



01183 TS
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería

**SOBRE LA CONDICIÓN DE RADIACIÓN NO LINEAL
EN EL DRENAJE AGRÍCOLA SUBTERRÁNEO**

M. I. MANUEL ZAVALA TREJO

TESIS

PRESENTADA COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN INGENIERÍA (HIDRÁULICA)

Director de tesis: Dr. Carlos Fuentes Ruiz

CUERNAVACA, MOR.

2003

1

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

PAGINACIÓN DISCONTINUA

AGRADECIMIENTOS

Agradezco al Dr. Carlos Fuentes Ruiz, director de este trabajo, su amistad y paciencia.

Agradezco al Dr. Waldo Ojeda Bustamante por el apoyo incondicional proporcionado en el transcurso de este trabajo.

Agradezco las sugerencias y comentarios a este trabajo de los sinodales:

Dr. Jaime Collado Moctezuma

Dr. Benjamín de León Mojarro

Dr. Luis Rendón Pimentel

Dr. Hermilo Ramírez León

Dr. Víctor Manuel Ruiz Carmona

A la Universidad Nacional Autónoma de México.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico otorgado para realizar mis estudios.

DEDICATORIA

Con profundo cariño y respeto a mis padres:

Manuel y Ana María

ÍNDICE GENERAL

	Pág.
INTRODUCCIÓN	1
Objetivos	3
CAPÍTULO I. PLANTEAMIENTO GENERAL	5
1.1. Escala macroscópica	6
1.1.1. Flujo de agua en el suelo	6
1.1.2. Representación analítica de las características hidrodinámicas.	9
a) Características hidrodinámicas de Fujita y Parlange.	10
b) Características hidrodinámicas de van Genuchten y Brooks y Corey	11
1.1.3. Condición inicial y condiciones en la frontera excepto en el dren	12
a) Condición inicial	12
b). Condiciones de frontera excepto en el dren	13
1.1.4. Condición de frontera en el dren (Ω)	13
a) Aproximaciones clásicas	13
a.1.) Drenes asimilados como puntos	14
a.2.) Representación geométrica de los drenes	19
b) La condición de radiación lineal de Newton en los drenes	21
1.1.5. Flujo de agua en el dren	22
1.2. Escala megascópica	24
1.2.1. Ecuación de Boussinesq	24
1.2.2. Aproximaciones clásicas	28
a) Porosidad drenable	29
a.1) Modelos empíricos	30
a.1.1.) Hipótesis: $\mu(H) \equiv v(H)$	30
a.1.2.) Gupta <i>et al.</i> (1994)	32
a.1.3.) Limitaciones de los modelos empíricos	33
a.2) Modelos mecanicistas ($\mu(H) \equiv v(H)$)	33
a.2.1) Tipo Fujita	33
a.2.2) Tipo capacidad de almacenamiento	34
a.2.3) Limitaciones de los modelos mecanicistas	34
b) Condiciones de frontera en los drenes	34
b.1.) La condición de Dirichlet	35
b.1.1) Fórmula de Hooghoudt (1940)	35

b.1.2) Solución de Glover-Dumm (1954)	38
b.2.) La condición de radiación lineal de Newton en los drenes	39
1.2.3. Las variables a investigar en la escala de Boussinesq	42
CAPITULO II. DRENAJE DE COLUMNAS DE SUELOS INICIALMENTE SATURADOS	43
2.1. Planteamiento del problema	44
2.2. Solución numérica de la ecuación de Richards unidimensional	46
2.3. Validación de la solución numérica.	48
2.4. Experimentos en laboratorio.	55
2.4.1. La porosidad total y la curva granulométrica	55
2.4.2. Prueba de infiltración	58
2.4.3. Prueba de drenaje	60
2.5. La radiación en el drenaje de una columna de suelo	64
2.5.1. Coeficiente de resistencia constante: La condición de radiación lineal	65
2.5.2 Coeficiente de resistencia variable: La condición de radiación no lineal	67
2.6. La condición de radiación no lineal en el drenaje de columnas de suelos de características hidráulicas contrastantes.	73
CAPITULO III. MODELACIÓN DE LA TRANSFERENCIA DE AGUA EN SISTEMAS DE DRENAJE AGRÍCOLA SUBTERRÁNEOS CON LA ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL	79
3.1. Planteamiento del problema	79
3.2. Calculo del radio hidráulico en un dren circular	81
3.3. Solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional	85
3.4. Experimento de drenaje en laboratorio	88
3.5. Aplicación de la condición de radiación no lineal	92
3.6. Comparación de la condición de radiación no lineal con aproximaciones reportadas en la literatura	96
3.6.1. Condición de superficie de filtración (Neuman, 1973)	96
3.6.2. Solución de Kirkham (1949)	98
CAPITULO IV. MODELACIÓN DE LA TRANSFERENCIA DE AGUA EN SISTEMAS DE DRENAJE AGRÍCOLA SUBTERRÁNEOS CON LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ UNIDIMENSIONAL	105
4.1. Planteamiento del problema	106

4.2. Capacidad de almacenamiento y porosidad drenable	108
4.3. La condición de radiación en los drenes	111
4.3.1. Coeficiente de resistencia constante (radiación lineal)	111
4.3.2. Coeficiente de resistencia variable (radiación no lineal)	112
a) Combinación convexa	112
b) Radiación no lineal fractal	113
4.4. Una solución de elemento finito de la ecuación de Boussinesq unidimensional	116
4.5. Validación de la solución de elemento finito de la ecuación de Boussinesq unidimensional	118
4.5.1. Régimen transitorio	118
4.5.2. Régimen permanente	120
4.6. Verificación de las hipótesis clásicas usadas en el drenaje agrícola	122
4.7. Aplicación de una fórmula para la capacidad de almacenamiento o porosidad drenada	123
4.8. Aplicación de la condición de radiación lineal de Newton	124
4.9. Aplicación de la condición de radiación no lineal	125
CAPITULO V. DESCRIPCIÓN DE LAS TRANSFERENCIAS DE MASA Y ENERGÍA EN SISTEMAS DE DRENAJE AGRÍCOLA SUBTERRÁNEOS	131
5.1. Planteamiento	131
5.2. Problemas directos	133
5.2.1. Modelación del experimento de drenaje de laboratorio.	133
5.2.2. Modelación del experimento de drenaje de Pandey <i>et al.</i> (1992).	135
5.3. Problema inverso: Cálculo de la separación entre drenes	141
5.3.1. Suelo arena de Tezoyuca	142
5.3.2. Suelo franco-arcilloso de Pandey <i>et al.</i> (1992)	143
CAPITULO VI. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	145
ANEXO I. RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE INFILTRACIÓN Y DE DRENAJE EN COLUMNAS DE SUELOS	147
REFERENCIAS	155

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ÍNDICE DE FIGURAS

	Pág.
1.1. Esquema de un sistema de drenaje agrícola subterráneo.	8
1.2. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional. Corte AA' en la Figura 1.1.	9
1.3. Red requerida en la aproximación de Vimore y Taylor (1962).	14
1.4. Representación esquemática del dominio de solución y del estado del medio poroso considerados en la solución de Kirkham (1949).	16
1.5. Condición de frontera de galería o de superficie de filtración para el caso del drenaje agrícola subterráneo.	20
1.6. Representación esquemática del flujo de agua en un dren	22
1.7. Esquema general de la posición del manto freático.	25
1.8. Esquema de un sistema de drenaje agrícola subterráneo.	28
1.9. Porosidad drenable cuando el nivel freático desciende por drenaje.	29
1.10. Relación entre la porosidad drenable ($\mu = \nu$) y la conductividad hidráulica a saturación K_s , adaptada del Drainage Manual (1994).	30
1.11. Relación entre la porosidad drenable y la carga hidráulica según la ecuación (1.67) con $A = 1.0$ para: $B = 2.0$ (cóncava), $B = 1.0$ (lineal), $B = 0.5$ (convexa).	32
1.12. Relación entre el gasto de drenaje y la carga hidráulica sobre una línea de drenaje (Fuentes <i>et al.</i> , 1997).	39
2.1. Variación del error en función de la discretización espacial en la arena de Tezoyuca, Morelos.	52
2.2. Evolución de la lámina drenada hasta 75 cm de profundidad en la columna de suelo arena de Tezoyuca.	52
2.3. Variación del error en función de la discretización espacial en la arcilla clara Yolo, USA.	53

2.4. Evolución de la lámina drenada hasta 75 cm de profundidad en la columna de suelo arcilla clara Yolo.	53
2.5. Comparación de los perfiles de humedad obtenidos con la solución de elemento finito con los derivados de la solución analítica de Fuentes <i>et al.</i> (1992) para diferentes tiempos de simulación.	54
2.6. Columna de suelo de textura arenosa de la región de Tezoyuca, Morelos	56
2.7. Curva granulométrica de la Arena de Tezoyuca y la función definida por la ecuación (2.30): $D_g = 225 \mu\text{m}$ y $M = 0.5$; $R^2 = 0.9975$.	57
2.8. Prueba de infiltración.	58
2.9 Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con: $\psi_d = -18.5 \text{ cm}$ y $K_s = 18.2 \text{ cm/h}$, con $R^2 = 0.9988$.	59
2.10. Prueba de drenaje.	60
2.11. Histéresis capilar en la característica de humedad. Las curvas son representadas por la ecuación (1.17) con $\theta_s = 0.45 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $\theta_r = 0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $m = 0.381$; para la infiltración $\psi_d(\text{inf}) = -18.50 \text{ cm}$ y para el drenaje $\psi_d(\text{dren}) = -50.38 \text{ cm}$.	63
2.12. Esquema del drenaje de una columna de suelo.	64
2.13. La posición de la superficie libre en función de la presión del agua en la base de la columna proporcionada por la ecuación (2.46), con $P = 75 \text{ cm}$ y $q_o/K_s = \frac{1}{2}$.	66
2.14. Comparación de la lámina drenada medida con la lamina drenada calculada con: a) $q_o/K_s = \frac{1}{2}$ ($R_{in} \cong 20,000 \text{ s}$) y b) $q_o/K_s = \frac{1}{2}$ ($R_{in} \cong 25,000 \text{ s}$).	67
2.15. Variación obtenida con la relación (2.52) considerando $a = b = 1$ y diferentes valores del flujo característico $q_o = q_o/K_s$.	69
2.16. La posición de la superficie libre en función de la presión del agua en la base de la columna proporcionada por la ecuación (2.49), con $P = 75 \text{ cm}$, $a = b = 1$ y $q_o/K_s \cong 1$.	70

2.17. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1$ y $q_0/K_s \cong 1$.	71
2.18. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1.85$ y $q_0/K_s = 4.3$ ($R^2 = 0.9948$).	72
2.19. La posición de la superficie libre en función de la presión del agua en la base de la columna proporcionada por la ecuación (2.49), con $P = 75$ cm, $a = b = 1.85$ y $q_0/K_s = 4.3$.	72
2.20. Pruebas de infiltración y de drenaje en columnas de suelos.	73
2.21. Relación entre el parámetro "a" de la condición de radiación no lineal (2.47) y la dimensión cociente del suelo "s" (2.23).	75
2.22. Evoluciones de las láminas drenadas por la arena de Tezoyuca descritas con la condición de radiación no lineal (ecuación 2.47) para diferentes valores de a, b y q_0 .	76
3.1. Sistema de drenaje experimental.	80
3.2. Tubería circular parcialmente llena con agua.	82
3.3. Sobre el radio hidráulico.	85
3.4. Sistema de drenaje subterráneo experimental.	89
3.5.a. Saturación del suelo del módulo de drenaje.	90
3.5.b. Avance del frente de humedad.	90
3.6. Descripción de la lámina infiltrada experimental con la ecuación de Richards y las características hidrodinámicas de van Genuchten - Brooks y Corey. Valores de los parámetros: $\theta_s = 0.539$, $m = 0.373$, $\eta = 3.767$, $\psi_d = -17.5$ cm y $K_s = 18.3$ cm/h; $R^2 = 0.9926$.	91
3.7. Malla de elementos finitos.	92
3.8. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con	

- $a = b = 1.88$ y $q_0/K_s = 300$: $R^2 = 0.9937$ (Arena de Tezoyuca). 93
- 3.9. Equipotenciales, campo de velocidades y posición de la superficie libre a un minuto de iniciado el drenaje del suelo arena de Tezoyuca. Las magnitudes extremas de la velocidad de Darcy son $q_{\min} = 6.08 \times 10^{-5}$ cm/s y $q_{\max} = 1.87 \times 10^{-2}$ cm/s. 94
- 3.10. Equipotenciales, campo de velocidades y posición de la superficie libre a los 15 minutos de iniciado el drenaje del suelo arena de Tezoyuca. Las magnitudes extremas de la velocidad de Darcy son $q_{\min} = 4.71 \times 10^{-5}$ cm/s y $q_{\max} = 1.48 \times 10^{-2}$ cm/s. 94
- 3.11. Equipotenciales, campo de velocidades y posición de la superficie libre a una hora de iniciado el drenaje del suelo arena de Tezoyuca. Las magnitudes extremas de la velocidad de Darcy son $q_{\min} = 2.29 \times 10^{-5}$ cm/s y $q_{\max} = 1.04 \times 10^{-2}$ cm/s. 95
- 3.12. Equipotenciales, campo de velocidades y posición de la superficie libre a las 12 h de iniciado el drenaje del suelo arena de Tezoyuca. Las magnitudes extremas de la velocidad de Darcy son $q_{\min} = 5.48 \times 10^{-7}$ cm/s y $q_{\max} = 1.09 \times 10^{-3}$ cm/s. 95
- 3.13. Evolución teórica del tirante en el dren calculada con $J = 0.001$, $d = 0.54$ y $\kappa \cong 9.83$. 96
- 3.14. Evolución de la lámina drenada calculada con la condición de radiación no lineal (3.1) y evolución de la lámina drenada descrita con la condición de superficie de filtración (Neuman, 1973). 97
- 3.15. Evolución del manto freático calculada con la condición de radiación no lineal (3.1) y evolución descrita con la condición de superficie de filtración (Neuman, 1973). 98
- 3.16. Evolución de la lámina drenada calculada con la condición de radiación no lineal y evolución calculada con la solución de Kirkham (ecuación 3.32) suponiendo que la circunferencia del dren es completamente permeable: $r_e = r_o = 2.5$ cm. 100
- 3.17. Evolución de la lámina drenada calculada con la condición de radiación no lineal y evolución calculada con la solución de Kirkham para un radio efectivo de $r_e = 0.3$ cm. 102
- 4.1. Representación esquemática de la columna de suelo que se ubica encima del dren 113

4.2. Evolución de la superficie libre obtenida con la solución de elemento finito y evolución calculada con la solución analítica (1.94).	119
4.3. Evolución de la lámina drenada obtenida con la solución de elemento finito y evolución calculada con la solución analítica (1.98).	120
4.4. La solución de elemento finito en régimen transitorio tiende a la solución analítica en régimen permanente cuando $t \rightarrow \infty$.	121
4.5. Evolución de la lámina drenada experimental y la lámina drenada calculada con la solución de elemento finito considerando: la transmisibilidad definida por la ecuación (4.2), la porosidad drenable constante ($\mu = \bar{v} \cong 0.20 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$) y condiciones de Dirichlet homogéneas en los drenes ($h_o(t) = 0$).	123
4.6. Evolución de la lámina drenada experimental y evolución de la lámina drenada calculada con la solución de elemento finito considerando: la transmisibilidad definida por la ecuación (4.2), la fórmula para la porosidad drenada (4.18) e imponiendo condiciones de Dirichlet homogéneas en los drenes ($h_o(t) = 0$).	124
4.7. Evolución de la lámina experimental y la lámina calculada con la solución de elemento finito con la transmisibilidad (4.2), la porosidad drenada (4.18) y las condiciones de radiación (4.8.1) y (4.8.2.) para el coeficiente de resistencia (4.20): $R^2 = 0.9852$.	125
4.8. Evolución de la lámina drenada experimental y evolución de la lámina drenada calculada con la solución de elemento finito considerando la transmisibilidad y la porosidad drenada definidas respectivamente por las ecuaciones (4.2) y (4.18) y la condición de radiación no lineal (4.33).	126
4.9. Evolución de la lámina drenada obtenida con la condición de radiación no lineal y evoluciones obtenidas con la combinación convexa (4.23) considerando diferentes valores del factor de ponderación ω .	129
5.1. Evoluciones teóricas de la lámina drenada del sistema experimental relleno con arena de Tezoyuca.	134
5.2. Evoluciones teóricas de la superficie libre a la mitad de separación entre drenes en el módulo de drenaje experimental relleno con arena de Tezoyuca.	134

5.3. Sistema de drenaje experimental de Pandey <i>et al.</i> , 1992 (acotaciones en cm).	135
5.4. Ajuste de la curva granulométrica experimental del suelo franco arcilloso de Pandey <i>et al.</i> con la ecuación (2.31) para $M = 0.105$ y $D_g = 1050 \mu\text{m}$: $R^2 = 0.9918$	136
5.5. Malla elementos finitos.	138
5.6. Evoluciones del volumen de agua evacuado por el dren descritas con la ecuación de Richards y con la ecuación de Boussinesq.	139
5.7.a.) Comparación de la evolución experimental del manto freático con las evoluciones descritas con la ecuación de Richards y con la ecuación de Boussinesq a 50 cm del centroide del dren.	140
5.7.b.) Comparación de la evolución experimental del manto freático con las evoluciones descritas con la ecuación de Richards y con la ecuación de Boussinesq a 220 cm del centroide del dren.	140
5.7.c.) Comparación de la evolución experimental del manto freático con las evoluciones descritas con la ecuación de Richards y con la ecuación de Boussinesq a 433 cm del dren.	141
5.8. Evoluciones teóricas de la superficie libre a la mitad de separación entre drenes calculadas con la ecuación de Richards bidimensional para una separación entre drenes de 100 cm y con la ecuación de Boussinesq unidimensional para una separación entre drenes de 49 cm	142
5.9. Evoluciones de la superficie libre a la mitad de separación entre drenes calculadas con la ecuación de Richards bidimensional para una separación entre drenes de 926 cm y con la ecuación de Boussinesq unidimensional para una separación entre drenes de 600 cm.	143
I.1. Curva granulométrica de la Arena de Cuaculan y la función definida por la ecuación (2.18): $D_g = 675 \mu\text{m}$ y $M = 0.325$ ($R^2 = 0.9933$).	148
I.2 Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con: $\psi_d = -19.5$ cm y $K_s = 7.6$ cm/h ; $R^2 = 0.9979$ (arena de Cuaculan).	148
I.3. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con	

$a = b = 1.5$ y $q_o/K_s = 2.74$; $R^2 = 0.9884$ (arena de Cuaculan).	149
I.4. Curva granulométrica del suelo Sta. María y la función definida por la ecuación (2.18): $D_g = 415 \mu\text{m}$ y $M = 0.127$ ($R^2 = 0.9699$).	149
I.5. Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con: $\psi_d = -45.5$ cm y $K_s = 0.51$ cm/h; $R^2 = 0.9991$ (suelo Sta. María).	150
I.6. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1.4$ y $q_o/K_s = 1.28$; $R^2 = 0.9987$ (suelo Sta. María).	150
I.7. Curva granulométrica del suelo La pintura y la función definida por la ecuación (2.18): $D_g = 500 \mu\text{m}$ y $M = 0.095$ ($R^2 = 0.9793$).	151
I.8. Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con: $\psi_d = -51.0$ cm y $K_s = 0.06$ cm/h; $R^2 = 0.9993$ (La Pintura).	151
I.9. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1.40$ y $q_o/K_s = 2.35$; $R^2 = 0.9971$ (La. Pintura).	152
I.10. Curva granulométrica de la arcilla de Progreso y la función definida por la ecuación (2.18): $D_g = 400 \mu\text{m}$ y $M = 0.13$; $R^2 = 0.9965$.	152
I.11. Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con: $\psi_d = -42.5$ cm y $K_s = 0.11$ cm/h; $R^2 = 0.9997$ (suelo de Progreso).	153
I.12. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1.3$ y $q_o/K_s = 2.0$; $R^2 = 0.9899$ (suelo Progreso).	153

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

ÍNDICE DE TABLAS

	Pág.
2.1. Parámetros de las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange para dos suelos contrastantes.	51
2.2. Parámetros hidráulicos de cuatro suelos de textura contrastante.	74
2.3. Parámetros de la condición de radiación no lineal (ecuación 2.47).	74
1.1. Características físicas de las columnas de suelo.	147
1.2. Condición inicial y condición de frontera superior en las pruebas de infiltración.	147

INTRODUCCIÓN

En los distritos de riego que se ubican en las zonas áridas y semi-áridas de México se han detectado aproximadamente medio millón de hectáreas de terrenos agrícolas con problemas de ensalitramiento progresivo y de mantos freáticos someros (Fuentes y Saucedo, 1999). Una alternativa para reincorporar a la actividad productiva estos terrenos es la construcción de sistemas de drenaje agrícola subterráneo, los cuales abaten los mantos freáticos y remueven las sales contenidas en el perfil del suelo. A la fecha aproximadamente treinta y cuatro mil hectáreas disponen de sistemas drenaje agrícola subterráneo, estos sistemas han contribuido de manera sustancial a aumentar el rendimiento de los cultivos. Es innegable entonces la importancia del estudio de la dinámica del agua en este tipo de sistemas de drenaje.

Un estudio riguroso de las transferencias de masa y energía que ocurren en los sistemas de drenaje agrícola subterráneos requiere que estos procesos sean descritos mediante ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Dicho estudio puede ser abordado a dos escalas de análisis diferente, la escala macroscópica donde las transferencias de agua en el suelo son descritas por la ecuación de Richards y la escala megascópica donde las transferencias son descritas por la ecuación de Boussinesq. En la primera escala de análisis la velocidad promedio del agua en el suelo se calcula con la ley de Darcy mientras que en la segunda la velocidad media se calcula con la ley de Darcy promediada. El análisis a la escala macroscópica es recomendable cuando se desea realizar una descripción detallada de los procesos de transferencia de agua que ocurren en los sistemas de drenaje, mientras que el estudio a la escala megascópica es recomendable cuando sólo se desea realizar un descripción global de estos procesos.

El análisis de las transferencias de agua en la capa subsuperficial del suelo para fines de drenaje agrícola con la ecuación de Richards (1931) se ha visto limitado principalmente por tres causas: 1) la naturaleza tridimensional del movimiento del agua en los sistemas de drenaje; 2) la dificultad que presenta la estimación de los parámetros que intervienen en las características hidrodinámicas del suelo; y 3) el poco conocimiento que se tiene del tipo de condición de frontera que debe usarse en el dren para describir la transferencia de agua del suelo hacia el interior de éste.

La problemática asociada con la obtención de una solución numérica de la ecuación tridimensional de Richards puede ser salvada aproximadamente si se acepta la hipótesis de que las características principales de los sistemas de drenaje son bien representadas con la aplicación de la ecuación bidimensional de Richards a un corte transversal de suelo. Sin embargo el problema de la caracterización hidrodinámica y de la condición de frontera en el dren permanece abierto.

La aproximación más usada en la literatura para describir la transferencia de agua del suelo al interior del dren consiste en considerar la circunferencia de éste como una superficie de filtración (Neuman, 1973; Zaradny y Feddes, 1979; Fipps *et al.*, 1986; Saucedo *et al.*, 2002). En dicha aproximación se impone una condición tipo Dirichlet homogénea sobre el segmento de circunferencia del dren que esté en contacto con suelo saturado y en el segmento que está en contacto con suelo no saturado, se impone una condición tipo Neumann con flujo nulo. El uso de la condición tipo Dirichlet implica que la resistencia en la interfaz suelo-atmósfera es nula mientras que el uso de la condición tipo Neumann implica que es infinita. En la realidad el comportamiento de la resistencia en la interfaz suelo-dren no corresponde al descrito con la aproximación de superficie de filtración, ya que esta resistencia evoluciona de manera gradual probablemente en función de las presiones existentes en la vecindad del dren, tanto en el suelo como en el interior del tubo, y no como una función delta de Dirac.

Una mejor descripción de las transferencias de masa y energía del suelo hacia el dren puede ser realizada considerando la condición de radiación de Newton, la cual establece que el flujo de drenaje es proporcional a la diferencia de presiones existentes en la vecindad del dren, siendo la constante de proporcionalidad el coeficiente de resistencia de la interfaz suelo-dren. Este tipo de condición de frontera contiene como caso particular la condición de superficie de filtración reportada en la literatura. Sin embargo la aplicación de la condición de radiación presenta un problema, el desconocimiento de la forma funcional del coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-dren.

Debido a las dificultades que presenta el uso de la ecuación de Richards, el estudio de la transferencia de agua en los sistemas de drenaje es principalmente abordado con la ecuación de Boussinesq (1904). A partir de esta ecuación se han obtenido fórmulas simples para calcular la separación entre drenes, ya sea considerando régimen de flujo permanente (Hooghoudt, 1940; Ernst, 1950) o analizando el problema transitorio (Dumm, 1954; Van Schilfgaarde *et al.*, 1956; Fuentes *et al.*, 1997). Sin embargo estas relaciones se han derivado suponiendo que algunos de los coeficientes de la ecuación de Boussinesq son constantes, como por ejemplo la capacidad de almacenamiento y la transmisibilidad del acuífero (Dumm, 1954; Van Schilfgaarde *et al.*, 1956; Fuentes *et al.*, 1997) y utilizando condiciones de frontera simplificadas en los drenes, carga nula sobre los drenes (Hooghoudt, 1940; Dumm, 1954; Van Schilfgaarde *et al.*, 1956). Bien que en la práctica estas fórmulas han sido aplicadas con éxito al diseño de sistemas de drenaje, teóricamente las transferencias de agua del suelo al dren son mal representadas con estas relaciones.

Recientemente se han presentado resultados experimentales y teóricos donde se muestra que los supuestos referentes a la carga nula sobre el dren y a la forma funcional de la capacidad de almacenamiento son físicamente incorrectos (Namuche *et al.*, 1996; Fuentes *et al.*, 1997; González *et al.*, 1997). En consecuencia en este enfoque existe incertidumbre sobre el

comportamiento de la capacidad de almacenamiento y sobre el tipo de condición de frontera que debe imponerse en los drenes.

Las limitaciones encontradas en cada una de las escalas de análisis de los procesos de transferencia de agua en sistemas de drenaje agrícola subterráneos motivan el planteamiento de los siguientes objetivos en este trabajo:

1. Estudiar desde un punto de vista teórico y experimental el proceso de drenaje subterráneo de los suelos para determinar la forma de la condición de frontera que mejor describa la transferencia de agua del suelo hacia los drenes, considerando las ecuaciones de Richards y de Boussinesq. En ambas escalas de estudio se investiga el uso de condiciones de frontera tipo radiación en los drenes.
2. Comparar las transferencias de masa y energía descritas con las ecuaciones de Richards bidimensional y de Boussinesq unidimensional, usando en los drenes las condiciones de frontera previamente determinadas.

El material que se presenta en este trabajo se distribuye de la siguiente manera:

En el capítulo I se presentan las relaciones fundamentales que describen las transferencias de masa y energía en los sistemas de drenaje agrícola subterráneos. Primeramente se presentan la ecuación de Richards, las representaciones analíticas de sus coeficientes y las condiciones límites a las que se ha sujetado clásicamente esta ecuación para describir el fenómeno del drenaje. Posteriormente se plantea la forma en que se abordará la descripción del drenaje en este trabajo, la cual consiste en imponer en el dren una condición de frontera tipo radiación y describir la variación del tirante en el tubo con una ley de resistencia. Enseguida se presentan la ecuación de Boussinesq, las aproximaciones clásicas para sus coeficientes y las condiciones de frontera que tradicionalmente se han impuesto en el dren. Se identifican las variables a estudiar en este enfoque, siendo éstas la forma de la capacidad de almacenamiento y la condición de frontera en el dren.

En el capítulo II se estudia teórica y experimentalmente el drenaje de una columna de suelo inicialmente saturado a la atmósfera para obtener la forma del coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-dren durante la fase de recesión del manto freático. En laboratorio el dren es representado por una placa porosa colocada en la parte inferior de una columna de suelo y la caracterización hidrodinámica del suelo es realizada con un método basado en su curva granulométrica, su porosidad total y una prueba de infiltración. En este estudio se establece que la relación que describe la transferencia de agua del suelo al interior del dren es una condición de radiación no lineal.

En el capítulo III se aborda la descripción del movimiento del agua en un sistema drenaje subterráneo acoplando la ecuación de Richards bidimensional para el flujo de agua en el suelo con una ley de resistencia para el flujo de agua en el dren. En la frontera del dren se impone la condición de radiación no lineal precedentemente obtenida. Se obtiene una solución numérica de este sistema la cual es aplicada para reproducir un experimento de drenaje hecho en laboratorio. El buen acuerdo entre los resultados teóricos y experimentales muestra la capacidad descriptiva de la condición de radiación no lineal obtenida en este trabajo. Además se comparan los resultados obtenidos con la condición de radiación no lineal con aquellos proporcionados por las condiciones de frontera utilizadas en la literatura, mostrándose que la condición de radiación no lineal proporciona la mejor descripción de la transferencia de agua del suelo al dren.

En el capítulo IV se aborda el estudio de la dinámica del agua en un sistema de drenaje con la ecuación de Boussinesq unidimensional de los acuíferos libres. Primeramente se estudia la capacidad de almacenamiento como función de la posición de la superficie libre y a partir de una conceptualización de lámina drenable y lámina drenada se establece la relación entre la capacidad de almacenamiento y la porosidad drenable. Posteriormente se investiga el uso de una condición de frontera tipo radiación en el dren planteándose diferentes formas funcionales para el coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-dren. Se obtiene una solución numérica de la ecuación de Boussinesq unidimensional la cual es aplicada, previa validación, para reproducir un experimento de drenaje en laboratorio y determinar el comportamiento de la resistencia en la interfaz suelo-dren. Se encuentra que la mejor aproximación a los datos experimentales es obtenida cuando se impone en el dren una condición de radiación no lineal. Se muestra que los supuestos clásicos utilizados en la literatura para modelar eventos transitorios de drenaje con la ecuación de Boussinesq, porosidad drenable constante y carga nula sobre los drenes, son físicamente incorrectos.

La comparación de los resultados proporcionados por la ecuación de Boussinesq unidimensional sujeta a una condición tipo radiación no lineal en los drenes y por la ecuación de Richards bidimensional sujeta a una condición tipo radiación no lineal en la frontera del dren es el objetivo principal del capítulo V. Apoyados en evidencia experimental se muestra que la ecuación de Richards describe de mejor manera las transferencias de masa y de energía que ocurren en los sistemas de drenaje agrícola subterráneos y que la ecuación de Boussinesq subestima la recesión del manto freático.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPITULO I PLANTEAMIENTO GENERAL

En hidrología superficial y en hidrología subterránea es ampliamente reconocida la importancia de la zona no saturada del suelo, dado que es en esta zona donde se desarrolla la parte esencial de los procesos de evapotranspiración, infiltración, drenaje y recarga de los acuíferos. El estudio de estos fenómenos es altamente complejo, dado que se trata de analizar procesos básicamente no lineales que ocurren en un medio propenso a deformarse y cuyas propiedades varían en el tiempo y en el espacio. Para abordar tanto el estudio experimental como la descripción de las transferencias en dicho medio, se pueden considerar tres escalas de análisis diferentes:

Escala microscópica. En esta escala de análisis, que corresponde a cada poro del suelo, la velocidad media del agua o gasto microscópico unitario se estima con la ecuación de Poiseuille, la cual proviene de las ecuaciones de Navier-Stokes, y la presión en cada poro se estima con la ecuación de Laplace. Esta escala de análisis es recomendable para una comprensión fina de los mecanismos fundamentales de los procesos de transferencia.

La escala macroscópica. La complejidad que plantea la definición precisa de la forma geométrica del espacio poroso hace que la descripción microscópica no pueda ser puesta en práctica sin un cambio de escala, cuya etapa esencial consiste en introducir el concepto de volumen elemental representativo, el cual permite establecer una equivalencia entre el medio real disperso y un medio ficticio continuo. En esta escala de análisis, que corresponde a un conjunto de poros de amplia gama de tamaños, la velocidad media en el conjunto de poros llenos con agua o gasto unitario macroscópico se estima con la ley de Darcy, y la presión del agua asociada al conjunto se estima con la propia ley de Laplace aplicada al tamaño de poro mayor; la ecuación de transferencia correspondiente es conocida como ecuación de Richards.

Escala megascópica. En esta escala de análisis, que corresponde a un conjunto de suelos, la velocidad media o gasto unitario megascópico se estima con la ley de Darcy promediada, y la presión del agua es la proporcionada por los piezómetros, la ecuación de transferencia correspondiente es conocida como ecuación de Boussinesq.

En la práctica el análisis del drenaje agrícola puede efectuarse considerando la escala macroscópica o la escala megascópica, dependiendo de los objetivos que se persigan en el estudio. Por ejemplo a la escala de la parcela se puede utilizar la ecuación de Richards para una descripción detallada de las transferencias de agua en un sistema de drenaje, y para una descripción global se puede utilizar la ecuación de Boussinesq. Al nivel de un distrito de riego la aplicación de la ecuación de Richards es limitada principalmente por la cantidad de información

que se necesita para representar la variabilidad espacial de las características hidrodinámicas del suelo y por la extensión misma de la zona en estudio. Esta situación origina que la descripción de las características generales del movimiento del agua a través del suelo sea mayormente realizada a partir de la ecuación de Boussinesq.

1.1. ESCALA MACROSCÓPICA

A la escala macroscópica la descripción de las transferencias de masa y energía en los sistemas de drenaje agrícola subterráneos puede realizarse considerando de manera explícita las zonas saturada y no saturada del suelo así como la profundidad de los drenes y la forma geométrica de los mismos, en consecuencia un estudio detallado de estos procesos debe considerar tanto las condiciones existentes en el medio poroso como las existentes en el dren. Enseguida se presentan las ecuaciones fundamentales que se usan en este trabajo para describir dichos procesos.

1.1.1. Flujo de agua en el suelo

El movimiento del agua a través del suelo puede ser descrito con la ecuación de transferencia que se obtiene al combinar el principio de conservación de masa:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} - S \quad (1.1)$$

y la ley de Darcy generalizada, que relaciona la velocidad del flujo con la pérdida de energía en la dirección del movimiento:

$$\mathbf{q} = -K(\psi)\nabla H \quad (1.2)$$

donde \mathbf{q} es el gasto de agua por unidad de superficie de suelo perpendicular a la dirección del movimiento o flujo de Darcy $[LT^{-1}]$; t es el tiempo; ∇ es el operador gradiente; H es el potencial hidráulico $[L]$, que es igual a la suma del potencial de presión del agua en el suelo (ψ) y el potencial gravitacional, asimilado generalmente a la coordenada z orientada positivamente hacia abajo: $H = \psi - z$; θ es el volumen de agua por unidad de volumen de suelo o contenido volumétrico de agua $[L^3L^{-3}]$, y depende del potencial de presión del agua en el suelo; S es el volumen de agua extraído por las plantas por unidad de volumen de suelo en la unidad de tiempo $[L^3L^{-3}T^{-1}]$; $K(\psi)$ es la conductividad hidráulica del suelo $[LT^{-1}]$, y depende del potencial de

presión del agua en el suelo. $\theta(\psi)$ y $K(\psi)$ son conocidas como las características hidrodinámicas del suelo, y generalmente son relaciones altamente no lineales.

La introducción de (1.2) en (1.1) permite obtener la siguiente ecuación de transferencia:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} - S \quad (1.3)$$

La existencia de la relación $\theta(\psi)$, conocida como la característica de humedad del suelo, permite expresar la ecuación (1.3) en términos de una sola variable dependiente (ψ), con la introducción de la capacidad específica $C(\psi)$:

$$C(\psi) = \frac{d\theta}{d\psi} \quad (1.4)$$

La aplicación de la regla de la cadena al primer término de la ecuación (1.3), considerando la ecuación (1.4), permite establecer la ecuación de transferencia conocida como la ecuación de Richards (1931):

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \nabla \cdot [K(\psi) \nabla \psi] - \frac{dK}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial z} - S \quad (1.5)$$

Childs y Collis-George (1950) suponen que existe la función inversa $\psi(\theta)$, y con la introducción de la difusividad hidráulica definida por:

$$D(\theta) = K(\theta) \frac{d\psi}{d\theta} \quad (1.6)$$

establecen la ecuación de transferencia en su forma Fokker-Planck:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [D(\theta) \nabla \theta] - \frac{dK}{d\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} - S \quad (1.7)$$

Si bien la ecuación de transferencia tipo Fokker-Planck (1.7) es ampliamente considerada en la obtención de soluciones analíticas de problemas relacionados con el flujo del agua en suelos no saturados, esta ecuación diferencial presenta las siguientes limitaciones: 1) no es aplicable en zonas de suelo saturado, ya que para esta condición la difusividad hidráulica es infinita; 2) no

puede ser aplicada en medios heterogéneos porque en este tipo de suelos la función $\theta(\psi)$ es discontinua.

Dada las limitaciones que presenta la aplicación de la ecuación tipo Fokker-Planck (1.7), el estudio de las transferencias de agua en sistemas de drenaje agrícola es abordado clásicamente con la ecuación de Richards (1.5).

El movimiento del agua en el suelo y por tanto en un sistema de drenaje subterráneo es un fenómeno tridimensional (Figura 1.1) motivo por el cual su descripción debe realizarse usando la ecuación (1.5) en tres dimensiones, sin embargo dado el esfuerzo de cómputo que esto significa es conveniente aceptar la hipótesis de que el fenómeno es básicamente bidimensional es decir, que se efectúa en planos perpendiculares a la dirección del dren (corte AA' en la Figura 1.1). Si además se asume que la extracción de agua por las plantas es despreciable ($S = 0$), la ecuación que gobierna el proceso será entonces forma bidimensional de la ecuación (1.5) siguiente:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (1.8)$$

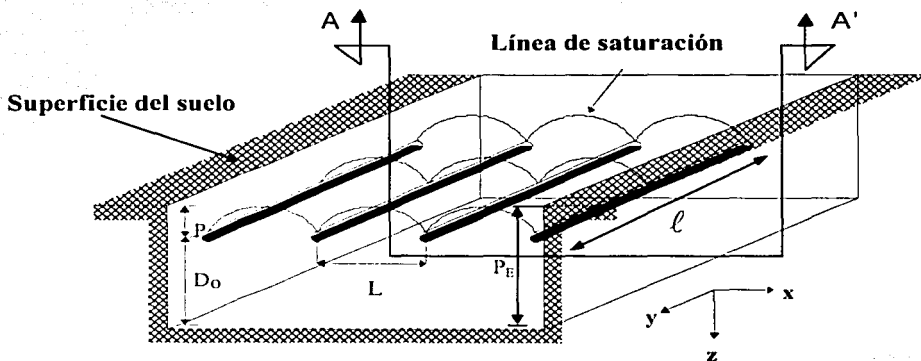


Figura 1.1. Esquema de un sistema de drenaje agrícola subterráneo.

Cuando se tiene un sistema de drenaje con tubos paralelos equidistantes instalados a igual profundidad y se asume que el suelo es homogéneo, es posible definir un dominio de solución para la ecuación (1.8) como el que se muestra en la Figura 1.2.

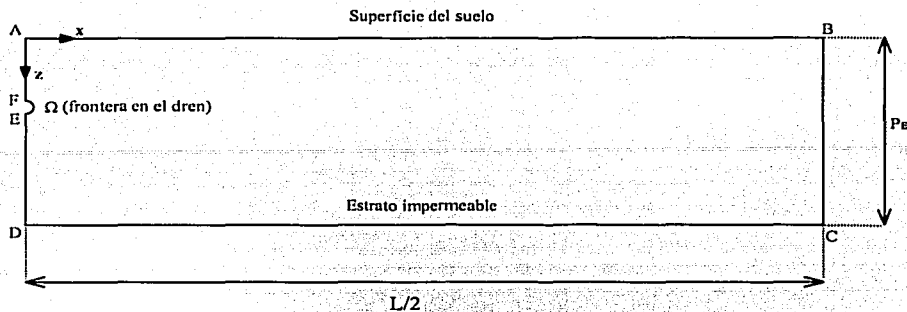


Figura 1.2. Dominio de solución para la ecuación de Richards bidimensional. Corte AA' en la Figura 1.1.

De acuerdo con el dominio de solución definido, el semigasto por unidad de longitud de dren que fluye por la frontera del dren se calcula como:

$$Q_{1/2} = \int_{\Omega} q_d d\Omega \quad (1.9)$$

donde q_d es el flujo de Darcy calculado en cada punto sobre la frontera Ω . El gasto por unidad de longitud de dren será el doble del semigasto evacuado por la frontera Ω y el gasto total, conforme a la hipótesis de que el flujo se da en planos perpendiculares al desarrollo del dren, será proporcionado por el producto de la longitud de las líneas de drenaje (ℓ) y el gasto por unidad de longitud:

$$Q_T = 2 Q_{1/2} \ell \quad (1.10)$$

1.1.2. Representación analítica de las características hidrodinámicas.

La resolución numérica o analítica de la ecuación de Richards (1.5) requiere del conocimiento previo de las propiedades hidráulicas del suelo y de la selección de modelos que relacionen el contenido volumétrico de agua θ con el potencial de presión del agua en el suelo ψ y la conductividad hidráulica K con el contenido volumétrico θ . Fuentes *et al.* (1992) recomiendan usar en casos teóricos el modelo para la difusividad $D(\theta)$ de Fujita (1952) y la relación entre la conductividad $K(\theta)$ y la difusividad $D(\theta)$ de Parlange *et al.* (1982) y en estudios experimentales los modelos propuestos por van Genuchten (1980) para la característica

de humedad y por Brooks y Corey (1964) para la conductividad hidráulica. La recomendación se sustenta en el hecho de que este par de combinaciones de características hidrodinámicas satisfacen las propiedades integrales de la infiltración.

a) Características hidrodinámicas de Fujita y Parlange.

La difusividad de Fujita (1952) se puede escribir como:

$$D(S_c) = \frac{K_s \lambda_c}{\theta_s - \theta_r} \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha S_c)^2} \quad (1.11)$$

donde $S_c = (\theta - \theta_r) / (\theta_s - \theta_r)$ es el grado de saturación; θ_s es el contenido volumétrico de agua a saturación [$L^3 L^{-3}$]; θ_r es el contenido volumétrico residual [$L^3 L^{-3}$]; α es un parámetro de forma que varía entre 0 y 1; λ_c es la escala integral de Bouwer (1964) que se define como:

$$\lambda_c = \frac{1}{K_s} \int_{\theta_r}^{\theta_s} D(\theta) d\theta \quad (1.12)$$

La relación entre la conductividad y la difusividad propuesta por Parlange *et al.* (1982) de acuerdo con Fuentes *et al.* (1992) se define como:

$$\frac{K(S_c)}{K_s} = S_c \left[1 - \beta \frac{\int_0^{S_c} D(\bar{S}_c) d\bar{S}_c}{\int_0^1 D(\bar{S}_c) d\bar{S}_c} \right] \quad (1.13)$$

donde β es un parámetro de forma adimensional ($0 < \beta < 1$).

La introducción de (1.11) en (1.13) permite obtener la siguiente relación para la conductividad hidráulica:

$$K(S_c) = K_s \frac{S_c [1 - \beta + (\beta - \alpha) S_c]}{1 - \alpha S_c} \quad (1.14)$$

La relación entre el potencial de presión ψ y el contenido volumétrico de agua θ se deduce a partir de la definición para la difusividad hidráulica (1.6) considerando (1.11) y (1.14), obteniéndose:

$$\psi(S_e) = \psi_c \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[\frac{1 - \alpha S_e}{(1 - \alpha) S_e} \right] + \frac{\beta - \alpha}{\beta(1 - \beta)} \ln \left[\frac{1 - \beta + (\beta - \alpha) S_e}{(1 - \alpha) S_e} \right] \right\} \quad (1.15)$$

donde $\psi_c = -\lambda_c$.

Es importante señalar que cuando $\alpha = \beta$ se deduce la ecuación de la conductividad en función de la presión propuesta por Gardner (1958): $K(\psi) = K_s \exp(\psi/\lambda_c)$. En este caso se obtiene la función $\theta(\psi)$ de manera explícita, a saber:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha) \exp(\psi/\psi_c)} \quad (1.16)$$

b) Características hidrodinámicas de van Genuchten y Brooks y Corey

El modelo para la característica de humedad de van Genuchten (1980) es:

$$\frac{\theta(\psi) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left[1 + \left(\frac{\psi}{\psi_d} \right)^n \right]^{-m} \quad (1.17)$$

donde ψ_d , m y n son parámetros empíricos.

Van Genuchten (1980) ha utilizado la teoría capilar de Burdine (1953) y el modelo capilar de Mualem (1976a) para estimar la conductividad hidráulica a partir de la curva de retención (1.17) y para obtener formas analíticas cerradas para la conductividad ha impuesto relaciones entre los parámetros m y n . En el modelo de Burdine (1953) $m = 1 - 2/n$, con $n > 2$, lo cual permite obtener:

$$K(S_e) = K_s S_e^3 \left[1 - (1 - S_e^{1/n})^m \right] \quad (1.18.1)$$

Mientras que en el modelo de Mualem (1976a) impone $m = 1 - 1/n$, con $n > 1$, obteniendo:

$$K(S_e) = K_s S_e^{1/2} \left[1 - (1 - S_e^{1/n})^m \right]^2 \quad (1.18.2)$$

Utilizando los coeficientes de la solución en serie para la infiltración vertical Fuentes *et al.* (1992) han analizado las combinaciones (1.17) y (1.18.1) así como (1.17) y (1.18.2) y han mostrado que este par de combinaciones no satisfacen las propiedades integrales de la infiltración. También han mostrado que la combinación de la característica de humedad de van Genuchten sujeta a la restricción de Burdine ($m = 1 - 2/n$) con el modelo para la conductividad hidráulica de Brooks y Corey (1964) satisface las condiciones de la infiltración en todo tipo de suelo.

El modelo para la conductividad hidráulica de Brooks y Corey (1964) es:

$$K(\theta) = K_s \left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^\eta \quad (1.19)$$

donde η es un parámetro adimensional.

En este trabajo se usan en lo subsecuente las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange (1.14, 1.15) y la combinación del modelo de van Genuchten para la curva de retención (1.17) sujeta a la restricción de Burdine ($m = 1 - 2/n$) y la curva de conductividad de Brooks y Corey (1.19).

1.1.3. Condición inicial y condiciones en la frontera excepto en el dren

Para describir el fenómeno del drenaje agrícola subterráneo con la ecuación (1.8) es necesario conocer el estado inicial del medio poroso y definir las condiciones de frontera que mejor representen el fenómeno. Las condiciones inicial y de frontera excepto en el dren son planteadas fácilmente.

a) Condición inicial

El potencial de presión del agua en suelo es una función conocida del espacio:

$$\psi = \psi_i(x, z) \quad (1.20)$$

ψ_i por ejemplo puede ser una distribución hidrostática de presiones, $\psi_i = z - P$, siendo P la profundidad inicial del manto freático.

b). Condiciones de frontera excepto en el dren

Por la simetría del flujo se sabe que en los segmentos \overline{BC} , \overline{DE} y \overline{FA} el flujo de Darcy en dirección perpendicular a estos es nulo (condición tipo Neumann), misma situación ocurre en \overline{CD} debido al estrato impermeable.

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = L/2; \quad z \in \overline{BC}; \quad t > 0 \quad (1.21)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad z \in \overline{DE}; \quad t > 0 \quad (1.22)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad x = 0; \quad z \in \overline{FA}; \quad t > 0 \quad (1.23)$$

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = 0 \quad x \in \overline{CD}; \quad z = P_E; \quad t > 0 \quad (1.24)$$

donde P_E es la profundidad del estrato impermeable medida a partir de la superficie del suelo.

La condición de frontera que debe usarse en la superficie del suelo (segmento \overline{AB}) depende del fenómeno que sea desea representar, para el caso de riego por gravedad el valor del potencial de presión ψ es igual al tirante de agua h_w , esto es, la frontera se trata con una condición tipo Dirichlet.

$$\psi = h_w \quad x \in \overline{AB}; \quad z = 0; \quad t > 0 \quad (1.25.1)$$

Si se desea representar lluvia o evaporación en la superficie, se puede imponer una condición de frontera tipo Neumann de flujo prescrito $E(t)$, es decir;

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = E(t) \quad x \in \overline{AB}; \quad z = 0; \quad t > 0 \quad (1.25.2)$$

1.1.4. Condición de frontera en el dren (Ω)

a) Aproximaciones clásicas

Las aproximaciones presentadas en la literatura que describen el flujo de agua del suelo hacia los drenes subterráneos pueden ser clasificadas de acuerdo a la forma en que representan al

dren. A un primer grupo pertenecen aquellos modelos que asimilan el dren como un punto y sobre este punto imponen condiciones de frontera simplificadas tipo Dirichlet o tipo Neumann. Un segundo grupo incluye aquellos modelos que consideran la forma geométrica del dren y sobre su circunferencia imponen condiciones de frontera tipo Dirichlet o tipo Neumann o incluso una combinación de ambas. Enseguida se presenta una descripción de estas dos aproximaciones.

a.1.) Drenes asimilados como puntos

La forma tradicional de representar la sección transversal de la tubería de drenaje (Ω , Figura 1.2) es como un punto, bajo el razonamiento de que el área transversal de los drenes es varios órdenes de magnitud menor (5 a 6) respecto del área transversal de un sistema de drenaje agrícola subterráneo. Al aceptar este supuesto el problema del drenaje agrícola se reduce a resolver la cuestión del tipo de condición de frontera que debe imponerse sobre este punto.

- Vimoke y Taylor (1962) modelan el flujo de agua hacia un dren representado como punto usando un método que ajusta la conductividad de los elementos finitos que circundan al nodo que simula al dren (Figura 1.3). Los factores de ajuste (C_a) son una función del radio de la malla que circunda al dren (s) y del radio del propio dren (r_o). La conductividad es ajustada utilizando la siguiente relación:

$$K_{dren} = KC_a \tag{1.26}$$

donde K_{dren} es la conductividad ajustada de los elementos que circundan al dren; K es la conductividad de los elementos que circundan al dren antes del ajuste y $C_a < 1$. La distancia entre el nodo que representa al dren y todos los nodos que lo circundan debe ser constante ($s = cte$).

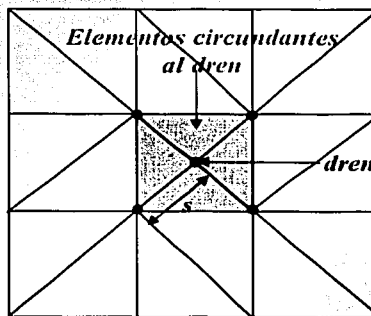


Figura 1-3. Red requerida en la aproximación de Vimoke y Taylor (1962).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

El gasto de agua que evacua el dren del suelo se calcula simplemente realizando un balance de masa en el dominio de solución y dividiendo el resultado así obtenido por el paso tiempo correspondiente.

Uno de los inconvenientes de esta aproximación es que el gasto de drenaje depende fuertemente del valor del radio s y de la densidad de la discretización espacial del dominio de solución (Vimoke *et al.*, 1963). El valor s generalmente es obtenido de manera de reproducir la evolución del gasto de drenaje proporcionado por soluciones analíticas derivadas para formas extremadamente simplificadas de la ecuación de transferencia de agua.

- Natur *et al.* (1975), Gharaatny-Sani y King (1978), Yeh y King (1978), Fipps *et al.* (1986) imponen sobre el dren asimilado como punto una condición tipo Dirichlet constante, el valor de la presión es supuesto igual a la presión atmosférica ($\psi = 0$). Sin embargo este supuesto es incorrecto debido a que el potencial de presión en la vecindad del dren varía en función de la carga de agua sobre éste y de la presión existente en el interior de la tubería de drenaje.
- Barcelo y Nieber (1981, 1982), Tarboton y Wallender (2000), representan al dren como un punto y en éste imponen una condición tipo Neumann de gasto variable considerando la relación carga-gasto deducida por Kirkham (1949). La ecuación de Kirkham es una solución para régimen permanente que describe el gasto de agua que absorbe un sumidero de un medio poroso semi-infinito completamente saturado (Figura 1.4). La solución para un número infinito de sumideros lineales equidistantes es:

$$Q_d = \frac{4\pi K_s (\hat{h}_w + P_E - D_o - r_e)}{2 \ln \left\{ \sinh \left[\pi \frac{2(P_E - D_o) - r_e}{L} \right] / \sinh \left(\frac{\pi r_e}{L} \right) \right\} + f} \quad (1.27)$$

donde:

$$f = -2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \ln \left\{ \frac{\sinh^2 [2\pi j(P + D_o)/L] - \sinh^2 (\pi r_e/L)}{\sinh^2 (2\pi r_e/L) - \sinh^2 \{ \pi [2(P_E - D_o) - r_e]/L \}} \right\} \quad (1.28)$$

siendo Q_d el gasto de drenaje por unidad de longitud de dren; D_o la profundidad del estrato impermeable medida a partir del centroide de la sección transversal de la tubería de drenaje (Figura 1.4); \hat{h}_w la lámina de agua en la superficie del suelo; y r_e un radio efectivo.

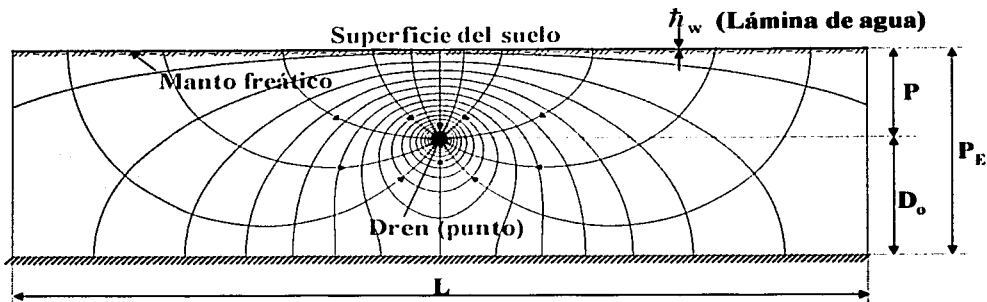


Figura 1.4. Representación esquemática del dominio de solución y del estado del medio poroso considerados en la solución de Kirkham (1949).

Kirkham (1957) demostró que la contribución de la serie (1.28) a la ecuación (1.27) es despreciable cuando el espaciamiento entre drenes es mucho mayor respecto de la profundidad del estrato impermeable ($L \gg D_o$).

Cuando el espaciamiento entre drenes tiende al infinito, el gasto de agua evacuado por un dren se calcula con la siguiente relación (Kirkham, 1949):

$$Q_d = \frac{2\pi K_s (h_w + P_E - D_o - r_c)}{\ln \left\{ \frac{2(P_E - D_o) - r_c}{r_c} \right\}} \quad (1.29)$$

No obstante que en la deducción de la ecuación de Kirkham (1.27) se asume régimen permanente y que la superficie libre es horizontal a lo largo de la separación entre drenes, tanto Barcelo y Nieber como Tarboton y Wallender proponen simular procesos transitorios de drenaje sustituyendo arbitrariamente la profundidad total del estrato impermeable P_E por la siguiente relación:

$$P_E = D_o + h_o(t) \quad (1.30)$$

donde $h_o(t)$ es la carga de agua sobre el dren, la cual es variable en el tiempo.

- Fipps y Skaggs (1991) asimilan el dren como un punto e imponen en éste una condición tipo Neumann de flujo variable. Estos autores usan la relación carga-gasto que se obtiene al resolver analíticamente el problema de la absorción uniforme de masa por un tubo cilíndrico de longitud

infinita, considerando flujo exclusivamente radial, condiciones tipo Dirichlet y régimen permanente. Esta relación se deduce de la siguiente manera:

Para el caso de régimen permanente, flujo radial y extracción nula, la ecuación de Richards (1.5) se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[rK(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial r} \right] = 0 \quad (1.31)$$

donde r es la coordenada radial [L].

El uso de la transformación integral de Kirchoff (1894):

$$\phi = \int_{0,1}^0 D(\theta) d\theta = \int_{-\infty}^{\psi} K(\psi) d\psi \quad (1.32)$$

permite linealizar la ecuación (1.31) y escribirla en la forma:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0 \quad (1.33)$$

Las condiciones de frontera consideradas son:

$$\phi = \phi_{sd} \quad r = r_o \quad t > 0 \quad (1.34.1)$$

$$\phi = \phi_s \quad r = r_1 \quad t > 0 \quad (1.34.2)$$

donde ϕ_{sd} y ϕ_s son respectivamente los valores del potencial de Kirchoff en el dren y en el suelo [$L^2 T^{-1}$]; r_o es el radio de la tubería de drenaje; y r_1 es la distancia de la que fluye el agua ($r_1 \geq r_o$).

La solución de la ecuación (1.33) sujeta a las condiciones de frontera (1.34.1) y (1.34.2) es:

$$\phi(r) = \frac{\phi_{sd} \ln(r_1/r) + \phi_s \ln(r/r_o)}{\ln(r_1/r_o)} \quad (1.35)$$

Derivando la ecuación (1.35) con respecto r y considerando la ecuación (1.32), se obtiene la expresión para calcular el flujo de agua en la superficie del dren q_d :

$$q_d = \frac{1}{r_o \ln(r_1/r_o)} \int_{\psi_{sd}}^{\psi} K(\psi) d\psi \quad (1.36)$$

Si se supone la conductividad hidráulica del suelo constante e igual a su valor a saturación (K_s), la ecuación (1.36) se reduce a:

$$q_d = -K_s \frac{(\psi_{sd} - \psi)}{r_o \ln(r_1/r_o)} \quad (1.37)$$

donde ψ_{sd} es el potencial de presión en la superficie del dren; y ψ es un valor del potencial de presión a una distancia r del dren.

El gasto de drenaje por unidad de longitud de dren Q_d se calcula con:

$$Q_d = 2\pi r_o q_d = -\frac{2\pi K_s (\psi_{sd} - \psi)}{\ln(r_1/r_o)} \quad (1.38)$$

El gasto de drenaje calculado con (1.38) depende principalmente del valor del parámetro r_1 . Bravo y Schwab (1975) señalan que si el radio efectivo del dren varía entre 5 y 7.5 cm (2 y 3 in) se puede considerar que $r_1 = 38.1$ cm (15 in). A partir de experimentos numéricos Fipps y Skaggs (1991) encuentran que el gasto de drenaje proporcionado por la ecuación (1.38) difiere a lo más 1.5 % respecto del valor obtenido con la solución analítica de Kirkham (1.27) cuando $10 \leq r_1 \leq 30$ cm para $5.0 \leq r_o \leq 7.5$ cm.

La mayor limitación de la ecuación (1.38) es que el flujo de agua en la vecindad del dren no es sólo radial, debido tanto al efecto de la gravedad como al efecto del estrato impermeable. Además la no existencia de flujo exclusivamente radial cerca del dren se acentúa en procesos transitorios sobre todo cuando la superficie libre se aproxima a la elevación del dren.

- Kohler *et al.* (2001) imponen sobre el dren representado como punto una condición de flujo variable (tipo Neumann) según la cual, el gasto de drenaje es función de la carga de agua sobre el dren (h_o) y de la carga a la mitad de separación entre drenes (h_c):

$$Q_d = L[A(h_c - h_o) + B(h_c^2 - h_o^2)] \quad (1.39)$$

donde $h_o = Ch_c + h_{e0}$; A, B y h_{e0} son parámetros empíricos que se calculan de manera de reproducir la variación experimental del gasto de drenaje Q_d .

La ecuación (1.39) es una generalización de la ecuación de Hooghoudt (1940), propuesta por Oosterbaan *et al.* (1989) para eliminar el supuesto de una carga nula sobre los drenes ($h_o(t) = 0$). La principal desventaja de esta aproximación (1.39) es que es una solución obtenida para una forma simplificada de la ecuación de Boussinesq unidimensional (régimen permanente), ecuación que no considera de manera explícita los procesos de transferencia que ocurren en la zona no saturada del suelo y que además se deriva suponiendo una distribución hidrostática de las presiones, supuesto que no se cumple sobre todo cerca del dren.

En general la representación de un dren como un punto tiene como principales desventajas, ignorar el efecto de la forma y tamaño de los drenes sobre la distribución de la presión en el suelo en las regiones próximas al dren y no considerar la evolución de la presión en el interior de la tubería.

a.2.) Representación geométrica de los drenes

El segundo grupo de modelos que describen el flujo de agua hacia los drenes es integrado por aquellas aproximaciones que representan los drenes como orificios en sus dominios de solución (Ω), la medida de estos orificios corresponde al diámetro efectivo de los drenes. Dependiendo del tipo de condición de frontera que se usa sobre la circunferencia del dren se distinguen dos aproximaciones. La primera consiste en usar una condición de frontera tipo Dirichlet constante (Gureghian y Youngs, 1975) y la segunda consiste en usar en el dren una condición llamada de galería o de superficie de filtración (Figura 1.5). La última condición fue propuesta por Neuman (1973) para describir el flujo de agua a través de presas y diques de tierra y fue adaptada posteriormente para describir la transferencia de agua del suelo hacia drenes superficiales o subterráneos (Zaradny y Feddes, 1979; Cushman *et al.*, 1979; Merva *et al.*, 1983; Cooley, 1983; Fipps *et al.*, 1986; Huyakorn *et al.*, 1986; Ahmad *et al.* 1993; Kohler *et al.* 2001; Saucedo *et al.*, 2002).

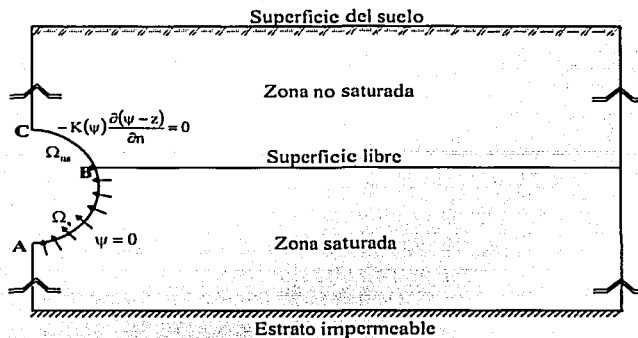


Figura 1.5. Condición de frontera de galería o de superficie de filtración para el caso del drenaje agrícola subterráneo.

Para aplicar la condición de galería es necesario usar una combinación de condiciones tipo Dirichlet y tipo Neumann como se describe enseguida: sobre el segmento de circunferencia del dren que esté en contacto con suelo saturado se impone una condición tipo Dirichlet homogénea (segmento AB en la Figura 1.5) y si existe un segmento del dren que este en contacto con suelo no saturado, se impone en éste una condición tipo Neumann de flujo nulo (segmento BC). La longitud de los segmentos se ajusta en función de la posición de la superficie libre, por ejemplo cuando ésta se ubica sobre el dren se tiene que la presión en todo el perímetro de éste es igual a la presión atmosférica ($\psi = 0$). Es importante señalar que al usarse una condición tipo Dirichlet homogénea se supone que la resistencia en la interfaz suelo-dren es nula mientras que al usar la condición tipo Neumann de flujo nulo se supone que la resistencia es infinita.

El gasto total de agua que transfiere del medio poroso a la línea de drenaje a través de la zona suelo saturado-dren, se estima con la integración de la ley de Darcy en el segmento mencionado:

$$Q_T = 2\ell \int_{\Omega_s} -K(\psi) \frac{\partial(\psi-z)}{\partial n} d\Omega_s \quad (1.40)$$

donde $\Omega_s = \Omega - \Omega_{ns}$ es el segmento frontera del dren en contacto con suelo saturado; y Ω_{ns} es el segmento frontera del dren en contacto con suelo no saturado.

La principal limitación de las aproximaciones que consideran la forma geométrica de los drenes la constituye el uso de la condición de Dirichlet homogénea, ya que físicamente el

potencial de presión del agua en la vecindad inmediata del dren varía en el tiempo y su evolución depende de la presión existente en el interior del propio dren, de la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-dren y de la posición de la superficie libre. Se puede entonces concluir que el fenómeno físico de la transferencia de agua no es bien representado con el supuesto de presión nula en la circunferencia del dren.

b) La condición de radiación lineal de Newton en los drenes

Las limitaciones de las aproximaciones clásicas pueden ser solventadas si se conociera la variación en el tiempo de la presión o del flujo de agua. Sin embargo estas son precisamente las funciones que se requieren determinar para cuantificar el volumen drenado de agua. En analogía con el fenómeno de la transferencia de calor por un sólido hacia a la atmósfera, en este trabajo se considera inicialmente la siguiente hipótesis: el flujo de agua hacia drenes subterráneos puede ser descrito con la condición de radiación lineal de Newton.

La forma general de la condición de radiación lineal de Newton se puede establecer considerando por una parte que el flujo de agua en el suelo en la vecindad del dren es proporcionado por la ley de Darcy:

$$q_d = -K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial n} \tag{1.41}$$

y por otra que este flujo de agua es proporcionado por una ley de tipo Ohm:

$$q_d = -\frac{h - \psi}{R_{in}} \tag{1.42}$$

donde h es la presión en el interior del dren [L]; y R_{in} es la resistencia al flujo del agua en la interfaz suelo-dren [T].

La igualación de las ecuaciones (1.41) y (1.42) conduce a la siguiente condición de radiación (Carslaw y Jaeger, 1959):

$$K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial n} - \frac{h - \psi}{R_{in}} = 0 \tag{1.43}$$

La ecuación (1.43) es conocida algunas veces como condición de Robbins cuando el coeficiente de resistencia y la conductividad hidráulica son constantes.

La condición de radiación lineal de Newton (1.43) tiende a una condición tipo Dirichlet al considerar $R_{in} \cong 0$, ($\psi \cong h$) y a una condición tipo Neumann de flujo nulo al considerar el límite $R_{in} \rightarrow \infty$ ($-K(\psi)\partial(\psi-z)/\partial n = 0$). Mediante este análisis se muestra que las aproximaciones reportadas en la literatura para modelar el drenaje agrícola subterráneo son un caso particular de la condición de radiación lineal de Newton.

El mayor problema para describir el drenaje agrícola con el sistema de ecuaciones (1.8), (1.20), (1.21-1.25) y (1.43) es que se requiere conocer las características hidrodinámicas del suelo $\theta(\psi)$ y $K(\psi)$, la evolución de la presión en el interior del dren (h) y la forma del coeficiente de resistencia de la interfaz suelo-atmósfera el cual puede ser constante, una función de la presión o del flujo de agua.

1.1.5. Flujo de agua en el dren

Para aplicar la ecuación (1.43) es necesario conocer la evolución de la presión en el interior del dren (h). Se sabe que el valor de h es igual a la presión atmosférica en fracción del perímetro del dren que esta en contacto con aire ($h = 0$) y en la fracción restante, en contacto con agua, h es igual a la altura de la columna de agua si se acepta la hipótesis de una distribución hidrostática de las presiones, $h = h_0 - \Delta z$ donde h_0 es el tirante medio en el dren (Figura 1.6).

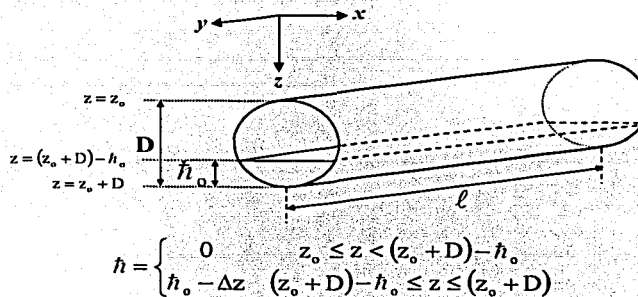


Figura 1.6. Representación esquemática del flujo de agua en un dren

En consecuencia para estimar el valor de h en todo el perímetro del dren es necesario conocer la evolución temporal y espacial del tirante de agua en el tubo (h_0). Dado que se ha

supuesto que las variaciones en el sentido longitudinal del dren son despreciables, el tirante de agua puede ser considerado constante a lo largo del dren pero variable en el tiempo ($h_o(t)$). Dadas estas condiciones el tirante medio en el dren puede ser estimado en cada tiempo con las relaciones que describen el flujo uniforme de agua en drenes circulares.

En flujo uniforme la ecuación de continuidad se escribe como:

$$Q_D = AV \quad (1.44)$$

donde Q_D es el gasto total que descarga una línea de drenaje [L^3T^{-1}]; A es el área hidráulica [L^2]; y V es la velocidad media del agua [LT^{-1}].

La velocidad del flujo puede calcularse a partir de una ley de resistencia, en este trabajo se usa la ley fractal presentada por Fuentes y Vauclin (1994):

$$V = \kappa \frac{g^d}{\nu^{2d-1}} R_H^{3d-1} J^d \quad (1.45)$$

donde $1/2 \leq d = D/3 \leq 1$, D es la dimensión fractal de masa; κ es un coeficiente adimensional; g es la aceleración gravitacional [LT^{-2}]; R_H es el radio hidráulico [L]; J es la pendiente de la línea de energía o de fricción [LL^{-1}], que en flujo uniforme es paralela a la pendiente del terreno (J_o); y ν es la viscosidad cinemática del agua [L^2T^{-1}].

Al introducir (1.44) en (1.45) se obtiene:

$$Q_D = \kappa \frac{g^d}{\nu^{2d-1}} AR_H^{3d-1} J^d \quad (1.46)$$

La ecuación (1.46) relaciona el tirante medio en el dren con el gasto que conduce el propio dren, sin embargo su aplicación presenta un problema, se tienen dos incógnitas (Q_D y h_o) y una sola ecuación. Este problema se resuelve planteando una segunda ecuación que se obtiene al integrar la condición de radiación (1.43) sobre el perímetro del dren y al multiplicar este resultado por la longitud de la línea de drenaje (ℓ):

$$Q_T = 2\ell \int_{\Omega} \frac{\hat{h} - \psi}{R_{in}} d\Omega \quad (1.47)$$

Por continuidad el gasto que se transfiere del suelo al dren (Q_T) debe ser igual al gasto que descarga el dren (Q_D), es decir $Q_T = Q_D$:

$$\kappa \frac{g^d}{v^{2d-1}} AR_{II}^{3d-1} J^d - 2\ell \int_{\Omega} \frac{h - \psi}{R_{in}} d\Omega = 0 \quad (1.48)$$

En resumen en este trabajo se modela el flujo de agua hacia drenes subterráneos resolviendo de manera acoplada la ecuación (1.48) y la ecuación de Richards (1.8) considerando las condiciones límite (1.20), (1.21-1.25), (1.43), investigándose la forma funcional del coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-dren R_{in} .

1.2. ESCALA MEGASCÓPICA

La dificultad que presenta la aplicación de la ecuación de Richards ha originado que la descripción del flujo del agua en un sistema de drenaje subterráneo sea principalmente realizada con la ecuación de Boussinesq. Esta ecuación considera principalmente la zona saturada del suelo, mientras que la zona no saturada es considerada de manera simplificada a través del término que representa la capacidad de almacenamiento del acuífero. El uso de la ecuación de Boussinesq es justificable cuando no existen condiciones propicias para realizar una caracterización hidrodinámica del medio poroso que permita considerar tanto el fenómeno de histéresis capilar como la variabilidad espacial.

1.2.1. Ecuación de Boussinesq

Enseguida se presenta la deducción de la ecuación de Boussinesq con el objetivo de identificar y tener presente las hipótesis realizadas en dicha derivación.

La ecuación (1.1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \theta(x, y, z, t)}{\partial t} = - \frac{\partial q_x(x, y, z, t)}{\partial x} - \frac{\partial q_y(x, y, z, t)}{\partial y} - \frac{\partial q_z(x, y, z, t)}{\partial z} - S \quad (1.49)$$

Al integrar la ecuación (1.49) en la dirección z desde la elevación del estrato impermeable H_1 hasta la elevación de la superficie libre H (Figura 1.7) se obtiene la ecuación diferencial que describe la dinámica de los mantos freáticos someros a la escala megascópica. Se escribe:

$$\int_{H_i}^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = - \int_{H_i}^H \frac{\partial q_x}{\partial x} dz - \int_{H_i}^H \frac{\partial q_y}{\partial y} dz - \int_{H_i}^H \frac{\partial q_z}{\partial z} dz - \int_{H_i}^H S dz \quad (1.50)$$

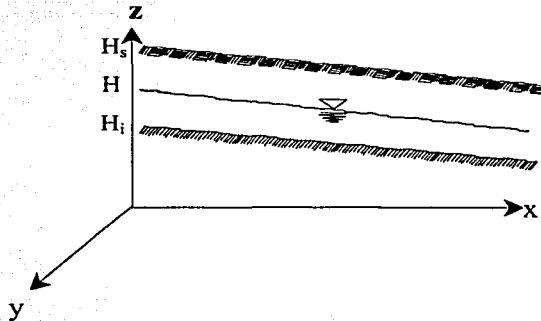


Figura 1.7. Esquema general de la posición del manto freático.

Ahora se evalúan cada una de las integrales de (1.50). Por facilidad primero se evalúa la tercera integral del lado derecho de la expresión (1.50) obteniéndose el siguiente resultado:

$$\int_{H_i}^H \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = q_z(x, y, H, t) - q_z(x, y, H_i, t) = q_{zH} - q_{zH_i} \quad (1.51)$$

donde q_{zH} y q_{zH_i} son los flujos de Darcy en la dirección de la coordenada espacial z en las elevaciones H y H_i , respectivamente.

Las integrales restantes se expresan aplicando la regla de Leibniz. Se procede ahora con la integral del lado izquierdo de (1.50):

$$\int_{H_i}^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{H_i}^H \theta(x, y, z, t) dz - \theta(x, y, H, t) \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1.52)$$

En la integral (1.52) θ es constante entre $z = H_i$ y $z = H$ e igual a su valor a saturación θ_s , y el valor $\theta(x, y, H, t)$ en una vecindad sobre H se le denomina θ_{ns} , de forma tal que se puede

definir la capacidad de almacenamiento del acuífero (μ) como la diferencia entre ambos contenidos de humedad:

$$\mu = \theta_s - \theta_{ns} \quad (1.53)$$

Al considerar (1.53) la integral (1.52) puede expresarse como:

$$\int_{H_i}^H \frac{\partial \theta}{\partial t} dz = \mu(x, y, t) \frac{\partial H(x, y, t)}{\partial t} \quad (1.54)$$

El resto de las integrales en (1.50) se evalúan de manera similar:

$$\int_{H_i}^H \frac{\partial q_x}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} [(H - H_i) \langle q_x \rangle] - q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} + q_{xH_i} \frac{\partial H_i}{\partial x} \quad (1.55)$$

$$\int_{H_i}^H \frac{\partial q_y}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} [(H - H_i) \langle q_y \rangle] - q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} + q_{yH_i} \frac{\partial H_i}{\partial y} \quad (1.56)$$

$$\int_{H_i}^H S dz = \langle S \rangle (H - H_i) \quad (1.57)$$

donde $\langle q_x \rangle$ y $\langle q_y \rangle$ son los flujos de Darcy promedio en el espesor saturado $(H - H_i)$; q_{xH} , q_{xH_i} , q_{yH} y q_{yH_i} son los flujos de Darcy en la dirección de las coordenadas espaciales en las elevaciones H y H_i , respectivamente; y $\langle S \rangle$ es la tasa media de extracción de agua en la unidad de tiempo en la zona saturada del suelo.

Los flujos promedios de Darcy se calculan bajo el supuesto de una distribución hidrostática de presiones, es decir:

$$\psi(x, y, z, t) = H(x, y, t) - z \quad (1.58)$$

De este modo:

$$\langle q_x \rangle = \frac{1}{(H - H_i)} \int_{H_i}^H q_x(x, y, z, t) dz = -\frac{1}{(H - H_i)} \int_{H_i}^H K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} dz = -\langle K_s \rangle \frac{\partial H}{\partial x} \quad (1.59)$$

$$\langle q_y \rangle = \frac{1}{(H - H_i)} \int_{H_i}^H q_y(x, y, z, t) dz = - \frac{1}{(H - H_i)} \int_{H_i}^H K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial y} dz = - \langle K_s \rangle \frac{\partial H}{\partial y} \quad (1.60)$$

De las ecuaciones (1.59 y 1.60) se hace evidente que el aceptar una distribución hidrostática de presiones equivale a adoptar la hipótesis de Dupuit, es decir, considerar que el flujo es proporcional al gradiente de la carga hidráulica (H) en la dirección del flujo siendo la constante de proporcionalidad el valor medio ponderado de la conductividad hidráulica a saturación $\langle K_s \rangle$.

Sustituyendo las expresiones (1.51, 1.54-1.57) en (1.50) se obtiene la ecuación diferencial de los mantos freáticos someros en su forma general:

$$\begin{aligned} \langle \mu \rangle \frac{\partial H}{\partial t} = & - \left[\frac{\partial}{\partial x} [(H - H_i) \langle q_x \rangle] + \frac{\partial}{\partial y} [(H - H_i) \langle q_y \rangle] \right] \\ & - \left[-q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} - q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} + q_{xH_i} \frac{\partial H_i}{\partial x} + q_{yH_i} \frac{\partial H_i}{\partial y} - q_{zH} + q_{zH_i} \right] - \langle S \rangle (H - H_i) \end{aligned} \quad (1.61)$$

Finalmente si se considera que los flujos de Darcy son despreciables en el estrato impermeable ($H = H_i$), la ecuación (1.61) se puede escribir como:

$$\langle \mu \rangle \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\langle K_s \rangle (H - H_i) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\langle K_s \rangle (H - H_i) \frac{\partial H}{\partial y} \right] + R \quad (1.62)$$

en donde R se ha definido como:

$$R(x, y, t) = q_{xH} \frac{\partial H}{\partial x} + q_{yH} \frac{\partial H}{\partial y} - q_{zH} - \langle S \rangle (H - H_i) \quad (1.63)$$

En otras palabras R representa el aporte vertical y las cantidades de agua desplazada sobre la superficie libre, es decir, representa el aporte efectivo de la zona no saturada hacia la saturada.

Si se considera que las variaciones de H en la dirección longitudinal de los drenes son despreciables se puede describir el flujo de agua en un sistema de drenaje agrícola a partir de la ecuación de Boussinesq unidimensional. En tal situación el problema consiste en resolver la siguiente forma de la ecuación de Boussinesq:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R \quad (1.64)$$

sobre el dominio mostrado en la Figura 1.8.

En la ecuación (1.64) $T(H)$ es la transmisibilidad del acuífero que se define como $T(H) = K_s(H - H_i)$.

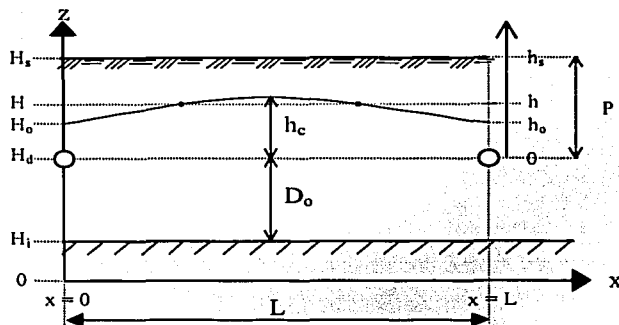


Figura 1.8. Esquema de un sistema de drenaje agrícola subterráneo.

1.2.2. Aproximaciones clásicas

Para resolver la ecuación de Boussinesq en régimen transitorio es necesario definir las condiciones de frontera que debe usarse en los drenes y proporcionar la capacidad de almacenamiento del acuífero. En la mayor parte de las aplicaciones donde se hace uso de esta ecuación diferencial se utilizan condiciones de frontera simplificadas en los drenes, normalmente de tipo Dirichlet (Dumm, 1954; Van Schilfgaard, *et al.*, 1956; Pandey, *et al.*, 1992; Gupta *et al.*, 1994) y se asimila la capacidad de almacenamiento μ (ecuación 1.53) a la porosidad drenable ν , fracción de poros de suelo que se libera de agua cuando el manto freático desciende, independientemente de la forma funcional adoptada para esta propiedad: constante para cada tipo de suelo $\mu = \nu$ (Dumm, 1954; Van Schilfgaard *et al.*, 1956; Pandey *et al.*, 1992) o variable en función de la carga hidráulica $\mu(H) \equiv \nu(H)$ (Skaggs y Tang, 1976; Bhattacharya y Broughton, 1979; Pandey, *et al.*, 1992; González *et al.*, 1997). Recientemente Gupta *et al.* (1994) han indicado que la capacidad de almacenamiento sólo puede ser asimilada a la porosidad drenable

cuando esta última es constante ($\mu = \nu = \text{cte}$) y Fuentes *et al.* (1997) han presentado evidencia que muestra que la evolución de la carga sobre el dren es mejor descrita con el uso de una condición de frontera de radiación lineal. Enseguida se presentan las aproximaciones clásicas reportadas en la literatura para describir la dinámica del agua en sistemas de drenaje subterráneos con la ecuación de Boussinesq y se señalan sus límites de aplicabilidad.

a) Porosidad drenable (ν)

En drenaje agrícola el término porosidad drenable (ν) es comúnmente utilizado para representar la fracción de poros del suelo que se libera de agua cuando el manto freático desciende (Figura 1.9). Este parámetro es fundamental cuando se desea predecir el abatimiento de los mantos freáticos originado por sistemas de drenaje superficiales y subterráneos, sin embargo aunque su importancia es bien reconocida su dependencia respecto de la posición de la superficie libre ha sido poco estudiada y su relación con la capacidad de almacenamiento no ha sido establecida rigurosamente. En numerosos estudios se excluye la porosidad drenable al asumir régimen de flujo permanente, ya que esta hipótesis implica que $\mu \partial H / \partial t = 0$ (Hooghoudt, 1940; Aronovici y Donnan, 1946; Toksoz y Kirkham, 1971a y 1971b). En otros estudios se ha considerado que la porosidad drenable es una propiedad intrínseca del medio poroso (ν es una constante para cada tipo de suelo) y que es equivalente a la capacidad de almacenamiento $\mu = \nu$ (Dumm, 1954; Van Schilfgaarde *et al.*, 1956; Dylla, 1966; Skaggs, 1978; Ahmad *et al.*, 1991; Pandey *et al.*, 1992), siendo su valor comúnmente estimado a partir de la conductividad hidráulica a saturación del suelo (Figura 1.10).

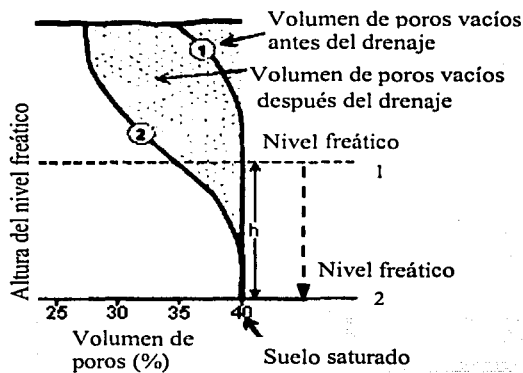


Figura 1.9. Porosidad drenable cuando el nivel freático desciende por drenaje.

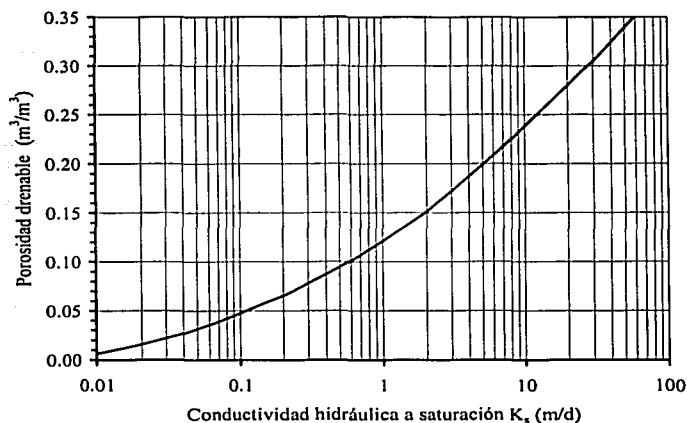


Figura 1.10. Relación entre la porosidad drenable ($\mu = \upsilon$) y la conductividad hidráulica a saturación K_s , adaptada del Drainage Manual (1994).

El primer trabajo reportado en la literatura donde se estudia la porosidad drenable como función de la carga hidráulica fue realizado por Skaggs *et al.* (1975) quienes midieron simultáneamente el volumen de agua drenado por una columna de suelo y la posición del manto freático. Realizando análisis de regresión no lineal sobre los datos experimentales obtienen relaciones empíricas entre la porosidad drenable y la profundidad del manto freático. Los resultados presentados en este trabajo impulsaron el desarrollo de algunas investigaciones donde se han propuesto relaciones empíricas y semi-empíricas entre la porosidad drenable y la carga hidráulica (Skaggs y Tang, 1976; Bhattacharya y Broughton, 1979; Pandey, *et al.*, 1992; Gupta *et al.*, 1994; González *et al.*, 1997; Fuentes *et al.*, 1999). En la mayor parte de estos trabajos se asimila la capacidad de almacenamiento a la porosidad drenable ($\mu(H) \equiv \upsilon(H)$) y sólo Gupta *et al.* (1994) distinguen la capacidad de almacenamiento de la porosidad drenable cuando esta última es función de la carga hidráulica.

Enseguida se hace una presentación de los principales representaciones analíticas de la porosidad drenable reportadas en la literatura.

a.1.) Modelos empíricos

a.1.1) Hipótesis: $\mu(H) \equiv \upsilon(H)$.

- Bhattacharya y Broughton (1979) realizaron experimentos de drenaje en suelos de características hidráulicas contrastantes, un suelo de textura arenosa "Upland" y uno de

textura arcillosa "Santa Rosalía". Las pruebas consistieron en saturar columnas de suelo y medir simultáneamente la evolución en el tiempo del volumen de agua drenado y la evolución del manto freático. Para ubicar la posición de la superficie libre instalaron pozos de observación de diámetro pequeño y para eliminar el problema de la pérdida de masa debida a la evaporación cubrieron con plástico la superficie de los suelos analizados. La información experimental permitió a Bhattacharya y Broughton estudiar la porosidad drenable en función de la posición de la superficie libre, sin embargo no distinguen entre porosidad drenable y capacidad de almacenamiento, asumen $\mu(H) \equiv \nu(H)$, y además las relaciones que presentan son producto de regresiones no lineales sobre datos experimentales, razón por la cual sus modelos tienen una estructura matemática distinta para cada tipo de suelo. En suelos de textura arenosa los autores proponen la siguiente relación:

$$\mu(h) \equiv \nu(h) = \left[\frac{1}{1 + 2^{-a_1(h-0.5)}} - \frac{1}{1 + 2^{0.5a_1}} \right] a_5 \quad (1.65)$$

Mientras que en suelos de textura arcillosa recomiendan el uso de la siguientes relación funcional:

$$\mu(h) \equiv \nu(h) = h(e^{-a_1 h} - e^{-a_2 h}) + a_3(1 - e^{-a_4 h}) \quad (1.66)$$

donde a_1 , a_2 , a_3 , a_4 y a_5 son parámetros de ajuste.

- Pandey *et al.* (1992) suponen que la capacidad de almacenamiento (μ) y la porosidad drenable (ν) son la misma propiedad y proponen la siguiente relación funcional empírica entre la porosidad drenable y la carga hidráulica:

$$\mu(h) \equiv \nu(H) = \nu_0 \left\{ 1 - \left[\left(\frac{A h}{h_s} \right) / \left(\frac{h}{h_s} + \frac{1 - h/h_s}{B} \right) \right] \right\} \quad (1.67)$$

donde ν_0 es un valor máximo de la porosidad drenable que corresponde al caso en que la profundidad del manto freático coincide con la profundidad de los drenes; A y B son parámetros empíricos que se determinan a partir de una calibración de datos experimentales. El valor del parámetro A es igual a la unidad si se desea satisfacer el requisito de que $\mu = 0$ cuando $h = h_s$ (sistema saturado).

Pandey *et al.* (1992) argumentan que la relación (1.67) es altamente flexible para describir datos experimentales en diferentes tipos de suelos, esta flexibilidad es mayormente debida al

parámetro B cuyo valor determina la curvatura de la función, cuando $0 < B < 1$ la función (1.67) es una curva convexa, $B > 1$ es una curva cóncava y con $B = 1$ es una relación lineal (ver Figura 1.11).

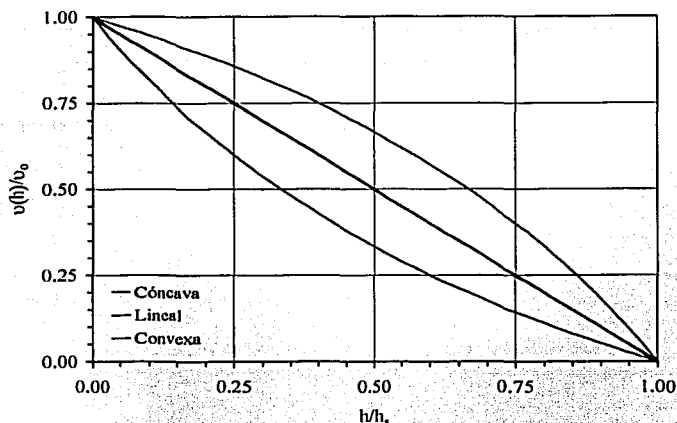


Figura 1.11. Relación entre la porosidad drenable y la carga hidráulica según la ecuación (1.67) con $A = 1.0$ y; $B = 2.0$ (cóncava), $B = 1.0$ (lineal), $B = 0.5$ (convexa).

a.1.2) Gupta *et al.* (1994)

Gupta *et al.* (1994) al deducir la ecuación de Boussinesq considerando el principio de conservación de masa, la ley de Darcy y la hipótesis de Dupuit, obtienen que la porosidad drenable v interviene en la ecuación de Boussinesq de la siguiente manera:

$$\frac{\partial[Hv(H)]}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R \quad (1.68)$$

A partir de las ecuaciones (1.64) y (1.68) se deduce que:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = v(H) \frac{\partial H}{\partial t} + H \frac{\partial v(H)}{\partial t} \quad (1.69)$$

La relación (1.69) permite mostrar que la capacidad de almacenamiento μ es equivalente a la porosidad drenable v solamente cuando esta última es independiente de la carga hidráulica.

Aunque Gupta *et al.* (1994) distinguen la capacidad de almacenamiento de la porosidad drenable, no deducen una relación formal entre la porosidad drenable y la posición de la superficie libre ya que simplemente introducen en la ecuación (1.68) la siguiente fórmula empírica para ν :

$$\nu(H) = \nu_0 \left\{ 1 - \left[\left(\frac{Ah}{h_s} \right) / \left(\frac{h}{h_s} + \frac{1 - h/h_s}{B} \right) \right] \right\} \quad (1.70)$$

a.1.3.) Limitaciones de los modelos empíricos

No obstante que los modelos empíricos presentan la ventaja de tener una estructura matemática sencilla tienen como principal limitante el haber sido derivados para condiciones particulares lo cual origina que su aplicación requiera de la calibración de sus parámetros para cada tipo de suelo, condición inicial y condiciones de frontera que prevalezcan en el medio en estudio. Se ha encontrado que en los modelos empíricos se introducen diferentes parámetros con el único objetivo de reproducir datos experimentales sin tomar en cuenta la física del proceso de drenaje de un suelo, por esta razón no contribuyen a establecer bases que mejoren el conocimiento que se tiene del fenómeno.

a.2.) Modelos mecanicistas ($\mu(H) \equiv \nu(H)$).

a.2.1) Tipo Fujita

González *et al.* (1997) deducen una fórmula para calcular la porosidad drenable en función de la posición de la superficie libre haciendo uso de la relación (1.53) suponiendo que la capacidad de almacenamiento es equivalente a la porosidad drenable ($\mu(H) \equiv \nu(H)$). Estos investigadores analizan el caso en que la superficie libre del acuífero en la coordenada (x, y) ubicada en la posición $z = H$ estuvo precedentemente ubicada en la posición $z = H_s$ (ver Figura 1.8). González *et al.* (1997) proponen calcular la porosidad drenable aceptando dos hipótesis: i) tomar $\theta_{ns}(H)$ como el valor medio en la zona no saturada, es decir:

$$\mu \equiv \nu = \theta_s - \frac{1}{H_s - H} \int_H^{H_s} \theta dz \quad (1.71)$$

y ii) aceptar una distribución hidrostática de las presiones $\psi = H - z$ para introducir la curva de retención $\theta(\psi) = \theta(H - z)$ en lugar de $\theta(z)$ en la ecuación (1.71).

Considerando estas dos hipótesis e introduciendo en (1.71) la representación analítica de la curva de retención (1.16) derivan la siguiente relación para la porosidad drenable:

$$\mu(H) \equiv v(H) = \theta_s \left[1 - \frac{\lambda_c}{\alpha(H_s - H)} \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha + \alpha \exp[-(H_s - H)/\lambda_c]} \right) \right] \quad (1.72)$$

a.2.2.) Tipo capacidad de almacenamiento

Haciendo uso de algunas transformaciones elementales, Fuentes *et al.* (1999) llevan la ecuación de Boussinesq no lineal (1.62) a la forma de la ecuación Fokker-Planck no lineal y al linealizar esta última mediante cambios de variables y coordenadas aceptando la ecuación de Fujita para la difusividad (1.11), inducen la siguiente fórmula para la capacidad de almacenamiento o porosidad drenable en función de la carga hidráulica:

$$\mu(H) \equiv v(H) = \mu_1 (1 + p) (1 - \alpha) \left(\frac{H - H_i}{H_1 - H_i} \right) \left/ \left[1 - \alpha + \alpha \left(\frac{H - H_i}{H_1 - H_i} \right)^{1+p} \right]^2 \right. \quad (1.73)$$

donde μ_1 es una porosidad drenable de referencia; p indica el tipo de acuífero, $p = 1$ corresponde a un acuífero libre y $p = 0$ a un acuífero confinado; H_1 es la elevación de algún nivel superior de referencia como la superficie del terreno en un acuífero libre ($H_1 = H_s$) o la elevación de la parte superior de un acuífero confinado [L].

a.2.3) Limitaciones de los modelos mecanicistas

Aunque los modelos mecanicistas (1.72) y (1.73) permiten estudiar a detalle el proceso de drenaje de un suelo tienen como principal inconveniente el haber sido derivados suponiendo que la capacidad de almacenamiento del acuífero es equivalente a la porosidad drenable ($\mu(H) \equiv v(H)$), supuesto que no se cumple cuando la porosidad drenable es función de la carga hidráulica (ver ecuación 1.69).

b) Condiciones de frontera en los drenes

La condición de frontera que clásicamente se ha impuesto en los drenes ($x = 0$ y $x = L$ en la Figura 1.8) es de tipo Dirichlet ($h_o(t)$ ó $H_o(t) = h_o(t) + D_o$). Por ejemplo en la solución de Glover-Dumm (1954) se supone que la carga sobre el dren se abate de manera instantánea ($h_o(t) = 0$); en la deducción original de la fórmula de Hooghoudt (1940) se asume una carga nula

sobre los drenes ($h_o = 0$); y en modelaciones numéricas de procesos transitorio de drenaje se ha supuesto carga nula sobre los drenes (Skaggs, 1978).

b.1) La condición de Dirichlet

b.1.1) Fórmula de Hooghoudt (1940)

Una de las soluciones más simples de la ecuación de Boussinesq unidimensional (1.64) es la fórmula de Hooghoudt (1940), la cual se deduce considerando las siguientes condiciones:

- i) Régimen permanente, es decir, $\partial H / \partial t = 0$.
- i) Conductividad hidráulica a saturación constante ($K_s = \text{cte}$).
- ii) Recarga constante $R = R_o$.

Con los supuestos anteriores y considerando que la elevación del estrato impermeable es $H_i = 0$, la ecuación (1.64) se reduce a:

$$K_s \frac{\partial}{\partial x} \left(H \frac{\partial H}{\partial x} \right) + R_o = 0 \quad (1.74)$$

Las condiciones de frontera a que se sujeta (1.74) son las siguientes:

$$H = D_o \text{ en } x = 0 \text{ o } x = L \text{ para } t > 0 \quad (1.75.1)$$

$$dH/dx = 0 \text{ en } x = L/2 \text{ para } t > 0 \quad (1.75.2)$$

Resolviendo (1.74) considerando (1.75.1) y (1.75.2) se obtiene:

$$K_s (H^2 - D_o^2) + R_o [(x - L/2)^2 - L^2/4] = 0 \quad (1.76)$$

Si se considera la recarga igual a la descarga ($R_o = q_o$) y se realiza la traslación $H = D_o + h$, donde h es la carga hidráulica a partir de la posición de los drenes, de la ecuación (1.76) se puede deducir lo siguiente:

$$q_o = \frac{4K_s h_c (h_c + 2D_o)}{L^2} \quad (1.77)$$

donde h_e es la carga hidráulica a la mitad de separación entre drenes ($x = L/2$). En la ecuación (1.77) se ha reemplazado D_o por una profundidad equivalente D_e , ya que no todo el acuífero por abajo de los drenes contribuye a la cantidad de agua evacuada.

El cálculo de D_e puede realizarse con alguna de las siguientes fórmulas:

- La relación presentada por Moody (1966):

$$D_e = \frac{D_o}{1 + \frac{D_o}{L} \left[\frac{8}{\delta} \ln \left(\frac{D_o}{r} \right) - f \right]} \quad 0 < D_o/L < 0.3 \quad (1.78)$$

donde $f = 3.55 - \frac{1.6D_o}{L} + 2 \left(\frac{D_o}{L} \right)^2$.

y para $D_o/L \geq 0.3$:

$$D_e = \frac{\pi L}{8 \left[\ln \left(\frac{L}{r_o} \right) - 1.15 \right]} \quad (1.79)$$

siendo r_o el radio de los drenes.

- La relación de Van der Molen y Wesseling (1991) deducida aplicando el método de las imágenes:

$$D_e = \frac{\frac{\delta L}{8}}{\ln \frac{L}{\delta r} + F(x)} \quad (1.80)$$

donde:

$$x = \frac{2\pi D_o}{L} \quad (1.81.1)$$

y

$$F(x) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \ln \coth(jx) \quad (1.81.2)$$

La función (1.81.2) puede aproximarse como:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4 \exp[-(2j+1)x]}{(2j+1)\{1 - \exp[-(2j+1)x]\}} \quad (1.82)$$

La expresión (1.82) converge rápidamente para $x > 1$. Sin embargo para $x \ll 1$ su convergencia es lenta, por esta razón se usa la siguiente expresión:

$$F(x) = \frac{\pi^2}{4x} + \ln\left(\frac{\pi}{2x}\right) \quad (1.83)$$

Si los drenes se localizan sobre el estrato impermeable ($D_o \approx 0$), la ecuación (1.77) se transforma en:

$$q_o = \frac{4K_s h_c^2}{L^2} \quad (1.84)$$

esta ecuación describe el flujo de agua por encima del dren.

Si el estrato impermeable es muy profundo ($D_o \gg h$), puede despreciarse el primer término de la ecuación (1.77), resultando:

$$q_o = \frac{8K_s D_o h_c}{L^2} \quad (1.85)$$

La ecuación (1.85) describe el flujo de agua por debajo del dren.

Las consideraciones anteriores sobre el cálculo del flujo por encima y por debajo del dren, conducen a la conclusión de que, si el perfil del suelo consta de dos capas con diferente conductividad hidráulica y si el dren se localiza en la interfaz entre ambas capas, la ecuación (1.77) puede escribirse como:

$$q_o = \frac{4K_{ss} h_c^2 + 8K_{si} D_o h_c}{L^2} \quad (1.86)$$

donde K_{ss} y K_{si} son las conductividades hidráulicas a saturación del estrato superior y el inferior respectivamente $[LT^{-1}]$.

b.1.2) Solución de Glover-Dumm (1954)

La solución de Glover-Dumm se deduce aceptando las siguientes hipótesis:

- i) La carga hidráulica H es mucho mayor que las variaciones de H , con este supuesto $H \equiv D_0$.
- ii) La conductividad hidráulica a saturación es constante.
- iii) La recarga es nula ($R = 0$).
- iv) La porosidad drenable es una constante para cada tipo de suelo ($\mu = \nu = cte$).

Con los supuestos anteriores la ecuación (1.64) se escribe como:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = K_s D_0 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (1.87)$$

donde se ha considerado que $H_i = 0$.

La condición inicial que se utiliza es la siguiente:

$$H_s(x) = h_s(x) + D_0 \quad x = 0 \quad t = 0 \quad (1.88)$$

donde $h_s(x)$ es la elevación inicial de la superficie libre a lo largo de la coordenada horizontal x contada a partir de los drenes.

Las condiciones de frontera a que se sujeta la ecuación (1.87) son de Dirichlet homogénea, es decir se asume que la carga es nula sobre los drenes ($h(0, t) = 0$ y $h(L, t) = 0$):

$$H = D_0 \quad x = 0 \quad t > 0 \quad (1.89.1)$$

$$H = D_0 \quad x = L \quad t > 0 \quad (1.89.2)$$

Usando el método de separación de variables se resuelve el sistema (1.87), (1.88) y (1.89), obteniéndose el siguiente resultado:

$$H(x, t) = D_o + \frac{4h_s}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2j+1} \exp[-(2j+1)^2 f t] \sin \frac{(2j+1)\pi x}{L} \quad (1.90)$$

donde $f = \frac{\pi^2 K_s D_o}{\mu L^2}$.

Con la solución (1.90) se puede describir la evolución en el tiempo de la carga al centro entre drenes ($h_c = H_c - D_o$), si se retiene solamente una armónica de tal solución y se considera que la superficie libre en la condición inicial tiene forma de una parábola de cuarto orden se deduce la siguiente fórmula para el cálculo de la separación entre drenes:

$$L = \pi \left(\frac{K_s D_o t}{\mu} \right)^{1/2} \left[\ln \left(1.16 \frac{h_s}{h_c} \right) \right]^{-1/2} \quad (1.91)$$

b.2) La condición de radiación lineal de Newton en los drenes

A partir de una serie de observaciones de las variables físicas de un sistema de drenaje instalado en campo, Fuentes *et al.* (1997) presentan evidencia de que la carga de agua sobre el dren no se abate de manera instantánea (Figura 1.12) como se supone clásicamente en la literatura (Hooghoudt, 1940; Glover-Dumm, 1954; Skaggs, 1978) y proponen que la evolución de esta variable sea descrita utilizando la condición de radiación lineal de Newton.

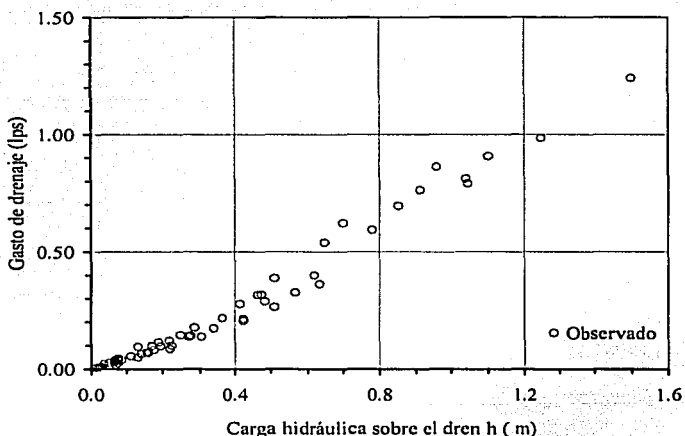


Figura 1.12. Relación entre el gasto de drenaje y la carga hidráulica sobre una línea de drenaje (Fuentes *et al.*, 1997).

La aplicación de la condición de radiación en un sistema de drenaje permite establecer que el flujo de agua a través de la frontera del dren $q(x=0 \text{ o } x=L, t)$ es proporcional a la diferencia de carga en la vecindad inmediata de esta frontera. Suponiendo que en el interior del dren la presión es igual a la atmosférica (convencionalmente igual a cero), se tiene: $q \propto h$. Haciendo intervenir la conductividad hidráulica a saturación (K_s) y la separación entre drenes (L) el flujo de agua se puede expresar como: $q(0, t) = -\gamma K_s h(0, t)/L$ y $q(L, t) = \gamma K_s h(L, t)/L$, donde γ es un coeficiente adimensional de conductancia de la interfaz suelo-dren. Puesto que de acuerdo con la ley de Darcy $q(x, t) = -K_s \partial h(x, t)/\partial x$, las condiciones en las fronteras se establecen como sigue:

$$-K_s \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma \frac{K_s}{L} h = 0, \quad x = 0 \quad (1.92.1)$$

$$K_s \frac{\partial h}{\partial x} + \gamma \frac{K_s}{L} h = 0, \quad x = L \quad (1.92.2)$$

En un sistema de drenes paralelos a igual separación el gasto de agua que fluye a través de la frontera por unidad de longitud de dren es proporcionado por (Fuentes *et al.*, 1997):

$$Q_d(t) = 2\gamma \frac{K_s}{L} [D_o + h(0, t)]h(0, t) \quad (1.93)$$

Fuentes *et al.* (1997) han obtenido una solución de la ecuación de Boussinesq del régimen transitorio bajo condiciones de radiación (ecuaciones 1.92.1 y 1.92.2) aceptando las siguientes condiciones:

- i) Porosidad drenable constante $v = v \Rightarrow \mu = v$.
- ii) Transmisibilidad constante $T = T = K_s (D_o + \bar{h})$.
- iii) Recarga nula ($R = 0$).
- iv) Condición inicial constante $H = H_s = D_o + h_s$.

La solución para $h(x, t)$ es la serie de Fourier siguiente:

$$h(x, t) = h_s \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right) \left[\cos\left(\alpha_n \frac{x}{L}\right) + \frac{\gamma}{\alpha_n} \sin\left(\alpha_n \frac{x}{L}\right) \right] \quad (1.94)$$

donde $\tau = \mu L^2 / T$.

Los valores propios (α_n) son las raíces positivas de:

$$f(\alpha) = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\gamma}{\alpha} - 2 \cot(\alpha) = 0 \quad (1.95)$$

y las amplitudes correspondientes (A_n) se calculan con:

$$A_n = 2 \frac{\alpha_n \sin(\alpha_n) + \gamma [1 - \cos(\alpha_n)]}{\alpha_n^2 + \gamma^2 + 2\gamma} \quad (1.96)$$

El gasto drenado por unidad de longitud de acuerdo con la ecuación (1.93) y la lámina drenada son proporcionados respectivamente por:

$$Q_i(t) = \frac{2\gamma T}{L} h(0, t) = \frac{2\gamma T}{L} h_s \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right) \quad (1.97)$$

$$\ell(t) = \frac{1}{L} \int_0^L Q_i(t) dt = \ell_{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} 2\gamma \frac{A_n}{\alpha_n^2} \left[1 - \exp\left(-\alpha_n^2 \frac{t}{\tau}\right)\right] \quad (1.98)$$

donde $\ell_{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \ell(t) = \mu h_s$.

En razón del límite de la ecuación (1.98), Fuentes *et al.* (1997) recomiendan tomar como porosidad drenable constante el valor medio siguiente:

$$\mu = \frac{1}{h_s} \int_0^{h_s} \mu(h) dh \quad (1.99)$$

Los mismos autores sugieren tomar como valor constante de la transmisibilidad el valor medio ponderado siguiente:

$$T = K_s (D_o + \bar{h}) = \frac{2}{h_s^2} \int_0^{h_s} h T(h) dh \quad (1.100)$$

es decir $\bar{h} = \frac{2}{3} h_s$.

Se puede demostrar que esta solución contiene a la solución de Glover-Dumm (ecuación 1.90). En efecto, cuando la conductancia de la interfaz suelo-dren es muy grande ocurre el abatimiento instantáneo de la carga sobre el dren. Cuando $\gamma \rightarrow \infty$ de la ecuación (1.95) se deduce $\alpha_n = (2n+1)\pi$ y de la ecuación (1.96): $\gamma \bar{A}_n \rightarrow 4$. Con estos resultados y considerando que $H = D_0 + h$ se deduce la solución de Glover-Dumm.

1.2.3. Las variables a investigar en la escala de Boussinesq

La revisión bibliográfica precedente ha permitido identificar las limitaciones de las aproximaciones que se usan para modelar el drenaje agrícola con la ecuación de Boussinesq, estas se enuncian a continuación:

- En drenaje agrícola la capacidad de almacenamiento es comúnmente asimilada a la porosidad drenable, independientemente de la forma funcional adoptada para esta propiedad: constante para cada tipo de suelo (Pandey *et al.*, 1992) o variable en función de la carga hidráulica (Skaggs y Tang, 1976; Bhattacharya y Broughton, 1979; Pandey, *et al.*, 1992; González *et al.*, 1997; Fuentes *et al.*, 1999).
- No obstante que Fuentes *et al.* (1997) proponen imponer en los drenes la condición de radiación lineal de Newton, no realizan una validación exhaustiva de la capacidad de descripción de esta condición de frontera (comparación con datos experimentales obtenidos bajo condiciones controladas y considerando suelos de diferentes texturas).

Siendo que en los trabajos presentados en la literatura sobre drenaje agrícola no se ha establecido formalmente la relación entre la capacidad de almacenamiento y la porosidad drenable y que las fórmulas mecanicistas para la porosidad drenable se han derivado suponiendo que dicha propiedad es equivalente a la capacidad de almacenamiento y además no se ha realizado un estudio detallado de la condición de frontera en los drenes, en este trabajo se plantean los siguientes objetivos: 1) estudiar la capacidad de almacenamiento como una función de la posición de la superficie del manto freático considerando la influencia de la zona no saturada del suelo en el proceso de drenaje; 2) estudiar la forma de la condición de frontera que debe imponerse en los drenes; y 3) verificar la capacidad descriptiva tanto de la fórmula para la capacidad de almacenamiento como de la condición de frontera en los drenes mediante la descripción de un experimento de drenaje hecho en laboratorio con una solución de elemento finito de la ecuación de Boussinesq unidimensional.

CAPITULO II

DRENAJE DE COLUMNAS DE SUELOS INICIALMENTE SATURADOS

La aplicación de la condición de radiación lineal de Newton (ecuación 1.43) a la descripción de la transferencia de agua del suelo hacia los drenes presenta los siguientes problemas:

1. Determinar la naturaleza física del coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-dren ya que este puede ser constante o una función de la presión o del flujo de agua.
2. Determinar la evolución la presión en el interior del dren h .
3. Estimar las características hidrodinámicas del suelo de manera independiente de los estudios sobre la resistencia en la interfaz (R_{in}) y la presión en el dren (h), puesto que si las experiencias de drenaje pueden ser descritas con la condición de radiación lineal de Newton (1.43) es claro que la imprecisión de la caracterización del suelo será absorbida por la manera particular de considerar la transferencia del agua del suelo hacia el dren o viceversa.

En este capítulo se realiza un estudio teórico y experimental de la transferencia de agua del suelo hacia la atmósfera en la base de la columna de suelo que se ubica sobre el dren para conocer el comportamiento del coeficiente de resistencia en la interfaz (R_{in}) durante la fase recesión del manto freático. Para describir este proceso de transferencia se obtiene primeramente una solución numérica de la ecuación de Richards unidimensional, la cual es validada comparando sus resultados con aquellos proporcionados por la solución de Fuentes (1992) que describe el drenaje en una columna de suelo semi-infinita. Posteriormente se realiza un experimento de drenaje en laboratorio donde el dren es representado por una placa porosa colocada en el fondo de una columna de suelo inicialmente saturado. La caracterización hidrodinámica del suelo es realizada aplicando una metodología que se basa en la curva granulométrica del suelo, su porosidad total y en la descripción de un evento transitorio de flujo de agua en el medio poroso, por ejemplo una prueba de infiltración. Debido a que las características hidrodinámicas son afectadas por la histéresis capilar, en especial la característica de humedad, el volumen total de agua drenado por la columna de suelo es utilizado para obtener los parámetros hidráulicos correspondientes a drenaje. Finalmente se establecen las condiciones físicas que deben satisfacerse durante la transferencia de agua de la base de columna de suelo hacia la atmósfera. Se muestra que en los tiempos muy cortos la condición de radiación lineal de Newton no cumple estas condiciones y además no describe la evolución en el tiempo de la lámina drenada experimental. Se estudian modificaciones a la condición de radiación lineal de Newton obteniéndose que la transferencia de agua del suelo a la atmósfera puede ser descrita con una condición de radiación no lineal. Los parámetros de esta condición de frontera se estiman de manera de minimizar los errores entre la lámina de agua drenada calculada con la ecuación de Richards y la lámina de agua drenada medida. Utilizando información obtenida en suelos de

texturas contrastantes se muestra la buena capacidad descriptiva de la condición de radiación no lineal y se propone una relación empírica entre los exponentes de la condición de radiación no lineal y una propiedad física del suelo.

2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El movimiento del agua en una columna de suelo es descrito clásicamente con la ecuación de Richards unidimensional, que puede escribirse de la siguiente manera:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (2.1)$$

Para describir el drenaje de una columna de suelo además de la ecuación (2.1) es necesario conocer el estado inicial del medio poroso y definir las condiciones de frontera que mejor representen el fenómeno bajo estudio. Si en el tiempo inicial ($t = 0$) se tiene una columna de suelo saturada que no transfiere agua a la atmósfera por sus fronteras superior e inferior, se puede suponer que la condición inicial corresponda a una distribución hidrostática de presiones:

$$\psi(z, 0) = z \quad \text{en} \quad 0 \leq z \leq P \quad (2.2)$$

donde P es la longitud de la columna.

En la frontera superior de la columna se puede imponer una condición de frontera tipo Neumann:

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = -E \quad z = 0 \quad (2.3)$$

donde E es un valor de flujo conocido $[LT^{-1}]$, tal como la evaporación en función del tiempo: $E = E(t)$.

La transferencia de agua del suelo hacia la atmósfera en la base de la columna de suelo puede ser modelada con la condición de radiación lineal de Newton (1.43), que para casos unidimensionales se escribe como:

$$-K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} + \frac{h - \psi}{R_{in}} = 0 \quad z = P \quad (2.4)$$

La presión existente en el exterior del medio poroso corresponde a la presión atmosférica la cual puede suponerse constante para todo tiempo:

$$h = 0 \quad \forall t \quad (2.5)$$

Aún cuando en este caso el valor de la variable h es conocido (2.5), la descripción del drenaje de una columna de suelo a la atmósfera requiere todavía del conocimiento de las características hidrodinámicas del suelo ($\theta(\psi)$ y $K(\theta)$) y del coeficiente de resistencia de la interfaz suelo-atmósfera que pueda ser una constante o una función de la presión o del flujo de agua.

El estudio del coeficiente de resistencia de la interfaz (R_{in}) requiere tanto de una solución de la ecuación (2.1) sujeta a la condición inicial definida por la ecuación (2.2) y a las condiciones de frontera (2.3) y (2.4) para $K(\theta)$ y $\theta(\psi)$ variables como de información experimental, dado que se requiere explorar, determinar y validar la forma de este parámetro.

La solución analítica del sistema antes mencionado no es conocida hasta el presente motivo por el cual se obtiene una solución numérica de éste. El requisito de la información experimental es cumplido desarrollando en laboratorio pruebas de infiltración y de drenaje en columnas de suelo manteniendo bajo control variables climatológicas como la temperatura, el viento y la evaporación.

El problema de la caracterización hidrodinámica de los suelos puede ser abordado ya sea mediante el uso de procedimientos directos de laboratorio o campo que están basados en la resolución experimental de la ecuación de Richards bajo condiciones iniciales y de frontera simplificadas, utilizando sensores para medir la presión del suelo (tensiómetros), o mediante procedimientos indirectos e inversos que permiten estimar los parámetros que intervienen en las representaciones analíticas comúnmente aceptadas de las características hidrodinámicas del suelo.

Para estimar los parámetros de las representaciones analíticas, en este trabajo se utiliza, por su sencillez, rapidez y precisión, un procedimiento indirecto e inverso basado en la curva granulométrica del suelo, la porosidad total del mismo y una prueba de infiltración. Es bien conocido que las características hidrodinámicas son afectadas por la histéresis capilar, en especial la característica de humedad, por tal razón se realiza una prueba de drenaje para obtener los parámetros correspondientes.

2.2. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS UNIDIMENSIONAL

La resolución numérica de la ecuación (2.1) se realiza con el método del elemento finito. En este método la variable dependiente ψ se aproxima por una combinación lineal de funciones de base φ_j definidas en relación con la función delta de Kronecker:

$$\psi(z, t) \cong \hat{\psi}(z, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(z) \Psi_j(t) \quad (2.6)$$

donde $\Psi_j(t)$ son coeficientes que dependen del tiempo y representan la solución aproximada de la ecuación (2.1) en puntos específicos del dominio llamados nodos (n).

La sustitución de la solución aproximada $\hat{\psi}(z, t)$ en la ecuación (2.1) genera un error o residual (ε) que puede escribirse como:

$$\varepsilon = C \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial (\hat{\psi} - z)}{\partial z} \right] \quad (2.7)$$

Este residual se minimiza formando una integral ponderada de ε sobre el dominio de solución $(0, P)$ y requiriendo que la integral, denominada residuo ponderado, sea cero:

$$\int_0^P \varepsilon v_i(z) dz = \int_0^P \left\{ C \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left[K \frac{\partial (\hat{\psi} - z)}{\partial z} \right] \right\} v_i(z) dz = 0 \quad (2.8)$$

donde $v_i(z)$, con $i = 1, \dots, n$, son las funciones de peso.

La integración por partes de la ecuación (2.8) conduce a:

$$\int_0^P C \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} v_i dz + \int_0^P K \left(\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} - 1 \right) \frac{dv_i}{dz} dz = K \frac{\partial (\hat{\psi} - z)}{\partial z} v_i \Big|_0^P \quad (2.9)$$

Con la sustitución de la solución de elemento finito $\hat{\psi}$ dada por la ecuación (2.6) en la ecuación (2.9), considerando que las funciones de peso son iguales a las funciones de base $v = \varphi$ (método de Galerkin) y asumiendo una variación lineal de las propiedades hidráulicas en el

elemento ($\hat{C} = \varphi_g C_g$ y $\hat{K} = \varphi_g K_g$), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$[A] \frac{d\{\Psi\}}{dt} + [B]\{\Psi\} = \{F\} + \{G\} \quad (2.10)$$

donde A es conocida como la matriz de masa, B es la matriz de rigidez, F es el vector que contiene los valores o las relaciones de los flujos en la frontera ($z=0$ y $z=P$) y G es el vector de la fuerza de gravedad. Utilizando funciones de interpolación lineales se calcularon los coeficientes de estas matrices y vectores, el resultado obtenido es:

$$A_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_0^P C_g \varphi_g \varphi_i \varphi_j dz = \delta_{ij} \sum_c C_j \frac{\Delta z}{2} \quad (2.11)$$

$$B_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_0^P K_g \varphi_g \frac{d\varphi_i}{dz} \frac{d\varphi_j}{dz} dz = \sum_c (-1)^{i+j} \frac{\bar{K}}{\Delta z} \quad (2.12)$$

$$F_i = \bar{K} \left. \frac{\partial(\Psi - z)}{\partial z} \varphi_i \right|_0^P = \begin{cases} E(t) & ; i=1 (z=0) \\ \frac{h_i - \Psi_i}{R_{in}} & ; i=n (z=P) \end{cases} \quad (2.13)$$

$$G_i = \int_0^P K_g \varphi_g \frac{d\varphi_i}{dz} dz = \sum_c K \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

donde φ son funciones de base del sistema de masa concentrado (Neuman, 1973); δ_{ij} es la delta de Kronecker; \bar{K} es la conductividad hidráulica en el elemento tomada como el promedio aritmético de las conductividades en los dos nudos del elemento (como consecuencia de la forma adoptada para las funciones de base).

La aproximación de la derivada temporal en la ecuación (2.10) se realiza con el siguiente esquema:

$$\left(\frac{d\{\Psi\}}{dt} \right)^{t+\omega\Delta t} = \frac{\{\Psi\}^{t+\Delta t} - \{\Psi\}^t}{\Delta t} \quad (2.15)$$

$$\{\Psi\}^{t+\omega\Delta t} = \omega\{\Psi\}^{t+\Delta t} + (1-\omega)\{\Psi\}^t \quad (2.16)$$

donde Δt es el paso de tiempo y ω es un coeficiente de ponderación en el tiempo ($0 \leq \omega \leq 1$), tomado como $\omega = 1$ (esquema implícito). Sustituyendo las ecuaciones (2.15) y (2.16) en la ecuación (2.10) y aplicando el método de linealización de Picard se obtiene:

$$\left[\frac{A_{t+\omega\Delta t}^w}{\Delta t} + \omega B_{t+\omega\Delta t}^w \right] \{Y\}_{t+\Delta t}^{w+1} = \left[\frac{A_{t+\omega\Delta t}^w}{\Delta t} - (1-\omega)B_{t+\omega\Delta t}^w \right] \{Y\}_t + \{F\}_{t+\omega\Delta t}^w + \{G\}_{t+\omega\Delta t}^w \quad (2.17)$$

donde w indica el número de iteración en el intervalo de tiempo. El sistema de ecuaciones (2.17) es resuelto utilizando un método iterativo de gradiente conjugado preconditionado (Noor y Peters, 1987) que permite eliminar los errores de redondeo asociados con el procedimiento de sustitución regresiva requerido en los métodos directos. El esquema numérico (2.17) se codificó en el lenguaje de programación Borland C++ 5.0.

2.3. VALIDACIÓN DEL ESQUEMA NUMÉRICO

La dificultad de establecer un criterio general de convergencia y estabilidad para la ecuación de Richards, hace necesario validar el modelo desarrollado comparando los resultados obtenidos mediante su aplicación con aquellos proporcionados por una solución analítica. Existen en la literatura soluciones exactas para una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo constante en la superficie de la misma que se han construido para las características hidrodinámicas propuestas por Fujita (ecuación 1.11) y Parlange *et al.* (ecuación 1.14).

Para las características de Fujita y Parlange, con el caso particular de α variable y $\beta = 1$, se han desarrollado soluciones analíticas exactas en una columna semi-infinita de suelo sujeta a una condición de flujo constante en la superficie del suelo y a un contenido de agua inicial constante. En flujo bifásico la solución es presentada por Rogers *et al.* (1983), y en flujo monofásico por Sanders *et al.* (1988). La solución del último trabajo ha sido adaptada por Warrick *et al.* (1990) y Parkin *et al.* (1995) para el caso del drenaje en una columna semi-infinita de suelo y para el flujo del agua en una columna finita por Hills y Warrick (1993). La solución para el caso general de α y β variables es presentada por Fuentes (1992).

$$\Theta(\zeta, t) = \frac{\mu(\zeta, t)}{1 - \alpha + \alpha \mu(\zeta, t)} \quad (2.18)$$

$$\mu(\zeta, t) = \frac{\alpha Q - (1 - \beta)}{2\beta} - \frac{\sqrt{1 - \alpha}}{\beta[u_r(\zeta, t) + u_c(\zeta, t)]} \left[\frac{\partial u_r(\zeta, t)}{\partial \zeta} + \frac{\partial u_c(\zeta, t)}{\partial \zeta} \right] \quad (2.19)$$

$$z.(\zeta, t.) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \left[\left(1 - \alpha + \alpha \frac{\alpha Q - (1-\beta)}{2\beta} \right) \zeta \right] + \frac{\alpha}{\beta} \ln \left[\frac{\exp(\lambda^2 t.)}{u_r(\zeta, t.) + u_c(\zeta, t.)} \right] \quad (2.20)$$

siendo:

$$u_r = \frac{1}{2} \exp(-\lambda \zeta + \lambda^2 t.) \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{t.}} - \lambda \sqrt{t.} \right) + \frac{1}{2} \exp(\lambda \zeta + \lambda^2 t.) \operatorname{erfc} \left(\frac{\zeta}{2\sqrt{t.}} + \lambda \sqrt{t.} \right) \quad (2.21)$$

$$u_c = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp[A(\zeta)] \left[\exp\left(-\frac{(\zeta - \xi)^2}{4t.}\right) - \exp\left(-\frac{(\zeta + \xi)^2}{4t.}\right) \right] d\xi \quad (2.22)$$

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha}} \sqrt{(1-\beta)^2 + 2[2\beta(1-\alpha) - \alpha(1-\beta)]Q + (\alpha Q)^2} \quad (2.23)$$

$$A(\zeta) = \frac{1}{2\sqrt{1-\alpha}} \left[\alpha Q \zeta - \int_0^{\zeta} (1-\beta + 2\beta \mu_i(\xi)) d\xi \right] \quad (2.24)$$

en donde las variables adimensionales están definidas por:

$$z. = \frac{z}{\lambda_c} \quad (2.25)$$

$$t. = \frac{K_s}{(\theta_s - \theta_r) \lambda_c} t \quad (2.26)$$

El cálculo de la función $A(\zeta)$ requiere del conocimiento de la condición inicial. Por simplicidad se escogerá un contenido de agua constante en todo el perfil (θ_i). El valor correspondiente μ_i se calcula utilizando la ecuación (2.18). La función resultante $A(\zeta) = [\alpha Q - (1-\beta + 2\beta \mu_i)] \zeta / 2\sqrt{1-\alpha}$, permite obtener de la ecuación (2.22) la solución para u_c de manera cerrada.

La solución analítica para el perfil de humedad $\theta(z, t)$ es paramétrica, es decir de la forma $\theta(\zeta, t) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \Theta[\zeta, K_s t / \lambda_c (\theta_s - \theta_r)]$ y $z = \lambda_c z_c [\zeta, K_s t / \lambda_c (\theta_s - \theta_r)]$, con $\zeta \geq 0$ como parámetro.

Cuando se desea describir la infiltración en una columna semi-infinita de suelo en la solución analítica se sustituye Q por el valor de flujo que se tenga en la frontera superior ($Q > 0$); si se desea describir el efecto de la evaporación se impone un flujo negativo en esta frontera ($Q < 0$) y si se desea modelar el drenaje en una columna semi-infinita entonces se impone en esa misma frontera una condición de Neumann de flujo nulo ($Q = 0$).

La semejanza entre los perfiles de humedad calculados con el esquema numérico y los proporcionados por la solución exacta es influenciada básicamente por la discretización del dominio en el espacio y el tiempo. En esta validación los valores de Δz y Δt se eligen de la siguiente manera: se fija una discretización espacial, se selecciona un paso de tiempo para iniciar la modelación y en el transcurso de ésta se modifica el paso de tiempo hasta alcanzar un valor máximo previamente seleccionado. La modificación del intervalo de tiempo se realiza cumpliendo las siguientes reglas: para una tolerancia dada, si el esquema converge en un número menor o igual a J iteraciones, el paso de tiempo se incrementa en, por ejemplo, 5%; si el número de iteraciones necesario para alcanzar la convergencia es mayor que IJ , donde $I > J$, se reduce el paso de tiempo en, por ejemplo, 25%. La simulación concluye cuando se alcanza el tiempo en el que se desea comparar los resultados analíticos y numéricos.

Las diferencias entre la solución exacta (analítica) y la solución aproximada (numérica) a un tiempo dado se calculan utilizando dos criterios, el error cuadrático medio:

$$E.C.M. = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^n [\theta_{\text{exact}}(t) - \theta_{\text{num}}(t)]^2}{n-1}} \quad (2.27)$$

y el error relativo máximo:

$$E_{\text{max}} = \max \left| \frac{\theta_{\text{num}} - \theta_{\text{exacta}}}{\theta_{\text{exacta}}} \right| \times 100 \quad (2.28)$$

donde n es el número de nodos.

Los errores estimados con las ecuaciones (2.27) ó (2.28) se grafican contra los pasos de espacio usados en las simulaciones para determinar la discretización espacial óptima, que es aquella que minimiza el error de truncado.

La validación del modelo es realizada en dos suelos contrastantes, la arcilla clara de Yolo, USA y la arena de Tezoyuca, Morelos, cuyos parámetros de las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange se muestran en la Tabla 2.1.

Suelo	θ_r [cm ³ /cm ³]	θ_s [cm ³ /cm ³]	λ_c [cm]	K_s [cm/h]	α	β
Arcilla clara de Yolo, USA	0.2285	0.4950	27.05	0.0443	0.8912	1.0000
Arena de Tezoyuca, Morelos	0.0000	0.4500	29.00	18.2000	0.9523	0.9999

Tabla 2.1. Parámetros de las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange para dos suelos contrastantes.

La condición inicial que se impone en ambos suelos es una distribución constante de la humedad a lo largo del perfil de suelo, $\theta(z) = \theta_s$.

En las arenas el flujo del agua es más rápido que en las arcillas, razón por la cual se seleccionan respectivamente los siguientes valores extremos para el paso de tiempo: $\Delta t_{ini} = 1 \times 10^{-5}$ s y $\Delta t_{max} = 60$ s (arena) y $\Delta t_{ini} = 1 \times 10^{-2}$ s y $\Delta t_{max} = 180$ s (arcilla). En ambos casos se usa una tolerancia de $Tol = 1 \times 10^{-3}$ cm para probar la convergencia de la solución numérica y para definir el aumento o decremento del paso de tiempo se utiliza $J = 5$ y $IJ = 15$. Los tiempos en los cuales se comparan las distribuciones del contenido volumétrico de agua proporcionadas por las soluciones numérica y analítica son: para la arena de Tezoyuca a los 30 min de iniciado el drenaje y para la arcilla Yolo a las 48 horas de drenaje. En ambas comparaciones se consideran los cambios de almacenamiento que se producen sólo en los primeros 75 cm de longitud de la columna.

Aplicando el modelo numérico (2.17) se simuló el drenaje en una columna semi-infinita de suelo. A partir de las comparaciones con la solución analítica se encontró que en la arena de Tezoyuca el error de truncado en la distribución del contenido volumétrico de agua evoluciona en función de la discretización espacial conforme a la siguiente relación (Figura 2.1.):

$$E.C.M. = 2.505 \times 10^{-4} - 1.391 \times 10^{-5} \Delta z + 4.575 \times 10^{-6} \Delta z^2 \quad (2.29)$$

Derivando (2.29) con respecto a z e igualando a cero la expresión resultante se obtiene la discretización espacial óptima para las condiciones de drenaje especificadas y los intervalos de tiempo considerados, $\Delta z \cong 1.5$ cm (E.C.M. $\cong 2.4 \times 10^{-4}$ cm³/cm³ y $E_{max} \cong 0.098$ %). Pasos de espacio menores a éste no mejoran los resultados dado que incrementan el error de redondeo y el tiempo de cómputo, por ejemplo $\Delta z = 2.5 \times 10^{-4}$ cm (E.C.M. $\cong 2.5 \times 10^{-4}$ cm³/cm³ y $E_{max} \cong 0.099$ %).

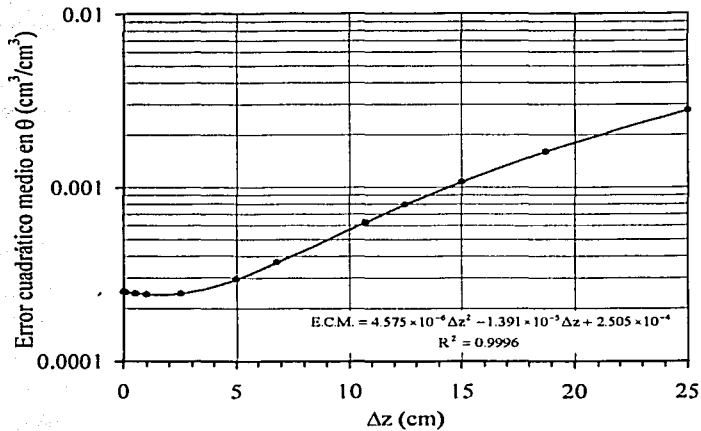


Figura 2.1. Variación del error en función de la discretización espacial en la arena de Tezoyuca, Morelos.

En la Figura 2.2. se muestran las evoluciones de la lámina drenada en la columna de suelo arena de Tezoyuca hasta 75 cm de profundidad, obtenidas con diferentes discretizaciones espaciales del dominio de solución. En esta Figura se puede observar como la solución numérica tiende a la analítica conforme el paso de espacio se aproxima a su valor óptimo.

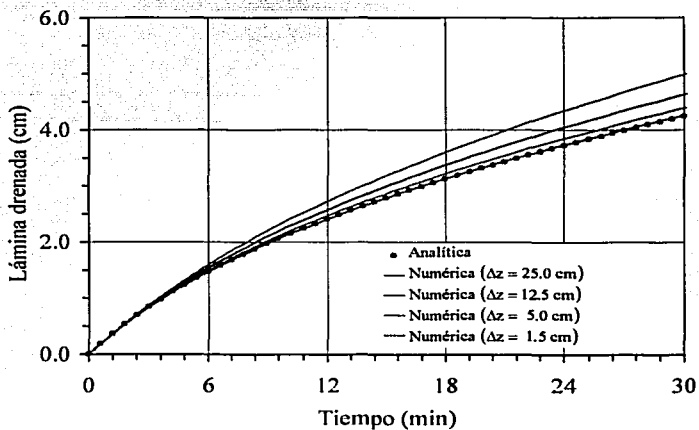


Figura 2.2. Evolución de la lámina drenada hasta 75 cm de profundidad en la columna de suelo arena de Tezoyuca.

Pruebas similares a las anteriores se desarrollaron considerando la arcilla clara Yolo. La evolución del error en este suelo se muestra en la Figura 2.3. y en la Figura 2.4. se muestra la evolución de la lámina drenada para diferentes discretizaciones espaciales. El paso de espacio óptimo para este tipo de suelo es de: $\Delta z \cong 0.26 \text{ cm}$ (E.C.M. $\cong 8.45 \times 10^{-5} \text{ cm}^3/\text{cm}^3$ y $E_{\text{max}} \cong 0.026 \%$).

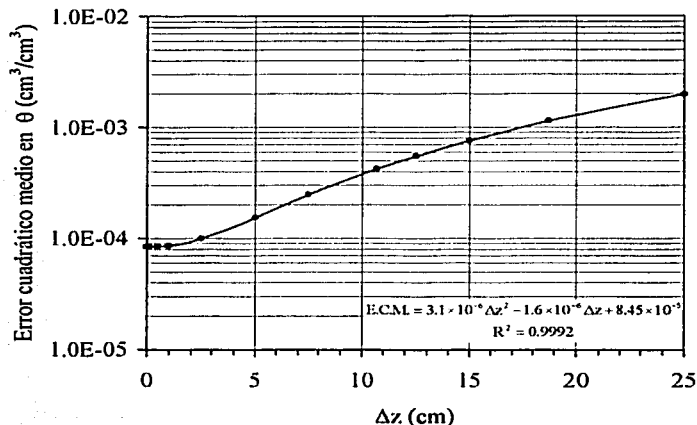


Figura 2.3. Variación del error en función de la discretización espacial en la arcilla clara Yolo, USA.

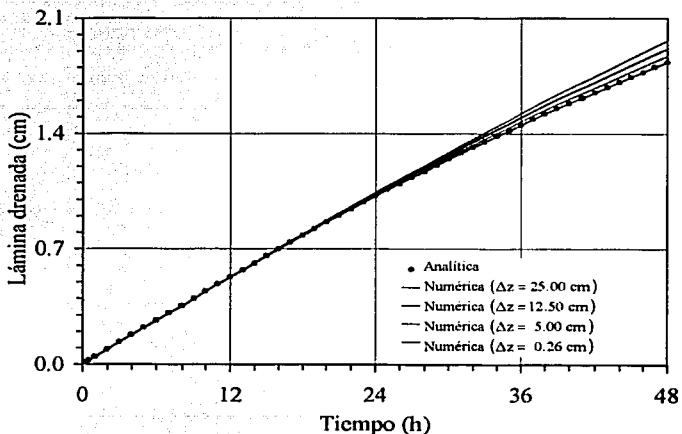
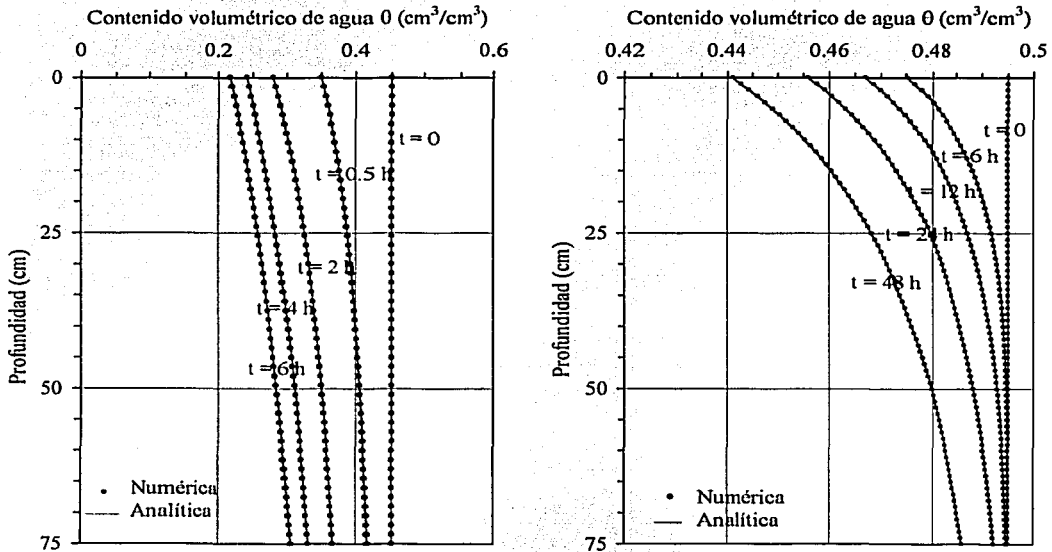


Figura 2.4. Evolución de la lámina drenada hasta 75 cm de profundidad en la columna de suelo arcilla clara Yolo.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

Considerando los pasos de espacio óptimos determinados precedentemente, se modeló el drenaje en las columnas de suelo arena de Tezoyuca y arcilla clara Yolo. Los perfiles de humedad obtenidos en diferentes tiempos de simulación son prácticamente iguales a los proporcionados por la solución analítica (Figura 2.5a y 2.5b). La ausencia de oscilaciones en los resultados de la solución de elemento finito justifica la selección de los pasos de espacio y de tiempo, así como el criterio adoptado para incrementar este último parámetro en el transcurso de la modelación.

Los resultados obtenidos en esta sección muestran la confiabilidad del esquema numérico desarrollado y permiten concluir que éste puede ser aplicado para simular distintos escenarios de drenaje.



a) Arena de Tezoyuca.

b) Arcilla clara Yolo.

Figura 2.5. Comparación de los perfiles de humedad obtenidos con la solución de elemento finito con los derivados de la solución analítica de Fuentes *et al.* (1992) para diferentes tiempos de simulación.

2.4. EXPERIMENTOS EN LABORATORIO

En el laboratorio de la División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería de la UNAM (Morelos) se desarrollaron pruebas de infiltración y de drenaje en columnas de suelos con el objetivo de obtener información que permitiese determinar y validar la forma del coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-atmósfera que interviene en la relación (2.4).

La caracterización hidrodinámica de los suelos se realiza considerando las representaciones analíticas de la curva de retención de humedad de van Genuchten (ecuación 1.17) y de la curva conductividad hidráulica de Brooks y Corey (ecuación 1.19). La estimación de los parámetros que intervienen en estas relaciones funcionales es realizada con la metodología propuesta por Fuentes (1992), basada en la porosidad total del suelo (ϕ) y su curva granulométrica para los parámetros de forma (m y η), y en la reproducción con la ecuación de Richards de la lámina acumulada de agua observada en una prueba de infiltración para los parámetros de escala (ψ_a y K_s). En este capítulo se ilustra la aplicación de esta metodología considerando sólo uno de los suelos usados en los experimentos realizados en laboratorio, y en el Anexo I se presentan los resultados obtenidos en los suelos restantes.

2.4.1. La porosidad total y la curva granulométrica del suelo

En laboratorio se construyó una columna de acrílico transparente de longitud $P = 75$ cm y de una sección transversal circular de diámetro $D_c = 15$ cm, con una placa porosa cubierta por un filtro colocada en su parte inferior con la finalidad de retener el suelo y permitir la salida del agua y del aire. Esta columna se relleno con una muestra alterada de suelo de textura arenosa de la región de Tezoyuca, Morelos (Figura 2.6).

La porosidad total del suelo (ϕ) es estimada con la fórmula $\phi = 1 - \rho_a / \rho_s$, donde ρ_a es la densidad volumétrica del suelo seco (o densidad aparente) y ρ_s la densidad de las partículas sólidas. Con la densidad medida de $\rho_a = 1.357$ g/cm³, y la densidad $\rho_s = 2.65$ g/cm³ de las partículas de cuarzo, se obtiene $\phi = 0.488$ cm³/cm³.

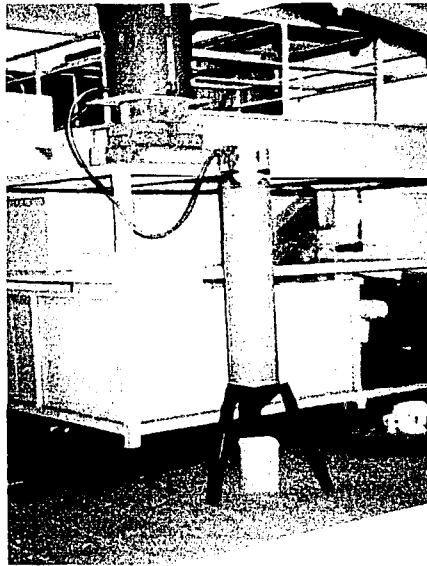


Figura 2.6. Columna de suelo de textura arenosa de la región de Tezoyuca, Morelos

Los parámetros m y η se estiman a partir de la curva granulométrica del suelo y de la porosidad de la columna. La curva granulométrica experimental se ajusta con la siguiente función de distribución tipo van Genuchten:

$$F(D) = \left[1 + \left(\frac{D_g}{D} \right)^N \right]^{-M} \quad (2.30)$$

donde $F(D)$ es la frecuencia acumulada basada en el peso de las partículas cuyos tamaños son inferiores o iguales a D , D_g es un tamaño característico del tamaño de las partículas, M y N son dos parámetros de forma empíricos, y adoptando la restricción de Burdine: $M = 1 - 2/N$, con $0 < M < 1$ y $N > 2$. El mejor ajuste de la ecuación (2.30) con la curva granulométrica ($R^2 = 0.9975$) se obtiene con $D_g = 225 \mu\text{m}$ y $M = 0.5$ (Figura 2.7).

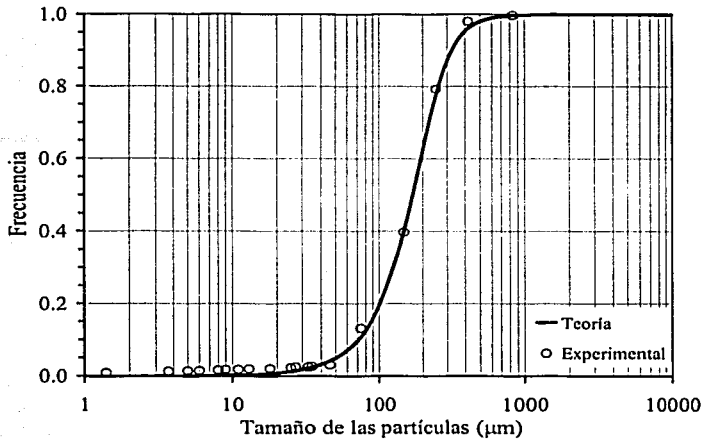


Figura 2.7. Curva granulométrica de la Arena de Tezoyuca y la función definida por la ecuación (2.30): $D_g = 225 \mu\text{m}$ y $M = 0.5$; $R^2 = 0.9975$.

Haciendo $\lambda = mn$ y $\mu_g = MN$ el parámetro de forma m puede ser relacionado con M a través de la fórmula (Fuentes, 1992):

$$\frac{\mu_g}{\lambda} \cong 1 + \frac{2s-1}{2(1-s)} \quad (2.31)$$

donde s es el cociente de la dimensión fractal del suelo y la dimensión del espacio de Euclides ($s = D_r/3$) definido implícitamente en función de la porosidad total del suelo por (Fuentes *et al.*, 2001):

$$(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1. \quad (2.32)$$

En la Arena de Tezoyuca se obtiene $s = 0.692$. Con el valor de $\mu_g = MN = 2.0$ se deduce $\lambda = mn = 1.233$, de donde $m = 0.381$. El parámetro η se puede estimar con la relación deducida por Fuentes *et al.* (2001) para valores altos de la tensión de humedad:

$$\eta = 2s(2/\lambda + 1) \quad (2.33)$$

Con los valores estimados anteriormente para s y λ se obtiene: $\eta = 3.63$.

2.4.2. Prueba de infiltración

La estimación del contenido volumétrico de agua a saturación se realiza midiendo el volumen de agua necesario para saturar la columna de suelo ($V \cong 5964 \text{ cm}^3$) y dividiendo este valor entre el volumen total de la columna ($V \cong 13253 \text{ cm}^3$), el resultado así obtenido es $\theta_s = 0.45 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. La diferencia entre la porosidad y el contenido volumétrico a saturación se debe al volumen de aire atrapado después de la saturación de la columna de suelo. El contenido volumétrico de agua residual se asume igual a cero ($\theta_r = 0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$).

Los parámetros de escala de las características hidrodinámicas (ψ_d y K_s) se estiman a partir de la evolución en el tiempo de la lámina infiltrada en una prueba de infiltración realizada en la columna de suelo (Figura 2.8).

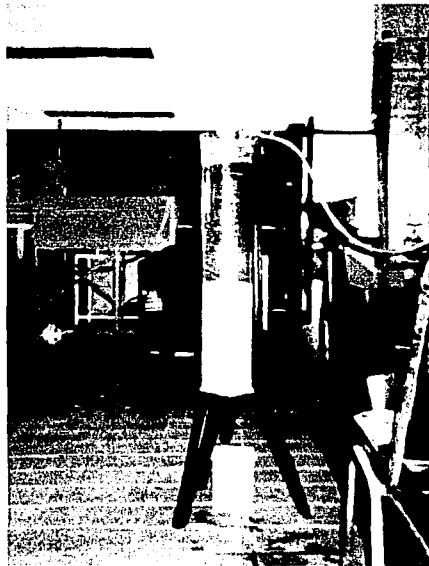


Figura 2.8. Prueba de infiltración.

Para una carga de agua constante sobre la superficie de una columna finita de suelo, el proceso de infiltración se modela sujetando la ecuación (2.1) a las siguientes condiciones inicial y de frontera:

$$\theta = \theta_{ini}; \quad \text{para } 0 \leq z \leq P; \quad t = 0 \quad (2.34)$$

$$\psi = \psi_{cte}; \quad \text{para } z = 0; \quad t > 0 \quad (2.35)$$

$$q = -K(\psi) \frac{\partial(\psi - z)}{\partial z} = 0 \quad \text{para } z = P; \quad t > 0 \quad (2.36)$$

con $\theta_{ini} = 0.008 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $P = 75 \text{ cm}$ y $\psi_{cte} = 6.5 \text{ cm}$.

Para resolver el sistema (2.1), (2.34), (2.35) y (2.36) se utiliza la solución numérica (2.17). El dominio de solución se discretiza generando una malla uniforme de elementos finitos de 751 nodos distribuidos en 750 elementos. El paso de tiempo inicial elegido fue $\Delta t_{ini} = 1 \times 10^{-5} \text{ s}$ que se incrementa durante la simulación en un 5% hasta un valor máximo de 60 s si el número de iteraciones que se requieren para resolver (2.17) en el intervalo de tiempo es menor de 5.

Usando la estrategia de solución numérica anterior y considerando los valores de m , η , θ_s y θ_r previamente estimados, se calibraron los valores de ψ_d y K_s de manera de reproducir las observaciones experimentales (Figura 2.9). Los valores así obtenidos son: $\psi_d = -18.5 \text{ cm}$ y $K_s = 18.2 \text{ cm/h}$, con $R^2 = 0.9988$.

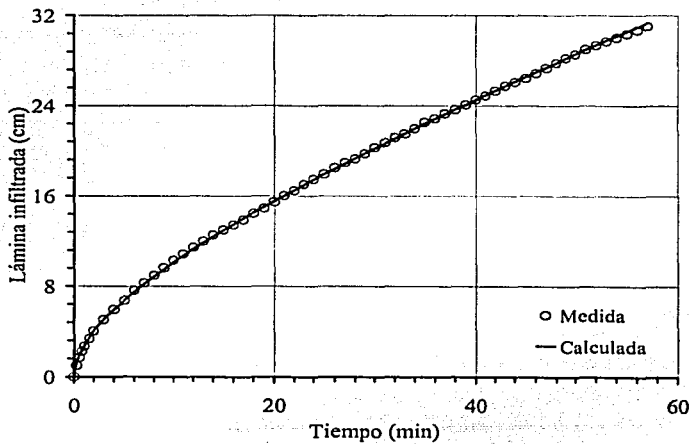


Figura 2.9 Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con: $\psi_d = -18.5 \text{ cm}$ y $K_s = 18.2 \text{ cm/h}$, con $R^2 = 0.9988$.

2.4.3. Prueba de drenaje

Después de la prueba de infiltración se deja la carga de agua sobre la columna de suelo durante un día de drenaje libre con la finalidad de eliminar el aire atrapado. Enseguida en la base de la columna se coloca un tapón y en la superficie, previo retiro del exceso de agua, se coloca una bolsa de polietileno con la finalidad de eliminar la evaporación. Después de una semana de estabilización de la presión del agua en el suelo, el tapón se retira para medir, durante un tiempo de 960 min, el volumen de agua drenado en el transcurso del tiempo (Figura 2.10).

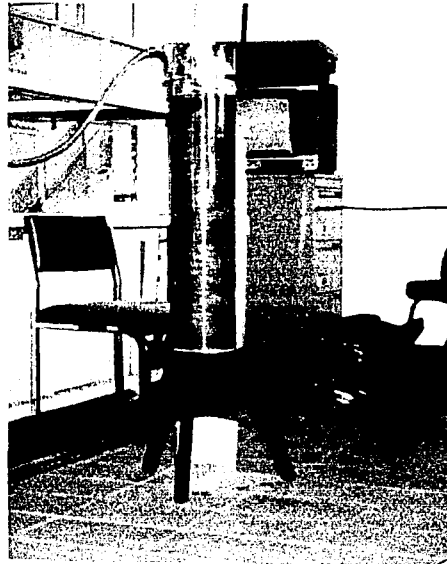


Figura 2.10. Prueba de drenaje.

Cuando $t \rightarrow \infty$ el flujo de Darcy tiende a cero en toda la columna de suelo. La distribución de presiones tiende a condiciones de equilibrio hidrostático, es decir.

$$\psi(z, \infty) = z - P \quad (2.37)$$

La lámina máxima drenada es proporcionada por:

$$l_{\max} = \int_0^P [\theta_s - \theta(z, \infty)] dz \quad (2.38)$$

La introducción de la ecuación (1.17), considerando la ecuación (2.37), en la ecuación (2.38) permite obtener:

$$\ell_{\max} = (\theta_s - \theta_r) \left[P - |\psi_d| \int_0^{|\psi_d|} (1 + \psi^n)^{-m} d\psi \right] \quad (2.39)$$

Con los valores de los parámetros obtenidos precedentemente se obtiene de la ecuación (2.39) $\ell_{\max} \cong 16.72$ cm, sin embargo la lámina drenada observada en los tiempos muy largos es $\ell_{\max} \cong 5.30$ cm. Esta discrepancia es debida al fenómeno de histéresis capilar cuya manifestación es más acentuada en la característica de humedad que en la curva de conductividad hidráulica (Mualem, 1976b). El fenómeno de histéresis capilar ocurre debido a las diferencias presentes en los procesos de vaciado o llenado de los poros de un suelo. Para que el estudio de la condición de frontera en la base de la columna de suelo no sea influenciado por el efecto de la histéresis capilar, es necesario determinar la curva de retención de humedad correspondiente a drenaje.

En la literatura se reportan diferentes aproximaciones para describir el fenómeno de histéresis capilar. Por ejemplo Néel (1942), Everett y Whitton (1952), Everett y Smith (1954) y Everett (1954) y (1955) desarrollaron una aproximación a la histéresis, la teoría del dominio independiente, la cual fue aplicada por primera vez a la histéresis capilar por Poulavasillis (1962). El modelo del dominio independiente supone que no existe interacción entre los poros del suelo y permite predecir la relación $\psi - \theta$ a partir de una familia de curvas de retención, ya sea de infiltración o de drenaje. Después de un proceso secuencial de mojado y secado el contenido volumétrico de agua puede ser obtenido utilizando la siguiente aproximación:

$$\theta = \iint f(\psi_{\text{inf}}, \psi_{\text{dren}}) d\psi_{\text{inf}} d\psi_{\text{dren}} \quad (2.40)$$

donde ψ_{inf} es el potencial de presión correspondiente a infiltración; ψ_{dren} es el potencial de presión correspondiente a drenaje; y $f(\psi_{\text{inf}}, \psi_{\text{dren}})$ es una función de distribución bivariada. El producto $f(\psi_{\text{inf}}, \psi_{\text{dren}}) d\psi_{\text{inf}} d\psi_{\text{dren}}$ describe el volumen relativo de espacio poral que se llena para un cambio de presión de ψ_{inf} a $\psi_{\text{inf}} + d\psi_{\text{inf}}$ o que se drena para un cambio de presión de ψ_{dren} a $\psi_{\text{dren}} + d\psi_{\text{dren}}$.

La mayor desventaja de esta aproximación es que requiere del conocimiento de la curva de retención principal (curva correspondiente a cuando se satura un suelo inicialmente seco o se drena un suelo inicialmente saturado) y de la curva de retención primaria, ya sea para infiltración o para drenaje. A partir de estas curvas se interpolan las curvas de retención subsecuentes.

Basado en el trabajo de Philip (1964), Mualem (1973) y (1974) supone que la función de distribución $f(\psi_{\text{inf}}, \psi_{\text{dren}})$ que interviene en la relación (2.40) puede ser representada como un producto de dos funciones de distribución independientes $f_0(\psi_{\text{inf}})$ y $f_1(\psi_{\text{dren}})$. Con esta hipótesis deriva una fórmula de interpolación que predice las curvas de retención dentro del circuito principal de histéresis a partir de las curvas principales de infiltración y de drenaje. El supuesto de Mualem implica que las curvas de infiltración y de drenaje varían suave y regularmente a lo largo del circuito de histéresis, sin embargo en suelos reales este comportamiento no siempre es observado (Topp, 1971).

Parlange (1976) asume que la función f es independiente de ψ_{inf} y deriva un modelo que predice la curva de retención para infiltración o para drenaje a partir de una frontera del circuito principal de histéresis. En este caso las curvas de retención son obtenidas no por interpolación, como en los casos precedentes, sino por extrapolación a partir del conocimiento de una frontera.

Viaene *et al.* (1994) probaron en 10 suelos de características hidráulicas contrastantes seis relaciones reportadas en la literatura que predicen la histéresis capilar a partir de una curva de retención principal (infiltración ó drenaje) y encontró que el mejor modelo para describir este fenómeno es el presentado por Parlange (1976). Resultados similares son reportados por Si y Kachanosky (2000). Sin embargo Braddock *et al.* (2001) han mostrado que cuando la curva de retención principal para infiltración es descrita con el modelo de van Genuchten (ecuación 1.17), algunas de las curvas para drenaje que se predicen con la relación de Parlange (1976) exhiben un comportamiento físicamente incorrecto al presentar valores del contenido volumétrico mayores al de saturación para un cierto intervalo de succión.

En el estudio que se realiza sobre el drenaje de una columna de suelo a la atmósfera se requiere conocer sólo las curvas principales para infiltración y para drenaje, dado que al saturar el suelo arena de Tezoyuca éste estaba prácticamente seco ($\theta_{\text{ini}} = 0.008 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$) y cuando se drenó éste estaba inicialmente saturado. En la sección 2.4.2 se ha determinado la curva de retención principal para infiltración, en consecuencia falta determinar la curva para drenaje. Esta condición descarta el uso de modelos que predicen la histéresis capilar a partir de la interpolación de dos o más curvas conocidas y dado que el modelo de extrapolación de Parlange *et al.* (1976) proporciona resultados físicamente inconsistentes, en este trabajo se propone una metodología para determinar la curva de retención principal para drenaje.

Como los parámetros de forma de las características hidrodinámicas del suelo m , n y η y los contenidos volumétricos de agua θ_s y θ , se han estimado de manera independiente a eventos transitorios de flujo de agua en la columna de suelo, se supone que estos son iguales tanto para infiltración como para drenaje. Adicionalmente se asume que la conductividad hidráulica a

saturación estimada a partir de la prueba de infiltración es la misma para procesos de drenaje, es decir $K_{s(inf)} = K_{s(dren)}$, ya que se sabe que la histéresis capilar en la curva de conductividad hidráulica es despreciable en varios tipos de suelo y que su efecto es mayor en la curva de retención de humedad (Mualem, 1976b). En consecuencia el efecto de la histéresis capilar será absorbido por el parámetro de escala ψ_d , cuyo valor para drenaje se determina a partir de la lámina drenada máxima medida en laboratorio $\ell_{max} \cong 5.30$ cm. Introduciendo este valor en la relación (2.39) y resolviendo para ψ_d se obtiene, $\psi_d(dren) = -50.38$ cm, el cual discrepa del valor obtenido a través de la prueba de infiltración $\psi_d(inf) = -18.50$ cm. Las características de humedad correspondientes a los fenómenos de infiltración y de drenaje se muestran en la Figura 2.11.

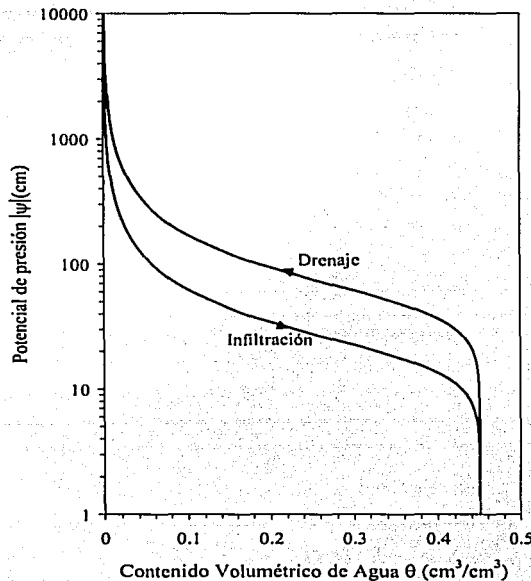


Figura 2.11. Histéresis capilar en la característica de humedad. Las curvas son representadas por la ecuación (1.17) con $\theta_s = 0.45 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $\theta_r = 0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $m = 0.381$; para la infiltración $\psi_d(inf) = -18.50$ cm y para el drenaje $\psi_d(dren) = -50.38$ cm.

Una vez que se ha obtenido una solución numérica de la ecuación de Richards y se han determinado los valores de los parámetros que intervienen en las características hidrodinámicas

de van Genuchten (1980) y Brooks y Corey (1964) para la arena de Tezoyuca, se investiga la forma del coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-atmósfera que interviene en la condición de radiación (2.4).

2.5. LA RADIACIÓN EN EL DRENAJE DE UNA COLUMNA DE SUELO

En la zona saturada del suelo $z_w \leq z \leq P$, donde z_w es la posición de la superficie libre del agua (Figura 2.12), el contenido volumétrico de agua es constante e igual a θ_s , esto implica que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (2.41)$$

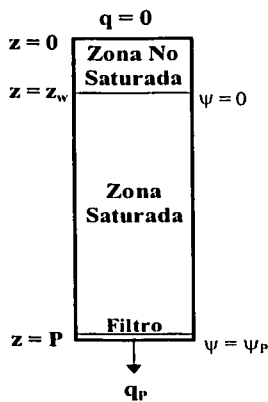


Figura 2.12. Esquema del drenaje de una columna de suelo.

y en consecuencia se tiene:

$$\frac{\partial q}{\partial z} = 0 \quad (2.42)$$

de donde se infiere que el flujo de drenaje (q) es una función independiente de z , es decir el flujo en toda la zona saturada es igual al flujo en la base de la columna (q_p), y es a lo más una función del tiempo, $q_p(t)$.

La integración de la ecuación (2.42) en la zona saturada del suelo permite obtener la relación entre la presión del agua en la base de la columna (ψ_p), la posición de la superficie libre (z_w) y el flujo de drenaje (q_p):

$$\psi_p(t) = \left[1 - \frac{q_p(t)}{K_s} \right] [P - z_w(t)] \quad (2.43)$$

En el tiempo inicial ($t = 0$) la superficie libre del agua se ubica en la superficie de la columna ($z_w = 0$) y la presión en la base de la columna de acuerdo con la ecuación (2.2) es $\psi_p = P$. De la ecuación (2.43) se deduce que $q_p(0) = 0$, es decir el flujo de drenaje en el tiempo inicial es finito e igual a cero. Puesto que para todo tiempo se tiene $0 \leq \psi_p(t)$ y $0 \leq P - z_w(t)$, de la ecuación (2.43) se deduce que $q_p(t) \leq K_s$. En consecuencia: $0 \leq q_p(t) \leq K_s$.

Del análisis precedente se establece:

$$\psi_p = P; \quad z_w = 0; \quad t = 0 \quad (2.44.1)$$

$$\psi_p = 0; \quad z_w = P; \quad t \rightarrow \infty \quad (2.44.2)$$

2.5.1. Coeficiente de resistencia constante: la condición de radiación lineal

El coeficiente de resistencia de la ecuación (2.4) puede ser escrito, tomando como escala de longitud el tamaño de la columna, como $R_{in} = P/q_o$ donde q_o es un valor particular del flujo de agua, es decir:

$$q_p = q_o \left(\frac{\psi_p - h}{P} \right) \quad (2.45)$$

La posición de la superficie libre en función de la presión en la base de la columna se obtiene con la introducción de la ecuación (2.45) en la ecuación (2.43):

$$z_w(t) = P - \frac{\psi_p(t)}{1 - \frac{q_o}{K_s} \left[\frac{\psi_p(t) - h}{P} \right]} \quad (2.46)$$

En el tiempo inicial la superficie libre se encuentra en $z_w(0) = 0$ y a partir de la ecuación (2.46), con $\psi_p(0) = P$ y por ejemplo con $q_o/K_s = 1/5$ se obtiene $z_w = -112.5$ cm lo cual es físicamente imposible. Esto es debido a que el flujo de agua calculado con la ecuación (2.45) es diferente de cero en $t = 0$. En la Figura 2.13 se muestra la gráfica de la ecuación (2.46) para $P = 75$ cm y $q_o/K_s = 1/5$.

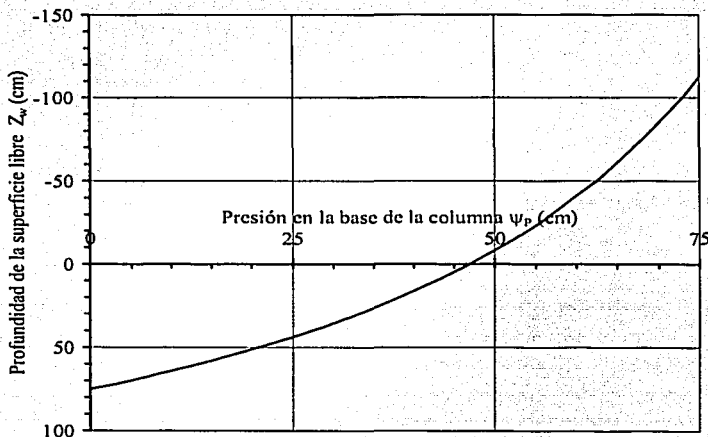


Figura 2.13. La posición de la superficie libre en función de la presión del agua en la base de la columna proporcionada por la ecuación (2.46), con $P = 75$ cm y $q_o/K_s = 1/5$.

Bien que no se tiene el comportamiento esperado en los tiempos muy cortos con la condición de radiación lineal de Newton (ecuación 2.45), esta es utilizada para reproducir las observaciones experimentales de la lámina drenada en los tiempos cortos y largos. Para esto se aplica la solución numérica (2.17) considerando las condiciones (2.2), (2.3) y (2.45), con $E(t) = 0$ y $h = 0$. Las características hidrodinámicas son tomadas con los parámetros estimados previamente, considerando $\psi_d(\text{dren}) = -50.38$ cm.

La simulación numérica es realizada generando una malla de 750 nudos y 751 elementos y eligiendo una paso de tiempo inicial $\Delta t_{ini} = 1 \times 10^{-5}$ s que se incremento hasta un máximo de $\Delta t_{max} = 60$ s según el criterio expuesto en la validación del modelo numérico.

En la Figura 2.14 se muestran los resultados de las simulaciones numéricas donde se puede observar que la lámina drenada calculada tiene una curvatura distinta a la que tiene la lámina medida. Con $q_o/K_s = \frac{1}{4}$ ($R_{in} \cong 20,000$ s) se presentan diferencias significativas entre los datos medidos y calculados tanto en los tiempos cortos de drenaje (0-100 min) como en tiempos largos (120 min – 700 min) mientras que con $q_o/K_s = \frac{1}{5}$ ($R_{in} \cong 25,000$ s) las mayores diferencias se presentan en los tiempos cortos (0-200 min).

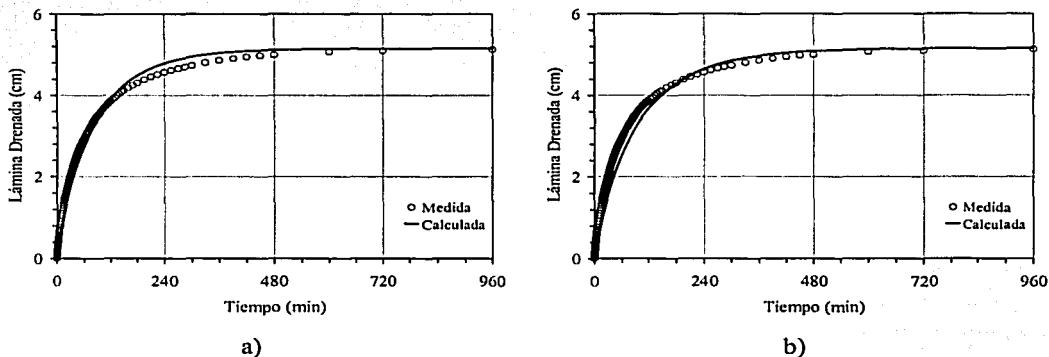


Figura 2.14. Comparación de la lámina drenada medida con la lamina drenada calculada con: a) $q_o/K_s = \frac{1}{4}$ ($R_{in} \cong 20,000$ s) y b) $q_o/K_s = \frac{1}{5}$ ($R_{in} \cong 25,000$ s).

2.5.2. Coeficiente de resistencia variable: la condición de radiación no lineal

Los resultados obtenidos en la sección anterior ponen de manifiesto la necesidad de modificar la condición de radiación lineal (2.45) para satisfacer que el flujo de drenaje en el tiempo inicial sea cero y para mejorar su capacidad descriptiva. Para obtener un flujo de agua nulo en el tiempo inicial, el lado derecho de la ecuación (2.45) puede ser multiplicada por el factor $1 - \psi/P$. El resultado se puede generalizar de la manera siguiente:

$$q_p = q_o \left(1 - \frac{\psi_p}{P}\right)^a \left(\frac{\psi_p - h}{P}\right)^b \quad (2.47)$$

La ecuación (2.47) es una condición de radiación no lineal en la que intervienen tres parámetros desconocidos q_o , a y b .

El coeficiente de resistencia correspondiente es proporcionado por

$$R_{in}(\psi_p) = \frac{P}{q_o \left(1 - \frac{\psi_p}{P}\right)^a \left(\frac{\psi_p - h}{P}\right)^{1-b}} \quad (2.48)$$

La posición de la superficie libre en función de la presión en la base de la columna es en este caso proporcionada por:

$$z_w(t) = P - \frac{\psi_p(t)}{1 - \frac{q_o}{K_s} \left[1 - \frac{\psi_p(t)}{P}\right]^a \left[\frac{\psi_p(t) - h}{P}\right]^b} \quad (2.49)$$

No obstante que con la ecuación (2.49) se asegura que la posición del manto freático en el instante inicial se ubique en la superficie del suelo, es necesario obtener restricciones para a , b y q_o de manera de satisfacer por una parte que $z_w(t) > 0$ y por otra parte que sea una función monótona creciente. Para ello se deriva (2.49) con respecto a la presión y la expresión resultante se sujeta a la condición de que sea siempre menor de cero. Para facilitar este análisis se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\psi^* = \frac{\psi}{P} \quad (2.50.1)$$

$$q_o^* = \frac{q_o}{K_s} \quad (2.50.2)$$

$$z_w^* = \frac{z_w}{P} \quad (2.50.3)$$

Al introducir las expresiones (2.50) en (2.49) y el valor de la presión en el dren ($h = 0$) se obtiene la siguiente relación adimensional:

$$z_w^* = 1 - \frac{\psi^*}{1 - q_0^* (1 - \psi^*)^a (\psi^*)^b} \quad (2.51)$$

Derivando la ecuación (2.51) y aplicando la restricción antes mencionada se obtiene:

$$\frac{dz_w^*}{d\psi} = \frac{q_0^* (1 - \psi^*)^{a-1} (\psi^*)^b [a\psi^* - (b-1)(1 - \psi^*)] - 1}{[1 - q_0^* (1 - \psi^*)^a (\psi^*)^b]^2} < 0 \quad (2.52)$$

Dada una columna de suelo existen múltiples combinaciones entre a , b y q_0 que satisfacen la restricción (2.52). Para simplificar la aplicación de la condición de radiación no lineal (ecuación 2.47) en los subsecuente se acepta la siguiente hipótesis $a = b$. Este supuesto permite concentrarse en el estudio de sólo dos parámetros, uno de forma (a ó b) y uno de escala (q_0).

Enseguida se estudia el caso en el cual el exponente del gradiente de presiones en la condición de radiación no lineal es igual a la unidad ($a = b = 1$). Con estos valores se deduce de (2.52) que la función z_w es monótona creciente para $0 < q_0^* < 1$ (Figura 2.15).

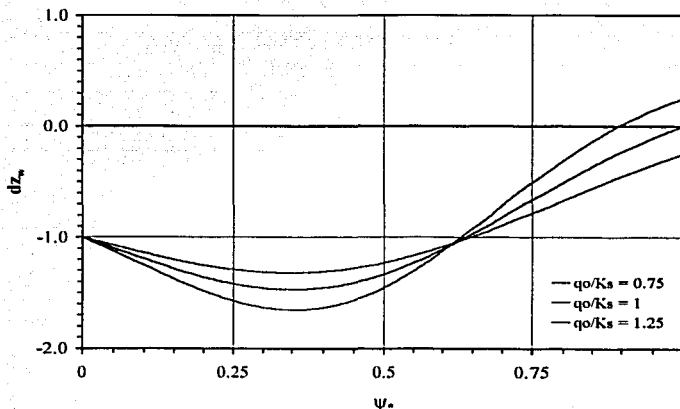


Figura 2.15. Variación obtenida con la relación (2.52) considerando $a = b = 1$ y diferentes valores del flujo característico $q_0^* = q_0/K_s$.

Obtenido el rango de variación del flujo característico q_0 para $a = b = 1$, se modeló el experimento de drenaje encontrándose que la mejor aproximación entre datos medidos y teóricos se obtiene con un $q_0 \cong K_s$. En la Figura 2.16 se presenta la variación de la profundidad de la superficie libre con respecto a la presión en la base de la columna, en donde se muestra que $z_w > 0$ para todo tiempo. En la Figura 2.17 se muestra la evolución en el tiempo tanto de la lámina drenada calculada como de la lámina medida observándose el siguiente comportamiento: en los tiempos cortos ($t < 100$ min) las diferencias entre la lámina drenada teórica y la experimental son pequeñas, sin embargo conforme el tiempo de drenaje avanza las diferencias se incrementan, ya que la lámina drenada calculada tiende a su valor máximo de forma más rápida que la lámina observada.

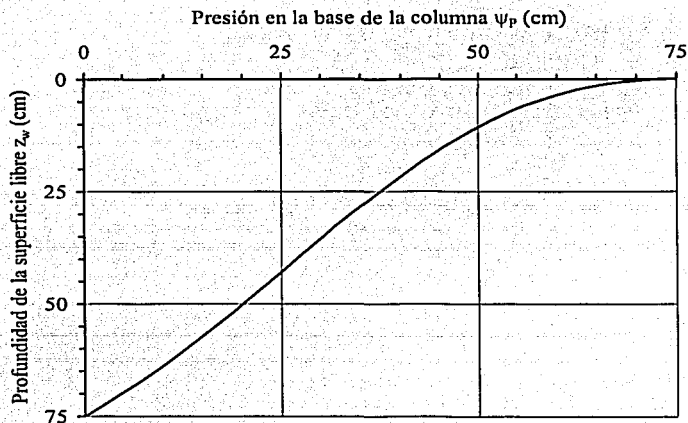


Figura 2.16. La posición de la superficie libre en función de la presión del agua en la base de la columna proporcionada por la ecuación (2.49), con $P = 75$ cm, $a = b = 1$ y $q_0/K_s \cong 1$.

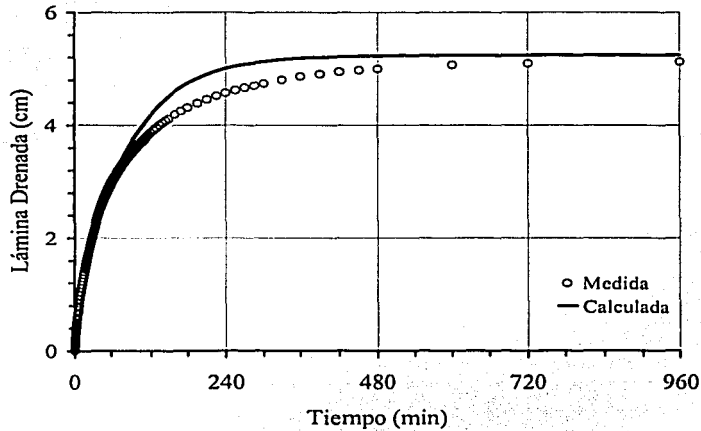


Figura 2.17. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1$ y $q_0/K_s \cong 1$.

Los resultados anteriores evidencian que una mejor descripción de la experiencia de drenaje es posible si se considera que la potencia del gradiente de presiones de la condición de radiación no lineal (2.47) es mayor de la unidad.

Considerando este último resultado se modeló el experimento de drenaje optimizándose los parámetros a y q_0 . En la Figura 2.18 se muestra la mejor aproximación lograda entre la lámina drenada medida y la lámina calculada. Los valores de los parámetros de la condición de radiación no lineal son $a = b = 1.85$ y $q_0/K_s = 4.3$. La restricción (2.52) es cumplida ya que para los valores de a y b obtenidos el rango de variación del cociente q_0/K_s es $0 < q_0/K_s < 4.5$. En la Figura 2.19 se presenta la variación de la profundidad de la superficie libre con respecto a la presión en la base de la columna. En esta Figura se observa que no existe ningún valor de ψ_p para el que $z_w < 0$.

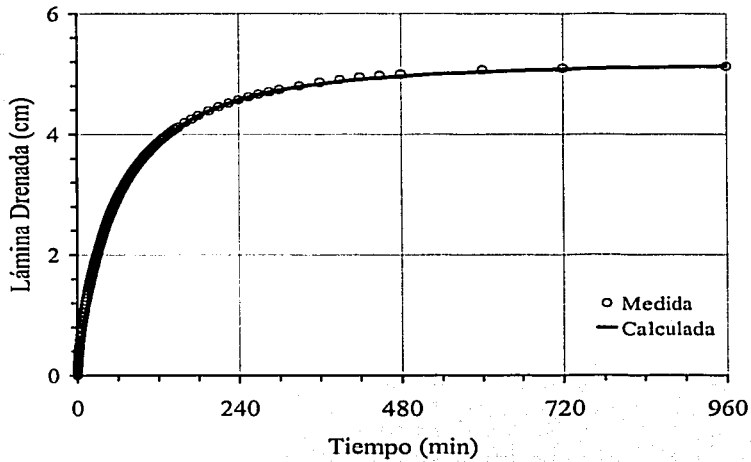


Figura 2.18. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1.85$ y $q_0/K_s = 4.3$ ($R^2 = 0.9948$).

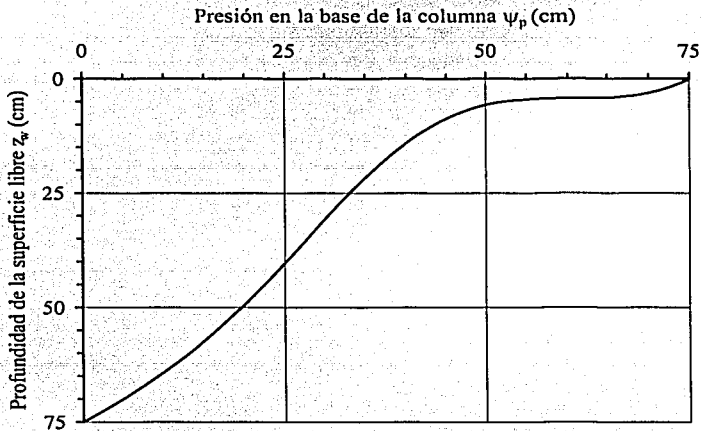


Figura 2.19. La posición de la superficie libre en función de la presión del agua en la base de la columna proporcionada por la ecuación (2.49), con $P = 75$ cm, $a = b = 1.85$ y $q_0/K_s = 4.3$.

2.6. LA CONDICIÓN DE RADIACIÓN NO LINEAL EN EL DRENAJE DE COLUMNAS DE SUELOS DE CARACTERÍSTICAS HIDRÁULICAS CONTRASTANTES

Los análisis precedentes han permitido establecer la relación que describe el drenaje de un suelo inicialmente saturado hacia la atmósfera (ecuación 2.47), sin embargo esta relación sólo ha sido probada usando información experimental del suelo arena de Tezoyuca, un estudio más general requiere considerar el drenaje de suelos de diferentes texturas. Con el objeto de satisfacer este requisito se ubicaron y seleccionaron cuatro tipos de suelos agrícolas en el estado de Morelos, obteniéndose muestras alteradas de cada uno de estos medios porosos (Figura 2.20). Al igual que se hizo con la arena de Tezoyuca, las muestras de suelos se secaron al aire, se pasaron por el tamiz de 2 mm y se estimaron sus parámetros hidráulicos aplicando la metodología previamente expuesta. Los ajustes de las curvas granulométricas y de las pruebas de infiltración se presentan en el ANEXO I. Los parámetros hidráulicos estimados para infiltración y para drenaje se presentan en la Tabla 2.2.

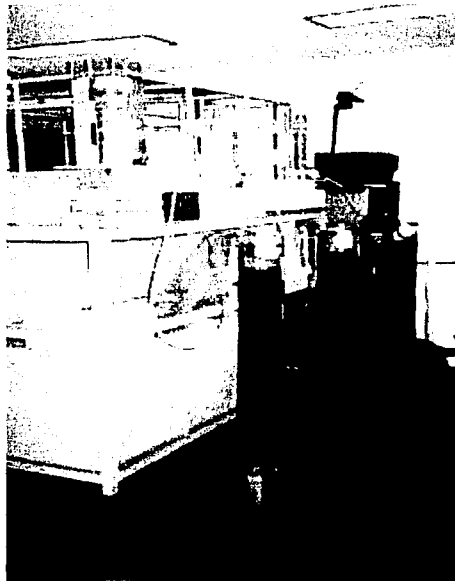


Figura 2.20. Pruebas de infiltración y de drenaje en columnas de suelos.

Suelo	ϕ (cm ³ /cm ³)	s	θ_s (cm ³ /cm ³)	θ_r (cm ³ /cm ³)	n	η	K_s (cm/h)	$\Psi_{d(inf)}$ (cm)	$\Psi_{d(dren)}$ (cm)
1	0.390	0.671	0.370	0.000	2.633	5.586	7.60	-19.50	-32.80
2	0.614	0.719	0.600	0.000	2.164	19.020	0.51	-45.50	-46.00
3	0.509	0.696	0.477	0.000	2.128	23.218	0.06	-51.00	-63.00
4	0.526	0.700	0.500	0.000	2.179	16.998	0.11	-42.50	-53.90

Tabla 2.2. Parámetros hidráulicos de cuatro suelos de textura contrastante.

Finalizada la fase de caracterización hidrodinámica de los suelos se modelaron numéricamente cada una de las pruebas de drenaje considerando la condición de radiación no lineal (2.47) y se estimaron los valores de los parámetros a y q_0 para cada tipo de suelo de manera de obtener el mejor acuerdo entre datos teóricos y experimentales respetando la restricción (2.52). Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 2.3 y las series de datos experimentales y numéricas se muestran en el ANEXO I.

Suelo	a	b	q_0 (cm/h)	Coefficiente de correlación (R^2) L. drenada medida - L. drenada teórica
1	1.50	1.50	20.82	0.9884
2	1.37	1.37	0.65	0.9971
3	1.40	1.40	0.14	0.9987
4	1.30	1.30	0.22	0.9899

Tabla 2.3. Parámetros de la condición de radiación no lineal (ecuación 2.47).

Los resultados presentados en la Tabla 2.3 muestran la flexibilidad descriptiva de la condición de radiación no lineal obtenida en este estudio (ecuación 2.47). En un intento por encontrar una relación entre los parámetros de la condición de radiación no lineal y las propiedades hidráulicas del suelo se explora la siguiente hipótesis: el parámetro de forma "a" de la condición (2.47) es una función de la dimensión cociente del suelo "s" (ecuación 2.32). Para

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

estudiar esta hipótesis se grafican los valores de estos parámetros obtenidos precedentemente (incluyendo el suelo arena de Tezoyuca, que en lo subsecuente se identificará como el suelo 5) y se acotan los valores extremos del parámetro "a" en función de los límites del parámetro "s" de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \text{Si } s = 1/2 & : a = 1 \\ \text{Si } s = 1 & : a = 2 \end{aligned} \tag{2.53}$$

El comportamiento (2.53) es satisfecho con la siguiente función lineal:

$$a(s) = 2s \tag{2.54}$$

La aproximación proporcionada por (2.54) a los valores de "a" determinados a partir del mejor ajuste a los datos experimentales de lámina drenada es mostrada en la Figura 2.21.

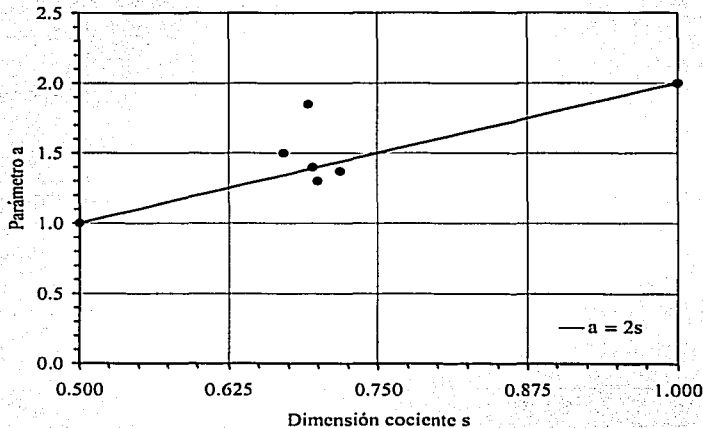


Figura 2.21. Relación entre el parámetro "a" de la condición de radiación no lineal (2.47) y la dimensión cociente del suelo "s" (2.32).

Para verificar los resultados que se obtienen al aplicar la relación (2.54) se calculó con esta ecuación el valor del parámetro "a" correspondiente al suelo arena de Tezoyuca, $a(0.692) = b(0.692) = 1.384$. Utilizando este valor y la ecuación (2.52) se determinó el rango de

variación de q_0 ($0 < q_0/K_s < 2.29K_s$) y posteriormente se modeló el experimento de drenaje hecho en laboratorio para identificar el valor de q_0 que proporcione la mejor aproximación a los datos experimentales, encontrándose que este comportamiento es obtenido cuando $q_0 \cong 2.0K_s = 36.4 \text{ cm/h}$. En la Figura 2.22 se compara el resultado obtenido al calibrar dos parámetros (a y q_0) y el obtenido estimando el parámetro "a" con la ecuación (2.54) y calibrando q_0 , observándose que las diferencias entre ambos resultados son pequeñas no obstante que el valor de "a" calculado con (2.54) es 33.6 % menor respecto del determinado a partir del mejor ajuste a los datos experimentales. Esta comparación muestra que (2.54) es una relación útil y práctica que facilita la aplicación de la condición de radiación no lineal (2.47).

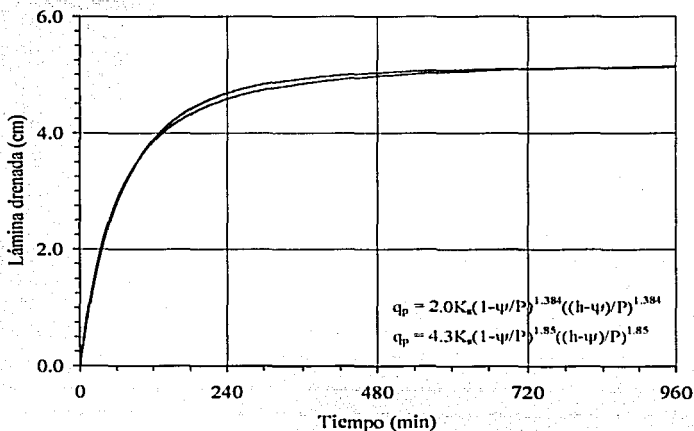


Figura 2.22. Evoluciones de las láminas drenadas por la arena de Tezoyuca descritas con la condición de radiación no lineal (ecuación 2.47) para diferentes valores de a , b y q_0 .

Resumen

Se ha realizado un estudio teórico y experimental para describir el drenaje de columnas de suelo inicialmente saturado utilizándose cinco suelos de características hidráulicas contrastantes cuyas características hidrodinámicas se han estimado a partir de su curva granulométrica, su porosidad total y una prueba infiltración en laboratorio. Debido a los efectos de la histéresis

capilar en la característica de humedad, estos suelos también se han caracterizado con una prueba de drenaje. Se han establecido las condiciones físicas que deben satisfacerse durante la transferencia de agua de la base de la columna de suelo hacia la atmósfera. Se ha propuesto una relación para describir el proceso de transferencia de agua o condición de radiación no lineal. Los parámetros que intervienen en esta condición son estimados de manera de minimizar los errores entre la lámina de agua drenada calculada con la ecuación de Richards y la lámina de agua drenada medida. Los resultados obtenidos muestran la alta flexibilidad de la condición de radiación no lineal propuesta y evidencian que esta condición de frontera puede ser utilizada para describir la lámina drenada en el transcurso del tiempo por una columna de suelo inicialmente saturado.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

MODELACIÓN DE LA TRANSFERENCIA DE AGUA EN SISTEMAS DE DRENAJE AGRÍCOLA SUBTERRÁNEOS CON LA ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL

Acceptando que las características principales de los sistemas de drenaje agrícola subterráneos son bien representadas con la aplicación de la ecuación de Richards bidimensional (ecuación 1.8) a un corte transversal de suelo, en este capítulo se describe el flujo de agua del suelo a los drenes imponiendo sobre el perímetro de estos (Ω) la condición de radiación no lineal obtenida al estudiar el drenaje de columnas de suelo. Se aborda el problema de la presión en el interior en el dren y se propone que la evolución de esta variable sea descrita considerando la ley de resistencia fractal de Fuentes y Vauclin (1994). Dado que en la ley de resistencia fractal interviene el radio hidráulico y es bien sabido que la definición clásica de este presenta incongruencias cuando es aplicada a secciones circulares, se propone una nueva definición de esta variable. Para probar la capacidad de descripción de la condición de radiación no lineal se obtiene un solución numérica del sistema compuesto por la ecuación de Richards bidimensional y la ley de resistencia fractal y esta se aplica para reproducir un experimento de drenaje hecho en laboratorio. Previamente se realiza la caracterización hidrodinámica del suelo usado en el experimento aplicando una metodología basada en la curva granulométrica, la porosidad total y en la reproducción de un evento transitorio de flujo de agua. El buen acuerdo entre datos teóricos y experimentales muestra la alta flexibilidad de la condición de radiación no lineal. Utilizando los parámetros estimados a partir de la información experimental, se comparan los resultados que se obtienen considerando la condición de radiación no lineal con aquellos que se obtienen al aplicar aproximaciones reportadas en la literatura.

3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Con la ecuación Richards bidimensional:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - 1 \right) \right] \quad (1.8)$$

puede modelarse la transferencia de agua en sistemas de drenaje similares a los mostrados en la Figura 3.1.

Las condiciones iniciales y de frontera excepto en el dren corresponden a las presentadas en el capítulo I. En el tiempo inicial ($t=0$) se tiene un suelo saturado que no transfiere agua a la atmósfera por sus fronteras, en consecuencia se supone que la condición inicial corresponda a una distribución hidrostática de presiones, es decir $\psi(x,z) = z$. Además dado que se estudia la

dinámica del agua en un sistema de drenaje con tuberías paralelas equidistantes donde la superficie del suelo es paralela al estrato impermeable, puede suponerse que por las fronteras laterales el flujo de Darcy en la dirección horizontal es nulo, $-K(\psi)\left[\partial\psi/\partial x\right]=0$. En la frontera inferior la componente vertical del flujo de Darcy es nula, por lo cual se imponen en este segmento la siguiente condición, $-K(\psi)\left[\partial(\psi-z)/\partial z\right]=0$. En la superficie del suelo puede imponerse una condición de flujo prescrito, tal como la evaporación (E) en función del tiempo, $-K(\psi)\left[\partial(\psi-z)/\partial z\right]=-E(t)$.

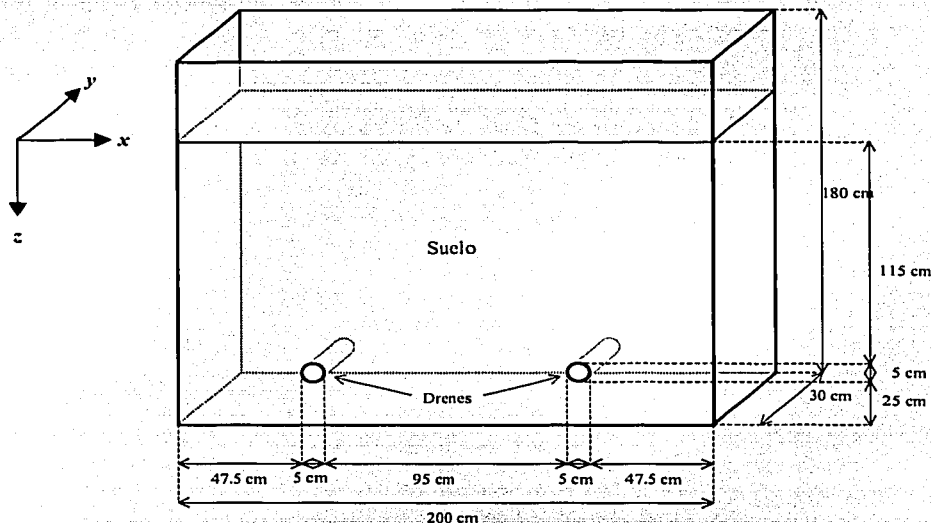


Figura 3.1. Sistema de drenaje experimental.

Sobre la circunferencia del dren se impone la condición de radiación no lineal (2.47) que para casos bidimensionales se escribe:

$$-K(\psi)\frac{\partial(\psi-z)}{\partial n}=q_0\left(1-\frac{\psi}{P}\right)^a\left(\frac{\psi-h}{P}\right)^b \quad (3.1)$$

donde el parámetro q_0 es un valor particular del flujo de agua que permite considerar el flujo horizontal (q_{0x}) como vertical (q_{0z}), es decir: $q_0 = \sqrt{q_{0x}q_{0z}}$.

La aplicación de la relación (3.1) requiere del conocimiento de la evolución de la presión en el interior del dren. La definición de h en el perímetro interno del tubo se realiza de la siguiente manera: h es igual a la presión atmosférica ($h = 0$) en fracción del perímetro del dren que esta en contacto con aire y en la fracción restante, en contacto con agua, h es igual a la altura de columna de agua que se tenga sobre cada punto del dren. Dado que en este trabajo se supone que las variaciones en el sentido “y” son nulas, en consecuencia el tirante en el dren puede asumirse uniforme pero variable en el tiempo. El cálculo del tirante en el dren para cada tiempo se realiza con la ecuación de continuidad para régimen permanente ($Q = VA$) y la ley de resistencia fractal propuesta por Fuentes y Vauclin (1994) presentada en el capítulo I:

$$V = \kappa \frac{g^d}{v^{2d-1}} R_H^{3d-1} J^d \quad (1.45)$$

La introducción de la ecuación de continuidad en la ecuación (1.45) permite obtener la relación entre el tirante medio en el dren y el gasto que conduce ($Q = \kappa g^d AR_H^{3d-1} J^d / v^{2d-1}$). Sin embargo la aplicación de esta relación presenta un problema, se tienen dos incógnitas (gasto y tirante) y una sola ecuación. Este problema se resuelve planteando una segunda relación, para ello se integra la condición de radiación no lineal (3.1) a lo largo del dren, obteniéndose:

$$Q = \ell \int_{\Omega_T} \left(1 - \frac{\Psi}{P}\right)^a \left(\frac{\Psi - h}{P}\right)^b d\Omega_T \quad (3.2)$$

donde Ω_T es el perímetro del dren y ℓ su longitud.

3.2. CALCULO DEL RADIO HIDRÁULICO EN UN DREN CIRCULAR

La aplicación de la ecuación (1.45) a la descripción del flujo del agua en el dren requiere de la definición del radio hidráulico (R_H). Tradicionalmente este se define como la razón entre el área hidráulica y el perímetro mojado. Cuando esta definición es aplicada a secciones circulares parcialmente llenas se encuentra una incongruencia ya que existen algunos valores del tirante en el dren a los cuales les corresponde el mismo valor de radio hidráulico, es decir la relación tradicional de radio hidráulico no es una función monótona creciente. Para salvar esta dificultad se introduce la definición de perímetro hidráulico, igual a la suma del perímetro mojado y el ancho de la superficie libre, y se propone redefinir el radio hidráulico como la razón del área hidráulica al perímetro hidráulico. El razonamiento efectuado es el siguiente:

Definición 1. El radio hidráulico (R_H) es la razón del área hidráulica (A_H) al perímetro mojado (P_M):

$$R_H = \frac{A_H}{P_M} \quad (3.3)$$

Definición 2. El perímetro hidráulico (P_H) es igual a la suma del perímetro mojado (P_M) y el ancho de la superficie libre (T_o):

$$P_H = P_M + T_o \quad (3.4)$$

Definición 3. El radio principal (\mathfrak{R}_H) es la razón del área hidráulica (A_H) al perímetro hidráulico (P_H):

$$\mathfrak{R}_H = \frac{A_H}{P_H} \quad (3.5)$$

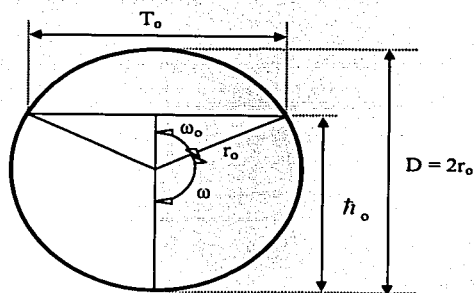


Figura 3.2. Tubería circular parcialmente llena con agua.

Con la notación presentada en la Figura 3.2 se deducen las siguientes características hidráulicas:

Area hidráulica:

$$A_H(\omega) = r_o^2 \left[\omega - \frac{1}{2} \sin(2\omega) \right] \quad (3.6)$$

$$\text{Perímetro mojado:} \quad P_M(\omega) = 2r_o\omega \quad (3.7)$$

$$\text{Tirante hidráulico central:} \quad h_o(\omega) = r_o[1 - \cos(\omega)] \quad (3.8)$$

En estas ecuaciones $0 \leq \omega \leq \pi$, el límite inferior corresponde a la sección completamente vacía mientras que el límite superior a la sección completamente llena. Puesto que $h_o(\omega)$ es una función creciente, se satisface el hecho de que el área hidráulica y perímetro mojado son funciones monótonamente crecientes cuyos límites máximos son:

$$\text{Área hidráulica máxima:} \quad A_{H_{\max}}(\omega) = A_H(\pi) = \pi r_o^2 \quad (3.9)$$

$$\text{Perímetro mojado máximo:} \quad P_{M_{\max}}(\omega) = P_M(\pi) = 2\pi r_o \quad (3.10)$$

$$\text{Tirante hidráulico central máximo:} \quad h_o(\omega) = h_o(\pi) = 2r_o \quad (3.11)$$

Las tres características hidráulicas pueden ser adimensionalizadas con respecto a sus valores máximos, respectivamente como sigue:

$$A_H^*(\omega) = \frac{1}{\pi} [\omega - \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega)] \quad (3.12)$$

$$P_M^*(\omega) = \frac{\omega}{\pi} \quad (3.13)$$

$$h_o^*(\omega) = \frac{1}{2} [1 - \cos(\omega)] \quad (3.14)$$

en las cuales $0 \leq A_H^* = A_H/A_{H_{\max}} \leq 1$, $0 \leq P_M^* = P_M/P_{M_{\max}} \leq 1$ y $0 \leq h_o^* = h_o/h_{o_{\max}} \leq 1$, cuando $0 \leq \omega/\pi \leq 1$.

El radio hidráulico es:

$$R_H(\omega) = R_{H_{\max}} \left[1 - \frac{\text{sen}(2\omega)}{2\omega} \right] \quad (3.15)$$

donde el radio hidráulico máximo corresponde a la sección completamente llena:

$$R_{H_{\max}} = \frac{r_o}{2} \quad (3.16)$$

De las ecuaciones (3.9) y (3.10) se obtiene:

$$\frac{dR_H}{dH} = \frac{\text{sen}(2\omega) - 2\omega \cos(2\omega)}{4\omega^2 \text{sen}(\omega)} \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17) se anula en ω_1 , donde ω_1 satisface $\tan(2\omega_1) - 2\omega_1 = 0$. Puesto que se debe satisfacer que $0 \leq \omega_1 \leq \pi$, la raíz de interés es $\omega_1 \cong 2.2467$. a este valor del ángulo corresponde el tirante hidráulico central $h_{o_1}/h_{o_{\max}} \cong 0.8128$, y el radio hidráulico $R_{H_1}/R_{H_{\max}} \cong 1.2172$. De este modo se puede inferir que la función $R_H(h_o)$ es monótona creciente sobre el intervalo $0 < h_o < h_{o_1}$, y no creciente sobre el intervalo $h_{o_1} \leq h_o < h_{o_{\max}}$. Un gráfico de la función $R_H(h_o)$ definida por la ecuación (3.15) se muestra en la Figura 3.3. El radio hidráulico también toma el valor $R_{H_{\max}} = R/2$ cuando $\omega_1 = \pi/2$, es decir cuando $h_o = h_{o_{\max}}/2$.

En un intento por salvar las incongruencias de la definición clásica de radio hidráulico, se estudia ahora la definición de radio principal, cuya aplicación requiere de la definición de perímetro hidráulico (ecuación 3.4) donde el ancho de la superficie libre se calcula como:

$$T_o(\omega) = 2r_o \text{sen}(\omega) \quad (3.18)$$

A partir de las definiciones (3.4), (3.5) y (3.18) se establecen respectivamente las expresiones para el perímetro y el radio hidráulicos adimensionales siguientes:

$$P_H^* = \frac{1}{\pi} [\omega + \text{sen} \omega] \quad (3.19)$$

$$\mathfrak{R}_H^*(\omega) = \frac{\omega - \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega)}{\omega + \text{sen}(\omega)} \quad (3.20)$$

donde $0 \leq P_H^* = P_H/P_{H_{\max}} \leq 1$, $0 \leq \mathfrak{R}_H^* = \mathfrak{R}_H/\mathfrak{R}_{H_{\max}} \leq 1$; $P_{H_{\max}} = 2\pi r_o$, y $\mathfrak{R}_{H_{\max}} = r_o/2$.

En la Figura 3.3 se ilustra la bondad de esta nueva definición. En base a los resultados obtenidos se propone que el radio hidráulico se defina como la razón entre el área hidráulica al perímetro hidráulico.

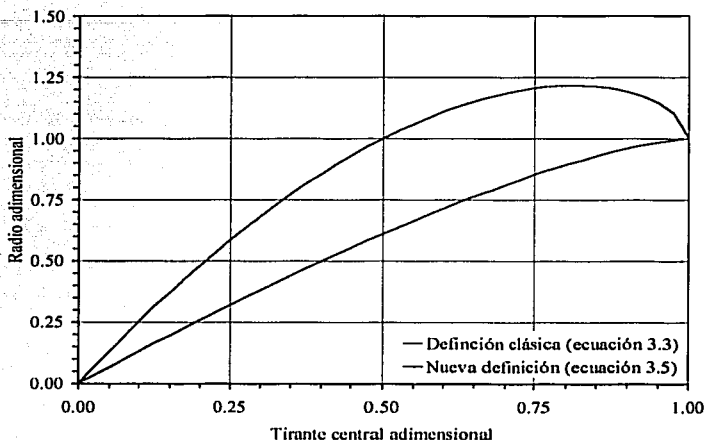


Figura 3.3. Sobre el radio hidráulico.

3.3. SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE RICHARDS BIDIMENSIONAL.

Para describir el flujo de agua del suelo hacia los drenes y de los drenes hacia la descarga con las ecuaciones (1.8) y (1.45) y la relación (3.2) es necesario disponer de una solución de este sistema. Como la solución analítica de éste no es conocida hasta el presente, es necesario resolverlo mediante técnicas numéricas.

La solución numérica de la ecuación de Richards bidimensional se realiza integrando en el espacio esta ecuación con el método de los elementos finitos y en el tiempo con un método de diferencias finitas. El procedimiento usado se explica enseguida:

Se propone la solución de la ecuación (1.8) como una combinación lineal de funciones de base (φ):

$$\psi(x, z, t) \cong \Psi(x, z, t) = \sum_{j=1}^n \Psi_j(t) \phi_j(x, z) \quad (3.21)$$

Se multiplica la ecuación (1.8) por una función de peso (v), se integra usando el teorema de Green sobre el dominio de solución (R) limitado por la frontera (\mathfrak{R}) y se obtiene la siguiente expresión para la forma débil de la ecuación de Richards bidimensional:

$$\int_R C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} v dR + \int_R K(\psi) \left[\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right] dR = \int_R K(\psi) \frac{\partial v}{\partial z} dR + \int_{N_c} q v dN_c + \int_{R_s} q v dR_s \quad (3.22)$$

donde se denotado como N_c a la fracción de \mathfrak{R} sujeta a condición de Neumann con flujo prescrito; y R_s es la fracción de \mathfrak{R} sujeta a una condición de radiación.

Se sustituye la solución aproximada (3.21) en la forma débil (3.22) tomando en cuenta lo siguiente: a) se consideran las funciones de peso (v) iguales a las funciones de base (ϕ), b) se asume una variación lineal de las características hidrodinámicas sobre cada elemento, expresándola mediante las funciones de forma: $\hat{C} = \phi_i C_i$ y $\hat{K} = \phi_j K_j$, c) se utiliza un sistema de masa concentrado con la finalidad de obtener una matriz diagonal (Neuman, 1973).

Aplicando la metodología anterior se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$[A] \frac{d\{\Psi\}}{dt} + [B]\{\Psi\} = \{Q\} + \{F\} + \{G\} \quad (3.23)$$

Utilizando funciones de base lineales, que se definen en relación con la función delta de Kronecker aplicada a cada nudo en particular, y considerando la condición de radiación no lineal (3.1) las matrices del sistema (3.23) se calculan como sigue:

$$A_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[\int_R C_i \phi_i \phi_j \phi_k dR \right] = \delta_{ij} \sum_c C_j \frac{A^{(c)}}{3} \quad (3.24)$$

$$B_{kj} = \sum_{j=1}^n \left[\int_R K_i \phi_i \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \right) dR \right] = \sum_c \frac{K}{4A^{(c)}} (m_j m_k + p_j p_k) \quad (3.25)$$

$$Q_k = \int_{N_e} q \bar{\varphi}_k dN_e = \sum_e \frac{q L n_j}{2} \quad (3.26)$$

$$F_k = \int_{R_e} q \bar{\varphi}_k dR_e = - \sum_e q_o \left(1 - \frac{\Psi_j}{P_j} \right)^a \left(\frac{\Psi_j - h_j}{P_j} \right)^b \frac{L r_j}{2} \quad (3.27)$$

$$G_k = \int_R K_e \bar{\varphi}_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} dR = \sum_e \frac{K}{2} p_k \quad (3.28)$$

donde se ha denotado a las funciones de masa concentrada como $\bar{\varphi}$ y se definen como funciones unitarias en la región baricéntrica correspondiente a un nudo específico, y cero en el resto del dominio; $A^{(e)}$ es el área del elemento; \bar{K} es la conductividad en el elemento tomada como el promedio aritmético de las conductividades en los tres nudos del elemento (como consecuencia de la forma adoptada para las funciones de base); C_j es la capacidad específica correspondiente al nudo j ; $L n_j$ es la longitud de frontera asociada a cada nudo bajo condición de Neumann; $L r_j$ es la longitud de frontera asociada a cada nudo bajo condición de radiación; m y p son factores geométricos definidos según las funciones de forma: $m_i = z_j - z_k$, $p_i = x_j - x_k$. Los subíndices i, j, k , que corresponden a las esquinas del elemento triangular, corren sobre sus tres posibles permutaciones secuenciales.

La integración en el tiempo del sistema (3.23) se realiza utilizando diferencias finitas. Se tienen en cuenta las aproximaciones siguientes:

$$\left(\frac{d\{\Psi\}}{dt} \right)^{t+\omega\Delta t} = \frac{\{\Psi\}^{t+\Delta t} - \{\Psi\}^t}{\Delta t} \quad (3.29)$$

$$\{\Psi\}^{t+\omega\Delta t} = \omega\{\Psi\}^{t+\Delta t} + (1-\omega)\{\Psi\}^t \quad (3.30)$$

donde Δt es el paso de tiempo y ω es un coeficiente de ponderación en el tiempo ($0 \leq \omega \leq 1$).

Al sustituir las ecuaciones (3.29) y (3.30) en la ecuación (3.23) y aplicar el método de Picard se obtiene el siguiente esquema numérico para la ecuación de Richards bidimensional:

$$\left[\frac{A_{t+\omega\Delta t}^w}{\Delta t} + \omega B_{t+\omega\Delta t}^w \right] \{ \Psi \}_{t+\Delta t}^{w+1} = \left[\frac{A_{t+\omega\Delta t}^w}{\Delta t} - (1-\omega) B_{t+\omega\Delta t}^w \right] \{ \Psi \}_t + \{ Q \}_{t+\omega\Delta t}^w + \{ F \}_{t+\omega\Delta t}^w + \{ G \}_{t+\omega\Delta t}^w \quad (3.31)$$

el factor de ponderación $\omega = 1$ permite obtener un esquema implícito; y w indica el número de iteración en el intervalo de tiempo.

El sistema de ecuaciones (3.31) es resuelto utilizando un método iterativo de gradiente conjugado preconditionado (Noor y Peters, 1987) que permite trabajar solamente con los coeficientes distintos de cero de la matriz B y eliminar los errores de redondeo asociados con el procedimiento de sustitución regresiva requerido en métodos directos. La relación par el tirante (3.2) se resuelve de manera acoplada a (3.31) aplicando el método de Newton-Raphson. El esquema numérico se codificó en el lenguaje de programación Borland C++ 5.0.

3.4. EXPERIMENTO DE DRENAJE EN LABORATORIO

En el laboratorio de física de suelos del Instituto Mexicano de Tecnología del Agua se construyó un sistema de drenaje subterráneo para estudiar experimentalmente la fase de recesión del manto freático (Figura 3.4). Este sistema dispone de paredes de acrílico transparente (Lucita) de 1.5 cm de espesor y dos drenes de PVC cubiertos con un filtro de tela para evitar el paso de partículas sólidas al interior de los mismos. Adicionalmente se diseñó y construyó una estructura de perfil tubular rectangular para reforzar las paredes laterales del sistema de drenaje. Las características físicas del mismo son las siguientes: ancho 200 cm, espesor de 30 cm y una altura 200cm; drenes de 5 cm de diámetro separados entre sí 100 cm y ubicados a 50 cm de las paredes laterales del módulo y a 27.5 cm del fondo del mismo (ver Figura 3.1). El sistema de drenaje se rellenó hasta una altura de 145 cm (medida a partir de su base) con una muestra de suelo arenoso de la región de Tezoyuca, Morelos previamente secada y pasada por el tamiz de 2 mm.

Los parámetros $\{ \theta_s, \theta_r, m, n \text{ y } \psi_d \}$ de la curva de retención definida por la ecuación (1.17) así como los parámetros $\{ \eta \text{ y } K_s \}$ de la curva de conductividad hidráulica (1.19) son estimados aplicando la metodología de Fuentes (1992) basada en la curva granulométrica del suelo y una prueba de infiltración. La curva granulométrica del suelo corresponde a la presentada en la Figura 2.7.

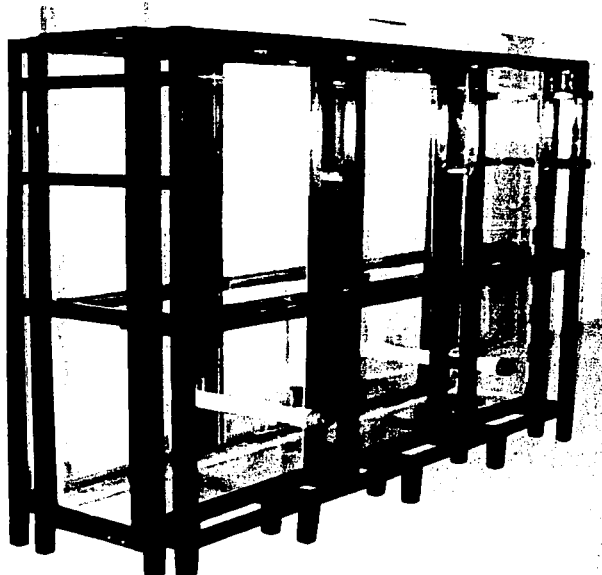


Figura 3.4. Sistema de drenaje subterráneo experimental.

La densidad de las partículas de este material es asumida como la densidad de sus partículas de cuarzo: $\rho_s = 2.65 \text{ g/cm}^3$. La densidad volumétrica del suelo seco (o densidad aparente), en estas condiciones de alteración, es de: $\rho_a = 1.221 \text{ g/cm}^3$. La porosidad volumétrica total del suelo (ϕ) se calcula con la fórmula $\phi = 1 - \rho_a / \rho_s$, a saber: $\phi = 0.539 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$.

Con la porosidad estimada y la relación $(1 - \phi)^s + \phi^{2s} = 1$, se deduce $s = 0.702$. Aplicando la relación (2.31) considerando el resultado anterior y los valores de M y N obtenidos en el capítulo II a partir de la curva granulométrica de la arena de Tezoyuca, se obtiene: $m = 0.373$, $n = 3.19$. Introduciendo estos últimos valores en (2.33) se deduce $\eta = 3.767$.

El suelo del sistema de drenaje fue saturado (Figura 3.5), previa colocación de una placa de lucita perforada a 5 cm sobre la superficie para prevenir efectos de erosión y manteniendo

cerrados los drenes, con la aplicación de un volumen de $V_w = 435,128 \text{ cm}^3$ de agua en un volumen de suelo de $V_i \cong 868,822 \text{ cm}^3$, es decir un contenido volumétrico de $V_w/V_i \cong 0.5 \text{ m}^3/\text{m}^3$, al cual se debe agregar el contenido de humedad inicial. El contenido de humedad a saturación es tomado igual a la porosidad total ($\theta_s = \phi$) y se asume que el contenido volumétrico residual es cero ($\theta_r = 0$).



Figura 3.5.a. Saturación del suelo del módulo de drenaje.



Figura 3.5.b. Avance del frente de humedad.

Los parámetros restantes de las características hidrodinámicas de van Genuchten y de Brooks y Corey (ψ_d y K_s) son obtenidos a partir de una prueba de infiltración unidimensional vertical. Una columna de acrílico transparente de longitud $P = 75 \text{ cm}$ y diámetro $d_c = 15 \text{ cm}$ fue rellena con la arena de Tezoyuca a una densidad aparente similar a la del módulo de drenaje. La prueba de infiltración fue realizada con una carga de agua sobre la superficie del suelo de $\psi_{\text{sup}} = 4.35 \text{ cm}$ y un flujo nulo en su base ($-K(\psi)\partial(\psi - z)/\partial z = 0$), el contenido de humedad inicial en toda la columna fue de $\theta_o = 0.02 \text{ m}^3/\text{m}^3$. La lámina infiltrada acumulada medida en el transcurso del tiempo $I(t)$ es reproducida con la solución numérica de la ecuación de Richards unidimensional (2.17). Los valores $\psi_d = -17.5 \text{ cm}$ y $K_s = 18.3 \text{ cm/h}$ minimizan la suma de los cuadrados de los errores entre la lámina medida y la lámina calculada a partir de la ecuación de Richards con $R^2 = 0.9926$ (Figura 3.6).

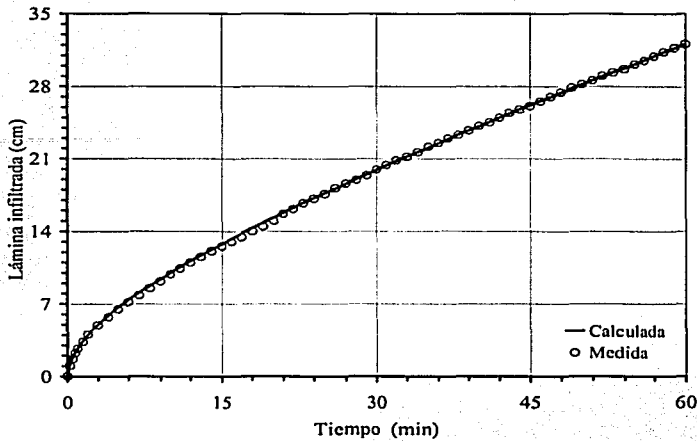


Figura 3.6. Descripción de la lámina infiltrada experimental con la ecuación de Richards y las características hidrodinámicas de van Genuchten - Brooks y Corey. Valores de los parámetros:

$$\theta_s = 0.539, m = 0.373, \eta = 3.767, \psi_d = -17.5 \text{ cm y } K_s = 18.3 \text{ cm/h; } R^2 = 0.9926.$$

Estimadas las características hidrodinámicas correspondientes a procesos de infiltración, se cubrió la parte superior del módulo experimental con una hoja de plástico para eliminar la evaporación y se destaparon los drenes para medir la evolución en el tiempo del volumen de agua drenado. El aforo de los drenes se hizo a intervalos de tiempo variables iniciándose con un intervalo de 30 segundos durante el periodo crítico y posteriormente se usaron intervalos de 1, 5, 10, 15, 30 minutos y hasta de 12 y 24 horas. Se tomaron lecturas durante un tiempo total de 10 días usándose el método de aforo volumétrico.

Con los valores de los parámetros obtenidos precedentemente se calcula, con la ecuación (2.39), la lámina drenada por cada dren del módulo de drenaje en los tiempos muy largos, el resultado así obtenido es $\ell_{\max} \cong 42.1 \text{ cm}$, sin embargo la lámina drenada observada es $\ell_{\max} \cong 23.93 \text{ cm}$. Este valor puede ser obtenido con una actualización del parámetro ψ_d de la curva de retención: $\psi_d(\text{drenaje}) = -41.85 \text{ cm}$, el cual discrepa del valor obtenido a través de la prueba de infiltración $\psi_d(\text{inf}) = -17.5 \text{ cm}$. Esta discrepancia es debida al fenómeno de histéresis capilar cuya manifestación es más acentuada en la característica de humedad que en la curva de conductividad hidráulica. Para el análisis de la lámina drenada por cada dren del módulo se retienen los valores: $\psi_d = -41.85 \text{ cm y } K_s = 18.3 \text{ cm/h}$.

3.5. APLICACIÓN DE LA CONDICIÓN DE RADIACIÓN NO LINEAL

Considerando los parámetros del suelo estimados precedentemente se modela con la solución numérica (3.31) el experimento de drenaje hecho en laboratorio imponiendo en los drenes la condición de radiación no lineal (3.1), en la superficie del suelo una evaporación nula ($E = 0$), condiciones de flujo nulo en el resto de las fronteras y describiendo el flujo del agua en el dren con la ley de resistencia fractal (1.45). Para realizar la simulación de la prueba de drenaje se discretiza primeramente el dominio de solución mostrado en la Figura 3.1 generando una malla de elementos finitos con el paquete comercial Argus One 4.0 p. La malla generada consta de 10795 nudos y 21082 elementos con espaciamientos mínimos de $\Delta x_{\min} = \Delta z_{\min} = 0.2$ cm y máximos de $\Delta x_{\min} = \Delta z_{\min} = 2.0$ cm (Figura 3.7). El paso de tiempo inicial que se usa es de $\Delta t_{\text{ini}} = 0.1$ s el cual se incrementa en el transcurso de la simulación hasta un máximo de $\Delta t_{\text{max}} = 60$ s. Para calcular la variación en el tiempo del tirante en el dren se usan los siguientes valores: $J = 0.001$, $d = 0.54$ y $\kappa \cong 9.83$ (estimado a partir del coeficiente de Hazen-Williams para tubos de PVC). El tiempo total de la simulación corresponde a la duración de la prueba de drenaje ($t = 10$ d).

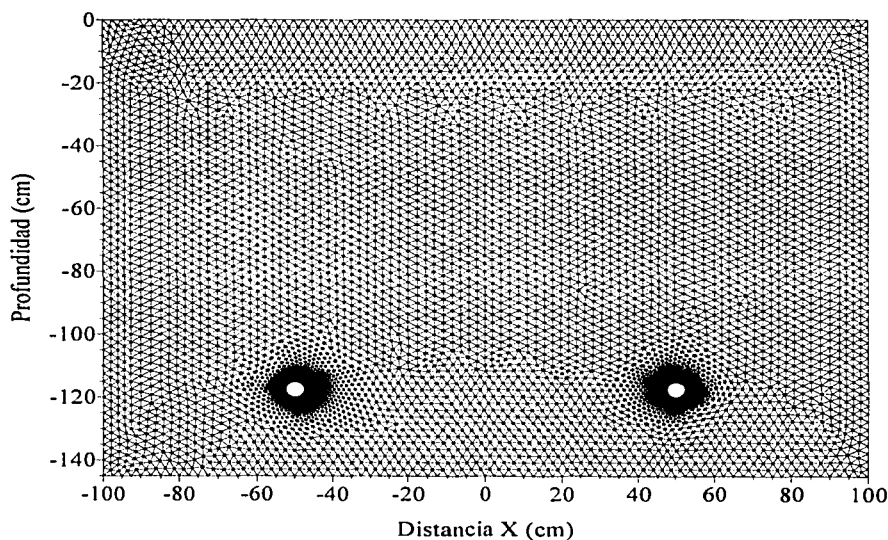
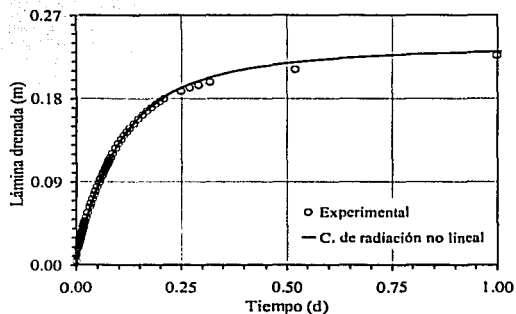
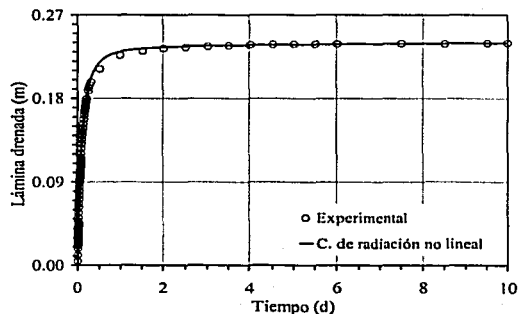


Figura 3.7. Malla de elementos finitos.

Los parámetros a , b y q_0 de la condición de radiación no lineal (ecuación 3.1) se estiman de manera de minimizar la diferencia entre datos numéricos y experimentales, el mejor acuerdo entre estos datos se obtiene con $a = b = 1.88$ y $q_0 = 300K_s$. En la Figura 3.8 se presenta una comparación de la lámina drenada experimental con la obtenida usando la condición de radiación no lineal, en esta Figura se puede observar el buen acuerdo entre ambas series de datos, tanto en los tiempos cortos del drenaje como en los tiempos muy largos. Sobre el valor de los coeficientes de forma a y b es conveniente indicar que éste es similar al obtenido en el caso del drenaje unidimensional de columnas de suelo ($a = b = 1.85$), la diferencia de 1.6 % puede ser atribuible al hecho de que la porosidad total (ϕ) del suelo contenido en el módulo de drenaje es 10.5 % mayor respecto de la estimada para la columna de suelo. Este resultado muestra que los parámetros de forma a y b son independientes de la geometría del dominio de solución y que pueden ser estimados con la relación presentada en el capítulo II (ecuación 2.54).



a) 1 día de drenaje.



b) 10 días de drenaje.

Figura 3.8. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1.88$ y $q_0/K_s = 300$: $R^2 = 0.9937$ (Arena de Tezoyuca).

En las Figuras 3.9-3.12 se muestran las líneas equipotenciales y el campo de velocidades para diferentes tiempos de simulación. En estas Figuras se puede observar que tanto las líneas equipotenciales como las de corriente muestran tendencias razonables y no exhiben oscilaciones aparentes, lo cual muestra la confiabilidad del modelo numérico desarrollado y la bondad del criterio usado para variar el paso de tiempo en el transcurso de la simulación (ver sección 2.3). En la Figura 3.13 se presenta la evolución teórica del tirante en el dren.

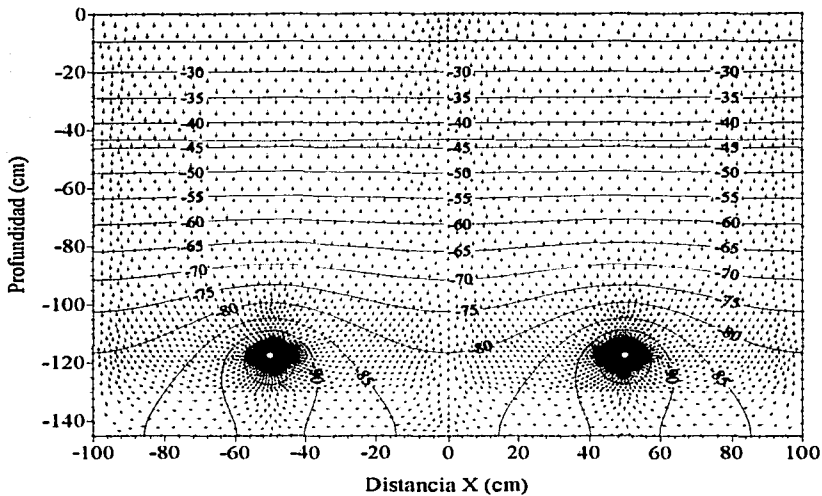


Figura 3.9. Equipotenciales, campo de velocidades y posición de la superficie libre a un minuto de iniciado el drenaje del suelo arena de Tezoyuca. Las magnitudes extremas de la velocidad de Darcy son $q_{\min} = 6.08 \times 10^{-5}$ cm/s y $q_{\max} = 1.87 \times 10^{-2}$ cm/s.

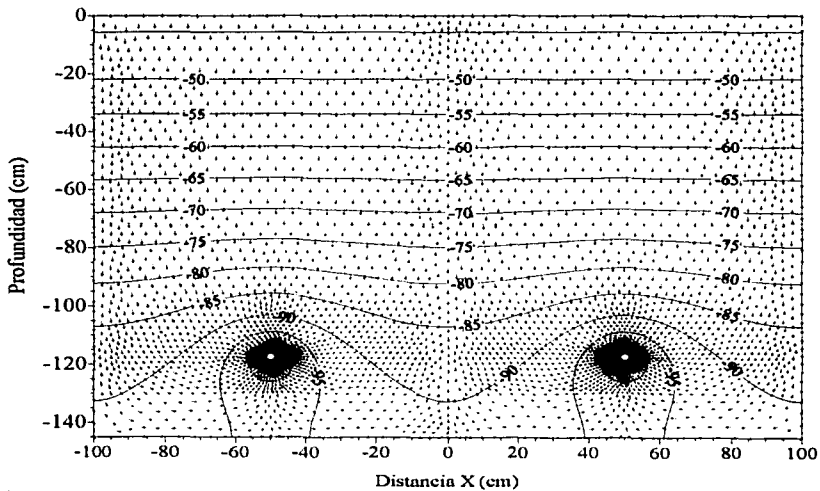


Figura 3.10. Equipotenciales, campo de velocidades y posición de la superficie libre a los 15 minutos de iniciado el drenaje del suelo arena de Tezoyuca. Las magnitudes extremas de la velocidad de Darcy son $q_{\min} = 4.71 \times 10^{-5}$ cm/s y $q_{\max} = 1.48 \times 10^{-2}$ cm/s.

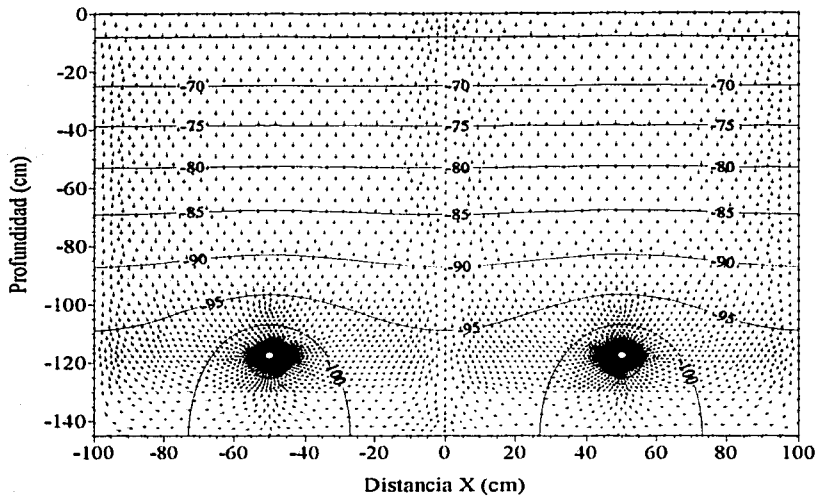


Figura 3.11. Equipotenciales, campo de velocidades y posición de la superficie libre a una hora de iniciado el drenaje del suelo arena de Tezoyuca. Las magnitudes extremas de la velocidad de Darcy son $q_{\min} = 2.29 \times 10^{-5} \text{ cm/s}$ y $q_{\max} = 1.04 \times 10^{-2} \text{ cm/s}$.

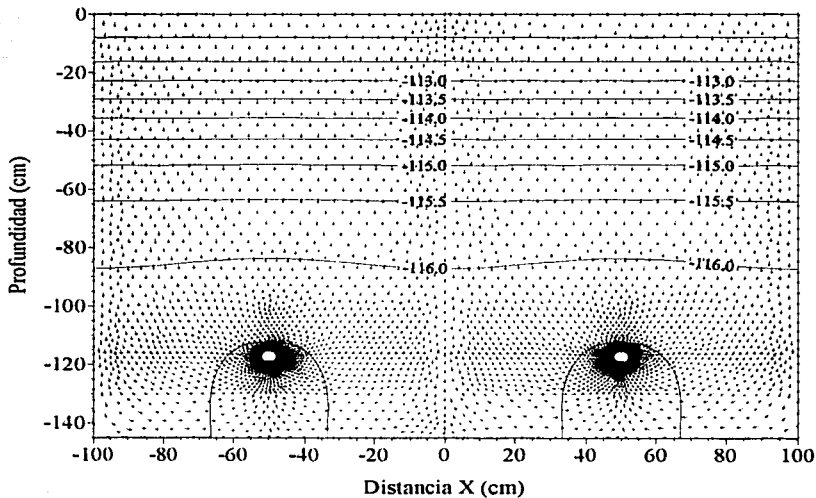


Figura 3.12. Equipotenciales, campo de velocidades y posición de la superficie libre a las 12 h de iniciado el drenaje del suelo arena de Tezoyuca. Las magnitudes extremas de la velocidad de Darcy son $q_{\min} = 5.48 \times 10^{-7} \text{ cm/s}$ y $q_{\max} = 1.09 \times 10^{-3} \text{ cm/s}$.

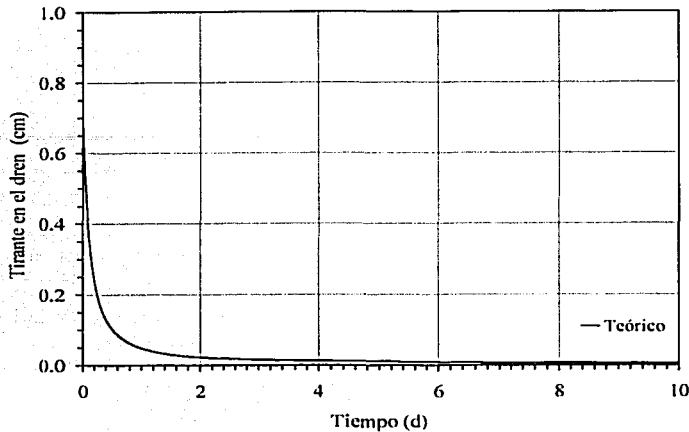


Figura 3.13. Evolución teórica del tirante en el dren $h_o(t)$ calculada con $J = 0.001$, $d = 0.54$ y $\kappa \cong 9.83$.

3.6. COMPARACIÓN DE LA CONDICIÓN DE RADIACIÓN NO LINEAL CON APROXIMACIONES REPORTADAS EN LA LITERATURA.

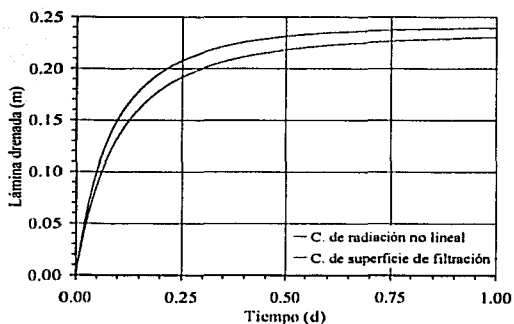
Apoyados en evidencia experimental se ha probado la capacidad descriptiva de la condición de radiación no lineal (3.1), sin embargo antes de recomendar su uso para describir la transferencia de agua del suelo a los drenes, es necesario mostrar las ventajas de esta aproximación respecto de las aproximaciones reportadas en la literatura. Para ello se realizan modelaciones del experimento de drenaje sujetando al dren primeramente a la condición de superficie de filtración (Neuman, 1973) y luego a una condición tipo Neumann de flujo variable donde se hace uso de la solución Kirkham (1949).

3.6.1. Condición de superficie de filtración (Neuman, 1973).

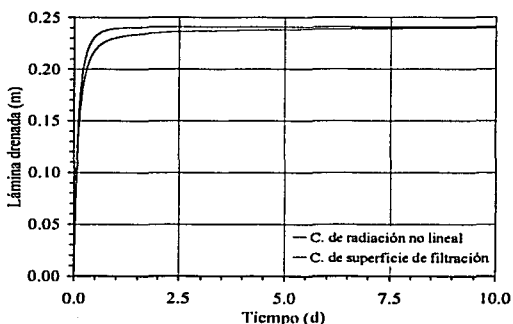
Siendo que la condición de superficie de filtración permite considerar de manera explícita la forma geométrica de los drenes, la modelación del experimento de drenaje con esta condición de frontera se realiza utilizando tanto la malla computacional como la discretización temporal empleadas en la aplicación de la condición de radiación no lineal. Los resultados de la simulación numérica se presentan en las Figuras 3.14 y 3.15. En la Figura 3.14 se compara la evolución en el

tiempo de la lámina drenada calculada con la condición de radiación no lineal y la calculada con la condición de filtración, esta comparación pone en evidencia que la aproximación clásicamente usada en la literatura para modelar el drenaje agrícola sobrestima el gasto de drenaje debido al supuesto de que la resistencia en la interfaz suelo saturado-dren es nula. Esta sobrestimación del gasto de drenaje a su vez origina que se sobrestime el abatimiento del manto freático, como se muestra en la Figura 3.15.

Los resultados obtenidos anteriormente sirven de sustento al siguiente comentario: si se diseña un sistema de drenaje subterráneo considerando los resultados proporcionados por la condición de superficie de filtración, se corre el riesgo de subestimar la separación entre drenes necesaria, ya que en la realidad la resistencia suelo saturado-dren es distinta de cero. Adicionalmente a este problema es preciso señalar que, la condición de filtración no describe detalladamente la evolución de la presión en el interior del dren, ya que no permite considerar de manera explícita en el análisis el gradiente de presiones que se genera en la interfaz suelo saturado-dren.



a) Primer día de drenaje del suelo arena de Tezoyuca ($P = 115$ cm y $L = 100$ cm).



b) 10 días de drenaje del suelo arena de Tezoyuca ($P = 115$ cm y $L = 100$ cm).

Figura 3.14. Evolución de la lámina drenada calculada con la condición de radiación no lineal (3.1) y evolución de la lámina drenada descrita con la condición de superficie de filtración (Neuman, 1973).

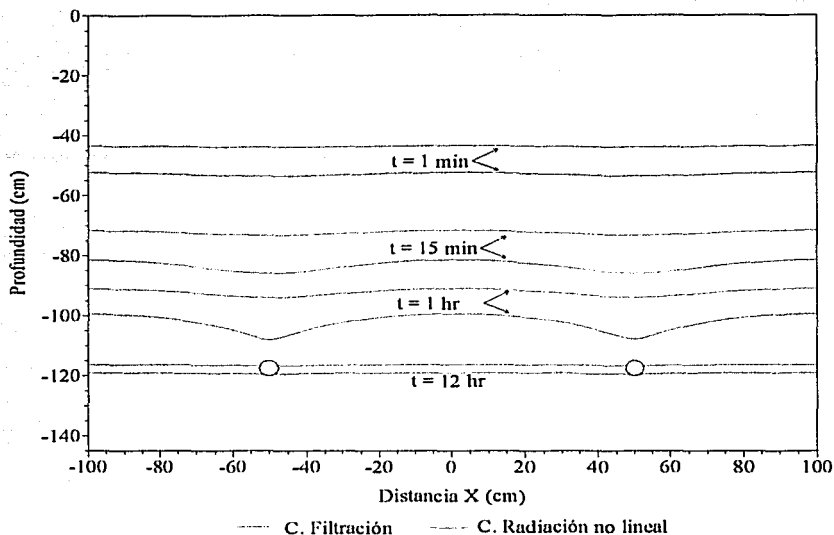


Figura 3.15. Evolución del manto freático calculada con la condición de radiación no lineal (3.1) y evolución descrita con la condición de superficie de filtración (Neuman, 1973).

3.6.2. Solución de Kirkham (1949).

Los resultados obtenidos al imponer en la circunferencia del dren la condición de radiación no lineal (ecuación 3.1) son ahora contrastados con aquellos que se obtienen al representar el dren como un punto sujeto a una condición tipo Neumann de flujo variable. La variación del gasto es descrita con la solución presentada por Kirkham (ecuación 1.27). Siendo que esta solución es obtenida considerando régimen de flujo permanente, su aplicación a procesos de drenaje transitorios puede realizarse introduciendo la hipótesis (1.30) en (1.27) y asumiendo $h_w = 0$, lo cual permite obtener:

$$Q = \frac{4\pi K_s (h_o(t) - r_c)}{2 \ln \left\{ \sinh \left[\pi \frac{2h_o - r_c}{L} \right] / \sinh \left(\frac{\pi r_c}{L} \right) \right\} + f} \quad (3.32)$$

donde:

$$f = -2 \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \ln \left\{ \frac{\sinh^2 (2\pi j D_o / L) - \sinh^2 (\pi r_c / L)}{\sinh^2 (2\pi r_c / L) - \sinh^2 \{ \pi [2h_o(t) - r_c] / L \}} \right\} \quad (3.33)$$

Una primera restricción de la solución de Kirkham es obtenida al analizar el primer término de su denominador, ya que para que el gasto de drenaje se una función acotada es necesario que se cumpla:

$$\frac{\sinh\left[\pi\frac{2h_0 - r_c}{L}\right]}{\sinh\left(\frac{\pi r_c}{L}\right)} > e \quad (3.34)$$

donde e es el número de Neper ($e \cong 2.71828$).

Siendo que se estudia la fase de recesión del manto freático para recarga nula y se ha mostrado que la carga sobre el dren se abate totalmente cuando el tiempo de drenaje de un suelo tiende a infinito, es necesario que las condiciones de frontera que se impongan sobre el dren describan este comportamiento extremo. La restricción obtenida para la solución de Kirkham (ecuación 3.34) permite mostrar que con esta aproximación no puede describirse de forma completa la fase de recesión de manto freático.

No obstante que la solución de Kirkham no describe la recesión del manto freático en los tiempos muy largos, se modela el experimento de drenaje para analizar el comportamiento de esta relación en los tiempos cortos. Para aplicar la solución de Kirkham se generó una malla de elementos finitos de 8577 Nudos, 16806 elementos con espaciamientos mínimos de $\Delta x_{\min} = \Delta z_{\min} = 1.8 \text{ cm}$ (zonas circundantes a los dos nodos que representan a los drenes) y máximos de $\Delta x_{\max} = \Delta z_{\max} = 2.0 \text{ cm}$ (zonas más alejadas de los drenes). Los pasos de tiempo inicial y máximo que se usan en este caso corresponden a aquellos previamente considerados en la aplicación de la condición de radiación no lineal. Así mismo las condiciones que se imponen en las fronteras del dominio de solución excepto el dren son las mismas que se han usado en las secciones anteriores.

Definidas las condiciones básicas que se requieren en la simulación, es necesario estimar el valor del parámetro r_c de la solución de Kirkham. Para cumplir este objetivo se modela el experimento de drenaje suponiendo primeramente que r_c es igual al radio de la tubería de drenaje, es decir $r_c = r_0 = 2.5 \text{ cm}$. Esta condición implica suponer que los drenes son completamente permeables, es decir, que los tubos no ofrecen resistencia al flujo del agua. Es conveniente indicar que el tiempo de aplicación de la solución de Kirkham y por consecuencia de comparación con la condición de radiación no lineal cuando la separación entre drenes es

constante, es función de las características hidrodinámicas del suelo y del valor del parámetro r_e . Una comparación de los resultados obtenidos con la solución de Kirkham con $r_e = 2.5\text{ cm}$ y los obtenidos con la condición de radiación no lineal se muestra en la Figura 3.16, en esta se observa que no es conveniente aplicar la solución de Kirkham asimilando el radio efectivo (r_e) al radio del dren (r_o) ya que ello conduce a sobrestimar la evolución del gasto de drenaje y por consecuencia el abatimiento del manto freático.

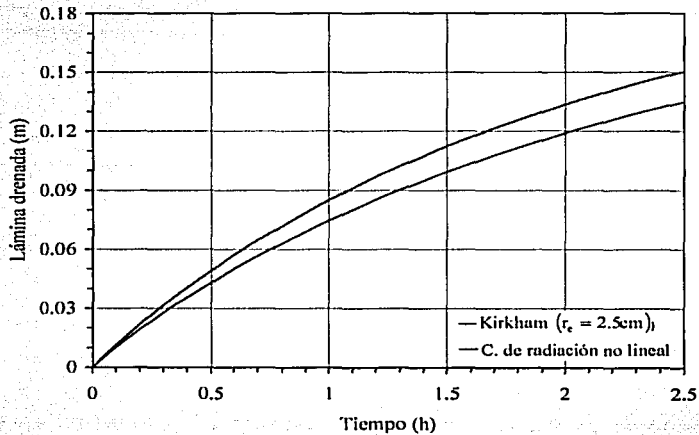


Figura 3.16. Evolución de la lámina drenada calculada con la condición de radiación no lineal y evolución calculada con la solución de Kirkham (ecuación 3.32) suponiendo que la circunferencia del dren es completamente permeable: $r_e = r_o = 2.5\text{ cm}$.

Una segunda forma para estimar el parámetro r_e es la siguiente:

Asúmase primero que el flujo del agua en las zonas del suelo próximas al dren es exclusivamente radial, para esta condición el gasto de drenaje puede calcularse con la ecuación (1.38). Si se tuviese un dren que no ofrece resistencia al flujo del agua, la relación que describiría la evolución del gasto (Q_p) sería entonces:

$$Q_p = -\frac{2\pi K_s(\psi_{sd} - \psi)}{\ln(r_i/r_o)} \quad (3.35)$$

Sin embargo como los tubos de drenaje reales son semi-permeables dado que tienen un número finito de orificios a través de los cuales se transfiere el agua del medio poroso al interior del dren, el radio del dren (r_o) puede sustituirse por un radio efectivo (r_c) para tomar en cuenta esta condición, por lo cual el gasto de drenaje correspondiente (Q_{sp}) puede calcularse con:

$$Q_{sp} = -\frac{2\pi K_s (\psi_{sd} - \psi)}{\ln(r_1/r_c)} \quad (3.36)$$

La combinación de las ecuaciones (3.35) y (3.36) permite obtener la razón del gasto drenado por un dren semi-permeable al gasto drenado por uno dren permeable:

$$\frac{Q_{sp}}{Q_p} = \frac{\ln(r_1/r_o)}{\ln(r_1/r_c)} \quad (3.37)$$

Resolviendo para el radio efectivo se obtiene:

$$r_c = \frac{r_1}{(r_1/r_o)^{\frac{Q_p}{Q_{sp}}}} \quad (3.38)$$

La ecuación (3.38) puede ser utilizada para calcular el radio efectivo de un dren si se conoce la razón Q_{sp}/Q_p y el parámetro r_1 . Investigadores del Departamento de Agricultura y Conservación de Recursos Naturales de Estados Unidos han realizado mediciones en laboratorio de estas variables considerando tubos de drenaje de diferentes materiales y diámetros, para el caso de tubos de PVC de 5 cm de diámetro reportan $Q_{sp}/Q_p \cong 0.49$ y $r_1 \cong 19.1$ cm (USDA, 1997).

Introduciendo los valores anteriores en la ecuación (3.38) se calculó un valor de radio efectivo para los drenes instalados en el sistema de drenaje experimental bajo estudio, $r_c \cong 0.3$ cm. Usando este valor se aplicó la solución de Kirkham para describir el experimento de drenaje y los resultados obtenidos se compararon con aquellos derivados con la condición de radiación no lineal (Figura 3.17). De esta comparación se deduce el siguiente comportamiento de la solución de Kirkham: cuando el tiempo de drenaje es menor de $t < 1.9$ h, la evolución de la lámina drenada obtenida con esta solución muestra un buen acuerdo respecto del resultado descrito con la condición de radiación no lineal, sin embargo para tiempos mayores la solución de Kirkham sobrestima sensiblemente el gasto de drenaje. Además de acuerdo con el límite (3.34) el

tiempo de aplicación de la solución de Kirkham para $r_e = 0.3 \text{ cm}$ es sólo de $t \cong 10.85 \text{ h}$, mientras que la duración del experimento es de 10 d.

Basados en los resultados obtenidos en esta sección se concluye que cuando la solución de Kirkham se usa para describir el comportamiento hidráulico de un sistema de drenaje existirá un tiempo para el cual se sobrestima el volumen de agua evacuado por los drenes. Otra desventaja que presenta la solución de Kirkham es que no describe la fase de recesión del manto freático en tiempos largos y muy largos de drenaje, ya que su aplicación esta restringida a valores de carga sobre el dren que satisfagan el límite (3.34).

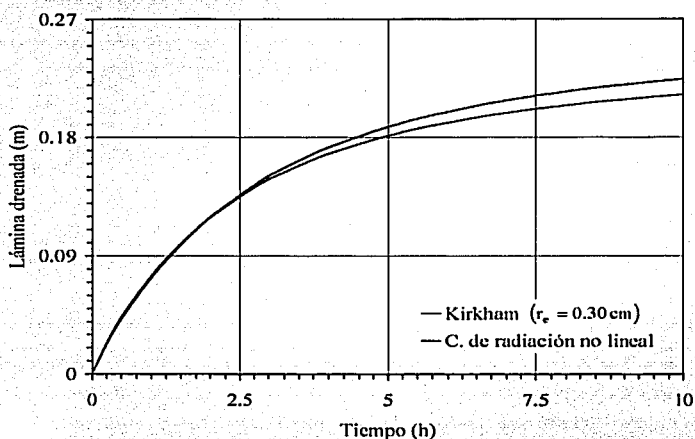


Figura 3.17. Evolución de la lámina drenada calculada con la condición de radiación no lineal y evolución calculada con la solución de Kirkham para un radio efectivo de $r_e = 0.3 \text{ cm}$.

Resumen

Se ha presentado una aproximación mecanicista para describir el funcionamiento hidráulico de un sistema de drenaje agrícola subterráneo que consiste en acoplar la ecuación de Richards bidimensional para el flujo de agua en el suelo con una ley de resistencia para el flujo de agua en el dren. Este acoplamiento se ha realizado imponiendo en los drenes una condición de radiación no lineal. Se ha presentado el experimento de drenaje realizado en laboratorio del cual se obtiene información para evaluar la capacidad de descripción de la condición de radiación no

lineal así como la capacidad de las dos aproximaciones más usadas en la literatura para modelar el flujo de agua hacia los drenes, que son la condición de superficie de filtración y la solución de Kirkham. A partir de la comparación con los datos experimentales se ha mostrado que las transferencias de masa y energía en un sistema de drenaje agrícola subterráneo son mejor descritas con la condición de radiación no lineal y que tanto la condición de filtración como la solución de Kirkham sobrestiman el gasto de drenaje y por consecuencia el abatimiento del manto freático.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

104

CAPITULO IV

MODELACIÓN DE LA TRANSFERENCIA DE AGUA EN SISTEMAS DE DRENAJE
AGRÍCOLA SUBTERRÁNEOS CON LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ
UNIDIMENSIONAL

En este capítulo se aborda el estudio de la dinámica del agua en sistemas de drenaje agrícola subterráneos con la ecuación de Boussinesq unidimensional de los acuíferos libres. En una primera etapa se estudia la porosidad drenable como una función de la posición del manto freático considerando la influencia de la zona no saturada del suelo en el proceso de drenaje. A partir de una conceptualización de la lámina drenada y la lámina drenable se define el concepto de capacidad de almacenamiento, utilizado en la teoría clásica de acuíferos, y el de porosidad drenable utilizado en drenaje agrícola. Utilizando las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange y el modelo para la curva de retención de van Genuchten, se obtienen dos fórmulas para la capacidad de almacenamiento, siendo la primera útil en estudios teóricos y la segunda en estudios experimentales. En una segunda etapa se aborda el problema de la definición de la condición de frontera en los drenes, planteándose condiciones de radiación lineal y de radiación no lineal para describir la transferencia de agua del suelo a los drenes. Se obtiene una solución de elemento finito de la ecuación de Boussinesq unidimensional para verificar: 1) las hipótesis clásicas que se usan en el drenaje agrícola, porosidad drenable constante y carga nula en los drenes; 2) la capacidad descriptiva de la relación para la capacidad de almacenamiento previamente deducida; y 3) la condición de frontera tipo radiación que debe imponerse en los drenes. Aplicando la solución numérica, previa validación de ésta, se modela un experimento de drenaje realizado en laboratorio, obteniéndose primeramente que los supuestos de porosidad drenable constante y de carga nula sobre los drenes no describen la experiencia de drenaje. Posteriormente se aplica una de las fórmulas para la capacidad de almacenamiento encontrándose que ésta proporciona una mejor aproximación a los datos experimentales que aquella obtenida con el supuesto de porosidad drenable constante, sin embargo una fuerte discrepancia entre datos teóricos y experimentales permanece. Se concluye que dichas diferencias son debidas principalmente a la condición de frontera que se usa en el dren. Finalmente se aplican las condiciones de frontera tipo radiación previamente planteadas, obteniéndose que la condición de radiación lineal de Newton sólo describe los datos experimentales de lámina drenada en los tiempos cortos del drenaje. Se encuentra que una mejor descripción del experimento de drenaje es posible con la condición de radiación no lineal obtenida en este trabajo. El buen acuerdo entre la evolución de la lámina drenada experimental y la evolución de la lámina drenada calculada con la condición de radiación no lineal permite concluir que esta relación puede usarse para describir la transferencia de agua del suelo a los drenes.

4.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La ecuación de Boussinesq de los acuíferos libres resulta de la aplicación del principio de conservación de la masa y de la ley de Darcy. La aplicación del principio de conservación de la masa al volumen elemental del acuífero $(H - H_i)\Delta x\Delta y$, donde (x, y) son las coordenadas cartesianas en el plano horizontal, $(H - H_i)$ es el espesor del acuífero, $H = H(x, y, t)$ y $H_i = H_i(x, y)$ son respectivamente la elevación de la superficie libre y del estrato impermeable con respecto a un nivel de referencia, resulta en la siguiente ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \nabla \cdot Q = R \quad (4.1)$$

donde $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$; $Q = (Q_x, Q_y) = Q(x, y, t)$ es el vector gasto por unidad de longitud, Q_x y Q_y son las componentes del gasto en las direcciones cartesianas; $R = R(x, y, t)$ es el volumen de recarga por unidad de tiempo por unidad de área de acuífero; $W = W(x, y, t)$ es el volumen de agua almacenada posible de ser drenada o removida por unidad de área que se denominará *lámina almacenada drenable o removible* y es definida por $dW = d[\psi(H - H_i)]$, en la cual $\psi = \psi(H)$ es una fracción de la porosidad, que puede ser una función de H , que se denominará *porosidad drenable*.

El gasto es proporcionado por la ley de Darcy, considerando los supuestos de Dupuit-Forcheimer:

$$Q = -T(H)\nabla H, \quad T(H) = K_s(H - H_i) \quad (4.2)$$

donde $T(H)$ es la transmisibilidad del acuífero; y K_s es la conductividad hidráulica a saturación.

La ecuación bidimensional de Boussinesq resulta de la combinación de las ecuaciones (4.1) y (4.2):

$$\mu(H)\frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \cdot [T(H)\nabla H] + R \quad (4.3)$$

en la cual se ha introducido la capacidad de almacenamiento del acuífero $\mu(H)$ definida por:

$$\mu(H) = \frac{dW}{dH} = \frac{d[v(H)(H - H_i)]}{dH}, \quad W(H) = W_i + \int_{H_i}^H \mu(H) dH \quad (4.4)$$

donde $W_i = W(H_i) = 0$ porque H_i es la elevación del estrato impermeable.

De acuerdo con la ecuación (4.4) cuando la porosidad drenable es independiente de H , la capacidad de almacenamiento también es independiente de H y se tiene $\mu = v$, con lo cual se muestra que solo en este caso la capacidad de almacenamiento es equivalente a la porosidad drenable tal como indican Gupta *et al.* (1994), mientras que si la porosidad drenable depende de H no puede ser asimilada a la capacidad de almacenamiento, como se ha hecho en la mayor parte de los trabajos presentados en la literatura (Skaggs *et al.*, 1976; Bhattacharya y Broughton, 1979; Pandey *et al.*, 1992; González *et al.*, 1997; Fuentes *et al.*, 1999).

El estudio de la dinámica del agua en un sistema de drenaje agrícola es más ampliamente realizado a partir de la ecuación de Boussinesq unidimensional:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[T(H) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R \quad (4.5)$$

Para resolver la ecuación (4.5), además de proporcionar la capacidad de almacenamiento $\mu(H)$, es necesario definir las condiciones iniciales y de frontera que mejor representen el fenómeno en estudio. La especificación de estas condiciones límites es muchas veces más conveniente si la posición de la superficie libre contada a partir del estrato impermeable es expresada como (ver Figura 1.8):

$$H(x, t) = D_o + h(x, t) \quad (4.6)$$

donde $h(x, t)$ es la carga hidráulica contada a partir de la posición de los drenes.

La condición inicial de la presión debe ser especificada como la elevación de la superficie libre a lo largo de la coordenada horizontal x :

$$h(x, 0) = h_s(x) \quad (4.7)$$

La descripción de la transferencia de agua del suelo hacia los drenes puede realizarse si se impone en los drenes una condición tipo radiación:

$$q_d(0, t) = -\frac{h}{R_{in}} \quad (4.8.1)$$

$$q_d(L, t) = \frac{h}{R_{in}} \quad (4.8.2)$$

donde R_{in} es un coeficiente que representa la resistencia al flujo de la agua en la interfaz suelo dren [T]. Las ecuaciones (4.8.1.) y (4.8.2.) corresponden a la condición de radiación lineal de Newton cuando R_{in} es independiente de la carga hidráulica.

La descripción del comportamiento de un sistema de drenaje con el sistema de ecuaciones (4.5), (4.6), (4.7) y (4.8) requiere del conocimiento de la capacidad de almacenamiento $\mu(H)$, y del coeficiente de resistencia de la interfaz suelo-atmósfera R_{in} , el cual puede ser una función de la carga hidráulica o del flujo de agua.

Para el estudio cuidadoso del coeficiente de resistencia de la interfaz suelo-dren es importante determinar primero la forma de la capacidad de almacenamiento y conocer de manera independiente las características hidrodinámicas del suelo.

4.2. CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO Y POROSIDAD DRENABLE

En la deducción de la ecuación de Boussinesq a partir de la integración de la ecuación de Richards en la coordenada vertical (sección 1.2.1), se ha obtenido la expresión siguiente de la capacidad de almacenamiento:

$$\mu(H) = \theta_s - \theta_{ns}(H) \quad (4.9)$$

donde θ_s es el contenido de humedad a saturación, igual a la porosidad volumétrica total del suelo (ϕ) cuando no existe aire atrapado y θ_{ns} es un contenido de humedad característico de la zona no saturada del suelo, dependiente de la elevación de la superficie libre. De acuerdo con la estructura de la ecuación (4.9) a la capacidad de almacenamiento también se le denominará *porosidad drenada*.

La utilización de la ecuación (4.9) requiere de la definición de $\theta_{ns}(H)$; para ello se introduce la definición de lámina drenada. Partiendo de que la superficie libre del acuífero

ubicada en la posición $z = H$ estuvo precedentemente ubicada en la posición $z = H_s$, la lámina drenada debido al abatimiento, es definida considerando la zona no saturada por:

$$\ell(H) = \int_H^{H_s} [\theta_s - \theta(z)] dz \quad (4.10)$$

y definida considerando la lámina drenable de la zona saturada por:

$$\ell(H) = W_s - W(H) \quad (4.11)$$

donde $W_s = W(H_s)$ es la lámina drenable máxima.

González *et al.* (1997) suponen que la porosidad drenable es equivalente a la capacidad de almacenamiento o porosidad drenada ($\mu(H) \equiv v(H)$) y que puede calcularse aceptando dos hipótesis: i) tomar a $\theta_{ns}(H)$ como el valor medio en la zona no saturada, $\theta_{ns}(H) = \bar{\theta}(H)$, y por la ecuación (4.10) $\mu(H) = \ell(H)/(H_s - H)$, y ii) aceptar una distribución hidrostática de las presiones $\psi = H - z$ para introducir la curva de retención $\theta(\psi) = \theta(H - z)$ en lugar de $\theta(z)$ en la ecuación (4.10).

Sin embargo la capacidad de almacenamiento o porosidad drenada que hace compatible las definiciones de la lámina drenada dadas por las ecuaciones (4.10) y (4.11) es tal que:

$$\mu(H) = dW/dH = -d\ell/dH \quad (4.12)$$

Aceptando solamente la hipótesis de una distribución hidrostática de las presiones, la lámina drenada es expresada como:

$$\ell(H) = \int_H^{H_s} [\theta_s - \theta(H - z)] dz \quad (4.13)$$

de la cual se deduce:

$$\mu(H) = \frac{dW}{dH} = -\frac{d\ell}{dH} = \theta_s - \theta(H - H_s) \quad (4.14)$$

Tomando en cuenta la ecuación (4.9) $\theta_{ns}(H) = \theta(H - H_s) = \theta_{sup}(H)$ corresponde al contenido de humedad en la posición H_s , en lugar del contenido de humedad medio como suponen González *et al.* (1997).

Una expresión de la curva de retención que permite la integración cerrada de la ecuación (4.4) se obtiene considerando la representación analítica (1.16), la cual se deduce considerando el modelo para la difusividad hidráulica de Fujita (ecuación 1.11), la relación para la conductividad hidráulica de Parlange *et al.* (ecuación 1.13) y que $\alpha = \beta$.

La introducción de $\theta(\psi) = \theta(H - z)$, definida por la ecuación (1.16), en la ecuación (4.10) permite deducir la siguiente expresión de la lámina drenada:

$$\ell(H) = (\theta_s - \theta_r) \left[(H_s - H) - \frac{\lambda_c}{\alpha} \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha + \alpha \exp[-(H_s - H)/\lambda_c]} \right) \right] \quad (4.15)$$

La porosidad drenada definida por la ecuación (4.14) con $\theta(H - H_s)$ calculada con la ecuación (1.16) es la siguiente:

$$\mu(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \frac{1}{\alpha + (1 - \alpha) \exp[(H_s - H)/\lambda_c]} \right\} \quad (4.16)$$

La lámina drenable $W(H)$ se deduce de la ecuación (4.11) $W(H) = \ell(H_i) - \ell(H)$, puesto que $W_s = \ell(H_i)$. Considerando la ecuación (4.16) se tiene:

$$W(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ (H - H_i) - \frac{\lambda_c}{\alpha} \ln \left[\frac{1 - \alpha + \alpha \exp(-(H_s - H)/\lambda_c)}{1 - \alpha + \alpha \exp(-(H_s - H_i)/\lambda_c)} \right] \right\} \quad (4.17)$$

y la porosidad drenable se obtiene con la fórmula: $\nu(H) = W(H)/(H - H_i)$, en la cual se debe señalar que $\nu(H_i) = \mu(H_i)$.

Otro modelo de la curva de retención que permite obtener una expresión explícita para la porosidad drenada es la relación de van Genuchten (ecuación 1.17):

$$\mu(H) = (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \frac{1}{\left\{ 1 + \left[\frac{(H - H_s)}{\psi_d} \right]^n \right\}^m} \right\} \quad (4.18)$$

Basados en la recomendación de Fuentes *et al.* (1992) sobre el uso de las representaciones analíticas de las curvas de retención de humedad de Fujita y Parlange y de van Genuchten, se propone que la fórmula de porosidad drenada (4.16) se use en estudios teóricos, tales como deducción de soluciones analíticas, mientras que la ecuación (4.18) se use en estudios prácticos, como por ejemplo la descripción de experimentos de campo y laboratorio o en la modelación de escenarios de interés agrícola.

4.3. LA CONDICIÓN DE RADIACIÓN EN LOS DRENES

Siendo que la forma funcional de la porosidad drenada $\mu(H)$ ha sido determinada de manera rigurosa, enseguida se aborda el problema de la definición de la condición de frontera en los drenes, investigando el coeficiente de resistencia de la interfaz suelo-dren (R_{in}) de la condición de radiación (4.8).

4.3.1. Coeficiente de resistencia constante (radiación lineal)

Fuentes *et al.* (1997) suponen que la resistencia de la interfaz suelo-dren es constante y que su valor puede ser estimado con la siguiente relación:

$$R_{in} = \frac{L}{\gamma K_s} \quad (4.19)$$

donde L es la separación entre drenes y γ es un coeficiente de conductancia.

Por conveniencia en este trabajo se redefine la resistencia en la interfaz como:

$$R_{in} = \frac{P}{\gamma K_s} \quad (4.20)$$

donde P es la profundidad de los drenes.

Si se introduce (4.20) en (4.8) se obtiene la siguiente condición de radiación lineal:

$$q_d = \gamma K_s \frac{h_o}{P} \quad (4.21)$$

donde q_d es el flujo de drenaje; y h_o es la carga sobre el dren.

En un sistema de drenes paralelos equidistantes el gasto por unidad de longitud evacuado por un dren es proporcionado por:

$$Q_d = 2\gamma K_s \frac{h_o}{P} (h_o + D_o) \quad (4.22)$$

4.3.2. Coeficiente de resistencia variable (radiación no lineal)

a) *Combinación convexa*

La condición radiación lineal (4.21) puede generalizarse considerando la contribución de los términos de segundo orden, por lo que el flujo de drenaje puede ser calculado con la siguiente combinación convexa:

$$q_d = \gamma K_s \left[(1 - \omega) \frac{h_o}{P} + \omega \left(\frac{h_o}{P} \right)^2 \right] \quad (4.23)$$

donde ω es un factor de peso que varía entre 0 y 1, cuando $\omega = 0$ el flujo de drenaje es proporcional a la carga hidráulica sobre el dren y cuando $\omega = 1$ el flujo de drenaje es proporcional al cuadrado de la carga.

Considerando (4.23) el gasto por unidad de longitud evacuado por un dren es proporcionado por:

$$Q_d = 2\gamma K_s \left[(1 - \omega) \frac{h_o}{P} + \omega \left(\frac{h_o}{P} \right)^2 \right] (h_o + D_o) \quad (4.24)$$

El coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-dren que permite llevar la condición de radiación de Newton (4.8) a la forma de la combinación convexa (4.22) es:

$$R_m = \frac{P}{\gamma K_s \left[(1 - \omega) + \omega \frac{h_o}{P} \right]} \quad (4.25)$$

b) Radiación no lineal fractal

Los resultados obtenidos al estudiar la transferencia de agua del suelo al dren con la ecuación de Richards indican que a esa escala de análisis la evolución del flujo de drenaje debe ser descrita con una condición de radiación no lineal fractal (ecuación 2.47). En consecuencia existe la probabilidad de que una condición de frontera similar se requiera también a la escala de Boussinesq.

Para obtener una condición de radiación no lineal fractal para la ecuación de Boussinesq y establecer una forma funcional para el coeficiente de resistencia en la interfaz, se realiza el siguiente análisis.

Considérese la columna de suelo que se ubica por encima del dren y asúmase que este medio está inicialmente saturado (ver Figura 4.1).

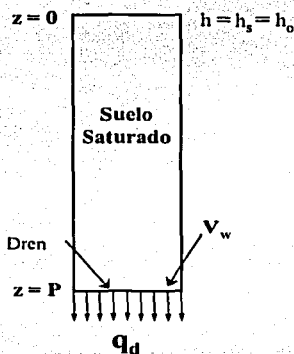


Figura 4.1. Representación esquemática de la columna de suelo que se ubica encima del dren

El volumen de la columna de suelo puede calcularse con la fórmula clásica:

$$V = A_T P \quad (4.26)$$

donde A_T es la área superficial del dren.

Mientras que el volumen de poros en la columna de suelo puede calcularse con:

$$V_w = A_w h_0 \quad (4.27)$$

donde A_w es el área total de poros expuestos, la cual es una fracción de A_T .

La razón del volumen total de poros al volumen total de suelo (V^*), se obtiene combinando las ecuaciones (4.26) y (4.27):

$$V^* = A^* \left(\frac{h_o}{P} \right) \quad (4.28)$$

donde $A^* = A_w/A_T = \phi$ si se acepta la hipótesis de que el conjunto de los poros de la columna de suelo se asimila a un sistema de tubos capilares paralelos.

Una mejor aproximación a un suelo real puede realizarse representando los poros de este como un sistema de capilares no paralelos. Si adicionalmente se considera al suelo como un objeto fractal (Fuentes, 2001) entonces la porosidad efectiva del sistema antes mencionado puede ser estimada con la siguiente relación:

$$V_{er}^* = (V^*)^s (V^*)^s = \phi^{2s} \left(\frac{h_o}{P} \right)^{2s} \quad (4.29)$$

donde s es la dimensión cociente del suelo definida implícitamente en función de la porosidad total del suelo ϕ . De la ecuación (2.32) se deducen los comportamientos extremos de la función $s(\phi)$:

$$\text{Para } \phi \rightarrow 0: \quad s(\phi) = 1/2 + \ln 2 / \{2[1 + \ln(1/\phi)]\} \quad (4.30.1)$$

$$\text{Para } \phi \rightarrow 1: \quad s(\phi) = 1 - \ln 2 / \{\ln[1/(1 - \phi)]\} \quad (4.30.2)$$

$$\text{De donde} \quad \frac{1}{2} < s < 1 \quad (4.30.3)$$

Los valores extremos de s son: i) para $\phi = 0$, $s = 1/2$; ii) para $\phi = 1$, $s = 1$

La razón del volumen máximo de agua al volumen total de suelo ($V_{w_{er}}$) es fácilmente obtenida a partir de la relación (4.29):

$$V_{w,er} = v \left(\frac{h_o}{P} \right)^\delta \quad (4.31)$$

donde $v = \phi^{2s}$ es la porosidad areal y $\delta = 2s$ ($1 \leq \delta \leq 2$).

Es bien sabido que el flujo de drenaje es proporcional al volumen de agua, considerando esta condición y la ecuación (4.31) se infiere:

$$q_d \propto v \left(\frac{h_o}{P} \right)^\delta \quad (4.32)$$

Haciendo intervenir la conductividad hidráulica, el flujo de drenaje puede expresarse como:

$$q_d = \gamma K_s \left(\frac{h_o}{P} \right)^\delta \quad (4.33)$$

El gasto por unidad de longitud evacuado por un dren según la condición (4.33) es proporcionado por:

$$Q_d = \gamma K_s \left(\frac{h_o}{P} \right)^\delta (h_o + D_o) \quad (4.34)$$

Al comparar (4.8) con (4.33) se obtiene la siguiente forma funcional para el coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-dren:

$$R_{in}(h_o) = \frac{P}{\gamma K_s (h_o/P)^{\delta-1}} \quad (4.35)$$

Hasta este punto se han obtenido tres condiciones de frontera tipo radiación para describir la transferencia de agua del suelo hacia el interior de los drenes (4.21, 4.23 y 4.33), el siguiente paso en la investigación consiste en determinar cual de estas condiciones de frontera describe mejor el proceso.

La solución analítica de la ecuación (4.5) sujeta a la condición inicial (4.7) y a las condiciones de frontera definidas por las ecuaciones (4.8.1) y (4.8.2) para los coeficientes (4.20) o (4.25) o (4.35), con la transmisibilidad (4.2) y la capacidad de almacenamiento definida por la

ecuación (4.16) o (4.18) no es conocida hasta el presente. En consecuencia para modelar escenarios de drenaje considerando el sistema antes mencionado es necesario primero obtener una solución numérica del mismo.

4.4. UNA SOLUCIÓN DE ELEMENTO FINITO DE LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ UNIDIMENSIONAL

La resolución numérica de la ecuación (4.5) se realiza con el método del elemento finito. En este método la variable dependiente H se aproxima por una combinación lineal de funciones de base φ_j definidas en relación con la función delta de Kronecker:

$$H(x, t) \cong \hat{H}(x, t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) a_j(t) \quad (4.36)$$

donde $a_j(t)$ son coeficientes que dependen del tiempo y representan la solución aproximada de la ecuación (4.5) en puntos específicos del dominio llamados nodos (n).

El esquema numérico para la ecuación de Boussinesq unidimensional no lineal se obtiene de la siguiente manera.

Se sustituye la solución aproximada $\hat{H}(x, t)$ en la ecuación (4.5) y el error generado por la aproximación se minimiza formando una integral ponderada de éste sobre el dominio de solución $(0, L)$ y requiriendo que la integral, denominada residuo ponderado, sea cero. Se integra por partes la expresión para el residuo ponderado y se obtiene la forma débil de la ecuación (4.5). Considerando esta expresión se aplica el método de Galerkin y se asume una variación lineal de las propiedades hidráulicas en el elemento ($\mu = \varphi_g \mu_g$ y $T = \varphi_g T_g$), lo que permite obtener el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$[A] \frac{d\{a\}}{dt} + [B]\{a\} = \{F\} + \{G\} \quad (4.37)$$

donde A es la matriz de masa, B es la matriz de rigidez, F es el vector que contiene los valores de las recargas y G es el vector de gastos en la frontera ($x = 0$ y $x = L$). El uso de funciones de interpolación lineales (φ) permite calcular los coeficientes de estas matrices y vectores, el resultado obtenido es:

$$A_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_0^L \rho_g \varphi_g \varphi_i \varphi_j dx = \delta_{ij} \sum_c \mu_j \frac{\Delta x}{2} \quad (4.38)$$

$$B_{ij} = \sum_{j=1}^n \int_0^L T_g \varphi_g \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = \sum_c (-1)^{i+j} \frac{\bar{T}}{\Delta x} \quad (4.39)$$

$$F_i = \int_0^L R_g \varphi_g \varphi_i dx = \sum_c R_i \frac{\Delta x}{2} \quad (4.40)$$

$$G_i = \hat{T} \left. \frac{\partial \hat{H}}{\partial x} \varphi_i \right|_0^L = -q_d H_i; \quad i = 1, i = n \quad (4.41)$$

donde φ son funciones de base del sistema de masa concentrado (Neuman, 1973); δ_{ij} es la delta de Kronecker; \bar{T} es la transmisibilidad en el elemento tomada como el promedio aritmético de las transmisibilidades en los dos nudos del elemento (como consecuencia de la forma adoptada para las funciones de base); y Δx es el tamaño del elemento.

La integración en el tiempo de la ecuación (4.37) se realiza usando aproximaciones similares a (2.15) y (2.16). El esquema numérico para la ecuación (4.5) así obtenido es el siguiente:

$$\left[\frac{A_{t+\omega\Delta t}^j}{\Delta t} + \omega B_{t+\omega\Delta t}^j \right] \{a\}_{t+\Delta t}^j = \left[\frac{A_{t+\omega\Delta t}^j}{\Delta t} - (1-\omega) B_{t+\omega\Delta t}^j \right] \{a\}_t + \{F\}_{t+\omega\Delta t}^j + \{G\}_{t+\omega\Delta t}^j \quad (4.42)$$

donde Δt es el paso de tiempo; ω es un coeficiente de ponderación en el tiempo ($0 \leq \omega \leq 1$), tomado como $\omega = 1/2$ (esquema de diferencias centrales); j representa el número de iteración en el intervalo de tiempo.

La solución numérica de la ecuación de Boussinesq unidimensional (4.42) se codificó en el lenguaje de programación Borland C++ 5.0.

Para la aplicación de la solución de elemento finito de la ecuación de Boussinesq unidimensional es necesario encontrar una relación entre los pasos de espacio (Δx) y de tiempo (Δt). La búsqueda se simplifica con la introducción de las siguientes variables adimensionales en la ecuación (4.5):

$$x^* = x/L \quad (4.43)$$

$$t^* = t/\tau \quad (4.44)$$

$$H^* = (H - H_i)/(H_s - H_i) \quad (4.45)$$

$$\mu^* = \mu/v_s \quad (4.46)$$

$$R^* = RL^2/[T_s(H_s - H_i)] \quad (4.47)$$

en donde $T_s = K_s(H_s - H_i)$ y $v_s = W_s/(H_s - H_i)$.

La ecuación (4.5) permanece invariante de escala si la escala de tiempo es definida por:

$$\tau = v_s L^2 / T_s \quad (4.48)$$

Puesto que la ecuación de Boussinesq es de tipo parabólico la relación entre los pasos de espacio y de tiempo adimensionales se establece de la manera siguiente:

$$M = \frac{(\Delta x^*)^2}{\Delta t^*} = \left(\frac{v_s}{T_s} \right) \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \quad (4.49)$$

El valor del parámetro M puede ser encontrado comparando la solución de elemento finito con soluciones analíticas.

4.5. VALIDACIÓN DE LA SOLUCIÓN DE ELEMENTO FINITO DE LA ECUACIÓN DE BOUSSINESQ UNIDIMENSIONAL

Antes de usar la solución numérica de la ecuación de Boussinesq para modelar pruebas de drenaje, esta se valida comparando sus resultados con aquellos derivados de la solución analítica proporcionada por las ecuaciones (1.94) y (1.98) en régimen transitorio y con los derivados de una solución para régimen permanente.

4.5.1. Régimen transitorio

Se seleccionan las siguientes características y parámetros de un sistema de drenaje parcelario: i) características del sistema: $L = 50$ m, $P = 1.5$ m, $D_o = 3.5$ m, $H_i = 0$ m, $H_s = 5$ m; ii) propiedades del suelo: $\theta_s = 0.5$ m³/m³, $\theta_r = 0.0$ m³/m³, $K_s = 0.557$ m/d, $\lambda_c = 0.45$ m, $\alpha = \beta = 0.95$; iii) condición inicial: $h_s = P = 1.5$ m; iv) condiciones de frontera:

(1.92.1) y (1.92.2) con $\gamma = 1.5$. De las ecuaciones (1.99) y (1.100) se deducen respectivamente: $\mu = 0.1087 \text{ m}^3/\text{m}^3$ y $T = 2.5065 \text{ m}^2/\text{d}$ ($\bar{h} = 1 \text{ m}$). Los datos anteriores representan un sistema de drenaje instalado en el distrito de riego 076 "Valle del Carrizo", Sinaloa, México (Fuentes *et al.*, 1997; González *et al.*, 1997).

El parámetro M de la ecuación (4.49) se obtiene de manera que con una discretización del dominio en N elementos de tamaño uniforme $\Delta x = L/N$, y seleccionado el valor de N , se busque el paso de tiempo que permita mejor reproducir las soluciones analíticas (1.94) y (1.98). Para el ejemplo estudiado se ha seleccionado $N = 50000$ ($\Delta x = 1 \text{ cm}$) y encontrado el mejor paso de tiempo de $\Delta t = 1 \text{ s}$. Con estos resultados se deduce $M \cong 0.1$. Se puede mostrar que en los tiempos grandes el paso de tiempo puede ser incrementado sin inducir errores adicionales en la solución con la siguiente recomendación: el paso de tiempo se incrementa en 10 % si el número de iteraciones en un nivel de tiempo es menor de 5 sin rebasar un paso de tiempo máximo de $\Delta t_{\text{max}}^* \cong 3 \times 10^{-4}$ con un criterio de convergencia $\max \|H_{t+\Delta t}^{*m+1} - H_{t+\Delta t}^{*m}\| \leq 1 \times 10^{-6}$. La comparación entre la solución analítica (1.94) y la solución de elemento finito se presentan en la Figura 4.2 y en la Figura 4.3 se comparan la evolución de la lámina drenada proporcionada por la solución analítica (1.98) con la evolución descrita con la solución numérica, en ambos casos no existe diferencia significativa entre las soluciones. La ausencia de oscilaciones en los resultados de la solución de elemento finito justifica la selección de los pasos de espacio y de tiempo así como el criterio adoptado para incrementar el intervalo de tiempo.

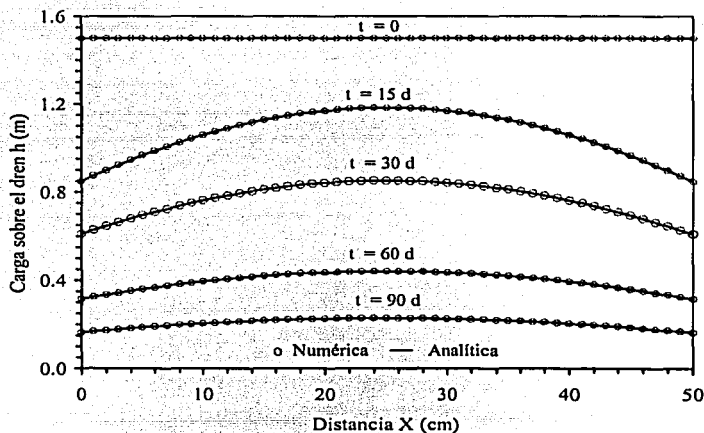


Figura 4.2. Evolución de la superficie libre obtenida con la solución de elemento finito y evolución calculada con la solución analítica (1.94).

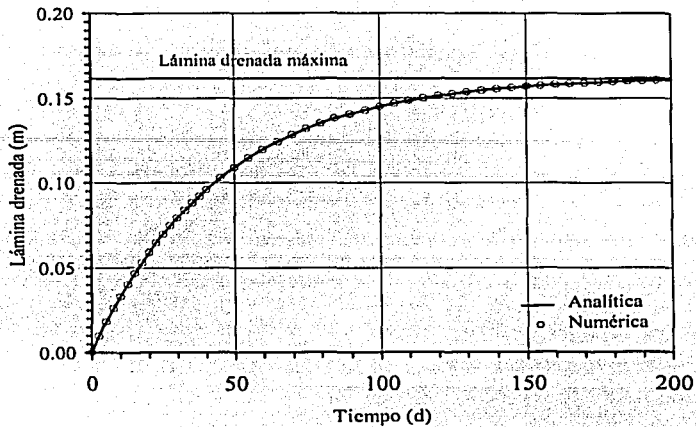


Figura 4.3. Evolución de la lámina drenada obtenida con la solución de elemento finito y evolución calculada con la solución analítica (1.98).

4.5.2. Régimen permanente

En la solución de elemento finito se introducen la transmisibilidad variable (4.2), la porosidad drenada (4.16), la condición inicial (4.7) y las condiciones de fronteras de radiación lineal proporcionadas por la combinación de (4.8.1) con (4.19) y (4.8.2) con (4.19), los valores de los parámetros se toman iguales al del caso precedente.

En esta validación se hace uso de una solución tipo Hooghoudt (ecuación 1.76), la cual se deduce para el régimen permanente ($\partial H/\partial t = 0$), recarga constante $R = R_0$ y considerando las siguientes condiciones de frontera: 1) $H = H_0$ en $x = 0$ y $x = L$, y 2) $dH/dx = 0$ en el centro $x = L/2$. Es decir:

$$H^2(x) = H_0^2 + \frac{R_0}{K_s} x(L-x) \quad (4.50)$$

Aplicando la ecuación (4.50) al centro de la separación entre drenes ($x = L/2$) con h_c y h_o las cargas hidráulicas sobre el dren y en el centro de la separación entre drenes respectivamente, se deduce la fórmula:

$$R_0 = 4K_s [h_c(h_c + 2D_0) - h_o(h_o + 2D_0)]/L^2 \quad (4.51)$$

El gasto de drenaje cuando el coeficiente de resistencia es igual al indicado en (4.19) es proporcionado por la relación (1.93):

$$Q_i(t) = 2\gamma \frac{K_s}{L} [D_o + h_o] h_o \quad (1.93)$$

Para una recarga constante ($R = R_o$) el gasto drenado por unidad de longitud es dado por $Q_i = R_o L$. Las ecuaciones (4.51) y (1.93) permiten obtener la relación entre la carga sobre el dren (h_o) y la carga en el centro de la separación entre drenes (h_c), a saber:

$$h_o = \frac{\sqrt{(4+\gamma)^2 D_o^2 + 8(2+\gamma)h_c(h_c + 2D_o)} - (4+\gamma)D_o}{2(2+\gamma)} \quad (4.52)$$

Se selecciona $h_c = 0.5$ m que conduce a $h_o \cong 0.365$ m y $R_o \cong 0.944 \times 10^{-3}$ m/d. Considerando las características previamente definidas y la malla computacional usada en la validación anterior (50000 elementos y 50001 nodos), se modela el abatimiento del manto freático. En la Figura 4.4 se muestra que la solución de elemento finito en régimen transitorio tiende a la solución analítica en régimen permanente, definida por la ecuación (4.50), cuando $t \rightarrow \infty$. En esta Figura también se observa que la solución numérica no exhibe oscilaciones aparentes.

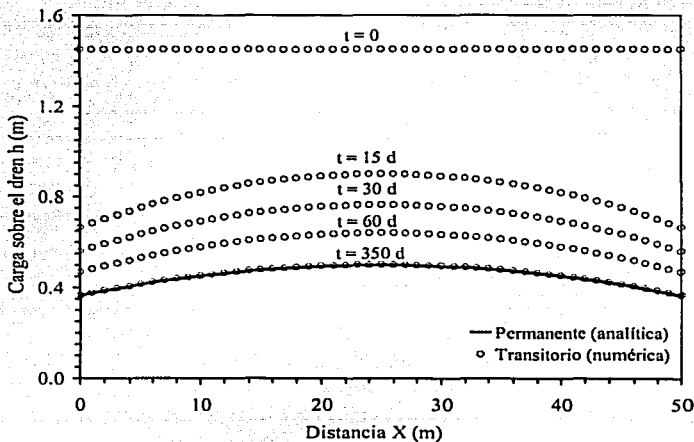


Figura 4.4. La solución de elemento finito en régimen transitorio tiende a la solución analítica en régimen permanente cuando $t \rightarrow \infty$.

El buen acuerdo entre la solución de elemento finito y las soluciones analíticas para régimen transitorio y permanente, permite concluir que el modelo numérico puede ser aplicado para describir la dinámica del agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo.

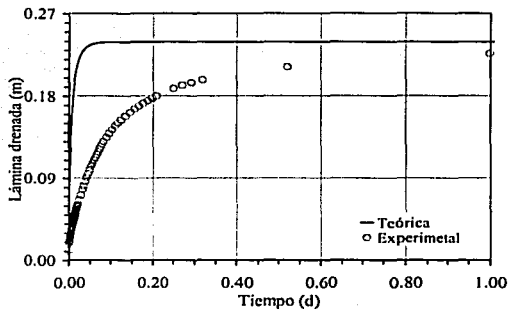
4.6 VERIFICACIÓN DE LAS APROXIMACIONES CLÁSICAS USADAS EN EL DRENAJE AGRÍCOLA

Utilizando los datos obtenidos en el experimento de drenaje descrito en la sección 3.4 y la solución numérica de la ecuación de Boussinesq unidimensional (4.42), se evalúa el nivel de descripción de dos aproximaciones clásicas usadas en drenaje agrícola, porosidad drenable constante ($\mu = \nu = \text{cte}$) y carga nula sobre los drenes ($h_o(t) = 0$).

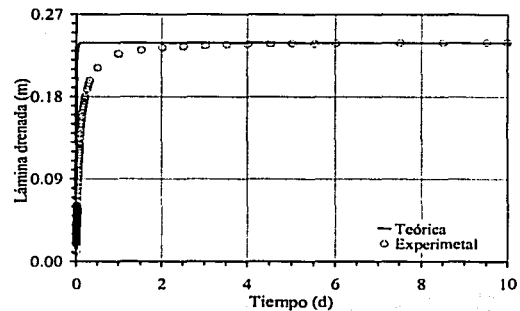
Las características del sistema de drenaje experimental son: $P = 120 \text{ cm}$; $D_o = 25 \text{ cm}$; $L = 100 \text{ cm}$. Los parámetros hidráulicos del suelo arena de Tezoyuca: $\theta_s = 0.539 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $\theta_r = 0.0 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, $K_s = 18.3 \text{ cm/h}$, $\psi_d = -41.8 \text{ cm}$, $n = 3.19$. La condición inicial observada en laboratorio corresponde a $H(x,0) = H_s$, donde $H_s = 145 \text{ cm}$.

Utilizando los parámetros anteriores así como las ecuaciones (1.99) y (4.18) y la lámina drenada total medida en los tiempos muy largos ($\ell_d \cong 23.93 \text{ cm}$), se estimó el valor de la porosidad drenable promedio, $\bar{\mu} = \bar{\nu} \cong 0.2 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. El valor así determinado es muy similar al que se estima usando la gráfica adaptada del Drainage Manual (Figura 1.10), $\bar{\mu} \cong 0.195 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. Siendo que estos dos valores se obtienen de manera independiente, la similitud entre ambos muestra la bondad de la metodología empleada en la caracterización hidrodinámica del suelo arena de Tezoyuca y muestra también que los datos experimentales son confiables. En la modelación numérica se retiene el valor primeramente estimado. La transmisibilidad del acuífero experimental se describe con la relación (4.2) y se considera la recarga nula $R = 0$.

Con las características y las propiedades del suelo antes definidas, se modela numéricamente el experimento de drenaje, los resultados obtenidos se muestran en la Figura 4.5. En esta Figura se observa que la evolución de la lámina drenada descrita considerando que la porosidad drenable es constante y que la carga sobre los drenes se abate de manera instantánea, difiere considerablemente de la evolución de la lámina drenada medida, para todo tiempo de drenaje la evolución teórica sobrestima sensiblemente la evolución experimental.



a) 1 día.



b) 10 días.

Figura 4.5. Evolución de la lámina drenada experimental y la lámina drenada calculada con la solución de elemento finito considerando: la transmisibilidad definida por la ecuación (4.2), la porosidad drenable constante ($\mu = \sigma \cong 0.20 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$) y condiciones de Dirichlet homogéneas en los drenes ($h_o(t) = 0$).

La comparación presentada en la Figura 4.5 permite mostrar que las aproximaciones de porosidad drenable constante y de carga nula sobre los drenes no describen la evolución del gasto de drenaje en sistemas con características iguales o similares a las consideradas en este estudio. No obstante que existe la posibilidad de que las diferencias entre los resultados obtenidos con estas dos hipótesis clásicas y los experimentales disminuyan conforme la separación entre drenes se incremente, situación más próxima a las condiciones que prevalecen en campo, desde un punto de vista teórico tal comportamiento no es aceptable ya que es indispensable que las relaciones mecanicistas tengan la capacidad de describir cualquier situación.

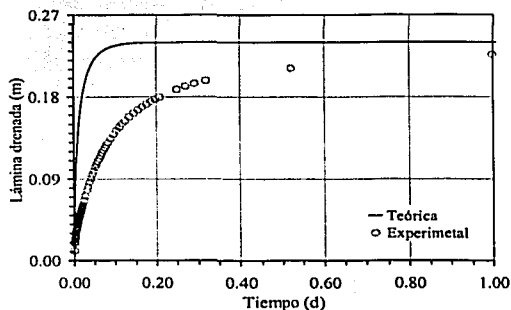
Es necesario entonces investigar si las aproximaciones para la capacidad de almacenamiento o porosidad drenada y para la condición de frontera en los drenes que se presentan en este trabajo, contribuyen a una mejor descripción de las variables de los sistemas de drenaje.

4.7 APLICACIÓN DE UNA FORMULA PARA LA CAPACIDAD DE ALMACENAMIENTO O POROSIDAD DRENADA

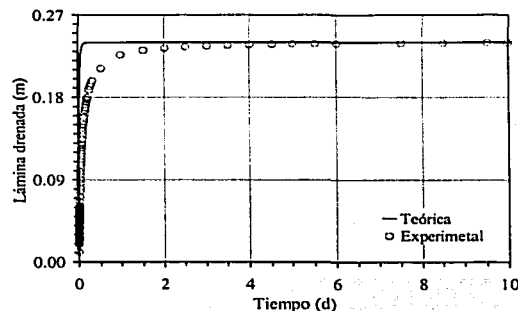
Si bien en la sección anterior se ha mostrado que dos de las aproximaciones que comúnmente se emplean para modelar el funcionamiento de un sistema de drenaje subterráneo no siempre proporcionan resultados satisfactorios, falta determinar si las discrepancias entre datos

teóricos y experimentales que se muestran en la Figura (4.5) son debidas al supuesto de la porosidad drenable constante ($\mu = \upsilon$), o al supuesto de la una carga nula sobre los drenes o a ambos.

Para cumplir este objetivo se modela el experimento de drenaje manteniendo la condiciones de Dirichlet homogéneas en los drenes, eliminando el supuesto de porosidad drenable constante ($\mu = \upsilon$) y considerando que la porosidad drenada es función de la carga hidráulica ($\mu(H)$). Debido a que la caracterización hidrodinámica de la arena de Tezoyuca fue realizada usando el modelo para la curva de retención de van Genuchten, en la solución numérica de la ecuación de Boussinesq unidimensional se introduce la fórmula para la porosidad drenada (4.18). Los resultados de la modelación se muestran en la Figura 4.6 donde se observa que si bien la evolución de la lámina drenada teórica mejora respecto de la obtenida en el caso anterior (Figura 4.5), esta aún exhibe diferencias significativas con la evolución la lámina drenada experimental. Estos resultados permite concluir que el problema de la descripción del drenaje se ubica principalmente en el tipo de condición de frontera que debe imponerse en los drenes.



a) 1 día.



b) 10 días.

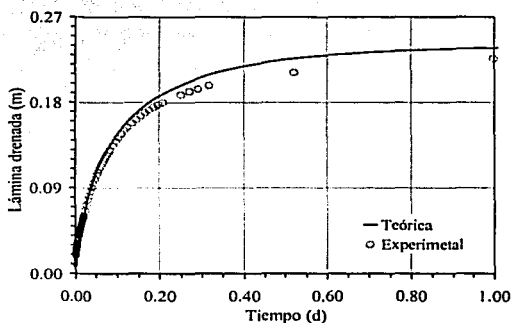
Figura 4.6. Evolución de la lámina drenada experimental y evolución de la lámina drenada calculada con la solución de elemento finito considerando: la transmisibilidad definida por la ecuación (4.2), la fórmula para la porosidad drenada (4.18) e imponiendo condiciones de Dirichlet homogéneas en los drenes ($h_e(t) = 0$).

4.8 APLICACIÓN DE LA CONDICIÓN DE RADIACIÓN LINEAL DE NEWTON

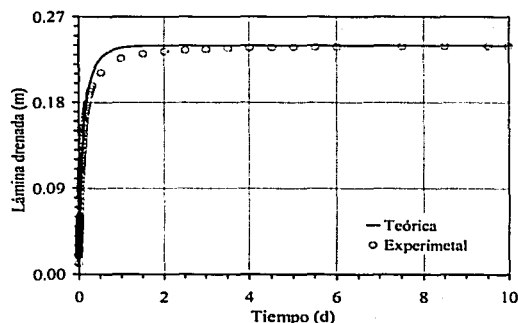
Se ha mostrado que la transferencia de agua del suelo hacia los drenes no es bien representada cuando se considera que la carga hidráulica sobre estos se abate de manera instantánea (Figura 4.6). En un intento por obtener una mejor aproximación a este fenómeno se

modela el experimento de drenaje aplicando la solución de elemento finito de la ecuación de Boussinesq unidimensional (4.42) considerando la transmisibilidad (4.2), la relación para la porosidad drenada (4.18), la recarga nula ($R = 0$), la condición inicial (4.7) y las condiciones de radiación (4.8.1) y (4.8.2) considerando el coeficiente de resistencia en la interfaz suelo-dren (4.20).

La descripción de la prueba de drenaje experimental con las condiciones de radiación lineal requiere del conocimiento del coeficiente de conductancia adimensional γ (ecuación 4.20). La conductancia es estimada con la minimización de la suma de los cuadrados del error entre la lámina drenada experimental y la lámina drenada calculada con la solución de elemento finito, el valor obtenido es $\gamma \cong 0.7$ con $R^2 = 0.9852$ (Figura 4.7). Los resultados de la simulación muestran que la lámina drenada medida y la lámina calculada presentan tendencias similares para tiempos menores de $t < 0.1$ d, sin embargo conforme el tiempo transcurre la condición de radiación lineal sobrestima la evolución de la lámina drenada observada y en consecuencia el gasto de drenaje medido.



a) 1 día.



b) 10 días.

Figura 4.7. Evolución de la lámina experimental y la lámina calculada con la solución de elemento finito con la transmisibilidad (4.2), la porosidad drenada (4.18) y las condiciones de radiación (4.8.1) y (4.8.2.) para el coeficiente de resistencia (4.20): $R^2 = 0.9852$.

4.9. APLICACIÓN DE LA CONDICIÓN DE RADIACIÓN NO LINEAL

Una buena aproximación al fenómeno del drenaje agrícola puede definirse como aquella que describe en todo tiempo, el comportamiento de las variables físicas de un sistema de drenaje.

Siendo que la condición de radiación lineal (4.21) sólo predice los resultados experimentales en los tiempos cortos de drenaje ($t < 0.1$ d), es necesario obtener una relación que describa en todo tiempo el flujo del agua del suelo hacia los drenes. En un intento por determinar esta relación se prueba enseguida la capacidad de descripción de la condición de radiación no lineal (4.33). Aunque esta condición de frontera incluye dos parámetros a determinar, la conductancia γ y el coeficiente de forma δ , el análisis desarrollado en la sección 4.3.2b ha permitido establecer que este último parámetro es una función lineal de la dimensión cociente del suelo (s): $\delta = 2s$, es decir, el valor de δ es independiente del evento transitorio de drenaje ya que sólo depende de la textura del suelo. En consecuencia únicamente es la conductancia γ la que debe ser determinada a partir de una prueba transitoria de drenaje y su estimación se realiza de manera similar al caso precedente. La porosidad total de la arena de Tezoyuca del módulo de drenaje es $\phi = 0.539$, utilizando este valor y la ecuación (2.32) se obtiene que $s = 0.702$, en consecuencia $\delta \cong 1.4$. Utilizando las características consideradas en el caso anterior y la condición de radiación no lineal en los drenes (4.33), se modela el experimento de drenaje, obteniéndose que la mejor aproximación a los datos experimentales se logra con $\gamma \cong 1.045$: $R^2 = 0.9965$ (ver Figura 4.8). La evolución de la lámina drenada descrita con la condición de radiación no lineal (4.33) presenta un buen acuerdo con los datos experimentales prácticamente en todo el tiempo de simulación y proporciona una mejor aproximación que aquella que se obtiene con la condición de radiación lineal de Newton (4.21). Esta comparación permite concluir lo siguiente: cuando se use la ecuación de Boussinesq para describir la fase de recesión del manto freático deben imponerse en los drenes la condición de radiación no lineal (4.33).

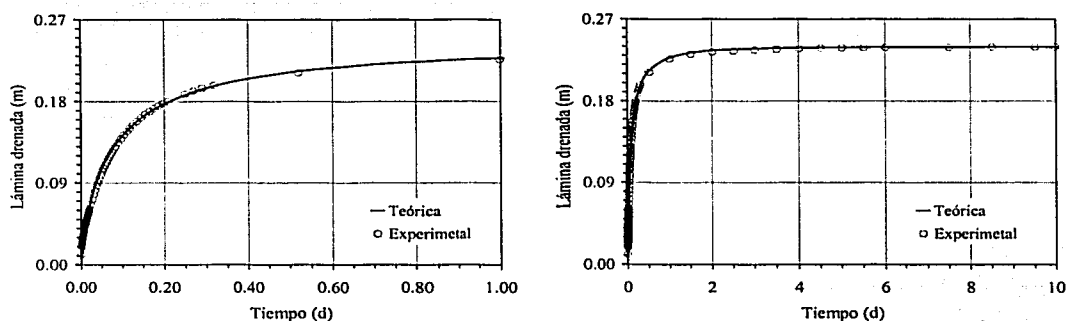


Figura 4.8. Evolución de la lámina drenada experimental y evolución de la lámina drenada calculada con la solución de elemento finito considerando la transmisibilidad y la porosidad drenada definidas respectivamente por las ecuaciones (4.2) y (4.18) y la condición de radiación no lineal (4.33): $R^2 = 0.9965$.

Se ha mostrado que la relación que describe el drenaje de un suelo a la escala de Boussinesq es la condición de radiación no lineal fractal (4.33). Un último estudio de esta condición de frontera consiste en verificar si esta relación puede ser bien aproximada por la combinación convexa (4.23). Para facilitar el análisis se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$q^* = \frac{q_d}{\gamma K_s} \quad (4.53)$$

$$h_o^* = \frac{h_o}{P} \quad (4.54)$$

Estas dos variables adimensionales permiten llevar la condición de radiación no lineal (4.33) y la combinación convexa (4.23) a las siguientes formas:

$$q^* = h_o^{*\delta} \quad (4.55)$$

$$q^* = (1 - \omega)h_o^* + \omega h_o^{*2} \quad (4.56)$$

Siendo que la relación (4.55) proporciona la mejor aproximación a la experiencia, esta en lo subsecuente se considera como la solución exacta del problema de la recesión del manto freático ($q_e^* = h_o^{*\delta}$) mientras que (4.56) será la solución aproximada $q_a^* = (1 - \omega)h_o^* + \omega h_o^{*2}$. Para obtener la mejor aproximación de (4.56) a (4.55) es necesario deducir la relación óptima entre el factor de ponderación ω y el exponente δ . Esta relación puede ser obtenida con el método de mínimos cuadrados o con el método de conservación de masa. Enseguida se hace una descripción de ambos métodos.

i) *Mínimos cuadrados*

La combinación de (4.55) y (4.56) con las consideraciones antes expuestas permite obtener una expresión para el error:

$$\varepsilon(\omega) = h_o^{*\delta} - [(1 - \omega)h_o^* + \omega h_o^{*2}] \neq 0 \quad (4.57)$$

Este error o residuo puede minimizarse formando una integral ponderada de ε sobre el intervalo de variación de h_0^* (0,1) y requiriendo que esta integral llamada residuo ponderado sea cero:

$$\int_0^1 [h_0^{*\delta} - (1-\omega)h_0^* - \omega h_0^{*2}] v dh_0^* = 0 \quad (4.58)$$

donde v son las funciones de peso.

En el método de mínimos cuadrados las funciones de peso son:

$$v = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \quad (4.59)$$

lo cual equivale a minimizar:

$$f(\omega) = \int_0^1 \varepsilon^2 dh_0^* = \int_0^1 [h_0^{*\delta} - (1-\omega)h_0^* - \omega h_0^{*2}]^2 dh_0^* = 0 \quad (4.60)$$

con respecto al parámetro ω .

La minimización de (4.60) permite obtener una relación entre el exponente δ de la condición de radiación no lineal (4.33) y el factor de peso ω de la combinación convexa (4.23):

$$\omega = \frac{5\delta^2 + 5\delta - 6}{2(\delta + 2)(\delta + 3)} \quad (4.61)$$

Sustituyendo el valor de $\delta = 1.4$ en la relación (4.61) se obtiene $\omega \cong 0.495$.

ii) Método de conservación de masa

Una segunda forma de estimar el valor de ω es aplicando el método de conservación de masa, el cual consiste en ponderar las relaciones de drenaje respectivas $\int_0^1 (q_c/h_0^*) dh_0^*$,

$\int_0^1 (q_a/h_0^*) dh_0^*$ e igualar estas expresiones:

$$\int_0^1 (h_0^{*\delta-1}) dh_0^* = \int_0^1 [(1-\omega) + \omega h_0^*] dh_0^* \quad (4.62)$$

Resolviendo (4.62) se obtiene la siguiente relación entre ω y δ :

$$\omega = 2 \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \quad (4.63)$$

Introduciendo $\delta = 1.4$ en (4.63) se obtiene que $\omega = 0.5714$.

Utilizando la combinación convexa (4.23) como condición de frontera en los drenes y usando las condiciones y características consideradas en la aplicación de la condición de radiación no lineal se modeló el experimento de drenaje, los resultados obtenidos se presentan en la Figura 4.9. En esta Figura se puede observar que la mejor aproximación de la combinación convexa a la condición de radiación no lineal fractal (4.33) es lograda con $\omega = 0.5714$ (método de conservación de masa), sin embargo también se observa que sólo para $t < 0.2d$ se tiene un buen acuerdo entre las evoluciones de la lámina drenada obtenidas con ambas condiciones de frontera, ya que para tiempos mayores de $t > 0.2d$ la combinación convexa sobrestima el flujo de drenaje y en consecuencia la lámina drenada tiende a su valor máximo de forma más rápida que lo predicho con la condición de radiación no lineal fractal (4.33). Estos resultados muestran una vez más que la mejor aproximación a la recesión del manto freático es obtenida sujetando los drenes a la condición de radiación no lineal fractal (4.33).

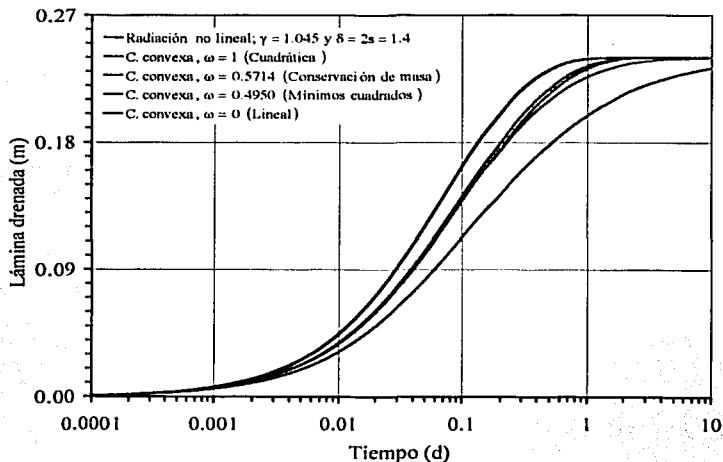


Figura 4.9. Evolución de la lámina drenada obtenida con la condición de radiación no lineal fractal (4.33) y evoluciones obtenidas con la combinación convexa (4.23) considerando diferentes valores del factor de ponderación ω .

Resumen

Se ha abordado el estudio de la dinámica del agua en un sistema de drenaje agrícola con la ecuación de Boussinesq unidimensional de los acuíferos libres. En una primera etapa se ha estudiado la porosidad drenable como una función de la posición del manto freático considerando la influencia de la zona no saturada del suelo en el proceso de drenaje. A partir de una conceptualización de la lámina drenada y la lámina drenable se ha definido el concepto de capacidad de almacenamiento, utilizado en la teoría clásica de acuíferos, y el de porosidad drenable utilizado en drenaje agrícola. Utilizando las características hidrodinámicas de Fujita y Parlange y el modelo para la curva de retención de van Genuchten, se han obtenido dos fórmulas para la capacidad de almacenamiento, siendo la primera útil en estudios teóricos y la segunda en estudios prácticos. En una segunda etapa se ha abordado el problema de la definición de la condición de frontera en los drenes, planteándose condiciones de radiación lineal y de radiación no lineal para describir la transferencia de agua del suelo a los drenes.. Se ha obtenido una solución de elemento finito de la ecuación de Boussinesq unidimensional para verificar: 1) las hipótesis clásicas que se usan en el drenaje agrícola, porosidad drenable constante y carga nula en los drenes; 2) la capacidad descriptiva de la relación para la capacidad de almacenamiento previamente deducida; y 3) la condición de frontera tipo radiación que debe imponerse en los drenes. Aplicando la solución numérica, previa validación de ésta, se ha modelado un experimento de drenaje realizado en laboratorio, obteniéndose primeramente que tanto el supuesto de porosidad drenable constante como el de carga nula sobre los drenes no describen la experiencia de drenaje. Posteriormente se aplicó una de las fórmulas para la capacidad de almacenamiento y se encontró que ésta proporciona una mejor aproximación a los datos experimentales que aquella obtenida con el supuesto de porosidad drenable constante, sin embargo una fuerte discrepancia entre datos teóricos y experimentales permanece. Se ha concluido que dichas diferencias son debidas principalmente a la condición de frontera que se usa en el dren. Finalmente se han aplicado las condiciones de frontera tipo radiación previamente planteadas, obteniéndose que la condición de radiación lineal de Newton sólo describe los datos experimentales de lámina drenada en los tiempos cortos del drenaje. Se ha obtenido que una mejor descripción del experimento de drenaje es posible con la condición de radiación no lineal presentada en este trabajo. El buen acuerdo entre la evolución de la lámina drenada experimental y la evolución de la lámina drenada calculada con la condición de radiación no lineal ha permitido concluir que esta relación puede utilizarse para describir la transferencia de agua del suelo a los drenes.

CAPITULO V

**DESCRIPCIÓN DE LAS TRANSFERENCIAS DE MASA Y ENERGÍA EN SISTEMAS
DE DRENAJE AGRÍCOLA SUBTERRÁNEOS**

En este capítulo se hace una comparación de los resultados proporcionados por la ecuación de Boussinesq unidimensional con los proporcionados por la ecuación de Richards bidimensional, estudiándose la descripción de las transferencias tanto de masa como de energía en sistemas de drenaje subterráneos experimentales. Así mismo se realizan cálculos de separación entre drenes usando las ecuaciones Richards y de Boussinesq y se comparan los valores obtenidos con estas aproximaciones.

5.1 PLANTEAMIENTO

Una de las funciones principales de los sistemas de drenaje agrícola es evitar el establecimiento de un régimen de humedad y aireación perjudicial para el desarrollo de los cultivos, mediante el desalajo de los excesos de agua provenientes de excesos de riegos, precipitaciones, pérdidas por infiltración en canales, aportaciones de corrientes subterráneas provenientes de zonas altas, etc. En otras palabras los sistemas de drenaje tienen como finalidad abatir los mantos freáticos hasta una profundidad que no afecte a las raíces de los cultivos. Para realizar una evacuación rápida y oportuna de los excesos de humedad es necesario determinar gastos de drenaje para diferentes separaciones, profundidades y diámetro de los drenes y seleccionar el diseño que mejor funcione en la práctica.

Esta determinación generalmente se realiza aplicando fórmulas obtenidas para formas simplificadas de la ecuación de Boussinesq unidimensional y condiciones de frontera de primer orden en los drenes (Hooghoudt, 1940; Dumm, 1954). Sin embargo en este trabajo se ha mostrado que las hipótesis consideradas en la derivación de estas soluciones no siempre describen la evolución de las variables físicas de un sistema de drenaje y se ha obtenido que la evolución del gasto de drenaje puede ser descrita de mejor manera con las siguientes aproximaciones:

La primera es resolviendo la ecuación de Richards bidimensional:

$$C(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K(\psi) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[K(\psi) \frac{\partial (\psi - z)}{\partial z} \right] \quad (5.1)$$

considerando la siguiente condición tipo radiación no lineal en los drenes:

$$q = q_0 \left(1 - \frac{\psi}{P}\right)^a \left(\frac{\psi - h}{P}\right)^b \quad (5.2)$$

Y la segunda consiste en resolver la ecuación de Boussinesq unidimensional:

$$\mu(H) \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_s (H - H_1) \frac{\partial H}{\partial x} \right] + R \quad (5.3)$$

considerando una condición de frontera tipo radiación no lineal en los drenes:

$$q = \gamma K_s \left(\frac{h_0}{P}\right)^6 \quad (5.4)$$

En los capítulos III y IV se ha mostrado que estas aproximaciones permiten predecir las transferencias de masa en sistemas de drenaje agrícola subterráneos, sin embargo no se ha probado que ellas proporcionen resultados similares respecto de las transferencias de energía (abatimiento de la superficie libre), proceso que es de fundamental importancia cuando se diseña un sistema de drenaje.

Siendo que la ecuación de Richards proporciona descripciones finas del movimiento del agua en el suelo y la ecuación de Boussinesq proporciona sólo descripciones globales, es de esperar entonces que la solución al problema de la recesión del manto freático sea proporcionado por el sistema (5.1) y (5.2), mientras que el sistema (5.3) y (5.4) es una aproximación al anterior.

Desde un punto de vista teórico es importante determinar el nivel de aproximación del sistema (5.3) y (5.4) al sistema (5.1) y (5.2), considerando tanto las transferencias de masa como las transferencias de energía. Desde un punto de vista práctico es importante investigar si existen diferencias entre el valor de separación entre drenes calculado con la ecuación de Richards y el calculado con la ecuación de Boussinesq.

En este capítulo se plantean los siguientes objetivos: 1) aplicar los sistemas (5.1) y (5.2) así como (5.3) y (5.4) para modelar numéricamente experimentos de drenaje en dos suelos de características hidrodinámicas contrastantes y comparar los resultados obtenidos con ambas aproximaciones; 2) estimar separaciones entre drenes considerando las dos aproximaciones antes mencionadas.

5.2. PROBLEMAS DIRECTOS

5.2.1. Modelación del experimento de drenaje de laboratorio

Se realiza una primera comparación de los resultados proporcionados por las ecuaciones de Richards bidimensional y de Boussinesq unidimensional para la recesión del manto freático, considerando el sistema de drenaje experimental presentado en el capítulo III donde se usó el suelo arena de Tezoyuca. En la modelación con la ecuación de Richards se consideran las condiciones definidas en la sección 3.5 mientras que en la modelación con la ecuación de Boussinesq se hace uso de las características especificadas en la sección 4.9.

Los resultados obtenidos con las soluciones numéricas de las ecuaciones de Richards y de Boussinesq (secciones 3.5 y 4.9) muestran que ambas aproximaciones proporcionan descripciones similares respecto de las transferencias de masa en el sistema de drenaje experimental, como puede verse en la Figura 5.1. Sin embargo esta condición no es conservada para las transferencias de energía, ya que la evolución del manto freático descrita con la aproximación de Boussinesq presenta diferencias significativas respecto de la obtenida con la ecuación de Richards. En la Figura 5.2 se muestra la evolución de la superficie libre a la mitad de separación entre drenes, en esta Figura se observa claramente que la ecuación de Boussinesq predice un abatimiento del manto freático más lento que el descrito con la ecuación de Richards, por ejemplo el tiempo requerido para que el manto freático (originalmente ubicado en la superficie del suelo) descienda hasta una profundidad de 80 cm (zona de raíces de los cultivos) es según la ecuación de Richards de $t = 0.465$ h y según la ecuación de Boussinesq de $t = 1.225$ h, la diferencia relativa del tiempo de Boussinesq al tiempo de Richards es aproximadamente de 163%. Si bien no se cuenta con mediciones de la evolución de la superficie libre que permitan verificar cual de estas aproximaciones describe de mejor manera la experiencia, dado que se está reproduciendo con ambas aproximaciones la evolución de la lámina drenada experimental (ver secciones 3.5 y 4.9) es posible esperar que la evolución descrita con la ecuación de Richards se aproxime más a la evolución que realmente se presenta en el sistema de drenaje, ya que la ecuación de Boussinesq es una aproximación menos fina que la primera, dado que se obtiene al integrar la ecuación de Richards en la vertical asumiendo una distribución hidrostática de las presiones, supuesto que no se satisface en la vecindad del dren donde el flujo es mayormente radial. Este supuesto puede ser una de las causas de que la ecuación de Boussinesq no conserve la energía.

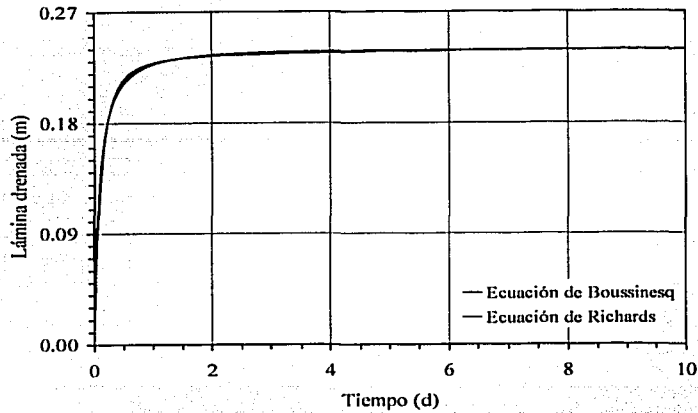
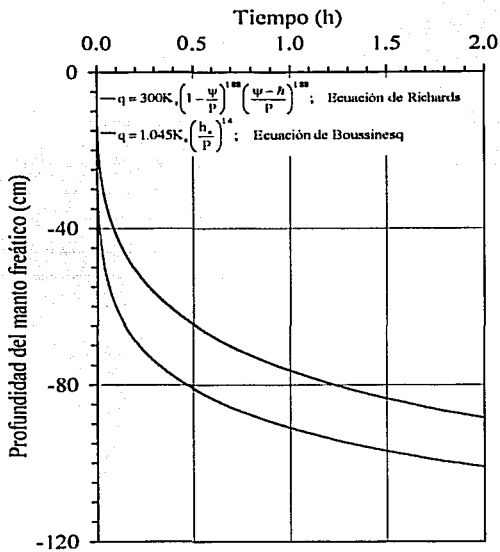
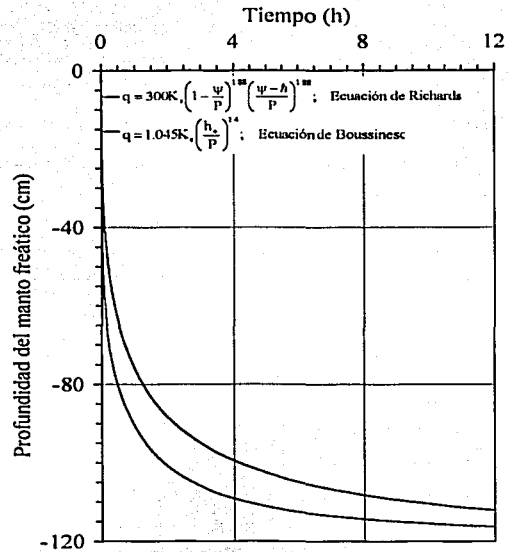


Figura 5.1. Evoluciones teóricas de la lámina drenada del módulo experimental relleno con arena de Tezoyuca.



a) 2 horas de drenaje



b) 12 horas de drenaje

Figura 5.2. Evoluciones teóricas de la superficie libre a la mitad de separación entre drenes en el módulo de drenaje experimental relleno con arena de Tezoyuca.

5.2.2. Modelación del experimento de drenaje de Pandey *et al.* (1992)

Pandey *et al.* (1992) desarrollaron un experimento de drenaje en laboratorio usando un suelo de textura franco arcillosa y midieron la evolución en el tiempo de la superficie libre en diferentes puntos de un sistema de drenaje. En un intento por reproducir las mediciones experimentales con la ecuación de Boussinesq, Pandey *et al.* propusieron una fórmula empírica para la capacidad de almacenamiento (1.67), sin embargo los resultados que obtienen considerando esta fórmula aunque son mejores que los obtenidos al suponer la porosidad drenada constante difieren sensiblemente de los observados en laboratorio. En el capítulo IV se ha mostrado de manera rigurosa que la capacidad de almacenamiento no puede adoptar formas arbitrarias, en consecuencia se retoman los resultados experimentales obtenidos por Pandey *et al.* para investigar si las diferencias encontradas entre datos experimentales y los derivados a partir de la ecuación de Boussinesq son debidas al hecho de que esta ecuación no conserva la energía. Para completar este estudio se describe el mismo experimento de drenaje con la ecuación de Richards bidimensional.

Las dimensiones y características del sistema de drenaje considerado en el experimento se presentan en la Figura 5.3. Este sistema se rellenó hasta una altura de 160 cm con un suelo de textura franco arcillosa previamente pasado por la malla de 2 mm, procurando mantener una densidad aparente constante para establecer condiciones de homogeneidad. Una vez colocado el suelo éste se saturó aplicando una carga de agua en la superficie del mismo y se dejó reposar el medio durante un periodo de 15 días para permitir la estabilización de las presiones y la eliminación del aire atrapado. Transcurrido este periodo se retiró el exceso de humedad existente en la superficie del suelo, se destapó el dren y se midieron la variación en el tiempo del manto freático a diferentes distancias del centroide del dren (50 cm, 220 cm y 433 cm).

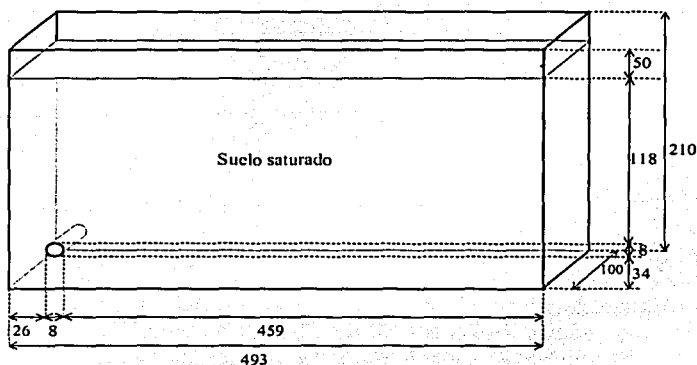


Figura 5.3. Sistema de drenaje experimental de Pandey *et al.*, 1992 (acotaciones en cm).

Las características físicas de este suelo reportadas por Pandey *et al.* son: densidad aparente promedio $\rho_a = 1.5 \text{ g/cm}^3$; densidad de las partículas sólidas $\rho_s = 2.65 \text{ g/cm}^3$; conductividad hidráulica a saturación $K_s = 0.1563 \text{ cm/h}$; y un valor de porosidad drenada promedio de $\mu = 0.0316 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$.

La aplicación de la ecuación de Richards bidimensional (5.1) requiere de representaciones analíticas de la curva de retención de humedad y de la curva de conductividad hidráulica, para ser congruentes con la línea seguida en este trabajo se seleccionan los modelos de van Genuchten y de Brooks y Corey (ecuaciones 1.17 y 1.19) y los parámetros que intervienen en estas relaciones se estiman de la siguiente manera:

Los parámetros m y η se estiman a partir de la curva granulométrica del suelo y de la porosidad total del mismo. La curva granulométrica experimental reportada por Pandey se ajusta con la función de distribución del tamaño de las partículas tipo van Genuchten (2.30), el mejor ajuste entre esta función y la curva granulométrica ($R^2 = 0.9918$) se obtiene con $D_g = 1050 \mu\text{m}$ y $M = 0.105$ (Figura 5.4). La porosidad total del suelo se estima usando la relación $\rho = 1 - \rho_a / \rho_s$, considerando los valores de densidad aparente y de los sólidos reportados: $\phi = 0.434 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$. Introduciendo este valor en relación (2.32) y resolviendo la función resultante, se obtiene la dimensión cociente del suelo franco arcilloso de Pandey, $s = 0.6805$.

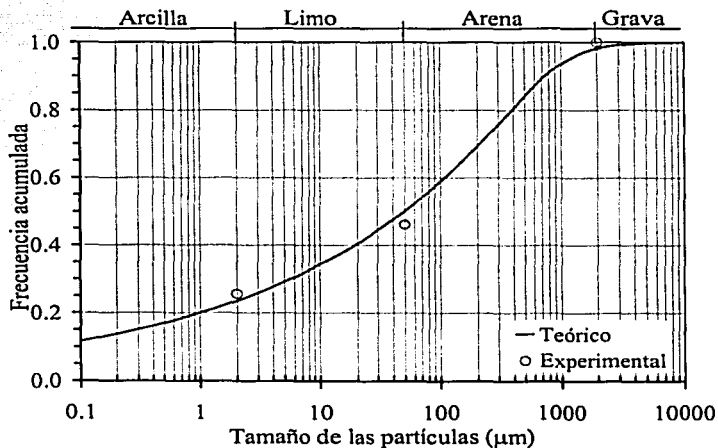


Figura 5.4. Ajuste de la curva granulométrica experimental del suelo franco arcilloso de Pandey *et al.* con la ecuación (2.30) para $M = 0.105$ y $D_g = 1050 \mu\text{m}$: $R^2 = 0.9918$

TRABAJO CON
FALLA DE ORIGEN

Considerando los valores precedentemente obtenidos se aplican las relaciones (2.31) y (2.33) obteniéndose que $m = 0.0697$ y $\eta = 19.513$. El contenido volumétrico de agua a saturación se asimila a la porosidad total del suelo $\theta_s = \phi = 0.434 \text{ cm}^3/\text{cm}^3$, y el contenido volumétrico residual se supone igual a cero $\theta_r = 0$.

El parámetro de escala ψ_d se determina a partir de la ecuación (1.99) y el valor de porosidad drenada promedio reportado. Introduciendo en la ecuación (1.99) la fórmula para la capacidad de almacenamiento (4.18), se obtiene:

$$\mu = \frac{1}{H_s - H_d} \int_{H_d}^{H_s} (\theta_s - \theta_r) \left\{ 1 - \frac{1}{\left\{ 1 + \left[\frac{(H - H_s)}{\psi_d} \right]^n \right\}^m} \right\} dH = 0.0316 \quad (5.5)$$

Resolviendo la relación (5.5) para ψ_d considerando $H_s = 160 \text{ cm}$ y $H_d = 34 \text{ cm}$ se obtiene $\psi_d = -44.8 \text{ cm}$.

La condición inicial tanto para la ecuación de Richards como para la ecuación de Boussinesq es la correspondiente a un suelo inicialmente saturado que no transfiere agua por ninguna de sus fronteras, $\psi(x, z, 0) = z$ y $H(x, 0) = H_s$.

Las condiciones que se imponen en los segmentos de frontera del dominio de solución de la ecuación de Richards bidimensional a excepción del dren son de flujo nulo, es decir $-K(\psi) \left[\partial(\psi - z) / \partial z \right] = 0$ en $z = 0$ y $z = 160$ para $0 \leq x \leq 493$; $-K(\psi) \left[\partial\psi / \partial x \right] = 0$ $x = 0$ y $x = 493$ para $0 < z < 160$.

Los parámetros de forma de las condiciones de radiación no lineal (5.2) y (5.4) se estiman respectivamente con las relaciones $a(s) = 2s$ (ecuación 2.54) y $\delta = 2s$, obteniéndose $a = 1.36$ y $\delta = 1.36$. Adicionalmente se supone que el valor del exponente "b" de la condición de radiación no lineal (5.2) es igual al valor estimado para el exponente "a". Para describir la variación en el tiempo del tirante en el dren $h(t)$ (ecuación 5.2) se suponen los siguientes valores: $J = 0.001$, $d = 0.54$ y $\kappa \cong 9.83$ (estimado a partir del coeficiente de Hazen-Williams para tubos de PVC). Los parámetros q_0 y γ de las condiciones de frontera (5.2) y (5.4) se estiman de manera de reproducir las observaciones experimentales.

La discretización del dominio de solución de la ecuación de Richards bidimensional se hizo de la siguiente manera: con el paquete comercial Argua One 4.0p se generó una malla de

elementos finitos respetando la condición de uniformidad (Mori, 1983), la malla consta de 16,022 nudos, distribuidos en 31,448 elementos (Figura 5.5), los pasos de espacio mínimos escogidos son $\Delta x_{\min} = 0.025 \text{ cm}$, y $\Delta z_{\min} = 0.025 \text{ cm}$, y los máximos son $\Delta x_{\max} = 2.5 \text{ cm}$ y $\Delta z_{\max} = 2.5 \text{ cm}$. Se seleccionó un paso de tiempo inicial de $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ que se incrementó en el transcurso de la simulación hasta un máximo de $\Delta t_{\max} = 240 \text{ s}$.

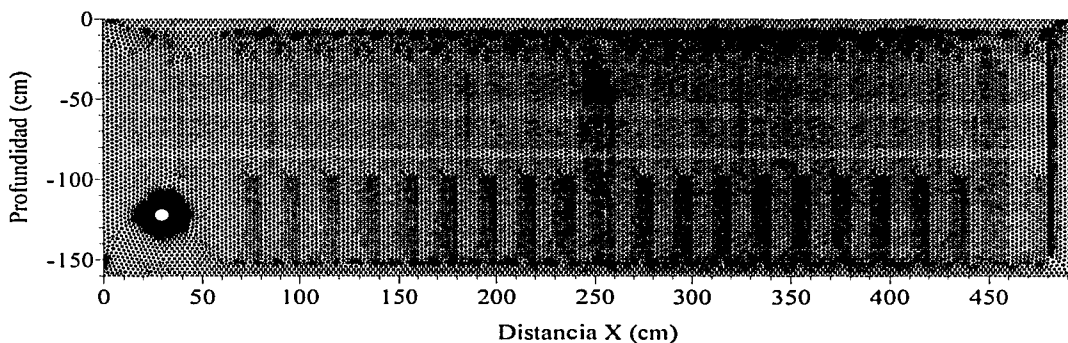


Figura 5.5. Malla elementos finitos.

El dominio de solución de la ecuación de Boussinesq unidimensional se definió como el doble de la distancia que hay desde el centroide de la sección transversal del dren hasta la pared derecha del sistema experimental ($L = 926 \text{ cm}$). Este dominio se discretizó generando una malla de 9261 nudos y 9260 elementos de tamaño uniforme ($\Delta x = 0.1 \text{ cm}$). Se seleccionó un paso de tiempo inicial de $\Delta t_{\text{ini}} = 1 \text{ s}$ que se incremento conforme transcurre la simulación hasta un máximo de $\Delta t_{\text{ini}} = 600 \text{ s}$.

Considerando las características estimadas precedentemente se simuló el experimento de drenaje aplicando las soluciones numéricas de las ecuaciones de Richards y de Boussinesq que se presentaron en los capítulos III y IV. El tiempo total de las simulaciones es igual a la duración de la prueba de drenaje ($t = 10 \text{ d}$). El objetivo de las simulaciones numéricas es reproducir con ambas aproximaciones la variación en el tiempo del volumen de agua evacuado por el dren (procurando que el volumen drenado a los 10 días de la prueba sea aproximadamente el mismo) y comparar las evoluciones teóricas de la superficie libre con la evolución medida en laboratorio.

Mediante simulaciones numéricas se encontró que el mejor ajuste de la ecuación de Richards a los datos experimentales de evolución del manto freático se obtiene con $q_0 = 30K_s$. Utilizando la evolución teórica del volumen de agua drenado obtenida con esta aproximación, se estimó el valor del parámetro γ de la condición tipo radiación no lineal (5.4), $\gamma \cong 7.75$.

Los resultados obtenidos con las ecuaciones de Richards y de Boussinesq para la transferencia de masa se presentan en la Figura 5.6. En esta Figura se puede observar que existen pequeñas diferencias entre las evoluciones descritas con ambas ecuaciones, esto puede deberse a que con la ecuación de Boussinesq sólo se está considerando las transferencias que ocurren del centro del dren hacia su derecha (condición aproximada a la que se presentó en laboratorio), mientras que con la ecuación de Richards se considera además lo que pasa en los 30 cm ubicados a la izquierda del dren (condición real presentada en laboratorio). En esta Figura también puede observarse que el volumen de agua drenado a los 10 días del experimento obtenido con ambas aproximaciones es prácticamente el mismo ($V \cong 0.1 \text{ m}^3$).

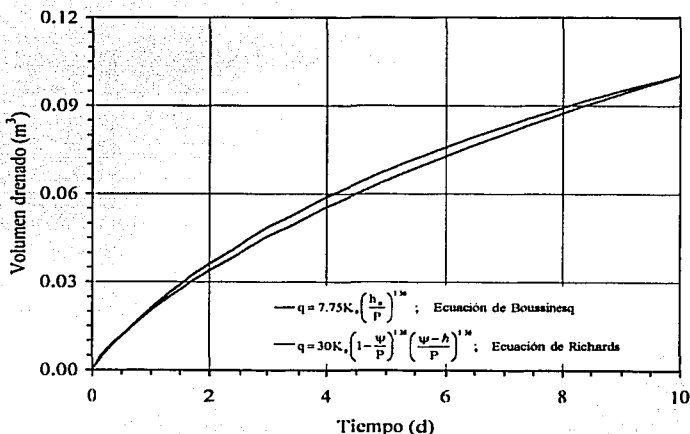


Figura 5.6. Evoluciones del volumen de agua evacuado por el dren descritas con la ecuación de Richards y con la ecuación de Boussinesq.

Al comparar la evolución del manto freático medida en laboratorio con los resultados obtenidos en las simulaciones numéricas, se verifica que la ecuación de Boussinesq no conserva la energía respecto de la ecuación de Richards y que esta última describe de mejor manera la

recesión del manto freático, tal y como se había mencionado en la sección 5.1.1 (ver Figuras 5.7). Las diferencias entre la ecuación de Richards y los datos experimentales en los tiempos largos de drenaje pueden ser debidas a la evaporación, sin embargo como esta variable no fue medida en el transcurso del experimento se supuso nula en las simulaciones numéricas.

La evidencia experimental ha permitido mostrar que la ecuación de Boussinesq subestima la recesión del manto freático, esta condición debe tenerse presente cuando se emplee la ecuación de Boussinesq en el diseño de sistemas de drenaje o cuando se utilice para estimar de la conductividad hidráulica a saturación promedio de un sistema, ya que existe el riesgo de sobrestimar tanto la separación entre drenes como el valor de conductividad hidráulica.

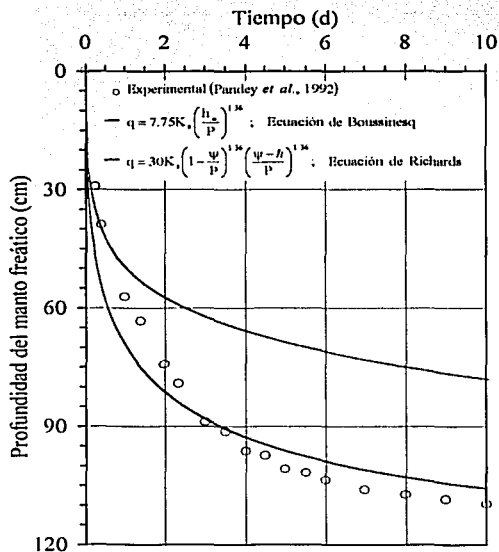


Figura 5.7.a.) Comparación de la evolución experimental del manto freático con las evoluciones descritas con la ecuación de Richards y con la ecuación de Boussinesq a 50 cm del centroide del dren.

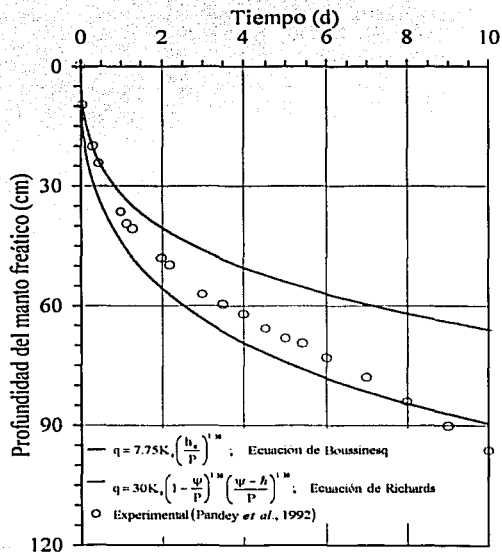


Figura 5.7.b.) Comparación de la evolución experimental del manto freático con las evoluciones descritas con la ecuación de Richards y con la ecuación de Boussinesq a 220 cm del centroide del dren.

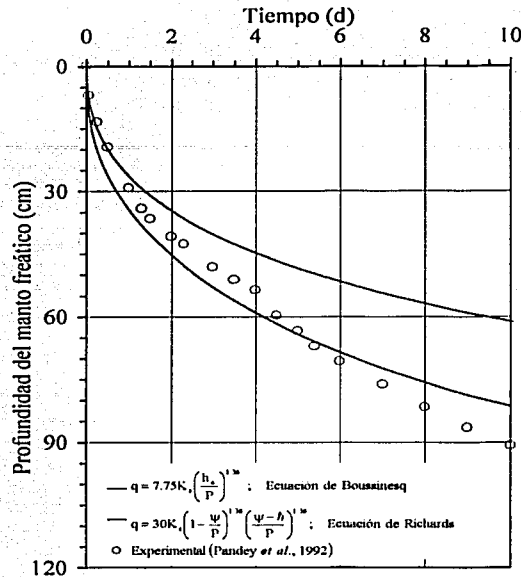


Figura 5.7.c.) Comparación de la evolución experimental del manto freático con las evoluciones descritas con la ecuación de Richards y con la ecuación de Boussinesq a 433 cm del dren.

5.3. PROBLEMA INVERSO: CALCULO DE LA SEPARACIÓN ENTRE DRENES.

Los resultados obtenidos en la sección anterior permiten suponer que si las ecuaciones de Richards y de Boussinesq son aplicadas al diseño de un sistema de drenaje agrícola subterráneo, los resultados proporcionados por estas ecuaciones pueden diferir sensiblemente. Para comparar los resultados derivados de estas ecuaciones diferenciales, en esta sección se plantea el problema inverso consistente en calcular la separación entre drenes que se necesita para abatir el manto freático a la mitad de la separación hasta una profundidad establecida en un periodo de tiempo fijo. En el diseño se considera el abatimiento a la mitad de separación entre drenes porque a esta distancia se presenta la profundidad mínima del manto freático.

En este problema inverso se consideran el suelo arena de Tezoyuca y el suelo arcilloso de Pandey *et al.* (1992) ya que se han estimado previamente tanto sus parámetros hidráulicos como los parámetros que intervienen en las condiciones tipo radiación no lineal (5.2) y (5.4).

5.3.1. Suelo arena de Tezoyuca.

Considérese el sistema experimental de drenaje presentado en la sección 3.4 y supóngase que el abatimiento descrito con la ecuación de Richards bidimensional corresponde al abatimiento que se desea reproducir con la ecuación de Boussinesq unidimensional, ¿Cuál es la separación entre drenes que permite aproximar los resultados de la ecuación de Boussinesq a los de la ecuación de Richards a la mitad de separación entre drenes.

A partir de una serie de simulaciones numéricas se encontró que la mejor aproximación entre el abatimiento descrito con la ecuación de Boussinesq al descrito con la ecuación de Richards se obtiene cuando la separación entre drenes para la primera ecuación diferencial es aproximadamente de 49 cm (Figura 5.8). La diferencia entre la separación real y la separación requerida por la ecuación de Boussinesq es aproximadamente de 102%. Se debe tener presente que al modificar la separación entre drenes para intentar reproducir la evolución de la superficie libre se está considerando un sistema de drenaje distinto del experimental.

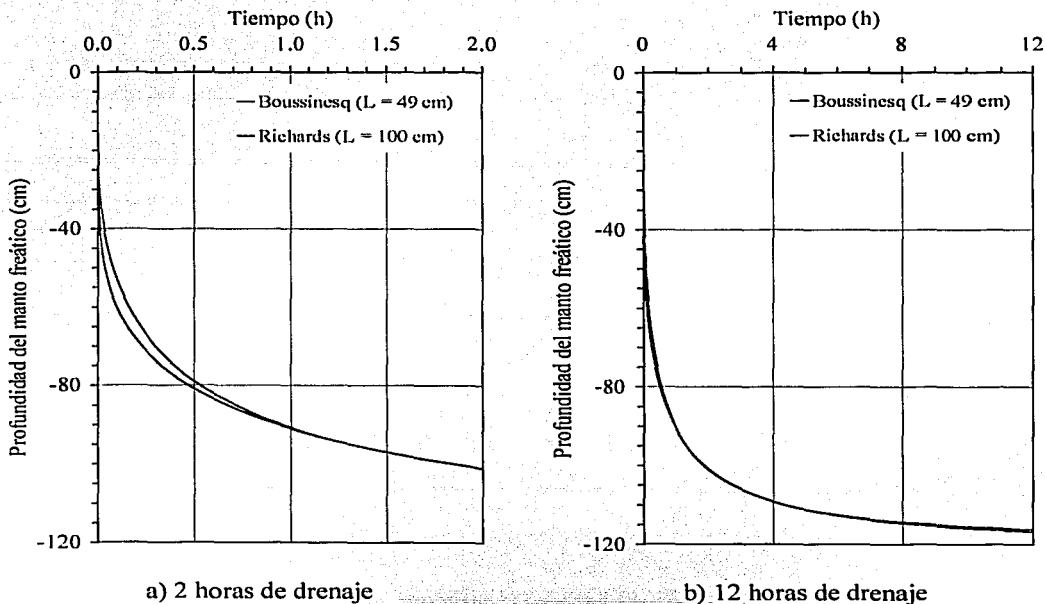


Figura 5.8. Evoluciones teóricas de la superficie libre a la mitad de separación entre drenes calculadas con la ecuación de Richards bidimensional para una separación entre drenes de 100 cm y con la ecuación de Boussinesq unidimensional para una separación entre drenes de 49 cm.

5.3.2. Suelo franco arcilloso de Pandey *et al.* (1992)

Una segunda comparación entre las separaciones proporcionadas por las ecuaciones de Richards y de Boussinesq es realizada considerando el sistema de drenaje experimental de Pandey *et al.* (1992). Al igual que en el caso anterior supóngase que desea reproducir con la ecuación de Boussinesq la evolución del manto freático a la mitad de separación entre drenes descrita con la ecuación de Richards, ya que esta última aproximación proporcionó la mejor descripción de los datos experimentales.

Para aproximar la evolución de la superficie libre descrita con la ecuación de Richards, se hizo variar la separación entre drenes para la ecuación de Boussinesq. El mejor acuerdo entre las evoluciones se obtiene cuando la separación entre drenes para la ecuación de Boussinesq es aproximadamente de $L \cong 600$ cm (Figura 5.9). Esta separación es 54.3% menor que la separación real.

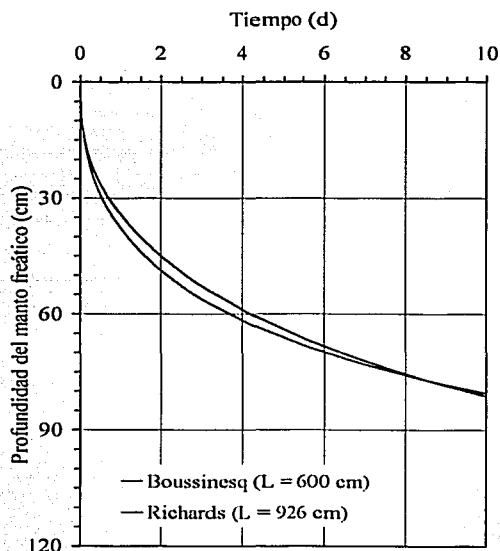


Figura 5.9. Evoluciones de la superficie libre a la mitad de separación entre drenes calculadas con la ecuación de Richards bidimensional para una separación entre drenes de 926 cm y con la ecuación de Boussinesq unidimensional para una separación entre drenes de 600 cm.

Las diferencias entre las separaciones proporcionadas por las ecuaciones de Richards y de Boussinesq en dos suelos de características hidrodinámicas contrastantes, muestran que cuando se diseñan sistemas de drenaje con la ecuación de Boussinesq se sobrestima la separación entre drenes.

Resumen

Se han presentado dos aproximaciones para describir el drenaje agrícola, la primera consiste en resolver la ecuación de Richards sobre un dominio bidimensional considerando una condición tipo radiación no lineal en el perímetro del dren y la segunda consiste en resolver la ecuación de Boussinesq sobre un dominio unidimensional imponiendo en los extremos de éste condiciones tipo radiación no lineal. A partir de una comparación directa entre ambas aproximaciones y apoyados en evidencia experimental, se ha mostrado que la ecuación de Boussinesq no conserva la energía respecto de la ecuación de Richards. Adicionalmente se ha mostrado que la ecuación de Boussinesq sobrestima la separación entre drenes que se requiere para abatir el manto freático una profundidad dada.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

CAPÍTULO VI CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se ha abordado la descripción de la transferencia de agua en sistemas de drenaje agrícola subterráneos considerando las ecuaciones diferenciales no lineales de Boussinesq en su forma unidimensional y de Richards en sus formas unidimensional y bidimensional. Se ha estudiado específicamente el tipo de condición de frontera que debe sujetar a cada una de estas ecuaciones en la frontera del dren.

La determinación del tipo de condición de frontera que debe imponerse en los drenes se ha realizado a partir del análisis de las transferencias de masa y energía que ocurren durante la recesión del manto freático en la columna de suelo ubicada encima del dren. El análisis basado en la ecuación de Richards, ha permitido establecer que la relación que describe el drenaje de una columna de suelo hacia la atmósfera es una condición de frontera tipo radiación no lineal. Esta relación contiene a la condición de radiación lineal clásica y satisface que la posición de la superficie libre es una función monótona decreciente del potencial de presión en la base de la columna de suelo. El buen acuerdo entre los resultados obtenidos con la condición de frontera tipo radiación no lineal y las observaciones realizadas en pruebas de drenaje en columnas de suelos de características hidráulicas contrastantes, permiten concluir que esta relación puede ser usada para describir la evolución en el tiempo de la lámina de agua drenada a la atmósfera por una columna de suelo inicialmente saturado.

La descripción de las transferencias de masa y energía en un sistema de drenaje agrícola subterráneo se ha abordado acoplando la ecuación de Richards bidimensional para el flujo de agua en el suelo con una ley de resistencia para el flujo de agua en el dren e imponiendo en el perímetro de la tubería de drenaje la condición tipo radiación no lineal precedentemente determinada. Se ha realizado un experimento de drenaje en laboratorio para evaluar la capacidad de descripción tanto de la condición tipo radiación no lineal como la de las dos aproximaciones mas usadas en la literatura para modelar el flujo de agua hacia los drenes, la condición de superficie de filtración (Neuman, 1973) y la solución de Kirkham (1949). Se ha mostrado que la mejor aproximación a los datos experimentales es proporcionada por la condición de radiación no lineal y que la condición de superficie de filtración sobrestima el gasto de drenaje debido a que considera resistencia nula en la interfaz suelo saturado-dren. Un análisis de la solución de Kirkham ha permitido establecer que esta relación no describe el abatimiento del manto freático en los tiempos largos. A partir de estos resultados se concluye que la descripción de las transferencias de masa y energía en sistemas de drenaje agrícola con la ecuación de Richards debe ser realizada imponiendo en el perímetro de los drenes la condición tipo radiación no lineal obtenida en este trabajo.

La descripción de la dinámica del agua en un sistema de drenaje agrícola también ha sido abordada considerando la ecuación de Boussinesq unidimensional de los acuíferos libres. Para que el estudio de la condición de frontera no fuera afectado por el desconocimiento de la forma funcional de la capacidad de almacenamiento, se ha estudiado primeramente la porosidad drenable como una función de la posición de la superficie del manto freático considerando la influencia de la zona no saturada del suelo en el proceso de drenaje. A partir de una conceptualización de la lámina drenada y la lámina drenable se ha definido el concepto de capacidad de almacenamiento o porosidad drenada, utilizado en la teoría clásica de acuíferos, y el de porosidad drenable utilizado en drenaje agrícola. Posteriormente se ha abordado el problema de la definición de la condición de frontera en los drenes, a partir de la aplicación de conceptos de geometría fractal se ha determinado que la transferencia de agua del suelo hacia los drenes debe ser descrita con una condición de frontera tipo radiación no lineal. Esta relación establece que el flujo de drenaje es proporcional a una potencia de la carga hidráulica sobre el dren, donde el exponente es una función lineal de la dimensión cociente del suelo. Apoyados en evidencia experimental se ha mostrado que dos de los supuestos usados en la teoría clásica del drenaje agrícola, porosidad drenable constante y carga nula sobre los drenes, no describen las transferencias de masa y energía en un sistema de drenaje agrícola subterráneo y que una mejor aproximación a estos procesos puede ser obtenida considerando la fórmula de la capacidad de almacenamiento y la condición de frontera tipo radiación no lineal obtenidas en este trabajo.

Evidencia experimental ha permitido comparar y evaluar las dos aproximaciones que se han propuesto en este trabajo para modelar el fenómeno del drenaje agrícola: la resolución de la ecuación de Richards sobre un dominio bidimensional considerando una condición tipo radiación no lineal en el perímetro del dren y la resolución de la ecuación de Boussinesq sobre un dominio unidimensional en cuyas fronteras se imponen condiciones tipo radiación no lineal. Los resultados obtenidos permiten concluir que la ecuación de Boussinesq no conserva la energía respecto de la ecuación de Richards lo cual origina que la separación entre drenes estimada con esta aproximación sea menor que aquella estimada con la ecuación de Richards.

Esfuerzos futuros deben encaminarse al estudio de los parámetros de escala de las condiciones tipo radiación no lineal que sujetan a las ecuaciones de Richards y de Boussinesq en la frontera de los drenes.

ANEXO I

RESULTADOS DE LAS PRUEBAS DE INFILTRACIÓN Y DE DRENAJE EN COLUMNAS DE SUELOS

En este anexo se presentan los resultados teóricos y experimentales relacionados con las pruebas de infiltración y de drenaje en columnas de suelos. Primeramente en la Tabla I.1. se presentan las características físicas de estas columnas y en la Tabla I.2 se especifican el estado inicial de las columnas y las cargas de agua aplicadas sobre su superficie durante las pruebas de infiltración. Enseguida se muestran las curvas granulométricas de cada suelo así como el ajuste que se hizo de éstas con la ecuación (2.30). Se muestran también los resultados de la calibración de los parámetros de escala K_s y ψ_d para cada uno de los suelos. Finalmente se presenta la comparación de láminas drenadas medidas y las láminas drenadas calculadas con la condición de radiación no lineal correspondientes al mejor ajuste a los datos experimentales.

Suelo	Longitud de la columna (cm)	Volumen de la columna (cm ³)	Peso del suelo (g)	Densidad aparente ρ_a (g/cm ³)	Densidad de los sólidos ρ_s (g/cm ³)
1 Arena "Cuaculan" (Yautepec, Mor)	75.00	12989.88	20993.70	1.616	2.65
2 "Sta. María" (Cuernavaca, Mor)	75.00	12989.88	13275.60	1.022	2.65
3 "La Pintura" (Yautepec, Mor)	75.00	12989.88	17190.60	1.323	2.70
4 "Progreso" (Jiutepec, Mor)	75.00	12989.88	16730.90	1.288	2.72

Tabla I.1. Características físicas de las columnas de suelo.

Suelos \ Datos	1	2	3	4
Contenido volumétrico inicial (cm ³ /cm ³)	0.008	0.013	0.015	0.016
Carga en la superficie (cm)	3.00	10.00	6.500	6.500

Tabla I.2. Condición inicial y condición de frontera superior en las pruebas de infiltración.

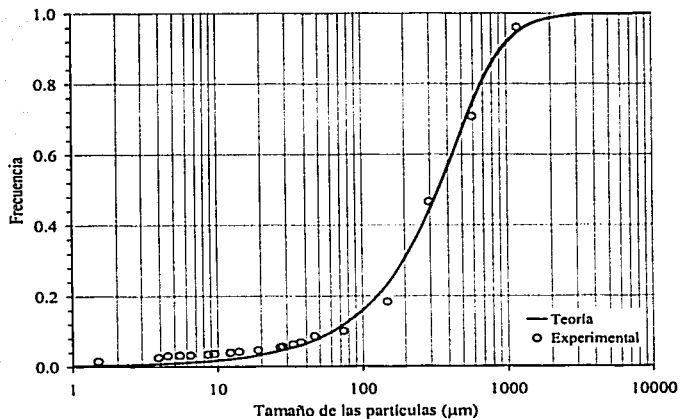


Figura I.1. Curva granulométrica de la Arena de Cuaculan y la función definida por la ecuación (2.30): $D_g = 675 \mu\text{m}$ y $M = 0.325$ ($R^2 = 0.9933$).

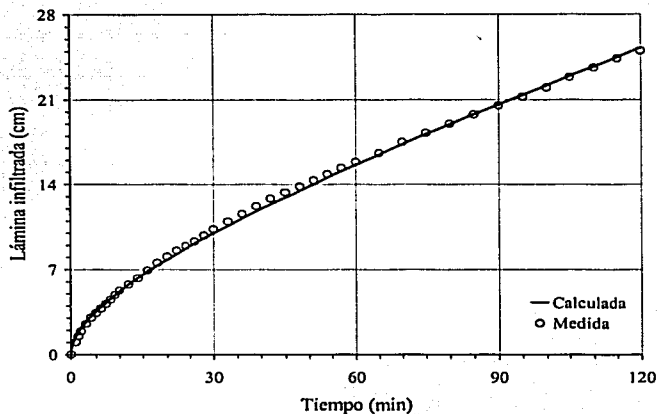


Figura I.2 Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con: $\psi_d = -19.5 \text{ cm}$ y $K_s = 7.6 \text{ cm/h}$; $R^2 = 0.9979$ (arena de Cuaculan).

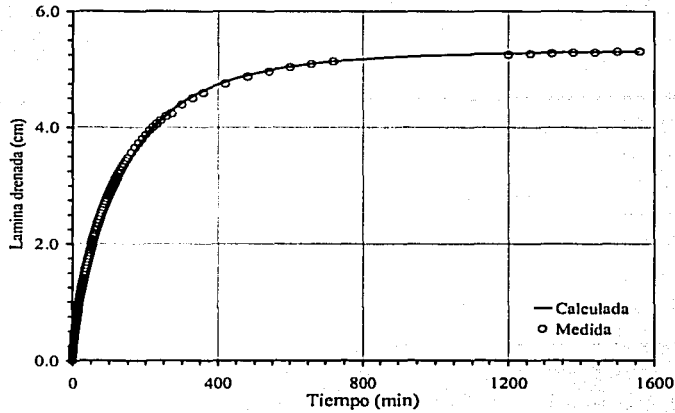


Figura I.3. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1.5$ y $q_0/K_s = 2.74$; $R^2 = 0.9884$ (arena de Cuaculan).

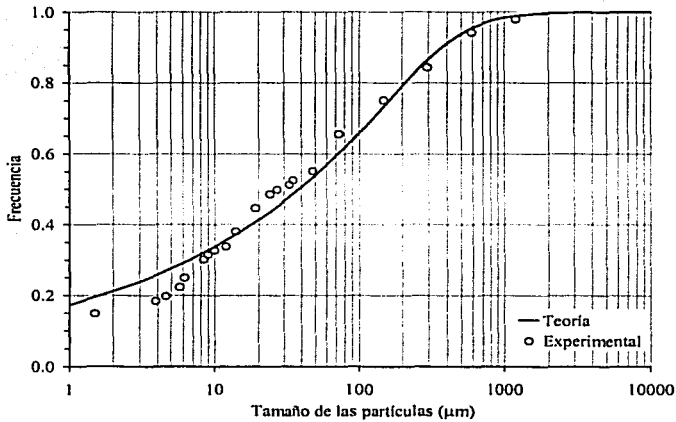


Figura I.4. Curva granulométrica del suelo Sta. María y la función definida por la ecuación (2.30): $D_g = 415 \mu\text{m}$ y $M = 0.127$ ($R^2 = 0.9699$).

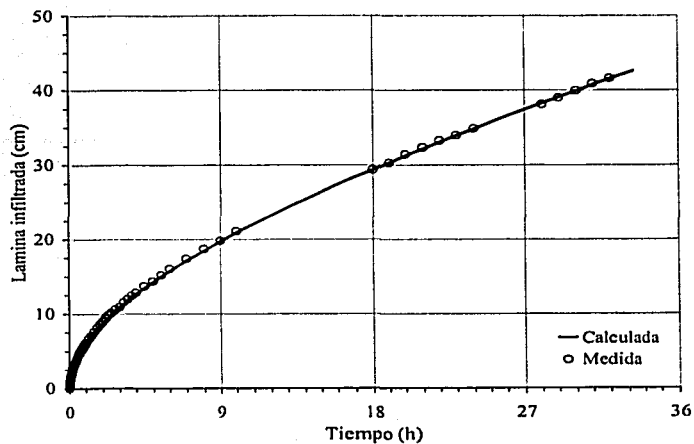


Figura I.5. Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con: $\psi_d = -45.5$ cm y $K_s = 0.51$ cm/h; $R^2 = 0.9991$ (suelo Sta. María).

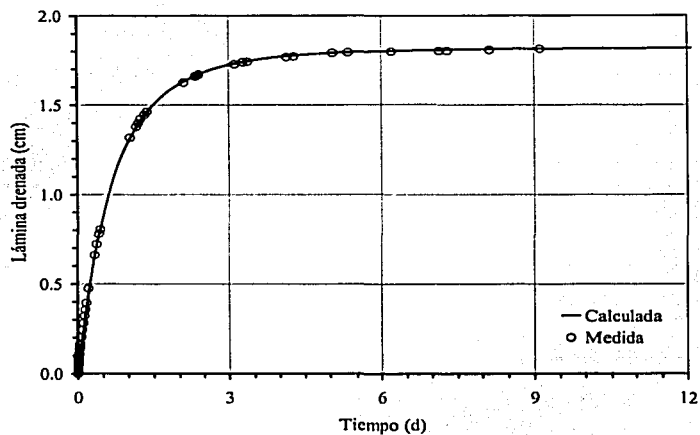


Figura I.6. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1.4$ y $q_0/K_s = 1.28$; $R^2 = 0.9987$ (suelo Sta. María).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

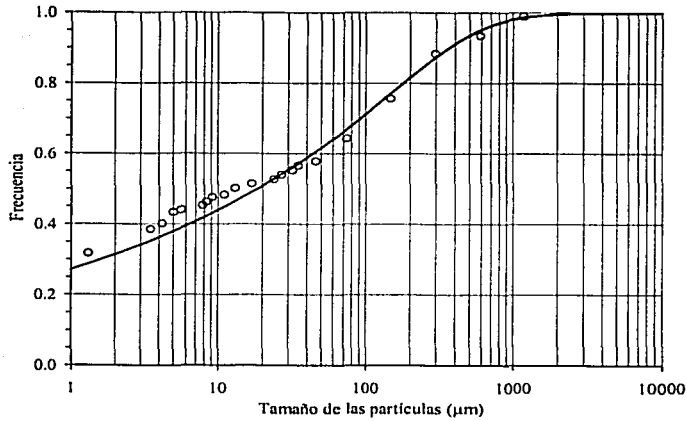


Figura I.7. Curva granulométrica del suelo La pintura y la función definida por la ecuación (2.30): $D_g = 500 \mu\text{m}$ y $M = 0.095$ ($R^2 = 0.9793$).

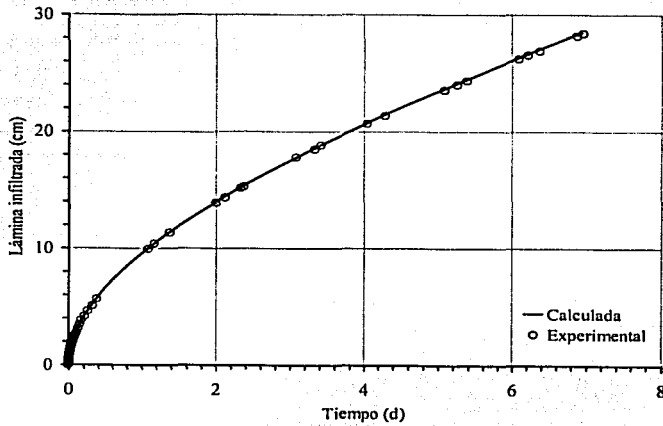


Figura I.8. Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con: $\psi_d = -51.0 \text{ cm}$ y $K_s = 0.06 \text{ cm/h}$; $R^2 = 0.9993$ (La Pintura).

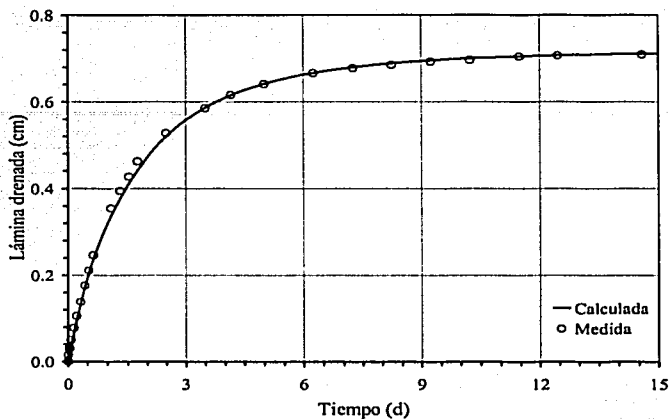


Figura I.9. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1.40$ y $q_0/K_s = 2.35$; $R^2 = 0.9971$ (La. Pintura).

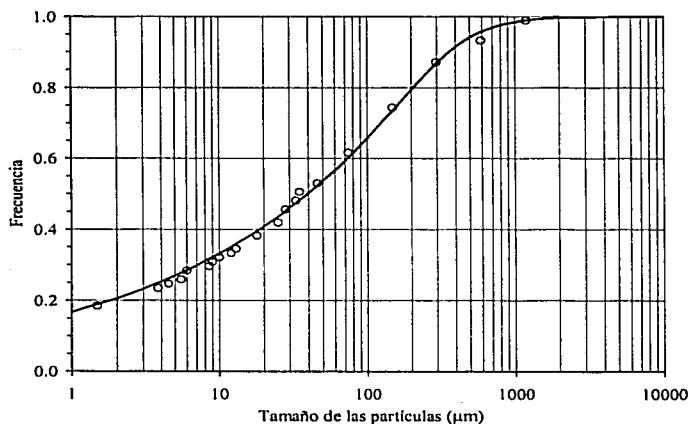


Figura I.10. Curva granulométrica de la arcilla de Progreso y la función definida por la ecuación (2.30): $D_g = 400 \mu\text{m}$ y $M = 0.13$; $R^2 = 0.9965$.

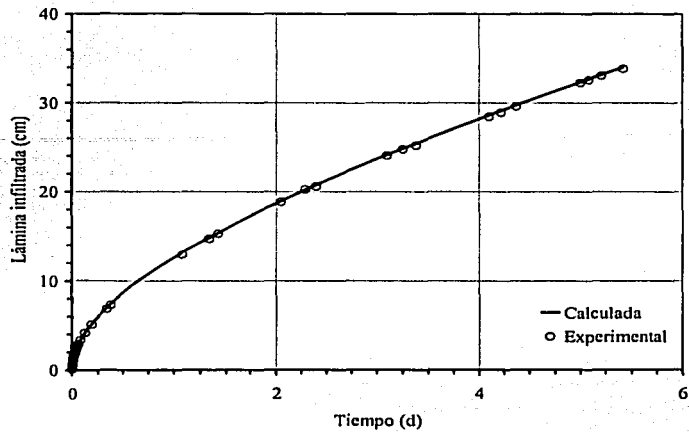


Figura I.11. Comparación de las láminas de infiltración medida y calculada con: $\psi_d = -42.5$ cm y $K_s = 0.11$ cm/h ; $R^2 = 0.9997$ (suelo de Progreso).

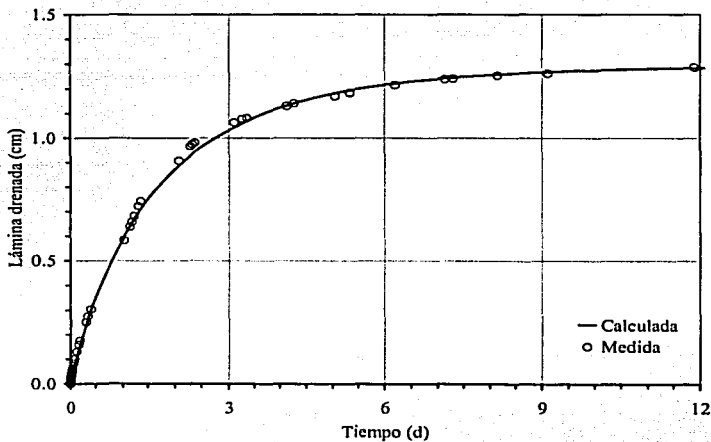


Figura I.12. Comparación de la lámina drenada medida con la lámina drenada calculada con $a = b = 1.3$ y $q_o/K_s = 2.0$; $R^2 = 0.9899$ (suelo Progreso).

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

TFIS CON
FALLA DE ORIGEN

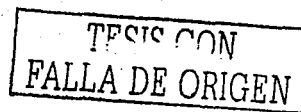
154

REFERENCIAS

1. Ahmad, S., D. Kashyap y B.S. Mathur, 1991. *Numerical modeling of two dimensional transient flow to ditches*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 117(6): 839-851.
2. Ahmad, S., D. Kashyap y B.S. Mathur, 1993. *Mathematical modeling of saturated-unsaturated flow to drains*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 119(1): 18-33.
3. Aronovici, V.S. y W.W. Donnan, 1946. *Soil permeability as a criteria for drainage design*. Transactions American Geophysical Union, 27(1): 95-101.
4. Barcelo, M.D. y J.L. Nieber, 1981. *Simulation of natural soil pipes in a soil profile*. Paper presented at the Summer Meeting, Am. Soc. Agric. Eng., Orlando, Fla.
5. Barcelo, M.D. y J.L. Nieber, 1982. *Influence of soil pipes networks on catchment hydrolog. cimulation of natural soil pipes in a soil profile*. Paper presented at the Summer Meeting, Am. Soc. Agric. Eng., Univ. of Wisc., Madison.
6. Bhattacharya, A., y R. Broughton, 1979. *Variable drainable porosity in drainage design*. Journal of Irrigation and Drainage Division, ASAE 105 (1): 71-85.
7. Boussinesq, J., 1904. *Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol*. Journal the Math. Pures et Appl., serie 5, tomo 10, fasciculo 1.
8. Bouwer H., 1964. *Rapid field measurement of air entry value and hydraulic conductivity of soil as significant parameters if flow system analysis*. Water Resources Research, 36: 411-424.
9. Braddock, R.D., J.-Y. Parlange y H. Lee, 2001. *Application of a soil water hysteresys model to simple water retention curves*. Transport in Porous Media, 44: 407-420.
10. Bravo N.J. y G.O. Schwab, 1975. *Effect of openings on inflow in to corrugated drains*. Winter American Society of Agricultural Engineers Meeting, held at Chicago, III. (paper 75-2525).
11. Broadbridge, P., y I. White, 1988. *Constant rate rainfall infiltration: A versatile nonlinear model, 1, Analytical solution*. Water Resources Research, 24: 145-154.

12. Brooks, R. H. y A. T. Corey, 1964. *Hydraulic properties of porous media*. Hydrol. Pap. 3, Colo. State Univ., Fort Collins.
13. Burdine, N. T., 1953. *Relative permeability calculation from size distribution data*. Pet. Trans. AIME, 198: 71-78.
14. Carslaw, H.S., y J.C. Jaeger, 1959. *Conduction of heat in solids*. Oxford University Press: 507 pp.
15. Childs, E. C. y N. Collis-George, 1950. *The permeability of porous materials*. Proc. Roy. Soc., Ser. A(201): 392-405.
16. Cooley, R.L., 1983. *Some new procedures for numerical solution of variably saturated flow problems*. Water Resources Research, 19(5): 1271-1285.
17. Cushman, D. Kirkham y R.F. Keller, 1979. *A Galerkin in Time, Linearized Finite Element Model of 2-Dimensional Unsaturated Porous Media Drainage*. Soil Sci. Soc. Am. J., 43: 638-641.
18. Drainage Manual, 1994. A Water Resources Technical Publication Revised Reprint, U. S. Department of the Interior, Bureau of Reclamation.
19. Dumm L., 1954. *Drain spacing formula*. Agricultural Engineering, 35: 726-730.
20. Dylla, A.S., 1966. *Simplified procedure for transient flow drainage design*. Transactions American Society of Agricultural Engineers, 9(1): 61-63.
21. Ernst, L., 1956. *Calculation of the steady flow of groundwater in vertical cross-sections*. Netherlands Journal of Agricultural Science 4: 126:131.
22. Everett, D.H. y W.I. Whitton, 1952. *A general approach to hysteresis 1*. Trans. Faraday Soc., 48: 749-752.
23. Everett, D.H. y F.W. Smith, 1954. *A general approach to hysteresis 2*. Trans. Faraday Soc., 50: 187-197.
24. Everett, D.H., 1954. *A general approach to hysteresis 3. A formal treatment of independent domain model of hysteresis*. Trans. Faraday Soc., 50: 1077-1096.

25. Everett, D.H., 1955. *A general approach to hysteresis 4. An alternative formulation of the domain model*. Trans. Faraday Soc., 51: 1551-1557.
26. Fipps G., R.W. Skaggs y W. Nieber, 1986. *Drains as a boundary condition in finite elements*. Water Resources Research, 22(11): 1613-1621.
27. Fipps G. y R.W. Skaggs, 1991. *Simple methods for predicting flow to drains*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 117(6): 881-895.
28. Fuentes, C., 1992. *Approche fractale des transferts hydriques dans les sols non-saturés*. Tesis de Doctorado de la Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia: 252pp.
29. Fuentes, C., R. Haverkamp y J.-Y. Parlange, 1992. *Parameter constraints on closed-form soil-water relationships*. Journal of Hydrology, 134: 117-142.
30. Fuentes, C. y M. Vauclin, 1994. *Sobre la ley de resistencia hidráulica en el flujo transitorio del agua sobre una superficie porosa inicialmente no saturada*. XVI Congreso Latinoamericano de Hidráulica, 1: 113-121.
31. Fuentes C., R. Namuche, L. Rendón, R. Patrón, O. Palacios, F. Brambila y A. González, 1997. *Solución de la ecuación de Boussinesq del régimen transitorio en el drenaje agrícola bajo condiciones de radiación: El caso del Valle del Carrizo, Sinaloa*. Memorias del VII Congreso Nacional de Irrigación. México: 3-141, 3-145.
32. Fuentes C., S. Martínez, y H. Saucedo, 1999. *La ecuación de Boussinesq con capacidad de almacenamiento variable*. IX Congreso Nacional de Irrigación. Culiacán, Sinaloa, México, (2): 103-110.
33. Fuentes, C., y H. Saucedo, 1999. *Reclamation of soils with deficient drainage and salt problems in irrigated areas of México*. Transactions of 17th Congress on Irrigation and Drainage, ICID, 1E(49): 113-127.
34. Fuentes, C., F. Brambila, M. Vauclin, J.-Y. Parlange, y R. Haverkamp, 2001. *Modelación fractal de la conductividad hidráulica de los suelos no saturados*. Ingeniería Hidráulica en México, 16(2): 119-137.
35. Fujita, H., 1952. *The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium, part II*. Textil Research Journal, 22: 823-827.



36. Gardner, W. R., 1958. *Some steady-state solutions of the unsaturated moisture flow equation with application to evaporation from a water table*. Soil Sci., 85: 228-232.
37. Gharaaty-Sani y L.G. King, 1978. *Interceptor drains on sloping land*. Paper 78-2028 presented at the Summer Meeting, Am. Soc. Agr. Eng., Utah.
38. González, A., C. Fuentes, L. Rendón, R. Patrón, H. Saucedo, F. Brambila, R. Namuche, y R. Mercado, 1997. *Sobre la ecuación de Richards y la ecuación de Boussinesq de los acuíferos libres*. Memorias del VII Congreso Nacional de Irrigación. Hermosillo, Sonora, México: 141-145.
39. Gupta, R., A. Bhattacharya, y P. Chandra, 1994. *Unsteady drainage with variable drainage porosity*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering. 120(4): 703-715.
40. Gureghian, A. B. y E.G. Youngs, 1975. *The calculation of steady-state water table heights in drained soils by means of the finite element method*. Journal of Hydrology, 27: 15-32.
41. Hills, R.G. y A.W. Warrick, 1993. *Burgers equation: A solution for soil water flow in a finite length*. Water Resources Research, 29: 1179-1184.
42. Hooghoudt S., 1940. *Bijdrage tot de kennis van enige natuurkundige grootheden van der grond*. No. 7 Verslag andbouwk Onderzoek, 46: 515-707.
43. Huyakorn, P. S., E.P. Springer, V. Givanasen y T.D. Wadsworth, 1986. *A three-dimensional finite element model for simulating water flow in variably saturated porous media*. Water Resources Research, 22(13): 1790-1808.
44. Kirkham, D., 1949. *Flow of ponded water into drain tubes in soil overlying an impervious layer*. Eos. Trans. Agu, 30(3): 369-385.
45. Kirkham, D., 1957. *The theory of land drainage: the ponded case*. Drainage of agricultural lands: Agronomy Monograph 7, ed. J. N. Luthin, American Society of Agronomy, Madison, Wisc.: 139-181.
46. Kohler, A., K.C. Abbaspour, M. Fritsch, M. Th. van Genuchten y R. Schulin, 2001. *Simulating unsaturated flow and transport in a macroporous soil to tile drains subject to an entrance head: model development and preliminary evaluation*. Journal of Hydrology, 254: 67-81.

47. Merva, G. E., L. Segerlind, H. Murase y M.R. Fausey, 1983. *Finite element modelling for depth and spacing of drains in layered soils*. Trans. of ASAE, 26(2): 452-456.
48. Moody, W.T., 1966. *Nonlinear differential equation of drain spacing*. Journal of Irrigation and Drainage Division, ASCE, 92: 1-9.
49. Mori, M., 1983. *The finite element method and its applications*. Ed. Macmillan, New York. 273 pp.
50. Mualem, Y., 1973. *Modified approach to capillary hysteresis based on a similarity hypothesis*. Water Resources Research, 9: 1324-1331.
51. Mualem, Y., 1974. *A conceptual model of hysteresis*. Water Resources Research, 10: 514-520.
52. Mualem, Y., 1976a. *A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media*. Water Resources Research, 12: 513-522.
53. Mualem, Y., 1976b. *Hysteretical models for prediction of the hydraulic conductivity of unsaturated porous media*. Water Resources Research, 12(6): 1248-1254.
54. Namuche, R., C. Fuentes y L. Rendón, 1996. *Informe ejecutivo del proyecto de diseño e instalación de drenaje parcelario del Distrito de Riego 076., El Carrizo, Sinaloa*. Informe interno, IMTA, Jiutepec, Morelos, México.
55. Natur, F. S., L.G. King y R.W. Jeppson, 1975 *Unsaturated-saturated flow through heterogeneous sloping lands*. Rep. PRWG59c-9, Utha Water Res. Lab., Logan: 45 pp.
56. Néel, L., 1942. *Théories des lois d'aimanation de Lord Rayleigh, 1*. Cah. Phys., 12: 1-20.
57. Néel, L., 1943. *Théories des lois d'aimanation de Lord Rayleigh, 2*. Cah. Phys., 13: 19-30.
58. Neuman, S. P., 1973. *Saturated-unsaturated seepage by finite elements*. Journal of Hydraulic Division, ASCE, 99(HY12): 2233-2249.
59. Noor, K.A. y J.M. Peters, 1987. *Preconditioned conjugate gradient technique for the analysis of symmetric structures*. International Journal of Numerical Methods in Engineering, 24: 2057-2070.

60. Oosterbaan, R.J., A. Ppissarra y J.G. van Alphen, 1989. *Hydraulic head and discharge relations of pipe drainage systems with entrance resistance*. Proceedings of 15th European Regional Conference on Agricultural Water Management. Vol. III, ICID, Dubrovnik.
61. Pandey, R. A., Bhattacharya, O. Singh y S. Gupta, 1992. *Drawdown solution with variable drainable porosity*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 118(3): 382-396.
62. Parkin, G.W., A.W. Warrick, D. E. Elrick y G. Kachanoski, 1995. *Analytical solution for one-dimensional drainage: Water stored in a fixed depth*. Water Resources Research, 31(5): 1267-1271.
63. Parlange, J.-Y., 1976. *Capillary hysteresis and the relationship between drying and wetting curves*. Water Resources Research, 12(2): 224-228.
64. Parlange, J.-Y., R.D. Braddock, I. y R.E. Smith., 1982. *Three parameter infiltration equation*. Soil Sci. 11:170-174.
65. Philip, J.R., 1964. *Similarity hypothesis for capillary hysteresis in porous materials*. J. Geophys. Res., 69(8): 1553-1562.
66. Poulavasillis, A., 1962. *Hysteresis of pore water, an application of the concept of independent domains*. Soil Sci., 93: 405-412.
67. Rogers, C., M.P. Stallybrass, y D.L. Clements, 1983. *On two-phase filtration under gravity and with boundary infiltration. Application of a Bäcklund transformation*. Nonlinear Anal. Theory Methods Appl., 7: 785-799.
68. Richards, L. A., 1931. *Capillary conduction of liquids through porous mediums*. Physics 1: 318-333.
69. Sanders, G.C., J.-Y. Parlange, V. Kühnel, W.I. Hogart, D. Lockington, y J.P. O'Kane, 1988. *Exact nonlinear solution for constant flux infiltration*. Journal of Hydrology, 97: 341-346.
70. Saucedo, H., C. Fuentes, M. Zavala y M. Vauclin, 2002. *Una solución de elemento finito para la transferencia de agua en un sistema de drenaje agrícola subterráneo*. Ingeniería Hidráulica en México, XVII, 1: 93-105.
71. Si, B.C., y R.G. Kachanosky, 2000. *Unified solution for infiltration and drainage with hysteresis theory and field test*. Soil Sci. Soc. Am. J., 64: 30-35.

72. Skaggs, R.W., L.G. Wells y S.R. Ghaté, 1975. *Predicted versus measured drainable porosities*. Meeting of American Society of Agricultural Engineers, Chicago, III, Paper No. 75-2527.
73. Skaggs, R.W., e Y. Tang, 1976. *Saturated and unsaturated flow to parallel drains*. J. of Irrigation and Drainage Division, ASCE, 102: 221-238.
74. Skaggs, R.W., 1978. *Effect of drain tube openings on water-table drawdown*. Journal of Irrigation and Drainage, ASCE, 104: 13-21.
75. Tarboton, K.C. y W.W. Wallender, 2000. *Finite-element grid configurations for drains*. Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 126(4): 243-249.
76. Toksoz, S, y D. Kirkham, 1971a: *Steady drainage of layered soils, I: Theory*. Journal of Irrigation and Drainage, ASCE, 97: 1-18.
77. Toksoz, S, y D. Kirkham, 1971b. *Steady drainage of layered soils, II: Nomographs*. Journal of Irrigation and Drainage, ASCE, 97 : 19-37.
78. Topp, G.C., 1971. *Soil water hysteresis in silt loam and clay loam soils*. Water Resources Research, 7(4): 914-920.
79. US Department of Agriculture, Natural Resources Conservation Service, 1997. *Hydrology tools for wetland determination*. Course Workbook, National Employee Development Center, USDA, NRCS, Fort Worth, TX.
80. Van der Molen, W. H., y J. Wesseling, 1991. *A solution in closed form and a series solution to replace the tables for the thickness of the equivalent layer in Hooghoudt's drain spacing formula*. Agricultural Water Management, 19: 1-16.
81. Van Genuchten, M. Th., 1980. *A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of the unsaturated soils*. Soil Sci. Soc. Amer. J., 44: 892-898.
82. Van Schilfhaarde, J., D. Kirkham y R.K. Frevert, 1956. *Physical and mathematical theories of tile and ditch drainage and their usefulness in design*. Research Bulletin No. 436, Agricultural Experimental Station, Iowa State College, Ames, Iowa.
83. Viaene, P., H. Vereecken, J. Daniels y J. Feyen, 1994. *A statistical analysis of six hysteresis*

models for the moisture retention characteristic. Soil Sci., 157: 345-355.

84. Vimoke, B.S. y G.S. Taylor, 1962. *Simulating water flow in soil with an electrical resistance network.* Rep. 41-65, Soil and Water Conserv. Res. Div., U.S. Agric. Res. Serv., Columbus Ohio: 51 pp.
85. Vimoke, B.S., T.D. Yura, T. J. Thiel y G.S. Taylor, 1963. *Improvements in constructions and use of resistance networks for studying drainage problems.* Soil Sci. Soc. Am. J., 26(2): 203-207.
86. Warrick, A., D. Lomen y A. Islas, 1990. *An analytical solution to Richards equation for a draining soil profile.* Water Resources Research, 26(2): 253-258.
87. Yeh, H. J. y L.G. King, 1978. *Transient subsurface drainage on sloping irrigated land.* Paper presented and the Summer Meeting, Am. Soc. Agric. Eng., Utha.
88. Zaradny, H., y R.A. Feddes, 1979. *Calculation of non-steady flow towards a drain in saturated-unsaturated soil by finite elements.* Agricultural Water Management, 1(2): 37-53.