = f_{q+1}(a)$ para algún $a \in C^{q+1}(X,\mathcal{A})$, por lo cual definimos $d : Ker(\gamma_q) \longrightarrow H^{q+1}(X,\mathcal{A})$ de forma que a cada $c \in Ker(\gamma_q)$ le asignamos el elemento $a + Im(\alpha_q) \in H^{q+1}(X,\mathcal{A})$. Sea $\bar{b} \in C^q(X,\mathcal{B})$ tal que $g_q(\bar{b}) = c$ y consideramos al elemento $b - \bar{b}$, entonces $g_q(b-\bar{b}) = 0$ por lo tanto existe $\bar{a} \in C^q(X,\mathcal{A})$ tal que $f_q(\bar{a}) = b - \bar{b}$, y sea $a' \in C^{q+1}(X,\mathcal{A})$ tal que $f_{q+1}(a') = \beta_q(\bar{b})$; entonces, $f_{q+1}(\alpha_q(\bar{a})) = \beta_q(f_q(\bar{a})) = \beta_q(b-\bar{b}) = \beta(b) - \beta_q(\bar{b})$, pero $\beta_q(b) = f_{q+1}(a')$ y $\beta_q(\bar{b}) = f_{q+1}(a)$ por lo que $\beta_q(b) - \beta_q(\bar{b}) = f_{q+1}(a-a') = f_{q+1}(\alpha_q(\bar{a}))$ lo que implica $a - a' = \alpha_q(\bar{a})$, es decir $a + Im(\alpha_q) = a' + Im(\alpha_q)$ en $H^{q+1}(X,\mathcal{A})$, por lo tanto d está bien definida.

Falta verificar que $Im(\gamma_{q+1}) = 0$, para ello, sea $c \in Im(\gamma_{q-1})$ entonces existe $d \in C^{q-1}(X.\mathcal{C})$ tal que $\gamma_{q-1}(d) = c$. Como g_{q-1} es sobre, entonces existe d' tal que $g_{q-1}(d') = d$ y $g_q(\beta_{q-1}(d')) = c$. Sea $b = \beta_{q-1}(d')$ y consideramos que $\beta_q(b) = 0$ implica que existe $a \in C^{q+1}(X, \mathcal{A})$ tal que $f_{q+1}(a) = b$, entonces $a = 0$, por lo tanto c es el cero en $H^{q+1}(X, \mathcal{A})$.

De lo anterior y de la propiedad universal del *conúcleo* tenemos que existe $\delta^q : H^q(X, \mathcal{C}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{A})$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} Ker(\gamma_q) \arrow[r, "d"] \arrow[d] & H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \\ H^q(X, \mathcal{C}) \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}$$

(a) Tenemos entonces la siguiente sucesión:

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi^0} H^0(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{\psi^0} H^0(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^0} H^1(X, \mathcal{A}) \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow H^q(X, \mathcal{A}) \xrightarrow{\varphi^q} H^q(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{\psi^q} H^q(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta^q} H^{q+1}(X, \mathcal{A}) \longrightarrow \cdots$$

Sea $b \in Im(\varphi^q)$, es decir, $b = \varphi^q(a + Im(\alpha_{q-1})) = f_q(a) + Im(\beta_{q-1})$. Ahora $\psi^q(b) = \psi^q(\varphi^q(a + Im(\alpha_{q-1}))) = \psi^q(f_a + Im(\beta_{q-1})) = g_q(f_q(a) + Im(\gamma_{q-1})) = 0 + Im(\gamma_{q-1})$ que es el cero en $H^q(X, \mathcal{C})$, por lo tanto $Im(\varphi^q) \subseteq Ker(\psi^q)$. Por otra parte, sea $b + Im(\beta_{q-1}) \in Ker(\psi^q)$, esto es, $\psi^q(b + Im(\beta_{q-1})) = g_q(b) + Im(\gamma_{q-1}) = 0$ entonces $g_q(b) \in Im(\gamma_{q-1})$, por lo tanto existe $c \in C^{q-1}(X, \mathcal{C})$ tal que $\gamma_{q-1}(c) = g_q(b)$, lo que implica que existe $b' \in C^{q-1}(X, \mathcal{B})$ tal que $g_{q-1}(b') = c$, entonces $g_q(\beta_{q-1}(b')) = \gamma_{q-1}(g_{q-1}(b')) = \gamma_{q-1}(c) = g_q(b)$. Ahora, $g_q(b - \beta_{q-1}(b')) = g_q(b) - g_q(\beta_{q-1}(b')) = g_q(b) - g_q(b) = 0$, por lo tanto existe $a \in C^q(X, \mathcal{A})$ tal que $f_q(a) = b - \beta_{q-1}(b')$; es decir, $\varphi^q(a + Im(\alpha_{q-1})) = f_q(a) + Im(\beta_{q-1}) =$

$b-\beta_{q-1}(b')+Im(\beta_{q-1})=b+Im(\beta_{q-1})$, entonces $Ker(\psi^q)\subseteq(\varphi^q)$. Por lo anterior, la sucesión es exacta en $H^q(X,\mathcal{B})$.

Sea, $c+Im(\gamma_{q-1})\in Im(\psi^q)$, entonces $c+Im(\gamma_{q-1})=\psi^q(b+Im(\beta_{q-1}))=g_q(b)+Im(\gamma_{q-1})$ y $\gamma_q(g_q(b))=0$, por lo tanto existe $a\in C^{q+1}(X,\mathcal{A})$ tal que $f_{q+1}(a)=\beta_q(b)$, pero $b+Im(\beta_{q-1})\in H^q(X,\mathcal{B})$, lo que implica que $b\in Ker(\beta_q)$, es decir, $\beta_q(b)=0$, por lo tanto $a=0$. Entonces $\delta(c+Im(\gamma_{q-1}))=\delta(g_q(b)+Im(\gamma_{q-1}))=0+Im(\alpha_q)=Im(\alpha_q)$, por lo cual $c+Im(\gamma_{q-1})\in Ker(\delta)$. Sea $c+Im(\gamma_{q-1})\in Ker(\delta)$; es decir, $c\in Ker(\gamma_q)$, por lo tanto existe $b\in C^q(X,\mathcal{B})$ tal que $g_q(b)=c$, entonces $g_{q+1}(\beta(b))=0$, por lo tanto existe $a\in C^{q+1}(X,\mathcal{A})$ tal que $f_q(a)=\beta_q(b)$, pero $0=a+Im(\alpha_q)\in H^{q+1}(X,\mathcal{A})$ por lo cual $a\in Im(\alpha_q)$. Consideramos $b-f_q(a')+Im(\beta_{q-1})\in H^q(X,\mathcal{B})$, con $a'\in C^q(X,\mathcal{A})$, ésto implica que $b-f_q(a')+Im(\beta_{q-1})\in H^q(X,\mathcal{B})$, entonces $\psi^q(b-f_q(a'))=g_q(b)-g_q(f_q(a'))+Im(\gamma_{q-1})=g_q(b)+Im(\gamma_{q-1})=c+Im(\gamma_{q-1})$, por lo tanto $c+Im(\gamma_{q-1})\subseteq Im(\psi^q)$; es decir, la sucesión es exacta en $H^q(X,\mathcal{C})$.

Sea $c+Im(\gamma_{q-1})\in H^q(X,\mathcal{C})$, con $c\in Ker(\gamma_q)$, entonces existe $b\in C^q(X,\mathcal{B})$ tal que $g_q(b)=0$ con $g_{q+1}(\beta_q(b))=0$, por lo tanto existe $a\in C^{q+1}(X,\mathcal{A})$ tal que $f_{q+1}(a)=\beta_q(b)$ y $\delta^q(c+Im(\gamma_{q+1}))=a+Im(\alpha_q)$; es decir, $a+Im(\alpha_q)\in H^{q+1}(X,\mathcal{A})$ y $\varphi^{q+1}(a+Im(\alpha_q))=\beta_q(b)+Im(\beta_q)=Im(\beta_q)=0\in H^{q+1}(X,\mathcal{B})$, por lo tanto $Im(\delta^q)\subseteq Ker(\varphi^{q+1})$. Ahora, sea $a+Im(\alpha_q)\in Ker(\varphi^{q+1})$, con $a\in Ker(\alpha_{q+1})$, entonces $\varphi^{q+1}(a+Im(\alpha_q))=f_{q+1}(a)+Im(\beta_q)=0$ lo que implica que $f_{q+1}(a)\in Im(\beta_q)$, por lo tanto $\beta_q(b) = f_{q+1}(a)$ y tenemos $\gamma_q(g_q(b)) = g_{q+1}(\beta_q(b)) = g_{q+1}(f_{q+1}(a)) = 0$, entonces $g_q(b) \in Ker(\gamma_q)$ y se sigue que $g_q(b) + Im(\gamma_{q-1}) \in H^q(X, \mathcal{C})$ y por construcción $\delta(g_q(b) + Im(\gamma_{q-1})) = a + Im(\alpha_q)$, es decir, $Ker(\varphi^{q+1}) \subseteq Im(\delta^q)$. De lo anterior tenemos la sucesión es exacta en $H^{q+1}(X, \mathcal{A})$.

(b) Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{A} \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\tau"'] & \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[d, "\mu"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{A}' \arrow[r, "h'"] & \mathcal{B}' \arrow[r, "f'"] & \mathcal{C}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por 2, sabemos que existe un homomorfismo de grupos para toda $q \geq 0$, $h_q : H^q(X, \mathcal{A}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{B})$ y si $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ es otro morfismo de gavillas, entonces $f_q \circ h_q = (f \circ h)_q$; y por el inciso anterior sabemos que para cada sucesión exacta corta, existe un homomorfismo de grupos $\delta : H^q(X, \mathcal{C}) \longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{A})$ tal que la sucesión de grupos de cohomología es exacta dondequiera, entonces consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{A}) \arrow[r, "\varphi_0"] \arrow[d, "\sigma_0"'] & H^0(X, \mathcal{B}) \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\tau_0"'] & H^0(X, \mathcal{C}) \arrow[r, "\delta_0"] \arrow[d, "\mu_0"'] & H^1(X, \mathcal{A}) \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[d, "\sigma_1"'] & \cdots \\
0 \arrow[r] & H^0(X, \mathcal{A}') \arrow[r, "\varphi_0'"] & H^0(X, \mathcal{B}') \arrow[r, "\psi_0'"] & H^0(X, \mathcal{C}') \arrow[r, "\delta_0'"] & H^1(X, \mathcal{A}') \arrow[r, "\varphi_1'"] & \cdots
\end{tikzcd} \tag{3.13}$$

por lo tanto, para cada $q \geq 0$ tenemos que $(\tau_q \circ \varphi_q) = (\tau \circ \varphi)_q$, $(\varphi_q' \circ \sigma_q) = (\varphi' \circ \sigma)_q$ y $\tau \circ \varphi = \varphi' \circ \sigma$, de lo que obtenemos $\tau_q \circ \varphi_q = \varphi_q' \circ \sigma_q$; análogamente $\mu_q \circ \psi_q = \psi' \circ \tau_q$.

Para ver que $\sigma_{q+1} \circ \delta_q = \delta_q' \circ \mu_q$, consideremos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} C^q(X,\mathcal{A}) \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, "\alpha_q"'] & C^q(X,\mathcal{B}) \arrow[r, "g_q"] \arrow[d, "\beta_q"'] & C^q(X,\mathcal{C}) \arrow[d, "\gamma_q"'] \\ C^{q+1}(X,\mathcal{A}) \arrow[r, "f_{q+1}"] & C^{q+1}(X,\mathcal{B}) \arrow[r, "g_{q+1}"] & C^{q+1}(X,\mathcal{C}) \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C^q(X,\mathcal{A}') \arrow[r, "f'_q"] \arrow[d, "\alpha'_q"'] & C^q(X,\mathcal{B}') \arrow[r, "g'_q"] \arrow[d, "\beta q'"'] & C^q(X,\mathcal{C}') \arrow[d, "\gamma'_q"'] \\ C^{q+1}(X,\mathcal{A}') \arrow[r, "f'_{q+1}"] & C^{q+1}(X,\mathcal{B}') \arrow[r, "g'_{q+1}"] & C^{q+1}(X,\mathcal{C}') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} C^q(X,\mathcal{C}) \arrow[r, "C_q"] \arrow[d, "\gamma_q"'] & C^q(X,\mathcal{C}') \arrow[d, "\gamma'_q"'] \\ C^{q+1}(X,\mathcal{C}) \arrow[r, "C_{q+1}"] & C^{q+1}(X,\mathcal{C}') \end{tikzcd}$$

El tercer diagrama es análogo para $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Entonces, la conmutatividad se sigue de la construcción del homomorfismo δ.

□

Definición 3.2.3. Una resolución de una gavilla $\mathcal{S}$ sobre un espacio X

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}^*$$

es llamada *acíclica*, si $H^q(X,\mathcal{A}^p) = 0$ para toda $q > 0$ y $p \geq 0$.

Teorema 3.2.4. *Sea $\mathcal{S}$ una gavilla sobre un espacio X, y sea*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}^*$$

una resolución de $\mathcal{S}$. Entonces existe un homomorfismo natural

$$\gamma^p : H^p(\Gamma(X,\mathcal{A}^*)) \longrightarrow H^p(X,\mathcal{S}),$$

donde $H^p(\Gamma(X, \mathcal{A}^*))$ *es el p-ésimo grupo derivado del complejo de cocadenas* $\Gamma(X, \mathcal{A}^*)$. *Más aún, si*

$$0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}^*$$

es acíclica, γ^p *es un isomorfismo.*

Demostración. Sea $\mathcal{K}^p = Ker(\mathcal{A}^p \longrightarrow \mathcal{A}^{p+1}) = Im(\mathcal{A}^{p-1} \longrightarrow \mathcal{A}^p)$, entonces $\mathcal{K}^p \subseteq \mathcal{A}^p$.

Como la sucesión $0 \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}^0 \longrightarrow \mathcal{A}^1 \longrightarrow \cdots$ es exacta en cualquier lado, entonces $\mathcal{K}^0 = Ker(\mathcal{A}^0 \longrightarrow \mathcal{A}^1) = Im(\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{A}^0) = \mathcal{S}$, y tenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^{p-1} \longrightarrow \mathcal{A}^{p-1} \longrightarrow \mathcal{K}^p \longrightarrow 0$$

y por la definición de $\mathcal{K}^p$, el morfismo de gavillas $\mathcal{A}^{p-1} \longrightarrow \mathcal{K}^p$ es sobre ya que $\mathcal{A}^{p-1} \longrightarrow \mathcal{A}^p$ lo es, por lo tanto la sucesión es exacta. Por el teorema 3.2.2, tenemos una sucesión exacta larga

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}^{p-1}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{A}^{p-1}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{K}^p) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}^{p-1}) \longrightarrow \cdots$$

y la podemos reescribir como

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{A}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^p) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}^{p-1}) \longrightarrow \cdots \tag{3.14}$$

Ahora, consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{K}^p \arrow[r, "j"] & \mathcal{A}^p \arrow[r, "f^p"] & \mathcal{A}^{p+1} \\ & \mathcal{A}^{p-1} \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[ul, dashed, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

donde j es la inclusión y $f^q \circ \varphi = 0$ por exactitud, entonces, por la *propiedad* *universal de núcleo*[4], existe un único homorfismo $\psi : \mathcal{A}^{p-1} \longrightarrow \mathcal{K}^p$ tal que el diagrama conmuta. Si tomamos secciones globales (ver [God64]) tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Gamma(X,\mathcal{K}^p) \arrow[r, "\bar{j}"] & \Gamma(X,\mathcal{A}^p) \arrow[r, "f^p"] & \Gamma(X,\mathcal{A}^{p+1}) \\ & \Gamma(X,\mathcal{A}^{p-1}) \arrow[u, "\varphi"'] \arrow[ul, dashed, "\bar{\psi}"] & \end{tikzcd}$$

Además $\Gamma(X,\mathcal{K}^p) \cong Ker(\Gamma(X,\mathcal{A}^p) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{A}^{p+1}))$, pero $\psi \circ j = \bar{\varphi}$, lo que implica $\bar{\varphi}(\Gamma(X,\mathcal{A}^{p-1})) = \bar{j}(\bar{\psi}(\Gamma(X,\mathcal{C}^{p-1})))$ por la tanto $\bar{j}(Im(\bar{\psi})) = Im(\bar{\varphi})$, es decir $Im(\bar{\psi}) \cong Im(\bar{\varphi})$.

Entonces

$$\frac{\Gamma(X,\mathcal{K}^p)}{Im(\bar{\psi})} \cong \frac{Ker(\Gamma(X,\mathcal{A}^p) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{A}^{p+1}))}{Im(\Gamma(X,\mathcal{A}^{p-1}) \longrightarrow \Gamma(X,\mathcal{A}^p))} = H^p(\Gamma(X,\mathcal{A}^*)).$$

Tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Im(\bar{\psi}) \arrow[r] & \Gamma(X,\mathcal{K}^p) \arrow[r] \arrow[d] & \dfrac{\Gamma(X,\mathcal{K}^p)}{Im(\psi)} \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & 0 \\ & & H^1(X,\mathcal{K}^{p-1}) & & \end{tikzcd}$$

entonces por la *propiedad universal de conúcleo* existe un homomorfismo único $\bar{\gamma}^p : \frac{\Gamma(X,\mathcal{K}^p)}{Im(\psi)} \longrightarrow H^1(X,\mathcal{K}^{p-1})$, tal que el diagrama conmuta; definimos

$$\gamma_1^p : H^p(\Gamma(X,\mathcal{A}^*)) \longrightarrow H^1(X,\mathcal{K}^{p-1})$$

dado por la composición del isomorfismo con γ^p, de hecho $Ker(\gamma_1^p) = 0$; si además la resolución es acíclica entonces $H^1(X,\mathcal{A}^{p-1}) = 0$, por lo tanto la

[4]Revisar "Foundaions of Module and Ring Theory, A Handbook for Study and Research"; Robert Wisbauer. Gordon and Breach Science Publishers. p.49.

sucesión

$$0 \longrightarrow Im(\bar{\psi}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{K}^p) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{K}^{p-1}) \longrightarrow 0$$

es exacta y γ_1^p es un isomorfismo.

De forma análoga definimos $\mathcal{K}^{p-r} = Ker(\mathcal{A}^{p-r} \longrightarrow \mathcal{A}^{p-r+1}) = Im(\mathcal{A}^{p-r-1} \longrightarrow \mathcal{A}^{p-r})$ y obtenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^{p-r} \longrightarrow \mathcal{A}^{p-r} \longrightarrow \mathcal{A}^{p-r+1} \longrightarrow 0$$

con $2 \leq r \leq p$; y siguiendo el procedimiento anterior podemos definir $\gamma_r^p : H^{r-1}(X, \mathcal{K}^{p-r+1}) \longrightarrow H^r(X, \mathcal{K}^{p-r})$, por lo tanto definimos

$$\gamma^p = \gamma_p^p \circ \gamma_{p-1}^p \circ \cdots \circ \gamma_1^p$$

es decir,

$$H^p(\Gamma(X, \mathcal{A}^*)) \xrightarrow{\gamma_1^p} H^1(X, \mathcal{K}^{p-1}) \xrightarrow{\gamma_2^p} H^2(X, \mathcal{K}^{p-2}) \xrightarrow{\gamma_3^p} \cdots \xrightarrow{\gamma_p^p} H^p(X, \mathcal{K}^0) = H^p(X, \mathcal{S})$$

y γ^p es un isomorfismo si la resolución es acíclica.

Para ver que γ^p es natural, sea

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{S} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{A}^* \arrow[d, "g"] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r] & \mathcal{B}^* \end{tikzcd}$$

un homomorfismo de resoluciones, es decir, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{S} \arrow[r, "f^0"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{A}^0 \arrow[r, "f^1"] \arrow[d, "g_1"'] & \mathcal{A}^1 \arrow[r, "f^2"] \arrow[d, "g_2"'] & \mathcal{A}^2 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"'] & \cdots \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r, "\alpha^0"'] & \mathcal{B}^0 \arrow[r, "\alpha^1"'] & \mathcal{B}^1 \arrow[r, "\alpha^2"'] & \mathcal{B}^2 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

y por el teorema 3.2.2 tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H^p(\Gamma(X,\mathcal{S}^*)) \arrow[r, "\gamma_1^p"] \arrow[d, "\bar{g}_p"'] & H^1(X,\mathcal{K}^{p-1}) \arrow[r, "\gamma_2^p"] \arrow[d] & H^2(X,\mathcal{K}^{p-2}) \arrow[r, "\gamma_3^p"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\gamma_p^p"] & H^p(X,\mathcal{K}^0) \arrow[d] \\ H^p(\Gamma(X,\mathcal{B}^*)) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_1^p"] & H^1(X,\tilde{\mathcal{K}}^{p-1}) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_2^p"] & H^2(X,\tilde{\mathcal{K}}^{p-2}) \arrow[r, "\tilde{\gamma}_3^p"] & \cdots \arrow[r, "\tilde{\gamma}_p^p"] & H^p(X,\tilde{\mathcal{K}}^0) \end{tikzcd}$$

por lo tanto el diagrama

$$\begin{tikzcd} H^p(\Gamma(X,\mathcal{A}^*)) \arrow[r, "\gamma^p"] \arrow[d, "\bar{g}_r"'] & H^p(X,\mathcal{S}) \arrow[d, "f_p"] \\ H^p(\Gamma(X,\mathcal{B}^*)) \arrow[r, "\tilde{\gamma}^p"] & H^p(X,\mathcal{T}) \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $\bar{g}^p$ es el homomorfismo inducido por g_p.

□

Corolario 3.2.5. *Supongamos que*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{S} \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{A}^* \arrow[d, "g"] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{T} \arrow[r] & \mathcal{B}^* \end{tikzcd}$$

es un homomorfismo de resoluciones de gavillas. Entonces existe un homomorfismo inducido

$$H^p(\Gamma(X,\mathcal{A}^*)) \xrightarrow{\bar{g}_p} H^p(\Gamma(X,\mathcal{B}^*));$$

si h es un isomorfismo de gavillas y ambas resoluciones son acíclicas, entonces $\bar{g}_p$ es un isomorfismo.

Demostración. Por el teorema anterior tenemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} H^p(\Gamma(X,\mathcal{A}^*)) \arrow[r, "\gamma^p"] \arrow[d, "\bar{g}^p"'] & H^p(X,\mathcal{S}) \arrow[d, "h_p"] \\ H^p(\Gamma(X,\mathcal{B}^*)) \arrow[r, "\tilde{\gamma}^p"] & H^p(X,\mathcal{T}) \end{tikzcd}$$

y h_p, γ^p y $\bar{\gamma}^p$ son isomorfismos, por lo tanto $\bar{g}_p$ es isomorfismo. □

Lema 3.2.6. *Si X es una variedad y $\mathcal{M}$ es una gavilla de módulos sobre una gavilla suave de anillos $\mathcal{R}$, ambas sobre X, entonces $\mathcal{M}$ es suave.*

Demostración. Sean $K \subset X$ un conjunto cerrado, y $\sigma \in \Gamma(K, \mathcal{M})$. Como $\sigma \in \Gamma(K, \mathcal{M}) := \varinjlim_{K \subset U} \mathcal{F}(U)$ entonces σ se extiende a algún conjunto abierto $U \subset X$ tal que $K \subset U$. Sea $\rho \in \Gamma(K \cup (X \setminus U), \mathcal{R})$ definida como

$$\rho \equiv \begin{cases} 1 & \text{sobre} \quad K \\ 0 & \text{sobre} \quad X \setminus U \end{cases}$$

Como $\mathcal{R}$ es suave, ρ se extiende a todo X y por lo tanto $\rho.\sigma$ es la extensión de σ a todo X, entonces $\mathcal{M}$ es suave. □

Teorema 3.2.7. *(de Rham)*

Sea X una variedad diferenciable. Entonces la aplicación natural

$$I : H^p(\mathcal{E}^*(X)) \longrightarrow H^p(\mathcal{S}^*_\infty(X, \mathbb{R}))$$

inducida por la integración de formas diferenciables sobre cadenas singulares C^∞ con coeficientes reales, es un isomorfismo.

Demostración. Consederamos las resoluciones de la gavilla $\mathbb{R}$ dadas en el ejemplo 2.2.13

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \varepsilon^*$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{S}^*_\infty(\mathbb{R}).$$

Primero notemos que en la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{i} \varepsilon^0 \longrightarrow \varepsilon^1 \longrightarrow \cdots$$

las gavillas $\mathbb{R}$ y ε^0 son suaves, y por el corolario 3.1.8 la gavilla ε^1 es suave.

Ahora, sabemos que $\mathcal{S}^0_\infty = \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$, entonces cada gavilla $\mathcal{S}^p_\infty$ es un módulo sobre $\mathcal{S}^0_\infty$, que es una gavilla suave, y por el lema anterior tenemos que $\mathcal{S}^p_\infty$ es una gavilla suave, es decir ambas resoluciones son acíclicas, por lo tanto el morfismo I es un isomorfismo.

□

Teorema 3.2.8. *(Dolbeault)*

Sea X una variedad compleja. Entonces

$$H^q(X, \Omega^p) \cong \frac{Ker(\varepsilon^{p,q}(X) \xrightarrow{\delta} \varepsilon^{p,q+1}(X))}{Im(\varepsilon^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\delta} \varepsilon^{p,q}(X))}.$$

Demostración. Consideramos la resolución dada en el ejemplo 2.2.11 y de manera análoga a las formas diferenciables de grado p, podemos demostrar que la gavilla de formas diferenciables de tipo (p, q) con valores complejos sobre una variedad compleja, es suave (ver [Sor69], pag.151), y Ω^p es el núcleo del morfismo $\varepsilon^{p,0} \longrightarrow \varepsilon^{p,1}$, por lo tanto la resolución

$$0 \longrightarrow \Omega^p \xrightarrow{i} \varepsilon^{p,0}(X) \xrightarrow{\delta} \varepsilon^{p,1}(X) \xrightarrow{\delta} \varepsilon^{p,2}(X) \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \varepsilon^{p,n}(X) \longrightarrow 0$$

es suave, y por lo tanto acíclica, entonces hay un isomorfismo

$$\gamma^p : H^p(X, \Omega^p) \longrightarrow H^p(\Gamma(X, \varepsilon^*))$$

donde

$$H^p(\Gamma(X, \varepsilon^*)) = \frac{Ker(\varepsilon^{p,q}(X) \longrightarrow \varepsilon^{p,q+1}(X))}{Im(\varepsilon^{p,q-1}(X) \longrightarrow \varepsilon^{p,q}(X))}$$

□

Bibliografía

[God64] Roger Godement, *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*, Hermann, 1964.

[GR65] Robert C. Gunning and Hugo Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, INC., 1965.

[Lan93] Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993.

[Rot79] Joseph J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, Academic Press, INC., 1979.

[Sor69] Giuliano Sorani, *An introduction to real and complex manifolds*, Gordon and Breach., 1969.

[Spi65] Michael Spivak, *Calculus on manifolds*, Perseus Books., 1965.

[Ten75] B.R. Tennison, *Sheaf theory*, Cambridge University Press, 1975.

[War83] Frank Wilson Warner, *Foundations of differentiable manifolds and lie groups*, Springer-Verlag, GTM., 1983.

[Wel80] R.O. Wells, *Differential analysis on complex manifolds*, Springer-Verlag, GTM., 1980.