00324

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

23

TITULO DE TESIS

NOTAS DE CLASE PARA EL CURSO DE GEOMETRÍA ANALÍTICA PARA BACHILLERATO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

ACTUARÍA

P R E S E N T A :

María Fragoso Sandoval

NOMBRE DEL DIRECTOR DE TESIS:

M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes

2003

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

PAGINACIÓN DISCONTINUA

UNIVERSIDAD NACIONAL
AVPNMA DE
MEXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Fragoso Sandoval María
FECHA: 10/Marzo/2003
FIRMA:

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Notas de clase para el curso de Geometría Analítica para bachillerato."

realizado por María Fragoso Sandoval

con número de cuenta 08811970-4, quién cubrió los créditos de la carrera de Actuaría

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis
Propietario M. en A.P. María del Pilar Alonso Reyes

Propietario M. en C. José Antonio Flores Díaz

Propietario Ing. Enrique Lemus Vázquez

Suplente M. en C. Lourdes Guerrero Zarco

Suplente M. en C. Agustín Ontiveros Pineda

Consejo Departamental de Matemáticas.

M. en C. JOSE ANTONIO FLORES DIAZ

CONSEJO DEPARTAMENTAL
DE
MATEMATICAS

1-A

A MI MADRE

AGRADECIÉNDOLE INFINITAMENTE CUANTO HIZO POR MÍ, ASÍ COMO EL APOYO QUE ME BRINDO DURANTE LOS AÑOS MI CARRERA.

A MI ASESORA

QUIEN ME OTORGA SU TIEMPO, IDEAS Y SUGERENCIAS QUE ME HIZO A LO LARGO DEL TEXTO.

A MI SOBRINO JAVIER

QUIEN ME ENSEÑO LA FORTALEZA Y PERSEVERANCIA POR ALCANZAR LOS OBJETIVOS DESEADOS; QUE A PESAR DE TODOS LOS OBSTÁCULOS EN EL TRAYECTO, SE PUEDEN LOGRAR MIENTRAS SE TENGA VIDA.

A MI HIJO VÍCTOR

QUIEN ME OTORGO LA MOTIVACIÓN PARA ALCANZAR UNA DE MIS METAS... OBTENER EL TITULO PROFESIONAL.

ÍNDICE

UNIDAD I

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

UNIDAD II

LA LÍNEA RECTA.

UNIDAD III

CIRCUNFERENCIA

UNIDAD IV.

LAS CÓNICAS.

INTRODUCCIÓN

Con la presente tesis se tiene como objetivo presentar de una manera más sencilla y accesible la Geometría Analítica a un estudiante de bachillerato. Se pretende que el estudiante establezca el primer acercamiento con esta rama de las matemáticas de una manera gráfica, intuitiva y formal.

La estrecha relación entre las gráficas y expresiones algebraicas característica de la Geometría Analítica, se aprovecha para promover al estudiante la adquisición de las habilidades en los procesos de modelación matemática en la resolución de problemas. En particular se privilegia la ejercitación en la articulación entre representaciones algebraicas de las cónicas y sus correspondientes representaciones gráficas para el reconocimiento de formas.

La tesis esta dividida en cuatro unidades, en cada una se presenta un tema dando una breve explicación, se dan ejemplos resueltos y se proponen una serie de ejercicios para que resuelva el estudiante, con la finalidad de reforzar los conocimientos y habilidades adquiridas dentro de cada unidad.

En la primera unidad llamada Conceptos Fundamentales, tiene por objetivo introducir y resolver problemas relacionados con segmento de recta, tales como: distancia entre dos puntos, división de un segmento dada una razón , el punto medio de un segmento, la pendiente de una recta y por último el ángulo comprendido entre dos líneas rectas que se cortan. Esta unidad es fundamental para poder deducir las ecuaciones tanto de las rectas así como para determinar los puntos y segmentos de la circunferencia o en su defecto de las cónicas en sí.

En la segunda unidad la Línea Recta, tiene por objetivo que el estudiante identifique las diversas formas en que se puede representar la ecuación de la recta, sin que el estudiante las vea de forma aislada sino que estas distintas formas de representar a la ecuación de la recta le sirvan para plantear de la manera mas sencilla un problema, así como la representación gráfica del mismo.

La tercera unidad, la Circunferencia, tiene como objetivo identificar las distintas maneras en que se pueden representar la ecuación de una circunferencia en forma ordinaria y General, así como determinar la ecuación de una circunferencia dados tres puntos, también se presentan algunos problemas en las que se involucran puntos y segmentos de la circunferencia.

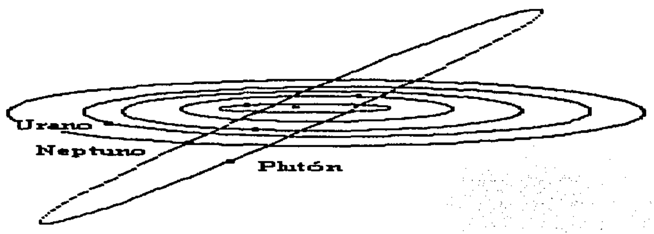
Por último la cuarta unidad titulada las Cónicas, su objetivo es conocer como se generan cada una de estas, como la parábola, la elipse y la hipérbola, en la resolución de diferentes problemas de aplicación en las diversas áreas de la ciencia.

Es preciso recordar que en la Geometría Analítica forma parte de uno de los bloques de la Matemática del bachillerato, esto implica que su comprensión es un antecedentes importante para ascender al Cálculo. Es relevante señalar que no todos los estudiantes, tienen el interés, la habilidad y prerrequisitos matemáticos iguales; por lo cuál sería una buena sugerencia el inclinarse por una enseñanza diferencial; es decir conducir las actividades de acuerdo a las diferencias que presentan los estudiantes, esto no quiere decir de ninguna manera bajar el nivel del curso sino adaptar su exigencia de acuerdo a las diferencias individuales.

UNIDAD I

FUNDAMENTOS

La geometría analítica es un medio que permite modelar fenómenos físicos para poder entender con mayor precisión los fenómenos tales como las trayectorias que siguen los planetas, cometas, lanzamiento de un objeto, etc. La palabra "geometría " significa " medida de la tierra".



EL PLANO

COORDENADAS CARTESIANAS EN EL PLANO

En la vida diaria se encuentran diversos problemas como el de la localización, por ejemplo si se busca una calle y le muestran a uno un plano de la zona que transita, el problema se transforma en entender el plano, localizar en dónde se está situado con respecto al plano, encontrar el lugar al que se quiere trasladar y contextualizar lo que ha realizado en el plano para saber en que dirección se debe continuar. Los planos de las ciudades generalmente están representados por un sistema de coordenadas.

Ahora se está preparado para entender la descripción precisa del modelo analítico de un plano euclidiano. Este modelo se llamará el " plano euclidiano analítico simplemente "plano euclidiano". El plano euclidiano se denota por R^2 (léase "R dos"). Los puntos de R^2 son los pares ordenados (x, y) de R^2. En otras palabras un sistema de coordenadas cartesianas es el conjunto formado por todos los pares ordenados (x, y) que puedan existir, de los elementos de dos conjuntos A y B.

Si el conjunto A está formado por los elementos -1, 0, 1 y el conjunto B por -1, 0,1 ,2 ; el producto cartesiano de los conjuntos A y B, denotado como A x B estará dada por:

A x B =
{(-1,-1), (-1,0), (-1, 1), (-1,2), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (0,2), (1,-1), (1,0), (1,1), (1,2) }
Con
A = { -1, 0, 1 } y B ={ -1, 0, 1, 2 }

Al graficar el producto cartesiano A x B, se definen los ejes de coordenadas, uno de ellos representa al conjunto A (Eje horizontal) y el otro al conjunto B (Eje vertical), tal como se muestra en la Figura 1.

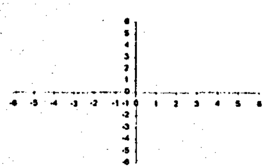


Figura 1. Sistemas de coordenadas cartesianasde los conjuntos A y B.

El sistema así formado se le llama sistema de coordenadas cartesianas de los conjuntos A y B. La palabra "cartesiana " se emplea en honor al matemático Franco Descartes, quien fue el primer hombre de ciencia, que introdujo el concepto de producto cartesiano.

Sobre el sistema de ejes cartesianos de los conjuntos A y B que se muestran en la figura1, cada par ordenado del producto cartesiano A x B, representa un punto tal como se muestra en la figura 2.

En la geometría analítica, en cada eje se utiliza al conjunto de los números reales, llamándosele por lo general al eje horizontal X y el eje vertical Y, tal y como se observa en la figura 3, donde también se muestra a un punto cualquiera , cuyo par ordenado es (x, y).

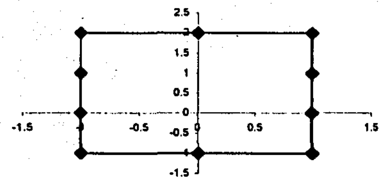


Figura 2. Los puntos que representan cada par ordenado del producto cartesiano A x B.

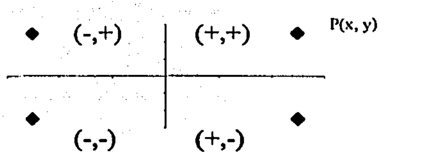


Figura 3. Sistema de ejes cartesiano . Tanto el eje X como el eje Y representan al conjunto de los números reales.

COORDENADAS CARTESIANAS DE UN PUNTO CUALQUIERA.

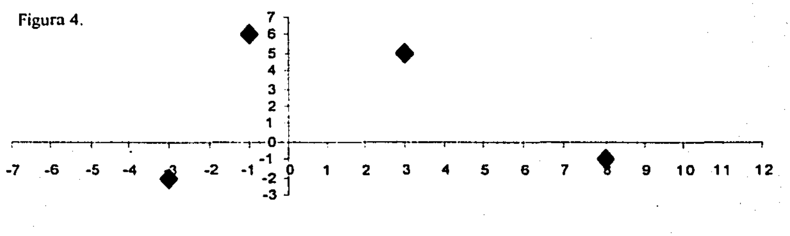
Cualquier punto en este sistema de coordenadas, se localiza por medio de una abscisa "x" y una ordenada "y". Los valores de la abscisa positivos se cuentan desde el origen hacia la derecha y del origen hacia la izquierda se miden los valores negativos . En el eje "y", de las ordenadas las cantidades que son positivas se encuentran hacia arriba del origen y hacia abajo las negativas.

Una forma conveniente de localizar a un punto p(x, y), en un sistema de coordenadas cartesianas "X y Y". Se muestra en la figura 3. Primero se cuenta la magnitud de la abscisa "x" y sin despegar la punta del lápiz se cuenta la magnitud positiva o negativa de la ordenada "y", el punto p(x, y) queda localizado donde se termina la magnitud de Y.

Ejemplo: Localizar los puntos en el plano (figura 4.)

A (3, 5)
B (-1, 6)
C (-3, -2)
D (8, -1)

Figura 4.



RECTAS PARALELAS A LOS EJES.

Los puntos que se encuentran sobre los ejes tienen al menos una coordenada igual a cero. Los que están sobre el eje "x" son del tipo (x, 0); los que están sobre el eje "y" son del tipo (0, y) . Al punto donde se cortan los dos ejes se le llama origen y le corresponde a la pareja (0,0).

Si se toma los puntos con la segunda coordenada idéntica; o sea, son de la forma (x, y_1) donde y_1 es un número fijo, se obtendrá la recta: L_1 (Ver Figura 5.)

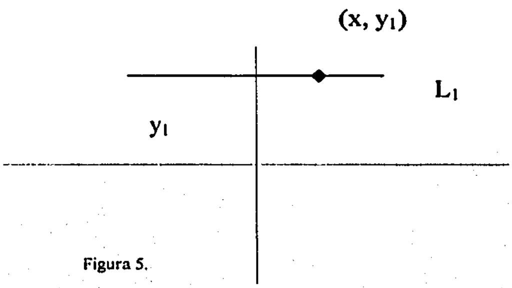


Figura 5.

Si se toma un punto con coordenadas – (x_1, y_1), este punto está sobre L_1 y, al revés, todo punto de L_1 tiene coordenadas de esa forma. Por ello si se identifica a los puntos del plano con sus coordenadas, la recta L_1 es el conjunto de pares (x, y_1) donde x es cualquier número. Esto también se escribirá abreviadamente así:

$L_1 = \{ (x, y_1) \mid x \text{ es un número cualquiera} \}$.

Nota: Lo anterior se lee así, L_1 es el conjunto de parejas ordenadas (x, y_1), tal que x es un número cualquiera.

Las rectas paralelas al eje " y" tienen todos sus puntos a una misma distancia de el, por lo que todos sus puntos tienen su primera coordenada idéntica.

Los puntos de la recta L_2 de la figura 6. tienen todas sus coordenadas de la forma (x_1,y), siendo y un número arbitrario; y, a su vez, todo punto de este estilo está sobre L_2 por lo que se puede transcribir:

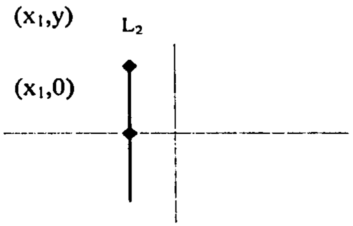


Figura 6.

$L_2 = \{ (x_1, y) \mid y$ es cualquier número$\}$

x_1

Nota: Lo anterior se lee así, L_2 es el conjunto de parejas ordenadas (x_1 , y) tal que y es un número cualquiera.

SEMIPLANOS.

En la figura 7, se ha rayado la región que está por encima de la recta L_1.

Todos los puntos de esta región tienen una propiedad en común; a saber, que su segunda coordenada es mayor que y_1. Así:

$$L_1 = \{ (x, y_1) \mid x \text{ es un número cualquiera}\}$$

y la región rayada en la figura 6, es el conjunto:

$$S_1 = \{ (x, y) \mid x \text{ es un número cualquiera y , } y > y_1 \}$$

S_1 es uno de los semiplanos que tienen por borde a L_1. El otro semiplano, S_2, rayado en la figura 8, es el siguiente conjunto:

$$S_2 = \{ (x, y) \mid x \text{ es un número cualquiera y , } y < y_1 \}$$

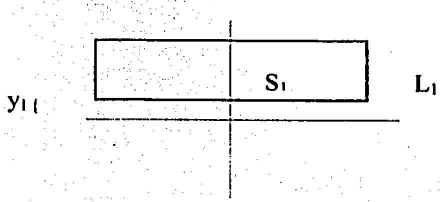


Figura 7

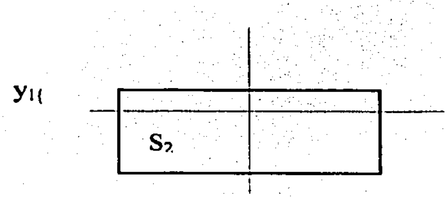


Figura 8

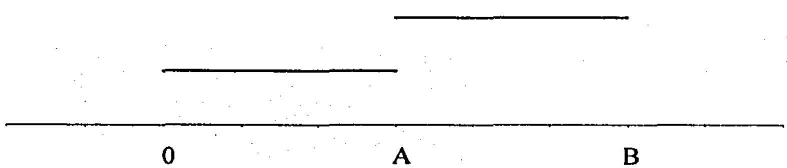
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

Cualquier segmento $\overline{AB}$ como se muestra en la figura 9, se define como:

$\overline{AB} = \{x \,/\, A \leq x \leq B\}$

Figura 9 Segmento de recta $\overline{AB}$

Lo cual indica que el segmento $\overline{AB}$ está formado por el conjunto de puntos que van desde el punto A y terminan en el punto B. El sentido del segmento es determinado por el signo que contiene, o bien por la notación $\overline{AB}$, la cuál indica que el segmento empieza en el punto A y termina en el punto B. La magnitud del segmento es dada por el valor absoluto de él, lo cual se denota como $\overline{AB}$.



En geometría analítica, la solución de los problemas pueden realizarse por dos métodos uno de ellos es el método gráfico y el otro el analítico.

El método gráfico, consiste en consultar la gráfica proporcionada por el problema y dar la solución. El método analítico, consiste en resolver el problema empleando el razonamiento matemático, junto con la utilización de expresiones algebraicas.

En general se aprecia que para dos puntos cualesquiera $p_1(x_1)$ y $p_2(x_2)$ de un segmento dirigido $\overline{p_1 p_2}$. (figura 10) , la magnitud de la distancia de ese segmento está dada por el valor absoluto de la diferencia del valor numérico del punto final del segmento, menos el valor numérico del punto inicial.

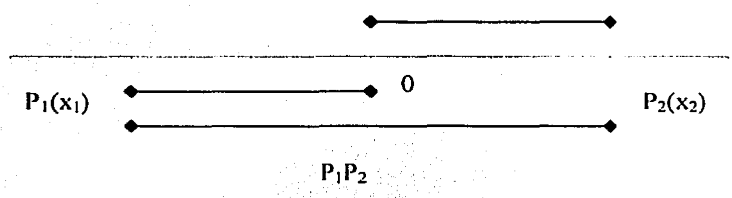


Figura 10. Segmento rectilíneo cualquiera p_1p_2.
$D = | x_2 - x_1 |$

El sentido del segmento lo determina el signo de la diferencia $x_2 - x_1$.

Demostración:

Se aprecia que la suma de los segmentos $\overline{p_1 0} + \overline{0 p_2}$ es igual a $\overline{p_1 p_2}$, esto es:

$\overline{p_1 0} + \overline{0 p_2} = \overline{p_1 p_2}$ ... (a)

Si se llama d a la distancia entre los puntos p_1 y p_2, se tiene:

$\overline{p_1 p_2} = d, \quad \overline{p_1 0} = \overline{-0 p_1} = -x_1, \quad \overline{0 p_2} = x_2$

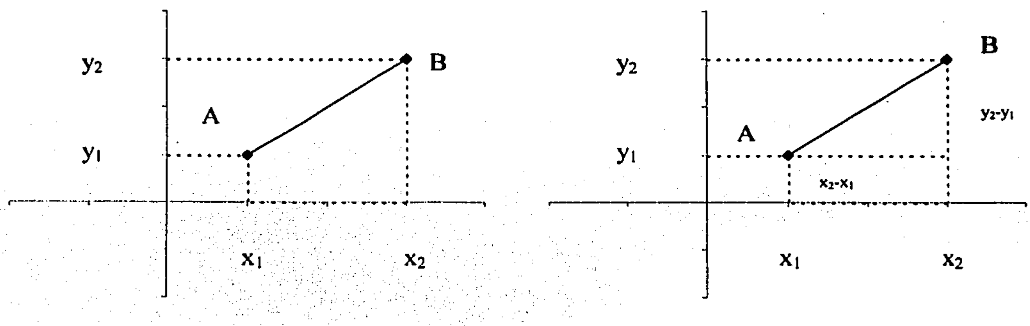
Sustituyendo en la expresión (a) se tiene: $d = x_2 - x_1$.

Con esta diferencia se obtiene el sentido del segmento; si la diferencia es mayor que cero, el sentido es positivo y si la resta es menor que cero, el sentido es negativo. La magnitud del segmento dirigido será: $\mathbf{d = | x_2 - x_1 |}$.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN EL PLANO.

La distancia entre dos puntos en el plano es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la diferencia entre las abscisas y la diferencia entre las ordenadas.

Si a los puntos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2) que se muestran en la figura 11, se les dibuja sobre el sistema de coordenadas cartesianas sus abscisas y ordenadas correspondientes serán:



Si el punto A (x1, y1) se traza una paralela, al eje X se tendrá. x2

Figura 11. Sistema de coordenadas cartesianas mostrando la distancia que existe entre los puntos A(x_1, y_1) y B(x_2, y_2).

Nótese por medio de la figura 11, que el segmento rectilíneo resultante de trazar una paralela al eje X, a partir del punto A(x_1,y_1), hasta el punto de intersección con el segmento de recta que determina la ordenada y_2, tiene como magnitud a x_2-x_1. Este segmento, con el segmento rectilíneo que existe entre los puntos $\overline{AB} = d$ y el segmento y_2-y_1 , forman un triángulo rectángulo.

De acuerdo al teorema de Pitágoras que dice. El cuadrado de la hipotenusa (d^2) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos $(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$, algebraicamente se representa como:

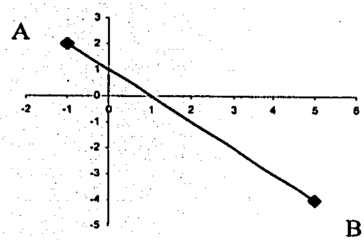
$$d^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2.$$

Despejando a la distancia, se observa que el cuadrado se transmuta al otro miembro de la igualdad como raíz cuadrada, esto es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \textbf{... Fórmula (1)}$$

EJEMPLOS:

1. Calcular la distancia que existe entre los puntos A(-1, 2) y B(5, -4).



Analíticamente se sabe que la distancia se obtiene de la ecuación .

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Si se hace arbitrariamente a:

A(-1,2)= A(x_1, y_1) y B(5,-4) = B(x_2, y_2)

Al sustituir estos valores en la fórmula de distancia, se tiene:

x_1= -1, x_2= 5, y_1= 2, y_2= -4

$$d = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-4-2)^2}$$
$$d = \sqrt{(5+1)^2 + (-6)^2}$$
$$d = \sqrt{(6)^2 + 36}$$
$$d = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 8.4$$

Al hacer la medición directa sobre la figura se aprecia que la distancia entre los puntos A y B es aproximadamente 8.3.

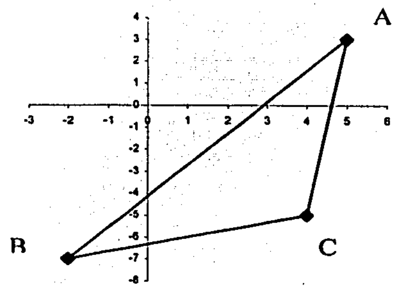
2. Obtener el perímetro del triángulo determinado por los puntos A(5,3), B(-2,-7) y C(4, -5)

Primero se ubicarán los puntos en plano cartesiano, se unirán posteriormente para obtener la solución gráfica para razonar la solución analítica.

De acuerdo al concepto de perímetro (P), de cualquier triángulo se determina sumando la magnitud de sus lados, en este caso según la figura será:

$P = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}.$

Para poder sumar los lados del triángulo ABC, se debe primero calcular la magnitud de los lados, es decir hay que evaluar la distancia que existe entre los puntos A y B; B y C; C y A.



Si $d_1 = d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

con A(5, 3) = A (x_1, y_1) y B(-2 , -7) = B(x_2, y_2)
Sustituyendo el valor de las coordenadas en la fórmula (1)

$$d_1 = \sqrt{(-2-5)^2 + (-7-3)^2}$$
$$d_1 = \sqrt{(-7)^2 + (-10)^2}$$
$$d_1 = \sqrt{49+100} = \sqrt{149} = 12.2$$

Evaluando el lado $\overline{BC} = d_2$ con B(-2, -7) = B (x_1, y_1) y C(4, -5) = C(x_2, y_2). Al sustituirlo en la fórmula (1) se tiene:

$$d_2 = \sqrt{(4-(-2))^2 + (-5-(-7))^2}$$
$$d_2 = \sqrt{(4+2)^2 + (-5+7)^2}$$
$$d_2 = \sqrt{(6)^2 + (2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 6.3$$

Cálculo del lado CA = d_3, para C(4, -5) = C(x_1, y_1) y A(5, 3) = A (x_2, y_2). Sustituyendo en la fórmula (1) se tiene:

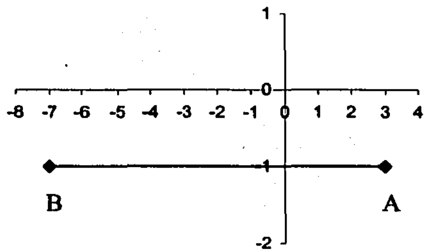
$$d_3 = \sqrt{(5-4)^2 + (3-(-5))^2}$$
$$d_3 = \sqrt{(1)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{1+(8)^2}$$
$$d_3 = \sqrt{1+64} = \sqrt{65} = 8.06$$

Ya teniendo el valor de cada lado del triángulo ABC, se suman para obtener el perímetro, tal como se había mencionado.

P = 12.2 + 6.3 + 8.0 = 26.5 (solución aproximada)

3. Si la distancia entre los puntos A(3, -1) y B (-7, y) es 10, obtener la ordenada del punto B.

De acuerdo con la figura, la evaluación de la ordenada del punto B(-7, y), será un – punto de la recta discontinua que muestra la gráfica, tal punto tiene la condición de – que su distancia al punto A es igual a 10. Tentativamente el esquema muestra que el valor de la ordenada es -1.



Analíticamente al emplear la expresión algebraica de la distancia entre dos puntos para d = 10, A(3, -1) = A(x_1, y_1) y B(-7, y) = B (x_2, y_2)

Se tiene:

$$
\begin{aligned}
d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\
10 &= \sqrt{(-7-3)^2 + (y-(-1))^2} \\
(10)^2 &= \left(\sqrt{(-10)^2 + (y+1)^2}\right)^2 \\
100 &= (-10)^2 + (y+1)^2 \\
100 &= 100 + (y+1)^2 \\
100 - 100 &= (y+1)^2 \\
0 &= (y+1)^2 \\
\sqrt{0} &= \sqrt{(y+1)^2} \\
0 &= y+1 \\
y &= -1
\end{aligned}
$$

Las coordenadas del punto B son: B(-7, -1)

4. Demostrar que los puntos A(-4 , 4), B(-2, 2), C(3, -3) son colineales.

Los puntos A, B, y C son colineales si:

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}.$$

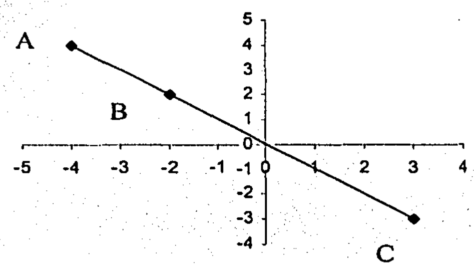
Entonces sustituyendo en la fórmula (1), se tiene:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2-(-4))^2 + (2-4)^2} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2.82$$

$$\overline{BC} = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 7.07$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(3-(-4))^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{(7)^2 + (-7)^2} = \sqrt{49+49} = \sqrt{98} = 9.89$$

$\overline{AB} + \overline{BC} = 2.83 + 7.07 = 9.9 = \overline{AC}.$ Por lo tanto A, B, y C. Son colineales.



DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA.

División de un segmento en un razón dada. Se considera al segmento $\overline{p_1 p_2}$ que se muestra en la figura 12. Dividido por el punto p(x, y) con una razón : $r = \dfrac{\overline{p_1 p}}{\overline{p p_2}}$

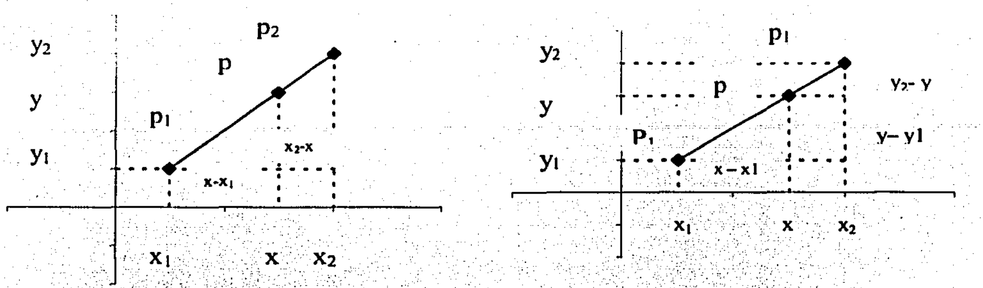


Figura 12. Segmento de recta determinado por los puntos $\overline{p_1 p_2}$ y dividido por una razón $r = \frac{\overline{p_1 p}}{\overline{pp_2}}$ en el punto p(x, y). En la figura de la derecha sólo se trazaron paralelas al eje x desde cada punto para que se aprecien mejor las conclusiones.

Recordando los conceptos geométricos, cuando se tienen dos o más rectas paralelas cortadas por dos transversales los segmentos que determinan son proporcionales, en este caso se tienen las paralelas y_1 y y_2 cortadas por las transversales $\overline{p_1 p_2}$ y el eje de las x, definiéndose a los segmentos $\overline{p_1 p}, \overline{pp_2}$, $x-x_1$, y x_2-x, según la figura 12, obsérvese; por lo tanto:

$$\frac{\overline{p_1 p}}{\overline{pp_2}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} \quad , \quad pero\,\frac{\overline{p_1 p}}{\overline{pp_2}} = r$$ se tiene:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = r$$

$$x - x_1 = r(x_2 - x)$$

$$x - x_1 = rx_2 - rx$$

$$x + rx = x_1 + rx_2$$

$$x(1 + r) = x_1 + rx_2$$

$x = \dfrac{x_1 + rx_2}{1 + r}$ con esta expresión se calcula la abscisa x del punto p(x, y) que divide al segmento $\overline{p_1 p_2}$ a una razón r diferente de -1.

Para calcular la ordenada y del punto p(x, y), que divide al segmento $\overline{p_1 p_2}$ obsérvese la figura 11, ahora las paralelas x_1, x, x_2 cortadas por la transversal $\overline{p_1 p_2}$ y el eje y definen a los segmentos $\overline{p_1 p}$, $\overline{pp_2}$, y - y_1, y_2 - y; por lo tanto se tiene:

$$\frac{\overline{p_1 p}}{\overline{pp_2}} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}, \quad pero \frac{\overline{p_1 p}}{\overline{pp_2}} = r \quad \text{se tiene:}$$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y} = r \text{ despejando la coordenada y:}$$

$$y - y_1 = r\,(y_2 - y)$$

$$y - y_1 = r\,y_2 - ry$$

$$y + ry = y_1 + ry_2$$

$$r\,(1 + r) = y_1 + ry_2$$

$r = \dfrac{y_1 + ry_2}{1 + r}$, con esta expresión se evalúa la ordenada y del punto p(x, y) que divide al segmento $\overline{p_1 p_2}$ a la razón r diferente de -1, las coordenadas de este punto también puede representarse como:

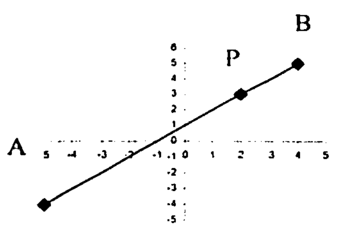
$$P(x, y) = \left(\frac{x_1 + rx_2}{1 + r}, \frac{y_1 + ry_2}{1 + r} \right) \qquad \text{. . . } \textbf{Fórmula(2)}$$

EJEMPLOS:

1. Calcular la razón con que el punto P(2, 3) divide al segmento $\overline{AB}$ definido por los puntos A(-5, -4) y B (4, 5).

Como el punto P(2, 3) se encuentra entre los puntos A y B, la razón que se calculará debe de ser positiva. Se sabe que la razón con que el punto (x, y) divide a un segmento es $r = \dfrac{\overline{p_1 p}}{\overline{pp_2}}$, por lo tanto nótese que el problema se reduce a obtener la distancia que existe entre los puntos A(-5, -4), P(2, 3) y los puntos P(2, 3), B(4, 5), para obtener el cociente de estas magnitudes:

Sustituyendo en la fórmula(1), se tiene:

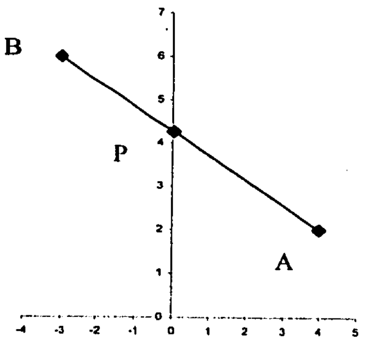


$$\overline{AP}=\sqrt{(2-(-5))^2+(3-(-4))^2}=\sqrt{(7)^2+(7)^2}=\sqrt{49+49}=\sqrt{98}=9.8$$

$$\overline{PB}=\sqrt{(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{(2)^2+(2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2.82$$

Por lo tanto $r = 9.8 / 2.82 = 3.4$

2. Calcular las coordenadas del punto P(x, y) que divide con una razón de 1.3 al vector cuyos punto inicial y final son A(4, 2) y B(-3, 6) respectivamente.



Se sabe que las coordenadas del punto P(x, y) son:

$$P(x,y)=\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r},\frac{y_1+ry_2}{1+r}\right)$$

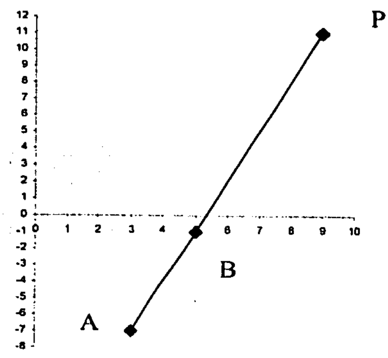
Con $r = 1.3$, $A(4, 2) = A(x_1, y_1)$ y $B(-3, 6) = B(x_2, y_2)$. Sustituyendo en P

$$P\left(\frac{4+1.3(-3)}{1+1.3},\frac{2+1.3(6)}{1+1.3}\right)$$

$$P\left(\frac{4-3.9}{2.3},\frac{2+7.8}{2.3}\right)$$

$$P\left(\frac{0.1}{2.3},\frac{9.8}{2.3}\right)=(0.04,4.26)$$

3. Los puntos que definen a un vector son A(3, -7) y B(5, -1), calcular las coordenadas del punto P(x, y) que divide al segmento en una razón de -1.5, si $r = -1.5$, A(3,-7) y B(5, -1) .



Se sabe que las coordenadas del punto P(x,y) que divide al vector, se evalúan por medio de la fórmula (2). Sustituyendo valores.

$$P\left(\frac{3+(-1.5)(5)}{1+(-1.5)},\frac{-7+(-1.5)(-1)}{1+(-1.5)}\right)$$
$$P\left(\frac{3-7.5}{1-1.5},\frac{-7+1.5}{1-1.5}\right)$$
$$P\left(\frac{-4.5}{-0.5},\frac{-5.5}{-0.5}\right)$$
$$P(9,11)$$

EL PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

Si P(x, y) es un punto que divide al segmento $\overline{P_1P_2}$ en su punto medio la razón es igual a la unidad, por lo tanto se sustituye r = 1 en $P\left(\frac{x_1+rx_2}{1+r},\frac{y_1+rx_2}{1+r}\right)$, se obtendrán las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{p_1p_2}$

$$P_M\left(\frac{x_1+(1)x_2}{1+1},\frac{y_1+(1)y_2}{1+1}\right)$$
$$P_M\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$
$$P_M(x,y)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)\ .\ .\ .\ \textbf{Fórmula (3)}$$

EJEMPLOS:

1. Determinar las coordenadas del punto medio del segmento $\overline{AB}$, determinados por los puntos A(3, -5) y B(2,7).

El punto medio del segmento $\overline{AB}$, se obtiene por medio de la fórmula (3).

Con A(3, -5) = A(x_1, y_1) y B(2, 7) = B(x_2, y_2).

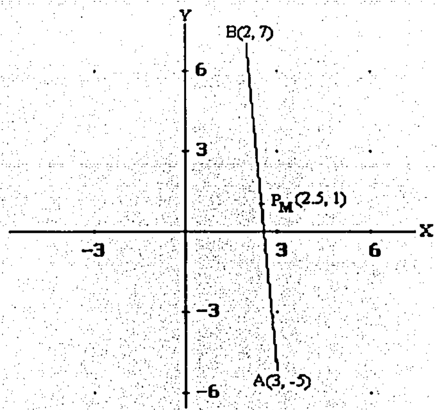
Sustituyendo:

$$P_M(x,y) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

$$P_M = \left(\frac{3+2}{2}, \frac{-5+7}{2}\right)$$

$$P_M = \left(\frac{5}{2}, \frac{2}{2}\right)$$

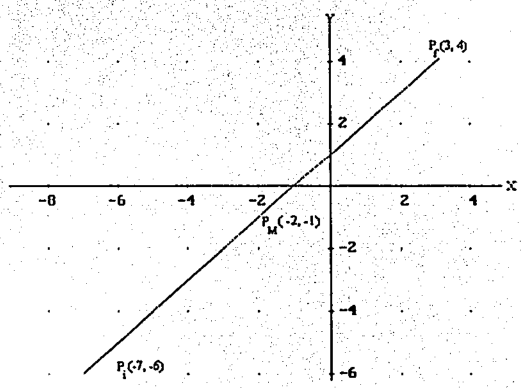
$$P_M = (2.5, 1)$$



2. Si el punto medio de un vector es (-2, -1) y su punto final (3, 4), calcular las coordenadas del punto inicial.

Se sabe que el punto medio de un segmento se computa por medio de la formula (3), - - donde P_M =(x_M, y_M) proporciona a:

$$x_M = \frac{x_1+x_2}{2}, \quad y_M = \frac{y_1+y_2}{2}$$

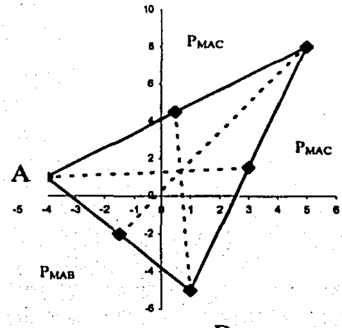


Si las coordenadas de P_f(3, 4) = P_f(x2, y2) y el P_M(-2, 1) = P_M(x_M, y_M), sustituyendo en la expresión anterior, solo hay que despejar a x_1, y_1, esto es:

$$\begin{aligned} -2 &= \frac{x_1+3}{2} \\ -2(2) &= x_1+3 \\ -4 &= x_1+3 \\ -4-3 &= x_1 \\ -7 &= x_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} -1 &= \frac{y_1+4}{2} \\ -1(2) &= y_1+4 \\ -2 &= y_1+4 \\ -2-4 &= y_1 \\ -6 &= y_1 \end{aligned}$$

Las coordenadas del punto inicial P_i(-7, -6)

3. Calcular la magnitud de las medianas del triángulo A(-4,1) , B(1,-5) y C(5,8).



La mediana es la distancia que existe entre el vértice de un triángulo y el punto medio del lado opuesto, por lo tanto , para resolver el problema primero se obtiene el punto medio de los lados del triángulo. Utilizando la fórmula (3)

$$P_M(x,y)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

Calculando los puntos medios de $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$.

$$P_M AB=\left(\frac{-4+1}{2},\frac{1-5}{2}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{-4}{2}\right)=(-1.5,-2)$$

$$P_M BC=\left(\frac{1+5}{2},\frac{-5+8}{2}\right)=\left(\frac{6}{2},\frac{3}{2}\right)=(3,1.5)$$

$$P_M CA=\left(\frac{5-4}{2},\frac{8+1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{9}{2}\right)=(0.5,4.5)$$

Sobre la figura de este problema se localizan estos puntos medios y se trazan las medianas. Ahora se procede a evaluar a las medianas empleando la ecuación de distancia (fórmula (1)). $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Para la mediana de $\overline{AP_{MBC}}=d_1$, con A(-4, 1) = A(x_1, y_1) y $P_{M\overline{BC}}$(3, 1.5)= $P_{M\overline{BC}}$(x_2, y_2)

$$d_1=\sqrt{(3-(-4))^2+(1.5-1)^2}=\sqrt{(7)^2+(0.5)^2}=\sqrt{49+0.25}=\sqrt{49.25}=7.01$$

Para la mediana que va del vértice B al punto medio del lado $\overline{AC}$, se tiene que d_2 = $\overline{BP_{MAC}}$, con B(1, -5) = B(x_1, y_1) y $P_{M\overline{AC}}$(0.5, 4.5) = $P_{M\overline{AC}}$(x_2, y_2)

$$d_{21}=\sqrt{(0.5-1))^2+(4.5-(-5))^2}=\sqrt{(-0.5)^2+(9.5)^2}=\sqrt{0.25+90.25}=\sqrt{90.5}=9.51$$

Para la mediana que va del vértice C al punto medio del lado AB, se tiene que $d_3 = CP_{MAB}$, con $C(5, 8) = C(x_1, y_1)$ y $P_{MAB}(-1.5, -2) = P_{MAB}(x_2, y_2)$

$$d_3 = \sqrt{(-1.5-5)^2+(-2-8)^2} = \sqrt{(-6.5)^2+(-10)^2} = \sqrt{42.25+100} = \sqrt{142.25} = 11.92$$

Obsérvese que las tres medianas se cortan en un punto de intersección el cual se le conoce como baricentro y sus coordenadas se encuentran fácilmente por medio de la siguiente expresión:

$$B\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right) \quad \textbf{... Fórmula (4)}$$

Para cualquier triángulo definido por los puntos $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2, y_2)$, $p_3(x_3, y_3)$. Para el triángulo definiremos a $A(-4, 1) = A(x_1, y_1)$, $B(1, -5) = B(x_2, y_2)$, $C(5, 8) = C(x_3, y_3)$. Sustituyendo:

$$B\left(\frac{-4+1+5}{3}, \frac{1-5+8}{3}\right) = B\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) = (0.66, 1.33)$$

LUGAR GEOMÉTRICO.

En aplicaciones matemáticas, no sólo se presenta el problema de encontrar el conjunto de puntos que satisfacen una relación dada en el lenguaje algebraico, sino que además, es común tener que resolver el problema inverso, es decir, determinar la regla de correspondencia en el lenguaje algebraico de un conjunto de puntos que satisfacen una o varias propiedades.

El conjunto de puntos que tiene una propiedad (o varias) en común, es un subconjunto de los puntos en el plano.

En el plano coordenado el subconjunto de puntos que satisfacen una o varias propiedades determinadas, con exclusión de todos los demás puntos en el plano, recibe el nombre de lugar geométrico.

Un lugar geométrico se define por una o varias propiedades geométricas que comúnmente están expresadas en palabras.

Ejemplos de lugares geométricos:

1) ***Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de dos puntos fijos A y B.***

Este lugar geométrico corresponde a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$; por ejemplo se cumple que la distancia del punto A al punto C es igual a la distancia del punto B al C, igualmente para los puntos D, E, F y cualquier otro sobre la mediatriz del segmento (Figura 13).

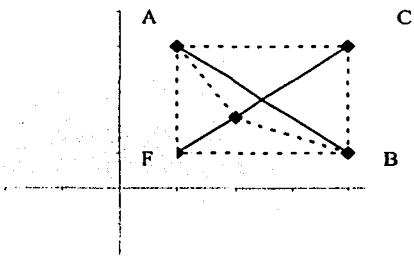


Figura 13

2) ***Lugar geométrico de los puntos del plano cuya ordenada es igual a cero.*** Este lugar geométrico corresponde al eje de las abscisas, ya que para cualquier valor que tome la variable **x, R** el valor de la ordenada cumple con la propiedad de ser igual a cero (Figura14)

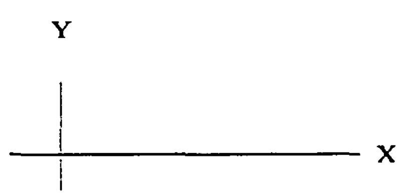


Figura 14

3) ***Lugar geométrico de los puntos del plano cuya abscisa es igual a cinco.*** Este lugar geométrico corresponde a una recta paralela al eje de las ordenadas, ya que para cualquier valor de la variable **y, R** el valor de las abscisas cumple con la propiedad de ser igual cinco. (Figura 15)

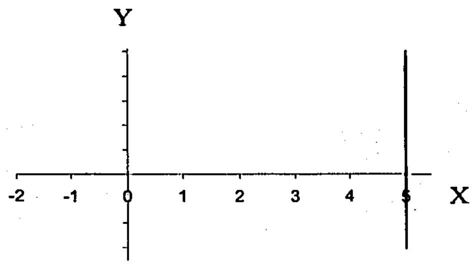


Figura 15

4) ***Lugar geomerrico de todos los puntos en el plano que equidistan de un punto dado (A).*** Este lugar geométrico corresponde a una circunferencia, ya que la distancia, siempre es la misma. Por ejemplo, la distancia del punto B al punto A es la misma que la distancia del punto C al punto A, etc. (Figura 16).

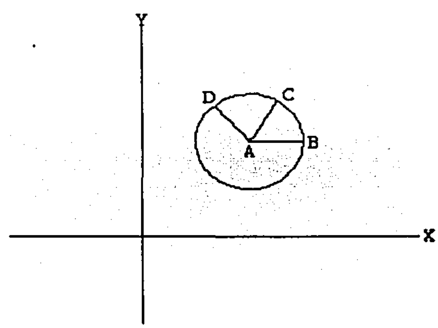


Figura 16

5) ***Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo (A) y una recta (ℓ).*** Este lugar geométrico corresponde a una parábola. Por ejemplo, la distancia del punto C al punto A es la misma que la distancia del punto B al punto A es la misma distancia del punto B a la recta *ℓ*. y la distancia del punto B al punto A es la misma distancia del punto B a la recta *ℓ*, etc. (Figura 17)

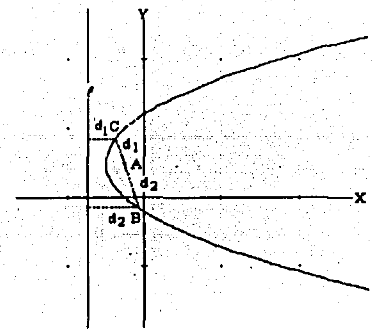


Figura 17

6) ***Lugar geométrico de los puntos en el plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos (F_1 y F_2) es constante.*** Este lugar geométrico corresponde a una elipse. Por ejemplo, la distancia del punto F_1 al pinto C, más la distancia del punto C al punto F_2, es igual a la constante k, etc. (Figura 18).

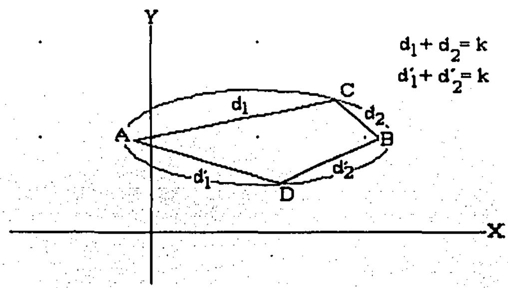


Figura 18

LA ECUACIÓN DE UN LUGAR GEOMÉTRICO.

Al definir ya lo que es un lugar geométrico, ahora sólo queda encontrar las ecuaciones de algunos de ellos. Para esto, se explicara el procedimiento general de tres pasos que sirve para todos los casos.

1) Se escoge un punto P(x, y) que tiene la característica de ser el representativo de todos los que forman el lugar geométrico. Este punto no puede tener coordenadas numéricas porque estaría fijo y lo que se requiere es que tenga coordenadas variables, para que al moverse, vaya creando el lugar geométrico deseado.

2) Cada lugar geométrico tiene una o varias propiedades que cumplen todos sus puntos y lo que distingue de otros lugares. En este paso se deben poner en forma de igualdad aquellas condiciones que identifican que el punto P(x, y) satisface la propiedad particular de ese lugar.

3) La igualdad geométrica debe ser expresada algebraicamente (o analíticamente) con los elementos o fórmulas propias de la Geometría Analítica, de tal manera que al simplificar lo máximo posible, se obtenga la ecuación del lugar geométrico buscado.

Al resumir:

1) ***Se escoge el punto P(x, y).***

2) ***Se escribe la propiedad con respecto al punto p, en forma de una igualdad.***

3) ***Se convierte analíticamente la igualdad y después de simplificarla, se obtiene la ecuación buscada.***

EJEMPLOS:

1. La mediatriz es la recta perpendicular a un segmento de recta en su punto medio. Para encontrar la ecuación de la mediatriz del segmento AB, con coordenadas: A(1, 5) y B(6, -2), siguiendo los pasos descritos anteriormente. (Figura 19)

1. Se toma el punto P(x, y) representativo de todos los puntos de ese lugar.

2. La mediatriz es, el lugar geométrico de todos los puntos en el plano que equidistan de los extremos al segmento .

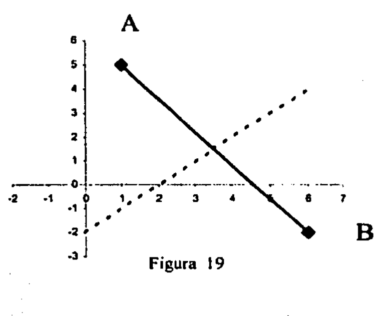


Figura 19

Equidistar significa que la distancia es la misma, por la que la igualdad, en base a la propiedad, es : d(P, A)= d(P, B).

3) Es necesario expresar analíticamente la igualdad y, para eso, se debe identificar que d(P, A) y d(P, B) representan, en cada caso, la distancia entre dos puntos. Como:

$$d(P,A)=\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2} \quad \text{y} \quad d(P,B)=\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}$$

Entonces, la igualdad se convierte en:

$$\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_B)^2}=\sqrt{(x-x_B)^2+(y-y_B)^2}$$

Ya se tiene las coordenadas de los puntos A(1,5) y B(6,-2), al sustituir se obtiene:

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-6)^2+(y-(-2))^2}$$

Ya expresada la igualdad analíticamente, se debe reducir a su mínima expresión para tener la ecuación buscada.

Se quitan las raíces cuadradas y se eleva al cuadrado ambos miembros de la igualdad:

$$(x-1)^2+(y-5)^2 = (x-6)^2+(y+2)^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado:

$$x^2-2x+1+y^2-10y+25= x^2-12x+36+y^2+4y+4$$

Se iguala la ecuación a cero:

$$x^2-2x+1+y^2-10y+25- x^2+12x-36-y^2-4y-4=0$$

Reduciendo los términos semejantes:

$$10x-14y-14=0$$

Al dividir entre dos, queda la ecuación de la mediatriz del segmento AB:

$$5x-7y-7=0.$$

El punto medio del segmento AB, debe ser un punto de la mediatriz, al comprobarlo.

P_{MAB} (7/2, 3/2)

en la ecuación, debe cumplirse la igualdad

$$5\left(\frac{7}{2}\right)-7\left(\frac{3}{2}\right)-7=0$$

$$\frac{35}{2}-\frac{21}{2}-7=0$$

$$\frac{35-21-14}{2}=0$$

$$0=0$$

2. **Una figura muy utilizada y conocida es la circunferencia. La cual está representada en las llantas y volantes de automóviles, el sol, los discos de música, las construcciones, los instrumentos musicales, etc.** Para encontrar la ecuación de una circunferencia que tiene por centro el punto C(-5, 2) y de radio r = 6, siguiendo los tres pasos de los lugares geométricos. (Figura 20.)

1. Se toma el punto P(x, y)
2. La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado centro. Como la distancia de cualquier punto P de la curva a su centro es el tamaño del radio, la propiedad queda expresada como la igualdad d (P, C) = r.

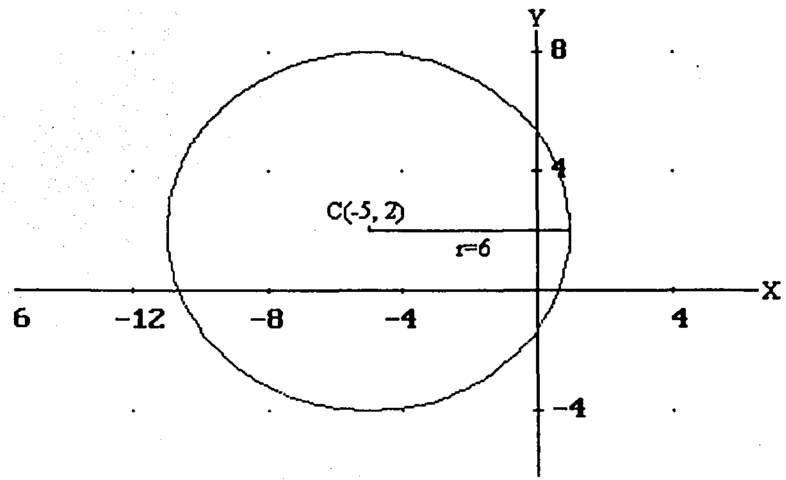


Figura 20

3. La traducción analítica dice que d(P, C) es la distancia entre dos puntos por lo que:

$d(P,C) = \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2}$ y r una constante.

Entonces la igualdad es:

$$\sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} = r$$

Ahora, se sustituye las coordenadas del punto C(-5, 2) y el tamaño del radio (r = 6) en la ecuación anterior.

$\sqrt{(x - (-5))^2 + (y - 2)^2} = 6$ y simplificando lo máximo posible

$(x + 5)^2 + (y - 2)^2 = 36$, elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad

$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 = 36$, desarrollando los binomios al cuadrado

$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 - 36 = 0$, igualando la ecuación a cero

$x^2 + 10x + y^2 - 4y - 7 = 0$, reduciendo términos semejantes

$x^2 + y^2 + 10x - 4y - 7 = 0$, al ordenarla se obtiene la ecuación buscada.

3. Otro lugar geométrico conocido es la elipse, ésta es la trayectoria que siguen los planetas, incluida la tierra, al rededor del sol. También hay lentes y espejos, así como la forma de ciertas salas de música que utilizan las propiedades de la elipse. Algunas plazas públicas, como la de San Pedro en Roma, tienen forma elíptica. Finalmente, en muchos jardines hay arreglos de plantas y flores en forma de elipse.

Se encontrará la ecuación de la elipse que tiene por focos F(-4, 0), F'(4, 0) y su eje mayor $\overline{AA'}$ mide 10 unidades de longitud. Figura 21.

1. Se escoge el punto P(x, y)

2. La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos en el plano tales que la sumas de sus distancias a dos puntos fijos es siempre constante. Los dos puntos fijos son los dos focos (F y F') y la constante es el tamaño del eje mayor. Así, la propiedad la escribimos como:

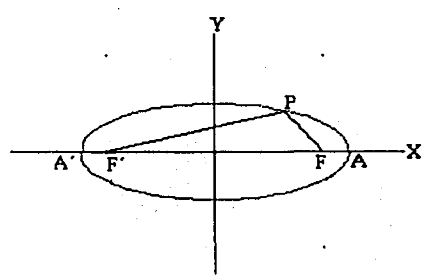


Figura 21.

$$\sqrt{(x-x_F)^2+(y-y_F)^2}+\sqrt{(x-x_{F'})^2+(y-y_{F'})^2}=k$$

Si sustituimos los datos F(-4,0), F'(4,0) y k = 10, se tiene:

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}=10$$

Ahora, para reducir a su máxima expresión :

se pasa una raíz cuadrada al segundo miembro:

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-0)^2}=10-\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2}$$

Se eleva al cuadrado ambos miembros de la igualdad.

$$(x+4)^2+(y-0)^2 = (10-\sqrt{(x-4)^2+(y-0)^2})^2$$

Elevando los binomios al cuadrado de ambos miembros de la igualdad

$$x^2+8x+16+y^2=100-20\sqrt{(x-4)^2+(y)^2}+(x-4)^2+y^2$$

Elevando los binomios al cuadrado del segundo miembro.

$$x^2+8x+16+y^2=100-20\sqrt{x^2-8x+16+y^2}+x^2-8x+16+y^2$$

Pasando al primer miembro todos los términos que no incluyan la raíz cuadrada.

$$x^2+8x+16+y^2-x^2+8x-16-y^2-100=-20\sqrt{x^2-8x+16+y^2}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$16x-100=-20\sqrt{x^2-8x+16+y^2}$$

Se divide entre cuatro toda la igualdad;

$$4x-25=-5\sqrt{x^2-8x+16+y^2}$$

Elevando al cuadrado de nuevo los dos miembros de la igualdad:

$$(4x-25)^2=(-5\sqrt{x^2-8x+16+y^2})^2$$

Desarrollamos al binomio al cuadrado y hacemos la multiplicación:

$$16x^2-200x+625=25x^2-200x+400+25y^2$$

Pasado todo al primer miembro:

$$16x^2-200x+625-25x^2+200x-400-25y^2=0$$

Al reducir términos semejantes y multiplicar por -1 se obtiene la ecuación buscada:

$$9x^2+25y^2-225=0$$

4. La parábola es la figura que se obtiene cuando se lanza un objeto al aire de manera no vertical. Se usa en lentes y espejos y antenas de radio y televisión. Se encontrará la ecuación de la parábola cuyos puntos equidistan del eje Y del punto -----F(-3, 1) (Figura 22).

1. Se toma el punto P(x, y)

2. La propiedad ya establecida en el enunciado nos dice que la distancia del punto P al eje Y, o sea de d(P, eje Y) = d(P, F).

3. Analíticamente la d(P , eje Y) es el valor - absoluto de la abscisa del punto P y la d(F, P) es la distancia entre dos puntos. Entonces la igualdad indicada en el inciso 2 es:

$$|x|=\sqrt{(x-x_F)^2+(y-y_F)^2}$$

Si sustituimos las coordenadas de F (-3, 1) se tiene: $|x|=\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2}$

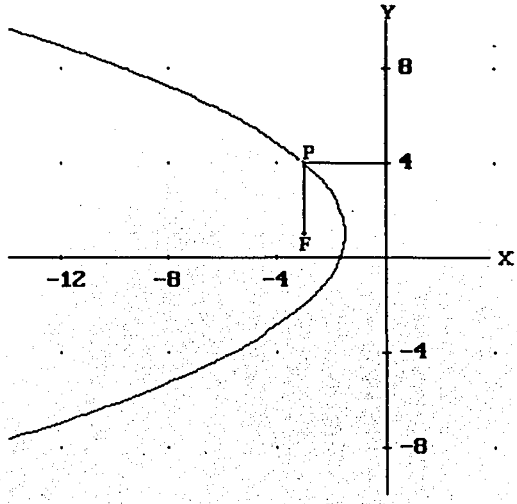


Figura 22

Para reducir la ecuación a su forma simple:

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$x^2 = (x+3)^2+(y-1)^2$$

Desarrollando los binomios al cuadrado:

$$x^2 = x^2+6x+9+y^2-2y+1$$

Igualando a cero la ecuación

$$x^2-x^2+6x+9+y^2-2y+1=0$$

Al simplificar los términos semejantes:

$$6x+y^2-2y+10=0$$

Ordenando tenemos la ecuación de la parábola buscada:

$$y^2+6x-2y+10=0$$

PENDIENTE DE UNA RECTA.

Una línea recta dirigida, es una recta que guarda cierta inclinación respecto al eje de las abscisas en un sistema de coordenadas cartesianas. Ejemplo: La figura 23 muestra a la recta ℓ haciendo un ángulo α respecto al eje de las abscisas.

Por convención las rectas en este caso --- serán dirigidas únicamente hacia arriba, por lo que el ángulo de inclinación de las rectas α está limitado al intervalo $0° \leq \alpha \leq 180°$. Si se obtiene la tangente del ángulo de ---- inclinación de una recta, al resultado se le llama pendiente de la recta y generalmente se le denota con la letra m

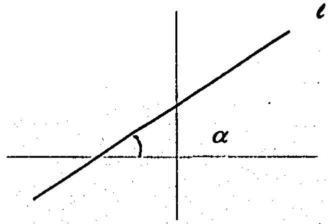


Figura 23

$$m = \tan \alpha$$

EJEMPLO:

1. $\alpha = 30°$

Como la pendiente de la recta está definida como $m = \tan \alpha$ sólo se sustituye en la ecuación: es decir $m = \tan 30° = 0.5774$

2. $\alpha = 60°$

$$m = \tan 60° = 1.732$$

3. $\alpha = 170°$

$$m = \tan 170° = -\tan (180° - 170°) = -\tan 10° = -0.176.$$

La pendiente de recta, no sólo se puede calcular por medio de la ecuación $m = \tan \alpha$ directamente, también es posible obtenerla cuando se conocen dos puntos de ella. Esto es: dados dos puntos $p_1(x_1, y_1)$ y $p_2(x_2, y_2)$ que muestra la figura 24

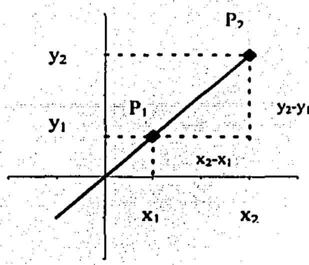


Figura 24

Obsérvese que del punto $p_1(x_1, y_1)$ se se trazó un segmento de recta paralelo al eje X, viene a ser un lado del triángulo rectángulo que se forma con este segmento, -- con la recta p_1p_2 y el segmento formado --- por el punto de intersección del segmento - $(x_2 - x_1)$, con la ordenada y_2 quedando este lado opuesto al ángulo α es dado por --- $(y_2 - y_1)$. Como m = tan α y al tangente del ángulo α es igual a, el cateto opuesto sobre el cateto adyacente, se tiene con ayuda de la figura que:

$$m = tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

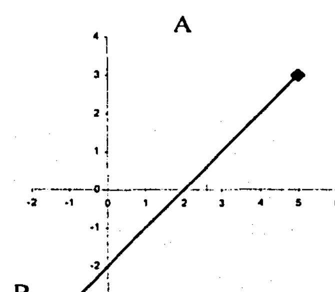
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad . . . \textbf{ Fórmula (5)}$$

EJEMPLOS:

1. Obtener la pendiente de recta que pasa por los puntos A(5, 3) y B(-1, -3).

Al observar la figura se aprecia, tomando en cuenta la escala que, las coordenadas del punto A son (5, 3) y el punto B(-1, -3).Como la pendiente de la recta que pasa por dos puntos conocidos se obtiene por medio de la expresión.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

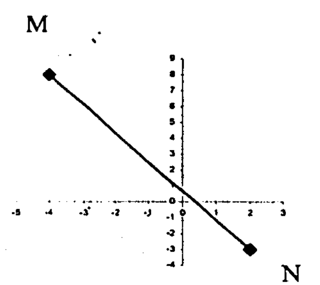


Sean (x_1, y_1) las coordenadas del punto A(5, 3),es decir $x_1 = 5$, $y_1 = 3$ y las coordenadas del punto B(-1, -3) se asignan al punto (x_2, y_2) esto es $x_2 = -1$; $y_2 = -3$.

Sustituyéndose en la ecuación de la pendiente se tiene:

$$m = \frac{-3-3}{-1-5} = \frac{-6}{-6} = 1$$

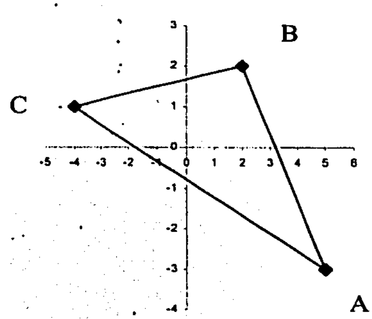
2. Calcular la pendiente de la recta que pasa por los puntos M (-4, 2) y N (8, -3).



Sean (x_1, y_1) las coordenadas del punto - - M(-4, 2), es decir $x_1 = -4$, $y_1 = 2$ y las -- - - coordenadas del punto N(8, -3) se asignan al punto (x_2, y_2), esto es $x_2 = 8$; $y_2 = -3$. Sustituyéndose en la ecuación de la pendiente se tiene:

$$m = \frac{-3-2}{8+4} = \frac{-5}{12} = -0.416$$

3. Un triángulo determinado por los puntos A (5, -3), B(2, 2), C(-4, 1). Computar la pendiente de sus lados.



Para obtener la pendiente de los lados del triángulo que $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ en cada lado del polígono.

La pendiente del lado $\overline{AB}$, se denominará como $m_{\overline{AB}}$, la del lado $\overline{BC}$ como $m_{\overline{BC}}$ y $m_{\overline{AC}}$ representará la pendiente del lado $\overline{AC}$

Para obtener la pendiente m_{AB} se emplean los puntos A(5, -3) y B(2, 2).
Esto es: $x_1 = 5$, $y_1 = -3$ y $x_2 = 2$; $y_2 = 2$.

Sustituyéndose en la ecuación de la pendiente se tiene:

$$\therefore m_{\overline{AB}} = \frac{2+3}{2-5} = \frac{5}{-3} = -1.666$$

Para obtener la pendiente m_{BC} se emplean los puntos B(2, 2), C(-4, 1). Esto es: $x_1 = 2$, $y_1 = 2$ y $x_2 = -4$; $y_2 = 1$.
Sustituyéndose en la ecuación de la pendiente se tiene:

$$m_{\overline{BC}} = \frac{1-2}{-4-2} = \frac{-1}{-6} = -0.1666$$

Finalmente la pendiente m_{AC} se emplean los puntos A(5, -3), C(-4, 1). Esto es: $x_1 = 5$, $y_1 = -3$ y $x_2 = -4$; $y_2 = 1$.
Sustituyéndose en la ecuación de la pendiente se tiene:

$$m_{\overline{AC}} = \frac{1+3}{-4-5} = \frac{4}{-9} = -0.444$$

ÁNGULO DE DOS RECTAS

Sean dos rectas cualesquiera r_1 y r_2 que se muestra en la figura 25 , siempre se identificará a la recta r_1, aquella cuyo ángulo de inclinación es menor.

Si al punto de intersección de las rectas r_1 y r_2 se denota como ℓ_3, al punto de intersección de la recta r_1, con el eje X, se le identifica como ℓ_1 y al punto de intersección de la recta r_2 con el eje X, se le denomina ℓ_2, la figura anterior se representa (Figura 26).

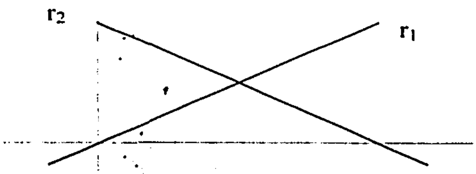


Figura 25

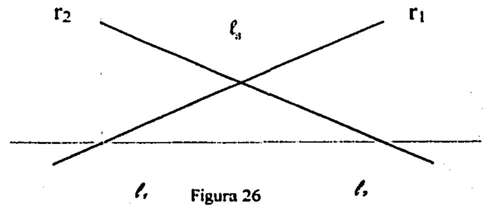


Figura 26

Considérese el ángulo de inclinación de la recta r_1 es α_1; el de la recta r_2 es α_2, y al ángulo entre las rectas dirigidas se le denota como β_1, en la figura anterior se tendrá (Figura 27).

En la Figura 28 el ángulo suplementario al ángulo de las rectas β, se le llamará β_2 ($\beta_1+\beta_2 = 180^\circ$), el ángulo suplementario del ángulo de la inclinación de la recta r_2 (α_2), es igual a $180^\circ - \alpha_2$ y el otro ángulo interior del triángulo $\ell_1.\ell_2.\ell_3$, es igual al ángulo de las rectas β_1, por ser opuestos por el vértice, por lo tanto , la figura anterior se representa como:

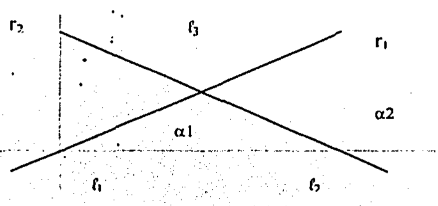


Figura 27

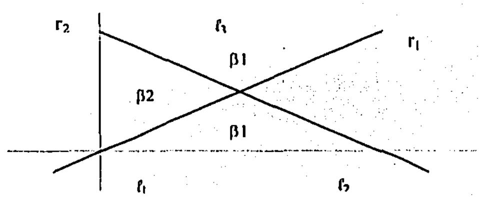


Figura 28

El ángulo exterior α_1 al triángulo $\ell_1.\ \ell_3.\ \ell_2$, es igual a la suma de los ángulos interiores del triángulo opuesto a el , esto es:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \beta_1 \quad \text{de donde}$$

$$\beta_1 = \alpha_2 - \alpha_1 \ ...(A)$$

Tómese la función tangente en ambos miembros de la igualdad (A), se tendrá:

$$\tan \beta_1 = \tan \beta_1 = \tan(\alpha_2 - \alpha_1)$$

Como la $\tan(\alpha_2-\alpha_1)$, es una igualdad dada por:

$$tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tan\alpha_2 - tan\alpha_1}{1 + tan\alpha_1 tan\alpha_2}$$

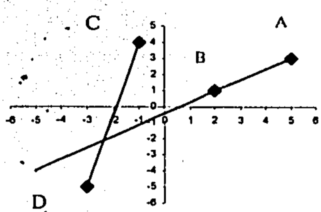
Como la tangente del ángulo de inclinación de una recta es igual a su pendiente se tiene que:

$$tan\beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \text{ ....Fórmula (6)}$$

EJEMPLOS:

1. Obtener el ángulo de inclinación que existe entre las rectas que pasan por los siguientes puntos correspondientes:

Recta : r_1 A(5, 3) B(2, 1)
Recta : r_2 C(-1, 4) D(-3, -5)



El ángulo β que existe entre las rectas r_1 y r_2, se calcula por medio de la expresión:

$$tan\beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Donde m_1 representa a la pendiente de r_1 y es evaluada por:

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Con A(5, 3)= A(x_1, y_1) y B(2, 1) = B(x_2, y_2)

Sustituyéndose los valores numéricos de m_1, se tiene:

$$m_1 = \frac{1-3}{2-5} = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$$

Para obtener la pendiente de la recta r_2, también se conocen los puntos que son:

Con $C(-1, 4) = C(x_1, y_1)$ y $D(-3, -5) = D(x_2, y_2)$

Sustituyéndose los valores numéricos de m_2, se tiene:

$$m_2 = \frac{-5-4}{-3+1} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$$

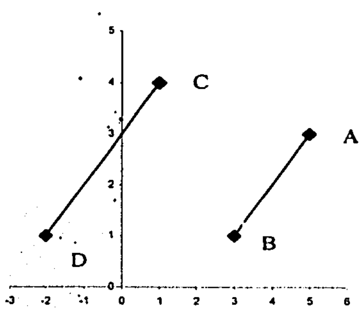
Sustituyéndose los valores numéricos de m_1 y m_2, se tiene:

$$Tan\beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{9}{2} - \frac{2}{3}}{1 + \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{\frac{23}{6}}{1+3} = \frac{23}{24} = 0.9583$$

β = ang. tan (0.9583) = 43. 7°

RECTAS PARALELAS.

1. Obtener el ángulo de las rectas definidas por los puntos: A(5, 3), B(3, 1), y C(1, 4), D(-2, 1)



Al observar la figura, se aprecia que las rectas son paralelas y que el ángulo entre - ellas es cero, por lo cual sus pendientes -- son iguales, esto es:

Se sabe que el ángulo que forman las rectas se obtiene por medio de:

$$tan\beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Donde m_1 es la pendiente de recta formada por los puntos: A(5, 3) y C(3, 1); mientras que m_2 representa la pendiente de recta que es definida por C(1, 4) y D(-2, 1), en ambos casos las pendientes se obtienen por medio de :

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ ; A(5, 3), B(3, 1) Y C(1, 4), D(-2, 1)}$$

$$m_1 = \frac{1-3}{3-5} = \frac{-2}{-2} = 1 \qquad\qquad m_1 = \frac{1-4}{-2-1} = \frac{-3}{-3} = 1$$

Nótese que las pendientes de las rectas son iguales; sustituyéndose en:

$$tan\beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{1-1}{1+1(1)} = 0$$

$$\beta = \text{ang. tan } (0) = 0^\circ$$

En general se puede manifestar que cuando el ángulo de dos rectas es nulo, las líneas rectas son paralelas. Cuando dos rectas son paralelas sus pendientes son iguales, es decir : $m_1 = m_2$

RECTAS PERPENDICULARES

Si el ángulo de dos rectas es recto ¿Qué relación guardan sus pendientes? Cómo el ángulo entre las rectas es un ángulo recto, implica que $\beta = 90^\circ$

$$tan\beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = tan 90^\circ = \infty$$

Para que el cociente sea infinito se requiere que el producto de las pendientes $m_1 m_2 = -1$ ya que así se obtendrá :

$$tan\beta_1 = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{m_2 - m_1}{1+(-1)} = \frac{m_2 - m_1}{0} = \infty$$

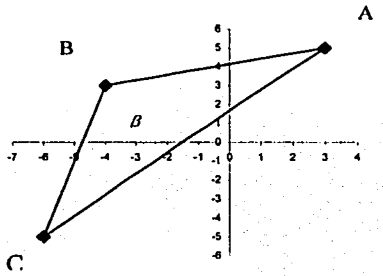
∴ La condición de que dos rectas sean perpendiculares es el producto de las pendientes de las rectas sea igual a menos uno $m_1 m_2 = -1$ o bien: $m_2 = -1/m_1$

4. Demostrar que el polígono determinado por los puntos A(3, 5) , B(-4, 3) y C(-6, -5) es un triángulo obtusángulo.

Recuerde que el triángulo obtusángulo es aquel que contiene un ángulo obtuso , por lo tanto el problema se reduce a obtener el ángulo β, ya que según la gráfica es el único ángulo del triángulo ABC, que es obtuso.

Los ángulos β y σ son suplementarios, es decir; β + σ = 180° de donde se tiene que: β = 180° − σ

El ángulo σ como se aprecia en la figura, es el ángulo formado por las rectas – r_1 definidas por los puntos A y B; y la recta r_2 , determinada por la recta que pasa por – los puntos C(-6, -5) y B(-4, 3) por lo tanto :



$$tan\,\sigma = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

; A(3, 5), B(-4, 3) Y C(-6, -5), B(-4, 3)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_1 = \frac{3-5}{-4-3} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7} \qquad m_1 = \frac{3+5}{-4+6} = \frac{8}{2} = 4$$

$$tan\,\sigma = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{4 - \frac{2}{7}}{1 + 4\left(\frac{2}{7}\right)} = \frac{\frac{26}{7}}{\frac{15}{7}} = \frac{26}{15}$$

σ = ang. tan(26/15) = 60°

β = 180°- 60° = 120°

4. Demostrar que los ángulos interiores de un triángulo suman 180°, con el triángulo obtusángulo del problema anterior.

Como ya se calculó el ángulo obtuso del triángulo ABC, el cual tiene un valor de 120°, en este ejercicio se procederá a evaluar a los dos ángulos restantes A y C, para lo cual se sabe que se emplea la expresión:

$$tanA = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Para el cálculo del ángulo A obsérvese que de acuerdo con el sentido positivo del ángulo (sentido contrario a las manecillas del reloj). La pendiente m_2 se considera que es la pendiente de recta donde termina el ángulo y la pendiente m_1 es la pendiente de la recta a partir de la cual se inicia el ángulo. Por lo tanto la pendiente m_2 se obtiene empleándose a los puntos C(-6, -5) y A(3, 5). El cálculo de la pendiente m_1 se realiza con los puntos A(3, 5) y B (-4, 3).

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$; A(3, 5), B(-4, 3) Y C(-6, -5), A(3, 5)

$$m_1 = \frac{3-5}{-4-3} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7} \qquad m_2 = \frac{5+5}{3+6} = \frac{10}{9}$$

Sustituyéndose los valores numéricos de m_1 y m_2 se tiene:

$$tanA = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{\frac{10}{9} - \frac{2}{7}}{1 + \frac{10}{9}\left(\frac{2}{7}\right)} = \frac{\frac{52}{63}}{\frac{83}{63}} = \frac{52}{83}$$

A = ang tan(52/83) = 32°

En el cálculo del ángulo C se tiene:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$; C(-6, -5), A(3, 5) Y C(-6, -5), B(-4, 3)

$$m_1 = \frac{5+5}{3+6} = \frac{10}{9} = \frac{10}{9} \qquad m_2 = \frac{3+5}{-4+6} = \frac{8}{2} = 4$$

Sustituyéndose los valores numéricos de m_1 y m_2 se tiene:

$$tanC = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{4 - \frac{10}{9}}{1 + 4\left(\frac{10}{9}\right)} = \frac{\frac{26}{9}}{\frac{49}{9}} = \frac{26}{49}$$

$$C = \text{ang}\tan(26/49) = 28^{\circ}$$

Finalmente se suman los valores numéricos de los ángulos A, B y C para verificar que su suma es igual a 180° y quede resuelto el problema.

$$A + B + C = 120^{\circ} + 32^{\circ} + 28^{\circ} = 180^{\circ}$$

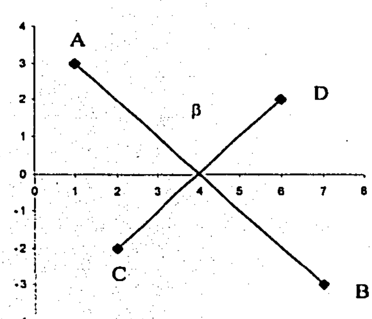
5. Demostrar que la recta definida por los puntos A(1,3) y B(7,-3) es perpendicular a la recta que pasa por los puntos C(2, -2) y D(6,2).

Para comprobar que las rectas de este problema son perpendiculares, las pendientes de las rectas deben satisfacer la relación $m_1 m_2 = -1$

También se puede demostrar, que las rectas son perpendiculares, calculando el ángulo entre las líneas rectas, por medio de:

$$tan\beta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

y comprobar que el ángulo es de 90°.



Para obtener la pendiente m_1 que es definida por los puntos C(2, -2) y D(6, 2) se utiliza la expresión:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\Rightarrow m_1=\frac{2+2}{6-2}=\frac{4}{4}=1$$

A la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(1, 3) y B(7, -3) se le llamará m_2 .

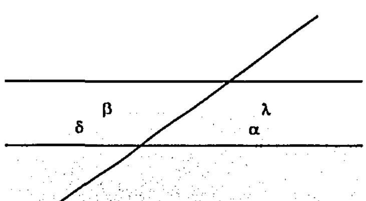
$$m_2=\frac{-3-3}{7-1}=\frac{-6}{6}=-1$$

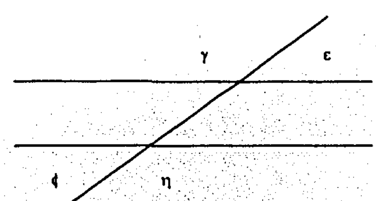
Si las rectas son perpendiculares deben de satisfacer la relación $m_1m_2 = -1$, sustituyéndose los valores de m_1 y m_2 se tiene (1) (-1) = -1, lo cual demuestra que las rectas de este problema son perpendiculares.

Ahora se empleará la expresión:

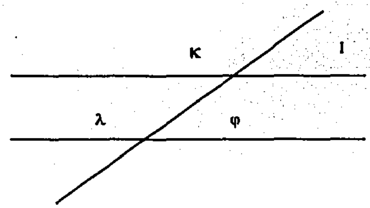
$$tan\beta=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}=\frac{-1-1}{1+1(-1)}=\frac{-2}{0}=\infty$$

. Es conveniente recordar que cuando existen dos líneas rectas paralelas cortadas por una transversal, los ángulos alternos internos son iguales $\alpha = \beta$, $\chi = \delta$.

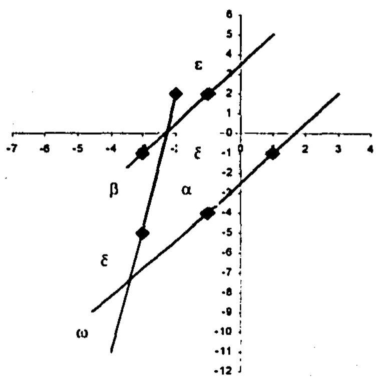




Simultáneamente se sabe que los ángulos alternos externos son iguales $\varepsilon = \phi$, $\gamma = \eta$. Así como los ángulos correspondientes $I = \varphi$, $\kappa = \lambda$.



5. Demostrar que la recta determinada por los puntos A(-1, -4) y B(1, -1), es paralela a la recta definida por los puntos C(-3, -1) y D(-1, 2). Sobre estas rectas paralelas para una transversal definida por E(-3, -5) y F(-2, 2), demuestre que los ángulos alternos internos son iguales; que también lo son los ángulos alternos externos y finalmente compruebe que los ángulos correspondientes son iguales.



Se sabe que dos rectas paralelas son paralelas cuando sus pendientes son, en este caso se debe demostrar que $m_{AB} = m_{CD}$.

$$m_{AB} = \frac{-1+4}{1+1} = \frac{3}{2}$$

$$m_{CD} = \frac{2+1}{-1+3} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto la recta definida por los puntos A y B es paralela a la recta determinada por los puntos C y D.

Para demostrar que los ángulos alternos internos son iguales $\alpha = \beta, \gamma = \delta$, se debe conocer a la pendiente de la línea transversal EF, y así poder aplicar la fórmula para calcular el ángulo entre dos rectas.

Como la recta transversal pasa por los puntos E(-3, 5) y F(-2, 2), se tiene:

$$m_{EF} = \frac{2-5}{-2+3} = \frac{-3}{1} = -3$$

Al evaluar el ángulo α se hace a la pendiente de la recta EF igual a m_2 y la pendiente de la recta que es definida por los puntos AB es m_1.

$m_2 = m_{EF} = -3$ y $m_1 = m_{AB} = 3/2$.

$$tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{3}{2}}{1 + (-3)\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{9}{7}$$

α = ang tan(9/7) = 52.12°

Al calcular el ángulo β se hace a la pendiente de la recta CD igual a m_1 y la pendiente de la recta que es definida por los puntos EF es m_2.

$m_2 = m_{EF} = -3$ y $m_1 = m_{CD} = 3/2$.

$$tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 - \frac{3}{2}}{1 + (-3)\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{7}{2}} = \frac{9}{7}$$

β = ang tan(9/7) = 52.12°.

Obsérvese de la figura que los ángulos alternos externos ε y ω son opuestos por el vértice a los ángulos β y α respectivamente por lo que:

$\varepsilon = \beta = 52.12°$ $\omega = \alpha = 52.12°$

$\therefore \varepsilon = \omega$.

Los ángulos correspondientes ε y α son iguales ya que $\varepsilon = \alpha = 52.12°$. Se deja como ejercicio al estudiante el demostrar que los ángulos alternos internos restantes de la figura son iguales, además los ángulos alternos externos y los correspondientes.

EJERCICIOS:

1. Hallar la distancia entre dos puntos cuyas distancias son:

a) (-8) y (17) b) (11) y (53) c) (-25) y (-143)

2. En un sistema de ejes rectangulares, situar los siguientes pares de puntos y calcular sus distancias respectivas:

a) (3, 7) y (17, -5) b) (0, -9) y (9, 0) c) (-2, 2) y (-11, 7) d) (-4, -6) y (-2, -1)

3. Los vértices de un cuadrilátero son los puntos (1, 3), (7, 3), (9, 8), y (3, 8). Demostrar que el cuadrilátero es un paralelogramo y calcular su perímetro.

4. Trazar el cuadrilátero cuyos vértices son: (1, 2), (4, 5), (1, 5), (4, 2). Calcular las longitudes de sus diagonales y comprobar que ellas son iguales.

5. Comprobar que los puntos A(1, 1), B(0, 5), y C(-3, 0) son los vértices de un triángulo rectángulo. Dibujar sus alturas del triángulo y calcular sus longitudes.

6. Hallar el punto de la abscisa 3 que diste 10 unidades del punto A(-3, 6) y hacer su gráfica para comprobación.

7. Trazar el triángulo de vértices A(4, 2), B(0, 6) y C(-2, -2); dibujar las medianas y calcular sus longitudes; calcular sus ángulos interiores.

8. Determinar las coordenadas del punto P(x, y), que divide al segmento determinado por los puntos $P_1(7, 5)$ y $P_2(-4, -4)$ en la razón $r = \frac{1}{3}$ Trazar su gráfica correspondiente.

9. **Hallar las coordenadas de un punto P(x, y), que divide al segmento determinado por $P_1(5, -2)$ y $P_2(2, 5)$, si la razón es r = 2. Hacer su gráfica.**

10. El segmento que une el punto A(-2, -1) con el punto B(3, 3); se prolonga hasta C. Sabiendo que $\overline{BC} = 3\overline{AB}$, determinar las coordenadas del punto C. Hacer la gráfica.

11. El centro de un cuadrado es el punto (2, -1) y dos de sus vértices son (2, 2) y (-1, -1). Encontrar las coordenadas de los otros dos vértices, trazarlas y calcular su perímetro.

12. Trazar el segmento cuyos extremos son (-2, -1) y (4, 2). Calcular: a) Las coordenadas del punto medio del segmento; b) Las coordenadas de los puntos que dividen en tercios al propio segmento.

13. El punto (2, 6) es un extremo del segmento cuyo punto medio es (3, 3). ¿Cuáles son las coordenadas del otro extremo del segmento? Comprobarlo gráficamente.

14. Calcular las pendientes de los segmentos que unen a los puntos del problema dos.

15. Comprobar que los puntos (-2, -1), (2, 1) y (4, 2) están alineados; Hacer lo mismo con los puntos (2, 0), (0, 2) y (-4, 6). Comprobarlo gráficamente.

16. Dibujar una recta que pase por el punto (-1, 2), cuya pendiente sea $\frac{3}{4}$, trazar otra recta que pase por el mismo punto cuya pendiente sea $-\frac{1}{2}$; Calcular el ángulo comprendido entre estas rectas.

17. Determinar las coordenadas de un punto P(x, y), que equidiste con los puntos fijos: A(4, 3); B(2, 7) y C(-3, -8). Trazar la gráfica.

18. Hallar el lugar geométrico del punto P(x, y), cuya distancia equidista al punto fijo C(2, -1) sea igual a 5. Hacer su gráfica.

19. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P(x, y) cuya diferencia de distancias a los puntos fijos $F_1(1, 4)$ y $F_2(1, -4)$ sea igual a 6.

20. Calcular los ángulos interiores del triángulo cuyos vértices son A(-3, 0), B(0, 7) y C(7, 4). Trazar su gráfica.

21. Determinar el punto que pertenece al eje "y" y que equidista de los puntos (-2, -3) y (6, 1). Trazare su gráfica.

22. Trazar el triángulo cuyos vértices son los puntos (3, 2), (6, 1) y (7, -2). Demostrar que es isósceles, calcular las pendientes de sus tres lados, sus ángulos interiores, su perímetro, su área y sus ángulos de inclinación.

23. Dibujar el triángulo cuyos vértices son los puntos A(3, 1), B(-1, 1) y C(0, -3), calcular los puntos medios de sus lados calculando el perímetro y área, que resulte del triángulo trazado por los puntos medios.

RESPUESTAS

1. a) d = 25 b) d = 42 c) d = 118
2. a) d = 18.439 b) d =12.72 c) d = 10.29 e) d = 5.38
3. $d\overline{AB} = d\overline{DC} = 6,\quad d\overline{AD} = d\overline{BC} = \sqrt{29}$
4. Diagonal $\overline{AB}$ = Diagonal $\overline{CD}$ = $\sqrt{18}$

5. $\overline{AB} = \overline{AC} = \sqrt{17}$, $\overline{CB} = \sqrt{34}$, Por el téorema de pitágoras

$mCA = \frac{1}{4}$, $m\overline{AB} = -4, \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)(-4) = -1 \therefore$ Es un triangulo rectángulo

6. P(3, -2)

7. $P_{\overline{AB}} = (2,4)$, $P_{\overline{BC}} = (-1,2)$, $P_{\overline{CA}} = (1,0)$, $A = 78°42'$, $B = 59°3'$, $C = 42°15'$

8. $P\left(\frac{17}{3}, \frac{11}{4}\right)$

9. $P\left(3, \frac{8}{3}\right)$

10. C(18, 15)

11. (2,-4), (5, 1), - Perímetro $= 12\sqrt{2}$

12. a) (1,0.5) b) (2,1)

13. (4, 0)

14. $m_{AB} = -\frac{6}{7}$, $m_{CD} = 1$, $m_{EF} = -\frac{5}{9}$, $m_{GH} = \frac{5}{2}$

15. Área = 0

16. $3x - 4y + 11 = 0$, $x + 2y - 3 = 0$, $\alpha = 116° 34'$

17. P(-5, 1)

18. $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$ es una Circunferencia

19. $9x^2 - 7y^2 - 18x + 72 = 0$ es una Hipérbola

20. A = C = 45°, B = 90°

21. P(0,3)

22. A = B = 26° 34′, C = 126° 52′, Área = $4U^2$, Perímetro = 11.98

23. Perímetro = 6.56, Área = $2U^2$.

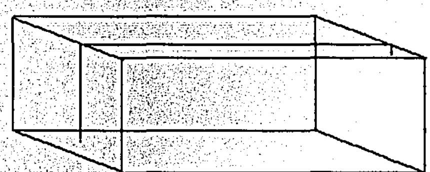
UNIDAD II
LA RECTA

Euclides (300 a.C.) sistematizó en sus libros llamados los elementos, los conocimientos de geometría que existían hasta entonces. La geometría euclidiana, que se estudia actualmente en la escuela, se deduce de diez premisas muy simples y lógicas llamadas postulados (5) y axiomas (5), estas premisas han sido uno de los pilares más importantes en el desarrollo intelectual del hombre .

De la geometría euclidiana proviene la conocida frase " la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta". Esta propuesta tiene la virtud de coincidir con el sentido común y, en un principio, todo lo que la contradiga, sería rápidamente tachado ilógico.

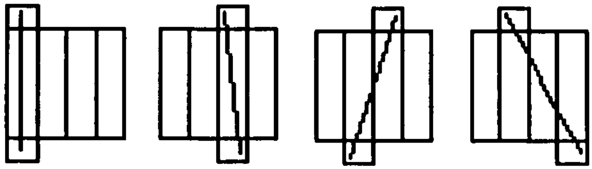
Por ejemplo:

a) En un cuarto de ocho metros de largo por tres de ancho y tres de alto hay una mosca apetitosa en el centro de una de las paredes cuadradas, a 10 centímetros del piso. En el centro de la pared opuesta hay una araña hambrienta a 10 cm del techo ¿Cuál es el camino más corto que debe seguir la araña para atrapar a la mosca



Lo más lógico es que suba 10 cm, recorra el techo totalmente por su mitad y luego que baje en línea recta hasta que sorprenda a su presa. En total tiene que recorrer 11 metros, es la misma distancia si baja de la pared 2.9m, sigue por la mitad del suelo y sube los 10 cm del lado opuesto.

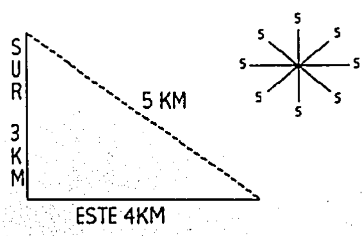
Esto se basa en la idea euclidiana la menor distancia que hay entre dos puntos, con lo cual sólo pasa por tres caras o paredes del cuarto y cualquier otra trayectoria debería ser mayor en longitud . Analizando el problema, se recorta a un paralelepípedo (que es la forma del cuarto) a escala del original colocándolo en un plano y se unen los puntos donde se encuentran los dos insectos.



Existen diferentes formas de cortar al paralelepípedo, la primera es la que da 11m, pero si se sigue analizando se observa que una de ellas corresponde al valor más pequeño de la trayectoria que debe recorrer una araña , y es de 10.16 m. Si se unen las dos caras con la recta trazada para formar el cuarto, se notará que. Contra la lógica , la araña debe pasar por cinco caras, en lugar de las tres que habíamos pensado, para tener la trayectoria que le da la distancia más corta entre dos puntos .
A este camino que minimiza la distancia, se le conoce con el nombre de geodésica

b) Un grupo de investigadores se encuentra en un campamento. Salen a dar una caminata, uno de ellos lleva una brújula, recorren tres km. al sur y luego cuatro al oeste, donde se encuentra un fósil, lo recogen y lo llevan a su campamento para analizarlo. El que llevaba la brújula se dio cuenta de que para regresar recorrieron tres km. al norte.

Si lo representamos gráfica -- mente se observa que sucedió algo ex-- traño, ya que la menor distancia entre el sitio en que encontraron el fósil y el campamento, debería de ser cinco km. y en dirección al noreste ¿Cómo es -- posible que con caminar tres km. al -- norte llegarán al punto de partida?



Para poder entender lo que pasó, antes, que nada, se debe de tomar en cuenta que el movimiento de los investigadores no se hace en un plano, sino en la tierra que es un espacio curvo, por lo tanto, las geodésicas no son líneas rectas. Así una explicación puede darse si se supone que los investigadores estaban en el Polo Norte, al moverse tres km. hacia el sur lo hacen por un meridiano terrestre, luego por un paralelo cuando camina cuatro km. hacia el este y, al final, al caminar hacia el norte tres km. por otro meridiano, regresan al punto de partida.

Las geodésicas en este caso no son líneas rectas, esto es importante que se tome en cuenta cuando se va a construir un puente de varios kilómetros de longitud, ya que la tierra es una superficie curva.

Los ejemplos anteriores proporcionan una visión más amplia del tipo de geometría que nos rodea y que algunas veces parece ir en contra del sentido común.

También es importante mencionar que hay otros tipos de geometrías que surgen al negar el quinto postulado de Euclides, el cual dice que por un punto exterior a una recta dada, sólo es posible trazar una y sólo una recta paralela.

En 1830, después de más de dos mil años de vigencia teórica y práctica de la geometría euclidiana, un matemático ruso, Lobachevky, negó el postulado de las paralelas al plantear que por un punto exterior a una recta dada se puede trazar dos rectas paralelas a la anterior. Más tarde, B. Riemann, matemático alemán también niega el quinto postulado al decir que por un punto exterior no se puede trazar ninguna recta paralela a otra dada.

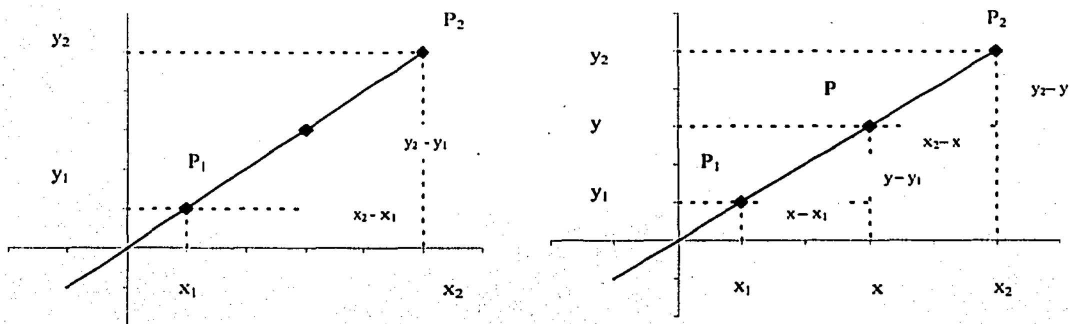
Ambas geometrías no euclidianas parecen ser no sólo un esfuerzo intelectual por negar el sentido común y que nada lógico se puede obtener de ella. Lo curioso es que las geometrías del espacio que se generan, tienen consecuencias teóricas muy importantes, siendo uno de sus mayores logros la correspondencia con la famosa teoría general de la relatividad de Einstein, que plantea un espacio-tiempo no euclidiano y que se puede identificar con la geometría de Riemann.

Así, como la física clásica de Newton es un caso especial de la relatividad de Einstein, cuando la velocidad del objeto es pequeña, es comparada con la luz (300 000 km./seg.), la geometría euclidiana surge de la no euclidiana, cuando las dimensiones geométricas son pequeñas comparadas con las del marco de referencia espacial y no se pueden representar en un plano.

Retomando el ejemplo de los investigadores que caminan tres km. al sur a partir del polo, se puede considerar que después de moverse 4 km. Al este se encuentran en un punto exterior a una recta dada. Pero si caminan tres kilómetros al norte, se dan cuenta que interceptan con la "paralela" ya que regresan al campamento o al punto de partida.

ECUACIÓN DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS.

Al observar la línea recta que es definida por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ de la figura que está inmediatamente a la izquierda se aprecia que su pendiente m es dada por:



De acuerdo al triángulo rectángulo $P_1 I P_2$

$$m = \tan\beta = \frac{C.Opuesto}{C.Adyacente} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \ldots(7)$$

De la figura anterior en el lado derecho se ha representado un punto cualquiera de la recta $P(x, y)$ y se han trazado sus coordenadas, en forma similar al gráfico del lado izquierdo .

Es notorio que existe otro triángulo rectángulo formado por la parte de la misma recta y con los catetos $(x - x_1)$ y $(y - y_1)$; si se aplica nuevamente la definición de pendiente de una recta, en este caso se obtendrá:

$$m = tan\beta = \frac{y - y_1}{x - x_1} \quad . . .(8)$$

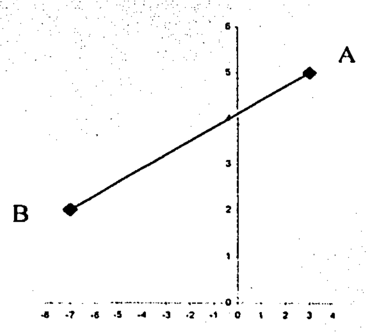
Como el ángulo de inclinación de la recta es el mismo de las ecuaciones 7 y 8 entonces las pendientes son iguales y se tendrá $m_1 = m_2$ es decir:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

La ecuación obtenida es conocida como la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

EJEMPLOS:

1. Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(3, 5) y B(-7, 2).



Se sabe que la ecuación de la recta que pase por dos puntos es de la forma :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En esta ecuación se sustituyen los valores $A(3, 5) = A(x_1, y_1)$ y $B(-7, 2) = B(x_2, y_2)$ esto es:

$$\frac{y - 5}{x - 3} = \frac{2 - 5}{-7 - 3} = \frac{-3}{-10} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{y - 5}{x - 3} = \frac{3}{10}$$

Ahora se realizan las operaciones indicadas: $10(y - 5) = 3(x - 3)$

$$10y - 50 = 3x - 9$$

$$\mathbf{3x - 10y + 41 = 0}$$

La expresión se le conoce como la ecuación de la línea recta expresada en su forma general del tipo $Ax + By + C = 0$

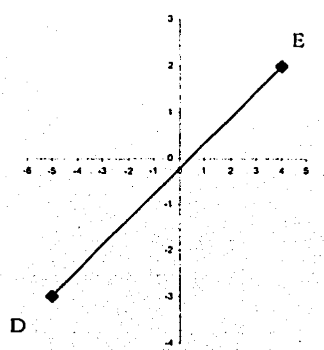
Donde en este caso A, el coeficiente de x vale 3 (A = 3), B el coeficiente de y vale -10 (B = -10) y a C que es el término independiente, el cual tiene un valor de 41 (C = 41).

Cuando la recta está expresada en forma general su pendiente m se calcula por medio de la expresión :

$$m = \frac{-A}{B}$$

En esta recta se tiene: $m = \frac{-(-3)}{10} = \frac{3}{10}$

2. Evaluar la ecuación de la recta que pasa por los puntos D(-5, -3) y E(4, 2).



Se sabe que la ecuación de la recta que pase por dos puntos es de la forma :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

En esta ecuación se sustituyen los valores D(-5, -3)=D(x_1, y_1) y E(4, 2)=E(x_2, y_2) esto es:

$$\frac{y+3}{x+5} = \frac{2+3}{4+5} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{y+3}{x+5} = \frac{5}{9}$$

Ahora se realizan las operaciones indicadas: 9(y + 3) = 5(x + 5)

9y + 27 = 5x + 25

5x - 9y - 2 = 0

Donde en este caso A, el coeficiente de x vale 5 (A = 5), B el coeficiente de y vale -9 (B = -9) y a C que es el término independiente, el cual tiene un valor de -2 (C = -2).

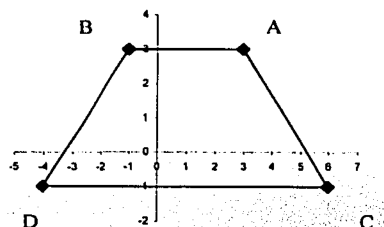
La pendiente m se calcula por medio de la expresión :

$$m = \frac{-A}{B}$$

En esta recta se tiene: $m = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9}$

3. Calcular la ecuación de los lados del trapecio definido por los puntos A(3, 3), B(-1, 3), C(6, - 1), y D(-4, -1).

El problema se reduce a obtener cuatro ecuaciones de recta que pasen por dos puntos, una para cada lado del trapecio, es decir para el lado AB se tiene A(3, 3)=A(x_1, y_1) y B(-1, 3) = E(x_2, y_2) esto es:



$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Se sustituyen los valores

$$\frac{y-3}{x-3} = \frac{3-3}{-1-3} = \frac{0}{-4} = 0$$

$$\frac{y-3}{x-3} = 0$$

Ahora se realizan las operaciones indicadas: $(y - 3) = 0(x - 3)$

$$y - 3 = 0$$

Donde en este caso A, el coeficiente de x vale 0 (A = 0), B el coeficiente de y vale 1 (B =1) y a C que es el término independiente, el cual tiene un valor de -3 (C =-3).

La pendiente m se calcula por medio de la expresión :

$$m = \frac{-A}{B}$$

En esta recta se tiene: $m = \frac{-0}{1} = 0$

Al expresar la ecuación como y = 3, se observa que es una función constante, la cual indica que para cualquier punto tiene como ordenada 3.

Para obtener la ecuación del lado BD se tiene B(-1, 3)=B(x_1, y_1) y D(-4, -1)=E(x_2, y_2) esto es: $\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Se sustituyen los valores

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Ahora se realizan las operaciones indicadas: $3\,(y-3)=4(\,x+1)$

$$3y-9=4x+4$$

$$4x-3y+13=0$$

Donde en este caso A, el coeficiente de x vale 4 (A = 4), B el coeficiente de y vale -3 (B = -3) y a C que es el término independiente, el cual tiene un valor de 13 (C = 13).

La pendiente m se calcula por medio de la expresión :

$$m=\frac{-A}{B}$$

En esta recta se tiene: $m=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3}$

Al encontrar la ecuación de la recta DC, nótese que es paralelo al lado AB y al eje de las x por lo tanto su pendiente de esta recta debe ser nula ya que se ha demostrado que cuando dos rectas son paralelas sus pendientes son iguales se verá en este caso se tiene $D(-4,-1)=D(x_1,y_1)$ y $C(6,-1)=C(x_2,y_2)$ esto es:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Se sustituyen los valores

$$\frac{y+1}{x+4}=\frac{-1+1}{6+4}=\frac{0}{10}=0$$

$$\frac{y+1}{x+4}=0$$

Ahora se realizan las operaciones indicadas: $(\,y+1\,)=0\,(\,x+4\,)$

$$y+1=0$$

Donde en este caso A, el coeficiente de x vale 0 (A = 0), B el coeficiente de y vale 1 (B =1) y a C que es el término independiente, el cual tiene un valor de 1 (C =1).

La pendiente m se calcula por medio de la expresión:

$$m = \frac{-A}{B}$$

En esta recta se tiene: $m = \frac{-0}{1} = 0$

Al expresar la ecuación como y = 1, se observa que es una función constante , la cual indica que para cualquier punto tiene como ordenada 1.

Para obtener la ecuación del lado CA se tiene $C(6,-1)=C(x_1, y_1)$ y $A(3, 3)=A(x_2, y_2)$ esto es:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Se sustituyen los valores

$$\frac{y+1}{x-6} = \frac{3+1}{3-6} = \frac{4}{-3}$$

$$\frac{y+1}{x+6} = \frac{4}{-3}$$

Ahora se realizan las operaciones indicadas: $-3(y+1) = 4(x-6)$

$$-3y - 3 = 4x - 24$$

$$4x + 3y - 21 = 0$$

Donde en este caso A, el coeficiente de x vale 4 (A = 4), B el coeficiente de y vale 3 (B = 3) y a C que es el término independiente, el cual tiene un valor de -21 (C = -21)

La pendiente m se calcula por medio de la expresión :

$$m = \frac{-A}{B}$$

En esta recta se tiene: $m = \frac{-4}{3}$

4. Calcular las coordenadas de los vértices del cuadrilátero definido por los puntos de intersección de las rectas; $y - 3 = 0$, $4x - 3y + 13 = 0$, $y + 1 = 0$ y $4x + 3y - 21 = 0$.

Como las ecuaciones de las líneas rectas en este problema son las obtenidas en el ejercicio anterior, entonces lo que se debe demostrar es que los vértices del cuadrilátero son los puntos A(3, 3), B(-1, 3), C(6, -1) y D(-4, -1), también se debe recordar que al resolver simultáneamente estas ecuaciones se obtienen los puntos de intersección, esto es:

$$y - 3 = 0 \qquad \ldots (I)$$
$$4x - 3y + 13 = 0 \qquad \ldots (II)$$
$$y + 1 = 0 \qquad \ldots (III)$$
$$4x + 3y - 21 = 0 \qquad \ldots (IV)$$

Considérese las ecuaciones (I) y (II).

$$y - 3 = 0 \qquad \ldots (I)$$
$$4x - 3y + 13 = 0 \qquad \ldots (II)$$

Despejando a "y" de la ecuación (I) se tiene $y = 3$. Sustituyendo en la ecuación (II) se tiene:

$$4x - 3(3) + 13 = 0$$
$$4x - 9 + 13 = 0$$
$$4x + 4 = 0$$
$$x = -4/4$$
$$x = -1$$

Por lo tanto las coordenadas de uno de los vértices es el punto (-1, 3) el cual corresponde al punto B. Considerando las ecuaciones (II) y (III).

$$4x - 3y + 13 = 0 \qquad \ldots (II)$$
$$y + 1 = 0 \qquad \ldots (III)$$

De la ecuación (III) se obtiene que $y = -1$. Sustituyéndose en la ecuación (II) se tiene:

$$4x - 3(-1) + 13 = 0$$

$$4x + 3 + 13 = 0$$

$$4x = -16$$

$$x = -16/4$$

$$x = -4$$

Estas dos rectas nos proporcionan al vértice (-4, -1) que corresponde al punto D.

Analizándose las ecuaciones (III) y (IV) se tendrá:

$$y + 1 = 0 \ldots \text{(III)}$$

$$4x + 3y - 21 = 0 \ldots \text{(IV)}$$

De la ecuación (III) se tiene $y = -1$; sustituyendo en la ecuación (IV)

$$4x + 3(-1) - 21 = 0$$

$$4x - 3 - 21 = 0$$

$$4x = -24$$

$$x = 24/4$$

$$x = 6$$

Estas dos rectas nos proporcionan al vértice (6, -1) que corresponde al punto C.

Finalmente se emplearán las ecuaciones (I) y (IV)

$$y - 3 = 0 \ldots \text{(I)}$$

$$4x + 3y - 21 = 0 \ldots \text{(IV)}$$

De la ecuación (I) se tiene que $y = 3$; en la ecuación (IV), se tiene :

$$4x + 3(3) - 21 = 0$$

$$4x + 9 - 21 = 0$$

$$4x = 12$$

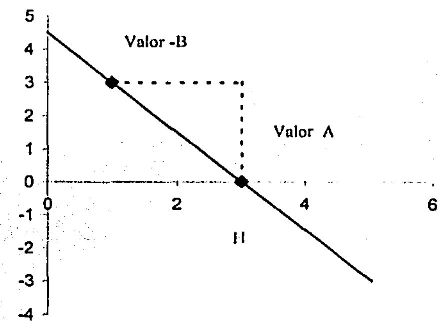
$$x = 12/4 = 3 \quad \therefore \ A(3, 3).$$

GRÁFICO DE UNA RECTA EN FORMA GENERAL.

Cuando se conoce a la ecuación de la recta en forma general $Ax + By + C = 0$, y se desea hacer su gráfica, se proporciona un valor cualquiera a "x" o "y" y se obtiene el valor numérico de la otra incógnita, con ello se tiene a las coordenadas del punto cualquiera de la recta; después se calcula la pendiente de la recta $m = -A/B$ y tomándose, al punto conocido de la recta, a partir de él se traza en la gráfica verticalmente el valor de A, inmediatamente sin despegar el lápiz del punto final que denota a A, se traza horizontalmente el valor de B, determinándose así otro punto de la recta, se unen estos dos puntos y con ello se tiene la recta deseada, esto es:

Hacer las gráfica de las siguientes rectas:

1. $3x + 2y - 9 = 0$

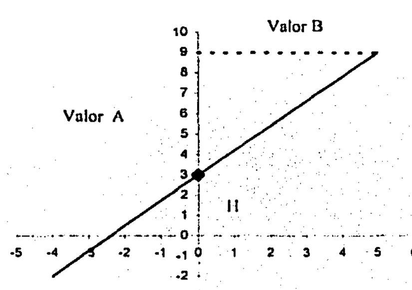


Se proporciona un valor arbitrario a x o a y; en este ejemplo tómese $y = 0$, sustituyéndose en la ecuación, se tiene:

$$3x + 2(0) - 9 = 0$$
$$3x - 9 = 0$$
$$3x = 9$$
$$x = 9/3 = 3$$

Se obtiene así las coordenadas de un punt que se calcula en este caso por medio de: $m = -A/B$, donde A es el coeficiente de x y B es el coeficiente de y por lo cual $m = -3/2 = 3/-2$.

2. $6x - 5y + 20 = 0$



Se proporciona un valor arbitrario a x o a y; en este ejemplo tómese $x = 0$, sustituyéndose en la ecuación, se tiene:

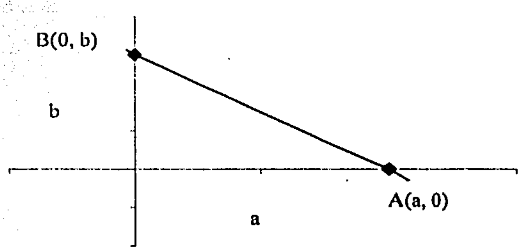
$$6x - 5y + 20 = 0$$
$$6(0) - 5y + 20 = 0$$
$$-5y = -20$$
$$y = -20/-5 = 4$$

Se obtiene así las coordenadas de un punto de la recta H(0, 4). La pendiente m se sabe que se calcula en este caso por medio de: m = -A/B , donde A es el coeficiente de x y B es el coeficiente de y por lo cual m = -6/-5 = 6/5.

ECUACIÓN DE LA LÍNEA RECTA EN LA FORMA SIMÉTRICA.

Sea la recta definida por los puntos A(a, 0) y B(o, b) que se muestra en la figura .

Cuando se conoce a un punto de la recta que está en el eje x, se la llama a la distancia que existe entre el origen O(0,0) y el punto considerado, ABSCISA AL ORIGEN, en este caso se denota con la letra "a"; cuando el punto se localiza en el eje y a la distancia que existe entre el origen y el punto se le llama, ORDENADA AL ORIGEN, la cual por lo general se denota como " b".



Obsérvese que se conocen dos puntos de la recta, el punto A(a, 0) y el B(0, b), por lo tanto se puede obtener la ecuación de la recta, empleando la expresión conocida como ecuación de la recta que pasa por dos puntos, la cual se sabe que tiene la forma:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Donde $A(a, 0) = A(x_1, y_1)$ y $B(0, b) = B(x_2, y_2)$

$$\frac{y-0}{x-a}=\frac{b-0}{0-a}=\frac{b}{a}$$

$$\frac{y}{x-a}=\frac{b}{-a}$$

Efectuando las operaciones adecuadas se tendrá:

$$-ay = b(x - a)$$

$$-ay = bx - ab$$

$$-bx - ay = -ab$$

Dividiendo a la última expresión por (-ab), se tiene:

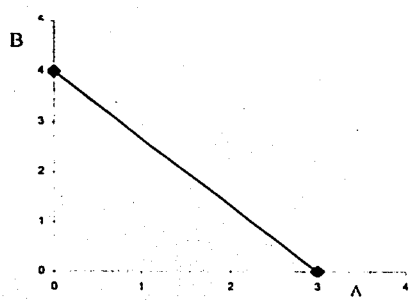
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$ **Ecuación de la recta en forma simétrica.**

Para evaluar su pendiente de la recta, cuando de ésta se conoce su ecuación en la forma simétrica se obtiene por medio de la expresión:

$$m=\frac{-b}{a}$$

EJEMPLOS:

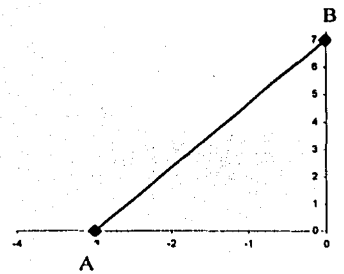
1. Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa al origen es tres y su ordenada al origen es cuatro.



De acuerdo con el problema la abscisa al origen es $a = 3$, y la ordenada al origen - - $b = 4$, por lo tanto al sustituir en la ecua- - ción de la recta en forma simétrica se tiene que: $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$

Este gráfico se construye localizando los puntos A(3, 0) y B(0, 4). En este caso su pendiente es: m = -4/3.

2. Obtener la ecuación de la recta definida por los puntos A(-3, 0) y B(0, 7)



En este problema se aprecia que la - - - abscisa al origen es a = -3 y la ordenada al origen es b = 7, al sustituirlo en la ecuación de la recta en forma simétrica se tiene:

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{7}=1$$
$$m=\frac{7}{3}$$

TRANSFORMACIÓN DE LA ECUACIÓN DE LA RECTA DE LA FORMA GENERAL.

Cuando la ecuación de la recta, es dada en la forma general Ax + By + C = 0, y se desea conocer su abscisa al origen, así como su ordenada al origen, se puede proceder de la manera siguiente:

1. El término independiente se transpone al miembro derecho de la igualdad .

$$Ax + By = -C$$

2. Se divide la ecuación anterior por -C con el objeto de que el miembro derecho de la ecuación sea igual a uno, tal como lo exige la ecuación de la recta en la forma simétrica.

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=\frac{-C}{-C}$$
$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

3. Finalmente se aplican las propiedades de las fracciones algebraicas, esto es:

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}}+\frac{y}{\frac{-C}{B}}=1$$

Como la ecuación de la línea recta en la forma simétrica tiene la forma:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Se tiene que:

$$a=\frac{-C}{A}$$

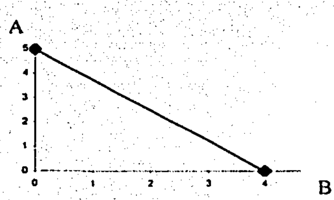
$$b=\frac{-C}{B}$$

1. Expresar en la forma simétrica la ecuación de la recta 5x + 4y -20 = 0. Como la ecuación está escrita en la forma general Ax + By + C = 0, se aprecia por comparación que:

A = 5, B = 4, y C =-20, de donde se obtiene a la abscisa y ordenada al origen:

$$a=\frac{-C}{A}=\frac{-(-20)}{5}=4$$

$$b=\frac{-C}{B}=\frac{-(-20)}{4}=5$$



Por lo que la ecuación en forma simétrica se expresa como: $\frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$

Es conveniente que el educando resuelva este tipo de problemas haciendo uso de los pasos algebraicos descritos antes de este problema, con el objeto de que madure sus conocimientos y se le facilite el estudio de las cónicas.

Dada la ecuación $5x + 4y - 20 = 0$, se pasa el miembro derecho de la igualdad al término independiente.

$$5x + 4y = 20$$

Ahora dividimos toda la ecuación entre 20.

$$\frac{5x}{20}+\frac{4y}{20}=\frac{20}{20}$$

Finalmente se simplifica la ecuación directamente:

$$\frac{x}{\frac{20}{5}}+\frac{y}{\frac{20}{4}}=1 \Rightarrow \frac{x}{4}+\frac{y}{5}=1$$

ECUACIÓN DE LA RECTA EN LA FORMA PUNTO PENDIENTE.

Conocida la ecuación de la recta que es determinada por dos puntos:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Se recuerda que en esta igualdad, la pendiente m está dada por:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \quad \text{por lo que se tiene:} \quad \frac{y-y_1}{x-x_1}=m$$

o bien:

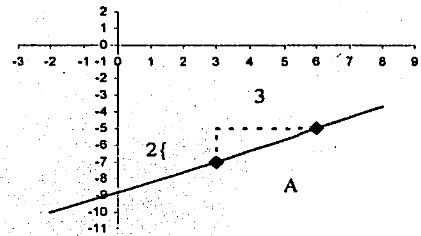
$$\mathbf{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

La ultima expresión es conocida con la ecuación de la recta en la forma punto pendiente.

EJEMPLO:

1. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3, -7) y su pendiente es 2/3.

Como debe ser usual en geometría - analítica primero debe hacerse la figura con el objeto de ayudarnos a razonar el problema.



En este caso se conoce a un punto -- A(3, -7) de la recta y su pendiente ---- m = 2/3 por lo tanto la ecuación que se empleará es la ecuación de la recta en forma punto pendiente, dada por: $y - y_1 = m(x - x_1)$ con $A(3, -7) = A(x_1, y_1)$ y $m = 2/3$.

Substituyéndose los valores numéricos de x_1, y_1, y m_1, se tiene:

$$y-(-7)=\frac{2}{3}(x-3)$$

$$y+7=\frac{2}{3}(x-3)$$

Si se desea expresar a la ecuación anterior en la forma general, solamente se debe realizar las operaciones algebraicas indicadas.

$$3(y + 7) = 2(x - 3)$$

$$3y + 21 = 2x - 6$$

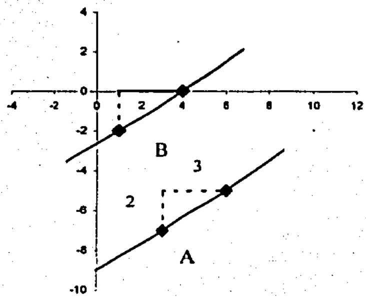
$$2x - 3y - 27 = 0.$$

2. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto B(1, -2) y es paralela a la recta del problema anterior.

Como la recta cuya ecuación se desea obtener es paralela, a la recta del último problema resuelto, por la condición de paralelismo de dos rectas se puede concluir que la pendiente de la recta que pasa por el punto B(1, -2), es igual a la pendiente de la recta del problema anterior, es decir: m = 2/3.

Por lo cual la ecuación de la recta en la forma punto pendiente será:

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$ con $m = 2/3$ y $B(1, -2) = B(x_1, y_1)$



$$y-(-2)=\frac{2}{3}(x-1)$$
$$3(y+2)=2(x-1)$$
$$3y+6=2x-2$$
$$2x-3y-8=0$$

3. Una recta es determinada por los puntos, D(5, 1) y E(-3, 2), hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto F(-1, -3) y es perpendicular a la recta DE.

De acuerdo con el concepto de perpendicularidad de dos rectas, la pendiente de la recta que pasa por el punto F(-1, -3) es recíproca y de signo contrario a la pendiente de la recta que pasa por los puntos E y D es decir:

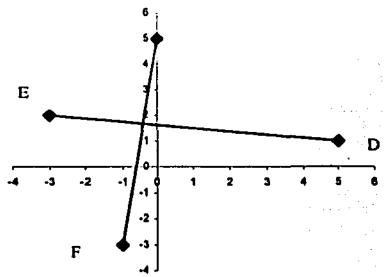
$$m_2 = -\frac{1}{m_1} \text{ ó bien } m_2 = -\frac{1}{m_{DE}}$$

Para obtener el valor numérico de la pendiente m_2 se necesita calcular la pendiente m_{DE} por medio de: $m_{DE} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Donde:

D(5, 1) = D(x_1, y_1) y E(-3, 2) = E(x_2, y_2)

$$m_{DE} = \frac{2-1}{-3-5} = \frac{1}{-8}$$



Entonces la pendiente de la recta que pasa por el punto F(-1, -3) y que es perpendicular a la recta cuya pendiente es -1/8 es:

$$m_2 = \frac{1}{\frac{-1}{8}} = 8$$

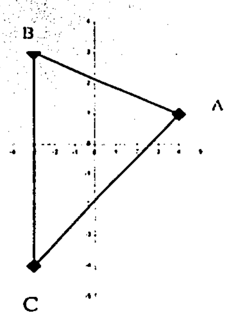
Finalmente la ecuación de la recta es: $y - y_1 = m(x - x_1)$ con m = 8 y F(-1, -3)

$$y-(-3) = 8(x-(-1))$$
$$y+3 = 8(x+1)$$
$$y+3 = 8x+8$$
$$8x - y + 5 = 0$$

4. Un triángulo es definido por los puntos A(4, 1), B(-3, 3) y C(-3, -4), hallar las ecuaciones de las medianas y obtener su Baricentro.

Una mediana, en un triángulo cualquiera es un segmento de recta que va de un vértice al punto medio del lado opuesto. Como cada mediana del triángulo pasa por el punto medio del lado respectivo, primero se evaluará a los puntos medios de los lados del triángulo por medio de la expresión:

$$P_m = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$



Para el lado AB, se tiene A(4, 1) =A(x_1, y_1) y B(-3, 3) = B(x_2, y_2)

$$P_{MAB} = \left(\frac{4-3}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{4}{2}\right) = (.5,2)$$

Para el lado BC, se tiene B(-3, 3) B(x_1, y_1) y C(-3, -4) = C(x_2, y_2)

$$P_{MBC} = \left(\frac{-3-3}{2}, \frac{3-4}{2}\right) = \left(\frac{-6}{2}, \frac{-1}{2}\right) = (-3,.-.5)$$

Finalmente para el lado CA, se tiene C(-3, -4) = C(x_1, y_1) y A(4, 1) = A(x_2, y_2)

$$P_{MCA} = \left(\frac{-3+4}{2}, \frac{-4+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-3}{2}\right) = (.5, -1.5)$$

Teniendo los puntos medios de cada lado del triángulo ABC, se trazan las medianas; de acuerdo con la figura se aprecia que para cada mediana se conocen dos puntos, uno de ellos es el punto medio del lado respectivo y el otro el vértice opuesto al punto medio, por lo tanto para encontrar la ecuación de cada mediana, se hará uso de la ecuación de la recta que pasa por dos

puntos dada por: $$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

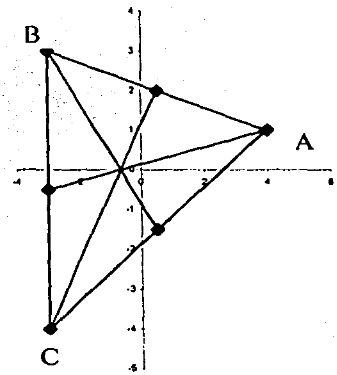
Para la mediana AP_{MBC};

se tiene A (4, 1) y $P_{MBC}(-3, -1/2)$

$$\frac{y-1}{x-4} = \frac{-\frac{1}{2}-1}{-3-4} \Rightarrow \frac{y-1}{x-4} = \frac{-\frac{3}{2}}{-7}$$

$$\frac{y-1}{x-4} = \frac{3}{14} \Rightarrow 14(y-1) = 3(x-4)$$

$$14y - 14 = 3x - 12 \Rightarrow 3x - 14y + 2 = 0$$



Para la mediana BP_{MAC}; se tiene

B(-3,3) y $P_{MAC}(1/2, -3/2)$

$$\frac{y-3}{x+3} = \frac{-\frac{3}{2}-3}{\frac{1}{2}+3} \Rightarrow \frac{y-3}{x+3} = \frac{-\frac{9}{2}}{\frac{7}{2}}$$

$$\frac{y-3}{x+3} = -\frac{9}{7} \Rightarrow 7(y-3) = -9(x+3)$$

$$7y - 21 = -9x - 27$$

$$9x + 7y + 6 = 0$$

Finalmente para la mediana CP_{MAB}; se tiene C(-3, -4) y $P_{MAB}(1/2, 2)$

$$\frac{y+4}{x+3}=\frac{2+4}{\frac{1}{2}+3} \quad \Rightarrow \quad \frac{y+4}{x+3}=\frac{6}{\frac{7}{2}}$$

$$\frac{y+4}{x+3}=\frac{12}{7} \quad \Rightarrow \quad 7(y+4)=12(x+3)$$

$$7y+28=12x+36 \Rightarrow 12x-7y+8=0$$

Para obtener las coordenadas del Baricentro se debe resolver el sistema de ecuaciones en donde se pueden hacer un sistema de ecuaciones M_1 y M_2; M_1 y M_3 o bien M_2 y M_3. Se resolverá la combinación M_1 y M_2 y se le deja al educando que resuelva las otras dos combinaciones para que demuestre que las medianas se interceptan en un solo punto.

$$3x - 14y + 2 = 0 \ \ldots M_1$$
$$9x + 7y + 6 = 0 \ \ldots M_2$$
$$12x - 7y + 8 = 0 \ \ldots M_3$$

De M_1 y M_2 se tiene:

$$3x - 14y = -2 \ \ldots M_1$$
$$9x + 7y = -6 \ \ldots M_2$$

Multiplicando la ecuación M_1 por (-3) se tiene:

$$-9x + 42y = 6$$
$$\underline{9x + 7y = -6}$$
$$49y = 0 \quad \text{Donde} \quad y = 0$$

Sustituyéndose y = 0 en M_2, se tiene:

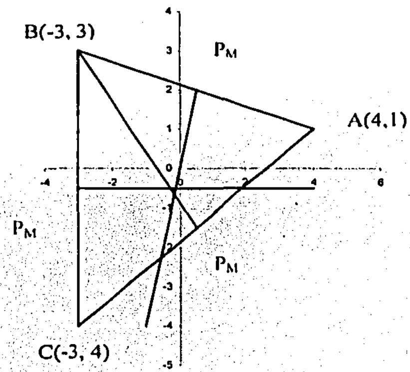
$$9x + 7(0) = -6$$
$$9x = -6$$
$$x = -6/9$$
$$x = -.66$$

Por lo tanto el Baricentro es dado por: B(-0.66, 0)

5. Obtener las ecuaciones de las mediatrices del triángulo del problema anterior y las coordenadas del circuncentro.

Como una mediatriz es un lugar geométrico que equidista de los extremas de un segmento, se sabe que este tipo de rectas pasa por el punto medio del lado de cada triángulo y además son perpendiculares al lado que equidistan.

En la figura del lado derecho se muestra a las mediatrices del triángulo ABC del problema anterior, se aprecia que como ya son conocidos - los puntos medios del triángulo, el presente pro-- blema se reduce a calcular la pendiente de cada lado del polígono, una vez obtenida se aplica la - propiedad de perpendicularidad de dos rectas para evaluar la pendiente de cada mediatriz; finalmente se aplica la ecuación punto pendiente para hallar la ecuación de estos lugares geométricos.



Calculando la pendiente del lado AB: A(4, 1) = A (x_1, y_1), B(-3, 3) = B(x_2, y_2)

$$m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{-3-4} = -\frac{2}{7}$$

$$m\perp_{AB} = -\frac{1}{m_{AB}} = -\frac{1}{-\frac{2}{7}} = \frac{7}{2}$$

Haciendo lo mismo para la pendiente del lado BC:B(-3, 3) = B(x_1, y_1),C(-3, -4) = C(x_2, y_2)

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-4-3}{-3+3} = -\frac{7}{0} = \infty$$

$$m\perp_{BC} = -\frac{1}{m_{BC}} = -\frac{1}{-\frac{7}{0}} = \frac{0}{7} = 0$$

Ahora para la pendiente del lado CA: $C(-3, -4) = C(x_1, y_1)$, $A(4, 1) = A(x_2, y_2)$

$$m_{CA} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1+4}{4+3} = \frac{5}{7}$$

$$m\perp_{CA} = -\frac{1}{m_{CA}} = -\frac{1}{\frac{5}{7}} = -\frac{7}{5}$$

Como la mediatriz del lado AB denotada como M_1 pasa por el punto medio $P_{MAB}(1/2, 2) = P_{MAB}(x_1, y_1)$ y es perpendicular al lado AB, su pendiente es:

$$m\perp_{AB} = \frac{7}{2}$$

la ecuación será:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{7}{2}(x - \frac{1}{2})$$

$$2(y-2) = 7(x - \frac{1}{2})$$

$$2y - 4 = 7x - \frac{7}{2}$$

$$2y - 4 = \frac{14x - 7}{2}$$

$$2(2y-4) = 14x - 7$$

$$4y - 8 = 14x - 7$$

$$14x - 4y - 7 + 8 = 0$$

$$14x - 4y + 1 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots M_1$$

Para hallar la mediatriz del lado BC denotada como M_2 pasa por el punto medio $P_{MBC}(-3, -1/2) = P_{MBC}(x_1, y_1)$ y es perpendicular al lado BC, su pendiente es:

$$m\perp_{BC} = 0$$

y su ecuación será:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + \frac{1}{2} = 0(x + 3)$$
$$y = -\frac{1}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots M_2$$

Finalmente para obtener la mediatriz del lado AC denotada como M_3 que pasa por el punto medio $P_{MAC}(1/2, -3/2) = P_{MAC}(x_1, y_1)$ y es perpendicular al lado AB, su pendiente es: $m\perp_{AC} = -\frac{7}{5}$.

La ecuación M_3 será:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + \frac{3}{2} = -\frac{7}{5}(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow 5(y + \frac{3}{2}) = -7(x - \frac{1}{2})$$
$$5y + \frac{15}{2} = -7x + \frac{7}{2} \Rightarrow \frac{10y + 15}{2} = \frac{-14x + 7}{2}$$
$$10y + 15 = 2\left(\frac{-14x + 7}{2}\right) \Rightarrow 10y + 15 = -14x + 7$$
$$14x + 10y + 15 - 7 = 0$$
$$14x + 10y + 8 = 0 \ \ldots M_3$$

Las mediatrices se interceptan también en un punto, a ese punto se le llama circuncentro. Encontrar sus coordenadas si las ecuaciones de las mediatrices son:

$$14x - 4y + 1 = 0 \ \ldots\ldots M1$$
$$y = -1/2 \ \ldots. M2$$
$$4x + 10y + 8 = 0 \ \ldots\ldots M3$$

Substituyéndose y = -0.5 en M3 se tiene:

$$14x + 10(-0.5) + 8 = 0$$
$$14x - 5 + 8 = 0$$
$$14\,x = -3$$
$$x = -3/14$$
$$x = -0.21$$

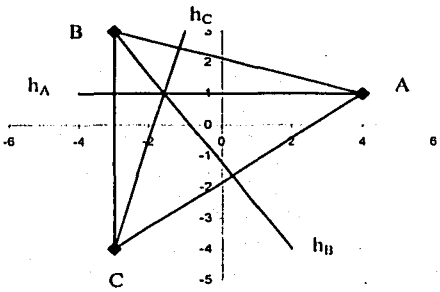
Por lo tanto se aprecia que las coordenadas del circuncentro son: C(-0.21, -0.5)

Se recomienda al estudiante que demuestre que todas las mediatrices intersectan en este punto.

6. Encontrar las ecuaciones de las alturas del problema (4) y encontrar la coordenada del ortocentro.

Por lo tanto para encontrar la ecuación de la altura h_A, se empleará la ecuación de la recta en la forma punto pendiente ya que se conoce un punto, el vértice A(4, 1) y su pendiente que es recíproca y de signo contrario a la pendiente del lado BC por condición de perpendicularidad.

También se observa que la pendiente de la altura h_A es igual a la pendiente de la mediatriz M_2 del problema anterior.



De acuerdo con el problema anterior:

$$m_{AB} = -\frac{2}{7}, \qquad m_{BC} = \infty, \qquad m_{CA} = \frac{5}{7}$$

$$m\perp_{AB} = m_{hC} = \frac{7}{2}, \quad m\perp_{BC} = m_{hA} = 0, \quad m\perp_{CA} = m_{hB} = -\frac{7}{5}$$

Con A(4, 1) y m = 0 la ecuación de la altura h_A:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 1 = 0(x - 4)$$
$$y - 1 = 0$$
$$y = 1 \ldots\ldots\ldots h_a$$

La ecuación de la altura h_B:

Con B(-3, 3) y m_{hB} = -7/5

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 3 = \frac{-7}{5}(x+3) \Rightarrow \quad 5(y-3) = -7(x+3)$$
$$5y - 15 = -7x - 21 \quad \Rightarrow 7x + 5y - 15 + 21 = 0$$
$$7x + 5y + 6 = 0$$

La ecuación de la altura h_C:

Con C(-3, -4) y m_{hc}= 7/2

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y + 4 = \frac{7}{2}(x+3)$$
$$2(y+4) = 7(x+3)$$
$$2y + 8 = 7x + 21$$
$$7x - 2y - 8 + 21 = 0$$
$$7x - 2y + 13 = 0$$

Las alturas interceptan en un punto llamado ortocentro, para evaluar sus coordenadas se resuelve el sistema de ecuaciones:

y = 1 ....h_A

7x + 5y + 6 = 0 ...... h_B

7x - 2y + 13 = 0 ...... h_C

Substituyéndose y = 1 en hB, se tiene:

7x +5(1) +6 = 0

7x = -11

x = -11/7

x = -1.57

Por lo tanto las coordenadas del ortocentro será :

O(-1.57, 1)

ÁREA DE UN TRIÁNGULO.

El área de un triángulo cualquiera se obtiene por medio de la siguiente expresión.

$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}$$

En el determinante anterior (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) representan las coordenadas de los vértices de un triángulo cualquiera.

EJEMPLO:

1) Calcular el área del triángulo ABC, donde A(4, 1), B(-3, 3), C(-3, -4):

Substituyéndose a los puntos A, B, C, en la expresión anterior se tiene:

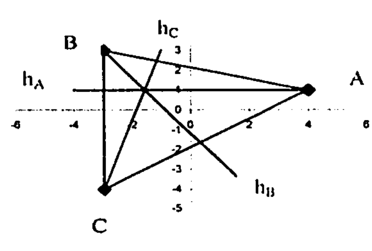
$$A=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1\\ -3 & 3 & 1\\ -3 & -4 & 1\\ 4 & 1 & 1\\ -3 & 3 & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left[(12+12-3)-(-3-16-9)\right]=\frac{1}{2}\left[(21)-(-28)\right]$$

$$A=\frac{1}{2}[21+28]=\frac{1}{2}[49]=24.5$$

OTRO MÉTODO PARA CALCULAR EL ÁREA DE UN TRIÁNGULO.

El estudiante debe recordar que el área de un triángulo puede ser calculada también por medio de: $A=\dfrac{(base)(altura)}{2}$

De acuerdo con la figura del problema (4) la base del triángulo es cualquiera de sus lados, por ejemplo el lado AC; para - aplicar la formula anterior se debe obtener el valor numérico de la base AC y la altura correspondiente h_B.



La magnitud de la base se obtiene aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos: Con A(4, 1) = A(x_1, y_1) y C(-3, -4) = C(x_2, y_2)

$$b=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$b=\sqrt{(-3-4)^2+(-4-1)^2}=\sqrt{(-7)^2+(-5)^2}$$
$$b=\sqrt{49+25}=\sqrt{74}=8.6$$

Para evaluar la magnitud de la altura Bτ, se necesita conocer las coordenadas del punto τ. Este punto de acuerdo con la figura es el punto de intersección en la recta hB, cuya ecuación es conocida por el problema (6) 7x +5y +6 =0 y la base AC del triángulo cuya ecuación se puede obtener por medio de la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Después que se conoce la ecuación de esta recta, se resuelve el sistema de ecuaciones para obtener la coordenada del punto τ. Esto es:

Con A(4, 1) = A(x_1, y_1) y C(-3, -4)=(x_2, y_2)

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_2}$$
$$\frac{y-1}{x-4}=\frac{-4-1}{-3-4}$$
$$\frac{y-1}{x-4}=\frac{5}{7}$$
$$7(y-1)=5(x-4)$$
$$7y-7=5x-20$$
$$5x-7y-20+7=0$$
$$5x-7y-13=0$$

Finalmente dado el sistema de ecuaciones:

5x - 7y -13 = 0 Ecuación de la base AC.

7x +5y + 6 = 0 Ecuación de la altura h_B

Aplicando el método de reducción.(Se multiplica por 7 a la ecuación de la altura y por 5 a la ecuación de la base, se tiene:

$$\begin{array}{l} 25x - 35y - 65 = 0 \\ \underline{49x + 35y + 42 = 0} \\ 74x \qquad -23 = 0 \end{array}$$

$x = 23/74$

$x = 0.31$

Substituyéndose $x = 23/74$ en la ecuación de la base, para calcular la ordenada y del punto de intersección τ, se tiene:

$5(0.31) - 7y - 13 = 0$

$1.55 - 7y - 13 = 0$

$-7y = 11.45$

$y = 11.45/-7$

$y = -1.64$

Entonces τ tiene como coordenadas $\tau(0.31, -1.64)$, el vértice B(-3, 3) y la magnitud de la altura será dada por:

$$B\tau = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3 - 0.31)^2 + (3 + 1.64)^2}$$

$$B\tau = \sqrt{(-3.31)^2 + (4.64)^2} = \sqrt{10.1561 + 21.5496} = \sqrt{32.5057} = 5.7$$

Por lo tanto, el área del triángulo es:

$$A = \frac{(b)(h)}{2} = \frac{(8.6)(5.7)}{2} = \frac{49}{2} = 24.5u^2$$

ECUACIÓN DE LA RECTA CONOCIDA SU PENDIENTE Y SU ORDENADA AL ORIGEN.

Se sabe que la ecuación de la recta punto pendiente es:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

Si el punto $P_1(x_1, y_1)$ es dado por las coordenadas (0, b), la ecuación anterior se trasforma a:

$y - b = m(x - 0)$

$y - b = mx$

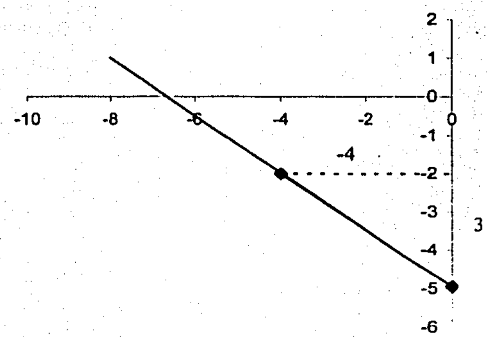
$y = mx + b$

Está ultima ecuación se emplea , cuando se conoce a la pendiente de la recta m y la ordenada al origen b.

EJEMPLO.

1. Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es -3/4 y la ordenada al origen vale -5.

Como m = -3/4 y b =-5, la recta que se representa en la figura de la derecha y su ecuación es:



$$y = mx + b$$

$$y = -\frac{3}{4}x - 5$$

$$y = \frac{-3x - 20}{4}$$

$$4y = -3x - 20$$

$$3x + 4y + 20 = 0$$

A = 3, B = 4, C =20.

2. Expresar la ecuación de la recta 3x + 4y + 20 = 0 en forma canónica.

A la ecuación 3x + 4y + 20 = 0; se divide por el coeficiente de "y" y se despeja a esta variable esto es:

$$\frac{3x}{4} + \frac{4y}{4} + \frac{20}{4} = 0$$

$$\frac{3x}{4} + y + 5 = 0$$

$$y = \frac{-3x}{4} - 5$$

Obsérvese que es exactamente la misma ecuación que se obtuvo en el problema anterior.

3. Calcular la ordenada al origen y la pendiente de la recta 3x -2y +8 = 0. Una de las formas de resolver este problema es transportando a la ecuación 3x -2y +8 = 0 a la forma y = mx + b, esto es:

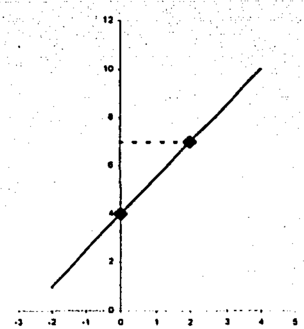
$$3x-2y+8=0$$

$$\frac{3x}{-2}-\frac{-2y}{-2}+\frac{8}{-2}=0$$

$$-\frac{3x}{2}+y-4=0$$

$$y=\frac{3x}{2}+4$$

Por lo tanto se tiene que m = 3/2 y b = 4.



4. La pendiente de una recta es 3/2 y su ordenada al origen es -6; obtener su ecuación en la forma simétrica.

Como m = 3/2 y b = -6, se sabe que la ecuación de la recta es: y = mx + b substituyéndose valores numéricos se tiene: y = 3x/2 -6 desarrollándose las operaciones indicadas, se tiene:

$$y=\frac{3x-12}{2}$$

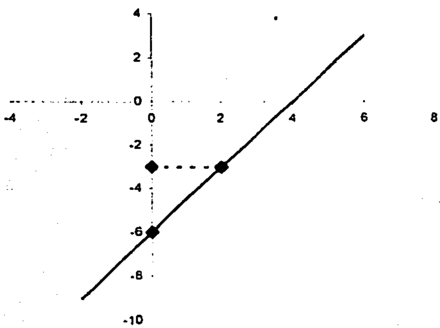
$$2y=3x-12$$

$$-3x+2y=-12$$

$$\frac{-3x}{-12}+\frac{2y}{-12}=\frac{-12}{-12}$$

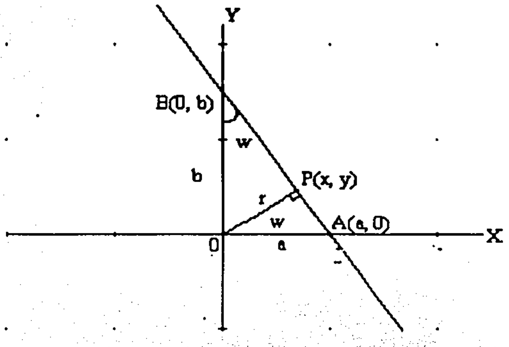
$$\frac{x}{12/3}+\frac{y}{-12/2}=1$$

$$\frac{x}{4}+\frac{y}{-6}=1$$



ECUACIÓN DE LA RECTA EN LA FORMA NORMAL.

La ecuación de la recta en forma normal, está expresada en función de la distancia (r) normal (perpendicular), que existe entre el origen y la recta, así como el ángulo (w) que hace esta normal con el eje x, tal como se muestra en la figura.



Si se considera la función trigonométrica coseno del ángulo w en el triángulo AOP.

Se tiene: $\cos w = \dfrac{r}{a}$

de donde la abscisa al origen "a" se

$$a \cos w = r$$

expresa como: $a = \dfrac{r}{\cos w}$

La ordenada al origen "b" de la recta que muestra la figura se va a evaluar del triángulo rectángulo OPB. En este triángulo se aprecia que el ángulo OBP es igual al ángulo w por estar formados por lados perpendiculares respectivamente.

$$\operatorname{sen} w = \frac{r}{b}$$

$$b = \frac{r}{\operatorname{sen} w}$$

Si se substituyen las expresiones obtenidas para la abscisa y ordenada al origen en la ecuación de la recta en forma simétrica, se tiene:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$$\frac{x}{\dfrac{r}{\cos w}} + \frac{y}{\dfrac{r}{\operatorname{sen} w}} = 1$$

$$\frac{x \cos w}{r} + \frac{y \operatorname{sen} w}{r} = 1$$

$$x \cos w + y \operatorname{sen} w = r$$

A esta última expresión se le denomina ecuación normal de la recta.

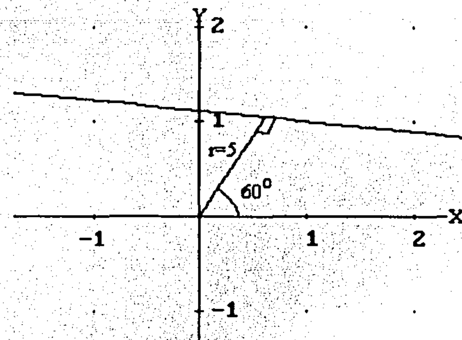
EJEMPLO.

1. Hallar la ecuación de la recta cuya distancia normal al origen es de 5 unidades y el ángulo que forma, la distancia normal es de 60^{o}.

Analizándose el enunciado del pro-- blema se observa que r = 5 y w = 60°; la forma normal de la recta es:

$x\cos w + y \operatorname{sen} w = r \Rightarrow x\cos 60^{\circ} + y\operatorname{sen} 60^{\circ} = 5$

$0.5x + 0.866y = 5$



2. Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3, 4) y es perpendicular a la recta que pasa por el origen y el punto A.

De acuerdo con el dato proporcionado, se aprecia que al trazar en la figura las coordenadas del punto A(3, 4) se forma un triángulo rectángulo cuya hipotenusa r se puede calcular por el teorema de Pitágoras, el sen w, y el cos w aplicándose su definición; para más

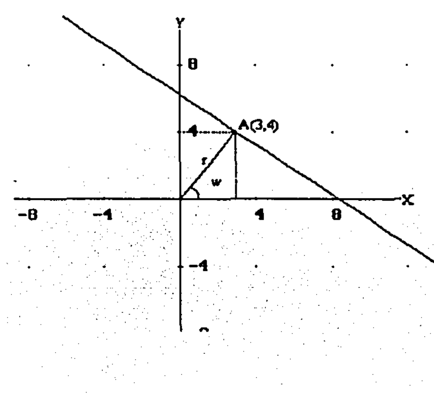
tarde utilizar la ecuación de la recta en la forma normal y determinar así la ecuación de la recta deseada, esto es:

$x\cos w + y \operatorname{sen} w = r$

$r = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$

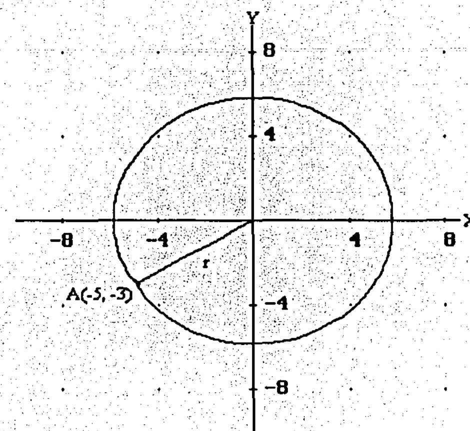
$\operatorname{sen} w = \dfrac{Cat.Op.}{Hip.} = \dfrac{4}{5}$

$\cos w = \dfrac{Cat.Ady.}{Hip.} = \dfrac{3}{5}$



Por lo tanto la ecuación queda representada por : $\dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}y = 5$

3. Una circunferencia con centro en el origen pasa por el punto A(-5, -3), encontrar la ecuación de la tangente en ese punto:



De acuerdo con la figura, se concluye que la ecuación de la tangente en el punto A(-5,-3) a la circunferencia, se puede obtener por medio de la ecuación de la recta en forma normal, ya que la tangente es perpendicular al radio r, se sabe que:

$$r = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$\cos w = \frac{-5}{r} = \frac{-5}{\sqrt{34}}, \qquad \operatorname{sen} w = \frac{-3}{r} = \frac{-3}{\sqrt{34}}$$

Como la ecuación de la recta en la forma normal es:

$$x\cos w + y \operatorname{sen} w = r$$

$$x\frac{-5}{\sqrt{34}} + y\frac{-3}{\sqrt{34}} = \sqrt{34}$$

$$-5x - 3y = 34$$

$$5x + 3y + 34 = 0$$

Cuando se conoce a la ecuación general de la recta y se desea expresar a esta ecuación en forma normal x cos w + y sen w = r ; se debe tomar en cuenta que dos o más ecuaciones de rectas representan a la misma, cuando sus coeficientes respectivos son proporcionales, es decir:

$$\text{De} \quad \left\{ \begin{array}{l} Ax + By + C = 0 \\ (\cos w)x + (\operatorname{sen} w)y - r = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \cos w = HA \\ \operatorname{sen} w = HB \\ -r = HC \end{array} \right\}$$

Donde H es una constante; de las expresiones anteriores se tiene que:

$$\begin{Bmatrix} \cos^2 w = H^2 A^2, \mathrm{sen}^2\, w = H^2 B^2 \\ \cos^2 w + \mathrm{sen}^2\, w = H^2 A^2 + H^2 B^2 \end{Bmatrix}$$

Como $\cos^2 w + \mathrm{sen}^2 w = 1$ se tiene:

$$H^2 A^2 + H^2 B^2 = 1$$

$$H^2 (A^2 + B^2) = 1 \qquad \text{Para} \quad A^2 + B^2 \neq 0$$

$$H = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Como:

$$\cos w = HA = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\mathrm{sen}\, w = HB = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$-r = HC = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Al sustituirse las expresiones anteriores en la ecuación normal de la recta x cos w + y sen w -r = 0 se tiene:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Expresión que se emplea para transformar cualquier ecuación de la recta Ax +By +C = 0 (en la forma general) a la forma normal x cos w + y sen w = r.

De los signos ± que existen antes del radical sólo se emplea uno de ellos con el objeto de que el ángulo w sea único, tal y como el educando lo ha observado en los ejercicios anteriores y en la definición de la ecuación normal de la recta. Como -r = HC y r siempre es positivo, se concluye que necesariamente H y C deben de ser signos contrarios: por lo tanto la ecuación recién obtenida de los signos ± que anteceden al radical $\left(\pm\sqrt{A^2 + B^2} = H^{-1}\right)$ se selecciona el signo contrario al del signo de C (siempre que $C \neq 0$). Si C =0 y el coeficiente de la variable y es cero, (B = 0) H y A tienen el mismo signo; finalmente si en la ecuación se tiene que tanto C=0;. como B=0 entonces el signo que antecede al radical (H), es el mismo que el coeficiente A.

EJEMPLO:

1. Expresar en la forma normal a las rectas dadas por las ecuaciones:

$$3x + 2y - 6 = 0 ; \quad -2x + 3y + 10 = 0$$

$3x + 2y - 6 = 0$ En esta ecuación se tiene que: A = 3, B =2 , C = -6; substituyéndose A, B,C se tiene:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

$$\frac{3}{\pm\sqrt{3^2+2^2}}x+\frac{2}{\pm\sqrt{3^2+2^2}}y+\frac{-6}{\pm\sqrt{3^2+2^2}}=0$$

$$\frac{3}{\pm\sqrt{13}}x+\frac{2}{\pm\sqrt{13}}y+\frac{-6}{\pm\sqrt{13}}=0$$

$$\frac{3}{\sqrt{13}}x+\frac{2}{\sqrt{13}}y=\frac{6}{\sqrt{13}}$$

Recuerda que el signo del radical se selecciona, el signo contrario a C por lo cual se utilizo el signo + ya que C = -6.

La última ecuación tiene la forma x cos w + y sen w = r

$$\cos w=\frac{3}{\sqrt{13}}; \quad \operatorname{sen} w=\frac{2}{\sqrt{13}}=0.55; \quad r=\frac{6}{\sqrt{13}}=1.66$$

$$w = ang\,\operatorname{sen}(0.555) = 33.5^\circ$$

$-2x + 3y + 10 = 0$. Por la forma general de la recta se tiene A = -2, B =3 y C = 10 sustituyéndose se tiene:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}x+\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}y+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

$$\frac{-2}{\pm\sqrt{(-2)^2+3^2}}x+\frac{3}{\pm\sqrt{(-2)^2+3^2}}y+\frac{10}{\pm\sqrt{(-2)^2+3^2}}=0$$

$$\frac{-2}{\pm\sqrt{13}}x+\frac{3}{\pm\sqrt{13}}y+\frac{10}{\pm\sqrt{13}}=0$$

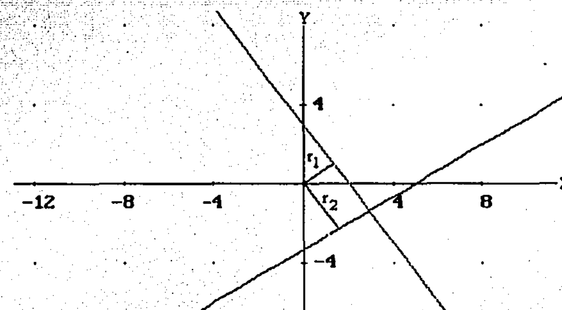
$$\frac{2}{\sqrt{13}}x-\frac{3}{\sqrt{13}}y=\frac{10}{\sqrt{13}}$$

Recuerda que el signo del radical se selecciona, el signo contrario a C por lo cual se utilizo el signo - ya que C = 10.

La última ecuación tiene la forma x cos w + y sen w = r

$$\cos w = \frac{2}{\sqrt{13}} = 0.55; \quad \operatorname{sen} w = \frac{3}{\sqrt{13}}; \quad r = \frac{10}{\sqrt{13}}$$

$$w_2 = 360° - 56.25° = 303.75°$$



En la figura se muestra a las dos rectas del último par de ejemplos, note que la distancia de la recta con el origen (r_1= 1.66) forma un ángulo agudo con el eje x, por ser positivas las funciones trigonométricas del seno y coseno; mientras que la distancia de la recta -2x +3y +10 = 0 (r_2= 2.77) con el origen, forma un ángulo mayor de 270° y menor de 360 °, por ser el coseno positivo y el seno negativo.

2. Calcular la distancia que existe entre las rectas 3x - y +3 = 0 y -6x + 2y +36 = 0 y comprobar que son paralelas.

Para obtener la distancia que existe en estas rectas se pueden transformar sus ecuaciones a la forma normal y obtener la distancia que existe de cada recta al origen; conocidas estas entonces se suman y con ello se obtendrá la distancia deseada.

De la ecuación: 3x - y +3 =0; se tiene que A = 3, B = -1, C = 3, entonces al substituir se tendría:

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

$$\frac{3x}{\pm\sqrt{3^2+(-1)^2}}+\frac{-1y}{\pm\sqrt{3^2+(-1)^2}}+\frac{3}{\pm\sqrt{3^2+(-1)^2}}=0$$

$$\frac{3x}{\pm\sqrt{10}}+\frac{-1y}{\pm\sqrt{10}}+\frac{3}{\pm\sqrt{10}}=0$$

$$-\frac{3x}{\sqrt{10}}+\frac{1y}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos w_1=\frac{-3}{\sqrt{10}};\qquad \operatorname{sen} w_1=\frac{1}{\sqrt{10}};\qquad r_1=\frac{3}{\sqrt{10}}=0.948$$

Como el seno del ángulo w es positivo y el coseno negativo , se concluye que w es un ángulo obtuso, es decir: $90^\circ < w < 180^\circ$ por lo tanto:

w = 180° - ang sen(0.3162)

w = 180° - 18. 43° = 161.57°

Para la ecuación -6x + 2y + 36 = 0 se percibe que es posible expresarla como: -3x +y +18 = 0, de donde se concluye que A= -3, B =1, C= 18, substituyéndose:

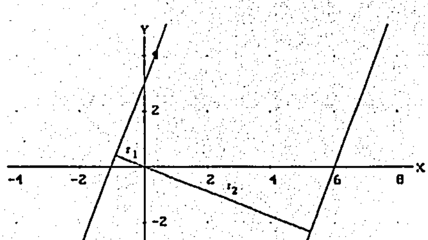
$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

$$\frac{-3x}{\pm\sqrt{(-3)^2+1^2}}+\frac{1y}{\pm\sqrt{(-3)^2+1^2}}+\frac{18}{\pm\sqrt{(-3)^2+1^2}}=0$$

$$\frac{-3x}{\pm\sqrt{10}}+\frac{1y}{\pm\sqrt{10}}+\frac{18}{\pm\sqrt{10}}=0$$

$$\frac{3x}{\sqrt{10}}-\frac{1y}{\sqrt{10}}=\frac{18}{\sqrt{10}}$$

$$\cos w_1=\frac{3}{\sqrt{10}};\qquad \operatorname{sen} w_1=\frac{-1}{\sqrt{10}};\qquad r_1=\frac{18}{\sqrt{10}}=5.692$$



Nótese que w_2 es igual a w_1 + 180°; como el coseno del ángulo w_2 es positivo y el seno negativo el ángulo es:

w_2= 360°-ang cos(0.948)

w_2= 360°-18.55°

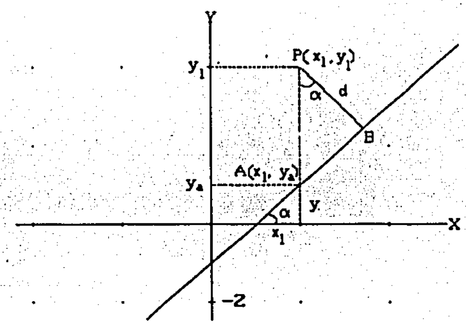
DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Considerándose a una recta cuya ecuación tiene la forma $y = mx + b$; la recta se encuentra a una distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$, tal como se muestra en la figura .

Note que el ángulo α de inclinación de la recta es igual al ángulo APB, por ser ángulos formados por lados respectivamente perpendiculares, además es importante destacar que el punto $A(x_1, y_1)$ su abscisa x_1 es igual a la abscisa del punto P_1.

Al observar el triángulo ABP de la figura , se tiene por definición de coseno:

$$\cos\alpha = \frac{d}{\overline{P_1A}} \Rightarrow d = \overline{P_1A}\cos\alpha$$



Se sabe por trigonometría que:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sec\alpha}; \quad \sec^2\alpha = 1 + tan^2\alpha$$

Substituyéndose en $d = \overline{P_1A}\cos\alpha$ se tiene:

$$d = \overline{P_1A}\frac{1}{\sec\alpha} = \frac{\overline{P_1A}}{\pm\sqrt{1+tan^2\alpha}}$$

Analizándose a la figura se aprecia que:

$$\overline{P_1A} = y_1 - y_a \quad \text{..... ....} \quad (A)$$

Como el punto $A(x_1,y_a)$ pertenece a la recta, la ecuación $y = mx + b$ en ese punto se representa como: $y_a = mx_1 + b$

Substituyéndose la ecuación anterior en (A) se tiene:

$$\overline{P_1A} = y_1 - (mx_1 + b) = y_1 - mx_1 - b$$

reemplazándose en (A) a $\overline{P_1A}$ por la expresión algebraica obtenida, y sabiéndose que

$m = tan\alpha \quad \therefore \quad m^2 = tan^2\alpha$ se tendrá:

$$d = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{1+m^2}}$$

La expresión anterior se utiliza para calcular la distan' dirigida que existe entre un punto de coordenadas $P_1(x_1, y_1)$ y una recta de la forma $y = mx + b$.

De los signos ± que anteceden al radical, se emplean de la forma siguiente:

1. Cuando el punto $P_1(x_1, y_1)$ y el origen del sistema coordenadas "x" "y" se ubican en un mismo lado de la recta, la distancia del punto a la recta se considera negativa y de los signos ± que anteceden al radical se selecciona al signo que hace negativo al cociente.

$$d = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{1 + m^2}}$$

2. Si el punto $P_1(x_1, y_1)$ y el origen del sistema de ejes cartesianos se encuentran en lados opuestos respecto a la recta, la distancia dirigida del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta $y = mx + b$, se considera positiva y nuevamente los signos que anteceden al radical , se utiliza al signo que hace positivo al cociente:

$$d = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{1 + m^2}}$$

3. Si la recta pasa por el origen, la distancia se considera positiva si el punto está por arriba de ella y negativa cuando se ubica por debajo.

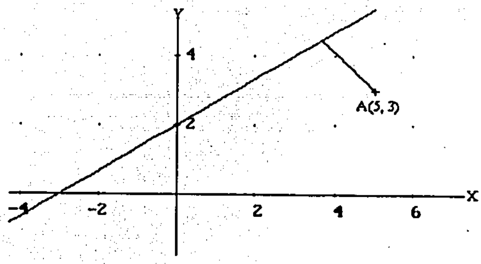
EJEMPLO:

1. Encontrar la distancia que existe del punto A(5, 3) a la recta $y = 2x/3 + 2$. En este caso se tiene que $m = 2/3$ y la ordenada al origen es $b = 2$, la posición del punto A respecto a la recta y al origen, se aprecia de los signos ± que anteceden al radical se selecciona al signo que hace negativo a la distancia, por estar el punto del mismo lado que el origen respecto a la recta.

Con $x_1 = 5$, $y_1 = 3$, $m = 2/3$ y $b = 2$

$$d = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{1+m^2}}$$

$$d = \frac{3 - \frac{2}{3}(5) - 2}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{2}{3}\right)^2}}$$



$$d = \frac{3 - \frac{10}{3} - 2}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{4}{9}\right)}}$$

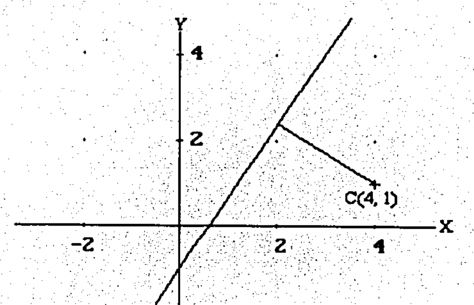
$$d = \frac{1 - \frac{10}{3}}{\pm\sqrt{\left(\frac{9+4}{9}\right)}} = \frac{\frac{3-10}{3}}{\pm\sqrt{\frac{13}{9}}} = \frac{\frac{-7}{3}}{\pm\frac{\sqrt{13}}{3}} = \frac{-7}{\pm\sqrt{13}} = -1.94$$

2. Evaluar la distancia del punto C(4, 1) a la recta $y = 5x/3 - 1$.

Se tiene $x_1 = 4$, $y_1 = 1$; $m = 5/3$, $b = -1$; por lo tanto:

$$d = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{1+m^2}}$$

$$d = \frac{1 - \frac{5}{3}(4) - (-1)}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{5}{3}\right)^2}}$$



$$d = \frac{2 - \frac{20}{3}}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{25}{9}\right)}}$$

$$d = \frac{\frac{6-20}{3}}{\pm\sqrt{\left(\frac{9+25}{9}\right)}} = \frac{\frac{-14}{3}}{\pm\frac{\sqrt{34}}{3}} = \frac{-14}{\pm\sqrt{34}} = 2.4$$

3. Encontrar una expresión algebraica que denomine a la distancia de un punto $P_1(x_1, y_1)$ a una recta en la forma general.

Hasta este momento se sabe que la distancia de un punto a una recta está dada por:
$d = \dfrac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{1+m^2}}$

Se sabe que la pendiente m de una recta, dada en su forma general es : $m = -\dfrac{A}{B}$

Además la ordenada al origen está dada por: $b = -\dfrac{C}{B}$

Substituyéndose m y b en la expresión (9) se tiene:

$$d = \frac{y_1 - mx_1 - b}{\pm\sqrt{1+m^2}}$$

$$d = \frac{y_1 - \left(\frac{-A}{B}\right)x_1 - \left(\frac{-C}{B}\right)}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{-A}{B}\right)^2}}$$

$$d = \frac{y_1 + \left(\frac{A}{B}\right)x_1 + \left(\frac{C}{B}\right)}{\pm\sqrt{1+\left(\frac{A^2}{B^2}\right)}}$$

$$d = \frac{\frac{By_1 + Ax_1 + C}{B}}{\pm\sqrt{\frac{A^2+B^2}{B^2}}}$$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

La última expresión algebraica es la mas usual en geometría analítica para hacer los cálculos de la distancia de un punto a una recta.

Los signos $\pm$ que anteceden al radical se emplean de igual manera, a la dada anteriormente.

4. Evaluar la distancia del punto F(-3, 1) a la recta 2x -3y +2 = 0. Se sabe que la distancia de un punto a una recta se puede obtener pro medio de la expresión.

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Donde en este problema se tiene : A = 2, B = -3, C = 2; x_1= -3, y_1=1 , substituyéndose los valores numéricos se tiene:

$$d = \frac{2(-3) + (-3)(1) + 2}{\pm\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{-6 - 3 + 2}{\pm\sqrt{4 + 9}} = \frac{-7}{\pm\sqrt{13}}$$

Para seleccionar el signo del radical es necesario contar con la figura del problema; de la ecuación de la recta.

2x -3y + 2 = 0 se sabe que:

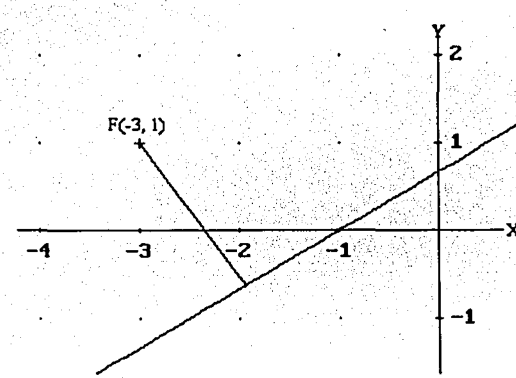
$$m = -\frac{A}{B} = \frac{2}{3}$$

para y = 0

2x -3(0) + 2 = 0

2x + 2 = 0

x = -1.



Entonces con el punto (-1, 0) y la pendiente, se traza la recta, apreciándose que el punto F(-3, 1) y el origen del sistema de ejes cartesianos se ubican de lados opuestos a la recta, lo que indica que la distancia debe de ser positiva, por lo tanto se emplea el signo negativo de:

$$d = \frac{-7}{\pm\sqrt{13}} = 1.94$$

EJERCICIOS:

1. Comprobar que son paralelas las rectas que pasan por los puntos:
   a) (0,3), (2, 0); (-2, 0), (0,3)
   b) y comprobar que la recta que pasa por los puntos (0,-2) y (3, 0), es perpendicular a las otras dos

2. Distintas posiciones de una recta en el plano de los ejes coordenados. Observar la ecuación de una recta es siempre de primer grado. Trazar las rectas cuyas ecuaciones son:
   a) $x = 0$ b) $y + 1 = 0$ c) $y = x$ d) $y = 0$
   e) $y = 2x + 4$ f) $y = 8$ g) $x = -8$ h) $x = 19$
   i) $y = -7$

3. Trazar las gráficas de cada una de las siguientes ecuaciones:
   a) $y = 3x$ b) $y = 3x + 4$ c) $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 2$ d) $y - x = 0$
   e) $y = \frac{1}{2}x - 2$ f) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 1$ g) $3x + y = 1$ h) $x - 3y + 4 = 0$
   i) $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 3$

4. Determinar la ecuación de la recta cuya pendiente es –4 y que pasa por el punto de intersección de las rectas $2x + y - 8 = 0$ y $3x - 2y + 9 = 0$. Trazar su gráfica.

5. Determinar la ecuación de la recta de pendiente $m = -1$, ordenada al origen $b = 2$. Determinar la ecuación de otra recta que tiene por coordenadas al origen $b = 6$ y $a = -2$. Trazar estas dos rectas y determinar el punto donde se cortan.

6. Trazar la recta que pasa por el punto (-1, 2) de pendiente $m = 1/2$. Trazar la recta que pasa por el punto (5, 2) y su $m = -1$. Encontrar las ecuaciones de estas dos rectas, el punto donde se cortan y sus intersecciones con los ejes coordenadas.

7. Una recta que pasa por el punto (3, -6) y es perpendicular a la recta definida por los puntos (4, 1) y (2, 5). Encontrar las ecuaciones de estas dos rectas, el punto donde se cortan y sus intersecciones con los ejes de coordenadas.

8. La pendiente de una recta que pasa por el punto P(3, 2) es igual a ¾ . Situar dos puntos sobre esta recta que disten 5 unidades de P. Comprobarlo con gráfica.

9. Encontrar la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son A(-2, -3) y B(0, -1). Usar esta ecuación para probar que los puntos (-4, 1) y (1, -4) pertenecen a dicha mediatriz.

10. Determinar la distancia del punto (6, -1) a la recta $3x + 1 = y$ así como la distancia del punto (5, 2) a la recta $3x - 4y + 6 = 0$.

11. Hallar las ecuaciones de las rectas de pendiente $m = -\frac{3}{4}$, que forman con los ejes coordenadas un triángulo de área igual a 24 unidades cuadráticas. Trazar su gráfica.

12. Determinar las ecuaciones de las rectas paralelas a la recta $x + 3y = 0$ que pasan a la distancia $\sqrt{10}$ del punto (-1, 2)

13. Determinar las ecuaciones de las perpendiculares a la recta $x + y = 0$, que pasen a una distancia $2\sqrt{2}$ del punto (1, -1)

14. Determinar las longitudes de las alturas del triángulo cuyos vértices son (2, 0), (3, 5) y (-1, 2), determinando también el ortocentro.

15. La ecuación de la recta normal es: $x \cos \omega + y \operatorname{sen} \omega - 5 = 0$. Determinar el valor del ángulo ω para que la recta pase por el punto (-4, 3). Trazar la gráfica.

16. Trazar el triángulo de vértices: A(4, 0), B(2, 4) y C(0, -4).
    a) Determinar la s ecuaciones de sus lados.

b) Determinar las ecuaciones de la sus medianas.

c) Determinar las ecuaciones de sus bisectrices.

d) Determinar el punto donde se cortan las medianas o baricentro.

e) Determinar los ángulos interiores del triangulo.

17. Determinar la ecuación de la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos A(0, 4) y B(6, 2). Comprobar que esta recta pasa por P(4, 6) y por el punto medio del segmento dado. ¿Cuáles son los puntos donde ella corta a los ejes?

18. Una recta que pasa por el origen y por el punto (a, b). Encontrar la ecuación de otra recta perpendicular a la anterior por el punto (a, b).

19. Sea el punto C(-6, 4) y la recta x = y. Determinar sobre esta recta dos puntos: A y B, de modo que el triángulo ABC sea equilátero.

20. Obtener la ecuación de la recta que pasa por M(6, 1) y forma con la recta y = 2x + 4 un ángulo de 36°52′. Dato: tg 36° 52′ = ¾.

21. Desde un punto C(0, 7) trazar dos rectas, $\overline{CA}$ y $\overline{CB}$, que forman un ángulo de 45° con la recta cuya ecuación es 10y = 4x + 12

22. Por medio del uso del determinante, calcular la superficie de los triángulos cuyos vértices son:

a) A(-2, -1), B(4, 2) y C(0, 3)

b) D(3, 1), E(-1, 1) y F(0, -3). Hacer la gráfica respectiva.

23. Los vértices de un triángulo son: A(4, y), B(-2, 4) y C(8, -2). Calcular la ordenada del vértice A, si el área del triángulo es de 28 unidades cuadradas.

RESPUESTAS

1. $m_1 = m_2 = \dfrac{-3}{2}$, $\therefore$ las rectas son paralelas ,

   $m_3 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow$ las rectas son pependiculares por que $m_1 m_3 = -1$

2. Gráfica (I)

3. Gráficas(II)

4. Punto de intersección P(1, 6), la ecuación de la recta es: $4x + y - 10 = 0$

5. $y = -x + 2$; $y = 3x + 6$; P(-1, 3)

6. Las ecuaciones de las rectas son: $x - 2y = -5$; $x + y = 7$, El punto de corte C(3, 4), las intersecciones con los ejes coordenadas (-5, 0), (0, 2.5) ; (0,7), (7, 0), el ángulo entre las dos rectas $\alpha = 108^\circ\, 26'$, el suplementario será : $71^\circ\, 34'$

7. Las ecuaciones de las rectas son: $2x + y - 9 = 0$; $x - 2y - 15 = 0$, El punto de corte $H\left(\dfrac{33}{5}, -\dfrac{21}{5}\right)$

8. $P_1(7, 5)$, $P_2(-1, -1)$

9. $x + y + 3 = 0$

10. $d_1 = 2\sqrt{10}$, $d_2 = \dfrac{13}{5}$

11. $3x + 4y - 24 = 0$; $3x + 4y + 24 = 0$, Las intersecciones con los ejes son (8, 0), (0, 6); (-8, 0), (0, -6).

12. $x + 3y = 15$; $x + 3y = -5$

13. $x - y + 2 = 0$; $x - y - 6 = 0$

14. $h_1 = 3.4$, $h_2 = 4.7$, $h_3 = 3.3$; $O(0.76, 1.64)$

15. $\omega = \acute{a}ng\ sen\dfrac{3}{5} = 36°52'11''$

16. a) $2x + y - 8 = 0$; $4x - y - 4 = 0$; $x - y - 4 = 0$

b) $y = 0$; $x = 2$; $2x - y - 4 = 0$

c) $9.77x - 5.53y - 22.14 = 0$; $0.59x - 3.65y + -2.36 = 0$; $17.19x + 1.88y - 41.92 = 0$

d) $P(2, 0)$

c) $<A = 18° 26'5.9''$, $<B = 40° 36'4.58''$, $<C = 120° 57'49.5''$

17. $3x - y - 6 = 0$; $P_M(3, 3)$.

18. $y = \dfrac{b}{a}x$; $y - b = -\dfrac{a}{b}(x - a)$

19. $A(1.9, 1.9)$, $B(-3.8, -3.8)$

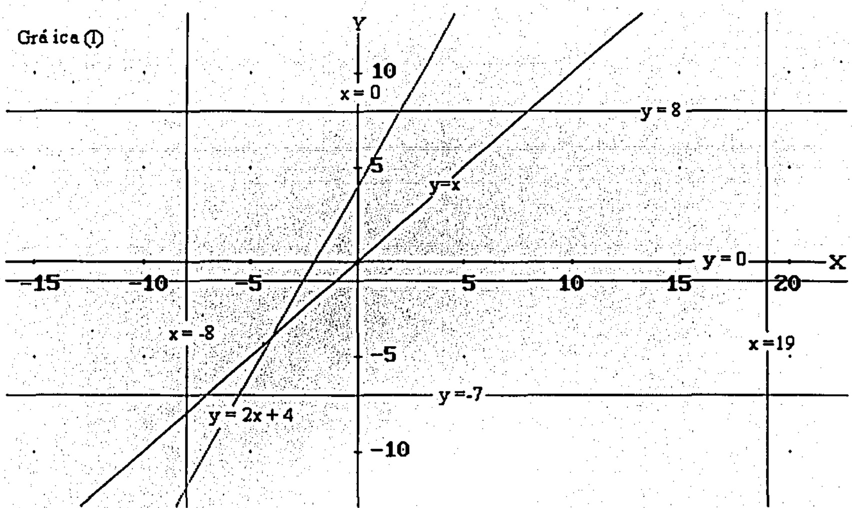
20. $x - 2y - 4 = 0$

21. $7x - 3y + 21 = 0$; $3x + 7y - 49 = 0$

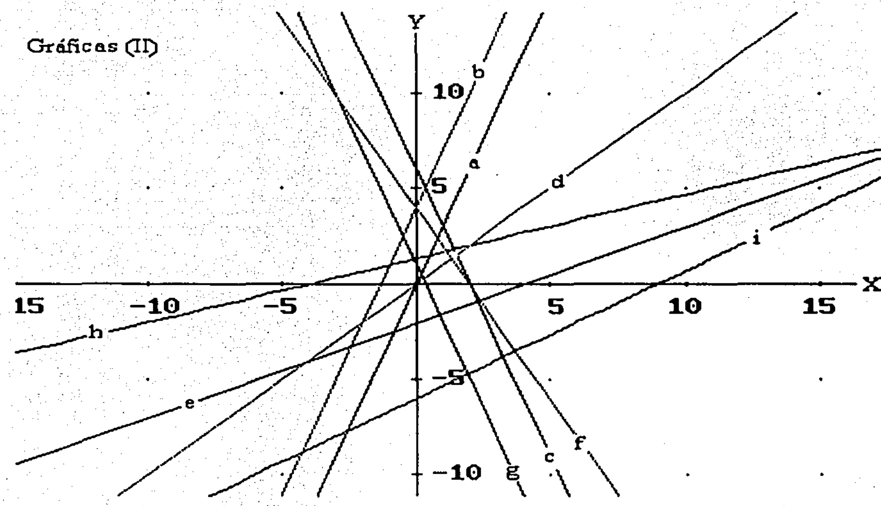
22. a) $A = 9u^2$, b) $A = 8u^2$

23. $y = 6$.

Grá ica (I)



Gráficas (II)

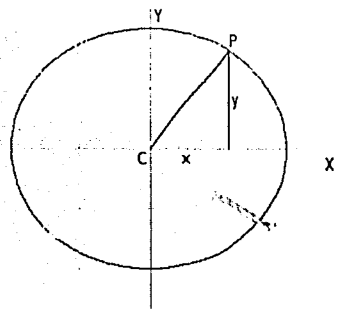


UNIDAD III

LA CIRCUNFERENCIA.

La circunferencia es el lugar geométrico formado por un conjunto de puntos en el plano que cumplen la condición, todo punto de este conjunto a un punto del plano que se considera fijo, es igual a un valor constante, a este punto fijo se le llama centro de la circunferencia y al valor constante se le llama radio de la misma.

Si se considera en forma particular, que el punto llamado centro de la circunferencia esta en el origen del sistema coordenadas rectangulares, tendrá por coordenadas (0, 0), denotándose por C(0, 0); si la distancia constante se denota por r (radio de la circunferencia). Al considerarse un punto P(x, y) de la circunferencia, se tiene que la distancia de este punto al centro C(0, 0) es dada por; (Aplicarse el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo que muestra la figura);



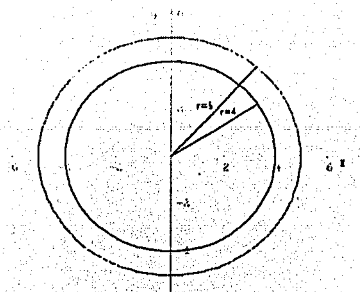
En un triángulo rectángulo, la suma de - - los cuadrados de sus catetos es igual al cuadrado de su hipotenusa.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Esta ecuación representa una circunferencia con su centro en el origen del sistema.

EJEMPLOS:

1. Escribir las ecuaciones de las circunferencias concéntricas al origen y radios de 4 y 5 unidades respectivamente.



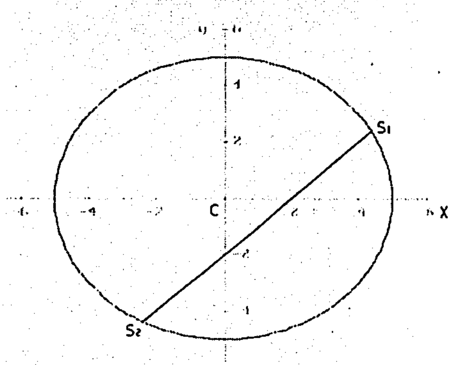
Las circunferencias concéntricas son - - aquellas que tienen el mismo centro, en este caso, su centro de cada circunferencia está en el origen C(0,0). Luego de sus ecuaciones obtenidas a partir de la ecuación:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

donde se sustituye el valor numérico de cada uno de los radios, esto es:

$$x^2 + y^2 = (4)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 16$$
$$x^2 + y^2 = (5)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 25$$

2. Hacer la gráfica de la circunferencia determinada por la ecuación $x^2 + y^2 = 25$ y evaluar la magnitud de la cuerda perteneciente a la recta que pasa por los puntos A(2, 0) y B(0, -2).



De acuerdo con la información que se - - - proporciona $x^2 + y^2 = 25$ se aprecia que el - radio $r = \sqrt{25} = 5$ por lo tanto se hace uso del compás, haciendo centro en el origen y considerándose un radio de cinco unidades se traza la circunferencia solicitada. Para obtener la magnitud de la cuerda $\overline{S_1S_2}$ que se muestra en la figura, primero se debe calcular la ecuación de la recta que pasa por los puntos A(2, 0) y B(0, -2), después se resuelven simultáneamente, esta ecuación con la ecuación de la circunferencia para obtener los puntos S_1 y S_2 y finalmente por medio de la distancia que existe entre dos puntos se obtiene la magnitud de la cuerda. Esto es; La recta que pasa por los puntos A(2, 0) y B(0, -2) se puede obtener por medio de;

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

ya que a = 2, b = -2, se tiene:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-2}=1 \Rightarrow -x+y=-2 \therefore y=x-2$$

Substituyéndose y = x - 2 en $x^2 + y^2 = 25$, se tiene: $x^2 + (x-2)^2=25$.

Desarrollándose las operaciones indicadas en la ecuación anterior:

$$x^2+y^2-4x+4=25$$
$$2x^2-4x+4-25=0$$
$$2x^2-4x-21=0$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, se tiene:

Con a = 2, b = -4, c = -21

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(2)(-21)}}{2(2)}=\frac{4\pm\sqrt{16+168}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{184}}{4}=\frac{4\pm 13.56}{4}$$

$$x_1=\frac{4+13.56}{4}=4.39$$

$$x_2=\frac{4-13.56}{4}=-2.39$$

Substituyéndose los valores de x_2= -2.39 y x_2=4.39 individualmente en la ecuación de la recta y = x - 2, se tiene;

y_2= -2.3-2 = -4.39 y_1= 4.39 - 2= 2.39

Por lo tanto las coordenadas de los puntos extremos de la cuerda S_1 y S_2 son aproximadamente:

S_2(-2.39,-4.39) y S_1(4.39, 2.39)

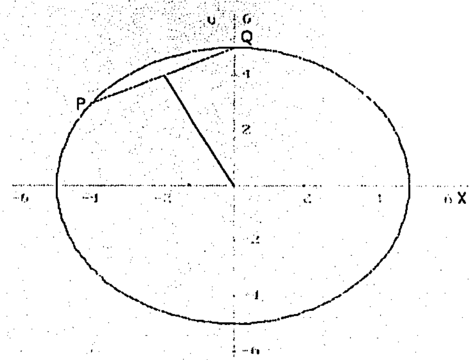
Finalmente la magnitud de la cuerda será:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-2.39-4.39)^2+(-4.39-2.39)^2}$$

$$d=\sqrt{(-6.78)^2+(-6.78)^2}=\sqrt{45.96+45.96}=\sqrt{91.936}=9.58$$

Puede apreciarse en la figura que la magnitud de la cuerda es aproximadamente 9.58 unidades.

3. La ecuación de una circunferencia es $x^2+y^2=25$. El punto medio de una cuerda de esta circunferencia es el punto M(-2, 4). Hallar la ecuación de la cuerda. (Ver la figura).



Se observa que la ecuación $x^2+y^2=25$, corresponde a la ecuación de una circunferencia con centro en el origen C(0,0) y radio r = 5, gráficamente se tiene: El segmento $\overline{PQ}$ representa la cuerda con su punto medio M(-2, 4). El segmento $\overline{CM}$ representa un eje radial perpendicular a la cuerda $\overline{PQ}$ en su punto medio M(-2, 4). Calculando la pendiente de $\overline{CM}$ que se obtiene por medio de la ecuación :

$$m_{CM}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-4}{0+2}=-2$$

Luego por la condición de perpendicularidad, la pendiente de la cuerda es:

$$m_{PQ}=-\frac{1}{m_{CM}}=\frac{1}{2}$$

Ahora como se obtiene el punto M(-2,4) y la pendiente de la cuerda PQ $m_{PQ}=\frac{1}{2}$

substituyéndose en la ecuación de la recta, cuando se conoce un punto y la pendiente de la recta, se tiene:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{1}{2}(x + 2)$$

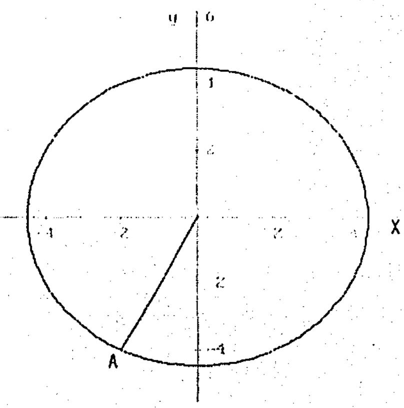
$$2y - 8 = x + 2$$

$$x - 2y + 10 = 0$$

Esta última expresión es la ecuación de la cuerda $\overline{PQ}$

4. Obtener la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en el origen y que es tangente a la recta que pasa por el punto A(-2, -4).

Como la circunferencia tiene su centro en el origen y el punto de tangencia A(-2,-4) pertenece a esta curva, el radio r, se puede obtener por medio de la distancia entre dos puntos C(0,0), A(-2,-4).



$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)}$$

$$r = \sqrt{(-2 - 0)^2 + (-4 - 0)^2} = \sqrt{4 + 16}$$

$$r = \sqrt{20}$$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia con r^2=20.

$$x^2 + y^2 = 20$$

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA CIRCUNFERENCIA.

La ecuación de una circunferencia, cuyo centro se localiza en un punto cualquiera C(h, k) y cuyo radio es dado por r. (Ver figura).

Supóngase que el punto C(h, k), es origen de sistema de ejes cartesianos " X′, Y`", el cual es un sistema trasladado respecto al sistema "X, Y". Para un punto cualquiera P` de coordenadas (x`, y`) en el sistema X′ Y′, la ecuación de la circunferencia, por tener su centro en el origen de X` Y` es: $x'^2 + y'^2 = r^2$

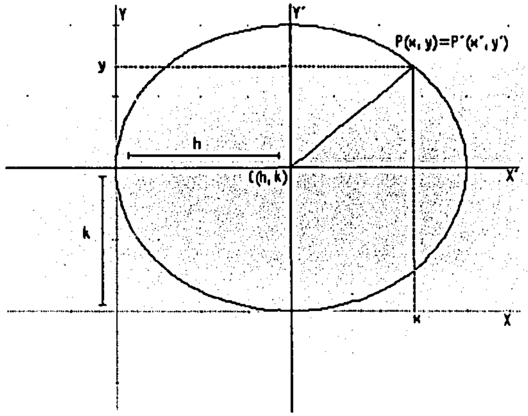
Además con ayuda de la figura se tiene:

$x' = x - h$

$y' = y - k$

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia será:

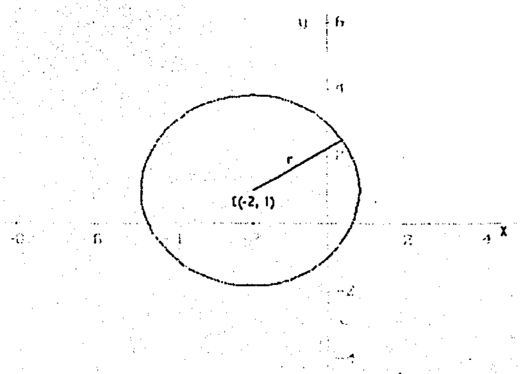
$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$



Esta expresión es conocida como la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria y se utiliza para hallar la ecuación de la circunferencia cundo se te proporciona el centro de ella en un punto cualquiera C(h, k) y su radio r.

EJEMPLO:

1. Hallar la ecuación de la circunferencia con centro C(-2, 1) y radio $r = \sqrt{8}$.



La ecuación de una circunferencia con centro C(h, k) y de radio r es:

$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

con h = -2, k = 1 y $r^2 = 8$.

$(x-(-2))^2 + (y-1)^2 = 8$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$

Desarrollándose las operaciones que se indican en la ecuación ordinaria de la circunferencia anterior se tiene:

$$x^2+4x+4+y^2-2y+1=8$$
$$x^2+4x+4+y^2-2y+1-8=0$$
$$x^2+4x+y^2-2y-3=0$$

Esta última expresión se le conoce como ecuación general de la circunferencia.

ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA.

La ecuación general de la circunferencia y de cualquier curva de segundo grado es:

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

En general para toda circunferencia A = C

En este sistema de coordenadas cartesianas se analizarán los casos en que B=0.

EJEMPLOS:

1. Obtener las ecuaciones ordinaria y general de una circunferencia que tiene su centro en el punto C(-3,5) y su radio mide 4 unidades.

De acuerdo al problema se tienen como datos a: h = -3, k = 5 y r = 4.

Por lo tanto la ecuación de la circunferencia, se puede encontrar haciéndose uso de la expresión ordinaria del problema.

Para obtener la ecuación en la forma general de la circunferencia, se desarrollan las operaciones que indican en la expresión ordinaria, esto es:

$$(x+3)^2+(y-5)^2=16$$
$$x^2+6x+9+y^2-10y+25=16$$
$$x^2+6x+9+y^2-10y+25-16=0$$
$$x^2+6x+y^2-10y+18=0$$

La expresión anterior es la ecuación en la forma general de la circunferencia que tiene su centro en el punto (-3, 5) y como radio 4 unidades.

Recordando la ecuación general de la circunferencia,

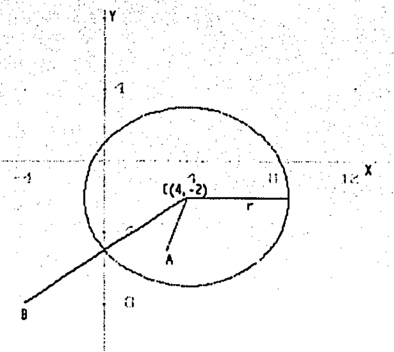
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En este caso, con B = 0, se tiene por comparación que:

A = C = 1 D = 6

E = -10 F = 18.

2. La ecuación de la circunferencia es $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$. Demostrar que el punto A(3, -5) es un punto que pertenece al interior de la circunferencia y que el punto B(-4, -8) es exterior.



Como la ecuación de la circunferencia es $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$, entonces el centro es el punto C(4,-2) y su radio es dado por r = 5. Tal como se muestra en la gráfica.

Los puntos P, P_2, P_3, P_4 son algunos puntos que pertenecen a la circunferencia.

Entonces las distancias:

$$\overline{PC} = \overline{P_2C} = \overline{P_3C} = \overline{P_4C} = ... = r = 5$$

Gráficamente se observa que el punto A(3,-5) pertenece al interior de la circunferencia y el punto B(-4,-8) está en el exterior de la misma.

Analíticamente, como el punto A(3,-5), está en el interior de la circunferencia se debe demostrar que la distancia $\overline{CA}$ es menor que el radio, esto es:

$$\overline{AC} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{con } C(4,-2) \text{ y } A(3,-5)$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4-3)^2 + (-2-(-5))^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

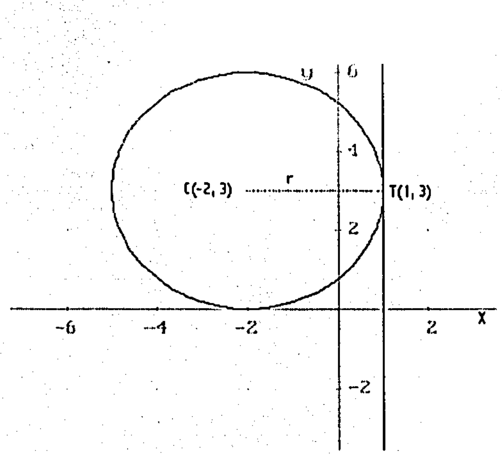
Por lo tanto $\sqrt{10} < r$ y el punto está en el interior de la circunferencia. Para el caso del punto B que se localiza fuera de la circunferencia, se debe demostrar que la distancia entre los puntos C(4,-2) y B(-4,-8) es mayor que el radio, es decir:

$$\overline{CB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{con } C(4,-2) \text{ y } B(-4,-8)$$

$$\overline{CB} = \sqrt{(-4-4)^2 + (-8-(-2))^2} = \sqrt{(-8)^2 + (-6)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$$

Por lo tanto se tiene que 10 > r, lo cuál indica que el punto B es exterior a la circunferencia.

3. La ecuación de una circunferencia es $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$. Hallar la ecuación tangente a la circunferencia que pasa por al punto T(1, 3).



Como la ecuación dada es de la forma:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Su centro C(h, k) es C(-2, 3); el punto T(1, 3) es un punto de tangencia y pertenece a la circunferencia.

Como $\overline{CT}$ es perpendicular a la tangente, se calculará la pendiente de $\overline{CT}$:

$m_{CT} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{3-3}{-2-1} = \dfrac{0}{-3} = 0$ Se sabe que el recíproco de signo contrario a la pendiente m_{CT}, proporciona la pendiente de la recta tangente.

$$m_T = -\frac{1}{m_{CT}} = -\frac{1}{0} = -\infty$$

Se aprecia que por el valor de la pendiente, la recta es perpendicular al eje X, por lo tanto la ecuación de la tangente se puede obtener por medio de:

$y - y_1 = m_T(x - x_1)$ Con $m_T = -\frac{1}{0} = -\infty$ y T(1, 3)

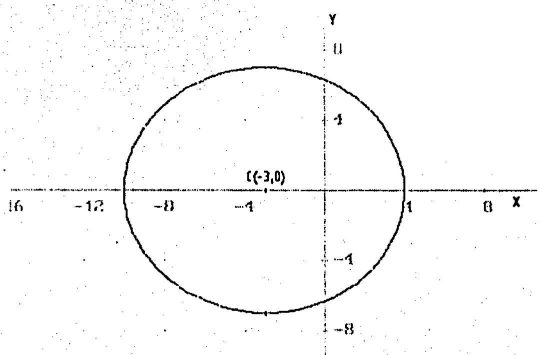
$$y - 3 = -\infty(x - 1)$$

$$\frac{y-3}{-\infty} = (x - 1)$$

$$0 = x - 1$$

$$x = 1$$

4. Una circunferencia tiene su diámetro definido por los puntos A(-10, 0) y B(4, 0) calcular su ecuación.



El centro de la circunferencia es el punto medio de los puntos extremos del diámetro $\overline{AB}$, por lo tanto:

$$h = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-10+4}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$k = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$$

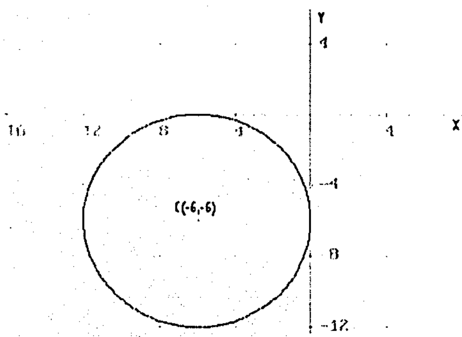
Entonces las coordenadas del centro son: C(-3, 0).

La longitud de su radio es: $r = \sqrt{(-3-4)^2 + 0^2} = \sqrt{49} = 7$

Luego la ecuación en forma ordinaria dada por: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ con $h = -3$, $k = 0$, y $r = 7$ se tiene:

$$(x - (-3))^2 + (y - 0)^2 = 7^2$$
$$x^2 + 6x + 9 + y^2 = 49$$
$$x^2 + y^2 + 6x - 40 = 0.$$

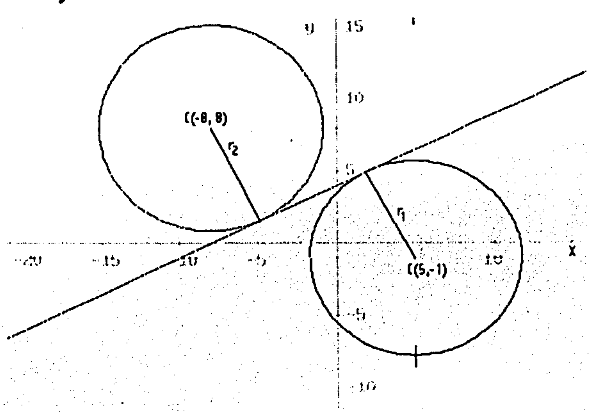
5. Una circunferencia tiene su centro en la bisectriz del tercer cuadrante y es tangente al eje de las abscisas en el punto T(-6, 0). Obtener su ecuación.



El centro C pertenece a la recta perpendicular en T "al eje de las abscisas". Por lo tanto la abscisa del centro es -6. Como C pertenece a la bisectriz dada por $y = x$; su ordenada es -6, luego el radio es igual a 6, y su ecuación es dada por:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$
$$h = -6, \quad k = -6, \quad r = 6$$
$$(x + 6)^2 + (y + 6)^2 = 6^2$$

6. Los dos centros de dos circunferencias son C(5, -1) y C(-8, 8). Las circunferencias son tangentes a la recta cuya ecuación es $x - 2y + 8 = 0$. Calcular las ecuaciones de las circunferencias.



Para la ecuación de la recta proporcionada por el problema $x - 2y + 8 = 0$. Se tiene que los coeficientes de la ecuación de la recta en forma general $Ax + By + C = 0$ son:

$A = 1$, $B = -2$, $C = 8$.

Los puntos de contacto son los pies de las perpendiculares a la recta dada, desde los centros de curvatura C correspondientes.

Los radios son las distancias de C_1 a su punto de contacto A_1, $\overline{C_1A_1} = r_1$ y de C_2 a su punto de contacto B_2, $\overline{C_2A_2} = r_2$. Entonces aplicándose la expresión desconocida de la distancia de un punto a una recta se evaluará el radio, esto es:

$$r_1 = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$r_1 = \frac{|1(5) - 2(-1) + 8|}{\pm\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|5 + 2 + 8|}{\pm\sqrt{1+4}} = \frac{|15|}{\pm\sqrt{5}} = \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3\sqrt{5}$$

La ecuación de la primer circunferencia es:

$$(x - 5)^2 + (y + 1)^2 = 45.$$

De manera semejante se calcula, r_2, con las coordenadas del centro C_2.

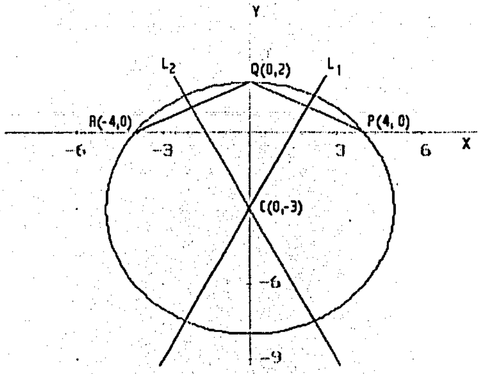
$$r_2 = \frac{|1(-8) - 2(8) + 8|}{\pm\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{|-8 - 16 + 8|}{\pm\sqrt{1+4}} = \frac{|-16|}{\pm\sqrt{5}} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$$

La ecuación de la segunda circunferencia es:

$$(x + 8)^2 + (y - 8)^2 = 51.2$$

7. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de coordenadas P(4, 0), Q(0, 2) y R(-4, 0).

La intersección de dos mediatrices correspondientes a dos lados cualesquiera del triángulo PQR, proporcionan al centro de la circunferencia. El radio es dado por la distancia que existe entre el centro y cualquiera de los vértices del triángulo PQR.



Para calcular las ecuaciones de las meadiatrices, se evaluarán primero las pendientes de los lados PQ y QR para aplicar más tarde la condición de perpendicularidad y evaluar las pendientes de las mediatrices. Después se calcularán los puntos medios, de los lados mencionados, para obtener las ecuaciones de las mediatrices por medio de la ecuación de la recta punto pendiente, esto es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{PQ} = \frac{2-0}{0-4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}; L_1 = m\perp = \frac{2}{1} = 2$$

$$m_{QR} = \frac{0-2}{-4-0} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}; L_2 = m\perp = -\frac{2}{1} = -2$$

$$P_M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

$$P_{MPQ} = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (2,1)$$

$$P_{MQR} = \left(\frac{0+(-4)}{2}, \frac{2+0}{2}\right) = (-2,1)$$

Por lo tanto las ecuaciones de las mediatrices, se obtienen por medio de:

Para L_1 se tiene, $m_{L1}=2$ y P_{MPQ} (2, 1) lo cual se emplea en:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 1 = 2(x - 2)$

$y - 1 = 2x - 4$

$2x - y - 3 = 0$

Para L_2 se tiene, m_{L2}=-2 y P_{MQR} (-2, 1) lo cual se emplea en:

$$y - y1 = m(x - x1)$$
$$y - 1 = -2(x + 2)$$
$$y - 1 = -2x - 4$$
$$2x + y + 3 = 0$$

Resolviendo las ecuaciones de las mediatrices obtenidas simultáneamente:

$$\begin{array}{r} 2x - y = 3 \\ \underline{2x + y = -3} \\ 4x = 0 \end{array}$$
$$x = 0 \Rightarrow y = -3$$
$$\therefore C(0,3)$$

Finalmente con las coordenadas del centro y las coordenadas de cualquiera de sus vértices se calcula la magnitud del radio, resultando:

Tomemos: C(0, -3), R(-4, 0)

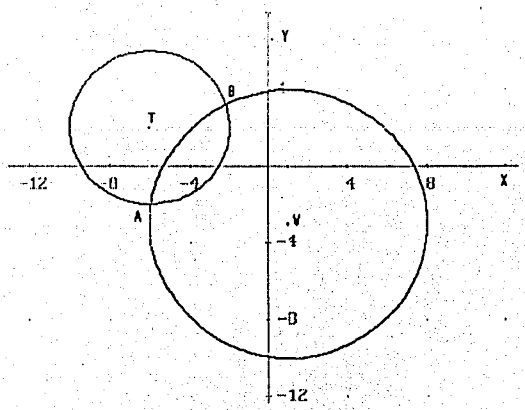
$$r = \overline{CR} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-0)^2 + (0+3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$
$$r = 5$$

Conocidos el centro y el radio de la circunferencia se sabe que se puede determinar su ecuación, la cuál es:

$$x^2 + (y+3)^2 = 25.$$

8. Calcular los puntos de intersección de dos circunferencias cuyos centros de curvatura son los puntos T(-6, 2) y V(1, -3), si sus radios son de 4 y 7 unidades respectivamente.

Como se van a obtener los puntos de intersección de dos circunferencias, el problema se reduce a resolver simultáneamente las ecuaciones de estas curvas. Por lo tanto primero se procederá a encontrar las ecuaciones de las circunferencias en la forma ordinaria, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$, después de expresarán en la forma general y más tarde se resolverá el sistema resultante, esto es:



$$T(-6,2); r = 4$$
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x+6)^2 + (y-2)^2 = 4^2$$
$$x^2 + 12x + 36 + y^2 - 4y + 4 = 16$$
$$x^2 + y^2 + 12x - 4y + 24 = 0$$

$$V(1,-3); r = 7$$
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 7^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 49$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 39 = 0$$

Multiplicándose por (-1) la ecuación de la izquierda y sumándole la ecuación de la derecha para desaparecer los términos cuadráticos, se tiene:

$$\begin{array}{r} -x^2 - 12x - y^2 + 4y - 24 = 0 \\ \underline{x^2 - 2x + y^2 + 6y - 39 = 0} \\ -14x \quad + 10y - 63 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{10y - 63}{14}$$

Sustituyéndose la expresión anterior en la ecuación de segundo grado del lado izquierdo se tiene:

$$\left(\frac{10y-63}{14}\right)^2 + 12\left(\frac{10y-63}{14}\right) + y^2 - 4y + 24 = 0$$
$$100y^2 - 1260y + 3969 + 1680y - 10584 + 196y^2 - 784y + 4704 = 0$$
$$296y^2 - 364y - 1911 = 0$$

De acuerdo a la última expresión se tiene: a = 296, b = -364, c = -1911.

Utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$y = \frac{-(-364) \pm \sqrt{(-364)^2 - 4(296)(-1911)}}{2(296)} = \frac{364 \pm \sqrt{132496 + 2262624}}{592}$$

$$y_1 = -1.99$$

$$y_2 = 3.22$$

Sustituyéndose y_1 y y_2 se tiene:

$$x = \frac{10y - 63}{14}$$

$$x_1 = \frac{10(-1.99) - 63}{14} = -5.92$$

$$x_2 = \frac{10(3.22) - 63}{14} = -2.2$$

Por lo tanto los puntos de intersección de la circunferencias son aproximadamente: A(-5.92, 1.99) y B(-2.2, 3.92).

9. Si los puntos T(5, 3) y V(-1, -2) son los puntos extremos de una cuerda, hallar la ecuación de la circunferencia que define a esa cuerda si su radio es de 6 unidades.

Nótese que la cuerda determinada por los puntos T(5, 3) y V(-1, -2) define a dos circunferencias de radio r = 6, por lo tanto la solución del problema debe proporcionar las coordenadas de dos centros, uno para cada circunferencia. Se sabe que la ecuación ordinaria de la circunferencia es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2.$$

Si en ella se sustituyen las coordenadas de los puntos dados y el radio se tendrán dos ecuaciones, cuyas incógnitas serán h y k. Esto es:

$$\begin{array}{cc} T(5,3) & V(-1,-2) \\ (5-h)^2 + (3-k)^2 = 6^2 & (-1-h)^2 + (-2-k)^2 = 6^2 \\ 25 - 10h + h^2 + 9 - 6k + k^2 = 36 & 1 + 2h + h^2 + 4 + 4k + k^2 = 36 \end{array}$$

Multiplicándose la ecuación de la izquierda por (-1) y sumándose la expresión de la derecha, se tiene:

$$\begin{array}{l} -25 + 10h - h^2 - 9 + 6k - k^2 = -36 \\ \underline{1 + 2h + h^2 + 4 + 4k + k^2 = 36} \\ -24 + 12h \quad -5 \quad +10k \quad = 0 \end{array}$$

$$h = \frac{29 - 10k}{12}$$

Se sustituye esta última expresión en la ecuación de la izquierda:

$$25 - 10\left(\frac{29 - 10k}{12}\right) + \left(\frac{29 - 10k}{12}\right)^2 + 9 - 6k + k^2 = 36$$

$$3600 - 3480 + 1200k + 841 - 580 + 100k^2 + 1296 - 864k + 144k^2 - 5184 = 0$$

$$244k^2 - 244k - 2927 = 0$$

La última expresión es una ecuación de segundo grado, utilizando la formula general se tiene: $a = 244$, $b = -244$, $c = -2927$.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$k = \frac{-(-244) \pm \sqrt{(-244)^2 - 4(244)(-2927)}}{2(244)} = \frac{244 \pm \sqrt{2916288}}{488}$$

$$k_1 = 3.99$$

$$k_2 = -2.99$$

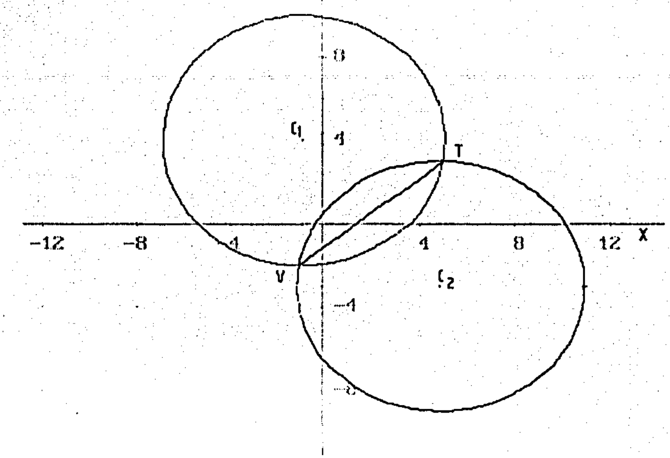
Sustituyéndose k_1 y k_2 se tiene:

$$h = \frac{29 - 10k}{12}$$

$$h_1 = \frac{29 - 10(3.99)}{12} = -0.9$$ Por lo tanto los centros de las circunferencias son los puntos:

$$h_2 = \frac{29 - 10(-2.99)}{12} = 4.9$$

$C_1(-0.9, 3.99)$, $C_2(4.9, -2.99)$.



ECUACIÓN GENERAL DE LA CIRCUNFERENCIA.

De la ecuación de la circunferencia con centro en (h, k) y radio r, $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ llamada forma ordinaria, se obtiene la forma general tal como se ha realizado en algunos ejemplos, simplemente se desarrollan los binomios al cuadrado que están indicados, esto es: $(x^2 - 2hx + h^2) + (y^2 - 2ky + k^2) = r^2$

Al ordenar y al asociarse los términos se tiene:

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

Si se hace $-2h = D$, $-2k = E$ y $(h^2 + k^2 - r^2) = F$ al sustituirse en la ecuación anterior se tiene que la ecuación general de la circunferencia es representada como:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En esta ecuación es importante hacer notar lo siguiente:

1) La ecuación es de segundo grado en "x" y de segundo grado en "y".

2) Los coeficientes de los términos cuadráticos son iguales.

Anteriormente se ha obtenido la ecuación ordinaria de la circunferencia, expresión de la cual inmediatamente se puede realizar su figura, debido a que se determinan fácilmente el centro y su radio. Ahora se harán ejercicios en los cuales se conoce la ecuación general de la circunferencia y por procedimientos algebraicos se obtendrá la ecuación ordinaria de esta curva; para lograr este fin se recomienda realizar el siguiente procedimiento:

De la ecuación: $A'x^2 + D'x + A'y^2 + E'y + F' = 0$

1. Se divide a la ecuación general de la circunferencia por el coeficiente de x^2 o de y^2.

$$\frac{A'x^2}{A'} + \frac{D'x}{A'} + \frac{A'y^2}{A'} + \frac{E'y}{A'} + \frac{F'}{A'} = 0$$

$$x^2 + \frac{D'x}{A'} + y^2 + \frac{E'y}{A'} + \frac{F'}{A'} = 0$$

Si se hace $D = \frac{D'}{A'}, E = \frac{E'}{A'}, F = \frac{F'}{A'}$ la ecuación anterior se reduce a:

$$x^2 + Dx + y^2 + Ey + F = 0$$

2. Se suman y se restan el cuadrado de la mitad de los coeficientes de "x" y de "y", esto es:

$$\underbrace{x^2 + Dx + \left(\frac{D}{2}\right)^2} - \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \underbrace{y^2 + Ey + \left(\frac{E}{2}\right)^2} - \left(\frac{E}{2}\right)^2 + F = 0$$

3. Se factorizan los trinomios cuadrados perfectos que quedaron indicados:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 - \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 - \left(\frac{E}{2}\right)^2 + F = 0$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2 - F$$

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$$

4. La ecuación de la circunferencia anterior tiene la forma ordinaria

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

y por comparación: $h = -\frac{D}{2}, k = -\frac{E}{2}, r^2 = \frac{D^2}{4} + \frac{E^2}{4} - F$

Por lo que las coordenadas del centro de la circunferencia y la magnitud del radio son:

$$C(h,k) = C\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}\right), r = \sqrt{\frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}}$$

Como el radio está dado por la expresión: $r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}$ se observan las siguientes condiciones:

1. Si $D^2 + E^2 - 4F > 0$ Se tiene una circunferencia real
2. Si $D^2 + E^2 - 4F = 0$ Se tiene una circunferencia punto
3. Si $D^2 + E^2 - 4F < 0$ Se tiene una circunferencia imaginaria

EJEMPLOS:

1. Obtener la ecuación de las siguientes circunferencias y realizar su gráfica.

a) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - 20 = 0$

b) $3x^2 + 3y^2 - 12x + 15y - 6 = 0$

c) $x^2 - 6x + y^2 - 12y + 20 = 0$

a) La ecuación $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - 20 = 0$, se divide entre los coeficientes de x^2 o y^2.

$$\frac{2x^2}{2} + \frac{2y^2}{2} + \frac{4x}{2} - \frac{6y}{2} - \frac{20}{2} = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y - 10 = 0$$

Ahora se suman y se restan el cuadrado de la mitad de los coeficientes de "x" y "y"

$$x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 + y^2 - 3y + \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 10 = 0$$

Se factorizan los trinomios cuadrados perfectos.

$$(x+1)^2 - 1 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 10 = 0$$

$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 11 + \frac{9}{4}$$

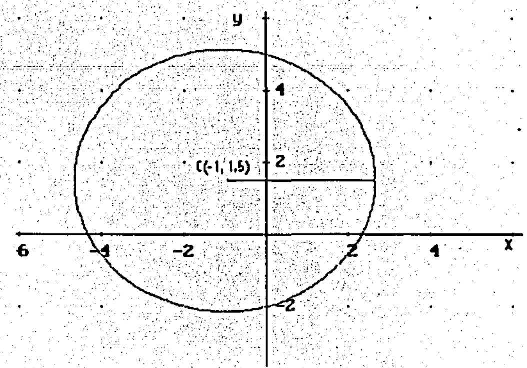
$$(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{53}{4}$$

Esta ecuación tiene la forma ordinaria de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y por

comparación se tiene:

$$h = -1, k = \frac{3}{2}, r = \sqrt{\frac{53}{4}}$$

$$C\left(-1, \frac{3}{2}\right), r = 3.6$$



b) La ecuación $3x^2 + 3y^2 - 12x + 15y - 6 = 0$, se divide entre los coeficientes de x^2 o y^2.

$$\frac{3x^2}{3} + \frac{3y^2}{3} - \frac{12x}{3} + \frac{15y}{3} - \frac{6}{3} = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 5y - 2 = 0$$

Ahora se suman y se restan el cuadrado de la mitad de los coeficientes de "x" y "y"

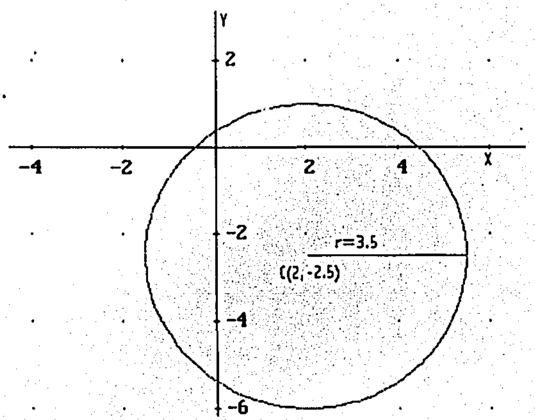
$$x^2 - 4x + \left(\frac{-4}{2}\right)^2 - \left(\frac{-4}{2}\right)^2 + y^2 + 5y + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2 = 0$$

Se factorizan los trinomios cuadrados perfectos.

$$(x-2)^2 - 4 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} - 2 = 0$$

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = 6 + \frac{25}{4}$$

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}$$



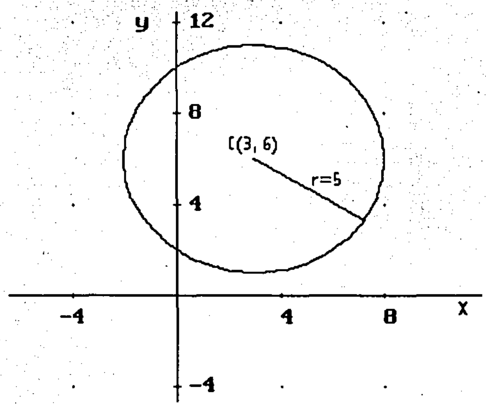
Esta ecuación tiene la forma ordinaria de la circunferencia $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ y por comparación se tiene:

$$h = 2,\ \ k = -\frac{5}{2},\ \ r = \sqrt{\frac{49}{4}}$$
$$C(2,-2.5),\qquad r = 3.5$$

c) De la ecuación:

$$x^2 - 6x + y^2 - 12y + 20 = 0$$
$$x^2 - 6x + \left(\frac{-6}{2}\right)^2 - \left(\frac{-6}{2}\right)^2 + y^2 - 12y + \left(\frac{-12}{2}\right)^2 - \left(\frac{-12}{2}\right)^2 + 20 = 0$$
$$(x-3)^2 - 9 + (y-6)^2 - 36 + 20 = 0$$
$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 9 + 36 - 20$$
$$(x-3)^2 + (y-6)^2 = 25$$

Siendo el centro y radio: $C(3,6)$, $r = 5$



2. Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos: P(2, 0), Q(1,-1) y R(3, -1).

Suponiéndose que la ecuación de la circunferencia por determinar es de la forma general. $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Como los tres puntos pertenecen a la circunferencia, éstos deben de satisfacer la ecuación.

Para el punto P(2,0), se tiene al sustituir en la ecuación general de la circunferencia lo siguiente:

$$2^2 + 0^2 + D(2) + E(0) + F = 0$$

$$2D + F = -4 \ldots M_1$$

Para el punto Q(1,-1), se tiene:

$$1^2 + (-1)^2 + D(1) + E(-1) + F = 0$$

$$D - E + F = -2 \ldots M_2$$

Para el punto R(3, -1)

$$3^2 + (-1)^2 + D(3) + E(-1) + F = 0$$

$$3D - E + F = -10 \ldots M_3$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones:$(M_1)(M_2)(M_3)$.

$$D = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -10 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4+2-0+0-4-10}{-2-1+0-0+2+3} = \frac{-8}{2} = -4$$

Sustituyéndose $D = -4$ en (M_1)

$$2D + F = -4$$

$$2(-4) + F = -4$$

$$F = 8-4$$

$$F = 4$$

Empleándose los valores D y F en la (M_2)

$$D - E + F = -2$$

$$-4 - E + 4 = -2$$

$$E = 2$$

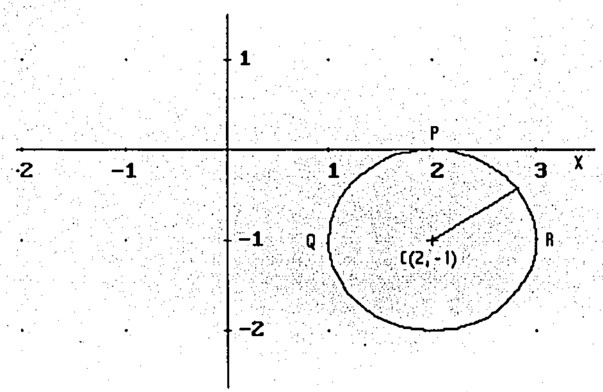
Por lo tanto como D = -4, E = 2 y F = 4, al sustituirlos en la ecuación de la circunferencia se tiene:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$$

Donde se concluye que el centro de la circunferencia y su radio son:

$$C\left(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2}\right) = \left(-\frac{-4}{2}, -\frac{2}{2}\right) = (2, -1)$$

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{D^2 + E^2 - 4F} = \frac{1}{2}\sqrt{16 + 4 - 16} = 1$$



TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS POR TRANSLACIÓN DE EJES.

En un gran número de situaciones físico-matemáticas, es conveniente realizar transformaciones de coordenadas de un sistema de ejes cartesianos XY, a otro X¨Y¨ , como fue el caso de la obtención de la ecuación de la circunferencia en la forma ordinaria.

Ecuación de la circunferencia en forma cónica.

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Ecuación de la circunferencia en forma ordinaria.

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

Ecuación de la circunferencia en forma general.

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$
$$A=C$$

Al hacer estudios característicos de la naturaleza es una ventaja ejercer una transformación de coordenadas por translación de sistema de ejes cartesianos, con el objeto de simplificar la investigación deseada.

La transformación de la ecuación de una circunferencia en su forma ordinaria o general a la expresión canónica, se realiza por medio de las ecuaciones:

$x=x'+h$
$y=y'+k$

El punto (h, k), representa al origen del nuevo sistema de coordenadas cartesianas.

EJEMPLOS:

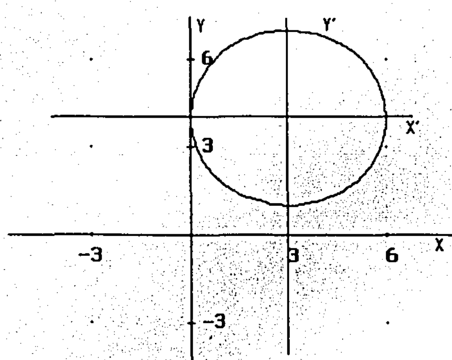
1. Expresar en la forma canónica la ecuación de la circunferencia $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, si el origen de sistema de ejes cartesianos se traslada al punto (3,4).

Las ecuaciones de transformación de coordenadas, para una translación son:

$$\begin{array}{l} x=x'+h \\ y=y'+k \end{array} \text{ con } h=3 \text{ y } k=4.$$

Substituyéndose estas expresiones en $(x-3)^2+(y-4)^2=9$, se tiene:

$$(x'+3-3)^2+(y'+4-4)^2=9$$
$$(x'+0)^2+(y'+0)^2=9$$
$$x'^2+y'^2=9$$

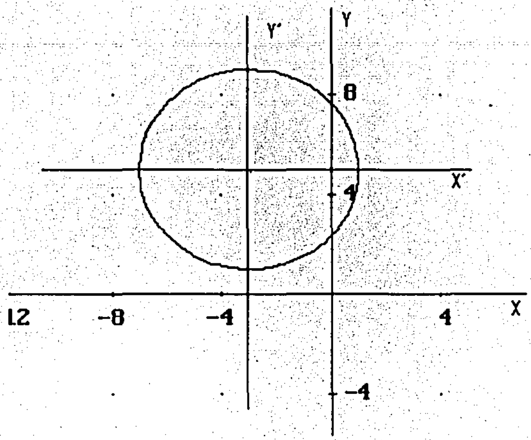


2. Obtener la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2+6x-10y+18=0$ en un sistema de ejes coordenadas cuyo origen se traslada al punto (-3, 5).

Se sabe que las ecuaciones de transformación son:

$$\begin{aligned} x &= x'+h \\ &= x'+(-3) \\ &= x'-3 \end{aligned} \qquad \text{ya que } h=-3 \text{ y } k=5.$$

$$y=y'+k=y'+5$$



Substituyéndose en la ecuación dada se tiene que:

$$x^2+y^2+6x-10x-10y+18=0$$

$$(x'-3)^2+(y'+5)^2+6(x'-3)-10(y'+5)+18=0$$

desarrollándose las operaciones indicadas

$$x'^2-6x'+9+y'^2+10y'+25+6x'-18-10y'-50+18=0$$

reduciéndose términos semejantes se llega a:

$$x'^2+y'^2-16=0$$

$$x'^2+y'^2=16$$

3. Obtener la ecuación de la circunferencia $3x^2+3y^2+12x-20y+11=0$ en un sistema de coordenadas cartesianas, tal que no existan términos en x′ y y′.

Nótese que si en una ecuación de una circunferencia no existen términos en x′ y y′, lo que se manifiesta es que, la ecuación de la circunferencia dada se expresa en la forma canónica, esto es:

$$x'^2+y'^2=r^2$$

Se sabe que en estos casos el origen del sistema de los ejes cartesianos se traslada al centro de la circunferencia.

Como las ecuaciones de translación de coordenadas de una translación son:

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

al substituirse en la ecuación dada se tiene:

$$3(x'+h)^2 + 3(y'+k)^2 + 12(x'+h) - 20(y'+k) + 11 = 0$$

desarrollándose los binomios al cuadrado:

$$3(x'^2 + 2x'h + h^2) + 3(y'^2 + 2y'k + k^2) + 12(x'+h) - 20(y'+k) + 11 = 0$$
$$3x'^2 + 6x'h + 3h^2 + 3y'^2 + 6y'k + 3k^2 + 12x' + 12h - 20y' - 20k + 11 = 0$$

factorizándose a x′ u y′ :

$$3x'^2 + 3y'^2 + x'(6h+12) + y'(6k-20) + (3h^2 + 3k^2 - 12h - 20k + 11) = 0$$

Como el enunciado del problema indica que no debe existir términos en x′ y y′, entonces sus coeficientes deben de ser nulos, esto es:

$$6h - 12 = 0 \qquad 6k - 20 = 0$$

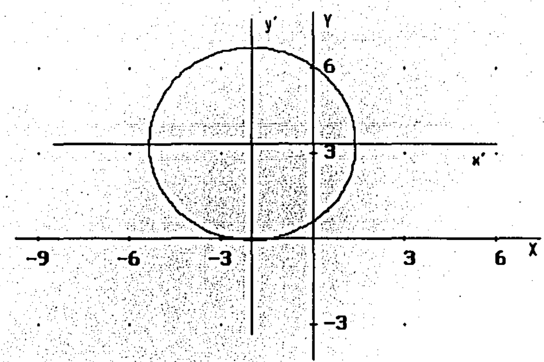
De estas expresiones se obtienen las coordenadas del punto donde se encuentra el origen del nuevo sistema de coordenadas cartesianas.

$$6h - 12 = 0 \qquad 6k - 20 = 0$$
$$6h = 12 \qquad 6k = 20$$
$$h = \frac{12}{6} \qquad k = \frac{20}{6}$$
$$h = 2 \qquad k = 3.3$$

Substituyéndose h = 2 y k = 3.3, para evaluar el término independiente dado por:

$$3x'^2 + 3y'^2 + x'(6h-12) + y'(6k-20) = -(3h^2 + 3k^2 - 12h - 20k + 11)$$
$$3x'^2 + 3y'^2 = -(3(2^2) + 3(3.3^2) - 12(2) - 20(3.3) + 11)$$
$$3x'^2 + 3y'^2 = -(3(4) + 3(10.89) - 24 - 66 + 11)$$
$$3x'^2 + 3y'^2 = -(12 + 32.67 - 24 - 66 + 11)$$
$$3x'^2 + 3y'^2 = -34.33$$
$$3(x'^2 + y'^2) = 34.33$$
$$x'^2 + y'^2 = \frac{34.33}{3}$$
$$x'^2 + y'^2 = 11.4$$

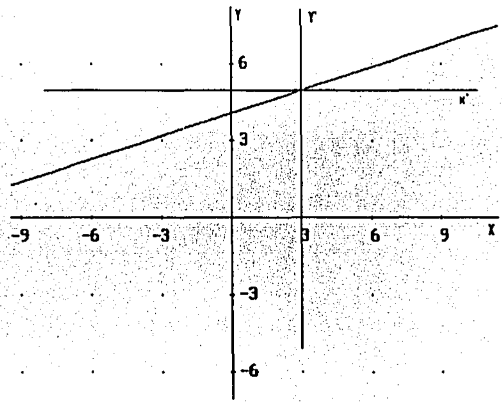
Con el origen (2, 3.3)



4. Obtener la ecuación de la recta $3x-10y+41=0$ en un sistema de coordenadas, tal que su origen se encuentra en el punto (3, 5).

Se sabe que las ecuaciones de transformación de coordenadas en una translación son:

$$x = x' + h = x' + 3 \qquad y = y' + k = y' + 5$$



Substituyéndose en la ecuación de la recta se tiene:

$$3x-10y+41=0$$
$$3(x'+3)-10(y'+5)+41=0$$
$$3x'+9-10y'-50+41=0$$
$$3x'-10y'=0$$

En la nueva ecuación se observa que no existe el término independiente (C = 0), lo cual indica, que la recta pasa por el origen del sistema de coordenadas x′y′.

EJERCICIOS:

1. Obtener la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el origen, si su radio de 5 unidades.

2. Obtener la ecuación de la circunferencia de radio $\sqrt{10}$ y tiene por centro C(1, -3). Obtener los puntos donde esta curva corta a los ejes coordenados.

3. Obtener la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto P(-2, 4) y que es concéntrica a la que tiene por ecuación : $2x^2+2x^2-10x+8y-2=0$. Trazar su gráfica.

4. Encontrar los puntos donde la curva de la circunferencia $3x^2+3y^2-16x+2y+15=0$ corta a la recta definida por los puntos (0, 1) y (2, 0). Determinar los puntos donde la circunferencia corta a los ejes y trazar su gráfica.

5. Determinar las coordenadas del centro y la longitud del radio de las circunferencias que siguen: a) $x^2+y^2-2x+4y=0$ b) $x^2+y^2+2x+6y=0$

6. Encontrar la ecuación de la circunferencia que pase por los puntos A(0, 0), B(2, 0) y C(0, 4)

7. Verificar por el cálculo que la recta 2x + x = 10 es tangente a la circunferencia $x^2+y^2-2x-4y=0$ ¿Cuáles son las coordenadas del punto de tangencia?

RESPUESTAS:

1. $x^2+y^2=25$

2. $P_1(0, 0)$, $P_2(0, -6)$, $P_3(0, 0)$, $P_4(2, 0)$; $x^2+y^2-2x-6y=0$

3. $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{45}{4}$; $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{225}{4}$

4. x +2y –2 =0 corta en punto $P_1(1.3, 0.3)$, $P_2(4, -1)$; los puntos donde corta con el eje "X" son: (1.3, 0). (4.11, 0)

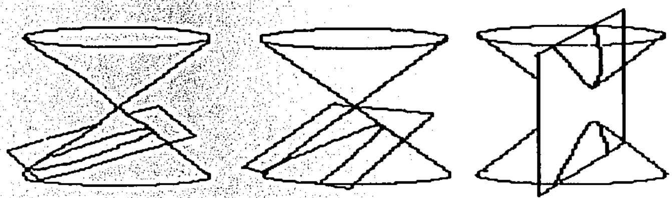
5. a) C(1, -2) . $r=\sqrt{5}$; b) C(-1, -3), $r=\sqrt{10}$

6. $(x-1)^2+(y+2)^2=5$

7. $T(2, 4)$

UNIDAD IV
LAS CÓNICAS
SECCIONES CÓNICAS

Se conocen como secciones cónicas aquellas curvas que pueden obtenerse al cortar un cono de dos mantos con un plano, como se muestra en la figura. Las cónicas generales son:



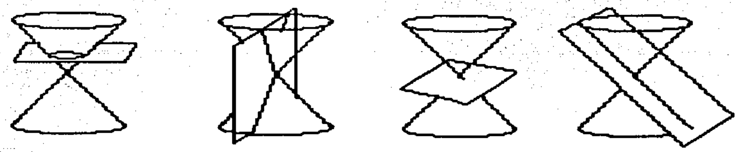
Secciones Cónicas

- La parábola, que se obtiene al cortar un cono con un plano cuya inclinación es la misma que la superficie lateral del cono.
- La elipse, que se obtiene al cortar el cono con un plano cuya inclinación es menor al ángulo que forma la superficie lateral del cono con la base.
- La hipérbola, que se obtiene al cortar al cono con un plano cuya inclinación es mayor al ángulo que forma la superficie lateral del cono con la base. En este caso, el plano corta a los dos mantos del cono.

También podemos considerar como casos particulares de cónicas a:

- La circunferencia como caso particular de la elipse, cuando el plano corta horizontalmente.
- Dos rectas que se cortan, como el caso particular de la hipérbola, cuando el plano de corte es vertical y pasa por el vértice de los conos.
- Un punto, cuando el plano corta a los conos únicamente en el vértice.
- Una recta, cuando el plano es tangente a los dos conos.

Casos particulares



Circunferencia Dos Rectas que se cortan Un Punto Una Recta

Las definiciones geométricas de las cónicas no resultan prácticas para muchas aplicaciones. Utilizando la geometría sintética es posible probar que estas definiciones son equivalentes a las que se dan a continuación, que están dadas en términos de distancias y que permiten obtener propiedades y aplicaciones de ellas.

- Una parábola es el conjunto de puntos del plano que equidistan a una recta fija y un punto fijo que no está en ella.

- Una elipse es el conjunto de puntos del plano cuya distancia a dos puntos fijos tiene una suma constante.

- Una hipérbola es el conjunto de puntos del plano cuya distancia a dos puntos fijos del plano tiene una diferencia constante.

Estas definiciones son similares a la ya conocida de la circunferencia, como el conjunto de puntos del plano cuya distancia a un punto dado es constante.

La geometría analítica toma estas definiciones y las combina con el álgebra obteniendo que todas las cónicas pueden representarse mediante ecuaciones de segundo grado en dos variables y recíprocamente, toda ecuación de segundo grado describe una cónica o a un caso degenerado de alguna de ellas.

LA PARÁBOLA.

La parábola es una trayectoria familiar para todos, ya que cotidianamente se observa. Después de todo, es el recorrido que sigue cualquier objeto cuando lo lanzamos con cierta velocidad e inclinación respecto a la vertical. Este movimiento queda dibujado en el recorrido de las partículas de agua que salen de una manguera.

También forman parte de nuestro mundo las antenas parabólicas. En estas cualquiera de las curvas contenidas, que pasan por el vértice de la antena es una parábola. El propósito de esta disposición es reflejar las señales electromagnéticas(de televisión o radio), de manera que todas ellas se concentren en un sólo punto. Un propósito similar cumplen los espejos parabólicos de los grandes telescopios ópticos, como el que posee México en San Pedro Mártir, o el del Monte Palomar, en Estados Unidos.

Como puede apreciarse, existe una gran diversidad de aplicaciones que se general al estudiar las propiedades de una curva, en esta ocasión la trayectoria parabólica.

DEFINICIÓN.

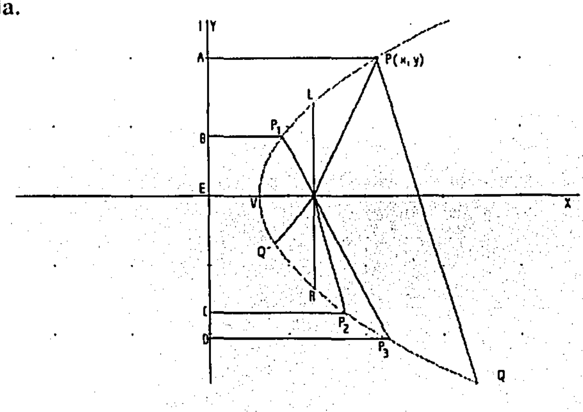
La parábola es un lugar geométrico formado por un conjunto de puntos en el plano XY; tales que cada punto de este conjunto satisface la siguiente condición geométrica:

La distancia de una recta fija situada en un plano XY, a un punto cualquiera P(x,y) de la parábola es igual a la distancia que existe entre el punto P(x,y) y un punto fijo.

El punto fijo llamado foco, no pertenece a la recta fija llamada directriz de la parábola.

Mediante la gráfica siguiente, se hace ver que se verifique la condición geométrica que deben satisfacer todos los puntos de la parábola.

$\overline{AP} = \overline{PF}$
$\overline{BP_1} = \overline{P_1F}$
$\overline{CP_2} = \overline{P_2F}$
$\overline{DP_3} = \overline{P_3F}$
ETC.



Las igualdades anteriores se verifican para todo punto P, que pertenezca a este conjunto.

$\{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$ llamado parábola.

ELEMENTOS DE LA PARÁBOLA.

Los elementos de la parábola son:

1. Un punto fijo llamado foco = F. Este punto siempre se encuentra en el eje de la parábola.
2. Una recta fija llamada directriz = I. Esta recta es perpendicular al eje de la parábola.
3. Un eje de la parábola = a. Este eje pasa por F y es perpendicular a I.
4. Vértice de la parábola = V. V es el punto medio de EF, de acuerdo con la figura.
5. Cuerda de la parábola = $\overline{QP}$. Línea recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola.
6. Cuerda focal = $\overline{PQ'}$. Es una cuerda que pasa por el foco.
7. Lado recto = $\overline{LR}$. Es una cuerda focal perpendicular al eje de la curva que pasa por el foco.
8. Radio focal = $\overline{FP}$. Es la distancia de un foco a un punto cualquiera de la parábola.
9. Parámetro de la parábola = P. Distancia del foco al vértice.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN Y SU EJE COINCIDIENDO CON EL EJE X.

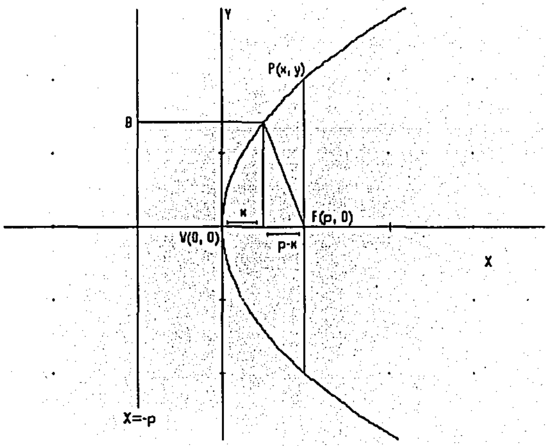
Si se aplica la condición geométrica, para que exista una parábola es decir, que la distancia de un punto cualquiera de esta curva P_1 al foco (F) sea igual a la distancia de ese punto P_1 a una recta x = -p llamada directriz, se tiene:

$$\left|\overline{FP}\right| = \left|\overline{P_1 B}\right|$$

De acuerdo con la figura se aprecia que la hipotenusa $\overline{P_1F}$ del triángulo rectángulo de catetos "y" y p - x, se obtiene haciendo uso del teorema de Pitágoras.

$\left|\overline{FP_1}\right| = \sqrt{(p-x)^2 + y^2}$

De la figura se aprecia que la magnitud de $\overline{BP_1}$ es:



$\left|\overline{BP_1}\right| = |p+x|$ por lo tanto como: $\left|\overline{FP_1}\right| = \left|\overline{P_1B}\right|$, se tiene: $\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = |p+x|$

Elevándose al cuadrado la expresión anterior se tiene:

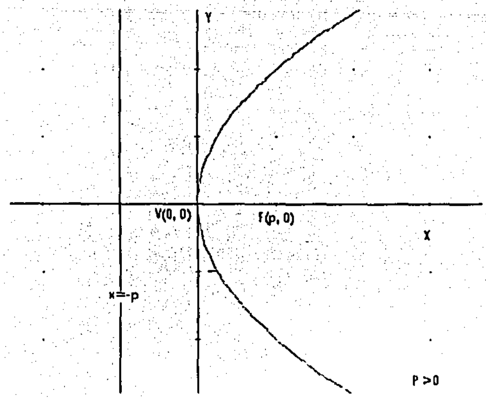
$$
\begin{aligned}
(p-x)^2 + y^2 &= |p+x|^2 \\
p^2 - 2px + x^2 + y^2 &= p^2 + 2px + x^2 \\
y^2 &= p^2 - p^2 + 2px + 2px + x^2 - x^2 \\
y^2 &= 4px
\end{aligned}
$$

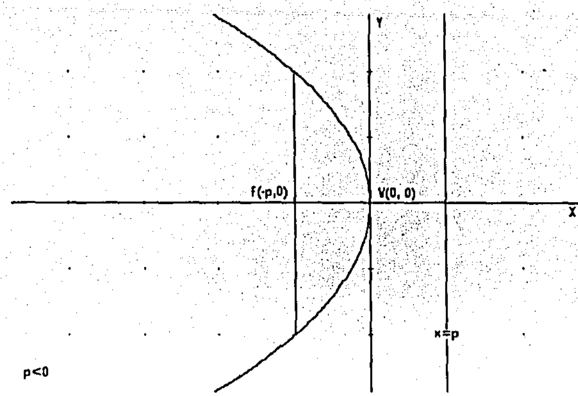
Esta última expresión es la ecuación de la parábola con vértice en el origen, con su eje focal en el eje "x", y con foco en el punto F(p, 0).

La directriz de la parábola por ser una recta paralela al eje "y". Tiene como ecuación x = -p.

El lado recto de la parábola esta dado por: $LR = |4p|$.

Cuando p>0 la parábola se abre hacia la derecha y si p<0 la curva abre hacia la izquierda, tal como se muestra en la siguiente figura.





ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON VÉRTICE EN EL ORIGEN Y SU EJE COINCIDIENDO CON EL EJE Y.

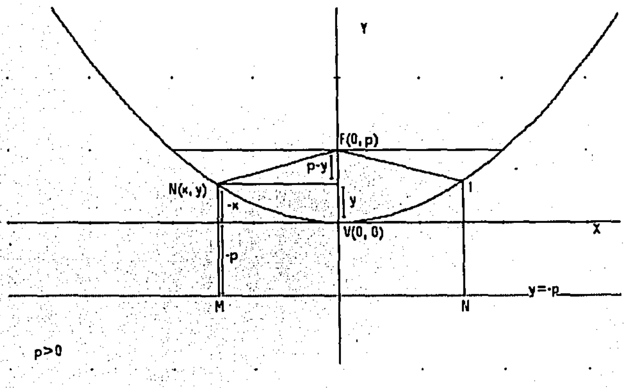
La distancia de un punto cualquiera de la parábola al foco, es igual a la existente entre el mismo punto y la directriz de la parábola y = -p.

De acuerdo con la figura, esto es:

$\left|\overline{FN}\right| = \left|\overline{NM}\right|$ ó también $\left|\overline{FI}\right| = \left|\overline{HI}\right|$

De la figura se aprecia la distancia $\left|\overline{FN}\right|$ es dada por:

$\left|\overline{FN}\right| = \sqrt{(p-y)^2 + (-x)^2}$ de acuerdo con el teorema de Pitágoras, además se aprecia que $\left|\overline{NM}\right| = |y+p|$ igualándose los valores de $\left|\overline{FN}\right| = \left|\overline{NM}\right|$



se tiene: $\sqrt{(p-y)^2+(-x)^2}=|y+p|$

Elevándose al cuadrado la expresión anterior se tiene:

$$(p-y)^2+(-x)^2=(y+p)^2$$
$$p^2-2py+y^2+x^2=y^2+2py+p^2$$
$$x^2=y^2-y^2+2py+2py+p^2-p^2$$
$$x^2=4py$$

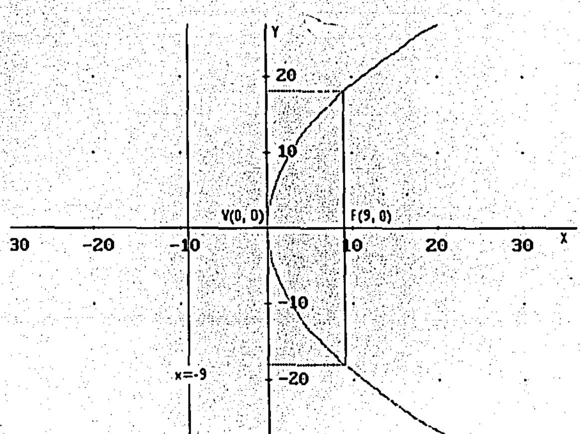
La última expresión es la ecuación de la parábola con vértice en el origen, con eje focal con el eje y, con una directriz dada por y = -p, con un foco determinado por el punto F(0, p) y cuyo lado recto es $LR=|4p|$.

En estos casos, cuando p>0 la parábola se abre hacia arriba y para p<0 la cónica se abre hacia abajo.

EJEMPLOS:

1. Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y foco en el punto (9, 0).

Según el enunciado del problema el eje de la parábola coincide con el eje X. Las coordenadas del foco F(9, 0) = F (p,0) indican que la distancia entre el vértice V(0, 0) y el foco es p = 9.



Substituyéndose este valor en la ecuación $y^2 = 4px$, se obtendrá la ecuación de la parábola solicitada; $y^2 = 4(9)x$, $y^2 = 36x$. La ecuación de la directriz es x = -9.

2. Calcular la ecuación de la parábola con vértice en al origen y foco en el punto (0, 5).

Por el enunciado del problema, el eje de la parábola coincide con el eje Y, por lo tanto las coordenadas del foco son; F(0, p) = F(0, 5), por comparación se concluye que: p = 5.

Substituyéndose este valor en la ecuación $x^2 = 4py$, se tiene:

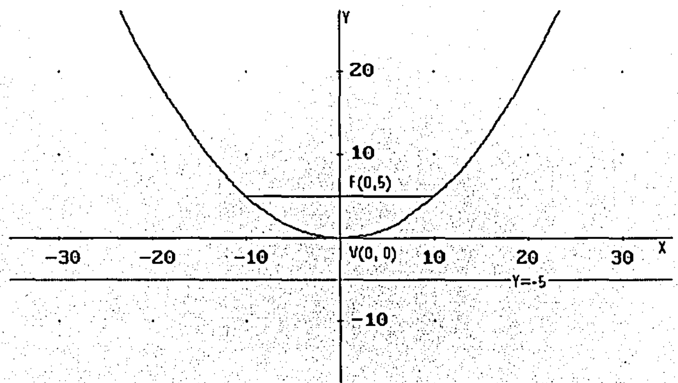
$x^2 = 4(5)y \Rightarrow x^2 = 20y$ es la -- ecuación pedida.

El lado recto es:

$$LR = |4p| = |4(5)| = 20$$

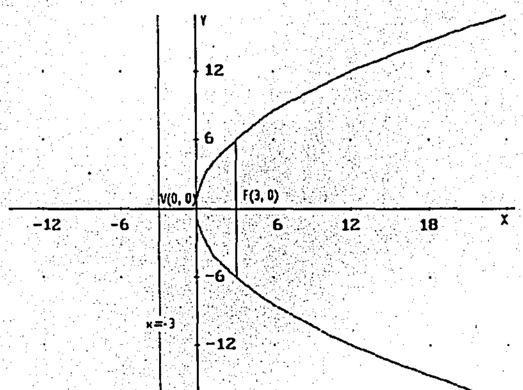
La ecuación de la directriz es:

y = -p es decir y = -5.



3. Obtener la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz la recta x + 3 = 0.

Como la ecuación de la directriz es x + 3 = 0. Se aprecia que es una -- recta constante paralela al eje Y -- por lo tanto el eje focal de la parábola esta coincidiendo con el eje X y su ecuación debe tener la forma: $y^2 = 4px$.



Para obtener el valor de p se hace uso de la ecuación de la directriz x + 3 = 0 que es de la forma x + p = 0. Y por comparación se tiene que p = 3. Por lo tanto la ecuación es:

$$y^2 = 4(3)x \therefore y^2 = 12x$$

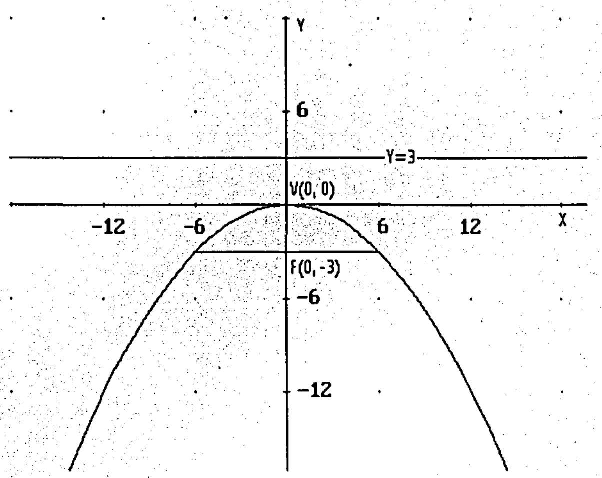
4. Hallar la ecuación de la parábola, si su directriz es y - 3 = 0.

Como la ecuación de la directriz es - y - 3 = 0 se tiene a una línea constante paralela al eje X y el eje de la parábola coincidirá con el eje Y , su ecuación - tiene la forma: $x^2 = 4py$.

Para obtener el valor de (p) nuevamente se hará uso de la ecuación de la --- directriz y - 3 = 0 de la forma y + p = 0 por lo tanto p = - 3.

Substituyéndose p = -3 en la ecuación - de la parábola se obtendrá la ecuación -- solicitada:

$$x^2 = 4(-3)y \therefore x^2 = -12y$$

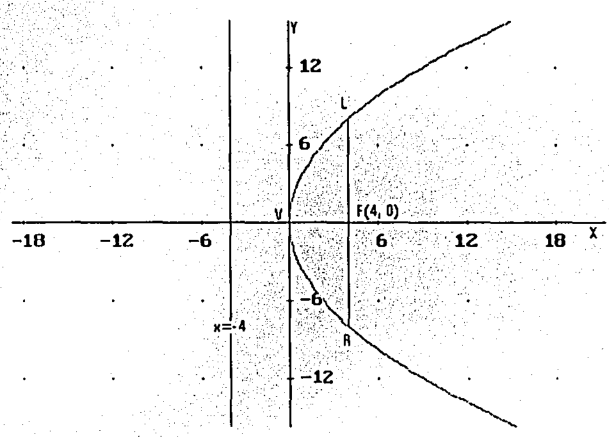


5. Obtener la ecuación de la parábola, las coordenadas del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto. Si tiene su vértice en el origen y su eje coincide con el eje X y pasa por el punto (4, 8).

Como la parábola tiene su vértice en el origen y eje focal coincidiendo con el eje X, la ecuación debe de ser de la forma: $y^2 = 4px$.

Nótese que en este caso no se conoce la ecuación de la directriz, ni las coordenadas del foco para calcular el valor de (p). Por lo tanto se hace uso de las coordenadas del punto dado (4,8) que pertenece a la parábola, y satisface a la ecuación $y^2 = 4px$, con y = 8 y x = 4 de acuerdo con las coordenadas del punto dado. Al usarse estos valores nótese que se tiene una ecuación con una incógnita (p), esto es: $8^2 = 4p(4)$, de donde se obtiene que p = 4.

Entonces la ecuación es: $y^2 = 16x$, las coordenadas del foco F(4,0), la - ecuación de la directriz es x + 4 = 0. La longitud de su lado recto esta dado por: $LR = |4p| = |4(4)| = 16$.



6. Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje Y pasa por el punto (-8,-4). Obtener la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Por los datos del problema la ecuación de la parábola es de la forma siguiente: $x^2 = 4py$.

Como el punto (-8,-4) pertenece a ella, entonces sus coordenadas deben satisfacerla esto es:

$$(-8)^2 = 4p(-4) \qquad 64 = -16p \;\therefore\; p = \frac{64}{-16} = -4$$

Entonces su ecuación es: $x^2 = -16$

Las coordenadas del foco son:

F(0, p) esto es F(0, -4)

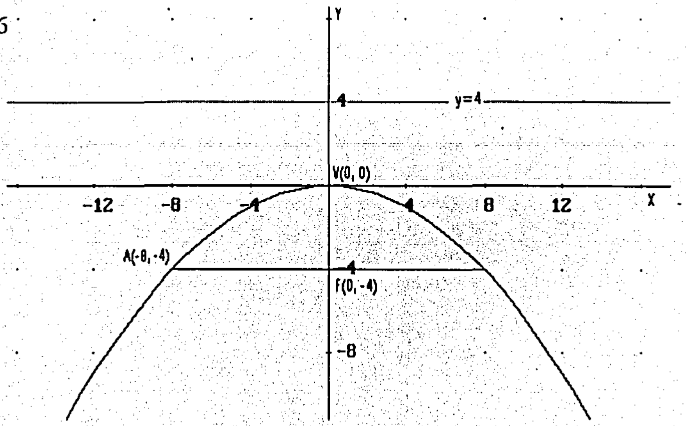
La ecuación de la directriz es:

y + p = 0 esto es y - 4 = 0

o bien y = 4.

La longitud del lado recto es:

$LR = |4p| = |4(-4)| = 16$.



7. Obtener la magnitud de la cuerda focal de la parábola $y^2 = 8x$ que es paralela a la recta que pasa por los puntos A(7, 3) y B(6, -1).

De acuerdo con la ecuación de la parábola dada, se aprecia que es una cónica con su vértice en el origen y su eje focal coincide con el eje X, es decir su ecuación es de la forma $y^2 = 4px$, por comparación se aprecia que: $\begin{matrix} 4p = 8 \\ p = 2 \end{matrix}$

Por lo tanto, el foco tiene como coordenadas al punto F(p, 0) = F(2, 0).

Se sabe que la cuerda focal pasa por el foco F(2, 0), y además en este problema es paralela a la recta que pasa por los puntos A(7, 3) y B(6, -1) por lo tanto la pendiente de la cuerda focal es igual a la pendiente de la recta.

Esta pendiente se obtiene por medio de:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-1-3}{6-7}$$

$$m = \frac{-4}{-1}$$

$$m = 4$$

Conocido un punto de la cuerda F(2, 0) y su pendiente m = 4, se obtiene su ecuación haciendo uso de:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 0 = 4(x - 2)$$
$$y = 4x - 8$$

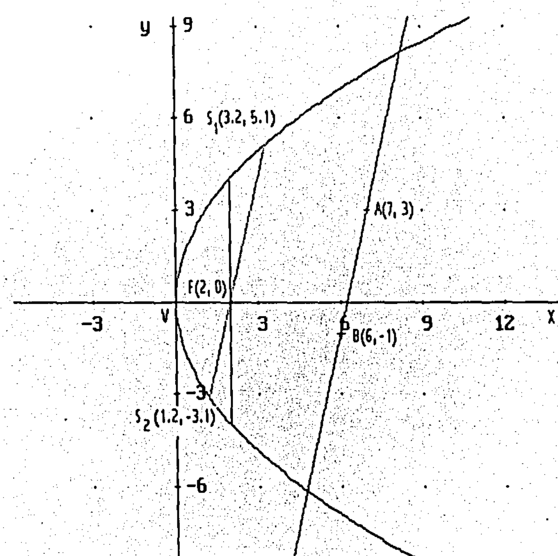
Conocida la ecuación de la cuerda focal de la parábola, se debe de resolver con la ecuación de la curva $y^2 = 8x$, para obtener los puntos de intersección S_1 y S_2.

Substituyéndose y = 4x - 8 en :

$$y^2 = 8x$$
$$(4x-8)^2 = 8x$$
$$16x^2 - 64x + 64 = 8x$$
$$16x^2 - 72x + 64 = 0$$
$$2x^2 - 9x + 8 = 0$$

De donde:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4(2)(8)}}{2(2)}$$
$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 64}}{4}$$
$$x = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{4}$$
$$x = \frac{9 \pm 4.12}{4}$$
$$x_1 = \frac{9 + 4.12}{4} = 3.28$$
$$x_2 = \frac{9 - 4.12}{4} = 1.22$$



Sustituyendo los valores numéricos a x_1 y x_2 en y = 4x - 8, se tiene:

$$y_1 = 4(3.28) - 8 = 5.12$$
$$y_2 = 4(1.22) - 8 = -3.12$$

Por lo tanto las coordenadas de los puntos de intersección S_1 y S_2 son:
$S_1(3.28, 5.12)$ y $S_2(1.22, -3.12)$

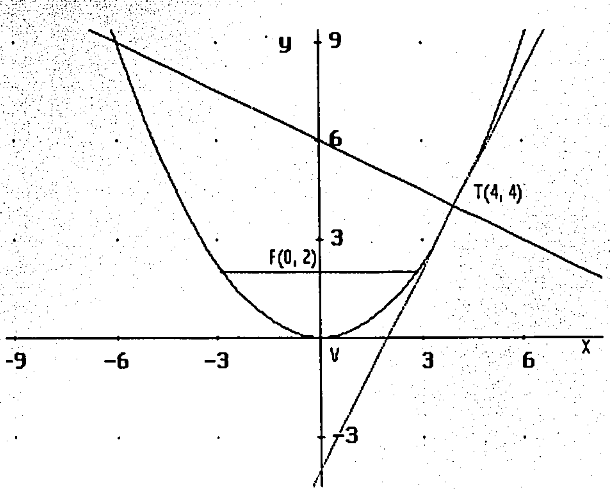
Finalmente la magnitud de la cuerda focal es dada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(1.22 - 3.28)^2 + (-3.12 - 5.12)^2}$$
$$d = \sqrt{(-2.06)^2 + (-8.24)^2}$$
$$d = \sqrt{4.2436 + 67.8976}$$
$$d = \sqrt{72.1412}$$
$$d = 8.49.$$

8. La ecuación de una parábola es $x^2 = 4y$, hallar la ecuación de la tangente y normal a esta curva en el punto T(4, 4).

Al hacer uso del enunciado del problema se aprecia que el punto de tangencia T(4, 4) pertenece tanto a la tangente como a la parábola; además se sabe que la ecuación de la tangente se puede encontrar utilizando la expresión de la recta punto pendiente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = m(x - 4)$$
$$y = 4 + mx - 4m$$



Esta última expresión se sustituye en la ecuación de la parábola:

$$x^2 = 4(4 + mx - 4m)$$
$$x^2 = 16 + 4mx - 16m$$
$$x^2 - 4mx + 16(m - 1) = 0$$

La última expresión es una ecuación de segundo grado en "x", de donde:

a = 1, b = -4m, c = 16(m-1)

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x=\frac{-(4m)\pm\sqrt{(-4m)^2-4(16(m-1))(1)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{4m\pm\sqrt{16m^2-4(16(m-1))}}{2}$$

El punto T(4, 4) solo acepta el paso de una tangente y la solución de la fórmula de una ecuación de segundo grado proporciona dos resultados, solo es única cuando el radicando es cero, por lo tanto:

$$16m^2-64(m-1)=0$$
$$m^2-4m+4=0$$

Nuevamente se llega a una ecuación de segundo grado ahora en "m". De acuerdo a la ecuación, se tiene: A = 1, B = -4, C = 4.

$$m=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$m=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2(1)}$$
$$m=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}$$
$$m=\frac{4}{2}$$
$$m=2$$

Una vez encontrada la pendiente se sustituye el valor en la ecuación punto pendiente esto es:

$$y-4=2(x-4)$$
$$y-4=2x-8$$
$$2x-y-4=0$$

Esta última expresión es la ecuación de la tangente en el punto T(4, 4).

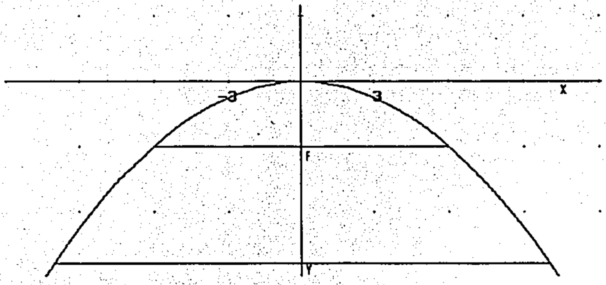
La recta normal es perpendicular a la tangente, su pendiente es reciproca con signo contrario a la pendiente de la tangente, esto es:

$$m_N = -\frac{1}{m_T} = -\frac{1}{2}$$

Al sustituirse en la ecuación punto pendiente se tiene:

$$y-4=-\frac{1}{2}(x-4)$$
$$y-4=-\frac{1}{2}x+2$$
$$\frac{1}{2}x+y-6=0$$
$$x+2y-12=0$$

9. Un puente, sobre el río del estado de Veracruz ha sido construido con una longitud horizontal de 1200m en forma parabólica, si su foco se encuentra a 25m por debajo de él, obtener la ecuación del lugar geométrico que define al puente.



En los problemas físicos el proyectista adapta las condiciones matemáticas al fenómeno en estudio. En este caso se seleccionará el vértice de la parábola como la altura máxima del puente; como la distancia que existe entre el vértice y el foco se ha definido como la literal "p", se tiene p = -25m, el signo menos indica que el foco está por debajo del vértice donde la ecuación es de la forma:

$$x^2 = 4py$$
$$x^2 = 4(-25)y$$
$$x^2 = -100y$$

10. La óptica, parte de la física que estudia a los rayos luminosos cuya causa se le llama luz, a reportado que un rayo luminoso al llegar a un espejo parabólico paralelo a su eje focal, al reflejarse pasa por su foco.

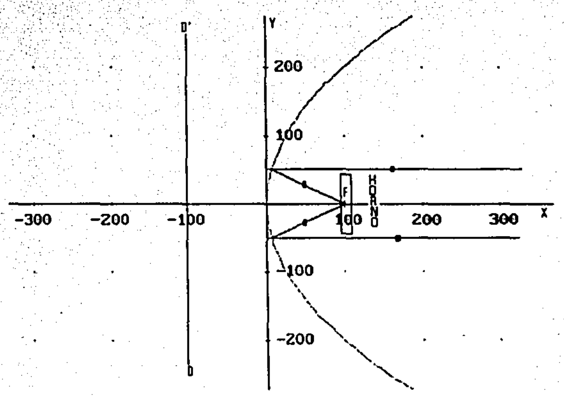
Si la directriz del corte de un espejo parabólico está a 100m de su vértice, hallar la ecuación de la parábola y manifestar en que punto de su eje focal se debe construir un horno si los rayos luminosos procedentes del sol, por medios ópticos se obligarán a llegar paralelos el eje del espejo.

Si el proyectista del espejo parabólico sobrepone al origen del sistema de ejes cartesianos en el vértice del espejo, al tener la directriz a 100m del vértice y sabiendo que la ecuación de la directriz es de la forma x = -p por estar en el eje focal de la parábola coincidiendo con el eje "X" , se tendrá: x = -100 entonces p = 100m.

La ecuación en este caso se sabe que es de la forma:

$$y^2 = 4px$$
$$y^2 = 400x$$

El recinto que fungirá como horno -- debe construirse a 200m de la direc-- triz, es decir, en el foco de coordena-- das F(p,0) = F(100,0), porque en ese punto se concentrará toda la energía - luminosa procedente del sol.



A este tipo de hornos se les denomina solares y sus aplicaciones serán de gran importancia en el desarrollo de la vida diaria.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA CON SU EJE FOCAL PARALELO A CUALQUIERA DE LOS EJES CARTESIANOS "XY" Y VÉRTICE EN V(h, k).

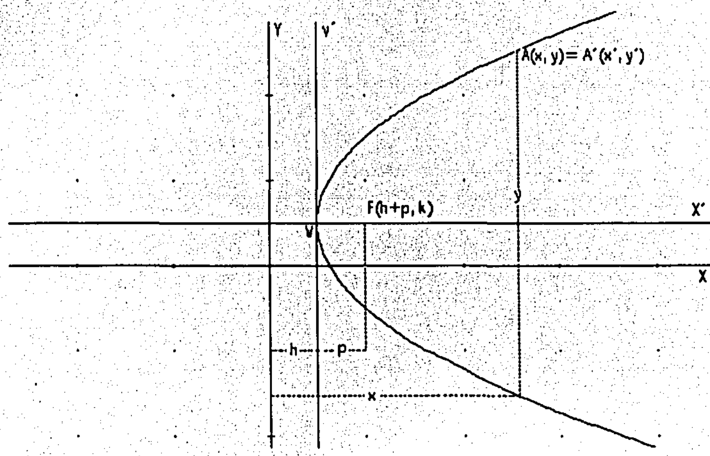
Para obtener la ecuación de la parábola con su eje focal paralelo al eje "x", se realiza una translación de los ejes cartesianos, de tal forma que el vértice de la parábola coincida con el origen de un nuevo sistema de ejes cartesianos X'Y' tal como se muestra en la figura.

Se aprecia en el gráfico de la derecha que las ecuaciones de este tipo de una transformación en una translación se satisfacen, ya que el punto A de coordenadas (x,y) en el sistema coordenadas XY y de coordenadas X' Y' cumplen con las siguientes expresiones:

$$x = x' + h$$
$$y = y' + k$$

de donde se tendrá:

$$x' = x - h$$
$$y' = y - k$$



Por estar el vértice de la parábola en el origen del sistema coordenadas X' Y' y tener su eje focal coincidiendo con el eje X', la ecuación en este sistema en de la forma: $y'^2 = 4px'$ donde se sabe que "p" es la distancia del vértice de la parábola al foco.

Sustituyéndose las coordenadas de translación de los ejes, se tiene en la ecuación anterior

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

La expresión anterior es la ecuación es la ecuación de la parábola cuando tiene su vértice en un punto cualquiera V(h, k) y su eje focal paralelo al eje "X".

Cuando la parábola tiene su eje focal paralelo al eje "Y" y su vértice en un punto cualquiera V(h, k) la ecuación es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

De la figura anterior se aprecia que las coordenadas del foco de una parábola con eje paralelo al eje "X" son: F(h + p, k).

Cuando el eje focal es paralelo al eje "Y" las coordenadas del foco son: F(h, k + p).

Se recuerda que si $p>0$ y el eje de la parábola es paralelo o esta sobre el eje X la parábola abre hacia la derecha. Cuando $P<0$ la curva abre hacia la izquierda.

En forma similar cuando el eje de la parábola esta o es paralelo al eje Y del sistema de ejes cartesianos, si $p>0$ la cónica abre hacia arriba y si $p<0$ la parábola abre hacia abajo.

La ecuación de la directriz con el eje de la parábola paralelo al eje X es:

$x = h - p$.

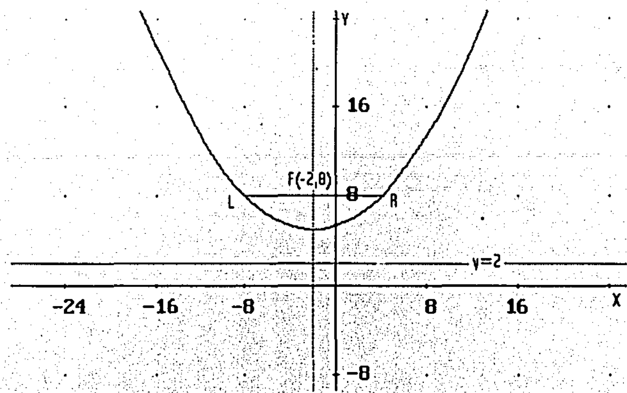
La ecuación de la directriz con el eje de la parábola paralelo al eje Y es:

$y = k - p$.

EJEMPLOS:

1. Una parábola tiene por directriz a la recta $y = 2$ y por foco al punto F(-2, 8). Graficar la curva y escribir su ecuación.

Como la directriz es la recta $y = 2$ paralela al eje X. El eje de la parábola es paralelo al eje Y. Por lo tanto la ecuación de esta parábola es de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$.



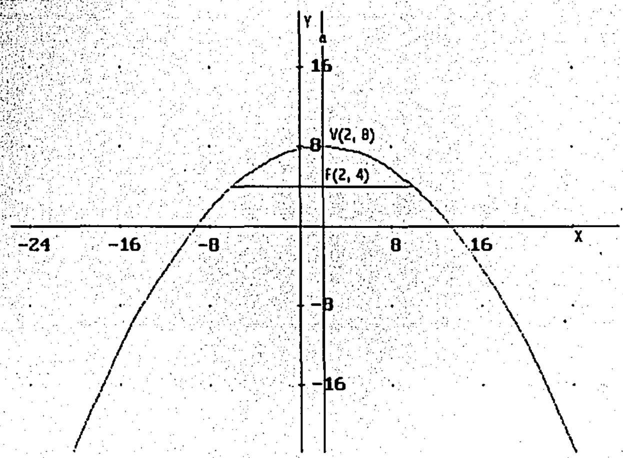
Como el vértice V está en un punto medio entre la directriz y el foco, V tiene por coordenadas V'(-2, 5). La distancia dirigida del vértice al foco es p = 8 - 5 = 3. Por lo tanto su ecuación es: $(x+2)^2 = 12(y-5)$.

Como p = 3 > 0 la parábola abre hacia arriba.

2. Obtener la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto V(2, 8) y cuyo foco es F(2, 4). Obtener la ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto. Graficar observando el signo de p, y el valor del lado recto $(LR = |4P|)$ para abrir la parábola.

Los elementos del vértice V y foco F de toda parábola pertenecen al eje de la misma. Luego como las absci-- sas el vértice y del foco son iguales. Se concluye que el eje "a" de la pará- bola es paralelo al eje Y. Luego su e- cuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$



Como las coordenadas del vértice son V(h, k) = V(2, 8) se tiene por comparación que: h = 2, k = 8; entonces se aprecia que falta todavía evaluar la magnitud de p, distancia del foco al vértice, la cual por estar sobre el eje Y se obtiene por medio de: $|p| = VF = 8+4 = 4$. Por definición de valor absoluto $|p| = \begin{cases} p \text{ si } p>0 \\ -p \text{ si } p<0 \end{cases}$ como el foco es un punto por debajo del vértice V, la parábola abre hacia abajo y de las dos soluciones que da el valor absoluto, se considera de acuerdo con la hipótesis del problema. $|p| = -4$

Sustituyéndose h, k, y p en la ecuación de la parábola se tendrá finalmente:

$$(x-2)^2 = 4(-4)(y-8)$$
$$(x-2)^2 = -16(y-8)$$
$$x^2 - 4x + 4 = -16y + 128$$
$$x^2 - 4x + 16y - 124 = 0$$

La expresión anterior es la ecuación de la parábola en la forma general:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Primero se estudiarán los casos donde B = 0, lo que manifiesta que el eje focal de la parábola es paralelo o coincide sobre uno de los ejes cartesianos XY convencionales.

Además en este caso se observa que C = 0, lo cual denota que el eje focal de la parábola es paralelo al eje Y.

La magnitud del lado recto es: $|4p| = |4(-4)| = 16$.

3. Una parábola tiene su foco en el punto F(3, -2), si su lado recto es igual a 20 unidades, obtener la ecuación de la cónica, con su eje paralelo al eje Y abriendo hacia abajo.

Como el lado recto de la parábola es: $LR = |4p| = 20$ por definición de valor absoluto $|4p| = p$ si p>0 y $|4p| = -4p$ si p<0 como la parábola abre hacia abajo se selecciona el valor de $|4p| = -4p$ de donde se obtiene que: -4p = 20 entonces p = -5.

Como las coordenadas del foco son dadas F(h, k + p) = F(3, -2) por comparación se tiene: h =3 y k + p = -2. Si p = -5, entonces k + (-5) = -2 de donde se obtiene k = 3.

Se sabe que las coordenadas del vértice de la parábola son dadas por: V(h ,k), entonces en este problema V(3, 3).

La ecuación de la parábola con eje paralelo al eje Y es:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

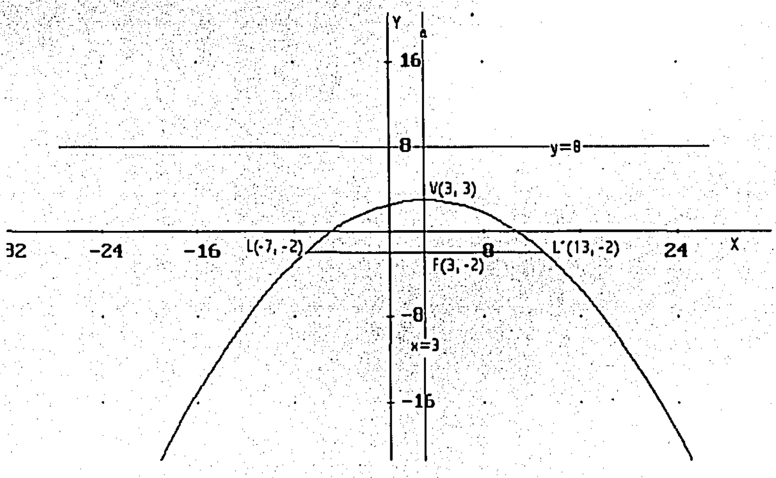
al sustituirse los valores de p, h, y k se tendrá:

$$(x-3)^2 = -20(y-3)$$
$$x^2 - 6x + 9 = -20y + 60$$
$$x^2 - 6x + 20y - 51 = 0$$

Como la última expresión es de la forma: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ se tiene: A = 1, B = 0, C = 0, D = -6, E = 20, F = -51.

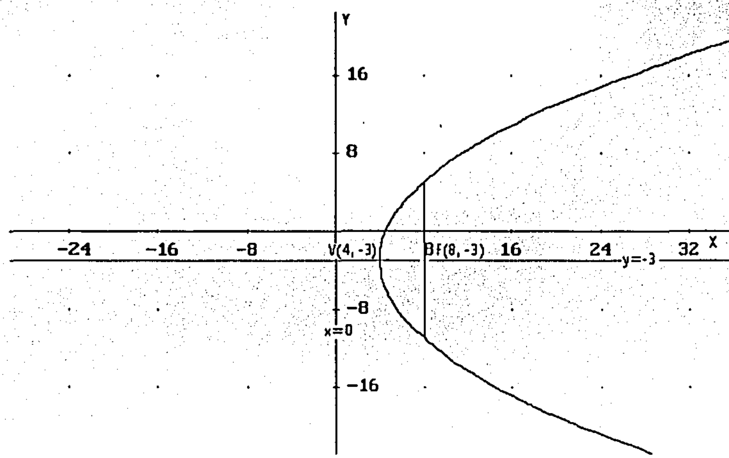
La ecuación de la directriz es: $y = k - p = 3 + 5 = 8$.

Las coordenadas de los puntos de intersección del lado recto con la parábola son: L′(-7, -2) y L(13, -2).



4. Una parábola tiene su vértice en el punto V(4, -3) y su foco en F(8, -3). Hallar la ecuación.

Como la ordenada del vértice como la del foco son iguales a -3, entonces el eje de la parábola es paralelo al eje X, o sea que se trata de una parábola horizontal cuya ecuación es de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ como la abscisa del foco es mayor que la abscisa del vértice, entonces la parábola abre hacia la derecha, en otras palabras p es positivo cuyo valor es p = 4.



Tomándose en cuenta que el vértice de la parábola tiene como coordenadas V(h, k)=V(4, -3) se concluye que h = 4, k = -3 además se sabe que p=4, al sustituirse en la ecuación de la parábola se tendrá:

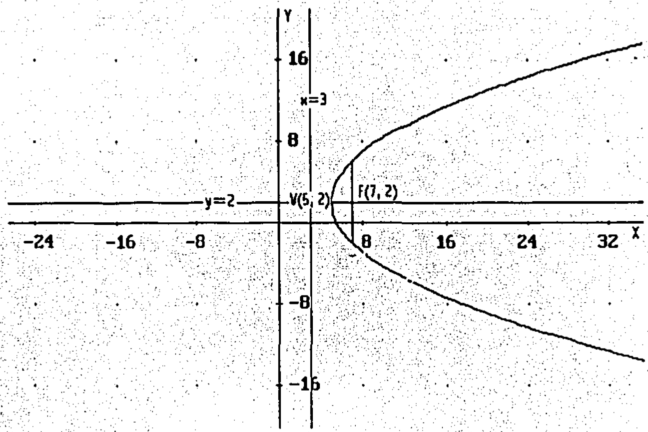
$$(y-(-3))^2 = 4(4)(x-4)$$
$$(y+3)^2 = 16(x-4)$$
$$y^2+6y+9 = 16x-64$$
$$y^2+6y-16x+73 = 0$$

teniéndose: A = 0, B = 0, C = 1, D = -16, E = 6 y F = 73.

La longitud del lado recto es: $LR = |4p| = |4(4)| = 16$.

5. Hallar la ecuación de la parábola que tiene su vértice en el punto V(5, 2), el eje focal satisface la expresión y = 2 y su lado recto es 8.

Se sabe que la ecuación de una línea recta constante paralela al eje X, es de la forma y=c. En este caso se tiene que y = 2, por lo tanto el eje de la parábola es paralelo al eje X y la ecuación es de la forma :



$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

donde las coordenadas (h, k), por el enunciado del problema son V(5,2)

$\therefore$ h = 5, k = 2. Como el lado recto $LR = |4p| = 8$ implica que p = 2. Finalmente la ecuación es:

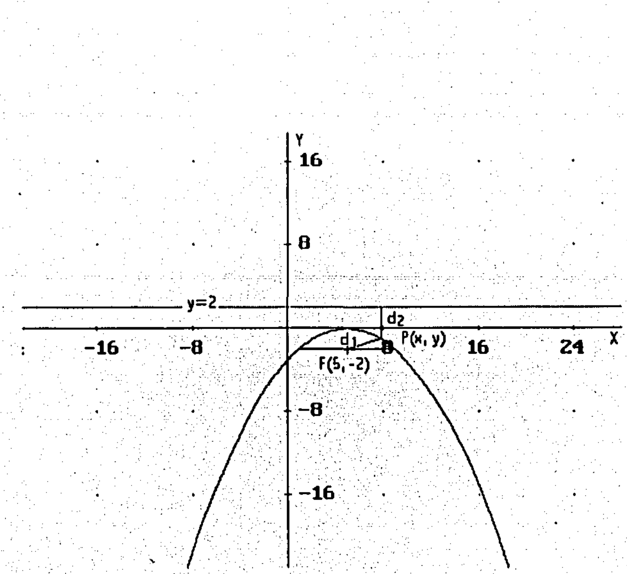
$$(y-2)^2 = 8(x-5)$$

6. Una parábola tiene su foco en el punto F(5, -2), su directriz es dada por la expresión y =2, hallar la ecuación.

Como la directriz de la parábola es la función constante y = 2 se concluye que el eje focal la cónica esta paralelo al eje Y y si su vértice se encuentra en (h, k), la ecuación debe de tener la forma: $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ o bien: $Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ ya que B = 0 y C = 0.

De acuerdo con la definición de la parábola la distancia que existe de cualquiera de sus puntos P(x, y) al foco debe de ser igual a la distancia que existe entre el punto P(x, y) y la directriz, es decir $d_1 = d_2$. La distancia del punto P(x, y) al foco se encuentra usando la expresión de la distancia entre dos puntos, esto es:

$$d_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d_1 = \sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2}$$



La distancias del punto P(x, y) a la directriz $y - 2 = 0$ se encuentra haciendo uso de la

expresión: $$d_2 = \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

donde se tiene, según los datos del problema $A = 0$, $B = 1$, $C = -2$.

$$d_2 = \frac{y-2}{\sqrt{0^2 + 1^2}}$$
$$d_2 = y - 2$$

igualándose las ecuaciones resultantes de las distancias $d_1 = d_2$ se tiene:

$$\sqrt{(x-5)^2 + (y+2)^2} = y - 2$$

elevándose al cuadrado la expresión anterior y realizando las operaciones indicadas se tiene:

$$(x-5)^2 + (y+2)^2 = (y-2)^2$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 = y^2 - 4y + 4$$
$$x^2 - 10x + 25 + y^2 + 4y + 4 - y^2 + 4y - 4 = 0$$
$$x^2 - 10x + 8y + 25 = 0$$

en donde se denota $A = 1$, $B = C = 0$, $D = -10$, $E = 8$, $F = 25$.

TRANSFORMACIÓN DE LA ECUACIÓN GENERAL DE LA PARÁBOLA A LA FORMA ORDINARIA.

Con el objeto de facilitar la técnica que se emplea más comúnmente para pasar una ecuación de parábola de la forma general a la forma ordinaria se ilustra algunos ejemplos.

1. Demostrar que la ecuación $4y^2 - 48x - 20y = 71$. Representa una parábola, calcular las coordenadas de su vértice y del foco, la ecuación de la directriz y la longitud del lado recto. Dividiéndose por cuatro la ecuación se tiene:

$$4y^2 - 20y = 48x + 71$$

$$y^2 - 5y = 12x + \frac{71}{4}$$

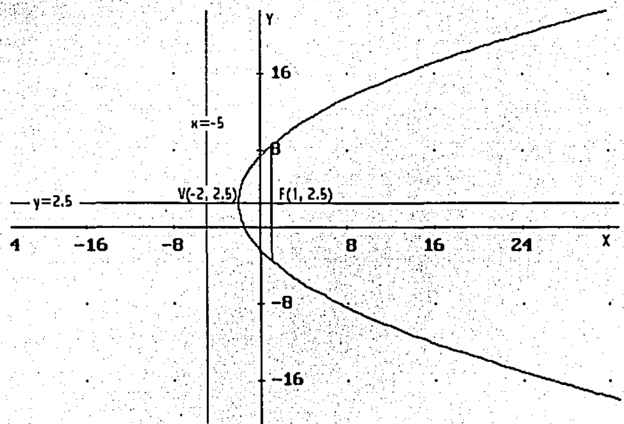
completándose el trinomio cuadrado perfecto, se sumarán en ambos miembros de la igualdad el cuadrado de la mitad del coeficiente "y".

$$y^2 - 5y + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 12x + \frac{71}{4} + \frac{25}{4}$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + \frac{96}{4}$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12x + 24$$

$$\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 12(x + 2)$$



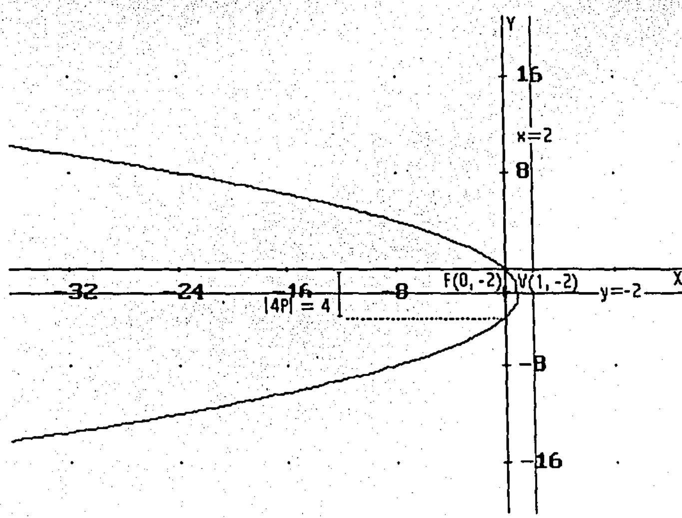
Por lo tanto es una parábola horizontal de vértice $V\left(-2, \frac{5}{2}\right)$. Como $|4p| = 12 > 0$ la parábola abre hacia la derecha. Si 4p = 12 por lo tanto p = 3.

Las coordenadas del foco son: $F(h+p,k) = F\left(-2+3, \frac{5}{2}\right) = F\left(1, \frac{5}{2}\right)$ la ecuación de la directriz es: x = -5; la ecuación de su eje es $y = \frac{5}{2}$.

2. Dada la parábola $y^2 + 4x + 4y = 0$. Calcular la ecuación de su eje, las coordenadas de su foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.(graficar).

$$y^2 + 4y = -4x$$
$$y^2 + 4y + 4 = -4x + 4$$
$$(y+2)^2 = -4(x-1)$$
$$4p = -4 \therefore p = -1 < 0.$$

Se trata de una parábola horizontal con sus ramas abiertas hacia la izquierda. Las coordenadas del vértice son V(1, -2). Como p = -1, las coordenadas de su foco son F(h + p, k) = F(0, -2).



3. Si la ecuación de una parábola es $y=-x^2+6x-8$. Determinar las coordenadas del vértice, las coordenadas del foco y las ecuaciones del eje y la directriz.

Agrupando los términos cuadráticos y lineal en el primer miembro de la ecuación y pasando los términos restantes al segundo miembro se tiene:

$$x^2-6x=-y-8$$

Completando trinomios cuadrados perfectos:

$$x^2-6x=-y-8$$
$$x^2-6x+9=-y-8+9$$
$$(x-3)^2=-1(y-1)$$
$$V(3,1).$$
$$4p=-1 \therefore p=-\frac{1}{4}<0$$
$$F(h,k+p)=F\left(3,1-\frac{1}{4}\right)=F\left(3,\frac{3}{4}\right)$$

Por lo anterior se puede afirmar que se trata de una parábola vertical que abre hacia abajo. La ecuación del eje es x = 3; la ecuación de la directriz es:

$$y=k-p$$
$$y=1-\left(-\frac{1}{4}\right)$$
$$y=\frac{5}{4}$$

TRASLACIÓN DE EJES EN LA PARÁBOLA.

En forma similar a los ejercicios realizados anteriormente con la circunferencia, en ocasiones es conveniente expresar a la parábola en su forma canónica, es decir en un sistema coordenadas, donde su vértice sea el origen del sistema.

Las ecuaciones de transformación de coordenadas para una traslación se sabe que son dadas por:

$$x = x' + h \qquad y = y' + k.$$

Donde (x, y) son las coordenadas en al sistema cartesiano "XY", (h, k), son las coordenadas de un punto cualquiera del sistema "XY", donde existe el origen del nuevo sistema x′y′ que se traslada.

EJEMPLOS:

1. Expresar la ecuación $x^2 - 2x + 4y - 1 = 0$, en un sistema de coordenadas cuyo origen se traslada al punto $\left(1, \frac{1}{2}\right)$.

Las ecuaciones de transformación son: si h = 1, k = 1/2

$$x = x' + h = x' + 1 \qquad y = y' + k = y' + 1/2.$$

Sustituyéndose las ecuaciones anteriores en la ecuación de la parábola dada tiene:

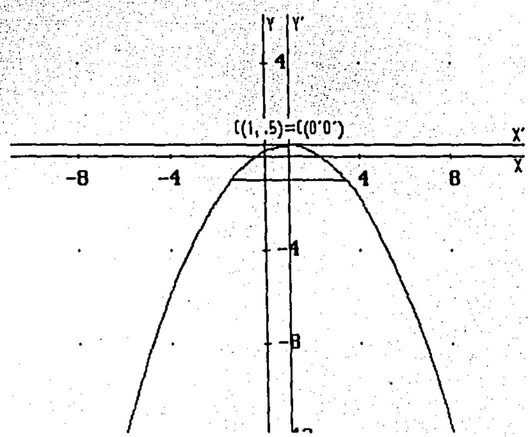
$$x^2 - 2x + 4y - 1 = 0$$

$$(x' + 1)^2 - 2(x' + 1) + 4\left(y' + \frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

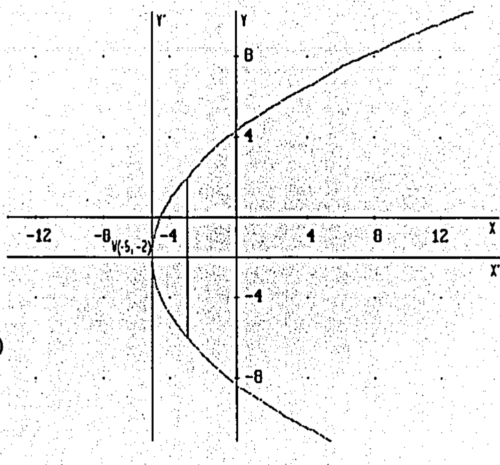
$$x'^2 + 2x' + 1 - 2x' - 2 + 4y' + 2 - 1 = 0$$

$$x'^2 + 4y' = 0$$

$$x'^2 = -4py'$$



2. Representar a la parábola $(y+2)^2 = 8x+5$, en un sistema de coordenadas cuyo origen se traslada al punto (-5,-2)



Se sabe que las ecuaciones de transformación de coordenadas bajo una translación de origen son:

x = x′+ h h = -5

y = y′ + k k = -2

Substituyéndose en la ecuación de la parábola, se tiene:

$$(y'-2+2)^2 = 8(x'-5+5)$$
$$(y'+0)^2 = 8(x'+0)$$
$$y'^2 = 8x'$$

3. Transformar la ecuación de la parábola $x^2+3x+5y-15=0$, en una expresión que no tenga términos en x. Ni independientes.

Al analizar detenidamente la ecuación, se aprecia que si no existen los términos en x, ni el independiente la parábola debe tener su vértice en el origen, ya que la ecuación en este caso tiene la forma:

$$x^2 = \pm 4py$$

Para lograr este fin se debe realizar una traslación del sistema de ejes cartesianos, tal traslación se hace aplicándose las ecuaciones de transformación.

$$x = x'+h$$
$$y = y'+k$$

Ahora el problema también consiste en calcular las coordenadas del vértice de la parábola que será el origen del nuevo sistema de coordenadas. Substituyéndose en la ecuación dada se tiene:

$$(x'+h)^2+3(x'+h)+5(y'+k)-15=0$$
$$x'^2+2x'h+h^2+3x'+3h+5y'+5k-15=0$$
$$x'^2+(2h+3)x'+5y'+(h^2+3h+5k-15)=0$$

Como se desea que el término independiente y el de x no existan, entonces estos son nulos, es decir:

$$2h+3=0 \Rightarrow h=\frac{-3}{2}$$
$$h^2+3h+5k-15=0$$

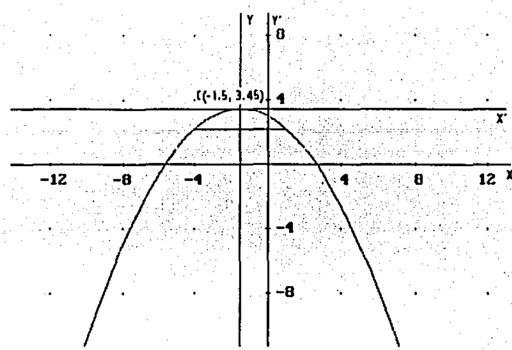
Substituyéndose el valor de h, se tiene:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2+3\left(-\frac{3}{2}\right)+5k-15=0$$
$$5k=15-\frac{9}{4}+\frac{9}{2}$$
$$5k=\frac{60-9+18}{4}$$
$$5k=\frac{69}{4}$$
$$k=\frac{69}{20}=3.45$$

La ecuación buscada es: $x'^2=-5y'$

Teniendo su vértice en el origen, representado éste, en el sistema "XY" por el punto:

$$C\left(-\frac{3}{2},\frac{69}{20}\right)=(-1.5,3.45)$$



ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

La ecuación general de segundo grado es de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

En particular se considera el caso en que la ecuación de segundo grado contiene el término xy, es decir en el caso en que $B \neq 0$. Se demostrará que por medio de una rotación de los ejes coordenados siempre es posible transformar la ecuación en otra forma: $A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y'^o + F' = 0$

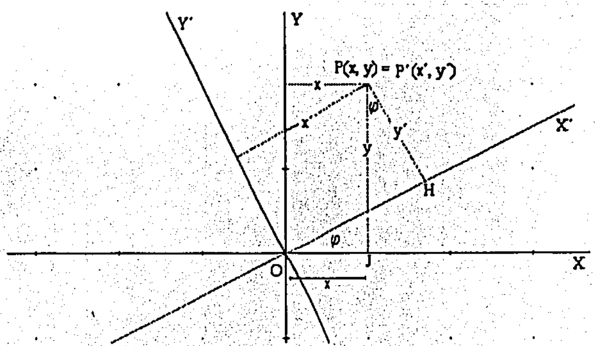
En la que uno de los coeficientes A' y C', por lo menos es diferente de cero, y no aparece el término en x'y'.

La ecuación puede representar un lugar geométrico real, representa una cónica o uno de los casos excepcionales de un punto o un par de rectas.

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS POR ROTACIÓN.

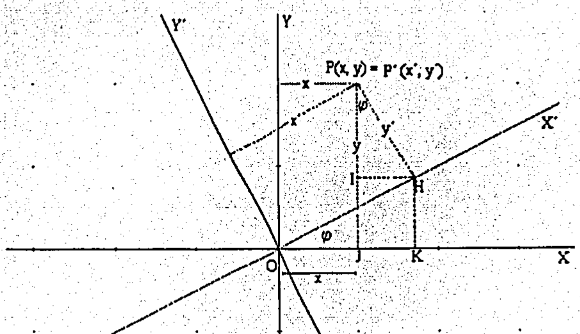
Para obtener las ecuaciones de transformación de coordenadas bajo una rotación de ángulo agudo φ es conveniente auxiliarnos de la siguiente figura:

Considérese un punto cualquiera P(x, y) en el sistema de coordenadas "XY", las coordenadas de este punto P(x, y) en el sistema x′y′ se denotan como P(x′, y′). Se recomienda el análisis minucioso - del trazo de las coordenadas del punto P en la figura.



Nótese que el ángulo que tiene como vértice al punto P(x, y), cuyos lados son las ordenadas de los sistemas de coordenadas. Es decir "y" y y′. Este ángulo es igual al ángulo de rotación porque está formado por lados mutuamente perpendiculares. $y' \perp x'$ $y \perp x$.

Si del punto de intersección de la --- ordenada y′ con el eje x′ (ver figura) punto H se trazan paralelas a los ejes del sistema cartesiano XY.
Se obtienen los triángulos rectángulos PIH y OKH, tal y como se muestra en la figura. Estos triángulos se van a utilizar para obtener la relación matemática entre las coordenadas del sistema "XY" con las del sistema "X′Y′"



La abscisa del punto P, en el sistema "XY", x es igual a $\overline{OJ}$, de acuerdo a la figura, además, obsérvese que x = OJ, está también dada por: $x = \overline{OJ} = \overline{OK} - \overline{JK} = \overline{OK} - \overline{IH}$

ya que $\overline{JK} = \overline{IH}$, por estar formados por lados mutuamente paralelos. $IH = JK$ y $JI = KH$.

Es conveniente que se percate de que el lado $\overline{OK}$ del triángulo OH, es la proyección de la abscisa $x' = \overline{OH}$, sobre el eje X del sistema de coordenadas original o primitivo "XY", teniéndose, de acuerdo con la definición de la función trigonométrica $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{OK}}{x'}, \quad \therefore \overline{OK} = x'\cos\varphi$$

Similarmente, el segmento $\overline{IH}$, se obtiene haciéndose uso del triángulo PIH, por medio de la función $\operatorname{sen}\varphi$; esto es:

$$sen\varphi = \frac{IH}{y'}, \quad \therefore IH = y'sen\varphi$$

Sustituyéndose las expresiones obtenidas para $\overline{IH} y \overline{OK}$; se obtiene la ecuación de transformación de coordenadas para la abscisa x:

$$x = \overline{OK} - \overline{IH}$$

$$x = x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi$$

Para obtener la ecuación de transformación de la ordenada y, obsérvese la figura e inmediatamente apreciará que: $y = \overline{JP}$, además que: $y = \overline{JP} = \overline{JI} + \overline{IP} = \overline{KH} + \overline{IP}$

ya que $\overline{JI} = \overline{KH}$, por estar formado por lados respectivamente paralelos $\overline{IH} \parallel \overline{JK}$, $\overline{JI} \parallel \overline{KH}$

Del triángulo OKH se tiene: $\quad \operatorname{sen}\varphi = \dfrac{\overline{KH}}{x'} \therefore \overline{KH} = x'\operatorname{sen}\varphi$

Del triángulo PIH, se obtiene: $\quad \cos\varphi = \dfrac{\overline{IP}}{y'} \therefore \overline{IP} = y'\cos\varphi$

Substituyéndose, las relaciones de $\overline{KH} y \overline{IP}$, se obtiene finalmente la ecuación de transformación de coordenadas para la ordenada.

$$y = x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi$$

EJEMPLO:

1. ¿Cuál es el ángulo que debe rotar un sistema de ejes cartesianos x′y′, para que la ecuación de la parábola $x^2 + \sqrt{2}xy + \frac{1}{2}y^2 = 12x$, sea expresada sin el término "xy"?

Primero se confirmara si la curva proporcionada realmente es una parábola, si lo es debe satisfacer que: $B^2 - 4AC = 0$

Siendo $A = 1$, $B = \sqrt{2}$, y $C = \frac{1}{2}$, se tiene que al sustituir los valores se tiene:

$\left(\sqrt{2}\right)^2 - 4(1)\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2 = 0$ lo cual indica que efectivamente es una parábola.

Ahora se substituirán las ecuaciones de transformación:

$$x = x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi$$
$$y = x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi$$

En la ecuación de la parábola dada, después se desarrollarán operaciones y se despejará a φ, para conocer el ángulo de rotación bajo el cuál la ecuación de la parábola no contiene el término xy, es decir B = 0.

$$x^2 + \sqrt{2}xy + \frac{1}{2}y^2 = 12x$$

$$(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi)^2 + \sqrt{2}(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi)(x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi) + \frac{1}{2}(x'\operatorname{sen}\varphi + y'\cos\varphi)$$
$$= 12(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi)$$

Desarrollando los binomios al cuadrado y ordenando terminos:

$$x'^2(\cos^2\varphi + \sqrt{2}\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\varphi) + y'^2(\operatorname{sen}^2\varphi + \sqrt{2}\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos^2\varphi) +$$
$$x'y'(-2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + \sqrt{2}\cos^2\varphi - \sqrt{2}\operatorname{sen}^2\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi) = 12(x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi)$$

Como no se desea que exista el término en x' y' a su coeficiente se hace nulo, es decir B = 0.

$$B = -2sen\varphi\cos\varphi + \sqrt{2}sen^2 - \sqrt{2}\cos^2\varphi + sen\varphi\cos\varphi = 0$$
$$\sqrt{2}(sen^2\varphi - \cos^2\varphi) - sen\varphi\cos\varphi = 0$$

Deacuerdo a las identidades trigonometricas se tiene :

$$sen^2\varphi - \cos^2\varphi = \cos 2\varphi$$

$$2sen\varphi\cos\varphi = sen2\varphi$$

$$\therefore sen\varphi\cos\varphi = \frac{sen2\varphi}{2}$$

Sustituyendo las identidades se tiene :

$$\sqrt{2}(sen^2\varphi - \cos^2\varphi) - sen\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\sqrt{2}(\cos 2\varphi) - \frac{1}{2}sen2\varphi = 0$$

$$\sqrt{2}(\cos 2\varphi) = \frac{1}{2}sen2\varphi$$

$$2\sqrt{2} = \frac{sen2\varphi}{\cos 2\varphi}$$

$$\tan 2\varphi = 2\sqrt{2}$$

$$2\varphi = Ang.\tan(2\sqrt{2}) = 70.53°$$

$$\varphi = \frac{70.53°}{2} = 35.26°$$

Sustituyendo el valor de φ en la ecuación transformada, obteniéndose la ecuación buscada en el sistema x' y', sin el término xy.

$$x'^2(\cos^2 35.26° + \sqrt{2}\cos 35.26°\ sen\ 35.26° + \frac{1}{2}sen^2\ 35.26°) + y'^2(sen^2\ 35.26° - \sqrt{2}\ sen\ 35.26° \cos 35.26° + \frac{1}{2}\cos^2 35.26°) =$$

$$= 12(x'\cos 35.26° - y'\ sen\ 35.26°)$$

$$x'^2(.66+.66+.28) + y'^2(.33-.66+.33) = 12(.81x' - .51y')$$

$$1.62x'^2 = 9.7x' - 6.9y'$$

$$1.62x'^2 - 9.7x' = -6.9y'$$

Dividiendo por 1.6

$$x'^2 - 6x' = -4.3y'$$

Transformandola a forma ordinaria:

$$x'^2 - 6x' + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -4.3y' + \left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$(x'-3)^2 = -4.3y' + 9$$

$$(x'-3)^2 = -4.3(y' + \frac{9}{-4.3})$$ Aproximandose se llega a:

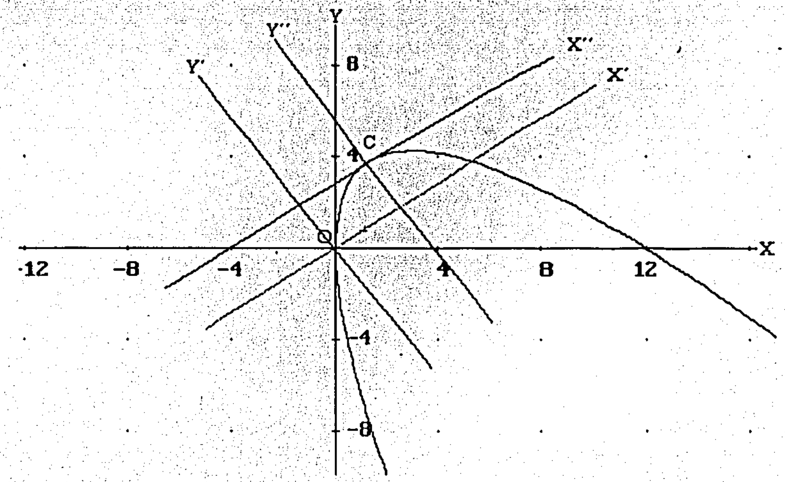
$$(x'-3)^2 = -4.3(y'-2)$$

Se aprecia que el vértice de la parábola es el punto (3, 2) del sistema x' y' y LR = 4p = -4.3 por lo cual p = 1

Si se realiza una traslación del origen del sistema x' y' al punto (3, 2), se tiene un nuevo sistema de coordenadas x'' y'', donde:

$x' = x'' + 3$

$y' = y'' + 2$



Substituyéndose en la ecuación de la parábola, se tendrá: $(x''+ 3 - 3)^2 = -4.3\ (y'' + 2 - 2)$

$x''^2 = -4.3\ y''$

La ecuación anterior es la forma más simple de la parábola.

En este ejercicio se aprecia cierta incomodidad al hacer las aproximaciones, ya que se han olvidado el numero de decimales que se fueron quitando, por lo cual es recomendable manejar el mayor números de decimales posible.

EJERCICIOS

1. La directriz de una parábola es el punto (a, 0). Determinar su ecuación.
2. Determinar la ecuación de la parábola que pase por los puntos (0, 0), (1, 0) y (3, 6).

3. Encontrar las coordenadas de los puntos donde la recta $2y - x = 4$ corta a la parábola $2y - x^2 + 2 = 0$. Construir la gráfica respectiva.

4. Determinar la ecuación de una parábola cuyo eje de simetría sea el eje de las ordenadas, cuyo foco es el origen y pasa por el punto (4, 3). ¿Cuál es su vértice y directriz?

5. Determinar el vértice y el foco de la parábola $y^2 = 2(x + y)$, las ecuaciones de su eje y su directriz, y la longitud del lado reto.

RESPUESTAS

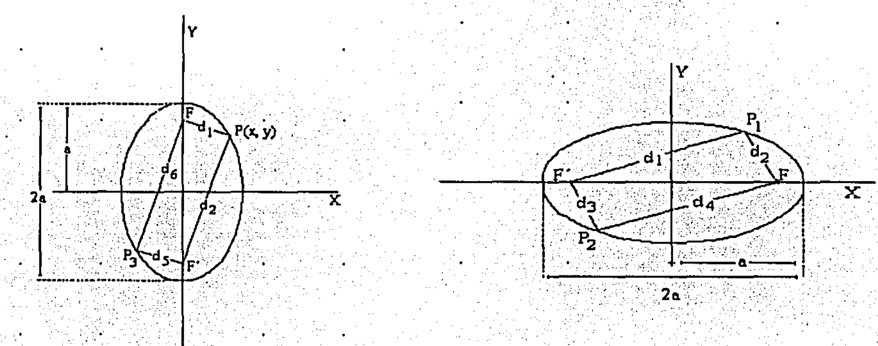
1. $y^2 = 2a(x - a/2)$
2. $x^2 - y - x = 0$
3. $P_1(3, 3.5)$, $P_2(-2, 1)$, $V(0, -1)$, $F(0, -0.5)$, $y = -1.5$
4. $x^2 = 4(y + 1)$; $V(0, -1)$, $F(0,0)$, $y = -2$
5. $(y - 1)^2 = 2(x + .05)$; $V(-.05, 1)$, $F(0, 1)$, $LR = 2$, $x = -1$

LA ELIPSE.

La elipse es una trayectoria cerrada como la circunferencia, aunque con ciertas diferencias. Se le estudia por su gran aplicación en la cosmología, en la cuál es cotidiano oír hablar de trayectorias elípticas. Aunque se ha comentado que la trayectoria de la Tierra al rededor del Sol es aproximadamente circular, más correcto es decir que su movimiento de traslación se asemeja a una elipse.

Definición

La elipse es un lugar geométrico formado por un conjunto de puntos, tales que la suma de las distancias ($d_1 + d_2$) de un punto cualquiera a dos puntos fijos llamados fijos llamados focos (F y F′) es igual a un valor constante (2a), analícese la siguiente figura:



Del punto p se tiene $d_1 + d_2 =$ Constante. Del punto p_1, se observa que $d_1 + d_2 = C = 2a$.

Del punto p_2 se concluye de $d_3 + d_4 =$ Constante $= 2a$.

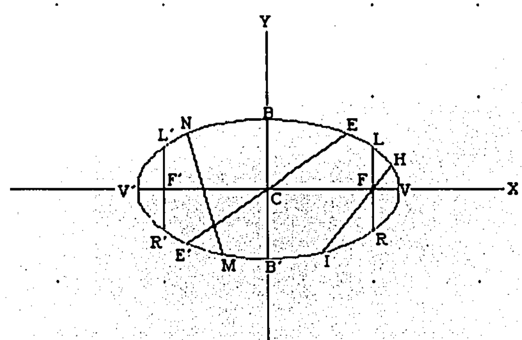
Del punto p_3 se ve de $d_5 + d_6 =$ Constante $= 2a$.

ELEMENTOS DE LA ELIPSE.

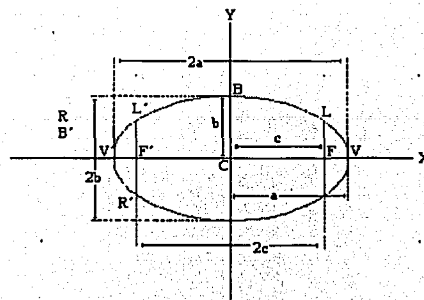
Al igual que la parábola la elipse tiene elementos que la caracterizan y diferencian de las otras cónicas. Éstos son:

1. Dos puntos fijos llamados focos F y F′.
2. Centro de la elipse c, que es el punto medio del segmento $\overline{FF'}$.
3. El segmento de recta que pasa por los focos hasta los puntos V y V′ se le llama eje mayor o eje focal. $\overline{VV'}$.
4. A los puntos V y V′ se les conoce como vértices del eje mayor.
5. El segmento de recta $\overline{BB'}$ que pasa por el centro de la elipse y es perpendicular al eje mayor, se le llama eje menor o eje normal.
6. A los puntos a B y B′ se les identifica como vértice del eje menor.
7. El segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la elipse se llama cuerda $\overline{MN}, \overline{BB'}, \overline{VV'}, \overline{LR}, \overline{L'R'}$.
8. Las cuerdas que son perpendiculares al eje mayor y pasan por los focos se les llama lado recto.(LR, L′R′)
9. Las cuerdas que pasan por cualquiera de los focos se les llama cuerdas focales. Ejemplo: EE′, VV′ y BB′.

La distancia que existe entre el centro - de la elipse y uno de sus vértices del eje mayor se le denota generalmente por la literal "a" la distancia entre los dos vértices del eje mayor es 2a.



La magnitud del eje menor es 2b, porque la distancia del centro de la elipse a cualquiera de sus vértices del eje normal es -- dada por "b".



La magnitud de la distancia entre el centro de la elipse y cualquiera de sus focos es denominada como "c" por lo tanto, el valor de la distancia entre los focos F y F′ es 2c.

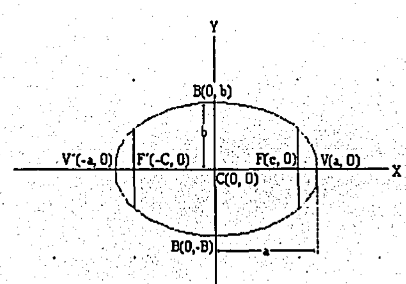
ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL EN EL EJE "X".

Cuando el centro de la elipse está en el origen y el eje mayor de una elipse coincide con el eje "X", entonces se tiene que el eje normal o menor coincide con el eje "Y", tal y como se muestra el la siguiente gráfica.

Las coordenadas del centro de la elipse son C(0, 0). De acuerdo con las definiciones dadas anteriormente de la magnitud del semieje menor "b" y de "c" se tiene con ayuda de la figura que las coordenadas de los vértices y focos son:

V(a, 0) V′(-a, 0)
F(c, 0) F′(-c, 0)
B(0, b) B′(0, -b)

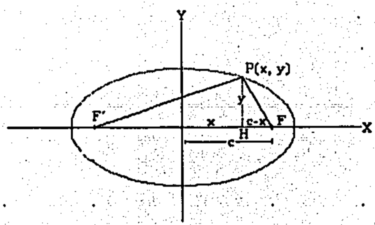
De acuerdo con la figura de la derecha y la definición de la elipse se tiene que la suma de las distancias $\overline{PF'} y \overline{FP}$ es igual a una constante llamada 2a.



$\left|\overline{FP}\right| + \left|\overline{F'P}\right| = 2a$.

Del triángulo rectángulo F'PH, se tiene que; (por el teorema de Pitágoras)

$\overline{F'P}^2 = \overline{F'H}^2 + \overline{HP}^2$



Como $\left|\overline{F'H}\right| = c + x, \overline{HP} = y$ se tiene que: $\overline{F'P}^2 = (c+x)^2 + y^2$.

Del triángulo rectángulo HPF, se tiene: $\overline{FP} = y^2 + (c-x)^2$.

Despejando a $\overline{F'P} y \overline{FP}$ y substituyendo los valores en $\left|\overline{FP}\right| + \left|\overline{F'P}\right| = 2a$ se tiene:

$$\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + (c-x)^2} = 2a$$

o bien:
$$\sqrt{y^2 + (c-x)^2} = 2a - \sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

elevándose al cuadrado;

$$y^2 + (c-x)^2 = \left(2a - \sqrt{(c+x)^2 + y^2}\ \right)^2$$

$$y^2 + c^2 - 2cx + x^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2} + (c+x)^2 + y^2$$

$$y^2 + c^2 - 2cx + x^2 - c^2 - 2cx - x^2 - y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

$$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

$$-4(cx + a^2) = -4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

$$(cx + a^2) = \frac{-4a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}}{-4}$$

$$(cx + a^2) = a\sqrt{(c+x)^2 + y^2}$$

$$(cx+a^2)^2=(a\sqrt{(c+x)^2+y^2}\ )^2$$
$$c^2x^2+2a^2cx+a^4=a^2c^2+2a^2cx+a^2x^2+a^2y^2$$
$$c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2=-a^4+a^2c^2$$
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

Haciendo a: $a^2-c^2=b^2$

b^2 será mayor que cero puesto que en la elipse se aprecia que a>c. Por lo tanto $a^2>c^2 \Rightarrow a^2-c^2>0$.

Por lo cual la ecuación se puede escribir como: $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

Dividido entre a^2b^2, se llega; $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

La última expresión es la ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal en el eje "X".

Despejando la variable "Y" de la ecuación de la elipse;

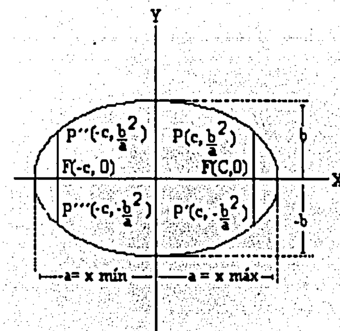
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$
$$a^2y^2=a^2b^2-b^2x^2$$
$$y^2=\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}$$
$$y=\pm\sqrt{\frac{b^2(a^2-x^2)}{a^2}}$$
$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)}$$

Para que existan valores reales de la variable "y" se sabe que el radicando debe ser una cantidad positiva o cero, es decir; $a^2-x^2\geq 0$.

Lo cual indica que: $-a\leq x\leq a$

Obsérvese, a la elipse de cualquier figura anterior y apreciará que para cualquier punto P(x, y) de esta cónica, la variable x nunca tiene valores mayores a la longitud del semieje mayor(a). Similarmente la variable "y" está limitado los intervalos de valores, es decir; $-b\leq x\leq b$.

Nótese en la figura que los dos rectos de la elipse son dos segmentos de recta paralelos al eje de las "y" por lo tanto se aprecia que la abscisa de estos seg- - mentos siempre vale "c", si se substituye este valor en $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, se tiene a las coordenadas de los puntos extremos de los lados rectos LR y L'R', esto es:



$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}$$

$$y=\pm\frac{b^2}{a}$$

Ya que: $b^2=a^2-c^2$

Partiendo del foco hacia el punto P y al punto P′ se concluye que la longitud del lado recto es;

$$LR=\frac{b^2}{a}+\frac{b^2}{a}=\frac{2b^2}{a}$$

Una característica fundamental en la elipse es su excentricidad que se define como:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}<1$$

La excentricidad siempre es menor que uno debido a que c<a, tal y como se aprecia en la figura anterior.

ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE EL EJE "Y".

Cuando la elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor en el eje de las "Y", la ecuación en este caso es: $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$.

Obsérvese que el cuadrado de la magnitud del semieje mayor (a^2) divide ahora a y_2. La ecuación se obtiene siguiendo el razonamiento expuesto con la ecuación de la elipse con centro en el origen y eje mayor en el eje "X".

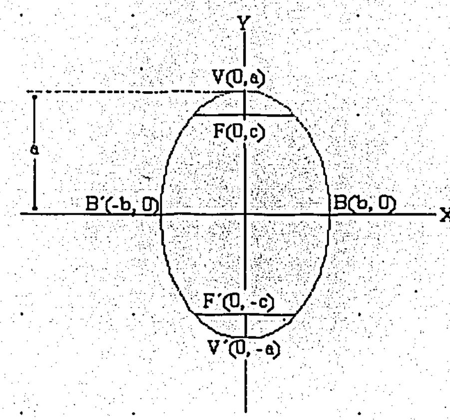
De acuerdo con las definiciones de los elementos de la elipse con ayuda de la siguiente figura, se aprecian las coordenadas de sus puntos básicos.

Por lo tanto, para este tipo de elipses las coordenadas de los vértices y focos son:

V(0, a) V´(0, -a)

F(0, c) F´(0, -c)

B(b, 0) B´(-b, 0)



La magnitud del lado recto y su excentricidad no sufren cambios:

$$LR=\frac{2b^2}{a}$$

$$e=\frac{c}{a}$$

EJEMPLOS:

1. Realizar la figura de la elipse dada por la expresión:

$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ Además obténgase la magnitud de la excentricidad y del lado recto.

Para realizar el gráfico de esta elipse es necesario conocer algunos elementos de la cónica, tales como las coordenadas de sus vértices y de sus focos, por lo cual primero se deben calcular los valores de a, b y c.

Al observar la expresión dada se aprecia que es la ecuación de la elipse con centro en el origen y eje mayor en el eje X, ya que la ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

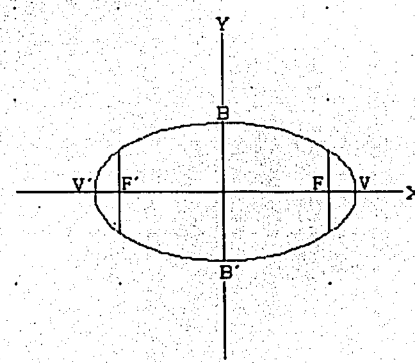
Por comparación de la ecuación anterior y la dada en el problema se concluye que:

$a^2=36$ y $b^2=16$

$a=6$ $b=4$

Conocidos los valores de los semiejes mayor y menor el valor de c se obtiene por medio de la expresión:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$
$$c=\sqrt{36-16}$$
$$c=4.47$$



La excentricidad es:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{4.47}{6}<1$$

La magnitud del lado recto es; $LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(16)}{6}=5.33$

Las coordenadas de vértices y focos son: (con a = 6, b = 4 y c = 4.47)

V(a, 0) = V (6, 0) V′(-a, 0) = V′(-6, 0)

B(0, b) = B(0, 4) B′(0, -b) = B′(0, -4)

F(c, 0) = F′(4.47, 0) F′(-c, 0) = F′(-4.47, 0)

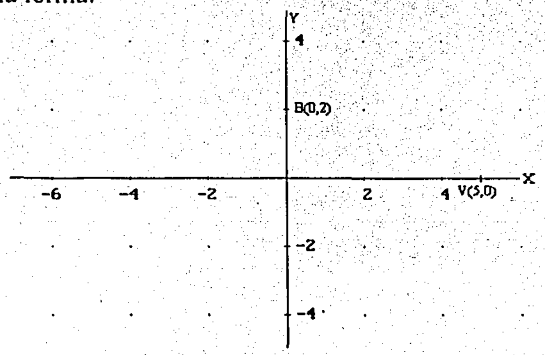
Con estos elementos es posible realizar la figura del problema, sabiéndose que su centro esta en C(0,0), tal y como se muestra en la figura anterior.

2. Hallar la ecuación de la elipse cuyo centro está en el origen y sus vértices del eje mayor y menor son los puntos V(5, 0) y B(0, 2).

Como uno de los vértices del eje mayor es el punto V(5, 0) se aprecia que el eje focal de la elipse se encuentra sobre el eje "X" ya que, por acuerdo se ha manifestado que los vértices del eje mayor se representan con las letras V y V′.

Como una de las coordenadas de los vértices del eje mayor es V(a, 0) = V(5, 0), por comparación se concluye que a = 5.

El vértice B(0, b) = B (0, 2), entonces b = 2. Conociendo los valores de a y b, se puede dar la ecuación de la elipse, puesto que tiene la forma:



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$$

Para realizar la gráfica es necesario obtener diversos elementos de la elipse, como son las coordenadas de los focos y los vértices restantes así como su lado recto.

Para evaluar la magnitud de "c" por medio de:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}$$

$$c=\sqrt{25-4}=4.58$$

Su lado recto y excentricidad:

$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(4)}{5}=\frac{8}{5}$$

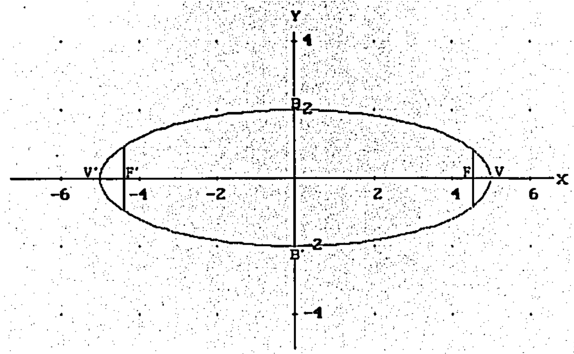
$$e=\frac{c}{a}=\frac{4.58}{5}<1$$

Por lo tanto las coordenadas de los vértices y focos son:

V(a, 0) = V (5, 0) V′(-a, 0) = V′(-5, 0)

B(0, b) = B(0, 2) B′(0, -b) = B′(0, -2)

F(c, 0) = F′(4.58, 110) F′(-c, 0) = F′(-4.58, 0)



3. Hacer la gráfica y encontrar la ecuación de la elipse que tiene su eje menor sobre el eje "y" con una magnitud de seis unidades y uno de sus focos es el punto F(2, 0) y el centro está en el origen.

Como la magnitud del eje menor de la elipse es 2b, entonces se tiene: 2b = 6, entonces b = 3.

Como la coordenada del foco es F(2, 0), por comparación se tiene c = 2. Además se sabe que el centro de la elipse es el origen C(0, 0).

Para calcular la magnitud de "a" debe obtenerse por medio de:

$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$a = \sqrt{9+4}$$
$$a = \sqrt{13} = 3.6$$

Las coordenadas de los vértices y focos son: (con a = 3.6, b = 3 y c = 2)

V(a, 0) = V (3.6, 0)   V′(-a, 0) = V′(-3.6, 0)

B(0, b) = B(0, 3)   B′(0, -b) = B′(0, -3)

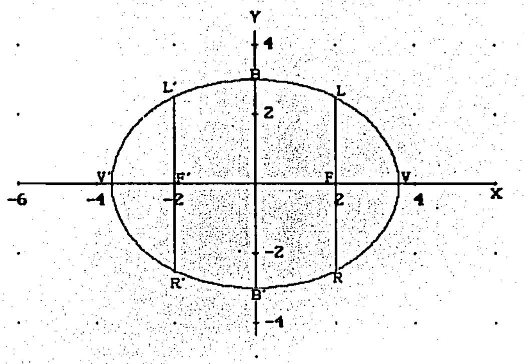
F(c, 0) = F′(2, 0)   F′(-c, 0) = F′(-2, 0)

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{3.6} = 5$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3.6} < 1$$

Por lo tanto la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$$



4. Graficar la elipse dada por: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{12} = 1$. Al observar la ecuación y analizarla se aprecia que en la elipse siempre se tiene:

$$a > b \therefore a^2 > b^2$$

entonces se concluye que:

$$a^2 = 12$$
$$b^2 = 4$$

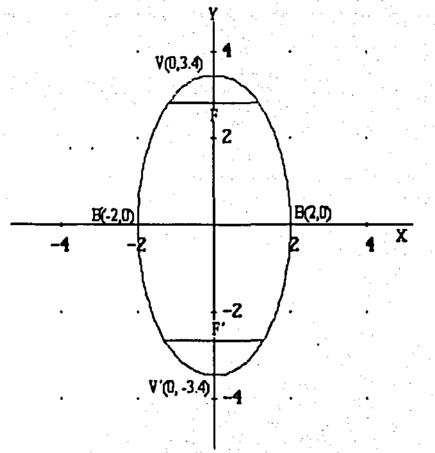
además la elipse tiene su eje focal en el eje “y” porque 12>4.

Si $\begin{matrix} a^2 = 12 \therefore a = 3.46 \\ b^2 = 4 \therefore b = 2 \end{matrix}$

Para calcular el valor de “c” por medio de:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12 - 4} = 2.82$$

Conocido los valores de a y b, se pueden obtener las coordenadas de los vértices, - que en este caso son:



V(0, a) = V (0, 3.46) V′(0, -a) = V′(0, -3.46)
B(b, 0) = B(2, 0) B′(-b, 0) = B′(-2, 0)
F(0, c) = F′(0, 2.82) F′(0, -c) = F′(0, -2.82)

El lado recto y la excentricidad se deben - - evaluar usándose las expresiones conocidas:

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3.46} = 2.31$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{2.82}{3.46} < 1$$

5. El lado recto de una elipse con centro en el origen es $\frac{10}{3}$, hallar su ecuación si uno de los vértices del eje menor tiene como coordenadas al punto B(4, 0)

Como uno de los vértices del eje menor está en el eje X, B(4, 0) implica que el eje mayor o focal se ubica en el eje "y", por lo que la ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

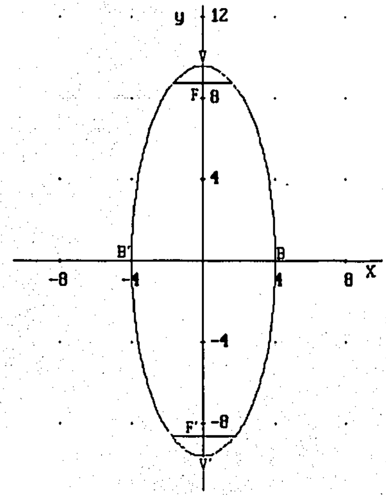
Dado B(4, 0) = B(b, 0) entonces b = 4.

Como el lado recto es dado por:

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{10}{3}$$

Se substituye el valor numérico de "b", despejándose la incógnita "a", esto es:

$$\frac{2(4)^2}{a} = \frac{10}{3} \therefore a = \frac{6(16)}{10} = 9.6$$



Por lo tanto la ecuación de la elipse es:

con a = 9.6 y b = 4.

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{(9.6)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{92.16} = 1$$

Se evalúa el valor de "c" por medio de:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{92.16 - 16} = \sqrt{78.16} = 8.72$$

La excentricidad $e = \frac{c}{a} = \frac{8.72}{9.6} < 1$

Por lo tanto las coordenadas del los vértices y focos son:

V(0, a) = V (0, 9.6) V′(0, -a) = V′(0, -9.6)

B(b, 0) = B(4, 0) B′(-b, 0) = B′(-4, 0)

F(0, c) = F′(0, 8.72) F′(0, -c) = F′(0, -8.72).

6. Obtener la ecuación de la elipse que pasa por los puntos $A\left(3, \frac{3}{2}\right)$ y $B\left(-4, \frac{-1}{2}\right)$ teniendo su centro en el origen y su eje mayor sobre el eje X.

Se sabe que la ecuación de la elipse bajo las características mencionadas en el problema es de la forma: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Para determinar la ecuación se deben conocer los valores de a y b, estas magnitudes no las proporcionan los datos del problema directamente. De las coordenadas de los puntos A y B al sustituirlas, la ecuación se llega a tener un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; se resuelve, determinándose con ello los valores de a y b. Esto es; para el punto $A\left(3,\frac{3}{2}\right)$ se tiene

$x=3, y=\frac{3}{2}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{\frac{9}{4}}{b^2}=1$$

Para el punto $B\left(-4,\frac{-1}{2}\right)$, $x=-4, y=-\frac{1}{2}$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{16}{a^2}+\frac{\frac{1}{4}}{b^2}=1$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene:

$$9b^2+\frac{9}{4}a^2=a^2b^2$$
$$16b^2+\frac{1}{4}a^2=a^2b^2$$

Despejando a a^2 de la primera ecuación se tiene:

$$a^2\left(b^2-\frac{9}{4}\right)=9b^2$$
$$a^2=\frac{9b^2}{b^2-\frac{9}{4}}$$

Substituyéndose en la segunda ecuación se tiene:

$$16b^2+\frac{1}{4}\left(\frac{9b^2}{b^2-\frac{9}{4}}\right)=\left(\frac{9b^2}{b^2-\frac{9}{4}}\right)b^2$$

$$16b^2+\frac{1}{4}\left(\frac{9b^2}{\frac{4b^2-9}{4}}\right)=\left(\frac{36b^2}{4b^2-9}\right)b^2$$

$$16b^2(4b^2-9)+9b^2=36b^4$$

$$64b^4-144b^2+9b^2=36b^4$$

$$64b^4-144b^2+9b^2-36b^4=0$$

$$28b^4-135b^2=0$$

$$b^2(28b^2-135)=0$$

$$28b^2-135=0$$

$$b^2=\frac{135}{28}=4.82\Rightarrow b=\pm 2.19$$

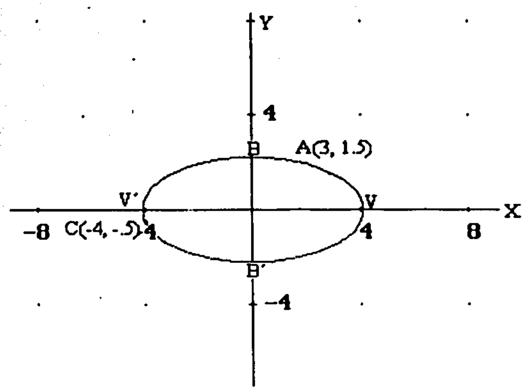
Substituyendo el valor de b^2 en a^2 se tiene:

$$a^2=\frac{9\left(\frac{135}{28}\right)}{\frac{135}{28}-\frac{9}{4}}=\frac{\frac{1215}{28}}{\frac{135-63}{28}}=\frac{1215}{72}=16.87$$

$$a=\pm 4.10$$

Por lo tanto la ecuación buscada es:

$$\frac{x^2}{\frac{1215}{72}}+\frac{y^2}{\frac{135}{28}}=1$$



7. Hacer la gráfica de la elipse determinada por $196x^2 + 100y^2 = 1225$. Además demostrar que la recta $5x - 3y - 13 = 0$. Es una secante de la elipse dada.

La ecuación de la elipse debe de proporcionar la información suficiente para poder obtener los elementos básicos de la cónica es decir las coordenadas de los vértices, focos, excentricidad y lado recto, ya que con estos elementos uno se auxilia en la elaboración del gráfico.

Las ecuaciones de la elipse que se han analizado hasta el momento representan una igualdad con la unidad, entonces la ecuación dada se divide entre 1225, esto es:

$$\frac{196x^2}{1225} + \frac{100y^2}{1225} = 1$$

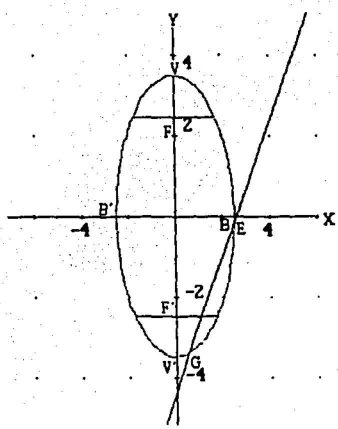
$$\frac{x^2}{\frac{1225}{196}} + \frac{y^2}{\frac{1225}{100}} = 1$$

$$\frac{x^2}{6.25} + \frac{y^2}{12.25} = 1$$

De la última ecuación se aprecia mas fácilmente que la elipse tiene su eje mayor sobre el eje "Y", ya que la ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{por lo tanto:} \quad \begin{array}{l} a^2 = 12.25 \Rightarrow a = 3.5 \\ b^2 = 6.25 \Rightarrow b = 2.5 \end{array}$$

$$a^2 > b^2,$$



Para calcular la magnitud de "c" se emplea la expresión:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{12.25 - 6.25} = \sqrt{6} = 2.44$$

Las coordenadas de sus vértices y focos son:

V(0, a) = V(0, 3.5) V′(0, -a) = V′(0, -3.5)

B(b, 0) = B(2.5, 0) B′(-b, 0) = B′(-2.5, 0)

F(0, c) = F(0, 2.44) F′(0, -c) = F′(0, -2.44)

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(6.25)}{3.5} = 3.57$$
$$e = \frac{c}{a} = \frac{2.44}{3.5} < 1$$

Se sabe que para demostrar que la recta 5x -3y -13 = 0. Es secante a la elipse $196x^2 + 100y^2 = 1225$, se deben de resolver estas ecuaciones simultáneamente, es decir;

De 5x -3y -13 = 0 se tiene $x = \frac{3y+13}{5}$

Substituyéndose esta expresión en la ecuación de la elipse:

$$196\left(\frac{3y+13}{5}\right)^2 + 100y^2 = 1225$$
$$196\left(\frac{9y^2+78y+169}{25}\right) + 100y^2 = 1225$$
$$196(9y^2+78y+169) + 2500y^2 = 30625$$
$$1764y^2 + 15288y + 33124 + 2500y^2 - 30625 = 0$$
$$4264y^2 + 15288y + 2499 = 0$$
$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$y = \frac{-15288 \pm \sqrt{(15288)^2 - 4(4264)(2499)}}{2(4264)}$$
$$y_1 = -0.17$$
$$y_2 = -3.41$$

De $x = \frac{3y+13}{5}$ se tiene: $x_1 = 2.49$, $x_2 = 0.55$ por lo tanto la recta 5x -3y -13 = 0. Es secante a la elipse dada en los puntos E(2.49, -0.17) y G(0.55, -3.41)

8. La excentricidad de la trayectoria elíptica que describe el satélite Morelos al rededor del sol es 1/62, si la longitud de su eje mayor es de 2970 $(10)^8$ Km. Obtener:

a) La magnitud del lado recto

b) La ecuación de la elipse que describe al satélite Morelos al rededor del sol, si este astro se encuentra en uno de sus focos.

c) La distancia más cercana del satélite al sol

d) La distancia más retirada que tiene el satélite del sol

Si la magnitud del eje mayor de la elipse propuesta es:

$$2a = 2970\ (10)^8\ \text{Km.}$$

$$a = 1485\ (10)^8\ \text{Km.}$$

Como la excentricidad es dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{62} = \frac{c}{1485(10)^8}$$

$$c = \frac{1485(10)^8}{62} = 23.951(10)^8$$

como

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(1485(10)^8)^2 - (23.951(10)^8)^2}$$

$$b = 1484.8068(10)^8$$

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(220465.3202(10)^{16})}{1485(10)^8} = 2969.22(10)^8$$

Si se considera como origen al centro de la elipse que describe a la tierra en su movimiento al rededor del sol, entonces será el punto medio del perihelio y afelio y la ecuación es:

$$\frac{x^2}{(1485(10)^8)^2} + \frac{y^2}{(1484.8068(10)^8)^2} = 1$$

Las coordenadas de los vértices y focos son:

V (a, 0) = V (1485$(10)^8$, 0)

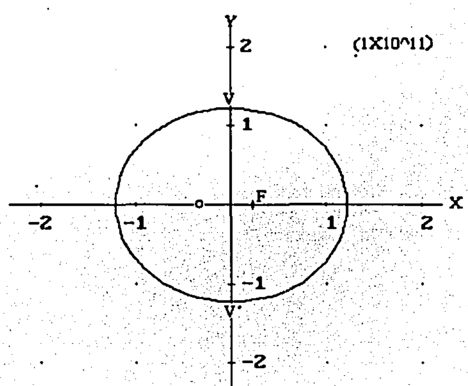
V′(-a, 0) = V′(-1485 $(10)^8$, 0)

B (0 , b) = B (0, 1484.8068 $(10)^8$)

B′(0, -b) = B′(0, -1484.8068 $(10)^8$)

F (c, 0) = F (23.9516 $(10)^8$, 0)

F′ (-c, 0) = F′(-23.9516 $(10)^8$, 0)



De acuerdo con la figura se aprecia que la magnitud del perihelio (punto más cercano de la tierra al sol) es;

Dperihelio = a - c = 1485 $(10)^8$ - 23.9616 $(10)^8$ = 1461.0383 $(10)^8$ Km.
Dafelio = a + c = 1485 $(10)^8$ + 23.9616 $(10)^8$ = 1508.9616$(10)^8$ Km.

ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO EN UN PUNTO CUALQUIERA C(h,k) Y EJE FOCAL AL EJE X.

Si el C(h, k) se considera el origen del sistema de ejes cartesianos x′y′ la ecuación de la elipse será:

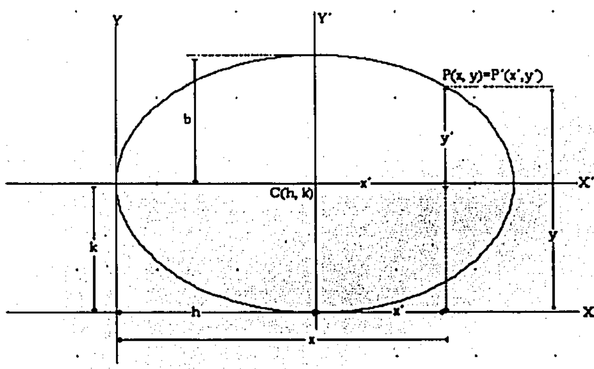
$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

Obsérvese que el origen se traslada al punto C(h, k), por lo tanto para obtener la ecuación de la elipse en el sistema XY, se debe de ver cuál es la relación entre x′, x y h además de y′, y, k.

De acuerdo con la figura se aprecia que:

$$x' = x - h$$

$$y' = y - k$$



Substituyéndose en la ecuación de la elipse, se llega a la ecuación de la elipse con centro en un punto cualquiera y eje mayor paralelo al eje x.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

De acuerdo con la figura siguiente las coordenadas de los vértices y focos - son:

C(h, k)

V(h + a, k), V′(h-a, k)

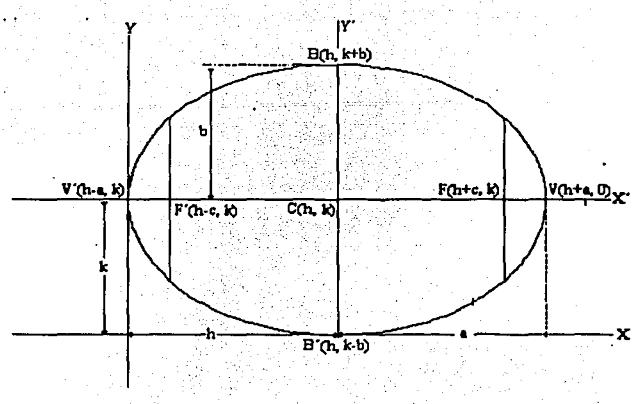
F (h + c, k), F′(h-c, k)

B (h, k + b), B′(h, k-b)

La magnitud del lado recto y la excentricidad son dadas por las mismas expresiones:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$e = \frac{c}{a} < 1$$



ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO EN C(h, k) Y EJE FOCAL PARALELO AL EJE "Y".

Al realizar una traslación del sistema XY al punto C(h, k) siendo este punto el origen del nuevo sistema "X′Y′" con los ejes paralelos al sistema "XY", la ecuación de la elipse con centro en el C(h, k) y eje focal paralelo al eje Y es:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

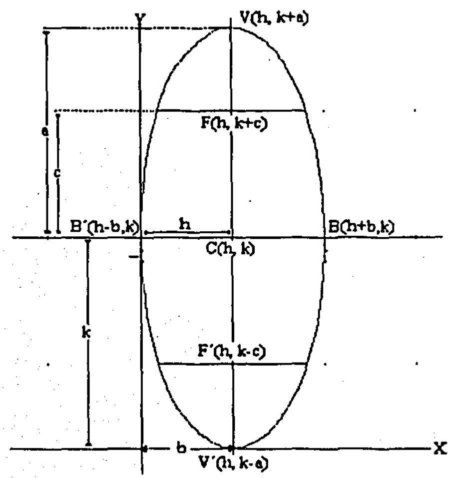
Con ayuda de la figura las coordenadas de los vértices y focos son:

C(h, k)

V(h , k + a), V′(h , k-a)

F (h , k + c), F′(h , k-c)

B (h + b , k), B′(h-b, k)



La magnitud del lado recto y la excentricidad son dadas por las mismas expresiones:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$e = \frac{c}{a} < 1$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

EJEMPLOS:

1. Hallar la ecuación de la elipse si los vértices del eje mayor son los puntos V(3, 2) y V′(9, 2) y su excentricidad es $\frac{3}{5}$.

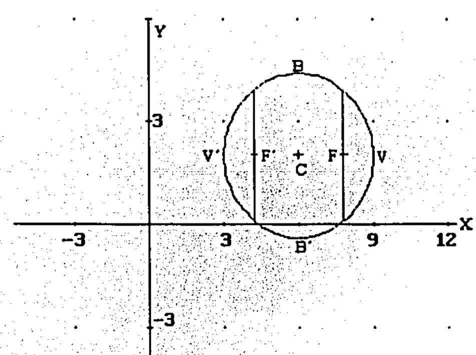
Para determinar la ecuación de la elipse, se debe en estos casos determinar su centro C(h, k), la longitud de su eje mayor y menor (2a y 2b) ya que la ecuación tiene la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Como el centro de la elipse es el punto medio de los vértices del eje mayor se tiene que para V′(3,2) y V(9,2)

$$C(h,k) = C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = C\left(\frac{3+9}{2}, \frac{2+2}{2}\right) = C(6,2)$$

De acuerdo con la figura se aprecia que la longitud del semieje mayor es a = 3, ya que es igual a la magnitud de la distancia que existe entre el centro de la elipse y cualquiera de sus vértices del eje mayor.



De la excentricidad se concluye que:

$$e=\frac{3}{5}=\frac{c}{a}\Rightarrow\frac{3}{5}=\frac{c}{3}\Rightarrow c=\frac{9}{5}=1.8$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{9-\frac{81}{25}}=\frac{12}{5}=2.4$$

$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2\left(\frac{144}{25}\right)}{3}=3.84$$

Dadas a = 3, b = 2.4, c =1.8 y el LR = 3.84, C(6,2)

Sustituyendo los valores en la ecuación de la elipse se tiene:

$$\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{\frac{144}{25}}=1$$

Las coordenadas de los vértices y focos son:

C(h, k)=C(6, 2)

V(h + a , k) = V(9, 2), V′(h-a, k)=V′(3, 2)

F (h + c, k) = F(7.8, 2), F′(h-c, k)= F′(4.2, 2)

B (h , k + b)= B(6, 4.4), B′(h, k-b)=B′(6, -0.4)

2. Obtener la ecuación de la elipse en la forma general del problema anterior.

La expresión general se obtiene desarrollándose las operaciones indicas e igualándose a cero la ecuación resultante esto es:

Dada la ecuación:

$$\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{\frac{144}{25}}=1$$

$$\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{25(y-2)^2}{144}=1$$

$$\frac{144(x-6)^2+225(y-2)^2}{1296}=1$$

$$144(x^2-12x+36)+225(y^2-4y+4)=1296$$

$$144x^2-1728x+5184+225y^2-900y+900=1296$$

$$144x^2+225y^2-1728x-900y+4788=0$$

Está última ecuación es la forma general de la elipse la cual es dada por:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se había mencionado que se estudiarán los casos en que B = 0, por comparación se aprecia que:

A = 144, B = 0, C = 225, D = -1728, E = -900, F = 4788.

Cuando se tiene una ecuación de una curva de segundo grado, se había obtenido que la curva se trataba de una circunferencia si A = C.

Es una parábola si: A = 0 con $C \neq 0$ o bien $A \neq 0$ y C = 0.

Para el caso de una elipse se aprecia que: $A \neq C$ y además son del mismo signo.

3. Dada la ecuación de la elipse del problema anterior, calcular la ecuación en forma ordinaria.

Para obtener la ecuación de una elipse en forma ordinaria, a partir de su ecuación general se recomienda el siguiente procedimiento:

3.1 Se ordenan los términos que contengan las incógnitas "x" y "y"

$$144x^2 - 1728x + 225y^2 - 900y + 4788 = 0$$

3.2 Para los términos que contienen a la abscisa se saca el factor común al coeficiente de "x^2" (A = 144) y de los términos que contienen a la ordenada, se factoriza al coeficiente "y^2" (B = 225), esto es:

$$144\left(\frac{144x^2}{144} - \frac{1728x}{144}\right) + 225\left(\frac{225y^2}{225} - \frac{900y}{225}\right) + 4788 = 0$$

$$144\left(x^2 - 12x\right) + 225(y^2 - 4y) + 4788 = 0$$

3.3 Se suma y se resta el cuadrado de la mitad de los coeficientes de "x" y "y"

$$144\left(x^2 - 12x + \left(\frac{12}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{2}\right)^2\right) + 225\left(y^2 - 4y + \left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right) + 4788 = 0$$

$$144(x^2 - 12x + 36 - 36) + 225(y^2 - 4y + 4 - 4) + 4788 = 0$$

3.4 Se factorizan los trinomios cuadrados perfectos

$$144\left((x-6)^2 - 36\right) + 225\left((y-2)^2 - 4\right) + 4788 = 0$$

3.5 Se efectúan las operaciones indicadas:

$$144\left((x-6)^2-36\right)+225((y-2)^2-4)+4788=0$$

$$144(x-6)^2+225(y-2)^2=1296$$

3.6 Dividiendo la ecuación por el término independiente:

$$\frac{144(x-6)^2}{1296}+\frac{225(y-2)^2}{1296}=\frac{1296}{1296}$$

$$\frac{(x-6)^2}{\frac{1296}{144}}+\frac{(y-2)^2}{\frac{1296}{225}}=1$$

$$\frac{(x-6)^2}{9}+\frac{(y-2)^2}{\frac{144}{25}}=1$$

Se aprecia que esta ecuación es precisamente la buscada y es dada en el primer problema.

4. Hacer el gráfico de la elipse $2x^2-6x+8y^2+32y+\frac{1}{2}=0$.

Para realizar la figura de una elipse es necesario conocer las coordenadas de los focos, vértices, centro, además la magnitud del lado recto.

Una de las formas que existen para conocer estos valores es transformar esta ecuación de la elipse en forma ordinaria, esto es:

$$2x^2-6x+8y^2+32y+\frac{1}{2}=0$$

$$2(x^2-3x)+8(y^2+4y)+\frac{1}{2}=0$$

$$2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+8\left(y^2+4y+4-4\right)+\frac{1}{2}=0$$

$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{18}{4}+8(y+2)^2-32+\frac{1}{2}=0$$

$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+8(y+2)^2=36$$

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{36}{2}}+\frac{(y+2)^2}{\frac{36}{8}}=\frac{36}{36}$$

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{18}+\frac{(y+2)^2}{4.5}=1$$

Esta elipse tiene su eje mayor paralelo al eje X por lo tanto:

$a^2 = 18$ $\quad$ $b^2 = 4.5$

a =4.24 $\quad$ b =2.12

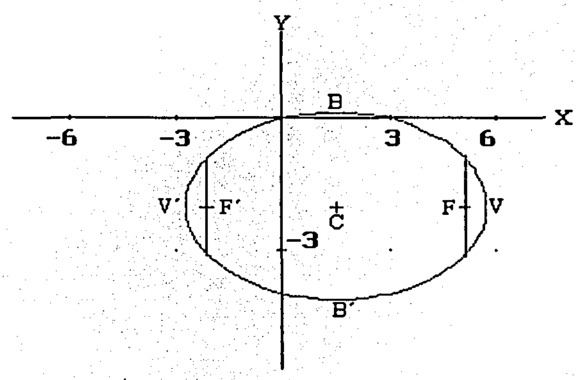
El centro C(h, k) es C(1.5, -2) porque h= 1.5 y k =-2.

Para evaluar a "c" por medio de:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{18-4.5}=3.67$$

$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(4.5)}{4.24}=2.12$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3.67}{4.24}<1$$



Por lo tanto las coordenadas de los vértices y focos son:

C(h, k) = C(1.5, -2)

V(h + a, k)=V(5.74, -2), $\quad$ V'(h-a, k)=V'(-2-74, -2)

F (h + c, k)= F(5.17, -2), $\quad$ F'(h-c, k)=F'(-2.17,-2)

B (h , k + b)=B(1.5, 0.12), $\quad$ B'(h, k-b)=B'(1.5, -4.12)

5. Obtener la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos B(-3, 3) y B'(-3, -5) y la longitud del lado recto es de cuatro unidades.

Como las abscisas de los vértices del eje menor son iguales, se concluye que este eje es paralelo al eje Y, por lo cual el eje mayor será paralelo al eje X, siendo la ecuación de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

Las coordenadas del centro C(h, k) se obtienen evaluando la abscisa y ordenada del punto medio de los vértices B(-3,3) y B′(-3,-5)

$$C(h,k)=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-3-3}{2},\frac{3-5}{2}\right)=(-3,-1)$$

La magnitud de la distancia del centro a la elipse a uno de sus vértices del eje menor es:

b= 4. Tal y como se aprecia en la figura.

Como el lado recto. LR = 4, se tiene:

$$LR=\frac{2b^2}{a}\Rightarrow\frac{2(16)}{a}=4\therefore a=8$$

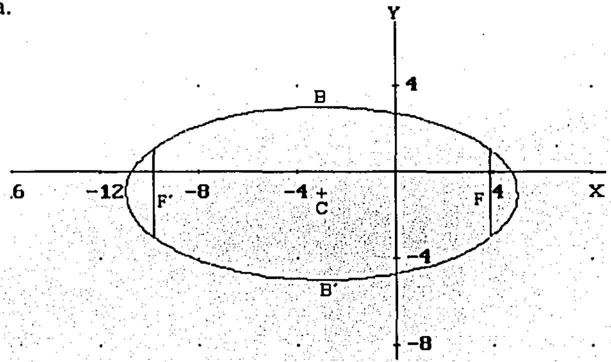
Finalmente la ecuación será:

$$\frac{(x+3)^2}{64}+\frac{(y+1)^2}{16}=1$$

Para evaluar los elementos de la elipse se tiene:

$$c=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{64-16}=6.9$$

$$e=\frac{c}{a}=\frac{6.9}{8}<1$$



Las coordenadas de los vértices y focos son:

V(h + a, k) = V(5, -1), V′(h - a, k) = V′(-11, -1)

F(h + c, k) = F(3.9, -1), F′(h -c, k) = F′(-9.9, -1)

B(h, k +b) = B(-3, 3) B′(h, k -b) =B′(-3, -5)

6. El centro de una elipse es el punto (2, -3), su excentricidad es 2/5. Hallar su ecuación si su eje focal es paralelo al eje "Y" y los focos se localizan a una distancia de ±2.25 del centro de la elipse.

De acuerdo con la figura se aprecia que las coordenadas de los focos - - son: F(2, -0.75) y F′(2, -5.25)

como: c = 2.25 y e = 2/5 se tiene:

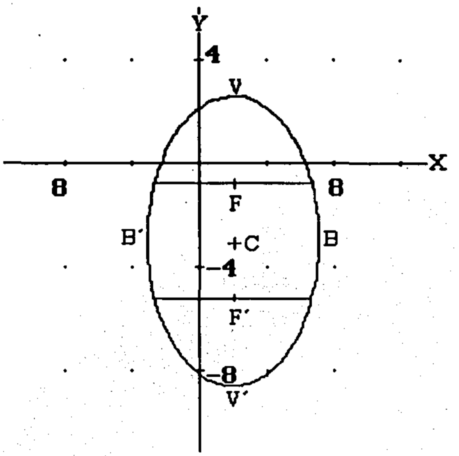
$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{2.25}{a} = \frac{2}{5} \therefore a = 5.6$$

Se sabe que la magnitud del semieje menor es dada por:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(5.6)^2 - (2.25)^2} = 5.1$$

La ecuación es del tipo:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$



Con h = 2, k = -3, b = 5.1 y a = 5.6

$$\frac{(x-2)^2}{26.01} + \frac{(y+3)^2}{31.36} = 1$$
$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(5.1)^2}{5.6}$$

Las coordenadas de sus vértices son:

V(h , k + a) = V(2, 2.6), V′(h, k -a) = V′(2, -8.6)

F(h , k + c) = F(2, -0.75), F′(h , k -c) = F′(2, -5.25)

B(h + b, k) = B(7.1, -3) B′(h -b, k) =B′(-3.1, -3)

7. Los electrones del segundo y tercer orbital del átomo de uranio describen una elipse en cada nivel, si los focos son los puntos F(0, 5) y F′(0, -5) obtener las ecuaciones de las órbitas si la magnitud del semieje mayor del segundo orbital es de ocho unidades atómicas y el tercer nivel tiene la excentricidad de 1/2.

De las coordenadas de los focos se aprecia que el eje focal de la elipse está sobre el eje "y", c = 5, por lo tanto C(0, 0), y el segundo orbital tiene a = 8, por lo tanto la magnitud del semieje menor es: $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{64 - 25} = \sqrt{39} = 6.24$

Por lo tanto la ecuación de la elipse del segundo orbital del átomo de uranio es:

$$\frac{x^2}{39} + \frac{y^2}{64} = 1$$

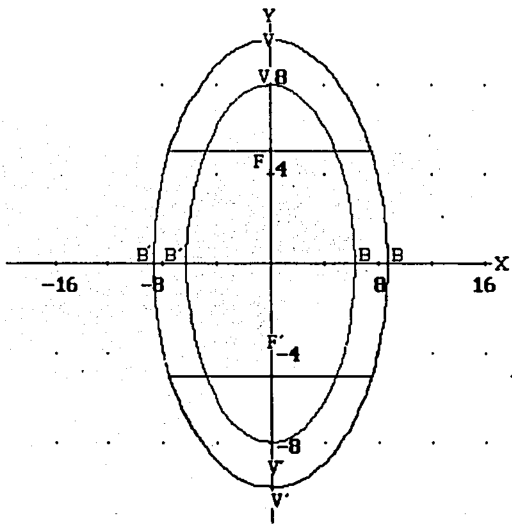
Las coordenadas de los vértices son:

V(0, a) = V(0, 8), V′(0, -a)= V′(0, -8)

B(b, 0)=B(6.24, 0), B′(-b, 0)=B′(-6.24, 0)

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(39)}{8} = 9.75$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{8} < 1$$



Para el tercer orbital, se tiene que c = 5 y e = 1/2, como la excentricidad es dada por:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{a} = \frac{1}{2} \therefore a = 10$$

La magnitud del semieje menor es:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{100 - 25} = \sqrt{75} = 8.66$$

La ecuación de la tercera órbita del átomo de uranio es:

$$\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{100}=1$$

$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(75)}{10}=15$$

Las coordenadas de los vértices son:

V(0, a) = V(0, 10)   V'(0, -a) = V′(0, -10)

B(b, 0) = B(8.6, 0)   B′(-b, 0)= B′(-8.6, 0)

8. Hallar los elementos de la elipse dada por: $5x^2+20x+y^2-4y-56=0$

$$5x^2+20x+y^2-4y-56=0$$

$$5(x^2+4x)+(y^2-4y)-56=0$$

$$5(x^2+4x+4-4)+(y^2-4y+4-4)-56=0$$

$$5(x+2)^2-20+(y-2)^2-4-56=0$$

$$5(x+2)^2+(y-2)^2=80$$

$$\frac{(x+2)^2}{\frac{80}{5}}+\frac{(y-2)^2}{80}=1$$

$$\frac{(x+2)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{80}=1$$

$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(16)}{8.94}=3.57$$

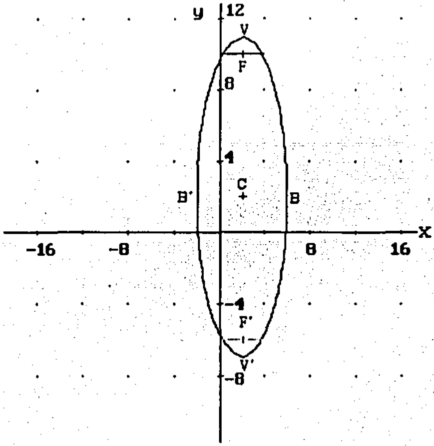
$$e=\frac{c}{a}=\frac{8}{8.94}<1$$

Las coordenadas de los vértices y focos son:

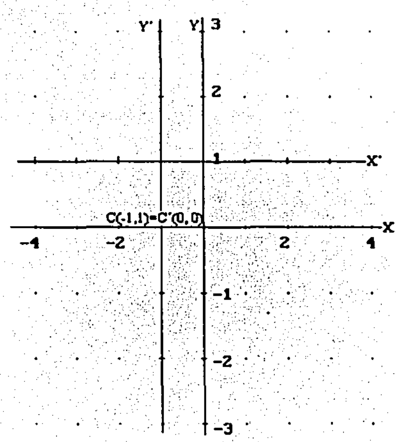
V(h , k + a) = V(2, 10.94),   V′(h, k -a) = V′(2, -6.94)

F(h , k + c) = F(2, 10),   F′(h , k -c) = F′(2, -6)

B(h + b, k) = B(6, 2)   B′(h -b, k) =B′(-2, 2)



9. Hallar la ecuación de la elipse $2x^2 + 4x + 3y^2 - 6y - 1 = 0$, si el origen del sistema coordenado se traslada al punto (-1, 1).



Las ecuaciones de transformación son:

x = x' +h

y = y' + k

Donde (h, k) son las coordenadas donde se traslada al sistema de coordenadas, - esto es: h = -1 y k = 1, remplazándose - las incógnitas h, k de las ecuaciones de - translación se tendrá:

x = x' - 1

y = y' + 1

Substituyéndose las últimas expresiones en la ecuación de la elipse:

$$2x^2+4x+3y^2-6y-1=0$$
$$2(x'-1)^2+4(x'-1)+3(y'+1)^2-6(y'+1)-1=0$$
$$2x'^2-4x'+2+4x'-4+3y'^2+6y'+3-6y'-6-1=0$$
$$2x'^2+3y'^2=6$$
$$\frac{2x'^2}{6}+\frac{3y'^2}{6}=1$$
$$\frac{x'^2}{3}+\frac{y'^2}{2}=1$$

Esta última ecuación es de una elipse con centro en el origen del sistema de coordenadas x′ y′ con el eje focal sobre el eje x′ con $a^2= 3$ y $b^2=2$. Por lo tanto la magnitud de los semiejes mayor y menor son:

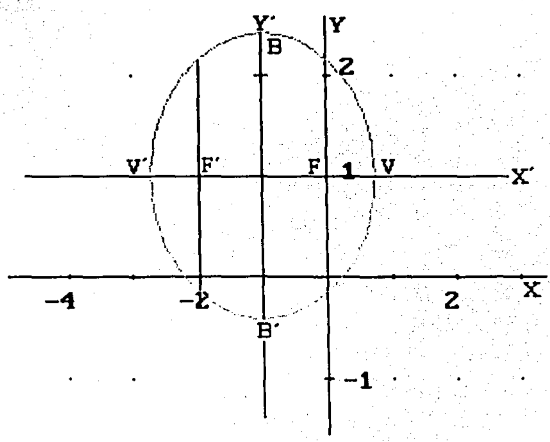
$$a=\sqrt{3}=1.73 \qquad b=\sqrt{2}=1.41 \qquad c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{3-2}=1$$

El lado recto es: $LR=\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2(2)}{1.71}=2.33$ y las coordenadas de vértices y focos son:

V(a, 0) = V(1.73, 0), V′(-a, 0) = V′(-1.73, 0)

F(c, 0) = F(1, 0), F′(-c, 0) = F′(-1, 0)

B(0, b)= B(0, 1.41) B′(0, -b) = B′(0, -1.41)



10. Si el centro de la elipse $8x^2-72x+106+7y^2-56y=0$, se traslada al punto (9/2,4), encontrar su ecuación.

De acuerdo a las ecuaciones de transformación de coordenadas se tiene:

$$x = x' + h \qquad con \qquad h = \frac{9}{2} \Rightarrow x = x' + \frac{9}{2}$$

$$y = y' + k \qquad con \qquad k = 4 \Rightarrow y = y' + 4$$

Substituyéndose las expresiones de transformación de coordenadas en la ecuación de la elipse.

$$8x^2-72x+106+7y^2-56y=0$$

$$8(x'+\frac{9}{2})^2-72(x'+\frac{9}{2})+106+7(y'+4)^2-56(y'+4)=0$$

$$8(x'^2+9x'+\frac{81}{4})-72x'-324+106+7(y'^2+8y'+16)-56y'-224=0$$

$$8x'^2+72x'-72x'+7y'^2+56y'-56y'+162-324+106+112-224=0$$

$$8x'^2+7y'^2-168=0$$

$$8x'^2+7y'^2=168$$

$$\frac{8x'^2}{168}+\frac{7y'^2}{168}=1$$

$$\frac{x'^2}{21}+\frac{7y'^2}{24}=1$$

la ecuación es de la forma:

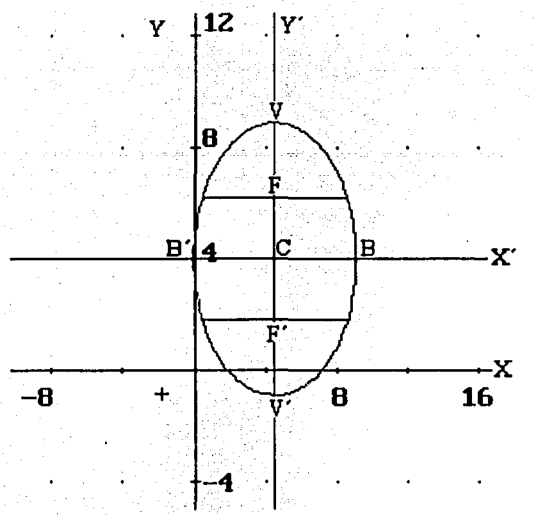
$\frac{x'^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$ Lo que implica por comparacion :

$$a^2 = 24 \Rightarrow a = \sqrt{24} = 4.89 \qquad b^2 = 21 \Rightarrow b = \sqrt{21} = 4.58$$

$$c = \sqrt{a^2-b^2} = \sqrt{5} = 2.23 \qquad LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(21)}{4.89} = 8.58$$

por lo que las coordenadas de vértices y focos son:

V(0, a) = V (0, 4.8) V'(0,- a) = V' (0 ,-4.8)
F (0, c) = F (0, 2.2) F' (0, -c) = F' (0, -2.2)
B (b, 0) = B (4.5, 0) B' (-b, 0) = B' (-4.5, 0)



EJERCICIOS

1. Los focos de una elipse son los puntos (-1, 0) y (1, 0). La longitud de su eje menor es $2b = 2$. Determinar su ecuación.

2. Encontrar las longitudes de los ejes, las coordenadas de los focos y la excentricidad de la elipse $25x^2 + 169y^2 = 4225$.

3. Los focos de una elipse son (2, 1) y (3, 4). La longitud de su eje mayor es igual a 6. Determinar su ecuación.

4. La ecuación de una elipse que pasa por el punto (1, 2), si sus focos son F(1, 1) y F′(0, 2)¿Cuáles son las tangentes de las rectas paralelas a la recta $y + x = 0$.

RESPUESTAS

1. $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{1}=1$

2. **F(12, 0), F′(-12, 0), V(13, 0), V′(-13,0), B(0, 5), B′(0,-5); Eje mayor = 26, Eje menor = 10, e = 12/13, LR = 50/13.**

3. $35x^2 - 6xy + 27y^2 - 160x - 120y + 116 = 0$

4. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 10y + 7 = 0$; Las rectas Tangentes son: $x + y - 1 = 0$; $x + y - 3 = 0$

LA HIPÉRBOLA.

INTRODUCCIÓN

El estudio de la hipérbola, además de interesante, reviste gran importancia debido a sus propiedades de la cual se derivan significativas aplicaciones. Se han mencionado ya, que la trayectoria de los planetas alrededor del sol forma una elipse, pero no sólo los planetas: Todas las masas atrapadas por el campo gravitacional de otra mucho mayor orbitan alrededor de ésta. Se sabe, sin embargo, que no todos los cuerpos celestes son prisioneros del Sol o cualquier otra estrella: Algunos, debido a su gran velocidad, logran escapar, aunque desviados de su dirección inicial. ¿Qué forma tiene su trayectoria? Desde luego, conforme más cerca esté de la estrella, la fuerza de atracción desviadora será también mayor, pero conforme se aleje, tal fuerza disminuirá de manera gradual hasta que, ya suficientemente lejos, prosigue su camino rectilíneo.

Un objeto como el que se describió podría ser un cometa. El Sol es visitado frecuentemente por éstos. Alguno de ellos con órbitas elípticas muy excéntricas, lo hacen periódicamente; de ellos el más famoso el cometa Halley (cuya aparición es cada 75 años, su último acercamiento ocurrió a fines de 1985 y principios de 1986). Otros comentas arriban una sola vez, para perderse posteriormente y alejarse definitivamente del Sistema Solar. La trayectoria descrita es justamente una hipérbola.

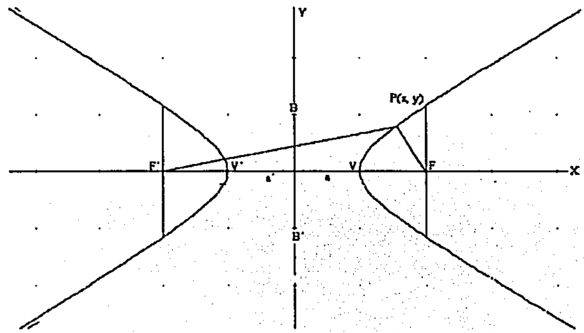
En la actualidad, los conocimientos que se poseen, el hombre es capaz de predecir la aparición de un cuerpo celeste, conocer la forma de su trayectoria, calcular su movimiento posterior, etc. Desde luego, en mucho interviene el conocimiento total de las distintas curvas generadas del cono, y por tal razón llamadas cónicas.

Definición

La hipérbola es un lugar geométrico formado por un conjunto de puntos, tales que en cualquiera de ellos se tiene que, el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos llamados focos es una constante positiva menor a la distancia que existe entre los focos .

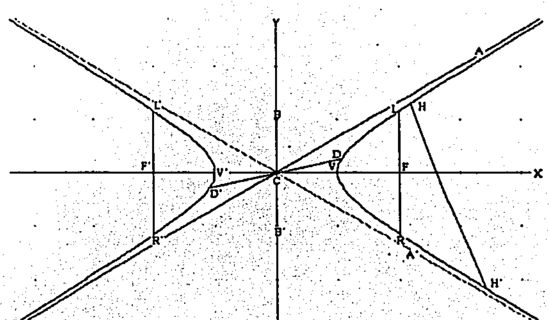
Matemáticamente la definición -- anterior con ayuda de la figura se representa como:

$$\left\| \overline{PF} \right| - \left| \overline{PF'} \right\| = 2a$$



ELEMENTOS DE LA HIPÉRBOLA.

1. La recta que une a los focos F y F' se llama eje focal.
2. Los puntos de intersección del eje - focal con la hipérbola se les conoce -- como vértices.
3. La distancia que existe entre los -- vértices V y V′ del eje focal se le co- noce como eje transverso, o eje real.
4. El punto medio del eje transverso se le llama centro C.



5. La recta perpendicular al eje focal y que pasa por el centro de la hipérbola es conocida como eje normal o imaginario. En la figura lo representa en este caso el eje Y.

6. Los puntos B y B' del eje normal se llaman vértices del eje normal, y la distancia que existe entre ellos se conoce como eje conjugado.

7. El segmento de recta que une a dos puntos cualquiera de la hipérbola se le llama cuerda $\overline{HH'}$.

8. La cuerda que pasa por cualquiera de los focos se le llama cuerda focal.

9. La cuerda focal que es perpendicular al eje focal se le llama lado recto $\overline{LR}$ y $\overline{LlR'}$.

10. Los segmentos de recta que van de un punto de la hipérbola a cualquiera de los focos se les llama radio vectores. PF y PF'.

11. Las cuerdas que pasan por el centro de la hipérbola se les llama diámetro DD'.

12. Las rectas A y A' que pasan por el centro de la hipérbola y los vértices del rectángulo cuyos lados son 2a y 2b se les llama asíntotas.

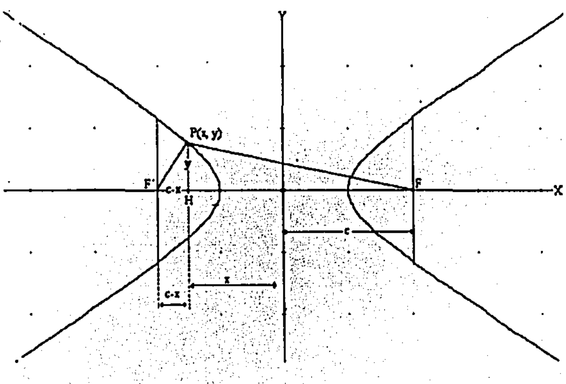
ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE EL EJE X.

Del triángulo rectángulo PHF' se tiene que:

$$\left|\overline{PF'}\right| = (c - x)^2 + y^2$$

Del triángulo PHF, se aprecia por el teorema de Pitágoras:

$$\left|\overline{PF}\right| = (c + x)^2 + y^2$$



Substituyéndose las expresiones en la definición de la hipérbola dada por:

$$\left\| \overline{PF} \right| - \left| \overline{PF'} \right\| = 2a$$

$$\left| \sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(c+x)^2 + y^2} \right| = 2a$$

Aplicándose la definición de valor absoluto, se tiene:

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(c-x)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a$$

La primera de estas ecuaciones es válida cuando el punto P(x, y) se encuentra en la rama izquierda de la hipérbola y cuando P(x, y) está en la rama derecha se satisface la última ecuación. De la primera ecuación se tiene que:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado

$$\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$$

$$(x-c)^2 - (x+c)^2 - 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$x^2 - 2xc + c^2 - x^2 - 2xc - c^2 - 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$-4xc - 4a^2 = 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Dividiendo la ecuacione entre cuatro:

$$-xc - a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado:

$$(-xc - a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2$$

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2(x+c)^2 + y^2$$

$$x^2c^2 + 2a^2xc + a^4 = a^2x^2 + 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$x^2c^2 + 2a^2xc - a^2x^2 - 2a^2xc - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

Factorizando:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

Se aprecia en las figuras anteriores de la hipérbola que $c > a \therefore c^2 > a^2$ por lo que $c^2 - a^2 > 0$, en este caso se tiene: $b^2 = c^2 - a^2$.

Substituyéndose $b^2 = c^2 - a^2$ en la ecuación anterior se tiene:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{Dividiéndose entre } a^2b^2$$

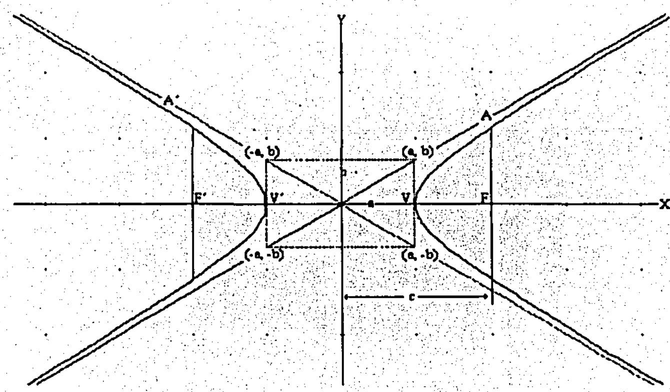
$$\frac{b^2x^2}{a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{a^2b^2} = 1 \qquad \text{O bien:}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Expresión que representa a la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal en el eje x.

De acuerdo con la figura las coordenadas de los dos vértices y focos de la hipérbola horizontal son:

V(a, 0), V' (-a, 0)
B(0, b), B'(0, -b)
F(c, 0), F' (-c, 0)



El lado recto y excentricidad ésta dado por:

$$LR = \frac{2b^2}{a}$$

$$e = \frac{c}{a} > 1$$

Como la asíntota A, pasa por el origen C(0, 0) y por el punto A(a, b), su ecuación puede obtenerse por medio de:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

con C(0,0) y $A_1(a,b)$

$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{b - 0}{a - 0} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = \frac{b}{a} \quad \therefore \quad y = \frac{b}{a}x$$

Con C(0,0) y $A_2(-a,b)$

$$\frac{y - 0}{x - 0} = \frac{-b - 0}{a - 0} \quad \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{b}{a} \quad \therefore y = -\frac{b}{a}x$$

Finalmente se observa que las ecuaciones de las asintotas A_1 y A_2 pueden representarse simplemente por:

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

EJEMPLOS:

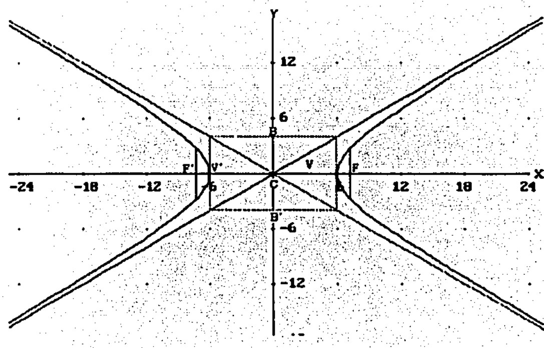
1. Hallar la ecuación de la hipérbola que tiene su centro en el origen y cuyas longitudes de los semiejes transverso y normal son iguales a la mitad de los lados del rectángulo definido por los puntos H(6, 4), M(-6, 4), N(-6,.-4), y P(6, -4), considerándose que el eje transverso de la hipérbola es paralelo al lado HM que muestra la figura estando en el eje x.

De acuerdo con el enunciado del problema y con ayuda de la figura se concluye que la magnitud del semieje transverso es: a = 6 y la del semieje normal b = 4

Como el centro de la hipérbola se encuentra en el origen y su eje focal en el eje x, la ecuación es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Substituyéndose a = 6 y b = 4, se obtiene la ecuación de la hipérbola deseada:



$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Para obtener el valor de c se utiliza la siguiente expresión:

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \therefore \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 16 + 36 = 52$$

$$\therefore c = \sqrt{52} = 7.21$$

Su lado recto y excentricidad son:

$$LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{6} = 5.33, \qquad e = \frac{c}{a} = \frac{7.21}{6} > 1$$

Las ecuaciones de las asintotas son:

$$y = \pm\frac{4}{6}x$$

Las coordenadas de los vértices y focos son:

V(a, 0) = V(6, 0), V' (-a, 0) = V'(-6, 0)

B(0, b) = B(0, 4), B'(0, -b) = B'(0, -4)

F(c, 0) = F(7.2, 0), F' (-c, 0) = F'(-7.2, 0)

2. Obtener la ecuación de la hipérbola si uno de sus focos es el punto F (13, 0), su excentricidad es dada por 13/8 y su centro es C(0, 0).

Por las coordenadas del foco de la hipérbola se aprecia que su eje focal o transverso está sobre el eje "x" ya que la ordenada es nula, además se sabe que las coordenadas del foco son: F(c, 0) = F(13, 0), c = 13.

De la expresión de la excentricidad $e=\frac{c}{a}$ se iguala el valor dado es este problema para evaluar el valor de "a", esto es:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{13}{8} \text{ como c = 13 se tiene:}$$

$$\frac{13}{a}=\frac{13}{8} \quad \therefore \ a=8$$

Conocidos los valores de a = 8 y c = 13, es necesario calcular la magnitud del semieje normal "b", ya que la ecuación de la hipérbola tiene la forma:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ya que $b^2=c^2-a^2 \qquad b^2=169-64=105$

Entonces $\frac{x^2}{64}-\frac{y}{105}=1$

Los elementos de la hipérbola y su figura son:

Si $a=8,\ c=13,\ b=10.24$

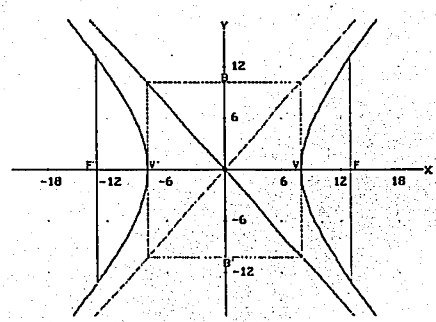
V(a, 0) = V(8, 0) V'(-a, 0) = V'(-8, 0)

F(c, 0) = F(13, 0) F' (-c, 0) = F'(-13, 0)

B(0, b) = B(0, 10.24) B'(0, -b) = B'(0, -10.24)

$$LR=\frac{2b^2}{a}=\frac{2(105)}{8}=26.25$$

$$y=\pm\frac{b}{a}x \Rightarrow y=\pm\frac{10.24}{8}x$$



ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJE FOCAL SOBRE EL EJE Y.

Cuando la hipérbola tiene su centro en el origen y su semieje transverso sobre el eje de las "y" , la ecuación en este caso es:

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$

Obsérvese que el cuadrado de la magnitud del semieje transverso (a^2) divide ahora a y^2. De acuerdo con las definiciones de la hipérbola y con ayuda de la siguiente figura se aprecia las coordenadas de sus puntos básicos.

Por lo tanto para este tipo de hipérbolas las coordenadas de los vértices y focos son:

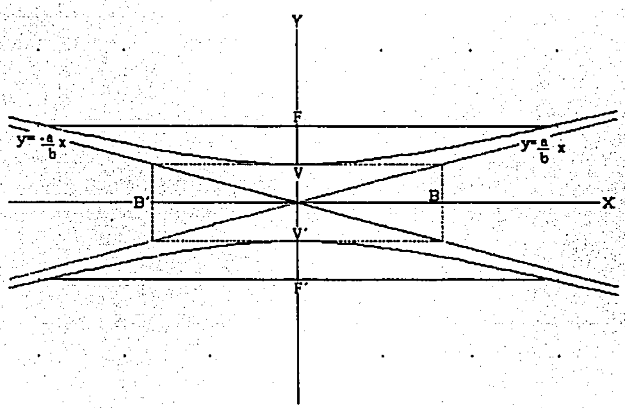
V(0, a) V'(0, -a)

F(0, c) F'(0, -c)

B(b, 0) B'(-b, 0)

La magnitud del lado recto y excentricidad no sufren cambios:

$$e=\frac{c}{a}>1,\quad LR=\frac{2b^2}{a}$$



Finalmente las ecuaciones de sus asíntotas son: $y = \pm \frac{a}{b} x$

EJEMPLO:

1. **Hacer la gráfica de la hipérbola determinada por la ecuación $-4x^2 + 45y^2 - 180 = 0$.**

Para realizar la gráfica de cualquier hipérbola se saben que se deben conocer a los elementos básicos de esta cónica, los cuales son determinados por los valores de a, b y c; para obtener estos valores es necesario transformar la ecuación en su forma canónica.

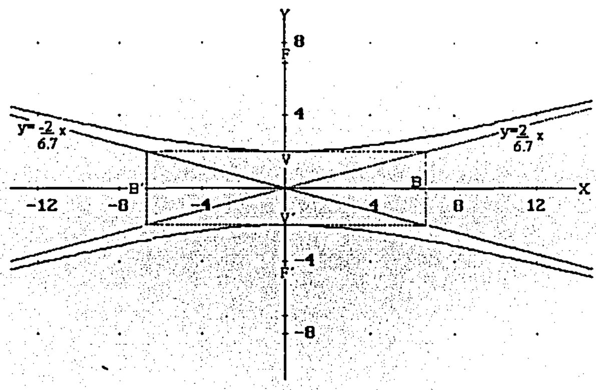
$$-4x^2 + 45y^2 - 180 = 0$$

$$-4x^2 + 45y^2 = 180$$

$$-\frac{x^2}{\frac{180}{4}} + \frac{y^2}{\frac{180}{45}} = 1$$

$$-\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{45} = 1$$



Por lo tanto se obtiene que: $a^2 = 4$, $b^2 = 45$, entonces $a = 2$ y $b = 6.7$;se sabe que:

$b^2 = c^2 - a^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 4 + 45 = 49 \quad \therefore \quad c = 7$

Por lo tanto las coordenadas de los vértices son:

V(0, a) = V(0, 2) V'(0, -a) = V'(0, -2)

F(0, c) = F(0, 7) F'(0, -c) = F'(0, -7)

B(b, 0) = F(6.7, 0) B'(-b, 0) = B'(-6.7, 0)

La magnitud del lado recto y excentricidad son:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{7}{2} > 1, \quad LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(45)}{2} = 45$$

Finalmente las ecuaciones de sus asíntotas son: $y = \pm\frac{a}{b}x \Rightarrow y = \pm\frac{2}{6.7}x$

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN UN PUNTO CUALQUIERA C(h, k) Y EJE PARALELO AL EJE X.

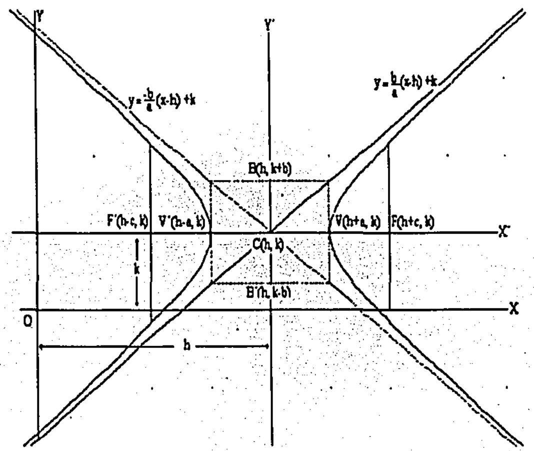
Si el C(h, k) se considera en el origen de un sistema de ejes cartesianos x' y' la ecuación de la hipérbola será: $\frac{x'^2}{a^2} - \frac{y'^2}{b^2} = 1$

Obsérvese que el origen se trasladó al punto C(h, k), por lo tanto para obtener la ecuación de la hipérbola en el sistema XY, se debe ver cuál es la relación entre x', x y h además de y',y, k.

De acuerdo con la figura se aprecia que:
x' = x - h.
y'= y - k.
Sustituyéndose se llega a la ecuación de la elipse con centro en un punto --- cualquiera y eje transverso sobre x.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Por lo cual las coordenadas de sus - - vértices y focos son:



V(h + a, k) V'(h - a, k)

F(h + c, k) F'(h - c, k)

B(h, k + b) B'(h, k - b)

La magnitud del lado recto y excentricidad no sufren cambios: $e = \dfrac{c}{a} > 1, \quad LR = \dfrac{2b^2}{a}$

Las ecuaciones de sus asíntotas son:

$$y = \pm\frac{b}{a}(x-h)+k$$

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA CON CENTRO EN UN PUNTO CUALQUIERA C(h, k) Y EJE PARALELO AL EJE Y.

Si el centro C(h, k) se considera en el origen de un sistema de ejes cartesianos x' y' la ecuación de la hipérbola será: $\dfrac{y'^2}{a^2} - \dfrac{x'^2}{b^2} = 1$

Obsérvese que el origen se trasladó al punto C(h, k), por lo tanto para obtener la ecuación de la hipérbola en el sistema XY, se debe ver cuál es la relación entre x', x y h además de y',y, k.

De acuerdo con la figura se aprecia que:

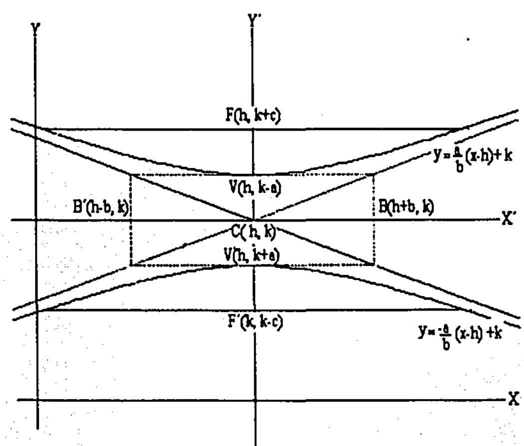
x' = x - h.

y'= y - k.

Sustituyéndose se llega a la ecuación - de la elipse con centro en un punto --- cualquiera y eje transverso sobre y.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Por lo cual las coordenadas de sus - -



vértices y focos son:

V(h, k + a) V'(h, k – a)

F(h, k + c) F'(h, k – c)

B(h + b, k) B'(h - b, k)

La magnitud del lado recto y excentricidad no sufren cambios: $e = \frac{c}{a} > 1, \quad LR = \frac{2b^2}{a}$

Las ecuaciones de sus asíntotas son: $y = \pm\frac{a}{b}(x - h) + k$

EJEMPLOS:

1. Realizar la gráfica de la hipérbola determinada por la ecuación.

$$9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$$

Primero se reduce a la ecuación en su forma ordinaria completando cuadrados. Entonces

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4$$

$$9(x - 3)^2 - 4(y - 1)^2 = -36$$

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$

Esta última expresión es la ecuación de una hipérbola con centro en (3, 1) y cuyo eje focal es paralelo al eje Y.

Como $c^2 = a^2 + b^2, c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Por lo cual las coordenadas de sus vértices y focos son:

V(h, k + a) = V (3, 4) V'(h, k – a) = V'(3, -2)

F(h, k + c) = F (3, 4.6) F'(h, k – c) = F'(3, -2.6)

B(h + b, k) = B(5, 1) B'(h - b, k) = B'(1, 1)

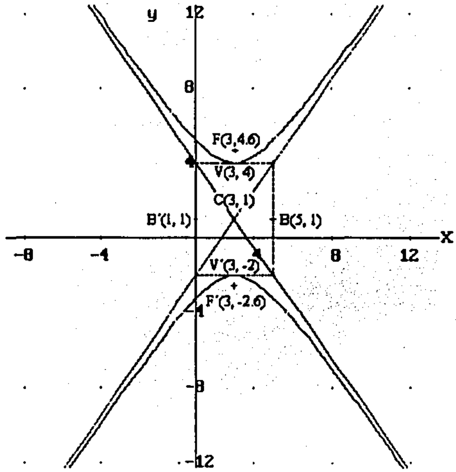
La magnitud del lado recto y excentricidad no sufren cambios:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1, \quad LR = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(4)}{3} = 2.66$$

Las ecuaciones de sus asíntotas son:

$$y = \pm\frac{a}{b}(x-h)+k$$

$$y = \pm\frac{3}{2}(x-3)+1$$



ECUACIÓN GENERAL DE LA ELIPSE CUANDO SU EJE FOCAL ESTA INCLINADO HACIENDO UN ÁNGULO AGUDO CON RESPECTO AL EJE X.

Anterior mente se manifestó que la ecuación general de las cónicas.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Representa a una parábola si el indicador (B^2- 4AC) es nulo, cuando $B \neq 0$

Además cuando el coeficiente "xy" es distinto de cero, se ha manifestado que el eje focal de la cónica tiene su eje inclinado, respecto al eje x, con un ángulo agudo.

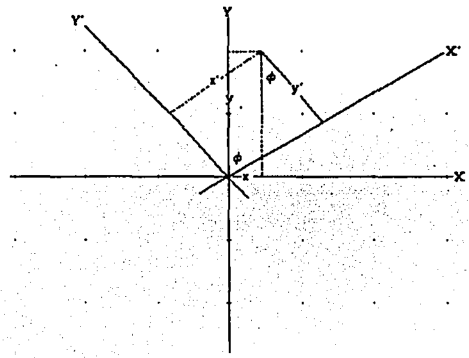
La ecuación general de las cónicas representa a una elipse si el indicador (B^2- 4AC) es menor que cero, matemáticamente se representa como: (B^2- 4AC)<0

Dada la ecuación general de segundo grado (de las cónicas) con el eje focal inclinado respecto al eje de las X.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Si se desea expresar la ecuación sin el término en "xy"(B = 0), se sabe que se debe realizar una rotación respecto a los ejes cartesianos "xy" de tal forma que uno de los nuevos ejes del sistema x′ y′ coincide con el eje focal de la cónica o es paralelo a él. Las ecuaciones que transforman al sistema x'y′ rotado son:

$$x = x'\cos\varphi - y'\operatorname{sen}\varphi$$
$$y = x'\operatorname{sen}\varphi + y'\operatorname{sen}\varphi$$



Donde es el ángulo de inclinación -- formado por el eje x′ y el eje x, y -- (x,y) son las coordenadas de un punto cualquiera en el sistema "xy" y - - (x',y') son las coordenadas del mismo punto en el sistema " x'y'"

Ahora se sustituyen las ecuaciones de transformación de coordenadas bajo una rotación en la expresión general de la cónica.

$$A(x'\cos\varphi - y'sen\varphi)^2 + B(x'\cos\varphi - y'sen\varphi)(x'sen\varphi + y'\cos\varphi) + C(x'sen\varphi + y'\cos\varphi)^2 +$$
$$D(x'\cos\varphi - y'sen\varphi) + E(x'sen\varphi + y'\cos\varphi) + F = 0$$

Desarrollándose las operaciones:

$$\mathrm{A}(x'^2\cos^2\varphi - 2x'y'sen\varphi\cos\varphi + y'^2 sen^2\varphi) +$$
$$B(x'^2 sen\varphi\cos\varphi + x'y'\cos^2\varphi - x'y'sen^2\kappa - y'^2 sen\varphi\cos\varphi) +$$
$$C(x'^2 sen^2\varphi + 2x'y'sen\varphi\cos\varphi + y'^2\cos^2\varphi) +$$
$$Dx'\cos\varphi - Dy'sen\varphi + Ex'sen\varphi + Ey'\cos\varphi + F = 0$$

Ahora se multiplican lo monomios y polinomios que quedaron indicados y posteriormente se factorizan $x'^2, x'y', y'^2, x', y'$ esto es:

$$(A\cos^2\varphi + Bsen\varphi\cos\varphi + Csen^2\varphi)x'^2 +$$
$$(-2Asen\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - sen^2\varphi) + 2Csen\varphi\cos\varphi)x'y' -$$
$$(A\mathrm{sen}^2\varphi - Bsen\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi)y'^2 + D(\cos\varphi + Esen\varphi)x' +$$
$$(E\cos\varphi - Dsen\varphi)y' + F = 0$$

La expresión anterior es una ecuación general de las cónicas en el sistema de coordenadas x' y', de la forma:

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

Donde los coeficientes de las variables x'^{2}, x'y',y'^{2}, x' y y' se les ha identificado como A', B', C', D', y F'; para no confundirse con los coeficientes A, B, C, D y E de la ecuación general de las cónicas en el sistema coordenada xy.

Como A' es el coeficiente de x'^{2}, entonces todo factor que está multiplicado a x'^{2} es igual A', de manera similar los demás coeficientes esto es:

$$\begin{aligned}
A' &= A\cos^2\varphi + B\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + C\operatorname{sen}^2\varphi \\
B' &= 2(C - A)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) = 0 \\
C' &= A\operatorname{sen}^2\varphi - B\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + C\cos^2\varphi \\
D' &= D\cos\varphi + E\operatorname{sen}\varphi \\
E' &= E\cos\varphi - D\operatorname{sen}\varphi \\
F' &= F
\end{aligned}$$

Ahora puede apreciarse que el indicador o discriminante en los sistemas coordenadas xy y x' y' es por definición:

B^2-4AC = B'^{2}- 4A'C' como B'=0 entonces se tiene:

B^2-4AC = - 4A'C'

ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

Como en el sistema de coordenadas cartesianas x' y' se tiene a cualquiera de sus ejes coincidiendo con el eje focal de la cónica, se sabe que: La ecuación general de segundo grado

$$A'x'^2 + B'x'y' + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0$$

1. Representa una parábola si uno de los coeficientes x'^2 o y'^2 es nulo es decir:

$$A = 0 \;\; y \;\; C \neq 0 \;\; o \;\; A \neq 0 \;\; y \;\; C = 0$$

Al sustituir los valores en el indicador se tiene:

$$B^2 - 4AC = -4A'C' = 0$$

lo que demuestra que cuando el indicador es nulo, la ecuación de segundo grado representa una parábola.

2. Una elipse existe cuando los coeficientes de x'^2 y y'^2, son de signos iguales es decir:

$$Si \;\; A > 0, \;\; C > 0 \;\; o \;\; A < 0, \;\; C < 0$$

Al sustituirlos valores en el indicador se tiene:

$$B^2 - 4AC = -4A'C' < 0$$

3. Finalmente se tiene a una cónica llamada hipérbola cuando el indicador es mayor a cero , es decir:

$$Si \;\; A > 0, \;\; C < 0 \;\; o \;\; A < 0, \;\; C > 0$$

Al sustituirlos valores en el indicador se tiene:

$$B^2 - 4AC = -4A'C' > 0$$

En el sistema de coordenadas x' y' y el eje focal de la cónica coincide con cualquiera de los eje x' y' o es paralelo a uno de ellos con B'= 0, de acuerdo con los desarrollos realizados se tiene:

$B' = 2(C - A)\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi + B(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) = 0$

Si $\begin{cases}\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi \\ \operatorname{sen}2\varphi = 2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi\end{cases}$

Se tiene:

$B' = (C - A)\operatorname{sen}2\varphi + B\cos 2\varphi = 0$

Si $A = C$, se tiene:

$B' = B\cos 2\varphi = 0$ y como $B \neq 0$, entonces $\cos 2\varphi = 0$

lo cual implica que:

$2\varphi = 90°$, por lo tanto $\varphi = 45°$

Lo anterior indica que el ángulo de rotación de los ejes x' y' es de 45°, respecto a los ejes xy cuando A = C.

Si $A \neq C$, entonces la expresión para B', se tiene:

$$B = (C - A)\operatorname{sen}2\varphi + B\cos 2\varphi = 0$$
$$(C - A)\operatorname{sen}2\varphi = -B\cos 2\varphi$$
$$\frac{\operatorname{sen}2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{-B}{C - A}$$
$$\tan 2\varphi = \frac{B}{A - C}$$

Para $0° \leq \varphi < 90°$, con φ un angulo agudo.

EJEMPLOS:

1. En cada uno de los siguientes incisos indicar que tipo de cónica representan las siguientes ecuaciones y que ángulo debe existir entre el sistema de ejes cartesianos XY y uno nuevo de sistemas coordenadas donde el eje focal de la cónica esta sobre o es paralelo a cualquiera de los ejes del sistema rotado X'Y'.

a) $6x^2 + 5xy + 4y^2 - 2x - 3y - 7 = 0$

Por comparación de la ecuación general de segundo grado:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Se concluye que: B = 5, A = 6 y C = 4.

Substituyéndose estos valores en la formula dada para el indicador se tiene:

$$B^2 - 4\,AC = (5)^2 - 4(6)(4) = -71$$

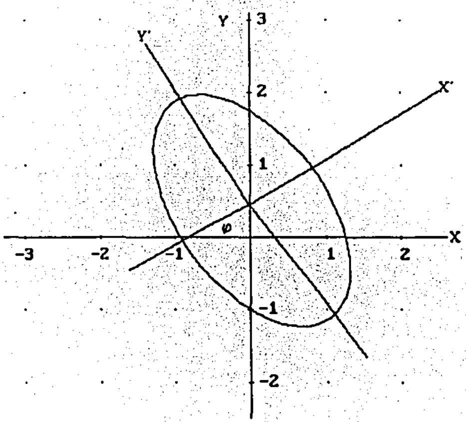
Como el indicador es menor que cero, la ecuación dada representa a una elipse.

El ángulo que se deben girar los ejes cartesianos para que el eje focal coincida con cualquiera de los ejes de un sistema rotado x' y' es:

$$tan2\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{5}{6-4} = \frac{5}{2}$$

$$2\varphi = Ang.tan(2.5) = 68.19°$$

$$\varphi = \frac{68.19°}{2} = 34.09°$$



b) $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 3x + 4y + 8 = 0$

Se tiene que: B = 4, A = 2 y C = 2.

Substituyéndose estos valores en la fórmula dada para el indicador se tiene:

$$B^2 - 4\,AC = (4)^2 - 4(2)(2) = 0$$

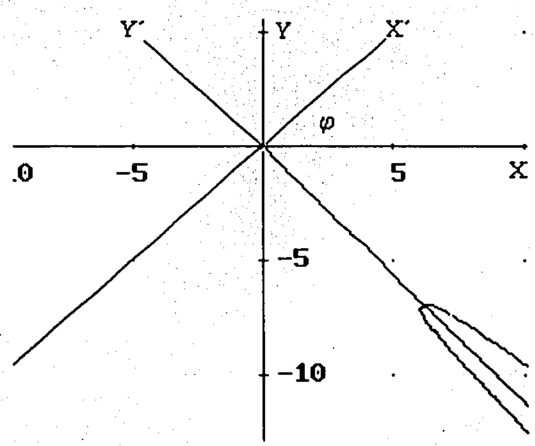
Como el indicador es cero, la ecuación dada representa a una parábola.

Como A = C, el ángulo de rotación $\varphi = 45^\circ$ ya que:

$$tan2\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{4}{2-2} = \frac{4}{0} = \infty$$

$$2\varphi = Ang.tan(\infty) = 90^\circ$$

$$\varphi = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$



2. Hallar la ecuación de la elipse $2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 + \sqrt{3}x + y - 10 = 0$ **sin el término xy.**

Se sabe que al obtener la ecuación de la elipse sin el término xy, entonces se debe expresar la ecuación en un sistema de ejes cartesianos x'y', rotado al respecto al sistema xy.

Las ecuaciones de transformación son:

$$x = x' \cos\varphi - y' \operatorname{sen}\varphi$$
$$y = x' \operatorname{sen}\varphi + y' \cos\varphi$$

Como φ representa al ángulo de rotación del nuevo sistema coordenado, dado por:

$$tan 2\varphi = \frac{B}{A-C} = \frac{\sqrt{3}}{2-1} = \sqrt{3}$$
$$2\varphi = Ang.tan(\sqrt{3}) = 60^\circ$$
$$\varphi = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

Sustituyéndose $\varphi = 30^\circ$ en el sistema de transformación de coordenadas bajo una rotación , se tiene:

$$x = x' \cos 30^\circ - y' \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y'$$
$$y = x' \operatorname{sen} 30^\circ + y' \cos 30^\circ = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y'$$

Substituyéndose las ecuaciones anteriores en la expresión de la elipse dada por el problema, se tendrá:

$$2x^2 + \sqrt{3}xy + y^2 + \sqrt{3}x + y - 10 = 0$$
$$2(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y')^2 + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y')(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y') + (\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y')^2 + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}x' - \frac{1}{2}y') +$$
$$(\frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y') - 10 = 0$$
$$2(\frac{3}{4}x'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x'y' + \frac{1}{4}y'^2) + \sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{4}x'^2 + \frac{3}{4}x'y' - \frac{1}{4}x'y' - \frac{\sqrt{3}}{4}y'^2) +$$
$$(\frac{1}{4}x'^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}x'y' + \frac{3}{4}y'^2) + \frac{3}{2}x' - \frac{\sqrt{3}}{2}y' + \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{3}}{2}y' - 10 = 0$$

Simplificando se tiene :

$$\frac{5}{2}x'^2+\frac{1}{2}y'^2+2x'y'-10=0$$ Multiplicandose por dos se tiene :

$$5x'^2+y'^2+4x'-20=0$$

$$5(x'^2+\frac{4}{5}x)+y'^2-20=0$$

$$5(x'+\frac{2}{5})^2+(y'+0)^2=20+\frac{16}{20}$$

$$5(x'+\frac{2}{5})^2+(y'+0)^2=\frac{104}{5}$$

$$\frac{5(x'+\frac{2}{5})^2}{\frac{104}{5}}+\frac{(y'+0)^2}{\frac{104}{5}}=1$$

$$\frac{(x'+\frac{2}{5})^2}{\frac{104}{25}}+\frac{(y'+0)^2}{\frac{104}{5}}=1$$

Nótese que el centro de la elipse se localiza en el punto $\left(\frac{2}{5},0\right)=(.4,0)$ del sistema de ejes x' y', además se aprecia que el eje focal es paralelo al eje y', ya que la ecuación final es del tipo: $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Por comparación se tiene:

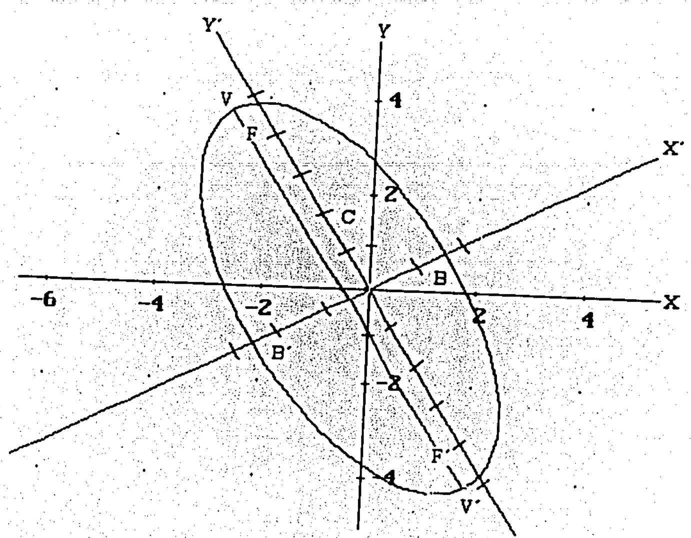
$$a^2=\frac{104}{25}=4.16\Rightarrow a=2.03,$$

$$b^2=\frac{104}{5}=20.8\Rightarrow b=4.56$$

$$c^2=a^2-b^2=\frac{416}{25}\Rightarrow c=4.07$$

Las coordenadas de los vértices y focos son:

V(h, k + a) = V (-0 .4, 4.56) V'(h, k - a) = V'(-0.4, -4.56)
F (h, k + c) = F (-.4, 4.07) F'(h, k – c) = F'(-0.4, -4.07)
B (h + b, k) = B (1.6, 0) B'(h - b, k) = B'(-2.4, 0)



EJERCICIOS:

1. Construir las hipérbolas cuyas ecuaciones son:
   a) $4x^2 - 25y^2 = 100$
   b) $9y^2 - 6x^2 = 144$

   Situar los focos, calcular las longitudes de los ejes y trazar sus asíntotas.

2. Sean la hipérbolas:
   a) $x^2 - 2y^2 + 4x + 4y + 4 = 0.$
   b) $x^2 - y^2 + 3x - y + 8 = 0$
   c) $x^2 - y^2 + 4x - 4y + 16 = 0$

   Determinar su centro, focos, lado recto, vértices, excentricidad, asíntotas y trazar su gráficas.

3. Dada la ecuación de la hipérbola $16x^2 - 9y^2 + 64x + 8y - 89 = 0$, determinar sus elementos y trazarla.

4. Hallar el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de la distancia a los puntos fijos (-6,-4) y (2, -4) es igual a 6.

5. Hallar las coordenadas de los vértices y focos, así como la excentricidad de la hipérbola que es conjugada a la que tiene por ecuación $9x^2 - 4y^2 = 36$.

6. Dada la Ecuación General, sin el término Bxy determinar qué lugar geométrico se trata:

   a) $9x^2 - 4y^2 + 18x + 6y - 43 = 0$
   b) $x^2 - x = -y^2 + y$
   c) $3x^2 + 3y^2 + 4x = 1$
   d) $x^2 - y^2 - 2x - 6y = 8$
   e) $3x^2 + 3y^2 + 6x - 12y + 6 = 0$
   f) $y - x^2 + 2x - 3 = 0$
   g) $5x^2 + 2y^2 - 10x = -4y + 7$
   h) $-3x^2 - 2y^2 + 6x = 8y + 1$

7. En las ecuaciones siguientes, determinar que cónica representa cada ecuación
   a) $4x^2 - 24xy + 11y^2 + 56x - 58y + 95 = 0$
   b) $7x^2 + 18x - 2xy + 7y^2 - 9 = 30y$
   c) $8x^2 + 40x - 80y + 200 = -2y^2 - 8xy$

8. Haciendo girar los ejes de coordenadas un ángulo de 45°
   a) $x^2 + xy + y^2 = 1$, probar que la ecuación representa una elipse.
   b) $x^2 + 4xy + y^2 = 4$, decir que cónica representa.

RESPUESTAS

1. a) C(0, 0), V(5, 0), V´(-5, 0), F(5.38, 0), F´(-5.38, 0); las Asíntotas son: $2x - 5y = 0$, $2x + 5y = 0$

b) C(0, 0), V(0, 4), V′(0, -4), F(0, 5), F′(0, -5); las Asíntotas son: $3y - 4x = 0$, $3y + 4x = 0$

2. a) C(-2, 1), V(-2, 2), V′(-2, 0), F(-2, 2.73), F′(-2, -0.73);
las Asíntotas son: $x + 1.41y + 0.58 = 0$; $x - 1.41y + 3.41 = 0$.
b) C(-1.5,- 0.5), V(-1.5, 1.94), V′(-1.5, -2.94), F(-1.5, 2.96), F′(-1.5, -4.46)
c) C(-2, -2), V(-2, 2), V′(-2, -6), F(-2, 3.65), F′(-2, -7.65)

3. C(-2, 1), V(1, 1), V′(-5, 1), F(3, 1), F′(-7, 1); LR = 10.66;Eje transverso = 6, Eje conjugado = 8, Sus Asíntotas: $4x + 3y + 5 = 0$, $4x - 3y + 11 = 0$

4. $y^2 + 8y - 4x + 20 = 0$ (Parábola)

5. C(0, 0), V(0, 3), V′(0, -3), F(0, 3.6), F′(0, -3.6), B(2, 0), B′(-2, 0); Sus Asíntotas son:
$3x - 2y = 0$; $3x + 2y = 0$

6. a) Hipérbola ($A \neq C$; Diferente Signo)
b) Circunferencia ($A = C$; Igual Signo)
c) Circunferencia ($A = C$; Igual Signo)
d) Hipérbola ($A = C$; Diferente Signo)
e) Circunferencia ($A = C$; Igual Signo)
f) Parábola ($C = 0$, $A \neq 0$, $E \neq 0$; Igual Signo)
g) Elipse ($A \neq C$; Igual Signo)
h) Elipse ($A \neq C$; Igual Signo)

7. a) $B^2 - 4AC = 400 > 0$ Hipérbola
b) $B^2 - 4AC = -192 < 0$ Elipse
c) $B^2 - 4AC = 0$ Parábola

8. $\dfrac{x'^2}{\frac{2}{3}} + \dfrac{y'^2}{4} = 1$

9. $\dfrac{x'^2}{\frac{4}{3}} - \dfrac{y'^2}{4} = 1$; Es una hipérbola

COMENTARIOS

El principal objetivo por el cuál fue elaborado el presente trabajo de tesis es que los estudiantes del tercer semestre de bachillerato, cuenten con un material de apoyo en curso de Geometría Analítica acorde al programa de estudio.

Una de las dificultades que se presentan en la elaboración de este texto es contar con un programa tan ambicioso y muy poco el tiempo para impartir el curso, por ello se trata de desarrollar los temas de la manera más sencilla y accesible, contando con una buena cantidad de ejemplos y auxiliándonos en la gráficas para mejorar el entendimiento de los mismos. Además de contar con bastantes ejemplos a lo largo del texto, que tienen por finalidad el reforzar los conocimientos adquiridos previamente.

Este trabajo tiene la peculiaridad de poder complementarse con otras bibliografías para el enriquecimiento de los temas.

Para aquellos profesores que utilicen esta tesis con los estudiantes le facilitará la didáctica de los temas.

Otro propósito por el cuál fue creado esta tesis, es el que proporcione la habilidad y prerrequisitos matemáticos; despertando el interés en la materia y por que no influir de alguna manera a que el estudiante se incline por una de las carreras en el área físico matemático.

BIBLIOGRAFÍA.

1. Lehmann Charles H. " Geometría Analítica". Limusa, México, 1997.

2. Eugenio Filloy. Y Fernando Hitt. " Geometría Analítica". Grupo Editorial Iberoamérica, México, 1997.

3. Elena de Oteyza. et al. "Geometría Analítica". Prentice Hall, México, 1994.

4. J. Stewart, et al. " Precálculo". International Thomsom Editores, México, 2001.

5. Ortiz Campos. "Matemáticas-4". Publicaciones Cultural, México, 1999.

6. López Quiles. et al. "Relaciones y Geometría Analítica". Ed. Alambra, México, 1995.

7. Swokowski, E. "Calculo con Geometría Analítica". Limusa, México, 1984.