00365

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO 7

FACULTAD DE CIENCIAS

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

CÓPULAS ARQUIMEDEANAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIAS

P R E S E N T A :

ISABEL RODRÍGUEZ REBOLLEDO

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ MARÍA GONZÁLEZ-BARRIOS MURGUÍA

2003

A

Dedicatoria

A mis padres Maricarmen y Félix por regalarme lo más importante en mi vida, el luchar por lo que uno quiere y el amor a la libertad.

A mis hijos Enrique y Marimé por serlo más grande y querido en mi vida.

A Enrique por compartir con amor uno de los deseos más importantes de mi vida.

A mis hermanos Paco, Juan, Denisse y Mirna por estar siempre a mi lado.

A Arturo por todos los momentos que compartimos al inicio y al termino de este proyecto

Agradecimientos

Agradezco al Instituto de Investigación de Matemáticas Aplicadas y Sistemas, de la Universidad Nacional Autónoma de México, principalmente al Dr. José María González-Barrios Murguia por todo su apoyo y tiempo invertido en la elaboración de este trabajo.

Agradezco también a la Dra. Begoña Fernández Fenández y al Dr. Alberto Contreras Cristán por los comentarios y sugerencias hechas a este trabajo.

A los doctores Federico O'Reilly, Mogens Bladt, Eduardo Gutiérrez y Raúl Rueda por haberme dado la formación, madurez y responsabilidad para poder seguir adelante en mi proyecto académico.

Índice general

Introducción

En el desarrollo de este trabajo se describe una clase de distribuciones multivariadas, cuyas marginales son uniformes en el intervalo unitario. Tales distribuciones se llaman "cópulas". La palabra cópula fue empleada en por primer vez por Sklar(1959) en el teorema que actualmente lleva su nombre, el cual establece la relación que guarda la distribución multivariada con sus marginales. Así, si H es una función de distribución de dimensión n con marginales unidimensionales $F_1, ..., F_n$, entonces existe una cópula C, (la cual es única si $F_1, ..., F_n$ son continuas), tal que $H(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$. Las cópulas tienen un papel importante en la construcción de funciones de distribución y en el estudio de dependencia de dos o más variables. La mayoría de los resultados presentados están tomados de Nelsen(1999).

En el primer capítulo se dan las bases, definiciones y propiedades básicas de las cópulas. Se expone el teorema de Sklar para funciones de distribución generalizadas, estableciendo la relación que existe entre las distribuciones marginales y las conjuntas. De este teorema se desprende la versión de cópulas para variables aleatorias y un corolario que brinda un método para su construcción. Se establece el criterio de orden que puede existir entre las cópulas, así como los diferentes casos de simetría. Por último se exponen algunos conceptos y resultados para el caso multivariado.

En el capítulo dos se obtiene apartir del método algebráico una clase de funciones de distribución $H(x, y)$ con marginales $F(x)$ y $G(y)$, tales que $H(x, y) = \varphi^{-1}[\varphi(F(x)) + \varphi(G(y))]$ donde φ es una función convexa, decreciente definida en $(0, 1]$ tal que $\varphi(1) = 0$. A estas funciones se les llaman cópulas Arquimedeanas, que son el objetivo principal de este trabajo, las cuales tienen una forma simple, son simétricas, asociativas, y se construyen facilmente. En esta parte del trabajo se dan algunos resultados importantes para estas cópulas y varios ejemplos de familias que pertenecen a esta clase, como son las familias de distribución de Gumbel, Ali-Mikhail-Haq, Clayton y Frank. Se establecen los casos especiales, el orden y se fijan algunos criterios de concordancia, como son la dependencia de cola baja y alta.

Capítulo 1

Definiciones y Propiedades

1.1. Preliminares

En el desarrollo del texto se denotará a los reales por $\mathbb{R} := (-\infty, \infty)$; a los reales extendidos como $\overline{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty]$, al plano real extendido por $\overline{\mathbb{R}}^2 := \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$, y al cuadrado unitario $\mathbf{I}^2 := \mathbf{I} \times \mathbf{I}$ donde $\mathbf{I} = [0, 1]$.

Un *rectángulo* B en $\overline{\mathbb{R}}^2$ es el producto cartesiano de dos intervalos cerrados, es decir $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$, donde los *vértices* de B son los puntos (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_1) y (x_2, y_2), donde $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$.

En esta sección se resumen las definiciones y resultados necesarios para entender los conceptos de cópulas. Las *funciones 2-crecientes* son importantes ya que en estas se centra una de las propiedades de las cópulas. El concepto de las *funciones 2-crecientes*, es un análogo a la idea en dos dimensiones de las funciones crecientes de una variable.

1.1.1. Definición. *Una función real 2-valuada H es una función tal que, Dom $H \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ y Ran $H \subset \mathbb{R}$.*

1.1.2. Definición. *Sean S_1 y S_2, subconjuntos no vacíos en $\mathbb{R}$, y sea H una función cuyo dominio es $S_1 \times S_2$. Sea B un rectángulo que tiene todos sus vertices en el Dom H. Entonces, el H-volumen de B está dado por*

$$\begin{aligned} V_H(B) &= H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2)) + H(x_1, y_1) \qquad (1.1) \\ &= \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y). \end{aligned}$$

donde $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$.

Siendo $\Delta_{x_1}^{x_2} H(x,y) = H(x_2,y) - H(x_1,y)$ y
$\Delta_{y_1}^{y_2} H(x,y) = H(x,y_2) - H(x,y_1)$.

Esta definición da una "medida" para un rectángulo B que se encuentra dentro del dominio de la *función real 2-valuada H*, donde sólo se pide que los vértices se encuentren en el dominio de la función.

1.1.3. Definición. *Una función real 2-valuada es 2-creciente si $V_H(B) \geq 0$, para todos los rectángulos B cuyos vertices pertenecen al Dom H.*

1.1.4. Ejemplo. Sea H una función definida en I^2 por $H(x,y) = max(x,y)$.

Si $B = I^2$, entonces $V_H(I^2) = H(1,1) - H(1,0) - H(0,1) + H(0,0) = -1 < 0$. Por lo tanto H no es 2-creciente. ■

1.1.5. Ejemplo. Sea H una función definida en I^2 por

$$H(x,y) = (2x-1)(2y-1).$$

Sea $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subset I^2$, entonces

$$\begin{aligned} V_H(B) &= H(x_2,y_2) - H(x_2,y_1) - H(x_1,y_2)) + H(x_1,y_1) \\ &= (2y_2-1)(2x_2-2x_1) - (2y_1-1)(2x_2-2x_1) \\ &= 4(x_2-x_1)(y_2-y_1) \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $H(x,y)$ es 2-creciente. Si $F(x) = H(x,y_0) = (2x-1)(2y_0-1)$ donde y_0 representa cualquier valor en el intervalo $(0,1/2)$, $F(x)$ es decreciente. Igual pasa si $G(y) = H(x_0,y) = (2x_0-1)(2y-1)$ donde $x_0 \in (0,1/2)$, entonces $G(y)$ es decreciente. Para los otros casos $F(x)$ y $G(y)$ son crecientes. ■

En este ejemplo se ve que si una función es 2-creciente esto no implica que la función sea creciente en cada argumento.

Partiendo de las definiciones del H-volumen de un cuadrado B y de la función 2-creciente, se dan los siguientes lemas que servirán más tarde para establecer la continuidad de las cópulas.

1.1.6. Lema. *Sean S_1 y S_2 subconjuntos no-vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$, y sea H una función 2-creciente con $Dom\, H = S_1 \times S_2$. Sean $x_1, x_2 \in S_1$ tales que $x_1 \leq x_2$ y sean $y_1, y_2 \in S_2$ tales que $y_1 \leq y_2$. Entonces la función $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ es creciente en S_1, y la función $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ es creciente en S_2.*

Demostración: Sean S_1, S_2 no vacíos, tales que $S_1 y S_2 \subset \overline{\mathbb{R}}$, H una función 2-creciente con $Dom\, H = S_1 \times S_2$ y $F(t) = H(t, y_2) - H(t, y_1)$.

Sea el rectángulo $B := [t, t+h] \times [y_1, y_2] \subset Dom\, H$. Como H es 2-creciente se tiene que $V_H(B) \geq 0$, es decir

$$H(t+h, y_2) - H(t+h, y_1) \geq H(t, y_2) - H(t, y_1)$$

entonces $F(t+h) \geq F(t)$, por lo tanto F es creciente en S_1.

Sea $G(t) = H(x_2, t) - H(x_1, t)$ y el rectángulo $C = [x_1, x_2] \times [t, t+h] \subset Dom\, H$. Analogamente se obtiene que G es creciente en S_2. □

1.1.7. Definición. *Sean $a_1 = \inf S_1$ y $a_2 = \inf S_2$, tales que $a_1 \in S_1$ y $a_2 \in S_2$. Se dice que la función $H : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$ está fija si $H(x, a_2) = 0$ y $H(a_1, y) = 0$, para todo $(x, y) \in S_1 \times S_2$.*

Si en el Lema 1.1.6 se agrega la hipótesis de que el ínfimo de S_1 pertenece a S_1 y el ínfimo de S_2 pertenece a S_2. Entonces si H es una función fija 2-creciente entonces es creciente en cada argumento, lo cual se ilustra en el resultado siguiente.

1.1.8. Lema. *Sean S_1 y S_2 subconjuntos no-vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$, y sea H una función fija 2-creciente con $Dom\, H = S_1 \times S_2$. Entonces H es creciente en cada argumento.*

Demostración: Sean $a_1 = \inf S_1$ y $a_2 = \inf S_2$, tales que $a_1 \in S_1$ y $a_2 \in S_2$, como H *está fija* entonces $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$ para todo $(x, y) \in S_1 \times S_2$. Sustituyendo $x_1 = a_1$ y $y_1 = a_2$ en el Lema 1.1.6 se tiene que H es creciente en cada argumento. □

1.1.9. Definición. *Sean $b_1 = \sup S_1 \in S_1$ y $b_2 = \sup S_2 \in S_2$ y $H : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$, entonces H tiene marginales F y G dadas por:*

$$F(x) := H(x, b_2) \quad \text{para toda } x \in S_1 := Dom\, F, \text{ y}$$
$$G(y) := H(b_1, y) \quad \text{para toda } y \in S_2 := Dom\, G.$$

1.1.10. Ejemplo. Sea H una función con dominio en $\overline{\mathbb{R}}^2$ dada por

$$H(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}.$$

Sea $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \in Dom\, H$

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2)) + H(x_1, y_1)$$
$$= \frac{(e^{y_2} - e^{y_1})(e^{x_2} - e^{x_1})(2 + e^{y_2} + e^{y_1} + e^{x_2} + e^{x_1})}{(e^{x_2} + e^{y_2} + 1)(e^{x_2} + e^{y_1} + 1)(e^{x_1} + e^{y_2} + 1)(e^{x_1} + e^{y_1} + 1)} \geq 0,$$

Entonces H es 2-creciente, donde el $Dom\, F = Dom\, G := [-\infty, \infty]$, como $H(x, -\infty) = (1 + e^{-x} + e^{\infty})^{-1} = 0$ y $H(-\infty, y) = (1 + e^{\infty} + e^{-y})^{-1} = 0$, entonces H está fija y sus marginales son: $F(x) = H(x, +\infty) = (1 + e^{-x} + e^{-\infty})^{-1} = (1 + e^{-x})^{-1}$, y $G(y) = H(+\infty, y) = (1 + e^{-\infty} + e^{-y})^{-1} = (1 + e^{-y})^{-1}$, donde $F(x)$ y $G(y)$ son crecientes. ∎

1.1.11. Lema. *Sean S_1 y S_2 subconjuntos no-vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$, y sea H una función fija 2-creciente con marginales F y G, donde $Dom\, H = S_1 \times S_2$. Sean (x_1, y_1) y (x_2, y_2) puntos en $S_1 \times S_2$. Entonces*

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Demostración:

$$H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1).$$

Aplicando la desigualdad del triángulo

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|,$$

como H está fija, es 2 creciente y tiene marginales cumple con los Lemas 1.1.6 y 1.1.8.
Sean $a_1 = \inf S_1$, $a_2 = \inf S_2$, $b_1 = \sup S_1$ y $b_2 = \sup S_2$, entonces
$H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$, $H(x, b_2) = F(x)$ y $H(b_1, y) = G(y)$.
Como H es *2-creciente* en cada argumento, se cumple

$$F(x_2) = H(x_2, b_2) \geq H(x_2, y_2) \geq H(x_2, a_2) \geq 0 \qquad \text{para toda } x_2 \in S_1.$$

$F(x_1) = H(x_1, b_2) \geq H(x_1, y_2) \geq H(x_1, a_2) \geq 0$ para toda $x_1 \in S_1$.

Como H(x) es 2-creciente, y creciente en cada argumento entonces si $x_2 \leq x_1$ se tiene que

$F(x_2) - F(x_1) \geq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \geq 0$, por lo tanto

$$|F(x_2) - F(x_1)| \geq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)|. \tag{1.2}$$

El mismo argumento se emplea para $G(y)$, por lo que

$$|G(y_2) - G(y_1)| \geq |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|. \tag{1.3}$$

De las ecuaciones (1.2) y (1.3) se obtiene que

$$\begin{aligned} |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| &\leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \\ &\leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|. \end{aligned}$$ □

1.2. Cópulas

Primero definiremos las *subcópulas*, que son un caso particular de las funciones *fijas 2-crecientes*.

1.2.1. Definición. *Una subcópula es una función C' con las siguientes propiedades:*

1. *Dom $C' = S_1 \times S_2$, donde S_1 y $S_2 \subset I$ y contienen al 0 y al 1.*
2. *C' es una función fija 2-creciente.*
3. *Para toda $u \in S_1$ y para toda $v \in S_2$,*

$$C'(u, 1) = u \quad y \quad C'(1, v) = v. \tag{1.4}$$

Por lo que para cada $(u, v) \in$ *Dom* C', $0 \leq C'(u, v) \leq 1$, por lo tanto el *Ran* C' es también un subconjunto de **I**.

1.2.2. Definición. *Una cópula es una subcópula C cuyo dominio es I^2, es decir una cópula es una función $C : I^2 \to I$ con las siguientes propiedades:*

1. Para toda $u \in \mathbf{I}$

$$C(u,0) = 0 = C(0,u). \tag{1.5}$$

2. Para toda $u \in \mathbf{I}$

$$C(u,1) = u \quad y \quad C(1,u) = u. \tag{1.6}$$

3. Para cualquier u_1, u_2, v_1, v_2 en $\mathbf{I}$, con $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$,

$$C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \geq 0. \tag{1.7}$$

La ecuación (1.5) establece que las cópulas son funciones fijas, la (1.7) asigna a cada rectángulo $[u_1,u_2] \times [v_1,v_2]$ en I^2 un valor no negativo, por lo tanto son funciones *2-crecientes*.

1.2.3. Ejemplo. Sean C_0 y C_1 cópulas, y algún $\theta \in \mathbf{I}$. Entonces $(1-\theta)C_0 + \theta\, C_1$ es también una cópula.

Sea $C^*(u,v) = (1-\theta)C_0(u,v) \ + \ \theta\, C_1(u,v)$, entonces

1. Para cada $u \ \in \mathbf{I}$
   $C^*(u,0) = (1-\theta)C_0(u,0) \ + \ \theta\, C_1(u,0) = 0$, y
   $C^*(0,u) = (1-\theta)C_0(0,u) \ + \ \theta\, C_1(0,u) = 0$.
2. Para cada $u \ \in \mathbf{I}$
   $C^*(u,1) = (1-\theta)C_0(u,1) \ + \ \theta\, C_1(u,1) = (1-\theta)u + \theta\, u = u$ y
   $C^*(1,u) = (1-\theta)C_0(1,u) \ + \ \theta\, C_1(1,u) = (1-\theta)u + \theta\, u = u$.
3. Para cada u_1, u_2, v_1, $v_2 \in \mathbf{I}$, donde $u_1 \leq u_2$; $v_1 \leq v_2$.
   Sea $B := [u_1,u_2] \times [v_1,v_2]$, entonces

$$\begin{aligned} V_{C^*}(B) &= C^*(u_2,v_2) - C^*(u_2,v_1) - C^*(u_1,v_2) + C^*(u_1,v_1) \\ &= (1-\theta)V_{C_0}(B) + \theta V_{C_1}(B) \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $C^*(u,v)$ es una cópula. ∎

1.2.4. Teorema. *Sea C' una subcópula. Entonces para cada $(u,v) \in DomC'$*

$$\max(u+v-1,0) \leq C'(u,v) \leq \min(u,v). \tag{1.8}$$

Demostración:
Sea (u,v) un punto cualquiera en *Dom* C' y C' una subcópula. Entonces $C'(u,v) \leq C'(u,1) = u$ y $C'(u,v) \leq C'(1,v) = v$ lo que implica que $C'(u,v) \leq min(u,v)$.

Sea $B := [u,1] \times [v,1] \subset I^2$, entonces $V_{C'}(B) = C'(1,1) - C'(1,v) - C'(u,1) + C'(u,v) = 1 - v - u + C'(u,v) \geq 0$, por lo que $C'(u,v) \geq u + v - 1$, pero $C'(u,v) \geq 0$ por lo cual $C'(u,v) \geq \max(u+v-1,0)$.

Por lo tanto $\max(u+v-1,0) \leq C'(u,v) \leq \min(u,v)$. □

Como toda cópula es una subcópula entonces la desigualdad (1.8) es válida también para cópulas. Entonces para cada cópula C y cualquier $(u,v) \in \mathbf{I}^2$ se cumple:

$$\max(u+v-1,0) = W(u,v) \leq C(u,v) \leq M(u,v) = \min(u,v). \tag{1.9}$$

A la ecuación (1.9) se le conoce como *desigualdad de Fréchet-Hoeffding*. Siendo de interés las funciones $W(u,v)$, $M(u,v)$ y $\Pi(u,v) = uv$, conocidas respectivamente como *la cota inferior de Fréchet-Hoeffding*, *la cota superior de Fréchet-Hoeffding* y la *cópula producto*.

En el siguiente ejemplo se demuestra que las funciones $\Pi(u,v)$, $M(u,v)$ y $W(u,v)$ son cópulas.

1.2.5. Ejemplo. $\Pi(u,v) = uv$, $M(u,v)$ y $W(u,v)$ son cópulas.

Sea $B := [u_1,u_2] \times [v_1,v_2]$, donde $u_1,u_2,v_1,v_2, \in \mathbf{I}$ tales que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$.

a.) $\Pi(u,v) = uv$.

1. Para todo $u \in \mathbf{I}$ $\Pi(u,0) = 0$ y $\Pi(0,u) = 0$.
2. Para todo $u \in \mathbf{I}$ $\Pi(u,1) = u$ y $\Pi(1,u) = u$.
3. $V_\Pi(B) = \Pi(u_2,v_2) - \Pi(u_2,v_1) - \Pi(u_1,v_2) + \Pi(u_1,v_1)$
   $= u_2v_2 - u_2v_1 - u_1v_2 + u_1v_1 = (u_2-u_1)(v_2-v_1) \geq 0.$

Por lo que $\Pi(u,v) = uv$ es una cópula.

b.) $M(u,v) = \min(u,v)$.

1. Para toda $u \in \mathbf{I}$; $M(u,0) = \min(u,0) = 0$ y $M(0,u) = \min(0,u) = 0$.
2. Para toda $u \in \mathbf{I}$; $M(u,1) = \min(u,1) = u$ y $M(1,u) = \min(1,u) = u$.
3. $V_M(B) = M(u_2,v_2) - M(u_2,v_1) - M(u_1,v_2) + M(u_1,v_1)$.

Basta con analizar los siguientes casos:
Caso 1: Si $u_i \geq v_1$, $i = 1,2$, entonces $V_M(B) = 0$.
Caso 2: Si $u_i < v_1$, $i = 1,2$, entonces $V_M(B) = 0$.
Caso 3: Si $u_1 < v_1$, $u_2 \geq v_1$ y v_2 , entonces $V_M(B) = v_2 - v_1 \geq 0$.
Caso 4: Si $u_1 < v_1$, $u_2 \geq v_1$, $u_2 < v_2$, entonces $V_M(B) = u_2 - v_1 \geq 0$.
Caso 5: Si $u_1 \geq v_1, u_1 < v_2, u_2 \geq v_1, u_2 < v_2$, entonces $V_M(B) = u_2 - u_1 \geq 0$.

Por lo tanto $V_M(B) \geq 0$, y $M(u,v) = \min(u,v)$ es una cópula.

c.) $W(u,v) = \max(u+v-1,0)$.

1. Para toda $u \in \mathbf{I}$; $W(u,0) = 0$ y $W(0,u) = 0$.
2. Para toda $u \in \mathbf{I}$; $W(u,1) = u$ y $W(1,u) = u$.
3. $V_W(B) = W(u_2,v_2) - W(u_2,v_1) - W(u_1,v_2) + W(u_1,v_1)$.

Basta con analizar los siguientes casos:
Caso 1: Si $u_1 + v_i \leq 1$, $u_2 + v_i \leq 1$, $i = 1,2$, entonces $V_W(B) = 0$.
Caso 2: Si $u_1 + v_i \geq 1$, $u_2 + v_i \geq 1$, $i = 1,2$, entonces $V_W(B) = 0$.
Caso 3: Si $u_1 + v_i \leq 1$, $u_2 + v_i \geq 1$, $i = 1,2$, entonces $V_W(B) = v_2 - v_1 \geq 0$.
Caso 4: Si $v_1 + u_i \leq 1$, $v_2 + u_i \geq 1$, $i = 1,2$, entonces $V_W(B) = u_2 - u_1 \geq 0$.
Caso 5: Si $u_2 + v_2 > 1$, $v_1 + u_1$, $v_2 + u_1$, $v_1 + u_2 \leq 1$, entonces
$V_W(B) = u_2 + v_2 - 1 \geq 0$.
Caso 6: Si $v_1 + u_1 \leq 1$, $v_2 + u_1$, $v_2 + u_2$, $u_2 + v_1 > 1$, entonces
$V_W(B) = 1 - v_1 - u_1 \geq 0$.

Entonces $V_W(B) \geq 0$ y $W(u,v) = max(u+v-1,0)$ es una cópula. ∎

1.2.6. Ejemplo. Una función de cópulas no es necesariamente una cópula, por ejemplo la media geométrica de W y Π no es una cópula.

Sean $W(u,v) = max(u+v-1,0)$ y $\Pi(u,v) = uv$,

$$G(u,v) = (W(u,v)\Pi(u,v))^{1/2} = \begin{cases} (uv(u+v-1))^{1/2} & u+v \geq 1, \\ 0 & u+v \leq 1. \end{cases}$$

1. Para toda $u \in \mathbf{I}$; $G(u,0) = 0 = G(0,u)$.
2. Para toda $u \in \mathbf{I}$; $G(u,1) = u$ $G(1,u) = u$.
3. Sea $B := \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right] \times \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$, entonces

$$V_G(B) = G\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) - G\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right) - G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) < 0.$$

Por lo tanto $G(u,v)$ no es una cópula. ∎

El siguiente teorema establece la continuidad de las cópulas via la condición de *Lipschitz* sobre I^2.

1.2.7. Teorema. *Sea C una cópula. Entonces para cada u_1, u_2, v_1, $v_2 \in Dom\, C$,*

$$|C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \tag{1.10}$$

Demostración: Sea C una cópula, entonces

$$C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1) = C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_2) - C(u_1,v_1).$$

Aplicando la desigualdad del triángulo

$$|C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1)| \leq |C(u_2,v_2) - C(u_1,v_2)| + |C(u_1,v_2) - C(u_1,v_1)|.$$

Como C es una cópula se cumple que $C(u_2,v_2) \leq C(u_2,1) = u_2$ y $C(u_1,v_1) \leq C(u_1,1) = u_1$, aplicando el Lema 1.1.11, se tiene que $|C(u_2,v_2) - C(u_1,v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$. □

De la ecuación (1.10) se sigue que cualquier cópula C es uniformemente continua sobre su dominio.

1.2.8. Definición. *Sea C una cópula, y d cualquier número que pertenezca a I. La sección horizontal de C en d es la función de $I \to I$ dada por $t \mapsto C(t,d)$; la sección vertical de C en d es la función de $I \to I$ dada por $t \mapsto C(d,t)$, y la sección diagonal de C es la función de $\delta_C : I \to I$ definida por $\delta_C(t) = C(t,t)$.*

Para cualquier cópula C, usando las cotas de Fréchet-Hoeffding se tiene que:

1. $\max(2t-1,0) \leq \delta_C(t) \leq t$ para toda $t \in \mathbf{I}$.
2. Si $\delta_C(t) = \delta_M(t)$ para toda $t \in \mathbf{I}$ entonces, $C(u,v) = M(u,v)$.

1.2.9. Corolario. *Las secciones horizontales, verticales y diagonales de una cópula C son crecientes y uniformemente continuas.*

Demostración: La sección horizontal de una cópula C, $t \mapsto C(t,a)$ es creciente por el Lema 1.2.7, de aquí que

$$|C(t_1,a) - C(t_2,a)| \leq |t_1 - t_2|,$$

por lo tanto $C(t,a)$ es uniformemente continua.

El caso vertical es análogo.

La sección diagonal de C es la función $\delta_C : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$, de donde

$$|\delta_C(t_1) - \delta_C(t_2))| \leq |C(t_1,t_1) - C(t_2,t_2)| \leq 2|t_1 - t_2|,$$

por lo tanto $\delta_C(t)$ es uniformemente continua. □

En la figura 1.1, se presentan las superficies de las cópulas M,W y Π De la definición de cópula y del Teorema 1.2.7, la gráfica de cualquier cópula es una superficie continua dentro del cubo unitario $\mathbf{I}^3$.

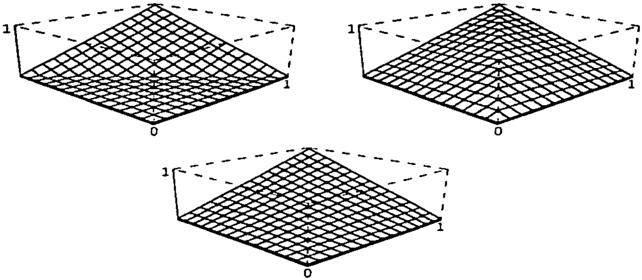

Figura 1.1. Cópulas M, W y Π.

Para presentar la gráfica de una cópula de un manera simple se pueen utilizar los diagramas de contorno, esto es, el conjunto en $\mathbf{I}^2$ dado por $\{C(u,v) = a \mid a \in \mathbf{I}\}$. En la figura 1.2 se presentan las curvas de nivel de las cópulas M, W y Π.

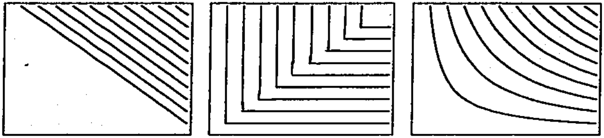

Figura 1.2. Contornos de las cópulas M, W y Π.

1.2.10. Teorema. *Sea C una cópula. Para cada $v \in I$, la derivada parcial $\partial C/\partial u$ existe para casi toda u con respecto a la medida de Lebesgue, y para tal v y u*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \leq 1. \tag{1.11}$$

Similarmente, para cualquier $u \in I$, la derivada parcial $\partial C/\partial v$ existe para casi toda v, y para tal u y v,

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u,v) \leq 1. \tag{1.12}$$

Además, las funciones

$$u \mapsto \frac{\partial C(u,v)}{\partial v} \; y \; v \mapsto \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$$

están definidas y son crecientes casi en cualquier parte en I.

Demostración: La existencia de las derivadas $\partial C/\partial u$ y $\partial C/\partial v$ es inmediata por el Corolario 1.2.9, la sección vertical y horizontal son funciones crecientes y continuas, por lo tanto derivables casi en todas partes. Para demostrar que se cumple (1.11), sabemos que C es creciente por lo tanto se cumple que para $h > 0$,

$$C(u+h,v) - C(u,v) \geq 0.$$

Por lo tanto
$$\frac{C(u+h,v)-C(u,v)}{h} \geq 0,$$
entonces si $h \to 0$
$$\frac{\partial}{\partial u}C(u,v) = \lim_{h\to 0}\frac{C(u+h,v)-C(u,v)}{h} \geq 0. \tag{1.13}$$
Por el Teorema 1.2.7 se cumple que
$$\lim_{h\to 0}\frac{|C(u+h,v)-C(u,v)|}{h} \leq 1. \tag{1.14}$$
De (1.13) y (1.14) se tiene,
$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u}C(u,v) \leq 1.$$
Si $v_1 \leq v_2$, entonces $u \mapsto C(u,v_2)-C(u,v_1)$ es creciente.

Por lo tanto
$$\frac{\partial}{\partial u}[C(u,v_1)-C(u,v_2)]$$
está definida y es no negativa en casi todo $\mathbf{I}$, además $v \mapsto \frac{\partial}{\partial u}C(u,v)$ es una función creciente en casi todos lados de $\mathbf{I}$.

Se utilizan los mismos resultados para $u \mapsto \frac{\partial}{\partial v}C(u,v)$. □

Drouet y Kotz(2001) dan un ejemplo de este teorema, consideremos la cópula de *Gumbel-Hougaard*
$$C_\theta(u,v) = exp(-[(-ln\, u)^\theta + (-ln\, v)^\theta]^{1/\theta})$$
$$\tfrac{\partial}{\partial u}C_\theta = \tfrac{(-ln\, u)}{u}^{\theta-1} exp(-[(-ln u)^\theta+(-ln v)^\theta]^{1/\theta})[(-ln u)^\theta+(-ln v)^\theta]^{-\frac{\theta-1}{\theta}}$$

Donde $u \in (0,1)$ y para $\theta \in \mathbb{R}$ donde $\theta > 1$, $\frac{\partial}{\partial u}C_\theta(u,v)$ es una función estrictamente creciente de v.

Una propiedad que sugiere la desigualdad de Fréchet-Hoeffding, es el orden ya que cualquier cópula se encuentra entre $W(u,v)$ y $M(u,v)$, por lo que no existe cópula más grande que M ni más chica que W. Por ejemplo $\Pi(u,v) = uv$ es una cópula, siguiendo la desigualdad (1.9) se tiene que
$$W(u,v) \leq \Pi(u,v) \leq M(u,v).$$

1.2.11. Definición. *Si C_1 y C_2 son cópulas, se dice que C_1 es más chica que C_2, si $C_1(u,v) \leq C_2(u,v)$ para todo u, $v \in I$. Se denota por $C_1 \prec C_2$.*

1.2.12. Ejemplo. ¿ Existe un orden entre

$$C(u,v) = \frac{W(u,v)+M(u,v)}{2} \quad \text{y} \quad \Pi(u,v) = uv \text{ ?}$$

No se pueden comparar ya que

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} = & \; C\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right) > \Pi\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \qquad \text{y} \\ \frac{1}{8} = & \; C\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}\right) < \Pi\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}, \end{aligned}$$

por lo que no se cumple que $C(u,v) \leq \Pi(u,v)$ para todo (u,v). ■

1.2.13. Definición. *Se dice que una familia de cópulas paramétricas $\{C_\theta\}$ está ordenada positivamente, si $C_\alpha \prec C_\beta$ cuando $\alpha \leq \beta$; y ordenada negativamente si $C_\alpha \succ C_\beta$ cuando $\alpha \leq \beta$.*

1.2.14. Ejemplo. La familias de cópula *Ali-Mikhail-Haq* está ordenada positivamente

$$C_\theta(u,v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)} \qquad \theta \in [-1,1]. \tag{1.15}$$

Sean α y $\beta \in [-1,1]$, tal que $\alpha \leq \beta$,

$$\frac{C_\alpha(u,v)}{C_\beta(u,v)} = \frac{1-\beta(1-u)(1-v)}{1-\alpha(1-u)(1-v)} \leq 1.$$

Entonces $C_\alpha \prec C_\beta$. ■

1.3. Teorema de Sklar

La relación que guarda la distribución bivariada con sus marginales univariadas se aclara con el Teorema de Sklar, siendo central para la teoría de cópulas. Además es la base de muchas aplicaciones en estadística.

1.3.1. Definición. *Una función de distribución generalizada es una función F con dominio en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que:*

1. *F es creciente, y*
2. *$F(-\infty) = 0$ y $F(+\infty) = 1$.*

1.3.2. Ejemplo. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$, la distribución uniforme en $[a, b]$ es la función U_{ab} dada por

$$U_{ab}(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\infty, a), \\ \dfrac{x-a}{b-a} & x \in [a, b], \\ 1 & x \in (b, \infty]. \end{cases}$$

$U_{ab}(x)$ es una función de distribución ya que satisface las condiciones de la Definición 1.3.1. ■

1.3.3. Definición. *Una función de distribución conjunta generalizada es una función H con dominio en $\overline{\mathbb{R}}^2$, que satisface:*

1. *H es 2-creciente,*
2. *$H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ y*
3. *$H(+\infty, +\infty) = 1$.*

Una función de distribución conjunta generalizada H es una función fija, con marginales F y G dadas por $F(x) = H(x, \infty)$ y $G(y) = H(\infty, y)$, donde F y G son también funciones de distribución generalizadas.

En estas definiciones de función de distribución generalizada no se pide la continuidad por la derecha, como en el caso de las funciones de distribución para variables aleatorias.

1.3.4. Ejemplo. Sea H una función con dominio $\overline{\mathbb{R}}^2$ dada por

$$H(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}.$$

Ya se demostró en el Ejemplo 1.1.10 que $H(x,y)$ es 2-creciente, además es una función fija, $H(-\infty,y) = 0 = H(x,-\infty)$ y $H(\infty,\infty) = 1$, por tanto $H(x,y)$ es una función de distribución generalizada.

Las marginales de $H(x,y)$ son de acuerdo a lo obtenido en el Ejemplo 1.1.10 $F(x) = (1+e^{-x})^{-1}$ y $G(y) = (1+e^{-y})^{-1}$.

$F(x)$ y $G(y)$ satisfacen las condiciones de la Definición 1.3.1, por lo cual son funciones de distribución generalizadas conocidas como *funciones de distribución logísticas.* ■

1.3.5. Lema. *Sea H una función de distribución generalizada con funciones marginales F y G. Entonces existe una única subcópula C' tal que*

1. *$\mathrm{Dom}\, C' = \mathrm{Ran}\, F \times \mathrm{Ran}\, G$,*
2. *Para todo x, y en $\overline{\mathbb{R}}$, $H(x,y) = C'(F(x), G(y))$.*

Demostración: Como H es una función de distribución generalizada, H está fija y es 2-creciente, con dominio en $\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}} = S_1 \times S_2$, por lo que satisface las hipótesis del Teorema 1.1.11.
Sean F y G las marginales de H, entonces para (x_1,y_1) y (x_2,y_2) en $\overline{\mathbb{R}}^2$ se cumple

$$|H(x_2,y_2) - H(x_1,y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Si $F(x_2) = F(x_1)$ y $G(y_2) = G(y_1)$, entonces $H(x_2,y_2) = H(x_1,y_1)$.

El conjunto

$$\{((F(x), G(y)), H(x,y)) \mid x,\ y \in \overline{\mathbb{R}}\},$$

define una función *real 2-valuada C'*, que cumple:

1. $\mathrm{Dom}\, C' = \mathrm{Ran}\, F \times \mathrm{Ran}\, G$ donde si contiene al 0 y al 1 ya que F y G son funciones de distribución.
2. C' está fija y es 2-creciente, ya que H es una función de distribución.
3. $C'(F(x), G(+\infty)) = C'(F(x), 1) = H(x,+\infty) = F(x)$,
   $C'(F(+\infty), G(y)) = C'(1, G(y)) = H(+\infty, y) = G(y)$.

Entonces C' es una subcópula. □

1.3.6. Lema. *Sea C' una subcópula. Entonces existe una cópula C tal que $C(u,v) = C'(u,v)$ para todo $(u,v) \in Dom\, C'$. Cualquier subcópula se puede extender a una cópula, que no es única.*

Demostración: Sea C' una subcópula, tal que $Dom\, C' = S_1 \times S_2$.
Para toda $u_1, u_2, v_1, v_2 \in Dom\, C'$ se cumple que

$$|C'(u_2,v_2) - C'(u_1,v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|,$$

entonces C' es uniformemente continua. Por el teorema de extensión continua, C' se puede extender a una función C'' continua donde el $Dom\, C'' = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$, $\overline{S_1}$ y $\overline{S_2}$ son las cerraduras de S_1 y S_2 respectivamente, por lo cual $S_1 \subset \overline{S_1}$ y $S_2 \subset \overline{S_2}$, entonces $C''(a,b) = C'(a,b)$ si $(a,b) \in Dom\, C'$, C'' es una subcópula ya que satisface:

1. $Dom\, C'' = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$, donde $\overline{S_1} \subset \mathbf{I}$ y $\overline{S_2} \subset \mathbf{I}$ contienen al $\{0,1\}$, además
2. C'' está fija, es 2-creciente y cumple con la ecuacion (1.4).

Como C'' es una subcópula, utilizando una interpolación la subcópula C'' se puede extender a una función con dominio en $\mathbf{I}^2$.

Sea $(a,b) \in I^2$, sean $a_1 = \inf \overline{S_1}$ y $a_2 = \sup \overline{S_1}$ y sean $b_1 = \inf \overline{S_2}$ y $b_2 = \sup \overline{S_2}$, donde $a_1 \leq a \leq a_2$ y $b_1 \leq b \leq b_2$, si $a \in \overline{S_1}$ entonces $a_1 = a = a_2$, si $b \in \overline{S_2}$ entonces $b_1 = b = b_2$.

Sean

$$\lambda_1 = \begin{cases} \dfrac{a - a_1}{a_2 - a_1} & si\ a_1 < a_2, \\ 1 & si\ a_1 = a_2. \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} \dfrac{b - b_1}{b_2 - b_1} & si\ b_1 < b_2, \\ 1 & si\ b_1 = b_2. \end{cases}$$

Cuando $(a,b) \notin Dom\, C'$ se define una interpolación donde λ_1 y μ_1 son lineales con respecto a a y b.

$$\begin{aligned} C(a,b) &= (1-\lambda_1)(1-\mu_1)C''(a_1,b_1) + (1-\lambda_1)\mu_1 C''(a_1,b_2) \\ &+ \lambda_1(1-\mu_1)C''(a_2,b_1) + \lambda_1\mu_1 C''(a_2,b_2), \end{aligned} \tag{1.16}$$

$Dom\, C = I^2$, ya que esta es una interpolación de C'' con λ_1 y μ_1.

Para cualquier $(a,b) \in Dom\, C''$, $C(a,b) = C''(a,b)$.

$$\begin{aligned} C(a,0) &= (1-\lambda_1)(1-\mu_1)C''(a_1,0) + (1-\lambda_1)\mu_1 C''(a_1,0) \\ &+ \lambda_1(1-\mu_1)C''(a_2,0) + \lambda_1\mu_1 C''(a_2,0) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(a,1) &= (1-\lambda_1)(1-\mu_1)C''(a_1,1) + (1-\lambda_1)\mu_1 C''(a_1,1) \\ &+ \lambda_1(1-\mu_1)C''(a_2,1) + \lambda_1\mu_1 C''(a_2,1) \\ &= (1-\lambda_1)(1-\mu_1)a_1 + (1-\lambda_1)\mu_1 a_1 + \lambda_1(1-\mu_1)a_2 + \lambda_1\mu_1 a_2 \\ &= \frac{(a_2-a)a_1}{a_2-a_1} + \frac{(a-a_1)a_2}{a_2-a_1} \\ &= a. \end{aligned}$$

Igualmente

$$C(1,b) = b.$$

Para que C sea una cópula falta demostrar que C es una función 2-creciente. Sea $(c,d) \in I^2$ tal que $a \le c$ y $b \le d$ y sean c_1, d_1, c_2, d_1, λ_2, μ_2 donde

$$\lambda_2 = \begin{cases} \dfrac{c-c_1}{c_2-c_1} & si\ c_1 < c_2, \\ 1 & si\ c_1 = c_2. \end{cases}$$

$$\mu_2 = \begin{cases} \dfrac{d-d_1}{d_2-d_1} & si\ d_1 < d_2, \\ 1 & si\ d_1 = d_2. \end{cases}$$

Sea $B := [a,c] \times [b,d]$, para calcular $V_C(B)$ existen varios casos, ya que depende si un punto pertenece o no a $\overline{S_1}$ entre a y c, y si existe un punto o no en $\overline{S_2}$ entre b y d.

Un caso simple es cuando no existen puntos entre a y c, ni entre b y d por tanto $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$, $d_1 = b_1$ y $d_2 = b_2$.

$$V_C(B) = V_C([a,c] \times [b,d]) = C(c,d) - C(c,b) - C(a,d) + C(a,b). \quad (1.17)$$

$$\begin{aligned} C(c,d) &= (1-\lambda_2)(1-\mu_2)C''(c_1,d_1) + (1-\lambda_2)\mu_2)C''(c_1,d_2) \\ &+ \lambda_2(1-\mu_2)C''(c_2,d_1) + \lambda_2\mu_2 C''(c_2,d_2) \\ &= (1-\lambda_2)(1-\mu_2)C''(a_1,b_1) + (1-\lambda_2)\mu_2 C''(a_1,b_2) \end{aligned}$$

$$+ \quad \lambda_2(1-\mu_2)C''(a_2,b_1) + \lambda_2\mu_2 C''(a_2,b_2).$$

$$\begin{aligned} C(c,b) &= (1-\lambda_2)(1-\mu_1)C''(a_1,b_1) + (1-\lambda_2)\mu_1)C''(a_1,b_2) \\ &+ \lambda_2(1-\mu_1)C''(a_2,b_1) + \lambda_2\mu_1 C''(a_2,b_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(a,d) &= (1-\lambda_1)(1-\mu_2)C''(a_1,b_1) + (1-\lambda_1)\mu_2)C''(a_1,b_2) \\ &+ \lambda_1(1-\mu_2)C''(a_2,b_1) + \lambda_1\mu_2 C''(a_2,b_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(a,b) &= (1-\lambda_1)(1-\mu_1)C''(a_1,b_1) + (1-\lambda_1)\mu_1)C''(a_1,b_2) \\ &+ \lambda_1(1-\mu_1)C''(a_2,b_1) + \lambda_1\mu_1 C''(a_2,b_2). \end{aligned}$$

Sustituyendo en (1.17) se tiene que

$$\begin{aligned} V_C(B) &= [(1-\lambda_2)(1-\mu_2) - (1-\lambda_2)(1-\mu_1) - (1-\lambda_1)(1-\mu_2) \\ &+ (1-\lambda_1)(1-\mu_1)][C''(a_1,b_1) - C''(a_1,b_2) - C''(a_2,b_1) + \\ &+ C''(a_2,b_2)] \\ &= [(\lambda_2-\lambda_1)(\mu_2-\mu_1)]V_C([a_1,a_2]\times[b_1,b_2]) \geq 0, \end{aligned}$$

ya que $\lambda_2 \geq \lambda_1$ si $a \leq c$ y $\mu_2 \geq \mu_1$ si $b \leq d$.

El caso extremo es cuando al menos existe un punto entre a y c, y entre b y d por tanto $a < a_2 \leq c_1 \leq c$ y $b < b_2 \leq d_1 \leq d$.

$$\begin{aligned} V_C(B) &= V_C([a,c]\times[b,d]) = C(c,d) - C(c,b) - C(a,d) + C(a,b) \quad (1.18) \\ &= (1-\lambda_2)(1-\mu_2)C''(c_1,d_1) + (1-\lambda_2)\mu_2)C''(c_1,d_2) \\ &+ \lambda_2(1-\mu_2)C''(c_2,d_1) + \lambda_2\mu_2 C''(c_2,d_2) \\ &- (1-\lambda_2)(1-\mu_1)C''(c_1,b_1) - (1-\lambda_2)\mu_1)C''(c_1,b_2) \\ &- \lambda_2(1-\mu_1)C''(c_2,b_1) - \lambda_2\mu_1 C''(c_2,b_2) \\ &- (1-\lambda_1)(1-\mu_2)C''(a_1,d_1) - (1-\lambda_1)\mu_2)C''(a_1,d_2) \\ &- \lambda_1(1-\mu_2)C''(a_2,d_1) - \lambda_1\mu_2 C''(a_2,d_2) \\ &+ (1-\lambda_1)(1-\mu_1)C''(a_1,b_1) + (1-\lambda_1)\mu_1)C''(a_1,b_2) \\ &+ \lambda_1(1-\mu_1)C''(a_2,b_1) + \lambda_1\mu_1 C''(a_2,b_2) \\ &+ \mu_2 C''(a_2,d_2) - \mu_2 C''(a_2,d_2) + \mu_2 C''(a_2,d_1) - \mu_2 C''(a_2,d_1) \\ &+ \lambda_2 C''(c_1,b_2) - \lambda_2 C''(c_1,b_2) + C''(c_1,b_2) - C''(c_1,b_2) \\ &+ \lambda_2 C''(c_2,b_2) - \lambda_2 C''(c_2,b_2) + (1-\lambda_1)C''(a_1,b_2) \\ &- (1-\lambda_1)C''(a_1,b_2) + (1-\mu_1)C''(a_1,b_2) - (1-\mu_1)C''(a_1,b_2) \\ &+ C''(a_2,b_2) - C''(a_2,b_2). \end{aligned}$$

Asociando términos

$$\begin{aligned}
V_C(B) &= \mu_2 V_C([a_2,c_1]\times[d_1,d_2]) + (1-\lambda_1)\mu_2 V_C([a_1,a_2]\times[d_1,d_2])\\
&+ \lambda_2\mu_2 V_C([c_1,c_2]\times[d_1,d_2]) + (1-\lambda_1)V_C([a_1,a_2]\times[b_2,d_1])\\
&+ V_C([a_2,c_1]\times[b_2,d_1]) + \lambda_2 V_C([c_1,c_2]\times[b_2,d_1])\\
&+ (1-\lambda_1)(1-\mu_1)V_C([a_1,a_1]\times[b_1,b_2]) + \mu_2 V_C([a_2,c_1]\times[b_1,b_2])\\
&+ (1-\mu_1)V_C([a_2,c_1]\times[b_1,b_2])\\
&+ \lambda_2(1-\mu_1)V_C([c_1,c_2]\times[b_1,b_2]) \geq 0.
\end{aligned}$$

Los demás casos son combinaciones de los dos anteriores, por lo que C cumple con $V_C(B)\geq 0$ para cualquier B en $Dom\, C$, por lo tanto C es una cópula. □

1.3.7. Ejemplo. Sea (a,b) cualquier punto en $\mathbb{R}^2$, y sea la siguiente función de distribución generalizada

$$H(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } x<a \quad o \quad y<b,\\ 1 & \text{si } x\geq a \quad y \quad y\geq b.\end{cases}$$

Las marginales de $H(x,y)$ son

$$F_a(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\in[-\infty,a)\\ 1 & \text{si } x\in[a,\infty).\end{cases}$$

$$G_b(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y\in[-\infty,b)\\ 1 & \text{si } y\in[b,\infty).\end{cases}$$

Aplicando el Lema 1.3.5 $H(x,y)=C'(F(x),G(y))$ entonces el $Dom\, C'=\{0,1\}\times\{0,1\}$ donde $C'(0,0)=C'(0,1)=C'(1,0)=0$ y $C'(1,1)=1$; extendiendo la subcópula C' a una cópula C de acuerdo al lema anterior donde el $Dom\, C=\mathbf{I}^2$, para todo $(u,v)\in\mathbf{I}^2$ queda $C(u,v)=uv$ la cual es una cópula. ■

1.3.8. *Teorema de Sklar.* *Sea H una función de distribución generalizada conjunta con marginales F y G. Entonces existe una cópula C tal que para todos $(x,y)\in\overline{\mathbb{R}}$,*

$$H(x,y)=C(F(x),G(y)) \tag{1.19}$$

Si F y G son continuas, entonces C es única, por otra parte, C está unicamente determinada sobre $Ran\, F \times Ran\, G$. Si C es una cópula y F y G son funciones de distribución, entonces la función H definida por (1.19) es una función de distribución con marginales F y G.

Demostración:
Para todo $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ existe la cópula $H(x,y) = C(F(x), G(y))$ de acuerdo a los dos lemas anteriores. Si F y G son continuas entonces $Ran\, F = Ran\, G = \mathbf{I}$, y de acuerdo al Lema 1.3.5 la cópula es única. En caso de que F y G no sean continuas C sólo queda determinada por $Ran\, F \times Ran\, G$. □

La ecuación (1.19) establece a través de una cópula la relación que guarda la función de distribución generalizada bivariada con las funciones univariadas. También permite expresar una cópula en términos de una función de distribución conjunta y de las inversas de las marginales. Por esto es necesario definir como se obtienen esas inversas, ya que las marginales pueden no ser crecientes estrictamente, por eso se define la *cuasi-inversa* de una función de distribución.

1.3.9. Definición. *Sea F una función de distribución generalizada. Entonces la cuasi-inversa de F es cualquier función $F^{(-1)}$ con dominio en $\mathbf{I}$ tal que*

1. *Si $t \in Ran\, F$, entonces $F^{(-1)}(t)$ es cualquier $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $F(x) = t$, es decir para toda $t \in Ran\, F$, $F(F^{(-1)}(t)) = t$.*

2. *Si $t \notin Ran\, F$, entonces*

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x | F(x) \geq t\} = \sup\{x | F(x) \leq t\}.$$

Sea $A := \{x | F(x) \geq t\}$ y $B := \{x | F(x) \leq t\}$ donde F es una función de distribución.

Sea $-\infty \leq \ldots \leq x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq \infty$, se tiene que $0 = F(-\infty) \leq \ldots \leq F(x_1) \leq \ldots \leq F(\infty) = 1$.

Sea

1. Si $A = [x_1, \infty]$ y $B = [-\infty, x_1)$, entonces $A \cap B = \phi$, por lo tanto $\inf A = x_1 = \sup B$,

2. Si $A = [x_1, \infty]$ y $B = [-\infty, x_1]$, entonces $A \cap B \neq \phi$, por lo tanto $\inf A = \sup B = x_1$.

Por lo tanto $\inf A = \sup B$.

Si F es estrictamente creciente su cuasi-inversa es la inversa ordinaria y se utiliza la notación común F^{-1}.

1.3.10. Ejemplo. Sea

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1/3 & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$F(x)$ es una función de distribución generalizada con cuasi-inversa

$$F^{(-1)}(t) = \begin{cases} a_0, & \text{si } t = 0, \quad a_0 < 0, \\ 0, & \text{si } 0 < t < 1/3, \\ a_1, & \text{si } t = 1/3, \quad 1/3 < a_1 < 1, \\ 0, & \text{si } 1/3 < t < 1, \\ a_2, & \text{si } t = 1, \quad a_2 \geq 1. \end{cases}$$

■

1.3.11. Corolario. *Sea H, F, G y C' como en el Lema 1.3.5, y sea $F^{(-1)}$ y $G^{(-1)}$ las cuasi-inversas de F y G, respectivamente. Entonces para cualquier $(u, v) \in Dom\, C'$,*

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \tag{1.20}$$

Demostración: Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G, entonces de acuerdo al Lema 1.3.5 $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$ donde $Dom\, C' = Ran\, F \times Ran\, G$.

Sean $u = F(x)$ y $v = G(y)$ funciones de distribución con cuasi-inversas $x = F^{(-1)}(u)$ y $y = G^{(-1)}(v)$).

Por lo que $H(x, y) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v))$, por el teorema de Sklar se tiene que

$$C'(u, v) = C'(F(F^{(-1)}(u)), G(G^{(-1)}(v))) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad \square$$

Este corolario ilustra un método para la construcción de cópulas cuando F y G son funciones continuas.

1.3.12. Ejemplo. Sea

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & \text{si } (x,y) \in [-1,1] \times [0,\infty], \\ 1-e^{-y} & \text{si } (x,y) \in (1,\infty] \times [0,\infty], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

cuyas marginales son

$$H(x,\infty) = F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-\infty,-1) \\ \dfrac{x+1}{2} & \text{si } x \in [-1,1] \\ 1 & \text{si } (x,y) \in (1,\infty] \times [0,\infty]. \end{cases}$$

$$H(\infty,y) = G(y) = \begin{cases} 0 & y \in [-\infty,0) \\ 1-e^{-y} & y \in [0,\infty] \\ 1 & (x,y) \in (1,\infty] \times [0,\infty]. \end{cases}$$

Las cuasi-inversas de $F(x)$ y $G(y)$, donde el $Ran\ F = Ran\ G = \mathbf{I}$ son:
$F^{(-1)}(u) = (2u-1)\mathbb{I}_{[0,1]}(u)$ y $G^{(-1)}(v) = -ln(1-v)\mathbb{I}_{[0,1]}(v)$.

Para construir la cópula se evalua $C(u,v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v))$,

$$\begin{aligned} H(2u-1, -ln(1-v)) &= \frac{2u(1-1+v)}{(2uv-1)(1-v)+2-1+v} \\ &= \frac{uv}{u+v-uv}. \end{aligned}$$

■

1.3.13. Ejemplo. La función de distribución exponencial bivariada de Gumbel

$$H_\theta(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y+\theta xy)} & (x,y) \in [0,\infty] \times [0,\infty], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\theta \in [0,1]$.

Las marginales de $H_\theta(x,y)$ son $F_\theta(x) = 1-e^{-x}$, para $x \geq 0$, y $G_\theta(y) = 1-e^{-y}$, para $y \geq 0$. F_θ y G_θ son funciones crecientes, tales que $F_\theta(-\infty) = 0 = G_\theta(-\infty)$ y $F_\theta(\infty) = 1 = G_\theta(\infty)$ por lo tanto son funciones de distribución con cuasi-inversas: $F_\theta^{(-1)}(u) = -ln(1-u)\mathbb{I}_{[0,1]}(u)$ y $G_\theta^{(-1)}(v) =$

$-ln(1-v)\mathbb{I}_{[0,1]}(v)$, respectivamente.

$$\begin{aligned} C_\theta(u,v) &= H_\theta(F_\theta^{(-1)}(u), G_\theta^{(-1)}(v)) \\ &= H_\theta(-ln(1-u), -ln(1-v)) \\ &= 1 - e^{ln(1-u)} - e^{ln(1-v)} - e^{ln(1-u)}e^{ln(1-v)}e^{-\theta ln(1-u)ln(1-v)} \\ &= u+v-1+(1-u)(1-v)e^{-\theta ln(1-u)ln(1-v)}. \end{aligned}$$

La cópula asociada a la distribución exponencial bivariada de Gumbel es

$$C_\theta(u,v) = u+v-1+(1-u)(1-v)e^{-\theta ln(1-u)ln(1-v)}.$$ ■

Sea C una cópula, se define la función H_C con $Dom\ H_C := \overline{\mathbb{R}}^2$ como

$$H_C(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \in [-\infty,0) \times [-\infty,0), \\ C(x,y) & (x,y) \in [0,1] \times [0,1], \\ x & (x,y) \in [0,1] \times (1,\infty], \\ y & (x,y) \in (1,\infty] \times [0,1], \\ 1 & (x,y) \in (1,\infty] \times (1,\infty]. \end{cases}$$

Entonces H_C es una función de distribución bivariada donde sus marginales son funciones de distribución uniformes en [0,1].

1.4. Cópulas y Variables Aleatorias

Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es un espacio de probabilidad y los resultados básicos de un experimento corresponden a los valores de $\omega \in \Omega$. Sea X una función de Ω en los reales.

1.4.1. Definición. *Una variable aleatoria sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es una función $\mathcal{F}-$medible de $\Omega \to \mathbb{R}$, es decir $X : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tal que para toda $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

Si X es una variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ la medida de probabilidad inducida por X es la medidad de probabilidad P_X en $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ dada por

$$P_X(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\} \qquad \text{con } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

1.4.2. Definición. *La función de distribución de una variable aleatoria X es la función $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por*

$$F(x) = P\{\omega : X(\omega) \leq x\} \qquad \text{para } x \in \mathbb{R},$$

entonces F es creciente y continua por la derecha, con $F(\infty) = 1$ y $F(-\infty) = 0$.

Una variable aleatoria X se dice que es continua si y sólo si la función de distribución es continua para todo $x \in \mathbb{R}$. Equivalentemente, X es continua si $P[X = x] = 0$ para todo x.

El teorema siguiente restablece el *Teorema de Sklar* en términos de las variables aleatorias y de sus funciones de distribución.

1.4.3. Teorema. *Sean X y Y variables aleatorias con funciones de distribución F y G respectivamente. y función de distribución conjunta H. Entonces existe una cópula C tal que*

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)).$$

Si F y G son continuas entonces C es única. En caso contrario C únicamente puede determinarse en el $Ran\, F \times Ran\, G$.

1.4.4. Teorema. *Sean X y Y variables aleatorias continuas. Entonces X y Y son independientes si y sólo si $C_{XY} = \Pi$.*

Demostración: Sean F y G las funciones de distribución de X y Y, y $H(x,y)$ la función de distribución conjunta de X y Y. Entonces

$$H(x,y) = F(x)G(y) = C(F(x), G(y)) = \Pi(F(x), G(y)).$$

De acuerdo al Lema 1.3.5 es única cuando X y Y son continuas. □

Por lo que la cópula producto caracteriza la independencia de las variables aleatorias cuando son continuas.

Si la función de distribución de una variable aleatoria es continua, y si α es una función estrictamente monótona cuyo dominio incluye $Ran\, X$, entonces la función de distribución de $\alpha(X)$ es también continua.

1.4.5. Teorema. *Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY}. Si α y β funciones estrictamente crecientes en $Ran\, X$ y $Ran\, Y$ respectivamente. Entonces $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$. Por lo que C_{XY} es invariante bajo transformaciones estrictamente crecientes de X y Y.*

Demostración: Sean X y Y variables aleatorias continuas, α y β funciones estrictamente crecientes.

Sean F_1, F_2, G_1, G_2 las funciones de distribución de X, $\alpha(X)$, Y, $\beta(Y)$, respectivamente

$$F_2(x) = P[\alpha(X) \leq x] = P[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x)),$$

$$G_2(y) = P[\beta(Y) \leq y] = P[Y \leq \beta^{-1}(y)] = G_1(\beta^{-1}(y)).$$

Entonces

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\ &= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y)) \\ &= C_{XY}(F_2(x)), G_2(y)). \end{aligned}$$

Como X y Y son variables aleatorias continuas, el $Ran\, F_2 = Ran\, G_2 = \mathbf{I}$ entonces $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$. $\square$

1.4.6. Teorema. *Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C_{XY}. Si α y β son funciones estrictamente monótonas en $Ran\, X$ y $Ran\, Y$ respectivamente. Entonces*

1. *Si α es estrictamente creciente y β es estrictamente decreciente, entonces*
$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

2. *Si α es estrictamente decreciente y β es estrictamente creciente, entonces*
$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

3. *Si α, y β son estrictamente decrecientes, entonces*

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) = u + v - 1 + C_{XY}(1-u, 1-v).$$

Demostración: Sean X y Y variables aleatorias continuas, α y β funciones monóntonas estrictamente.
Sean $u = F_2$ y $v = G_2$,

$$\begin{aligned}
1.)\ C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) &= C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) = P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\
&= P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y > \beta^{-1}(y)] \\
&= P[X \leq \alpha^{-1}(x)] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= P[\alpha(X) \leq x] - C_{XY}(P[\alpha(X) \leq x], 1 - P[\beta(Y) \leq y]) \\
&= F_2(x) - C_{XY}(F_2(x), 1 - G_2(y)) = u - C_{XY}(u, 1-v).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.)\ C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) &= C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) = P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\
&= P[X > \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= P[Y \leq \beta^{-1}(y)] - P[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= P[\beta(Y) \leq x] - C_{XY}(1 - P[\alpha(X)] > x, P[\beta(Y) \leq y]) \\
&= G_2(y) - C_{XY}(1 - F_2(x), G_2(y)) = v - C_{XY}(1-u, v).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.)\ C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u,v) &= C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) = P[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\
&= P[X > \alpha^{-1}(x), Y > \beta^{-1}(y)] \\
&= P[\alpha(X) \leq x] + P[\beta(Y) \leq y] - 1 \\
&+ C_{XY}(1 - P[\alpha(X)] > x, 1 - P[\beta(Y)] > y) \\
&= F_2(x) + G_2(y) - 1 + C_{XY}(1 - F_2(x), 1 - G_2(y)) \\
&= u + v - 1 + C_{XY}(1-u, 1-v).
\end{aligned}$$

□

Las tres funciones que resultan de aplicar las transformaciones monótonas son cópulas.

Sea $B := [u_1, u_2] \times [v_1, v_2] \subset \mathbf{I}^2$.

1. $C^*(u,v) = u - C_{XY}(u, 1-v)$.
   Para toda $u \in \mathbf{I}$; $C^*(u,1) = u = C^*(1,u)$.

Para toda $u \in \mathbf{I}$; $C^*(u,0) = 0 = C^*(0,u)$.

$$\begin{aligned} V_{C^*}(B) &= C^*(u_2,v_2) - C^*(u_2,v_1) - C^*(u_1,v_2) + C^*(u_1,v_1) \\ &= V_{C_{XY}}([u_1,u_2] \times [1-v_2, 1-v_1]) \geq 0. \end{aligned}$$

Entonces $C^*(u,v)$ es cópula.

2. $C^*(u,v) = v - C_{XY}(1-u,v)$.
Para toda $u \in \mathbf{I}$; $C^*(u,1) = u = C^*(1,u)$.
Para toda $u \in \mathbf{I}$; $C^*(u,0) = 0 = C^*(1,0)$.

$$V_{C^*}(B) = V_{C_{XY}}([1-u_2, 1-u_1] \times [v_1,v_2]) \geq 0.$$

Entonces $C^*(u,v)$ es cópula.

3. $C^*(u,v) = u + v - 1 + C_{XY}(1-u, 1-v)$.
Para toda $u \in \mathbf{I}$; $C^*(u,1) = u = C^*(1,u)$.
Para toda $u \in \mathbf{I}$; $C^*(u,0) = 0 = C^*(1,0)$.

$$V_{C^*}(B) = V_{C_{XY}}([1-u_2, 1-u_1] \times [1-v_2, 1-v_1]) \geq 0.$$

Entonces $C^*(u,v)$ es cópula.

1.4.7. Ejemplo. Sean X y Y variables aleatorias continuas con cópula C y funciones de distibución univariadas F y G respectivamente. Las variables aleatorias $\max(X,Y)$ y $\min(X,Y)$ son los estadísticos de orden para X y Y. Demostrar que las funciones de distribución de los estadísticos de orden están dadas por

$$P[\max(X,Y) \leq t] = C(F(t),G(t)) \qquad \text{y}$$
$$P[\min(X,Y) \leq t] = F(t) + G(t) - C(F(t),G(t)).$$

Cuando $F = G$,

$$P[\max(X,Y) \leq t] = \delta_C(F(t)) \qquad \text{y}$$
$$P[\min(X,Y) \leq t] = 2F(t) - \delta_C(F(t)).$$

$$P[\max(X,Y) \leq t] = P[X \leq t, Y \leq t] = C(F(t),G(t)).$$

Cuando $F = G$ entonces es igual a $\delta_C(F(t))$.

$$\begin{aligned} P[\min(X,Y) \leq t] &= P[\{X \leq t\} \cup \{Y \leq t\}] \\ &= P[X \leq t] + P[Y \leq t] - P[X \leq t, Y \leq t] \\ &= F(t) + G(t) - C(F(t),G(t)). \end{aligned}$$

Cuando $F = G$ $\qquad P[\min(X,Y) \leq t] = 2F(t) - \delta_C(F(t))$. ∎

Ahora consideremos dos variables aleatorias asociadas a un mismo experimento X_1 y X_2. Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ un vector aleatorio sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, si $\mathbf{X} : \Omega \to \mathbb{R}^2$, entonces $\mathbf{X}$ es $\mathcal{F}$−medible si y sólo X_i es Borel medible, para $i = 1, 2$.

La medida de probabilidad inducida por el vector aleatorio $\mathbf{X}$ está definida por

$$P_{\mathbf{X}}(B) = P\{\omega : X(\omega) \in B\} \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2).$$

1.4.8. Definición. *La función de distribución de un vector aleatorio $\mathbf{X}$ es la función $H : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ definida por*

$$H_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2].$$

A H también se le conoce como función de distribución conjunta de X_1 y X_2, H es creciente y continua en $\mathbb{R}^2$, con $H(x, -\infty) = 0 = H(-\infty, x)$ y $H(\infty, \infty) = 1$.

Las cópulas son funciones de distribución con marginales Uniformes$[0,1]$. Cada cópula induce una medidad de probabilidad en $\mathbf{I}^2$ a través de $V_C([0,u] \times [0,v]) = C(u,v)$. La *C-medida* de un subconjunto $\mathbf{I}^2$ es la probabilidad de que dos variables Uniformes $[0,1]$ U y V con función de distribución conjunta C tomen valores en $[0,u] \times [0,v]$.

Cualquier cópula C se puede expresar como

$$C(u,v) = A_C(u,v) + S_C(u,v),$$

donde

$$A_C(u,v) = \int_u^0 \int_v^0 \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} C(s,t)\,dt\,ds$$

es la parte *absolutamente continua* de la cópula, y

$$S_C(u,v) = C(u,v) - A_C(u,v)$$

es la parte *singular.*

Del Teorema 1.2.10 $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v$ existe casi en todas partes en $\mathbf{I}^2$. Si $C \equiv A_C$ en $\mathbf{I}^2$, la función de distribución C tiene una función de densidad conjunta dada por

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v),$$

entonces C es absolutamente continua; si $C \equiv S_C$, esto es $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v = 0$ casi en todo $\mathbf{I}^2$, entonces C es singular. De otra manera C tiene componente singular y componente absolutamente continua.

El *soporte* de una función de distribución conjunta H es el complemento de la unión de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^2$ con H-medida cero.

1.4.9. Definición. *El soporte de una cópula es el complemento de la unión de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbf{I}^2$ con C-medida cero. Cuando el soporte de C es $\mathbf{I}^2$, se dice que C tiene soporte completo.*

1.4.10. Ejemplo. La cota superior de Fréchet Hoeffding $M(u,v)$ es una cópula singular ya que

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u,v) = 0.$$

Como el soporte de la cópula es el complemento de la unión de todos los subconjuntos abiertos de $\mathbf{I}^2$ con M-medida cero. Para esta cópula todos los rectángulos por abajo o por encima de la diagonal tienen medida cero, y los rectángulos que tiene al menos un vertice sobre la diagonal no, por ello el soporte es la diagonal en $\mathbf{I}^2$, es decir $v = u$ para todo $u \in \mathbf{I}$.

Lo mismo ocurre para la cota inferior W, donde la parte absolutamente continua vale 0, por lo que es una cópula singular donde el soporte es la diagonal invertida, es decir $v = 1 - u$ para todo $u \in \mathbf{I}$. ■

1.4.11. Ejemplo. La cópula producto es absolutamente continua para todo $(u,v) \in \mathbf{I}^2$

$$A_\Pi(u,v) = \textstyle\int_u^0 \int_v^0 \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \Pi(s,t)\,dt\,ds = \displaystyle\int_u^0 \int_v^0 dt\,ds = uv = \Pi(u,v). \qquad ■$$

En el siguiente ejemplo se muestra una cópula que tiene componentes absolutamente continuo y singular.

1.4.12. Ejemplo. Sea la cópula

$$C_{\alpha,\beta} = \begin{cases} u^{1-\alpha}v & u^\alpha \geq v^\beta, \\ uv^{1-\beta} & u^\alpha \leq v^\beta. \end{cases}$$

Si $u^\alpha > v^\beta$ entonces $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}C(u,v) = (1-\alpha)u^{-\alpha}$, y

si $u^\alpha < v^\beta$ entonces $\frac{\partial^2}{\partial u \partial v}C(u,v) = (1-\beta)u^{-\beta}$

$$\begin{aligned} A_{C_{\alpha,\beta}}(u,v) &= \int_u^0 \int_v^0 \frac{\partial^2}{\partial s \partial} C_{\alpha,\beta}(s,t)dtds \\ &= \int_u^0 \int_v^0 [(1-\alpha)s^{-\alpha}\mathbb{I}_{\{s^\alpha > t^\beta\}} + (1-\beta)t^{-\beta}\mathbb{I}_{\{s^\alpha < t^\beta\}}]dtds \\ &= (1-\alpha)\int_u^0 s^{-\alpha} \int_v^0 \mathbb{I}_{\{s^{\alpha/\beta} > t\}} dtds \\ &+ (1-\beta)\int_u^0 t^{-\beta} \int_v^0 \mathbb{I}_{\{s^{\alpha/\beta} < t\}} dtds, \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} A_{C_{\alpha,\beta}}(u,v) &= uv^{1-\beta}\mathbb{I}_{\{u^\alpha < v^\beta\}} + vu^{1-\alpha}\mathbb{I}_{\{u^\alpha > v^\beta\}} \\ &- \frac{\alpha\beta}{\alpha - \alpha\beta + \beta}\left[u^{\alpha/\beta - \alpha + 1}\mathbb{I}_{\{u^\alpha < v^\beta\}} + v^{\beta/\alpha - \beta + 1}\mathbb{I}_{\{u^\alpha > v^\beta\}}\right], \end{aligned}$$

donde la parte absolutamente continua de la cópula es

$$A_{C_{\alpha,\beta}}(u,v) = C_{\alpha,\beta}(u,v) - \frac{\alpha\beta}{\alpha - \alpha\beta + \beta}\min[u^\alpha, v^\beta]^{\alpha^{-1}+\beta^{-1}-1}$$

y el componente singular

$$S_{C_{\alpha,\beta}}(u,v) = \frac{\alpha\beta}{\alpha - \alpha\beta + \beta}\min[u^\alpha, v^\beta]^{\alpha^{-1}+\beta^{-1}-1}. \qquad \blacksquare$$

1.5. Las Cotas de Fréchet Hoeffding

Como consecuencia del Teorema de Sklar, si X y Y son variables aleatorias con función de distribución conjunta H y marginales F y G respectivamente, entonces la desigualdad de Fréchet-Hoeffding para la función de distribución conjunta H es

$$W(F(x),G(y)) \leq H(x,y) \leq M(F(x),G(y)), \tag{1.21}$$

donde

$$M(F(x),G(y)) = \min(F(x),G(y)) \quad \text{y}$$

$$W(F(x),G(y)) = \max(F(x)+G(y)-1,0),$$

son la cotas superior e inferior respectivamente de Fréchet-Hoeffding para la función de distribución conjunta H.

1.5.1. Ejemplo. Demostrar que las cotas de las distribuciones de los estadísticos de orden están dadas por

$$\max(F(t)+G(t)-1,0) \leq P[\max(X,Y) \leq t] \leq \min(F(t),G(t)) \text{ y } \tag{1.22}$$
$$\max(F(t),G(t)) \leq P[\min(X,Y) \leq t] \leq \min(F(t)+G(t),1). \tag{1.23}$$

Para (1.23) se tiene que

$$C(F(t),G(t)) \leq \min(F(t),G(t)),$$

entonces

$$-C(F(t),G(t)) \geq -\min(F(t),G(t))$$

por lo que

$$F(t)+G(t)-C(F(t),G(t)) \geq F(t)+G(t)-\min(F(t),G(t)).$$

Si $F(t) \leq G(t)$ entonces

$$F(t)+G(t)-C(F(t),G(t)) \geq G(t).$$

Por lo tanto $P[\min(X,Y) \leq t] \geq \max(F(t),G(t))$

$$C(F(t),G(t)) \geq \max((F(t)+G(t)-1,0)$$
$$F(t)+G(t)-C(F(t),G(t)) \leq F(t)+G(t)-\max(F(t)+G(t)-1,0).$$

Si $F(t)+G(t) > 1$ entonces

$$F(t)+G(t)-C(F(t),G(t)) \leq 1.$$

Por lo tanto $P[\min(X,Y) \leq t] \leq \min(F(t)+G(t),1)$

$$\max(F(t),G(t)) \leq P[\min(X,Y) \leq t] \leq \min(F(t)+G(t),1). \qquad \blacksquare$$

1.5.2. Definición. *Un conjunto $S \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ es creciente si para cualquier (x,y), $(u,v) \in S$, $x < u$ implica que $y \leq u$. Similarmente, $S \subset \overline{\mathbb{R}}^2$ es decreciente si para cualquier (x,y), $(u,v) \in S$, $x < u$ implica que $y \geq u$.*

La función de distribución conjunta H de las variables aleatorias X y Y es la cota superior de Fréchet Hoeffding si y sólo si el soporte de H pertenece a un conjunto creciente y es la cota inferior si el conjunto al que pertenece es decreciente.

1.5.3. Lema. *Sea $S \subset \overline{\mathbb{R}}^2$. Entonces S es creciente si y sólo si para cada $(x,y) \in S$, se cumple*

1. *para todo $(u,v) \in S$, $u \leq x$ implica $v \leq y$ o*
2. *para todo $(u,v) \in S$, $v \leq y$ implica $u \leq x$.*

Demostración: Suponemos que S es creciente, y que ninguna de las condiciones del lema se cumplen.

Entonces existen puntos (a,b) y (c,d) $\in S$ tales que $a \leq x$, $b > y$, $d \leq y$ y $c > x$.

Por lo que $a \leq x < c$ implica que $a < c$ y $b > y \geq d$ implica que $b < d$ lo cual contradice la hipótesis.

Si S es decreciente, existen (a,b) y (c,d) $\in S$ con $a < c$ y $b > d$ entonces para cualquier punto $(x,y) \in S$ donde $(x,y) = \left(\frac{a+c}{2}, \frac{d+b}{2}\right)$ no se cumple ninguna de las dos condiciones. □

1.5.4. Lema. *Sean X y Y variables con función de distribución conjunta H. Entonces H es igual a M en (1.21)(cota superior de Fréchet-Hoeffding) si y sólo si para todo $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, se cumple $P[X > x, Y \leq y] = 0$ o $P[X \leq x, Y > y] = 0$*

Demostración: Sean $F(x)$ y $G(y)$ las funciones de distribución de X y Y respectivamente, $F(x) = P[X \leq x] = P[X \leq x, Y \leq y] + P[X \leq x, Y > y]$, entonces $H(x,y) = F(x) - P[X \leq x, Y > y]$.

Ahora $G(y) = P[Y \leq y] = P[X \leq x, Y \leq y] + P[X > x, Y \leq y]$, entonces $H(x,y) = G(y) - P[X > x, Y \leq y]$, por lo que $H(x,y) = M(F(x), G(y))$ si y sólo si $\min(P[X \leq x, Y > y], P[X > x, Y \leq y]) = 0$. □

1.5.5. Teorema. *Sean X y Y variables con función de distribución conjunta H. Entonces $H = M$ si y sólo si el soporte de H es un subconjunto creciente de $\overline{\mathbb{R}}^2$.*

Demostración: Sea S el soporte de H, tal que S es creciente, y sea (x,y) cualquier punto en $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Entonces para todo $(u,v) \in S$, $u \leq x$ implica que $v \leq y$ si cumple que

$$\{(u,v)|u \leq x, v > y\} \cap S = \phi \quad \text{o} \quad P[X \leq x, Y > y] = 0.$$

Si para todo $(u,v) \in S$, $v \leq y$ y $u \leq x$, entonces

$$\{(u,v)|v \leq y, u \leq x\} \cap S \;=\; \phi \quad \text{o} \quad P[X > x, Y \leq y] = 0$$

por lo tanto $H(x,y) = \min(F(x), G(y))$. □

1.5.6. Lema. *Sean X y Y variables con función de distribución conjunta H. Entonces H es igual a W (cota inferior de Fréchet-Hoeffding) si y sólo si para todo $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, se cumple $P[X > x, Y > y] = 0$ o $P[X \leq x, Y \leq y] = 0$.*

Demostración: Sean $F(x)$ y $G(y)$ las funciones de distribución de X y Y respectivamente, y $W(F(x), G(y))$ su función de distribución conjunta,

$$P[X > x, Y > y] = P[X > x] - P[Y \leq y] + P[X \leq x, Y \leq y].$$

Entonces

$$\begin{aligned} H(x,y) &= P[X > x, Y > y] + F(x) + G(y) - 1, \\ \text{si } P[X > x, y > y] &= 0, \quad \text{entonces } H(x,y) = F(x) + G(y) - 1. \\ P[X \leq x, Y \leq y] &= P[X \leq x] - P[Y > y] + P[X > x, Y > y] \\ &= F(x) + G(y) - 1 + 1 - F(x) - G(y) + H(x,y), \\ \text{si } P[X \leq x, y \leq y] &= 0, \text{ entonces } H(x,y) = 0. \end{aligned}$$

□

1.5.7. Teorema. *Sean X y Y variables con función de distribución conjunta $H(x,y)$. Entonces H es igual a W (cota inferior de Fréchet Hoeffding) si y sólo si el soporte de H está en un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}^2$ decreciente.*

Demostración: Sea S el soporte de H, tal que S es decreciente, y sea (x,y) cualquier punto en $\overline{\mathbb{R}}^2$.

Entonces para todo $(u,v) \in S$, $u \leq x$ implica que $v > y$ si cumple que

$$\{(u,v)|u \leq x, v \leq y\} \cap S = \phi \quad \text{o} \quad P[X \leq x, Y \leq y] = 0.$$

Si para todo $(u,v) \in S$, $v > y$, entonces $u \leq x$ se cumple si

$$\begin{aligned}\{(u,v)|v \leq y, u \leq x\} \cap S &= \phi \quad \text{o} \quad P[X \leq x, Y \leq y] = 0 \quad \text{o} \\ \{(u,v)|u > x, v > y\} \cap S &= \phi \quad \text{o} \quad P[X > x, Y > y] = 0,\end{aligned}$$

por lo tanto $H(x,y) = \text{máx}(F(x) + G(y) - 1, 0)$. □

Para variables aleatorias X y Y continuas, Y es casi seguramente una función creciente de X si y sólo si la cópula de X y Y es M; y Y es casi seguramente una función decreciente de X si y sólo si la cópula de X y Y es W. Si U y V son variables aleatorias uniformes $[0,1]$, con función de distribución M, entonces $P[U = V] = 1$, y si la cópula es W entonces $P[U + V = 1] = 1$.

1.6. Cópulas de Supervivencia

La probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores mayores a x está dada por la *función de supervivencia*, $\overline{F}(x) = P[X > x] = 1 - P[X \leq x]$.

Para variables aleatorias X y Y con función de distribución conjunta H, la función de distribución conjunta de supervivencia está dada por

$$\overline{H}(x,y) = P[X > x, Y > y],$$

donde sus marginales están dadas por

$$\begin{aligned}\overline{H}(x,-\infty) = P[X > x, Y > -\infty] &= 1 - P[X \leq x] = \overline{F}(x) \quad \text{y} \\ \overline{H}(-\infty,y) = P[X > -\infty, Y > y] &= 1 - P[Y \leq y] = \overline{G}(y).\end{aligned}$$

La relación que guarda las funciones de supervivencia univariadas con la función $\overline{H}(x,y)$.

$$\begin{aligned}\overline{H}(x,y) &= P[X > x, Y > y]\\ &= P[Y > y] - P[X \le x] + P[X \le x, Y \le y]\\ &= 1 - P[Y \le y] + 1 - P[X \le x] - 1 + P[X \le x, Y \le y]\\ &= P[Y > y] + P[X > x] - 1 + C(F(x), G(y))\\ &= \overline{G}(y) + \overline{F}(x) - 1 + C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)).\end{aligned}$$

Se define a la función $\widehat{C} : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I}$ por

$$\widehat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v), \tag{1.24}$$

se tiene que

$$\overline{H}(x,y) = \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)).$$

La función $\widehat{C}$ es una cópula ya que satisface

1. Para todo $u \in \mathbf{I}$, $\widehat{C}(u,0) = 0 = \widehat{C}(0,u)$.
2. Para todo $u \in \mathbf{I}$, $\widehat{C}(u,1) = u = \widehat{C}(1,u)$.
3. Sea $B := [u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$, un rectángulo tal que $B \subset \mathbf{I}^2$

$$\begin{aligned}V_{\widehat{C}}(B) &= \widehat{C}(u_2, v_2) - \widehat{C}(u_2, v_1) - \widehat{C}(u_1, v_2) + \widehat{C}(u_1, v_1)\\ &= V_C([1-u_2, 1-u_1] \times [1-v_2, 1-v_1]) \ge 0.\end{aligned}$$

Se conoce a $\widehat{C}$ como la *cópula de supervivencia* de X y Y, la cual asocia de manera análoga a las funciones de supervivencia marginales con la función de supervivencia conjunta.

Sean U y V variables aleatorias uniformes $(0,1)$, entonces

$$\begin{aligned}\overline{C}(u,v) &= P[U > u, V > v]\\ &= P[U > u] - P[V \le v] + P[U \le u, V \le v]\\ &= 1 - u - v + C(u,v) = \widehat{C}(1-u, 1-v).\end{aligned}$$

1.6.1. Ejemplo. En el ejemplo 1.3.13 se obtuvo la cópula C_θ para una función de distribución Gumbel exponencial bivariada, para $\theta \in [0,1]$,

$$C_\theta(u,v) = u + v - 1 + (1-u)(1-v)e^{-\theta \ln(1-u)\ln(1-v)}.$$

La cópula de supervivencia se obtiene aplicando (1.24)

$$\widehat{C}_\theta(u,v) = u + v - 1 + C_\theta(1-u, 1-v) = (uv)e^{-\theta \ln(u)\ln(v)}. \qquad \blacksquare$$

1.6.2. Ejemplo. Distribución de Pareto Bivariada
Sean X y Y variables aleatorias cuya función de distribución conjunta es

$$\overline{H}_\theta(x,y) = \begin{cases} (1+x+y)^{-\theta} & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ (1+x)^{-\theta} & x \geq 0,\ y < 0, \\ (1+y)^{-\theta} & x < 0,\ y \geq 0, \\ 1 & x < 0,\ y < 0, \end{cases}$$

donde $\theta > 0$.

Las marginales quedan como

$$\overline{F}(x) = \overline{H}_\theta(x, -\infty) = \begin{cases} (1+x)^{-\theta} & x \geq 0, \\ 1 & x < 0. \end{cases}$$

$$\overline{G}(y) = \overline{H}_\theta(-\infty, y) = \begin{cases} (1+y)^{-\theta} & y \geq 0 \\ 1 & y < 0. \end{cases}$$

$\overline{F}(u)^{(-1)} = u^{-1/\theta}$ y $\overline{G}(v)^{(-1)} = v^{-1/\theta}$, aplicando el Corolario 1.3.11 se obtiene la cópula

$$\widehat{C}_\theta(u,v) = \overline{H}_\theta(\overline{F}(u)^{(-1)}, \overline{G}(v)^{(-1)}) = (u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}. \qquad \blacksquare$$

1.6.3. Definición. *El dual de una cópula C es la función $\widetilde{C}$ definida por $\widetilde{C}(u,v) = u + v - C(u,v)$ y la co-cópula es la función C^* definida por $C^*(u,v) = 1 - C(1-u, 1-v)$.*

Las funciones de las definiciones anteriores no son cópulas ya que ninguna de las dos cumplen con la primera propiedad, i.e. $\widetilde{C}(u,0) = u - C(u,0) = u$ y $C^*(u,0) = 1 - C(1-u,1) = u$.

Cuando C es la cópula de un par de variables aleatorias X y Y, el dual de una cópula y la co-cópula expresan cada una la probabilidad de un evento. Al igual que la cópula de supervivencia,

$$P[X > x, Y > y] = \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y))$$

para el dual el evento que se describe es

$$\begin{aligned} P[\{X \leq x\} \cup \{Y \leq y\}] &= P[X \leq x] + P[Y \leq t] - P[X \leq x, Y \leq y] \\ &= F(x) + G(y) - H(x,y) \\ &= \widetilde{C}(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[\{X > x\} \cup \{Y > y\}] &= P[X > x] + P[Y > y] - P[X > x, Y > y] \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)) \\ &= 1 - C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)) \\ &= C^*(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

1.6.4. Ejemplo. En el ejemplo 1.3.13 se obtuvo la cópula C_θ para una función de distribución Gumbel exponencial bivariada, para $\theta \in [0,1]$

$$C_\theta(u,v) = u + v - 1 + (1-u)(1-v)e^{-\theta ln(1-u) ln(1-v)}.$$

La cópula de supervivencia se obtiene aplicando (1.24)

$$\widehat{C}_\theta(u,v) = u + v - 1 + C_\theta(1-u, 1-v) = (uv)e^{-\theta ln(u) ln(v)}. \quad \blacksquare$$

Si X y Y variables aleatorias continuas con cópula C y función de distribución común F, Las funciones de distribución y de supervivencia de los estadísticos de orden, dados en el ejemplo 1.4.7, están dadas por

Estad. de Orden	Func. de distribución	Func. de supervivencia
$\text{máx}(X,Y)$	$\delta(F(t))$	$\delta^*(\overline{F}(t))$
$\text{mín}(X,Y)$	$\widetilde{\delta}(F(t))$	$\widehat{\delta}^*(\overline{F}(t))$

donde δ, $\widehat{\delta}$, $\widetilde{\delta}$, y δ^* denotan las diagonales de C, $\widehat{C}$, $\widetilde{C}$, y C^*, respectivamente.

$$\begin{aligned} P[\text{máx}(X,Y) \leq t] &= P[X \leq t, Y \leq t] \\ &= C(F(t), F(t)) = \delta(F(t)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[\text{máx}(X,Y) > t] &= P[\{X > t\} \cup \{Y > t\}] \\ &= P[X > t] + P[Y > t] - P[X > t, Y > t] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\overline{F}(t) - \widehat{C}(\overline{F}(t), \overline{F}(t)) \\
&= 1 - C(1 - \overline{F}(t), 1 - \overline{F}(t)) \\
&= C^{*}(\overline{F}(t), \overline{F}(t)) = \delta^{*}(\overline{F}(t)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P[\min(X,Y) \leq t] &= P[\{X \leq t\} \cup \{Y \leq t\}] \\
&= P[X \leq t] + P[Y \leq t] - P[X \leq t, Y \leq t] \\
&= 2F(t) - C(F(t), F(t)) \\
&= \widetilde{C}(F(t), F(t)) = \widetilde{\delta}(F(t)).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P[\min(X,Y) > t] &= P[X > t, Y > t] \\
&= P[X > t] - P[Y \leq t] - P[X \leq t, Y \leq t] \\
&= 2\overline{F}(t) - 1 + C(1 - \overline{F}(t), 1 - \overline{F}(t)) \\
&= \widehat{C}(\overline{F}(t), \overline{F}(t)) = \widehat{\delta}(\overline{F}(t)).
\end{aligned}
$$

1.6.5. Ejemplo. El conjunto de composiciones que forman la cópula de supervivencia, la co-cópula, la identidad y el dual de una cópula dada, (es decir, "$\wedge$","$*$","$\sim$","i") está representado en la siguiente tabla:

$\circ$	i	$\wedge$	$\sim$	$*$
i	i	$\wedge$	$\sim$	$*$
$\wedge$	$\wedge$	i	$*$	$\sim$
$\sim$	$\sim$	$*$	i	$\wedge$
$*$	$*$	$\sim$	$\wedge$	i

Algunas operaciones involucradas en la tabla son:

$\widehat{C}^{\wedge}(u,v) = u + v - 1 + \widehat{C}(1-u, 1-v) = C(u,v)$ entonces, $^{\wedge}\circ^{\wedge} = i$

$\widehat{C}^{\sim}(u,v) = u + v - 1 + \widetilde{C}(1-u, 1-v) = 1 - C(1-u, 1-v)$
$= C^{*}(u,v)$ entonces, $^{\wedge}\circ^{\sim} = *$

$\widehat{C}^{*}(u,v) = u + v - 1 + C^{*}(1-u, 1-v) = u + v - C(u,v) = \widetilde{C}(u,v)$
entonces,$^{\wedge}\circ^{*} = \sim$

$\widetilde{C}^{\wedge}(u,v) = u + v - \widehat{C}(u,v) = C^{*}(u,v)$ entonces, $^{\sim}\circ^{\wedge} = *$

$$C^{**}(u,v) = 1 - C^{*}(1-u, 1-v) = C(u,v) \text{ entonces, } \text{"}\circ\text{"} = i \qquad \blacksquare$$

El teorema siguiente es la versión para funciones de supervivencia del Corolario 1.3.11.

1.6.6. Corolario. *Sea $\overline{H}$, $\overline{F}$, $\overline{G}$ y $\widehat{C}$ tales que $\overline{H}(x,y) = \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y))$ y sean $\overline{F}^{(-1)}$ y $\overline{G}^{(-1)}$ las cuasi inversas de $\overline{F}$ y $\overline{G}$, respectivamente. Entonces para cualquier $(u,v) \in I^2$*

$$\widehat{C}(u,v) = \overline{H}(\overline{F}^{(-1)}(u), \overline{G}^{(-1)}(v)).$$

1.7. Simetría

1.7.1. Definición. *Si X es una variable aleatoria y $c \in \mathbb{R}$, se dice que X es simétrica con respecto a c si la función de distribución de la variable aleatoria $X - c$ y $c - X$ son la misma, es decir*

$$\begin{aligned} P[X - c \leq x] &= P[c - X \leq x] \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R} \quad y \\ P[X \leq x + c] &= P[X \geq c - x] \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Si X es una variable aleatoria continua

$$F(x + c) = P[X \leq x + c] = P[X \geq c - x] = \overline{F}(c - x). \tag{1.26}$$

1.7.2. Definición. *Sean X y Y variables aleatorias y sea $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.*

1. *(X,Y) es simétrico marginalmente alrededor (a,b) si X y Y son simétricos en a y b respectivamente, es decir*

$$P[X \leq x + a] = P[X \geq a - x] \quad y \quad P[Y \leq y + b] = P[Y \geq b - y].$$

2. *(X,Y) es radialmente simétrico alrededor (a,b) si la función de distribución conjunta de $X - a$ y $Y - b$ es la misma que la función de distribución conjunta de $a - X$ y $b - Y$.*

$$P[X \leq x + a, Y \leq y + b] = P[X \geq a - x, Y \geq b - y].$$

3. (X,Y) *es conjuntamente simétrico en* (a,b) *si los cuatro pares de variables aleatorias tienen función de distribución común:* $(X-a,Y-b)$, $(X-a,b-Y)$, $(a-X,Y-b)$ *y* $(a-X,b-Y)$.

$$\begin{aligned} P[X \le x+a, Y \le y+b] &= P[X \le x+a, Y \ge b-y] = \\ P[X \ge a-x, Y \le y+b] &= P[X \ge a-x, Y \ge b-y]. \end{aligned}$$

1.7.3. Teorema. *Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G, respectivamente. Sea (a,b) cualquier punto en $\mathbb{R}^2$. Entonces (X,Y) es radialmente simétrico alrededor de (a,b) si y sólo si*

$$H(a+x,b+y) = \overline{H}(a-x,b-y) \quad \text{para todo } (x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2.$$

Demostración:

$$\begin{aligned} H(a+x,b+y) &= P[X \le a+x, Y \le b+y] \\ &= P[X \ge a-x, Y \ge b-y] \\ &= \widehat{C}(\overline{F}(a-x), \overline{G}(b-y)) \\ &= \overline{H}(a-x,b-y). \end{aligned}$$ □

1.7.4. Teorema. *Si X y Y son variables aleatorias continuas como en el Teorema 1.7.3, donde (a,b) es cualquier punto en $\mathbb{R}^2$. Entonces (X,Y) es conjuntamente simétrico con respecto (a,b) si y sólo si se cumplen*

$$H(a+x,b+y) = F(a+x) - H(a+x,b-y) \quad y \tag{1.27}$$

$$H(a+x,b+y) = G(b+y) - H(a-x,b+y), \tag{1.28}$$

para todo $(x,y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.

Demostración:

$$\begin{aligned} 1.)\ H(a+x,b+y) &= P[X \le a+x, Y \le b+y] \\ &= C(P[X \le a+x], P[Y \le b+y]) \\ &= C(P[X \le a+x], P[Y > b-y]) \\ &= P[X \le a+x, Y > b-y) \\ &= P[X \le a+x] - P[[X \le a+x, Y \le b-y) \end{aligned}$$

$$= F(a+x) - H(a+x, b-y).$$

También

$$\begin{aligned} 2.)\ H(a+x,b+y) &= P[X \leq a+x, Y \leq b+y] \\ &= C(P[X \leq a+x], P[Y \leq b+y]) \\ &= C(P[X > a-x], P[Y \leq b+y]) \\ &= P[Y \leq b+y] - P[[X \leq a-x, Y \leq b+y) \\ &= G(b+y) - H(a-x, b+y). \end{aligned}$$ □

La simetría conjunta implica la radial y ésta implica la simetría marginal. Por lo que la simetría conjunta es una condición más fuerte.

Las cópulas y las cópulas de supervivencia juegan un papel especial en la simetría radial, la cual se explica en el teorema siguiente.

1.7.5. Teorema. *Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H, marginales F y G, respectivamente, y cópula C. Si X y Y son simétricas en a y b, respectivamente. Entonces (X, Y) es radialmente simétrico alrededor de (a, b), si y sólo si* $H(a+x, b+y) = \overline{H}(a-x, b-y)$, *es decir si y sólo si C satisface*

$$C(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v) \quad \textit{para todo } (u,v) \in I^2. \tag{1.29}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} H(a+x,b+y) &= P[X \leq a+x, Y \leq b+y] \\ &= C(F(a+x), G(b+y)) \\ &= C(\overline{F}(a-x), \overline{G}(b-y)), \quad (1.30) \\ \overline{H}(a-x,b-y) &= P[X \geq a-x, Y \geq b-y] \\ &= \widehat{C}(\overline{F}(a-x), \overline{G}(b-y)), \quad (1.31) \end{aligned}$$

(1.30) es igual a (1.31) si y sólo si $C = \widehat{C}$. □

La ecuación (1.29) establece que para cualquier $(u, v) \in \mathbf{I}^2$, los rectángulos $([0, u] \times [0, v])$ y $([1-u, 1] \times [1-v, 1])$, tienen el mismo valor bajo C.

1.7.6. Teorema. *Si X y Y son variables como en el Teorema 1.7.5. Entonces (X, Y) es conjuntamente simétrico alrededor de (a, b), es decir H*

satisface las ecuaciones (1.27) y (1.28), si y sólo si C satisface

$$C(u,v) = u - C(u,1-v) \quad y \quad C(u,v) = v - C(1-u,v).$$

Demostración:

$$\begin{aligned} H(a+x,b+y) &= F(a+x) - H(a+x,b-y) \\ &= F(a+x) - P[X \leq a+x, Y \leq b-y] \\ &= F(a+x) - C(P[X \leq a+x, 1 - P[Y \leq b+y]) \\ &= F(a+x) - C(F(a+x), 1 - G(b+y)), \end{aligned}$$

si $u = F(a+x)$ y $v = G(b+y)$ se tiene que

$$H(F^{-1}(u), G^{-1}(v)) = C(u,v) = u - C(u,1-v).$$

$C(u,v) = v - C(1-u,v)$ es análogo al anterior.

Otra forma de simetría es la intercambiabilidad.

1.7.7. Definición. *Las variables aleatorias X y Y son intercambiables si los vectores (X,Y) y (Y,X) están identicamente distribuidos. Es decir si la función de distribución de X y Y es H, entonces $H(x,y) = H(y,x)$ para todo x, y $\in \overline{\mathbb{R}}^2$.*

1.7.8. Teorema. *Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H, marginales F y G, respectivamente, y cópula C. Entonces X y Y son intercambiables si y sólo si $F = G$ y $C(u,v) = C(v,u)$ para todo $(u,v) \in I^2$.*

Demostración: Sean X y Y, con funciones de distribución F y G, respectivamente, tales que $F = G$, y cópula C tal que $C(u,v) = C(v,u)$ para todo $(u,v) \in \mathbf{I}^2$, entonces

$$H(x,y) = C(F(x), G(y)) = C(G(y), F(x)) = H(y,x).$$

Por lo tanto X y Y son intercambiables.

Si X y Y son intercambiables, entonces $H(x,y) = H(y,x)$ por tanto $F = G$ y la cópula $C(u,v) = C(v,u)$. $\square$

Cuando se cumple que $C(u,v) = C(v,u)$ para todo $(u,v) \in \mathbf{I}^2$ se dirá simplemente que la cópula es simétrica. Un ejemplo donde se cumple esta simetría es la cópula producto $\Pi(u,v) = uv = vu = \Pi(v,u)$.

1.7.9. Ejemplo. Sea

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1} & (x,y) \in [-1,1] \times [0,\infty], \\ 1-e^y & (x,y) \in (1,\infty] \times [0,\infty], \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con marginales

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < -1, \\ \dfrac{x+1}{2} & x \in [-1,1], \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

$$G(y) = \begin{cases} 0 & y < 0, \\ 1-e^y & y \geq 0, \end{cases}$$

Su cópula es

$$C(u,v) = \frac{uv}{u+v-vu},$$

donde se cumple que $C(u,v) = C(v,u)$, la cópula es simétrica pero las variables aleatorias X y Y no son intercambiables ya que $F \neq G$. Por lo cual la simetría no implica la intercambiabilidad. ■

1.7.10. Ejemplo. Sea

$$H_\theta(x,y) = \begin{cases} 1-e^{-x}-e^{-y}+e^{-(x+y+\theta xy)} & x,y \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Con marginales

$$F_\theta(x) = \begin{cases} 1-e^{-x} & x \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$G_\theta(y) = \begin{cases} 1-e^{-y} & y \geq 0, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Su cópula es

$$C(u,v) = u+v-1+(1-u)(1-v)exp[-\theta(ln(1-u)ln(1-v))] = C(v,u).$$

La cópula es simétrica y $F = G$ entonces las variables aleatorias X y Y son intercambiables. ■

En el ejemplo siguiente se demuestra que la intercambiabilidad no implica la simetría radial.

1.7.11. Ejemplo. Sean X y Y variables aleatorias continuas identicamente distruibuidas, cada una simétrica alrededor de a. Demostrar que la intercambiabilidad no implica la simetría radial, y la simetría radial no implica la intercambiabilidad.

Sean X y Y variables continuas intercambiables con función de distribución H, y simétricas en a, por lo que $F(x+a) = \overline{F}(a-x)$.

$$\begin{aligned} H(x+a, y+a) &= P[X \le x+a, Y \le y+a] \\ &= C(P[X \le x+a], P[Y \le y+a]) \\ &= C(F(x+a), G(y+a)), \end{aligned}$$

como son intercambiables, $F = G$ entonces

$$\begin{aligned} H(x+a, y+a) &= C(F(y+a), F(x+a)) \\ &= C(P[Y \le y+a], P[X \le x+a]), \\ &= H(y+a, x+a) \end{aligned}$$

X y Y son simétricas en a, entonces

$$\begin{aligned} H(y+a, x+a) &= C(P[Y \le y+a], P[X \le x+a]) \\ &= C(P[Y \ge a-y], P[X \ge a-x]) \\ &= C(P[X \ge a-x], P[Y \ge a-y]) \\ &= C(1 - P[X \le a-x], 1 - P[Y \le a-y]) \\ &= C(1 - F(a-x), 1 - F(a-y)). \end{aligned}$$

Lo cual no establece la simetría radial.

Si se cumple la simetría radial se tiene que

$$\begin{aligned} \overline{H}(a-x, a-y) &= H(x+a, y+a) \\ &= C(F(x+a), F(y+a)) \\ &= C(P[X \le x+a], P[Y \le y+a]) \\ &= P[X \le x+a, Y \le y+a]. \end{aligned}$$

Lo cual no implica la intercambiabilidad en las variables, ya que no se puede establecer que $P[X \le x+a, Y \le y+a] = P[Y \le y+a, X \le x+a]$. ■

1.8. Cópulas Multivariadas

En esta sección se extenderá la definición de cópula para el caso multivariado y se darán algunos resultados expuestos por Schweizer y Sklar(1983).

Para cualquier entero positivo n, denotamos a $\overline{\mathbb{R}}^n$, al espacio extendido $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \ldots \times \overline{\mathbb{R}}$. Se empleará la notación vectorial entonces los puntos $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ y $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \overline{\mathbb{R}}^n$, diremos que $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ si $u_i \leq v_i$, para todo $i = 1, \ldots, n$.

1.8.1. Definición. *Sea $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ la n-caja $B := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ denota el producto cartesiano de n intervalos cerrados. Los vértices de la n-caja B son los puntos $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ donde cada c_k es igual a a_i o b_i.*

El n-cubo unitario $\mathbf{I}^n$ es el producto $[0,1] \times [0,1] \times \ldots \times [0,1]$.

1.8.2. Definición. *Una función real n-valuada H es una función cuyo dominio, Dom H, es un subconjunto de $\overline{\mathbb{R}}^n$ y su rango, Ran H, es un subconjunto de $\mathbb{R}$.*

1.8.3. Definición. *Sean $S_1, S_2, \ldots, S_n$ subconjuntos no vacíos de $\overline{\mathbb{R}}$, y sea H una función real n-valuada tal que Dom $H = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$. Sea $B := [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ una n-caja donde todos sus vértices están en el dominio de H. Entonces el $H-$volumen de B está dada por*

$$V_H(B) = \sum sgn(\mathbf{c}) H(\mathbf{c}) \tag{1.32}$$

donde la suma se toma sobre todos los vértices de B.

$$sgn(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1 & \text{si } c_k = a_k \text{ para un número par de } k\text{'s.} \\ -1 & \text{si } c_k = a_k \text{ para un número impar de } k\text{'s.} \end{cases}$$

Equivalentemente, el H-volumen de una n-caja $B := [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ es:

$$V_H(B) = \Delta_b^a H(\mathbf{t}) = \Delta_{b_n}^{a_n} \Delta_{b_{n-1}}^{a_{n-1}} \cdots \Delta_{b_1}^{a_1} H(\mathbf{t}),$$

donde

$$\Delta_{b_k}^{a_k} H(\mathbf{t}) = H(t_1, \ldots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \ldots, t_n) - H(t_1, \ldots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \ldots, t_n).$$

1.8.4. Ejemplo. Sea H una función real 3-valuada con dominio en $\overline{\mathbb{R}}^3$, y sea $B := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$. El H-volumen de B es

$$\begin{aligned} V_H(B) = H(x_2, y_2, z_2) - H(x_2, y_2, z_1) - H(x_2, y_1, z_2) - H(x_1, y_2, z_2) \\ + H(x_2, y_1, z_1) + H(x_1, y_2, z_1) + H(x_1, y_1, z_2) - H(x_1, y_1, z_1). \end{aligned}$$ ■

1.8.5. Definición. *Una función real n-valuada H es n-creciente si $V_H(B) \geq 0$, para toda n-caja B cuyos vértices están en el Dom H.*

Al igual que en la versión bidimensional que una función sean n-creciente no implica que sea creciente en cada argumento.

1.8.6. Definición. *Sea H una función de $A_1 \times \cdots \times A_n$ en$(-\infty, \infty)$, donde cada A_m es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que contiene a $a_m = inf\ A_m$. Entonces H está fija si $H(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ para todo $(x_1, x_2, ..., x_n) \in$ Dom H tal que $x_m = a_m$ para al menos una m.*

1.8.7. Lema. *Sea H una función n-creciente y fija. Entonces H es creciente en cada argumento, en el sentido que si $(x_1, ..., x_{m-1}, x, x_{m+1}, ..., x_n)$ y $(x_1, ..., x_{m-1}, y, x_{m+1}, ..., x_n)$ pertenecen al Dom H y $x < y$, entonces*

$$H(x_1, ..., x, ..., x_n) \leq H(x_1, ..., y, ..., x_n).$$

Demostración: Sea $B := [(a_1, ..., x, a_m, ..., a_n), (x_1, ..., y, x_m, ..., x_n)]$ y H una función n-creciente, por lo que es $V_H(B) \geq 0$. Entonces,

$$\begin{aligned} V_H(B) &= \sum sgn(\mathbf{c}) H(\mathbf{c}) \\ &= H(x_1, ..., y, ..., x_n) - H(x_1, ..., x, ..., x_n), \end{aligned}$$

por lo tanto $$H(x_1, ..., y, ..., x_n) \geq H(x_1, ..., x, ..., x_n).$$ □

1.8.8. Definición. *Sea H una función de $A_1 \times \cdots \times A_n$ en$(-\infty, \infty)$, donde cada A_m es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ que contiene a $e_m = sup\ A_m$. Entonces H tiene marginales. La marginales uni-dimendionales de H son las funciones H_m dadas por*

$$\begin{aligned} \text{Dom } H_m &= A_m \text{ para } m = 1, 2, ..., n, \\ H_m(x) &= H(e_1, ..., e_{m-1}, x, e_{m+1}, ..., e_n) \end{aligned}$$

para todo $x \in$ Dom H_m.

Las marginales de dimensión más alta se definen similarmente, es decir fijando algunas entradas en H, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

1.8.9. Ejemplo. Sea H una función con dominio $[-1,1]\times[0,\infty]\times[0,\Pi/2]$ dada por

$$H(x,y,z)=\frac{(x+1)(e^y-1)(sen\,z)}{x+2e^y-1}$$

H está fija ya que $H(x,0,0)=0$, $H(-1,y,0)=0$ y $H(-1,0,z)=0$. Con marginales univariadas

$$\begin{aligned} H_1(x) &= H(x,\infty,\Pi/2)=\frac{x+1}{2}, \\ H_2(y) &= H(1,y,\Pi/2)=1-e^{-y}, \\ H_3(z) &= H(1,\infty,z)=sen\,z. \end{aligned}$$

Y sus marginales bivariadas

$$\begin{aligned} &H_{12}(x,y)=H(x,y,\Pi/2)=\frac{(x+1)(1-e^{-y})}{x+e^y-1}, \\ &H_{13}(x,z)=H(x,\infty,z)=\frac{(x+1)(sen\,z)}{2}, \\ &H_{23}(y,z)=H(1,y,z)=(1-e^{-y})sen\,z. \end{aligned}$$

■

1.8.10. Lema. *Sea H una función n-creciente, fija y con marginales. Entonces cada marginal uni-dimensional H_m de H es nodecreciente; y si $(x_1,...,x_{m-1},x,x_{m+1},...,x_n)$ está en el dominio de H. entonces*

$$0\le H(x_1,...,x_{m-1},x,x_{m+1},...,x_n)\le H_m(x)$$

para todo $x\in Dom\,H_m$.

La demostración de este lema es inmediato del Lema 1.8.7 la propiedad n-creciente y fija, ya que la función es creciente en cada argumento.

1.8.11. Lema. *Sea H una función n-creciente, fija y con marginales. Para cualquier entero m, tal que $1\le m\le n$, sea $(x_1,...,x_{m-1},x,x_{m+1},...,x_n)$, $(x_1,...,x_{m-1},y,x_{m+1},...,x_n)\in Dom\,H$ tal que $x<y$. Entonces*

$$H(x_1,...,x_{m-1},y,...,x_n)-H(x_1,...,x_{m-1},x,...,x_n)\le H_m(y)-H_m(x). \tag{1.33}$$

Demostración: Si $n = 2$, entonces H es 2-creciente, entonces

$$H(y,e_2) - H(x,e_2) - H(y,x_2) + H(x,x_2) \geq 0,$$
$$H(y,x_2) - H(x,x_2) \leq H(y,e_2) - H(x,e_2) = H_1(y) - H_1(x) \text{ y}$$

$$H(e_1,y) - H(e_1,x) - H(x_1,y) + H(x-1,x) \geq 0,$$
$$H(x_1,y) - H(x-1,x) \leq H(e_1,y) - H(e_1,x) = H_2(y) - H_2(x).$$

Si $n > 2$, sean la n-cajas B_1, $B_2, ..., B_{n-1}$ subconjuntos del *Dom H*, denotados por

$$\begin{aligned}
B_1 &= [(x_1, ..., a_{m-1}, x, a_{m+1}, ..., a_n), (e_1, ..., x_{m-1}, y, x_{m+1}, ..., x_n)], \\
B_2 &= [(a_1, x_2, ..., x, a_{m+1}, ..., a_n), (e_1, ..., x_{m-1}, y, x_{m+1}, ..., x_n)], \\
&\vdots \\
B_{n-1} &= [(a_1, ..., a_{m-1}, x, a_{m+1}, ..., x_n), (e_1, ..., x_{m-1}, y, x_{m+1}, ..., e_n)].
\end{aligned}$$

Como H es n-creciente, se tiene que para cada k,

$$\sum_{k=1}^{n-1} V_H(B_k) \geq 0.$$

Como H está fija, para cada B_k el valor $V_H(B_k)$ se reduce a

$$\begin{aligned}
H(e_1, ..., e_k, ..., y, ..., x_n) &- H(e_1, ..., e_k, ..., x, ..., x_n) \\
-H(e_1, ..., x_k, ..., y, ..., x_n) &+ H(e_1, ..., x_k, ..., x, ..., x_n).
\end{aligned}$$

Si

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} V_H(B_k) &= \sum_{k=1}^{n-1}\{H(e_1, ..., e_k, ..., y, ..., x_n) - H(e_1, ..., e_k, ..., x, ..., x_n) \\
&- H(e_1, ..., x_k, ..., y, ..., x_n) + H(e_1, ..., x_k, ..., x, ..., x_n)\} \\
&= H(e_1, ..., e_{m-1}, y, ..., e_n) - H(e_1, ..., e_{m-1}, x, e_{m+1}, ..., e_n) \\
&- H(x_1, ..., x_{m-1}, y, ..., x_n) + H(x_1, ..., x_{m-1}, x, x_{m+1}, ..., x_n).
\end{aligned}$$

Como, $\sum_{k=1}^{n-1} V_H(B_k) \geq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
H(e_1, ..., e_{m-1}, y, e_{m+1}, ..., e_n) &- H(e_1, ..., e_{m-1}, x, e_{m+1}, ..., e_n) \\
-H(x_1, ..., x_{m-1}, y, x_{m+1}, ..., x_n) &+ H(x_1, ..., x_{m-1}, x, x_{m+1}, ..., x_n) \geq 0,
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} H(x_1, ..., x_{m-1}, y, x_{m+1}, ..., x_n) &- H(x_1, ..., x_{m-1}, x, x_{m+1}, ..., x_n) \\ &\leq H_m(y) - H_m(x). \end{aligned}$$ □

1.8.12. Lema. *Sea H como en el Lema 1.8.11, sean $(x_1, ..., x_n)$, $(y_1, ..., y_n)$ en el Dom H. Entonces*

$$|H(x_1, ..., x_n) - H(y_1, ..., y_n)| \leq \sum_{m=1}^{n} |H_m(x_m) - H_m(y_m)|. \quad (1.34)$$

Demostración: Por el Lema 1.8.7 la ecuación 1.33 es equivalente a

$$|H(x_1, ..., x, x_{m+1}, ..., x_n) - H(x_1, ..., y, x_{m+1}, ..., x_n)| \leq |H_m(x) - H_m(y)|,$$

para todo $(x_1, ..., x, ..., x_n)$, $(x_1, ..., y, ..., x_n)$ en el *Dom H*. Aplicando la desigualdad anterior n veces se obtiene que

$$|H(x_1, ..., x_n) - H(y_1, ..., y_n)| \leq \textstyle\sum_{m=1}^{n} |H_m(x_m) - H_m(y_m)|.$$ □

Se puede ahora definir partiendo de todos los resultados anteriores las subcópulas y las cópulas n-dimensionales. Las definiciones son análogas a las del caso de dos dimensiones (1.2.1 y 1.2.2).

1.8.13. Definición. *Una subcópula multivariada o una n-subcópula es una función C' que satisface las siguientes condiciones:*

1. *Dom $C' = A_1 \times \cdots \times A_n$, donde cada $A_k \subset I$ que contiene al 0 y al 1;*
2. *C' es una función fija n-creciente;*
3. *C' tiene marginales (uni-dimensionales) C'_k, $k = 1, 2, ..., n$, las cuales satisfacen*

$$C'_k(u) = u \quad \text{para todo } u \in A_k.$$

Por lo que para cada $\mathbf{u} \in$ *Dom C'*, $0 \leq C'(\mathbf{u}) \leq 1$, tal que el *Ran C'* es también un subconjunto de **I**.

1.8.14. Definición. *Una cópula multivariada es una subcópula C cuyo dominio es I^n, es decir una cópula multivariada es una función $C : I^n \to I$ con las siguientes propiedades:*

1. *Para toda* $u \in I^n$,

$$C(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{si al menos una coordenada de } \mathbf{u} \text{ es } 0, \tag{1.35}$$

2. *Para toda* $u \in I^n$,

$$C(\mathbf{u}) = u_k \quad \text{si todas las coordenadas de } \mathbf{u} \text{ son 1 excepto } u_k, \tag{1.36}$$

3. *Para cualquier* $\mathbf{a}$ *y* $\mathbf{b}$ *en* I^n, *tales que* $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$,

$$V_C([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) \geq 0. \tag{1.37}$$

1.8.15. Ejemplo. Sea $C(u, v, w) = w \cdot \min(u, v)$, demostrar que es cópula

Sea $B := [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ donde $a_1 \leq a_2, b_1 \leq b_2$, y $c_1 \leq c_2$.

1. $C(u, v, 0) = 0 \cdot \min(u, v) = 0$, $C(0, v, w) = 0$ y $C(u, 0, w) = 0$.
2. $C(u, 1, 1) = 1 \cdot \min(u, 1) = u$, $C(1, v, 1) = v$ y $C(1, 1, w) = w$.
3. $$\begin{aligned} V_C(B) &= C(a_2, b_2, c_2) - C(a_2, b_2, c_1) - C(a_2, b_1, c_2) - C(a_1, b_2, c_2) \\ &+ C(a_2, b_1, c_1) - C(a_1, b_2, c_1) + C(a_1, b_1, c_2) - C(a_1, b_1, c_1) \\ &= (a_2 - a_1)V_M([b_1, b_2] \times [c_1, c_2]) \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto $C(u, v, w) = w \cdot \min(u, v)$ es una cópula. ■

Una consecuencia del Lema 1.8.12 es la continuidad uniforme de las n-subcópulas y por tanto de las n-cópulas.

1.8.16. Teorema. *Sea* C' *una* n*-subcópula. Entonces para todo* $\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{v}$ *en el* $Dom\, C'$,

$$|C'(\mathbf{v}) - C'(\mathbf{v})| \leq \sum_{k=1}^{n} |v_k - u_k|. \tag{1.38}$$

C' es uniformemente continua en su dominio.

Demostración: Sea $z > 0$, sea $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ puntos en el $Dom\, C'$ tales que $\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_m| < z$, entonces (1.34) y por la tercera propiedad de las n-subcópulas se cumple que:

$$|C'(\mathbf{x}) - C'(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|.$$

por lo que C' es uniformemente continua en su dominio. □

1.8.17. Definición. *Sea n un entero ≥ 2. Una función de distribución n-dimensional es una función H que satisface las siguientes condiciones:*

1. *$Dom\, H = \overline{\mathbb{R}}^n$,*
2. *H está fija y es n-creciente,*
3. *$H(\infty, \infty, ..., \infty) = 1$.*

1.8.18. *Teorema de Sklar en n dimensiones.* *Sea H una función de distribución n-dimensional con marginales F_1, F_2, ..., F_n. Entonces existe una n-cópula C tal que para todo $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}^n$,*

$$H(x_1, x_2, ..., x_n) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n)) \qquad (1.39)$$

Si $F_1, F_2, ..., F_n$ son todas continuas, entonces C es única; si no C está únicamente determinado sobre $Ran F_1 \times Ran F_2 \times \cdots Ran F_n$. Si C es una n-cópula y F_1, F_2, ..., F_n son funciones de distribución, entonces la función H definida por (1.39) es una función de distribución n-dimensional con marginales F_1, F_2, ..., F_n.

1.8.19. Corolario. *Sea H, C, F_1, F_2, ..., F_n como en el Teorema 1.8.18 y sean $F_1^{(-1)}$, $F_2^{(-1)}$, ..., $F_n^{(-1)}$ las cuasi-inversas de F_1, F_2, ..., F_n respectivamente. Entonces para cualquier $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^n$,*

$$C(u_1, u_2, ..., u_n) = C(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), ..., F_n^{(-1)}(u_n)). \qquad (1.40)$$

Se denotarán por W^n, Π^n y M^n a las extensiones en n dimensiones de las cópulas W, Π y M, dadas por:

$$\begin{aligned} M^n(\mathbf{u}) &= \min(u_1, u_2, ..., u_n), \\ \Pi^n(\mathbf{u}) &= u_1 u_2 \cdots u_n, \qquad (1.41) \\ W^n(\mathbf{u}) &= \max(u_1 + u_2 ... u_n - n + 1, 0). \qquad (1.42) \end{aligned}$$

Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ en $\mathbf{I}^n$ tales que $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$. Se pueden redefinir las ecuaciones (1.41) y (1.42), como sigue

$$\begin{aligned} V_{\Pi^n}([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) &= (v_1 - u_1)(v_2 - u_2) \cdots (v_n - u_n), \text{ y} \\ V_{W^n}([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) &= \max(0, \min(v_1, v_2, ..., v_n) - \min(u_1, u_2, ..., u_n)). \end{aligned}$$

Las funciones M^n y Π^n son cópulas para cualquier entero $n \geq 2$ y la W^n no es cópula para $n \geq 3$, como se muestra en el siguiente ejemplo.

1.8.20. Ejemplo. Sea la función $W^n : \mathbf{I}^n \to \mathbf{I}$ tal que
$W^n(u_1, u_2, ..., u_n) = \max(u_1 + ... + u_n - n + 1, 0)$ para todo $(u_1, ..., u_n) \in \mathbf{I}^n$.

Sea $B := [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ con $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \mathbf{I}^n$ tal que $\mathbf{a} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2})$ y $\mathbf{b} = (1, 1, ..., 1)$. Entonces $\mathbf{a} \prec \mathbf{b}$, los valores de $sgn_B(\mathbf{c}) \neq 0$ ya que todos los vértices de B son distintos. Sea K el conjunto de todos los vértices de B, dado por $K := \{\mathbf{c} = (c_1, ..., c_n) \in \mathbf{I}^n : c_k = 1/2 \text{ ó } c_k = 1\}$.

$$\begin{aligned} V_{W^n}(B) &= \sum_{\mathbf{c} \in K} sgn_B(\mathbf{c}) W^n(\mathbf{c}) \\ &= \sum_{\mathbf{c} \in K} sgn_B(c_1, ..., c_n) W^n(c_1, ..., c_n) \\ &= \sum_{\mathbf{c} \in K} sgn_B(c_1, ..., c_n) \max(c_1 + ... + c_n - n - 1, 0). \end{aligned}$$

La mayoría de los sumandos son cero ∎

La versión de las cotas de Fréchet-Hoeffding para cópulas multivariadas es el teorema siguiente, donde a diferencia de la bivariada, las dos cotas son cópulas.

1.8.21. Teorema. *Si C' es cualquier n-subcópula, entonces para cualquier $\mathbf{u} \in Dom\, C'$,*

$$W^n(\mathbf{u}) \leq C'(\mathbf{u}) \leq M^n(\mathbf{u})$$

A pesar de que la cota inferior no es cópula es la mejor aproximación, en el sentido que para cualquier $n \geq 3$ y cualquier $\mathbf{u} \in \mathbf{I}^n$, existe una cópula C tal que $C(\mathbf{u}) = W^n(\mathbf{u})$.

Capítulo 2

Cópulas Arquimedeanas

2.1. Construcción de Cópulas

El método de inversión para construir cópulas parte esencialmente del Corolario 1.3.11, donde dadas dos variables aleatorias X y Y con función de distribución conjunta H, y marginales F y G, respectivamente, se calculan las cuasi-inversas de las marginales y se obtiene:

$$C(u,v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)).$$

Con esta cópula, nuevas distribuciones con marginales arbitrarias, F' y G', se pueden construir utilizando el Teorema de Sklar: $H'(x,y) = C(F'(x), G'(y))$.

Esto mismo se puede utilizar para las funciones de supervivencia

$$\widehat{C}(u,v) = \overline{H}(\overline{F}^{(-1)}(u), \overline{G}^{(-1)}(v)),$$

donde $\overline{F}^{(-1)}$ denota la cuasi-inversa de $\overline{F}$.

Otro método es el algebráico, con el cual se construirán dos familias de cópulas: *la Plackett y la Ali-Mikhail-Haq*, partiendo de las relaciones que existen entre su función de distribución conjunta y sus marginales univariadas.

Distribuciones Plackett

Las tablas de contingencias se construyen con el fin de estudiar la relación entre dos variables de clasificación. En la tabla 2.1 se registran las frecuencias a, b, c, d de las clasificaciones indicadas para una muestra de tamaño n.

	bajo	alto	
bajo	a	b	$a+b$
alta	c	d	$c+d$
	$a+c$	$b+d$	n

Tabla 2.1

La razón del producto cruzado es el real positivo $\theta = ad/cb$, el cual es una medida de "asociación" o "dependencia".

Cuando el valor θ es 1, corresponde a la independencia, pues $ad = cb$, lo cual implica que cada entrada de la tabla es igual a su valor esperado.

$$\frac{a+c}{n}(a+b) = \frac{a^2+ab+ac+cb}{n} = \frac{a(a+b+c+d)+bc-ad}{a+b+c+d} = a$$

Si $\theta = ad/cb > 1$, entonces $ad > cb$. Por lo que las observaciones se concentraron en las celdas "bajo-bajo" y "alta-alta".

Si $0 < \theta < 1$, entonces $0 < ad < cb$. Por lo tanto las observaciones se concentran en las celdas "bajo-alta" y "alta-bajo".

$$\theta = \frac{ad}{bc} = \frac{a/c}{b/d} = \frac{\frac{a}{a+c}\Big/\frac{c}{a+c}}{\frac{b}{b+d}\Big/\frac{d}{b+d}} \qquad \text{y} \qquad \theta = \frac{a/b}{c/d} = \frac{\frac{a}{a+b}\Big/\frac{b}{a+b}}{\frac{c}{c+d}\Big/\frac{d}{c+d}}.$$

En Plackett(1965) la familia de distribución bivariada, resulta de una extensión de esta idea a las funciones de distribución bivariada con marginales continuas.

Sean X y Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta H y marginales F y G respectivamente; sean x, y cualquier par de números reales. Si la variable aleatoria X representa la variable columna, donde las categorias bajo y alto corresponden a los eventos $X \leq x$ y $X > x$

respectivamente, y similarmente para la variable renglón Y.

Entonces, los valores de la tabla 2.1 representan los eventos:
$a = P[X \leq x, Y \leq y] = H(x,y)$,
$b = P[X \leq x, Y > y] = F(x) - H(x,y)$,
$c = P[X > x, Y \leq y] = G(y) - H(x,y)$,
$d = P[X > x, Y > y] = 1 - F(x) - G(y) + H(x,y)$.

Sustituyendo los valores anteriores en $\theta = ad/bc$, se tiene que

$$\theta = \frac{H(x,y)(1 - F(x) - G(y) + H(x,y))}{(F(x) - H(x,y))(G(y) - H(x,y))}. \tag{2.1}$$

Sean $u = F(x)$ y $v = G(y)$, utilizando el Teorema de Sklar, se puede escribir la ecuación (2.1) como

$$\theta = \frac{C(u,v)[1 - u - v + C(u,v)]}{[u - C(u,v)][v - C(u,v)]},$$

cuando $\theta = 1$ y se resuelve para $C(u,v)$, la única solución es $C = \Pi$ que es la cópula de variables aleatorias X y Y independientes.

Para $\theta \neq 1$, se obtiene la ecuación cuadrática

$$0 = (\theta - 1)C^2(u,v) + [(1-\theta)(u+v) - 1]C(u,v) + \theta uv \tag{2.2}$$

donde

$$C(u,v) = \frac{1 + (\theta - 1)(u+v) \pm \sqrt{[1 + (\theta - 1)(u+v)]^2 - 4uv\theta(\theta - 1)}}{2(\theta - 1)},$$

es la solución.

De acuerdo al teorema de Sklar para dos variables aleatorias continuas X y Y con marginales F y G, respectivamente la cópula $C(F(x), G(y)) = H(x,y)$ es única, por lo que alguna de las dos soluciones de (2.2) no es una cópula.

Las marginales de las dos raices de (2.2) son:

$$C(u,0) = \frac{[1 + (\theta - 1)u] \pm |1 + (\theta - 1)u|}{2(\theta - 1)} \quad \text{y}$$
$$C(u,1) = \frac{[\theta + (\theta - 1)u] \pm |\theta - (\theta - 1)u|}{2(\theta - 1)}.$$

La raíz

$$C(u,v) = \frac{1+(\theta-1)(u+v)+\sqrt{[1+(\theta-1)(u+v)]^2-4uv\theta(\theta-1)}}{2(\theta-1)}$$

no satisface las condiciones de frontera.

Sin embargo, la otra raíz satisface las dos condiciones de frontera, esto es

$$\begin{aligned} C_\theta(u,0) &= \frac{[1+(\theta-1)u]-[1+(\theta-1)u]}{2(\theta-1)} = 0 \quad y \\ C_\theta(u,1) &= \frac{[\theta+(\theta-1)u]-[\theta-(\theta-1)u]}{2(\theta-1)} = u. \end{aligned}$$

Para que C_θ sea una cópula falta ver que es 2-creciente, para ello es suficiente con demostrar que

$$\frac{\partial^2 C_\theta(u,v)}{\partial u \partial v} \geq 0 \quad y \quad C_\theta(u,v) = \int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C_\theta(s,t)}{\partial s \partial t} dt ds,$$

para toda $(u,v) \in \mathbf{I}^2$.

$$\frac{\partial^2 C_\theta(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{\theta(1+(\theta-1)v+u(\theta-1)(1-2v))}{p}$$

donde

$$\begin{aligned} p \;=\; & \theta((\theta-1)^2u^2+(1+(\theta-1)v)^2+2u(\theta-1+v(1-\theta^2)) \times \\ & \sqrt{[1+(\theta-1)(u+v)]^2-4uv\theta(\theta-1)2(\theta-1)}. \end{aligned}$$

Como $\theta(1+(\theta-1)v+u(\theta-1)(1-2v)) > 0$ y $p > 0$ para cualquier $\theta > 0$ y $\theta \neq 1$ entonces, se cumple que $\partial^2 C_\theta(u,v)/\partial u \partial v \geq 0$.

Además,

$$\int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C_\theta(s,t)}{\partial s \partial t} dt ds = C_\theta(u,v),$$

por lo tanto C_θ es absolutamente continua, por lo cual se obtiene la familia Plackett de cópulas para $\theta > 0$, $\theta \neq 1$,

$$C(u,v) \;=\; \frac{1+(\theta-1)(u+v)-\sqrt{[1+(\theta-1)(u+v)]^2-4uv\theta(\theta-1)}}{2(\theta-1)}$$

y para $\theta = 1$,

$$C(u,v) \;=\; \Pi(u,v) = uv.$$

Distribuciones Ali-Mikhail-Haq

Sean X y Y variables aleatorias con función de distribución H y marginales F y G, repectivamente. Si X y Y denotan el tiempo de vida de un objeto. En ocasiones es de interés la "posibilidad de sobrevivencia", es decir la razón $P[X > x]/P[X \leq x]$ es la probabilidad de sobrevivir después del tiempo x entre la probabilidad de falla antes del tiempo x.

$$\frac{P[X > x]}{P[X \leq x]} = \frac{\overline{F}(x)}{F(x)} = \frac{1 - F(x)}{F(x)}.$$

De manera análoga, se puede definir la posibilidad de supervivencia bivariada, por la razón,

$$\frac{P[\{X > x\} \cup \{Y > y\}]}{P[X \leq x, Y \leq y]} = \frac{\overline{H}(x,y)}{H(x,y)} = \frac{1 - H(x,y)}{H(x,y)}. \tag{2.3}$$

2.1.1. Ejemplo. Sean X y Y variables aleatorias con función de distribución logística, esto es, para todo x, $y \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$H(x,y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}.$$

Entonces, la razón (2.3) es,

$$\frac{1 - H(x,y)}{H(x,y)} = \frac{1 - (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}}{(1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}} = e^{-x} + e^{-y}.$$

Como, $F(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$, se tiene que

$$\frac{\overline{F}(x)}{F(x)} = \frac{1 - (1 + e^{-x})^{-1}}{(1 + e^{-x})^{-1}} = e^{-x}, \text{ similarmente se obtiene } \frac{\overline{G}(y)}{G(y)} = e^{-y}.$$

Entonces,

$$\frac{1 - H(x,y)}{H(x,y)} = \frac{\overline{F}(x)}{F(x)} + \frac{\overline{G}(y)}{G(y)} = \frac{1 - F(x)}{F(x)} + \frac{1 - G(y)}{G(y)}. \tag{2.4}$$

■

2.1.2. Ejemplo. Sean X y Y variables aleatorias independientes con función de distribución H y funciones de distribución marginales F y G, respectivamente, entonces $H(x,y) = F(x)G(y)$.

$$\frac{1-H(x,y)}{H(x,y)} = \frac{1-F(x)}{F(x)} + \frac{1-G(y)}{G(y)} + \frac{1-F(x)}{F(x)} \cdot \frac{1-G(y)}{G(y)} \tag{2.5}$$

Ali, Mikhail y Haq (1978) proponen la búsqueda de funciones de distribución bivariada para la cual la razón de posibilidades de sobrevivencia, satisfaga

$$\frac{1-H(x,y)}{H(x,y)} = \frac{1-F(x)}{F(x)} + \frac{1-G(y)}{G(y)} + (1-\alpha)\frac{1-F(x)}{F(x)} \cdot \frac{1-G(y)}{G(y)} \tag{2.6}$$

para alguna constante α.

Si $\alpha = 1$ se obtiene (2.4), si $\alpha = 0$ se tiene la independencia de las variables aleatorias.

Con la transformación $u = F(x)$, $v = G(y)$, y el Teorema de Sklar en (2.6), se obtiene

$$\frac{1-C_\alpha(u,v)}{C_\alpha(u,v)} = \frac{1-u}{u} + \frac{1-v}{v} + (1-\alpha)\frac{1-u}{u} \cdot \frac{1-v}{v}$$

Resolviendo para $C_\alpha(u,v)$,

$$\begin{aligned}
\frac{1-C_\alpha(u,v)}{C_\alpha(u,v)} &= \frac{(1-u)v + (1-v)u - (1-\alpha)(1-u)(1-v)}{uv}, \\
uv &= C_\alpha(u,v)[(1-u)v + (1-v)u + (1-\alpha)(1-u)(1-v) + uv] \\
&= C_\alpha(u,v)[v(1-u) + u + (1-\alpha)(1-u)(1-v)] \\
&= C_\alpha(u,v)[1-\alpha(1-u-v+uv)],
\end{aligned}$$

por lo tanto, se obtiene la familia de **Ali-Mikhail-Haq**, donde $\alpha \in [-1,1]$,

$$C_\alpha(u,v) = \frac{uv}{1-\alpha(1-u)(1-v)}. \tag{2.7}$$

Sea $u \in \mathbf{I}$, entonces

$$\begin{aligned}
C_\alpha(u,1) &= u \quad \text{y} \quad C_\alpha(1,u) = u. \\
C_\alpha(u,0) &= 0 \quad \text{y} \quad C_\alpha(0,u) = 0.
\end{aligned}$$

Para que $C_\alpha(u,v) \geq 0$ en $\mathbf{I}^2$, es necesario que $\alpha \leq 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_\alpha(u,v)}{\partial v} &= \frac{u(1+(u-1)\alpha)}{((u-1)(v-1)\alpha-1)^2}. \\
\frac{\partial^2 C_\alpha(u,v)}{\partial u \partial v} &= \frac{1+[(u-1)+(v-1)+uv]\alpha + [(1-u)(v-1)]\alpha^2}{(1-(u-1)(v-1)\alpha)^3}.
\end{aligned}$$

para que
$$\frac{\partial^2 C_\alpha(u,v)}{\partial u \partial v} \geq 0 \qquad \text{se requiere que } \alpha \geq -1.$$
Finalmente, para $(u,v) \in \mathbf{I}^2$
$$\begin{aligned}\int_0^u \int_0^v \frac{\partial^2 C_\alpha(s,t)}{\partial s \partial t} dt ds &= \frac{v(1-\alpha+v\alpha)}{(\alpha-1-v\alpha)(v\alpha-\alpha)} - \\ &- \frac{v(1-\alpha+v\alpha)}{(v\alpha-\alpha)(-1+\alpha-u\alpha-v\alpha+uv\alpha)} \\ &= \frac{uv}{1-\alpha(u-1)(v-1)}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $C_\alpha(u,v)$ es absolutamente continua. C_α representa a la Familia de cópulas Ali-Mikhail-Haq, la cual de acuerdo al ejemplo 1.2.14 está ordenada positivamente. ■

La figura 2.1 ilustra la superficie de una cópula de esta familia con θ=0.8 y su gráfica de contorno.

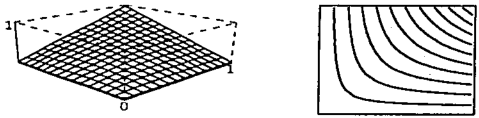

Figura 2.1. Cópula Ali-Mikhail-Haq con θ=0.8.

2.2. Definiciones

Las funciones de distribución conjunta y marginales de miembros de la Familia Ali-Mikhail-Haq satisfacen la relación siguiente
$$\frac{1-C(F(x),G(y))}{C(F(x),G(y))} == \frac{1-F(x)}{F(x)} + \frac{1-G(y)}{G(y)} + (1-\alpha)\frac{1-F(x)}{F(x)} \cdot \frac{1-G(y)}{G(y)},$$
de donde,
$$1+(1-\alpha)\frac{1-C(F(x),G(y))}{C(F(x),G(y))} = \left[1+(1-\alpha)\frac{1-F(x)}{F(x)}\right]\left[1+(1-\alpha)\frac{1-G(y)}{G(y)}\right].$$

Por lo tanto, $\lambda(C(F(x),G(y))) = \lambda(F(x))\lambda(G(y))$, donde $\lambda(t) = 1 + (1-\alpha)(1-t)/t$. λ es una función positiva en el intervalo $(0,1)$. Entonces para $\varphi(t) = -\ln\lambda(t)$, se puede escribir a C como la suma de las funciones marginales F y G,

$$\begin{aligned} \varphi(C(F(x),G(y))) &= -\ln\lambda(F(x)\lambda(G(y)) - \ln\lambda(F(x)) - \ln\lambda(G(y)) \\ &= \varphi(F(x)) + \varphi(G(y)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2.1. Ejemplo. Sea $\widehat{C}_\theta(u,v) = (u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}$ y $\varphi(t) = t^{-1/\theta} - 1$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(\widehat{C}_\theta(u,v)) &= \varphi((u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}) \\ &= [(u^{-1/\theta} + v^{-1/\theta} - 1)^{-\theta}]^{-1/\theta} \\ &= u^{-1/\theta} - 1 + v^{-1/\theta} - 1, \end{aligned}$$

por lo tanto, satisface (2.8)

$$\varphi(\widehat{C}_\theta(u,v)) = \varphi(u) + \varphi(v).$$

Sea $C_\theta(u,v) = \exp\left(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\right)$ y $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$, entonces

$$\varphi(C_\theta(u,v)) = \varphi(\exp\left(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\right)) = (-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta,$$

por lo que (2.8) se cumple, $\varphi(C_\theta(u,v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$. ∎

Para construir una cópula a partir de la relación (2.8), es necesario resolver esta expresión para $C(u,v)$, esto es, $C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ donde $\varphi^{[-1]}$ es la pseudo-inversa de la función φ.

2.2.2. Definición. *Sea $\varphi : \mathbf{I} \to [0,\infty]$ una función continua, decreciente estrictamente tal que $\varphi(1) = 0$. La pseudo-inversa de φ es la función $\varphi^{[-1]}$ tal que $Dom\,\varphi^{[-1]} = [0,\infty]$ y $Ran\,\varphi^{[-1]} = \mathbf{I}$, dada por*

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & si\;\; 0 \le t \le \varphi(0), \\ 0 & si\;\; \varphi(0) \le t \le \infty. \end{cases}$$

$\varphi^{[-1]}$ es continua y decreciente en $[0,\infty]$, y es estrictamente decreciente en $[0,\varphi(0)]$.

Además, $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ *en* $\mathbf{I}$, *y*

$$\begin{aligned}\varphi^{[-1]}(\varphi(t)) &= \begin{cases} t & si\ \ 0 \le t \le \varphi(0), \\ \varphi(0) & si\ \ \varphi(0) \le t \le \infty. \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)).\end{aligned}$$

Finalmente, si $\varphi(0) = \infty$, *entonces* $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

2.2.3: Lema. *Sea* $\varphi : \mathbf{I} \to [0, \infty]$ *una función continua, estrictamente decreciente tal que* $\varphi(1) = 0$, *y sea* $\varphi^{[-1]}$ *la pseudo-inversa de* φ *definida en (2.8). Sea* $C : \mathbf{I}^2 \to \mathbf{I}$ *dada por*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \tag{2.9}$$

Entonces C *satisface las condiciones de frontera (1.5) y (1.6) para una cópula.*

Demostración: Sea $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$, y $u \in \mathbf{I}$. De acuerdo a la definición de pseudo-inversa, se tiene que

$$C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ \varphi(0) = \infty, \text{entonces } \varphi^{-1}(\infty) = 0, \\ 0 & \text{si } \ 0 \le \varphi(u) \le \infty. \end{cases}$$

$\varphi(1) = 0$, entonces $C(u, 1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$. Por simetría $C(0, u) = 0$ y $C(1, u) = u$. □

Para que $C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ sea cópula, falta establecer las condiciones para que C sea una función 2-creciente, las cuales se establecen en el Lema siguiente.

2.2.4. Lema. *Sean* φ, $\varphi^{[-1]}$ *y* C *bajo la hipótesis del Lema 2.2.3. Entonces* C *es 2-creciente si y sólo si cuando* $u_1 \le u_2$,

$$C(u_2, v) - C(u_2, v) \le u_2 - u_1. \tag{2.10}$$

Demostración: Sea $B := [u_1, u_2] \times [v, 1]$ tal que $B \subset \mathbf{I}^2$, si C es 2-creciente $V_C(B) \ge 0$.

$$\begin{aligned} V_C(B) &= C(u_2, 1) - C(u_2, v) - C(u_1, 1) + C(u_1, v) \\ &= u_2 - C(u_2, v) - u_1 + C(u_1, v) \ge 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \le u_2 - u_1.$$

Sean v_1, $v_2 \in \mathbf{I}$ tal que $v_1 \leq v_2$, como C es creciente entonces, $C(0, v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1, v_2)$.

Se sabe que C es continua, entonces existe $t \in \mathbf{I}$ tal que $C(t, v_2) = v_1$, $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) + \varphi(t)$.

$$\begin{aligned}
C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u_2, v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u_1, v_2) + \varphi(t)) \\
&= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t) \\
&\leq C(C(u_2, v_2), 1) - C(u_1, v_2), 1) \\
&= C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2).
\end{aligned}$$

Por lo tanto C es 2-creciente. □

2.2.5. Definición. *Sea $J \subset \mathbb{R}$. Se dice que una función $\varphi : J \to [0, \infty]$ es convexa en J si para cualquier t que satisface $0 \leq t \leq 1$ y los puntos cualesquiera x_1, x_2 en J, se tiene que*

$$\varphi((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)\varphi(x_1) + t\varphi(x_2).$$

si se cambia la desigualdad la función es cóncava.

Obsérvese que si $x_1 < x_2$, entonces cuando t varía de 0 a 1, el punto $(1-t)x_1 + tx_2$ recorre el intervalo de x_1 a x_2.

Una función convexa no es necesariamente derivable en todo punto, como lo indica el ejemplo $f(x) = |x|$, con $x \in \mathbb{R}$. Sin embargo, si J es un intervalo abierto y si $f : J \to \mathbb{R}$ es convexa en J, entonces existen las derivadas por la izquierda y por la derecha de F en todo punto de J. Como una consecuencia, se sigue que una función convexa en un intervalo abierto es necesariamente continua.

2.2.6. Teorema. *Sea J un intervalo abierto y sea $f : J \to \mathbb{R}$, si f tiene segunda derivada en J. Entonces f es una función convexa si y sólo si $f''(x) \geq 0$ para toda $x \in J$.*

Demostración: Sea $f : J \to \mathbb{R}$ con segunda derivada, entonces

$$f''(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}, \tag{2.11}$$

para cada $a \in J$.

Dada $a \in J$, sea h tal que $a+h$ y $a-h$ pertenecen a J. Entonces $a = 1/2[(a+h)+(a-h)]$ y como f es convexa en J, se tiene que

$$f(a) = f(\frac{1}{2}(a+h) + \frac{1}{2}(a-h)) \leq \frac{1}{2}f(a+h) + \frac{1}{2}f(a-h).$$

Por lo tanto, se obtiene que $f(a+h) - 2f(a) + f(a-h) \geq 0$. Puesto que $h^2 > 0$ para toda $h \neq 0$, se ve que el límite 2.11 debe ser no negativo.

Por tanto se tiene que $f''(a) \geq 0$ para cualquier $a \in J$.

Por probar ahora que si $f''(x) \geq 0$ entonces f es convexa.

Sean x_1, x_2 dos puntos cualesquiera de J, sea $0 < t < 1$ y sea $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$. Al aplicar el Teorema de Taylor a f alrededor de x_0 se obtiene un punto c_1 entre x_0 y x_1, tal que

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0) \quad + \quad \frac{1}{2}f''(c_1)(x_1 - x_0)^2,$$

y un punto c_2 entre x_0 y x_2 tal que

$$f(x_2) = f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0) \quad + \quad \frac{1}{2}f''(c_2)(x_2 - x_0)^2.$$

Si f'' es no negativa en J entonces,

$$R = \frac{1}{2}(1-t)f''(c_1)(x_1 - x_0)^2 \quad + \quad \frac{1}{2}tf''(c_2)(x_2 - x_0)^2 \geq 0.$$

Por lo tanto se obtiene que

$$\begin{aligned}(1-t)f(x_1) + tf(x_2) &= f(x_0) + f'(x_0)((1-t)x_1 + tx_2 - x_0) + \\ &+ \frac{1}{2}(1-t)f''(c_1)(x_1 - x_0)^2 + \frac{1}{2}tf''(c_2)(x_2 - x_0)^2 \\ &= f(x_0) + R \\ &\geq f(x_0) = f((1-t)x_1 + tx_2).\end{aligned}$$

Por lo tanto f es una función convexa en J. □

2.2.7. Teorema. *Sea φ una función continua, estrictamente decreciente de $\mathbf{I}$ a $[0,\infty]$ tal que $\varphi(1)=0$, y sea $\varphi^{[-1]}$ la pseudo-inversa de φ. La función $C:\mathbf{I}^2\to\mathbf{I}$ dada por (2.9) es una cópula si φ es convexa.*

Demostración: Sean $C(u,v)=\varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v))$, u_1, u_2, $v\in\mathbf{I}$ tal que $u_1\le u_2$, y $v\le 1$.

C satisface (2.10), y $\varphi^{[-1]}(\varphi(u_2)+\varphi(v))-\varphi^{[-1]}(\varphi(u_2)+\varphi(v))\le u_2-u_1$, equivalentemente

$$u_1+\varphi^{[-1]}(\varphi(u_2)+\varphi(v))\le u_2+\varphi^{[-1]}(\varphi(u_2)+\varphi(v)).$$

Para $u_1\le u_2$, sean $a=\varphi(u_1)$, $b=\varphi(u_2)$ $c=\varphi(v)$, entonces

$$\varphi^{[-1]}(a)+\varphi^{[-1]}(b+c)\le\varphi^{[-1]}(b)+\varphi^{[-1]}(a+c), \tag{2.12}$$

como φ es decreciente entonces $a\ge b$ y $c\ge 0$.

Supongase que C satisface (2.10), por lo cual $\varphi^{[-1]}$ satisface (2.12).

Sean s, $t\in[0,\infty]$ tales que $s\le t$.

Si $a=(s+t)/2$, $b=s$ y $c=(t-s)/2$, entonces (2.12) se reescribe como

$$\begin{aligned}
\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right)+\varphi^{[-1]}\left(s+\frac{t-s}{2}\right) &\le \varphi^{[-1]}(s)+\varphi^{[-1]}\left(\frac{t+s}{2}+\frac{t-s}{2}\right),\\
\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right)+\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) &\le \varphi^{[-1]}(s)+\varphi^{[-1]}(t),\\
\varphi^{[-1]}\left(\frac{s+t}{2}\right) &\le \frac{\varphi^{[-1]}(s)+\varphi^{[-1]}(t)}{2}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Como $\varphi^{[-1]}$ es continua y satisface (2.13) se tiene que φ es convexa.

Sea $\varphi^{[-1]}$ una función convexa. Sean a, b y $c\in\mathbf{I}$ fijos tales que $a\ge b$ y $c\ge 0$, y $\gamma=(a-b)/(a-b+c)$, de aqui que $a-b=(a-b+c)\gamma$, entonces $a=(a+c)\gamma+b(\gamma-1)$.

También, $b+c=a+c-(a-b+c)\gamma=(a+c)(1-\gamma)+\gamma b$.

Como $\varphi^{[-1]}$ es convexa entonces, y $\gamma \in [0,1]$ se cumple que

$$\varphi^{[-1]}(a) \leq (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a+c) \qquad \text{y,}$$

$$\varphi^{[-1]}(b+c) \leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c).$$

Sumando estas dos desigualdades se obtiene la ecuación (2.12) donde se obtiene que C es 2-creciente y por lo tanto una cópula. □

Sea Φ el conjunto de funciones $\varphi : [0,1] \to [0,\infty]$ continuas, estrictamente dercrecientes, convexas, tal que $\varphi(1) = 0$ con pseudo-inversa. Cada $\varphi \in \Phi$ genera una cópula C, esto es, una función de distribución bivariada con marginales uniformes $[0,1]$ dada por

$$C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)), \qquad 0 \leq u,\ v \leq 1. \tag{2.14}$$

Estas cópulas se llaman *Arquimedeanas*. A la función φ se le llama generador de la cópula C. Si $\varphi(0) = \infty$, se dice que φ es un generador estricto. En este caso, $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ y $C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u)+\varphi(v))$ es una *cópula Arquimedeana estricta*. Ver figura 2.2.

Miembros típicos de la clase Φ incluyen a $\varphi(t) = -\ln(t)$, $\varphi(t) = (1-t)^{\alpha}$ con $\alpha < 1$ y $\varphi(t) = t^{-\alpha} - 1$, donde $\alpha > 1$.

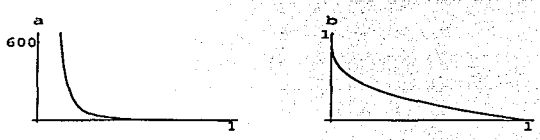

Figura 2.2. Generadores estricto y no estricto.

2.2.8. Ejemplo. Sea $\varphi(t) = -\ln(t)$ para $t \in [0,1]$, $\varphi(t)$ es continua, estrictamente decreciente, convexa y $\varphi(1) = 0$. Como $\varphi(0) = \infty$, $\varphi(t)$ es un generador estricto, entonces $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = \exp(-t)$.

Para generar la cópula, se sustituyen en la expresión $C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$ y se obtiene $C(u,v) = \exp(\ln(u) + \ln(v)) = uv = \Pi(u,v)$. Por lo que la cópula producto es una cópula Arquimedeana estricta. De aquí que X y Y son variables independientes si y sólo si $\varphi(t) = -c\ln(t)$, donde $c > 0$. ■

2.2.9. Ejemplo. Sea $\varphi(t) = 1 - t$ para $t \in [0, 1]$. $\varphi \in \Phi$ ya que es continua, convexa, estrictamente decreciente y $\varphi(1) = 0$.

$$\begin{aligned}\varphi^{[-1]}(t) &= \begin{cases} 1-t & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & t > 1. \end{cases} \\ &= \text{máx}(1-t, 0).\end{aligned}$$

Para construir la cópula se tiene que

$$\begin{aligned}C(u,v) = \varphi^{[-1]}(1-u+1-v) &= \begin{cases} u+v-1 & 0 \leq u+v-1 \leq 1, \\ 0 & u+v-1 > 1. \end{cases} \\ &= \text{máx}(u+v-1, 0).\end{aligned}$$

Por lo tanto la cota inferior de Fréchet-Hoeffding $W(u,v) = \text{máx}(u+v-1, 0)$ es una cópula Arquimedeana. ■

2.2.10. Ejemplo. La cota superior de Fréchet-Hoeffding M, definida por $M(u,v) = \text{mín}(u,v)$, es la cópula del par (U, V) donde $U = V$ con probabilidad 1.

Esta cópula no se puede escribir de la forma $C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$, ya que $C(u,u) = u$ lo cual implicaría que $2\varphi(u) = \varphi(u)$ para toda $u \in (0,1)$. Por lo que la cota superior no es una cópula Arquimedeana. ■

2.2.11. Ejemplo. Sea $\varphi_\theta(t) = \ln(1 - \theta \ln t)$ para $\theta \in (0, 1]$. En caso de ser un generador, obtener la cópula que genera.

Para que φ_θ sea un generador tiene que ser continuo, estrictamente decreciente.

1. φ_θ es continua.

2. $\varphi_\theta'(t) = \dfrac{-\theta}{t(1-\theta\ln t)} \leq 0$, si $0 < t < 1$, por lo tanto es decreciente, además para t_1 y t_2 tales que $t_1 < t_2$ se cumple que $\varphi_\theta(t_1) > \varphi_\theta(t_2)$ entonces φ_θ es estrictamente decreciente.

3. Además $\varphi(0) = \infty$,entonces φ es un generador estricto, por lo que $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi{-}1(t) = \exp[(1-e^t)/\theta]$. Por lo tanto φ_θ es un generador.

Entonces de acuerdo a (2.9) se tiene que la cópula generada es

$$\begin{aligned}
C_\theta(u,v) &= \varphi_\theta^{-1}(\varphi_\theta(u)+\varphi_\theta(v)) = \exp[(1-\exp\{\ln(1-\theta\ln u)+\ln((1-\theta\ln v)\}]/\theta),\\
&= \exp[(1-\exp\{\ln(1-\theta\ln(u))(1-\theta\ln(v))\}/\theta],\\
&= \exp[\ln(uv)-\theta\ln(u)ln(v)],\\
&= uv\exp[-\theta\ln(u)ln(v)].
\end{aligned}$$

Esta cópula es la cópula de supervivencia de la distribución exponencial de Gumbel bivariada, misma que se obtuvo en el ejemplo 1.6.1. ■

2.2.12. Teorema. *Sea C una cópula Arquimedeana con generador φ. Entonces:*

1. *C es simétrica, es decir, $C(u,v) = C(v,u)$ para toda u, $v \in \mathbf{I}$;*

2. *C es asociativa, es decir, $C(C(u,v),w) = C(u,C(v,w))$ para toda u, v, $w \in \mathbf{I}$;*

3. *Si $c > 0$ es cualquier constante entonces $c\varphi$ es también generador de de C.*

Demostración: Sea C una cópula C con generador φ. Es decir $C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v))$.

1. Es trivial.

2. Sea $C(C(u,v),w) = \varphi^{[-1]}(\varphi(C(u,v)) + \varphi(w))$.

$$\varphi[\varphi^{-1}(\varphi(u)+\varphi(v)] = \begin{cases} \varphi(u)+\varphi(v) & \text{si } 0 \leq \varphi(u)+\varphi(v) \leq \varphi(0),\\ \varphi(0) & \text{si } \varphi(0) \leq \varphi(u)+\varphi(v) \leq \infty.\end{cases}$$

Entonces,

$$C(C(u,v),w) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0),\\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty.\end{cases}$$

donde $t = \varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)$.
Y,

$$C(u, C(v, w)) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0 & \text{si } \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Por lo tanto $C(u, C(v, w)) = C(C(u, v), w)$.

3. Como φ es un de generador C, entonces φ es una función convexa en $\mathbf{I}$, entonces para cualquier t que satisface $0 \leq t \leq 1$ y puntos cualesquiera x_1, x_2 en $\mathbf{I}$, se cumple que

$$\varphi((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)\varphi(x_1) + t\varphi(x_2),$$

para $c > 0$ se tiene que

$$c(\varphi((1-t)x_1 + tx_2)) \leq c((1-t)\varphi(x_1) + t\varphi(x_2)),$$

de donde $c\varphi$ es convexa, y por lo tanto es también generador de la misma C.□

2.2.13. Teorema. *Sea C una cópula tal que $\delta_C(u) < u$ para toda u en $(0, 1)$. Entonces C es Arquimedeana.*

Demostración: Sea C una cópula Arquimedeana con generador φ, y sea $\delta_C(u) = C(u, u)$ la sección diagonal de la cópula C.

$C(u, u) = \varphi^{[-1]}(2\varphi(u))$, como $\varphi^{[-1]}$ es decreciente entonces para $2\varphi(u) > \varphi(u)$, se tiene que $C(u, u) < u$ para toda u en $(0, 1)$. □

El teorema anterior establece que esta propiedad y la asociatividad caracterizan a las cópulas Arquimedeanas.

2.3. Propiedades

Sea Ω el conjunto de funciones continuas, estrictamente decrecientes, convexas de $\mathbf{I}$ a $[0, \infty]$ con $\varphi(1) = 0$.

El nombre de cópulas Arquimedeanas se atribuye al Axioma de Arquimedes para números reales positivos,-"Si a, b son reales positivo, entonces existe un entero positivo n tal que $na > b$. Una cópula Arquimedeana se comporta como una operación en el intervalo $[0,1]$, que asigna a cada $(u,v) \in \mathbf{I}^2$ un número $C(u,v)$ en $\mathbf{I}$. Esta operación es conmutativa (por la propiedad de simetría), y asociativa, además preserva el orden, es decir que si $u_1 \geq u_2$ y $v_1 \geq v_2$, entonces $C(u_1,v_1) \leq C(u_2,v_2)$. Por lo que las cópulas Arquimedeanas ($\mathbf{I}$,C) son un semigrupo Abeliano ordenado.

2.3.1. Definición. *Para cualquier $u \in \mathbf{I}$, las C-potencias de una cópula Arquimedeana C, representadas por u_C^n se define recursivamente como $u_C^1 = u$, y $u_C^{n+1} = C(u, u_C^n)$.*

La versión del Axioma de Arquímedes para ($\mathbf{I}$,C) es –"*Para cualquier par de números $u,v \in (0,1)$, existe un entero positivo n tal que $u_C^n < v$*". Es por esta razón que se les llama cópulas Arquimedeanas, quien utilizó este término por primera vez fue Ling(1965).

2.3.2. Teorema. *Sea C una cópula Arquimedeana generada por $\varphi \in \Phi$. Entonces para cualquier u, $v \in \mathbf{I}$, existe un entero positivo n tal que $u_C^n < v$.*

Demostración: Sean u, v elementos cualesquiera de $(0,1)$. Sea C una cópula Arquimendeana con generador φ, entonces $C(u,v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))$.

La C-potencia u_C^n queda como,

$$
\begin{aligned}
u_C^n &= C(u, u_C^{n-1}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(u_C^{n-1})) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(C(u, u_C^{n-2})) \\
&= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(u_C^{n-2}))) \\
&= \varphi^{[-1]}(2\varphi(u) + \varphi(u_C^{n-2})) \\
&= \vdots \\
&= \varphi^{[-1]}(n\varphi(u)).
\end{aligned}
$$

Como $\varphi(u)$ y $\varphi(v)$ son reales positivos, se puede aplicar el axioma de Arquímides, por lo que existe un entero positivo n talque $n\varphi(u) > \varphi(v)$.

$\varphi^{[-1]}$ es decreciente entonces, $\varphi^{[-1]}(n\varphi(u)) < \varphi^{[-1]}(\varphi(v))$. Como $v > 0$, $\varphi(v) < \varphi(0)$ entonces $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, y $v > \varphi^{[-1]}(n\varphi(u)) = u_C^n$. $\square$

Las curvas de nivel de cualquier cópula C están dadas por el conjunto $\{(u,v) \in \mathbf{I}^2 \mid C(u,v) = t\}$. Para una cópula Arquimedeana y para $t > 0$, el conjunto de nivel consiste de los puntos sobre la curva de nivel $\varphi(u)+\varphi(v) = \varphi(t) \in \mathbf{I}^2$, la cual conecta a los puntos $(1,t)$ y $(t,1)$.

Sea $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$, resolviendo para v, queda como

$$v = L_t(u) = \varphi^{[-1]}(\varphi(t) - \varphi(u)) = \varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u)). \qquad (2.15)$$

Donde $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, ya que $(\varphi(t) - \varphi(u)) \in [0, \varphi(0))$. Cuando $t = 0$, se obtiene el *conjunto cero* de C, y se denota $Z(C) = \{(u,v) \in \mathbf{I}^2 \mid C(u,v) = 0\}$. Para algunas cópulas Arquimedeanas este conjunto está formado exclusivamente por los dos segmentos de rectas $\{0\} \times \mathbf{I}$ y $\mathbf{I} \times \{0\}$ y para otras el conjunto $Z(C)$ tiene un área positiva, para el cual la curva que lo acota es $L_0(u) = \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$, conocida como la *curva cero* de C.

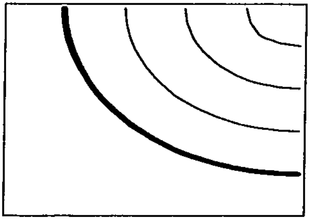

Figura 2.3. Gráfica de algunas curvas de nivel.

En la figura 2.3 se representan las curvas de nivel de una cópula Arquimedeana. Este hecho queda demostrado por:

2.3.3. Teorema. *Las curvas de nivel de una cópula Arquimedeana son convexas.*

Demostración: Sea C una cópula Arquimedeana con generador φ. Sea $t \in [0,1)$, entonces las curvas de nivel de C están dadas por $L_t(u) =$

$\varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u))$.

Como φ es convexa, para u_1, $u_2 \in \mathbf{I}$, se satisface que

$$\varphi(\frac{u_2 + u_1}{2}) \leq \frac{\varphi(u_2) + \varphi(u_1)}{2}.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \varphi(\frac{u_2 + u_1}{2}) &\geq \varphi(t) - \frac{\varphi(u_2) + \varphi(u_1)}{2} \\ &= \frac{[\varphi(t) - \varphi(u_1)] + [\varphi(t) - \varphi(u_2)]}{2}. \end{aligned}$$

Como φ^{-1} es decreciente y convexa, cuando se aplica en ambos lados de la identidad se obtiene que

$$\begin{aligned} L_t\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) &= \varphi^{-1}\left(\varphi(t) - \varphi(\frac{u_2 + u_1}{2})\right) \\ &\leq \varphi^{-1}\left(\frac{[\varphi(t) - \varphi(u_1)] + [\varphi(t) - \varphi(u_2)]}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u_1)) + \varphi^{-1}(\varphi(t) - \varphi(u_2))\right) \\ &= \frac{L_t(u_1) + L_t(u_2)}{2}. \end{aligned}$$

□

2.3.4. Ejemplo. Sea $\theta \in [0,1]$ supóngase que la masa de probabilidad de θ se distribuye uniformemente en el segmento de recta que une los puntos $(0,0)$ y $(\theta,1)$, y con masa de $1-\theta$ en el segmento que une los puntos $(\theta,1)$ y $(1,0)$. Cuando $\theta = 1$, el segmento de recta que une los puntos es el soporte de la cópula M y cuando $\theta = 0$ la recta que une a los puntos es el soporte de la cópula W, cuando $\theta \in (0,1)$ la cópula está dada por

$$C_\theta(u,v) = \begin{cases} u & \text{si } 0 \leq u \leq \theta v \leq \theta, \\ \theta v & \text{si } 0 \leq \theta v < u < 1-(1-\theta)v, \\ u+v-1 & \text{si } \theta \leq 1-(1-\theta)v \leq u \leq 1, \end{cases}$$

Esta cópula no es simétrica y por lo tanto no es Arquimedeana, además las curvas de nivel no son siempre convexas para cualquier valor de $\theta \in [0,1]$. ■

El siguiente teorema da la $C-$medida de cada curva de nivel de una cópula Arquimedeana C.

2.3.5. Teorema. *Sea C una cópula Arquimedeana generada por $\varphi \in \Omega$.*

1. *Para $t \in (0,1)$, la C-medida de las curvas de nivel $\varphi(u)+\varphi(v)=\varphi(t)$ está dada por*

$$\varphi(t)\cdot\left[\frac{1}{\varphi'(t^-)}-\frac{1}{\varphi'(t^+)}\right], \tag{2.16}$$

donde $\varphi'(t^-)$ y $\varphi'(t^+)$ denotan la derivada por la izquierda y por la derecha respectivamente de φ en t. En particular si $\varphi'(t)$ existe la C-medida es 0.

2. *Si C es no estricta, entonces la C-medida de la curva $\varphi(u)+\varphi(v)=\varphi(0)$ es igual a*

$$-\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0^+)}, \tag{2.17}$$

y es igual a 0 cuando $\varphi'(0^+)=-\infty$.

Demostración: Sea φ convexa, entonces existen las derivadas izquierda y derecha de φ, en $(0,1]$ $[0,1)$ respectivamente.

$$\varphi'(t^-)=\lim_{x\to t^-}\frac{\varphi(x)-\varphi(t^-)}{x-t^-} \quad \text{y} \quad \varphi'(t^+)=\lim_{x\to t^+}\frac{\varphi(x)-\varphi(t^+)}{x-t^+}.$$

Sea $t\in(0,1)$, y $w=\varphi(t)$. Se fija a n un entero positivo, y se considera la partición del intervalo $[t,1]$ inducido por la partición regular de $[0,w]$, $\{0,\ w/n,...,kw/n,...,w\}$, por lo que la partición de $[t,1]$ está dado por $\{t=t_0,t_1,...,t_n=1\}$ donde $t_{n-k}=\varphi^{[-1]}(kw/n)$, para $k=0,\ 1,\ 2,...,\ n$.

Si $w<\varphi(0)$, se tiene de la ecuación (2.9) que:

$$\begin{aligned}
C(t_j,t_k) &= \varphi^{[-1]}(\varphi[t_j]+\varphi[t_k])\\
&= \varphi^{[-1]}\Big(\Big(\varphi[\varphi^{[-1]}((n-j)/n)w)]\Big)+\varphi\Big(\varphi^{[-1]}[((n-k)/n)w]\Big)\Big)\\
&= \varphi^{[-1]}\Big(\frac{n-j}{n}w+\frac{n-k}{n}w\Big)=\varphi^{[-1]}\Big(w+\frac{n-j-k}{n}w\Big).
\end{aligned}$$

En particular $C(t_j,t_{n-j})=\varphi^{[-1]}(w)=t$.

Sea el rectángulo $R_k:=[t_{k-1},t_k]\times[t_{n-k},t_{n-k+1}]$ y sea $S_n:=\bigcup_{k=1}^{n}R_k$.

Como $\varphi^{[-1]}$ es convexa, se sigue que

$$0 \leq t_1 - t_0 \leq t_2 - t_1 \leq \ldots \leq t_n - t_{n-1} = 1 - t_{n-1}.$$

Donde $\lim_{n\to\infty}(1 - t_{n-1}) = 1 - \lim_{n\to\infty} \varphi^{[-1]}(w/n) = 1 - \varphi^{[-1]}(0) = 0.$

De aqui que la C-medida de las curva de nivel $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(t)$ este dada por $\lim_{n\to\infty} V_C(S_n)$.

Para cada k se tiene que

$$\begin{aligned}
V_C(R_k) &= C(t_k, t_{n-k+1}) - C(t_k, t_{n-k}) - C(t_{k-1}, t_{n-k+1}) + C(t_{k-1}, t_{n-k}) \\
&= \varphi^{[-1]}(w - w/n) - t - t + \varphi^{[-1]}(w + w/n) \\
&= [\varphi^{[-1]}(w + w/n) - \varphi^{[-1]}(w)] \\
&- [\varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w - w/n)].\text{Así,} \\
V_C(S_n) &= \sum_{k=1}^{n} V_C(R_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} [\varphi^{[-1]}(w + w/n) - \varphi^{[-1]}(w)] - [\varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w - w/n)] \\
&= n([\varphi^{[-1]}(w + w/n) - \varphi^{[-1]}(w)] - [\varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w - w/n)]) \\
&= w\left(\frac{[\varphi^{[-1]}(w + w/n) - \varphi^{[-1]}(w)]}{w/n} - \frac{[\varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w - w/n)]}{w/n}\right).
\end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} V_C(S_n) = \lim_{n\to\infty} V_C(S_n) = \sum_{k=1}^{\infty} V_C(R_k) = \lim_{n\to\infty} w\left(\frac{a}{w/n} - \frac{b}{w/n}\right)$, donde $a = \varphi^{[-1]}(w+w/n) - \varphi^{[-1]}(w)$ y $b = \varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w-w/n)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} w\left(\frac{b}{w/n}\right) &= \lim_{n\to\infty} w\left(\frac{w/n}{\varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w - w/n)}\right)^{-1} \\
&= \varphi(t) \lim_{t\to t+} \left(\frac{\varphi(t_{n-1})}{t - t_1}\right)^{-1} = \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \\
\lim_{n\to\infty} w\left(\frac{a}{w/n}\right) &= \lim_{n\to\infty} w\left(\frac{w/n}{\varphi^{[-1]}(w + w/n) - \varphi^{[-1]}(w)}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

$$= \varphi(t) \lim_{t\to t^-} \left(\frac{\varphi(t_{n-1})}{t_1 - t}\right)^{-1} = \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^-)}.$$

De donde se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} V_C(S_n) = \varphi(t)\left[\frac{1}{\varphi'(t^-)} - \frac{1}{\varphi'(t^+)}\right].$$

Para una C no estricta y $t = 0$, $\varphi(0) < \infty$ y $C(u,v) = 0$ en $Z(C)$, es decir en y por debajo de la curva de nivel $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$.

Entonces para cada k,

$$\begin{aligned} V_C(R_k) &= C(t_k, t_{n-k+1}) = \varphi^{[-1]}\left(\frac{n-k}{n}w + \frac{k-1}{n}w\right) \\ &= \varphi^{[-1]}\left(\frac{w(n-1)}{n}\right) = t_1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} V_C(S_n) &= \sum_{\infty}^{k=1} V_C(R_k) = \lim_{n\to\infty} nt_1 = \lim_{n\to\infty} w\left(\frac{t_1}{w/n}\right) \\ &= \lim_{t\to 0+} \varphi(t)\left(\frac{t}{\varphi(t_{n-1})}\right) \\ &= -\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0^+)}. \end{aligned}$$

□

2.3.6. Teorema. *Sea C una cópula Arquimedeana generada por $\varphi \in \Omega$. Sea $K_C(t)$ la C-medida del conjunto $\{(u,v) \in I^2 \mid C(u,v) \le t\}$, o equivalentemente, del conjunto $\{(u,v) \in I^2 \mid \varphi(u) + \varphi(v) \ge \varphi(t)\}$. Entonces para cualquier $t \in I$,*

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}. \tag{2.18}$$

Demostración: Sea $t \in (0,1)$, y $w = \varphi(t)$. Sea n un entero positivo fijo, se consideran las mismas particiones de $[0,w]$ y $[t,1]$ que en la demostarción del teorema 2.3.5. Sea un rectángulo $R'_k := [t_{k-1}, t_k] \times [0, t_{n-k+1}]$, y $S'_n = \bigcup_{k=1}^{n} R'_k$.

$$V_C(R'_k) = C(t_k, t_{n-k+1}) - C(t_k, 0) - C(t_{k-1}, t_{n-k+1}) + C(t_{k-1}, 0),$$

$$
\begin{aligned}
&= C(t_k, t_{n-k+1}) - C(t_{k-1}, t_{n-k+1}),\\
&= \varphi^{[-1]}\left(\frac{n-1}{n}w\right) - \varphi^{[-1]}(w).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V_C(S'_n) &= \sum_{k=1}^{n} V_C(R'_k),\\
&= \sum_{k=1}^{n} \varphi^{[-1]}\left(\frac{n-1}{n}w\right) - \varphi^{[-1]}(w),\\
&= -w\left[\frac{\varphi^{[-1]}(w) - \varphi^{[-1]}(w - w/n)}{w/n}\right].
\end{aligned}
$$

Si se calcula el límite cuando $n \to \infty$, igual que se hizo en la demostración anterior se obtiene $K_C(t) = t - \dfrac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}$. □

El siguiente corolario es una generalización del teorema 2.3.6.

2.3.7. Corolario. *Sea C una cópula Arquimedeana generada por $\varphi \in \Omega$. Sea $K'_C(s,t)$ la C-medida del conjunto $\{(u,v) \in I^2 \mid u \le s, C(u,v) \le t\}$. Entonces para cualquier s, $t \in I$,*

$$
K'_C(s,t) = \begin{cases} s & si\ s \le t,\\ t - \dfrac{\varphi(t) - \varphi(s)}{\varphi'(t^+)} & si\ s > t. \end{cases} \tag{2.19}
$$

Demostración:

1. Cuando $s \le t$, $K'_C(s,t) = s$ es la C-medida del rectángulo $[0,s] \times [0,1]$.

2. Suponiendo que $s > t$, como en los teoremas anteriores, sea $z = \varphi(s)$ y considerar la partición del intervalo $[t,s]$ inducida por la partición regular del intervalo $[z,w]$. Donde $t_{n-k} = \varphi^{[-1]}(z + [k(w-z)/n])$, para $k = 0, 1, ..., n$.
   De aquí que

$$
\begin{aligned}
C(t_j, t_k) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(t_j) + \varphi(t_k))\\
&= \varphi^{[-1]}\left(z + \frac{(n-j)(w-z)}{n} + z + \frac{(n-k)(w-z)}{n}\right)\\
&= \varphi^{[-1]}\left(w + \frac{(n-j-k)(w-z)}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Sea $R'_k := [t_{k-1}, t_k] \times [0, t_{n-k+1}]$ y $S'_n = \bigcup_{k=1}^{n} R'_k$.

$$\begin{aligned}
V_C(R'_k) &= C(t_k, t_{n-k+1}) - C(t_k, 0) - C(t_{k-1}, t_{n-k+1}) + C(t_{k-1}, 0) \\
&= C(t_k, t_{n-k+1}) - C(t_{k-1}, t_{n-k+1}) \\
&= \varphi^{[-1]}\left(z + \frac{(n-k)(w-z)}{n} + z + \frac{(k-1)(w-z)}{n}\right) \\
&- \varphi^{[-1]}\left(z + \frac{(n-k-1)(w-z)}{n} + z + \frac{(k-1)(w-z)}{n}\right) \\
&= \varphi^{[-1]}\left(z + w - \frac{(w)}{n}\right) + \varphi^{[-1]}(w).
\end{aligned}$$

El resultado se sigue como en la demostración del Teorema 2.3.6. □

Una subclase de cópulas Arquimedeanas consiste en aquellas que sus generadores son funciones doblemente diferenciables, denotada por Δ, es decir cuando la cópula C tiene un generador tal que

$$\varphi(1) = 0 \quad \varphi'(t) < 0 \quad \text{y} \quad \varphi''(t) > 0 \qquad \text{para toda } t \in (0,1). \tag{2.20}$$

Las condiciones 2.20 son suficientes para garantizar que φ tiene una inversa φ^{-1}, que también es doblemente diferenciable. Si $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \infty$, entonces por conveniencia se denotará $\varphi(0) = \infty$. Ejemplos de estos generadores son $\varphi(t) = (1-t)^{\theta}$ y $\varphi(t) = t^{-\theta} - 1$ donde $\theta > 1$.

Cada miembro $\varphi \in \Delta$ genera una cópula $C(u,v)$ para cada $(u,v) \in \mathbf{I}^2$ como sigue

$$C(u,v) = \begin{cases} \varphi^{-1}[\varphi(u) + \varphi(v)] & 0 \le \varphi(u) + \varphi(v) \le \varphi(0), \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.21}$$

Si $\varphi(0) = \infty$, entonces $C(u,v)$ es estrictamente positiva excepto cuando $u = 0$ o $v = 0$, el soporte de la distribución es el conjunto $\{(u,v) \mid \varphi(u) + \varphi(v) \le \varphi(0)\}$, el cual es el cuadrado unitario completo si $\varphi(0) = \infty$.

Todas las cópulas C están formadas de una componente singular y una absolutamente continua, es decir

$$C(u,v) = A_C(u,v) + S_C(u,v).$$

Cuando C es absolutamente continua su densidad c asociada con 2.20 se puede encontar así. Sea $\varphi(C(u,v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$ se obtiene la derivada de $C(u,v)$ con respecto a u y después con respecto a v. Esto es

$$\varphi'(C(u,v))\frac{\partial(C(u,v))}{\partial u} = \varphi'(u)$$

y

$$\varphi''(C(u,v))\frac{\partial(C(u,v))}{\partial u}\frac{\partial(C(u,v))}{\partial v} + \frac{\partial^2(C(u,v))}{\partial u}\partial v = 0 \qquad (2.22)$$

entonces, la densidad de $C(u,v)$, es

$$c(u,v) = -\frac{\varphi''(C(u,v))\varphi'(u)\varphi'(v)}{[\varphi'(C(u,v))]^3}. \qquad (2.23)$$

Por las propiedades de φ dadas en (2.20) es claro que $c(u,v) > 0$, para toda (u,v) tal que $\varphi(u) + \varphi(v) < \varphi(0)$. En general, las derivadas no existen en el límite $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$.

Las cópulas de esta clase en ocasiones tienen componente singular. Si tiene, el componente singular está concentrado en el conjunto $\{(u,v)|\varphi(u)+\varphi(v) = \varphi(0)\}$, de aquí que las derivadas parciales $\partial C(u,v)/\partial u$ y $\partial C(u,v)/\partial v$ existen en todos lados, excepto en esa curva. En el siguiente teorema Genest y MacKay(1986b) establecen cuando una cópula C tiene una componente singular y la cantidad de masa de probabilidad que está concentrada ahí.

2.3.8. Teorema. *La cópula $C(u,v)$ generada por un elemento de $\varphi \in \Delta$ tiene un componente singular si y sólo si*

$$\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} \neq 0.$$

En este caso, $\varphi(U) + \varphi(V) = \varphi(0)$ con probabilidad $-\varphi(0)/\varphi'(0)$.

Demostración: Sea C una cópula Arquimedeana con generador φ y densidad c, que satisafce las condiciones (2.20). Sean

$$x = C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \qquad y \qquad y = v$$

donde x, $y \in (0,1)$. Para un valor fijo de x se tiene que $x \leq y \leq 1$, esto se cumple ya que si $a \leq 1$ entonces $a \leq C(1,v) = v$. De 2.22, el Jacobiano de esta transformación está dado por

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = -\frac{\varphi'(y)}{\varphi'(C(u,v))}.$$

Por lo tanto,

$$\rho = \int\int_A c(u,v)dvdu$$

donde $A = \varphi(u) + \varphi(v) < \varphi(0)$

$$= -\int\int_B \frac{\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^2}\varphi'(y)dydx$$

con $B = 0 < x < y < 1$

$$= \int_0^1 \frac{\varphi''(x)}{[\varphi'(x)]^2}\varphi(x)dx$$

$$= 1 - \left[\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)}\right]_0^1.$$

Sea $a \in (0,1)$, la intersección de la recta tangente de $\varphi(t)$ en $t = a$, con u es $\varphi(a)/\varphi'(a)$, esta cantidad se aproxima a 0 a medida que $a \to 1$. Entonces ρ es menor que 1 si y sólo si $\varphi(0)/\varphi'(0) \neq 0$.

En este caso, la cópula tiene un componente singular en la curva $\varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)$. Es decir con probabilidad $\varphi(0)/\varphi'(0)$ la pareja (U,V) está en la curva. □

Cuando el generador de una cópula Arquimedeana es continuamente diferenciable, la C-medida del conjunto $\{(u,v) \in \mathbf{I}^2 \mid C(u,v) \leq t\}$ dada por (2.18) es $K_C(t) = t - \varphi(t)/\varphi'(t)$.

2.3.9. Ejemplo. Sea $\varphi(t) = [t^{-\alpha} - 1]/\alpha$ para $\alpha > 0$, generar la cópula y encontrar el componente singular si lo tiene.

$$\varphi(1) = 0, \qquad \varphi'(t) = -\frac{1}{t^{\alpha+1}} < 0, \qquad \varphi''(t) = \frac{\alpha+1}{t^{\alpha+2}} > 0,$$

para toda $t \in (0,1)$. Como $\varphi(0) = \infty$ entonces $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1} = (\alpha t + 1)^{-1/\alpha}$ por lo que la cópula que genera φ es

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\alpha}\left(u^{-\alpha} - 1 + v^{-\alpha} - 1\right)\right) \\ &= \left[u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1\right]^{-1/\alpha}. \end{aligned}$$

En este caso $\varphi(0)/\varphi'(0) = 0$, por lo que no tiene componente singular y su soporte está dado por $(0,1]^2$. ■

2.3.10. Ejemplo. La función $\varphi(t) = [t^{-\alpha} - 1]/\alpha$ definida en el 2.3.9 es también un elemento de Δ si $\alpha \in [0,1)$. Donde si $\alpha = 0$, se define $\varphi(t) = \lim_{\alpha\to 0}[t^{\alpha} - 1]/\alpha = -\ln(t)$, con inversa $\varphi^{-1}(t) = e^{-t}$.

$$\varphi(1) = 0, \qquad \varphi'(t) = -\frac{1}{t} < 0, \qquad \varphi''(t) = \frac{1}{t^2} > 0, \qquad \text{para toda } t \in (0,1),$$

Entonces la cópula que se genera es

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)) \\ &= uv = \Pi(u,v). \end{aligned}$$

Por lo que U y V son variables aleatorias independientes si el generador de la cópula es $\varphi(t) = -\ln(t)$.

Para $\alpha < 0$, la cópula que se genera es la misma que en el ejemplo anterior, $\varphi(0) = -1/\alpha$, pero $\varphi(0)/\varphi'(0) = 0$, por lo que no tiene componente singular y su soporte está restringido a la región dado por $\varphi(u) + \varphi(y) < \varphi(0)$. ■

2.3.11. Ejemplo. Considerar $\varphi(t) = (1-t)^{\alpha}$ donde $\alpha \geq 1$. Como $\varphi(0) = 1$, se tiene que

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} 1 - t^{1/\alpha} & 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & t \geq 1. \end{cases}$$

entonces la cópula que se genera es

$$\begin{aligned} C(u,v) &= \begin{cases} 1 - [(1-u)^{\alpha} + (1-v)^{\alpha}]^{1/\alpha} & 0 \leq (1-u)^{\alpha} + (1-v)^{\alpha} \leq 1, \\ 0 & (1-u)^{\alpha} + (1-v)^{\alpha} \geq 1. \end{cases} \\ &= \max(0, 1 - [(1-u)^{\alpha} + (1-v)^{\alpha}]^{1/\alpha}). \end{aligned} \qquad (2.24)$$

Para este caso, el límite es $(1-u)^{\alpha} + (1-v)^{\alpha} = 1$, y la probabilidad que (U,V) caigan en la curva está dada por $\varphi(0)/\varphi'(0) = 1/\alpha$, por lo que tiene componente singular.

Cuando $\alpha = 1$, la cópula (2.24) es la cópula W, la cual es completamente sigular con $V = 1 - U$ con probabilidad 1. ■

El siguiente resultado presenta la versión probabilística del teorema 2.3.6 y del corolario 2.3.7.

2.3.12. Teorema. *Sean U y V variables aleatorias uniformes (0,1) cuya función de distribución conjunta es la cópula Arquimedeana C generada por $\varphi \in \Omega$. Sea $T = \varphi(U)/(\varphi(U) + \varphi(V))$ y $Z = C(U, V)$. Entonces,*

1. *T está uniformemente distribuida en $(0, 1)$,*
2. *Z está distribuida como $K(z) = z - \lambda(z)$, donde $\lambda(z) = \varphi(z)/\varphi'(z)$,*
3. *Z y T son variables aleatorias independientes.*

Demostración: Si se supone que C es absolutamente continua y que $g(z, t)$ es la densidad de (U, V) y $G(z, t) = P(Z \leq z, T \leq t)$, entonces

$$g(z, t) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} C(u, z) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, w)} \right|.$$

$$\int_0^z \int_0^w g(t, z) dt dz = \int \int c(u, v) \left| \frac{\partial(u, v)}{\partial(z, t)} \right| du dv,$$

donde $c(u, v)$ es la densidad de la cópula y $\left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(z,w)} \right|$ es el Jacobiano de la Transformación $(u, v) \to (z, t)$.

$$\begin{aligned} z &= C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)), \text{ por lo que } \varphi(z) = \varphi(u) + \varphi(v). \\ t &= \frac{\varphi(u)}{\varphi(u) + \varphi(v)}, \text{ de aquí que } w = \frac{\varphi(u)}{\varphi(z)}, \end{aligned}$$

entonces

$$\varphi(u) = t \cdot \varphi(z) \text{ y } \varphi(v) = (1 - w) \cdot \varphi(z),$$

y el Jacobiano es igual a $\frac{\varphi(z)\varphi'(z)}{\varphi'(u)\varphi'(v)}$, entonces se tiene de 2.23 que

$$g(z,t) = \left(-\frac{\varphi'(u)\varphi'(v)\varphi''(z)}{[\varphi'(z)]^3}\right)\left(-\frac{\varphi(z)\varphi'(z)}{\varphi'(u)\varphi'(v)}\right) = \frac{\varphi''(z)\varphi(z)}{\varphi(z)}.$$

Así de esta manera

$$\begin{aligned} G(z,t) &= \int_0^w \int_0^z \frac{\varphi''(y)\varphi(y)}{\varphi(y)} dy dx = \int_0^w dx \int_0^z \frac{\varphi''(z)\varphi(z)}{\varphi(z)} dy \\ &= t\left[z - \frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}\right]_0^z = tK(z). \end{aligned}$$

□

Genest y Rivest(1993) presentan la demostración para el caso general.

2.3.13. Corolario. *Sean U y V variables aleatorias uniformes (0,1) cuya función de distribución conjunta es la cópula Arquimedeana C generada por $\varphi \in \Omega$. Entonces la función K_C dada por la ecuación (2.18) es la función de distribución de la variable aleatoria $C(U,V)$. Además la función K'_C dada por (2.19) es la función de distribución de U y $C(U,V)$.*

Si se quiere construir una cópula C con las propiedades de asociatividad y que satisfaga $\delta_C(u) < u$ es decir una cópula Arquimedeana, el siguiente teorema da una técnica para hacerlo.

2.3.14. Teorema. *Sea C una cópula Arquimedeana con genereador $\varphi \in \Omega$. Entonces para casi todas las u, v, $\in \mathbf{I}$,*

$$\varphi'(u)\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} = \varphi'(v)\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} \tag{2.25}$$

Demostración: Sea φ convexa, φ' existe casi en todos lados en $(0,1)$. Por el teorema 1.2.10 $\partial C(u,v)/\partial v$ y $\partial C(u,v)/\partial u$ existen para todo u, $v \in \mathbf{I}$.

Sea $C(u,v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ entonces $\varphi(C(u,v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$ se aplica la regla de la cadena y obtenemos

$$\begin{aligned} \varphi'(C(u,v))\frac{\partial C(u,v)}{\partial u} &= \varphi'(u) \qquad \text{y} \\ \varphi'(C(u,v))\frac{\partial C(u,v)}{\partial v} &= \varphi'(v). \end{aligned}$$

Como φ es estrictamente decreciente, $\varphi'(t) \neq 0$ para cualquier $t \in (0,1)$, entonces

$$\varphi'(C(u,v)) = \varphi'(u) \Big/ \left(\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}\right) \quad \text{y} \quad \varphi'(C(u,v)) = \varphi'(v) \Big/ \left(\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}\right).$$

De aqui que se cumple (2.25). $\square$

2.3.15. Ejemplo. ¿ La Familia de cópulas Farlie-Gumbel-Morgenstern C_θ es una familia de cópulas Arquimedeanas ? Sea $C_\theta = uv + uv\theta(1-u)(1-v)$, donde $\theta \in [-1,1]$, para que sea Arquimedeana basta con probar que cumple con las condiciones del Lema 2.2.4 y el Teorema 2.2.7.

Si se toman tres puntos arbitrarios en $(0,1)$, y se hacen los cálculos

$$\begin{aligned}
C_\theta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{6}\left(1+\frac{\theta}{3}\right)\\
C_\theta\left(\frac{1}{4},C_\theta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\right) &= \frac{1}{24}\left(1+\frac{\theta}{3}\right)\left(1+\frac{3}{4}\theta\left[\frac{15-\theta}{18}\right]\right)\\
C_\theta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{8}\left(1+\frac{3\theta}{8}\right)\\
C_\theta\left(C_\theta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{24}\left(1+\frac{\theta}{3}\right)\left(1+\frac{2}{3}\theta\left[\frac{64-3\theta}{64}\right]\right)
\end{aligned}$$

entonces se puede ver que

$$C_\theta\left(\frac{1}{4},C_\theta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\right) \neq C_\theta\left(C_\theta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\frac{1}{3}\right),$$

para toda $\theta \in [-1,1]$ excepto cuando $\theta = 0$, ya que cuando esto ocurre

$$C_\theta\left(\frac{1}{4},C_\theta\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{1}{24} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = C_\theta\left(C_\theta\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right),\frac{1}{3}\right),$$

esto es lógico ya que cuando $\theta = 0$, $C_\theta(u,v) = uv$ y se dice que las variables son independientes.

Al no cumplir con la propiedad asociativa, la cópula C no es Arquimedeana.■

Genest y Rivest (1989) dan una caracterización de la familia de distribuciones de Gumbel.

2.3.16. Ejemplo. La Familia Ali-MikHail-Haq de cópulas se construyó en la primer sección de este capítulo, estas cópulas están dadas por

$$C_\theta(u,v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)} \qquad \text{donde } \theta \in [-1,1].$$

Esta familia es Arquimedeana porque cumple con las condiciones del Lema 2.2.4 y del Teorema 2.2.7. Sean u, v, w $\in \mathbf{I}$ entonces

$$C_\theta(u, C_\theta(v,w)) = \frac{uC_\theta(v,w)}{1-\theta(1-u)(1-C_\theta(v,w))}$$

$$= \frac{u\left[\dfrac{vw}{1-\theta(1-v)(1-w)}\right]}{1-\theta(1-u)\left[1-\dfrac{vw}{1-\theta(1-v)(1-w)}\right]},$$

$$= \frac{uvw}{(1-\theta(1-u))(1-\theta(1-v)(1-w)-vw},$$

$$= -\frac{uvw}{-1+\theta^2(u-1)(v-1)(w-1)+\theta(2-v-w+u(vw-1))}.$$

$$C_\theta(C_\theta(u,v),w)) = \frac{C_\theta(u,v)w}{1-\theta(1-w)(1-C_\theta(u,v))},$$

$$= \frac{uvw}{(1-\theta(1-w))(1-\theta(1-v)(1-u)-uv},$$

$$= -\frac{uvw}{-1+\theta^2(u-1)(v-1)(w-1)+\theta(2-v-w+u(vw-1))}.$$

Por lo tanto C_θ es una cópula asociativa ya que

$$C_\theta(C_\theta(u,v),w)) = C_\theta(u, C_\theta(v,w)).$$

Además $\delta_C(u) = C_\theta(u,u) = \dfrac{u^2}{1-\theta 1-\theta(1-u)^2} < u$, para toda $u \in (0,1)$, por lo tanto $C_\theta(u,v)$ es una cópula Arquimedeana.

Para encontrar el generador, se utiliza la igualdad (2.25) del Teorema 2.3.14

$$
\begin{aligned}
\frac{\varphi_\theta'(u)}{\varphi_\theta'(v)} &= \frac{\partial C_\theta(u,v)/\partial u}{\partial C_\theta(u,v)/\partial v} \\
\frac{\partial C_\theta(u,v)}{\partial u} &= \frac{v}{1-\theta(1-u)(1-v)} - \frac{\theta u v(1-v)}{(1-\theta(1-u)(1-v))^2} \\
&= \frac{(1+\theta(v-1))v}{(\theta(u-1)(v-1)-1)^2}.
\end{aligned}
$$

Análogo para v,

$$\frac{\partial C_\theta(u,v)}{\partial v} = \frac{(1+\theta(u-1))u}{(\theta(u-1)(v-1)-1)^2}.$$

enonces,

$$\frac{\varphi_\theta'(u)}{\varphi_\theta'(v)} = \frac{v[1-\theta(1-v)]}{u[1-\theta(1-u)]},$$

de aquí $\varphi_\theta'(t) = \dfrac{-c_\theta}{t[1-\theta(1-t)]}$, entonces el generador esta dado por

$$\varphi_\theta(t) = \frac{c_\theta}{1-\theta}\ln\left(\frac{1-\theta(1-t)}{t}\right) \quad \text{para } \theta \in [-1,1) \quad \text{y } \varphi_1(t) = c_1\left(\frac{1}{t}-1\right).$$

Si $c_1 = 1$ y $c_\theta = 1-\theta$ para $\theta \in [-1,1)$ se obtiene el generador de las cópulas de la familia ALi-MikHail-Haq. ■

2.4. Orden y Casos Límite

Una cópula C_1 es menor que C_2, $C_1 \prec C_2$, si $C_1(u,v) \leq C_2(u,v)$ para todo $u, v \in \mathbf{I}$. La familia de cópulas $\{C_\theta\}$ está ordenada positivamente si $C_\alpha \prec C_\beta$, cuando $\alpha \leq \beta$, y negativamente si $C_\alpha \succ C_\beta$ cuando $\alpha \leq \beta$.

2.4.1. Ejemplo. Sean C_1 y C_2 miembros de la familia de cópulas de Gumbel-Barnet $\{C_\theta\}$, con $C_\theta(u,v) = uv\exp[-\theta \ln u \ln v]$, con $\theta \in (0,1]$. Sean

$$\begin{aligned} C_1(u,v) = C_{\theta_1}(u,v) &= uv\exp[-\theta_1 \ln u \ln v], \\ C_2(u,v) = C_{\theta_2}(u,v) &= uv\exp[-\theta_2 \ln u \ln v]. \end{aligned}$$

Si $\theta_1 \leq \theta_2$

$$\begin{aligned} uv\exp[-\theta_1 \ln u \ln v] &\geq uv\exp[-\theta_2 \ln u \ln v], \\ -\theta_1 \ln u \ln v &\geq -\theta_2 \ln u \ln v. \end{aligned}$$

Por lo tanto $C_{\theta_1}(u,v) \geq C_{\theta_2}(u,v)$ para toda $(u,v) \in \mathbf{I}^2$, $C_{\theta_1} \succ C_{\theta_2}$ entonces la familia de Gumbel-Barnett está ordenada negativamente ■

En ocasiones no es tan inmediato verificar si la familia de cópulas está ordenada positiva o negativamente, uno de estos casos lo muestra el ejemplo siguiente.

2.4.2. Ejemplo. Sean C_1, $C_2 \in \{C_\theta\}$, donde para $(u,v) \in \mathbf{I}^2$,

$$C_\theta(u,v) = \frac{\theta}{\ln(e^{\theta/u} + e(\theta/v) - e(\theta)}, \qquad \text{para } \theta \in (0,\infty)$$

Sean θ_1 y θ_2 en $(0,\infty)$, tales que $\theta_1 \leq \theta_2$.
Si $C_{\theta_1} = \dfrac{\theta_1}{\ln(e^{\theta_1/u} + e(\theta_1/v) - e(\theta_1)}$ y $C_{\theta_2} = \dfrac{\theta_2}{\ln(e^{\theta_2/u} + e(\theta_2/v) - e(\theta_2)}$.
No es fácil verificar cual de las dos es menor, por lo que se tienen que buscar otros criterios. ■

Para las cópulas Arquimedeanas la concordancia se va a determinar de acuerdo a las propiedades de sus generadores.

2.4.3. Definición. *Una función f definida en $[0,\infty)$ es subaditiva si para todo x, $y \in [0,\infty)$,*

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \tag{2.26}$$

2.4.4. Teorema. *Sean C_1 y C_2 cópulas Arquimedeandas generadas, respectivamente por φ_1 y φ_2 en Ω. Entonces $C_1 \prec C_2$ si y sólo si $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es subaditiva.*

Demostración: Sea $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$. f es decreciente. Como f es composición de dos funciones continuas es continua, $f(0) = \varphi_1(\varphi_2^{[-1]}(0)) = \varphi_1(1) = 0$.

Supongase que $C_1 \prec C_2$, $C_1(u,v) \leq C_2(u,v)$ para $(u,v) \in \mathbf{I}^2$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) &\leq \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)) \\ \varphi_1 \circ \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) &\geq \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)) \\ (\varphi_1(u) + \varphi_1(v)) &\geq f(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Sea $x = \varphi_2(u)$ y $y = \varphi_2(v)$, entonces $f(x) = \varphi_1(\varphi_2^{[-1]}(x)) = \varphi_1(u)$, análogo para y, $f(y) = \varphi_1(v)$. Entonces (2.27), se puede escribir como

$$f(x) + f(y) \geq f(x+y), \qquad \text{por lo tanto } f \text{ es subaditiva,}$$

para todo $x, y \in [0, \varphi_2(0)]$. Si $x > \varphi_2(0)$ o $y > \varphi_2(0)$, entonces los dos lados de la desigualdad anterior son 0.

Sean f subaditiva y $x_1, x_2 \in \mathbf{I}$ donde $x_1 \leq x_2$, entonces $\varphi_1(\varphi_2^{[-1]}(x_1)) \leq \varphi_1(\varphi_2[-1](x_2))$, de aquí que $f(x_1) \leq f(x_2)$. Como f es subaditiva, entonces $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Sean $x = \varphi_2(u)$ y $y = \varphi_2(v)$, entonces

$$\begin{aligned} f(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)) &\leq f(\varphi_2(u)) + f(\varphi_2(v)) = \varphi_1(u) + \varphi_1(v), \\ \varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(u) + \varphi_2(v)) &\geq \varphi_1^{[-1]}(\varphi_1(u)) + \varphi_1(v)), \end{aligned}$$

entonces,

$$C_2(u,v) \geq C_1(u,v) \quad \text{lo que implica que } C_1 \prec C_2.$$

□

Los siguientes resultados establecen las condiciones suficientes para que la función $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ sea subaditiva y así poder establecer que $C_1 \prec C_2$.

2.4.5. Lema. *Sean f definida en $[0, \infty)$. Si f es concava y $f(0) = 0$, entonces f es subaditiva.*

Demostración: Sean x, $y \in [0, \infty)$. Si $x + y = 0$, entonces $x = y = 0$, por lo que $f(x+y) = 0 \leq f(x) + f(y) = 0$.

Si $x+y>0$,

$$x=\frac{x}{x+y}(x+y)+\frac{y}{x+y}(0) \quad \text{y} \quad y=\frac{y}{x+y}+\frac{x}{x+y}(0).$$

Si f es cóncava y $f(0)=0$, entonces

$$f(x) \geq \frac{x}{x+y}f(x+y)+\frac{y}{x+y}f(0)=\frac{x}{x+y}f(x+y)$$

y

$$f(y) \geq \frac{y}{x+y}f(x+y)+\frac{x}{x+y}f(0)=\frac{y}{x+y}f(x+y).$$

Entonces,

$$f(x)+f(y) \geq f(x+y).$$

Por lo tanto f es subaditiva si f es cóncava. □

Se puede garantizar que si f es cóncava f es subaditiva pero al contrario no es cierto.

2.4.6. Corolario. *Bajo la hipótesis del Teorema 2.4.4, si $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ es cóncava, entonces $C_1 \prec C_2$.*

Demostración: Sea $f=\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$, donde f es una función tal que $f((1-t)x_1+tx_2) \geq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$, para $t \in [0,1]$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\varphi_1^{[-1]}(f((1-t)x_1+tx_2)) &\geq \varphi_1^{[-1]}((1-t)f(x_1)+tf(x_2)),\\
\varphi_2^{[-1]}((1-t)x_1+tx_2) &\geq \varphi_1^{[-1]}[(1-t)\varphi_1(\varphi_2^{[-1]}(x_1))+t\varphi_1(\varphi_2^{[-1]}(x_2))],\\
\varphi_2^{[-1]}[\varphi_2(u)+\varphi_2(v)] &\geq \varphi_1^{[-1]}[\varphi_1(u)+\varphi_1(v)]\\
C_2(u,v) &\geq C_1(u,v).
\end{aligned}$$

□

2.4.7. Ejemplo. Sean C_1 y C_2 miembros de la familia de Gumbel-Hougaard, con parámetros θ_1 y θ_2, los generadores de C_1 y C_2 son $\varphi_k(t)=(-\ln t)^{\theta_k}$ para $k=1,2$. Determinar el orden.

Sea $C_\theta(u,v)=\exp\left\{-\left[(-\ln u)^\theta+(-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right\}$ miembro de la familia de Gumbel-Hougaard, generada por $\varphi_\theta(t)=(-\ln t)^\theta$.

Sea $\varphi_2(t)=(-\ln t)^{\theta_2}$, de aquí que $\varphi_2^{[-1]}(t)=(\exp(-t^{1/\theta_2}),\ \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(t)=\varphi_1(\exp(-t^{1/\theta_2})=t^{\theta_1/\theta_2}$.

Sea $f(t) = t^{\theta_1/\theta_2}$, como f es continua en $(0, 1]$, por el Teorema 2.2.6

$$f''(t) = \theta_1 \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{\theta_2^2} \right) t^{\theta_1/\theta_2 - 2},$$

si $\theta_1 \leq \theta_2$ entonces $f''(t) < 0$ para todo $t \in (0, 1]$, entonces f es cóncava, y $C_1 \prec C_2$. ■

2.4.8. Corolario. *Bajo la hipótesis del Teorema 2.4.4, si φ_1/φ_2 es creciente en $(0,1)$, entonces $C_1 \prec C_2$.*

Demostración: Sea g una función tal que $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ definida por $g(t) = f(t)/t$, donde $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$. Entonces

$$g(\varphi_2(t)) = \frac{f(\varphi_2(t))}{\varphi_2(t)} = \frac{\varphi_1 \left(\varphi_2^{[-1]}(\varphi_2(t)) \right)}{\varphi_2(t)} = \frac{\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)},$$

como φ_2 es decreciente, entonces g es decreciente en $(0, \varphi_2(0))$ y de aquí en $(0, \infty)$.

Para todo x, $y \geq 0$, $g(x + y)$ como φ_2 es decreciente y entonces g es decreciente en $(0, \varphi_2(0))$ y de aquí en $(0, \infty)$.

Para todo x, $y \geq 0$ $g(x + y) \geq g(x)$ y $g(x + y) \geq g(y)$, de aquí que $x[g(x+y) - g(x)] + y[g(x+y) - g(y)] \leq 0$, o $(x+y)g(x+y) \leq xg(x) + yg(y)$. Por lo tanto g es subaditiva. □

2.4.9. Ejemplo. Sean C_1 y C_2 miembros de la familia de cópula $\{C_\theta\}$, donde

$$C_\theta(u, v) = \text{máx} \left(1 - \left[(1-u)^\theta + (1-v)^\theta \right]^{1/\theta}, 0 \right) \qquad \text{con } \theta > 1,$$

con generadores $\varphi_1 = (1-t)^{\theta_1}$ y $\varphi_2 = (1-t)^{\theta_2}$, respectivamente.

$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = (1-t)^{\theta_1 - \theta_2}$. Si $\theta_1 \leq \theta_2$, es creciente en $(0, 1)$ entonces $C_1 \prec C_2$.

Por lo tanto la familia $\{C_\theta\}$ está ordenada positivamente. ∎

Genest y MacKay(1986a) establecen en el Corolario 2.4.10 otro criterio de concordancia para las cópulas Arquimedeanas.

2.4.10. Corolario. *Bajo la hipótesis del Teorema 2.4.4, si φ_1 y φ_2 son continuamente diferenciables en $(0,1)$, y si φ_1'/φ_2' es no decreciente en $(0,1)$, entonces $C_1 \prec C_2$.*

Demostración: φ_1 y φ_2 son decrecientes y convexas en $(0,1)$, por lo que φ_1' y φ_2' son negativas en $(0,1)$.

Sea $g = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ y $f = \frac{\varphi_1'}{\varphi_2'}$ creciente y continua, esto es por $\lim_{t\to 1^-} f(t)$ existe.

$\lim_{t\to 1^-} \varphi_1(t) = 0 = \lim_{t\to 1^-} \varphi_2(t)$,

$$g' = \frac{\varphi_1'\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2'}{\varphi_2^2} = \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_2'} - \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right) \cdot \frac{\varphi_2'}{\varphi_2} = (f-g) \cdot \frac{\varphi_2'}{\varphi_2} \tag{2.28}$$

Por el Corolario 2.4.8, sólo se necesita demostrar que g' es no negativa, o que $\frac{\varphi_2'}{\varphi_2}$ es negativa, y que $f(t) - g(t) \leq 0$ en $(0,1)$.

Supóngase que existe una $t_0 \in (0,1)$ tal que $f(t_0) - g(t_0) > 0$. Entonces

$$g(t_0) < f(t_0) \leq \lim_{t\to 1^-} f(t) = \lim_{t\to 1^-} f(t)$$

Pero por (2.28), $g'(t_0) < 0$, por la propiedad del valor intermedio de las derivadas en Bartle y Sherbert(1996) y como g es diferenciable en todas partes entonces existe un t_1 en $(t_0, 1)$ donde $g(t_1) < g(t_0)$ y $g'(t_1) = 0$. Entonces, $g(t_1) < g(t_0) < f(t_0) \leq f(t_1)$ pero por (2.28) $g'(t_1) < 0$ esto es una contradicción.

2.4.11. Ejemplo. Sean C_1 y C_2 miembros de la familia Clayton con parámetros θ_1 y θ_2, y generadores φ_1 y φ_2, respectivamente, donde $\varphi_k = (t^{-\theta_k} - 1)/\theta_k$ para $k = 1,2$, y $\varphi_k'(t) = t^{\theta_k - 1}$, entonces $g(t) = \frac{\varphi_1'}{\varphi_2'} = t^{\theta_2 - \theta_1}$. Si $\theta_1 \leq \theta_2$, entonces $g(t)$ es creciente en $(0,1)$ y $C_1 \prec C_2$, por lo que ésta familia de cópulas está ordenada positivamente. ∎

En la tabla se muestran algunas familias de cópulas con sus generadores y el orden que guardan esas familias.

C_θ	θ	$\varphi_\theta(t)$
$\text{máx}[(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{1/\theta},0]$	$[-1,\infty)/\{0\}$	$\frac{1}{\theta}\left(t^{-\theta}-1\right)$
Orden:	positivo	
$\frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}$	$\theta\in[-1,1)$	$\ln\left[\frac{1-\theta(1-t)}{t}\right]$
Orden:	positivo	
$\exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta+(-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right)$	$\theta\in[1,\infty)$	$(-\ln t)^\theta$
Orden:	positivo	
$-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{(e^{-\theta u}-1)((e^{-\theta v}-1)}{(e^{-\theta}-1)}\right)$	$\theta\neq 0$	$-\ln\left[\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}\right]$
Orden:	positivo	
$\text{máx}[\theta uv+(1-\theta)(u+v-1),0]$	$\theta\in(0,1]$	$-\ln[\theta t+(1-\theta)]$
Orden:	positivo	
$uv\exp[-\theta\ln u\ln v]$	$\theta\in(0,1]$	$-\ln[1-\theta\ln t]$
Orden:	negativo	
$\frac{uv}{[1+(1-u^\theta)(1-v^\theta)]^{1/\theta}}$	$\theta\in(0,1]$	$\ln[2t^{-\theta}-1]$
Orden:	no existe	
$\left(1+\left[(u^{-1}-1)^\theta+(v^{-1}-1)^\theta\right]^{1/\theta}\right)^{-1}$	$\theta>0$	$\left(\frac{1}{t}-1\right)^\theta$
Orden:	positivo	
$\frac{\theta}{\ln[e^{\theta/u}+e^{\theta/v}-e^\theta]}$	$\theta\in(0,\infty)$	$e^{\theta/t}-e^\theta$
Orden:	positivo	
$exp\left(1-[(1-\ln u)^\theta+(1-\ln v)^\theta-1\right)^{1/\theta}$	$\theta\in(0,\infty)$	$(1-\ln t)^\theta$
Orden:	positivo	

Tabla 2.2. Familias ordenadas de cópulas Arquimedeanas.

2.4.12. Teorema. *Sea $\{C_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ una familia de cópulas Arquimedeanas con generadores diferenciables $\varphi_\theta \in \Omega$. Entonces $C = \lim C_\theta$ es una cópula Arquimedeana si y sólo existe una función $\varphi \in \Omega$ tal que $s,\ t \in (0,1)$,*

$$\lim \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{\varphi(s)}{\varphi'(t)} \tag{2.29}$$

donde el lím *denota el límite unilateral apropiado cuando θ se aproxima al punto-final del intervalo paramétrico Θ.*

Demostración: Sea U_θ, V_θ variables aleatorias uniforme en $(0,1)$ con función de distribución conjunta C_θ, sea K'_θ la función de distribución de las variables aleatorias U_θ y $C_\theta(U_\theta, V_\theta)$. Si C_θ es una cópula Arquimedeana generada por φ_θ, por los Corolarios 2.3.7 y 2.3.13,

$$K'_\theta(s,t) = P[U_\theta \leq s, C_\theta(U_\theta, V_\theta) \leq t] = t - \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} + \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} \tag{2.30}$$

siempre que $0 < t < s < 1$. Sean U y V variables aleatorias uniformes $(0,1)$ con función de distribución C y sea K' la función de distribución de las variables aleatorias U y $C(U,V)$. Suponiendo que C es una cópula Arquimedeana, generada por φ y de los Corolarios 2.3.7 y 2.3.13,

$$K'(s,t) = P[U \leq s, C(U,V) \leq t] = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} + \frac{\varphi(s)}{\varphi'(t)} \tag{2.31}$$

Por demostrar que $(U_\theta, C_\theta(U_\theta, U_\theta)) \xrightarrow{d} (U, C(U,V))$, cuando $\theta \to \theta_0$, donde θ_0 es el límite del intervalo paramétrico, si $C(U_\theta, V_\theta) \to C(U,V)$, entonces $C(U_\theta, 1) = U_\theta \to U = C(U,1)$. Entonces, se tiene que

$$\lim K'_\theta(s,t) = \lim K'(s,t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} + \frac{\varphi(s)}{\varphi'(t)},$$

para $0 < t < s < 1$.
De la ecuaciones (2.30) y (2.31), se tiene que $\lim_{\theta \to \theta_0} \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{\varphi(s)}{\varphi'(t)}$. Ahora si la ecuación (2.29) se cumple, entonces existen infinidad de constantes c_θ tales que para toda $t \in (0,1]$, el $\lim c_\theta \varphi_\theta(t) = \varphi(t)$. De aquí se tiene que $\lim \varphi_\theta^{[-1]}/c_\theta = \varphi^{[-1]}$, por lo que para cualquier $u, v \in \mathbf{I}$

$$\lim \varphi_\theta^{[-1]}(\varphi_\theta(u) + \varphi_\theta(v)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)).$$

Por lo tanto $C = \lim C_\theta$. □

El generador de la cópula W es $\varphi(t) = 1 - t$, entonces W es el límite de la familia $\{C_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ si el límite de $\varphi_\theta(s)/\varphi'_\theta(t) = s - 1$. El generador de la cópula Π es $\varphi(t) = -\ln t$, entonces Π es el límite de la familia $\{C_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ si $\lim \varphi_\theta(s)/\varphi'_\theta(t) = t \cdot \ln s$.

2.4.13. Ejemplo. Sea $C_\theta = \max\{\theta uv + (1-\theta)(u+v-1), 0\}$ con generador $\varphi_\theta = -\ln[\theta t + (1-\theta)]$ con $\theta \in (0,1]$, para $s, t \in (0,1)$.

$$\lim_{\theta\to 0+} \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{\ln[\theta s + (1-\theta)]}{\theta/[\theta t + (1-\theta)]} = \lim_{\theta\to 0+} \frac{[\theta t + (1-\theta)]^2(s-1)}{\theta s + (1-\theta)} = s - 1.$$

Por lo tanto, $C_0 = W$.

$$\lim_{\theta\to 1-} \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = \lim_{\theta\to 1-} \frac{[\theta t + (1-\theta)]^2(s-1)}{\theta s + (1-\theta)} = t\ln s.$$

Entonces, $C_1 = \Pi$ ■

2.4.14. Ejemplo. Sea $C_\theta = \max\{(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1)^{1/\theta}, 0\}$ con generador $\varphi_\theta = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ con $\theta \in \{[-1,\infty)/0\}$, para $s, t \in (0,1)$.

$$\lim_{\theta\to -1+} \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = \lim_{\theta\to -1+} -\frac{t^{\theta+1}}{\theta}(s^{-\theta} - 1) = s - 1.$$

Por lo tanto, $C_{-1} = W$.

$$\lim_{\theta\to 1-} \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = \lim_{\theta\to 0-} -t^{\theta+1} \cdot \frac{1 - s^{-\theta}}{\theta} = t\ln s.$$

Entonces, $C_0 = \Pi$ ■

2.4.15. Teorema. *Sea $\{C_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ una familia de cópulas Arquimedeanas con generadores diferenciables $\varphi_\theta \in \Omega$. Entonces $\lim C_\theta = M(u,v)$ si y sólo*

$$\lim \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = 0 \qquad \textit{para } t \in (0,1)$$

donde el lím *denota el límite unilateral apropiado cuando θ se aproxima al punto final del intervalo paramétrico Θ.*

Demostración:
Sea θ_0 que denota el límite del intervalo Θ y si $\lim \varphi_\theta(t)/\varphi'_\theta(t) = 0$, para una $t \in (0,1)$ y un $\epsilon \in (0,t)$. Se tiene que $0 \leq -\varphi_\theta(t)/\varphi'_\theta(t) \leq \epsilon$.

La intersección de la línea tangente a la gráfica $\varphi_\theta(x)$ es $t - \varphi_\theta(t)/\varphi'_\theta(t)$ en el punto $(t, \varphi_\theta(t))$, como $\varphi(t)$ es convexa y decreciente, se tiene que para $x = t + \varphi_\theta/\varphi'(t)$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi_\theta\left(t + \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t}\right) &> 2\varphi_\theta(t), \\ \varphi_\theta^{[-1]}\left(\varphi_\theta\left(t + \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)}\right)\right) &< \varphi_\theta^{[-1]}(2\varphi_\theta(t)), \\ C_\theta(t,t) = \varphi_\theta(2\varphi_\theta(t)) &> t + \frac{\varphi_\theta}{\varphi'(t)} > t - \epsilon. \end{aligned}$$

$C_\theta(t,t) = t$, esto es $\lim C_\theta(u,v) = M(u,v)$. □

2.4.16. Ejemplo. Sea $C_\theta(u,v) = \left(1 + [(u^{-1}-1)^\theta) + (v^{-1}-1)^\theta)]^{1/\theta}\right)^{-1}$ con generador $\varphi_\theta(t) = \left(\frac{1}{t} - 1\right)^\theta$ donde $\theta \in [1,\infty)$.

$\varphi'_\theta(t) = \left(\frac{-\theta}{t^2}\right)\left(\frac{1}{t} - 1\right)^{\theta-1}$, entonces

$$\lim_{\theta\to\infty} \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{t^2 - t}{\theta} = 0.$$

Por lo que el $C_\infty = M$. ■

C_θ	Casos Especiales
$\max[(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{1/\theta},0]$, donde $\theta \in [-1,\infty)/\{0\}$	$C_{-1}=W, C_0=\Pi$ $C_1=\frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}, C_\infty=M$
$\frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}$, donde $\theta \in [-1,1)$	$C_0=\Pi, C_\infty=\frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$
$\exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta+(-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right)$, donde $\theta \in [1,\infty)$	$C_1=\Pi, C_\infty=M$
$-\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{(e^{-\theta u}-1)((e^{-\theta v}-1)}{(e^{-\theta}-1)}\right)$, donde $\theta \neq 0$	$C_{-\infty}=W, C_0=\Pi$ $C_\infty=M$
$\max[\theta uv+(1-\theta)(u+v-1),0]$, donde $\theta \in (0,1]$	$C_0=W, C_1=\Pi$
$uv\exp[-\theta\ln u\ln v]$, donde $\theta \in (0,1]$	$C_0=\Pi$
$\frac{uv}{[1+(1-u^\theta)(1-v^\theta)]^{1/\theta}}$, donde $\theta \in (0,1]$	$C_0=\Pi$
$\left(1+\left[(u^{-1}-1)^\theta+(v^{-1}-1)^\theta\right]^{1/\theta}\right)^{-1}$, donde $\theta > 0$	$C_1=\frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}, C_\infty=M$
$\frac{\theta}{\ln[e^{\theta/u}+e^{\theta/v}-e^\theta]}$, donde $\theta > 0$	$C_0=\frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}, C_\infty=M$
$\exp\left(1-[(1-\ln u)^\theta+(1-\ln v)^\theta-1]\right)^{1/\theta}$, donde $\theta > 0$	$C_1=\Pi, C_\infty=M$

Tabla 2.3. Familias de cópulas Arquimedeanas, límites.

Donde $\Sigma = u+v$.

2.5. Familias paramétricas

En esta sección se muestran métodos para construir familias de generadores para cópulas Arquimedeanas de un generador $\varphi \in \Omega$.

2.5.1. Teorema. *Sea $\varphi \in \Omega$, sean α y β números reales positivos, y se define*

$$\varphi_{\alpha,1}(t) = \varphi(t^{\alpha}) \qquad y \qquad \varphi_{1,\beta}(t) = [\varphi(t)]^{\beta} \tag{2.32}$$

1. *Si $\beta \geq 1$, entonces $\varphi_{1,\beta}$ es un elemento de Ω.*
2. *Si $\alpha \in (0,1)$, entonces $\varphi_{\alpha,1}$ es un elemento de Ω.*
3. *Si φ es doblemente diferenciables y $t\varphi'(t)$ es no decreciente en $(0,1)$, entonces $\varphi_{\alpha,1}$ es un elemento de Ω para toda $\alpha > 0$.*

Demostración:

1. Si $\beta = 1$ entonces $\varphi_{1,\beta} \in \Omega$.entonces $\varphi_{1,\beta}$ es un elemento de Ω. Para $\beta \geq 1$, sean x_1, x_2 tales que $x_1 < x_2$, si $\varphi(t) \in \Omega$, implica que $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$, como $\beta \geq 1$ se tiene que $[\varphi(x_1)]^{\beta} > [\varphi(x_2)]^{\beta}$, por lo tanto $\varphi_{1,\beta}$ es estrictamente decreciente.

   Como $\varphi(t)$ es un generador entonces es derivable, por lo que $\varphi_{1,\beta}(t) = [\varphi(t)]^{\beta}$, de donde $\varphi''_{1,\beta}(t) = \beta(\beta-1)\varphi''(t)[\varphi(t)]^{\beta-2} < 0$, ya que $\varphi(t)$ es convexa, entonces $\varphi_{1,\beta}$ es una función convexa.

   Además $\varphi_{1,\beta}(1) = [\varphi(1)]^{\beta} = 0$, por lo tanto $\varphi_{1,\beta} \in \Omega$.

2. Si $\alpha \in (0,1)$, entonces $\varphi_{\alpha,1}(t) = \varphi(t^{\alpha})$. Para $x_1 < x_2$ y para $a \in (0,1)$ se tiene que $x_1^{\alpha} < x_2^{\alpha}$ como $\varphi(t)$ es decreciente entonces $\varphi(x_1^{\alpha}) \geq \varphi(x_2^{\alpha})$, esto es $\varphi_{1,\alpha}(x_1) > \varphi_{1,\alpha}(x_2)$ para $x_1 < x_2$. Entonces es decreciente.

   $\varphi_{\alpha,1}(t) = \varphi(t^{\alpha})$ es convexa ya que t^{α} es convexa para $\alpha \in (0,1]$ y φ es decreciente.

Además $\varphi_{1,\alpha}(1) = \varphi(1) = 0$, por lo tanto $\varphi_{1,\alpha} \in \Omega$. □

La familia de generadores $\{\varphi_{\alpha,1} \in \Omega \mid \varphi_{\alpha,1}(t) = \varphi(t^{\alpha})\}$ se le conoce como la familia α asociada con el generador φ y a $\{\varphi_{1,\beta} \in \Omega \mid \varphi_{1,\beta}(t) = [\varphi(t)]^{\beta}\}$ como la familia β asociada con φ.

2.5.2. Ejemplo. El generador de la familia de cópulas Clayton es el generador $\varphi(t) = t^{-1} - 1 \in \Omega$, entonces la familia de generadores que forma cuando $\alpha > 0$ es $\{\varphi_{\alpha,1} \in \Omega \mid \varphi_{\alpha,1}(t) = (t)^{-\alpha} - 1, \text{para } \alpha > 0\}$ donde esta familia genera cópulas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} C_\alpha(u,v) &= \varphi_\alpha^{[-1]}(\varphi_\alpha(u) + \varphi_\alpha(v)) = \varphi^{[-1]}(u^{-\alpha} - 1 + v^{-\alpha} - 1) \\ &= \text{máx}[(u^\alpha + v^\alpha - 1)^{1/\alpha}, 0]. \end{aligned}$$

para $\alpha > 0$. Para un generador $\varphi(t) = (-\ln t) \in \Omega$, entonces la familia de generadores que forma cuando $\beta \geq 1$ es $\{\varphi_{1,\beta} \in \Omega | \varphi_{1,\beta}(t) = (-\ln t)^\beta, \text{para } \beta \geq 1\}$ donde la familia de cópulas que genera es de la forma

$$\begin{aligned} C_\alpha(u,v) &= \varphi_\beta^{-1}(\varphi_\beta(u) + \varphi_\beta(v)) = \varphi_\beta^{-1}((-\ln u)^\alpha + (-\ln v)^\alpha) \\ &= \exp[-((\ln u)^\alpha + (\ln^v)^\alpha)^{1/\alpha}]. \end{aligned}$$

∎

2.5.3. Teorema. *Sea $\varphi \in \Omega$, y sean $\varphi_{\alpha,1}$ y $\varphi_{1,\beta}$ dados por (2.32), generadores de las cópulas $C_{\alpha,1}$ y $C_{1,\beta}$, respectivamente. Sean $\beta \geq 1$ y α toma valores en un subconjunto A de $(0,\infty)$ el cual incluye al intervalo* $(0,1]$.

1. *Si $\beta_1 \leq \beta_2$, entonces $C_{1,\beta_1} \prec C_{1,\beta_2}$.*
2. *Si $\varphi([\varphi^{[-1]}(t)]^\theta)$ es subaditiva para todo $\theta \in (0,1)$, y si α_1, α_2 están en A, entonces $\alpha_1 \leq \alpha_2$ implica que $C_{\alpha_1,1} \prec C_{\alpha_2,1}$.*

Demostración:

1. Sea la familia β de generadores $B := \{\varphi_{1,\beta} \in \Omega \mid \varphi_{1,\beta} = [\varphi(t)]^\beta\}$ para $\beta \geq 1$, sean φ_{1,β_1} y φ_{1,β_2} elementos de B, entonces
$$\frac{\varphi_{1,\beta_1}(t)}{\varphi_{1,\beta_2}(t)} = \frac{[\varphi(t)]^{\beta_1}}{[\varphi(t)]^{\beta_2}} = [\varphi(t)]^{\beta_1 - \beta_2},$$
si $\beta_1 \leq \beta_2$ entonces $[\varphi(t)]^{\beta_1-\beta_2}$ es decreciente, por el Corolario 2.4.8, se concluye que $C_{1,\beta_1} \prec C_{1,\beta_2}$.
2. Si $\varphi([\varphi^{[-1]}(t)]^{\alpha_1/\alpha_2}$ es subaditiva para todo $\theta \in (0,1)$, y si α_1, α_2 esto es inmediato del Teorema 2.4.4,

por lo que $C_{\alpha_1,1} \prec C_{\alpha_2,1}$. □

2.5.4. Ejemplo. Sea $\varphi(t) = t^{-1} - 1$, entonces la familia α de generadores asociados es $\{\varphi_{1,\alpha} \in \Omega \mid \varphi_{1,\alpha}(t) = t^{-\alpha} - 1\}$ para $\alpha > 0$. $\varphi^{-1}(t) = (t+1)^{-\alpha}$, entonces siguiendo la segunda parte del Teorema 2.5.3 se tiene que $\varphi([\varphi^{-1}(t)]^{\alpha}) = (t+1)^{\alpha} - 1$, la cual es cóncava en el intervalo $(0,1)$ y $\varphi([\varphi^{-1}(0)]^{\alpha}) = 0$, entonces la familia que generé estará positivamente ordenada. ■

2.5.5. Teorema. *Sea $\varphi \in \Omega$, y sea $\varphi_{\alpha,1}$ y $\varphi_{1,\beta}$ dadas por (2.32), generadores de las cópulas $C_{\alpha,1}$ y $C_{1,\beta}$, respectivamente, donde $\beta \geq 1$ y α toma valores en un subconjunto de $(0,\infty)$ el cual incluye al intervalo $(0,1]$.*
1. Si φ es continuamente diferenciables y $\varphi'(1) \neq 0$, entonces

$$C_{0,1}(u,v) = \lim_{\alpha \to 0^+} C_{\alpha,1}(u,v) = \Pi(u,v),$$

2.

$$C_{1,\infty}(u,v) = \lim_{\beta \to \infty} C_{1,\beta}(u,v) = M(u,v).$$

Demostración: Aplicando los Teoremas 2.4.12 y 2.4.15, se tiene que

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\varphi_{\alpha,1}(s)}{\varphi'_{\alpha,1}(t)} = \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{\varphi(s)^{\alpha}}{\varphi'(t^{\alpha})\alpha t^{\alpha-1}} = t \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{1 - s^{\alpha}}{-\alpha} = t \lim_{\alpha \to 0^+} s^{\alpha} \ln s = t \cdot \ln s.$$

Como $C_{0,1}(u,v) = \lim_{\alpha \to 0^+} C_{\alpha,1}(u,v) = \Pi$.

$$\lim_{\beta \to \infty} \frac{\varphi_{1,\beta}(t)}{\varphi'_{1,\beta}(t)} = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{[\varphi(s)]^{\beta}}{\beta[\varphi(t)]^{\beta}\varphi'(t)} = \lim_{\beta \to \infty} \frac{\varphi(t)}{\beta\varphi'(t)} = 0.$$

Por lo tanto $C_{1,\infty}(u,v) = M(u,v)$. □

La composición de los generadores α y β forma otro generador con el que se pueden construir cópulas bi-paramétricas.

$$\varphi_{\alpha,\beta}(t) = \varphi_{1,\beta} \circ \varphi_{\alpha,1}(t) = \varphi_{1,\beta}(\varphi(t^{\alpha})) = [\varphi(t^{\alpha})]^{\beta}. \tag{2.33}$$

Es un generador que está en Ω porque satisface:

1. $\varphi_{\alpha,\beta}(1) = [\varphi(1)]^\beta = 0.$
2. $\varphi_{\alpha,\beta}(t)$ es continua por composición.
3. Sean $x_1,\ x_2 \in \mathbf{I}$, tal que $x_1 < x_2$, $\varphi_{\alpha,1}(x_1) > \varphi_{\alpha,1}(x_2)$ de aquí que $\varphi_{\alpha,\beta}(x_1) > \varphi_{\alpha,\beta}(x_2)$ para $x_1 < x_2$ entonces $\varphi_{\alpha,\beta}(t)$ es decreciente.
4. Sean $x_1,\ x_2 \in \mathbf{I}$, tal que $x_1 < x_2$, $s \in [0,1]$. φ es convexa, $y(t) = t^\alpha$ es cóncava para $\alpha \in (0,1]$. Como y es cóncava se tiene que $y((1-s)x_1 + sx_2) > (1-s)y(x_1) + sy(x_2)$, como φ es un generador es estrictamente decreciente por lo que $\varphi(y((1-s)x_1 + sx_2)) < \varphi((1-s)y(x_1) + sy(x_2))$ pero también es convexa entonces $\varphi((1-s)y(x_1) + sy(x_2)) \le (1-s)\varphi(y(x_1)) + s\varphi(y(x_2))$ entonces, se sabe que $g(t) = \varphi(t^\alpha)$ es convexa, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
(g((1-s))x_1 + sx_2))^\beta &\le ((1-s)g(x_1) + sg(x_2))^\beta \\
&= \varphi_{1,\beta}((1-s)g(x_1) + sg(x_2)) \\
&\le (1-s)\varphi_{1,\beta}(g(x_1)) + s\varphi_{1,\beta}(g(x_2)) \\
&\le (1-s)(g(x_1))^\beta + s(g(x_2))^\beta \\
&= (1-s)\varphi_{\alpha,\beta}(x_1) + s\varphi_{\alpha,\beta}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\varphi_{\alpha,\beta}$ es un generador.

2.5.6. Ejemplo. La función $\varphi(t) = t^{-1} - 1$, genera la cópula $C(u,v) = uv/u + v - uv$, utilizando (2.33) se obtiene que $\varphi_{\alpha,\beta}(t) = (t^{-\alpha} - 1)^\beta$, donde su inversa es $\varphi^{-1}_{\alpha,\beta} = (t^{1/\beta} + 1)^{-1/\alpha}$, por lo que la cópula que genera es

$$\begin{aligned}
C_{\alpha,\beta}(u,v) &= \varphi^{-1}_{\alpha,\beta}(\varphi_{\alpha,\beta}(u) + \varphi_{\alpha,\beta}(v)) \\
&= \left\{\left[(u^{-\alpha} - 1)^\beta + (v^{-\alpha} - 1)^\beta\right]^{1/\beta} + 1\right\}^{-1/\alpha}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{\alpha,1}(u,v) &= (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{1/\alpha}. \\
C_{0,1}(u,v) &= \Pi(u,v). \\
C_{1,\infty}(u,v) &= M(u,v). \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

2.6. Multivariadas

En esta sección se dará una visión muy general de lo que son las cópulas Arquimedeanas Multivariada, por lo cual se omiten las demostraciones, si se desea ver los resultados más a detalle se pueden encontrar en el libro de Schweizer y Sklar(1983).

La construcción de las cópulas Arquimedenas n-dimensionales surge de la misma idea que cuando se empezó a construir las cópulas Arquimedeanas a partir de la cópula Π. Es decir, $\Pi^n(\mathbf{u}) = u_1u_2...u_n = \exp(-[(-\ln u_1) + (-\ln u_2) + ... + (-\ln u_n)])$.

$$C^n(\mathbf{u}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + ... + (\varphi(u_n)), \quad (2.34)$$

Las funciones C^n en la ecuación (2.34) son las iteraciones de la cópula Arquimedeana bi-dimensional generada por $\varphi(t)$, esto es

$$C^2(u_1, u_2) = C(u_1, u_2) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)),$$

, entonces para $n \geq 3$,

$$C^n(u_1, u_2, ..., u_n) = C(C^{n-1}(u_1, u_2, ..., u_{n-1})).$$

Con $\varphi(t) = (1-t)$ en la ecuación (2.34) se construye W^n, donde para $n \geq 2$ ya no es una cópula.
Una de las condiciones extras que se le piden a los generadores es que sus derivadas tengan signos alternantes.

2.6.1. Definición. *Una función $g(t)$ es completamente monótona en un intervalo J si es continua ahí y tiene derivadas de todos los órdenes con signos alternantes, es decir si satisface*

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0 \quad (2.35)$$

para toda t en el interior de J y $k = 0, 1, 2, ...$

2.6.2. Teorema. *Sea φ una función $g(t)$ continua estrictamente decreciente de $\mathbf{I}$ a $[0, \infty]$ tal que $\varphi(0) = \infty$ y $\varphi(1) = 0$, y sea φ^{-1} la inversa de φ. Si C^n es una función de $\mathbf{I}^n$ a $\mathbf{I}$ dada por (2.34), entonces C^n es una n-cópula para toda $n \geq 2$ si y sólo si φ^{-1} es completamente monótona en* $[0, \infty)$.

2.6.3. Corolario. *Si la inversa φ^{-1} de un generador estricto φ de una cópula Arquimedeana C es completamente monótona, entonces $C \prec \Pi$.*

2.6.4. Lema. *Sea φ un generador estricto cuya inversa es completamente monótona en $[0, \infty)$, y sea $\varphi_{1,\beta}(t) = [\varphi(t)]^{\beta}$ para $\beta \geq 1$. Entonces $\varphi_{1,\beta}^{-1}$ es completamente monótona en $[0, \infty)$.*

2.6.5. Lema. *Una función Ψ en $[0, \infty)$ es la Transformación de Laplace de una distribución Λ si y sólo si Ψ es completamente monótona y $\Psi(0) = 1$.*

Comentarios Finales

Una función de distribución $H(x,y)$ con marginales $F(x)$ y $G(y)$ se dice que es generada por una cópula Arquimedean si se puede expresar a $H(x,y) = \varphi{-}1[\varphi(F(x)) + \varphi(G(y))]$ para alguna función convexa, decreciente definida en $(0,1]$, tal que $\varphi(1) = 0$. Muchas funciones de distribución bivariada pertenecen a esta clase como son las: Gumbel, la Ali-MikHail-Haq, la Clayton, Joe, Frank y Hougaard, entre muchas otras.

Las cópulas Arquimedeanas se clasifican de acuerdo a su generadores, si el generador de la cópula $\varphi(0) = \infty$ la cópula es estricta, en caso contrario se dice que la cópula no es estricta.

Las cópulas Arquimedeanas se caracterizan por las propiedades de asociatividad, simetría y porque cualquier cópula Arquimedeana C satisface $\delta_C(u) < u$, para cualquier $u \in \mathbf{I}$.

El nombre de cópulas Arquimedeanas se atribuye al Axioma de Arquimedes para números reales positivos,-"Si a, b son reales positivo, entonces existe un entero positivo n tal que $na > b$. Una cópula Arquimedeana se comporta como una operación en el intervalo $[0,1]$, en el que asigna a cada $(u,v) \in \mathbf{I}$ un número $C(u,v)$ en $\mathbf{I}$, está operación es conmutativa, (propiedad de simetría) y es asociativa, además preserva el orden, es decir que si $u_1 \geq u_2$ y $v_1 \geq v_2$, entonces $C(u_1,v_1) \leq C(u_2,v_2)$. En tonces las cópulas Arquimedeanas son un semigrupo ordenado Abeliano $(\mathbf{I},C)$.

Cuando el generador φ de una cópula Arquimedeana es continuamente diferenciable la C-medida del conjunto $\{(u,v)| \in \mathbf{I}^2|C(u,v) \leq t\}$ es

$$t - (\varphi(t)/\varphi'(t)).$$

Cuando la cópula es absolutamente continua su densidad está dada por

$$-\frac{\varphi''(C(u,v))\varphi'(u)\varphi'(v)}{[\varphi'(C(u,v))]^3}.$$

Las cópulas Arquimedeanas cuyo generador es doblemente diferenciable, en ocasiones tienen componente singular. Si tiene, el componente singular está concentrado en el conjunto $\{(u,v) \mid \varphi(u) + \varphi(v) = \varphi(0)\}$, de aquí que las derivadas parciales $\partial C(u,v)/\partial u$ y $\partial C(u,v)/\partial v$ existen en todos lados, excepto en esa curva. Genest y MacKay(1986b) estalecen cuando una cópula

C tiene un componente singular y qué masa de probabilidad está concentrada ahí.

Cuando se analizan los casos límites, los posibles resultados son las cópulas W, Π,$\Pi/(\Sigma - \Pi)$ que son Arquimedeanas y para algunos casos es la cópula M la cual no lo es, los criterios para calcularlos se basan en propiedades de los generadores. En las cópulas Arquimedeanas también en función de sus generadores se puede establecer los criterios de concordancia.

Joe(1993) deja abierto el problema si existe una familia de cópulas bivariada simple con dependencia de cola baja y alta, Nelsen(1997) da solución a este problema estableciendo que existen casos de cópulas Arquimedeanas que tienen esa propiedad.

Referencias

1. Ali, M.M., Mikhail, N.N. and Haq, M.S. (1978), A class of bivariate distributions including the bivariate logistic. *J. Multivariate Anal.*, **8**, 405-412.

2. Bartle, R. and Sherbert, D (1996), *Introducción al Análisis Matemático.* (Limusa, México, D.F).

3. Drouet, D. M. and Kotz, S. (2001), *Correlation and Dependence.* (Imperial College Press).

4. Genest, C. and MacKay, J. (1986a), Copules archimédiennes et familles de lois bidimensionnelles dont les marges sont données, *Canad. J. Statist.*, **14**, 145-159.

5. Genest, C. and MacKay, J. (1986b), The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals, *Amer. Statist.*, **40**, 280-285.

6. Genest, C. and Rivest, L.P-. (1989), A characterization of Gumbel's family of extreme value distributions, *Statist. Probab. Lett.*, **8**, 207-211.

7. Genest, C. and Rivest, L.P-. (1993), Statistical inference procedures for bivariate Archimedean copulas, *J. Ameri. Statist. Assoc.*, **88**, 1034-1043.

8. Joe, H. (1993)Parametric Families of Multivariate Distributions with given margins, *J. Multivariate Anal.*, **46**, 262-282.

9. Ling, C.H-(1965), Representation of asociative functions, *Publ. Math. Debrecen*, **12**, 189-212.

10. Nelsen, R. B. (1997), Dependence and order in families of Archimedean copulas, *J. Multivariate Anal.* **60**, 111-122.

11. Nelsen, R. B. (1999), *An Introduction to Copulas.* (Springer-Verlang, New York).

12. Plackett, R. L. (1965), A class of bivariate distributions, *J. Amer. Statist. Assoc.* **60**, 516-522.

13. Schweizer, B. and Sklar, A (1983), *Probabilistic Metric Spaces.* (North-Holland, New York).