00324

25

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

NUEVA DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE MALTSEV.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO

P R E S E N T A:

IVAN LEI FELIPE MONROY LÓPEZ

DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES

DIRECTOR DE TESIS: DR FRANCISCO MARMOLEJO RIVAS

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

FACULTAD DE CIENCIAS
SECCION ESCOLAR

MÉXICO, D.F.

2003

Universidad Nacional
Autónoma de México
UNAM
Biblioteca Central
Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Ivan Lei Felipe Monroy López

FECHA: Marzo 24/2003

FIRMA: Ivan Monroy

VNIVERSIDAD NACIONAL AVFNMA DE MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Nueva Demostración del Teorema de Maltsev"

realizado por Ivan Lei Felipe Monroy López

con número de cuenta 9554347-7, quién cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Francisco Marmolejo Rivas	Marmolejo
Propietario	Dr. Francisco Raggi Cárdenas	F. Raggi
Propietario	Dra. Martha Takane Imay	Martha Takane
Suplente	Dr. José Ríos Montes	José Ríos M.
Suplente	Dr. Hugo Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

cc

21

Nueva Demostración del Teorema de Maltsev

ccc
111

Agradecimientos

Muchas gracias a mi asesor Pancho Marmolejo por su infinita paciencia.

Gracias a mis hermanas por parecerse entre sí.

Gracias papá y mamá.

Gracias: Amanda, Bombero, Enano, Laura, Natalia, Mario,...

Índice General

V f

Introducción

En Álgebra Universal, el término *variedad* se refiere a la categoría de álgebras para una teoría ecuacional de un solo tipo. De eso habla el teorema original de Maltsev:

> en la variedad $\mathcal{A}$, cualquier par de relaciones de equivalencia R, S en un mismo objeto satisface $RS = SR$ si y sólo si la teoría tiene una operación ternaria m tal que $mxxy = y$ y $mxyy = x$

En esta tesis, llamamos variedad a la categoría de álgebras de una teoría ecuacional que bien puede ser multitipo (cf. capítulo 9).

Las categorías que necesitamos para poder tratar con relaciones de equivalencia son las *regulares*. Éstas las introducimos en el capítulo 2. También son útiles las categorías *exactas*. Una categoría regular es exacta cuando todas sus relaciones de equivalencia salen como el par núcleo de algún morfismo.

Si $\mathcal{T}$ es una categoría con productos finitos, denotamos por $\mathbf{Cont_{FP}}\ \mathcal{T}$ a la categoría de funtores $\mathcal{T} \longrightarrow \mathsf{Con}$ que preservan productos finitos, donde Con es la categoría de conjuntos. Las proposiciones 10.9 y 10.10 aseguran que toda variedad es una categoría *de modelos* $\mathbf{Cont_{FP}}\ \mathcal{T}$ para una $\mathcal{T}$ con productos finitos y viceversa. Los capítulos 8 y 9 se incluyeron para poder demostrar esas dos proposiciones.

El objetivo de esta tesis es presentar la versión del teorema de Maltsev que se da en [5]. Esto lo hacemos en el capítulo 10, proposición 10.16:

> una categoría $\mathbf{Cont_{FP}}\ \mathcal{T}$ es de Maltsev si y sólo si para todo objeto W en $\mathcal{T}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & W \times W \arrow[d, "1\times\Delta"] \\ W \times W \arrow[r, "\Delta\times 1"'] & W \times W \times W \end{tikzcd}$$

es un coproducto fibrado débil en $\mathcal{T}$

En el capítulo 3, definimos *categoría de Maltsev* como sigue. Una categoría regular es n-permutable si para cualquier par de relaciones de equivalencia R, S en un mismo objeto se da

$$\underbrace{RSR\ldots}_{n \text{ veces}} = \underbrace{SRS\ldots}_{n \text{ veces}}.$$

En los casos particulares de categorías 2-permutables y categorías 3-permutables, hablamos de categorías de Maltsev y de Goursat, respectivamente.

En el resto de la tesis revisamos las categorías de Maltsev y de Goursat:

- una categoría regular es de Maltsev si y sólo si todos sus objetos simpliciales son de Kan (proposición 4.10)

- una categoría regular es exacta de Maltsev si y sólo si todo par de cocientes con dominio común tienen coproducto fibrado y el morfismo *conexión* del dominio común al producto fibrado de este coproducto fibrado es una suprayección (proposición 5.9)

- una categoría regular es de Goursat si y sólo si la imagen directa de una relación de equivalencia bajo un cociente vuelve a ser relación de equivalencia (proposición 6.15)

- el lema 1.5 de grupos abelianos es válido en cualquier categoría exacta de Goursat (proposición 7.5)

Las categorías de Maltsev son importantes porque aparecen con frecuencia en las matemáticas. El ejemplo que desarrollamos con detalle en esta tesis es la categoría de grupos topológicos, sección 3.4. En particular, GrTop es ejemplo de una categoría de Maltsev que no es exacta. Algunos otros ejemplos de categoría de Maltsev son: cualquier categoría algebraica en la que parte de la estructura sea grupo, la categoría de álgebras de Heyting, los duales de las categorías de grupos abelianos y R-módulos, la categoría dual de cualquier pretopo con límites finitos, etc.

Los capítulos $2-7$ siguen a [4]. Los capítulos $8, 9$ son de [1]. El capítulo 10 es de [5]. El orden y la elección de temas son nuestros.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, nos ocupamos de dos ejemplos adelantan algunas de las ideas que desarrollamos más adelante. La primera sección es el caso particular del capítulo 7 para la categoría Ab. En la segunda sección probamos lo necesario de la categoría Top para la sección 3.4. En la primera sección seguimos a [7], mientras que en la segunda a [6]. Algunos detalles son nuestros.

1.1 Ab

En esta sección trataremos con grupos abelianos.

Definición 1.1 *Un* subgrupo *de G es un subconjunto no vacío $H \subseteq G$ tal que*

- $h_1, h_2 \in H$ *implica* $h_1 + h_2 \in H$
- $h \in H$ *implica* $-h \in H$

Definición 1.2 *Una* relación de equivalencia *en un grupo G es un subgrupo $R \leq G \times G$ tal que*

- $\forall g \in G$ *se tiene* $\langle g, g \rangle \in R$ *(reflexividad)*
- $\forall \langle g_1, g_2 \rangle \in R$ *se tiene* $\langle g_2, g_1 \rangle \in R$ *(simetría)*
- *Si* $\langle g_1, g_2 \rangle, \langle g_2, g_3 \rangle \in R$ *entonces* $\langle g_1, g_3 \rangle \in R$ *(transitividad)*

Dado un subgrupo $H \leq G$, se induce una relación de equivalencia de la manera usual por $R = \{\langle g_1, g_2\rangle \ : \ \text{hay } h \in H \text{ con } g_2 = g_1 + h\}$.
A una relación de equivalencia $R \leq G \times G$ le podemos asociar el subgrupo $\{g_2 - g_1 \ : \ \langle g_1, g_2\rangle \in R\} \leq G$.
Estas asociaciones inducen una biyección entre las retículas: relaciones de equivalencia de G, subgrupos de G. Esta biyección preserva el orden de dichas retículas.

Lema 1.3 *Si R es una relación de equivalencia en G y g_1, g_2 son tales que $g_2' - g_1' = g_2 - g_1$ para $\langle g_1', g_2'\rangle \in R$ entonces $\langle g_1, g_2\rangle \in R$.*

Demostración. Sabemos que $\langle g_1, g_1\rangle, \langle g_1', g_1'\rangle \in R$. Como R es subgrupo,

$$\langle g_1, g_1\rangle + \langle g_1', g_2'\rangle - \langle g_1', g_1'\rangle = \langle g_1, g_2\rangle$$

está en R.

$*$

Proposición 1.4 *Si R subgrupo de $G \times G$ es una relación reflexiva en G entonces es de equivalencia.*

Demostración. La simetría la tenemos puesto que

$$\langle g_1, g_1\rangle - \langle g_1, g_2\rangle + \langle g_2, g_2\rangle = \langle g_2, g_1\rangle.$$

Mientras que para la transitividad,

$$\langle g_1, g_2\rangle - \langle g_2, g_2\rangle + \langle g_2, g_3\rangle = \langle g_1, g_3\rangle$$

$*$

Sobre la siguiente proposición, Lambek comenta en [7], p. 137 que es *extremely useful in the popular pastime called diagram chasing.*

Proposición 1.5 *En el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[d, "\gamma"] \\
D \arrow[r, "\lambda'"'] & E \arrow[r, "\mu'"'] & F
\end{tikzcd}$$

supongamos que los dos renglones son exactos, más precisamente

$$\begin{aligned} \text{Im } \lambda &= \text{Núc } \mu \\ \text{Im } \lambda' &= \text{Núc } \mu' \end{aligned}$$

Entonces tenemos el isomorfismo de grupos abelianos

$$\text{Im } \beta \cap \text{Im } \lambda' / \text{ Im } (A \to E) \approx \text{Núc } (B \to F) / \text{ Núc } \beta + \text{Núc } \mu$$

Demostración. Tenemos los isomorfismos

$$\begin{aligned} \text{Im } \beta \cap \text{Im } \lambda' &= \text{Im } \beta \cap \text{Núc } \mu' \\ &= \{\beta b \ : \ \mu'\beta b = 0\} \\ &= \{\beta b \ : \ \gamma\mu b = 0\} \\ &= \beta(\text{Núc } \gamma\mu) \\ &\approx \text{Núc } \gamma\mu/\text{Núc } \beta \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \text{Im } \beta\lambda &= \beta(\text{Im } \lambda) \\ &= \beta(\text{Núc } \mu) \\ &= \beta(\text{Núc } \mu + \text{Núc } \beta) \\ &\approx (\text{Núc } \mu + \text{Núc } \beta)/\text{Núc } \beta \end{aligned}$$

Por un teorema de isomorfismo para grupos abelianos, obtenemos

$$\text{Im } \beta \cap \text{Im } \lambda' / \text{ Im } (A \to E) \approx \text{Núc } (B \to F) / \text{ Núc } \beta + \text{Núc } \mu$$

*

1.2 Top

En esta sección trataremos con espacios topológicos.

Definición 1.6 *Sean A y K dos espacios topológicos. Una función continua $A \xrightarrow{p} K$ es una* identificación *si p es sobre y la topología de K es $\{U \subseteq K \ : \ p^{-1}U$ es abierto en $A\}$. A dicha topología se le dice la* topología de identificación *en K.*

Proposición 1.7 *Sea* $A \xrightarrow{p} K$ *una identificación. Si* $A \xrightarrow{h} B$ *es una función continua univaluada en las fibras de* p *entonces hay una única función continua* $K \xrightarrow{\tilde{h}} B$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "h"'] & & K \arrow[dl, dashed, "\tilde{h}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. La única función $\tilde{h}$ que hace conmutar el diagrama es $\tilde{h}(k) = h(p^{-1}(k))$. Si U es abierto en B entonces $h^{-1}U = p^{-1}\tilde{h}^{-1}U$ es abierto en A. Puesto que p es identificación, $\tilde{h}^{-1}U$ es abierto en K y $\tilde{h}$ es continua; como se quería ver.

$\ast$

Antes de pasar a la siguiente proposición, hagamos una

Observación 1.2.1 *En la categoría* Top *una función biyectiva entre dos espacios topológicos no es necesariamente un homeomorfismo. Basta tomar la identidad entre los espacios topológicos* (X, τ) *y* (X, ι) *donde* $\iota \subset \tau$ *es estricta.*

Proposición 1.8 *Una función continua* $A \xrightarrow{p} K$ *es una identificación si y sólo si satisface la siguiente propiedad:*

> *si* $B \xrightarrow{i} K$ *es continua e inyectiva, y* $p = ih$ *para alguna función continua* $A \xrightarrow{h} B$ *entonces* i *es un homeomorfismo.*

Demostración.
$\Rightarrow$
Denotemos por B al codominio de h. Como i es inyectiva entonces h es univaluada en las fibras de p. Por la proposición 1.7 hay una única $K \xrightarrow{\tilde{h}} B$ continua tal que $h = \tilde{h}p$. Aplicando la misma proposición a la factorización $p = (i\tilde{h})p$ concluimos que $i\tilde{h} = 1_K$. Entonces i ha de tener como inversa a $\tilde{h}$. Por lo tanto i es un homeomorfismo.

$\Leftarrow$
Si p no fuera sobre, la contención $\mathrm{Im}\, p \subseteq K$ en

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p"'] & & K \\ & \mathrm{Im}\, p \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

sería estricta. Por lo tanto, p es sobre.
Denotemos ahora por τ a la topología de K y por ι a la topología de identificación en K. En el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p"'] & & (K,\tau) \\ & (K,\iota) \arrow[ur, "1"'] & \end{tikzcd}$$

la identidad en K es continua y por lo tanto es un isomorfismo. Concluimos que las topologías τ, ι coinciden.

$*$

Proposición 1.9 *Sean* $A \xrightarrow{p} K$ *y* $J \xrightarrow{f} K$ *dos funciones continuas.* B *es el conjunto* $\{\langle a, j\rangle \in A \times J \ : \ pa = fj\}$ *con la topología que hereda como subespacio de* $A \times J$*. Para todo par de funciones continuas* $X \xrightarrow{h_1} A$ *y* $X \xrightarrow{h_2} J$ *hay una única función continua* $X \longrightarrow B$ *tal que conmuta*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "h_2"] \arrow[ddr, bend right, "h_1"'] & & \\ & B \arrow[r, "q"] \arrow[d, "g"] & J \arrow[d, "f"] \\ & A \arrow[r, "p"'] & K \end{tikzcd}$$

Demostración.
La única función que hace conmutativo al diagrama es $\langle h_1, h_2\rangle$. Esta es continua porque una base para la topología de B es $\{(U \times V) \cap B \ : \ U \subseteq A, \ V \subseteq J \ \text{abiertos}\}$ y $\langle h_1, h_2\rangle^{-1}(U \times V) \cap B = h_1^{-1}U \cap h_2^{-1}V$.

$*$

Proposición 1.10 *Misma situación de la proposición 1.9. Si $A \xrightarrow{p} K$ es una identificación abierta, q es una identificación abierta.*

Demostración.
q es abierta. Sea U abierto en B. Por la proposición 1.9, U es de la forma

$$\bigcup_{\alpha}(A_\alpha \times H_\alpha) \cap B$$

con A_α, H_α abiertos en A, J respectivamente. Tenemos las equivalencias

$$\frac{\dfrac{\dfrac{x \in q(\bigcup_\alpha (A_\alpha \times H_\alpha) \cap B)}{x \in H_{\alpha_0} \text{ y hay } a \in A_{\alpha_0} \text{ con } fx = pa \text{ para una } \alpha_0}}{x \in H_{\alpha_0} \text{ y } x \in f^{-1}p(A_{\alpha_0}) \text{ para una } \alpha_0}}{x \in \bigcup_\alpha (f^{-1}p(A_\alpha) \cap H_\alpha)}$$

Por lo tanto $qU = \bigcup_\alpha (f^{-1}p(A_\alpha) \cap H_\alpha)$. Como p es abierta, qU es abierto.
q es una identificación. Sea $U \subseteq J$ con $q^{-1}U$ abierto. Como p es identificación, en particular es sobre. Se sigue que q es sobre y que $U = qq^{-1}U$. Por el inciso anterior q es abierta. Por lo tanto U es abierto y q es identificación.

*

Capítulo 2

Categorías Regulares

2.1 Subobjetos, suprayecciones e imágenes

Éste capítulo es esencialmente la primera sección de [4]. La definición de *suprayección* es de [2].

Las definiciones y proposiciones de éste capítulo nos permiten definir a las *categorías regulares*. Éstas son de suma importancia porque casi todo este trabajo transcurre dentro de ellas.

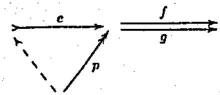
A menos de que se diga lo contrario, trabajaremos en categorías con límites finitos (esto se define en [8]). Sea $\mathcal{A}$ una categoría y A uno de sus objetos. Se induce un preorden en los monos de codominio A por: $i \leq i'$ si hay k con $i = i' \circ k$. Dos monos i, i' se dicen *equivalentes* si $i \leq i'$ y $i' \leq i$. Las clases de equivalencia inducidas (se acaba de definir una relación de equivalencia) se llaman *subobjetos* de A y se denotan Sub A. El orden $\leq$ se hereda. De esta manera, Sub A es un conjunto parcialmente ordenado con ínfimos binarios $i \wedge i'$ dados por el producto fibrado y máximo 1_A.

Definición 2.1 *Se dice que un morfismo* $A \xrightarrow{p} K$ *es una* suprayección *si* $p = m \circ a$ *con* m *mono implica* m *iso.*

Las siguientes son algunas propiedades básicas de las suprayecciones.

Proposición 2.2 *Toda suprayección es epi.*

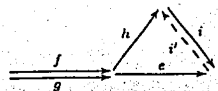
Demostración. Supongamos que $f \circ p = g \circ p$ y p es suprayección. Calculemos el igualador e de f y g. Por la propiedad universal del igualador p se factoriza a través de e. Como e es mono y p es suprayección, e es iso. Concluimos que $f = g$



$*$

Proposición 2.3 *Todo epi regular es una suprayección.*

Demostración. Sea e el coigualador de f y g. Si $e = i \circ h$ con i mono entonces $h \circ f = h \circ g$. Por la propiedad universal del coigualador, hay un único morfismo i' con $h = i' \circ e$. Usando una vez más la propiedad universal, se obtiene $i \circ i' = 1_A$. Por lo tanto i es iso.



$*$

Proposición 2.4 *p es una suprayección si y sólo si tiene la siguiente propiedad*

> *si $v o p = i o u$ con i mono entonces hay una (única) w con $u = w o p$ y $v = i \circ w$*

Esta se llama la propiedad diagonal *de las suprayecciones.*

Demostración. $\Rightarrow$
Calculemos el producto fibrado de i,v $Q \xrightarrow{<i',v'>} B \times C$. Factorizemos a p y u a través del mismo. Como los monos son estables bajo producto fibrado, i' es mono y por ende iso. Como toda suprayección es epi y

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "i'^{-1}"'] \arrow[d, "1"] \\ Q \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "v'"'] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "i"'] & D \end{tikzcd}$$

conmuta, $w = v' \circ i'^{-1}$ da la factorización.

$\Leftarrow$

Supongamos que para un mono i, $p = i \circ u$. Aplicamos la propiedad diagonal al diagrama

$$1 \circ p = i \circ u$$

Entonces para una d, $1 = i \circ d$ y i es iso.

*

En general, un morfismo epi y mono no es iso. Un ejemplo es la observación 1.2.1 Sin embargo,

Proposición 2.5 *Un morfismo que es mono y suprayección es iso.*

Demostración. Se aplica 2.4 a

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "1"'] & {} \arrow[d, "1"] \\ {} \arrow[r, "p"'] & {} \end{tikzcd}$$

Proposición 2.6 *Las suprayecciones son cerradas bajo composición.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama, en el que p, q son suprayecciones cuya composición qp se factoriza a través de un mono i y w se obtuvo con la propiedad diagonal

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "p"] \arrow[dr] & {} \arrow[r, "q"] \arrow[d, dashed, "w"] & {} \\ & {} \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Como $q = iw$, i es iso.

*

Proposición 2.7 *Si $p \circ f$ es suprayección entonces p es suprayección.*

Demostración. Si $i \circ h$ es una factorización de p con i mono, entonces $i \circ (h \circ f)$ es una factorización de $p \circ f$.

*

Considérese el conjunto de todas las suprayecciones de dominio A. Este conjunto también está preordenado. Tómese $p \leq p'$ si y sólo si hay q con $p = q \circ p'$. Al poner p relacionado con p' si $p \leq p'$ y $p' \leq p$ se induce una relación de equivalencia. Las clases de equivalencia se denotan Coci A . El preorden se les hereda.

Definición 2.8 *Una categoría $\mathcal{A}$* tiene imágenes *si todo morfismo* $A \xrightarrow{f} B$ *admite una factorización a través de un subobjeto mínimo. Dicho subobjeto es único salvo isomorfismo y lo llamamos la* imagen *de f. Usamos la notación usual* Im $f = i$ *para decir que i es la imagen de f.*

Proposición 2.9 *$f = i \circ p$ con i mono. p es suprayección si y sólo si i es la imagen de f.*

Demostración.
$\Rightarrow$ Sea $f = i' \circ p'$ otra factorización de f con i' mono. Aplíquese la propiedad diagonal al cuadrado $i' \circ p' = i \circ p$.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & \cdot \arrow[d, "i"] \arrow[dl, dashed] \\ \cdot \arrow[r, "i'"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$ Suponga $f = i \circ p$ con Im $f = i$. Si $p = i' \circ p'$ con i' mono entonces f se factoriza a través del mono $i \circ i'$. Como Im $f = i$, hay i'' con $i' \circ i'' = 1$. Entonces i' iso.

$*$

Proposición 2.10 *Si la categoría $\mathcal{A}$ tiene imágenes entonces para todo objeto A de la categoría,* Coci A *tiene supremos binarios.*

Demostración. Sean $A \xrightarrow{p} K$, $A \xrightarrow{p'} K'$ dos suprayecciones. Si q es la suprayección que aparece en la factorización de $\langle p, p' \rangle$ a través de su imagen entonces, $p \leq q$ y $p' \leq q$. Si q' es una suprayección con $p \leq q'$ y $p' \leq q'$ entonces $f = \langle p, p' \rangle$ factoriza a través de q'. Aplíquese la propiedad diagonal al cuadrado derecho.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\langle p,p' \rangle"] \arrow[dr, "q"'] & & K \times K' \\ & \mathrm{Im} f \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "q"'] & L \arrow[d] \\ \mathrm{Im} f \arrow[r] & K \times K' \end{tikzcd}$$

$*$

Proposición 2.11 *La diagonal del coproducto fibrado de dos suprayecciones es suprayección.*

Demostración. Sean $A \xrightarrow{p} K$, $A \xrightarrow{p'} K'$ dos suprayecciones con coproducto fibrado como sigue

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & K \arrow[d, "q'"] \\ K' \arrow[r, "q"'] & L \end{tikzcd}$$

Veremos que q es suprayección. Luego la proposición se sigue de 2.6. Supongamos que $q = i \circ r$ para un mono i. Por 2.4, hay una única d tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "r o p'"'] & K \arrow[d, "q'"] \arrow[dl, "d"] \\ M \arrow[r, "i"'] & L \end{tikzcd}$$

Entonces hay una única i' tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p'"'] & K \arrow[d, "q'"] \arrow[ddr, bend left, "d"] & \\ K' \arrow[r, "q"'] \arrow[drr, bend right, "r"'] & L \arrow[dr, "i'"] & \\ & & M \end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal del coproducto fibrado, $i \circ i' = 1_L$. Como i es mono, entonces es iso. Concluimos que q es suprayección y por lo tanto $q \circ p'$ es suprayección.

*

Proposición 2.12 *En una categoría con imágenes, sean $A \xrightarrow{p} K_1$ y $A \xrightarrow{q} K_2$ dos suprayecciones. Su coproducto fibrado existe si y sólo si tienen ínfimo $p \wedge q$ en* Coci A. *Éste es precisamente la diagonal de dicho coproducto.*

Demostración. $\Rightarrow$ Si

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & K_1 \arrow[d, "q'"] \\ K_2 \arrow[r, "p'"'] & L \end{tikzcd}$$

es coproducto fibrado, el morfismo $r = q'p = p'q$ es una suprayección por la proposición 2.11. Claramente $r \leq p, q$. Sea t una suprayección con $t \leq p, q$. Esto quiere decir que hay $K_1 \xrightarrow{f} M$ y $K_2 \xrightarrow{g} M$ tales que $fp = t = gq$. Por la propiedad universal de coproducto fibrado hay una única $L \xrightarrow{e} M$ tal que $f = eq'$ y $g = ep'$. Entonces $t = er$ o sea, $t \leq r$ en Coci A. Por lo tanto $r = p \wedge q$.

$\Leftarrow$ Sean $A \xrightarrow{p} K_1$ y $A \xrightarrow{q} K_2$ dos suprayecciones con ínfimo indicado por

$$\begin{tikzcd} & K_1 \arrow[d, "p'"] \\ A \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "p\wedge q"] \arrow[dr, "q"'] & K \\ & K_2 \arrow[u, "q'"'] \end{tikzcd}$$

Sean $K_1 \xrightarrow{x} L$ y $K_2 \xrightarrow{y} L$ tales que $xp = yq$. Denotemos este morfismo por t y pongamos su factorización suprayección-mono

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "t"] \arrow[dr, "r"'] & & L \\ & M \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Por la propiedad diagonal, hay únicas x' y y' tales que $r = x'p$ y $r = y'q$. Entonces hay $K \xrightarrow{w} M$ con

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "w"] \\ A \arrow[ur, "p\wedge q"] \arrow[r, "r"'] & M \end{tikzcd}$$

Así es que, como p y q son suprayecciones, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & K_1 \arrow[d, "p'"] \arrow[ddr, bend left, "x"] & \\
K_2 \arrow[r, "q'"'] \arrow[drr, bend right, "y"'] & K \arrow[dr, "i \circ w"] & \\
 & & L
\end{tikzcd}$$

conmuta. $i \circ w$ es el único morfismo que lo hace conmutar porque $p \wedge q$ es suprayección.

$*$

Ejemplo 2.13 *En* Con *las suprayecciones son las funciones sobres. En* Ab *las suprayecciones son los morfismos sobres. En* Top *las suprayecciones son las identificaciones. Las primeras dos afirmaciones son claras. La tercera se trató en los preliminares.*

2.2 Categorías Regulares

Empezamos esta sección con una definición y un lema que serán útiles para definir a las categorías regulares.

Definición 2.14 *Sea* $A \xrightarrow{f} B$ *un morfismo. Al mono* $\langle r_1, r_2 \rangle$ *obtenido de calcular el producto fibrado de* f *consigo mismo se le llama el* núcleo *o* par núcleo *de* f*, y se denota* Núc $f = \langle r_1, r_2 \rangle$.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_2"'] & A \arrow[d, "f"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Lema 2.15 *Si* $f = ip$ *es una factorización de* f *con* i *mono entonces* Núc f = Núc p

Demostración. Denotemos Núc $f = \langle r_1, r_2\rangle$. $pr_1 = pr_2$ porque i es mono. Sean $\langle g_1, g_2\rangle$ con $pg_1 = pg_2$. Entonces

$$fg_1 = ipg_1 = ipg_2 = fg_2$$

Pero $\langle r_1, r_2\rangle$ es universal entre las parejas coigualadas por f.

∗

Definición 2.16 *Una categoría $\mathcal{A}$ se dice* regular *si*

- *tiene límites finitos*
- *tiene imágenes*
- *sus suprayecciones son estables bajo producto fibrado*

Lema 2.17 *En una categoría regular $\mathcal{A}$, si $A \xrightarrow{p} K$ y $B \xrightarrow{q} L$ son suprayecciones entonces $p \times q$ es suprayección.*

Demostración. Los cuadrados

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "p\times 1_B"] \arrow[d, "\pi_A"'] & K \times B \arrow[d, "\pi_K"] \\ A \arrow[r, "p"'] & K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \times B \arrow[r, "1_K\times q"] \arrow[d, "\pi_B"'] & K \times L \arrow[d, "\pi_L"] \\ B \arrow[r, "q"'] & L \end{tikzcd}$$

son productos fibrados. Como $\mathcal{A}$ es regular, $1_K \times q$ y $p \times 1_B$ son suprayecciones. Por la proposición 2.6, $p \times q = (1_K \times q) \circ (p \times 1_B)$ es suprayección.

∗

Si se tienen dos morfismos

$$A \xrightarrow{q} C \xrightarrow{g} K,$$

el núcleo de su composición se puede expresar en términos de un producto fibrado a lo largo del núcleo del segundo. Más precisamente

Lema 2.18 *Denotemos* Núc $g = \langle s_1, s_2\rangle$ *Si el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\langle r_1,r_2\rangle"'] & S \arrow[d, "\langle s_1,s_2\rangle"] \\ A \times A \arrow[r, "q\times q"'] & C \times C, \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado entonces Núc $gq = \langle r_1, r_2\rangle$.

Demostración.
El cuadrado correspondiente conmuta puesto que

$$gqr_1 = gs_1t = gs_2t = gqr_2$$

Sean $x_1, x_2 : X \to A$ con $(gq)x_1 = (gq)x_2$. Hay un único morfismo $X \xrightarrow{x} S$ con $s_1x = qx_1$ y $s_2x = qx_2$. Entonces, $(q \times q)\langle x_1, x_2\rangle = \langle s_1, s_2\rangle x$. Así pues, hay un único morfismo $X \xrightarrow{y} R$ con $\langle r_1, r_2\rangle y = \langle x_1, x_2\rangle$ y $ty = x$. Como $\langle r_1, r_2\rangle$ es mono, sólo y satisface la primera de estas condiciones. Por lo tanto, Núc $gq = \langle r_1, r_2\rangle$.

*

Proposición 2.19 *En las categorías regulares, toda suprayección es coigualadora de su par núcleo.*

Demostración. Sea $A \xrightarrow{p} K$ una suprayección con núcleo $R \xrightarrow{\langle r_1,r_2\rangle} A \times A$. Sea $A \xrightarrow{f} B$ con $fr_1 = fr_2$. En el siguiente diagrama, C es la imagen del morfismo $\langle p, f\rangle$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\langle p,f\rangle"] \arrow[dr, "q"'] & & K \times B \\ & C \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd}$$

Se tiene $p = (\pi_K \circ j) \circ q$ y $f = (\pi_B \circ j) \circ q$. Bastaría demostrar que el morfismo $g = \pi_K \circ j$ es invertible. Por la proposición 2.7, g es suprayección. Veremos que g es mono. Estamos en la situación del lema 2.18. Como $\langle p, f\rangle r_1 = \langle p, f\rangle r_2$ entonces $qr_1 = qr_2$. Esto implica $s_1t = qr_1 = qr_2 = s_2t$. Como estamos en una categoría regular, t es suprayección por el lema 2.17. Entonces $s_1 = s_2$ y g es mono.

*

Definición 2.20 *Si A es un objeto de una categoría, a los morfismos con codominio A se les llamará* elementos generalizados *de A o simplemente* elementos *de A.*

Definición 2.21 *Si $X \xrightarrow{a} A$ es un elemento de A y $G \xrightarrow{i} A$ es un subobjeto de A, se dice que a* pertenece a *G si a se factoriza a través de i.*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "i"] & \\ & A \\ X \arrow[uu, dashed] \arrow[ur, "a"'] & \end{tikzcd}$$

Nótese que de esta manera, los subobjetos quedan determinados por los elementos que les pertenecen.

Proposición 2.22 *En una categoría regular, un elemento $Y \xrightarrow{b} B$ pertenece a la imagen de un morfismo $A \xrightarrow{f} B$ si y sólo si hay un elemento $X \xrightarrow{a} A$ y una suprayección $X \xrightarrow{q} Y$ con $bq = fa$.*

Demostración.
$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[d, "b'"] \arrow[ddr, bend left, "b"] & \\ A \arrow[r, "p"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & \mathrm{Im}\ f \arrow[dr, "i"] & \\ & & B \end{tikzcd}$$

Si $f = ip$ es la factorización de f entonces $b = ib'$ para una b'. Si el producto fibrado de p y b' está dado por $X \xrightarrow{\langle a,q \rangle} A \times Y$ entonces q y a son los morfismos buscados.
$\Leftarrow$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "q"] \arrow[d, "a"'] & Y \arrow[dd, "b"] \arrow[ddl, dashed, "b'"] \\ A \arrow[d, "p"'] & \\ \mathrm{Im}\ f \arrow[r, "i"'] & B \end{tikzcd}$$

Tenemos $bq = fa$ con q suprayección. Por la propiedad diagonal hay un único morfismo $Y \xrightarrow{b'} \mathrm{Im}\, f$ con $b = ib'$.

*

2.3 Relaciones

En cualquier categoría con límites finitos, se puede hablar de *relaciones*. En este capítulo suponemos todas las categorías regulares.

Definición 2.23 *A los subobjetos de $A \times B$ se les llama* relaciones de A en B. *Usamos la notación $R : A \nrightarrow B$, para indicar que una relación va de A en B, si es que no se presta a confusión.*

Por definición, las relaciones de un objeto a otro constituyen un conjunto parcialmente ordenado con ínfimos finitos y elemento máximo. Dada una relación $R = \langle r_1, r_2 \rangle : A \nrightarrow B$, podemos considerar su opuesta $R^{\circ} = \langle r_2, r_1 \rangle : B \nrightarrow A$. Asimismo, a los morfismos se les puede ver como relaciones si se identifican con su gráfica $\langle 1_A, f \rangle$. Es claro que las únicas relaciones de ese tipo son las que tienen a r_1 iso. De manera análoga a la definición 2.21, podemos hablar de pertenencia.

Definición 2.24 *Se dice que una pareja de elementos generalizados*

$$\begin{tikzcd} & A \\ X \arrow[ur, "a"] \arrow[dr, "b"'] & \\ & B \end{tikzcd}$$

pertenece *a la relación $R : A \nrightarrow B$ si $\langle a, b \rangle$ se factoriza a través del subobjeto R. Esto lo denotamos $b(R)a$. Nótese que una relación está completamente determinada por los objetos que le pertenecen.*

Definición 2.25 *Sean $A \xrightarrow{R} B$ y $B \xrightarrow{S} C$ relaciones en una categoría con imágenes. Podemos formar el diagrama*

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "u_2"] & & \\ & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & & S \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "s_2"] & \\ A & & B & & C \end{tikzcd}$$

donde $\langle u_1, u_2\rangle$ *es el producto fibrado de* r_2 *con* s_1*. La* composición S que sigue a R, *denotada* SR *es la imagen del morfismo* $\langle r_1u_1, s_2u_2\rangle$.

Proposición 2.26 *Si* $A \xrightarrow{R} B$ *y* $B \xrightarrow{S} C$ *son relaciones entonces* $c(SR)a$ *para* $X \xrightarrow{a} A$, $X \xrightarrow{c} C$ *si y sólo si hay una suprayección* $Y \xrightarrow{p} X$ *y un elemento generalizado* $Y \xrightarrow{b} B$ *con* $cp(S)b$ *y* $b(R)ap$.

Demostración. $\Rightarrow$ La definición de composición, aunada a la proposición 2.22, nos da $c(SR)a$ si y sólo si hay $Y \xrightarrow{y} M$ elemento generalizado y $Y \xrightarrow{p} X$ suprayección tales que conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "y"'] & X \arrow[d, "\langle a,c\rangle"] \\ M \arrow[r, "\langle r_1u_1, s_2u_2\rangle"'] & A \times C \end{tikzcd}$$

Al definir $b = r_2 \circ u_1 \circ y = s_1 \circ u_2 \circ y$, obtenemos lo deseado.
$\Leftarrow$ Si $\langle r_1, r_2\rangle r = \langle ap, b\rangle$ y $\langle s_1, s_2\rangle s = \langle b, cp\rangle$ entonces hay un único morfismo $Y \xrightarrow{y} M$ tal que $r = u_1 \circ y$ y $u_2 \circ y = s$. Este morfismo y hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "y"'] & X \arrow[d, "\langle a,c\rangle"] \\ M \arrow[r, "\langle r_1u_1, s_2u_2\rangle"'] & A \times C \end{tikzcd}$$

Por la proposición 2.22, $c(SR)a$.

*

Proposición 2.27 *La composición de relaciones es asociativa.*

Demostración. Se reduce a demostrar que para tres relaciones

$$A \xrightarrow{R} B \xrightarrow{S} C \xrightarrow{T} D$$

y dos elementos generalizados $X \xrightarrow{a} A$ y $X \xrightarrow{d} D$, se tiene que

$$d((TS)R)a \Leftrightarrow d(T(SR))a$$

Aplicando dos veces la proposición 2.26, obtenemos $d((TS)R)a \Leftrightarrow$ el diagrama izquierdo. Reacomodando el diagrama izquierdo obtenemos el derecho.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[ddl, "a"'] \arrow[ddrr, bend left, "d"] & & & & & X \arrow[ddll, bend right, "a"'] \arrow[ddr, "d"] & \\
 & Y \arrow[u, "p"] \arrow[d, "b"'] & Z \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "c"] & \Longrightarrow & & Z \arrow[r, "1_Z"'] \arrow[d, "bq"'] & Z \arrow[u, "pq"'] \arrow[d, "c"] & \\
A & B & C & D & A & B & C & D
\end{tikzcd}$$

Una vez más, la proposición 2.26 garantiza $d(T(SR))a$. La otra implicación es análoga.

*

Observación 2.3.1 *Dada una categoría regular $\mathcal{A}$, podemos definir su categoría* Rel $\mathcal{A}$ *de relaciones por*

Objetos *son los objetos de $\mathcal{A}$*

Morfismos *de A a B son las relaciones de A a B*

Las identidad en A es la relación $\langle 1_A, 1_A \rangle$. La composición de morfismos es como en la definición 2.25. La proposición 2.27 asegura que es asociativa. Además, si $A \xrightarrow{f} B$ y $B \xrightarrow{g} C$ son dos morfismos de la categoría $\mathcal{A}$, el rombo en

$$\begin{tikzcd}
 & & A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[dr, "f"] & & \\
 & A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[dr, "f"] & & B \arrow[dl, "1_B"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

es producto fibrado. Es decir, la composición de f y g como morfismos de $\mathcal{A}$ se corresponde a su composición en Rel $\mathcal{A}$.

Proposición 2.28 *Sean R, S, T y P cuatro relaciones como en el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "R"] & B \arrow[r, bend left, "T"] \arrow[r, bend right, "S"'] & C \arrow[r, "P"] & D
\end{tikzcd}$$

Si $S \leq T$ entonces $SR \leq TR$ y $PS \leq PT$.

Demostración. Sólo demostraremos $PS \leq PT$-la otra desigualdad es análoga. Denotemos por y al morfismo $S \longrightarrow T$ que $\langle t_1, t_2\rangle y = \langle s_1, s_2\rangle$. Denotemos por $\langle u_1, u_2\rangle : M \to S \times P$ y $\langle v_1, v_2\rangle : N \to T \times P$ a los productos fibrados de s_2 con p_1 y t_2 con p_1 respectivamente. Como

$$p_1 u_2 = s_2 u_1 = t_2 y u_1,$$

hay un único morfismo $M \xrightarrow{y'} N$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "u_1"'] \arrow[dr, dashed, "y'"] \arrow[drr, bend left, "u_2"] & & \\
S \arrow[dr, "y"'] & N \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "v_1"] & P \arrow[d, "p_1"] \\
& T \arrow[r, "t_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

Se sigue que

$$\langle s_1 u_1, p_2 u_2\rangle = \langle t_1 v_1, p_2 v_2\rangle y'$$

Como $PS = \text{Im } \langle s_1 u_1, p_2 u_2\rangle$ y $PT = \text{Im } \langle t_1 v_1, p_2 v_2\rangle$, concluimos que $PS \leq PT$.

*

Es muy útil considerar algunos casos especiales de composición de relaciones. Nos referimos a todas las variantes que ocurren si una de las relaciones es una función o la opuesta de una función.

Lema 2.29 *Con la notación de la definición 2.25. Si R es un morfismo $A \xrightarrow{f} B$, entonces $Sf = \langle u_1, s_2 u_2\rangle$. De igual forma, si $S = g^\circ$ con g un morfismo $C \longrightarrow B$ entonces $g^\circ R = \langle r_1 u_1, u_2\rangle$.*

Demostración. En el siguiente diagrama, el rombo es producto fibrado

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "u_2"] & & \\
& A \arrow[dl, "1_A"'] \arrow[dr, "f"] & & S \arrow[dl, "s_1"'] \arrow[dr, "s_2"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que el morfismo $\langle u_1, s_2u_2\rangle$ es mono. Sean x, y dos morfismos con $\langle u_1, s_2u_2\rangle x = \langle u_1, s_2u_2\rangle y$. Proyectando obtenemos, $s_2u_2x = s_2u_2y$ y $u_1x = u_1y$. Entonces $s_1u_2x = fu_1x = fu_1y = s_1u_2y$. Esto significa que $\langle s_1, s_2\rangle u_2x = \langle s_1, s_2\rangle u_2y$ y por ende $u_2x = u_2y$ y $\langle u_1, u_2\rangle x = \langle u_1, u_2\rangle y$. Por lo tanto $x = y$. Analogamente si $S = g^\circ$.

*

Lema 2.30 *Con la notación de la definición 2.25. Si S es el morfismo $B \xrightarrow{g} C$ entonces $gR = \mathrm{Im}\ \langle r_1, gr_2\rangle$. De igual forma, si $R = f^\circ$ con f un morfismo $B \longrightarrow A$ entonces $Sf^\circ = \mathrm{Im}\ \langle fs_1, s_2\rangle$.*

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
 & & R \arrow[dl, "1_R"'] \arrow[dr, "r_2"] & & \\
 & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & & B \arrow[dl, "1_B"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}$$

El rombo es un producto fibrado.

*

Corolario 2.31 *En una categoría regular,*

1. *Para cualquier morfismo $X \xrightarrow{f} Y$ se tiene $f^\circ f = \text{Núc}\ f$. Así pues, $1_A \leq f^\circ f$ con igualdad si y sólo si f es mono.*

2. *Para cualquier morfismo $B \xrightarrow{h} A$ se tiene $hh^\circ \leq 1_A$. Se da la igualdad si y sólo si h es suprayección.*

3. *Si $R = \langle r_1, r_2\rangle$ es una relación, entonces $R = r_2{r_1}^\circ$.*

Demostración.

1. En (2.29), tomese $S = f^\circ$, $R = f$.

2. Por (2.30) sabemos que $hh^\circ = \mathrm{Im}\ \langle h, h\rangle$. Pero si la factorización de h es ip, entonces la de $\langle h, h\rangle$ es $\langle i, i\rangle p$.

3. En (2.30), compónganse $r_1{}^\circ$ y r_2.

*

Corolario 2.32 *Si $A \xrightarrow{f} B$ y $C \xrightarrow{g} D$ son dos morfismos y $C \xrightarrow{R} A$ $D \xrightarrow{S} B$ dos relaciones entonces*

$$fRg^\circ \leq S \quad \Leftrightarrow \quad R \leq f^\circ S g$$
$$ff^\circ f = f \quad \text{y} \quad f^\circ f f^\circ = f^\circ$$

Demostración. Son consecuencia inmediata del corolario 2.31

*

Es claro que

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta si y sólo si hay $w : D \to U$ con

$$\begin{tikzcd} D \arrow[dr, "w"] \arrow[drr, bend left, "k"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\ & U \arrow[r, "u_2"'] \arrow[d, "u_1"] & C \arrow[d, "g"] \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmutativo, donde $\langle u_1, u_2 \rangle$ es el producto fibrado de f con g.

Teorema 2.33 *Con la notación del diagrama anterior.*

1. *El cuadrado conmuta si y sólo si $kh^\circ \leq g^\circ f$.*

2. *$kh^\circ = g^\circ f$ si y sólo si el cuadrado conmuta y w es suprayección.*

3. El cuadrado es un producto fibrado si y sólo si $kh^\circ = g^\circ f$ y $\langle h,k\rangle$ es mono.

Demostración.

1. La relación kh° es la imagen de $\langle h,k\rangle$. $\langle u_1,u_2\rangle$ es mono. Entonces $\langle h,k\rangle = \langle u_1,u_2\rangle w$ si y sólo si $kh^\circ \leq \langle u_1,u_2\rangle = g^\circ f$.

2. Si w es suprayección entonces $\langle u_1,u_2\rangle$ es la imagen de $\langle h,k\rangle$ y por ende $kh^\circ = g^\circ f$. Al revés, si $kh^\circ = g^\circ f$ entonces $kh^\circ = \mathrm{Im}\ \langle h,k\rangle = \langle u_1,u_2\rangle$. Por lo tanto, la igualdad $\langle h,k\rangle = \langle u_1,u_2\rangle w$ fuerza a que w sea suprayección.

3. Si $kh^\circ = g^\circ f$ y $\langle h,k\rangle$ es mono entonces $\langle h,k\rangle = kh^\circ = g^\circ f$ y por ende es producto fibrado. Si el cuadrado es producto fibrado entonces de entrada $\langle h,k\rangle$ es mono y por ende $kh^\circ = \langle h,k\rangle$. Pero el producto fibrado de f con g es $g^\circ f$.

$*$

Ejemplo 2.34 *En* Con. *El primer inciso del teorema 2.33 dice que*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "k"] \arrow[d, "h"'] & C \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta si y sólo si

$$\{(hd,kd) \mid d \in D\} \subseteq \{(a,c) \mid fa = gc\}$$

Los incisos 1. y 2. del corolario 2.31 dicen

1. *La función $X \xrightarrow{f} Y$ es inyectiva si y sólo si para todo subconjunto $Z \subseteq X$ se da $f^{-1}fZ = Z$.*

2. *La función $X \xrightarrow{f} Y$ es sobre si y sólo si para todo subconjunto $Z \subseteq X$ se da $ff^{-1}Z = Z$.*

Proposición 2.35 *Sean relaciones $R : A \to B$, $S : B \to C$ y $T : A \to C$. Se tiene:*

$$SR \wedge T \leq S(R \wedge S^\circ T)$$

Demostración. Sean $X \xrightarrow{a} A$ y $X \xrightarrow{c} C$ dos elementos generalizados tales que $c(SR \wedge T)a$. Hay una suprayección $Y \xrightarrow{p} X$ tal que

$$cp(S)b \quad c(T)a \quad b(R)ap$$

Entonces $b(R \wedge S^\circ T)ap$. Así pues, $cp(S(R \wedge S^\circ T))ap$. Como p es suprayección $c(S(R \wedge S^\circ T))a$.

*

2.4 Equiv A, Cong A y Coci A

Definición 2.36 *Una relación $A \xrightarrow{R} A$ se dice*

- reflexiva *si* $\Delta_A = \langle 1_A, 1_A \rangle \leq R$
- simétrica *si* $R^\circ \leq R$
- transitiva *si* $RR \leq R$
- de equivalencia *si cumple las tres anteriores.*

Al conjunto de relaciones de equivalencia en un objeto A, ordenadas como subobjetos de $A \times A$ lo denotamos por Equiv A. El elemento mínimo de Equiv A es Δ_A. El elemento máximo es $A \times A \xrightarrow{1_{A \times A}} A \times A$ Los ínfimos finitos en Equiv A se calculan como en las endorelaciones de A puesto que

Proposición 2.37 *Sean R y R' son dos relaciones de equivalencia en A. $R \wedge R'$ es relación de equivalencia.*

Proposición 2.38 *Para cualquier morfismo $A \xrightarrow{f} B$ la relación* Núc f *$: A \to A$ es de equivalencia.*

Demostración. Por el corolario 2.31 $1_A \leq f^\circ f$. Es obvio que $(f^\circ f)^\circ = f^\circ f$. Mientras que por el corolario 2.32, $(f^\circ f)(f^\circ f) = f^\circ f$.

*

Definición 2.39 *A las relaciones de equivalencia de la forma* Núc f *para algún morfismo* f *se les dice* efectivas *o simplemente* congruencias. *Al conjunto de congruencias en un objeto* A *lo denotamos por* Cong A

En una categoría regular, Cong A es un subconjunto de Equiv A con el orden inducido. Tenemos inducida la función Núc : Coci $A \to$ Cong A que a cada suprayección le asocia su par núcleo.

Teorema 2.40 *En una categoría regular,* Núc : Coci $A \to$ Cong A *es una biyección entre conjuntos parcialmente ordenados que invierte el orden. Su inversa se calcula coigualando y se denota* Coig : Cong $A \to$ Coci A

Demostración.
Si f es un morfismo con dominio A, su par núcleo $\langle f_1, f_2\rangle$ es un elemento cualquiera de Cong A. Por la proposición 2.15 sabemos que si $f = ip$ es la factorización de f entonces Núc $p =$ Núc f. O sea, Núc es sobre.
Por otro lado, de la proposición 2.19 se deduce que

$$\text{Coig} \circ \text{Núc} = 1_{\text{Coci } A}$$

Concluimos pues, que Núc es biyectiva.
Veamos ahora que invierte el orden. Sean $q, q' \in$ Coci A tales que $q \leq q'$. Entonces q coiguala al núcleo de q' y por consiguiente Núc $q' \leq$ Núc q.

$*$

Proposición 2.41 *En una categoría regular, si* $p, p' \in$ Coci A *entonces*

$$\text{Núc } (p \vee p') = (\text{Núc } p) \wedge_{\text{Equiv } A} (\text{Núc } p')$$

Es decir, los ínfimos en Cong A *se calculan como en* Equiv A.

Demostración. Denotemos por $M \xrightarrow{\langle m_1, m_2\rangle} A \times A$ y $M' \xrightarrow{\langle m'_1, m'_2\rangle} A \times A$ a los núcleos de p y p' respectivamente. De esta manera, en Equiv A, su ínfimo está dado por el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} \tilde{N} \arrow[r, "\tilde{n}_2"] \arrow[d, "\tilde{n}_1"'] & M' \arrow[d, "\langle m'_1, m'_2\rangle"] \\ M \arrow[r, "\langle m_1, m_2\rangle"'] & A \times A \end{tikzcd}$$

Si denotamos por $N \xrightarrow{\langle n_1, n_2\rangle} A \times A$ al núcleo de $\langle p, p'\rangle$ hay que ver que como subobjetos de $A \times A$, $\tilde{N}$ y N son el mismo. Por un lado tenemos

$$\begin{tikzcd}
\tilde{N} \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "m_2'\tilde{n}_2 = m_2\tilde{n}_1"] \arrow[ddr, bend right, "m_1'\tilde{n}_2 = m_1\tilde{n}_1"'] & & \\
& N \arrow[r, "n_2"] \arrow[d, "n_1"'] & A \arrow[d, "\langle p,p'\rangle"] \\
& A \arrow[r, "\langle p,p'\rangle"'] & K \times K'
\end{tikzcd}$$

En el otro sentido considérense primero

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "l"] \arrow[drr, bend left, "n_2"] \arrow[ddr, bend right, "n_1"'] & & \\
& M \arrow[r, "m_2"] \arrow[d, "m_1"'] & A \arrow[d, "p"] \\
& A \arrow[r, "p"'] & K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
N \arrow[dr, "l'"] \arrow[drr, bend left, "n_2"] \arrow[ddr, bend right, "n_1"'] & & \\
& M' \arrow[r, "m_2'"] \arrow[d, "m_1'"'] & A \arrow[d, "p'"] \\
& A \arrow[r, "p'"'] & K
\end{tikzcd}$$

Y luego

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "l'"] \arrow[ddr, bend right, "l"'] & & \\
& \tilde{N} \arrow[r, "\tilde{n}_2"] \arrow[d, "\tilde{n}_1"'] & M' \arrow[d, "\langle m_1', m_2'\rangle"] \\
& M \arrow[r, "\langle m_1, m_2\rangle"'] & K
\end{tikzcd}$$

$*$

Cerramos este capítulo con una definición y un ejemplo.

Definición 2.42 *Una categoría $\mathcal{A}$ se dice* exacta *si es regular y todas sus relaciones de equivalencia son efectivas.*

Ejemplo 2.43 Ab *es exacta. Si $R \leq G \times G$ es una relación de equivalencia sabemos que se corresponde con un subgrupo $H \leq G$. Se puede considerar el* *grupo cociente* $G \xrightarrow{p} G/H$ *y* p *es suprayección en* Ab. *Si* $R \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} G$ *son las proyecciones entonces* p *las coiguala y además*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{r_2} & G \\ {\scriptstyle r_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ G & \xrightarrow[p]{} & G/H \end{array}$$

es un producto fibrado.

Capítulo 3

n-permutabilidad en categorías regulares

3.1 n-permutabilidad

Si

$$B \xleftarrow[R]{} A \xleftarrow[S]{} B$$

son dos relaciones en una categoría regular, podemos formar la sucesión de relaciones

$$R,\ RS,\ RSR,\ RSRS, \ldots$$

en la que cada término se obtiene del anterior precomponiendo con R ó S según sea el caso.

Definición 3.1 *En una categoría regular $\mathcal{A}$ consideremos las relaciones*

$$B \xleftarrow[R]{} A \xleftarrow[S]{} B.$$

Definimos la sucesión $(R, S)_n$ por inducción: $(R, S)_0 = 1$,

$$(R, S)_{n+1} = \begin{cases} (R, S)_n R & n \text{ par} \\ (R, S)_n S & n \text{ impar} \end{cases}$$

Lema 3.2 *R y S como en la definición anterior. En caso de que R y S sean ambas relaciones reflexivas en el objeto A, cada término $(R, S)_n$ volverá a ser una relación reflexiva en A y se forma la cadena de desigualdades*

$$(R, S)_0 \leq (R, S)_1 \leq (R, S)_2 \leq (R, S)_3 \leq (R, S)_4 \leq \ldots$$

Demostración. $(R,S)_0$ es una relación reflexiva. Si n es par y $(R,S)_n$ es reflexiva entonces $1 \leq (R,S)_n R = (R,S)_{n+1}$, puesto que R es reflexiva. Análogamente si n es impar.

*

En casi todo lo que sigue nos ocuparemos del caso en que ambas R y S son relaciones de equivalencia. Empezamos con un lema.

Lema 3.3 *Sean R y S relaciones de equivalencia en un objeto A.*

1. *Para $n \geq 2$, si $(R,S)_n$ es relación de equivalencia entonces $R \vee S = (R,S)_n$ en* Equiv A.

2. *Si $m \geq 1$*

$$(R,S)_n(R,S)_m = \begin{cases} (R,S)_{n+m} & n \text{ par} \\ (R,S)_{n+m-1} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$(R,S)_n(S,R)_m = \begin{cases} (R,S)_{n+m-1} & n \text{ par} \\ (R,S)_{n+m} & n \text{ impar} \end{cases}$$

3. *Si $n < m$ entonces*

$$(R,S)_n \leq (R,S)_m$$
$$(S,R)_n \leq (R,S)_m$$

Si R y S sólo son reflexivas, este resultado sigue siendo válido.

4. $$(R,S)_n^\circ = \begin{cases} (S,R)_n & n \text{ par} \\ (R,S)_n & n \text{ impar} \end{cases}$$

Demostración.

1. Si $T \in$ Equiv A es tal que $R, S \leq T$ entonces siempre $(R,S)_n \leq T$.

2. Ambas igualdades las hacemos por inducción sobre m. Para la primera tenemos:

$$(R,S)_n(R,S)_1 = (R,S)_n R = \begin{cases} (R,S)_{n+1} & n \text{ par} \\ (R,S)_n & n \text{ impar} \end{cases}$$

Supongamos el resultado para m y demostrémoslo para $m+1$.

$$(R,S)_n(R,S)_{m+1} = (R,S)_n \begin{cases} (R,S)_m R & m \text{ par} \\ (R,S)_m S & m \text{ impar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (R,S)_{n+m}R & m \text{ par} & n \text{ par} \\ (R,S)_{n+m-1}R & m \text{ par} & n \text{ impar} \\ (R,S)_{n+m}S & m \text{ impar} & n \text{ par} \\ (R,S)_{n+m-1}S & m \text{ impar} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (R,S)_{n+m+1} & n \text{ par} \\ (R,S)_{n+m} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Mientras que para la segunda:

$$(R,S)_n(S,R)_1 = (R,S)_n S = \begin{cases} (R,S)_n & n \text{ par} \\ (R,S)_{n+1} & n \text{ impar.} \end{cases}$$

Suponiendo para m,

$$(R,S)_n(S,R)_{m+1} = \begin{cases} (R,S)_n(S,R)_m S & m \text{ par} \\ (R,S)_n(S,R)_m R & m \text{ impar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (R,S)_{n+m-1}S & m \text{ par} & n \text{ par} \\ (R,S)_{n+m}S & m \text{ par} & n \text{ impar} \\ (R,S)_{n+m-1}R & m \text{ impar} & n \text{ par} \\ (R,S)_{n+m}R & m \text{ impar} & n \text{ impar} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} (R,S)_{n+m} & n \text{ par} \\ (R,S)_{n+m+1} & n \text{ impar} \end{cases}$$

3. Ambas desigualdades son por inducción sobre $m-n$. Para la primera, como R y S son reflexivas, tenemos

$$(R,S)_n \leq \begin{cases} (R,S)_n R \\ (R,S)_n S, \end{cases}$$

es decir $(R,S)_n \leq (R,S)_{n+1}$. Suponiendo el resultado para $m-n \leq k$, lo demostramos para $m-n=k+1$

$$(R,S)_n \leq (R,S)_{n+k} \leq (R,S)_{n+k+1},$$

donde la primera y segunda desigualdades son las hipótesis de inducción para k y 1 respectivamente.
La otra desigualdad es análoga y sólo haremos la base porque también es una inducción. Demostremos por inducción sobre n que

$$(S,R)_n \leq (R,S)_{n+1}$$

Para $n = 0$ el resultado es claro. Supongamos el resultado cierto para n par. Tenemos:

$$(S,R)_{n+1} = (S,R)_n S \leq (R,S)_{n+1} S = (R,S)_{n+2}$$

Mientras que para n impar

$$(S,R)_{n+1} = (S,R)_n R \leq (R,S)_{n+1} R = (R,S)_{n+2}.$$

4. Sólo haremos el caso $n = 2k-1$ por inducción sobre $1 \leq k$. El otro es análogo. Para la base tenemos $R^\circ = R$ porque R es relación de equivalencia. Supongamos que $(R,S)^\circ_{2k-1} = (R,S)_{2k-1}$. Entonces,

$$\begin{aligned}(R,S)^\circ_{2k+1} &= (R,S)^\circ_{2k-1+2} = ((R,S)_{2k-1}SR)^\circ \\ &= RS(R,S)_{2k-1} = (R,S)_{2k+1}.\end{aligned}$$

*

La importancia del siguiente teorema radica en permitirnos dar la definición que cierra esta sección.

Teorema 3.4 *R y S son relaciones de equivalencia en un objeto A de la categoría regular $\mathcal{A}$. Para toda $n \geq 2$ son equivalentes*

1. $(R,S)_n$ *es una relación de equivalencia*
2. *para cada* $m > n$, $(R,S)_m = (R,S)_n$ *y* $(S,R)_m = (R,S)_n$
3. *para una* $m > n$, $(R,S)_m = (R,S)_n$
4. *para una* $m > n$, $(S,R)_m = (R,S)_n$
5. $(R,S)_{n+1} = (R,S)_n$

6. $(S,R)_{n+1} = (R,S)_n$

7. $(S,R)_n \leq (R,S)_n$

En todo caso $(R,S)_n = R \vee S$ *y si* n *es par entonces 7. es igualdad.*

Demostración.
La demostración se indica en el diagrama. Las implicaciones marcadas con un punto son triviales.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 3 \arrow[r, "\cdot"] & 5 \arrow[dr] & & \\
1 \arrow[r] & 2 \arrow[ur, "\cdot"] \arrow[dr, "\cdot"'] & & & 7 \arrow[r] & 1 \\
 & & 4 \arrow[r, "\cdot"'] & 6 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

$1 \Rightarrow 2$ Si $(R,S)_n$ es relación de equivalencia, $R \vee S = (R,S)_n$. Entonces si $m > n$

$$\begin{aligned}(R,S)_n \leq (R,S)_m \leq R \vee S = (R,S)_n\\ (R,S)_n \leq (S,R)_m \leq R \vee S = (R,S)_n\end{aligned}$$

$5 \Rightarrow 7$

$$(S,R)_n \leq (R,S)_{n+1} = (R,S)_n$$

$6 \Rightarrow 7$

$$(S,R)_n \leq (S,R)_{n+1} = (R,S)_n$$

$7 \Rightarrow 1$ $(R,S)_n$ siempre es reflexiva. Si n es impar $(R,S)_n^\circ = (R,S)_n$. Si n es par $(R,S)_n^\circ = (S,R)_n \leq (R,S)_n$. De cualquier manera $(R,S)_n$ es simétrica. Bastará ver que para toda m,

$$(R,S)_{n+2m} \leq (R,S)_n \qquad (*)$$

puesto que $(R,S)_n(R,S)_n = (R,S)_{2n}$ si n es par y $(R,S)_n(R,S)_n = (R,S)_{2n-1}$ si n impar. Veremos $(*)$ por inducción. Si n es par

$$(R,S)_{n+2} = R(S,R)_n S \leq R(R,S)_n S = (R,S)_n.$$

Si n es impar

$$(R,S)_{n+2} = R(S,R)_n R \leq R(R,S)_n R = (R,S)_n.$$

De cualquier forma $(R, S)_{n+2} \leq (R, S)_n$.
Supongamos $(R, S)_{n+2m} \leq (R, S)_n$. Entonces:

$$(R, S)_{n+2(m+1)} = RS(R, S)_{n+2m} \leq RS(R, S)_n = (R, S)_{n+2} \leq (R, S)_n.$$

Si n es par, $(S, R)_n^\circ = (R, S)_n$ y $(R, S)_n^\circ = (S, R)_n$. Por lo tanto si n es par 7. es igualdad.

*

Definición 3.5 *Una categoría regular $\mathcal{A}$ es n-permutable ($n \geq 2$) si cualquier par de relaciones de equivalencia satisface las condiciones de la proposición 3.4.*

3.2 Categorías de Maltsev y Goursat

Para definir las categorías de Maltsev y Goursat veremos otras condiciones equivalentes a n–permutabilidad en una categoría regular. Pero antes, necesitamos un lema que trata con propiedades de sucesiones de la forma $(P, P^\circ)_n$ para $A \xrightarrow{P} B$ una relación.

Lema 3.6 *En lo que sigue, $A \xrightarrow{P} B$ es una relación.*

1. *Si $P = \langle f, g \rangle$, entonces para $1 \leq n$*

$$(P, P^\circ)_n = \begin{cases} g(R, S)_{n-1} g^\circ & n \text{ par} \\ g(R, S)_{n-1} f^\circ & n \text{ impar,} \end{cases}$$

   donde $R =$ Núc f y $S =$ Núc g.

2. *Si $(P, P^\circ)_{n-1} = (P, P^\circ)_{n+1}$ entonces $(P, P^\circ)_{n-1} = (P, P^\circ)_{n-1+k}$ para toda k par.*

3. *Si $P = RS$ con R y S relaciones de equivalencia entonces para $2 \leq n$*

$$(P, P^\circ)_{n-1} = (R, S)_n$$
$$(P^\circ, P)_{n-1} = (S, R)_n$$

Demostración.

1. Por inducción sobre n. La base es 2.31 que dice $P = gf^\circ$. Suponemos el resultado para n par. El caso n impar es análogo. Recordemos que la proposición 2.31 también dice Núc $g = g^\circ g$.

$$(P, P^\circ)_{n+1} = g(R, S)_{n-1} g^\circ P = g(R, S)_{n-1} g^\circ g f^\circ = g(R, S)_n f^\circ$$

2. Se sigue de que para toda k,

$$(P, P^\circ)_{n-1+k} = (P, P^\circ)_{n-1} \begin{cases} (P^\circ, P)_k & n \text{ par} \\ (P, P^\circ)_k & n \text{ impar} \end{cases} = (P, P^\circ)_{n+1+k}$$

3. En el fondo, las dos igualdades son sólo una y el paso inductivo es

$$\begin{aligned} (P, P^\circ)_n = (P, P^\circ)_{n-1} &\begin{cases} SR & n \text{ par} \\ RS & n \text{ impar} \end{cases} \\ &= (R, S)_{n+1}. \end{aligned}$$

La última igualdad se obtiene haciendo uso del lema 3.3.

*

Proposición 3.7 *En una categoría regular, para toda $n \geq 2$ son equivalentes*

1. la categoría es n-permutable.

2. $(S, R)_n = (R, S)_n$ para R y S congruencias en un objeto A.

3. para cualquier relación $A \xrightarrow{P} B$, $(P, P^\circ)_{n+1} = (P, P^\circ)_{n-1}$.

4. para cualquier relación reflexiva $A \xrightarrow{E} A$, la relación $(E, E^\circ)_{n-1}$ es de equivalencia.

5. para cualquier relación reflexiva E, la relación $(E, E^\circ)_{n-1}$ es transitiva.

6. para cualquier relación reflexiva E, se tiene $(E, E^\circ)_{n-1} = (E^\circ, E)_{n-1}$.

Demostración. La demostración se indica en el diagrama. Las implicaciones marcadas con un punto son triviales.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\cdot"] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 \arrow[r, "\cdot"] \arrow[dr] & 5 \arrow[r] & 1 \\ & & & & 6 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$2 \Rightarrow 3$ Denotemos $P = \langle f, g\rangle$. El corolario 2.31 dice $P = gf^\circ$, Núc $f = f^\circ f$ y Núc $g = g^\circ g$. Denotemos Núc $f = R$ y Núc $g = S$. Tenemos:

$$(P, P^\circ)_n = \begin{cases} g(R, S)_{n-1}g^\circ & \text{si } n \text{ es par} \\ g(R, S)_{n-1}f^\circ & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por el corolario 2.32 obtenemos

$$(P, P^\circ)_{n+1} = g(R, S)_n f^\circ = g(S, R)_n f^\circ = g(R, S)_{n-2} f^\circ = (P, P^\circ)_{n-1}$$
$$(P, P^\circ)_{n+1} = g(R, S)_n g^\circ = g(S, R)_n g^\circ = g(R, S)_{n-2} g^\circ = (P, P^\circ)_{n-1}$$

para n par y n impar, respectivamente.

$3 \Rightarrow 4$ $(E, E^\circ)_{n-1}$ es claramente reflexiva y –si n es impar– simétrica. La simetría también se tiene para n par puesto que

$$((E, E^\circ)_{n-1})^\circ = (E^\circ, E)_{n-1} \leq E(E^\circ, E)_{n-1}E = (E, E^\circ)_{n+1} = (E, E^\circ)_{n-1}$$

Para transitividad notemos que $(E, E^\circ)_{n-1} = (E, E^\circ)_{n+1}$ implica $(E, E^\circ)_{n-1} = (E, E^\circ)_{n-1+k}$ para toda k par. Luego, si n es impar

$$(E, E^\circ)_{n-1}(E, E^\circ)_{n-1} = (E, E^\circ)_{2n-2} = (E, E^\circ)_{n-1}$$

Mientras que si n es par,

$$(E, E^\circ)_{n-1}(E, E^\circ)_{n-1} \leq (E, E^\circ)_{n-1}E^\circ(E, E^\circ)_{n-1} = (E, E^\circ)_{2n-1} = (E, E^\circ)_{n-1}$$

$4 \Rightarrow 6$ La implicación es trivial para n par. Si n es impar como $(E, E^\circ)_{n-1}$ es relación de equivalencia, en particular es transitiva:

$$(E^\circ, E)_{n-1} \leq (E, E^\circ)_{2n-2} = (E, E^\circ)_{n-1}(E, E^\circ)_{n-1} \leq (E, E^\circ)_{n-1}$$

La otra desigualdad se obtiene intercambiando E y E°.

Para las implicaciones que siguen, hacemos $E = RS$ de forma tal que

$$(E, E^\circ)_{n-1} = (R, S)_n$$
$$(E^\circ, E)_{n-1} = (S, R)_n$$

donde R, S son dos relaciones de equivalencia cualesquiera.
$5 \Rightarrow 1$ Tenemos $(R,S)_n(R,S)_n = (R,S)_n$. Para n impar esto quiere decir $(R,S)_{2n-1} = (R,S)_n$; mientras que para n par $(R,S)_{2n} = (R,S)_n$. De todos modos es el inciso 3 de la proposición 3.4.

$6 \Rightarrow 1$ Directamente tenemos $(R,S)_n = (S,R)_n$.

*

Por su importancia en lo que sigue, enunciamos la proposición anterior para $n = 2$. Incluimos también los incisos pertinentes de la proposición 3.4 y estrenamos un nuevo concepto.

Definición 3.8 *Una relación* $A \xrightarrow{P} B$ *se dice difuncional si* $PP^\circ P = P$.

Teorema 3.9 *En una categoría regular* $\mathcal{A}$ *las siguientes propiedades son equivalentes.*

1. *si* R *y* S *son relaciones de equivalencia en un objeto* A *entonces la composición* RS *también es relación de equivalencia y* $R \vee S = RS$ *en* Equiv A.
2. $SR = RS$ *ó* $SR \leq RS$.
3. $SR = RS$ *si* R *y* S *son congruencias.*
4. *toda relación* $A \xrightarrow{P} B$ *es difuncional.*
5. *toda relación reflexiva es relación de equivalencia.*
6. *toda relación reflexiva es transitiva.*
7. *toda relación reflexiva es simétrica.*

Por conveniencia demostramos parte de la proposición anterior para sólo una relación.

Proposición 3.10 *Sea* $P = \langle f, g \rangle$ *una relación* $A \longrightarrow B$ *y denotemos* $R =$ Núc f *y* $S =$ Núc g. *P es difuncional si y sólo si* $SR = RS$.

Demostración. Tenemos las equivalencias

$$
\begin{array}{rcl}
PP^\circ P & \leq & P \\
gf^\circ fg^\circ gf^\circ & \leq & gf^\circ \\
f^\circ fg^\circ g & \leq & g^\circ gf^\circ f \\
RS & \leq & SR \\
RS & = & SR
\end{array}
$$

La primera y tercera equivalencias son por el corolario 2.31. La segunda es por el corolario 2.32. La cuarta es por el teorema 3.4.

*

Definición 3.11 *Diremos que una categoría $\mathcal{A}$ es de* Maltsev *si es 2-permutable. Esto es, si satisface las condiciones del teorema 3.9. A las categorías 3-permutables las llamaremos de* Goursat.

Proposición 3.12 *(Modularidad) R y S son relaciones de equivalencia en el objeto A tales que $SRS \leq RSR$ y por ende $R \vee S = RSR$. Si $T \in$* Equiv *A satisface $R \leq T$ entonces*

$$(R \vee S) \wedge T = R \vee (S \wedge T)$$

Demostración.
Usando dos veces las leyes modulares de Freyd, proposición 2.35 obtenemos

$$
\begin{array}{rcl}
(R \vee S) \wedge T & = & RSR \wedge T \leq R(SR \wedge RT) \\
& = & R(SR \wedge T) \leq R(S \wedge TR)R \\
& = & R(S \wedge T)R
\end{array}
$$

Pero como $R(S \wedge T)R \leq TTT = T$ y además

$$R(S \wedge T)R \leq RSR \leq R \vee S,$$

entonces $R(S \wedge T)R = (R \vee S) \wedge T$. Por consiguiente $R(S \wedge T)R$ es relación de equivalencia e igual, por la proposición 3.4, a $R \vee (S \wedge T)$.

*

3.3 Un ejemplo: Teorías de Lawvere

En esta sección veremos la parte trivial del teorema de Maltsev para teorías de Lawvere. Empezemos definindolas e interpretándolas.

Definición 3.13 *Una* teoría de Lawvere *es una categoría $\mathcal{T}$ que tiene por objetos al conjunto*

$$T^0, T^1, T^2, \ldots, T^n, \ldots$$

de potencias finitas del objeto $T = T^1$.

Definición 3.14 *Si $\mathcal{B}$ es una categoría con productos finitos y $\mathcal{T}$ es una teoría de Lawvere,* los modelos de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{B}$ *son los funtores $F : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}$ que preservan productos finitos. A la categoría de modelos $\mathcal{T}$ y transformaciones naturales entre ellos la denotamos por* Mod $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$.

Ejemplo 3.15 *Una teoría de Lawvere para los grupos tiene tres morfismos*

$$T^0 \xrightarrow{e} T$$
$$T^2 \xrightarrow{m} T$$
$$T \xrightarrow{i} T.$$

Así como los diagramas ($T \xrightarrow{z} T^0$ es el único morfismo que existe porque T^0 es terminal):

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "{\langle i,1\rangle}"] \arrow[dr, "ez"'] & T^2 \arrow[d, "m"] & T \arrow[l, "{\langle 1,i\rangle}"'] \arrow[dl, "ez"] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "{\langle \pi_1, m\rangle}"] \arrow[d, "{\langle m,\pi_3\rangle}"'] & T^2 \arrow[d, "m"] \\ T^2 \arrow[r, "m"'] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "{\langle ez,1\rangle}"] \arrow[dr, "1"'] & T^2 \arrow[d, "m"] & T \arrow[l, "{\langle 1,ez\rangle}"'] \arrow[dl, "1"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Para grupos abelianos, habría que añadir el diagrama

$$\begin{tikzcd} T^2 \arrow[rr, "{\langle \pi_2,\pi_1\rangle}"] \arrow[dr, "m"'] & & T^2 \arrow[dl, "m"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Las categorías Gru *y* Ab *son las categorías de modelos de las teorías correspondientes en* Con. *En el último capítulo veremos rigurosamente cómo obtener una teoría a partir de una categoría "algebraica" dada.*

Definición 3.16 *Si $\mathcal{T}$ es una teoría de Lawvere, una* operación de Maltsev *en dicha teoría es un morfismo $T^3 \xrightarrow{m} T$ tal que conmuta*

$$\begin{tikzcd} T^2 \arrow[r, "{\langle \pi_1,\pi_1,\pi_2 \rangle}"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & T^3 \arrow[d, "m"] & T^2 \arrow[l, "{\langle \pi_1,\pi_2,\pi_2 \rangle}"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Observemos que en una categoría de modelos para una teoría de Lawvere con operación de Maltsev, si

$$\begin{tikzcd} & A \\ X \arrow[ur, "a_1"] \arrow[dr, "a_2"'] & \\ & A \end{tikzcd}$$

son dos elementos generalizados cualesquiera, entonces conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "{\langle a_1,a_1,a_2 \rangle}"] \arrow[dr, "a_2"'] & A \times A \times A \arrow[d, "m"] & X \arrow[l, "{\langle a_1,a_2,a_2 \rangle}"'] \arrow[dl, "a_1"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Ejemplo 3.17 *En* Gru *y en* Ab. *Si G es un grupo entonces una operación de Maltsev en G es $m(x, y, z) = xy^{-1}z$, para $x, y, z \in G$.*

Proposición 3.18 *$\mathcal{B}$ es una categoría con límites finitos. $\mathcal{T}$ es una teoría de Lawvere con una operación de Maltsev. $\mathcal{A} =$ Mod $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ es la categoría de modelos de $\mathcal{T}$ en $\mathcal{B}$. Si $\mathcal{A}$ es regular entonces todas sus relaciones reflexivas son simétricas. Es decir, $\mathcal{A}$ es una categoría de Maltsev.*

Demostración.
A las operaciones de Maltsev en los objetos de $\mathcal{A}$ las denotaremos m_{objeto}. Sea A un objeto de $\mathcal{A}$ y E una relación reflexiva en A:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & E \arrow[dl, "{\langle e_1,e_2 \rangle}"] \\ & A \times A & \end{tikzcd}$$

Entonces para $i = 1, 2$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "je_i"] \arrow[dr, "\langle e_i, e_i \rangle"'] & & E \arrow[dl, "\langle e_1, e_2 \rangle"] \\
& A \times A &
\end{tikzcd}$$

Denotemos $l = \langle\langle e_1, e_1\rangle, \langle e_1, e_2\rangle, \langle e_2, e_2\rangle\rangle$. Así es que conmuta

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "\langle je_1, 1_E, je_2 \rangle"] \arrow[dr, "l"'] & & E^3 \arrow[dl, "\langle e_1, e_2 \rangle^3"] \\
& (A \times A)^3 &
\end{tikzcd}$$

Tenemos

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[r, "\langle\langle e_1, e_1, e_2\rangle, \langle e_1, e_2, e_2\rangle\rangle"] \arrow[d, "l"] \arrow[ddl, "\langle je_1, 1_E, je_2 \rangle"'] \arrow[dr, bend left=60, "\langle e_2, e_1 \rangle"] \arrow[dr, phantom, "\bullet\bullet\bullet"] & (A \times A \times A)^2 \arrow[d, "m_A \times m_A"] \\
& (A \times A)^3 \arrow[r, "m_{A \times A}"'] & A \times A \\
E^3 \arrow[ur, "\langle e_1, e_2 \rangle^3"'] \arrow[r, "m_E"'] \arrow[ur, phantom, shift left=8, "\bullet\bullet"] & E \arrow[ur, "\langle e_1, e_2 \rangle"'] &
\end{tikzcd}$$

Donde

- • conmuta porque m_A es operación de Maltsev
- •• conmuta porque E es subálgebra de $A \times A$
- ••• conmuta porque los límites en $\mathcal{A}$ son puntuales

Por lo tanto E es simétrica y $\mathcal{A}$ es de Maltsev.

*

3.4 GrTop

Veremos que si $\mathcal{T}$ es una teoría de Lawvere y $\mathcal{B}$ es una categoría regular, entonces $\mathcal{A} = \text{Mod}\ (\mathcal{T}, \mathcal{B})$ también es regular. La categoría de grupos topológicos GrTop es ejemplo de que $\mathcal{A}$ puede ser regular aún si $\mathcal{B}$ no lo es. A lo largo de esta sección $\mathcal{T}, \mathcal{B}$ y $\mathcal{A}$ son como arriba.

Proposición 3.19 *$\mathcal{A}$ tiene límites finitos. Estos se calculan puntualmente. En particular, $A \xrightarrow{f} K$ es mono en $\mathcal{A}$ si y sólo si $AT \xrightarrow{f_T} KT$ es mono en $\mathcal{B}$.*

Demostración. En una categoría de pregavillas como $\mathcal{B}^{\mathcal{T}}$, los límites se calculan puntualmente. Un límite (finito) de modelos vuelve a ser modelo porque los límites conmutan con los límites. Para la equivalencia, recordemos que un morfismo es mono si y sólo si en el producto fibrado consigo mismo se obtiene la diagonal y que si f_T es mono entonces $(f_T)^n$ es mono.

$*$

Proposición 3.20 *Si el morfismo $A \xrightarrow{p} K$ en $\mathcal{A}$ es tal que $AT \xrightarrow{p_T} KT$ es una suprayección en $\mathcal{B}$ entonces p es una suprayección en $\mathcal{A}$.*

Demostración. Sea

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr] & & K \\ & I \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

una factorización de p en $\mathcal{A}$ con i mono. Por la proposición 3.19, i_T es mono. Como p_T es suprayección, entonces i_T también es iso. Como I, K son modelos, $i_{T^n} \approx (i_T)^n$ y en consecuencia i es iso. Por lo tanto p es suprayección.

$*$

Proposición 3.21 *Hay factorizaciones suprayección mono en $\mathcal{A}$. Es decir, $\mathcal{A}$ tiene imágenes.*

Demostración. Sea $A \xrightarrow{f} K$ un morfismo en $\mathcal{A}$. La factorización suprayección-mono

$$\begin{tikzcd} AT \arrow[rr, "f_T"] \arrow[dr, "p_T"'] & & KT \\ & I \arrow[ur, "i_T"'] & \end{tikzcd}$$

de f_T existe porque $\mathcal{B}$ es regular. Sea $T^n \xrightarrow{w} T^m$ un morfismo cualquiera en la teoría $\mathcal{T}$. En el siguiente diagrama, w_I se define mediante la propiedad diagonal 2.4. Podemos hacer esto porque $(p_T)^n$ es suprayección, dado que en $\mathcal{B}$ las suprayecciones son estables bajo producto fibrado

$$\begin{tikzcd} AT^n \arrow[r, "(p_T)^n"] \arrow[d, "w_A"'] & I^n \arrow[r, "(i_T)^n"] \arrow[d, dashed, "w_I"] & BT^n \arrow[d, "w_B"] \\ AT^m \arrow[r, "(p_T)^m"'] & I^m \arrow[r, "(i_T)^m"'] & BT^m \end{tikzcd}$$

Por la unicidad en la propiedad diagonal, podemos asegurar que hemos definido un funtor $\mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{B}$

$$T^n \mapsto I^n$$
$$w \mapsto w_I$$

Por construcción, este es un modelo. Por las proposiciones 3.19 y 3.20, los morfismos p, i en $\mathcal{B}$ dados por

$$p_{T^n} = (p_T)^n$$
$$i_{T^n} = (i_T)^n$$

son suprayección y mono respectivamente. Por lo tanto $\mathcal{A}$ tiene factorizaciones suprayección-mono.

*

Proposición 3.22 *Sea $A \xrightarrow{p} K$ una suprayección en $\mathcal{A}$. Entonces $AT \xrightarrow{p_T} KT$ es suprayección en $\mathcal{B}$. Junto con la proposición 3.20, esto dice que un morfismo p es suprayección en $\mathcal{A}$ si y sólo si p_T es suprayección en $\mathcal{B}$.*

Demostración. Consideremos la factorización

$$\begin{tikzcd} AT \arrow[rr, "p_T"] \arrow[dr, "q_T"'] & & KT \\ & I \arrow[ur, "i_T"'] & \end{tikzcd}$$

de p_T en $\mathcal{B}$. De la misma manera que en 3.20 podemos extender dicha factorización a una factorización $iq = p$ de p en $\mathcal{A}$ con i mono. Como p es suprayección, i debe de ser iso y en consecuencia i_T también. Por lo tanto, puesto que q_T es suprayección, p_T es suprayección.

*

Proposición 3.23 *$\mathcal{A}$ es regular.*

Demostración. Por las proposiciones 3.19 y 3.21, $\mathcal{A}$ tiene límites finitos e imágenes. Por la proposición 3.22, las suprayecciones p en $\mathcal{A}$ son precisamente las que tienen a p_T suprayección. Como en $\mathcal{B}$, las suprayecciones son estables bajo producto fibrado y los límites son puntuales, concluimos que en $\mathcal{A}$ las suprayecciones son estables bajo producto fibrado.

*

GrTop es la categoría de modelos Mod $(\mathcal{T}, \text{Top})$ para la teoría de Lawvere $\mathcal{T}$ de los grupos.

Lema 3.24 *Sea $A \xrightarrow{p} K$ un morfismo en* GrTop *tal que p_T es una suprayección en* Top. *Entonces p_T es abierto en* Top.

Demostración. Sea $U \subseteq AT$ un abierto. Tenemos la igualdad

$$p_T^{-1} p_T U = \bigcup_{a \in \text{Nuc } p_T} a \cdot U$$

donde Nuc p_T es el núcleo usual de p_T visto como un homomorfismo de grupos y $a \cdot U = \{a \cdot u \ : \ u \in U\}$. Para toda $a \in AT$ la asignación $A \xrightarrow{a\cdot} A$ dada por $x \mapsto a \cdot x$ es un homeomorfismo porque tiene como inversa a $a^{-1}\cdot$. Se tiene eso en particular para toda $a \in$ Nuc p_T y por lo tanto $p_T^{-1} p_T U$ es abierto. En 1.8, verificamos que las suprayecciones en Top son las identificaciones. Concluimos que $p_T U$ es abierto en KT.

*

Top no es regular: en [10], p. 113 viene un ejemplo de una suprayección que no es estable bajo producto fibrado. Sin embargo,

Proposición 3.25 *La categoría* GrTop *es regular.*

Demostración. La demostración de 3.23 sigue siendo válida:

- En la proposición 3.19, sólo se usó que $\mathcal{B}$ tiene límites finitos. Sabemos que Top tiene límites finitos porque tiene productos finitos e igualadores.

- En 3.20 y 3.22 sólo se usaron propiedades generales de modelos.

- En 3.21 se usaron dos cosas. (1) $\mathcal{B}$ tiene imágenes. Esto es cierto de Top-las suprayecciones son las identificaciones por 1.8. (2) Si el morfismo p en $\mathcal{A}$ es tal que p_T es suprayección en $\mathcal{B}$ entonces la suprayección p_T es estable bajo producto fibrado en $\mathcal{B}$. Esto es cierto de GrTop por las proposiciones 1.10 y 3.24.

*

Capítulo 4

Objetos simpliciales y categorías de Maltsev

Este capítulo es la verificación de una conjetura que Barr hace en [2], p. 3.

> A useful axiom which gives a notion intermediate between being exact and being abelian is the supposition that every reflexive subobject of the square of any object is an equivalence relation (see I. (5.5)). This condition is equivalent to every simplicial object being Kan.

4.1 Extensiones de Kan

Definición 4.1 *Sea $J : \mathbf{M} \to \mathbf{C}$ un funtor y $C \in \mathbf{C}$ un objeto. Definimos la categoría $(C \downarrow J)$ de la siguiente manera*

Objetos *son los morfismos $C \longrightarrow JM$ para $M \in \mathbf{M}$*

Morfismos *de $C \xrightarrow{f} JM_1$ a $C \xrightarrow{g} JM_2$ son los morfismos $M_1 \xrightarrow{h} M_2$ en $\mathbf{M}$ tales que conmuta*

$$\begin{tikzcd} & JM_1 \arrow[d, "Jh"] \\ C \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "g"'] & JM_2 \end{tikzcd}$$

Denotamos por Q_C al funtor que olvida $(C \downarrow J) \longrightarrow \mathbf{M}$.

Proposición 4.2 *Sean $J : \mathbf{M} \to \mathbf{C}$ y $T : \mathbf{M} \to \mathbf{A}$ dos funtores tales que para toda $C \in \mathbf{C}$ la composición*

$$(C \downarrow J) \xrightarrow{Q_C} \mathbf{M} \xrightarrow{T} \mathbf{A}$$

tiene límite. Podemos inducir un funtor $K : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ y una transformación natural $KJ \xrightarrow{\epsilon} T$, tales que si J es fiel y pleno entonces ϵ es un isomorfismo.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{M} \arrow[r, "J"] \arrow[d, "T"'] & \mathbf{C} \arrow[dl, "K"] \\ \mathbf{A} & \end{tikzcd}$$

Demostración. Para cada $C \in \mathbf{C}$, definimos KC como el límite sobre TQ_C. Todo morfismo $C \xrightarrow{g} C'$ en $\mathbf{C}$, determina un cono

$$\{KC \xrightarrow{q_{f \circ g}} TQ_{C'}f\}_{f \in (C' \downarrow J)}$$

Definimos $KC \xrightarrow{Kg} KC'$ como el único morfismo tal que para toda $f \in (C' \downarrow J)$ conmuta

$$\begin{tikzcd} KC \arrow[rr, "Kg"] \arrow[dr, "q_{f\circ g}"'] & & KC' \arrow[dl, "q'_f"] \\ & TQ_{C'}f & \end{tikzcd}$$

Es obvio que esta asociación preserva identidades. K respeta composiciones porque el diagrama

$$\begin{tikzcd} KC \arrow[r, "Kg"] \arrow[dr, "q_{f\circ h\circ g}"'] & KC' \arrow[r, "Kh"] \arrow[d, "q'_{f\circ h}"] & KC'' \arrow[dl, "q''_f"] \\ & TQ_{C''}f & \end{tikzcd}$$

conmuta para toda $f \in (C'' \downarrow J)$. Para cada $M \in \mathbf{M}$ denotaremos por ϵ_M al morfismo

$$KJM \xrightarrow{q_{1_{JM}}} TM$$

que corresponde a la identidad $1_{JM} \in (JM \downarrow J)$. Veamos que ϵ es una transformación natural $KJ \to T$. Sean $M_1, M_2 \in \mathbf{M}$. Denotemos a los respectivos conos límites por

$$\{KJM_1 \xrightarrow{p_f} TM\}_{f:JM_1 \to JM} \qquad \{KJM_2 \xrightarrow{q_f} TM\}_{f:JM_2 \to JM}$$

Para toda $M_1 \xrightarrow{h} M_2$ consideramos el cuadrado

$$\begin{tikzcd} KJM_1 \arrow[r, "KJh"] \arrow[d, "p_{1_{JM_1}}"'] \arrow[dr, "p_{Jh}"] & KJM_2 \arrow[d, "q_{1_{JM_2}}"] \\ TM_1 \arrow[r, "Th"'] & TM_2 \end{tikzcd}$$

El triángulo inferior conmuta porque Jh es un morfismo $1_{JM_1} \longrightarrow Jh$ en $(JM_1 \downarrow J)$. El triángulo superior conmuta por la definición del funtor K.
Supongamos ahora que J es fiel y pleno. Sea $M \in \mathrm{M}$ un objeto cualquiera. Por ser J fiel y pleno, 1_{JM} es el objeto inicial de $(JM \downarrow J)$. Podemos entonces tomar a $TQ1_{JM} = TM$ como KJM.

$*$

4.2 Objetos simpliciales

Definición 4.3 *Describimos la categoría Δ por*

Objetos *son los ordinales finitos $[n] = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ para $n \geq 0$*

Morfismos *son las funciones monótonas*

Definición 4.4 *Un objeto simplicial de la categoría $\mathcal{A}$ es un objeto de la categoría de funtores $[\Delta^\circ, \mathcal{A}]$.*

Los detalles de la siguiente afirmación se pueden checar en [9].
Dar un objeto simplicial es equivalente a dar unos objetos $K_n \in \mathcal{A}$ para $n \geq 0$ y para cada n, morfismos

$$\begin{array}{ccc} K_n \xrightarrow{d_i} K_{n-1} & & 0 \leq i \leq n \\ K_{n-1} \xrightarrow{s_i} K_n & & 0 \leq i \leq n-1, \end{array}$$

tales que

$$\begin{aligned} d_i d_j &= d_{j-1} d_i \quad \text{si } i < j && (4.1) \\ s_i s_j &= s_{j+1} s_i \quad \text{si } i \leq j && (4.2) \\ d_i s_j &= s_{j-1} d_i \quad \text{si } i < j && (4.3) \\ d_i s_i &= 1 && (4.4) \\ d_{i+1} s_i &= 1 && (4.5) \\ d_i s_j &= s_j d_{i-1} \quad \text{si } j+1 < i && (4.6) \end{aligned}$$

Denotemos por Δ_1 a la subcategoría plena de Δ que tiene por objetos a [0] y [1]. Dar un objeto de la categoría $[\Delta_1^\circ, \mathcal{A}]$ es dar una gráfica reflexiva

$$K_0 \xrightarrow{s_0} K_1 \underset{d_1}{\overset{d_0}{\rightrightarrows}} K_0$$

Si denotamos por $\Delta_1 \xrightarrow{J} \Delta$ la inclusión, todo objeto simplicial K de $\mathcal{A}$ determina un objeto de $[\Delta_1^\circ, \mathcal{A}]$ dado por la restricción KJ°. En el sentido opuesto tenemos

Proposición 4.5 *Sea $\mathcal{A}$ con límites finitos. Toda gráfica reflexiva en $\mathcal{A}$ es la restricción de un objeto simplicial.*

Demostración. Estamos en la situación de la proposición 4.2. Por la manera de construir K, si $i = 0, 1$ entonces podemos definir $Ki := Ti$.

$*$

Definición 4.6 *Si K es un objeto simplicial de la categoría $\mathcal{A}$ y $n \geq 2$, $k \in [n]$, definimos un* cuerno (n, k) *como un conjunto de elementos generalizados*

$$\{X \xrightarrow{x_i} K_{n-1}\}_{i \in [n], i \neq k}$$

tales que para toda $i, j \in [n]$, $i < j$, $i, j \neq k$ se tiene que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x_i"] \arrow[d, "x_j"'] & K_{n-1} \arrow[d, "d_{j-1}"] \\ K_{n-1} \arrow[r, "d_i"'] & K_{n-2} \end{tikzcd}$$

conmuta.

Si $\mathcal{A}$ tiene límites finitos, un cuerno (n, k) es lo mismo que un solo elemento generalizado $X \xrightarrow{x} L_n^k$, donde

$$\{L_n^k \xrightarrow{e_i} K_{n-1}\}_{i \in [n], i \neq k}$$

es un límite sobre el diagrama apropiado. La identidad simplicial

$$\begin{tikzcd} K_n \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "d_j"'] & K_{n-1} \arrow[d, "d_{j-1}"] \\ K_{n-1} \arrow[r, "d_i"'] & K_{n-2} \end{tikzcd}$$

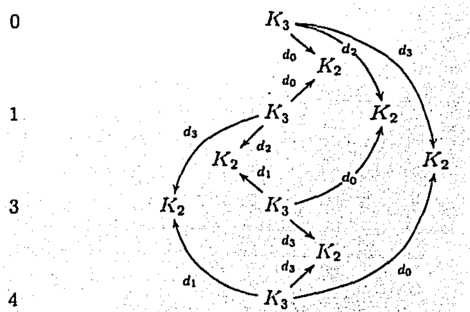
dice que para toda $n \geq 2$ y $k \in [n]$,

$$\{K_n \xrightarrow{d_i} K_{n-1}\}_{i \in [n], i \neq k}$$

es un cuerno (n, k). Entonces, si $\mathcal{A}$ tiene límites finitos tenemos un morfismo $K_n \xrightarrow{t_n^k} L_n^k$ tal que $e_i t_n^k = d_i$ para $i \neq k$, con la notación de arriba.

Definición 4.7 *Un objeto simplicial es* de Kan *si para toda pareja* (n, k) *con* $k \in [n]$, $n \geq 2$ *el morfismo* t_n^k *correspondiente es una suprayección.*

Con la intención de ilustrar estas ideas, presentamos el diagrama para $(n, k) = (4, 2)$. También se muestran los cuadrados que conmutan si $x_i, i \neq k, i \in [n]$ es un cuerno. La numeración a la izquierda del diagrama grande numera los K_3 que aparecen en dicho diagrama y nos permite localizar dónde es que los cuadrados se realizarían.



$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "x_1"'] \arrow[dr, phantom, "0<1"] & K_3 \arrow[d, "d_0"] \\ K_3 \arrow[r, "d_0"'] & K_2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "x_3"'] \arrow[dr, phantom, "0<3"] & K_3 \arrow[d, "d_2"] \\ K_3 \arrow[r, "d_0"'] & K_2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "x_0"] \arrow[d, "x_4"'] \arrow[dr, phantom, "0<4"] & K_3 \arrow[d, "d_3"] \\ K_3 \arrow[r, "d_0"'] & K_2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "x_1"] \arrow[d, "x_3"'] \arrow[dr, phantom, "1<3"] & K_3 \arrow[d, "d_2"] \\ K_3 \arrow[r, "d_1"'] & K_2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "x_1"] \arrow[d, "x_4"'] \arrow[dr, phantom, "1<4"] & K_3 \arrow[d, "d_3"] \\ K_3 \arrow[r, "d_1"'] & K_2 \end{tikzcd} \quad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "x_3"] \arrow[d, "x_4"'] \arrow[dr, phantom, "3<4"] & K_3 \arrow[d, "d_3"] \\ K_3 \arrow[r, "d_3"'] & K_2 \end{tikzcd}$$

Proposición 4.8 *Un objeto simplicial es de Kan si y sólo si para todo cuerno* (n,k) $\{X \xrightarrow{x_i} K_{n-1}\}$ *hay* $Y \xrightarrow{y} K_n$ *elemento generalizado y* $Y \xrightarrow{p} X$ *suprayección con que conmuta*

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "y"] \arrow[d, "p"'] & K_n \arrow[d, "d_i"] \\ X \arrow[r, "x_i"'] & K_{n-1} \end{tikzcd} \qquad i \neq k$$

Demostración.
$\Rightarrow$ Denotamos

$$\{L_n^k \xrightarrow{e_i} K_{n-1}\}_{i\in[n], i\neq k}$$

al límite sobre el cuadrado correspondiente. Considérese el producto fibrado $\langle y, p\rangle$ de $t : K_n \to L_n^k$ con respecto a x, que cumple $e_i x = x_i$. Sígase este cuadrado conmutativo por e_i y recuérdese que en las categorías regulares, las suprayecciones son estables bajo producto fibrado.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "y"'] & X \arrow[d, "x"] \arrow[ddr, bend left, "x_i"] & \\ K_n \arrow[r, "t"'] \arrow[drr, bend right, "d_i"'] & L \arrow[dr, "e_i"] & \\ & & K_{n-1} \end{tikzcd}$$

$\Leftarrow$ Nótese que $e_i : L \to K_{n-1}$ es el cuerno que corresponde al morfismo identidad de L. Por hipotésis, hay p suprayección y y elemento generalizado tal que $e_i \circ p = d_i \circ y$. Pasando al límite, obtenemos $t \circ y = p$. Por la proposición 2.7 t es suprayección.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "y"] \arrow[d, "p"'] & K_n \arrow[r, "t"] \arrow[d, "d_i"] & L \arrow[dl, "e_i"] \\ L \arrow[r, "e_i"'] & K_{n-1} & \end{tikzcd}$$

*

Corolario 4.9 *Misma situación de la proposición anterior. Si denotamos $z = d_k y$, tenemos*

$$\begin{aligned} d_i z &= d_{k-1} x_i p \quad & i < k \\ d_i z &= d_k x_{i+1} p \quad & k \leq i \end{aligned}$$

Demostración. $i < k$ es el diagrama de la izquierda. El de la derecha es $k \leq i$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "y"'] & X \arrow[d, "x_i"] \\ K_n \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "d_k"'] & K_{n-1} \arrow[d, "d_{k-1}"] \\ K_{n-1} \arrow[r, "d_i"'] & K_{n-2} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "y"'] & X \arrow[d, "x_{i+1}"] \\ K_n \arrow[r, "d_{i+1}"] \arrow[d, "d_k"'] & K_{n-1} \arrow[d, "d_k"] \\ K_{n-1} \arrow[r, "d_i"'] & K_{n-2} \end{tikzcd}$$

*

El corolario anterior es como "agregarle la cara que falta" al cuerno. Al denotar $x'_i = x_i p$ para $i \neq k$ y $x'_k = z$, tenemos que para toda $i < j$ conmuta

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "x'_i"] \arrow[d, "x'_j"'] & K_{n-1} \arrow[d, "d_{j-1}"] \\ K_{n-1} \arrow[r, "d_i"'] & K_{n-2} \end{tikzcd}$$

Teorema 4.10 *En una categoría regular $\mathcal{A}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *Todo objeto simplicial K en $\mathcal{A}$ es Kan*
2. *Para cada objeto simplicial K de $\mathcal{A}$ y cada cuerno (n, k)*

$$\{X \xrightarrow{x_i} K_{n-1}\}_{i \in [n], i \neq k}$$

hay suprayección $Y \xrightarrow{p} X$ y morfismo $Y \xrightarrow{z} K_{n-1}$ con

$$\begin{aligned} d_i z &= d_{k-1} x_i p \quad & i < k \\ d_i z &= d_k x_{i+1} p \quad & k \leq i \end{aligned}$$

3. Para cada objeto simplicial se tiene 2. para cuernos $(2,2)$

4. Para cada gráfica reflexiva K y cada par de morfismos

$$X \overset{x_0}{\underset{x_1}{\rightrightarrows}} K_1$$

con $d_0x_0 = d_0x_1$, existe una suprayección $Y \xrightarrow{p} X$ y un morfismo $Y \xrightarrow{z} K_1$ tales que $d_0z = d_1x_0p$ y $d_1z = d_1x_1p$.

5. $\mathcal{A}$ es de Maltsev

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$ Esto es el corolario 4.9.
$2 \Rightarrow 3$ Trivial.
$3 \Rightarrow 4$ Por 4.5, toda gráfica reflexiva K se puede extender a un objeto simplicial que seguiremos denotando por K. Las condiciones sobre los morfismos paralelos x_0, x_1 dicen que éstos son un cuerno $(2,2)$ en K. Las hipótesis para K dicen $d_0z = d_1x_0p$ y $d_0z = d_1x_1p$.
$4 \Rightarrow 5$ Sea $K_1 \xrightarrow{(d_0,d_1)} K_0 \times K_0$ una relación reflexiva. Esto significa que para un $K_0 \xrightarrow{s_0} K_1$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} K_1 \arrow[rr, "{(d_0,d_1)}"] & & K_0 \times K_0 \\ & K_0 \arrow[ul, "s_0"] \arrow[ur, "\Delta"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Notemos que el diagrama anterior también representa a una gráfica reflexiva. Denotamos $x_0 = 1_{K_1}$ y $x_1 = s_0d_0$. Aplicando la identidad simplicial (4.4), obtenemos $d_0x_1 = d_0x_0$. Así es que existen una suprayección $Y \xrightarrow{p} K_1$ y un morfismo $Y \xrightarrow{z} K_1$ tales que $d_0z = d_1p$ y $d_1z = d_0p$. La w del siguiente diagrama existe por la propiedad diagonal de las suprayecciones, 2.4.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "z"'] & K_1 \arrow[d, "{(d_1,d_0)}"] \arrow[dl, dashed, "w"] \\ K_1 \arrow[r, "{(d_0,d_1)}"'] & K_0 \times K_0 \end{tikzcd}$$

Esta misma w exhibe a $\langle d_0, d_1 \rangle$ como una relación simétrica. Aplicando 3.9, concluimos que $\mathcal{A}$ es de Maltsev.
5 ⇒ 1 Sea

$$\{X \xrightarrow{x_i} K_{n-1}\}_{i \in [n], i \neq k}$$

un cuerno (n, k). Veremos que es de Kan. La demostración se hará en dos pasos. Primero se verá que si $0 < k$ entonces para toda r con $0 \leq r < k$ hay $u^r : Z^r \to K_n$ elemento generalizado y $q^r : Z^r \to X$ suprayección con $d_i \circ u^r = x_i \circ q^r$ si $i \leq r$. Luego se verá que si $k < n$ entonces para toda r con $k < r$ hay $v^r : Y^r \to K_n$ elemento generalizado y $p^r : Y^r \to X$ suprayección respectivamente tales que para toda i con $r \leq i$ ó $i < k$ se tiene $d_i \circ v^r = x_i \circ p^r$. La suprayección y el elemento generalizado buscado serán p^{n-1}, v^{n-1} ó p^n, v^n dependiendo de si k es ó menor ó es igual a n.
Primer paso $0 < k$ Por inducción
r = 0 Tómese $q^0 = 1_X$ y $u^0 = s_0 \circ x_0$. Usando la identidad simplicial (4.4) obtenemos fácilmente lo que queremos.
r suponiendo r − 1. Suponemos que tenemos q^{r-1}, u^{r-1} con $d_i \circ u^{r-1} = x_i \circ q^{r-1}$, si $i \leq r-1$. Se tiene entonces que conmuta si $i \leq r-1$

$$\begin{tikzcd}
Z^{r-1} \arrow[r, "q^{r-1}"] \arrow[d, "u^{r-1}"'] & X \arrow[r, "x_r"] \arrow[d, "x_i"] & K_{n-1} \arrow[r, "s_r"] \arrow[d, "d_i"] & K_n \arrow[d, "d_i"] \\
K_n \arrow[r, "d_i"'] \arrow[dr, "d_r"'] & K_{n-1} \arrow[r, "d_{r-1}"'] & K_{n-2} \arrow[r, "s_{r-1}"'] & K_{n-1} \\
& K_{n-1} \arrow[ur, "d_i"] \arrow[rr, "s_r"'] & & K_n \arrow[u, "d_i"']
\end{tikzcd}$$

Esto quiere decir que, si denotamos al núcleo de d_i por D_i, entonces la pareja $\langle s_r \circ x_r \circ q^{r-1}, s_r \circ d_r \circ u^{r-1} \rangle$ está en D_i y consecuentemente en $D = D_0 \wedge \ldots \wedge D_{r-1}$ para $i \leq r-1$. Por otro lado, $\langle s_r \circ d_r \circ u^{r-1}, u^{r-1} \rangle$ está en D_r. Así que la pareja $\langle s_r \circ x_r \circ q^{r-1}, u^{r-1} \rangle$ está en $D_r D$. Pero como $\mathcal{A}$ es de Maltsev esto es lo mismo que DD_r. Esto quiere decir que hay una suprayección $\overline{q} : Z^r \to Z^{r-1}$ y un elemento generalizado $u^r : Z^r \to K_n$ con $d_r \circ s_r \circ x_r \circ q^{r-1} \circ \overline{q} = d_r \circ u^r$ y $d_i \circ u^r = d_i \circ u^{r-1} \circ \overline{q}$ si $i < r$. Denotando $q^r = q^{r-1} \circ \overline{q}$ y usando las identidades simpliciales, así como el paso inductivo obtenemos $d_i \circ u^r = x_i \circ q^r$ para $i \leq r$.
Segundo paso $k < n$ Por inducción hacia abajo.
r = n Hay dos casos, dependiendo de si la desigualdad $0 \leq k$ es estricta o no. Si no lo fuera, entonces tomamos $p^n = 1_X, v^n = s_{n-1} \circ x_n$. En caso contrario,

tomamos $p^n = q^{k-1}, v^n = s_{n-1} \circ x_n \circ q^{k-1}$ (q y u del primer paso). Tenemos

$$
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "u"'] & X \arrow[r, "x_n"] \arrow[d, "x_i"] & K_{n-1} \arrow[r, "s_{n-1}"] \arrow[d, "d_i"] & K_n \arrow[d, "d_i"] \\
K_n \arrow[r, "d_i"'] \arrow[dr, "d_n"'] & K_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"'] & K_{n-2} \arrow[r, "s_{n-2}"'] & K_{n-1} \\
 & K_{n-1} \arrow[ur, "d_i"'] \arrow[rr, "s_{n-1}"'] & & K_n \arrow[u, "d_i"']
\end{tikzcd}
$$

para $i < k$. Entonces la pareja $\langle s_{n-1} \circ x_n \circ q, s_{n-1} \circ d_n \circ u \rangle$ está en la relación $D_0 \wedge \ldots \wedge D_{k-1} = D$. Por otro lado, las identidades simpliciales implican que $\langle s_{n-1} \circ d_n \circ u, u \rangle$ pertenece a la relación D_n. Así que $\langle s_{n-1} \circ x_n \circ q, u \rangle$ está en $D_n D = D D_n$. Por lo que existen una suprayección $p' : Y^n \longrightarrow Z$ y un elemento generalizado $v^n : Y^n \longrightarrow K_n$ con $d_n \circ v^n = d_n \circ s_{n-1} \circ x_n \circ q \circ p'$ y $d_i \circ v^n = d_i \circ u \circ p'$ si $i < k$. Si tomamos $p^n = q \circ p'$ obtenemos lo que queremos.

r suponiendo r + 1. Estrictamente, deberíamos considerar dos casos, al igual que en $r = n$. Pero sólo veremos $0 < k$ ya que éste indica la demostración del otro caso. Suponemos que tenemos p^{r+1}, v^{r+1} con $d_i \circ v^{r+1} = x_i \circ p^{r+1}$, si $r + 1 \leq i$ ó $i < k$. Se tiene entonces que si $r < i$

$$
\begin{tikzcd}
Y^{r+1} \arrow[r, "p^{r+1}"] \arrow[d, "v^{r+1}"'] & X \arrow[r, "x_r"] \arrow[d, "x_i"] & K_{n-1} \arrow[r, "s_{r-1}"] \arrow[d, "d_{i-1}"] & K_n \arrow[d, "d_i"] \\
K_n \arrow[r, "d_i"'] \arrow[dr, "d_r"'] & K_{n-1} \arrow[r, "d_r"'] & K_{n-2} \arrow[r, "s_{r-1}"'] & K_{n-1} \\
 & K_{n-1} \arrow[ur, "d_{i-1}"'] \arrow[rr, "s_{r-1}"'] & & K_n \arrow[u, "d_i"']
\end{tikzcd}
$$

y si $i < k$

$$\begin{tikzcd}
Y^{r+1} \arrow[r, "p^{r+1}"] \arrow[d, "v^{r+1}"'] & X \arrow[r, "x_r"] \arrow[d, "x_i"] & K_{n-1} \arrow[r, "s_{r-1}"] \arrow[d, "d_i"] & K_n \arrow[d, "d_i"] \\
K_n \arrow[r, "d_i"'] \arrow[dr, "d_r"'] & K_{n-1} \arrow[r, "d_{r-1}"'] & K_{n-2} \arrow[r, "s_{r-2}"'] & K_{n-1} \\
 & K_{n-1} \arrow[ur, "d_i"] \arrow[rr, "s_{r-1}"'] & & K_{n-2} \arrow[u, "d_i"']
\end{tikzcd}$$

En conclusión, $\langle s_{r-1} \circ x_r \circ p^{r+1}, s_{r-1} \circ d_r \circ v^{r-1} \rangle$ está en $D = (D_0 \wedge \ldots \wedge D_{k-1}) \wedge (D_{r+1} \wedge \ldots \wedge D_n)$. Por otro lado $\langle s_{r-1} \circ d_r \circ v^{r+1}, v^{r+1} \rangle$ está en D_r. Entonces $\langle s_{r-1} \circ x_r \circ p^{r+1}, v^{r+1} \rangle$ está en $D_r D = D D_r$. Así que hay una suprayección $\overline{p} : Y^r \to Y^{r+1}$ y un elemento generalizado $v^r : Y^r \to K_n$ con $d_i \circ v^r = d_i \circ v^{r+1} \overline{p}$ para $r < i$ ó $i < k$ y con $d_r \circ v^r = d_r \circ s_{r-1} \circ x_r \circ p^{r+1}$. Denotando $p^r = p^{r+1} \circ \overline{p}$ obtenemos lo que queremos.

$*$

Capítulo 5

Categorías exactas de Maltsev

En lo que sigue nos referiremos con frecuencia al siguiente diagrama conmutativo

$$(!) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[dr, "w"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "r"'] & & \\ & E \arrow[r, "y"] \arrow[d, "x"] & C \arrow[d, "v"] \\ & B \arrow[r, "u"'] & D, \end{tikzcd}$$

donde $\langle x, y\rangle$ es el producto fibrado de u con v y w es el único morfismo que hace conmutar el diagrama. A la diagonal $A \longrightarrow D$, la llamaremos t. Cuando sea necesario referirnos al par núcleo de alguno de los morfismos en (!), lo haremos con la correspondiente letra mayúscula. Así $R =$ Núc r, $S =$ Núc s, etc.

Proposición 5.1 *En el diagrama* (!), *son equivalentes*

1. *w es mono*
2. *$\langle r, s\rangle$ es mono*
3. *$R \wedge S = 1$*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$
Sean $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} A$ dos morfismos tales que $\langle r, s\rangle f = \langle r, s\rangle g$. Como $\langle x, y\rangle$ es

mono, se tiene $wf = wg$. Entonces $f = g$.
2 ⇒ 3
Sean $X \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} A$ elementos generalizados tales que $b(R \wedge S)a$. Esto quiere decir que $\langle a, b\rangle$ se factoriza a través de los núcleos de r y s en la siguiente manera

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, bend left, "\langle r_1, r_2\rangle"] & & \\ X \arrow[u] \arrow[d] \arrow[rr, "\langle a,b\rangle"] & & A \times A \\ S \arrow[urr, bend right, "\langle s_1, s_2\rangle"'] & & \end{tikzcd}$$

Entonces

$$\langle r, s\rangle a = \langle r, s\rangle b$$

Por lo tanto $a = b$.
3 ⇒ 1
Sean $X \overset{a}{\underset{b}{\rightrightarrows}} A$ dos morfismos tales que $wa = wb$. Esto implica que

$$\begin{aligned} ra &= rb \\ sa &= sb \end{aligned}$$

Entonces $b(R \wedge S)a$. Por lo tanto $a = b$. Es decir, w es mono.

∗

Proposición 5.2 *Si $\langle r, s\rangle$ es un producto fibrado entonces es una relación difuncional.*

Demostración. Supongamos que el exterior de (!) es un producto fibrado. Por 2.33, tenemos

$$\begin{aligned} sr^\circ &= v^\circ u \\ rs^\circ &= u^\circ v \end{aligned}$$

Componiendo y precomponiendo ambas ecuaciones por s° y r, y aplicando 2.31 obtenemos

$$\begin{aligned} SR = s^\circ sr^\circ r = s^\circ v^\circ ur = t^\circ t = T \\ RS = r^\circ rs^\circ s = r^\circ u^\circ vs = t^\circ t = T \end{aligned}$$

Entonces $SR = RS$ y por 3.10 concluimos que $\langle r, s\rangle$ es difuncional.

∗

Nos interesa sobre todo lo que pasa cuando r, s, t (y entonces u, v) son suprayecciones.

Proposición 5.3 *En el diagrama* (!) *suponemos que* r, s, t *son suprayecciones. Son equivalentes*

1. w *es una suprayección*
2. $SR = T$
3. $RS = T$

Demostración. Haremos sólo la equivalencia entre *1.* y *2.*, puesto que la otra es análoga. w suprayectiva es equivalente, por 2.33 a $sr^\circ = v^\circ u$. Esto es equivalente a

$$SR = s^\circ sr^\circ r = s^\circ v^\circ ur = t^\circ t = T$$

porque como s y r son suprayectivas, por 2.31, tenemos $ss^\circ = 1$ y $rr^\circ = 1$.

$*$

Proposición 5.4 *En el diagrama* (!) *suponemos que* r, s *y* t *son suprayecciones. El exterior de dicho diagrama es un producto fibrado si y sólo si* $SR = T$ *y* $R \wedge S = 1$. *En tal caso, el exterior de dicho diagrama también es coproducto fibrado.*

Demostración. Tenemos las siguientes equivalencias

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\text{el exterior de (!) es producto fibrado}}{w \text{ es iso}}}{w \text{ es suprayección y mono}}}{SR = T \text{ y } R \wedge S = 1,}$$

donde la última equivalencia es consecuencia de las proposiciones 5.1 y 5.3. Si el exterior de (!) es un producto fibrado, tenemos $SR = T = RS$. Es decir, $R \vee S$ en Equiv A es la congruencia T. Entonces, por la proposición 2.40 $r \wedge s$ en Coci A es la suprayección t. Por lo tanto el exterior de (!) es un coproducto fibrado.

$*$

Proposición 5.5 *Sean r y s suprayecciones. Si el correspondiente supremo $R \vee S$ en* Equiv A *es una congruencia y además $R \vee S = RS$, entonces existe el coproducto fibrado de r y s. Si el exterior (!) es dicho coproducto fibrado, tenemos*

1. *w es suprayección*

2. *el exterior de (!) es un producto fibrado si y sólo si $R \wedge S = 1$.*

Demostración. Si $R \vee S$ es la congruencia $T =$ Núc t, entonces $r \wedge s = t$ en Coci A y por lo tanto el exterior de (!) es un coproducto fibrado. Para ver que w es suprayección, cancelamos r° y s de

$$r^\circ r s^\circ s = t^\circ t = r^\circ u^\circ v s$$

(lo podemos hacer porque r y s son suprayecciones). Obtenemos $rs^\circ = u^\circ v$ y concluimos w suprayección de 2.33. *2.* es consecuencia inmediata de la proposición anterior.

$*$

Proposición 5.6 *Para una categoría regular $\mathcal{A}$ son equivalentes*

1. *$\mathcal{A}$ es exacta.*

2. *si para dos congruencias R, S tenemos $SR = RS$, entonces el supremo $R \vee S$ en* Equiv A *es una congruencia.*

3. *si los núcleos de las suprayecciones $A \xrightarrow{r} B$ y $A \xrightarrow{s} C$ satisfacen $SR = RS$ y $R \wedge S = 1$ entonces r, s tienen coproducto fibrado y este también es un producto fibrado.*

4. *si r y s son suprayecciones con dominio común y $\langle r, s\rangle$ es una relación difuncional, entonces $\langle r, s\rangle$ es un producto fibrado.*

Demostración.
$1 \Rightarrow 2$ La definición de exacta es 2.42
$2 \Rightarrow 3$ Estamos en la situación de la proposición anterior
$3 \Rightarrow 4$ Es la proposición 3.10
$4 \Rightarrow 1$ Supongamos que $A \xrightarrow{\langle r,s\rangle} B \times B$ es una relación de equivalencia.

Por reflexividad, r, s son suprayecciones. Por simetría y transitividad, $\langle r, s\rangle$ difuncional. Entonces hay u, v tales que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[d, "u"] \\ B \arrow[r, "v"'] & D \end{tikzcd}$$

es producto fibrado. Por reflexividad de $\langle r, s\rangle$ concluimos que $u = v$.

*

Corolario 5.7 *Una categoría regular $\mathcal{A}$ es exacta si y sólo si sucede que cuando dos congruencias R y S en un objeto A tienen supremo en* Equiv A, *éste es una congruencia.*

Demostración.
$\Rightarrow$ Toda relación de equivalencia en una categoría exacta es congruencia.
$\Leftarrow$ Usamos el inciso *2.* del criterio 5.6. Sea A un objeto cualquiera de la categoría $\mathcal{A}$ y sean R, S dos congruencias en A tales que $RS = SR$. Entonces existe $R \vee S$ en Equiv A, es RS y, por hipotésis, es una congruencia. Por lo tanto $\mathcal{A}$ es exacta.

*

Corolario 5.8 *Sea $\mathcal{A}$ una categoría que admite coproductos fibrados de suprayecciones a lo largo de suprayecciones. Afirmamos que*

1. *para todo objeto A, el conjunto parcialmente ordenado* Cong A *tiene supremos binarios*

2. *$\mathcal{A}$ es exacta si y sólo si para todo objeto A, la inclusión* Cong $A \longrightarrow$ Equiv A *preserva supremos binarios*

Demostración. *1.* se sigue de la proposición 2.40. Para *2.* sólo demostraremos una implicación, puesto que la otra es trivial. Supongamos que para todo objeto A de $\mathcal{A}$ la inclusión de Cong A en Equiv A preserva supremos binarios. Usaremos el corolario anterior para ver que $\mathcal{A}$ es exacta. Sean R y S dos congruencias que suponemos tienen supremo $R \vee_{\text{Equiv } A} S$. Las hipotésis sobre $\mathcal{A}$ aseguran que existe el supremo $R \vee_{\text{Cong } A} S$ y que éste es igual a $R \vee_{\text{Equiv } A} S$. Por lo tanto, $R \vee_{\text{Equiv } A} S$ es una congruencia y por el corolario anterior, $\mathcal{A}$ es exacta.

*

Proposición 5.9 *Una categoría regular $\mathcal{A}$ es una categoría exacta de Maltsev si y sólo existe el coproducto fibrado de cualquier par de suprayecciones $A \xrightarrow{r} B$ y $A \xrightarrow{s} C$ y además, si éste es el exterior de* (!), *w es suprayección.*

Demostración.
$\Rightarrow$ Como $\mathcal{A}$ es exacta de Maltsev, $RS = SR = R \vee S$ es congruencia. Entonces, por la proposición 2.40, r, s tienen coproducto fibrado y por 5.3 w es suprayección.
$\Leftarrow$ Por la proposición 5.3, w suprayección es equivalente a $RS = SR = R \vee S = T = \text{Núc } t$. Eso basta para que $\mathcal{A}$ sea exacta por la proposición 5.8.

$*$

Capítulo 6

Categorías de Goursat

Definición 6.1 *En una categoría regular $\mathcal{A}$, sea $A \xrightarrow{r} B$ un morfismo cualquiera. Definimos las funciones*

$$\begin{aligned} r_* &: \mathrm{Sub}\ A \to \mathrm{Sub}\ B \\ r^* &: \mathrm{Sub}\ B \to \mathrm{Sub}\ A \end{aligned}$$

como sigue. Si $G \xrightarrow{i} A$ es un subobjeto de A, entonces $r_*i :=$ Im ri. Si $H \xrightarrow{j} B$ es un subobjeto de B, entonces r^*j aparece en el producto fibrado

$$\begin{tikzcd} r^*H \arrow[r] \arrow[d, "r^*j"'] & H \arrow[d, "j"] \\ A \arrow[r, "r"'] & B \end{tikzcd}$$

Ejemplo 6.2 *En* Con, *si $r : A \to B$ es una función, r_* y r^* corresponden a la imagen directa e imagen inversa de r, respectivamente.*

Proposición 6.3 *En una categoría regular $\mathcal{A}$, todo morfismo $A \xrightarrow{r} B$ da lugar a una adjunción*

$$r_* \dashv r^* : \mathrm{Sub}\ A \to \mathrm{Sub}\ B$$

de conjuntos parcialmente ordenados.

Demostración. Si $r_*i \leq j$, por la propiedad universal del producto fibrado existe un morfismo $G \to r^*H$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rrr] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, "i"'] & & & r_*G \arrow[dl] \arrow[ddl, "r_*i"] \\
& r^*H \arrow[r] \arrow[d, "r^*j"] & H \arrow[d, "j"] & \\
& A \arrow[r, "r"'] & B &
\end{tikzcd}$$

Al revés, si $i \leq r^*j$, por la propiedad diagonal 2.4, hay un único morfismo $r_*G \to H$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rrr] \arrow[dr] \arrow[ddr, "i"'] & & & r_*G \arrow[dl, dashed] \arrow[ddl, "r_*i"] \\
& r^*H \arrow[r] \arrow[d, "r^*j"] & H \arrow[d, "j"] & \\
& A \arrow[r, "r"'] & B &
\end{tikzcd}$$

Ahora verificaremos que $i \leq i'$ implica $r^*i \leq r^*i'$. Por lo anterior sabemos

$$i' \leq r^*r_*i'$$

Entonces $i \leq r^*r_*i'$ y, otra vez, por lo anterior

$$r_*i \leq r_*i'$$

La implicación que falta es análoga.

*

En lo que sigue nos ocuparemos de la siguiente situación particular. $r : A \to B$ es un morfismo. La construcción anterior, en el caso del producto $r \times r : A \times A \to B \times B$ induce una adjunción entre los conjuntos parcialmente ordenados Rel A, Rel B que por conveniencia seguiremos denotando $r_* \dashv r^*$.

Proposición 6.4 *Si* $A \xrightarrow{r} B$ *es un morfismo en una categoría regular* $\mathcal{A}$, *y* $U \in$ Rel B, $S \in$ Rel A *entonces podemos evaluar* r^*, r_* *como las composiciones de relaciones*

$$\begin{aligned} r^*U &= r^\circ U r \\ r_*S &= r S r^\circ \end{aligned}$$

Demostración. Si en

$$
\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dl, "x_1"'] \arrow[dr, "x_2"] & & \\
 & V \arrow[dl, "v_1"'] \arrow[dr, "v_2"] & & W \arrow[dl, "w_1"'] \arrow[dr, "w_2"] & \\
A \arrow[dr, "r"'] & & U \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[dr, "u_2"] & & A \arrow[dl, "r"] \\
 & B & & B &
\end{tikzcd}
$$

los tres cuadrados son productos fibrados, entonces

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "v_2x_1=w_1x_2"] \arrow[d, "\langle v_1x_1, w_2x_2\rangle"'] & U \arrow[d, "\langle u_1, u_2\rangle"] \\
A \times A \arrow[r, "r\times r"'] & B \times B
\end{tikzcd}
$$

es producto fibrado. Concluimos que $r^*U = r^\circ Ur$. Por la proposición 2.32 tenemos

$$S \leq r^\circ Ur \quad \Leftrightarrow \quad rSr^\circ \leq U$$

Es decir, $r_*S = rSr^\circ$.

$*$

Corolario 6.5 *Sean* $U \in \mathrm{Rel}\ B$ *y* $A \xrightarrow{r} B$ *un morfismo.*

1. *Si* U *es una relación de equivalencia entonces* r^*U *es una relación de equivalencia.*

2. *Si* U *es la congruencia* Núc u, *entonces* r^*U *es una congruencia, a saber* Núc ur.

Demostración.

1. Usando la proposición 2.31 y que U es relación de equivalencia, tenemos

$$1 \leq r^\circ r \leq r^\circ Ur$$
$$(r^\circ Ur)^\circ = r^\circ U^\circ r = r^\circ Ur$$
$$r^\circ Urr^\circ Ur \leq r^\circ UUr = r^\circ Ur$$

2. Si U es la congruencia Núc u para una $B \xrightarrow{u} D$, entonces por la proposición 2.31 tenemos

$$r^*U = r^\circ u^\circ ur = (ur)^\circ ur = \text{Nuc } ur$$

*

Como consecuencia del corolario anterior obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
\text{Rel } B \arrow[r, "r^*"] & \text{Rel } A \\
\text{Equiv } B \arrow[u] \arrow[r, "r^\sharp"] & \text{Equiv } A \arrow[u] \\
\text{Cong } B \arrow[u] \arrow[r, "r^\sim"] & \text{Cong } A \arrow[u] \\
\text{Coci } B \arrow[u] \arrow[r, "r_!"'] & \text{Coci } A \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

donde $r^\sharp$ y $r^\sim$ son simplemente las restricciones de r^* a Equiv B y Cong B respectivamente, mientras que $r_!$ está determinado por $r^\sim$.

Proposición 6.6 *$r^*, r^\sharp, r^\sim$ preservan ínfimos finitos. $r_!$ preserva supremos finitos.*

Demostración. r^* preserva ínfimos por ser adjunto derecho. Por las proposiciones 2.41 y 2.37, Cong A y Equiv A son cerradas bajo ínfimos finitos. Por lo tanto $r^*, r^\sharp, r^\sim$ preservan ínfimos finitos y $r_!$ preserva supremos finitos.

*

Proposición 6.7 *Para una $S \in$ Equiv A, el adjunto izquierdo*

$$r_\sharp : \text{Equiv } A \to \text{Equiv } B,$$

si existe, está dado por la mínima relación de equivalencia T en Equiv B *que contiene a r_*S. Análogamente para $r_\sim$:* Cong $A \to$ Cong B.

Demostración.
Lo haremos sólo para $r_\sharp$ porque el otro caso es analógo.
Supongamos primero que $U \in \text{Equiv } B$, es tal que $T \leq U$. Entonces $r_*S \leq U$. Pero esto es equivalente a $S \leq r^*U = r^\sharp U$.
En el otro sentido, supongamos que $S \leq r^*U$. Aplicando r_* de ambos lados obtenemos $r_*S \leq r_*r^*U \leq U$. Por lo tanto $T \leq U$.
Concluimos $r_\sharp S = T$.

*

Proposición 6.8 *Sea* $A \xrightarrow{s} C$ *en* Coci A *con núcleo* $S \xrightarrow{\langle s_1, s_2 \rangle} A \times A$ *en* Cong A. *Definamos* $\langle v_1, v_2 \rangle : V \to B \times B$ *de la siguiente manera*

- $r_*S = \langle w_1, w_2 \rangle$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\langle s_1, s_2 \rangle"] \arrow[d, "p"'] & A \times A \arrow[d, "r \times r"] \\ W \arrow[r, "\langle w_1, w_2 \rangle"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

- Coig $\langle w_1, w_2 \rangle = v$

- $\langle v_1, v_2 \rangle =$ Núc v

Entonces $\langle v_1, v_2 \rangle$ *es la mínima congruencia que contiene a* $\langle w_1, w_2 \rangle$, *o sea* $\langle v_1, v_2 \rangle = r_\sim S$.

Demostración. Por la propiedad universal de producto fibrado, hay una única $W \longrightarrow V$ tal que $\langle w_1, w_2 \rangle$ se factoriza

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, "\langle w_1, w_2 \rangle"] \arrow[d] & \\ V \arrow[r, "\langle v_1, v_2 \rangle"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

Es decir, $W \leq V$. Consideremos la congruencia $V' \xrightarrow{\langle v_1', v_2' \rangle} B \times B$ con $V' =$ Núc v' y supongamos que

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[dr, "\langle v_1', v_2' \rangle"] & \\ W \arrow[u, "t"] \arrow[r, "\langle w_1, w_2 \rangle"'] & B \times B \end{tikzcd}$$

entonces $v'w_1 = v'w_2$ y por lo tanto v' se factoriza

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d] \\ B \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "v'"'] & E' \end{tikzcd}$$

Esto implica que $v'v_1 = v'v_2$ y por lo tanto que $\langle v_1, v_2 \rangle$ se factoriza

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[dr, "\langle v_1', v_2' \rangle"] & \\ & B \times B \\ V \arrow[uu] \arrow[ur, "\langle v_1, v_2 \rangle"'] & \end{tikzcd}$$

Es decir $V \leq V'$.

*

En lo que sigue nos referiremos con frecuencia al cuadrado

$$(+) \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[d, "v"] \\ C \arrow[r, "n"'] & E, \end{tikzcd}$$

que suponemos conmuta.

Proposición 6.9 *Sea $A \xrightarrow{r} B$ un morfismo y $A \xrightarrow{s} C$ una suprayección. Denotemos por $S \xrightarrow{\langle s_1, s_2 \rangle} A \times A$ al núcleo de s. (+) es coproducto fibrado si y sólo si $r_{\sim}S = \text{Núc } v$.*

Demostración.

$\Rightarrow$

Veremos que si el cuadrado es coproducto fibrado, entonces $v = \text{Coig}\langle w_1, w_2 \rangle$, con la notación de 6.8. Sea $B \xrightarrow{v'} E'$ con $v'w_1 = v'w_2$. Entonces $(v'r)s_1 = (v'r)s_2$. Por la propiedad universal hay una única $C \xrightarrow{n'} E$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "r"] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[d, "v'"] \\ C \arrow[r, "n'"'] & E' \end{tikzcd}$$

Por lo tanto hay una única $E \longrightarrow E'$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "v"'] \arrow[dd, bend left, "v'"] \\ C \arrow[r, "n"] \arrow[dr, bend right, "n'"'] & E \arrow[d] \\ & E' \end{tikzcd}$$

Por lo tanto Coig $\langle w_1, w_2 \rangle = v$.

$\Leftarrow$

Como $vw_1 = vw_2$, hay una única $C \longrightarrow E$, que por homogeneidad llamamos n, tal que conmuta (+). Sean $B \xrightarrow{v'} E'$, $C \xrightarrow{n'} E'$ tales que $v'r = n's$. Como p (de 6.8) es suprayección, $v'w_1 = v'w_2$. Entonces hay una única $E \xrightarrow{t} E'$ tal que $v' = tv$. Como s es suprayección, también tenemos $tn = n'$.

*

Corolario 6.10 *Sea* $A \xrightarrow{r} B$ *un morfismo en una categoría* $\mathcal{A}$. *Existe el adjunto izquierdo* $r_{\sim}$: Cong $A \to$ Cong B *si y sólo si* $\mathcal{A}$ *tiene coproductos fibrados a lo largo de suprayecciones. Esto sucede cuando* $\mathcal{A}$ *tiene coigualadores. Si* $s \in$ Coci A *y* (+) *es un coproducto fibrado entonces* $v = r^{!}s$.

*

Proposición 6.11 *El morfismo* $A \xrightarrow{r} B$ *es una suprayección si y sólo si el funtor* r^{*} : Rel $B \to$ Rel A *es fiel y pleno. Si es el caso,* $r^{\natural}, r^{\sim}$ *y* $r_!$ *también son fieles y plenos. Cuando* r *es suprayección, tenemos* $r^{*}(UU') = (r^{*}U)(r^{*}U')$.

Demostración. Sabemos que r^* es fiel y pleno si y sólo si $r_*r^* \leq 1$ es una igualdad. Pero si es una igualdad, aplicando r_*r^* a 1_B, obtenemos, por 2.32

$$rr^\circ = rr^\circ rr^\circ = 1$$

Por 2.31, r es una suprayección. Al revés, si r es una suprayección, por 2.31 tenemos

$$r_*r^*U = rr^\circ Urr^\circ = U$$

para toda $U \in$ Equiv B. La última parte también es consecuencia de 2.31

$$r^*Ur^*U' = r^\circ Urr^\circ U'r = r^\circ UU'r$$

*

Proposición 6.12 *Sean r y s elementos de* Coci A. *El adjunto izquierdo $r^! s$ existe si y sólo si $r \wedge s$ existe en* Coci A. *En una categoría regular $\mathcal{A}$ los adjuntos $r^!, r_\sim$ existen para todas las suprayecciones r si y sólo si la categoría tiene coproductos fibrados de suprayecciones con suprayecciones. Si* (+) *es coproducto fibrado tenemos*

1. $r^! s = v$
2. $r_! r^! s = r \wedge s$

Demostración. En las siguientes equivalencias, suponemos que (+) es el coproducto fibrado de r con s.

$$\frac{\dfrac{\dfrac{r \wedge s \text{ existe}}{\text{existe el coproducto fibrado de } r \text{ con } s}}{r_\sim S = \text{ Nuc } v}}{r^! s = v}$$

La primera equivalencia es la proposición 2.12. La segunda se tiene por 6.9. La última es la definición de $r^!$. De esto también sacamos *1*. Para *2*. observemos que en 6.5, se evaluó $r^\sim$. Entonces si $V =$ Núc v, $r^\sim V =$Núc vr. Por lo tanto

$$r_! r^! s = r_! v = vr = r \wedge s$$

*

Proposición 6.13 *Si $A \xrightarrow{r} B$ es una suprayección y S es una relación de equivalencia en A, los siguientes incisos son equivalentes*

1. *$r_* S$ es una relación de equivalencia*
2. *$SRS \leq RSR$*
3. *RSR es relación de equivalencia y en consecuencia igual a $R \vee S$*

Demostración. Como r es suprayección, $r_* S$ es reflexiva por la proposición 2.31:

$$1 = rr^\circ \leq rSr^\circ = r_* S$$

r_*S es simétrica porque $(rSr^\circ)^\circ = rS^\circ r^\circ = rSr^\circ$. Entonces tenemos las equivalencias

$$\begin{array}{c} r_*S \in \text{Equiv } A \\ \hline rSr^\circ rSr^\circ \leq rSr^\circ \\ \hline Sr^\circ rS \leq r^\circ rSr^\circ r \\ \hline SRS \leq RSR \\ \hline \mathit{3.} \end{array}$$

La segunda es por 2.32. La tercera es por 2.31. La última es por 3.4.

*

Proposición 6.14 *Sean* $A \xrightarrow{r} B$ *una suprayección con núcleo* R *y* $T \in$ Equiv A *una relación de equivalencia cualquiera. Tenemos*

1. *T es de la forma $r^\sharp U$ para una $U \in$ Equiv B si y sólo si $R \leq T$.*

2. *$r^\sharp$ preserva supremos finitos.*

3. *El adjunto izquierdo $r_\sharp T$ existe si y sólo si $R \vee T$ existe en* Equiv A. *En este caso tenemos las igualdades $r_\sharp T = r_*(R \vee T) = r(R \vee T)r^\circ$ y $r^\sharp r_\sharp T = R \vee T$.*

Demostración.

1. En un sentido tenemos la desigualdad

$$R = r^\circ r \leq r^\circ U r = T$$

Al revés, si $R \leq T$, entonces $RT \leq T$ y $TR \leq T$. Luego RTR es igual a la relación de equivalencia RTR. Así es que por 6.13, r_*T está en Equiv B. Pero además

$$\begin{aligned} T &= RTR \\ &= r^\circ r T r^\circ r \\ &= r^\sharp r_* T \end{aligned}$$

Por lo tanto T es de la forma deseada.

2. Sea $S \in$ Equiv $\mathcal{A}$ tal que $r^{\sharp}P, r^{\sharp}Q \leq S$ para $P, Q \in$ Equiv $\mathcal{B}$. Por *1.* tenemos $R \leq S$ y que hay $U \in$ Equiv $\mathcal{B}$ con $r^{\sharp}U = S$. Como r es suprayección, $r^{\sharp}$ es fielmente plena y debe ser que $P, Q \leq U$. Luego $P \vee Q \leq U$ y se sigue $r^{\sharp}(P \vee Q) \leq r^{\sharp}U = S$. Por lo tanto $r^{\sharp}(P \vee Q) = r^{\sharp}P \vee r^{\sharp}Q$.

3. $\Leftarrow$
   Tenemos que $R \leq R \vee_{\mathrm{Equiv}\,\mathcal{A}} T$. Por *1.* hay $U \in$ Equiv $\mathcal{B}$ con $r^{\sharp}U = R \vee_{\mathrm{Equiv}\,\mathcal{A}} T$. Tenemos
   $$r^{\sharp}r_*T = r^{\sharp}(rTr^\circ) = r^\circ rTr^\circ r = RTR \leq R \vee_{\mathrm{Equiv}\,\mathcal{A}} T = r^{\sharp}U$$
   Como $r^{\sharp}$ es fiel y pleno, $r_*T \leq U$. Sea $S \in$ Equiv $\mathcal{A}$ tal que $r_*T \leq S$. Tenemos
   $$\begin{aligned} RTR \leq r^{\sharp}S \;&\Rightarrow\; r^{\sharp}U = R \vee_{\mathrm{Equiv}\,\mathcal{A}} T \leq r^{\sharp}S \\ &\Rightarrow\; U \leq S \end{aligned}$$
   Por 6.7, existe el adjunto izquierdo $r_{\sharp}T = U$.
   $\Rightarrow$
   Supongamos que para $T \in$ Equiv $\mathcal{A}$ existe el adjunto izquierdo $r_{\sharp}T$. Tenemos la desigualdad $T \leq r^{\sharp}r_{\sharp}T$ porque ésta es equivalente a $r_*T \leq r_{\sharp}T$. Tenemos que $R \leq r^{\sharp}r_{\sharp}T$ porque $r^{\sharp}r_{\sharp}T$ es de la forma $r^{\sharp}U$ para $U \in$ Equiv $\mathcal{B}$. Sea $S \in$ Equiv $\mathcal{B}$ tal que $R, T \leq S$. Entonces $S = r^{\sharp}U$ para una $U \in$ Equiv $\mathcal{B}$. Pero $T \leq r^{\sharp}U$ si y sólo si $r_{\sharp}T \leq U$. Entonces $r^{\sharp}r_{\sharp}T \leq r^{\sharp}U = S$. Por lo tanto el supremo de T, R existe y $r^{\sharp}r_{\sharp}T = R \vee_{\mathrm{Equiv}\,\mathcal{A}} T$. De esta última igualdad también se sigue $r_{\sharp}T = r_*(R \vee T) = r(R \vee T)r^\circ$ puesto que r es suprayección.

$*$

Proposición 6.15 *Una categoría regular $\mathcal{A}$ es de Goursat si y sólo si para toda suprayección $\mathcal{A} \xrightarrow{r} \mathcal{B}$ y para toda $S \in$ Equiv $\mathcal{A}$, r_*S es una relación de equivalencia. Si es el caso, el adjunto izquierdo de $r^{\sharp}$ está dado por $r_{\sharp}S = r_*S = rSr^\circ$ y tenemos $r^{\sharp}r_{\sharp}S = RSR = R \vee S$.*

Demostración. Por la proposición 3.4 una categoría regular $\mathcal{A}$ es de Goursat si y sólo si para todo par de congruencias R, S tenemos $SRS \leq RSR$. Por la proposición 6.13 esto es equivalente que para toda $S \in$ Equiv $\mathcal{A}$, r_*S sea relación de equivalencia. El resto de la proposición se sigue de 6.4 y 6.14.

$*$

Capítulo 7

Categorías Exactas de Goursat

Sea $\mathcal{A}$ una categoría exacta. Si $A \in \mathcal{A}$ es un objeto, entonces tenemos la igualdad Equiv A = Cong A y 2.40 da un isomorfismo entre estos dos conjuntos parcialmente ordenados y (Coci A)°. La relación de equivalencia que este isomorfismo le asocia a una suprayección la denotamos con la letra mayúscula correspondiente. Así, $R =$ Núc r, $U =$ Núc u, etc.
Si R es una relación de equivalencia en A, denotamos por A/R al codominio de r.

Lema 7.1 *Si $U = \langle u_1, u_2 \rangle$ es una relación de equivalencia en B y $A \xrightarrow{r} B$ es una suprayección entonces tenemos el isomorfismo de objetos*

$$A/r^*U \approx B/U$$

Demostración. Si $B \xrightarrow{p} B/U$ es el coigualdor de $\langle u_1, u_2 \rangle$ y

$$\begin{tikzcd}
r^*U \arrow[r] \arrow[d, "\langle v_1, v_2 \rangle"'] & U \arrow[d, "\langle u_1, u_2 \rangle"] \\
A \times A \arrow[r, "r \times r"'] & B \times B
\end{tikzcd}$$

es producto fibrado, entonces $\langle v_1, v_2 \rangle$ es el núcleo de pr por el corolario 6.5. Como pr es suprayección, es coigualador de $\langle v_1, v_2 \rangle$.

$*$

Proposición 7.2 *Sea $\mathcal{A}$ una categoría exacta de Goursat. Sean R y S dos relaciones de equivalencia en $\mathcal{A}$ que se corresponden con las suprayecciones $A \xrightarrow{r} B$ y $A \xrightarrow{s} S$ respectivamente. Tenemos los siguientes isomorfismos*

$$B/r_*S \approx A/(R \vee S) \approx C/s_*R$$

Demostración. Como $\mathcal{A}$ es de Goursat, existe el supremo $R \vee S$. Por lo tanto, existe el coproducto fibrado de r con s:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, "t"] & C \arrow[d, "v"] \\ B \arrow[r, "u"'] & D \end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{A}$ es exacta, por la proposición 6.9 obtenemos

$$r_\sharp S = U$$

Como $\mathcal{A}$ es de Goursat, $r_\sharp S = r_*S$, por la proposición 6.15. Por lo tanto

$$B/r_*S \approx D$$

Análogamente $C/s_*R \approx D$. Como $r \wedge s = t$ entonces t se corresponde con $R \vee S$ y $A/(R \vee S) \approx D$.

*

Corolario 7.3 *Misma situación de la proposición anterior. Supongamos que $\langle r, s \rangle$ es mono. Si esa relación la denotamos por Y entonces $Y^\circ Y$ y YY° son relaciones de equivalencia y tenemos*

$$B/Y^\circ Y \approx C/YY^\circ$$

Demostración. Por las proposiciones 2.31 y 6.4 tenemos

$$Y^\circ Y = rs^\circ sr^\circ = rSr^\circ = r_*S$$

Análogamente, $YY^\circ = s_*R$.

*

Proposición 7.4 *En el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"] & C \\ F \arrow[r, "n"] \arrow[dr, "a"'] & B \arrow[d, "i"] & \\ & M & \end{tikzcd}$$

i es mono y r, s, k son suprayecciones. Denotemos $f = ir$. Entonces a^*f_*S es una relación de equivalencia y k induce un isomorfismo

$$E/h^*(R \vee S) \approx F/a^*f_*S$$

Demostración. Como la categoría es exacta, por la proposición 6.15 $R \vee S = r^*r_*S$. Entonces $h^*(R \vee S) = h^*r^*r_*S = k^*n^*r_*S$. Por el lema 7.1

$$E/h^*r^*r_*S \approx F/n^*r_*S$$

Como i es mono, por la proposición 2.31, $i^*i_* = 1$. Por lo tanto

$$n^*r_*S = n^*i^*i_*r_*S = a^*f_*S$$

*

Proposición 7.5 *En el diagrama*

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, shift left, "\lambda_1"] \arrow[r, shift right, "\lambda_2"'] & A \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "f"] & X \\ Y \arrow[r, "\lambda"'] & M \arrow[r, shift left, "\mu_1"] \arrow[r, shift right, "\mu_2"'] & Z \end{tikzcd}$$

supongamos que los dos renglones son exactos, *más precisamente*

$$\begin{aligned} \text{Nuc } \mu &= \text{Im } \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle \\ \text{Im } \lambda &= \text{Ig } \langle \mu_1, \mu_2 \rangle \end{aligned}$$

donde Ig $\langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ *denota al igualador de μ_1 y μ_2. Entonces* Im $\langle f\lambda_1, f\lambda_2 \rangle$ *es relación de equivalencia y tenemos el isomorfismo*

$$\text{Ig } \langle \mu_1 f, \mu_2 f \rangle / (\text{Nuc } f \vee \text{Nuc } \mu) \approx (\text{Im } \lambda \wedge \text{Im } f)/\text{Im } \langle f\lambda_1, f\lambda_2 \rangle$$

Demostración. Denotemos por $H \xrightarrow{b} M$ a la imagen de λ, por

$$A \xrightarrow{r} B \xrightarrow{i} M$$

a la factorización de f, y por $A \xrightarrow{s} C$ a la suprayección que se corresponde con la relación de equivalencia $\langle s_1, s_2 \rangle = \mathrm{Im}\ \langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = \mathrm{Núc}\ \mu$.
Consideremos el siguiente diagrama conmutativo, en el que los cuadrados son productos fibrados y a es una diagonal.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & A \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"'] & C \\
F \arrow[r, "n"] \arrow[d, "c"'] \arrow[dr, "a"'] & B \arrow[d, "i"] & \\
H \arrow[r, "b"'] & M &
\end{tikzcd}$$

Por construcción i es mono y r, s, k son suprayecciones. Por la proposición 7.4, $a^* f_* S$ es relación de equivalencia y tenemos el isomorfismo

$$E/h^*(R \vee S) \approx F/a^* f_* S$$

Pero

- $h = \mathrm{Ig}\ \langle \mu_1 f, \mu_2 f \rangle$, porque h es el producto fibrado de $\mathrm{Ig}\ \langle \mu_1, \mu_2 \rangle$ a lo largo de f

- $a = (\mathrm{Im}\ \lambda) \wedge (\mathrm{Im}\ f)$, por definición

y tenemos las igualdades de relaciones de equivalencia

- $R \vee S = (\mathrm{Nuc}\ f) \vee (\mathrm{Nuc}\ \mu)$, por el lema 2.15

- $\mathrm{Im}\ \langle f\lambda_1, f\lambda_2 \rangle = f_* S$ por definición

Por lo tanto concluimos

$$\mathrm{Ig}\ \langle \mu_1 f, \mu_2 f \rangle / (\mathrm{Nuc}\ f \vee \mathrm{Nuc}\ \mu) \approx (\mathrm{Im}\ \lambda \wedge \mathrm{Im}\ f)/\mathrm{Im}\ \langle f\lambda_1, f\lambda_2 \rangle$$

$*$

Recordemos que por la proposición 1.4, la categoría Ab es de Maltsev y en particular de Goursat. Por la proposición 9.36 también es exacta. Por lo tanto, la proposición 7.5 es válida en Ab. Como caso particular obtenemos la proposición 1.5. Basta considerar, con la notación de dicha proposición, el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, shift left, "\mu_1"] \arrow[r, shift right, "\mu_2"'] & B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\beta"] & C \\ D \arrow[r, "\lambda'"'] & E \arrow[r, shift left, "\mu'"] \arrow[r, shift right, "0"'] & Z \end{tikzcd}$$

donde μ_1, μ_2 es el par núcleo de μ y 0 es el morfismo cero.

ESTA TESIS NO SALE
DE LA BIBLIOTECA

Capítulo 8

Categorías Localmente Finitamente Presentables

Definición 8.1 *Un objeto K de una categoría $\mathcal{K}$ es* finitamente presentable *si el funtor*

$$\mathcal{K}(K, -) : \mathcal{K} \to \mathsf{Con}$$

preserva colímites dirigidos.

Definición 8.2 *Una categoría $\mathcal{K}$ es* localmente finitamente presentable *si es cocompleta y tiene un conjunto $\mathcal{A}$ de objetos finitamente presentables tal que todo $K \in \mathcal{K}_o$ es colímite dirigido de objetos en $\mathcal{A}$.*

Definición 8.3 *Sea K un objeto en la categoría $\mathcal{K}$ y $\mathcal{A}$ una subcategoría plena de $\mathcal{K}$. Definimos la categoría $(\mathcal{A} \downarrow K)$ por*

Objetos *son los morfismos $A \xrightarrow{f} K$ con $A \in \mathcal{A}$ y $K \in \mathcal{K}$*

Morfismos *de $A \xrightarrow{f} K$ a $B \xrightarrow{g} K$ son los morfismos $A \xrightarrow{h} B$ tales que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[r, "g"'] & K \end{tikzcd}$$

El diagrama canónico *de K es el funtor*

$$\Gamma : (\mathcal{A} \downarrow K) \longrightarrow \mathcal{A}$$

donde si $X \xrightarrow{f} A$ *entonces* $\Gamma f = X$ *y si* $f \xrightarrow{h} g$ *entonces* $\Gamma h = h$. *Decimos que* K *es un* colímite canónico de objetos en $\mathcal{A}$ *si el cocono*

$$\{\Gamma f \xrightarrow{f} K\}_{f \in (\mathcal{A} \downarrow K)}$$

es colímite. En caso de que todo objeto $K \in \mathcal{K}$ *sea un colímite canónico de objetos en* $\mathcal{A}$*, decimos que* $\mathcal{A}$ *es* densa *en* $\mathcal{K}$.

Proposición 8.4 *Un colímite finito de objetos finitamente presentables es finitamente presentable.*

Demostración. Sea

$$\{\Gamma I \xrightarrow{q_I} L\}_{I \in \mathbf{I}}$$

un colímite en $\mathcal{K}$ sobre el diagrama finito $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathcal{K}$ con ΓI finitamente presentable para cada $I \in \mathbf{I}$. Sea, por otro lado,

$$\{\Upsilon J \xrightarrow{p_J} M\}_{J \in \mathbf{J}}$$

un colímite en $\mathcal{K}$ sobre el diagrama dirigido $\Upsilon : \mathbf{J} \to \mathcal{K}$. Basta con demostrar que

$$\{\mathcal{K}(L, \Upsilon J) \xrightarrow{\mathcal{K}(L, p_J)} \mathcal{K}(L, M)\}_{J \in \mathbf{J}}$$

es un colímite dirigido en Con:

1. Sea $L \xrightarrow{f} M$ un morfismo. Como ΓI siempre es finitamente presentable, para cada $I \in \mathbf{I}$ hay $J_I \geq J_1, J_2$ y $\Gamma I \xrightarrow{f_I} \Upsilon J_I$ tal que $f q_I = p_{J_I} f_I$. Como $\mathbf{I}$ es finita y $\mathbf{J}$ es dirigida entonces hay $J_o \in \mathbf{J}$ tal que para toda $I \in \mathbf{I}$

$$\begin{tikzcd} \Gamma I \arrow[r, "f q_I"] \arrow[dr, "\Upsilon(J_I \to J_o) f_I"'] & M \\ & \Upsilon J_o \arrow[u, "p_{J_o}"'] \end{tikzcd}$$

Para cada I denotemos $\Upsilon(J_I \to J_o) f_I =: l_I$. Sea $I \xrightarrow{h} I'$ en $\mathbf{I}$. Como

$$p_{J_o} l_I = p_{J_o} l_{I'} \Gamma h$$

hay $J_h \in \mathbf{J}$ tal que

$$\Upsilon(J_o \to J_h)l_I = \Upsilon(J_o \to J_h)l_{I'}\Gamma h$$

Como $\mathbf{I}$ es finita y $\mathbf{J}$ es dirigida entonces hay $J_1 \in \mathbf{J}$ tal que para toda $I \xrightarrow{h} I'$ en $\mathbf{I}$

$$\begin{tikzcd} & \Upsilon J_1 & \\ \Gamma I \arrow[ur, "\Upsilon(J_I \to J_1)f_I"] \arrow[rr, "\Gamma h"'] & & \Gamma I' \arrow[ul, "\Upsilon(J_{I'} \to J_1)f_{I'}"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Denotemos $g_I := \Upsilon(J_I \to J_1)f_I$. El cocono $\{g_I\}_{I \in \mathbf{I}}$ induce un morfismo $L \xrightarrow{g} \Upsilon J_1$ que hace conmutar al diagrama

$$\begin{tikzcd} & & M \\ L \arrow[r, "g"] \arrow[urr, bend left, "f"] & \Upsilon J_1 \arrow[ur, "p_{J_1}"] & \\ \Gamma I \arrow[u, "q_I"] \arrow[r, "l_I"'] & \Upsilon J_o \arrow[u, "\Upsilon(J_o \to J_1)"'] \arrow[uur, bend right, "p_{J_o}"'] & \end{tikzcd}$$

2. Sean $L \xrightarrow{f} \Upsilon J_1$ y $L \xrightarrow{g} \Upsilon J_2$ tales que $p_{J_1}f = p_{J_2}g$. Entonces para cada $I \in \mathbf{I}$, $p_{J_1}fq_I = p_{J_2}gq_I$. Como ΓI siempre es finitamente presentable, para cada $I \in \mathbf{I}$ hay $J_I \geq J_1, J_2$ tal que

$$\Upsilon(J_1 \to J_I)fq_I = \Upsilon(J_2 \to J_I)gq_I$$

Existe $J_o \in \mathbf{J}$ tal que para toda I, $J_I \leq J_o$ porque $\mathbf{I}$ es finita y $\mathbf{J}$ es dirigida. Entonces para toda $I \in \mathbf{I}$ tenemos

$$\Upsilon(J_1 \to J_o)fq_I = \Upsilon(J_2 \to J_o)gq_I$$

Por lo tanto

$$\Upsilon(J_1 \to J_o)f = \Upsilon(J_2 \to J_o)g.$$

*

Definición 8.5 *En una categoría $\mathcal{K}$, un* generador *es un conjunto de objetos $\mathcal{G}$ tal que para cada par $K \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} K'$ de morfismos distintos hay un morfismo $G \xrightarrow{h} K$ con $G \in \mathcal{G}$ tal que $fh \neq gh$. Un generador se dice* fuerte *si cumple la siguiente propiedad. Si A es un objeto de $\mathcal{K}$, entonces para todos sus subobjetos propios $X \xrightarrow{x} A$ existe un objeto $G \in \mathcal{G}$ y un morfismo $G \xrightarrow{f} A$ tales que f no se factoriza a través de x, es decir, la conmutatividad de*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dashed] & & A \\ & X \arrow[ur, "x"'] & \end{tikzcd}$$

no se da para ningún morfismo $G \longrightarrow X$.

Proposición 8.6 *Una categoría es localmente finitamente presentable si es cocompleta y tiene un generador fuerte de objetos finitamente presentables.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{A}$ al generador fuerte de objetos finitamente presentables. $\bar{\mathcal{A}}$ es la cerradura de $\mathcal{A}$ bajo colímites finitos. Observemos que $\bar{\mathcal{A}}$ sigue siendo conjunto. Por 8.4, los objetos de $\bar{\mathcal{A}}$ son finitamente presentables. El diagrama canónico $(\bar{\mathcal{A}} \downarrow K) \to \mathcal{A}$ es filtrante porque $\bar{\mathcal{A}}$ tiene colímites finitos. Denotemos su colímite por

$$\{A \xrightarrow{f^*} K^*\}_{f \in (\bar{\mathcal{A}} \downarrow K)}$$

Se induce un morfismo $K^* \xrightarrow{m} K$ tal que para toda $f \in (\bar{\mathcal{A}} \downarrow K)$ conmuta

$$\begin{tikzcd} K^* \arrow[rr, "m"] & & K \\ & A \arrow[ul, "f^*"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Veremos que m es iso. Como $\mathcal{A}$ es un generador fuerte y todo morfismo $A \xrightarrow{f} K$ con $A \in \mathcal{A}$ se factoriza a través de m, para ver que m es iso, basta checar que m es mono. A su vez, como $\mathcal{A}$ es (en particular) un generador, para ver que m es mono, basta checar que m distingue morfismos con dominio en $\mathcal{A}$. Sean $B \overset{p}{\underset{q}{\rightrightarrows}} K^*$ tales que $mp = mq$ y $B \in \mathcal{A}$. Como B es finitamente presentable hay p', q' tales que $f^{*}p' = p$ y $f^{*}q' = q$ para una $f \in (\bar{\mathcal{A}} \downarrow K)$. Sea $A \xrightarrow{c} C$ el coigualador de p', q'. Denotemos por $C \xrightarrow{g} K$ al único morfismo con $gc = mf^{*}$.

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r, "c"] \arrow[d, "f^{*}"] & C \arrow[dl, "g^{*}"] \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[ur, shift left, "p'"] \arrow[ur, shift right, "q'"'] \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & K^{*} \arrow[r, "m"'] & K
\end{tikzcd}$$

$C \in \bar{\mathcal{A}}$ por definición de $\in \bar{\mathcal{A}}$. Además, como $\langle f^{*}\rangle_{f\in(\bar{\mathcal{A}}\downarrow K)}$ es cono (colímite) de K con respecto a $\bar{\mathcal{A}}$, de

$$f = mf^{*} = gc$$

se sigue que

$$f^{*} = g^{*}c.$$

Así es que

$$p = f^{*}p' = g^{*}cp' = g^{*}cq' = f^{*}q' = q.$$

Por lo tanto m es mono y en consecuencia iso.

$*$

Proposición 8.7 *En una categoría localmente finitamente presentable $\mathcal{K}$, denotemos por $\mathcal{A}$ a la subcategoría plena de objetos finitamente presentables. Entonces para todo $K \in \mathcal{K}$ tenemos*

1. *$(\mathcal{A} \downarrow K)$ es filtrante*

2. *K es colímite canónico de objetos en $\mathcal{A}$*

Es decir, en cualquier categoría localmente finitamente presentable, la subcategoría plena de objetos finitamente presentables es densa.

Demostración.

1. Sea $\mathcal{D} \subseteq (\mathcal{A} \downarrow K)$ una subcategoría finita. El diagrama

$$\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{K}$$

dado por $A \xrightarrow{f} K$,

$$f \mapsto A$$

tiene un colímite

$$\{A \xrightarrow{q_f} L\}_{f \in \mathcal{D}}$$

Por la proposición, 8.4 $L \in \mathcal{A}$. Además, por la propiedad universal, hay una única $L \xrightarrow{v} K$ tal que para toda $f \in \mathcal{D}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "v"] \\ A \arrow[ur, "q_f"] \arrow[r, "f"'] & K \end{tikzcd}$$

Esto quiere decir que

$$\{f \xrightarrow{q_f} v\}_{f \in \mathcal{D}}$$

es cocono sobre $\mathcal{D}$.

2. Como $\mathcal{K}$ es localmente finitamente presentable, hay un diagrama dirigido $\mathbf{I} \xrightarrow{\Upsilon} \mathcal{A}$ tal que K es un colímite

$$\{\Upsilon I \xrightarrow{q_I} K\}_{I \in \mathbf{I}}$$

Sea $\{A \xrightarrow{p_f} L\}_{f \in (\mathcal{A} \downarrow K)}$ un cocono sobre el diagrama canónico $(\mathcal{A} \downarrow K) \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{K}$. Como para toda $I \xrightarrow{h} J$ en $\mathbf{I}$, Υh es un morfismo $q_I \longrightarrow q_J$ en $(\mathcal{A} \downarrow K)$, entonces

$$\begin{tikzcd} \Upsilon I \arrow[d, "\Upsilon h"'] \arrow[dr, "p_{q_I}"] & \\ \Upsilon J \arrow[r, "p_{q_J}"'] & L \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto hay una única $K \xrightarrow{p} L$ tal que para toda $I \in \mathbf{I}$ conmuta

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "p"] \\ \Upsilon I \arrow[ur, "q_I"] \arrow[r, "p_{q_I}"'] & L \end{tikzcd}$$

Si $A \xrightarrow{f} K$ es un objeto de $(\mathcal{A} \downarrow K)$, hay I, f' tales que conmuta

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f'"'] & K \arrow[r, "p"] & L \\ & \Upsilon I \arrow[u, "q_I"] \arrow[ur, "p_{q_I}"'] & \end{tikzcd}$$

El triángulo izquierdo dice que $f \xrightarrow{f'} q_I$ es morfismo en $(\mathcal{A} \downarrow K)$. Por lo tanto $p_f = p_{q_I} f'$ y $pf = p_f$. Si $K \xrightarrow{p'} L$ fuera tal que $p'f = p_f$ para toda $f \in (\mathcal{A} \downarrow K)$, en particular tendríamos $p'q_I = p_{q_I}$ para $I \in \mathbf{I}$. Por lo tanto,

$$\{\Gamma f \xrightarrow{f} K\}_{f \in (\mathcal{A} \downarrow K)}$$

es cono colímite.

*

Proposición 8.8 *Sea $\mathcal{A} \xrightarrow{i} \mathcal{K}$ una subcategoría plena de la categoría $\mathcal{K}$. Denotemos por E al funtor $\mathcal{K} \to$ Con $^{\mathcal{A}^\circ}$ definido por $EK = \mathcal{K}(i(-), K)$. Tenemos*

1. *Si $\mathcal{A}$ es densa entonces E es fiel y pleno*
2. *Si cada objeto de $\mathcal{A}$ es finitamente presentable, E preserva colímites dirigidos.*

Demostración.

1. E es fiel. Sean $K_1 \underset{h_2}{\overset{h_1}{\rightrightarrows}} K_2$ tales que $Eh_1 = Eh_2$. Como $\mathcal{A}$ es densa existen un diagrama $\mathbf{I} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{A}$ y un cocono colímite $\{\Gamma I \xrightarrow{q_I} K_1\}$ $_{I \in \mathbf{I}}$. En particular, para toda $I \in \mathbf{I}$ tenemos $h_1 q_I = h_2 q_I$. Por lo tanto $h_1 = h_2$ y E es fiel.
   E es pleno. Sea $\mathcal{K}(i(-), K_1) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{K}(i(-), K_2)$ una transformación natural. Por hipotésis, K_1 es colímite canónico sobre $\Gamma : (\mathcal{A} \downarrow K_1) \to \mathcal{K}$. Tenemos la colección de morfismos

$$\{A \xrightarrow{\alpha_A(f)} K_2\}_{f \in (\mathcal{A} \downarrow K)}$$

Si $f \xrightarrow{h} g$ es un morfismo en $(\mathcal{A} \downarrow K_1)$, persiguiendo a $B \xrightarrow{g} K_1$ en

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(B, K_1) & \xrightarrow{\alpha_B} & \mathcal{K}(B, K_2) \\ {\scriptstyle \mathcal{K}(h,K_1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{K}(h,K_2)} \\ \mathcal{K}(A, K_1) & \xrightarrow[\alpha_A]{} & \mathcal{K}(A, K_2) \end{array}$$

concluimos que $\{\alpha_A(f)\}_{f \in (\mathcal{A} \downarrow K_1)}$ es un cocono que induce un morfismo $K_1 \xrightarrow{a} K_2$ tal que

$$af = \alpha_A(f)$$

para cada $A \xrightarrow{f} K_1$ en $(\mathcal{A} \downarrow K_1)$. Esta última igualdad dice que $\alpha = Ea$.

2. Sea $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathcal{K}$ un diagrama dirigido con colímite

$$\{\Gamma I \xrightarrow{q_I} L\}_{I \in \mathbf{I}}$$

en $\mathcal{K}$. Para cada $A \in \mathcal{A}$, el diagrama

$$\{\mathcal{K}(A, \Gamma I) \xrightarrow{\mathcal{K}(A, q_I)} \mathcal{K}(A, L)\}_{I \in \mathbf{I}}$$

es colímite porque A es finitamente presentable. Por lo tanto, el diagrama

$$\{\mathcal{K}(i(-), \Gamma I) \xrightarrow{\mathcal{K}(i(-), q_I)} \mathcal{K}(i(-), L)\}_{I \in \mathbf{I}}$$

es colímite en $\mathrm{Con}^{\mathcal{A}^\circ}$ y E preserva colímites dirigidos.

*

Definición 8.9 *Si $\mathcal{A}$ es una categoría, y $H : \mathcal{A}^\circ \to \mathrm{Con}$, es un funtor, podemos definir la categoría* $\mathrm{El}(H)$ *de la siguiente manera*

Objetos *son las parejas (A, a) con $A \in \mathcal{A}$ y $a \in HA$.*

Morfismos *$(A, a) \xrightarrow{h} (B, b)$ son los morfismos $A \xrightarrow{h} B$ en $\mathcal{A}$ tales que $Hhb = a$.*

Proposición 8.10 *Si $\mathcal{A}$ es una categoría y $H : \mathcal{A}^\circ \to \mathsf{Con}$ es un funtor, entonces H es un colímite sobre el diagrama $\Gamma : \mathrm{El}(H) \to \mathsf{Con}^{\mathcal{A}^\circ}$ dado por $(A, a) \mapsto \mathcal{A}(-, A)$*

Demostración. Tenemos la colección de morfismos

$$\{\mathcal{A}(-, A) \xrightarrow{q^{(A,a)}} H\}_{(A,a)\in \mathrm{El}(H)}$$

donde $q^{(A,a)}$ es la transformación natural que por el lema de Yoneda se corresponde a $a \in HA$, o sea $q_A^{(A,a)}(1_A) = a$. Veamos que es cocono. Sea $(A, a) \xrightarrow{h} (B, b)$ un morfismo en $\mathrm{El}(H)$. Por Yoneda sabemos que $q_A^{(B,b)}(h) = Hh(b)$. Entonces

$$q_A^{(A,a)}(1_A) = a = Hh(b) = q_A^{(B,b)} h_*(1_A),$$

la segunda igualdad porque h es morfismo en $\mathrm{El}(H)$. Por Yoneda, eso basta para demostrar que

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}(-, A) \arrow[d, "h_*"'] \arrow[dr, "q^{(A,a)}"] & \\ \mathcal{A}(-, B) \arrow[r, "q^{(B,b)}"'] & H \end{tikzcd}$$

conmuta. Veamos ahora que este cocono es colímite. Sea

$$\{\mathcal{A}(-, A) \xrightarrow{p^{(A,a)}} G\}_{(A,a)\in \mathrm{El}(H)}$$

cualquier otro cocono sobre Γ. Por el lema de Yoneda, si queremos que

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[d, "l"] \\ \mathcal{A}(-, A) \arrow[ur, "q^{(A,a)}"] \arrow[r, "p^{(A,a)}"'] & G \end{tikzcd}$$

conmute, entonces debe ser que para toda $A \in \mathcal{A}$ y $a \in HA$ se tiene $l_A(a) = p_A^{(A,a)}(1_A)$. Veamos que si así definimos l entonces para toda $A \xrightarrow{f} B$ en $\mathcal{A}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} HA \arrow[r, "l_A"] & GA \\ HB \arrow[u, "Hf"] \arrow[r, "l_B"'] & GB \arrow[u, "Gf"'] \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $b \in HB$. Por Yoneda sabemos que

$$l_A Hf(b) = (Gf)l_A(b)$$

porque en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & HA \arrow[d, "l_A"] \\ \mathcal{A}(A,B) \arrow[ur, "q_A^{(B,b)}"] \arrow[r, "p_A^{(B,b)}"'] & GA \end{tikzcd}$$

podemos perseguir a f. Por lo tanto l es transformación natural y H es colímite sobre Γ.

$*$

Proposición 8.11 *Usamos la notación de la proposición anterior. Si $\mathcal{A}°$ tiene límites finitos y H los preserva entonces* $\mathrm{El}(H)$ *es filtrante.*

Demostración. Sea $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathrm{El}(H)$ un diagrama con $\mathbf{I}$ finita. Denotemos por U al funtor $\mathrm{El}(H) \to \mathcal{A}$ dado por $(A,a) \mapsto A$. Por hipotésis, podemos calcular el colímite $\{A_I \xrightarrow{q_I} A\}_{I\in\mathbf{I}}$ sobre $U\Gamma$ en $\mathcal{A}$ y

$$\{HA \xrightarrow{Hq_I} HA_I\}_{I\in\mathbf{I}}$$

es límite en Con. Por la manera de evaluar los límites en Con, una colección compatible $\{a_I \in HA_I\}_{I\in\mathbf{I}}$ determina un único elemento $a \in HA$ con la propiedad $Hq_I(a) = a_I$. Esto dice que cada q_I es morfismo en $\mathrm{El}(H)$ y por lo tanto la colección

$$\{(A_I, a_I) \xrightarrow{q_I} (A,a)\}_{I\in\mathbf{I}}$$

es cocono sobre Γ.

$*$

Proposición 8.12 *En una categoría $\mathcal{K}$ localmente finitamente presentable denotemos por $\mathcal{A}$ la subcategoría plena de objetos finitamente presentables. $\mathcal{K}$ es equivalente a la categoría* $\mathrm{Cont}_\omega\mathcal{A}°$ *de funtores $\mathcal{A}° \to$ Con que preservan límites finitos.*

Demostración. El funtor $E : \mathcal{K} \to \mathrm{Con}^{\mathcal{A}^\circ}$ dado por $EK = \mathcal{K}(i(-), K)$ es, por las proposiciones 8.7 y 8.8, fiel y pleno. Denotemos $\mathcal{K}' \subseteq \mathrm{Con}^{\mathcal{A}^\circ}$ la subcategoría que tiene por objetos los funtores G isomorfos a EK para algún $K \in \mathcal{K}_o$. Veremos que $\mathcal{K}'$ es igual a $\mathrm{Cont}_\omega \mathcal{A}^\circ$. Con eso se demostraría la proposición, puesto que $\mathcal{K}$ es isomorfa a $E\mathcal{K}$ y $E\mathcal{K}$ es equivalente a $\mathcal{K}'$.

$\subseteq$

Si $G \in \mathcal{K}'$, G es isomorfo a un funtor $\mathcal{K}(i(-), K)$ para un $K \in \mathcal{K}$. El funtor $\mathcal{K}(-, K)$ preserva los límites de $\mathcal{K}^\circ$. Por la proposición 8.4, los colímites finitos en $\mathcal{A}$ se evalúan como en $\mathcal{K}$. Pero $\mathcal{K}(i(-), K)$ es simplemente la restricción de $\mathcal{K}(-, K)$ a $\mathcal{A}^\circ$. Por lo tanto $G \in \mathrm{Cont}_\omega \mathcal{A}^\circ$.

$\supseteq$

Al revés, si $H : \mathcal{A}^\circ \to \mathrm{Con}$, preserva límites finitos entonces por la proposición 8.10, H es colímite de un funtor $\Gamma : \mathrm{El}(H) \to E\mathcal{K}$ que se factoriza

$$\begin{tikzcd} \mathrm{El}(H) \arrow[rr, "\Gamma"] \arrow[dr] & & \mathrm{Con}^{\mathcal{A}^\circ} \\ & \mathcal{K} \arrow[ur, "E"'] & \end{tikzcd}$$

Por la proposición 8.4, se puede aplicar la proposición 8.11 para concluir que dicho colímite es filtrante. Por la proposición 8.8, E preserva colímites filtrantes, que siempre existen porque $\mathcal{K}$ es localmente finitamente presentable. Por lo tanto, $H \in \mathcal{K}'$.

$*$

Capítulo 9

Variedades

9.1 Alg Σ

Fijemos un conjunto S (de *tipos*). Le llamamos así porque lo usaremos para ordenar, en el sentido de clasificar por tipo.

Definición 9.1 *Si S es un conjunto, las* palabras *en S es el conjunto de las expresiones formales*

$$s_1 s_2 \cdots s_n$$

con $s_i \in S$ para $i = 1, \ldots, n$. Denotamos a este conjunto por PS y no descartamos el caso $n = 0$, que es la palabra vacía $\emptyset$.

Definición 9.2 *Una* signatura *ordenada por S es un conjunto de símbolos Σ y una función*

$$\Sigma \longrightarrow PS \times S$$

Esta función, evaluada en un símbolo $\sigma \in \Sigma$, la denotamos de la manera usual por

$$\sigma : s_1 \times \cdots \times s_n \longrightarrow s$$

Si $\sigma \mapsto (s_1, \ldots, s_n, s)$. Si $n = 0$, simplemente escribimos $\sigma : \to s$.

Definición 9.3 *Sea Σ una signatura ordenada por S. Un* álgebra Σ *consiste de*

- *un objeto $(A_s)_{s \in S}$ de* Con^S

- *para cada* $\sigma : s_1 \times \cdots \times s_n \longrightarrow s$ *en* Σ *una función*

$$\sigma_A : A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \longrightarrow A_s$$

Definición 9.4 *Sea* Σ *una signatura ordenada por* S*. La categoría* Alg Σ *está descrita por*

Objetos *son las álgebras* Σ

Morfismos *de* A *a* B *son los morfismos* $A \xrightarrow{f} B$ *en* Con^S *tales que para todo* $\sigma : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ *conmuta*

$$\begin{tikzcd}
A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n} \arrow[r, "f_{s_1} \times \cdots \times f_{s_n}"] \arrow[d, "\sigma_A"'] & B_{s_1} \times \cdots \times B_{s_n} \arrow[d, "\sigma_B"] \\
A_s \arrow[r, "f_s"'] & B_s
\end{tikzcd}$$

A partir de este momento suponemos que se ha escogido una específica signatura ordenada por S, que llamaremos Σ. Denotaremos por $|\cdot|$ al funtor que olvida Alg $\Sigma \to \mathsf{Con}^S$.

Definición 9.5 *Para cada* $X \in \mathsf{Con}^S$ *definimos el objeto* $T_\Sigma X \in \mathsf{Con}^S$ *por inducción de la siguiente manera*

- *si* $x \in X_s$ *entonces* $x \in (T_\Sigma X)_s$
- *si para* $i = 1, \ldots, n$, $\tau_i \in (T_\Sigma X)_{s_i}$ *y* $\sigma : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ *entonces la palabra* $\sigma\tau_1 \ldots \tau_n \in (T_\Sigma X)_s$

Al objeto $T_\Sigma X$ *lo llamamos los* términos *de* X.

Observemos que $T_\Sigma X$ es un álgebra Σ. La estructura se la da el segundo inciso de la anterior definición. Esta álgebra da el adjunto izquierdo del funtor que olvida $|\cdot|$: Alg $\Sigma \to$Con.

Proposición 9.6 *Denotemos por* η *la inclusión* $X \hookrightarrow |T_\Sigma X|$*. El álgebra* $T_\Sigma X$ *tiene la siguiente propiedad universal. Para todo morfismo* $X \xrightarrow{f} |A|$ *en* Con^S *existe un único morfismo* $T_\Sigma X \xrightarrow{\bar{f}} A$ *en* Alg Σ *tal que conmuta*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\eta"'] & {|A|} & A \\
 & {|T_\Sigma X|} \arrow[u, "|\bar{f}|"'] & T_\Sigma X \arrow[u, "\bar{f}"']
\end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos $\bar{f}$ por inducción sobre la complejidad de los términos en X. Para $\sigma :\to s$ y $x \in X$ tenemos

$$\begin{aligned} \bar{f}\sigma &= \sigma_A \\ \bar{f}x &= fx \end{aligned}$$

Si sabemos evaluar $\bar{f}$ en $\tau_1, \ldots, \tau_n$ entonces

$$\bar{f}(\sigma\tau_1 \ldots \tau_n) = \sigma_A(\bar{f}\tau_1, \ldots, \bar{f}\tau_n)$$

La última ecuación dice que $\bar{f}$ es un morfismo en Alg Σ. La unicidad es clara.

*

Al funtor izquierdo de $|\cdot|$ lo denotamos T_Σ.

Observación 9.1.1 *Si A es un álgebra Σ y X es un conjunto multitipo, para cada $\tau \in (T_\Sigma X)_s$ tenemos definida una función*

$$\mathsf{Con}^S(X, |A|) \xrightarrow{\tau_A} A_s$$

dada por $f \mapsto \bar{f}_s\tau$. Estas funciones se definen por inducción y si $A \xrightarrow{h} B$ es un morfismo en Alg Σ *entonces conmuta*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Con}^S(X, |A|) \arrow[r, "\tau_A"] \arrow[d, "\mathsf{Con}^S(X,|h|)"'] & A_s \arrow[d, "h_s"] \\ \mathsf{Con}^S(X, |B|) \arrow[r, "\tau_B"'] & B_s \end{tikzcd}$$

Proposición 9.7 *El funtor* Alg Σ $\xrightarrow{|\cdot|}$ Con^S *crea límites.*

Demostración. Consideremos un diagrama $\mathbf{I} \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{Alg}\,\Sigma$. Supongamos que

$$\{L \xrightarrow{p_I} |\Gamma I|\}_{I \in \mathbf{I}}$$

es un cono límite sobre $|\Gamma|$. Para cualquier $\sigma : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ inducimos σ_L por

$$\begin{tikzcd} L_{s_1} \times \cdots \times L_{s_n} \arrow[r, "\sigma_L"] \arrow[d, "p^I_{s_1} \times \cdots \times p^I_{s_n}"'] & L_s \arrow[d, "p^I_s"] \\ |\Gamma I|_{s_1} \times \cdots \times |\Gamma I|_{s_n} \arrow[r, "\sigma_{\Gamma I}"'] & |\Gamma I|_s \end{tikzcd}$$

Tomadas en conjunto, σ_L le da a L la única estructura de álgebra Σ que hace morfismos a las funciones p_l. Por lo tanto $|\cdot|$ crea límites.

$*$

Proposición 9.8 *Los monos en* Alg Σ *son los morfismos inyectivos en cada tipo.*

Demostración. Como $|\cdot|$ es fiel, refleja monos. Como $|\cdot|$ es adjunto derecho, preserva monos. El resultado se sigue porque los monos en Con^S son los morfismos inyectivos en cada tipo.

$*$

Observación 9.1.2 *En* Alg Σ *una relación de equivalencia según la definición 2.36 es un conjunto multitipo R tal que para toda $s \in S$*

$$R_s \subseteq A_s \times A_s$$

es una relación de equivalencia en Con *y para toda $\sigma : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ en Σ, si $\langle x_i, y_i\rangle \in R_{s_i}$ para $i = 1, \ldots, n$ entonces $\langle \sigma x_1 \cdots x_n, \sigma y_1 \cdots y_n\rangle \in R_s$.*

Proposición 9.9 *La relación* Núc f *es de equivalencia en* Alg Σ *para todo morfismo $A \xrightarrow{f} B$ en dicha categoría.*

Demostración. Basta observar que, por la proposición 9.7, el producto fibrado $\langle r^1, r^2\rangle : R \to A \times A$ de f consigo mismo en cada tipo $s \in S$ es

$$\begin{tikzcd} R_s \arrow[r, "r_s^1"] \arrow[d, "r_s^2"'] & A_s \arrow[d, "f_s"] \\ A_s \arrow[r, "f_s"'] & B_s \end{tikzcd}$$

donde

$$\begin{aligned} R_s &= \{\langle a^1, a^2\rangle \in A_s \times A_s : f_s a^1 = f_s a^2\} \\ r_s^i\langle a^1, a^2\rangle &= a^i \end{aligned}$$

Podemos aplicar la observación 9.1.2 porque f es un morfismo de álgebras.

$*$

Definición 9.10 *Consideremos una relación de equivalencia $R \hookrightarrow A \times A$ en* Alg Σ. *Definimos el álgebra cociente A/R de la siguiente manera*

- *Para cada $s \in S$, $(A/R)_s$ es el conjunto de clases de equivalencia de A_s bajo la relación R_s. Si $x \in A_s$, su clase la denotamos por $[x]$.*
- *Si $\sigma : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ está en Σ y $x_i \in A_{s_i}$ para $i = 1, \ldots, n$ entonces $\sigma_A([x_1], \ldots, [x_n]) = [\sigma_A(x_1, \ldots, x_n)]$, que está bien definida por la observación 9.1.2.*

Al morfismo natural $A \twoheadrightarrow A/R$ lo llamamos el morfismo canónico.

Proposición 9.11 *En* Alg Σ *un morfismo $A \xrightarrow{p} K$ es suprayección si y sólo si es sobre en cada tipo.*

Demostración.
$\Rightarrow$ Supongamos que p no es sobre en cada tipo. Consideremos la relación $R =$Núc p. El morfismo $A/R \xrightarrow{i} K$ definido por $i_s[x] = p_s x$ es mono pero no iso. Si c es el morfismo canónico,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "c"'] & & K \\ & A/R \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, p no es suprayección.
$\Leftarrow$ Supongamos que p es sobre en cada tipo y que tenemos una factorización

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p'"'] & & K \\ & K', \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

donde i es mono. Por la proposición 9.8 para cada tipo s, i_s es mono. Pero la factorización $p_s = i_s p'_s$ en Con implica que i_s es sobre y también iso. Concluimos que en Alg Σ, i es iso y por lo tanto p es suprayección.

∗

Proposición 9.12 *En* Alg Σ *todo morfismo tiene una factorización suprayección-mono.*

Demostración. Si $A \xrightarrow{f} B$ es un morfismo en Alg Σ podemos considerar la factorización

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "c"'] & & B \\ & A/R \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

donde c es el morfismo canónico, $R = \text{Núc } f$ y i está definida por $i_s[x] = f_s x$. Estos morfismos son sobre e inyectivo en cada tipo, respectivamente. Por lo tanto son suprayección y mono respectivamente.

$*$

Proposición 9.13 Alg Σ *tiene coproductos.*

Demostración. Sea $\{A^\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de álgebras Σ. El coproducto está dado por:

$$A^\alpha \xrightarrow{p^\alpha} [T_\Sigma(\coprod_{\alpha\in\Lambda} |A^\alpha|)]/R,$$

donde

- R es la mínima relación de equivalencia tal que para toda $\sigma : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ en Σ, si $\{x_i \in A^\alpha_{s_i}\}_{i=1,\dots,n}$ para alguna $\alpha \in \Lambda$ entonces

$$\sigma_{A^\alpha}(x_1, \dots, x_n)\ (R)\ \sigma x_1, \dots, x_n$$

- para $x \in A^\alpha_s$, $p^\alpha_s x$ es la clase de $x \in |A^\alpha|$ bajo R

$*$

Proposición 9.14 Alg Σ *tiene coigualadores.*

Demostración. Sean $f, g : A \to B$ dos morfismos en Alg Σ y consideremos la mínima relación de equivalencia R de B en Alg Σ tal que si $x_s \in A_s$ entonces $g_s x_s (R) f_s x_s$. Entonces tenemos que el morfismo canónico $B \xrightarrow{c} B/R$ es universal entre los morfismos c' con $c' f = c' g$.

$*$

Corolario 9.15 Alg Σ *tiene colímites.*

Demostración. Esto es consecuencia de las proposiciones 9.13 y 9.14.

$*$

Proposición 9.16 *El funtor* $|\cdot| : \mathrm{Alg}\ \Sigma \to \mathsf{Con}^S$ *crea colímites dirigidos.*

Demostración. Tenemos la situación

$$\mathbf{I} \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{Alg}\ \Sigma \xrightarrow{|\cdot|} \mathsf{Con}^S$$

Como Con^S es cocompleta, $|\Gamma|$ tiene colímite

$$\{|\Gamma I| \xrightarrow{q^I} L\}_{I \in \mathbf{I}}$$

Sea $\sigma : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ en Σ. Como los colímites dirigidos conmutan con los límites finitos en Con, sabemos que

$$\{(\Gamma I)_{s_1} \times \cdots \times (\Gamma I)_{s_n} \xrightarrow{q^I_{s_1} \times \cdots \times q^I_{s_n}} L_{s_1} \times \cdots \times L_{s_n}\}_{I \in \mathbf{I}}$$

es un cocono colímite. Entonces hay una única σ_L tal que para toda I conmuta

$$\begin{tikzcd}
L_{s_1} \times \ldots \times L_{s_n} \arrow[r, "\sigma_L"] & L_s \\
\Gamma I_{s_1} \times \ldots \times \Gamma I_{s_n} \arrow[u, "q_I"] \arrow[r, "\sigma_{\Gamma I}"'] & \Gamma I_s \arrow[u, "q_I"']
\end{tikzcd}$$

o sea tal que para toda $I \in \mathbf{I}$, en $\mathrm{Alg}\ \Sigma$ $\Gamma I \xrightarrow{q_I} L$ es morfismo.

$*$

9.2 Finitamente Presentables en Alg Σ

En esta sección, $\mathcal{A}$ denotará la categoría $\mathrm{Alg}\ \Sigma$ con adjunción $T_\Sigma \dashv |\cdot| : \mathcal{A} \to \mathsf{Con}^S$. Empezamos con tres definiciones.

Definición 9.17 *Un objeto K en una categoría $\mathcal{K}$ es* finitamente generado *si $\mathcal{K}(K, -)$ preserva colímites dirigidos de monos.*

Definición 9.18 *Un objeto A de $\mathcal{A}$* está generado *por un subobjeto* $X \xrightarrow{i} |A|$ *en* Con^S *si la única $\hat{\imath}$ que hace conmutar*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "i"'] & {|T_\Sigma X|} \arrow[d, "|\hat{\imath}|"] & T_\Sigma X \arrow[d, "\hat{\imath}"] \\ & {|A|} & A \end{tikzcd},$$

es una suprayección en $\mathcal{A}$. A X se le dice los generadores *de A.*

Definición 9.19 *Una* presentación *de un objeto A de $\mathcal{A}$ es*

- *un subobjeto* $X \longrightarrow |A|$
- *unas ecuaciones Y en* $T_\Sigma X \times T_\Sigma X$

tales que A es isomorfo al álgebra cociente $(T_\Sigma X)/R$ donde R es la mínima relación de equivalencia generada por Y en $T_\Sigma X$. En este caso decimos que A es presentable *por X y Y.*

Proposición 9.20 *Si un álgebra A de $\mathcal{A}$ es finitamente generada entonces tiene un número finito de generadores.*

Demostración. Consideremos la categoría dirigida $\mathbf{X}$ de los subconjuntos multitipo finitos de $|A|$ ordenados por inclusión. Para cada $X \in \mathbf{X}$ denotamos por i_X a la inclusión $X \hookrightarrow |A|$. La factorización

$$\begin{tikzcd} T_\Sigma X \arrow[rr, "\hat{\imath}_X"] \arrow[dr] & & A \\ & \Gamma X \arrow[ur, "j_X"'] & \end{tikzcd}$$

de $T_\Sigma X \xrightarrow{\hat{\imath}_X} A$ en $\mathcal{A}$ existe por la proposición 9.12. ΓX es la mínima subálgebra de A generada por X y podemos definir un funtor $\mathbf{X} \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{A}$. Como A es finitamente generada, existe $X_0 \in \mathbf{X}$ tal que la identidad 1_A se factoriza

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dr] & & A \\ & \Gamma X_0 \arrow[ur, "j_{X_0}"'] & \end{tikzcd}$$

Esta factorización dice que j_{X_0} es suprayección. Como j_{X_0} es inclusión entonces es mono y en consecuencia iso. Por lo tanto, A es isomorfa a ΓX, que tiene un número finito de generadores.

$*$

Proposición 9.21 *En $\mathcal{A}$, un objeto es finitamente presentable si y sólo si es presentable por un número finito de generadores y un número finito de ecuaciones.*

Demostración.

$\Leftarrow$

Sea $A \in \mathcal{A}$ presentado por un número finito de generadores y relaciones X, Y respectivamente. Si R es la mínima relación de equivalencia en $T_\Sigma X$ que contiene a Y entonces $A \approx (T_\Sigma X)/R$ con una suprayección $T_\Sigma X \xrightarrow{p} A$. Sea $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathcal{A}$ un diagrama dirigido con colímite $\{\Gamma I \xrightarrow{q_I} L\}$. Veremos que

$$\{\mathcal{A}(A, \Gamma I) \xrightarrow{\mathcal{A}(A,q_I)} \mathcal{A}(A, L)\}_{I \in \mathbf{I}}$$

es un colímite. Denotamos

$$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$$
$$Y = \{\tau_1 = \tau_1', \ldots, \tau_m = \tau_m'\}$$

y si $t \in T_\Sigma X$, su clase en A es $[t]$.

- Sea $A \xrightarrow{f} L$ un morfismo. Como $\mathbf{I}$ es dirigida, hay $I \in \mathbf{I}$ tal que $y_i \in \Gamma I$, donde $f[x_i] = q_I y_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Hay una única $T_\Sigma X \xrightarrow{f_1} \Gamma I$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} x_i \arrow[dr, mapsto] & X \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr] & {|T_\Sigma X|} \arrow[d, "|f_1|"] \\ & y_i & {|\Gamma I|} \end{tikzcd}$$

conmuta. Como $q_I f_1 x_i = f p x_i$ para $i = 1, \ldots, n$ entonces $fp = q_I f_1$. Como para toda $i = 1, \ldots, m$, $q_I f_1 \tau_i = q_I f_1 \tau_i'$ entonces hay $J \geq I$

tal que $\Gamma(I,J)f_1\tau_i = \Gamma(I,J)f_1\tau_i'$. Entonces existe un único morfismo $T_\Sigma X/R \xrightarrow{f_2} \Gamma J$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd} T_\Sigma X \arrow[r, "\Gamma(I,J)f_1"] \arrow[d, "p"'] & \Gamma J \\ T_\Sigma X/R \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

Como p es suprayección entonces $q_J f_2 = f$.

- Sean $A \overset{g}{\underset{h}{\rightrightarrows}} \Gamma I$ tales que $q_I g = q_I h$. En particular, $q_I g[x_i] = q_I h[x_i]$ para $i = 1, \ldots, n$. Como $\{q_I\}$ es colímite dirigido, hay $J \geq I$ tal que $\Gamma(I,J)g[x_i] = \Gamma(I,J)h[x_i]$ para $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto, $\Gamma(I,J)g = \Gamma(I,J)h$.

$\Rightarrow$

Por la proposición 9.20, A tiene un número finito de generadores que denotaremos X. Sea $T_\Sigma X \xrightarrow{p} A$ la suprayección canónica. Denotemos por N la congruencia Núc p. Consideremos la categoría dirigida $\mathcal{E}$ de los subconjuntos finitos multitipo de N ordenados por inclusión. Tenemos el diagrama $\Gamma : \mathcal{E} \to \mathcal{V}$ dado por

- $\Gamma E = (T_\Sigma X)/\tilde{E}$ donde $\tilde{E}$ es la mínima congruencia en $T_\Sigma X$ que contiene a E, denotamos por p_E al morfismo canónico.
- si $E_1 \subseteq E_2$, entonces $\Gamma(E_1, E_2)$ es la única suprayección que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} T_\Sigma X \arrow[rr, "p_{E_2}"] \arrow[dr, "p_{E_1}"'] & & \Gamma E_2 \\ & \Gamma E_1 \arrow[ur, dashed, "\Gamma(E_1,E_2)"'] & \end{tikzcd}$$

Como para toda E se da $E \subseteq N$, tenemos la factorización

$$\begin{tikzcd} T_\Sigma X \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p_E"'] & & A \\ & (T_\Sigma X)/\tilde{E} \arrow[ur, dashed, "q_E"'] & \end{tikzcd}$$

El diagrama

$$\{\Gamma E \xrightarrow{q_E} A\}_{E\in\mathcal{E}}$$

es un colímite dirigido. Como A es finitamente presentable entonces hay un $E_0 \in \mathcal{E}$ tal que la identidad 1_A se factoriza

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "1_A"] \arrow[dr, "u"'] & & A \\ & \Gamma E_0 \arrow[ur, "q_{E_0}"'] & \end{tikzcd}$$

ΓE_0 es presentado por un número finito de ecuaciones y generadores. Por "$\Leftarrow$" ΓE_0 es finitamente presentable y entonces

$$\{\mathcal{V}(\Gamma E_0, \Gamma E) \xrightarrow{\mathcal{V}(\Gamma E_0, q_E)} \mathcal{V}(\Gamma E_0, A)\}_{E\in\mathcal{E}}$$

es colímite dirigido. Como q_{E_0} coiguala a 1_{E_0} y uq_{E_0}, entonces hay E_1 tal que

$$\Gamma(E_0, E_1) = \Gamma(E_0, E_1)uq_{E_0}$$

Veamos que q_{E_1} es iso con inversa $\Gamma(E_0, E_1)u$. Sabemos que $q_{E_1}(\Gamma(E_0, E_1)u) = 1_A$. Al revés tenemos

$$\Gamma(E_0, E_1)uq_{E_1}\Gamma(E_0, E_1) = \Gamma(E_0, E_1)$$

Por construcción, $\Gamma(E_0, E_1)$ es suprayección. Concluimos que $\Gamma(E_0, E_1)uq_{E_1} = 1_{\Gamma E_1}$ y que q_{E_1} es iso.

*

9.3 Alg (Σ, E)

Fijemos un conjunto multitipo V (de *variables*) en Con^S tal que para toda $s \in S$, V_s es un conjunto numerable.

Definición 9.22 *Una ecuación es una pareja* (τ_1, τ_2) *en* $T_\Sigma V \times T_\Sigma V$. *Las ecuaciones a veces las denotamos*

$$\tau_1 = \tau_2.$$

Definición 9.23 *Sea A un álgebra Σ. Decimos que A* satisface *la ecuación $\tau_1 = \tau_2$ si para toda $V \xrightarrow{f} |A|$, $\bar{f}$ es la extensión de 9.6, se da la igualdad*

$$\bar{f}\tau_1 = \bar{f}\tau_2$$

Definición 9.24 *Dado un conjunto E de ecuaciones, denotamos por* Alg (Σ, E) *a la subcategoría plena de* Alg Σ *que tiene por objetos las álgebras Σ que satisfacen todas las ecuaciones de E. A las categorías de la forma* Alg (Σ, E), *se les llama* variedades.

Fijemos un conjunto E de ecuaciones en Σ. Denotemos por U al funtor que olvida Alg $(\Sigma, E) \to \mathsf{Con}^S$.

Observación 9.3.1 *Un elemento A de* Alg Σ *está en* Alg (Σ, E) *si y sólo si, para toda $\tau = \tau'$ en E, se da que $\tau_A = \tau'_A$ para las funciones definidas en la observación 9.1.1.*

Proposición 9.25 *U crea límites.*

Demostración. Sea $\Gamma : \mathbf{I} \to$ Alg Σ tal que

$$\{L \xrightarrow{p^I} U\Gamma I\}_{I \in \mathbf{I}}$$

es límite en Con^S. Por 9.6, L tiene estructura de álgebra Σ. Por la observación 9.1.1, para toda $I \in \mathbf{I}$ las funciones multitipo τ_L, τ'_L satisfacen

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Con}^S(V, UL) \arrow[r, shift left, "\tau_L"] \arrow[r, shift right, "\tau'_L"'] \arrow[d, "\mathsf{Con}^S(V, \Gamma I)"'] & L_s \arrow[d, "p^I_s"] \\
\mathsf{Con}^S(V, \Gamma I) \arrow[r, "\tau_{\Gamma I} = \tau'_{\Gamma I}"'] & \Gamma I_s
\end{tikzcd}$$

Por la propiedad universal, $\tau_L = \tau'_L$ y L también es álgebra (Σ, E).

$*$

Proposición 9.26 *U crea colímites dirigidos.*

Demostración. Tenemos la situación

$$\mathrm{I} \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{Alg}\ \Sigma \xrightarrow{U} \mathsf{Con}^S$$

con I dirigida. Supongamos $\{U\Gamma I \xrightarrow{q_I} L\}$ colímite en Con^Ssobre $U\Gamma$. Sabemos que L tiene estructura de álgebra Σ. Si $\tau \in T_\Sigma V$ entonces τ_L se induce por

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Con}^S(V, L_s) \arrow[r, "\tau_L"] & L_s \\ \mathsf{Con}^S(V, (\Gamma I)_s) \arrow[u, "\mathsf{Con}^S(V, q_I)"] \arrow[r, "\tau_{\Gamma I}"'] & (\Gamma I)_s \arrow[u, "q_I"'] \end{tikzcd}$$

*

Corolario 9.27 Alg (Σ, E) *es cerrada bajo productos y subobjetos.*

Demostración. Es consecuencia inmediata de 9.25.

*

Proposición 9.28 Alg (Σ, E) *es cerrada bajo suprayecciones en* Alg Σ

Demostración. Si $\tau = \tau'$ es una ecuación de tipo s, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Con}^S(V, UA) \arrow[r, "\mathsf{Con}^S(V,p)"] \arrow[d, shift right, "\tau_A"'] \arrow[d, shift left, "\tau'_A"] & \mathsf{Con}^S(V, UK) \arrow[d, shift right, "\tau_K"'] \arrow[d, shift left, "\tau'_K"] \\ A_s \arrow[r, "p^s"'] & K_s \end{tikzcd}$$

conmuta secuencialmente. Por la observación 9.1.1 $\tau_A = \tau'_A$. Como p es suprayección, $\mathsf{Con}^S(V, p)$ es sobre y $\tau'_K = \tau_K$. Por lo tanto $K \in$ Alg (Σ, E).

*

Proposición 9.29 Alg (Σ, E) *es cerrada bajo colímites dirigidos en* Alg Σ.

Demostración. Sea $\mathbf{I}$ una categoría dirigida y $\Gamma : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{Alg}\ (\Sigma, E)$ un funtor tal que

$$\{G\Gamma I \xrightarrow[q_I]{} L\}_{I\in\mathbf{I}}$$

es colímite en $\mathbf{Alg}\ \Sigma$. Sea $\tau = \tau'$ una ecuación en E. En τ, τ' sólo aparecen un número finito, digamos n, de variables de tipos $s_1, \ldots, s_n$ (puede haber repeticiones de tipos). Como los límites finitos conmutan con los colímites dirigidos en Con,

$$\{(G\Gamma I)_{s_1} \times \cdots \times (G\Gamma I)_{s_n} \xrightarrow[q^I_{s_1}\times\cdots\times q^I_{s_n}]{} L_{s_1} \times \cdots \times L_{s_n}\}_{I\in\mathbf{I}}$$

es colímite. Pero para toda $I \in \mathbf{I}$ conmuta

$$\begin{tikzcd}
L_{s_1} \times \cdots \times L_{s_n} \arrow[rr, shift left, "\tau_L"] \arrow[rr, shift right, "\tau'_L"'] & & L_s \\
(G\Gamma I)_{s_1} \times \cdots \times (G\Gamma I)_{s_n} \arrow[u, "q^I_{s_1}\times\cdots\times q^I_{s_n}"] \arrow[rr, "\tau_{\Gamma I}=\tau'_{\Gamma I}"'] & & (G\Gamma I)_s \arrow[u, "q^I_s"']
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto $\tau_L = \tau'_L$ y L es álgebra (Σ, E).

*

Notemos que en la proposición anterior hemos abusado de la notación con las τ's.

Proposición 9.30 *La categoría* $\mathbf{Alg}\ (\Sigma, E)$ *tiene factorizaciones suprayección-mono.*

Demostración. La factorización de 9.12 sigue siendo válida por 9.27 y 9.28.

*

Proposición 9.31 *En la categoría* $\mathbf{Alg}\ (\Sigma, E)$ *las suprayecciones son estables bajo producto fibrado.*

Demostración. Sean $B \xrightarrow{q} L$ una suprayección y $K \xrightarrow{g} L$ un morfismo cualquiera. Si $A \xrightarrow{(p,f)} K \times B$ es el producto fibrado de q con g entonces, por la proposición 9.25

$$\begin{tikzcd}
A^s \arrow[r, "f^s"] \arrow[d, "p^s"'] & B^s \arrow[d, "q^s"] \\
K^s \arrow[r, "g^s"'] & L^s
\end{tikzcd}$$

es producto fibrado en Con. Por lo tanto, p es suprayección por las proposiciones 9.11 y 9.28. Esto es, en Alg (Σ, E) las suprayecciones son estables bajo producto fibrado.

*

Proposición 9.32 *En* Alg (Σ, E) *las relaciones de equivalencia son efectivas.*

Demostración. Sea $R \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} A$ una relación de equivalencia en Alg (Σ, E). En Con^S tiene un coigualador $A \xrightarrow{p} K$. Como Con^S es exacta, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "r_2"] \arrow[d, "r_1"'] & A \arrow[d, "q"] \\ A \arrow[r, "q"'] & K \end{tikzcd}$$

es producto fibrado. El funtor que olvida Alg $\Sigma \xrightarrow{|\cdot|}$ Con^S crea coigualadores de relaciones de equivalencia. Entonces $A \xrightarrow{q} K$ es una suprayección en Alg Σ. Por la proposición 9.28, q es suprayección en Alg (Σ, E). Entonces $\langle r_1, r_2 \rangle =$ Núc q en Alg (Σ, E). Por lo tanto las relaciones de equivalencia en Alg (Σ, E) son efectivas.

*

El siguiente lema lo necesitamos para evaluar el adjunto izquierdo del funtor que olvida U : Alg $(\Sigma, E) \to$ Con^S.

Lema 9.33 *$\mathcal{A}$ es una subcategoría plena de $\mathcal{B}$. Si*

- *$\mathcal{B}$ es completa, bien copotenciada y tiene factorizaciones suprayección-mono*
- *$\mathcal{A}$ es cerrada bajo productos y subobjetos,*

entonces $\mathcal{A}$ es suprayección-reflexiva en $\mathcal{B}$.

Demostración. Sea B un objeto de $\mathcal{B}$. El conjunto de clases de isomorfismo de las suprayecciones de dominio B y codominio en $\mathcal{A}$ existe porque $\mathcal{B}$ es bien copotenciada. Consideremos el producto $\prod_q A_q$ con $q : B \longrightarrow A_q$ variando sobre dicho conjunto. Llamemos A a la imagen de la función natural

$$B \xrightarrow{\langle q \rangle} \prod_q A_q$$

con factorización $\langle q \rangle = m \circ p$. Sea $B \xrightarrow{f} A'$ un morfismo cualquiera con $A' \in \mathcal{A}_o$. Sea la factorización suprayección-mono de f, con r en el conjunto de arriba, $m_r \circ r$. Entonces tenemos la situación

$$\begin{tikzcd}
 & & B \arrow[dll, bend right, "p"'] \arrow[dl, "\langle q \rangle"'] \arrow[dr, "r"] \arrow[drr, bend left, "f"] & & \\
A \arrow[r, "m"'] & \prod_q A_q \arrow[rr, "\pi_r"'] & & A_r \arrow[r, "m_r"'] & A'
\end{tikzcd}$$

La unicidad del morfismo $A \longrightarrow A'$ se tiene puesto que p es epi. Por lo tanto q es una flecha universal de B en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ tiene como subcategoría plena y suprayección-reflexiva a $\mathcal{A}$.

*

Proposición 9.34 Alg (Σ, E) *es una subcategoría suprayección-reflexiva de* Alg Σ

Demostración. Hacemos $\mathcal{A} = \mathrm{Alg}\ (\Sigma, E)$ y $\mathcal{B} = \mathrm{Alg}\ \Sigma$ en 9.33

*

A continuación pintamos las categorías y adjunciones con que estamos trabajando. F_1 es el funtor de 9.34. G es el funtor que olvida $\mathrm{Alg}\ (\Sigma, E) \rightarrow \mathrm{Alg}\ \Sigma$. Si definimos $F = F_1 T_\Sigma$ sabemos que $F \dashv U$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}\ (\Sigma, E) \arrow[d, shift left, "G"] \arrow[dd, bend left=60, "U"] \\
\mathrm{Alg}\ \Sigma \arrow[u, shift left, "F_1"] \arrow[d, shift left, "|\cdot|"] \\
\mathrm{Con}^S \arrow[u, shift left, "T_\Sigma"] \arrow[uu, bend left=60, "F"]
\end{tikzcd}$$

Observación 9.3.2 *Una descripción explícita del funtor F. Si $X \in$Con^S, entonces*

$$FX = T_\Sigma X/R$$

Para R la mínima relación de equivalencia en $T_\Sigma X$ que contiene a

$$\tau'_{T_\Sigma X} f(R_s) \tau_{T_\Sigma X} f$$

para toda $\tau = \tau'$ de tipo s en E y $V \xrightarrow{f} |T_\Sigma X|$ en Con^S.

Proposición 9.35 Alg (Σ, E) *es cocompleta.*

Demostración. Sea $\Gamma : \mathbf{I} \to$ Alg (Σ, E) un funtor. Consideremos la composición $G\Gamma$. Sabemos que en Alg Σ este funtor tiene colímite

$$L \xrightarrow{q_I} G\Gamma I$$

para $I \in \mathbf{I}$. Si aplicamos F_1 al cocono, obtenemos otro cocono colímite

$$F_1 L \xrightarrow{Fq_I} F_1 G\Gamma I$$

para $I \in \mathbf{I}$ puesto que F_1 es adjunto derecho. Pero como G es fiel y plena $F_1 G\Gamma I$ es isomorfo a ΓI.

*

Proposición 9.36 *La categoría* Alg (Σ, E) *es exacta.*

Demostración. Esto es consecuencia de las proposiciones 9.25, 9.30, 9.31 y 9.32.

*

Capítulo 10

Nueva Demostración del Teorema de Maltsev

En este capítulo tenemos finalmente todas las herramientas necesarias para demostrar el teorema de Maltsev según [5]. En la primera sección, obtenemos por un lado el importante el primer inciso de la proposición 10.4, y por otro la proposición 10.9. Ésta última, aunada a 10.10, da una equivalencia entre las variedades y las categorías de modelos de una categoría con límites finitos. En la segunda sección, lo fundamental es demostrar los lemas 10.10, 10.15, así como extraer unas consecuencias del primero que son necesarias. Dicha sección concluye con lo que propiamente es el teorema de Maltsev: proposición 10.16.

10.1 Teo $\mathcal{V}$

Definición 10.1 *$\mathcal{V}$ es una variedad de álgebras tipificadas por S. La* teoría *de* $\mathcal{V}$-álgebras *es la categoría dual de todas las $\mathcal{V}$-álgebras libres*

$$F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}$$

para $s_1, \ldots, s_n$ eneadas de tipos en S, vista como subcategoría plena de $\mathcal{V}^{\circ}$. La denotamos Teo $\mathcal{V}$.

Proposición 10.2 *Para una variedad $\mathcal{V}$ de álgebras tipificadas por S, la categoría* Teo $\mathcal{V}$ *es isomorfa a la categoría descrita por:*

Objetos *son las expresiones $s_1 \times \cdots \times s_m$ con $s_i \in S$*

Morfismos *de* $s_1 \times \cdots \times s_m$ *a* $t_1 \times \cdots \times t_n$ *son las eneadas* $\tau_1, \ldots, \tau_n$ *para* τ_i *de tipo* t_i *en* $F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}$.

Composición *de los morfismos*

$$s_1 \times \cdots \times s_m \xrightarrow{(\tau_1,\ldots,\tau_n)} t_1 \times \cdots \times t_n \xrightarrow{(\nu_1,\ldots,\nu_p)} u_1 \times \cdots \times u_p$$

es el morfismo $(\nu_1', \ldots, \nu_p')$ *donde* ν_i' *es* ν_i *con* τ_j *en vez de* $x_j^{s_j}$.

Demostración. La correspondencia biunívoca entre los objetos está dada por

$$s_1 \times \cdots \times s_m \quad \longleftrightarrow \quad F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_m^{s_m}\}.$$

Para biyectar los morfismos, basta con observar que como F es adjunto izquierdo, los morfismos

$$F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_m^{s_m}\} \longrightarrow F\{x_1^{t_1}, \ldots, x_n^{t_n}\}$$

en Teo $\mathcal{V}$ están en correspondencia biunívoca con las funciones S–tipificadas

$$\{x_1^{t_1}, \ldots, x_n^{t_n}\} \longrightarrow F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_m^{s_m}\}.$$

Se respeta la composición de morfismos puesto que si

$$s_1 \times \cdots \times s_m \xrightarrow{(\tau_1,\ldots,\tau_n)} t_1 \times \cdots \times t_n \xrightarrow{(\nu_1,\ldots,\nu_p)} u_1 \times \cdots \times u_p$$

en Teo $\mathcal{V}$

$$F\{x_1^{u_1}, \ldots, x_p^{u_p}\} \to F\{x_1^{t_1}, \ldots, x_n^{t_n}\} \to F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_m^{s_m}\}$$

en $\mathcal{V}$, la imagen de $x_i^{u_i}$ bajo esta última composición es precisamente ν'.

*

Proposición 10.3 Teo $\mathcal{V}$ *tiene productos finitos.*

Demostración. $F\emptyset$ es un objeto terminal. Como F es adjunto derecho, cada objeto $F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}$ es el producto $\prod_{i=1}^{n} F\{x_i\}$. La proyección i–ésima la da el morfismo $F\{x_i^{s_i}\} \to F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}$ generado por $x_i^{s_i} \mapsto [x_i^{s_i}]$

*

Proposición 10.4 *La subcategoría* (Teo $\mathcal{V}$)° *de* $\mathcal{V}$ *cumple las siguientes propiedades*

1. *los objetos de* Teo $\mathcal{V}$ *son proyectivos regulares en* $\mathcal{V}$

2. (Teo $\mathcal{V}$)° *es densa en* $\mathcal{V}$

3. *todos los elementos de* (Teo $\mathcal{V}$)° *son finitamente presentables*

Demostración.

1. Sea $A \xrightarrow{p} K$ una suprayección en $\mathcal{V}$ y sea $FX \xrightarrow{f} K$ un morfismo cualquiera con $X = \{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}$. Por la proposición 9.28 hay $a_i \in A_{s_i}$ para $i = 1, \ldots, n$ tales que $p_{s_i} a_i = f[x_i^{s_i}]$ ($[x_i^{s_i}]$ es la clase de $x_i^{s_i}$ en A. La función multitipo $X \xrightarrow{g} |A|$ que $x_i \mapsto a_i$ se extiende a $FX \xrightarrow{\bar{g}} A$ por la propiedad universal. El diagrama

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "p"] \\ & K \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto $F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}$ es proyectivo regular.

2. Tenemos el cocono canónico $\{FX \xrightarrow{f} A\}$ sobre

$$((\text{Teo } \mathcal{V})^\circ \downarrow A) \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{V}$$

Si $\{FX \xrightarrow{p^f} B\}$ es otro cocono sobre Γ inducimos una función multitipo $|A| \xrightarrow{p} |B|$ de la siguiente manera: si $a \in A_s$ entonces $a_s \mapsto p_s^{\bar{a}}(x)$ para $x \in V_s$ y $\bar{a}$ el morfismo $F\{x\} \xrightarrow{\bar{a}} A$ inducido por $x \mapsto a$. Veamos que para toda $F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\} \xrightarrow{f} A$ el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "p"] & & B \\ & F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\} \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "p^f"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $w \in F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}$ y denotemos $a := f_s w$. Entonces

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ w \end{array} \qquad \begin{tikzcd} F\{x\} \arrow[d] \arrow[dr, "\bar{a}"] & \\ F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\} \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

es morfismo en $(\mathcal{A} \downarrow A)$ y por lo tanto

$$\begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ w \end{array} \qquad \begin{tikzcd} F\{x\} \arrow[d] \arrow[dr, "p^{\bar{a}}"] & \\ F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\} \arrow[r, "p^f"'] & B \end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto

$$p^f w = p^{\bar{a}}[x] = pfw$$

Análogamente, se demuestra que p es morfismo en $\mathcal{V}$ y que es único.

3. Sea $\Gamma : \mathbf{I} \to \mathcal{V}$ un funtor con $\mathbf{I}$ dirigida y colímite en $\mathcal{V}$. Tenemos los isomorfismos

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\mathcal{V}(F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}, \mathrm{colim}\ \Gamma I)}{\mathsf{Con}^S(\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}, U(\mathrm{colim}\ \Gamma I))}}{\mathsf{Con}^S(\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}, \mathrm{colim}\ U\Gamma I)}}{\mathrm{colim}\ \mathsf{Con}^S(\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}, U\Gamma I)}}{\mathrm{colim}\ \mathcal{V}(F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}, \Gamma I)}$$

La segunda equivalencia se tiene por las proposiciones 9.16 y 9.29.

Corolario 10.5 *Toda variedad $\mathcal{V}$ es localmente finitamente presentable.*

Demostración. Esto es consecuencia de las proposiciones 8.6, 9.35 y 10.4.

*

Definición 10.6 *En $\mathcal{V}$ un objeto A es presentado por un conjunto X de generadores y unas relaciones $Y \subseteq T_\Sigma X \times T_\Sigma X$ si A es isomorfa al álgebra $F_1(T_\Sigma X/R)$. Aquí R es la mínima relación de equivalencia en $T_\Sigma X$ que contiene a Y.*

Proposición 10.7 *En $\mathcal{V}$ un objeto está presentado por un conjunto finito de generadores y un conjunto finito de relaciones si y sólo si A es finitamente presentable.*

Demostración. $\Rightarrow$ Sea X un conjunto multitipo finito y $Y \subseteq T_\Sigma X \times T_\Sigma X$ un conjunto finito. Sea $\Gamma : \mathbf{I} \rightarrow \mathcal{V}$ un funtor con $\mathbf{I}$ dirigida y colímite

$$\{\Gamma I \xrightarrow{q'} \text{colim } \Gamma\}_{I \in \mathbf{I}}$$

en $\mathcal{V}$. Tenemos los isomorfismos

$$\begin{array}{c}
\mathcal{V}(F_1(T_\Sigma X/R), \text{colim } \Gamma I) \\ \hline
\textbf{Alg } \Sigma \ (T_\Sigma X/R, G(\text{colim } \Gamma I)) \\ \hline
\textbf{Alg } \Sigma \ (T_\Sigma X/R, \text{colim } G\Gamma I) \\ \hline
\text{colim } \textbf{Alg } \Sigma \ (T_\Sigma X/R, G\Gamma I) \\ \hline
\text{colim } \mathcal{V}(F_1(T_\Sigma X/R), \Gamma I)
\end{array}$$

donde el tercer isomorfismo se tiene por la proposición 9.21.
$\Leftarrow$ Es analóga a 9.21.

$*$

Proposición 10.8 *En $\mathcal{V}$, todo objeto finitamente presentable es el cociente de dos objetos en la imagen de* (Teo $\mathcal{V}$)°.

Demostración. Por la proposición 10.7, A finitamente presentable es presentado por un conjunto multitipo finito X y un conjunto de ecuaciones $\{\tau_i = \tau_i'\}_{i\in I}$ con I finito. Podemos considerar a I como un conjunto multitipo, el tipo de $\tau_i = \tau_i'$ es el tipo de τ_i. Definimos

$$FI \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} FX$$

por

$$i \xrightarrow{r_1} \tau_i$$
$$i \xrightarrow[r_2]{} \tau_i'$$

Veremos que la suprayección $FX \xrightarrow{p} A$ que hace a A cociente de FX es coigualador de r_1 y r_2. Es obvio que $qr_1 = qr_2$. Sea f tal que $fr_1 = fr_2$.

Entonces $f\tau_i = f\tau_i'$ para toda $i \in I$. Como Núc p es la mínima congruencia que contiene $\tau_i = \tau_i'$ para $i \in I$, hay $\bar{f}$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "f"'] & & A \arrow[dl, "\bar{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ es única porque p es suprayección.

$*$

Proposición 10.9 *Toda variedad $\mathcal{V}$ es equivalente a la categoría de funtores* Teo $\mathcal{V} \to$ Con *que preservan productos finitos y transformaciones naturales. Ésta la denotamos* $\mathbf{Cont_{FP}}$ Teo $\mathcal{V}$.

Demostración. $\mathcal{V}$ es localmente finitamente presentable por la proposición 10.5. Entonces, si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{V}$ es la subcategoría plena de los finitamente presentables, $\mathcal{V}$ es equivalente, por la proposición 8.12 a la categoría de modelos $\mathbf{Cont}_\omega\ \mathcal{A}^\circ$. Cada funtor en $\mathbf{Cont}_\omega\ \mathcal{A}^\circ$, al ser restringido a Teo $\mathcal{V}$ da lugar a un funtor en $\mathbf{Cont_{FP}}$ Teo $\mathcal{V}$. Tenemos entonces un funtor

$$\mathbf{Cont}_\omega\ \mathcal{A}^\circ \longrightarrow \mathbf{Cont_{FP}}\ \text{Teo}\ \mathcal{V}$$

Este funtor es fiel y pleno por la proposición 10.8. Veremos que todo modelo H en $\mathbf{Cont_{FP}}$ Teo $\mathcal{V}$ es isomorfo a la restricción de un modelo en $\mathbf{Cont}_\omega\ \mathcal{A}^\circ$. Con eso quedará demostrado que el funtor de arriba es una equivalencia. Supongamos $\mathcal{V} = \text{Alg}\ (\Sigma, E)$. Si $\tau \in (T_\Sigma X)_s$ para X subconjunto multitipo de las variables V, tenemos el morfismo

$$F\{x_1^s\} \xrightarrow{[\tau]} FX$$

en Alg (Σ, E) generado por

$$x_1^s \mapsto [\tau]$$

Así pues, en Teo $\mathcal{V}$ obtenemos un morfismo

$$F\{x_1^{s_1}\} \xleftarrow[{[\tau]}]{} FX$$

Como F es adjunto izquierdo, tenemos en particular, el producto

$$\{F\{x_1^{s_1} \ldots, x_n^{x_n}\} \xrightarrow{[x_i^{s_i}]} F\{x_1^{s_i}\}\}_{i=1,\ldots,n}$$

Como H preserva productos finitos, tenemos

$$HF\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\} \approx \prod_{i=1}^{n} HF\{x_1^{s_i}\}$$

en Con. Definimos el álgebra $A \in \mathrm{Alg}\ (\Sigma, E)$ de la siguiente manera

- $A_s = HF\{x_1^s\}$
- para $\sigma : s_1 \times \cdots \times s_n \to s$ en Σ, σ_A está dada por

$$HF\{x_1^{s_1} \ldots, x_n^{s_n}\} \xrightarrow{H[\sigma(x_1^{s_1},\ldots,x_n^{s_n})]} HF\{x_1^s\}$$

Veamos que para toda $a : \{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\} \to UA$, si $\tau \in T_\Sigma\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}$ entonces

$$H[\tau](a) = \bar{a}_s(\tau)$$

donde $\bar{a} : T_\Sigma\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\} \to GA$ es la de la proposición 9.6. Lo hacemos por inducción sobre la complejidad de τ:

- si $\tau = x_i^{s_i}$ entonces $\bar{a}_s(x_i^{s_i}) = a_i$. Por otro lado, $H[x_i^{s_i}](a) = a_i$ puesto que $[x_i^{s_i}] : F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\} \to F\{x_1^{s_i}\}$ es la i–ésima proyección y H preserva productos finitos
- supongamos $\tau = \sigma(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ para $\sigma : t_1 \times \cdots \times t_m \to t$ y que la regla es válida para $\tau_k \in (T_\Sigma\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\})_{t_k}$, o sea si

  $$\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\}^{a} \longrightarrow |A|$$

  entonces $H[\tau_k](a) = \bar{a}_{t_k}(\tau_k)$. En Teo $\mathcal{V}$ la composición

$$F\{x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}\} \xrightarrow{([\tau_1],\ldots,[\tau_m])} F\{x_1^{t_1}, \ldots, x_m^{t_m}\} \xrightarrow{[\sigma x_1^{t_1} \cdots x_m^{t_m}]} F\{x_1^t\}$$

es $[\sigma(\tau_1, \ldots, \tau_n)]$. Entonces

$$
\begin{aligned}
H[\tau](a) &= H[\sigma(\tau_1, \ldots, \tau_m)](a) && (10.1)\\
&= H[\sigma x_1^{t_1} \cdots x_m^{t_m}]H([\tau_1], \ldots, [\tau_m])(a) && (10.2)\\
&= H[\sigma x_1^{t_1} \cdots x_m^{t_m}](H[\tau_1], \ldots, H[\tau_m])(a) && (10.3)\\
&= \sigma_A(H[\tau_1](a), \ldots, H[\tau_m](a)) && (10.4)\\
&= \sigma_A(\tilde{a}_{t_1}(\tau_1), \ldots, \tilde{a}_{t_m}(\tau_m)) && (10.5)\\
&= \tilde{a}_t(\sigma(\tau_1, \ldots, \tau_m)) && (10.6)\\
&= \tilde{a}_t(\tau) && (10.7)
\end{aligned}
$$

donde

- (3.3) es la hipotésis sobre H
- (3.4) se da por definición de σ_A
- (3.5) es la hipotésis de inducción
- (3.6) se da porque $\tilde{a}$ es morfismo de álgebras

Hemos construido el álgebra $A \in \text{Alg}\ (\Sigma, E)$. Para todo $s \in S$ tenemos

$$\mathcal{V}(F\{x_1^s\}, A) \approx A_s = HF\{x_1^s\}$$

Como H y $\mathcal{V}(-, A)$ preservan productos finitos, y todo objeto de Teo $\mathcal{V}$ es producto finito de objetos de la forma $F\{x_1^s\}$, obtenemos

$$\mathcal{V}(i(-), A) \approx H$$

donde i es la inclusión de Teo $\mathcal{V}$ en $\mathcal{V}^\circ$. Entonces $\mathbf{Cont}_\omega\ \mathcal{A}^\circ$ es equivalente a $\mathbf{Cont}_{\mathbf{FP}}$ Teo $\mathcal{V}$ y por lo tanto

$$\mathcal{V} \approx \mathbf{Cont}_{\mathbf{FP}}\ \text{Teo}\ \mathcal{V}$$

*

10.2 Teorema de Maltsev

El regreso de la proposición 10.9 es el lema 10.10. De éste necesitamos dos consecuencias que enunciamos en las dos proposiciones que le siguen.

Lema 10.10 *Sea* **C** *una categoría con productos finitos. La categoría de modelos* $\mathbf{Cont_{FP}}$ **C** *es isomorfa a una variedad* Alg (Σ, E).

Demostración. El conjunto de tipos S son los objetos de **C**.
La signatura Σ consta de

- los morfismos de **C**
- para cada producto finito $\{L \xrightarrow{p_i} C_i\}_{i=1,\dots,n}$ en **C** un símbolo

$$\tilde{L} : C_1 \times \cdots \times C_n \to L$$

El conjunto de ecuaciones E consta de

- para cada objeto de $C \in \mathbf{C}$ y para cada variable x de tipo C la ecuación

$$1_C x = x$$

- para cada composición

$$C \xrightarrow{f} D \xrightarrow{g} B$$

  en **C**, si $h = gf$ y x es una variable de tipo C, la ecuación

$$gfx = hx$$

- para cada producto $\{L \xrightarrow{p_i} C_i\}_{i=1,\dots,n}$ y cada variable x de tipo L, la ecuación

$$\tilde{L}(p_1 x, \dots, p_n x) = x$$

- para cada producto $\{L \xrightarrow{p_i} C_i\}_{i=1,\dots,n}$ y cada eneada de variables $x_1, \dots, x_n$ de tipos $C_1, \dots, C_n$ respectivamente, las ecuaciones

$$p_i \tilde{L} x_1, \dots, x_n = x_i$$

  para $i = 1, \dots, n$.

Hay dos asignaciones obvias $\mathbf{Cont_{FP}}$ **C** $\longrightarrow$ **Alg** (Σ, E) y **Alg** $(\Sigma, E) \longrightarrow$ $\mathbf{Cont_{FP}}$ **C**. Las ecuaciones aseguran que ambas están definidas. Que son inversas una de la otra es obvio.

*

Proposición 10.11 *Misma situación del lema 10.10. Para toda $C \in \mathbf{C}$, el modelo $\mathbf{C}(C, -)$ es proyectivo regular en $\mathbf{Cont_{FP}}\ \mathbf{C}$.*

Demostración. Denotamos por $\mathbf{I}$ al isomorfismo $\mathbf{Cont_{FP}}\ \mathbf{C} \to \mathbf{Alg}\ (\Sigma, E)$ y por $F \dashv U$ a la adjunción entre $\mathbf{Alg}\ (\Sigma, E)$ y $\mathsf{Con}^{\mathsf{Ob}(\mathbf{C})}$. En diagramas

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Cont_{FP}}\ \mathbf{C} \arrow[r, "\mathbf{I}"] \arrow[d, "\text{inclusión}"'] & \mathbf{Alg}\ (\Sigma, E) \arrow[d, shift left, "U"] \\ \mathsf{Con}^{\mathbf{C}} & \mathsf{Con}^{\mathsf{Ob}(\mathbf{C})} \arrow[u, shift left, "F"] \end{tikzcd}$$

Sea $C \in \mathbf{C}$. Consideramos la imagen de $\mathbf{I}(\mathbf{C}(C, -))$ en $\mathbf{Alg}\ (\Sigma, E)$. Son equivalentes

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\mathbf{I}(\mathbf{C}(C, -)) \to A}{\mathbf{C}(C, -) \to \mathbf{I}^{-1}A}}{a \in A_C}}{\{x_1^C\} \to UA}}{F\{x_1^C\} \to A}.$$

La segunda equivalencia es por definición de $\mathbf{I}$. La tercera equivalencia es por propiedades de funciones multitipo en $\mathsf{Con}^{\mathsf{Ob}(\mathbf{C})}$. Las otras equivalencias son claras. Concluimos que $\mathbf{I}(\mathbf{C}(C, -))$ y $F\{x_1^C\}$ son isomorfos en $\mathbf{Alg}\ (\Sigma, E)$. Pero por la proposición 10.4 $F\{x_1^C\}$, es proyectivo regular en $\mathbf{Alg}\ (\Sigma, E)$. Por lo tanto $\mathbf{C}(C, -)$ es proyectivo regular en $\mathbf{Cont_{FP}}\ \mathbf{C}$.

*

Proposición 10.12 *Misma situación del lema 10.10. Denotemos por Y a la inclusión de Yoneda $\mathbf{C}^\circ \to \mathsf{Con}^{\mathbf{C}}$. La subcategoría plena $Y(\mathbf{C}^\circ) \subseteq \mathsf{Con}^{\mathbf{C}}$ es cerrada bajo sumas finitas.*

Demostración. Si C_1, C_2 son objetos de $\mathbf{C}$, se tienen las equivalencias

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\mathbf{C}(C_1, -) \coprod \mathbf{C}(C_2, -) \to M}{\mathbf{C}(C_1, -) \to M \text{ y } \mathbf{C}(C_2, -) \to M}}{\langle x_1, x_2 \rangle \in MC_1 \times MC_2}}{x \in M(C_1 \times C_2)}}{\mathbf{C}(C_1 \times C_2, -) \to M}$$

Por lo tanto $\mathbf{C}(C_1,-)\coprod\mathbf{C}(C_2,-)$ y $\mathbf{C}(C_1\times C_2,-)$ son isomorfos y $Y(\mathbf{C}^{\circ})$ es cerrada bajo sumas finitas.

*

Las dos proposiciones que siguen apuntan a la demostración del lema 10.15. Si X es un objeto en una categoría $\mathcal{A}$ con sumas finitas, consideramos el diagrama conmutativo

$$(\ddagger)\qquad \begin{tikzcd} X+X+X \arrow[r, "\delta+1"] \arrow[d, "1+\delta"'] & X+X \arrow[d, "\delta"] \\ X+X \arrow[r, "\delta"'] & X \end{tikzcd}$$

Proposición 10.13 *El diagrama* $(\ddagger)$ *es un coproducto fibrado.*

Demostración. Sean f_1, f_2, g_1, g_2 morfismos tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X+X+X \arrow[r, "\delta+1"] \arrow[d, "1+\delta"'] & X+X \arrow[d, "g_1+g_2"] \\ X+X \arrow[r, "f_1+f_2"'] & Z \end{tikzcd}$$

Si antecedemos dicho diagrama por cada una de las tres inclusiones $X \xrightarrow{i} X+X+X$ obtenemos

$$f_1=g_1=f_2=g_2$$

Por lo tanto el único morfismo $X \xrightarrow{f} Z$ tal que

$$\begin{aligned} f\delta &= f_1+f_2 \\ f\delta &= g_1+g_2 \end{aligned}$$

es f_1 y $(\ddagger)$ es coproducto fibrado.

*

Proposición 10.14 *Si $\mathcal{A}$ es una categoría exacta de Maltsev, entonces el morfismo $X+X+X \xrightarrow{\langle\delta+1,1+\delta\rangle} (X+X)\times(X+X)$ satisface*

$$\Delta \leq \langle\delta+1,1+\delta\rangle$$

Concluimos que su imagen es una relación reflexiva y en consecuencia una relación de equivalencia.

Demostración. Consideremos la inclusiones i_1, i_2, i_3 de X en $X+X+X$. Los siguientes dos diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} X+X \arrow[rr, "i_1+i_3"] \arrow[dr, "1"'] & & X+X+X \arrow[dl, "\delta+1"] \\ & X+X & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X+X \arrow[rr, "i_1+i_3"] \arrow[dr, "1"'] & & X+X+X \arrow[dl, "1+\delta"] \\ & X+X & \end{tikzcd}$$

Entonces conmuta

$$\begin{tikzcd} X+X \arrow[rr, "i_1+i_3"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & X+X+X \arrow[dl, "\langle\delta+1,1+\delta\rangle"] \\ & (X+X)\times(X+X) & \end{tikzcd}$$

o sea, $\Delta \leq \langle\delta+1, 1+\delta\rangle$. Las otras afirmaciones se siguen de que $\mathcal{A}$ es Maltsev y de la proposición 3.9.

*

Lema 10.15 *Sea $\mathcal{A}$ una categoría exacta con sumas finitas. Sea $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{A}$ una subcategoría plena cerrada bajo sumas finitas, cuyos objetos sean proyectivos regulares. Si $\mathcal{A}$ es una categoría de Maltsev entonces para todo objeto $X \in \mathcal{P}$ el diagrama (‡) es un producto fibrado débil en $\mathcal{P}$.*

Demostración. Sea $W \in \mathcal{P}$ y dos morfismos $W \overset{w_1}{\underset{w_2}{\rightrightarrows}} X+X$ tales que

$$\delta w_1 \;=\; \delta w_2$$

Supongamos que la factorización de $\langle\delta+1, 1+\delta\rangle$ es

$$X+X+X \xrightarrow{p} I \xrightarrow{\langle m_1, m_2\rangle} (X+X)\times(X+X)$$

Por la proposición 10.13, δ es el coigualador de m_1, m_2. Por la proposición 10.14, $\langle m_1, m_2\rangle$ es relación de equivalencia, y como $\mathcal{A}$ es exacta, el cuadrado

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "m_2"'] & X+X \arrow[d, "\delta"] \\ X+X \arrow[r, "\delta"'] & X \end{tikzcd}$$

es un producto fibrado. Entonces hay un único morfismo $W \xrightarrow{w} I$ tal que

$$\begin{aligned} m_1 w &= w_1 \\ m_2 w &= w_2 \end{aligned}$$

Como W es proyectivo regular, $W \xrightarrow{w} I$ se factoriza a través de la suprayección $X + X + X \xrightarrow{p} I$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "w'"] \arrow[dr, "w"'] & X + X + X \arrow[d, "p"] \\ & I \end{tikzcd}$$

Se sigue

$$\begin{aligned} (\delta + 1)w' &= w_1 \\ (1 + \delta)w' &= w_2 \end{aligned}$$

y (‡) es un producto fibrado débil.

*

El teorema que viene a continuación, es el de Maltsev.

Teorema 10.16 *Sea $\mathcal{T}$ una categoría con productos finitos. La categoría* $\mathbf{Cont_{FP}}\ \mathcal{T}$ *es exacta y tiene sumas finitas. Además,* $\mathbf{Cont_{FP}}\ \mathcal{T}$ *es de Maltsev si y sólo si para todo objeto $W \in \mathcal{T}$ su diagrama*

$$(\dagger) \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & W \times W \arrow[d, "1\times\Delta"] \\ W \times W \arrow[r, "\Delta\times 1"'] & W \times W \times W \end{tikzcd}$$

es un coproducto fibrado débil en $\mathcal{T}$.

Demostración. $\mathbf{Cont_{FP}}\ \mathcal{T}$ es exacta y tiene sumas finitas por las proposiciones 9.36, 9.35 y 10.10. Esto lo usaremos para la primera parte de la equivalencia:
$\Rightarrow$
Consideramos la inclusión de Yoneda $Y : \mathcal{T}^\circ \to \mathbf{Cont_{FP}}\ \mathcal{T}$. Le aplicaremos el lema 10.15 a la subcategoría plena $Y(\mathcal{T}^\circ) \subseteq \mathcal{A}$. Esto lo podemos hacer porque

- por la proposición 10.11, todos los elementos de $Y(\mathcal{T}^\circ)$ son proyectivos regulares
- por la proposición 10.12, $Y(\mathcal{T}^\circ)$ está cerrada bajo sumas finitas

Por el lema 10.15, concluimos que para toda $X \in Y(\mathcal{T}^\circ)$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X+X+X \arrow[r, "\delta+1"] \arrow[d, "1+\delta"'] & X+X \arrow[d, "\delta"] \\
X+X \arrow[r, "\delta"'] & X
\end{tikzcd}$$

es un producto fibrado débil en $Y(\mathcal{T}^\circ)$. El resultado se sigue, puesto $Y(\mathcal{T}^\circ)$ y $\mathcal{T}$ son categorías duales.
$\Leftarrow$
Sea $M \in \mathbf{Cont_{FP}}\,\mathcal{T}$ un modelo. Sea $E \xrightarrow{\langle e_1, e_2\rangle} M \times M$ una relación reflexiva en $\mathbf{Cont_{FP}}\,\mathcal{T}$:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & E \arrow[dl, "\langle e_1, e_2\rangle"] \\
& M \times M &
\end{tikzcd}$$

Por la proposición 3.9, basta con definir puntualmente una transformación natural $E \longrightarrow E$ que muestre a E como una relación simétrica. Sea $X \in \mathcal{T}$. Por hipotésis, el diagrama (†) es un coproducto fibrado débil. Como $\pi_2\Delta = \pi_1\Delta$, la propiedad universal débil de dicho diagrama dice que hay un morfismo $X \times X \times X \xrightarrow{m_X} X$ tal que conmuta

$$\begin{tikzcd}
X \times X \arrow[r, "\Delta\times 1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & X \times X \times X \arrow[d, "m_X"] & X \times X \arrow[l, "1\times\Delta"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Consideremos la subcategoría plena $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}$ que tiene por objetos a las potencias finitas de X

$$X^0, X^1, X^2, \ldots, X^n, \ldots$$

Esta categoría es una teoría de Lawvere (definición 3.13). Si restringimos M, j, etc. a $\mathcal{T}_X$, obtenemos una relación reflexiva $\mathfrak{E} \xrightarrow{\langle e_1, e_2 \rangle} \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{M} \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathfrak{E} \arrow[dl, "\langle e_1, e_2 \rangle"] \\ & \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} & \end{tikzcd}$$

en Mod $(\mathcal{T}_X, \mathsf{Con})$, donde $\mathfrak{M}, \mathrm{j}$, etc. son las restricciones $M_{|\mathcal{T}_X}, j_{|\mathcal{T}_X}$, etc. Como en $\mathcal{T}_X$, $X^3 \xrightarrow{m_X} X$ es una operación de Maltsev (definición 3.16), concluimos por la proposición 3.18, que $\mathfrak{E} \xrightarrow{\langle e_1, e_2 \rangle} \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ es una relación simétrica:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{E} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\langle e_2, e_1 \rangle"'] & & \mathfrak{E} \arrow[dl, "\langle e_1, e_2 \rangle"] \\ & \mathfrak{M} \times \mathfrak{M} & \end{tikzcd}$$

En conclusión: para cada X hay un morfismo $EX \xrightarrow{i_X} EX$ tal que

$$\begin{tikzcd} EX \arrow[rr, "i_X"] \arrow[dr, "\langle e_2, e_1 \rangle_X"'] & & EX \arrow[dl, "\langle e_1, e_2 \rangle_X"] \\ & MX \times MX & \end{tikzcd}$$

conmuta. Esta asignación está bien definida porque

$$\langle e_1, e_2 \rangle_X \text{ mono} \Rightarrow i_X \text{ única}$$

Consideremos ahora un morfismo cualquiera $X \xrightarrow{f} Y$ en $\mathcal{T}$. En el diagrama

$$\begin{tikzcd} & & MX \times MX \arrow[dd, "Mf \times Mf"] \\ EX \arrow[r, "i_X"] \arrow[d, "Ef"'] \arrow[urr, bend left, "\langle e_2, e_1 \rangle_X"] & EX \arrow[d, "Ef"] \arrow[ur, "\langle e_1, e_2 \rangle_X"'] & \\ EY \arrow[r, "i_Y"'] \arrow[rr, bend right, "\langle e_2, e_1 \rangle_Y"'] & EY \arrow[r, "\langle e_1, e_2 \rangle_Y"] & MY \times MY \end{tikzcd}$$

los triángulos conmutan por definición de i, y los trapezoides conmutan porque $\langle e_1, e_2\rangle, \langle e_2, e_1\rangle$ son transformaciones naturales. Como $\langle e_1, e_2\rangle_Y$ es mono, tenemos $Ef \circ i_X = i_Y \circ Ef$ y se sigue que $E \xrightarrow{i} E$ es una transformación natural. Por lo tanto, E es una relación simétrica. $\mathbf{Cont_{FP}}\, \mathcal{T}$ es una categoría de Maltsev, por la proposición 3.9.

*

127

Bibliografía

[1] J. Adamek, J. Rosicky: Locally presentable and accessible categories, *London Mathematical Society Lecture Note Series* **189** Cambridge University Press, (1994).

[2] M. Barr, P.A. Grillet, D.H. van Osdol: Exact categories and categories of sheaves, *Lecture Notes in Mathematics* **236**, Springer, Berlin (1971).

[3] A. Carboni, E. Vitale: Regular and Exact Completions, *J. Pure and Appl. Algebra* **125** (1998), 79-117.

[4] A. Carboni, G.M. Kelly, M.C. Pedicchio: Some Remarks on Maltsev and Goursat Categories, *Applied Categorical Structures* 1 (1993), 385-421.

[5] A. Carboni, M.C. Pedicchio: A New Proof of the Mal'cev Theorem, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* Serie II, Suppl. 64 (2000), 13-16.

[6] J. Dugundji: Topology. Boston: Allyn and Bacon (1966).

[7] J. Lambek: Lectures on Rings and Modules, Blaisdell Publishing Company (1966).

[8] Mac Lane, Saunders: Categories for the Working Mathematician, *Graduate Texts in Mathematics* 5 Springer-Verlag (1971).

[9] MacKinnon, Dan: Various Constructions and Universal Properties of the Simplicial Category, Tesis de maestría, Universidad de Dalhousie (1996).

[10] M.C. Pedicchio: Algebraic Theories, *Textos de Matemática* Série B, No. 21, Departemento de Matemática da Universidade de Coimbra, Portugal (1999).

[11] J. van Oosten: Basic Category Theory, *BRICS Lecture Series* http://www.brics.aau.dk/BRICS/ (1995).