

00324



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

37

FACULTAD DE CIENCIAS

ANÁLISIS GEOMÉTRICO DE LA DINÁMICA INDUCIDA EN EL PLANO POR ECUACIONES DE RICCATI CON COEFICIENTES TRIGONOMÉTRICOS.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

JOSÉ FERRÁN VALDEZ LORENZO



DIRECTOR DE TESIS:
DRA. LAURA ORTIZ BOBADILLA



2003

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

A



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
AVENIDA 14
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas •
UNAM a difundir en formato electrónico e imp.
contenido de mi trabajo "RECURRENTE"
NOMBRE: José Ferrán Valdez Lorenzo
FECHA: 25-marzo-2003
FIRMA: H.S.B.

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Análisis geométrico de la dinámica inducida en el plano por ecuaciones de Riccati con coeficientes trigonométricos

realizado por José Ferrán Valdez Lorenzo

con número de cuenta 9852522-3 , quién cubrió los créditos de la carrera de matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario

Dra. Laura Ortiz Bobadilla Laura Ortiz B.

Propietario

Dr. Alberto Verjovsky Sola Wolke A

Propietario

Dr. Jose Seade Kuri José Seade Kuri

Suplente

Dra. Adriana Ortiz Rodriguez Adriana

Suplente

Dr. Adolfo Guillot Santiago Adolfo Guillot Santiago

Consejo Departamental de mat



José Antonio Gómez Ortega
M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMÁTICAS

B

Agradecimientos.

El presente trabajo no hubiera sido posible sin la colaboración de muchas personas, a quienes de distintas maneras quiero dar gracias.

Por su apoyo moral y económico durante todo este tiempo quiero agradecer a mis padres y abuelos, Fernando, María Amalia, Elvia, José, Bulmaro y Estela.

Por su infinita paciencia, dedicación y calidad humana, agradezco a Ernesto y a Laura.

Por las correcciones y el apoyo para que siga en mi camino como matemático agradezco a los doctores Adolfo Guillot, José Seade, Alberto Verjovsky y a la doctora Adriana Ortiz.

Por exceso de motivos, a la familia que escogí entre desconocidos: Natalia, Amanda, Ramon, Emiliano, Laura, Rodrigo, Victor, Gabriela, Isabel, Galo, Alejandro, Eric, Damian y Adalberto.

A Zaloren, por meterse en mi vida sin permiso.

Quiero agradecer a quienes me apoyaron en días difíciles, a los doctores Salvador Pérez Esteva, Rolando Jiménez, Luis Montejano, Jorge Rocha y Javier Bracho.

Por sentar las bases, quiero agradecer las horas invertidas a los doctores Javier Páez, Jorge Ize, Carlos Hernández, León Kushner, Ernesto Rosales y a la doctora Laura Ortiz.

A la Princesa Ríos y a la Condesa Ugolini, por velar por mi salud, pulcritud y estado de ánimo.

Al cubo exterior: Jose, Jose Luis, Álgebra, Miguel Ángel, Tonatiuh, Javier, Selene, Paulina y Yessenia.

Mi hermana María Luz en realidad no colaboró con este trabajo, pero la quiero mucho y desde aquí le mando un saludo.

Mi hermano Camilo me prestó su máquina un rato, también lo quiero mucho y lo saludo desde aquí.

Supongo que eso es todo. Por falta de memoria es probable que haya omitido a alguien, no por malagradecido.

**FALTA
PAGINA**

2

Índice general

1.		5
1.1.	Ejemplos y generalidades	6
2.		11
2.1.	Una primera extensión	12
2.2.	Soluciones en $S^1 \times \mathbb{C}$	15
2.3.	Números asociados a soluciones periódicas	19
2.4.	La Transformación de monodromía	20
2.5.	El parámetro r	24
2.6.	La segunda extensión	26
2.7.	Más sobre la monodromía	34
2.8.	Las transformaciones de Möbius	38
2.9.	Curvas periódicas finitas y sus invariantes	47
3.		55
3.1.	El retrato fase cerca de $\{x = 0\}$	57
3.1.1.	Primer caso	58
3.1.2.	Segundo caso	60
A.		79
A.1.	Ecuaciones de Riccati, generalidades	79
A.2.	Prueba de la proposición 2.6	80
A.3.	Detalles, proposición 2.2	81
A.4.	Prueba al corolario del teorema 3.1	81
A.5.	En vecindades del punto al infinito	82
A.6.	Campos resonantes de tipo Poincaré	84

Capítulo 1

El estudio de procesos o sistemas cuya evolución depende del tiempo, ocupa un lugar importante dentro del quehacer científico. Dentro de dicho estudio las ecuaciones diferenciales ordinarias cobran especial importancia al hacer posible la descripción de los procesos que son caracterizables por un número finito de parámetros y cuya evolución se sabe determinista y suficientemente regular.

En esta tesis hacemos un análisis cualitativo de la dinámica inducida en el plano por ecuaciones de Riccati con coeficientes trigonométricos. De manera general entenderemos por *ecuación de Riccati*¹ a una expresión de la forma:

$$\frac{dz}{dt} = f_2(t)z^2 + f_1(t)z + f_0(t) \quad (t, z) \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C},$$

donde los coeficientes son funciones analíticas reales en t . Por *ecuación de Riccati con coeficientes trigonométricos* entenderemos el caso cuando las funciones $f_j(t)$ son polinomios $P_j(x, y)$ evaluados en $x = e^{it}$, $y = e^{-it}$. Explícitamente si:

$$P_j(x, y) = \sum_{k+l=0}^{n_j} a_{kl}^j x^k y^l \quad a_{kl}^j \in \mathbb{C}$$

tendremos,

$$f_j(t) = \sum_{k+l=0}^{n_j} a_{kl} e^{i(k-l)t} \quad a_{kl} \in \mathbb{C} \quad t \in \mathbb{R}.$$

A grandes rasgos, este tipo de ecuaciones diferenciales ordinarias asocian un vector en cada instante y a cada punto de la región del plano, describiendo así un proceso bidimensional, determinista y que cambia suavemente con el

¹No autónoma

paso del tiempo. El estudio del proceso se centra en determinar el conjunto de todos sus posibles estados², es decir, en encontrar las curvas en el espacio donde se esté trabajando cuyos vectores o rectas tangentes en cada punto e instante están determinadas por la ecuación diferencial en cuestión. Muy esquemáticamente:



Figura 1.1: Curvas y vectores tangentes

1.1. Ejemplos y generalidades

Las curvas que satisfacen un sistema plano dado por una ecuación diferencial no autónoma son esencialmente *puntos singulares* (donde el vector asociado es nulo), *órbitas periódicas* (correspondientes a curvas cerradas) y *órbitas no periódicas*. Entre las órbitas periódicas distinguiremos aquellas aisladas de otras órbitas periódicas llamándolas *ciclos límite*.

El principal objetivo de esta tesis es describir dado un tipo particular de ecuación de Riccati con coeficientes trigonométricos, al conjunto de curvas que satisfacen la misma, poniendo particular atención en las órbitas periódicas y ciclos límite. En este sentido podremos, después de probar los principales resultados de esta tesis, hacer afirmaciones como:

- Toda solución de la ecuación:

$$\frac{dz}{dt} = (e^{i27t} + e^{i7t})z^2 + e^{i3t}z + e^{i2t} \quad (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C},$$

es periódica³ de periodo 1.

²Equivalente a conocer el *espacio fase del sistema*.

³Más adelante definiremos el *periodo* de una órbita periódica.

- El sistema definido por la ecuación:

$$\frac{dz}{dt} = (e^{3t} + (e + i\pi))z^2 + 3 \quad (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C},$$

no presenta soluciones periódicas en \mathbb{C} .

Cabe destacar que el presente trabajo no es original. Casi la totalidad de los métodos y resultados a presentarse pueden encontrarse en la fuente principal de esta tesis, el artículo de Henryk Żoładek⁴ intitulado *The Method of Holomorphic Foliations in Planar Periodic Systems: The Case of Riccati Equations*.

La estructura general de este trabajo consta de dos partes. En la primera, correspondiente al segundo capítulo, se extiende en dos etapas la dinámica que inducen las ecuaciones de Riccati con coeficientes trigonométricos en el plano a $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. En el inter se introduce el concepto de *transformación de monodromía*, destacando su importancia en el estudio de dicha dinámica. Ya sentadas las bases, en la segunda parte correspondiente al tercer capítulo, se analizan casos particulares de ecuaciones de Riccati con coeficientes trigonométricos y se concluye sobre el número de órbitas periódicas que presentan las mismas. Se debe destacar que el análisis de los casos a presentarse no es exhaustivo.

Por grado de dificultad en la expresión que las define, después del caso constante, el tipo de ecuación diferencial más sencillo que podemos considerar en el plano es el *lineal homogéneo*. Explícitamente:

$$\begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

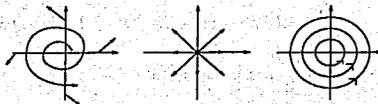
$a, b, c, d \in \mathbb{R}; (x, y) \in \mathbb{R}^2$. En este caso la dinámica a presentarse ha sido descrita de manera exhaustiva⁵. Basta con conocer los valores y vectores propios de la matriz correspondiente para conocer la dinámica que la ecuación diferencial lineal induce en el plano. Por ejemplo, en el caso de que la matriz correspondiente resulte no singular tenemos como único punto singular al origen y no se presentan ciclos límite.

Por ejemplo, tenemos los siguientes diagramas correspondientes a cada

⁴Instituto de Matemáticas, Universidad de Varsovia. E-mail: zoladek@mimuw.edu.pl

⁵Ver [Hl-S]

matriz inmediata inferior:



$$i) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad ii) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad iii) \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

El nivel de dificultad inmediato lo ocupan las ecuaciones determinadas por una expresión polinomial. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y + x(1 - (x^2 + y^2)) \\ \frac{dy}{dt} &= x + y(1 - (x^2 + y^2)) \end{aligned}$$

Esquemáticamente:

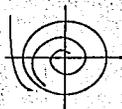


Figura 1.2: Curvas integrales correspondientes al campo vectorial polinomial

Este sistema presenta un único punto singular, el origen, y un único ciclo límite⁶. Vemos entonces en los ciclos límite una diferencia sustancial entre la dinámica inducida por ecuaciones lineales y polinomiales de grado mayor o igual que 2.

⁶Hágase el cambio de variable $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$

Siguiendo en este tono están los sistemas en el plano determinados por ecuaciones del tipo:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= Q(x, y) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios de coeficientes reales de grado máximo n . Una cuestión fundamental a responder en este caso, propuesta ya a la comunidad matemática internacional durante el congreso de 1900 por David Hilbert⁷, es determinar si se puede conocer en términos del grado de los polinomios correspondientes el número máximo y la posición de los ciclos límite que se presentan. Gracias a los avances hechos por Dulac, Bamón, Il'yashenko, Ecalle, Martinet, Moussu y Ramis, hoy se sabe que el número de ciclos límite es finito para grado fijo, sin embargo a la fecha⁸ no se ha podido dar una respuesta a la cuestión anterior, ni siquiera para el caso cuadrático.

Así, dentro de este marco, el estudio de *ecuaciones de Riccati con coeficientes trigonométricos*:

$$\frac{dz}{dt} = P_2(t)z^2 + P_1(t)z + P_0(t) \quad (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \quad (1.2)$$

donde, como se mencionaba anteriormente, se tiene que:

$$P_n(x, y) = \sum_{k+l=0}^{m_n} a_{kl}^n x^k y^l \quad a_{kl}, x, y \in \mathbb{C},$$

puede entenderse, hablando holagamente, como el estudio de un caso motivado por el de los sistemas en el plano del tipo (1.1) donde los polinomios correspondientes son de grado máximo 2.

Iacopo Francesco, conde Riccati. (28 de mayo, 1676 Venecia - 15 de abril, 1754 Treviso) Siendo en un principio estudiante de leyes, Iacopo Francesco es motivado por su amigo, y matemático, Stephano Angeli para estudiar matemáticas. Pronto adquiere fama en el medio e incluso rechaza ofertas de Pedro el Grande para la presidencia de la Academia de Ciencias de San Petersburgo. Sus trabajos en hidráulica fueron de gran utilidad a la ciudad de Venecia en la construcción de diques a lo largo de los canales.

⁷Ver [II] y [H]

⁸ver [II]

En lo que al estudio de ecuaciones diferenciales se refiere, destacan sus métodos de reducción de orden y separación de variables. Además, el conde Riccati encontró métodos de solución para diversos tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias que posteriormente fueron ampliamente aceptados. Se le conoce principalmente por la ecuación que lleva su nombre:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x) \quad (x, y) \in \mathbb{R},$$

de la cual hizo un estudio detallado y resolvió casos particulares. Dicha ecuación ya había sido estudiada por Jacobo Bernoulli y discutida con Riccati en 1754. El conde mantenía correspondencia con un gran número de matemáticos a lo largo de Europa y tuvo gran influencia en personajes de la talla de Daniel Bernoulli y Euler. También trabajó con péndulos cícloides, las leyes de resistencia en un fluido y la geometría diferencial.

Capítulo 2

Como se delineaba en el capítulo anterior, estaremos analizando sistemas en el plano determinados por ecuaciones de Riccati con coeficientes trigonométricos. Explicitamente,

$$\frac{dz}{dt} = P_2(t)z^2 + P_1(t)z + P_0(t) \quad (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \quad (2.1)$$

donde $P_j(t)$ resulta de evaluar al polinomio $P_j(x, y) = \sum_{k+l=j} \alpha_{kl} x^k y^l$ en $x = e^{it}$, $y = e^{-it}$. Tenemos así en $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ un campo vectorial analítico (real en t , holomorfo en z) definido por la aplicación:

$$(t, z) \xrightarrow{v(t, z)} (1, P_2(t)z^2 + P_1(t)z + P_0(t)), \quad (2.2)$$

Este campo vectorial define para cada punto $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ a la recta:

$$V(t, z) := \{ \mu v(t, z) \mid \mu \in \mathbb{R} \}. \quad (2.3)$$

Definición 2.1. Entendemos por curva integral del campo de direcciones definido por (2.3) a cualquier curva $\Gamma(t) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ tal que la recta tangente a esta en cada punto (t, z) sea precisamente $V(t, z)$. Por otro lado, una solución de la ecuación de Riccati del tipo (2.1) con datos iniciales (t_0, z_0) es una curva en el plano $z(t)$, $t \in \mathbb{R}$, cuyo valor en el instante t_0 es z_0 , y tal que para cada t en su dominio satisfice:

$$\frac{dz}{dt} = P_2(t)z(t)^2 + P_1(t)z(t) + P_0(t)$$

Además, la recta tangente a la curva definida por la aplicación $z \mapsto (t, z(t))$ es $V(t, z(t))$.

Dicho de otra manera, en el caso de las curvas integrales, estamos poniendo atención únicamente a la dirección de la velocidad con que se recorren éstas, olvidándonos de la magnitud de la misma. En este sentido tendremos que si la curva $\Gamma(t)$ es una parametrización de una curva integral del campo $V(t, z)$, entonces cualquier reparametrización suave de ésta será también curva integral del campo $V(t, z)$.

Ejemplo 1. *Algunos ejemplos de este tipo de ecuaciones son:*

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= e^{-it}z + 1; & \frac{dz}{dt} &= (3e^{27it} + \pi e^{-3it})z^2, & (2.4) \\ \frac{dz}{dt} &= 0,1235711\dots \end{aligned}$$

En las secciones siguientes haremos una extensión de la dinámica que define en el plano la ecuación (2.1) a la variedad compacta $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Esta extensión se llevará a cabo en dos etapas. En la primera definiremos, tomando como punto de partida al campo (2.2), un campo vectorial holomorfo en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Una vez definido este se introducirán los conceptos de transformación de monodromía, órbita periódica (e invariantes asociados) y un nuevo parámetro para caracterizar toda una familia de ecuaciones relacionadas a la ecuación (2.1). Posteriormente se retomarán estos conceptos a partir de la extensión final de la dinámica a $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ y teniendo ya la herramienta teórica necesaria pasaremos al tercer capítulo de la tesis donde se demuestran los resultados principales.

2.1. Una primera extensión

Una primera aproximación al estudio del sistema consiste en una extensión del dominio $\mathbb{R} \times \mathbb{C}$ al espacio $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Observemos que el lado derecho de la ecuación de Riccati (2.1) coincide con la composición de $P(x, z) = P_2(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_0(x, x^{-1})$ con $x = e^{it}$. Aquí, $P(x, z)$ es una aplicación meromorfa en x con polos en $\{x = 0\}$ y holomorfa en z . Por otro lado observamos que $x(t) = x_0 e^{it}$ es solución de la ecuación diferencial $\frac{dx}{dt} = ix$ con condición inicial $x(0) = x_0$. Es por esto, como demostraremos en la sección (2.2), que las soluciones de la ecuación de Riccati (2.1) resultan ser la

segunda coordenada de las soluciones $\gamma_{(x_0, z_0)}(t) = (x(t), z(t))$ del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = ix \quad (2.5)$$

$$\frac{dz}{dt} = P_2(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_0(x, x^{-1}) \quad (x, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{C}$$

restringidas a $\text{Im}(t) = 0$.

Por ejemplo, si la ecuación de Riccati de la que se parte es:

$$\frac{dz}{dt} = e^{-it}z^2 + 1 \quad (t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C},$$

tendríamos como primera extensión:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ix & (2.6) \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{z^2}{x} + 1 & (x, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Observamos que el campo (2.6) no está bien definido en $\{x = 0\}$ ya que $P_2(x, x^{-1}) = \frac{1}{x}$.

Al parecer, nos estamos complicando las cosas más que acercarnos a la solución, sin embargo hay manera de solventar estos problemas. Para ello recurrimos a uno de los teoremas pilares dentro del estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, cuya prueba se remite a [Hil].

Teorema 2.1 (Teorema de existencia y unicidad para ecuaciones diferenciales holomorfas). Sean f_1, \dots, f_n funciones holomorfas definidas en un abierto U de \mathbb{C}^n . Entonces para todo punto $p \in U$ y $t_0 \in \mathbb{C}$, existe una única solución $z(t) = (z_1(t), \dots, z_n(t))$ de la ecuación diferencial holomorfa:

$$\frac{dz_j}{dt} = f_j(z_1, \dots, z_n) \quad j = 1, \dots, n$$

definida en una vecindad de $t_0 \in \mathbb{C}$ y satisfaciendo la condición inicial $z(t_0) = p$.

Así, podemos dar una partición¹ de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ constituida por las soluciones a (2.5) con datos iniciales en $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{x = 0\}$ y por la variedad analítica

¹Una foliación con singularidades. Ver [G-O].

$\{x = 0\}$. Los problemas de indefinición del campo en el conjunto $\{x = 0\}$ serán solventados definiendo un nuevo campo, múltiplo del campo (2.5), que define la misma partición. En la ecuación (2.6) del ejemplo anterior multiplicando por x obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ix^2 \\ \frac{dz}{dt} &= z^2 + x \end{aligned} \quad (x, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{C} \quad (2.7)$$

Proposición 2.1. *Si se restringen los campos (2.6) y (2.7) a $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{x = 0\}$, las particiones de este subconjunto de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ conformadas por las soluciones de ambos campos son idénticas.*

Prueba. Para cada $(x, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{x = 0\}$ los campos (2.6) y (2.7) definen la recta compleja:

$$\begin{aligned} R_{(x,z)} &= \left\{ \lambda \left(ix, \frac{z^2}{x} + 1 \right) \mid \lambda \in \mathbb{C} \right\} \\ \tilde{R}_{(x,z)} &= \left\{ \mu (ix^2, z^2 + x) \mid \mu \in \mathbb{C} \right\}, \end{aligned}$$

respectivamente. Nótese que los vectores generadores de $R_{(x,z)}$ y $\tilde{R}_{(x,z)}$ son colineales: basta tomar $\lambda = x$ o $\mu = \frac{1}{x}$. Entonces $R_{(x,z)} = \tilde{R}_{(x,z)}$, es decir, las ecuaciones (2.6) y (2.7) definen en $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{x = 0\}$ las mismas direcciones. Como consecuencia del teorema de existencia y unicidad podemos afirmar que las curvas integrales de los campos (2.6) y (2.7) coinciden en $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{x = 0\}$.

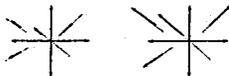


Figura 2.1: Campos que definen las mismas direcciones

Observación. *Como consecuencia de la proposición (2.1) tenemos que, en términos de curvas integrales, el campo (2.6) coincide con un campo analítico en todo $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, con el que trabajaremos más fácilmente sin perder información*

en $x \neq 0$. De manera general, si la primera extensión de la ecuación de Riccati resulta ser un campo de la forma:

$$\frac{dz}{dt} = iz$$

$$\frac{dz}{dt} = P_2(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_0(x, x^{-1}) \quad (x, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad t \in \mathbb{C},$$

trabajaremos, para evitar problemas de definición, con el campo:

$$\frac{dz}{dt} = iz^{k+1}$$

$$t \in \mathbb{C}$$

$$\frac{dz}{dt} = x^k(P_2(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_0(x, x^{-1})) \quad (x, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}, \quad (2.8)$$

donde k es el mayor de los grados de los polinomios $P_i(x, y)$ en la variable y .

Definición 2.2. Entenderemos por primera extensión de la ecuación de Riccati con coeficientes trigonométricos (2.1) a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ al campo definido por la expresión (2.8).

Las particiones a las que nos hemos referido en la proposición (2.1) son un caso particular de un tipo más general de partición que puede darse para una variedad compleja M . Dicho tipo de descomposición recibe el nombre de *Foliación holomorfa por curvas (con singularidades) de M* , normalmente denotada por \mathcal{F} . Aunque no necesitaremos la definición formal de este concepto, se recomienda consultar $[G-O]$ al respecto. A grosso modo, cuando tengamos definido en M un campo analítico v , tendremos de manera natural una foliación \mathcal{F} holomorfa por curvas (con singularidades) de M . Ésta está conformada por las curvas integrales (llamadas también *hojas de la foliación \mathcal{F}*) y los puntos singulares de v . Vale la pena notar que, como t está definido en \mathbb{C} , las curvas integrales del campo (2.8) que no son puntos singulares resultan ser superficies de Riemann.

Procedamos entonces a determinar las curvas que resuelven la ecuación de Riccati (2.1). Recordemos que en el proceso de extensión pasamos de la variable e^{it} en S^1 a trabajar con x en \mathbb{C} . Por ello, en el proceso de determinación de curvas integrales prestaremos especial atención a la intersección de las hojas de la foliación con el cilindro:

$$C := S^1 \times \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}.$$

2.2. Soluciones en $S^1 \times \mathbb{C}$

Una primera cosa que debe observarse es que la restricción del campo (2.8) a C nunca es vertical, es decir, la primera coordenada de éste no se

anula. Una consecuencia de esta no verticalidad es que las curvas integrales de (2.8) con condiciones iniciales de la forma $\xi_0 = (e^{i\theta_0}, z_0)$, denotadas por \mathcal{L}_{ξ} , intersecan transversalmente² a C . Esquemáticamente,³

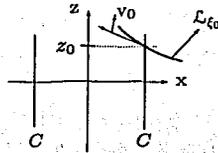


Figura 2.2: Intersección transversal de C y \mathcal{L}_{ξ}

Definimos para cada $\xi \in C$ el conjunto:

$$\Gamma_{\xi} := \mathcal{L}_{\xi} \cap C.$$

Aunque por el momento no resulte muy obvio, Γ_{ξ} será el conjunto más importante a lo largo de esta tesis. Para validar esta importancia tenemos que develar algunas propiedades de Γ_{ξ} .

Propiedad 1. Γ_{ξ} es una subvariedad diferenciable de dimensión real uno.

Prueba. Dada la no verticalidad del campo restringido a C ,

$$\frac{dz}{dx}|_C = -ix^{-1}(P_2(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_0(x, x^{-1}))|_C \neq 0 \text{ para } x \neq 0,$$

tenemos que para cada p en $C \cap \mathcal{L}_{\xi}$, como $\frac{dz}{dx}(p) \neq 0$, podemos parametrizar localmente a \mathcal{L}_{ξ} como:

$$\mathcal{L}_{\xi}(x) = (x, p + a_1(x - p) + \dots)$$

Luego, si:

$$\begin{aligned} \Pi_1 : C \times C &\longrightarrow C \\ (x, z) &\longmapsto x \end{aligned}$$

²La demostración de este hecho y definición de intersección transversal se incluyen más adelante en la Propiedad 2.

³En esta figura v_0 es el vector que el campo (2.8) asigna al punto ξ_0 .

es la proyección canónica de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ en el plano $\{z = 0\}$, tendremos que $\Gamma_\xi = (\Pi|_{\alpha_\xi})^{-1}(S^1)$ puede ser parametrizada por:

$$\Gamma_\xi = (e^{it}, p + a_1(e^{it} - p) + \dots),$$

con lo que queda demostrada la propiedad.

Propiedad 2. Si $\Gamma_\xi(t) = (e^{it}, z(t))$ es una parametrización de Γ_ξ entonces $(t, z(t))$ es una parametrización de la curva integral asociada al campo que define la ecuación de Riccati (2.1) con dato inicial $(0, z(0))$.

Prueba. Primero caracterizaremos, para cada $p \in \Gamma_\xi$, al espacio tangente de Γ_ξ valiéndonos de los correspondientes C y \mathcal{L}_ξ en p . Posteriormente, con dicha caracterización obtendremos el resultado. Primero probemos el siguiente lema auxiliar.

Lema 2.1. Sea \mathcal{L}_ξ la hoja de la foliación \mathcal{F} correspondiente a la condición inicial $\xi \in C$. Entonces las subvariedades \mathcal{L}_ξ y C de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ se intersectan transversalmente.

Prueba. Recordemos⁴ que si M y N son dos subvariedades diferenciables del espacio \mathbb{C}^n que se intersectan transversalmente, es decir, que para cada $p \in N \cap M$ sucede que:

$$T_p \mathbb{C}^n = T_p N + T_p M,$$

Sea $p = (x, z) \in \mathcal{L}_\xi \cap C$. Como \mathcal{L}_ξ es curva integral del campo (2.8), se tiene que:

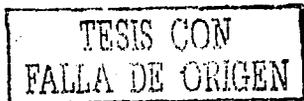
$$T_p \mathcal{L}_\xi \cong \{ \lambda(ix^{t+1}, x^t((P_2(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_0(x, x^{-1}))) \mid \lambda \in \mathbb{C} \}. \quad (2.9)$$

Por otra parte, como en una circunferencia la dirección tangente es perpendicular a la radial y el multiplicar por i es equivalente a una rotación por $\frac{\pi}{2}$,

$$T_p C = \{ (\lambda_1 ix, \lambda_2 + i\lambda_3) \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \}. \quad (2.10)$$

Tomemos ahora (x_0, z_0) en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ arbitrario y veamos que se pueden escoger $\lambda \in \mathbb{C}$ y $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ de manera que la suma de los vectores que resultan

⁴Ver [Hi]



de multiplicar a los generadores de $T_p\mathcal{L}_\xi$ y T_pC por estos escalares es (x_0, z_0) .

En efecto, si escogemos:

$$\lambda = x_0(-ix^{-(k+1)}) \quad \lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 + i\lambda_3 = z_0 - \lambda [x^k(P_2(x, x^{-1}z^2 + \dots))],$$

obtenemos en $T_p\mathcal{L}_\xi + T_pC$ la combinación lineal apropiada para (x_0, z_0) . Es decir, \mathcal{L}_ξ y C se intersectan transversalmente, concluyendo así la prueba de este lema auxiliar.

Para concluir la prueba de la propiedad 2, como consecuencia de la intersección transversal de las subvariedades \mathcal{L}_ξ y C , tenemos que:

$$\begin{aligned} 4 &= \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(T_p\mathcal{L}_\xi) + \dim_{\mathbb{R}}(T_pC) - \dim_{\mathbb{R}}(T_p\mathcal{L}_\xi \cap T_pC), \end{aligned}$$

luego,

$$\dim_{\mathbb{R}}(T_p\mathcal{L}_\xi \cap T_pC) = 1.$$

Así, como en principio $T_p\Gamma_\xi \subseteq T_p\mathcal{L}_\xi \cap T_pC$ y Γ_ξ es una curva real, tenemos que necesariamente:

$$T_p\Gamma_\xi = T_p\mathcal{L}_\xi \cap T_pC. \quad (2.11)$$

Esta igualdad, sumada a la descripción de los espacios tangentes de la solución \mathcal{L}_ξ y el cilindro C , implica, si (η_1, η_2) está en $T_p\mathcal{L}_\xi \cap C$, que:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \lambda ix^{k+1} & \text{así, } \lambda &= \lambda_1 x^{-k} \text{ y por tanto} \\ \eta_1 &= \lambda_1 ix, \end{aligned}$$

de manera que:

$$(\eta_1, \eta_2) = \lambda_1(ix, P_2(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_0(x, x^{-1})),$$

con quien generamos:

$$T_p\Gamma_\xi = \{ \mu(ix, P_2(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_0(x, x^{-1})) \mid \mu \in \mathbb{R} \}. \quad (2.12)$$

Por esta última igualdad tenemos que si $\Gamma_\xi(t) = (e^{it}, z(t))$ es una parametrización de Γ_ξ , entonces $(t, z(t))$ es una parametrización de la curva integral con dato inicial $(0, z(0))$ del campo asociado a la ecuación de Riccati (2.1) ya que en cada punto de ésta la recta tangente en cuestión es precisamente $V(t, z(t))$, como se estableció en (2.12).

2.3. Números asociados a soluciones periódicas

Las propiedades establecidas en la sección (2.2) nos permiten establecer una correspondencia entre las soluciones a la ecuación de Riccati (2.1) y las curvas Γ_ξ de la manera siguiente: $z(t)$ solución de (2.1) con dato inicial $z(0) = z_0$ se corresponde con $\Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap C$, donde $\xi = (1, z_0)$. Es de notar que las curvas integrales periódicas del campo (2.2) se corresponden con las curvas Γ_ξ compactas y viceversa, razón por la cual pondremos especial atención a estas curvas Γ_ξ asociándoles números que nos ayudan a distinguirlas entre sí.

Definición 2.3. Decimos que $\Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap C$ es periódica si es compacta y definimos su periodo como $2\pi n$, donde n es la cardinalidad de la fibra:

$$(\Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi})^{-1}(x), \quad x \in S^1,$$

donde Π_1 es la proyección canónica de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ a su primera coordenada, es decir, $\Pi_1(x, z) = x$.

En la siguiente proposición verificaremos la validez de la definición (2.2), es decir, verificaremos que la cardinalidad de la fibra $(\Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi})^{-1}(x)$ es finita y constante cuando $x \in S^1$.

Proposición 2.2. Si $\Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap C$ es periódica, entonces:

$$\text{Cardinalidad de } (\Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi})^{-1} := |(\Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi})^{-1}(x)| = n,$$

para alguna $n \in \mathbb{N}$ y para toda $x \in S^1$.

Prueba. Veamos primero que la cardinalidad es finita. Para ello recordemos que si $p \in \Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap C$ podemos localmente parametrizar \mathcal{L}_ξ con la variable $x \in \{z = 0\}$, obteniendo:

$$\mathcal{L}_\xi = (x, p + a_1(x - p) + \dots).$$

Si la cardinalidad de $(\Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi})^{-1}(x)$ no fuera finita en alguna $x_0 \in S^1$ estaríamos contradiciendo la compacidad de Γ_ξ pues podríamos dar una cubierta abierta de dicha curva sin subcubiertas finitas. Para ver que la cardinalidad es constante definamos primero el conjunto:

$$A_n = \{x \in S^1 \text{ tales que } |(\Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi})^{-1}(x)| = n\} \quad n \in \mathbb{N},$$

donde la cardinalidad de la fibra es constante. Es de notar que $A_n \cap A_m = \emptyset$ si $n \neq m$. Seguidamente veremos que A_n es un conjunto abierto. Así, si la cardinalidad de la fibra $(\Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi})^{-1}(x)$ no es constante a lo largo de S^1 , el círculo unitario es disconexo, una flagrante contradicción.

Notemos entonces que la restricción:

$$\Pi_1 : \Gamma_\xi \longrightarrow S^1,$$

de la proyección Π_1 a la curva Γ_ξ es al menos de clase \mathcal{C}^1 . Además, la diferencial de la misma en cada punto resulta invertible y preserva la orientación⁵ entre los respectivos espacios tangentes a Γ_ξ y S^1 . Es por esto último que la cardinalidad de la fibra $(\Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi})^{-1}(x)$ coincide con el grado de $\Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi}$ en x . Como el grado de una función no depende del punto x , la cardinalidad de la fibra se preserva en S^1 , quedando demostrada esta proposición.

Para poder definir los siguientes números asociados a una solución compacta habrá que introducir la función clave para el estudio de la dinámica inducida por la ecuación de Riccati en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$.

2.4. La Transformación de monodromía

A pesar de que no estamos considerando una parametrización específica para la curva Γ_ξ , para definir la transformación de monodromía, llamada también aplicación de primer retorno, consideraremos especialmente las Γ_ξ del tipo:

$$\Gamma_\xi(t) = (e^{it}, z(t)). \quad (2.13)$$

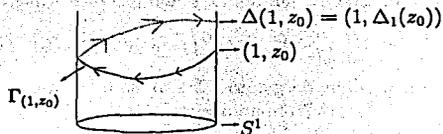
Definición 2.4. *La transformación de monodromía, también llamada aplicación de primer retorno, es la función que se define como:*

$$\begin{aligned} \Delta : \{1\} \times \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \{1\} \times \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ (1, z_0) &\longmapsto (1, \Delta_1(z_0)) := (1, z(2\pi)), \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde $(e^{it}, z(t))$ es una parametrización de $\Gamma_{(1, z_0)}$.

⁵Ver apéndice.

Esquemáticamente:



Veamos ahora las propiedades locales de esta transformación.

Proposición 2.3. *La transformación de monodromía es una función analítica.*

Prueba. La idea de la prueba es poder expresar localmente Δ como composición de funciones analíticas. Tomemos entonces un punto $(1, z_0)$ en $\{1\} \times \mathbb{C}$ y g^t el flujo del campo (2.8) a tiempo t_1 de manera que:

$$\Delta(1, z_0) = g^{t_1}(1, z_0).$$

Desafortunadamente, como la velocidad de recorrido de las soluciones con respecto al parámetro t depende de la condición inicial, no necesariamente tenemos, para todos los puntos $(1, \bar{z})$ en una vecindad de $(1, z_0)$, que $\Delta(1, \bar{z}) = g^{t_1}(1, \bar{z})$. De lo contrario se habría dado fin a la prueba ya que el flujo a tiempo finito de un campo analítico es a su vez analítico⁶. Para completar la prueba usaremos la analiticidad del flujo a tiempo finito y el teorema de rectificación⁷ para campos vectoriales holomorfos.

Teorema 2.2 (Teorema de rectificación de campos vectoriales holomorfos). *Sea*

$$\frac{dz}{dt} = v(z), \quad z \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n,$$

un campo vectorial holomorfo definido en el abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}^n$. Sea $z_0 \in \mathcal{U}$ tal que $v(z_0) \neq 0$. Entonces existe una vecindad $N(z_0)$ de z_0 y una función analítica e invertible:

$$\Psi : N(z_0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0),$$

definido de $N(z_0)$ a una vecindad del origen en \mathbb{C}^n que lleva el campo $v(z)$ en el campo constante $z \mapsto e_1 := (1, 0, \dots, 0)$.

⁶ver [G-O].

⁷ver [G-O].

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

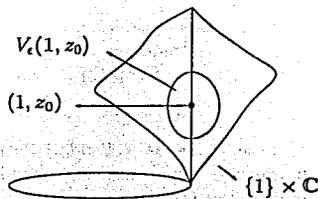
Como el campo (2.8) no se anula en C , existe (por el teorema de rectificación de campos vectoriales holomorfos), una vecindad $B_\delta(g^{t_1}(1, z_0)) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de $\Delta(1, z_0)$ en donde el campo es rectificable vía un biholomorfismo:

$$\Psi : B_\delta(g^{t_1}(1, z_0)) \longrightarrow \Psi(B_\delta(g^{t_1}(1, z_0)));$$

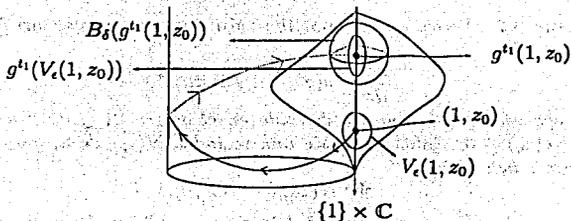
Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\Psi(g^{t_1}(1, z_0)) = 0$, el origen en $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Tomemos ahora $V_\epsilon(1, z_0) \subseteq \{1\} \times \mathbb{C}$ una vecindad del punto $(1, z_0)$ tal que:

$$g^{t_1}(V_\epsilon(1, z_0)) \subseteq B_\delta(g^{t_1}(1, z_0)).$$

Esquemáticamente:



Aplicando g^{t_1} obtenemos:



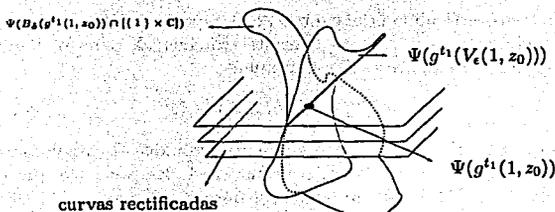


Figura 2.3: Aplicando el cambio de coordenadas Ψ

Finalmente definamos una proyección $\tilde{\Pi}$ a lo largo de las curvas integrales de (2.8), cuyo dominio sea:

$$\tilde{\Pi} := \Psi(g^{h_1}(V_c(1, z_0))),$$

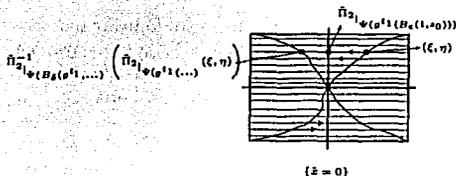
y cuya imagen esté contenida en:

$$\Psi(B_\delta(g^{h_1}(1, z_0)) \cap \{1\} \times \mathbb{C}),$$

de la manera siguiente: en las coordenadas (\bar{x}, \bar{z}) dadas por Ψ tomamos $\tilde{\Pi}_2$ la proyección canónica en la segunda coordenada. Así, si (ξ, η) está en $\Psi(B_\delta(g^{h_1}(1, z_0)))$, definimos:

$$\begin{aligned} \Psi(g^{h_1}(V_c(1, z_0))) &\xrightarrow{\tilde{\Pi}} \Psi(B_\delta(g^{h_1}(1, z_0)) \cap \{1\} \times \mathbb{C}) \\ (\psi, \eta) &\longmapsto \left[\tilde{\Pi}_2^{-1} \Big|_{\Psi(B_\delta(g^{h_1}(1, z_0)) \cap \{1\} \times \mathbb{C})} \circ \tilde{\Pi}_2 \Big|_{\Psi(g^{h_1}(V_c(1, z_0)))} \right] (\xi, \eta). \end{aligned}$$

Esquemáticamente:



Dada la no verticalidad del campo (2.8), para p en $B_\epsilon(1, z_0)$ la intersección de esta vecindad con la curva Γ_p resulta transversal, pensadas ambas como subvariedades del cilindro c . Explícitamente:

$$T_p\Gamma_p + T_pV_\epsilon(1, z_0) \cong \mathbb{R}^3.$$

Al ser, tanto g^{t_1} , como el cambio de coordenadas Ψ , biholomorfismos locales, preservan dicha intersección transversal. Es por esto que el espacio tangente a $\Psi(g^{t_1}(V_\epsilon(1, z_0)))$ no puede ser paralelo al plano $\{\lambda(1, 0) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$, de manera que $\bar{\Pi}_2|_{\Psi(g^{t_1}(V_\epsilon(1, z_0)))}$ resulta analítica e invertible en una vecindad en $\Psi(g^{t_1}(V_\epsilon(1, z_0)))$ del punto $(0, 0)$. Por exactamente las mismas razones $\bar{\Pi}_2|_{\Psi(B_\delta(g^{t_1}(1, z_0)) \cap (\{1\} \times \mathbb{C}))}$ resulta analítica e invertible en una vecindad en $\Psi(B_\delta(g^{t_1}(1, z_0)) \cap (\{1\} \times \mathbb{C}))$ del punto $(0, 0)$. Así, al ser composición de ambas, $\bar{\Pi}$ resulta analítica e invertible. Finalmente, quizás es una vecindad más pequeña que las anteriores, podemos descomponer a la transformación de monodromía Δ como:

$$\Delta = \Psi^{-1} \circ \bar{\Pi} \circ \Psi \circ g^{t_1}.$$

La analiticidad de Δ se desprende de la de Ψ , $\bar{\Pi}$ y g^{t_1} , quedando así terminada la prueba.

Notemos que si $\Gamma_{(1, z_0)}$ es $2\pi n$ periódica entonces n es el natural más pequeño que satisface $\Delta^n(1, z_0) = (1, z_0)$.

Definición 2.5. Llamaremos *multiplicador característico de la curva $2\pi n$ -periódica $\Gamma_{(1, z)}$* al número complejo:

$$\frac{d(\Delta^n)}{dz}(1, z).$$

2.5. El parámetro r

Hasta el momento los argumento que hemos venido utilizando para definir y estudiar los mapeos de monodromía y las curvas $\Gamma_{(1, z)}$ se apoyan en el hecho de que el campo (2.8) restringido al cilindro \mathbb{C} no es vertical. En esta sección veremos cómo extender lo visto hasta ahora a los conjuntos:

$$C_r = \{|x| = r\} \times \mathbb{C}, \quad 0 < r < \infty,$$

ampliando así el rango de nuestro discurso.

Dado que la primera coordenada del campo (2.9) restringido a los conjuntos C_r , $0 < r < \infty$, nunca es nula, es posible de manera análoga definir, para cada (x, z) en C_r , a la curva:

$$\Gamma_{(x,z)}^r = \mathcal{L}_{(x,z)} \cap C_r, \quad (2.15)$$

donde $\mathcal{L}_{(x,z)}$ es la solución de la ecuación (2.9) correspondiente a datos iniciales (x, z) . Así, como en la sección anterior establecimos una correspondencia entre las curvas Γ_ξ con $|\xi| = 1$ y las soluciones a la ecuación de Riccati (2.1), cabe preguntarse por el tipo de ecuación que resuelven las curvas $\Gamma_{(x,z)}^r$.

Proposición 2.4. *Sea $(x_0, z_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ tal que $\|x_0\| = r$. Si $\Gamma_{(x_0, z_0)}^r(t) = (re^{it}, z(t))$ es una parametrización de $\Gamma_{(x_0, z_0)}^r$ entonces $(t, z(t))$ es una parametrización de la curva integral asociada al campo que define⁸ la ecuación de Riccati:*

$$\frac{dz}{dt} = P_2(re^{it}, r^{-1}e^{-it})z^2 + P_1(re^{it}, r^{-1}e^{-it})z + P_0(re^{it}, r^{-1}e^{-it}), \quad (2.16)$$

con dato inicial $(0, z(0)) = (0, z_0)$.

Prueba. La prueba de esta proposición imita a la que se hizo para la propiedad 2 de las curvas $\Gamma_\xi \subseteq C$. Utilizando de igual manera la intersección transversal en cada p en Γ_ξ de las variedades $\mathcal{L}_{(x_0, z_0)}$ y C_r obtenemos que:

$$T_p \Gamma_{(x_0, z_0)}^r = T_p \mathcal{L}_{(x_0, z_0)} \cap T_p C_r, \quad (2.17)$$

ya que $\mathcal{L}_{(x_0, z_0)}$ es solución a (2.9) y en circunferencias las direcciones tangentes y radiales son siempre perpendiculares. Igualmente:

$$T_p \mathcal{L}_{(x_0, z_0)} = \{ \lambda (ix_0^{k+1}, x_0^k (P_2(x_0, x_0^{-1})z^2 + P_1(x_0, x_0^{-1})z + P_0(x_0, x_0^{-1}))) \mid \lambda \in \mathbb{C} \},$$

$$T_p C^r = \{ (\lambda_1 ix_0, \lambda_2 + i\lambda_3) \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \};$$

de manera que si $(\eta_1, \eta_2) \in T_p \Gamma_\xi^r$ tendremos que $\eta_1 = \lambda_1 x_0^{k+1}$, $\eta_2 = i\lambda_1 x_0$. Así, $\lambda = \lambda_1 x_0^{-k}$. Luego, si $x_0 = re^{it_0}$ tenemos:

$$(\eta_1, \eta_2) = \lambda_1 (ire^{it_0}, P_2(re^{it_0}, r^{-1}e^{-it_0})z^2 + P_1(re^{it_0}, r^{-1}e^{-it_0})z + P_0(re^{it_0}, r^{-1}e^{-it_0})),$$

⁸Análogamente a como se estableció en la ecuación (2.2)

es decir,

$$T_p \Gamma_r(x_0, z_0) = \{ \mu (i r e^{it_0}, P_2(r e^{it_0}, r^{-1} e^{-it_0}) z^2 + P_1(r e^{it_0}, r^{-1} e^{-it_0}) z + P_0(r e^{it_0}, r^{-1} e^{-it_0})) \mid \mu \in \mathbb{R} \}, \quad (2.18)$$

de donde se desprende el resultado deseado.

Continuando con las analogías, podemos incluir en el estudio de ecuaciones del tipo (2.16) conceptos como el de curva $\Gamma_r(x, z)$ $2\pi n$ -periódica, así como el de la transformación (analítica) de monodromía:

$$\Delta_r : \{r\} \times \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \{r\} \times \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C},$$

y asociar a $\Gamma_r(x, z)$ su correspondiente multiplicador $\frac{d(\Delta_r)}{dx}(r, z)$.

Aunque lo más natural a seguir sería el estudio de las relaciones que existen entre las transformaciones de monodromía, curvas periódicas y multiplicadores correspondientes a los cilindros C y C_r , pospondremos un momento este estudio hasta la sección (2.9). Primero introduciremos una nueva extensión del campo definido por la ecuación de Riccati (2.1) para seguidamente retomar el tema con una panorámica completa.

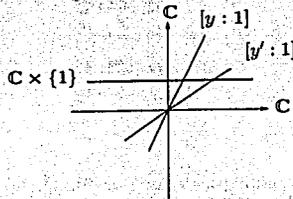
2.6. La segunda extensión

A pesar de que la primera extensión del campo (2.8) al espacio $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ parece ser suficiente para determinar el número de órbitas periódicas que presenta una ecuación de Riccati del tipo (2.1), no da información sobre cómo las soluciones de la ecuación de Riccati se comportan en vecindades del punto al infinito. Es por ello que haremos una segunda y última extensión. La idea general es dar un campo de direcciones analítico en la variedad compacta $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ que coincida en su carta afín, la cual llamaremos *parte finita* con el campo (2.8). Posteriormente veremos cómo al retomar el concepto de transformación de monodromía extendiendo la misma de la transversal al campo $\{|x| = r\} \times \mathbb{C}$ a la transversal $\{|x| = r\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, la transformación de monodromía extendida resulta estar en el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$.

Recordemos brevemente que $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es el conjunto $\{(x, z) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \{(0, 0)\}\}$ módulo la relación de equivalencia \sim definida por: (x, z) es equivalente a (x', z') , $(x, z) \sim (x', z')$, si existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $(x, z) = \lambda(x', z')$. Es decir, los puntos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ corresponden a clases de equivalencia inducidas por

esta relación: rectas complejas en \mathbb{C}^2 por el origen a las que se les quita justo este punto.

Esquemáticamente:



A $\mathbb{C}P^1$ se le asigna como atlas estándar:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}P^1} = \{(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)\},$$

donde

$$U_1 = \{[x : y] \in \mathbb{C}P^1 \mid y \neq 0\}$$

$$U_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathbb{C}$$

$$[x : y] \xrightarrow{\phi_1} \frac{x}{y}$$

$$U_2 = \{[x : y] \in \mathbb{C}P^1 \mid x \neq 0\}$$

$$U_2 \xrightarrow{\phi_2} \mathbb{C}$$

$$[x : y] \xrightarrow{\phi_2} \frac{y}{x}$$

Para efectos esquemáticos utilizaremos el hecho de que $\mathbb{C}P^1$ es difeomorfo a \mathbb{P}^1 , la esfera de Riemann:

$$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\},$$

$$\mathcal{A}_{\mathbb{P}^1} = \{(\Omega_1, h_1), (\Omega_2, h_2)\},$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \mathbb{C} \quad \Omega_2 = (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \cup \{\infty\} \\ \Omega_1 \xrightarrow{h_1} \mathbb{C} \\ z \mapsto z \\ \Omega_2 \xrightarrow{h_2} \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{z} \end{aligned}$$

(Aquí estamos pensando que $h_2(\infty) = 0$). Dicho lo anterior, utilizaremos como atlas para $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ el producto cartesiano $\mathcal{A}_{\mathbb{C}P^1} \times \mathcal{A}_{\mathbb{C}P^1}$, es decir:

$$\mathcal{A}_{\mathbb{C}P^1} \times \mathcal{A}_{\mathbb{C}P^1} = \{(V_{11}, \Psi_{11}), (V_{12}, \Psi_{12}), (V_{21}, \Psi_{21}), (V_{22}, \Psi_{22})\},$$

donde $(V_{ij}, \Psi_{ij}) := (U_i \times U_j, \Phi_i \times \Phi_j)$ y $U_k \Phi_k \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}P^1}$. Además, denotaremos por H_{il} al cambio de coordenadas existente entre las cartas (V_{ij}, Ψ_{ij}) y (V_{kl}, Ψ_{kl}) . Por ejemplo:

$$H_{12} : \Psi_{11}^{-1}(V_{11} \cap V_{12}) \longrightarrow \Psi_{12}(V_{11} \cap V_{12}),$$

está definida como $H_{12}(x, z) = (x, \frac{1}{z})$. Así, de manera natural tenemos el encaje:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \\ (x, z) &\longmapsto ([x : 1], [z : 1]). \end{aligned}$$

Comenzaremos la segunda extensión en la carta (V_{11}, Ψ_{11}) definiendo ahí el campo como $v_{11}(x, z)$:

$$\begin{aligned} V_{11} &\xrightarrow{\Psi_{11}} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \xrightarrow{v_{11}} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & (2.19) \\ ([x : 1], [z : 1]) &\longrightarrow (x, z) \longrightarrow (x^k, x^k(P_2(x, x^{-1})z^2 + \dots)). \end{aligned}$$

Nota. Apegándonos formalmente a la definición de campo vectorial, en (2.19) estamos queriendo decir que en el abierto $V_{11} \subseteq \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ definimos:

$$\begin{aligned} V_{11} &\xrightarrow{v_{11}} TV_{11} \\ ([x : 1], [z : 1]) &\longrightarrow (([x : 1], [z : 1]), x^k, x^k(P_2(x, x^{-1})z^2 + \dots)). \end{aligned}$$

pero por razones de espacio y simplicidad estaremos optando en esta segunda extensión por una expresión del tipo (2.19).

Para hacer lo propio en el resto de las cartas utilizaremos los cambios de coordenadas H_{ij} y sus respectivas diferenciales. Hagamos primero la extensión a la carta (V_{12}, Ψ_{12}) usando el campo ya definido en (V_{11}, Ψ_{11}) .

Considérense entonces el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V_{11} & & V_{12} \\ \downarrow \Psi_{11} & & \downarrow \Psi_{12} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{H_{12}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ \downarrow v_{11} & & \downarrow v_{12} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{DH_{12}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \end{array}$$

En este diagrama tenemos:

$$\begin{aligned} H_{12} : \Psi_{11}(V_{11} \cap V_{12}) &\longrightarrow \Psi_{12}(V_{11} \cap V_{12}) \\ (x, z) &\longrightarrow (x, \frac{1}{z}), \end{aligned}$$

por ello,

$$DH_{12}|_{(x,z)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z^2} \end{pmatrix}$$

Entonces, si (ξ_1, η_2) es imagen bajo Ψ_{12} de $([\xi_1 : 1], [1 : \eta_2]) \in V_{12}$, definimos:

$$\begin{aligned} v_{12}(\xi_1, \eta_2) &= DH_{12}|_{H_{12}^{-1}(\xi_1, \eta_2)} (v_{11}(H_{12}^{-1}(\xi_1, \eta_2))) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\eta_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\xi_1^{k+1} \\ \xi_1^k (P_2(\xi_1, \xi_1^{-1})\eta_2^{-2} + \dots) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i\xi_1^{k+1} \\ -\xi_1^k (P_2(\xi_1, \xi_1^{-1}) + P_1(\xi_1, \xi_1^{-1})\eta_2 + P_0(\xi_1, \xi_1^{-1})\eta_2^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observación. Dado que $H_{12}^{-1}(\xi_1, \eta_2) = (\xi_1, \frac{1}{\eta_2})$ y el dominio de H_{12} es $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, falta definir v_{21} en puntos de la forma $(\xi_1, 0)$. Como la idea general es tener una extensión analítica en todo $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, definimos v_{12} en todo V_{12} como:

$$v_{12}(\xi_1, \eta_2) := \begin{cases} DH_{12}|_{H_{12}^{-1}(\xi_1, \eta_2)} (v_{11}(H_{12}^{-1}(\xi_1, \eta_2))) & \text{si } \eta_2 \neq 0; \\ (i\xi_1^{k+1}, -\xi_1^k P_2(\xi_1, \xi_1^{-1})) & \text{si } \eta_2 = 0 \end{cases}$$

Prosigamos con la extensión, ahora en la carta (V_{21}, Ψ_{21}) . Observemos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} V_{11} & & V_{21} \\ \downarrow \Psi_{11} & & \downarrow \Psi_{21} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{H_{21}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ \downarrow v_{11} & & \downarrow v_{21} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{DH_{21}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \end{array}$$

En este diagrama tenemos:

$$\begin{array}{ccc} H_{21} : \Psi_{11}(V_{11} \cap V_{21}) & \longrightarrow & \Psi_{21}(V_{11} \cap V_{21}) \\ (x, z) & \longrightarrow & (\frac{1}{z}, z), \end{array}$$

por ello,

$$DH_{21}|_{(x,z)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, si (η_1, ξ_2) es imagen bajo Ψ_{21} de $([1 : \eta_1], [\xi_2 : 1])$, definimos:

$$\begin{aligned} v_{21}(\eta_1, \xi_2) &= DH_{21}|_{\Psi_{21}^{-1}(\eta_1, \xi_2)}(v_{11}(H_{21}^{-1}(\eta_1, \xi_2))) \\ &= \begin{pmatrix} -\eta_1^{-2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i\eta_1^{-k} + 1 \\ \eta_1^{-k}(P_2(\eta_1^{-1}, \eta_1)\xi_2^2 + \dots) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\eta_1^{-2} & 0 \\ \eta_1^{-k}(P_2(\eta_1^{-1}, \eta_1)\xi_2^2 + P_1(\eta_1^{-1}, \eta_1)\xi_2 + P_0(\eta_1^{-1}, \eta_1)) & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observación. La extensión de la carta (V_{21}, Ψ_{21}) es un poco más complicada que la anterior. Conceptualmente hablando, como $H_{21}^{-1}(\eta_1, \xi_2) = (\frac{1}{\eta_1}, \xi_2)$, falta definir v_{12} para puntos de la forma $(0, \xi_2)$. Si proseguimos como en la extensión hecha a la carta (V_{12}, Ψ_{12}) definiendo:

$$v_{21}(0, \xi_2) = \lim_{(\eta_1, \xi_2) \rightarrow (0, \xi_2)} v_{21}(\eta_1, \xi_2),$$

tendremos un polo de $v_{12}(\eta_1, \xi_2)$, salvo cuando $k = 0$ y el grado de $P_j(x, y)$ en la variable y sea cero. Para solventar estos problemas de indefinición del

campo procederemos de manera análoga a como lo hicimos durante la primera extensión para definir:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= iz^{k+1} & t \in \mathbb{C} \\ \frac{dz}{dt} &= x^k(P_2(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_0(x, x^{-1})) & (t, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Es decir, multiplicaremos a v_{12} a manera de eliminar los polos de éste en los puntos $(0, \xi_2)$ sin afectar al conjunto de sus curvas integrales. Así, definimos:

$$v_{12}(\eta_1, \xi_2) := \eta_1^m(-i\eta_1^{-k+1}, \eta_1^{-k}(P_2(\eta_1^{-1}, \eta_1)\xi_2^2 + P_1(\eta_1^{-1}, \eta_1)\xi_2 + P_0(\eta_1^{-1}, \eta_1))),$$

donde $m = k + \max_{j \in \{0,1,2\}} \{\text{grad}_x P_j(x, y)\}$.

Finalmente completemos la extensión en la carta (V_{22}, Ψ_{22}) :

$$\begin{array}{ccc} & V_{11} & V_{22} \\ & \downarrow \Psi_{11} & \downarrow \Psi_{22} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{H_{22}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \\ & \downarrow v_{11} & \downarrow v_{22} \\ \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{DH_{22}} & \mathbb{C} \times \mathbb{C} \end{array}$$

Aquí,

$$\begin{aligned} H_{22} : \Psi_{11}(V_{11} \cap V_{22}) &\longrightarrow \Psi_{22}(V_{11} \cap V_{22}) \\ (x, z) &\longrightarrow \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{z}\right), \end{aligned}$$

luego,

$$DH_{22}|_{(x,z)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{z^2} \end{pmatrix}.$$

Entonces definimos:

$$v_{22}(\eta_1, \eta_2) := \eta_1^m(-i\eta_1^{-k+1}, -\eta_1^{-k}(P_2(\eta_1^{-1}, \eta_1) + P_1(\eta_1^{-1}, \eta_1)\eta_2 + P_0(\eta_1^{-1}, \eta_1)\eta_2^2)).$$

Donde $m = k + \max_{j \in \{0,1,2\}} \{\text{grad}_x P_j(x, y)\}$. Nótese que aquí se tomó por dada una discusión análoga a la que llevó a la definición de los campos v_{12} y v_{21} . Aquí (η_1, ξ_2) es imagen bajo Ψ_{22} de $([1 : \eta_1], [1 : \eta_2])$, que se encuentra en el abierto V_{22} .

Definición 2.6. La segunda extensión o extensión a $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ de la ecuación de Riccati:

$$\frac{dz}{dt} = P_2(re^{it}, re^{-it})z^2 + P_1(re^{it}, re^{-it})z + P_0(re^{it}, re^{-it}),$$

se define como el campo de direcciones en $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ generado en cada carta (V_{kl}, Ψ_{kl}) respectivamente por:

$$v(x, z) := \begin{cases} v_{11}(x, z) = (ix^{k+1}, x^k(P_2(x, x^{-1})z^2 + \dots)) & \text{si } k = l = 1; \\ v_{12}(x, z) = (ix^{k+1}, -x^k(P_0(x, x^{-1})z^2 + \dots)) & \text{si } k = 1, l = 2; \\ v_{21}(x, z) = x^m(-ix^{-k+1}, x^{-k}(P_2(x^{-1}, x)z^2 + \dots)) & \text{si } k = 2, l = 1; \\ v_{22}(x, z) = -x^m(-ix^{-k+1}, x^{-k}(P_0(x^{-1}, x)z^2 + \dots)) & \text{si } k = l = 1; \end{cases} \quad (2.20)$$

donde se toma $(x, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ procediente de la carta $(V_{kl}, \Psi_{kl}) \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1}$ y $m = \max_{j \in \{0,1,2\}} \{\text{grad}_x P_j(x, y)\}$.

Observación. Durante la construcción de $v(x, z)$ siempre tomamos como referencia al campo v_{11} , es decir, a la primera extensión que se hizo de la ecuación de Riccati a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Basados en esto y en el proceso de construcción no es difícil ver que $v(x, z)$ es un campo de direcciones analítico en $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Así el conjunto de soluciones de v define una foliación \mathcal{F} con singularidades \mathcal{F} de $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$.

De la misma forma que hicimos en la primera extensión a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la ecuación de Riccati (2.1) y con la perspectiva utilizada en la segunda extensión del campo (2.8) a $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$, podemos definir para cada $\xi \in S^1 \times \mathbb{C}P^1$ y cada $r \in (0, \infty)$, a la curva:

$$\Gamma_\xi := \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^r,$$

donde $\mathcal{C}^r := \{|x| = r\} \times \mathbb{C}P^1$.

Es importante notar que, a diferencia de las curvas $\Gamma_\xi = \{|x| = r\} \times \mathbb{C}$ propias de la primera extensión a $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, en este caso podemos escoger datos iniciales $\xi = ([1 : 1], [1 : 0])$ y así obtener una $\Gamma_\xi = S^1 \times \mathbb{C}P^1$ cuya segunda coordenada pase por el punto al infinito.

Proposición 2.5. Sea $\Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^1$ donde $\xi = ([1 : 1], [1 : 0])$ en $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Si $\Gamma_\xi(t) = (e^{it}, z(t))$ es una parametrización de $\Psi_{12}(\Gamma_\xi \cap V_{12})$ se tiene que

$(t, z(t))$ es una parametrización de la curva integral del campo inducido⁹ por la ecuación de Riccati:

$$\frac{dz}{dt} = -(P_0(e^{it}, e^{-it})z^2 + P_1(e^{it}, e^{-it})z + P_2(e^{it}, e^{-it})),$$

con condición inicial $(0, z(0))$.

Prueba. En el marco general de la prueba utilizaremos las coordenadas $\Psi_{12}(V_{12})$. Así si $p \in \Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^1$, entonces:

$$T_p \mathcal{L}_\xi \cong \{ \lambda(ix^{k+1}, -x^k(P_0(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_2(x, x^{-1}))) \mid \lambda \in \mathbb{C} \},$$

donde, $\Psi_{12}(p) = (x, z)$. Además:

$$T_p \mathcal{C} \cong \{ (\lambda_1 ix, \lambda_2 + i\lambda_3) \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \}.$$

Tomemos ahora $(x_0, z_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ arbitrario. Si escogemos

$$\lambda = -ix_0 x_{-(k+1)} \quad \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 + i\lambda_3 = z_0 + \lambda x^k (P_0(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_2(x, x^{-1})),$$

obtenemos, como en la prueba de la propiedad 2, que las variedades \mathcal{L}_ξ y \mathcal{C}^1 se intersectan transversalmente. Así, tendremos que:

$$\begin{aligned} 4 &= \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \\ &= \dim_{\mathbb{R}}(T_p \mathcal{L}_\xi) + \dim_{\mathbb{R}}(T_p \mathcal{C}^1) - \dim_{\mathbb{R}}(T_p \mathcal{L}_\xi \cap T_p \mathcal{C}^1), \end{aligned}$$

luego,

$$\dim_{\mathbb{R}}(T_p \mathcal{L}_\xi \cap T_p \mathcal{C}^1) = 1.$$

Así, como en principio $T_p \Gamma_\xi \subseteq T_p \mathcal{L}_\xi \cap T_p \mathcal{C}^1$ y Γ_ξ es una curva real, tenemos que necesariamente:

$$T_p \Gamma_\xi = T_p \mathcal{L}_\xi \cap T_p \mathcal{C}^1.$$

Esta igualdad, sumada a la descripción de los espacios tangentes de la solución \mathcal{L}_ξ y el cilindro \mathcal{C}^1 , implica, si (η_1, η_2) está en $T_p \mathcal{L}_\xi$, que $\eta_1 = \lambda x^{k+1}$. Así, $\lambda = \lambda_1 x^{-k}$, y por tanto $\eta_1 = \lambda_1 ix$. De esta manera podemos concluir que:

$$(\eta_1, \eta_2) = \lambda_1 (ix, -(P_0(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_2(x, x^{-1}))),$$

⁹Como en la ecuación (2.2)

obteniendo entonces:

$$T_p \Gamma_\xi = \{ \mu(ix, -(P_0(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_2(x, x^{-1}))) \mid \mu \in \mathbb{R} \}.$$

Por esta última igualdad tenemos que si $\Gamma_\xi(t) = (e^{it}, z(t))$ es una parametrización de Γ_ξ entonces $(t, z(t))$ es una parametrización de la curva integral con dato inicial $(0, z(0)) = (0, z_0)$ del campo asociado a la ecuación de Riccati (2.1), ya que en cada punto de ésta la recta tangente en cuestión es precisamente $V(t, z(t))$, como se estableció en (2.3).

$$T_p \Gamma_\xi \cong \{ \lambda_1(ix, -(P_0(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_2(x, x^{-1}))) \mid \lambda_1 \in \mathbb{R} \}.$$

con lo que concluye nuestra prueba.

Observación. Si en la ecuación de Riccati (2.1) hacemos el cambio de variable $y = \frac{1}{z}$ obtenemos $\frac{dy}{dt} = -\frac{1}{z^2} \frac{dz}{dt}$. De manera que:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -y^2 \left(\frac{P_2(e^{it}, e^{-it})}{y^2} + \frac{P_1(e^{it}, e^{-it})}{y} + P_0(e^{it}, e^{-it}) \right) \\ &= -(P_0(e^{it}, e^{-it})y^2 + P_1(e^{it}, e^{-it})y + P_2(e^{it}, e^{-it})). \end{aligned}$$

En conexión con la proposición (2.5), estamos teniendo que curvas Γ_ξ correspondientes a datos iniciales del tipo $([1 : 1], [1 : 0])$ se corresponden con soluciones de la ecuación de Riccati que pasan por el punto al infinito. En la siguiente sección veremos que al extender a $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$ el concepto de transformación de monodromía, obtenemos que estas transformaciones resultan ser transformaciones de Möbius.

2.7. Más sobre la monodromía

Toca ahora estudiar la transformación de monodromía en la variedad compacta $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Para poder determinar la naturaleza de las transformaciones de monodromía, determinaremos, con ayuda de una proposición auxiliar, la forma general de las soluciones de la ecuación de Riccati (2.1) y utilizaremos el hecho de que ahora trabajamos en la variedad compacta $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. El razonamiento es el siguiente: Sea $\xi \in \{1\} \times \mathbb{CP}^1$ y $\Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap \mathbb{C}$. Si:

$$\Gamma_\xi(t) = (e^{it}, z(t)),$$

es una parametrización de Γ_ξ , entonces,

$$\Delta(\xi) = (1, z(2\pi)), \quad (2.21)$$

es la manera natural de extender la definición que teníamos para Δ en $\{1\} \times \mathbb{C} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ a $\{1\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. (Ver sección (2.4)).

Proposición 2.6. Si $y(t)$ es una solución a la ecuación diferencial de segundo orden:

$$P_2(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + [P_2'(t) + P_2(t)P_1(t)] \frac{dy}{dt} + [P_2^2(t)P_0(t)] y = 0, \quad (2.22)$$

con $(y(0), y'(0)) = (y_0, y'_0)$, entonces en toda t donde $P_2(t)y(t) \neq 0$ se tiene que la función:

$$z(t) = -\frac{y'(t)}{P_2(t)y(t)}$$

es solución de la ecuación de Riccati (2.1) con $z(0) = -\frac{y'(0)}{P_2(0)y(0)}$. Aquí $P_j(t)$ es abreviación de $P_j(e^{it}, e^{-it})$, polinomio trigonométrico que corresponde al coeficiente del término de orden j (en z) de la ecuación de Riccati (2.1).

La prueba de esta proposición y más detalles sobre la manera como se llega a esta ecuación lineal pueden encontrarse en el apéndice.

Observación. Si para alguna t sucede que $P_2(t)y(t) = 0$, no tendríamos problema al considerar $z(t)$ como parametrización de la segunda coordenada de la curva Γ_ξ ya que estamos trabajando en la variedad $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. A lo más tendríamos que reescribir las ecuaciones involucradas en las coordenadas (V_{12}, Ψ_{12}) .

Así, pasemos al resultado principal de esta sección.

Proposición 2.7. Sea $\Delta : \{1\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \{1\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ la transformación de monodromía asociada al campo $v(x, z)$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Si $P_2(0) \neq 0$, entonces $\Delta(1, z) = (1, \frac{az+b}{cz+d})$ con $ad - bc \neq 0$ y $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{C}$.

Prueba. Trabajaremos primero en las coordenadas $\Psi(V_{11})$. Tomemos entonces en estas coordenadas el punto $(1, z_0)$. Para poder dar una parametrización de $\Gamma_{(1, z_0)}$ habrá que encontrar una solución $z(t)$ de (2.22)

tal que $z(0) = z_0$. Para ello notemos que por ser ésta una ecuación lineal de segundo orden, su solución general está dada por:

$$\Psi(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t),$$

donde $\beta = \{y_1(t), y_2(t)\}$ forman una base para el espacio de soluciones de (2.22). Sin perder generalidad, podemos suponer que los miembros de esta base satisfacen las condiciones iniciales $(y_1(0), y_1'(0)) = (1, 0)$ y $(y_2(0), y_2'(0)) = (0, 1)$. Luego, encontrar tal $z(t)$ equivale a resolver para, c_1 y c_2 , la ecuación:

$$-\frac{c_2}{P_2(0)c_1} = z_0,$$

dado que:

$$z(t) = -\frac{1}{P_2(t)} \left[\frac{c_1 y_1'(t) + c_2 y_2'(t)}{c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)} \right].$$

Una posible elección es $c_1 = 1$ y $c_2 = -z_0 P_2(0)$, de manera que la $z(t)$ requerida es:

$$z(t) = -\frac{1}{P_2(t)} \left[\frac{y_1'(t) - z_0 P_2(0) y_2'(t)}{y_1(t) + z_0 P_2(0) y_2(t)} \right].$$

En virtud de lo determinado en (2.22) tenemos:

$$\Delta(1, z_0) = \left(1, -\frac{1}{P_2(2\pi)} \left[\frac{y_1'(2\pi) - z_0 P_2(0) y_2'(2\pi)}{y_1(2\pi) + z_0 P_2(0) y_2(2\pi)} \right] \right) \quad (2.23)$$

Utilizando el hecho de que $P_2(0) = P_2(2\pi)$, tenemos,

$$\begin{aligned} a &= P_2(0) y_2'(2\pi), & b &= -y_1'(2\pi), \\ c &= P_2^2(0) y_2(2\pi), & d &= P_2(0) y_1(2\pi), \end{aligned} \quad (2.24)$$

podemos reescribir (2.23) como:

$$\Delta(1, z_0) = \left(1, \frac{az_0 + b}{cz_0 + d} \right).$$

Notemos que, aunque el punto $([1 : 1], [0 : 1])$ no esté en las coordenadas $\Psi(V_{11})$, $\Delta(\Psi_{12}([1 : 1], [0 : 1]))$ está bien definido. De hecho,

$$\Delta(\Psi_{12}([1 : 1], [0 : 1])) = \frac{a}{c}$$

Observaciones.

- Por ser

$$\bar{P}_2(t) = \sum_{k+l=0}^{m_2} a_{kl} e^{i(k-l)t},$$

sucede que $\bar{P}_2(0) = \bar{P}(2\pi)$, de ahí las expresiones para los coeficientes de Γ .

- Pedir que $\bar{P}_2(0) \neq 0$, equivale a pedir que los coeficientes a_{kl} no estén en el plano que pasa por el origen

$$\sum_{k+l=0}^{m_2} z_{kl} = 0,$$

En términos de la medida de Lebesgue, el conjunto de coeficientes que está en dicho plano, tiene medida cero.

- Al resolver la ecuación $z_0 \bar{P}_2(0) c_1 + c_2 = 0$, para c_1 y c_2 , arbitrariamente escogimos $c_1 = 1$ y $c_2 = -z_0 \bar{P}_2(0)$. Si en lugar de ello, hubiéramos tomado $c_1 = k$, k en \mathbb{C}^* , necesariamente $c_2 = -z_0 \bar{P}_2(0) k$ y entonces:

$$z(t) = \frac{y_1'(t)k + kz_0 \bar{P}_2(0) y_2'(t)}{y_1(t)k - kz_0 \bar{P}_2(0) y_2(t)},$$

lo que implica que:

$$\Delta(1, z) = \frac{azk + bk}{czk + dk} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

- Calculando:

$$\begin{aligned} ad - bc &= \bar{P}_2^2(0)[y_2'(2\pi)y_1(2\pi) - y_1'(2\pi)y_2(2\pi)] \\ &= \bar{P}_2^2(0)[W[y_1, y_2](2\pi)], \end{aligned}$$

donde $W[y_1, y_2](t)$ denota al *Wronskiano* de $[y_1(t), y_2(t)]$. De la teoría clásica de ecuaciones diferenciales ordinarias, consultable en [Bra], se tiene que el Wronskiano de una base del espacio de soluciones de una ecuación diferencial ordinaria de orden n debe ser distinto de cero en su dominio. Aunado esto a la hipótesis de que $\bar{P}_2(0) \neq 0$ tenemos que $ad - bc \neq 0$, es decir, Δ es lo que se conoce como *transformación no singular*.

En la siguiente sección haremos un breve recorrido por los principales resultados de los elementos del grupo $PSL(2, \mathbb{C})$. Estos resultados nos permitirán entender mejor las dinámicas dictadas por la ecuación de Riccati (2.1).

2.8. Las transformaciones de Möbius

En la presente sección enunciaremos y probaremos los principales resultados concernientes a los elementos del grupo $PSL(2, \mathbb{C})$. El objetivo principal es dar una clasificación de los mismos que sirva para entender y clasificar los distintos tipos de dinámica que induce en el plano el tipo de ecuaciones de Riccati (2.1).

Entendemos por *transformación de Möbius no singular* a la función holomorfa definida de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ mediante la asignación:

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & z \neq \infty \\ \frac{a}{c} & z = \infty \end{cases} \quad (2.25)$$

Donde $\{a, b, c, d\} \subseteq \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Veamos ahora algunas de las propiedades que presentan este tipo de transformaciones. Por simplicidad en lugar de la expresión (2.25), escribiremos $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$.

Propiedad 3. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius. Entonces,

- Si $c \neq 0$, se tiene que $\frac{az+b}{cz+d} = (\Phi_4 \circ \Phi_3 \circ \Phi_2 \circ \Phi_1)(z)$, donde,

$$\begin{aligned} \Phi_j : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1, \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ z &\xrightarrow{\Phi_1} z + \frac{d}{c}, & z &\xrightarrow{\Phi_2} \frac{1}{z}, \\ z &\xrightarrow{\Phi_3} -\frac{ad-bc}{c^2}z, & z &\xrightarrow{\Phi_4} z + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

- Si $c = 0$, se tiene que $\frac{a}{c}z + \frac{b}{d} = (\Phi_5 \circ \Phi_6)(z)$, donde,

$$z \xrightarrow{\Phi_5} \frac{a}{d}z, \quad z \xrightarrow{\Phi_6} z + \frac{b}{d}$$

y necesariamente $d \neq 0$.

La prueba de esta propiedad se deja al lector pues se verifica al substituir las correspondientes expresiones para Φ_1, Φ_2, Φ_3 y Φ_4 . Lo importante aquí es que podemos factorizar a cualquier transformación de Möbius como producto de funciones cuyas propiedades son más sencillas de entender.

Tanto Φ_1 como Φ_4 en el primer caso y Φ_2 en el segundo son traslaciones. Φ_3 y Φ_1 en el primer y segundo caso respectivamente son expansiones seguidas de rotaciones y, finalmente, Φ_2 en el primer caso resulta una inversión con respecto de la circunferencia unitaria con centro en el origen. Supondremos un conocimiento general por parte del lector en lo que respecta a las propiedades básicas de la inversión compleja, es decir, de las propiedades básicas de la función:

$$z \mapsto \frac{q\bar{z} + (R^2 - |q|^2)}{\bar{z} - q},$$

misma que representa la inversión respecto de una circunferencia C de radio R y centro q . Algunas de estas propiedades básicas son la preservación de rectas, circunferencias; la anticonformalidad o la invariancia de familias de circunferencias ortogonales a C . Se recomienda ampliamente la lectura del tercer capítulo de [Nee] donde con mayor precisión se estudian en estos detalles.

Propiedad 4. *El conjunto de transformaciones de Möbius no singulares es un grupo¹⁰ bajo la composición de funciones.*

Prueba. Tomemos dos transformaciones de Möbius no singulares:

$$T_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} \quad y \quad T_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2},$$

y notemos que:

$$(T_1 \circ T_2)(z) = \frac{(a_2b_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)} \quad (2.26)$$

es en efecto una transformación de Möbius no singular. La transformación:

$$(T_1)^{-1}(\xi) = \frac{d_1\xi - b_1}{-c_1\xi + a_1},$$

es la inversa de la transformación T_1 ya que, en virtud de (2.26),

$$(T_1^{-1} \circ T_1)(z) = z,$$

con lo que la propiedad queda demostrada.

¹⁰De hecho un grupo de Lie complejo

Es de notarse que al definir la aplicación del espacio vectorial de matrices de 2×2 con coeficientes complejos al grupo de transformaciones de Möbius:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

entonces,

$$T^{-1}(T) = \{k \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{C}^*\}$$

Es decir, la matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ no determina a la transformación T . Es por ello que distinguiremos aquellas donde $ad - bc = 1$, o lo que es lo mismo, $k^2 = (ad - bc)^{-1}$.

Definición 2.7. Al grupo¹¹ formado por transformaciones de Möbius tales que $ad - bc = 1$ se le denomina grupo proyectivo especial lineal y se le denota por $PSL(2, \mathbb{C})$. También se dice, cuando $ad - bc = 1$, que la transformación correspondiente está normalizada.

A continuación damos una clasificación de los elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$ tomando como criterio su número de puntos fijos. Tomemos así $T(z) \in PSL(2, \mathbb{C})$. Para determinar sus puntos fijos habrá que resolver la siguiente ecuación para z :

$$\frac{az + b}{cz + d} = z, \quad (2.27)$$

o equivalentemente,

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0,$$

cuyas raíces resultan ser:

$$r_{\pm} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(d - a)^2 + 4bc}}{2c}. \quad (2.28)$$

Si escogemos una transformación de Möbius normalizada podemos reescribir (2.28) como:

$$r_{\pm} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}.$$

Así, tenemos las siguientes posibilidades:

¹¹La prueba de que en efecto se trata de un grupo es análoga a la de la propiedad 4

- Si $c \neq 0$ y $(a+d)^2 \neq 4$, dos puntos fijos en \mathbb{C} .
- Si $c \neq 0$ y $(a+d)^2 = 4$, un único punto fijo en \mathbb{C} .
- Si $c = 0$ tenemos que la transformación T es de la forma:

$$z \mapsto a^2 z + ba.$$

Si $b = 0$, la transformación se reduce a una rotación seguida de una expansión, pensando que $\frac{a}{d} = \rho e^{i\theta}$. Ergo, los únicos¹² puntos fijos resultan ser $z = 0$ y $z = \infty$.

Si $b \neq 0$ y $a \neq d$ tenemos como puntos fijos $z = \frac{b}{d-a}$ y $z = \infty$.

Si por el contrario $a = d$, el único punto fijo es $z = \infty$.

Agotadas las posibilidades, demos paso a la propiedad más importante de las transformaciones en $PSL(2, \mathbb{C})$ en relación con el proceso de entendimiento del retrato fase de un campo determinado por una ecuación de Riccati del tipo (2.1).

Propiedad 5. *Toda transformación de Möbius normalizada es conjugada, por elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$, a una transformación del tipo:*

$$z \mapsto \rho e^{i\theta} z \quad \text{ó} \quad z \mapsto z + B \quad B \in \mathbb{C}^*.$$

Prueba. La prueba se hará por casos sobre el número de puntos fijos de la transformación T . Recordemos que dos miembros T_1 y T_2 de $PSL(2, \mathbb{C})$ se conjugan vía un tercero H en el grupo si:

$$T_1(z) = (H \circ T_2 \circ H^{-1})(z). \quad (2.29)$$

Sucede entonces que estos dos miembros de $PSL(2, \mathbb{C})$ conjugados por H tienen el mismo número de puntos fijos. Para ver esto, tomemos p_i punto fijo de T_2 y sea $\eta_i = H(p_i)$ y notemos que:

$$\begin{aligned} T_1(\eta_i) &= (H \circ T_2 \circ H^{-1})(\eta_i) \\ &= (H \circ T_2)(p_i) \\ &= H(p_i) \\ &= \eta_i. \end{aligned}$$

¹²Salvo el caso excepcional $a = d$, donde $T(z) = z$.

Por tanto, el conjunto de puntos fijos de T_2 está contenido en el correspondiente de T_1 . Para obtener la otra contención basta notar que de (2.29) se desprende:

$$T_2(z) = (H^{-1} \circ T_1 \circ H)(z).$$

Consideremos ahora los siguientes casos:

A) Cuando T tiene dos puntos fijos, p_+ y p_- en $\mathbb{C}P^1$. Consideremos primero el caso en que p_+ y p_- están en \mathbb{C} . Tomemos ahora el miembro de $PSL(2, \mathbb{C})$ que manda p_+ a cero y p_- al punto al infinito:

$$H(z) = \frac{az - ap_+}{dc - dp_-}, \quad \text{con} \quad -adp_- + adp_+ = 1.$$

Luego definiendo:

$$\tilde{T}(\eta) = (H \circ T \circ H^{-1})(\eta),$$

tendremos que:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(0) &= (H \circ T \circ H^{-1})(0), & \tilde{T}(\infty) &= (H \circ T \circ H^{-1})(\infty) \\ &= (H \circ T)(p_+) & &= (H \circ T)(p_-) \\ &= H(p_+) & &= H(p_-) \\ &= 0 & &= \infty; \end{aligned}$$

es decir, \tilde{T} tiene como puntos fijos a cero y al punto al infinito. Ergo, si:

$$\tilde{T}(\eta) = \frac{\bar{a}\eta + \bar{b}}{\bar{c}\eta + \bar{d}}, \quad (2.30)$$

necesariamente debe suceder que $\bar{b} = \bar{c} = 0$. Dado que existe $\theta \in (0, 2\pi]$ y $\rho \in \mathbb{R}^*$ tales que $\bar{a}\bar{d}^{-1} = \rho e^{i\theta}$, entonces,

$$\tilde{T}(\eta) = \rho e^{i\theta} \eta.$$

Por otro lado, cuando se tiene que $p_+ = \infty$ y $p_- = \xi$, basta considerar:

$$F(z) = z - \xi,$$

de manera que $\tilde{T}(\eta) = (F \circ T \circ F^{-1})(\eta)$ tiene como puntos fijos a cero y el punto al infinito. Por tanto \tilde{T} es de la forma:

$$\tilde{T}(\eta) = \rho e^{i\theta} \eta.$$

B) Tomemos ahora el caso en que T tiene un único punto fijo p en $\mathbb{C}\mathbb{P}$. Consideremos primero el caso cuando este punto fijo está en \mathbb{C} . En $PSL(2, \mathbb{C})$, consideremos la transformación H que lleva p en el punto al infinito, esto es,

$$H(z) = \frac{1}{z - p}.$$

Siguiendo el mismo razonamiento definimos,

$$\tilde{T}(\eta) = (H \circ T \circ H^{-1})(\eta),$$

luego,

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\infty) &= (H \circ T \circ H^{-1})(\infty) \\ &= (H \circ T)(p) \\ &= H(p) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Como bajo conjugaciones en $PSL(2, \mathbb{C})$ se preserva el número de puntos fijos, podemos afirmar que el punto al infinito es el único punto fijo de $\tilde{T}(z)$. Así, retomando la expresión (2.30) tenemos que necesariamente $\bar{c} = 0$. Si sucediera que $\bar{a} \neq \bar{d}$, entonces $z = -\bar{b}\bar{d}^{-1}(\bar{a}\bar{d}^{-1} - 1)^{-1}$ sería punto fijo de $\tilde{T}(z)$ distinto al punto al infinito. Ergo, haciendo $B = \frac{b}{d}$, tenemos que en efecto:

$$\tilde{T}(\eta) = \eta + B,$$

donde $B \neq 0$, pues de lo contrario cero sería también punto fijo de $\tilde{T}(\eta)$.

Finalmente, si el único punto fijo es el punto al infinito, por la discusión tenida durante la prueba basta tomar $H(z) = z$ para llegar a que la transformación en cuestión es del tipo $z \mapsto z + B$. Con esto termina la prueba.

Corolario. Si $T \in PSL(2, \mathbb{C})$ tiene más de dos puntos fijos entonces T es la identidad.

Prueba. Los puntos fijos de T son soluciones de la ecuación de segundo grado:

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0.$$

Entonces, si T tiene más de dos puntos fijos, necesariamente $c = d - a = b = 0$. Luego, $a = d$, por lo que podemos concluir que $T(z) = z$.

Como consecuencia de la propiedad 5 y este corolario podemos suponer sin pérdida de generalidad que todo miembro de $PSL(2, \mathbb{C})$ es de la forma:

$$z \mapsto \rho e^{i\theta} z \quad z \mapsto z + B.$$

Definición 2.8. Sea $T \in PSL(2, \mathbb{C})$, entonces:

- Si $T(z) = \rho$ es conjugada a $e^{i\theta} z$ diremos que T es:
 - De tipo elíptico si $\rho = 1$ y $\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$, $\alpha \neq 0$
 - De tipo hiperbólico si $\rho \neq 1$ y $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$
 - De tipo loxodrómico si $\rho \neq 1$ y $\theta \equiv \alpha \pmod{2\pi}$, $\alpha \neq 0$.
- Si $\tilde{T}(z) = z + B$ diremos que $T(z)$ es de tipo parabólico.

Observaciones. 1. Sean $T_1, T_2 \in PSL(2, \mathbb{C})$. Definimos la relación:

$T_1 \sim T_2$ si y sólo si existe $H \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que $T_2 = (H \circ T_1 \circ H^{-1})$ Entonces esta relación es:

- a) Reflexiva: pues $T_1(z) \sim T_1(z)$ tomando $H(z) = z$.
- b) Simétrica : pues $T_2(z) = (H \circ T_1 \circ H^{-1})(z)$ implica $T_1(z) = (H^{-1} \circ T_2 \circ H)(z)$
- c) Transitiva : pues $T_2(z) = (H_1 \circ T_1 \circ H_1^{-1})(z)$ y $T_3(z) = (H_2 \circ T_2 \circ H_2^{-1})(z)$ implica $T_3(z) = ((H_2 \circ H_1) \circ T_1 \circ (H_1^{-1} \circ H_2^{-1}))(z)$.

De esta manera, al considerar $PSL(2, \mathbb{C})$ módulo esta relación de equivalencia, obtenemos una buena clasificación de los elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$.

2. Si la transformación de monodromía:

$$\Delta : \{1\} \times \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \{1\} \times \mathbb{C}P^1,$$

correspondiente a la segunda extensión de la ecuación de Riccati (2.1) es:

- a) De tipo elíptico con $\theta = \frac{2\pi p}{q}$, $(p : q) = 1$, entonces, por tratarse de una rotación por θ , tenemos que toda solución¹³ de la ecuación de Riccati (2.1) es periódica de periodo $2\pi q$; en este caso se tiene que:

$$\Delta^q(1, z) = (1, e^{i\frac{2\pi p}{q}} z) = (1, z).$$

Además al estar Δ en el grupo $PSL(2, \mathbb{C})$, Δ^q también lo está.

¹³Distinta de las correspondientes a datos iniciales $z = 0$ y $z = \infty$.

b) De tipo hiperbólico o loxodrómico con

▪ $\rho > 1$, entonces para todo z en \mathbb{C}^* ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^n(1, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1, \rho^n e^{in\theta} z) = (1, \infty)$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \Delta^n(1, z) = \lim_{n \rightarrow -\infty} (1, \rho^n e^{in\theta} z) = (1, 0).$$

▪ $\rho < 1$, entonces para todo z en \mathbb{C}^* ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^n(1, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1, \rho^n e^{in\theta} z) = (1, 0)$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} \Delta^n(1, z) = \lim_{n \rightarrow -\infty} (1, \rho^n e^{in\theta} z) = (1, \infty).$$

Igualmente al caso anterior, las únicas soluciones periódicas son las correspondientes a los datos iniciales $z = 0$ y $z = \infty$. Además éstas son de periodo uno.

c) De tipo parabólico, entonces para todo z en \mathbb{C} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta^n(1, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1, z + nB) = \lim_{n \rightarrow \infty} = (1, \infty),$$

y, como en casos anteriores, por ser $z = \infty$ el único punto fijo de Δ , la solución correspondiente a dicho dato inicial resulta periódica de periodo uno.

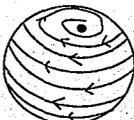
Esquemáticamente:



Elíptica



Hiperbólica



Loxodrómica



Parabólica

3. Consideremos el desarrollo de Taylor en torno al 0 de una transformación de Möbius normalizada que no tenga al origen como polo:

$$\begin{aligned} T(z) &= T(0) + \frac{dT}{dz}(0)z + \frac{1}{2!} \frac{d^2T}{dz^2}(0)z^2 + \dots \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 z + \frac{\alpha_2 z^2}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Como:

$$T(0) = \frac{b}{d} \quad T'(0) = \frac{1}{d^2} \quad T''(0) = -\frac{2c}{d^3},$$

obtenemos entonces las siguientes igualdades:

$$\alpha_0 = \frac{b}{d} \quad \alpha_1 = \frac{1}{d^2} \quad \alpha_2 = -\frac{2c}{d^3};$$

y con ellas:

$$\begin{aligned} a &= \pm \alpha_1^{-\frac{1}{2}} \pm \alpha_0 \alpha_2 \alpha_1^{-\frac{3}{2}} & b &= \pm \alpha_1^{-\frac{1}{2}} \alpha_0 \\ c &= \pm \alpha_2 \alpha_1^{-\frac{3}{2}} & d &= \pm \alpha_1^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Es decir, dados los tres primeros coeficientes de la serie de Taylor en torno al 0 de una transformación de Möbius normalizada que no tenga al origen como polo, podemos determinar, según la clasificación antes mencionada, su tipo.

Nota. Si consideramos el desarrollo de Taylor de una transformación de Möbius no singular normalizada en una vecindad de alguno de sus puntos fijos, se puede seguir un razonamiento análogo al anterior para concluir que basta conocer los tres primeros coeficientes de dicho desarrollo para determinar el tipo de transformación con el que estamos trabajando.

2.9. Curvas periódicas finitas y sus invariantes

Para terminar este capítulo estudiaremos, en esta sección, la manera como se relacionan localmente las transformaciones de monodromía:

$$\{1\} \times \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{\Delta} \{1\} \times \mathbb{C}P^1$$

$$\{r\} \times \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{\Delta_r} \{r\} \times \mathbb{C}P^1,$$

para valores del parámetro r cercanos a 1. Posteriormente, con este estudio determinaremos invariantes de la familia de curvas:

$$\Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^r, \quad 0 < r < \infty,$$

donde ξ está en $\mathcal{C}^{r_0} = \{|x| = r_0\} \times \mathbb{C}P^1$ para alguna r_0 en $(0, \infty)$ y \mathcal{L}_ξ es la hoja de la foliación \mathcal{F} correspondiente al dato inicial ξ . A pesar de haber introducido en la sección anterior herramienta teórica apropiada para el estudio de la dinámica del campo $v(x, z)$ (2.20) en vecindades de $x = \infty$ ó $z = \infty$, nos restringiremos, por el momento, al estudio de curvas fuera de dichas vecindades. Explícitamente, si consideramos las proyecciones canónicas:

$$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{\Pi_1} \mathbb{C}P^1$$

$$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \xrightarrow{\Pi_2} \mathbb{C}P^1,$$

a la primera y segunda coordenada respectivamente, estaremos trabajando con curvas Γ_ξ que no intersectan a las "secciones al infinito":

$$S_1 := \Pi_1^{-1}(\{1 : 0\}) \quad S_2 := \Pi_2^{-1}(\{1 : 0\}).$$

Definición 2.9. Sea ξ en $\{r_0\} \times \mathbb{C}P^1$, $0 < r_0 < \infty$. Diremos que la curva:

$$\Gamma_\xi^{r_0} = \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^{r_0}$$

es *periódica finita* si $\Gamma_\xi^{r_0}$ es compacta y $\Gamma_\xi^{r_0} \cap S_2^\infty = \emptyset$. Aquí \mathcal{L}_ξ es la hoja de la foliación \mathcal{F} correspondiente al dato inicial ξ y $\mathcal{C}^{r_0} = \{|x| = r_0\} \times \mathbb{C}P^1$.

Cabe entonces preguntarse, de tener $\Gamma_\xi^{r_0}$ periódica finita con periodo k , si para r vecina a r_0 , se preservan la periodicidad, finitud y periodo en la familia de curvas:

$$\Gamma_\xi^r = \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^r, \quad 0 < r < \infty.$$

Para responder a dicha cuestión, comenzaremos analizando, al menos localmente y en su parte finita, cómo se relacionan las transformaciones de monodromía:

$$\begin{aligned} \{r_1\} \times \mathbb{C}P^1 &\xrightarrow{\Delta_{r_1}} \{r_1\} \times \mathbb{C}P^1 \\ \{r_2\} \times \mathbb{C}P^1 &\xrightarrow{\Delta_{r_2}} \{r_2\} \times \mathbb{C}P^1, \end{aligned}$$

para r_1 y r_2 suficientemente cercanas.

Proposición 2.8. *Para toda ξ en $\{\{r_1\} \times \mathbb{C}P^1\} \setminus S_2^\infty$ tal que $\Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^{r_1}$ es periódica y r_2 suficientemente cercana a r_1 , existe, para cada $\eta \in \eta^{14} \{\Delta_{r_1}^k(\xi)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ una vecindad $B_\epsilon(\eta) \subseteq \{r_1\} \times \mathbb{C}P^1$ de η y una función analítica e invertible:*

$$B_\epsilon(\eta) \xrightarrow{H_{r_2}^1} \{r_2\} \times \mathbb{C}P^1$$

tal que

$$\Delta_{r_2} = (H_{r_2}^{1+1} \circ \Delta_{r_1} \circ (H_{r_2}^1)^{-1}).$$

Aquí,

$$H_{r_2}^{1+1} : B_\epsilon'(\Delta_{r_1}(\eta)) \rightarrow \{r_2\} \times \mathbb{C}P^1$$

y estamos suponiendo que $\eta = \Delta_{r_1}^j(\xi)$.

Prueba. La estructura general de la prueba consiste en definir la función H_{r_2} , probar su analiticidad y, en el proceso de dicha prueba, obtendremos la invertibilidad de ésta y el que conjugue localmente las transformaciones Δ_{r_1} y Δ_{r_2} . Sin perder generalidad supondremos que $r_1 = 1$ y $r_2 = r$ es cercano a 1.

Tomemos entonces ξ en $\{\{r_1\} \times \mathbb{C}P^1\} \setminus S_2^\infty$, de manera que la curva $\Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^1$ resulte periódica finita. Notemos que en el cilindro $\{|x| = r\} \times \mathbb{C}P^1$, $0 < r < \infty$, el campo $v(x, z)$ tiene siempre su primera coordenada distinta de cero. Es por ello que, si tomamos $p \in \mathcal{L}_\xi \cap \{\mathcal{C} \setminus S_2^\infty\}$,

¹⁴Aquí $\Delta_{r_1}^k(\xi)$ denota la k -ésima iteración de la transformación de monodromía Δ_{r_1} , aplicada al punto ξ

podemos, en una vecindad en $\{z = 0\} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de $\Pi_1(p)$, parametrizar \mathcal{L}_ξ por medio de la variable x :

$$\mathcal{L}_\xi(x) := (x, p + a_1(x - \Pi_1(p)) + \dots).$$

Ahora sí, definamos para $r > 1$ (el caso $r < 1$ es análogo) suficientemente¹⁵ cercana a uno:

$$B_\epsilon(\xi) \xrightarrow{H_r^0} \{r\} \times \mathbb{C}$$

$$(1, z) \longmapsto (\Pi_1|_{\mathcal{L}_{(1,z)} \cap \tilde{V}_\delta(\xi)})^{-1}(r)$$

Aquí, $B_\epsilon(\xi) \subseteq \{1\} \times \mathbb{C}$ es una vecindad de ξ tal que $B_\epsilon(\xi) \subseteq \Psi_{11}(V_\delta(\xi))$ y tal que $B_\epsilon(\xi) \cap \mathcal{L}_\xi = \{\xi\}$. $\tilde{V}_\delta(\xi)$ es una vecindad de $\mathcal{L}_\xi \cap \{\{r\} \times \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ en donde el campo $v(x, z)$ es rectificable y tal que

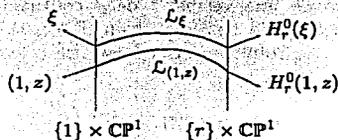
$$\tilde{V}_\delta(\xi) \cap \Pi_1^{-1}(\{(1 - \eta, r + \eta)\})_{(1,z)} \neq \emptyset,$$

para todo $(1, z)$ en $B_\epsilon(\xi)$. En este contexto,

$$\Pi_1^{-1}(\{(1 - \eta, r + \eta)\})_{(1,z)}$$

denota el levantamiento del segmento en el plano $\{z = 0\}$ que une a los puntos $(1 - \eta, 0)$ y $(r + \eta, 0)$ a la hoja $\mathcal{L}_{(1,z)}$ y que contiene al punto $(1, z)$.

Esquemáticamente:



Nótese que por cómo definimos $\tilde{V}_\delta(\xi)$, aseguramos que $H_r^0(1, z)$ consta de un solo punto.

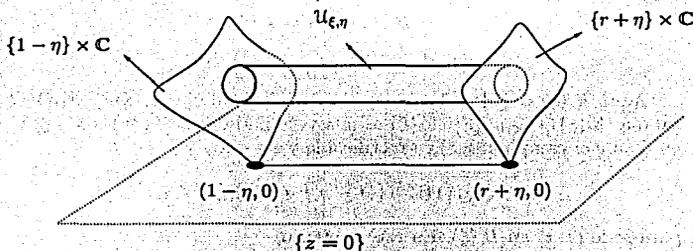
Para probar la analiticidad de la aplicación H_r^0 procederemos como cuando probamos la analiticidad de las transformaciones de monodromía: H_r^0 puede ser visto localmente, en una vecindad de ξ contenida en $\{1\} \times \mathbb{C}P^1$, como el flujo a tiempo finito de un campo analítico seguido de una proyección,

¹⁵La suficiencia de esta cercanía irá siendo aclarada en el transcurso de la prueba.

módulo un cambio de coordenadas holomorfo. Primero definamos el campo cuyo flujo ayudará a factorizar H_r^0 . Tomemos entonces el abierto:

$$U_{\xi, \eta} := \{(1 - \eta, r + \eta)\} \times B_\xi(\xi), \quad 0 < \eta \ll 1,$$

donde por $\{(1 - \eta, r + \eta)\}$ denotamos el segmento contenido en el plano $\{z = 0\}$ y que une a los puntos $(1 - \eta, 0)$ y $(r + \eta, 0)$. Esquemáticamente:



Nota. Puede ser necesario tomar una vecindad más chica de ξ en $\{1\} \times \mathbb{C}$ de manera que $U_{\xi, \eta}$ contenga $H_r^0(\xi)$.

Para cada p en $U_{\xi, \eta}$, definimos $\bar{p} = \Pi_1(p)$ y consideremos la curva:

$$\Gamma_p(t) = (t\bar{p}, 0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luego, como en una vecindad de \bar{p} contenida en $\{z \equiv 0\}$ podemos parametrizar la hoja \mathcal{L}_p de la foliación \mathcal{F} con la variable x , la proyección Π_1 restringida a \mathcal{L}_p resulta un biholomorfismo local. Definimos entonces el campo w en $U_{\xi, \eta}$ como:

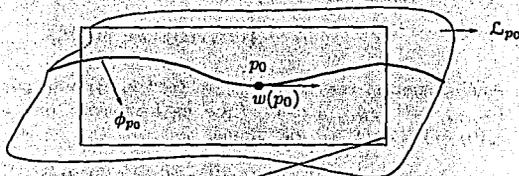
$$w(p) = D(\Pi_1|_{\mathcal{L}_p})^{-1} \left(\frac{d\Gamma_p}{dt} \Big|_{t=1} \right).$$

Nótese que, por cómo definimos a w , las curvas integrales ϕ_{p_0} de w correspondientes a datos iniciales p_0 , son el levantamiento a la hoja \mathcal{L}_{p_0} del intervalo $= \{(1 - \eta, r + \eta)\}$ vía la proyección Π_1 . Explícitamente:

$$t \xrightarrow{\phi_{p_0}} (t\bar{p}_0, p_0 + a_1(t\bar{p}_0 - \bar{p}_0) + \dots), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Razón por la cual la analiticidad del campo $v(x, z)$ se hereda al campo w .

Esquemáticamente:



$$\Pi_1^{-1}(\{(1-\eta, \tau+\eta)\})$$

Como el campo w es finito en todo $U_{\xi, \eta}$ podemos tomar t_1 tal que el flujo de w a tiempo t_1 , $g_w^{t_1}$, satisfaga:

$$\Pi_1(g_w^{t_1}(\xi)) = \tau.$$

Al no anularse el campo w en $g_w^{t_1}(\xi) \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de $g_w^{t_1}$ podemos aplicar en una vecindad $V_\epsilon(g_w^{t_1}(\xi))$ el teorema de rectificación. Así, existe un cambio de coordenadas holomorfo:

$$V_\epsilon(g_w^{t_1}(\xi)) \xrightarrow{\Psi} (\mathbb{R}^3, 0)$$

transforma las soluciones de w con condiciones iniciales en dicha vecindad en soluciones del campo constante:

$$\dot{x} = (1, 0, 0)$$

con condiciones iniciales en una vecindad del origen. Por los mismos argumentos que se usaron justo en este paso de la prueba de la analiticidad de las transformaciones de monodromía, podemos proyectar analíticamente a lo largo de las soluciones rectificadas mediante una función $\tilde{\Pi}$ y entonces factorizar a H_r^0 como:

$$H_r^0 = \Psi^{-1} \circ \tilde{\Pi} \circ \Psi \circ g_w^{t_1}$$

en el abierto $(g_w^{t_1})^{-1}(V_\epsilon(g_w^{t_1}(\xi)) \cap B_\epsilon(\xi))$. Como las funciones involucradas en la factorización son analíticas e invertibles, H_r^0 resulta serlo.

Basta ver entonces que, en efecto, H_r^0 y H_r^1 la transformación construida de la misma manera sólo que ahora tomando $\Delta(\xi)$ en lugar de ξ , conjugan las transformaciones de monodromía. Para ello, tomamos ξ en $\{1\} \times \mathbb{CP}^1$ de manera que $\Gamma_\xi = \mathcal{L}_\xi \cap \mathbb{C}$ es periódica finita. Llamemos $(1, z_0)$ a $\Psi_{11}(\xi)$ y tomemos $(1, z)$ cercano a $(1, z_0)$. Distingamos las siguientes curvas:

1. Sea $\Gamma_{(1,z)}(t) = (e^{it}, z(t))$ una parametrización de $\Gamma_{(1,z)} = \mathcal{L}_{(1,z)} \cap \mathcal{C}$ con $z(0) = z$, definimos:

$$\Gamma_1 := \{(e^{it}, z(t)) \mid t \in [0, 2\pi]\}.$$

2. Análogamente, sea $\Gamma_{H_r(1,z)}(t) = (re^{it}, z_r(t))$ una parametrización de $\Gamma_{H_r(1,z)} = \mathcal{L}_{H_r(1,z)} \cap \mathcal{C}^r$ (que es lo mismo que $\mathcal{L}_{(1,z)} \cap \mathcal{C}^r$) con $z_r(0) = \Pi_2(H_r(1, z))$, definimos:

$$\Gamma_2 := \{(re^{it}, z_r(t)) \mid t \in [0, 2\pi]\}$$

3. Como con $x \neq 0$ la hoja $\mathcal{L}_{(1,z)}$ es parametrizada localmente por la variable x , tiene sentido hablar de las curvas resultantes de los levantamientos a dicha hoja del intervalo $\{(1, r)\}$, cuyos extremos son $\{a, c\} := \{(1, z(0)), (r, z_r(0))\}$ y $\{b, d\} := \{(1, z(2\pi)), (1, z_r(2\pi))\}$ respectivamente. Así definimos:

$$\Gamma_3 := \{\Pi_1^{-1} |_{\mathcal{L}_{(1,z)}} (\{(1, r)\}) \mid \text{los extremos son } a \text{ y } c\}$$

$$\Gamma_4 := \{\Pi_1^{-1} |_{\mathcal{L}_{(1,z)}} (\{(1, r)\}) \mid \text{los extremos son } b \text{ y } d\}$$

Esquemáticamente:

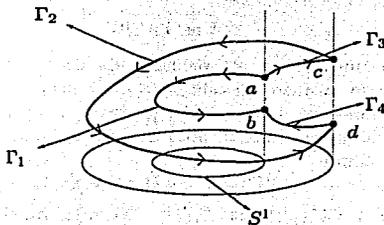


Figura 2.4: La curva Γ

Cabe destacar que en caso de que Γ_1 o Γ_2 sean curvas cerradas necesariamente se tiene que $\Gamma_3 = \Gamma_4$ ya que localmente $\mathcal{L}_{(1,z)}$ puede parametrizarse por x

para $x \neq 0$. Además, la curva:

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$$

es conexa por cómo escogimos las dos últimas Γ_i 's. Finalmente, por cómo se definieron H_r^0 , H_r^1 y los mapeos de monodromía Δ y Δ_r , la trayectoria del punto $(1, z(0))$ bajo la composición:

$$((H_r^1)^{-1} \circ \Delta_r \circ H_r^0)(1, z)$$

equivale a recorrer Γ partiendo del punto $a = (1, z(0))$ hasta el punto $b = (1, z(2\pi))$ pasando primero por Γ_3 , luego por Γ_2 y finalmente por Γ_4 como se indica en la figura (2.4). Basta entonces notar que:

$$\Delta(1, z) = (1, z(2\pi))$$

con lo que esta prueba concluye.

La hipótesis de que ξ determinara una curva periódica finita Γ_ξ puede ser debilitada pidiendo únicamente que ξ esté en $\{\{1\} \times \mathbb{C}P^1\} \setminus S_2^\infty$, es decir, que ξ sea un dato inicial en la parte finita de $\{1\} \times \mathbb{C}P^1$. En este caso la motivación principal para poner una hipótesis más fuerte fue para evitar que el discurso de la prueba saliera de las coordenadas $\Psi_{11}(V_{11})$, siendo de esta manera más sencillo de visualizar. Demos ahora paso al resultado más importante de esta sección.

Proposición 2.9. *Sea ξ en $\{\{r_1\} \times \mathbb{C}P^1\} \setminus S_2^\infty$ tal que $\Gamma_\xi^{r_1} = \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^{r_1}$ resulta periódica finita de periodo $2\pi n$ y multiplicador η_0 . Entonces en la familia:*

$$\Gamma_\xi^r = \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^r$$

el periodo $2\pi n$ y el multiplicador η_0 se preservan para r vecina a r_1 , siempre que $\Gamma_\xi^r \cap S_2^\infty = \emptyset$.

Prueba. Tomemos ξ en $\{\{r_1\} \times \mathbb{C}P^1\} \setminus S_2^\infty$ de manera que Γ_ξ sea periódica finita de periodo n y multiplicador η_0 . Sea $r \in (r_1 - \epsilon, r_1 + \epsilon)$ de manera que ninguna Γ_ξ^r intersekte S_2^∞ . Así, podemos aplicar los argumentos de la

proposición (2.7) de la siguiente manera. Siendo $\Delta_{r_1}^n(\xi) = \xi$, $\Delta_r^j = (H_r^{j+1} \circ \Delta_{r_1} \circ (H_r^j)^{-1})$, con $j \in \{0, \dots, n\}$, y $\hat{\xi} = H_r^0(\xi)$, entonces:

$$\begin{aligned} \Delta_r^n(\hat{\xi}) &= \Delta_r^{n-1} \circ (H_r^1 \circ \Delta_{r_1} \circ (H_r^0)^{-1})(\hat{\xi}) \\ &= \Delta_r^{n-2} \circ (H_r^2 \circ \Delta_{r_1} \circ (H_r^1)^{-1}) \circ (H_r^1 \circ \Delta_{r_1} \circ (H_r^0)^{-1})(\hat{\xi}) \\ &= (H_r^n \circ \Delta_{r_1} \circ (H_r^0)^{-1})(\hat{\xi}) \\ &= (H_r^n \circ \Delta_{r_1}^n)(\xi) \\ &= (H_r^n)(\xi) \\ &= \xi \end{aligned}$$

Es decir, H_r^0 hace corresponder puntos fijos de $\Delta_{r_1}^n$ a puntos fijos de Δ_r^n y como estos puntos fijos representan órbitas periódicas, se preserva el periodo al ser la misma n para ambas transformaciones.

Bajo los mismos argumentos, si $(\Delta_{r_1}^n)'(\xi) = \eta_0$, $\Delta_{r_1}^n(\xi) = \xi$ y $\hat{\xi} = H_r^0(\xi)$, tendremos, aplicando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} (\Delta_r^n)'(\hat{\xi}) &= (H_r^n \circ \Delta_{r_1}^n \circ (H_r^0)^{-1})'(\hat{\xi}) \\ &= [(H_r^n)'(\Delta_{r_1}^n((H_r^0)^{-1}(\hat{\xi})))] [(\Delta_{r_1}^n)'((H_r^0)^{-1}(\hat{\xi}))] ((H_r^0)^{-1})'(\hat{\xi}) \\ &= [(H_r^n)'(\xi)] [(\Delta_{r_1}^n)'(\xi)] ((H_r^0)^{-1})'(\hat{\xi}) \\ &= [(H_r^n)'((H_r^0)^{-1}(\hat{\xi}))] ((H_r^0)^{-1})'(\hat{\xi}) (\Delta_{r_1}^n)'(\xi) \\ &= [(H_r^n \circ (H_r^0)^{-1})'(\hat{\xi})] \eta_0 \\ &= \eta_0 \end{aligned}$$

Observaciones. De la proposición 2.9 podemos observar que de manera general, la conjugación analítica preserva el número de puntos fijos de las transformaciones de monodromía y el valor de la primera derivada en estos.

A pesar de que sabemos que Δ_r debe ser una transformación de Möbius, todavía no podemos decir lo mismo de las funciones H_r^j . Hasta el momento éstas funciones son únicamente analíticas y localmente invertibles.

Capítulo 3

Este es el capítulo donde se determina el tipo de dinámica que induce en el plano complejo la ecuación de Riccati (2.1). Como se mencionaba en el primer capítulo, el análisis a realizarse no es exhaustivo. Consideraremos, como se explica con detalle en la sección (3.1), casos particulares de los coeficientes trigonométricos de la ecuación de Riccati (2.1). Se determinará en cada uno de estos casos el tipo (dentro de $PSL(2, \mathbb{C})$) de transformación de monodromía Δ , que se obtiene. De esta manera, utilizando las observaciones que se hicieron después de la definición (2.6), podremos concluir sobre el número de órbitas periódicas que presenta el conjunto de soluciones de la ecuación de Riccati (2.1).

Comencemos entonces retomando la última discusión que se tuvo en el capítulo anterior. En ella se estableció la invarianza del periodo y multiplicador de curvas periódicas finitas. Cabe entonces preguntarse sobre las mismas cuestiones en el caso de que éstas intersecten a S_2^∞ . Es decir, si:

$$\Gamma_{\xi_0} = \mathcal{L}_{\xi_0} \cap \mathcal{C} \quad \xi_0 \in S_2^\infty, \quad \mathcal{L}_\xi \in \mathcal{F},$$

resulta periódica, habrá que establecer el tipo de relación entre los periodos y multiplicadores correspondientes a Γ_{ξ_0} y $\Gamma_{\xi_0}^r$ para r cercanas a 1.

Teorema 3.1 (Zol). *Sea $\xi_0 \in \{|x| = r_0\} \times \mathbb{C}P^1$ con $r_0 \neq 0$. Si*

$$\Gamma_{\xi_0}^{r_0} = \mathcal{L}_{\xi_0} \cap \mathcal{C}_{r_0}, \quad 0 < r_0 < \infty.$$

es periódica, entonces el correspondiente periodo y multiplicador se preservan en la familia de curvas:

$$\Gamma_{\xi_0}^r = \mathcal{L}_{\xi_0} \cap \mathcal{C}_r \quad 0 < r < \infty$$

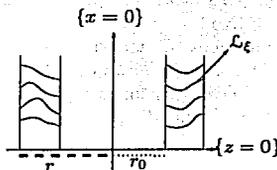
Prueba. La idea general de esta prueba es hacer construcciones análogas a las que se hicieron durante la prueba de la proposición (2.8) para obtener las funciones H_r^j , salvo que en este caso estaremos trabajando también en las coordenadas $\Psi_{12}(V_{12})$. En la sección anterior vimos que si la curva $\Gamma_{\xi_0}^{r_0}$ no intersectaba S_2^∞ la periodicidad, el periodo y el multiplicador se preservaban en la familia $\Gamma_{\xi_0}^r$, para r cercana a r_0 . Investiguemos lo que sucede cuando $\Gamma_{\xi_0}^r \cap S_2^\infty \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad supondremos que lo anterior sucede con la curva que comenzamos, es decir, $\Gamma_{\xi_0}^{r_0} \cap S_2^\infty \neq \emptyset$. Trabajaremos en las coordenadas $\Psi_{12}(V_{12})$ donde el campo correspondiente a la segunda extensión de la ecuación de Riccati (2.1) es de la forma:

$$v_{12}(x, z) = (ix^{k+1}, -x^k(P_0(x, x^{-1})z^2 + P_1(x, x^{-1})z + P_2(x, x^{-1})))$$

de manera que si $^1 0 < r_0 < r < \infty$, podemos asegurar la ausencia de polos para $v_{12}(x, z)$ en el anillo:

$$\mathcal{A}_{r_0, r} = \{(x, z) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \approx \Psi_{12}(V_{12}) \mid 0 < r_0 \leq |x| \leq r_1\}.$$

Esto implica que toda superficie \mathcal{L}_ξ , con $\xi \in \mathcal{A}_{r_0, r}$, es acotada en dicho conjunto. Esquemáticamente:



Así, tendremos que es posible construir en estas coordenadas, de manera análoga a cómo lo hicimos en la última sección del capítulo anterior, un par de funciones holomorfas H_r^j , H_r^{j+1} que en estas coordenadas conjuguen localmente de manera analítica, en vecindades cotenidas en $\{r_0\} \times \mathbb{C}$ de $\Delta_{r_0}^j(\xi_0)$ y $\Delta_{r_0}^{j+1}(\xi_0)$, a las transformaciones de monodromía Δ_{r_0} y Δ_r .

Si para alguna j sucede que $\Delta_{r_0}^j(\xi) \in V_{11}$ podemos aplicar los mismos argumentos que se usaron para la prueba de la proposición (2.8) y así obtener el resto de las funciones H_r^j que conjuguen en vecindades de estos puntos a Δ_{r_0}

¹El caso $0 < r \leq r_0 < \infty$ es análogo.

y Δ_r . Imitando la prueba de la proposición (2.9), obtenemos la invariancia de la periodicidad, periodo y multiplicador para $\Gamma_{\xi_0}^r$ donde r es vecina a r_0 . Podemos concluir entonces que en la familia de curvas:

$$\Gamma_{\xi_0} = \mathcal{L}_{\xi_0} \cap \mathcal{C}$$

la periodicidad, periodo y multiplicador se preservan independientemente de que los miembros de ésta intersecten a la sección S_2^∞ o no, dando con esto fin a la prueba.

Corolario. *Dada una ecuación de Riccati con coeficientes trigonométricos, todas las transformaciones de monodromía*

$$\Delta_r : \{r\} \times \mathbb{C}P^1 \longrightarrow \{r\} \times \mathbb{C}P^1, \quad 0 < r < \infty,$$

pertenecen a la misma clase en $PSL(2, \mathbb{C})^2$.

Prueba. Ver apéndice, sección A.4.

3.1. El retrato fase cerca de $\{x = 0\}$

Haciendo una recopilación de lo visto hasta ahora podemos afirmar que la extensión a $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ permitió acoplar al discurso sobre la invariancia de periodos y multiplicadores a las curvas periódicas con datos iniciales en S_2^∞ .

Toca en esta sección hacer un análisis de cómo el retrato fase cerca del eje coordenado $\{x = 0\}$ afecta la dinámica inducida por el campo de direcciones $v(x, z)$, producto de la segunda extensión de la ecuación de Riccati (2.1), en $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$. Este análisis habrá de realizarse, como decíamos al principio del capítulo, considerando distintos casos de la ecuación (2.1). Así, analizaremos la dinámica, en un primer caso, cuando dicha ecuación es de la forma:

$$\frac{dz}{dt} = e^{imt} \left[\widehat{P}_2(t)z^2 + \widehat{P}_1(t)z + \widehat{P}_0(t) \right], \quad m \geq 1, \quad (3.1)$$

donde $e^{imt} \widehat{P}_j(t) = P_j(t)$. Es decir, en este primer caso estaremos suponiendo que el polinomio $P_j(x, y)$ es de la forma:

$$P_j(x, y) = a_{n0}x^n + a_{(n-1)0}x^{n-1} + \dots + a_{j0}x, \quad a_{k0} \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, n.$$

²Módulo la relación de equivalencia establecida en la sección 2.8

El siguiente caso está dado por la ecuación cuya expresión es:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sum_{k+l=0}^{m_1} a_{kl} e^{i(k-l)t} \right) z^2 + \left(\sum_{k+l=0}^{m_2} b_{kl} e^{i(k-l)t} \right) z + \left(\sum_{k+l=0}^{m_3} c_{kl} e^{i(k-l)t} \right)$$

y tal que satisface que cada vez que $k < l$, se tenga que $|a_{kl}|^2 + |a_{lk}|^2 + |c_{kl}|^2 = 0$. Al suceder esto podemos retomar la expresión anterior como:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k e^{i(k)t} \right) z^2 + \left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k e^{i(k)t} \right) z + \left(\sum_{k=0}^{n_3} c_k e^{i(k)t} \right). \quad (3.2)$$

Es decir, a diferencia del caso anterior, en éste sí se permite a los polinomios que conforman los coeficientes tener un término independiente, salvo que en los tres polinomios éste resulte ser cero.

Finalmente como tercer caso tendremos aquél donde no sucede nada de lo anterior: ni podemos desacoplar un factor e^{imt} , ni dejan de aparecer términos donde $k < l$.

3.1.1. Primer caso

Teorema 3.2 (Zol). *Toda solución a un sistema de Riccati de la forma³*

$$\frac{dz}{dx} = e^{imt} \left[\widehat{P}_2(t) z^2 + \widehat{P}_1(t) z + \widehat{P}_0(t) \right] \quad m \geq 1$$

resulta periódica de periodo 1.

Prueba. Para obtener el resultado basta probar que la transformación de monodromía Δ es la identidad en $\{1\} \times \mathbb{C}P^1$. Una ecuación de la forma (3.1) define en las coordenadas $\Psi_{11}(V_{11})$ al campo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ix \\ \dot{z} &= x^m \left[\widehat{P}_2(x) z^2 + \widehat{P}_1(x) z + \widehat{P}_0(x) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

mismo que puede multiplicarse por el factor x^{-1} obteniendo así el campo equivalente:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= i \\ \dot{z} &= x^{m-1} [P_2(x, x^{-1}) z^2 + P_1(x, x^{-1}) z + P_0(x, x^{-1})]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

³ Aquí $e^{imt} \widehat{P}_j(e^{it}) = P_j(e^{it}, e^{-it})$

que posee en $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 \setminus \{x = 0\}$ las mismas curvas integrales que (3.3).

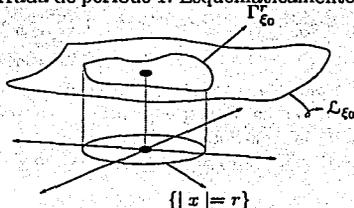
Luego, como la primera coordenada de (3.4) es idénticamente i podemos⁴ para cada $\xi_0 = (0, z_0)$ parametrizar a la hoja \mathcal{L}_{ξ_0} con la variable x y obtener una expresión local:

$$(x, z_0 + a_1 x + \dots) \quad x \in (\mathbb{C}, 0).$$

Por ello, si tomamos $r > 0$ suficientemente chica, tendremos que el levantamiento de cualquier circunferencia de radio r a la hoja Γ_{ξ_0} :

$$(\Pi_1 |_{\mathcal{L}_{\xi_0}})^{-1}(\{|x| = r\}) = \Gamma_{\xi_0}^r$$

resulta una curva cerrada de periodo 1. Esquemáticamente:



Sean entonces $(0, z_1)$, $(0, z_2)$ y $(0, z_3)$ tres puntos en la transversal al campo (3.4) $\{x = 0\}$. Llamemos B_1 , B_2 y B_3 a las correspondientes vecindades contenidas en $\{z = 0\}$ donde podemos tomar a la variable x como parámetro para las hojas $\mathcal{L}_{(0, z_1)}$, $\mathcal{L}_{(0, z_2)}$ y $\mathcal{L}_{(0, z_3)}$. Tomando:

$$B = \cap_{j=1}^3 B_j$$

podemos asegurar que los levantamientos de una circunferencia $\{|x| = r\} \subseteq B$ resultan ser tres curvas cerradas $\Gamma_{(0, z_j)}^r, j = 1, 2, 3$. Esto implica que Δ_r tiene tres puntos fijos. Luego, aplicando el corolario a la propiedad 5, tendremos que:

$$\Delta_r(z) = z. \quad (3.5)$$

Así, como consecuencia de la última sección del capítulo anterior y el teorema (3.1) tendremos que (3.5) sucede para toda $0 < r < \infty$, en particular para $r = 1$.

⁴Como $\frac{dz}{dz}(\xi_0) \neq 0$.

Ejemplos.

En los sistemas:

1. $\frac{dz}{dt} = e^{it}z^2 + e^{3it}$
2. $\frac{dz}{dt} = (e^{27it} + e^{11it})z^2 + (e^{it} + e^{19it}) + e^{it}$,

toda solución resulta periódica de periodo 1.

3.1.2. Segundo caso

A diferencia del caso anterior, los sistemas de Riccati a considerarse aquí serán de la forma:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k e^{ikt}\right) z^2 + \left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k e^{ikt}\right) z + \left(\sum_{k=0}^{n_3} c_k e^{ikt}\right), \quad (3.6)$$

con $|a_0|^2 + |b_0|^2 + |c_0|^2 > 0$, es decir, no se permite que todos los términos independientes correspondientes a los polinomios que conforman los coeficientes de la ecuación de Riccati (3.6), sean cero. Entonces, al hacer la extensión a $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ obtendremos en las coordenadas $\Psi_{11}(V_{11})$ el campo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ix \\ \dot{z} &= \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k x^k\right) z^2 + \left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k x^k\right) z + \left(\sum_{k=0}^{n_3} c_k x^k\right) \end{aligned} \quad (3.7)$$

mismo que puede ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ix \\ \dot{z} &= P_0(z) + xP_1(x, z), \end{aligned} \quad (3.8)$$

donde $P_0(z) = a_0 z^2 + b_0 z + c_0$ y $xP_1(x, z) = \dot{z} - Q_0(z)$.

Se verá entonces en dos distintos subcasos cómo la naturaleza de (3.7) en una vecindad de uno de sus puntos singulares permite determinar el número de soluciones periódicas de la ecuación de Riccati (2.1).

Determinemos los puntos singulares de (3.7). Necesariamente $x = 0$, por lo que estos se encuentran en la superficie $\mathbb{C}_0 := \{x = 0\}$. Luego, el campo (3.8) restringido a \mathbb{C}_0 define en las coordenadas $\Psi_{11}(V_{11})$ al campo:

$$\dot{z} = a_0 z^2 + b_0 z + c_0 \quad (3.9)$$

y en las coordenadas $\Psi_{12}(V_{12})$ tendremos:

$$\dot{y} = -(c_0 y^2 + b_0 y + a_0), \quad (3.10)$$

pensando $y = \frac{1}{z}$. Es decir, (3.8) define un campo analítico en toda \mathbb{C}_0 .

Primer subcaso. Dos puntos singulares distintos en \mathbb{C}_0

Tomemos $z_1 \neq z_2$ los dos puntos singulares del campo (3.8) en la superficie \mathbb{C}_0 . Podemos, sin pérdida de generalidad, suponer que $z_1 = 0$. Entonces P_0 es de la forma:

$$P_0(z) = \bar{a}z(z - z_2) \quad \text{o} \quad P_0(z) = \bar{a}z^2 \quad (3.11)$$

De esta manera, ya que la parte lineal del campo (3.7) en el origen es:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ * & \frac{dP_0}{dz}(0) \end{pmatrix}$$

tendremos que la misma es no singular y que el cociente de sus valores propios $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = P_{0z}(0)$ resulta ser:

$$\lambda(z_1) = -i \frac{dP_0}{dz}(0).$$

Como veremos más adelante este cociente es un elemento indispensable en el análisis local de la dinámica de campos vectoriales analíticos.

Lema 3.1. Sea $\lambda(z_1) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ el cociente de los valores propios de la parte lineal del campo (3.11) en el punto singular z_1 . Entonces, en el caso en que el campo tenga dos puntos singulares $z_1 \neq z_2$ se tiene que:

$$\lambda(z_2) = -\lambda(z_1).$$

Prueba. Supongamos sin perder generalidad que $z_1 = 0$. En el caso de que $P_0(z) = az(z - z_2)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \lambda(0) &= -iP_{0z}(0) & \lambda(z_2) &= -iP_{0z}(z_2) \\ &= i\bar{a}z_2 & &= -i\bar{a}z_2. \end{aligned}$$

Por otro lado, si $P_0(z) = \bar{a}z$ los puntos singulares de (3.8) son $z_1 = 0$ y $z_2 = \infty$. Luego:

$$\begin{aligned} \lambda(z_1) &= -P_{0z}(0) & \lambda(\infty) &= -iP_{0z}(0) \\ &= -i\bar{a} & &= i\bar{a}, \end{aligned}$$

con lo que damos por concluida la prueba.

Para poder establecer los resultados correspondientes a este primer subcaso haremos uso de un teorema clásico en la teoría de ecuaciones diferenciales analíticas. Éste clasifica a los campos vectoriales analíticos cuya parte lineal satisface el tener una colección no resonante de valores propios cuya envolvente convexa no contiene al origen.

Definición 3.1. Una colección de números complejos $\lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ se dice resonante si para algún λ_j sucede que:

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^n a_k \lambda_k, \quad a_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \sum_{k=1}^n a_k \geq 2$$

de lo contrario decimos que dicha colección es no resonante. Se dice que un campo vectorial lineal es resonante si el espectro del correspondiente mapeo lineal lo es. De otra manera se dice que el campo vectorial es no resonante.

Así, demos paso al teorema.

Teorema 3.3. (Poincaré-Dulac) Un germen de un campo analítico en \mathbb{C}^n no resonante y tal que la envolvente convexa de su espectro en el plano complejo no contenga al origen es analíticamente equivalente a su parte lineal.

En el caso particular de tener en \mathbb{C}^2 un campo de la forma:

$$\dot{x} = \lambda_1 x \quad \dot{y} = \lambda_2 y + \dots \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$$

tenemos:

- Si el campo es resonante, las únicas⁵ resonancias a presentarse son de la forma:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m\lambda_1 + l\lambda_2 \quad m + l \geq 2, \\ \lambda_2 &= k\lambda_1 \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

y se tiene equivalencia analítica con el campo,

$$\dot{x} = \lambda_1 x \quad \dot{y} = \lambda_2 y + a_k x^k. \quad (3.12)$$

En este caso, si $a_k \neq 0$, la única variedad invariante bajo el flujo del campo es $\{x = 0\}$.

- Si en 3.12 se tiene que $a_k = 0$ y $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}$ tenemos a $y = Cx^\lambda$ como familia de curvas localmente invariantes.

⁵Ver apéndice

Nota. Por equivalencia analítica se entiende la existencia de un cambio de coordenadas local y analítico que lleve el campo original a uno de la forma (3.12). Este teorema puede consultarse en [A - A].

A manera de ir desarrollando un lenguaje común respecto a los distintos tipos de puntos singulares que puede presentar el campo (3.9) incluimos la siguiente clasificación.

Definición 3.2. Sea z_1 un punto singular del campo (3.9), entonces:

- z_1 es un foco si $\lambda(z_1) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
- z_1 es un nodo si $\lambda(z_1) > 0$.
- z_1 es un punto silla si $\lambda(z_1) < 0$.

Finalmente, si $\lambda(z_1) = \frac{p}{q}$ con $p, q > 0$ y $(p, q) = 1$, diremos que z_1 es un nodo $(p : q)$ -resonante. Si adicionalmente en (3.12) se tiene que $a_k = 0$ diremos que el nodo es linealizable y de otro modo que no lo es.

Teorema 3.4 (Zol). Considérese un sistema de Riccati de la forma:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k e^{ikt} \right) z^2 + \left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k e^{ikt} \right) z + \left(\sum_{k=0}^{n_3} c_k e^{ikt} \right), \quad (3.13)$$

con $|a_0|^2 + |b_0|^2 + |c_0|^2 > 0$, tal que el polinomio $P(z) := a_0 z^2 + b_0 z + c_0$ tiene dos ceros $z_1 \neq z_2$ en $\{0\} \times \mathbb{CP}^1$. Suponga que $\lambda(z_1) = -i(2z_1 a_0 + b_0) \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R} \setminus 0\}$ y que $\lambda(z_1) \notin \mathbb{N}$ o de suceder que $\lambda(z_1) \in \mathbb{N}$ se tiene que $a_k = 0$ en (3.12). Entonces las transformaciones de monodromía:

$$\{r\} \times \mathbb{CP}^1 \xrightarrow{\Delta_r} \{r\} \times \mathbb{CP}^1 \quad 0 < r < \infty$$

son conjugadas analíticas a una transformación de Möbius del tipo:

$$\xi \mapsto e^{2\pi i \lambda} \xi$$

Demostración. Por la forma de la ecuación de Riccati tenemos que, en las coordenadas $\Psi_{11}(V_{11})$ la segunda extensión de ésta es de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ix \\ \dot{z} &= \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k x^k \right) z^2 + \left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k x^k \right) z + \left(\sum_{k=0}^{n_3} c_k x^k \right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

Supondremos, sin perder generalidad, que $z_1 = 0$; denotemos por $\lambda = \lambda(0)$, al cociente de los valores propios de la parte lineal del campo en el origen. Entonces, la parte lineal del campo en el origen queda representada por la matriz:

$$\begin{pmatrix} i & 0 \\ * & b_0 \end{pmatrix}$$

Ahora, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_- \setminus 0\}$ y $\lambda \notin \mathbb{N}$ (valores propios no resonantes) o $\lambda \in \mathbb{N}$ pero $\sigma = 0$ (es decir, el origen resulta un nodo $(\lambda:1)$ -resonante linealizable) tenemos asegurada⁶ la existencia de un cambio de coordenadas:

$$(x, \bar{z}) := H(x, z) = (x, z) + (0, \dots)$$

analítico en $(\mathbb{C}^2, \hat{0})$, una vecindad del origen en \mathbb{C}^2 . En estas nuevas coordenadas (x, \bar{z}) el campo (3.14) adopta la forma:

$$\dot{x} = ix \quad \dot{\bar{z}} = i\lambda \bar{z}. \quad (3.15)$$

Describamos ahora a la foliación \mathcal{F} en las coordenadas (x, \bar{z}) en una vecindad del origen. Primeramente tenemos al origen como punto singular y a las hojas $\{\{x = 0\} \setminus \{(0, 0)\}\}$ y $\{\{\bar{z} = 0\} \setminus (0, 0)\}$. El resto de las hojas admiten⁷ para x distinta de cero en una vecindad del origen una parametrización del tipo:

$$\bar{z} = Kx^\lambda \quad (3.16)$$

donde K depende de los datos iniciales fuera de $\{x = 0\}$.

Esquemáticamente:

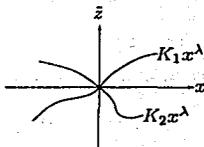


Figura 3.1: Hojas en una vecindad de $(x, \bar{z}) = (0, 0)$

⁶Por el teorema 3.3

⁷Puede integrarse directamente de la ecuación (3.15)

Para calcular una expresión local de las transformaciones de monodromía en las coordenadas (x, \bar{z}) basta levantar las circunferencias $(re^{it}, 0)$ a las hojas de la foliación \mathcal{F} . Como en vecindades de $(x, \bar{z}) = (0, 0)$ para (r, z_0) las hojas de \mathcal{F} son de la forma:

$$\mathcal{L}_{(r, z_0)} = (x, K_0 x^\lambda) \quad K_0 = \bar{z}_0 r^{-\lambda} \quad x \sim 0 \quad r \sim 0,$$

tenemos que el levantamiento a $\mathcal{L}_{(r, z_0)}$ de la circunferencia $x = re^{it}$ resulta:

$$\Gamma_{z_0}(t) = (re^{it}, re^{i\lambda t} z_0).$$

Así, por como se definen las transformaciones de monodromía, tendremos como expresión local⁸ para las mismas:

$$\bar{z} \mapsto e^{2\pi i \lambda} \bar{z}. \quad (3.17)$$

Por otro lado, como el cambio de coordenadas $H(x, z)$ es de la forma $Id + \dots$, tendremos que $H^{-1}(x, \bar{z}) = Id + \dots$. De esta manera se tendrá que una expresión local para las transformaciones de monodromía en las coordenadas (x, z) es:

$$z \mapsto e^{2\pi i \lambda} z + \dots$$

Como consecuencia del teorema 3.1, sabemos que en estas coordenadas todas las transformaciones de monodromía deben pertenecer a la misma clase en $PSL(2, \mathbb{C})$. De la expresión anterior se desprende que el multiplicador asociado a la clase de equivalencia de éstas en $PSL(2, \mathbb{C})$ es precisamente $e^{2\pi i \lambda}$. Entonces la clase de conjugación analítica a la que pertenecen estas transformaciones es justamente $[e^{2\pi i \lambda} z]$, lo que concluye con esta prueba.

Corolario. Si para un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & (\sum_{k=0}^{n_1} a_k e^{ikt}) z^2 + (\sum_{k=0}^{n_2} b_k e^{ikt}) z \\ & + (\sum_{k=0}^{n_3} c_k e^{ikt}) \end{aligned}$$

se tiene que $\lambda(z_1) \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_- \cup \mathbb{Q}_+\}$ entonces el mismo tiene únicamente dos soluciones periódicas en $\mathbb{C}P^1$ y el periodo de ambas es 1. Si $\lambda(z_1) = \frac{p}{q} > 0$, con $(p; q) = 1$, entonces existen únicamente dos soluciones periódicas de periodo 1 y el resto resultan también periódicas pero de periodo q .

⁸En una vecindad del origen de cada transversal $\{r\} \times \mathbb{C}$

Prueba. Al preservarse bajo conjugaciones analíticas los puntos fijos de una transformación de Möbius basta notar que las funciones:

$$\Delta^n : \xi^{2\pi i \lambda n} \xi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

tienen, en el caso $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_- \cup \mathbb{Q}_+\}$, como únicos puntos fijos al cero y al punto al infinito. Por otro lado, si $\lambda = \frac{p}{q} > 0$ con $(p; q) = 1$, entonces $\Delta^q(z) = z$ para toda z en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, ya que Δ no es más que una rotación por $\frac{2\pi}{q}$. Finalmente basta notar que el origen y el punto al infinito son siempre puntos fijos de cualquier rotación, con lo que damos por concluida la prueba a este corolario.

Una hipótesis fuerte en la formulación del teorema 3.4 fue suponer que, de tener a z_1 como nodo ($\lambda : 1$)-resonante, éste resultaba linealizable. En el siguiente resultado analizaremos la dinámica correspondiente cuando esto no sucede. Dicho análisis se realizará en dos etapas.

Lema 3.2. (Zol) *Considere el sistema de Riccati:*

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k e^{ikt} \right) z^2 + \left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k e^{ikt} \right) z + \left(\sum_{k=0}^{n_3} c_k e^{ikt} \right), \quad (3.18)$$

tal que la cuadrática $P(z) := a_0 z^2 + b_0 z + c_0$ tiene dos ceros $z_1 \neq z_2$ y el punto singular $(0, z_1)$ es un nodo $(N : 1)$ -resonante no linealizable; es decir, en (3.12) se tiene $a_k \neq 0$. Entonces las transformaciones de monodromía Δ_r para r y z vecinas a cero son de la forma:

$$\Delta_r(z) = 2\pi\sigma r^n + z + \dots$$

Prueba. La prueba de este lema imita a la del teorema (3.4). Se hace una descripción local de la foliación \mathcal{F} , generada por la segunda extensión de la ecuación de Riccati (3.18), en las coordenadas (x, \bar{x}) , obteniendo una expresión local para las hojas correspondientes a condiciones iniciales fuera de $\{x = 0\}$. Finalmente se obtiene la expresión anunciada para las transformaciones de monodromía levantando a estas hojas circunferencias de la forma $(re^{it}, 0)$.

Por la forma de la ecuación de Riccati que tenemos en las hipótesis de este lema, la segunda extensión de la misma en las coordenadas $\Psi_{11}(V_{11})$ es de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= iz \\ \dot{z} &= \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k x^k \right) z^2 + \left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k x^k \right) z + \left(\sum_{k=0}^{n_3} c_k x^k \right). \end{aligned}$$

Supongamos que $z_1 = (0, 0)$ es un nodo ($N : 1$)-resonante no linealizable. Entonces existe localmente un cambio de coordenadas analítico $(x, \bar{z}) := H(x, z) = (x, z + \dots)$ tal que en las nuevas coordenadas la expresión anterior es de la forma:

$$\dot{x} = ix \quad \dot{\bar{z}} = iN\bar{z} + \sigma x^N. \quad (3.19)$$

La foliación \mathcal{F} se describe a continuación. Primeramente tenemos al origen como punto singular y a la hoja $\{\{x = 0\} \setminus (0, 0)\}$. Para $x \sim 0$, $x \neq 0$ podemos considerar:

$$\frac{dz}{dx} = N \frac{\bar{z}}{x} - i\sigma x^{N-1}.$$

Resolviendo primero la parte homogénea de ésta y por variación de parámetros el resto, obtenemos una expresión para $\bar{z}(x)$ y, con ella una parametrización local para las curvas (complejas) integrales del campo (3.19). Explícitamente,

$$\Gamma_K(x) = (x, Kx^N - i\sigma x^N \ln x) \quad x \neq 0, \quad x \sim 0. \quad (3.20)$$

Para calcular las transformaciones de monodromía Δ_r para r vecina a cero, levantemos la curva⁹ $(re^{it}, 0)$ a la hoja $\Gamma_K(x)$. Explícitamente obtenemos:

$$\frac{(re^{it}, K r^N e^{it} - i\sigma r^N e^{iNt} \ln(re^{it}))}{(re^{it}, K r^N e^{it} - i\sigma r^N e^{iNt} \ln(r) + t\sigma r^N e^{iNt})} = \quad (3.21)$$

Evaluando en $t = 2\pi$ llegamos a:

$$\frac{(r, K r^N - i\sigma r^N \ln(r) + 2\pi\sigma r^N)}{(r, \Gamma_K(r) + 2\pi\sigma r^N)} = \quad (3.22)$$

Entonces, si tomamos $(r, \bar{z}) \in \{r\} \times \mathbb{C}$ vecina al origen¹⁰, tenemos que la expresión para las transformaciones de monodromía en las coordenadas (x, \bar{z}) es de la forma:

$$\tilde{T}_r(\bar{z}) = 2\pi\sigma r^N + \bar{z} \quad (3.23)$$

Ahora, como el cambio de coordenadas $H(x, z)$ comienza con la identidad tendremos lo mismo para $H(x, z)$ y por tanto para r y z vecinas a cero las

⁹Aquí K es una constante que depende de los datos iniciales

¹⁰En la transversal $\{r\} \times \mathbb{C}$

transformaciones de monodromía en las coordenadas (x, z) pueden expresarse como:

$$T_r(z) = 2\pi\sigma r^N + z + \dots$$

con lo que terminamos la prueba de este lema.

Teorema 3.5. (Zol) Seai

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k e^{i(k)t} \right) z^2 + \left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k e^{i(k)t} \right) z + \left(\sum_{k=0}^{n_3} c_k e^{i(k)t} \right) \quad (3.24)$$

el sistema de Riccati cuyo polinomio $P(z) := a_0 z^2 + b_0 z + c_0$ satisface las hipótesis del lema (3.2). Entonces las transformaciones de monodromía asociadas a (3.24) son de tipo parabólico.

Prueba. En el lema anterior encontramos la expresión para las transformaciones de monodromía en una vecindad del origen hasta el término lineal. Para ello utilizamos un cambio local analítico de coordenadas, al que llamamos $H(x, z) = (x, z + \dots)$. Denotemos por $h_2(x, z) = z + \dots$ a la segunda función coordenada de este cambio de coordenadas. Entonces, restringidos a la transversal $\{r\} \times \mathbb{C}$, tenemos:

$$2\pi\sigma r^N + z + \dots = (h_2^{-1}|_{x=r} \circ (2\pi\sigma r^N + \bar{z}) \circ h_2|_{x=r})(z) \quad (3.25)$$

Dada esta conjugación analítica local, notemos ahora lo siguiente sobre las transformaciones T_r en las coordenadas (x, z) :

1. Si $r \neq 0$ entonces $T_r \neq Id$.
2. T_r tiende a Id conforme r tiende a cero. Además, como se observaba en la prueba del teorema 1, sabemos que todas las transformaciones T_r , para $0 < r < \infty$, pertenecen a la misma clase de equivalencia en $PSL(2, \mathbb{C})$. Entonces, T_r está en la clase de equivalencia $[z + \lambda]$ con $\lambda \neq 0$ o bien en la clase $[\rho e^{i\theta} z]$ con $\rho e^{i\theta} \neq 1$. Supongamos que sucede lo último, entonces para toda $0 < r < \infty$ la transformación T_r debe tener dos puntos fijos y como multiplicador en uno de estos a $\rho e^{i\theta}$.

Sin embargo, para que T_r tienda a Id conforme r tiende a cero, el valor de la derivada de las transformaciones en sus respectivos puntos fijos debe tender a 1. Para ello la curva $\beta(r) := T_r$ debe intersectar a clases de equivalencia $[\rho e^{i\theta}]$ con $\rho \neq \bar{\rho}$ y θ no congruente con $\bar{\theta}$ módulo 2π , lo que contradice la

pertenencia de las transformaciones Δ_r a una misma clase de equivalencia. Por tanto no puede suceder más que $\beta(r) \subseteq [z + \lambda]$, $0 < r < \infty$, quedando terminada así esta prueba.

A continuación abordaremos el caso en que la cuadrática $P(z) = P_2(1, 1)z^2 + P_1(1, 1)z + P_0(1, 1)$ tiene un solo cero de multiplicidad dos. Como en los dos teoremas anteriores, para la prueba del siguiente haremos fuerte uso de un teorema clásico en la teoría de ecuaciones diferenciales holomorfas. Este trata sobre la existencia y regularidad de curvas invariantes en vecindades de los puntos singulares.

Teorema 3.6 (Variedades invariantes). *Considérese el campo analítico:*

$$v(\bar{z}) = A\bar{z} + \dots \quad \bar{z} \in \mathbb{C}^2$$

donde la matriz A tiene como valores propios a $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 = 0$ con correspondientes espacios propios E^e y E^c . Entonces existen dos variedades invariantes bajo el flujo del campo:

- W^e , llamada variedad estable, que resulta analítica y tangente en el origen a E^e .
- W^c , llamada variedad central, no necesariamente analítica, y tangente en el origen a E^c .

Puede consultarse este teorema [A - A], cuarto capítulo, tercera sección; y para un ejemplo de un campo analítico cuya variedad central no resulte analítica se recomienda [Guck]. Demos paso entonces al siguiente resultado.

Teorema 3.7. (Zol) *Sea el sistema de Riccati:*

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k e^{i(k)t} \right) z^2 + \left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k e^{i(k)t} \right) z + \left(\sum_{k=0}^{n_3} c_k e^{i(k)t} \right) \quad (3.26)$$

tal que la cuadrática $P(z) := a_0 z^2 + b_0 z + c_0$ tiene un único cero en $\mathbb{C}P^1$. Entonces las transformaciones de monodromía son de tipo parabólico.

Demostración. Dadas las hipótesis de nuestro teorema, la ecuación de Riccati (3.26) induce en su segunda extensión, para las coordenadas donde estemos trabajando¹¹, un campo de la forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ix \\ \dot{z} &= az^2 + x(b + b_{10}x + b_{01}z + \dots) \end{aligned} \quad (3.27)$$

¹¹Que pueden ser $\Psi_{11}(V_{11})$ ó $\Psi_{12}(V_{12})$

mismo que tiene como parte lineal

$$\begin{bmatrix} i & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene como valores propios a $\lambda_1 = i$ y $\lambda_2 = 0$ con vectores propios correspondientes $(1, -ib)$ y $(0, 1)$. Obsérvese que entonces, por un lado, como la primera coordenada del campo se anula en $\{x = 0\}$ y ésta variedad en cada punto $(0, z)$ tiene como espacio tangente al generado por el vector $(0, 1)$, tenemos que la variedad central es:

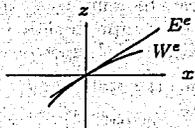
$$\{x = 0\}$$

misma que en este caso particular resulta analítica. Por otro lado, como consecuencia del teorema (3.6), tenemos que la variedad estable debe ser tangente en el origen a:

$$E^e = \{\lambda(1, -ib) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$$

de manera que en una vecindad del origen en $\{z = 0\}$ la variedad W^e es parametrizable¹² por la variable x .

Esquemáticamente:



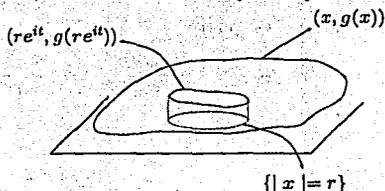
Escribamos a W^e como:

$$W^e := (x, g(x)) = (x, -ibx + b_2x^2 + \dots) \quad x \in (\mathbb{C}, 0)$$

donde g es analítica. Al escribir de esta manera a la variedad W^e podemos asegurar que los puntos:

$$(r, p_r) := (r, g(r))$$

resultan puntos fijos de la transformación de monodromía. Esto sucede pues el levantamiento de las curvas $(re^{it}, 0)$ a $(x, g(x))$ resulta en curva cerrada.



Esquemáticamente:

De manera que:

$$T_r(r, p_r) = (re^{it}, g(re^{it}))|_{|x|=r} = (r, g(r)) = (r, p_r)$$

Para demostrar que las transformaciones de monodromía son de tipo parabólico nos basaremos en el siguiente razonamiento. Como se estableció al final de la sección (2.8), basta conocer los tres primeros coeficientes del desarrollo de Taylor en una vecindad de un punto fijo de una transformación de Möbius normalizada para poder determinar la clase en $PSL(2, \mathbb{C})$ a la que pertenece. Para determinar estos tres primeros coeficientes haremos un cambio de coordenadas local y analítico con el que se obtendrá una nueva expresión para el campo (3.27). Posteriormente obtendremos una ecuación diferencial ordinaria asociada a esta nueva expresión del campo y, resolviendo las ecuaciones de primera y segunda variación asociadas a cierta solución de dicha ecuación diferencial ordinaria, obtendremos los valores explícitos de dichos coeficientes.

Definamos entonces el cambio de coordenadas:

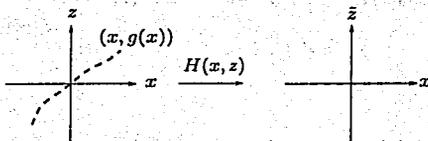
$$(x, \bar{z}) := H(x, z) = (x, z - g(x)) = (x, z + ibx - b_2x^2 + \dots)$$

para x en una vecindad del origen. Geométricamente estamos localmente "enderezando" la variedad estable W^c para convertirla en el eje $\{\bar{z} = 0\}$. Esquemáticamente,

Vale la pena notar que $H(x, z)$ manda a cada transversal $\{r\} \times \mathbb{C}$ en sí misma, siendo su restricción a éstas la traslación:

$$z \mapsto z - g(r) = z - p_r$$

¹²Pues E^c está generada por un vector en \mathbb{C}^2 cuya primera coordenada es distinta de cero, es decir, este espacio no es vertical



entonces esta restricción del cambio de coordenadas a cada transversal manda al punto fijo p_r de la transformación de monodromía al punto $(r, 0)$. Llamemos a la segunda función coordenada de $H(x, z)$:

$$h(x, z) = z - g(x) = z + ibx - b_2x^2 + \dots$$

y a su inversa:

$$h^{-1}(x, \bar{z}) = a_1\bar{z} + a_2x + o(x^2)$$

entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} z &= (h^{-1} \circ h) = h^{-1}(z + ibx + o(x^2)) \\ &= a_1z + ib_1x + a_2x + o(x^2), \end{aligned}$$

por lo que necesariamente $a_1 = 1$ y $a_2 = -ibx$, ergo:

$$h^{-1}(x, \bar{z}) = \bar{z} - ibx + o(x^2). \quad (3.28)$$

Por otro lado, para determinar la expresión correspondiente al campo (3.27) en las coordenadas (x, \bar{z}) utilicemos la diferencial de $H(x, z)$. Así,

$$DH(x, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ib - 2b_2x + \dots & 1 \end{pmatrix}$$

de manera que:

$$\begin{aligned} DH(x, z) \begin{pmatrix} ix \\ az^2 + b(x + b_1x^2 + \dots) \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ ib - 2b_2x + \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ix \\ az^2 + x(b + \dots) \end{pmatrix} & \end{aligned} \quad (3.29)$$

Entonces, si designamos como $v(x, \bar{z})$ al campo (3.27) en las coordenadas (x, \bar{z}) , en virtud de lo establecido en (3.28) y (3.29), obtenemos:

$$v(x, \bar{z}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ix \\ az^2 + x\dot{g}(x, \bar{z}) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde $\bar{g}(x, \bar{z})$ es analítica con $\bar{g}(0, 0) = 0$. Además como en estas coordenadas llevamos localmente la variedad estable $(x, g(x))$ al eje $\{\bar{z} = 0\}$, debe suceder que $\bar{g}(x, 0) \equiv 0$, por el carácter invariante¹³ de dicha variedad. Notemos además que de (3.30) obtenemos:

$$\frac{d\bar{z}}{dx} = -\frac{ia\bar{z}^2}{x} - i\bar{g}(x, \bar{z}) \quad x \neq 0 \quad (3.31)$$

Si $\bar{z}(x, \zeta)$ representa localmente una solución a (3.31) tal que $\bar{z}(r, \zeta) = \zeta$ con ζ en $\{r\} \times \mathbb{C}$, entonces, la transformación de monodromía en las coordenadas (x, \bar{z}) puede verse como:

$$\bar{T}_r(\zeta) = \bar{z}(re^{it}, \zeta)|_{t=2\pi}$$

Para determinar la naturaleza de dicha transformación se considera la expansión de $\bar{z}(x, \zeta)$ en series de potencias en una vecindad del punto $(x, 0)$. Ésta es de la forma:

$$\bar{z}(x, \zeta) = a_0(x)\zeta + a_1(x)\zeta^2 + \dots \quad (3.32)$$

pues, como localmente el eje $\{\bar{z} = 0\} \setminus (0, 0)$ resulta solución de (3.30), necesariamente:

$$\bar{z}(x, 0) \equiv 0 \quad x \in (\mathbb{C}, 0)$$

Así, determinaremos los valores de $a_0(re^{it})|_{t=2\pi}$ y $a_1(re^{it})|_{t=2\pi}$ usando la primera y segunda variación de la ecuación (3.31) respecto de la solución $\bar{z}(x, 0)$. *Primera variación.* Como función de x , $\frac{d\bar{z}}{d\zeta}(x, \zeta)$, satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\bar{z}}{d\zeta}(x, \zeta) \right) &= \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{d}{dx} (\bar{z}(x, \zeta)) \right) \\ &= \frac{d}{d\zeta} (v(x, \bar{z}(x, \zeta))) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}(x, \bar{z}(x, \zeta)) \frac{d\bar{z}}{d\zeta}(x, \zeta) \end{aligned}$$

En particular, como $\bar{z}(x, 0) \equiv 0$ y por (3.32), $a_0(x) = \frac{d\bar{z}}{d\zeta}(x, 0)$. Sustituyendo este valor en la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{da_0}{dx}(x) = \frac{dv}{d\bar{z}}(x, 0)a_0(x)$$

¹³Invariante bajo el flujo del campo (3.27)

para toda $x \neq 0$ en una vecindad del origen. Explícitamente,

$$\frac{da_0}{dx}(x) = -i \frac{d\bar{g}}{d\bar{z}}(x, 0) a_0(x)$$

Por lo tanto, localmente:

$$\frac{d}{dx} \ln a_0(x) = -i \frac{d\bar{g}}{d\bar{z}}(x, 0)$$

Luego, integrando sobre $\Gamma_r = \{re^{it} \mid t \in [0, 2\pi]\}$, obtenemos:

$$\ln a_0(re^{it})|_{t=2\pi} - \ln a_0(r) = -i \int_{\Gamma_r} \frac{d\bar{g}}{d\bar{z}}(x, 0) dx \quad (3.33)$$

Nótese que como $\bar{g}(x, \bar{z})$ es analítica en una vecindad del origen, el lado derecho de esta igualdad es cero. Por otro lado, como:

$$\bar{z}(r, \zeta) = \zeta = a_0(r)\zeta + a_1(r)\zeta^2 + \dots$$

tenemos que $a_0(r) = 1$ y $a_k(r) = 0$ para $k > 1$. Por lo tanto, de la expresión (3.33) podemos concluir que necesariamente $a_0(re^{it})|_{t=2\pi} = 1$.

Segunda variación. De manera general tenemos que:

$$a_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 \bar{z}}{d\zeta^2}(x, 0) \quad (3.34)$$

además, como función de x , $\frac{d^2 \bar{z}}{d\zeta^2}(x, \zeta)$ satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{d^2 \bar{z}}{d\zeta^2}(x, \zeta) \right) &= \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{d\bar{z}}{d\zeta}(x, \zeta) \right) \frac{d\bar{z}}{d\zeta}(x, \zeta) \\ &= \frac{d^2 \bar{z}}{d\zeta^2}(x, \bar{z}(x, \zeta)) \left[\frac{d\bar{z}}{d\zeta}(x, \zeta) \right]^2 \\ &\quad + \frac{d^2 \bar{z}}{d\zeta^2}(x, \zeta) \frac{d\bar{z}}{d\zeta}(x, \bar{z}(x, \zeta)) \end{aligned}$$

En particular, como $\bar{z}(x, 0) = 0$ y por (3.34) obtenemos:

$$\frac{d}{dx} (2a_1(x)) = 2 \left[-i \frac{d\bar{g}}{d\bar{z}}(x, 0) a_1(x) - \frac{2ia}{x} + \frac{d^2 \bar{g}}{d\bar{z}^2}(x, 0) \right] a_0^2(x) \quad (3.35)$$

una ecuación lineal no homogénea de primer orden para $a_1(x)$. Ahora, si $a_1(x)$ es una solución a la ecuación homogénea:

$$\frac{da}{dx}(x) = \left[-i \frac{d\bar{g}}{d\bar{z}}(x, 0) \right] a(x) \quad (3.36)$$

podemos encontrar una solución a (3.35) por el método de variación de parámetros. Explícitamente, proponemos como solución a la ecuación no homogénea:

$$2a_1(x) = \bar{a}_1(x) = \phi(x)a(x) \quad x \in \mathbb{C} \quad (3.37)$$

donde ϕ debe determinarse. Derivando lo anterior:

$$\begin{aligned} \bar{a}'(x) &= \phi'(x)a(x) + \phi(x)a'(x) \\ - \left[\frac{2ia}{x} + \frac{d^2\bar{g}}{dz^2}(x_0) \right] a_0(x) &= \phi'(x)a(x) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\phi'(x) = -\frac{a_0(x)}{a(x)} \left[\frac{2ia}{x} + \frac{d^2\bar{g}}{dz^2}(x) \right] \quad (3.38)$$

Observación. La ecuación (3.36) resulta exactamente la misma que se obtuvo en la primera variación, de manera que $a(x) = a_0(x)$ y por tanto de (3.38), integrando sobre la circunferencia de radio r con centro en el origen obtenemos:

$$\phi(re^{it})|_{t=2\pi} - \phi(r) = -2ia \int_{\{|z|=r\}} \frac{dx}{x} - \int_{\{|z|=r\}} \frac{d^2\bar{g}}{dz^2}(x, 0) dx$$

Luego, por la analiticidad de \bar{g} obtenemos que:

$$\phi(re^{it})|_{t=2\pi} = \phi(r) - 2ia \int_{\{|z|=r\}} \frac{dx}{x} \quad (3.39)$$

ahora, como se estableció antes que $a_k(r) = 0$ para $k > 1$ y dado que $a(x) = a_0(x)$, tenemos:

$$0 = \bar{a}_1(r) = \phi(r)a_0(r) = \phi(r)$$

De esta manera:

$$\begin{aligned} \bar{a}_1(re^{it})|_{t=2\pi} &= \phi(re^{it})a_0(re^{it})|_{t=2\pi} \\ &= \phi(re^{it}) \\ &= -2ia \int_{\{|z|=r\}} \frac{dx}{x} \\ &= 4\pi a \end{aligned}$$

Así, la transformación de monodromía en las coordenadas (x, \bar{z}) se puede expresar en una vecindad del origen para r vecina a cero como:

$$\bar{z} \xrightarrow{T_r} \bar{z} + 2\pi a \bar{z}^2 + \dots$$

Obtenemos así que T_r y \bar{T}_r son distintas de la identidad. Además, como el cambio de coordenadas $H(x, z)$ que las conjuga analíticamente está definido en vecindades de los puntos fijos de cada transformación, el valor de la derivada de las mismas en dichos puntos se debe preservar. Recordemos además que en las coordenadas (x, z) las transformaciones de monodromía pertenecen todas a la misma clase de equivalencia en $PSL(2, \mathbb{C})$. Así, T_r pertenece a $[Id]$, $[\rho e^{i\theta} z]$ o $[z + \lambda]$. La primera posibilidad queda descartada pues T_r es distinta de la identidad, la segunda también pues debe tener como derivada en el punto fijo a $\rho e^{i\theta}$ (o $\rho^{-1} e^{-i\theta}$), cosa que no sucede pues $T_r'(p_r) = 1$. Finalmente, la única posibilidad es que T_r esté en $[z + \lambda]$ para alguna λ en \mathbb{C}^* . Por lo tanto las transformaciones son de tipo parabólico y esta la prueba de este teorema termina.

Resumiendo lo demostrado en los últimos tres teoremas podemos decir a grandes rasgos que la dinámica inducida por la ecuación de Riccati:

$$\frac{dz}{dt} = \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k e^{i(k)t} \right) z^2 + \left(\sum_{k=0}^{n_2} b_k e^{i(k)t} \right) z + \left(\sum_{k=0}^{n_3} c_k e^{i(k)t} \right)$$

presenta un cambio cualitativo cuando una de las raíces del polinomio:

$$P(z) = a_0 z^2 + b_0 z + c_0$$

resulta nodo ($N : 1$)-resonante no linealizable del campo asociado a la segunda extensión de la ecuación o bien, cuando dicho polinomio tiene una única raíz.

Finalmente veremos cómo haciendo uso de herramienta teórica un poco más elaborada podemos concluir sobre la dinámica que inducen ecuaciones de Riccati con coeficientes trigonométricos en el caso de que las transformaciones de monodromía tengan en una vecindad del origen un desarrollo en series de potencias de la forma:

$$z \mapsto z + a_2 z^2 + \dots \quad a_2 \neq 0 \quad (3.40)$$

cuya característica esencial es tener a la identidad como parte lineal. Definamos entonces primero:

Definición 3.3. Sea $f : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ un germen analítico distinto de la identidad. Diremos que f pertenece a la clase A_{p+1} si su desarrollo en series de potencias alrededor del origen es de la forma:

$$f(z) = z + a_{p+1} z^{p+1} + \dots$$

A grandes rasgos haremos uso de un teorema que responde a la problemática de clasificar topológicamente a este tipo de gérmenes analíticos para poder concluir que, de tener¹⁴ una transformación de monodromía en \mathcal{A}_2 , necesariamente debe ser del tipo parabólico.

Teorema 3.8. *(Sh)(Ca) Cualquier germen $f(z)$ analítico en la clase \mathcal{A}_{p+1} es topológicamente equivalente al flujo a tiempo 1 del campo vectorial:*

$$\dot{z} = z^{p+1}$$

La prueba de este teorema puede encontrarse en los artículos de A.A. Shcherbakov, [Sh] y C. Camacho [Ca], misma que se omite por no estar dentro de los objetivos de este trabajo. El teorema asegura la existencia en una vecindad del origen de un homeomorfismo H tal que, si $g_{z^{p+1}}^1$ denota el flujo a tiempo 1 del campo $\dot{z} = z^{p+1}$, se tiene:

$$f(z) = (H^{-1} \circ g_{z^{p+1}}^1 \circ H)(z) \quad (3.41)$$

Una importante consecuencia de la conjugación topológica local establecida en (3.41) es que H lleva localmente órbitas del flujo $g_{z^{p+1}}^1$ en órbitas de $f(z)$ y preserva el número de puntos fijos de ambas transformaciones. Aplicando este resultado al caso de tener una transformación de monodromía en \mathcal{A}_2 tenemos:

Teorema 3.9. *Si la transformación de monodromía correspondiente a la segunda extensión de la ecuación de Riccati:*

$$\frac{dz}{dx} = P_2(e^{it}, e^{-it})z^2 + P_1(e^{it}, e^{-it})z + P_0(e^{it}, e^{-it})$$

pertenece a la clase \mathcal{A}_2 , entonces ésta no puede ser de tipo elíptico.

Prueba. Consideremos en $\mathbb{C}P^1$ el campo definido por:

$$\dot{z} = z^2 \quad (3.42)$$

haciendo el cambio de variable $\xi = \frac{1}{z}$ obtenemos en la carta que contiene al punto al infinito la expresión:

$$\dot{\xi} = -\frac{\dot{z}}{z^2} = 1 \quad (3.43)$$

¹⁴Es decir, si el germen que define el desarrollo de Taylor de la transformación de monodromía en una vecindad del origen pertenece a la clase \mathcal{A}_2 .

de manera que en dichas coordenadas para el dato inicial ξ_0 se tiene que:

$$\xi(t) = \xi_0 + t$$

Así, las soluciones de la ecuación correspondientes a datos iniciales $z(0) = z_0 \neq 0$, vistas desde la carta que contiene al origen en una vecindad de éste resultan de la forma:

$$z(t) = \frac{1}{(z_0^{-1} + t)}$$

De esta manera podemos ver que el flujo a tiempo 1 del campo $\dot{z} = z^2$ resulta:

$$g_{z^2}^1(z) = -\frac{1}{z^{-1} + 1}, \quad \text{para } z \neq 0 \text{ y } z_2^1(0) = 0$$

Ahora, si la transformación de monodromía resultara de tipo elíptico sería conjugada analítica de una aplicación de la forma:

$$\xi \mapsto e^{i\theta} \xi \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

sin embargo esto implicaría que en una vecindad del origen el flujo a tiempo 1 del campo $\dot{z} = z^2$ es topológicamente equivalente a la aplicación $\xi \mapsto e^{i\theta} \xi$. Ésta última aplicación, al no ser más que una rotación por θ , deja invariantes a toda una familia de circunferencias en una vecindad del origen. La imagen de una circunferencia con centro en el origen de radio suficientemente chico bajo el homeomorfismo que da la conjugación entre ambas funciones debe resultar una curva cerrada invariante bajo el flujo a tiempo uno del campo $\dot{z} = z^2$. Empero, en una vecindad del origen las curvas cerradas invariantes bajo el flujo de dicho campo a tiempo uno tienen todas como punto común al origen, el único punto singular del campo. Como la conjugación topológica debe mandar puntos singulares de una transformación a puntos singulares de la otra transformación, obtenemos una contradicción. Entonces, la transformación de monodromía no puede ser de tipo elíptico.

Apéndice A

En este apéndice incluimos algunas pruebas omitidas en capítulos anteriores y breves comentarios sobre el comportamiento de las soluciones de la ecuación de Riccati en vecindades del punto al infinito.

A.1. Ecuaciones de Riccati, generalidades

Consideremos la ecuación de Riccati¹:

$$y'(z) = f_0(z) + f_1(z)y(z) + f_2(z)y^2(z), \quad z \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{C} \quad (\text{A.1})$$

donde los coeficientes $f_j(z)$ son funciones holomorfas de z en el abierto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{C}$.

Tomando como referencia [Hil], siempre podemos asociar a este tipo de ecuaciones de Riccati una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden de la forma:

$$w''(z) + P(z)w'(z) + Q(z)w(z) = 0 \quad (\text{A.2})$$

de manera que las soluciones de esta ecuación lineal estén en estrecha relación con las soluciones a la ecuación de Riccati (A.1).

Basta tomar:

$$P(z) = -\frac{f_2'(z)}{f_2(z)} - f_1(z), \quad Q(z) = f_0(z)f_2(z)$$

para obtener, si $w(z)$ es solución de la ecuación lineal homogénea de segundo orden, una solución de la ecuación de Riccati (A.1), haciendo el cambio de variable:

$$y(z) = -\frac{w'(z)}{w(z)} \quad (\text{A.3})$$

¹Aquí la derivada es respecto al parámetro $t \in \mathbb{C}$.

La prueba de este hecho se omite pues se desprende fácilmente imitando los cálculos que se realizan en la siguiente sección del apéndice durante la prueba de la proposición (1.1).

A.2. Prueba de la proposición 2.6

Proposición A.1. Si $y(t)$ es una solución a la ecuación diferencial de segundo orden:

$$P_2(t) \frac{d^2 y}{dt^2} + [P_2'(t) + P_2(t)P_1(t)] \frac{dy}{dt} + [P_2^2(t)P_0(t)] y = 0$$

con $(y(0), y'(0)) = (y_0, y'_0)$, entonces en toda t donde $P_2(t)y(t) \neq 0$ se tiene que la función:

$$z(t) = -\frac{y'(t)}{P_2(t)y(t)}$$

es solución de la ecuación de Riccati (2.1) con $z(0) = -\frac{y'(0)}{P_2(0)y(0)}$. Aquí $P_j(t)$ es abreviación de $P_j(e^{it}, e^{-it})$ polinomio trigonométrico correspondiente al coeficiente del término de orden j (en z) de la ecuación de Riccati (2.1).

Prueba. Notemos que:

$$z'(t) = \frac{P_2(t)y(t)y''(t) + y(t)y'(t)P_2'(t)y(t) + y'(t)P_2(t)y(t)^2}{P_2(t)y(t)^2} (t)y^2(t)$$

Despejando $y''(t)$ de la ecuación lineal de segundo orden y sustituyendo dicho valor en la expresión anterior tenemos:

$$z'(t) = [y(t)(P_2'(t)y'(t) + P_2(t)P_1(t)y'(t) - P_2^2(t)P_0(t)y(t)) + y(t)y'(t)P_2'(t) + (y'(t))^2 P_2(t)] [P_2^2(t)y(t)]^{-1}$$

simplificando,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{P_2'(t)y'(t)}{P_2(t)y(t)} - \frac{P_1(t)y'(t)}{P_2(t)y(t)} + P_0(t) + \frac{P_2'(t)y'(t)}{P_2(t)y(t)} \\ &\quad - \frac{P_1(t)y'(t)}{P_2(t)y(t) + P_0(t)} + \frac{(y'(t))^2}{P_2(t)y^2(t)} \\ &= \frac{(y'(t))^2}{P_2(t)y^2(t)} - \frac{P_1(t)y'(t)}{P_2(t)y(t)} + P_0(t) \\ &= P_2(t)z^2(t) + P_1(t)z(t) + P_0(t) \end{aligned}$$

con lo que queda concluida la prueba de esta proposición.

A.3. Detalles, proposición 2.2

Proposición A.2. Sea $\Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi}$ la restricción de la proyección Π_1 a la curva \mathcal{L}_ξ , como en la proposición 2.2. Entonces ésta es al menos \mathcal{C}^1 , localmente invertible y preserva la orientación entre los correspondientes espacios tangentes de Γ_ξ y S^1 .

Demostración. Tomemos entonces $p = (x_0, z_0)$ en Γ_ξ . Luego, sean (ϕ, U) y (ψ, V) cartas de Γ_ξ y S^1 asociadas a los puntos p y $\Pi_1(p)$ de manera que $\phi(U) \subseteq V$. Nominalmente, $\phi(t) := (x_0 e^{it}, z(t))$ y $\psi(t) := \Pi_1(p) e^{it}$. En este caso la representación local de $\Pi_1, \psi \circ \Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi} \circ \phi^{-1}$, resulta ser, para θ en una vecindad de θ_0 ,

$$\begin{aligned} (\psi \circ \Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi} \circ \phi^{-1})(t) &= (\psi \circ \Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi})(x_0 e^{it}, z_0) \\ &= \psi(x_0 e^{it}) \\ &= t. \end{aligned}$$

De manera que:

$$\frac{d(\psi \circ \Pi_1|_{\mathcal{L}_\xi} \circ \phi^{-1})}{dt} \Big|_{t=0} = 1,$$

con lo que queda demostrada esta proposición.

A.4. Prueba al corolario del teorema 3.1

Corolario. Dada una ecuación de Riccati con coeficientes trigonométricos, todas las transformaciones de monodromía

$$\Delta_r : \{r\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \longrightarrow \{r\} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1, \quad 0 < r < \infty,$$

pertenecen a la misma clase en $PSL(2, \mathbb{C})^2$.

Prueba. Para probar este corolario supondremos que la familia de funciones Δ_r interseca a distintas clases en $PSL(2, \mathbb{C})$ y encontraremos una contradicción.

Como consecuencia del teorema (3.1) tenemos que todas las transformaciones de monodromía correspondientes a una ecuación de Riccati con coeficientes trigonométricos dada comparte el número de puntos fijos y los

²Módulo la relación de equivalencia establecida en la sección 2.8

multiplicadores. Sin pérdida de generalidad, supongamos que las transformaciones Δ_{r_1} y Δ_{r_2} están en distintas clases de equivalencia $[\rho_1 e^{i\theta_1}]$ y $[\rho_2 e^{i\theta_2}]$. Entonces existen dos miembros de $PSL(2, \mathbb{C})$, H_1 y H_2 , que conjugan a Δ_{r_1} y Δ_{r_2} con los representantes de sus respectivas clases. Repitiendo los cálculos que se realizaron en la segunda parte de la prueba de la proposición (2.9), obtenemos que el multiplicadores en uno de los puntos fijos (explícitamente aquél que bajo la conjugación va a dar al origen) de Δ_{r_1} y Δ_{r_2} debe ser $\rho_1 e^{i\theta_1}$ y $\rho_2 e^{i\theta_2}$, respectivamente. Entonces, como mencionábamos al principio de la prueba, estos dos números deben ser iguales, sin embargo, esto implicaría que las clases de equivalencia de Δ_{r_1} y Δ_{r_2} no son distintas, contradiciendo lo que habíamos supuesto. En el caso de que se tenga un único punto fijo el razonamiento es análogo. Esto pone fin a la prueba.

A.5. En vecindades del punto al infinito

Al trabajar en las coordenadas (V_{12}, Ψ_{12}) al principio del tercer capítulo obtuvimos la invarianza del periodo y multiplicador en la familia de curvas:

$$\Gamma_\xi^r = \mathcal{L}_\xi \cap \mathcal{C}^r$$

En esta sección del apéndice veremos cómo, al trabajar en las coordenadas (V_{12}, Ψ_{12}) , obtenemos información sobre la manera como las soluciones del sistema de Riccati asociado llegan al punto al infinito. No se formulará resultado alguno, pero sí analizaremos dos casos particulares que ayudarán a establecer mejor esta idea.

Encontraremos una expresión explícita para las curvas $\Gamma_{\xi_0}(t) := (x_0 e^{it}, \Gamma_0(t))$, donde $\xi_0 = (x_0, 0)$ y $|x_0| = 1$. Antes que nada recordemos que por la no verticalidad del campo $v_{12}(x, z)$, en una vecindad de ξ_0 podemos representar a \mathcal{L}_{ξ_0} como:

$$\mathcal{L}_{\xi_0} := (x, z(x))$$

con $z(x)$ analítica de la forma:

$$z(x) = a_l (x - x_0)^l + \dots, \quad (\text{A.4})$$

donde l es el orden de x_0 como cero de $z(x)$.

Caso A.1. $[\frac{dz}{dx}(x_0) = 0]$

Aquí tenemos que la expresión local para $z(x)$ resulta ser:

$$z(x) = a_2(x - x_0)^2 + \dots \quad (\text{A.5})$$

Antes de proseguir en la búsqueda de la expresión para $\Gamma_0(t)$ hagamos algunos cambios de variable para facilitar la misma. Para ello, observemos que la expresión (A.5) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} z &= a_2(x - x_0)^2(1 + \dots) \\ &= a_2(x - x_0)^2 g(x). \end{aligned}$$

Como $g(x_0) \neq 0$ podemos en una vecindad en el plano $\{z = 0\}$ del punto $(x_0, 0)$ encontrar una función analítica $h(x)$ tal que $h^2(x) = g(x)$. Definamos entonces nuestra nueva variable:

$$\hat{x} := \sqrt{a_2}(x - x_0)h(x), \quad (\text{A.6})$$

de manera que $z = \hat{x}^2$. Para determinar $\Gamma_0(t)$ levantemos entonces la curva $\{(x_0 e^{it}, 0) \mid t \in (\mathbb{R}, 0)\}$ a la hoja $\mathcal{L}_{(x_0, 0)}$. Dado que $\hat{x}(x_0) = 0$, tendremos para dicho levantamiento una expresión de la forma:

$$\hat{x}(x_0 e^{it}) = \alpha t + \beta t^2 + \dots \quad t \in (\mathbb{R}, 0) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Supondremos³ ahora que el conjunto $\{\alpha, \beta\}$ es una base de $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, es decir, $\frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{R}$. Así,

$$\begin{aligned} \Gamma_0(t) &= (\alpha t + \beta t^2 + \dots)(\alpha t + \beta t^2 + \dots) \\ &= (\alpha^2 t^2 + 2\alpha\beta t^3 + \dots). \end{aligned}$$

Como consecuencia de nuestra suposición $\{\alpha^2, 2\alpha\beta\}$ forma también una base de $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, de manera que podemos reescribir la parametrización anterior como,

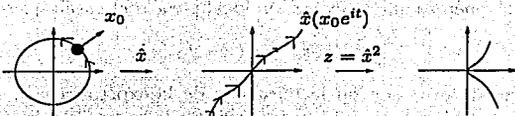
$$\Gamma_0(t) = \alpha^2 y_1(t) + 2\alpha\beta y_2(t),$$

donde:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= t^2 + \dots \\ y_2(t) &= t^3 + \dots \end{aligned}$$

³ Dejaremos fuera de este trabajo el caso cuando $\alpha = c\beta$

Esquemáticamente, suponiendo $\{\alpha^2, 2\alpha\beta\} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2\}$,



Caso A.2. $[\frac{dz}{dx}(x_0) \neq 0]$

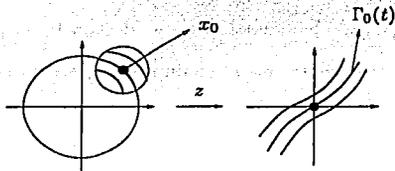
En este caso tenemos que la expresión local para $z(x)$ es:

$$z(x) = a(x - x_0) + \dots \quad (\text{A.7})$$

y podemos asegurar que en una vecindad en el plano $\{z = 0\}$ del punto $(x_0, 0)$ la función $z(x)$ es un biholomorfismo. Así, y en contraste con el caso anterior, podemos asegurar la suavidad de los levantamientos:

$$t \mapsto z(\eta_0 e^{it}) \quad t \in (\mathbb{R}, 0), \quad |\eta_0| \sim 1.$$

Esquemáticamente:



Omitiremos un análisis más general, pero se invita al lector a realizar lo propio tomando como referencia la discusión desarrollada para los casos $n = 1$ y $n = 2$.

A.6. Campos resonantes de tipo Poincaré

En esta sección del apéndice analizaremos las posibles resonancias a presentarse en campos vectoriales definidos en \mathbb{C}^2 con parte lineal no singular

cuando el espectro de la parte lineal de estos se encuentra en el dominio de Poincaré.

Definición A.1. Una colección de números complejos $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ en \mathbb{C}^2 pertenece al dominio de Poincaré si la envolvente convexa de los vectores λ_1, λ_2 en el plano complejo no contiene al origen. De contenerlo diremos que dicha colección pertenece al dominio de Siegel.

Proposición A.3. Sea el campo analítico:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \lambda_1 x \\ \dot{y} &= \lambda_2 y + \dots \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

tal que $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ pertenece al dominio de Poincaré. Entonces, de ser el campo resonante, todas las posibles resonancias a presentarse son:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= m\lambda_1 + l\lambda_2 \quad m+l \geq 2, \\ \lambda_2 &= k_0\lambda_1 \quad k_0 \in \mathbb{N}, \text{ fijo y } k_0 \geq 2. \end{aligned}$$

Prueba. Suponemos que el campo es resonante. Veamos primero que existe una única resonancia posible para el valor propio λ_2 . Supongamos que existen dos,

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= a\lambda_1 + b\lambda_2 \quad a+b \geq 2 \\ \lambda_2 &= \bar{a}\lambda_1 + \bar{b}\lambda_2 \quad \bar{a} + \bar{b} \geq 2, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

entonces:

$$0 = (a - \bar{a})\lambda_1 + (b - \bar{b})\lambda_2,$$

de manera que si $a - \bar{a} \neq 0$ o $b - \bar{b} \neq 0$ tendríamos que los los vectores $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ son linealmente dependientes, ergo proporcionales. Como $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ están en el dominio de Poincaré la constante de proporcionalidad, μ , que satisface $\lambda_1 = \mu\lambda_2$, debe ser estrictamente mayor que cero. Sustituyendo en A.9 el valor de λ_1 obtenemos,

$$\lambda_2 = (a\mu + b)\lambda_2 = (\bar{a}\mu + \bar{b})\lambda_2,$$

lo que implica:

$$\mu = \frac{1-b}{a} = \frac{1-\bar{b}}{\bar{a}}. \quad (\text{A.10})$$

Ahora, como $\lambda_1 = \mu\lambda_2$ y $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, necesariamente $b \neq 1$. Por otro lado, de la definición de resonancia tenemos que $a, b \in \mathbb{N}$; luego, lo anterior implica que $b > 1$, pero por la relación establecida en A.9 tendríamos que $\mu < 0$,

contradiendo el que el espectro de la parte lineal del campo esté en el dominio de Poincaré.

Llamemos a esta única resonancia:

$$\lambda_2 = a\lambda_1 + b\lambda_2,$$

y observemos lo siguiente:

- *Necesariamente* $a \neq 0$. De lo contrario se tendría que $\lambda_2 = b\lambda_2$, luego $b = 1$, lo que contradice que $a + b \geq 2$.
- *Necesariamente* $b = 0$. Si $ab \neq 0$, de la resonancia obtenemos:

$$0 = (b - 1)\lambda_2 + a\lambda_1,$$

entonces, como $a \neq 0$ se tiene los vectores $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ son linealmente dependientes. Por estar estos en el dominio de Poincaré,

$$\lambda_1 = \mu\lambda_2 \quad \mu > 0,$$

sustituyendo el valor de λ_1 en la ecuación que define la resonancia llegamos a que:

$$\lambda_2 = (a\mu + b)\lambda_2.$$

Esto último nos dice que necesariamente $\mu = -\frac{b-1}{a}$, relación que no se puede dar ya que debe suceder que $\mu < 0$.

Por lo tanto, la resonancia debe ser de la forma:

$$\lambda_2 = k_0\lambda_1, \quad k_0 \in \mathbb{N} \quad k_0 \geq 2,$$

lo que pone fin a la prueba.

Bibliografía

- [A-A] D.V. Anosov, V.I. Arnol'd (Eds.), *Dinamical Systems I*, Enciclopedia of Mathematical Sciences, Volumen 1, Springer Verlag, 1994.
- [Ah] Lars V. Ahlfors, *Complex Analysis* McGraw-Hill, Inc., Tercera edición, 1979.
- [Ca] *Topological classification and bifurcations of holomorphic flows with resonances in C*. Invent. Math. 67 (1982), 447-472.
- [Chow-Ha] Shui-Nee Chow, Jack K. Hale, *Methods of bifurcation theory*. A Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Springer, Primera edición, 1982.
- [G-O] X. Gomez-Mont, Laura Ortiz-Bobadilla, *Sistemas dinámicos holomorfos en superficies*, Aportaciones Matemáticas, Notas de investigación, número 3, Sociedad Matemática Mexicana, 1998.
- [H] D. Hilbert, *Mathematical problems*, Reimpresión, Bull. Amer. Math. Soc. 37, 407-436, 2000.
- [Hil] Einar Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain*, Pure and Applied Mathematics, A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts. John Wiley Sons, Inc., 1976.
- [Hi] Morris W. Hirsch, *Differential Topology*, Graduate texts in mathematics, Springer, Sexta edición, 1997.
- [Il] Yu. Ilyashenko, *Centennial history of Hilbert's 16th problem*, Bull. Amer. Math. Soc. 39, Número 3, 301-354, 2002.
- [Nee] Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*, Oxford University Press, Segunda Edición, 1998.

[Ricc] www-gap.dcs.st-and.ac.uk/history/Mathematicians/Riccati.html

[Sh] A. A. Shcherbakov, *Topological classification of germs of conformal maps with identical linear part*. (En ruso). Vest. Moskov. Univ. Ser. I, Math.-Mekh. (1982) No.3, 52-57. Traducción al inglés: Moscow. Univ. Math. Bul. 37 (1982).

[Zol] Henryk Żołądek, *The Method of Holomorphic Foliations in Planar Periodic Systems: The Case of Riccati Equations*, Journal of Differential Equations 165, 143-173, 2000.