00324
28

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

CONICAS, CONICAS Y MAS CONICAS

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

M A T E M A T I C A

P R E S E N T A :

PATRICIA RIVERO MARTINEZ

DIRECTOR DE TESIS: DRA. MA. DE LA PAZ ALVAREZ SHERER

2003

A

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Rivero Martínez Patricia
FECHA: 12 de febrero del 2003.
FIRMA:

VNIVERSIDAD NACIONAL AVTONOMA DE MEXICO

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunico a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Cônicas, cônicas y más cônicas"
realizado por Patricia Rivero Mertînez

con número de cuenta 8955474-0 , quién cubrió los créditos de la carrera de: Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dra. Ma de la Paz Alvarez Sherer
Propietario	M. en C. Miguel Lara Aparicio
Propietario	M. en C. Francisco de Jesûs Struck Chávez
Suplente	Dr. Santiago Lôpez de Medrano Sânchez
Suplente	M. en C. Carmen Rocio Vite Gonzâlez

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
CONSEJO DEPARTAMENTAL DE MATEMATICAS

A mis padres, hermanos esposo e hija.

D

Agradecimientos

A mi profesora la Dra. María de la Paz Álvarez Scherer por el gran apoyo que ha mostrado en la dirección de esta tesis, no sólo con sus consejos y orientación sino con la motivación y alegría en la elaboración de este trabajo.

Al Dr. Santiago López de Medrano Sánchez por las sugerencias que contribuyeron al mejoramiento de esta tesis.

Al M. en C. Miguel Lara Aparicio que tuvo a bien revisar exhaustivamente esta tesis y las aportaciones que de ello resultaron por sus valiosos comentarios y observaciones.

Al M. en C. Francisco de Jesús Struck Chávez por sus valiosos comentarios y observaciones.

A la M. en C. Carmen Rocio Vite González por sus valiosas sugerencias en la redacción de esta tesis.

Prólogo.

En los últimos años he impartido los cursos de matemáticas III y IV en el plantel Vallejo del Colegio de Ciencias y Humanidades UNAM. En estos cursos se trabaja con las cónicas y es ahí donde he sentido la necesidad de elaborar material que me apoye en mis cursos ya que resulta ser un tema difícil para el estudiante, razón por la cuál me di en profundizar el tema.

Este trabajo tiene como objetivo principal servir como material de apoyo al profesor que imparta un curso donde se trabaje con las cónicas.

En el capítulo 1 se presenta un bosquejo histórico sobre cómo han surgido las distintas formas de definir las cónicas, quiénes las han trabajado y algunas relaciones que tienen con otras ramas de la ciencia.

En el capítulo 2 se analizan las propiedades de las cónicas, donde se presentan las relaciones entre tangentes, focos, directrices, cuerdas focales, ángulos, etc. En donde la mayoría de las propiedades se demuestran por métodos sintéticos.

El capítulo 3 se inicia presentando a las cónicas en situaciones de la vida cotidiana. Después se trabaja con puntos especiales relacionados con las cónicas donde se obtienen lugares geométricos inesperados como son otras curvas famosas.

El capítulo 4 es una recopilación de 10 problemas bonitos de las cónicas entre los que destacan algunas aplicaciones en arquitectura, astronomía y radionavegación.

En el capítulo 5 se abordan propuestas que pueden ayudar a la comprensión de los conceptos relacionados con las cónicas. Se proponen métodos como el doblado de papel, las construcciones con regla y compás y aparatos mecánicos. Una buena clase taller con los estudiantes sería realizar las construcciones de las cónicas con el paquete computacional "Cabri-géomètre II".

Cada unidad tiene su respectivo anexo, en el que se presenta información más extensa, demostraciones que no se presentaron en los capítulos o soluciones de los ejercicios propuestos.

Además de la biblioteca, el Internet fue una herramienta de gran utilidad ya que proporcionó muchas de las imágenes aquí presentadas y orientó en la búsqueda de información. Cabe señalar que todas las construcciones que se presentan en este trabajo se realizaron usando "Cabri-géomètre II".

Si a un profesor le sirve alguna de las actividades aquí propuestas en la enseñanza de un curso, daremos como hecho que el objetivo se ha cumplido.

F

Indice.

1. Conociendo a las cónicas
   - 1.1. Nacimiento de las cónicas 1
   - 1.2. Arquitas de Tatento y Eudoxo 2
   - 1.3. Menecmo 2
   - 1.4. Aristeo y Euclides 6
   - 1.5. Arquímedes 7
   - 1.6. Diocles 9
   - 1.7. Apolonio de Perga 10
   - 1.8. Pappo, Hipatia y Proclo 13
   - 1.9. Legado árabe 14
   - 1.10. El renacimiento y las cónicas 15
   - 1.11. Descartes, Fermat y la geometría de coordenadas 17
   - 1.12. Las cónicas definidas por su excentricidad. 17
   - 1.13. Las esferasde Dandelín 18
   - 1.14. Las cónicas definidas paramétricamente 20
   - 1.15. Ecuaciones de una sección cónica en coordenadas polares 22
   - 1.16. Las cónicas como curvas reflexivas 23

2. Propiedades geométricas de las cónicas.
   - 2.1 Propiedades geométricas de la parábola 26
   - 2.2 Propiedades geométricas de la elipse 29
   - 2.3 Propiedades geométricas de la hipérbola 35

3. Las cónicas y sus acompañantes. 38

4. Problemas bonitos de cónicas 48

5. Talleres.
   - 5.1. Doblado de papel 51
   - 5.2. Circunferencias concéntricas 53

G

5.3. Métodos para dibujar una parábola 55
5.4. Métodos para dibujar una elipse 56
5.5. Métodos para dibujar una hipérbola 57
5.6. Construyendo cónicas mediante el Cabri–géomètre 57
5.7. Girando agua 60
5.8. Agujas temblando 61
5.9. Billar elíptico 62
5.10. Luz elíptica 63
5.11. Formando cónicas con luz 64
5.12. Reloj de sol 65

Anexo 1: Conociendo a las cónicas 68

Anexo 2: Propiedades geométricas de las cónicas 85

Anexo 3: Las cónicas y sus acompañantes 90

Anexo 4: problemas bonitos 115

Anexo 5: Talleres 127

1: Conociendo a las cónicas

1.1. Nacimiento de las cónicas

Atenas fue el centro más activo y más próspero del Mediterráneo oriental en los siglos V y IV a. de E. También fue el centro de concurrencia de varios intelectuales extranjeros de la época entre los que destacan: Demócrito[1], Sócrates[2], Platón[3] y Aristóteles[4].

Es por este tiempo cuando se empiezan a discutir los tres problemas clásicos de la geometría: *la cuadratura del círculo*, *la duplicación del cubo* y *la trisección de un ángulo*, que piden la construcción de un círculo cuya área sea igual a la de un cuadrado dado, duplicar el volumen de un cubo dado y la división de un ángulo cualquiera en tres ángulos iguales, respectivamente. Del primero y el último no se sabe cómo surgieron pero de la duplicación del cubo hay una leyenda transmitida por Eratóstenes[5] en la que cuenta que una peste azotó la ciudad de Atenas en el año 429 a de E y que causó probablemente la muerte de Pericles[6]. Entonces los atenienses enviaron una comisión al oráculo de Apolo en Delfos[7] para preguntar qué podían hacer para detener la peste y la respuesta fue que debían duplicar el volumen del altar cúbico dedicado a Apolo en Delfos sin variar su forma. Parece ser que los atenienses construyeron otro altar cúbico con el doble de la arista del primero; así su volumen aumentó ocho veces en lugar de dos y no pudieron parar la peste. Es por esta razón que el problema también se llama el *problema de Delfos*. Muchos intelectuales de la época se interesaron en la solución del problema usando regla y compás y no tuvieron éxito (en el siglo XIX se mostró que no tenía solución usando sólo regla y compás).

[1] Filósofo griego (460 – 370 a de E) que propuso la teoría atómica del universo.
[2] Filósofo griego (470 – 399 a de E). Influyó en Platón.
[3] Filósofo griego (428 – 347 a de E), fundó la "Academia", escuela en donde se impartían enseñanza de filosofía, matemáticas y astronomía.
[4] Aristóteles (384 – 322 a de E.) discípulo de Platón y maestro de Alejandro Magno. Creó el "*Liceo*" que fue tan prestigioso como la "*Academia*". Su filosofía se caracteriza por ser un movimiento filosófico y científico basado en la experimentación.
[5] Eratóstenes de Cirene: Astrónomo griego (276 – 194 a de E), primer hombre que calculó la longitud de la circunferencia de la tierra.
[6] Pericles: (495 – 429 a de E.) Político ateniense, cuya importancia en la historia de Atenas fue tan grande que con frecuencia se denomina el "*Siglo de Pericles*" al periodo de su mandato. Desde su cargo de estratega, magistratura para la que fue reiteradamente elegido como jefe de los demócratas, Pericles intentó que todos los ciudadanos atenienses participaran en el gobierno.
[7] En inglés es Delos. Por lo que el problema de la duplicación del cubo también se le conoce como el "*problema deliano*".

Un descubrimiento sorprendente ocurre cuando en la "*Academia*" de Platón el geómetra Hipócrates de Quios[8] (470, ? a. de E) reduce el problema al problema equivalente de "dos medias proporcionales" aunque esta formulación no resultó más fácil de manejar que la anterior.

1. 2. Arquitas de Tarento y Eudoxo.

Arquitas además de matemático era estadista y filósofo. Nació aproximadamente en el año 428 a. de E. en Tarento, (un lugar que en ese tiempo estaba bajo el mando griego), y murió aproximadamente en el año 350 a. de E. Arquitas fue amigo de Platón y llevó a los Pitagóricos a Tarento. Fue uno de los matemáticos que se interesó por el problema de la duplicación del cubo y dio una solución geométrica. La innovadora solución de Arquitas consistió en encontrar dos medias proporcionales entre dos segmentos de línea, usando un semicírculo que rueda en el espacio tridimensional, con lo que introdujo el movimiento en la geometría.

Eudoxo (408 – 355 a. de E) astrónomo y matemático griego, introdujo el uso de la geometría en la astronomía.

Eudoxo trabajó el problema de la duplicación del cubo usando líneas curvas y como solución encontró una media proporcional equivalente a la de Arquitas. Estas soluciones sin embargo, sólo dieron demostraciones de la existencia del número deseado como una cantidad geométrica.

1.3. Menecmo

Nació aproximadamente en el año 380 a. de E en Alopeconnesus, Asia Menor, ahora Turquía, y murió en el año 320 a. de E. aproximadamente.

Proclo[9] dice que Menecmo fue alumno de Platón y de Eudoxo y maestro de Alejandro Magno. Se cuenta que Alejandro Magno preguntó a Menecmo cuál era una forma fácil de aprender geometría a lo que Menecmo contestó

> *¡Oh rey! Viajando a través del país hay caminos privados y caminos reales, pero en la geometría sólo hay un camino para todos.*

---

[8] Hipócrates de Quios ó Chios.

[9] Ver página 13.

Menecmo hizo sus descubrimientos sobre secciones cónicas mientras estaba intentando resolver el problema de duplicar el cubo. De hecho el problema específico que tenía que resolver era encontrar dos proporciones medias entre dos segmentos rectos. Esto lo llevo a cabo y resolvió el problema de la duplicación del cubo usando estas secciones cónicas. La solución de Menecmo es descrita por Eutocio[10] en su comentario a Arquímedes en "*La Esfera y el Cilindro*"; la cuál en términos modernos se escribe de la siguiente forma:

Dados a, b encontrar dos proporciones medias x, y entre ellos. Es decir, encontrar x, y tales que $$a: x = x: y = y: b \qquad \text{donde } b = 2a.$$

por lo que se tiene,

$$a/x = x/y \quad \text{entonces} \quad x^2 = ay \qquad (1)$$

y

$$a/x = y/b \quad \text{entonces} \quad xy = ab \qquad (2)$$

Multiplicando a (2) por a y así tenemos

$$xya = aba$$

$$xx^2 = a^2b$$

$$x^3 = a^2b$$

como $b = 2a$

$$x^3 = a^2(2a)$$

$$x^3 = 2a^3$$

Por lo tanto, si a es la longitud de la arista del cubo dado, x es la del cubo cuyo volumen es el doble.

Menecmo trató de resolver este problema hallando curvas cuyos puntos, en términos modernos, satisficieran las dos ecuaciones anteriores. Y esto lo consiguió seccionando un cono rectángulo con un plano perpendicular a una de sus generatrices. No se han conservado los escritos de Menecmo pero su demostración pudo haber sido como la siguiente: se considera un cono rectángulo OAB con vértice en O y se secciona con un plano perpendicular a la generatriz OB en el punto C situado a una distancia a de O.

Por un punto cualquiera P de la curva–sección, pasa un plano paralelo a la base del cono que lo corta en la circunferencia de diámetro RQ. Sea M el pie de la perpendicular desde P a este diámetro (Figura 1.1).

---

[10] Matemático griego (480 – 540). Escribió dos "*Comentarios*", uno sobre Apolonio de Perga y otro sobre Arquímedes; en este último explica los procedimientos de los matemáticos alejandrinos para realizar cálculos numéricos.

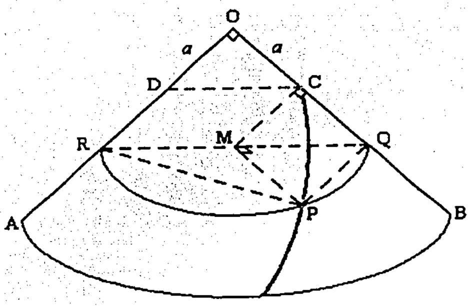


Figura 1. 1

Como los triángulos MPQ y MPR son semejantes se tiene que

$$\frac{PM}{MQ}=\frac{RM}{PM} \qquad \Rightarrow \qquad PM^2 = RM \cdot MQ \qquad (1)$$

Como los triángulos CMQ y ODC son semejantes

$$\frac{MQ}{DC}=\frac{CM}{a} \qquad \Rightarrow \qquad MQ=\frac{DC \cdot CM}{a} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1)

$$PM^2 = RM \cdot \frac{DC \cdot CM}{a}$$

Del paralelogramo DCMR

$$DC = RM$$

entonces

$$PM^2 = DC\frac{DC \cdot CM}{a}=\frac{DC^2 \cdot CM}{a} \qquad (3)$$

Y del triángulo rectángulo ODC tenemos que :

$$DC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$PM^2 = \frac{2a^2 \cdot CM}{a}$$

$$\Rightarrow \qquad PM^2 = 2a \cdot CM$$

Si en el plano de la sección tomamos un sistema de referencia con origen en C, siendo el eje de las abscisas la recta CM y el eje de las ordenadas su perpendicular en C, la expresión anterior se escribiría

$$y^2 = 2ax$$

que es la ecuación de una parábola.

De la expresión algebraica $a: x = x: y = y: b$ donde $b = 2a$ tenemos que la intersección de las parábolas $x^2 = ay$ y $y^2 = 2ax$ también resuelve el problema de la duplicación del cubo, prescindiendo de la condición de emplear sólo la regla y el compás (Figura 1. 2).

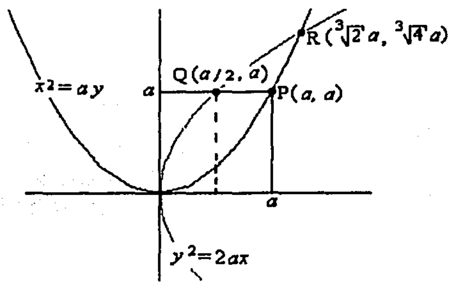


Figura 1. 2

Menecmo trató de resolver el problema de la duplicación del cubo hallando curvas cuyos puntos satisficieran las ecuaciones anteriores. Para esto, cortó conos agudos, rectos, y obtusos con planos perpendiculares a cada una de estas generatrices y obtuvo elipses, parábolas e hipérbolas respectivamente. Por esto en su época, estas curvas recibían el nombre de *oxitoma* (sección del cono agudo, es decir, sección de un cono cuyo ángulo de apertura es agudo por un plano perpendicular a una generatriz, Figura 1. 3. a), *ortotoma* (sección de un cono recto) y *amblitoma* (sección de un cono obtuso, Figura 1. 3. b). A este método se le conoció como "*Las triadas de Menecmo*".

Ahora que ya conocemos cómo surgieron las secciones cónicas nos preguntamos ¿cómo es que Menecmo pensó en obtener estas curvas de un cono? A ciencia cierta no lo sabemos, aunque podemos intuir que las habilidades de observación tan perspicaces de los matemáticos griegos

fueron atraídas a estas formas. Es probable que la elipse haya sido la primera sección cónica que se notó, pues si cortamos un cilindro circular recto con un plano que no sea perpendicular a su eje lo que se tiene es una elipse. De hecho, Euclides notó que cortando un cilindro con un plano no paralelo a la base se obtenía una sección de un cono acutángulo que es "similar a un [escudo]" (Heath, 1921, 125). Una extensión natural podría ser hacer cortes de un cono con planos. Entonces quizás ellos movieron al plano cortante de tal modo que no cortara completamente al cono. ¿Qué curvas aparecieron? ¿Qué propiedades comparten? ¿En qué son diferentes?
Neugebauer sugiere que el origen del concepto está en la teoría de los relojes de sol, dado que el haz de rayos involucrados en el diseño de los relojes de sol es un cono que está cortado por el plano del horizonte en una hipérbola[11], y una porción de esa hipérbola está fuera del reloj de sol.

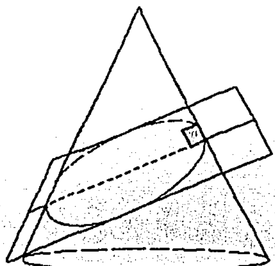


Figura 1. 3. a

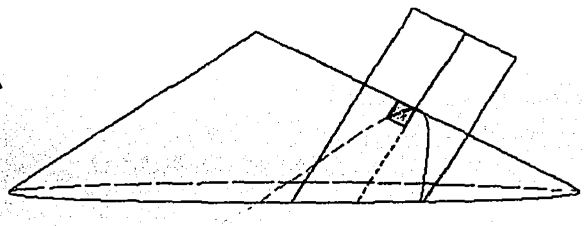


Figura 1. 3. b

1.4. Aristeo y Euclides.

De Aristeo (?370 – 300 a. de E) no se conoce prácticamente nada de su vida. Pappus hace referencia a él como *Aristeo el viejo* y le dio gran crédito a Aristeo en una obra titulada "*Cinco libros acerca de lugares sólidos*" pero ahora está perdido.
Los griegos clasificaban los lugares geométricos en tres categorías: los *lugares planos*, que abarcaban las líneas rectas y las circunferencias; los *lugares sólidos*, que incluían a las cónicas; y los *lugares lineales* que incluían a las demás curvas (cuadratriz, espiral, etc.). Esta clasificación

[11] Las civilizaciones de la antigüedad que construyeron relojes de sol estaban establecidas en regiones cuya latitud determina que la sombra sea una hipérbola.

es heredada a los problemas; así, los problemas planos son aquellos que se resuelven mediante rectas y circunferencias (regla y compás), los problemas sólidos se resuelven mediante secciones cónicas y los problemas lineales necesitan otras curvas. La duplicación del cubo es un problema sólido, pues puede ser resuelto mediante la intersección de dos parábolas o de una parábola y una hipérbola. El problema de la trisección de un ángulo fue considerado en un principio como problema lineal, pero más tarde Pappo de Alejandría (s. III) redujo a sólido el problema, al encontrar una solución empleando una circunferencia y una hipérbola; la cuadratura del círculo es un problema esencialmente lineal. Esta clasificación se va a mantener hasta mediados del siglo XVII en el que la geometría analítica ofrece otras alternativas.

Los resultados de Aristeo fueron profundos y especializados de tal modo que Euclides prefirió dejarlos en su presentación original. Según Heath, Aristeo fue el primero en tratar a las cónicas como lugares geométricos.

Se conocen pocos datos de la vida de Euclides (?330 – 275 a. de E). Probablemente pasó su vida en Atenas y fue invitado a Alejandría por Tolomeo I, fundador de la escuela matemática de Alejandría en donde Euclides se encontraba entre los primeros maestros. De las obras que escribió sólo se han conservado cinco hasta nuestros días: "*Los Elementos*", "*Los Datos*", "*La División de Figuras*", "*Los Fenómenos*" y "*La Óptica*". La obra que más ha influido en la forma de pensar del hombre es "*Los Elementos*". Se sabe que escribió una obra sobre las cónicas, hoy perdida. En "*Los Elementos*" no estudia estas curvas por considerarlas un tema de la matemática superior.

1.5. Arquímedes

Al igual que otros matemáticos griegos muchos datos sobre su vida se desconocen excepto que nació en la ciudad griega de Siracusa (hoy Sicilia) hacia el año 287. Su padre fue Fidias el astrónomo y era pariente del rey de Siracusa Hiero II. Seguramente estudió en Alejandría, pues mantenía contacto con los discípulos inmediatos de Euclides. Luego se instaló en Siracusa en donde obtuvo gran fama. Durante el sitio de Siracusa por los romanos en el año 215 a. de E, Arquímedes inventó ingeniosas máquinas de guerra que mantenían alejado al enemigo: catapultas, espejos parabólicos para incendiarlas los barcos desde lejos, etc. Finalmente, después de dos años de duro asedio Siracusa fue tomada por los romanos. Aún después de la caída de la ciudad Arquímedes siguió estudiando matemáticas. Había dibujado unos diagramas en la arena y estaba tan absorto que no hizo caso a un soldado romano y éste atravesó con su lanza el cuerpo de aquel científico de 75 años de edad.

Arquímedes

Además de los numerosos inventos mecánicos, como el tornillo para sacar agua de un pozo con forma de hélice, Arquímedes descubrió varias leyes físicas entre las que destaca la ley de la palanca y el famoso principio hidrostático, recogidos en sus obras "*Sobre el equilibrio de los planos*" y "*Sobre los cuerpos flotantes*", respectivamente. Pero lo que más valoraba Arquímedes eran sus descubrimientos matemáticos.

Los maravillosos escritos de Arquímedes que aún se conservan son: "*El Arenario*", "*La medida del círculo*", "*La cuadratura de la parábola*", "*Sobre los conoides y los esferoides*", "*De la esfera y el cilindro*", "*De las espirales*" y "*El método*". El cúmulo de descubrimientos que se encuentran en estas obras convierten a Arquímedes en uno de los matemático más geniales de la antigüedad.

Por lo que respecta a los lugares geométricos, en "*La cuadratura de la parábola*" encontramos el cálculo del área de un segmento parabólico realizado de la siguiente manera: consideremos un segmento de parábola donde se inscribe el triángulo ABC, siendo C el punto en que la tangente es paralela a AB. Sea D el punto en que la tangente es paralela a AC y E el punto en que la tangente es paralela a BC. Los triángulos ADC y BCE son equisuperficiales y cada uno de ellos tiene un área igual a 1/8 del triángulo grande. Repitiendo este proceso constructivo se obtiene la serie 1 + ¼ + 1/16 + ...que tiene como límite a 4/3, en consecuencia, el área del segmento parabólico es 4/3 de la del triángulo ABC[12].

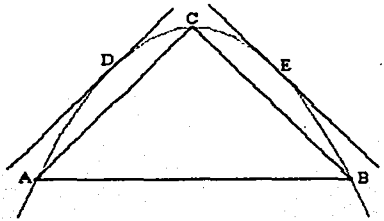


Figura 1. 4

1.6. Diocles

Probablemente nació después de Arquímedes y antes de Geminos de Rodas quién vivió alrededor del 70 a. de E. Su trabajo "*Sobre espejos ardientes*" es una colección de dieciséis proposiciones de geometría, principalmente sobre cónicas.

La primera de estas proposiciones prueba lo que por mucho tiempo se ha conocido como la propiedad focal de la parábola, Diocles fue el primero en establecerla. En las siguientes dos proposiciones da propiedades de espejos esféricos y con las proposiciones 4 y 5 da la construcción foco- directriz de la parábola.

En "*Sobre espejos ardientes*" Diocles también estudia el problema de encontrar un espejo tal que la envolvente de rayos reflejantes sea una curva cáustica[13] dada o un espejo tal que el foco trace una curva dada mientras el sol se mueve a través del cielo. La solución de este problema, tiene consecuencias interesantes para la construcción de un reloj de sol. Neugebauer, muestra que este

[12] Para mas detalles, ver, Heath T., A manual of greek mathematics, p. 330 – 332.

[13] La envolvente de la familia de rayos es llamada una cáustica (es decir, 'quemante' ya que la luz es concentrada en ésta.)

Def. La cáustica (reflexión) de Γ con respecto a P es la envolvente del haz Λ de líneas reflejantes.

Una cáustica es claramente vista en el interior de una taza cuando el sol brilla sobre ésta. Un arco iris en el cielo es también una cáustica debido a un sistema de rayos que pasan por una gota de agua con flexión completa interna.

problema no puede resolverse exactamente, mientras Hogendijk considera la posibilidad de que Diocles diera argumentos de este tipo en el texto original pero que más tarde al copiarlos no se entendió esta parte por lo que se omitió.

1.7. Apolonio de Perga

Apolonio de Perga
(262 - 190 a.de E)
"El Gran Geométra"

Al igual que ha ocurrido con otros genios de la antigüedad no se conocen datos precisos de su vida; incluso se le llega a confundir con otros Apolonio ya que este nombre era muy usual en ese tiempo. De los datos que se conocen tenemos que nació hacia el año 262 a. de E en Perga, una ciudad griega situada actualmente en Turquía. Apolonio fue discípulo de sucesores de Euclides en Alejandría, a donde llegó procedente de su natal Perga, su permanencia en esta ciudad propició que entrara en contacto con los grandes matemáticos que ahí radicaban. Se le conoce principalmente por su trabajo sobre las secciones cónicas, por el cual algunos le consideran como el verdadero descubridor de la geometría analítica, y se le llegó a conocer también como *el gran geómetra.* Junto con Euclides y Arquímedes, Apolonio es el tercer miembro del trío de grandes mentes geométricas de Grecia Antigua. "No es exageración decir que cada consecuencia geométrica importante, incluyendo las actuales, encuentre su origen en algún trabajo de estos tres grandes estudiosos" (Eves, 1963, 25)

La mayoría de las obras de Apolonio han desaparecido y sólo de algunas conocemos breves descripciones hechas casi 500 años después por otro matemático de Alejandría, Pappo. Seis de esas obras junto con dos de Euclides, fueron incluidas en una colección también desaparecida, titulada "*Tesoro de análisis*" que, según Pappo, consistía en un cuerpo de conocimientos destinados a quienes, dominando ya la geometría básica, quisieran abordar problemas relativos a curvas superiores. De Apolonio se ha conservado, casi completa, su obra maestra, "*Las Cónicas*" gracias sobre todo a una traducción al árabe.

Sobre las cónicas Apolonio escribe más de lo que hasta entonces se sabía y de modo mejor organizado. Su índice se puede proponer así:

I. Modos de obtención y propiedades fundamentales de las cónicas.

II. Diámetros, ejes y asíntotas.

III. Teoremas notables. Propiedades de los focos.

IV. Número de intersección de las cónicas.

V. Segmentos de máxima y mínima distancia a las cónicas. Normal, evoluta, centro de curvatura.

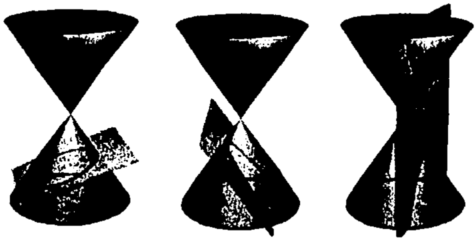
VI. Igualdad y semejanza de las secciones cónicas. Problema inverso: dada la cónica, hallar el cono.

VII. Relaciones métricas sobre diámetros.

VIII. (Se desconoce su contenido. Tal vez problemas sobre diámetros conjugados).

El anexo correspondiente a Apolonio, tomado casi en su totalidad se tomó del libro "*Los matemáticos griegos*" de Miguel Lara Aparicio, se describe con más detalle el contenido de los ocho libros de Apolonio. Adelantamos que Apolonio fue el primero en seccionar un cono circular de dos ramas mediante un plano colocado en diferentes posiciones y obtener a las distintas cónicas. Así, en el caso de la hipérbola es el primero en trabajar con las dos ramas.

En la Figura 1. 5 se muestra el corte de conos con planos en distintos posiciones, para el caso de la hipérbola, cuando el plano es paralelo al eje del cono es sólo una forma particular de obtenerla.



Elipse **Parábola** **Hipérbola**

Figura 1.5

Además, en el libro III la proposición 49 contiene lo que hoy solemos tomar a veces como la definición de elipse PF + PF' = 2a.

Se ha dicho que él fue quien introdujo los términos de parábola, elipse e hipérbola para referirse a tales secciones cónicas.

De acuerdo con Eves, los términos "elipse", "parábola" e "hipérbola" de lengua pitagórica temprana referentes a la "aplicación de áreas" (la forma de "álgebra geométrica" contenida en *Los Elementos* de Euclides, libro II). Al aplicar un rectángulo a un segmento de línea [alineando un borde del rectángulo al segmento con una esquina del rectángulo que se aparea con un extremo], la "otra" esquina del rectángulo es menor, igual o mayor que el segmento. Estos tres casos fueron llamados "elipse", "parábola" e "hipérbola".

En la siguiente figura, de Eves, sea AB el eje principal de una cónica, P cualquier punto en la cónica, Q el pie de la perpendicular de P en AB. Sea AR, perpendicular a AB, una distancia igual al lado recto.

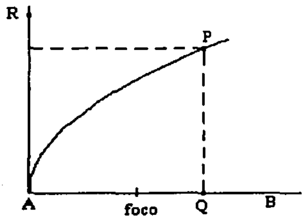


Figura 1.6

Sobreponga al segmento AR, un rectángulo en donde uno de sus lados es AQ y un área igual a $(PQ)^2$.
Si el lado del rectángulo excede el segmento AR, entonces la cónica es una hipérbola.
Si el lado del rectángulo coincide con el segmento AR, entonces la cónica es una parábola.
Si el lado del rectángulo es menor que el segmento AR, entonces la cónica es una elipse.

Es un hecho que con la muerte de Apolonio se término la época dorada de las matemáticas griegas. Sin embargo, las extraordinarias contribuciones que se generaron en esa época fueron el motor para que siguieran apareciendo otros grandes pensadores que mantuvieron vivo el desarrollo de las matemáticas.

1.8. Pappo, Hipatia y Proclo

Pappo de Alejandría (290 – 350) fue un notable geómetra que, además de obtener resultados originales, se ocupó de estudiar y comentar los tratados de los grandes matemáticos que le precedieron. Su obra más importante "*Colección matemática*", ha llegado casi íntegra hasta nuestros días. Esta obra contiene el primer tratamiento que conocemos de las propiedades foco – directriz de las secciones cónicas que no aparecen explícitamente en la obra de Apolonio. Pappo tuvo acceso a trabajos que ahora están perdidos por lo que representa un eslabón con la geometría griega antigua.

En los años posteriores le siguen una gran cantidad de "comentarios", como los realizados por la joven matemática, Hipatia (ó Hypatia) de Alejandría (370 – 415) quién intentaba un renacimiento de la matemática griega, lo cual era muy mal visto por el patriarca de Alejandría Cirilo quien se convirtió en su principal enemigo, ya que para fortalecer el cristianismo se encargaba de eliminar cualquier creencia, según él, herética. Hipatia por ser defensora del pensamiento racional griego fue muerta cruelmente en el año 415 por una muchedumbre de cristianos fanáticos, que además incendiaron la riquísima biblioteca de Alejandría de la que ella era responsable. Con esto se marca el final del periodo de las matemáticas griegas.
Hipatia escribió "*Comentarios a las cónicas de Apolonio*", entre otros.

Hipatia de Alejandría

Proclo (411 – 485) también fue un notable historiador matemático. Al igual que Pappus, tuvo acceso a la documentación original de los matemáticos de las eras Clásica y Helenista que después desapareció. Su "*Resumen Eudemian*" es una fuente invaluable de información acerca del trabajo matemático griego antes de Euclides (Eves, 1990).

1.9. Legado árabe

Una parte de la matemática griega se salvó a través del imperio árabe. En Bagdad y en otras ciudades se forman centros intelectuales en los que se estudiaron y tradujeron los manuscritos de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Tolomeo y Eutocio, es por esta razón que algunas obras, por ejemplo, los tres últimos libros Sobre las cónicas de Apolonio, han llegado hasta nuestros días. Al-Haytam, el Alhazen de los occidentales, es autor de numerosas obras de matemáticas, astronomía, medicina, filosofía y ciencias físicas, de las cuales sólo se conserva su tratado de curvas geométricas y su tesoro de la óptica. En este último libro, que contiene la primera descripción exacta del ojo y un estudio del aumento de las lentes, Alhazen sostiene que la causa de la visión está en el objeto y no en el ojo, cita las leyes de la reflexión y enuncia el principio de la cámara obscura. En el curso de las investigaciones sobre la óptica, Alhazen planteó el problema de encontrar un punto sobre un espejo esférico en el que debe reflejarse la luz procedente de un cierto foco luminoso para incidir en el ojo de un observador. Este problema se conoce como "el problema de Alhazen" y puede resolverse utilizando las cónicas. (Río Sánchez, p 30).

Sin embargo, durante casi doce siglos se olvidaron de las secciones cónicas. Fue hasta el siglo XVI, en parte como una consecuencia de la invención de la imprenta y a la diseminación resultante del trabajo de Apolonio, que ocurrió un progreso en la teoría y en las aplicaciones de las secciones cónicas.

1.10. El renacimiento y las cónicas

En 1522 Johannes Werner (1468 – 1528) publica el tratado "*Los elementos de las cónicas*" en la que sólo estudia la parábola y la hipérbola, y entre las pocas novedades que tiene con respecto al tratado de Apolonio, muestra un método para construir puntos de una parábola de parámetro p con regla y compás.

Es muy famoso el método para trazar una cónica mediante una proyección ortogonal dada por el pintor Alberto Durero (1471 – 1528).

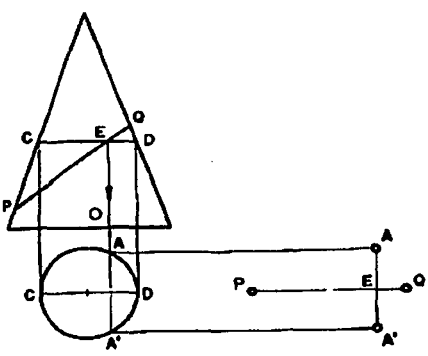
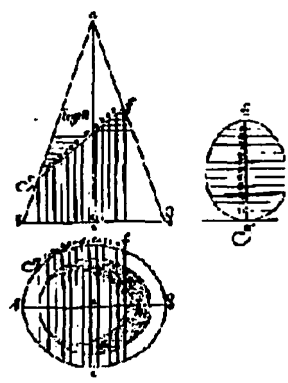


Figura 1. 7. A Método de Durero para el trazado de la elipse.

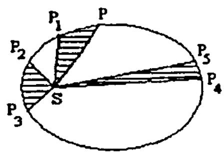


1. 7. B Proyección de una sección elíptica según Durero

Siendo muy joven Galileo Galilei (1564 – 1642) ingresó a la universidad de Pisa para estudiar medicina pero encontró mayor atracción por la física y es en donde inicia una fabulosa aventura científica: analiza cuidadosamente los fenómenos (el tiempo de las oscilaciones de una lámpara colgada del techo y la trayectoria que sigue la bala de un cañón, entre otros), hace mediciones, formula conjeturas, realiza experimentos, efectúa cálculos matemáticos y enuncia sus conclusiones en forma de leyes científicas, y descubre que la trayectoria de la bala de un cañón, despreciando la resistencia del aire, es una parábola. Posteriormente su discípulo Torricelli completó este resultado demostrando además que la envolvente de la familia de esta trayectoria contenida en un mismo plano es otra parábola, que nunca es sobrepasada por ningún proyectil disparado por ese cañón por lo cual recibe el nombre de parábola de seguridad.

Otra visión renacentista es la de Kepler (1571 – 1630) quién nació en la ciudad alemana de Wil der Sadt. Kepler hereda el trabajo del astrónomo Tycho Brahe y lo perfecciona con la ayuda de los trabajos de Euclides, Arquímedes y Apolonio y se resume en las siguientes leyes

1. Todos los planetas recorren órbitas elípticas teniendo al sol en uno de sus focos.
2. La línea que une el sol con un planeta recorre áreas iguales en tiempos iguales.
3. El cuadrado del período del planeta es proporcional al cubo de su distancia máxima al sol.



Si S es el Sol, un planeta se traslada de P a P_1, de P_2 a P_3 y de P_4 a P_5 en el mismo tiampo, si las áreas sombreadas son iguales.

Figura 1.8

Kepler introduce al lenguaje científico la palabra "*foco*" derivada de la palabra latina *focus* que quiere decir "hogar" o "chimenea", también desarrolla un principio de continuidad que unifica a las cónicas: a partir de la sección cónica obtenida al cortar un cono con un plano que pasa por el vértice formada simplemente por dos rectas secantes, podemos pasar gradualmente por una familia infinita de hipérbolas según uno de los focos que se va alejando del otro al ir inclinando el plano cortante. Cuando se ha alejado infinitamente, tenemos una parábola es decir, cuendo el plano es paralelo a una generatriz del cono y al traspasar el punto al infinito y acercarse de nuevo por el otro lado se va obteniendo una familia de elipses, hasta que, cuando los dos focos coinciden, aparece una circunferencia. Esta idea sería aprovechada más tarde por Desargues (1593 – 1662) y la geometría proyectiva.

1.11. Descartes, Fermat y la geometría de coordenadas

La gran revolución del pensamiento matemático suscitada por el filósofo René Descartes (1596 – 1650) en "*La géometrie*" publicada en 1637 se basaba en la aplicación del álgebra a la geometría. Así, un punto en un plano está determinado en su posición por dos números, x e y, o coordenadas. Cuando el punto varía de posición, varían x e y; así se llega a la idea más hermosa del método, la de una sola ecuación algebraica en x e y para representar toda una curva. La geometría cartesiana amplió el concepto de lugar geométrico al hacer que un objeto algebraico tomará la naturaleza geométrica y viceversa. Un caso particular de esto son las cónicas (ver capítulo 3). Además de que facilitó considerablemente la comprensión entre las secciones cónicas y sus propiedades.

Pierre Fermat (1601 – 1667) abogado y parlamentario de Toulousse dedicó sus ratos libres a leer y comentar los tratados de los matemáticos griegos, demostró que todas las ecuaciones de segundo grado representan una cónica o un par de rectas.

1.12. Las cónicas definidas por su excentricidad

John Wallis (1617 – 1703) capellán del rey y profesor de geometría en Oxford en su obra titulada "*Tractatus de sectionibus conicis*", deduce todas las propiedades conocidas de las cónicas a partir de las ecuaciones obtenidas de las relaciones de Apolonio y considera estas ecuaciones como las definiciones de las secciones cónicas, con lo que se aproxima a la concepción moderna de sección cónica como lugar geométrico de los puntos que satisfacen una ecuación algebraica de segundo grado.

Por otro lado Jan de Witt (1629 – 1672) en un trabajo similar al de Wallis pero independiente, "*Elementa curvarum linearum*", mediante la geometría de coordenadas deduce ciertas ecuaciones de segundo grado en su forma canónica identificando su forma correspondiente. Primeramente define a las cónicas utilizando para todas la razón de las distancias al foco y a la directriz (término introducido por él).

Esta razón es la excentricidad de la cónica. Es decir, sea P un punto fijo y una línea fija D (tal que F no esté en D) y

$$d(P,F)\,/\,d(P,D)=e$$

en donde F es el foco de la cónica y D la directriz y e es una constante.

a) Si $0 < e < 1$, se tiene a la elipse.

b) Si $e = 1$, se tiene a la parábola y

c) Si $e > 1$, se tiene a la hipérbola

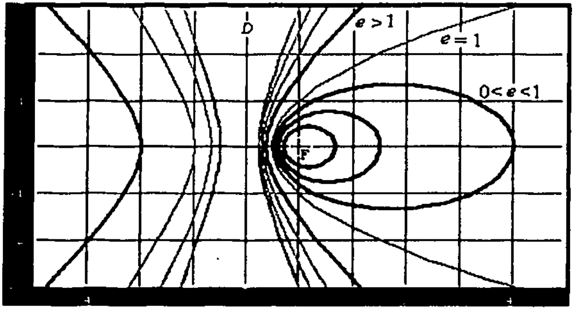


Figura 1. 9

1.13. Las esferas de Dandelín

Las esferas de Dandelín relacionan muchas propiedades de las cónicas en el cono. Estas fueron descubiertas por dos matemáticos belgas, Lambert Adolphe Quetelet (1796 – 1874) y Germinal Pierre Dandelin (1794 – 1847) en 1822, las cuáles se obtienen de la siguiente manera:

1. Inscribimos una esfera dentro de un cono y cortamos con un plano. Tal que la esfera sea tangente al plano cortante en un punto y tangente al cono en un círculo. Para el caso de la hipérbola y de la elipse hay dos esferas.
2. El punto donde las esferas tocan al plano cortante son los focos de las cónicas.
3. La directriz de las cónicas es la intersección del plano cortante y el plano del círculo tangente.

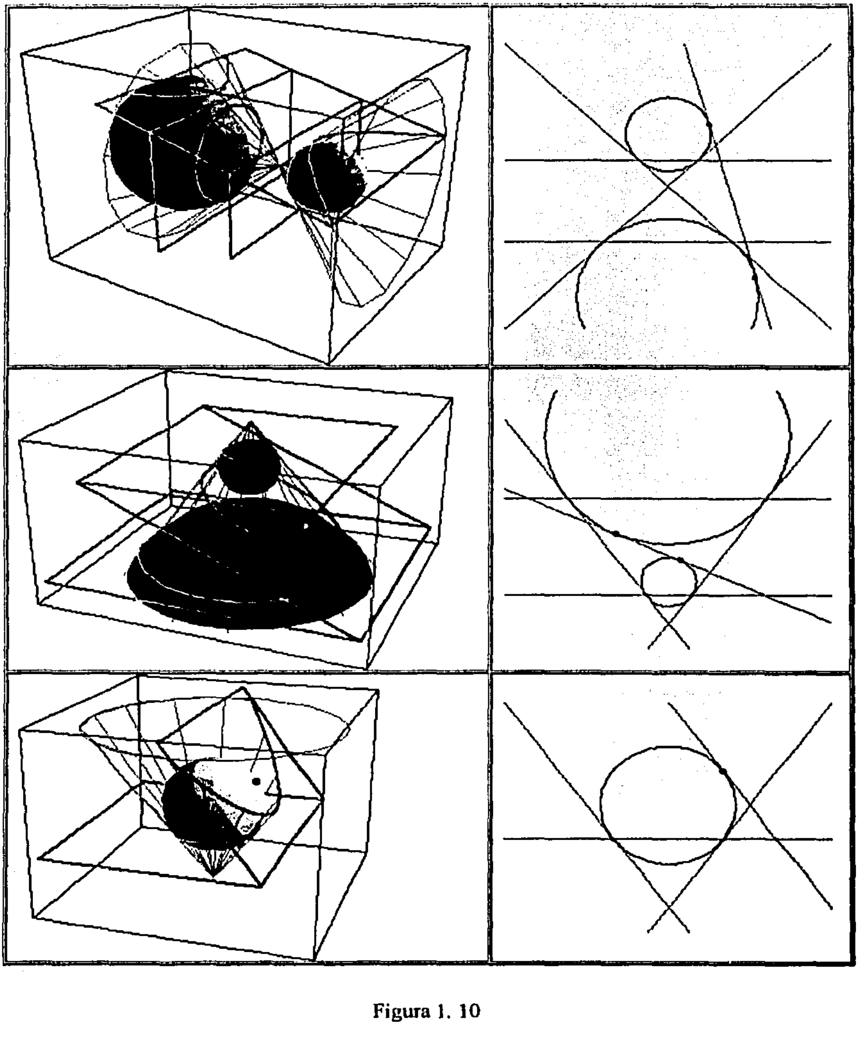


Figura 1. 10

1.14. Las Cónicas definidas paramétricamente

Estas curvas definidas paramétricamente, son las coordenadas de un punto en la curva, dadas en términos de una sola variable.

Definición. Una función paramétrica f con parámetro t es $f: R \to R^2$ tal que

$$f(t) = (\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)), \qquad \varphi_i : R \to R$$

La forma paramétrica de la parábola.

Las coordenadas para cualquier punto de la parábola es $(at^2, 2at)$. Este punto está en la parábola para todos los valores de $t \in \mathbf{R}$.

Forma paramétrica de la elipse.

Una comparación entre las formas de la ecuación de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y un círculo concéntrico $x^2 + y^2 = a^2$, donde cualquier punto es $(a \cdot \cos\theta,\ a \cdot \text{sen}\ \theta)$, nos lleva a observar que el punto $(a \cdot \cos\theta,\ b \cdot \text{sen}\ \theta)$ está en la elipse para todos los valores del parámetro θ. A fin de preservar la naturaleza uno–uno de la relación entre un punto y su parámetro, se restringe $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

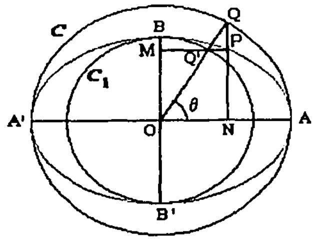


Figura 1. 11

El ángulo θ tiene un significado geométrico. Supóngase que C es un círculo dibujado con el eje mayor como diámetro (como en la Figura 5), y la ordenada a través de cualquier punto P en la elipse interseca a C en Q (en el mismo cuadrante que P) y al eje mayor en N.

También supóngase que C_1 es un círculo dibujado con el eje menor como diámetro(también en la figura anterior), y la abscisa a través de cualquier punto P en la elipse interseca a C_1 en Q' (en el mismo cuadrante que P) y al eje menor en M.

Si $\quad \angle QON = \theta \quad$ y $\quad \cos\theta = \dfrac{\overline{O}N}{a}$

$\Rightarrow \quad a\cos\theta = \overline{O}N \quad$ además $\quad \overline{O}N = x$

$\Rightarrow \quad a\cos\theta = x$

Por otra parte $\quad \angle Q'OM = 90° - \theta \quad$ y $\quad \cos(90° - \theta) = \dfrac{\overline{O}M}{b}$

Como $\quad \cos(90° - \theta) = \text{sen}\,\theta \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\,\theta = \dfrac{\overline{O}M}{b}$

$\Rightarrow \quad b\,\text{sen}\,\theta = \overline{O}M \quad$ pero $\quad \overline{O}M = y$

$\Rightarrow \quad b\,\text{sen}\,\theta = y$

es decir, la forma paramétrica de la elipse es **($a \cdot \cos\theta$, $b \cdot \text{sen}\,\theta$)**

Forma paramétrica de la hipérbola.

Para todos los valores de θ, el punto P(a sec θ, b tanθ) está en la hipérbola. Esto se puede obtener dibujando dos circunferencias concéntricas en el origen y que sus radios sean OA = a y OB = b como en la siguiente figura. Trazar una recta l que pase por O y por A, donde θ es el ángulo que forma l con la parte positiva el eje X. Trazar una perpendicular a l por A y sea M el punto de intersección con el eje X. Por M, trazar una paralela al eje Y

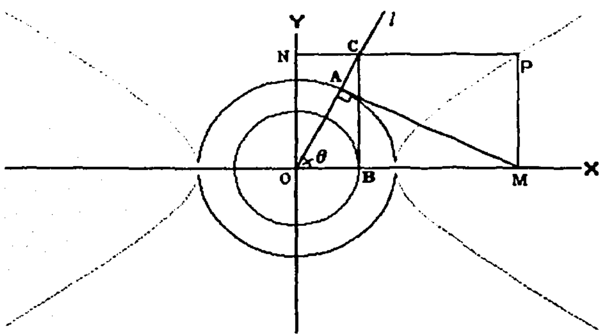


Figura 1. 12

del triángulo rectángulo OAM

$$\cos\theta = \frac{\overline{OA}}{\overline{OM}} = \frac{a}{x} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{a}{\cos\theta} = a\cdot\sec\theta$$

y del triángulo rectángulo OBC

$$tan\theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{OB}} = \frac{y}{b} \qquad \Rightarrow \qquad y = b\cdot tan\theta$$

1.15. Ecuaciones de una sección cónica en coordenadas polares

Definición.

La *gráfica de una ecuación polar* en un sistema de coordenadas polares es el conjunto de todos los puntos del plano que tienen *al menos* un par de coordenadas polares (r, θ) que satisfacen la ecuación.

Ahora consideremos una sección cónica cuyo foco esta en el polo y una recta D cuya ecuación cartesiana es de la forma $x = -p$ ($p > 0$) que sea la directriz correspondiente, como en la Figura 7.

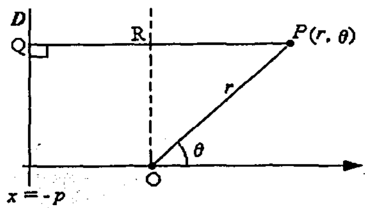


Figura 1. 13

Recordando de la Sección II. 4 que si P es un punto cualquiera de la sección cónica, entonces la excentricidad e ($e > 0$) de la sección cónica esta dada por

$$d(0, P) \,/\, d(D, P) = e$$

así tenemos que

$$d(0, P) = e\,[d(D, P)] \qquad (1)$$

pero en términos de coordenadas polares tenemos que

$$d(0, P) = r \qquad (2)$$

por otro lado, tenemos que

$$d(D, P) = d(D, R) + d(R, P) \qquad (3)$$

pero

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$d(D, R) = p \qquad (4)$$

y

$$\cos\theta = d(R, P) / r$$

por lo que

$$d(R, P) = r\cos\theta \qquad (5)$$

sustituyendo (4) y (5) en (3) tenemos

$$d(D, P) = p + r\cos\theta \qquad (6)$$

además, sustituimos (2) y (6) en (1) y tenemos

$$r = e\,[p + r\cos\theta]$$

$$r = e\,p + er\cos\theta$$

$$r - er\cos\theta = e\,p$$

$$r(1 - e\cos\theta) = e\,p$$

$$r = e\,p \,/\, (1 - er\cos\theta) \qquad (7)$$

La ecuación (7) es la forma polar ordinaria de una ecuación cónica con foco en el origen y cuya directriz correspondiente es la recta que tiene la ecuación $x = -p$.

1. 16. Las cónicas como curvas reflexivas

Las propiedades de reflexión de parábolas, elipses e hipérbolas son muy conocidas y tienen muchas aplicaciones prácticas, ¿Qué curvas o superficies las tienen? ¿Existen otras curvas con esta propiedad? en el año de 1992 Daniel Drucker obtiene el siguiente resultado en el que muestra por qué las cónicas son tan especiales

Teorema: *una curva plana suave tiene propiedad reflexiva si y sólo si es un subconjunto de un círculo, hipérbola, parábola o línea recta.*

De donde tenemos que si excluimos el caso algo degenerado de la línea recta, la cual no está determinada únicamente por sus "focos", entonces las curvas suaves con propiedades reflexivas son precisamente las secciones cónicas: círculos, elipses, hipérbolas y parábolas (o secciones de estas curvas). Esto añade otra importante caracterización de las secciones cónicas.

La propiedad reflejante de la parábola ha sido la base de muchas aplicaciones, por ejemplo, se utiliza en el diseño de telescopios reflectantes o de antenas parabólicas de la siguiente forma: Si construimos un espejo cóncavo cuya superficie sea un paraboloide de revolución (es decir, la superficie que se obtiene al girar una parábola alrededor de su eje) todos los rayos de luz paralelos al eje del espejo se concentrarán en el foco tras ser reflejados. Esto permite concentrar grandes cantidades de energía (luminosa, solar, etc.)

La antena parabólica que se utiliza por satélite, concentra la señal de ondas electromagnéticas procedentes del satélite al que esta orientada y la amplifica. Las antenas parabólicas que se utilizan en radioastronomia para observar objetos celestes muy lejanos, como las galaxias, o para recibir la comunicación de los satélites que exploran el sistema solar. Las propiedades reflejantes de la parábola y la hipérbola se combinan para en el diseño del telescopio reflector.

Otra aplicación interesante de reflexión de la parábola se usa inversamente en los faros de los automóviles, que arrojan un haz de rayos paralelos después de ser emitidos por un pequeño foco eléctrico y reflejarse en el espejo.

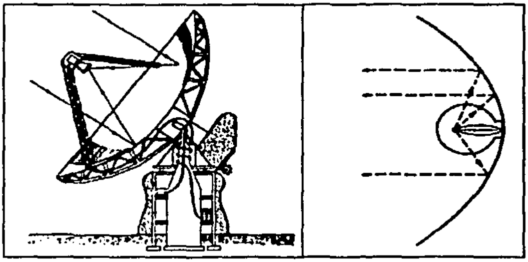


Figura 1. 14

La propiedad reflexiva de la elipse consiste en que todas las ondas que emanen de uno de sus focos se concentrarán en el otro. Este principio se utiliza en el diseño de instrumentos médicos, por ejemplo, el pulverizador de cálculos renales, que permite desintegrar piedras en los riñones sin necesidad de practicar cirugía, colocando una potente fuente de ondas de choque en uno de los focos de una elipse, y el riñón del paciente en el otro.

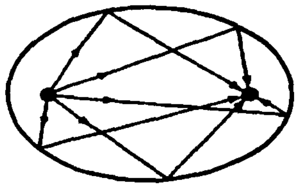


Figura 1. 15

Si se coloca material combustible en un foco de un reflector elíptico, este material se puede encender colocando una fuente de calor en el otro foco.

"*Es realmente un enigma esto de que los geómetras griegos eligieran precisamente éstas curvas para estudiarlas, y desde el punto de vista actual no podemos decir sino que parece haber sido un caso de suerte asombrosa*" (J. Newman)

Por todo lo que hemos visto, tenemos que las secciones cónicas son un rico tópico clásico que ha sido reflexionado en muchos acontecimientos en la historia de las matemáticas.

Además que han sido de gran utilidad en la aplicación en otras ramas de la ciencia y la tecnología.

2. Propiedades geométricas de las cónicas.

Las cónicas poseen una interesante cadena de propiedades de naturaleza puramente geométrica, las cuales se siguen de la definición o pueden establecerse con la asistencia de álgebra elemental. Estas propiedades geométricas pueden obtenerse sólo por argumentos geométricos, sin embargo las demostraciones son un poco más difíciles. Los métodos con los cuales se obtienen resultados sin cualquier recurso explícito del álgebra son ahora estudiadas en su mayoría, sólo por el interés histórico que representan ya que muchas de estas propiedades fueron conocidas por los antiguos griegos.

2.1. Propiedades geométricas de la parábola.

La solución de un problema la deberíamos buscar con la mayor sencillez posible usando razonamientos algebráicos o sintéticos o combinando ambos razonamientos.

Ahora nos referiremos al diagrama de la Figura 2.1 en donde están etiquetados algunos puntos. P es cualquier punto sobre la parábola, O es el vértice y S el foco. La tangente en P interseca a la tangente en el vértice en A, a la directriz en R y al eje en T. M es el pie de la perpendicular de P a la directriz, N es el pie de la perpendicular de P al eje, G es el punto donde la normal en P interseca al eje y el eje interseca a la directriz en Z. En el diagrama S, A y M parecen estar colineales, ¡y lo están!, este es uno de los resultados que serán probados.

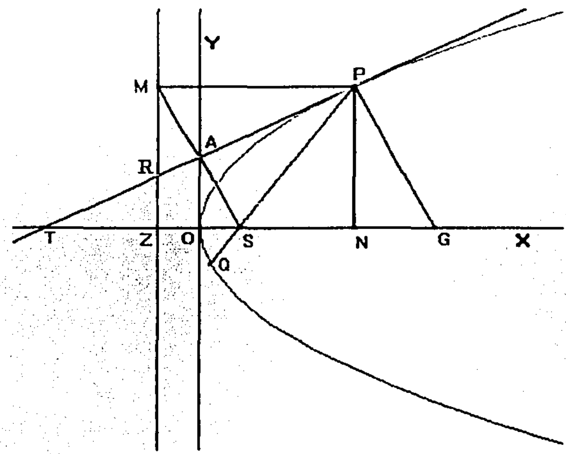


Figura 2. 1

(1) SPMT es un rombo[14].
Para OT = ON, y OS = OZ (ya que O esta sobre la parábola)
Por tanto ST = ZN = MP = SP (ya que P esta sobre la parábola)
Así ST es igual y paralelo a PM, y ST = SP. □[15]

(2) El pie de la perpendicular desde el foco a la tangente está sobre la tangente en el vértice.
Como OT = ON, y también TA = AP (ya que OA es paralelo a PN). A es por tanto el punto medio de la diagonal PT, y también está y biseca la otra diagonal SM. Las diagonales de un rombo son perpendiculares entre sí, también el ángulo SAP es un ángulo recto. □

(3) El circuncírculo de un triángulo formado por tres tangentes a la parábola pasa a través del foco.
Como los pies de las perpendiculares de S a los tres lados son colineales (sobre la tangente en el vértice), y el resultado se sigue del recíproco del teorema de Simson. □

(4) SP y la recta a través de P paralela al eje forman ángulos iguales con la tangente en P.
Si MP, TP son prolongados por M_1, T_1 respectivamente,
$\angle TPS = \angle TPM$ (propiedad del rombo)
$= \angle T_1PM_1$ (ángulos opuestos por el vértice),
El cual es el resultado planteado. Esto implica que la normal en P es la bisectriz del ángulo formado por SP y PM_1 y es la "propiedad reflexiva" que los rayos de una fuente de puntos de luz en S serán reflejados del interior de la parábola en una emisión paralela al eje. Estos principios son usados cuando se está construyendo el fondo de los faros y reflectores de un carro. Inversamente, un rayo de luz paralelo al eje es enfocado por una fuente parabólica en el foco de la parábola. (De ahí el nombre). □

(5) La porción de la tangente entre el punto de contacto y la directriz subtiende un ángulo recto en el foco.
$\angle SPR = \angle MPR$ y así los triángulos SPR y MPR son congruentes.
De donde se sigue que $\angle RSP$ es un ángulo recto. □

(6) Los puntos de intersección de las tangentes sobre la directriz son los extremos de una cuerda focal (que es una cuerda a través del foco)
Si la otra tangente de R intersecta la parábola en Q, los ángulos RSP y RSQ son ambos ángulos rectos; y así PSQ es una recta. □

(7) Las tangentes en los extremos de una cuerda focal se intersecan en ángulos rectos sobre la directriz.

[14] Un rombo es un paralelogramo que tiene sus cuatro lados iguales y sus ángulos contiguos desiguales.
[15] El símbolo □ significa fin de la demostración.

Las tangentes en P y Q se intersecan en la directriz, ya que si estas intersecan la directriz en R y R', los ángulos $\angle RSP$ y $\angle R'SP$ son rectos, entonces RS y R'S coinciden. Ya que los triángulos SRP, MRP son congruentes, los ángulos SRP y MRP son iguales. Análogamente, si M' es el pie de la perpendicular de Q a la directriz, los ángulos SRQ y M'RQ son iguales y de esto se sigue que $\angle PRQ$ sea un ángulo recto. □

(8) $SA^2 = SO \cdot SP$
Como los triángulos OAS y APS son semejantes. Estos dan una ecuación ($a/p = p/r \Rightarrow OS \cdot SP = SA^2$) $p^2 = ar$ en p, la longitud de la perpendicular de S a la tangente de P, y r, la longitud de SP. Esta es llamada la ecuación de la parábola (p, r), y es ocasionalmente usada en los libros de mecánica y cálculo. □

(9) SMPG es un paralelogramo.
Como PG es paralelo a SM, ambos son perpendiculares a PT. □

(10) La subnormal (la distancia a lo largo del eje bajo la normal) de la parábola es una longitud constante.
Como $SG = ZN$ y también $NG = ZS = 2a$. □

Ejercicios propuestos al lector.

1. Con la notación de la Figura 2.1, prueba los siguientes resultados:
   (i) $TA \cdot AR = SO \cdot SP$
   (ii) $TA = AN$
   (iii) La recta a través de A paralela al eje biseca a SP.
   (iv) La tangente en el vértice pasa por el círculo con diámetro SP.
   (v) $PG = 2 \cdot AS$
   (vi) $PG^2 = 2 \cdot SL \cdot SP$
   (vii) Si la tangente en P interseca a SL en K entonces $SK = SR$:

2. PSQ es una cuerda focal de una parábola donde el vértice es O y el foco en S. M es el pie de la perpendicular de P a la directriz, y N es el pie de la perpendicular de P al eje. Probar los siguientes resultados:
   (i) Si la tangente en P y Q se intersectan en R y RQ intersectan el lado recto en U entonces $RU = SM$.
   (ii) El círculo con diámetro PQ toca a la directriz.
   (iii) La recta a través de R paralela al eje biseca a PQ.
   (iv) $\angle MVS$ es un ángulo recto.

2.2 Propiedades geométricas de la elipse.

Al igual que la parábola la elipse tiene una riqueza de propiedades, que se siguen de la definición. Algunas veces se demuestran con la ayuda del álgebra elemental o un poco más dificilmente sin esta última.

Para la primera sucesión de propiedades nos referiremos a la Figura 2.2. La elipse tiene como eje principal al segmento AA' y como eje conjugado al segmento BB' con longitudes $2a$ y $2b$ respectivamente y se intersectan en O. Con focos S y S' con directrices correspondientes d y d'. Estos ejes son considerados como ejes de coordenadas cuando así se requiere. P es un punto cualquiera (x_1, y_1) de la curva y la tangente en P intersecta a las directrices en D y D' respectivamente, a AA' en T y a BB' en U. La normal en P intersecta a AA' en G. El pie de la perpendicular de P a AA' es N. La línea a través de P paralela a AA' intersecta a BB' en L y a las directrices en M y M'.

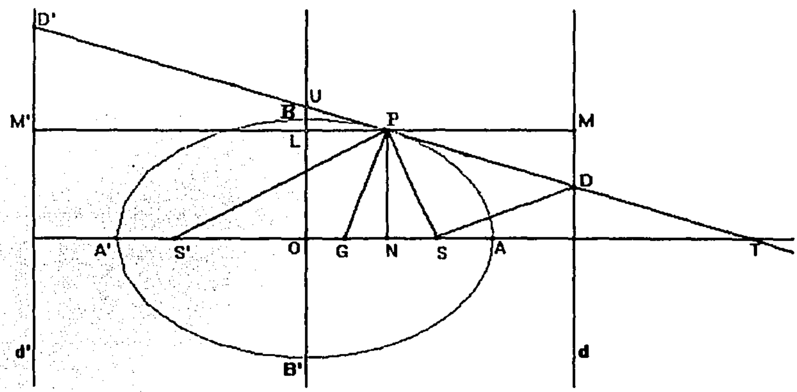


Figura 2. 2

Ahora tenemos la propiedad fundamental de las distancias focales.

$$SP + SP' = 2a$$

Los primeros resultados se obtienen usando un poco de álgebra elemental.

(1) $ON \cdot OT = a^2$.
Si P es el punto con coordenadas (x_1, y_1), $ON = x_1$ y la tangente $xx_1/a^2 + y\,y_1/b^2 = 1$[16] intersecta al eje X cuando $y = 0$ en el punto T donde $xx_1 = a^2$. $\square$

[16] Nótese que solamente el punto (x_1, y_1) satisface a la vez la ecuación de la elipse y de la línea; por lo tanto es una tangente.

(2) **La parte de la tangente entre el punto de contacto y la directriz subtienden un ángulo recto con el foco correspondiente; esto es, el ángulo PSD es un ángulo recto.**

La tangente en $P(x_1, y_1)$ es

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

Y va a intersectar a d en $(a/e,\ k)$ así tenemos

$$\frac{\left(\frac{a}{e}\right)x_1}{a^2}+\frac{ky_1}{b^2}=1$$

$$\frac{ax_1}{a^2e}+\frac{ky_1}{b^2}=1$$

$$\frac{x_1}{ae}+\frac{ky_1}{b^2}=1$$

$$b^2x_1+aeky_1=aeb^2$$

$$aeky_1=aeb^2-b^2x_1=b^2(ae-x_1)=a^2(1-e^2)(ae-x_1)$$

$$aeky_1=a^2(1-e^2)(ae-x_1)$$

$$y_1=\frac{a^2(1-e^2)(ae-x_1)}{aek}=\frac{a(1-e^2)(ae-x_1)}{ek}$$

Como $S(c,0)$ y $P(x_1,y_1)$, la pendiente de SP es $\dfrac{y_1}{x_1-c}$ pero como $c=ae$

entonces la pendiente de SP es $\dfrac{y_1}{x_1-ae}$

Por otro lado $S(c,\ 0)$ y $D(\frac{a}{e},\ k)$, la pendiente de SD es $\dfrac{k}{\frac{a}{e}-c}=\dfrac{k}{\frac{a}{e}-ae}$

Entonces el producto de la pendiente de SP por la pendiente de SD es

$$\frac{y_1}{x_1-ae}\cdot\frac{k}{\left(\frac{a}{e}-ae\right)}=\frac{\frac{a(1-e^2)(ae-x_1)}{ek}}{x_1-ae}\cdot\frac{\frac{k}{1}}{a\left(\frac{1-e^2}{e}\right)}=\frac{\frac{a}{e}(1-e^2)(ae-x_1)}{\frac{a}{e}(1-e^2)(x_1-ae)}$$

$$=\frac{(ae-x_1)}{(x_1-ae)}=\frac{-(x_1-ae)}{(x_1-ae)}=-1 \qquad \square$$

(3) **Las tangentes de los extremos de una cuerda focal se intersectan en la directriz.**

(4) **Los puntos de contacto de las tangentes desde un punto en la directriz son extremos de una cuerda focal.**
(Tales tangentes *no* son, sin embargo, perpendiculares. Esta propiedad es verdadera sólo en las parábolas. En cambio para la elipse las tangentes que se intersectan en la directriz, nunca pueden ser perpendiculares)

(5) SG = $e \cdot$ SP.
La norma normal en P(x_1, y_1) es

$$\frac{xa^2}{x_1} - \frac{yb^2}{y_1} = a^2 - b^2$$

Si $y = 0$

$$\frac{xa^2}{x_1} = a^2 - b^2 = c^2$$

$$x = \frac{c^2}{a^2}x_1 = e^2 x_1$$

$G(e^2 x_1, 0)$

$$SG = OS - OG = ae - e^2 x_1 = e^2\left(\frac{a}{e} - x_1\right) = e^2 PM = e^2\left(\frac{SP}{e}\right) = e \cdot SP \qquad \square$$

(6) **La normal bisecta el ángulo dado por las distancias focales, esto es, los ángulos SPG y S'PG son iguales.**
Como $SG = e \cdot SP \quad \Rightarrow \quad \frac{SG}{SP} = e$

y similarmente $S'G = e \cdot S'P \quad \Rightarrow \quad \frac{S'G}{S'P} = e$

Entonces $\frac{SG}{SP} = \frac{S'G}{S'P}$

Por lo tanto PG bisecta al ángulo SPS". □

(7) **La tangente en P es igualmente inclinada a las distancias focales SP, S'P.**
Los ángulos entre la tangente en P, SP y S'P son los *complementos* de los ángulos iguales SPG y S'PG. □
Esta es la propiedad 'reflejante' de la elipse; un rayo de luz desde el foco S es reflejado en P y pasa por S'.

(8) **Los pies V y V' de las perpendiculares desde S y S' a la tangente en P están en el círculo auxiliar.**

Sea Q el punto de intersección de S'P y SV como en la Figura 2.3. Entonces los ángulos S'PV', SPV y QPV son iguales, así que los triángulos SPV y QPV son congruentes. Por lo tanto
S'Q = S'P + PQ = S'P +SP = $2a$ (la suma de las distancias focales)

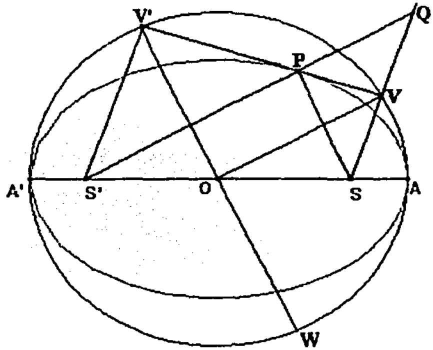


Figura 2. 3

Ahora V es el punto medio de SQ y O es el punto medio de S'S, así que S'Q = 2·OV, y OV = a; por lo tanto V esta en el círculo auxiliar y de manera semejante esta V'. □

(9) Si SV $=p$ y S'V' $=p'$ entonces $pp' = b^2$.
Si V'O intersecta al círculo auxiliar otra vez en W, entonces V'W es un diámetro y también WVS es una línea recta. Tenemos que SW = S'V' ya que los triángulos OS'V' y OSW son congruentes. Por lo tanto
pp' = SV · S'V' = SV · SW = SA · SA' (intersección de las cuerdas de un círculo)
$= (a - ae)(a + ae) = a^2 - (ae)^2 = a^2 - c^2 = b^2$. □

(10) Las tangentes perpendiculares a una elipse se intersectan en un punto R cuyo lugar geométrico es un círculo llamado el círculo director, con ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Sean dos tangentes perpendiculares en R que intersectan el círculo auxiliar en V, V ' y W, W ' respectivamente (Figura 2.4).
Entonces SV, S'V' son perpendiculares a una tangente, y SW, S'W' a otra. Entonces SVRW y S'V'RW' son rectángulos, y así

$$RV \cdot RV' = SW \cdot S'W' = b^2.$$

Por lo tanto la longitud de la tangente desde R al círculo unitario es b (Figura 2.4), y también $OR^2 = (a^2 + b^2)$, y el lugar geométrico de R es un círculo donde el radio es $\sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Comparando con la Propiedad 7 de la parábola nótese que el círculo director reemplaza a la directriz la cual es el lugar geométrico de las tangentes perpendiculares de la parábola. □

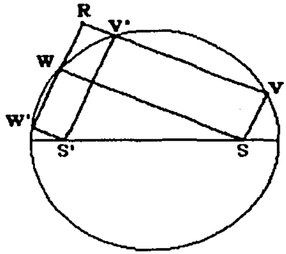


Figura 2. 4

(11) Si TP y TQ son tangentes a la elipse, los ángulos TSP y TSQ son iguales.
La línea que pasa por SP y su perpendicular que pasa por T se intersectan en E y
la línea que pasa por SP y su perpendicular que pasa por T se intersectan en E.
Además las perpendiculares a la directriz que pasan por T y P la intersectan en H y M respectivamente. PT intersecta a la directriz en R (Figura 2.5)
Entonces

SE / SP = RT / RP (TE y SR son paralelos, ya que ∠RSP es recto)
= TH / PM (ya que TH y PM son paralelos)

Pero SP = e·PM y

SE / SP = TH / PM ⇒ SE / e·PM = TH / PM
⇒ SE / e = TH
⇒ SE = e·TH

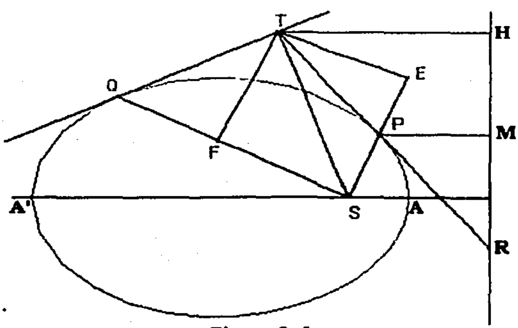


Figura 2. 5

Similarmente, SF = e·TH, y así los triángulos TSE y TSF son congruentes. Así se sigue que $\angle$TSP = $\angle$TSQ □

(12) Si TP y TQ son tangentes a la elipse, los ángulos STP y S'TQ son iguales.
Refiriéndonos a la Figura 2.6,

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 && \text{(propiedad 7)} \\ &= a_3 && \text{(por ser opuestos por el vértice)} \\ b_1 &= b_2 && \text{(propiedad 11)} \\ a_1 + a_3 &= b_1 + b_2 + c_1 && \text{(ángulo externo)} \\ a_1 &= b_1 + d_1 && \text{(ángulo externo)} \end{aligned}$$

Así tenemos $c_1 = 2d_1$, $c_2 = 2d_2$.
Pero $c_1 = c_2$ y también $d_1 = d_2$. □

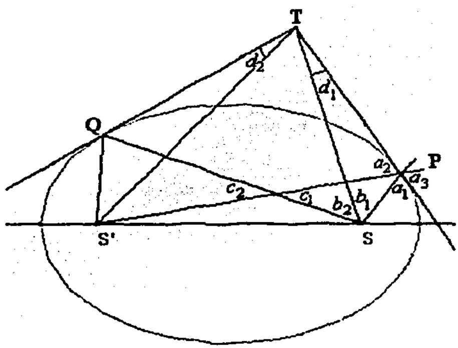


Figura 2. 6

Ejercicios propuestos al lector.

1. Las tangentes en los extremos de una cuerda focal se intersectan en la directriz en T. Mostrar que TS es perpendicular a la cuerda.

2. Dar una construcción para el segundo foco de una elipse cuando un foco, la correspondiente directriz y una tangente son dados.

3. Dada una elipse y su eje mayor, describe como se construye:
   (i) Los focos.
   (ii) La tangente en un punto P.

2.3. Propiedades geométricas de la hipérbola.

Las propiedades geométricas de la hipérbola son análogas a las propiedades geométricas de la elipse sólo que en lugar de ángulos iguales se reemplaza por ángulos *complementarios* y algunos resultados son diferentes si dos puntos se toman en distintas ramas de la curva. la demostración de la propiedad (10) para la elipse acerca del círculo director no es válida para una hipérbola. A continuación tenemos algunas propiedades de la hipérbola.

La hipérbola tiene como eje principal al segmento AA' con longitudes $2a$ y como eje conjugado a la recta b y se intersectan en O. Sus focos S y S' con directrices correspondientes d y d'. Estos ejes son considerados como ejes de coordenadas cuando así se requiere. P es un punto cualquiera (x_1, y_1) de la curva y la tangente en P intersecta a las directrices en D y D' respectivamente, a AA' en T y a b en U. La normal en P intersecta a AA' en G. El pie de la perpendicular de P a AA' es N. La línea a través de P paralela a AA' intersecta a b en L y a las directrices en M y M'.

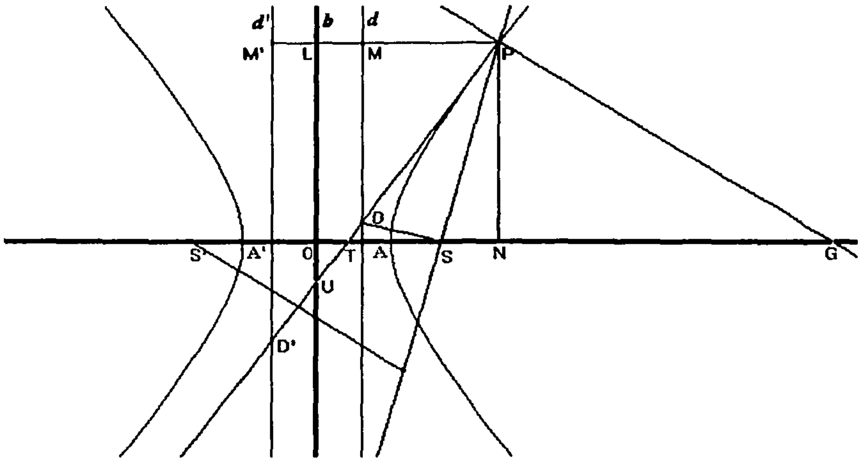


Figura 2. 7

(1) $\mathrm{ON} \cdot \mathrm{OT} = a^2$.
Si P es el punto con coordenadas (x_1, y_1), $\mathrm{ON} = x_1$ y la tangente $xx_1/a^2 - y\,y_1/b^2 = 1$[17] intersecta al eje transverso cuando $y = 0$ en el punto T donde $xx_1 = a^2$. □

[17] Nótese que solamente el punto (x_1, y_1) satisface a la vez la ecuación de la hipérbola y de la línea; por lo tanto es una tangente.

(2) **La parte de la tangente entre el punto de contacto y la directriz subtienden un ángulo recto con el foco correspondiente; esto es, el ángulo PSD es un ángulo recto.**

La tangente en $P(x_1, y_1)$ es:

$$x x_1/a^2 - y y_1/b^2 = 1$$

Y va a intersectar a d en $(a/e, k)$ así tenemos

$$\frac{\left(\frac{a}{e}\right)x_1}{a^2} - \frac{ky_1}{b^2} = 1$$

$$\frac{ax_1}{a^2e} - \frac{ky_1}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_1}{ae} - \frac{ky_1}{b^2} = 1$$

$$b^2x_1 - aeky_1 = aeb^2$$

$$aeky_1 = aeb^2 - b^2x_1 = b^2(ae - x_1) = a^2(1-e^2)(ae - x_1)$$

$$aeky_1 = a^2(1-e^2)(ae - x_1)$$

$$y_1 = \frac{a^2(1-e^2)(ae-x_1)}{aek} = \frac{a(1-e^2)(ae-x_1)}{ek}$$

Como $S(c, 0)$ y $P(x_1, y_1)$, la pendiente de SP es $\frac{y_1}{x_1 - c}$ pero como $c = ae$

entonces la pendiente de SP es $\frac{y_1}{x_1 - ae}$

Por otro lado $S(c, 0)$ y $D(\frac{a}{e}, k)$, la pendiente de SD es $\frac{k}{\frac{a}{e} - c} = \frac{k}{\frac{a}{e} - ae}$

Entonces el producto de la pendiente de SP por la pendiente de SD es

$$\frac{y_1}{x_1 - ae}\cdot\frac{k}{\left(\frac{a}{e} - ae\right)} = \frac{\frac{a(1-e^2)(ae-x_1)}{ek}}{x_1 - ae}\cdot\frac{\frac{k}{1}}{a\left(\frac{1-e^2}{e}\right)} = \frac{\frac{a}{e}(1-e^2)(ae-x_1)}{\frac{a}{e}(1-e^2)(x_1-ae)}$$

$$= \frac{(ae - x_1)}{(x_1 - ae)} = \frac{-(x_1 - ae)}{(x_1 - ae)} = -1 \qquad \square$$

(3) **Las tangentes de los extremos de una cuerda focal se intersectan en la directriz.**

(4) **Los puntos de contacto de las tangentes desde un punto en la directriz son extremos de una cuerda focal.**

(5) $SG = e \cdot SP$.

La normal en $P(x_1,\ y_1)$ es

$$\frac{xa^2}{x_1}+\frac{yb^2}{y_1}=a^2+b^2$$

Si $\quad y=0$

$$\frac{xa^2}{x_1}=a^2+b^2=c^2$$

$$x=\frac{c^2}{a^2}x_1=e^2x_1$$

$$G(e^2x_1,0)$$

$$SG=OG-OS=e^2x_1-ae=e^2\left(x_1-\frac{a}{e}\right)=e^2PM=e^2\left(\frac{SP}{e}\right)=e\cdot SP \qquad \square$$

(6) La normal bisecta el ángulo dado por las distancias focales, esto es, los ángulos SPG y S'PG son complementarios.

Como $\quad SG=e\cdot SP \quad \Rightarrow \quad \frac{SG}{SP}=e$

y similarmente $\quad S'G=e\cdot S'P \quad \Rightarrow \quad \frac{S'G}{S'P}=e$

Entonces $\quad \frac{SG}{SP}=\frac{S'G}{S'P}$

Por lo tanto PG bisecta al ángulo esterior SPS''. □

3. Las cónicas y sus acompañantes.

Cuando un objeto se encuentra fijo a otro objeto que se mueve bajo ciertas condiciones, podemos tener indicios de que la trayectoria de ese objeto fijo no es arbitraria, así podemos tratar de conocer cuál es su trayectoria, tal es el caso del siguiente problema

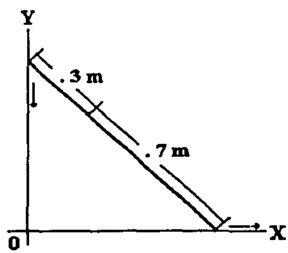
En los ejercicios que a continuación presentamos sólo se encuentra el enunciado y su respectivo dibujo para que el lector imagine cuál es la trayectoria por la que viaja el punto indicado. En el anexo correspondiente a esta unidad está la solución de cada uno de los ejercicios. Sin embargo, invitamos al lector a dejarse llevar por la curiosidad de encontrar estos lugares geométricos y a pasar un rato de emoción y diversión.

1. Una escalera de 1m de longitud situada sobre el suelo liso y apoyada con un extremo en la pared se desliza hacia abajo. ¿Por qué trayectoria se mueve un gatito que se encuentre a 30cm del extremo superior?

   Tratemos de imaginar qué forma tiene la trayectoria por la que se mueve el gatito.

   Sugerencias:

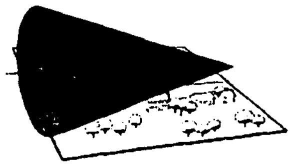
   i) Emplear un sistema de coordenadas como el que se muestra a continuación.



   ii) Con una regla simulemos el movimiento y marquemos distintas posiciones.

   iii)¿Podemos deducir de qué curva se trata?

2. Un avión vuela con movimiento rectilíneo a una altura constante h con una velocidad supersónica v, ¿cuál es, en un momento dado, la región de la superficie terrestre (que suponemos plana) en cuyos puntos se oye o se ha oído el ruido del avión?



Dada cualquier curva C, en particular la parábola, la elipse o la hipérbola, con frecuencia tenemos el siguiente problema: P es un punto que puede variar en la curva C, y otro punto R, es construido a partir de P y otros puntos fijos y líneas dadas. Es obvio, que al variar P también varía R, así que nos preguntamos ¿de qué manera varía R?, o mejor dicho, ¿cuál es el lugar geométrico de R?. Para encontrar el lugar geométrico, con respecto a los problemas de parábola, los atacaremos con el método siguiente

i) Encontrar las coordenadas (X, Y) de R en términos de p y cualesquiera números fijos (usualmente por lo menos la a involucrada en $y^2 = 4ax$).

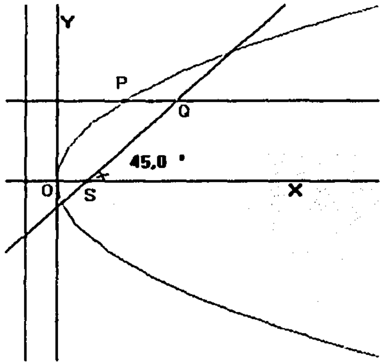
ii) Eliminando p de las expresiones de X y Y. Por lo que encontrar una relación que sea satisfecha por las coordenadas de R para todos los valores de p, y en consecuencia para todas las posiciones de p.

iii) Reemplazando X por x, Y por y en esta ecuación. La ecuación resultante es la del lugar geométrico de R.

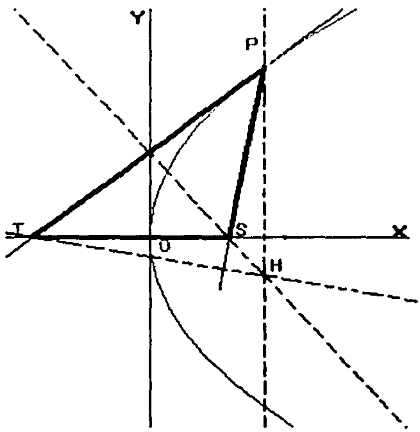
El método que hemos adoptado, sin embargo tiene modificaciones en circunstancias particulares. Además en algunos ejemplos el paso (i) no se puede llevar a cabo completamente. Otro de los matices de este método es cuando la variación de R depende de un punto variable en una recta fija o en alguna otra curva. En cada caso lo importante es ver cuáles son las causas de la variación del punto (X, Y).

Para la parábola $y^2 = 4ax$, cualquier punto P se puede representar en su forma paramétrica $(ap^2, 2ap)$ y observamos que cuando P varía, el parámetro p también varía. Con frecuencia R depende de dos puntos P y Q en la parábola y en consecuencia de los parámetros p y q, además de que están relacionados por alguna ecuación, la cual está dada por alguna condición en P y Q, por ejemplo, PQ pasa por algún punto fijo.

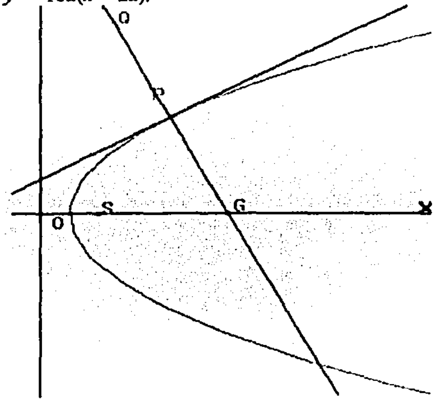
3. P es cualquier punto sobre la parábola con foco S, y Q es un punto tal que PQ es paralelo al eje X y QS forma un ángulo de 45° con la parte positiva del eje X. Encuentra el lugar geométrico del punto medio de PQ, cuando P varía en la parábola.



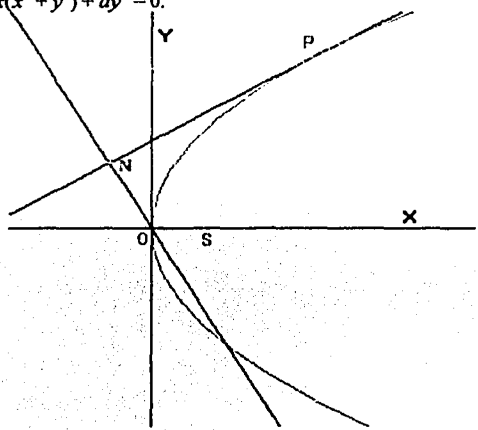
4. Si la tangente a la parábola en P interseca al eje x en T, y S es el foco, encuentra las coordenadas del ortocentro H del triángulo SPT y muestra que cuando P varía, la ecuación del lugar geométrico de H es la curva $ay^2 = x(a - x)^2$.



5. Si la normal a la parábola en P interseca al eje de la parábola en G y GP es prolongado, más allá de P, hasta Q tal que P es el punto medio de GQ, mostrar que la ecuación del lugar geométrico de Q es $y^2 = 16a(x + 2a)$.

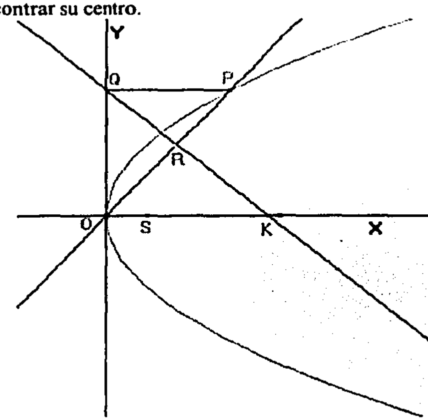


6. Encontrar las coordenadas de N, el pie de la perpendicular dibujada del origen a la tangente de la parábola en un punto cualquiera P. Mostrar que cuando P cambia, el lugar geométrico de N es la curva $x(x^2 + y^2) + ay^2 = 0$.

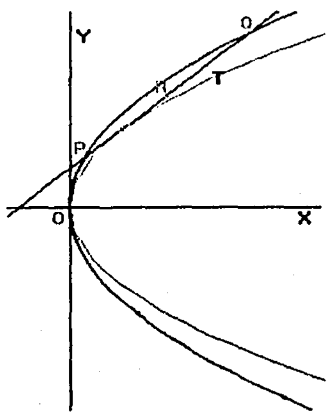


TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

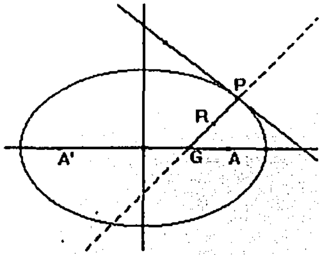
7. P es cualquier punto en la parábola, y O es el origen; Q es el pie de la perpendicular de P al eje Y, R es el pie de la perpendicular de Q a OP, y QR interseca al eje x en K. Probar que K es un punto fijo y encontrar sus coordenadas. Probar también que el lugar geométrico de R es un círculo, y encontrar su centro.



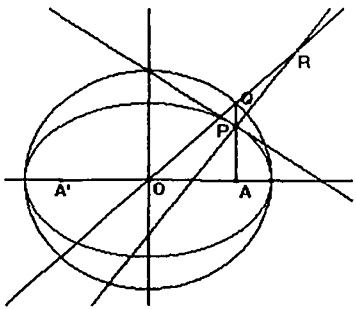
8. Una tangente de la parábola $y^2 = 4bx$ interseca a la parábola $y^2 = 4ax$ en P y Q. Probar que la ecuación del lugar geométrico del punto medio de PQ es $y^2 (2a - b) = 4ax$.



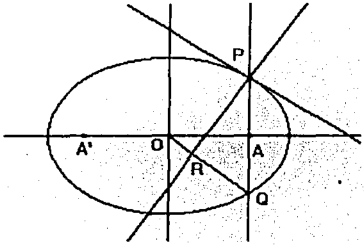
9. La normal en un punto P de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, interseca el eje mayor en G. Probar que el lugar geométrico del punto medio de GP es una segunda elipse concéntrica con la primera y encontrar la excentricidad de la segunda elipse si a = 4, b = $\sqrt{15}$.



10. P es el punto (a cosθ, b senθ) en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y Q es el punto correspondiente al círculo auxiliar, O es el centro de la elipse y la normal a la elipse en P interseca a OQ en R. Encontrar las coordenadas de R en términos de a, b y θ. De esta manera mostrar que, cuando θ varía, el lugar geométrico de R es el círculo $x^2 + y^2 = (a + b)^2$.

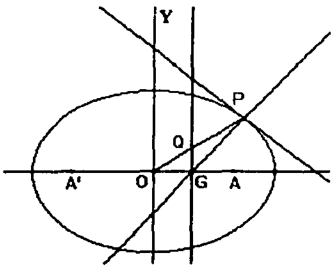


11. La perpendicular al eje mayor que pasa por el punto P de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ interseca a la elipse otra vez en el punto Q. O es el centro de la elipse y la normal en P intersecta OQ en el punto R. Encuentra las coordenadas de R y muestra que, cuando P varía, el lugar geométrico de R es la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = (a^2 - b^2)^2/(a^2 + b^2)^2$.

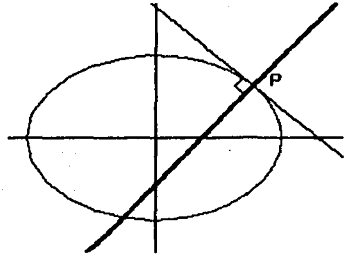


12. La normal en un punto P de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ interseca al eje mayor en G. Si Q es el punto de intersección de la recta que pasa por G y es paralela al eje y, y la recta que une a P con el centro de la elipse, demuestra que la ecuación del lugar geométrico Q es

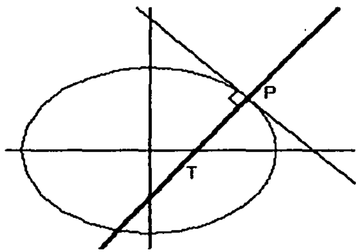
$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = (a^2 - b^2)^2 / a^4.$$



13. Encontrar la evoluta[18] de una elipse.



14. Sea T un punto sobre la normal a una distancia d de un punto P de la elipse. Trazar el lugar geométrico de T.



[18] **Círculo de Curvatura.**

Para un punto cualquiera P de una curva C, la tangente en P tiene la misma pendiente que la curva. De manera análoga, podemos construir, para cada punto de la curva, un círculo tangente cuya curvatura sea igual a la curvatura de la curva dada, en ese punto.

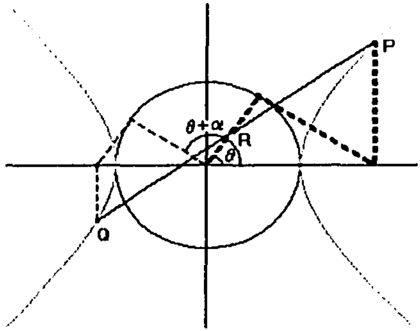
Definición. Se llama centro de curvatura (h, k) de un punto $P(x, y)$ sobre una curva, el centro de círculo de curvatura.

El lugar geométrico de los centros de curvatura de una curva dada se llama evoluta de esa curva.

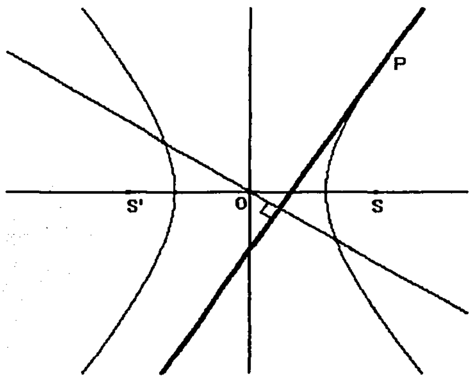
15. Probar que el punto P donde las coordenadas son (a secθ, a tan θ) está en la hipérbola rectangular $x^2 - y^2 = a^2$. Si Q es el punto donde el parámetro es $\theta + \pi/2$ y R(x_1, y_1) es el punto medio de PQ, probar que

$$y_1 / x_1 = \text{sen}\theta + \cos\theta$$

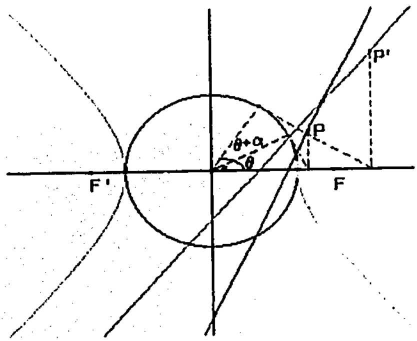
y encontrar el lugar geométrico de R.



16. Probar que la ecuación de cualquier tangente a la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ puede escribirse de la forma $y = mx \pm\sqrt{(a^2 m^2 - b^2)}$. Encontrar la ecuación del lugar geométrico del pie de la perpendicular desde el origen a la tangente de la hipérbola.

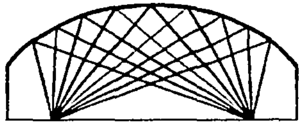


17. Cualquier punto de la hipérbola rectangular $x^2 - y^2 = a^2$ es ($a\cdot \sec\theta$, $a\cdot \tan\theta$). Encontrar la ecuación del lugar geométrico del punto de intersección de las tangentes a la hipérbola en los puntos con parámetros θ y $\theta + \alpha$ cuando θ varía.
¿Cuál es el lugar geométrico cuando $\alpha = \pi$?



4. Ejercicios bonitos de cónicas.

1. La base de un auditorio es de forma elíptica y tiene 20m de longitud y 16m de ancho. Si cae una aguja sobre un foco el ruido que produce se escucha claramente cerca del otro foco. ¿A qué distancia está un foco del otro?



El principio de reflexión (ver capitulo 1.17) es usado en construcciones de bóvedas las cuáles se han denominado "galerías de los susurros" como la que se encuentra en el Convento del Desierto de los Leones, cerca de la Ciudad de México, la Catedral de San Pablo en Londres. De tal modo que si una persona susurra cerca de uno de los focos, puede ser escuchada en el otro foco, aunque no pueda escucharse en ningún otro lugar.
La construcción del Statuary Hall en la Capital de los Estados Unidos es elíptica. John Quincy Adams descubrió este fenómeno, él situado en su recepción en un punto focal del techo elíptico, fácilmente escuchaba sin ser visto sobre las conversaciones privadas de otro miembro de la Casa de Representantes localizado cerca del otro punto focal.

2. En el plano están dados los puntos A y B. Hallar el conjunto de puntos M para los cuáles el perímetro del triángulo AMB es igual a un valor constante p.

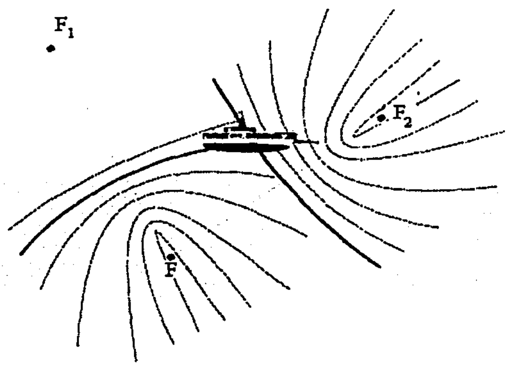
3. Se traza el contorno de una hortaliza de forma elíptica colocando dos estacas en el suelo con una separación de 16m y colocando un lazo de longitud total de 36m alrededor de ellas; se traza el contorno empleando una tercera estaca que al girarla alrededor de las dos fijas mantiene al lazo en tensión ¿De qué longitud y qué ancho será la hortaliza?

4. Los planetas describen órbitas elípticas en torno al sol, que se encuentra en uno de los focos. En la siguiente tabla mostramos algunos datos relativos a Mercurio, la Tierra, Marte y Plutón. Completa la tabla calculando los datos que faltan y encuentra la ecuación de la órbita de cada planeta tomando como origen el centro de la elipse y como eje x la recta que une los focos. Las distancias se proporcionan en millones de kilómetros.

Planeta	Semieje mayor	Semieje menor	Distancia del sol al centro	Excentricidad de la órbita	Distancia mínima del planeta al sol
	a	B	c	e	$a-c$
Mercurio	58.5			0.205	
Tierra	149.6			0.016	
Marte	228.2			0.093	
Plutón	6022			0.247	

Las órbitas de la luna y de los satélites de la tierra son también elípticas, así como las trayectorias de los cometas en órbita permanente alrededor del sol. El *Cometa Halley* toma casi 76 años para viajar alrededor de nuestro sol. Edmund Halley vio el cometa en 1682 y predijo correctamente que regresaría en 1759.

Una aplicación que se utiliza en la radionavegación consiste en determinar la posición de barcos o aviones en su recorrido. Un sistema denominado Loran se funda en la emisión sincronizada de impulsos por tres emisoras F, F_1 y F_2, que dan lugar a una red de hipérbolas como a continuación se explica. Un aparato receptor a bordo de un avión o de un barco en movimiento mide la diferencia de tiempo que existe entre la recepción de un impulso procedente de una de ellas (digamos F) y los impulsos emitidos al mismo tiempo por las otras dos. Como la diferencia en los tiempos de recepción de las señales es proporcional a la diferencia de las distancias entre el receptor y las emisoras el receptor se hallará sobre una hipérbola con focos F y F_1 y diferencia de radios focales $2a$. Además, se sabrá sobre cuál rama de la hipérbola se encuentra pues se sabe cual llegó primero. Repitiendo el procedimiento con F y F_2 se hallará que el receptor se halla en otra hipérbola con focos F y F_2 y diferencia de radios focales $2a'$. determinándose su posición como el punto de intersección de las dos curvas.



5. **Tres estaciones F, G y H transmiten en forma sincronizada ondas de radio para la navegación. G se halla 300km al norte de F y H a 200km al este de F. Un barco recibe la señal de F veinte cienmilésimas de segundo después que la señal de G y catorce cienmilésimas de segundo**

después que la de H. Determinar gráficamente la posición del avión relativa a las estaciones F, G y H tomando como origen al punto F. (Suponer que las ondas viajan a 300 000km/s.)

6. P y Q son dos puntos sobre la parábola con parámetros p y q. O es el origen y OP es perpendicular a OQ.
   i) Mostrar que $pq + 4 = 0$
   ii) Y que las tangentes a la curva en P y Q intersecan a la recta $x + 4a = 0$.

7. Encontrar las coordenadas del punto de intersección C de las tangentes a la parábola en los puntos $A(at_1^2, 2at_1)$ y $B(at_2^2, 2at_2)$. Mostrar que el área del triángulo ABC es $[a^2 (t_1 - t_2)^3] /2$.

8. La tangente a la parábola en el punto P, con parámetro p, corta al eje de la parábola en el punto L y cualquier recta que pasa por L e interseque a la parábola en los puntos Q y R con parámetros q y r.
   i) Probar que p, q y r están en progresión geométrica.
   ii) Mostrar también que si las tangentes en Q y R se intersecan en M, entonces MP, es perpendicular al eje de la parábola.

9. Probar que los puntos (3, 0) y (–3, 0) son los focos de la elipse
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$
   Encontrar la longitud del semieje mayor y la excentricidad de la hipérbola la cual tiene los mismos focos e interseca a la elipse en el punto (3, 16/5). Obtener la ecuación de las tangentes a la elipse y a la hipérbola en el punto (3, 16/5).

10. Los puntos A y B son (1, 0) y (–1, 0) respectivamente. Encontrar las ecuaciones de los lugares geométricos de los puntos P y Q tales que
$$AP + BP = 4, \qquad AQ - BQ = \pm 1.$$
   Encontrar los puntos de intersección de estos lugares geométricos y mostrar que se intersecan ortogonalmente.

5. Talleres.

Al igual que sucede en la construcción de las matemáticas como ciencia, el aprendizaje debe venir guiado por la búsqueda de respuestas a problemas que tengan sentido e interés para los alumnos, que los animen a explorar, formular y comprobar conjeturas, primero a escala intuitiva y empírica; después generalizando y más tarde justificando (demostrando). A continuación proponemos una serie de actividades para que el alumno experimente, analice, discuta, investigue, "aplique" lo aprendido en clases, a fin de que formule y compruebe sus propias conjeturas.

Taller No. 1: Doblado de Papel Encerado.

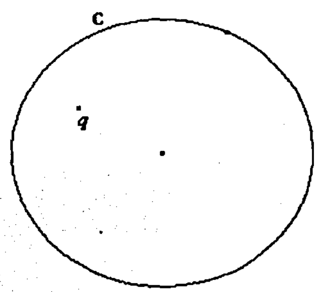
En las tres siguientes actividades la elipse, la hipérbola y la parábola surgen como envolventes de ciertas familias de rectas, es decir la curva tiene tangencia con todas las rectas de esta familia.

Material:

Hojas de papel encerado tamaño carta, compás y pluma.

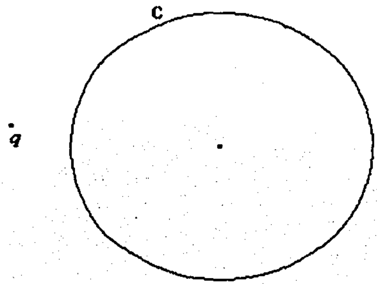
Actividad 1.

En una hoja de papel encerado dibujar una circunferencia C y marcar un punto q dentro de la circunferencia (como en la siguiente figura). Doblar el papel de tal modo que el punto q quede sobrepuesto en la circunferencia en un punto q'. Hacer varios dobleces y ¡obtendrá una curva!



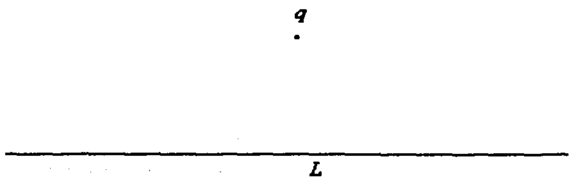
Actividad 2.

En una hoja de papel encerado dibujar una circunferencia C y marcar un punto q dentro de la circunferencia (como en la siguiente figura). Dobla el papel de tal modo que el punto q quede sobrepuesto en la circunferencia en un punto q'. Haz varios dobleces y obtendrás una curva, ¿Será igual a la anterior?



Actividad 3.

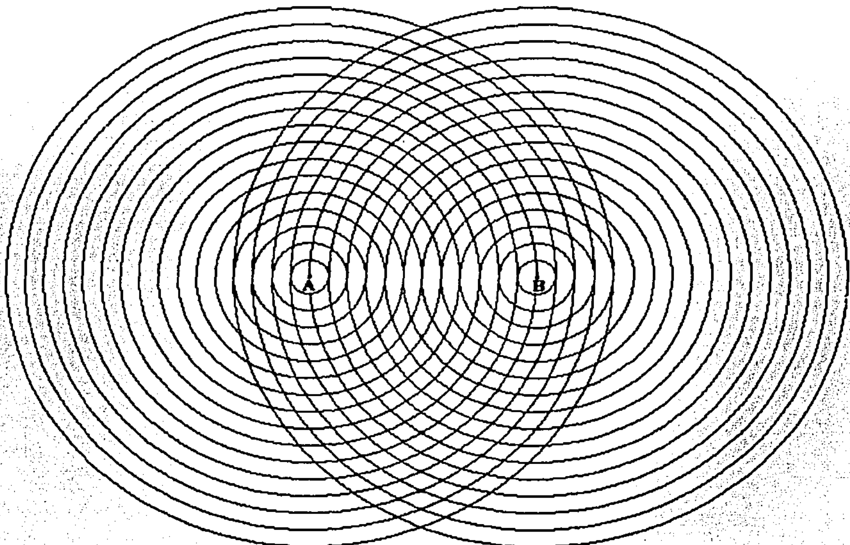
En una hoja de papel encerado dibuja una línea recta L y un punto p fuera de ella (como en la siguiente figura). Dobla el papel de tal modo que el punto p quede sobre la línea recta.



Taller No. 2: Circunferencias concéntricas.

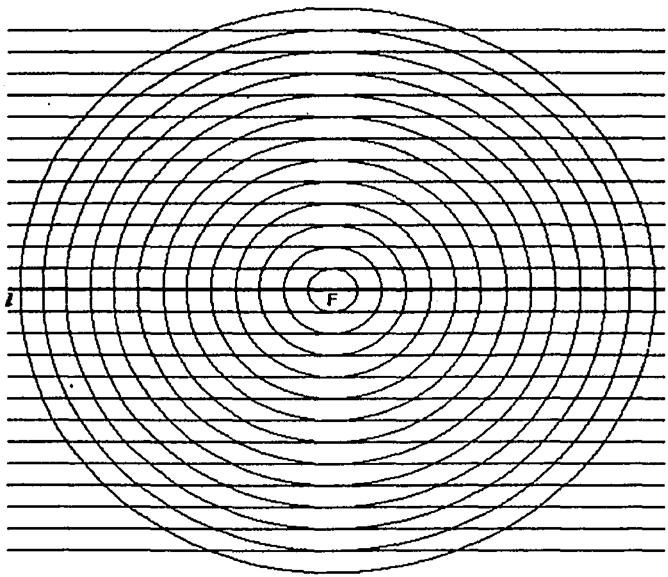
Actividad 1.

En la siguiente figura hay dos familias de circunferencias concéntricas en A y B, de tal modo que la distancia entre dos circunferencias consecutivas es una unidad. Al cortarse las circunferencias se forma una red de puntos llamados nodos (es decir los puntos de intersección de las circunferencias), y a dos nodos los llamaremos vecinos si son los vértices opuestos de un cuadrilátero curvilíneo. Mostrar que todos los puntos de una sucesión de nodos vecinos se encuentran sobre una elipse o sobre una hipérbola.



Actividad 2.

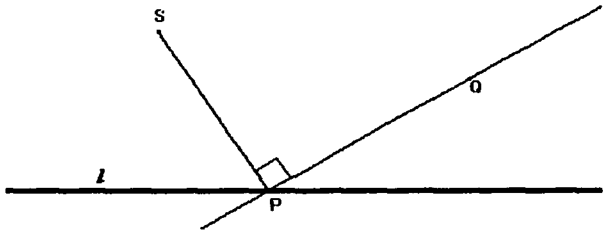
En el plano se da una recta *l*, y sobre ella el punto F. Están trazadas circunferencias cuyos radios son números enteros y el centro en F, así como también rectas paralelas a *l* que se hallan a la distancia de un número entero de ésta. Mostrar que todos los puntos de la sucesión de los nodos vecinos[19] de la red, construida igualmente que en el Actividad 1, se encuentran sobre una parábola con el foco F.



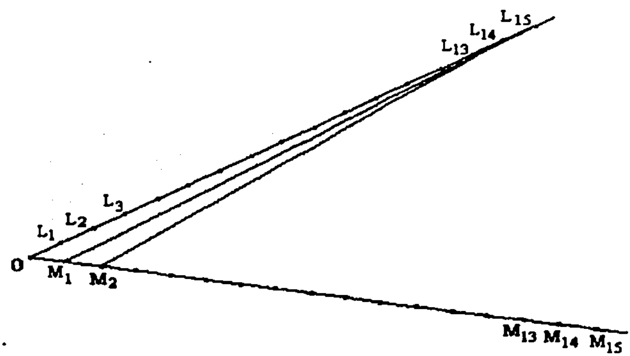
[19] Aquí son nodos vecinos si son los vértices opuestos de un cuadrilátero curvilíneo.

Taller No. 3: Métodos para dibujar una parábola.

1. Sea l una línea dada y S un punto fijo que no esté en l. Sea P cualquier punto sobre l y dibujar la perpendicular PQ a SP. Todas las rectas PQ tocan una parábola, que tiene foco en S y a l como tangente en el vértice.



2. Sean l y m dos rectas que se intersectan en O. Marcar distancias de la misma longitud (por ejemplo de 1cm) en cada línea, llamando los puntos O, L_1, L_2, L_3,... y O, M_1, M_2, M_3,... en orden desde O. Ahora unimos L_{15} a M_1 L_{14}, a M_2, y en general L_i a M_{16-i}, para cada i. Las rectas tocan una parábola, que tiene a L_8M_8 como tangente en el vértice y a l y m entre sus tangentes. Además las tangentes pueden dibujarse mas allá de O, llamando L_{-1}, L_{-2}, L_{-3}, y así sucesivamente y continuar uniendo los puntos correspondientes. El método puede obviamente ser modificado para dar más o menos tangentes, tomando un número distinto a 16.



Este taller se puede hacer con tachuelas e hilo de color sobre una tabla.

Taller No. 4: Métodos para dibujar una elipse.

1. **Método del jardinero.**

Material:

Un pedazo de hilo de 25cm, hojas de papel, dos chinches o tachuelas y lápiz.

Procedimiento:

1.1. Amarra las chinches en los extremos del hilo.

1.2. Coloca sobre el cartón una hoja de papel y clava en ella dos chinches o tachuelas con una separación de 16 cm.

1.3. Con el lápiz mantén tenso el hilo, al mismo tiempo que

1.4. Manteniendo tenso el hilo con el lápiz ve trazando la curva

2. **Con regla y compás.**

2.1 **Trazar puntos de una elipse.**

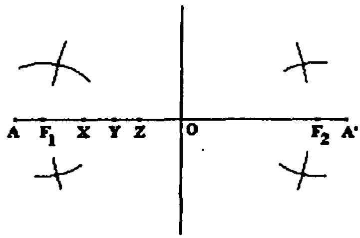
2.1.1 Trazamos el segmento AA' (eje mayor) y sea O el punto medio de AA'.

2.1.2 Trazamos por O el segmento BB' perpendicular a AA'.

2.1.3 Buscamos los dos focos de la siguiente manera, con un radio igual a OA (semi–eje mayor) y centro en B, trazamos arcos que corten al eje mayor AA' en F y F' focos de la elipse.

2.1.4 Entre F y O tomamos tres puntos distintos X, Y, Z.

2.1.5 Con radio AX y centro en F, trazamos arcos de circunferencia arriba y abajo del segmento AA'.



2.1.6 Hacer lo mismo que el paso anterior pero con centro en F'.

2.1.7 Con radio XA' y centro en F trazamos arcos de circunferencia que intersequen a los anteriores.

2.1.8 Hacer lo mismo que el paso anterior pero con centro en F'.

2.1.9 Hacer los pasos A 5. – A 8, para los puntos Y, Z.

2.1.10 Unir los puntos de intersección de los arcos para formar la elipse (ya sea a mano o con curvígrafo).

2.2 Trazar una elipse como envolvente de círculos.

2.2.1 Dibujamos una circunferencia y sea el segmento AB uno de sus diámetros.

2.2.2 Dibujamos una serie de cuerdas perpendiculares a este diámetro.

2.2.3 Dibujamos círculos que tengan como diámetros cada una de estas cuerdas.

La envolvente de estos círculos es una elipse especial (excentricidad $\frac{\sqrt{2}}{2}$).

Taller No. 5: Método para dibujar una hipérbola.

1. Construir puntos de una hipérbola, con regla y compás, dados los vértices y los focos
   - 1.1. Se traza la recta l, la cuál contiene a los dos focos F y F', también se localizan los vértices V y V'.
   - 1.2. En la recta l se toman tres puntos X, W y Z fuera del segmento FF'.
   - 1.3. Con radio VX y centro en F trazar arcos de circunferencia arriba y debajo de la recta l.
   - 1.4. Hacer lo mismo que el paso anterior pero con centro en F'.
   - 1.5. Con radio V'X y centro en F trazar arcos de circunferencia que intersequen a los anteriores.
   - 1.6. Hacer lo mismo que el paso anterior pero con centro en F'.
   - 1.7. Hacer los pasos 1.3 – 1.5, para los puntos W y Z.
   - 1.8. Unir los puntos de intersección de los arcos en forma manual o con curvígrafo para formar la hipérbola.

Taller No. 6: Construyendo cónicas mediante el Cabri-géomètre II.

Actividad 1.

<u>Construcción de la parábola usando la definición foco – directriz.</u>

1. Trazamos una recta a la cual etiquetamos con X.
2. Trazamos una recta perpendicular a la recta X y la etiquetamos con D.
3. Sea T el punto de intersección de las rectas.

4. En la recta X tomamos un punto F (distinto a T).
5. En la recta D tomamos otro punto distinto a T el cual etiquetamos con M
6. Trazamos el segmento FM.
7. Trazamos la mediatriz del segmento FM.
8. Trazamos una recta paralela a la recta X que pase por el punto M a la cuál llamamos N.
9. Sea P el punto de intersección de N con la mediatriz de FM.
10. Trazamos el lugar geométrico señalando primero al punto P y después al punto M

Actividad 2.

Construcción de la elipse usando la propiedad (8) del Capítulo 2.

1. Trazamos un segmento, con extremos A y A'.
2. Trazamos la mediatriz del segmento AA'. Etiquetamos con M a la mediatriz; sea O el punto de intersección de M con el segmento AA'.
3. Trazamos el segmento OA
4. Trazamos una circunferencia con centro en O y radio OA. Etiquetamos con C a la circunferencia.
5. Sea F un punto en el segmento OA. Trazamos el simétrico de F con respecto a M y lo etiquetamos con F'.
6. Trazamos el segmento F'V', en donde V ' es un punto de la circunferencia distinto a A y A'.
7. Trazamos una recta paralela a F'V' que pase por F. Etiquetamos con V al punto de intersección de esta última recta y la circunferencia, de tal modo que el segmento VV' no intercepte al segmento AA'.
8. Trazamos el segmento FV.
9. Trazamos la circunferencia C1 con centro en V y radio FV.
10. De la circunferencia C1, al otro extremo del diámetro que pasa por F lo etiquetamos con Q.
11. Trazamos la perpendicular a FQ que pase por V, e esta recta la etiquetamos con L.
12. Trazamos el segmento FQ.
13. Etiquetamos con P al punto de intersección de FQ y L.
14. Trazamos el lugar geométrico señalando primero al punto P y después al punto V'.

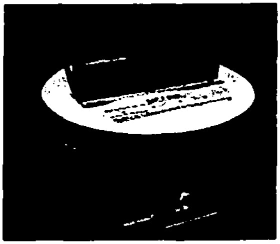
Avtividad 3.

Construcción de la hipérbola.

1. Trazamos una recta a la cual etiquetamos con X.
2. Trazamos una recta perpendicular a la recta X y la etiquetamos con Y.
3. Sea O el punto de intersección de las rectas.
4. Sea A un punto sobre X (distinto a O).
5. Trazamos la circunferencia con centro en O y radio OA. A esta circunferencia la etiquetamos con C1.
6. Sea B un punto sobre Y (distinto a O).
7. Trazamos la circunferencia con centro en O y radio OB. A esta circunferencia la etiquetamos con C2.
8. Trazamos una recta que pase por O (distinta a X y Y). A esta recta la etiquetamos con $L1$.
9. Sea D el punto de intersección de C1 con $L1$.
10. Trazamos la perpendicular a $L1$ que pase por D. A esta recta la llamamos $L2$.
11. Sea N el punto de intersección de $L2$ con X.
12. Trazamos una perpendicular a X por N y la etiquetamos con $L3$.
13. Trazamos la circunferencia con centro en N y radio DN. A esta circunferencia la llamamos C3
14. Sea Q el punto de intersección de $L3$ y $C3$.
15. Unimos Q con A', donde A' es el otro punto de intersección de Y con C1. Este segmento intersecará a X en W.
16. Trazamos una recta que pase por B' y W, y el punto donde interseque a $L3$ lo etiquetamos con P
15. Trazamos el lugar geométrico señalando primero al punto P y después al punto D.

Taller No. 7: Girando agua.

Actividad 1.



Materiales.

- Una caja de plástico rectangular, delgada y transparente, cerca de 12 x 12 x 1 pulgadas. (30 x 30 x 2.5 cm). (puedes comprar uno ya hecho o puedes hacer uno fácilmente pegando varias piezas de plástico)
- Pegamento (silicón).
- Un girador con un diámetro más grande que la longitud de la caja.
- 2 pedazos de plástico o madera, cada uno de 2 x 6 x ½ pulgadas (5 x 15 x 1.3 cm), para fijar la caja al girador.
- Agua.
- Pintura vegetal o anilina.

Tiempo: 15 minutos o menos con una caja ya hecha; una hora o menos si haces tu propia caja.

Procedimiento:

Las uniones de la caja necesitan ser pegadas herméticamente también usa el sellador silicón para pegar cualquier gotera. Deja la tapa de la caja abierta.

Pega los pedazos de madera al girador a lo largo de la caja, para sostener la caja firmemente en el lugar.

Llena la caja con agua coloreada hasta la mitad y gírala en el girador. Nota la forma de la superficie del agua, ¡forma una parábola!

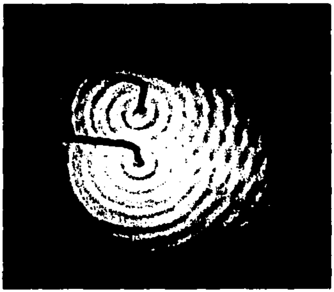
Actividad 2.

Analicemos una situación semejante, ¿qué forma adopta la superficie de un líquido homogéneo en un vaso cilíndrico que gira sobre su eje longitudinal?

Taller No. 8: Agujas temblando.

Descripción:

Dos agujas vibrando forman dos conjuntos de ondas circulares concéntricas en un recipiente plano de vidrio. Donde los dos conjuntos de círculos se intersecan uno a otro. Se forman regiones "quietas" donde el agua no se mueve. Éstas regiones "quietas" grafican conjuntos de hipérbolas. ¡Obsérvalas!



Propósito:

Este taller puede usarse para ilustrar propiedades de la hipérbola incluyendo el hecho que la diferencia de las distancias de cualquier punto a los focos es constante.

Taller 9: Billar elíptico.

Según una anécdota, cuando Lewis Carroll (1832 – 1898) publicó "*Alicia en el país de las maravillas*", a la reina Victoria de Inglaterra le gustó tanto el libro, que ordenó que le fueran enviando todo lo que publicase su autor. La siguiente obra que recibió fue... ¡un tratado de Geometría!. En realidad, Lewis Carroll era Charles L. Dodgson, un profesor de matemáticas en la Universidad de Oxford. Además, fabricó un billar circular y publicó un folleto explicando sus propiedades. También existen mesas elípticas de billar.

Descripción:

Actualmente se tienen dos versiones de esta exhibición:

- La primera versión tiene dos agujeros en los dos focos. Un tiro de bola desde un foco rebotará fuera de cualquier punto del eje e impactará la bola localizada en el otro foco.

- La segunda mesa elíptica, mostrada abajo, tiene un solo agujero localizado en un foco. Una bola lanzada desde el otro foco a cualquier punto en el eje de la mesa se reflejará en la buchaca.

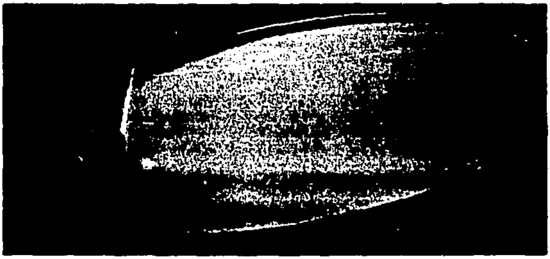
Las bolas que cruzan el segmento que une los focos continuarán atravesando este segmento.

Las bolas que cruzan el eje mayor fuera del segmento que une los focos nunca pasarán entre los focos.

Taller No. 10: Luz elíptica.

Descripción:

Este taller consiste en construir una mesa elíptica con una tira de espejo flexible alrededor de su orilla. Cuando un rayo de luz es proyectado desde uno de los focos de la mesa, éste siempre se reflejará por el espejo y pasará por el otro foco.



Propósito:

Este taller usa luz para mostrar varias propiedades de la elipse.

- Si el rayo de luz se origina **en un foco** (o una recta a través de un foco) está pasará a través del otro foco después de una reflexión, dos reflexiones, etc.

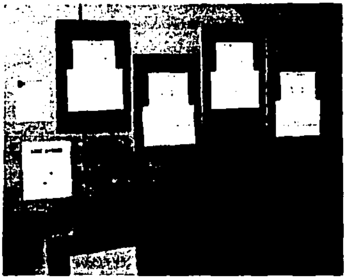
- Si el rayo de luz se origina en un punto el que no sea un foco y la trayectoria del rayo esta **entre los dos focos**, ésta nunca atravesará el exterior de los dos focos.

- Si el rayo de luz se origina en un punto que no sea un foco y la trayectoria del rayo está **fuera de los dos focos**, ésta nunca encontrará un camino en la región comprendida entre los dos focos.

Referencias

Este taller fue diseñado y construido por Alan Brix un profesor de física en New Trier.

Taller 11: Formando cónicas con luz



Descripción:

El alumno va cambiando la forma de la luz que va desde un círculo, una elipse, una parábola hasta una hipérbola las cuales iguala a las gráficas específicas en la pared.

Propósito:

Este taller ilustra cómo las cuatro "secciones cónicas" pueden ser obtenidas intersecando conos y planos. La luz de una lámpara de mano se propaga en forma de un cono de luz. La pared es como un plano que interseca al cono de luz. El resultado es un área de luz en la pared en forma de una de las cuatro secciones cónicas. La forma exacta depende del ángulo con el cuál la luz interseca a la pared.

La luz brillante en una pared por la noche

Este taller fue diseñado y construido por Kathy Waldherr de New Trier High School.

Taller 12: Reloj de Sol

Cada día el sol, desde que sale por el Este y se pone por el Oeste, describe sobre el cielo un arco de circunferencia. Este movimiento es aparente, por que, en realidad, es consecuencia del movimiento diario de rotación de la tierra.

Desde hace mucho tiempo se sabe que, cuando el sol recorre el cielo a lo largo de un día, la sombra que proyecta un objeto fijo describe una curva cónica. Esto se puede comprobar experimentalmente si se va marcando, por ejemplo, cada media hora, sobre una superficie plana el límite de la sombra que proyecta un objeto cualquiera.

Los relojes de sol se fundamentan en este hecho. Están provistos de un marcador o estilete, llamado gnomon, que proyecta su sombra sobre una superficie plana donde están señalizadas las horas. El extremo de la sombra indica la hora solar correspondiente.

El Sol, por lo lejano que está, se considera como un foco puntual de luz. La línea imaginaria que le une con el extremo del gnomon recorre a lo largo del día parte de la superficie de un cono, también imaginario. La superficie de este cono se corta por el plano del reloj donde se observa la sombra del extremo del gnomon. Por eso, la trayectoria que sigue esa sombra es la de una cónica.

En las latitudes entre los círculos polares esa cónica es siempre una hipérbola, tanto más curvada cuanto más próximo esté el día 21 de junio (solsticio de verano) o al 21 de diciembre (solsticio de invierno).

En dos días del año, la trayectoria de la sombra que proyecta el gnomon es una recta en todos los lugares de la tierra. Esto ocurre en los días 21 de marzo (equinoccio de primavera) y 23 septiembre (equinoccio de otoño). La razón es que, en esos días la trayectoria del Sol y el extremo del gnomon están en un mismo plano que corta al plano de observación en una recta.

Por la orientación del cuadrante podemos distinguir distintos tipos de relojes de sol:

- De cuadrante ecuatorial: si es paralelo a un plano que cortase a nuestro planeta por el ecuador.
- De cuadrante horizontal: si es horizontal.
- De cuadrante vertical orientado: es vertical y orientado hacia el sur.
- Cuadrante vertical declinante: es vertical, pero no está orientado exactamente hacia el Sur. Es el reloj de sol típico de la fachada de una casa.

Construcción de un reloj de sol de cuadrante ecuatorial

Los relojes de Sol solo valen para los lugares de la misma latitud. Así que lo primero que se tiene que hacer es averiguar la latitud del lugar donde se va a colocar el reloj de sol. Eso se puede hacer consultando un atlas.

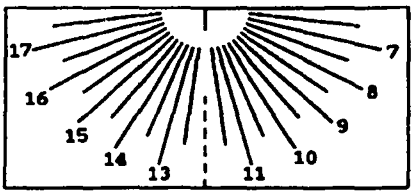
Material:

Cartón o madera, papel, pegamento, tijeras, cutter y una regla.

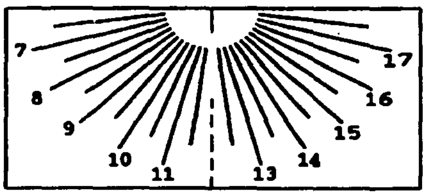
Los relojes de sol de "cuadrante solar" están formados por un estilete, cuya sombra se proyecta sobre un plano o cuadrante en el que se encuentran dibujadas las líneas horarias que nos permiten determinar la hora.

Un reloj de sol de cuadrante ecuatorial se puede construir fácilmente formando dos piezas: una rectangular que será el cuadrante y otra triangular que hará de estilete y soporte. Cada una de ellas lleva una ranura, que nos permite encajarlas.

Comenzaremos su construcción recortando el cuadrante, que es un rectángulo del doble de largo que el ancho. Sus dimensiones podrán ser las que deseemos, aunque lo recomendable es que su largo sea de 15 a 30 centímetros. A la mitad del largo deberá hacerse una ranura que llegue hasta la mitad del ancho, (la línea que aparece a trazos en las figuras).



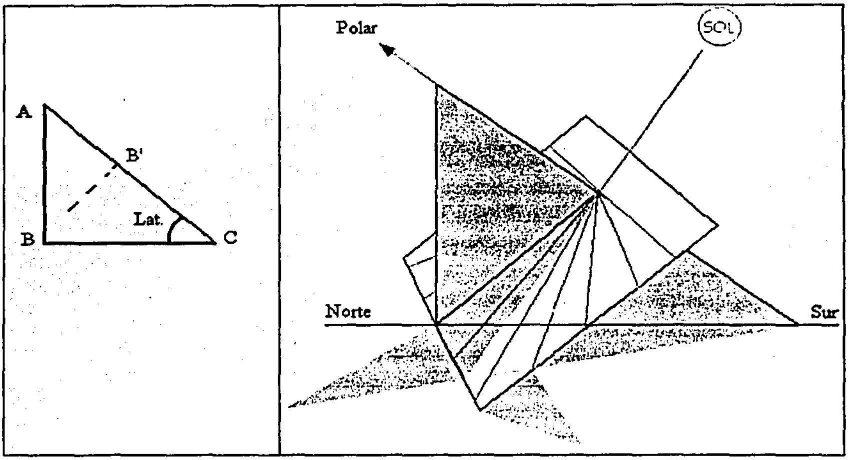
Cara de primavera – verano



Cara de otoño – invierno

Las líneas horarias deben dibujarse a intervalos de 15° en las dos caras del cuadrante: la cara de primavera – verano y la de otoño – invierno. Las trazadas en las figuras son válidas para un reloj que se vaya a utilizar en el hemisferio norte, para el hemisferio sur intercambiaremos la de primavera – verano por la de otoño – invierno.

Para construir la segunda pieza, el estilete, se debe conocer la latitud del lugar donde se ubicará el reloj. Se trata de un triángulo rectángulo dónde el ∠BCA deberá ser igual a la latitud, para que el cuadrante quede paralelo al ecuador, y la longitud del segmento BB' igual a la del lado menor del cuadrante. En esta pieza también se deberá realizar una ranura (la línea que aparece a trazos en la figura) que permitirá ensamblarla con la primera.



Una vez construidas y montadas las dos piezas, el reloj debe colocarse en un lugar horizontal y orientado correctamente. Si el reloj se va a usar en el hemisferio norte, la cara de primavera – verano deberá mirar hacia el Norte (como se muestra en la figura), mientras que si se va a usar en el hemisferio sur lo hará hacia el Sur. Para determinar la dirección Norte – Sur, podemos utilizar una brújula; habrá que tener en cuenta que el Norte no coincide con la dirección señalada por la aguja, que apunta al Norte magnético. Otro método consiste en utilizar la sombra de un objeto vertical (una plomada) al mediodía, que indica la dirección Norte – Sur; habrá que tener en cuenta que deben ser exactamente las 12 horas del tiempo solar verdadero, que no coinciden con las 12 horas de nuestros relojes (ver "¿Qué hora indica nuestro reloj de sol?").

En primavera y verano el Sol incide sobre la cara superior (la de primavera – verano), donde se verá la sombra del estilete. En otoño e invierno la sombra del estilete se proyecta en la cara inferior (la de otoño – invierno), mientras que la superior permanece en sombra.

Anexo1: Conociendo a las cónicas

1.1. Nacimiento de las cónicas.

Según Heath, otra leyenda sobre el problema de la duplicación del cubo también dada por Eratóstenes es que uno de los antiguos poetas trágicos hiciese aparecer en escena al rey Minos en el acto de ordenar la construcción de una tumba para su hijo Glauco, y advirtiendo que la tumba tenía en cada uno de sus lados una longitud de cien unidades, exclamó: "Escaso espacio en verdad concedéis a un sepulcro real, duplicadlo, conservando siempre la forma cúbica, duplicad de inmediato a cada uno de sus lados".

Hipócrates de Quíos ya había apreciado que la solución de este problema era equivalente a la solución de la duplicación del cubo pues tomando a como la arista del cubo inicial y $b = 2a$, la expresión anterior conduce a

$$xy = a\,(2a)$$
$$xy = 2a^2$$

Y si se multiplica por $x^2 = ay$ se tiene:

$$xy \cdot x^2 = 2a^2 \cdot ay$$
$$x^3 = 2a^3$$

y por tanto x será la longitud de la arista del cubo cuyo volumen es el doble del dado.

Mas tarde Eutocio siguiendo la solución de Menecmo, da una segunda solución. De nuevo con notación moderna ilustramos esto:

$$a/x = x/y \quad \text{entonces} \quad x^2 = ay$$

y $$x/y = y/b \quad \text{entonces} \quad y^2 = bx.$$

Observamos que los valores de x y y se encuentran en la intersección de las dos parábolas $x^2 = ay$ y $y^2 = bx$.

1. 7. Apolonio de Perga.

Las circunstancias por las que Apolonio escribe *Las cónicas* están explicadas por él mismo en su primer libro. (Taton; 1988, II, 367)

"Apolonio a Eudemo, salud.

Si tu salud es buena y todo lo demás es como tú lo deseas, te felicito; en cuanto a nosotros, estamos bastante bien. Durante el tiempo que pasé en Pérgamo contigo, te vi muy deseoso de conocer nuestro trabajo sobre las cónicas; te envío pues el primer libro, después de haberlo corregido; te mandaremos los otros cuando estemos satisfechos de ello; creo que no habrás olvidado lo que te dije: que he escrito este tratado a petición del geómetra Naucrates, en la época en que éste estuvo en Alejandría y compartió nuestras ocupaciones.; y que después de redactar ocho libros en total se lo dijimos enseguida; mas por la prisa, pues él estaba a punto de embarcarse, no pudimos perfeccionarlos, sino que escribimos todo lo que nos vino en mientes con la intención de volver más tarde sobre ello. Ahora, pues, que tenemos tiempo, vamos publicando estos libros a medida que son corregidos. Pero como ocurre que varias de las personas que están en relación con nosotros han conocido también el primero y segundo libros antes de que fueran retocados, no te asombre encontrar otra redacción.

De esos ocho libros, los primeros cuatro discurren en forma elemental; el primero contiene la generación de las tres secciones y de las opuestas, así como sus propiedades capitales, expuesto todo de modo más amplio y con más generalidad que los demás tratados sobre este asunto. El segundo libro se refiere a los diámetros y a los ejes de las secciones, las asíntotas y otras cuestiones de uso general o indispensables para la discusión de los problema; por el primer libro sabrás cuáles son las líneas que llamo diámetros y las que llamo ejes. El tercero contiene gran número de teoremas singulares que sirven ya para la síntesis de los lugares sólidos, ya para los problemas; la mayoría de ellos y los más hermosos son nuevos; al buscarlos teníamos presente que Euclides no había efectuado la síntesis del lugar de tres o cuatro líneas, sino sólo, y al azar, la de una parte de ese lugar, y ello de modo bastante poco feliz; y es que era imposible hacer la síntesis completa sin lo que hemos descubierto. El libro cuarto determina de cuántas maneras pueden encontrarse entre sí las secciones cónicas, así como una circunferencia de círculo, y resuelve, además, otras cuestiones, ninguna de las cuales fue tratada por los que nos han precedido, sobre cuántos puntos encuentra secciones opuestas una sección cónica o una circunferencia de círculo.

Los últimos libros se refieren a teorías más especiales; el uno trata, en efecto, los máximos y los mínimos con amplitud; el otro, de la igualdad y la semejanza de las secciones cónicas; el siguiente, de teoremas para la discusión de los problemas y el último, de determinados problemas sobre las cónicas. Por lo demás, cuando todos estén publicados los que los estudien podrán apreciarlos según juzguen. Saludos".

A continuación examinamos algunos detalles de esta obra

En el libro 1

De las Cónicas aparecen las siguientes definiciones básicas:

1. Si desde un punto que no se encuentra en el plano de un círculo, se traza una recta a la circunferencia de éste, se prolonga en ambas direcciones y se hace que recorra la circunferencia, permaneciendo fijo el punto, hasta que llegue a su posición inicial, se llama *superficie cónica* a la que, descrita por la recta, se compone de dos superficies opuestas por el

vértice que se extiende indefinidamente, lo mismo que la recta que describe, se llama vértice de la superficie al punto fijo y eje a la recta determinada por éste y el centro del círculo.

2. Se llama *cono* a la figura limitada por el círculo y la superficie comprendida entre el vértice y la circunferencia del círculo, *vértice* del cono al que lo es de su superficie, *eje* a la recta que va del vértice al centro del círculo y *base* a este mismo círculo.

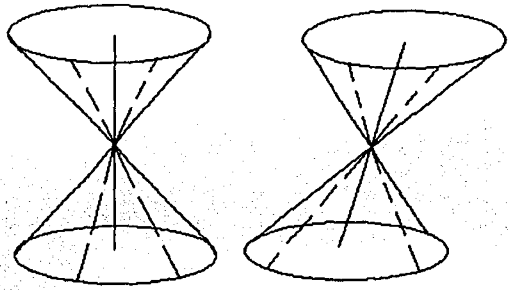


Figura A.1.1

3. Se llama *cono recto* al cono que tiene el eje perpendicular a la base y *oblicuo* (o escaleno) al que no tiene el eje perpendicular a la base.

4. Se llama *diámetro* de toda curva que se encuentra en un mismo plano a la recta que, al trazarse en la curva, divide en dos partes iguales a todas las paralelas a una recta cualquiera trazadas en la curva. *Vértice* de esta curva es el extremo del diámetro que se localiza en la curva y se conoce como paralelas a las rectas trazadas en orden sobre el diámetro.

5. Se llama *diámetros conjugados* de una y dos curvas a cada una de las rectas que son un diámetro y dividen en dos partes iguales a las paralelas del otro.

Concluye con dos definiciones más y prosigue con sesenta proposiciones.

A continuación destacamos los siguientes hechos de la obra de Apolonio:

De las definiciones podemos apreciar que Apolonio considera los dos mantos de un cono y procede a estudiar las figuras obtenidas al seccionar el cono con un plano.

A cada curva así obtenida la relacionará con un determinado diámetro y con una familia de curvas conjugadas con respecto al mismo diámetro. De las clases de curvas obtenidas considerará como secciones cónicas a las figuras cónicas a las cuales los diámetros son perpendiculares a las cuerdas conjugadas a los mismos.

Así, por ejemplo, se puede estudiar también la hipérbola; sin embargo, Apolonio habla de dos hipérbolas (una en cada manto). Ahora procede a obtener ecuaciones para las secciones cónicas; por ejemplo, en nuestro lenguaje, para la elipse de diámetro AB = $2a$ (vea la siguiente figura), tracemos en A una perpendicular a AB cuya longitud sea igual a $2p$ y sobre AB localicemos el punto C de manera que al trazar una perpendicular a AB, el área del cuadrado de lado CD sea igual al área del rectángulo de lado $2p$; sea AC = x, por tanto CD = $2a - x$, así

$$\mathrm{CF} \cdot \mathrm{AC} = \mathrm{CD}^2 \qquad (1)$$

Ahora observe que el triángulo AEB es semejante al triángulo CFB por lo que $\mathrm{CF} / \mathrm{CB} = 2p / 2a$, de donde $\mathrm{CF} = \mathrm{CB} \cdot p/a = (2a - x)\, p/a$, al sustituir en (1) y hacer $\mathrm{CD} = y$, tenemos que

$$y^2 = (p/a)(2a - x)\, x,$$

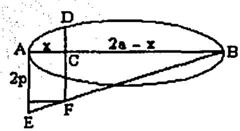


Figura A.1.2

Observe además que área del rectángulo de lado CF es menor que el que corresponde al área del rectángulo de lado AE, así decimos entonces que el rectángulo CF se utiliza por defecto (elipsis); de ahí el nombre de elipse. Procediendo de manera análoga con una de las ramas de la hipérbola (vea la siguiente figura) obtenemos

$$y^2 = (p/a)(2a + x)\, x$$

y como aquí el área del rectángulo AF excede al área del rectángulo EC, entonces se habla de hipérbola.

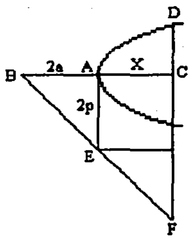


Figura A.1.3

En el caso en que las áreas del cuadrado y del rectángulo con un lado igual a $2p$ sean iguales, entonces no hay ni exceso ni defecto y se habla de parábola.

Cabe hacer notar el siguiente hecho. Debido a que álgebra de los griegos no se había desarrollado y más bien trabajaban con un álgebra geométrica, no se buscaba transformar los problemas geométricos tal como sucedió a partir de la fundamentación de la geometría analítica.

La siguiente definición que Apolonio hace de la parábola $y^2 = 2x$, da una idea de lo que ayuda un lenguaje simbólico adecuado para simplificar la expresión de las ideas de manera que quedan claras y comprensibles, como sucede hoy en día:

"Al cortar un cono con un plano que pase por el eje y con otro que corte a la base según una perpendicular a la del triángulo según el eje, el diámetro de la sección es paralelo a uno de los lados del triángulo, entonces el cuadrado de toda recta trazada desde la sección del cono en forma paralela a la intersección del plano secante y el de la base del cono hasta el diámetro de la sección, es igual al rectángulo formado por la recta que separa en el diámetro el lado del vértice de la sección y por una cierta recta cuya razón a la recta situada entre el ángulo cónico y el vértice de la sección es la misma que la del cuadrado de la base del triángulo según el eje al rectángulo formado por los otros lados del triángulo. Llamaremos parábola a dicha sección".

En el libro I Apolonio también trabajó con las tangentes a las cónicas. Describe a una tangente como aquella recta que tan sólo tiene un punto común con una sección cónica, u cuyo resto queda fuera de la cónica. A continuación demuestra que una recta trazada desde el extremo de un diámetro está fuera de la cónica y que ninguna otra recta se puede construir entre la susodicha recta y la cónica. En consecuencia, dicha recta tocará a la cónica o, en otras palabras, es tangente a la cónica.

De hecho Apolonio construye tangentes a todas las cónicas. Empleando nuestros símbolos y lenguajes actuales, veamos cómo procedía para construir la recta tangente a la elipse:

Tracemos rectas que unan al punto T (vea la Figura A.1.4) con F_1 y F_2, respectivamente. Construyamos la bisectriz del ángulo F_1TF_2, levantemos una perpendicular e esta bisectriz en T. Entonces esta recta será tangente a la elipse en T.

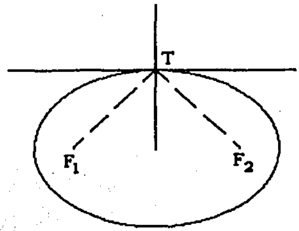


Figura A.1.4

Demostración de que, efectivamente, esta recta es tangente a la elipse. (Vea figura A.1.5).

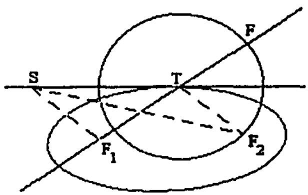


Figura A.1.5

Sea $S \neq T$. Entonces se probará que S no se puede pertenecer a la elipse.

Construyamos el círculo con centro en T que pase por el foco más cercano (en la figura es F_2). Prolonguemos el segmento F_1T de manera que interseque al círculo en F (el cual esta fuera de la elipse). El triángulo TF_2E es isósceles y es bisecado por ST, dado que este segmento se construyó perpendicular a la bisectriz de un ángulo exterior adyacente, por lo que ST debe ser el bisector perpendicular a la base del triángulo isósceles ETF_2; así S equidista de E y de F_2 y , por la construcción de E, tenemos,

$$F_1T + F_2\,T = F_1E$$

$$F_1E < F_1S + SF_2; \text{ por lo que } F_1T + F_2T < F_1S + F_2S,$$

Por lo que S no está en la elipse, con lo que queda probada la afirmación.

Apolonio también nos demuestra cómo construir cónicas a partir de ciertos datos que pueden ser un diámetro o bien el lado recto, etc.

LIBRO II. En el se estudia las propiedades de las asíntotas y de las hipérbolas conjugadas y el trazado de las tangentes. En particular demuestra que la elipse, la hipérbola y la parábola tienen tan sólo un par de ejes mutuamente perpendiculares y se dan a conocer los métodos de construcción de los centros y ejes de una sección común dada.

LIBRO III. Aparecen varios teoremas sobre áreas como los siguientes:

Si las tangentes en cualesquiera dos puntos de A y B de una cónica se cortan en C y además cortan a los diámetros que *pasan* por B y A en d y F entonces los triángulos CDB y ACF tienen la misma área.

Se generaliza el bien conocido teorema de la geometría elemental de que si dos cuerdas de un círculo se intersecan entonces el producto de los segmentos de una cuerda es igual al producto de los segmentos de la otra; el teorema en cuestión diría que si OP y OQ son tangentes a una cónica, RS es cualquier cuerda paralela a OP y R'S' es cualquier cuerda paralela a OQ y si RS y R'S' se intersectan en U; entonces

$$RU \cdot US / R'U \cdot US = OP^2 / OQ^2.$$

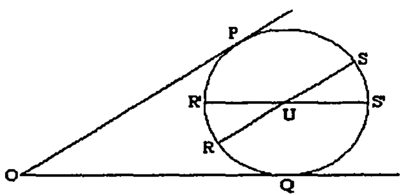


Figura A.1.6

Además aparecen teoremas sobre polos y polares y sobre la obtención de secciones cónicas, con la ayuda de haces proyectivos y mediante el uso de una propiedad de las áreas considera casos simples sobre el trazado de tangentes sin usar los puntos de tangencia.

Curiosamente no aparece ningún concepto de directriz a pesar de que se sabe que Euclides ya manejaba el hecho de que una cónica es el lugar geométrico de los puntos tales que la razón de sus distancias a un punto fijo (foco) y a una recta fija (directriz) es constante.

LIBRO IV. Aparece un grupo de proposiciones relacionadas con la división armónica de rectas, además de otros teoremas sobre parejas de cónicas que se intersecan y se demuestra que dos cónicas se cortan en, a lo más, cuatro puntos.

LIBRO V. De todo el tratado de las cónicas, este libro está considerado como el más notable y novedosos. Se resuelve pro primera vez problemas sobre máximos y mínimos de las normales consideradas como segmentos de recta trazados desde un punto a una curva; también se trabaja con la construcción de normales y se llega hasta un nivel tal que es posible escribir las ecuaciones cartesianas de las envolventes de las normales (evolutas) de la elipse, la hipérbola y la parábola.

LIBRO VI. Trabaja con cónicas congruentes y semejantes y segmentos de cónicas. Se muestra cómo en un cono recto dado se puede encontrar una sección congruente a una cónica dada. Generaliza el problema sobre la construcción de una familia de conos que pasan a través de una sección cónica dada.

LIBRO VII. Este libro es el que menos destaca en la obra general, debido a que no hay proposiciones sobresalientes. Se trabaja con varios teoremas que manejan diámetros conjugados, por ejemplo, se demuestra que para la elipse (hipérbola) la suma (diferencia) de los cuadrados de los ejes; o bien este otro ejemplo: en una elipse o en una hipérbola el área del paralelogramo determinado por cuales quiera dos diámetros conjugados y el ángulo en el que se intersecan es igual al área determinada por los ejes.

LIBRO VIII. Este libro está perdido y se cree que contenía material teórico correspondiente a lo que trata el libro VII. Según Pappus, Apolonio escribió, además, los siguientes tratados:
De la sección proporcional, que contenía 181 proposiciones.
De la sección espacial, que contenía 124 proposiciones.
Tangencias, que contenía 124 proposiciones.
Tendencias, que contenía 125 proposiciones.

Lugares geométricos planos, que contenía 147 proposiciones.

En el libro *Tangencias*, aparece el famoso problema de Apolonio al cual le dieron solución, entre otros, Vietá y Newton y que dice que dados tres puntos, rectas o círculos cualesquiera o cualquier combinación de tres elementos de esos conjuntos, se debe trazar un círculo que pase a través de los puntos y que sea tangente a las rectas y círculos dados.

1. 13. Las esferas de Dandelin.

Sea V el vértice en donde todas las líneas del cono (llamadas *generatrices*) pasan a través de V y hacen un ángulo α con el eje VW (Fig. A.1.7). Esta superficie es llamada un cono circular recto y cualquier sección de ésta es llamada sección cónica.

Sea Π un plano tal que el ángulo entre éste y el eje es β. Cuando Π pasa a través de V, es claro que la sección del cono es

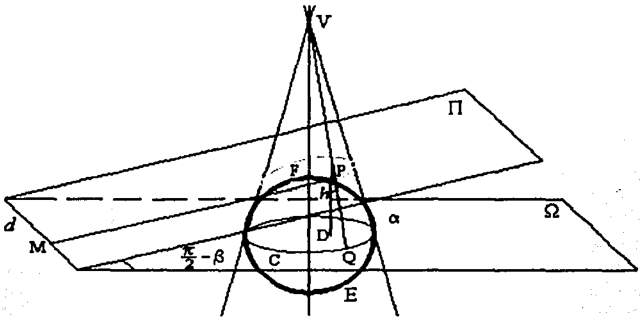


Figura A.1.7

(i) Un par de líneas si $\beta < \alpha$,

(ii) Una línea si $\beta = \alpha$,

(iii) Un punto, V, si $\beta > \alpha$,

Cuando Π no pasa a través de V y $\beta = \pi/2$, la sección es evidentemente un círculo. Esto nos propone considerar secciones para otros valores de β.

Sea E una esfera que toca al cono en un círculo C y toca a Π en un punto F. Sea Ω el plano por el círculo, que intersecta a Π en una línea d. Sea P cualquier punto en la curva la cual es la sección del cono por Π y sea VP la línea que intersecta a C en Q. Sea PM perpendicular a d, y sea D el pie de la perpendicular desde P a Ω donde PD = h. Entonces $\angle QPD = \alpha$ de donde $\cos\alpha = h / PQ$

$\Rightarrow \quad h = PQ \cos\alpha$

$\Rightarrow \quad PQ = h / \cos\alpha$

$\Rightarrow \quad PQ = h \sec\alpha \quad \ldots \quad (1)$

Además $\angle PMD = \pi/2 - \beta$

$\Rightarrow \quad \cos(\pi/2 - \beta) = \cos\beta$

$\Rightarrow \quad h = PM \cos\beta \quad \ldots \quad (2)$

También PF = PQ (por ser tangentes a la esfera),

$PF = h \sec\alpha$ sustituyendo (1)

$PF = PM \cdot \cos\beta \cdot \sec\alpha$ sustituyendo (2)

De aquí se sigue que para cualquier posición de P en la curva,

$$PF = e \cdot PM,$$

Así que esas secciones cónicas tienen un foco

Además $\quad e = \cos\beta \cdot \sec\alpha$

De donde tenemos

(i) Cuando $\beta > \alpha$, $e < 1$, es una elipse,

(ii) Cuando $\beta = \alpha$, $e = 1$, es una parábola

(iii) Cuando $\beta < \alpha$, $e > 1$, es una hipérbola.

Observamos que la cónica que es un par de líneas paralelas nunca surge de esta definición.

1.14 Las Cónicas definidas paraméricamente.

Estas curvas definidas parametricamente, son las coordenadas de un punto en la curva dadas en términos de una sola variable.

Forma paramétrica de la parábola.

La línea $y = mx$ a través del origen intersecta la parábola $y^2 = 4ax$ donde

$$(mx)^2 = 4ax$$
$$m^2x^2 = 4ax$$
$$m^2x = 4a$$
$$x = 4a / m^2$$

sustituyendo x en $y = mx$

$$y = m(4a/m^2)$$
$$y = 4a/m$$

El punto de intersección además del origen es el punto $(4a/m^2,\ 4a/m)$, y vemos que, cuando la línea $y = mx$, m varía y el punto de la parábola varía. Una forma ordenada de esto es obteniendo por sustitución $2/m = t$, así que las coordenadas de un punto cualquiera en la parábola son $(4a/m^2,\ 4a/m)$.

es decir, la forma paramétrica de la parábola es $\boldsymbol{(at^2,\ 2at)}$

Estos puntos están en la parábola para todos los valores de $t \in \mathbf{R}$.

1.15. Ecuaciones de una sección cónica en coordenadas polares.

Antes de ver las ecuaciones polares de las cónicas vamos a ver lo que es la gráfica de una ecuación polar. En este caso en lugar de trabajar con el Sistema de Coordenadas Cartesianas en el plano lo haremos con el Sistema de Coordenadas Polares, en donde cada punto P queda determinado por las coordenadas $(r,\ \theta)$en donde r es la distancia de O (el polo) a P y θ es el ángulo formado por el eje polar y el segmento que une a O con P (ver Figura A.1.8). Por convención se ha aceptado que el sentido positivo de rotación va en sentido opuesto en que giran las manecillas del reloj.

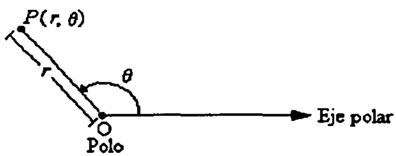


Figura A.1.8

1. 16. Las cónicas como curvas reflexivas

¿Por qué son tan especiales las secciones cónicas?, ¿Qué otras curvas tienen propiedades de reflexión? Para encontrarlas, primero debemos decir que se entiende por una "propiedad de reflexión". La definición que usaremos así como para integrar todas las secciones cónicas –aún los círculos, donde los "focos" F y F' coinciden.

Nos permitimos estar de acuerdo que una curva suave plana C tiene una *propiedad de reflexión* si existen puntos F y F', que no estén en C, tal que la línea tangente en cualquier punto P de C bisecta uno de los pares de ángulos opuestos formados por la intersección de las líneas que unen a P con F y con F'. Un "punto al infinito" es definido por medio de una línea a través del origen. La línea que una a P con un punto al infinito es definida como la línea a través de P paralela a la línea dada. No son considerados puntos al infinito los que están en C.

Si C tiene una propiedad de reflexión por los puntos F y F' al infinito, entonces para cada punto en C la línea tangente en P hace ángulos iguales con las líneas de P a F y F'. Evidentemente la línea tangente bisecta cada ángulo agudo entre las líneas que unen a P con F y F', de otro modo es perpendicular al ángulo bisector. (Cuando F = F', la línea tangente en P es paralela o perpendicular a la línea a través de P y F.) las direcciones de las líneas desde P a F y F' no dependen de la elección de P. Por lo tanto como C es suave es garantía de que todas las líneas tangentes a C son paralelas. De esto se sigue que C es (parte de) de una línea recta. C no es determinada por F y F' únicamente.

El siguiente supuesto de que C tiene una propiedad de reflexión dada por F y F', donde F, F' no son puntos al infinito. Refiriéndonos solo a la forma de C, sin el supuesto de orientación también podemos suponer sin pérdida de generalidad de que F esta en el origen y que F' tiene coordenadas (s, 0). Suponiendo que los puntos P de C son definidos por coordenadas polares (r, θ), donde r es una función de valores positivos de θ. Considerando que un punto P el cual podemos tomar en el semiplano superior. Sea α el ángulo de inclinación de la línea tangente l de C en P y sea ψ el ángulo de inclinación de la línea a través de P y F'. Por supuesto θ es el ángulo de inclinación de la línea a través de P y F (ver Figura A.1.9). Cuando P se mueve a lo largo de C, las coordenadas de r y θ cambian pero s permanece constante. Ahora examinaremos el hecho resolviendo para s en términos de r y θ, e investigando la condición de que $ds/d\theta = 0$.

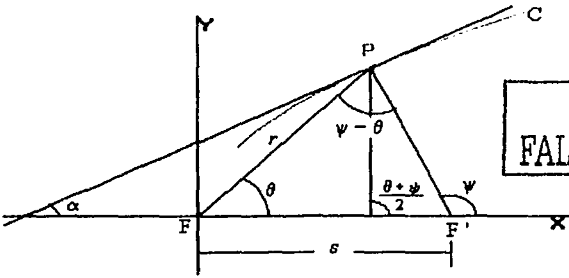


Figura A.1.9

Aplicando la ley de los senos al triángulo FPF', obtenemos

$$\frac{s}{\operatorname{sen}(\psi-\theta)}=\frac{r}{\operatorname{sen}(\pi-\psi)}=\frac{r}{\operatorname{sen}\psi}$$

como $\operatorname{sen}(\pi-\psi)=\operatorname{sen}\psi$ entonces tenemos

$$\frac{s}{\operatorname{sen}(\psi-\theta)}=\frac{r}{\operatorname{sen}\psi}$$

$$\Rightarrow \qquad s=\frac{r\operatorname{sen}(\psi-\theta)}{\operatorname{sen}\psi}$$

$$\Rightarrow \qquad s=\frac{r(\operatorname{sen}\psi\cos\theta-\cos\psi\operatorname{sen}\theta)}{\operatorname{sen}\psi}$$

$$\Rightarrow \qquad s=r\left(\cos\theta-\frac{\operatorname{sen}\theta}{tan\,\psi}\right) \qquad (1)$$

(Si $\psi=\pi/2$ entonces $s=r\cos\theta$)

El ángulo de inclinación de la normal en C es $\alpha-\pi/2$ o $\alpha+\pi/2$, sin embargo esta en $[0,\pi)$. Si l bisecta el ángulo FPF'. entonces $\alpha=(\theta+\psi)./2$. Otra manera $\alpha\pm\pi/2=(\theta+\psi)/2$. (En la Figura 5, $\alpha+\pi/2=(\theta+\psi)/2$)). Así

$$\psi=2\alpha-\theta+\sigma\pi \text{ , donde } \{-1,0,1\},$$

$$\text{y} \qquad \tan\psi=(\tan(2\ -\ \theta)=\frac{\tan2\alpha-\tan\theta}{1+\tan2\alpha\tan\theta}$$

$$\therefore \qquad \tan\psi=\frac{\tan2\alpha-\tan\theta}{1+\tan2\alpha\tan\theta} \qquad (2)$$

$$\text{Aquí} \qquad \tan2\alpha=\frac{\operatorname{sen}2\alpha}{\operatorname{sen}2\alpha}=\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}=\frac{\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\frac{2\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{2tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\therefore \qquad \tan2\alpha=\frac{2tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \qquad (3)$$

$$\text{y} \qquad \tan\alpha=\frac{dy}{dx}=\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}=\frac{(r\operatorname{sen}\theta)'}{(r\cos\theta)'}=\frac{r'\operatorname{sen}\theta+r\cos\theta}{r'\cos\theta-r\operatorname{sen}\theta}$$

$$\therefore \qquad \tan\alpha = \frac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta} \qquad (4)$$

Donde los primos denotan la diferencial con respecto a θ. Sustituyendo (4) en (3) obtenemos la fórmula

$$\tan 2\alpha = \frac{2\dfrac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}}{1-\left(\dfrac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}\right)^2} = \frac{2\left(\dfrac{r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta}\right)}{\dfrac{(r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)^2 - (r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta)^2}{(r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)^2}}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2(r'\operatorname{sen}\theta + r\cos\theta)(r'\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta)}{[(r')^2\cos^2\theta - 2rr'\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta] - [(r')^2\operatorname{sen}^2\theta + 2rr'\operatorname{sen}\theta\cos\theta + r^2\cos^2\theta]}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2[(r')^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - rr'\operatorname{sen}^2\theta + rr'\cos^2\theta - r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta]}{[(r')^2 - r^2]\cos^2\theta - [(r')^2 - r^2]\operatorname{sen}^2\theta - 4rr'\operatorname{sen}\theta\cos\theta}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2[(r')^2 - r^2]\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 2rr'(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}{[(r')^2 - r^2][\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta] - 2rr'(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{[(r')^2 - r^2]\operatorname{sen}2\theta + 2rr'\cos 2\theta}{[(r')^2 - r^2]\cos 2\theta - 2rr'\operatorname{sen}2\theta} \qquad (5)$$

Sustituyendo (5) en (2) mostramos que

$$\tan\psi = \frac{\left(\dfrac{[(r')^2 - r^2]\operatorname{sen}2\theta + 2rr'\cos 2\theta}{[(r')^2 - r^2]\cos 2\theta - 2rr'\operatorname{sen}2\theta}\right) - \tan\theta}{1 + \left(\dfrac{[(r')^2 - r^2]\operatorname{sen}2\theta + 2rr'\cos 2\theta}{[(r')^2 - r^2]\cos 2\theta - 2rr'\operatorname{sen}2\theta}\right)\tan\theta}$$

$$\tan\psi = \frac{[(r')^2 - r^2]\operatorname{sen}2\theta + 2rr'\cos 2\theta - \tan\theta\{[(r')^2 - r^2]\cos 2\theta - 2rr'\operatorname{sen}2\theta\}}{[(r')^2 - r^2]\cos 2\theta - 2rr'\operatorname{sen}2\theta + \{[(r')^2 - r^2]\operatorname{sen}2\theta + 2rr'\cos 2\theta\}\tan\theta}$$

$$\tan\psi = \frac{[(r')^2 - r^2][\operatorname{sen}2\theta - \tan\theta\cos 2\theta] + 2rr'[\cos 2\theta + \tan\theta\operatorname{sen}2\theta\}]}{[(r')^2 - r^2][\cos 2\theta + \operatorname{sen}2\theta\tan\theta] + 2rr'[\cos 2\theta\tan\theta - \operatorname{sen}2\theta]}$$

$$\tan\psi = \frac{[(r')^2 - r^2][2\operatorname{sen}\theta\cos\theta - \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}(2\cos^2\theta - 1)] + 2rr'[(2\cos^2\theta - 1) + \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}2\operatorname{sen}\theta\cos\theta]}{[(r')^2 - r^2][\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta + 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}] + 2rr'[(2\cos^2\theta - 1)\dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} - 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta]}$$

$$tan\psi=\frac{[(r')^2-r^2][2\operatorname{sen}\theta\cos\theta-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}]+2rr'[2\cos^2\theta-1+2\operatorname{sen}^2\theta]}{[(r')^2-r^2][\cos^2\theta-\operatorname{sen}^2\theta+2\operatorname{sen}^2\theta]+2rr'[(2\cos\theta\operatorname{sen}\theta-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}-2\operatorname{sen}\theta\cos\theta]}$$

$$tan\psi=\frac{[(r')^2-r^2]tan\theta+2rr'[2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)-1]}{[(r')^2-r^2][\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta]-2rr'tan\theta}=\frac{[(r')^2-r^2]tan\theta+2rr'[2-1]}{[(r')^2-r^2]-2rr'tan\theta}$$

$$tan\psi=\frac{[(r')^2-r^2]\operatorname{sen}\theta+2rr'\cos\theta}{[(r')^2-r^2]\cos\theta-2rr'\operatorname{sen}\theta} \qquad (6)$$

Finalmente sustituyendo (6) en (1) se obtiene la fórmula deseada para s:

$$s=r\left(\cos\theta-\frac{\operatorname{sen}\theta}{\frac{[(r')^2-r^2]\operatorname{sen}\theta+2rr'\cos\theta}{[(r')^2-r^2]\cos\theta-2rr'\operatorname{sen}\theta}}\right)=r\left(\cos\theta-\left(\frac{[(r')^2-r^2]\cos\theta-2rr'\operatorname{sen}\theta}{[(r')^2-r^2]\operatorname{sen}\theta+2rr'\cos\theta}\right)\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$s=r\left(\frac{\cos\theta\,\{[(r')^2-r^2]\operatorname{sen}\theta+2rr'\cos\theta\}-\{[(r')^2-r^2]\cos\theta-2rr'\operatorname{sen}\theta\}\operatorname{sen}\theta}{[(r')^2-r^2]\operatorname{sen}\theta+2rr'\cos\theta}\right)$$

$$s=r\left(\frac{[(r')^2-r^2][\operatorname{sen}\theta\cos\theta-\cos\theta\operatorname{sen}\theta]+2rr'(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}{[(r')^2-r^2]\operatorname{sen}\theta+2rr'\cos\theta}\right)$$

$$s=r\left(\frac{2rr'}{[(r')^2-r^2]\operatorname{sen}\theta+2rr'\cos\theta}\right)$$

$$s=\frac{2r^2r'}{[(r')^2-r^2]\operatorname{sen}\theta+2rr'\cos\theta} \qquad (7)$$

Igualando $s'=0$ (es decir, usando la regla del cociente e igualando el numerador de la expresión resultante de s' igual a 0), obtenemos

$$0=2r\,[(r')^2+r^2]\{-[rr''-2(r')^2]\operatorname{sen}\theta+rr'\cos\theta\}$$

Como r y $(r')^2+r^2$ son positivos,

$$[rr''-2(r')^2]\operatorname{sen}\theta = rr'\cos\theta \qquad (8)$$

Esta ecuación puede simplificarse haciendo $\rho = 1 / r$, así

$$r = 1 / \rho, \qquad r' = -\rho' / \rho^2, \qquad r'' = [-\rho\rho'' + 2(\rho')^2] / \rho^3.$$

Así de (8) tenemos

$$\rho'' \operatorname{sen}\theta = \rho' \cos\theta \qquad (9)$$

Resolviendo (9) para ρ' por separación de variables, obtenemos

$$\rho' = b \operatorname{sen}\theta \qquad \text{y} \qquad \rho = a - b\cos\theta$$

Para algunas constantes a y b, no ambas cero (ya que $\rho \neq 0$). Por lo tanto

$$r = 1 / (a - b\cos\theta) \qquad (a \neq 0 \ \text{ o } \ b \neq 0) \qquad (10)$$

Usando (7) para calcular s, obtenemos

$$s = 2b / (a^2 - b^2) \qquad (11)$$

Como $s < \infty$, podemos tener $|a| \neq |b|$.
Si a y b son positivas se tiene $e = b / a$ y $p = 1 / b$, así de (10) se tiene

$$r = pe / (1 - e\cos\theta) \qquad (12)$$

que es la ecuación polar de una sección cónica con foco en el origen, directriz $x = -p$, y excentricidad $e > 0$. Si a y b son distintas de cero, y de signos contrarios, entonces (10) representa una sección cónica con foco en el origen, directriz $x = -1 / b$, y excentricidad $e = |b/a|$. Ya que $|a| \neq |b|$, la sección cónica es una elipse o una hipérbola pero no una parábola (pues en el caso de la parábola $e = 1$).

Si $a \neq 0$ y $b = 0$, entonces $s = 0$ y $r = 1 / a$, también F = F' y C es un círculo.
Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces $s = -2 / b$ y $r = -1 / b \cos\theta$, así C es la línea vertical $x = -1/ b$, que es la mediatriz del segmento FF'.

Hay dos casos degenerados. Si C es parte del eje x, entonces no podemos tomar nuestros puntos P en el semiplano superior, también la derivada no se aplica. C tendrá propiedad reflexiva relativa para cualquier puntos F y F' sobre el eje x que no estén en C. También, la derivada solo se aplica para los puntos P donde $\psi \neq \pi / 2$. Si C es la parte de la línea vertical por F', entonces $\psi = \pi / 2$ para *todos* los puntos de C y no podemos resolver para s.
Los puntos F y F' pueden coincidir y la propiedad reflexiva se mantiene. Vemos que en ambos casos, C es parte de una recta y F y F' son puntos de la misma recta pero no están en C.

Considerando el caso en el cual solo uno de los dos focos F o F' es un punto al infinito. Sea F' un punto al infinito sobre el eje x. Entonces la propiedad de reflexión de c implica que $2\alpha = \theta$ o $2\alpha = \theta + \pi$ (en la siguiente Figura A.1.10 $2\alpha = \theta$), por lo que

$$\tan 2\alpha = \tan\theta \qquad (13)$$

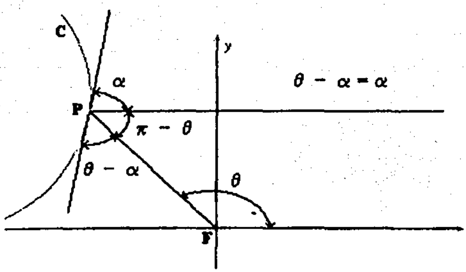


Figura A.1.10

La fórmula (5) aún se sostiene. Cuando se sustituye (5) en (13), se obtiene

$$[(r')^2 - r^2]\ \text{sen}\theta + 2rr'\cos\theta = 0 \qquad (14)$$

se observa que esta ecuación diferencial es satisfecha solo por las parábolas en la forma polar:

$$r = p\ /(1 \pm \cos\theta) \qquad (15)$$

para ver esto directamente, $\xi = r(1 - \cos\theta)$, por lo que

$$r = \xi\ /\ (1 - \cos\theta) \qquad \text{y} \qquad r' = [\xi'\ (1 - \cos\theta) - \xi\ \text{sen}\theta]\ /\ (1 - \cos\theta)^2.$$

Entonces (14) será (después de algunas manipulaciones)

$$\xi'(\xi'\ \text{sen}\theta - 2\xi)\ /\ (1 - \cos\theta)^2 = 0 \qquad (16)$$

de donde se sigue que $\xi' = 0$ o $\xi'\ /\ \xi = 2\csc\theta$, así

$$\xi = p \quad \text{o} \quad \xi = p(1 - \cos\theta)\ /\ (1 + \cos\theta)$$

Para alguna constante p. Ésta da (15). Otra vez aparecen líneas rectas como un caso degenerado (cuando es parte del eje x).

Ahora tenemos que todas las curvas a candidatas a curvas con propiedad reflexiva son rectas, círculos, elipses, hipérbolas, parábolas, y pedazos de estas curvas.

Solución de los ejercicios propuestos.

2.1. Propiedades geométricas de la parábola.

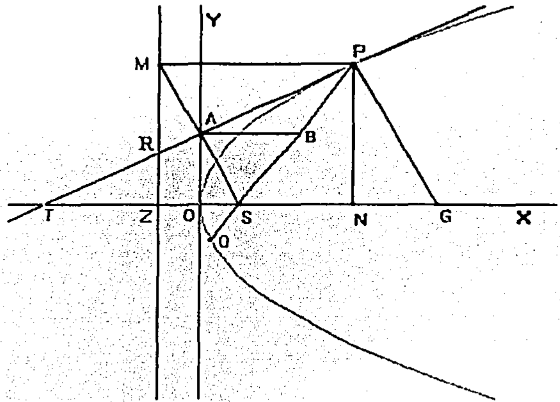


Figura A.2.1

1. Con la notación de la Figura A.2.1, prueba los siguientes resultados:

   (i) $TA \cdot AR = SO \cdot SP$

   Como los triángulos RAS y SAP son semejantes entonces

$$AR / AS = AS / AP$$

   Entonces

$$AR \cdot AP = AS^2$$

   Por la Propiedad tenemos (8)

$$AR \cdot AP = SO \cdot SP$$

   Pero

$$AP = AT$$

$$AR \cdot AT = SO \cdot SP$$

(ii) $TA = AN$

Los triángulos OAT y OAN son congruentes pues OA es común a ambos triángulos además los ángulos AOT y AON son rectos y $OT = ON = ap^2$, así por LAL

$$TA = AN.$$

(iii) La línea a través de A paralela al eje bisecta a SP.

La línea a través de A paralela al eje de la parábola corta al segmento SP en B. Así los triángulos TSP y ABP son semejantes por lo que tenemos

$$SP / PT = BP / PA$$
$$SP / 2 \cdot PA = BP / PA$$
$$SP / 2 = BP$$
$$SP = 2 \cdot BP$$

(iv) La tangente en el vértice toca al círculo con diámetro SP.

Por el ejercicio anterior B es el centro de la circunferencia con diámetro SP.

La línea paralela al eje a través de A intersecta a SP en B, por lo que tenemos que los triángulos TSP y ABP son semejantes, de donde tenemos

$$TS / TP = AB / AP$$
$$TS / 2 \cdot AP = AB / AP$$
$$TS / 2 = AB$$
$$TS = 2 \cdot AB$$

Como $$TS = SP$$
$$SP = 2AB$$

Para la circunferencia con diámetro SP, B es el centro de la circunferencia y un radio AB por ser paralelo al eje es perpendicular a la tangente en el vértice lo que implica que la tangente solo toca a la circunferencia con diámetro SP.

(v) $PG = 2 \cdot AS$

Los triángulos ATS y PTG son semejantes

$$AT = PT / 2$$
$$TS = TG / 2$$

$$SA = GP / 2$$

Entonces $$2 \cdot SA = GP$$

(vi) $PG^2 = 2 \cdot SL \cdot SP$ (donde L es un extremo del lado recto)

Si $$PG = 2 \cdot AS$$

entonces $$PG^2 = 4 \cdot AS^2$$

Usando la propiedad (8) $$PG^2 = 4(SO \cdot SP)$$

$$PG^2 = 2(2 \cdot SO)\, SP$$

Ahora sólo demostraremos que $2 \cdot SO = SL$

Por una parte tenemos que cualquier punto en la parábola tiene coordenadas $(ap^2, 2ap)$ y por otro lado $SO = a$, así concluimos

$$a = ap^2$$

$$\therefore \quad p = \pm 1$$

Como $$SL = 2ap$$

Sustituyendo p nos queda

$$SL = 2a(\pm 1)$$

$$SL = \pm 2a$$

$$SL = \pm 2 \cdot SO$$

En particular $$SL = 2 \cdot SO$$

2. PSQ es una cuerda focal de una parábola donde el vértice es O y foco S. M es el pie de la perpendicular de P a la directriz, y N es el pie de la perpendicular de P al eje. Probar los siguientes resultados:

   (i) Si la tangente en P y Q se intersectan en R y RQ intersectan el lado recto en U entonces

   $$RU = SM.$$

   Como $MR \parallel US$ y $SM \parallel RU$ entonces SMRU es un paralelogramo[20] por lo que tenemos que SM = RU.

[20] Todo paralelogramo tiene iguales sus lados opuestos.

(ii) El círculo con diámetro PQ toca a la directriz

Como PQ es una cuerda focal, por la propiedad (7) las tangentes en P y Q se intersectan en la directriz formando un ángulo recto. Sea R el punto de la directriz donde se intersectan las tangentes en P y Q, así tenemos que el triángulo PRQ es recto y la circunferencia con diámetro PQ toca la directriz en R

2.2. Propiedades geométricas de la elipse.

1. Las tangentes en los extremos de una cuerda focal se intersectan en la directriz en T. Mostrar que TS es perpendicular a la cuerda.

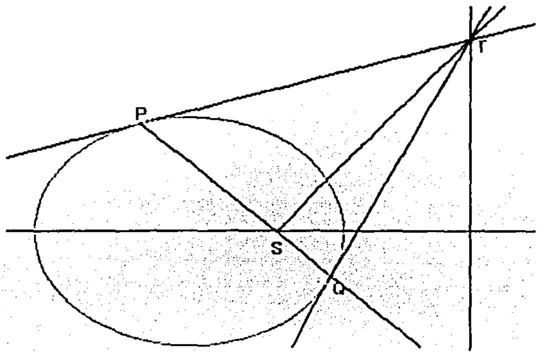


Figura A.2.2

Como PQ es una cuerda focal entonces las tangentes en P y Q se intersectan en la directriz en T (propiedad 4) y como el ángulo PST es recto (Propiedad 2) entonces PS es perpendicular a ST y así PQ también es perpendicular a ST.

2. Dar una construcción para el segundo foco de una elipse cuando un foco, la correspondiente directriz y una tangente son dados. (usando la Propiedad 2)

1) Construir una perpendicular a la directriz que pase por el punto donde se encuentra el foco dado. Esta recta contiene al eje principal de la elipse.
2) Sea D el punto de intersección de la tangente con la directriz y F el foco dado, trazar una recta perpendicular l al segmento DF.
3) La intersección de la tangente con l es P, un punto de la elipse.
4) Trazar una perpendicular n a la tangente dada por P, que es la normal en P.
5) Sea E la intersección del eje con la normal.

Siendo F' el otro foco, la normal bisecta el $\angle$ FPF'

6) El $\angle$ FPE se transfiere para formar al $\angle$ EPF'.

3. Dada una elipse y su eje mayor, describe como se construye:

(i) Los focos.

1) Se traza una perpendicular en el punto medio del eje mayor
2) Sea B un punto que resulta de la intersección de la perpendicular del eje mayor con la elipse.
3) Se abre el compás con radio igual a la mitad del eje mayor
4) Apoyando el compás en B, trazar arcos que corten el eje en los puntos F_1 y F_2. Los puntos así obtenidos serán los focos, ya que se cumple que $b^2 + c^2 = a^2$.

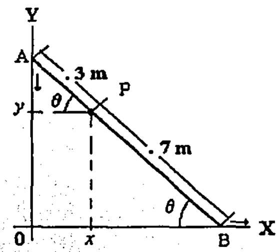
(ii) La tangente en un punto P. (se usa la propiedad 8)

1) Sean A y A' los puntos de intersección de la elipse con el eje mayor.
2) Sea O el punto medio del segmento AA'.
3) Trazar una circunferencia con centro en O y radio igual a OA.
4) Encontrar los focos F y F' de la elipse.
5) Del mismo lado en que se encuentra P, con respecto al eje, se une F con V, siendo V un punto de la circunferencia.
6) Se traza una recta paralela m al segmento FV por F', donde V' es el punto de intersección de m con la circunferencia y está del mismo lado que V y P con respecto al eje.
7) Se traza la recta que pase por V y V' que es la tangente por P.

Anexo 3: Las cónicas y sus acompañantes.

Solución de los ejercicios correspondientes a la unidad 3.

1. **Tomamos como punto de partida el diagrama que se sugirió y al punto en donde se encuentra el gatito lo llamamos P el con coordenadas x, y. El ángulo que forma la escalera con el suelo es θ y los extremos de la escalera son A y B.**



$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{.7} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sen}^2\theta = \left(\frac{y}{.7}\right)^2 = \frac{y^2}{.49}$$

y del triángulo rectángulo yPA tenemos

$$\cos\theta = \frac{x}{.3} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = \left(\frac{x}{.3}\right)^2 = \frac{x^2}{.9}$$

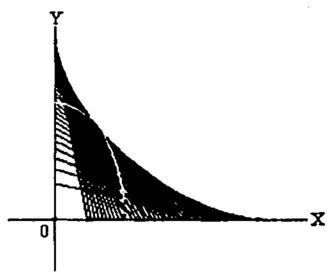
y como

$$\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$$

Así tenemos

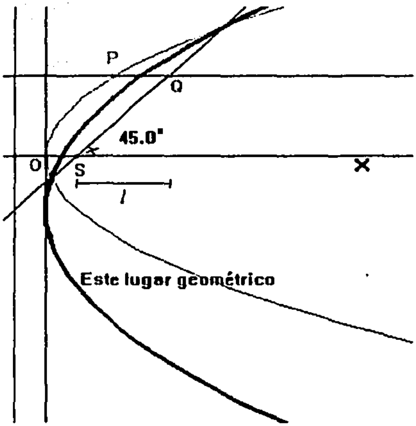
$$\frac{x^2}{.9} + \frac{y^2}{.49} = 1$$

Sorpresivamente tenemos que el gato se mueve por una elipse. En la siguiente gráfica tenemos la gráfica



2. **El eje del cono de audibilidad es paralelo al plano con que se esta cortando al cono, así la superficie terrestre donde se escucha el ruido del avión es una hipérbola**

3. P es cualquier punto sobre la parábola, foco S, y Q es un punto tal que PQ es paralelo al eje x y QS hace un ángulo de 45° con la parte positiva del eje x. Encuentra el lugar geométrico del punto medio de PQ, cuando P varia en la parábola.



P tiene coordenadas $(ap^2,\ 2ap)$ y como

$$\tan 45° = \frac{2ap}{l} \quad \Rightarrow \quad 1 = \frac{2ap}{l}$$

$$\Rightarrow \quad l = 2ap \qquad \therefore Q(a + 2ap,\ 2ap)$$

$$\therefore R\left(\frac{ap^2 + a + 2ap}{2},\ 2ap\right)$$

$$= \left(\frac{a(p^2 + 1 + 2p)}{2},\ 2ap\right)$$

$$= \left(\frac{a(p^2 + 2p + 1)}{2},\ 2ap\right) = \left(\frac{a(p+1)^2}{2},\ 2ap\right)$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{a(p+1)^2}{2} \qquad Y = 2ap$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2X}{a} = (p+1)^2 \qquad \frac{Y}{2a} = 2ap$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2X}{a}} = (p+1) \qquad \frac{Y}{2a} = p$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2X}{a}} - 1 = p \qquad \frac{Y}{2a} = p$$

Igualando p tenemos

$$\sqrt{\frac{2X}{a}} - 1 = \frac{Y}{2a} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2X}{a}} = \frac{Y}{2a} + 1 \quad \Rightarrow \quad 2a\left(\sqrt{\frac{2X}{a}}\right) = Y + 2a$$

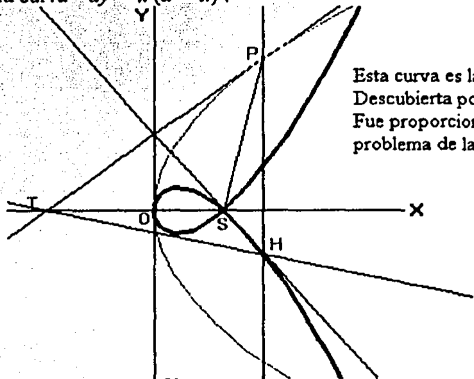
$$2(\sqrt{a})^2\left(\frac{\sqrt{2X}}{\sqrt{a}}\right) = Y + 2a \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{a}\sqrt{2X} = Y + 2a \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2aX} = Y + 2a$$

$$\Rightarrow \quad 4(2aX) = (Y + 2a)^2$$

$$\Rightarrow \quad 8Xa = (Y + 2a)^2$$

Así tenemos que el lugar geométrico del punto medio de PQ es una parábola con vértice en (0, -2a).

4. Si la tangente a la parábola en P intersecta al eje x en T, y S es el foco, encuentra las coordenadas del ortocentro H del triángulo SPT y muestra que cuando P varía la ecuación del lugar geométrico de H es la curva $ay^2 = x(a-x)^2$.



Esta curva es la trsisectrix de Mauclarin. Descubierta por Colin Mauclarin en 1742. Fue proporcionada como solución al problema de la trisección de un ángulo dado.

La ecuación de la tangente[21] en P es: $x - py + ap^2 = 0$

e intersecta al eje x cuando $y = 0$, es decir,

$x - p(0) + ap^2 = 0$

$x + ap^2 = 0$

$x = -ap^2$ por lo tanto $T(-ap^2, 0)$.

Como el lado TS del triángulo se encuentra sobre el eje x, así tenemos

$\Rightarrow \quad X = ap^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{X}{a} = p^2$

$\Rightarrow \quad Y = ap - ap^3$

$\Rightarrow \quad Y = ap(1-p^2)$

$\Rightarrow \quad Y = ap\left(1-\dfrac{X}{a}\right)$ sustituyendo p^2

$\Rightarrow \quad Y = ap\left(\dfrac{a-X}{a}\right)$

$\Rightarrow \quad Y = p(a-X)$

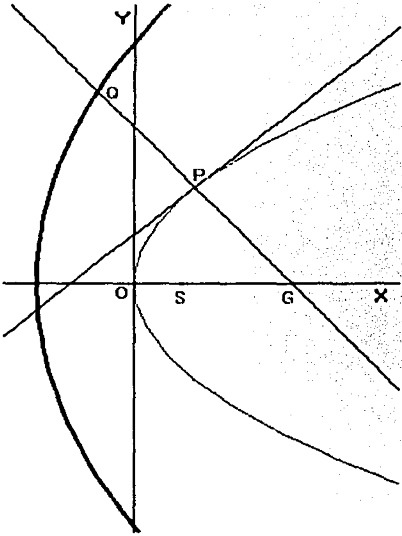
$\Rightarrow \quad Y^2 = p^2(a-X)^2 \quad \Rightarrow \quad p^2 = \dfrac{Y^2}{(a-X)^2}$

igualando p^2

$\Rightarrow \quad \dfrac{X}{a} = \dfrac{Y^2}{(a-X)^2} \quad \Rightarrow \quad X(a-X)^2 = aY^2$

[21] Nótese que solamente el punto $(ap^2, 2ap)$ satisface a la vez la ecuación de la parábola y de la recta, por lo tanto es una tangente. Y la perpendicular a esta recta por este punto es $px + y = ap^3 + 2ap$.

5. Si la normal a la parábola en P intersecta al eje de la parábola en G y GP es producido, más allá de P, hasta Q tal que P es el punto medio de GQ mostrar que la ecuación del lugar geométrico de Q es $y^2 = 16a(x + 2a)$.



La ecuación de la normal en P es :

$$px + y = ap^3 + 2ap$$

si $y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = ap^2 + 2a \qquad \therefore G(ap^2 + 2a, 0)$

como $P(ap^2, 2ap)$ es el punto medio de GQ, así

$$ap^2 = \frac{x_q + ap^2 + 2a}{2} \qquad\qquad 2ap = \frac{y_q + 0}{2}$$

$$2ap^2 = x_q + ap^2 + 2a \qquad\qquad y_q = 4ap$$

$$x_q = ap^2 - 2a$$

$$\therefore \quad Q(ap^2 - 2a,\ 4ap)$$

$$X = ap^2 - 2a \qquad\qquad Y = 4ap$$

$$X + 2a = ap^2 \qquad\qquad \frac{Y}{4a} = p$$

$$\frac{X + 2a}{a} = p^2 \qquad\qquad \frac{Y^2}{16a^2} = p^2$$

igualando p^2 tenemos que :

$$\frac{X + 2a}{a} = \frac{Y^2}{16a^2}$$

$$\frac{16a^2(X + 2a)}{a} = Y^2$$

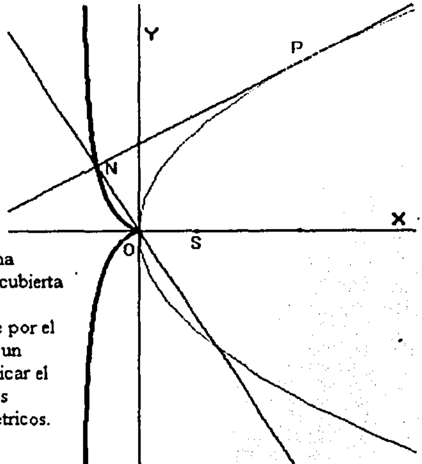
$$16a(X + 2a) = Y^2$$

cambiando x por X y y por Y :

$$16a(x + 2a) = y^2$$

Así tenemos que el lugar geométrico de Q es la parábola con vértice en $(-2a, 0)$ y eje en el eje x.

6. Encuentra las coordenadas de N, el pie de la perpendicular dibujada del origen a la tangente de la parábola en un punto cualquiera P. Mostrar que cuando P cambia, el lugar geométrico de N es la curva $x(x^2+y^2)+ay^2=0$.



Esta curva se llama Cisoide y fue descubierta por Diocles aproximadamente por el año 180 a. C. en un esfuerzo por duplicar el cubo por métodos puramente geométricos.

La ecuación de la tangente en el punto P es

$$x-py+ap^2=0 \qquad (1)$$

Como buscamos la perpendicular que pase por el origen, tomamos la normal en P

$$px+y=ap^3+2ap \qquad (2)$$

y la evaluamos en (0, 0)

$$p(0)+0=ap^3+2ap$$

así tenemos

$$0=ap^3+2ap \qquad (3)$$

de (2) y (3) tenemos

$$px+y=0 \qquad (4)$$

Que es la recta perpendicular por a la tangente en P y pasa por el origen; como N es el punto la intersección de las rectas (1) y (4), de la ecuación (4) despejamos a y,

$$y=-px \qquad (5)$$

y la sustituimos en (1)

$$x-p(-px)+ap^2=0$$

$$x-p^2x+ap^2=0$$

$$x+p^2x=-ap^2$$

$$x\,(1+p^2)=-ap^2$$

$$x=\frac{-ap^2}{1+p^2}$$

sustituyendo en (5)
$$y=-p\left(\frac{-ap^2}{1+p^2}\right)=\frac{ap^3}{1+p^2}$$

así tenemos que
$$\mathrm{N}\left(\frac{-ap^2}{1+p^2},\ \frac{ap^3}{1+p^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad X=\frac{-ap^2}{1+p^2} \quad \Rightarrow \quad X(1+p^2)=-ap^2 \quad \Rightarrow \quad X+Xp^2=-ap^2$$

$$\Rightarrow \quad Xp^2+ap^2=-X \quad \Rightarrow \quad Xp^2+ap^2=-X \quad \Rightarrow \quad (X+a)p^2=-X$$

$$\therefore \quad p^2=\frac{-X}{a+X} \quad \Rightarrow \quad p=\sqrt{\frac{-X}{a+X}}$$

tanbién tenemos que
$$Y=\frac{ap^3}{1+p^2} \quad \Rightarrow \quad Y(1+p^2)=ap^3 \quad \Rightarrow \quad Y+Yp^2=ap^3$$

$$\Rightarrow \quad Y=ap^3-Yp^2 \quad \Rightarrow \quad Y=(ap-Y)p^2$$

sustituyendo p^2 y p
$$Y=\left(a\sqrt{\frac{-X}{a+X}}-Y\right)\left(\frac{-X}{a+X}\right)$$

$$Y=\left(a\sqrt{\frac{-X}{a+X}}-Y\right)\left(\frac{-X}{a+X}\right)$$

$$(a+X)Y=\left(a\sqrt{\frac{-X}{a+X}}-Y\right)(-X)$$

$$aY+XY=-aX\sqrt{\frac{-X}{a+X}}+XY$$

$$aY=-aX\sqrt{\frac{-X}{a+X}}$$

$$Y=-X\sqrt{\frac{-X}{a+X}}$$

$$Y^2=\left(-X\sqrt{\frac{-X}{a+X}}\right)^2$$

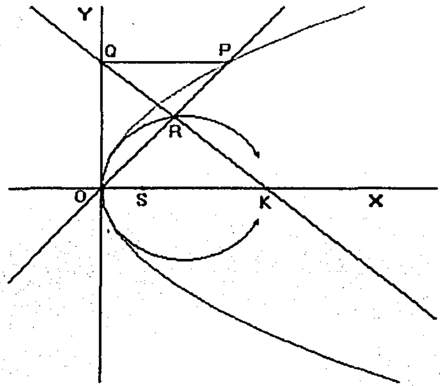
$$Y^2=X^2\left(\frac{-X}{a+X}\right)$$

$$(a+X)Y^2=-X^3$$

$$aY^2+XY^2=-X^3$$

$$aY^2+XY^2+X^3=0$$

7. P es cualquier punto en la parábola, y O es el origen; Q es el pie de la perpendicular de P al eje y, R es el pie de la perpendicular de Q a OP, y QR intersecta al eje x en K. Probar que K es un punto fijo, y encuentra sus coordenadas. Probar también que el lugar geométrico de R es un círculo, y encuentra su centro.



Encontremos la ecuación de la línea recta OP mediante la forma punto pendiente

$$m=\frac{2ap-0}{ap^2-0}=\frac{2ap}{ap^2}=\frac{2}{p}$$

por lo tanto $\quad y-0=\dfrac{2}{p}(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=\dfrac{2}{p}x$

$\Rightarrow \quad py=2x \quad \Rightarrow \quad 2x-py=0 \quad (1)$

la ecuación de la recta perpendicular a (1) que pasa por Q(0, $2ap$) tiene la forma

$px+2y+c=0 \quad (2)$

para encontrar c sustituimos las coordenadas de Q en (2)

$p(0)+2(2ap)+c=0 \quad \Rightarrow \quad 4ap+c=0 \quad \therefore \quad c=-4ap$

así la ecuación de la recta perpendicular a OP que pasa por Q es:

$px+2y-4ap=0 \quad (3)$

e interceptará al eje x en K, es decir, cuando $y=0$

Encontremos la ecuación de la línea recta OP
mediante la forma punto pendiente

$$m=\frac{2ap-0}{ap^2-0}=\frac{2ap}{ap^2}=\frac{2}{p}$$

por lo tanto $\quad y-0=\frac{2}{p}(x-0) \quad \Rightarrow \quad y=\frac{2}{p}x$

$$\Rightarrow \quad py=2x \quad \Rightarrow \quad 2x-py=0 \quad (1)$$

la ecuación de la recta perpendicular a (1) que pasa por
Q(0, $2ap$) tiene la forma

$px+2y+c=0 \quad (2)$

para encontrar c sustituimos las coordenadas de Q en (2)

$p(0)+2(2ap)+c=0 \quad \Rightarrow \quad 4ap+c=0 \quad \therefore \quad c=-4ap$

así la ecuación de la recta perpendicular a OP que pasa por Q es:

$px+2y-4ap=0 \quad (3)$

e interceptará al eje x en K, es decir, cuando $y=0$

$px+2(0)-4ap=0 \quad \Rightarrow \quad px-4ap=0 \quad \Rightarrow \quad px=4ap$

$\Rightarrow \quad x=4a \quad \therefore K(4a,0)$

para encontrar el lugar geométrico en donde se intersectan las rectas (1) y (3), despejamos a p de ambas ecuaciones

$$p=\frac{2x}{y} \qquad px-4ap=-2y$$

$$p=\frac{2x}{y} \qquad p(x-4a)=-2y$$

$$p=\frac{2x}{y} \qquad p=\frac{-2y}{x-4a}$$

igualando a p tenemos

$$\frac{2x}{y}=\frac{-2y}{x-4a}$$

$$2x(x-4a)=-2y^2$$

$$2x^2-8ax=-2y^2$$

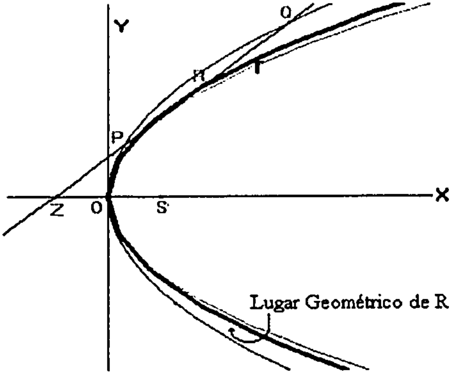
$x^2-4ax=-y^2$ dividiendo entre 2.

$x^2-4ax+4a^2=-y^2+4a^2$ completando trinomio cuadrado perfecto.

$(x-2a)^2=-y^2+4a^2$ factorizando

$(x-2a)^2 + y^2 = 4a^2$ tenemos la ecuación de una circunferencia con centro en $(2a, 0)$ y radio $2a$.

8. Una tangente de la parábola $y^2 = 4bx$ intersecta a la parábola $y^2 = 4ax$ en P y Q. Probar que la ecuación del lugar geométrico del punto medio de PQ es $y^2(2a - b) = 4ax$.



Tenemos los puntos $P(ap^2, 2ap)$ y $Q(aq^2, 2aq)$

de donde tenemos que la pendiente de la recta PQ es

$$m = \frac{2aq - 2ap}{aq^2 - ap^2} = \frac{2a(q-p)}{a(q^2 - p^2)} = \frac{2(q-p)}{(q-p)(q+p)} = \frac{2}{q+p} \qquad \therefore m = \frac{2}{q+p}$$

usando la forma punto pendiente la ecuación de la recta PQ es

$$y - 2ap = \frac{2}{q+p}(x - ap^2)$$

$$(q+p)(y-2ap) = 2(x - ap^2)$$

$$(q+p)y - (q+p)2ap = 2x - 2ap^2$$

$$(q+p)y - 2apq - 2ap^2 = 2x - 2ap^2$$

$$(q+p)y - 2apq = 2x \qquad \text{eliminando } -2ap^2$$

$$2x - (q+p)y + 2apq = 0$$

como la recta PQ es tangente a la parábola $y^2 = 4bx$ en el punto t

$$\frac{2}{1} = \frac{-(p+q)}{-t} = \frac{2apq}{bt^2}$$

$$\Rightarrow \qquad -2t = -(p+q) \qquad -(p+q)bt^2 = -2apqt$$

$$\Rightarrow \qquad 2t = (p+q) \qquad (p+q)bt^2 = 2apqt$$

$$\Rightarrow \qquad t=\frac{(p+q)}{2} \qquad\qquad (p+q)bt=2apq$$

$$\Rightarrow \qquad t=\frac{(p+q)}{2} \qquad\qquad t=\frac{2apq}{b(p+q)}$$

igualando t

$$\Rightarrow \qquad \frac{(p+q)}{2}=\frac{2apq}{b(p+q)}$$

$$b(p+q)=4apq$$

$$b=\frac{4apq}{p+q}$$

sea (X, Y) el punto medio de P a Q

$$X=\frac{ap^2+aq^2}{2} \qquad\qquad Y=\frac{2ap+2aq}{2}$$

$$2X=ap^2+aq^2 \qquad\qquad 2Y=ap+aq$$

$$2X=a(p^2+q^2) \qquad\qquad 2Y=a(p+q)$$

$$\frac{2X}{a}=p^2+q^2 \qquad\qquad \frac{2Y}{a}=p+q$$

$$\frac{2X}{a}+2pq=p^2+2pq+q^2 \qquad\qquad \left(\frac{2Y}{a}\right)^2=(p+q)^2$$

$$\frac{2X}{a}+2pq=(p+q)^2 \qquad\qquad \left(\frac{2Y}{a}\right)^2=(p+q)^2$$

$$\frac{2X}{a}+2pq=\left(\frac{2Y}{a}\right)^2$$

$$\frac{2X}{a}+2pq=\frac{4Y^2}{a^2}$$

$$2aX+2a^2pq=4Y^2$$

$$2aX+2a^2\left(\frac{b(p+q)^2}{4a}\right)=4Y^2$$

$$2aX+\frac{ab(p+q)^2}{2}=4Y^2$$

$$4aX+ab(p+q)^2=4Y^2$$

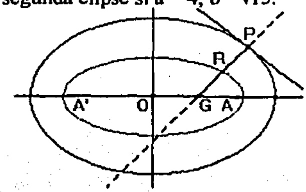
$$4a^2X+ba^2(p+q)^2=4aY^2$$

$$4a^2X+bY^2=4aY^2$$

$$4a^2X=4aY^2-bY^2$$

$$4a^2X=Y^2(4a-b)$$

9. La normal en P, un punto de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, intersecta el eje mayor en G. Probar que el lugar geométrico del punto medio de GP es una segunda elipse concéntrica con la primera y encuentra la excentricidad de la segunda elipse si a = 4, b = $\sqrt{15}$.



La ecuación de la normal[22] en P es:

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\operatorname{sen}\theta} = a^2 - b^2 \qquad \cdots (1)$$

e intersecta al eje x cuando = 0, así tenemos,

$$\frac{ax}{\cos\theta} = a^2 - b^2 = a^2e^2 \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{a^2e^2\cos\theta}{a} = ae^2\cos\theta \qquad \therefore \quad G(ae\cos\theta, 0)$$

por lo tanto tenemos que el punto medio de GP es:

$$(X, Y) = \left(\frac{ae^2\cos\theta + a\cos\theta}{2}, \frac{b\operatorname{sen}\theta}{2}\right)$$

Para encontrar el lugar geométrico del punto medio de GP vamos a despejar a $\cos\theta$ de X y a $\operatorname{sen}\theta$ de Y.

$$\Rightarrow \quad X = \frac{ae^2\cos\theta + a\cos\theta}{2} \qquad\qquad Y = \frac{b\operatorname{sen}\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{(ae^2 + a)\cos\theta}{2} \qquad\qquad Y = \frac{b\operatorname{sen}\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad X = \frac{a(e^2 + 1)\cos\theta}{2}; \qquad\qquad Y = \frac{b\operatorname{sen}\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{2X}{a(e^2 + 1)}; \qquad\qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{2Y}{b}$$

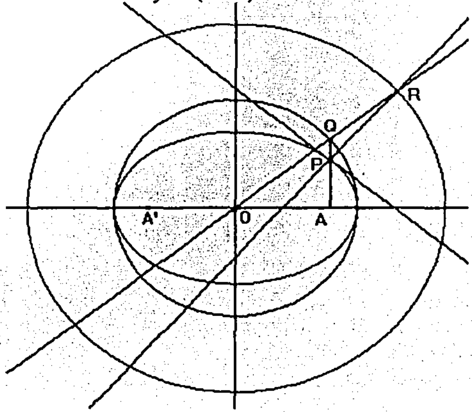
como $\qquad \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{2X}{a(e^2 + 1)}\right)^2 + \left(\frac{2Y}{b}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4X^2}{a^2(e^2 + 1)^2} + \frac{4Y^2}{b^2} = 1 \qquad \therefore \qquad \frac{X^2}{\frac{a^2(e^2 + 1)^2}{4}} + \frac{Y^2}{\frac{b^2}{4}} = 1$$

[22] Esta recta y la tangente además de ser perpendiculares, ambas pasan por el punto ($a\cos\theta$, $b\operatorname{sen}\theta$).

10. P es el punto (a cosθ, b senθ) en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ y Q es el punto correspondiente al círculo auxiliar. O es el centro de la elipse y la normal a la elipse en P intersecta OQ en R. Encuentra las coordenadas de R en términos de a, b y θ. Así de muestra que, cuando θ varía, el lugar geométrico de R es el círculo $x^2 + y^2 = (a+b)^2$.



La ecuación de la normal en P es:

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\operatorname{sen}\theta} = a^2 - b^2 \qquad \cdots(1)$$

y la ecuación de OQ es $y/x = tan\theta$, es decir, $y = xtan\theta$ $\cdots(2)$

Sustituyendo a y en la ecuación de la normal, es decir, (2) en (1) tenemos:

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{bx\,tan\theta}{\operatorname{sen}\theta} = a^2 - b^2$$

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{\dfrac{bx\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}}{\operatorname{sen}\theta} = a^2 - b^2$$

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{bx\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta\,\operatorname{sen}\theta} = a^2 - b^2$$

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{bx}{\cos\theta} = a^2 - b^2$$

$$ax - bx = (a^2 - b^2)\cos\theta$$
$$(a-b)x = (a^2 - b^2)\cos\theta$$

$$x = \frac{(a^2 - b^2)\cos\theta}{(a-b)}$$

$$x = \frac{(a-b)(a+b)\cos\theta}{(a-b)}$$

$$\therefore \qquad x = (a+b)\cos\theta \qquad \cdots (3)$$

Sustituyendo x en la ecuación de OQ, es decir, (3) en (2):

$$y = (a+b)\cos\theta\, tan\theta$$

$$y = (a+b)\cos\theta\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

así $\qquad y = (a+b)\operatorname{sen}\theta \qquad \cdots (4)$

por lo tanto, R tiene coordenadas $(x,y) = ((a+b)\cos\theta, (a+b)\operatorname{sen}\theta)$

Haciendo variar θ obtenemos el lugar geométrico de R.

Así de la ecuación (3) despejamos $\cos\theta$ y de la ecuación (4) a $\operatorname{sen}\theta$ de donde tenemos:

$$\cos\theta = \frac{x}{a+b} \; ; \qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{a+b}$$

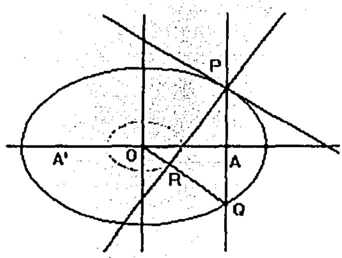
como $\qquad \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{x}{a+b}\right)^2 + \left(\frac{y}{a+b}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x^2}{(a+b)^2} + \frac{y^2}{(a+b)^2} = 1$$

$\therefore \qquad x^2 + y^2 = (a+b)^2 \qquad$ es el lugar gemétrico de R.

11. La perpendicular de cualquier punto P en la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ en el eje mayor intersecta a la elipse otra vez en el punto Q. O es el centro de la elipse y la normal en P intersecta OQ en el punto R. Encuentra las coordenadas de R y muestra que, cuando P varía, el lugar geométrico de R es la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = (a^2 - b^2)^2/(a^2 + b^2)^2$.



Como P es un punto sobre la elipse con coordenadas (a cos β, b sen β) entonces Q tiene coordenadas (a cos β, - b sen β). La ecuación de la recta OQ la vamos a obtener por medio de la forma punto pendiente

$$m = \frac{-b\,\text{sen}\,\theta}{a\cos\theta} = -\frac{b}{a}tan\theta$$

$$y = \left(-\frac{b}{a}tan\theta\right)x \qquad \cdots \quad (1)$$

Sustituyendo a y en la ecuación de la normal, es decir, (2) en (1) tenemos:

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{b\left(-\frac{b}{a}tan\theta\right)x}{\text{sen}\,\theta} = a^2 - b^2$$

$$\frac{ax}{\cos\theta} + \frac{\frac{b^2 x\,\text{sen}\,\theta}{a\cos\theta}}{\text{sen}\,\theta} = a^2 - b^2$$

$$\frac{ax}{\cos\theta} + = a^2 - b^2$$

$$\frac{ax}{\cos\theta} + \frac{b^2 x}{a(\cos\theta)} = a^2 - b^2$$

$$\frac{a^2 x + b^2 x}{a\cos\theta} = a^2 - b^2$$

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

$$x=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)a\cos\theta \qquad \cdots \quad (3)$$

$$y=-\frac{b}{a}\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)a\cos\theta\tan\theta$$

$$y=-b\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\cos\theta\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}\right)$$

$$y=-b\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\operatorname{sen}\theta \qquad \cdots \quad (4)$$

$$\therefore \quad R\left(\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)a\cos\theta\ , \quad -b\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\cos\theta=\frac{x}{a\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)}; \qquad \operatorname{sen}\theta=\frac{y}{-b\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)}$$

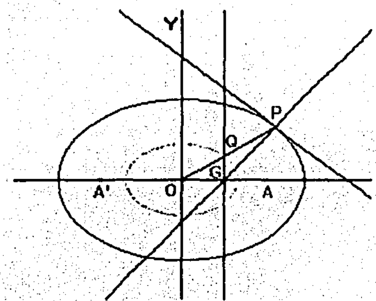
como $\quad \cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta=1$

$$\left(\frac{x}{a\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)}\right)^2+\left(\frac{y}{-b\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)}\right)^2=1$$

$$\frac{x^2}{a^2\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2}+\frac{y^2}{b^2\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2}=1$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)^2$$

12. La normal en un punto P de la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ intersecta al eje mayor en G. Si Q es el punto de intersección de la línea a través de G paralela al eje y, y la línea que une a P con el centro de la elipse, demuestra que la ecuación del lugar geométrico Q es $x^2/a^2 + y^2/b^2 = (a^2 - b^2)^2 / a^4$.



La ecuación de la normal en P($a\cos\theta$, $b\,\text{sen}\,\theta$) es :

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\text{sen}\,\theta} = a^2 - b^2 \qquad \cdots(1)$$

e intercepta al eje mayor cuando $y = 0$

$$\frac{ax}{\cos\theta} = a^2 - b^2$$

$$x = \frac{(a^2 - b^2)}{a}\cos\theta \qquad \therefore Q\left(\frac{(a^2 - b^2)}{a}\cos\theta, y\right)$$

La ecuación de la recta OQ la obtenemos por medio de la forma punto pendiente

$$m = \frac{b\,\text{sen}\,\theta - 0}{a\cos\theta - 0} = \frac{b\,\text{sen}\,\theta}{a\cos\theta} = \frac{b}{a}\tan\theta \qquad \Rightarrow \qquad y - 0 = \frac{b}{a}\tan\theta(x - 0)$$

$$y = \frac{b}{a}\tan\theta \cdot x$$

Sustituyendo a x en y para encontar el punto de intersección de la recta

$$x = \frac{(a^2 - b^2)}{a}\cos\theta \text{ con la recta } y = \frac{b}{a}\tan\theta \cdot x$$

$$y = \frac{b}{a}\tan\theta \cdot \frac{(a^2 - b^2)}{a}\cos\theta = \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2}\text{sen}\,\theta$$

$$\therefore Q\left(\frac{(a^2 - b^2)}{a}\cos\theta, \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2}\text{sen}\,\theta\right)$$

$$\Rightarrow \qquad x = \frac{(a^2 - b^2)}{a}\cos\theta \qquad\qquad y = \frac{b(a^2 - b^2)}{a^2}\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \qquad \cos\theta = \frac{ax}{a^2 - b^2} \qquad\qquad \operatorname{sen}\theta = \frac{a^2 y}{b(a^2 - b^2)}$$

Y como $\qquad \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

$$\left(\frac{ax}{a^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{a^2 y}{b(a^2 - b^2)}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{a^2x^2}{(a^2 - b^2)^2} + \frac{a^4y^2}{b^2(a^2 - b^2)^2} = 1$$

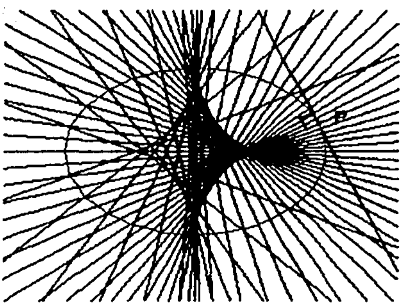
$$\Rightarrow \qquad a^2x^2 + \frac{a^4y^2}{b^2} = (a^2 - b^2)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{(a^2 - b^2)^2}{a^4}$$

13. Encontrar la evoluta de la elipse[23] $\qquad b^2x^2 + a^2x^2 = b^2a^2$

La evoluta de una elipse es una astroide "alargada" en la dirección de los ejes de coordenadas.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \qquad\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2y^2}$$



Primer paso:

$$h = \frac{(a^2 - b^2)x^3}{a^4} \qquad\qquad k = -\frac{(a^2 - b^2)y^3}{b^4}$$

Segundo paso:

$$x = \left(\frac{a^4h}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad\qquad y = -\left(\frac{b^4k}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

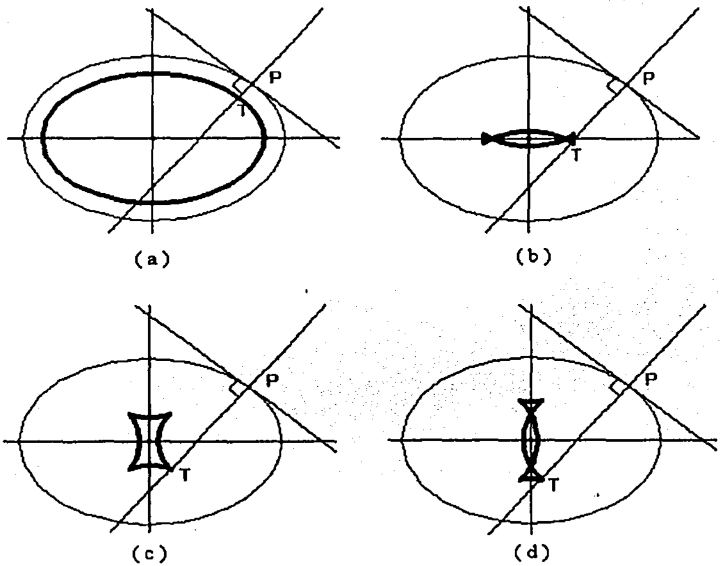
Tercer paso:

$$(ah)^{\frac{2}{3}} + (bh)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

que es la ecuación de la evoluta.

[23] Esta solución fue tomada de Granville W., *Calculo diferencial e integral*, p. 192.

14. Sea T un punto sobre la normal a una distancia d de un punto P de la elipse. Trazar el lugar geométrico de T. (este ejercicio fue tomado de Arnold V. *Catastrophe theory*).



Supongamos que un disturbio (es decir, ondas de choque, luz o una epidemia) son propagadas en algún medio.

Suponiendo que en el momento inicial del disturbio esta en la curva de la Figura (a) y que la velocidad de la propagación es 1.

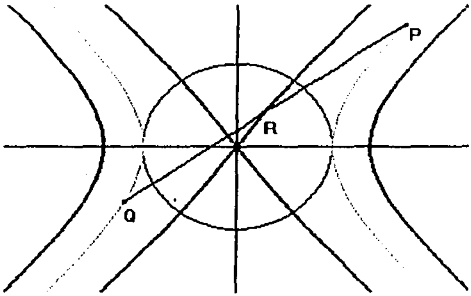
Para encontrar por donde el desorden estará en el tiempo T podemos mover el punto T sobre la normal de la curva. La curva resultante es llamada *frente de onda.*

En un principio el frente de onda no tiene singularidades, pero después de algún tiempo aparecen Figuras (b), (c) y (d).

15. Probar que el punto P donde las coordenadas son (a secθ, a tan θ) esta en la hipérbola rectangular $x^2 - y^2 = a^2$. Si Q es el punto donde el parámetro es $\theta + \pi/2$ y $R(x_1, y_1)$ es el punto medio de PQ, probar que

$$y_1 / x_1 = \text{sen}\theta + \cos\theta$$

y encuentra el lugar geométrico de R.



Demostración:
Tenemos que

$$R(x_1, y_1) = \frac{P+Q}{2} = \left(\frac{(a\sec\theta, a\tan\theta) + (a\sec(\theta+\pi/2), a\tan(\theta+\pi/2))}{2}\right)$$

Por lo que

$$R(x_1, y_1) = \left(\frac{a\sec\theta + a\sec(\theta+\pi/2)}{2}, \frac{a\tan\theta + a\tan(\theta+\pi/2)}{2}\right) \tag{1}$$

Como

$$\sec(\theta+\pi/2) = \frac{1}{\cos(\theta+\pi/2)} = \frac{1}{\cos(\pi/2-(-\theta))} = \frac{1}{\text{sen}(-\theta)} = \frac{1}{-\text{sen}\,\theta} = -\csc\theta$$

y

$$\tan(\theta+\pi/2) = \frac{\text{sen}(\theta+\pi/2)}{\cos(\theta+\pi/2)} = \frac{\text{sen}(\pi/2-(-\theta))}{\cos(\pi/2-(-\theta))} = \frac{\cos(-\theta)}{\text{sen}(-\theta)} = \frac{\cos\theta}{-\text{sen}\,\theta} = -\cot\theta$$

Sustituyendo lo anterior en (1) tenemos

$$R(x_1,y_1)=\left(\frac{a\sec\theta-a\csc\theta}{2},\frac{a tan\theta-a\cot\theta}{2}\right)=\left(\frac{a}{2}(\sec\theta-\csc\theta),\frac{a}{2}(tan\theta-\cot\theta)\right)$$

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{\frac{a}{2}(tan\theta-\cot\theta)}{\frac{a}{2}(\sec\theta-\csc\theta)}=\frac{tan\theta-\cot\theta}{\sec\theta-\csc\theta}=\frac{\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}-\frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}}{\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}=\frac{\frac{\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}{\frac{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}{\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}$$

$$\frac{y_1}{x_1}=\frac{\operatorname{sen}^2\theta-\cos^2\theta}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=\frac{(\operatorname{sen}\theta-\cos\theta)(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)}{\operatorname{sen}\theta-\cos\theta}=\operatorname{sen}\theta+\cos\theta$$

$$\therefore \qquad \frac{y_1}{x_1}=\operatorname{sen}\theta+\cos\theta$$

Ahora encontremos el

$$R(x_1,y_1)=\left(\frac{a}{2}(\sec\theta-\csc\theta),\frac{a}{2}(tan\theta-\cot\theta)\right)$$

$$x_1=\frac{a}{2}(\sec\theta-\csc\theta)$$

$$\frac{2x_1}{a}=\sec\theta-\csc\theta$$

$$\frac{2x_1}{a}+\csc\theta=\sec\theta$$

$$\left(\frac{2x_1}{a}+\csc\theta\right)^2=\sec^2\theta$$

$$\frac{4x_1^2}{a^2}+\frac{4x_1}{a}\csc\theta+\csc^2\theta=\sec^2\theta$$

$$y_1=\frac{a}{2}(tan\theta-\cot\theta)$$

$$\frac{2y_1}{a}=tan\theta-\cot\theta$$

$$\frac{2y_1}{a}+\cot\theta=tan\theta$$

$$\left(\frac{2y_1}{a}+\cot\theta\right)^2=tan^2\theta$$

$$\frac{4y_1^2}{a^2}+\frac{4y_1}{a}\cot\theta+\cot^2\theta=tan^2\theta$$

$$\sec^2\theta=1+tan^2\theta$$

$$\frac{4x_1^2}{a^2}+\frac{4x_1}{a}\csc\theta+\csc^2\theta=1+\frac{4y_1^2}{a^2}+\frac{4y_1}{a}\cot\theta+\cot^2\theta$$

$$\csc^2\theta=1+\cot^2\theta$$

$$\frac{4x_1^2}{a^2}+\frac{4x_1}{a}\csc\theta+\csc^2\theta=\frac{4y_1^2}{a^2}+\frac{4y_1}{a}\cot\theta+\csc^2\theta$$

$$\frac{4x_1^2}{a^2}+\frac{4x_1}{a}\csc\theta=\frac{4y_1^2}{a^2}+\frac{4y_1}{a}\cot\theta$$

$$4x_1^2+4ax_1\csc\theta=4y_1^2+4ay_1\cot\theta$$
$$x_1^2+ax_1\csc\theta=y_1^2+ay_1\cot\theta$$
$$x_1^2-y_1^2=ay_1\cot\theta-ax_1\csc\theta$$

$$x_1^2-y_1^2=a(y_1\cot\theta-x_1\csc\theta)$$

$$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(y_1\cot\theta-x_1\csc\theta)^2$$

$$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(y_1^2\cot^2\theta-2x_1y_1\cot\theta\csc\theta+x_1^2\csc^2\theta)$$
$$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(y_1^2(\csc^2\theta-1)-2x_1y_1\cot\theta\csc\theta+x_1^2\csc^2\theta)$$

$$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(y_1^2\csc^2\theta-y_1^2-2x_1y_1\cot\theta\csc\theta+x_1^2\csc^2\theta)$$

$$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(x_1^2(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)^2\csc^2\theta-y_1^2-2x_1x_1(\operatorname{sen}\theta+\cos\theta)\cot\theta\csc\theta+x_1^2\csc^2\theta)$$

$$\begin{aligned}(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(x_1^2(\operatorname{sen}^2\theta+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta+\cos^2\theta)\csc^2\theta-y_1^2\\ -2x_1^2\operatorname{sen}\theta\cot\theta\csc\theta-2x_1^2\cos\theta\cot\theta\csc\theta+x_1^2\csc^2\theta)\end{aligned}$$

$$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(x_1^2(1+2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\csc^2\theta-y_1^2-2x_1^2\cot\theta c-2x_1^2\cot^2\theta+x_1^2\csc^2\theta)$$

$$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(x_1^2\csc^2\theta+2x_1^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\csc^2\theta-y_1^2-2x_1^2\theta\cot\theta-2x_1^2\cot^2\theta+x_1^2\csc^2\theta)$$

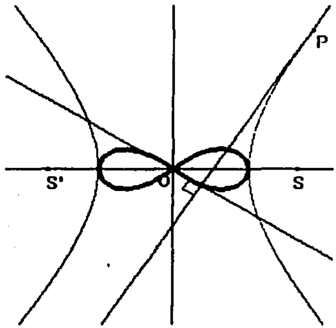
$$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(2x_1^2\csc^2\theta+2x_1^2\cot\theta-y_1^2-2x_1^2\cot\theta-2x_1^2\cot^2\theta)$$

$$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(2x_1^2\csc^2\theta-y_1^2-2x_1^2\cot^2\theta)$$

$$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(2x_1^2(\csc^2\theta-\cot^2\theta)-y_1^2)$$

$(x_1^2-y_1^2)^2=a^2(2x_1^2-y_1^2)$ que es el lugar geométrico de R.

16. Probar que la ecuación de cualquier tangente a la hipérbola $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ puede escribirse de la forma $y = mx \pm\sqrt{(a^2 m^2 - b^2)}$. Encontrar la ecuación del lugar geométrico del pie de la perpendicular desde el origen a la tangente de la hipérbola.



La ecuación de la tangente en el punto (x_1, y_1) es:

$$\frac{x \cdot x_1}{a^2} - \frac{y \cdot y_1}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

Si la ecuación de la tangente es expresada en la forma pendiente ordenada a origen :

$$y = mx + c \qquad (2)$$

$$-mx + y = c \qquad (3)$$

Comparando los coeficientes de las ecuaciones (1) y (3):

$$\frac{\frac{x_1}{a^2}}{-m} = \frac{-\frac{y_1}{b^2}}{1} = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x_1}{-a^2 m} = \frac{1}{c} \qquad\qquad -\frac{y_1}{b^2} = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow \qquad x_1 = \frac{-a^2 m}{c} \qquad\qquad y_1 = \frac{-b^2}{c}$$

Ahora, sustituimos x_1, y_1 en (3):

$$-m\left(\frac{-a^2 m}{c}\right) + \frac{-b^2}{c} = c \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2 m^2}{c} - \frac{b^2}{c} = c \quad \Rightarrow \quad a^2 m^2 - b^2 = c^2$$

$$\therefore \qquad c = \pm\sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

Si la ecuación de la tangente es expresada en la forma pendiente ordenada a origen :

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}$$

Como la tangente a la hipérbola es
$y = mx \pm \sqrt{(a^2 m^2 - b^2)}$

$\Rightarrow \qquad y - mx = \pm \sqrt{(a^2 m^2 - b^2)}$

y la recta perpendicular a ésta que pasa por el origen es
$my + x = 0$

de donde tenemos
$m = -x/y$

sustituyendo a m en la ecuación de la tangente, obtenemos:

$$y - \left(-\frac{x}{y}\right)x = \pm\sqrt{a^2\left(-\frac{x}{y}\right)^2 - b^2}$$

$$\Rightarrow \qquad y + \frac{x^2}{y} = \pm\sqrt{\frac{a^2x^2}{y^2} - b^2}$$

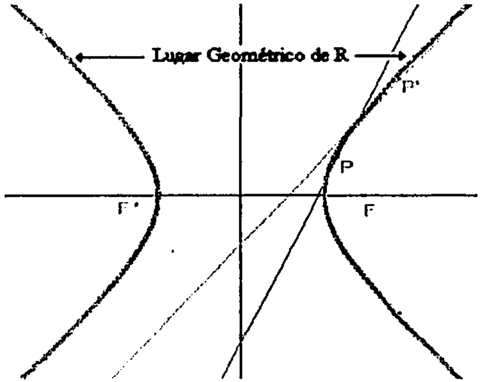
$$\Rightarrow \qquad \frac{y^2 + x^2}{y} = \pm\sqrt{\frac{a^2x^2 - b^2y^2}{y^2}} = \pm\frac{\sqrt{a^2x^2 - b^2y^2}}{\sqrt{y^2}} = \pm\frac{\sqrt{a^2x^2 - b^2y^2}}{y}$$

$$\Rightarrow \qquad y^2 + x^2 = \pm\sqrt{a^2x^2 - b^2y^2}$$

$$\Rightarrow \qquad (y^2 + x^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$$

que es la ecuación del lugar geométrico pedido, el cual es una "*roseta de dos hojas*" y cuando $a = b$ se obterdrá la "*Lemniscata de Bernoulli*"

17. **Cualquier punto de la hipérbola rectangular $x^2 - y^2 = a^2$ es $(a\cdot \sec\theta, a\cdot \tan\theta)$. Encuentra la ecuación del lugar geométrico del punto de intersección de las tangentes a la hipérbola en los puntos con parámetros θ y $\theta + \alpha$ cuando θ varía.**
¿Cuál es el lugar geométrico cuando $\alpha = \pi$?



La cuerda que une los puntos $(a\cdot\sec\theta, a\cdot\tan\theta)$ y $(a\cdot\sec\alpha, a\cdot\tan\alpha)$

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta-(\theta+\alpha)}{2}\right)-\frac{y}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{\theta+(\theta+\alpha)}{2}\right)=\cos\left(\frac{\theta+(\theta+\alpha)}{2}\right)$$

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{-\alpha}{2}\right)-\frac{y}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{2\theta+\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{2\theta+\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\alpha}{2}-\frac{y}{a}\operatorname{sen}\left(\frac{2\theta+\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{2\theta+\alpha}{2}\right) \qquad (1)$$

También tenemos la ecuación de la tangente en el punto (x_1, y_1)

$$\frac{x\cdot x_1}{a^2}-\frac{y\cdot y_1}{a^2}=1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x\cdot x_1}{a}-\frac{y\cdot y_1}{a}=a \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x_1}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{y_1}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\theta+\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{\cos\left(\frac{2\theta+\alpha}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x_1}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{2\theta+\alpha}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \cos\frac{2\theta+\alpha}{2} = \frac{a\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{x_1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_1}{\operatorname{sen}\frac{2\theta+\alpha}{2}} = \frac{a}{\cos\frac{2\theta+\alpha}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \operatorname{sen}\frac{2\theta+\alpha}{2} = \frac{y_1\cdot\cos\frac{2\theta+\alpha}{2}}{a}$$

$$\left(\cos\frac{2\theta+\alpha}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{sen}\frac{2\theta+\alpha}{2}\right)^2 = 1$$

$$\frac{a^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{x_1^2} + \frac{y_1^2\cdot\cos^2\frac{2\theta+\alpha}{2}}{a^2} = 1$$

Como $\quad \cos\frac{2\theta+\alpha}{2} = \frac{a\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{x_1} \qquad \Rightarrow \qquad \cos^2\frac{2\theta+\alpha}{2} = \frac{a^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{x_1^2} \qquad (4)$

Sustituyendo (4) en (3)

$$\frac{a^2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{x_1^2} + \frac{y_1^2\,\frac{a^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{x_1^2}}{a^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a^2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{x_1^2} + \frac{\frac{a^2\cdot y_1^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{x_1^2}}{a^2} = 1$$

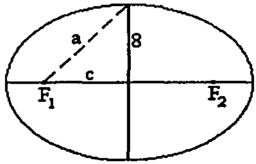
$$\frac{a^2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{x_1^2} + \frac{a^2\cdot y_1^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{a^2 x_1^2} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{a^2\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}{x_1^2} + \frac{y_1^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{x_1^2} = 1$$

$$a^2\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + y_1^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} = x_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad (a^2+y_1^2)\cos^2\frac{\alpha}{2} = x_1^2 \qquad (5)$$

$$a^2 + y_1^2 = x_1^2\sec^2\frac{\alpha}{2}$$

Anexo 4. Ejercicios bonitos de cónicas.

1. La base de un auditorio es de forma elíptica y tiene 20m de longitud y 16m de ancho. Si cae una aguja sobre un foco el ruido que produce se escucha claramente cerca del otro foco. ¿A qué distancia está un foco del otro?



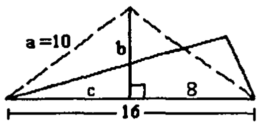
Como tiene 20m de longitud entonces a = 10
Además, como tiene 16m de ancho entonces b = 8.
Por Pitágoras $b^2 + c^2 = a^2$

$$8^2 + c^2 = 10^2$$
$$c^2 = 10^2 - 8^2$$
$$c^2 = 100 - 64$$
$$c^2 = 36$$
$$\Rightarrow \quad c = 6$$

pero $d(F_1, F_2) = 2c = 2(6) = 12$
así tenemos que la distancia entre los dos focos es de 12m

2. En el plano están dados los puntos A y B. Hallar el conjunto de puntos M para los cuáles el perímetro del triángulo AMB es igual a un valor constante p.
$AB + BM + MA = p$
Sea $AB = 2c$ fijo
$\Rightarrow \quad BM + MA = k$
$\therefore$ M esta en una elipse.

3. Se traza el contorno de una hortaliza de forma elíptica colocando dos estacas en el suelo con una separación de 16m y colocando un lazo de longitud total de 36m alrededor de ellas; se traza el contorno empleando una tercera estaca que al girarla alrededor de las dos fijas mantiene al lazo en tensión ¿De qué longitud y qué ancho será la hortaliza?



Como el lazo tiene una longitud de 36m y las estacas tienen una separación de 16m así que por Pitágoras

$$b^2 + c^2 = a^2$$
$$b^2 + 8^2 = 10^2$$
$$b^2 = 100 - 64$$
$$b^2 = 36$$
$$\Rightarrow \quad b = 6$$

por lo tanto el ancho es

$$2b = 2\,(6) = 12$$

4. Los planetas describen órbitas elípticas en torno al sol, que se encuentra en uno de los focos. En la siguiente tabla mostramos algunos datos relativos a Mercurio, la Tierra, Marte y Plutón. Completa la tabla calculando los datos que faltan y encuentra la ecuación de la órbita de cada planeta tomando como origen el centro de la elipse y como eje x la línea de los focos. Las distancias se proporcionan en millones de kilómetros.

Planeta	Semi- eje mayor	Semi–eje menor	Distancia del sol al centro	Excentricidad de la órbita	Distancia mínima del planeta al sol
	a	b	c	e	$a-c$
Mercurio	58.5	57.27	11.9	0.205	46.8
Tierra	149.6	149.58	2.393	0.016	147.2
Marte	228.2	227.21	21.222	0.093	206.9
Plutón	6022	5835.4	1487.4	0.247	4534.5

Vamos a resolver sólo para Mercurio y de manera similar se resuelve para los otros planetas.

Como $\quad e = \dfrac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad c = ae = (58.5)(0.205) = 11.9 \quad \Rightarrow \quad c = 11.9$

En seguida calculamos el valor de b usando:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$
$$b = \sqrt{(58.5)^2 - (11.9)^2} = \sqrt{3422.25 - 141.61} = \sqrt{3280.64}$$
$$b = 57.27$$

Ahora calculamos la distancia mínima:

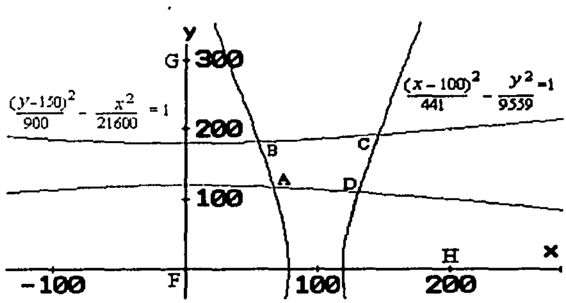
$$a - c = 58.5 - 11.9 = 46.6 \quad \Rightarrow \quad a - c = 46.6$$

Tomando como origen el centro de la elipse y como eje x la línea de los focos, la ecuación de la órbita de Mercurio es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{donde} \qquad a^2 = 3422.25 \qquad b^2 = 3279.85$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x^2}{3422.25} + \frac{y^2}{3279.85} = 1$$

5. Tres estaciones F, G y H transmiten en forma sincronizada ondas de radio para la navegación. G se halla 300km al norte de F y H a 200km al este de F. Un barco recibe la señal de F veinte cienmilésimas de segundo después que la señal de G y catorce cienmilésimas de segundo después que la de H. Determina gráficamente la posición del barco relativa alas estaciones F, G y H tomando como origen al punto F. (Supón que las ondas viajan a 300 000km/s.)



Abajo veremos que el barco se encuentra en la intersección de dos hipérbolas que se intersectan en cuatro puntos.
Tenemos que el tiempo es proporcional a la distancia, tomando en cuentas las estaciones G y F sabemos que la señal que se recibió primero fue la de G por lo que el barco se encuentra más cerca de G que de F, es decir en la rama de arriba.

Por otro lado, sabemos que la señal que se recibió primero fue la de H que la de F por lo que el barco se encuentra más cerca de que de H, es decir en la rama de la derecha, así tenemos que el barco se localiza en el punto C (de la Figura de Arriba) que tiene coordenadas aproximadamente (145, 193).

Un aparato receptor Loran-C a bordo de un avión o barco en movimiento mide la diferencia de tiempo que existe entre la recepción de un pulso procedente de una de ellas (digamos F) y los pulsos emitidos al mismo tiempo por las otras dos.

Solución:
Sea t_1 = tiempo en que se recibe la señal de la estación ubicada en H.
Y t_2 = tiempo en que se recibe la señal de F $\Rightarrow$ $t_2 = t_1 + 14/100\,000$
Además, $d = vt$, pero $v = 300\,000$km/s
$\therefore$ $d = 300\,000\,t$
$\Rightarrow$ $d_1 = 300\,000\,t_1$ y $d_2 = 300\,000\,t_2 = 300\,000(t_1 + 14/100\,000)$
y si calculamos
$d_2 - d_1 = 300\,000\,(t_1 + 14/100\,000) - 300\,000\,t_1 = 300\,000\,t_1 + 42 - 300\,000\,t_1 = 42$

Como la diferencia de las distancias es igual a una constante implica que el lugar geométrico en donde se encuentra el barco es una hipérbola en la que $2a = 42$.
Ahora vamos a determinar analíticamente en que hipérbola se encuentra el barco.

$d((0,0),(x,y)) - d((200,0),(x,y)) = \pm 42$

$\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-200)^2+y^2} = \pm 42$

$\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-200)^2+y^2} \pm 42$

Elevando al cuadrado

$x^2+y^2 = \left(\sqrt{(x-200)^2+y^2} \pm 42\right)^2$

$x^2+y^2 = (x-200)^2 + y^2 \pm 84\sqrt{(x-200)^2+y^2} + 1764$

$x^2 = x^2 - 400x + 40000 \pm 84\sqrt{(x-200)^2+y^2} + 1764$

$0 = -400x \pm 84\sqrt{(x-200)^2+y^2} + 41764$

$0 = -100x \pm 21\sqrt{(x-200)^2+y^2} + 10441$

$100x - 10441 = \pm 21\sqrt{(x-200)^2+y^2}$

$(100x-10441)^2 = \left(\pm 21\sqrt{(x-200)^2+y^2}\right)^2$

$10000x^2 - 2088200x + 109014481 = 441\left((x-200)^2+y^2\right)$

$10000x^2 - 2088200x + 109014481 = 441\left(x^2 - 400x + 40000 + y^2\right)$

$10000x^2 - 2088200x + 109014481 = 441x^2 - 176400x + 17640000 + 441y^2$

$10000x^2 - 441x^2 - 2088200x + 176400x - 441y^2 = 17640000 - 109014481$

$9559x^2 - 1911800x - 441y^2 = -91374481$

$9559(x^2 - 200x) - 441y^2 = -91374481$

$9559(x^2 - 200x + 10000) - 441y^2 = -91374481 + 9559(10000)$

$9559(x^2 - 100)^2 - 441y^2 = 4215519$

$\frac{(x-100)^2}{441} - \frac{y^2}{9559} = 1$ esta de las hipérbolas en donde se encuentra el barco.

De forma similar se obtiene la diferencia de tiempos entre las estaciones ubicadas en F y G.
Sea t_3 = tiempo en que se recibe la señal de la estación ubicada en G.
Y t_2 = tiempo en que se recibe la señal de F $\Rightarrow$ $t_2 = t_3 + 20/100\,000$

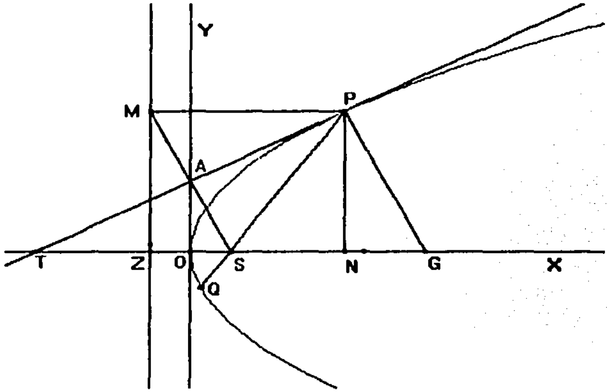
De la ecuación: $d = 300\,000\, t$
$\Rightarrow$ $d_3 = 300\,000\, t_3$ y $d_2 = 300\,000\, t_2 = 300\,000(t_3 + 20/100\,000)$
y si calculamos
$d_2 - d_3 = 300\,000\,(t_3 + 20/100\,000) - 300\,000\, t_3 = 300\,000\, t_3 + 60 - 300\,000\, t_3 = 60$

Como la diferencia de las distancias es igual a una constante implica que el lugar geométrico en donde se encuentra el barco es una hipérbola en la que $2a = 60$.

Así, obtenemos que la otra hipérbola donde se encuentra el barco es:

$$\frac{(y-150)^2}{900} - \frac{x^2}{21600} = 1$$

En estos ejercicios la ecuación de la parábola es $y^2 = 4ax$.



6. P y Q son dos puntos sobre la parábola con parámetros p y q. O es el origen y OP es perpendicular a OQ.
   i) Mostrar que $pq + 4 = 0$
   ii) Y que las tangentes a la curva en P y Q intersectan a la recta $x + 4a = 0$.

Demostración de i).
Como P es el punto con coordenadas $(ap^2, 2ap)$ entonces la recta OP tiene pendiente

$$m = \frac{2ap - 0}{ap^2 - 0} = \frac{2}{p}$$

usando la forma punto pendiente, la ecuación de la recta OP es

$$y - 0 = \frac{2}{p}(x - 0) \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{2}{p}x$$

de igual modo tenemos la ecuación de la recta OQ es

$$y = \frac{2}{q}x$$

como OP es perpendicular a OQ entonces

$$\frac{2}{p}\left(\frac{2}{q}\right) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad 4 = -pq \qquad \Rightarrow \qquad pq + 4 = 0$$

Demostración de ii)

tenemos que la ecuación de la tangente en P es

$x - py + ap^2 = 0$

tenemos que la ecuación de la tangente en Q es

$x - qy + aq^2 = 0$

para encontrar el punto de intersección de ambas tangentes hacemos

$$
\begin{aligned}
\_\, x - py + ap^2 &= 0 \\
\underline{x - qy + aq^2 = 0} & \\
(q-p)y - a(q^2 - p^2) &= 0 \\
(q-p)y - a(q-p)(q+p) &= 0 \\
y - a(q+p) &= 0 \\
y &= a(q+p)
\end{aligned}
$$

sustituyendo en la ecuación de la tangente en P tenemos

$x - pa(p+q) + ap^2 = 0$

$x - ap^2 - apq + ap^2 = 0$

$x - apq = 0$

$x + a(-pq) = 0$

$x + 4a = 0$

7. Encuentra las coordenadas del punto de intersección C de las tangentes a la parábola en los puntos $A(at_1^2, 2at_1)$ y $B(at_2^2, 2at_2)$. Mostrar que el área del triángulo ABC es $[a^2 (t_1 - t_2)^3] /2$.

Tenemos que la ecuación de la tangente en A es

$x - t_1 y + a(t_1)^2 = 0$

y en B

$x - t_2 y + a(t_2)^2 = 0$

C es el punto de intersección de estas tangentes así tenemos

$\_\, x - t_1 y + a(t_1)^2 = 0$.

$\underline{x - t_2 y + a(t_2)^2 = 0}$

$\Rightarrow \quad (t_2 - t_1)y + a[(t_1)^2 - \underline{(t_2)^2}] = 0$

$\Rightarrow \quad (t_2 - t_1)y = -a[(t_1)^2 - \underline{(t_2)^2}]$

$$y=\frac{-a\left[(t_1)^2-(t_2)^2\right]}{t_1-t_2}=\frac{-a\left[(t_1-t_2)(t_1+t_2)\right]}{-(t_1-t_2)}=a(t_1+t_2) \qquad \therefore\quad y=a(t_1+t_2)$$

suatituyendo y en la ecuación (1)

$$\begin{aligned} x-t_1a(t_1+t_2)+a(t_1)^2&=0\\ x-a(t_1)^2-at_1t_2+a(t_1)^2&=0\\ x-at_1t_2&=0\\ x&=at_1t_2 \qquad \therefore\quad C(at_1t_2,\ a(t_1+t_2))\end{aligned}$$

y como el área de un triángulo $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ es

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}$$

entonces tenemos que para $A\left(at_1^2,2at_1\right)$, $B\left(at_2^2,2at_2\right)$, $C(at_1t_2,\ a(t_1+t_2))$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} at_1^2 & 2at_1 & 1\\ at_2^2 & 2at_2 & 1\\ at_1t_2 & a(t_1+t_2) & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(at_1^2\begin{vmatrix} 2at_2 & 1\\ a(t_1+t_2) & 1\end{vmatrix}-2at_1\begin{vmatrix} at_2^2 & 1\\ at_1t_2 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} at_2^2 & 2at_2\\ at_1t_2 & a(t_1+t_2)\end{vmatrix}\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(at_1^2(2at_2-a(t_1+t_2))-2at_1\left(at_2^2-at_1t_2\right)+\left(at_2^2a(t_1+t_2)-2at_2at_1t_2\right)\right)$$

$$\frac{1}{2}\left(2a^2t_2t_1^2-a^2t_1^2(t_1+t_2)-2a^2t_1t_2^2+2a^2t_1^2t_2+a^2t_2^2(t_1+t_2)-2a^2t_2t_1t_2\right)$$

$$\frac{a^2}{2}\left(2t_2t_1^2-t_1^2(t_1+t_2)-2t_1t_2^2+2t_1^2t_2+t_2^2(t_1+t_2)-2t_2t_1t_2\right)$$

$$\frac{a^2}{2}\left(2t_2t_1^2-t_1^3+t_1^2t_2-2t_1t_2^2+2t_1^2t_2+t_2^2t_1+t_2^3-2t_1t_2^2\right)$$

$$\frac{a^2}{2}\left(t_2^3-3t_1t_2^2+3t_2t_1^2-t_1^3\right)=\frac{a^2}{2}(t_2-t_1)^3$$

8. La tangente a la parábola en el punto P, con parámetro p, corta el eje de la parábola con el punto L y cualquier punto a través de L intersecta la parábola en los puntos Q y R con parámetros q y r.
   i) Probar que p, q y r están en progresión geométrica.

ii) Mostrar también que si las tangentes en Q y R se intersectan en M, entonces MP, es perpendicular al eje de la parábola.

Demostración de i).
La ecuación de la tangente en P es
$x - py + ap^2 = 0$
y corta al eje x cuando $y = 0$, entonces
$x - p(0) + ap^2 = 0$
$x + ap^2 = 0$

$x = -ap^2$
por lo tanto L$(-ap^2, 0)$
la ecuación de la cuerda que pasa por q y R es
$x - \frac{1}{2}(q+r)y + aqr = 0$
como la cuerda pasa por L entonces
$-ap^2 - \frac{1}{2}(q+r)(0) + aqr = 0$
$-ap^2 + aqr = 0$
$aqr = ap^2$
$qr = p^2$
$\Rightarrow \quad p = \sqrt{qr}$

sea $\quad r = \dfrac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}}$

$$q, \quad q\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} = \left(\sqrt{q}\right)^2 \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} = \sqrt{q}\sqrt{r} = \sqrt{qr} = p, \quad p\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} = \sqrt{qr}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} = \sqrt{q}\sqrt{r}\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{q}} = \left(\sqrt{r}\right)^2 = r$$

Demostración de ii).
La ecuación de la tangente en Q es
$$x - qy + aq^2 = 0 \qquad (1)$$
La ecuación de la tangente en R es
$$x - ry + ar^2 = 0 \qquad (2)$$
Para encontrar el punto de intersección M de ambas tangentes hacemos

$$\begin{array}{r} x - qy + aq^2 = 0 \\ -\ \underline{x - ry + ar^2 = 0} \end{array}$$

$$(-q + r)y + a(q^2 - r^2) = 0$$
$$-(q - r)y + a(q - r)(q + r) = 0$$
$$-y + a(q + r) = 0$$
$$y = a(q + r)$$

Sustituyendo y en (1)
$$x - q\,a(q + r) + aq^2 = 0$$
$$x - a q^2 + aq r + aq^2 = 0$$
$$x - a q r = 0$$
$$x = a q r$$

como $qr = p^2$
$$\therefore \quad x = ap^2$$

$\therefore$ M$(ap^2, a(r + q))$

Como P(ap^2, $2ap$) observamos que la coordenada x de M y P es ap^2, así tenemos que MP es perpendicular a al eje de la parábola.

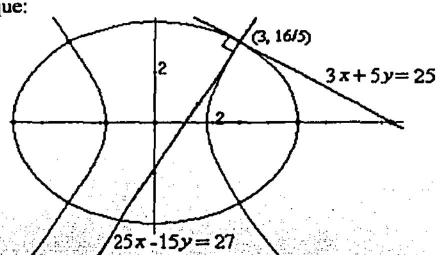
9. Prueba que los puntos (3, 0) y (–3, 0) son los focos de la elipse

$$x^2/25 + y^2/16 = 1$$

Encuentra la longitud del semi–eje mayor y la excentricidad de la hipérbola la cual tiene los mismos focos e intersecta a la elipse en el punto (3, 16/5). Obtén la ecuación de las tangentes a la elipse y a la hipérbola en el punto (3, 16/5) mostrando que forman ángulos rectos.

Como los focos son los puntos $(3,0)$ y $(-3,0)$ por lo tanto $c=3$.

Si las curvas se intersectan en el punto (3, 16/5) entonces este punto también pertenece a la hipérbola, por lo que:



$$d\left((-3,0),\left(3,\frac{16}{5}\right)\right)-d\left((3,0),\left(3,\frac{16}{5}\right)\right)=\pm 2a$$

$$\sqrt{(3-(-3))^2+\left(\frac{16}{5}-0\right)^2}-\sqrt{(3-3)^2+\left(\frac{16}{5}-0\right)^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{36+\frac{256}{25}}-\sqrt{\left(\frac{16}{5}\right)^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{\frac{900+256}{25}}-\frac{16}{5}=\pm 2a \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\frac{1156}{25}}-\frac{16}{5}=\pm 2a$$

$$\frac{34}{5}-\frac{16}{5}=\pm 2a \quad \Rightarrow \quad \frac{18}{5}=\pm 2a$$

$$a=\pm\frac{18}{10} \quad \Rightarrow \quad a=\pm\frac{9}{5}$$

Para calcular la excentricidad de la hipérbola tomamos el valor positivo de a:

$$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{\frac{9}{5}}=\frac{15}{9}=\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad e=\frac{5}{3}$$

La ecuación de la tangente a la hipérbola en el punto (3, 16/5) es:

$$\frac{x_1 x}{a^2}-\frac{y_1 y}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\frac{3}{\frac{81}{25}}}{}x-\frac{\frac{16}{5}}{\frac{144}{25}}y=1$$

$$\frac{75}{81}x-\frac{400}{720}y=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{25}{27}x-\frac{5}{9}y=1$$

$$25x-\frac{5}{9}(27)y=27 \quad\Rightarrow\quad 25x-15y=27 \qquad (1)$$

$$\frac{x_1 x}{a^2}+\frac{y_1 y}{b^2}=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{3x}{25}+\frac{\frac{16}{5}y}{16}=1$$

$$\frac{3}{25}x+\frac{16}{80}y=1 \quad\Rightarrow\quad \frac{3}{25}x+\frac{1}{5}y=1$$

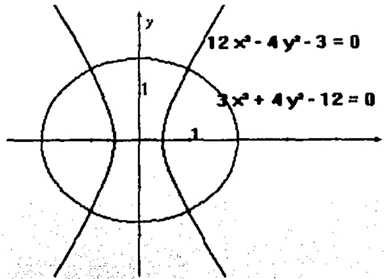
$$3x+\frac{25}{5}y=25 \quad\Rightarrow\quad 3x+5y=25 \qquad (2)$$

$$(25)3+(-15)5=75-75=0 \qquad \therefore$$

10. Los puntos A y B son $(1, 0)$ y $(-1, 0)$ respectivamente. Encuentra las ecuaciones de los lugares geométricos de los puntos P y Q tales que

$$AP + BP = 4, \qquad AQ - BQ = \pm 1.$$

Encuentra los puntos de intersección de estos lugares.



$$d((1,0),(x,y)) + d((-1,0),(x,y)) = 4$$
$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + \sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 4$$
$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4 - \sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

Elevando al cuadrado

$$(x-1)^2 + y^2 = \left(4 - \sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right)^2$$
$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 16 - 8\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + (x+1)^2 + y^2$$
$$x^2 - 2x + 1 = 16 - 8\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + x^2 + 2x + 1$$
$$-2x - 2x - 16 = -8\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$
$$-4x - 16 = -8\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$

Elevando Dividiendo entre - 4

$$x + 4 = 2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}$$
$$(x+4)^2 = \left(2\sqrt{(x+1)^2 + y^2}\right)^2$$
$$x^2 + 8x + 16 = 4\left((x+1)^2 + y^2\right) = 4x^2 + 8x + 4 + 4y^2$$
$$12 = 3x^2 + 4y^2$$
$$1 = \frac{3x^2}{12} + \frac{4y^2}{12}$$
$$\therefore \qquad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

$$d((1,0),(x,y)) - d((-1,0),(x,y)) = \pm 1$$
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} - \sqrt{(x+1)^2+y^2} = \pm 1$$
$$\sqrt{(x-1)^2+y^2} = \sqrt{(x+1)^2+y^2} \pm 1$$

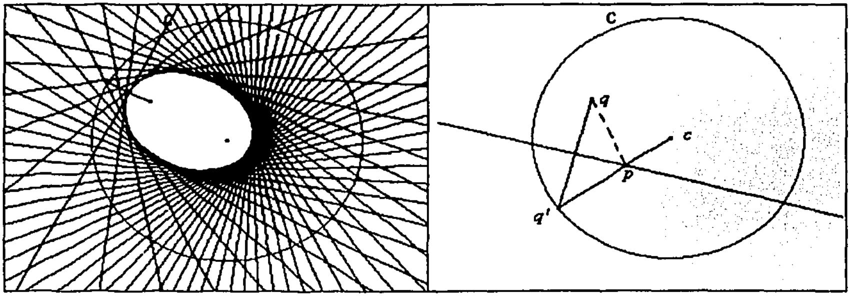
Elevando al cuadrado

$$(x-1)^2+y^2 = \left(\sqrt{(x+1)^2+y^2} \pm 1\right)^2$$
$$x^2-2x+1+y^2 = (x+1)^2+y^2 \pm 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}+1$$
$$x^2-2x = x^2+2x+1 \pm 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$
$$-2x-2x-1 = \pm 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$
$$(-4x-1)^2 = \left(\pm 2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2$$
$$16x^2+8x+1 = 4\left((x+1)^2+y^2\right)$$
$$16x^2+8x+1 = 4x^2+8x+4+4y^2$$
$$16x^2-4x^2-4y^2 = 4-1$$
$$12x^2-4y^2 = 3$$
$$4x^2 - \frac{4y^2}{3} = 1$$
$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1$$

Anexo 5: Talleres

Resultados de los talleres propuestos.

5. 1. Doblado de Papel Encerado.
Actividad 1.
En la primera parte de la siguiente figura mostramos la curva que resulta de doblar el papel



Demostración
Sea q' el punto tal que al doblar el papel q quedo sobrepuesto en q', c el centro de la circunferencia C y r el radio, así tenemos que

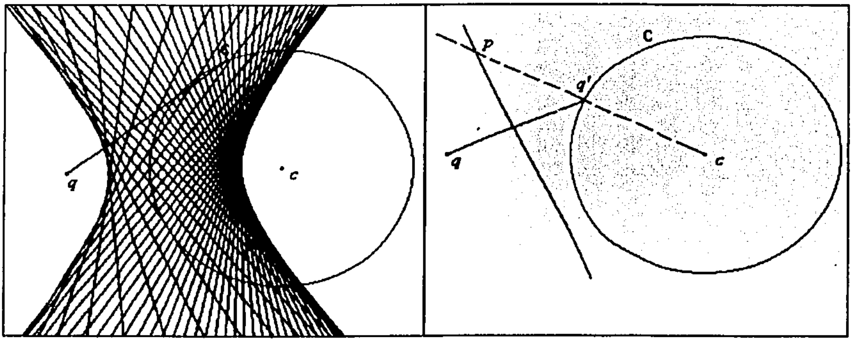
$$d = (c,\ q') = r$$

Pero al doblar el papel de tal modo que el punto q queda sobrepuesto en la circunferencia en q', obtenemos la mediatriz del segmento qq'. Sea p el punto de intersección de la mediatriz y del segmento cq', por lo que

$$d(c,\ p) + d(p, q') = r$$
pero
$$d(p,\ q') = d(p, q)$$
entonces
$$d(c,\ p) + d(p, q) = r$$

Así tenemos que p está en el lugar geométrico tal que la suma de las distancias de p a c y q es una constante mayor que $d(c, q)$. Por lo que tenemos que p esta en una elipse cuyos focos son c y q.

Actividad 2.



Demostración:

En cada doblez el punto q se sobrepone en un punto q' en la circunferencia y se obtiene la mediatriz del segmento qq'. Sea p el punto de intersección de la mediatriz y de la recta cq', entonces

$$d(c,\ p) = d(c, q') + d(q', p)$$

pero

$$d(c,\ q') = r$$

entonces

$$d(c,\ p) = r + d(q', p)$$

$$d(c,\ p) - d(q', p) = r$$

como p esta en la mediatriz del segmento qq' entonces

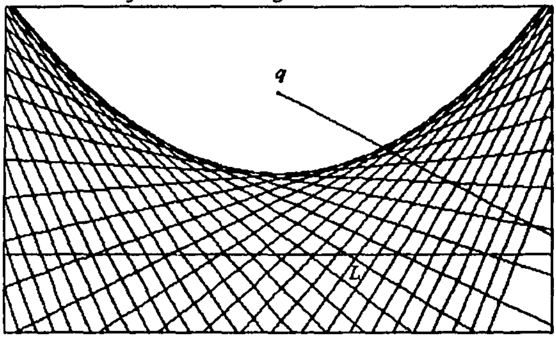
$$d(q', p) = d(p, q)$$

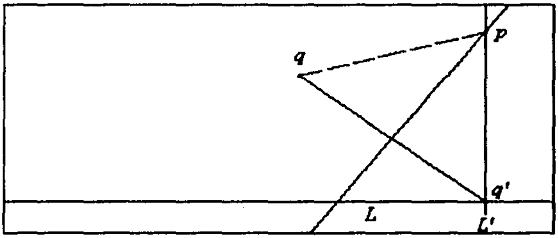
así tenemos

$$d(c,\ p)\ -\ d(p, q) = r$$

Así tenemos que p está en el lugar geométrico tal que la diferencia de las distancias de p a c y q es una constante menor que $d(c, q)$. Por lo que tenemos que p esta en una hipérbola cuyos focos son c y q.

Actividad 3.
Situemos los ejes como en la figura anterior



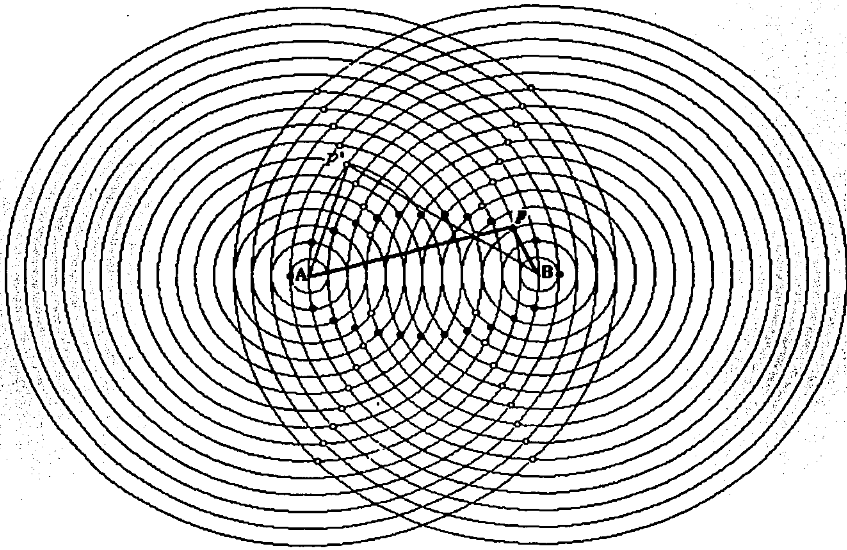


Demostración:
En cada doblez el punto q se sobrepone en la recta en un punto q' y se obtiene la mediatriz del segmento qq'. Sea L' la perpendicular a L que pasa por q'. Sea p el punto de intersección de L' y de la mediatriz, entonces como p esta en la mediatriz del segmento qq' tenemos

$$d(q, p) = d(p, q')$$

Así tenemos que p está en el lugar geométrico tal que la distancia de q a p y es igual a la distancia de p a L'. Así tenemos que p esta en una parábola donde el foco y la directriz son q y L' respectivamente.

5. 2. Circunferencias concéntricas.
Actividad 1.



Sea **P** un punto cual quiera marcado con • y tomando las distancias AP y PB observamos que

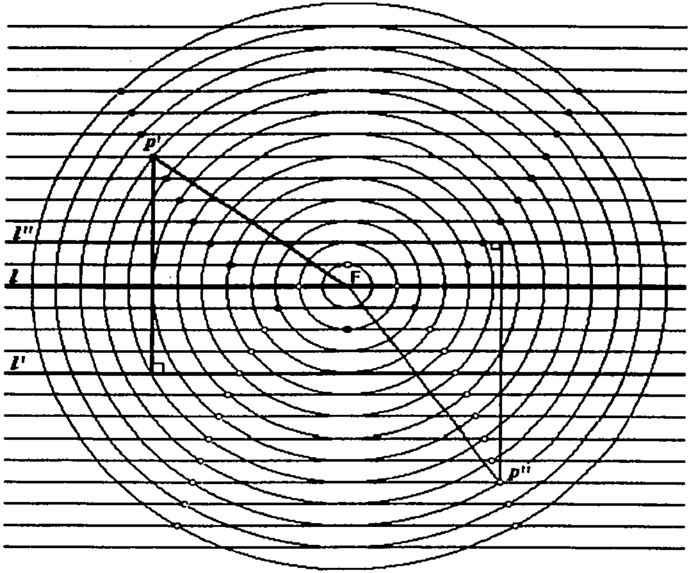
$$AB + PB = 14.$$

Es decir, los puntos se encuentran en una elipse.

Ahora tomemos un punto cualquiera P marcado con o y tomamos $|AP - PB| = 5$

De donde tenemos que los puntos se encuentran en una hipérbola.

Actividad 2.

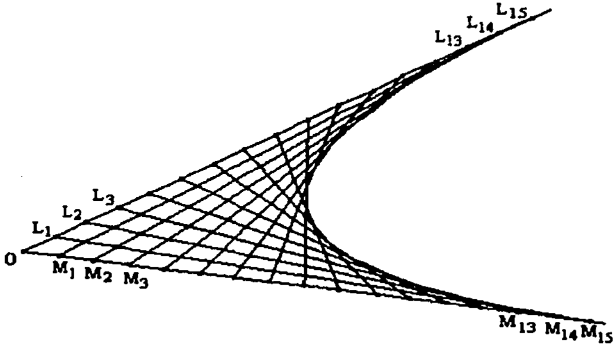


En la ilustración tenemos dos conjuntos de puntos, tomamos un punto cualquiera **p** de los que están marcados con • y vemos $d(F, p) = d(p, l) = 10$.

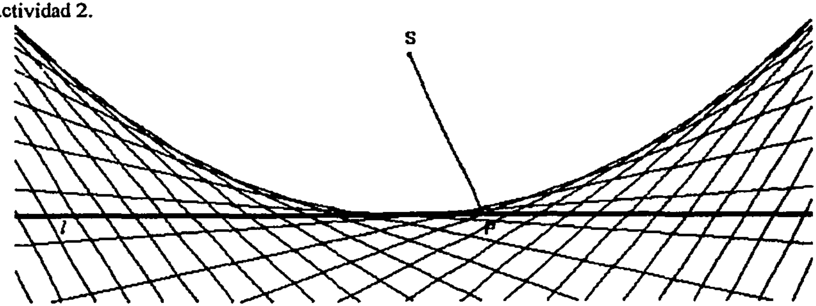
Y para un punto cualquiera p' marcado con o tenemos que $d(F, p') = d(p', l) = 11$.

5. 3. Métodos para dibujar una parábola.

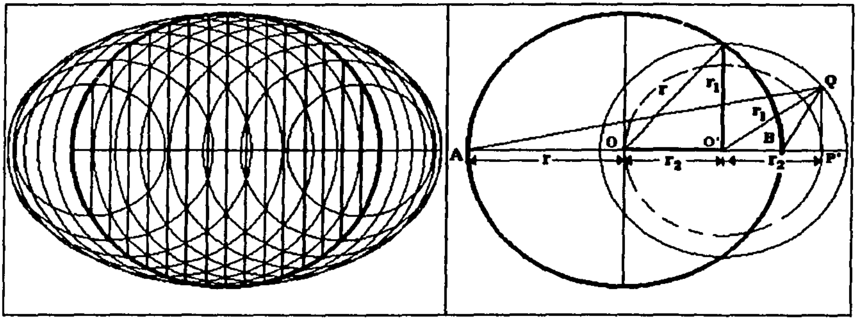
Actividad 1.



Actividad 2.



5. 4. Métodos para dibujar una elipse.



Para determinar el punto en que la circunferencia de radio r_1 toca a la curva envolvente se traza una circunferencia con radio el segmento r^2 = OO' y centro en O' obteniéndose el punto P'; se levanta una perpendicular por P' que corta a la circunferencia en Q (ver Figura); este es el punto de la envolvente y se verifica que:

$$QA^2 = P'A^2 + P'Q^2 = (r+2r_2)^2 + (r_1^2 - r_2^2) = r^2 + 4rr_2 + 4r_2^2 + r_1^2 - r_2^2 = r^2 + 4rr_2 + 3r_2^2 + r_1^2$$
$$= 2r_2^2 + 4rr_2 + r^2 + (r_2^2 + r_1^2) = 2r_2^2 + 4rr_2 + r^2 + r^2 = 2r_2^2 + 4rr_2 + 2r^2$$
$$= 2(r_2^2 + 2rr_2 + r^2) = 2(r_2 + r)^2 = 2(r + r_2)^2 \qquad \Rightarrow \qquad QA = \sqrt{2}(r + r_2)$$

$$QB^2 = P'B^2 + P'Q^2 = (r-2r_2)^2 + (r_1^2 - r_2^2) = r^2 - 4rr_2 + 4r_2^2 + r_1^2 - r_2^2 = r^2 - 4rr_2 + 3r_2^2 + r_1^2$$
$$= 2r_2^2 - 4rr_2 + r^2 + (r_2^2 + r_1^2) = 2r_2^2 - 4rr_2 + r^2 + r^2 = 2r_2^2 - 4rr_2 + 2r^2$$
$$= 2(r_2^2 - 2rr_2 + r^2) = 2(r_2 - r)^2 = 2(r - r_2)^2 \qquad \Rightarrow \qquad QB = \sqrt{2}(r - r_2)$$

$$QA + QB = \sqrt{2}(r + r_2) + \sqrt{2}(r - r_2) = \sqrt{2}r + \sqrt{2}r_2 + \sqrt{2}r - \sqrt{2}r_2 = \sqrt{2}r + \sqrt{2}r = 2\sqrt{2}r$$

Así tenemos que la envolvente es una elipse con focos en A y B.

Como $\qquad \mathrm{QA} + \mathrm{QB} = 2\sqrt{2}\,r$

Y $\qquad \mathrm{QA} + \mathrm{QB} = 2a$

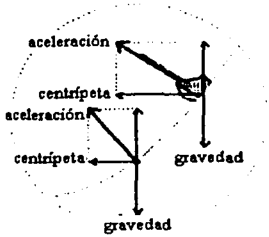
$$\therefore \qquad 2a = 2\sqrt{2}\,r$$
$$a = \sqrt{2}\,r$$
$$b = c = r$$

Calculemos la excentricidad de esta elipse

$$e = \frac{c}{a} = \frac{r}{\sqrt{2}\cdot r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad e = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

5. 7. Máquina girando agua.

La superficie forma una parábola. Como la caja gira muy rápido, el agua tenderá a continuar moviéndose en una línea tangente al círculo. Sin embargo, la caja aprisiona el agua y la forzá para seguir moviéndose en un círculo el agua cerca del eje de la caja va alrededor in un círculo grande al mismo tiempo que el agua cerca de del centro va alrededor de un círculo pequeño. Que significa que el agua cerca del eje más se mueve más rápidamente que el agua cerca del centro. La velocidad con la que un objeto se mueve en un círculo, la longitud la fuerza necesaria para mantenerla en el círculo. Esta fuerza es llamada fuerza centrípeta.



La componente horizontal de la aceleracion provoca la fuerza centrípeta

5. 12. Reloj de sol

Los relojes de Sol no marcan la hora que marca tu reloj, sino la hora solar. Para saber la hora civil (la del reloj) hay que hacer correcciones:

1. La primera es debida a que la hora civil está adelantada una hora en el horario de verano (del primer domingo de abril al último domingo de octubre) Hay que sumar una hora a la hora solar.
2. Si donde vives está al Oeste del meridiano de Greenwich la longitud es negativa. En este caso tienes que multiplicar los grados de latitud por 4 para obtener los minutos que tienes que sumar a la hora leída en el reloj de Sol.

Bibliografía.

Libros.

1. Arnold V., *Catastrophe theory*, Springer – Verlag, 2nd. Edition.
2. Boltianski V, *La envolvente*, Editorial MIR Moscú 1977.
3. Granville W., *Cálculo diferencial e integral*, Editorial Limusa, séptima reimpresión, 1984.
4. Hartley E., *Cartesian geometry of the plane*, Cambridge University, 1966.
5. Health T., *A manual of greek mathematics*, primera impresión, Dover Publications, inc. New York, 1963.
6. Lara A. Miguel, *Los matemáticos griegos*, primera edición, México 1993.
7. Lehmann C., *Geometría analítica*, UTEHA, México 1974.
8. Newman J., *Sigma el mundo de las matemáticas*, vol. 1, grijalbo, Barcelona, 1997.
9. Río S. J. Del, *Lugares geométricos. Cónicas*, primera reimpresión, editorial Síntesis, España 1996.
10. Sundara T., *Geometric exercises in paper folding*, Dover Publications, inc., New York, 1966.
11. Torres A. Guillermo, *Geometría Analítica*, Editorial Santillana, México 1998.
12. Vasíliev N. B., Gutenmájer V. L, *Rectas y curvas*, Editorial MIR Moscú 1980.
13. Wooton W, et al, *Geometría análitica moderna*, tercera reimpresión, Publicaciones Cultural, México 1985.

Artículos.

Drucker D., *Reflection properties of Curves and Surfaces*, Mathematics Magazine, Vol. 65, No. 3, Junio 1992, p 147 –157.

Páginas en internet

1. Archimedesportraits.htm
2. conicsection–fromMathWorld.htm
3. es.geocities.com/elvmates/Hiperbola.htm
4. occurrenceoftheconics.htm
5. www.mat.ucm.es/deptos/am/guzman/apolonio/conic.htm
6. www.math.rutgers.edu/~cherlin/HistoryPapers1999/schmarge.html
7. www.megapulse.com/hom%20used.html.
8. www.nths.newtrier.k12.us/academics/math/connections/connections-htm
9. www-groups.dcs.st-and.a.c.uk/~history
10. www-groups.dcs.st-and.a.c.uk/~history/Mathematicians/Diocles.html
11. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Aristaeus.html
12. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Eutocius.html
13. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Hypatia.html
14. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Menaechmus.html
15. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Apollonius.html
16. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Democritus.html
17. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Eratosthenes.html
18. www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/References/Proclus.html
19. xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html