

00386

2



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO
INSTITUTO DE ASTRONOMÍA

**ESTRUCTURA ORBITAL Y
MAGNETOHIDRODINÁMICA
DE UN POTENCIAL
GALÁCTICO
CON BRAZOS ESPIRALES
Y BARRA**

EJEMPLAR UNICO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE
DOCTOR EN CIENCIAS (ASTRONOMÍA)

P R E S E N T A

BÁRBARA SELÉN/PICHARDO SILVA

DIRECTORES DE TESIS: DR. MARCO MARTOS NÚÑEZ
DR. EDMUNDO MORENO DÍAZ

A

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN





Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN DISCONTINUA

A mis Queridos Padres

Agradecimientos

Creí que sería fácil escribir los agradecimientos, pero tenía tantas cosas que decir que mi poca habilidad literaria se vió severamente sobrepasada. En la búsqueda de una palabra que lo dijera todo invertí mucho tiempo y finalmente encontré que la única posible por simple y honesta es ¡ gracias!.

A todas las personas que directa o indirectamente han tenido que ver en mi desarrollo como persona y como estudiante les doy las gracias y me disculpo si omito por descuido algún nombre, se que esas personas sabrán que están de alguna manera incluidas aquí.

A mis muy queridos directores de tesis y guías en el fascinante mundo de la Ciencia!, el Dr. Marco Martos y el Dr. Edmundo Moreno. Gracias por que me dieron, al aceptarme como su estudiante, la invaluable oportunidad de disfrutar mi trabajo al punto de no sentir pasar las horas en frente de un libro o de la computadora y de desear siempre más, al punto de poder decir que fue la mejor época de mi vida entera como estudiante. Gracias!

A los Doctores Luis Aguilar, Christine Allen, Jesús González, Marco Martos, Edmundo Moreno, Margarita Rosado y Linda Sparke por aceptar leer este trabajo y por sus importantes y acertados comentarios. Aunque no quedaron en la lista final de sinodales deseo agradecer también a los Doctores Isaac Shlosman, José Franco, J. Antonio García Barreto, y Elías Brinks, por aceptar leer la tesis.

Al Instituto de Astronomía por hacernos sentir, durante nuestro paso como sus estudiantes, que tenemos derecho a todo y que somos capaces de todo. Gracias por las facilidades (dinero, viajes, impresion de tesis, etc) y los privilegios que nos otorgan.

A la UNAM en general y a la DGEP en particular por la beca de doctorado y al indispensable proyecto CONACYT (36566-E).

A la Dra. Silvia Torres, porque a pesar de insistir tanto en que la "vida es dura",

AGRADECIMIENTOS

ella siempre intenta facilitarnosla. Gracias por aquella beca que seguramente ya no recordará pero que me fue de gran ayuda.

Al Dr. Enrique Vázquez por todo lo que me enseñó, aún estoy recogiendo frutos de lo que aprendí y se que así será por mucho tiempo.

A mi muy querido Master Edmundo, porque más allá de limitarse a lo académico en lo que es un verdadero y sólido Maestro (aunque no le guste escucharlo), me dió clases de calidad humana y sencillez. Te quiero un chorro Maese mío!

A Marquito lindo, por hacerme sentir siempre segura de que estaría conmigo hasta el final del mundo, por ser un excelente asesor dispuesto siempre a todo por sus estudiantes, por su mentalidad jovial y llena todo el tiempo de ideas nuevas. Gracias Marquito querido, me diste más de lo que crees.

A mis amados padres, Felipe Pichardo y Rosario Silva, por producirme desde muy pequeña esta sensación de intenso agradecimiento y porque se que no importa cuanto haga, nunca terminaré de pagar todo lo que les debo. Porque se muy bien que me amarían igual si hubiese decidido ser política o repostera, y porque su idea de apoyo rebasa todas las fronteras que entiendo. Gracias por permitirme ver su amor que llegó tan lejos y que tiro todo lo que se le puso en frente. Gracias mamacita linda por ser mi ejemplo (aunque nunca llegaré a tener un corazón tan bueno como el tuyo). Papacito, aunque todos dicen que somos igualitos, yo creo que tu alegría de vivir es inigualable, gracias por lo que de eso me heredaste!

A mis queridos hermanos Carlos, Daniel, Ricardo y Phillips porque aunque me cueste trabajo lograr que se dejen dar un beso, se que me adoran y que no podrían vivir sin mi y mis sabios consejos (¿es cierto no?). A mis "cuñaas", Irma por ser linda y darme mucha comida, a Tere por ser linda (espero que un día también me de mucha comida) y Blanca (por los años buenos).

A mis 7 preciosos, Dany, Dany, Karla Selén (mi tocallita!), Geos, Jair (mi ahijadito!), Evayed y Brayan (así se escribe he) por dulces y empalagosos!

A Gabi U.P., porque eres la mujer más valiente que conozco prima querida. A mi primo Gustavo U.P., por mantenerme sana todo el doctorado (¿de verdad es peligroso ingerir mercurio?).

A mi tía Martha S.O. (D.E.P.), porque ahora estaría conmigo si no tuviera cosas tan importantes que hacer.

A Antonio P.T., por todo el cariño que eres capaz de dar y que nadie podría imaginarse. Por tu corazón profundamente generoso y adorable. Gracias por las discusiones científicas y matemáticas con las que aprendí mucho aunque creas que nunca te escuchaba, cada cosa que has dicho la tengo grabada en la mente. Eres una de las mentes más claras que conozco y además eres precioso!

A mis entrañables, gracias por las sonrisas, pláticas, comidas, eventos, ciencia y diversión: Lorenzo, Maru, Bertha V. (por se tan cálida amiga), Wilder, Luis L. (extraño nuestras pláticas), Javier, Pao, Vale, Julia, Gilgo, Lorena, Selene, Paty (como disfruté comerme mis 6 tortas diarias con ustedes!), Iqui (¿terminaremos el ...¿ Tremaine algún día?), Eva, Mago, Leonid, Anabel, Vladimir, Alfredo Santillán (mi REY!), gracias por prestarme tu cuenta en Berenice y por estar siempre dispuesto a ayudarme), a Miguel A. Y. (por ser un buen concubículo y porque vas a tener que leer mi tesis, je je je) a , Eduardo (el pequeño), Ericka, Valeria, René, y a Ivanio (gracias por las discusiones de brazos espirales).

A Gerardito V., por todo lo que vivimos y que se quedará siempre en mi.

A Jorge E.M.S, mi mejor amigo desde la infancia y hasta el fin de mis días. Gracias Jorgito por estar siempre para mí.

A Otavito por tu enorme fuerza que te ha llevado a salir de cualquier percance sin degradar en absoluto la hermosura de tu alma. Y gracias por las intensas discusiones de dinámica y cosmología.

A Chucho G. por tu calidez, por tu amistad y por lo fácil que es quererte.

A mi amibita Sandra por tu hiperactividad que me hace sentir un diplodocus, por tu intenso concepto de la palabra "amigo", por tu lealtad a prueba de balas, por tu amor a México en lo que "casi" me equiparas, y por ser interesante y divertida. Te quiero mucho amiga.

A Lety C. por sus consejos, porque se que me quiere y yo la quiero también.

A Ricardo F.G.D., gracias Dr. por las mil y una pláticas en las que me divertí tanto, porque es tan fácil platicar contigo y estar de acuerdo (excepto en cosas de medio interestelar) y gracias porque se que seremos amigos hasta que otro cometa nos acabe.

A Héctor M.V., por que la eterna distancia no afectó en nada nuestra amistad, por enseñarme sobre barras y por estar ahí siempre.

A Alfredo F.B., porque pasaste de ser un buen compañero de oficina, a ser mi amigo,

AGRADECIMIENTOS

por saber escuchar y saber compartir y por íntegro.

Al todo el personal del Instituto de Astronomía porque siempre me dieron sonrisas aunque yo sólo les daba molestias. Especialmente a Gloria (gracias por tu paciencia!), Eloisa (si yo tuviera tu voz, todo lo diría cantando) y Vero. A la señora Lupita (por su dulcísima sonrisa) y la Señora Maru por su gentileza, a la Sra. Rafa, al Sr. Juanito por esos taquitos tan buenos de los domingos. A todo el personal de cómputo, Gil, Liliana, Carmelo y Alf.

αββα τα

Índice General

Agradecimientos	iii
1 Resumen	1
1.1 Overview in English	5
1.1.1 Introduction	5
1.1.2 The Spiral Arms	7
1.1.3 The Bar	13
1.1.4 One Dimensional HD and MHD Analysis of Gas with a Realistic Stellar Potential of the Galaxy	20
1.1.5 Conclusions	23
I CONCEPTOS INTRODUCTORIOS	29
2 Introducción General	31
2.1 La Vía Láctea	31
2.2 El Modelaje Dinámico de Estrellas y de Gas en la Vía Láctea	33
2.3 Objetivos Generales y Organización de la Tesis	39
II LA DINAMICA ESTELAR	41
3 Los Brazos Espirales	43
3.1 Introducción	43
3.2 Los Brazos Espirales de la Vía Láctea	48

3.2.1	El Lugar Geométrico de los Brazos Espirales en el Plano del Disco Galáctico	49
3.2.2	Número de Brazos	51
3.2.3	Angulo de enrollamiento ("Pitch Angle") de los Brazos Espirales	52
3.2.4	Altura de los Brazos en la Dirección Perpendicular al Plano Galáctico y Anchura	54
3.2.5	Límite externo de los Brazos	55
3.2.6	Fuerza Radial y Masa de los Brazos	56
3.2.7	Ley de Densidad a lo largo del Brazo Espiral y Contraste de Densidad Superficial Observado	56
3.2.8	Velocidad Angular Ω_p del Patrón Espiral	57
3.3	Construcción Analítica de un Modelo Tridimensional para los Brazos Espirales con Esferoides Oblatos Inhomogéneos. Potencial y Fuerzas	58
3.3.1	Potencial y Fuerza para Esferoides Oblatos Homogéneos e Inhomogéneos	61
3.3.2	La Superposición: Potencial y Fuerza de los Brazos Espirales Formados por Esferoides Oblatos Inhomogéneos	68
3.3.3	La Densidad de los Brazos Espirales	76
3.4	Los Métodos Empleados en la Tesis para el Estudio Dinámico Estelar	89
3.4.1	Diagramas de Poincaré	92
3.4.2	Orbitas Periódicas (Soporte Orbital)	96
3.4.3	Análisis de Regiones Ordenadas y Caóticas con Exponentes de Lyapunov	103
3.5	Resultados de los Estudios Dinámico Estelares del Modelo con Brazos Espirales. Artículo: <i>Nonlinear Effects in Models of the Galaxy: I. Mid-plane Stellar Orbits In the Presence of Three-Dimensional Spiral Arms</i>	105
3.5.1	<i>Introduction</i>	107
3.5.2	<i>The Model</i>	111
3.5.3	<i>Self-Consistency Analysis</i>	117
3.5.4	<i>A Comparison with the TWA</i>	122
3.5.5	<i>Orbital Analysis</i>	124
3.5.6	<i>Discussion and Conclusions</i>	137

3.6	Otros Resultados	141
4	La Barra	161
4.1	Introducción	161
4.2	La Barra de la Vía Láctea	166
4.2.1	Orientación de la Barra Respecto a la Línea de Visión	166
4.2.2	Longitud de la Barra	168
4.2.3	Razones Axiales	168
4.2.4	Ley de Densidad y Longitudes de Escala	169
4.2.5	La Masa	171
4.2.6	Velocidad Angular Ω_P del Patrón	171
4.3	Modelos de la Barra Galáctica. Construcción Analítica	173
4.3.1	Modelo Elipsoidal de la Barra Galáctica	174
4.3.2	Modelo Prolato de la Barra Galáctica	182
4.3.3	Modelo de Superposición de Elipsoides de la Barra Galáctica	194
4.4	Estudios Dinámico Estelares en el Plano Galáctico	199
4.4.1	Diagramas de Poincaré y Orbitas en el Espacio de Configuración	200
III	EL GAS	227
5	Análisis Unidimensional HD y MHD del Gas en un Potencial Estelar Realista de la Galaxia	229
5.1	Introducción	229
5.2	Estudio del Gas en la Vecindad Local	230
6	Conclusiones	255
6.1	Trabajo en Proceso y a Futuro	260
IV	APENDICES	263
A	El Potencial Axisimétrico	265

B Los Métodos de Integración y las Técnicas	269
B.1 El Método de Bulirsh-Stoer para la Integración de Orbitas	269
B.2 El Método de Runge-Kutta de Orden 7mo-8vo para la Integración de Orbitas	272
B.3 El Método de Newton-Raphson para la Construcción de Orbitas Periódicas	272
B.4 Los Códigos Computacionales	276
B.4.1 El Código de los Brazos Espirales	276
B.4.2 Los Códigos de la Barra	277
B.4.3 El Código para las Orbitas Periódicas	278
C El Código Magnetohidrodinámico Zeus	281
Bibliografía	285

Capítulo 1

Resumen

Con el propósito de estudiar la respuesta estelar y gaseosa no lineal al potencial gravitacional de galaxias similares a la Vía Láctea, hemos construido un modelo tridimensional del potencial debido a los brazos espirales y la barra central de nuestra Galaxia. El potencial Galáctico total que empleamos en este trabajo incluye además, al potencial axisimétrico con halo, disco y bulbo del modelo de Allen & Santillán (1991). Aunque el propósito de este trabajo es modelar el potencial de los brazos espirales y de la barra en nuestra Galaxia, este modelo puede aplicarse a otras galaxias espirales y/o barradas similares.

Las componentes no axisimétricas (brazos espirales y barra) son modeladas con conjuntos de elipsoides y esferoides que intentan reproducir sus estructuras tridimensionales. Los brazos espirales se modelan como una superposición de esferoides oblatos inhomogéneos, colocados en un lugar geométrico ("*locus*") espiral dado. Las características geométricas del *locus* (como el ángulo de enrollamiento, límite interno y externo) se ajustan de diferentes conjuntos de datos que incluyen observaciones en la banda K del infrarrojo (asociado a la población estelar vieja) y en el óptico (asociado al gas y población estelar joven). Para la barra Galáctica, por otra parte, se proponen tres modelos diferentes que emplean la ley de densidad observada en esta componente. El primero de estos modelos es un elipsoide inhomogéneo, el segundo es un esferoide prolato inhomogéneo y el tercero consiste de una superposición de elipsoides inhomogéneos; en este último se modela la forma de caja de las superficies de densidad constante observada en la barra Galáctica.

Se sabe actualmente que los brazos y la barra de la Galaxia giran con velocidades angulares muy diferentes; dado que el potencial propuesto es un potencial estacionario, requiere necesariamente un "rompimiento" de la estructura total brazos-barra para girar a distintas velocidades. Hemos entonces iniciado nuestro estudio con cálculos orbitales en el plano Galáctico (donde en general las estructuras como barras y brazos perturban notablemente) y magnetohidrodinámicos en una dimensión, separando el potencial de brazos y barra, esto es, simulando inicialmente a la Galaxia como una espiral sin barra, de manera que los primeros resultados son válidos para cualquier galaxia espiral normal, similar a la Vía Láctea. Hemos también hecho análisis orbitales preliminares para la barra Galáctica que no incluyen brazos espirales; sin embargo, estos análisis se realizaron en la región de la barra o muy cerca de ésta, de manera tal que los brazos (cuya masa se estima del orden del 15% de la de la barra) fueron inicialmente removidos. En un último y muy cualitativo experimento, se incluyeron ambas componentes girando a la velocidad angular de los brazos espirales.

Para el modelo de la Galaxia que incluye los brazos espirales se obtuvieron los siguientes resultados. Se realizó una comparación del modelo presentado en este trabajo con una aproximación de brazos muy cerrados (TWA, *tight winding approximation*) que representa el tratamiento clásico utilizado generalmente en simulaciones con brazos espirales, la cual nos permitió observar detalles físicos que son inaccesibles con el tratamiento clásico, y mostró diferencias importantes tanto en la dinámica orbital como gaseosa en regiones medias y externas de la Galaxia. La aproximación TWA funciona como una aproximación local en el sentido de que no considera la autogravedad total del sistema al suponer que los mínimos de potencial se localizan exactamente en los centros geométricos de los brazos espirales. Hemos encontrado que la forma de las fuerzas y el potencial es muy diferente cuando se considera el potencial global de los brazos espirales con un modelo no idealizado. Esto incide por ejemplo, en la dinámica gaseosa, en la que se observan diferencias considerables en la posición y duración de los choques del gas con los brazos espirales. Esto es, con la aproximación clásica se obtiene un choque estacionario en la parte cóncava externa de los brazos espirales (dentro de corotación), el cual necesita un ajuste muy fino de los parámetros para efectuarse. De esta forma, si la velocidad de entrada del fluido es ligeramente mayor que la velocidad crítica para un choque estacionario, el choque deja el brazo espiral en la dirección de la

corriente (“*downstream*”). Por otro lado, con las simulaciones realizadas en este trabajo con el código *Zeus*, se muestra que para un intervalo plausible de velocidades de entrada del gas al brazo y en correspondencia a las expectativas observacionales y teóricas, los choques viajan en contra de la dirección de la corriente (“*upstream*”) hacia el lado cóncavo interno al brazo espiral en toda la región adentro de corotación. Esta región es marcada en observaciones por la acumulación de polvo en la parte interna de los brazos espirales. La inclusión del campo magnético es fundamental para este efecto.

Orbitalmente hemos reproducido los resultados del modelo clásico para brazos con muy baja masa; sin embargo, para la masa mayor que hemos considerado para los brazos espirales (dentro del intervalo plausible para la Galaxia), las diferencias se acentúan. El modelo clásico varía sólo muy ligeramente sus resultados respecto a los brazos menos masivos, presentando poco o nada de caos, a diferencia del modelo menos idealizado. Un análisis preliminar de autoconsistencia para el patrón espiral favorece una velocidad angular de aproximadamente $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

Se presenta el análisis estándar en el sistema de referencia que gira con los brazos espirales y se complementa con información orbital en el sistema inercial Galáctico. De esta forma se encuentra que las órbitas prógradas están definidas en este sistema inercial sin ambigüedad en el sentido de rotación, a diferencia de las órbitas prógradas definidas en el sistema no inercial, en el que una misma órbita puede pasar de un sentido prógrado, respecto al movimiento de los brazos espirales, a uno retrógrado. El procedimiento consiste entonces en etiquetar las órbitas prógradas y retrógradas en el sistema inercial sobre los diagramas en el espacio fase construidos en el sistema no inercial. De esta forma se encuentra una clara separatriz entre las dos clases de órbitas en el sistema inercial. El caos se encuentra restringido siempre a las órbitas prógradas y surge para las perturbaciones espirales más altas plausibles para la Galaxia.

Para la barra Galáctica el modelo que mejor ajusta las observaciones de la Galaxia es el modelo de superposición de elipsoides inhomogéneos, que reproduce tanto la ley de densidad en la barra como las isofotas de caja (“*boxy*”, cuyo modelaje representa un problema muy complicado). De esta forma, con superposiciones como la realizada para la barra Galáctica, se puede reproducir fácilmente el potencial de una distribución de este tipo para barras en general.

Entre los resultados para los modelos de la Galaxia con barra se encuentran los

siguientes. Se realizaron experimentos con los tres modelos de la barra Galáctica, incluyendo el potencial axisimétrico con un bulbo parcial, otra serie de experimentos removiendo el bulbo, una más con la barra únicamente y una última con el potencial de brazos incluido. Encontramos que la separatriz, que para el caso de los brazos era extremadamente fina, es ahora mucho más ancha, esto es, la región en los diagramas de Poincaré que contiene órbitas prógradas-retrógradas en el sistema inercial aumenta, disminuyendo a su vez la región de orbitas prógradas y la de retrógradas. El caos en la mayoría de los casos es inducido por la componente central de bulbo y a diferencia de los brazos, inicia en casi todos los casos en las órbitas prógradas-retrógradas que componen la separatriz. Pasando la barrera de corotación, el caos inicia nuevamente en las órbitas prógradas. De la misma forma que para el potencial de brazos, no se encuentra caos en ningún caso en la región retrógrada.

Hemos construido un modelo tridimensional que ajusta los parámetros más importantes de la parte no axisimétrica del potencial general Galáctico que puede ser utilizado tanto en dinámica orbital como en magnetohidrodinámica. Este modelo, superpuesto a un potencial axisimétrico, nos proporciona un modelo tridimensional de la distribución Galáctica de masa que incluye todas las componentes conocidas.

1.1 Overview in English

In this overview, the thesis is presented in English in a more compact version than the original Spanish manuscript. This version stresses the main concepts and ideas. The contents are presented in the same order in which they appear in the original version.

1.1.1 Introduction

The lack of any obvious explanation for the “mysterious” observable luminous band across the sky, especially prominent in Summer nights, made ancient people to incorporate it as part of their rich mythology. For the Incas this band was dust of stars, a path of snow for the Eskimos, and for the Greeks, a way of Milk spilled out by Hera after a painful bite of the little Hercules.

It was only after Galileo Galilei Sidereus nuncios aimed his telescope at that band in the sky, that we learned it was made out of millions of individual stars, those in our Galaxy, the Milky Way, and it was only eighty years ago that we finally discovered the concept of *Galaxy*.

Our position in the Galaxy imposes formidable observational and theoretical obstacles to the task of building a realistic and complete picture of our own Galaxy, which is therefore often harder than that of analyzing distant galaxies with a convenient orientation with respect to the observer. What we learn from other galaxies however, complements what we know about our own.

Once it was confirmed that we belong to a galaxy just like many others in the skies, a natural step to follow was to determine its morphological type among the various cosmical structures classified in the Universe. In 1958, Oort, Kerr and Westerhout made a giant step forward, finding that the available data set at the time was consistent with the existence of spiral arms in our Galaxy. Strong evidence of non-circular motions in the Galactic center direction were also found (Shane 1971). That sort of kinematics is what one expects from motion induced by a strongly non axisymmetric potential (Peters 1975). Since at least half of all disc galaxies have bars, it was reasonable to conclude that the Milky Way was a barred galaxy.

It is clear that the use of axisymmetric gravitational potentials to model the Galaxy is in many instances a good approximation. Depending on the aim of the study, it can

also be a gross over-simplification.

Several codes have been developed which follow the time-dependent dynamics of galaxies using different approaches, such as N-body, SPH, hydro and magnetohydrodynamics. We use in this work a steady model for the mass distribution of the Galaxy, whose non-axisymmetric components we propose. Although it is known that the potential of the Galaxy is time-dependent, its changes occur over times, and we assume that it is steady in the system of reference that moves with the non-axisymmetric structures (bar or spiral arms). Since the knowledge about the precise parameters of the Galaxy will improve with the new data bases that are being produced by the SLOAN survey (USA) and the GAIA astrometry satellite (European Community), among others, our steady type models can be quite useful, as they contain a number of adjustable parameters representing observable quantities.

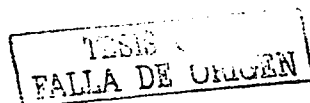
General Goals and Organization of the Thesis

With the aim of studying the stellar and gaseous response to the general potential of the Milky Way, we have built a three dimensional model for the non-axisymmetric gravitational potential due to the spiral arms and the bar, including an axisymmetric, basic component, with a dark spherical halo, a bulge and a disc (Allen & Santillán 1991). Although the model was fitted to model the Galaxy, it can be applied with appropriate parameters to other spiral galaxies.

The usual spiral modeling employed in galactic and gaseous simulations, due to its simplicity, is that of Lin & Shu (1964). This potential is originally two-dimensional. In this work, rather than using a simplified model for the spiral arms, we have constructed a three-dimensional model that, although it is far from being as simple as the model of Lin and Shu, has inherent advantages which will be shown in the course of this work.

We have also built three models for the Galactic bar. As for the model for the spiral arms, these models can be applied to other galaxies. Since our expectation is that the dynamics of stars in the midplane of the Galaxy will be more sensitive than that of stars above it in response to the non-axisymmetric structures, our work begins with a study of stellar dynamics in the plane of the disk; however, the model and codes were developed in 3 dimensions and will (or are currently) be extended to that realm.

This thesis has been divided in 6 chapters and three appendixes. Chapter 2 is



the general introduction. Chapter 3 presents the model of the spiral arms and the results in the form of a paper that has appeared in *The Astrophysical Journal*. The paper is attached there in its published version. In Chapter 4 we present our models for the Galactic bar and some results. In Chapter 5 we give the results of some 1D MHD experiments. Finally, Appendixes A, B, C give the axisymmetric potential, the description of the algorithms employed for the stellar dynamical evolution and a brief description of the code Zeus used for our experiments simulating the gas response to our potential.

1.1.2 The Spiral Arms

Introduction

Once the existence of the spiral arms in our Galaxy was accepted, the next step was to build a first global picture of them: their location and extent, the number of arms, and what they are made of. Unfortunately, the spiral arm structure of the Galaxy is much less obvious to us than in other spiral galaxies, because the Solar system is approximately located in the Galactic plane and apparently on the edge of one of the spiral arms (Orion-Cygnus arm). In 1976, Geogelin & Geogelin introduced the first global picture of the spiral arms in our Galaxy based upon observations of HII regions as the most luminous tracers of the arms in the optical band.

Despite the rapid improvement in observational efforts over the last decades, there is still an open debate about the main parameters of the spiral arms, including the number of them. This is mainly due to the fact that the number of arms depends on the wavelength of the observations. However, in the last few years, the data set seems to be converging to yield a simple picture. Two spiral arms seem to fit the observations in the K-band (which traces mainly the old stellar population), and four arms consistently appear in optical observations (showing young stars produced by the gas response to the K-band arms).

The Spiral Arms in the Galaxy

In this section we introduce all the observational parameters for the spiral arms in our Galaxy that are used in our construction of the model.

* *The Spiral Locus.* Georgelin & Georgelin (1976) and later Caswell & Haynes (1987) built the first picture of the Galactic spiral arms. A good fit to that pattern is given by a logarithmic spiral *locus*. For this work we have adopted the analytic *locus* form given by Roberts, Huntley and van Albada (1979), which represents a bar across the Galactic center, and spiral arms that emerge from the bar tips and form a logarithmic spiral at large distances.

* *Number of spiral Arms.* The spiral structure obtained in the K-band suggests that a double-armed structure dominates the non-axisymmetric emission (Drimmel & Spergel 2001). On the other hand, optical observations (HII regions) are better fit with four spiral arms. Since there is evidence of a complex pattern, we have considered two possibilities for the number of spiral arms: the first one with the two K-band spiral arms, and the second with multiple spiral arms including those of the K-band and the four optical arms.

* *Pitch Angle.* We have adopted two different pitch angles. The first corresponds to that obtained from the K-band observations (Drimmel 2000), $i_p = 15.5^\circ$. The second corresponds to optical observations, $i_p = 12^\circ$ (Vallée 2002).

* *Height and Width of The Arms.* Since there are no direct measures of the height and width of the spiral arms in our Galaxy, we assume that the Milky Way has a common spiral pattern and take the estimates of Kennicutt & Hodge (1982) of the width (up to 1.5 kpc without extracting the disk) of the arms from a sample of 17 galaxies.

For the height of the arms (vertical scale) we have taken a constant value $z_{br} = 0.5$ kpc. This value is an intermediate between the scale heights of the so-called stellar thick and thin disks in the Galaxy (Pardi, Ferrini, Matteucci 1995).

* *Outer Limit of The Arms.* We have chosen for this particular parameter the value suggested by observations, that gives $R_f \sim 12$ kpc (Amaral & Lépine 1997; Drimmel 2000).

* *Radial Force and Mass.* Patsis, Contopoulos & Grosbøl (1991) constructed self-consistent models of spiral galaxies, based upon a statistical sample of twelve normal spiral galaxies of Sa, Sb and Sc types. They found a correlation between the pitch angle of the spiral arms and the ratio of radial forces generated by the spiral arms as

compared to that from the axisymmetric background. In their plot, our Galaxy falls into the domain of Sb galaxies, with pitch angles in the range between 11° and 16° . If we assume that the corresponding radial force ratio is in the average range 4% and 10%, this would imply a ratio of the mass in spiral arms (M_B) to the disk mass (M_D , see Appendix A) of $M_B/M_D = 0.0175, 0.05$ for our model.

* *Density Law Along The Spiral Arms.* We have taken two different density laws for the spiral arms along their symmetry axis. The first is a linear fall in the centers of the oblate spheroids that form the arms, introduced for its simplicity. And the second is an exponential fall, more appropriate since it is known that disk's luminosity falls exponentially with galactocentric distance.

* *Angular Velocity Ω_P .* Lin & Shu (1964, 1966) found a value $\Omega_P = 13.5 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Amaral & Lépine (1997) found self-consistent models with angular velocities in the range $15\text{-}26 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, the best fit with $\Omega_P = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. On the other hand, N-body models suggest that Ω_P could be as large as that of the bar ($\sim \Omega_P = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$). Thus we consider a range of pattern speeds in our model.

Analytical Construction of a Three-Dimensional Model for the Spiral Arms with Inhomogeneous Oblate Spheroids

One of the reasons to use Lin & Shu approximation is its analytical simplicity. Unfortunately there are no simple functions known for the potential and forces of an inhomogeneous, three-dimensional mass distribution in a spiral form.

Thus, taking advantage of known results in potential theory for spheroids, we have constructed a spiral arm as a superposition of oblate spheroids.

The arm is modeled as a series of individual inhomogeneous oblate spheroids set down along the spiral *locus* in a similar way to beads in a necklace (see Figure 3.6), but with freedom to overlap to represent a distribution that is sufficiently smooth, or one that is flocculent if the distance between among spheroids increases.

The procedure to obtain the potential and forces of an inhomogeneous oblate spheroid starting from the theory of homogeneous oblate spheroids is given by Schmidt (1956), and is described briefly in Section 3.3.1. Equations (3.4), (3.5) and (3.6), give the potential and forces (in cylindrical coordinates) of an homogeneous oblate spheroid

roid. Figure 3.4 shows an homogeneous oblate spheroid and the employed cylindrical coordinates.

The basic idea of Schmidt consists in representing the inhomogeneous spheroids as a superposition of homogeneous oblate spheroids in a self-similar form. In Figure 3.5 we show the superposition of homogeneous components.

To obtain the potential and forces of an inhomogeneous spheroid we integrate over each infinitesimally thin homogeneous component which produces a radially-varying density law. With this procedure we obtain in equations (3.7), (3.10), (3.11) and (3.12), the potential and forces for points inside the inhomogeneous spheroid, and equations (3.8), (3.14), (3.15), (3.16), for points outside the inhomogeneous spheroid. We have considered a linear density law, equation (3.3), in the inhomogeneous spheroids as a first approximation, due to its easy implementation. Introducing this linear density law, the forces and potential for an inhomogeneous oblate spheroid are given in equations (3.8), (3.17), (3.18), (3.19). The mass of the oblate spheroid is given by the relation (3.21).

The Superposition: Potential and Force of The Inhomogeneous Oblate Spheroids

In Figure 3.6 we present a scheme of the superposition in the Galaxy model. Once we know the potential and force for one "brick" of the spiral building, we place these bricks along a given *locus* and locate them using cylindrical coordinates. Equations of the spiral *locus* are (3.24) and (3.25).

Figure 3.8, shows the position of an arbitrary point \mathbf{r}' with respect to the centers of the spheroids. With this we obtain equations ?? and ?? that give the cylindrical radial coordinate of the point \mathbf{r}' with respect to the spheroid n , in the arms R_1 and R_2 . In this way, the cylindrical coordinates (R''_{1n}, z') , (R''_{2n}, z') are employed to obtain the contributions of the n th spheroids in the spiral arms R_1 and R_2 , to the total potential and force at the point \mathbf{r}' .

Finally, with this procedure and equations (3.19), (3.17) and (3.18) we obtain the total potential and force at the position \mathbf{r}' due to the spiral arms; this is given by equations (3.31) and (3.32).

Density of the Spiral Arms

In order to mimic a density fall in the spiral arms along their symmetry axis, we decreased the central density of spheroids along the arms. We tried three different laws. The first one considers the same mass in all the spheroids; this case was implemented only to highlight the simplicity of the procedure. The second was a linear fall in the central density of each spheroid (along the spiral arm), introduced to compare results with the third law, which is a more appropriate exponential fall. The final results presented in this Thesis were computed with the exponential fall in the central density of spheroids along the spiral arms (see Figure 3.49). In Figure 3.9 we present iso-density contours of the three transversal cuts of the spiral arms. The potential and force with the exponential fall in the central density of spheroids are presented in equations (3.50) and (3.51).

Methods Employed in this Thesis for Dynamical Studies

We introduce, in Section 3.4, the equations of motion that are solved by the orbital dynamical codes, and the reference systems: an inertial system and a non-inertial system which follows to the rotating spiral pattern. We also introduce here Jacobi's integral of motion, which is our control parameter to measure numerical errors in the integration of orbits in the rotating frame.

In Section 3.4.1 we describe the standard procedure to obtain Poincaré diagrams with the additional explanation of the form in which we label each orbit according to its sense of motion in the inertial system. In every Poincaré diagram, we find that prograde and retrograde orbits defined in this way are sharply separated into disjoint regions. However, we must take the Poincaré diagrams in the rotating frame, where the only known integral of motion is identified as Jacobi's energy.

In Section 3.4.2 the procedure to obtain periodic orbits is explained. For this purpose we have used the two-dimensional Newton-Raphson method to find the roots of the error equations (3.54) and (3.55). Since periodic orbits pass over their same steps after a complete cycle around the Galactic center, find them minimizing the differences in position and velocity between the starting point of the launched orbit and its value after a full cycle. If the orbit is periodic, these errors will be close to zero.

Finally, in Section 3.4.3 we include the definition of the Lyapunov first exponent -equation 3.57- employed to test for chaotic behavior in some orbits.

In order to mimic a density fall in the spiral arms along their symmetry axis, we decreased the central density of spheroids along the arms. We tried three different laws. The first one considers the same mass in all the spheroids; this case was implemented only to highlight the simplicity of the procedure. The second was a linear fall in the central density of each spheroid (along the spiral arm), introduced to compare results with the third law, which is a more appropriate exponential fall. The final results presented in this Thesis were computed with the exponential fall in the central density of spheroids along the spiral arms (see Figure 3.49). In Figure 3.9 we present iso-density contours of the three transversal cuts of the spiral arms. The potential and force with the exponential fall in the central density of spheroids are presented in equations (3.50) and (3.51).

Methods Employed in this Thesis for Dynamical Studies

We introduce, in Section 3.4, the equations of motion that are solved by the orbital dynamical codes, and the reference systems: an inertial system and a non-inertial system which follows to the rotating spiral pattern. We also introduce here Jacobi's integral of motion, which is our control parameter to measure numerical errors in the integration of orbits in the rotating frame.

In Section 3.4.1 we describe the standard procedure to obtain Poincaré diagrams with the additional explanation of the form in which we label each orbit according to its sense of motion in the inertial system. In every Poincaré diagram, we find that prograde and retrograde orbits defined in this way are sharply separated into disjoint regions. However, we must take the Poincaré diagrams in the rotating frame, where the only known integral of motion is identified as Jacobi's energy.

In Section 3.4.2 the procedure to obtain periodic orbits is explained. For this purpose we have used the two-dimensional Newton-Raphson method to find the roots of the error equations (3.54) and (3.55). Since periodic orbits pass over their same steps after a complete cycle around the Galactic center, find them minimizing the differences in position and velocity between the starting point of the launched orbit and its value after a full cycle. If the orbit is periodic, these errors will be close to zero.

Finally, in Section 3.4.3 we include the definition of the Lyapunov first exponent -equation 3.57- employed to test for chaotic behavior in some orbits.

Results of Dynamical Studies with the Model of the Spiral Arms

The main results of our study of the spiral arms studies are presented in the form of an English written paper, published in ApJ 2003, 582, 230-245, and whose abstract is presented in this overview for completeness.

Abstract

With the aim of studying the nonlinear stellar and gaseous response to the gravitational potential of a galaxy such as the Milky Way, we have modeled three-dimensional Galactic spiral arms as a superposition of inhomogeneous oblate spheroids and added their contribution to an axisymmetric model of the Galactic mass distribution. Three spiral loci are proposed here, based in different sets of observations. A comparison of our model with a tight-winding approximation shows important differences in the middle and outer Galactic regions. A preliminary self-consistency analysis taking $\Omega_p = 15$ and $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ for the angular speed of the spiral pattern seems to favor the value $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. As a first step to the full three-dimensional calculations for which the model is suitable, we have explored the stellar orbital structure in the midplane of the Galaxy. We present the standard analysis in the pattern rotating frame, and complement this analysis with orbital information from the Galactic inertial frame. Prograde and retrograde orbits are defined unambiguously in the inertial frame, then labeled as such in the Poincaré diagrams of the noninertial frame. In this manner, we found a sharp separatrix between the two classes of orbits. Chaos is restricted to the prograde orbits, and its onset occurs for the higher spiral perturbation considered plausible in our Galaxy. An unrealistically high spiral perturbation tends to destroy the separatrix and make chaos pervasive. This might be relevant in other spiral galaxies.

Other Results

In this section we present briefly some results that are not mentioned or thoroughly explained in the paper.

In a qualitative comparison between results obtained with the standard model of spiral arms (Lin & Shu 1964) and our three-dimensional model, Poincaré diagrams look very similar for the lowest plausible masses for the spiral arms in the Galaxy ($M_S/M_D \sim 0.02$). For a low-mass example, see Figures 3.45 of the standard approximation and 3.46

for our model. The larger the mass in spiral arms, the richer orbital structure becomes in our model compared with the standard model in all cases). For the maximum plausible mass of the spiral arms in the Galaxy ($M_S/M_D \sim 0.05$), chaos appears in extended regions of the diagrams, as opposed to what happens in the standard model, which hardly gives rise to chaos. For a high-mass example, see Figures 3.47 of the standard approximation and Figure 3.48 for our model.

Orbital behavior does not seem to depend strongly on how the density falls along the arms, as can be seen in Figure 3.50 for the linear fall and Figure 3.51 for the exponential fall.

In Figure 3.55, we present results for the same orbital family, but with different pitch angles for the spiral arms and with an exaggerated mass ($M_S/M_D \sim 0.1$), in order to appreciate better the nonlinear effects. An increase in the pitch angle produces an increase in the area of chaotic regions. This result is consistent with the empirical relation found by Patsis, Contopoulos & Grosbøl (1991). In Figure 15 of their paper they show a correlation between radial force of the spiral arms (relative to the axisymmetric potential) vs. pitch angle for a representative sample of Sa, Sb and Sc galaxies. In this manner, they show that an increase in pitch angle increases the relative radial force (which in our model would correspond to more mass in the spiral arms, and more stochastic motion in consequence).

Finally, in Figure 3.56 we show some examples of orbits in real space in the non-inertial reference frame (upper left figure of each panel) and in the inertial frame (upper right figure of each panel), and the azimuthal velocity in the non-inertial frame. The azimuthal velocity shows how in some cases, the orbital motion measured in the rotating frame can change its sense, switching between prograde and retrograde motion. In the inertial frame, in general, an orbit conserves its sense of motion. For this reason, a definition of prograde or retrograde motion is more convenient in the inertial reference frame.

1.1.3 The Bar

Analyses of kinematic 21-cm maps of neutral hydrogen (HI) in the Galactic center direction, at a longitude $l = 0^\circ$, show the existence of motions in the line of sight with

velocities of more than $\pm 200 \text{ km s}^{-1}$ (Fig. 9.33 of Binney & Merrifield). This is an evidence that there is a non-axisymmetric structure producing these strong deviations of circular motion in the gas. On the other hand, stellar distribution studies have also concluded the existence of a Galactic bar (Harmon & Gilmore 1988; Nakada et al. 1991; Weinberg 1992). Using infrared observations of Matsumoto et al. (1982), Blitz & Spergel (1991) find evidence of a Galactic bar. More recently, Weiland et al. (1994) with the COBE/DIRBE $2.2 \mu\text{m}$ maps, revealed a distinctive bar structure that seems to point towards the first quadrant of the Galaxy. Freudenreich (1998), with models based in the COBE/DIRBE NIR maps, finds clear evidence of the Galactic bar and fits a density law to observations. Microlens theory has also been applied by Zhao (1996) and Stanek et al. (1997), who find a bar in the Galactic center direction.

Based on all this evidence that confirms the existence of a bar in the Milky Way, and in the dynamical importance of a structure like this, we have also included a model of the Galactic bar in this work.

The Bar in the Milky Way

In this section we introduce the general Galactic observational parameters.

* *Orientation of the Bar with respect of the Line of Sight.* From stellar counts ($10^\circ > |b| > 2^\circ$, $|l| < 15^\circ$) in the K-band, values for the angle between the long axis of the bar major and our line of sight to the Galactic center (this angle is called "position angle"), are obtained between $\varphi_{\text{bar}} = 12 \pm 6^\circ$ (López-Corredoira et al. 2000) and $20 - 30^\circ$ (Nikolaev & Weinberg 1997; Stanek et al. 1997). The models of Bissantz and Gerhard (2002), with COBE/DIRBE data in the L band, give the range $\varphi_{\text{bar}} = 20^\circ - 25^\circ$. Models of gas and orbital dynamics (Binney et al. 1991), give $15^\circ \leq \varphi_{\text{bar}} \leq 35^\circ$. Microlens theory favors $\varphi_{\text{bar}} \sim 15^\circ$ (Zhao & Mao 1996).

In summary, $\varphi_{\text{bar}} \sim 20^\circ$ can be considered a good approximation for the orientation of the Galactic bar (Gerhard 2002). Although this specific parameter is not employed in our models, it is important since it determines observationally the size of the bar.

A schematic diagram of the bar in the Galaxy is shown in Figure 4.2.

* *Bar Length.* For a position angle of $\varphi_{\text{bar}} \approx 20^\circ$, models based on the COBE/DIRBE NIR maps find a value for the semi-major axis of the bar in the range $R_f = 3.1 - 3.5 \text{ kpc}$ (Freudenreich 1998; Binney, Gerhard & Spergel 1997; Bissantz & Gerhard 2002). This

is in agreement with observations of OH/IR stars (Sevenster 1999) and IRAS variables (Nikolaev & Weinberg 1997).

* *Axial Ratios.* Parametric models from COBE/DIRBE data give nearly prolate models, with axial ratios of approximately 10:3-4:3 (which represents the proportion among the semiaxis a, b, c respectively). This is consistent with the non-parametric models of Bissantz & Gerhard (2002). Binney, Gerhard & Spergel (1997) find ratios of 10:6:4. Stellar counts give 10:4:3 (Stanek et al. 1997) and 10:5.4:3.3 (López-Corredoira et al. 2000), with the bar slightly flattened towards the equatorial plane.

In this work we have adopted the axial ratios of the observational fit obtained by Freudenreich (1998). These axial ratios are 10:3.8:2.6, which are in the range obtained by other authors.

* *Density Law and Scale-lengths.* In the specific case of the Galaxy, Freudenreich (1998) has obtained a good fit for the density in the bar, considering three plausible density laws (presented in Section 4.2.4), including an exponential law. The best fit is obtained with a density law of the form, $\rho \propto \text{sech}^2(R_s)$, where R_s is given by the relation (4.1), and taking a cut at R_{end} , where a Gaussian factor with a scalelength h_B (Figure 4.3) is added to smooth the density fall. In this manner the density law is described by equations 4.2 and 4.3.

* *Mass.* The mass of the bar is probably the most difficult parameter to determine, and the one with greatest uncertainty.

Dwek et al. (1995), using the mass at the turn-off point in the main sequence, and from photometric observations of the HST combined with luminosity function determined in the Baade window, obtain a mass for the Galactic bulge-bar $M_{BAR} \approx 1.3 \times 10^{10} M_{\odot}$. Matsumoto et al. (1982) and Kent (1992), with a model of the Galactic bulge as an oblate spheroid, obtain $M_{BAR} \approx 1 \times 10^{10} M_{\odot}$.

In a recent work, Weiner & Sellwood (1999) present a hydrodynamical model with a Ferrers bar that reproduces the Galactic $l-v$ diagrams. They find in their best model a bar mass $M_{BAR} \approx 9.8 \times 10^9 M_{\odot}$ and also determine a bulge mass of approximately $5.4 \times 10^9 M_{\odot}$ (within 1 kpc radius).

* *Pattern Angular Velocity, Ω_P .* The angular velocity, or equivalently the corotation radius, is the most important dynamical parameter of the bar. Although different pieces

of work give very different values for this parameter, in the last decade the plausible velocity range has been reduced to $40 \leq \Omega_p \leq 70 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ (Binney et al. 1991; Fux 1999; Englmaier & Gerhard 1999; Weiner & Sellwood 1999; Bissantz & Gerhard 2002).

Galactic Bar Models. Analytical Construction

Many models of bars exist at the present time. The first and most simple considers a bar as a two-dimensional perturbation, with a potential of the form $\Phi_{BAR}(R, \varphi) = g(R)\cos(2\varphi)$ (see for example Contopoulos & Papayannopoulos 1980). Most of bar models have employed a mass distribution with similar stratification in ellipsoids or prolate spheroids, of the form given by equation (4.4). These are Ferrers ellipsoids or spheroids (see for example Binney & Tremaine 1994). An ellipsoid with $n = 0$ (homogeneous) has been considered by Sanders & Tubbs (1980). An inhomogeneous ($n \neq 0$) prolate spheroid has been employed by Papayannopoulos & Petrou (1983), Petrou & Papayannopoulos (1983), Athanassoula et al. (1983), Teuben & Sanders (1985), Shlosman & Heller (2002). Inhomogeneous ellipsoids have been considered by Pfenniger (1984) and Kaufmann & Contopoulos (1996).

For the particular case of our Galaxy, we have considered three models that use the density law obtained by Freudenreich (1998) based on COBE/DIRBE observations. The first is an inhomogeneous ellipsoid, the second is an inhomogeneous prolate spheroid, since the Galactic bar seems to be approximately prolate, and the third consists of a superposition of inhomogeneous ellipsoids, which intend to model the boxy isodensity contours observed in the Galactic bar. Attempts to obtain the potential for a mass distribution of this boxy type have been made by Hernquist & Ostriker (1992).

Model of the Bar as an Inhomogeneous Ellipsoid

With the same idea of a superposition of self-similar components (ellipsoids in this case) as that mentioned in Section 3.3.1, we model the Galactic bar as an inhomogeneous ellipsoid. For this purpose we use potential theory for homogeneous ellipsoids (Kellogg 1953; MacMillan 1930), whose forces and potential in a Cartesian system are given by equations 4.16 to 4.19.

Figure 4.5 illustrates the superposition of homogeneous ellipsoids to approximate the density in the bar.

This procedure is very similar to that used in the oblate superposition, except for the imposed density law. Once each component (homogeneous ellipsoid) is identified and its mass and semiaxes are known -the way to do this is described in equations (4.21) to (4.27)-, the forces and potential are obtained with equations 4.28 to 4.31.

Model of the Bar as an Inhomogeneous Prolate Spheroid

Following the same superposition principle, and the same density law for the bar as in the ellipsoidal model, we construct a prolate inhomogeneous spheroid whose density is obtained as shown in Figure 4.7. This model, unlike the ellipsoidal one where the approach to the density law is done by steps of stairs (homogeneous spheroids), approximates the density with prolate shells with density falling linearly with the semi-major axis (like that of oblate spheroids in the spiral arms).

In this manner, from equations (4.33) to (4.35), which give the derivatives of the potential and the potential for an homogeneous prolate spheroid, we obtain the derivatives of the potential (or forces) for an inhomogeneous prolate spheroid in equations (4.58) and (4.59) for an internal point \mathbf{r} , and (4.60) and (4.61) for an external point. Tests for “internal” or “external” position are done over each prolate shell (see Figure 4.8). In the same way, the potential for the inhomogeneous prolate spheroid is given by equations (4.65) for an internal point \mathbf{r} , and (4.66) for an external point.

Bar Model with a Superposition of Inhomogeneous Ellipsoids

With the aim of approximating, the boxy iso-density contours seen in the Galactic bar (Freudenreich 1998; Zhao & Mao 1996; Ibata & Gilmore 1995), we propose a superposition of inhomogeneous ellipsoids.

This model consists of a superposition of inhomogeneous ellipsoids with density given by equation (4.20). Two identical ellipsoids have their “equatorial plane” (which is the plane that contains the major and middle axes) rotated by an angle θ_1 , one to each side of the y, z plane -Figure 4.9 a)-. The other two ellipsoids (also identical), have their equatorial plane rotated an angle θ_2 on the x, z plane -Figure 4.9 b)-.

The fit to the boxy iso-density surfaces of the bar was computed with an algorithm of multidimensional minimization. The quantity to minimize is the ten-dimensional function (4.69), that represents the rms distance between a set of iso-density surfaces

obtained with the superposition model and the corresponding surfaces resulting from the density of the bar, as given by the fit of Freudenreich (1998).

Figure 4.10 shows a comparison of iso-density contours in the three Cartesian planes given by the superposition model and those obtained with the fit of Freudenreich (1998).

Stellar Dynamical Studies in the Galactic Plane

We have used the same techniques as in the spiral arms model (Section 3.4) to analyze stellar orbits in the Galactic plane in the presence of the Galactic bar. All computations were done (as with the spiral arms) with a Bulirsch-Stoer integrator (Appendix B).

In all cases we have adopted for the mass of the bar $M_{BAR} = 9.8 \times 10^9 M_{\odot}$ (See Section 4.2.5) and an angular velocity $\Omega_P = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ (see Section 4.2). Units of Jacobi constant E_J , are $100 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$.

In literature on galactic bars we can find definitions like “bulge-bar” or “peanut-shaped” bulges to mean triaxial bulges or bar-like bulges (Bureau, Freeman & Athanassoula). In those cases the bar is introduced in models as the only central component besides a disk and halo. In other work it is assumed that both structures coexist, and it has even been proposed that a bar, destroyed by an excessive central mass, becomes a bulge (Norman, Sellwood & Hasan 1996).

For our Galaxy, some authors consider both components, bulge and bar (Sevenster 1999; Zhao 2000). We present three experiments with our bar models with no spiral arms. In the first, the axisymmetric potential includes a bulge component of about 45% of the bar mass (Weiner & Sellwood 1999). In the second experiment, we remove the bulge component completely, leaving only the Galactic halo, disk and bar. In the last experiment we make analyses considering only the “bare” bar, with no halo and no disk present, to see the global effect of the axisymmetric potential.

Ellipsoidal, Prolate, and Superposition Bar Models. Preliminary Results

Figure 4.11 shows ten Poincaré diagrams for the ellipsoidal bar (with halo, disk and partial bulge). Unlike the case with the spiral arms, the separatrix made of near-zero angular momentum orbits is considerably wider, that is, there are more prograde-retrograde orbits (i.e. orbits that change its sense of motion in the inertial reference

frame). However, the separatrix conserves its characteristic of separating prograde and retrograde orbits in the inertial system.

In some families ($E_J = -2300, -2200, -2100$) chaos starts in the separatrix orbits. Chaos diminishes in the separatrix for higher values of E_J , and dominates in the prograde region after passing the corotation barrier (approximately at 3.5 kpc).

As for the spiral arms studies, *we found no chaotic retrograde orbits*. In Figure 4.12 we show some orbits in the inertial (upper figures in the six panels) and non-inertial system (lower figures in the panels). The arrows point to the same orbit as it appears in the Poincaré diagram.

Figure 4.13 shows some " x_1 " periodic orbits for this potential.

In the second experiment we have removed completely the bulge component. In Figure 4.14 we show ten Poincaré diagrams for this case.

The first obvious characteristic is the absence of chaos in the separatrix. Chaos here only appears in the prograde region beyond the corotation barrier. The bar seems to be favored by the absence of the central component in the sense that if the mass bar increases, chaos fills quickly the region of prograde orbits destroying the x_1 orbits.

The separatrix is now noticeably wider than in the first experiment (in cases with regular motion). Prograde and retrograde regions diminish their size considerably in this case. This seems to be due to local effects that the bar potential produces on stars in the inertial system, which become more important when the central potential is less important. This effect was also obtained with the spiral arms. If we accept this result, this would mean that in late-type galaxies (Sc or SBc), where spiral patterns have large pitch angles, where arms are much brighter relative to disks, and where bulges are small, the orbits that change its sense of motion could dominate orbital motion inside the bar. On the other hand, in galaxies where axisymmetric components (mainly bulge or massive nucleus) are much more important (massive) than non-axisymmetric ones (Sa), prograde orbits would dominate orbital motion.

In Figure 4.15 we present some examples of orbits in configuration space. In Figure 4.16 we show some of the x_1 periodic orbits for this case.

Finally in Figure 4.17 we present six Poincaré diagrams for the last experiment, considering only the ellipsoidal bar (without the axisymmetric potential). In this case we observe the same trend regarding the widening of the separatrix. In Figure 4.18 we

present examples of orbits in configuration space. In Figure 4.19 some x_1 orbits are shown.

We also present Poincaré diagrams with the same three experiments (partial bulge, no bulge, and with the bar potential only) with the prolate bar model in Figures 4.20, 4.21 and 4.22, respectively. Comparing these results with those obtained with the ellipsoidal bar, we notice that both models give similar results.

In Figure 4.23 we present five Poincaré diagrams with the superposition model of the Galactic bar that includes the total axisymmetric potential. It can be noticed that the orbital structure is very similar to that obtained in the ellipsoidal model. Chaos is stronger in the separatrix due to the more massive bulge component. In the prograde region, the onset of chaos starts now inside the corotation barrier ($E_J = -2200$). For $E_J = -2200$, where chaos does not dominate in the separatrix, we see that this region narrows due to the increase in bulge mass.

In Figure 4.24 we show three Poincaré diagrams with the superposition model and the axisymmetric potential, but removing completely the bulge component. Results are very similar to those of the ellipsoidal model. Chaos disappears when the bulge is not present.

Finally, in Figure 4.25 we show five diagrams of the superposition model, but we have also included the **spiral arms**. The mass of the spiral arms is $M_B/M_D = 0.0175$, the angular velocity for this simulations was the spiral arm velocity $\Omega_P = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. The separatrix in these cases is wider than in cases where only spiral arms are considered (Sections 3.5 and 3.6). The orbital structure is considerable more complex when the spiral arms are included, despite their low mass.

The preliminary studies presented here are the beginning of a set of applications and comparative analyses with the model of the Galactic spiral arms and the models of the Galactic bar.

1.1.4 One Dimensional HD and MHD Analysis of Gas with a Realistic Stellar Potential of the Galaxy

Using the forces produced by the model of the potential of the Galactic spiral arms (Section 3), we have studied the gas response to that potential using the MHD-code

Zeus (Appendix C).

The gas response is extremely sensitive to the potential details. This fact and the need of a three-dimensional potential were two of the most important motivations for the construction of the Galactic potential presented here.

Simulations in 1 and 1.5 Dimensions

In the transit of gas around the Galactic center, stream lines of the gas flow are approximately closed as seen from the system that rotates with the spiral arms. In an axisymmetric potential these orbits are circular, which means that the magnitude of velocity is constant along the trajectory; thus the orbits of gas are continuous, with no shocks. If the gas is perturbed by a non-axisymmetric potential like the spiral arms (even in the plausible weaker cases of the spiral arms in the Galaxy), shocks can be obtained. In Figure 5.1 we present a simple scheme of the problem.

Optical spiral structure of galaxies is delineated mainly by Population I objects (young stars, HII regions and dust). The origin of these tracers was a mystery for a long time, until it was noticed that the spiral pattern could force shock waves in the interstellar gas (Fujimoto 1966; Roberts 1969, 1972). These shock waves could produce compressions strong enough to originate HII regions and new stars. The shocks can be traced by the dark absorption lanes of dust in the dense post-shock gas.

Although the physical explanation of the phenomenon is reasonably convincing, unfortunately detailed agreement between theory and observations is not. For instance, the position of shocks, that in galaxies are generally observed on the concave edge (upstream, inside corotation) of spiral arms -Fig. 5.1 a)-, according to simulations (for example Baker & Barker 1974, hereafter BB74), a stationary shock should appear on the outer edge of spiral arms -Figure 5.1 b)-.

We have studied this problem in one dimension, using the TWA, in which, on the Galactic plane the dimensionality of the equations is reduced to one for small pitch angles (see, e.g., Spitzer 1978). The main purpose of this simple 1D test is to stress the point that slight changes in the potential of spiral arms could modify the results, due to the strong sensitivity of gas to the potential details. In Figure 5.2 we present the 1D approximation, which means we consider only the radial component (perpendicular to the spiral arm) of velocity streamlines, which is in fact the component producing the

shock.

We have used both potentials (BB74 and ours) to compare results directly. Equations (5.1) and (5.2) give the BB74 potential and force.

The mesh is centered at an arbitrary galactocentric radius of 6.3 kpc (where our spiral arm has a minimum in the potential) and we have reproduced BB74 results. We also present some computations at 8.5 kpc.

At 6.3 kpc the velocity component normal to the spiral arm in the Galaxy is 24.4 km/s, and at 8.5 kpc it is 18 km/s (radial velocities relative to the arm, assumed normal to the arm). Figure 5.5 shows the potential and force in the BB74 model. As can be seen, the potential is perfectly symmetric and with its minimum located exactly at the geometric center of the spiral arm. In this idealized potential, shocks are stationary only for a critical value of the entering velocity (that is, the stationary shock conditions require an extremely fine tuning of parameters). If the velocity is higher than this critical velocity, shocks leave the arm downstream; if less, the gas forms what BB74 calls an “accretion shock”.

Figures 5.6 to 5.8 show the BB74 results that we have reproduced with the code Zeus.

In Figure 5.9 we give the potential and force along a Galactic radial line ($\varphi = 0^\circ$) that crosses the spiral arm whose geometrical center is located at 6.3 kpc.

We see that the geometric center of the arm does not coincide necessarily with the minimum of the potential. This minimum is shifted towards the Galactic center, due to the gravitational contribution of the entire.

Most of our simulations were with an adiabatic equation of state for the gas, but we tried some isothermal runs with no apparent difference in results.

In Figures 5.11 and 5.12 we show 1D hydrodynamical simulations. Gas enters the mesh from left to right with inflow-outflow boundary conditions. The width of the potential well is 2 kpc along the quasi-radial coordinate.

In both set of simulations (HD and MHD), gas is not swept downstream for any plausible radial velocity. In this manner we always obtain upstream shocks that remain in the well a considerable time (200 million years). Furthermore, we do not find a stationary shock. Transient long-lived shocks as well as stationary ones, could explain shocks seen in galaxies.

In Figures 5.14 to 5.16 we present 1.5 MHD simulations with the same parameters as in Figures 5.11 to 5.13 for HD simulations.

In these simulations we have included the component of magnetic field along the spiral arm transverse to the direction of fluid motion, with the standard value of $5\mu\text{G}$. The main difference between HD and MHD simulations is the gas compression, because of the isotropic magnetic pressure.

Figures 5.14 to 5.17 show how the magnetic field reduces the strength of the shock and a tendency to keep density enhancements in the grid is now present. Although we do not find stationary shocks, we find quasi-stationary long-lived shocks.

Along the Galactic radial line $\varphi = \pi/2$ there is a third crossing with the spiral arm at 8.5 kpc. Figure 5.18 shows the shock produced at this galactocentric distance for an entering velocity of 35 km/s. The front leaves the grid, moving downstream as for the BB74 case, and as it does in the pure HD case with our arm. At the corresponding entering velocity for this location in the Galaxy (18 km/s) there is also an upstream shock, even with the weaker spiral here considered.

1.1.5 Conclusions

We present a three-dimensional model for a spiral and central bar mass distribution. This model is applied in particular to calculate the motions of stars and gas in our Galaxy, although it can be applied to other spiral and/or barred galaxies. It allows us to look with a deeper physical insight into details that are inaccessible with the classical treatment of the spiral perturbation, which models it as a simple periodic function.

Experiments were done first with a mode of the Milky Way that contained only the spiral arms as the non-axisymmetric component, in order to understand the stellar and gas dynamics without the strong interaction of the massive bar component and the spiral, whose coupling we expect will cause complex kinematics.

We have adopted two spiral *locii* for the arms. The first *locus*, with two spiral arms, represents the stellar arms, with a pitch angle of 15.5° (Drimmel 2000). The second option for the *locus*, with six arms, considers additionally the four optical arms delineated by luminous HII regions, with a pitch angle of 12° . From the range of possibilities given in the literature, we have considered three values for the pattern

angular velocity, $\Omega_P = 15, 20$ and $60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, and a mass ratio (arms vs. disk), M_B/M_D , in the range $0.0175 - 0.05$. In this mass range, the radial force due to the spiral arms is between 5% - 10% of the axisymmetric radial force.

Performing self-consistency tests on our model by computing periodic orbits, and using the C&G86 method to analyze the stellar density response to the imposed potential, we have found that the requirement of gravitational self-consistency favors an angular velocity of the spiral pattern $\Omega_P = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

We have found that the contribution of the entire spiral pattern to the potential, causes the local potential to adopt a shape that cannot be fitted by the traditionally invoked TWA (Tight Winding Approximation) model. This fact might have far-reaching consequences, for instance, in the gas response to the spiral perturbation. We have performed modest, one-dimensional, MHD simulations (Franco, Martos, Pichardo & Jongsoo 2002) with the code Zeus, to show the differences in the gas response, comparing the conventional model of a cosine for the potential with the model presented in this work. These simulations show that shocks do not leave the arm downstream, as in previous calculations (Baker & Barker 1974; Martos & Cox 1998) for a plausible range of entering speeds. In correspondence with observational expectations, shocks instead seek the upstream edge of the arm, that is, the concave side inside corotation, which is generally marked in optical observations by accumulations of dust in the inner part of the spiral arms. The inclusion of the magnetic field is essential to this effect. In this manner, results based on the TWA should be revised: the gas response can depend strongly on the position in the Galaxy. A potential “well” in the arm might disappear as such at a different radial segment of the arm.

In comparisons of orbital analyses with our model and the TWA approximation, we find that results are very similar in cases with low mass of the spiral arms ($M_B/M_D \sim 0.0175$). In cases with higher mass (up to $M_B/M_D \sim 0.05$), differences are noticeable, starting with a richer orbital structure in Poincaré diagrams until the onset of chaos, which does not appear in the TWA case.

In the analysis of Poincaré diagrams, we found it is quite fruitful to use an inertial frame to define the prograde or retrograde sense of orbital motion around the Galactic center, along with the usual definition in the non-inertial system, where Poincaré diagrams are defined. In the inertial frame the sense of motion is preserved with time

for almost every orbit in our experiments, the exceptions being orbits with nearly zero angular momentum. This property relies on the parameters we consider plausible for our Galaxy. If we display information from the inertial system in the non-inertial one, Poincaré diagrams reveal that prograde and retrograde orbits, as defined in the inertial frame, occupy sharply separated regions, through a separatrix corresponding, loosely, to nearly zero angular momentum orbits in this system.

The definition of sense of orbital motion in the inertial frame, has a simple physical meaning. Many processes exist where the precise knowledge of the orbital average motion with respect to an inertial frame is important, for example in dynamical friction effects over the Galactic bar, prograde orbits are more important since their mean relative velocity with the bar is lower than in the retrograde orbits case. On the other hand, this definition of orbital motion appears to be intimately connected to the onset of chaos. Based on an analysis of Poincaré diagrams and the first Lyapunov exponent, we find that, within plausible ranges for the amplitude and pitch angles of the spiral arms for a galaxy such as the Milky Way (and independently of the chosen number of arms), if there is chaos, only prograde orbits can exhibit it. For a sufficiently weak perturbation, as it seems to be the case in our Galaxy, the separatrix is a well-defined, narrow curve. The onset and extension of chaotic subregions of the prograde region depends on two main parameters: the mass in the spiral arms, or the relative force, and the angular velocity. We stress the point that the standard definition in the rotating frame (which calls the $x' > 0$ part of the diagram the retrograde side and the $x' < 0$ part the prograde side, for a spiral pattern moving clockwise), would not have shed light onto the connection chaos-prograde motion. This is because the same orbit (ordered or chaotic) can occupy both sections of Poincaré diagrams. The different behavior regarding the onset of chaos of prograde and retrograde orbits, as defined in the inertial system, could be attributed to the overlapping of resonances (Contopoulos 1967).

In cases with the lower spiral masses (approximately $M_S/M_D \leq 0.03$), we do not find chaos for angular speeds of the spiral pattern lower than $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. We have also computed some orbital families with $\Omega_p = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, since N-body models predict those velocities (which corresponds to the bar's pattern speed), and we find that, even for the lowest spiral mass we considered, chaos appears for some families. A minimum strength of the perturbation is required for the appearance of stochastic

motion in the models with the lowest angular speeds (15 and 20 km s⁻¹ kpc⁻¹). We find that an amplitude of approximately 6% (on average) of the axisymmetric radial force is required (which corresponds in our model to $M_S/M_D \leq 0.05$ for a pitch angle of 15.5°). For cases of very strong spiral perturbations (relative forces higher than 15%) the separatrix is no longer a well-defined curve and chaos is pervasive. However, we think this spiral forcing is far larger than appropriate for a Sb galaxy.

Two laws of density fall along the spiral arm were considered: a linear fall and an exponential fall, the later physically more justifiable (since the disk density is exponential). Our results do not seem to depend strongly on the density law.

We have implemented three models for the Galactic bar, using the observed density law. In one of these models we approximately reproduce the boxy appearance of the isodensity (isophotal) contours in our Galaxy. The first model is an inhomogeneous ellipsoid, the second one is an inhomogeneous prolate spheroid (computationally much less expensive than the first), the third consists of a superposition of inhomogeneous ellipsoids, and is the one that better fits observations.

Trying to reproduce the boxy shape of bars is a very complicated problem; however, with superpositions like the one we have implemented we can model the Galactic observations, and actually with the adequate superposition it is possible to model easily the potential of other bars. Qualitative comparisons from orbital analysis on the three models show no significant differences.

The following are some results using the models. We have made three main experiments with the three models of the Galactic bar. The first includes the axisymmetric potential with a partial bulge (Weiner & Sellwood 1999), in the second experiment we have removed completely the bulge, and in the third experiment we have removed the axisymmetric potential. One more experiment with the third bar (superposition of inhomogeneous ellipsoids) has also been done, including the spiral arms. With these model, we find that the separatrix (composed by low angular momentum orbits), is much wider than in the case without a bar (only the spiral arms), which means that the region of orbits that change their sense of motion) increase, diminishing the region of always-retrograde and prograde orbits in Poincaré diagrams.

In most cases chaos is induced by the bulge component, and starts in the prograde-retrograde orbits that delineate the separatrix. Beyond the corotation barrier, chaos

starts now in the prograde orbits, precisely as we found when only the spiral perturbation was present.

Work in Progress and for the Future

Application of the model introduced in this work opens a window of possibilities for orbital and gas studies in the Galaxy. We can check (and possibly revise) results obtained in galactic models which did not include bar and spiral arms mass distributions. We list here some currently-underway and future work.

* In all the analyses of spiral arms, we have assumed that these are smooth. It is expected (Sellwood 1991; Rix & Zaritsky 1995) that spiral arms change their width and height with galactocentric distance. Additionally spiral arms are not necessarily smooth, but they are flocculent. Because of the model construction, such features are easy to implement in our simulations. In this manner, orbital analysis would allow us understand the implications in gaseous dynamics, and particularly for gravitational self-consistency (studying periodic orbits for instance), produced by flocculent spiral arms like those observed in galaxies like ours and later ones due to giant HII regions.

* Although periodic orbits were used in self-consistency analyses, we consider necessary to go deeper in these study, adding characteristic diagrams and stability analysis.

* Application to Galactic clusters in order to determine the importance of the Galactic bar and arms in their spatial distribution. If the Galactic bar affects in some way this spatial distribution of the observed Galactic clusters, we could try to use the observed clusters to obtain a range of possible angular velocities for the Galactic bar. Could we know if an edge-on galaxy is barred or not by knowing the spatial distribution of clusters in a galaxy?. Similar considerations have been explored by Long, Ostriker & Aguilar (1992).

It is currently known that massive central components are able to destroy bars. With a bar like that of the Milky Way, and based on self-consistency analyses and orbital chaos, we can look for a maximum central mass concentration (in a bulge for instance) in the Milky Way.

* Shock analyses of the gas encounter with the spiral arm in the Galactic plane to determine the velocity ellipsoid of young stellar population, taking as initial conditions positions and velocities zones where shocks can trigger star formation or HII regions.

We are also doing experiments in the plane perpendicular to the Galactic disk and to the spiral arm in order to study vertical motions and stellar formation induced at high z (coordinate perpendicular to Galactic plane). This extends the work by Martos & Cox (1998), in which hydraulic jumps or bores appear as a consequence of the gas entering a spiral arm.

- * Shock analysis of gas with the Galactic bar to try to explain cosmic ray acceleration.

- * Coupling of bar and spiral arms with velocities corresponding to the bar (as N-body models predict), to the spiral arms and both. Self-consistency analyses and dynamical and gaseous implications.

- * Three dimensional studies. Gas and stars. High velocity stars in the Solar neighborhood.

- * Combining the steady model presented here, with an N-body code, it is possible to make analyses of the inner structure of globular clusters or Galactic satellites, introducing as background potential the steady model with spiral arms and bar, applying all the resolution to the cluster or Galactic satellite (instead to the set galaxy-globular cluster or galaxy-satellite) to analyze tidal effects, dynamical friction and destruction induced by the Galactic non-axisymmetric structure.

Parte I

CONCEPTOS INTRODUCTORIOS

Capítulo 2

Introducción General

La observación del Universo por el ser humano desde tiempos remotos, y su inextinguible curiosidad, nos han proporcionado una de las puertas más importantes al aparentemente insondable reino de los fenómenos físicos y específicamente nos dio la llave al de los fenómenos celestes. En su deseo por entender lo que le rodeaba, el hombre antiguo le dio las más ingeniosas explicaciones a esos puntos brillantes en el cielo; como puede notarse en las pinturas rupestres prehistóricas que datan de más de 20,000 años antes de nuestra era o en los grabados de culturas que forman parte de la historia, como los mayas, aztecas, egipcios, entre otros, quienes crearon una impresionante mitología que pretendía explicar cada suceso en el cielo que no podía ser explicado con los conocimientos de aquellos días.

La presente tesis intenta aprovechar algunos recursos que nos da el conocimiento y la tecnología actual, del que todas estas culturas no pudieron gozar, y proporcionar un grano de polvo al conocimiento general de la Galaxia en la que el ser humano surgió.

2.1 La Vía Láctea

Muchos pueblos de la antigüedad notaron la presencia de una banda débilmente luminosa, apreciable especialmente en las noches de verano, que cruza la bóveda celeste aproximadamente en dirección norte-sur. Sin poder darle una explicación, esta estructura en el cielo pasó a ser parte de la rica mitología de muchos pueblos. Para los Griegos era el enorme rastro de leche que Hera derramó corriendo hacia el Olimpo después de

una dolorosa mordida del pequeño y hambriento Hércules. Para los incas era polvo de estrellas, y un sendero de nieve para los esquimales. La palabra *galaxia* se deriva entonces de la palabra griega para leche, denominada así por los astrónomos griegos Anaxágoras y Eratóstenes. En particular, nuestra Galaxia (también llamada simplemente *La Galaxia*), es conocida desde la época de los romanos con el nombre de *Vía Láctea*, que significa “camino de leche”.

Esta banda de luz fue uno de los enigmas inexpugnables por cientos de años hasta que a Galileo Galilei se le ocurrió la idea de apuntar al cielo el ya conocido telescopio (utilizado en la navegación). Galileo descubrió que la banda luminosa y suave, estaba en realidad compuesta por incontables estrellas, como muchas de las estrellas individuales que se veían a simple vista.

Actualmente, después de mucho tiempo y vidas enteras dedicadas al estudio del Universo, sabemos que efectivamente esa banda de luz está asociada a nuestra Galaxia, que está compuesta por una enorme cantidad de estrellas. La mayoría de estas estrellas están localizadas en un gigante disco delgado. Nosotros vemos este disco de canto porque nuestro sistema Solar, al igual que la mayoría de estas estrellas, se localiza aproximadamente en el plano medio de la Vía Láctea. El honor del descubrimiento de la verdadera forma de nuestra Galaxia se le atribuye al astrónomo Harlow Shapley (quien también calculó el tamaño para la Galaxia que, aunque sobrestimó severamente, proporcionó la más clara idea de la distribución de la Galaxia hasta esa época).

La Galaxia contiene aproximadamente 10^{11} estrellas; además contiene 10^{10} masas solares de gas distribuidas en decenas de miles de nubes con un amplio rango de masas y tamaños. Aunque el gas representa una fracción pequeña de la masa total, tiene influencia directa sobre la dinámica estelar; las nubes de gas denso, que son los lugares donde se da la formación estelar, juegan un papel importante en la evolución de la Galaxia, por ejemplo, en el mecanismo de dispersión de velocidades estelares que aumenta con la edad, debido a encuentros con nubes moleculares (Wielen 1977).

A pesar de que el estar inmersos en la Galaxia nos dificulta una visión general de ésta, el tener todo “tan cerca” ha permitido que se realicen observaciones muy detalladas de cada rincón alcanzable con la tecnología actual. Sin embargo, la existencia de tantos datos hace extraordinariamente confusa la integración de un todo, para tener un escenario completo y cerrado de la Vía Láctea.

2.2 El Modelaje Dinámico de Estrellas y de Gas en la Vía Láctea

Aunque existía aún una controversia hasta hace pocos años entre la idea de que la Galaxia puede estar formada por componentes que representan objetos físicos de naturaleza diferente, o la posibilidad de que se trate de una sola estructura intrínsecamente continua, los modelos fueron divididos, principalmente por una cuestión de sencillez, en muchas componentes que sumadas nos proporcionarían el potencial gravitacional general de la Galaxia.

El primer astrónomo que tuvo éxito en sintetizar las observaciones de movimientos estelares en la vecindad Solar fue J. H. Oort. El objetivo principal de Oort fue explicar la cinemática de la vecindad Solar, pero inició además el proceso de interpretación de la cinemática en términos de la dinámica, construyendo el primer modelo moderno de la distribución de masa en la Galaxia (Oort 1932). Desde el trabajo pionero de Oort y, especialmente desde las observaciones de la línea de 21 cm de hidrógeno neutro, que proporcionaron las primeras estimaciones confiables de la velocidad circular alrededor del centro Galáctico, en puntos interiores a la órbita del Sol en la Galaxia (el "círculo" Solar), se han propuesto muchos modelos para el potencial Galáctico. Por muchos años, después de la publicación por Kwee et al. (1954) de la primera curva de rotación con observaciones de 21 cm, el modelo de masa estándar fue el de Schmidt (1956), quien propuso una superposición de esferoides muy aplanados, obteniendo el mejor ajuste a los parámetros conocidos de la Galaxia en aquel tiempo. Su modelo consta de cuatro esferoides inhomogéneos (y nueve homogéneos, sólo para afinar el ajuste entre el modelo y las observaciones de la fuerza radial en el plano Galáctico): el primer esferoide inhomogéneo representa los objetos más jóvenes (población I), el segundo representa a las estrellas más tardías (de tipo espectral F a M), el tercero las estrellas de alta velocidad y el cuarto a los objetos no conocidos o no visibles, que se requieren para explicar el exceso observado en la fuerza radial.

Otros modelos de la Galaxia asumían que era un sistema de tipo morfológico Sbc sin barra, compuesto por un disco y una componente esferoidal como las observadas en otras galaxias. En particular, se suponía que el brillo superficial del disco era exponencial, como se observa en otras galaxias, mientras que el del esferoide seguía la ley $R^{1/4}$ (de

Vaucouleurs 1948). La longitud de escala y densidades de esas componentes pueden ser estimadas siguiendo dos métodos posibles. El primero de éstos es conocido como el *método fotométrico*. En éste se calculan las densidades de luminosidad y las longitudes de escala por conteos de estrellas, o de medidas de luz integrada, de estrellas no resueltas. Entonces se elige una razón masa-luminosidad, independiente de la posición, para cada componente y se multiplica la densidad de luminosidad de cada componente por la razón masa-luminosidad, para determinar la correspondiente densidad de masa (ver Bahcall y Soneira -1980- para una revisión de este método). El segundo método es conocido como el *método dinámico*, donde se supone que cada componente tiene una razón masa luminosidad desconocida, pero también independiente de la posición. La masa de las componentes (bulbo, disco y halo) se determina minimizando -con mínimos cuadrados- las diferencias entre los parámetros dinámicos observacionales conocidos para la Galaxia (velocidad local de escape, curva de rotación y otros resultados de la dinámica local) y los obtenidos con este modelo (Caldwell y Ostriker 1981).

Muchos modelos de la distribución de masa en nuestra Galaxia (Schmidt 1965; Bahcall y Soneira 1980; Caldwell y Ostriker 1981; Allen y Santillán 1991 -Apéndice A-; Dehnen y Binney 1998) han reproducido bastante bien muchas de las características observacionales de la Galaxia. Sin embargo, un examen más detallado de la distribución estelar y gaseosa de la Galaxia, ha revelado que un modelo axisimétrico es una sobresimplificación. Aún a las escalas mayores, el hidrógeno atómico no está distribuido uniformemente en acimut, el disco no es plano y contiene alabeos a grandes radios, etc. Además, la existencia de brazos espirales, justo como aquellos observados en otras galaxias, fue mostrada por Oort, Kerr y Westerhout (1958), usando una interpretación aguda de las observaciones de regiones delgadas y alargadas densas en gas.

También se encontró evidencia muy notoria señales fuertes de movimiento no circular en la dirección del centro Galáctico (Rougoor y Oort 1960; Rougoor 1964; Shane 1971), donde se observó que el corrimiento por efecto Doppler de la línea de 21 cm, se alejaba severamente (cientos de km s^{-1}) de cualquier predicción para órbitas circulares. Esto fue inicialmente interpretado como una expulsión violenta de gas desde el centro Galáctico. Más tarde, a partir de observaciones de galaxias externas, simulaciones numéricas y mejores observaciones de la Vía Láctea, se llegó a la conclusión de que una forma más simple de interpretar estos enormes flujos de gran velocidad en el centro Galáctico, era

considerarlos como el flujo de gas en órbitas no circulares en un potencial no axisimétrico (Peters 1975). Como al menos la mitad de las galaxias de disco conocidas tienen una barra o una distorsión oval (cuyo comportamiento dinámico es similar al de una barra), es razonable concluir que la Galaxia contiene una barra.

Con el mejoramiento de las observaciones de la cinemática de las galaxias, en particular de la Vía Láctea, se hicieron cada vez más y mejores intentos de analizar también la dinámica. Para estas enormes estructuras, que a nuestra visión serán prácticamente estáticas por cientos de miles de generaciones, existía una forma única de estudio. Esta es la de las simulaciones numéricas y la comparación de éstas con diversas observaciones de galaxias.

Actualmente se conocen gran variedad de códigos muy elaborados para la simulación de la evolución dinámica de galaxias. Entre los más conocidos están los códigos de N-cuerpos, los tipo SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics), los códigos potencial-partícula también conocidos como estacionarios (Binney 2001) y los hidro y magneto-hidrodinámicos (tales como Zeus -Apéndice C-). Los de N-cuerpos están basados en el problema clásico del cual llevan el nombre, que simula aditivamente las interacciones entre todas las partículas que forman un sistema estelar como, por ejemplo, una galaxia. En un sistema típico cada partícula influye en el resto de las partículas que lo constituyen a través de la ley de la gravitación de Newton. Un código de N-cuerpos sigue las trayectorias espaciales de la colección de N partículas que forman el sistema. Puesto que no es posible resolver en forma analítica las ecuaciones de movimiento de una colección de tres (excepto en un caso restringido) o más partículas, se recurre a algoritmos que permiten su solución de manera numérica. Una simulación de N-cuerpos procede sobre pasos de tiempo, para cada uno de los cuales la fuerza neta sobre cada partícula es determinada para decidir su avance. Un cálculo directo de la fuerza (es decir, uno a uno entre todas las partículas) requeriría de $\sim O(N^2)$ operaciones por cada paso de tiempo, lo cual limita enormemente el número de partículas que pueden ser simuladas por este método. Varios métodos jerárquicos se han propuesto para reducir la complejidad de estos cálculos, entre los que cabe destacar los llamados códigos de árbol. Estos consideran la contribución al potencial partícula a partícula, únicamente para las más cercanas, mientras que para las lejanas considera la contribución solamente del centro de masa de conjuntos de partículas, en lugar de tomar la contribución

individual. Para estos últimos el número de operaciones por paso de tiempo se reduce enormemente a $\sim O(N \ln N)$, permitiendo aumentar la resolución del sistema a través del incremento del número de partículas utilizadas para su representación (para una revisión, ver Sellwood 1987).

Entre las ventajas de los códigos de N-cuerpos, la más importante es que cumplen directamente con la ecuación de Poisson, por lo que son autoconsistentes en todo momento; es decir permiten seguir la evolución temporal de un sistema dado, recalculando las fuerzas y potencial, considerando a cada paso los cambios estructurales del sistema mismo. Esto significa que resultan autoconsistentes a cada tiempo, tanto en el sentido de la ecuación de Poisson como en el sentido de la duración de sus estructuras no axisimétricas. De esta forma, este tipo de códigos es capaz de generar estructuras como barras y brazos espirales de alta duración con las condiciones iniciales adecuadas y evolucionarlas para su estudio dinámico global y en algunos casos incluso para análisis locales finos. Sin embargo, el problema inherente de este tipo de códigos es el enorme costo computacional que obliga a sacrificar la resolución en los problemas dinámicos de gran escala.

Como ya se ha mencionado, el propósito principal de este trabajo consiste en el análisis orbital de una galaxia como la nuestra. Para este tipo de análisis se requiere una estructura muy resuelta (fina) del potencial que no puede (hasta el momento) ser obtenida con códigos del tipo de los N-cuerpos, dado que éstos trabajan con un número limitado de partículas, que aunque resulta aceptable para el análisis de la evolución dinámica general de las galaxias, no proporcionan suficiente resolución para análisis orbitales detallados. Esto debido al hecho de que cada partícula de estos sistemas representa un conjunto de al menos 10^4 masas solares (en los mejores modelos de N-cuerpos alcanzados hasta el momento), lo que produce un potencial granuloso que afecta el movimiento de las partículas localmente. Por otra parte, aunque es posible, es también muy complicado modelar con códigos de N-cuerpos galaxias específicas que ajusten la mayor parte de los parámetros observacionales conocidos o hacer estudios generales con variación libre de parámetros, esto, debido al enorme costo computacional que representaría buscar un ajuste preciso a un conjunto de observaciones determinado.

Dada la motivación de la tesis y las razones que hemos expuesto, hemos elegido construir un modelo del tipo potencial-partícula (o estacionario) que nos permite anali-

zar con detalle la estructura orbital con un potencial fino y no idealizado de la Galaxia, que toma la mayoría de los parámetros observacionales conocidos de ésta.

En referencia a los códigos estacionarios. Los estudios cinemáticos y dinámicos de otras galaxias han mostrado, como ya hemos mencionado, que éstas pueden ser mejor entendidas como sistemas formados por un conjunto de componentes (bulbo o “esferoide”, disco grueso y/o delgado, un halo masivo, brazos espirales y/o una barra o una distorsión oval). Todas estas componentes están descritas por el potencial galáctico $\Phi(x, y, z, t)$, que aunque es variable en el tiempo, lo hace en escalas de tiempo tan largas que puede ser considerado como prácticamente estacionario en el sistema de referencia que se mueve con la estructura no axisimétrica dada, como los brazos espirales o la barra. Se cree entonces que la Galaxia en general y las estructuras no axisimétricas en particular deben estar en estado aproximadamente estacionario en el sentido de su duración en la Galaxia, dado que en su parte visible el tiempo dinámico es órdenes de magnitud más corto que el tiempo de Hubble y no hay razón aparente para suponer que estamos pasando por alguna etapa especial de la Galaxia, como un clímax de formación estelar o algún otro evento relevante, corto y que modifique fuertemente el potencial promedio de la Galaxia (Binney 2001). Por último, en las barras, estructuras aparentemente menos estacionarias en el sentido de que se creía que perdían momento angular desacelerándose debido a fricción dinámica con el halo (Debatista y Sellwood 1998, 2000; Athanassoula 2002), se sabe actualmente que el proceso de fricción dinámica ha sido severamente sobrestimado debido a la baja resolución espacial con la que se hacían los experimentos de N-cuerpos (Valenzuela y Klipin 2002). Dado que las barras son elementos de las galaxias extremadamente comunes, estos procesos son probablemente lo suficientemente lentos como para considerar los potenciales prácticamente estacionarios en el sistema de referencia que rota con estas estructuras.

La desventaja más importante de los códigos potencial-partícula o estacionarios, es la falta de autoconsistencia que en su expresión más simple significa que la respuesta orbital a un potencial impuesto no necesariamente “apoya” a las estructuras que la componen. En este caso la autoconsistencia, a diferencia del caso de los N-cuerpos, tiene que ser demostrada. Este tipo de análisis se incluye en la tesis para los modelos presentados. Entre más parámetros observacionales y dinámicos de la Galaxia se conozcan, los modelos estacionarios representarán más fielmente lo observado y serán por lo

tanto más autoconsistentes.

Actualmente se realizan estudios observacionales de la Galaxia que producirán bases de datos nunca antes imaginadas (SLOAN por los Estados Unidos y aún en proyecto, GAIA por la Comunidad Europea), que nos permitirán conocer más detalles de las componentes de la Galaxia, esto le dará aún más importancia a los modelajes estacionarios que serán cada vez más realistas y autoconsistentes, dada la cantidad de parámetros que se conocerán.

En resumen, los códigos estacionarios parten de la suposición de que el potencial promedio de un sistema como la Galaxia, con todas sus componentes (halo, bulbo, disco, brazos y/o barra), es básicamente el mismo durante periodos de tiempo muy largos. Este tipo de códigos nos permite experimentar con el espacio de parámetros plausibles para un sistema dado e incluso acotar otra serie de parámetros difíciles de calcular observacionalmente, tales como la masa, etc. Mejores observaciones de las galaxias ayudarán a desarrollar modelos más realistas que develarán muchos de los misterios de la dinámica galáctica.

Para estudios hidro y magnetohidrodinámicos también se han creado una gran cantidad de herramientas como los códigos tipo SPH y los de malla euleriana. Los códigos SPH, al igual que los de N-cuerpos, son métodos que emplean partículas, pero también resuelven problemas hidrodinámicos sin necesidad de mallas para el cálculo de las derivadas espaciales. Los códigos SPH calculan las derivadas por diferenciación analítica de fórmulas de interpolación. De esta forma las ecuaciones de momento y energía se convierten en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales son fáciles de entender en términos mecánicos y termodinámicos. Por ejemplo, el gradiente de presión se vuelve una fuerza entre pares de partículas (para una revisión del método ver Monaghan 1992). Los códigos SPH, por otro lado, tienen problemas intrínsecos al método para la simulación de choques, por ejemplo. Aunado a esto, este tipo de códigos aún no emula el campo magnético; aunque actualmente se está haciendo un esfuerzo por introducirlo.

Finalmente, se conocen los códigos de malla que resuelven las ecuaciones de conservación de los fluidos incluyendo el campo magnético en una malla euleriana. Uno de los mejores ejemplos es el código conocido como Zeus (ver Apéndice C), que es empleado en este trabajo. A diferencia de los códigos adaptivos como los del tipo SPH, el rango

dinámico espacial de este tipo de códigos no es muy grande debido al enorme costo computacional para realizar corridas de gran escala con buena resolución, sin embargo son capaces de incorporar campos magnéticos y manejar choques con facilidad.

2.3 Objetivos Generales y Organización de la Tesis

Con el propósito de estudiar la respuesta estelar y gaseosa al potencial de la Vía Láctea, hemos construido un modelo tridimensional para el potencial gravitacional de los brazos espirales y de la barra, superpuesto al potencial axisimétrico de Allen y Santillán (1991). Aunque específicamente empleado para modelar a nuestra Galaxia, el modelo de los brazos espirales y de la barra puede ser aplicado, con los parámetros correspondientes, a otras galaxias espirales y/o con barra.

Por su simplicidad, el potencial de brazos espirales empleado generalmente es el de Lin y Shu (1964), modelado como una perturbación periódica al potencial axisimétrico. Este potencial originalmente es bidimensional. En este trabajo, más que usar un modelo simplificado de los brazos, hemos optado por construir un modelo tridimensional que, aunque está lejos de ser tan simple como el de Lin y Shu, tiene ventajas inherentes que mostraremos a lo largo de la tesis. Consideramos que en lugar de usar una simplificación para una estructura tan importante (como puede verse en las observaciones en la banda K o en el óptico) como la perturbación espiral, se deben analizar modelos más realistas.

Con el objetivo de tener una representación global de la Galaxia, también hemos construido tres modelos plausibles para aproximar a la barra Galáctica. Estos modelos, de la misma forma que los de los brazos, pueden ser aplicados en otras galaxias con barra, si los parámetros principales (radio, velocidad angular, perfil de brillo, factores de escala) son conocidos.

Aunque el potencial es tridimensional y está habilitado para calcular órbitas en tres dimensiones, hemos iniciado con estudios orbitales en el plano Galáctico. Sobre este tema existen muchos trabajos de galaxias espirales en general, que estudian la respuesta orbital a patrones espirales (Athanasoula et al. 1983; Contopoulos y Grosbøl 1986, etc.) y a barras galácticas (Teuben y Sanders 1985; Contopoulos et al. 1989; van Albada y Sanders 1982; Norman, Sellwood y Hasan 1996, etc.), analizando autoconsistencia, resonancias, órbitas periódicas, etc. Así mismo existen estudios orbitales en el mismo

sentido para modelos de la Galaxia (Barbanis y Woltjer 1967; Amaral y Lépine 1997; Englmaier y Gerhard 1999). Sobre ésto hablaremos con más detalle a lo largo del trabajo.

Realizamos un análisis unidimensional local del encuentro del gas Galáctico con el brazo espiral. La intención es encontrar la diferencia entre utilizar un pozo de potencial idealizado como una función cosenoidal y el pozo obtenido con nuestro modelo tridimensional de los brazos espirales.

La Tesis ha sido dividida en 6 capítulos y 3 apéndices. El Capítulo 1 es el resumen general del trabajo (presentado en español e inglés), el presente Capítulo (2) es una introducción general. En el Capítulo 3 se presenta el modelo de los brazos espirales y los resultados en forma de un artículo incluido en el mismo capítulo. En el Capítulo 4 se dan los modelos para la barra Galáctica y los resultados principales. En el Capítulo 5 damos los resultados de un experimento simple de estudios MHD en una dimensión. Finalmente en los Apéndices A, B, C, se presentan, respectivamente, el potencial axi-simétrico, los integradores empleados para la evolución dinámico estelar y una breve descripción de código magnetohidrodinámico Zeus empleado en los experimentos unidimensionales realizados para la Tesis.

Parte II

LA DINAMICA ESTELAR

Capítulo 3

Los Brazos Espirales

3.1 Introducción

Una de las características más prominentes en la mayoría de las galaxias de disco son los llamados **brazos espirales**, estas estructuras, espectaculares en tamaño, conspicuas en su brillo, e interesantes en su física, le dan su nombre a uno de los tipos de galaxias más abundantes en el Universo, que son las *galaxias espirales* (éstas representan aproximadamente el 70 % de las galaxias en general -van Den Bergh 1998-).

Las galaxias espirales producen la mayor parte de la luz visible en el Universo local. Las componentes fundamentales de este tipo de galaxias son, halo, disco, bulbo (con o sin barra) y brazos espirales. Dentro de cada clase de galaxias espirales: barradas y sin barra (también llamadas *normales*), se hace una subdivisión morfológica de acuerdo a la combinación de tres criterios: el primero relacionado con la importancia relativa del bulbo central y el disco en la producción de la luz total de la galaxia; el segundo es el ángulo de enrollamiento de los brazos espirales, y por último, el grado en el que los brazos espirales son resueltos en estrellas y nebulosas de emisión individuales (como regiones HII). Aunque esta clasificación parece insatisfactoria, ha sido propuesta en forma independiente por varios observadores, y la razón es que existe suficiente correlación entre estas tres características. En este sentido se observa, por ejemplo, que galaxias con bulbos centrales conspicuos tienden a tener brazos espirales muy enrollados que no están muy resueltos en estrellas o nubes, es decir, de apariencia suave. Este tipo de galaxias son designadas como de tipo *temprano* y son designadas de acuerdo a la

secuencia de Hubble como Sa o SBa para normales o barradas, respectivamente. Las espirales de tipo *tardío*, por otra parte, con bulbos pequeños brillantes muy condensados, brazos menos enrollados y altamente resueltos, son designadas Sc, Sd, SBc, y SBd, y entre éstas tenemos las Sb y SBb. A los tipos intermedios de condensaciones centrales (bulbos) y enrollamiento de los brazos espirales se les designa Sab, Sbc, etc (Sparke y Gallagher 2000; Binney y Merrifield 1998).

Con el conocimiento observacional de galaxias espirales externas obtenido hasta los años 30, todo parecía indicar que la Vía Láctea era un sistema estelar parecido a algunas de las galaxias externas como nuestra vecina Andrómeda y que probablemente poseía las mismas componentes estructurales generales de ésta, tales como los brazos espirales. Desafortunadamente, la estructura de brazos espirales de nuestra propia Galaxia nos es mucho menos obvia que la de otras galaxias debido al oscurecimiento en el disco de la Galaxia y a que el sistema Solar se localiza dentro de éste y en la orilla de uno de los brazos espirales (el brazo de Orión-Cygnus). Esta dificultad retrasó por muchas décadas la construcción de una imagen global de nuestra Galaxia. Como ya hemos mencionado en la introducción general (Capítulo 2), la primera idea sobre la estructura de la Galaxia era la de una distribución aproximadamente axisimétrica. Un examen más detallado de la distribución de gas reveló que el modelo axisimétrico era una sobresimplificación. Aún a escalas grandes el hidrógeno atómico en la Galaxia mostraba una distribución que dependía de la coordenada acimutal (Morgan, Sharpless y Osterbrock 1952). Se encontraron entonces regiones estrechas en las que el gas estaba considerablemente concentrado respecto a otras partes de la Galaxia, las cuales fueron rápidamente reconocidas por Oort, Kerr y Westerhout (1958) como la estructura espiral vista en otras galaxias. Más tarde fueron usados trazadores más luminosos de los brazos espirales, tales como regiones HII (Georgelin y Georgelin 1976; Caswell y Haynes 1987) una vez conocidas sus distancias cinemáticas. Se realizaron mapeos similares con otras componentes del medio gaseoso, tales como HI y CO, y más recientemente usando la dirección del campo magnético Galáctico bajo la suposición de que está alineado con los brazos espirales, o que es de geometría circular, basada en observaciones de otras galaxias. Estas mediciones se realizan usando la medida de rotación de pulsares; esto se hace ajustando la medida de rotación de Faraday de la luz proveniente de estos objetos, a longitudes de onda de radio, a la medida de rotación predicha por modelos con campo

magnético.

Cabe mencionar que actualmente existe aún una controversia sobre el número de brazos en nuestra Galaxia. Esto se debe a que si uno observa el disco con diferentes filtros, o con diferentes trazadores (como regiones HII o estrellas de población vieja), o incluso con diferentes modelos o técnicas, el número de brazos observados es distinto. Aunque existen trabajos que encuentran buenos ajustes a dos brazos para el óptico basados en observaciones de regiones HII (Bash 1981), la mayoría de éstos coinciden en que los mejores ajustes dan cuatro brazos en el óptico (Georgelin y Georgelin 1976; para una revisión ver Vallée 1995) y dos en la banda K (Drimmel 2000; Drimmel y Spergel 2001). Drimmel (2000) sugiere que los cuatro brazos ópticos en la Galaxia trazan la respuesta del gas a los dos brazos estelares observados en la banda K.

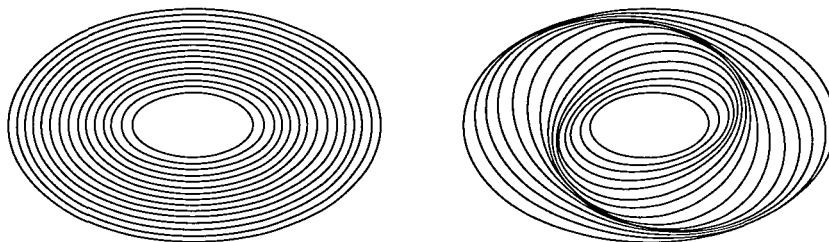
Una vez conocidas, aproximadamente, las características de los brazos espirales en nuestra Galaxia, vale la pena intentar modelarlos para analizar la dinámica general. El modelo más utilizado por su simplicidad para el potencial de los brazos espirales es el de Lin y Shu (1964). Este modelo está basado en la idea de las “ondas de densidad”, propuesta por P.O. Lindblad (1960), la cual sugiere para los brazos espirales una *estructura espiral cuasi estacionaria*¹ cuyo potencial se puede representar con una función simple y periódica que depende de la distancia galactocéntrica y del acimut en la forma siguiente,

$$\Phi = g(r)\cos(m\varphi + f(r)), \quad (3.1)$$

donde r y φ son coordenadas polares en el plano galáctico, m determina el número de brazos ($m=2$, produce un patrón de dos brazos), $g(r)$ define la amplitud de la espiral y $f(r)$ es la fase que contiene la información sobre la geometría del patrón espiral y su dirección respecto a la rotación galáctica. Si la rotación es en el sentido en el que φ aumenta y $f'(r) < 0$, es decir, los brazos espirales crecen en dirección prógrada respecto a su propio movimiento se les llama “*leading*”, lo cual traduciremos como “brazos prógrados”, mientras que si $f'(r) > 0$, los brazos espirales crecen en dirección retrógrada a movimiento se les llama “*trailing*”, que traduciremos como “brazos retrógrados” (a éstas pertenece más del 95% de las galaxias). Una versión analítica

¹Esto significa que el patrón espiral es de larga duración, esto es, permanece sin cambio rotando como cuerpo rígido por muchos periodos orbitales.

explícita de las funciones $g(r)$ y $f(r)$ de la ecuación (3.1) puede ser encontrada en Barbanis y Woltjer (1967).



$$\Phi = \cos(2\varphi)$$

$$\Phi = \cos(2(\varphi + f(r)))$$

FIGURA 3.1: Respuesta del movimiento promedio de las estrellas a la presencia de un potencial no axisimétrico con rotación de cuerpo rígido (que mantiene la misma fase para todas las órbitas) como en el caso de una barra (izquierda) y con rotación diferencial (que cambia sistemáticamente con el radio) como los brazos espirales (Kalnajs 1971).

En la teoría de “ondas de densidad”, los brazos espirales se formarán si las estrellas y el gas se mueven en órbitas elípticas cuya posición del eje mayor varía suavemente como una función que varía de forma suave y continua con el radio, formando la estructura espiral en las regiones donde la separación radial entre las órbitas consecutivas es mínima (Fig.3.1). La esencia de la teoría de ondas de densidad radica en encontrar la forma funcional de la fase $f(r)$ y la amplitud $g(r)$ que permita que la perturbación espiral tome una apariencia cuasiestacionaria. La concentración espiral de material mantendría una forma fija rotando rígidamente a una velocidad angular Ω_p . Por supuesto, este modelo requiere de un ajuste muy fino en los parámetros que resulta difícil de obtener en las galaxias reales, sin embargo sigue siendo la mejor explicación al nacimiento y duración de la estructura espiral. Cabe mencionar que el modelo de Lin y Shu es aplicable a brazos espirales globales o de gran diseño como los de M51 por ejemplo; existe además un modelo complementario al de Lin y Shu que se aplica a los llamados

brazos “floculentos”, es decir a los brazos fraccionados y difusos de algunas galaxias como M33 por ejemplo. Este modelo para brazos floculentos se conoce como “modelo de formación estelar estocástica y fue introducido por Gerola y Seiden (1978).

Desde el surgimiento de la teoría de Lin y Shu (1964), se ha utilizado la expresión del potencial espiral obtenida en este trabajo (ecuación 3.1), para el modelaje de los brazos espirales (por ejemplo, Barbanis y Woltjer 1967; Contopoulos 1981); esto debido a que representa una forma fácil y efectiva de simular los brazos, para los que no hay hasta el momento otra expresión que resulte tan simple. Para efectos de comparación con el modelo presentado en este trabajo, utilizaremos el modelo clásico de Lin y Shu que produce un potencial ideal de los brazos espirales de la Galaxia de una forma suave y continua, con los mínimos de potencial ubicados espacialmente a lo largo del eje de simetría de los brazos espirales.

Aún así, tiene sus limitaciones; por ejemplo, es autoconsistente sólo para ángulos de enrollamiento de los brazos menores a 6° (de ahí que también se le conozca como aproximación *tight winding*, es decir, “enrollamiento apretado”; ver por ejemplo Binney y Tremaine 1994). De esta forma, una de las ventajas importantes de este modelo, que es la autoconsistencia, sólo es válida para el modelaje de galaxias muy tempranas. Más aún, es un potencial bidimensional, aplicable en el plano Galáctico. Aunque existen aproximaciones que extienden este potencial incluyendo la coordenada z perpendicular al plano Galáctico (Martos y Cox 1998, con una forma exponencial del potencial en z ; Patsis y Grosbol 1996, con una función $sech^2(z)$; Lindblad, Lindblad y Athanassoula, 1996), éstas no son necesariamente autoconsistentes en el sentido de la ecuación de Poisson. De esta forma, este modelo de potencial no considera su propia autogravedad, y supone los mínimos del potencial como en un modelo de brazo local (Martos y Cox 1998), es decir, la posición de los mínimos corresponde al centro geométrico exacto del brazo espiral, lo cual no es necesariamente correcto cuando uno incluye la contribución total del patrón espiral, como mostraremos más adelante.

Existe actualmente una serie de trabajos muy importantes en el modelaje de los brazos espirales de la Galaxia, aunque la mayoría de éstos están basados en la aproximación de Lin y Shu (1964). Algunos ejemplos de este tipo de modelos son el de Lépine, Mishurov y Dedikov (2001), y el de Amaral y Lépine (1997), en el que ajustan dos y cuatro brazos a la Galaxia usando dos métodos observacionales: la cinemática de

variables cefeidas y diagramas de longitud vs. velocidad radial, (l, v_r) , de la muestra de regiones HII de la Galaxia. Otro ejemplo es el modelo de Bissantz y Gerhard (2002). Ellos dan un modelo no paramétrico (éstos están basados en observaciones y teoría estadística, pero no es posible ajustarlos a diferentes parámetros una vez obtenido un modelo para unas observaciones particulares) para deproyectar los mapas en la banda L del COBE/DIRBE (*Cosmic Background Explorer/Diffuse Infrared Background Experiment*) e incluyen brazos espirales ideales para estudiar microlentes.

Este Capítulo está dividido en seis secciones. En la Sección 3.2, discutimos brevemente los parámetros observacionales conocidos de los brazos espirales en la Vía Láctea; en la Sección 3.3 se presenta el modelo analítico tridimensional para los brazos espirales; los métodos y técnicas empleados en este trabajo para el estudio dinámico estelar en un potencial para la Galaxia con brazos se dan en la Sección 3.4. Finalmente, los resultados generales se dan en las Secciones 3.5 y 3.6.

3.2 Los Brazos Espirales de la Vía Láctea

Aunque se consideró por décadas que la Vía Láctea era una galaxia espiral, no fue sino hasta 1952 que Morgan y sus colaboradores (Morgan, Sharpless y Osterbrock 1952) lograron producir el primer esquema de los brazos espirales utilizando regiones HII, midiendo la distancia a las estrellas excitadoras. A partir de aquí, muchos trabajos observacionales sobre los brazos espirales han sido llevados a cabo con técnicas de observación cada vez mejores, logrando producir un modelo general de su ubicación y forma aproximada. Sin embargo, es importante reconocer que a pesar de la gran cantidad de esfuerzo invertido en estos trabajos observacionales, la forma exacta de los brazos en la Galaxia resulta la más difícil de observar y sigue siendo un enigma, y es por esto material de enorme controversia, desde su origen hasta su forma.

Describimos aquí algunos de los resultados generales obtenidos de la literatura observacional que a nuestro juicio se encuentran entre los más importantes:

- * *El lugar geométrico de los brazos en el plano del disco Galáctico*
- * *Número de brazos*

- * *Angulo de enrollamiento ("pitch angle") de los brazos*
- * *Altura de los brazos en la dirección perpendicular al plano Galáctico y anchura*
- * *Límite externo de los brazos*
- * *Fuerza radial y masa de los brazos*
- * *Ley de densidad a lo largo de los brazos y contraste de densidad superficial observado*
- * *Velocidad angular Ω_p del patrón espiral*

3.2.1 El Lugar Geométrico de los Brazos Espirales en el Plano del Disco Galáctico

Una vez aceptado el hecho de que la Vía Láctea es una galaxia de disco, el siguiente paso consistió en reconocer la existencia y determinar la morfología de la estructura espiral de nuestra Galaxia.

Dado que las regiones HII son una de las características observacionales más notables de las galaxias, y dado que además se encuentran principalmente agrupadas a lo largo de los brazos espirales, delineandolos claramente en otras galaxias, se hizo la suposición de que éstas podrían proporcionar evidencia directa de la estructura espiral en la Vía Láctea. Esto fue reconocido por Georgelin y Georgelin (1976), quienes obtuvieron el primer patrón espiral a gran escala de la Galaxia (Figura 3.2).

Después de este trabajo presentado por Georgeline y Georgelin (1976), muchos otros vinieron a mejorar las observaciones, para darnos un escenario cada vez más completo, aunque al mismo tiempo confuso, de la posición y forma de los brazos espirales en la Galaxia. Uno de los artículos más conocidos es el de Caswell y Haynes (1987). En su estudio con líneas de recombinación de hidrógeno de frecuencia cercana 5 GHz (H109 α y H110 α) de 316 regiones HII, muestran en detalle (en su Figura 5) la estructura de los brazos espirales en la región Galáctica externa al Sol.

Usando como base las observaciones de otras galaxias espirales, y en particular para la Vía Láctea, trabajos como el de Georgelin y Georgelin (1976) y el de Caswell y Haynes (1987), aparecieron nuevos modelos de la estructura espiral de la Galaxia. El primer paso consistió en aproximar el lugar geométrico de los brazos espirales, lo cual se hizo con espirales logarítmicas o aproximadamente logarítmicas (Vallée 1995; Drimmel 2000, etc.).

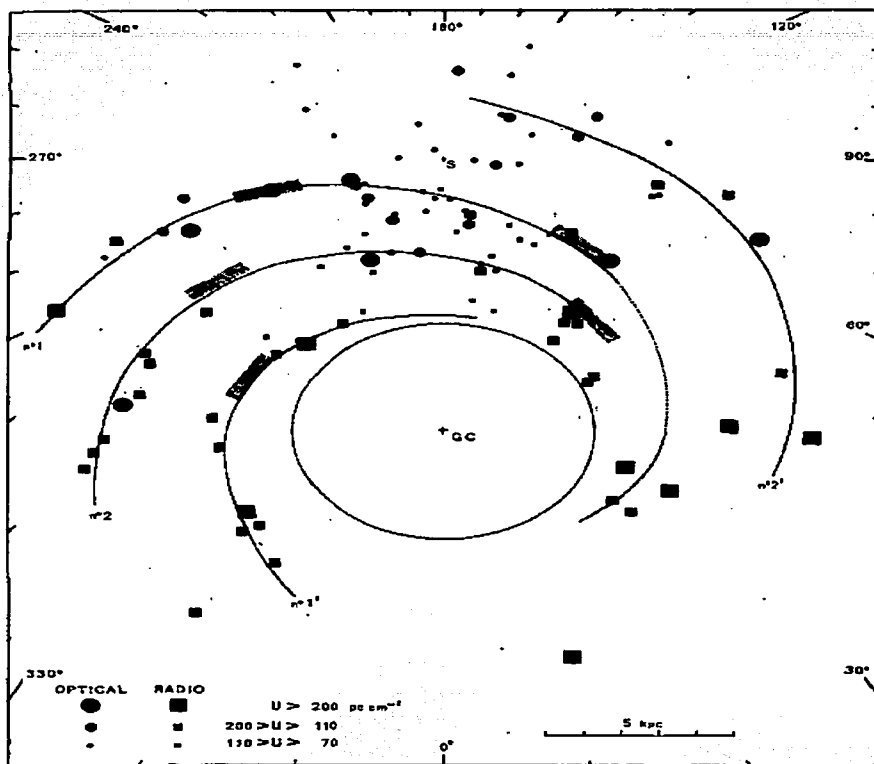


FIGURA 3.2: Modelo espiral de nuestra Galaxia obtenido de emisión de regiones III; El patrón espiral resultante tiene dos pares de brazos simétricos. No.1. Brazo Sagitario-Carina; No.2. Brazo Scutum-Crux; No.1'. Brazo Norma; No.2'. Brazo Perseo. Las barras grises corresponden al máximo en intensidad en el radio continuo e hidrógeno neutro.

Para este trabajo hemos adoptado la forma analítica proporcionada por Roberts, Huntley y van Albada (1979), donde se propone una espiral que aproxima una barra

en el centro de la Galaxia y dos brazos espirales que surgen de los extremos de la barra con un ángulo de enrollamiento fijo; a grandes distancias estos brazos trazan aproximadamente una espiral logarítmica. En la Sección 3.3.2, describiremos con más detalle este lugar geométrico para los brazos espirales.

3.2.2 Número de Brazos

Es muy importante, cuando se interpretan las observaciones para determinar la morfología de una galaxia determinada, considerar el trazador que se utiliza en los diagnósticos observacionales. Esto, debido a que, diferentes trazadores (como regiones HII o estrellas de población vieja, gas y polvo) resultan en diferentes morfologías y posiciones de los brazos espirales. De esta forma, aunque el patrón espiral, como perturbación al potencial global estelar (esto es, el de población más vieja) es único, existen otros tipos de brazos espirales en una misma galaxia compuestos por población joven, los cuales se cree que son la respuesta a los brazos espirales de población vieja.

Siguiendo lo anterior, se encuentran numerosas imágenes de galaxias espirales observadas en diferentes longitudes de onda que muestran las enormes diferencias estructurales, tanto entre las galaxias, como entre observaciones a diferentes longitudes de onda de una misma galaxia. La Vía Láctea es un buen ejemplo de esto.

La estructura espiral obtenida en la banda K con el perfil de emisión de la Galaxia (Drimmel 2000; Drimmel y Spergel 2001), sugiere que una estructura espiral de dos brazos domina la emisión no axisimétrica, y es consistente con observaciones en el cercano infrarrojo de galaxias, en las que los brazos están bastante bien descritos como logarítmicos, y más abiertos que sus contrapartes ópticas (Rix y Zaritsky 1995; Grosbøl y Patsis 1998). También es importante hacer notar que los patrones de dos brazos son más comunes en las observaciones en la banda K (que representa principalmente a la parte estelar de las galaxias) en discos de galaxias externas, sin importar su estructura en bandas del visible, la cual puede mostrar escasa correlación con las espirales en el cercano infrarrojo (Seigar y James 1998).

La disparidad entre la estructura espiral observada en la Galaxia en la banda K (asociada a dos brazos; Drimmel 2000) y en el óptico (asociada a cuatro brazos; Georgelin y Georgelin 1976; Caswell y Haynes 1987; Vallée 1995) puede entenderse recordando

que los trazadores ópticos son producto de formación estelar en los brazos gaseosos, producidos probablemente como respuesta a una perturbación en la densidad estelar de la población estelar vieja, con forma de dos brazos (Drimmel 2000).

Por otra parte, a partir de simulaciones hidrodinámicas, se conoce que la respuesta del gas a un potencial barrado puede producir una estructura espiral de 4 brazos (Englmaier y Gerhard 1999, Fux 1999).

Desde el punto de vista teórico, la Galaxia parece mantener de hecho $\Omega - \kappa/m$, con $m = 2$ (es decir, dos brazos), aproximadamente constante para un intervalo grande en la distancia Galactocéntrica; donde Ω es la frecuencia angular de rotación estelar y κ la frecuencia epicyclica. Dado que la zona donde las órbitas periódicas (2/1, es decir, dos ciclos radiales por uno acimutal) apoyan a un patrón de dos brazos persiste a distancias mayores que en uno de tres o cuatro brazos, se afirma la idea de un patrón de dos brazos para la componente estelar (Toomre 1977, Sparke y Gallagher 2000); para una revisión de las observaciones acerca del número de brazos espirales y ángulos de enrollamiento ver Vallée (1995).

Debido a que existe evidencia de un patrón complejo de brazos espirales en la Galaxia, los estudios realizados en esta Tesis sobre estructura orbital en el potencial Galáctico (Sección 3.5), fueron hechos considerando tanto un patrón de dos brazos espirales, que corresponde a las observaciones en la banda K de la componente estelar vieja de la Galaxia, como un patrón de brazos múltiples, que incluyen tanto los dos brazos observados en la banda K (usualmente asociados con las estrellas) como los brazos ópticos (asociados con el gas).

3.2.3 Angulo de enrollamiento (“Pitch Angle”) de los Brazos Espirales

Otro parámetro difícil de medir en nuestra Galaxia es el ángulo de enrollamiento de los brazos espirales. Esto se debe, además de las ineludibles fuentes de error experimental, al hecho de que no se conoce aún un modelo que unifique las observaciones y proporcione una imagen coherente de la estructura de los brazos espirales en la Galaxia. El ángulo de enrollamiento de los brazos espirales varía, no sólo de un observador a otro (o de una interpretación de los resultados a otra), sino también según la longitud de onda a la

cual se hace una observación dada; en otras palabras, varía también de acuerdo con el material observado (gas o estrellas). Sin embargo, se han hecho esfuerzos importantes por medir el ángulo de enrollamiento, algunos de los cuales son resumidos a continuación (y presentados también en una forma más compacta en la Tabla 3.1).

Una de las herramientas principales para el cálculo de este parámetro en particular, es el uso de campos magnéticos. En galaxias espirales las líneas de campo magnético siguen comúnmente los brazos espirales (Beck 1993; Heiles 1995). Para nuestra Galaxia, Heiles (1995), basado en datos de polarización de la luz estelar, encuentra las líneas de campo como espirales, con un ángulo de enrollamiento local i_p de $7.2^\circ \pm 4.1^\circ$. Rand y Lyne (1994) y Vallée (1995), basados en medidas de rotación y dispersión en pulsares, más la suposición de que las líneas son circulares, que no siguen los brazos espirales y con origen el centro Galáctico, obtienen para la Galaxia un ángulo de $12 \pm 1^\circ$ aproximadamente.

Por otro lado, Avedisova (1985) hace un estudio de los brazos espirales de la Vía Láctea con 255 nebulosas de emisión, con distancias fotométricas conocidas, y encuentra un ángulo de enrollamiento $i_p = 18$ a 20° . Drimmel y Spergel (2001), usando observaciones de estrellas y polvo en el cercano y lejano infrarrojo con el instrumento COBE/DIRBE, calculan $i_p \sim 15^\circ$.

Amaral y Lépine (1997), construyen modelos autoconsistentes de la Galaxia basados en modelos recientes de conteos de estrellas, y encuentran una solución autoconsistente con $i_p \sim 14^\circ$. Ángulos de enrollamiento menores ($\approx 6^\circ$) para modelos de 2 brazos son obtenidos con cinemática de cefeidas, de donde se obtienen parámetros para la construcción de la curva de rotación Galáctica y parámetros de las ondas de densidad espirales (Lépine, Mishurov y Dedikov 2001).

Para este trabajo adoptamos tres valores diferentes del ángulo de enrollamiento. El primero es para un modelo bisimétrico (i.e. de dos brazos), que intenta aproximar la posición de todos los brazos observados en la Galaxia, es decir, los cuatro brazos ópticos y los dos de la banda K. Para este caso el ángulo de enrollamiento es $i_p = 11^\circ$. Para el segundo caso analizado en este trabajo, que corresponde al patrón espiral de dos brazos obtenido con observaciones en la banda K, el ángulo de enrollamiento es $i_p = 15.5^\circ$ (Drimmel 2000). Finalmente, hemos considerado la superposición del patrón espiral en la banda K con el patrón espiral de cuatro brazos ópticos, este último con el ángulo de

enrollamiento $i_p = 12^\circ$ (Vallée 2002).

Tabla 3.1: Los ángulos de enrollamiento

No. Brazos	i_0 (grados)	Autor	Método
4	7.2 ± 4.1	Heiles (1995)	Polarización de luz estelar
4	2 ± 1	Rand y Lyne (1994) y Vallée (1995)	medidas de rotación y dispersion en pulsares
2	~ 15	Drimmel y Spergel (2001)	Observaciones de estrellas y polvo con el COBE/DIRBE
4	18-20	Avedisova (1985)	Muestra de 255 nebulosas de emisión
2+4	~ 14	Amaral y Lépine (1997)	Con modelos encuentran una solución autoconsistente con 2+4 brazos (estelares y de gas)
2	< 6	Lépine, Mishurov y Dedikov (2001)	Cinemática de cefeidas
2	$\sim 15.5^{(†)}$	Drimmel (2000)	Banda K, COBE/DIRBE
4	$\sim 12^{(†)}$	Vallée (2000)	Brazos ópticos (regiones HII).

(†) Valores adoptados en este trabajo.

3.2.4 Altura de los Brazos en la Dirección Perpendicular al Plano Galáctico y Anchura

En la misma forma que con el ángulo de enrollamiento, la altura en la dirección perpendicular al plano Galáctico y el ancho de los brazos espirales en la Galaxia, resultan muy difíciles de determinar. El primer problema es especificar la naturaleza del brazo (gas o estrellas, o polvo) y el segundo son las dificultades intrínsecas que se tienen siempre para determinar parámetros de los brazos. En particular, en lo referente a la altura sobre el plano de la Galaxia, no existe un trabajo observacional que proporcione el valor de este parámetro. De esta forma, y bajo la suposición de que la Vía Láctea es una galaxia espiral común, hemos tomado del trabajo de Kennicutt y Hodge (1982), una

aproximación para el ancho de los brazos espirales. En ese trabajo los autores analizan las propiedades morfológicas de una muestra de 17 galaxias espirales, encontrando un intervalo en el ancho de los brazos espirales para esta muestra de 0.5-1 kpc (Figura 4 del artículo de Kennicutt y Hodge) sin extraer el disco galáctico. Por otro lado, si intentamos aproximar el contraste en densidad (Sec. 3.2.7) observado en la Galaxia, considerando la caída lineal en densidad perpendicular al brazo (ver Sección 3.3.3) y el intervalo en masa que hemos asumido (Sección 3.2.6), tenemos aproximadamente un ancho de 2 kpc que resulta aproximadamente similar a los resultados de Kennicutt y Hodge.

Hemos tomado $z_{br} = 0.5$ kpc, donde z_{br} es la altura del brazo espiral medida desde el plano medio del disco, en la dirección perpendicular a éste. Este valor corresponde aproximadamente a una cantidad intermedia entre mediciones observacionales de los llamados discos estelares grueso y delgado (con escalas de altura $h_z \sim 0.3$ y 1 kpc respectivamente), determinadas de abundancias químicas en la Galaxia (Pardi, Ferrini, Matteucci 1995). Para una discusión sobre la estructura vertical de los brazos espirales ver también Martos y Cox 1998.

3.2.5 Límite externo de los Brazos

Contopoulos y Grosbøl (1986, 1988) así como Patsis, Contopoulos y Grosbøl (1991), construyeron modelos autoconsistentes de galaxias espirales a partir de una muestra estadística de observaciones de galaxias sin barra con fotometría y curva de rotación conocidas. En su análisis encuentran que algunas espirales terminan en la resonancia 4/1 del disco y las denominan “espirales fuertes”. Otras espirales que denominan “espirales débiles”, terminan en la resonancia de corrotación o incluso más lejos, hasta la resonancia externa de Lindblad (Vauterin y Dejonghe 1996; Kikuchi, Korchagin y Miyama 1997), como la teoría lineal predice. De acuerdo con este criterio, las espirales fuertes son aquellas cuyo máximo en la fuerza radial corresponde al 6% o más de la fuerza radial axisimétrica.

En el caso de la Vía Láctea, resulta difícil determinar la posición de la resonancia 4/1 (y en general de todas las resonancias) ya que éstas dependen de otro parámetro, también muy discutido, que es la velocidad angular (Ω_p) del patrón espiral. Hemos ele-

gido entonces para el límite externo de los brazos espirales los resultados obtenidos por observaciones que proporcionan una distancia galactocéntrica $R_f \sim 12$ kpc (Georgelin y Georgelin 1976; Caswell y Haynes 1987; Drimmel 2000).

3.2.6 Fuerza Radial y Masa de los Brazos

En el modelaje convencional de los brazos espirales como una perturbación al potencial axisimétrico, resulta muy complicado determinar la masa aproximada de la perturbación (i.e., la masa de los brazos espirales), así que en este caso se habla entonces de la razón de fuerzas radiales de los brazos vs. el fondo axisimétrico.

Patsis, Contopoulos y Grosbøl (1991) construyeron una familia de modelos autoconsistentes aplicados a doce galaxias espirales normales con curvas de rotación y fotometría superficial conocidas. Estas galaxias forman una muestra de los tipos Sa, Sb y Sc. Ellos encuentran una correlación entre el ángulo de enrollamiento de los brazos espirales y la razón de fuerza radial de los brazos a la fuerza del potencial axisimétrico de fondo. De forma que para ángulos de enrollamiento entre 11° y 16° (que corresponden a galaxias Sb, como parece ser la Vía Láctea), se obtienen razones de fuerzas radiales entre 4% y 10%, en promedio (que en nuestros modelos se traduce a razones de masa de los brazos M_B , a masa del disco M_D ² de $M_B/M_D = 0.0175, 0.05$). Esto es, en nuestro caso, la masa de los brazos espirales es un parámetro que podemos ajustar.

Otros modelos basados en observaciones encuentran independientemente una razón de fuerzas de aproximadamente 4% (Amaral y Lépine 1997).

3.2.7 Ley de Densidad a lo largo del Brazo Espiral y Contraste de Densidad Superficial Observado

Para este trabajo, hemos considerado dos perfiles distintos de densidad a lo largo del eje de simetría de los brazos espirales. La primera es una caída lineal (ver Sección 3.3), como un experimento inicial sencillo. La segunda es una ley exponencial (Sec. 3.3), mejor fundamentada observacionalmente, ya que se conoce que los discos mismos de las galaxias espirales caen exponencialmente con la distancia galactocéntrica (Amaral y Lépine 1997; Drimmel 2000).

²donde $M_D = 8.56 \times 10^{10} M_\odot$, es la masa del disco en el modelo de Allen y Santillán (1991)

Los resultados obtenidos usando ambos perfiles serán presentados más adelante, aunque debe hacerse notar que la diferencia entre los cálculos producidos por el perfil lineal de los brazos espirales no cambian drásticamente respecto a los resultados del perfil exponencial.

Por otro lado, el contraste entre la densidad superficial de los brazos vs. la densidad superficial del fondo axisimétrico más los brazos es del 20% aproximadamente, según los cálculos de Englmaier y Gerhard (1999). En este resultado hay un buen acuerdo con otros trabajos.

3.2.8 Velocidad Angular Ω_p del Patrón Espiral

La suposición de que los brazos espirales giran rígidamente a una velocidad angular Ω_p dada y el valor mismo de esta velocidad, han sido materia de debate por mucho tiempo.

En la teoría de ondas espirales aplicada a la Galaxia, Lin y Shu (1964,1966) encuentran una velocidad angular para el patrón de $\Omega_p = 13.5 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Por otra parte Amaral y Lépine (1997) encuentran modelos autoconsistentes también aplicados a la Galaxia, con Ω_p de 15 a 26 $\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ y proponen una velocidad para su mejor modelo de $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, empleando observaciones de cúmulos abiertos en la Galaxia.

Sitnik (1991) encuentra velocidades angulares del orden de 17 a 26 $\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, a partir de observaciones de complejos gigantes de estrellas y gas embebidos en super nubes de gas HI, detectados a 3 kpc del Sol, notando un gradiente en la edad de los grupos estelares dentro de estas nubes, que atribuyen a estimulación de formación estelar por el paso de una onda espiral cuya velocidad aproximada puede calcularse.

Por otra parte, de los cálculos hidrodinámicos de Englmaier y Gerhard (1999) y Fux (1999), se encuentra que la respuesta gaseosa en el disco Galáctico a un potencial barrado sugiere que Ω_p podría ser tan grande como la de la barra (60 $\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$); sin embargo, Englmaier y Gerhard aceptan en este mismo trabajo que la barra y los brazos podrían no tener la misma velocidad angular.

Construiremos ahora el modelo matemático que representará a los brazos espirales de una galaxia dada y el código numérico que integra las órbitas en este potencial. Deseamos modelar específicamente la Vía Láctea y para este propósito hemos elegido

los parámetros y ajustado el modelo lo mejor posible a las observaciones más recientes de la Galaxia.

3.3 Construcción Analítica de un Modelo Tridimensional para los Brazos Espirales con Esferoides Oblatos Inhomogéneos. Potencial y Fuerzas

Actualmente la mayoría de los modelos de brazos espirales galácticos consideran a esta componente como una perturbación a un potencial axisimétrico, de la forma dada por la ecuación (3.1).

¿Porqué generar un modelo más realista de brazos espirales, en lugar de tomar las simplificaciones ya conocidas?.

- Partiendo de la necesidad de un potencial tridimensional de brazos espirales para los propósitos de este trabajo y de trabajo futuro con los modelos presentados aquí, el potencial de Lin y Shu no resulta aplicable en su forma original, ya que éste es bidimensional. Aunque existen extensiones a la tercera dimensión (mencionadas en la Introducción de este Capítulo), éstas son *ad hoc*, es decir, no necesariamente autoconsistentes en el sentido de la ecuación de Poisson. De esta forma hemos considerado conveniente introducir un potencial tridimensional, tanto para estudios de órbitas estelares como para estudios hidro y magnetohidrodinámicos en la Galaxia.

- Desde una perspectiva empírica, si se observan imágenes de galaxias espirales en el óptico, es fácil identificar en primer plano a las estructuras más prominentes y espectaculares en estas galaxias, que son precisamente los brazos. La sola observación de estas imágenes nos sugiere ponerle especial cuidado a la representación y modelaje de estas complicadas estructuras que afectan la componente gaseosa notablemente y son los lugares principales donde se da la formación estelar de las galaxias espirales.

- Por otra parte creemos que la validez de cualquier suposición o aproximación local para los brazos espirales Galácticos (Martos y Cox 1998; Lépine, Mishurov y Dedikov 2001; Amaral y Lépine 1997), requiere ser comprobada con un modelo tridimensional.

Como se mencionó en la Introducción de este Capítulo, una de las razones para el uso de la aproximación de Lin y Shu de un potencial espiral, es su simplicidad matemática.

Desafortunadamente no se conocen ecuaciones sencillas para el cálculo del potencial y fuerza de una distribución de masa inhomogénea (ni homogénea), tridimensional y de forma espiral. Sin embargo, en la teoría de potencial se conocen las expresiones del potencial y fuerza para objetos geoméricamente más simples y en general con distribución inhomogénea de masa. Por ejemplo, los elipsoides triaxiales, los esferoides, oblatos y los esferoides prolatos, los homeoides (cascarones esferoidales), o estructuras más simples como discos y esferas (Kellogg 1953; MacMillan 1930).

La forma de los brazos espirales es complicada no sólo por el hecho de que se trata de una espiral, lo cual ya dificulta bastante el problema, sino porque su sección transversal no es circular -esto es, no es un cilindro espiral- sino bastante achatada en la dirección perpendicular al disco galáctico (Sección 3.2.4).

Debido a lo anterior, y dado que no tenemos un potencial para los brazos espirales, hemos hecho una construcción muy simple, aprovechando resultados conocidos de la teoría del potencial de los elipsoides y esferoides. Es necesario analizar primero si, dado el principio de superposición de potenciales, los elipsoides o esferoides pueden hacer las veces de "ladrillos" en la construcción del "edificio" de los brazos espirales.

La idea se basa en un principio de superposición³, y consiste en colocar un conjunto de objetos individuales -elipsoides o esferoides-, a lo largo de un lugar geométrico (*locus*) de forma espiral, como se describe en la sección 3.3.2. Estos objetos son como las cuentas en un collar, pero tienen la libertad de traslaparse para representar una distribución de masa relativamente suave. Tenemos ahora que elegir entre alguna de las tres posibilidades: elipsoides, esferoides prolatos, esferoides oblatos.

Una primera posibilidad para el tipo de objetos que se puede emplear para simular las características geométricas que hemos descrito de brazos espirales, son los elipsoides. Estas componentes triaxiales tienen mayor libertad geométrica que los esferoides, y se podrían colocar, por ejemplo, de tal forma que sus ejes mayores coinciden con la tangente local del brazo espiral. De esta manera obtendríamos una sección transversal elíptica del brazo espiral, y los ejes menores de las componentes elipsoidales determinarían la altura (con el semieje menor a lo largo de la coordenada perpendicular al plano del disco) y el ancho (con el semieje medio en el plano del disco galáctico, perpendicu-

³El principio de superposición de potenciales tiene su origen en el hecho de que la ecuación de Poisson es lineal.

lar a los brazos) del brazo. Sin embargo, debido a que aun en el caso más simple de componentes elipsoidales homogéneas las expresiones del potencial y fuerza hacen uso de integrales elípticas, el costo computacional comparado con los esferoides (oblatos o prolatos) es considerablemente más alto. Esto hace suficiente para nuestros propósitos el uso de esferoides, oblatos o prolatos. Una segunda posibilidad es entonces emplear esferoides prolatos. Lo más fácil de imaginar es colocar estas componentes con el eje mayor paralelo al lugar geométrico del brazo espiral. Sin embargo esto claramente nos daría una sección transversal circular, mientras que si colocamos el eje mayor del esferoide sobre el plano galáctico y perpendicular al eje de simetría del brazo, obtendríamos una sección transversal elíptica, pero necesitaríamos un número considerable de esferoides (tomando en cuenta que la altura del brazo será más pequeña que su ancho) para generar el brazo, lo cual nos regresa al problema de los elipsoides en el sentido del costo computacional.

Hemos finalmente elegido para la construcción de los brazos espirales una tercera posibilidad: el empleo de esferoides oblatos. Estos esferoides son colocados de manera que sus ejes ecuatoriales están en el plano del disco galáctico y su eje menor es perpendicular al disco galáctico. Con ésto la sección transversal del brazo es elíptica y se puede generar el brazo de una forma suave con un número menor de esferoides, en comparación al caso de esferoides prolatos.

Cabe mencionar finalmente que, dada la distribución que se propone para los esferoides, es posible hacer el brazo tan suave o floculento (que significa de brazos fragmentados y difusos) como sea necesario; esto se hace cambiando la distancia entre los centros de cada esferoide de tal manera que cuanto más se traslapan, la distribución de masa se vuelve más suave, mientras que cuando se separan, ésta se vuelve más floculenta. De esta forma podemos simular los brazos suaves de las galaxias tempranas, o para galaxias en general, los brazos suaves estelares (que se observan en las bandas infrarrojas), los brazos floculentos de galaxias tardías, y los brazos que se observan en el óptico, formados principalmente por regiones HII gigantes.

3.3.1 Potencial y Fuerza para Esferoides Oblatos Homogéneos e Inhomogéneos

En la representación de brazos espirales como una superposición de esferoides oblatos, el potencial y fuerza de los brazos en cualquier punto del espacio es la suma de los correspondientes campos de cada esferoide. En esta sección damos las ecuaciones para el potencial y fuerza de un esferoide oblató.

En imágenes de galaxias espirales, observadas en cualquier longitud de onda, se puede observar como el brillo de los brazos mantiene un contraste con el disco casi constante, lo cual implica que la densidad de los brazos espirales tiene una relación directa con el disco (Elmegreen 1998); esto significa que la densidad del brazo cae a lo largo de éste. Los brazos tampoco son homogéneos en la dirección perpendicular a éste. Proponemos entonces una superposición de esferoides oblatos inhomogéneos. En particular, emplearemos la teoría de potencial para esferoides oblatos inhomogéneos con **estratificación similar** en la densidad (Schmidt 1956). Para estos esferoides, las superficies de igual densidad son oblatas, concéntricas, con ejes paralelos y con una misma razón axial igual a la razón de ejes de la superficie frontera del esferoide oblató inhomogéneo (Fig. 3.3).

El semieje mayor a , de la superficie de igual densidad que pasa por un punto (x,y,z) , satisface la relación,

$$a^2 = x^2 + y^2 + \frac{z^2}{1 - e^2}, \quad (3.2)$$

con $e \equiv (1 - \frac{c^2}{a^2})^{1/2}$ la excentricidad de la superficie, c el semieje menor y $\frac{c}{a}$ la razón axial común a todas las superficies. Entonces la densidad en estratificación similar se puede expresar de la forma $\rho = \rho(a)$.

Como una primera aproximación, y considerando su fácil aplicación, hemos tomado como perfil de densidad $\rho(a)$, en los esferoides oblatos inhomogéneos que componen los brazos espirales, la forma de caída lineal, esto es,

$$\rho(a) = \begin{cases} p_0 + p_1 a, & a < a_r \\ 0, & a \geq a_r \end{cases} \quad (3.3)$$

con $p_0 (> 0)$, $p_1 (< 0)$ constantes en un esferoide dado. p_0 es la densidad central del esferoide. De esta forma para $\rho(0)$, $p_0 = -p_1 a_r$.

El potencial y campo de fuerza de un esferoide oblato inhomogéneo con la densidad lineal dada por la ecuación (3.3), han sido obtenidos por Schmidt (1956). En seguida daremos una breve descripción del procedimiento.

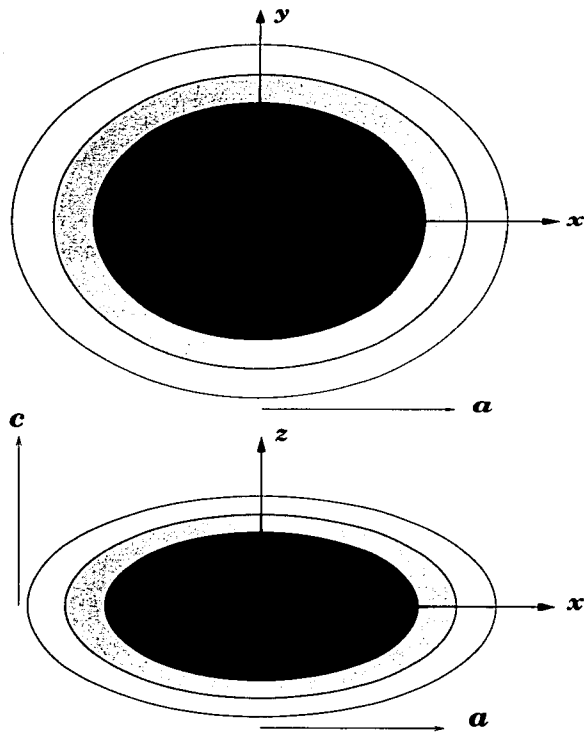


FIGURA 3.3: Esquema de un esferoide oblato inhomogéneo con estratificación similar, en el plano x-y (arriba) y en el plano x-z (abajo).

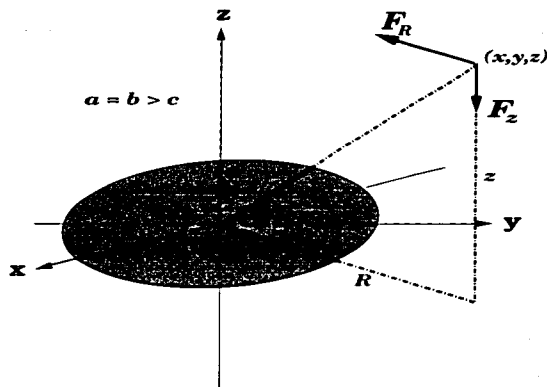


FIGURA 3.4: Esferoide oblatto homogéneo y las coordenadas cilíndricas empleadas.

Esferoide Oblato Homogéneo

Como punto de partida, se requieren las expresiones del potencial y fuerza de un esferoide oblatto homogéneo. En coordenadas cilíndricas (R, z) (Fig. 3.4), estas expresiones son (Schmidt 1956),

$$\Phi = -2\pi e^{-1} \sqrt{1 - e^2} \rho a^2 \beta - \frac{1}{2} (R F_R + z F_z), \quad (3.4)$$

$$F_R = -2\pi e^{-3} \sqrt{1 - e^2} \rho R (\beta - \text{sen} \beta \cos \beta), \quad (3.5)$$

$$F_z = -4\pi e^{-3} \sqrt{1 - e^2} \rho z (\tan \beta - \beta), \quad (3.6)$$

que representan el potencial Φ (tal que $\Phi = 0$ para $r \rightarrow \infty$) y las fuerzas por unidad de masa en el punto (x, y, z) , y se toman las unidades de tal manera que $G = 1$. ρ es la densidad constante del esferoide, $e = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ es la excentricidad, con a, c los semiejes mayor y menor respectivamente (Fig. 3.4). Si el punto (x, y, z) , se encuentra dentro del esferoide, β está dada por,

$$\operatorname{sen} \beta = e, \quad (3.7)$$

mientras que para (x, y, z) fuera del esferoide, β es la solución de la ecuación,

$$R^2 \operatorname{sen}^2 \beta + z^2 \tan^2 \beta = a^2 e^2. \quad (3.8)$$

Esferoide Oblato Inhomogéneo

La idea de Schmidt (1956) para representar un esferoide oblatto inhomogéneo ("in-homogéneo" en el sentido de que posee una ley de densidad más complicada que una densidad constante), consiste en la superposición de esferoides oblatos homogéneos (más propiamente dicho, es una superposición de cascarones esferoidales homogéneos, también conocidos como *homeoides* -Binney y Tremaine 1994-) en forma similar, con densidad infinitesimal. En la Figura 3.5 se ilustra esta superposición para el caso particular de la densidad $\rho(a) = \rho_0 + \rho_1 a$ considerada. Esta misma idea de superposición de componentes homogéneas es utilizada posteriormente en el modelaje de la barra Galáctica (Capítulo 4).

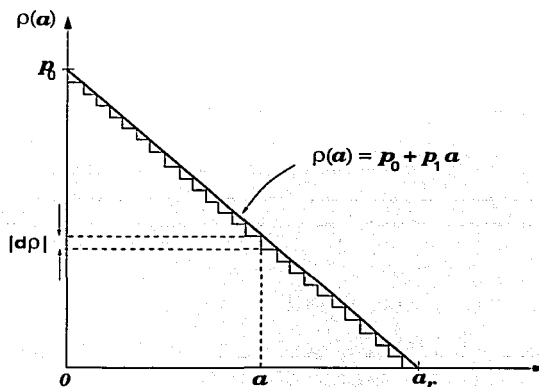


FIGURA 3.5: Superposición de componentes homogéneas para la construcción de un esferoide inhomogéneo. Una componente típica tiene semieje mayor a y densidad $|d\rho|$.

Calculamos primero el potencial y fuerza en un punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$, dentro del esferoide inhomogéneo; esto es, en la región de superposición. La densidad en el punto \mathbf{r} , $\rho(\mathbf{r})$, es la suma de las densidades de todos los esferoides homogéneos que contienen al punto. Para esos esferoides homogéneos β está dada por la ecuación (3.7), mientras que para todos los demás esferoides β está dada por la ecuación (3.8).

Entonces, de la ecuación (3.5), la componente R de la fuerza es,

$$F_R = -2\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2}R \left\{ \left(\text{sen}^{-1} e - e\sqrt{1-e^2} \right) \rho(\mathbf{r}) + \int_{\rho(\mathbf{r})}^{\rho_c} (\beta - \text{sen}\beta\cos\beta) d\rho \right\}, \quad (3.9)$$

con ρ_c la densidad central y en la integral se aplica la relación (3.8). Resolviendo la integral por partes, tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{\rho(\mathbf{r})}^{\rho_c} (\beta - \text{sen}\beta\cos\beta) d\rho &= (\beta - \text{sen}\beta\cos\beta) \rho \Big|_{\rho(\mathbf{r})}^{\rho_c} \\ &\quad - \int_{\text{sen}^{-1} e}^0 \rho \frac{d}{d\beta} (\beta - \text{sen}\beta\cos\beta) d\beta \\ &= - \left(\text{sen}^{-1} e - e\sqrt{1-e^2} \right) \rho(\mathbf{r}) \\ &\quad + 2 \int_0^{\text{sen}^{-1} e} \rho \text{sen}^2 \beta d\beta, \end{aligned}$$

finalmente,

$$F_R = -4\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2}R \int_0^{\text{sen}^{-1} e} \rho \text{sen}^2 \beta d\beta. \quad (3.10)$$

Análogamente,

$$F_z = -4\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2}z \int_0^{\text{sen}^{-1} e} \rho \tan^2 \beta d\beta. \quad (3.11)$$

De la misma forma obtenemos el potencial,

$$\Phi = -2\pi e^{-1}\sqrt{1-e^2} \left\{ \text{sen}^{-1} e \int_0^{\rho(\mathbf{r})} a^2 d\rho + \int_{\rho(\mathbf{r})}^{\rho_c} a^2 \beta d\rho \right\} - \frac{1}{2}(RF_R + zF_z),$$

siendo β determinada por la relación (3.8). Resolviendo las integrales por partes y notando de las ecuaciones (3.10) y (3.11) que,

$$\frac{1}{2}(RF_R + zF_z) = -2\pi e^{-1}\sqrt{1-e^2} \int_0^{\text{sen}^{-1} e} \rho a^2 d\beta,$$

tenemos,

$$\Phi = -4\pi e^{-1}\sqrt{1-e^2} \left[\int_0^{a(r)} \rho a \beta da + \text{sen}^{-1} e \int_{a(r)}^{a_r} \rho a da \right], \quad (3.12)$$

donde a_r es el valor de a correspondiente a $\rho = 0$, es decir, a la frontera del esferoide inhomogéneo y $a(\mathbf{r}) = a(R, z)$ el semieje mayor del esferoide que pasa por el punto dado (\mathbf{r}) ,

$$a(R, z) = \left(R^2 + \frac{z^2}{\xi^2} \right)^{1/2},$$

con $\xi = c/a$ la razón axial.

Si ahora consideramos un punto \mathbf{r} fuera del esferoide inhomogéneo, tendremos entonces que $\rho(\mathbf{r}) = 0$, de modo que el primer término de la ecuación (3.9) desaparece. La integral tiene que ser evaluada sobre el intervalo $\rho = 0$ a $\rho = \rho_c$, que es equivalente al intervalo de $a = a_r$ a $a = 0$, o $\beta = \gamma$ a $\beta = 0$, donde γ está dado por,

$$R^2 \text{sen}^2 \gamma + z^2 \tan^2 \gamma = a_r^2 e^2, \quad (3.13)$$

de donde,

$$F_R = -4\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2} R \int_0^\gamma \rho \text{sen}^2 \beta d\beta, \quad (3.14)$$

y

$$F_z = -4\pi e^{-3}\sqrt{1-e^2} z \int_0^\gamma \rho \tan^2 \beta d\beta. \quad (3.15)$$

Análogamente el potencial es,

$$\Phi = -4\pi e^{-1}\sqrt{1-e^2} \int_0^{a_r} \rho a \beta da. \quad (3.16)$$

De esta forma se ha obtenido el potencial y las fuerzas de un esferoide no homogéneo para puntos internos empleando las ecuaciones (3.7), (3.10), (3.11) y (3.12), y para puntos externos las ecuaciones (3.8), (3.14), (3.15), (3.16).

Ahora aplicamos a esta formulación la ley de densidad específica propuesta en la ecuación (3.3).

Sustituyendo $\rho = p_0 + p_1 a$ en la ecuación (3.10) o (3.14), tenemos,

$$\begin{aligned} F_R(R, z, \beta_0) &= -\frac{\partial \Phi}{\partial R} = -4\pi e^{-3} \sqrt{1-e^2} R \int_0^{\beta_0} (p_0 + p_1 a) \operatorname{sen}^2 \beta d\beta \\ &= -4\pi e^{-3} \sqrt{1-e^2} R \left[p_0 \int_0^{\beta_0} \operatorname{sen}^2 \beta d\beta + p_1 \int_0^{\beta_0} a \operatorname{sen}^2 \beta d\beta \right], \end{aligned}$$

con β_0 la solución de la ecuación (3.7) si r es interior al esferoide, de lo contrario β_0 es la solución γ de la ecuación (3.13).

Resolviendo ambas integrales utilizando la relación (3.8) tenemos,

$$\begin{aligned} F_R(R, z, \beta_0) &= -4\pi e^{-4} \sqrt{1-e^2} R \left\{ \frac{1}{2} p_0 e (\beta_0 - \operatorname{sen} \beta_0 \cos \beta_0) \right. \\ &\quad + p_1 \left[\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2} \right] \\ &\quad + \frac{p_1}{3R^2} \left[(R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2)^{3/2} - (R^2 + z^2)^{3/2} \right] \\ &\quad \left. + p_1 z \ln \frac{(\sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2} + z) (\sqrt{R^2 + z^2} - z)}{R^2 \cos \beta_0} \right\}. \quad (3.17) \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} F_z(R, z, \beta_0) &= -2\pi e^{-4} \sqrt{1-e^2} \left\{ 2p_0 e z (\tan \beta_0 - \beta_0) \right. \\ &\quad + zp_1 \left[\frac{2 \cos^2 \beta_0 + 1}{\cos^2 \beta_0} \sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2} - 3\sqrt{R^2 + z^2} \right] + p_1 (R^2 - 2z^2) \\ &\quad \left. \cdot \ln \frac{(\sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2} + z) (\sqrt{R^2 + z^2} - z)}{R^2 \cos \beta_0} \right\}, \quad (3.18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(R, z, \beta_0) &= -4\pi e^{-4} \sqrt{1-e^2} \left\{ e^3 a_r^2 \beta_0 \left(\frac{1}{2} p_0 + \frac{1}{3} p_1 a_r \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} p_0 e \left[\frac{1}{2} R^2 (\beta_0 - \operatorname{sen} \beta_0 \cos \beta_0) + z^2 (\tan \beta_0 - \beta_0) \right] \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} p_1 \left[(R^2 + z^2)^{3/2} - (R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2)^{3/2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & + \frac{1}{3} p_1 \left[\frac{3}{2} z^2 - R^2 \right] \sqrt{R^2 + z^2} + \frac{1}{3} p_1 \left[R^2 - z^2 \left(\frac{2 \cos^2 \beta_0 + 1}{2 \cos^2 \beta_0} \right) \right] \sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + 1} \\
 & - p_1 \left(\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) z \ln \frac{\left(\sqrt{R^2 \cos^2 \beta_0 + z^2} + z \right) \left(\sqrt{R^2 + z^2} - z \right)}{R^2 \cos \beta_0}
 \end{aligned} \right\}. \quad (3.19)$$

La masa del esferoide oblató inhomogéneo es,

$$M_O = 4\pi \sqrt{1 - e^2} \int_0^{a_r} (p_0 + p_1 a) a^2 da = 4\pi a_r^3 \sqrt{1 - e^2} \left(\frac{1}{3} p_0 + \frac{1}{4} p_1 a_r \right).$$

Como $\rho = 0$ en la frontera, de la relación (3.3),

$$p_0 = -p_1 a_r, \quad (3.20)$$

sustituyendo p_0 en M_O tenemos,

$$M_O = -\frac{1}{3} \pi a_r^4 \sqrt{1 - e^2} p_1, \quad (3.21)$$

$$p_1 = \frac{-3M_O}{\pi a_r^4 \sqrt{1 - e^2}}.$$

3.3.2 La Superposición: Potencial y Fuerza de los Brazos Espirales Formados por Esferoides Oblatos Inhomogéneos

En esta Sección se describe en detalle la superposición de los esferoides oblatos para la representación del patrón de brazos espirales que hemos utilizado. Se da el lugar geométrico sobre el que se hace la superposición y se establece la forma general de las expresiones para el potencial y fuerza producidos por esta superposición. Estas expresiones se emplean finalmente en la siguiente sección para diferentes dependencias de la densidad central de una componente esferoidal en función de su distancia al centro Galáctico.

En la Figura 3.6 se ilustra la superposición de los esferoides sobre el lugar geométrico espiral. Para la descripción completa del potencial Galáctico, se requieren todas las componentes posibles que lo conforman, tanto las consideradas axisimétricas tales como el halo, bulbo, disco, como las no axisimétricas: brazos espirales y barra. La Figura 3.6, también ilustra las componentes axisimétricas. En el Apéndice A damos algunas

propiedades del potencial Galáctico axisimétrico de Allen y Santillán (1991), que hemos empleado a lo largo de este trabajo para la parte con simetría axial. La barra Galáctica se modela en el Capítulo 4.

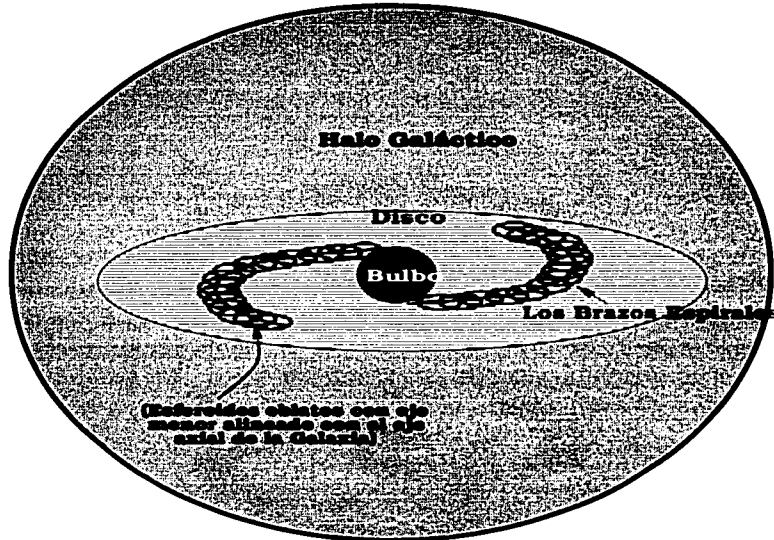


FIGURA 3.6: Esquema de la superposición del potencial axisimétrico y los brazos espirales formados por esferoides oblatos inhomogéneos.

Para la superposición de los esferoides es necesario especificar un lugar geométrico espiral sobre el cual colocarlos. Este lugar geométrico puede consistir de un número arbitrario de ramas espirales. En el tratamiento que damos en esta Sección, consideramos en particular un patrón espiral de dos brazos, pero en las aplicaciones del modelo de superposición, analizaremos situaciones que incluyen hasta seis brazos espirales en la Galaxia (Sección 3.5).

Ya que en las galaxias barradas, como la nuestra, los brazos espirales parecen emanar de la barra de tal forma que no se comportan como una espiral logarítmica desde su nacimiento, sino que pueden salir suavemente del brazo y variar ligeramente el ángulo de inclinación, hemos hallado conveniente en un patrón espiral de dos brazos, el empleo de la función $f(R)$, que interviene en la fase de la ecuación 3.1, en la forma dada por Roberts, Huntley y van Albada (1979),

$$f(R) = \frac{-2}{N \tan i_0} \ln \left[1 + \left(\frac{R}{R_s} \right)^N \right]. \quad (3.22)$$

Donde R_s es la distancia galactocéntrica a la cual el patrón espiral comienza y N es un parámetro que determina la forma de los brazos en su salida desde la barra, de tal forma que $N = 0$ significaría que los brazos se prolongan desde la barra con un ángulo de 180° , mientras que $N \rightarrow \infty$ significa una salida de los brazos formando un ángulo de 90° con la barra. El signo negativo en esta relación implica un enrollamiento del patrón espiral en el sentido de las manecillas del reloj (como en nuestra Galaxia, observada desde el polo norte Galáctico). i_0 es el ángulo de enrollamiento del patrón espiral respecto al círculo de radio R en el límite $R \rightarrow \infty$. En general el ángulo de enrollamiento i (ver Sección 3.2.3), a la distancia Galactocéntrica R , está dado por,

$$\tan i = \left[1 + \left(\frac{R_s}{R} \right)^N \right] \tan i_0, \quad (3.23)$$

entonces, si $N \rightarrow \infty$, en $R < R_s$, el patrón representa en realidad una barra (ya que $i \rightarrow 90^\circ$), y en $R > R_s$ se encuentra propiamente el patrón espiral con $i \rightarrow i_0$. En las aplicaciones de la relación 3.22, tomaremos el límite de N grande ($N \sim 100$).

El patrón espiral de dos brazos se obtiene con $2\varphi + f(R) = 0$. Esto da las dos ramas espirales ($R \geq R_s$),

$$R_1 = R_s (e^{\varphi N \tan i_0} - 1)^{1/N}, \quad \varphi \geq \frac{\ln 2}{N \tan i_0}, \quad (3.24)$$

$$R_2 = R_s (e^{(\varphi+\pi)N \tan i_0} - 1)^{1/N}, \quad \varphi \geq -\pi + \frac{\ln 2}{N \tan i_0}, \quad (3.25)$$

En la Figura 3.7, se muestran las dos ramas en el límite $N \rightarrow \infty$.

Tomamos ahora un sistema Cartesiano x', y' , anclado en los brazos espirales con origen en el centro de la Galaxia (Fig. 3.7). Las coordenadas de cualquier punto (x'_1, y'_1) sobre la espiral R_1 son,

$$x'_1 = R_1 \cos \varphi,$$

$$y'_1 = R_1 \operatorname{sen} \varphi.$$

Por simetría respecto al origen, con las coordenadas Cartesianas (x'_1, y'_1) de un punto en el primer brazo, las coordenadas en el segundo brazo son,

$$x'_2 = -x'_1,$$

$$y'_2 = -y'_1.$$

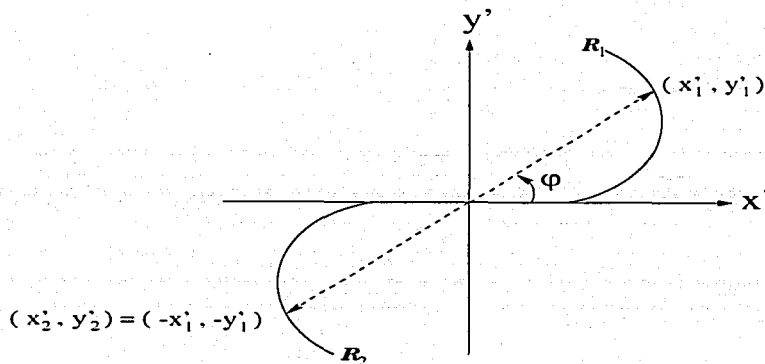


FIGURA 3.7: Las dos ramas del patrón espiral en el límite $N \rightarrow \infty$ y las coordenadas de un punto dado (x'_1, y'_1) sobre el brazo espiral R_1 y el punto opuesto (x'_2, y'_2) en el brazo espiral R_2 .

Dada una separación entre centros de esferoides, es necesario calcular la posición de estos centros a lo largo de las dos ramas espirales R_1 y R_2 . Debido a la simetría del sistema, es suficiente si analizamos sólo la rama R_1 .

En general para una curva dada $R(\varphi)$ tenemos,

$$x' = R \cos \varphi,$$

$$y' = R \operatorname{sen} \varphi,$$

de donde,

$$dx' = -R \operatorname{sen} \varphi d\varphi + dR \cos \varphi,$$

$$dy' = R \cos \varphi d\varphi + dR \operatorname{sen} \varphi,$$

entonces,

$$(dx')^2 + (dy')^2 = R^2(d\varphi)^2 + (dR)^2,$$

de donde, la diferencial de la longitud de arco, d_s , es,

$$d_s = \sqrt{R^2(d\varphi)^2 + (dR)^2} = \left\{ R^2 + \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2 \right\}^{1/2} |d\varphi|.$$

Para $R_1(\varphi)$ dado por la relación (3.24),

$$\begin{aligned} \frac{dR_1}{d\varphi} &= \frac{d}{d\varphi} \left\{ R_s [e^{\varphi N \tan i_0} - 1]^{1/N} \right\} \\ &= R_s \tan i_0 e^{\varphi N \tan i_0} \{e^{\varphi N \tan i_0} - 1\}^{\frac{1}{N}-1}. \end{aligned}$$

Si llamamos $U(\varphi) = \varphi N \tan i_0$ se tiene,

$$\frac{dR_1}{d\varphi} = R_s \tan i_0 e^{U(\varphi)} \{e^{U(\varphi)} - 1\}^{\frac{1}{N}-1}.$$

Entonces con $d\varphi \geq 0$,

$$\begin{aligned} ds &= \left\{ R_s^2 (e^U - 1)^{2/N} + R_s^2 \tan^2 i_0 e^{2U} [e^U - 1]^{2(\frac{1}{N}-1)} \right\}^{1/2} d\varphi \\ &= R_s (e^U - 1)^{\frac{1}{N}-1} \{e^{2U} \sec^2 i_0 - 2e^U + 1\}^{1/2} d\varphi. \end{aligned}$$

Si tomamos $s = 0$ donde comienza el brazo, es decir, en R_s tenemos,

$$s(\varphi) = R_s \int_{\varphi_1}^{\varphi} (e^U - 1)^{\frac{1}{N}-1} (e^{2U} \sec^2 i_0 - 2e^U + 1)^{1/2} d\varphi, \quad (3.26)$$

con $\varphi_1 = \frac{\ln 2}{N \tan i_0}$.

La separación entre centros de esferoides sucesivos se da como cierta longitud de arco d_s en el brazo R_1 . Entonces los centros de los esferoides se toman a las longitudes de arco $s_n = nd_s, n = 1, 2, 3, \dots, n_0$, con n_0 el número total de esferoides en el brazo R_1 . Los ángulos φ_n correspondientes, y por lo tanto las distancias $R_{1n}(\varphi_n)$, se obtienen con una inversión numérica de la ecuación (3.26). El número n_0 se obtiene especificando la distancia Galactocéntrica máxima, R_{1f} , para el patrón espiral. Si φ_f es el correspondiente ángulo acimutal, dado por,

$$\varphi_f = \frac{1}{N \tan i_0} \ln \left[1 + \left(\frac{R_{1f}}{R_s} \right)^N \right], \quad (3.27)$$

entonces de $s(\varphi_f)$ (ecuación 3.26), se obtiene la longitud de arco máxima a considerar y por lo tanto n_0 .

Con las posiciones angulares φ_n de los centros de los esferoides, las distancias correspondientes R_{1n} son,

$$R_{1n} = R_s (e^{\varphi_n N \tan i_0} - 1)^{1/N}. \quad (3.28)$$

Se necesita ahora conocer la posición de un punto dado en el espacio, $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, respecto al centro de cada esferoide. Esta posición se requiere para calcular la contribución del esferoide al potencial y fuerza totales en el punto \mathbf{r}' .

En las coordenadas Cartesianas (x', y') , el vector de posición del centro del n -ésimo esferoide en el brazo R_1 es,

$$\mathbf{r}'_{1n} = R_{1n} (\hat{\mathbf{i}}' \cos \varphi_n + \hat{\mathbf{j}}' \sin \varphi_n).$$

La posición del mismo esferoide correspondiente en el brazo R_2 , es $\mathbf{r}'_{2n} = -\mathbf{r}'_{1n}$.

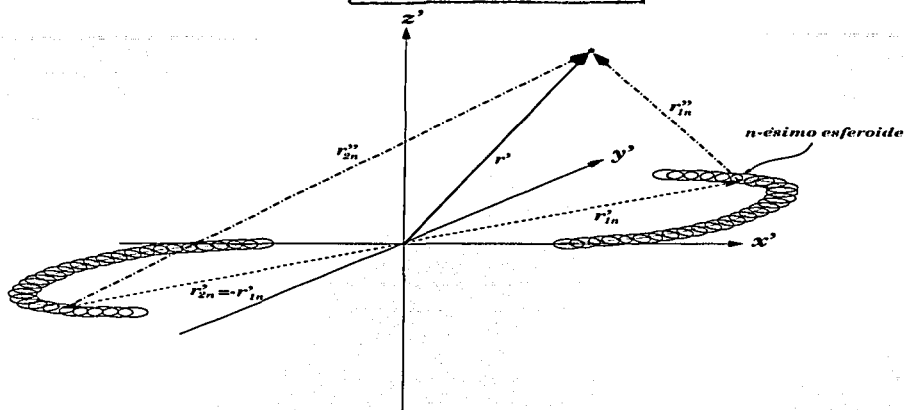


FIGURA 3.8: Posición vectorial de un punto arbitrario r' respecto a los centros de los esferoides.

La posición de r' respecto al centro del esferoide n -ésimo en el brazo R_1 es,

$$r''_{1n} = r' - r'_{1n},$$

y su posición respecto al esferoide n -ésimo en el brazo R_2 ,

$$r''_{2n} = r' - r'_{2n} = r' + r'_{1n}.$$

En la figura 3.8 se muestran los vectores de posición. De aquí,

$$\begin{aligned} r''_{1n} &= \hat{i}'x' + \hat{j}'y' + \hat{k}'z' - R_{1n}(\hat{i}' \cos \varphi_n + \hat{j}' \text{sen} \varphi_n) \\ &= \hat{i}'(x' - R_{1n} \cos \varphi_n) + \hat{j}'(y' - R_{1n} \text{sen} \varphi_n) + \hat{k}'z', \end{aligned}$$

y para el segundo brazo,

$$r''_{2n} = \hat{i}'(x' + R_{1n} \cos \varphi_n) + \hat{j}'(y' + R_{1n} \text{sen} \varphi_n) + \hat{k}'z'.$$

Llamando

$$R''_{1n} = \hat{i}'(x' - R_{1n} \cos \varphi_n) + \hat{j}'(y' - R_{1n} \text{sen} \varphi_n),$$

$$\mathbf{R}_{2,n}'' = \hat{\mathbf{i}}'(x' + R_{1,n} \cos \varphi_n) + \hat{\mathbf{j}}'(y' + R_{1,n} \operatorname{sen} \varphi_n),$$

entonces,

$$\mathbf{r}_{1,n}'' = \mathbf{R}_{1,n}'' + z' \hat{\mathbf{k}}',$$

$$\mathbf{r}_{2,n}'' = \mathbf{R}_{2,n}'' + z' \hat{\mathbf{k}}'.$$

De lo anterior, la coordenada radial cilíndrica del punto \mathbf{r}' respecto al n -ésimo esferoide en el brazo R_1 es,

$$\begin{aligned} R_{1,n}'' = |\mathbf{R}_{1,n}''| &= \left\{ (x' - R_{1,n} \cos \varphi_n)^2 + (y' - R_{1,n} \operatorname{sen} \varphi_n)^2 \right\}^{1/2} \\ &= \left\{ x'^2 + y'^2 + R_{1,n}^2 - 2R_{1,n} (x' \cos \varphi_n + y' \operatorname{sen} \varphi_n) \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

y respecto al esferoide correspondiente en R_2 ,

$$R_{2,n}'' = |\mathbf{R}_{2,n}''| = \left\{ x'^2 + y'^2 + R_{1,n}^2 + 2R_{1,n} (x' \cos \varphi_n + y' \operatorname{sen} \varphi_n) \right\}^{1/2}, \quad (3.30)$$

en ambos casos la coordenada cilíndrica z' es la misma.

Las coordenadas cilíndricas $(R_{1,n}'', z')$, $(R_{2,n}'', z')$, son las coordenadas que se emplean para obtener las contribuciones de los esferoides n -ésimos en los brazos espirales R_1 y R_2 al potencial y fuerza totales en el punto \mathbf{r}' .

En la Sección anterior, las ecuaciones (3.17), (3.18), (3.19), proporcionan las componentes de la fuerza y el potencial de un esferoide inhomogéneo con densidad $\rho(a) = p_0 + p_1 a$, en un punto con coordenadas cilíndricas (R, z) respecto al centro del esferoide. En la superposición, los esferoides n -ésimos en los brazos R_1 y R_2 tendrán asociados coeficientes p_{0n} y p_{1n} , y en general también el semieje mayor y excentricidad a_{rn} , e_n .

Con la función $\Phi(R, z, \beta)$ en la ecuación (3.19), y agregando el subíndice n respectivo, el potencial total en el punto \mathbf{r}' , debido a la superposición de esferoides en los brazos R_1 y R_2 es,

$$\Phi_{BR}(\mathbf{r}') = \sum_{n=1}^{n_0} [\Phi_n(R_{1,n}'', z', \beta_{1,n}) + \Phi_n(R_{2,n}'', z', \beta_{2,n})], \quad (3.31)$$

con $\beta_{1,n}$, $\beta_{2,n}$ la solución de β para el esferoide n -ésimo en el brazo R_1 y R_2 respectivamente.

Análogamente, con las funciones $F_R(R, z, \beta)$, $F_z(R, z, \beta)$ en las ecuaciones (3.17), (3.18), y también agregando el subíndice n , la fuerza en r' debida al n -ésimo esferoide en el brazo R_1 es,

$$\mathbf{F}(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) = \frac{R''_{1n}}{R''_{1n}} F_{Rn}(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) + \hat{\mathbf{k}}' F_{zn}(R''_{1n}, z', \beta_{1n}).$$

Sustituyendo R''_{1n} en esta ecuación, tenemos,

$$\mathbf{F}(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) = \frac{F_{Rn}(R''_{1n}, z', \beta_{1n})}{R''_{1n}} \{ \hat{\mathbf{i}}'(x' - R_{1n} \cos \varphi_n) + \hat{\mathbf{j}}'(y' - R_{1n} \operatorname{sen} \varphi_n) \} + \hat{\mathbf{k}}' F_{zn}(R''_{1n}, z', \beta_{1n}),$$

así mismo, para el n -ésimo esferoide en el brazo R_2 ,

$$\mathbf{F}(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) = \frac{F_{Rn}(R''_{2n}, z', \beta_{2n})}{R''_{2n}} \{ \hat{\mathbf{i}}'(x' + R_{1n} \cos \varphi_n) + \hat{\mathbf{j}}'(y' + R_{1n} \operatorname{sen} \varphi_n) \} + \hat{\mathbf{k}}' F_{zn}(R''_{2n}, z', \beta_{2n}).$$

Finalmente obtenemos la fuerza total en el punto arbitrario r' , debida a la superposición de esferoides como se muestra a continuación,

$$\begin{aligned} F_{BR}(r') &= \hat{\mathbf{i}}' \sum_{n=1}^{n_0} \left\{ \frac{F_{Rn}(R''_{1n}, z', \beta_{1n})}{R''_{1n}} (x' - R_{1n} \cos \varphi_n) + \frac{F_{Rn}(R''_{2n}, z', \beta_{2n})}{R''_{2n}} (x' + R_{1n} \cos \varphi_n) \right\} \\ &+ \hat{\mathbf{j}}' \sum_{n=1}^{n_0} \left\{ \frac{F_{Rn}(R''_{1n}, z', \beta_{1n})}{R''_{1n}} (y' - R_{1n} \operatorname{sen} \varphi_n) + \frac{F_{Rn}(R''_{2n}, z', \beta_{2n})}{R''_{2n}} (y' + R_{1n} \operatorname{sen} \varphi_n) \right\} \\ &+ \hat{\mathbf{k}}' \sum_{n=1}^{n_0} \{ F_{zn}(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) + F_{zn}(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) \} \\ &= \hat{\mathbf{i}}' F_{BR_x} + \hat{\mathbf{j}}' F_{BR_y} + \hat{\mathbf{k}}' F_{BR_z}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.3.3 La Densidad de los Brazos Espirales

En la sección anterior hemos descrito la superposición de esferoides oblatos inhomogéneos sobre un *locus* espiral dado, localizando así en coordenadas Cartesianas, cada esferoide -con una masa aún indeterminada, dada por la ecuación (3.21)-, para calcular

su contribución al potencial y fuerza total en un punto r' dado. Encontraremos ahora el potencial y fuerza de los brazos especificando la masa de cada esferoide.

Como ya hemos mencionado, es bien conocido que la densidad de los brazos espirales en las galaxias no es constante, ni en las direcciones perpendiculares al eje del brazo ni a lo largo de éste. Para la dirección perpendicular hemos introducido el potencial de esferoides inhomogéneos (Schmidt 1956), presentado en la Sección 3.3.1, en los que se ha propuesto una caída lineal para la densidad de los esferoides.

Para la densidad a lo largo del brazo espiral se han introducido tres leyes de densidad. En la primera, hemos tomado los esferoides con la misma masa, esto es, la densidad a lo largo del eje de los brazos espirales es constante (ver paneles superiores en la Figura 3.9). Esta ley es improbable para una galaxia real pero es simple e ilustrativa analíticamente. Los brazos de galaxias espirales presentan una caída en la densidad, apreciable cualitativamente en fotografías de galaxias espirales, en las que puede distinguirse cómo el brillo de los brazos mantiene un contraste con el disco casi constante, lo cual implica que la densidad de los brazos espirales tiene una relación directa con el disco (Elmegreen 1998). Hemos introducido dos posibles caídas en la densidad central de los esferoides. La primera y más simple es una ley de caída lineal. La segunda es precisamente una ley de caída exponencial en la densidad central de los esferoides, que sigue aproximadamente la ley de caída del disco (Sección 3.2.7). La idea de introducir una ley lineal en lugar de simplemente tomar la ley de caída exponencial, que resulta físicamente más justificable, es determinar qué tan sensible es la dinámica orbital a diferentes caídas en la densidad de los brazos espirales.

Los Brazos Compuestos por Esferoides de la Misma Masa

Si todos los esferoides inhomogéneos colocados a lo largo de los brazos espirales tienen la misma masa, la masa total de dos brazos espirales estará dada por,

$$M_{BR} = 2n_0M_O,$$

donde n_0 es el número total de esferoides en un brazo y M_O es la masa de un esferoide oblató inhomogéneo (Sec. 3.3.1).

Si escribimos M_{BR} como una fracción dada, α , de la masa total del disco en el potencial Galáctico axisimétrico de Allen y Santillán (1991 -Apéndice A-), a la que

llamaremos M_D , tenemos,

$$M_{BR} = \alpha M_D,$$

de donde,

$$M_O = \frac{\alpha M_D}{2n_0}.$$

Tomamos ahora todos los esferoides con las mismas dimensiones. Entonces, despejando p_1 de la ecuación (3.21), y sustituyendo M_O de la ecuación anterior tenemos,

$$p_1 = \frac{-3\alpha M_D}{2\pi a_r^4 n_0 \sqrt{1-e^2}}, \quad (3.33)$$

o,

$$-2\pi\sqrt{1-e^2}p_1 = \frac{3\alpha M_D}{a_r^4 n_0}.$$

Finalmente, sustituyendo en las fuerzas para un esferoide oblató, ecuaciones (3.17) y (3.18) y recordando la relación (3.20), se obtiene,

$$F_R(R, z, \beta) = \frac{3\alpha M_D R}{e^4 a_r^4 n_0} \left\{ -\frac{1}{2} a_r e (\beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta) + \sqrt{R^2 + z^2} \right. \\ \left. - \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} + \frac{1}{3R^2} \left[(R^2 \cos^2 \beta + z^2)^{3/2} - (R^2 + z^2)^{3/2} \right] \right. \\ \left. + z \ln \frac{(\sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} + z)(\sqrt{R^2 + z^2} - z)}{R^2 \cos \beta} \right\}, \quad (3.34)$$

y para la fuerza en la dirección z ,

$$F_z(R, z, \beta) = \frac{3\alpha M_D}{e^4 a_r^4 n_0} \left\{ -2 a_r e z (\tan \beta - \beta) \right. \\ \left. + z \left[\frac{2 \cos^2 \beta + 1}{\cos^2 \beta} \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} - 3\sqrt{R^2 + z^2} \right] \right. \\ \left. + (R^2 - 2z^2) \ln \frac{(\sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} + z)(\sqrt{R^2 + z^2} - z)}{R^2 \cos \beta} \right\}. \quad (3.35)$$

Si llamamos,

$$A = \frac{3\alpha M_D}{e^4 a_r^4 n_0}, \quad (3.36)$$

y $\mathfrak{S}_R(R, z, \beta)$, $\mathfrak{S}_z(R, z, \beta)$ el interior de las llaves en F_R y F_z respectivamente, tenemos,

$$\frac{F_R(R, z, \beta)}{R} = 2A\mathfrak{S}_R(R, z, \beta),$$

$$F_z(R, z, \beta) = A\mathfrak{S}_z(R, z, \beta).$$

De donde obtenemos finalmente que la fuerza total de los brazos espirales en un punto dado r' es -ecuación (3.32)-,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{BR}(r') &= \hat{i}' F_{BR_x} + \hat{j}' F_{BR_y} + \hat{k}' F_{BR_z} \\ &= \hat{i}' 2A \sum_{n=1}^{n_0} \{ \mathfrak{S}_R(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) (x' - R_{1n} \cos \varphi_n) + \mathfrak{S}_R(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) (x' + R_{1n} \cos \varphi_n) \} \\ &\quad + \hat{j}' 2A \sum_{n=1}^{n_0} \{ \mathfrak{S}_R(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) (y' - R_{1n} \operatorname{sen} \varphi_n) + \mathfrak{S}_R(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) (y' + R_{1n} \operatorname{sen} \varphi_n) \} \\ &\quad + \hat{k}' A \sum_{n=1}^{n_0} \{ \mathfrak{S}_z(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) + \mathfrak{S}_z(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) \}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

También de la ecuación 3.19 se obtiene,

$$\begin{aligned} \Phi(R, z, \beta) &= 2A \left\{ -\frac{1}{6} e^3 a_r^3 \beta + \frac{1}{2} e a_r \left[\frac{1}{2} R^2 (\beta - \operatorname{sen} \beta \cos \beta) + z^2 (\tan \beta - \beta) \right] \right. \\ &\quad + \frac{1}{9} \left[(R^2 + z^2)^{3/2} - (R^2 \cos^2 \beta + z^2)^{3/2} \right] + \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2} z^2 - R^2 \right] \sqrt{R^2 + z^2} \\ &\quad + \frac{1}{3} \left[R^2 - z^2 \left(\frac{2 \cos^2 \beta + 1}{2 \cos^2 \beta} \right) \right] \sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} - \left(\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{3} z^2 \right) \\ &\quad \left. \cdot z \ln \frac{(\sqrt{R^2 \cos^2 \beta + z^2} + z) (\sqrt{R^2 + z^2} - z)}{R^2 \cos \beta} \right\}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Si llamamos $\Psi(R, z, \beta)$ al interior de las llaves tenemos,

$$\Phi(R, z, \beta) = 2A\Psi(R, z, \beta).$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Finalmente, el potencial total en un punto \mathbf{r}' debido a los brazos espirales es (ecuación 3.31),

$$\Phi_{BR}(\mathbf{r}') = 2A \sum_{n=1}^{n_0} \{ \Psi(R''_{1,n}, z', \beta_{1,n}) + \Psi(R''_{2,n}, z', \beta_{2,n}) \}. \quad (3.39)$$

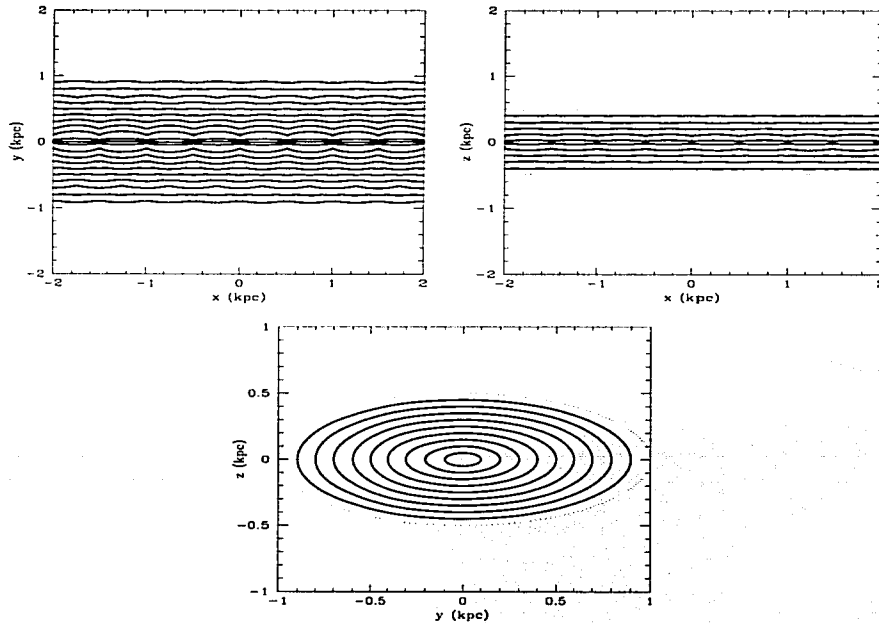


FIGURA 3.9: Isocontornos de densidad (líneas continuas) y fronteras de los esferoides (líneas punteadas) de una sección del brazo espiral, vistos en el plano del disco, $x - y$ (panel superior izquierdo), en el plano perpendicular al disco y paralelo al eje del brazo (panel superior derecho) y en el plano perpendicular al disco y al eje del brazo (panel inferior).

Ahora nos interesa saber cómo son los isocontornos de densidad de los brazos espirales, esto es, cómo es la densidad total del brazo espiral construido por las componentes individuales esferoidales. Los isocontornos de una sección del brazo espiral son presentados en la Figura 3.9. La separación entre los centros de los esferoides es 0.5 kpc y $a_r = 1$ kpc. El panel superior izquierdo, muestra los isocontornos (líneas continuas) de una sección del brazo espiral, vistos en el plano del disco (el plano $x - y$); los círculos (líneas punteadas) muestran las fronteras de los esferoides oblatos. De la misma forma, el panel superior derecho muestra los isocontornos vistos en el plano $x - z$, perpendicular al plano del disco a lo largo del eje del brazo. Finalmente, en el panel inferior, se muestran los isocontornos elípticos (líneas continuas), vistos en el plano $y - z$, perpendicular al plano del disco y al eje del brazo espiral. Con la elipse punteada se muestra la proyección en el plano $y - z$ de la frontera del esferoide central en la sección del brazo espiral (para las dimensiones del brazo Galáctico ver Sección 3.2.4).

Los Brazos Compuestos por Esferoides con Masas Diferentes: Caída Lineal

Para este caso consideraremos que la masa de los esferoides disminuye linealmente a partir de una distancia galactocéntrica R_t , con $R_s \leq R_t \leq R_{1j}$, como se ilustra en la Figura 3.10.

De esta forma podemos darle una caída lineal al brazo desde su inicio si $R_t = R_s$, o una densidad constante si $R_t = R_{1j}$, o ambas leyes como en el ejemplo de la Fig. 3.10 donde se combina una densidad constante hasta una cierta $R_t (> R_s)$ y después una caída lineal desde R_t hasta $R_{1j} (> R_t)$.

Tomamos nuevamente todos los esferoides con las mismas dimensiones espaciales. Recordando de las ecuaciones (3.20) y (3.21),

$$M_O = \frac{1}{3} \pi a_r^3 \sqrt{1 - e^2} p_0 = -\frac{1}{3} \pi a_r^4 \sqrt{1 - e^2} p_1.$$

Si $p_0 = p_{0t}$ en $R_s \leq R \leq R_t$ y tenemos n_{0t} esferoides en cada brazo en este intervalo de distancias, la masa sumada de los dos brazos en este mismo intervalo es,

$$M_{BR_t} = \frac{2}{3} n_{0t} \pi a_r^3 \sqrt{1 - e^2} p_{0t},$$

o, de la ecuación (3.20), $p_{0t} = -p_{1t} a_r$,

$$M_{BR_t} = -\frac{2}{3} n_{0t} \pi a_r^4 \sqrt{1-e^2} p_{1t}.$$

Ahora, en el intervalo $R_t \leq R \leq R_{1f}$, tenemos una caída lineal de p_0 con R , entonces,

$$\frac{p_0(R) - p_{0t}}{R - R_t} = \frac{-p_{0t}}{R_{1f} - R_t},$$

entonces,

$$p_0(R) = \frac{R_{1f} - R}{R_{1f} - R_t} p_{0t}. \quad (3.40)$$

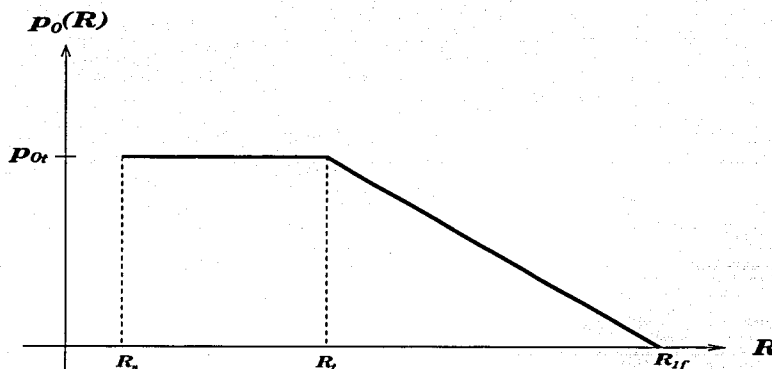


FIGURA 3.10: Ley de densidad central $p_0(R)$, de los esferoides en los brazos espirales en función de la distancia Galactocéntrica R . R_s es el radio Galactocéntrico donde los brazos espirales inician, R_{1f} , donde los brazos terminan y R_t el radio donde se da la transición de densidad constante a lineal.

La masa de los brazos en el intervalo externo $R \geq R_t$ es,

$$M_{BR_t} = \frac{2}{3} \pi a_r^3 \sqrt{1-e^2} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} p_{0n}$$

$$= \frac{2}{3} \pi a_r^3 \sqrt{1-e^2} \frac{p_{0t}}{R_{1f} - R_t} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} (R_{1f} - R_{1n}),$$

o refiriéndonos específicamente, por ejemplo, al brazo R_1 ,

$$M_{BR_1} = \frac{2}{3} \pi a_r^3 \sqrt{1-e^2} \frac{p_{0t}}{R_{1f} - R_t} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} (R_{1f} - R_{1n})$$

De donde la masa total en los brazos, $M_{BR} = M_{BR_1} + M_{BR_2}$, es,

$$M_{BR} = \frac{2}{3} \pi a_r^3 \sqrt{1-e^2} p_{0t} \left\{ n_{0t} + \frac{1}{R_{1f} - R_t} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} (R_{1f} - R_{1n}) \right\},$$

despejando p_{0t} ,

$$p_{0t} = \frac{3 M_{BR}}{2 \pi a_r^3 \sqrt{1-e^2} \left\{ n_{0t} + \frac{1}{R_{1f} - R_t} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} (R_{1f} - R_{1n}) \right\}}.$$

Con $M_{BR} = \alpha M_D$ y recordando que $p_{1t} = -p_{0t}/a_r$ obtenemos,

$$-2\pi \sqrt{1-e^2} p_{1t} = \frac{3 \alpha M_D}{a_r^4 \left\{ n_{0t} + \frac{1}{R_{1f} - R_t} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} (R_{1f} - R_{1n}) \right\}}.$$

Esta última ecuación nos será útil para encontrar A en la ecuación (3.37) para ambos intervalos. Para el intervalo donde $p_0(R)$ es constante ($R_s \leq R \leq R_t$) le llamaremos A_{cte} , y donde $p_0(R)$ es lineal ($R_t \leq R \leq R_{1f}$) le llamaremos A_{lin} .

Para A_{cte} tenemos de las ecuaciones (3.36) y (3.33),

$$A_{cte} = -\frac{2\pi \sqrt{1-e^2} p_{1t}}{e^4}, \quad (3.41)$$

de tal forma que la contribución de los n_{0t} esferoides en cada brazo a la fuerza en un punto \mathbf{r}' ($[\mathbf{F}_{BR}(\mathbf{r}')]_{cte}$) es la de la ecuación (3.37) sustituyendo A por A_{cte} y de la misma forma para el potencial ($[\Phi_{BR}(\mathbf{r}')]_{cte}$) en la ecuación (3.39); tomando en ambas expresiones el límite superior n_{0t} en las sumas.

Deseamos obtener ahora A_{lin} . Ya que,

$$p_0(R) = \frac{R_{1f} - R}{R_{1f} - R_t} p_{0t},$$

o,

$$p_1(R) = \frac{R_{1f} - R}{R_{1f} - R_t} p_{1t},$$

entonces,

$$A_{lin}(R) = \frac{-2\pi \sqrt{1-e^2} p_1(R)}{e^4} = \frac{-2\pi \sqrt{1-e^2}}{e^4} \frac{R_{1f} - R}{R_{1f} - R_t} p_{1t},$$

de donde,

$$A_{lin}(R) = A_{cte} \left(\frac{R_{1f} - R}{R_{1f} - R_t} \right),$$

de donde obtenemos que la fuerza total de los brazos espirales en el intervalo $R_t \leq R \leq R_{1f}$ en un punto dado \mathbf{r}' es,

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_{BR}(\mathbf{r}')]_{lin} &= \hat{\mathbf{i}}' (F_{BR_{x'}})_{lin} + \hat{\mathbf{j}}' (F_{BR_{y'}})_{lin} + \hat{\mathbf{k}}' (F_{BR_{z'}})_{lin} \\ &= \hat{\mathbf{i}}' \frac{2A_{cte}}{R_{1f} - R_t} \sum_{n=n_{or}+1}^{n_0} (R_{1f} - R_{1n}) \{ \mathfrak{S}_R(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) (x' - R_{1n} \cos \varphi_n) \\ &\quad + \mathfrak{S}_R(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) (x' + R_{1n} \cos \varphi_n) \} \\ &\quad + \hat{\mathbf{j}}' \frac{2A_{cte}}{R_{1f} - R_t} \sum_{n=n_{or}+1}^{n_0} (R_{1f} - R_{1n}) \{ \mathfrak{S}_R(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) (y' - R_{1n} \sin \varphi_n) \\ &\quad + \mathfrak{S}_R(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) (y' + R_{1n} \sin \varphi_n) \} \\ &\quad + \hat{\mathbf{k}}' \frac{A_{cte}}{R_{1f} - R_t} \sum_{n=n_{or}+1}^{n_0} (R_{1f} - R_{1n}) \{ \mathfrak{S}_z(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) + \mathfrak{S}_z(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) \}, \end{aligned}$$

y el potencial es,

$$[\Phi_{BR}(\mathbf{r}')]_{lin} = \frac{2A_{cte}}{R_{1f} - R_t} \sum_{n=n_{or}+1}^{n_0} (R_{1f} - R_{1n}) \{ \Psi(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) + \Psi(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) \}.$$

De donde se obtiene finalmente que la fuerza y potencial totales en \mathbf{r}' debida a los brazos espirales es,

$$\mathbf{F}_{BR}(\mathbf{r}') = [\mathbf{F}_{BR}(\mathbf{r}')]_{lin} + [\mathbf{F}_{BR}(\mathbf{r}')]_{cte}, \quad (3.42)$$

$$\Phi_{BR}(\mathbf{r}') = [\Phi_{BR}(\mathbf{r}')]_{lin} + [\Phi_{BR}(\mathbf{r}')]_{cte}. \quad (3.43)$$

Los diagramas de isocontornos de una sección del brazo espiral, para este caso y el siguiente (caída exponencial en la densidad del brazo), son muy similares a los de la Figura 3.9 si se observan en secciones de pocos kiloparsecs. Si se sigue un número fijo de isocontornos más allá de una sección pequeña del brazo, la diferencia entre los isocontornos de brazos con densidad constante y los de caída lineal o exponencial, es que en los últimos dos casos los isocontornos darán la impresión de que el brazo se “adelgaza” a lo largo del eje de simetría, esto es, los isocontornos se acercarán hacia el eje del brazo debido a que la densidad de cada esferoide cae, produciendo a su vez una caída en la suma total de la densidad.

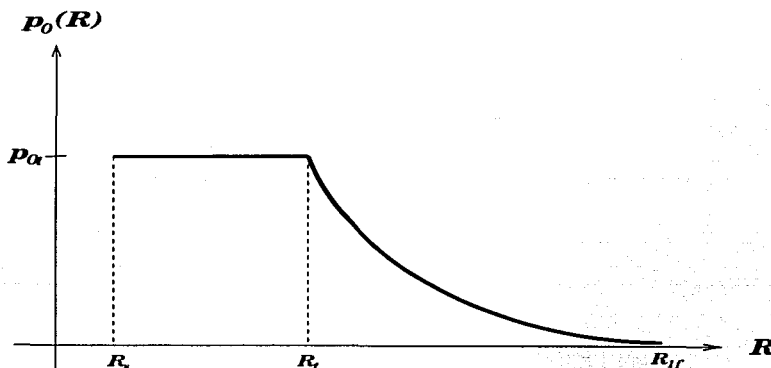


FIGURA 3.11: Ley de densidad central con caída exponencial de los esferoides en los brazos espirales en función de la distancia Galactocéntrica.

Los Brazos Compuestos por Esferoides con Masas Diferentes: Caída Exponencial

La ley de caída exponencial ha sido empleada ya en estudios de galaxias espirales (Para la Galaxia ver Sección 3.2.7), basados en el hecho físico de que los discos de las galaxias donde se desarrollan los brazos espirales, tienen en sí mismos una ley de densidad de caída radial como una exponencial (Contopoulos y Grosbøl 1986, 1988;

Patsis, Contopoulos y Grosbøl 1991; Amaral y Lépine 1997; Patsis y Grosbøl 1996; Englmaier y Gerhard 1999). Conviene mencionar aquí que, aunque los resultados de los estudios preliminares en el análisis orbital no fueron muy diferentes en el caso de la ley de caída lineal y la de caída exponencial, decidimos introducir la última para la mayor parte de los cálculos sobre los brazos espirales (que presentaremos en la Sección 3.5) por tener un mejor fundamento observacional que una caída lineal, por ejemplo.

De la misma forma que para la caída lineal, deseamos obtener las fuerzas y potencial para los brazos espirales con una caída exponencial en la densidad central de los esferoides, a lo largo del eje de simetría, que comience en un radio de *transición* R_t dado, antes del cual los esferoides tienen una densidad constante (Fig. 3.11). El intervalo de distancia de densidad constante, $R_t - R_s$, es en general mucho menor que la distancia $R_{1j} - R_t$, aunque se da muy exagerada en la Figura 3.11 por claridad. Cabe mencionar aquí que la caída de los brazos que empleamos en nuestros modelos finales fue exponencial desde el principio, esto es $R_t = R_s$.

La densidad central de los esferoides está dada nuevamente por $p_0(R)$, que para la parte de densidad constante ($R_s \leq R \leq R_t$) es $p_0(R) = p_{0t}$, mientras que para la región $R_t \leq R \leq R_{1j}$, es,

$$p_0(R) = p_{0t} e^{-(R-R_t)/\Delta}, \quad (3.44)$$

donde Δ , es la longitud de escala para la exponencial. Hemos tomado para este parámetro en particular $\Delta = 2.5$ kpc, que corresponde a la longitud de escala del disco de la Vía Láctea (Binney, Gerhard y Spiegel 1997; Freudenreich 1998).

Con esta definición y recordando de la ecuación (3.21) la masa para un esferoide oblató inhomogéneo, obtenemos que la masa de los brazos espirales en la región de caída exponencial es,

$$M_{BR_e} = \frac{2}{3} \pi a_r^3 \sqrt{1 - e^2} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} p_{0n}, \quad (3.45)$$

donde p_{0n} es la densidad central del n -ésimo esferoide en la región de caída exponencial ($R_t \leq R \leq R_{1j}$). Sustituyendo la ecuación (3.44) en la ecuación (3.45) tenemos,

$$M_{BR_e} = \frac{2}{3} \pi a_r^3 \sqrt{1 - e^2} p_{0t} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n} - R_t)/\Delta}.$$

Sumando la masa de la parte de los brazos con densidad constante ($R_s \leq R \leq R_t$) y M_{BR_e} de la parte exponencial ($R_t \leq R \leq R_{1j}$) obtenemos la masa total de los brazos espirales,

$$M_{BR_e} = \frac{2}{3} \pi a_r^3 \sqrt{1 - e^2} p_{0t} \left\{ n_{0t} + \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n} - R_t)/\Delta} \right\}, \quad (3.46)$$

y despejando p_{0t} ,

$$p_{0t} = \frac{3M_{BR}}{2\pi a_r^3 \sqrt{1 - e^2} \left\{ n_{0t} + \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n} - R_t)/\Delta} \right\}}. \quad (3.47)$$

Si tomamos la masa de los brazos como una fracción de la masa del disco, es decir $M_{BR} = \alpha M_D$, y recordando de la ecuación (3.20) que,

$$p_{1t} = -p_{0t}/a_r,$$

y rearreglando la ecuación (3.47), tenemos,

$$-2\pi \sqrt{1 - e^2} p_{1t} = \frac{3\alpha M_D}{a_r^3 \left\{ n_{0t} + \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n} - R_t)/\Delta} \right\}}.$$

Si llamamos,

$$A_{cte} = \frac{-2\pi \sqrt{1 - e^2} p_{1t}}{e^4},$$

de tal forma que la contribución de los n_{0t} esferoides en cada brazo, en $R_s \leq R \leq R_t$, a la fuerza en un punto \mathbf{r}' ($[\mathbf{F}_{BR}(\mathbf{r}')]_{cte}$) es como en la ecuación (3.37) sustituyendo A por A_{cte} y de la misma forma para el potencial ($[\Phi_{BR}(\mathbf{r}')]_{cte}$) en la ecuación (3.39), con n_{0t} en el límite superior de las sumas. Además, en $R_t \leq R \leq R_{1j}$,

$$p_0(R) = e^{-(R-R_t)/\Delta} p_{0t},$$

o,

$$p_1(R) = e^{-(R-R_t)/\Delta} p_{1t},$$

entonces,

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$A_{exp}(R) = \frac{-2\pi\sqrt{1-e^2} p_1(R)}{e^4} = \frac{-2\pi\sqrt{1-e^2} p_{1t} e^{-(R-R_t)/\Delta}}{e^4},$$

de donde,

$$A_{exp}(R) = A_{cte} e^{-(R-R_t)/\Delta}.$$

De esta forma obtenemos la fuerza total de los brazos espirales en el intervalo $R_t \leq R \leq R_1$, sobre un punto dado \mathbf{r}' ,

$$\begin{aligned} [\mathbf{F}_{BR}(\mathbf{r}')]_{exp} &= \hat{\mathbf{i}}'(F_{BR_x'})_{exp} + \hat{\mathbf{j}}'(F_{BR_y'})_{exp} + \hat{\mathbf{k}}'(F_{BR_z'})_{exp} \\ &= \hat{\mathbf{i}}' 2A_{cte} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n}-R_t)/\Delta} \{ \mathfrak{S}_R(R''_{1n}, z', \beta_{1n})(x' - R_{1n} \cos \varphi_n) \\ &\quad + \mathfrak{S}_R(R''_{2n}, z', \beta_{2n})(x' + R_{1n} \cos \varphi_n) \} \\ &\quad + \hat{\mathbf{j}}' 2A_{cte} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n}-R_t)/\Delta} \{ \mathfrak{S}_R(R''_{1n}, z', \beta_{1n})(y' - R_{1n} \operatorname{sen} \varphi_n) \\ &\quad + \mathfrak{S}_R(R''_{2n}, z', \beta_{2n})(y' + R_{1n} \operatorname{sen} \varphi_n) \} \\ &\quad + \hat{\mathbf{k}}' A_{cte} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n}-R_t)/\Delta} \{ \mathfrak{S}_z(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) \\ &\quad + \mathfrak{S}_z(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) \}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

y el potencial total de los brazos en el mismo intervalo,

$$[\Phi_{BR}(\mathbf{r}')]_{exp} = 2A_{cte} \sum_{n=n_{0t}+1}^{n_0} e^{-(R_{1n}-R_t)/\Delta} \{ \Psi(R''_{1n}, z', \beta_{1n}) + \Psi(R''_{2n}, z', \beta_{2n}) \}. \quad (3.49)$$

De donde se obtiene finalmente que la fuerza y potencial totales en \mathbf{r}' debida a los brazos espirales es,

$$\mathbf{F}_{BR}(\mathbf{r}') = [\mathbf{F}_{BR}(\mathbf{r}')]_{exp} + [\mathbf{F}_{BR}(\mathbf{r}')]_{cte}, \quad (3.50)$$

$$\Phi_{BR}(\mathbf{r}') = [\Phi_{BR}(\mathbf{r}')]_{exp} + [\Phi_{BR}(\mathbf{r}')]_{cte}. \quad (3.51)$$

3.4 Los Métodos Empleados en la Tesis para el Estudio Dinámico Estelar

La componente estelar más afectada por la presencia de los brazos espirales es el disco Galáctico. Hemos realizado estudios de la estructura orbital en el plano Galáctico desde un punto de vista cualitativo, usando los llamados *Cortes o Diagramas de Poincaré*, y desde un punto de vista más cuantitativo con la construcción de órbitas periódicas y la determinación del primer exponente de Lyapunov. Aunque los resultados orbitales presentados en la tesis son para órbitas en el plano Galáctico, el potencial, como hemos dicho a lo largo de este trabajo, es tridimensional y los códigos empleados están a su vez habilitados para correr órbitas en tres dimensiones.

Debido a la naturaleza complicada del conjunto total de componentes necesarias para representar una galaxia espiral (i.e. halo + bulbo + disco + brazos espirales), el movimiento orbital no puede ser resuelto analíticamente. Sin embargo es posible seguir su evolución temporal $(x(t), y(t), z(t))$, integrando las ecuaciones de movimiento numéricamente cubriendo una gran variedad de condiciones iniciales para producir un mapeo estelar lo más completo posible.

Introduciremos primero las ecuaciones de movimiento que deben resolverse para el estudio de la dinámica orbital. Para un potencial Galáctico total dado en coordenadas Cartesianas como $\Phi(x, y, z)$ (con $\Phi(x, y, z) = \Phi_0(x, y, z) + \Phi_{BR}(x, y, z)$, donde $\Phi_0(x, y, z)$ es el potencial axisimétrico y $\Phi_{BR}(x, y, z)$ el no axisimétrico, es decir, los brazos espirales), deseamos conocer la posición y velocidad de una partícula, lo cual nos proporcionará su ubicación en el espacio fase. De esta forma las ecuaciones a resolver son,

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial y}, \quad \frac{d\dot{z}}{dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

Ya que el potencial no es axisimétrico, veremos variaciones temporales del potencial si nos colocamos en un marco de referencia desde el cual los brazos se mueven a la velocidad angular Ω_p , es decir desde un sistema inercial. Sin embargo, si nos colocamos

en el sistema de referencia en el que los brazos permanecen fijos (sistema no inercial), estaremos en un sistema acelerado pero el potencial es independiente del tiempo.

Hemos elegido entonces resolver las ecuaciones de movimiento desde el sistema no inercial y hemos seguido la evolución en ambos sistemas simplemente utilizando las ecuaciones de transformación de un sistema de referencia inercial a uno acelerado, ambos con origen en el centro Galáctico, que presentamos a continuación,

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r}'$$

donde \mathbf{v} y \mathbf{v}' son las velocidades en los sistemas de referencia inercial y no inercial respectivamente, $\boldsymbol{\Omega}_p$ es la velocidad angular del patrón espiral y $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ es la posición de la partícula. Para la aceleración, en general,

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a} - 2\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{v}' - \boldsymbol{\Omega}_p \times (\boldsymbol{\Omega}_p \times \mathbf{r}')$$

donde \mathbf{a} y \mathbf{a}' son las aceleraciones en los sistemas de referencia inercial y no inercial respectivamente y tomamos $\frac{d\boldsymbol{\Omega}_p}{dt} = 0$.

Aprovecharemos entonces el hecho de que desde el marco de referencia que se mueve con los brazos espirales, el potencial no cambia en el tiempo.

Recordamos que en un potencial axisimétrico formado por un halo, bulbo y un disco, se conservan dos integrales de movimiento que son la energía, debido a la independencia del tiempo del potencial y el momento angular, debido a la simetría acimutal.

En el caso específico del potencial de una galaxia real que contiene, además del potencial axisimétrico, brazos espirales y/o barra con una velocidad angular dada, desaparece cualquier simetría y la independencia del tiempo del potencial, es decir, desaparecen las integrales de movimiento (todo esto visto desde un marco de referencia inercial). Por esta razón conviene resolver las ecuaciones y analizar el movimiento en el sistema no inercial, es decir, en el sistema que se mueve con los brazos, ya que el potencial visto desde este marco de referencia en el que los brazos están fijos es independiente del tiempo. Esto nos dice que existe una integral de movimiento (de forma similar al caso axisimétrico, en el que la independencia en el tiempo da una integral de movimiento que es la energía total); esta integral de movimiento es conocida como **integral de Jacobi**.

La integral de Jacobi nos permite hacer la integración de las órbitas para el análisis estelar (del que hablaremos más adelante) utilizándola como un diagnóstico del error, ya que ésta, al ser una integral de movimiento, debe conservarse aproximadamente igual a lo largo de una órbita dada. El integrador y toda la información técnica del programa que resuelve las órbitas se presenta en el Apéndice B. Mostraremos más adelante la expresión de la integral de Jacobi, pero antes presentaremos algunas definiciones importantes.

Los brazos espirales de la Vía Láctea como la mayoría de las galaxias espirales, tienen brazos retrógrados (*trailing*), y en particular tienen una velocidad angular negativa respecto a la dirección del polo norte Galáctico, es decir rotan en la dirección de las manecillas del reloj, esto es,

$$\Omega_p = -\Omega_p \hat{\mathbf{k}}', \quad \Omega_p > 0,$$

con \mathbf{k}' en la dirección del polo norte Galáctico.

Tenemos entonces que si \mathbf{a}_0 es la aceleración producida por una distribución de masa con simetría rotacional (i.e. el potencial axisimétrico de fondo) y $\mathbf{a}_{BR} = \mathbf{F}_{BR}$ es la aceleración producida por los brazos espirales (o la fuerza de los brazos por unidad de masa), la aceleración en el sistema no inercial es,

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}_0 + \mathbf{F}_{BR} - \Omega_p \times (\Omega_p \times \mathbf{r}') - 2\Omega_p \times \mathbf{v}',$$

En coordenadas Cartesianas, el término centrífugo de la ecuación anterior es,

$$\Omega_p \times (\Omega_p \times \mathbf{r}') = -\hat{\mathbf{i}}' \Omega_p^2 x' - \hat{\mathbf{j}}' \Omega_p^2 y',$$

mientras que el de Coriolis,

$$\Omega_p \times \mathbf{v}' = \hat{\mathbf{i}}' \Omega_p \dot{y}' - \hat{\mathbf{j}}' \Omega_p \dot{x}'.$$

Si $\mathbf{a}_0 = a_{0x'} \hat{\mathbf{i}}' + a_{0y'} \hat{\mathbf{j}}' + a_{0z'} \hat{\mathbf{k}}'$ y $\mathbf{a}' = a'_{x'} \hat{\mathbf{i}}' + a'_{y'} \hat{\mathbf{j}}' + a'_{z'} \hat{\mathbf{k}}'$, obtenemos las componentes Cartesianas de la aceleración en términos de las fuerzas producidas por el potencial axisimétrico y el de los brazos en las siguientes expresiones,

$$a'_{x'} = a_{0x'} + F_{BR_{x'}} + \Omega_p^2 x' - 2\Omega_p \dot{y}' = \ddot{x}',$$

$$\mathbf{a}'_{y'} = \mathbf{a}_{0y'} + F_{BR_{y'}} + \Omega_p^2 y' + 2\Omega_p \dot{x}' = \ddot{y}',$$

$$\mathbf{a}'_{z'} = \mathbf{a}_{0z'} + F_{BR_{z'}} = \ddot{z}'.$$

En el marco de referencia no inercial (que se mueve a la velocidad angular de los brazos), tenemos un potencial independiente del tiempo que nos proporciona una integral de movimiento (Binney y Tremaine 1994), que es la integral de Jacobi, definida de la siguiente forma,

$$E_J = \frac{1}{2} \mathbf{v}'^2 + \Phi_0 + \Phi_{BR} - \frac{1}{2} | \Omega_p \times \mathbf{r}' |^2,$$

con Φ_0 , Φ_{BR} los potenciales por unidad de masa axisimétrico, y de los brazos, respectivamente. El término $\frac{1}{2} | \Omega_p \times \mathbf{r}' |^2$, se conoce como *potencial centrífugo*. A la suma del potencial centrífugo y el potencial total ($\Phi_0 + \Phi_{BR} - \frac{1}{2} | \Omega_p \times \mathbf{r}' |^2$), se le conoce como *potencial efectivo*. En coordenadas Cartesianas, y ya que Ω_p es un vector con una sola componente en la dirección z' ,

$$E_J = \frac{1}{2} (\dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 + \dot{z}'^2) + \Phi_0(\mathbf{r}') + \Phi_{BR}(\mathbf{r}') - \frac{1}{2} \Omega_p^2 (x'^2 + y'^2). \quad (3.52)$$

Con estas definiciones comenzamos la descripción de los métodos utilizados en el análisis orbital.

3.4.1 Diagramas de Poincaré

Una primera posibilidad para el estudio del comportamiento orbital en una galaxia dada, es analizar directamente órbitas en el espacio real (de posición). Desafortunadamente, esta tarea además de difícil y tediosa es prácticamente inalcanzable cuando se intenta analizar el comportamiento orbital de toda una galaxia (hasta 10^{12} estrellas). Con excepción de unas pocas órbitas tales como las periódicas (de las que hablaremos en la Sección 3.4.2), las órbitas ordenadas y caóticas, después de un cierto número de revoluciones alrededor del centro galáctico resultan muy difíciles de identificar en su mayoría, ésto complica y en muchos casos hace imposible su análisis y/o clasificación.

Un estudio mucho más claro y revelador se da en el espacio fase, es decir en el espacio de velocidad vs. posición.

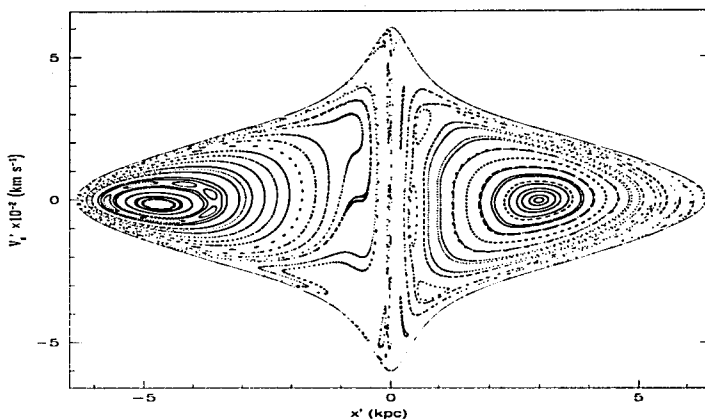


FIGURA 3.12: Ejemplo de un diagrama de Poincaré. La región con $x' > 0$ es llamada "retrógrada", y la región $x' < 0$, es llamada "prógrada".

El espacio fase asociado con el movimiento de una estrella tiene seis dimensiones en coordenadas Cartesianas, $x', y', z', \dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$. Si reducimos ésto al plano Galáctico, tendremos aún cuatro dimensiones, $x', y', \dot{x}', \dot{y}'$. Analizar el movimiento de una partícula en un espacio de cuatro dimensiones es muy complicado. Sin embargo, se puede determinar si las órbitas en el plano (x', y') admiten una integral de movimiento aislante adicional a la de Jacobi por el uso de un simple análisis gráfico. Dado que la constante de Jacobi $E_J(x', y', \dot{x}', \dot{y}')$ se conserva en el sistema no inercial (es decir el sistema fijo respecto a los brazos espirales), podríamos graficar el movimiento de la estrella en un espacio tridimensional, por ejemplo (x', y', \dot{x}') de manera que \dot{y}' sería determinada (con dos posibilidades en el signo ya que la Integral de Jacobi es cuadrática en \dot{y}') por el valor conocido de E_J . Sin embargo, aún en tres dimensiones el análisis y las gráficas

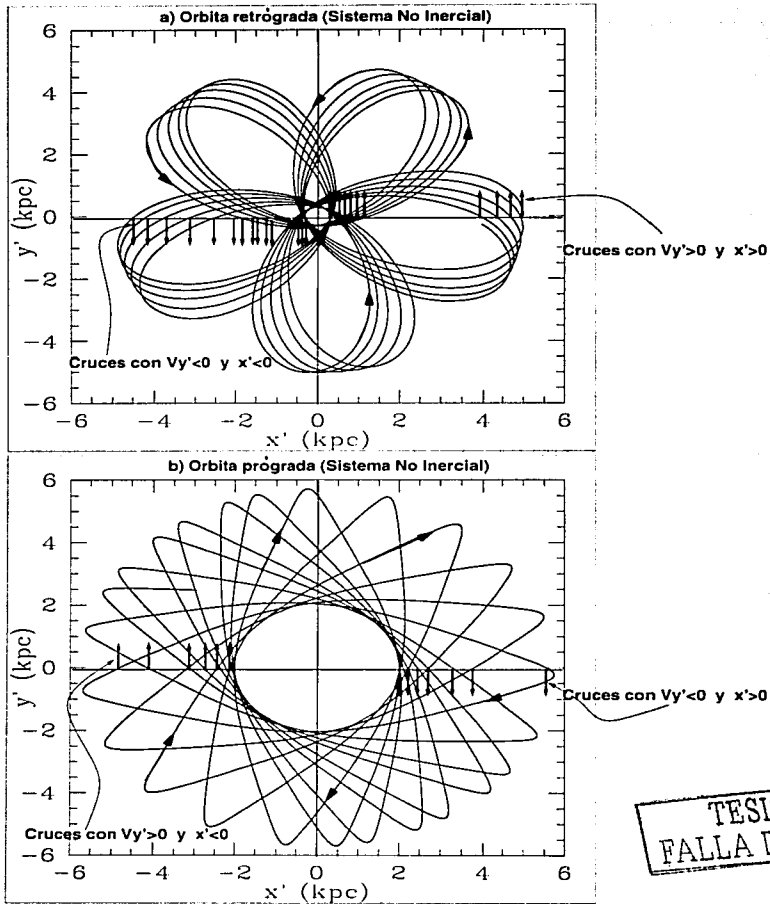
siguen siendo complicadas, así que sólo se pueden analizar los puntos donde la estrella cruza algún plano en el espacio fase, en nuestro caso el plano $y' = 0$. Para quitar la ambigüedad del signo en y' , se grafican las coordenadas (x', \dot{x}') sólo cuando $y' > 0$. En otras palabras, se toman los valores de x' y \dot{x}' cada vez que la estrella cruza el eje x' en la dirección positiva del eje y' . Aunque se acostumbra tomar solamente los cruces de las órbitas sobre el eje x' con $y' > 0$, hemos reducido el tiempo de integración simplemente adicionando también los cruces de las órbitas con $y' < 0$, lo cual es posible gracias a la simetría del patrón espiral. Estos cruces con $y' < 0$ se incorporan al diagrama de Poincaré con $y' > 0$ graficando los puntos $x' \rightarrow -x'$, $\dot{x}' \rightarrow -\dot{x}'$.

Si se grafican ahora todos los cruces en un diagrama de \dot{x}' vs. x' , se obtiene entonces un diagrama de Poincaré (Figura 3.12). Estos diagramas fueron propuestos por Henri Poincaré y se les conoce también como **Cortes de Poincaré** (ver por ejemplo, Binney y Tremaine 1994). Las curvas en estos diagramas (Figura 3.12) reflejan la existencia de una integral de movimiento adicional a la de Jacobi.

En el caso específico de la Galaxia, donde $\Omega_p < 0$ (como se indica en las Figuras 3.13 a y b), se acostumbra definir una órbita prógrada como aquella que cruza el eje $x' < 0$ (en el sistema no inercial) tal que $y' > 0$ (aunque se debe aclarar que es más bien el cruce el que puede definirse como prógrado, no así la órbita completa como explicaremos en la Sección 3.5). Por otra parte, las órbitas retrógradas son aquellas para las que en $x' > 0$ se tiene $y' > 0$. De esta forma, se dice que la parte derecha del diagrama de Poincaré ($x' > 0$) es la "región retrógrada", mientras que la parte izquierda ($x' < 0$), es la "región prógrada".

Para una constante de Jacobi dada, se construye una familia de órbitas como la de la Figura 3.12. Estas órbitas están restringidas a un área en el plano (x', \dot{x}') , definida por la restricción $E_J \geq \frac{1}{2}\dot{x}'^2 + \Phi_{eff}(x', 0)$, donde $\Phi_{eff}(x', y') = \Phi_0(x', y') + \Phi_{BR}(x', y') - \frac{1}{2}\Omega_p^2(x'^2 + y'^2)$, es el potencial efectivo.

Para una descripción del método y el código empleados para la solución de las ecuaciones de movimiento y la construcción de los diagramas de Poincaré ver Apéndice B.4.1.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FIGURA 3.13: Los cruces tomados para la construcción de los diagramas de Poincaré. a) Cruces con $\dot{y}' > 0$ en $x' > 0$ ("retrógrados"). b) Cruces con $\dot{y}' > 0$ en $x' < 0$ ("prógrados"). En ambos casos se adicionan a los diagramas de Poincaré los cruces con $\dot{y}' < 0$ convirtiendo los puntos con $x' \rightarrow -x'$, $\dot{x}' \rightarrow -\dot{x}'$

3.4.2 Orbitas Periódicas (Soporte Orbital)

El mecanismo para la formación del patrón espiral observado en la mayoría de las galaxias de disco no ha sido completamente entendido. Para tratar de explicarlo surgieron en los años 60 dos fuertes corrientes, dos tipos de teorías espirales. La primera de éstas por Oort (1962), asociaba cada brazo espiral con un cuerpo material, de forma que un brazo era esencialmente un tubo de gas contenido por el campo magnético galáctico. La dificultad de esta idea es que, aunque los brazos pueden formarse fácilmente en un potencial axisimétrico con una pequeña perturbación, la magnitud del campo magnético Galáctico no es suficiente para mantener los brazos rígidos, de esta forma éstos son rápidamente formados y enrollados en sólo 10^8 años y destruidos en 10^9 años. A este fenómeno se le conoció como el "dilema del enrollamiento". A pesar de esto, la idea de "brazos materiales" fue defendida por Toomre (1964) quien argumentaba que los brazos espirales eran transitorios. La gran frecuencia con la que se observan galaxias de disco con brazos espirales no podía explicarse, sin embargo, con la idea de brazos espirales transitorios. De esta forma surgió otra idea que resulta actualmente la más aceptada, *La teoría de ondas de densidad* (P. O. Lindblad 1960; B. Lindblad 1961; Lin y Shu 1964) que proporcionan un campo gravitacional espiral estacionario que refuerza la concentración observable de estrellas jóvenes y gas. De esta forma, estas ondas presentan un patrón rotante como cuerpo rígido con una velocidad angular Ω_p . A través de las regiones donde estas ondas existen, Ω_p es menor que Ω_c , donde $r\Omega_c(r)$ es la velocidad circular correspondiente a la distancia r del centro, para la curva de rotación observada en la Galaxia suponiendo un potencial axisimétrico. Esto significa que las estrellas moviéndose alrededor del centro galáctico en órbitas aproximadamente circulares, se moverán a través del patrón de ondas de densidad. El potencial gravitacional producido por la concentración de estrellas en los brazos mantendrán el exceso estelar ahí, aunque con el tiempo las ondas decaerán por procesos disipativos. Aunque esta idea es la más aceptada en la actualidad, requiere parámetros cuyos valores deben caer dentro de intervalos muy pequeños para desarrollarse y mantenerse.

Debido a que las galaxias son básicamente sistemas no colisionales, las órbitas estelares son un concepto bien definido, en el sentido del largo tiempo requerido para que una órbita cambie su estado en un potencial que, en promedio, es suave como el

potencial Galáctico. De esta forma puede decirse que las órbitas estelares constituyen la parte fundamental de la dinámica de las galaxias en cuanto a su estructura. Aunque el análisis en el espacio fase (diagramas de Poincaré. Sección 3.4.1) sigue siendo crucial, el problema de determinar si un modelo dinámico (como el expuesto en este trabajo) es autoconsistente o no, depende, entre otras cosas, de si la estructura orbital apoya un potencial impuesto tal como el de unos brazos espirales o una barra en una galaxia.

En el conjunto de órbitas estelares tenemos las conocidas como **órbitas periódicas**. Estas son las órbitas más simples que se pueden encontrar en una galaxia y resultan las más importantes porque éstas son seguidas por conjuntos de órbitas no periódicas e incluso por órbitas caóticas que forman tubos alrededor de éstas. En otras palabras, las llamadas órbitas periódicas estables conforman el *esqueleto dinámico estelar* de las galaxias.

Las órbitas periódicas producen un número finito de intersecciones (o puntos en el diagrama de Poincaré) en el límite $t \rightarrow \infty$. Alrededor de estos puntos se forman órbitas ordenadas, islas e incluso mares de caos (ver Figura 3.12 y diagramas en la sección 3.4.1).

Construcción de órbitas periódicas en el potencial espiral

En un modelo estacionario de densidad o del potencial para una galaxia de las características del presentado en esta Tesis, se requiere comprobar que en la evolución temporal éste resulta **autoconsistente**. Físicamente, esto significa que el potencial y, por lo tanto, la estructura (el patrón espiral por ejemplo) perdure sin incrementar su masa o debilitarse hasta desaparecer. La forma ideal de definir si un potencial espiral es autoconsistente es hacerlo analíticamente, esto es, dado un potencial impuesto, se calcula la respuesta en densidad, esta respuesta es utilizada para deducir el nuevo potencial espiral, se compara entonces la respuesta inducida con la densidad impuesta y se itera hasta encontrar una solución autoconsistente. Esfuerzos en esta dirección han sido desarrollados por Contopoulos (1970, 1975, 1979) y Patsis, Contopoulos y Grosbøl (1991), para un potencial espiral representado en forma muy simple como una perturbación al potencial axisimétrico. Debido a la dificultad analítica que representaría tratar de probar la autoconsistencia de nuestro modelo con este método, trataremos de acercarnos a la prueba de autoconsistencia con un enfoque orbital.

En el caso específico del potencial de los brazos y/o la barra y desde el punto de vista puramente orbital, existen tres tipos de soporte o apoyo a estas estructuras (Contopoulos 1980). El primero y más simple es conocido como "apoyo orbital" y se refiere a la forma de las órbitas que es en sí misma, de la forma aproximada de la estructura que apoya; un ejemplo de este tipo de apoyo se da en las barras, en las que las órbitas llamadas " x_1 ", tienen una forma alargada en la dirección de la barra (ver por ejemplo Figura 3.14). El segundo tipo de apoyo es el llamado "*stellar crowding*" o apoyo por amontonamiento estelar y se refiere al soporte que dan las estrellas por tiempo, esto es, en las regiones en las que las estrellas pasan largos períodos. Esto se da por ejemplo, en los apocentros de las órbitas donde las estrellas llevan las velocidades menores que pueden alcanzar a lo largo de toda su órbita de forma tal que pasan la mayor parte del tiempo en esas regiones; este tipo de soporte se da esquemáticamente en la Figura 3.15 y también puede verse en la Figura 3.14. El tercer tipo de apoyo es conocido como "*orbital crowding*" y se refiere al soporte por amontonamiento de trayectorias u órbitas donde existen regiones en las que aún cuando las estrellas pasan a velocidades (en el sistema no inercial) mayores que en sus apocentros por ejemplo, las órbitas están muy cerca produciendo un aumento en la densidad de estrellas en esos puntos. En las Figuras 3.15 y 3.14 se muestra un ejemplo de esta clase de soporte.

Existen cuatro regiones importantes en las Galaxias dadas por la velocidad angular del patrón estelar correspondiente (es decir, brazos o barra) en las que el apoyo estelar se da de diferentes formas. Estas son, *i*) la región dentro de la resonancia interna de Lindblad; *ii*) la región entre la resonancia interna de Lindblad y la de Corrotación; *iii*) la región entre Corrotación y la resonancia externa de Lindblad, y *iv*) la región fuera de la resonancia externa de Lindblad. Dado que los brazos se dan sólo en las regiones *ii*) y *iii*) nos limitaremos a éstas en la discusión de autoconsistencia. En los casos de perturbación espiral de baja amplitud, los patrones de brazos se extienden desde la región *ii*) hasta la *iii*) y en los no lineales se limitan a la región *ii*). En el caso lineal los brazos están apoyados por los tres tipos de soporte (Lynden-Bell y Kalnajs 1972), como puede verse en el esquema de la Figura 3.15 y en órbitas reales, Figuras 3.16 a 3.18.

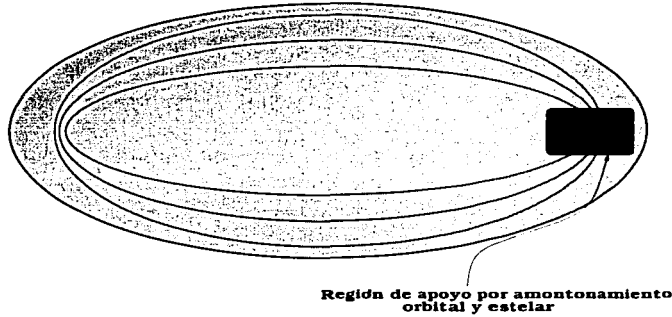


FIGURA 3.14: Soporte orbital y por "amontonamiento" orbital y estelar a un potencial de barra. La región sombreada que cubre a las órbitas periódicas representa la barra vista en el plano del disco.

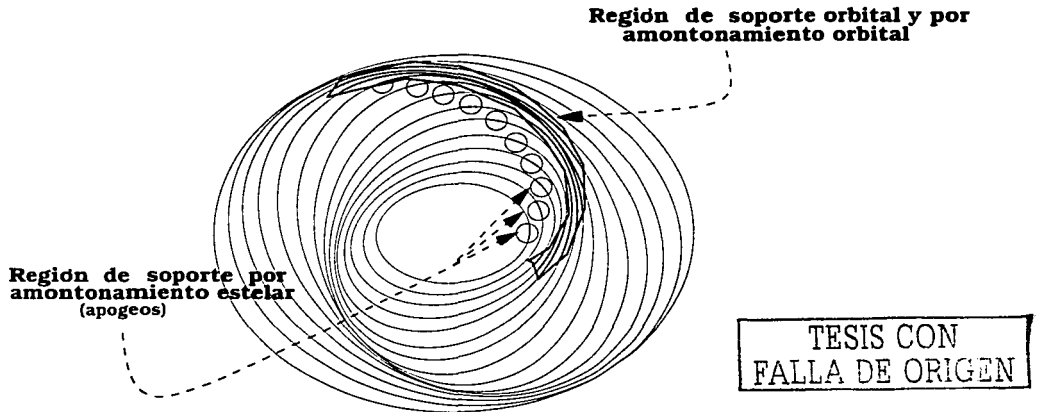


FIGURA 3.15: Soporte orbital y por amontonamiento orbital y estelar a un potencial de brazos.

Con el propósito de comprobar la autoconsistencia de nuestro modelo de brazos

espirales y de hacer el análisis estelar de una forma más cuantitativa, hemos construido un código (Apéndice B.4.3) que encuentra las órbitas periódicas generales y en particular lo hemos aplicado para localizar las 2/1 (Fig. 3.15), es decir, las órbitas con dos ciclos radiales por uno acimutal, para el potencial de los brazos espirales (+ modelo axisimétrico).

El programa que calcula las órbitas periódicas a una distancia Galactocéntrica dada, utiliza el método de Newton-Raphson (Apéndice B) en 2D. Describimos a continuación brevemente los pasos que se siguen para el cálculo de una órbita periódica.

Se requiere de una primera predicción para las condiciones iniciales de la órbita periódica. La mejor predicción que podemos proporcionar es la de una órbita periódica en un potencial puramente axisimétrico (es decir, sin brazos espirales). En el potencial axisimétrico las órbitas periódicas en el plano que interesan son las circulares (es decir las 1/1). Las órbitas son lanzadas (como en el caso de los diagramas de Poincaré) desde $y' = 0$, sobre el eje $x' > 0$ con cualquier v'_y y v'_x . De esta forma calculamos las condiciones iniciales con la siguiente relación,

$$v_c = \left(x' \left| \frac{d\Phi_0}{dx'} \right| \right)^{1/2}, \quad (3.53)$$

que define la velocidad circular en un potencial axisimétrico Φ_0 , es decir la curva de rotación. Obtenemos con ésto la predicción de la velocidad inicial para las órbitas periódicas correspondientes que deseamos calcular en el potencial $\Phi = \Phi_0 + \Phi_{BR}$, proporcionando solamente la posición sobre el eje x' .

Dado que estas órbitas periódicas 2/1, pasan por los mismos puntos tanto en posición como en velocidad después de una vuelta completa al centro del potencial, puede usarse esta propiedad para encontrarlas.

Con el método de Newton-Raphson en 2D, se buscan las raíces de las siguientes ecuaciones de error,

$$x'_f - x'_i = 0, \quad (3.54)$$

$$v'_{x_f} - v'_{x_i} = 0, \quad (3.55)$$

donde x'_i es la posición inicial desde donde lanzamos la órbita en el eje x' y v'_{x_i} la

velocidad inicial en ese punto; x'_f es la posición después de una vuelta completa, cuando interseca la órbita el eje x' nuevamente, y v'_{x_f} la velocidad correspondiente.

Una vez encontrada la raíz, lo que significa encontrar una órbita cuyo error (que corresponde a la diferencia entre el punto inicial y el punto final) después de una vuelta completa sea menor que 10^{-5} en unidades de kpc para x' y el mismo error para v'_x en unidades de 10 km/s (estas unidades le dan aproximadamente el mismo orden de magnitud al error en x' y en v'_x , es decir les dan el mismo peso cuando se calculan los errores), obtenemos las condiciones iniciales requeridas para la órbita que son x' , v'_x y E_J , donde E_J es la constante de Jacobi que calculamos en el plano galáctico de acuerdo a la siguiente relación,

$$E_J = \frac{1}{2}(v'_x{}^2 + v'_y{}^2) + \Phi(x', y') - \frac{1}{2}\Omega_p^2(x'^2 + y'^2). \quad (3.56)$$

En las Figuras 3.16 a 3.18, mostramos tres ejemplos de familias de resonancias 2/1 en potenciales con una razón de masas para los brazos espirales al disco, de $M_B/M_D = 0.0175, 0.03, 0.05$.

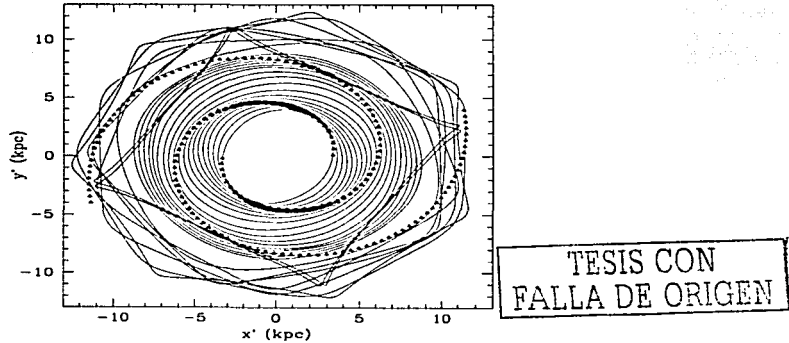


FIGURA 3.16: Órbitas periódicas en el sistema de referencia no inercial para $M_B/M_D = 0.0175$ (caso débil).

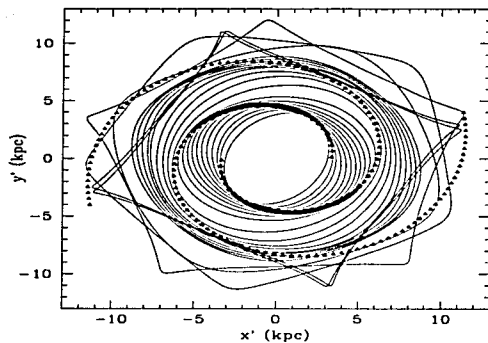


FIGURA 3.17: Orbitas periódicas en el sistema de referencia no inercial para $M_B/M_D = 0.03$ (caso intermedio).

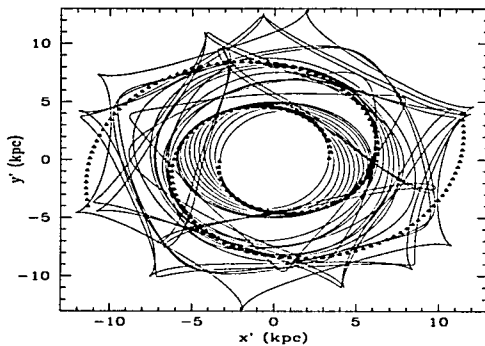


FIGURA 3.18: Orbitas periódicas en el sistema de referencia no inercial para $M_B/M_D = 0.05$ (caso fuerte).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

En la Sección 3.5.3 se discuten los resultados del análisis de autoconsistencia de los

brazos espirales con órbitas periódicas.

3.4.3 Análisis de Regiones Ordenadas y Caóticas con Exponentes de Lyapunov

El caos representa una de las características más complicadas de los sistemas dinámicos no lineales, tanto en el sentido del análisis de sus propiedades, como en el sentido de su simple determinación.

Uno de los diagnósticos más seguros para la determinación de caos en sistemas orbitales, son los diagramas de Poincaré. En este tipo de diagramas las órbitas "ordenadas" aparecen como curvas pobladas densamente de puntos que representan cada cruce de la órbita al eje x' ; estas órbitas rodean en su mayoría a las órbitas periódicas, que aparecen en los cortes como puntos o series de puntos. El caos por otro lado, aparece en forma de puntos dispersos que llenan densamente regiones enteras de estos diagramas que pueden rodear órbitas periódicas en muchos casos. En casos de caos total del sistema, estas órbitas llenan completamente la zona permitida para una constante de Jacobi dada, es decir el diagrama de Poincaré completo para una E_J determinada. Estas órbitas se denominan cuasiperiódicas.

La determinación de caos desde el punto de vista numérico, requiere de muy buena precisión en la integración de las órbitas. Para este efecto, hemos realizado todos los cálculos con el método de Bulirsh-Stoer (Apéndice B.1). Este método es uno de los integradores numéricos más precisos y veloces.

Aún con una buena precisión, la determinación de caos en un sistema, requiere varias pruebas. Además de los diagramas de Poincaré, que resultan uno de los mejores métodos de diagnóstico de caos, existen otros criterios de diagnóstico tales como las transformadas de Fourier tanto para hidrodinámica como para dinámica estelar (Carpintero y Aguilar 1998), la dimensión fractal y los exponentes de Lyapunov, entre los más efectivos e importantes. Debido a la naturaleza no disipativa del tipo de sistema que estamos modelando (y en general de los sistemas estelares), los fractales no son una opción. Hemos entonces incluido, con el propósito de verificar los resultados de los diagramas de Poincaré, el cálculo más simple posible del primer exponente de Lyapunov en el diagnóstico de caos para algunas órbitas con las que trabajamos.

El caos en sistemas deterministas implica una dependencia muy sensible a las condiciones iniciales. Esto significa que si dos partículas tienen trayectorias que comienzan muy cerca la una a la otra en el espacio fase, éstas se moverán alejándose exponencialmente en períodos de tiempo cortos en promedio. Esto es, si d_0 es una medida de la distancia inicial entre los dos puntos iniciales, a un pequeño tiempo más tarde, la distancia es $d(t) = d_0 2^{\lambda t}$, donde λ es el exponente de Lyapunov.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

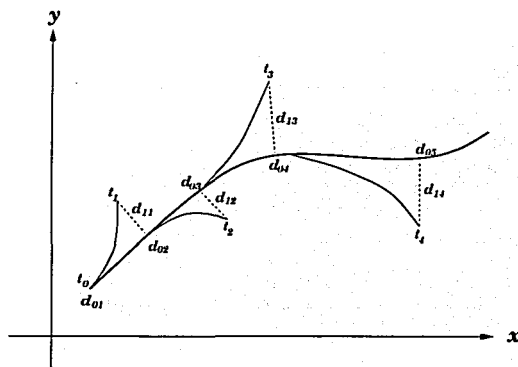


FIGURA 3.19: Esquema del cambio en distancia entre dos órbitas cercanas, usado para definir el primer exponente de Lyapunov.

La divergencia de órbitas caóticas puede solamente ser localmente exponencial debido a que el sistema está limitado por la integral de Jacobi (como lo están la mayoría de los sistemas físicos), $d(t)$ no puede ir hasta infinito. Esto es, para definir una medida de la divergencia de dos órbitas muy próximas, se promedia el crecimiento exponencial en muchos puntos a lo largo de la trayectoria como se muestra en la Figura 3.19. Se comienza entonces con una trayectoria de referencia a la que se conoce como *fiduciaria* y un punto o una trayectoria cercana y se mide $d(t)/d(0)$. Cuando $d(t)$ se hace muy grande (es decir cuando más grande que la distancia dada por un alejamiento exponencial), se busca una nueva trayectoria cercana y se define un nuevo $d_0(t)$. Se define el primer exponente de Lyapunov por la expresión,

$$\lambda = \frac{1}{t_0 - t_N} \sum_{i=1}^N \log_2 \left(\frac{d_{1i}}{d_{0i}} \right). \quad (3.57)$$

Entonces, el criterio para caos es,

$$\lambda > 0 \text{ caos}$$

$$\lambda < 0 \text{ movimiento regular}$$

Para una revisión de los exponentes de Lyapunov ver Wolf (1986).

3.5 Resultados de los Estudios Dinámico Estelares del Modelo con Brazos Espirales. Artículo: *Nonlinear Effects in Models of the Galaxy: I. Midplane Stellar Orbits In the Presence of Three-Dimensional Spiral Arms*

Se presentan en esta Sección los resultados principales de los estudios de dinámica estelar del modelo de la Galaxia con brazos espirales en la forma del siguiente artículo.

Resumen

Con el objetivo de estudiar la respuesta estelar y gaseosa no lineal al potencial gravitacional de una galaxia como la Vía Láctea, hemos modelado los brazos espirales Galácticos como una superposición de esferoides oblatos inhomogéneos, y sumado su contribución a un modelo axisimétrico de la distribución de masa de la Galaxia. Se proponen aquí tres lugares geométricos (*locus*) espirales, basados en diferentes conjuntos de observaciones. Una comparación del modelo con una aproximación de "enrollamiento apretado", muestra diferencias importantes en las regiones medias y externas de la Galaxia. Un análisis preliminar de autoconsistencia tomando $\Omega_p = 15$ y $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ para la velocidad angular del patrón espiral, parece favorecer el valor $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Aunque el modelo está preparado para cálculos en tres dimensiones, como un primer paso para los cálculos hemos explorado la estructura orbital en el plano medio de la Galaxia. Presentamos el análisis estándar en el sistema de referencia que rota con los brazos espirales, y complementamos este análisis con información orbital en el sistema inercial Galáctico. La órbitas prógradas y retrógradas están definidas sin ambigüedad

en el sistema inercial, y así son etiquetadas en los diagramas de Poincaré usuales en el sistema no inercial. De esta forma encontramos una clara separatriz entre las dos clases de órbitas. El caos está restringido a las órbitas prógradas y surge para las perturbaciones espirales plausibles más altas en masa para la Galaxia ($M_S/M_D \sim 0.05$). Una perturbación más allá de estos límites, tiende a destruir la separatriz y extender el caos. Este efecto podría ser relevante para otras galaxias.

Nonlinear Effects in Models of the Galaxy:

1. Midplane Stellar Orbits in the Presence of Three-Dimensional Spiral Arms

Bárbara Pichardo, Marco Martos, Edmundo Moreno, & Julia Espresate

Publicado en:

The Astrophysical Journal: ApJ, 2003, **582**, 230-245**Abstract**

With the aim of studying the nonlinear stellar and gaseous response to the gravitational potential of a galaxy such as the Milky Way, we have modeled three-dimensional Galactic spiral arms as a superposition of inhomogeneous oblate spheroids and added their contribution to an axisymmetric model of the Galactic mass distribution. Three forms for the spiral pattern (loci) are proposed here, based in different sets of observations. A comparison of our model with a tight-winding approximation shows important differences in the middle and outer Galactic regions. A preliminary self-consistency analysis taking $\Omega_p = 15$ and $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ for the angular speed of the spiral pattern seems to favor the value $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. As a first step to the full three-dimensional calculations for which the model is suitable, we have explored the stellar orbital structure in the midplane of the Galaxy. We present the standard analysis in the frame rotating with the pattern, and complement this analysis with orbital information from the Galactic inertial frame. Prograde and retrograde orbits are defined unambiguously in the inertial frame, then labeled as such in the Poincaré diagrams of the noninertial frame. In this manner, we found a sharp separatrix between the two classes of orbits. Chaos is restricted to the prograde orbits, and its onset occurs for the higher spiral perturbation considered plausible in our Galaxy. An unrealistically high spiral perturbation tends to destroy the separatrix and make chaos pervasive. This might be relevant in other spiral galaxies.

3.5.1 Introduction

Modeling of spiral galaxies with sophisticated computational techniques has become the usual way to study systems of this nature. One of the important structures, which

is in fact the one that gives the name to this type of galaxies, is the spiral pattern. In the spiral density wave theory (Lin & Shu 1964), the spiral structure of galaxies was modeled as a periodic perturbation term to the axisymmetric potential in the disk plane. This is known as the *tight-winding* for small pitch angles, or WKB, approximation (see, e.g., Binney & Tremaine 1994). In the case of a two-armed spiral pattern it gives a potential in the galactic plane of the form

$$\Phi_s(R, \varphi) = f(R)\cos[2\varphi + g(R)]. \quad (3.58)$$

The function $f(R)$ is the amplitude of the perturbation, $g(R)$ provides the geometry of the spiral pattern, and (R, φ) are polar coordinates in the noninertial reference frame of the arms (rotating with a given angular velocity).

All studies of spiral galaxies we know of, even in cases of large pitch angle in the spiral pattern, have used a spiral potential of the form in equation (3.58), e.g. Contopoulos & Grosbøl (1986, 1988; hereafter C&G86 and C&G88); Patsis, Contopoulos, & Grosbøl (1991, hereafter PC&G), and in particular for our Galaxy the models of Amaral & Lépine (1997, hereafter A&L) and Lépine, Mishurov, & Dedikov (2001). Self-consistency of the proposed spiral pattern has been analyzed by C&G86, C&G88, PC&G, and A&L.

The dependence of the spiral potential on z (perpendicular distance to the galactic plane) has been accounted for by Patsis & Grosbøl (1996) as a $\text{sech}^2(z/z_s)$ factor of a function of the form in equation (3.58), with z_s a scale height. Martos & Cox (1998), in numerical MHD simulations, considered an exponential z -factor of an approximate local spiral potential in the galactic plane.

In barred galaxies, the approach is analogous to that given above for spiral galaxies: the usual approximation for the potential in the galactic plane due to the bar is a function of the form $\Phi_b(R, \varphi) = f(R)\cos(2\varphi)$. Instead of taking an ad hoc dependence on the z -coordinate, an alternative way to consider the extension to a three-dimensional bar potential is to begin directly with a three-dimensional mass distribution representing the bar. This method has been considered by Athanassoula et al. (1983) and Pfenniger (1984). From a comparison on the galactic plane between their three-dimensional bar potential and a potential of the form $\Phi_b(R, \varphi) = f(R)\cos(2\varphi)$, Athanassoula et al. (1983) found important differences in the corresponding force fields. However, the

consequences of this result were not pursued.

In this paper, rather than using a simple ad hoc model for a three-dimensional spiral perturbation, we consider a procedure whose essence is exactly the same as the modeling of a barred galaxy made by Athanassoula et al. (1983): instead of using a spiral potential of the form given by equation (3.58), we propose a three-dimensional mass distribution for the spiral arms and derive their gravitational potential and force fields from previously known results in potential theory. Grand-design galaxies with a very prominent spiral structure in red light suggest to us that such structure should be considered an important galactic component and are worthy of a modeling effort beyond a simple perturbing term. This approach amounts to little more than admitting the possibility that there is no simple formula that fits the spiral perturbation at all R .

In our model we use Schmidt's (1956) analytical expression for the potential of an inhomogeneous oblate spheroid and model the spiral mass distribution as a series of such components settled along a spiral locus. The overlapping of spheroids allows a smooth distribution, resulting in a continuous function for the gravitational force. The basic parameters of the excess density distribution contributing to the spiral perturbation include a description of the spiral locus, the dimensions and density law of the spheroids, the central density in the spheroids as a function of galactocentric distance, the total mass of the spiral arms, and the angular velocity of the spiral pattern.

Our aim in this work is to make a preliminary study of stellar orbits in the Galactic plane, $z = 0$, in a potential resulting from the superposition of our three-dimensional spiral mass distribution and the axisymmetric Galactic mass distribution considered by Allen & Santillán (1991, hereafter A&S). Also, we compare the potential and force fields produced by the three-dimensional spiral mass distribution with a tight-winding approximation (TWA) in equation (3.58). The resulting differences might have important consequences on the stellar and gaseous dynamical behavior in a potential of this type.

Detailed orbital studies have been made in barred and spiral galaxies (see, e.g., Contopoulos 1983; Athanassoula et al. 1983; Pfenniger 1984; Teuben & Sanders 1985). In this work, our analysis of stellar motion in the Galactic plane, under the proposed Galactic potential, follows the usual technique of Poincaré diagrams. However, we propose an alternative interpretation of Poincaré diagrams that has not been previously consi-

dered. This interpretation is based on defining the orbital sense of motion (prograde or retrograde) in the Galactic inertial reference frame together with the usual definition in the noninertial reference frame (see, e.g., Athanassoula et al. 1983) in which the spiral arms (and/or a bar) are at rest. This leads to Poincaré diagrams (meaningful only in the noninertial reference frame) revealing two sharply separated regions, one corresponding to prograde orbits and the other to retrograde orbits. Our orbital analysis emphasizes the properties of the Galactic spiral arms for which some orbits might show stochastic behavior. These properties and the resulting stellar behavior should be applicable to similar types of galaxies.

The structure of this paper is the following: in Section 3.5.2, we present our Galactic model for the three-dimensional spiral arms, with a discussion of the required parameters. In Section 3.5.3, we give the preliminary self-consistency tests that we have made of the proposed spiral arms and establish a line of attack that must be followed to improve the model. In section 3.5.4, we make a comparison between the potential and force fields given by our model and those given by a TWA. In Section 3.5.5, we present an orbital analysis on the Galactic plane for differing spiral arms properties, including the total mass in the spiral arms, the number of arms, and the angular velocity of the spiral pattern. In the same Section, we clarify the distinction between prograde and retrograde motion and the importance of the frame of reference, to establish the essential difference between the two classes of orbits in Poincaré diagrams through the zero angular momentum separatrix, a concept we introduce in that section. We show there that our definition provides a direct connection between the sense of orbital motion and chaotic motion. Poincaré diagrams for a number of families labeled by their Jacobi integral E_J are shown. An estimate of the required strength of the spiral perturbation for which the nonlinear effects are important is given, and we discuss the range of parameters explored and those we deem plausible for our Galaxy. Finally in the same Section we investigate the onset of chaos using Lyapunov exponents, and the comparison of resonances for prograde and retrograde motion. In Section 3.5.6, we discuss our results and give some conclusions, including the possible response of the interstellar gas to the Galactic potential.

3.5.2 The Model

We use a Galactic model consisting of two mass distributions, the A&S axisymmetric model, and a three-dimensional spiral model given by a superposition of oblate, inhomogeneous spheroids along a given locus. The A&S Galactic model assembles a bulge and a flattened disk proposed by Miyamoto & Nagai (1975), with a massive spherical halo extending to a radius of 100 kpc. The model is mathematically simple, with closed expressions for the potential and continuous derivatives, which makes it particularly suitable for numerical work. The model satisfies quite well observational constraints such as the Galactic rotation curve and the perpendicular force at the solar circle. The main adopted parameters are $R_0 = 8.5$ kpc as the Sun's Galactocentric distance and $V_0(R_0) = 220$ km s $^{-1}$ as the circular velocity at the Sun's position. The total mass is $9 \times 10^{11} M_\odot$, and the local escape velocity is 536 km s $^{-1}$. The local total mass density is $\rho_0 = 0.15 M_\odot$ pc $^{-3}$. The resulting values for Oort's constants are $A = 12.95$ km s $^{-1}$ kpc $^{-1}$ and $B = -12.93$ km s $^{-1}$ kpc $^{-1}$.

As a first step to model the spiral mass distribution, we need the spiral locus. The optical spiral structure in our Galaxy has been studied by means of luminous HII regions (see, e.g, Georgelin & Georgelin 1976; Caswell & Haynes 1987). In the solar neighborhood, the local inclination (pitch angle) of this spiral pattern has been inferred from the direction of the magnetic field lines (Heiles 1996), assumed to be aligned with the spiral arms (see reviews by Beck 1993 and Heiles 1995 on magnetic fields in spiral galaxies). In a recent study, Drimmel (2000) presents evidence for a two-armed spiral in our Galaxy as observed in the K band, which is associated with a nonaxisymmetric component in the old stellar population. Figure 3.20 reproduces Figure 2 of Drimmel (2000); the filled squares trace the position of the four optical arms, and the open squares represent his 15.5° pitch-angle fit for the two arms in the K band. The solid line shows the first of three spiral loci we considered to model the spiral arms. These loci are obtained with a function $g(R)$ -see eq. (3.58)- of the form given by Roberts, Huntley & van Albada (1979),

$$g(R) = -\left(\frac{2}{N \tan i_p}\right) \ln [1 + (R/R_*)^N], \quad (3.59)$$

where i_p the pitch angle at $R \rightarrow \infty$. In Figure 3.20, we take $N=100$, thus making the

arms start at a distance R_s , with approximately the angle i_p to a line passing through the Galactic center, $i_p=11^\circ$, and $R_s=3.3$ kpc, and we consider an orientation such that the two arms start on a line making an angle of 20° with the Sun-Galactic center line (this is the approximate direction of the Galactic bar; see, e.g., Freudenreich 1998). This first two-armed spiral locus approximates the position of both optical and K-band arms.

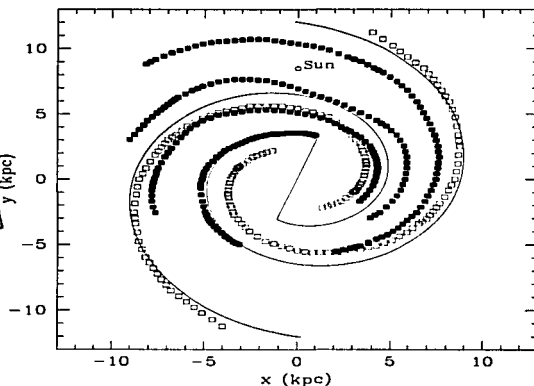


FIGURA 3.20: Spiral arms in our Galaxy (Fig. 2 of Drimmel 2000). *Filled squares* : Optical arms. *Open squares* K-band arms. *Line* : First of three spiral loci considered to model the spiral arms.

As a second spiral locus, we take the two-armed, K-band locus itself. In Figure 3.21, the filled and open squares represent the K-band arms in Figure 3.20. The solid line is obtained with the function $g(R)$ in equation (3.59), taking $N = 100$, $i_p = 15.5^\circ$, and $R_s = 2.6$ kpc. We consider the effective starting distance of the spiral arms in this second locus as the distance 3.3 kpc taken in the first locus; the inner filled squares in Figure 3.21 mark this position.

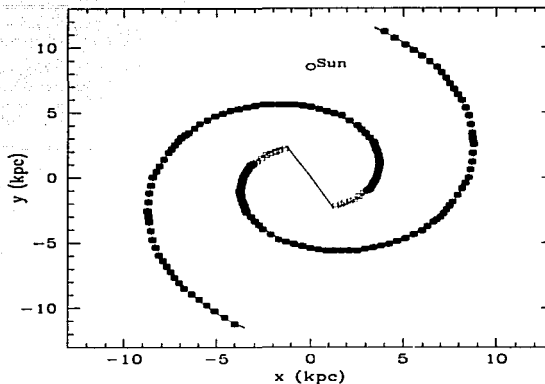


FIGURA 3.21: K-band spiral arms from Fig. 3.20. The solid line represents our second spiral locus. We consider only the part $R \geq 3.3$ kpc, denoted by the filled squares.

An important spiral locus is the one given by the four optical arms. Vallée (2002) shows in his Figure 2 his fit to these optical arms, taking a pitch angle of 12° and $R_0 = 7.2$ kpc for the Sun's Galactocentric distance. Figure 3.22 shows our fit with $N = 100$, $i_p = 12^\circ$, and $R_s = 3.54$ kpc in equation (3.59) and $R_0 = 8.5$ kpc. Drimmel (2000) has suggested that the four optical arms in our Galaxy trace the response of the gas to the two-armed, K-band stellar spiral arms in Figure 3.21. Thus, we take the third spiral locus for the spiral arms in our Galaxy as the superposition of the two-armed K-band and four-armed optical spiral loci. Galactic models using a superposition of two- and four-armed spirals have been proposed by A&L and Lépine et al. (2001).

Our set of models for the spiral mass distribution consist of a superposition of oblate, inhomogeneous spheroids along each of the three proposed spiral loci. The minor axis of each spheroid is perpendicular to the Galactic plane. Each spheroid has a similar mass distribution, i.e., surfaces of equal density are concentric spheroids of constant semiaxis ratio. We consider a linear density law, $\rho(a) = p_0 + p_1 a$, in the spheroids, with a the major semiaxis of a similar surface and the coefficients p_0 and p_1 being functions

of the Galactocentric distance of the spheroid's center. Schmidt (1956) has given the expressions for the potential and force fields for a spheroid with this density law.

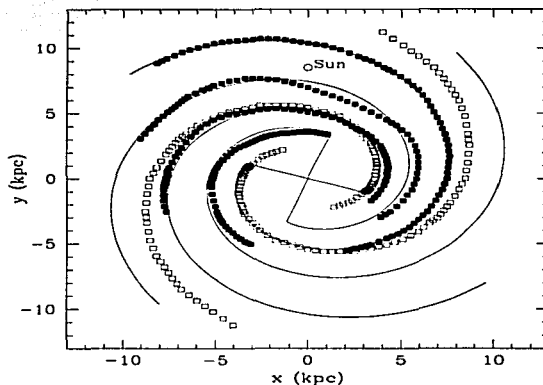


FIGURA 3.22: Spiral arms from Fig. 3.20. The solid line represents our fit to the four optical arms. The third spiral locus considered is the superposition of this four-armed locus and the one in Fig. 3.21.

With respect to the dimensions of the spheroids, Kennicutt & Hodge (1982) have analyzed a sample of spiral galaxies; from their Figure 4, the average width of the spiral arms is around 1 kpc. Thus, considering the linear fall in the density within the spheroids, and taking the vertical extension of the spiral arms as the mean scale height (the vertical structure of the arms is discussed in Martos & Cox 1998), in most models we take the minor (c_0) and major (a_0) semiaxes of the oblate spheroids as 0.5 kpc and 1.0 kpc, respectively, with a separation of spheroid centers along the spiral locus of 0.5 kpc. We found no significant change in our results if we decrease this separation (thus increasing the smoothness of the spiral mass distribution). Each spheroid has zero density at its boundary; thus, the coefficients p_0 and p_1 in a given spheroid satisfy $p_0(R) = -a_0 p_1(R)$, with R the Galactocentric distance of the spheroid's center. The function $p_0(R)$ is discussed below.

The superposition of spheroids begins at the distance $R_i = 3.3$ kpc in the first and second spiral loci given above and at $R_i = 3.5$ kpc in the third locus. The spiral arms are truncated, i.e., the superposition of spheroids ends, at a distance R_f . The analyses of C&G86, C&G88, and PC&G establish that for strong spirals, nonlinear effects make self-consistent spirals terminate at the 4/1 resonance, in contrast with weak spirals, in which linear theory predicts they can extend up to or beyond the corotation resonance (see, e.g., Vauterin & Dejonghe 1996; Kikuchi, Korchagin, & Miyama 1997). According to PC&G, strong spirals are those in which the force produced by the spiral perturbation is greater than 6% of the background force. We consider models around and above this limit, and hence the distance R_f should be taken in accordance with these results. However, our main criterion to set the value of R_f is the maximum radial extent of the observed spiral arms shown in Figure 3.20. In all models we take the value $R_f = 12$ kpc; in Figures 3.20-3.22 the solid lines end at this distance.

In our models, we consider two functions $p_0(R)$ for the central density in the spheroids, defined in the interval $R_i \leq R \leq R_f$: (1) a linear fall to zero, $p_0(R) = p_{01}(R_f - R)/(R_f - R_i)$; and (2) an exponential fall, $p_0(R) = p_{02}e^{-(R-R_i)/R_L}$, with $R_L = 2.5$ kpc the approximate radial scale length of the near-infrared Galactic disk (Freudenreich 1998). We compare the linear fall with the exponential one, the latter being the form generally employed in studies of spiral galaxies (see, e.g., C&G86; C&G88; PC&G; A&L; Patsis & Grosbøl 1996; Englmaier & Gerhard 1999).

The values of the coefficients p_{01} and p_{02} are

$$p_{01} = \frac{3M_s(R_f - R_i)}{2\pi a_0^2 c_0 \sum_{j=1}^{N_t} (R_f - R_j)} \quad (3.60)$$

$$p_{02} = \frac{3M_s}{2\pi a_0^2 c_0 \sum_{j=1}^{N_t} e^{-(R_j - R_i)/R_L}} \quad (3.61)$$

where M_s is the total mass in the spiral arms, N_t is the total number of spheroids in each arm, and R_j is the Galactocentric distance of spheroids' centers. The sums are only over one arm. In a model with four arms, we multiply the terms on the right by a factor of 1/2.

With the above expressions of $p_0(R)$ and $p_1(R) = -p_0(R)/a_0$, Schmidt's (1956) equations give the potential and force produced by a spheroid at any point in space; the

corresponding total potential and force are obtained by summing over all spheroids in all the arms.

The ratio of the total mass in the spiral arms to the mass of the disk ($M_D = 8.56 \times 10^{10} M_\odot$) in the A&S Galactic model is taken to be $M_S/M_D = 0.0175, 0.03,$ and 0.05 . In Section 3.5.3, some properties of the models based on these values are analyzed.

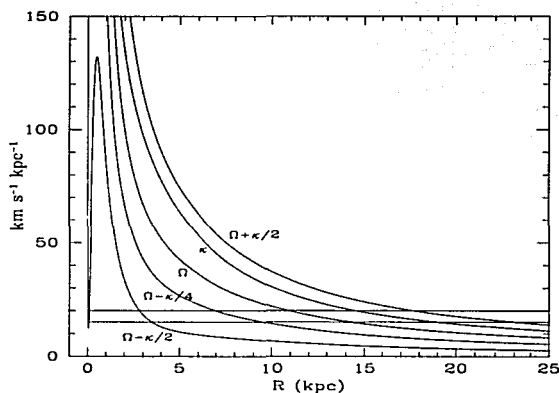


FIGURA 3.23: Resonance curves in the A&S Galactic model. Horizontal lines denote $\Omega_p = 15$ and 20 km s⁻¹ kpc⁻¹.

A final parameter in the models is the angular velocity of the spiral arms, Ω_p , which we assume to be rigidly rotating. The Galactic model of A&L favors the value $\Omega_p = 20$ km s⁻¹ kpc⁻¹, but the hydrodynamical calculations of Englmaier & Gerhard (1999) and Fux (1999), giving the gaseous response in the Galactic disk to a Galactic barred potential, suggest that Ω_p might be as large as 60 km s⁻¹ kpc⁻¹. However, Englmaier & Gerhard (1999) point out that the Galactic spiral arms and the Galactic bar might not have the same pattern speed. Thus, in our models we take a clockwise rotation and consider $\Omega_p = 20$ and 60 km s⁻¹ kpc⁻¹ as two possible values for the pattern speed of

the spiral arms. For comparison, we have also included computations with a plausible smaller value of $\Omega_p = 15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ (see discussions in Martos & Cox 1998; Gordon 1978; Palous et al. 1977; Lin, Yuan, & Shu 1969). Figure 3.23 gives some resonance curves in the A&S Galactic model. In the case of a two-armed spiral pattern and with $\Omega_p = 15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, the inner Lindblad resonance is at 3.5 kpc, corotation at 14.3 kpc, the external Lindblad resonance at 23.2 kpc, and the 4/1 resonance at 9.5 kpc. The corresponding values with $\Omega_p = 20$ and $60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ are 2.8, 10.9, 17.7, and 7 kpc and 1.36, 3.38, 6.28, and 2.21 kpc.

3.5.3 Self-Consistency Analysis

The self-consistency of a stationary spiral pattern, such as the one here proposed, must be addressed. PC&G constructed self-consistent models for 12 normal spiral galaxies. The sample included Sa, Sb, and Sc types. Their conclusion is that for the Sb and Sc galaxies, the best self-consistent model is a nonlinear one in which the 4/1 resonance determines the distance beyond which the response density does not enhance the spiral, i.e., the extent of the spiral pattern. Figure 15 of PC&G shows an approximate correlation in self-consistent models between the pitch angle of the spiral arms, i_p , and the relative radial force perturbation (absolute value of the ratio of radial forces produced by the spiral arms and the background, both evaluated at each point). According to that figure, our Galaxy, with $i_p \sim 15^\circ$, would require for a self-consistent model a relative force perturbation between 5 and 10%. In our models the ratio M_S/M_D was chosen within limits suggested by the PC&G result. We take $M_S/M_D = 0.0175$, 0.03, and 0.05, which imply a peak relative force perturbation of approximately 6%, 10%, and 15% and average values over R^4 of approximately 3%, 6%, and 10%, respectively.

⁴Note that the force is a sensitive function of R . See Section 3.5.6 for a discussion on the consequences of that fact

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

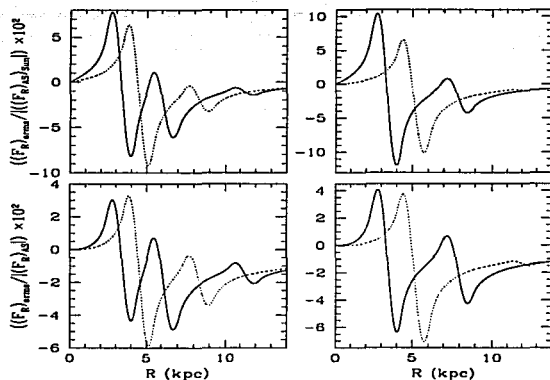


FIGURA 3.24: Radial force due to the spiral arms scaled by the absolute value of the A&S force at the solar position (*top panels*) and by that at the corresponding distance R (*bottom panels*) in a model with $M_S/M_D = 0.0175$. *Left*: Model with the spiral locus of Fig. 3.20. *Right*: Model with the spiral locus of Fig. 3.21. Values are given along the positive x' (*solid lines*) and y' (*dotted lines*) axes (see Fig. 3.29, showing the spiral locus of Fig. 3.21).

Figure 3.24 plots the radial force produced by the spiral arms in our model as a function of Galactocentric distance R . In this figure, the mass ratio is $M_S/M_D = 0.0175$ and $p_0(R)$ has the exponential fall with a scale length of 2.5 kpc; similar results are found with the linear fall of $p_0(R)$. In the left panels of the figure, the model has the spiral locus of Figure 3.20; in the right panels the spiral locus is that of Figure 3.21. In each case, the radial forces scaled by the absolute value of the force given by the A&S model at the solar position (*top panels*) and by that at the corresponding distance R (*bottom panels*); the relative force perturbation is the absolute value of the force ratio shown in these panels) are given along two radial lines (we call these two lines the x' - and y' - axes, respectively; see Figure 3.29): the line passing through the starting points of the spiral arms (Fig. 3.24, *solid curves*), and the line at right angles (Fig. 3.24, *dotted curves*). Similar plots are obtained in the cases $M_S/M_D = 0.03$ and 0.05, showing the corresponding peak values quoted above for the relative force

perturbation.

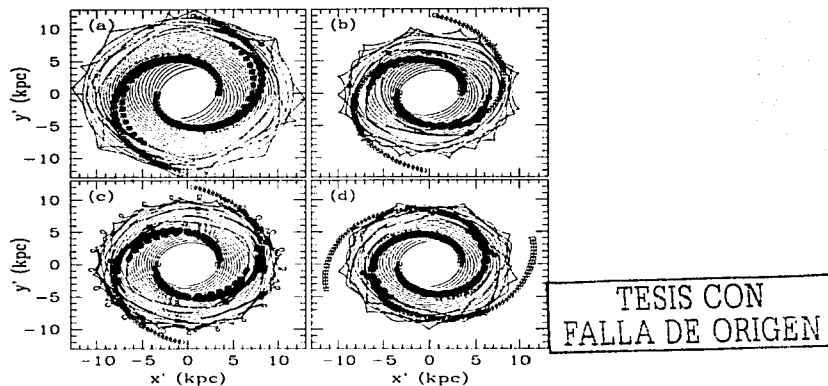


FIGURA 3.25: Response maxima (*filled squares*) in models with the spiral loci (*open squares*) of (a - c) Fig. 3.21, and (d) Fig. 3.20. In (a), $\Omega_p = 15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$; in (b - d), $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. In (a), (b), and (d), $M_S/M_D = 0.0175$; in (c), $M_S/M_D = 0.00875$. Periodic orbits used with the C&G86 method are also shown.

We made a preliminary study of self-consistency in the models of Figure 3.24, using the two values of Ω_p , $15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ and $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. We followed the method of C&G86 to obtain the density response to the given spiral perturbation. This method assumes that the stars with orbits trapped around an unperturbed circular orbit and with the sense of rotation of the spiral perturbation are also trapped around the corresponding central periodic orbit in the presence of the perturbation. Thus, we computed a series of central periodic orbits and found the density response along their extension, using the conservation of mass flux between any two successive orbits. The initial circular orbits were taken with a separation of 0.25 kpc. For more details, see C&G86.

We found the position of the maxima density response along each periodic orbit, and thus the positions of the response maxima on the Galactic plane are known. These positions are to be compared with the center of the assumed spiral arms, i.e., the spiral

locus.

Figure 3.25 illustrates some results. This figure shows the positions of the response maxima (filled squares), along with the spiral arms (open squares) and the periodic orbits used in the method. Cases (a), (b), (c) have the spiral locus of Figure 3.21, and case (d) that of Figure 3.20. The value of Ω_p is $15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ in case (a), and $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ in cases (b), (c), and (d). The mass ratio is $M_S/M_D = 0.0175$ in cases (a), (b), and (d), and $M_S/M_D = 0.00875$ in case (c).

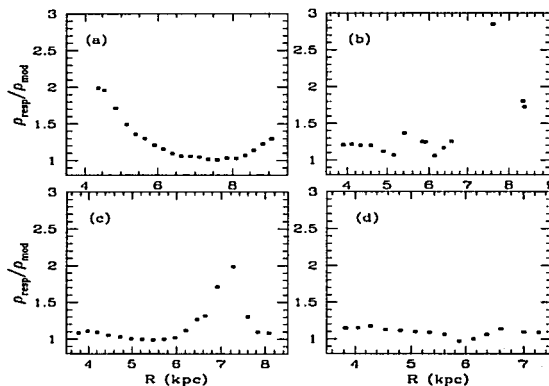
Figure 3.25 shows that mostly the response maxima lag behind the spiral arms, as the Galactocentric distance increases. This behavior has already been discussed by C&G88 and PC&G: the response maxima can lag behind or precede the spiral arms, depending on its radial scale length and strength, among other parameters. PC&G give a nonlinear self-consistent model for the spiral galaxy NGC 1087, in which the response maxima lag behind and claim that this is consistent with observations. C&G88 show that if they consider a dispersion of velocities around the central periodic orbits, the displacement between the response maxima and the spiral arms diminishes, resulting in a better self-consistency.

Once we found the positions of the response maxima, with the density response along each central periodic orbit we computed the average density response ρ_{resp} around each one of these positions, taking a circular vicinity of radius equal to the semiaxis a_0 of the spheroids in the model. We then compared ρ_{resp} with the imposed density, i.e., the one proposed by the model. This imposed density, ρ_{mod} , is the sum of the A&S disk density on the Galactic plane and the central density of the spiral arms. The value of ρ_{mod} is computed *along* the arms. The densities ρ_{resp} and ρ_{mod} are compared at the same Galactocentric distance R , but the corresponding positions on the Galactic plane can differ in azimuth, as shown in Fig. 3.25.

Following C&G88 and A&L, we computed the ratio ρ_{resp}/ρ_{mod} to analyze the self-consistency of the assumed spiral perturbation. This ratio should be close to 1. Figure 3.26 shows the value of this ratio for each case in Fig. 3.25. Figure 3.26(a), with $\Omega_p = 15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, shows a high-density response in the inner region where the spiral arms begin. This behavior has been discussed by C&G86 and C&G88. However, Figures 3.26(b),(c),(d), with $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, show a lower response in the inner region, making the ratio ρ_{resp}/ρ_{mod} closer to 1. Thus, in this preliminary analysis, we

favor $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. In contrast, A&L found (for their model) that the density response could not favor a specific value of Ω_p .

Figure 3.26c shows a better self-consistency than Figure 3.26b, which has twice the mass in the spiral arms. In both cases the density response differs strongly from the imposed density in the region around the distance (7 kpc) of the corresponding 4/1 resonance. Case (d), with the spiral locus of Fig. 3.20, appears to show an acceptable density response, even in the region of the 4/1 resonance.



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIGURA 3.26: Ratio of the response density to the imposed density, $\rho_{\text{resp}}/\rho_{\text{mod}}$, as a function of Galactocentric distance, for each case in Fig. 3.25.

The four approximately self-consistent models of Figures 3.25 and 3.26 have mass in the spiral arms seemingly in the lower limit of the interval (from Fig. 15 of PC&G) that an Sb galaxy like ours needs to sustain a nonlinear, self-consistent spiral perturbation. The analysis for self-consistency is also needed around the upper limit of the mass ratio M_S/M_D . As the method of C&G86 gives only approximate results (C&G88), this analysis and the preliminary results given above need to be reconsidered using the suggested improvements for self-consistency found by C&G88: it might be necessary

to account for a population of orbits around the periodic orbits, with an appropriate velocity dispersion, and perhaps also the inclusion of four-armed spirals (A&L; Lépine et al. 2001). In a study currently underway, we are exploring the self-consistency of our models considering these components, with the mass ratio M_S/M_D in the suggested interval and other density laws in the oblate spheroids, and taking the dimensions a_0 , c_0 as functions of Galactocentric distance. A three-dimensional orbital analysis, such as the one made by Patsis & Grosbøl (1996) would be also relevant in this procedure.

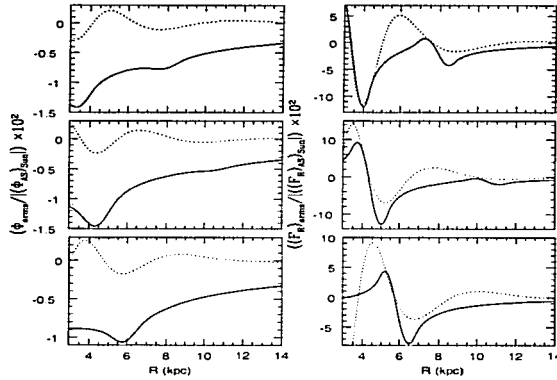


FIGURA 3.27: Potential and radial force, scaled by the absolute value of the potential and force of the A&S model at the solar position, of a model (solid line) with the spiral locus of Fig. 3.21, a mass ratio $M_S/M_D = 0.0175$, and an exponential fall with scale length of 2.5 kpc. The potential and radial force of the spiral arms along three radial lines are given, one along the positive x' -axis (top panels) and the other two along the lines at 60° (middle panels) and 120° (bottom panels) from the x' -axis (in the direction toward the y' -axis). The dotted lines show the corresponding potential and radial force of a TWA model, with the same spiral locus as in our model.

3.5.4 A Comparison with the TWA

In the TWA for the spiral arms (see, e.g., Binney & Tremaine 1994), the potential at a given point is determined by the properties of the spiral arms in a small vicinity around the point. This approximation is given by equation (3.58) in the case of a two-armed

spiral pattern. In our model, the potential at any point in space is obtained by summing the contributions of every element of mass along the spiral arms. Thus, a comparison of our model with the TWA model has some interest.

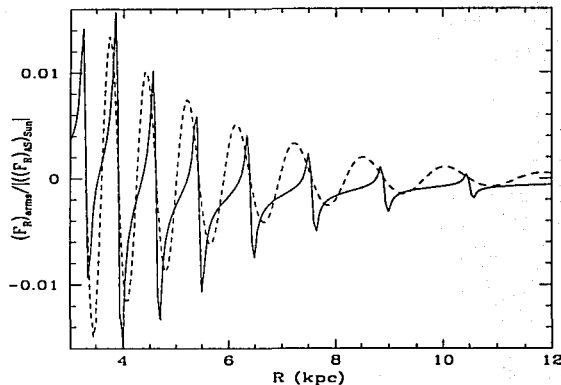


FIGURA 3.28: Comparison of the radial forces due to a 3° pitch angle, two-armed, low-mass, spiral perturbation. *Solid line*, our model; *dashed line*, TWA model (see text for details).

In Figure 3.27 we give the potential and radial force, scaled by the absolute value of the potential and radial force of the A&S model at the solar position, of a model (solid line) with the spiral locus of Figure 3.21, a mass ratio $M_S/M_D = 0.0175$, and an exponential fall of the central density in spheroids, $p_0(R)$, with a radial scale length of 2.5 kpc. We plot the potential and radial force of the spiral arms along three radial lines: the positive x' -axis (top panels), and the lines at 60° (middle panels) and 120° (bottom panels) from the x' -axis (in the direction toward the y' -axis). The dotted line shows the corresponding potential and radial force of a TWA model, i.e., equation (3.58), with the same spiral locus as in our model (Fig. 3.20), and with an amplitude $f(R)$ -eq. (3.58)- of the form considered by C&G86: $f(R) = -ARe^{-\epsilon_s R}$. In Figure 3.27 we take $A = 450 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$ and $\epsilon_s = 1/2.5 \text{ kpc}^{-1}$ (i.e., the same radial scale length as in our model). The high, 15.5° , pitch angle of the spiral locus is not suitable

for a rigorous comparison, but we see that our model cannot be well approximated by a TWA model. Note, for instance, in the top right panel of Figure 3.27, the effect of the mass in the spiral arms inside ~ 8 kpc: the attraction of the whole spiral pattern requires that the point at which the radial force changes from negative to positive needs to be closer to the spiral arm around 8 kpc than in the TWA model. This accumulated negative radial force shifts the net force toward negative values in the outer regions.

In Figure 3.28, we compare the radial forces along the positive x' -axis, for models with a 3° pitch-angle, two-armed, spiral locus starting at 3.3 kpc. The solid line shows our model with $a_0 = 0.1$ kpc, $c_0 = 0.05$ kpc, separation of spheroids' centers of 0.05 kpc, a low mass ratio $M_S/M_D = 0.001$, and an exponential fall of $p_0(R)$ with a radial scale length of 2.5 kpc. The dashed line represents a TWA model with $A = 9 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2} \text{ kpc}^{-1}$ and $\epsilon_s = 1/2.5 \text{ kpc}^{-1}$. Both models are similar in the inner region, but as the Galactocentric distance increases, the effect mentioned above begins to be important. Even in this low-mass case, the attraction of all the mass in the spiral arms makes the radial force in the outer regions asymmetric around zero; in fact, at large distances this force (per unit mass) is $-GM_S/R^2$. In Section 3.5.6 we discuss briefly some consequences of these results, which must have important consequences to the gasdynamics.

3.5.5 *Orbital Analysis*

As an application of our model, we have made a brief study of stellar orbits in the Galactic plane. Poincaré diagrams are presented and discussed from the perspective of the sense of orbital motion defined in the Galactic inertial frame and its connection to the onset of stochastic motion. To investigate further the nature of chaotic motion apparent in Poincaré diagrams, we utilized, in addition, Lyapunov exponents (Wolf 1984).

Poincaré Diagrams and the Separatrix of Zero Angular Momentum

The orbital analysis is made in the noninertial reference frame attached to the spiral pattern, labeled as the primed system of Cartesian coordinates (x', y', z') . As defined in Section 3.5.3, the x' -axis is taken as the line passing through the inner starting points of the spiral arms; the z' -axis is perpendicular to the Galactic plane, with its positive sense toward the north Galactic pole, and the y' -axis is such that the (x', y', z') axes

form a right-hand system. The angular velocity of the spiral arms, Ω_p , points in the negative direction of the z' -axis, i.e., a clockwise rotation.

In the Galactic plane, the effective potential in the noninertial frame is given by

$$\Phi_{eff}(x', y') = \Phi_{AS}(x', y') + \Phi_s(x', y') - (1/2)\Omega_p^2(x'^2 + y'^2), \quad (3.62)$$

with Φ_{AS} the A&S potential and Φ_s the potential due to the spiral arms.

Figure 3.29 shows some equipotential curves, $\Phi_{eff} = \text{const.}$, for the model with $M_S/M_D = 0.0175$, $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, exponential fall of $p_0(R)$, and the spiral locus of Figure 3.21 (i.e., $i_p = 15.5^\circ$). Both figures 3.21 and 3.29 have the same orientation of the spiral pattern. The inertial (x, y) and noninertial (x', y') axes are shown in Figure 3.29. Each square traces the center of an oblate spheroid, and the islands in the equipotential curves appear at the corotation distance (10.9 kpc in this case).

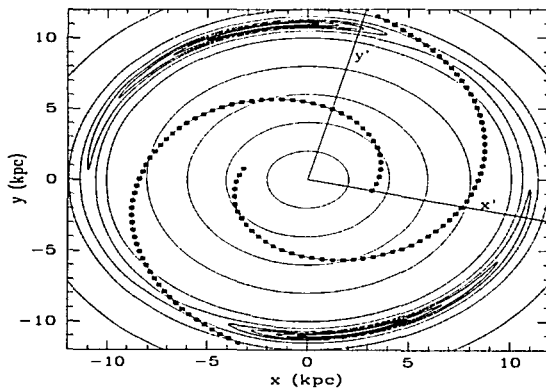


FIGURA 3.29: Equipotential curves $\Phi_{eff} = \text{const.}$, for a model with $M_S/M_D = 0.0175$, $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, and the spiral locus of Figure 3.21. The inertial x, y and non-inertial x', y' axes are shown. Each square marks the center of an oblate spheroid.

A known integral of stellar motion in the noninertial system is Jacobi's expression $E_J = (1/2)v'^2 + \Phi_{eff}$, with \mathbf{v}' the velocity in this system. Then, the equipotential

curves are curves of zero velocity for corresponding values of E_J . Figure 3.30 plots the value $E_J = \Phi_{eff}$ on the positive x' -axis for the model in Figure 3.29.

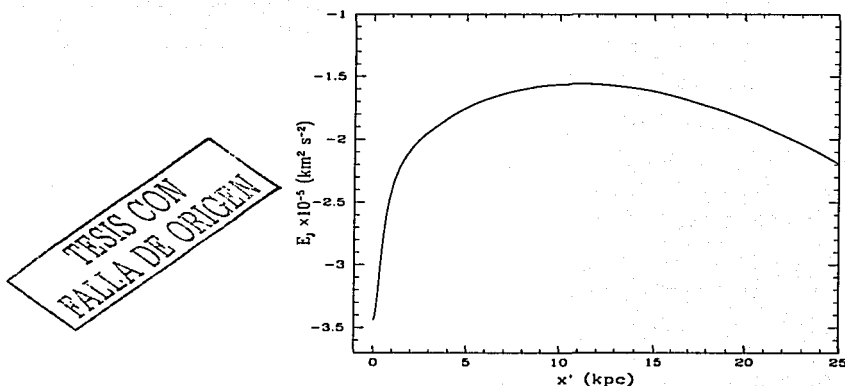


FIGURA 3.30: Value of E_J along the x' -axis for our model in Fig. 3.29.

Poincaré diagrams were constructed following the usual procedure. We found the crossing points with the x' -axis of orbits with a given value of E_J and made Poincaré diagrams x' vs. v'_x for the crossing points having $v'_y > 0$. All the crossing points with $v'_y < 0$ were incorporated in the $v'_y > 0$ diagrams, taking $x' \rightarrow -x'$, $v'_x \rightarrow -v'_x$. We studied several models with a two-armed spiral pattern, taking combinations of Ω_p (15 or 20 $\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$), i_p (11° or 15.5°), M_S/M_D (0.0175, 0.03, or 0.05), and the function p_0 (linear or exponential). Also, we studied models with the *six* spiral arms of Figure 3.22, taking combinations of $\Omega_p = 20$ or 60 $\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$, $M_S/M_D = 0.0175$ or 0.05, and an exponential function p_0 . In all cases the orbits were computed with a Bulirsch-Stoer algorithm (Press et al. 1992), with a mean maximum error $|(E_{J_{final}} - E_{J_{initial}})/E_{J_{initial}}|$ of the order of 10^{-12} , in runs with elapsed physical times of 10^9 - 10^{11} yr.

In this subsection, we present Poincaré diagrams⁵ for models with the lower mass

⁵In the Table 3.2 (in the last part of this chapter) are all the E_J families that we are presenting in

ratio $M_S/M_D = 0.0175$; results with $M_S/M_D = 0.05$ are presented in the next Section.

Figure 3.31 shows Poincaré diagrams for the model in Figures 3.29 and 3.30, i.e., $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ and the spiral locus of Figure 3.21 ($i_p = 15.5^\circ$). Values of E_J were selected in the interval $[-1.8, -1.2] \times 10^5 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$. In this and following figures each diagram was constructed with approximately 50 orbits. The boundary of the permitted region begins to open at the value E_J of the island around the corotation distance (see Figure 3.29) to which the x' -axis is tangent. This value of E_J is the maximum of the curve in Figure 3.30.

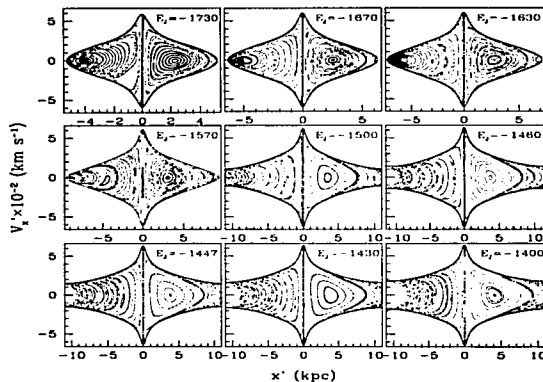


FIGURA 3.31: Poincaré diagrams for nine values of E_J (in units of $10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$), in a model with the spiral locus of Fig. 3.21, $M_S/M_D = 0.0175$, and $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. In each plot the separatrix is shown with darker spots.

Figure 3.32 gives four Poincaré diagrams for a model with the six spiral arms of Figure 3.22 and, again, $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. In this example, the mass ratio for the two K-band, spiral arms is $M_S/M_D = 0.0175$, and the total mass in the four optical arms has this same ratio; i.e., the total mass in the four optical arms is equal to the total mass in the two K-band arms.

the Thesis, including the characteristics of the respective employed model.

In the two Poincaré diagrams in Figures 3.33 and 3.34, we keep the same spiral-pattern arms as in Figure 3.32, but take the high pattern speed $\Omega_p = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Figure 3.35 shows some $\Phi_{eff} = \text{const.}$ curves for this case. The filled squares show the four optical arms and the open squares the two K-band arms. The x' -axis in this case of six arms is the starting line of the two K-band arms. The islands in the $\Phi_{eff} = \text{const.}$ curves appear at a lower corotation distance (cf. Figure 3.29). Figure 3.36 gives $E_J = \Phi_{eff}$ on the positive x' -axis.

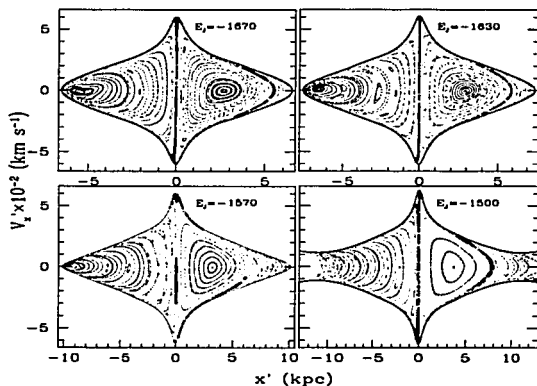
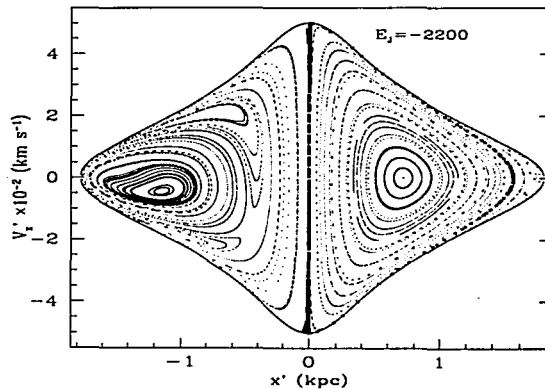


FIGURA 3.32: Poincaré diagrams in a model with the six spiral arms from Fig. 3.22 and $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. The two K-band arms and the four optical arms have the same mass ratio, $M_S/M_D = 0.0175$. The separatrix is shown with darker spots.

The orbital structure of Poincaré diagrams shown in Figures 3.31 - 3.34 is the usual structure obtained in studies of stellar orbits in spiral and barred galaxies (see, e.g., Contopoulos 1983; Athanassoula et al. 1983; Teuben & Sanders 1985). A dominant periodic orbit appears in the $x' > 0$ side of each diagram, and in some cases (i.e., for a certain range in E_J) there is also a dominant periodic orbit on the $x' < 0$ side. Rather than a detailed analysis of the orbital structure, what we wish to emphasize in these diagrams is the clear separation of two regions, each one containing orbits with a

definite sense of rotation, prograde or retrograde, defined in the Galactic inertial frame. In our situation, the spiral pattern moves in the clockwise sense; so the usual definition in the noninertial frame (see, e.g., Athanassoula et al. 1983) would call prograde orbits those orbits crossing the $x' < 0$ side, and retrograde orbits those crossing the $x' > 0$ side. This definition is ambiguous, because the azimuthal velocity in the noninertial frame may change sign along a given orbit. Thus, an orbit can be both prograde and retrograde (Contopoulos 1983). On the other hand, in the inertial frame, *and for the considered range of strengths of the spiral perturbation*, orbits maintain the sign of their azimuthal velocities, with the exception of orbits with angular momentum close to zero (as computed in this frame).



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIGURA 3.33: Same as Fig. 3.32, but with $E_J = -2200 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ and $\Omega_p = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

We define the sense of orbital rotation in the inertial frame as follows: prograde if the azimuthal velocity is always of the same sign as the angular velocity of the spiral pattern, Ω_p , and retrograde if the azimuthal velocity is always of the opposite sign from Ω_p . With this definition, Poincaré diagrams show a sharp separation between the regions of prograde and retrograde orbits by a “curve” that we call the separatrix of

zero angular momentum, which corresponds to orbits with nearly vanishing angular momentum in the inertial frame. In Figures 3.31 - 3.34, the separatrix is shown with darker spots. The orbits forming this "curve" would need to be computed over a longer time to fill it in the diagrams where it appears to be discontinuous.

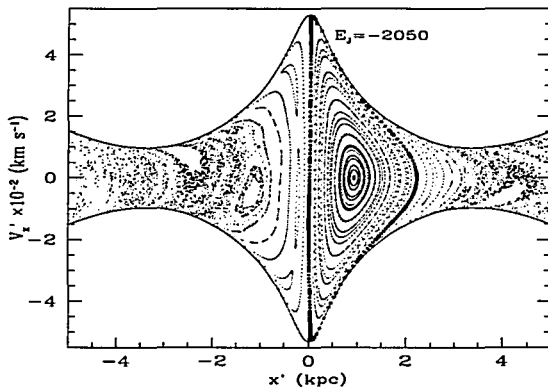


FIGURA 3.34: Same as Fig. 3.33, but with $E_J = -2050 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$.

The definition of sense of orbital motion in the inertial frame reveals that all orbits inside the region bounded by the separatrix are retrograde. Prograde orbits are outside this region. Prograde orbits may have points on both the $x' > 0$ and $x' < 0$ sides of a Poincaré diagram. Another way of saying this is that only prograde orbits can change their sense of motion in the rotating frame. The separatrix is the transition region between prograde and retrograde orbits in the inertial reference frame.

In Figure 3.34, the prograde region has orbits with appreciable chaotic motion. This behavior is discussed in more detail in the next subsection.

We have stressed above that the definition of sense of orbital rotation in the Galactic inertial frame is useful, as long as the strength of the spiral perturbation is not too high. From our study, the correlation chaos-prograde motion seems valid to our Galaxy. In

the next subsection, we analyze the orbital structure in the case of the higher mass ratio $M_S/M_D = 0.05$ still applicable to our Galaxy in our framework. We see below that the separatrix increases its width, i.e., the number of orbits which are both prograde and retrograde in the inertial frame increases. However, our definition still provides a clear separation of prograde and retrograde orbits. An interesting situation in which this definition apparently loses its usefulness is the case of lopsided galaxies considered by Noordermeer, Sparke, & Levine (2001). In this case, it is expected that even in the inertial frame there is a wide region of orbits that are both prograde and retrograde.

Defining the sense of orbital motion in the inertial frame has a more physical connection with the character of orbits affected by a spiral perturbation. As we see in the next section, the analysis of Poincaré diagrams based on this definition shows a connection with the onset of chaotic motion.

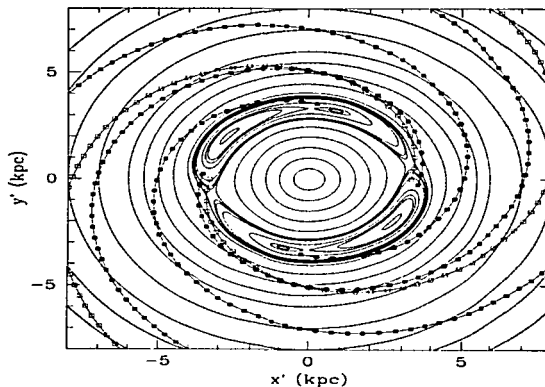


FIGURA 3.35: Equipotential curves $\Phi_{eff} = \text{const.}$, for the model corresponding to Figs. 3.33 and 3.34. Filled squares, optical arms; open squares, K-band arms.

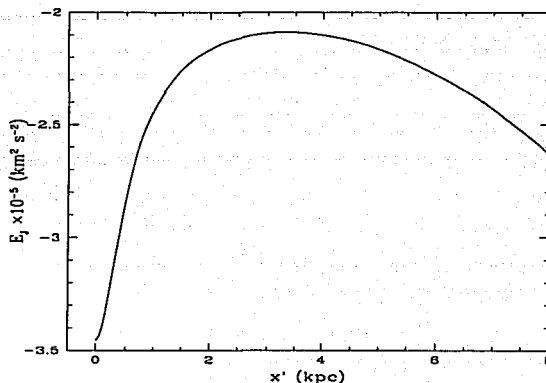


FIGURA 3.36: Value of E_J along the x' -axis in Fig. 3.35.

Exploring the Nature of Orbital Chaos

Orbital chaos has been found in potentials including spiral or bar perturbations (see, e.g., Contopoulos 1983; Athanassoula et al. 1983; Pfenniger 1984; Teuben & Sanders 1985; Fux 2001) and in other nonaxisymmetric potentials (see, e.g., Alvarellos 1996; Noordermeer et al. 2001). In this subsection, we present some results related with the onset of chaotic stellar motion in our model, taking the higher mass ratio $M_S/M_D = 0.05$, which we consider applicable in our Galaxy. We find that as the mass ratio M_S/M_D increases, the onset of orbital chaos always occurs outside the region bounded by the separatrix defined in the previous subsection, i.e., the prograde region. Furthermore, within the plausible range of M_S/M_D , chaos is entirely confined to the prograde region.

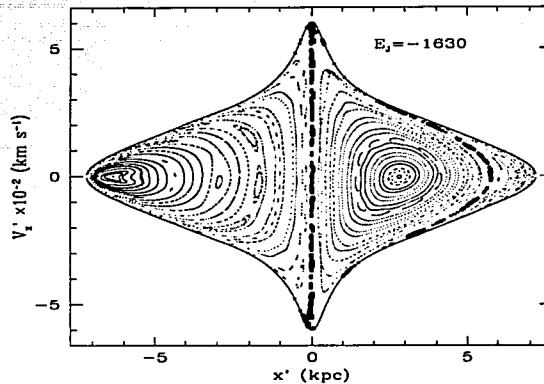


FIGURA 3.37: Zoom of top right panel of Fig. 3.31. Compare with Fig. 3.38

In Figure 3.37, we give a Poincaré diagram with $E_J = -1630 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$, (previously shown in Fig. 3.31, with $M_S/M_D = 0.0175$), and in Figure 3.38 a diagram with the same value of E_J , but now with $M_S/M_D = 0.05$. In both cases the pattern speed is $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. A comparison of the two figures shows that increasing the strength of the spiral perturbation causes the separatrix to increase in width and also some chaotic motion begins to appear on the $x' < 0$ side in Figure 3.38, i.e., outside the region bounded by the separatrix.

To investigate the orbital chaos that appears in Figure 3.38, we did a Lyapunov exponents analysis following Wolf (1986), by calculating individual orbits in the diagram in Figure 3.38. The first Lyapunov exponent was calculated to classify orbits as chaotic or nonchaotic by applying the usual criterion for chaos, namely, $\lambda > 0$ for chaotic motion (which means that two orbits with very close initial conditions will increase their relative distance as $e^{\lambda t}$, with t being the time), and $\lambda \leq 0$ for regular motion (where the relative distance will be constant or decrease exponentially to zero). We found that the exponent λ in the scattered-points subregions of the prograde region,

such as that labeled “1” in Figure 3.38, is always positive (approximately ≥ 0.4) for each pair of orbits we tried, as expected for conservative chaos. On the other hand, this exponent is less than zero for orbits in the regular regions of the Poincaré diagram for both prograde and retrograde orbits (labeled “2” and “3”, respectively). Thus, chaotic motion is entirely confined to the prograde orbits (seen from the inertial frame) for plausible parameters for the spiral arms in the Galaxy.

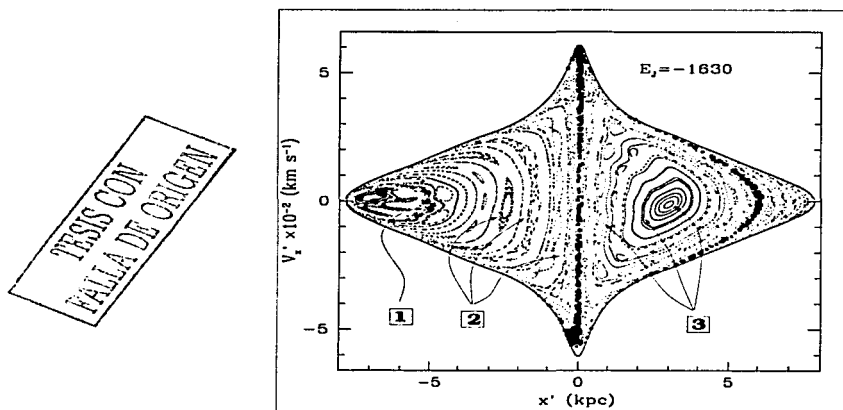


FIGURA 3.38: Same as Fig. 3.37, but with $M_S/M_D = 0.05$. Arrows and labels indicate some zones for which we computed Lyapunov exponents.

If we further increase the mass ratio M_S/M_D , we find that chaotic motion is important for a range of values of E_J , and it spreads from the prograde region toward the retrograde region. This behavior was seen in previous orbital studies (see, e.g., Contopoulos 1983; Athanassoula et al. 1983; Teuben & Sanders 1985), although not linked with the sense of orbital motion defined in the inertial frame.

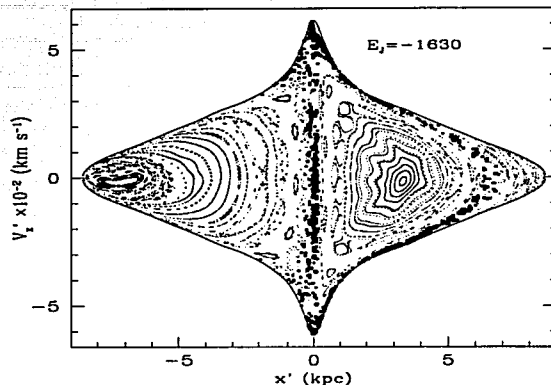


FIGURA 3.39: Poincaré diagram with $E_J = -1630 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$ in a model with the six spiral arms from Fig. 3.22. $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ and $M_S/M_D = 0.05$ for both optical and K-band arms. Compare with Fig. 3.38, which has the same Ω_p and M_S/M_D , but in a model with the spiral locus of Fig. 3.21.

Figure 3.39 shows the effect which produces the addition of the four optical arms to the two K-band arms considered in Figure 3.38, the total mass in the optical arms being the same as the mass in the K-band arms. There are structural similarities between the two diagrams (Figs. 3.38 and Fig. 3.39), but the main difference is the wider separatrix in Figure 3.39. In the separatrix the Lyapunov exponent is negative; thus, chaos is still confined to the prograde region.

In Figure 3.40 we give four Poincaré diagrams for the model with six spiral arms of Figure 3.39, but now with $\Omega_p = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. The prograde and retrograde regions are separated by a narrow separatrix. The first three diagrams show nonchaotic motion within corotation distance (see Figs. 3.23 and 3.36). The fourth diagram, in the bottom right panel, shows pervasive chaos in a wide zone in the prograde region. This corresponds to stellar motion that can surpass the corotation barrier. The same behavior is obtained in the case shown in Figure 3.34, with a lower mass in the six spiral arms. This transition from regular to chaotic motion was also obtained by Fux

(2001), who considered the Galactic bar as the perturbing agent.

All these results show that the onset of chaotic motion starts in the prograde region. The prime cause for chaotic motion is the onset of bifurcations and resonance interactions (Contopoulos 1967; Martinet 1974; Athanassoula et al. 1983; also, E. Athanassoula 2001, private communication). Regarding the resonance interactions, Figure 3.41 shows some important resonance curves for nearly circular retrograde orbits in the A&S Galactic model; in particular, with the $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ line shown in the figure (corresponding to the pattern speed of a spiral perturbation rotating in the *prograde* sense), the corresponding resonance positions can be read on the R -axis. Thus, resonances for retrograde orbits are more widely separated, as compared with the resonances for prograde orbits, some of which are shown in Figure 3.23; i.e., resonance interactions are more important in prograde orbits.

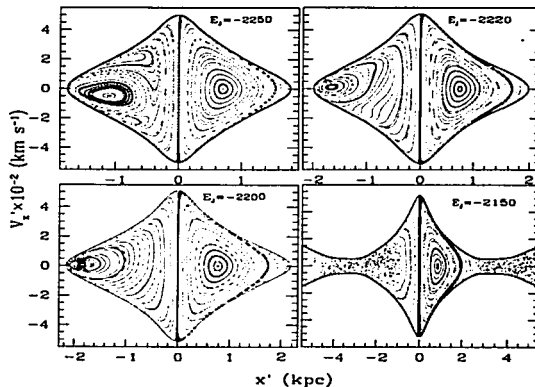


FIGURA 3.40: Same as Fig. 3.32, but with $\Omega_p = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ and $M_S/M_D = 0.05$.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

3.5.6 Discussion and Conclusions

We present a three-dimensional model for a spiral mass distribution, consisting of inhomogeneous oblate spheroids superposed along a given spiral locus. The model is applied in particular to our Galaxy, but it can easily be applied to spiral galaxies in general. Furthermore, it allows us to look with a deeper physical insight into details that are inaccessible to the classical treatment of the spiral perturbation, which models it as a simple periodic function. Our model of oblate spheroids is physically simple and plausible, with continuous derivatives and density laws. For our Galaxy, the model parameters, such as the number of spiral arms, its pitch angle, its radial extent, the pattern speed, the dimensions and mass density of the spheroids, and the total mass in the arms, were taken in a range of possibilities suggested by observations and theory.

In principle, the dimensions and mass density of the oblate spheroids will depend on the type of spiral arms that are modeled, gaseous or stellar. In this first work, the adopted dimensions resemble those of gaseous spiral arms (Kennicutt & Hodge 1982), and a linear density law in the spheroids has been considered. We assembled Galactic models with two-armed spirals, such as the 15.5° pitch-angle stellar arms discussed by Drimmel (2000), and with *six* spiral arms, adding the four 12° pitch-angle, optical arms delineated by luminous HII regions. From a range of possibilities, we considered three values of the pattern speed, $\Omega_p = 15, 20,$ and $60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, and the ratio of the mass in the spiral arms to the disk's mass in the A&S axisymmetric Galactic model, M_S/M_D , in the range 0.0175-0.05. In this range of masses, the average force due to the spiral arms is between 5% and 10 % of the background axisymmetric force.

In an effort to achieve a self-consistent model of the spiral perturbation in our Galaxy, we have used the well-known, approximate method of C&G86 to analyze the density response to this imposed perturbation. We have computed the density response in a Galactic potential with two spiral arms, taking the pattern speed as $\Omega_p = 15$ and $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ and the mass ratio M_S/M_D around the lower limit given above. Our nearly self-consistent models favor the pattern speed of $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. However, this preliminary analysis must be improved, at least accounting for (1) a hot stellar population around the central periodic orbits, (2) a four-armed, stellar spiral pattern in the density response, in addition to the main two-armed component (A&L), and

(3) a proper modeling of the dimensions of two-armed stellar spirals, such as the K-band arms given by Drimmel (2000). This type of arms is azimuthally broad (Rix & Zaritsky 1995); thus, an increase with Galactocentric distance of the major semiaxis a_0 of spheroids would be appropriate. This analysis will be presented in a future work.

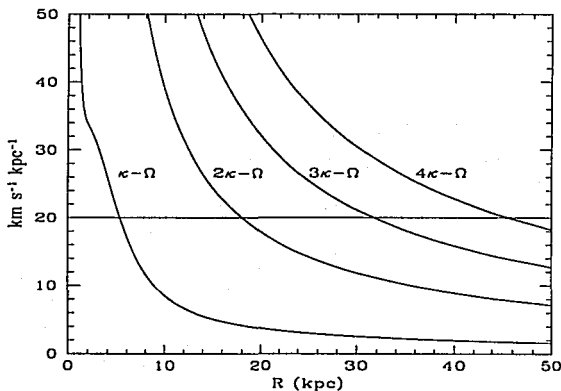


FIGURA 3.41: Some resonance curves for nearly circular retrograde orbits in the A&S Galactic model. The horizontal line represents $\Omega_p = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Compare with Fig. 3.23, which corresponds to nearly circular *prograde* orbits.

Modeling of the gravitational potential produced by a spiral perturbation has usually been based on the TWA -Eq. (3.58). We have compared the potential and force fields of a two-armed spiral perturbation given by our model with a TWA model. We found that the contributions to the potential from the entire pattern cause the local spiral potential to adopt shapes that are not correctly fitted by the TWA model, which has been traditionally invoked to represent the local spiral potential. This fact might have far-reaching consequences, for instance, in the gas response to the spiral perturbation. We have performed modest, one-dimensional, MHD simulations (Franco, Martos, Pichardo & Jongsoo 2002) with the code Zeus to show the differences in the gas response, using the conventional model of a cosine for the potential and the model presented in this

work. These simulations show that shocks do not leave the arm downstream, as in previous calculations (Baker & Barker 1974; Martos & Cox 1998) for a plausible range of entry speeds. And, in correspondence with observational expectations, shocks seek the upstream edge of the arm, i.e., the concave side inside corotation marked in optical observations of galaxies for accumulations of dust in the inner part of the spiral arms. The inclusion of the magnetic field is essential to this effect. In this manner, results based on the TWA should be revised: the gas response depends strongly on the position in the Galaxy. A potential "well" in the arm might disappear as such at a different segment of the arm.

In the analysis of Poincaré diagrams, we found it is quite fruitful to use an inertial frame to define the prograde or retrograde sense of orbital motion around the Galactic center, along with the usual definition in the noninertial system, where the Poincaré diagrams are defined. In the inertial frame, the sense of motion is preserved with time for almost every orbit in our experiments, the exceptions being orbits with nearly zero angular momentum. This property relies on the parameters we consider plausible for our Galaxy. If we include information from the inertial system in the noninertial one, Poincaré diagrams reveal that prograde and retrograde orbits, as defined in the inertial frame, occupy sharply separated regions, through a separatrix corresponding, loosely, to nearly zero angular momentum orbits in this system.

The definition of sense of orbital motion in the inertial frame goes beyond a mere matter of semantics, for it has a simple physical meaning, and it appears to be intimately connected to the onset of chaos. Based on an analysis of Poincaré diagrams and the first Lyapunov exponent, we find that, within plausible amplitudes and pitch angles of the spiral arms for a Galaxy such as the Milky Way (and independently of the number of arms chosen), if there is chaos, only prograde orbits can exhibit it, and for a sufficiently weak perturbation, as it seems to be the case in our Galaxy, the separatrix is a well-defined, narrow curve. The onset and extension of chaotic subregions of the prograde region depend on two main parameters: the mass in the spiral arms, or the relative force; and the angular velocity. We stress the point that the standard definition in the rotating frame, which calls the $x' > 0$ of the diagram the retrograde side and $x' < 0$ the prograde side (for a spiral pattern moving clockwise), would not have shed light onto the connection chaos-prograde motion, since the same orbit (ordered or chaotic) can occupy

both sections of Poincaré diagrams. The different behavior regarding the onset of chaos of prograde and retrograde orbits, as defined in the inertial system, could be attributed to the overlapping of resonances (Contopoulos 1967; E. Athanassoula 2001, private communication). Figures 3.23 and 3.41 show that the spacing of the main resonances is wider for retrograde orbits than for prograde ones, and for prograde orbits is even smaller if we take higher angular velocities for the spiral pattern. In cases with the lower spiral masses (approximately $M_S/M_D \leq 0.03$), we do not find chaos for angular speeds of the spiral pattern lower than $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. We have also computed some orbital families with $\Omega_p = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, since n-body models predict those velocities (which corresponds to the bar), and we find that, even for the lowest spiral mass we considered, chaos appears for some families (Fig. 3.40, $E_J = -2150 \times 10^2 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$), where almost all the prograde region is chaotic but chaos do not invade the retrograde region. The inclusion of more than two spiral arms does not seem to change the results dramatically (Figs. 3.38 for two arms and 3.39 for six arms). A minimum strength of the perturbation is required for the appearance of stochastic motion in the models with the lowest angular speeds (15 and $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$). We find that the amplitude of approximately 6% (on average) of the axisymmetric radial force is required (which corresponds in our model to a $M_S/M_D \leq .05$ for a pitch angle of 15.5°). For cases of very strong spiral perturbations (relative forces higher than 15%) the separatrix is no longer a well-defined curve and chaos is pervasive. However, we do not think this spiral forcing is proper for a Sb galaxy.

It is worth noticing that our results are valid in the plausible range of parameters (and even in unrealistic cases with maximum relative forces for the spiral arms up to 15%) in a galaxies similar to the Milky Way with two, four, or six arms. However, our results will surely be altered by the influence of the Galactic bar. We are currently studying this effect⁶.

⁶Estudios preliminares son presentados en el Capítulo 4.

3.6 Otros Resultados

En esta Sección se presentan brevemente algunos de los resultados no mencionados en el artículo (Sección 3.5) y algunos otros que aunque fueron mencionados, no han sido explicados en detalle.

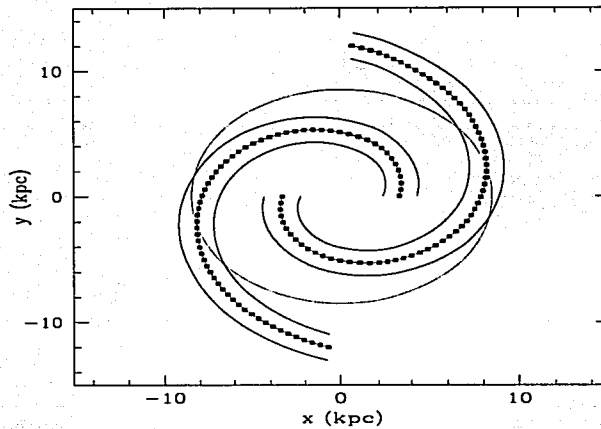


FIGURA 3.42: Esquema de los brazos espirales en la banda K (Drimmel 2000). Los cuadrados indican los centros de los esferoides; las líneas continuas muestran el ancho de los brazos. El círculo está a una distancia galactocéntrica de 8.5 kpc.

Hemos insistido a lo largo de este Capítulo en la importancia de modelar el patrón espiral con mayor detalle y bases físicas que lo que se puede lograr con un simple término perturbativo. Sabemos que unos brazos espirales cuyo potencial es modelado como una perturbación cosenoidal (ecuación 3.58), proporcionan una fuerza y potencial ideal, es decir, perfectamente simétrico, suave y con los mínimos de potencial en el centro geométrico del brazo espiral. Por otra parte mostramos el comportamiento de la fuerza y potencial a lo largo de una línea radial en las Figuras 3.24, 3.27, 3.28 y vimos la diferencia sustancial entre los diagramas que usan la aproximación TWA y los del

modelo presentado en este trabajo.

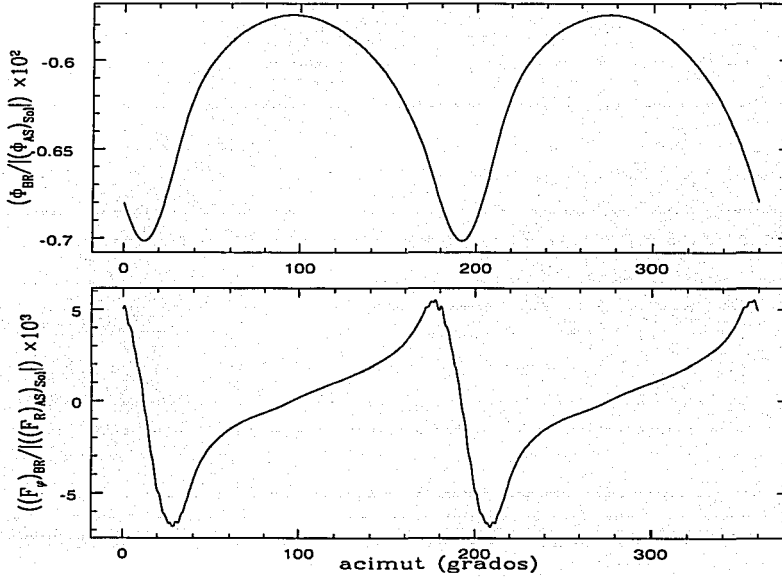


FIGURA 3.43: El potencial y la fuerza acimutal a lo largo del círculo de radio 8.5 kpc de la Figura 3.42. El cero en acimut se encuentra en el eje $x > 0$.

En el caso de un potencial no axisimétrico la fuerza acimutal es diferente de cero a lo largo de un círculo centrado en el origen galáctico (a diferencia de un potencial axisimétrico en el que esta fuerza es cero) y resulta más importante cuanto más importante es el perturbador. Por completez hemos construido un ejemplo de la fuerza acimutal y el potencial a lo largo del círculo con radio de 8.5 kpc, trazado en la Figura 3.42, que muestra los brazos espirales en la banda K (Drimmel 2000) con un ángulo de enrollamiento de 15.5° ; este ejemplo es dado en la Figura 3.43. Mostramos también la

fuerza radial y el potencial en la Figura 3.44 a lo largo de una línea radial que parte del origen galáctico en la dirección del eje $x > 0$. En ambas Figuras 3.43 y 3.44, la fuerza y potencial debidos a los brazos se dan escaladas respecto a los valores de la fuerza radial y potencial respectivamente, en la posición del Sol en el modelo de Allen y Santillán (1991).

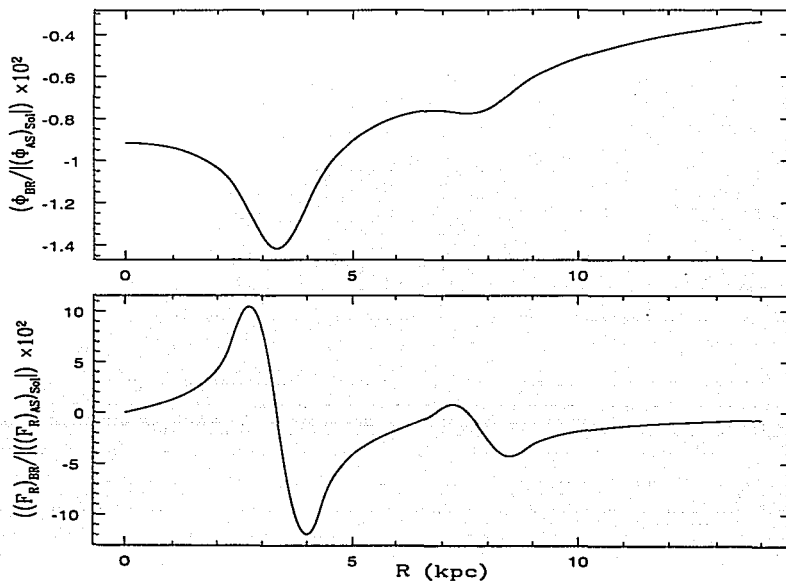


FIGURA 3.44: El potencial y la fuerza radial a lo largo del eje $x > 0$ en la Figura 3.42.

En el caso de un potencial de brazos modelado como un coseno, el potencial a lo largo del círculo en la Figura 3.42, resultaría una función periódica perfecta donde la longitud angular (a algún valor del potencial determinado) de los mínimos y máximos es la misma (esto es, por ejemplo, el ancho a potencial medio de los mínimos es igual

al ancho de los máximos) y donde los mínimos de potencial caerían exactamente en los centros geométricos de los brazos espirales que intersectan el círculo. Como puede verse en la Figura 3.43, la longitud angular de los mínimos (el ancho a potencial medio por ejemplo), es diferente a la longitud angular de los máximos. La diferencia es debida al hecho de que los brazos en nuestro modelo, al ser materiales, tienen un ancho determinado menor a la región interbrazo (ver Sección 3.2.4), como de hecho puede observarse en galaxias reales, mientras que los brazos modelados con las aproximaciones cosenoidales, suponen que la zona interbrazo tiene aproximadamente el mismo ancho (o la misma longitud angular) que la región de los brazos. Un potencial que refleja lo observado, tendría entonces mínimos de potencial con anchos a potencial medio, mucho menores que las zonas interbrazo como se ve en la Figura 3.43.

En la misma Figura 3.43, tenemos la fuerza acimutal a lo largo del círculo de la Figura 3.42. De la misma forma que para el potencial, se nota el efecto de un brazo delgado (de 2 kpc aproximadamente según las observaciones, Sección 3.2.4) y acotado en la fuerza acimutal, la cual cambia de dirección dirigiéndose siempre hacia el brazo y cambiando apreciablemente en una región más pequeña que la región interbrazo. En la Figura 3.44, mostramos el potencial y la fuerza radial a lo largo del eje $x > 0$. Se observan dos mínimos en el potencial debidos al cruce de la línea por ambos brazos y la fuerza radial correspondiente cuya forma hemos ya discutido en la Sección 3.5.

Además de las comparaciones directas entre nuestro modelo y el coseno ideal, usando el potencial y la fuerza, hemos realizado algunas comparaciones cualitativas del comportamiento orbital con ambos modelos, usando diagramas de Poincaré. En la Figura 3.45, se muestra un mosaico con nueve diagramas de Poincaré realizados con el modelo cosenoidal (para un ejemplo, ver Barbanis y Woltjer 1967), con una amplitud en la razón de fuerza radial del brazo vs. axisimétrica que corresponde aproximadamente a la misma fuerza que nuestros brazos espirales dan con una masa $M_B/M_D = 0.0175$. En la Figura 3.46, se muestra el correspondiente mosaico calculado con el modelo presentado en la Tesis.

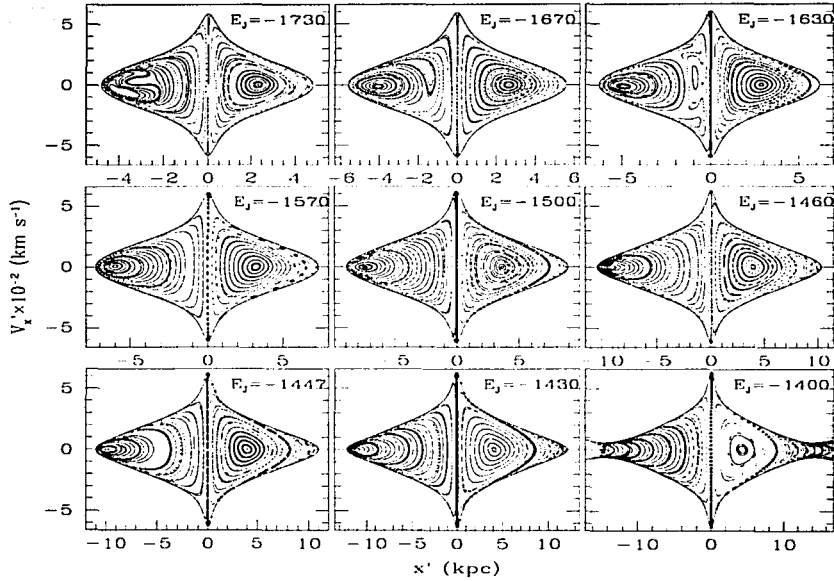


FIGURA 3.45: Familias orbitales calculadas con la aproximación cosenoïdal. La razón de fuerzas radiales corresponde aproximadamente a la misma razón de fuerzas radiales de nuestro potencial para una masa de los brazos espirales, $M_B/M_D = 0.0175$. El ángulo de enrollamiento es 15.5° y la velocidad angular $\Omega_P = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

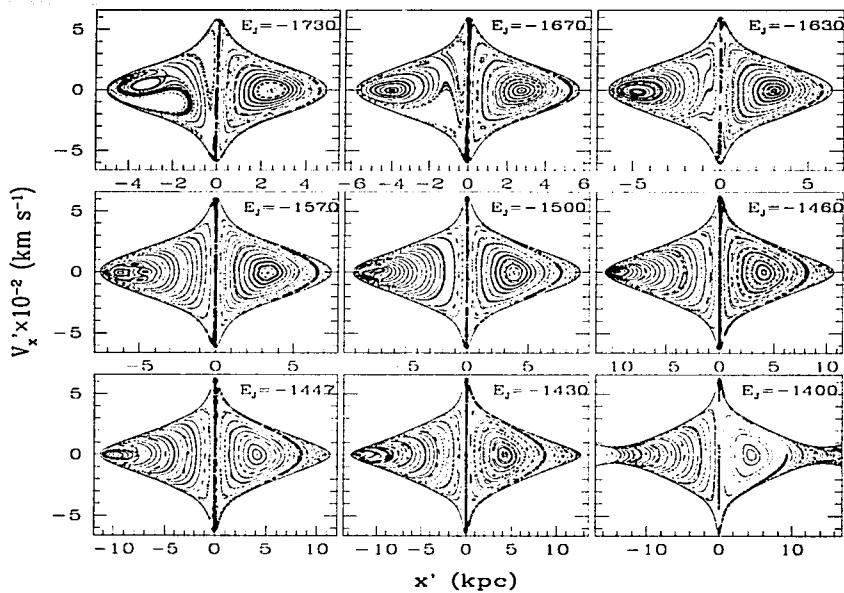


FIGURA 3.46: El correspondiente conjunto de familias orbitales calculadas con el modelo presentado en la Tesis. Los parámetros de los brazos espirales son los mismos que los de la Figura 3.45.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

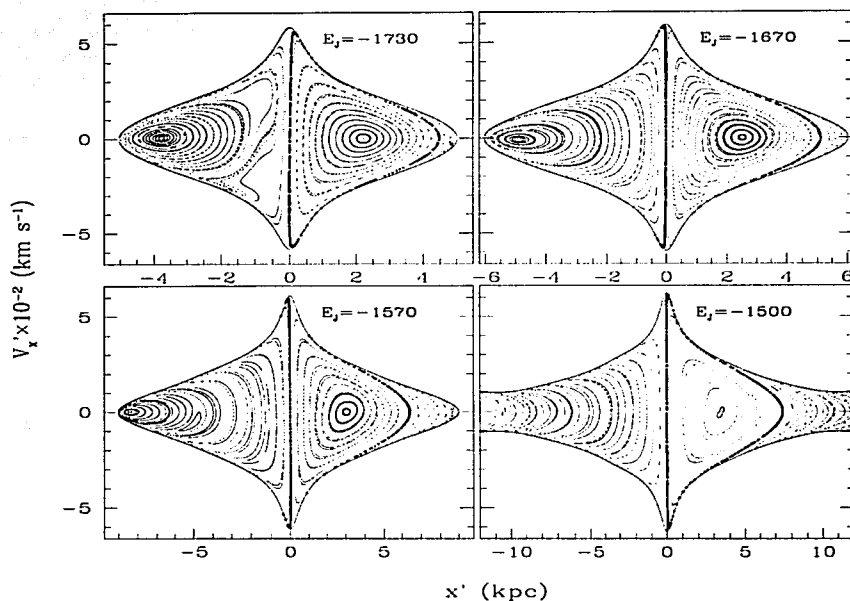


FIGURA 3.47: Lo mismo que la Figura 3.45 pero para una razón de fuerzas radiales que corresponden en nuestro modelo a una masa de los brazos espirales $M_S/M_D = 0.05$.

Desde un punto de vista cualitativo, los diagramas para órbitas en el plano Galáctico son similares a grandes rasgos, aunque si uno mira a detalle se observa cómo la estructura orbital en el caso del modelo menos idealizado del brazo espiral es más rica y complicada que en el caso del modelo de la aproximación cosenoidal. Sin embargo, en los casos de baja masa no es tan evidente la diferencia. En las Figuras 3.47 y 3.48 mostramos el equivalente de las Figuras 3.45 y 3.46 pero ahora para una masa $M_B/M_D = 0.05$. En este caso de masa alta, vemos cómo el caos se produce en regiones

más extensas que en el caso del modelo cosenoidal, en el cual incluso puede no aparecer caos aún con un brazo espiral a la misma amplitud en la razón de fuerzas radiales (brazo vs. fondo axisimétrico) que el del modelo de los esferoides.

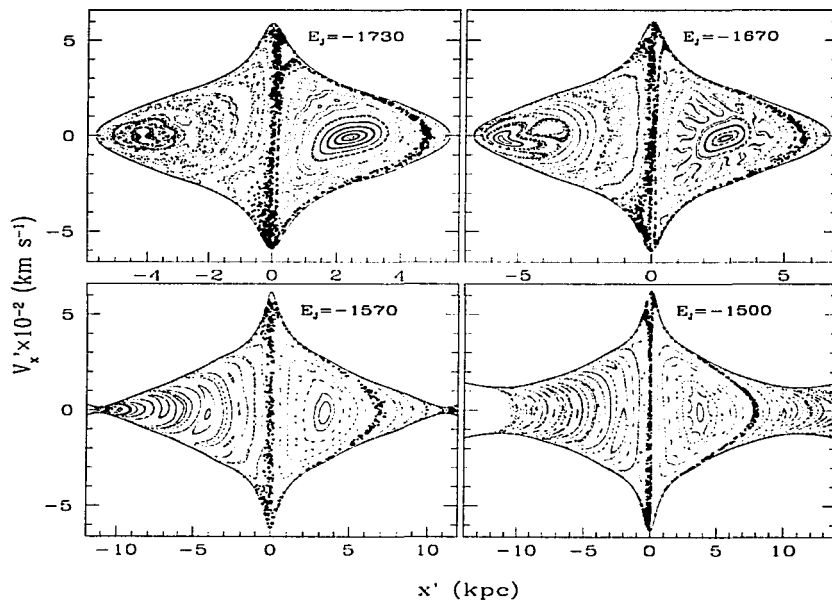


FIGURA 3.48: Lo mismo que la Figura 3.46 pero para una masa de los brazos espirales de $M_S/M_D = 0.05$.

Como se menciona en la Sección 3.5, la ley de caída en densidad de los esferoides a lo largo del brazo espiral es exponencial para todos los cálculos en el artículo, por ser ésta una caída físicamente más plausible (ver Sección 3.2.7). Por simplicidad inicialmente realizamos los cálculos con una ley de caída lineal, notando que la estructura orbital

(diagramas de Poincaré y órbitas periódicas), cualitativamente hablando, no parece depender de la ley de caída del brazo. En la Figura 3.49, se muestran ambas leyes de densidad para los centros de los esferoides a lo largo del brazo espiral, con $M_S/M_D = 0.0175$.

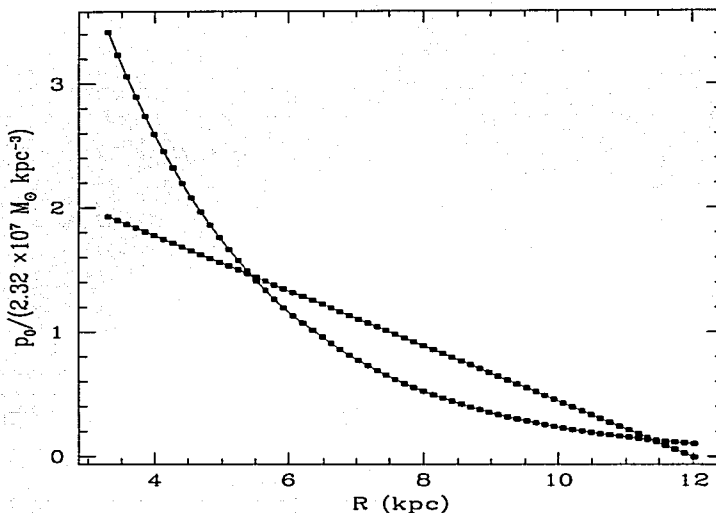


FIGURA 3.49: Las leyes de caída lineal y exponencial en la densidad central de los esferoides que componen los brazos espirales, empleadas en los experimentos orbitales.

Se muestran también las Figuras 3.50 y 3.51, que corresponden a seis familias orbitales para el experimento con brazos lineales y brazos exponenciales respectivamente. Ambos conjuntos de familias tienen los mismos parámetros orbitales tales como ángulo de enrollamiento, dimensiones y velocidad angular.

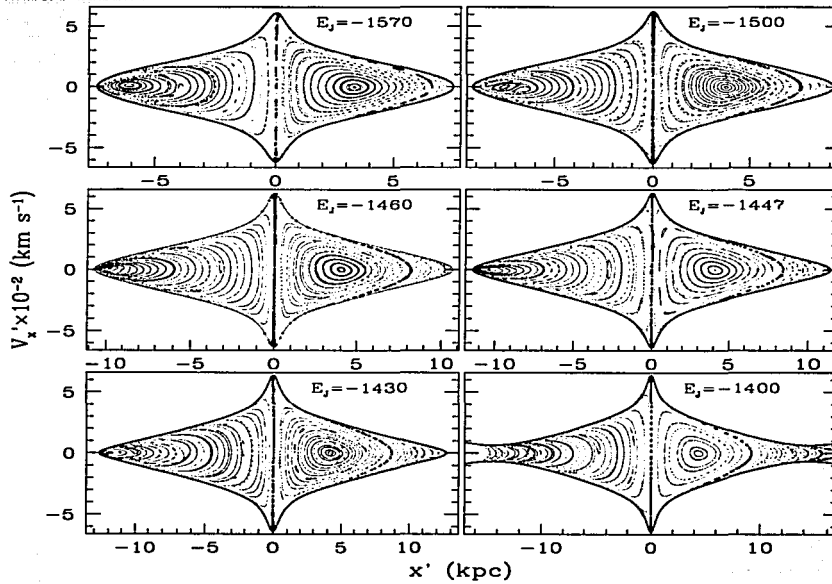


FIGURA 3.50: Familias orbitales correspondientes al experimento de brazos espirales con caída lineal en la densidad central de los esferoides. Los parámetros de los brazos son, ángulo de enrollamiento de 11° , velocidad angular $\Omega_P = 15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

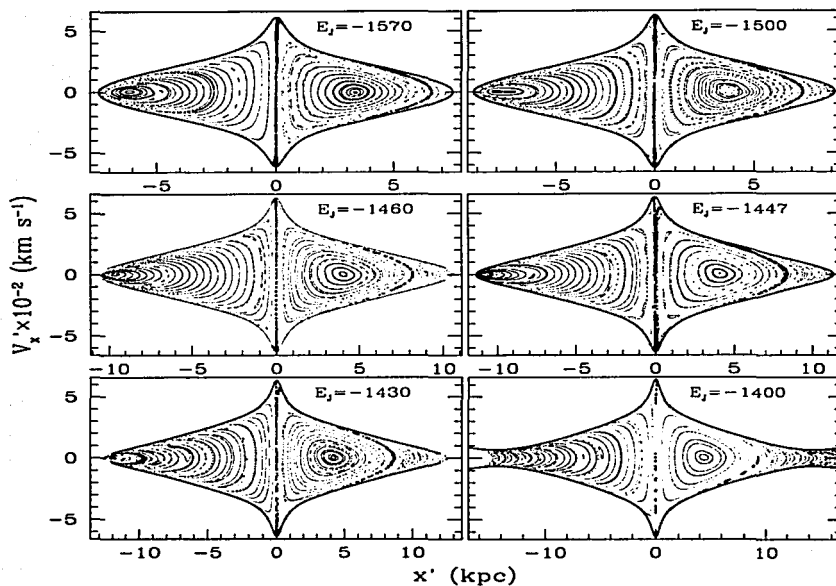


FIGURA 3.51: Lo mismo que la Figura 3.50, pero con la densidad central de los esferoides en los brazos en caída exponencial.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Mostramos a continuación algunas familias orbitales con el modelo de brazos espirales presentado en este trabajo. Hemos variado los parámetros más importantes tales como la velocidad angular, el ángulo de enrollamiento y la masa (sólo un parámetro a la vez), con propósitos de análisis por comparación.

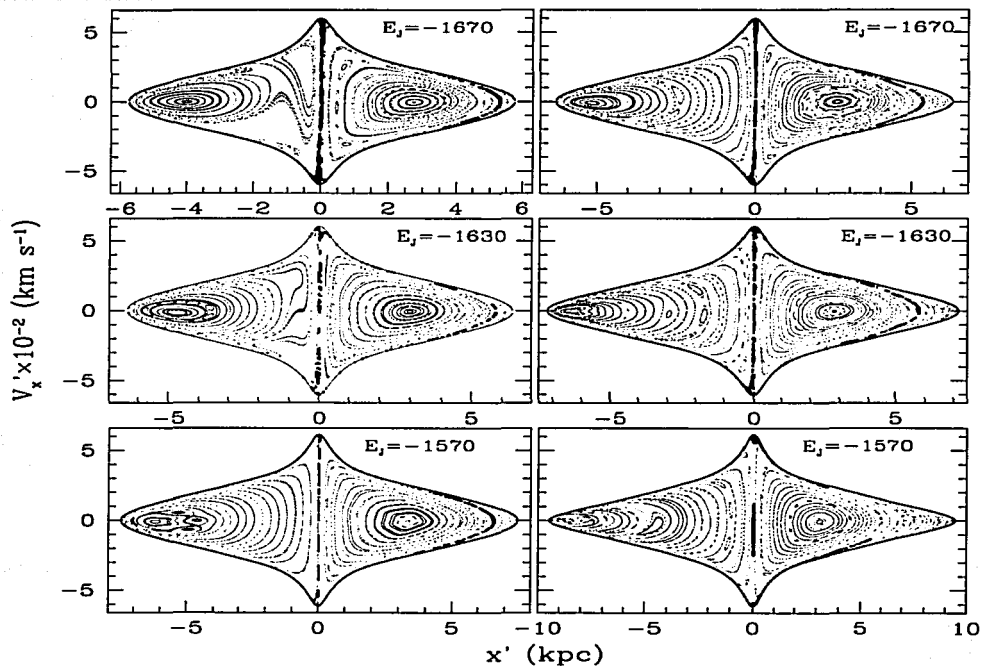


FIGURA 3.52: Familias orbitales con diferentes velocidades angulares. Los paneles de la izquierda con $\Omega_P = 15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, y los paneles de la derecha con $\Omega_P = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Todas las familias fueron calculadas con el modelo de brazos presentado en este trabajo. El ángulo de enrollamiento es el correspondiente a los brazos en la banda K ($i = 15.5^\circ$), la masa $M_B/M_D = 0.0175$.

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

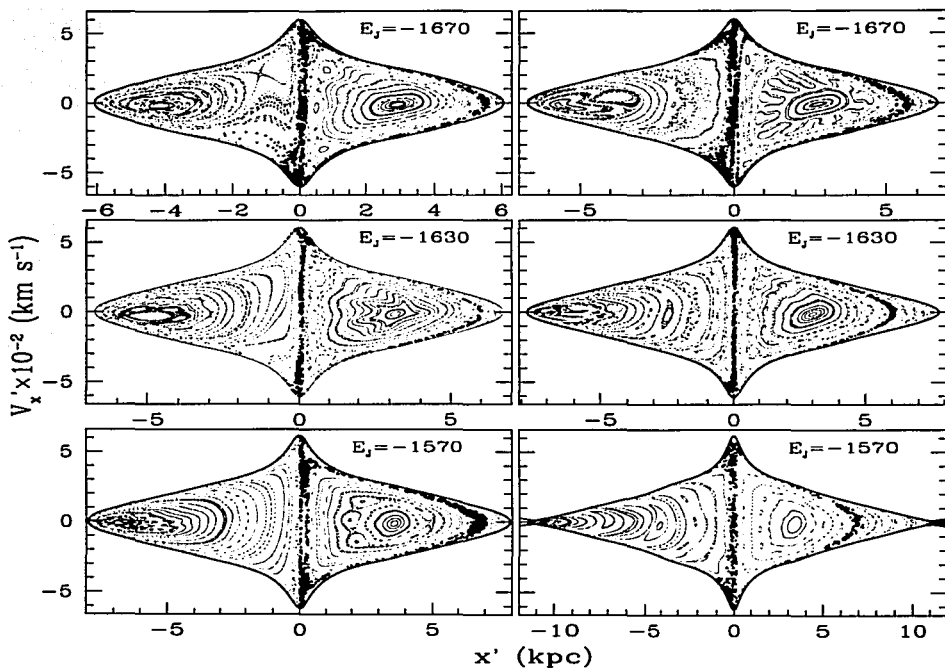


FIGURA 3.53: Lo mismo que la Figura 3.52 pero con $M_B/M_D = 0.05$.

En la Figura 3.52, presentamos tres familias de órbitas con diferentes velocidades angulares (en los paneles de la izquierda con $\Omega_P = 15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ y en los de la derecha con $\Omega_P = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$). Así mismo, en la Figura 3.53, se muestran los mismos experimentos pero con la masa máxima utilizada para los brazos en la Galaxia

en este trabajo ($M_B/M_D = 0.05$). El comportamiento orbital cambia notablemente con un cambio moderado en la velocidad angular. Las regiones caóticas por otra parte son afectadas sólo en su forma pero no parecen moverse o desaparecer de una velocidad a otra.

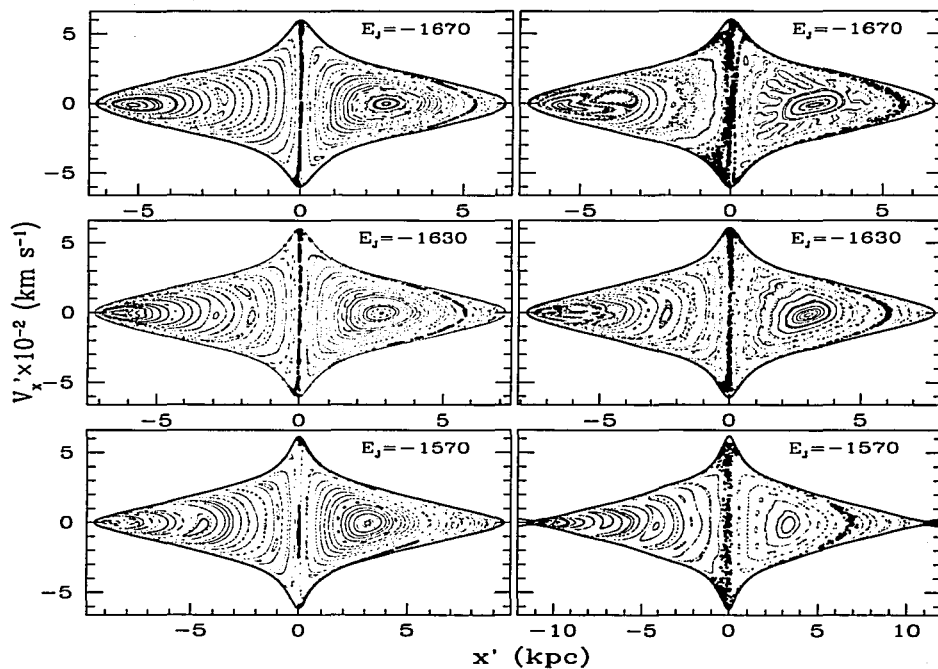


FIGURA 3.54: Diagramas comparativos de tres familias orbitales con $M_B/M_D = 0.0175$ (paneles del lado izquierdo) y tres familias con $M_B/M_D = 0.05$ (paneles del lado derecho). El ángulo de enrollamiento corresponde al de los brazos en la banda K, la velocidad angular es de $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

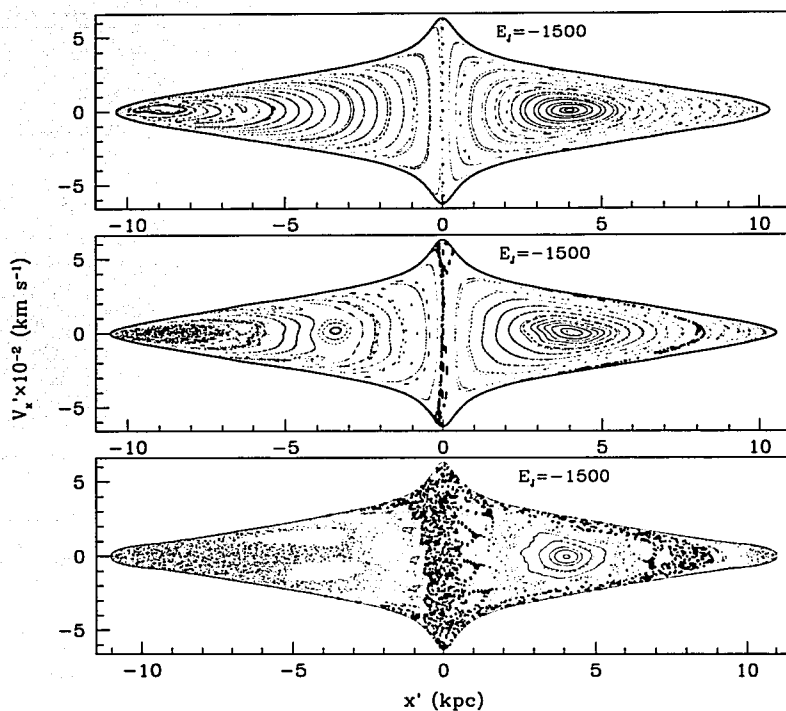


FIGURA 3.55: Cortes de Poincaré de una familia orbital producidos con el modelo espiral con tres ángulos de enrollamiento diferentes. El panel superior corresponde a un ángulo $i = 6^\circ$, el panel intermedio corresponde a $i = 11^\circ$ y el inferior a $i = 20^\circ$. La velocidad angular es $\Omega_P = 15 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. La masa se ha elegido de $M_B/M_D = 0.1$ por propósitos de claridad.

En la Figura 3.54 tenemos seis digramas de Poincaré con masas para los brazos

espirales de $M_B/M_D = 0.0175$ (para los tres paneles del lado izquierdo) y $M_B/M_D = 0.05$ (para los tres paneles del lado derecho). Como es de esperarse, el aumentar la masa al perturbador vuelve la estructura orbital más complicada y provoca el nacimiento de estructura caótica.

En la Figura 3.55, tenemos una familia orbital con las mismas características pero variando de un diagrama a otro el ángulo de enrollamiento. Hemos elegido una masa para los brazos que, aunque es del doble de la masa plausible para los brazos espirales, nos permite ver claramente el efecto sobre el caos que produce un cambio en el ángulo de enrollamiento. El aumento de las regiones caóticas va en el sentido de aumento del ángulo de los brazos. De esta forma, para un ángulo de 6° (límites de validez de los modelos lineales), no existe caos, mientras que para los ángulos de 11° y 20° , el caos aumenta fuertemente. Este resultado es observacionalmente comprobado en el trabajo de Patsis, Contopoulos y Grosbøl (1991), quienes en la Figura 15 de su artículo, presentan una correlación entre la fuerza radial relativa (al potencial axisimétrico) de los brazos espirales, vs. el ángulo de enrollamiento de los brazos espirales, para una muestra representativa de galaxias Sa, Sb y Sc. Ellos demuestran a partir de observaciones que a mayor ángulo de enrollamiento, mayor es la fuerza relativa de los brazos espirales respecto al potencial axisimétrico y como ya hemos visto para el caso con masas diferentes (o lo que es lo mismo, con fuerzas relativas diferentes), esto implica más caos.

Finalmente, en la Figura 3.56 presentamos ejemplos de órbitas en el espacio real, tanto en el sistema inercial como en el no inercial (montado en los brazos espirales). Cada figura tiene una flecha que indica la órbita a la que corresponde en el espacio fase (diagrama de Poincaré). En estas figuras hemos incluido también la velocidad acimutal en el recuadro inferior de cada una. Como puede verse claramente, el signo de la velocidad acimutal (y por lo tanto la dirección de giro de la órbita) cambia para la mayoría de las órbitas en el sistema no inercial. En el sistema inercial la mayoría de las órbitas conservan su sentido de movimiento de manera tal que sólo en este sistema tiene sentido definir una órbita como prógrada o retrógrada. Las únicas órbitas que de hecho cambian su sentido de movimiento (haciéndose prógradas y retrógradas), en el sistema inercial, son las de la separatriz con momento angular cercano a cero, representada por los puntos más oscuros en el diagrama de Poincaré de la Figura 3.56.

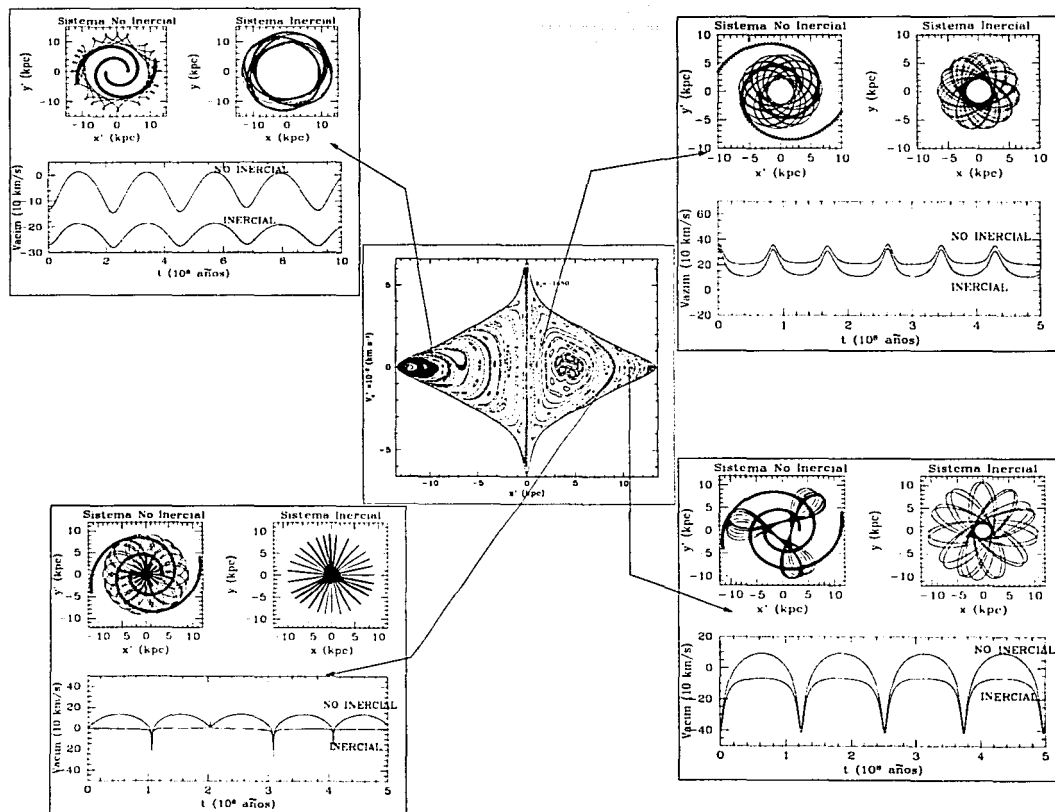


FIGURA 3.56: Cuatro ejemplos de órbitas individuales en el espacio real en el sistema inercial, no inercial y velocidad acimutal para cada una. Las flechas indican la órbita correspondiente en el espacio fase. Las únicas órbitas que cambian de signo en la velocidad acimutal (i.e., de sentido) en el sistema inercial son las que forman la separatrix.

Tabla 3.2: Las familias orbitales corridas con los modelos para los brazos espirales Galácticos.

No. Brazos	M_B/M_D	i_0 (grados)	$\Omega_P^{(1)}$	Familia $E_j^{(1)}$	Figura	Comentarios
2	0.0175	15.5	-20	-1730 -1670 -1630 -1570 -1500 -1460 -1447 -1430 -1400	3.31	Banda K(*)
4+2	0.0175 y 0.0175	12 y 15.5	-20	-1670 -1630 -1570 -1500	3.32	Brazos ópticos +Banda K(*)
4+2	0.0175 y 0.0175	12 y 15.5	-60	-2200 -2050	3.33 3.34	Brazos ópticos +Banda K(*)
2	0.05	15.5	-20	-1730	3.38	Banda K(*)
4+2	0.05 y 0.05	12 y 15.5	-20	-1630	3.39	Brazos ópticos +Banda K(*)
4+2	0.05 y 0.05	12 y 15.5	-60	-2250 -2220 -2200 -2150	3.40	Brazos ópticos +Banda K(*)
2	0.0175	15.5	-20	-1730 -1670 -1630 -1570 -1500 -1460 -1447 -1430 -1400	3.45	Banda K. Brazos con la aproximación de Lin y Shu (1964)(**)

...continua Tabla 3.2

No. Brazos	M_B/M_D	i_0 (grados)	$\Omega_P^{(t)}$	Familia $E_j^{(t)}$	Figura	Comentarios
2	0.0175	15.5	-20	-1730 -1670 -1630 -1570 -1500 -1460 -1447 -1430 -1400	3.46	Banda K(*)
2	0.05	15.5	-20	-1730 -1670 -1570 -1500	3.47	Banda K. Brazos con la aproximación de Lin y Shu (1964)(**)
2	0.05	15.5	-20	-1730 -1670 -1570 -1500	3.48	Banda K(*)
2	0.0175	11	-15	-1570 -1500 -1460 -1447 -1430 -1400	3.50	Ajuste con dos brazos a Banda K y ópticos (Fig.3.20) ρ caída lineal(*)
2	0.0175	11	-15	-1570 -1500 -1460 -1447 -1430 -1400	3.51	Ajuste con dos brazos a Banda K y ópticos(*)

...continua Tabla 3.2

No. Brazos	M_B/M_D	i_0 (grados)	$\Omega_P^{(†)}$	Familia $E_J^{(†)}$	Figura	Comentarios
2	0.0175	15.5	-15 -20 -15 -20 -15 -20	-1670 -1670 -1630 -1630 -1570 -1570	3.52	Banda K ^(*)
2	0.05	15.5	-15 -20 -15 -20 -15 -20	-1670 -1670 -1630 -1630 -1570 -1570	3.53	Banda K ^(*)
2	0.0175 0.05 0.0175 0.05 0.0175 0.05	15.5	-20	-1670 -1670 -1630 -1630 -1570 -1570	3.54	Banda K ^(*)
2	0.1	6 11 20	-15	-1500	3.55	Ajuste con dos brazos a Banda K y ópticos ^(**)

(†) En $\text{km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$

(†) En $100 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$. Cada familia E_J esta compuesta por 50 orbitas con 250 cruces al eje x' .

(*) Parámetros aplicados al modelo presentado en este trabajo.

(**) Parámetros aplicados al modelo clásico.

Capítulo 4

La Barra

4.1 Introducción

Actualmente se sabe que más de la mitad de las galaxias de disco contienen barras en sus partes internas y brillantes, y que estas barras giran como cuerpos rígidos. Estas estructuras internas son los ejemplos más comunes de sistemas triaxiales, y son además los únicos sistemas triaxiales cuyas direcciones de los ejes principales pueden ser determinados directamente (esto es debido a que dos de los ejes descansan en el disco). Aunque las preguntas más importantes respecto a las barras (tales como su origen, los parámetros físicos iniciales que determinan su tamaño, velocidad angular y tiempo de vida, etcétera), no han sido respondidas satisfactoriamente, en los últimos años se ha avanzado en el entendimiento de las propiedades de galaxias espirales barradas. Esto resulta de observaciones con cada vez mejor resolución y en nuevas bandas del espectro de la distribución de luz (desde el estudio de Kormendy 1979, hasta el Telescopio espacial, Martini et al. 2001), y la cinemática del gas y estrellas en sistemas barrados (Sancisi, Allen y Sullivan 1979; Kormendy 1983; Sheth et al. 2002). Por otra parte, la dinámica de sistemas barrados ha sido también estudiada con simulaciones numéricas, como los N-cuerpos e hidrodinámicos en modelos de potenciales barrados (Zang y Hohl 1978; Miller y Smith 1979; Sellwood 1980; Sanders y Tubbs 1980; Teuben y Sanders 1985; Sparke y Sellwood 1987; Athanassoula y Misiriotis 2002).

Como en el caso de las galaxias en general, se desearía poder clasificar a las barras galácticas por sus propiedades morfológicas. Dado que son objetos estructuralmente

muy similares entre sí desde el punto de vista observacional, con diferencias sólo en sus tamaños, velocidades angulares (ambos parámetros difíciles de determinar) y en sus leyes de densidad radial, la mejor clasificación que se conoce se basa en sus perfiles de brillo. Las galaxias espirales en general (con o sin barra) poseen discos con caída exponencial en su brillo. En cuanto a los perfiles de brillo radiales en las barras, se identifican dos tipos de barras, las *barras planas* y las *barras exponenciales* (Elmegreen y Elmegreen 1985). Las primeras tienen brillo superficial casi constante a lo largo de la barra. Esto es, decaen muy lentamente en comparación con el disco. Las barras exponenciales, por otro lado, tienen la misma longitud de escala que el disco (Fig. 4.1).

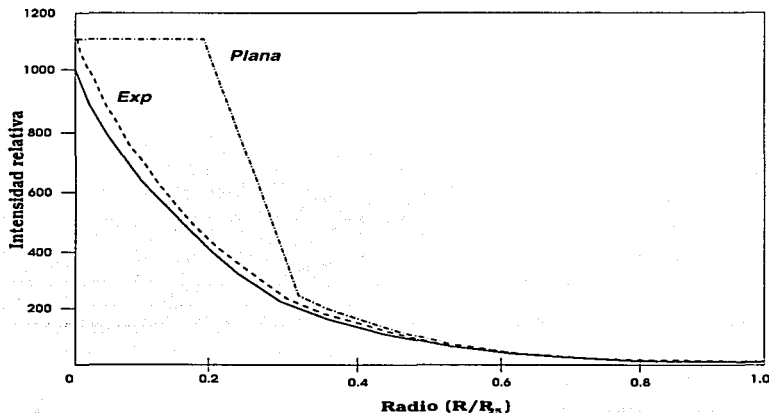


FIGURA 4.1: La figura muestra la forma general de los perfiles radiales para una barra. La curva sólida indica el perfil exponencial acimutalmente promediado para el disco. Los perfiles de las barras plana (fuerte) y exponencial (débil) son mostrados en las líneas cortadas. Para la plana la barra termina aproximadamente en $0.2R_{25}$.

Varios parámetros de las galaxias están correlacionados con el tipo de barra. Elmegreen y Elmegreen (1985) encuentran una fuerte dependencia entre el tipo de barra y el tipo galáctico de Hubble, en el sentido de que los tipos galácticos tempranos usualmente presentan barras planas. También encuentran una fuerte correlación entre las galaxias barradas planas y las espirales de gran diseño, mientras que las barradas exponenciales

usualmente son flocculentas en sus partes externas. Las barras tipo plano generalmente son grandes comparadas con el tamaño total de la galaxia, con $r_{bar}/R_{25} > 0.4$ (donde R_{25} es el radio de la isofota cuya magnitud es 25), mientras que las barras exponenciales tienen tamaños de $r_{bar}/R_{25} < 0.3$.

Aún cuando la de Elmegreen y Elmegreen (1985), resulta la clasificación más aceptada en el óptico, Eskridge et al. (2000), en un estudio de 186 espirales, no encuentran en el infrarrojo correlación alguna entre el tipo morfológico galáctico y la "fuerza de la barra" (que ellos definen con la combinación de varias variables tales como el flujo relativo a una cierta longitud de onda, el tamaño y las razones axiales). De esta manera las barras "planas" podrían reflejar un simple efecto de saturación.

Para el estudio de la estructura de las barras en la dirección perpendicular al disco galáctico, es necesario el análisis de galaxias barradas observadas de canto. Desafortunadamente la estructura que identificamos como una barra, es solamente directamente discernible con precisión en galaxias observadas aproximadamente de frente, de manera que es muy difícil, y en algunos casos imposible, saber si una galaxia de canto es barrada o no; sin embargo otros métodos indirectos han sido desarrollados.

Lo que actualmente entendemos de la estructura tridimensional de galaxias barradas es más bien dictado por estudios numéricos, que tratan de reproducir los resultados cinemáticos observacionales. El descubrimiento más importante en este tipo de cálculos es que la forma del bulbo galáctico nos puede dar una idea acerca de la existencia o no de una barra en una galaxia observada de canto. Kuijken y Merrifield (1995) obtuvieron espectros ópticos de galaxias de canto para mostrar la existencia de barras, vía el efecto Doppler. Ellos encontraron que galaxias con bulbos elípticos tienden a tener estructuras cinemáticas simples, con todo el material de un lado de la galaxia dando un corrimiento al rojo debido a su movimiento alejándose de nosotros, mientras que el material del otro lado dando un corrimiento al azul. Esta cinemática tan simple implica que el material está siguiendo las órbitas circulares que esperaríamos en una galaxia axisimétrica.

Por otro lado, las galaxias con bulbo en forma de cacahuete revelan una estructura cinemática mucho más compleja, indicando que el material sigue las órbitas más complicadas asociadas con un potencial barrado (Figura 4.60 de Binney y Merrifield). Los mismos razonamientos (la forma de cacahuete del bulbo y las observaciones espectrales del gas) han sido aplicados a la Vía Láctea para determinar la existencia de una barra.

Es interesante notar que el bulbo de la Vía Láctea tiene una apariencia muy distintiva de caja ("*boxy*") (Fig 1.8 de Binney y Merrifield 1998).

El hecho de que nuestro sistema Solar sea parte de la Vía Láctea, nos lleva a suponer que, en principio, la tarea de observarla y conocerla mejor se facilita respecto a cualquier otra galaxia. Paradójicamente, es mucho más difícil identificar estructuras dentro de nuestra Galaxia que en otras galaxias. El problema radica en la localización del Sol cerca del plano Galáctico (aproximadamente a 16.5 pc del plano medio -Binney y Merrifield 1998-), de manera que una estructura como una barra, por ejemplo, no puede ser directamente identificada en una galaxia de canto; además el polvo oscurece nuestra visión hacia la región central de la Galaxia. Por estas razones, durante muchas décadas se pensó que la concentración de estrellas hacia el centro Galáctico, escondidas por polvo en el disco, podía ser descrita por un esferoide, en el cual la densidad estelar cae en la forma de una ley de potencias en la distancia al centro. Esta suposición fue, en mucho, basada en la distribución aproximadamente esférica de cúmulos globulares en la Galaxia y en comparaciones con la forma aparente de los bulbos centrales de muchas galaxias espirales vistas de canto, respecto a las primeras observaciones ópticas de la Vía Láctea. Algunos ejemplos de modelos de bulbos esferoidales se pueden ver en de Vaucouleurs y Pence (1978) y Bahcall y Soneira (1980). En esos años, la poca evidencia observacional que había, obtenida por conteos de estrellas en ventanas de baja extinción hacia el centro de la Galaxia, no contradecía la idea del esferoide central.

Sin embargo, el análisis de los mapas cinemáticos en la línea de 21 cm del hidrógeno neutro (HI) en la dirección del centro Galáctico, da otra visión de la estructura de esta región interna. A una longitud Galáctica $l = 0$, la velocidad radial de HI, respecto al Sistema Local de Reposo, sería cero si el gas estuviera en órbitas circulares, como es de esperarse en una galaxia aproximadamente axisimétrica; es decir, sin una perturbación no axisimétrica al potencial galáctico, como es el caso de una barra. Sin embargo, en nuestra Galaxia, este gas muestra movimientos en la línea de visión con velocidades arriba de $\pm 200 \text{ km s}^{-1}$ (ver Fig 9.33 de Binney y Merrifield 1998). Estas velocidades pueden ser debidas a una explosión titánica reciente en el centro Galáctico (Burbridge y Hoyle 1963); sin embargo, esta idea pierde fuerza debido a la enorme energía y masa requeridas (Sanders y Prendergast 1974). Surge entonces una explicación alternativa, plausible y simple: *el gas no está en órbitas circulares*. Estas enormes velocidades dan

entonces evidencia de movimientos de gas a lo largo de una barra en el centro de la Vía Láctea, como sugirió de Vaucouleurs (1964). Tiempo después Liszt y Burton (1980), Gerhard y Vietri (1986), y Binney et al. (1991), con base en la cinemática de HI, CO y CS, dedujeron la presencia de una barra con una orientación de aproximadamente 16° respecto a la línea que une al Sol con el centro Galáctico (a la cual llamaremos desde aquí "ángulo de posición").

Estudios de la distribución estelar en la región interna Galáctica, también han llevado a la conclusión de la existencia de una barra. Harmon y Gilmore (1988) construyeron, con base en el color, una imagen de la forma del bulbo estelar seleccionando variables Mira (cuyo período es una función de la luminosidad) del catálogo de fuentes puntuales del satélite IRAS. Encontraron que el bulbo está aplanado en la dirección perpendicular al plano Galáctico, aunque no le dieron importancia a este resultado. Posteriormente esto fue también obtenido por otros investigadores, tales como Nakada et al. (1991) y Weinberg (1992), quienes estudiando el mismo tipo de variables Mira con el IRAS, notaron que su distribución era consistente con una barra. Su extremo más cercano se localiza en el primer cuadrante Galáctico.

Evidencia de la existencia de una barra en la Vía Láctea, a través de observaciones en el infrarrojo, fue también obtenida por Matsumoto et al. (1982), quienes mapearon el brillo superficial del bulbo Galáctico a $2.4 \mu\text{m}$. Sus resultados fueron utilizados por Blitz y Spergel (1991), quienes encontraron una asimetría longitudinal en estos mapas que atribuyeron a la presencia de una barra. El DIRBE (*Diffuse Infrared Background Experiment*) del COBE (*Cosmic Background Explorer*) mapeó el ciclo entero en 10 bandas de longitud de onda, incluyendo cuatro del cercano infrarrojo. Weiland et al. (1994) corrigieron por extinción el mapa de $2.2 \mu\text{m}$ del DIRBE, y sustrajeron una proyección extrapolada del disco Galáctico, dejando en el fondo un objeto con forma de caja muy distintiva de una barra, cuyo semieje mayor parece apuntar hacia el primer cuadrante. Dwek et al. (1995) aplicaron una variedad de modelos de barras y esferoides a estos mismos datos, concluyendo que el bulbo era definitivamente una barra con un ángulo de posición de $20^\circ - 30^\circ$ respecto a la línea que une al Sol con el centro Galáctico. Freudenreich (1998), con modelos basados en mapas del cercano infrarrojo del COBE/DIRBE encuentra una barra en el centro Galáctico y ajusta a las observaciones una ley de densidad para la barra.

Recientemente se ha empleado la teoría de microlentes gravitacionales para el estudio del bulbo Galáctico. Zhao (1996) aplica dicha técnica para concluir la existencia de una barra en el centro de la Galaxia. Más recientemente, Stanek et al. (1997), basándose en los resultados del proyecto OGLE de microlentes del centro Galáctico (Paczynski et al. 1994), proponen una barra con un ángulo de posición de $20^\circ - 30^\circ$.

Con base en los cada vez más numerosos resultados que confirman la existencia de una barra en la Galaxia, y en la enorme repercusión de una estructura no axisimétrica tan importante para la dinámica estelar y del gas, hemos incluido el modelaje de la barra Galáctica en este trabajo. En la Sección 4.2 presentamos tres modelos para la barra Galáctica. En la Sección 4.4 hacemos un estudio orbital empleando estos modelos.

4.2 La Barra de la Vía Láctea

A diferencia de los brazos espirales, cuyos parámetros resultan muy difíciles de determinar debido a que el sistema Solar se encuentra en medio de esta estructura, la barra tiene muchos más parámetros medidos y mejor consensados. Por supuesto, como en todo lo que se refiere a nuestra Galaxia, con controversia aún. Presentamos aquí un breve resumen de los resultados generales obtenidos de la literatura observacional para la barra Galáctica.

- * *Orientación de la Barra Respecto a la Línea de Visión*
- * *Longitud de la Barra*
- * *Razones Axiales*
- * *Ley de Densidad y Longitudes de Escala*
- * *La Masa*
- * *Velocidad Angular Ω_P del Patrón*

4.2.1 Orientación de la Barra Respecto a la Línea de Visión

Como hemos mencionado en la introducción de este capítulo, las observaciones tanto en infrarrojo como en conteos estelares de la Vía Láctea, muestran diferencias sistemáticas significativas a $l > 0$ y $l < 0$ en la dirección del centro Galáctico, lo cual se ha aceptado

como la firma inequívoca de una estructura no axisimétrica en el centro Galáctico con las características de las barras vistas en otras galaxias.

Una vez resuelto el problema de la existencia de una barra en el centro de la Galaxia, el siguiente paso consistió en la determinación de sus parámetros físicos. Uno de ellos es su orientación. Aunque en un modelo dinámico este parámetro carece de importancia, cuando se está tratando de simular una barra específica resulta fundamental ya que éste define, a su vez, otro parámetro fundamental que es el tamaño.

Aún cuando no existe un acuerdo claro entre diferentes trabajos, debido a la enorme dificultad que reviste el cálculo de este parámetro particular, el intervalo de posibilidades ha decrecido gracias a cada vez mejores observaciones y métodos de análisis. Presentamos aquí un breve resumen de los principales resultados observacionales.

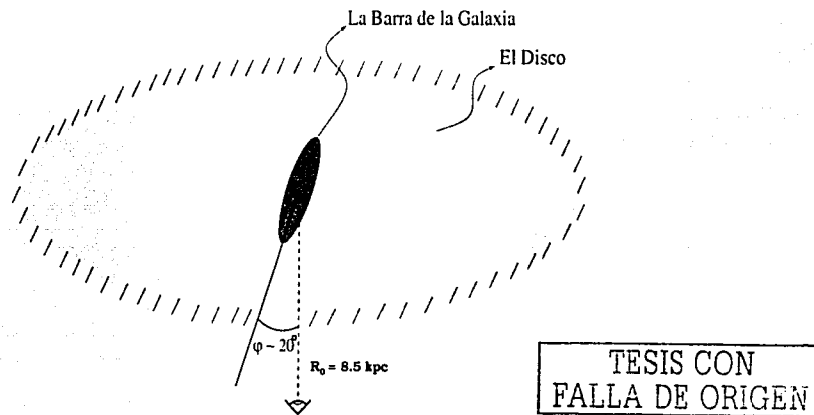


FIGURA 4.2: Este diagrama esquemático muestra el ángulo subtendido por la barra respecto a la línea que une el sistema Solar con el centro Galáctico.

De modelos de conteos de estrellas en la banda K ($10^\circ > |b| > 2^\circ$, $|l| < 15^\circ$) se obtienen valores entre $\varphi_{bar} = 12 \pm 6^\circ$ (López-Corredoira et al. 2000) y $20 - 30^\circ$ (Nikolaev y Weinberg 1997; Stanek et al. 1997).

Los modelos de Bissantz y Gerhard (2002) para los datos del COBE/DIRBE en la banda L, con la restricción adicional de la distribución de magnitud aparente de grupos de estrellas gigantes, da como óptimo el intervalo $\varphi_{bar} = 20 - 25^\circ$. Los modelos de dinámica de gases y análisis orbital (Binney et al. 1991) obtienen $15^\circ \leq \varphi_{bar} \leq 35^\circ$. Por último, las observaciones de microlentes favorecen $\varphi_{bar} \sim 15^\circ$ (Zhao y Mao 1996).

De esta forma $\varphi_{bar} \sim 20^\circ$ puede ser considerado un buen valor (Gerhard 2002). Un diagrama esquemático de la posición de la barra es mostrado en la Figura 4.2

4.2.2 Longitud de la Barra

Para un ángulo de posición de la barra respecto a nuestra línea de visión $\varphi_{bar} \simeq 20^\circ$, los modelos basados en mapas del cercano infrarrojo del COBE/DIRBE, encuentran el final de la barra alrededor de $R_f = 3.1 - 3.5$ kpc (Freudenreich 1998; Binney, Gerhard y Spergel 1997; Bissantz y Gerhard 2002). Estos resultados son también congruentes con los resultados de observaciones de estrellas OH/IR (Sevenster 1999) y variables IRAS (Nikolaev y Weinberg 1997).

4.2.3 Razones Axiales

Los modelos paramétricos del COBE/DIRBE mencionados en la subsección anterior (4.2.2), proporcionan razones axiales de aproximadamente 10:3-4:3. Esto resulta consistente con los modelos no paramétricos de Bissantz y Gerhard (2002). Binney, Gerhard y Spergel (1997), encuentran razones de 10:6:4 (sin tomar en cuenta los brazos espirales). Finalmente, los conteos de estrellas dan una razón de 10:4:3 (Stanek et al 1997) y 10:5.4:3.3 (López-Corredoira et al. 2000).

Para este trabajo hemos tomado las razones axiales de uno de las mejores ajustes observacionales para la barra de la Galaxia, que es el obtenido por Freudenreich (1998); este ajuste además nos ofrece otras ventajas, como veremos en la siguiente sección. Estas razones axiales (10:3.8:2.6) se encuentran en el intervalo proporcionado por otros trabajos.

4.2.4 Ley de Densidad y Longitudes de Escala

Como ya hemos mencionado en la introducción de este capítulo, la ley de densidad de las barras puede ir en general desde planas hasta exponenciales (Elmegreen y Elmegreen 1985). Sin embargo, las barras exponenciales han sido más utilizadas y/o favorecidas en la literatura (Lerner, Sundin y Thomasson 1999; Combes y Elmegreen 1993). En el caso de la barra Galáctica, el modelaje se ha hecho también con perfiles exponenciales (Alard 2001 -quien aclara que cerca del centro el perfil observado se desvía de una exponencial y es aproximadamente plano- y Freudenreich 1998).

En particular, para la ley de densidad de los modelos de barra presentados en la tesis, nos hemos basado en el modelo presentado por Freudenreich (1998), quien además de lograr ajustar bastante bien los datos del COBE/DIRBE (a 1.25, 2.2, 3.5, 4.9 μm), hace una comparación entre tres modelos de densidad que incluyen el caso de caída exponencial.

Los tres modelos empleados son,

$$\text{Modelo 1: } \rho \propto \text{sech}^2(R_s),$$

$$\text{Modelo 2: } \rho \propto e^{R_s^{-n}},$$

$$\text{Modelo 3: } \rho \propto \{1 + \text{sech}^2(R_s/R_c)^n\},$$

donde n representa un parámetro extra de la dependencia radial de la densidad para los modelos 2 y 3, y R_s tiene la forma propuesta por Athanassoula et al. (1990) para el caso de dos dimensiones en una galaxia observada de frente (*face on*),

$$R_s^c = \left(\frac{|x|}{a_x}\right)^c + \left(\frac{|y|}{a_y}\right)^c,$$

donde a_x , a_y son las longitudes de escala de la barra en la dirección de los ejes x y y . R_s representa una curva con forma elíptica cuando $c = 2$, con forma de diamante cuando $c < 2$ y de caja ("*boxy*") cuando $c > 2$. Generalizado a tres dimensiones tiene la forma,

$$R_s^{c\perp} = \left(\frac{|x|}{a_x}\right)^{c\perp} + \left(\frac{|y|}{a_y}\right)^{c\perp},$$

$$R_s^{c\parallel} = R_s^{c\perp} + \left(\frac{|z|}{a_z}\right)^{c\parallel},$$

donde a_z es la longitud de escala en la dirección del eje z . Es decir,

$$R_s = \left\{ \left[\left(\frac{|x|}{a_x} \right)^{c_\perp} + \left(\frac{|y|}{a_y} \right)^{c_\perp} \right]^{c_\parallel/c_\perp} + \left(\frac{|z|}{a_z} \right)^{c_\parallel} \right\}^{1/c_\parallel}, \quad (4.1)$$

donde, las coordenadas Cartesianas x, y, z tienen su origen en el centro Galáctico, R_s representa el radio efectivo, a_x, a_y, a_z son las longitudes de escala, c_\perp, c_\parallel son los parámetros de forma de cara (*face-on*) y de canto (*edge-on*) de la barra.

Freudenreich encuentra que la ley de densidad que mejor ajusta a las observaciones es la del modelo 1: $\rho \propto \text{sech}^2(R_s)$, cuya densidad trunca a un radio R_{end} . En $R_s > R_{\text{end}}$ se agrega un factor Gaussiano con longitud de escala h_B (Figura 4.3).

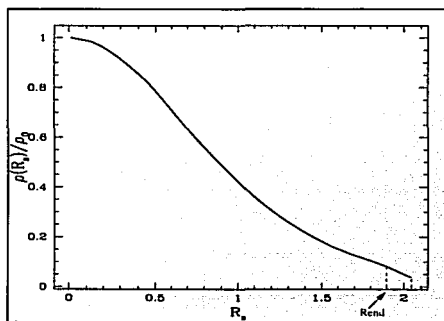


FIGURA 4.3: Ley de densidad radial ajustada a las observaciones del COBE/DIRBE por Freudenreich (1998).

Los parámetros que Freudenreich encuentra ajustan mejor a las observaciones son, $a_x \cong 1.7$ kpc, $a_y \cong 0.64$ kpc, $a_z \cong 0.44$ kpc, y $c_\parallel \cong 3.5$, $c_\perp \cong 1.7$. Es decir, la ecuación para la densidad es,

$$\rho(R_s) = \rho_0 \text{sech}^2(R_s), \quad 0 \leq R_s \leq R_{\text{end}}, \quad (4.2)$$

$$\rho(R_s) = \rho_0 \text{sech}^2(R_s) e^{-(R_s - R_{\text{end}})^2 / h_B^2}, \quad R_s \geq R_{\text{end}}, \quad (4.3)$$

donde ρ_0 es la densidad central de la barra, R_{end} el tamaño, h_{B_s} la longitud de escala para la caída Gaussiana escalada por a_x (i.e. h_B/a_x) y $h_B \cong 0.46$ kpc en los parámetros de Freudenreich (1998).

4.2.5 La Masa

La masa de la barra es probablemente el parámetro Galáctico más difícil de determinar y por lo tanto el de mayor incertidumbre.

Dwek et al. (1995), determinan fotométricamente usando observaciones del Telescopio Espacial (que proporcionan la masa en el punto de salida de la secuencia principal) combinado con la función de luminosidad determinada en la ventana de Baade, una masa para el bulbo-barra Galáctico de aproximadamente $1.3 \times 10^{10} M_\odot$.

Matsumoto et al. (1982) y Kent (1992), determinan teóricamente con un modelo dinámico del bulbo como un esferoide oblató, una masa de aproximadamente $1 \times 10^{10} M_\odot$.

Zhao (1996), encuentran a partir de observaciones de microlentes Galácticas y modelos restringidos por observaciones del COBE/DIRBE, una masa $> 2 \times 10^{10} M_\odot$ para su mejor modelo.

Weiner y Sellwood (1999), presentan un modelo hidrodinámico (con una barra de Ferrers) que reproduce los diagramas $l-v$ de la Galaxia. Y encuentran que sólo una barra masiva puede producir los enormes movimientos no circulares necesarios para poner al gas en las velocidades "prohibidas" observadas en estos diagramas. En su mejor modelo ellos encuentran que la masa de la barra es $9.8 \times 10^9 M_\odot$ y además determinan la masa del bulbo que resulta de aproximadamente $5.4 \times 10^9 M_\odot$ (dentro de 1 kpc de radio donde se encuentra la mayor parte de la masa).

4.2.6 Velocidad Angular Ω_P del Patrón

La velocidad angular Ω_P , o equivalentemente el radio de corotación, es el parámetro dinámico más importante y uno de los más difíciles de medir, y por ello con más incertidumbre.

Aunque diferentes trabajos reportan distintas velocidades angulares para la barra Galáctica, en la última década el intervalo de velocidades posibles se ha ido reduciendo hasta dar $40 \leq \Omega_P \leq 70$ km s⁻¹ kpc⁻¹. Los métodos más importantes para la estimación

de velocidades de las barras son: simulaciones hidrodinámicas (de malla y con SPH), el método de resonancias orbitales, y el método llamado "directo".

En el caso de las simulaciones hidrodinámicas se intenta reproducir los diagramas $l - v$ de la Galaxia y estructuras tales como el brazo a 3 kpc para encontrar por ejemplo, la región de corotación de la barra, lo cual aproxima el valor de la velocidad angular. En las simulaciones de Englmaier y Gerhard (1999) y Fux (1999) se interpreta el brazo a 3 kpc como uno de los brazos laterales cercano a la barra, lo cual lo sitúa cerca de corotación. Weiner y Sellwood (1999) utilizan una barra de Ferrers e intentan con simulaciones hidrodinámicas reproducir las velocidades extremadamente altas en el centro Galáctico buscando una velocidad óptima para reproducirlas.

En el método de resonancias orbitales, por otra parte, se busca relacionar estructuras en las galaxias tales como anillos o incluso estructura en la distribución de velocidades locales con resonancias orbitales tal como la resonancia externa de Lindblad de la barra (Dehnen 2000).

El llamado "directo" (Tremaine y Weinberg 1984), es un método cinemático que no emplea un modelo dinámico. La principal suposición de este modelo es que la densidad de luminosidad del trazador (estrellas, hidrógeno neutro, etc.), obedece una ecuación de continuidad, esto es, la masa total del trazador se mantiene fija y su luminosidad por unidad de masa es constante. En su forma simple, el método requiere medir el brillo superficial y la velocidad radial a lo largo de una banda paralela a la línea de nodos. Si la posición y la velocidad son medidas relativas al centro Galáctico, entonces la velocidad promedio pesada por la luminosidad en la banda dividida por la componente del vector de posición promedio pesada por la luminosidad, el cual es paralelo a la línea de nodos, es igual a $\Omega_p i$. Este método ha sido aplicado recientemente por Debattista, Gerhard y Sevenster (2002) a una muestra de trazadores (estrellas OH/IR) en la Vía Láctea.

Para una revisión de los parámetros de la barra Galáctica, ver Gerhard (2002).

4.3 Modelos de la Barra Galáctica. Construcción Analítica

Debido a la frecuencia de las estructuras en forma de barra en galaxias espirales, y su importancia en la dinámica estelar y del gas, numerosos trabajos han modelado las galaxias barradas en formas diversas. Lo más usual ha sido el empleo del potencial bidimensional de la forma, $\Phi_{BAR}(R, \varphi) = g(R)\cos(2\varphi)$ (ver por ejemplo Contopoulos y Papayannopoulos 1980). Los modelos tridimensionales para barras galácticas han empleado, en su mayoría, una distribución de masa con estratificación similar en elipsoides o en esferoides prolatos dada por la forma,

$$\rho_{BAR}(x, y, z) = \begin{cases} \rho_c(1 - m^2)^n, & m \leq 1, \\ 0, & m \geq 1, \end{cases} \quad (4.4)$$

con ρ_c la densidad central, $m^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$, y $a > b \geq c$ los semiejes respectivos (elipsoide: $a > b > c$; esferoide prolato $a > b = c$).

Con n entero, la densidad en la ecuación (4.4) da lugar a los llamados elipsoides (o esferoides) de Ferrers (ver por ejemplo, Binney y Tremaine 1994). El caso elipsoidal con $n=0$, esto es, un elipsoide homogéneo, ha sido considerado por Sanders y Tubbs (1980). Casos inhomogéneos ($n \neq 0$) en forma prolata han sido empleados por Papayannopoulos y Petrou (1983), Petrou y Papayannopoulos (1983), Athanassoula et al. (1983), Teuben y Sanders (1985), Shlosman y Heller (2002). La forma elipsoidal inhomogénea es considerada por Pfenniger (1984) y Kaufmann y Contopoulos (1996).

Como vimos en la Sección 4.2.4, en nuestra Galaxia la forma de estratificación en densidad de la barra, no es realmente elipsoidal. Las superficies de igual densidad tienen forma de caja y la densidad tiene una forma funcional más complicada que la de la ecuación 4.4 (Zhao 1996; Freudenreich 1998). Zhao (1996) ha empleado la técnica de expansión multipolar dada por Hernquist y Ostriker (1992) para obtener el potencial de una distribución de masa de este tipo.

Con la idea de construir un modelo tridimensional de la Vía Láctea lo más completo posible, y dada la evidencia de la barra Galáctica, en este trabajo hemos también modelado la barra. Consideramos la densidad dada por Freudenreich (1998) -ecuaciones (4.2) y (4.3)-, introduciéndola en los siguientes tres formas para la barra: 1) elipsoide

(triaxial), 2) esferoide prolato y 3) una superposición de elipsoides para aproximar la estratificación en densidad observada en forma de caja. En las Secciones 4.3.1, 4.3.2 y 4.3.3, presentamos estos modelos.

4.3.1 Modelo Elipsoidal de la Barra Galáctica

En esta Sección se da el potencial y la fuerza para un elipsoide inhomogéneo con estratificación similar. Se simula la densidad ajustada por Freudenreich (1998) -Sección 4.2.4-.

La densidad en la barra Galáctica -ecs. (4.2) y (4.3)-, tiene una forma muy complicada que no puede ser aproximada con una solución como las usualmente empleadas que resultan relativamente simples para el potencial y la fuerza del elipsoide, como es el caso de los elipsoides de Ferrers. Seguimos entonces el procedimiento de Schmidt (1956) -Sección 3.3.1-, y aproximamos el elipsoide inhomogéneo como una superposición de un número suficientemente grande de elipsoides homogéneos para ajustar satisfactoriamente la densidad.

El Elipsoide Homogéneo

Para hacer la superposición que simule una ley de densidad dada en un elipsoide (inhomogéneo), se requieren primero algunas ecuaciones que daremos a continuación de la teoría del potencial para un elipsoide homogéneo (Kellogg 1953; MacMillan 1930).

El elipsoide tiene su centro en el origen de un sistema Cartesiano x, y, z , con semiejes a, b, c (con $a > b > c$) -Figura 4.4-. Las componentes de la fuerza y el potencial en un punto $r = (x, y, z)$ dado son ($G=1$),

$$F_x = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -2\pi\rho abc xA(\lambda), \quad (4.5)$$

$$F_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -2\pi\rho abc yB(\lambda), \quad (4.6)$$

$$F_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -2\pi\rho abc zC(\lambda), \quad (4.7)$$

$$\Phi = -\pi \rho abc D(\lambda) - \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}, \quad (4.8)$$

donde $\rho (= cte)$ es la densidad del elipsoide, $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ es la fuerza y $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$, $D(\lambda)$ están dadas por,

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(a^2 + u)\sqrt{\psi(u)}},$$

$$B(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(b^2 + u)\sqrt{\psi(u)}},$$

$$C(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{(c^2 + u)\sqrt{\psi(u)}},$$

$$D(\lambda) = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{\psi(u)}},$$

con $\psi(u) = (a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)$. $\lambda = 0$ si \mathbf{r} está localizado dentro del elipsoide, y si \mathbf{r} es externo al elipsoide, λ es la raíz s mayor de,

$$\frac{x^2}{a^2 + s} + \frac{y^2}{b^2 + s} + \frac{z^2}{c^2 + s} - 1 = 0. \quad (4.9)$$

Con las razones axiales de la barra, $\zeta \equiv \frac{b}{a}$ y $\xi \equiv \frac{c}{a}$, se definen las constantes k , k' por,

$$k = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} \right)^{1/2} = \left(\frac{1 - \zeta^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2},$$

$$k' = (1 - k^2)^{1/2},$$

y las variables ϕ , θ ,

$$\text{sen } \phi = \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2 + u} \right)^{1/2},$$

$$\text{sen } \theta = \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2 + \lambda} \right)^{1/2}.$$

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

Con esto se obtiene,

$$A(\lambda) = 2k^{-2} a^{-3}(1 - \xi^2)^{-3/2} \{F(k, \theta) - E(k, \theta)\}, \quad (4.10)$$

$$B(\lambda) = 2k^{-2} k'^{-2} a^{-3}(1 - \xi^2)^{-3/2} \{E(k, \theta) - k'^2 F(k, \theta) - k^2(1 - k^2 \text{sen}^2 \theta)^{-1/2} \text{sen} \theta \cos \theta\}, \quad (4.11)$$

$$C(\lambda) = 2k'^{-2} a^{-3}(1 - \xi^2)^{-3/2} \left\{ \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \theta} \tan \theta - E(k, \theta) \right\}, \quad (4.12)$$

$$D(\lambda) = 2 a^{-1}(1 - \xi^2)^{-1/2} F(k, \theta), \quad (4.13)$$

con $E(k, \theta)$, $F(k, \theta)$ las integrales elípticas,

$$E(k, \theta) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi} d\phi, \quad (4.14)$$

$$F(k, \theta) = \int_0^\theta \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \text{sen}^2 \phi}}. \quad (4.15)$$

Definiendo,

$$F_1 \equiv -4\pi\zeta\xi(1 - \xi^2)^{-3/2} k^{-2}$$

$$F_2 \equiv F_1 k'^{-2}$$

$$F_3 \equiv F_1 k^2 k'^{-2}$$

$$F_4 \equiv \frac{1}{2} F_1 (1 - \zeta^2),$$

las expresiones de las fuerzas (4.5), (4.6), (4.7) y el potencial (4.8) son,

$$F_x = F_1 \rho x \{F(k, \theta) - E(k, \theta)\}, \quad (4.16)$$

$$F_y = F_2 \rho y \{E(k, \theta) - k'^2 F(k, \theta) - k^2(1 - k^2 \text{sen}^2 \theta)^{-1/2} \text{sen} \theta \cos \theta\}, \quad (4.17)$$

$$F_z = F_3 \rho z \{(1 - k^2 \text{sen}^2 \theta)^{1/2} \tan \theta - E(k, \theta)\}, \quad (4.18)$$

$$\Phi = F_4 \rho a^2 F(k, \theta) - \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot \mathbf{F}. \quad (4.19)$$

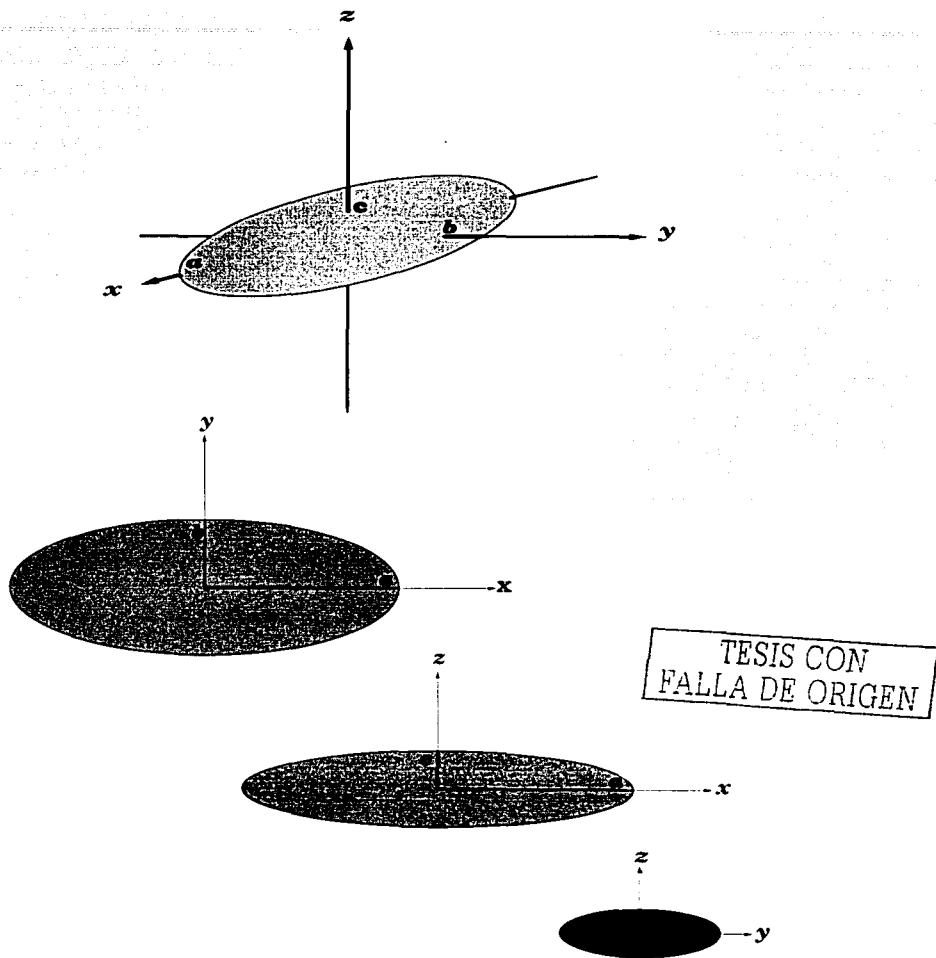


FIGURA 4.4: Elipsoide homogéneo y sus proyecciones en los planos Cartesianos.

El Elipsoide Inhomogéneo

En la Sección 4.2.4, se dieron las propiedades del ajuste a la densidad en la barra Galáctica obtenido por Freudenreich (1998). En la aproximación de forma elipsoidal para la barra Galáctica considerada en esta Sección, tomamos los exponentes c_{\parallel} y c_{\perp} en la ecuación (4.1) con los valores $c_{\parallel} = 2$, $c_{\perp} = 2$. Entonces la densidad con estratificación similar en la barra elipsoidal es,

$$\begin{aligned} \rho(a_s) &= \rho_0 \operatorname{sech}^2(a_s), & a_s \leq a_{B_s} \\ \rho(a_s) &= \rho_0 \operatorname{sech}^2(a_s) e^{-(a_s - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2}, & a_s \geq a_{B_s} \end{aligned} \quad (4.20)$$

con $a_s = \left\{ \frac{x^2}{a_x^2} + \frac{y^2}{a_y^2} + \frac{z^2}{a_z^2} \right\}^{1/2}$ y $a_{B_s} = a_B / a_x$, $h_{B_s} = h_B / a_x$ (ver Sección 4.2.4).

En la Figura 4.5 graficamos $\rho(a_s) / \rho_0$, con $a_B = 3.13$ kpc, $h_B = 0.46$ kpc, $a_x = 1.7$ kpc, y se ilustra cómo se han tomado las dimensiones y densidades de los elipsoides homogéneos cuya superposición aproxima al elipsoide inhomogéneo. En la región $a_s \leq a_{B_s}$ tomamos una partición en densidad,

$$\Delta\rho_1 = \frac{\rho_0}{N_1} \{1 - \operatorname{sech}^2(a_{B_s})\}, \quad (4.21)$$

y en la región $a_s \geq a_{B_s}$,

$$\Delta\rho_2 = \frac{\rho_0}{N_2} \operatorname{sech}^2(a_{B_s}). \quad (4.22)$$

El número de elipsoides homogéneos en $a_s \leq a_{B_s}$ es $N_1 - 1$, cada uno con densidad $\Delta\rho_1$; en $a_s \geq a_{B_s}$ el número es N_2 y cada elipsoide tiene la densidad $\Delta\rho_2$.

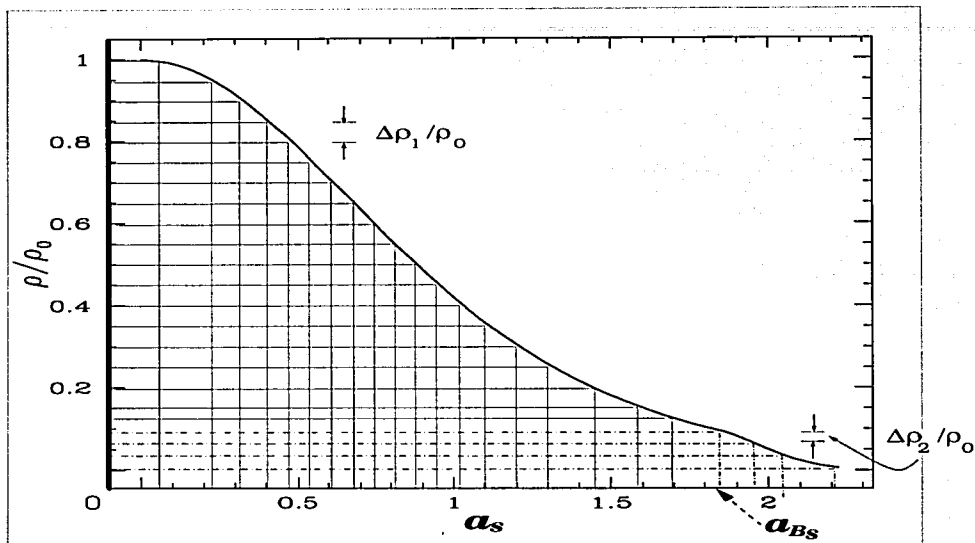


FIGURA 4.5: Superposición de las componentes elipsoidales homogéneas para aproximar a la barra elipsoidal inhomogénea.

Con $i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$, en la región $a_s \leq a_B$, se tienen las igualdades,

$$\frac{\Delta \rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{N_1} \{1 - \operatorname{sech}^2(a_{B_*})\} \quad (4.23)$$

$$= 1 - \operatorname{sech}^2(a_{s_1}) \quad (4.24)$$

$$= \operatorname{sech}^2(a_{s_i}) - \operatorname{sech}^2(a_{s_{i+1}}),$$

de aquí se obtienen las dimensiones escaladas de las componentes elipsoidales en esta región,

$$a_{s_i} = \operatorname{sech}^{-1} \left\{ 1 - \frac{i}{N_1} [1 - \operatorname{sech}^2(a_{B_*})] \right\}^{1/2}, \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1.$$

En la región $a_s \geq a_{B_s}$, con $j = 0, 1, 2, \dots, N_2 - 1$, y ya que $a_{s_{N_1}} = a_{B_s}$,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \rho_2}{\rho_0} &= \frac{1}{N_2} \operatorname{sech}^2(a_{B_s}) \\ &= \operatorname{sech}^2(a_{B_s}) - \operatorname{sech}^2(a_{s_{N_1+1}}) e^{-(a_{s_{N_1+1}} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2} \\ &= \operatorname{sech}^2(a_{s_{N_1+j}}) e^{-(a_{s_{N_1+j}} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2} - \operatorname{sech}^2(a_{s_{N_1+j+1}}) e^{-(a_{s_{N_1+j+1}} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2}. \end{aligned}$$

Las dimensiones escaladas $a_{s_{N_1+j}}$ en esta región se obtienen entonces con la solución de la ecuación,

$$\left(1 - \frac{j}{N_2}\right) \operatorname{sech}^2(a_{B_s}) - \operatorname{sech}^2(a_{s_{N_1+j}}) e^{-(a_{s_{N_1+j}} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, N_2 - 1.$$

Una vez conocidas todas las dimensiones escaladas a_{s_l} , $l = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 - 1$ para cada elipsoide que compone la barra, podemos conocer los semiejes mayores de estas componentes,

$$a_l = a_x a_{s_l}, \quad l = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 - 1. \quad (4.25)$$

Deseamos ahora calcular la densidad central de la barra, ρ_0 , para una masa total dada, que utilizaremos como parámetro libre del modelo. El volumen del l -ésimo elipsoide es,

$$V_l = \frac{4}{3} \pi a_l b_l c_l = \frac{4}{3} \pi \zeta \xi a_l^3, \quad l = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 - 1.$$

Entonces la masa del i -ésimo elipsoide en la región $a_l \leq a_B$ es,

$$M_i = V_i \Delta \rho_1 = \frac{4}{3} \pi \frac{\rho_0}{N_1} \zeta \xi a_i^3 [1 - \operatorname{sech}^2 a_{B_s}], \quad i = 1, 2, \dots, N_1 - 1$$

mientras que para $a_l \geq a_B$

$$M_{N_1+j} = \frac{4}{3} \pi \frac{\rho_0}{N_2} \zeta \xi a_{N_1+j}^3 \operatorname{sech}^2 a_{B_s}, \quad j = 0, 2, \dots, N_2 - 1.$$

Definiendo,

$$\delta_1 \equiv \frac{1}{N_1} [1 - \operatorname{sech}^2 a_{B_s}]$$

$$\delta_2 \equiv \frac{1}{N_2} \operatorname{sech}^2 a_{B_2},$$

la masa total de la barra es,

$$M_{Bar} = \frac{4}{3} \pi \zeta \xi \rho_0 \left\{ \delta_1 \sum_{i=1}^{N_1-1} a_i^3 + \delta_2 \sum_{j=0}^{N_2-1} a_{N_1+j}^3 \right\}, \quad (4.26)$$

y de aquí, para una M_{Bar} dada, la densidad central ρ_0 es,

$$\rho_0 = \frac{3M_{Bar}}{4\pi\zeta\xi \left\{ \delta_1 \sum_{i=1}^{N_1-1} a_i^3 + \delta_2 \sum_{j=0}^{N_2-1} a_{N_1+j}^3 \right\}}. \quad (4.27)$$

Conocida esta densidad central, la densidad en los elipsoides se obtiene con las ecuaciones (4.21) y (4.22).

Finalmente, conocidas las densidades de cada componente y sus dimensiones obtenemos las fuerzas y el potencial totales para la barra inhomogénea, como la suma de la fuerza y potencial de cada componente individual (ecs. 4.16 a 4.19), y lo representamos en las siguientes ecuaciones,

$$(F_{x_B})_{elip} = F_1 x \sum_{l=1}^{N_1+N_2-1} \rho_l \{F(k, \theta_l) - E(k, \theta_l)\}, \quad (4.28)$$

$$(F_{y_B})_{elip} = F_2 y \sum_{l=1}^{N_1+N_2-1} \rho_l \{E(k, \theta_l) - k'^2 F(k, \theta_l) - k^2 (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta_l)^{-1/2} \operatorname{sen} \theta_l \cos \theta_l\}, \quad (4.29)$$

$$(F_{z_B})_{elip} = F_3 z \sum_{l=1}^{N_1+N_2-1} \rho_l \{(1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta_l)^{1/2} \tan \theta_l - E(k, \theta_l)\}, \quad (4.30)$$

$$(\Phi_B)_{elip} = F_4 \sum_{l=1}^{N_1+N_2-1} \rho_l a_l^2 F(k, \theta_l) - \frac{1}{2} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{F})_{elip}, \quad (4.31)$$

donde $\mathbf{r} = (x, y, z)$ y $(\mathbf{F})_{elip} = ((F_{x_B})_{elip}, (F_{y_B})_{elip}, (F_{z_B})_{elip})$.

4.3.2 Modelo Prolato de la Barra Galáctica

Aunque es conocido que las barras galácticas son estructuras básicamente triaxiales, la justificación para la introducción de un esferoide prolato para representar la barra Galáctica, como vimos en las Secciones 4.2.3 y 4.2.4, es que ésta es en realidad aproximadamente prolata. Adicionalmente este modelo es completamente analítico en el sentido de que no requiere integrales elípticas, como es el caso de la barra elipsoidal, y está compuesto solamente por expresiones algebraicas relativamente simples para el análisis numérico y por lo tanto, resulta bastante más rápido computacionalmente para la integración de órbitas.

De esta forma describimos en la presente sección el segundo modelo utilizado en esta Tesis para la representación de la barra Galáctica. Este es el modelo de un esferoide prolato inhomogéneo con estratificación similar en su densidad.

En este caso tomamos $c_{\parallel} = 2$, $c_{\perp} = 2$, en la ecuación (4.1), con las longitudes de escala $a_{x_p} = a_x$ y $a_{y_p} = a_{z_p} = a_y$. Entonces la ecuación (4.1) es ahora,

$$a_s = \left\{ \frac{x^2}{a_{x_p}^2} + \frac{y^2 + z^2}{a_{y_p}^2} \right\}^{1/2},$$

y la densidad en el esferoide prolato es,

$$\begin{aligned} \rho(a_s) &= \rho_0 \operatorname{sech}^2(a_s), & a_s \leq a_{B_s} \\ \rho(a_s) &= \rho_0 \operatorname{sech}^2(a_s) e^{-(a_s - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2}, & a_s \geq a_{B_s}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

con $a_{B_s} = a_B / a_{x_p} = a_B / a_x$, $h_{B_s} = h_B / a_{x_p} = h_B / a_x$.

El Esferoide Prolato Homogéneo

De las expresiones generales para elipsoides, Sección (4.3.1), se obtiene el formulismo para un esferoide prolato homogéneo (Figura 4.6). Definimos la excentricidad del esferoide como $e_p = \sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}$ y obtenemos para las variables ϕ y θ ,

$$\phi = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{ae_p}{\sqrt{a^2 + u}} \right),$$

$$\beta_p = \theta = \operatorname{sen}^{-1} \left(\frac{ae_p}{\sqrt{a^2 + \lambda}} \right).$$

Además tenemos $k = 1$ y $k' = 0$, de donde,

$$A(\lambda) = \frac{2}{a^3 e_p^3} \left(\ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} - \operatorname{sen} \beta_p \right),$$

$$B(\lambda) = C(\lambda) = \frac{1}{a^3 e_p^3} \left(\frac{\operatorname{sen} \beta_p}{\cos^2 \beta_p} - \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} \right),$$

$$D(\lambda) = \frac{2}{a e_p} \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p}.$$

Sustituyendo todo lo anterior en las expresiones para la fuerza y potencial (ecs. 4.5 a 4.8) se obtienen las derivadas del potencial y el potencial en un punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ para el elipsoide prolato homogéneo de la siguiente forma,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 2\pi \rho e_p^{-3} (1 - e_p^2) R \left(\frac{\operatorname{sen} \beta_p}{\cos^2 \beta_p} - \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} \right), \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4\pi \rho e_p^{-3} (1 - e_p^2) x \left(\ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} - \operatorname{sen} \beta_p \right), \quad (4.34)$$

$$\Phi = -2\pi \rho a^2 e_p^{-1} (1 - e_p^2) \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} + \frac{1}{2} \left(R \frac{\partial \Phi}{\partial R} + x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \quad (4.35)$$

con ρ la densidad del esferoide y $R = \sqrt{y^2 + z^2}$.

Para \mathbf{r} dentro del esferoide prolato, $\beta_p = \operatorname{sen}^{-1} e_p$ y para \mathbf{r} fuera del esferoide β_p es la solución de,

$$x^2 \operatorname{sen}^2 \beta_p + R^2 \tan^2 \beta_p = a^2 e_p^2. \quad (4.36)$$

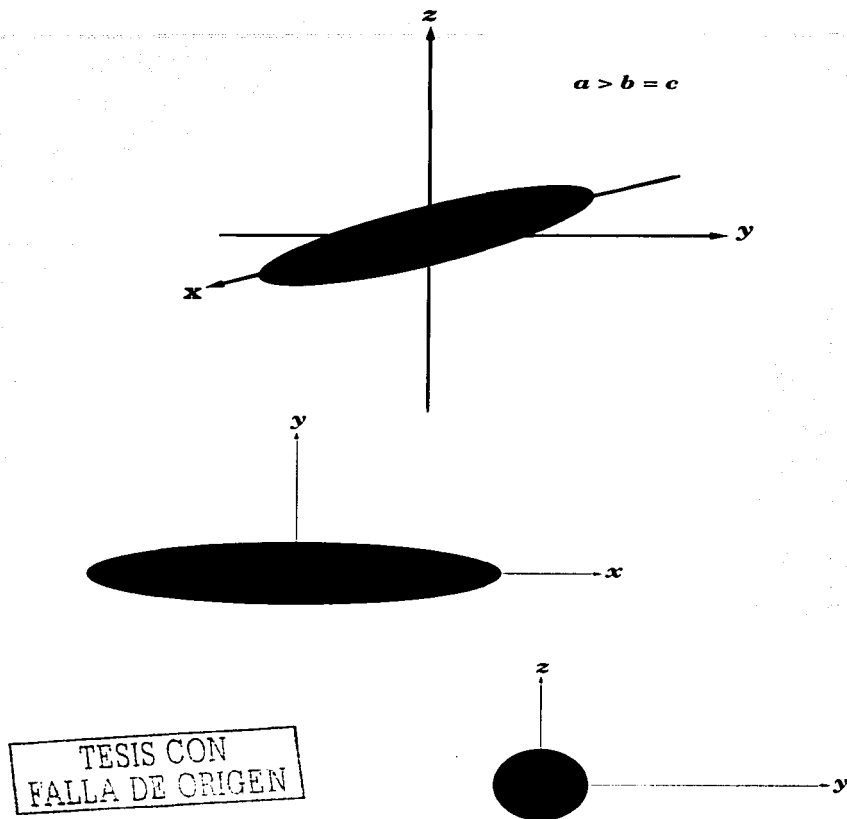


FIGURA 4.6: Esferoide prolato homogéneo y sus proyecciones en los planos Cartesianos.

El Esferoide Prolato Inhomogéneo

La primera opción posible para crear una superposición de esferoides prolatos que reproduzca una ley de densidad determinada, es seguir el mismo procedimiento que con los elipsoides, es decir superponer esferoides prolatos homogéneos de manera que formen una ley de densidad de escalón (Fig.4.5). Sin embargo, dado que los esferoides prolatos son matemáticamente más simples, debido a que tienen dos semiejes iguales, es posible ir un paso más lejos en la representación de la densidad. Construiremos entonces el esferoide prolato inhomogéneo que representa a la barra Galáctica empleando "cascarones" de esferoides prolatos inhomogéneos a su vez, pero con una ley de densidad lineal (Fig. 4.7).

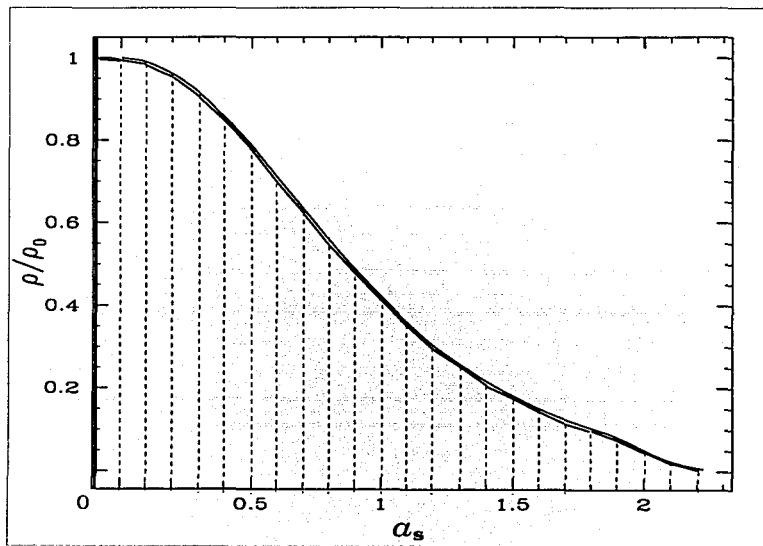


FIGURA 4.7: Superposición de "cascarones" de esferoides prolatos inhomogéneos con densidad lineal para aproximar a la barra Galáctica.

Con un procedimiento análogo al empleado en la Sección 3.3.1 para un esferoide

oblato inhomogéneo, en un punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ interno a un esferoide prolato inhomogéneo con estratificación similar $\rho(a)$ se obtiene,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) R \int_0^{\text{sen}^{-1} e_p} \rho \frac{\text{sen}^2 \beta_p}{\cos^3 \beta_p} d\beta_p, \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) x \int_0^{\text{sen}^{-1} e_p} \rho \frac{\text{sen}^2 \beta_p}{\cos \beta_p} d\beta_p, \quad (4.38)$$

$$\Phi = -4\pi e_p^{-1} (1 - e_p^2) \left\{ \int_0^{a(r)} \rho a \ln \frac{1 + \text{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} da + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + e_p}{1 - e_p} \int_{a(r)}^{a_r} \rho a da \right\}, \quad (4.39)$$

con $a(\mathbf{r}) = \left[x^2 + \frac{R^2}{1 - e_p^2} \right]^{1/2}$, $R^2 = y^2 + z^2$, y a_r el semieje mayor de la frontera del esferoide. Para un punto \mathbf{r} externo,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) R \int_0^{\beta'_p} \rho \frac{\text{sen}^2 \beta_p}{\cos^3 \beta_p} d\beta_p, \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) x \int_0^{\beta'_p} \rho \frac{\text{sen}^2 \beta_p}{\cos \beta_p} d\beta_p, \quad (4.41)$$

$$\Phi = -4\pi e_p^{-1} (1 - e_p^2) \int_0^{a_r} \rho a \ln \frac{1 + \text{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} da, \quad (4.42)$$

con β'_p la solución de $x^2 \text{sen}^2 \beta'_p + R^2 \tan^2 \beta'_p = a_r^2 e_p^2$.

La solución analítica de las integrales (4.37) a (4.42) es complicada para la densidad en la barra Galáctica -ec.(4.32)-. Aplicamos entonces estas ecuaciones a los cascarones con densidad lineal (Figura 4.7), para los cuales se conoce su solución analítica.

Tomamos una partición en densidad como en las ecuaciones (4.21) y (4.22). Los números N_1 y N_2 se pueden tomar sensiblemente menores que en el modelo elipsoidal, debido a que los cascarones con densidad lineal aproximan mejor la densidad en la barra Galáctica que una densidad de escalón.

Los semiejes mayores en los puntos de partición están dados por la relación (4.25), y agregamos dos semiejes extra: $a_0 = 0$, y $a_{N_1+N_2} = a_{N_1+N_2-1} + (a_{N_1+N_2-1} - a_{N_1+N_2-2})$; en el último intervalo $a_{N_1+N_2-1} \leq a \leq a_{N_1+N_2}$, tomamos una caída lineal a cero en

la densidad del cascarón correspondiente. Renumerando los semiejes mayores de la partición como a_n , $n = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 + 1$, ahora con $a_1 = 0$, y con la notación $\rho(a)$ significando $\rho(a/a_x)$, ρ la densidad en la ecuación (4.32), las densidades ρ_n^* en los cascarones están dadas por,

$$\rho_n^*(a) = \frac{a_{n+1}\rho(a_n) - a_n\rho(a_{n+1})}{a_{n+1} - a_n} + \frac{\rho(a_{n+1}) - \rho(a_n)}{a_{n+1} - a_n} a,$$

con $a_n \leq a \leq a_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots, N_1 + N_2$. En una forma más compacta,

$$\rho_n^*(a) = p_{0n} + p_{1n} a, \quad (4.43)$$

donde,

$$p_{0n} \equiv \frac{a_{n+1}\rho(a_n) - a_n\rho(a_{n+1})}{a_{n+1} - a_n},$$

$$p_{1n} \equiv \frac{\rho(a_{n+1}) - \rho(a_n)}{a_{n+1} - a_n}.$$

El volumen para un esferoide prolato es,

$$V_p = \frac{4}{3}\pi a b^2 = \frac{4}{3}\pi a^3(1 - e_p^2),$$

de donde, la masa de los cascarones prolotos inhomogéneos aproximando a la barra prolata Galáctica es,

$$\begin{aligned} M_p &= 4\pi(1 - e_p^2) \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \rho_n^*(a) a^2 da \\ &= 4\pi(1 - e_p^2) \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \left[\frac{1}{3} p_{0n} (a_{n+1}^3 - a_n^3) + \frac{1}{4} p_{1n} (a_{n+1}^4 - a_n^4) \right]. \end{aligned}$$

Como en el caso de la barra triaxial, la ley de densidad para la barra en $a \leq a_B$ es,

$$\rho(a_{s_n}) = \rho_0 \operatorname{sech}^2(a_{s_n}), \quad n = 1, 2, \dots, N_1 + 1, \quad (4.44)$$

mientras que en $a > a_B$,

$$\rho(a_{s_n}) = \rho_0 \operatorname{sech}^2(a_{s_n}) e^{-(a_{s_n} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2}, \quad n = N_1 + 2, \dots, N_1 + N_2, \quad (4.45)$$

y para el último punto,

$$\rho(a_{s_{N_1+N_2+1}}) = 0. \quad (4.46)$$

De aquí obtenemos p_{0n} y p_{1n} para ambas regiones. Para la región interna $a \leq a_B$, $n = 1, 2, \dots, N_1$,

$$p_{0n} = \rho_0 \frac{a_{n+1} \operatorname{sech}^2 a_{s_n} - a_n \operatorname{sech}^2 a_{s_{n+1}}}{a_{n+1} - a_n} = \rho_0 p'_{0n},$$

$$p_{1n} = \rho_0 \frac{\operatorname{sech}^2 a_{s_{n+1}} - \operatorname{sech}^2 a_{s_n}}{a_{n+1} - a_n} = \rho_0 p'_{1n},$$

para la región externa $a > a_B$, $n = N_1 + 1, \dots, N_1 + N_2 - 1$,

$$p_{0n} = \rho_0 \frac{a_{n+1} \operatorname{sech}^2 a_{s_n} e^{-(a_{s_n} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2} - a_n \operatorname{sech}^2 a_{s_{n+1}} e^{-(a_{s_{n+1}} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2}}{a_{n+1} - a_n} = \rho_0 p'_{0n},$$

$$p_{1n} = \rho_0 \frac{\operatorname{sech}^2 a_{s_{n+1}} e^{-(a_{s_{n+1}} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2} - \operatorname{sech}^2 a_{s_n} e^{-(a_{s_n} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2}}{a_{n+1} - a_n} = \rho_0 p'_{1n},$$

y en el último cascarón, $n = N_1 + N_2$,

$$p_{0_{N_1+N_2}} = \rho_0 \frac{a_{N_1+N_2+1} \operatorname{sech}^2 a_{s_{N_1+N_2}} e^{-(a_{s_{N_1+N_2}} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2}}{a_{N_1+N_2+1} - a_{N_1+N_2}} = \rho_0 p'_{0_{N_1+N_2}},$$

$$p_{1_{N_1+N_2}} = \rho_0 \frac{-\operatorname{sech}^2 a_{s_{N_1+N_2}} e^{-(a_{s_{N_1+N_2}} - a_{B_s})^2 / h_{B_s}^2}}{a_{N_1+N_2+1} - a_{N_1+N_2}} = \rho_0 p'_{1_{N_1+N_2}}.$$

De esta forma la masa de la barra queda,

$$M_p = 4\pi (1 - e_p^2) \rho_0 \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \left\{ \frac{1}{3} p'_{0n} (a_{n+1}^3 - a_n^3) + \frac{1}{4} p'_{1n} (a_{n+1}^4 - a_n^4) \right\},$$

de donde finalmente obtenemos, para una M_p dada, la densidad central ρ_0 ,

$$\rho_0 = \frac{M_p}{4\pi (1 - e_p^2) \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \left\{ \frac{1}{3} p'_{0n} (a_{n+1}^3 - a_n^3) + \frac{1}{4} p'_{1n} (a_{n+1}^4 - a_n^4) \right\}}. \quad (4.47)$$

La densidad $\rho^*(a)$, dada por el conjunto de densidades $\rho_n^*(a)$ -ecuación (4.43)- en los $N_1 + N_2$ cascarones, es la aproximación a la densidad en la barra prolata Galáctica. Esta función $\rho^*(a)$ se emplea entonces en las ecuaciones (4.37) a (4.42) para obtener la fuerza y el potencial en un punto arbitrario $\mathbf{r} = (x, y, z)$.

El Cálculo de $\frac{\partial\Phi}{\partial R}$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$

Primero se obtienen las expresiones de $\frac{\partial\Phi}{\partial R}$ y $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$. Según sea \mathbf{r} interno o externo al esferoide prolato dado por la densidad $\rho^*(a)$, las integrales en las ecuaciones (4.37) y (4.38) o en las ecuaciones (4.40) y (4.41) se hacen en los intervalos β_p correspondientes. Para los semiejes mayores de la partición, a_n , $n = 1, 2, \dots, N_1 + N_2 + 1$, los valores de β_{pn} en el caso de \mathbf{r} externo son las soluciones de,

$$R^2 \tan^2 \beta_{pn} + x^2 \operatorname{sen}^2 \beta_{pn} = a_n^2 e_p^2.$$

Si \mathbf{r} es interno, existe $n_0 \in \{1, 2, \dots, N_1 + N_2\}$ tal que $a_{n_0} \leq a(\mathbf{r}) \leq a_{n_0+1}$, con $a(\mathbf{r}) = \left(x^2 + \frac{R^2}{1-e_p^2}\right)^{1/2}$, el semieje mayor de la superficie esferoidal prolata similar que pasa por \mathbf{r} (Figura 4.8). El máximo valor de β_{pn} que interviene en las integrales es β_{pn_0} , dado por $R^2 \tan^2 \beta_{pn_0} + z^2 \operatorname{sen}^2 \beta_{pn_0} = a_{n_0}^2 e_p^2$.

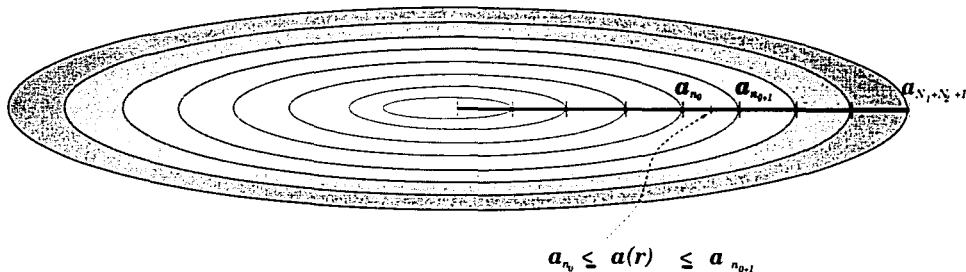


FIGURA 4.8: Particiones del semieje mayor de la barra. Señalamos en esta figura el semieje $a(\mathbf{r})$ dentro de la barra tal que $a_{n_0} \leq a(\mathbf{r}) \leq a_{n_0+1}$. $a_{N_1+N_2+1}$ es el semieje de la frontera.

Entonces, para \mathbf{r} interno,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) \rho_0 R \left\{ \sum_{n=1}^{n_0-1} \int_{\beta_{p_n}}^{\beta_{p_{n+1}}} (p'_{0_n} + p'_{1_n} a) \frac{\text{sen}^2 \beta_p d\beta_p}{\cos^3 \beta_p} \right. \\ \left. + \int_{\beta_{p_{n_0}}}^{\text{sen}^{-1} e_p} (p'_{0_{n_0}} + p'_{1_{n_0}} a) \frac{\text{sen}^2 \beta_p d\beta_p}{\cos^3 \beta_p} \right\}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) \rho_0 x \left\{ \sum_{n=1}^{n_0-1} \int_{\beta_{p_n}}^{\beta_{p_{n+1}}} (p'_{0_n} + p'_{1_n} a) \frac{\text{sen}^2 \beta_p d\beta_p}{\cos \beta_p} \right. \\ \left. + \int_{\beta_{p_{n_0}}}^{\text{sen}^{-1} e_p} (p'_{0_{n_0}} + p'_{1_{n_0}} a) \frac{\text{sen}^2 \beta_p d\beta_p}{\cos \beta_p} \right\}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

y las sumas no intervienen si $n_0 = 1$.

Si r es externo,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) \rho_0 R \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \int_{\beta_{p_n}}^{\beta_{p_{n+1}}} (p'_{0_n} + p'_{1_n} a) \frac{\text{sen}^2 \beta_p d\beta_p}{\cos^3 \beta_p}, \quad (4.50)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) \rho_0 x \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \int_{\beta_{p_n}}^{\beta_{p_{n+1}}} (p'_{0_n} + p'_{1_n} a) \frac{\text{sen}^2 \beta_p d\beta_p}{\cos \beta_p}. \quad (4.51)$$

Todas las integrales tienen solución analítica. Tenemos entonces,

$$I_1 = \int \frac{\text{sen}^2 \beta_p d\beta_p}{\cos^3 \beta_p} = \frac{1}{2} \left(\frac{\text{sen} \beta_p}{\cos^2 \beta_p} - \ln \frac{1 + \text{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} \right), \quad (4.52)$$

$$I_2 = \int \frac{\text{sen}^2 \beta_p d\beta_p}{\cos \beta_p} = \ln \frac{1 + \text{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} - \text{sen} \beta_p, \quad (4.53)$$

$$\begin{aligned} I_3 = \int a \frac{\text{sen}^2 \beta_p d\beta_p}{\cos^3 \beta_p} = \frac{1}{e_p} \left\{ \sqrt{R^2 + x^2 \cos^2 \beta_p} \left[\frac{R^2 + (x^2 - 3R^2) \cos^2 \beta_p}{3R^2 \cos^3 \beta_p} \right] \right. \\ \left. + |x| \ln \left[\sqrt{R^2 + x^2 \cos^2 \beta_p} + |x| \cos \beta_p \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$I_4 = \int a \frac{\text{sen}^2 \beta_p d\beta_p}{\cos \beta_p} = \frac{1}{2e_p} \left\{ \left(\frac{2 + \cos^2 \beta_p}{\cos \beta_p} \right) \sqrt{R^2 + x^2 \cos^2 \beta_p} \right.$$

$$+ \frac{1}{|x|} (R^2 - 2x^2) \ln \left[\sqrt{R^2 + x^2 \cos^2 \beta_p} + |x| \cos \beta_p \right] \}. \quad (4.55)$$

Conviene definir,

$$I'_3 = R^2 I_3, \quad (4.56)$$

$$I'_4 = x I_4, \quad (4.57)$$

de manera que las ecuaciones (4.48) a (4.51), quedan de la forma,

Para r interno

$$R \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) \rho_0 \left\{ \sum_{n=1}^{n_0-1} [R^2 p'_{0n} I_1 + p'_{1n} I'_3]_{\beta_{pn}}^{\beta_{pn+1}} \right. \\ \left. + [R^2 p'_{0n_0} I_1 + p'_{1n_0} I'_3]_{\beta_{pn_0}}^{sen^{-1} e_p} \right\}, \quad (4.58)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) \rho_0 \left\{ \sum_{n=1}^{n_0-1} [x p'_{0n} I_2 + p'_{1n} I'_4]_{\beta_{pn}}^{\beta_{pn+1}} \right. \\ \left. + [x p'_{0n_0} I_2 + p'_{1n_0} I'_4]_{\beta_{pn_0}}^{sen^{-1} e_p} \right\}, \quad (4.59)$$

y las sumas no intervienen si $n_0 = 1$.

Para r externo

$$R \frac{\partial \Phi}{\partial R} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) \rho_0 \sum_{n=1}^{N_1+N_2} [R^2 p'_{0n} I_1 + p'_{1n} I'_3]_{\beta_{pn}}^{\beta_{pn+1}}, \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = 4\pi e_p^{-3} (1 - e_p^2) \rho_0 \sum_{n=1}^{N_1+N_2} [x p'_{0n} I_2 + p'_{1n} I'_4]_{\beta_{pn}}^{\beta_{pn+1}}. \quad (4.61)$$

El Cálculo de Φ

De la misma forma, para el potencial en un punto interior a la barra tenemos de la ecuación 4.39,

$$\begin{aligned}
 \Phi &= -4\pi e_p^{-1} (1 - e_p^2) \left\{ \int_0^{a(r)} \rho^*(a) a \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} da + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + e_p}{1 - e_p} \int_{a(r)}^{a_{N_1+N_2+1}} \rho^*(a) a da \right\} \\
 &= -4\pi e_p^{-1} (1 - e_p^2) \left\{ \sum_{n=1}^{n_0-1} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \rho_n^*(a) a \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} da + \int_{a_{n_0}}^{a(r)} \rho_{n_0}^*(a) a \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} da \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \frac{1 + e_p}{1 - e_p} \left[\int_{a(r)}^{a_{n_0+1}} \rho_{n_0}^*(a) a da + \sum_{n=n_0+1}^{N_1+N_2} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \rho_n^*(a) a da \right] \right\}. \quad (4.62)
 \end{aligned}$$

Definimos la siguiente integral,

$$I_{5_n}(a) \equiv \int_0^a \rho_n^*(u) u du = \rho_0 \left(\frac{1}{2} p'_{0_n} a^2 + \frac{1}{3} p'_{1_n} a^3 \right),$$

de donde obtenemos,

$$\begin{aligned}
 \Phi &= -4\pi e_p^{-1} (1 - e_p^2) \left\{ - \sum_{n=1}^{n_0-1} \int_{\beta_{p_n}}^{\beta_{p_{n+1}}} I_{5_n}(a) \frac{d\beta_p}{\cos \beta_p} - \int_{\beta_{p_{n_0}}}^{\operatorname{sen}^{-1} e_p} I_{5_{n_0}}(a) \frac{d\beta_p}{\cos \beta_p} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{n_0-1} \left[I_{5_n}(a_{n+1}) \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \beta_{p_{n+1}}}{\cos \beta_{p_{n+1}}} \right) - I_{5_n}(a_n) \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \beta_{p_n}}{\cos \beta_{p_n}} \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + e_p}{1 - e_p} \right) \left[I_{5_{n_0}}(a_{n_0+1}) + \sum_{n=n_0+1}^{N_1+N_2} [I_{5_n}(a_{n+1}) - I_{5_n}(a_n)] \right] \right. \\
 &\quad \left. - I_{5_{n_0}}(a_{n_0}) \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_{p_{n_0}}}{\cos \beta_{p_{n_0}}} \right\}, \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

las dos primeras sumas no intervienen si $n_0 = 1$; la última no interviene si $n_0 = N_1 + N_2$. Análogamente para r exterior,

$$\begin{aligned}
 \Phi &= -4\pi e_p^{-1} (1 - e_p^2) \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \int_{a_n}^{a_{n+1}} \rho_n^*(a) a \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} da \\
 &= -4\pi e_p^{-1} (1 - e_p^2) \left\{ - \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \int_{\beta_{p_n}}^{\beta_{p_{n+1}}} I_{5_n}(a) \frac{d\beta_p}{\cos \beta_p} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \left[I_{5_n}(a_{n+1}) \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \beta_{p_{n+1}}}{\cos \beta_{p_{n+1}}} \right) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$-I_{5n}(a_n) \ln \left(\frac{1 + \operatorname{sen} \beta_{pn}}{\cos \beta_{pn}} \right) \Big] \Big\}. \quad (4.64)$$

Si definimos,

$$(I_6)_m = \int \frac{a^m d\beta_p}{\cos \beta_p},$$

entonces,

$$(I_6)_2 = \frac{1}{2e_p^2} \left\{ \frac{(R^2 - 2x^2 \cos^2 \beta_p) \operatorname{sen} \beta_p}{\cos^2 \beta_p} + (2x^2 - R^2) \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_p}{\cos \beta_p} \right\},$$

$$(I_6)_3 = \frac{1}{e_p^3} \left\{ \frac{\sqrt{R^2 + x^2 \cos^2 \beta_p}}{6 \cos^3 \beta_p} [2R^2(1 - 3 \cos^2 \beta_p) + x^2(8 + 3 \cos^2 \beta_p) \cos^2 \beta_p] \right. \\ \left. + |x| \left(\frac{3}{2} R^2 - x^2 \right) \ln \left[\sqrt{R^2 + x^2 \cos^2 \beta_p} + |x| \cos \beta_p \right] \right\}.$$

Finalmente el potencial en términos de las expresiones anteriores, para un punto r , interno es,

$$\Phi = -4\pi e_p^{-1} (1 - e_p^2) \left\{ -\rho_0 \sum_{n=1}^{n_0-1} \left[\frac{1}{2} p'_{0n} (I_6)_2 + \frac{1}{3} p'_{1n} (I_6)_3 \right]_{\beta_{pn}}^{\beta_{pn+1}} \right. \\ - \rho_0 \left[\frac{1}{2} p'_{0n_0} (I_6)_2 + \frac{1}{3} p'_{1n_0} (I_6)_3 \right]_{\beta_{pn_0}}^{\operatorname{sen}^{-1} e_p} \\ + \sum_{n=1}^{n_0-1} \left[I_{5n}(a_{n+1}) \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_{pn+1}}{\cos \beta_{pn+1}} - I_{5n}(a_n) \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_{pn}}{\cos \beta_{pn}} \right] \\ + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + e_p}{1 - e_p} \right) \left[I_{5n_0}(a_{n_0+1}) + \sum_{n=n_0+1}^{N_1+N_2} [I_{5n}(a_{n+1}) - I_{5n}(a_n)] \right] \\ \left. - I_{5n_0}(a_{n_0}) \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_{pn_0}}{\cos \beta_{pn_0}} \right\}, \quad (4.65)$$

y el correspondiente a un punto r externo,

$$\Phi = -4\pi e_p^{-1} (1 - e_p^2) \left\{ -\rho_0 \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \left[\frac{1}{2} p'_{0n} (I_6)_2 + \frac{1}{3} p'_{1n} (I_6)_3 \right]_{\beta_{pn}}^{\beta_{pn+1}} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{N_1+N_2} \left[I_{5n}(a_{n+1}) \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_{pn+1}}{\cos \beta_{pn+1}} - I_{5n}(a_n) \ln \frac{1 + \operatorname{sen} \beta_{pn}}{\cos \beta_{pn}} \right] \right\}. \quad (4.66)$$

4.3.3 Modelo de Superposición de Elipsoides de la Barra Galáctica

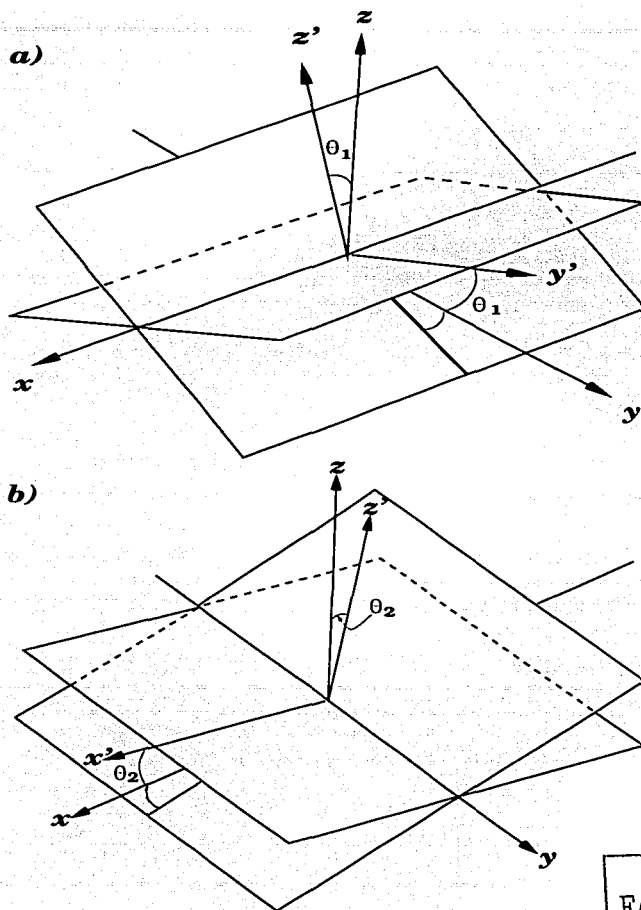
En el caso de los modelos elipsoidal y prolato de la barra Galáctica, hemos explicado que aunque consideran la ley de densidad observada para la Galaxia (Sección 4.2.4), no reproducen los isocontornos de densidad en forma de caja que se observan (Freudenreich 1998; Zhao y Mao 1996; Ibata y Gilmore 1995). En el caso de los modelos elipsoidal y prolato los isocontornos de densidad son elípticos.

En esta Sección se propone un modelo para la barra Galáctica que aproxima la forma de caja de las superficies de igual densidad observadas y reproduce, al igual que las barras elipsoidal y prolata, la ley de densidad observada. El modelo consiste en una superposición de elipsoides inhomogéneos (Sección 4.3.1). Otras superposiciones fueron analizadas utilizando esferoides prolatos inhomogéneos (Sección 4.3.2), aunque ninguna mejoró los resultados de la superposición de elipsoides inhomogéneos.

El modelo final consiste de cuatro elipsoides inhomogéneos con densidad de la forma dada en la ecuación (4.20). Dos elipsoides idénticos tienen su plano "ecuatorial" (el plano que contiene a los ejes mayor e intermedio) girado un ángulo θ_1 a ambos lados del eje z , sobre el plano y, z -Figura 4.9 a)-. Los otros dos elipsoides, también idénticos, tienen su plano ecuatorial girado un ángulo θ_2 en el plano x, z -Figura 4.9 b)-.

Con $a_B, b_B, c_B, a_x, a_y, a_z, h_B$ las dimensiones efectivas y longitudes de escala de la barra Galáctica (Sección 4.2), las correspondientes cantidades de los elipsoides girados el ángulo θ_1 se toman como,

$$\begin{aligned}
 a_{B1} &= k_1 a_B \\
 b_{B1} &= k_2 b_B \\
 c_{B1} &= k_3 c_B \\
 a_{x1} &= k_1 a_x \\
 a_{y1} &= k_2 a_y \\
 a_{z1} &= k_3 a_z \\
 h_{B1} &= k_1 h_B,
 \end{aligned}
 \tag{4.67}$$



TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIGURA 4.9: Los planos que contienen a los ejes mayor e intermedio de los cuatro elipsoides inhomogéneos en la superposición.

con k_1, k_2, k_3 constantes positivas. Ambos elipsoides con una masa M_1 , que es una fracción k_4 de la masa total de la barra, $M_B : M_1 = k_4 M_B$.

Análogamente para los dos elipsoides girados el ángulo θ_2 ,

$$\begin{aligned}
 a_{B2} &= k_5 a_B \\
 b_{B2} &= k_6 b_B \\
 c_{B2} &= k_7 c_B \\
 a_{x2} &= k_5 a_x \\
 a_{y2} &= k_6 a_y \\
 a_{z2} &= k_7 a_z \\
 h_{B2} &= k_8 h_B \\
 M_2 &= k_8 M_B,
 \end{aligned} \tag{4.68}$$

con la restricción $2k_4 + 2k_8 = 1$, con k_4 y k_8 positivos.

El ajuste a la densidad de la barra observada en la barra Galáctica por medio de la superposición de los cuatro elipsoides, da los valores de las constantes k_l , $l = 1, \dots, 8$, y de los ángulos θ_1 y θ_2 . Ya que la ecuación (4.20) da la densidad en cada elipsoide, tomando en cuenta las relaciones (4.67) y (4.68), entonces, considerando la orientación de cada elipsoide, se conoce la expresión analítica de la densidad $\rho_s(\mathbf{r})$ en cualquier punto $\mathbf{r} = (x, y, z)$ debida a la superposición. La cantidad que empleamos en el procedimiento de ajuste es $\rho_s(\mathbf{r})/\rho_s(0)$. En las ecuaciones (4.2) y (4.3) se tiene la densidad en la barra Galáctica, a la que llamaremos ρ_B . De esta forma, también conocemos entonces el cociente $\rho_B(\mathbf{r})/\rho_B(0)$.

El procedimiento de ajuste a la densidad en la barra Galáctica por medio de la superposición de los cuatro elipsoides inhomogéneos es el siguiente. Consideramos las superficies,

$$\begin{aligned}
 \frac{\rho_s(\mathbf{r})}{\rho_s(0)} &= c_j \\
 \frac{\rho_B(\mathbf{r})}{\rho_B(0)} &= c_j,
 \end{aligned}$$

para un valor $c_j (< 1)$ dado. Por la simetría de estas superficies, basta considerarlas en el octante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. En este octante tomamos una partición suficientemente fina en ángulos esféricos (φ, θ) (con eje polar el eje z). En los puntos de partición $(\varphi, \theta)_i$, obtenemos las distancias al origen r_s, r_B de los puntos correspondientes en ambas superficies. Entonces, para n puntos en la partición y m valores c_j , minimizamos la cantidad,

$$D = \left\{ \frac{\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{n} \sum_{i=1}^n (r_B - r_s)_{ij}^2}{\sum_{j=1}^m c_j} \right\}^{1/2}. \quad (4.69)$$

La cantidad D es función de las diez variables $k_l, l = 1, \dots, 8$ y θ_1, θ_2 .

El punto $(k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6, k_7, k_8, \theta_1, \theta_2)$ donde la función D alcanza su mínimo da entonces el mejor ajuste a la densidad en la barra Galáctica. Sin embargo, este punto puede caer fuera de la región de dimensión diez físicamente aceptable, es decir, con $k_l, l = 1, \dots, 8$ y θ_1, θ_2 positivos y $2k_4 + 2k_8 = 1$.

Para obtener el valor mínimo de D en la región aceptable, empleamos el algoritmo minimizador multidimensional conocido como "amoeba" (Press et al. 1992). Este programa encuentra los mínimos locales de una función unidimensional en un espacio multidimensional como el dado por la ecuación (4.69). Los valores que se obtienen son,

$$\begin{aligned} k_1 &= 1.1982 \\ k_2 &= 1.4086 \\ k_3 &= 0.8565 \\ k_4 &= 0.2600 \\ \theta_1 &= 0.6758 \text{ rad} \\ k_5 &= 1.1803 \\ k_6 &= 1.1941 \\ k_7 &= 1.0123 \\ k_8 &= 0.2400 \\ \theta_2 &= 0.2420 \text{ rad} \end{aligned}$$

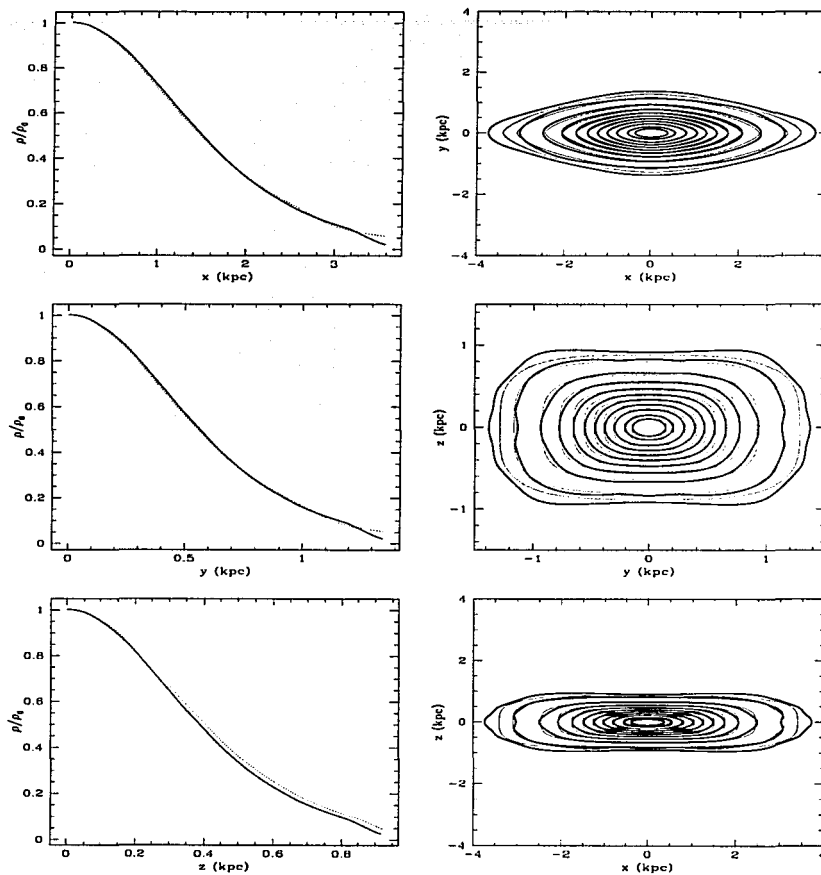


FIGURA 4.10: Paneles lado izquierdo: Comparación de la densidad a lo largo de los ejes x, y, z (superior, medio e inferior respectivamente) de la superposición (líneas puntadas) con la densidad en la barra Galáctica (Freudenreich 1998) (líneas continuas). Paneles lado derecho: Comparación en los tres planos Cartesianos de los contornos de igual densidad de nuestro ajuste (líneas oscuras) con los isocontornos observados en la barra Galáctica (líneas claras).

En los paneles del lado izquierdo de la Figura 4.10 se compara en los ejes x, y, z la densidad dada por nuestro ajuste con la densidad en la barra Galáctica (Freudenreich 1998). En los paneles del lado derecho de la misma Figura se comparan contornos de igual densidad en los tres planos Cartesianos.

Con estas características de los elipsoides, la fuerza y el potencial en un punto \mathbf{r} , producidos por cada uno de éstos, se obtiene aproximando su distribución de masa con el procedimiento de superposición de componentes elipsoidales homogéneas, dado en la Sección 4.3.1.

4.4 Estudios Dinámico Estelares en el Plano Galáctico

Una de las estructuras que ha recibido más atención recientemente en la literatura científica de Dinámica Galáctica, por su importancia en la dinámica general de las galaxias de disco (ya que puede inducir la existencia de brazos espirales, y alimentar con mecanismos de “barrido” de gas, el centro Galáctico), son las barras galácticas. Numerosos trabajos se han escrito sobre la dinámica estelar donde se realizan, v.g. análisis minuciosos en el espacio fase con diagramas de Poincaré (Vandervoort 1979; Patsis, Efthymiopoulos, Contopoulos y Voglis 1997; Berentzen, Heller, Shlosman y Fricke 1998), los aspectos no lineales (caos) de la dinámica que generan estos objetos masivos (Fux 2001; Binney 1982; Hasan y Norman 1990), las familias de órbitas periódicas (Teuben y Sanders 1985; Athanassoula, Bienayme, Martinet, Pfenniger 1983), además de innumerables estudios de N -cuerpos (Norman, Sellwood y Hasan 1996). Para la Galaxia no existen trabajos que estudien la dinámica orbital considerando la barra Galáctica con la ley de densidad observada y/o los brazos espirales.

Hemos realizado análisis orbitales preliminares en los tres modelos propuestos para la barra Galáctica y hecho comparaciones entre éstos, obteniendo algunos resultados cualitativos generales aplicando la misma idea que para los brazos espirales, que consiste en utilizar la información de ambos sistemas de referencia (el inercial y el no inercial) para la construcción de los diagramas en el espacio fase. Damos a continuación algunos de estos resultados.

4.4.1 Diagramas de Poincaré y Orbitas en el Espacio de Configuración

Todos los cálculos que presentamos a continuación fueron realizados con el integrador Bulirsh-Stoer (Apéndice B), con un error aproximado en la variación de la constante de Jacobi de $\left| \frac{E_{J_i} - E_{J_f}}{E_{J_i}} \right| \approx 10^{-11}$. En la Sección B.4.2 del Apéndice B, se describen brevemente las características de los códigos orbitales para los tres ajustes hechos a la barra Galáctica presentados en este trabajo.

En todos los casos la masa de la barra es $M_{BAR} = 9.8 \times 10^9 M_{\odot}$ (ver Sección 4.2.5) y la velocidad angular es $\Omega_P = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ (ver Sección 4.2.6), a menos que se especifique lo contrario. Finalmente, las unidades de la constante de Jacobi E_J , son $100 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$.

Barra elipsoidal

En la literatura sobre barras galácticas se encuentran términos como “bulbo-barra” para indicar bulbos triaxiales; en la mayoría de éstos se trata a la barra como la única componente central además del halo y disco. En otros trabajos se considera que de hecho coexisten ambas estructuras y suponen incluso que una barra destruida por un exceso de masa central se convierte en un bulbo (Norman, Sellwood y Hasan 1996). En particular para la Galaxia, se encuentran trabajos que se refieren a la barra Galáctica que no consideran otra componente esferoidal y también existen trabajos que llaman a la barra “bulbo-barra” y que consideran la existencia de la componente esferoidal (Sevenster 1999; Zhao 2000). Para el caso de la barra triaxial presentamos entonces tres experimentos: el primero considera el potencial axisimétrico (Apéndice A) con una componente de bulbo del orden del 45% de la masa de la barra (Weiner y Sellwood 1999). En el segundo experimento se remueve por completo la componente central (bulbo) dejando sólo el halo, el disco y la barra. En el último caso se hace análisis sobre la barra sola (sin potencial axisimétrico) con el propósito de entender el efecto global del potencial axisimétrico.

En la Figura 4.11 se muestran diez diagramas de Poincaré para el caso del modelo de barra elipsoidal con halo, disco y bulbo parcial (en la Tabla 4.1, al final de este Capítulo, se presenta el total de familias E_J mostradas en la tesis y las características del modelo respectivo). A diferencia de los cálculos con brazos, la separatriz, compuesta por órbitas

con bajo momento angular, es considerablemente más ancha dentro de la región de la barra; esto es, se tienen más órbitas que cambian su sentido de prógrado a retrógrado y viceversa en el sistema inercial. Sin embargo, la separatriz sigue conservando la característica de dividir las órbitas prógradas de las retrógradas en el sistema inercial como puede verse en cada uno de estos diagramas.

En este caso que incluye una componente central (bulbo parcial), las órbitas con E_J más negativo ($E_J \leq -2600$), es decir, las más internas y "amarradas", son ordenadas en su totalidad. Notamos que para algunos valores de E_J ($=-2300, -2200, -2100$), el caos comienza sobre las órbitas que componen la separatriz (a diferencia del potencial con brazos espirales, en el que el caos comienza en todos los casos en las órbitas prógradas en el sistema inercial). Para valores de E_J crecientes el caos disminuye en la separatriz y pasando la barrera de corotación (aproximadamente localizada a una distancia galactocéntrica de 3.5 kpc) el caos domina la región de órbitas prógradas. De la misma forma que para el potencial con brazos espirales, no se encuentra caos en la región retrógrada.

Barra elipsoidal (con halo, disco y bulbo parcial)

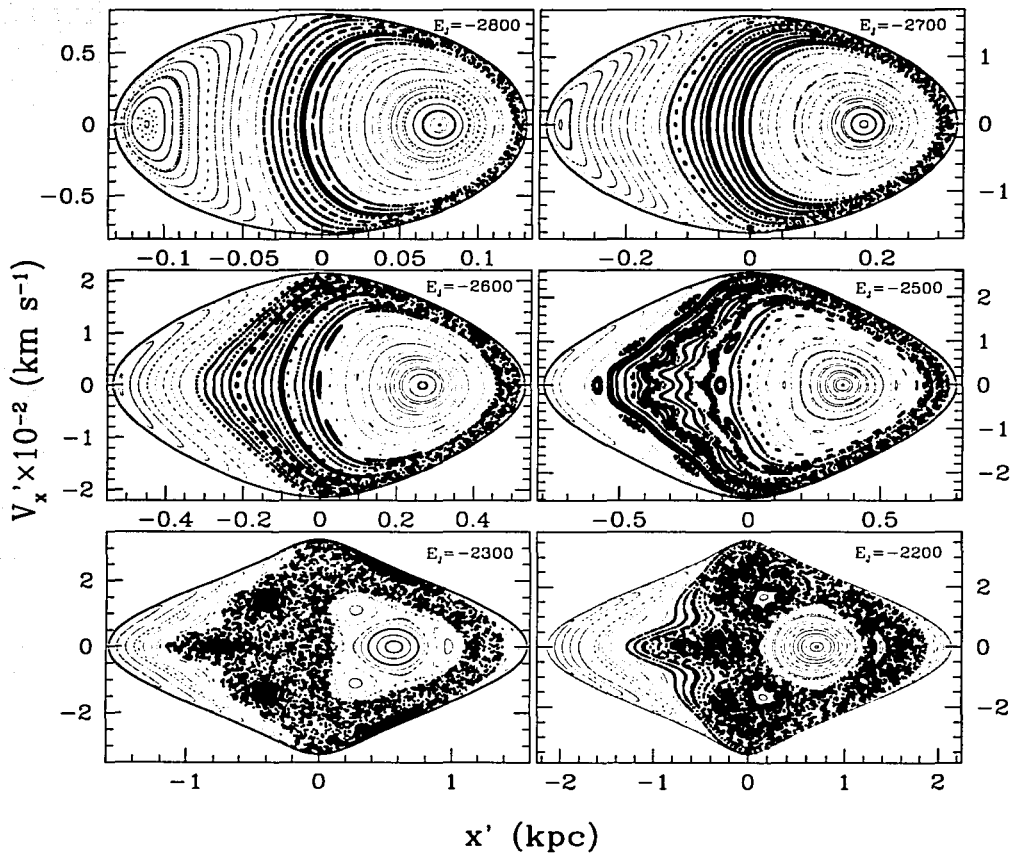


FIGURA 4.11: (Primera parte)

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

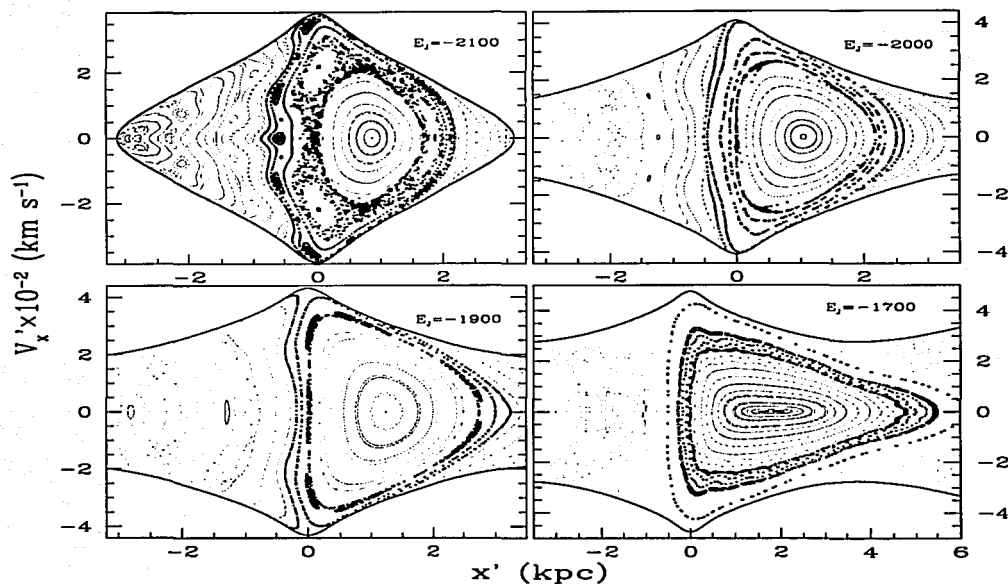


FIGURA 4.11: (Continuación) Diagramas de Poincaré con diferentes integrales de Jacobi del modelo de barra elipsoidal (con halo, disco y bulbo parcial). Las unidades de E_J son $100 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$. Al igual que en los diagramas para los brazos, los puntos oscuros delinean la separatriz.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Para ilustrar el comportamiento en el espacio real de las órbitas que componen estos diagramas mostramos algunos ejemplos de órbitas en el espacio de configuración tanto en el sistema inercial como en el no inercial (anclado a la barra) en la Figura 4.12. Elegimos para esto uno de los diez diagramas de Poincaré ($E_J = -2200$) presentados en la Figura 4.11.

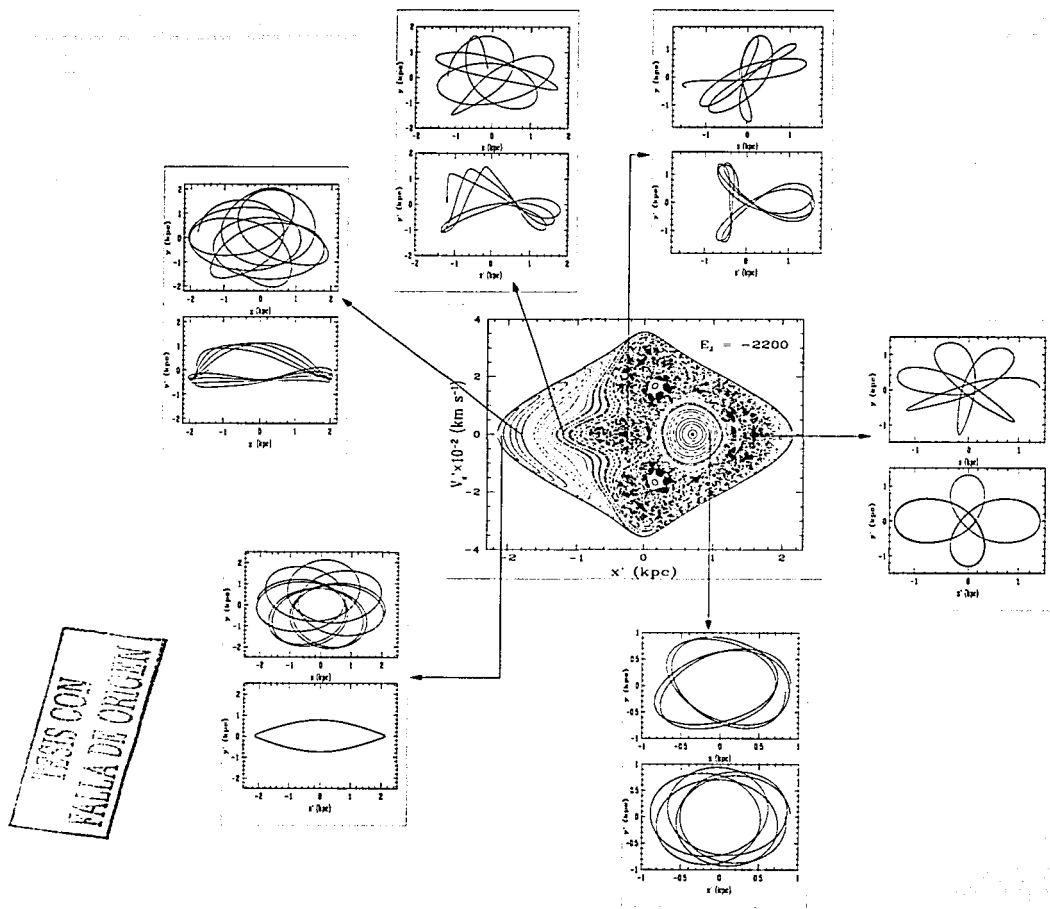


FIGURA 4.12: Ejemplos de órbitas en el espacio real en el sistema inercial (parte superior de los recuadros) y en el no inercial (parte inferior de los recuadros) para el modelo de barra elipsoidal (con halo, disco y bulbo parcial). Las flechas apuntan a la órbita correspondiente en el diagrama en el espacio fase.

En la Figura 4.13 se muestran algunas de las órbitas periódicas conocidas como x_1 , para el modelo de barra elipsoidal con halo, disco y bulbo parcial.

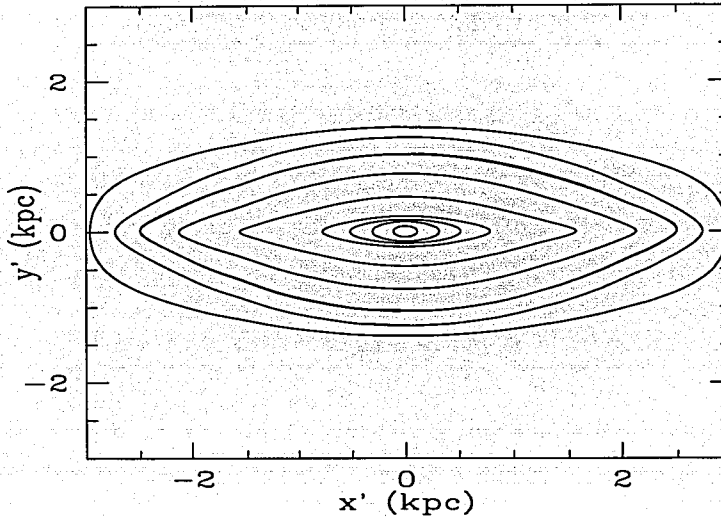


FIGURA 4.13: Órbitas periódicas x_1 para la barra elipsoidal con halo, disco y bulbo parcial.

En la Figura 4.14 se muestran diez ejemplos de diagramas en el espacio fase para diferentes valores de la constante de Jacobi. En este caso hemos extraído completamente la componente de bulbo, quedando incluido en el potencial, el disco, el halo y la barra elipsoidal.

La primera característica evidente es la ausencia de caos en la separatriz. El caos sólo aparece pasando la barrera de corotación en la región prógrada. La barra parece favorecida con la ausencia de una componente central, en el sentido de que si la masa del

bulbo crece, el caos en la región interna a la barra aumenta rápidamente hasta cubrir todo el espacio fase permitido comenzando por las órbitas prógradas y destruyendo las periódicas x_1 .

Comparando casos con la misma extensión en el eje x' , por ejemplo,

Con bulbo	Sin bulbo
E_J	E_J
-2800	-2350
-2500	-2250
-2300	-2150
-2200	-2100
-2100	-2050

se observa que la separatriz es ahora más ancha aún que en el caso con bulbo (para los casos con movimiento regular u ordenado). La componente de bulbo parece "amarrar" más hacia el centro las órbitas de menor momento angular (vistas en el sistema inercial). El ensanchamiento de la separatriz disminuye principalmente la extensión x' de la región retrógrada aunque también disminuye considerablemente la región prógrada. Esto puede deberse al efecto local que el potencial de barra produce sobre las órbitas en el sistema inercial, esto es, las estrellas sienten localmente fuerzas mayores que la fuerza central, axisimétrica, que las obligan a desviarse del movimiento prógrado o retrógrado que originalmente tendrían sin la presencia de este fuerte potencial no axisimétrico. Este efecto fue también notado en el caso de los brazos espirales, en los que para masas más allá de lo plausible para los brazos de la Galaxia (Sección 3.5), la separatriz pasaba de ser una línea formada por órbitas de momento angular cerca de cero, a una región formada por órbitas con mayor momento angular (como es el caso para la barra). Si aceptamos estos resultados, esto significaría que en las galaxias tardías (Sc o SBc), donde el patrón espiral tiene grandes ángulos de posición, donde el contraste brazos vs. disco es grande (esto es, brazos muy brillantes) y el bulbo es pequeño relativo a las barras, las órbitas progradas-retrógradas podrían dominar el movimiento orbital. Mientras que en galaxias donde las componentes axisimétricas centrales (como el bulbo), son muy importantes relativas a la barra y a los brazos espirales (Sa, SBa), las órbitas prógradas o retrógradas puras dominarían el movimiento orbital.

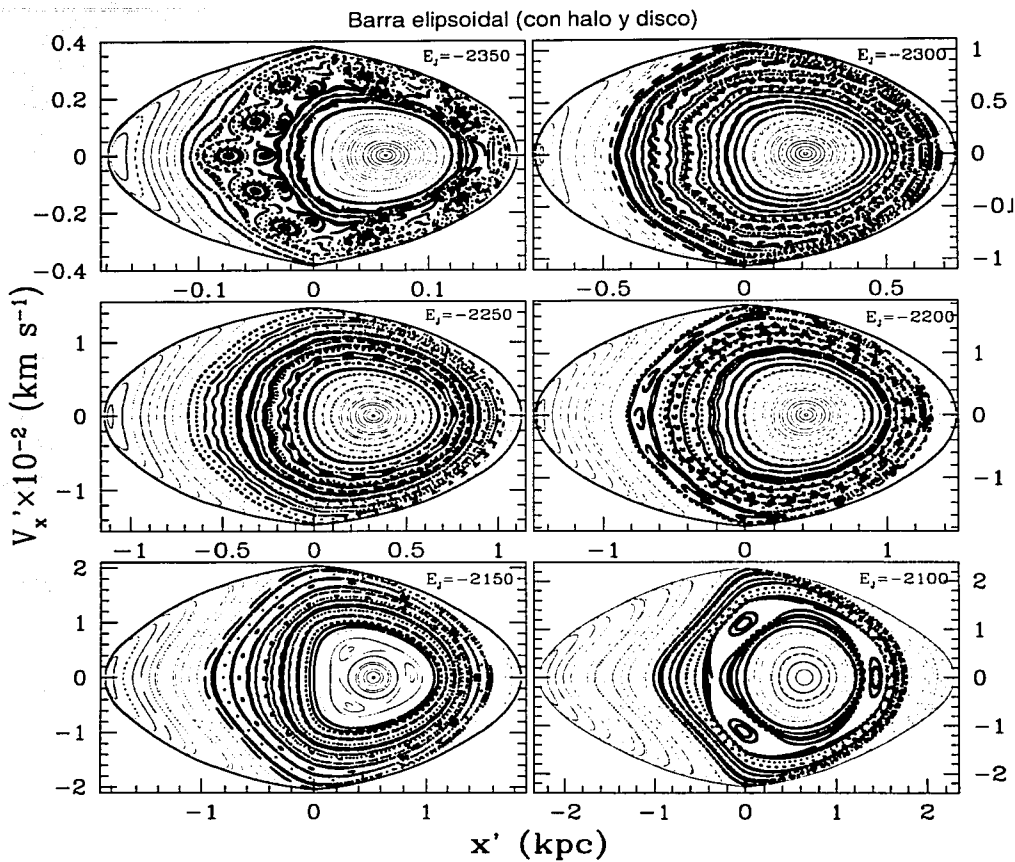


FIGURA 4.14: (Primera parte)

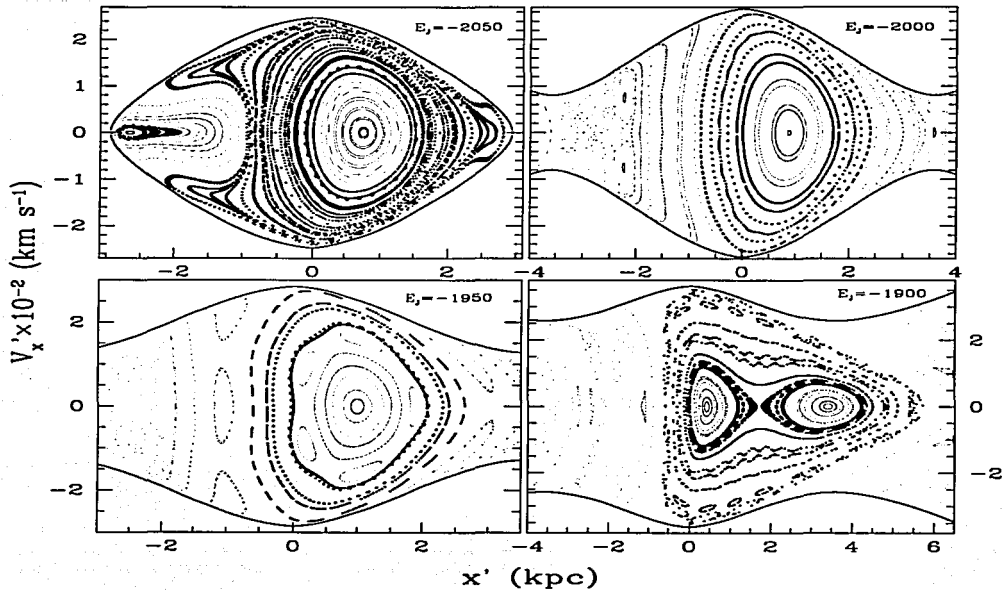
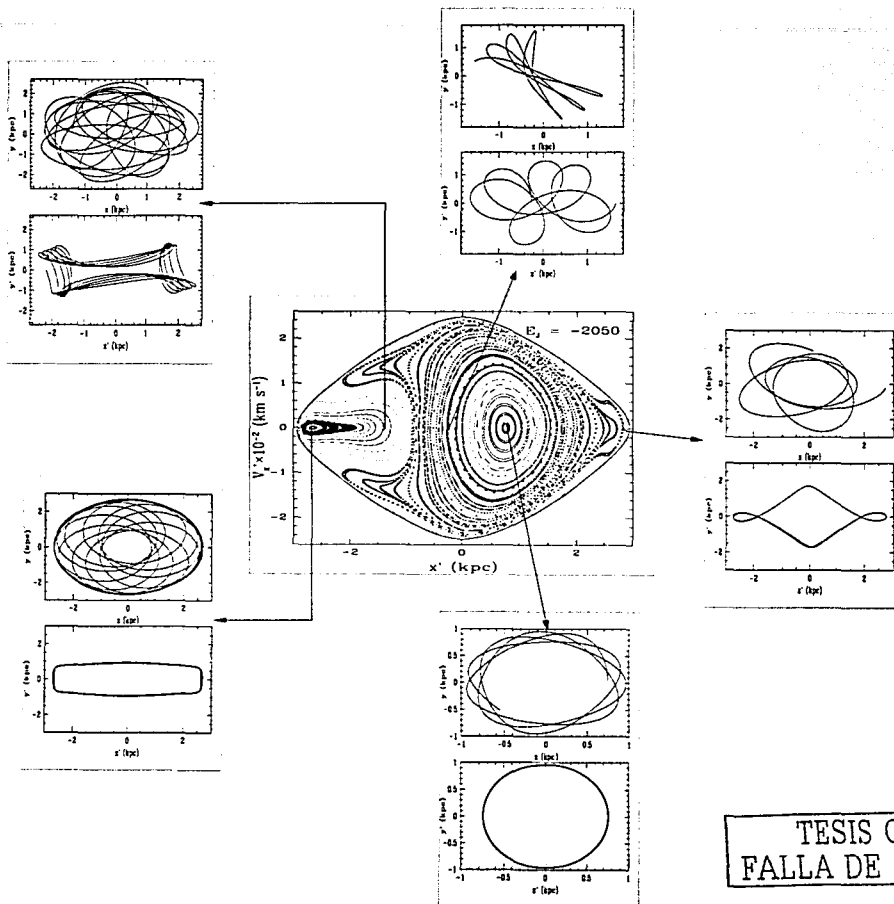


FIGURA 4.14: (Continuación) Diagramas de Poincaré con diferentes integrales de Jacobi del modelo de barra elipsoidal (con halo y disco sin bulbo).

TESIS CON
 FALLA DE ORIGEN

En la Figura 4.15 presentamos algunos ejemplos de órbitas en el espacio de configuración para uno de los diagramas del caso de barra elipsoidal sin bulbo.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

FIGURA 4.15: Lo mismo que la Figura 4.12 pero para el caso del modelo de barra elipsoidal con halo y disco sin bulbo.

En la Figura 4.16 se muestran algunas de las órbitas periódicas x_1 , para el modelo de barra elipsoidal con halo y disco **sin** bulbo.

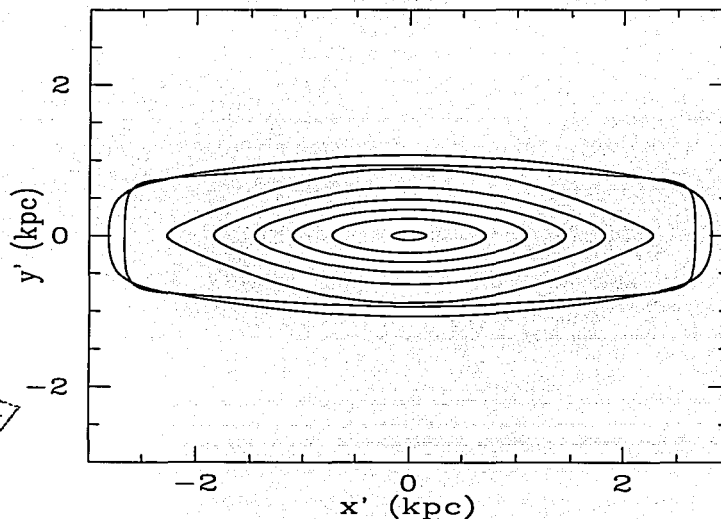


FIGURA 4.16: Órbitas periódicas x_1 para la barra elipsoidal con halo y disco **sin** bulbo.

Finalmente, en la Figura 4.17, se presentan seis diagramas de Poincaré únicamente de la barra elipsoidal **sin** potencial axisimétrico.

En este caso se confirma la tendencia al ensanchamiento de la separatriz, esto es, dominan ahora las órbitas cuyo sentido de movimiento cambia en el sistema inercial.

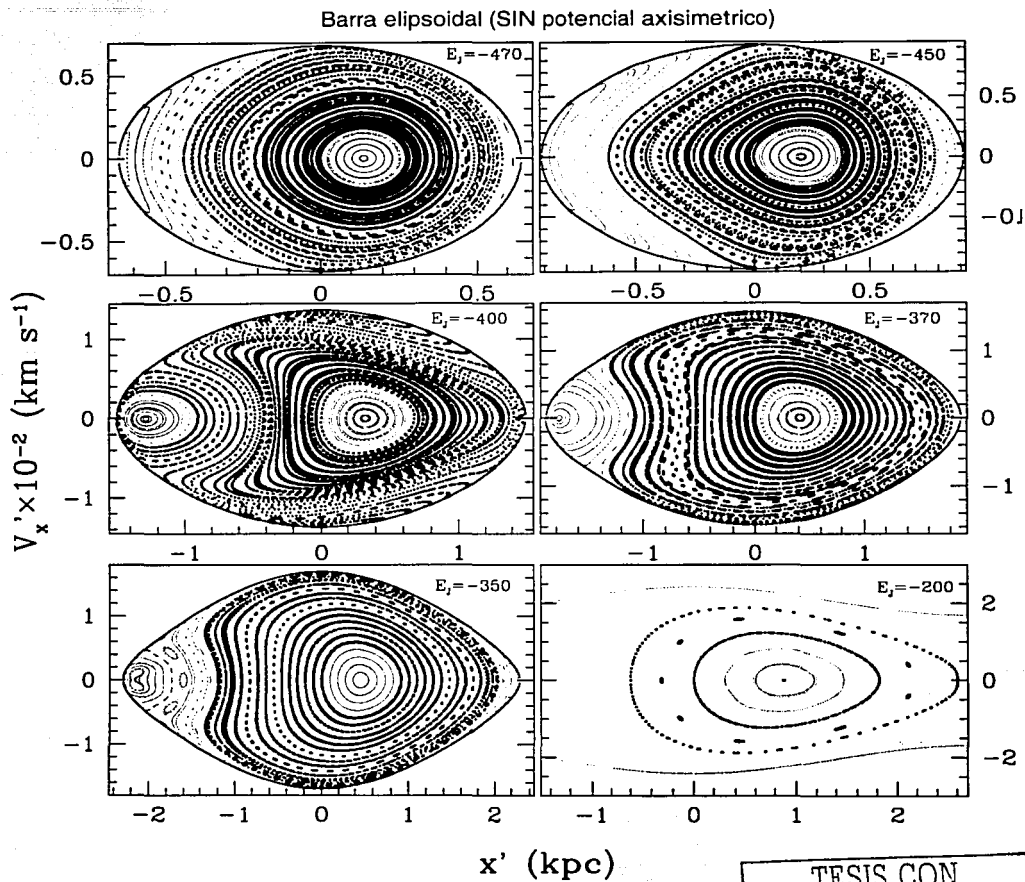


FIGURA 4.17: Diagramas de Poincaré con diferentes integrales de Jacobi del modelo de barra elipsoidal (sin potencial axisimétrico).

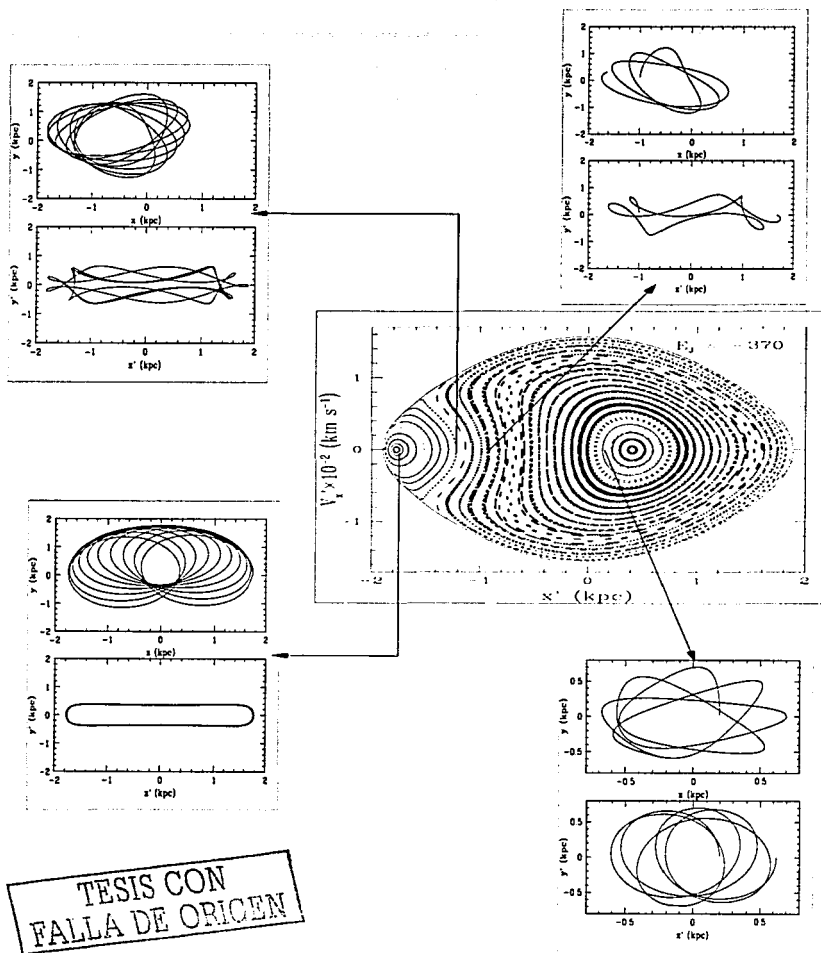


FIGURA 4.18: Lo mismo que la Figura 4.12 pero para el caso del modelo de barra elipsoidal sin potencial axisimétrico.

Ejemplos de órbitas en el espacio real para la barra elipsoidal sin potencial axisimétrico en ambos sistemas de referencia, son mostradas en la Figura 4.18.

En la Figura 4.19 se muestran algunas de las órbitas x_1 , para el modelo de barra elipsoidal sin potencial axisimétrico.

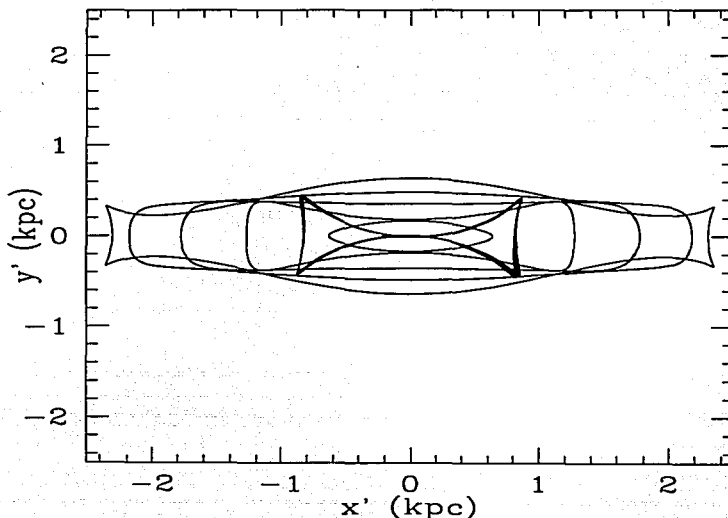


FIGURA 4.19: Órbitas periódicas x_1 para la barra elipsoidal sin potencial axisimétrico.

Barra Prolata

En las Figuras 4.20, 4.21 y 4.22 mostramos la analogía del modelo de barra prolata para la barra Galáctica con los casos de las Figuras 4.11, 4.14 y 4.17 respectivamente de la barra elipsoidal.

De esta forma vemos, comparando familias con valores iguales de la constante de Jacobi o con la misma extensión en la distancia x' , que el caso de barra prolata proporciona resultados cualitativamente muy similares a la barra elipsoidal. De la comparación de estos dos modelajes (elipsoidal y prolato) de la barra Galáctica, considerando que la barra de la Vía Láctea es aproximadamente prolata y que numéricamente es mucho más eficiente el modelo prolato, concluimos que un modelaje con un elipsoide prolato inhomogéneo es suficiente para el caso particular de la Galaxia.

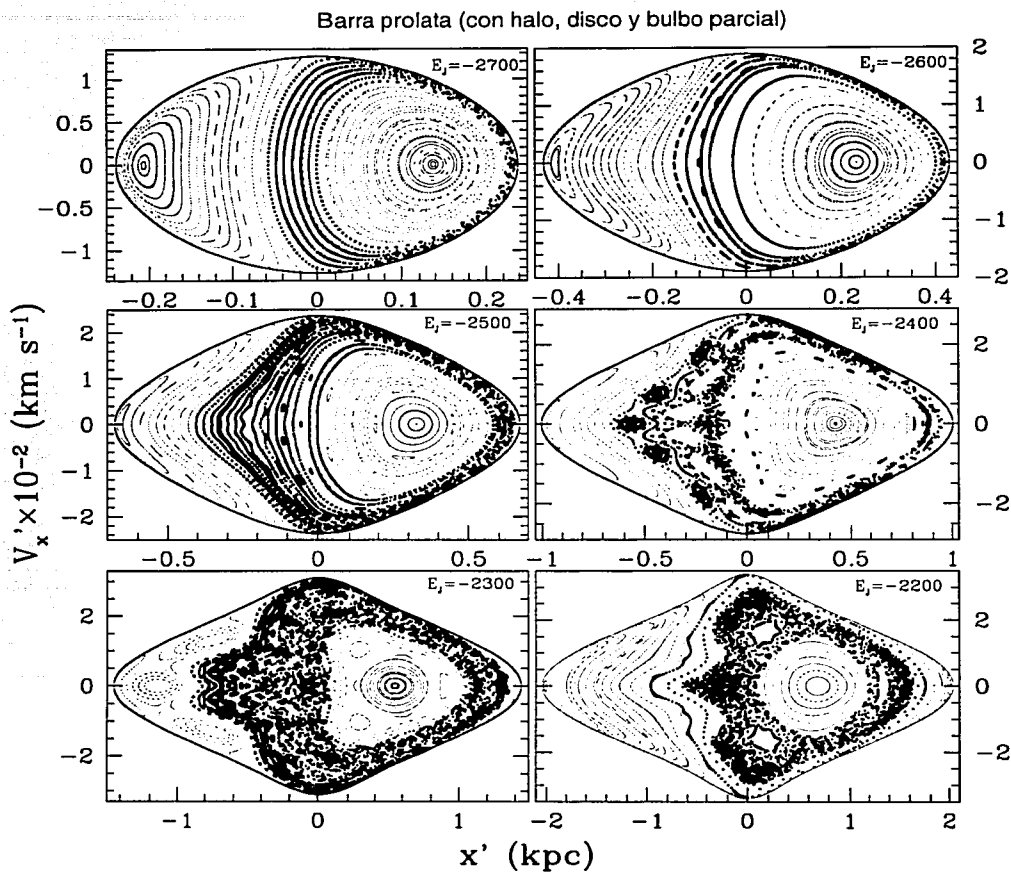


FIGURA 4.20: (Primera parte)

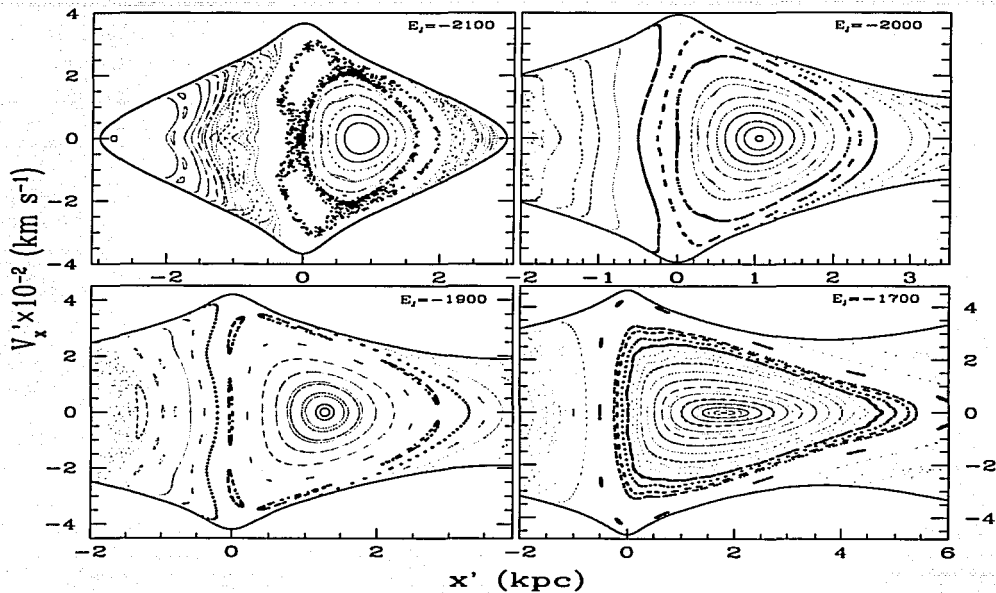


FIGURA 4.20: (Continuación) Diagramas de Poincaré con diferentes integrales de Jacobi del modelo de barra prolata (con halo, disco y bulbo parcial). Las unidades de E_J son $100 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

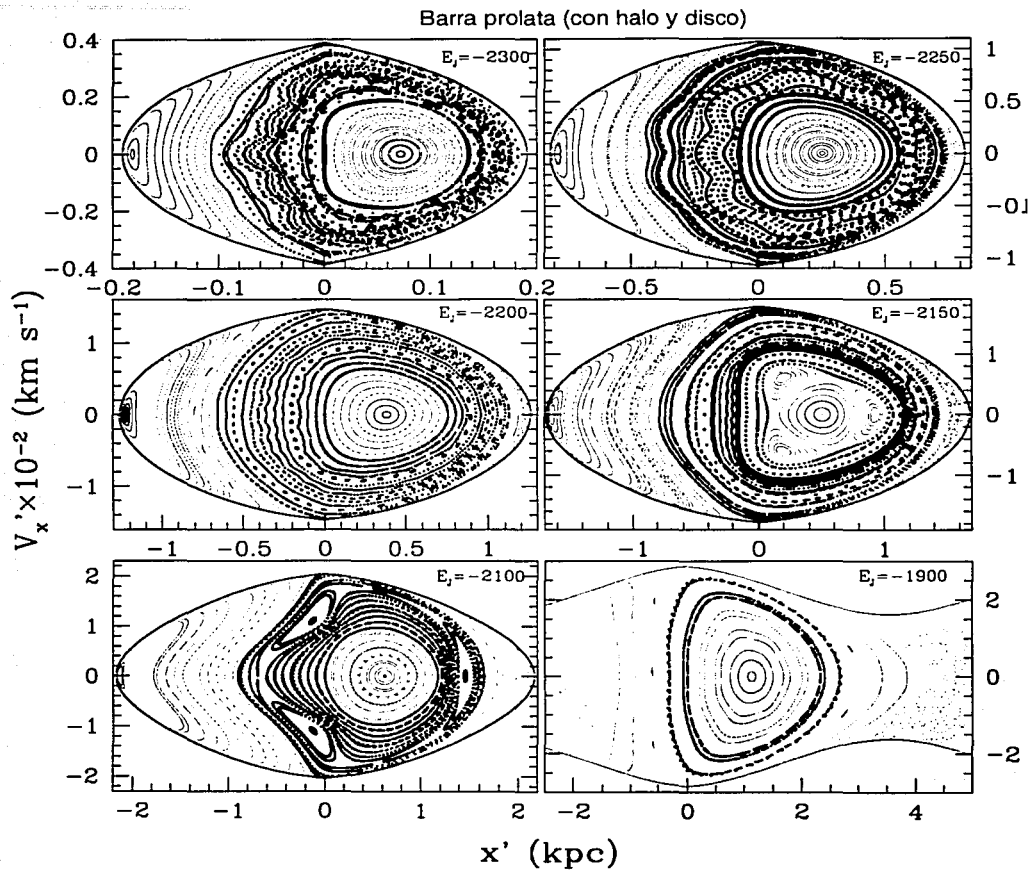


FIGURA 4.21: Diagramas de Poincaré con diferentes integrales de Jacobi del modelo de barra prolata (con halo y disco sin bulbo).

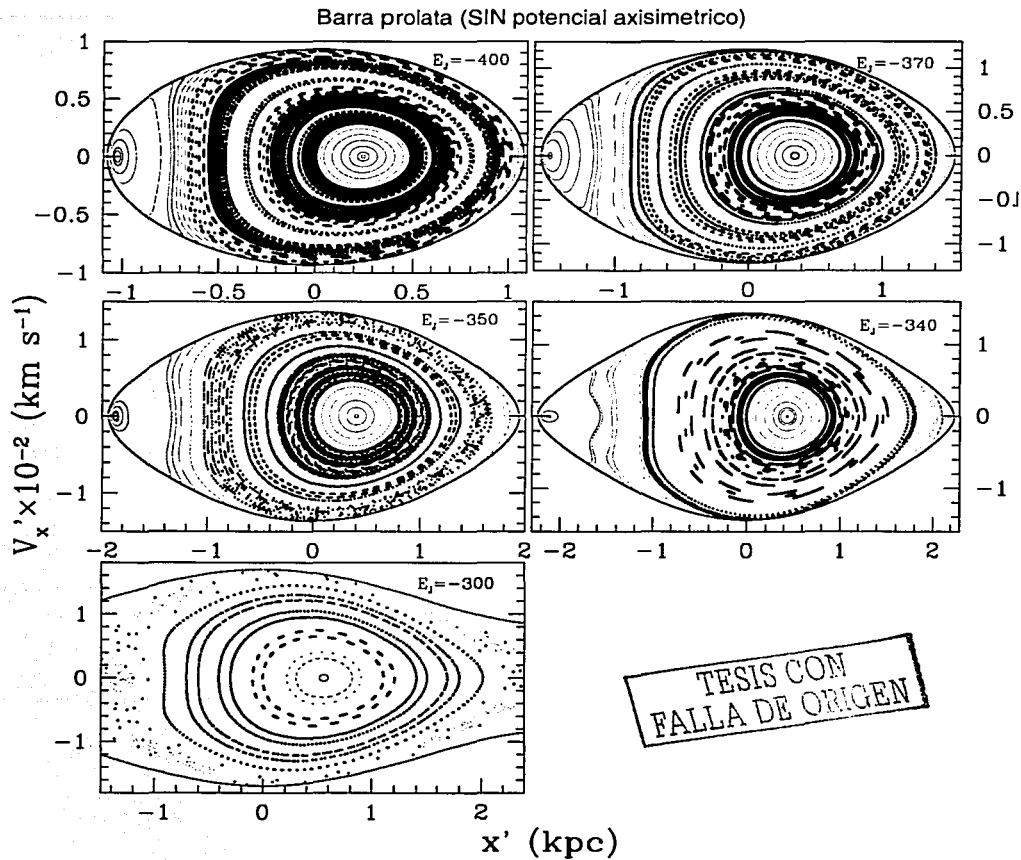


FIGURA 4.22: Diagramas de Poincaré con diferentes integrales de Jacobi del modelo de barra prolata sin potencial axisimétrico.

Barra modelada con la superposición de elipsoides inhomogéneos

En la Figura 4.23 se presentan cinco casos del potencial de barra como superposición que incluye el potencial axisimétrico total.

Comparando las familias del modelo de superposición con familias del modelo elipsoidal con bulbo con aproximadamente la misma extensión en el eje x' , es decir,

Superposición	Elipsoidal
E_J	E_J
-2600	-2300
-2500	-2300
-2400	-2200
-2300	-2100
-2200	-2100

se puede observar que la estructura de órbitas periódicas es muy similar en ambos casos, es decir, la superposición resulta orbitalmente parecida a la barra elipsoidal. El caos se extiende mucho más en la separatriz debido a que la componente central de bulbo es ahora significativamente mayor que en los casos de las Figuras 4.11 y 4.20, en los que consideramos sólo una fracción del bulbo. Por otra parte, en la región prógrada el caos comienza antes de pasar la barrera de corotación ($E_J = -2200$). Para $E_J = -2200$, donde no domina el caos en la separatriz, vemos el efecto de adelgazamiento de la separatriz (comparando con $E_J = -2100, -2000$ en la Figura 4.11) debido al incremento en la masa del bulbo en el potencial axisimétrico.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

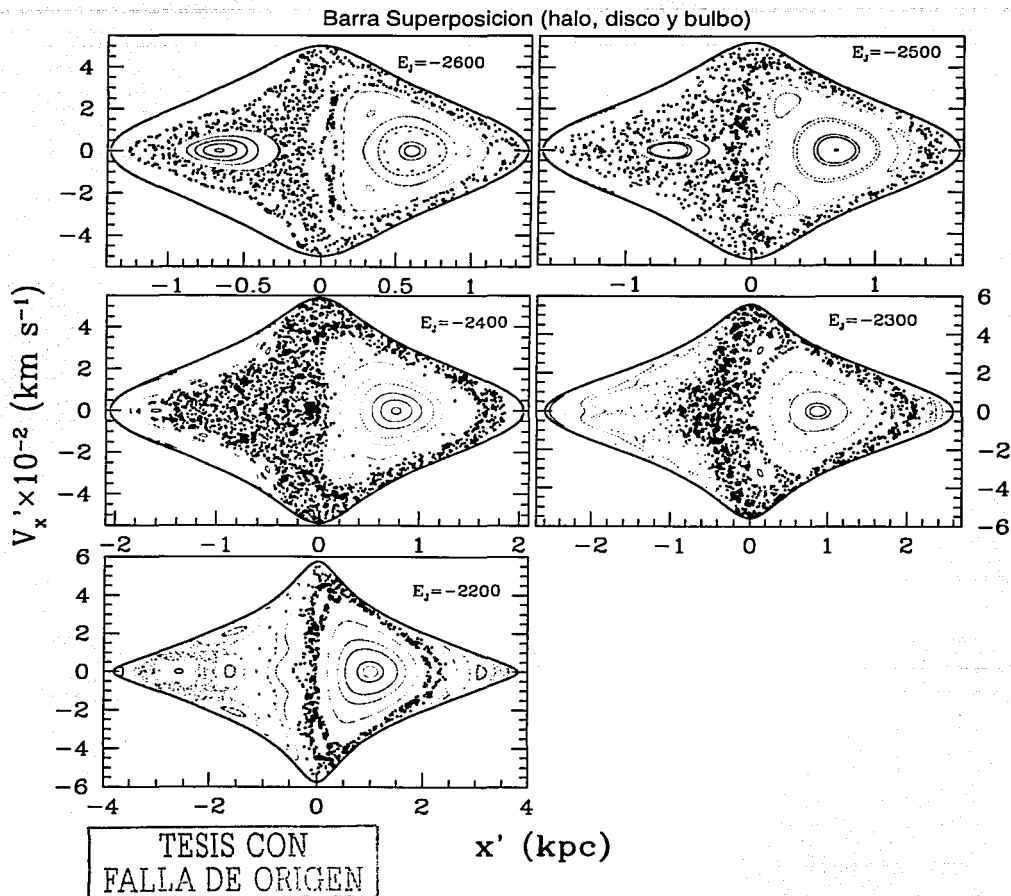


FIGURA 4.23: Diagramas de Poincaré con diferentes integrales de Jacobi de la barra modelada con una superposición de elipsoides inhomogéneos con el potencial axisimétrico total. Las unidades de E_J son $100 \text{ km}^2 \text{ s}^{-2}$.

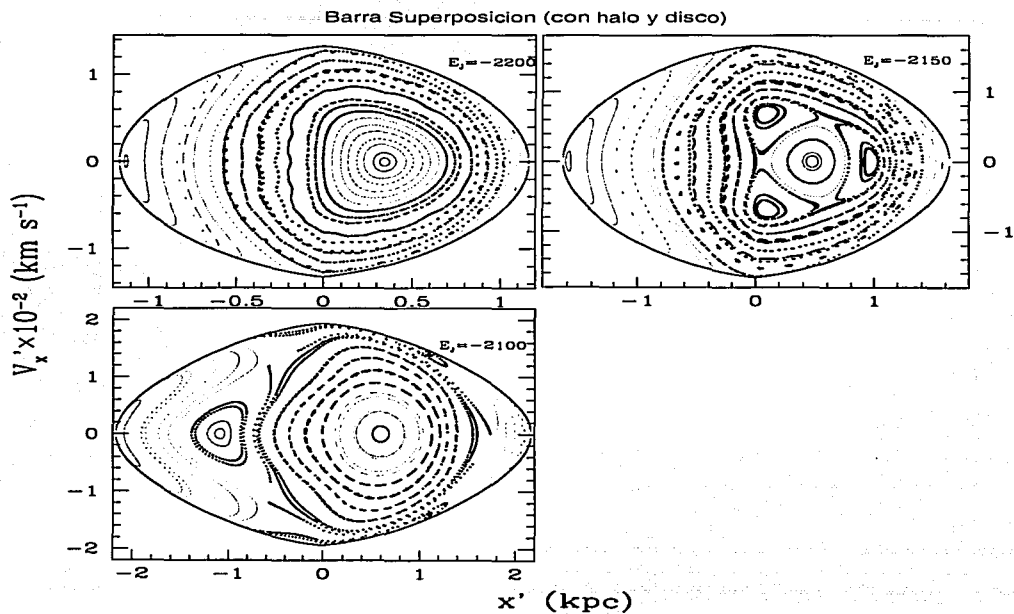


FIGURA 4.24: Diagramas de Poincaré con diferentes integrales de Jacobi de la barra modelada con una superposición de elipsoides inhomogéneos con el potencial axisimétrico sin bulbo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

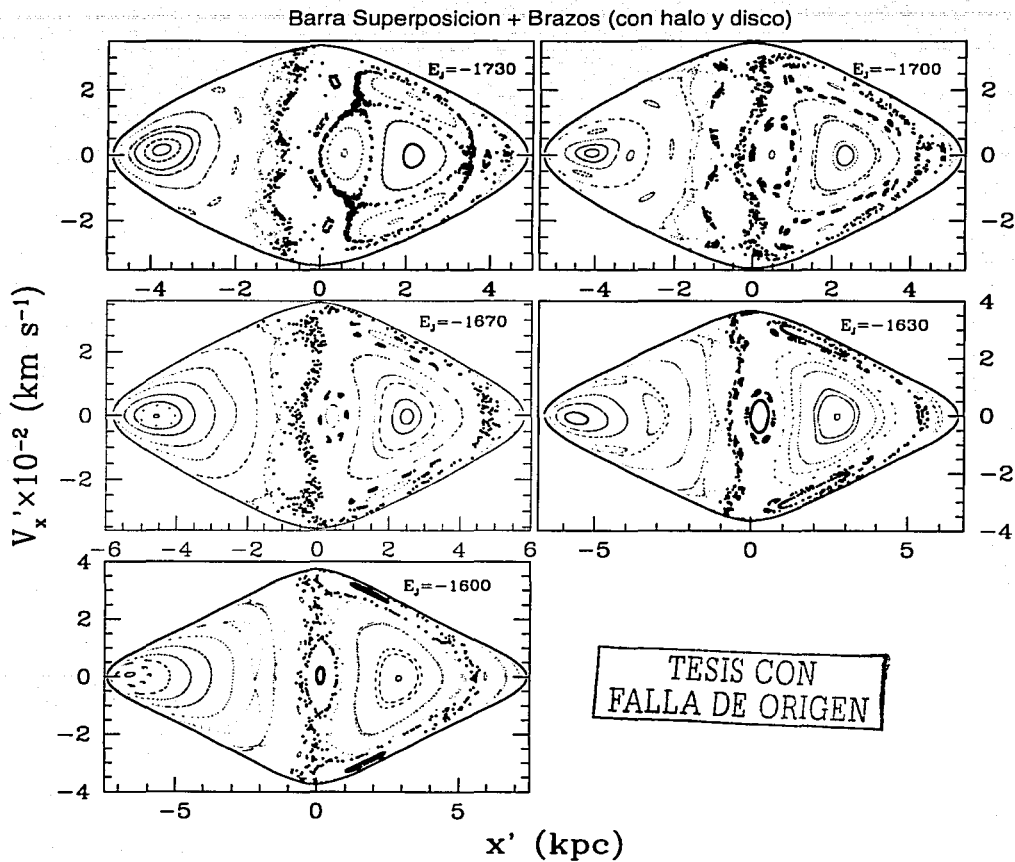


FIGURA 4.25: Diagramas de Poincaré con diferentes integrales de Jacobi de la barra modelada con una superposición de elipsoides con brazos incluidos (potencial axisimétrico sin bulbo).

En la Figura 4.24 se presentan tres diagramas de Poincaré de la superposición con el potencial axisimétrico sin la componente central de bulbo. Si comparamos por extensión en x' los casos de barra (superposición) con bulbo y sin bulbo,

Con bulbo	Sin bulbo
E_J	E_J
-2600	-2200
-2500	-2150
-2400	-2100,

se observa nuevamente que el caos desaparece al quitar el bulbo.

En general la estructura orbital en este caso es muy similar al de la barra elipsoidal sin bulbo si se comparan los mismos valores de la constante de Jacobi.

Finalmente, en la Figura 4.25 presentamos cinco diagramas en el espacio fase de la barra (superposición) con el potencial axisimétrico sin bulbo, y hemos incluido en este caso los **brazos espirales**. La masa de los brazos espirales es $M_B/M_D = 0.0175$. La velocidad angular para estas simulaciones fue reducida a la velocidad observada en los brazos espirales ($\Omega_P = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$).

En estos diagramas puede verse cómo la separatriz es más ancha que en los casos que consideran sólo los brazos espirales (Sección 3.5 y 3.6). La estructura orbital es considerablemente más compleja que con los brazos solamente o con la barra solamente, a pesar de la baja masa de los brazos respecto a la barra.

El estudio preliminar presentado es por supuesto, el inicio de una serie de aplicaciones y análisis comparativos de estos modelos en conjunto con los brazos espirales. El objetivo principal de estos modelos es su aplicación a diferentes problemas de la Galaxia. En algunos de éstos nos encontramos trabajando actualmente, tales como el estudio de órbitas de estrellas de alta velocidad en la vecindad Solar, el estudio de la distribución de cúmulos globulares cercanos al disco incluyendo la barra Galáctica y estudios de la interacción del gas con la barra.

Tabla 4.1(t):

Las familias orbitales corridas con los modelos para la barra Galáctica.

Modelo	Ω_P (km s ⁻¹ kpc ⁻¹)	Familia $E_J(^{\circ})$ (100 km ² s ⁻²)	Figura
Elipsoidal (triaxial) +halo, disco y bulbo parcial	-60	-2800	4.11
		-2700	
		-2600	
		-2500	
		-2300	
		-2200	
		-2100	
		-2000	
		-1900	
-1700			
Elipsoidal +halo, disco	-60	-2350	4.14
		-2300	
		-2250	
		-2200	
		-2150	
		-2100	
		-2050	
		-2000	
		-1950	
-1900			
Elipsoidal sin potencial axisimétrico	-60	-470	4.17
		-450	
		-400	
		-370	
		-350	
		-200	

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

...continúa Tabla 4.1

Modelo	Ω_p (km s ⁻¹ kpc ⁻¹)	Familia E_J (*) (100 km ² s ⁻²)	Figura
Prolata +halo, disco y bulbo parcial	-60	-2700	4.20
		-2600	
		-2500	
		-2400	
		-2300	
		-2200	
		-2100	
		-2000	
		-1900	
-1700			
Prolata +halo, disco	-60	-2300	4.21
		-2250	
		-2000	
		-2150	
		-2100	
-1900			
Prolata sin potencial axisimétrico	-60	-400	4.22
		-370	
		-350	
		-340	
		-300	

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

...continúa Tabla 4.1.

Modelo	Ω_P ($\text{km s}^{-1} \text{kpc}^{-1}$)	Familia E_J (*) ($100 \text{ km}^2 \text{s}^{-2}$)	Figura
Superposición de elipsoides +halo, disco y bulbo total	-60	-2600 -2500 -2400 -2300 -2200	4.23
Superposición de elipsoides +halo, disco	-60	-2200 -2150 -2100	4.24
Superposición de elipsoides con halo y disco +brazos espirales	-20	-1730 -1700 -1670 -1630 -1600	4.25

(*) Cada familia E_J esta compuesta por 50 orbitas con 250 cruces al eje x' .

(1) La longitud de la barra, la masa y las longitudes de escala son las mismas para todas las corridas. El semieje mayor de la barra es 3.13 kpc. La masa es $9.8 \times 10^9 M_\odot$. Las longitudes de escala son $a_x = 1.7$, $a_y = 0.64$ y $a_z = 0.44$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Parte III

EL GAS

Capítulo 5

Análisis Unidimensional HD y MHD del Gas en un Potencial Estelar Realista de la Galaxia

5.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos descrito la construcción de un potencial estelar tridimensional, no idealizado ni simplificado con brazos espirales y/o barra para la Galaxia, aunque puede ser también utilizado para otras galaxias espirales similares a la Vía Láctea.

Con este potencial hemos realizado estudios numéricos de una de las componentes más importantes de las galaxias espirales, que es el gas interestelar difuso, que permea el disco Galáctico con una escala de altura aproximada de 1 kpc (Reynolds 1989).

La respuesta extremadamente sensible del gas a los detalles del potencial y la necesidad de un potencial estelar tridimensional, constituyeron dos de las motivaciones más importantes para la construcción de un potencial Galáctico, en el cual los brazos espirales están modelados en forma tridimensional.

Las simulaciones fueron hechas con el código magnetohidrodinámico (MHD) *ZEUS* (Stone y Norman 1992 a,b; Stone, Mihalas y Norman 1992) que se describe brevemente en el Apéndice (C).

5.2 Estudio del Gas en la Vecindad Local

Como una primera aplicación del modelo presentado en este trabajo a la dinámica del gas, se realizaron simulaciones en una dimensión (1D) hidrodinámicas y en 1.5 dimensiones MHD de la respuesta del gas interestelar a la onda espiral.

Simulaciones en 1D. Descripción del problema

El problema que presentamos a continuación ha sido investigado y presentado en varios artículos tanto desde el punto de vista analítico (Spitzer 1978) como desde el punto de vista numérico (Baker y Barker 1974, BB74 a partir de aquí).

Al igual que las estrellas en la Galaxia siguen trayectorias alrededor del centro Galáctico, el gas interestelar sigue su propia trayectoria orbitando también el centro Galáctico, siguiendo básicamente las órbitas de menor energía aproximadamente circulares, debido a los efectivos procesos de disipación de energía en el gas.

En el tránsito del gas alrededor del centro Galáctico, las líneas de corriente son aproximadamente cerradas vistas desde el sistema que rota con los brazos espirales. Como vimos en el capítulo II, estas órbitas son perfectamente circulares en el caso de un potencial axisimétrico, lo que significaría que el gas en esas órbitas tiene la misma velocidad a lo largo de su trayectoria, en tal forma que el recorrido es continuo y sin choques. Actualmente se sabe que el flujo de gas, periódico y continuo, perturbado por un patrón espiral, incluso en los casos más débiles aceptables para la perturbación espiral en nuestra Galaxia, contiene choques. En la Figura 5.1 a), presentamos un esquema simple del problema de la formación del choque en la llegada del flujo de gas al brazo espiral.

La estructura espiral óptica de las galaxias está delineada principalmente por objetos de población I (como estrellas jóvenes, regiones HII y polvo). El origen de esos trazadores fue un misterio por mucho tiempo hasta que se observó que la perturbación espiral podía forzar soluciones discontinuas (choques) en el flujo del gas interestelar (Fujimoto 1966; Roberts 1969, 1972) que encuentra los brazos espirales. Estas ondas de choque son capaces de producir compresiones suficientes para originar la formación de regiones HII y de estrellas nuevas.

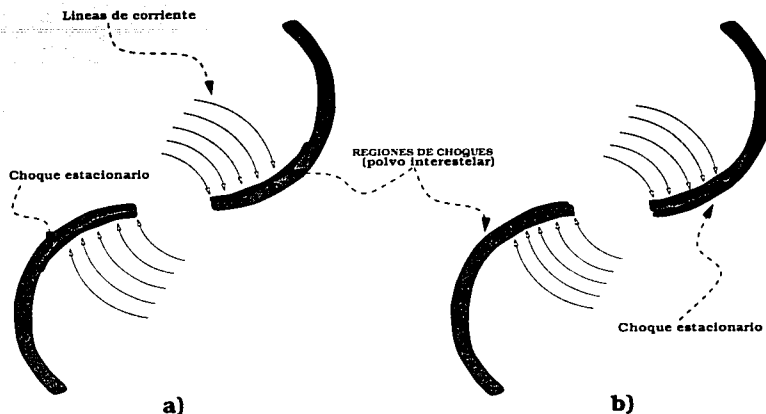


FIGURA 5.1: Esquema de los choques del gas interestelar en su encuentro con el brazo espiral. a) choque estacionario en la parte cóncava interna del brazo espiral (como se observa en las galaxias), b) choque estacionario en la parte cóncava externa del brazo espiral.

Aunque la explicación física del fenómeno es muy convincente, desafortunadamente el acuerdo entre las premisas de la teoría y las observaciones resulta menos convincente. Por ejemplo, la posición del choque, que en las galaxias se observa en la parte cóncava interna de los brazos espirales por la formación de líneas de polvo -Fig. 5.1 a)-, en las simulaciones en 1D (BB74) se obtiene un choque estacionario pero en la parte cóncava externa del brazo espiral -Fig. 5.1 b)-. Aún cuando el choque se encontrara en el lado correcto, como se observa en las galaxias espirales, el equilibrio para encontrar un choque estacionario resulta en extremo delicado, como veremos más adelante.

Por supuesto el enfoque que presentamos aquí es una simple aproximación unidimensional. La idea es demostrar con esta sencilla prueba que el uso de un potencial muy idealizado para los brazos espirales puede modificar los resultados, al punto de no obtener los resultados correctos debido a la gran sensibilidad del gas al potencial, como ya explicamos.

Debido a la capacidad de disipación de energía del gas, éste tiende a seguir las

órbitas periódicas de menor energía, aproximadamente circulares. De esta forma observamos que las líneas de corriente seguidas por el gas alrededor del centro Galáctico son aproximadamente cerradas en el sistema de referencia rotante y podemos suponer el flujo periódico.

Para realizar el primer estudio numérico utilizamos la aproximación de ángulos de enrollamiento pequeños para los brazos espirales (de esta forma, la variación en la componente acimutal de la fuerza a lo largo del brazo espiral es muy lenta comparada con la variación en la dirección normal), con la cual podemos reducir el problema a 1D y resolverlo localmente. En la Figura 5.2 representamos la aproximación en una dimensión, que significa simplemente utilizar únicamente la componente "radial" (la componente normal al brazo espiral) del vector de velocidad de las líneas de corriente, que es de hecho la que produce los choques ya que la "acimutal" sigue los brazos espirales sin intersectarlos, de manera que no pueden producirse choques.

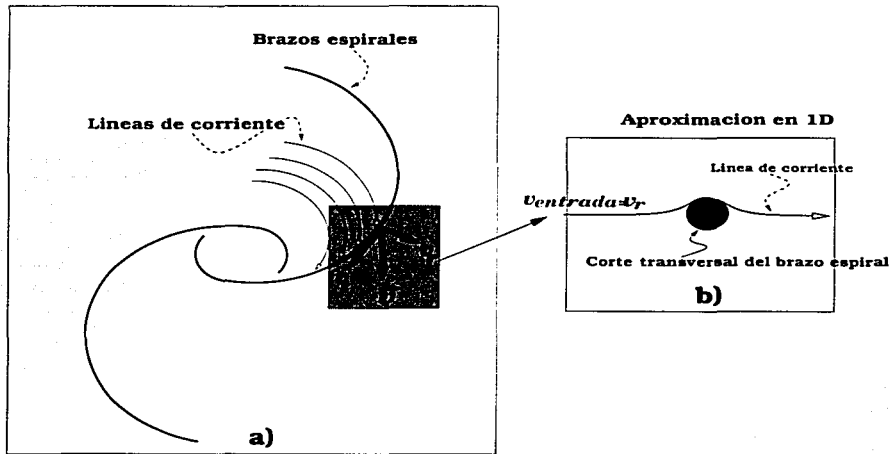


FIGURA 5.2: Componente normal del vector de velocidad del fluido utilizada en la aproximación en 1D del problema del choque del gas con el brazo espiral

De esta forma sólo tomaremos en las simulaciones en una dimensión, el potencial a lo largo de la línea normal al brazo espiral que, debido al pequeño ángulo de enrollamiento del brazo espiral es aproximadamente equivalente a tomar una línea radial desde el centro Galáctico, cruzando un brazo a un ángulo acimutal dado.

Para efectos de comparación de los resultados de las simulaciones numéricas del choque del gas con el brazo espiral, reproducimos también con Zeus los resultados de BB74.

BB74 calcularon el flujo del gas relajando la aproximación de periodicidad, argumentando que las galaxias reales poseen muchas irregularidades en el patrón espiral por lo que el gas no puede experimentar una función de forzamiento periódica. Ellos demuestran que aún sin la suposición de periodicidad, las ondas de choque se desarrollan. Suponen que la interacción del gas con la onda espiral se puede ver como un fenómeno enteramente local y sin memoria de encuentros previos.

El experimento numérico de BB74 consiste de una perturbación gravitacional que es fijada en un sistema de coordenadas computacional. El gas interestelar fluye en la malla computacional Euleriana de un lado a otro con velocidad v_e y densidad ρ_0 , y la deja del otro lado después de pasar a través de la perturbación supuesta, acotada en un intervalo de la malla.

El pozo de potencial gravitacional representando el brazo espiral consiste de un ciclo de una función coseno de la siguiente forma,

$$U(x) = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \text{ kpc}$$

$$U(x) = U_0 \left\{ \frac{1}{2} \cos(\pi(x-1)) - \frac{1}{2} \right\}, \quad \text{para } 1 \leq x \leq 3 \text{ kpc} \quad (5.1)$$

$$U(x) = 0, \quad \text{para } 3 \leq x \leq 4 \text{ kpc}$$

donde x es la coordenada normal al brazo espiral. La fuerza es entonces,

$$F(x) = 0, \quad \text{para } 0 \leq x \leq 1 \text{ kpc}$$

$$F(x) = \frac{U_0 \pi}{2} \text{sen}(\pi(x-1)), \quad \text{para } 1 \leq x \leq 3 \text{ kpc} \quad (5.2)$$

$$F(x) = 0, \quad \text{para } 3 \leq x \leq 4 \text{ kpc}$$

El ancho total del pozo es de 2 kpc, que corresponde aproximadamente al ancho observado del brazo espiral en la Galaxia. La amplitud del pozo, U_0 , es la necesaria

para garantizar la razón estándar dada en la literatura de 0.03 a 0.05 para la razón de fuerza radial del patrón espiral vs la fuerza radial del potencial axisimétrico. En el punto de salida del gas en la malla, las derivadas de los parámetros físicos son forzadas a cero para prevenir reflexiones. Suponen un gas monoatómico adiabático que obedece la siguiente ecuación (politrópica),

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma; \quad \gamma = 1.67 \quad (5.3)$$

a una temperatura del gas de 7000 K.

BB74 utilizaron para este experimento una malla de 100 puntos que proporciona una resolución de 40 pc por zona. Hemos reproducido con *Zeus* sus resultados utilizando una malla de 800 puntos (i.e. una resolución de 5 pc) para observar detalladamente la formación de los choques.

La solución del problema está determinada por tres parámetros que son, la velocidad de entrada, v_e , la velocidad térmica, v_t , y la magnitud de la perturbación, v_p . v_p es la velocidad que una partícula de prueba adquiriría si estuviera inicialmente en reposo afuera del pozo de potencial y fuera soltada hacia el mínimo del potencial (i.e. la velocidad máxima alcanzada que se da en la parte más profunda del pozo). Para la producción del choque debe cumplirse que $v_p > v_t$; esto significa que la perturbación potencial debe ser suficientemente grande para inducir movimiento supersónico. Cuando un choque se desarrolla, la razón v_p/v_t determina su compresión, de manera que a mayor razón, mayor es la compresión. Para cada par de parámetros v_p y v_t , hay un valor específico de v_e que origina un frente de choque estacionario.

Baker y Barker obtienen una magnitud de la perturbación de 15 km/s, para un potencial cuya fuerza relativa al disco es aproximadamente del usual 5% (que en el modelo presentado en esta tesis corresponde a una razón de masa de los brazos a disco de entre 0.0175 y 0.03). De la relación,

$$\frac{1}{2}v_p^2 = U_0$$

para una $v_p = 15$ km/s, que se da en el mínimo del potencial, es decir a $x = 2$ kpc, tenemos,

$$U_0 = 1.125 \times 10^{12} \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

La velocidad de entrada al brazo espiral es en este caso la componente normal del vector de velocidad de la línea de flujo que pasa por el brazo espiral a 6.3 kpc. Aunque los cálculos originales de BB74 fueron hechos a 8.5 kpc, para efectos de una comparación directa con nuestro modelo, hemos centrado la malla en el centro geométrico del brazo que pasa a 6.3 kpc (cerca de donde nuestro modelo predice un mínimo del potencial), extrapolado el modelo de BB74 a esa distancia y calculado la correspondiente v_e del gas a esa distancia. Hemos reproducido los resultados de BB74 de manera que las características físicas del choque se mantienen, cambiando sólo la posición del choque estacionario (por completez presentaremos también cálculos a 8.5 kpc más adelante).

Podemos obtener la velocidad acimutal v_a , del brazo espiral a 6.3 kpc, de la siguiente forma,

$$v_a = R\Omega.$$

Si $\Omega = 15$ km/s kpc, a 6.3 kpc tenemos,

$$v_a = 94.5 \text{ km/s.}$$

Si estamos en el sistema del brazo espiral debemos simplemente restarle a la velocidad del gas a 6.3 kpc, que de acuerdo con la curva de rotación es de ≈ 220 km/s, la velocidad del patrón espiral, esto nos da la velocidad relativa a esa distancia, esto es,

$$v_{rel} = (220 \text{ km/s} - 94.5 \text{ km/s}) = 125.5 \text{ km/s.}$$

Considerando un ángulo de enrollamiento del brazo espiral de 11° , obtenemos la componente normal como,

$$\tan 11^\circ = \frac{v_n}{v_{tan}}, \quad \text{donde } v_{tan} \simeq v_{rel}$$

donde v_n se refiere a la componente normal y v_{tan} a la tangencial,

$$v_n(R = 6.3 \text{ kpc}) \approx v_{rel} \tan 11^\circ \approx 24.4 \text{ km/s,}$$

v_n corresponde entonces a la componente normal al brazo espiral (Fig. 5.3).

Así mismo, para $R = 8.5$ kpc obtenemos una velocidad normal,

$$v_n(R = 8.5 \text{ kpc}) \approx 18 \text{ km/s.}$$

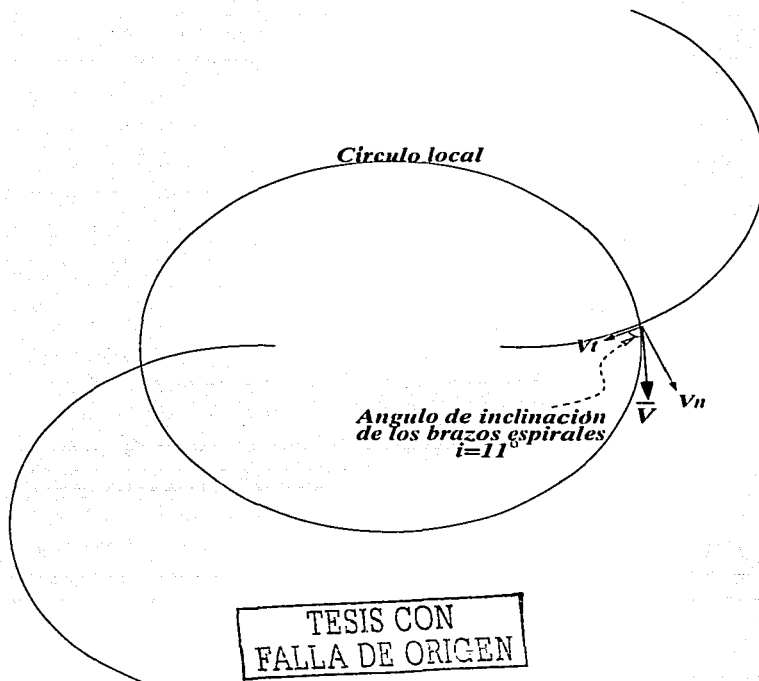


FIGURA 5.3: Componentes de velocidad normal y tangencial al brazo espiral. La componente normal es la utilizada para las simulaciones unidimensionales.

En la Figura 5.5 mostramos el potencial (arriba) y las fuerzas (abajo) por unidad de masa en el modelo de BB74. Como se ve en la figura, el potencial ha sido idealizado

como perfectamente simétrico; es decir, el mínimo del potencial se supone ubicado exactamente en el centro geométrico del brazo espiral.

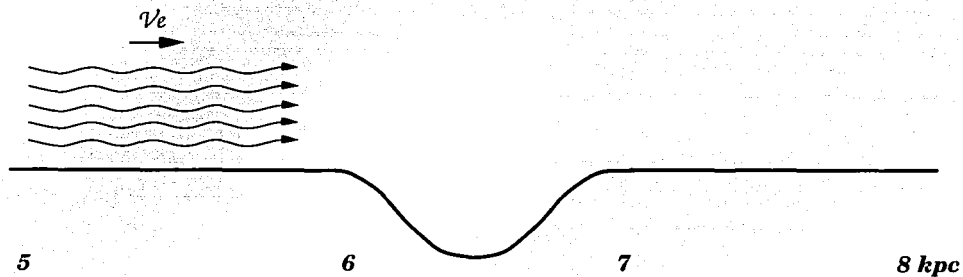


FIGURA 5.4: Esquema de la entrada del gas al pozo en la malla computacional. Las condiciones de frontera son "in-out".

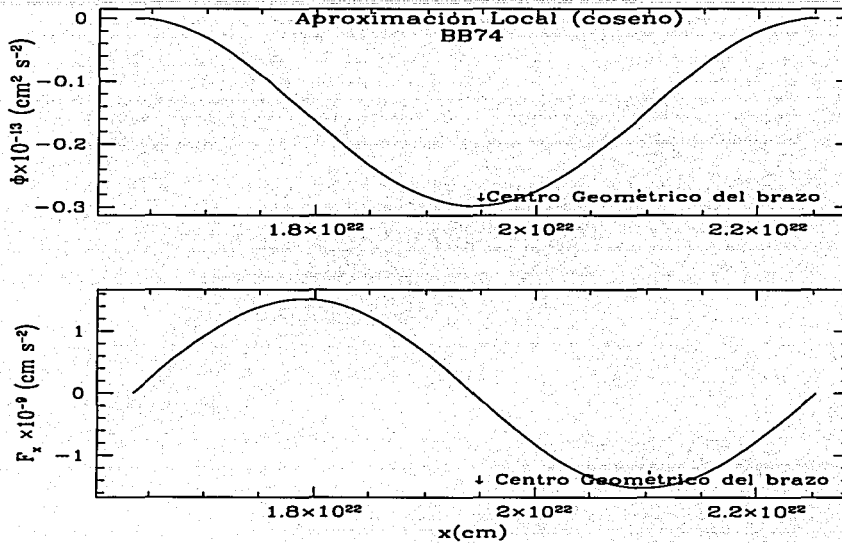


FIGURA 5.5: Potencial (arriba) y Fuerza (abajo) para el modelo de Baker y Barker (1974). El mínimo del potencial coincide exactamente con el centro geométrico del brazo.

Bajo este potencial idealizado, los choques resultantes son estacionarios sólo para una velocidad de entrada crítica, v_c , dada una amplitud para el potencial (en la Figura 5.4 se da un esquema de la entrada del gas al pozo en la malla computacional). En general, los choques se mueven a favor de la corriente si la velocidad de entrada es mayor que la crítica ($v_e > v_c$), lo cual corresponde a un choque transitorio. Por otro lado, si $v_e < v_c$, el gas se apila en el pozo formando un "choque de acreción" en los términos de BB74, aunque es más bien un apilamiento de material.

En las Figuras 5.6 a 5.8 mostramos los resultados del experimento de BB74 que hemos reproducido con *Zeus*. La Fig. 5.6 muestra el choque de acreción (apilamiento

de material) que viaja contra corriente (*upstream*) y que corresponde a $v_e < v_c$. La Fig. 5.7 muestra el choque estacionario a $v_e = v_c$ que se localiza "downstream", i.e., río abajo del mínimo del potencial (lo cual no coincide con lo observado en las galaxias espirales). La Fig. 5.8 muestra el choque *transitorio*, donde $v_e > v_c$; como puede notarse, para este modelo, la estabilidad del choque es muy sensible a v_c .

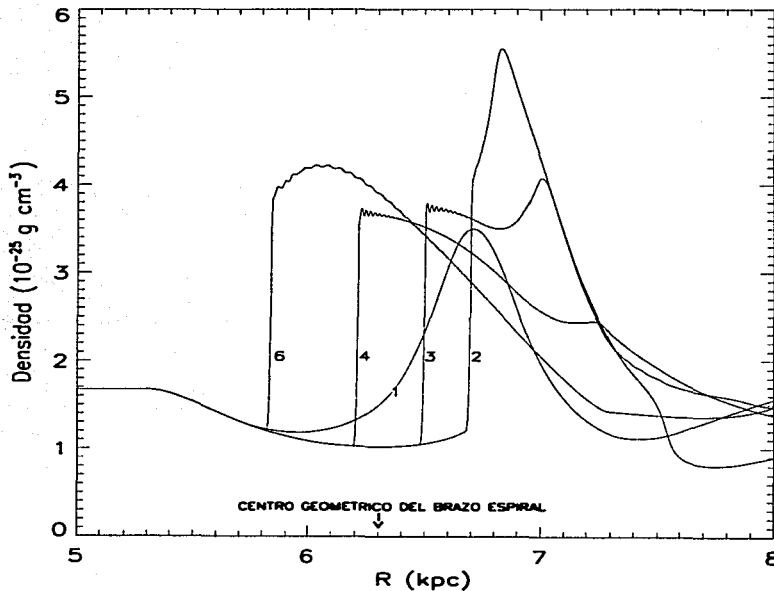


FIGURA 5.6: Densidad vs la coordenada normal al locus del brazo espiral a diferentes pasos de tiempo (una unidad de tiempo es 33.33 millones de años) para el modelo de BB74 con Zeus. "Choque de acreción", $v_e = 20 \text{ km/s}$ ($< v_c$).

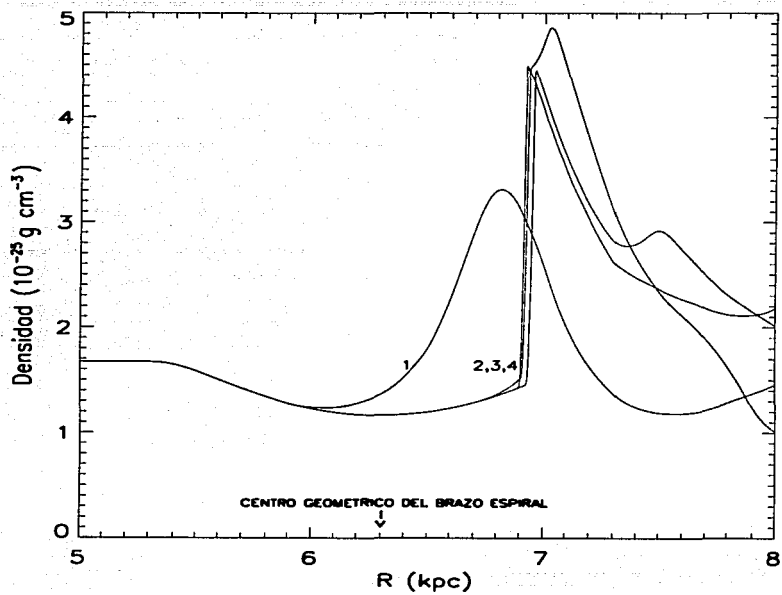


FIGURA 5.7: Choque estacionario, $v_e = 25 \text{ km/s}$ ($= v_c$).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

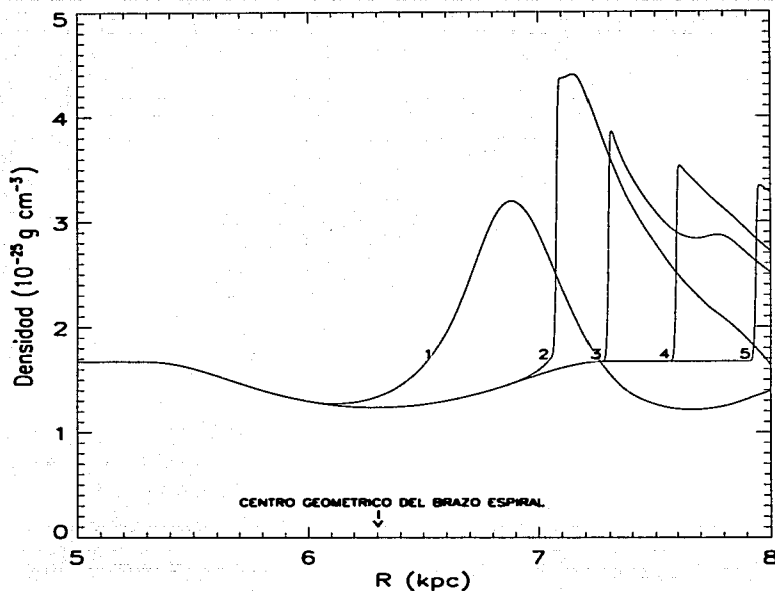


FIGURA 5.8: Choque transitorio, $v_e = 28 \text{ km/s}$ ($> v_c$)

Si resolvemos numéricamente el mismo problema pero ahora sustituimos el modelo global de los brazos espirales presentado en el capítulo II, observaremos algunas diferencias importantes.

En la Figura 5.9 se da el potencial y la fuerza a lo largo de la línea radial Galáctica $\varphi = 0^\circ$, línea donde inicia el patrón espiral, para nuestro modelo de los brazos espirales, cruzando el brazo cuyo centro geométrico se localiza a una distancia galactocéntrica de 6.3 kpc (Figura 5.10).

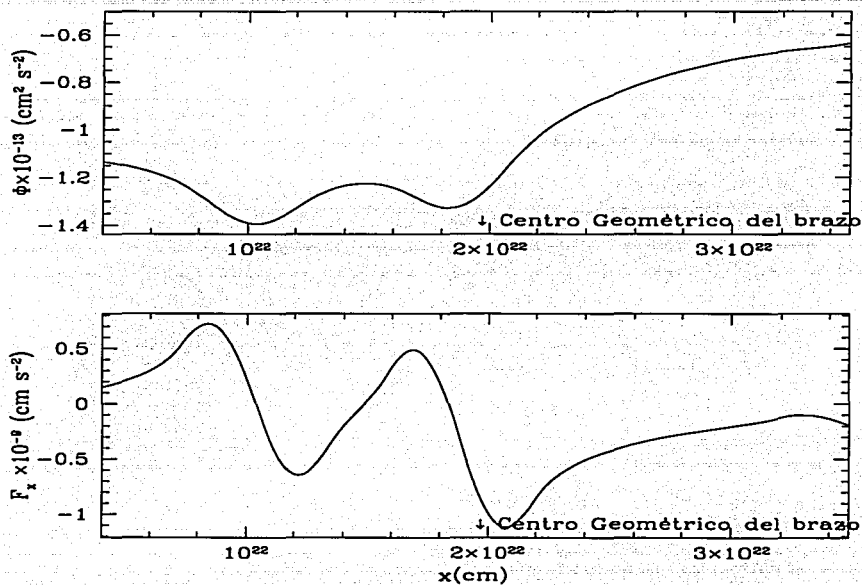


FIGURA 5.9: Potencial (arriba) y Fuerza (abajo) en nuestro modelo del brazo espiral.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

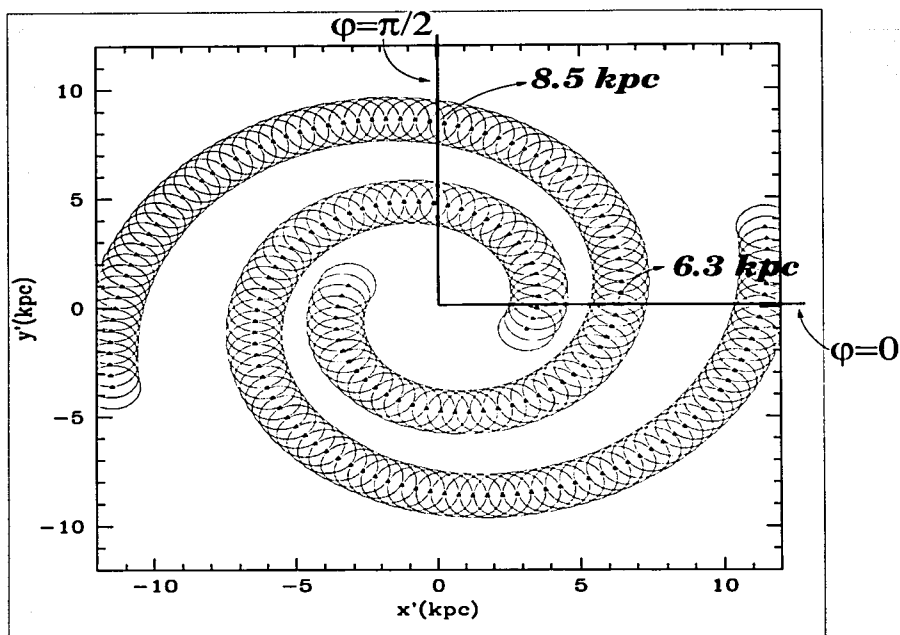


FIGURA 5.10: Líneas radiales (aproximadamente normales al brazo espiral) a $\varphi = 0$ y $\varphi = \pi/2$, tomadas para los cálculos con Zeus. Las líneas cruzan el centro geométrico del brazo espiral a las distancias galactocéntricas de 6.3 y 8.5 kpc respectivamente. Los círculos trazan los brazos espirales y los triángulos los centros geométricos de los brazos espirales.

La primera diferencia notable es el hecho de que el centro geométrico de los brazos espirales no coincide necesariamente con los mínimos del potencial (como en el caso de BB74, Fig. 5.5); éste está corrido hacia el centro Galáctico, lo cual es debido a la contribución total del patrón espiral global. Debido a la gran sensibilidad del gas a los detalles del potencial, esta diferencia resulta importante en las simulaciones HD y MHD.

La mayor parte de las simulaciones realizadas fueron adiabáticas al igual que las de BB74 (aunque realizamos también simulaciones isotérmicas sin que notáramos una diferencia importante en los resultados), con una temperatura $T=7000$ K y una densidad del gas de $n=0.1 \text{ cm}^{-3}$ (BB74), correspondiente al medio interestelar difuso caliente con una razón 0.1 He/H. La velocidad de entrada local (v_e) en la dirección radial es de 25 km/s a 6.3 kpc. La masa de los brazos fue elegida de tal forma que equipare la fuerza radial local del modelo de BB74 (ver Figuras 5.5 y 5.9) y que corresponde aproximadamente a la del modelo más débil plausible para la Galaxia que presentamos en este trabajo (Cap. II), $M_B/M_D = 0.0175$. De esta forma entendemos que cualquier diferencia en los resultados de las simulaciones, estará únicamente relacionada con la forma específica del potencial.

Considerando las incertidumbres asociadas al problema, como por ejemplo, la velocidad angular del patrón espiral, intentamos varias velocidades de entrada a la malla.

Realizamos simulaciones hidrodinámicas y magnetohidrodinámicas. Las primeras son mostradas en las Figuras 5.11 y 5.12. En el caso de BB74, el centro de la malla Euleriana corresponde al mínimo del potencial y al centro geométrico del brazo espiral. Para nuestro modelo el centro geométrico del brazo no es necesariamente el mínimo del potencial. El gas entra a la malla de izquierda a derecha con condiciones iniciales "inflow-outflow" (entrada-salida). El ancho del pozo (de los brazos) es 2 kpc a lo largo de la coordenada cuasi radial. Como se mencionó antes, realizamos simulaciones numéricas con el modelo de BB74 confirmando sus resultados. Un choque estacionario es obtenido a la velocidad crítica, $v_c \approx 25$ km/s, y localizado en la parte derecha del pozo de potencial ("downstream"). En el caso del potencial de BB74, la respuesta es muy sensible a la velocidad de entrada, de manera que para una $v_e (\approx 28$ km/s) ligeramente mayor a la crítica ($v_c \approx 25$ km/s) el choque se vuelve de carácter transitorio, de forma que deja la malla a favor de la corriente ("downstream") en 5 unidades de tiempo (la unidad de tiempo es ~ 33.3 millones de años).

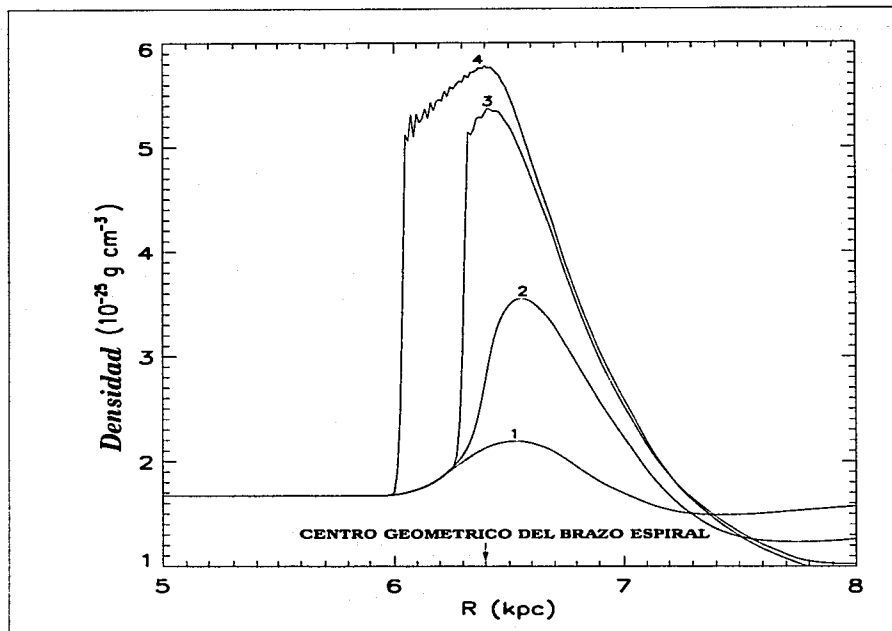


FIGURA 5.11: Densidad vs la coordenada normal al locus del brazo espiral a diferentes pasos de tiempo (una unidad de tiempo es 33.33 millones de años) para el modelo de brazos presentado en este trabajo. Estas simulaciones fueron realizadas con Zeus. $v_c = 20 \text{ km/s}$ ($< v_c$).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

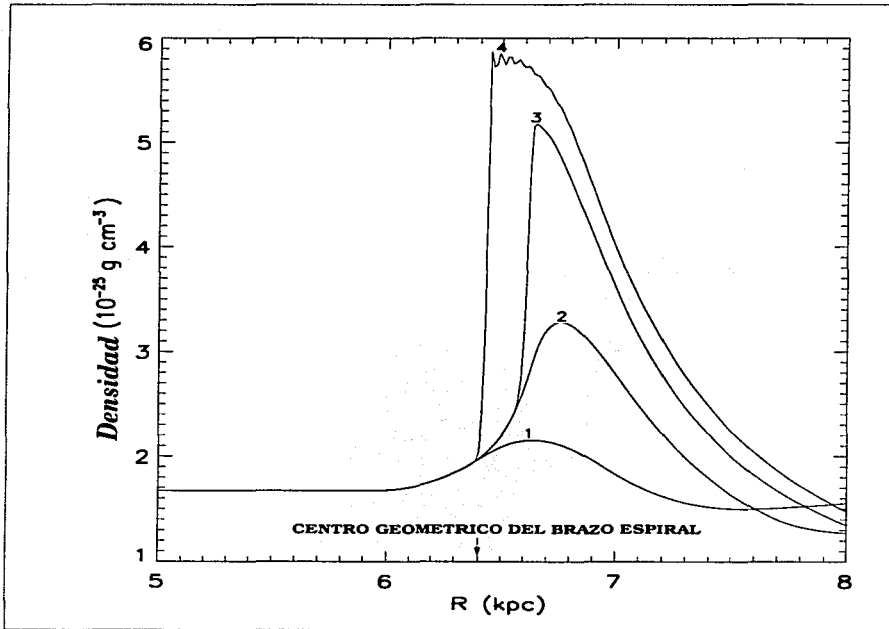
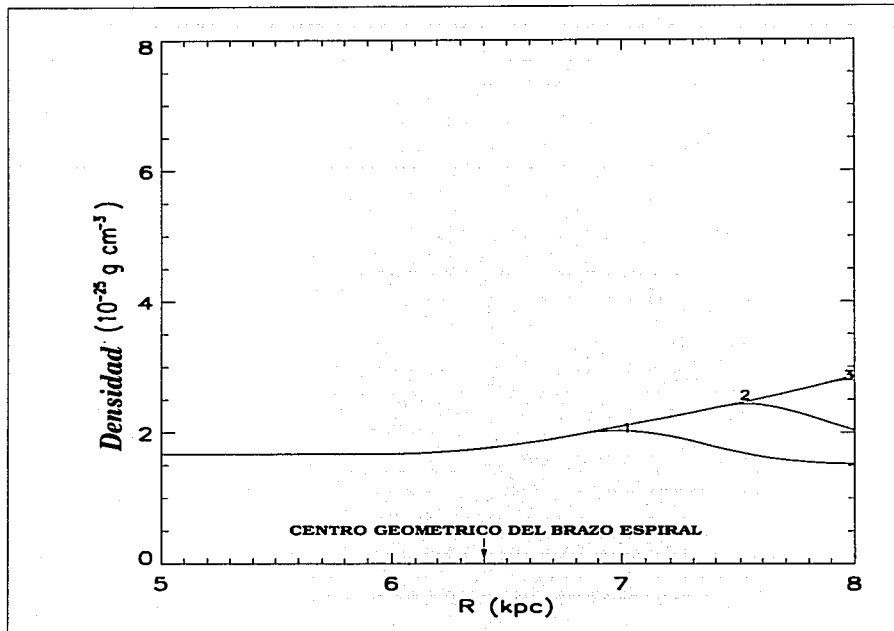


FIGURA 5.12: $v_c = 25 \text{ km/s}$ ($= v_c$). No se obtiene choque estacionario (como en el caso de BB74) pero se encuentra un choque contra corriente (*upstream*) que tiende a estabilizarse ligeramente hacia el lado cóncavo interno (dentro de corrotación) del brazo espiral en escalas de tiempo correspondientes a varios "crossing times", o el tiempo de encuentro con el siguiente brazo, lo cual resulta tan útil para explicar la frecuencia de estos choques en las observaciones como cualquier solución estacionaria.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

FIGURA 5.13: Choque contra corriente, $v_e = 40 \text{ km/s}$ ($> v_c$)

Tanto en las simulaciones HD como en las MHD que hemos realizado en 1D, los flujos no resultan barridos a favor de la corriente para ninguna velocidad plausible radial al brazo, de manera que a velocidades hasta de aproximadamente 39 km/s , obtenemos siempre un choque “upstream” (contra corriente) que se queda en el pozo de potencial en escalas significativas de tiempo del orden de 200 millones de años. No encontramos un choque estacionario. La existencia de un choque cuasiestacionario es menos restrictiva que la extremada precisión requerida de los parámetros en BB74 necesaria para obtener el choque estacionario. Y considerando los tiempos de cruce

para el tránsito brazo-interbrazo, los transientes de vida larga resultan tan útiles como la solución estacionaria.

En las Figuras 5.14 a 5.16 presentamos las simulaciones MHD con los mismos parámetros utilizados en las simulaciones de las Figuras 5.11 a 5.13 para las simulaciones HD, tales como la densidad, temperatura del gas, fuerza del brazo espiral, etc., así como las mismas velocidades de entrada a la malla.

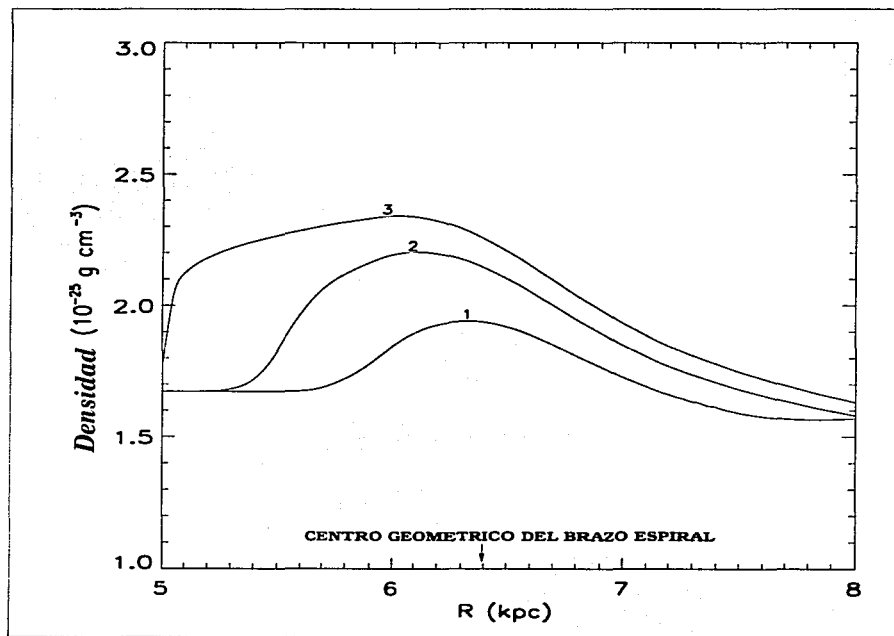


FIGURA 5.14: Resultados numéricos con campo magnético. $v_e = 20 \text{ km/s}$ ($< v_c$).

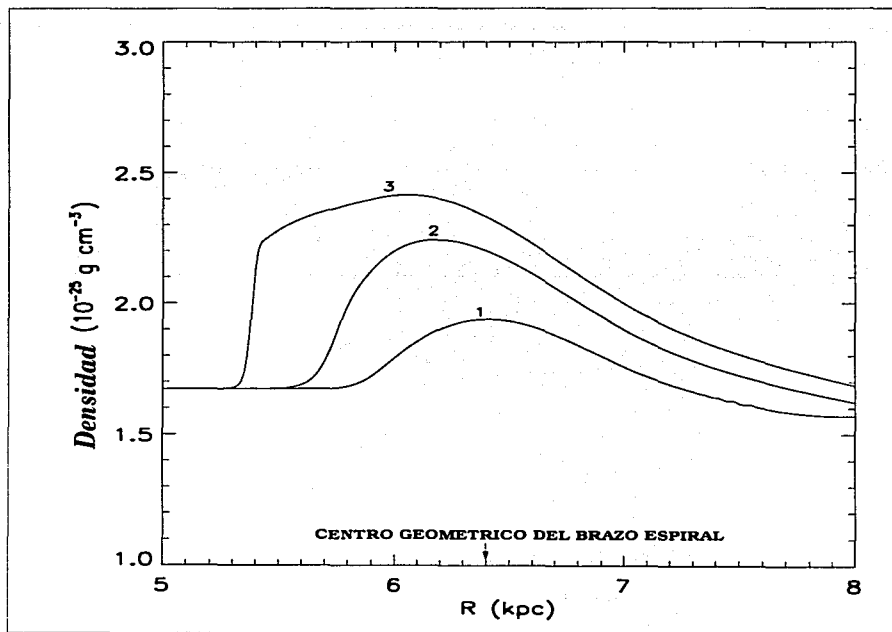


FIGURA 5.15: Choque contra corriente, $v_e = 25 \text{ km/s} (= v_c)$.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

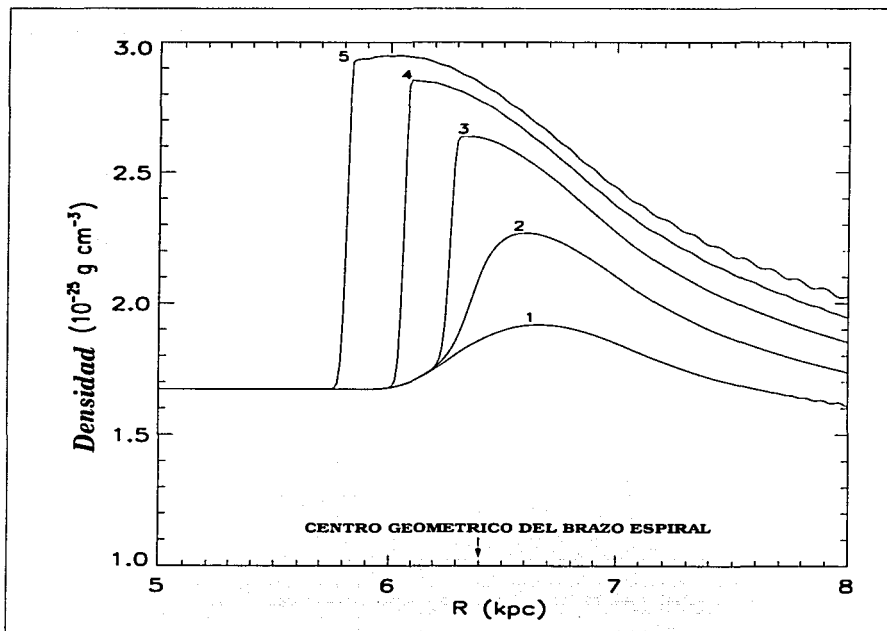


FIGURA 5.16: Choque contra corriente, $v_e = 40 \text{ km/s} (> v_c)$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

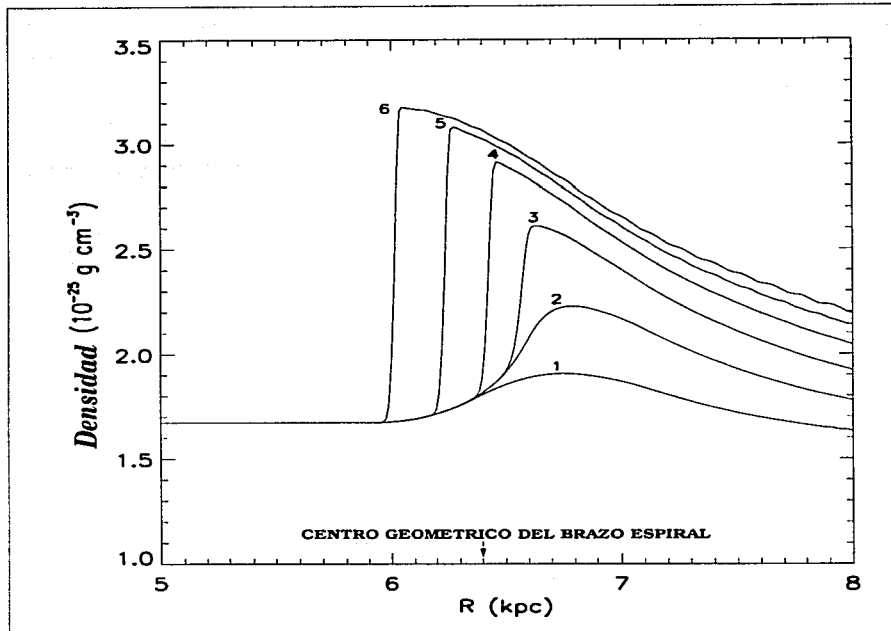


FIGURA 5.17: Choque contra corriente, $v_c = 45 \text{ km/s}$ ($> v_c$)

Para las simulaciones MHD hemos incluido el campo magnético transversal al movimiento (en la dirección acimutal, esto es, a lo largo de la dirección del brazo espiral), con el valor estándar de 5 micro Gauss. La diferencia principal en el caso de nuestras simulaciones HD y MHD proviene de la compresión.

Tubbs (1980) señala que la compresión en galaxias externas es mucho menor que la esperada por cálculos HD unidimensionales. En las Figuras 5.14 a 5.17 se muestra cómo el incluir el campo magnético reduce la compresión a través del frente de choque de acuerdo a la tendencia esperada; además del hecho de que el campo magnético evita

de forma más efectiva que el choque salga a favor de la corriente ("downstream"), que en el caso de los experimentos puramente hidrodinámicos. En el caso de los experimentos MHD, incluso para velocidades de entrada de 40 km/s, el choque se mueve contra corriente y permanece en el pozo por escalas de tiempo del orden de 200 millones de años. En este caso tampoco encontramos un choque estacionario, aunque sí encontramos choques semiestacionarios (contra corriente) de vida larga.

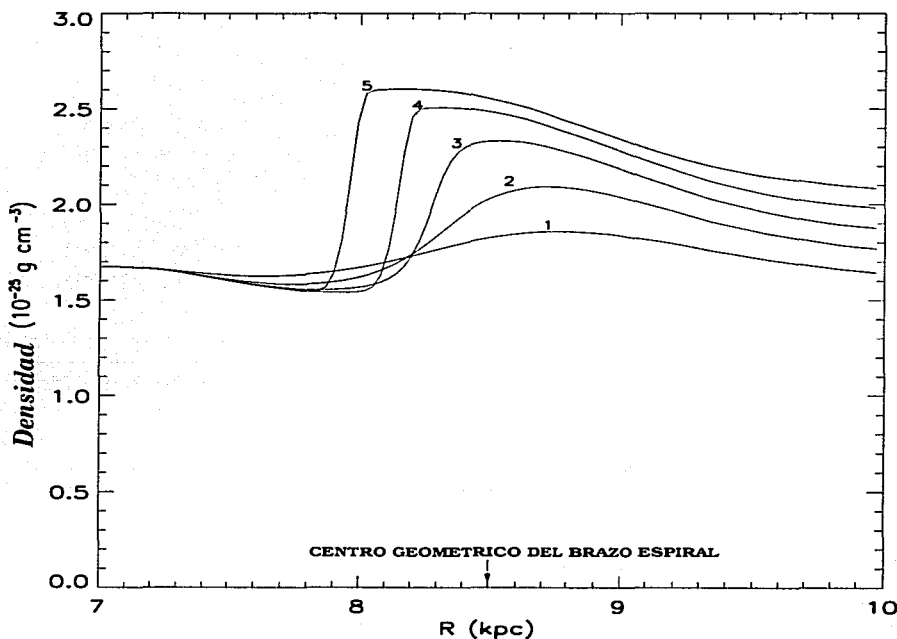


FIGURA 5.18: Densidad vs la coordenada normal al locus del brazo espiral a diferentes pasos de tiempo (una unidad de tiempo es 33.33 millones de años) para el modelo de brazos presentado en este trabajo. Choque contra corriente originado por el encuentro con un brazo a 8.5 kpc, $v_e = 35 \text{ km/s}$ ($> v_c$).

Debemos sin embargo considerar que todos estos cálculos están hechos bajo la suposición de un ángulo de enrollamiento pequeño para los brazos (*"tightly wound"*), así que cualquier predicción cuantitativa específica referente a la Galaxia debe ser tomada con cuidado.

A lo largo de la línea radial Galáctica, $\varphi = \pi/2$, hay un tercer cruce con el brazo a 8.5 kpc (Figura 5.10). En esta posición hay por lo tanto un pozo de potencial donde se puede esperar un choque. En la Figura 5.18 se muestra el tiempo de evolución para $v_e \approx 35$ km/s, una velocidad que origina una salida a favor de la corriente del choque en la malla para el caso de BB74 o para el caso puramente HD en nuestro potencial. Se muestra en la figura que la presión del campo magnético trabaja para hacer que el choque se mueva contra corriente (*"upstream"*). Aún el modelo débil de la Galaxia ($M_B/M_D = 0.0175$) es suficientemente fuerte como para producir el choque, y éste es producido también a una velocidad de entrada del fluido al brazo de 18 km/s, correspondiente a esta ubicación.

En resumen, este sencillo experimento nos lleva a concluir que la contribución del patrón espiral completo hace que el potencial espiral local adopte formas que no pueden ser correctamente ajustadas por un simple término perturbador que ha sido tradicionalmente invocado para representar el potencial espiral. Este hecho puede tener grandes alcances en la respuesta del gas a los brazos espirales. Nuestro modelaje MHD unidimensional, aunque limitado, ha mostrado que los choques no dejan el brazo a favor de la corriente como en cálculos previos de este problema (ejemplos, BB74 y Martos y Cox 1998) para un intervalo plausible de velocidades de entrada. En correspondencia con las observaciones, los choques buscan equilibrio moviéndose contra corriente (la parte cóncava de los brazos espirales dentro de corotación). La inclusión del campo magnético es esencial para este efecto. Las condiciones precisas para soluciones MHD estacionarias todavía tienen que ser establecidas por cálculos tridimensionales. Nuestro modelo global de esferoides representando al brazo, ayuda a hacer transiciones más repentinas (choques) en el flujo del gas a través del brazo que el modelo idealizado usual. El gas es supersónico en su velocidad orbital cuando entra al brazo (excepto cerca de corrotación), pero se reajusta justo detrás del choque a sus condiciones previas al choque en escalas de longitud razonables (ver Figs. 5.14 a 5.17), sin necesidad de condiciones de frontera periódicas. Nuestro modelo predice también que los choques de gran escala

producidos por la onda espiral están restringidos a ocurrir en regiones radialmente acotadas dentro de la extensión del patrón, y que este límite radial está determinado por la posición acimutal. Esto se debe a que se requiere un pozo de potencial, por débil que sea (como ocurre a 8.5 kpc), para producir un choque y eso sólo sucede en las regiones donde se da el brazo espiral. De esta forma, los choques resultan más violentos cuanto más cerca estamos del centro Galáctico donde los brazos son más fuertes. Las imágenes de MS1 parecen confirmar este escenario en el cual, en su mayoría, la parte interna de los brazos tiene choques prominentes y las partes externas pueden tenerlos o no (ver por ejemplo Binney y Tremaine 1994). Estos mismos datos despliegan una estructura compleja a lo largo del brazo sugiriendo que las velocidades de entrada locales normales al brazo pueden variar rápidamente muestreando en la dirección acimutal del brazo. Esto implicaría en el caso de las nubes moleculares, que las nubes formadas por la onda espiral estarían más concentradas hacia la parte interna de los brazos de la Galaxia, pero la formación de estas nubes hacia la parte externa de los brazos no debería ser una sorpresa tampoco. Sin embargo, en las regiones externas éstas deberían aparecer solamente a ciertos acimuts y no en una estructura anular (para brazos en la aproximación de ángulo de enrollamiento pequeño) como se espera en las regiones internas.

Capítulo 6

Conclusiones

Presentamos un modelo tridimensional para una distribución de masa espiral y una barra central. Estas estructuras se construyen a partir de superposiciones de elipsoides y esferoides inhomogéneos que aproximan la parte no axisimétrica de una galaxia espiral barrada. El modelo es aplicado en particular a nuestra Galaxia aunque puede aplicarse a otras galaxias espirales y/o barradas. El modelo nos permite ver con mayor profundidad física detalles que resultan inaccesibles, por ejemplo, para el tratamiento clásico que modela los brazos espirales como una simple perturbación periódica del potencial axisimétrico. El modelo es físicamente simple y plausible, con la fuerza, el potencial y la densidad continuos en todo punto. Para nuestra Galaxia, los parámetros que restringen el modelo, tales como el número de brazos espirales, el ángulo de enrollamiento, la velocidad angular de los brazos y de la barra, la masa de ambas componentes, la ley de densidad, etcétera, son elegidos de un intervalo de posibilidades sugeridas por las observaciones y la teoría.

Se realizaron experimentos con el potencial de la Galaxia agregando al potencial axisimétrico únicamente los brazos espirales, con el propósito de entender la dinámica orbital y gaseosa sin la interacción con la masiva componente de barra. Estos resultados siguen siendo válidos para galaxias espirales "normales" (no barradas).

Para los brazos espirales, las dimensiones y densidad de masa de los esferoides oblatos de los que están compuestos en el modelo, dependen del tipo de brazos, gaseosos o estelares. Hemos adoptado dos lugares geométricos diferentes para los brazos espirales. El primero, con dos brazos espirales, representa los brazos estelares con ángulo de

enrollamiento de 15.5° , obtenidos por Drimmel (2000). El segundo, con seis brazos, considera adicionalmente los cuatro brazos ópticos con ángulo de enrollamiento de 12° delineados por las brillantes regiones HII. Del intervalo de posibilidades en la literatura, hemos considerado tres valores para la velocidad angular del patrón, $\Omega_P = 15, 20$ y $60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, y una razón de masa de los brazos a la masa del disco del potencial axisimétrico, M_B/M_D , en el intervalo 0.0175, 0.05. En este intervalo de masas la fuerza radial debida a los brazos espirales se encuentra entre el 5% y 10% de la fuerza radial axisimétrica.

Con pruebas de autoconsistencia a nuestro modelo, empleando órbitas periódicas y el método de C&G86 para analizar la respuesta en densidad al potencial impuesto, encontramos que el modelo más autoconsistente favorece una velocidad angular para el patrón espiral $\Omega_P = 20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$.

El modelaje del potencial gravitacional producido por una perturbación espiral ha sido usualmente basado en la aproximación local TWA (*Tight Winding*). Hemos encontrado, sin embargo, que la contribución al potencial del patrón espiral completo hace que el potencial espiral local adopte formas que no se pueden ajustar correctamente con el modelo TWA. Este hecho tiene consecuencias importantes, por ejemplo en la respuesta del gas a la perturbación espiral. Hemos realizado modestas simulaciones unidimensionales MHD (Franco, Martos y Pichardo 2002) con el código Zeus para mostrar las diferencias sustanciales entre la respuesta del gas con el modelo convencional que emplea una función cosenoidal para el potencial espiral y el modelaje del patrón espiral que presentamos en este trabajo. Las simulaciones muestran que los choques producidos por el gas al interactuar con el brazo espiral, no dejan el brazo en dirección de la corriente (*“downstream”*), como se había encontrado en cálculos previos (Baker y Barker 1974) para un intervalo plausible de velocidades de entrada del gas al brazo. En correspondencia a las expectativas observacionales, los choques viajan contra corriente (*“upstream”*) buscando el lado cóncavo interno del brazo espiral (en la región interna a corotación) marcado en observaciones ópticas de galaxias por las acumulaciones de polvo. La inclusión del campo magnético para este efecto es esencial. De esta forma, consideramos que los resultados basados en la aproximación TWA deberían ser revisados: la respuesta del gas depende fuertemente de la posición en la Galaxia. Un pozo de potencial podría desaparecer como tal en algunas direcciones radiales (en la parte

externa de los brazos espirales). Por otra parte, en las comparaciones del análisis orbital de nuestro modelo con la TWA, encontramos que los resultados son muy similares para los casos de masa más baja de los brazos espirales ($M_B/M_D \sim 0.0175$), no así para los casos de masas mayores ($M_B/M_D > 0.0175$) en los que la diferencia se vuelve notable, iniciando con un enriquecimiento en la estructura orbital de los diagramas de Poincaré hasta la aparición de caos, que no sucede en el caso de la TWA sino hasta masas mayores a las del intervalo plausible ($M_B/M_D > 0.05$) para los brazos de la Galaxia.

En el análisis de los diagramas de Poincaré, encontramos que es muy útil usar un sistema inercial para definir el sentido de movimiento orbital, prógrado o retrógrado, alrededor del centro Galáctico además de la definición usual en el sistema no inercial, donde los diagramas en el espacio fase están definidos. En el sistema inercial, el sentido de movimiento se preserva con el tiempo para casi cada órbita en nuestros experimentos, siendo la excepción las órbitas con momento angular cerca de cero. Esta propiedad es válida para todo el intervalo de parámetros plausibles de la Galaxia, incluyendo diferentes números de brazos, masas, ángulos de enrollamiento, etcétera. Si incluimos información del sistema inercial en el sistema no inercial, los diagramas de Poincaré revelan que las órbitas prógradas y retrógradas definidas en el sistema inercial, ocupan regiones claramente separadas a través de una separatriz compuesta por órbitas con momento angular cerca de cero.

La definición del sentido de movimiento orbital en el sistema inercial va más allá de una cuestión de semántica. Existen muchos procesos físicos para los que se considera importante el conocimiento preciso de la dirección promedio de las órbitas respecto a un sistema inercial, por ejemplo para efectos de fricción dinámica las estrellas del disco sobre la barra, en este caso las órbitas prógradas pueden ser más importantes dado que sus velocidades relativas promedio con la barra, son menores que en el caso de las órbitas retrógradas. Por otra parte esta definición del movimiento orbital parece estar conectada con el nacimiento del caos. Basados en los análisis de los diagramas de Poincaré y cálculos con el primer exponente de Lyapunov de una serie de órbitas, encontramos que, dentro de un intervalo plausible para los parámetros de los brazos en una galaxia similar a la Vía Láctea (e independientemente del número de brazos), si existe caos, solamente las órbitas prógradas lo presentan, y para una perturbación lo suficientemente débil, como parece ser el caso en nuestra Galaxia, la separatriz es una

curva delgada muy bien definida. El surgimiento de las subregiones caóticas en la región prógrada depende de tres parámetros principalmente: la masa de los brazos espirales o la fuerza relativa, el ángulo de enrollamiento y en menor medida de la velocidad angular del patrón. Subrayamos aquí el punto de que la definición estándar en el sistema rotante, que llama a la parte $x' > 0$ del diagrama el lado retrógrado y a la parte con $x' < 0$ el lado prógrado (para un patrón como el de la Galaxia moviéndose a favor de las manecillas del reloj), no podría evidenciar la conexión del caos con el movimiento prógrado, debido a que una misma órbita (ordenada o caótica) puede ocupar ambas secciones de los diagramas de Poincaré. El comportamiento del surgimiento del caos diferente entre órbitas prógradas y retrógradas, definidas en el sistema inercial, ha sido atribuido al traslape de resonancias (Contopoulos 1967). En los casos de masa menor que el 3% de la masa del disco ($M_B/M_D \leq 0.03$), dentro del intervalo de masas considerado para los brazos espirales, no se encuentra caos para velocidades angulares de hasta $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$. Hemos también calculado algunas familias orbitales con velocidades $\Omega_P = 60 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$ (predichas por modelos de N-cuerpos y que corresponden a la velocidad de la barra) y encontramos que aún para la masa de los brazos más baja considerada, aparece caos en la región prógrada para algunas familias. Encontramos que una amplitud mínima en la fuerza radial de los brazos espirales es requerida para la aparición del movimiento estocástico con velocidades angulares de hasta $20 \text{ km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}$, que corresponde al 6% (en promedio) de la fuerza radial axisimétrica proporcionada en nuestro modelo por una razón de masas, $M_B/M_D = 0.05$ para un ángulo de enrollamiento de 15.5° . Para casos de perturbaciones espirales muy fuertes (con fuerzas relativas del orden del 15% o mayores), la separatriz se ensancha y es invadida por caos.

Dos leyes de caída en densidad de los esferoides que componen los brazos espirales fueron utilizadas, una caída lineal y una exponencial físicamente más justificable (dada la caída del disco). Los resultados parecen no ser afectados por la ley de caída de los brazos espirales.

Para la barra Galáctica hemos propuesto tres modelos distintos, con la ley de densidad observada para esta componente. El primero consiste en un elipsoide inhomogéneo, el segundo es un esferoide prolato que resulta mucho menos costoso computacionalmente. Finalmente, el modelo que mejor ajusta las observaciones de la Galaxia, es un modelo de superposición de elipsoides inhomogéneos, el cual reproduce aproximada-

mente tanto la ley de densidad en la barra como las isofotas cuadradas (cuyo modelaje representa un problema muy complicado). De esta forma, con superposiciones como la realizada para la barra Galáctica hemos podido reproducir las observaciones, y de hecho con la superposición adecuada es posible aproximar fácilmente el potencial de una barra en general. Es sin embargo importante recalcar, que de comparaciones cualitativas del análisis orbital de los tres modelos, no se encuentran diferencias significativas entre éstos, de manera que una barra prolata podría ser suficiente para los análisis estelares, aunque esto tendría que probarse con análisis más cuantitativos en esta dirección tanto orbitales como de gas.

Entre los resultados para los modelos de la Galaxia con barra se encuentran los siguientes. Se realizaron diversos experimentos con los tres modelos de la barra Galáctica. Mientras que en algunos trabajos la barra Galáctica es tratada como la única componente en el centro de la Galaxia, en otros se incluye adicionalmente al potencial global una componente de bulbo (ver Sección 4). De esta forma en los primeros experimentos hemos incluido el potencial axisimétrico con un bulbo parcial (Weiner y Sellwood 1999), otra serie de experimentos removiendo el bulbo, una más con la barra únicamente y una última con el potencial espiral incluido. Encontramos que la separatriz, que para todos los casos de los brazos espirales dentro del intervalo de parámetros plausibles para la Galaxia, resultaba muy fina, es ahora mucho más ancha, esto es, la cantidad de órbitas prógradas-retrógradas en el sistema inercial aumenta, disminuyendo a su vez las regiones de órbitas prógradas y retrógradas en el espacio fase. El caos en la mayoría de los casos es inducido por la componente central de bulbo, y a diferencia de los brazos, inicia en casi todos los casos en las órbitas prógradas-retrógradas que componen la separatriz. Pasando la barrera de corrotación, el caos inicia nuevamente en las órbitas prógradas. De la misma forma que para el potencial de brazos, no se encuentra caos en ningún caso en la región retrógrada.

Tenemos ahora un modelo tridimensional que ajusta los parámetros más importantes conocidos de la Galaxia para complementar la aproximación axisimétrica pura, y que puede ser utilizado tanto en dinámica orbital como en magnetohidrodinámica.

6.1 Trabajo en Proceso y a Futuro

La aplicación del modelo introducido en la presente tesis a la Vía Láctea nos abre una ventana de posibilidades para el estudio orbital y de gas en la Galaxia. Estas posibilidades van desde la revisión de los resultados producidos por modelos idealizados del potencial Galáctico hasta nuevas aplicaciones posibles.

Entre los trabajos que se encuentran en proceso actualmente y en proyectos a futuro anotamos los siguientes,

* En todo el análisis sobre los brazos espirales hemos supuesto que éstos son básicamente suaves como en una galaxia temprana y hemos supuesto el mismo ancho a lo largo de éstos. Según resultados observacionales de Sellwood (1991), y Rix & Zaritsky (1995) los brazos cambian su anchura y altura con la distancia galactocéntrica, de manera que un incremento o decremento en nuestro modelo del semieje mayor a_0 de los esferoides a lo largo de los brazos espirales, podría ajustar más apropiadamente las observaciones. Adicionalmente, para una galaxia Sb y en general, los brazos espirales no son necesariamente suaves y de hecho son más bien flocculentos. Por la forma del modelo de los brazos, simular brazos flocculentos es una posibilidad que nos permitiría entender el efecto sobre la autoconsistencia del patrón espiral (analizando órbitas periódicas por ejemplo) y sobre el gas, producido por unos brazos espirales flocculentos como los observados en galaxias como la nuestra y más tardías debido a las regiones HII gigantes.

* Aunque se usaron las órbitas periódicas para el análisis de autoconsistencia, consideramos que es necesario un análisis más profundo de este tipo de órbitas en forma de diagramas característicos y análisis de estabilidad riguroso, tanto para los brazos como para la barra.

* Aplicación a cúmulos galácticos con el propósito de determinar cómo afecta a la distribución espacial de los cúmulos cercanos al disco Galáctico la existencia de una barra como la de la Galaxia. En caso de que sí afecte la presencia de la barra a la distribución espacial de cúmulos, y dada la distribución de cúmulos en la Galaxia, se puede intentar obtener las cotas inferior y superior para la velocidad angular de la barra en la Galaxia. ¿Se puede saber en una galaxia de canto si una galaxia es barrada o no sólo con la distribución espacial de cúmulos galácticos?. Consideraciones similares para

la Galaxia han sido ya estudiadas por Long, Ostriker y Aguilar (1992).

* Basados en análisis de autoconsistencia con la ayuda de órbitas periódicas y caos orbital, encontrar una cota máxima para la concentración de masa central (o un bulbo) en la Vía Láctea.

* Análisis de los choques del gas con el brazo espiral en el plano Galáctico para determinar el elipsoide de velocidades de la población estelar joven, tomando como condiciones iniciales las posiciones y velocidades de las zonas donde el aumento en densidad producido por el choque puede generar formación estelar. Por otra parte, en la dirección perpendicular al plano Galáctico, se realizarán análisis de los movimientos verticales y formación estelar inducida por choques del gas a altas z (coordenada perpendicular al plano Galáctico).

* Análisis de choques del gas con la barra Galáctica para intentar explicar la generación de rayos cósmicos en la Galaxia.

* El acoplamiento entre la barra y los brazos espirales a la misma velocidad angular (brazos saliendo de la barra), a la velocidad de la barra, a la velocidad de los brazos y finalmente con otra situación muy probable, barra y brazos girando a diferentes velocidades angulares (las correspondientes a cada estructura según las observaciones).

* Órbitas en tres dimensiones. Estudio de órbitas de estrellas de alta velocidad en la vecindad Solar.

* Finalmente, en trabajo a futuro se incluye el estudio orbital y de gas en general de otros tipos de galaxias (Sa, Sc, SBa y Sbc), o en particular aplicado a galaxias específicas con parámetros determinados o por determinar usando análisis de autoconsistencia para restringirlos.

* En combinación con modelos de N-cuerpos, se pueden hacer análisis de la estructura interna de objetos como cúmulos globulares o satélites Galácticos, introduciendo como potencial de fondo el estacionario con brazos y barra para aplicar toda la resolución al cúmulo o satélite Galáctico y analizar los efectos de fuerza de marea, fricción dinámica y destrucción.

Parte IV

APENDICES

Apéndice A

El Potencial Axisimétrico

Para reproducir algunas de las propiedades de la Galaxia, tales como la curva de rotación, la fuerza perpendicular al plano y otros parámetros conocidos, como la velocidad de escape local y las constantes de Oort, hemos elegido el potencial tridimensional de Allen y Santillán (1991) como potencial de fondo, debido a su simplicidad matemática y a su aproximación a las propiedades Galácticas.

Este potencial es completamente analítico y continuo en todo punto, al igual que sus derivadas. Consiste de un bulbo central y un disco, ambos de la forma propuesta por Miyamoto y Nagai (1975) y un halo masivo esférico.

La distribución de masa central tiene un potencial de la forma,

$$\Phi_1(R, z) = -\frac{M_1}{(R^2 + z^2 + b_1^2)^{1/2}}, \quad (\text{A.1})$$

y la densidad correspondiente,

$$\rho_1(R, z) = \frac{3b_1^2 M_1}{4\pi(R^2 + z^2 + b_1^2)^{5/2}}, \quad (\text{A.2})$$

donde $M_1 = 606.0$ y $b_1 = 0.3873$. Las unidades son las llamadas "unidades Galácticas" (con $G = 1$) y son kpc para longitud, 10 km/s para velocidad y $2.32 \times 10^7 M_\odot$ para masa. La masa de esta componente es $1.41 \times 10^{10} M_\odot$.

La componente de disco,

$$\Phi_2(R, z) = -\frac{M_2}{(R^2 + [a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2)^{1/2}}, \quad (\text{A.3})$$

$$\rho_2(R, z) = \left(\frac{b_2^2 M_2}{4\pi}\right) \left(\frac{a_2 R^2 + [a_2 + 3(z^2 + b_2^2)^{1/2}][a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2}{\{R^2 + [a_2 + (z^2 + b_2^2)^{1/2}]^2\}^{5/2} (z^2 + b_2^2)^{3/2}}\right), \quad (\text{A.4})$$

donde $M_2 = 3690.0$, $a_2 = 5.3178$ y $b_2 = 0.2500$. Con una masa del disco de $8.56 \times 10^{10} M_\odot$.

Finalmente el halo, con $r = \sqrt{R^2 + z^2} \leq r_{max} = 100$ kpc,

$$\Phi_3(r) = -\frac{M(r)}{r} - \frac{M_3}{1.02 a_3} \left[-\frac{1.02}{1 + (r/a_3)^{1.02}} + \ln\{1 + (r/a_3)^{1.02}\}\right]_r^{100}, \quad (\text{A.5})$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$\rho_3(r) = \frac{M_3}{4\pi a_3 r^2} (r/a_3)^{1.02} \frac{[2.02 + (r/a_3)^{1.02}]}{[1 + (r/a_3)^{1.02}]^2}, \quad (\text{A.6})$$

donde $M(r) = \frac{M_3(r/a_3)^{2.02}}{1 + (r/a_3)^{1.02}}$, $M_3 = 4615.0$ y $a_3 = 12.0$. La masa del halo a 100 kpc es $8.002 \times 10^{11} M_\odot$.

La masa total del modelo es $9 \times 10^{11} M_\odot$.

Entre las restricciones observacionales tomadas, como la curva de rotación (Figura A.1) y la fuerza perpendicular en z , en este modelo se adoptan los siguientes parámetros, $R_0 = 8.5$ kpc como la distancia Galactocéntrica del Sol y $V_0(R_0) = 220$ km s^{-1} como la velocidad circular en la posición solar. El halo tiene un radio de 100 kpc. La curva de rotación se aplatina aproximadamente a una velocidad de 200 km s^{-1} . La velocidad de escape local es de aproximadamente 550 km s^{-1} . La densidad de masa total en la vecindad solar es $\rho = 0.15 M_\odot$ pc³. Los valores obtenidos para las constantes de la rotación Galáctica (constantes de Oort) son $A = 12.95$ km s^{-1} y $B = -12.93$ km s^{-1} , en buena concordancia con los datos actuales.

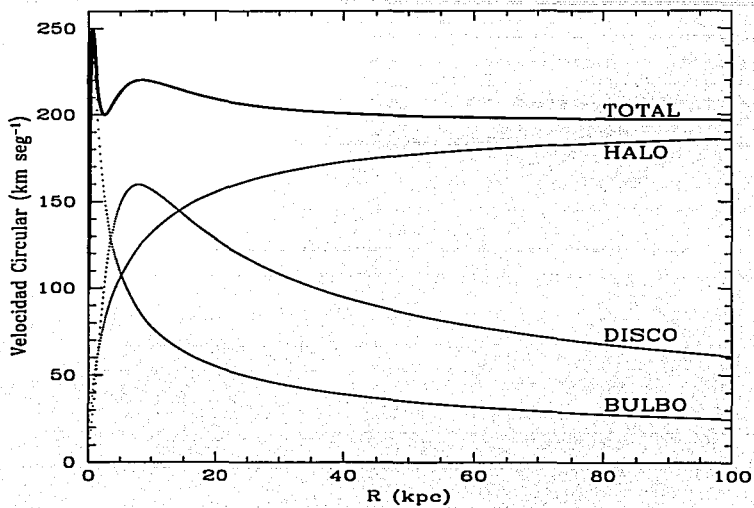


FIGURA A.1: Contribución de las tres componentes de masa a la curva de rotación (líneas punteadas) y la curva de rotación total (línea continua).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndice B

Los Métodos de Integración y las Técnicas

En el presente apéndice se describen brevemente los integradores utilizados en la solución de las ecuaciones de movimiento de las partículas sometidas a un potencial compuesto por la distribución axisimétrica y el patrón espiral y/o la barra Galáctica. Estos son, Bulirsh-Stoer (Press et al. 1992) y Runge-Kutta de orden 7mo-8vo (Fehlberg 1968).

B.1 El Método de Bulirsh-Stoer para la Integración de Orbitas

Este es uno de los mejores métodos de obtención de soluciones de alta precisión para ecuaciones diferenciales ordinarias con esfuerzos computacionales mínimos (Press et al. 1992).

El método consiste de tres ideas principales. La primera de éstas es el *acercamiento diferido al límite* de Richardson, que consiste en considerar la respuesta final de un cálculo numérico como una función analítica de un parámetro ajustable, como el tamaño de paso, h . Esta función analítica puede ser probada ejecutando los cálculos con varios valores de h , ninguno de ellos siendo necesariamente suficientemente pequeño para proporcionar la precisión deseada. Cuando se conoce suficiente acerca de la función, se le ajusta alguna forma analítica, y de esta forma se puede evaluar la función en el

punto "imposible" $h=0$ (Fig. B.1).

La segunda idea tiene que ver con el tipo de ajuste de la función utilizado. Debido al poder de la extrapolación de funciones racionales, Bulirsh y Stoer las eligieron en las aplicaciones tipo Richardson (Press et al. 1992). El poder radica en el aumento del limitado intervalo de convergencia de las series de potencias. Las funciones racionales pueden ajustarse bastante bien a funciones analíticas aún después de varios términos, en las potencias de h , de magnitud comparable.

La tercera idea es el uso de un método cuya función de error sea estrictamente par, permitiendo que la función racional o aproximación polinomial esté en términos de la variable h^2 en lugar de sólo h .

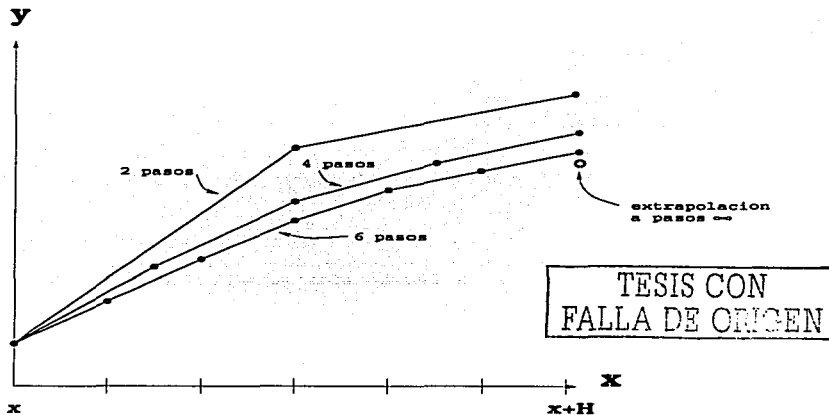


FIGURA B.1: Extrapolación de Richardson usada en el método de Bulirsh-Stoer. Un intervalo grande H es subdividido por diferentes secuencias de subintervalos cada vez más finos. Los resultados son extrapolados a una respuesta que se supone corresponderá a un número infinito de subintervalos. En el método de Bulirsh-Stoer, las integraciones son hechas con el método modificado del punto medio y la técnica de extrapolación es una función racional o una extrapolación polinomial.

Con estas ideas juntas describiremos con cierto detalle el programa que consiste de tres rutinas principales, BSSTEP (*stepper*), MMID (método de punto medio modifica-

do) y ODEINT (*driver*).

El método funciona de la siguiente forma: BSSTEP incrementa el valor en el tiempo una cantidad H y evalúa las variables iniciales y_i al tiempo $t+H$, subdivide este intervalo H en dos subintervalos de longitud $h=H/2$, evalúa las y_i en los extremos de esos dos subintervalos, uno de éstos le da un nuevo valor a la función al tiempo $t+h$. Entonces el intervalo H se subdivide otra vez en más intervalos y se evalúa otra vez (cada evaluación es hecha usando MMID). La secuencia del número de subdivisiones es predeterminada y en este caso particular es $n = 2, 4, 6, 8, 10, \dots, n_j = 2j$. Cada vez que una n sucesiva es intentada, se realiza una extrapolación polinomial (a $H/n=0$ o $n=\infty$) que devuelve, además de los valores extrapolados de la función, las estimaciones del error. En caso de que los errores no sean satisfactorios, se toma un valor más alto en n . Si son satisfactorios se irá a un siguiente paso más grande de H y se comenzará nuevamente con el n más pequeño. Si el intervalo H ha sido subdividido en 12 subintervalos y la extrapolación todavía no resulta satisfactoria, BSSTEP reducirá el tamaño de H en lugar de continuar incrementando el número de subintervalos. Esto significa que el paso de tiempo es variable. En regiones donde la función no varía mucho, los pasos de tiempo, H , son grandes y se requiere un número pequeño de subdivisiones para obtener la convergencia deseada. Por otra parte, en lugares donde la función es altamente variable, el tamaño de paso, H , se hace pequeño y la secuencia de subdivisiones usualmente crece. Para ejecutar la extrapolación polinomial después de cada n intentada, BSSTEP llama a la rutina PZEXTR (Press et al. 1992).

Finalmente, para la ejecución de BSSTEP se requiere un "manejador" (*driver*) el cual funciona como interfase con el usuario, para este efecto usamos la subrutina ODEINT. Esta subrutina comienza y termina la integración y guarda los resultados intermedios, es decir devuelve la lista de valores entre $t=0$ y t_f para las variables involucradas en el problema. Ya que el paso temporal no es fijo, ODEINT requiere un paso temporal mínimo tal que sólo si éste es más largo que el mínimo en BSSTEP, los valores de las variables serán guardados. Esto evita tener muchos valores salvados en lugares donde la función cambia rápidamente y el paso temporal es pequeño.

B.2 El Método de Runge-Kutta de Orden 7mo-8vo para la Integración de Orbitas

Esta rutina fue desarrollada en el departamento de Ingeniería Aeroespacial de la Universidad de Texas, Austin. Los coeficientes del algoritmo fueron calculados por Fehlberg (1968). El error de truncación es estimado como la diferencia de la integración a séptimo y octavo orden. El algoritmo genera la magnitud del paso de integración automáticamente a partir de uno dado inicialmente, de tal forma que el error de truncación no exceda una tolerancia dada para cada solución.

La conservación de la constante de Jacobi a lo largo de cada órbita fue utilizada para checar la exactitud de la integración con la siguiente expresión,

$$\left| \frac{E_J - E_{J_{inicial}}}{E_{J_{inicial}}} \right| \leq tol \quad (\text{B.1})$$

con tol la tolerancia. La constante de Jacobi a un tiempo t dado de la órbita es comparada con el valor respectivo al tiempo inicial $t_{inicial}$.

B.3 El Método de Newton-Raphson para la Construcción de Orbitas Periódicas

En el cálculo de las órbitas periódicas empleamos el método de Newton-Raphson (Press et al. 1992) que a continuación describimos brevemente.

En general el método de Newton-Raphson (N-R), además de ser el método más simple de su género, proporciona una forma muy eficiente de convergencia a una raíz suponiendo que se tiene una buena predicción inicial de la solución del problema. Cuando este no es el caso, se puede utilizar un método globalmente convergente para la solución basado en el método de N-R.

Consideremos el caso de dos dimensiones, en el que deseamos resolver en forma simultánea las siguientes ecuaciones,

$$f(x, y) = 0 \quad (\text{B.2})$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$g(x, y) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Donde f y g son dos funciones arbitrarias, cada una de las cuales tiene líneas de contorno cero que dividen el plano (x, y) en regiones donde su función respectiva es positiva o negativa. Estas fronteras de contorno cero son importantes. Las soluciones que estamos buscando son aquellos puntos que son comunes a los contornos cero de f y g (Figura B.2). Desafortunadamente, las funciones f y g no tienen en general relación la una con la otra. Para encontrar todos los puntos comunes, los cuales son las soluciones de nuestras ecuaciones no lineales, tendremos simplemente que mapear los contornos cero completos de ambas funciones. Nótese que los contornos cero, en general consisten de un número desconocido de curvas cerradas disconexas. ¿Cómo podemos entonces esperar saber cuándo hemos encontrado todas las piezas disconexas?

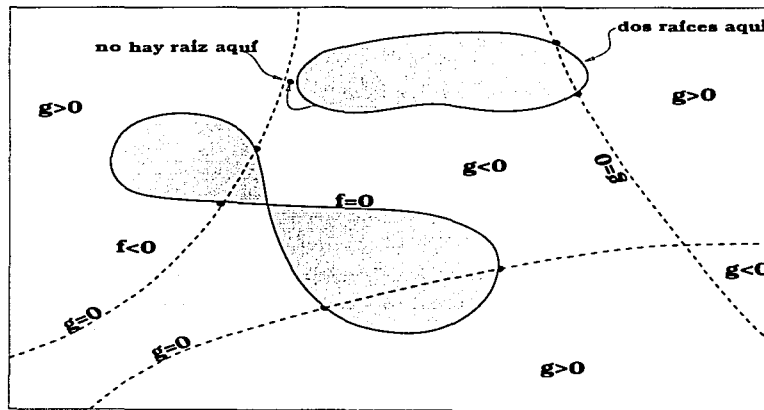


FIGURA B.2: Solución de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas. Las curvas sólidas se refieren a $f(x, y)$ y las punteadas a $g(x, y)$. Cada ecuación divide el plano (x, y) en una región positiva y una negativa limitada por curvas "cero". Las soluciones deseadas son las intersecciones de estas curvas cero no relacionadas. El número de soluciones es a priori desconocido.

Para problemas de más de dos dimensiones, necesitamos encontrar puntos mutua-

mente comunes a las N hipersuperficies de contorno cero no relacionadas, cada una de dimensión N .

Un problema típico tiene N funciones de las cuales obtendremos las raíces, estas funciones dependen de las variables $x_i, i = 1, 2, \dots, N$:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{B.4})$$

Denotamos como \mathbf{x} el vector completo de valores x_i y \mathbf{F} el vector de funciones F_i . En la vecindad de \mathbf{x} , cada una de las funciones F_i puede ser expandida en series de Taylor,

$$F_i(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = F_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \delta x_j + O(\delta\mathbf{x}^2). \quad (\text{B.5})$$

La matriz de derivadas parciales que aparece en la ecuación (B.5) es la matriz *Jacobiana* \mathbf{J} ,

$$J_{ij} \equiv \frac{\partial F_i}{\partial x_j}. \quad (\text{B.6})$$

En notación matricial la ecuación (B.5) es,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{x} + O(\delta\mathbf{x}^2). \quad (\text{B.7})$$

Despreciando los términos de orden $\delta\mathbf{x}^2$ y más altos y haciendo $\mathbf{F}(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = 0$, obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales para las correcciones $\delta\mathbf{x}$ que mueven cada función más cerca de cero simultáneamente; de esta forma,

$$\mathbf{J} \cdot \delta\mathbf{x} = -\mathbf{F}. \quad (\text{B.8})$$

Las correcciones son entonces sumadas al vector solución,

$$\mathbf{x}_{post} = \mathbf{x}_{ant} + \delta\mathbf{x}, \quad (\text{B.9})$$

y el proceso es iterado para la convergencia.

En el caso de que nuestra predicción inicial no sea lo suficientemente buena (por ejemplo para el caso en el que los brazos espirales o barra sean muy masivos), un método

global es uno que converge a una solución desde casi cualquier punto. Se ha desarrollado un algoritmo que combina la convergencia global rápida del método de N-R con una estrategia convergente globalmente que garantiza progresos hacia la solución a cada iteración.

Entonces el paso de N-R para el conjunto de ecuaciones,

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{B.10})$$

es (B.9), y de (B.8) tenemos,

$$\delta\mathbf{x} = -\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{B.11})$$

donde \mathbf{J} es la matriz Jacobiana. ¿Cómo se decide aceptar el paso de N-R $\delta\mathbf{x}$? Una estrategia razonable es imponer que el paso decrezca $|\mathbf{F}|^2 = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}$, que es el mismo requerimiento que impondríamos si se estuviera tratando de minimizar,

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}, \quad (\text{B.12})$$

el $\frac{1}{2}$ es por conveniencia. Cada solución de (B.10) minimiza (B.12), pero debe haber mínimos locales de (B.12) que no son soluciones de (B.10).

Para desarrollar una mejor estrategia nótese que el paso de N-R en (B.11) va en una dirección descendiente para f ,

$$\nabla f \cdot \delta\mathbf{x} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{J}) \cdot (-\mathbf{J}^{-1} \cdot \mathbf{F}) = -\mathbf{F} \cdot \mathbf{F} < 0. \quad (\text{B.13})$$

Así que la estrategia es muy simple: siempre se intenta primero el paso de N-R completo, porque una vez que se está lo suficientemente cerca de la solución, se obtendrá convergencia cuadrática. Sin embargo, checamos a cada iteración que el paso propuesto reduzca f . Si no, se retrocede a lo largo de la dirección de N-R hasta obtener un paso aceptable. Ya que el paso de Newton es en la dirección descendiente de f , está garantizado encontrar una paso aceptable regresando a pasos más cortos.

Nótese que este método esencialmente minimiza f tomando los pasos de N-R diseñados para llevar \mathbf{F} a cero. Esto no es equivalente a minimizar f directamente tomando los pasos de N-R diseñados para llevar ∇f a cero.

B.4 Los Códigos Computacionales

En esta sección se describen brevemente las características generales de los códigos empleados en los cálculos a lo largo de esta Tesis.

Los códigos fueron escritos en Fortran 77. El integrador principal fue en todos los casos el algoritmo Bulirsh-Stoer (B.1), aunque se realizaron inicialmente pruebas con el algoritmo Runge-Kutta (B.2), con propósitos de comparación de eficiencia (velocidad y precisión).

Los códigos calculan las órbitas en el sistema no inercial (anclado en los brazos espirales y/o la barra) y transforman adicionalmente los resultados al sistema inercial. Los datos de entrada y salida son dados en "unidades Galácticas" (Schmidt 1956), donde $G = 1$, la distancia se mide en kpc, la velocidad en 10 km/s y la masa en $2.32 \times 10^7 M_{\odot}$.

B.4.1 El Código de los Brazos Espirales

El programa que integra órbitas y conforma los diagramas de Poincaré en un potencial axisimétrico con los brazos espirales que hemos presentado en este trabajo (Capítulo 3), requiere como parámetros de entrada los siguientes (se dan también explícitamente algunos de los parámetros que fueron usados en la mayoría o la totalidad de los casos, tales como el ancho del brazo, la ley de caída en densidad de los brazos, etc),

- ▷ Distancia de corte del halo Galáctico
 $R_h = 100$ kpc
- ▷ Distancia Galactocéntrica de inicio de los brazos espirales
Variable.
- ▷ Angulo de enrollamiento ("*pitch angle*")
Variable.
- ▷ Semiejes de sección transversal al brazo
 $a_0 = 1.0$ kpc y $c_0 = 0.5$ kpc
- ▷ Separación de centros de esferoides
 $c_s = 0.5$ kpc
- ▷ Razón M_B/M_D
Variable.
- ▷ Distancia Galactocéntrica de corte de los brazos

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$R_f = 12 \text{ kpc}$$

- ▷ Velocidad angular del patrón espiral
Variable.
- ▷ Forma de caída en la densidad del brazo (lineal o exponencial)
Caída exponencial
- ▷ Longitud de escala en el caso de caída exponencial
 $h_p = 2.5 \text{ kpc}$ (misma escala de longitud que la del disco)
- ▷ Valor de la constante de Jacobi
Variable.
- ▷ Número de órbitas a integrar por diagrama de Poincaré
 $N_o = 50$
- ▷ Número de cruces con el plano y' (i.e., número de puntos por órbita en los diagramas de Poincaré)
 $N_c = 250$

Dados los parámetros más importantes listados arriba, el programa proporciona como salida seis archivos principales conteniendo las órbitas de diferentes "especies", esto es, separa las órbitas prógradas, retrógradas y las prógradas-retrógradas (Sección 3.5) en el sistema inercial y a su vez separa los tipos de "cruce" en cuanto a su componente " y " de velocidad en el sistema no inercial (i.e., v'_y) en positivos y negativos. De esta forma se puede etiquetar fácilmente en los diagramas de Poincaré, en el sistema no inercial, las órbitas prógradas, retrógradas y prógradas-retrógradas del inercial.

B.4.2 Los Códigos de la Barra

De la misma forma que el código de los brazos espirales, el de la barra calcula también diagramas de Poincaré. Aunque el potencial es enteramente distinto, las subrutinas de integración y de transformación de coordenadas son similares a las del código de los brazos. Los códigos (barra elipsoidal, prolata y superposición de elipsoidales) que calculan órbitas en el potencial de barra sumado al axisimétrico, requieren los siguientes parámetros generales de entrada (incluimos también algunos parámetros explícitos que fueron usados en la mayoría de los casos).

- ▷ Distancia de corte del halo Galáctico

$$R_h = 100 \text{ kpc}$$

▷ (La barra se parte en tres regiones para un mejor muestreo en la densidad, las primeras dos en la caída como $sech^2(a)$ y la tercera en la caída Gaussiana que comienza donde la barra termina) Extensión de la primera región de la barra

$$a_l = 0.5 \text{ kpc}$$

▷ Número de particiones en las tres regiones (esto significa, número de esferoides o elipsoides por región)

$$N_1 = 5, N_2 = 25, N_3 = 5$$

▷ Masa de la barra (en unidades de $2.32 \times 10^7 M_\odot$)

$$M_{BAR} = 423.$$

▷ Velocidad Angular de la barra

$$\Omega_P = -6.0 \text{ (10 km s}^{-1} \text{ kpc}^{-1}\text{)}$$

▷ Longitudes de escala (kpc)

$$a_x = 1.7, a_y = 0.64, a_z = 0.44$$

▷ Valor de la constante de Jacobi

Variable.

▷ Número de órbitas a integrar por diagrama de Poincaré

$N_o = 50$ (en las barras elipsoidal y prolata, y aproximadamente 25 en la superposición debido al tiempo de cómputo necesario para correr este código)

▷ Número de cruces con el plano y' (i.e., número de puntos por órbita en los diagramas de Poincaré)

$$N_c = 250$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

B.4.3 El Código para las Órbitas Periódicas

El programa que calcula las órbitas periódicas (Sección 3.4.2) utiliza como buscador de raíces el algoritmo de Newton-Raphson en 2 dimensiones (Press et al. 1992). Utiliza adicionalmente como subrutinas, los códigos que integran órbitas en un potencial con brazos o con barra para generar las órbitas individuales de prueba.

El programa requiere como condiciones iniciales una primera predicción (“guess”) en la posición y velocidad de la órbita periódica buscada. Esta predicción se obtiene de la órbita circular que correspondería a cierta posición (o alternativamente a cierta

constante de Jacobi) en un potencial axisimétrico sin perturbador. De esta forma, los únicos parámetros adicionales que se necesitan son la distancia Galactocéntrica por la que la órbita cruza, de manera que el programa barre el espacio de constantes de Jacobi hasta localizar una órbita periódica (o alternativamente se da como entrada la constante de Jacobi de forma que el programa barre el espacio de posiciones disponible) y el número de ciclos de la órbita periódica, es decir, órbitas que se cierran en un solo ciclo o en más.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Apéndice C

El Código Magnetohidrodinámico Zeus

Zeus 3-D es un código magnetohidrodinámico diseñado por el "National Center for Supercomputer Applications (NCSA)", para aplicaciones astrofísicas. El código utiliza algoritmos y estructuras desarrolladas por David Clarke, Phillip Colella, Chuck Evans, John Hawley, Michael Norman, Lorry Smarr, Jim Stone, Bram van Leer, Jim Wilson, Karl-Heinz Winkler y Paul Woodward, entre otros (Stone y Norman 1992a,b).

Este código fue diseñado para resolver problemas complejos de Dinámica de Fluidos ideales (no viscosos y no resistivos, es decir, con conductividad infinita) no relativistas.

El sistema de ecuaciones acopladas que Zeus integra numéricamente como función del tiempo y espacio es,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{C.1})$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{S} \mathbf{v}) = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{e} \mathbf{v}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (\text{C.3})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (\text{C.4})$$

donde,

ρ = densidad de materia

\mathbf{v} = campo de velocidad del flujo

$\mathbf{S} = \rho \mathbf{v}$ = campo vectorial del momento

p = presión térmica

Φ = potencial gravitacional

\mathbf{J} = densidad de corriente

\mathbf{B} = Inducción magnética

e = densidad de energía interna (por unidad de volumen)

Zeus es estrictamente Newtoniano y supone neutralidad de carga a todo tiempo -i.e. no es un código para plasmas-, supone también que el fluido es térmico y que está acoplado al campo magnético vía colisiones con una componente ionizada. La presión térmica se supone isotrópica.

Algunas de las características más importantes de Zeus se mencionan a continuación,

- * Utiliza diferencias finitas en una malla Euleriana ortogonal.
- * Las ecuaciones son completamente explícitas en el tiempo, por lo tanto con paso temporal controlado por la condición de Courant.

- * Es capaz de resolver problemas en 1-D, 2-D y 3-D con geometría Cartesiana, cilíndrica o esférica.

- * Puede incluir autogravedad así como campos gravitacionales externos.

- * La evolución dinámica del fluido puede ser isotérmica, adiabática (o en general cualquier $\gamma > 1$).

- * Las cantidades escalares (como densidad y energía interna) se localizan en el centro de las celdas de la malla, mientras que las cantidades vectoriales (como velocidad, campo magnético, etc.) se localizan en las esquinas o paredes de las celdas.

- * Para el tratamiento de las ondas de choque utiliza la viscosidad artificial de von Neumann-Richtmyer.

- * Maneja los siguientes tipos de condiciones de frontera:

- i*) Reflejantes o cerradas. Las componentes normales de la velocidad y del campo magnético son reflejadas mientras que las componentes tangenciales y de las variables escalares se mantienen constantes.

- ii*) Periódicas. Todas las variables físicas (escalares y vectoriales) en la frontera toman el mismo valor de las variables correspondientes en la frontera opuesta de la malla.

- iii*) Flujo de entrada (in). Los valores de las variables en la frontera donde es aplicada

esta condición son dados y mantenidos durante toda la evolución temporal.

iv) Flujo de salida (out). Los valores de las variables se mantienen igual una vez que han cruzado la frontera.

Para una descripción detallada del código, sus aplicaciones y el manual de uso, respectivamente, ver Stone y Norman 1992a,b; Norman, Stone and Clarke 1991; Clarke, Norman, Fiedler 1994.

Bibliografía

- [1] Alard, C., 2001, *A&A*, 379, 44
- [2] Allen, C. & Santillán, A., 1991, *RMxAA*, 22, 255 (A&S)
- [3] Alvarelos, J.L., 1996, Master Degree thesis, Univ. of California.
- [4] Amaral, L.H. & Lépine, J.R.D., 1997, *MNRAS*, 286, 885
- [5] Athanassoula, E., 2001, private communication
- [6] Athanassoula, E., 2002, *ApJ*, 596, 83
- [7] Athanassoula, E., Bienayme, O., Martinet, L., & Pfenniger, D., 1983, 127, 349
- [8] Athanassoula, E. & Misiriotis, A., 2002, *MNRAS*, 330, 35
- [9] Athanassoula, E., Morin, S., Wozniak, H., Puy, D., Pierce, M.J., Lombard, J. & Bosma, A., 1990, *MNRAS*, 245, 130
- [10] Avedisova, V.S., 1985, *PAZh*, 11, 448
- [11] Bahcall, J.N. & Soneira, R.M., 1980, *ApJS*, 44, 73
- [12] Baker, P.L. & Barker, P.K. 1974, *A & A*, 36, 179 (BB74)
- [13] Barbanis, B. & Woltjer, L. 1967, *ApJ*, 150, 461
- [14] Bash, F.N., 1981, *ApJ*, 250, 551
- [15] Beaulieu, S.F., Freeman, K.C., Kalnajs, A.J. Saha, P., & Zhao, H., 2000, *AJ*, 120, 855
- [16] Beck, R. 1993, *IAUS*, 157, 283
- [17] Berentzen, I., Heller, C.H., Shlosman, I., & Fricke, K.J., 1998, 300, 49
- [18] Binney, J., 1982, *MNRAS*, 201, 15
- [19] Binney, J., 2001, *J. Phys.*, IV, 1
- [20] Binney, J., Gerhard, O.E., Stark, A.A., Bally, J., & Uchida, K.I., 1991, *MNRAS*, 252, 210
- [21] Binney, J., Gerhard, O.E., & Spergel, D.N., 1997, *MNRAS*, 288, 365
- [22] Binney, J., Merrifield, M., 1998, *Galactic Astronomy* (Princeton University Press)
- [23] Binney, J. & Tremaine, S., 1994, *Galactic Dynamics* (Princeton University Press)
- [24] Bissantz, N. & Gerhard, O., 2002, *MNRAS*, 330, 591
- [25] Blitz, L. & Spergel, D.N., 1991, *ApJ*, 379, 631
- [26] Burbidge, G.R. & Hoyle, F., 1963, *ApJ*, 138, 57
- [27] Bureau, M., Freeman, K.C., Athanassoula, E., 1999. *The formation of galactic bulges*. New York : Cambridge University Press, p. 115
- [28] Caldwell, J.A.R. & Ostriker, J.P., 1981, *ApJ*, 251, 61
- [29] Carpintero, D.D., Aguilar, L.A., 1998, *MNRAS*, 298, 1
- [30] Caswell, J.L., & Haynes, R.F. 1987, *A & A*, 171, 261
- [31] Clarke, D.A., Michael L.N. & Fiedler, R.A., 1994, *Zeus-3D User Manual*, Laboratory for Computational Astrophysics, National Center for Supercomputing Applications, Ed. University of Illinois.
- [32] Combes, F. & Elmegreen, B.G., 1993, *A&A*, 271, 391
- [33] Contopoulos, G., 1967, *Bull. Astr.*, Ser. 3, 2, 223
- [34] Contopoulos, G., 1970 *ApJ*, 160, 113

- [35] Contopoulos, G., 1975 *ApJ*, 201, 566
- [36] Contopoulos, G., 1979 *A & A*, 71, 221
- [37] Contopoulos, G., 1980 *A & A*, 81, 198
- [38] Contopoulos, G., 1981, *A&A*, 104, 116
- [39] Contopoulos, G., 1983, *A&A*, 117, 89
- [40] Contopoulos, G., 1989, *A&ARv*, 1, 261
- [41] Contopoulos, G. & Grosbøl, P., 1986, *A & A*, 155, 11
- [42] Contopoulos, G. & Grosbøl, P., 1988, *A & A*, 197, 83
- [43] Contopoulos, G., & Papayannopoulos, T., 1980, *A & A*, 93, 33
- [44] Debattista, V.P., Gerhard, O., & Sevenster, M.N., 2002, *MNRAS*, 334, 355
- [45] Debattista, V.P. & Sellwood, J.A., 1998, *ApJ*493 L5
- [46] Debattista, V.P. & Sellwood, J.A., 2000, *ApJ*543 704
- [47] Dehnen, W., & Binney, J., 1998, *MNRAS*, 294, 429
- [48] Dehnen, W., 2000, *AJ*, 119, 800
- [49] de Vaucouleurs, G., 1948, *Ann. Astrophys.*, 11, 247
- [50] de Vaucouleurs, G., 1964, in *IAU Symp. 20, The Galaxy and the Magellanic Clouds*, ed. F.J. Kerr & A.W. Rogers (Canberra: Australian Acad. Sci.), 195
- [51] de Vaucouleurs, G., & Pence, W.D., 1978, *AJ*, 83, 1163
- [52] Drimmel, R., 2000, *A&A*, 358, L13
- [53] Drimmel, R., & Spergel, 2001, *ApJ*, 556, 181
- [54] Dwek, E., Arendt, R.G., Hauser, M.G., Kelsall, T., Lisse, C. M., Moseley, S.H., Silverberg, R.F., Sodroski, T.J., & Weiland, J.L., 1995, 445, 716
- [55] Elmegreen, B.G. & Elmegreen, D.M., 1985, *ApJ*, 288, 438
- [56] Elmegreen, D.M., 1998, *Galaxies and Galactic Structure* (Prentice Hall)
- [57] Englmaier, P. & Gerhard, O., 1999, *MNRAS*, 304, 512
- [58] Eskridge, P.B., Frogel, J.A., Pogge, R.W., Quillen, A.C., Davies, R.L., DePoy, D.L., Houdashelt, M.L., Kuchinski, L.E., Ramirez, S.V., Sellgren, K., Terndrup, D.M., Tiede, G.P., 2000, *AJ*, 119, 536
- [59] Fehlberg, E. 1968, *N.A.S.A. T.R. R-287*
- [60] Franco, J., Martos, M., Pichardo, B., & Jongsoo, K., 2002, *ASP*, 2002, pp. 343-350
- [61] Freudenreich, H.T., 1998, *ApJ*, 492, 495
- [62] Fujimoto, M. 1966, *IAU Symposium 29, Non Stable Phenomena in Galaxies*, ed. M. Arakeljan (Academy of Sciences of Armenia SSR), 453
- [63] Fux, R., 1999, *A&A*, 345, 787
- [64] Fux, R., 2001, *A&A*, 373, 511
- [65] Georgelin, Y.M. & Georgelin, Y.P., 1976, *A&A*, 49, 57
- [66] Gerhard, O.E., & Vietri, M., 1986, *MNRAS*, 223, 377
- [67] Gerhard, O.E., 2002, *ASP*, 273, 73
- [68] Gordon, M.A., 1978, *ApJ.*, 222, 100
- [69] Grosbøl, P. & Patsis, P.A., 1998, *A&A*, 336,840
- [70] Harmon, R., & Gilmore, G., 1988, *MNRAS*, 235, 1025
- [71] Hsuan, H. & Norman, C., 1990, 361, 69
- [72] Heiles, C. 1995, *The Physics of the Interstellar Medium and Intergalactic Medium. ASP Conference Series, Vol. 80*. Ed A. Ferrara, C.F. McKee, C. Heiles, P.R. Shapiro (Astronomical Society of the Pacific: San Francisco, California)
- [73] Heiles, C. 1996, *ApJ*, 462, 316
- [74] Hernquist, L. & Ostriker, J.P., 1992, *ApJ*, 386, 375
- [75] Ibata, R.A. & Gilmore, G.F., 1995, *MNRAS*, 275, 605
- [76] Kalnajs, A. J., 1970, *IAUS*, 38, 318
- [77] Kalnajs, A. J., 1983, *IAUS*, 100, 109K

- [78] Kalnajs, A. J., 1971, *Proceedings of the Astronomical Society of Australia*, 2, 174
- [79] Kaufmann, D.E. & Contopoulos, G., 1996, 309, 381
- [80] Kellogg, O.D., 1953, *Foundations of Potential Theory*. New York: Dover
- [81] Kennicutt, R.C., & Hodge, P., 1982, *ApJ*, 253, 101
- [82] Kent, S.M., 1992, *ApJ*, 387, 181
- [83] Kikuchi, N., Korchagin, V., Miyama, S.M., 1997, *ApJ*, 478, 446
- [84] Kormendy, J. 1979, *ApJ*, 227, 714
- [85] Kormendy, J. 1983, *ApJ*, 275, 529
- [86] Kwee, K.K., Muller, C.A., Westerhout, G., 1954, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 12, 211
- [87] Kuijken, K. & Merrifield, M.R., 1995, *ApJ*, 443, 13
- [88] Lépine, J.R.D., Mishurov, Y.N., Dedikov, S.Y. 2001, *ApJ*, 546, 234
- [89] Lerner, M.S., Sundin, M., & Thomasson, M., 1999, *A&A*, 344, 483
- [90] Lin, C.C. & Shu, F.H., 1964, *ApJ*, 140, 646
- [91] Lin, C.C. & Shu, F.H., 1966, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 55
- [92] Lin, C.C., Yuan, C., & Shu, F.H., 1969, *ApJ*, 155, 721
- [93] Lindblad, B., 1961, *StoAN*, 8
- [94] Lindblad, P. O., 1960, *Stockholm Obs Ann.*, 21, 4
- [95] Lindblad, P. A., Lindblad, P. O., & Athanassoula, E., 1996, *A&A*, 313, 65
- [96] Liszt, H.S. & Burton, W.B., 1980, *ApJ*, 236, 779
- [97] Long, K., Ostriker, J.P., & Aguilar, L., 1992, *ApJ*, 388, 362
- [98] López-Corredoira, M., Hammersley, P. L., Garzón, F., Simonneau, E., & Mahoney, T.J., *MNRAS*, 2000, 313, 392
- [99] Lynden-Bell, D. & Kalnajs, A.J., 1972, *MNRAS*, 157, 1
- [100] Martinet, L., 1974, *A & A*, 32, 329
- [101] Martini, P., Pogge, R.W., Ravindranath, S., An, J.H., 2001, *ApJ*, 562, 139
- [102] Martos, M.A. & Cox, D.P. 1998, *ApJ*, 509, 703 (MC)
- [103] Matsumoto, T., Hayakawa, S., Koizumi, H., Murakami, H., Uyama, K., Yamagami, T., & Thomas, J.A., 1982, *Proceedings of the Workshop, Pasadena, CA*
- [104] Mc. Millan, W.D., 1930, *The Theory of the Potential* (Dover Publications: New York)
- [105] Miller, R.H. & Smith, B. F., 1979, *ApJ*, 227, 785
- [106] Miyamoto, M. & Nagai, R., 1975, *Pub.Astr.Soc.Japan*, 27, 533
- [107] Monaghan, J.J., 1992, *ARA&A*, 30, 543
- [108] Morgan, W.W., Sharpless, S., & Osterbrock, D.E., 1952, *Astron.J.*, 57, 3
- [109] Nakada, Y., Deguchi, S., Hashimoto, O., Hizumiura, H., Onaka, T., Sekiguchi, K., & Yamamura, I., 1991, *Nature*, 353, 140
- [110] Nikolaev, S. & Weinberg, M.D., 1997, *ApJ*, 487, 885
- [111] Noordermeer, E., Sparke, L., & Levine, S., 2001, *MNRAS*, 328, 1064
- [112] Norman, C.A., Sellwood, J.A., & Hasan, H., 1996, *ApJ*, 462, 114
- [113] Norman, M., Stone, J., Clarke, D., 1991, *Astrophysical MHD Simulations in Two and Three Dimensions*, 20th Aerospace Sciences Meeting.
- [114] Oort, J.H., 1932, *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 6, 349
- [115] Oort, J.H., 1962, *Interstellar Matter in Galaxies*, ed. L. Woltjer (New York: W. A. Benjamin, Inc.), pp. 234-244
- [116] Oort, J.H., Kerr, F.J., Westerhout, G., 1958, *MNRAS*, 118, 379

- [117] Paczyński, B., Stanek, K.Z., Udalski, A., Szymanski, M., Kaluzny, J., Kubiak, M., Mateo, M., & Krzeminski, W., 1994, *ApJ*, 435, 113
- [118] Palous, J., Ruprecht, J., Dluhnevskaya, O.B., & Piskunov, T., 1977, *A&A*, 61, 27
- [119] Papayannopoulos, T. & Petrou, M., 1983, *A & A*, 119, 21
- [120] Pardi, M.C., Ferrini, F., & Matteucci, F., 1995, *ApJ*, 444, 207
- [121] Patsis, P.A., Contopoulos, G., & Grosbøl, P., 1991, *A & A*, 243, 373 (PCG)
- [122] Patsis, P.A., Efthymiopoulos, C., Contopoulos, G., & Voglis, N., 1997, 326, 493
- [123] Patsis, P.A. & Grosbøl, P., 1996, *A & A*, 315, 371
- [124] Peters, W.L., III, 1975, *ApJ*, 19, 617
- [125] Petrou, M. & Papayannopoulos, T., 1983, *MNRAS*, 219, 157
- [126] Pfenniger, D., 1984, *A& A*, 134, 373
- [127] Pichardo, B., Martos, M., Moreno, E., & Espesate, J., 2003, *ApJ*, 582, 230
- [128] Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., & Flannery, B.P., 1992, *Numerical Recipes in Fortran 77: The Art of Scientific Computing*, 2nd. ed. (Cambridge University Press: Cambridge)
- [129] Rand, R.J. & Lyne, A.G., 1994, *MNRAS*, 268, 497
- [130] Reynolds, R.J. 1989, *ApJ*, 339, L29
- [131] Rix, H. & Zaritsky, D., 1995, *ApJ*, 447, 82
- [132] Roberts, W.W. 1969, *ApJ*, 158, 123
- [133] Roberts, W.W. 1972, *ApJ*, 173, 259
- [134] Roberts, W. W., Jr., Huntley, J. M., & van Albada, G. D., 1979, *ApJ*, 233, 67
- [135] Rougoor, G.W. & Oort, J.H., 1960, *PNAS*, 46, 1
- [136] Rougoor, G.W., 1964, *BAN*, 17, 381
- [137] Sancisi, R., Allen, R.J., & Sullivan, W.T., III, 1979, *A&A*, 78, 217
- [138] Sanders, R.H. & Tubbs, A.D., 1980, *ApJ*, 235, 803
- [139] Sanders, R.H. & Prendergast, K.H., 1974, *ApJ*, 188, 489
- [140] Schmidt, M., 1956, *B. A. N.* 13, 15
- [141] Seigar, M.S. & James, P.A., 1998, *MNRAS*, 299, 685
- [142] Sellwood, J.A., 1980, *A&A*, 89, 296
- [143] Sellwood, J.A., 1987, *ARA&A*, 25, 151
- [144] Sellwood, J.A., 1991, *MNRAS*, 250, 278
- [145] Sevenster, M.N., 1999, *MNRAS*, 310, 629
- [146] Shane, W.W., 1971, *A&AS*, 4, 31
- [147] Sheth, K., Vogel, S.N., Regan, M.W., Teuben, P.J., Harris, A.I., & Thornley, M.D., 2002, *AJ*, 124, 2581
- [148] Shlosman, I. & Heller, C.H., 2002, *ApJ*, 565, 921
- [149] Sitnik, T. G., 1991, *IAUS*, 146, 91
- [150] Sparke, L.S. & Gallagher, J.S., 2000, *Galaxies in the Universe* (Cambridge University Press)
- [151] Sparke, L.S. & Sellwood, J.A., 1987, *MNRAS*, 225, 653
- [152] Spitzer, L., 1978, *Physical Processes in the Interstellar Medium* (J. Wiley & Sons: New York)
- [153] Stanek, K. Z.; Udalski, A.; Szymanski, M.; Kaluzny, J.; Kubiak, M.; Mateo, M.; Krzeminski, W., 1997, *ApJ*, 477, 163
- [154] Stone, J.M. & Norman, M.L. 1992a, *ApJS*, 80, 753
- [155] Stone, J.M. & Norman, M.L. 1992b, *ApJS*, 80, 791
- [156] Stone, J.M., Mihalas, D., & Norman, M.L. 1992, *ApJS*, 80, 819
- [157] Teuben, P. J. & Sanders, R. H., 1985, *MNRAS*, 212, 257
- [158] Toomre, A., 1964, *ApJ*, 139, 1217

- [159] Toomre, A., 1977, *ARA&A*, 15, 437
- [160] Toomre, A., 1981, *Proceedings of the Advanced Study Institute*, Cambridge University Press, p. 111-136.
- [161] Tremaine, S. & Weinberg, M. D., 1984, *ApJ*, 282, 5
- [162] Tubbs, A.D. 1980, *ApJ*, 239, 892
- [163] Valenzuela, J.O. & Klypin, A., 2002, *ApJ*, en imprenta
- [164] Vallée, J.P., 1995, *ApJ*, 454, 119
- [165] Vallée, J.P., 2002, *ApJ*, 566, 261
- [166] van Albada, T.S. & Sanders, R.H., 1982, *MNRAS*, 201, 303
- [167] van Den Bergh, S., 1998, "*Galaxy Morphology and Classification*", Ed. Cambridge Univ. Press
- [168] Vandervoort, P.O., 1979, *ApJ*, 232, 91
- [169] Vauterin, P. & Dejonghe, H., 1996, *A&A*, 313, 465
- [170] Weiland, J.L., Arendt, R.G., Berriman, G.B., Dwek, E., Freudenreich, H.T., Hauser, M., G., Kelsall, T., Lisse, C.M., Mitra, M., & Moseley, S.H., 1994, *ApJ*, 425, 81
- [171] Weinberg, M.D., 1992, *ApJ*, 384, 81
- [172] Weiner, B.J. & Sellwood, J.A., 1999, *ApJ*, 524, 112
- [173] Wielen, R., 1977, *A&A*, 60, 263
- [174] Wolf, A., 1986, in *Chaos*, Ed. A.V. Holden, (Manchester: Manchester Univ. Press.)
- [175] Zang, T. A. & Hohl, F., 1978, *ApJ*, 226, 521
- [176] Zhao, H., 1996, *MNRAS*, 278, 488
- [177] Zhao, H. & Mao, S., 1996, *MNRAS*, 283, 1197
- [178] Zhao, H., 2000, *MNRAS*, 316, 418

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN