



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

---

---

FACULTAD DE INGENIERÍA

ARREGLOS DE ANTENAS  
HELICOIDALES MONOFILARES SIN  
PLANO DE TIERRA

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
INGENIERO EN TELECOMUNICACIONES

P R E S E N T A

ALEJANDRO MONSIVÁIS HUERTERO

DIRECTOR DE TESIS: DR. RODOLFO NERI VELA

FEBRERO DE 2003





Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# ÍNDICE

<b>ÍNDICE</b>	<b>I</b>
<b>I PRÓLOGO</b>	<b>IV</b>
<b>1 CARACTERÍSTICAS Y APLICACIONES DE LAS ANTENAS HELICOIDALES</b>	<b>1</b>
1.1 Definición y tipos de antenas helicoidales	1
1.2 Geometría helicoidal	2
1.3 Ecuación de la hélice	5
1.4 Propiedades de las antenas helicoidales	6
1.4.1 Distribución de la magnitud de la corriente	6
1.4.2 Modos de transmisión	12
1.4.3 Modos de radiación	13
1.4.4 Velocidad de fase para el modo normal	21
1.4.5 Polarización	25
1.4.6 Impedancia de entrada	31
1.4.7 VSWR	35
1.4.8 Ganancia y ancho del haz	37
1.4.9 Ancho de Banda	43
1.5 Parámetros de las antenas helicoidales	44
1.5.1 Diámetro del conductor	45
1.5.2 Ángulo de disparo	46
1.5.2.1 Ángulo de disparo pequeño	46
1.5.2.2 Doble ángulo de disparo	48
1.6 Configuraciones especiales de las antenas helicoidales	49
1.6.1 Antenas helicoidales con diámetro variable	49
1.6.2 Antenas helicoidales de modo axial como elementos parásitos	59
1.6.3 Antenas helicoidales con aros en lugar de plano de tierra	61
1.7 Aplicaciones de las antenas helicoidales	63
1.7.1 Antena para el sistema de comunicación FLTSATCOM	63

1.7.2	Antena para los satélites INMARSAT-M	63
1.7.3	Antena para el sistema de posicionamiento global (GPS)	64
1.7.4	Antena MCA-6010 para el sistema SATCOM	65
1.7.5	Antena helicoidal para telefonía celular	66
1.7.6	Frecuencia dual de las antenas helicoidales con modo normal	67
1.7.7	Alimentador helicoidal tipo Backfire	68
<b>2</b>	<b>MODELADO MATEMÁTICO DE UNA HÉLICE CON AROS EN LUGAR DE PLANO DE TIERRA</b>	<b>70</b>
2.1	Introducción	70
2.2	Método de Momentos	71
2.2.1	Descripción general	71
2.2.2	Propiedades de la antena	77
2.2.3	Punto de alimentación de la antena	80
2.2.4	Limitantes del método	81
2.3	Efectos de un plano de tierra	81
2.3.1	Principio de imágenes	82
2.3.1.1	Dipolo eléctrico vertical	82
2.3.1.2	Dipolo eléctrico horizontal	85
2.3.2	Efectos de la geometría del plano de tierra	88
2.3.2.1	Antena helicoidal con plano de tierra cuadrado	88
2.3.2.2	Antena helicoidal con plano de tierra pequeño	90
2.3.2.3	Antena helicoidal con plano de tierra corrugado	93
2.3.3	Hipótesis de resultados	94
2.4	Hélice con aros en lugar de plano de tierra	95
2.4.1	Impedancias propias y mutuas	98
2.4.2	Matriz de impedancia y distribución de corrientes	132
2.4.3	Propiedades de radiación	135
2.5	Cálculos y presentación de resultados	137
2.6	Diseño y construcción de la antena	194
2.7	Mediciones	199

---

<b>3</b>	<b>MODELADO MATEMÁTICO DE UN ARREGLO HELICOIDAL</b>	<b>207</b>
3.1	Introducción	207
3.2	Principio de Multiplicación de Patrones	208
3.2.1	Arreglos lineales	208
3.2.1.1	Arreglo de dos elementos	208
3.2.1.2	Arreglo de N elementos con amplitud y espaciamiento constantes	214
3.2.2	Arreglos planos (bidimensionales)	218
3.3	Arreglos helicoidales	223
3.3.1	Arreglo de dos hélices	223
3.3.2	Arreglo de cuatro hélices	225
3.3.3	Arreglo helicoidal omnidireccional	228
3.3.4	Arreglo helicoidal con ángulo de disparo pequeño	230
3.4	Modelado matemático del arreglo helicoidal	232
3.5	Modelado con un plano de tierra infinito	245
3.6	Modelado con aros en lugar de plano de tierra	256
3.7	Conclusiones de los arreglos estudiados	271
<b>4</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>273</b>
<b>5</b>	<b>APÉNDICES</b>	
A.	Impedancia propia de dipolos cortos con geometrías cónicas	276
B.	Regla compuesta de Simpson	291
C.	Cálculo de los campos de radiación en el campo lejano por medio del MM	293
D.	Análisis de una antena circular	308
E.	Patrones de radiación para antenas con geometrías rectas y circulares por medio del MM	316
F.	Técnica de fotolitografía	320
G.	Conector K y coaxial rígido	323
H.	Ultralam 2000	328
I.	Analizador de redes	330
<b>6</b>	<b>REFERENCIAS</b>	<b>333</b>

---

## I. Prólogo

Las antenas helicoidales tienen muchas aplicaciones en diversos campos de las telecomunicaciones y de radioastronomía. Existen muchos tipos en cuanto a geometría, complejidad de construcción, ganancia, ancho del haz de media potencia, ancho de banda y demás parámetros de operación, por lo cual aún quedan pendientes muchas áreas de investigación al respecto. Todavía se siguen presentando resultados en congresos y publicaciones internacionales sobre antenas helicoidales, ya sean individuales, como arreglos, como alimentadores de platos parabólicos, etc., por lo cual se considera posible aportar algunas novedades a través del desarrollo de esta tesis de investigación.

Esta tesis tiene como objetivo obtener las propiedades de operación de las antenas mencionadas usando el Método de Momentos (Neri, 1999), ya que es un herramienta muy útil y fácil de programar en una computadora. Asimismo, se pretende lograr una actualización sobre el estado del arte del área de arreglos de antenas helicoidales y entender a fondo los detalles de operación de dichos arreglos de antenas para definir posibles aplicaciones nuevas. Por otro lado, se determinará si es válida la segmentación de una antena curva en dipolos de  $0.1\lambda$ , como lo es en el caso de antenas con geometría recta.

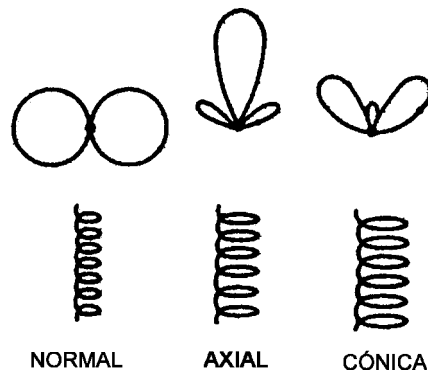
Para cubrir estas metas se llevará a cabo una búsqueda exhaustiva de estudios que en relación con este tema se han realizado hasta la fecha, tanto en libros de texto como en revistas especializadas e Internet; se simulará por medio del Método de Momentos (MM) una antena helicoidal tanto en forma aislada como en un arreglo y por último se harán mediciones en laboratorio empleando una antena que se diseñará específicamente para comprobar experimentalmente los resultados obtenidos con el MM.

# 1 Características y aplicaciones de las antenas helicoidales

## helicoidales

### 1.1 Definición y tipos de antenas helicoidales

Una antena helicoidal consiste de un conductor sencillo o de múltiples conductores dispuestos como una estructura helicoidal, y puede tener o no un plano de tierra (Stuzman, 1997). Es una antena especializada en emitir y recibir campos electromagnéticos con polarización circular, y es comúnmente usada en las estaciones terrenas de los sistemas de comunicación satelital. La antena helicoidal tiene varias formas de radiación, las cuales dependen de sus propiedades geométricas comparadas con la longitud de onda de operación; principalmente se emplean la radiación normal y axial (Figura 1.1).

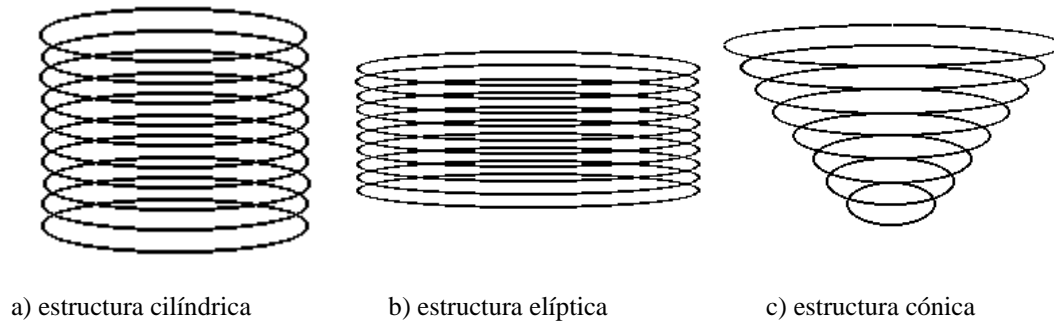


**Figura 1.1** *Modos de radiación de la antena helicoidal.*

El modo normal, que permite radiar hacia los lados del eje de la hélice, ocurre cuando la circunferencia es de un orden menor a una longitud de onda, ya que la hélice tiene una forma muy parecida a la de un dipolo. El modo axial provee máxima radiación a lo largo del eje de la hélice, porque la circunferencia de la hélice es del orden de una longitud de onda; este tipo de radiación es el más utilizado, debido a que se puede obtener polarización circular en un amplio ancho de banda, además de su alta directividad y eficiencia. Otro modo de radiación es el cónico o multilóbulos, el cual sucede cuando la circunferencia de la hélice es del orden de varias longitudes de onda (King, 1985).

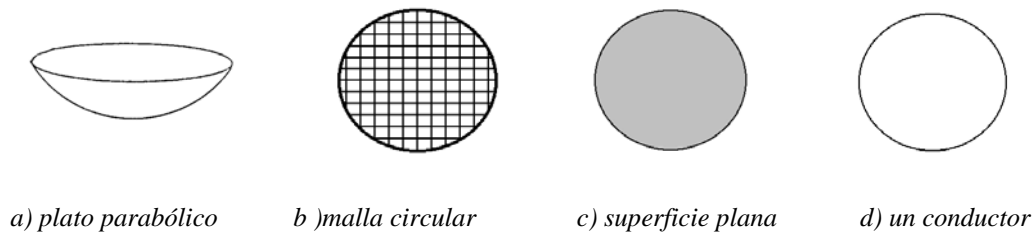
Una antena helicoidal puede ser monofilar (un conductor) o multifilar (varios conductores), y estos conductores pueden ser enrollados partiendo de un mismo punto o de diferentes, y asimismo estar

desfasados en su alimentación eléctrica o no. Esta antena puede estar dispuesta en una estructura cilíndrica, elíptica o cónica (Figura 1.2).



**Figura 1.2** *Diferentes estructuras de antenas helicoidales.*

En la práctica, el plano de tierra de este tipo de antenas se emplea con el propósito de conseguir mayor directividad, disminuir los lóbulos hacia atrás y obtener una impedancia de entrada puramente resistiva. El plano puede ser de forma cuadrada, circular, de plato o bien considerarlo infinito, y diseñado con alambres o una superficie plana; si se diseña como una rejilla de alambres debe ser la separación entre ellos menor a un décimo de la longitud de onda para mayor efectividad. (Figura 1.3)



**Figura 1.3** *Ejemplos de diferentes planos de tierra.*

## 1.2 Geometría helicoidal (Kraus, 2002)

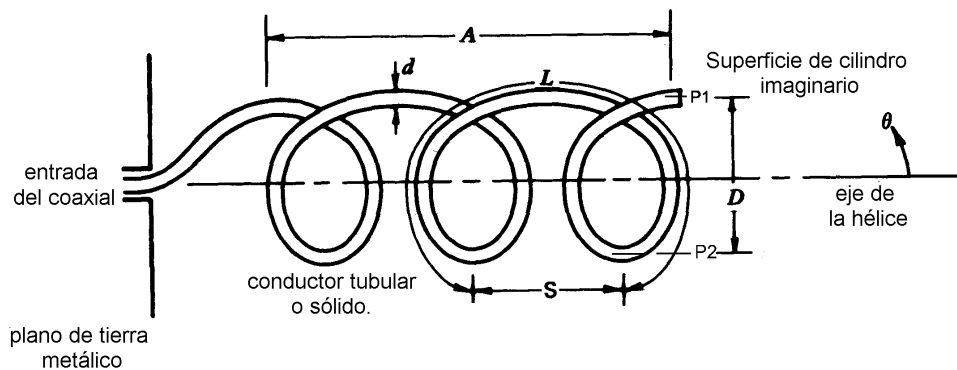
El análisis matemático en este apartado está considerado para una hélice monofilar dispuesta en una estructura cilíndrica.



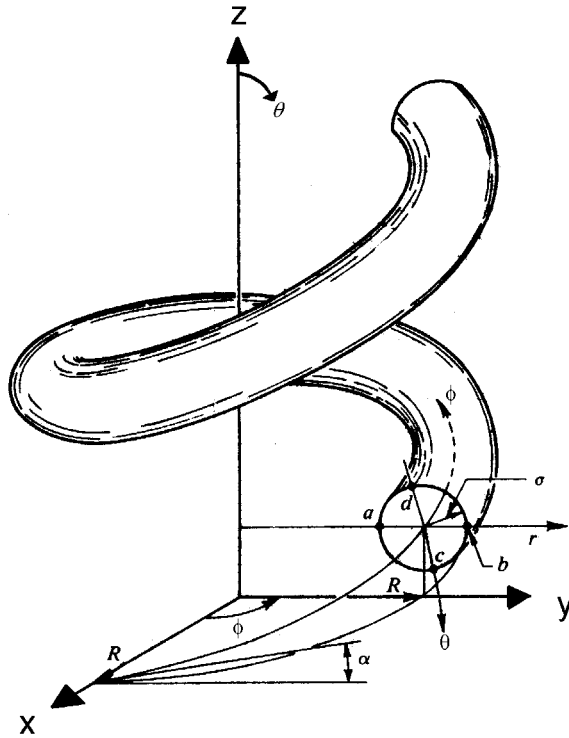
La hélice es una forma geométrica básica de tres dimensiones. Si se proyecta en un plano perpendicular a su eje, se observa como una circunferencia. Además, la hélice tiene sentido de rotación, y puede ser derecha o izquierda.

Los parámetros de diseño de una antena helicoidal se describen a continuación (Figura 1.4 a):

- D: Diámetro de hélice (de centro a centro del conductor).
- C: Circunferencia de la hélice, que se obtiene al proyectar la hélice en un plano perpendicular al eje de la misma.  $C = \pi D$
- S: Espaciamiento entre vueltas (de centro a centro del conductor).
- $\alpha$ : Ángulo de elevación,  $\alpha = \arctan(S/\pi D)$ .
- L: Longitud de una vuelta.
- N: Número de vueltas de la hélice.
- A: Longitud axial de la hélice,  $A = NS$
- d: Diámetro del conductor.



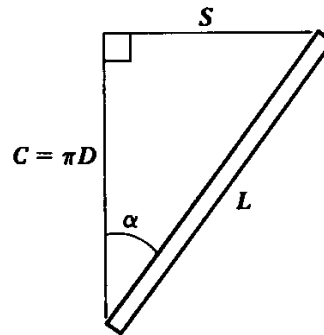
**Figura 1.4a** Geometría y dimensiones de la antena helicoidal.



**Figura 1.4b** Corte transversal de la hélice de radio  $R$ .

El diámetro  $D$  y la circunferencia  $C$  se refieren al cilindro imaginario cuya superficie pasa por los puntos centrales  $P_1$  y  $P_2$  de la hélice. En esta tesis, cuando se emplee el subíndice lambda  $[\lambda]$  significa que la dimensión se mide en longitudes de onda en el espacio libre. Por ejemplo,  $D_\lambda$ , es el diámetro de la hélice en longitudes de onda.

Si una vuelta de una hélice circular se desenrolla sobre una superficie plana, la relación entre el espaciado  $S$ , circunferencia  $C$ , longitud de vuelta  $L$  y ángulo de elevación  $\alpha$  se muestra en la figura 1.5.



**Figura 1.5** Una vuelta desenrollada de la hélice.

### 1.3 Ecuación de la hélice

Considérese la función vectorial dada por:

$$\mathbf{r} = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t \mathbf{k} \quad (1-1)$$

que está definida para todos los valores de tiempo  $t$ . La curva trazada por el vector  $\mathbf{r}$  es una hélice que se envuelve alrededor del cilindro circular imaginario definido por

$$x^2 + y^2 = 1 \quad (1-2)$$

tal como se ve en la Fig. 1.4b. Las componentes  $\mathbf{i}$  y  $\mathbf{j}$  de  $\mathbf{r}$  satisfacen la ecuación del cilindro, de modo que:

$$\cos^2 t + \sin^2 t = x^2 + y^2 = 1 \quad (1-3)$$

La curva se eleva conforme la componente en la dirección de  $\mathbf{k}$  se incrementa, es decir a través de un incremento en el tiempo. Cada incremento de  $2\pi$ , la curva completa una vuelta alrededor del cilindro imaginario. Las ecuaciones que describen a la hélice son las siguientes:

$$x = \cos(t) \quad (1-4)$$

$$y = \text{sen}(t) \quad (1-5)$$

$$z = t \quad (1-6)$$

## 1.4 Propiedades de las antenas helicoidales

A continuación se describen algunas de las propiedades de la antena helicoidal, como son su distribución de corriente, polarización, modos de transmisión, modos de radiación, impedancia de entrada, VSWR, ganancia, ancho del haz de media potencia y ancho de banda.

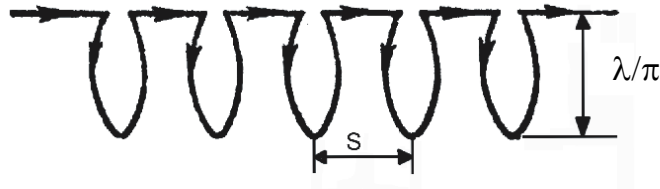
### 1.4.1 Distribución de amplitud de corriente eléctrica

La antena helicoidal cilíndrica pertenece al grupo de antenas denominado antenas direccionales de ondas progresivas. Este tipo de antenas se produce con base en sistemas de retardo, capaces de mantener las ondas superficiales. Las antenas de ondas progresivas se excitan generalmente desde un extremo, mientras que el régimen necesario de mantenimiento de la onda progresiva se asegura en la mayoría de los casos por la conveniente elección de los parámetros del sistema de retardo (geometría) y muy raramente, utilizando cargas especiales (impedancias) en el extremo opuesto. En las antenas de ondas progresivas la excitación se propaga por sí misma a lo largo del sistema emisor desde un extremo a otro, y por eso se llaman antenas de alimentación en serie (Markov, 1978).

Al variar la frecuencia de trabajo puede ocurrir una variación bastante brusca de la velocidad de fase en el sistema de retardo, así como también puede alterarse la eficacia del funcionamiento y la calidad de adaptación del excitador.

En la espiral de la antena helicoidal se origina una onda progresiva de corriente eléctrica y la antena radia el máximo de potencia a lo largo de su eje en dirección del movimiento de la onda de corriente, para el modo axial. Con el objeto de entender mejor el funcionamiento de la antena helicoidal cilíndrica, imaginémosla en forma de espiras o vueltas circulares planas de diámetro  $D = \lambda/\pi$ ,

colocadas en el eje con una distancia  $S$  entre sí y alimentadas en serie por un alimentador unifilar (Figura 1.6).



**Figura 1.6** Circuito de la antena helicoidal cilíndrica.

La corriente en cada vuelta resulta distribuida por la ley :

$$I = I_0 \exp(-jkL) \quad (1-7)$$

donde:

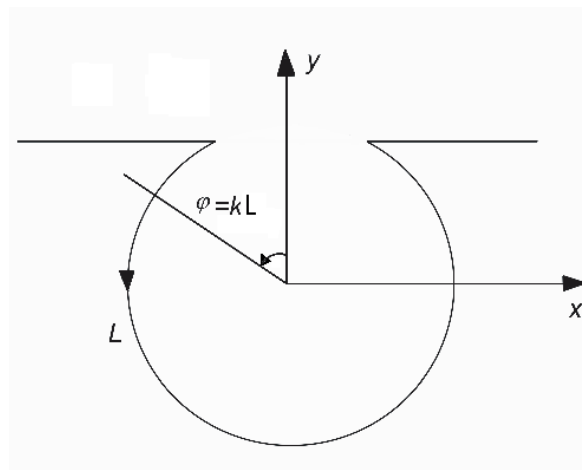
$I_0$  es la magnitud de la corriente al comienzo de la vuelta;

$$k = \frac{2\pi}{\lambda};$$

$L$  es la longitud de la vuelta.

El perímetro de la vuelta cuando  $D = \lambda/\pi$ , es exactamente una longitud de onda ( $C = \lambda$ ). Por eso, la distribución de corriente a lo largo de la vuelta se puede escribir también en la forma  $I = I_0 \exp(-j\varphi)$ ,

donde  $\varphi$  es el ángulo azimutal en el plano de la vuelta (Figura 1.7).



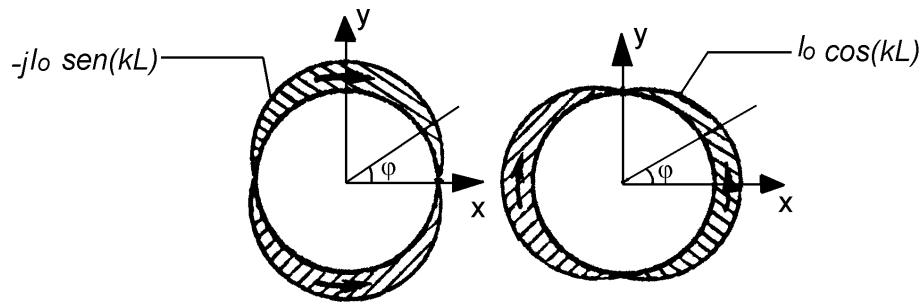
**Figura 1.7** Distribución de la corriente

$$I = I_0 \exp(-jkL) = I_0 \exp(-j\varphi)$$

La distribución de corriente en la espira es

$$I = I_0 \exp(-jkL) = I_0 \cos(kL) - jI_0 \sin(kL) \quad (1-8)$$

que es la superposición de dos ondas estacionarias desfasadas 90°; la amplitud de una de ellas varía a lo largo de la vuelta por la ley del coseno, y la de la otra por la ley del seno (Figura 1.8).



**Figura 1.8** Representación de la distribución de corriente en la vuelta de la espira.

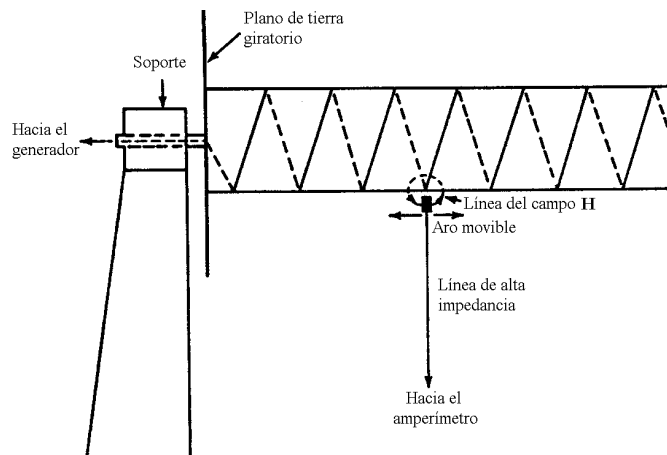
Se obtienen cuatro dipolos de media onda doblados, que oscilan en fase de dos en dos; un par de dipolos está orientado a lo largo del eje  $y$  y radia su potencia máxima en dirección del eje  $z$  con vector de intensidad del campo eléctrico coincidente con el eje  $y$ ; el otro par de dipolos está orientado en dirección del eje  $x$  y radia su potencia máxima, también, en dirección del eje  $z$ , pero el vector de intensidad del campo eléctrico coincide en este caso con el eje  $x$ . Puesto que los pares de dipolos oscilan con un desfase de 90°, el campo radiado en dirección del eje  $z$  tiene polarización circular; pero si forman cierto ángulo con el eje  $z$  la polarización del campo es elíptica, en tanto que en el plano  $xy$  la polarización del campo es lineal. Cabe hacer notar que, debido a la coincidencia de fase de las oscilaciones de los dipolos de cada par, su resistencia de radiación, teniendo en cuenta la interconexión, resulta bastante grande. La resistencia de entrada de cada vuelta es próxima a la impedancia característica, y, si además se toma en consideración que las vueltas contiguas a la espira oscilan casi en fase debido a la pequeñez de  $S/\lambda$ , se hace evidente que en la espiral de diámetro  $D = \lambda/\pi$  existe la onda progresiva de corriente.

La velocidad de fase de la onda de excitación de las vueltas contiguas en dirección del eje  $z$  resulta algo menor que la velocidad de la luz, y obtenemos una antena de velocidad de fase decelerada, radiante a lo largo de su eje.

Si el diámetro de la antena helicoidal (en espiral) es pequeño en comparación con la longitud de onda,  $D \ll \lambda/\pi$ , las corrientes en los puntos diametralmente opuestos de la vuelta (Fig. 1.4a, puntos  $P_1$  y  $P_2$ ) tienen en el espacio sentido opuesto y la resistencia de radiación de la vuelta será muy pequeña. En la antena se establece un régimen de onda estacionaria, la radiación a lo largo del eje de la espiral es igual a cero, y el máximo de radiación de cada vuelta y de toda la antena se obtiene en el plano transversal de la espiral (modo normal).

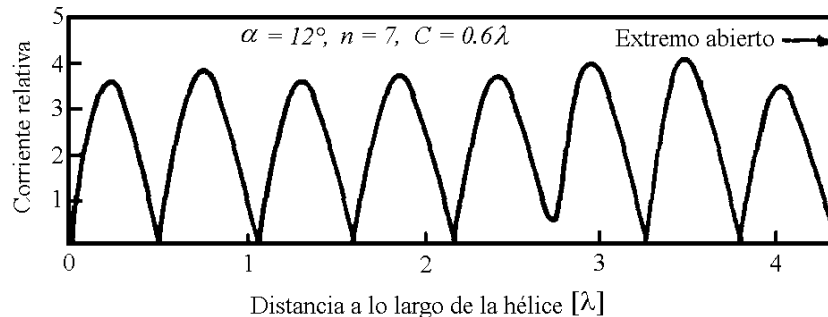
Cuando el diámetro de la espiral es grande,  $D \gg \lambda/\pi$ , las corrientes en los puntos diametralmente opuestos de la vuelta y en las vueltas contiguas nuevamente resultan no estar en fase, y a causa de la interacción la resistencia de radiación de la vuelta disminuye, se altera el régimen de onda progresiva y la radiación en la dirección del eje de los elementos individuales de la vuelta se compensa mutuamente; como resultado, el máximo de radiación de la antena forma cierto ángulo con el eje de la antena (modo cónico) (Kraus, 2002).

Kraus realizó medidas experimentales de la distribución de corrientes al rotar una antena helicoidal y su plano de tierra; colocó un aro pequeño (sensor de corriente) debajo del conductor de la antena (Figura 1.9). En bajas frecuencias (circunferencia de la hélice aproximadamente igual a  $0.5\lambda$ ) había prácticamente una onda estacionaria ( $VSWR \rightarrow \infty$ ) a lo largo de la hélice (Figura 1.10a); pero al incrementar a altas frecuencias, la distribución cambiaba drásticamente.

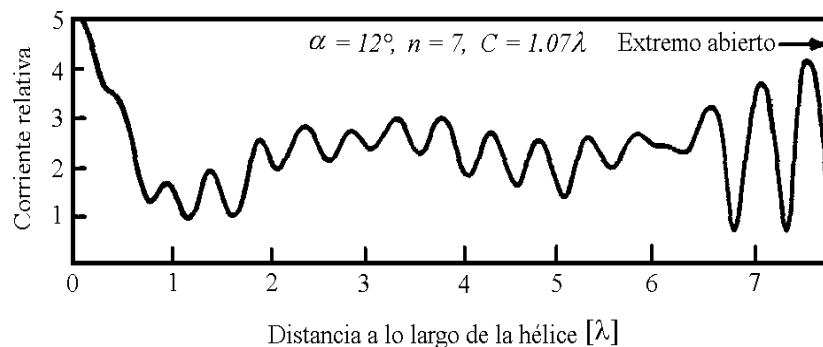


**Figura 1.9.** Arreglo empleado por Kraus para la medición de la distribución de corrientes.

Para una hélice con una circunferencia igual a  $1\lambda$  aparecen tres regiones: cerca del extremo inicial (entrada) la corriente decae exponencialmente, cerca del extremo final hay una onda estacionaria en una corta distancia, mientras que a lo largo de la hélice hay una amplitud de corriente relativamente uniforme (VSWR pequeño), la cuál se extiende en la mayor parte de la hélice (Figura 1.10b).



a) Modo normal

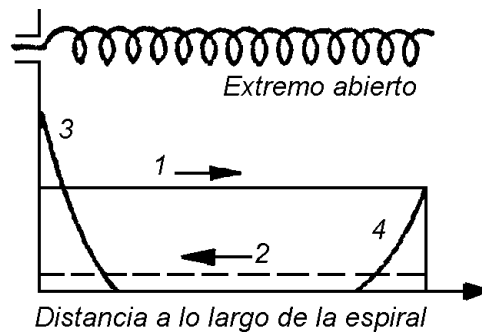


b) Modo axial

**Figura 1.10** Distribución de corriente en el conductor de la espiral.



En la figura 1.10 se muestran curvas experimentales de la distribución de amplitud de la corriente en el conductor de la antena con los siguientes parámetros: número de vueltas (espiras)  $n = 7$ ; ángulo de disparo de las espiras  $\alpha = 12^\circ$ , para modo normal y modo axial (Kraus, 2002). Se aprecia en el primer caso que la reflexión en el extremo de la espiral es considerable, y en la antena se establece la onda estacionaria (Fig. 1.10a). En el segundo caso también tiene lugar la reflexión en el extremo de la antena, pero en la parte media de la espiral la amplitud de la onda progresiva es más o menos constante (Fig. 1.10b).



**Figura 1.11** Cuadro esquemático de la distribución de corrientes en la espiral en modo axial.

El decremento en el extremo de la entrada puede ser visto como una transición entre el modo de hélice y plano de tierra a un modo de hélice pura. La reflexión de la onda que sale en el extremo final también decae exponencialmente, teniéndose una onda reflejada muy pequeña y una presencia dominante de la onda saliente a lo largo de la hélice. En la Figura 1.11 se muestra un cuadro esquemático de la distribución de corriente en la antena con patrón de radiación axial. A continuación se describen más detenidamente las trayectorias de las ondas: se puede decir que la onda incidente  $1$  se superpone con la onda reflejada  $2$ . Además, al comienzo y al final de la antena surgen ondas de orden superior a las que corresponden las corrientes amortiguadas  $3$  y  $4$ . La amplitud de corriente de la onda reflejada  $2$  es aproximadamente del 20% de la amplitud de la corriente de la onda incidente  $1$ , y en aproximación cero al examinar la radiación de la antena, por lo que las corrientes  $2$ ,  $3$  y  $4$  se pueden despreciar (Markov, 1978).

### 1.4.2 Modos de transmisión

El término modo de transmisión es empleado para describir la manera en la cual una onda electromagnética se propaga a lo largo de una hélice infinita, por lo que se estudia a la hélice como una línea de transmisión o guía de onda infinita. Una variedad de diferentes modos de transmisión es posible (Fig. 1.12).

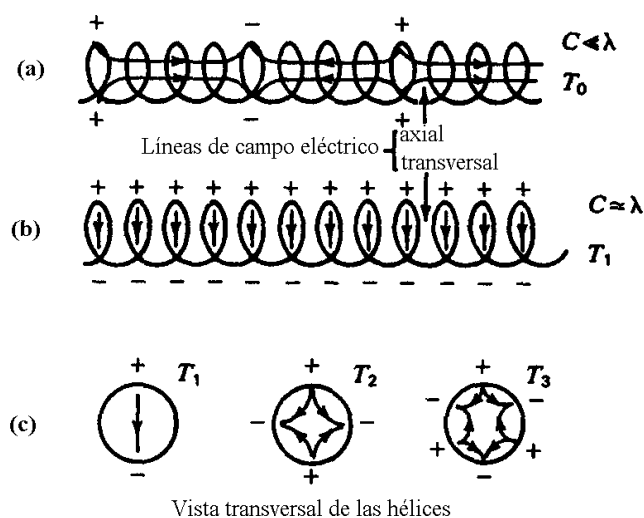


Figura 1.12. Modos de transmisión para una hélice

El modo de transmisión más bajo para una hélice tiene regiones adyacentes de cargas positivas y cargas negativas separadas por varias vueltas. Este modo es designado como el modo de transmisión  $T_0$  y la distribución instantánea de la carga es mostrada por la Figura 1.12a. El modo  $T_0$  es importante cuando la longitud de una vuelta es pequeña en comparación a la longitud de onda ( $L \ll \lambda$ ), este modo ocurre en solenoides a bajas frecuencias. Es también, el principal modo de transmisión en el tubo de onda progresiva, ya que las regiones adyacentes de cargas positivas y negativas están separadas por una distancia axial considerable, una componente axial sustancial del campo eléctrico está presente, y en el tubo de onda progresiva este campo interactúa con el flujo de electrones (Fig. 1.12a). La longitud máxima que permite la propagación del modo de transmisión  $T_0$  es  $L_\lambda < 1/3$ . El campo máximo para la hélice es normal al eje de la hélice cuando la longitud total de la hélice es mucho menor a la longitud de onda de trabajo ( $NL \ll \lambda$ ). Por lo que, esta condición es llamada “modo de radiación normal ( $R_0$ )”. El campo es, en general, polarizado elípticamente pero para ciertas dimensiones de la hélice puede tener polarización circular y para otras polarización lineal. El modo de transmisión y el modo de

radiación apropiado para hélices pequeñas puede ser descrito por la combinación de  $T_0$  y  $R_0$ , designándose como  $T_0R_0$ .

Un modo de transmisión de primer orden en la hélice, designado  $T_1$ , es posible cuando la circunferencia de la hélice  $C$  es aproximadamente  $1\lambda$ . Para ángulos de disparo pequeños, este modo tiene regiones adyacentes de cargas positivas y cargas negativas separadas por media vuelta aproximadamente (Fig. 12.b). Se observa que la radiación de las hélices con circunferencia del orden de  $1\lambda$  ( $C_\lambda \sim 1$ ) y un número de vueltas mayor a uno ( $N > 1$ ) es un haz bien definido con un máximo en la dirección del eje de la hélice. Por lo que, este tipo de radiación es llamado “*modo de radiación axial*”, designándose como  $R_1$ . La radiación de una antena helicoidal monofilar axial tiene una polarización circular o aproximadamente circular.

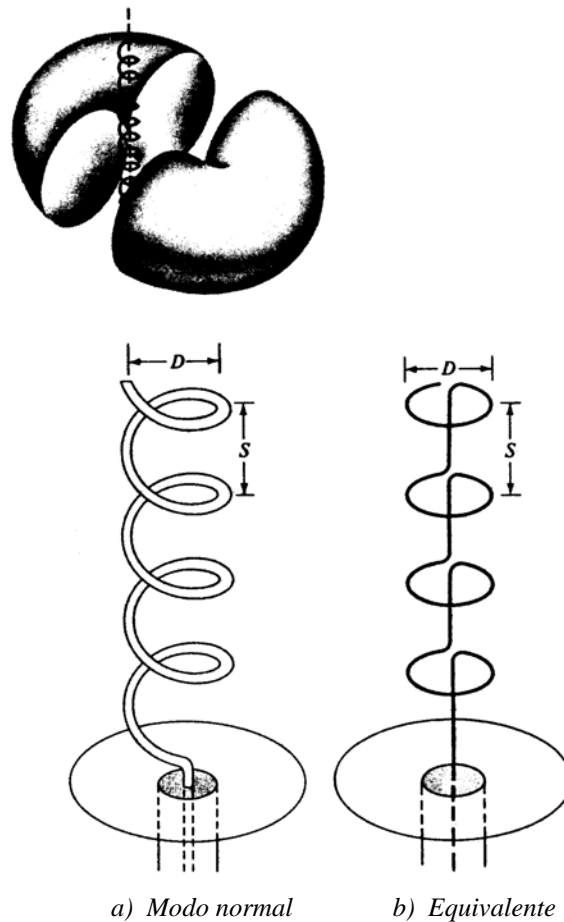
La transmisión para modos de alto orden ( $T_2$ ,  $T_3$ ,  $T_4$ , etc) se puede llevar a cabo para valores grandes de  $C_\lambda$  ( $C \gg \lambda$ ). Para ángulos de disparo pequeños, la distribución de carga alrededor de la hélice para estos modos se muestra de una forma aproximada en la figura 1.12c (Kraus, 2002).

### 1.4.3 Modos de radiación

El término modo de radiación es empleado para describir la forma general del patrón de radiación en campo lejano de una antena helicoidal finita. La antena helicoidal puede operar en muchos modos; sin embargo los dos principales son el normal y el axial. El modo axial es usualmente el más práctico porque se puede llevar a cabo en un gran ancho de banda la polarización circular y es más eficiente.

#### 1.4.3.1 Modo normal

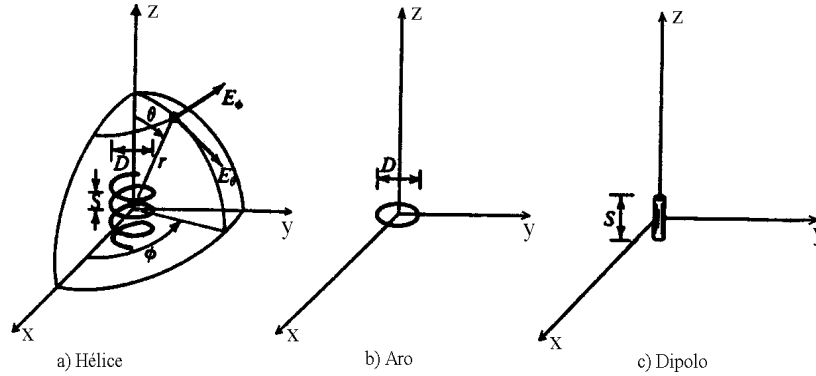
En el modo normal de operación el campo radiado por la antena es máximo en un plano normal al eje de la hélice y mínimo a lo largo del eje, como se muestra en la figura 1.13. Para llevar a cabo el modo normal de operación, el perímetro de la hélice es generalmente menor que la longitud de onda.



**Figura 1.13** Modo normal (*broadside*) para una antena helicoidal y su equivalente.

La geometría de la hélice se reduce a una vuelta de diámetro  $D$  cuando el ángulo de salida se aproxima a cero, y a un cable de longitud  $S$  cuando el ángulo tiende a ser  $90^\circ$ . En el modo normal, se puede pensar que la hélice consiste de  $N$  vueltas pequeñas y  $N$  dipolos cortos conectados juntos en serie como se muestra en la figura 1.13b. Los planos de cada vuelta son paralelos entre sí y son perpendiculares al eje axial de la hélice.

Dado que las dimensiones de la hélice en este modo son pequeñas, la corriente a lo largo de la hélice se puede asumir como constante y su patrón de radiación relativo independiente del número de vueltas y con semejanza al de un dipolo corto; y por lo tanto, su operación queda definida como la suma de los campos radiados por una vuelta de diámetro pequeño  $D$  y por un dipolo corto de longitud  $S$ , con su eje perpendicular al plano de la vuelta y con una distribución de corriente constante (Fig. 1.14).



**Figura 1.14.** Dimensiones de la hélice, aro y dipolo para el modo normal.

Ahora, en el campo lejano, los componentes del vector de campo eléctrico  $E_\theta$  y  $E_\phi$  de un dipolo corto de longitud  $S$  y corriente constante  $I_0$  son expresados por:

$$E_\phi = \frac{120\pi^3 D^2 I_0 \text{sen}\theta}{4\lambda^2 r} \quad (1-18)$$

$$E_\theta = j \frac{60\pi I_0 S \text{sen}\theta}{\lambda r} \quad (1-19)$$

Haciendo una comparación entre las anteriores ecuaciones, se indica que están en desfase de  $90^\circ$ , lo que representa una condición necesaria, pero no suficiente, para la polarización circular o elíptica. Por lo tanto, dividiendo la magnitud de (1-19) entre (1-18) se obtiene la razón axial:

$$AR = \frac{|E_\theta|}{|E_\phi|} = \frac{2S\lambda}{\pi^2 D^2} = \frac{2S_\lambda}{C_\lambda^2} \quad (1-20)$$

Tres casos especiales de polarización elíptica son de interés:

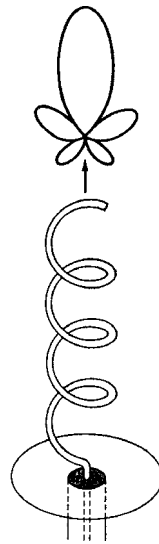
- 1) Cuando  $E_\phi = 0$ , la proporción axial es infinita y la elipse de polarización es una línea vertical indicando polarización lineal vertical. La hélice en este caso es un dipolo vertical.
- 2) Cuando  $E_\theta = 0$ , la proporción axial es cero y la elipse de polarización es una línea horizontal indicando polarización lineal horizontal. La hélice en este caso es un aro horizontal.
- 3) El tercer caso ocurre cuando  $|E_\phi| = |E_\theta|$ , para este caso la proporción axial es igual a la unidad y la elipse de polarización es un círculo, indicando polarización circular.

Siendo  $\alpha$  el ángulo de disparo para valores pequeños de  $\alpha$ , la polarización es horizontal; para valores grandes de  $\alpha$ , la polarización es vertical y cuando  $\alpha$  es tal que  $C/\lambda = (2S/\lambda)^{1/2}$  se tiene polarización circular.

Para llevar a cabo la operación en modo normal, se ha asumido que la corriente en todas direcciones de la longitud de la hélice es de magnitud y de fase constante. Esto se cumple a lo largo de todo el cable, cuya longitud es muy pequeña comparada con la longitud de onda, y su extremo final es terminado propiamente para reducir las múltiples reflexiones. Debido a sus características físicas, este modo de radiación tiene un estrecho rango de frecuencias en donde goza de una eficiente radiación. Prácticamente, este tipo de operación es limitada y pocas veces utilizada.

### 1.4.3.2 Modo axial

El modo de operación axial es más práctico y puede ser generado con más facilidad. En este modo de operación, hay tan solo un lóbulo mayor y su máxima intensidad de radiación es a lo largo del eje de la hélice como se muestra en la figura 1.15.

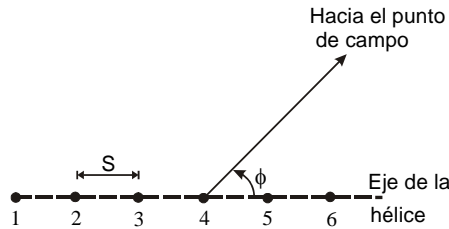


**Figura 1.15** *Modo axial (endfire) de la hélice.*

Para este modo, el diámetro  $D$  y el espaciamento  $S$  deben de ser fracciones grandes de la longitud de onda. Para llevar la polarización circular, se cumple que  $3/4 < C/\lambda < 4/3$ , siendo lo óptimo  $C/\lambda = 1$ , y el espaciamento  $S = \lambda/4$ . El ángulo de salida es usualmente  $12^\circ < \alpha < 14^\circ$ . Con mucha frecuencia la antena

helicoidal es utilizada con un plano de tierra, cuyo diámetro es mayor que  $\lambda/2$  y su alimentación por un cable coaxial. Sin embargo, otros tipos de alimentadores (como guías de onda) son posibles, especialmente para frecuencias de microondas. Las dimensiones de la hélice para este modo de operación no son tan críticas, resultando así un amplio ancho de banda.

Como una primera aproximación, se puede considerar que una antena helicoidal monofilar radiando en modo axial tiene un onda progresiva estacionaria de amplitud uniforme a lo largo de su conductor. Por el principio de multiplicación de patrones (Balanis, 1997), el patrón de radiación en el campo lejano de una hélice es el producto del patrón de una vuelta por el patrón de un arreglo de  $n$  fuentes puntuales isotrópicas. El espacio  $S$  entre las fuentes es igual al espacio entre las vueltas (Figura 1.16). Cuando la hélice es larga, el patrón del arreglo es más estrecho que el patrón de una vuelta y por lo tanto, la longitud determina el ancho del patrón total en campo lejano. Asumiendo que la variación en el campo lejano está dada por el patrón o factor del arreglo y que la diferencia de fase entre las fuentes y el arreglo es igual al cambio de fase de la onda progresiva en una vuelta de longitud  $L_\lambda$ , es posible obtener un modelo.



**Figura 1.16.** Arreglo de fuentes isotrópicas, cada fuente representa una vuelta de la hélice.

El patrón o factor del arreglo  $F$  para un arreglo de  $n$  fuentes puntuales isotrópicas es:

$$F = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} \quad (1-21)$$

donde:

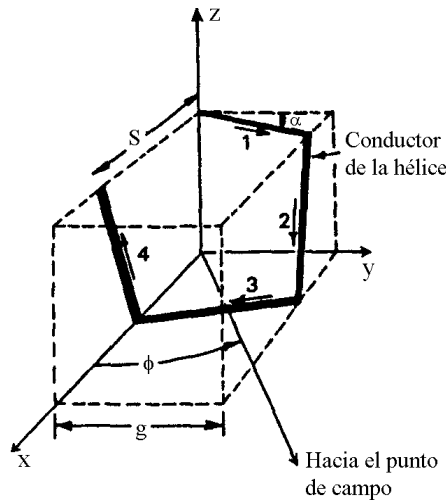
$$\psi = \frac{2\pi S}{\lambda} \cos\phi + \delta \quad (1-22)$$

donde  $\delta$  es la diferencia de fase entre dos fuentes contiguas.

En este caso, la expresión (1-22) es igual a:

$$\psi = 2\pi \left( \frac{2\pi S}{\lambda} \cos \phi - \frac{L_\lambda}{p} \right) \quad (1-23)$$

donde  $p = v/c =$  velocidad de fase relativa de la propagación de la onda a lo largo del conductor helicoidal,  $v$  es la velocidad de fase a lo largo del conductor y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.



**Figura 1.17** Hélice cuadrada empleada para el cálculo del patrón de una vuelta.

Una hélice circular puede ser tratada como una antena cuadrada. El campo total de una vuelta es la resultante del campo de los cuatro lados (Figura 1.17) ya que las mediciones indican que la diferencia entre una hélice circular y una hélice cuadrada es pequeña. La expresión para la componente  $E_{\phi 1}$  del campo lejano en el plano XZ debida al elemento 1 de la hélice cuadrada es:

$$E_{\phi 1} = k \frac{\text{sen} \gamma}{A} \text{sen} BA \quad \angle \left( -\frac{\omega r_1}{c} - BA \right) \quad (1-24)$$

donde:

$$k = \frac{I_0 p \eta}{2\pi r_1}$$

$$A = 1 - p \cos \gamma$$

$$B = \frac{\omega g}{2pc \cos \alpha}$$



$$\gamma = \frac{3\pi}{2} + \alpha + \phi$$

$$g = \frac{\sqrt{\pi}D}{2}$$

Las expresiones  $E_{\phi_2}$ ,  $E_{\phi_3}$ , etc. pueden ser obtenidas de la misma manera. Si las contribuciones de los elementos 2 y 4 son despreciados (Fig. 1.17), que es válido cuando  $\alpha$  y  $\phi$  son pequeños, la expresión para  $E_{\phi_T}$  es simplificada; haciendo esta aproximación y considerando que  $k = 1$  y  $r_l = \text{constante}$ , se tiene que:

$$E_{\phi_T} = \frac{\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha + \phi\right)}{A} \text{sen}BA \angle(-BA) \quad (1-25)$$

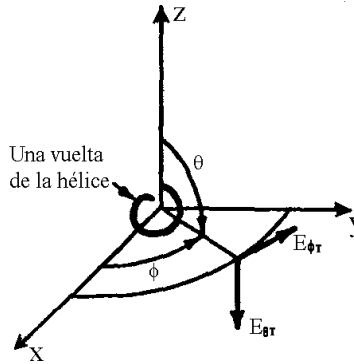
$$+ \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \phi\right)}{A'} \text{sen}BA' \angle[-BA' - 2\sqrt{\pi}B + \pi(S_\lambda \cos \phi + \sqrt{\pi}D_\lambda \text{sen}\phi)]$$

dado que la expresión (1-25) aplica sólo para hélice con sección transversal circular:

$$A = 1 - p \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha + \phi\right)$$

$$A' = 1 - p \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha + \phi\right)$$

$$B = \frac{D_\lambda \pi^{\frac{3}{2}}}{2p \cos \alpha}$$



**Figura 1.18.** Componentes del campo para una vuelta de la hélice.

La expresión (1-25) da el patrón aproximado para la componente  $\phi$  del campo lejano en el plano XZ para una hélice de sección circular (Fig. 1.18). Para conocer la componente  $\theta$  del campo, sólo los elementos 2 y 4 de sección cuadrada contribuyen. Suponiendo  $k = 1$ , la magnitud aproximada de la componente  $\theta$  del campo lejano para una hélice de sección circular es:

$$|E_{\theta r}| = 2 \frac{\text{sen}[\arccos(\text{sen}\alpha \cos\phi)] \text{sen}(BA'') \cos\alpha}{A''(1 - \text{sen}^2\alpha \cos^2\phi)^{\frac{1}{2}}} \quad (1-26)$$

$$\times \text{sen} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \pi(S_\lambda \cos\phi - \sqrt{\pi}D_\lambda \text{sen}\phi) - 2\sqrt{\pi}B \right] \right\}$$

donde:

$$A'' = 1 - p \text{sen}\alpha \cos\phi$$

$$B = \frac{D_\lambda \pi^{\frac{3}{2}}}{2p \cos\alpha}$$

La componente  $\phi$  del campo eléctrico en el campo lejano de una hélice de sección circular es  $E_\phi = E_{\phi r}F$ , mientras que la componente  $\theta$  del campo es  $E_\theta = E_{\theta r}F$ . El patrón aproximado de una hélice en modo axial puede ser calculado fácilmente, al considerar la contribución de una vuelta y asumiendo que el patrón de una vuelta está dado por  $\cos\phi$ . Finalmente, el patrón de radiación normalizado es:

$$E = \left( \operatorname{sen} \frac{90^\circ}{N} \right) \frac{\operatorname{sen} \left( \frac{N\psi}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{\psi}{2} \right)} \cos \phi \quad (1-27)$$

donde:

$$N \text{ es el número de vueltas y } \psi = 360^\circ \left[ S_\lambda (1 - \cos \phi) + \frac{1}{2N} \right]$$

En la expresión anterior, el valor de  $\psi$  es para la condición de incremento de directividad o condición de Hansen-Woodyard, es decir un aumento en la directividad se obtiene al incrementar el cambio de fase entre las fuentes (Kraus, 2002).

#### 1.4.4 Velocidad de fase para el modo axial

Una de los datos que generalmente se mide experimentalmente cuando se diseña una antena helicoidal es la velocidad de fase, ya que es muy útil para explicar algunas de las propiedades de dicha antena. Un análisis teórico riguroso de la velocidad de fase implica manejo de las funciones de Bessel o series de Fourier (Maclean, 1963), pero bajo ciertas consideraciones este análisis se puede simplificar. Para realizar los análisis correspondientes varios autores (Kraus, 2002; Maclean, 1963) definen la velocidad relativa de fase como:

$$p = \frac{v}{c} \quad (1-28)$$

donde  $v$  es la velocidad de fase y  $c$  es la velocidad de la luz en el espacio libre. Algunos otros (Markov, 1978) basan su análisis en el concepto de deceleración de la velocidad de fase, que se define como:

$$\xi = \frac{1}{p} = \frac{c}{v} \quad (1-29)$$

Para evitar confusiones, en esta tesis se empleará el concepto de velocidad relativa de fase. Los análisis que se presentan en este apartado toman como base la ecuación (1-23), presentada en el cálculo del patrón de radiación para el modo axial de la hélice.

### 1.4.4.1 Velocidad de fase para campos en fase

Retomando la Fig. 1.16 y la expresión (1-23), se observa que para tener una radiación axial se debe cumplir que  $\phi = 0$ , y además se quiere que los campos estén en fase, por lo que:

$$\psi = -2\pi m \quad (1-30)$$

donde  $m = 0, 1, 2, 3, \dots$  (orden del modo de transmisión).

El signo menos de la ecuación (1-30) representa que la fuentes tienen un retraso gradual igual a  $2\pi L_\lambda/p$ . Sustituyendo  $\phi = 0$  en la ecuación (1-23) e igualándola con (1-30), se tiene:

$$\frac{L_\lambda}{p} = S_\lambda + m \quad (1-31)$$

Resolviendo la expresión anterior y considerando que se trabaja en el primer modo de transmisión ( $m = 1$ ):

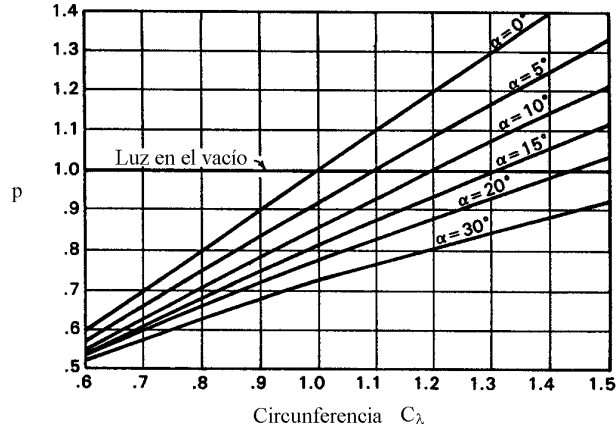
$$p = \frac{L_\lambda}{S_\lambda + 1} \quad (1-32)$$

Del triángulo de la Fig. 1.5, la ecuación (1-32) se puede escribir como:

$$p = \frac{1}{\text{sen}\alpha + \frac{\text{cos}\alpha}{C_\lambda}} \quad (1-33)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de disparo.

La ecuación anterior describe el comportamiento de la velocidad relativa de fase en función de la circunferencia  $C_\lambda$  para campos en fase en la dirección axial. La variación para hélices de diferentes ángulos de disparo se muestran en la Fig. 1.19.



**Figura 1.19.** Velocidad relativa de fase  $p$  para diferentes ángulos de disparo como función de la circunferencia de la hélice  $C_\lambda$  bajo la condición de campos en fase en la dirección axial.

Esta curva indica que cuando una hélice está radiando en el modo axial ( $3/4 < C_\lambda < 4/3$ ) el valor de  $p$  puede ser considerablemente menor que la unidad.

#### 1.4.4.2 Velocidad de fase bajo la condición de Hansen-Woodyard.

Se desea cumplir la condición de directividad incrementada de Hansen y Woodyard, la cual dice que un aumento en la directividad se obtiene al incrementar el cambio de fase entre las fuentes, esto es:

$$\delta = -\left(\frac{2\pi d}{\lambda} + \frac{\pi}{n}\right) \quad (1-34)$$

donde  $d$  es la distancia entre las fuentes y  $n$  es el número de fuentes del factor del arreglo.

Al aplicar esta condición al arreglo de la figura 1.16, la ecuación (1-30) se puede escribir como:

$$\psi = -\left(2\pi n + \frac{\pi}{n}\right) \quad (1-35)$$

Igualando la ecuación (1-35) con la ecuación (1-23), colocando  $\phi = 0$  y resolviendo para  $p$  se obtiene:

$$p = \frac{L_\lambda}{S_\lambda + m + \frac{1}{2n}} \quad (1-36)$$

Como nos interesa  $m = 1$ , la ecuación anterior se puede expresar como:

$$p = \frac{L_\lambda}{S_\lambda + \frac{2n+1}{2n}} \quad (1-37)$$

Para valores grandes de  $n$ , la ecuación anterior es igual a (1-32). Considerando nuevamente el triángulo de la Fig. 1.5, la ecuación (1-32) puede expresarse de la siguiente forma:

$$p = \frac{1}{\text{sen}\alpha + \left(\frac{2n+1}{2n}\right)\left(\frac{\cos\alpha}{C_\lambda}\right)} \quad (1-38)$$

Si se emplea la expresión anterior para calcular el factor del arreglo que permita conocer el patrón de radiación, se obtiene una gran aproximación al patrón de radiación y a la velocidad de fase experimentales. Por lo cual, se puede concluir que la condición de directividad de Hansen-Woodyard representa, de forma muy cercana, la condición natural para que las hélices puedan radiar en modo axial.

#### **1.4.4.3 Velocidad de fase conociendo el ángulo de los primeros nulos del patrón de radiación..**

En este caso se mide el ángulo  $\phi_0$ , en el cual ocurren los primeros mínimos o nulos en el patrón de radiación, los cuales corresponden al primer nulo en el factor del arreglo. Sustituyendo esta condición en la ecuación (1-30):

$$\psi = -(2\pi m + \psi_0) \quad (1-39)$$

donde  $\psi_0$  es el ángulo de los primeros mínimos o nulos en el factor del arreglo. Igualando la ecuación (1-39) con la ecuación (1-23) y trabajando con  $m = 1$ , se tiene:

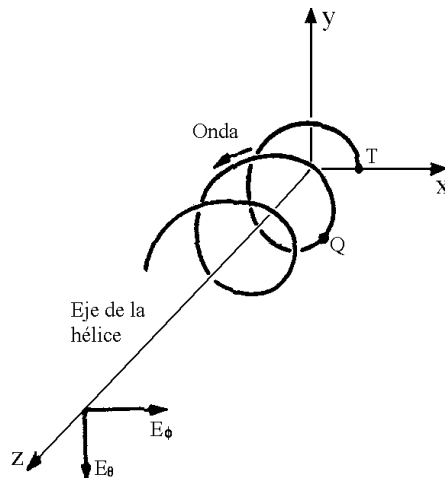
$$P = \frac{L_\lambda}{S_\lambda \cos \phi_0 + 1 + \frac{\Psi_0}{2\pi}} \quad (1-40)$$

### 1.4.5 Polarización

Una onda puede tener polarización lineal, circular o elíptica. Todas las antenas poseen algún tipo de polarización, igual a la polarización de la onda electromagnética que radian. Para un enlace ideal, la antena transmisora y la antena receptora deben tener el mismo tipo de polarización (Régimen de transmisión y recepción). Para el caso de las antenas helicoidales, un enlace correcto es con la antena transmisora con polarización circular derecha y la receptora con circular izquierda, o viceversa, pero no con la misma polarización porque no habrá recepción.

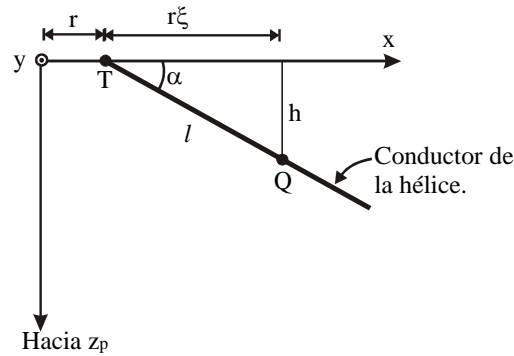
#### 1.4.5.1 Polarización circular

Para que la antena helicoidal pueda radiar con polarización circular se deben cumplir ciertas condiciones, las cuales se explicarán a continuación.

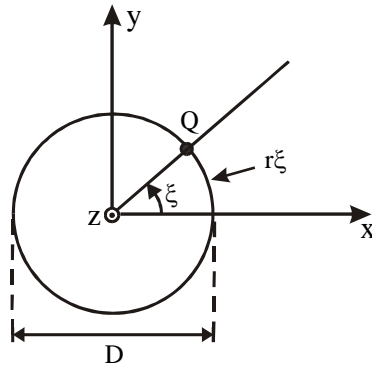


**Figura 1.20.** Componentes del campo eléctrico de la hélice vistos desde el eje de la hélice.

Basándose en la hélice mostrada en la figura 1.20 se calcularán las componentes del campo eléctrico ( $E_\phi$  y  $E_\theta$ ) en la dirección  $z$  del campo lejano. Se considera que se genera una onda progresiva en la superficie de la hélice (Fig. 1.20). La velocidad relativa de fase es  $p$ , el diámetro de la hélice es  $D$  y el espacio entre las vueltas es  $S$ . Al desenrollar la hélice en el plano  $XZ$ , se generan las relaciones que se muestran en la figura 1.21; la hélice vista desde un punto sobre el eje  $z$  se muestra en la figura 1.22.



**Figura 1.21.** Geometría para calcular los campos en la dirección  $z$  en coordenadas cilíndricas.



**Figura 1.22.** Hélice de la Fig. 1.21 vista desde el eje  $z$  positivo. En la figura el ángulo formado por la hélice desenrollada y el eje  $x$  es  $\xi$  y el arco subtendido por este ángulo es  $r\xi$ .

Las coordenadas de un punto  $Q$  sobre la hélice puede ser especificado como  $r, \xi, z$ ; este punto está ubicado a una distancia  $l$  del punto final  $T$  de la hélice. De las geometrías de las figuras 1.21 y 1.22, se tienen las relaciones:



$$\left. \begin{aligned} h &= l \operatorname{sen} \alpha \\ z_p - h &= z_p - l \operatorname{sen} \alpha \\ \alpha &= \arctan \frac{S}{\pi D} = \arccos \frac{r\xi}{l} \\ r\xi &= l \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (1-41)$$

donde  $z_p$  es la distancia del origen al punto de campo P.

En el punto P la componente  $E_\phi$  del campo eléctrico para una hélice con número entero  $N$  de vueltas se puede conocer por medio de la ecuación :

$$E_\phi = E_0 \int_0^{2\pi n} \operatorname{sen} \xi \exp \left[ j\omega \left( t - \frac{z_p}{c} + \frac{l \operatorname{sen} \alpha}{c} - \frac{l}{pc} \right) \right] d\xi \quad (1-42)$$

donde  $E_0$  es una constante que envuelve la magnitud de la corriente sobre la hélice.

Empleando las ecuaciones de (1-41), los dos últimos términos de la exponencial en (1-42) pueden ser escritos como:

$$\frac{l \operatorname{sen} \alpha}{c} - \frac{1}{pc} = \frac{r\xi}{c} \left( \tan \alpha - \frac{1}{p \cos \alpha} \right) \quad (1-43)$$

Al realizar la sustituciones y simplificaciones correspondientes, se tiene que la solución de la integral es:

$$E_\phi = \frac{E_1}{k^2 - 1} \left( e^{j2\pi nk} - 1 \right) \quad (1-44)$$

donde:

$$\begin{aligned} E_1 &= E_0 e^{j(\omega t - \beta z_p)} \\ \beta &= \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \end{aligned}$$

$$k = L_\lambda \left( \text{sen}\alpha - \frac{1}{p} \right)$$

Al realizar un procedimiento similar al anterior, la componente  $E_\theta$  del campo eléctrico en el punto P es:

$$E_\theta = E_0 \int_0^{2\pi n} \cos \xi \exp \left[ j\omega \left( t - \frac{z_p}{c} + \frac{l \text{sen}\alpha}{c} - \frac{l}{pc} \right) \right] d\xi \quad (1-45)$$

Haciendo las mismas simplificaciones que en el caso anterior, el resultado de la integral es:

$$E_\theta = \frac{jkE_1}{k^2 - 1} \left( e^{j2\pi nk} - 1 \right) \quad (1-46)$$

El cociente de dividir (1-46) entre (1-44) es:

$$\frac{E_\phi}{E_\theta} = \frac{1}{jk} = -\frac{j}{k} \quad (1-47)$$

De la ecuación anterior se observa que si  $k = \pm 1$ , se cumple que  $E_\phi$  y  $E_\theta$  estén en cuadratura y por lo tanto se cumple la condición para que se dé la polarización circular (Cheng, 1999). Como se desea polarización circular la proporción o razón axial es:

$$AR = \frac{|E_\phi|}{|E_\theta|} = \left| \frac{1}{jk} \right| = \frac{1}{k} = \left| L_\lambda \left( \text{sen}\alpha - \frac{1}{p} \right) \right| \quad (1-48)$$

Si se sustituye  $p$  para el incremento de directividad, la proporción axial es:

$$AR_{\text{Sobre el eje}} = \frac{2N + 1}{2N} \quad (1-49)$$

donde  $N$  es el número de vueltas de la hélice. Si  $N$  es grande la razón axial se aproxima a la unidad y la polarización es aproximadamente circular.

Vaughan observó (Vaughan, 1985) que la razón axial medida experimentalmente se incrementa más rápido que el decremento de  $C_\lambda$  cuando se alcanzaban valores menores a  $\frac{3}{4}$  en la circunferencia. Esta diferencia se debe a que en la deducción de la expresión (1-48) se desprecian los efectos de la onda reflejada sobre la hélice. Estos son pequeños cuando la hélice está radiando en el modo axial, pero en bajas frecuencias o cuando se tiene una circunferencia pequeña ( $C_\lambda < \frac{3}{4}$ ) los efectos de la onda reflejada son importantes.

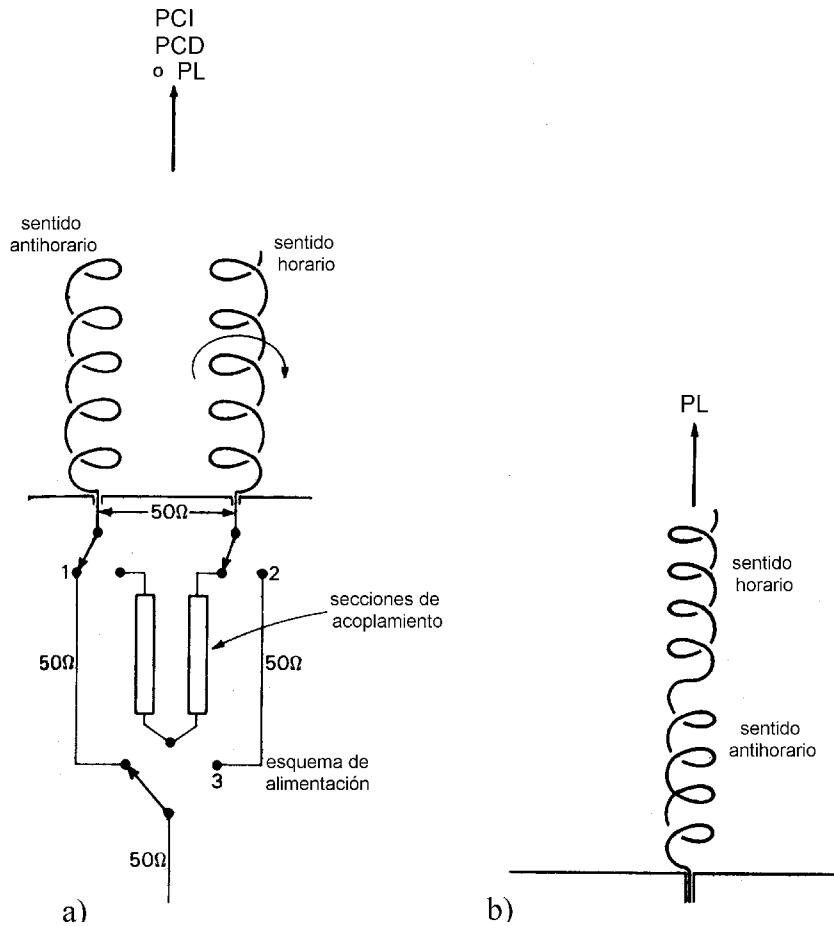
En suma, las condiciones importantes para tener una polarización circular son (Kraus, 2002):

1. La radiación en la dirección axial de una antena helicoidal con cualquier ángulo de disparo y un número entero de vueltas (mayor que uno) tendrá polarización circular si  $k = -1$ .
2. La radiación en la dirección axial de una antena helicoidal con cualquier ángulo de disparo y con un gran número de vueltas (no es necesario que el número sea entero) tendrá polarización circular si  $k$  es aproximadamente igual a  $-1$ .

#### 1.4.5.2 Polarización lineal

Aunque la antena helicoidal es ampliamente utilizada debido a su polarización circular, también es posible obtener polarización de tipo lineal; una de las formas en que se puede obtener esta polarización empleando dichas antenas es colocándolas en un arreglo en serie. En la figura 1.22 se muestran dos arreglos para producir diferentes tipos de polarización; si dos antenas helicoidales monofilares con radiación axial son colocadas juntas y con la misma alimentación, la radiación sobre el eje será lineal, provocada por el sentido opuesto de las corrientes.

Como se observa en la figura 1.23 cada antena tiene las mismas dimensiones físicas y eléctricas, pero el sentido de las vueltas debe ser opuesto. Es decir, que una antena presenta polarización circular izquierda, mientras que la otra presenta polarización circular derecha. Otro arreglo para la polarización lineal es instalar las mismas dos antenas anteriores, pero en paralelo.

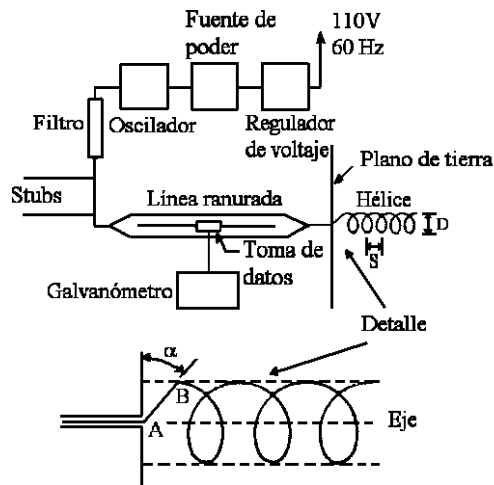


**Figura 1.23** (a) Arreglo para producir Polarización circular izquierda (PCI), polarización circular derecha (PCD) y algún plano de la polarización lineal. (b) Dos hélices en sentido contrario dispuestas en serie para producir polarización lineal (PL).

Un problema que se presenta en el diseño de un sistema de comunicaciones es el concerniente a la selección de la polarización de la antena para reducir los efectos causados por el medio de propagación. Dichos efectos se deben principalmente al efecto Faraday, la lluvia y otros fenómenos meteorológicos, que provocan alteraciones en la polarización de las ondas electromagnéticas. Estas alteraciones no son iguales en todo el espectro electromagnético. En el caso de la lluvia, las pérdidas aumentarán en proporción directa a la frecuencia y serán más críticas en ciertas bandas. Por otro lado, en el caso del efecto Faraday, conforme la frecuencia aumenta, el ángulo de rotación disminuye. Una de las ventajas que tiene la antena helicoidal es que su transmisión se ve poco afectada por el efecto Faraday, ya que tiene polarización circular.

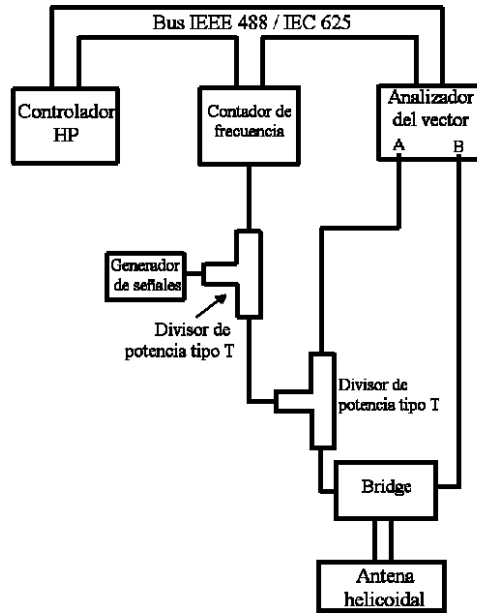
### 1.4.6 Impedancia de entrada

Para caracterizar correctamente una antena helicoidal es necesario conocer su comportamiento de su impedancia de entrada en la frecuencia. En 1947 Kraus y Glasser realizaron mediciones experimentales a 4 antenas helicoidales con plano de tierra (Glasser, 1948). El equipo que emplearon se muestra en la siguiente figura.



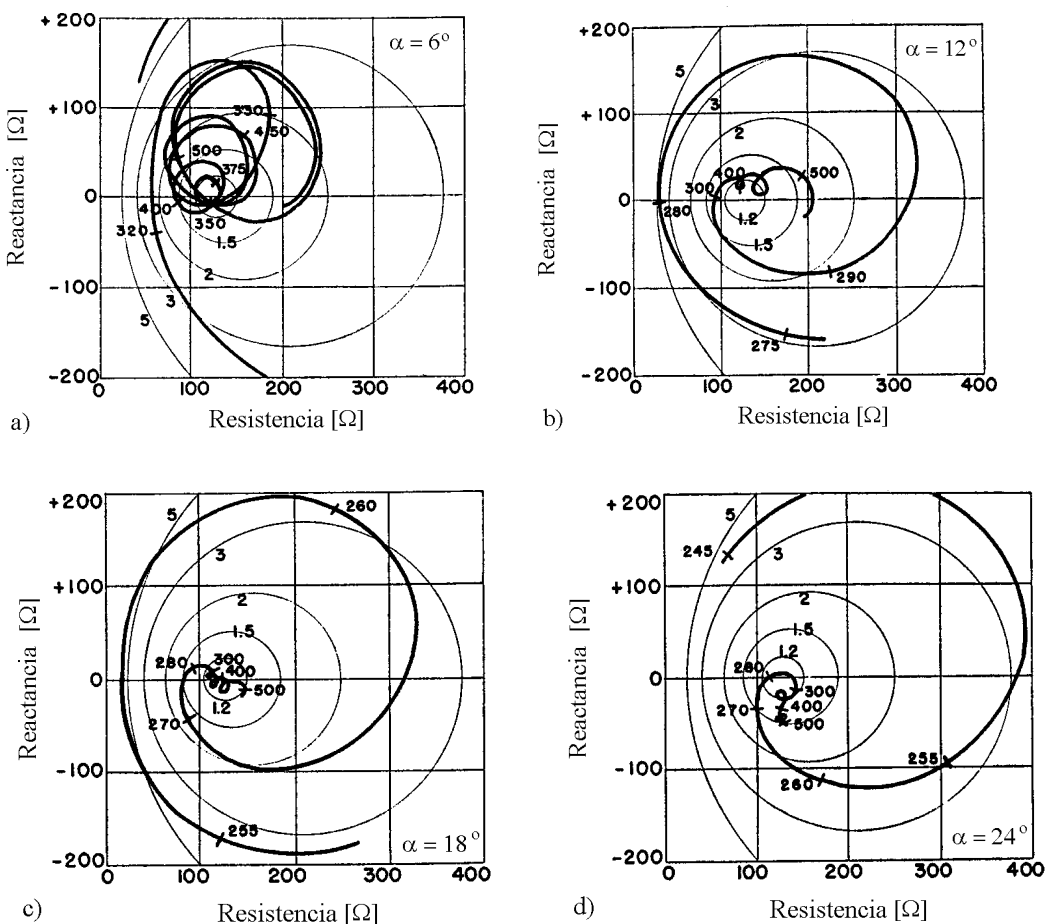
**Figura 1.24.** Equipo empleado para la medición de la impedancia de entrada.

La hélice es colocada sobre un plano de tierra de cobre de  $1.5 \times 1.5$  metros, la alimentación es proporcionada por una línea coaxial de  $53 \Omega$  con el conductor interno conectado a la hélice y el conductor externo al plano de tierra. Una forma más actual para medir la impedancia de entrada de una antena helicoidal es emplear el arreglo mostrado en la figura 1.25 (Vassilikos, 1995). En este arreglo, el sistema está controlado por una computadora que emplea un microcontrolador de Hewlett Packard y un bus estandarizado por la IEEE para tener una comunicación entre varios dispositivos.



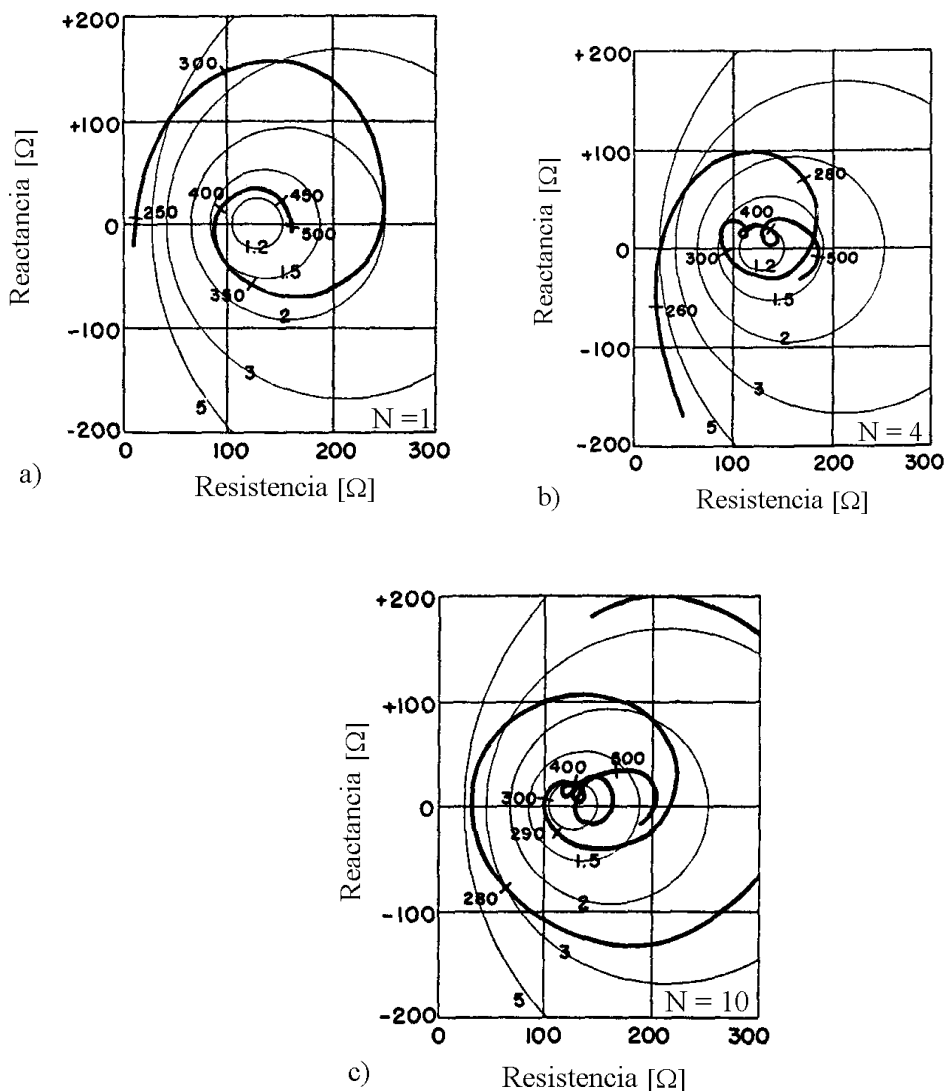
**Figura 1.25.** Medición de la impedancia de entrada por medio de un sistema controlado por una computadora.

Kraus y Glasser midieron la impedancia de entrada como una función de 3 variables : la frecuencia, el ángulo de disparo  $\alpha$  y el número de vueltas  $N$ , para facilitar la toma de los datos decidieron fijar la impedancia como una función de la frecuencia y realizar dos grupos de mediciones, en el primero se fijó el número de vueltas y se varió el ángulo de disparo, mientras que en el segundo se fijó el ángulo de disparo y se varió el número de vueltas. Se emplearon 4 hélices de sección transversal circular con un mismo diámetro físico ( $D = 22.5 \text{ cm}$ ) y con una longitud axial de  $123 \text{ cm}$  tomada desde el plano de tierra hasta el extremo superior de la hélice. El material empleado para la elaboración de la hélice fue un tubo de cobre con un diámetro de  $1.27 \text{ cm}$  de diámetro. Las cuatro hélices empleadas tenían un ángulo de disparo  $\alpha$  de 6, 12, 18 y 24 grados y 15, 8, 5 y 3.9 vueltas, respectivamente.



**Figura 1.26.** Resistencia y reactancia de la impedancia de entrada como una función de la frecuencia en MHz para cuatro hélices de mismo diámetro y longitud axial pero con diferentes ángulos de disparo; los círculos delgados representan los niveles de VSWR de la antena. a)  $\alpha = 6^\circ$ , b)  $\alpha = 12^\circ$ , c)  $\alpha = 18^\circ$  y d)  $\alpha = 24^\circ$ .

En la Fig. 1.26 se observa que el comportamiento de la impedancia con respecto a la frecuencia varía de diferente manera en bajas frecuencias que en frecuencias de 300 a 500 MHz (frecuencias para el modo axial o  $R_1$ ). Para la hélice de  $\alpha = 6^\circ$ , el modo  $R_1$  se encuentra entre 350 y 450 MHz, mientras que para la hélice con  $\alpha = 24^\circ$  el modo de radiación axial se presenta sólo en un pequeño rango de frecuencias. En los casos de las hélices con ángulo de disparo de 12 y 18 grados, las impedancias a bajas frecuencias (menores a 300 MHz) presentan una gran variación con pequeños cambios en la frecuencia. Por otro lado, en el rango de frecuencias para el modo axial, la variación de la impedancia es muy pequeña (con excepción de la hélice  $\alpha = 6^\circ$ ). La constancia de la impedancia indica que la onda reflejada en el extremo final de la hélice es pequeña. Se concluye que la variación de la impedancia entre 300 y 500 MHz disminuye al aumentar el ángulo de disparo.



**Figura 1.27.** Resistencia y reactancia de la impedancia de entrada como una función de la frecuencia para una hélice con un ángulo de disparo de  $12^\circ$  al variar su número de vueltas; los círculos delgados representan los niveles de VSWR de la antena. a)  $N = 1$ , b)  $N = 4$ , c)  $N = 10$

La variación de la impedancia como una función de la frecuencia se muestra en la figura 1.27. Para realizar estas mediciones se empleó una hélice con un ángulo de disparo de  $12^\circ$ , con un diámetro  $D = 23.2 \text{ cm}$ , elaborada con un tubo de cobre de  $1.27 \text{ cm}$  de diámetro y se varió su número de vueltas. La diferencia en el comportamiento de la impedancia de las hélices de 4 y 10 vueltas en la vecindad de los 400 MHz es pequeña y sugiere que si el número de vueltas es grande ( $N > 3$ ), la impedancia es relativamente independiente de  $N$  para frecuencias en el modo  $R_1$ .



Con una alimentación axial la impedancia de entrada es principalmente resistiva y puede ser calculada por medio de la ecuación (Kraus, 2002):

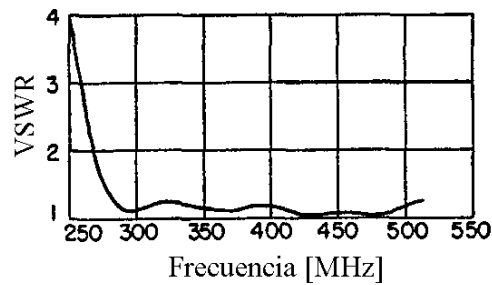
$$R_{ent} = 140C_{\lambda} \quad (1-50)$$

pero si la alimentación es periférica, la ecuación para dicha resistencia de entrada es:

$$R_{ent} = \frac{150}{\sqrt{C_{\lambda}}} \quad (1-51)$$

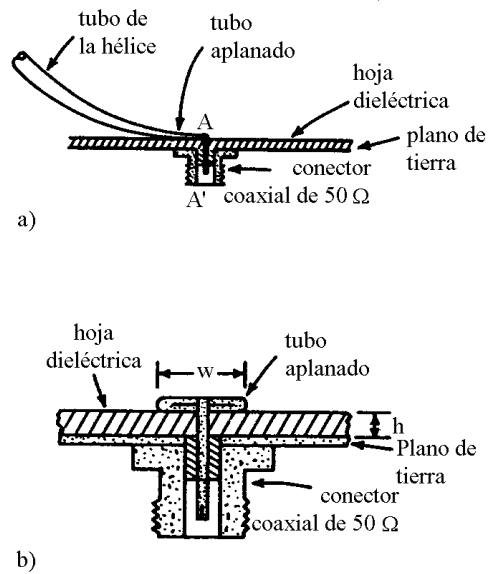
### 1.4.7 VSWR

La razón de voltaje de onda estacionaria (VSWR) que se presenta en una hélice conectada con una línea de 125 ohms es obtenida al comparar los círculos de la Fig. 1.26. Para una hélice con ángulo de disparo de 18° se presenta un VSWR menor a 1.25 en el rango de frecuencias para el modo de radiación axial, esto se muestra en la Fig. 1.28. El VSWR es menor a 1.25 en un ancho de banda de aproximadamente 80% y menor a 1.1 en un ancho de banda del 20% (Glasser, 1948).



**Figura 1.28.** Razón de onda estacionaria como función de la frecuencia para una hélice alimentada por una línea de transmisión de 125 ohms.

Para algunas aplicaciones no es conveniente tener impedancias nominales tan altas (125, 140 ó 150 ohms, típicamente) por lo que se recomienda ajustarla a 50 ohms. Una forma de lograrlo es incrementar el tamaño del conductor cuando se encuentre próximo al punto alimentación en el plano de tierra (Kraus, 1977). Este acoplamiento de impedancias permite disminuir el VSWR en un mayor rango de frecuencias. Este acoplamiento puede ser hecho con hélices de alimentación axial o alimentación periférica, pero se recomienda realizarlo con alimentación periférica (Fig. 1.29).



**Figura 1.29.** a) Aplanamiento del conductor de la hélice para realizar el acoplamiento con la línea coaxial. b) Detalle de la sección transversal AA' del inciso a).

Como el aplanamiento del tubo de la hélice es gradual, en el punto de alimentación el tubo será plano y estará espaciado del plano de tierra por una delgada placa de un material dieléctrico. El grosor adecuado de esta placa está determinado por la ecuación (Kraus, 1984):

$$h = \frac{w}{\frac{377}{\sqrt{\epsilon_r Z_0}} - 2} \quad (1-52)$$

donde:

- $w$ : grosor del conductor en el punto de alimentación
- $h$ : altura a la que se encuentra el conductor con respecto al plano de tierra o el grosor de la hoja dieléctrica
- $\epsilon_r$ : permitividad relativa de la hoja dieléctrica
- $Z_0$ : impedancia característica de la línea coaxial

### 1.4.8 Ganancia y Ancho del haz.

El ancho de haz y la ganancia son funciones del número de vueltas, del espaciamiento entre ellas, del ángulo de salida y de la frecuencia de operación. Basándose en un gran número de mediciones de patrones realizados por Kraus, la ganancia y el ancho de haz están dados por las siguientes relaciones cuasi-empíricas:

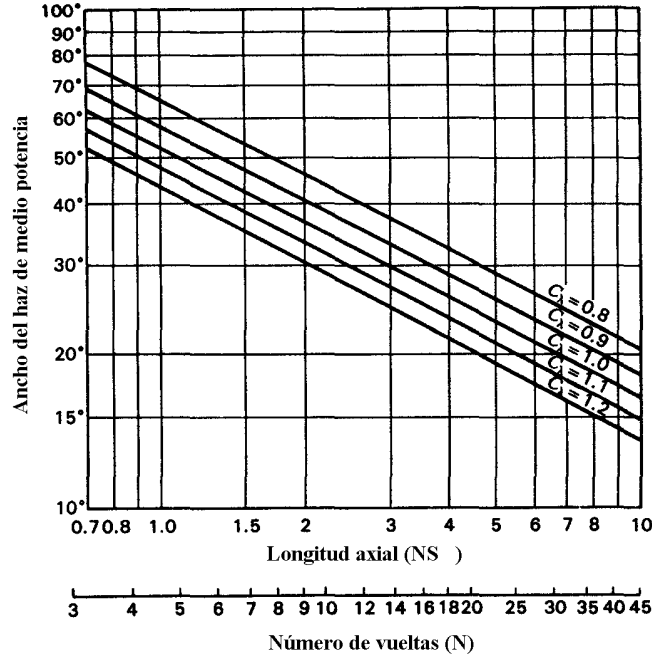
Ganancia:

$$G \approx K_G C_\lambda^2 N S_\lambda \quad (1-53)$$

Ancho de haz de media potencia (HPBW):

$$HPBW \approx \frac{K_B}{C_\lambda \sqrt{N S_\lambda}} \quad [\text{grados}] \quad (1-54)$$

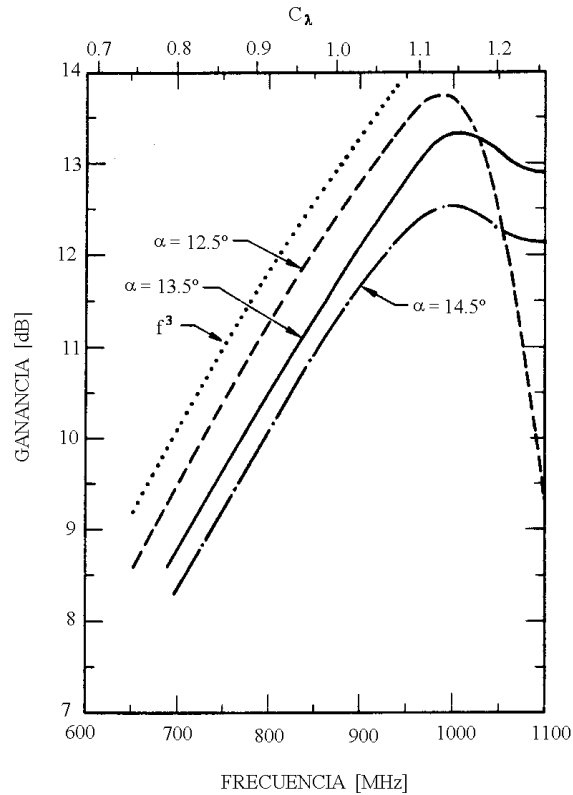
Siendo  $C_\lambda$  la circunferencia en longitudes de onda,  $N$  el número de vueltas y  $S_\lambda$  el espaciamiento entre vueltas en longitudes de onda. Estas ecuaciones son válidas bajo las restricciones:  $0.8 < C_\lambda < 1.15$ ,  $12^\circ < \alpha < 14^\circ$  y  $N > 3$ . De acuerdo a las mediciones hechas por Kraus,  $K_B = 52$  y  $K_G = 15$ . El comportamiento del ancho del haz de media potencia se muestra en la Fig. 1.30, tomando como base la ecuación (1-54).



**Figura 1.30.** Ancho del haz de media potencia para una antena helicoidal monofilar con radiación axial en función de su longitud axial y de su circunferencia.

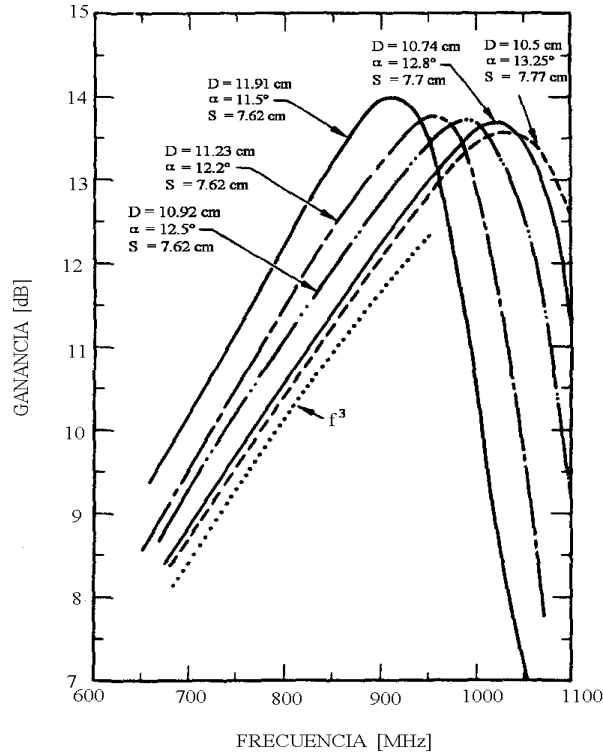
Otros investigadores que se interesaron en conocer la ganancia y el ancho del haz de la antena helicoidal fueron King y Wong, quienes también realizaron diversas mediciones para caracterizar algunas antenas helicoidales de longitud variable. Esta longitud tomaba valores entre 1 y 8 longitudes de onda (King, 1980). Para realizar el estudio, las mediciones se realizaron en dos grupos: en el primero se fijó la longitud de la hélice y se varió su diámetro y el ángulo de disparo, mientras que en el segundo grupo se fijó el diámetro de la hélice y el ángulo de disparo y se varió la longitud.

Dentro de los experimentos realizados en el primer grupo se caracterizaron tres antenas cuyos parámetros son: longitud = 78.23 cm, diámetro = 11 cm, pero cada una con un ángulo de disparo diferente. Estos ángulos fueron: 12.5°, 13.5° y 14.5°. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente figura:



**Figura 1.31.** Ganancia medida para una hélice de diámetro = 11 cm, longitud = 78.23 cm y con ángulo de disparo = 12.5°, 13.5° y 14.5°.

Esta figura presenta el comportamiento de una hélice de 11 cm de diámetro al variar su ángulo de disparo. Asimismo se presenta de forma empírica su dependencia de la frecuencia por medio de la expresión  $f^3$ . En la figura 1.32, se muestra la ganancia característica de una hélice de longitud igual a 78.23 cm y con diámetro y ángulo  $\alpha$  variables. En esta figura se observa que el pico de ganancia máximo se encuentra en la curva que describe el comportamiento de la hélice con mayor diámetro y menor ángulo de disparo.

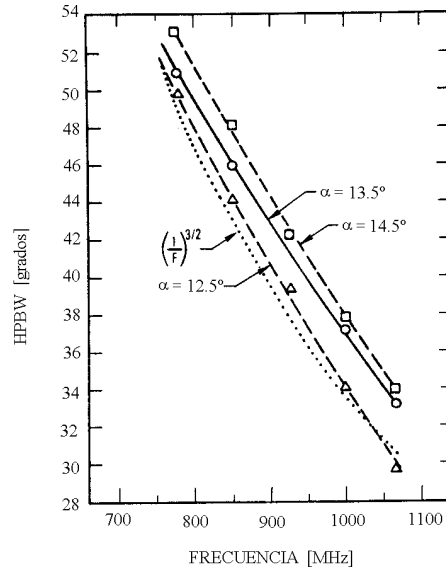


**Figura 1.32.** Ganancia de una antena helicoidal con longitud = 78.23 cm para varios diámetros.

Como se puede observar en la figura 1.32 para cada una de las hélices existe una ganancia máxima a una cierta frecuencia (diferente para cada hélice). A esta frecuencia de ganancia máxima le corresponde una longitud de onda, la cual se denomina como  $\lambda_p$ . Basándose en los resultados de las Figuras 1.31 y 1.32, King y Wong proponen la siguiente fórmula para el cálculo de la ganancia máxima:

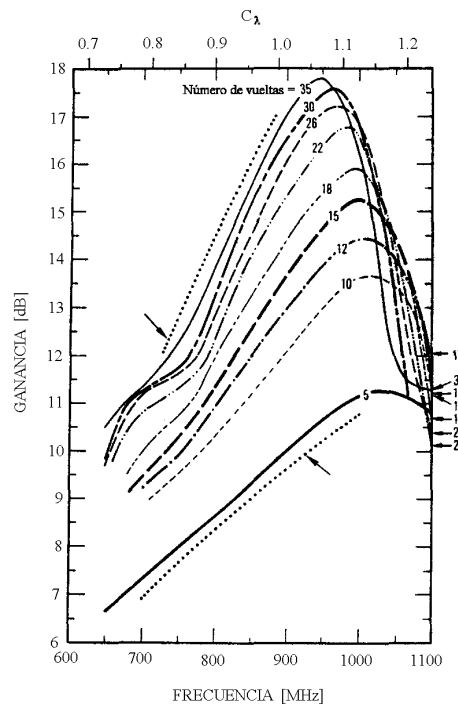
$$G_p = 8.3 \left( \frac{\pi D}{\lambda_p} \right)^{\sqrt{N+2}-1} \left( \frac{NS}{\lambda_p} \right)^{0.8} \left( \frac{\tan 12.5^\circ}{\tan \alpha} \right)^{\frac{\sqrt{N}}{2}} \quad (1-55)$$

donde  $\lambda_p$  es la longitud de onda del pico de ganancia y  $\alpha$  es el ángulo de disparo. Con estos datos y las mediciones de patrones de radiación, el ancho del haz de media potencia se muestra a continuación:



**Figura 1.33.** Ancho del haz de media potencia para una hélice de longitud = 78.23 cm, diámetro = 10.92 cm y  $\alpha$  variable, tomando los valores de 12.5°, 13.5° y 14.5°.

En lo referente al segundo grupo de mediciones, se caracterizó una antena con un ángulo de disparo de 12.8° y con un número de vueltas variable, los valores elegidos fueron  $N = 5, 10, 12, 15, 18, 22, 26, 30$  y 35 vueltas. Los resultados obtenidos se muestran en la figura 1.33.



**Figura 1.34.** Gráfica de la variación de la ganancia con respecto a la frecuencia para una antena helicoidal con diámetro = 10.74cm y  $N$  variable entre 5 y 35 vueltas.

En la Fig. 1.34 se observa que el pico de ganancia se encuentra en  $C_\lambda = 1.155$  para  $N = 5$  y decrece en  $C_\lambda = 1.07$  para  $N = 35$ . Las líneas punteadas proveen una estimación de la variación de la ganancia con respecto a la frecuencia. Se puede observar que esta variación se puede aproximar a  $f^3$  cuando  $N > 10$ . En esta misma figura se advierte que el pico de ganancia no es directamente proporcional al número de vueltas; es decir, si el número de vueltas se aumenta al doble, no se va a obtener un aumento de 3dB en la ganancia.

Al comparar los resultados obtenidos por Kraus con los de King y Wong, se concluye que para un número de vueltas entre 8.6 y 10 ambos resultados son iguales. Ya fuera de este rango, el factor  $K_B$  del ancho del haz varía entre 61 y 70, mientras que Kraus asigna el valor de 52. Asimismo existe una discrepancia en el valor del factor de ganancia  $K_C$ , ya que Kraus asigna el valor de 15, y de acuerdo a los experimentos de King y Wong este valor no es fijo y varía entre 4.2 y 7.7 fuera del rango antes mencionado.

La propiedad de radiar de manera más intensa en ciertas zonas con respecto a otras se le denomina directividad de la antena. La directividad se define como la intensidad del campo radiado en función de la dirección alrededor de una antena, es decir que:

$$\text{Directividad} = f(\theta, \phi)$$

Siendo  $\theta$  y  $\phi$  los ángulos de los ejes del sistema de referencia (Fig. 1.3b). Matemáticamente la directividad se puede conocer por medio de la ecuación:

$$D = \frac{U}{U_0} = \frac{4\pi U}{P_{rad}} \quad (1-56)$$

donde:

- D: directividad [adimensional]
- U: intensidad de radiación [W/estereorradián]
- $U_0$ : intensidad de radiación de la fuente isotrópica [W/estereorradián]
- $P_{rad}$ : potencia total radiada [W]

Otro forma de calcular la directividad es:



$$D = \frac{G}{\eta} \tag{1-57}$$

donde:

- G: ganancia
- $\eta$ : eficiencia

Tomando esta última ecuación y asumiendo que no hay pérdidas,  $\eta = 1$ , la directividad se puede igualar a la ganancia, por lo que, a partir de las ecuaciones (1-53) y (1-57), la directividad está dada por:

$$D = 12NC_{\lambda}^2 S_{\lambda} \tag{1-58}$$

### 1.4.9 Ancho de banda

Una de las propiedades más importantes de la antena helicoidal es su amplio ancho de banda. A continuación se presenta un estudio realizado por King y Wong a este respecto (King, 1980). La siguiente figura muestra el comportamiento del ancho de banda como una función del número de vueltas.

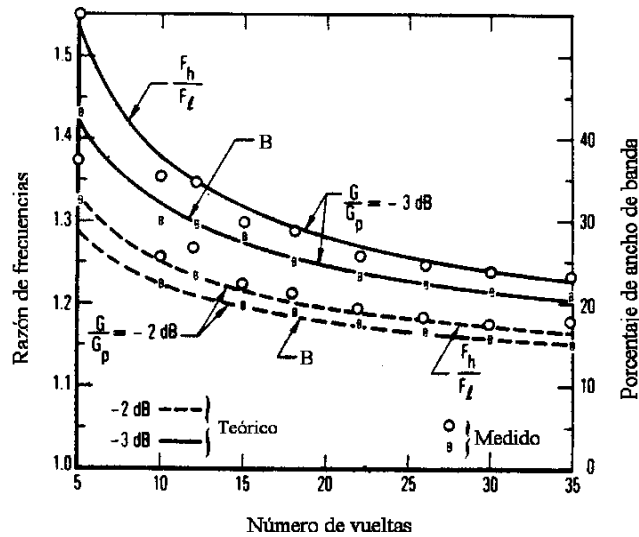


Figura 1.35. Comportamiento del ancho de banda para una hélice con diámetro 10.74 cm y con N variable entre 5 y 35 vueltas.

En la Fig. 1.35 se muestra el ancho de banda a los 3 y 2 decibeles. El ancho de banda decrece conforme aumenta la longitud de la hélice. Si se denotan la frecuencia más alta y la más baja con  $f_h$  y  $f_l$ , respectivamente, el ancho de banda puede ser calculado por medio de la expresión:

$$B = \frac{f_h - f_l}{\left(\frac{f_h + f_l}{2}\right)} \times 100\% \quad (1-59)$$

donde B está dado en porcentaje. Basándose en las observaciones realizadas, la razón de frecuencias del ancho de banda puede expresarse como:

$$\frac{f_h}{f_l} \approx 1.07 \left( \frac{0.91}{G/G_p} \right)^{\frac{4}{3\sqrt{N}}} \quad (1-60)$$

donde:

- G: ganancia
- Gp: ganancia pico
- N: número de vueltas

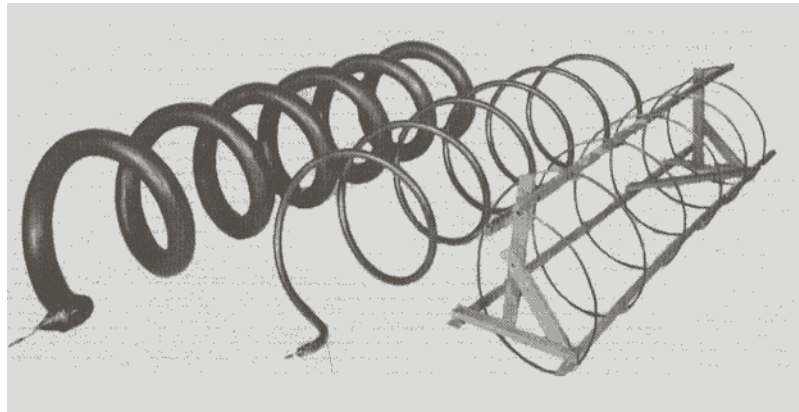
## 1.5 Parámetros de la antena

En la sección anterior se habló de las propiedades que posee la antena helicoidal. Todas ellas fueron expresadas en función de los parámetros de la antena, que son: frecuencia de operación, número de vueltas o espacio entre ellas, ángulo de disparo, diámetro de la hélice, diámetro del conductor y dimensiones y configuración del plano de tierra. Todos los parámetros son fijados por el diseñador, pero algunos de ellos pueden sufrir modificaciones para mejorar alguna o algunas de las propiedades de la antena.

En esta sección se tratarán algunos estudios que se han realizado con relación al diámetro del conductor y al ángulo de disparo. En la sección 1.6.1 se abordará el tema de variaciones en el diámetro de la hélice, que aunque es también una modificación de un parámetro, es un estudio más profundo que se presentará más adelante en un apartado especial.

### 1.5.1 Diámetro del conductor

Para determinar el efecto del diámetro del conductor, Kraus y Trace realizaron mediciones a tres antenas con una misma construcción (Trace, 1949). Las antenas tienen las siguientes características: ángulo de disparo =  $14^\circ$ , diámetro de la hélice = 21.9 cm y espaciado entre vueltas = 17.1 cm. Los diámetros del conductor de las antenas son 0.317, 1.27 y 4.13 cm (Fig. 1.36).



**Figura 1.36.** Hélices empleadas para conocer los efectos del diámetro del conductor.

A continuación se presentan las conclusiones obtenidas de este experimento cuando la antena radia en el modo axial:

1. El promedio del ancho del haz de media potencia de las componentes del campo eléctrico es prácticamente el mismo, aunque hay una ligera reducción en el ancho del haz al incrementar el diámetro del conductor.
2. La razón de la magnitud del lóbulo principal y la magnitud del mayor lóbulo secundario es ligeramente mayor para conductores más gruesos que en los conductores más delgados.
3. La razón axial en la dirección del eje de la hélice es prácticamente la misma para los tres conductores.
4. La impedancia de entrada en los tres casos es prácticamente resistiva. La resistencia promedio en el rango de frecuencia para el modo axial difiere aproximadamente en un 25% entre el conductor más delgado y el más grueso, pero la razón entre la resistencia máxima y la mínima en los tres casos es la misma.
5. La velocidad de fase de la propagación de la onda, en una primera aproximación, no sufre cambios.

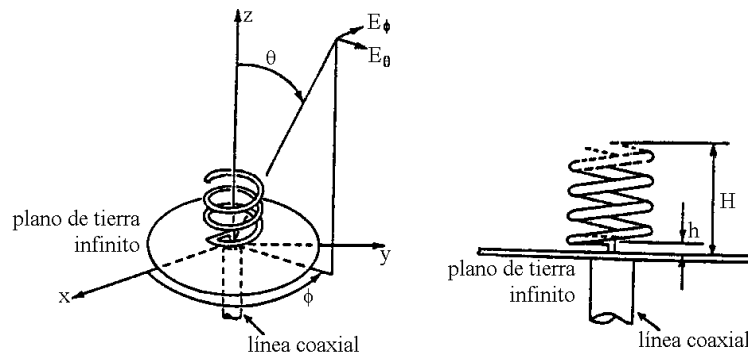
Con estos resultados se puede observar que el efecto del diámetro del conductor de la hélice no provoca cambios significativos en las propiedades de la antena.

## 1.5.2 Ángulo de disparo

### 1.5.2.1 Ángulo de disparo pequeño

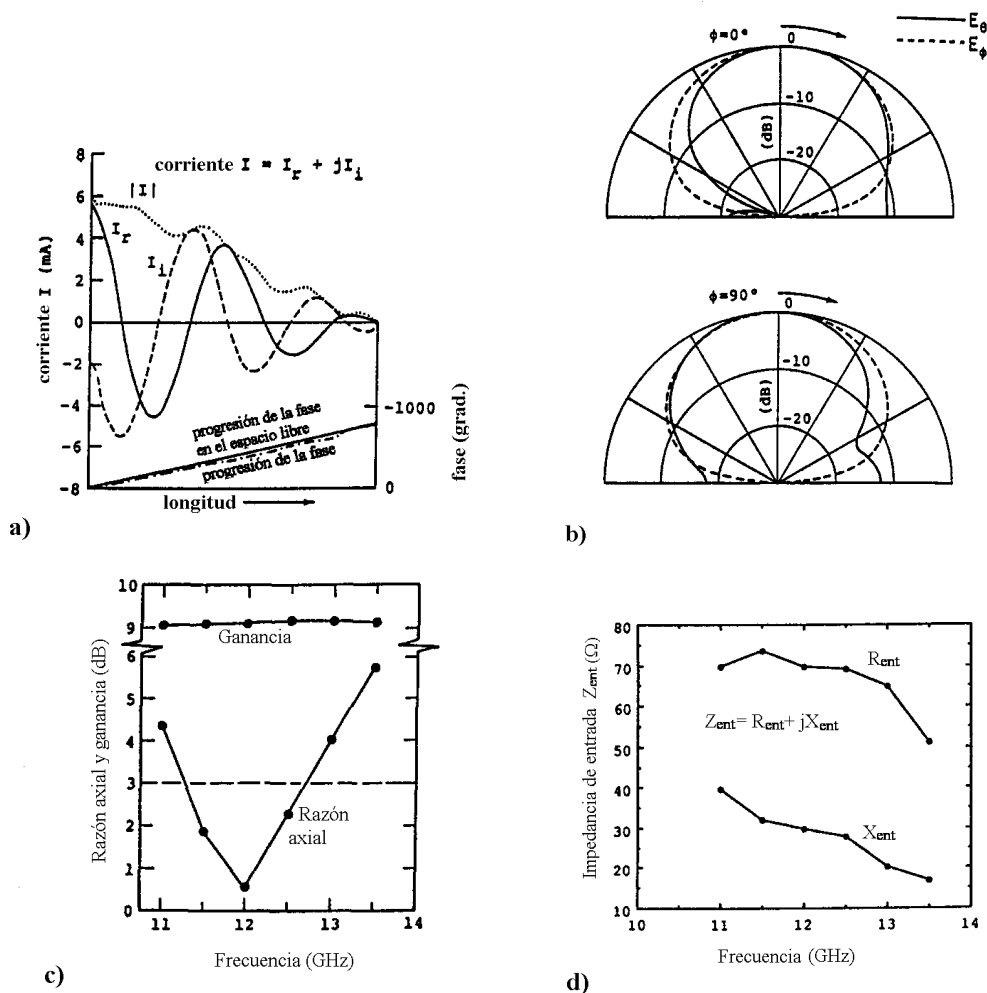
De acuerdo a los análisis mostrados en la sección 1.4, las hélices con un ángulo de disparo pequeño son un mal elemento radiador, pero en el año de 1990 Nakano presentó un estudio en el cual se expone una configuración que cambia esa visión (Nakano, 1991).

La configuración empleada es una hélice con circunferencia = 25 mm, radio del conductor = 0.5 mm y frecuencia de operación = 12 GHz (Figura 1.37).



**Figura 1.37.** Configuración empleada para la caracterización de una hélice con un ángulo de disparo pequeño.

Los ángulo de disparo con los que se trabajó se encuentran en el rango de  $4^\circ$ - $7^\circ$ . Al realizarse una antena con  $N = 10$  y  $\alpha = 4^\circ$  se confirmó que un ángulo pequeño y un gran número de vueltas no son parámetros adecuados para tener radiación con polarización circular, por lo que se propuso disminuir el número de vueltas y conservar el mismo ángulo de disparo. Una hélice con  $N = 2$  y  $\alpha = 4^\circ$  presenta las propiedades que se muestran en la Fig. 1.38.



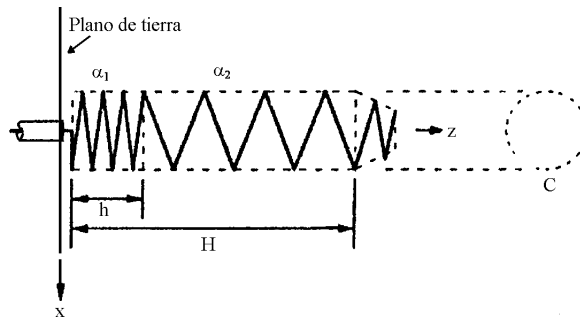
**Figura 1.38.** Propiedades para una antena helicoidal con  $N = 2$ ,  $\alpha = 4^\circ$ ,  $C = 1\lambda$ ,  $d = 0.02\lambda$  y  $f = 12\text{GHz}$ . a) Distribución de corriente. b) Patrón de radiación. c) Respuesta en frecuencia de la razón axial y la ganancia. d) Respuesta en frecuencia de la impedancia de entrada.

De la figura 1.38 se observa que la progresión de fase de la distribución de corriente cambia linealmente con la velocidad de fase, siendo aproximadamente igual a la velocidad de la luz en el espacio libre. El ancho del haz de media potencia es aproximadamente  $70^\circ$  en ambos planos principales. La ganancia de la antena es 9 dB, la cual es prácticamente la misma que la de una antena helicoidal con  $C = 1\lambda$ ,  $\alpha = 12.5^\circ$  y  $L = 0.9\lambda$  operando a una frecuencia de 12 GHz. La impedancia de entrada se puede considerar como constante, encontrándose 70  $\Omega$  para la resistencia y 30  $\Omega$  para la reactancia en un rango de frecuencias entre los 11.5 y 12.5 GHz.

Con los datos presentados por Nakano, se concluye que la combinación de un ángulo de disparo pequeño y pocas vueltas, permite realizar una hélice corta como un elemento radiador de polarización circular.

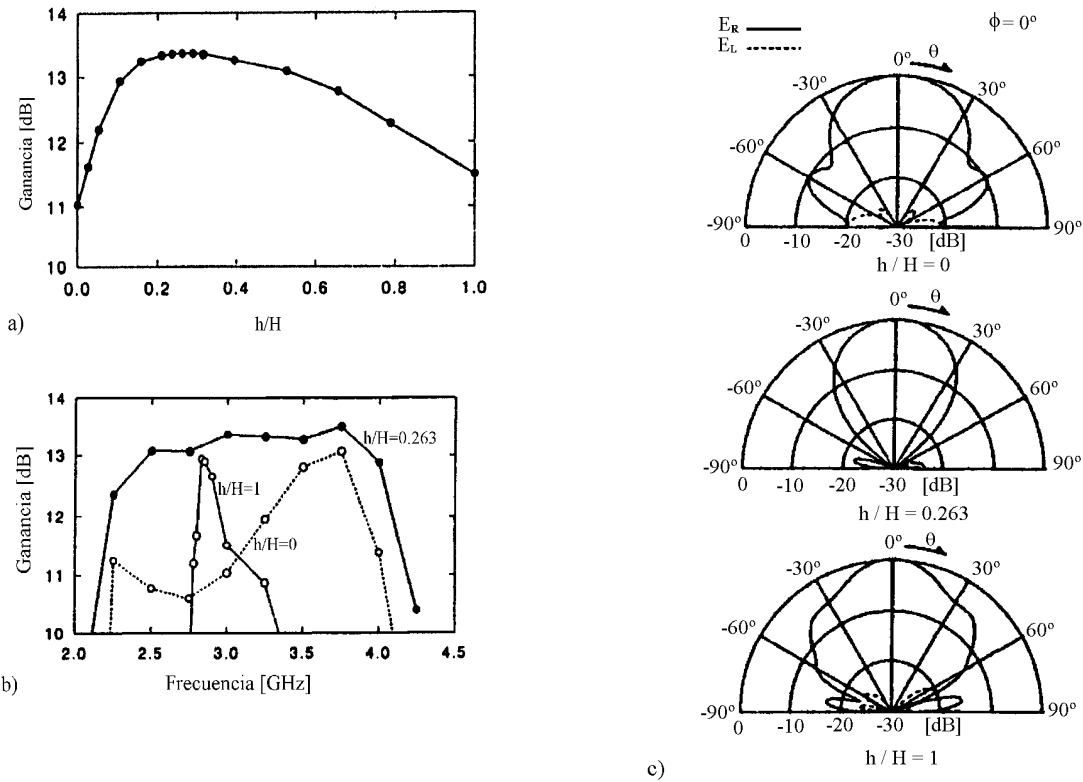
### 1.5.2.2 Doble ángulo de disparo

También se han realizado estudios para conocer el efecto que tiene diseñar una antena con doble ángulo de disparo (Mimaki, 1998). Para la elaboración de esta investigación se empleó la configuración que se muestra en la figura 1.39, la cual consiste en una antena con dos ángulos de disparo,  $\alpha_1 = 2^\circ$  y  $\alpha_2 = 12.5^\circ$ , circunferencia de la hélice =  $1\lambda$ , longitud axial =  $1.33\lambda$  y radio del conductor =  $0.005\lambda$  operando a una frecuencia = 3 GHz. Asimismo se afiló el perfil de la antena en su extremo abierto para disminuir la reflexión de la corriente (Ver sección 1.6.1)



**Figura 1.39.** Configuración de la antena helicoidal con doble ángulo de disparo,  $\alpha_1 = 2^\circ$  y  $\alpha_2 = 12.5^\circ$ .

En la figura 1.40a se observa que al incrementar la razón  $h/H$ , la ganancia también crece llegando a un valor máximo de 13.4 dB en  $(h/H)_{\text{máx}} = 0.263$ . El máximo de ganancia es 2.4 dB mayor que el máximo de ganancia que presenta un hélice con un solo ángulo de disparo  $\alpha_2$ . Los cambios en la ganancia están relacionados con los cambios en el patrón de radiación, y este último a su vez está relacionado con cambios en la razón  $h/H$ . La figura 1.40b muestra que la curva de ganancia se puede considerar como plana en el rango de 2.5 a 40 GHz. En la figura 1.40c se observa que el nivel del primer lóbulo lateral de  $-10$  dB a  $-22$  dB y el ancho del haz de media potencia disminuye de  $52^\circ$  a  $44^\circ$  en forma directa con el decremento de la razón  $h/H$  de 0 a 0.263. En suma, se observa que el efecto de colocar dos ángulos de disparo es benéfico en cuanto al ancho de banda se refiere, ya que es mayor al de una arreglo helicoidal formado por tres antenas helicoidales. El autor no menciona datos sobre cambios en la impedancia de entrada.



**Figura 1.40.** Propiedades de la antena helicoidal con doble ángulo de disparo. a) Ganancia como función de  $h/H$ . b) Respuesta en frecuencia de la ganancia. c) Patrones de radiación.

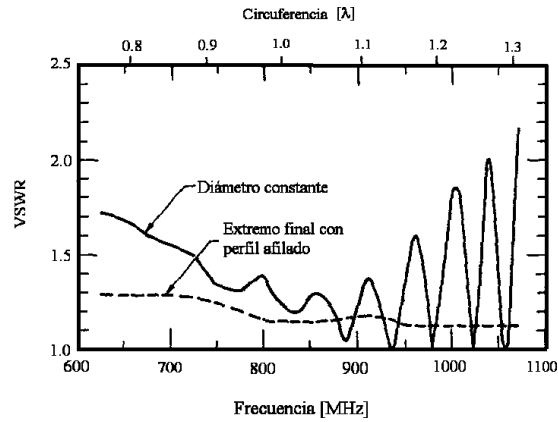
## 1.6 Configuraciones especiales de las antenas helicoidales

### 1.6.1 Antenas helicoidales con diámetro variable

Las antenas helicoidales son generalmente construidas con un diámetro variable. Si se afila el perfil del extremo final de la antena (*taper helical antenna*) se observa un incremento en el ancho de banda y una mayor ganancia. A continuación se presentan algunos estudios realizados a esta antena helicoidal modificada (Wong, 1979; Elkamchouchi, 2001).

### 1.6.1.1 VSWR

La figura 1.41 muestra el VSWR tanto para una antena helicoidal de diámetro constante como para una con perfil afilado. Se observa que el VSWR para la antena con perfil afilado es considerablemente menor, así como la desaparición de la región de resonancia de la antena con diámetro constante. Asimismo el cambio en el VSWR al tener un perfil afilado permite tener hélices más pequeñas.



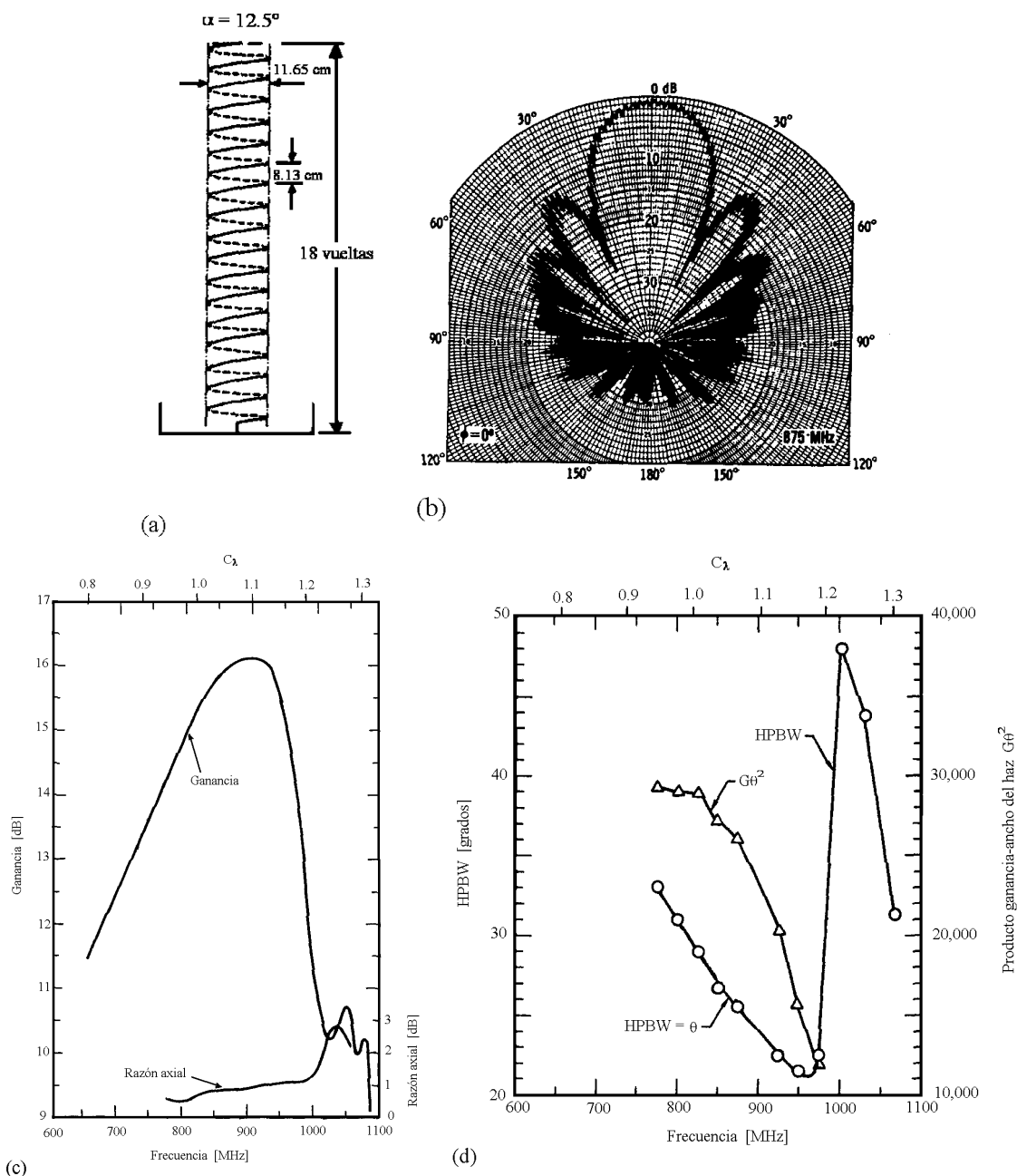
**Figura 1.41.** VSWR de dos antenas helicoidales de 18 vueltas y  $\alpha = 12.5^\circ$ . Una de ellas tiene un diámetro constante mientras que la otra posee un perfil afilado.

Al agregarse dos vueltas con un diámetro menor que el resto de la hélice se observó un decremento en el VSWR, alcanzándose valores entre 1.5 y 1 en un amplio rango de frecuencia. También se observó que la frecuencia inferior del ancho de banda no varió al trabajar con hélices con perfil afilado.

### 1.6.1.2 Antenas helicoidales con perfil afilado.

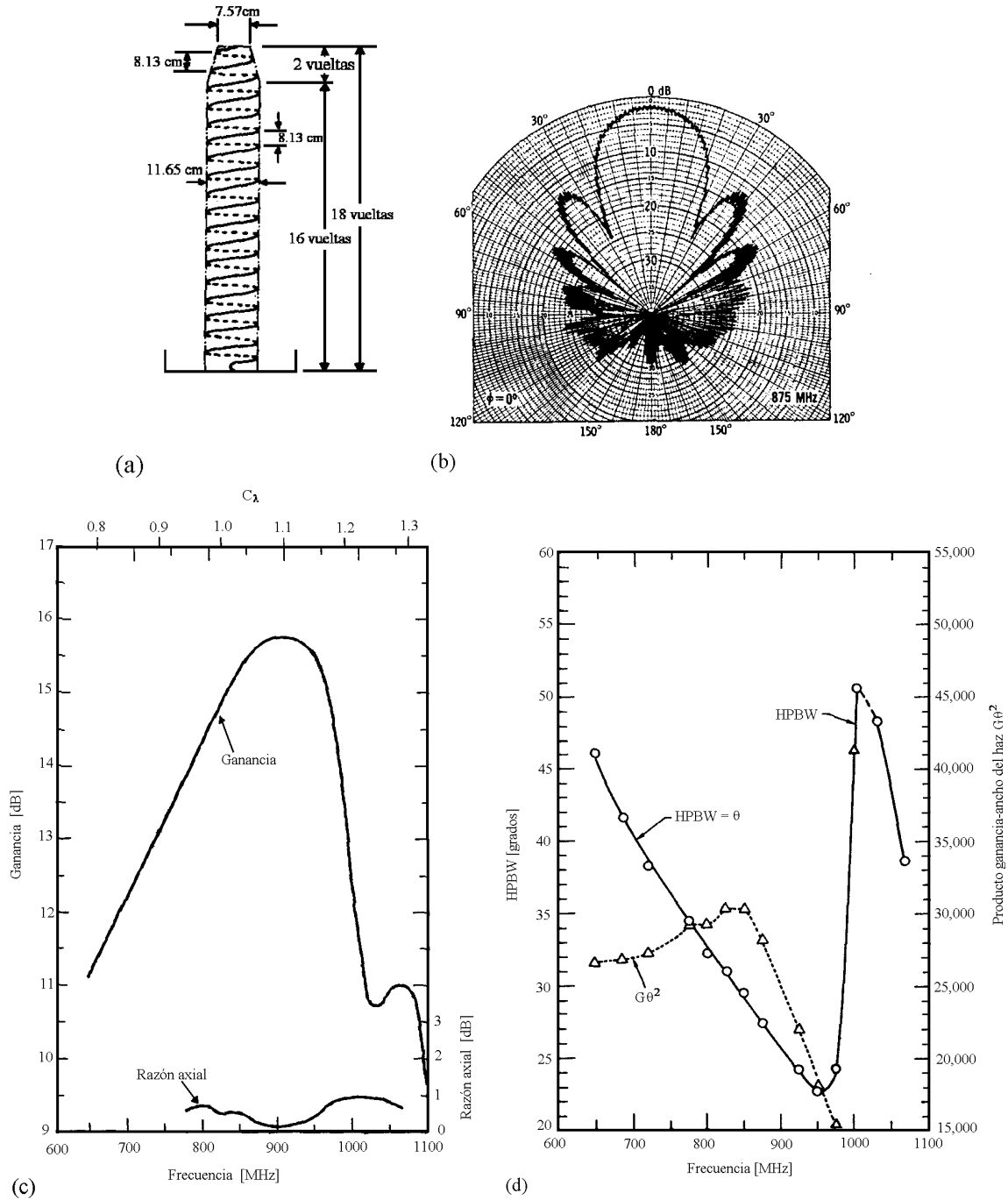
Para una antena con diámetro uniforme e igual a  $11.65 \text{ cm}$  y  $\alpha = 12.5^\circ$ , se esperan resultados aceptables en un rango de 650 a 1025 MHz, que corresponden a  $0.8 < C/\lambda < 1.25$ . Fuera de este rango se presenta distorsión en el patrón de radiación y por lo tanto disminución en la ganancia.





**Figura 1.42.** Características de una antena helicoidal con diámetro constante. a) Configuración. b) Patrón de radiación. c) Ganancia y razón axial. d) Ancho del haz de media potencia.

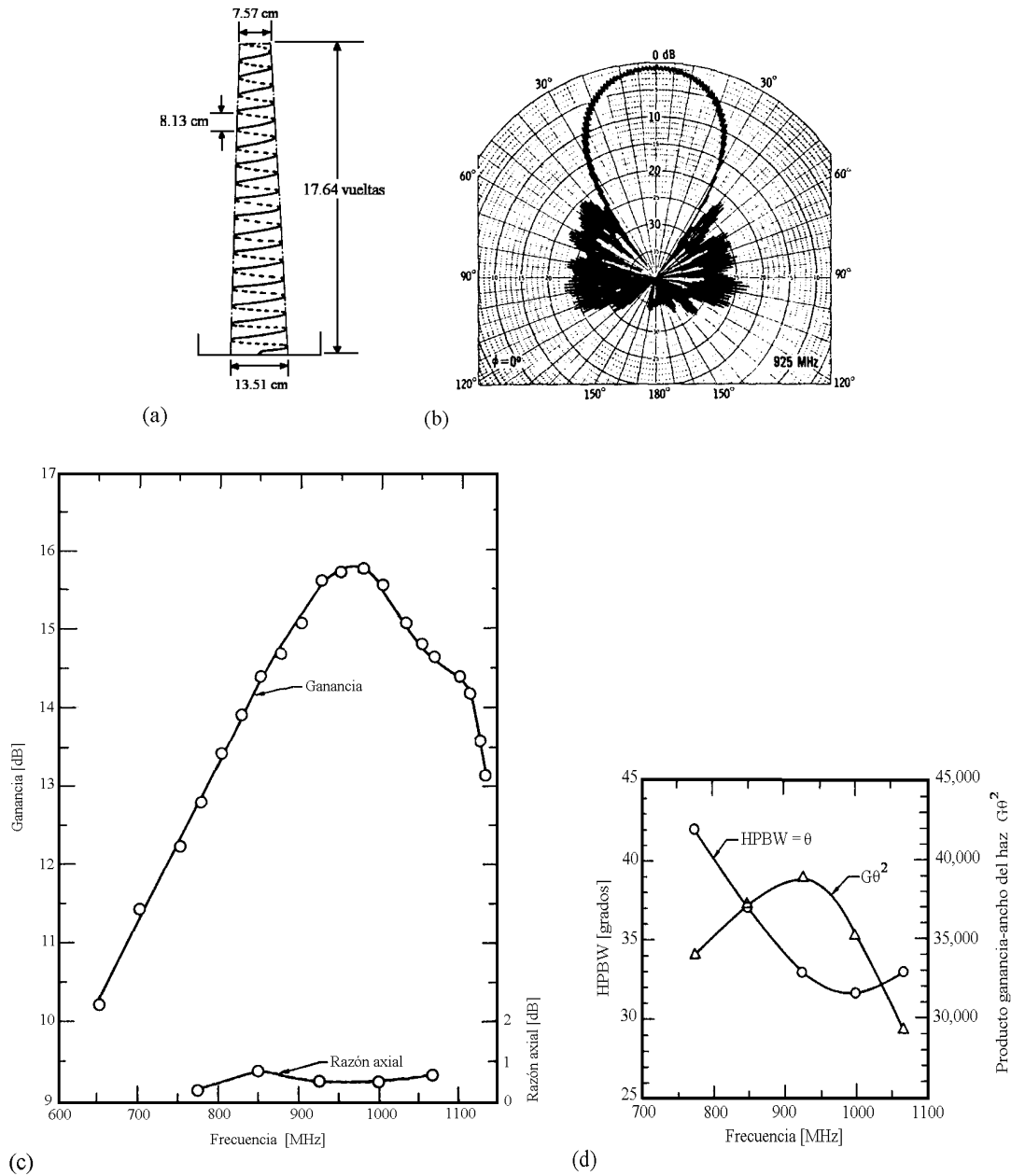
En la figura 1.43 se advierte que el HPBW es inversamente proporcional a  $f^2$  para  $C/\lambda < 1.1$ , mientras que la ganancia es proporcional a  $f^4$  para  $C/\lambda < 1.1$ . Asimismo, las mediciones muestran una gran simetría del patrón de radiación en el plano de azimut y un aumento en la ganancia dentro del rango de frecuencias de 773 a 1067 MHz.



**Figura 1.43.** Antena helicoidal con perfil afilado en su extremo final. a) Configuración. b) Patrón de radiación. c) Ganancia y razón axial. d) Ancho del haz de media potencia.

### 1.6.1.3 Antenas helicoidales con perfil liso

Otra forma de lograr un perfil afilado es disminuir gradualmente el tamaño del diámetro. Estas antenas se conocen como hélices cónicas.



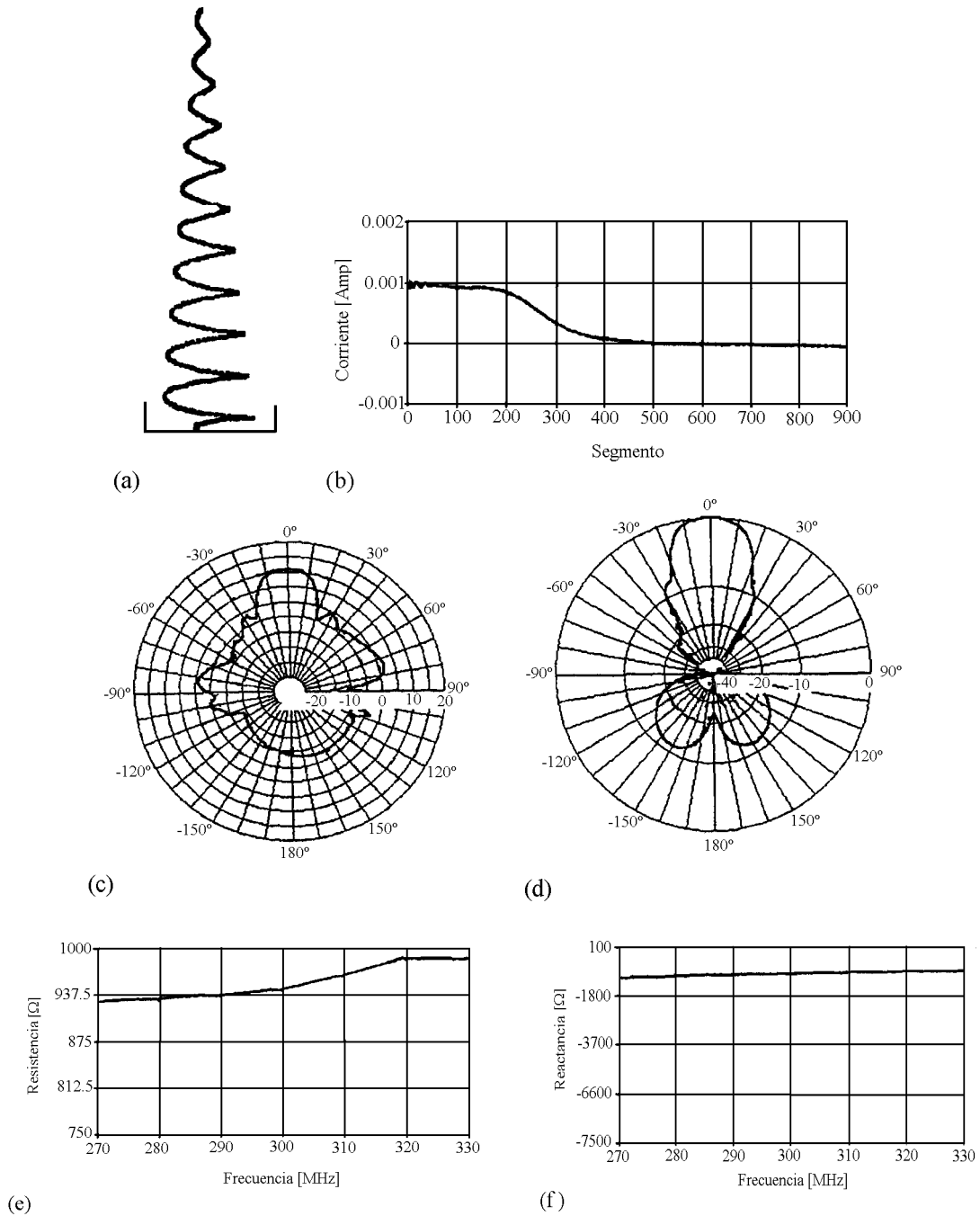
**Figura 1.44.** Antena helicoidal cónica. a) Configuración. b) Patrón de radiación. c) Ganancia y razón axial. d) Ancho del haz de media potencia.

Las características generales de estas antenas son (Fig. 1.44):

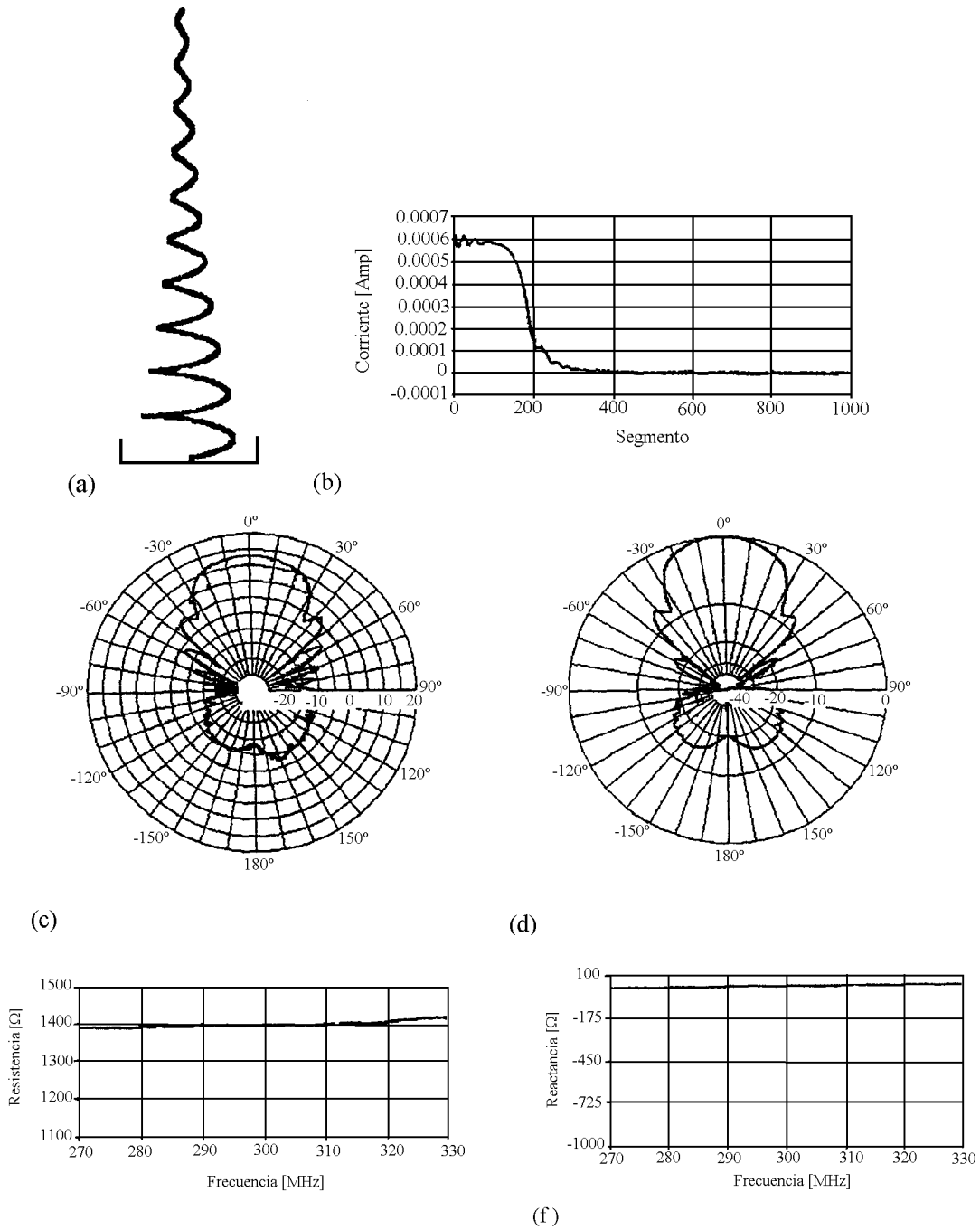
1. El pico de ganancia presenta una ligera disminución en comparación con una antena de diámetro constante, pero se muestra un incremento de ganancia en el extremo superior del ancho de banda.
2. Existe un incremento en la razón axial y los lóbulos laterales.
3. Las frecuencias superior e inferior del ancho de banda son determinadas por el promedio de la circunferencia de la hélice.
4. El pico de ganancia se encuentra en el valor promedio de la circunferencia.

Las antenas cónicas proveen un rango de frecuencias con una ganancia mayor en el extremo superior del ancho de banda, pero el ancho del haz es muy pequeño, por lo que se han realizado estudios para conocer las características de radiación que se presentan para diferentes tipos de perfiles. Las siguientes figuras muestran las características para perfiles lineales, logarítmicos y exponenciales (Elkamchouchi, 2001).

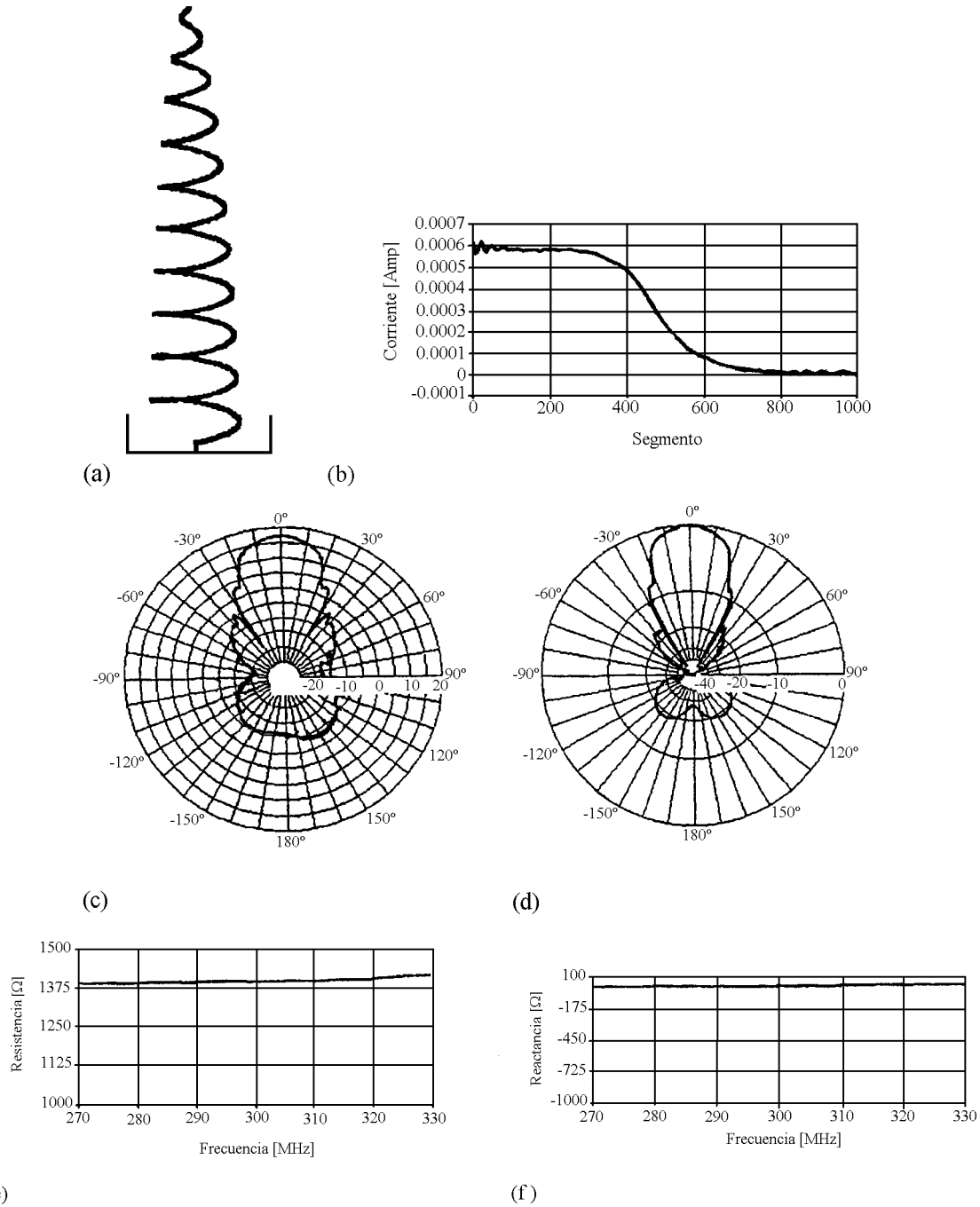
Para la obtención de la distribución de corriente de las figuras 1.45, 1.46 y 1.47 se empleó el método de momentos, por lo que se graficó segmento vs corriente. De dichas figuras se concluye que el perfil que presenta un patrón de radiación más estrecho y una mayor relación frente-atrás es el exponencial, pero en todos los casos la antena cónica presenta un incremento en la directividad al compararse con una antena de diámetro constante. En las antenas con perfiles lineal y logarítmico, se encuentran pequeñas variaciones en la resistencia de entrada, pero en todas las antenas cónicas se observa una impedancia de entrada muy alta, teniéndose valores de kilohms en la parte resistiva para antenas con perfil logarítmico y exponencial.



**Figura 1.45.** Antena helicoidal cónica con perfil lineal. a) Configuración. b) Distribución de corriente. c) Ganancia. d) Patrón de radiación. e) Resistencia de entrada. f) Reactancia de entrada.



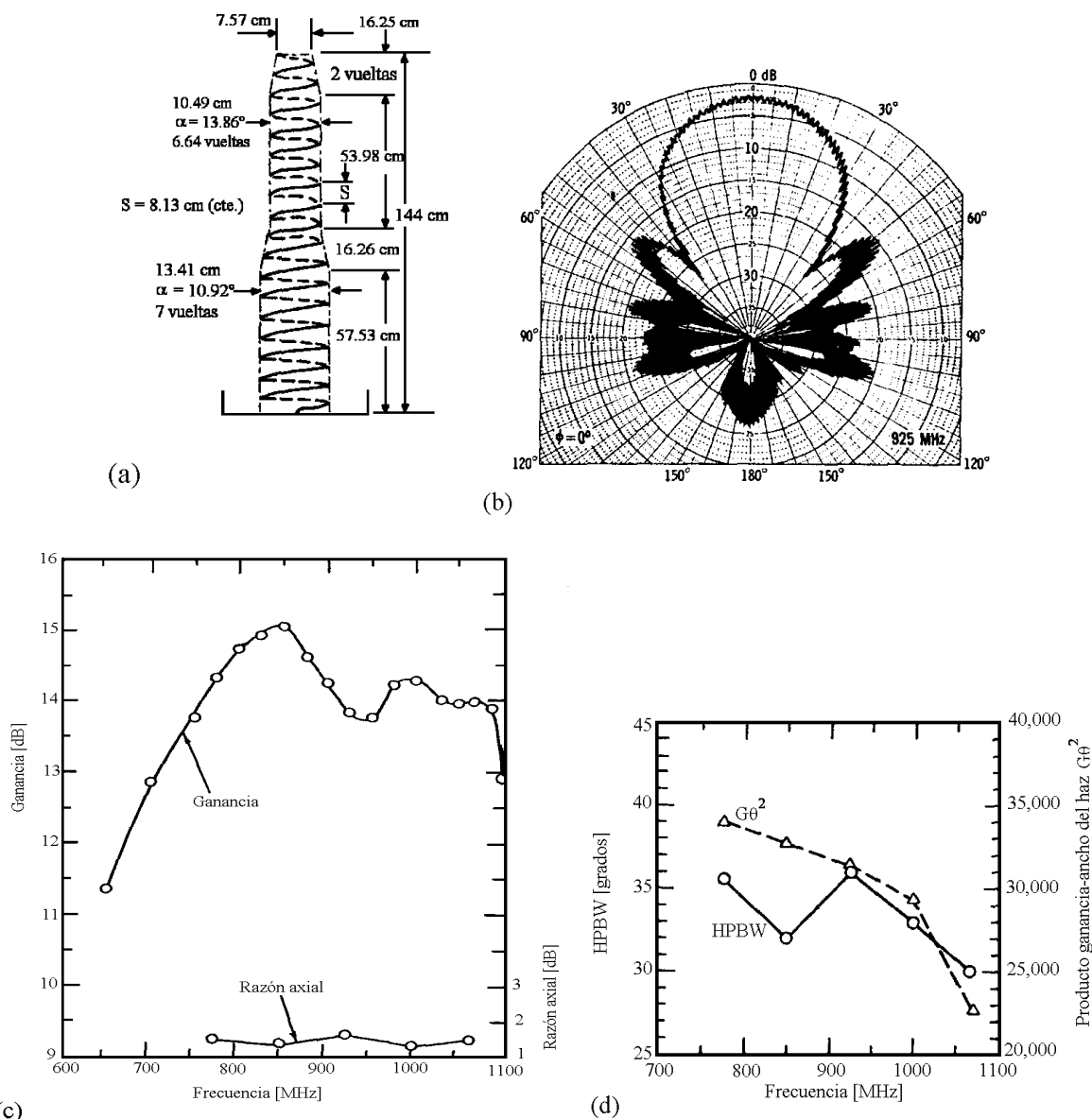
**Figura 1.46.** Antena helicoidal cónica con perfil logarítmico. a) Configuración. b) Distribución de corriente. c) Ganancia. d) Patrón de radiación. e) Resistencia de entrada. f) Reactancia de entrada.



**Figura 1.47.** Antena helicoidal cónica con perfil exponencial. a) Configuración. b) Distribución de corriente. c) Ganancia. d) Patrón de radiación. e) Resistencia de entrada. f) Reactancia de entrada.

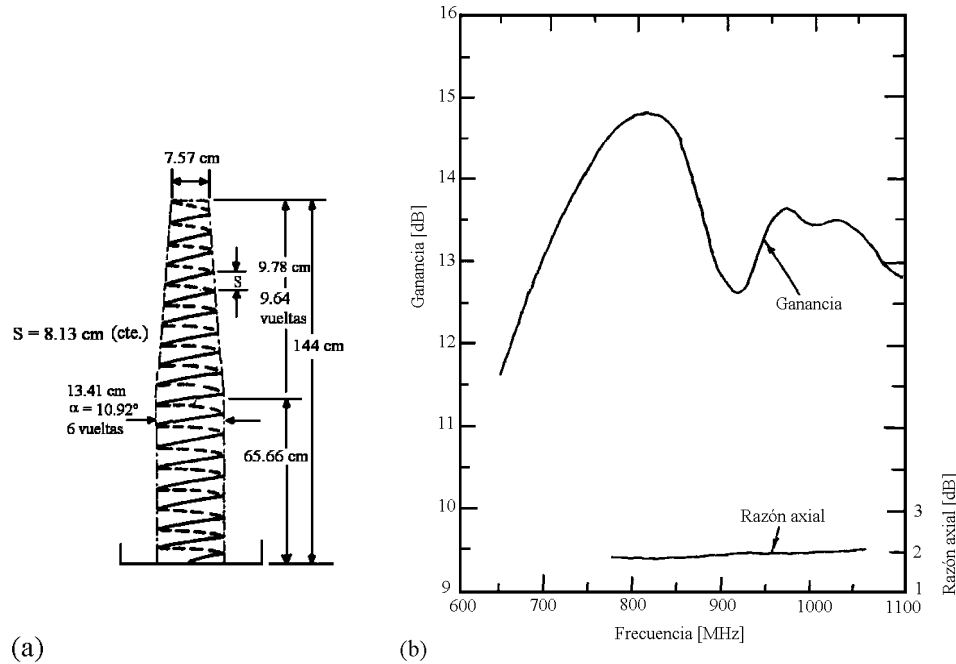
### 1.6.1.4 Antenas helicoidales con perfil semi-afilado

Las antenas helicoidales con perfil semi-afilado (*quasi-taper helix*) pueden construirse con dos o más secciones de hélices con diámetro constante o bien por medio de la combinación de secciones de diámetro constante y secciones con perfil afilado.



**Figura 1.48.** Antena helicoidal con perfil semi-afilado, formada por dos secciones de diámetro constante. a) Configuración. b) Patrón de radiación. c) Ganancia y razón axial. d) Ancho del haz de media potencia.





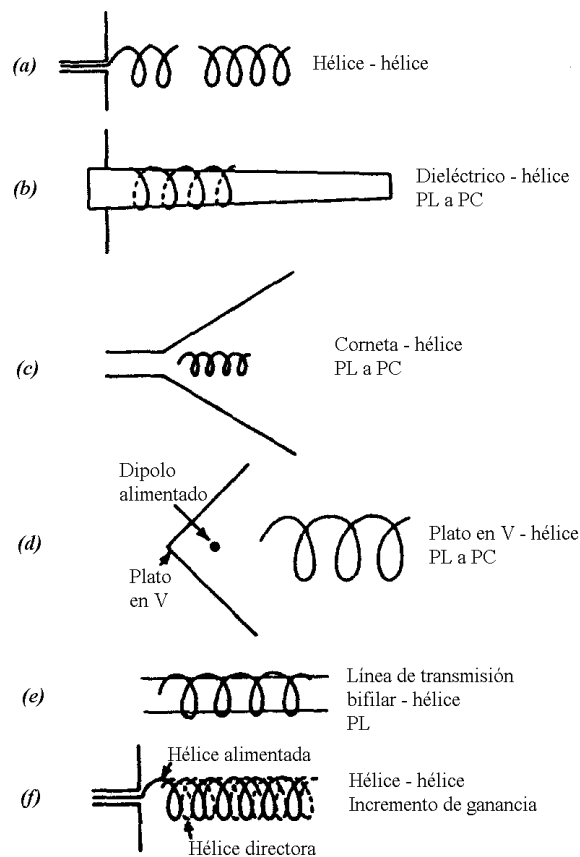
**Figura 1.49.** Antena helicoidal con perfil semi-afilado, formada por una sección de diámetro constante y una sección con perfil afilado. a) Configuración. b) Patrón de radiación.

En la figura 1.48, se observa una ganancia casi constante en el rango de 710 a 1100 MHz, lo que representa un mayor rango con ganancia uniforme en comparación con una antena de diámetro constante. La razón axial es menor a 1 dB, existiendo también un aumento en el ancho del haz y una disminución en los lóbulos laterales.

### 1.6.2 Antena helicoidal de modo axial como elemento parásito

- a) Hélice - hélice (Fig. 1.50a). Si el conductor de una antena helicoidal monofilar en modo axial de 6 vueltas es cortado al terminar su segunda vuelta, la antena continúa operando ya que las dos primeras vueltas excitan las cuatro restantes, funcionando estas últimas como directores.
- b) Dieléctrico - hélice (Fig. 1.50b). Al enrollar una hélice parásita de varias vueltas, en una antena dieléctrica con polarización lineal ésta puede radiar con polarización circular.
- c) Corneta - hélice (Fig. 1.50c). Si se coloca un hélice parásita de varias vueltas en el cuello de una antena piramidal de corneta con polarización lineal, la corneta puede radiar con polarización circular.

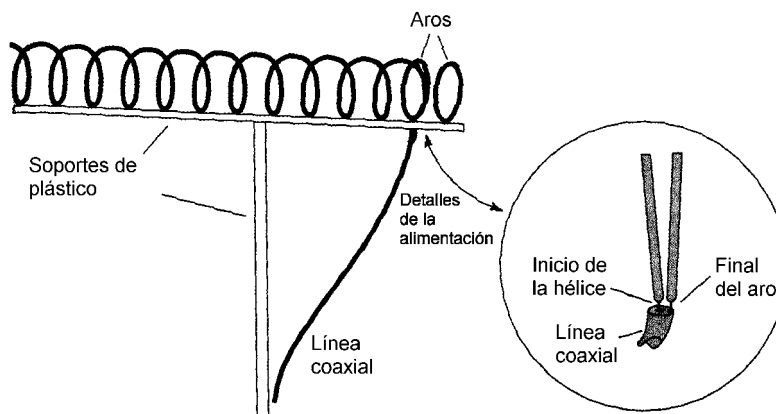
- d) Plato en V - hélice (Fig. 1.50d). Una hélice parásita enfrente de un antena reflectora en V provoca que se obtenga una polarización circular.
- e) Línea de transmisión bifilar - hélice (Fig. 1.50e). Si una hélice parásita de varias vueltas es colocada alrededor de una línea de transmisión bifilar sin tocarse, se obtendrá una antena que radia de modo axial con polarización lineal, con el campo eléctrico paralelo al plano de la línea de transmisión bifilar.
- f) Hélice - hélice (Fig. 1.50f). Si una hélice parásita es colocada entre las vueltas de una antena helicoidal monofilar alimentada que radia en modo axial (ambas con el mismo diámetro), se obtiene un incremento de aproximadamente 1 dB en la ganancia. Este incremento de ganancia ocurre para hélices que tienen su número de vueltas entre 8 y 20. La hélice parásita puede ser vista como un director.



**Figura 1.50.** Algunas aplicaciones de la antena helicoidal monofilar como elemento parásito.

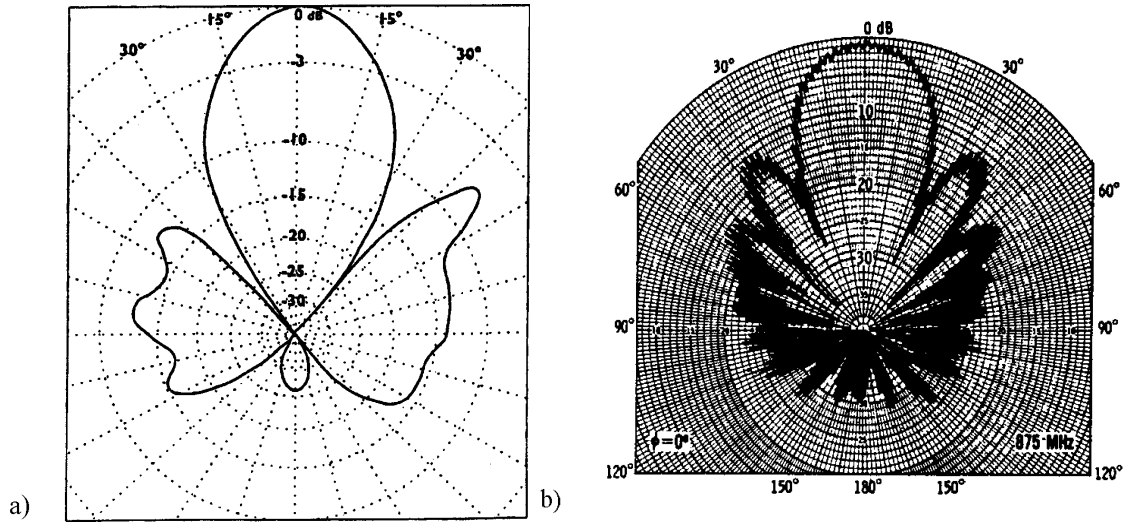
### 1.6.3 Antenas helicoidales con aros en lugar de plano de tierra

Como se pudo observar en las secciones anteriores, todas las antenas helicoidales poseen un plano de tierra, que puede tener diferentes geometrías. Kraus (Kraus, 1995) realizó una nueva configuración en la que no se tiene plano de tierra sino que, en su lugar, se colocan aros. En la figura 1.51 se observa que la hélice y el primer aro están aislados entre sí; este aro se aterriza uniéndolo con el conductor externo del cable coaxial. El segundo aro es un elemento parásito (lazo circular).



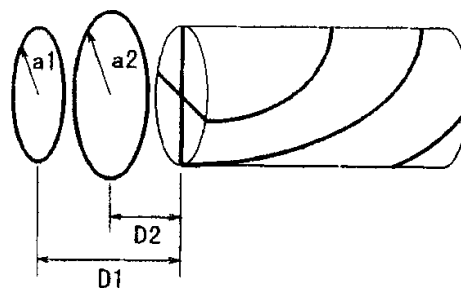
**Figura 1.51.** Antena helicoidal con aros en lugar de plano de tierra.

De acuerdo a las mediciones realizadas, esta antena tiene un comportamiento similar al de una antena con plano de tierra (Fig. 1.52), al menos para la frecuencia en que se hicieron dichas mediciones. Al comparar el patrón de radiación de la figura 1.52a con el patrón de radiación cuando se tiene un plano de tierra infinito (Fig. 1.52b), se observa un incremento en las amplitudes de los lóbulos laterales y una ligera pérdida de simetría del patrón cuando la antena tiene aros en lugar de plano de tierra, pero se puede apreciar que el ancho del haz de media potencia es prácticamente igual cuando se tiene un plano de tierra que cuando se tienen aros.



**Figura 1.52.** a) Patrón de radiación medido para la configuración de la fig. 1.51 a una frecuencia de 1.68 GHz. (Kraus, 1995). b) Patrón de radiación con plano de tierra infinito (Wong, 1979).

Otros autores han seguido desarrollando este modelo, lográndose así una configuración similar para una antena helicoidal cuadrifilar (Kazama, 1998). En su investigación, Kazama presenta una antena cuadrifilar con radiación backfire (Fig. 1.53). En este análisis se concluye que si la antena sólo tiene un aro, la corriente que se induce en ese aro contribuye a la radiación backfire, por lo que el comportamiento es muy diferente al de un elemento reflector o director; pero si se tienen varios aros, las propiedades de radiación pueden ser controladas por la distribución de corriente en los aros parásitos y con cambios muy pequeños en la distribución de corriente en la hélice.

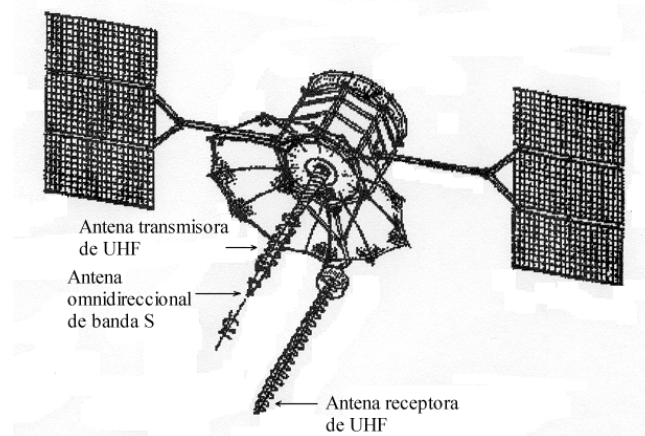


**Figura 1.53.** Antena helicoidal cuadrifilar con aros parásitos;  $a_1$  y  $a_2$  son los radios de los aros y  $D_1$  y  $D_2$  son las distancias a las que se encuentran los aros con respecto a la antena.

## 1.7 Aplicaciones de las antenas helicoidales

### 1.7.1 Antena para el sistema de comunicación FLTSATCOM

El sistema estadounidense de comunicación satelital FLTSATCOM es una constelación de cinco satélites empleada para la red del comando presidencial y para la fuerza aérea y naval de los Estados Unidos. El sistema fue diseñado para tener una vida útil de cinco años; sirve como una liga de comunicación segura entre los tres usuarios mencionados anteriores. Cada satélite cuenta con 23 canales, de los cuales 10 son usados por la fuerza naval, 12 por la fuerza aérea y un canal es reservado para las autoridades de comando nacional. El sistema FLTSATCOM posee una antena transmisora de 11 pies de diámetro rodeada por una malla de alambre. Esta malla tiene una forma hexagonal con 8 pies de ancho. Su antena receptora es una antena helicoidal de 13.5 pies de largo y 13 pulgadas en la base, montada fuera del plato de la antena transmisora.

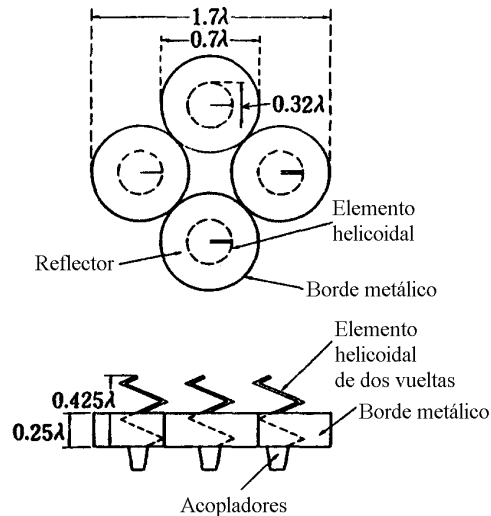


**Figura 1.54.** *Satélite FLTSATCOM*

### 1.7.2 Antena para los satélites INMARSAT-M (Fujimoto, 1994)

INMARSAT-M opera con antenas pequeñas, ya que se emplea para comunicación de botes, barcos o vehículos terrestres. La antena útil para este sistema debe ser una sola antena pequeña o bien un arreglo de antenas con alta eficiencia. Una antena de alta eficiencia puede ser construida por medio de un arreglo con cuatro hélices de dos vueltas. Este arreglo tiene una configuración cuadrada con sus elementos orientados como se muestra en la Fig. 1.55. Las mejores propiedades de ganancia de la antena y razón axial pueden ser obtenidas con un borde metálico de  $0.25\lambda$  de alto. Este arreglo

helicoidal tiene su aplicación en el área marítima, ya que se usa como antena transmisora y receptora en banda L para botes de navegación.



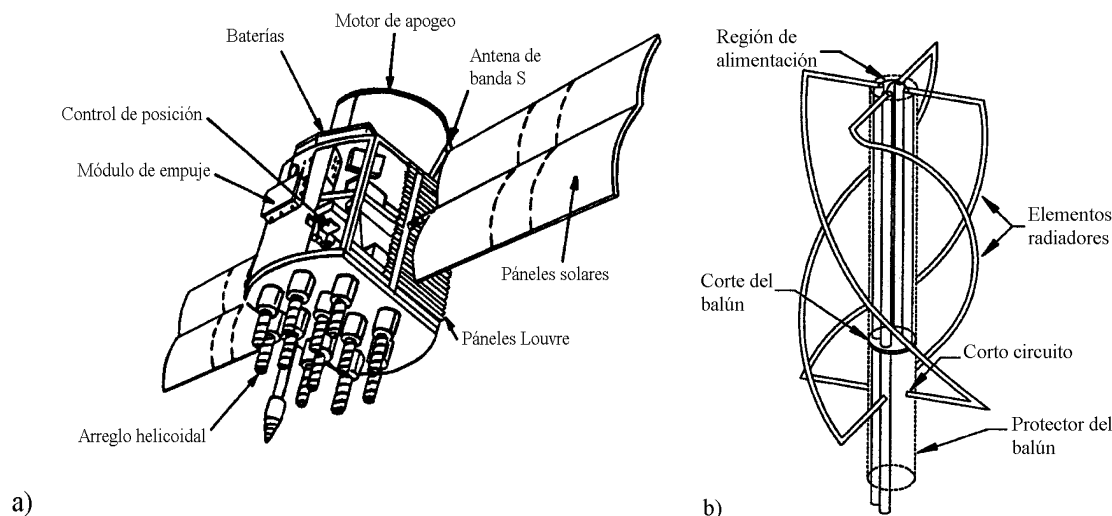
**Figura 1.55.** Arreglo helicoidal de cuatro elementos para los satélites INMARSAT-M.

### 1.7.3 Antena para el sistema de posicionamiento global (GPS)

El sistema NAVSTAR GPS (Navigation System with Time and Ranging / Global Positioning System) está basado en satélites de radio navegación que son capaces de proveer una alta precisión de datos de localización tridimensionales (latitud, longitud y elevación) en todo el mundo, las 24 horas del día. El sistema es, en general, para uso del Departamento de Defensa de los Estados Unidos de Norteamérica. Cada satélites transmite continuamente su posición y tiempo en dos frecuencias,  $f_1 = 1.23 \text{ GHz}$  y  $f_2 = 1.58 \text{ GHz}$ , con polarización circular derecha. Para incrementar la precisión de la posición, se emplean frecuencias duales para compensar los retrasos provocados por la ionosfera en las ondas radioeléctricas.

El sistema GPS requiere antenas que entreguen una respuesta uniforme en amplitud y fase en prácticamente todo el hemisferio que cubra, por lo que se requiere una orientación precisa en cada observación, o bien calcular y compensar la orientación de la antena. La necesidad de una amplitud constante en la región de cobertura es importante para el nivel de recepción. Asimismo, la antena no debe captar la ondas que no se originen en dicha región.

El requisito de la respuesta de fase constante en la región de cobertura de la antena es muy importante. Al recibir una señal, se calcula su fase por medio de una función en términos del ángulo de llegada. Una respuesta con fase constante es más difícil de lograr que una respuesta de amplitud constante. El corte del patrón de radiación se logra por medio de un proceso de interferencia de fase, el cual entrega una respuesta no uniforme para la antena, pero se ha observado que las antenas pequeñas producen una respuesta en fase aproximadamente constante (Tranquilla, 1990).



**Figura 1.56.** Antenas para el sistema GPS. a) Arreglo de 12 hélices. b) Antena cuadrifilar

La antena cuadrifilar ha sido estudiada para aplicaciones en el sistema GPS, especialmente por el tamaño que posee, una respuesta con una fase muy pequeña y poca variación del centro de la fase. Al alargar la antena y manteniendo el mismo número de vueltas, se reduce la relación frente-atrás, se incrementa el ancho del haz y se producen pequeñas variaciones en el centro de la fase en ángulos de elevación pequeños. La antena helicoidal no es capaz de transmitir con frecuencia dual ya que es una antena resonante y por lo tanto para un estrecho rango de frecuencias; si se quiere lograr la operación en una banda dual se pueden colocar dos antenas montadas coaxialmente.

#### 1.7.4 Antena MCA-6010 para el sistema SATCOM

El MCA-6010 es un arreglo de cuatro hélices que ha sido instalado en los estabilizadores Gulfstream y Challenger. El MCA-6010 ofrece una cobertura más amplia que los arreglos empleados anteriormente, ya que cubre una mayor región que las antenas de los sistemas INMARSAT. Ésta es una importante característica para ser usado en los vuelos de altas latitudes y rutas sobre el Océano Pacífico.

La ganancia que se obtiene por medio del arreglo es mayor a los requerimientos del sistema INMARSAT para la operación de uno o varios canales. El MCA-6010 es capaz de soportar 6 canales simultáneos de voz, fax o datos, incluso en los extremos de la cobertura. Los motores y los sensores de posición dirigen el arreglo de antenas en la dirección del satélite a más de 10 grados por segundo en una rotación continua en la dirección azimut de  $-10$  a  $+90$  grados de elevación para asegurar una comunicación ininterrumpida. El arreglo de antenas consiste en cuatro antenas helicoidales en banda L (Fig. 1.57) con la capacidad de soportar más de seis canales de forma simultánea.



**Figura 1.57.** Arreglo helicoidal MCA-6010 del sistema SATCOM.

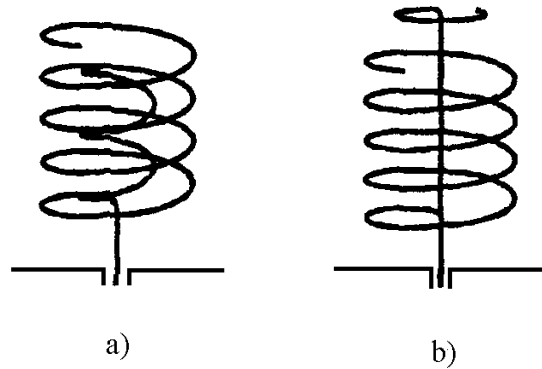
### **1.7.5 Antena helicoidal para telefonía celular** (Haapala, 1996)

El desarrollo de redes celulares ha tenido un gran crecimiento en los últimos años. Los teléfonos celulares se han hecho más comunes cada vez. Poco a poco las frecuencias empleadas en este tipo de redes se han ido moviendo con el fin de incrementar la capacidad en el tráfico. Lo anterior ha provocado que los distintos tipos de redes operen en diversas frecuencias. Como la frecuencia de operación puede variar, ha sido necesario crear aparatos que puedan operar a varias frecuencias. Una combinación típica de diversidad de frecuencias puede ser, por ejemplo, 900 MHz y 1800 MHz, frecuencias correspondientes a los sistemas GSM y DCS1800, respectivamente.

Para tener una operación con frecuencias duales es necesario tener dos antenas, pero para tener una dimensión suficientemente pequeña es conveniente colocar una antena dentro de la otra. Se pueden realizar antenas helicoidales operando con frecuencias duales, al instalar dos antenas helicoidales



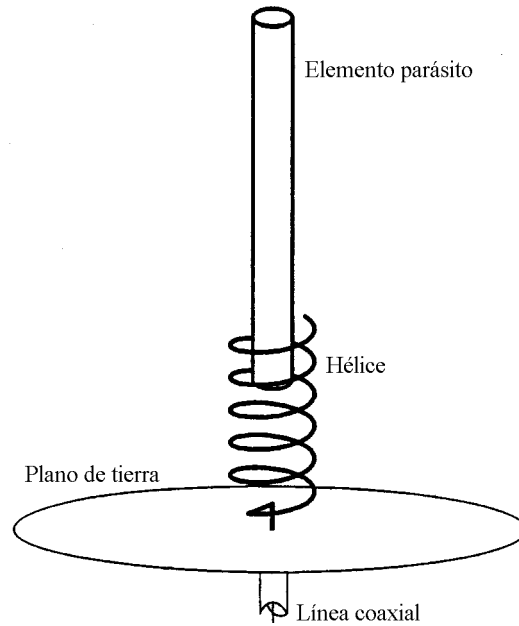
diseñadas para diferentes frecuencias y colocadas una dentro de la otra (Fig. 1.58a). Otra posibilidad es el uso de una antena helicoidal diseñada para bajas frecuencias y un monopolo colocado dentro de ella, el monopolo en su extremo superior tiene un espira con el fin de reducir el largo de la antena (Fig. 1.58b)



**Figura 1.58.** Antenas helicoidales para frecuencias duales. a) Dos antenas helicoidales, una dentro de la otra. b) Antena helicoidal combinada con un monopolo doblado en su extremo superior.

### 1.7.6 Frecuencia dual de las antenas helicoidales con modo normal

Algunos autores han investigado (Nakano, 1998) los efectos de un elemento parásito sobre la relación de voltajes de onda estacionaria VSWR en la antena helicoidal con radiación normal. Tal elemento parásito es un monopolo, y se le llama parásito porque no está conectado directamente a la alimentación de la hélice. La operación en frecuencia dual es definida en función de la posición del elemento parásito (altura del monopolo) sobre un plano de tierra idealmente infinito. Conforme la altura decrece, la separación de una frecuencia de resonancia inferior con respecto a una frecuencia de resonancia superior crece. La existencia de dos frecuencias de resonancia en una antena, permite una amplia aplicación en sistemas de comunicación inalámbrica, donde es necesaria una frecuencia de transmisión y una frecuencia de recepción, como los sistemas de comunicación celular (Figura 1.59).

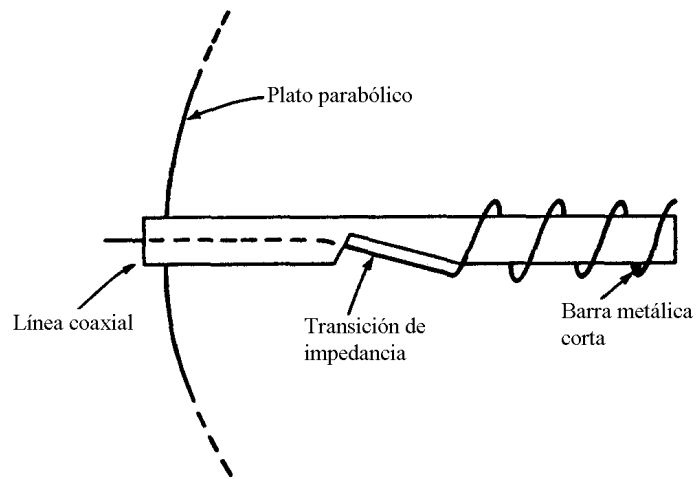


**Figura 1.59** Antena helicoidal con un monopolo como elemento parásito.

Un ejemplo del empleo de las frecuencias duales es en las redes celulares, donde la terminal móvil debe de tener una gama de frecuencias de operación, ya que estos dispositivos cambian de célula a célula, y por lo tanto son necesarios aparatos que puedan operar a varias frecuencias. Es la radiación normal de una o de un arreglo de hélices, y el elemento parásito, los que hacen posible la aplicación de estas antenas a las redes celulares. Además, dichos aparatos necesitan recibir y transmitir la señal en todas direcciones, es decir en cualquier posición en que el aparato se encuentre; entonces la radiación circular generada por una hélice es la mejor. Un arreglo de dos antenas helicoidales, una dentro de otra, es una configuración empleada para lo anterior.

### 1.7.7 Alimentador helicoidal tipo Backfire

Las antenas helicoidales también son útiles como alimentadores para platos parabólicos. Un ejemplo es el alimentador construido por Johnson y Cotton (Johnson, 1984), en el cual una antena helicoidal monofilar de modo axial opera en modo backfire (radiación hacia atrás) como un elemento alimentador con polarización circular y alta ganancia para un plato reflector parabólico. Al carecer de plano de tierra, la antena obviamente radia hacia atrás de una forma axial. Las dimensiones de la antena se restringen a sólo 3.5 vueltas con el ángulo de disparo de la última vuelta reducido gradualmente a cero. El ancho de banda útil es aproximadamente del 40 por ciento.



**Figura 1.60.** Antena helicoidal monofilar de modo axial como alimentador de un plato parabólico.

## 2 Modelado matemático de una hélice con aros en lugar de plano de tierra

### 2.1 Introducción

Esta tesis tiene como objetivo diseñar un nuevo arreglo de antenas helicoidales, por lo que es necesario primero caracterizar a una antena de forma aislada debido a que es el elemento base de nuestro estudio. Este nuevo diseño está basado en la propuesta realizada por el doctor Kraus (Kraus, 1995), en la cual se colocan aros en lugar del plano de tierra convencional (Ver sección 1.6.3).

En el trabajo presentado por Kraus únicamente se describe el patrón de radiación obtenido experimentalmente, pero no se realiza ningún estudio acerca de otras propiedades de la antena, como son la impedancia de entrada y la distribución de corrientes, entre otras. En esta tesis se presenta un estudio del efecto que tiene colocar aros como plano de tierra en la impedancia de entrada, la distribución de corrientes y el patrón de radiación; adicionalmente, se realiza un estudio para analizar el efecto que produce la distancia de separación entre la hélice y los aros.

El cálculo del diseño de una antena se divide, generalmente, en dos partes: el problema interior y el problema exterior (Markov, 1978). El problema interior consiste en encontrar las funciones de distribución de las corrientes de altas frecuencias por el emisor, mientras que en el problema exterior, se da por hecho el conocimiento de la distribución de corrientes para determinar el campo electromagnético de radiación de la antena y sus características numéricas, como lo son la anchura del haz, el nivel de los lóbulos laterales, la ganancia de la antena dirigida, etc.

Para conocer la distribución de corrientes de una antena tubular, se puede hacer de forma experimental, o bien por un análisis numérico. En este capítulo, se emplea el Método de Momentos para obtener la distribución de corrientes de una antena helicoidal aislada cuando se sustituye su plano de tierra por un aro. Con el objeto de comprobar los resultados obtenidos con el Método de Momentos se construyó una antena helicoidal muy similar al modelo teórico y se realizaron mediciones a su impedancia de entrada por medio de un analizador de redes.

## 2.2 Método de Momentos

### 2.2.1 Descripción del método

Una ecuación integral puede ser transformada en un sistema de ecuaciones lineales simultáneas (ecuación matricial), facilitando su solución. Roger Harrington unificó varios procedimientos para la solución de sistemas de ecuaciones en uno sólo, al cual llamó Método de Momentos (Harrington, 1968). Este método es muy útil para conocer los campos electromagnéticos radiados ya que puede ser programado. A continuación se presenta el procedimiento general del Método de Momentos.

Considérese la ecuación no homogénea:

$$L(f) = g \quad (2-1)$$

donde  $L$  es un operador lineal,  $g$  es conocido y  $f$  es el término por conocer. Se puede expandir  $f$  en un serie de funciones  $f_1, f_2, f_3, \dots$  en el dominio de  $L$ , como:

$$f = \sum_n \alpha_n f_n \quad (2-2)$$

donde los coeficientes  $\alpha_n$  son constantes. Las funciones  $f_n$  son llamadas de expansión o base. Al sustituir la ecuación (2-2) en (2-1), se obtiene:

$$\sum_n \alpha_n L(f_n) = g \quad (2-3)$$

Se define el producto interno como  $\langle f, g \rangle$ , el cual depende de cada problema, así como las funciones de prueba  $w_1, w_2, w_3, \dots$  en el rango de  $L$ . Tomando el producto interno de la ecuación (2-3) y las funciones de prueba  $w_m$ :

$$\sum_n \alpha_n \langle w_m, Lf_n \rangle = \langle w_m, g \rangle \quad (2-4)$$

donde  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Este conjunto de matrices puede ser escrito como una ecuación matricial de la siguiente forma:

$$[l_{mn}][\alpha_n] = [g_m] \quad (2-5)$$

donde

$$[l_{mn}] = \begin{bmatrix} \langle w_1, Lf_1 \rangle & \langle w_1, Lf_2 \rangle & \dots \\ \langle w_2, Lf_1 \rangle & \langle w_2, Lf_2 \rangle & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad [\alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \end{bmatrix} \quad [g_m] = \begin{bmatrix} \langle w_1, g \rangle \\ \langle w_2, g \rangle \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

Si la matriz  $[l_{mn}]$  es no singular, los coeficientes  $\alpha_n$  se pueden conocer por medio de la expresión:

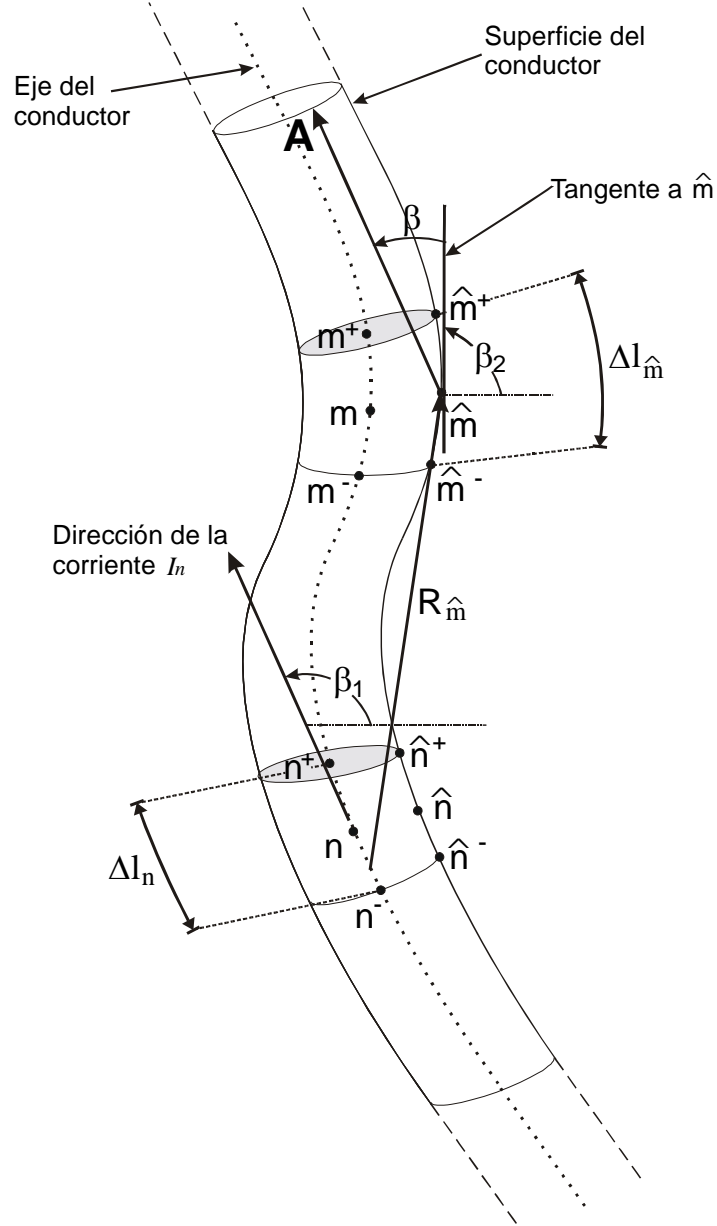
$$[\alpha_n] = [l_{mn}]^{-1} [g_m] \quad (2-7)$$

Para la elaboración de este trabajo, únicamente se toma el caso donde el elemento radiador es una antena tubular, por lo que se necesitan hacer algunas consideraciones. Con el fin de obtener una ecuación matricial de la antena, se considera como una red eléctrica y sus respectivos parámetros, es decir sus corrientes y voltajes. El conductor de la antena es considerado como  $N$  segmentos cortos conectados de forma contigua. Los puntos extremos de cada segmento definen un par de terminales del puerto o red. Estas  $N$  terminales constituyen la red que representa a la antena. Para conocer la matriz de impedancia para la red, se calcula el voltaje en circuito abierto para cada puerto y se realiza el estudio de las corrientes resultantes en cada uno de ellos. El análisis matemático de este caso ya ha sido desarrollado por el Dr. Neri (Neri, 1999), por lo que se presentará sólo un resumen de su trabajo.

La representación de la antena como una red es (Fig. 2.1):

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{N1} & Z_{N2} & \dots & Z_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

donde  $V_i$  es la diferencia de voltaje asociada con el segmento  $i$ ,  $I_i$  es la corriente que fluye en él,  $Z_{ii}$  es su impedancia propia y  $Z_{ij}$  es la impedancia mutua entre los segmentos  $i$  y  $j$ . Al comparar las ecuaciones (2-5) y (2-8), se observa claramente que  $[\alpha_n] = [I]$ ,  $[l_{mn}] = [Z_{mn}]$  y  $[g_m] = [V]$ .



**Figura 2.1.** Sección de un conductor dividido en segmentos de longitud menor o igual que  $\lambda/10$ . Se debe cumplir que tanto  $\Delta l_{\hat{m}}$  como  $\Delta l_n$  sean iguales o menores que  $\lambda/10$ .

Debido al segmento  $n$  se produce un campo eléctrico en el segmento  $\hat{m}$ . La dependencia de este campo eléctrico con respecto a la corriente del segmento  $n$  y la distribución de las cargas asociada con ella, se

puede expresar en función del potencial magnético  $\mathbf{A}$  que produce la primera y del potencial eléctrico  $V$  producido por las segundas. Para un punto específico  $\hat{m}$ , de acuerdo con la ecuaciones de Maxwell se tiene la relación:

$$\mathbf{E}^i = -j\omega\mathbf{A}\left(\hat{m}\right) - \nabla V\left(\hat{m}\right) \quad (2-9)$$

Suponiendo que la longitud del segmento  $\hat{m}$  es muy pequeña, se considera que el valor promedio de la intensidad del campo eléctrico producido en cualquier punto de su superficie es igual a la del punto medio  $\hat{m}$ . Por tanto, la impedancia mutua entre dos segmentos se puede evaluar por medio de la ley de Ohm como:

$$Z_{mn} = \frac{-\mathbf{E}^i\left(\hat{m}\right) \cdot \Delta\mathbf{l}_{\hat{m}}}{I_n} \quad (2-10)$$

La longitud de cada segmento se ve limitada a  $\lambda/10$  o menos. Es por ello que se puede considerar a cada uno de ellos como un dipolo corto, con corriente de magnitud y fase aproximadamente constante. Esta condición obliga que las funciones de prueba del producto interno del Método de Momentos sean pulsos de magnitud constante, siendo el producto interno:

$$\mathbf{L}\left(\hat{m}\right) = \mathbf{E}^i = -j\omega\mathbf{A}\left(\hat{m}\right) - \nabla V\left(\hat{m}\right) \quad (2-11)$$

y las funciones base  $f_n$  son los segmentos  $\hat{m}$ . Con lo anterior se han identificado ya todos los elementos del procedimiento general del método de momentos, comprobándose la validez de su aplicación en el estudio de antenas tubulares o de un conductor.

Para poder calcular  $\mathbf{E}^i(\hat{m})$  con la ecuación (2-9), se requiere obtener inicialmente el vector de potencial magnético  $\mathbf{A}(\hat{m})$ . De la figura 2.1, se observa que un vector tangente al segmento  $\hat{m}$  forma un ángulo  $\beta$  con  $\mathbf{A}$ , lo que permite expresar a la componente tangencial de  $\mathbf{A}$  como:



$$A_t(\hat{m}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\Delta l_n} I_n \cos \beta \frac{e^{-jkR_{\hat{m}}}}{R_{\hat{m}}} dl \quad (2-12)$$

Aun cuando la corriente en un segmento específico se considere constante en magnitud y fase, su dirección puede cambiar y, por lo tanto, este efecto sí debe tomarse en cuenta. Por lo tanto, la ecuación (2-12) se puede escribir como:

$$A_t(\hat{m}) = \frac{\mu}{4\pi} \Delta l_n I_n \Psi(n, \hat{m}) \quad (2-13)$$

donde:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} \cos \beta \frac{e^{-jkR_{\hat{m}}}}{R_{\hat{m}}} dl \quad (2-14)$$

y  $k$  es la constante de propagación en el espacio libre.

Para una corriente  $I_n$  que fluye en el segmento  $n$ , la densidad de carga a lo largo del intervalo  $[n, n+1]$  es

igual a  $\left(\frac{I_n}{j\omega}\right)\left(\frac{1}{\Delta l_{n^+}}\right)$ ; y de forma similar, la densidad de carga a lo largo del intervalo  $[n-1, n]$  es igual a

$\left(\frac{-I_n}{j\omega}\right)\left(\frac{1}{\Delta l_{n^-}}\right)$ .  $\Delta l_{n^+}$  denota la longitud del intervalo que une los puntos medios de los segmentos  $n$  y

$n+1$ , y  $\Delta l_{n^-}$  denota la longitud del intervalo limitado por los puntos medios de los segmentos  $n-1$  y  $n$ .

El potencial eléctrico  $V$  producido en los puntos extremos del segmento  $\hat{m}$  por un filamento de corriente  $I_n$  se puede expresar en cada caso como la suma algebraica de dos integrales.

$$V(\hat{m}^+) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \int_{\Delta l_{n^+}} \left(\frac{I_n}{j\omega\Delta l_{n^+}}\right) \left(\frac{e^{-jkR_{\hat{m}^+}}}{R_{\hat{m}^+}}\right) dl - \int_{\Delta l_{n^-}} \left(\frac{-I_n}{j\omega\Delta l_{n^-}}\right) \left(\frac{e^{-jkR_{\hat{m}^+}}}{R_{\hat{m}^+}}\right) dl \right] \quad (2-15)$$

y

$$V\left(\hat{m}^{-}\right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \int_{\Delta l_{n^{+}}} \left( \frac{I_n}{j\omega\Delta l_{n^{+}}} \right) \left( \frac{e^{-jkR_{\hat{m}^{-}}}}{R_{\hat{m}^{-}}} \right) dl - \int_{\Delta l_{n^{-}}} \left( \frac{I_n}{j\omega\Delta l_{n^{-}}} \right) \left( \frac{e^{-jkR_{\hat{m}^{-}}}}{R_{\hat{m}^{-}}} \right) dl \right] \quad (2-16)$$

El gradiente del potencial escalar puede estar dado por:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial l} = \frac{V\left(\hat{m}^{+}\right) - V\left(\hat{m}^{-}\right)}{\Delta l_{\hat{m}}} \quad (2-17)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2-15), (2-16) y (2-14) con  $\cos \beta = 1$  en la ecuación (2-17) se tiene:

$$\nabla V = \frac{I_n}{4\pi\epsilon j\omega\Delta l_{\hat{m}}} \left[ \Psi\left(n^{+}, \hat{m}^{+}\right) - \Psi\left(n^{-}, \hat{m}^{+}\right) - \Psi\left(n^{+}, \hat{m}^{-}\right) + \Psi\left(n^{-}, \hat{m}^{-}\right) \right] \quad (2-18)$$

en donde  $\Psi(n^{+}, \hat{m}^{+})$  indica que el intervalo de integración tiene como centro a  $n^{+}$  y que todas las distancias  $R_{\hat{m}}$  se toman a partir de puntos sobre este intervalo hacia el punto  $\hat{m}$ . El resto de las funciones

$\Psi$  tienen una interpretación similar.

Sustituyendo y simplificando, se obtiene la ecuación para las impedancias como:

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \Delta l_n \Delta l_{\hat{m}} \Psi\left(n, \hat{m}\right) + \frac{1}{j4\pi\epsilon\omega} \left[ \Psi\left(n^{+}, \hat{m}^{+}\right) - \Psi\left(n^{-}, \hat{m}^{+}\right) - \Psi\left(n^{+}, \hat{m}^{-}\right) + \Psi\left(n^{-}, \hat{m}^{-}\right) \right] \quad (2-19)$$

## 2.2.2 Propiedades de la antena

### 2.2.2.1 Patrón de radiación

Para graficar el patrón de radiación se requiere calcular la intensidad del campo eléctrico producido por la distribución de corrientes  $[I]$  en puntos suficientes de observación  $P(x, y, z)$ . Estos puntos se encuentran sobre la superficie de una esfera imaginaria cuyo centro, por conveniencia, puede convenir con el punto de alimentación de la antena. Si se considera el caso más general de una antena cuya geometría involucra corrientes con componentes en las direcciones  $x, y, z$ , las tres componentes del vector de potencial magnético  $\mathbf{A}$  producido en un punto de observación  $P$  se pueden calcular como:

$$A_x(P) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_{n_x} \int_{\Delta l_{nx}} \frac{e^{-jkr_n}}{r_n} dx' \quad (2-20)$$

$$A_y(P) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_{n_y} \int_{\Delta l_{ny}} \frac{e^{-jkr_n}}{r_n} dy' \quad (2-21)$$

$$A_z(P) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_{n_z} \int_{\Delta l_{nz}} \frac{e^{-jkr_n}}{r_n} dz' \quad (2-22)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad del espacio libre en el aire ( $\mu = \mu_0$ ),  $N$  es el número de segmentos de la antena,  $k$  es la constante de propagación y  $r_n$  es la distancia entre un punto fuente sobre el eje del segmento  $n$  y el punto de observación  $P$ .

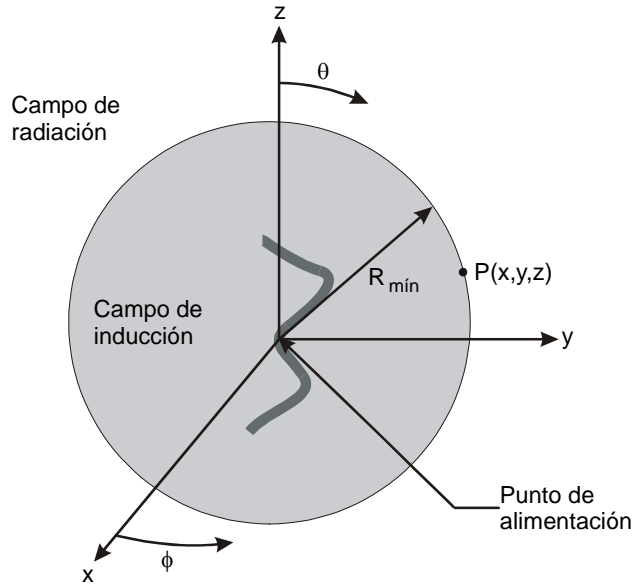
Habiendo obtenido las tres componentes del vector  $\mathbf{A}$ , se puede determinar el campo magnético producido en el mismo punto de observación como:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (2-23)$$

y finalmente, el campo eléctrico se obtiene como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H} \quad (2-24)$$

De esta manera, variando los ángulos  $\theta$  y  $\phi$  de la figura 2.2, se puede calcular la intensidad del campo eléctrico en puntos suficientes para graficar los patrones de radiación en cualquier plano. El radio de la esfera debe ser igual o mayor a la distancia mínima que define al espacio donde inicia el campo de radiación (Neri, 1999).



**Figura 2.2.** Sistema de ejes coordenados para calcular el patrón de radiación de la antena.

### 2.2.2.2 Ancho del haz principal

En la dirección de máxima radiación, el ancho del haz es el ángulo formado entre las rectas que pasan por el origen y los puntos en donde la intensidad del campo eléctrico es igual a  $0.707 E_{\text{máximo}}$ . Nótese que, como la radiación puede ser diferente en los planos E y H, los ángulos correspondientes que definen al ancho del haz son diferentes en cada caso.

### 2.2.2.3 Relación frente-atrás

Suponiendo que la máxima radiación ocurre en la dirección positiva de y, se define como:

$$R = \frac{E(\theta = 90^\circ, \phi = 90^\circ)}{E(\theta = 90^\circ, \phi = 270^\circ)} \quad (2-25)$$

### 2.2.2.4 Impedancia de entrada

La impedancia de entrada se obtiene a partir de la matriz de admitancias  $[Y]$ , es decir de  $[Z]^{-1}$ , que contiene toda la información de todos los acoplamientos entre el punto de alimentación y el resto de la antena:

$$Z_{entrada} = \frac{1}{Y_{i,i}} \quad (2-26)$$

donde  $i$  es el número correspondiente al segmento (hueco, en realidad) donde la antena es alimentada.

### 2.2.2.5 Ganancia máxima

La ganancia máxima de una antena se conoce por medio de la expresión:

$$G = \frac{P_{m\acute{a}x}}{P_{prom}} \quad (2-27)$$

donde  $P_{m\acute{a}x}$  es la densidad de potencia máxima producida por la antena en estudio y  $P_{prom}$  es la densidad de potencia promedio de una antena de referencia.

La densidad de potencia máxima está dada por:

$$P_{m\acute{a}x} = \frac{E^2_{m\acute{a}x}}{2\eta} \quad (2-28)$$

donde  $E_{m\acute{a}x}$  es la intensidad del campo eléctrico en la dirección de máxima radiación y  $\eta$  es la impedancia intrínseca del medio, que en nuestro caso es el aire.

Por otro lado, la densidad de potencia promedio se calcula por medio de la ecuación:

$$P_{prom} = \frac{\frac{1}{2} I_0^2 R_{entrada}}{4\pi R^2} \quad (2-29)$$

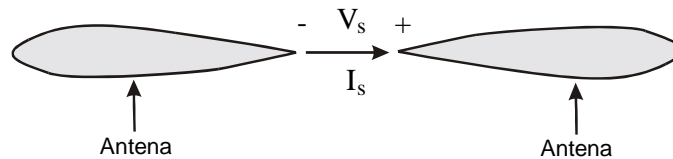
donde  $I_0$  es la corriente en el punto de alimentación,  $R_{entrada}$  es la resistencia de entrada y  $R$  es el radio de la esfera imaginaria sobre la cual se calculó la intensidad del campo eléctrico.

Finalmente, al sustituir la ecuaciones (2-28) y (2-29) en (2-27) se obtiene que:

$$G = \frac{4\pi R^2 E_{máx}^2}{\eta I_0^2 R_{entrada}} \quad (2-30)$$

### 2.2.3 Punto de alimentación de la antena

Se usa el término punto de alimentación para denotar una excitación provocada por una fuente de corriente aplicada a un par de terminales separadas una distancia mucho menor que una longitud de onda. La figura 2.3 muestra un punto de alimentación típico para una antena que está constituida por un alambre conductor excitado por una fuente de corriente  $I_s$  en su puerto de entrada.



**Figura 2.3.** Punto de alimentación de una antena.

De la figura 2.3 se concluye que en el caso de que la antena sea alimentada en un solo punto, todos los elementos del arreglo de voltajes  $[V]$  son iguales a cero, con excepción del correspondiente al segmento donde se alimenta la antena. Por conveniencia, este voltaje de alimentación se toma igual a  $1 \angle 0^\circ$  volts, es decir, la distribución de corrientes  $[I]$  es igual a la columna  $i$  de la matriz  $[Z]^{-1}$  cuando la antena se alimenta en el segmento  $i$ .

### 2.2.4 Limitantes del método

Dado que se emplean funciones pulso para la aproximación de la corriente, la condición de frontera  $V = \text{constante}$  sólo se cumple en los puntos de prueba (puntos  $\hat{m}$  de los segmentos) y no en todo lo largo del conductor. Sin embargo, al incrementar el número de segmentos (reduciendo así su longitud), la condición se cumple en un mayor número de puntos y la precisión del resultado aumenta.

Una antena puede ser vista como una red de dipolos cortos rectos. Si la antena posee una geometría lineal recta y los segmentos son menores que  $0.1\lambda$ , la precisión de los resultados es muy alta, existiendo ya literatura para comprobar las simulaciones obtenidas por el Método de Momentos (Neri, 1980). Sin embargo no todas las antenas lineales consisten de elementos rectos, sino que pueden tener diversas curvaturas, por lo que al representarla como una red de dipolos cortos rectos tal vez se esté introduciendo un error en la obtención de las propiedades de la antena, dependiendo de la longitud de dichos dipolos. Para mejorar la precisión en antenas curvas es posible representarlás como una red de dipolos cortos curvos, pero la geometría es más compleja y la ejecución del programa de computadora del Método de Momentos requiere más tiempo, dependiendo de las características del ordenador. El radio de curvatura influye en el grado de precisión, ya que si el dipolo corto curvo presenta un radio de curvatura menor que  $2\lambda$  y se trabaja como un dipolo corto recto se introducirían errores del orden de 5% y 18% en la resistencia y la reactancia, respectivamente (Apéndice A). Es importante considerar este resultado, ya que en esta tesis se trabaja con geometrías curvas, como son aros circulares y hélices, y se tienen radios de curvatura de diferentes valores, habiendo casos en donde su valor es menor que  $2\lambda$ , pero también pudiéndose presentar radios de curva mayores que  $2\lambda$  en los aros parásitos.

## 2.3 Efectos de un plano de tierra

El patrón de radiación de una antena cualquiera sufre modificaciones debido a su cercanía al piso. La Tierra actúa como un reflector, es decir que las ondas radiadas con menor ángulo que el horizonte son reflejadas, y este efecto es más notorio cuando la antena se acerca mucho a ella. Entonces, el efecto real de la Tierra es un incremento en la intensidad de radiación para ciertos ángulos de incidencia y un decremento en la intensidad de radiación para otros. En la práctica, con el propósito de conseguir mayor directividad y disminuir los lóbulos hacia atrás, suelen utilizarse planos de tierra metálicos de dimensiones comparables a una longitud de onda y conductividad muy alta.

### 2.3.1 Principio de imágenes

Para iniciar el análisis, considérese que se coloca un dipolo vertical a una altura  $h$  del plano de tierra infinito, constituido de una material conductor perfecto (Fig. 2.4). Para un punto de observación  $P_1$  hay una onda directa. Adicionalmente, existe una onda radiada de la fuente hacia el punto  $R_1$  de la interfaz, donde ocurre una reflexión. Al reflejarse en este punto, la trayectoria que describe cruzará por el punto  $P_1$ . Si se prolonga la trayectoria del rayo reflejado por debajo de la interfaz, parece que existe una fuente a una distancia  $h$ , por debajo del plano de tierra llamado fuente virtual o imagen. Para otro punto de observación  $P_2$  y su correspondiente punto de reflexión  $R_2$ , se observa que sucede el mismo fenómeno que para el punto  $P_1$ . El total de las reflexiones es, generalmente, determinado por los parámetros de los medios que se encuentran por encima y debajo del plano de tierra. En el caso en el que el medio inferior sea un conductor perfecto, la onda incidente es completamente reflejada (condiciones de frontera).

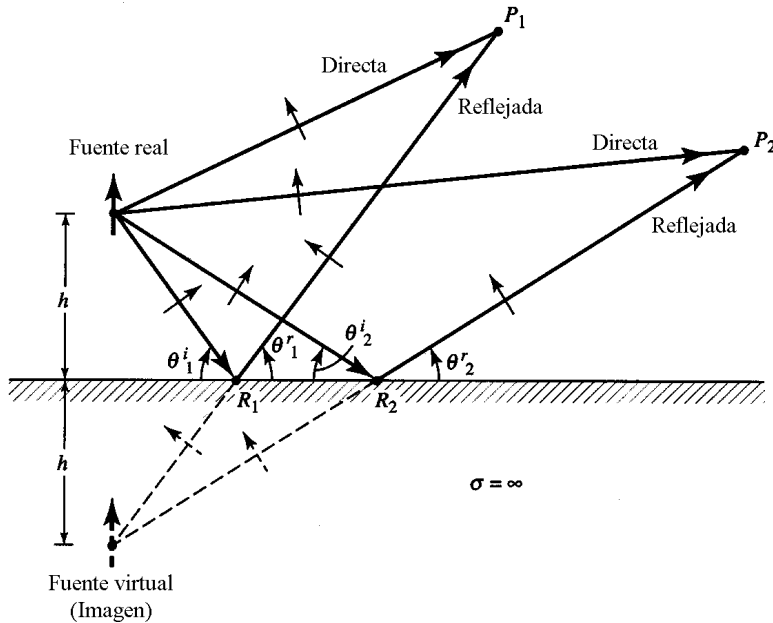


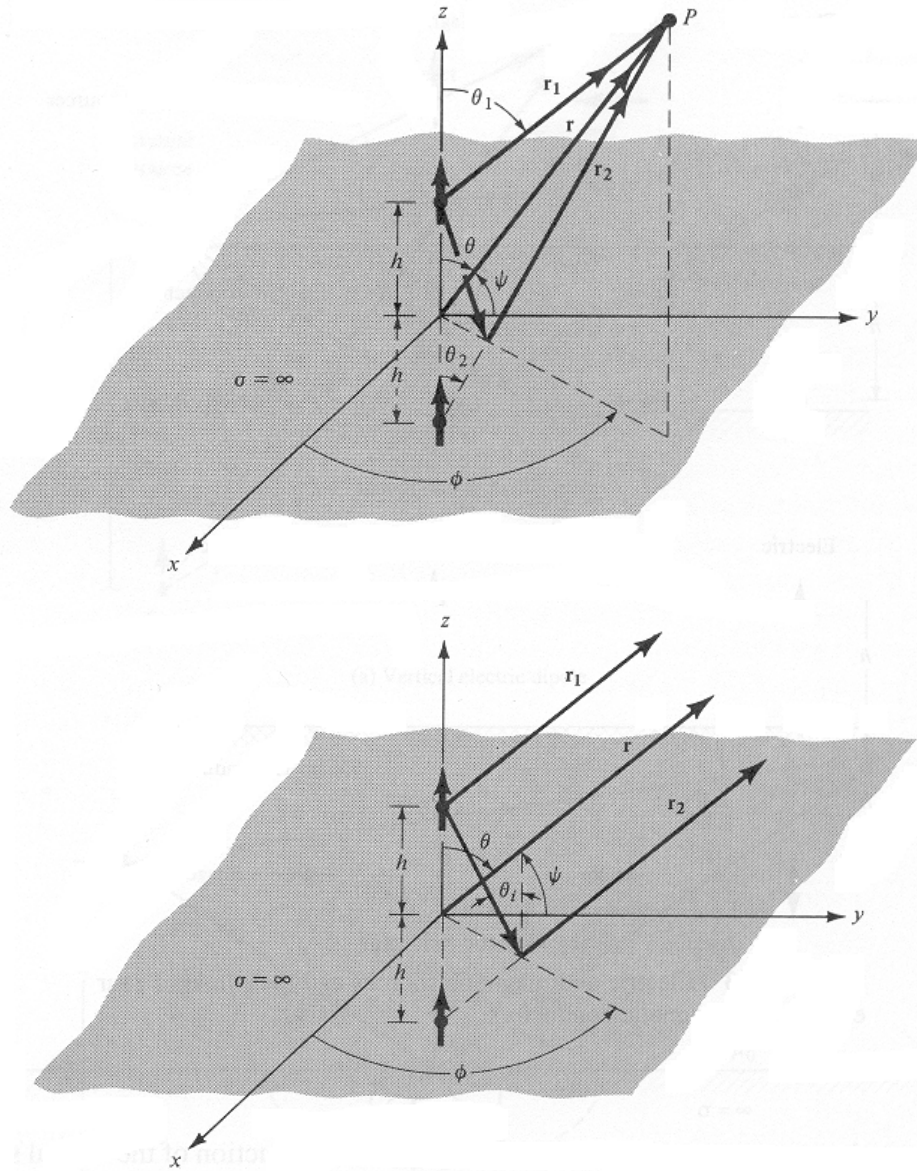
Figura 2.4. Dipolo eléctrico vertical ubicado por encima de un conductor perfecto.

#### 2.3.1.1 Dipolo eléctrico vertical

Tomando como base la figura 2.5, la componente de la onda directa del campo eléctrico de un dipolo infinitesimal de longitud  $l$  con corriente de amplitud constante  $I_0$  en la zona de campo lejano es :



$$E_{\theta}^d = j\eta \frac{kI_0 e^{-jkr_1}}{4\pi r_1} \text{sen}\theta_1 \quad (2-31)$$



**Figura 2.5.** Dipolo eléctrico vertical infinitesimal ubicado por encima de un conductor perfecto.

La componente de la onda reflejada también debe ser considerada, ya que es originada por la fuente virtual. Tomando un coeficiente de reflexión igual a uno, esta componente puede ser escrita como:

$$E_{\theta}^r = j\eta \frac{kI_0 e^{-jkr_2}}{4\pi r_2} \text{sen}\theta_2 \quad (2-32)$$

El campo total por encima de la interfaz ( $z > 0$ ) es igual a la suma de la componente de la onda directa y la componente de la onda reflejada. Para simplificar la expresión del campo eléctrico total, se toma como referencia al origen del sistema de coordenadas ( $z = 0$ ). En general, se puede escribir:

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos \theta} \\ r_2 &= \sqrt{r^2 + h^2 - 2rh \cos(\pi - \theta)} \end{aligned} \quad (2-33)$$

Para la zona de campo lejano y empleando una expansión binomial, la ecuación (2-33) también se puede escribir como:

$$\begin{aligned} r_1 &\approx r - h \cos \theta \\ r_2 &\approx r + h \cos \theta \end{aligned} \quad (2-34)$$

Dado que las variaciones de amplitud por atenuación no son críticas para ambas trayectorias, se puede suponer que:

$$r_1 \approx r_2 \approx r \quad (2-35)$$

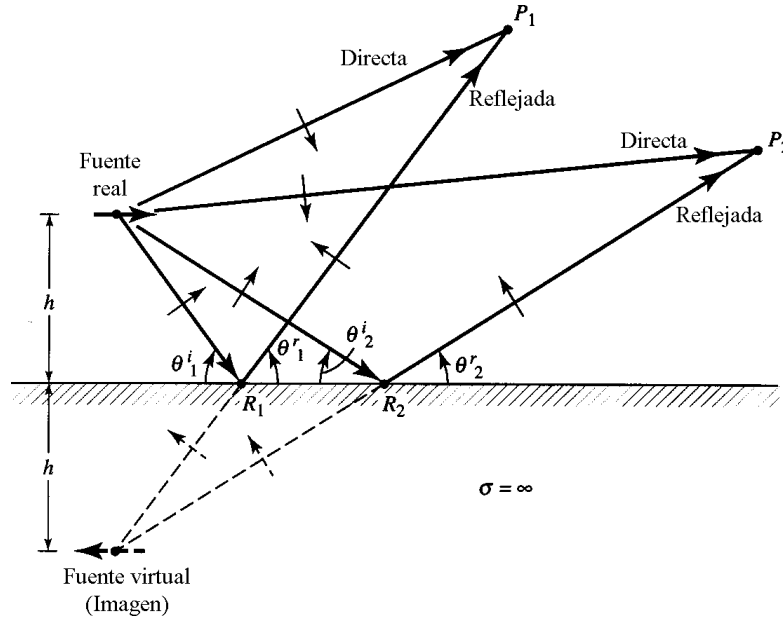
Empleando (2-34) y (2-35), la suma de (2-31) y (2-32) es:

$$\left. \begin{aligned} E_{\theta} &\approx j\eta \frac{kI_0 e^{-jkr}}{4\pi r} \text{sen}\theta [2 \cos(kh \cos \theta)] & z \geq 0 \\ E_{\theta} &\approx 0 & z < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-36)$$

Se puede observar que el campo total es igual al producto del campo de una sola fuente ubicada a una altura  $h$  por un factor que está en función de la altura  $h$  de la antena y el ángulo  $\theta$  del punto de observación.

### 2.3.1.2 Dipolo eléctrico horizontal

Otra configuración del dipolo se presenta cuando se coloca horizontalmente por encima del plano de tierra (Fig. 2.5). El desarrollo del análisis para este caso es idéntico al realizado para el dipolo vertical.



**Figura 2.5.** Dipolo eléctrico horizontal ubicado por encima de un conductor perfecto.

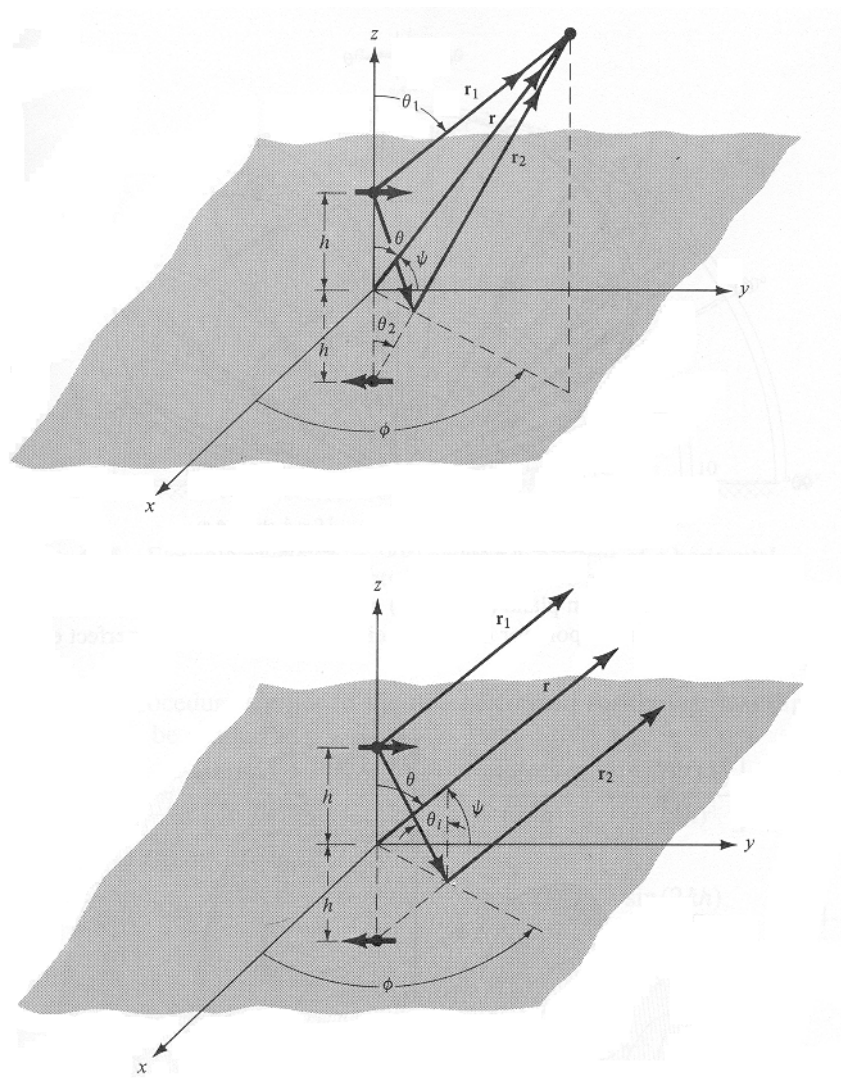
Haciendo referencia a la figura 2.6 y asumiendo la existencia de la fuente imagen, el campo eléctrico producido por la onda directa en el campo lejano es:

$$E_{\theta}^d = j\eta \frac{kI_0 e^{-jkr_1}}{4\pi r_1} \text{sen}\psi \quad (2-37)$$

y el campo de la onda reflejada está dado por:

$$E_{\theta}^r = -j\eta \frac{kI_0 e^{-jkr_2}}{4\pi r_2} \text{sen}\psi \quad (2-38)$$

ya que se considera que el coeficiente de reflexión para la componente horizontal es  $-1$ .



**Figura 2.6.** Dipolo eléctrico horizontal infinitesimal ubicado por encima de un conductor perfecto.

El ángulo  $\psi$  es medido del eje  $y$  hacia el punto de observación, por lo que:

$$\cos \psi = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_y \cdot (\mathbf{a}_x \text{sen}\theta \cos \phi + \mathbf{a}_y \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \mathbf{a}_z \cos \theta) = \text{sen}\theta \text{sen}\phi \quad (2-39)$$

donde:

$$\text{sen}\psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\theta \text{sen}^2\phi} \quad (2-40)$$

Dado que las observaciones son en el campo lejano, considerando que las trayectorias son paralelas, las distancias que producen las variaciones de fase son:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &\approx r - h \cos \theta \\ r_2 &\approx r + h \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (2-41)$$

y para la amplitud:

$$r_1 \approx r_2 \approx r \quad (2-42)$$

El campo total es válido sólo para  $z \geq 0$ ;  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ;  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  y es igual a:

$$E_{\psi} = E_{\psi}^d + E_{\psi}^r = j\eta \frac{kI_0 e^{-jkr}}{4\pi r} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \phi} [2j \text{sen}(kh \cos \theta)] \quad (2-43)$$

Si ahora el ángulo  $\psi$  es medido del eje x al punto de campo, se tiene que:

$$\cos \psi = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_y \cdot (\mathbf{a}_x \text{sen} \theta \cos \phi + \mathbf{a}_y \text{sen} \theta \text{sen} \phi + \mathbf{a}_z \cos \theta) = \text{sen} \theta \cos \phi \quad (2-44)$$

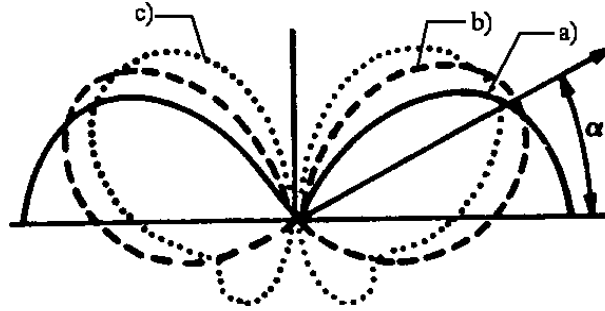
y el campo total es:

$$E_{\psi} = E_{\psi}^d + E_{\psi}^r = j\eta \frac{kI_0 e^{-jkr}}{4\pi r} \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta \cos^2 \phi} [2j \text{sen}(kh \cos \theta)] \quad (2-45)$$

Los dos casos anteriores han sido presentados ya que una forma sencilla de comprender los efectos que tiene un plano de tierra sobre una antena es por medio del estudio de un dipolo corto. Además, como se dijo anteriormente, esta tesis emplea el método de momentos, el cual supone que la antena está conformada por dipolo cortos y se pueden tomar los resultados de las ecuaciones (2-36), (2-43) y (2-45) para conocer el patrón de radiación de una antena que se encuentre sobre un plano de tierra infinito, ya que la contribución de un dipolo corto inclinado en el campo eléctrico radiado puede ser visto como la resultante de la contribución de cada una de sus componentes (vertical y horizontal).

### 2.3.2 Efectos de la geometría del plano de tierra

En la sección anterior se desarrolló el estudio para el caso de dipolos infinitesimales cuando se encuentran por encima de un plano de tierra liso e infinito. En este estudio se observa que gracias al plano de tierra se produce una fuente virtual simétrica a la fuente real con respecto al plano. En la práctica, no siempre es posible añadir planos de tierra infinitos a la antena, entendiéndose por plano infinito a aquél cuyas dimensiones eléctricas son muchos mayores que las de la antena. En la figura 2.7 se muestra el patrón de radiación de un monopolo de  $\frac{\lambda}{4}$  al variar las dimensiones de su plano de tierra. Se observa que al colocar un plano de tierra finito la radiación máxima sufre una rotación (Kraus, 2002), es decir, la dirección de máxima radiación forma un cierto ángulo con la horizontal. También se observa que hay campo para  $z < 0$ , debido al efecto de difracción de los rayos incidentes sobre los bordes del plano de tierra.

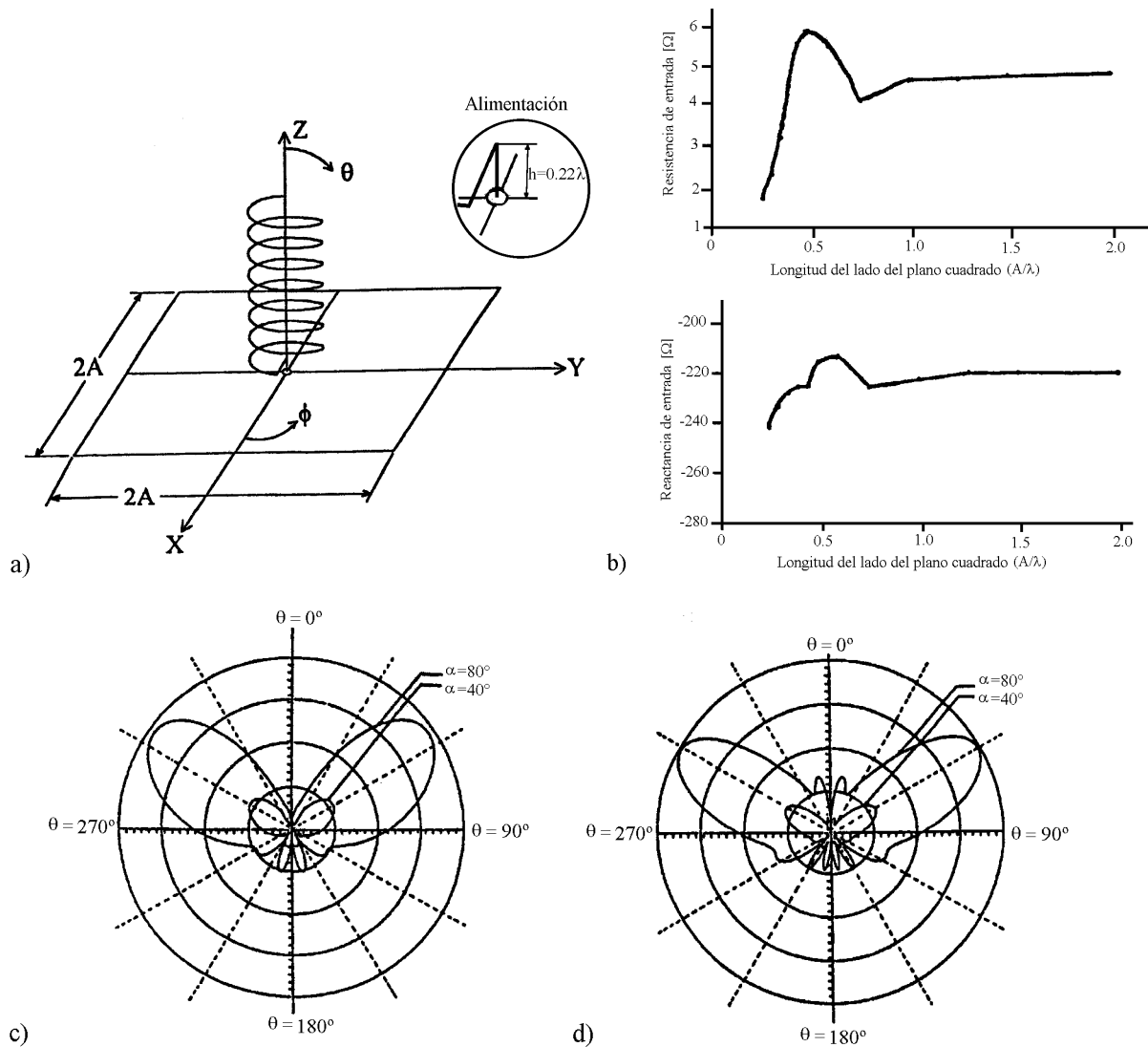


**Figura 2.7.** Patrones de radiación de una antena monopolo al variar las dimensiones de su plano de tierra. a) Plano de tierra sólido. b) Plano de tierra circular con un diámetro igual a varias longitudes de onda. c) Plano de tierra circular con un diámetro igual a una longitud de onda.

#### 2.3.2.1 Antena helicoidal con plano de tierra cuadrado

De las configuraciones descritas en el capítulo 1 se puede observar que la antena helicoidal requiere de un plano de tierra. Para simplificar algunos análisis se puede considerar que el plano es infinito, lo que permite aplicar la teoría de imágenes, pero no en todos los casos es posible, por lo que es necesario conocer los efectos del plano en las propiedades de la antena helicoidal.

Uno de los primeros estudios que se hicieron a este respecto fue realizado por un grupo de investigadores de Egipto y Arabia Saudita (Zainud-Deen, 1995). Desarrollaron un estudio para conocer los efectos que se presentan al variar las dimensiones de un plano de tierra cuadrado.



**Figura 2.8.** a) Configuración. b) Impedancia de entrada para una antena con  $\alpha = 40^\circ$  y radio de conductor =  $0.007\lambda$ . c) Patrón de radiación para dos antenas con diferente ángulo de disparo y plano de tierra  $2A = 2\lambda$ . d) Patrón de radiación para dos antenas con diferente ángulo de disparo y plano de tierra  $2A = 3\lambda$ .

La figura 2.8 muestra los resultados obtenidos para una antena helicoidal en modo normal. La antena construida tiene la particularidad de poseer un elemento lineal (monopolo) con una longitud igual a  $0.224\lambda$  en el punto de alimentación. Se encontró que cuando los lados del plano de tierra tienen una longitud mayor que  $2\lambda$ , la impedancia de entrada es casi constante. Asimismo, se observó que al

incrementar el ángulo de disparo la magnitud del campo eléctrico también aumenta, pero con un patrón de radiación muy similar. Por lo que respecta a los lóbulos laterales, se obtuvo un incremento en el número de lóbulos al disminuir las dimensiones del plano. Se puede observar que al igual que en el caso de un monopolo (Fig. 2.7) el patrón de radiación de una antena helicoidal que radia en modo normal también sufre una rotación o inclinación de su lóbulo principal (Figs. 2.8c y 2.8d). Como se puede observar en la Fig. 2.8b, la resistencia de entrada de la antena es muy pequeña; de acuerdo a los autores (Awadalla, 1992) esto es debido a los efectos del radio del conductor. Conforme a los resultados experimentales obtenidos por Awadalla y Zainud-Deen, un radio del conductor de 0.007m ( $= 0.012\lambda$ ) provoca una resistencia de entrada de unas cuantas unidades de ohms; mientras que un radio de 0.009m ( $= 0.0156\lambda$ ) entrega una resistencia de entrada de varias decenas de ohms, alcanzándose  $140 \Omega$  en la frecuencia central de la antena.

### 2.3.2.2 Antena helicoidal con plano de tierra pequeño

Continuando con el estudio de los efectos del plano de tierra, el Dr. Nakano (Nakano, 1988) diseñó una antena que tiene como plano de tierra un pequeño enrejado. En la figura 2.9 se muestra la configuración empleada. Cabe mencionar que el valor de la altura  $h$  no es reportado por Nakano.

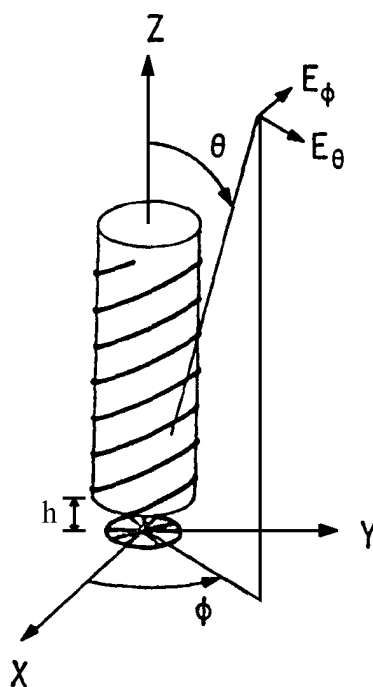
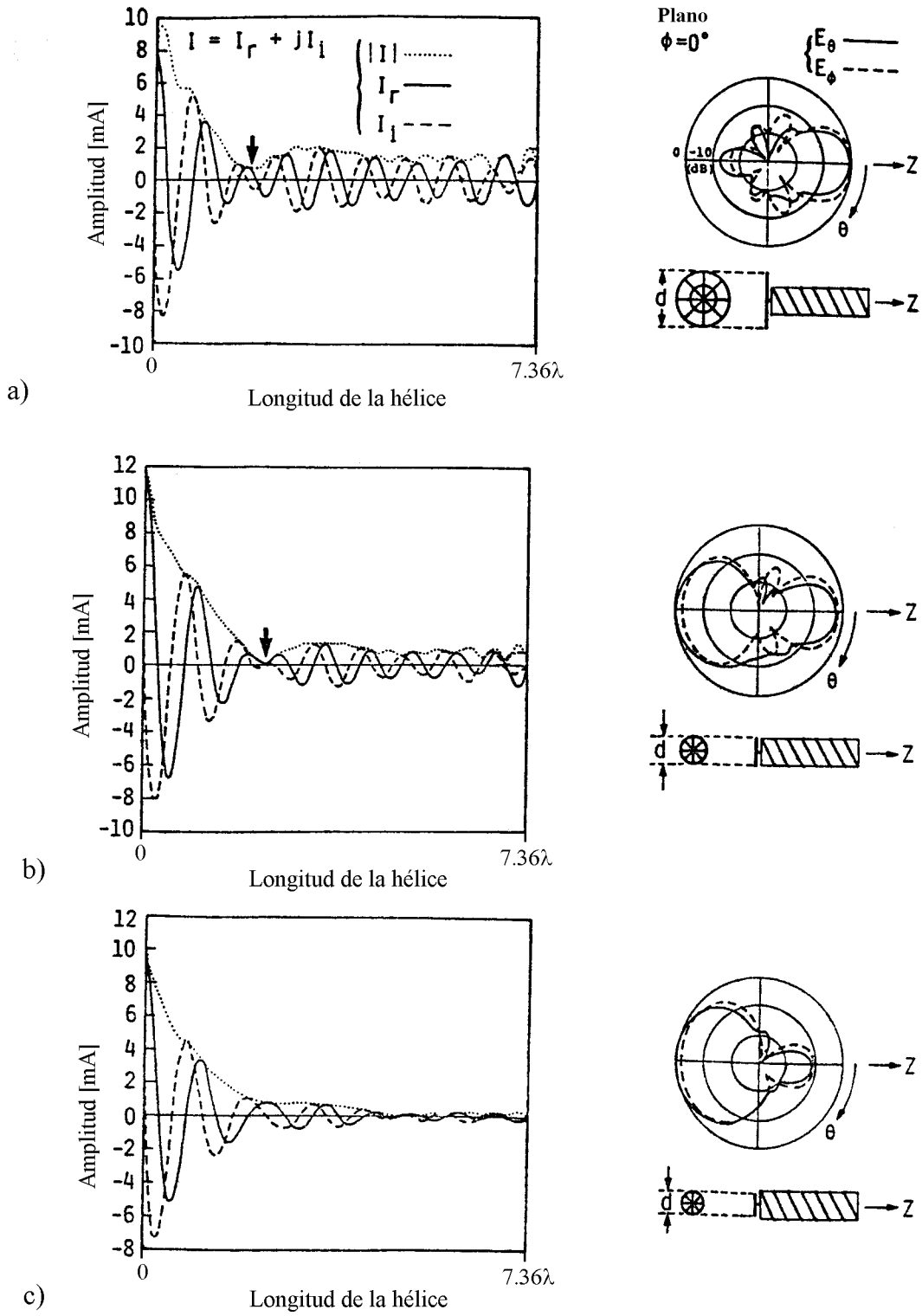


Figura 2.9. Antena helicoidal con plano de tierra pequeño.





**Figura 2.10.** Efectos del plano de tierra en la distribución de corriente y patrón de radiación al variar la circunferencia  $C$  del plato enrejado. a)  $C = 1.9\lambda$ . b)  $C = 1.1\lambda$ . c)  $C = 0.9\lambda$ .

Los parámetros de la antena helicoidal en estudio son  $N = 7$  vueltas,  $C_\lambda = 1$ ,  $\alpha = 12.5^\circ$  y radio del conductor  $= 0.012\lambda$ . La figura 2.10 muestra la distribución de corriente y el patrón de radiación al variar la circunferencia de la rejilla. En la figura 2.10a se observan dos regiones en la distribución de corrientes; en la primera se tiene una zona de decremento desde la entrada hasta el primer mínimo, y la segunda es una zona de onda superficial a partir del mínimo registrado. Su patrón de radiación muestra su máximo en la dirección  $Z^+$ . Se puede decir que las características que presenta una antena con un plato reflector de  $C = 1.9\lambda$  son muy similares a las de una antena con un plano de tierra infinito, salvo la relación frente-atrás y los lóbulos posteriores.

Al reducir las dimensiones de la circunferencia del plato reflector, la radiación backfire aumenta. La figura 2.10b muestra el caso cuando  $C = 1.1\lambda$ , se observa que la distribución de corriente es muy similar al caso anterior pero la amplitud en la zona de onda de superficie decrece y se produce un corrimiento del valor mínimo. La figura 2.10c muestra una configuración típica de una antena helicoidal como alimentador (sección 1.7.7), la cual tiene un decremento de la magnitud de la corriente a todo lo largo de la hélice, provocando una radiación del campo de modo backfire.

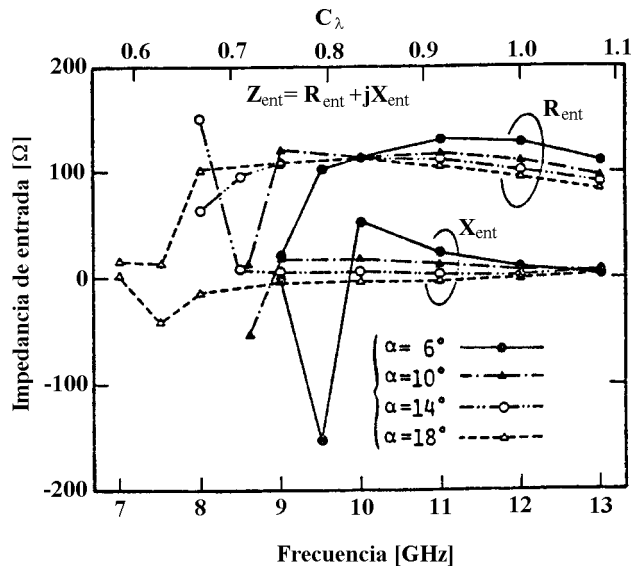
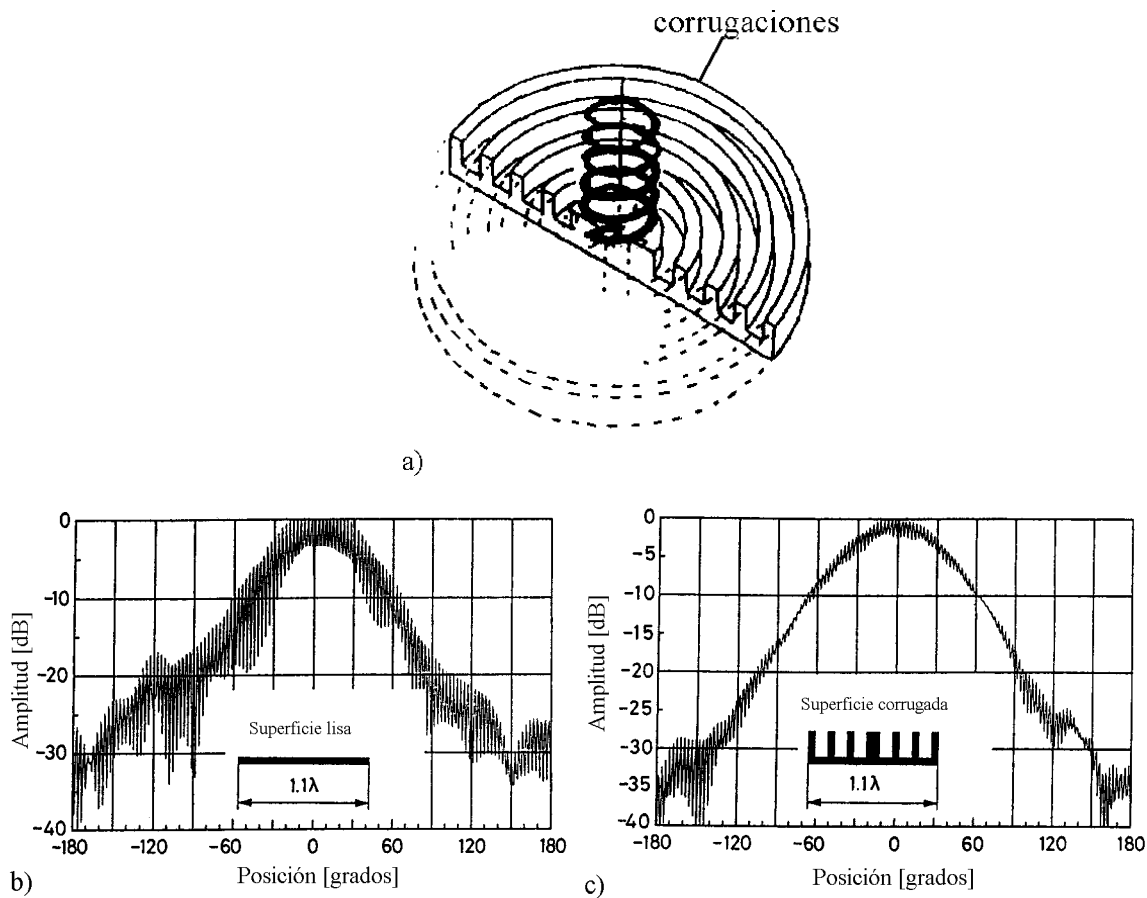


Figura 2.11. Impedancia de entrada

La impedancia de entrada muestra un ancho de banda amplio. Aunque esta impedancia depende en cada frecuencia del ángulo de disparo, se observa que posee un valor resistivo del orden de 100 ohms y un valor reactivo cercano a cero.

### 2.3.2.3 Antena helicoidal con plano de tierra corrugado

En los últimos años ha surgido el término superficies duras y artificialmente suaves (Kildal, 1990). Este concepto puede ser empleado para mejorar las propiedades de las antenas. Una superficie corrugada transversalmente causa un condición de frontera suave si la profundidad de la ondulación es elegida correctamente. Esto significa que la intensidad de campo para algunas polarizaciones es forzado a ser cero sobre la superficie. Esto provoca que no haya radiación a lo largo de la superficie y esto puede ser usado para reducir los niveles de los lóbulos laterales. Asimismo, la reflexión de la superficie dura o suave no cambia el sentido de rotación de la polarización circular, al contrario de una superficie conductora lisa.



**Figura 2.12.** a) Configuración. b) Patrón de radiación para una superficie lisa. c) Patrón de radiación para una superficie suave.

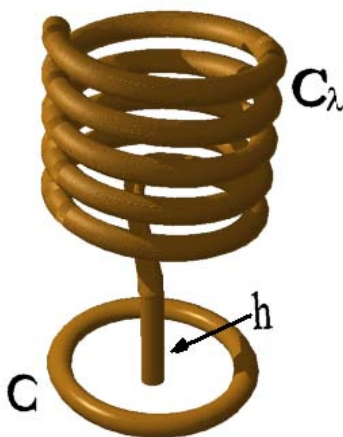
En la figura 2.12 se observa que la amplitud de los lóbulos laterales se disminuye al colocar la antena sobre una superficie suave; esta reducción puede llegar a ser de hasta 4 dB. La relación frente-atrás

presenta un incremento de 15 a 20 dB. También se incrementa la razón axial, especialmente en las altas frecuencias. El ancho de banda para la configuración con superficie suave tiende a ser un poco más estrecho que para la configuración con superficie lisa. Esto puede deberse a que el comportamiento de los discos corrugados como una superficie suave es válida sólo cuando las ondulaciones tienen una profundidad de un cuarto de longitud de onda.

La operación de la hélice sobre un disco puede ser explicado de la siguiente forma. El cable coaxial y la parte frontal de la hélice excitan un onda con polarización circular a lo largo del conductor de la hélice. Parte de esta onda no es radiada de modo endfire por la hélice, sino que es dirigida hacia el disco, es decir, con un modo backfire. A su vez, parte de la onda que llega al disco es reflejada contribuyendo a la radiación endfire de la hélice. Si el disco tiene una superficie lisa, cambiará el sentido de giro de la polarización y el campo reflejado tendrá una polarización circular con sentido contrario al campo incidente, pero si el disco tiene una superficie corrugada, el campo incidente y el campo reflejado tendrán el mismo sentido de giro y la polarización cruzada se reducirá.

### 2.3.3 Hipótesis de resultados

Como se dijo en la introducción de este capítulo, se quiere realizar un análisis teórico del modelo experimental o empírico propuesto por Kraus en 1995. En la figura 2.13 se presenta un diseño preliminar de la antena.



**Figura 2.13.** *Diseño propuesto,  $C \approx C_\lambda$  y  $h$  variable.*

En el trabajo descrito por Kraus únicamente se presenta el patrón de radiación obtenido, pero no un estudio de la distribución de corrientes e impedancia de entrada.

Con lo visto en las secciones 2.3.1 y 2.3.2, se observa que el plano de tierra infinito de una antena helicoidal provoca una radiación endfire. Esto se debe a la reflexión de los campos en el plano, pero también se tiene polarización cruzada; es decir, hay un cambio en el sentido de la polarización al reflejarse las componentes horizontales sobre la placa de metal.

Si se reducen las dimensiones del plano se provoca un cambio en la forma del patrón de radiación y en el resto de las propiedades de la antena. Se puede observar una pérdida de directividad y la impedancia de entrada presenta un comportamiento capacitivo. Más aún, si las dimensiones del plano son comparables con la circunferencia de la antena, se vuelve a tener directividad pero ahora con un modo de propagación backfire. Pero se sigue presentando polarización cruzada debido a las reflexiones en el plano de tierra. Para eliminar la polarización cruzada surge el plano de tierra corrugado, el cual también disminuye la amplitud de los lóbulos laterales.

Aplicando estos conocimientos al diseño propuesto en esta tesis, se espera que la radiación de la antena sea backfire, viéndose modificada su amplitud dependiendo de la corriente que se presente en el aro y de la distancia entre el aro y la hélice. Asimismo, se podría presentar un comportamiento capacitivo de la impedancia de entrada. Más adelante se comentará sobre los resultados obtenidos.

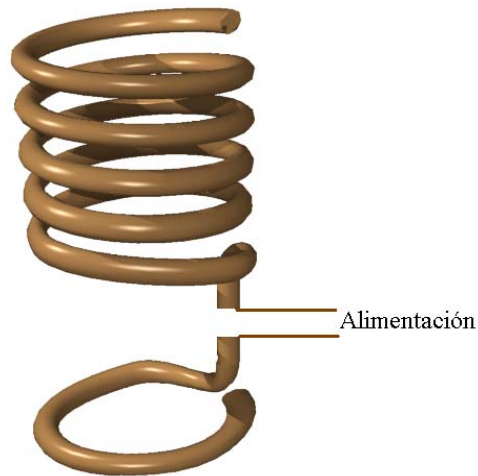
## 2.4 Hélice con aros en lugar de plano de tierra

Para realizar la construcción de la antena se pensó originalmente en trabajar en la frecuencia de 1GHz, ya que en el laboratorio de electromagnetismo existe un generador de señales a esta frecuencia así como una analizador de redes que cubre dicha frecuencia. Las dimensiones físicas para la antena se muestran en la tabla 2.1.

$f$ [Hz]	1.00E+09
$\lambda$ [m]	3.00E-01
$\alpha$ [°]	12
$C_\lambda$	3.44
$C$ [m]	1.031416
$D$ [m]	0.328309142
$S$ [m]	0.219234767
$L$ [m]	1.054458557
$N$	5
$L_{tot}$	5.272292784
$A$ [m]	1.096173833

**Tabla 2.1.** Dimensiones físicas para el diseño propuesto originalmente.

El conductor empleado para fabricar la antena fue cable AWG 6, ya que al ser de cobre posee la propiedad de ductilidad y permite conseguir fácilmente la forma de hélice, cumpliendo con el diámetro de diseño propuesto. Dado el peso que se obtuvo con este material fue necesario colocar la antena alrededor de un tubo PVC para darle rigidez. Al tener este tubo en el interior de la hélice, la única opción de excitación que se tuvo fue la alimentación periférica y dejando al aro abierto. Esta configuración se muestra en la figura 2.14.



**Figura 2.14.** *Diseño propuesto originalmente.*

Dentro de las mediciones previstas, se querían obtener la impedancia de entrada y el patrón de radiación; sin embargo, se observó un problema, ya que el campo lejano iniciaba a más de 2 metros de distancia de la antena, lo cual resultaba impráctico dada las dimensiones del laboratorio en donde se pensaban realizar las mediciones.

Debido a esta circunstancia se decidió aumentar la frecuencia de trabajo, pero a causa de las limitantes de equipo en el laboratorio se elevó hasta el valor de 10 GHz. Esto representó un decremento bastante considerable en las dimensiones físicas de la antena (Tabla 2.2).

$f$ [Hz]	1.00E+10
$\lambda$ [m]	3.00E-02
$\alpha$ [°]	12
$C_\lambda$	1.05
$C$ [m]	0.031416
$D$ [m]	0.01
$S$ [m]	0.006677693

(continúa tabla en la página siguiente)

$L [m]$	0.032117855
$N$	7
$L_{tot}$	0.224824988
$A [m]$	0.046743851

**Tabla 2.2.** Dimensiones físicas para la antena con frecuencia de 10 GHz.

La construcción de esta nueva antena fue más complicada y su implementación se describe más adelante. En este caso, la configuración original sufrió modificaciones ya que, debido a las dimensiones tan pequeñas, fue necesario alimentar a la antena de forma central, ya que si se quisiera alimentarla de forma periférica sería necesario tener un soporte lo suficientemente rígido para sostenerla y que el material del cual estuviera hecho no fuera eléctricamente conductor a esa frecuencia. Además, se decidió que el aro parásito fuera cerrado (Figura 2.15). La forma de alimentación de esta configuración se explica en la sección 2.4.2.

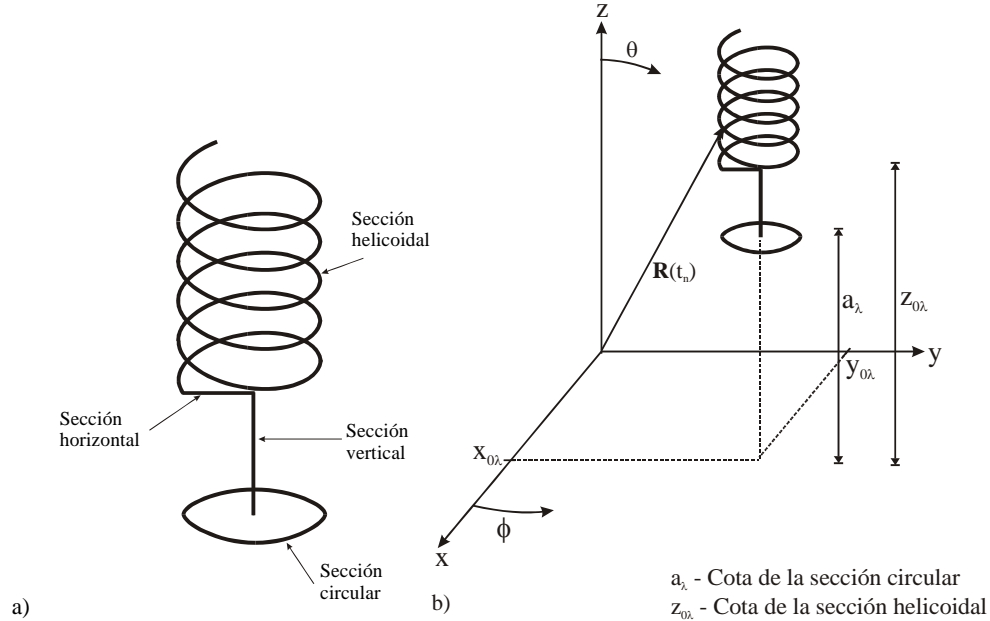


**Figura 2.15.** Configuración propuesta para la antena de 10 GHz.

En ambas configuraciones existe un elemento lineal de longitud variable entre la hélice y el aro. Pero para simular la configuración de la Fig. 2.15 por el MM fue necesario colocar un tramo lineal horizontal entre la hélice y el conductor lineal vertical para conservar la continuidad de la corriente, ya que físicamente existe una unión entre la hélice y el elemento vertical.

La simulación de una antena helicoidal con aros en lugar de plano de tierra se hizo por medio del Método de Momentos (MM), lo que implicó calcular la matriz de impedancias que la constituye. En nuestro caso,

la antena helicoidal se encuentra constituida por cuatro elementos: una hélice aislada, un elemento lineal horizontal, un elemento lineal vertical de longitud axial variable y un elemento circular cuyo diámetro también puede ser variable (Fig. 2.16).



**Figura 2.16.** Simplificación de la antena helicoidal para la simulación por el MM.

a) Configuración. b) Geometría.

Dado que la antena propuesta se conforma de cuatro geometrías diferentes, es necesario conocer las impedancias propias y mutuas de cada una de las geometrías, así como las impedancias mutuas que se presentan entre dichas geometrías. A continuación se presenta el desarrollo matemático realizado para la simulación de la antena, considerando en los casos necesarios dipolos cortos curvos para mejorar la aproximación dada por el método de momentos. En la figura 2.16b la hélice está colocada a propósito fuera del eje  $z$ , ya que de esta forma se generaliza el análisis de la geometría de la hélice y las ecuaciones obtenidas pueden emplearse en el estudio de arreglos de antenas helicoidales, que corresponde al capítulo 3 de esta tesis.

## 2.4.1 Impedancia propias y mutuas

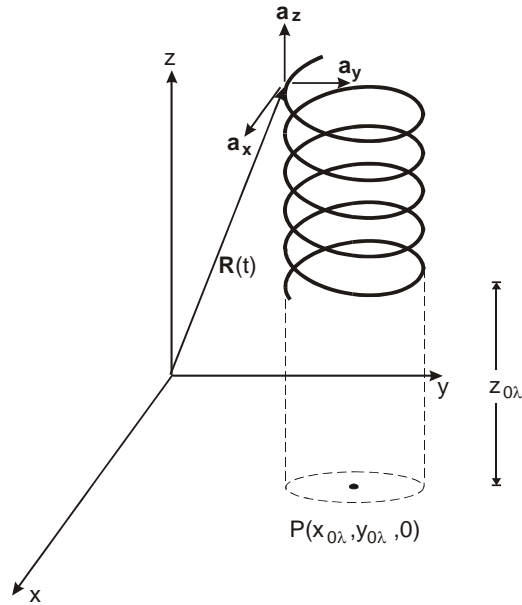
### 2.4.1.1 Sección helicoidal (Hélice aislada)

En esta sección se describirá el análisis matemático correspondiente a la sección helicoidal de la antena. De acuerdo al Método de Momentos (Harrington, 1968) es necesario considerar la ecuación vectorial de la hélice definida por:



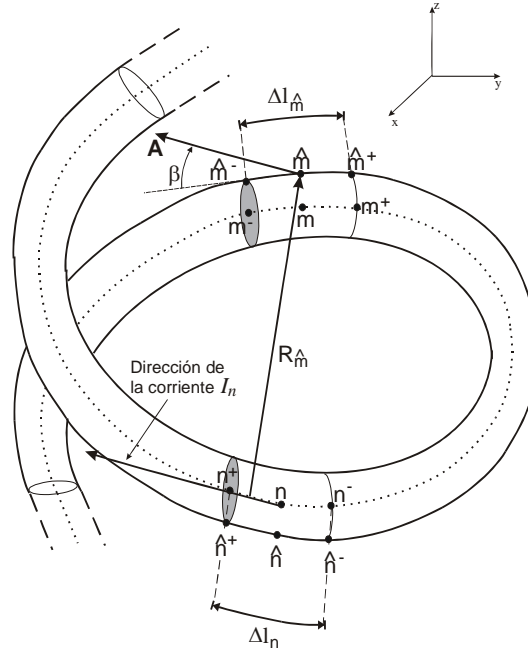
$$\mathbf{R}(t) = \left[ \frac{C_\lambda}{2\pi} \cos(t) + x_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_x + \left[ \frac{C_\lambda}{2\pi} \sin(t) + y_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_y + \left[ \frac{S_\lambda}{2\pi} t + z_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_z \quad (2-46)$$

donde  $\mathbf{R}$  es el vector de posición de la función vectorial,  $C_\lambda$  es la circunferencia de la hélice en longitudes de onda,  $S_\lambda$  es el espaciamiento entre las espiras en longitudes de onda,  $t$  es una variable que parametriza las tres coordenadas,  $(x_{\lambda 0}, y_{\lambda 0}, z_{\lambda 0})$  son las coordenadas del punto del centro de la circunferencia de la hélice y  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  y  $\mathbf{a}_z$  son los vectores unitarios del sistema (Fig. 2.17).



**Figura 2.17.** Geometría de la hélice en el sistema cartesiano.

Como se muestra en la figura 2.17, para poder aplicar el MM es necesario caracterizar a cada conductor tubular de la antena por medio de una curva que represente a la curvatura del segmento sobre su eje y otra que represente a la curvatura sobre su superficie. Esto se logra auxiliándose con la Fig, 2.18.



**Figura 2.18a.** Modelo de una segmento de la sección helicoidal.

A partir de la ecuación (2-46), la expresión que representa la curvatura del segmento  $n$  sobre su eje es:

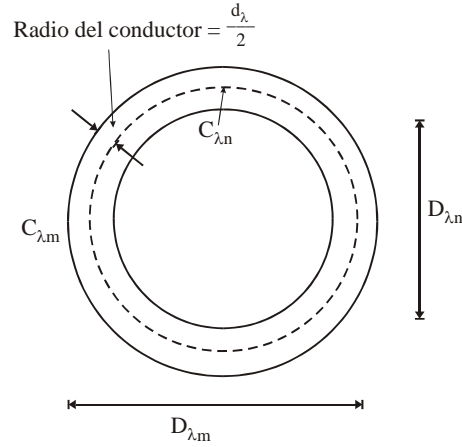
$$\mathbf{R}(t_n) = \left[ \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n) + x_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_x + \left[ \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n) + y_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_y + \left[ \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n + z_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_z \quad (2-47)$$

y la ecuación que representa a la curvatura de la superficie del segmento  $\hat{m}$  es:

$$\mathbf{R}(t_{\hat{m}}) = \left[ \frac{C_{\lambda \hat{m}}}{2\pi} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_x + \left[ \frac{C_{\lambda \hat{m}}}{2\pi} \text{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_y + \left[ \frac{S_{\lambda \hat{m}}}{2\pi} t_{\hat{m}} + z_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_z \quad (2-48)$$

El símbolo circunflejo indica que el vector de posición  $\mathbf{R}$  llega a la superficie del segmento.

Cabe señalar que debido al grosor del conductor de la antena, la circunferencia del eje y la circunferencia de la superficie no son iguales pero se pueden relacionar por medio de la expresión:



**Figura 2.18b.** Relación entre la circunferencia de la superficie y la circunferencia del eje.

$$C_{\lambda \hat{m}} = C_{\lambda n} + \pi d_{\lambda} \quad (2-49)$$

donde  $d_{\lambda}$  es el diámetro del conductor en longitudes de onda. A diferencia de las circunferencias de las hélices, el espaciamiento entre las espiras de la hélice del eje y el espaciamiento de la hélice de las espiras de la hélice de la superficie sí son iguales.

Para conocer la matriz de impedancias es necesario resolver la ecuación integral del MM, por lo que es necesario determinar todos sus elementos. Uno de ellos es la distancia,  $R_{\hat{m}}$  entre los segmentos  $n$  y  $m$  (véase la Fig. 2.18) que se calcula por medio de la magnitud de la siguiente ecuación vectorial:

$$R_{\hat{m}} = \left| \mathbf{R}(t_{\hat{m}}) - \mathbf{R}(t_n) \right| \quad (2-50)$$

Al sustituir las ecuaciones (2-47) y (2-48) en (2-50), se obtiene que:

$$R_{\hat{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{C_{\lambda \hat{m}}^2 + C_{\lambda n}^2 - 2C_{\lambda \hat{m}}C_{\lambda n} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + S_{\lambda}^2 (t_{\hat{m}} - t_n)^2} \quad (2-51)$$

Como se puede observar, la ecuación (2-51) está en coordenadas cilíndricas, ya que si se estudia la distancia entre dos puntos de la hélice como una distancia entre dos puntos de un cilindro, la deducción de dicha ecuación se facilita considerablemente. Asimismo, es necesario conocer el ángulo  $\beta$  (Fig. 2.18), que puede ser calculado por medio de la definición del producto escalar (Antón, 1998):

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{R}'\left(\hat{t}_m\right) \cdot \mathbf{R}'\left(t_n\right)}{\left|\mathbf{R}'\left(\hat{t}_m\right)\right| \left|\mathbf{R}'\left(t_n\right)\right|} \quad (2-52)$$

donde  $\mathbf{R}'\left(\hat{t}_m\right)$  y  $\mathbf{R}'\left(t_n\right)$  son los vectores tangentes a los segmentos  $\hat{m}$  y  $n$ , respectivamente. Para obtener estos vectores tangentes es necesario derivar las ecuaciones (2-46), por lo que se tiene (O'Neil, 1999):

$$\mathbf{R}'(t) = -\frac{C_\lambda}{2\pi} \operatorname{sen}(t) \mathbf{a}_x + \frac{C_\lambda}{2\pi} \cos(t) \mathbf{a}_y + \frac{S_\lambda}{2\pi} \mathbf{a}_z \quad (2-53)$$

$$\left|\mathbf{R}'(t)\right| = \frac{1}{2\pi} \sqrt{C_\lambda^2 + S_\lambda^2} \quad (2-54)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2-53) y (2-54) en (2-52), se sabe que el valor del  $\cos \beta$  es:

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left[ C_{\lambda n} C_{\lambda \hat{m}} \operatorname{sen}(t_n) \operatorname{sen}\left(\hat{t}_m\right) + C_{\lambda n} C_{\lambda \hat{m}} \cos(t_n) \cos\left(\hat{t}_m\right) + S_\lambda^2 \right]}{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \left[ \left(C_{\lambda n}^2 + S_\lambda^2\right) \left(C_{\lambda \hat{m}}^2 + S_\lambda^2\right) \right]^{\frac{1}{2}}} \\ \cos \beta &= \frac{C_{\lambda n} C_{\lambda \hat{m}} \cos\left(\hat{t}_m - t_n\right) + S_\lambda^2}{\left[ \left(C_{\lambda n}^2 + S_\lambda^2\right) \left(C_{\lambda \hat{m}}^2 + S_\lambda^2\right) \right]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (2-55)$$

De acuerdo con la ecuación (2-14), también es necesario conocer la expresión de la diferencial  $dl$  a lo largo del eje del segmento  $n$ , por lo que se emplea el concepto longitud de arco para conocer dicha diferencial. En el caso de la geometría helicoidal, la diferencial es:

$$dl = \left|\mathbf{R}'(t)\right| dt = \frac{1}{2\pi} \sqrt{C_\lambda^2 + S_\lambda^2} dt \quad (2-56)$$

Finalmente, la ecuación que permite calcular los elementos de la matriz de impedancia es (Neri, 1999):

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{\Delta l_n \sqrt{C_{\lambda \hat{m}}^2 + S_{\lambda}^2}} \times \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{\left[ C_{\lambda n} C_{\lambda \hat{m}} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + S_{\lambda}^2 \right] \exp(-jkR_{\hat{m}})}{\sqrt{C_{\lambda \hat{m}}^2 + C_{\lambda n}^2 - 2C_{\lambda \hat{m}} C_{\lambda n} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + S_{\lambda}^2 (t_{\hat{m}} - t_n)^2}} dt_n \quad (2-57)$$

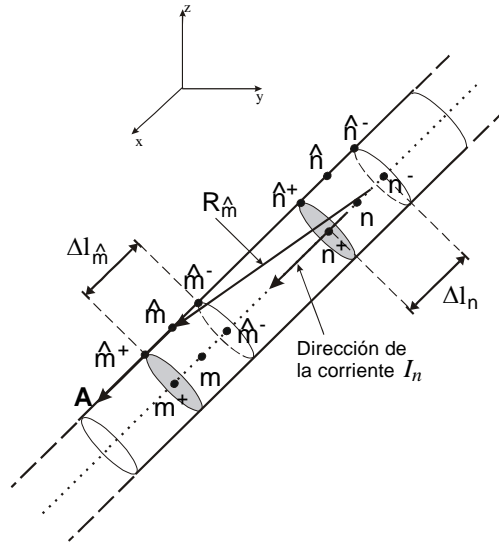
y para la contribución de cargas:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{\sqrt{C_{\lambda n}^2 + S_{\lambda}^2}}{\Delta l_n} \times \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{\exp(-jkR_{\hat{m}})}{\sqrt{C_{\lambda \hat{m}}^2 + C_{\lambda n}^2 - 2C_{\lambda \hat{m}} C_{\lambda n} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + S_{\lambda}^2 (t_{\hat{m}} - t_n)^2}} dt_n \quad (2-58)$$

### 2.4.1.2 Sección lineal horizontal

Esta sección, por tener una geometría lineal, presenta varias facilidades ya que, dado que ha sido estudiada por varios autores se tienen estudios como puntos de referencia para comprobar los resultados obtenidos (Neri, 1980).

Siguiendo un procedimiento similar al descrito en la sección anterior y tomando como referencia la Fig. 2.19, se pueden conocer todos los elementos de la ecuación (2-14).



**Figura 2.19.** Modelado de una segmento lineal a lo largo del conductor.

La geometría lineal se puede definir, en general, como:

$$\mathbf{R}(t) = x(t) \mathbf{a}_x + y(t) \mathbf{a}_y + z(t) \mathbf{a}_z \quad (2-59)$$

Para un tramo horizontal, paralelo al eje  $x$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$  son constantes y  $x(t)$  varía linealmente. Para esta combinación, las componentes vectoriales se pueden definir como:

$$\begin{cases} x(t_n) = x_{\lambda n} \\ y(t_n) = y_{\lambda 0n} = cte \\ z(t_n) = z_{\lambda 0n} = cte \end{cases} \quad (2-60)$$

Debido a que la geometría lineal sólo presenta variación en una dirección (Fig. 2.19), se puede conocer directamente la distancia  $R_{\hat{m}}$  por medio de la ecuación :

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\left(x_{\hat{\lambda m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\hat{\lambda m}} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\hat{\lambda m}} - z_{\lambda 0n}\right)^2} \quad (2-61)$$

donde  $(x_{\lambda\hat{m}}, y_{\lambda\hat{m}}, z_{\lambda\hat{m}})$  representa a todos los puntos que constituyen la superficie del tubo y  $(x_{\lambda n}, y_{\lambda n}, z_{\lambda n})$  representa a todos los puntos sobre el eje.

Al considerar la geometría de la Fig. 2.19 y realizando algunas simplificaciones, la ecuación (2-61) se puede escribir como:

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\frac{d_{\lambda}^2}{4} + (x_{\lambda\hat{m}} - x_{\lambda n})^2} \quad (2-62)$$

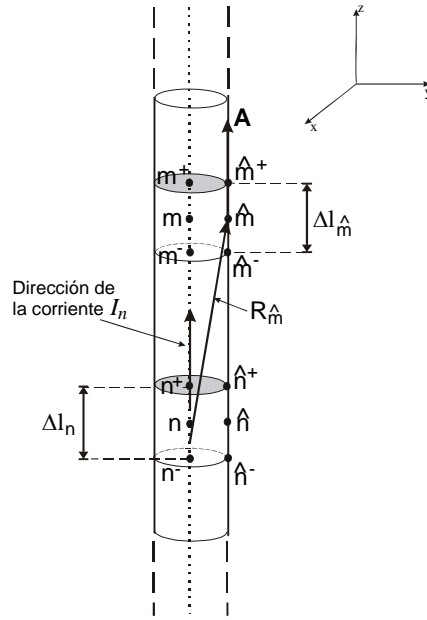
En toda la sección lineal el vector  $\mathbf{A}$  producido por el segmento  $n$  y el vector tangente al segmento  $\hat{m}$  son paralelos, por lo que  $\cos \beta = 1$  cuando los segmentos  $n$  y  $\hat{m}$  pertenecen a esta sección y, además,  $dl$  coincide con  $dx$  ya que es la única dirección donde se presenta variación.

Por lo dicho anteriormente, la ecuación (2-14) puede ser escrita indistintamente para la contribución de cargas y corrientes, como:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{x_{\lambda n-}}^{x_{\lambda n+}} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\frac{d_{\lambda}^2}{4} + (x_{\lambda\hat{m}} - x_{\lambda n})^2}\right)}{\sqrt{\frac{d_{\lambda}^2}{4} + (x_{\lambda\hat{m}} - x_{\lambda n})^2}} dx_{\lambda n} \quad (2-63)$$

### 2.4.1.3 Sección lineal vertical

Al igual que en la sección 2.4.1.2 se tiene un segmento lineal, pero en este caso de forma vertical. La geometría empleada para este análisis se muestra en la figura 2.20.



**Figura 2.20.** Modelado de una segmento lineal a lo largo del conductor.

Tomando la misma definición de la ecuación (2-59), se tiene que en este caso  $x(t)$  y  $y(t)$  son constantes y  $z(t)$  varía linealmente. Para esta combinación estas componentes vectoriales se pueden definir como:

$$\begin{cases} x(t_n) = x_{\lambda 0n} = cte \\ y(t_n) = y_{\lambda 0n} = cte \\ z(t_n) = z_{\lambda n} \end{cases} \quad (2-64)$$

Dado que también en este caso sólo existe variación en una dirección, la distancia puede ser calculada por medio del expresión (2-65). Al considerar la geometría de la Fig. 2.20 y realizando algunas simplificaciones, la ecuación (2-61) se puede escribir como:

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\frac{d_{\lambda}^2}{4} + \left( z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda n} \right)^2} \quad (2-65)$$

Nuevamente, en toda la sección lineal el vector  $\mathbf{A}$  producido por el segmento  $n$  y el vector tangente al segmento  $\hat{m}$  son paralelos, por lo que  $\cos \beta = 1$  cuando los segmentos  $n$  y  $\hat{m}$  pertenecen a esta sección y, además,  $dl$  coincide con  $dz$  ya que es la única dirección donde se presenta variación.



La ecuación que permite el cálculo de la impedancias propias y mutuas para una sección lineal vertical es:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{z_{\lambda n^-}}^{z_{\lambda n^+}} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\frac{d_\lambda^2}{4} + (z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda n})^2}\right)}{\sqrt{\frac{d_\lambda^2}{4} + (z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda n})^2}} dz_{\lambda n} \quad (2-66)$$

#### 2.4.1.4 Sección circular

En este caso, al igual que en la sección helicoidal, también se puede manejar la geometría por medio de ecuaciones paramétricas. De la figura 2.21, se observa que el aro se encuentra contenido en un plano igual o paralelo al XY.

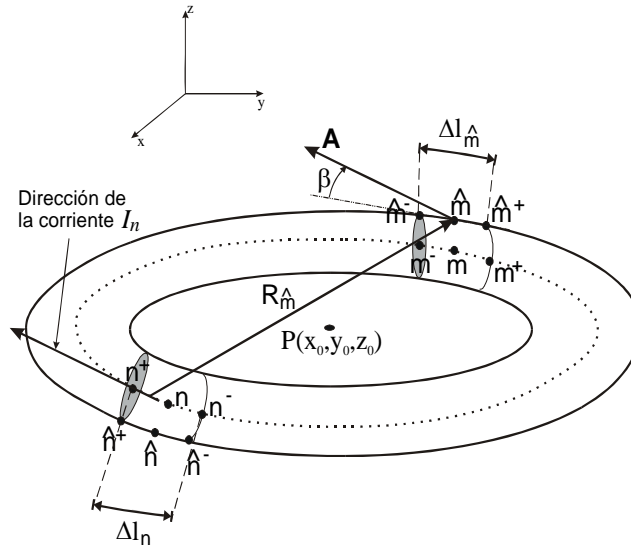


Figura 2.21. Modelado de un segmento circular a lo largo del conductor.

La ecuación vectorial que describe una geometría circular es:

$$\mathbf{R}(t) = [r_\lambda \cos(t) + x_{\lambda 0}] \mathbf{a}_x + [r_\lambda \sin(t) + y_{\lambda 0}] \mathbf{a}_y + z_{\lambda 0} \mathbf{a}_z \quad (2-67)$$

donde  $r_\lambda$  es el radio del aro en longitudes de onda,  $t$  es la variable que parametriza a la función vectorial en la dirección  $x$  y  $y$ ,  $(x_{\lambda 0}, y_{\lambda 0}, z_{\lambda 0})$  son las coordenadas del centro del aro, también en longitudes de onda y  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{a}_y$  y  $\mathbf{a}_z$  son los vectores unitarios del sistema.

De manera análoga a la sección helicoidal, en la sección circular también es necesario definir una función que represente la curvatura del segmento sobre su eje y otra que represente a la curvatura sobre la superficie. La ecuación que describe al eje es:

$$\mathbf{R}(t_n) = [r_{\lambda n} \cos(t_n) + x_{\lambda 0}] \mathbf{a}_x + [r_{\lambda n} \text{sen}(t_n) + y_{\lambda 0}] \mathbf{a}_y + z_{\lambda 0} \mathbf{a}_z \quad (2-68)$$

mientras que la que describe a la superficie es:

$$\mathbf{R}\left(t_{\hat{m}}\right) = \left[ r_{\lambda \hat{m}} \cos\left(t_{\hat{m}}\right) + x_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_x + \left[ r_{\lambda \hat{m}} \text{sen}\left(t_{\hat{m}}\right) + y_{\lambda 0} \right] \mathbf{a}_y + z_{\lambda 0} \mathbf{a}_z \quad (2-69)$$

Dado que el conductor de la antena posee un determinado grosor, el radio de la curvatura del eje no es igual al radio de la curvatura de la superficie, pero se pueden relacionar por medio de la ecuación:

$$r_{\lambda \hat{m}} = r_{\lambda n} + \frac{d_{\lambda}}{2} \quad (2-70)$$

donde  $d_{\lambda}$  es el diámetro del conductor del aro en longitudes de onda.

La distancia  $R_{\hat{m}}$  entre el segmento  $n$  y el segmento  $\hat{m}$  se puede calcular por medio de la expresión que determina la distancia entre dos puntos en coordenadas polares (Spiegel, 2000), al particularizar dicha ecuación a la sección circular se tiene que:

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{r_{\lambda \hat{m}}^2 + r_{\lambda n}^2 - 2r_{\lambda \hat{m}}r_{\lambda n} \cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right)} \quad (2-71)$$

Nuevamente, para conocer el  $\cos \beta$  es necesario derivar la ecuación (2-67):

$$\mathbf{R}'(t) = -r_{\lambda} \text{sen}(t) \mathbf{a}_x + r_{\lambda} \cos(t) \mathbf{a}_y \quad (2-72)$$

$$|\mathbf{R}'(t)| = r_{\lambda} \quad (2-73)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2-72) y (2-73) en (2-52) y realizando las simplificaciones necesarias se tiene que:

$$\cos\beta = \cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right) \quad (2-74)$$

Empleando la integral para el cálculo de la longitud de arco para conocer la expresión de la diferencial  $dl$  a lo largo del eje, se llega a la ecuación:

$$dl = r_{\lambda} dt \quad (2-75)$$

Finalmente, la ecuación integral del MM para la contribución de corriente es:

$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = \frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right) \frac{\exp\left(-jk\sqrt{r_{\lambda \hat{m}}^2 + r_{\lambda n}^2 - 2r_{\lambda \hat{m}}r_{\lambda n}\cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right)}\right)}{\sqrt{r_{\lambda \hat{m}}^2 + r_{\lambda n}^2 - 2r_{\lambda \hat{m}}r_{\lambda n}\cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right)}} dt_n \quad (2-76)$$

y para la contribución de cargas es:

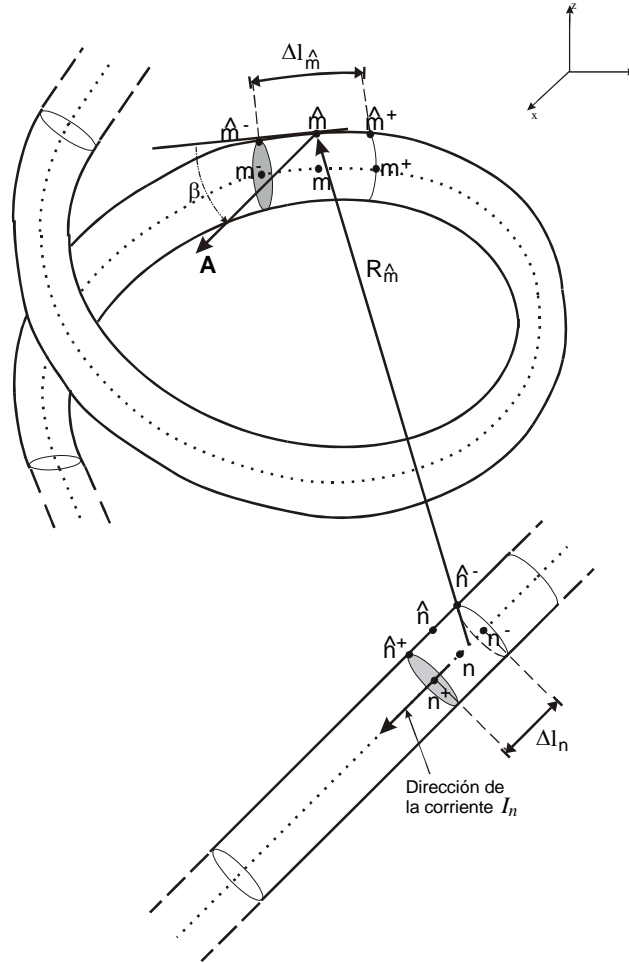
$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = \frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{r_{\lambda \hat{m}}^2 + r_{\lambda n}^2 - 2r_{\lambda \hat{m}}r_{\lambda n}\cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right)}\right)}{\sqrt{r_{\lambda \hat{m}}^2 + r_{\lambda n}^2 - 2r_{\lambda \hat{m}}r_{\lambda n}\cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right)}} dt_n \quad (2-77)$$

### 2.4.1.5 Sección helicoidal y sección horizontal

En este caso el desarrollo matemático se complica ya que se combinan dos geometrías diferentes, se tomarán como base algunas ecuaciones presentadas anteriormente. Para conocer los efectos que produce un segmento, es necesario conocer el vector  $\mathbf{A}$  que se produce en el segmento  $\hat{m}$  debido a la corriente que fluye en el segmento  $n$ , en los casos anteriores ambos segmentos poseían la misma geometría pero en éste

ya no es así, por lo que se tienen dos posibles combinaciones, la primera es cuando el segmento  $n$  tenga una geometría lineal y el segmento  $\hat{m}$  una geometría helicoidal, y la segunda es cuando el segmento  $n$  tenga una geometría helicoidal y el segmento  $\hat{m}$  una geometría lineal.

Para realizar el estudio de la primera combinación, se toma como base la geometría de la figura 2.22.



**Figura 2.22.** Modelo de un segmento horizontal y un segmento helicoidal.

Sustituyendo las ecuaciones (2-48) y (2-59) en (2-50), se obtiene que:

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda n}\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2} \quad (2-78)$$

donde

$$\begin{cases} x_{\hat{m}} = r_{\lambda\hat{m}} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda 0} \\ y_{\hat{m}} = r_{\lambda\hat{m}} \text{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda 0} \\ z_{\hat{m}} = \frac{S_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} t_{\hat{m}} \end{cases} \quad (2-79)$$

Para conocer el valor del  $\cos \beta$  se emplean las ecuaciones (2-53) y dado que la variación se encuentra en la dirección  $\mathbf{a}_x$ ,  $\mathbf{R}'(t_n) = \mathbf{a}_x$ , teniendo como resultado:

$$\cos \beta = -\text{sen}(t_{\hat{m}}) \quad (2-80)$$

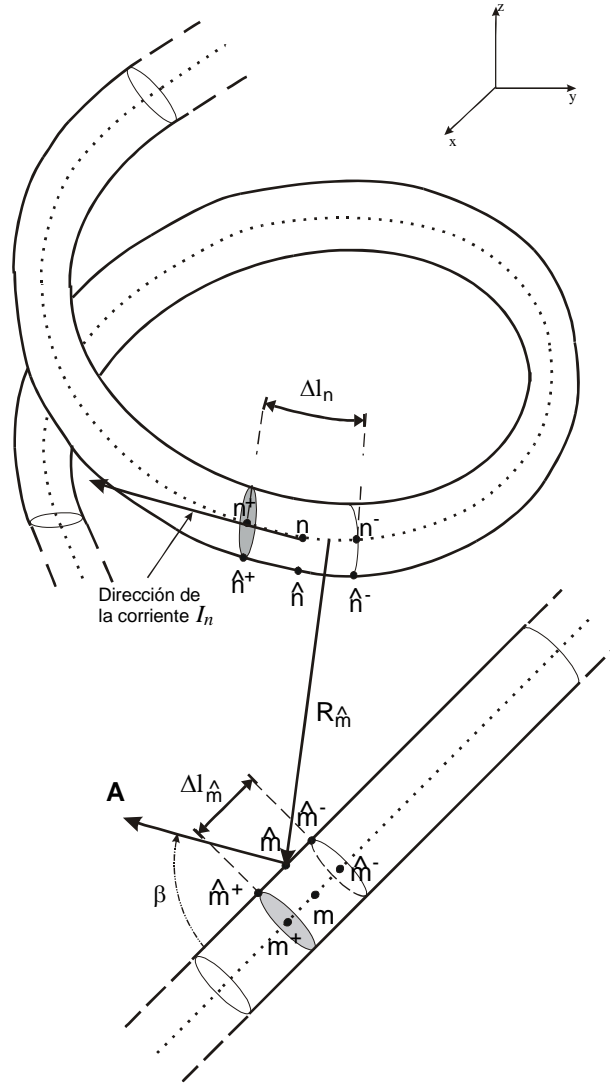
Como se puede observar la ecuación (2-80) puede ser considerada como una constante ya que la diferencial de integración se ubica sobre la sección lineal, y no sobre la sección helicoidal. La diferencial para este análisis es  $dl = dx_n$ . Esto nos permite escribir a la ecuación (2-14) como:

$$\Psi(n, \hat{m}) = -\frac{1}{\Delta l_n} \text{sen}(t_{\hat{m}}) \int_{x_{\lambda n}^-}^{x_{\lambda n}^+} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\left(x_{\lambda\hat{m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\lambda\hat{m}} - y_{\lambda n}\right)^2 + \left(z_{\lambda\hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\lambda\hat{m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\lambda\hat{m}} - y_{\lambda n}\right)^2 + \left(z_{\lambda\hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2}} dx_{\lambda n} \quad (2-81)$$

y

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{x_{\lambda n}^-}^{x_{\lambda n}^+} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\left(x_{\lambda\hat{m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\lambda\hat{m}} - y_{\lambda n}\right)^2 + \left(z_{\lambda\hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\lambda\hat{m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\lambda\hat{m}} - y_{\lambda n}\right)^2 + \left(z_{\lambda\hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2}} dx_{\lambda n} \quad (2-82)$$

Siendo las ecuaciones (2-81) y (2-82), las ecuaciones para la contribución de corrientes y la contribución de cargas, respectivamente.



**Figura 2.23.** Modelo de una sección helicoidal y una sección vertical

El segundo caso corresponde a la combinación cuando el segmento  $n$  tiene una geometría helicoidal y el segmento  $\hat{m}$  una geometría lineal. Empleando las ecuaciones (2-48), (2-59) y (2-60), y sustituyéndolas en (2-50), se tiene que:

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\left(x_{\lambda\hat{m}} - x_{\lambda 0} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n)\right)^2 + \left(y_{\lambda\hat{m}} - y_{\lambda 0} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n)\right)^2 + \left(z_{\lambda\hat{m}} - z_{\lambda 0} - \frac{S_{\lambda}}{2\pi} t_n\right)^2} \quad (2-83)$$

Asimismo, empleando las ecuaciones (2-53) y (2-54), y tomando en cuenta que la tangente al segmento  $\hat{m}$  es paralela al vector  $\mathbf{a}_x$ , el  $\cos \beta$  es igual a:

$$\cos \beta = -\text{sen}(t_n) \quad (2-84)$$

Tomando los resultados de las ecuaciones (2-83) y (2-84) y considerando la ecuación (2-56), la ecuación integral  $\Psi$  es:

$$\begin{aligned} \Psi(n, \hat{m}) = & -\frac{1}{\Delta l_n} \times \frac{\sqrt{C_{\lambda n}^2 + S_{\lambda}^2}}{2\pi} \times \\ & \int_{t_n^-}^{t_n^+} \text{sen}(t_n) \frac{\exp\left[-jk \sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda 0} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n)\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n)\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda 0} - \frac{S_{\lambda}}{2\pi} t_n\right)^2}\right]}{\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda 0} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n)\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n)\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda 0} - \frac{S_{\lambda}}{2\pi} t_n\right)^2}} dt_n \end{aligned} \quad (2-85)$$

y

$$\begin{aligned} \Psi(n, \hat{m}) = & \frac{1}{\Delta l_n} \times \frac{\sqrt{C_{\lambda n}^2 + S_{\lambda}^2}}{2\pi} \times \\ & \int_{t_n^-}^{t_n^+} \frac{\exp\left[-jk \sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda 0} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n)\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n)\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda 0} - \frac{S_{\lambda}}{2\pi} t_n\right)^2}\right]}{\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda 0} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n)\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n)\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda 0} - \frac{S_{\lambda}}{2\pi} t_n\right)^2}} dt_n \end{aligned} \quad (2-86)$$

donde la ecuaciones (2-85) y (2-86), permiten conocer la contribución de corriente y la contribución de cargas, respectivamente.

### 2.4.1.6 Sección helicoidal y sección vertical

El procedimiento realizado para analizar las impedancias mutuas entre estas dos geometrías es muy similar al descrito en la sección 2.4.1.5, por lo que únicamente se presentarán los resultados obtenidos.

El cálculo de las impedancias mutuas entre la sección helicoidal y la sección vertical también presenta dos combinaciones, la primera es considerando el segmento  $\hat{m}$  con geometría helicoidal y el segmento  $n$  con geometría lineal, y la segunda es considerando al segmento  $\hat{m}$  con geometría lineal y el segmento  $n$  con geometría helicoidal.

Para la primera combinación se tiene la geometría que se muestra en la siguiente figura:

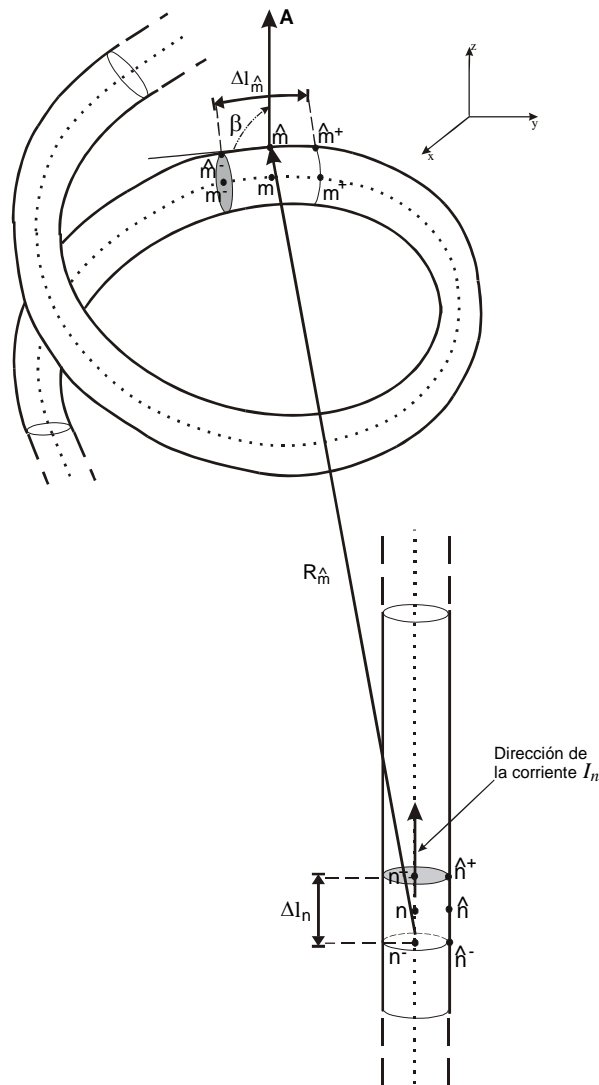


Figura 2.24. Modelo de un segmento helicoidal y un segmento lineal.



La distancia  $R_{\hat{m}}$  está dada por la ecuación :

$$R_{\hat{m}} = \left\{ \left[ \frac{C_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda0\hat{m}} - x_{\lambda0n} \right]^2 + \left[ \frac{C_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} \text{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda0\hat{m}} - y_{\lambda0n} \right]^2 + \left[ \frac{S_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} t_{\hat{m}} + z_{\lambda0\hat{m}} - z_{\lambda n} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-87)$$

Al realizar las siguientes definiciones:

$$\begin{cases} x_{h\hat{m}} = \frac{C_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda0\hat{m}} \\ y_{h\hat{m}} = \frac{C_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} \text{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda0\hat{m}} \\ z_{h\hat{m}} = \frac{S_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} t_{\hat{m}} + z_{\lambda0\hat{m}} \end{cases} \quad (2-88)$$

La ecuación (2-87) se puede escribir como:

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\left(x_{h\hat{m}} - x_{\lambda0n}\right)^2 + \left(y_{h\hat{m}} - y_{\lambda0n}\right)^2 + \left(z_{h\hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2} \quad (2-89)$$

donde prácticamente todas las variables con excepción de  $z_n$  toman valores constantes al realizarse las integrales. Al calcularse cada una de las integrales del MM el segmento  $n$  está representado por la geometría lineal, por lo que en el dirección  $x$  y  $y$  son constantes y en  $z$  presenta su única variación, y del segmento  $\hat{m}$  sólo se toma su punto medio, por lo que sus coordenadas permanecen constantes, es por ello que la única variable de integración posible es  $z_n$ .

La ecuación que permite conocer el valor del  $\cos \beta$  para este caso es:

$$\cos \beta = \frac{S_{\lambda\hat{m}}}{\sqrt{C_{\lambda\hat{m}}^2 + S_{\lambda\hat{m}}^2}} = c_1 \quad (2-90)$$

La variable de integración es  $z_n$ , por lo que  $\cos \beta$  en cada una de las integrales fungirá como un valor constante  $c_1$  dentro del integrando. Finalmente, la ecuación integral del MM para la contribución de corrientes es:

$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{z_{\lambda n-}}^{z_{\lambda n+}} c_1 \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\left(x_{\hat{h}m} - x_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(y_{\hat{h}m} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\hat{h}m} - z_{\lambda n}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\hat{h}m} - x_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(y_{\hat{h}m} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\hat{h}m} - z_{\lambda n}\right)^2}} dz_{\lambda n} \quad (2-91)$$

y para la contribución de cargas es:

$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{z_{\lambda n-}}^{z_{\lambda n+}} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\left(x_{\hat{h}m} - x_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(y_{\hat{h}m} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\hat{h}m} - z_{\lambda n}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\hat{h}m} - x_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(y_{\hat{h}m} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\hat{h}m} - z_{\lambda n}\right)^2}} dz_{\lambda n} \quad (2-92)$$

La segunda combinación toma como base la siguiente figura:

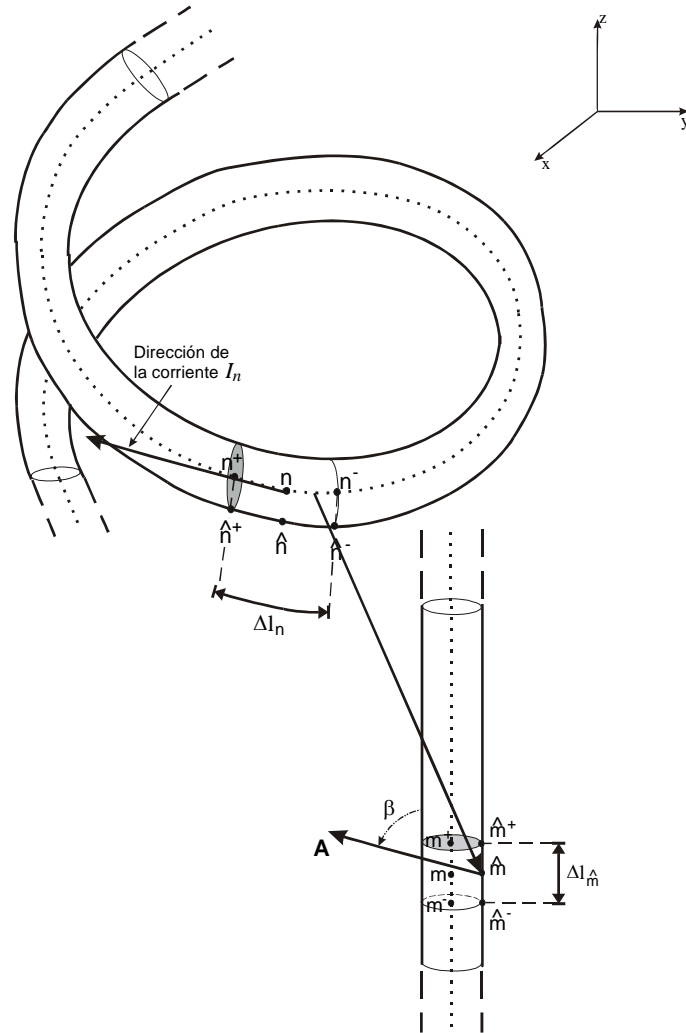


Figura 2.25. Modelo de un segmento lineal y un segmento helicoidal.

Para esta segunda combinación la distancia  $R_{\hat{m}}$  está dada por:

$$R_{\hat{m}} = \left\{ \left[ x_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n) - x_{\lambda 0 n} \right]^2 + \left[ y_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n) - y_{\lambda 0 n} \right]^2 + \left[ z_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n - z_{\lambda 0 n} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-93)$$

y el  $\cos \beta$  por:

$$\cos \beta = \frac{S_{\lambda n}}{\sqrt{C_{\lambda n}^2 + S_{\lambda}^2}} \quad (2-94)$$

Al sustituir las ecuación (2-56), (2-93) y (2-94) en la ecuación (2-14), se obtiene que para la contribución de corriente es:

$$\Psi(n, \hat{m}) = -\frac{1}{\Delta l_n} \times \frac{S_{\lambda n}^2}{2\pi} \times \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{\exp\left(-jk \sqrt{\left[x_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n) - x_{\lambda 0 n}\right]^2 + \left[y_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n) - y_{\lambda 0 n}\right]^2 + \left[z_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n - z_{\lambda 0 n}\right]^2}\right)}{\sqrt{\left[x_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n) - x_{\lambda 0 n}\right]^2 + \left[y_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n) - y_{\lambda 0 n}\right]^2 + \left[z_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n - z_{\lambda 0 n}\right]^2}} dt_n \quad (2-95)$$

y para la contribución de cargas es:

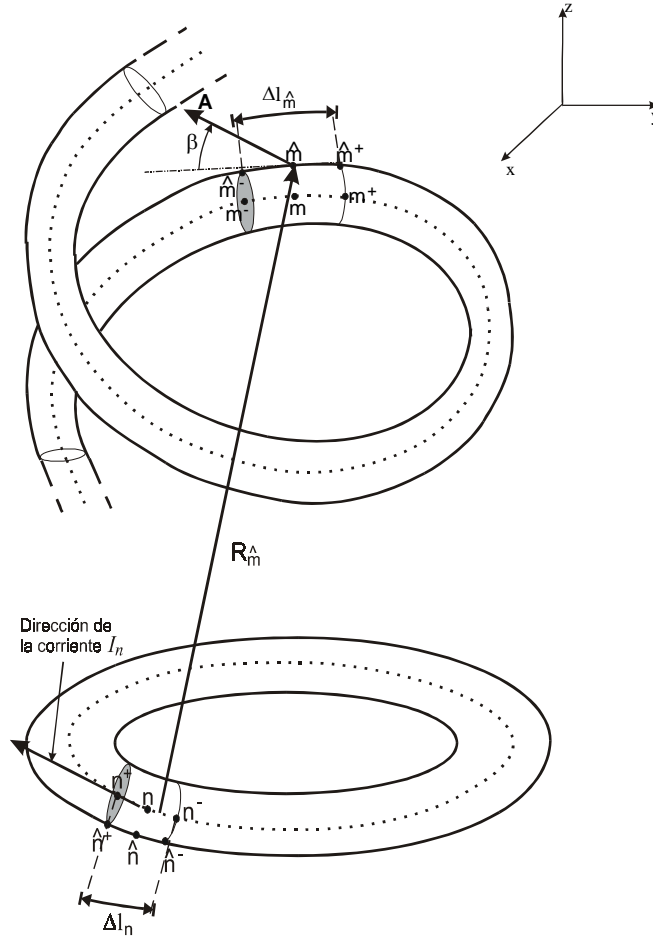
$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{\Delta l_n} \times \frac{\sqrt{C_{\lambda n}^2 + S_{\lambda}^2}}{2\pi} \times \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{\exp\left(-jk \sqrt{\left[x_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n) - x_{\lambda 0 n}\right]^2 + \left[y_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n) - y_{\lambda 0 n}\right]^2 + \left[z_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n - z_{\lambda 0 n}\right]^2}\right)}{\sqrt{\left[x_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n) - x_{\lambda 0 n}\right]^2 + \left[y_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n) - y_{\lambda 0 n}\right]^2 + \left[z_{\lambda 0 \hat{m}} - \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n - z_{\lambda 0 n}\right]^2}} dt_n \quad (2-96)$$

### 2.4.1.7 Sección helicoidal y sección circular

Es este apartado se van a analizar dos geometrías curvas, por lo que nuevamente es necesario conocer el vector  $\mathbf{A}$  que se produce en el segmento  $\hat{m}$  debido a la corriente que fluye en el segmento  $n$ . Este análisis es un poco diferente al realizado en las secciones anteriores ya que se combinan dos geometrías curvas y diferentes, por lo que se explicará paso a paso.

Dado que se analiza el cálculo de impedancias mutuas entre dos geometrías diferentes se tienen dos posibles combinaciones, la primera es que el segmento  $n$  tenga un geometría circular y el segmento  $\hat{m}$  una geometría helicoidal y la segunda es que el segmento  $n$  tenga una geometría helicoidal y el segmento  $\hat{m}$  una geometría circular.

A continuación se presenta el primer caso, en donde la geometría base se presenta en la siguiente figura:



**Figura 2.26.** Modelo de un segmento helicoidal y un segmento circular.

Sustituyendo las ecuaciones (2-48) y (2-68) en (2-50), se obtiene que la  $R_m^{\hat{}}$  distancia es:

$$R_{\hat{m}} = \left\{ \left[ \frac{C_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} \cos(t_{\hat{m}}) - r_{\lambda n} \cos(t_n) \right]^2 + \left[ \frac{C_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} \text{sen}(t_{\hat{m}}) - r_{\lambda n} \text{sen}(t_n) \right]^2 + \left[ \frac{S_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} t_{\hat{m}} + z_{\lambda 0\hat{m}} - z_{\lambda 0n} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-97)$$

donde  $z_{0\hat{m}}$  y  $z_{0n}$  representan las cotas de los centros de la circunferencia de la hélice y de la circunferencia del aro, respectivamente. Simplificando algunos términos, la ecuación (2-97) también se puede escribir como:

$$R_{\hat{m}} = \left[ \frac{C_{\lambda\hat{m}}^2}{4\pi^2} + r_{\lambda n}^2 - \frac{C_{\lambda\hat{m}}}{\pi} r_{\lambda n} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + \left( \frac{S_{\lambda\hat{m}}}{2\pi} t_{\hat{m}} + z_{\lambda 0\hat{m}} - z_{\lambda 0n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-98)$$

Ahora bien, también es necesario calcular el  $\cos \beta$  que se origina entre estas dos geometrías, por lo que, sustituyendo las ecuaciones (2-53) y (2-72) en (2-52) se puede conocer este valor. Este resultado es:

$$\cos \beta = \frac{C_{\lambda\hat{m}} \cos(t_{\hat{m}} - t_n)}{\sqrt{C_{\lambda\hat{m}}^2 + S_{\lambda\hat{m}}^2}} \quad (2-99)$$

Dado que la geometría del segmento  $n$  es circular,  $dl = r_{\lambda} dt$ . La ecuación integral para la contribución de corriente es:

$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = \frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \times \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{C_{\lambda \hat{m}} \cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right)}{\sqrt{C_{\lambda \hat{m}}^2 + S_{\lambda \hat{m}}^2}} \times \frac{\exp\left[-jk \sqrt{\frac{C_{\lambda \hat{m}}^2}{4\pi^2} + r_{\lambda n}^2 - \frac{C_{\lambda \hat{m}}}{\pi} r_{\lambda n} \cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right) + \left(\frac{S_{\lambda \hat{m}}}{2\pi} t_{\hat{m}} + z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n}\right)^2}\right]}{\sqrt{\frac{C_{\lambda \hat{m}}^2}{4\pi^2} + r_{\lambda n}^2 - \frac{C_{\lambda \hat{m}}}{\pi} r_{\lambda n} \cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right) + \left(\frac{S_{\lambda \hat{m}}}{2\pi} t_{\hat{m}} + z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n}\right)^2}} dt_n \quad (2-100)$$

y para la contribución de cargas es:

$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = \frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{\exp\left[-jk \sqrt{\frac{C_{\lambda \hat{m}}^2}{4\pi^2} + r_{\lambda n}^2 - \frac{C_{\lambda \hat{m}}}{\pi} r_{\lambda n} \cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right) + \left(\frac{S_{\lambda \hat{m}}}{2\pi} t_{\hat{m}} + z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n}\right)^2}\right]}{\sqrt{\frac{C_{\lambda \hat{m}}^2}{4\pi^2} + r_{\lambda n}^2 - \frac{C_{\lambda \hat{m}}}{\pi} r_{\lambda n} \cos\left(t_{\hat{m}} - t_n\right) + \left(\frac{S_{\lambda \hat{m}}}{2\pi} t_{\hat{m}} + z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n}\right)^2}} dt_n \quad (2-101)$$

Ahora se hará el análisis para la segunda combinación, por lo que en la siguiente figura se muestra la geometría a emplear.

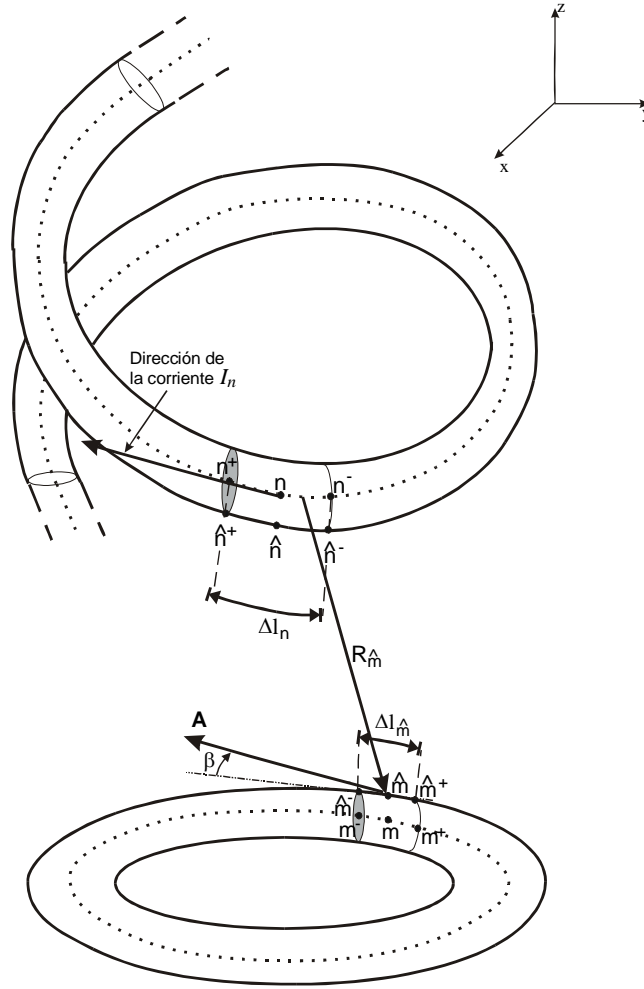


Figura 2.27. Modelado de un segmento circular y un segmento helicoidal.

Al sustituir las ecuaciones (2-47) y (2-69) en (2-50), la distancia  $R_{\hat{m}}$  es:

$$R_{\hat{m}} = \left[ r_{\lambda \hat{m}}^2 + \frac{C_{\lambda n}^2}{4\pi^2} - r_{\lambda \hat{m}} \frac{C_{\lambda n}}{\pi} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + \left( z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n} - \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (2-102)$$

Para calcular el  $\cos \beta$ , nuevamente se emplean las ecuaciones (2-53), (2-72) y (2-52), resultando que:

$$\cos \beta = \frac{C_{\lambda n} \cos(t_{\hat{m}} - t_n)}{\sqrt{C_{\lambda n}^2 + S_{\lambda n}^2}} \quad (2-103)$$



Aparentemente las ecuaciones (2-99) y (2-103) son iguales, pero no es así ya que, como se dijo anteriormente, la circunferencia que describe la curvatura del eje de la hélice es diferente a la circunferencia que describe la curvatura de su superficie.

Por tener un geometría helicoidal en el segmento  $n$ ,  $dl$  es igual a la ecuación (2-56), es decir:

$$dl = \frac{1}{2\pi} \sqrt{C_{\lambda}^2 + S_{\lambda}^2} dt$$

Teniendo ya todos los elementos necesarios, la ecuación integral del MM para la contribución de corrientes de la segunda combinación es:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{C_{\lambda n}}{2\pi \Delta l_n} \times \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) \frac{\exp\left[-jk \sqrt{r_{\lambda \hat{m}}^2 + \frac{C_{\lambda \hat{m}}^2}{4\pi^2} - r_{\lambda \hat{m}} \frac{C_{\lambda n}}{\pi} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + \left(z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n} - \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n\right)^2}\right]}{\sqrt{r_{\lambda \hat{m}}^2 + \frac{C_{\lambda \hat{m}}^2}{4\pi^2} - r_{\lambda \hat{m}} \frac{C_{\lambda n}}{\pi} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + \left(z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n} - \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n\right)^2}} dt_n \quad (2-104)$$

mientras que para la contribución de cargas es:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{\sqrt{C_{\lambda n}^2 + S_{\lambda n}^2}}{2\pi \Delta l_n} \times \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{\exp\left[-jk \sqrt{r_{\lambda \hat{m}}^2 + \frac{C_{\lambda \hat{m}}^2}{4\pi^2} - r_{\lambda \hat{m}} \frac{C_{\lambda n}}{\pi} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + \left(z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n} - \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n\right)^2}\right]}{\sqrt{r_{\lambda \hat{m}}^2 + \frac{C_{\lambda \hat{m}}^2}{4\pi^2} - r_{\lambda \hat{m}} \frac{C_{\lambda n}}{\pi} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + \left(z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n} - \frac{S_{\lambda n}}{2\pi} t_n\right)^2}} dt_n \quad (2-105)$$

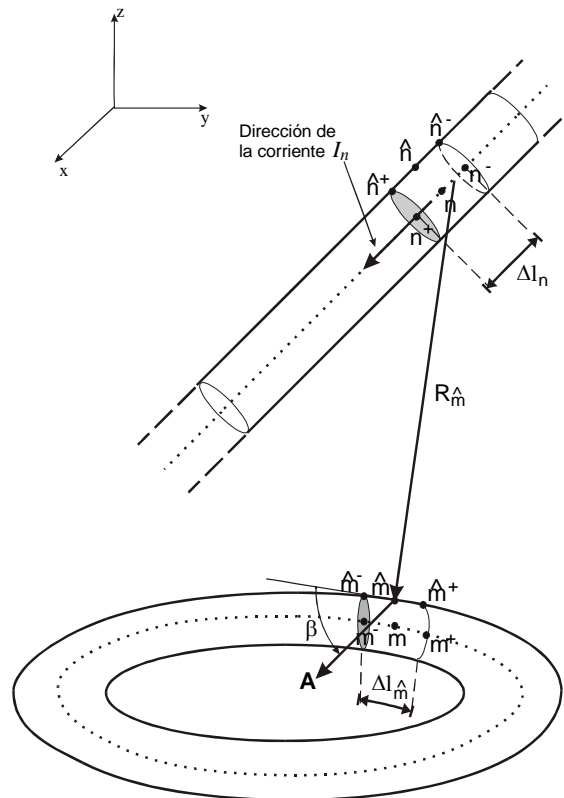
Para comprobar que los resultados obtenidos por las ecuaciones (2-100), (2-101), (2-104) y (2-105) son correctos, las impedancias mutuas entre la sección helicoidal y la sección circular empleando las

ecuaciones (2-100) y (2-101) deben ser iguales a las impedancias mutuas empleando las ecuaciones (2-104) y (2-105).

### 2.4.1.8 Sección circular y sección horizontal

Ahora toca el turno al análisis de las secciones circular y horizontal en conjunto, en esta caso se tiene, nuevamente, una geometría curva y una geometría lineal. El procedimiento a seguir es similar al presentado en las secciones 2.4.1.5 y 2.4.1.6, por lo que se darán por entendido algunas sustituciones.

Tomando como la primera combinación a la asignación del segmento  $n$  con geometría lineal horizontal y el segmento  $\hat{m}$  con geometría circular (figura 2.28).



**Figura 2.28.** Modelado de un segmento lineal y un segmento circular.

Considerando las ecuaciones (2-59) y (2-69), se tiene que la distancia  $R_{\hat{m}}$  es:

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\left(r_{\lambda\hat{m}} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda 0} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(r_{\lambda\hat{m}} \text{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda 0} - y_{\lambda n}\right)^2 + (z_{\lambda 0} - z_{\lambda n})^2} \quad (2-106)$$

Al sustituir las ecuaciones (2-72) y (2-73) y observando que el vector  $\mathbf{A}$  tiene una dirección  $\mathbf{a}_x$ , se tiene que:

$$\cos\beta = -\text{sen}\left(t_{\hat{m}}\right) \quad (2-107)$$

Finalmente, al sustituir las ecuaciones (2-106) y (2-107) y tomando en cuenta que  $dl = dx_n$ , la ecuación (2-14) particularizada para esta combinación es:

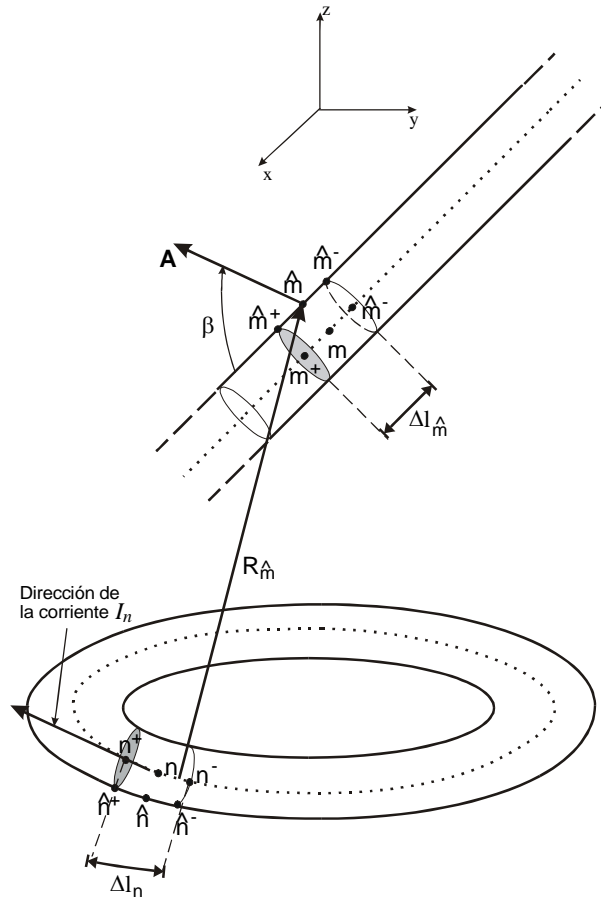
$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = -\frac{\text{sen}\left(t_{\hat{m}}\right)}{\Delta l_n} \times \int_{x_{\lambda n-}}^{x_{\lambda n+}} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\left(r_{\lambda\hat{m}} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda 0} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(r_{\lambda\hat{m}} \text{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda 0} - y_{\lambda n}\right)^2 + (z_{\lambda 0} - z_{\lambda n})^2}\right)}{\sqrt{\left(r_{\lambda\hat{m}} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda 0} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(r_{\lambda\hat{m}} \text{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda 0} - y_{\lambda n}\right)^2 + (z_{\lambda 0} - z_{\lambda n})^2}} dx_{\lambda n} \quad (2-108)$$

y

$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = \frac{1}{\Delta l_n} \times \int_{x_{\lambda n-}}^{x_{\lambda n+}} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\left(r_{\lambda\hat{m}} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda 0} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(r_{\lambda\hat{m}} \text{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda 0} - y_{\lambda n}\right)^2 + (z_{\lambda 0} - z_{\lambda n})^2}\right)}{\sqrt{\left(r_{\lambda\hat{m}} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda 0} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(r_{\lambda\hat{m}} \text{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda 0} - y_{\lambda n}\right)^2 + (z_{\lambda 0} - z_{\lambda n})^2}} dx_{\lambda n} \quad (2-109)$$

donde las ecuaciones (2-108) y (2-109) representan la contribución de corrientes y la contribución de cargas, respectivamente.

La segunda combinación posible es cuando el segmento  $n$  tiene una geometría horizontal y el segmento  $\hat{m}$  una geometría circular (Fig. 2.29).



**Figura 2.29.** Modelado de una sección horizontal y una sección circular.

La expresión que permite calcular la distancia  $R_{\hat{m}}$  entre el segmento  $n$  y el segmento  $\hat{m}$  para esta combinación es:

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \cos(t_n) - x_{\lambda 0}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \text{sen}(t_n) - y_{\lambda 0}\right)^2 + \left(z_{\lambda n} - z_{\lambda 0}\right)^2} \quad (2-110)$$

y el coseno del ángulo formando entre la dirección del vector  $\mathbf{A}$  y la tangente al segmento  $\hat{m}$  es:

$$\cos \beta = -\text{sen}(t_n) \quad (2-111)$$

Por lo tanto las expresiones que permiten calcular las impedancias mutuas son, para la contribución de corriente:

$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = -\frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \times \int_{t_n}^{t_{n+}} \frac{\exp\left(-jk \sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \cos(t_n) - x_{\lambda 0}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \sin(t_n) - y_{\lambda 0}\right)^2 + \left(z_{\lambda n} - z_{\lambda 0}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \cos(t_n) - x_{\lambda 0}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \sin(t_n) - y_{\lambda 0}\right)^2 + \left(z_{\lambda n} - z_{\lambda 0}\right)^2}} dt_n \quad (2-112)$$

y para la contribución de cargas:

$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = -\frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \int_{t_n}^{t_{n+}} \frac{\exp\left(-jk \sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \cos(t_n) - x_{\lambda 0}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \sin(t_n) - y_{\lambda 0}\right)^2 + \left(z_{\lambda n} - z_{\lambda 0}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \cos(t_n) - x_{\lambda 0}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \sin(t_n) - y_{\lambda 0}\right)^2 + \left(z_{\lambda n} - z_{\lambda 0}\right)^2}} dt_n \quad (2-113)$$

#### 2.4.1.9 Sección circular y sección vertical

Nuevamente se tienen dos posibles combinaciones, la primera es cuando el segmento  $n$  tiene una geometría vertical y el segmento  $\hat{m}$  una geometría circular (Fig. 2.30)

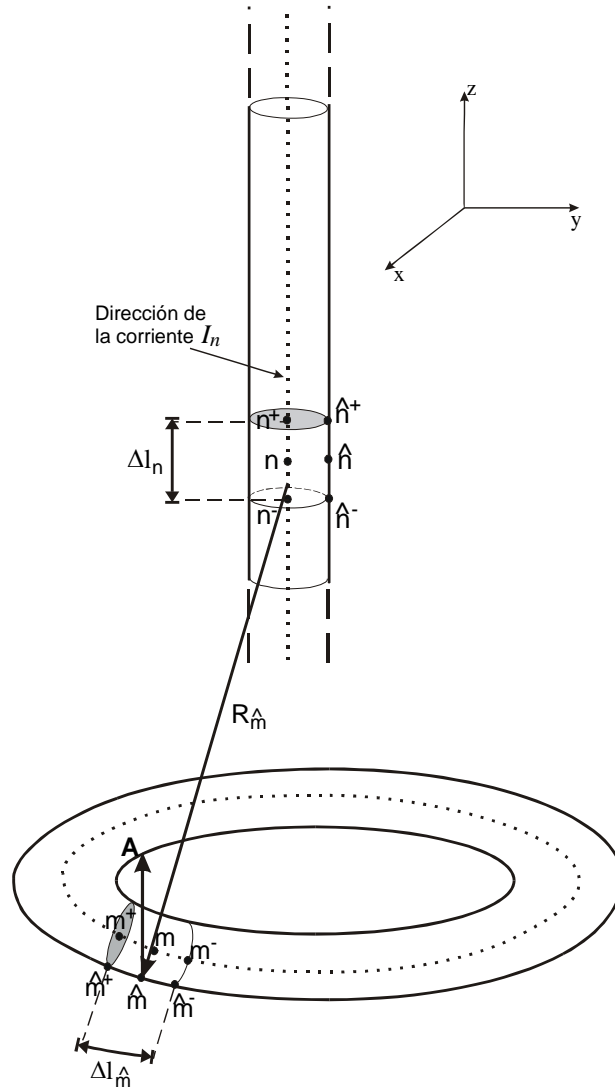


Figura 2.30. Modelo de una sección vertical y una sección circular.

La distancia  $R_{\hat{m}}$  está dada por la ecuación:

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\left( r_{\lambda \hat{m}} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda 0} - x_{\lambda n} \right)^2 + \left( r_{\lambda \hat{m}} \text{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda 0} - y_{\lambda n} \right)^2 + (z_{\lambda 0} - z_{\lambda n})^2} \quad (2-114)$$

y el  $\cos \beta$  es:

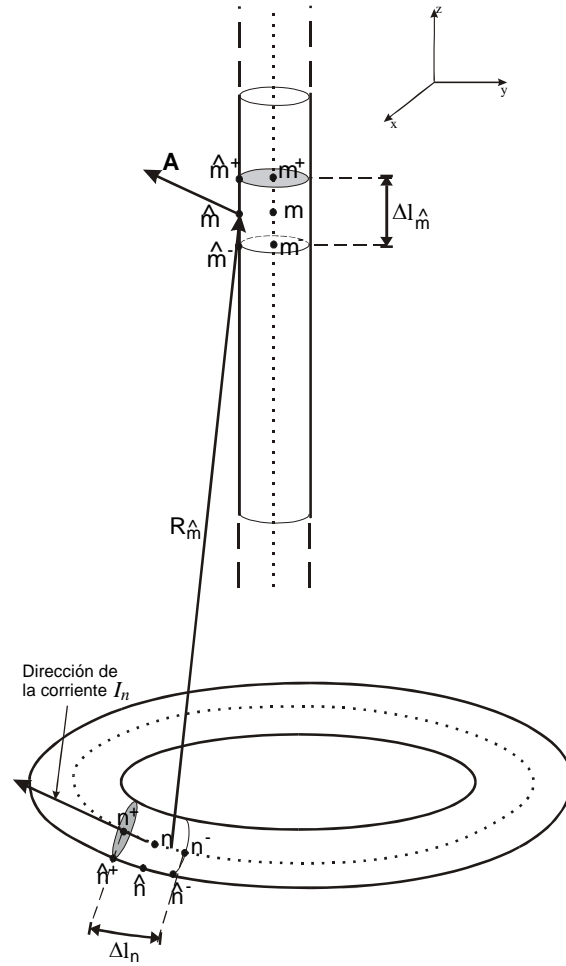
$$\cos \beta = 0 \quad (2-115)$$

Esto nos demuestra que el vector  $\mathbf{A}$  y la tangente al segmento  $\hat{m}$  están en ortogonalidad, es decir, en este caso no existe contribución de corrientes en los efectos de las impedancias mutuas.

La ecuación que permite conocer la contribución de cargas es:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{\Delta l_n} \times \int_{z_{\lambda n-}}^{z_{\lambda n+}} \frac{\exp\left(-jk \sqrt{\left(r_{\lambda \hat{m}} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda 0} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(r_{\lambda \hat{m}} \operatorname{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda 0} - y_{\lambda n}\right)^2 + (z_{\lambda 0} - z_{\lambda n})^2}\right)}{\sqrt{\left(r_{\lambda \hat{m}} \cos(t_{\hat{m}}) + x_{\lambda 0} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(r_{\lambda \hat{m}} \operatorname{sen}(t_{\hat{m}}) + y_{\lambda 0} - y_{\lambda n}\right)^2 + (z_{\lambda 0} - z_{\lambda n})^2}} dz_{\lambda n} \quad (2-116)$$

La segunda combinación es cuando el segmento  $n$  posee geometría circular y el segmento  $\hat{m}$  con geometría lineal vertical. En la figura 2.31 se observa claramente la perpendicularidad de estas dos sección por lo que únicamente es necesario determinar la ecuación para la contribución de cargas. Esta deducción tiene un desarrollo muy similar al presentado en el apartado 2.4.1.8.



**Figura 2.31.** Modelado de una sección circular y una sección vertical.

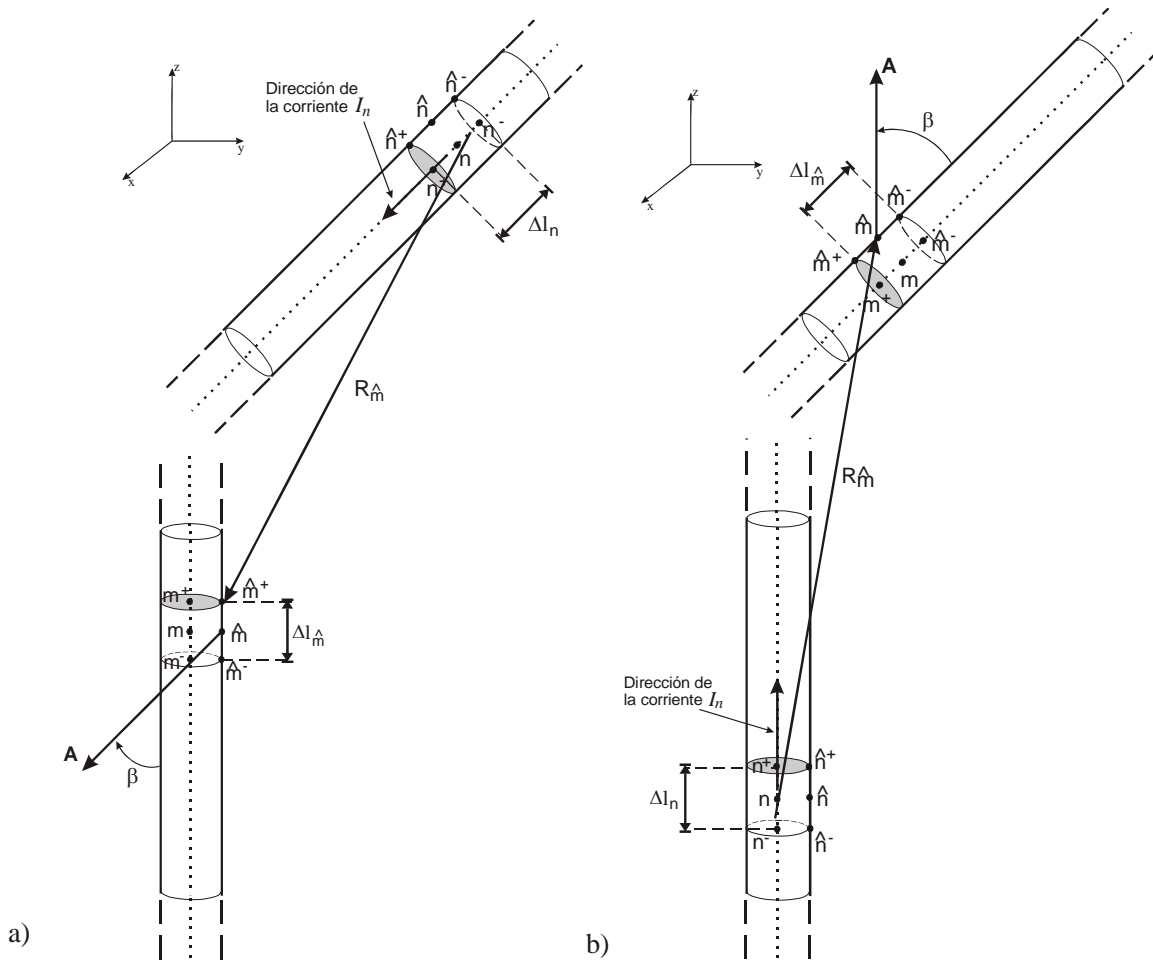
La ecuación que permite calcular la contribución de cargas para esta segunda combinación es:

$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = -\frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \times \int_{t_n}^{t_{n+}} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \cos(t_n) - x_{\lambda 0}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \text{sen}(t_n) - y_{\lambda 0}\right)^2 + \left(z_{\lambda n} - z_{\lambda 0}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \cos(t_n) - x_{\lambda 0}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - r_{\lambda n} \text{sen}(t_n) - y_{\lambda 0}\right)^2 + \left(z_{\lambda n} - z_{\lambda 0}\right)^2}} dt_n \quad (2-117)$$



### 2.4.1.10 Sección horizontal y sección vertical

Es claro que ambas secciones se encuentran en ortogonalidad, por lo que no habrá contribución de corriente. La geometría que presentan estas dos secciones se muestran en la figura 2.32.



**Figura 2.32.** Modelado de una sección horizontal y una sección vertical. a) Tomando como segmento  $n$  la sección horizontal. b) Tomando como segmento  $n$  la sección vertical.

Si se considera que el segmento  $n$  tiene una geometría lineal horizontal y el segmento  $\hat{m}$  una geometría lineal vertical, la ecuación integral que permite calcular las contribución de cargas es:

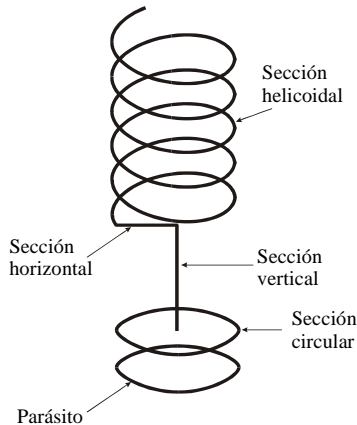
$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{x_{\lambda n-}}^{x_{\lambda n+}} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda n}\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda n}\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2}} dx_{\lambda n} \quad (2-118)$$

Pero, si se considera que el segmento  $n$  tiene una geometría lineal vertical y el segmento  $\hat{m}$  una geometría lineal horizontal, la ecuación integral que permite calcular las contribución de cargas es:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{z_{\lambda n-}}^{z_{\lambda n+}} \frac{\exp\left(-jk\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2}} dz_{\lambda n} \quad (2-119)$$

Como se puede observar, no es posible obtener una forma cerrada de la ecuación (2-14) así como de las particularizaciones hechas para cada una de las geometrías y las combinaciones entre ellas. Es por ello que para resolver la integrales que se presentan se empleará un método numérico llamado “Regla compuesta de Simpson” (Apéndice B).

Si el análisis de la antena incluye aros parásitos, se puede considerar que cada parásito tiene una geometría circular y emplear los resultados obtenidos anteriormente para la sección circular.



**Figura 2.33.** Antena helicoidal con aros parásitos

### 2.4.2 Matriz de impedancias y distribución de corrientes

Para poder conformar la matriz de impedancias es necesario agrupar todas las impedancias mutuas y propias obtenidas de las diferentes geometrías. Una forma para realizar la matriz de impedancias completa es la siguiente:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{circular\_circular} & Z_{circular\_horizontal} & Z_{circular\_vertical} & Z_{circular\_helical} \\ Z_{horizontal\_circular} & Z_{horizontal\_horizontal} & Z_{horizontal\_vertical} & Z_{horizontal\_helical} \\ Z_{vertical\_circular} & Z_{vertical\_horizontal} & Z_{vertical\_vertical} & Z_{vertical\_helical} \\ Z_{helical\_circular} & Z_{helical\_horizontal} & Z_{helical\_vertical} & Z_{helical\_helical} \end{bmatrix} \quad (2-120)$$

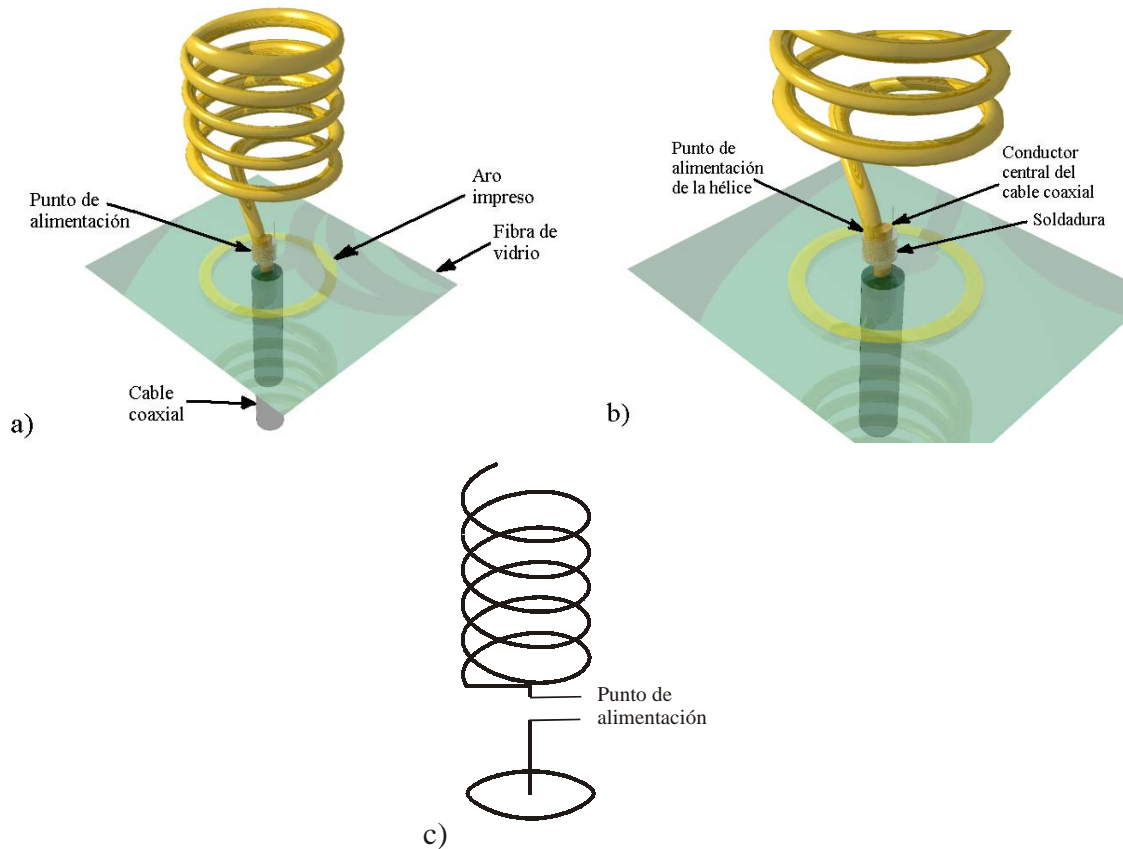
donde los subíndices indican las geometrías que se están analizando.

En el caso que se tengan aros parásitos, la matriz de impedancias puede ser formada como:

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{parásitos\_parásitos} & Z_{parásitos\_circular} & Z_{parásitos\_horizontal} & Z_{parásitos\_vertical} & Z_{parásitos\_helical} \\ Z_{circular\_parásitos} & Z_{circular\_circular} & Z_{circular\_horizontal} & Z_{circular\_vertical} & Z_{circular\_helical} \\ Z_{horizontal\_parásitos} & Z_{horizontal\_circular} & Z_{horizontal\_horizontal} & Z_{horizontal\_vertical} & Z_{horizontal\_helical} \\ Z_{vertical\_parásitos} & Z_{vertical\_circular} & Z_{vertical\_horizontal} & Z_{vertical\_vertical} & Z_{vertical\_helical} \\ Z_{helical\_parásitos} & Z_{helical\_circular} & Z_{helical\_horizontal} & Z_{helical\_vertical} & Z_{helical\_helical} \end{bmatrix} \quad (2-121)$$

En ambos casos, si la matriz de impedancias es correcta, será simétrica.

Para determinar el punto de alimentación fue necesario analizar la configuración de la antena hecha en el laboratorio. Dicha configuración se muestra en la figura 2.34a.



**Figura 2.34.** a) Configuración realizada en el laboratorio. b) Punto de alimentación (acercamiento). c) Punto de alimentación de la simulación.

Como se puede observar en la figura anterior, el punto de contacto entre el conductor interno del cable coaxial y la antena se ubica en el extremo inferior de la sección helicoidal (Fig. 2.34b) por lo que, para nuestro análisis, se considera que el punto de alimentación se encuentra en el extremo superior del segmento lineal vertical (Fig. 2.34c). El negativo o conductor externo del cable coaxial, que generalmente es conectado al plano de tierra, en este no lo es. Físicamente, el aro fue elaborado por medio de una línea cinta. Estos tipos de líneas de transmisión poseen dos placas, una que se alimenta y otra que sirve como plano de tierra. En este caso se requiere que el aro únicamente refleje la radiación producida por la hélice por lo que se removió una de las placas y en la restante se imprimió el aro, alimentándose por la corriente inducida debida a la hélice.

Tomando en cuenta estas consideraciones, es posible conocer la distribución de corrientes de la antena y por lo tanto el patrón de radiación. Para conocer la distribución de corrientes se aplica la expresión (2-8), teniéndose la magnitud y fase de dicha distribución, pero para obtener los campos radiados es necesario

conocer también la dirección de la corriente en cada una de las geometrías. Matemáticamente, las direcciones de las corrientes son:

Para la hélice:

$$\mathbf{I}_{hel} = I_{hel} \frac{1}{\sqrt{C_\lambda^2 + S_\lambda^2}} \left[ -C_\lambda \text{sen}(t_n) \mathbf{a}_x + C_\lambda \cos(t_n) \mathbf{a}_y + S_\lambda \mathbf{a}_z \right] \quad (2-122)$$

Para el elemento vertical:

$$\mathbf{I}_{vert} = I_{vert} \mathbf{a}_z \quad (2-123)$$

Para el elemento horizontal:

$$\mathbf{I}_{hor} = I_{hor} \mathbf{a}_x \quad (2-124)$$

Para el aro:

$$\mathbf{I}_{aro} = I_{aro} \left[ -\text{sen}(t_n) \mathbf{a}_x + \cos(t_n) \mathbf{a}_y \right] \quad (2-125)$$

donde  $\mathbf{I}_{hel}$ ,  $\mathbf{I}_{vert}$ ,  $\mathbf{I}_{hor}$  e  $\mathbf{I}_{aro}$  son las direcciones de la distribución de corrientes en las geometrías helicoidal, vertical, horizontal y circular, respectivamente.

### 2.4.3 Patrones de radiación

Conociendo las direcciones de la corrientes es posible obtener los patrones de radiación por medio del método de momentos (Apéndice C). Particularizando las ecuaciones (C-25), (C-26) y (C-27) se tiene que los campos radiados por cada una de las geometrías son:

Para la hélice:

$$E_{\theta} = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ -\cos\theta \cos\phi I_{hel} \frac{C_{\lambda}}{\sqrt{C_{\lambda}^2 + S_{\lambda}^2}} \text{sen}(t_n)(x_n^+ - x_n^-) + \right. \\ \left. \cos\theta \text{sen}\phi I_{hel} \frac{C_{\lambda}}{\sqrt{C_{\lambda}^2 + S_{\lambda}^2}} \cos(t_n)(y_n^+ - y_n^-) - \text{sen}\theta I_{hel} \frac{S_{\lambda}}{\sqrt{C_{\lambda}^2 + S_{\lambda}^2}} (z_n^+ - z_n^-) \right] \times \quad (2-126) \\ e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z_n \cos\theta)}$$

$$E_{\phi} = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ \text{sen}\phi I_{hel} \frac{C_{\lambda}}{\sqrt{C_{\lambda}^2 + S_{\lambda}^2}} \text{sen}(t_n)(x_n^+ - x_n^-) + \cos\phi I_{hel} \frac{C_{\lambda}}{\sqrt{C_{\lambda}^2 + S_{\lambda}^2}} \cos(t_n)(y_n^+ - y_n^-) \right] \times \quad (2-127) \\ e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z_n \cos\theta)}$$

Para el elemento vertical:

$$E_{\theta} = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ -\text{sen}\theta I_{vert} (z_n^+ - z_n^-) \right] e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z_n \cos\theta)} \quad (2-128)$$

$$E_{\phi} = 0 \quad (2-129)$$

Para el elemento horizontal:

$$E_{\theta} = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ \cos\theta \cos\phi I_{hor} (x_n^+ - x_n^-) \right] \times e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z_n \cos\theta)} \quad (2-130)$$

$$E_{\phi} = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ -\text{sen}\phi I_{hor} (x_n^+ - x_n^-) \right] \times e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z_n \cos\theta)} \quad (2-131)$$

Para el aro:

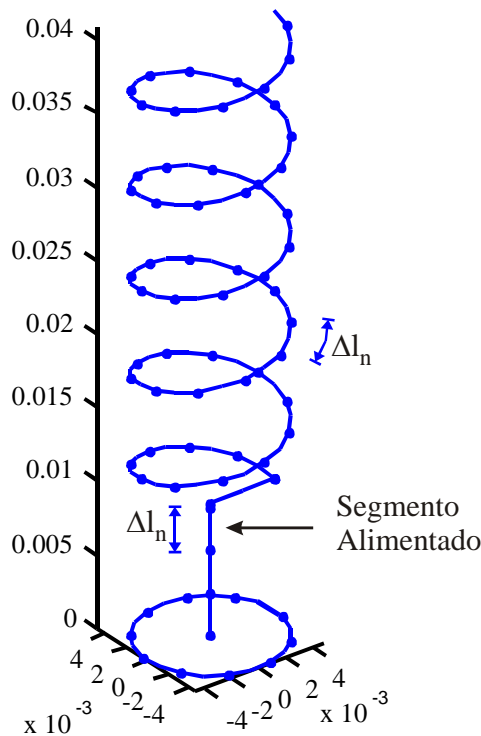
$$E_{\theta} = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ -\cos\theta \cos\phi I_{aro} \text{sen}(t_n)(x_n^+ - x_n^-) + \cos\theta \text{sen}\phi I_{aro} \cos(t_n)(y_n^+ - y_n^-) \right] \times \quad (2-132) \\ e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z_n \cos\theta)}$$

$$E_{\phi} = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ \text{sen}\phi I_{aro} \text{sen}(t_n)(x_n^+ - x_n^-) + \cos\phi I_{aro} \cos(t_n)(y_n^+ - y_n^-) \right] \times \quad (2-133) \\ e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z_n \cos\theta)}$$

## 2.5 Cálculos y presentación de resultados

Por medio de las ecuaciones presentadas en la sección 2.4, se realizaron estudios al variar algunos parámetros de la antena helicoidal y del aro parásito. Dentro de los estudios hechos se encuentran la variación de la altura del elemento vertical, variación de la circunferencia de la hélice, variación en el número de vueltas, entre otros. Asimismo, se realiza una comparación entre los resultados obtenidos por medio de la simulación y los resultados presentados en el capítulo 1.

La simulación de la antena se realizó por medio del programa MATLAB. En dicho programa se segmenta la antena en dipolos con una longitud igual o menor que  $0.1\lambda$ . En las geometrías rectas se consideran dipolos rectos y en las geometrías curvas (hélice y aro) dipolos curvos.



**Figura 2.35.** Gráfica de la simulación en MATLAB.

La figura 2.36 muestra las direcciones de las corrientes en la hélice. En dicha figura se presentan la componentes en coordenadas cartesianas y en coordenadas cilíndricas. Los resultados obtenidos de las corrientes sobre la hélice se presentan en la tabla 2.3.

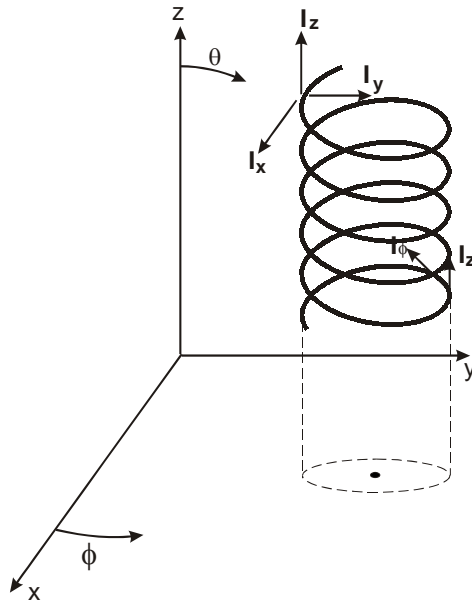


Figura 2.36. Hélice en coordenada cartesianas y cilíndricas.

Segmento	I	I	∠ I	Ix	Iy	I <sub>φ</sub>	Iz	Iz
1	0.0031 + 0.0049i	0.0058	1.0024	-0.0008 - 0.0013i	0.0029 + 0.0045i	0.0056	0.0008 + 0.0012i	0.0014
2	0.0040 + 0.0007i	0.004	0.1684	-0.0029 - 0.0005i	0.0026 + 0.0004i	0.0039	0.0010 + 0.0002i	0.001
3	0.0033 - 0.0018i	0.0037	-0.5096	-0.0031 + 0.0017i	0.0005 - 0.0003i	0.0036	0.0008 - 0.0004i	0.0009
4	0.0015 - 0.0032i	0.0036	-1.1209	-0.0014 + 0.0029i	-0.0006 + 0.0012i	0.0035	0.0004 - 0.0008i	0.0009
5	-0.0003 - 0.0032i	0.0032	-1.6739	0.0002 + 0.0018i	0.0003 + 0.0025i	0.0031	-0.0001 - 0.0008i	0.0008
6	-0.0017 - 0.0021i	0.0027	-2.2381	0.0001 + 0.0001i	0.0016 + 0.0020i	0.0026	-0.0004 - 0.0005i	0.0007
7	-0.0021 - 0.0005i	0.0022	-2.8922	-0.0010 - 0.0003i	0.0018 + 0.0005i	0.0021	-0.0005 - 0.0001i	0.0005
8	-0.0017 + 0.0009i	0.0019	2.6852	-0.0015 + 0.0007i	0.0008 - 0.0004i	0.0019	-0.0004 + 0.0002i	0.0005
9	-0.0009 + 0.0016i	0.0019	2.0966	-0.0009 + 0.0016i	-0.0000 + 0.0001i	0.0018	-0.0002 + 0.0004i	0.0004
10	-0.0001 + 0.0016i	0.0016	1.6564	-0.0001 + 0.0012i	-0.0001 + 0.0009i	0.0015	-0.0000 + 0.0004i	0.0004
11	0.0003 + 0.0010i	0.001	1.2907	0.0001 + 0.0004i	0.0003 + 0.0009i	0.001	0.0001 + 0.0002i	0.0003
12	0.0003 + 0.0004i	0.0005	0.9715	-0.0000 - 0.0001i	0.0003 + 0.0004i	0.0005	0.0001 + 0.0001i	0.0001
13	0.0001 + 0.0001i	0.0002	0.9559	-0.0001 - 0.0001i	0.0001 + 0.0001i	0.0002	0.0000 + 0.0000i	0
14	-0.0000 + 0.0001i	0.0001	1.948	0.0000 - 0.0001i	-0.0000 + 0.0000i	0.0001	-0.0000 + 0.0000i	0
15	0.0001 + 0.0002i	0.0002	1.1454	-0.0001 - 0.0001i	-0.0000 - 0.0000i	0.0002	0.0000 + 0.0000i	0
16	0.0004 + 0.0001i	0.0004	0.3695	-0.0002 - 0.0001i	-0.0003 - 0.0001i	0.0004	0.0001 + 0.0000i	0.0001
17	0.0006 - 0.0000i	0.0006	-0.0561	-0.0001 + 0.0000i	-0.0006 + 0.0000i	0.0006	0.0002 - 0.0000i	0.0002
18	0.0007 - 0.0003i	0.0007	-0.4626	0.0002 - 0.0001i	-0.0006 + 0.0003i	0.0007	0.0002 - 0.0001i	0.0002
19	0.0003 - 0.0006i	0.0007	-1.0491	0.0003 - 0.0005i	-0.0002 + 0.0003i	0.0007	0.0001 - 0.0001i	0.0002
20	-0.0002 - 0.0007i	0.0007	-1.8783	-0.0002 - 0.0007i	0.0000 + 0.0000i	0.0007	-0.0001 - 0.0002i	0.0002
21	-0.0008 - 0.0005i	0.0009	-2.5858	-0.0006 - 0.0004i	-0.0003 - 0.0002i	0.0009	-0.0002 - 0.0001i	0.0002
22	-0.0010 - 0.0000i	0.001	-3.1309	-0.0005 - 0.0000i	-0.0009 - 0.0000i	0.001	-0.0002 - 0.0000i	0.0002
23	-0.0008 + 0.0005i	0.001	2.5678	0.0000 - 0.0000i	-0.0008 + 0.0005i	0.001	-0.0002 + 0.0001i	0.0002
24	-0.0002 + 0.0009i	0.001	1.8324	0.0001 - 0.0005i	-0.0002 + 0.0007i	0.0009	-0.0001 + 0.0002i	0.0002
25	0.0005 + 0.0009i	0.0011	1.0844	-0.0004 - 0.0008i	0.0002 + 0.0004i	0.001	0.0001 + 0.0002i	0.0003

(la tabla continúa en la página siguiente)



Segmento	<b>I</b>	<b> I </b>	<b>∠ I</b>	<b>I<sub>x</sub></b>	<b>I<sub>y</sub></b>	<b> I<sub>φ</sub> </b>	<b>I<sub>z</sub></b>	<b> I<sub>z</sub> </b>
26	0.0010 + 0.0005i	0.0012	0.4741	-0.0010 - 0.0005i	-0.0002 - 0.0001i	0.0011	0.0003 + 0.0001i	0.0003
27	0.0011 - 0.0001i	0.0011	-0.082	-0.0008 + 0.0001i	-0.0007 + 0.0001i	0.0011	0.0003 - 0.0000i	0.0003
28	0.0007 - 0.0006i	0.001	-0.7367	-0.0002 + 0.0002i	-0.0007 + 0.0006i	0.0009	0.0002 - 0.0002i	0.0002
29	0.0000 - 0.0009i	0.0009	-1.5699	0.0000 - 0.0002i	-0.0000 + 0.0008i	0.0008	0.0000 - 0.0002i	0.0002
30	-0.0007 - 0.0007i	0.001	-2.344	-0.0005 - 0.0005i	0.0004 + 0.0005i	0.0009	-0.0002 - 0.0002i	0.0002
31	-0.0010 - 0.0002i	0.001	-2.9395	-0.0009 - 0.0002i	0.0002 + 0.0000i	0.001	-0.0002 - 0.0000i	0.0002
32	-0.0008 + 0.0003i	0.0009	2.763	-0.0007 + 0.0003i	-0.0003 + 0.0001i	0.0009	-0.0002 + 0.0001i	0.0002
33	-0.0003 + 0.0007i	0.0007	1.9855	-0.0002 + 0.0004i	-0.0002 + 0.0005i	0.0007	-0.0001 + 0.0002i	0.0002
34	0.0003 + 0.0006i	0.0007	1.0651	0.0000 + 0.0000i	0.0003 + 0.0006i	0.0007	0.0001 + 0.0002i	0.0002
35	0.0008 + 0.0003i	0.0008	0.3587	-0.0003 - 0.0001i	0.0007 + 0.0002i	0.0008	0.0002 + 0.0001i	0.0002
36	0.0008 - 0.0002i	0.0008	-0.228	-0.0007 + 0.0002i	0.0004 - 0.0001i	0.0008	0.0002 - 0.0000i	0.0002
37	0.0004 - 0.0005i	0.0007	-0.9086	-0.0004 + 0.0005i	-0.0000 + 0.0000i	0.0007	0.0001 - 0.0001i	0.0002
38	-0.0001 - 0.0006i	0.0006	-1.761	0.0001 + 0.0005i	0.0001 + 0.0003i	0.0006	-0.0000 - 0.0001i	0.0001
39	-0.0005 - 0.0003i	0.0006	-2.5864	0.0002 + 0.0001i	0.0005 + 0.0003i	0.0006	-0.0001 - 0.0001i	0.0001
40	-0.0006 + 0.0001i	0.0006	2.9312	-0.0001 + 0.0000i	0.0006 - 0.0001i	0.0006	-0.0001 + 0.0000i	0.0001
41	-0.0003 + 0.0005i	0.0006	2.1496	-0.0002 + 0.0003i	0.0002 - 0.0004i	0.0006	-0.0001 + 0.0001i	0.0001
42	0.0001 + 0.0006i	0.0006	1.4725	0.0001 + 0.0006i	-0.0000 - 0.0002i	0.0006	0.0000 + 0.0002i	0.0002
43	0.0003 + 0.0004i	0.0006	0.9136	0.0003 + 0.0004i	0.0001 + 0.0001i	0.0005	0.0001 + 0.0001i	0.0001
44	0.0003 + 0.0000i	0.0003	0.0869	0.0002 + 0.0000i	0.0002 + 0.0000i	0.0003	0.0001 + 0.0000i	0.0001
45	0.0000 - 0.0004i	0.0004	-1.5623	0.0000 - 0.0001i	0.0000 - 0.0004i	0.0004	0.0000 - 0.0001i	0.0001
46	-0.0004 - 0.0006i	0.0007	-2.1666	0.0001 + 0.0002i	-0.0004 - 0.0005i	0.0007	-0.0001 - 0.0001i	0.0002
47	-0.0006 - 0.0005i	0.0008	-2.4689	0.0005 + 0.0004i	-0.0004 - 0.0003i	0.0008	-0.0002 - 0.0001i	0.0002
48	-0.0005 - 0.0002i	0.0005	-2.7739	0.0005 + 0.0002i	-0.0000 - 0.0000i	0.0005	-0.0001 - 0.0000i	0.0001
49	0.0000 + 0.0002i	0.0002	1.3138	-0.0000 - 0.0001i	-0.0000 - 0.0001i	0.0002	0.0000 + 0.0000i	0
50	0.0007 + 0.0004i	0.0008	0.5012	-0.0003 - 0.0002i	-0.0006 - 0.0003i	0.0007	0.0002 + 0.0001i	0.0002
51	0.0010 + 0.0003i	0.0011	0.3238	0.0000 + 0.0000i	-0.0010 - 0.0003i	0.0011	0.0003 + 0.0001i	0.0003
52	0.0009 + 0.0002i	0.0009	0.2014	0.0005 + 0.0001i	-0.0007 - 0.0001i	0.0009	0.0002 + 0.0000i	0.0002

**Tabla 2.3.** Componentes de la corriente sobre la hélice.

Para la obtención de los valores presentados anteriormente, se simuló una antena helicoidal de cinco vueltas con  $C_\lambda = 1$ ,  $\alpha = 12^\circ$  y un diámetro de su conductor de  $0.03\lambda$ . Esta fue dividida en 52 segmentos, cada uno con una longitud de  $0.1\lambda$ . Como se puede observar en la tabla anterior, la contribución de la corriente en la dirección  $\mathbf{a}_z$  es muy pequeña en comparación con la contribución en la dirección  $\mathbf{a}_\phi$ , comprobándose el comportamiento de una vuelta como el de un aro cuadrado (Kraus, 2002).

Las figuras 2.37 y 2.38 muestran, respectivamente, la distribución de corriente y la impedancia de entrada para una hélice considerada como aislada. Para poder simularla por medio del Método de Momentos se supuso su alimentación en el primer segmento de la antena. Físicamente, esto puede ser visto como que el

punto alimentación se ubica ligeramente arriba del extremo de la antena, de tal forma que se pueda conectar ambos polos de la línea de transmisión.

Al comparar el resultado de la figura 2.37 con el obtenido por el doctor Nakano (Fig. 2.10) se observa que las distribuciones de corriente son muy similares, es decir se esperaría el patrón de radiación mostrado en la misma figura.

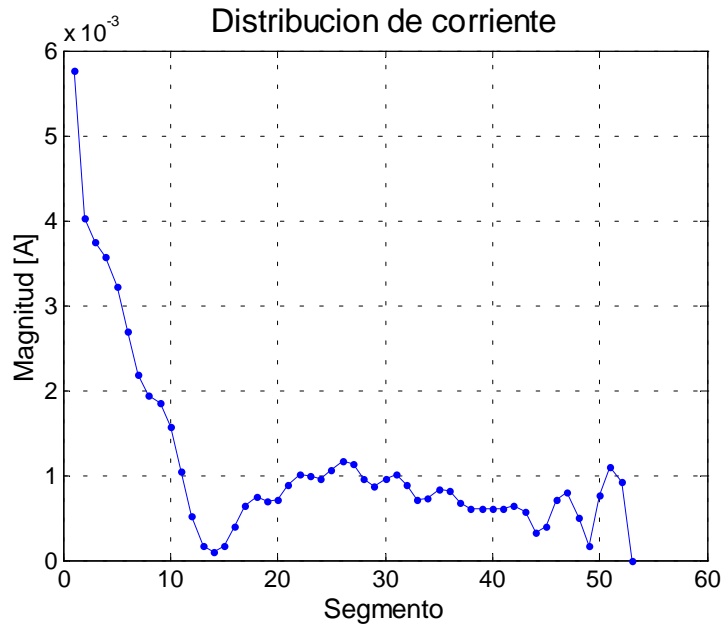


Figura 2.37. Distribución de corriente para una hélice aislada.

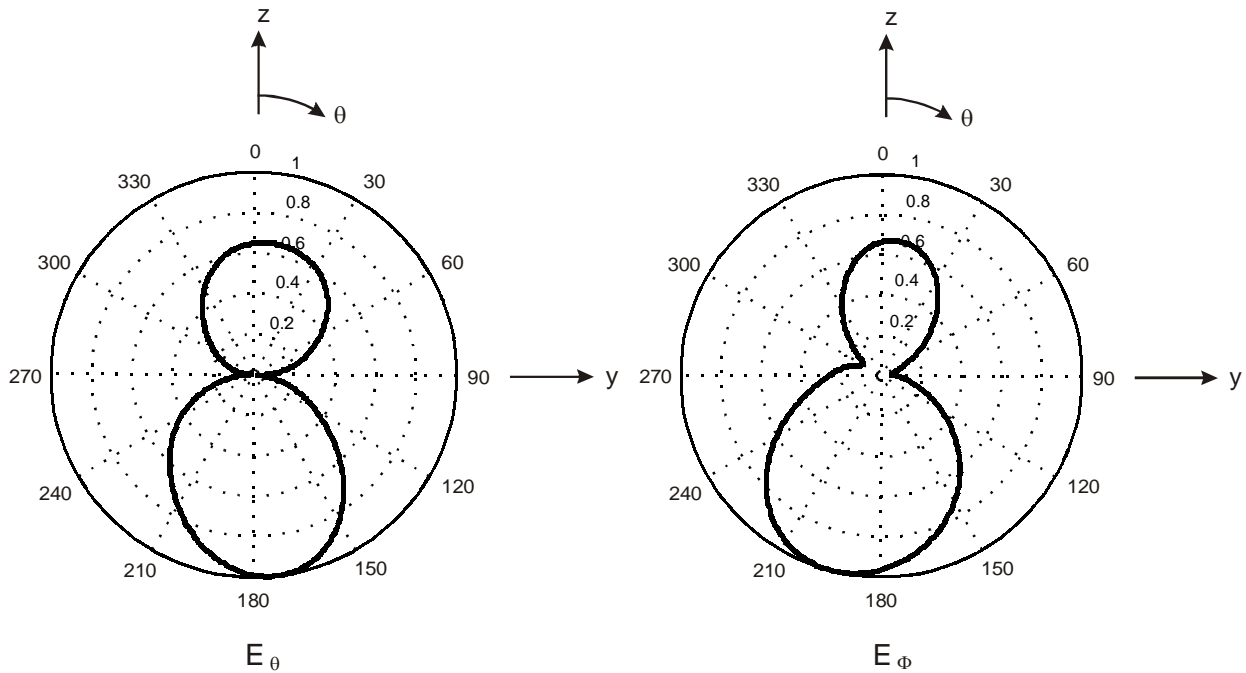
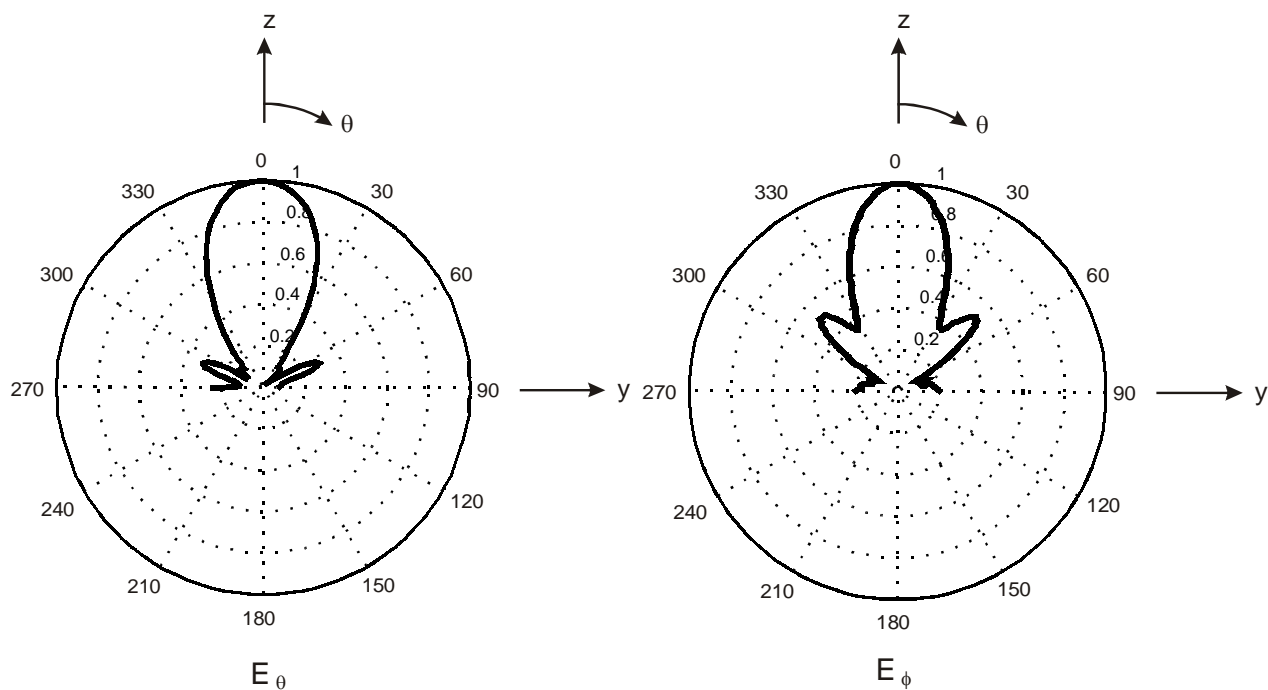


Figura 2.38a. Patrón de radiación de una hélice aislada sin plano de tierra.



**Figura 2.38b.** Patrón de radiación de una hélice aislada con plano de tierra (considerando el método de imágenes).

En las figuras 2.38 son presentados los patrones de radiación de una hélice cuando se considera sin plano de tierra y cuando se coloca un plano de tierra infinito. Se observa en 2.38a que cuando carece de un plano de tierra la radiación es preferentemente bakfire, y cuando se coloca un plano de tierra se observa una radiación endfire; cabe señalar que dado que se empleó el método de imágenes es necesario considerar las limitaciones de este método (sección 2.3.1).

### 2.5.1 Variación en la altura del elemento vertical

En esta sección se realiza un estudio del efecto que presenta la longitud del elemento vertical ( $h$ ) sobre la antena de la Fig. 2.34c. Las variaciones de la altura se encuentran en el rango de 0 a  $0.5\lambda$ . A continuación se presentan los resultados (impedancia de entrada, distribución de corriente y patrón de radiación) obtenidos de la simulación. Para la simulación de  $h = 0$ , se alimenta en el segmento horizontal que sería el contacto con el cable coaxial (Fig. 2.42b).

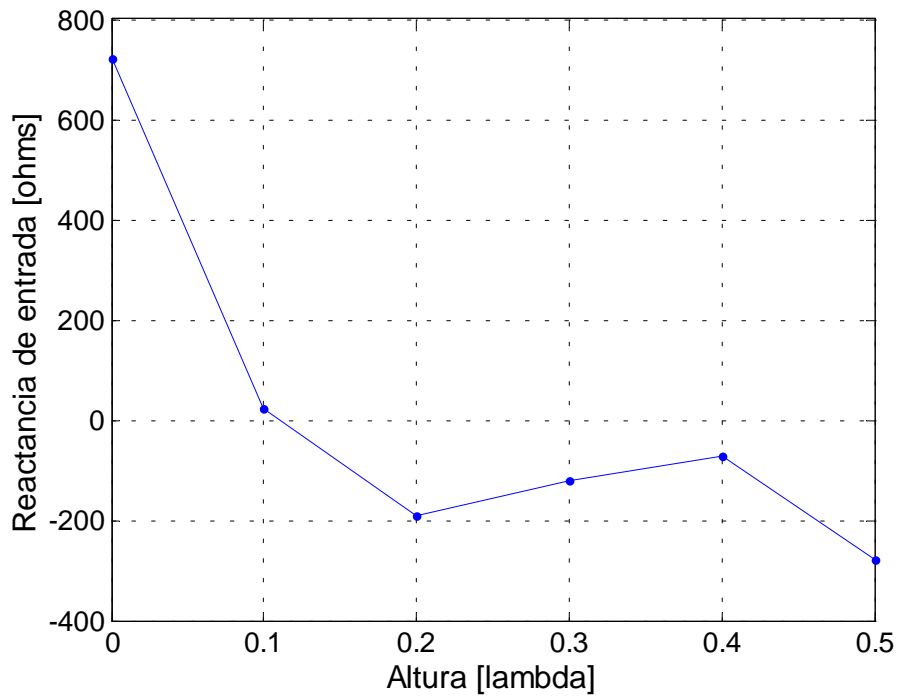
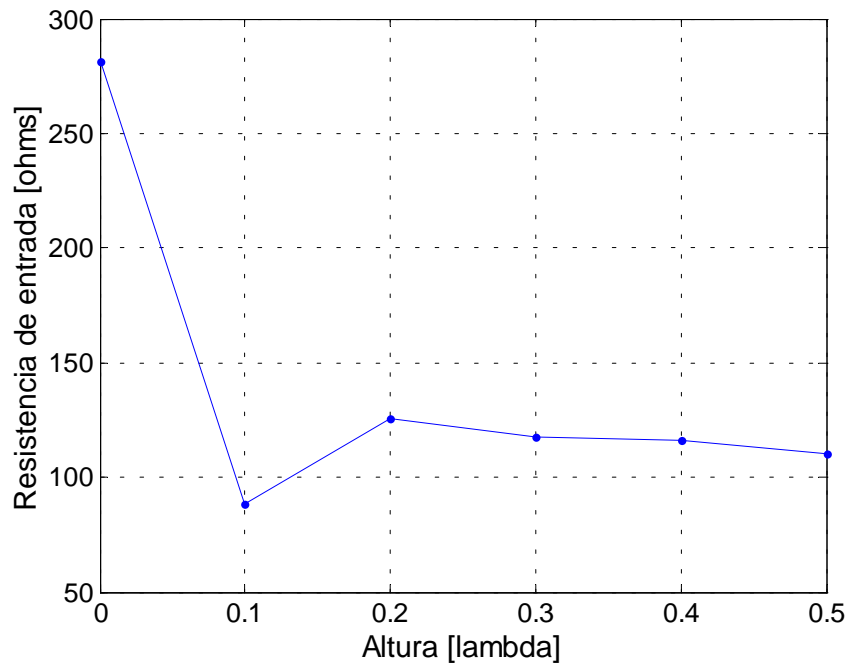


Figura 2.39. Impedancia de entrada.

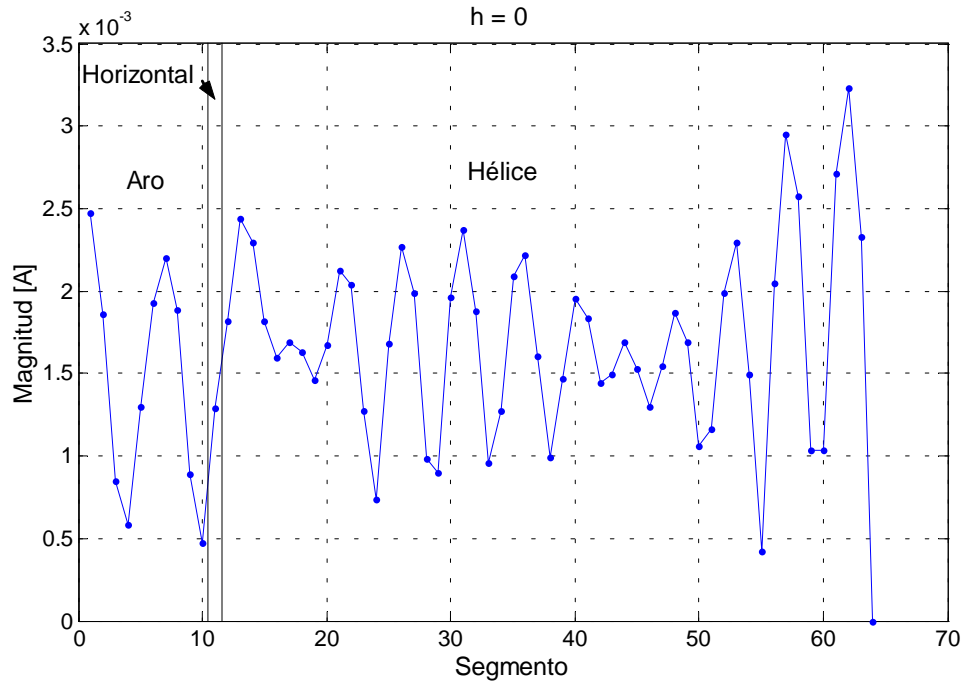


Figura 2.40a. Distribución de corriente para  $h = 0$ .

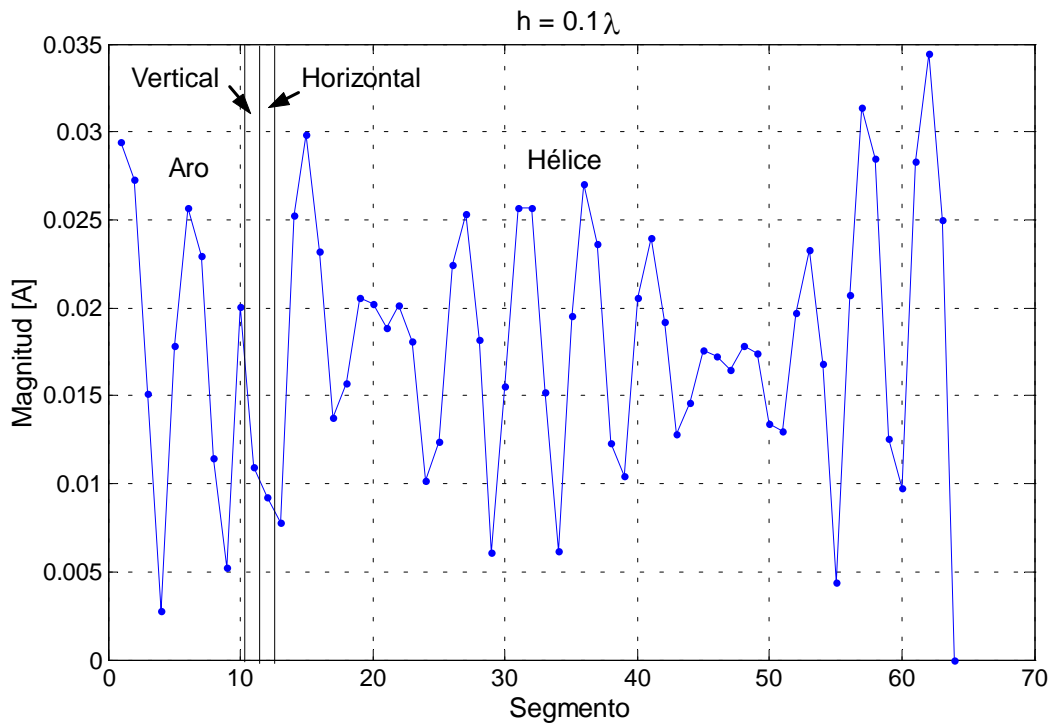


Figura 2.40b. Distribución de corriente para  $h = 0.1\lambda$ .

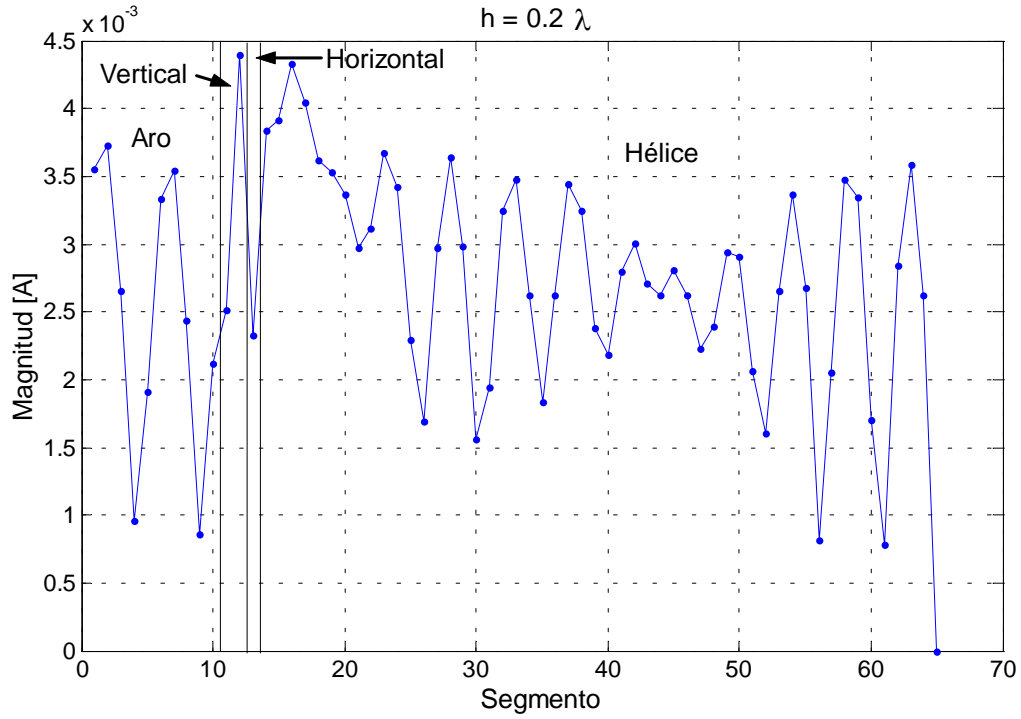


Figura 2.40c. Distribución de corriente para  $h = 0.2\lambda$ .

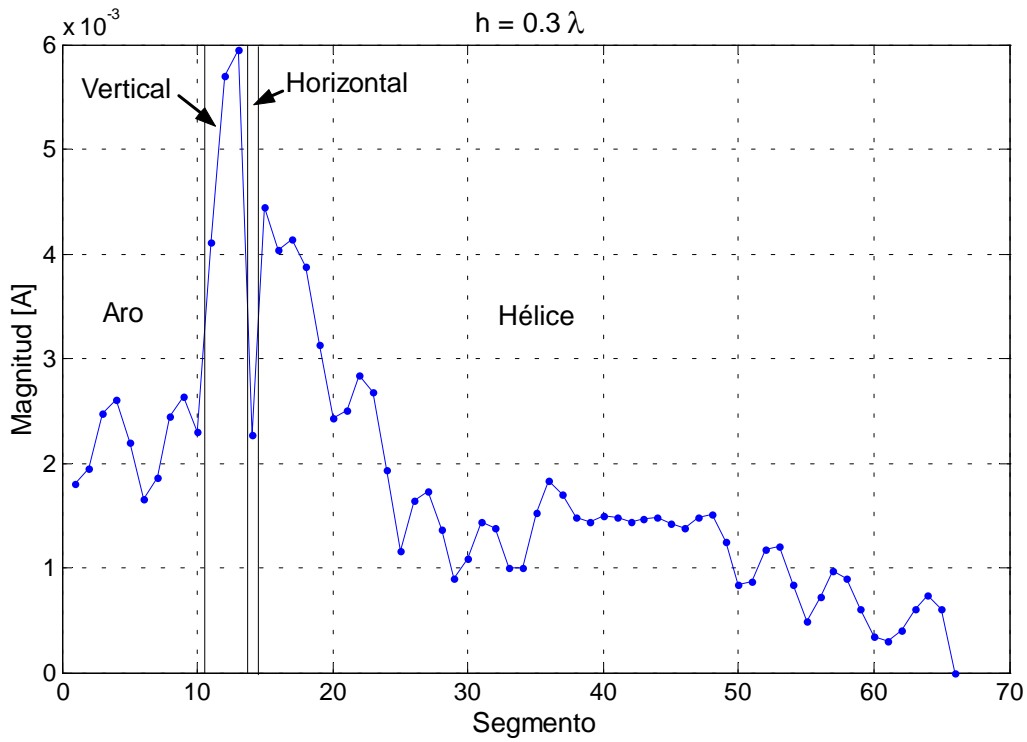


Figura 2.40d. Distribución de corriente  $h = 0.3\lambda$ .

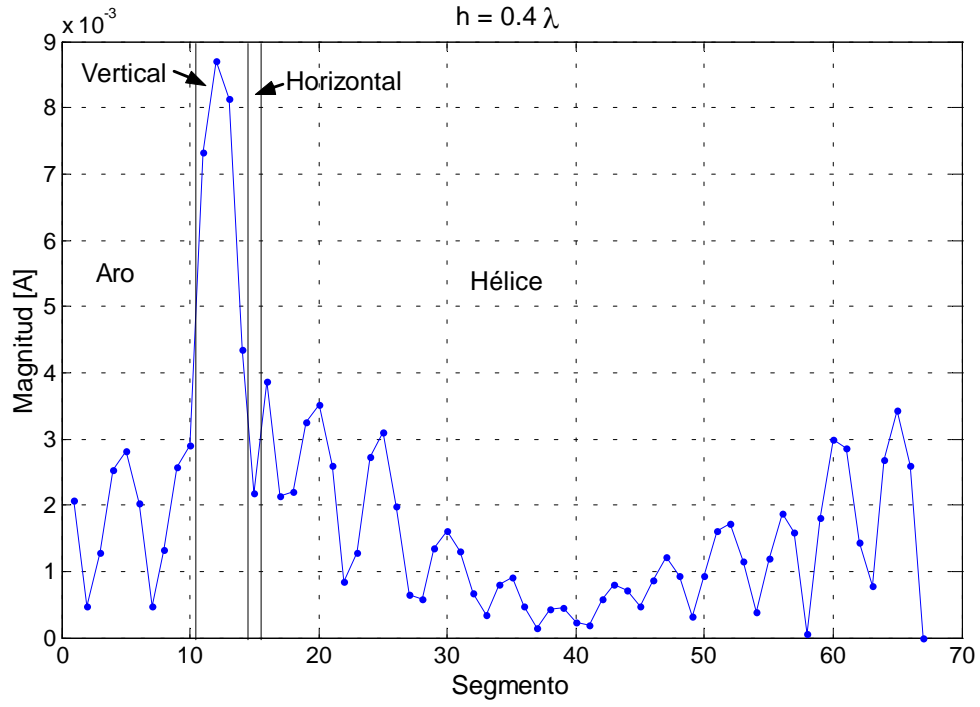


Figura 2.40e. Distribución de corriente para  $h = 0.4\lambda$ .

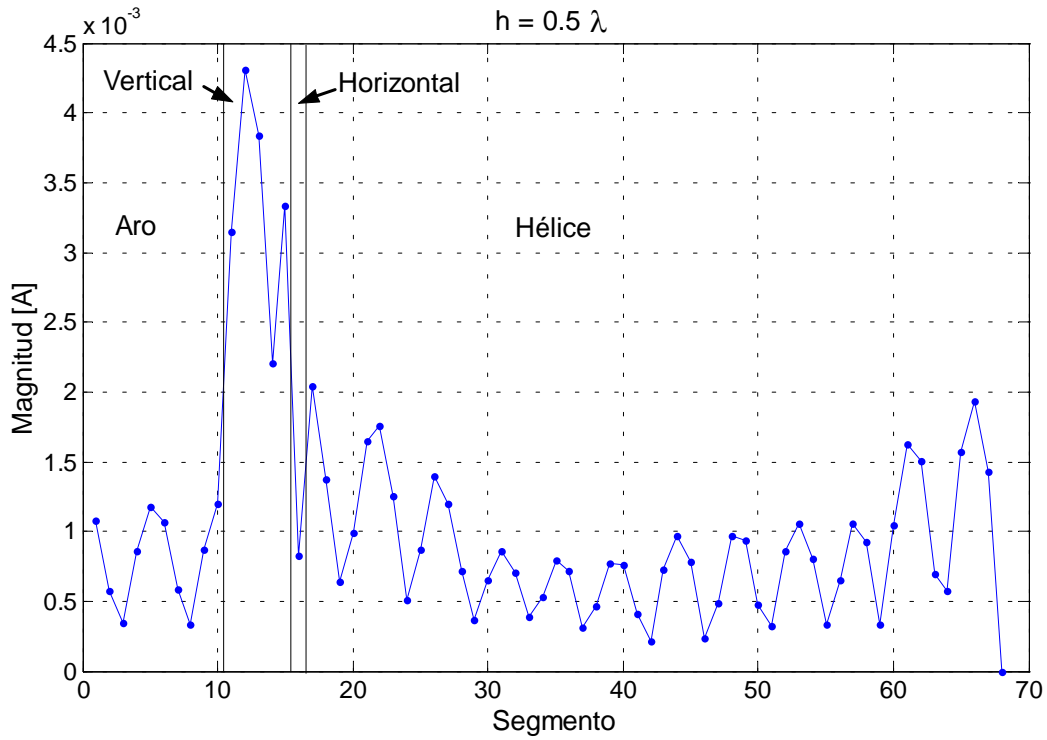


Figura 2.40f. Distribución de corriente para  $h = 0.5\lambda$ .

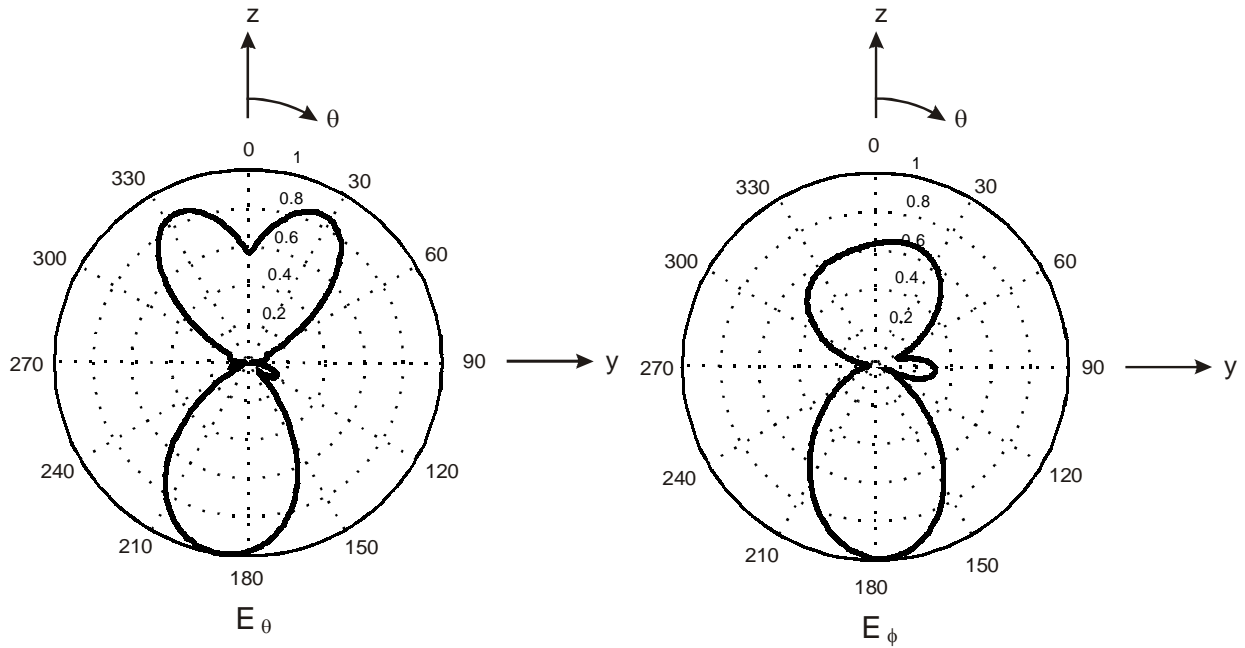


Figura 2.41a. Patrón de radiación para  $h = 0$ .

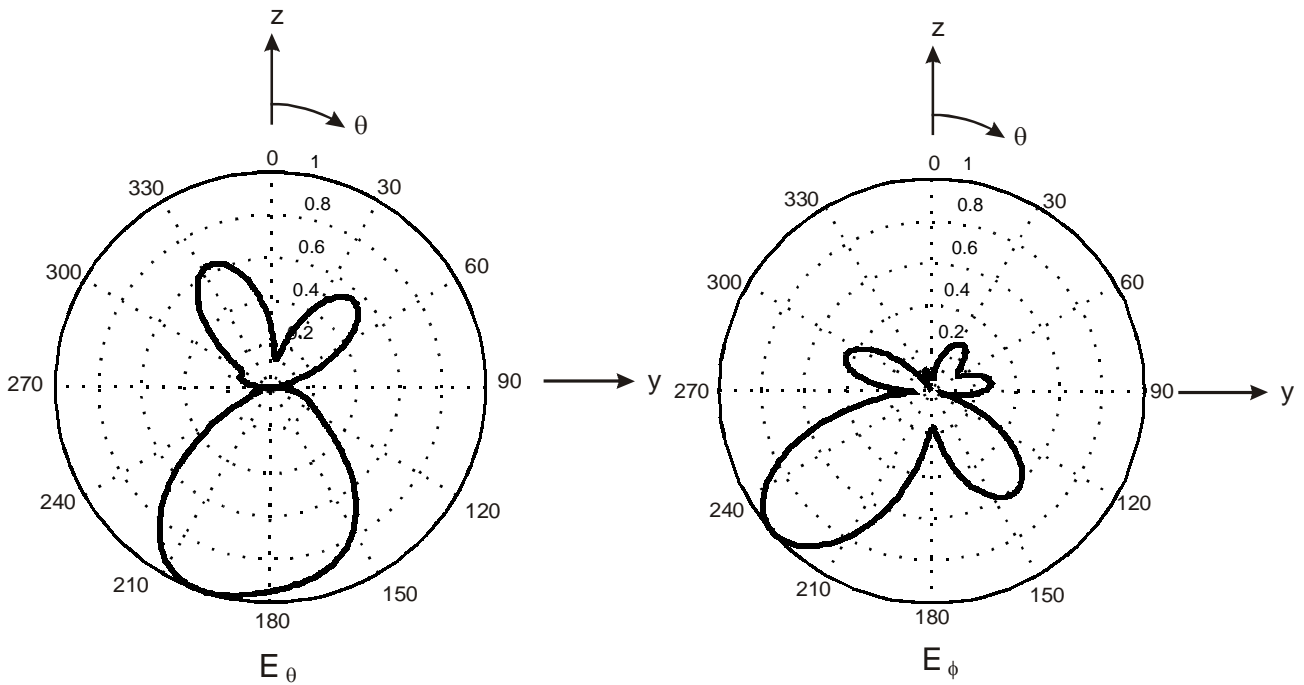
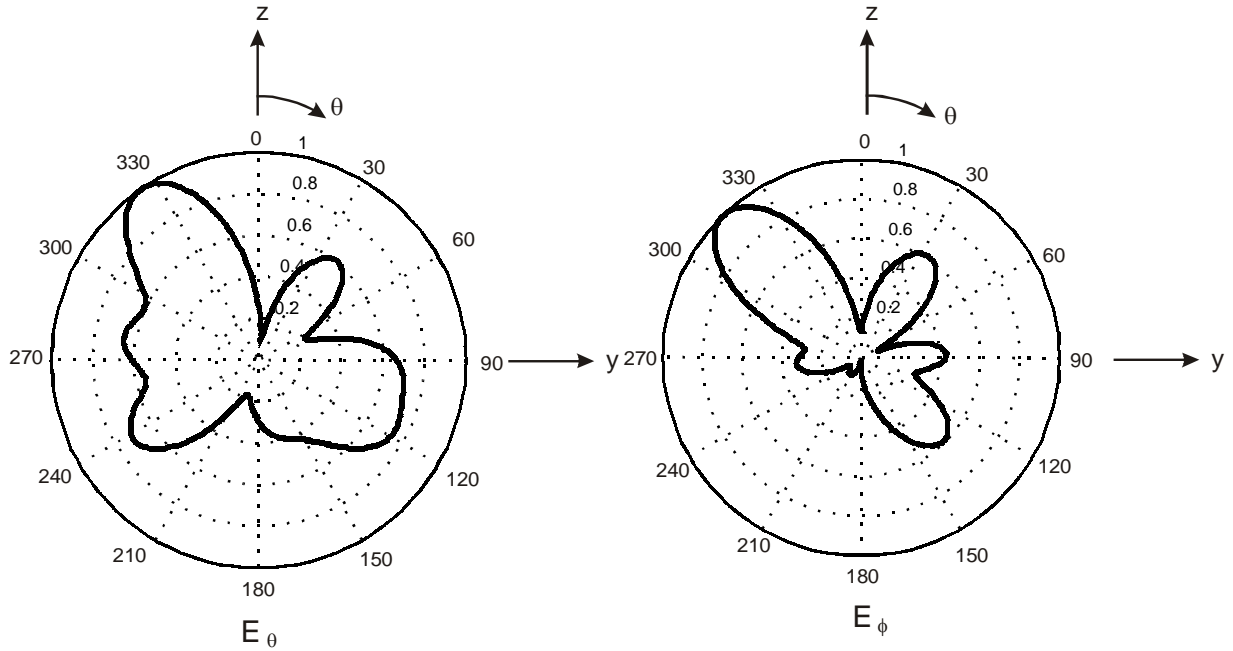
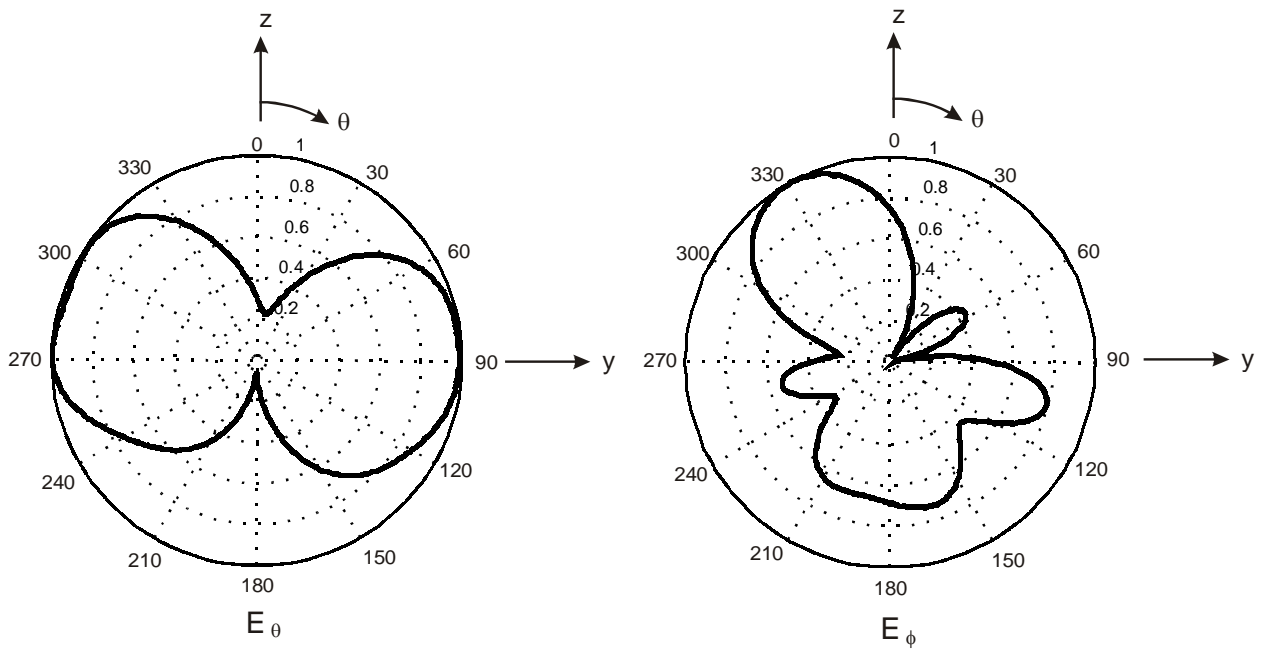


Figura 2.41b. Patrón de radiación para  $h = 0.1\lambda$ .

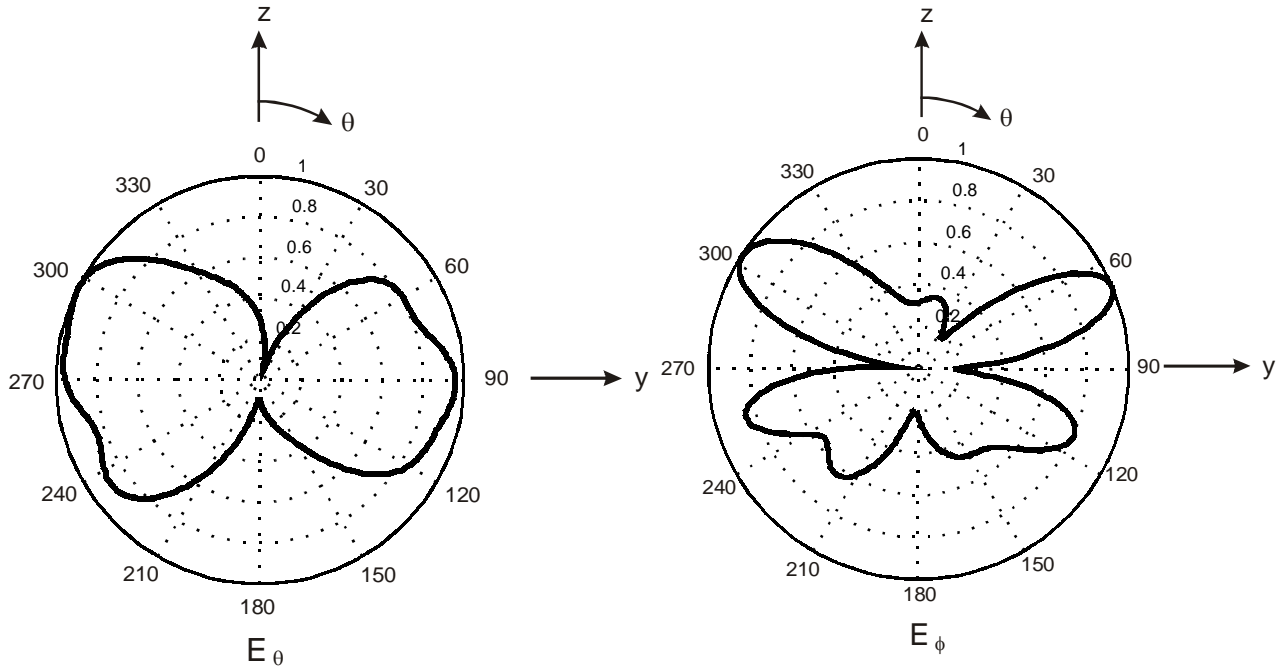




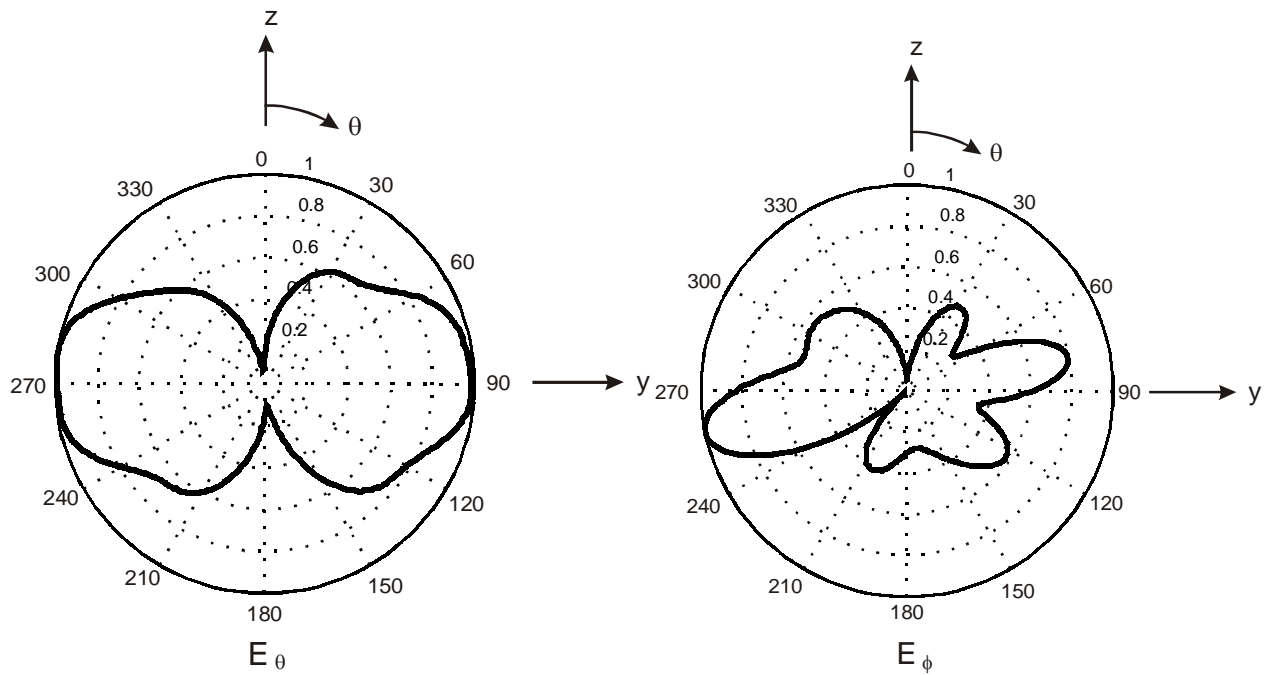
**Figura 2.41c.** Patrón de radiación para  $h = 0.2\lambda$ .



**Figura 2.41d.** Patrón de radiación para  $h = 0.3\lambda$ .



**Figura 2.41e.** Patrón de radiación para  $h = 0.4\lambda$ .



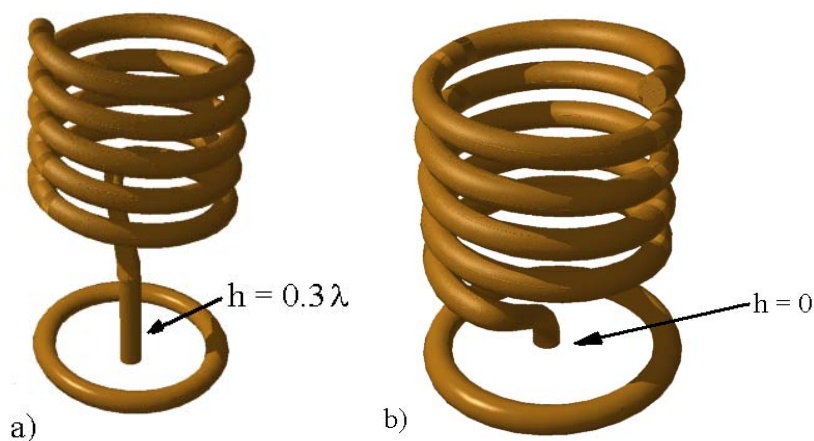
**Figura 2.41f.** Patrón de radiación para  $h = 0.5\lambda$ .

Las gráficas de la distribución de corrientes (Fig. 2.40) muestran que cuando se tienen elementos verticales la máxima amplitud de corriente se tiene en dicho elemento, por lo que la magnitud de corriente que llega a la hélice es pequeña. Conforme disminuye la altura  $h$  la amplitud que recibe la hélice es mayor.

En cada una de las gráficas de la figura 2.40 se puede percibir el rebote de la onda cuando llega al extremo abierto de la hélice; el caso que reporta el menor rebote es  $h = 0.3\lambda$ .

Como se puede observar, cuanto más tiende la longitud del segmento vertical a  $0.5\lambda$ , es mayor la tendencia hacia una radiación normal. Asimismo, se observa que conforme se disminuye la longitud del elemento vertical la dirección de la ganancia máxima en el plano de elevación sufre un giro con respecto a la horizontal, es decir cambia la dirección de la máxima radiación.

Con los resultados obtenidos en esta sección se observa que el radiador más eficiente para tener una radiación axial es aquel que no contenga un segmento vertical, es decir  $h = 0$ , pero dado que el caso que reporta el menor rebote es  $h = 0.3\lambda$ , se simularán ambos casos. La figura 2.42 muestra la animación para ambos casos.



**Figura 2.42.** a) Antena con  $h = 0.3\lambda$ . b) Antena con  $h = 0$ .

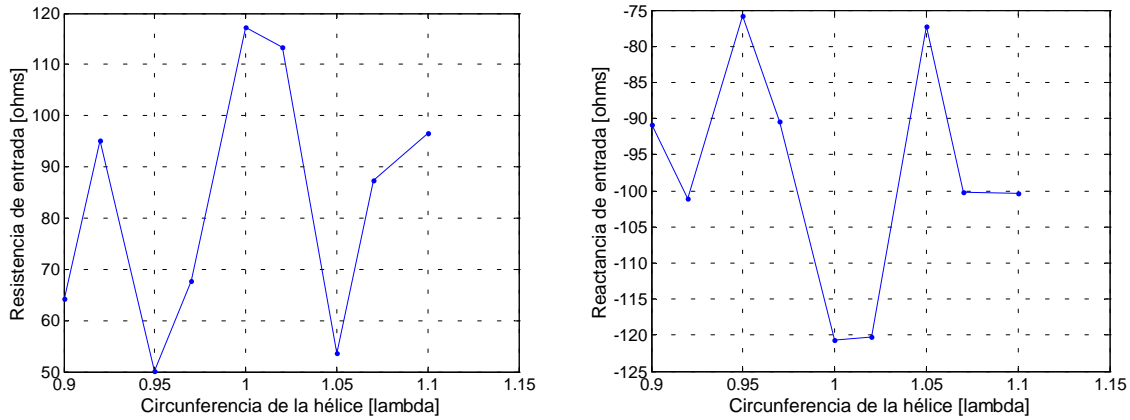
Al comparar los resultados obtenidos en esta sección con los presentados por Nakano (sección 2.3.2.2) cuando se tiene un plano de tierra pequeño, se observa que al igual que el patrón mostrado en el figura 2.10b se presenta una radiación backfire. Obviamente, los resultados obtenidos no son totalmente iguales, en nuestro caso la distribución de corriente difiere del mostrado por Nakano. En un principio, las dos configuraciones son diferentes entre sí, ya que él empleó una rejilla como plano de tierra, y en esta investigación se empleó sólo un aro parásito. Otro error que también influye es la precisión en la programación del método (Apéndice D) como lo es considerar coordenadas cartesianas para el cálculo del patrón de radiación en lugar de coordenadas cilíndricas (Apéndice C).

### 2.5.2 Variación en la circunferencia de hélice

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al variar la circunferencia de la hélice. El objeto de esta sección es conocer la circunferencia óptima para obtener la mayor directividad y eliminar al máximo la radiación backfire para  $h = 0$ . Como se mencionó anteriormente, se analizan los casos para  $h = 0.3\lambda$  y  $h = 0$ . Las características de la antena son  $N = 5$ ,  $\alpha = 12^\circ$ ,  $d_{\text{hélice}} = d_{\text{aro}} = 0.033\lambda$  y una frecuencia de operación = 10 GHz; la circunferencia del aro se mantuvo constante a  $1\lambda$ .

#### a) Altura $h = 0.3\lambda$

En la figura 2.43 se muestra la impedancia de entrada al variar la circunferencia de la hélice. Se observa que tanto la parte resistiva como la reactiva presentan un comportamiento cuasi-simétrico con respecto al  $C_\lambda = 1$ . Esto nos hace pensar que se obtendrán los mismo efectos al incrementar o disminuir en una misma proporción la circunferencia de la hélice.



**Figura 2.43.** Impedancia de entrada para diferentes circunferencias de la hélice.

La figura 2.44 muestra las distribuciones de corriente para las distintas circunferencias. En estas distribuciones se observa que la distribución para  $C_\lambda = 0.95$  y  $C_\lambda = 1.05$  son prácticamente iguales, pero no así las distribuciones para el resto de las circunferencias. Con esto queda desechada la hipótesis hecha anteriormente, ya que de acuerdo a la distribución de corriente no se comportan igual las variaciones proporcionales (incremento o decremento) de la circunferencia. También se observa que el caso en el cual la hélice recibe la menor corriente es para  $C_\lambda = 0.95$ , seguido de  $C_\lambda = 1.05$ , considerándose los peores casos para obtener una radiación axial, ya que prácticamente toda la potencia la radia el elemento vertical.

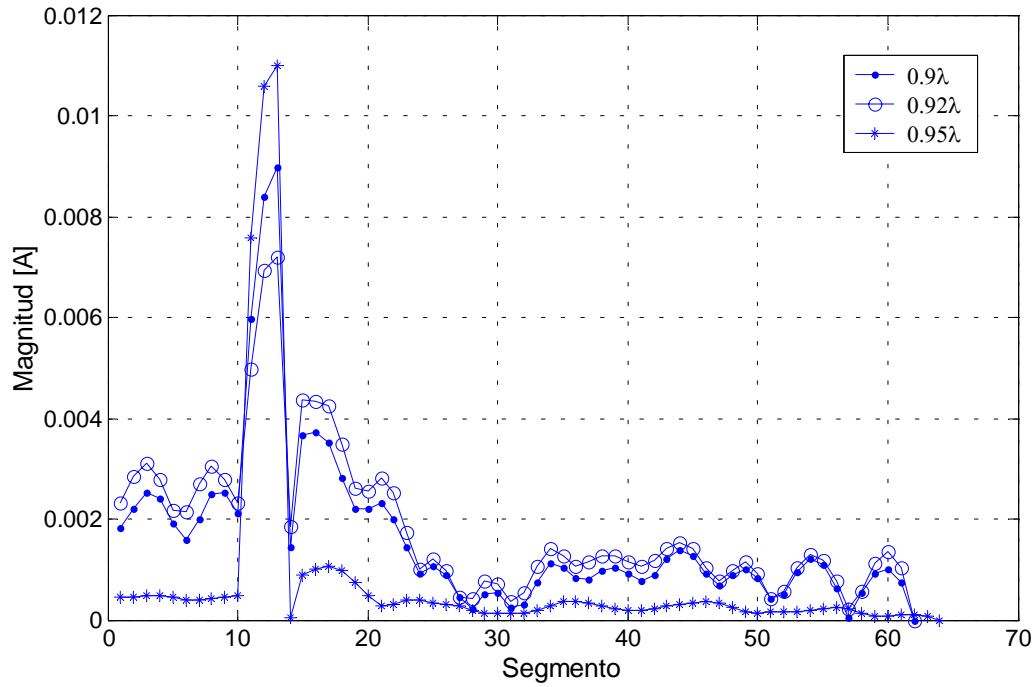


Figura 2.44a. Distribución de corriente para  $C_\lambda = 0.9$ ,  $C_\lambda = 0.92$  y  $C_\lambda = 0.95$ .

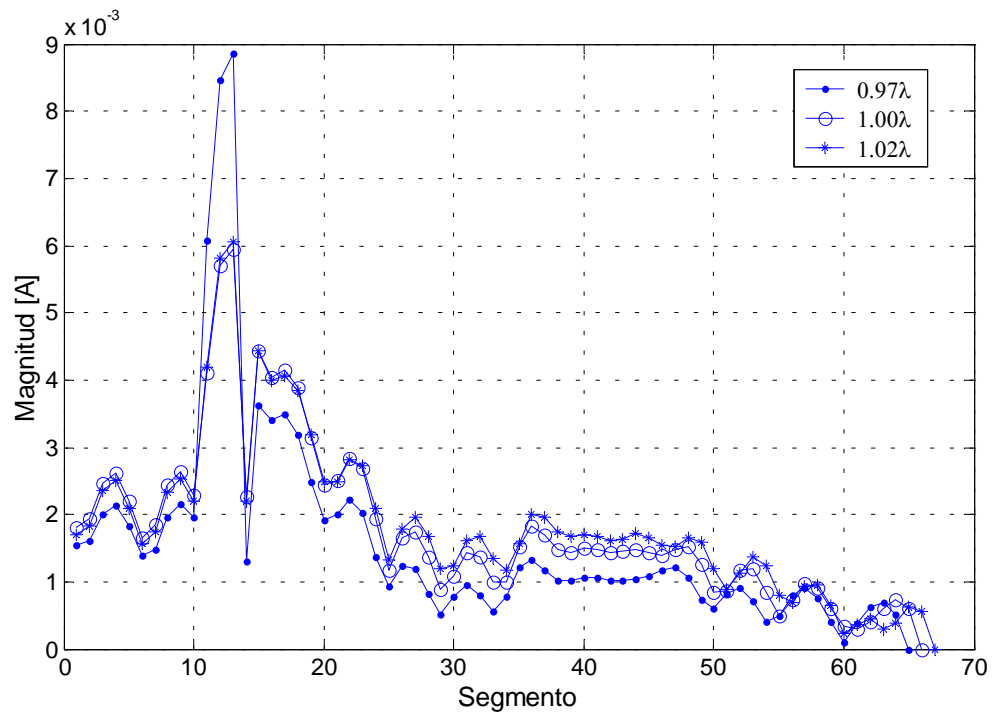


Figura 2.44b. Distribución de corriente para  $C_\lambda = 0.97$ ,  $C_\lambda = 1.00$  y  $C_\lambda = 1.02$ .

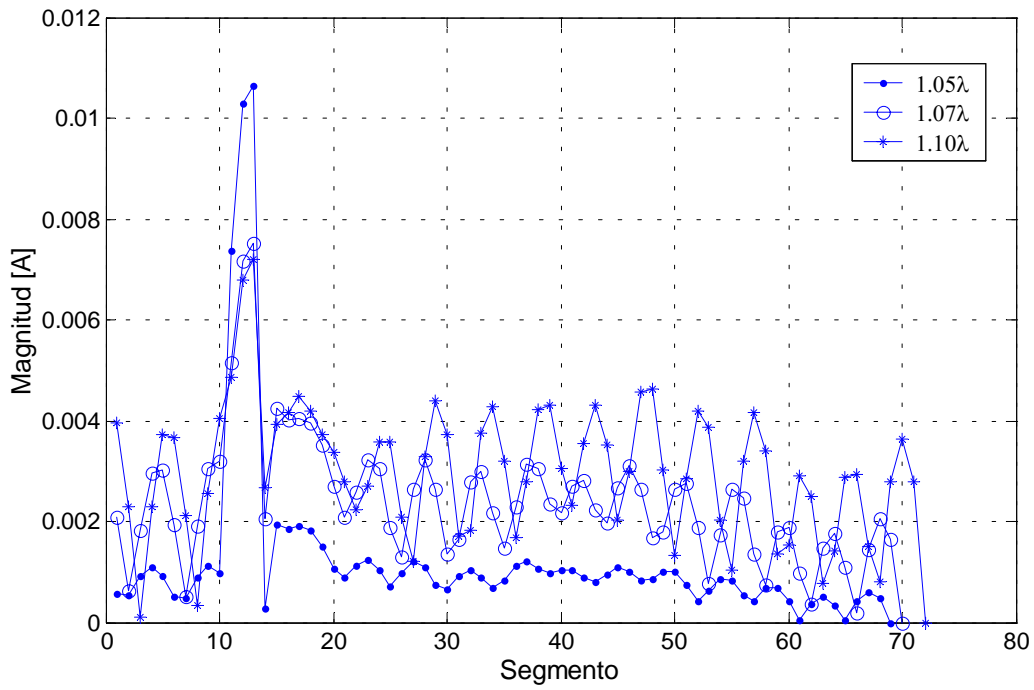


Figura 2.44c. Distribución de corriente para  $C_\lambda = 1.05$ ,  $C_\lambda = 1.07$  y  $C_\lambda = 1.10$ .

La figura 2.45 muestra los patrones de radiación obtenidos por la simulación para diferentes circunferencias de la hélice.

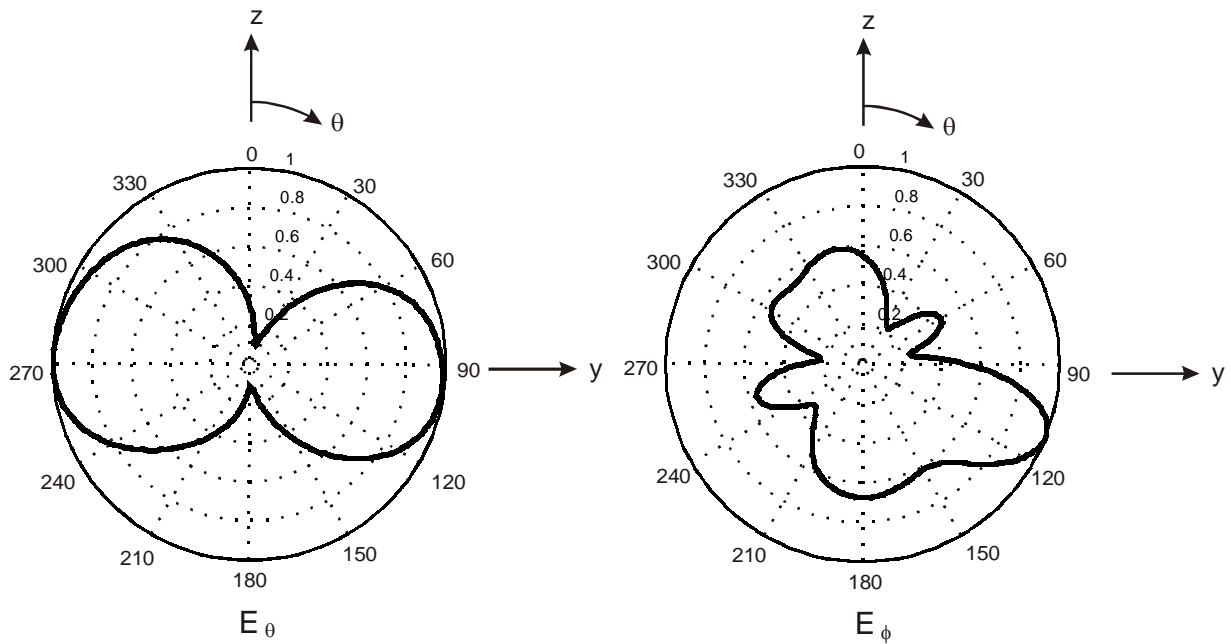


Figura 2.45a. Patrón de radiación para  $C_\lambda = 0.92$ .

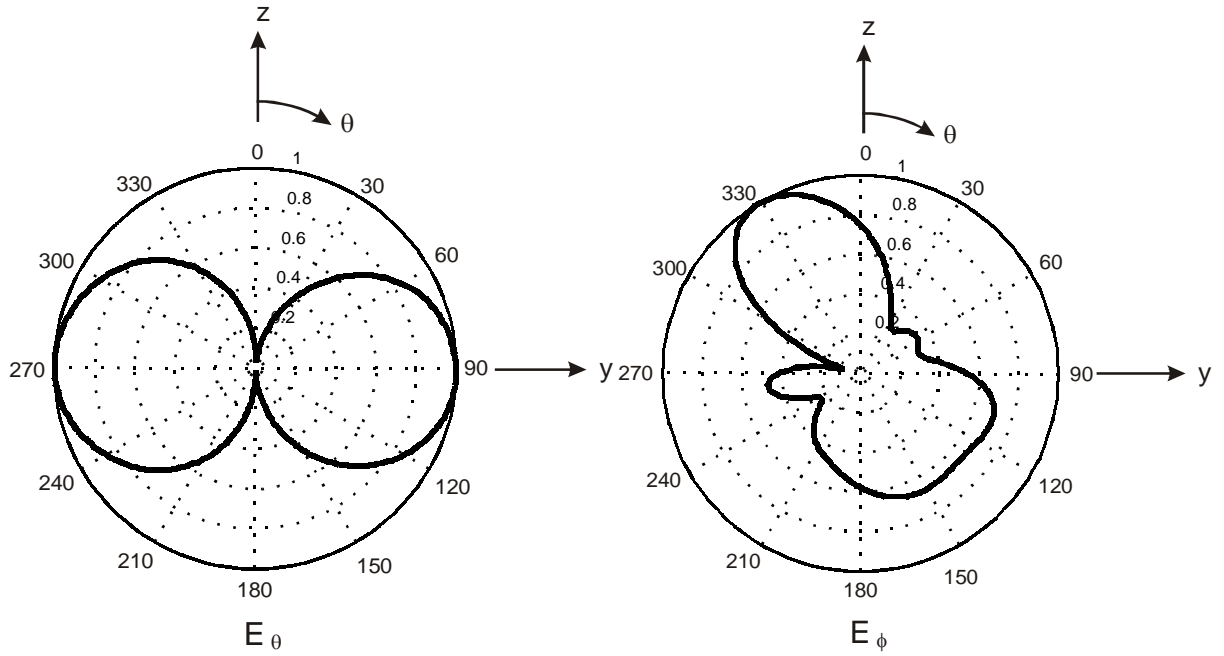


Figura 2.45b. Patrón de radiación para  $C_\lambda = 0.95$ .

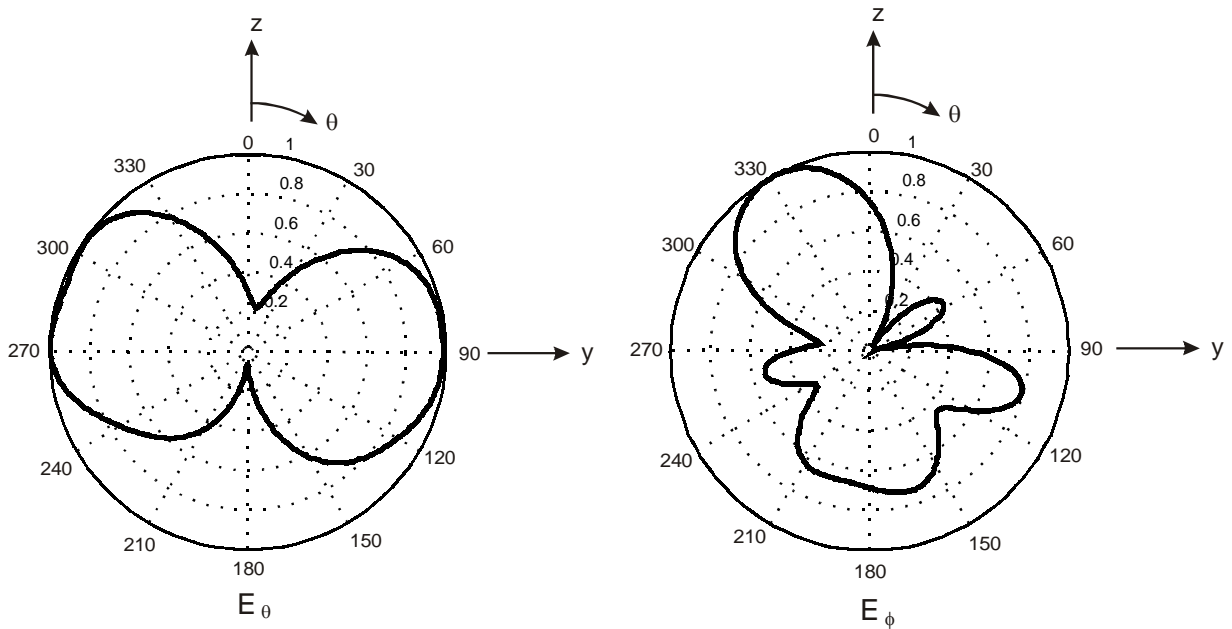


Figura 2.45c. Patrón de radiación para  $C_\lambda = 1.00$ .

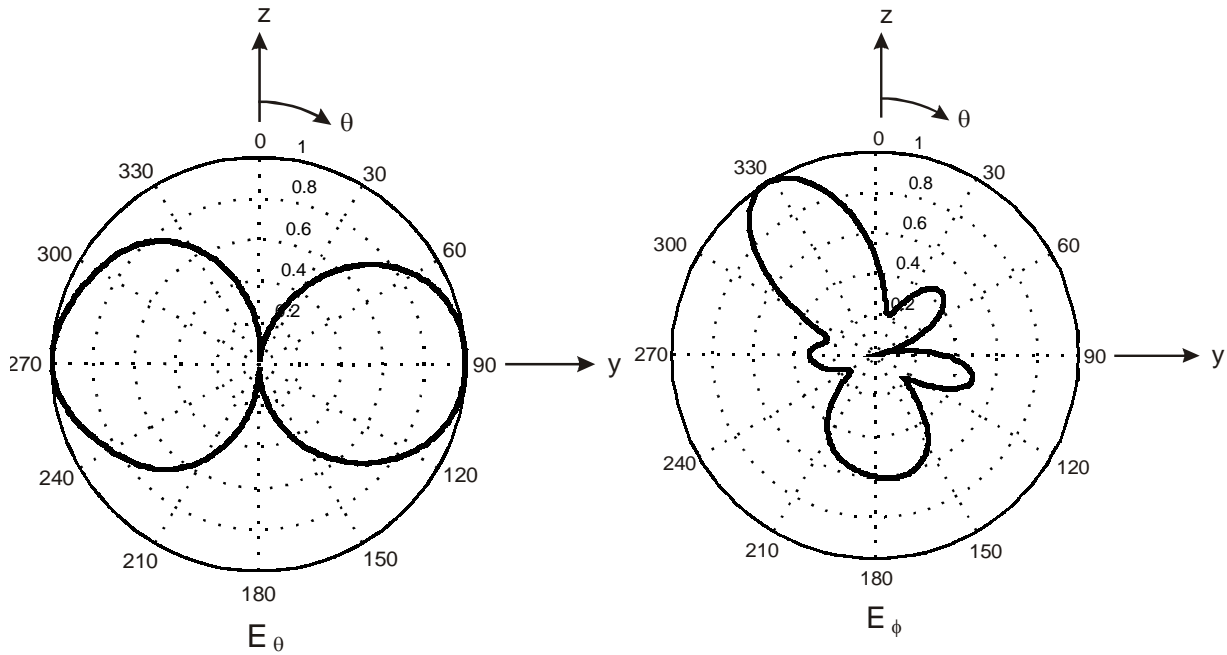


Figura 2.45d. Patrón de radiación para  $C_\lambda = 1.05$ .

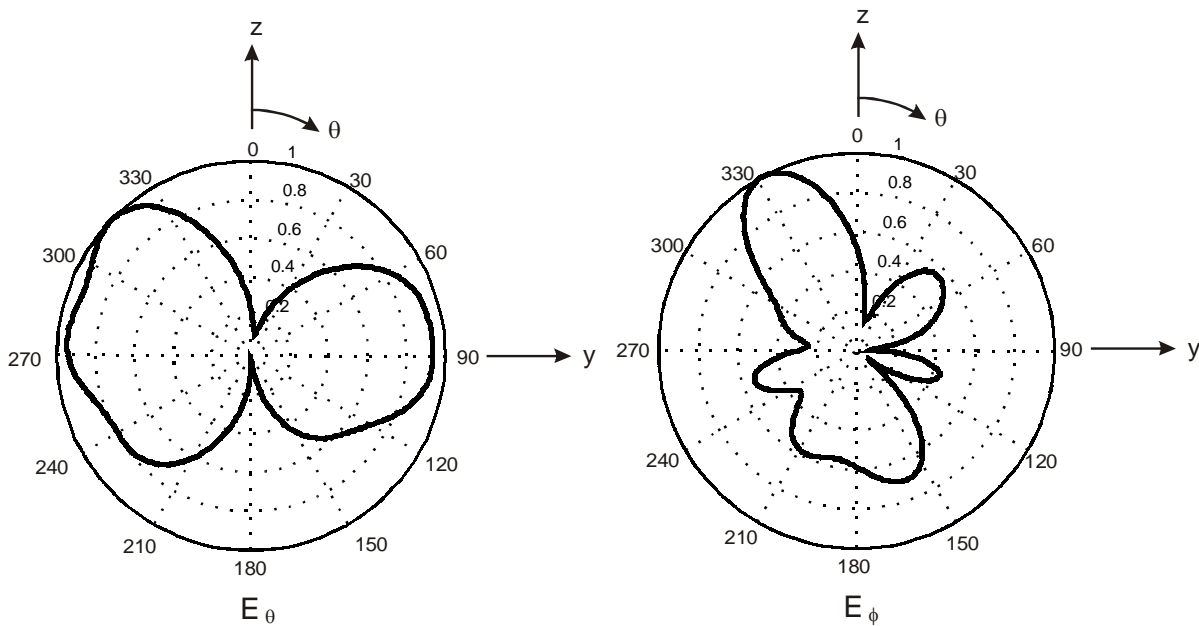


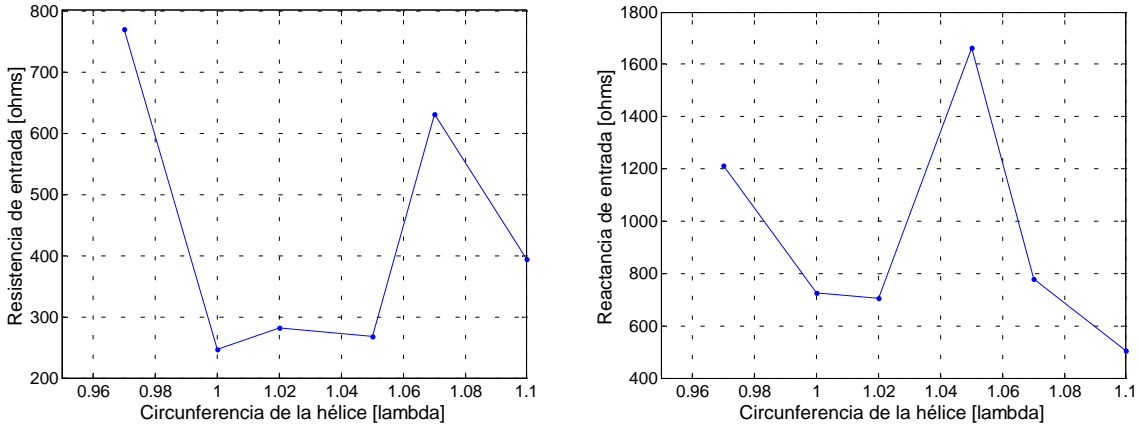
Figura 2.45e. Patrón de radiación para  $C_\lambda = 1.07$ .

Los patrones de radiación mostrados anteriormente desechan por completo la hipótesis de simetría de efectos. Asimismo se comprueba que para  $C_\lambda = 0.95$  y  $C_\lambda = 1.05$  se obtiene completamente una radiación normal de la hélice, radiando toda la potencia el elemento vertical. Al variar la hélice no se logró la variación de la radiación normal.

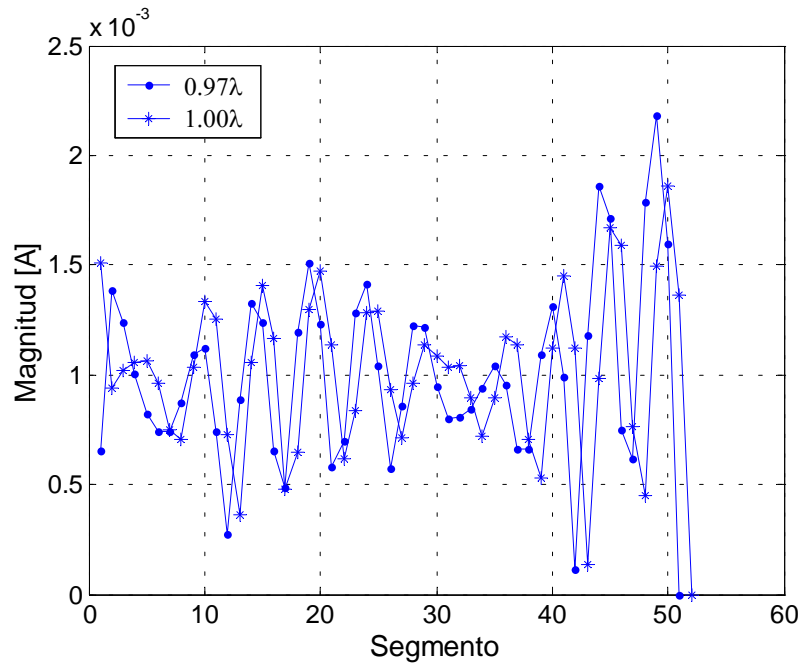


**b) Altura  $h = 0$**

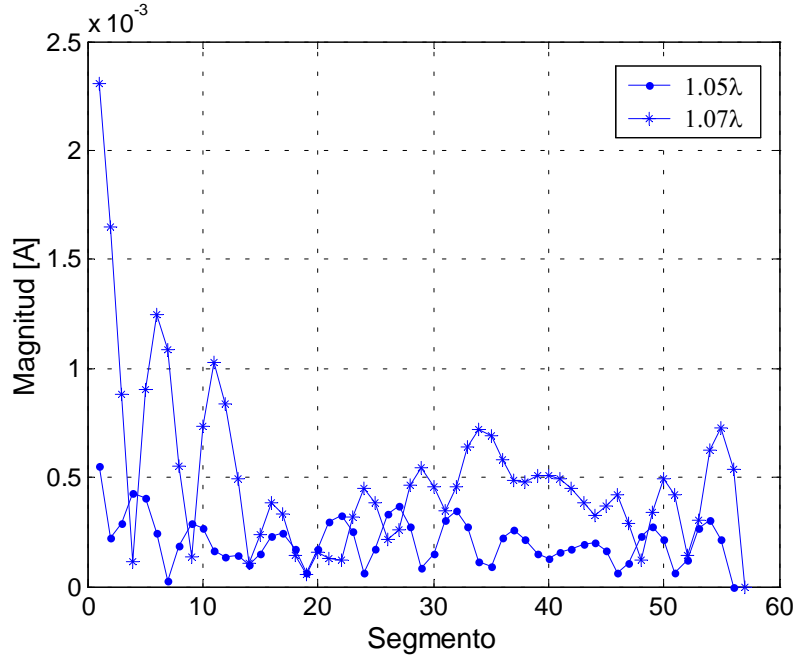
La figura 2.46 muestra la impedancia de entrada al variar la circunferencia de las hélices de una antena helicoidal que no posee sección vertical.



**Figura 2.46.** Impedancia de entrada al variar  $C_\lambda$  y  $h = 0$ .



**Figura 2.47a.** Distribución de corriente para  $C_\lambda = 0.97$  y  $C_\lambda = 1.00$ .



**Figura 2.47b.** Distribución de corriente para  $C_\lambda = 1.05$  y  $C_\lambda = 1.07$ .

La figura 2.47 muestra las distribuciones de corriente para diferentes dimensiones de la circunferencia de la hélice. Cabe señalar que únicamente se presenta la distribución de corriente que se desarrolla en la hélice.

Se observa que para una circunferencia de  $0.95\lambda$  y  $1.00\lambda$  los rebotes en el extremo abierto de la hélice son muy fuertes, se puede decir que prácticamente se está reflejando toda la potencia que llega a ese extremo. Para el caso de  $C_\lambda = 1.07$  se presenta la reflexión de potencia más pequeña. Dadas estas características se esperaría que los casos para  $C_\lambda = 0.95$  y  $C_\lambda = 1.00$  presenten un radiación backfire y para  $C_\lambda = 1.05$  y  $C_\lambda = 1.07$  se presente una radiación enfire.

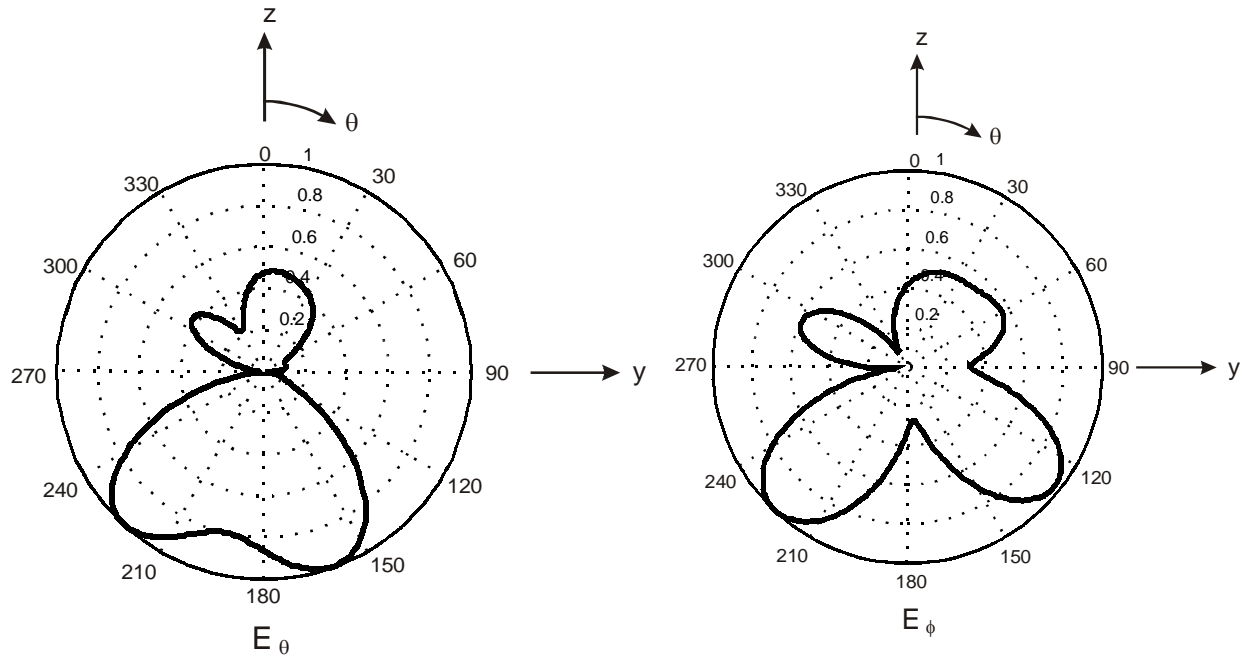


Figura 2.48a. Patrón de radiación para  $C_\lambda = 0.97$ .

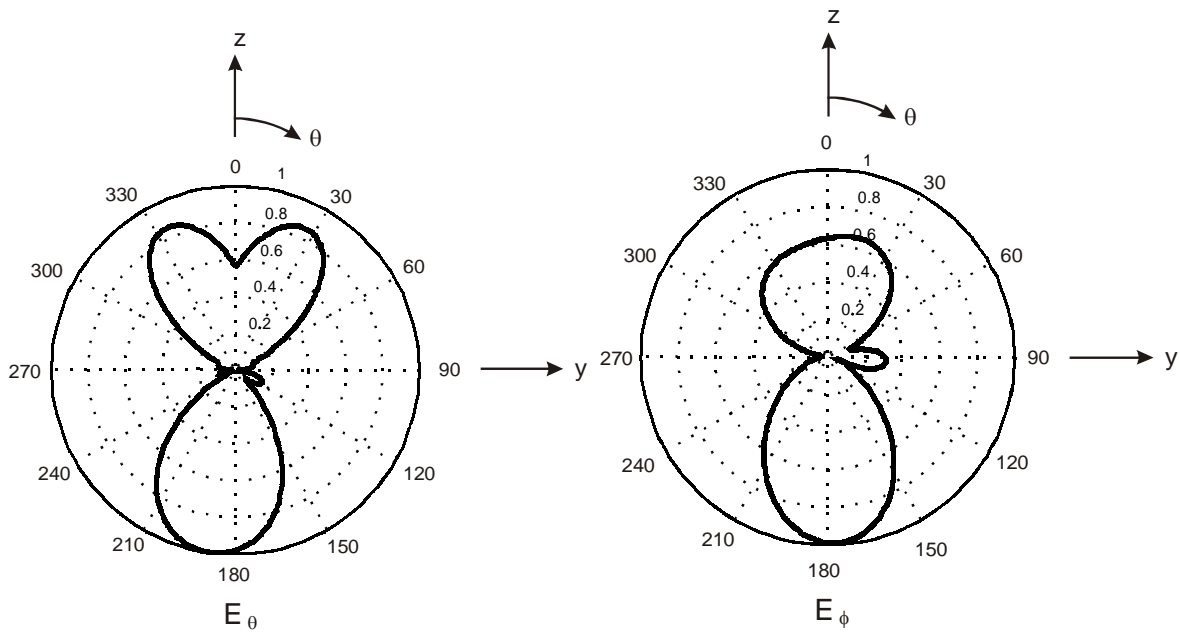
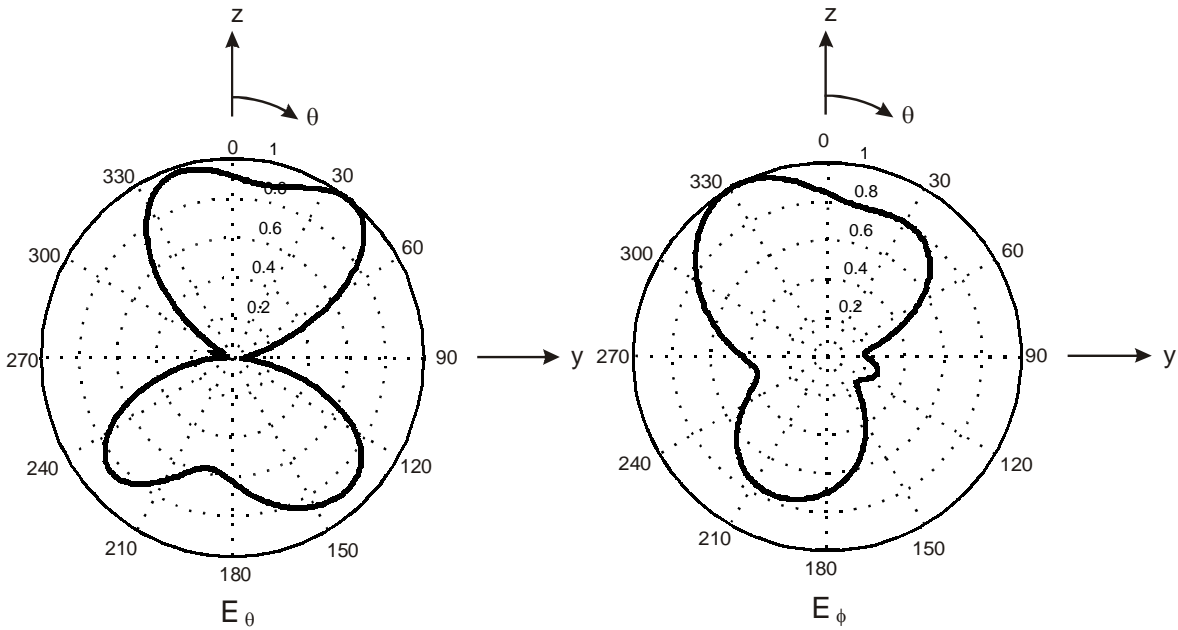
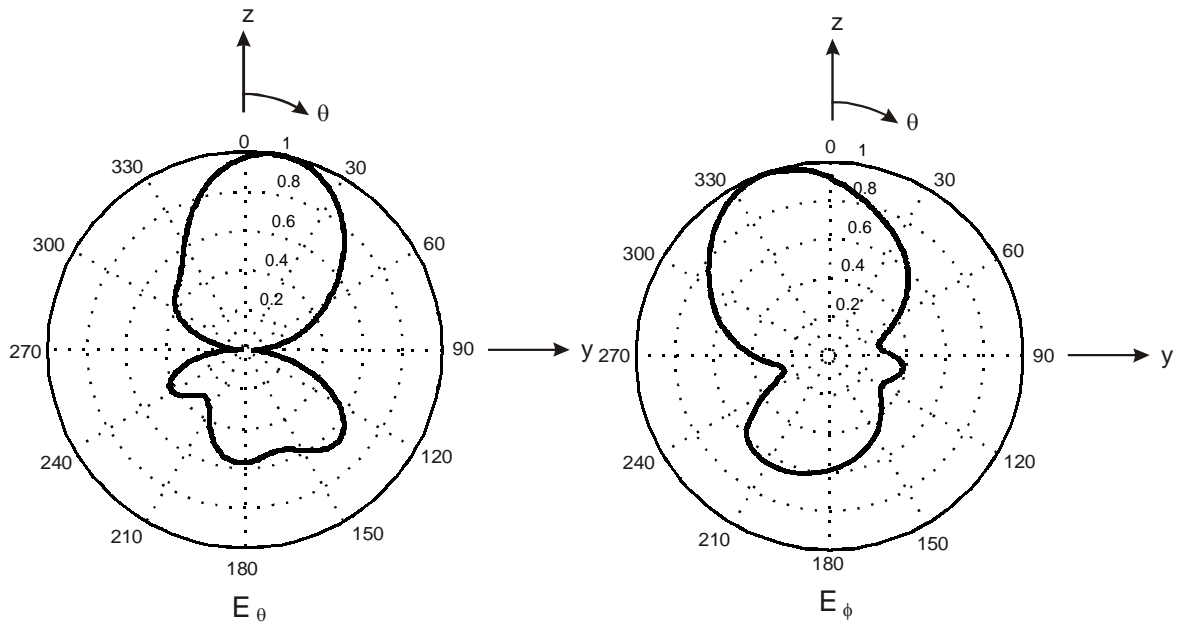


Figura 2.48b. Patrón de radiación para  $C_\lambda = 1.00$ .



**Figura 2.48c.** Patrón de radiación para  $C_\lambda = 1.05$ .



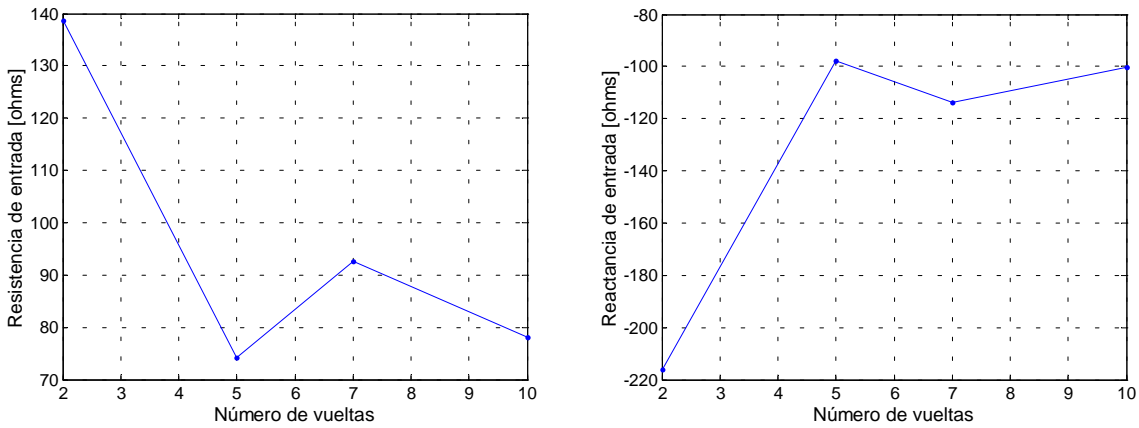
**Figura 2.48d.** Patrón de radiación para  $C_\lambda = 1.07$ .

De las figura 2.48 se concluye que para  $C_\lambda = 1.00$  se tiene una radiación preferentemente backfire pero su lóbulo endfire presenta una semejanza a una radiación cónica. Al incrementar las dimensiones de la circunferencia la radiación cambia a endfire, pero aún el lóbulo backfire es considerable.

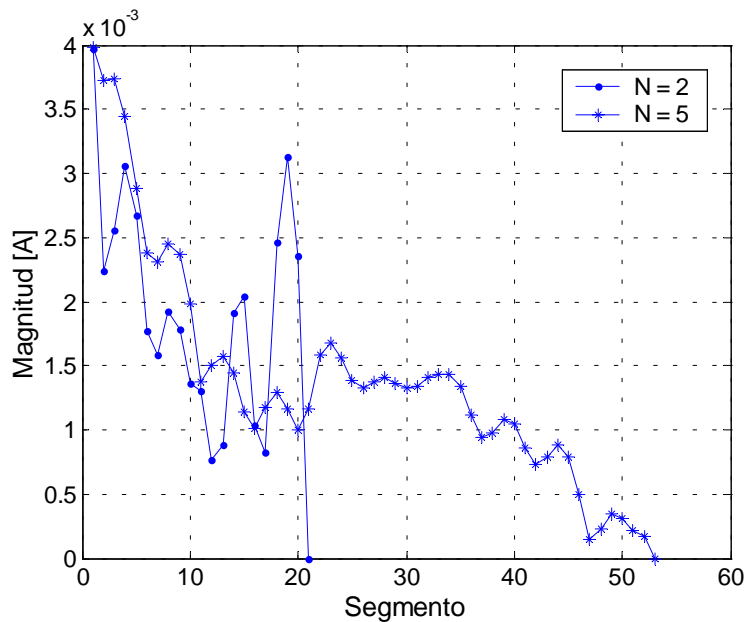
### 2.5.3 Variaciones en el número de vueltas

Otro parámetro importante en el diseño de una antena helicoidal es el número de vueltas. De acuerdo a las propiedades presentadas en el capítulo 1, el número de vueltas incrementa la directividad de la antena. La antena simulada posee  $C_\lambda = 1$ ,  $C_{\text{aro}} = 1\lambda$ ,  $\alpha = 12^\circ$  y  $d_{\text{tubo}} = 0.0333\lambda$ .

**a) Altura  $h = 0.3\lambda$**



**Figura 2.49.** Impedancia de entrada al variar el número de vueltas.



**Figura 2.50a.** Distribución de corriente para  $N = 2$  y  $N = 5$ .

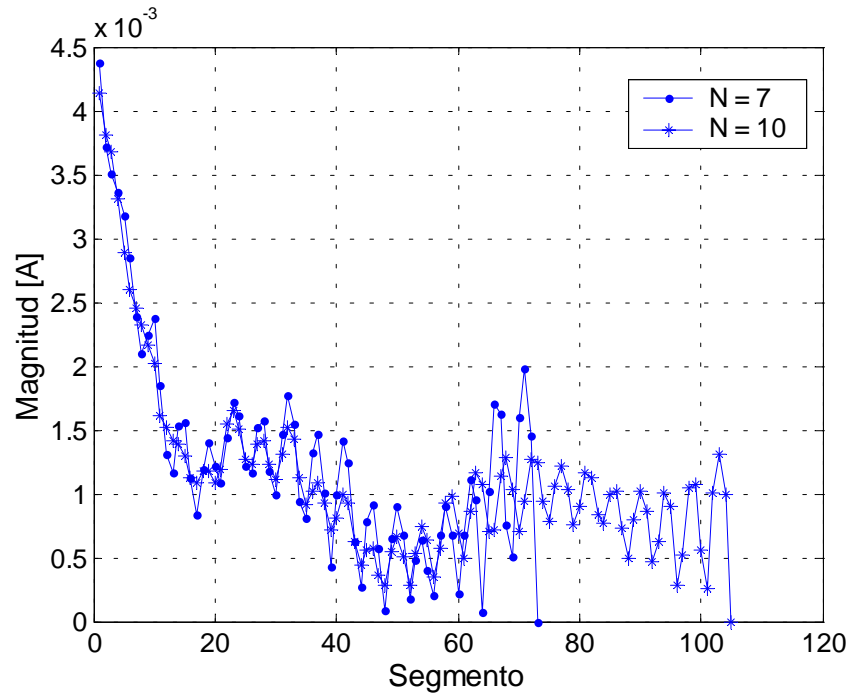


Figura 2.50b. Distribución de corriente para  $N = 7$  y  $N = 10$ .

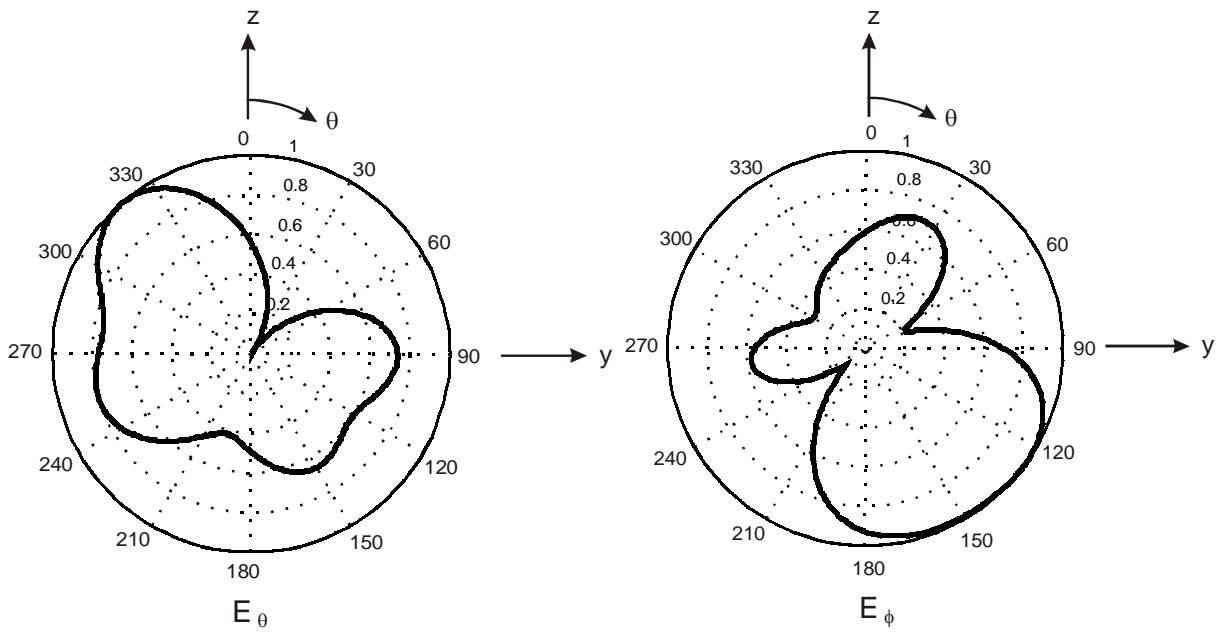


Figura 2.51a. Patrón de radiación para  $N = 2$ .

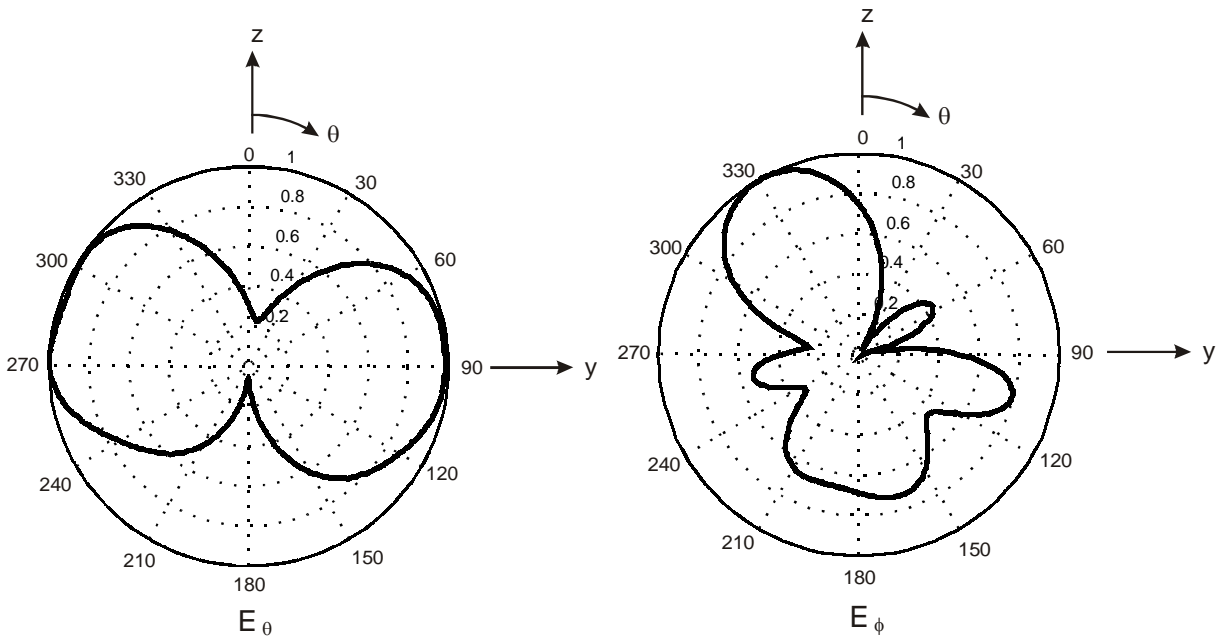


Figura 2.51b. Patrón de radiación para  $N = 5$ .

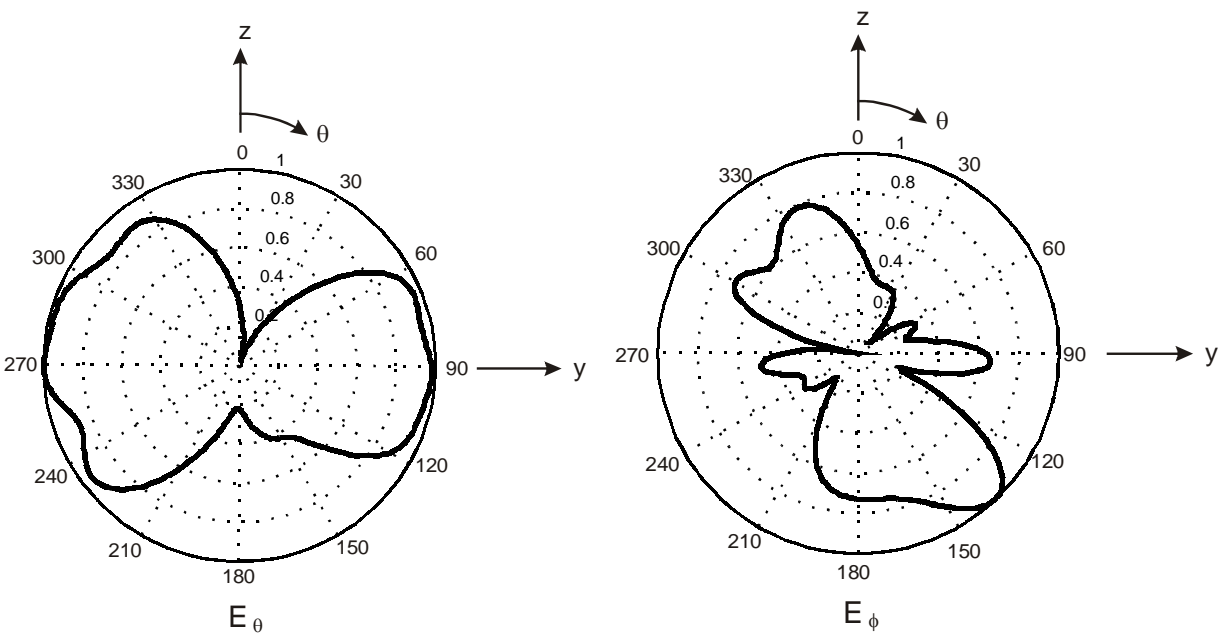
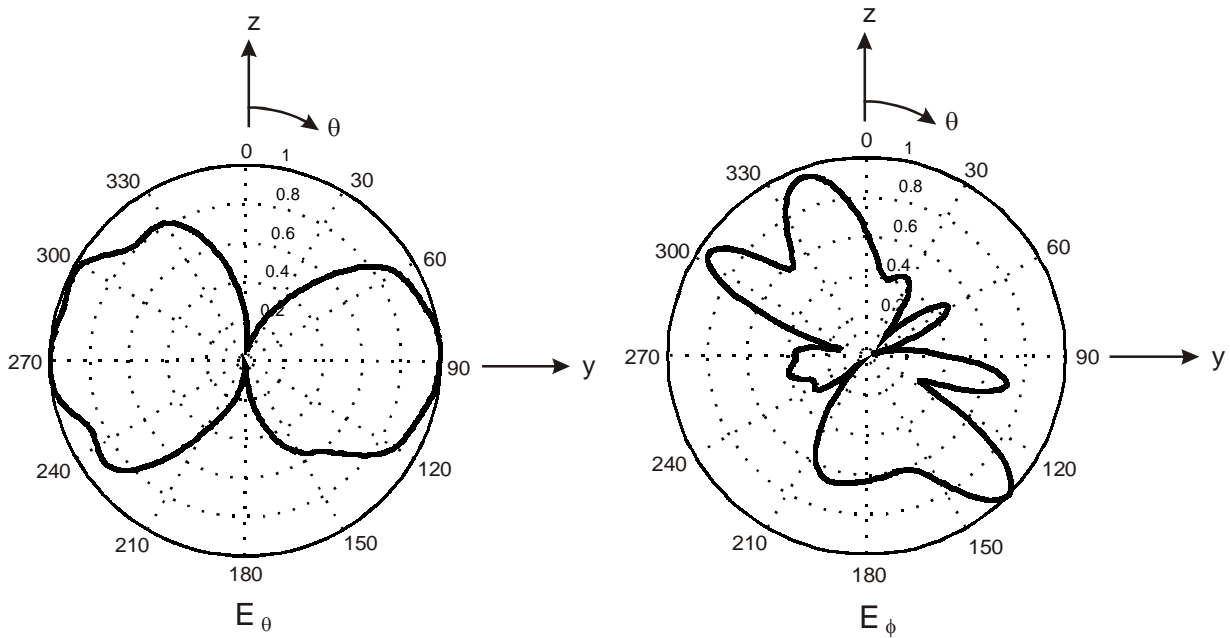


Figura 2.51c. Patrón de radiación para  $N = 7$ .



**Figura 2.51d.** Patrón de radiación para  $N = 10$ .

Las figuras 2.50a y 2.50b muestran las distribuciones de corriente al variar el número de vueltas de la hélice. Como se puede observar en todos los casos, el rebote de la señal en el extremo abierto es menor o igual que el 40% de la amplitud máxima. Como era de esperarse, el peor radiador es cuando  $N = 2$ , ya que el patrón de radiación no tiene una forma definida en el plano de elevación. Al incrementar el número de vueltas, no se modifica considerablemente el patrón de radiación en el plano de elevación, concluyéndose nuevamente que la mayor parte de la potencia es radiada por el elemento vertical.

**b) Altura  $h = 0$**

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al variar el número de vueltas de una hélice al suprimir la sección vertical propuesta inicialmente.



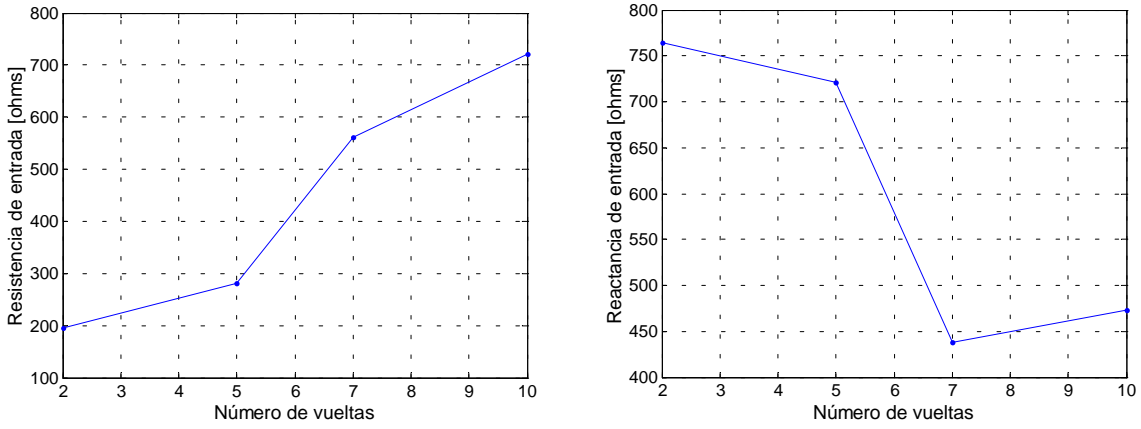


Figura 2.52. Impedancia de entrada al variar el número de vueltas de la hélice.

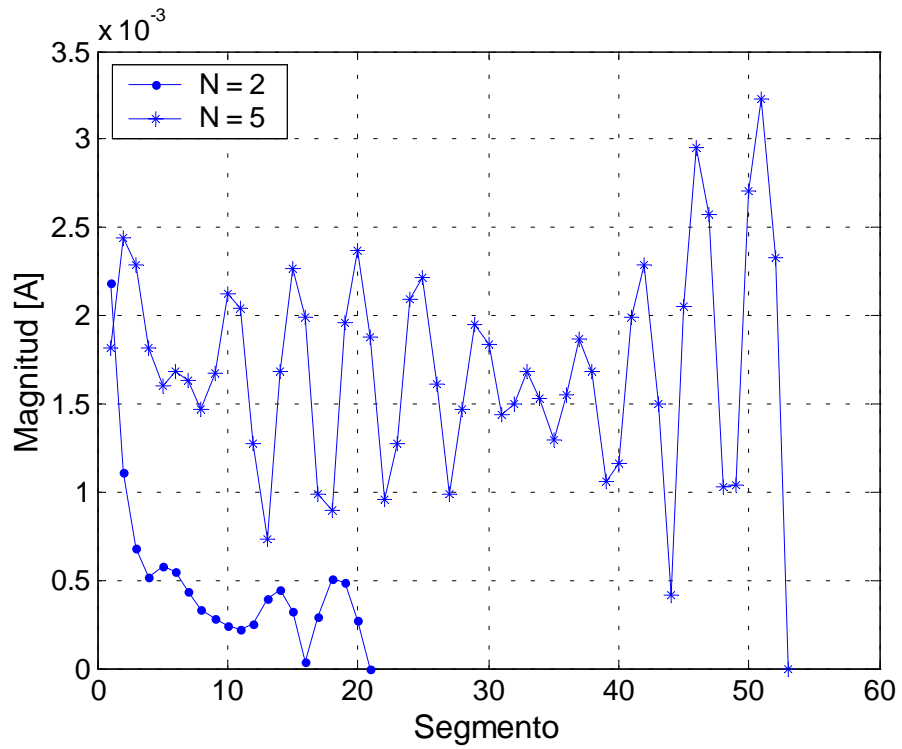


Figura 2.53a. Distribución de corriente para  $N = 2$  y  $N = 5$ .

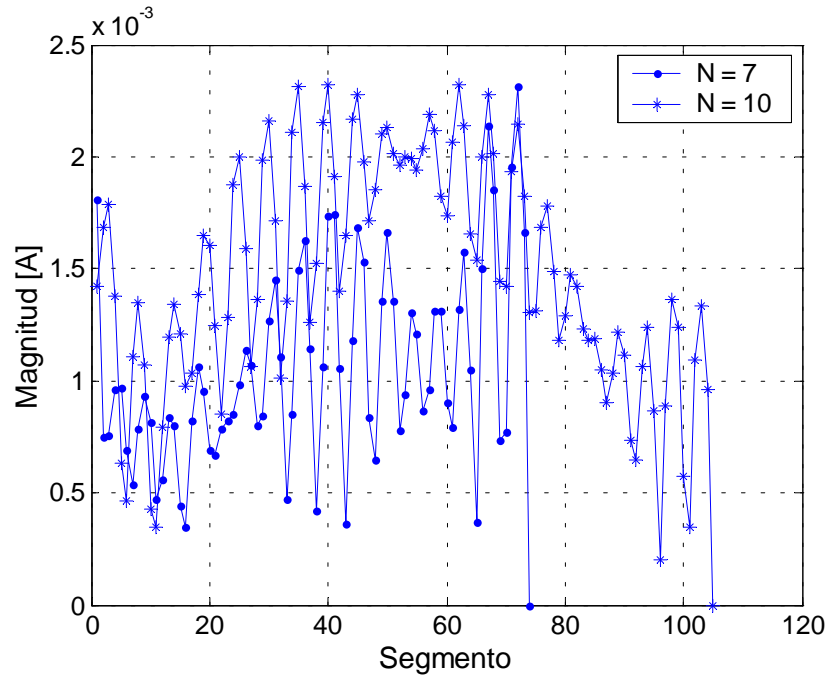


Figura 2.53b. Distribución de corriente para  $N = 7$  y  $N = 10$ .

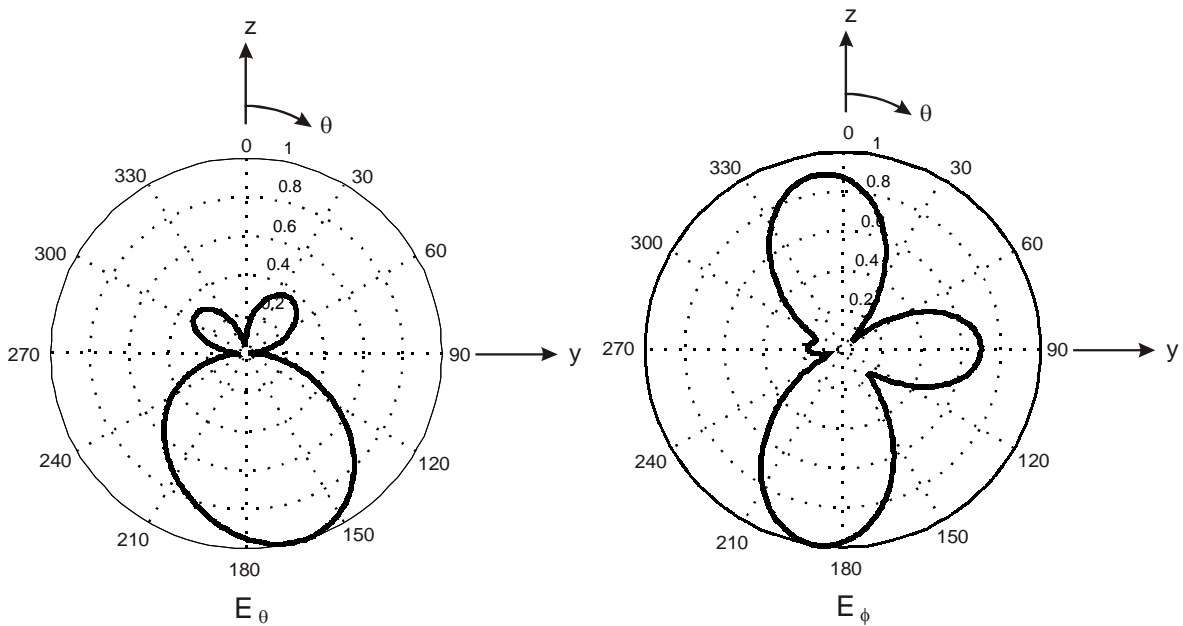


Figura 2.54a. Patrón de radiación para  $N = 2$ .

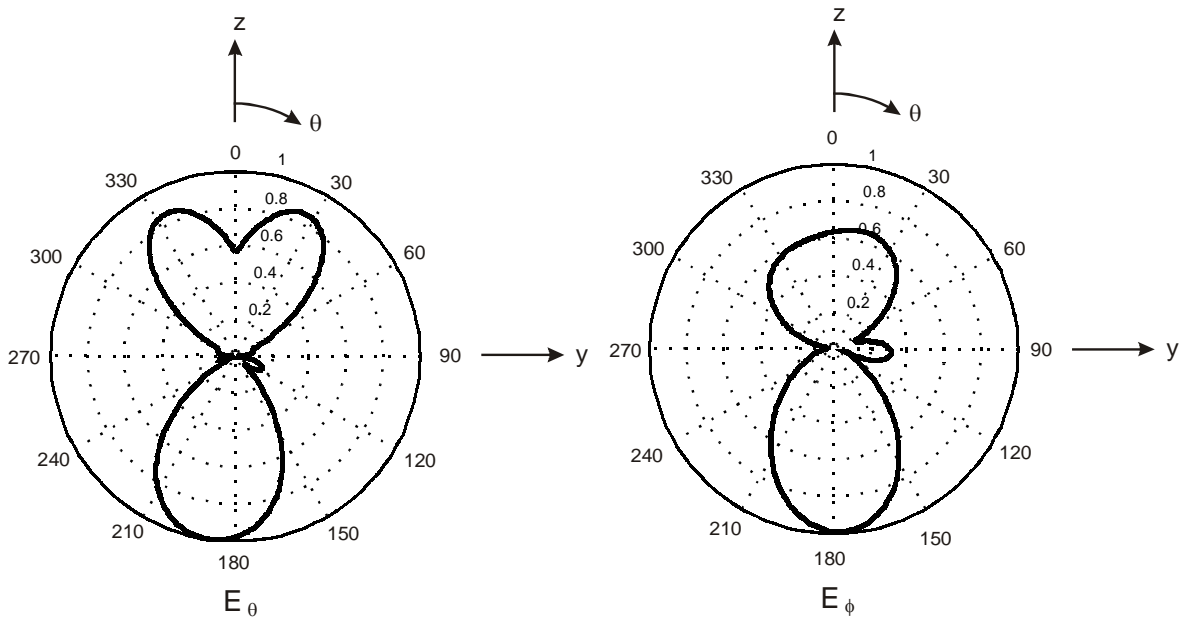


Figura 2.54b. Patrón de radiación para  $N = 5$ .

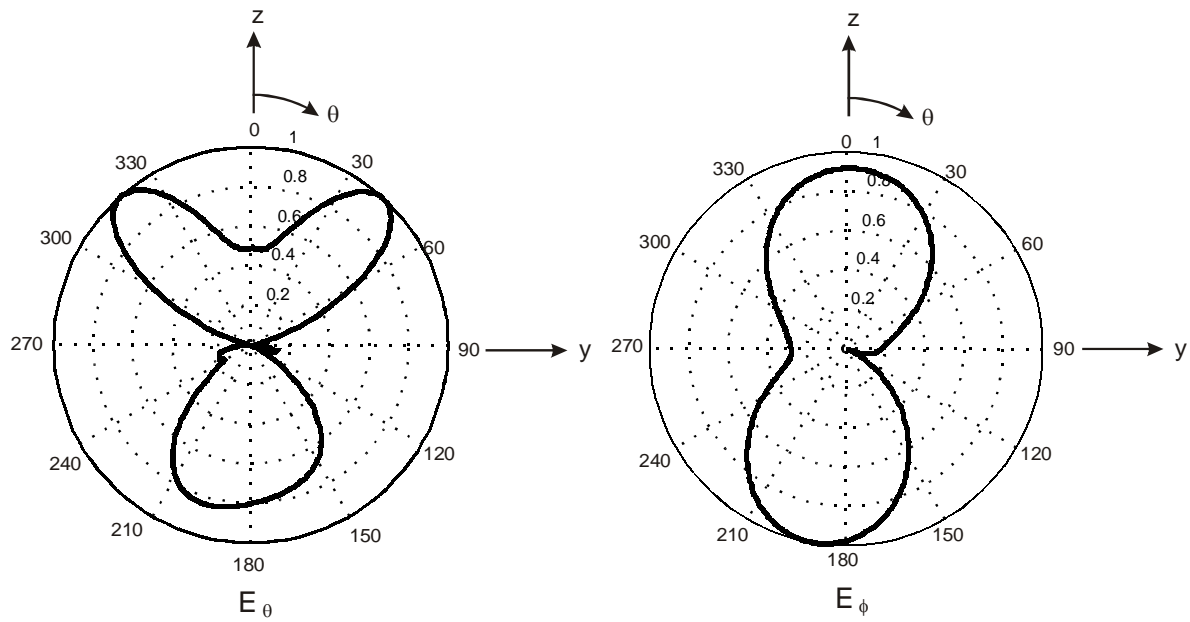
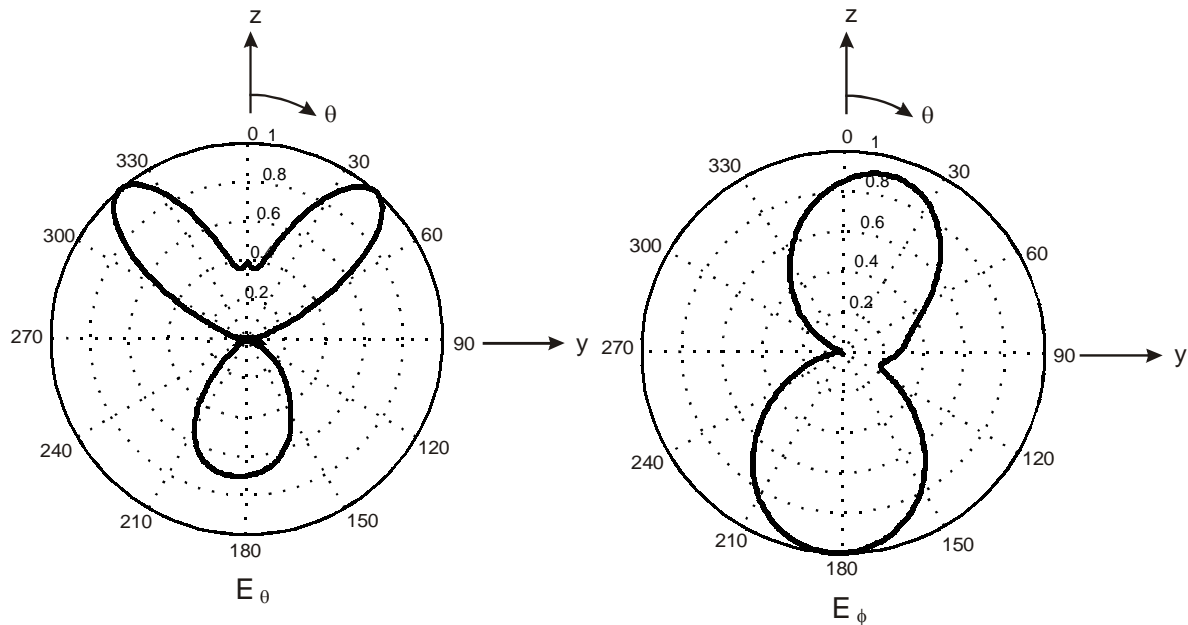


Figura 2.54c. Patrón de radiación para  $N = 7$ .



**Figura 2.54d.** Patrón de radiación para  $N = 10$ .

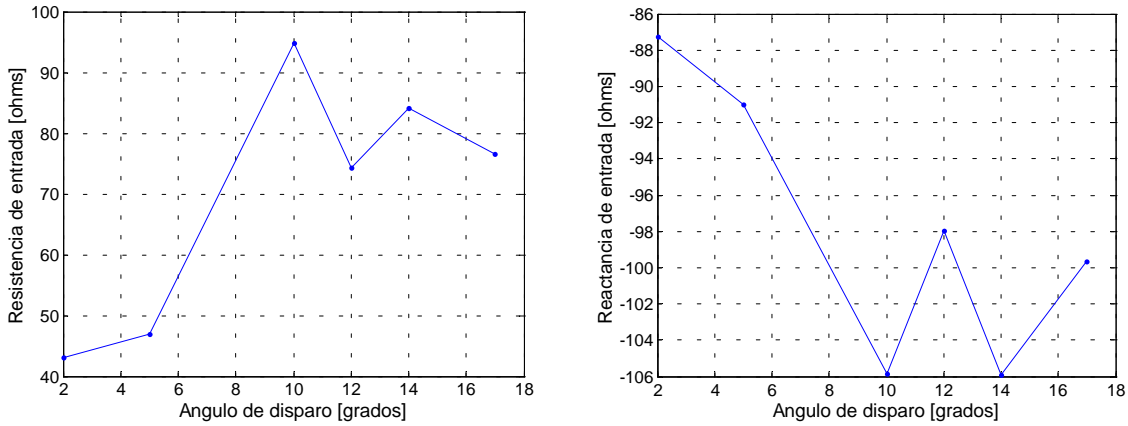
Las figuras 2.53a y 2.53b muestran las distribuciones de corrientes de las hélices al variar su número de vueltas. Para  $N = 2$  y  $N = 5$ , los rebotes en el extremo abierto de la hélice son muy altos, existiendo una gran reflexión de la potencia. Para  $N = 7$  y  $N = 10$ , ya no son tan grandes, pero su distribución de corriente no es semejante a la típica que se esperaría para una hélice con radiación endfire, ya que las amplitudes máximas se ubican a la mitad de la longitud total de la hélice.

De los patrones de radiación presentados, se observa que al incrementar el número de vueltas el patrón de radiación tiende a una radiación endfire, pero el lóbulo frontal es semejante al de una radiación cónica, ya que se presentan los valores máximos de los lóbulos con un ángulo de giro; este ángulo de giro depende del número de vueltas. Para  $N = 5$ , el ángulo de giro es de  $30^\circ$  mientras que para  $N = 7$  y  $N = 10$ , el ángulo de giro es de  $45^\circ$  aproximadamente, presentando un comportamiento similar al variar las dimensiones del plano de tierra de un dipolo (Fig. 2.7). Como se puede observar, al incrementar el número de vueltas, el ancho de cada uno de los haces disminuye; esto comprueba que al aumentar el número de vueltas la directividad aumenta.

### 2.5.4 Variación del ángulo de disparo

Uno de los parámetros que definen la radiación de la hélice es la separación entre vueltas,  $S_\lambda$ . De acuerdo a los estudios que se han realizado, el valor óptimo para una radiación endfire es  $S_\lambda = 0.25$ . El espaciado entre las hélices se relaciona con la circunferencia de la hélice y con el ángulo de disparo por medio de la ecuación  $\alpha = \arctan(S_\lambda/C_\lambda)$ . En la sección 2.5.2 se presentaron los resultados obtenidos al variar la circunferencia de la hélice; en esta sección se varía el ángulo de disparo para conocer los efectos en las propiedades de la antena. La antena empleada tiene  $C_\lambda = 1$ ,  $N = 5$ ,  $C_{\text{aro}} = 1\lambda$  y  $d_{\text{tubo}} = 1$ .

**a) Altura  $h = 0.3\lambda$**



**Figura 2.55.** Impedancia de entrada al varía el ángulo de disparo de la hélice.

Las figuras 2.56 y 2.57 muestran respectivamente las distribuciones de corriente de las hélices y los patrones de radiación al variar los ángulo de disparo. En la figura 2.56a se presentan las distribuciones para  $\alpha = 2^\circ$  y  $\alpha = 5^\circ$ ; obviamente, esto produce una  $S_\lambda$  menor a 0.25, lo cual indica que no son óptimos para una radiación endfire. Esto se comprueba al observar los niveles de rebote de potencia en el extremo abierto de la hélice. Como se dijo anteriormente, se eligió el caso para  $h = 0.3\lambda$  dado que presentaba el menor rebote. Para los ángulos mencionados anteriormente ( $\alpha = 2^\circ$  y  $\alpha = 5^\circ$ ) se pierde totalmente esta característica.

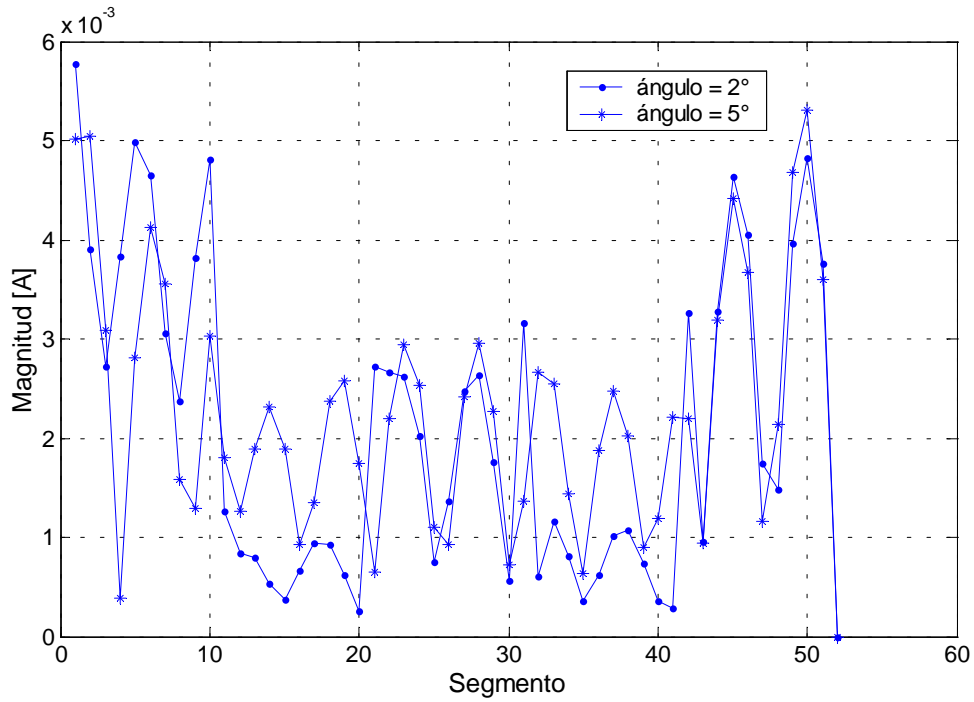


Figura 2.56a. Distribución de corriente para  $\alpha = 2^\circ$  y  $\alpha = 5^\circ$ .

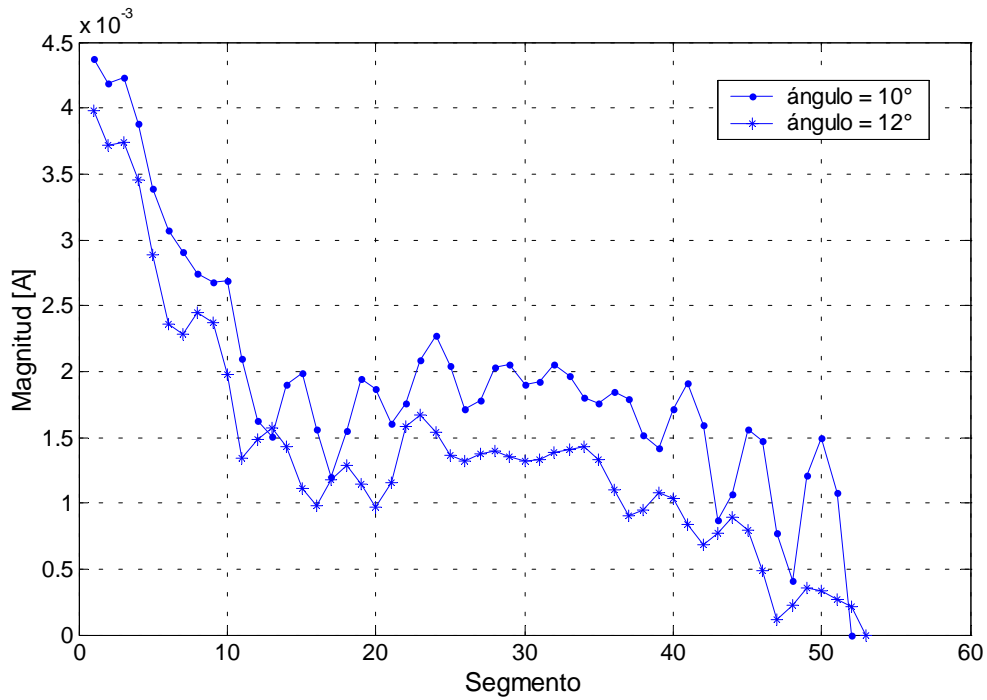


Figura 2.56b. Distribución de corriente para  $\alpha = 10^\circ$  y  $\alpha = 12^\circ$ .

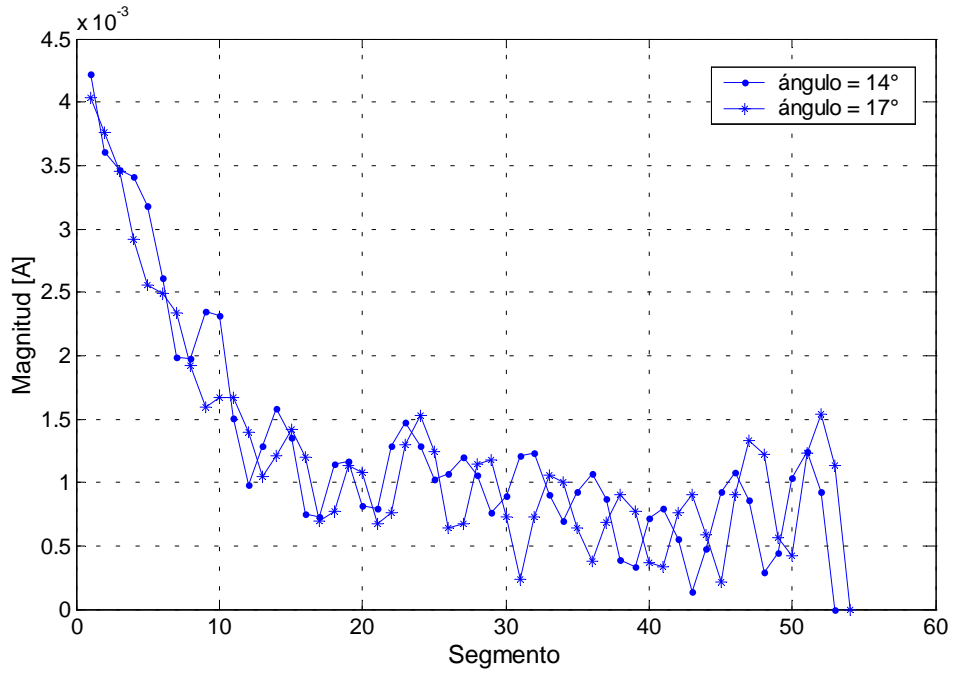


Figura 2.56c. Distribución de corriente para  $\alpha = 14^\circ$  y  $\alpha = 17^\circ$ .

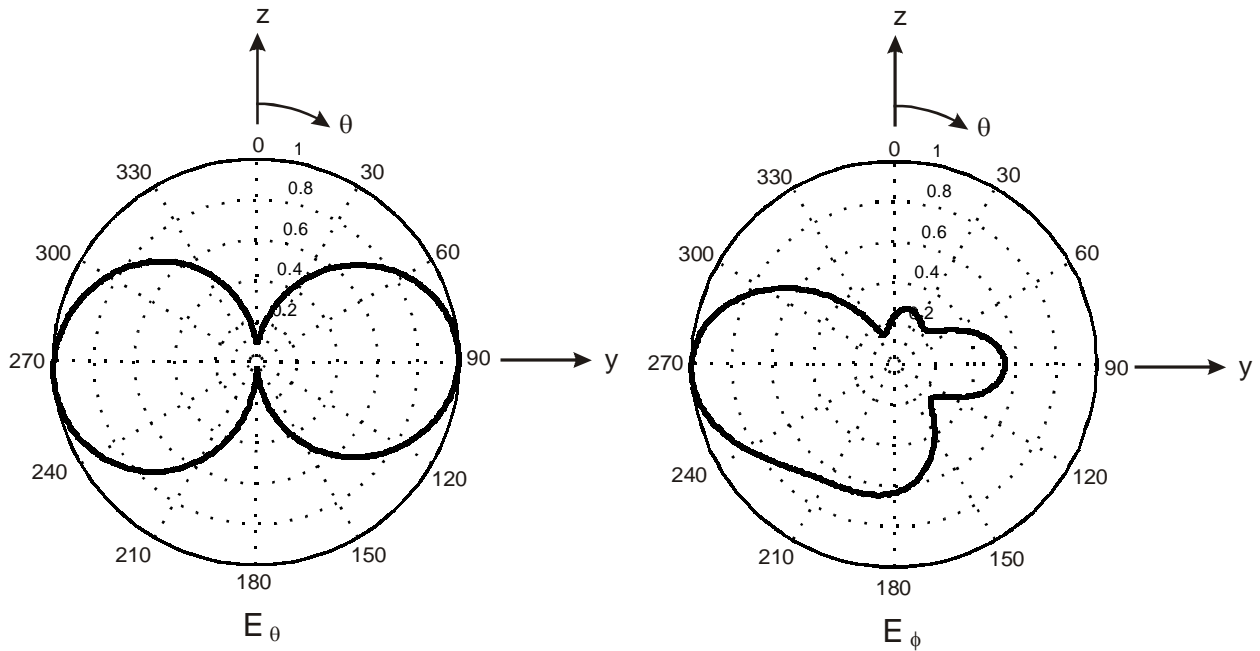


Figura 2.57a. Patrón de radiación para  $\alpha = 2^\circ$ .

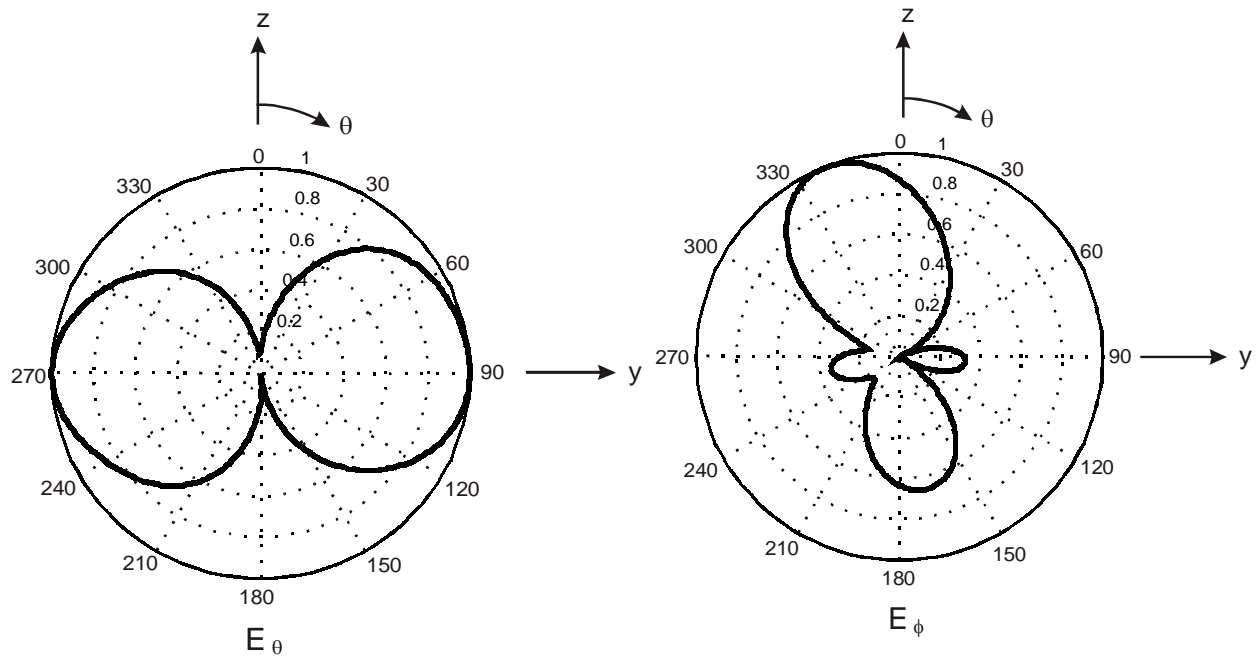


Figura 2.57b. Patrón de radiación para  $\alpha = 5^\circ$ .

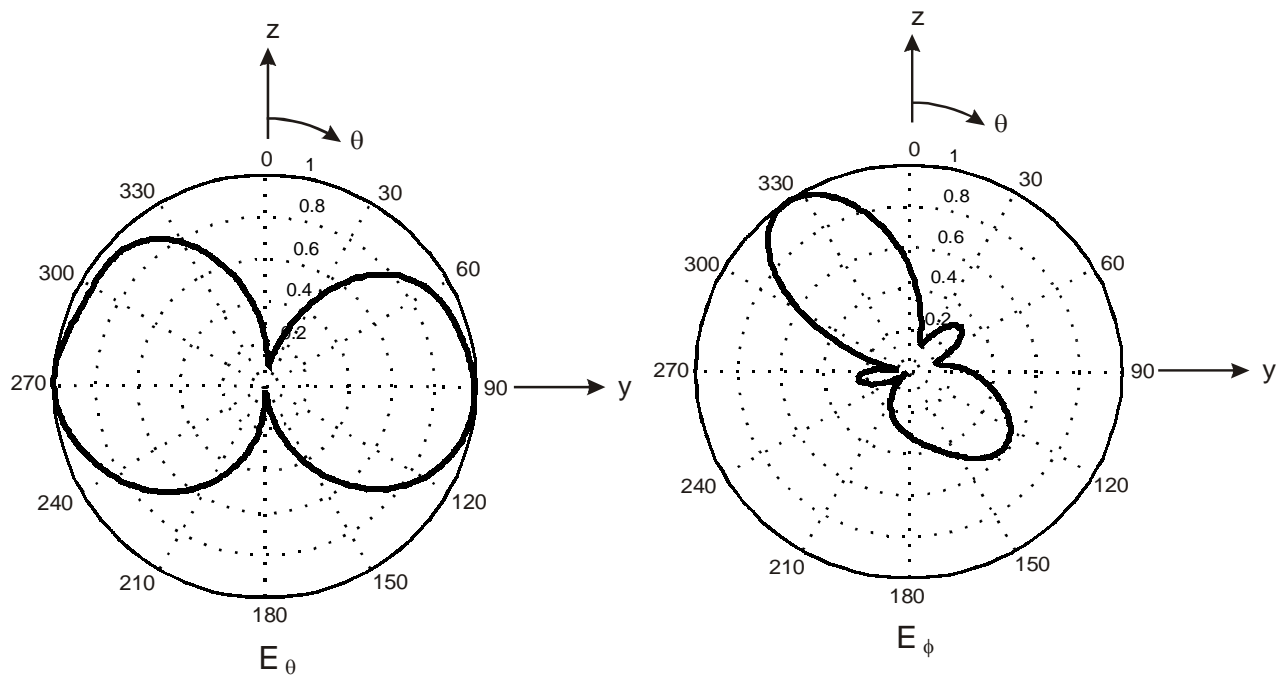


Figura 2.57c. Patrón de radiación para  $\alpha = 10^\circ$ .



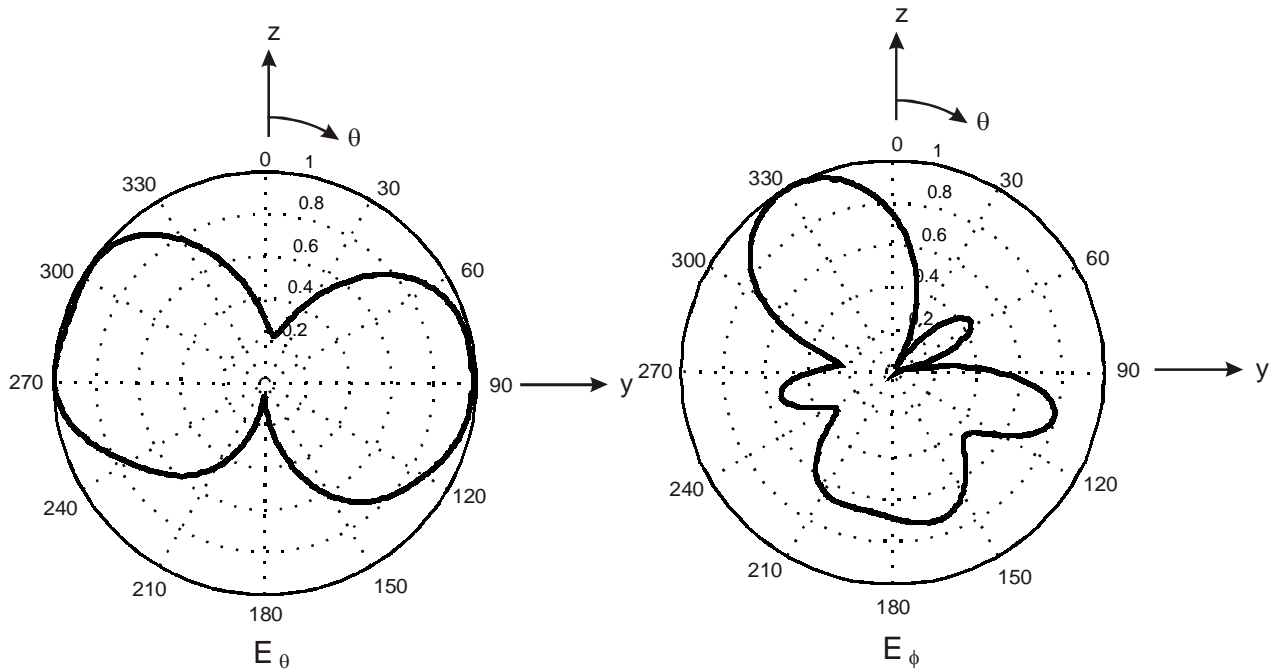


Figura 2.57d. Patrón de radiación para  $\alpha = 12^\circ$ .

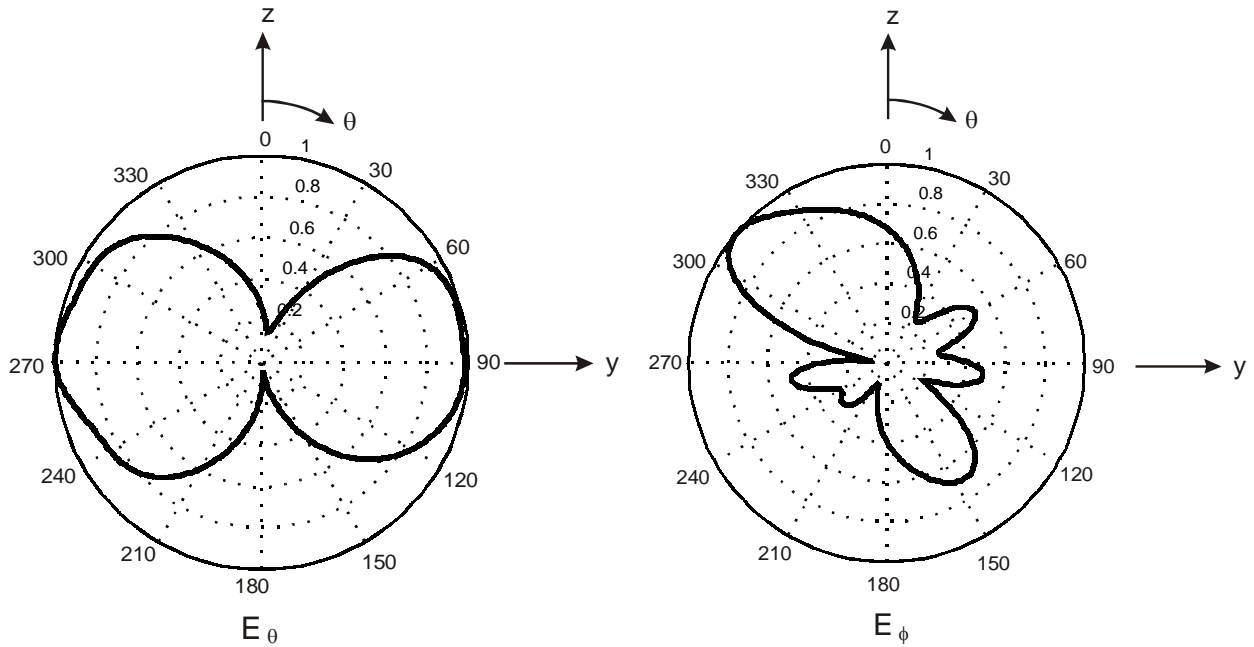
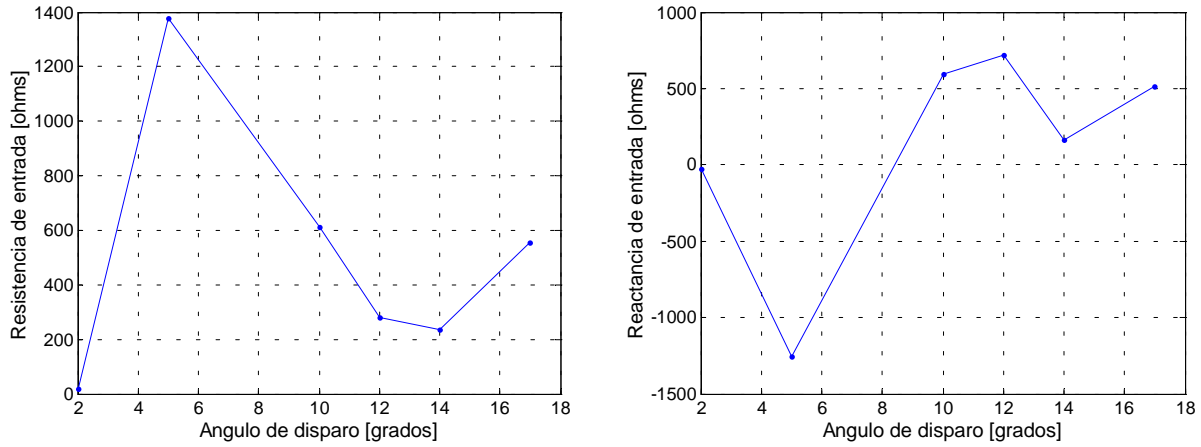


Figura 2.57d. Patrón de radiación para  $\alpha = 14^\circ$ .

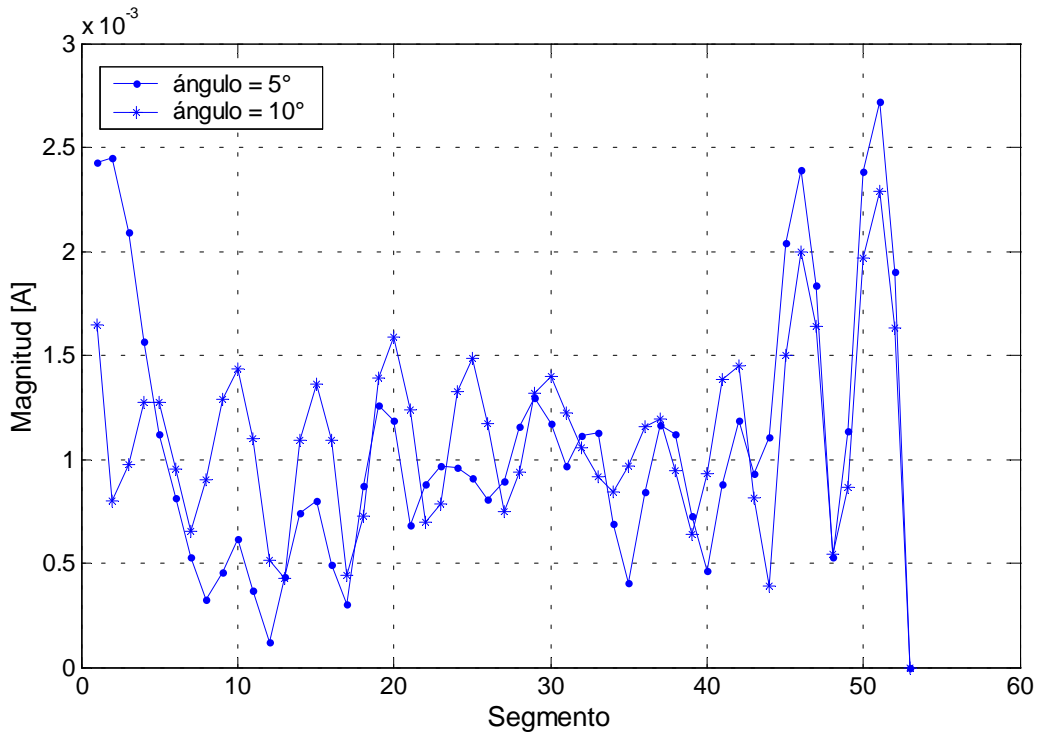
Se concluye que la modificación en ángulo de disparo no es suficiente para eliminar la radiación dominante del dipolo de  $0.3\lambda$ . También, se observa que el ángulo de disparo es un parámetro importante de la antena helicoidal para disminuir el rebote en el extremo abierto de la hélice.

**b) Altura  $h = 0$**

En esta sección se presentan las características correspondientes a una antena con  $h = 0$ .



**Figura 2.58.** Impedancia de entrada al variar el ángulo de disparo.



**Figura 2.59a.** Distribución de corriente para  $\alpha = 5^\circ$  y  $\alpha = 10^\circ$ .

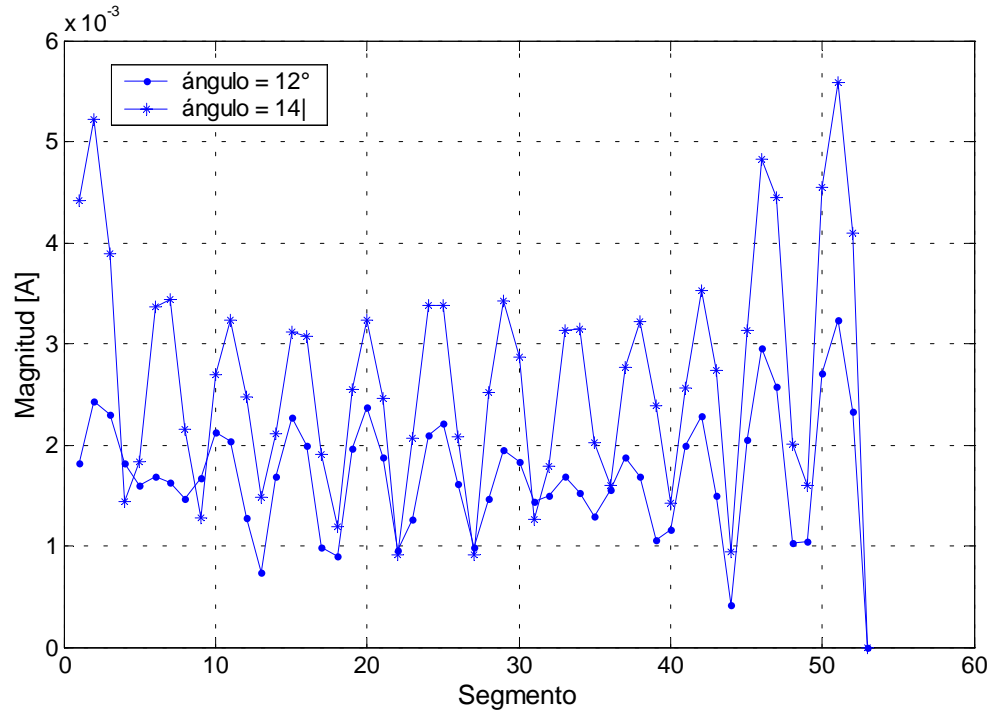


Figura 2.59b. Distribución de corriente para  $\alpha = 12^\circ$  y  $\alpha = 14^\circ$ .

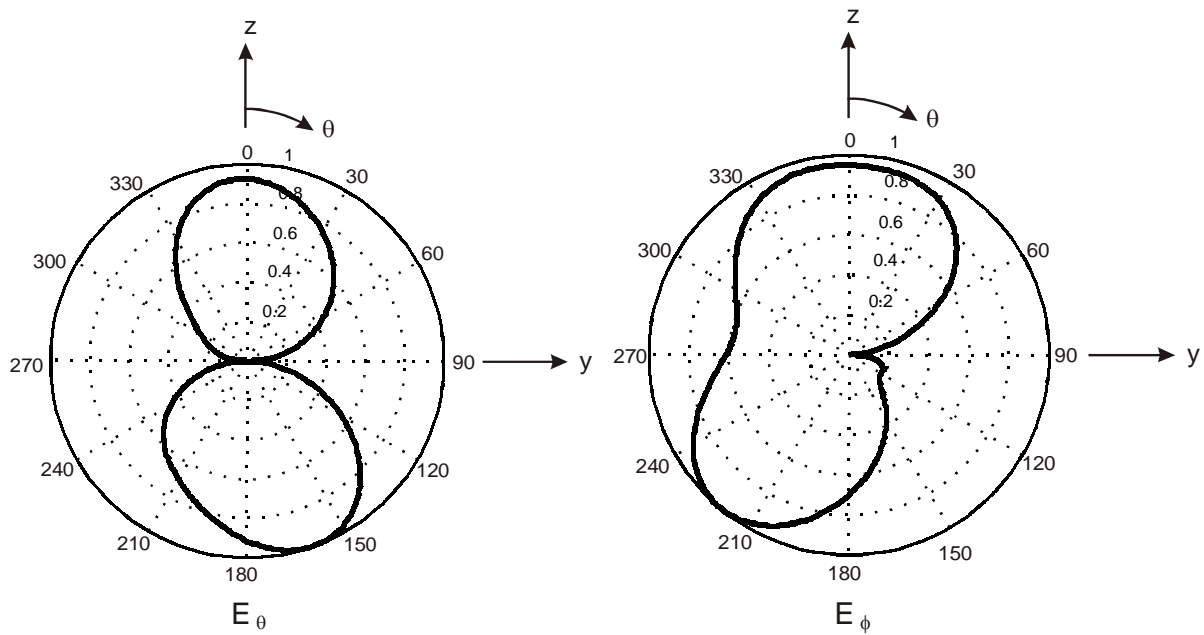


Figura 2.60a. Patrón de radiación para  $\alpha = 5^\circ$ .

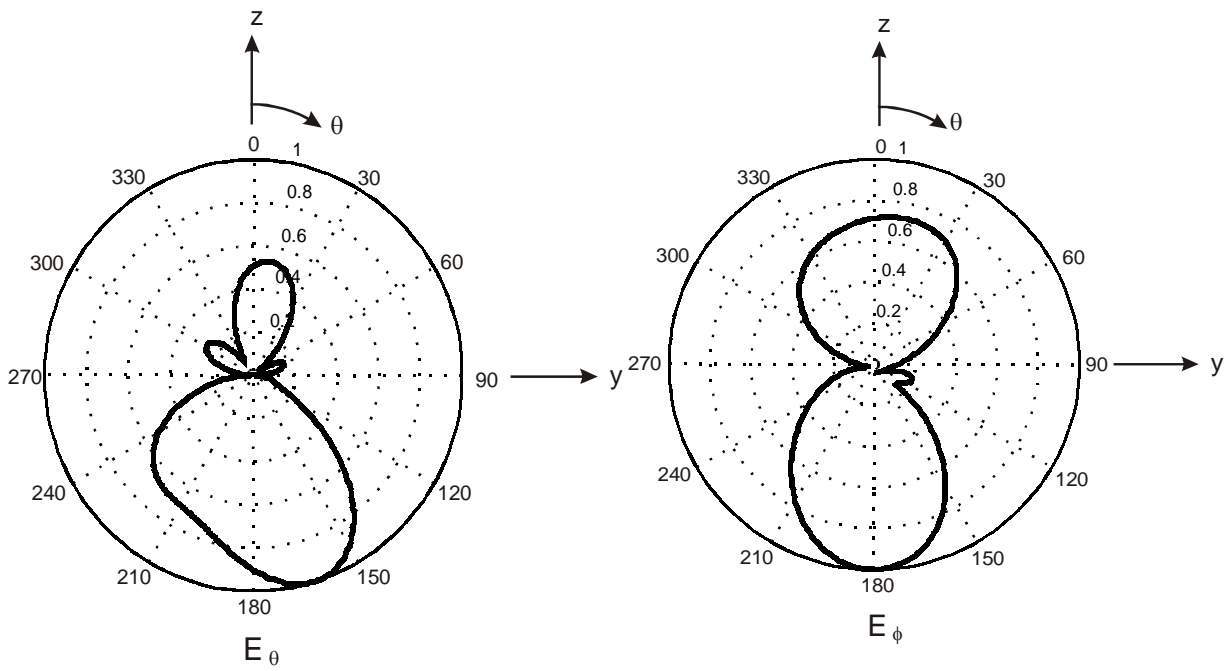


Figura 2.60b. Patrón de radiación para  $\alpha = 10^\circ$ .

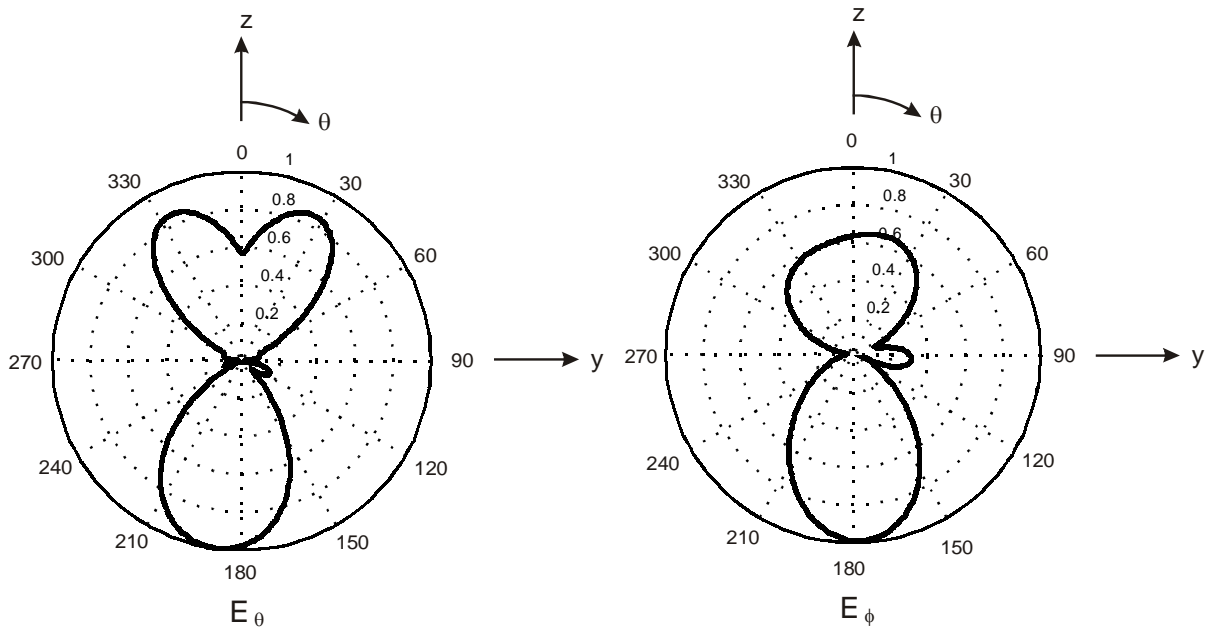
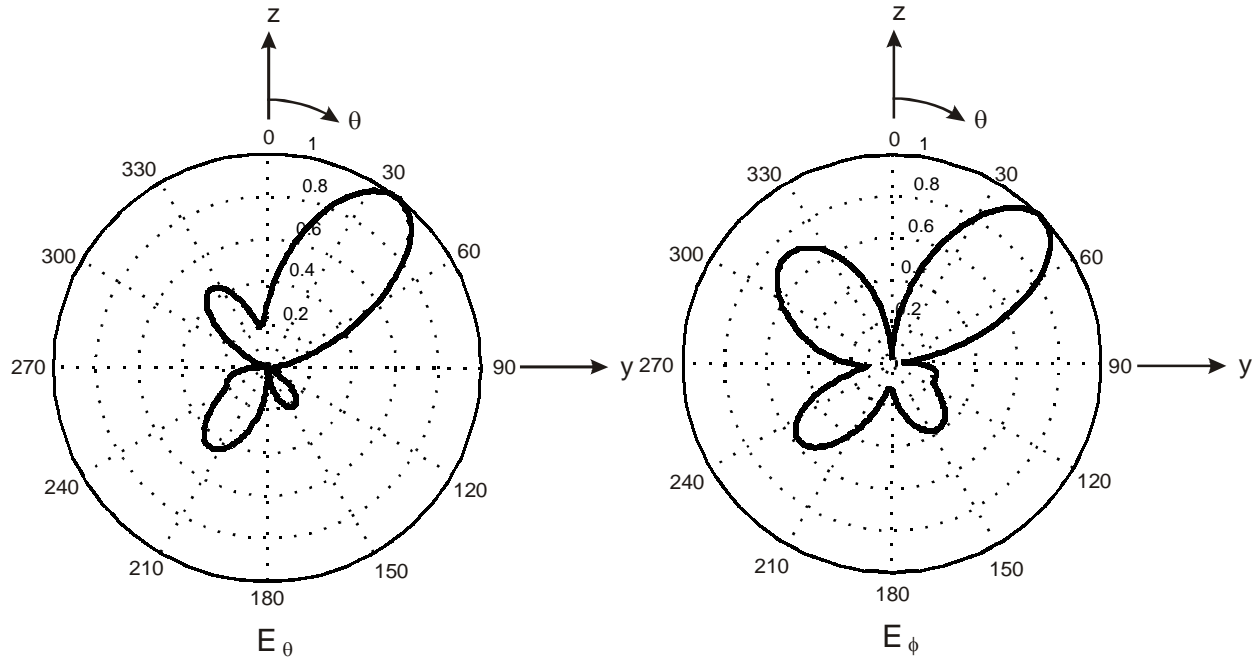


Figura 2.60c. Patrón de radiación para  $\alpha = 12^\circ$ .



**Figura 2.60d.** Patrón de radiación para  $\alpha = 14^\circ$ .

La figura 2.58 muestra la impedancia de entrada al variar el ángulo de disparo; se observa que para  $\alpha = 5^\circ$  la impedancia se eleva a valores muy altos, alcanzando miles de ohms que ya es una impedancia muy alta para una antena. Por lo que respecta a ángulo mayores, los valores de la resistencia de entrada oscilan entre  $200 \Omega$  y  $500 \Omega$ , mientras que la parte reactiva lo hace entre  $250 \Omega$  y  $600 \Omega$ .

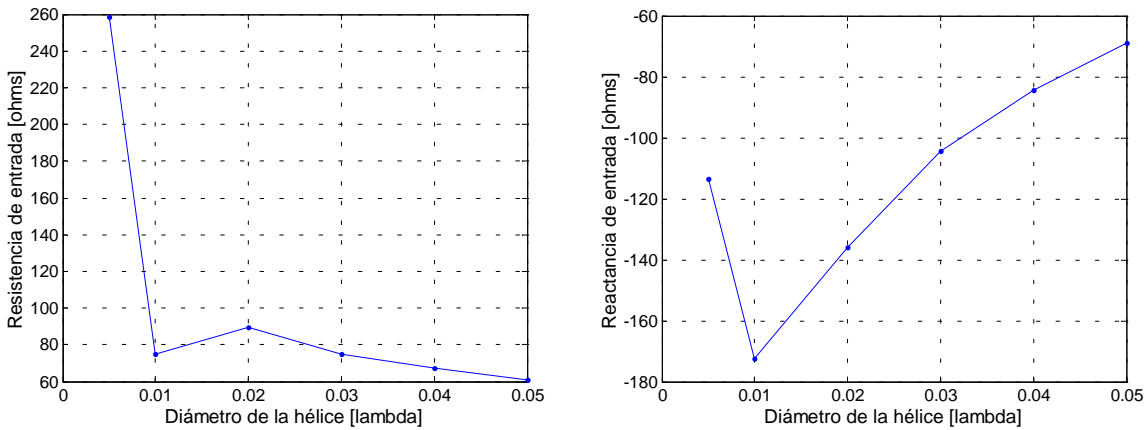
Con lo referente a las distribuciones de corriente, una variación en el ángulo de disparo no modifica en gran proporción los rebotes en el extremo abierto de la hélice. Asimismo, se presenta un comportamiento no esperado en la distribución de corriente de una antena helicoidal, ya que a la entrada se presenta una decremento de la señal, seguida de una sección en la cual se puede ver como una onda estacionaria y finalmente un rebote muy alto. De acuerdo a la teoría, a la salida debe de haber un rebote, pero pequeño.

En los patrones de radiación sí hay cambios considerables, ya que para un ángulo de disparo de  $5^\circ$  se tiene una patrón de radiación en el plano de elevación similar al de una hélice aislada (Fig. 2.38a). Como se puede observar en este caso, la proporción entre la dirección  $\mathbf{a}_\phi$  y  $\mathbf{a}_z$  es mayor ya que  $S_\lambda$  es muy pequeña. Con respecto a ángulo mayores a  $5^\circ$  ( $10^\circ$ ,  $12^\circ$  y  $14^\circ$ ), la radiación endfire aumenta conforme se incrementa el ángulo de disparo. Se observa que para  $\alpha = 14^\circ$ , el patrón de radiación tiende hacia una radiación cónica.

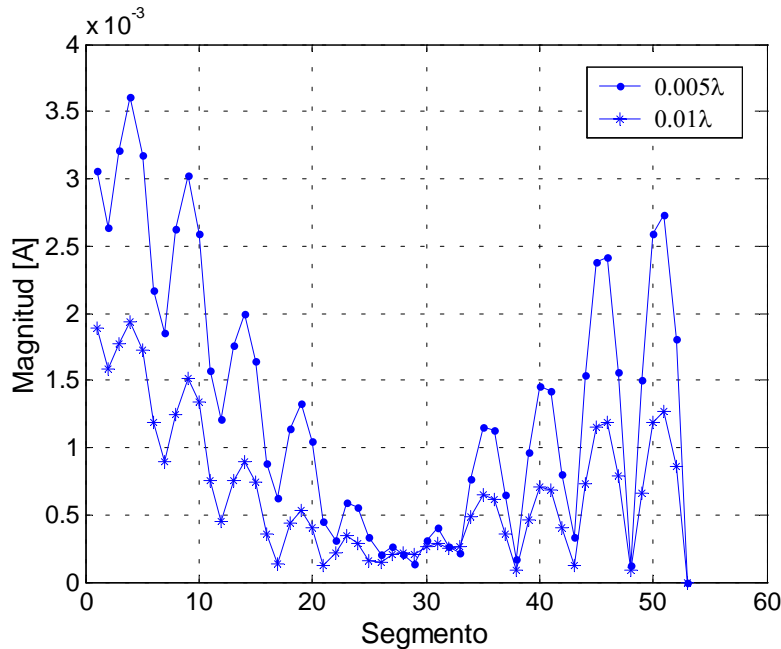
### 2.5.5 Variaciones en el diámetro del conductor de la hélice

De acuerdo con la investigación realizada en el capítulo 1 (Tice, 1949), el diámetro del conductor de la hélice no modifica las propiedades de la antena helicoidal. En esta sección se realizan las simulaciones necesarias para conocer los efectos de una antena con aro en lugar de plano de tierra. La antena simulada tiene como características:  $N = 5$ ,  $C_\lambda = 1$ ,  $C_{\text{aro}} = 1\lambda$  y  $\alpha = 12^\circ$ .

**a) Altura  $h = 0.3\lambda$**



**Figura 2.61.** Impedancia de entrada al variar el diámetro del conductor de la hélice.



**Figura 2.62a.** Distribución de corriente para  $d_{\text{hélice}} = 0.005\lambda$  y  $d_{\text{hélice}} = 0.01\lambda$ .

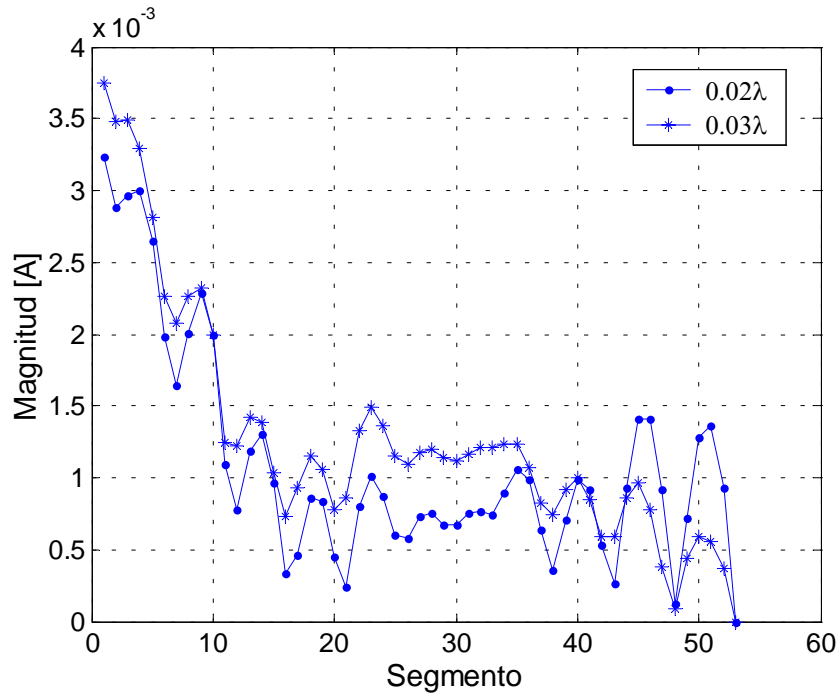


Figura 2.62b. Distribución de corriente para  $d_{hélice} = 0.02\lambda$  y  $d_{hélice} = 0.03\lambda$ .

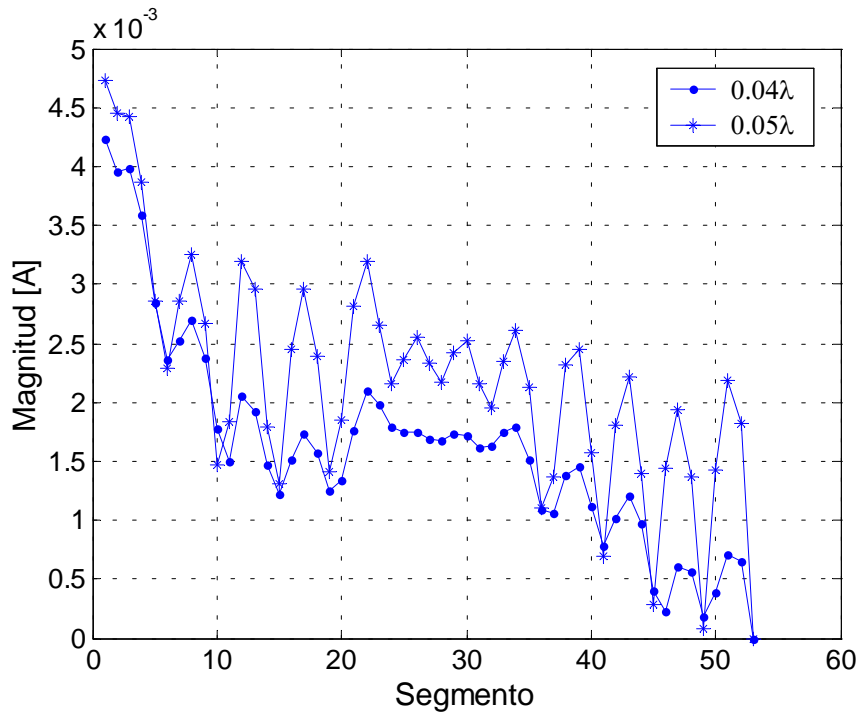


Figura 2.62c. Distribución de corriente para  $d_{hélice} = 0.04\lambda$  y  $d_{hélice} = 0.05\lambda$ .

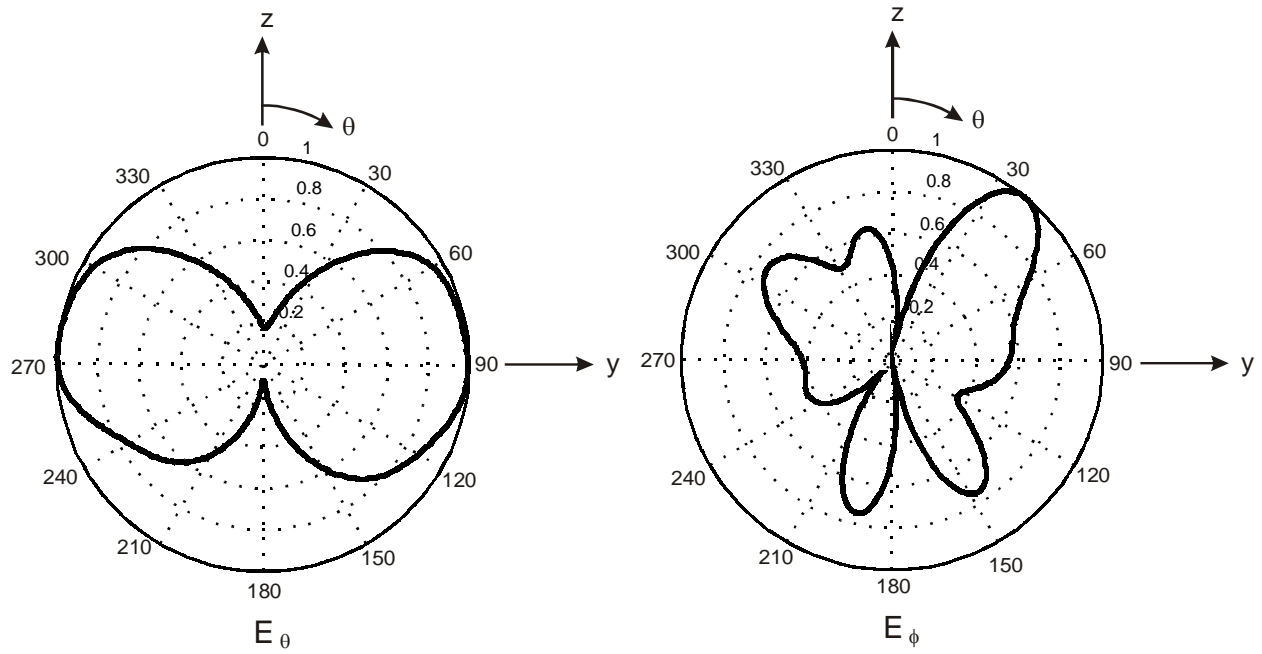


Figura 2.63a. Patrón de radiación para  $d_{hélice} = 0.01\lambda$ .

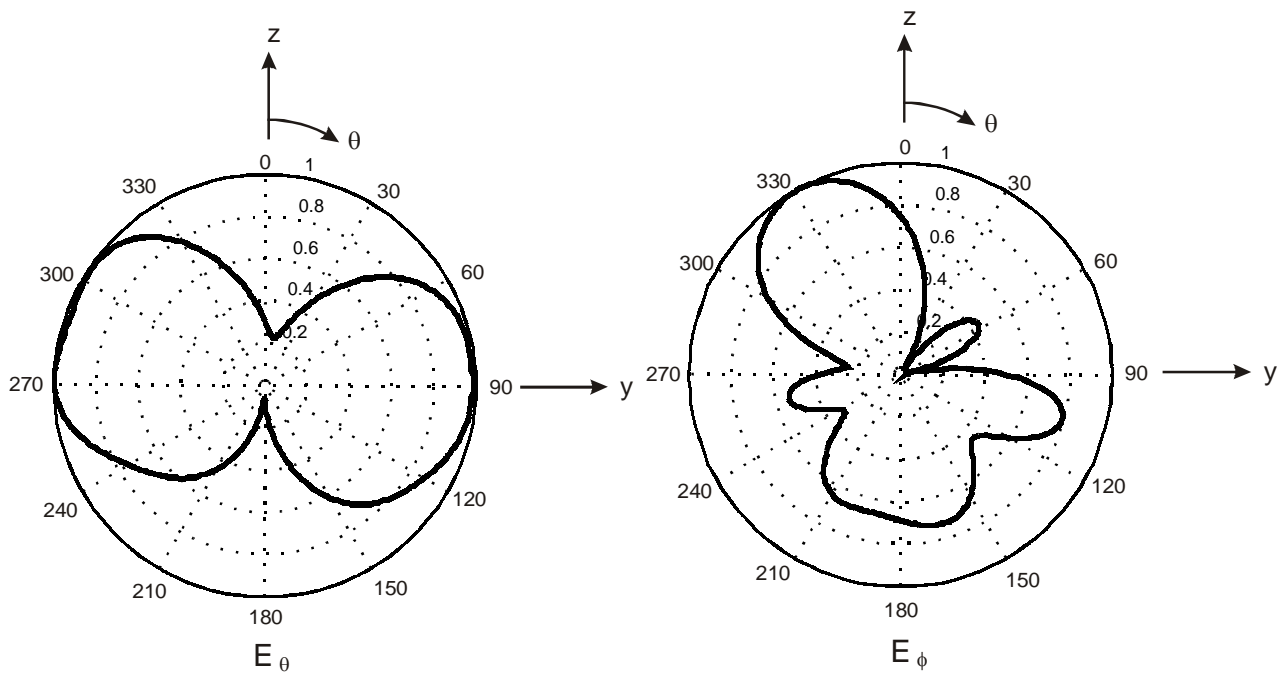
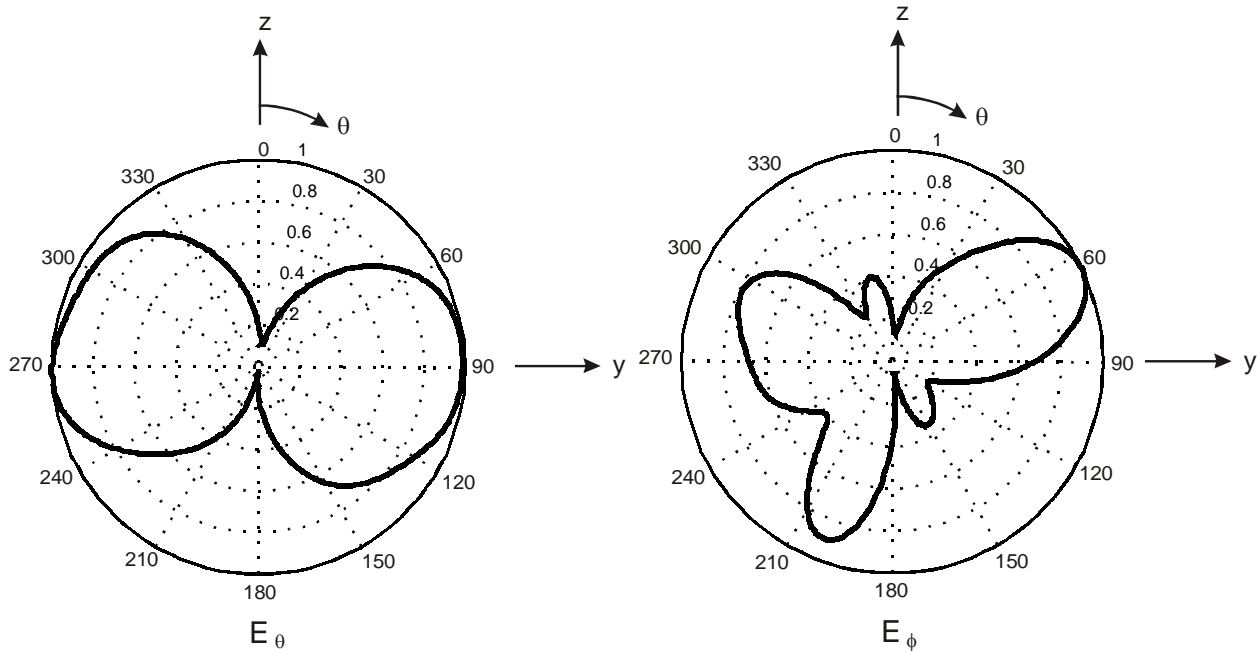


Figura 2.63b. Patrón de radiación para  $d_{hélice} = 0.03\lambda$ .





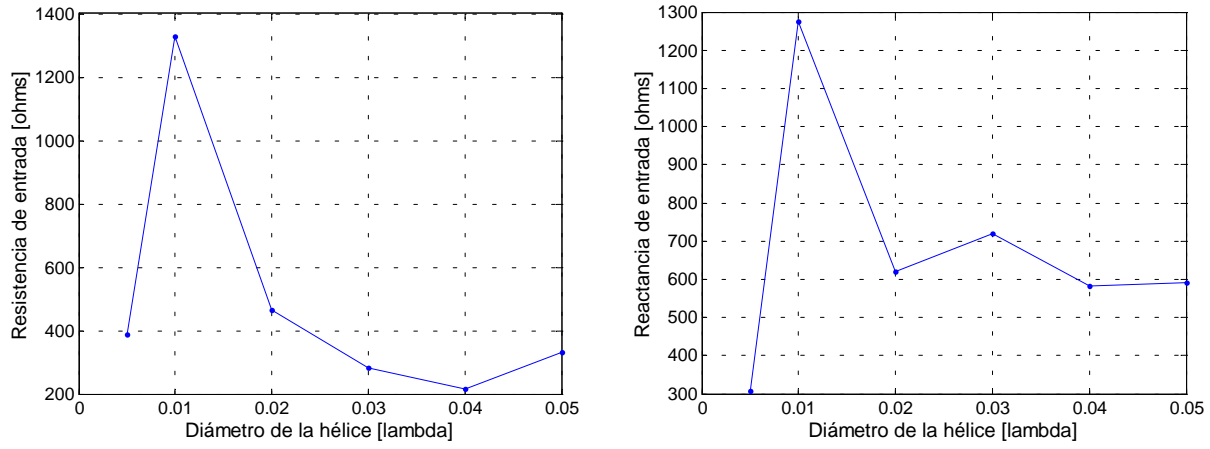
**Figura 2.63c.** Patrón de radiación para  $d_{hélice} = 0.05\lambda$ .

De la figura 2.61 se observa que para diámetros mayores a  $0.01\lambda$  la variación en la resistencia de entrada es muy pequeña (la variación máxima es de aproximadamente  $10 \Omega$ ). Con lo referente a la reactancia de entrada, a partir de  $0.01\lambda$  de diámetro se tiene un incremento prácticamente lineal del valor. El menor valor de reactancia se registra para un diámetro de  $0.01\lambda$ .

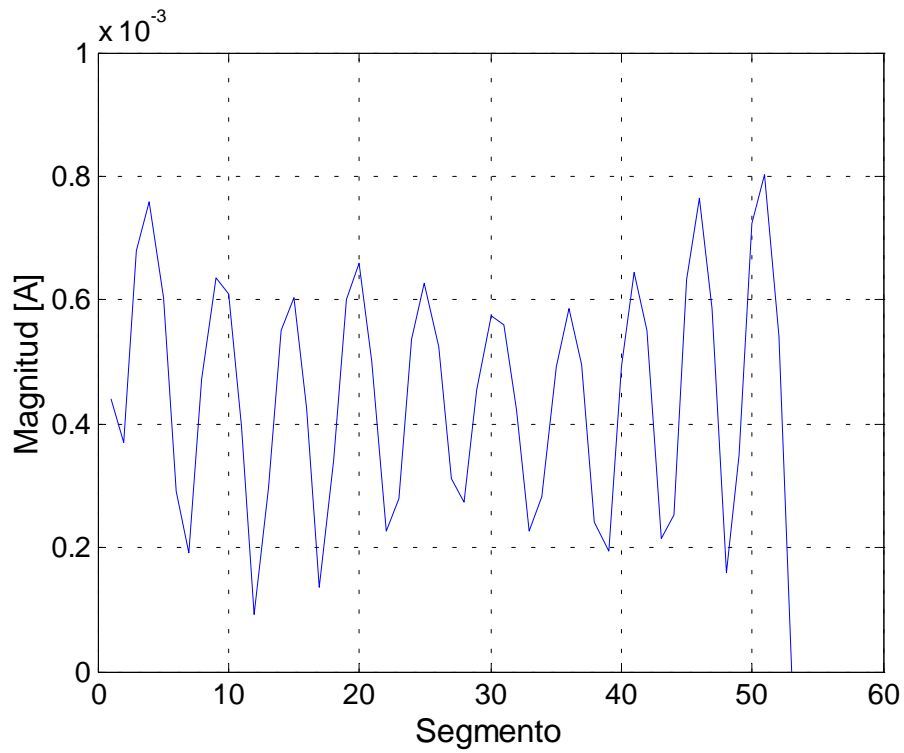
Las mayores discrepancias en la distribución de corriente se presentan en los diámetros de  $0.005\lambda$  y  $0.05\lambda$ . Con estos diámetros del tubo conductor se observa un comportamiento atípico de la corriente sobre la hélice. Cabe mencionar que el MM tiene errores de precisión para tubos muy delgados así como para tubos muy gruesos, por lo que se emplearán diámetro intermedios entre estos valores.

Las figuras 2.63a, 2.63b y 2.63c muestran los patrones de radiación obtenidos para tres diferentes diámetros. De estas figuras se concluye que el diámetro del conductor no afecta la propiedad de radiación de la antena, lo cual verifica con lo presentado en la sección 1.5.1.

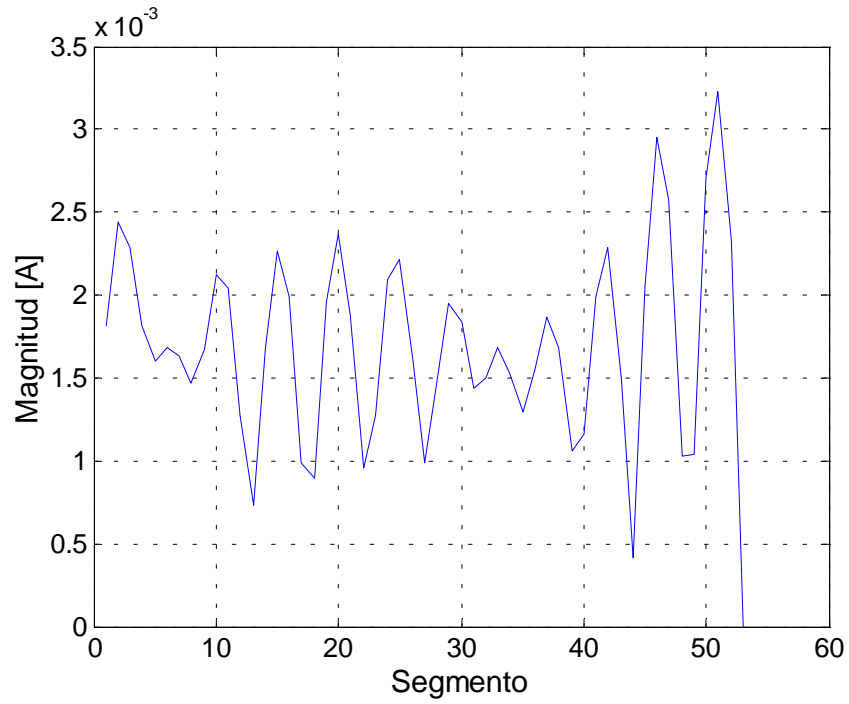
b) **Altura  $h = 0$**



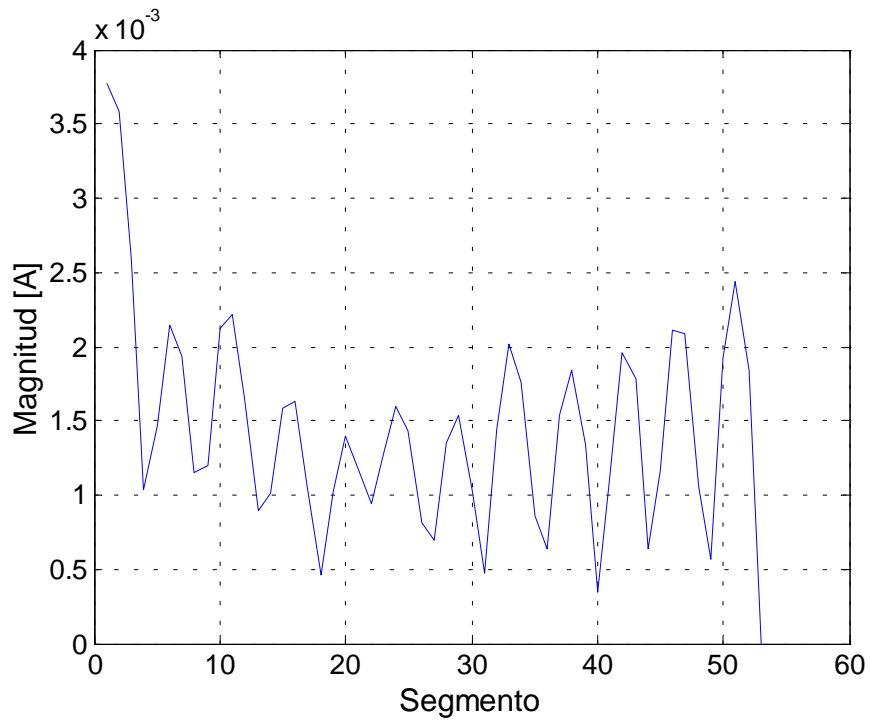
**Figura 2.64.** Impedancia de entrada para diferentes



**Figura 2.65a.** Distribución de corriente para  $d_{hélice} = 0.01\lambda$ .



**Figura 2.65b.** Distribución de corriente para  $d_{hélice} = 0.03\lambda$ .



**Figura 2.65c.** Distribución de corriente para  $d_{hélice} = 0.05\lambda$ .

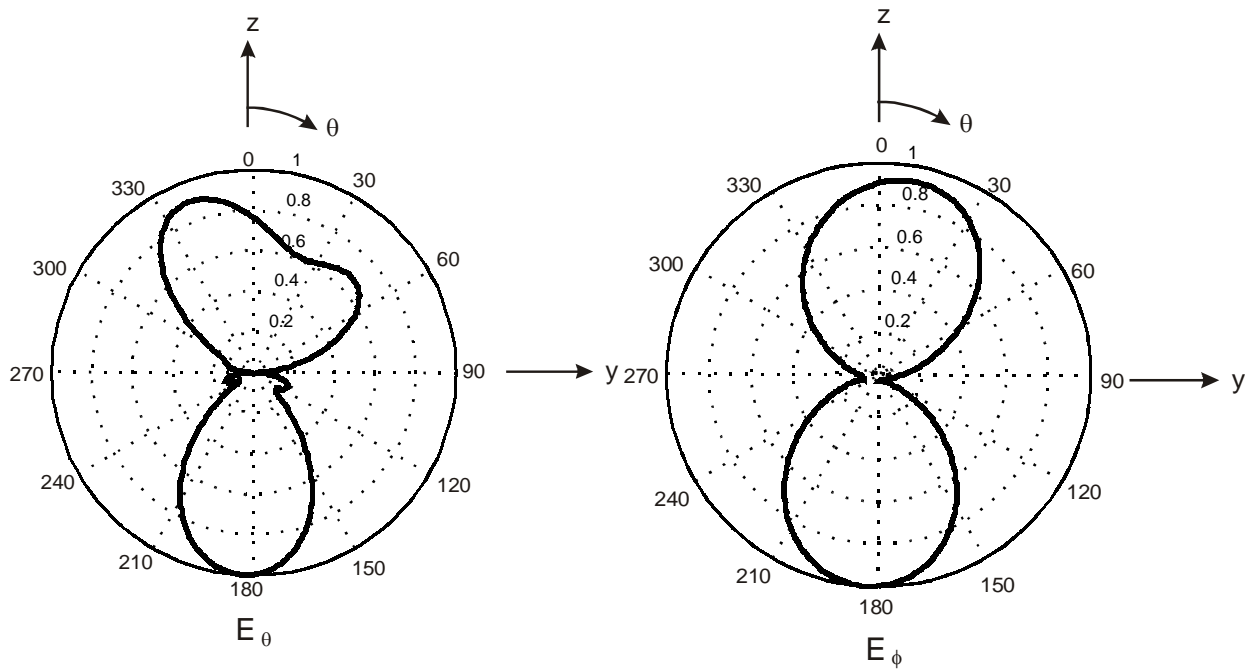


Figura 2.66a. Patrón de radiación para  $d_{hélice} = 0.01\lambda$ .

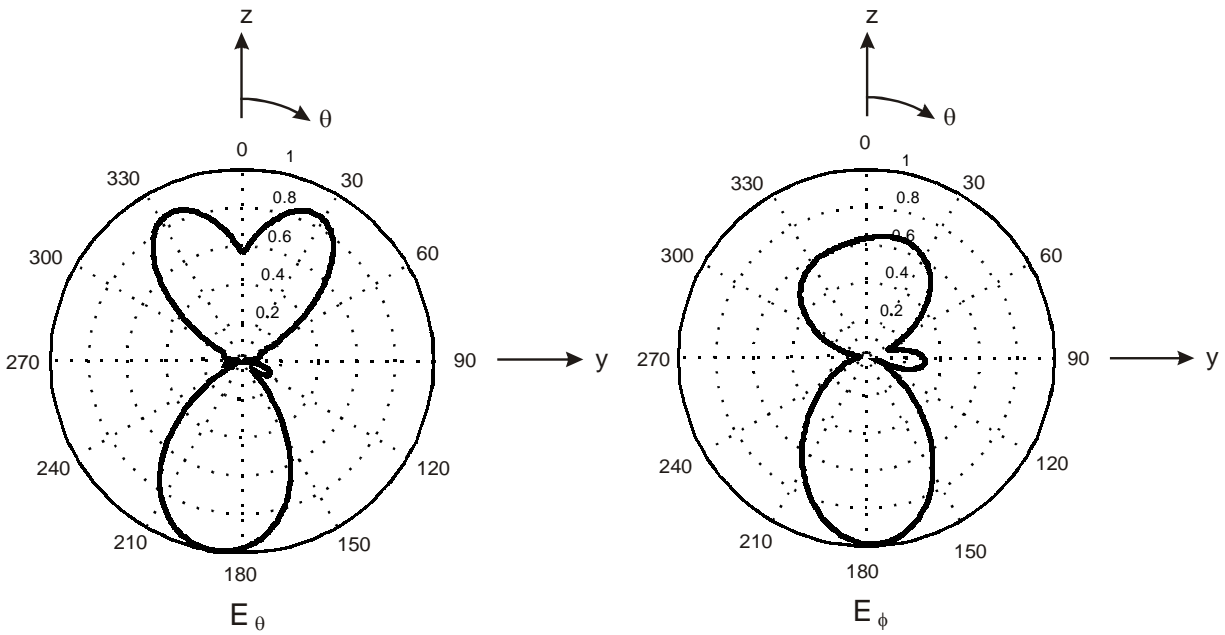
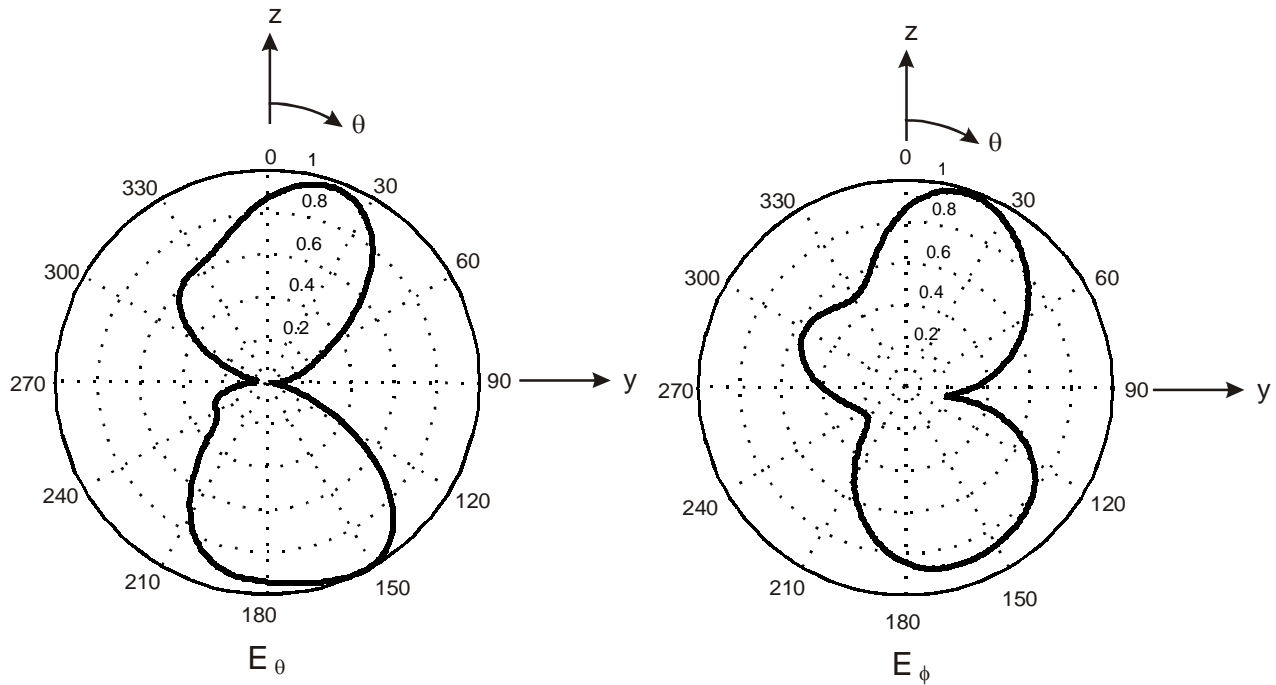


Figura 2.66b. Patrón de radiación para  $d_{hélice} = 0.03\lambda$ .



**Figura 2.66c.** Patrón de radiación para  $d_{hélice} = 0.05\lambda$ .

De la gráfica de la impedancia de entrada se observa que para un diámetro del conductor mayor que  $0.02\lambda$  los valores difieren muy poco. El menor valor de la resistencia de entrada se reporta para un diámetro igual a  $0.04\lambda$ , asimismo este valor registra el menor valor de reactancia.

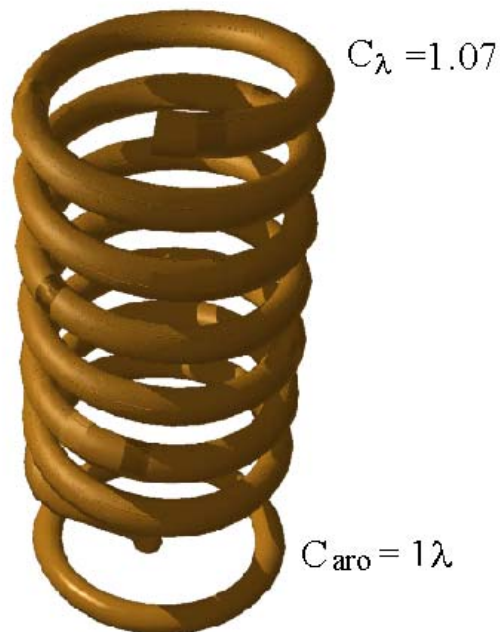
Los patrones mostrados en la figura 2.66 describen un comportamiento peculiar al variar el diámetro del conductor de la hélice, ya que para  $0.01\lambda$  el lóbulo endfire derecho presenta una mayor ganancia que el lóbulo endfire izquierdo. Para  $0.03\lambda$  se tiene una simetría en el lóbulo endfire, pero no así en el backfire. Finalmente, para  $0.05\lambda$  de nuevo se presenta una asimetría en los lóbulos endfire, ya que ahora quien presenta la mayor amplitud es el lóbulo izquierdo. Al comparar las figuras 2.66a y 2.66c parecería ser que  $E_\theta$  sufrió un giro sobre su eje.

### 2.5.6 Antena óptima

En las secciones anteriores se presentaron las características obtenidas del programa realizado por medio del MM al simular una antena helicoidal con un aro en lugar de plano de tierra. Con dicho programa se realizaron modificaciones a la antena para eliminar la radiación backfire que se presentaba.

El hablar de una antena óptima depende del propósito para el cual se quiera realizar. Para efectos de esta tesis, se entenderá como antena óptima aquella que tenga la mejor radiación endfire.

De acuerdo con los resultados obtenidos, la antena propuesta como óptima tiene las siguientes características:  $N = 7$ ,  $\alpha = 12^\circ$ ,  $C_\lambda = 1.07$ ,  $C_{\text{aro}} = 1\lambda$ ,  $h = 0$  y dado que el diámetro del tubo no cambia las propiedades de la antena, se tomará como  $0.03\lambda$ . Para el diseño de esta antena se consideró un frecuencia de operación de 10 GHz.



**Figura 2.67.** Geometría de la antena considerada como óptima.

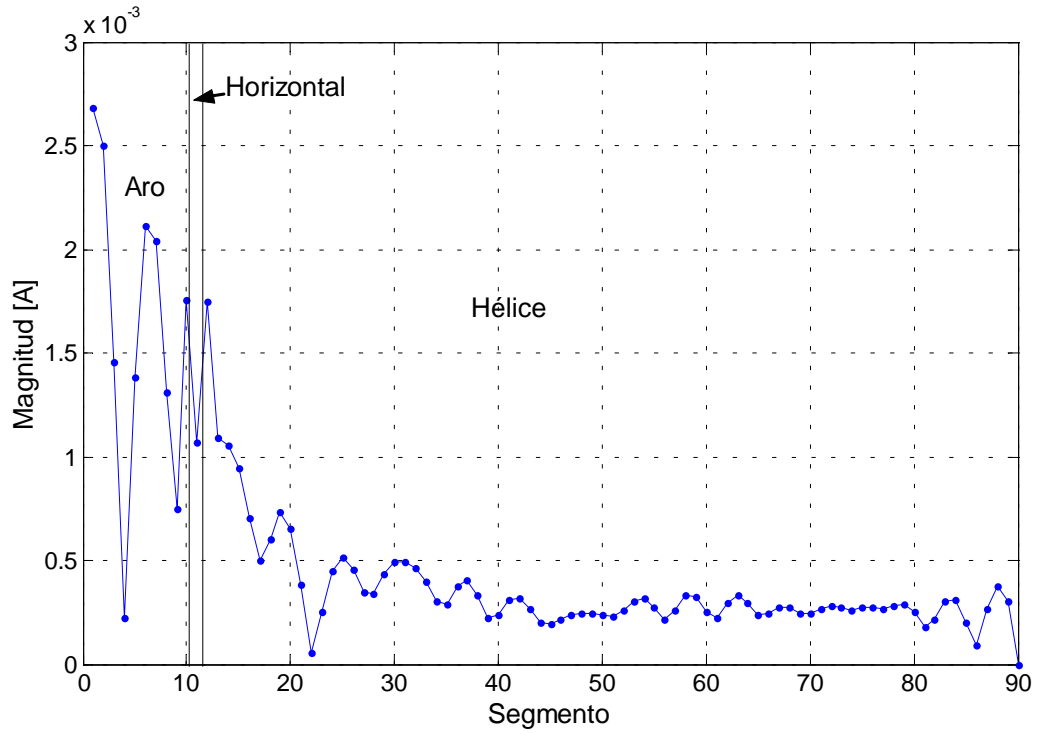


Figura 2.68a. Distribución de corriente de la antena propuesta como óptima.

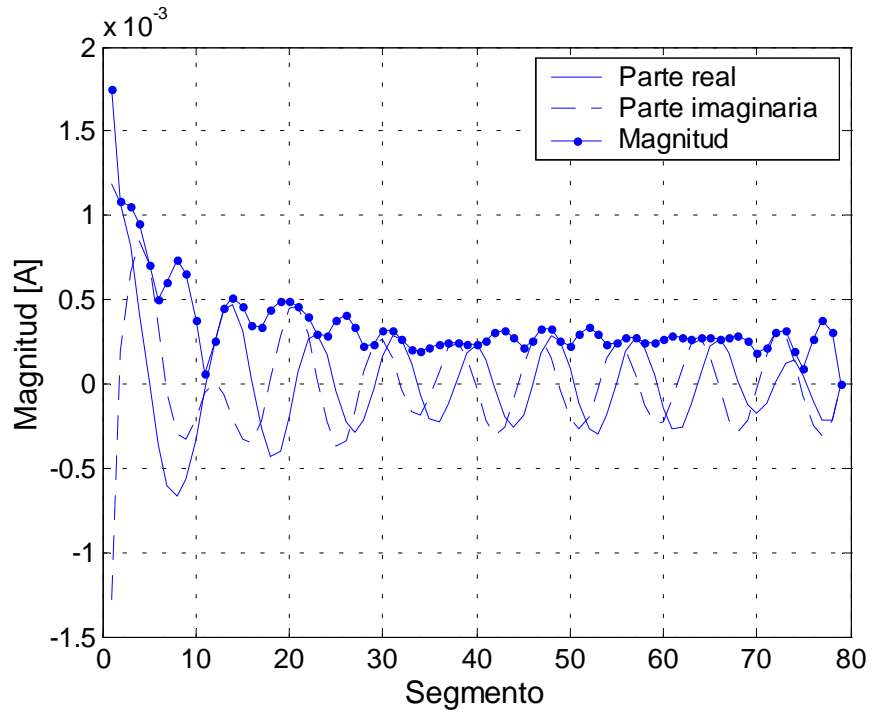


Figura 2.68b. Distribución de corriente obtenida a todo lo largo de la hélice.

Las figuras 2.68a y 2.68b muestran respectivamente la distribución de corriente a todo lo largo de la configuración propuesta y únicamente a todo lo largo de la hélice. De la figura 2.68a se observa que quien posee la mayor amplitud de corriente es el aro, por lo cual se espera que la radiación sea mayormente backfire.

La figura 2.68b muestra las componentes real e imaginaria de la corriente, al comparar esta figura con la obtenida por Nakano (Fig. 2.10b) al variar el radio de un rejilla como plano de tierra se perciben muy similares. Lamentablemente, el doctor Nakano no reportó en su investigación la corrientes que se presentan en la rejilla para conocer si también en ese caso la máxima amplitud de la corriente se registra en la rejilla.

Dentro de las diferencias que se observan, destaca el hecho de la posición del cero de la corriente ya que para nuestro caso se ubica aproximadamente a  $1\lambda$  (segmento 11) del inicio de la hélice, mientras que en la investigación realizada por Nakano el cero de la corriente se ubica a  $2.5\lambda$  del inicio de la hélice

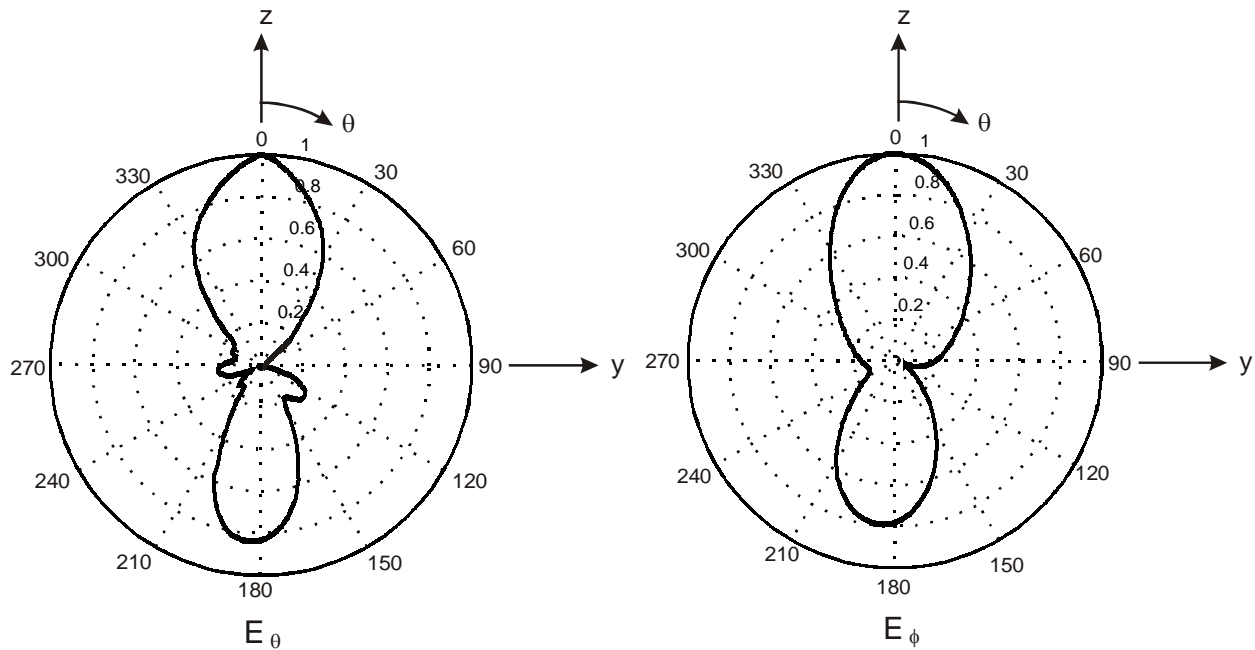


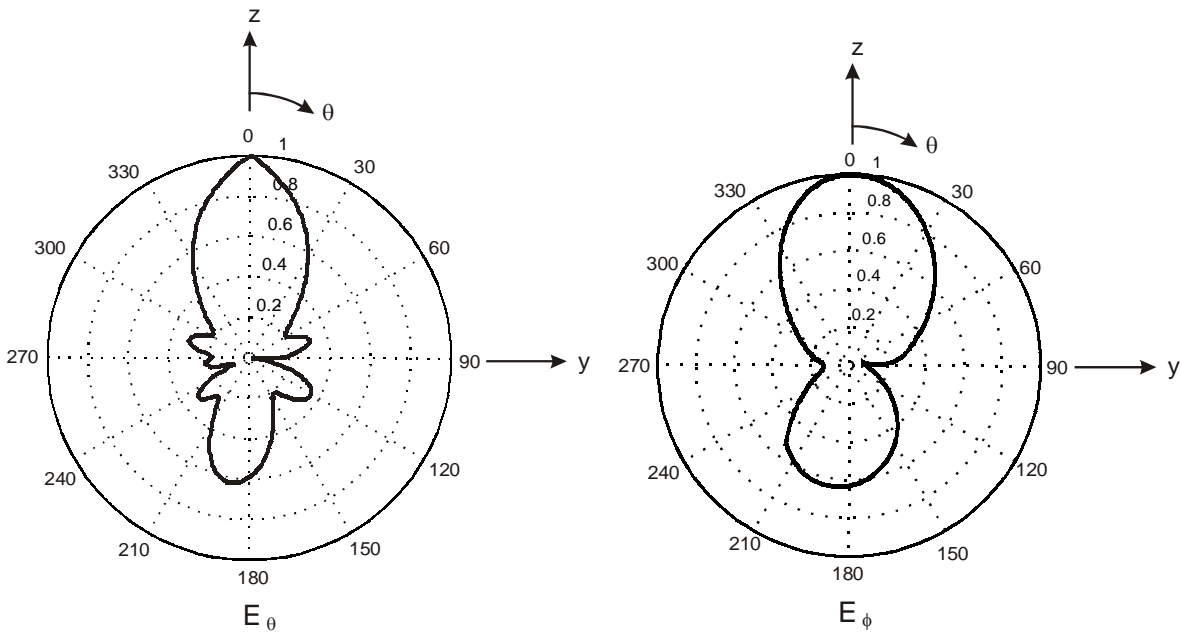
Figura 2.69a. Patrón de radiación.



De los patrones de radiación mostrados en la figura anterior se observa que el lóbulo endfire y el lóbulo backfire tienen ganancias muy similares, es decir la relación frente-atrás es cercana a uno. El lóbulo endfire posee un HPBW igual a  $40^\circ$

Al comparar este patrón con el obtenido por Nakano, se observa que en ambos casos la relación frente atrás es ligeramente menor que uno, pero en el caso de Nakano la radiación es mayormente backfire, y en el caso de la simulación por el MM, a nivel de ganancia máxima, son iguales, pero la relación frente-atrás presenta un valor similar.

Con lo que respecta a la impedancia de entrada, Nakano reporte un resistencia de entrada cercana a los  $100 \Omega$  y una reactancia de entrada casi nula; en nuestro caso se obtiene el valor  $135.77 -125.12i$ . El valor presentado por Nakano es un valor experimental y el nuestro es un valor totalmente simulado, es decir se debe de tomar este valor bajo las reservas del método de momentos para geometrías curvas (Apéndice D).

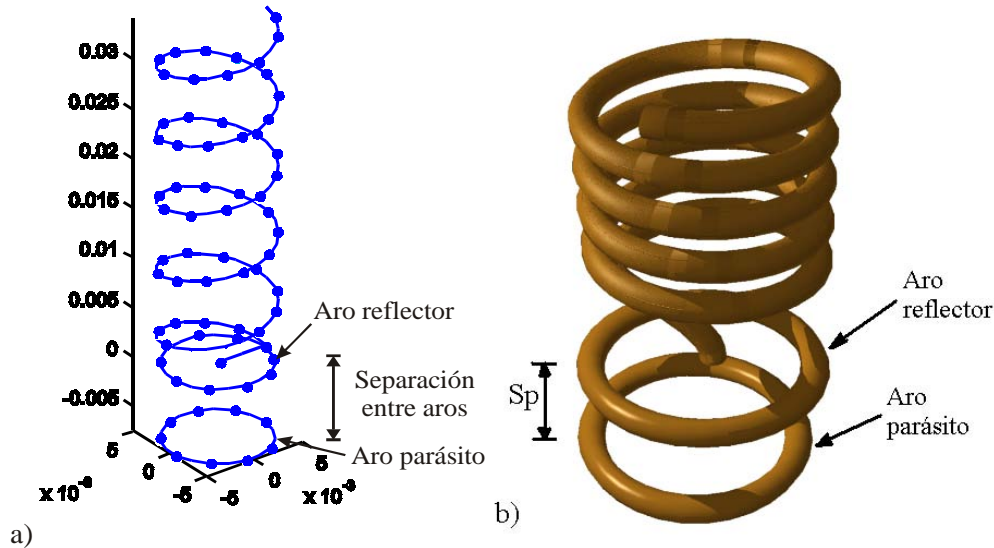


**Figura 2.69b.** Patrón de radiación considerando únicamente la radiación del aro para  $z > 0$ .

La figura 2.69b muestra los patrones de radiación obtenidos al despreciar la radiación backfire del aro debida a un sustrato dieléctrico (Hegase, 1994). Al comparar las figura 2.69a y 2.69b, se observa que la radiación backfire del arreglo disminuye en un 25%, encontrándose una característica adicional si se quisiera fabricar esta configuración.

### 2.5.7 Antena con aros parásitos

Empleando la geometría de la antena considerada como óptima, se colocará una aro parásito a una cierta distancia del aro reflector (Fig. 2.70). El objetivo de esta sección es conocer la separación a la cual el aro parásito empieza a ayudar a la radiación endfire y se empleará como comparación el artículo publicado por Zainud-Deen (Zainud-Deen,1998), atendiendo a las diferencias que se presenten.



**Figura 2.70.** Antena helicoidal con aros parásitos. a) Geometría considerada para la simulación. b) Animación de una antena con aros parásitos.

La figura 2.71 muestra la impedancia de entrada de esta antena. Se observa que la resistencia de entrada a partir de una separación de  $0.25\lambda$  se ubica en las cercanías de  $140 \Omega$  que es la resistencia teórica obtenida por Kraus para una antena helicoidal con plano de tierra. Asimismo, se observa que a partir de  $0.5\lambda$ , la resistencia de entrada se mantiene prácticamente constante.

Por lo que respecta a la reactancia de entrada, se presentan variaciones más bruscas en comparación con la resistencia de entrada. A partir de  $0.25\lambda$  la reactancia de entrada sufre un decremento, alcanzando su valor mínimo en  $0.5\lambda$  y después vuelve a incrementarse.

Lamentablemente, no es posible una comparación de los resultados con los obtenidos por Kraus (Kraus, 1995), ya que no los reporta en su artículo publicado.

Por lo que respecta al trabajo presentado por Zainud-Deen para una antena con un aro reflector o adyacente y dos aros parásitos ( $Sp_1 = 0.3\lambda$  y  $Sp_2 = 0.6\lambda$ ), reporta una resistencia de entrada cercana a los  $100 \Omega$  para la frecuencia central y una reactancia de  $-120 \Omega$ . Al comparar estos resultados con los presentados en esta tesis se observa que el factor de diferencia entre ambos datos es del 20% para la parte real y del 10% en la parte imaginaria. Esta diferencia se puede deber al número de aros parásitos. Cabe mencionar que Zainud-Deen no reporta el tipo de alimentación empleado para la antena helicoidal.

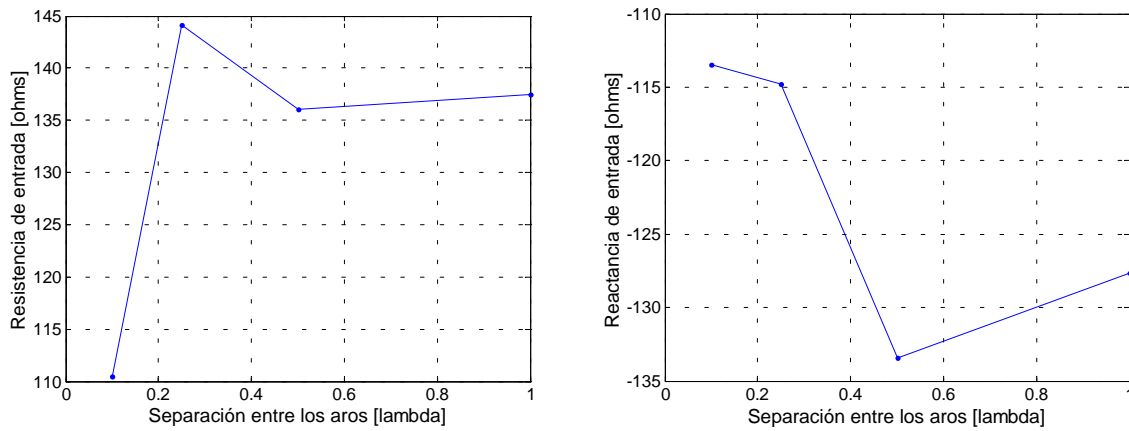


Figura 2.71. Impedancia de entrada al variar la separación entre los aros parásitos.

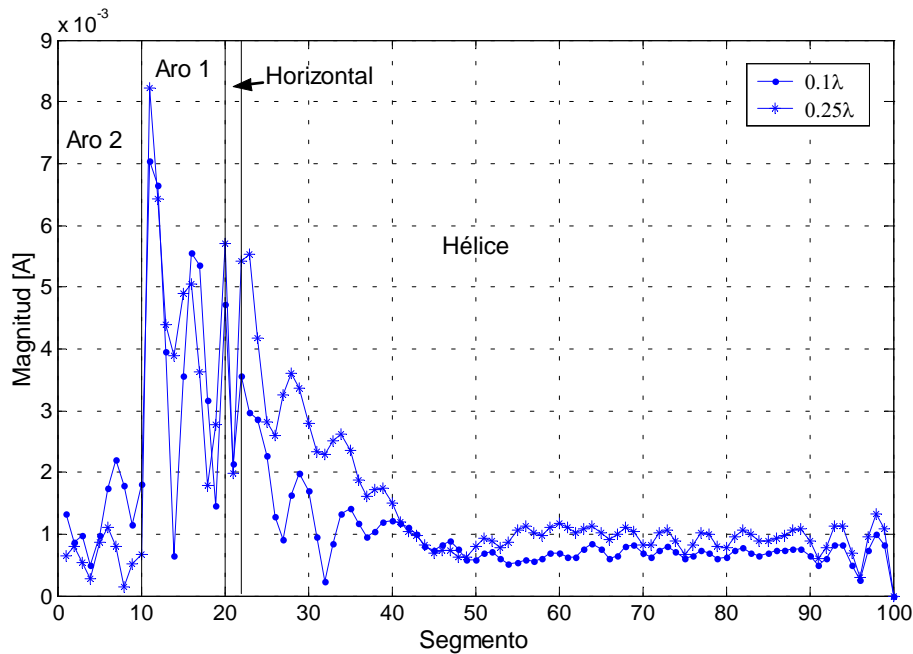


Figura 2.72a. Distribución de corriente obtenida para las separaciones  $Sp = 0.1\lambda$  y  $Sp = 0.25\lambda$ .

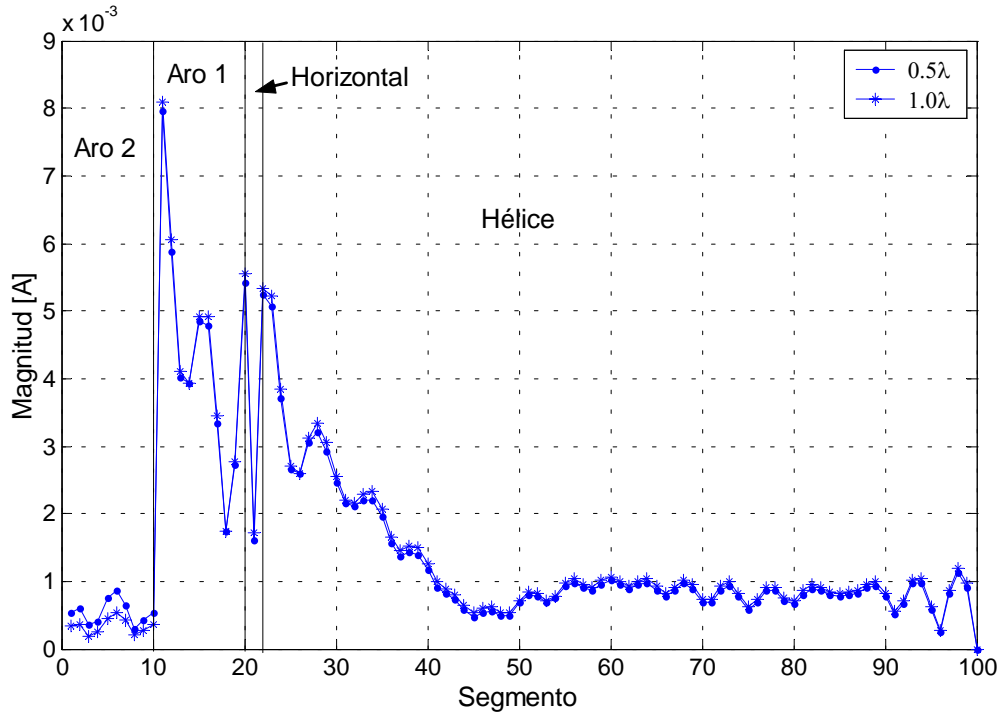


Figura 2.72b. Distribución de corriente obtenida para las separaciones  $Sp = 0.5\lambda$  y  $Sp = 1.00\lambda$ .

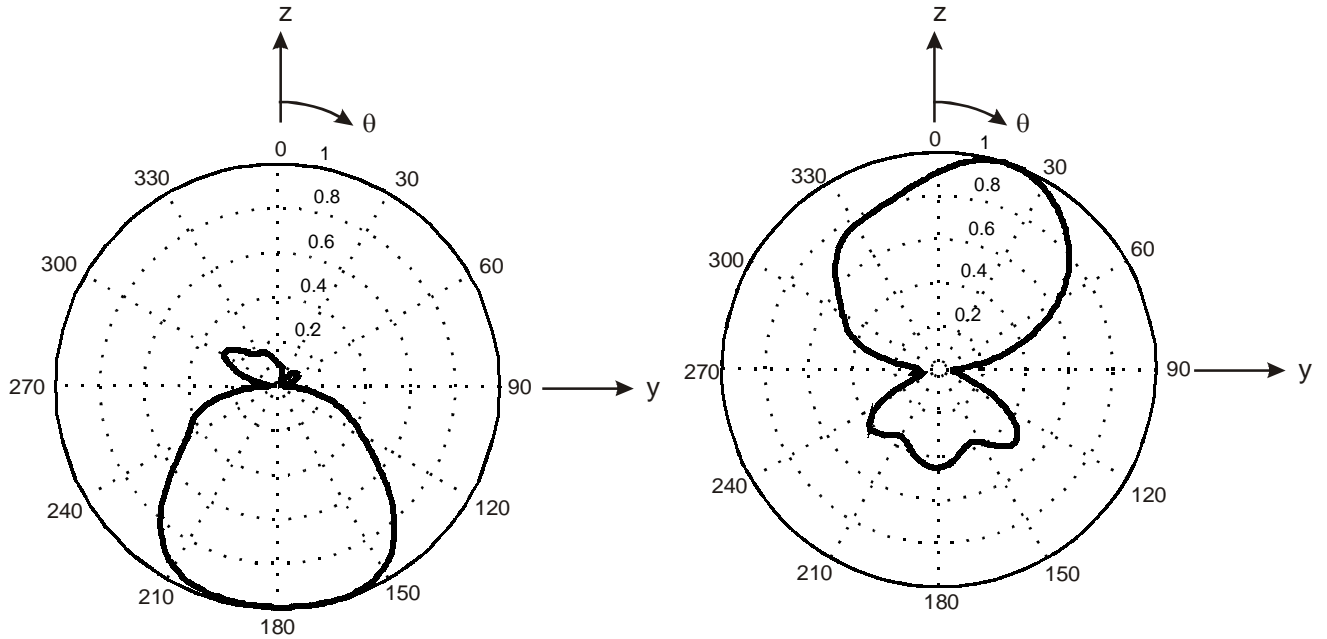
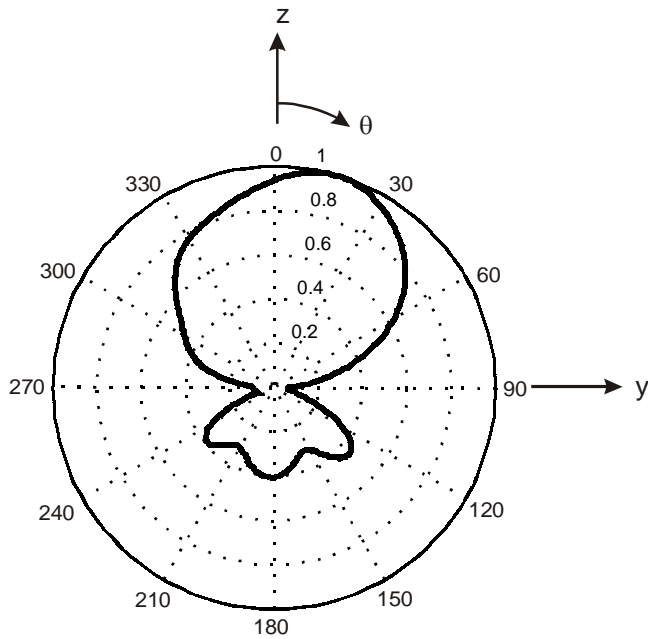
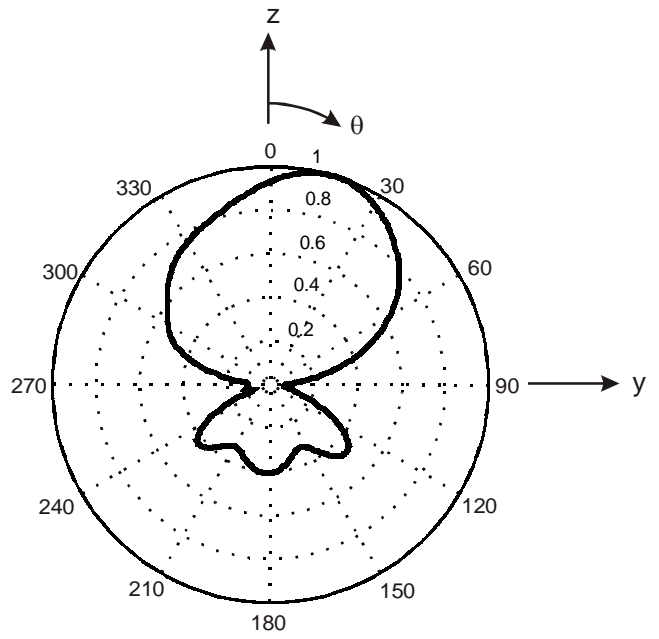


Figura 2.73a. Patrón de radiación completo para la separación  $Sp = 0.1\lambda$ .

Figura 2.73b. Patrón de radiación completo para la separación  $Sp = 0.25\lambda$ .



**Figura 2.73c.** Patrón de radiación completo para la separación  $Sp = 0.5\lambda$ .



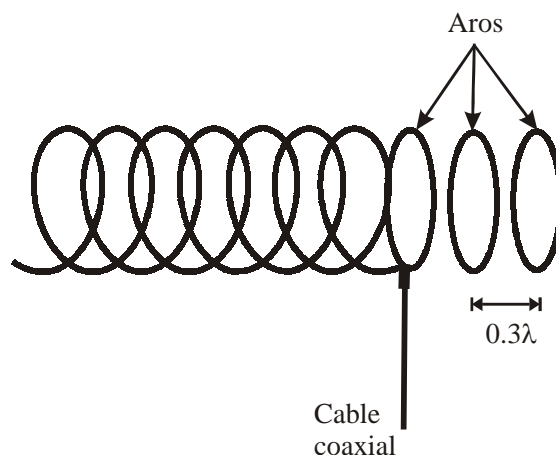
**Figura 2.73d.** Patrón de radiación completo para la separación  $Sp = 1.0\lambda$ .

Las figuras 2.72a y 2.72b muestran las distribuciones de corriente para 4 diferentes separaciones entre los aros. En todos los casos quien presenta la mayor amplitud de corriente es el aro reflector o adyacente (aro 1), asimismo se observa que la distribución de corriente que se tiene sobre la hélice difiere poco en su forma y amplitud en todos los casos. En el aro parásito (aro 2) se presentan variaciones en la amplitud de la corriente que se induce en él. Como era de esperarse, para separaciones pequeñas la amplitud en el aro 2 es mayor, y conforme se incrementa la separación, disminuye la amplitud de dicha corriente. Al comparar la amplitud del aro parásito para  $Sp = 0.1\lambda$  con  $Sp = 1\lambda$ , se observa que en el segundo caso la amplitud de la corriente es prácticamente una cuarta parte del primero. Otra característica que cabe señalar es que para una separación mayor a  $0.25\lambda$ , las amplitudes en el aro reflector, el elemento horizontal y la hélice no varían, por lo que de acuerdo a la distribución de corriente la distancia mínima a la cual la configuración se estabiliza es  $0.25\lambda$ .

Los patrones de radiación obtenidos se muestran en las figuras 2.73a, 2.73b, 2.73c y 2.73d. En ellas se puede observar que para una separación de  $0.1\lambda$ , el aro parásito ayuda a tener una radiación backfire, pero a partir de  $0.25\lambda$  el aro empieza a reflejar provocando una radiación endfire. Al comparar estos resultados

con el obtenido por Kraus, se observa que para los resultados simulados por MM presenta un radiación backfire, sin lóbulos laterales, pero con un lóbulo backfire y además presenta una asimetría en el lóbulo endfire.

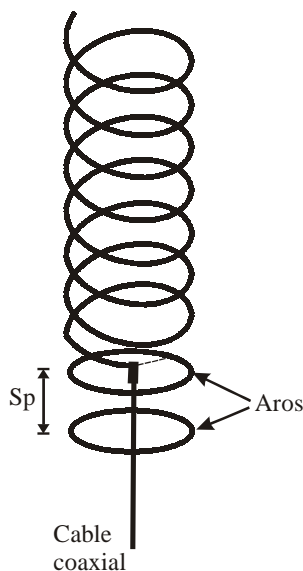
Zainud-Deen muestra en su trabajo la distribución de corriente obtenida tanto para una antena helicoidal balanceada con sentidos de giro opuestos entre las hélices (Nakano, 1987) como para una antena helicoidal con 3 aros. La conexión se realizó colocando el conductor central del coaxial en la hélice y el conductor externo en el aro. La distribución de corriente presenta su máximo en el punto de alimentación pero las amplitudes mayores se registran en el aro adyacente. Al comparar esta distribución de corriente con la obtenida en esta tesis, se observa que en ambos casos las máximas amplitudes se observan en el aro reflector (adyacente), aunque en la tesis se consideró un alimentación diferente. Comparando la distribución de corriente obtenido por Zainud-Deen, la de tesis y la obtenida para una hélice balanceada (Nakano, 1987; Zainud-Deen 1998), se observa que la corriente obtenida por Zainud-Deen no registra ningún cero de corriente a lo largo de la hélice mientras que Nakano reporta un cero aproximadamente a  $2.5\lambda$  del extremo de alimentación de la hélice. Ahora, comparando los valores obtenidos en la tesis, sí se registra un cero pero a  $1.5\lambda$  del punto de alimentación. Esto habla de un corrimiento del nulo de corriente. Este efecto de corrimiento del nulo también se puede observar al disminuir las dimensiones del plano de tierra (Nakano, 1988).



**Figura 2.73d.** Alimentación realizada por Zainud-Deen (Zainud-Deen, 1998)

Por lo que respecta al patrón de radiación, tanto en los resultados mostrados por Zainud-Deen como en los mostrados en esta tesis se obtiene una radiación backfire por medio de aros parásitos. De acuerdo con los resultados obtenidos por Zainud-Deen, la distancia óptima a la cual se deben de ubicar los aros entre ellos

para tener una radiación endfire es de  $0.3\lambda$ , y de acuerdo a esta tesis es de  $0.25\lambda$ . Esto nos habla de la proximidad de resultados y la validez de ambos estudios. Asimismo, la forma de los patrones de radiación es muy similar, lamentablemente Zainud-Deen no reporta el ancho del haz del patrón y su patrón impreso en el artículo no permite hacer una aproximación de dicho parámetro.



**Figura 2.73e.** Alimentación propuesta en esta tesis.

Cabe señalar que al comparar los patrones de radiación (a nivel cualitativo), como ya se dijo, existe una gran similitud entre el patrón de radiación obtenido por Zainud y el de esta tesis, pero esto no se cumple con el patrón reportado con Kraus (Kraus, 1995). De acuerdo con el Dr. Kraus, el patrón de radiación debe tener dos lóbulos laterales grandes y el lóbulo trasero o backfire debe ser muy pequeño. Esta característica no se cumple en los patrones obtenidos en esta tesis y por Zainud-Deen, ya que en estos patrones no se tienen lóbulos laterales, pero sí un lóbulo trasero que no puede ser considerado con una amplitud pequeña, ya que dicha amplitud es aproximadamente el 30% de la amplitud máxima. Lamentablemente, no es posible conjeturar sobre las posibles causas de estas diferencias, ya que el Dr. Kraus no reportó más datos de su estudio, como por ejemplo la distribución de corriente.

## 2.6 Diseño y construcción de la antena

Para construir la antena helicoidal a 10 GHz se contó con la valiosa asesoría del Dr. Oleksandr Martynyuk. Debido a la frecuencia de diseño elegida, no fue posible realizar la antena únicamente con tubos o alambres conductores, por lo que se empleó un circuito impreso.

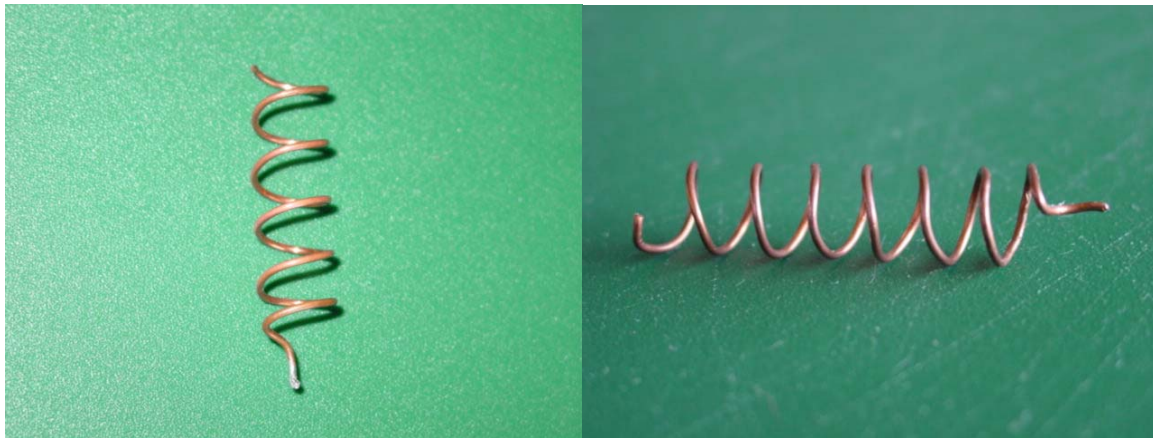
El material empleado para la construcción fue cable coaxial semirígido, conector K (Apéndice G) y un trozo de la placa Ultralam 2000 (Apéndice H) para la fabricación de los aros. Las características físicas de la antena ya fueron mostradas en la tabla 2.2. La antena helicoidal se elaboró por secciones, las cuales se describirán a continuación.



**Figura 2.74.** Propuesta de la antena a diseñar.

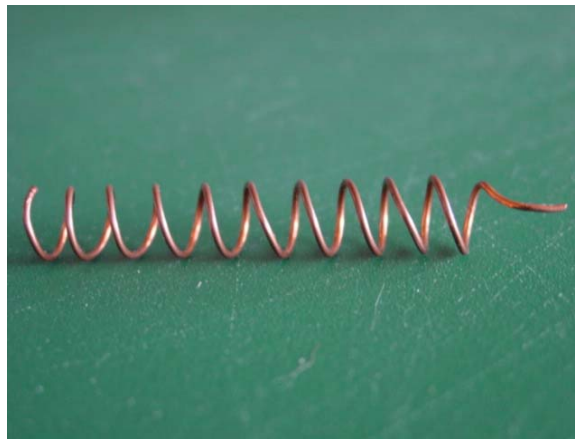
El elemento radiador de la antena (hélice) se elaboró por medio de un alambre de cobre AWG 14. La elección del material se realizó bajo el conocimiento de que la antena no se iba a exponer al agua, por lo que no se tendrían problemas con la oxidación del cobre; asimismo, para la elección del calibre del alambre se tomó en consideración el grosor necesario, de tal forma que tuviera la rigidez suficiente para soportar su propio peso. Con este material se elaboraron tres antenas con diferentes números de vueltas ( $N = 5, 7$  y  $10$ ); estas antenas se muestran en la figura 2.75.





a) Antena de 5 vueltas

b) Antena de 7 vueltas

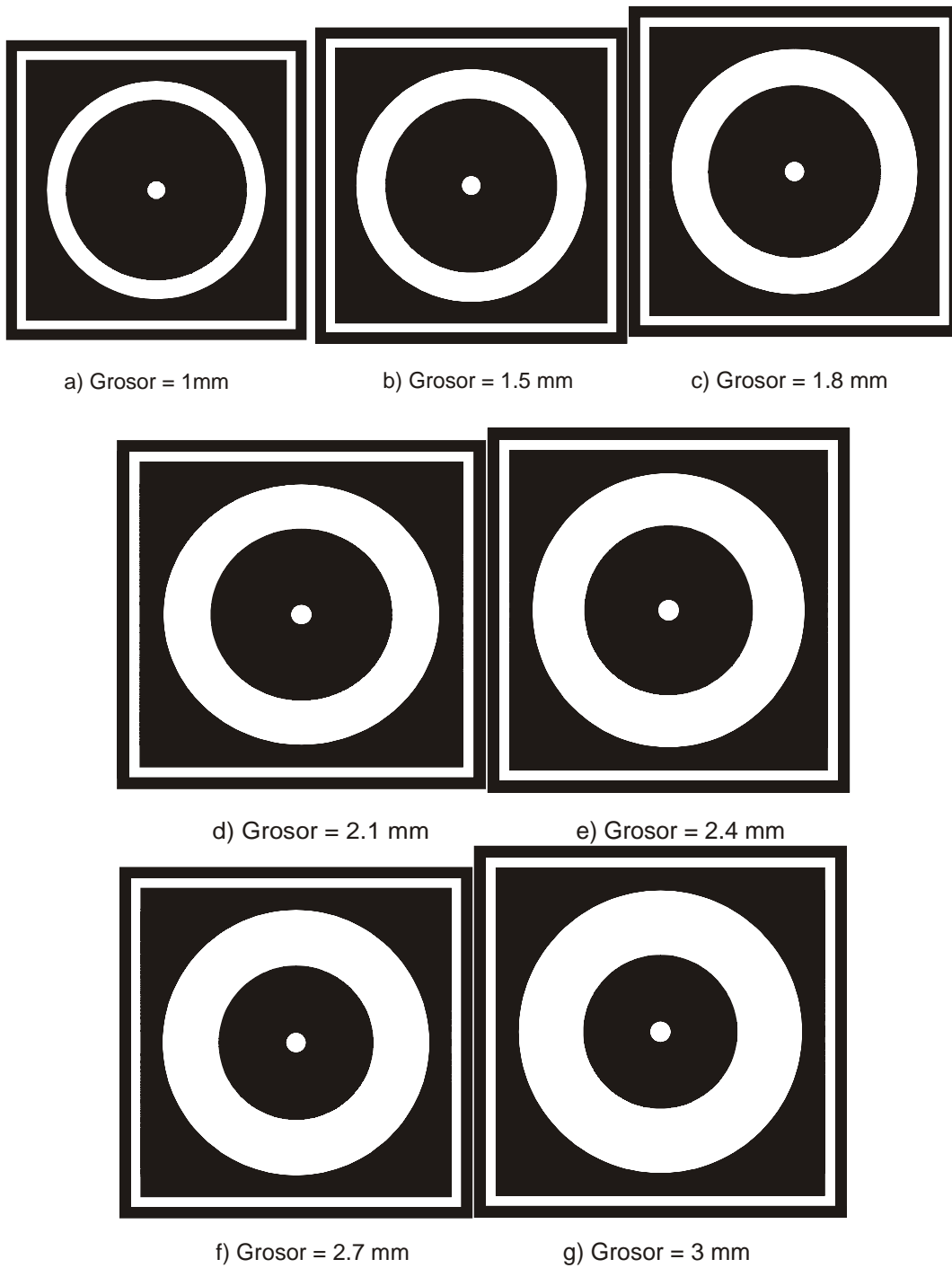


c) Antena de 10 vueltas

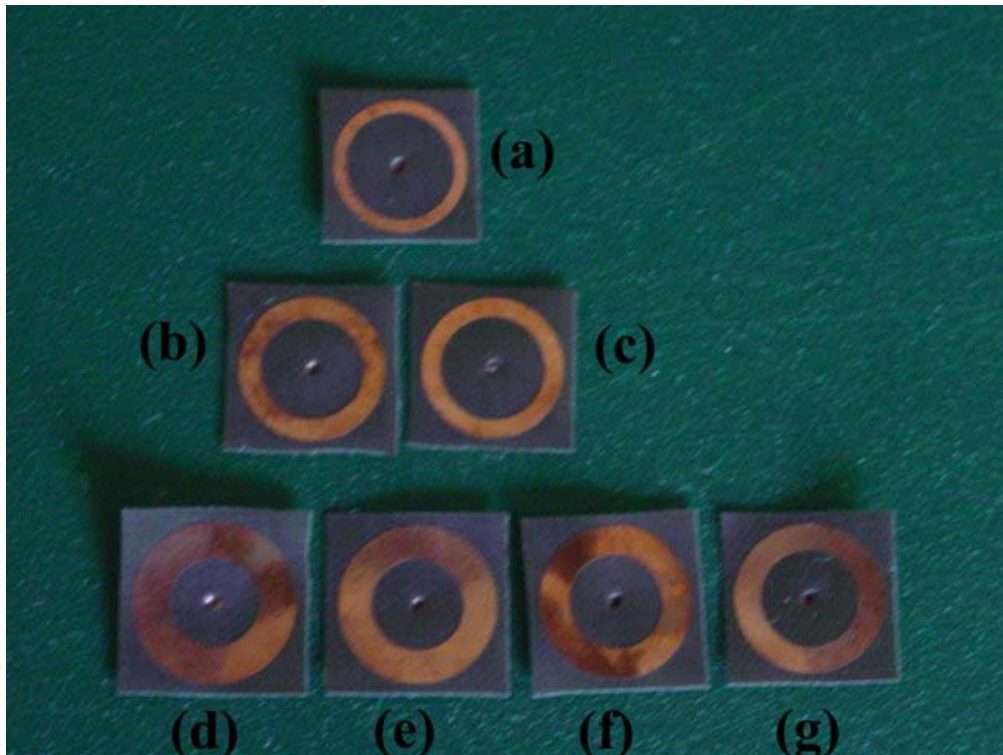
**Figura 2.75.** Antenas con diferente número de vueltas.

Para conocer el efecto que tiene el trozo vertical de la antena, se varió su longitud, tomándose valores de  $0.3\lambda$  y  $0.5\lambda$ , pero manteniendo constantes las características restantes de la antena.

Como no había forma de fijar el aro a un estructura que le diera soporte, se decidió hacerlo de forma impresa. Para grabarlo sobre la placa Ultralam 2000 se empleó la técnica de fotolitografía con resina negativa (Apéndice F); en esta técnica se requieren las máscaras (plantillas) de las figuras que se quieren grabar. Para la realización de esta tesis, se diseñaron máscaras en las cuales se varía el grosor (diámetro del tubo del aro) de la cinta a imprimir (Figuras 2.76 y 2.77).

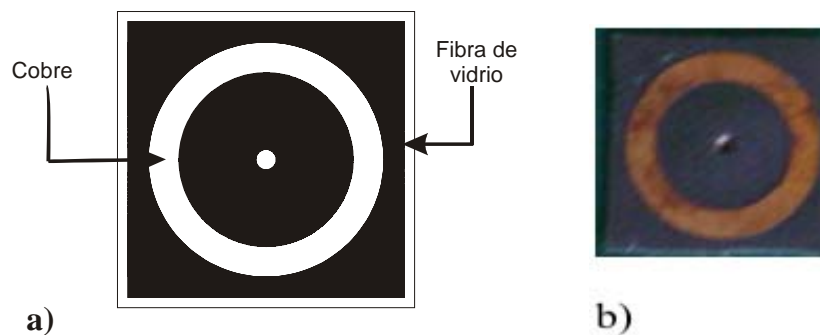


**Figura 2.76.** Máscaras para la realización de los impresos. a)  $d_{aro} = 1mm (= 0.0333\lambda)$ .  
b)  $d_{aro} = 1.5 mm (= 0.05\lambda)$ . c)  $d_{aro} = 1.8 mm (= 0.06\lambda)$ . d)  $d_{aro} = 2.1 mm (= 0.07\lambda)$ .  
e)  $d_{aro} = 2.4 mm (= 0.08\lambda)$ . f)  $d_{aro} = 2.7 mm (= 0.09\lambda)$ . g)  $d_{aro} = 3 mm (= 0.1\lambda)$



**Figura 2.77** Circuitos impresos. a)  $d_{aro} = 1\text{mm}$  ( $= 0.0333\lambda$ ).  
 b)  $d_{aro} = 1.8\text{ mm}$  ( $= 0.06\lambda$ ). c)  $d_{aro} = 1.5\text{ mm}$  ( $= 0.05\lambda$ ). d)  $d_{aro} = 3\text{ mm}$  ( $= 0.1\lambda$ ).  
 e)  $d_{aro} = 2.7\text{ mm}$  ( $= 0.09\lambda$ ). f)  $d_{aro} = 2.4\text{ mm}$  ( $= 0.08\lambda$ ). g)  $d_{aro} = 2.1\text{ mm}$  ( $= 0.07\lambda$ ).

Dado que se empleó resina negativa, las secciones de color negro en las máscaras representan las secciones en las cuales se va a desprender el cobre y las secciones de color blanco son las secciones donde se conserva el cobre (Figura 2.78).



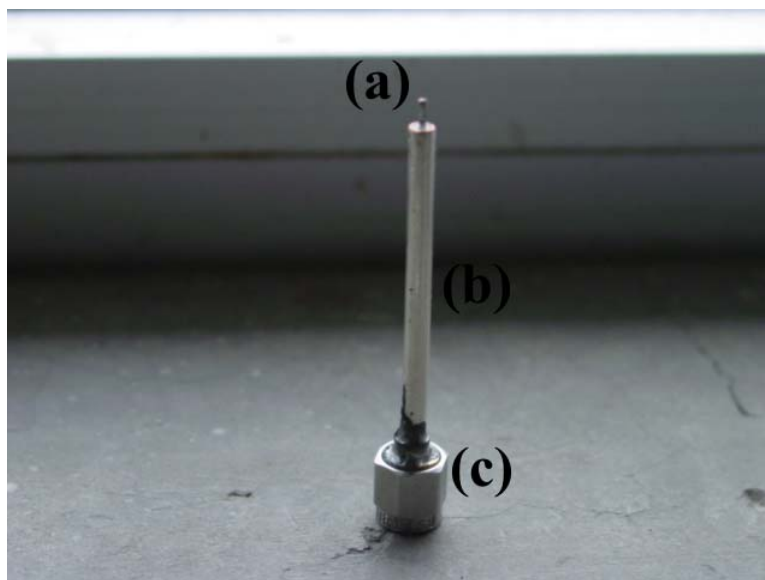
**Figura 2.78.** a) Máscara. b) Cinta impresa

Para comprobar los efectos que tiene la disminución de tamaño de un plano de tierra en las propiedades de la antena también se diseñó un plano de tierra. Dicho plano es de cobre con un grosor de aproximadamente 2 mm. El plano tiene una forma cuadrada, teniendo cada lado una longitud de 5 cm, o bien en longitudes de onda de  $1.7\lambda$ . El elemento empleado se muestra en la figura 2.79.



**Figura 2.79.** Plano de cobre empleado como plano de tierra infinito.

La alimentación se realizó por medio de un trozo de cable coaxial semirígido y el conector K (Fig. 2.80), para conectar el conductor central del coaxial y la antena se cortó 3 mm del conductor exterior.

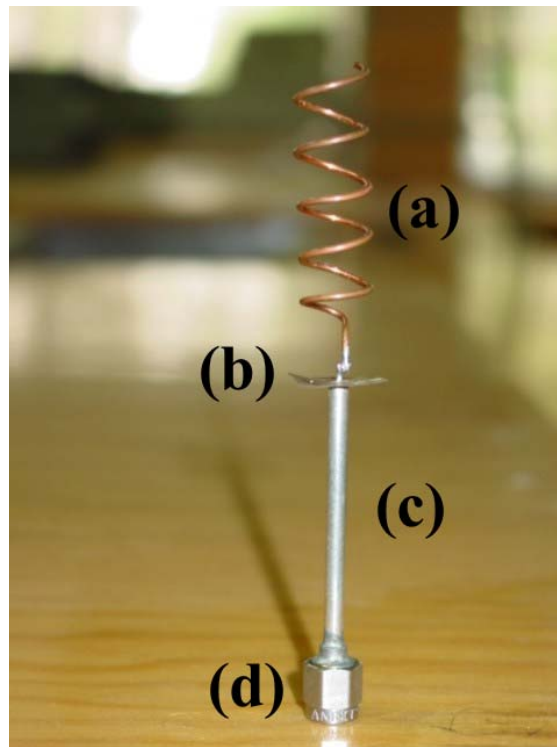


**Figura 2.80.** Unión entre el cable coaxial y el conector K. a) Conductor interno del cable coaxial. b) Conductor externo del cable coaxial. c) Conector K.

## 2.7 Mediciones

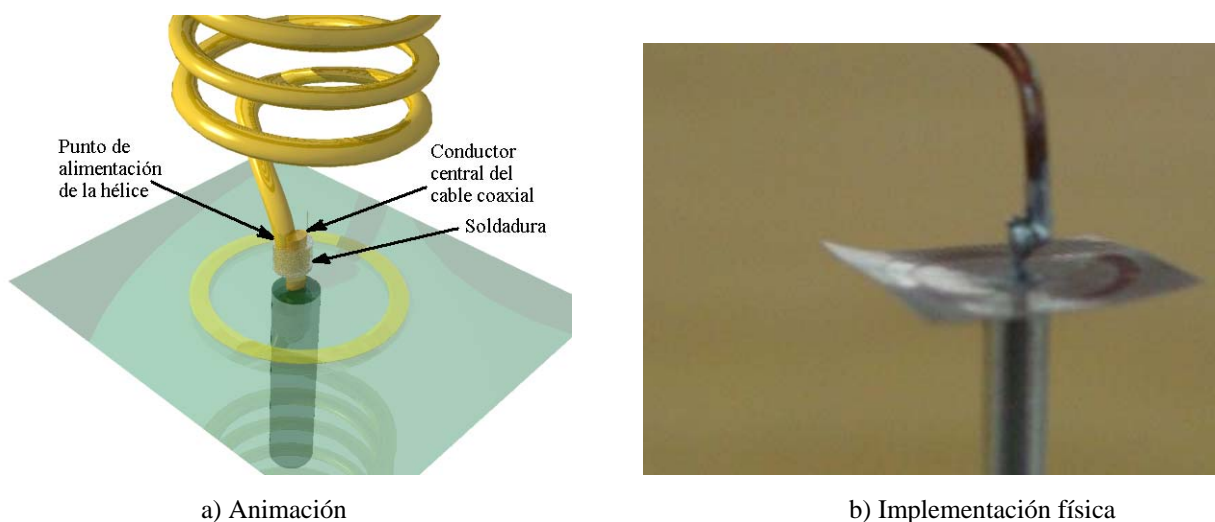
En la introducción de este capítulo se planteó como objetivo la construcción de una antena con aro en lugar de plano de tierra para medir su impedancia de entrada y su patrón de radiación. La lectura de la impedancia de entrada se realizó por medio de un analizador de redes (Apéndice I). Lamentablemente, no se pudo realizar las mediciones del patrón de radiación ya que en la UNAM no se cuenta con una cámara anecoica, la cual es un cuarto forrado por conos o prismas con material anecoico, permitiendo la absorción de campos y evitando interferencia en las mediciones. Se pensó en realizar las mediciones en un lugar abierto, pero dada la frecuencia de operación (10 GHz) cualquier objeto pequeño interfiere en las mediciones.

La conexión empleada para la realización de las mediciones se muestra en la Figura 2.81.



**Figura 2.81.** *Conexión realizada para la toma de mediciones. a) Antena helicoidal. b) Aro impreso. c) Cable coaxial semi-rígido. d) Conector K.*

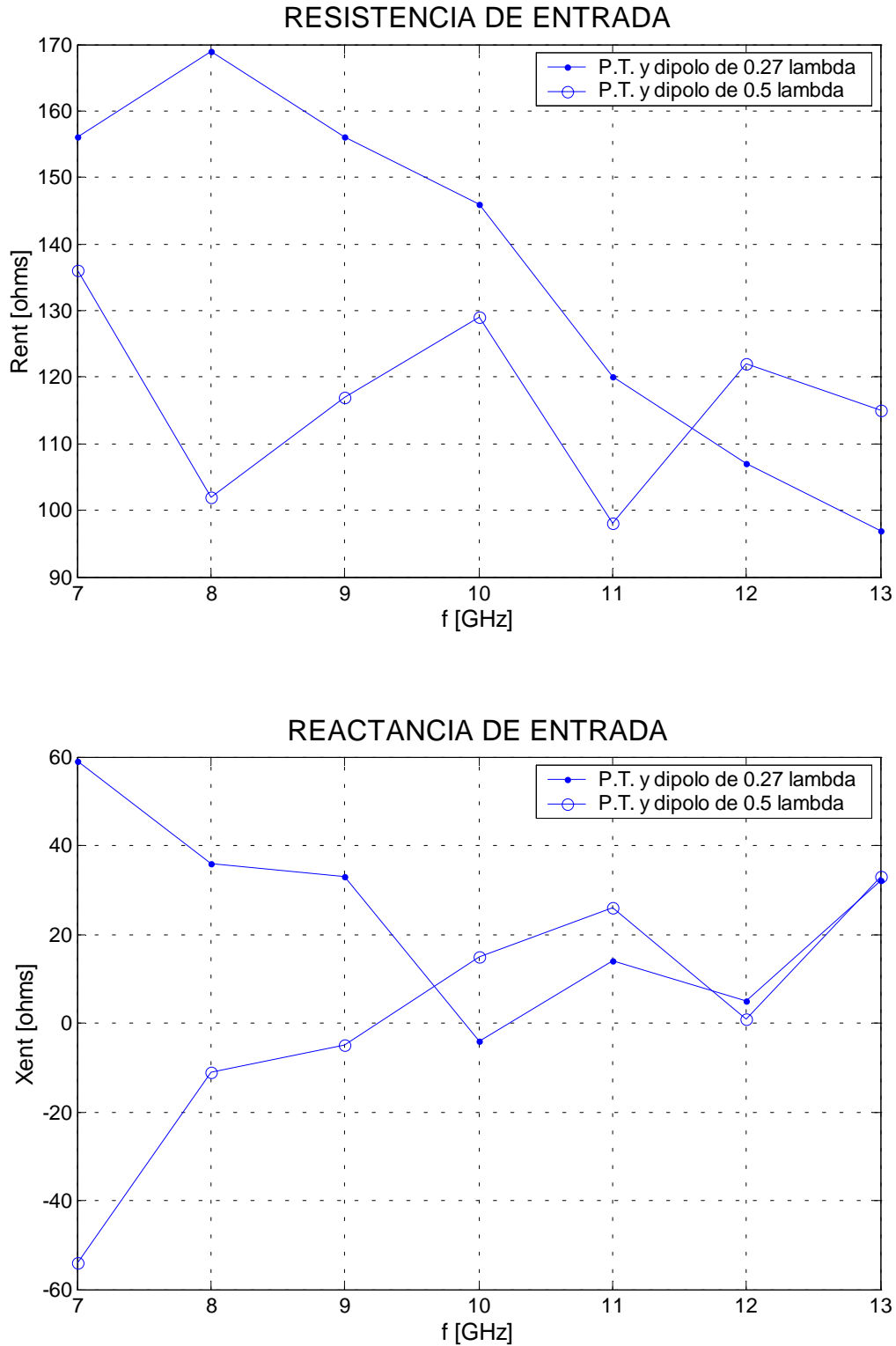
Uno de los problemas que se tuvo fue decidir la forma de alimentación ya que para obtener el mejor acoplamiento es necesario que el conductor central del coaxial y el conductor de la antena se conecten de tal forma que puedan ser estudiados como un solo conductor. La figura 2.82 muestra la animación y la implementación física del punto de alimentación de la antena.



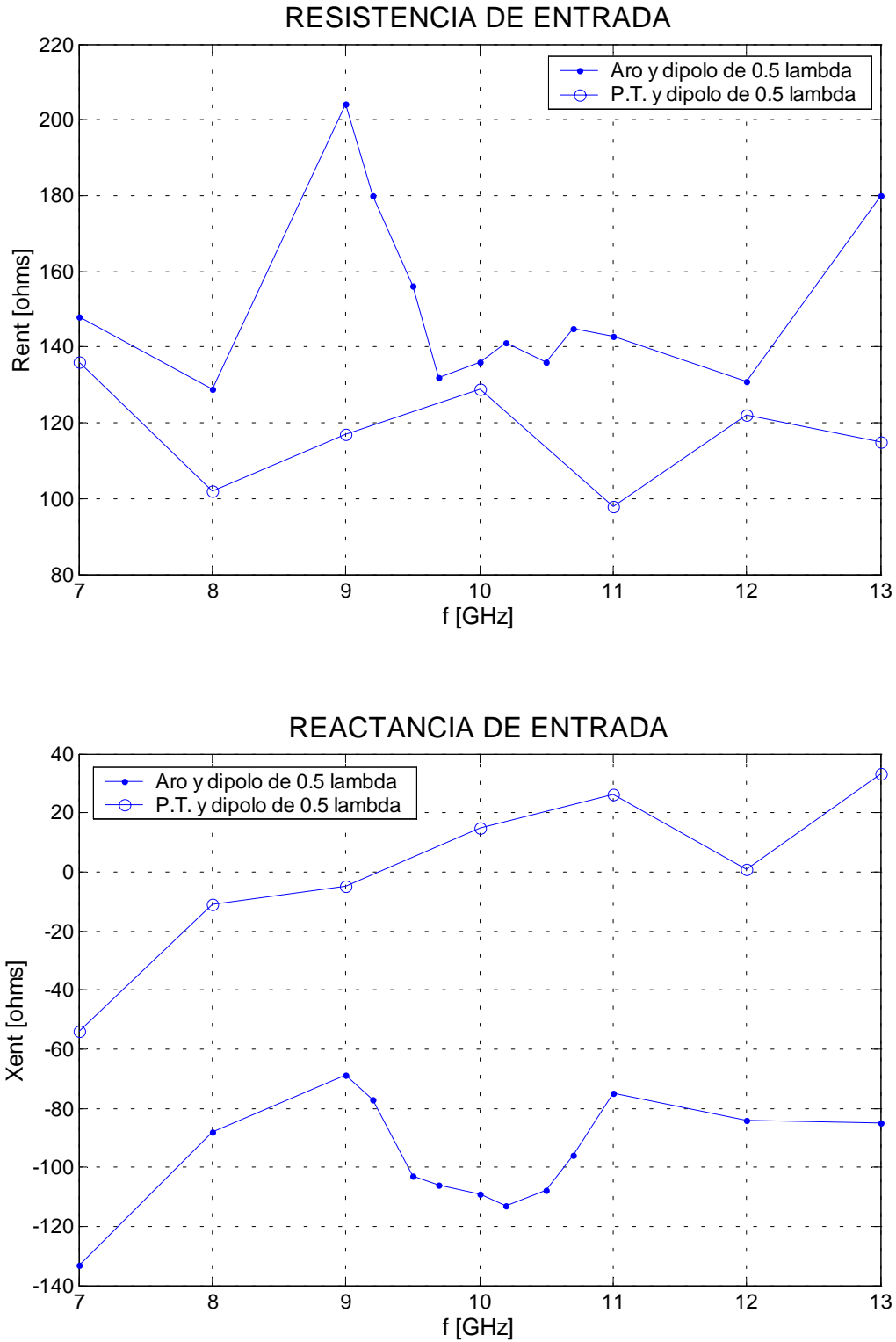
**Figura 2.82.** Punto de alimentación. a) Animación. b) Implementación física.

El primer paso fue conocer lo efectos que presenta el elemento lineal, tanto en un plano infinito y cuando se tiene un aro como reflector. En un principio se había previsto realizar mediciones para alturas iguales a  $h = 0.5\lambda$ ,  $h = 0.3\lambda$  y  $h = 0$ . Lamentablemente, dada las dimensiones de la antena y el conductor central fue necesario una sección vertical, la altura mínima alcanzada fue de  $0.27\lambda$ , que es aproximadamente  $0.3\lambda$ . De acuerdo a los resultados presentados en la sección 2.5 el mejor radiador para un modo axial es aquel que no contenga elemento vertical, pero por lo explicado anteriormente esta medición no fue posible realizarla.

Para conectar la antena al analizador de redes fue necesario emplear un acoplador de conector K a AP7, lo que derivó en calibrar nuevamente el aparato con respecto al retraso que provocó este acoplamiento. El retraso eléctrico fue de 196.84 mm (656.59 ps), siendo este valor la longitud del acoplador. A continuación se presentan gráficas comparativas de la lecturas realizadas para el aro y un plano de tierra infinito para diferentes longitudes del segmento vertical. El aro empleado para estas mediciones tiene una grosor de 1mm ( $= 0.0333\lambda$ ).

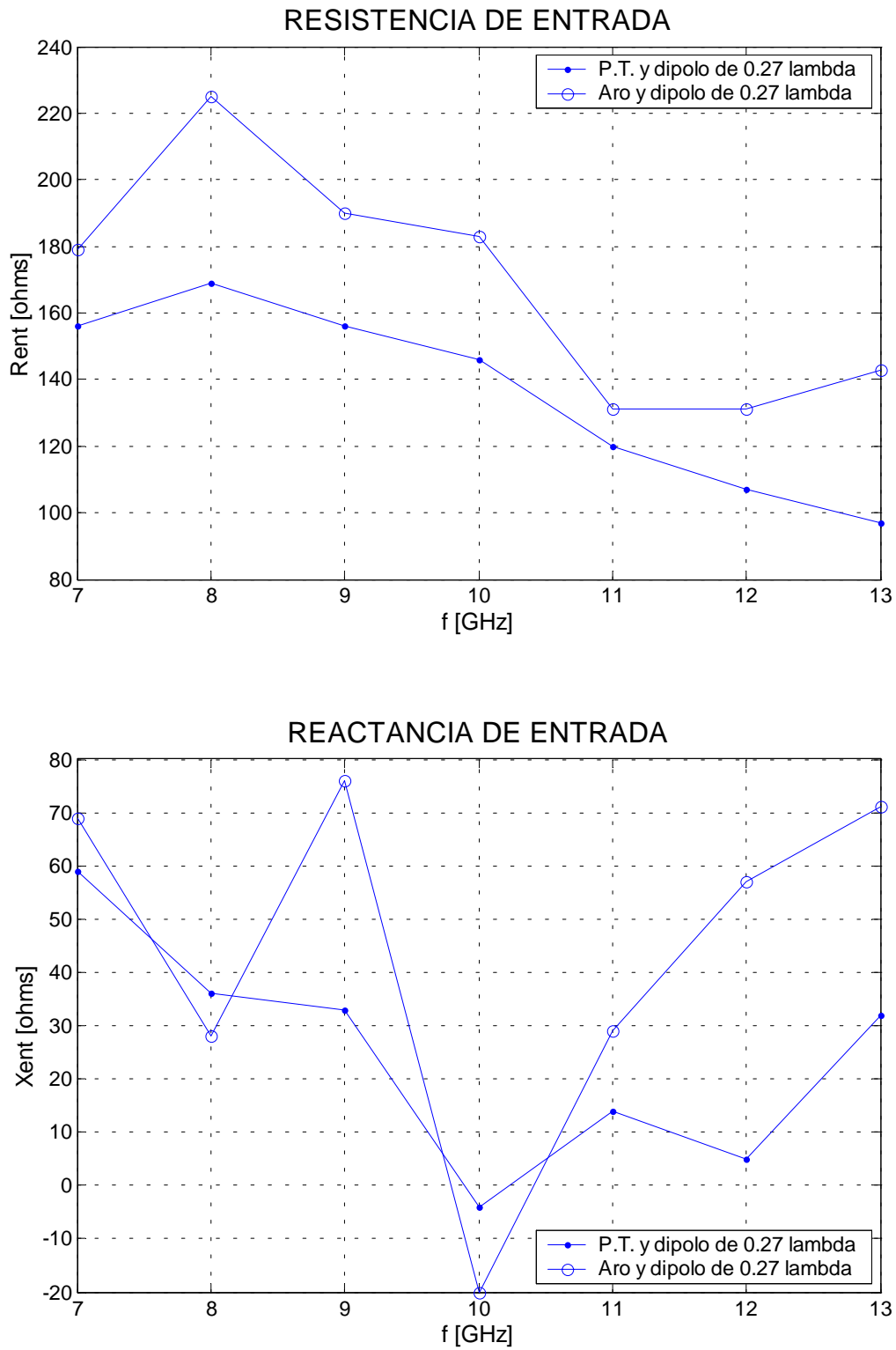


**Figura 2.83.** Comparación de las impedancias de entrada medidas de una antena helicoidal con plano de tierra infinito al variar la longitud del elemento vertical.

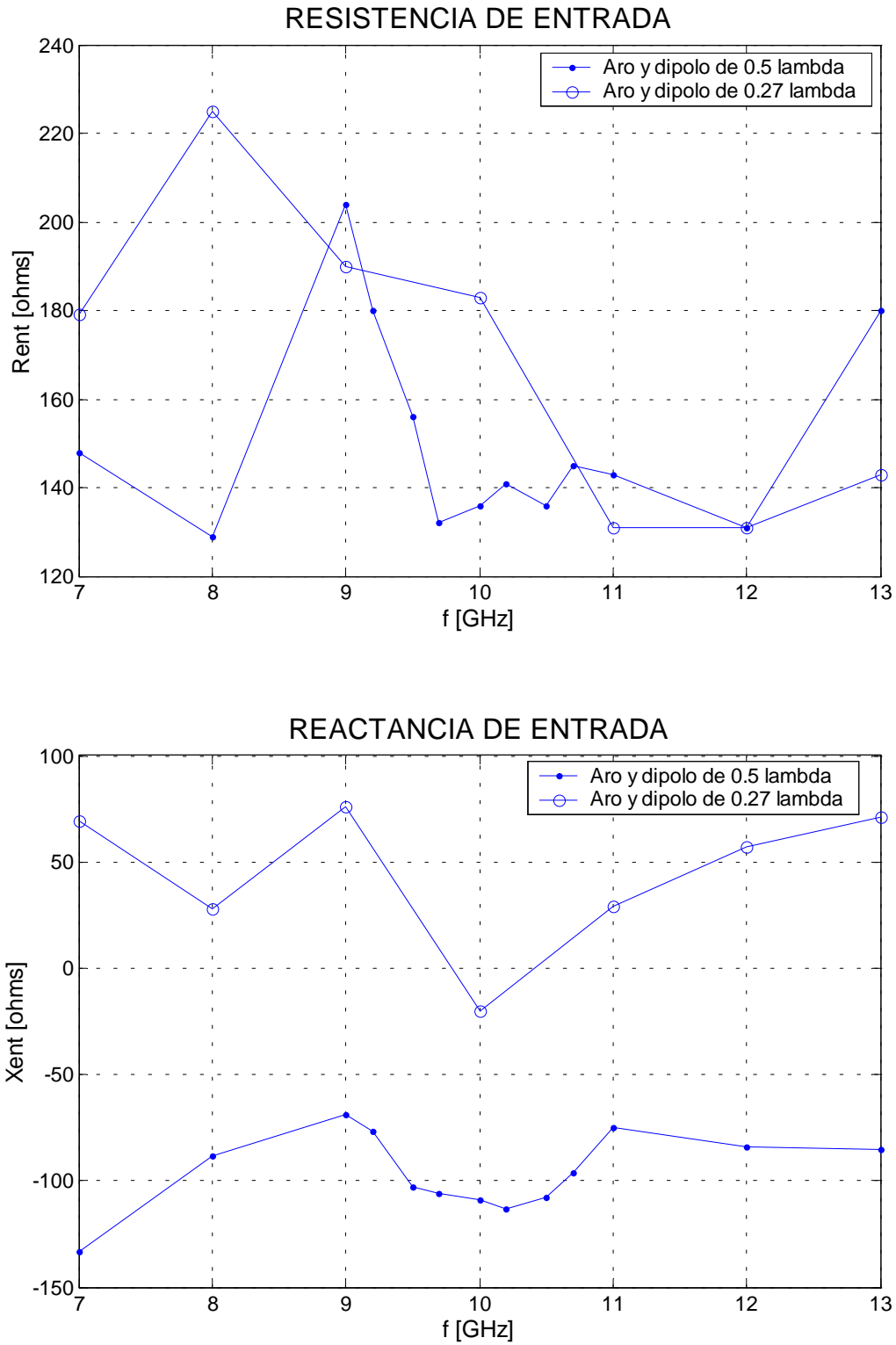


**Figura 2.84.** Comparación de las impedancias de entrada medidas para una antena helicoidal con elemento vertical de  $0.5\lambda$  al cambiar su plano de tierra por una aro.





**Figura 2.85.** Comparación de las impedancias de entrada medidas para una antena helicoidal con elemento vertical de  $0.27\lambda$  al cambiar su plano de tierra por una aro.



**Figura 2.86.** Comparación de las impedancias de entrada medidas de una antena helicoidal con aro reflector al variar la longitud del elemento vertical.

En la figura 2.83 se presentan los efectos de la longitud del elemento vertical cuando se tiene un plano de tierra infinito. Tanto para  $h = 0.27\lambda$  como para  $0.5\lambda$ ; en la frecuencia de diseño ambas resistencias de entrada son cercanas a los  $140 \Omega$  (valor teórico). De los 7 GHz a los 10 GHz, la resistencia de entrada para  $h = 0.27\lambda$  es superior a la resistencia de entrada para  $h = 0.5\lambda$ , pero para frecuencias mayores los valores son cercanos, prestando una diferencia máxima de  $20 \Omega$ . Por lo que respecta a su reactancia de entrada, de 7 GHz a 10 GHz la antena con  $h = 0.27\lambda$  presenta un comportamiento inductivo, mientras que  $h = 0.5\lambda$  presenta un comportamiento capacitivo. Para frecuencias mayores que 10 GHz, ambas reactancias tienen un comportamiento similar convergiendo a un mismo punto a los 13 GHz. Si consideramos el ancho de banda como aquellos valores a los cuales la reactancia de entrada es cercana a cero, para el estudio presentado en la gráfica 2.83 se tiene un ancho de banda de 3 GHz (de 9 a 12 GHz).

Ya caracterizadas las antenas con un plano de tierra, se cambió el plano por un aro reflector. La figura 2.84 muestra el comportamiento al cambiar el plano de tierra por un aro para una hélice con  $h = 0.5\lambda$ . Para la frecuencia de diseño la resistencia de entrada continúa cercana a los  $140 \Omega$ , pero para otras frecuencias la resistencia aumenta, llegando a valores ligeramente mayores que los  $200 \Omega$ . En este caso la reactancia de entrada tiene un comportamiento altamente capacitivo, registrándose un mínimo en la frecuencia de operación.

La figura 2.85 muestra el comportamiento de una hélice de  $0.27\lambda$  al cambiar el plano de tierra por un aro reflector. La resistencia de entrada, en ambos casos, presenta un comportamiento decreciente. En la reactancia de entrada, las variaciones más grandes se presentan cuando se tiene un aro reflector; en dichas variaciones el valor máximo es  $75 \Omega$  y el valor mínimo es  $-20\Omega$ .

La figura 2.86 muestra los casos cuando se tiene un aro reflector y se varía la longitud del elemento vertical. En la gráfica de la resistencia de entrada la antena con  $h = 0.27\lambda$  presenta las variaciones más bruscas. La diferencia máxima se encuentra a los 8 GHz. Con lo referente a la reactancia de entrada, a partir de 8 GHz se mantiene una diferencia constante entre ambas reactancias; esta diferencia es aproximadamente de  $100 \Omega$ .

Dentro de las dificultades que se tuvieron para la obtención de estas lecturas fue el punto de unión, ya que fue necesario ser muy cautelosos para la colocación de la soldadura y procurar que se tuviera el mejor contacto entre la antena y el conductor central del coaxial. Asimismo, al estar realizando las mediciones

se observó que se presentaba una corriente parásita sobre el conductor externo del coaxial, ya que al acercar un objeto de metal al coaxial las mediciones cambiaban súbitamente. Así que, si se quisieran mediciones más precisas es necesario mejorar el blindaje del cable coaxial semi-rígido. Para conocer la polarización de la antena se empleó una guía de onda rectangular y se conectó al puerto 2 del analizador de redes, mientras que la antena se conservó en el puerto 1. Se midió el parámetro de transmisión del analizador (parámetro  $S_{12}$ ). Al girar la antena se observó que la ganancia variaba un poco, por lo que se concluyó que la antena no tenía una polarización completamente circular, sino que era una polarización elíptica tendiendo a circular.

Al comparar estos resultados a los obtenidos con el método de momentos (Fig. 2.39) se observa que en la simulación para  $h = 0.5\lambda$  se tiene una impedancia cercana a los  $110 \Omega$  mientras que experimentalmente se tiene  $130 \Omega$ . Con lo referente a la parte reactiva, ambos resultados tienen un comportamiento reactivo, reportándose un valor experimental de  $-17 \Omega$  y un valor de la simulación de  $-200 \Omega$ . Para  $h = 0.3\lambda$ , la simulación entrega un valor de  $120 \Omega$ , mientras que la medición un valor de  $145 \Omega$ . En las partes reactivas se registran diferencias muy marcadas ya que la simulación reporta un valor capacitivo y las mediciones un valor inductivo. Se observa una clara diferencia entre los valores en las reactancias de entrada; esto se puede deber tanto a la radiación del coaxial como a los errores de simulación en el MM. Una forma para tener una mejor aproximación entre el MM y la parte experimental es simular también el cable coaxial en el programa o tratar de justificar las diferencias usando la carta de Smith.

Al comparar los valores experimentales con los proporcionados por Zainud-Deen (Zainud-Deen, 1998) se observa que las gráficas de las resistencias de entrada de  $h = 0.3\lambda$  y el reportado en el artículo siguen un comportamiento muy similar aunque no posean los mismos valores. La diferencia casi constante entre estas gráficas es de  $30\Omega$ . En ambos casos el máximo valor de la resistencia de entrada se ubica a  $0.75f_{oper}$  y a partir de ahí se registra un decremento de los valores. Sin embargo, se registran diferencias importantes en las reactancias, ya que Zainud-Deen reporta un valor capacitivo y las mediciones un valor inductivo.

## 3 Modelado matemático de un arreglo helicoidal

### 3.1 Introducción

En este capítulo se presenta un análisis de un arreglo de 4 hélices dispuestas en forma de un cuadrado. Asimismo, se realiza una comparación entre los resultados obtenidos cuando se tiene un arreglo helicoidal con un plano de tierra infinito y cuando se tienen aros en lugar de plano de tierra. Para la simulación del arreglo helicoidal se emplea el método de momentos y el principio de multiplicación de patrones

Cuando el doctor Kraus presentó los resultados obtenidos al sustituir el plano de tierra por aros (Kraus, 1995), únicamente realizó la investigación para una sola hélice; en este capítulo se presentan los resultados cuando se realiza un arreglo con esa nueva configuración. Se presentan las ecuaciones empleadas para la simulación de cada una de las geometrías para el cálculo de la matriz de impedancias de todo el arreglo. En este caso, la matriz de impedancias está constituida por las impedancias propias y mutuas entre cada uno de los elementos, y no sólo de los elementos propios de cada antena como lo fue en el capítulo 2.

Dentro de los resultados obtenidos, se hace un estudio de las impedancias mutuas entre las hélices, así como la distancia en la cual se pueden despreciar los efectos de dichas impedancias. Asimismo, se presenta un estudio de la impedancia de entrada en cada una de las antenas al variar la distancia que existe entre ellas. Otro de los parámetros que vale la pena conocer es la distribución de corrientes que se presenta en cada una de las antenas, así como la distribución que se tiene en las antenas cuando se tiene la distancia a la cual se pueden despreciar los efectos del acoplamiento entre las antenas.

Finalmente, se muestran los patrones de radiación obtenidos cuando se varía la distancia entre las hélices; también se hace una comparación de los patrones cuando se aplica el principio de multiplicación de patrones y cuando se emplea el método de momentos.

## 3.2 Principio de Multiplicación de Patrones

Si la corriente en cada uno de los elementos que constituyen el arreglo es la misma, el campo total de un arreglo puede ser determinado por la suma vectorial de los campos radiados de cada uno de los elementos. Este método es muy usado cuando no existe dependencia de la separación de los elementos. Para proveer un patrón muy directivo, es necesario que los campos de los elementos del arreglo interfieran constructivamente en las direcciones deseadas e interfieran destructivamente en el resto del espacio. Idealmente esto puede lograrse, pero en la práctica sólo se logra un resultado aproximado al deseado. En un arreglo de elementos idénticos, hay cinco parámetros que pueden ser usados para obtener la forma del patrón requerido en prácticamente todas sus direcciones (Balanis, 1997).

1. La configuración geométrica del arreglo (lineal, circular, rectangular, esférico, etc.).
2. El desplazamiento relativo entre los elementos.
3. La amplitud de la excitación de cada uno de los elementos.
4. La fase de excitación de cada uno de los elementos.
5. El patrón relativo de cada uno de los elementos.

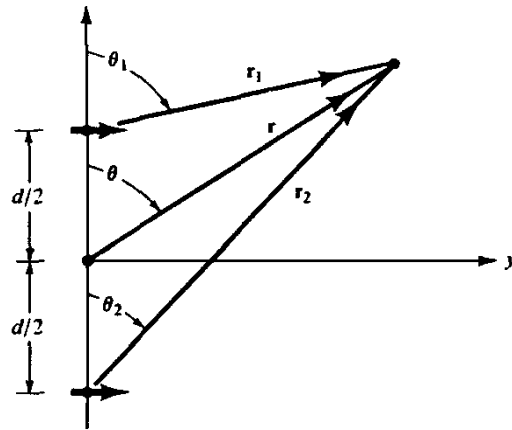
### 3.2.1 Arreglos lineales

#### 3.2.1.1 Arreglo de dos elementos

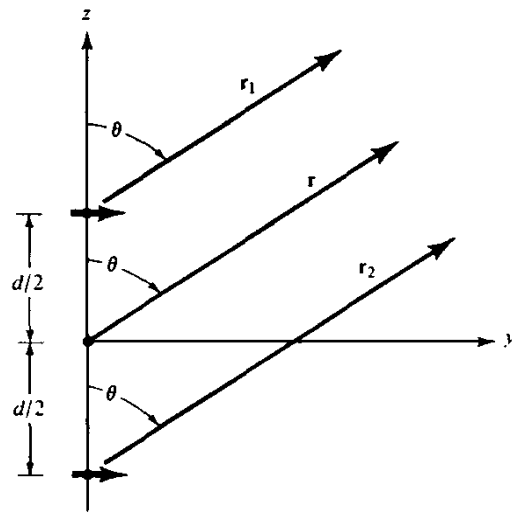
Para explicar el concepto del principio de multiplicación de patrones, se analizará como primer caso un arreglo de dos dipolos infinitesimales horizontales ubicados sobre el eje  $z$  (Figura 3.1a). El campo total radiado por los dos elementos, es igual a la suma de los campos radiados por cada uno de los dipolos (despreciando el acoplamiento entre ellos), es decir:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{a}_\theta j\eta \frac{kI_0 l}{4\pi} \left\{ \frac{e^{-j\left(kr_1 - \frac{\beta}{2}\right)}}{r_1} |\cos\theta_1| + \frac{e^{-j\left(kr_2 + \frac{\beta}{2}\right)}}{r_2} |\cos\theta_2| \right\} \quad (3-1)$$

donde  $\beta$  es la diferencia de fase de la excitación de los elementos. La magnitud de la excitación de los radiadores es idéntica.



(a) Dipolos infinitesimales



(b) Campo lejano

**Figura 3.1.** Geometría del arreglo de dos elementos ubicados sobre el eje  $z$ . a) Dipolos infinitesimales.

b) Observaciones en el campo lejano.

Considerando las simplificaciones mostradas en la figura 3.1b, se tiene:

$$\theta_1 \approx \theta_2 \approx \theta \quad (3-2)$$

Para las variaciones de fase:

$$\begin{cases} r_1 \approx r - \frac{d}{2} \cos \theta \\ r_2 \approx r + \frac{d}{2} \cos \theta \end{cases} \quad (3-3)$$

y para las variaciones de amplitud:

$$r_1 \approx r_2 \approx r \quad (3-4)$$

Tomando las ecuaciones anteriores, la ecuación (3-1) se puede escribir como:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{a}_\theta j\eta \frac{kI_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} |\cos \theta| 2 \cos \left[ \frac{1}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right] \quad (3-5)$$

De la ecuación (3-5) se puede observar que el campo total del arreglo es igual al campo de cada elemento con referencia en el origen multiplicado por un factor, el cual es comúnmente llamado *factor del arreglo*.

El factor del arreglo para un arreglo de 2 elementos de amplitud constante es:

$$FA = 2 \cos \left[ \frac{1}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right] \quad (3-6)$$

o bien de forma normalizada:

$$(FA)_n = \cos \left[ \frac{1}{2} (kd \cos \theta + \beta) \right] \quad (3-7)$$

El factor del arreglo es una función de la geometría del arreglo y de la fase de la excitación. Al variar la separación  $d$  y/o la fase  $\beta$  entre los elementos, las características del factor del arreglo y del campo total del arreglo puede ser controlado.

Con lo presentado hasta este momento, queda claro que el patrón de radiación en campo lejano de un arreglo de dos elementos idénticos es igual al producto del campo de un elemento en un punto de



referencia elegido (usualmente el origen) y el factor del arreglo de dicho arreglo, matemáticamente esto se puede expresar como:

$$\mathbf{E}_{total} = \mathbf{E}_{Elemento} \times FA \quad (3-8)$$

donde

$\mathbf{E}_{total}$  es el campo radiado por todo el arreglo

$\mathbf{E}_{Elemento}$  es el campo radiado por un elemento aislado y con referencia en un punto

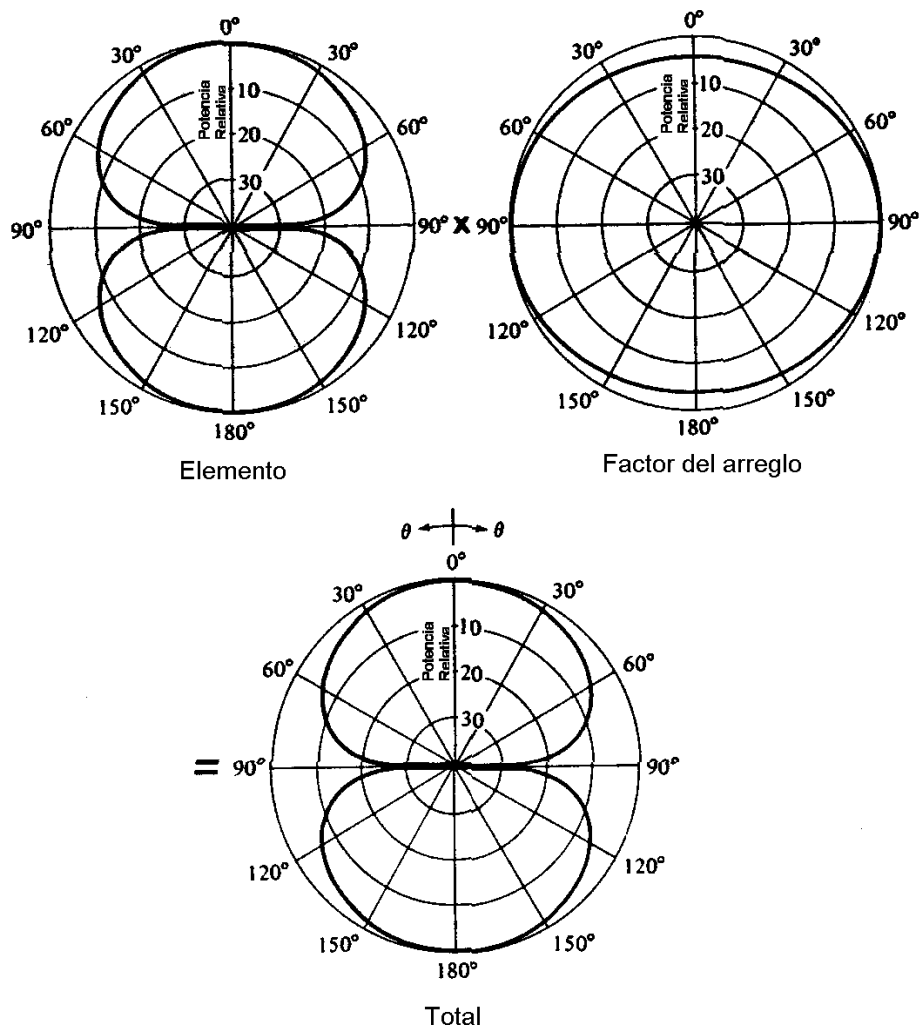
FA es el factor del arreglo

La metodología presentada en esta sección se conoce como principio de multiplicación de patrones para dos elementos idénticos.

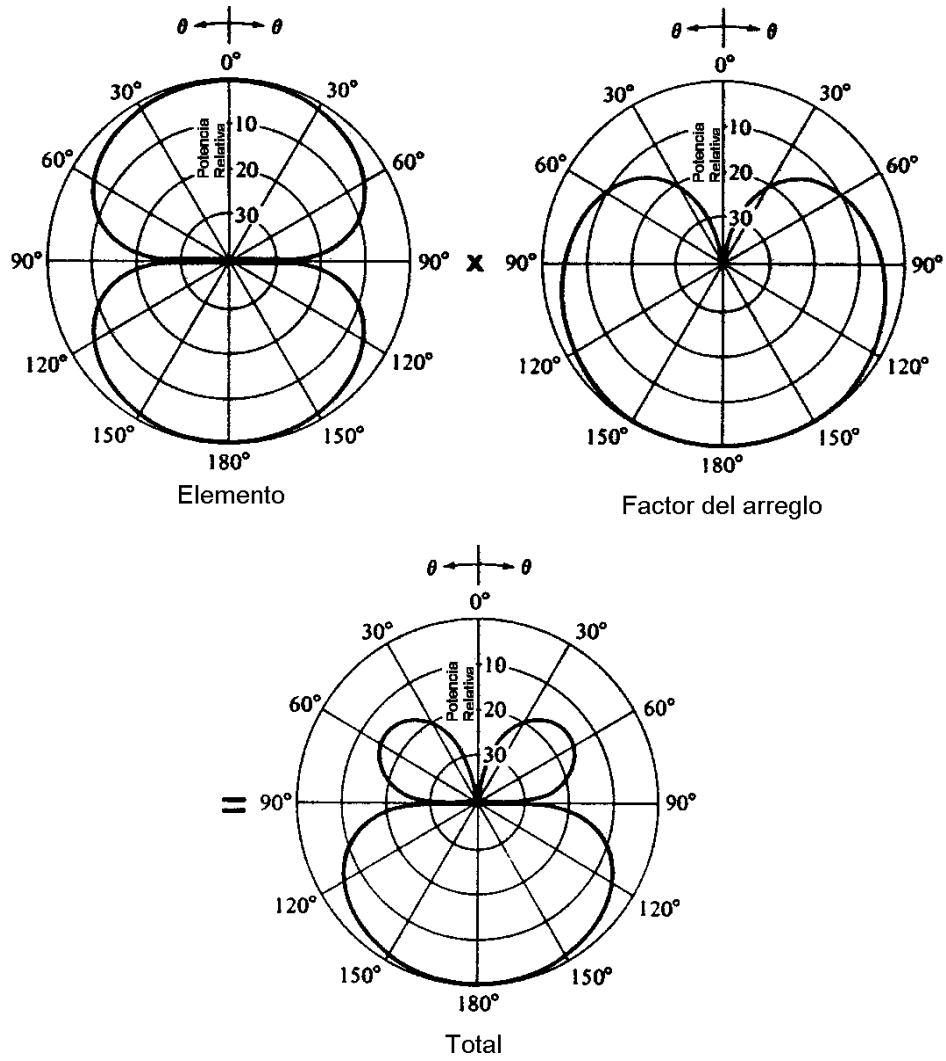
Cada arreglo tiene su propio factor. El factor del arreglo, en general, es función del número de elementos, su configuración geométrica, las magnitudes y fases relativas de la excitación y los espaciamentos entre los elementos. La dificultad de la obtención del factor del arreglo se reducirá si los elementos tiene las mismas amplitudes, fases y espaciamentos. Dado que dicho factor no depende de las características de dirección de los elementos radiadores por sí mismos, puede ser formulado sustituyendo los elementos radiadores por fuentes puntuales (isotrópicas).

Una vez obtenido el factor del arreglo, el campo total es obtenido empleando la ecuación (3-8). Se asume que cada fuente puntual tiene la misma amplitud, fase y ubicación del elemento del arreglo que sustituye.

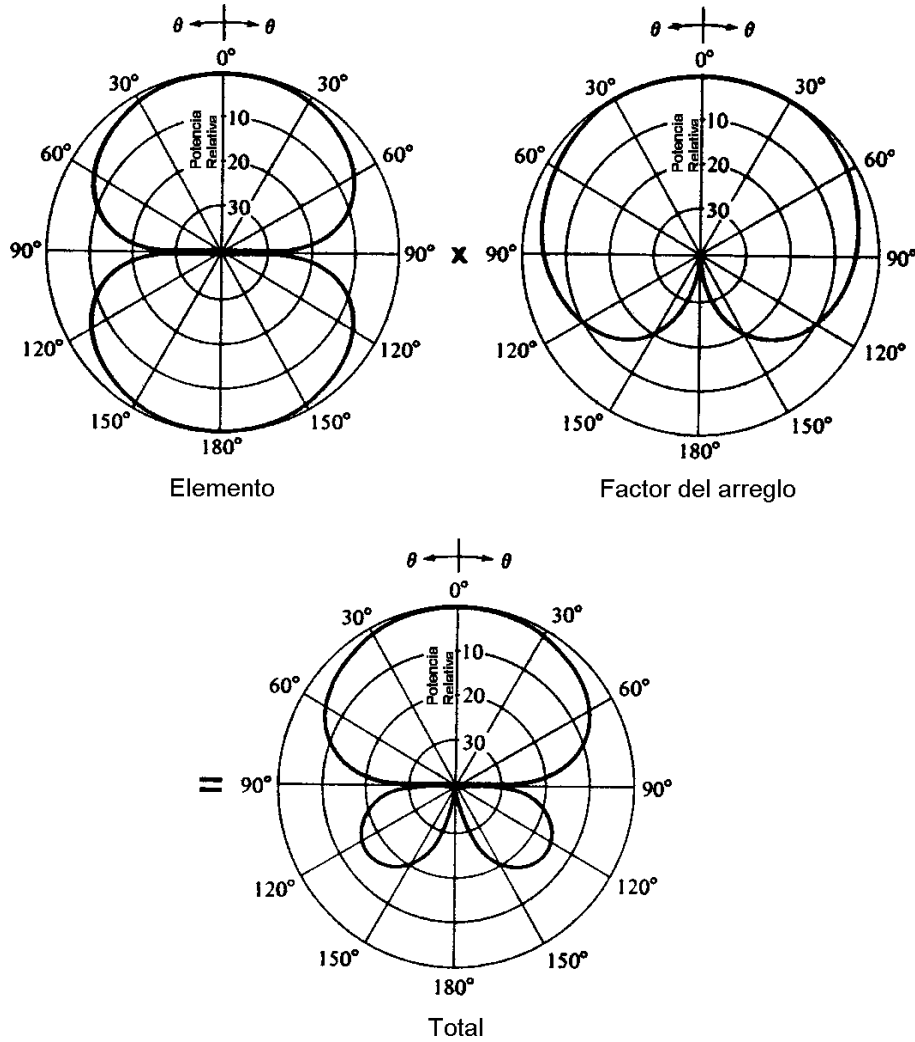
Para ilustrar mejor el concepto del principio de multiplicación de patrones, las figuras 3.2, 3.3 y 3.4 muestran patrones normalizados de un elemento aislado, el factor del arreglo y el patrón total del arreglo para diferentes valores de fase cuando se tiene un arreglo de dos dipolos horizontales separados una distancia  $d = \lambda/4$  (Balanis, 1997).



**Figura 3.2.** Elemento aislado, factor del arreglo y patrón total de un arreglo de dos dipolos horizontales con misma fase de alimentación ( $\beta = 0^\circ$ ,  $d = \lambda/4$ )



**Figura 3.3.** Elemento aislado, factor del arreglo y patrón total de un arreglo de dos dipolos horizontales con  $\beta = +90^\circ$  y  $d = \lambda/4$ .



**Figura 3.4.** Elemento aislado, factor del arreglo y patrón total de un arreglo de dos dipolos horizontales con  $\beta = -90^\circ$  y  $d = \lambda/4$ .

### 3.2.1.2 Arreglo lineal de N elementos con amplitud y espaciamiento uniforme

Esta sección es la generalización de la sección 3.2.1.1 ya que aquí se muestra la obtención del factor del arreglo cuando se tienen N elementos, pero bajo la condición de amplitud y espaciamiento uniforme. Para la obtención del factor del arreglo se toma como base la geometría presentada en la figura 3.5 y se asume que la diferencia de fase de la excitación  $\beta$  entre los elementos contiguos se incrementa progresivamente ( $\beta, 2\beta, 3\beta, \dots$ ). Un arreglo cuyos elementos poseen la misma magnitud de excitación y una fase progresiva son llamados arreglos uniformes. El factor del arreglo puede ser obtenido al considerar los

elementos como fuentes puntuales. El factor del arreglo puede ser obtenido matemáticamente por medio de la expresión:

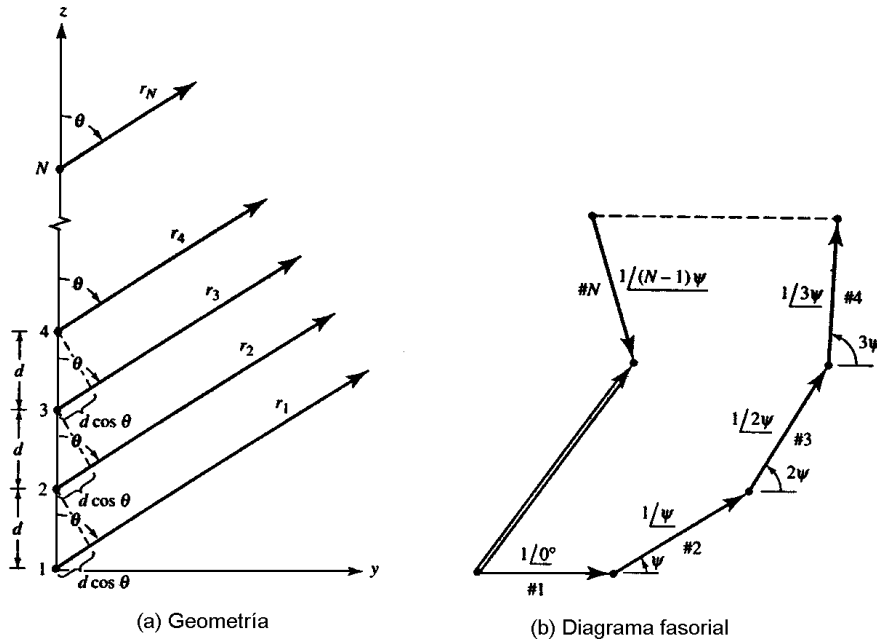
$$FA = 1 + e^{+j(kd \cos \theta + \beta)} + e^{+j2(kd \cos \theta + \beta)} + \dots + e^{+j(N-1)(kd \cos \theta + \beta)} \quad (3-9a)$$

$$FA = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)(kd \cos \theta + \beta)} \quad (3-9b)$$

La ecuación (3-9) también puede escribirse como:

$$FA = \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)\psi} \quad (3-10)$$

donde  $\psi = kd \cos \theta + \beta$ .



**Figura 3.5.** Geometría del campo lejano y diagrama fasorial de un arreglo de  $N$  fuentes isotrópicas ubicadas sobre el eje  $z$ .

Dado que el factor del arreglo total para un arreglo uniforme es una suma de exponenciales, puede ser representada como una suma vectorial de  $N$  fasores, cada uno con amplitud unitaria y fase progresiva  $\psi$ ; gráficamente, esto se ilustra en la figura 3.5.

Una forma cerrada de expresar a la ecuación (3-10) es (Balanis, 1997):

$$FA = e^{j\left(\frac{N-1}{2}\right)\psi} \left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right] \quad (3-11)$$

Si el punto de referencia es físicamente el centro del arreglo, el factor del arreglo se reduce a:

$$FA = \left[ \frac{\text{sen}\left(\frac{N}{2}\psi\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)} \right] \quad (3-12)$$

Aunque en la práctica sólo se miden los patrones en dos dimensiones, varios de ellos pueden emplearse para reconstruir las características tridimensionales de los arreglos.

Un arreglo lineal de  $N$  fuentes puntuales es colocado a lo largo del eje  $z$  y sus elementos están espaciados una distancia  $d$  entre ellos como se muestra en la figura 3.5. La amplitud de la excitación de cada elemento es  $a_n$  y existe una fase de excitación progresiva  $\beta$ . Para las observaciones en el campo lejano, el factor del arreglo puede escribirse como:

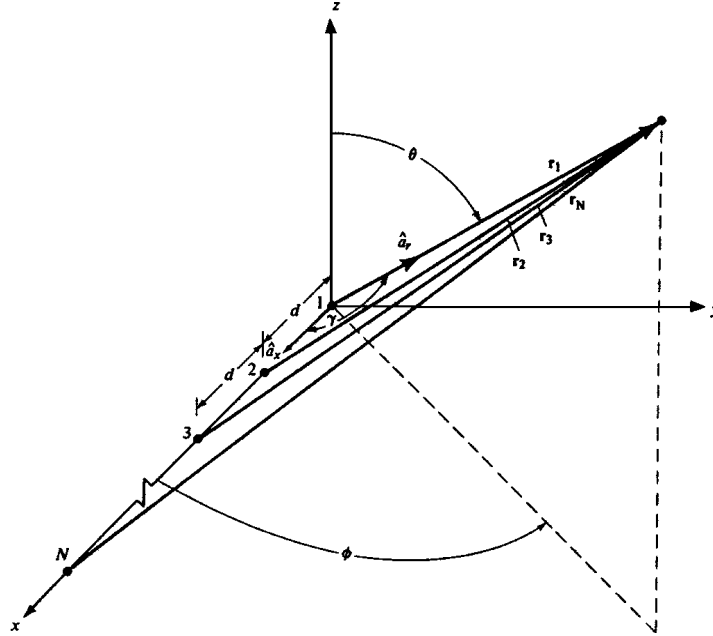
$$FA = \sum_{n=1}^N a_n e^{j(n-1)(kd \cos \gamma + \beta)} = \sum_{n=1}^N a_n e^{j(n-1)\psi} \quad (3-13)$$

donde  $\psi = kd \cos \gamma + \beta$ ,  $a_n$  es la amplitud de excitación del  $n$ -ésimo elemento y  $\gamma$  es el ángulo entre el eje del arreglo (eje  $z$ ) y el vector radial del origen al punto de observación.

En general, el ángulo  $\gamma$  se obtiene del producto punto de un vector unitario a lo largo del eje del arreglo con un vector unitario dirigido hacia el punto de observación. Para la geometría de la Fig. 3.5 se tiene que:

$$\cos \gamma = \mathbf{a}_z \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_z \cdot (\mathbf{a}_x \text{sen} \theta \cos \phi + \mathbf{a}_y \text{sen} \theta \text{sen} \phi + \mathbf{a}_z \cos \theta) = \cos \theta \Rightarrow \gamma = \theta \quad (3-14)$$

La ecuación (3-14) es válida únicamente cuando se tiene un arreglo a lo largo del eje  $z$ . A continuación se explican los procedimientos para obtener los factores del arreglo cuando el arreglo en estudio se encuentra sobre los ejes  $x$  o  $y$ .



**Figura 3.6.** Arreglo lineal de  $N$  elementos isotrópicos colocado a lo largo del eje  $x$ .

Considérese ahora un arreglo de  $N$  elementos isotrópicos ubicado sobre el eje  $x$  (Figura 3.6). El factor del arreglo en el campo lejano para el arreglo de la figura 3.6 es idéntico al del caso anterior, con excepción de la fase del factor  $\psi$ . Para esta geometría se tiene:

$$\cos \gamma = \mathbf{a}_x \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{a}_x \cdot (\mathbf{a}_x \text{sen}\theta \cos \phi + \mathbf{a}_y \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \mathbf{a}_z \cos \theta) = \text{sen}\theta \cos \phi \quad (3-15)$$

$$\cos \gamma = \text{sen}\theta \cos \phi \Rightarrow \gamma = \arccos(\text{sen}\theta \cos \phi) \quad (3-15a)$$

El factor para este arreglo es también dado por la ecuación (3-13) pero con la definición de  $g$  de la ecuación (3-15a). Para este sistema, el factor del arreglo es un función de los ángulo  $\theta$  y  $\phi$ .

De una forma similar, el factor del arreglo para  $N$  fuentes colocadas a lo largo del eje  $y$  se puede calcular por medio de la ecuación (3-13) pero con la siguiente definición de  $\gamma$ :

$$\cos \gamma = \mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_r = \text{sen}\theta \text{sen}\phi \Rightarrow \gamma = \arccos(\text{sen}\theta \text{sen}\phi) \quad (3-16)$$

Cabe señalar que la ubicación física de los elementos a lo largo de los ejes  $x$ ,  $y$  ó  $z$  no cambia las características del arreglo.

### 3.2.2 Arreglos planos (bidimensional)

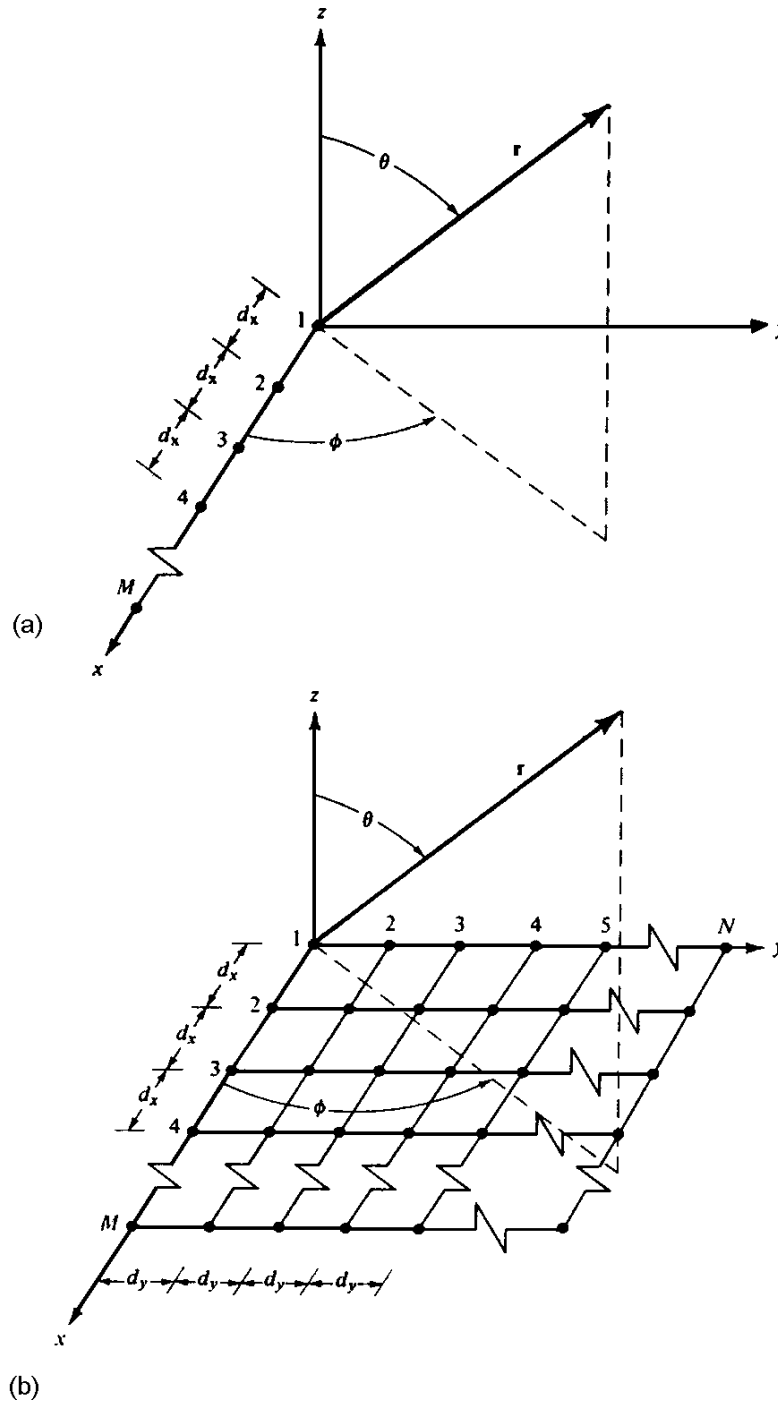
Otra forma de colocar los elementos radiadores en un arreglo es en forma de un enrejado para construir un arreglo plano o rectangular. Los arreglos planos proveen variables adicionales que pueden usarse como controles para ajustar la forma del patrón de radiación a la deseada. Los arreglos rectangulares son más versátiles y pueden tener una mejor simetría en sus lóbulos laterales.

Para encontrar el factor del arreglo de un arreglo rectangular se empleará la figura 3.7. Si  $M$  elementos son colocados inicialmente sobre el eje  $x$  (Figura 3.7a), el factor del arreglo puede ser calculado por medio de la ecuación:

$$FA = \sum_{m=1}^M I_{m1} e^{j(m-1)(kd_x \text{sen}\theta \cos\phi + \beta_x)} \quad (3-17)$$

donde  $I_{m1}$  es el coeficiente de la excitación de cada elemento. El espaciamiento y el cambio de fase progresivo entre los elementos a lo largo del eje  $x$  es representado por  $d_x$  y  $\beta_x$ , respectivamente.





**Figura 3.7.** a) Geometría para un arreglo lineal. b) Geometría para un arreglo rectangular.

Si  $N$  arreglos con las mismas características son colocados paralelamente uno junto al otro en la dirección  $y$ , a una distancia  $d_y$  entre ellos y con una fase progresiva  $\beta_y$ . Se obtendrá un arreglo rectangular como el mostrado en la figura 3.7b. El factor del arreglo para este arreglo rectangular es:

$$FA = \sum_{n=1}^N I_{1n} \left[ \sum_{m=1}^M I_{m1} e^{j(m-1)(kd_x \text{sen}\theta \cos\phi + \beta_x)} \right] e^{j(n-1)(kd_y \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \beta_y)} \quad (3-18)$$

o bien

$$FA = S_{xm} S_{yn} \quad (3-19)$$

donde

$$S_{xm} = \sum_{m=1}^M I_{m1} e^{j(m-1)(kd_x \text{sen}\theta \cos\phi + \beta_x)} \quad (3-20)$$

$$S_{yn} = \sum_{n=1}^N I_{1n} e^{j(n-1)(kd_y \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \beta_y)} \quad (3-21)$$

Las ecuaciones (3-20) y (3-21) indican que el patrón de radiación de un arreglo rectangular es igual al producto de los factores de los arreglos en las direcciones  $x$  e  $y$ .

Si los coeficientes de la amplitud de la excitación de los radiadores en la dirección  $y$  son proporcionales a las amplitudes de los radiadores en la dirección  $x$ , la amplitud del elemento  $(m,n)$  se puede escribir como:

$$I_{mn} = I_{m1} I_{1n} \quad (3-22)$$

Si además la amplitud de la excitación de todo el arreglo es constante ( $I_{mn} = I_0$ ), la ecuación (3-18) se puede escribir como:

$$FA = I_0 \sum_{m=1}^M e^{j(m-1)(kd_x \text{sen}\theta \cos\phi + \beta_x)} \sum_{n=1}^N e^{j(n-1)(kd_y \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \beta_y)} \quad (3-23)$$

Por lo tanto el factor del arreglo normalizado es:

$$FA_n(\theta, \phi) = \left\{ \frac{1}{M} \frac{\text{sen}\left(\frac{M}{2}\psi_x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi_x}{2}\right)} \right\} \left\{ \frac{1}{N} \frac{\text{sen}\left(\frac{N}{2}\psi_y\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi_y}{2}\right)} \right\} \quad (3-24)$$

donde  $\psi_x = kd_x \text{sen}\theta \cos\phi + \beta_x$  y  $\psi_y = kd_y \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \beta_y$ .

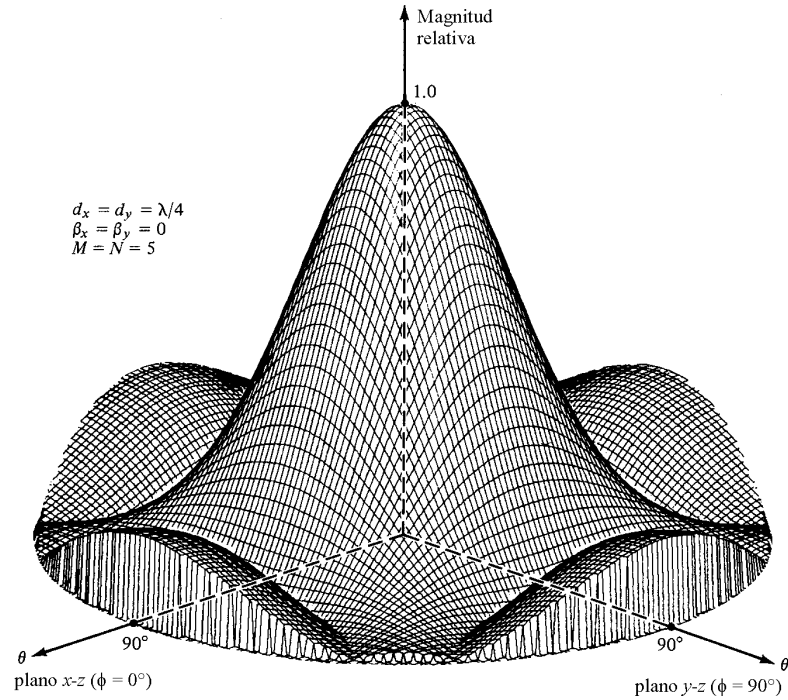
Cuando el espaciamiento entre los elementos es igual o mayor que  $\lambda$ , se obtienen varios lóbulos con amplitud máxima. El máximo principal es llamado lóbulo principal y los restantes, lóbulo laterales. Para evitar la existencia de lóbulos laterales en el plano  $XZ$  y  $YZ$ , el espaciamiento entre los elementos en la dirección  $x$  e  $y$  debe ser menor que  $\lambda$  ( $d_x < \lambda$  y  $d_y < \lambda$ ).

Para un arreglo rectangular el lóbulo principal y los lóbulos laterales de  $S_{xm}$  y  $S_{yn}$  se ubican en:

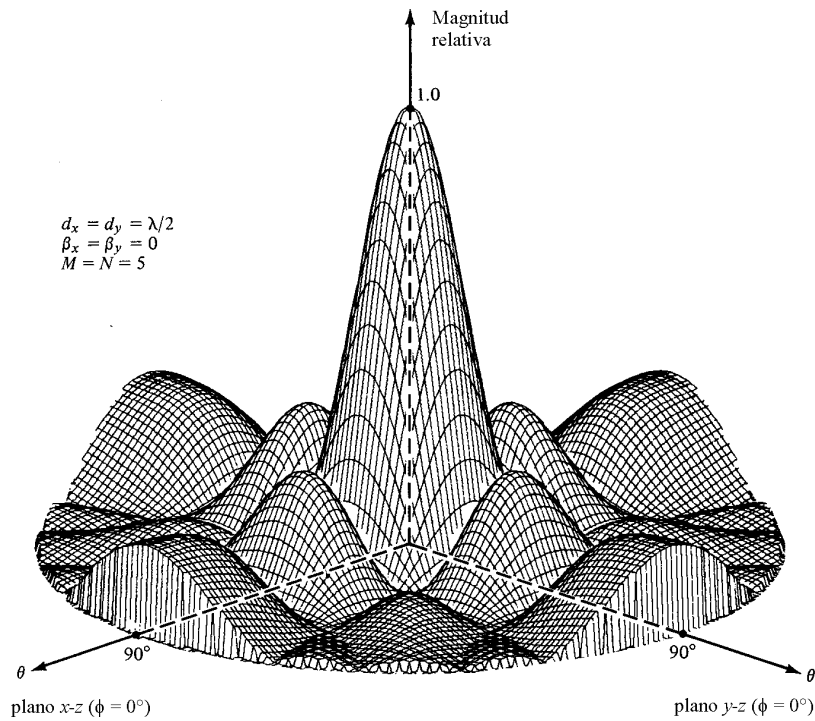
$$kd_x \text{sen}\theta \cos\phi + \beta_x = \pm 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3-25a)$$

$$kd_y \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \beta_y = \pm 2n\pi \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3-25b)$$

Las fase  $\beta_x$  y  $\beta_y$  son mutuamente independientes. Las figuras 3.8 y 3.9 muestran los patrones de radiación de dos arreglos rectangulares cuando se varía la distancia entre sus elementos (Balanis, 1997).



**Figura 3.8.** Patrón tridimensional de un arreglo rectangular de fuentes puntuales cuando sus elementos tienen un espaciamiento de  $d_x = d_y = \lambda/4$ , e igual amplitud y fase de excitación.



**Figura 3.9.** Patrón tridimensional de un arreglo rectangular de fuentes puntuales cuando sus elementos tienen un espaciamiento de  $d_x = d_y = \lambda/2$ , e igual amplitud y fase de excitación.

### 3.3 Arreglos helicoidales

#### 3.3.1 Arreglo de dos hélices

Siguiendo con el estudio presentado en 1995 por el doctor Kraus, Martínez et al (Martínez, 2000) realizaron un estudio para conocer los efectos del acoplamiento mutuo entre un arreglo de dos hélices (Fig. 3.10). Dentro de los resultados presentados, se realiza un análisis comparativo entre los patrones obtenidos por el Método de Momentos (MM) y el Principio de Multiplicación de Patrones (PMP).

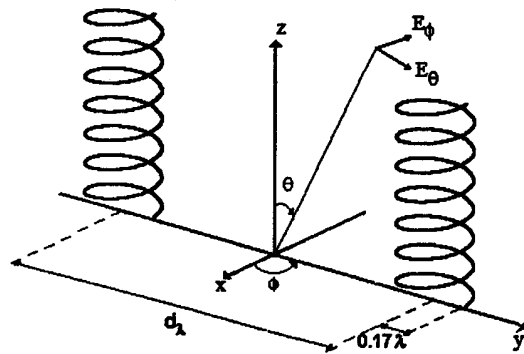
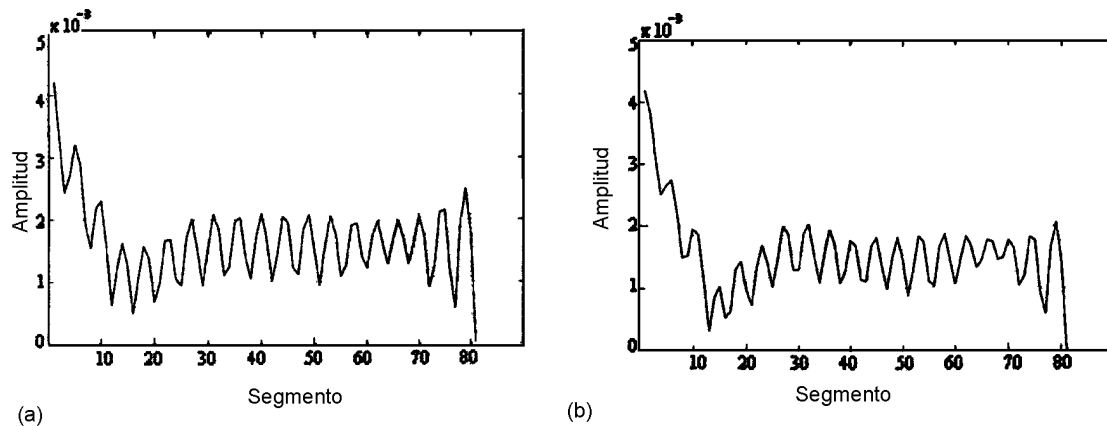
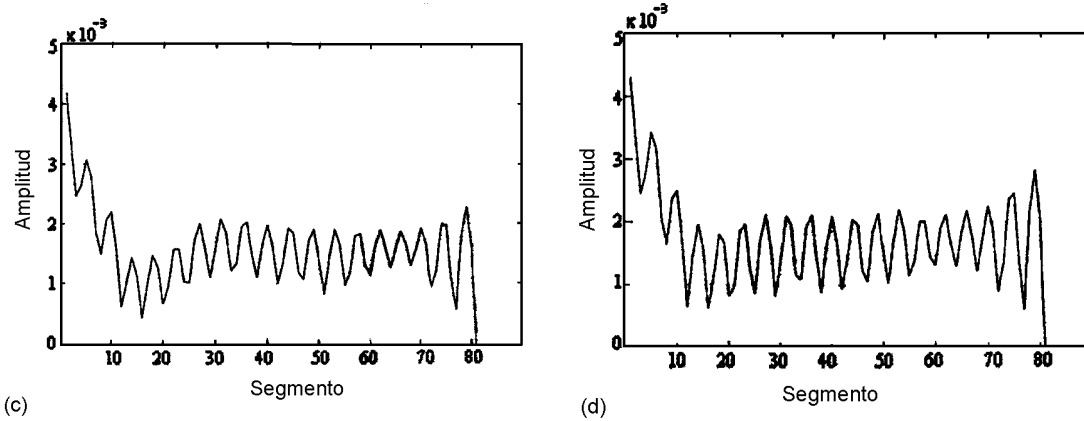


Figura 3.10 . Geometría del arreglo de dos hélices.

Cada una de las hélices del arreglo tiene 7 vueltas, circunferencia de  $1.07\lambda$  y un ángulo de disparo de  $12^\circ$ . Ambas hélices tienen el mismo sentido de giro, misma fase de alimentación y separadas una distancia  $d_\lambda$  entre ellas. De los resultados obtenidos (Fig. 3.11), se observa que cuando  $d_\lambda$  se incrementa, la distribución de corriente se aproxima a la de una hélice aislada.

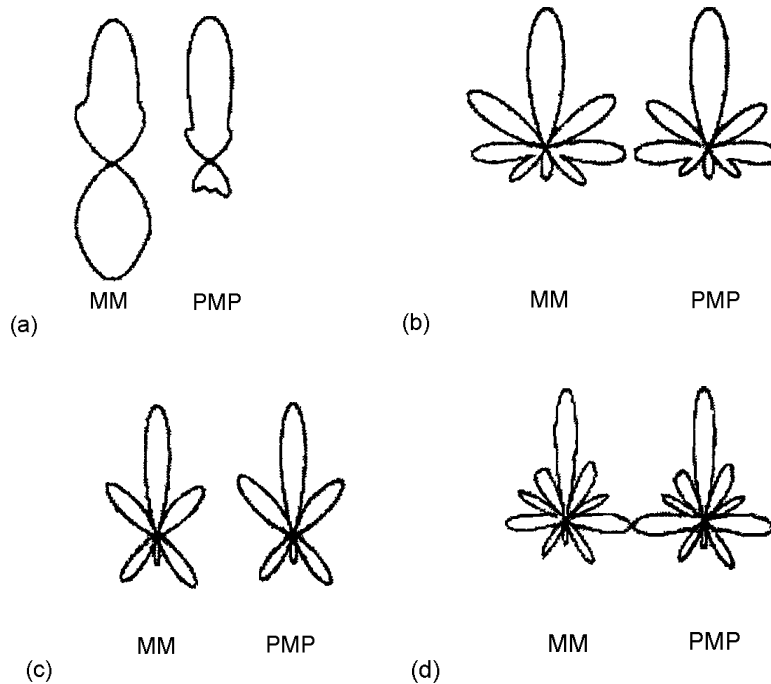




**Figura 3.11 .** Distribución de corriente obtenida para cada hélice.

a)  $d_\lambda = 0.5$ . b)  $d_\lambda = 1$ . C)  $d_\lambda = 1.5$ . d) Hélice aislada

Si no se considera el acoplamiento y se emplea el Principio de Multiplicación de Patrones, los resultados son los mismos para las separaciones de  $1.5\lambda$  y  $2\lambda$ , pero para valores de  $d_\lambda$  más pequeños ( $0.5\lambda$  y  $1\lambda$ ) es notorio que el patrón de radiación obtenido considerando el acoplamiento (MM) es más afilado que el obtenido por medio de PMP (Fig. 3.12).



**Figura 3.12.** Patrones de radiación del arreglo.

a)  $d_\lambda = 0.5$ . b)  $d_\lambda = 1$ . c)  $d_\lambda = 1.5$ . d)  $d_\lambda = 2$ .

Una hélice aislada con alimentación periférica y sin plano de tierra (primer segmento del MM) presenta una impedancia de  $112 - j210 \Omega$ . También se encontró que la resistencia y reactancia de entrada de cada hélice del arreglo son muy dependientes del espaciamiento entre ella cuando se tiene valores entre  $0.4\lambda$  y  $0.6\lambda$  de distancia entre las hélices, pero para valores mayores la resistencia de entrada tiende al valor de  $112 \Omega$  y la reactancia hacia  $-210 \Omega$ .

Con los resultados de esta investigación, se concluye que para un arreglo de dos hélices es necesario considerar los efectos del acoplamiento mutuo entre estos dos elementos cuando se tiene una separación  $d_\lambda$  entre  $0.5\lambda$  y  $1\lambda$  entre las hélices para obtener una aproximación muy cercana al comportamiento real del patrón del arreglo.

### 3.3.2 Arreglo de cuatro hélices

En la figura 3.13 se muestra el arreglo helicoidal construido por el doctor Kraus (Kraus, 1948). En esta configuración cada hélice tiene 6 vueltas y un ángulo de disparo de 14 grados. Las hélices fueron montadas sobre un plano de tierra liso y cuadrado de  $2.5\lambda \times 2.5\lambda$  y alimentadas con voltajes de igual amplitud y fase.

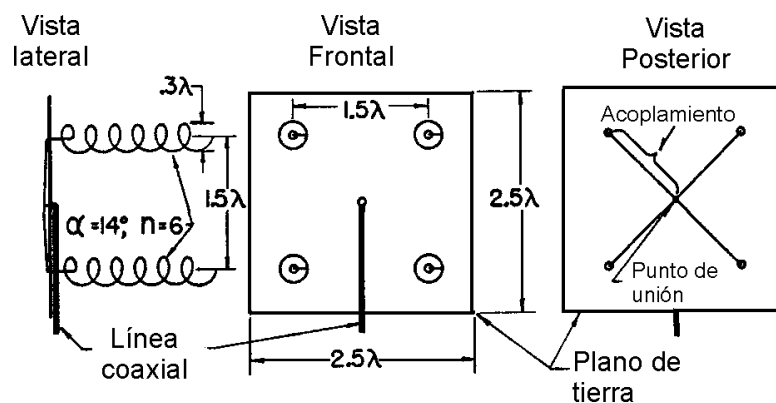
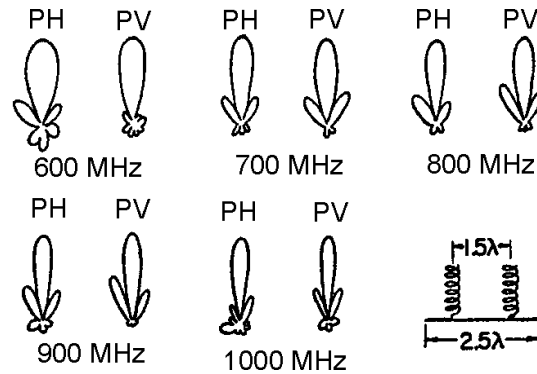


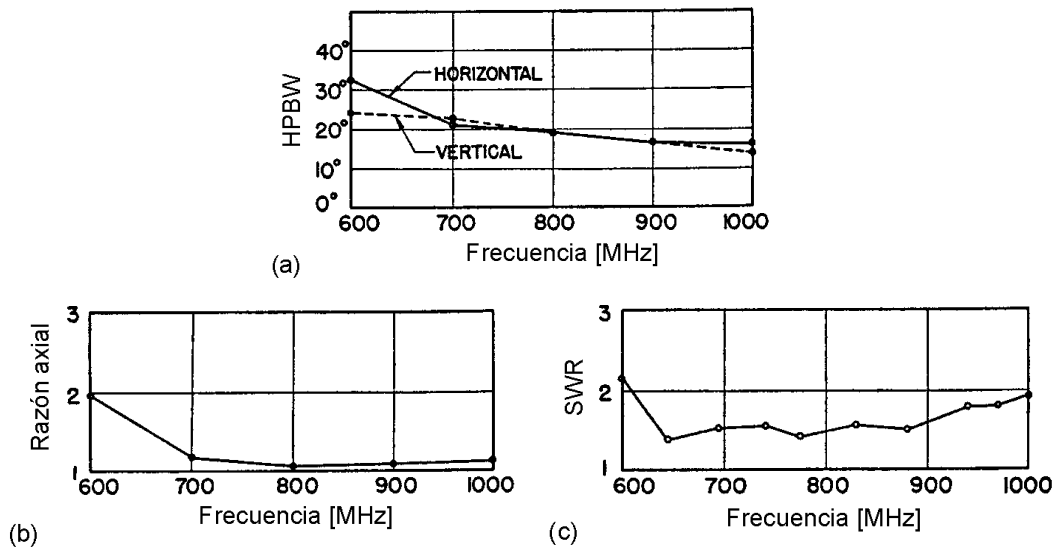
Figura 3.13. Arreglo de 4 hélices.

Cada antena es conectada por un trozo de línea de transmisión, el cual acopla gradualmente la impedancia característica de la antena de 130 a 200 ohms. Las cuatro líneas de las hélices conectadas en paralelo en un mismo punto producen una impedancia de 50 ohms.



**Figura 3.14.** Campo eléctrico medido para el arreglo helicoidal.  
(PH = Polarización Horizontal, PV = Polarización Vertical)

Los patrones de radiación medidos para las componentes de las polarizaciones horizontal y vertical se muestran en la figura 3.14. Al integrar los patrones de radiación para obtener una polarización circular, se tiene que la ganancia del arreglo es 40 (16 dB) a 600 MHz y 160 (22 dB) a 1000 MHz.

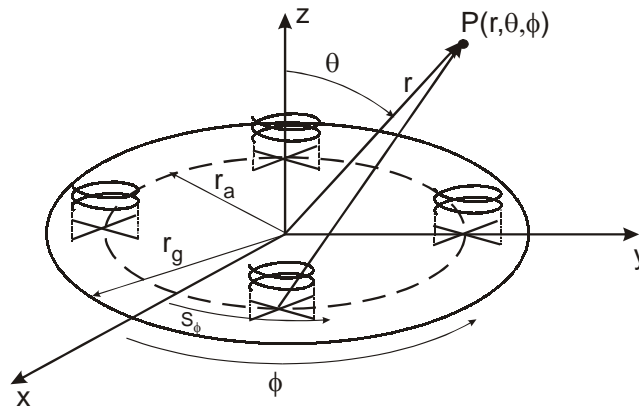


**Figura 3.15.** Sumario de los resultados obtenidos de las mediciones del arreglo helicoidal. a) Ancho del haz de media potencia. b) Razón axial. c) SWR.



Las mediciones del SWR se realizaron a una distancia de 2.5 metros del punto de conexión de la alimentación. De la figura 3.15 se observa que todas las características de la antenna son satisfactorias para operar entre los 600 y 1000 MHz.

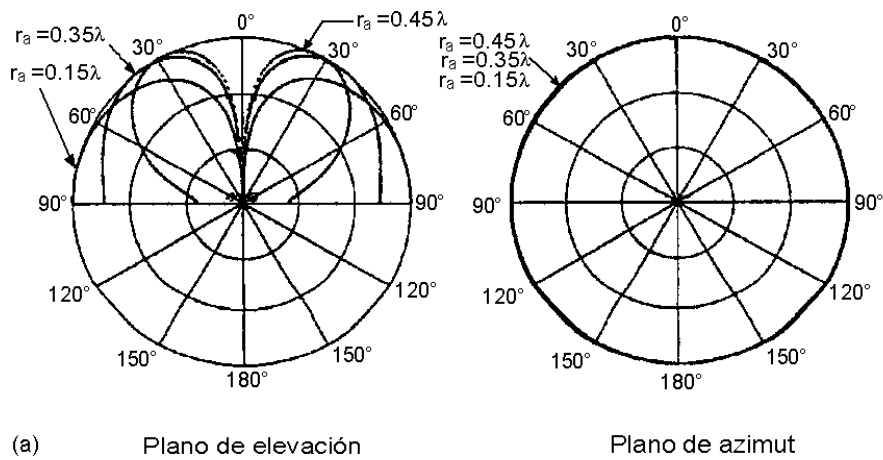
Años más tarde, algunos expertos en antenas (Phongcharoenpanich, 2001) realizaron una investigación para conocer el efecto que tienen las dimensiones del plano de tierra en el patrón de radiación de un arreglo para un modo de radiación cónico. La estructura de la antenna está compuesta de un arreglo circular de hélices pequeñas colocadas sobre un plano de tierra (Fig. 3.16).

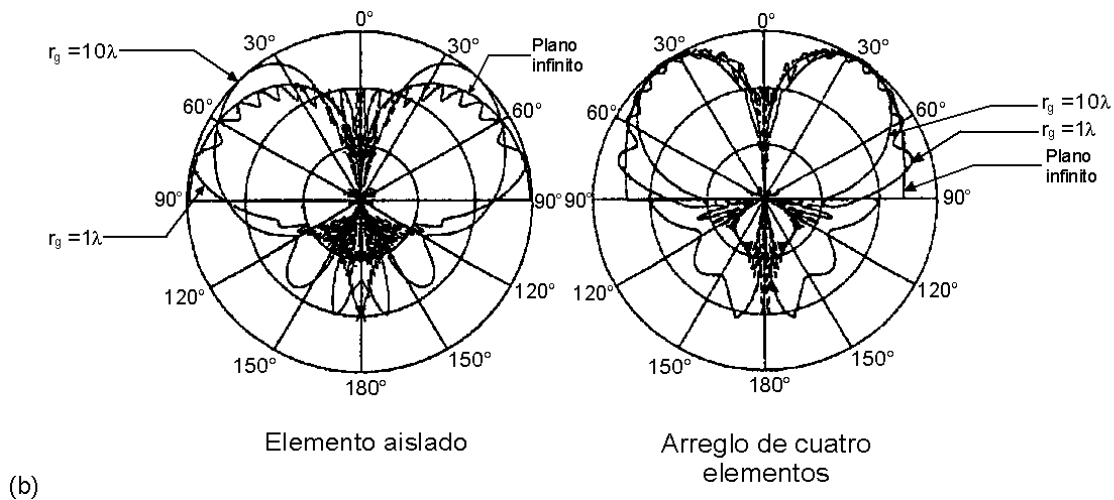


**Figura 3.16.** Arreglo helicoidal circular sobre un plano de tierra.

( $r_a$  = radio del arreglo,  $r_g$  = radio del plano de tierra)

Los patrones de radiación de elevación y azimut obtenidos al variar el radio del arreglo se muestran en el figura 3.17a y los patrones al variar el radio del plano de tierra se muestran en la figura 3.17b.



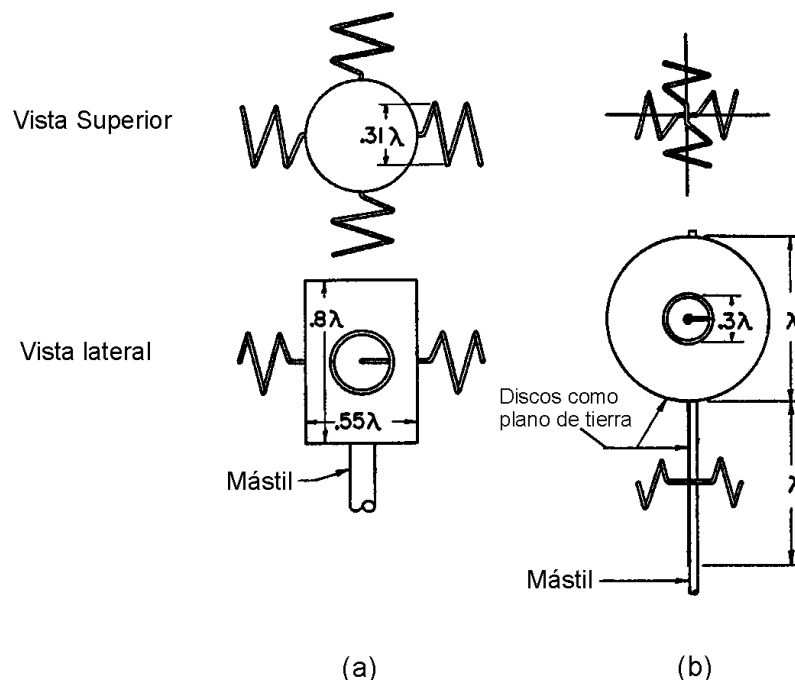


**Figura 3.17.** a) Patrones de radiación al variar el radio del arreglo y plano de tierra infinito. b) Patrones de radiación al variar el radio del plano de tierra.

De la figura anterior se observa que el patrón de elevación posee el nulo a  $90^\circ$ . En el caso de un elemento solo, el pico del patrón de elevación cambia significativamente con el tamaño del plano de tierra hasta que llega a  $90^\circ$  cuando el plano es infinito. Mientras que para el caso del arreglo de 4 elementos, el pico del patrón de elevación se mantiene a  $34^\circ$  para varias dimensiones del plano de tierra. El patrón con planos de tierra de radios pequeños provoca una radiación backfire considerable (Fig. 3.17b). El nivel del máximo lóbulo trasero se decrementa conforme el radio del plano de tierra se incrementa, llegando a desaparecer cuando el plano es infinito.

### 3.3.3 Arreglo helicoidal omnidireccional (Kraus, 1948)

En la figura 3.18 se muestran dos configuraciones para una radiación omnidireccional usando 4 antenas helicoidales, cada una de una vuelta. El término omnidireccional se emplea en esta sección para definir un radiación omnidireccional en el plano azimut únicamente.



**Figura 3.18.** Arreglo helicoidal omnidireccional. a) Hélices dispuestas alrededor de un cilindro. b) Hélices agrupadas en pares, cada par tiene las hélices separadas por un plano de tierra circular y liso.

En la figura 3.18a, las cuatro hélices ( $N = 1.5$  vueltas) están colocadas alrededor de un cilindro de  $0.5\lambda$  de diámetro. Todas las hélices tienen el mismo sentido de giro y colocadas con la misma orientación sobre el cilindro, asimismo todas son alimentadas con la misma fase por la línea de transmisión conectada en paralelo.

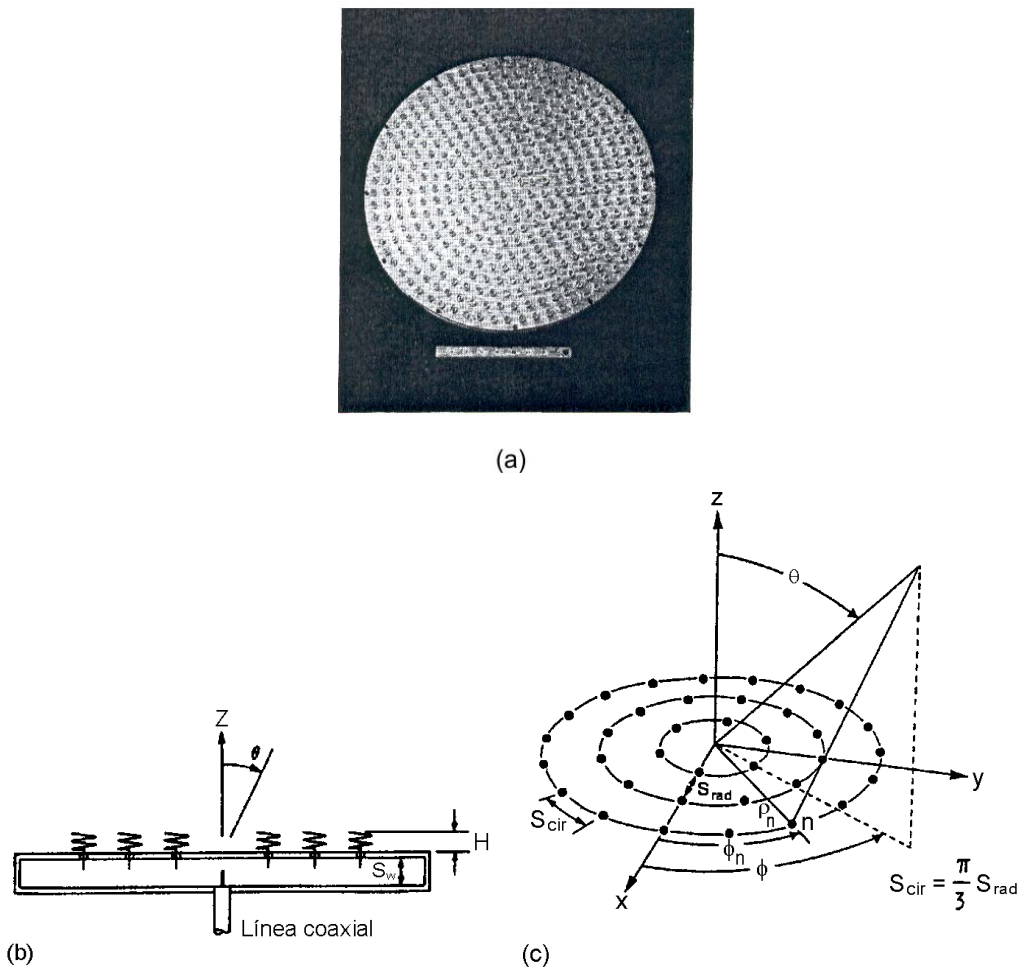
En la figura 3.18b las hélices están montadas en pares. Cada par consiste en dos hélices ( $N = 1$ ) colocadas de tal forma que sus puntos de alimentación estén juntos y conectados en paralelo. Los planos de tierra circulares están dispuestos transversalmente y espaciados una longitud de onda entre sus centros. Un par de las hélices radia hacia el norte y sur, mientras que el otro lo hace hacia el este y oeste. Los dos pares son conectados en paralelo y alimentados en un punto medio entre ellos. El diámetro y espaciamiento de los planos de tierra de una longitud de onda son arbitrarios, pudiéndose emplear un valor menor.

Las mediciones del campo se realizaron con una antena polarizada linealmente y orientada vertical, horizontal,  $+45^\circ$  y  $-45^\circ$ , sucesivamente. La variación de una componente de polarización no excedió más de 3 dB para un ángulo de rotación en el plano azimut de  $360^\circ$ . Las diferentes componentes de polarización no fueron, en general, del mismo valor; la variación máxima del campo eléctrico como

función del ángulo de polarización y el ángulo azimut fue de  $\pm 5$  dB. Los dos arreglos de la figura 3.18 presentan el mismo comportamiento en sus patrones de radiación en una banda de frecuencias de 1 a 1.5.

### 3.3.4 Arreglo helicoidal con ángulo de disparo pequeño

Esta sección es la continuación del estudio presentado en la sección 1.5.2.1, y por lo tanto también fue desarrollado por el Dr. Nakano (Nakano, 1992). En la figura 3.19 se muestra el arreglo construido.



**Figura 3.19.** Arreglo conformado por hélices con ángulo de disparo pequeño. a) Arreglo construido. b) Descripción de la alimentación. c) Geometría

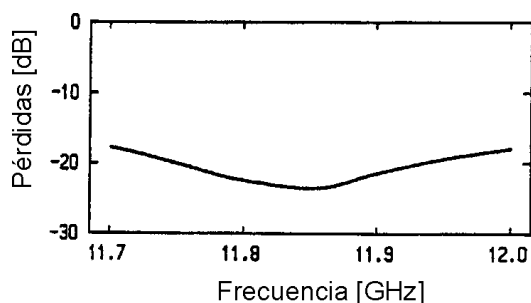
Cada elemento tiene un ángulo de disparo de  $4^\circ$ , circunferencia de la hélice de 25 mm ( $= 1\lambda$ ), radio del conductor igual a 0.5 mm ( $= 0.02\lambda$ ), 2 vueltas y altura de 1.25 mm ( $= 0.05\lambda$ ) del plano de tierra. Este arreglo fue diseñado para una frecuencia de operación de 12 GHz ( $\lambda = 25$  mm). Adicionalmente, esta

configuración tiene la característica de ser alimentado por un guía de onda radial, la cual conduce una onda electromagnética TEM. El espacio entre las placas que constituyen la guía es muy pequeño en comparación a la longitud de onda de trabajo, el cual tiene un valor de 7.5 mm ( $= 0.3\lambda$ ).

El alambre que conforma la línea de alimentación de cada hélice es insertado en la guía de onda radial en un hoyo pequeño y es excitado por una onda progresiva que fluye del centro de la guía de onda (línea coaxial) hacia el extremo de la guía. El radio del alambre de alimentación es el mismo que el del conductor de la hélice. El grosor total del arreglo es igual a 15 mm ( $S_w (= 7.5 \text{ mm}) + H (= 4.7 \text{ mm}) +$  grosor del plato).

Dado que la alimentación se provee por medio de una guía de onda es necesario eliminar la onda reflejada debida a la pared de la guía. Para lograr esto, se introdujo el alambre de alimentación de las hélices más externas a una distancia de  $0.25\lambda$  de la pared de la guía. La onda reflejada puede ser absorbida por las hélices más externas y despreciarse en prácticamente toda la guía onda, con la excepción de su extremo. Adicionalmente, se observó que la amplitud de la onda directa decaía progresivamente del centro al extremo de la guía, por lo que para mantener una onda de amplitud constante se alargaron los alambres de alimentación proporcionalmente al incremento de la distancia radial de la guía.

El acoplador de impedancias entre la línea coaxial (ubicada en el centro de la placa inferior de la guía) y la guía de onda se realiza por la propia inserción del conductor interno del coaxial a la guía. En la figura 3.20 se muestran las pérdidas por desacoplamiento, dichas pérdidas son menores que  $-18 \text{ dB}$  en la banda de frecuencia de 11.7 GHz a 12 GHz.



**Figura 3.20.** Pérdidas por desacoplamiento.

La figura 3.21 muestra la ganancia medida a la frecuencia de 11.85 GHz (mediciones realizadas para el plano de elevación). El patrón de radiación medido se muestran en la figura 3.22, el ancho del haz de medio de potencia fue  $3.7^\circ$  y el nivel del primer lóbulo lateral es  $-18$  dB.

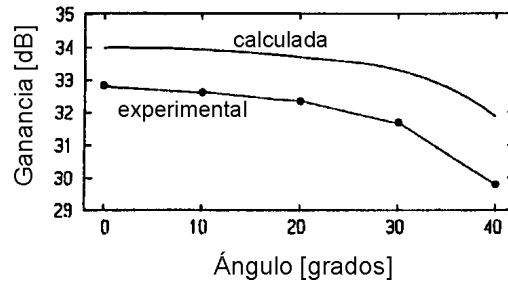


Figura 3.21. Ganancia medida para 11.85 GHz.

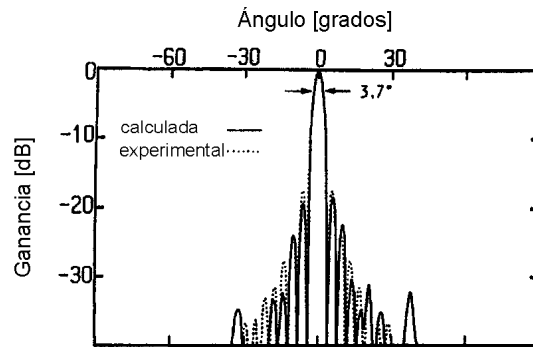


Figura 3.22. Patrón de radiación medido para 11.85 GHz.

### 3.4 Modelado matemático del arreglo helicoidal

En este capítulo se simula un arreglo helicoidal de 4 elementos espaciados una distancia  $d_\lambda$  entre elementos equidistantes.

En la sección 2.4.1 se presentó el desarrollo matemático realizado para el cálculo de la matriz de impedancias, pero en dicho procedimiento dado que sólo que consideró una antena aislada se pudieron realizar algunas simplificaciones en las fórmulas. En esta sección se presentan las ecuaciones que generalizan alguno de los casos anteriores; estos casos son geometrías helicoidales no concéntricas,

geometrías circulares no concéntricas, secciones horizontales y verticales paralelas y la impedancia mutua entre una geometría helicoidal y una sección no coaxiales.

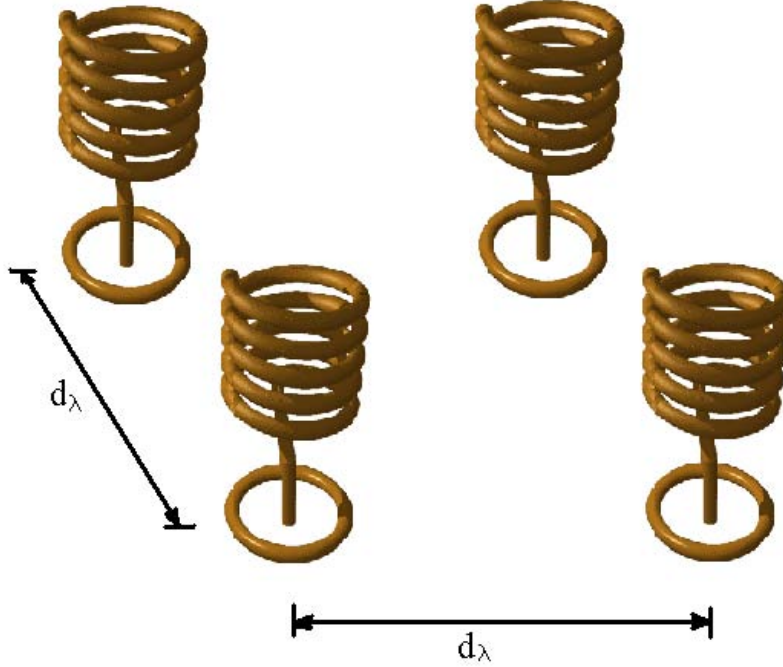
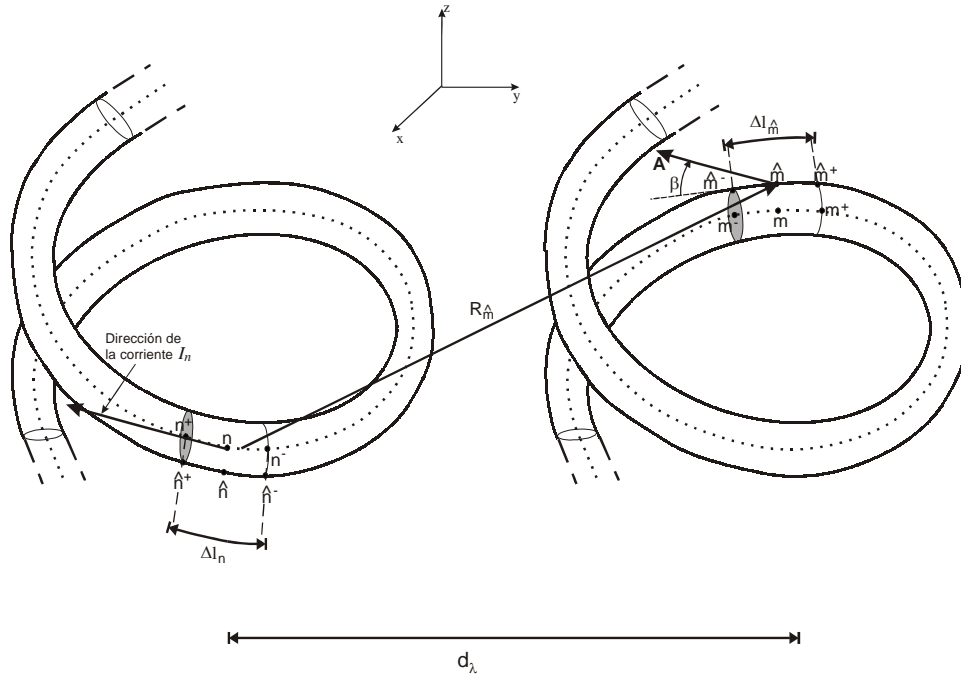


Figura 3.23. Arreglo helicoidal de 4 elementos.

### 3.4.1 Geometrías helicoidales

Tomando como base la figura 3.24 para el cálculo de los elementos necesarios para el cálculo de las impedancias mutuas, y sustituyendo las ecuaciones (2-47) y (2-48) en (2-50) se tiene:

$$R_{\hat{m}} = \left[ \left( \frac{C_{\lambda \hat{m}}}{2\pi} \cos(t_{\hat{m}}) - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \cos(t_n) + x_{\lambda 0 \hat{m}} - x_{\lambda 0 n} \right)^2 + \left( \frac{C_{\lambda \hat{m}}}{2\pi} \text{sen}(t_{\hat{m}}) - \frac{C_{\lambda n}}{2\pi} \text{sen}(t_n) + y_{\lambda 0 \hat{m}} - y_{\lambda 0 n} \right)^2 + \left( S_{\lambda}(t_{\hat{m}} - t_n) + z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-26)$$



**Figura 3.24.** Geometría empleada para el cálculo de las impedancias mutuas entre dos hélices.

Al comparar la ecuación (3-26) y (2-51) se observa que si los puntos  $(x_{\lambda 0 \hat{m}}, y_{\lambda 0 \hat{m}}, z_{\lambda 0 \hat{m}})$  y  $(x_{\lambda 0 n}, y_{\lambda 0 n}, z_{\lambda 0 n})$  de la ecuación (3-26) son iguales se obtiene la ecuación (2-51). Con lo referente al  $\cos \beta$ , la deducción se efectuó en términos de la definición del producto punto (por medio de vectores) no va a cambiar para este caso, por lo tanto:

$$\cos \beta = \frac{C_{\lambda n} C_{\lambda \hat{m}} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + S_{\lambda}^2}{\left[ (C_{\lambda n}^2 + S_{\lambda}^2) (C_{\lambda \hat{m}}^2 + S_{\lambda}^2) \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3-27)$$

la ecuación que permite calcular los elementos de la matriz de impedancia es:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{2\pi \Delta l_n \sqrt{C_{\lambda \hat{m}}^2 + S_{\lambda}^2}} \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{[C_{\lambda n} C_{\lambda \hat{m}} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) + S_{\lambda}^2] \exp(-jkR_{\hat{m}})}{R_{\hat{m}}} dt_n \quad (3-28)$$



$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{\sqrt{C_{\lambda n}^2 + S_{\lambda}^2}}{2\pi\Delta l_n} \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{\exp(-jkR_{\hat{m}})}{R_{\hat{m}}} dt_n \quad (3-29)$$

donde las ecuaciones (3-28) y (3-29) se emplean para el cálculo de la contribución de corriente y la contribución de carga, respectivamente.

### 3.4.2 Geometrías circulares

La figura 3.25 muestra la geometría que permite calcular la impedancia mutua entre dos aros no concéntricos.

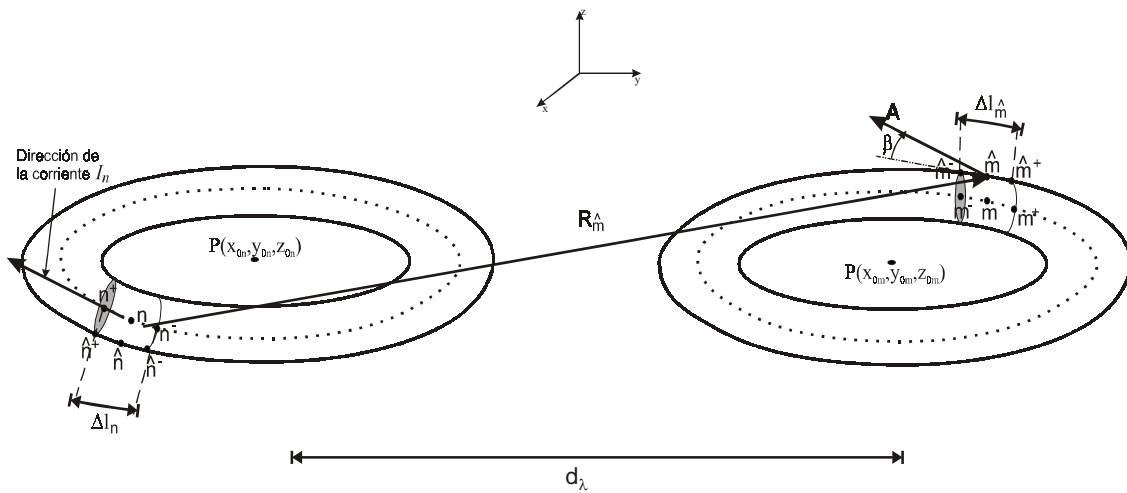


Figura 3.25. Geometría empleada para el cálculo de las impedancias mutuas entre dos aros.

Para el cálculo de la distancia  $R_{\hat{m}}^\lambda$ , se sustituyen las ecuaciones (2-68) y (269) en (2-50), por lo que se tiene:

$$R_{\hat{m}} = \left[ \left( r_{\lambda \hat{m}} \cos(t_{\hat{m}}) - r_{\lambda n} \cos(t_n) + x_{\lambda 0 \hat{m}} - x_{\lambda 0 n} \right)^2 + \left( r_{\lambda \hat{m}} \operatorname{sen}(t_{\hat{m}}) - r_{\lambda n} \operatorname{sen}(t_n) + y_{\lambda 0 \hat{m}} - y_{\lambda 0 n} \right)^2 + \left( z_{\lambda 0 \hat{m}} - z_{\lambda 0 n} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3-30)$$

Nuevamente se observa que si los puntos  $(x_{\lambda 0 \hat{m}}, y_{\lambda 0 \hat{m}}, z_{\lambda 0 \hat{m}})$  y  $(x_{\lambda 0 n}, y_{\lambda 0 n}, z_{\lambda 0 n})$  son iguales la ecuación (3-30) es igual a la ecuación (2-71).

El  $\cos \beta$  está dado por la ecuación:

$$\cos \beta = \cos(t_{\hat{m}} - t_n) \quad (3-31)$$

Las ecuaciones que permiten calcular la integral  $\Psi$  son, para la contribución de corriente:

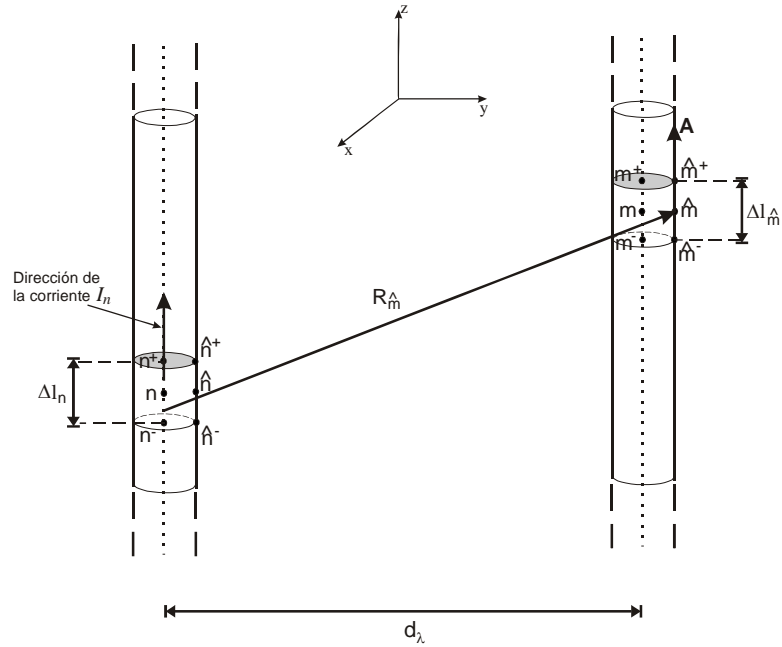
$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \cos(t_{\hat{m}} - t_n) \frac{\exp(-jkR_{\hat{m}})}{R_{\hat{m}}} dt_n \quad (3-32)$$

y para la contribución de cargas:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{\exp(-jkR_{\hat{m}})}{R_{\hat{m}}} dt_n \quad (3-33)$$

### 3.4.3 Geometrías lineales verticales

El análisis de esta sección se basa en la geometría de la figura 3.26.



**Figura 3.26.** Geometría empleada para el cálculo de las impedancias mutuas entre dos elementos verticales.

La geometría lineal se puede definir, en general, como:

$$\mathbf{R}(t) = x(t) \mathbf{a}_x + y(t) \mathbf{a}_y + z(t) \mathbf{a}_z \quad (3-34)$$

De la geometría mostrada en la figura 3.25, se tiene que  $x(t)$  y  $y(t)$  son constantes y  $z(t)$  varía linealmente.

Para esta combinación, estas componentes vectoriales se pueden definir como:

$$\begin{cases} x(t_n) = x_{\lambda 0n} = cte \\ y(t_n) = y_{\lambda 0n} = cte \\ z(t_n) = z_{\lambda n} \end{cases} \quad (3-35)$$

La distancia  $R_{\lambda m}$  se conoce por medio de la ecuación :

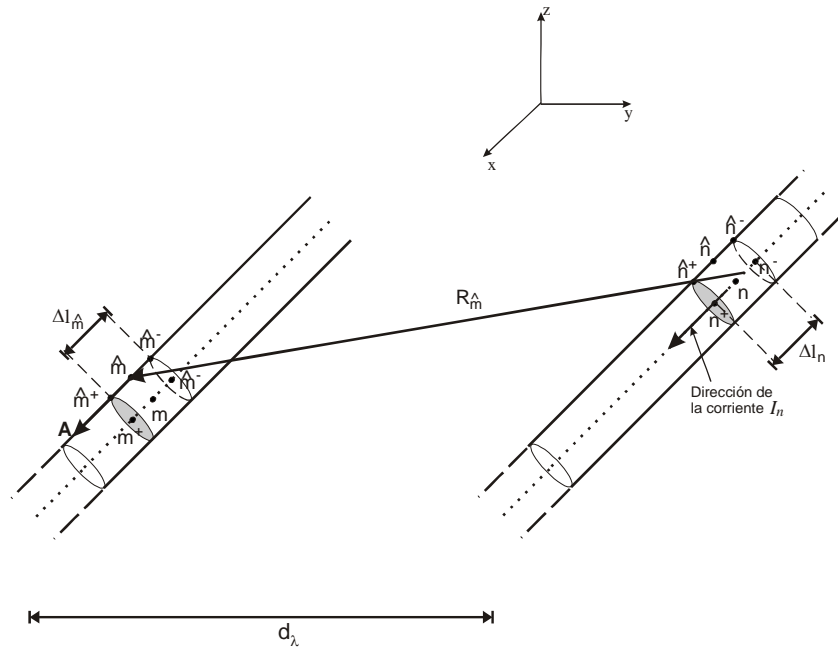
$$R_{\lambda m} = \sqrt{\left(x_{\lambda m} - x_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(y_{\lambda m} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\lambda m} - z_{\lambda n}\right)^2} \quad (3-36)$$

Con lo explicado en la sección 2.4.1.3 se sabe que  $\cos \beta = 1$ . Con este dato se conocen todos los elementos necesarios para el cálculo de las impedancias.

La ecuación que permite el cálculo de la impedancias propias y mutuas para una sección lineal vertical es:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{z_{\lambda n-}}^{z_{\lambda n+}} \frac{\exp\left(-jk \sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda n}\right)^2}} dz_{\lambda n} \quad (3-37)$$

### 3.4.4 Geometrías lineales horizontales



**Figura 3.27.** Geometría empleada para el cálculo de las impedancias mutuas entre dos elementos horizontales.

Tomando la ecuación (3-34) y la geometría mostrada en la figura 3.27, se observa que  $y(t)$  y  $z(t)$  son constantes y  $x(t)$  varía linealmente, por lo que para este caso las componentes vectoriales se pueden definir como:

$$\begin{cases} x(t_n) = x_{\lambda n} \\ y(t_n) = y_{\lambda 0n} = cte \\ z(t_n) = z_{\lambda 0n} = cte \end{cases} \quad (3-38)$$

La distancia  $R_{\hat{m}}$  se conoce por medio de la ecuación :

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda 0n}\right)^2} \quad (3-39)$$

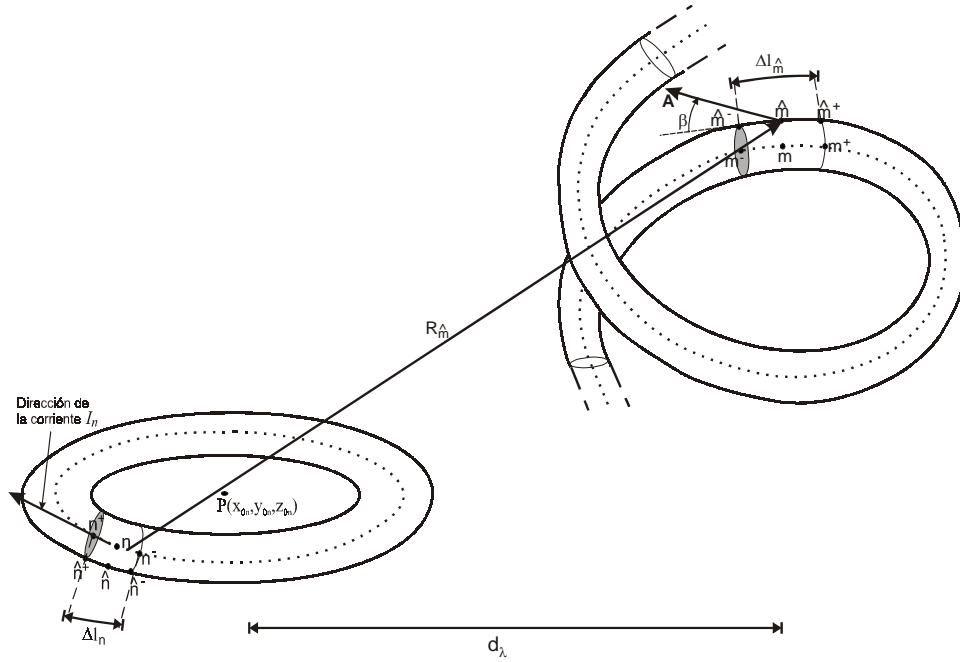
En esta geometría nuevamente se presenta un paralelismo entre la geometría que representa al eje y la geometría que representa a la superficie, por lo tanto  $\cos b = 1$ . La ecuación que permite el cálculo de la impedancias propias y mutuas para una sección lineal horizontal es:

$$\Psi\left(n, \hat{m}\right) = \frac{1}{\Delta l_n} \int_{x_{\lambda n-}}^{x_{\lambda n+}} \frac{\exp\left(-jk \sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda 0n}\right)^2}\right)}{\sqrt{\left(x_{\lambda \hat{m}} - x_{\lambda n}\right)^2 + \left(y_{\lambda \hat{m}} - y_{\lambda 0n}\right)^2 + \left(z_{\lambda \hat{m}} - z_{\lambda 0n}\right)^2}} dx_{\lambda n} \quad (3-40)$$

### 3.4.5 Geometría circular y geometría helicoidal no concéntricas

Como se dijo en el capítulo 2, cuando se habla de una impedancia mutua entre dos geometrías se tienen dos posibles combinaciones para asignar una geometría como  $n$  y otra como  $\hat{m}$ . Ente esta sección únicamente se analiza el caso cuando los segmentos  $n$  tienen una geometría circular y los segmentos  $\hat{m}$  un geometría helicoidal. La figura 3.28 ilustra este caso.

La ecuación (2-68) define la geometría circular, mientras que la ecuación (2-48) define la geometría helicoidal.



**Figura 3.28.** Geometría empleada para el cálculo de las impedancias mutuas entre un elemento circular y un elemento helicoidal no concéntricos.

Al realizar la diferencia vectorial indicada por la ecuación (2-50) se obtiene que:

$$R_m = \left\{ \left[ \frac{C_{\lambda m}}{2\pi} \cos(t_m) - r_{\lambda n} \cos(t_n) + x_{\lambda 0 m} - x_{\lambda 0 n} \right]^2 + \left[ \frac{C_{\lambda m}}{2\pi} \sen(t_m) - r_{\lambda n} \sen(t_n) + y_{\lambda 0 m} - y_{\lambda 0 n} \right]^2 + \left[ \frac{S_{\lambda m}}{2\pi} t_m + z_{\lambda 0 m} - z_{\lambda 0 n} \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (3-41)$$

El  $\cos \beta$  para entre estas geometrías está dado por:

$$\cos \beta = \frac{C_{\lambda m} \cos(t_m - t_n)}{\sqrt{C_{\lambda m}^2 + S_{\lambda m}^2}} \quad (3-42)$$

Finalmente, las ecuaciones que permiten conocer las contribuciones de corrientes y de cargas son, respectivamente:

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{C_{\lambda \hat{m}} \cos(t_{\hat{m}} - t_n)}{\sqrt{C_{\lambda \hat{m}}^2 + S_{\lambda \hat{m}}^2}} \times \frac{\exp(-jkR_{\hat{m}})}{R_{\hat{m}}} dt_n \quad (3-43)$$

y

$$\Psi(n, \hat{m}) = \frac{r_{\lambda n}}{\Delta l_n} \int_{t_{n-}}^{t_{n+}} \frac{\exp(-jkR_{\hat{m}})}{R_{\hat{m}}} dt_n \quad (3-44)$$

### 3.4.6 Matriz de impedancias e impedancia de entrada

En este caso se tienen cuatro hélices, una forma de organizar la matriz de impedancias se muestra en la ecuación (3-45):

$$Z = \begin{bmatrix} \textit{Antena 1} - \textit{Antena 1} & \textit{Antena 1} - \textit{Antena 2} & \textit{Antena 1} - \textit{Antena 3} & \textit{Antena 1} - \textit{Antena 4} \\ \textit{Antena 2} - \textit{Antena 1} & \textit{Antena 2} - \textit{Antena 2} & \textit{Antena 2} - \textit{Antena 3} & \textit{Antena 2} - \textit{Antena 4} \\ \textit{Antena 3} - \textit{Antena 1} & \textit{Antena 3} - \textit{Antena 2} & \textit{Antena 3} - \textit{Antena 3} & \textit{Antena 3} - \textit{Antena 4} \\ \textit{Antena 4} - \textit{Antena 1} & \textit{Antena 4} - \textit{Antena 2} & \textit{Antena 4} - \textit{Antena 3} & \textit{Antena 4} - \textit{Antena 4} \end{bmatrix} \quad (3-45)$$

donde *Antena n – Antena n* representa la impedancia propia de la antena *n* y *Antena n – Antena m* es la impedancia mutua entre la antena *n* y la antena *m*.

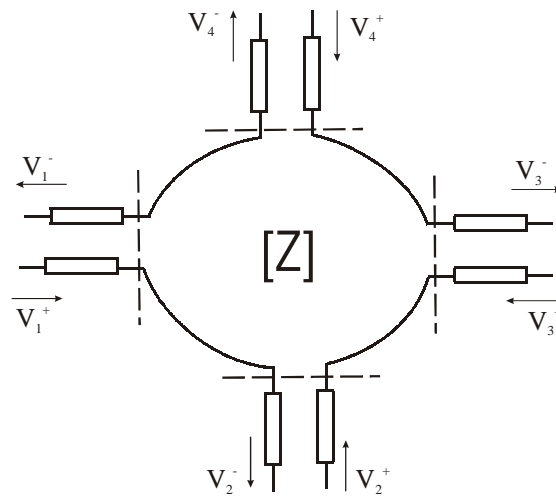
Cada uno de los elementos de la matriz (3-45) está dado por la ecuación:

$$\textit{Antena } n - \textit{Antena } m = \begin{bmatrix} \textit{Aro } n - \textit{Aro } m & \textit{Aro } n - \textit{Horiz. } m & \textit{Aro } n - \textit{Vertical } m & \textit{Aro } n - \textit{Hélice } m \\ \textit{Horiz. } n - \textit{Aro } m & \textit{Horiz. } n - \textit{Horiz. } m & \textit{Horiz. } n - \textit{Vertical } m & \textit{Horiz. } n - \textit{Hélice } m \\ \textit{Vertical } n - \textit{Aro } m & \textit{Vertical } n - \textit{Horiz. } m & \textit{Vertical } n - \textit{Vertical } m & \textit{Vertical } n - \textit{Hélice } m \\ \textit{Hélice } n - \textit{Aro } m & \textit{Hélice } n - \textit{Horiz. } m & \textit{Hélice } n - \textit{Vertical } m & \textit{Hélice } n - \textit{Hélice } m \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

donde  $n = 1, 2, 3, 4$  y  $m = 1, 2, 3, 4$ .

El análisis que se debe de realizar para la impedancia de entrada de cada una de las antenas ya no es tan sencillo como en el caso anterior. Para conocer este parámetro, el arreglo helicoidal puede ser visto como una red de 4 puertos. Dado que la alimentación de una antena se realiza por medio de una línea de transmisión, se tienen voltajes y corrientes incidentes y reflejadas, es decir en la terminal  $n$  se tiene que (Pozar, 1990):

$$\begin{aligned} V_n &= V_n^+ + V_n^- \\ I_n &= I_n^+ + I_n^- \end{aligned} \quad (3-47)$$



**Figura 3.29.** Arreglo helicoidal visto como una red de 4 puertos. Las líneas punteadas representan los planos de referencia tomados para el cálculo de la  $Z_{ent}$ .

Como datos se tiene la matriz de impedancia que describe a la red y los voltajes de alimentación, por lo que la ecuación matricial que representa al arreglo es:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

o bien,



$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

Para nuestro caso es más fácil conocer la impedancia de entrada de cada elemento a través de la matriz de admitancias. La ecuación que permite calcular la admitancia de entrada es

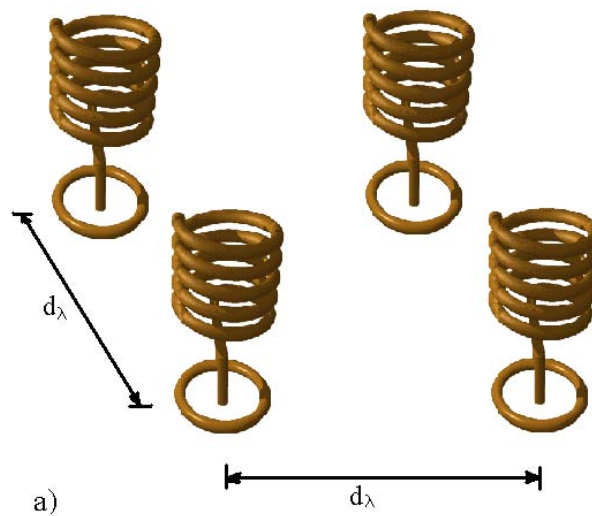
$$Y_{ent_{mn}} = \left. \frac{I_n}{V_n} \right|_{V_m=0 \text{ para } m \neq n} \quad (3-50)$$

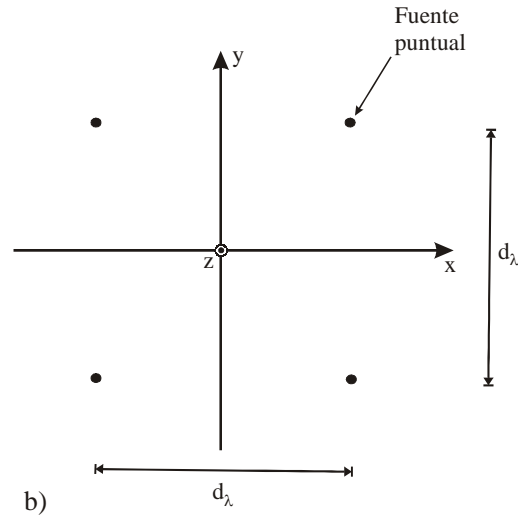
Finalmente la impedancia de entrada está dada por:

$$Z_{ent_{mn}} = \frac{1}{Y_{ent_{mn}}} \quad (3-51)$$

### 3.4.7 Factor del arreglo

La figura 3.30 muestra el arreglo de 4 cuatro hélices propuesto.





**Figura 3.30.** a) Animación del arreglo de 4 hélices con aro en lugar de plano de tierra. b) Geometría empleada para el cálculo del Factor del Arreglo .

La teoría del factor del arreglo fue expuesta en la sección 3.2, por lo que únicamente se emplearán los resultados obtenidos en dicha sección.

Para conocer la fórmula que representa el factor del arreglo se emplea la figura 3.29b. De acuerdo a esta figura  $M = 2$  y  $N = 2$ , y la distancia entre las hélices se va a variar. Dicha distancia será igual en la dirección  $x$  y en la dirección  $y$ , es decir  $d_x = d_y$ . Esta distancia se definirá como  $d_\lambda$ .

Empleando la ecuación normalizada para una arreglo bidimensional, se tiene que:

$$FA_n(\theta, \phi) = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(\psi_x)}{\text{sen}\left(\frac{\psi_x}{2}\right)} \right\} \left\{ \frac{1}{2} \frac{\text{sen}(\psi_y)}{\text{sen}\left(\frac{\psi_y}{2}\right)} \right\} \quad (3-52)$$

donde  $\psi_x = kd_\lambda \text{sen}\theta \cos\phi + \beta_x$  y  $\psi_y = kd_\lambda \text{sen}\theta \text{sen}\phi + \beta_y$ .

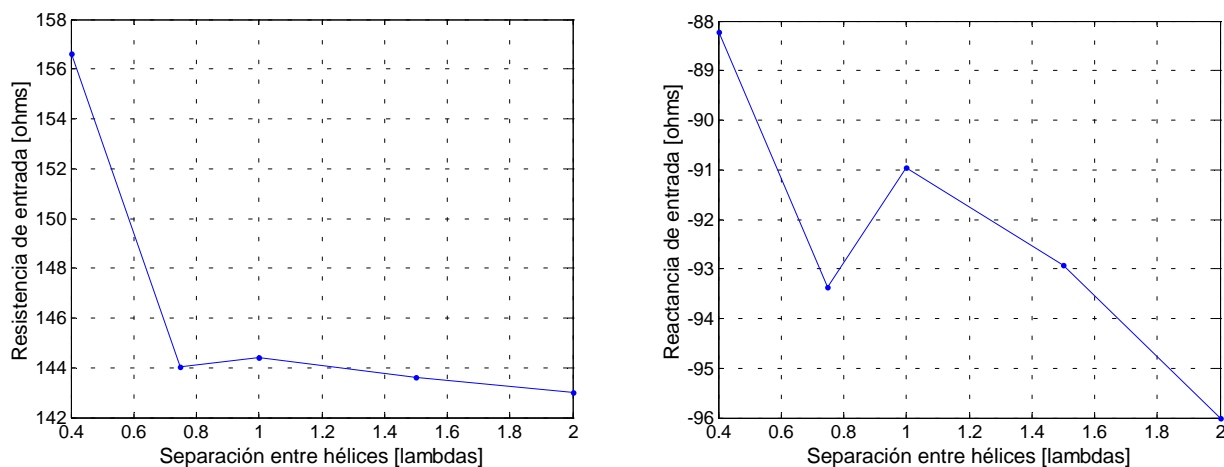
En la mayoría de los resultados presentados en esta tesis los factores  $\beta_x$  y  $\beta_y$  son cero, en caso en donde se manejen con algún otro valor se indicará.

### 3.4 Modelado con un plano de tierra infinito

Para realizar el estudio de un arreglo de 4 hélices con aros, primero se estudiará un arreglo helicoidal con un plano de tierra infinito. Este estudio se realizará por medio del Método de Momentos (MM) y el Principio de Multiplicación de Patrones. Asimismo, se hará una comparación entre los resultados que entregan ambos métodos.

#### 3.4.1 Método de Momentos

En esta sección se realiza el estudio del arreglo por medio del MM, por lo tanto es posible obtener la distribución de corrientes, la impedancia de entrada y el patrón de radiación al variar la distancia entre las hélices. Para la obtención de los patrones de radiación se empleó el Principio de imágenes (ver sección 2.3.1).



**Figura 3.31.** Impedancia de entrada de una antena unitaria al variar la separación entre las hélices del arreglo.

La figura anterior muestra la impedancia de entrada de una antena unitaria al estar las cuatro antenas alimentadas, para conocer la impedancia total del arreglo se puede considerar que las cuatro impedancias se encuentran en paralelo y a partir de ahí obtener una impedancia equivalente. Esta impedancia equivalente corresponde a la impedancia del arreglo, la cual debe ser acoplada a la impedancia de la línea coaxial. En este caso se observa que cuando se tiene una separación de  $0.4\lambda$  se registran los valores más altos de resistencia y reactancia de entrada. Al aumentar la separación entre las hélices, la resistencia de entrada tiende hacia  $142 \Omega$ , que es un valor muy aproximado al teórico ( $140 \Omega$ ). Por lo que respecta a la

reactancia de entrada, conforme aumenta la separación entre las hélices la reactancia se hace más capacitiva (aumenta su valor absoluto pero conserva el signo negativo).

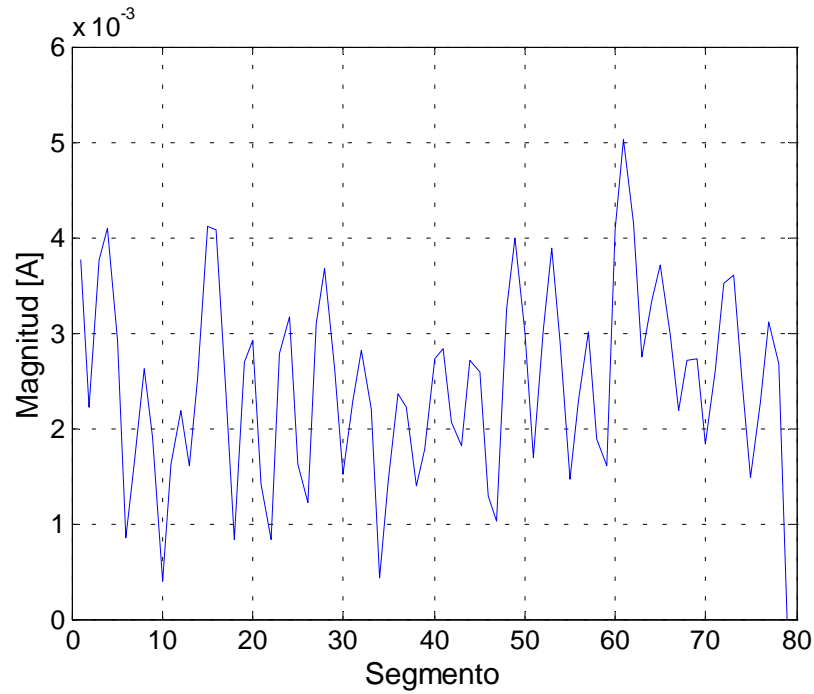


Figura 3.32a. Distribución de corrientes de una hélice cuando  $d_\lambda = 0.4$ .

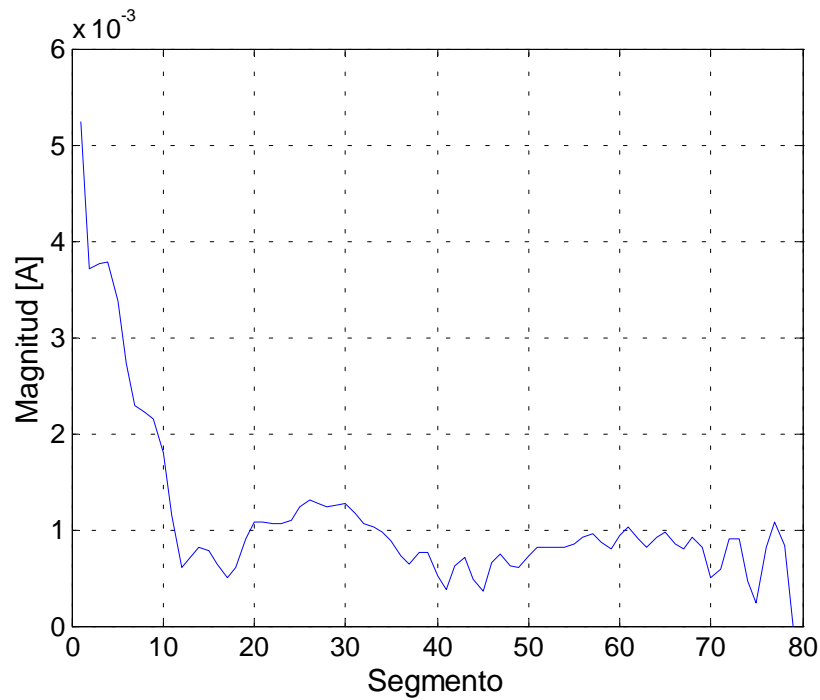
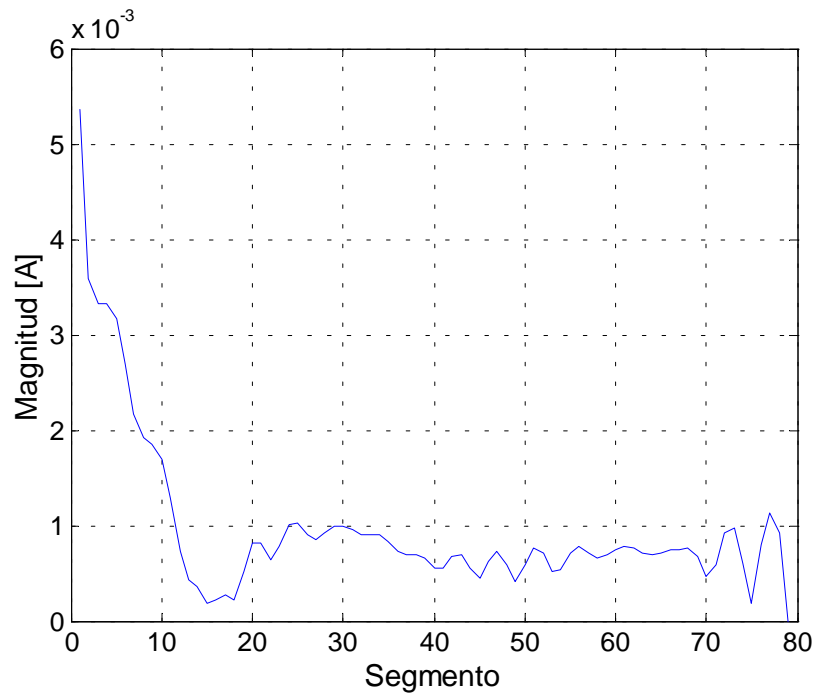
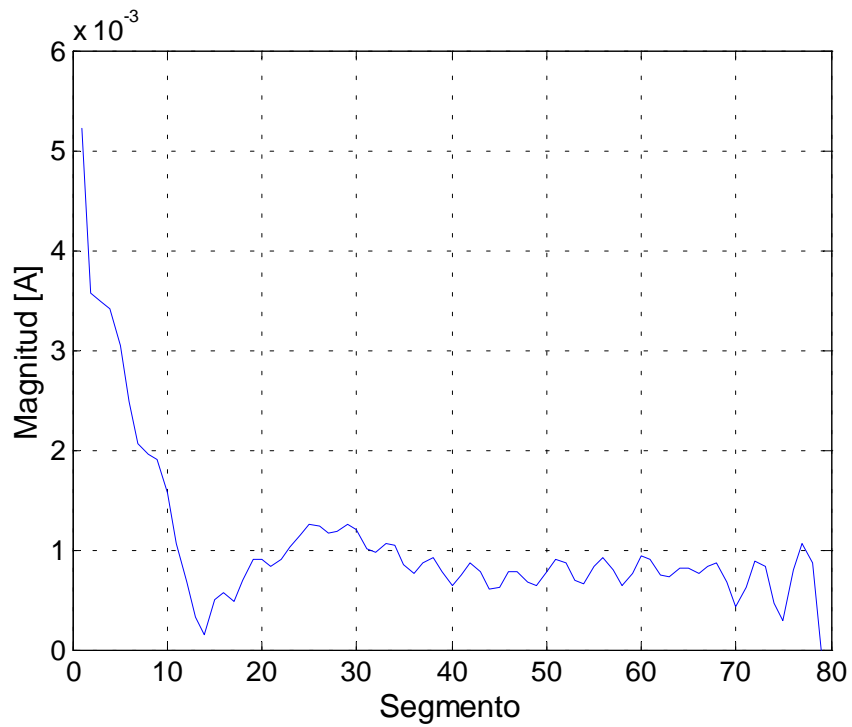


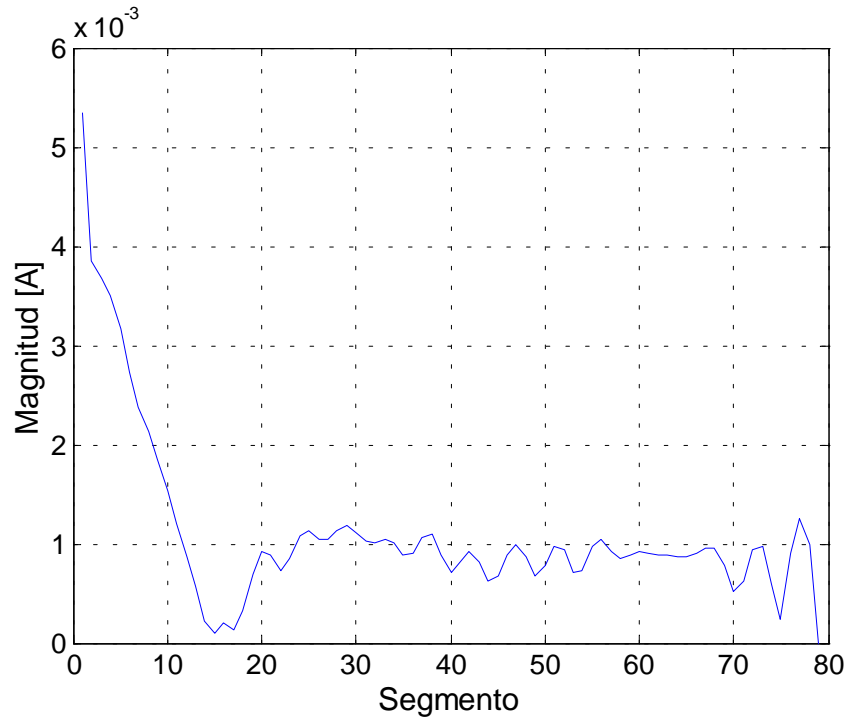
Figura 3.32b. Distribución de corrientes de una hélice cuando  $d_\lambda = 0.75$ .



**Figura 3.32c.** Distribución de corrientes de una hélice cuando  $d_\lambda = 1.0$ .



**Figura 3.32d.** Distribución de corrientes de una hélice cuando  $d_\lambda = 1.5$ .

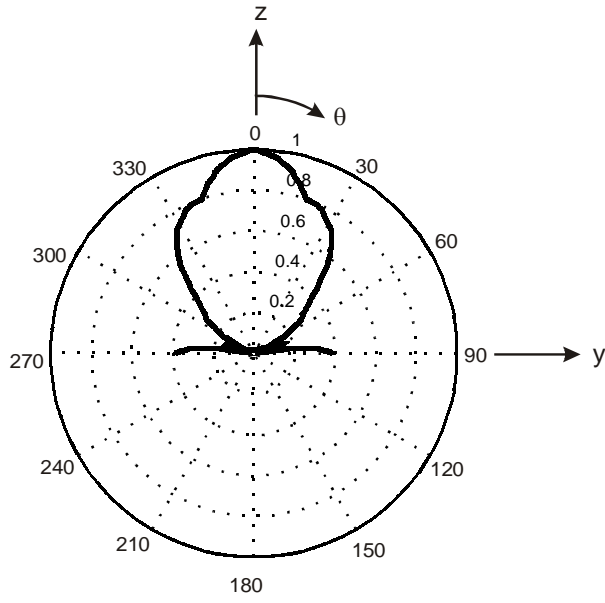


**Figura 3.32e.** Distribución de corrientes de una hélice cuando  $d_\lambda = 2.0$ .

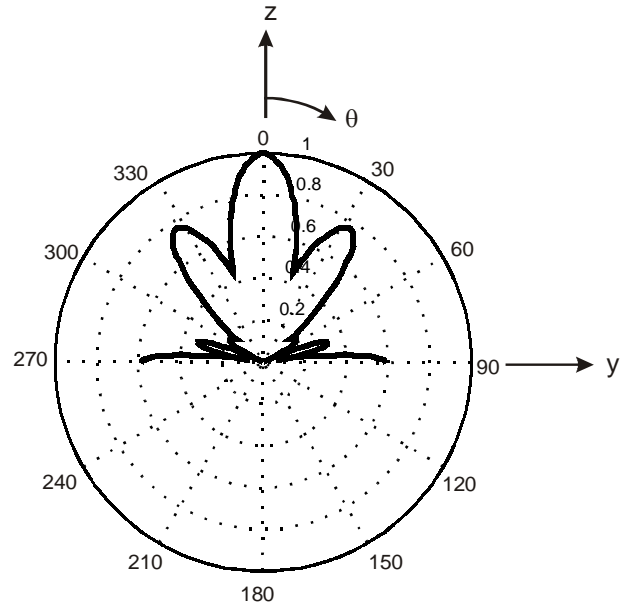
Las figuras anteriores muestran las distribuciones de corrientes para diferentes separaciones entre las hélices. La figura 3.32a expone la distribución de corriente para  $d_\lambda = 0.4$ ; en este caso no se observa una distribución de corriente para una hélice (tanto en modo axial como en modo normal). Al incrementar la separación entre las hélices, las distribuciones de corriente empiezan a asemejarse a la distribución de una hélice aislada.

Considerando únicamente los resultados obtenidos por la distribución de corriente, se puede considerar que el acoplamiento mutuo entre las antenas puede ser despreciado a partir de  $d_\lambda = 1.0$ . Para  $d_\lambda = 1.5$  y  $d_\lambda = 2.0$ , la semejanza a una sola hélice es muy alta.

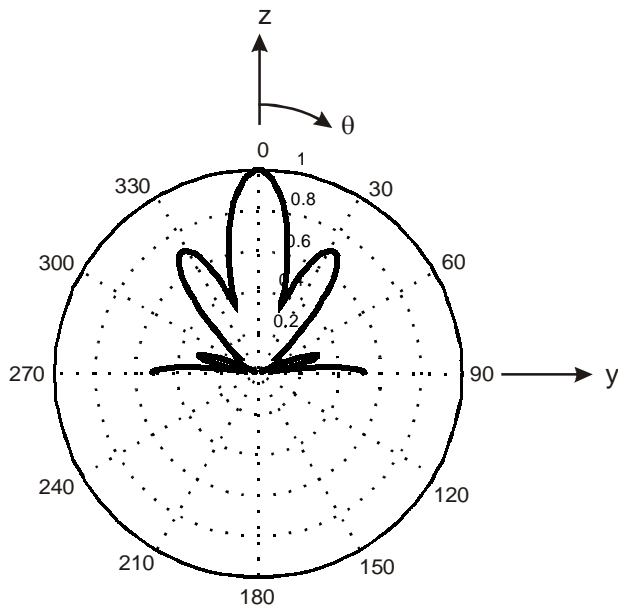
El siguiente parámetro a estudiar es el patrón de radiación; por medio de éste se podrá determinar mejor el comportamiento de radiación para cada una de las distintas separaciones.



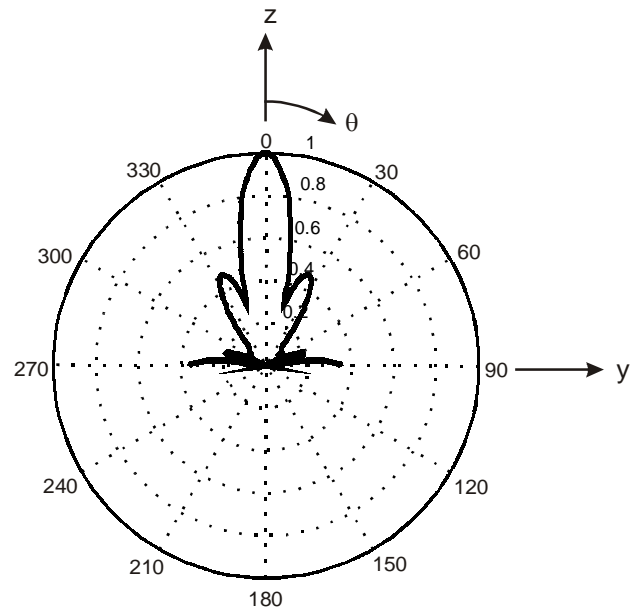
**Figura 3.33a.** Patrón de radiación total para  $d_\lambda = 0.4$ .



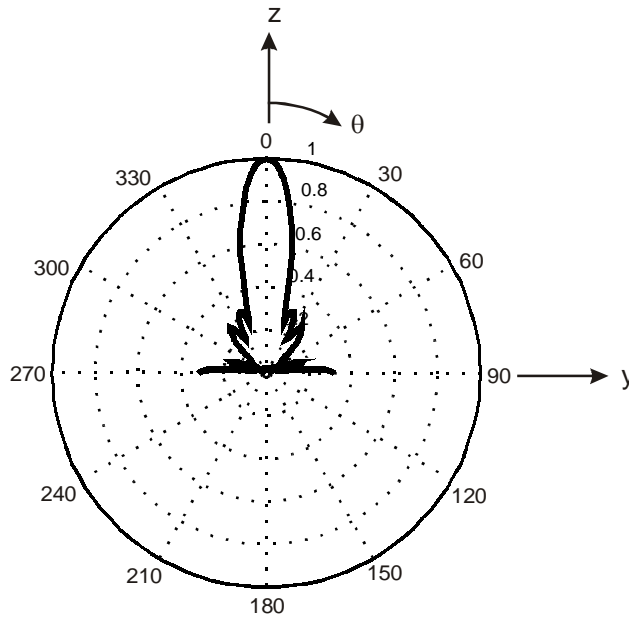
**Figura 3.33b.** Patrón de radiación total para  $d_\lambda = 0.75$ .



**Figura 3.33c.** Patrón de radiación total para  $d_\lambda = 1.0$ .



**Figura 3.33d.** Patrón de radiación total para  $d_\lambda = 1.5$ .



**Figura 3.33e.** Patrón de radiación total para  $d_\lambda = 2.0$ .

Como se puede observar al incrementar la distancia entre las hélices el patrón de radiación hace su haz más estrecho, por lo que aumenta su directividad. En este caso, para una distancia  $d_\lambda = 0.4$  se observa un patrón de radiación muy ancho, y semejante al obtenido para una hélice aislada. Cuando se tiene una distancia  $d_\lambda = 0.75$  surgen dos lóbulos dentro del haz principal; conforme se incrementa la distancia entre las hélices estos lóbulos disminuyen su amplitud, por lo que para un distancia de  $2.0\lambda$ , los lóbulos laterales tienen una amplitud muy pequeña.

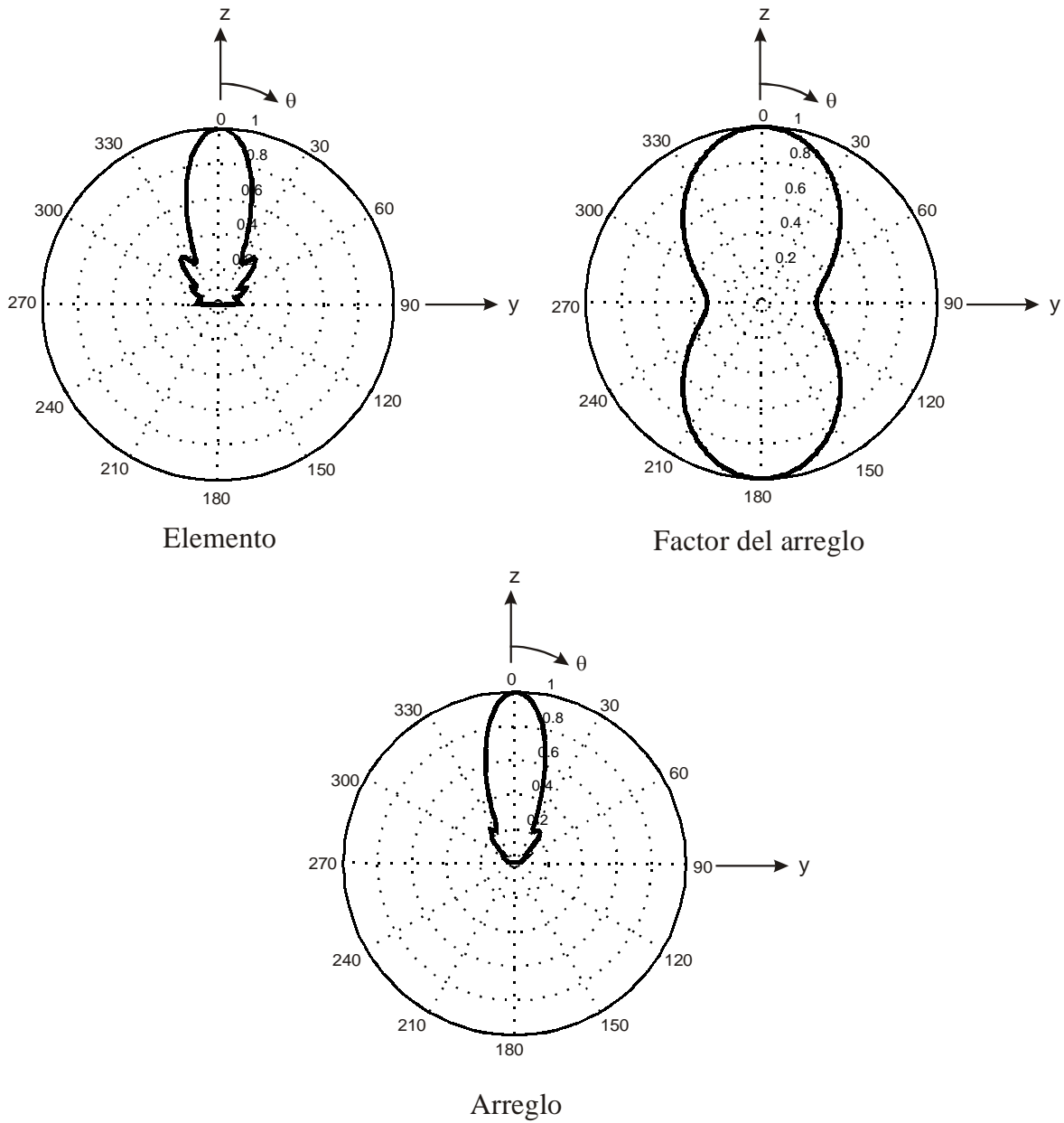
### 3.4.2 Principio de Multiplicación de Patrones

En esta sección se presentan los patrones de radiación sobre un plano de tierra infinito empleado el principio de multiplicación de patrones. En cada una de las figuras se muestra el patrón de una hélice sobre un plano de tierra infinito, el factor del arreglo y el patrón del arreglo resultante.

En las siguientes figuras se muestran los patrones de radiación obtenidos. Se puede observar que para las distancias  $d_\lambda = 0.4$  y  $d_\lambda = 0.75$  prácticamente no se tienen lóbulos laterales, pero a partir de  $d_\lambda = 1$ , aparecen dos lóbulos laterales (uno en cada lado) que conforme aumenta la separación entre las hélices aumentan su amplitud.



Asimismo, se observa que conforme la separación entre las hélices aumenta, el ancho del haz principal disminuye, esto se debe al comportamiento de los haces para los ángulo  $\theta = 0^\circ$  y  $\theta = 180^\circ$  del factor de arreglo.



**Figura 3.34a.** Patrón de radiación para  $d_\lambda = 0.4$ .

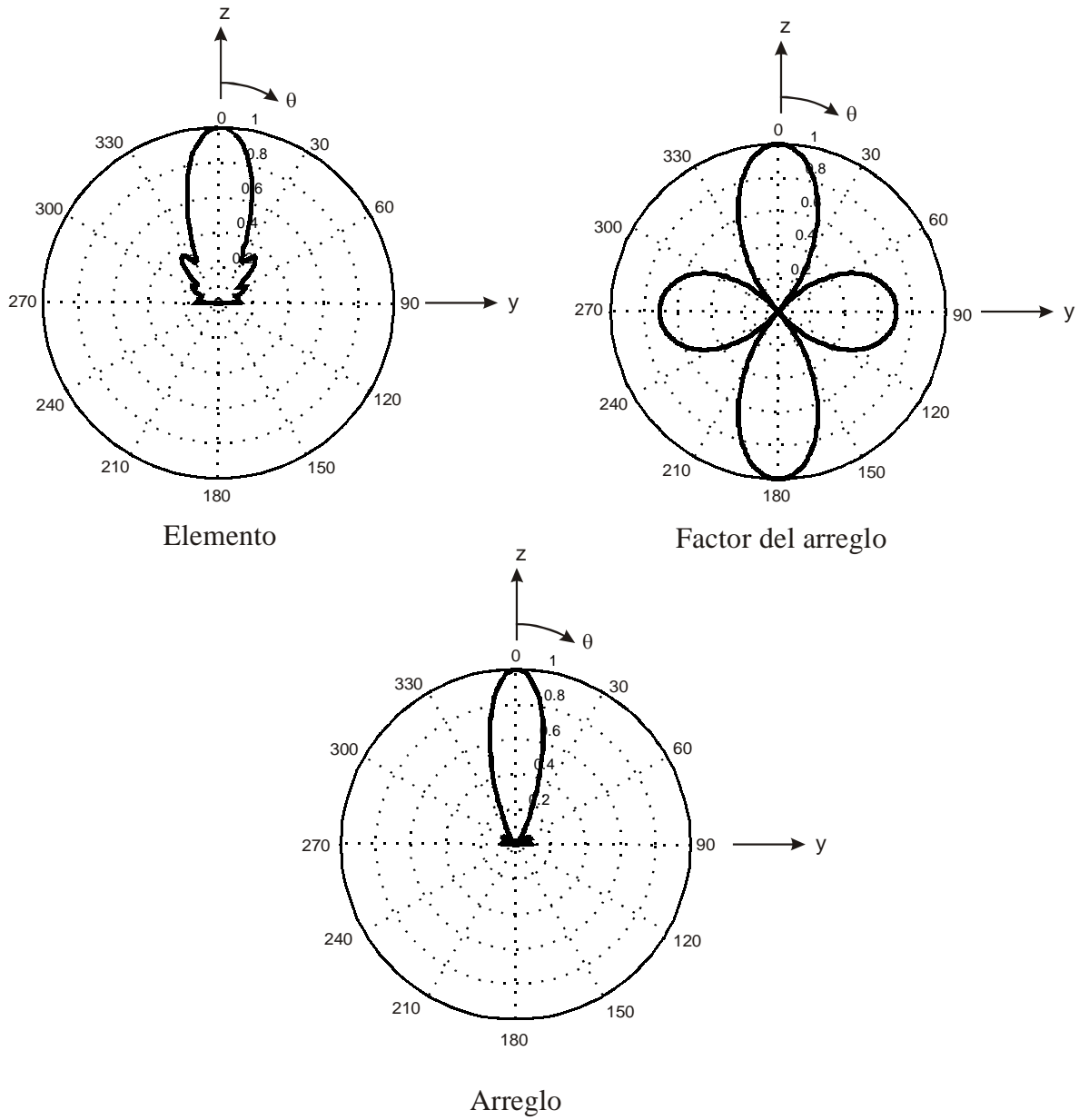


Figura 3.34b. Patrón de radiación para  $d_\lambda = 0.75$ .

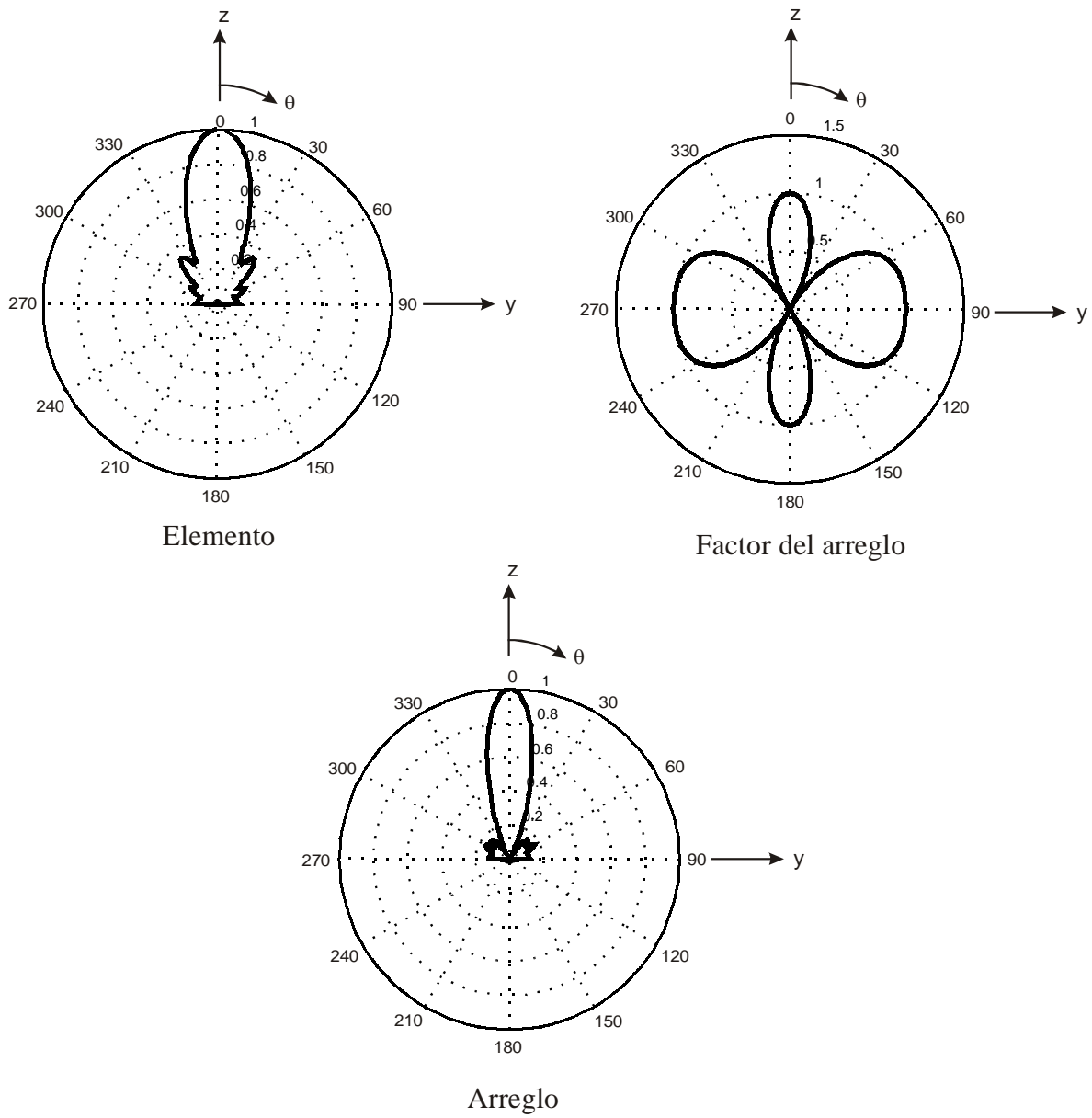
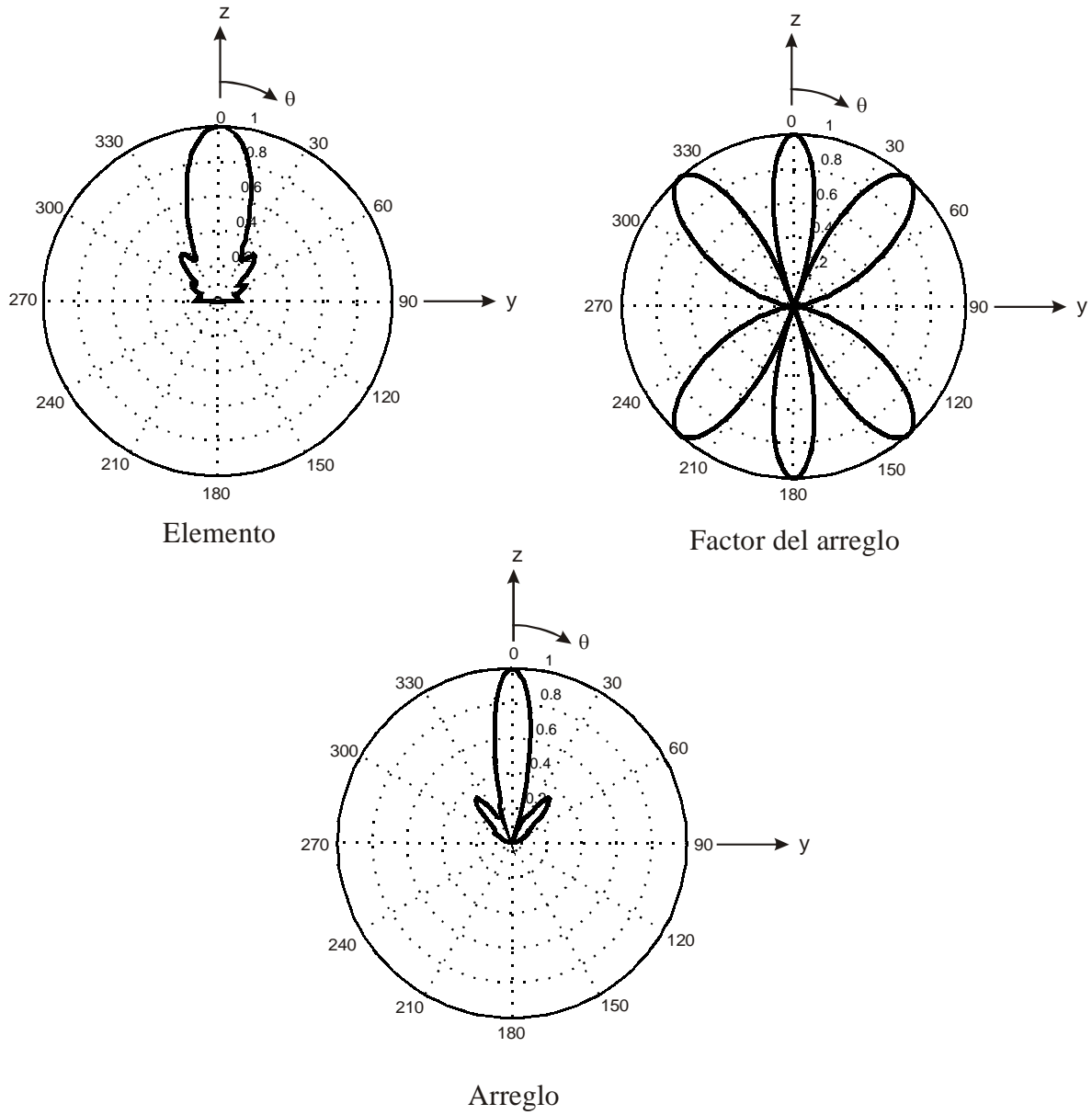
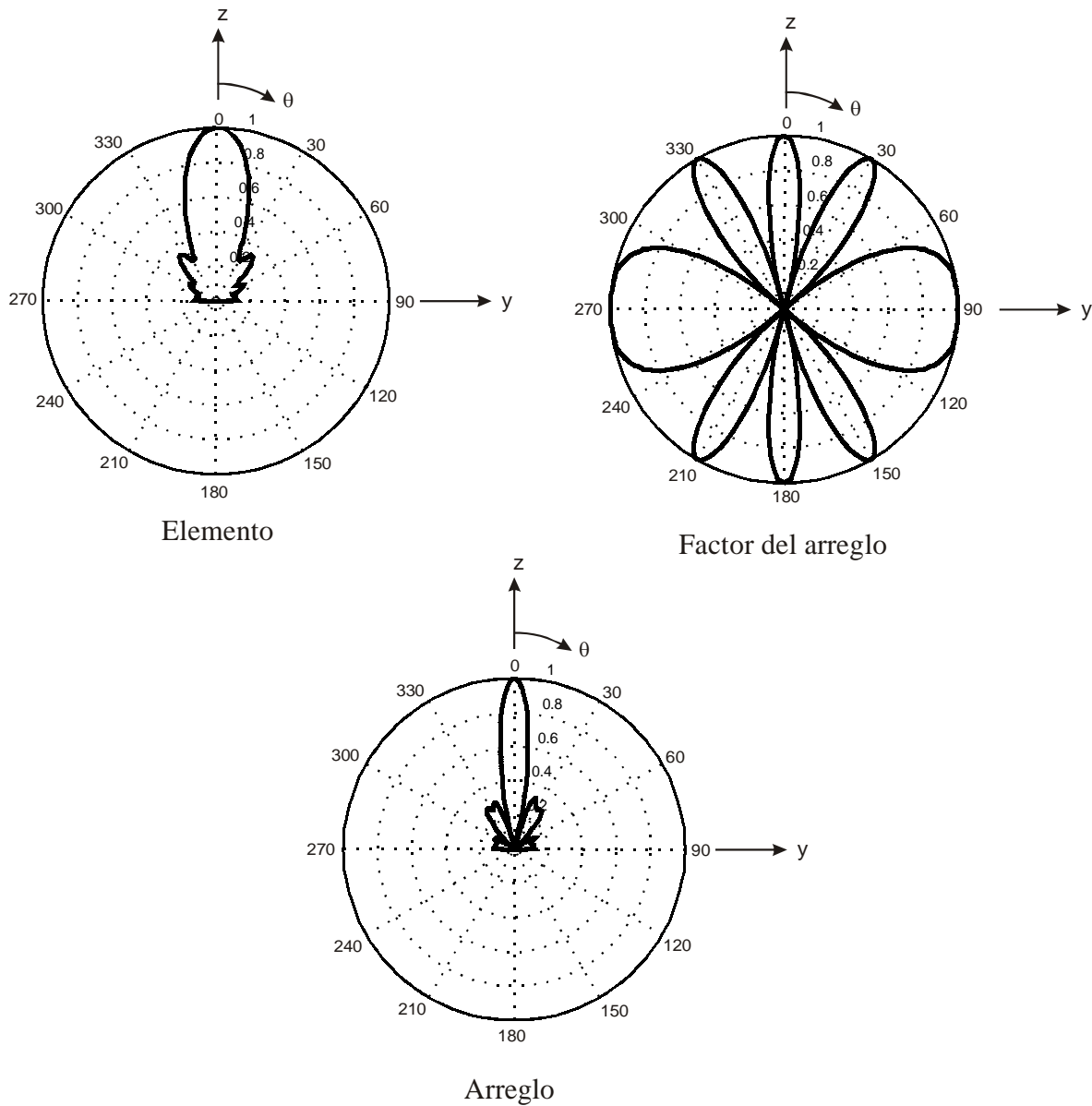


Figura 3.35c. Patrón de radiación para  $d_\lambda = 1.0$ .



**Figura 3.35d.** Patrón de radiación para  $d_\lambda = 1.5$ .



**Figura 3.35e.** Patrón de radiación para  $d_\lambda = 2.0$ .

### 3.4.3 Comparación

En esta sección se presentaron los patrones de radiación por dos métodos. Al comparar los patrones de radiación de ambos métodos se observa que a partir de  $1.5\lambda$  se obtiene un patrón muy similar. Una de las diferencias que se obtiene es el ancho del haz, ya que el MM entrega un ancho de haz de  $22^\circ$  y el PMP es cercano a  $10^\circ$ . Otra diferencia es la amplitud de los lóbulos laterales, ya que los patrones obtenidos por medio del MM es  $0.3E_{\text{máx}}$ , mientras que el PMP una amplitud  $0.2E_{\text{máx}}$ .

El Dr. Kraus realizó un arreglo con una separación de  $1.5\lambda$  entre los centros de las hélices (Kraus, 1948); de acuerdo con este artículo, la resistencia de entrada es cercana  $130 \Omega$ , mientras que en la simulación se obtuvo el valor de  $143.5 \Omega$ . El Dr. Kraus no reporta un valor reactivo, y el MM entrega un valor de  $-93\Omega$ . Esta diferencia se debe a que para la simulación del MM se analiza únicamente la matriz de impedancias de la hélice y no se considera los efectos del acoplamiento con el plano de tierra. Para obtener una mejor aproximación se puede simular un plano de tierra simplificado, como por ejemplo una rejilla o varios aros de diferentes radios, pero procurando que esta simplificación no modifique demasiado los patrones de radiación ni las distribuciones de corrientes.

Al comparar los patrones de radiación reportados por Kraus (ver Fig. 3.14 para 800 MHz) con los obtenidos por el PMP y el MM, se observa que los tres patrones son muy parecidos. Una de las principales diferencias es la amplitud de los lóbulos laterales, ya que el PMP reporta amplitudes muy pequeñas mientras que el MM y Kraus reportan amplitudes mayores. Otra diferencia importante es el ancho del haz de media potencia, ya que Kraus obtuvo un valor de  $20^\circ$ , el MM de  $22^\circ$  y el PMP  $10^\circ$ . Esto nos demuestra que la precisión del MM es más alta que la del PMP, aunque para tiempo de ejecución de las simulaciones es mucho menor el del PMP que el del MM entregando el PMP valores aceptables al ser comparados con datos experimentales.

### 3.5 Modelado con aros en lugar de plano de tierra

En el capítulo anterior se caracterizó una antena helicoidal con uno o más aros en lugar de plano de tierra y en la sección anterior se mostraron los efectos en las propiedades de un arreglo helicoidal cuando se tiene un plano de tierra infinito.

En esta sección se toma la configuración de lo que se consideró como antena óptima ( $N = 7$ ,  $C_\lambda = 1.07$ ,  $C_{\text{aro}} = 1\lambda$ ,  $\alpha = 12^\circ$ ,  $d_{\text{hélice}} = 0.03\lambda$ ,  $d_{\text{aro}} = 0.03\lambda$  y  $f_{\text{oper}} = 10 \text{ GHz}$ ) para realizar el arreglo propuesto en la figura 3.23. La figura 3.36 muestra la configuración programada para la obtención de las propiedades del arreglo. Para el estudio de las propiedades del arreglo, nuevamente se variará  $d_\lambda$ .

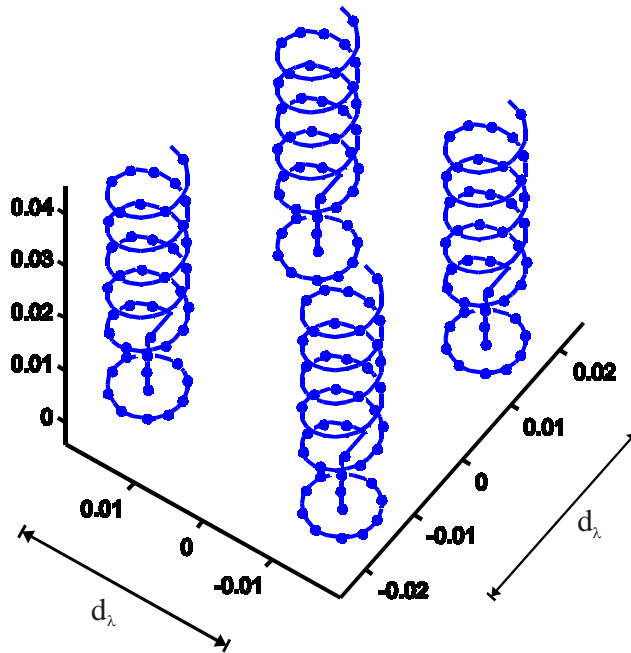


Figura 3.36. Simulación en MATLAB del arreglo de 4 hélices.

A continuación se muestran los patrones de radiación obtenidos al aplicar directamente el método de momentos (sección 2.2) y al emplear el principio de multiplicación de patrones (sección 3.2).

### 3.5.1 Método de Momentos.

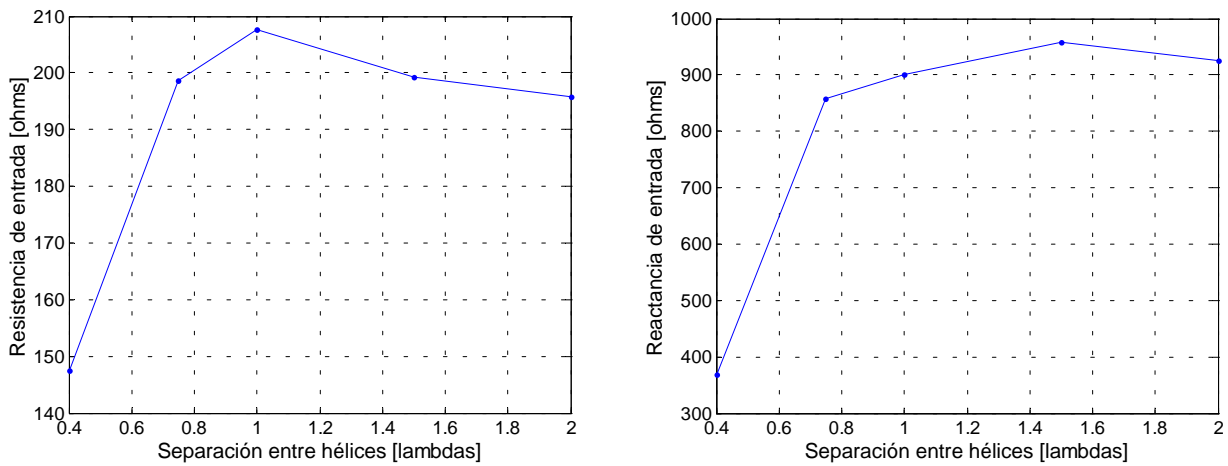
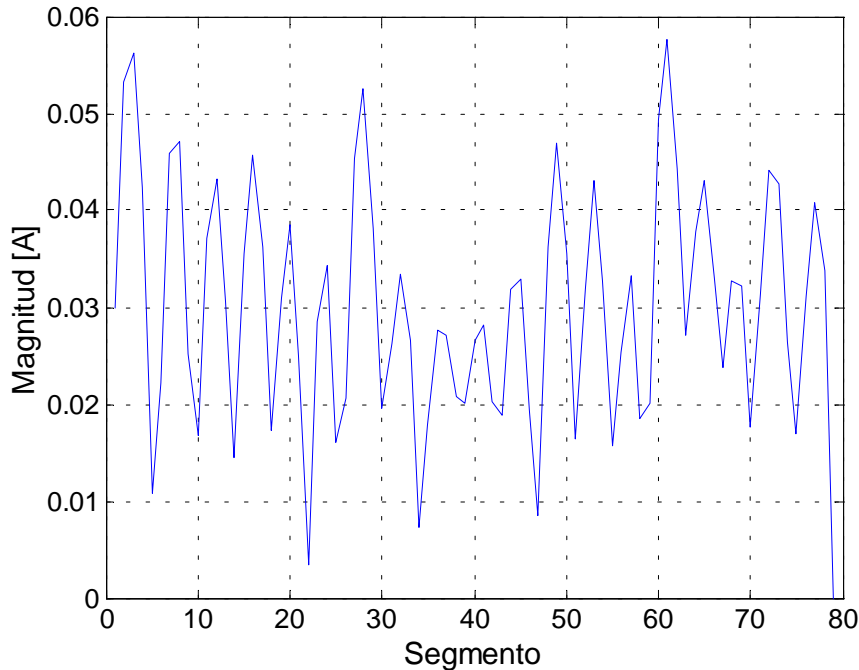


Figura 3.37. Impedancia de entrada de una antena al variar la separación entre las hélices del arreglo y con un aro reflector.

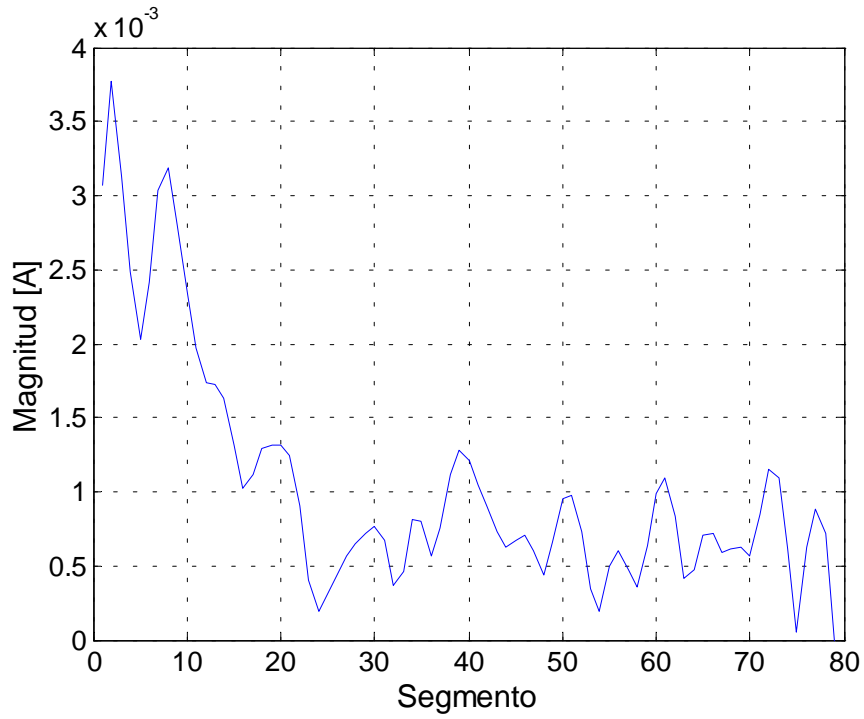
En la figura anterior se grafica el comportamiento de la impedancia de entrada de una antena del arreglo. Se tiene el valor mínimo de resistencia de entrada para una separación de  $0.4\lambda$  y después de esta separación el valor de la resistencia sube hasta un valor cercano a los  $205 \Omega$ ; después decrece poco, tendiendo hacia un valor de  $195 \Omega$ . Con lo referente a la reactancia de entrada, en este caso se reporta un comportamiento inductivo, alcanzando valores muy altos cercanos a los miles de ohms. Cabe señalar que estos valores son muy altos a los esperados, en especial los obtenidos en la reactancia de entrada ya que la antena óptima (Ver sección 2.5.6) reporta un valor  $-125.12$  en la reactancia de entrada. Lo más extraño es el cambio de signo en la reactancia de entrada. Esta discrepancia se pueden deber a los errores de precisión en la programación del método.

Las figuras 3.38 y 3.39 muestran respectivamente las distribuciones de corriente y los patrones de radiación obtenidos al aplicar el MM a un arreglo helicoidal. Las separaciones que se estudiaron son  $d_\lambda = 0.4$ , que es el menor valor que puede existir entre la hélices a causa de la circunferencia de la hélice,  $d_\lambda = 0.75$ ,  $d_\lambda = 1.0$ ,  $d_\lambda = 1.5$  y  $d_\lambda = 0.2$ .

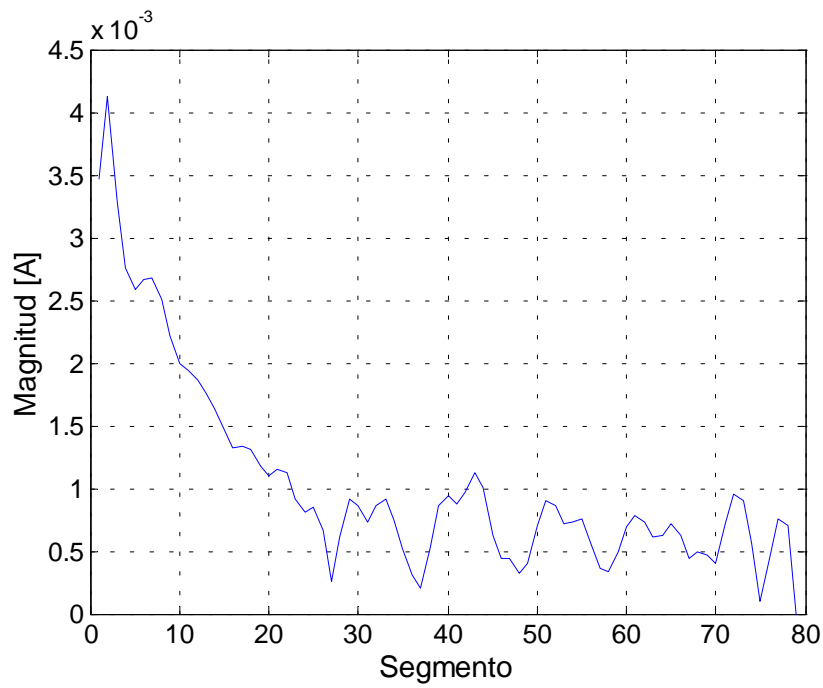


**Figura 3.38a.** Distribución de corriente para una arreglo con  $d_\lambda = 0.4$ .





**Figura 3.38b.** Distribución de corriente para una arreglo con  $d_\lambda = 0.75$ .



**Figura 3.38c.** Distribución de corriente para una arreglo con  $d_\lambda = 1.00$ .

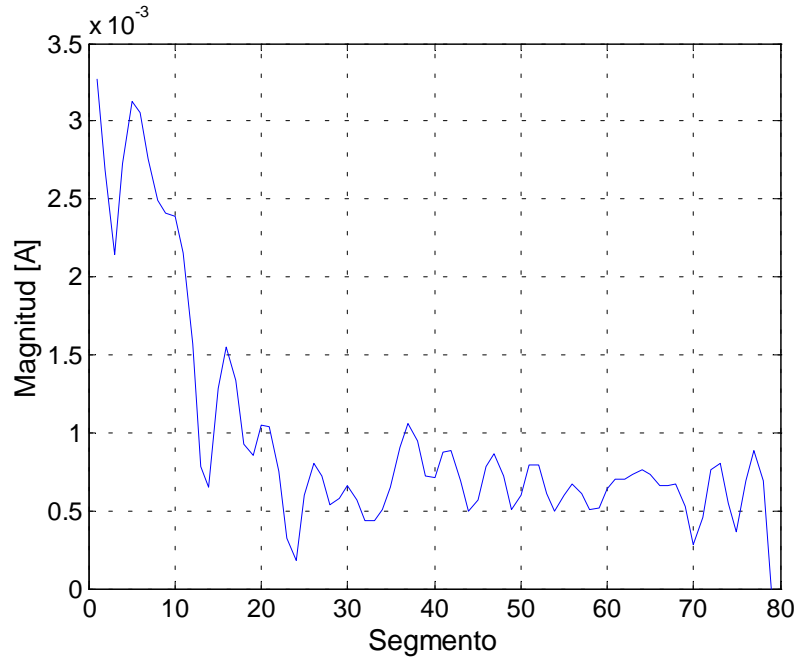


Figura 3.38d. Distribución de corriente para una arreglo con  $d_\lambda = 1.5$ .

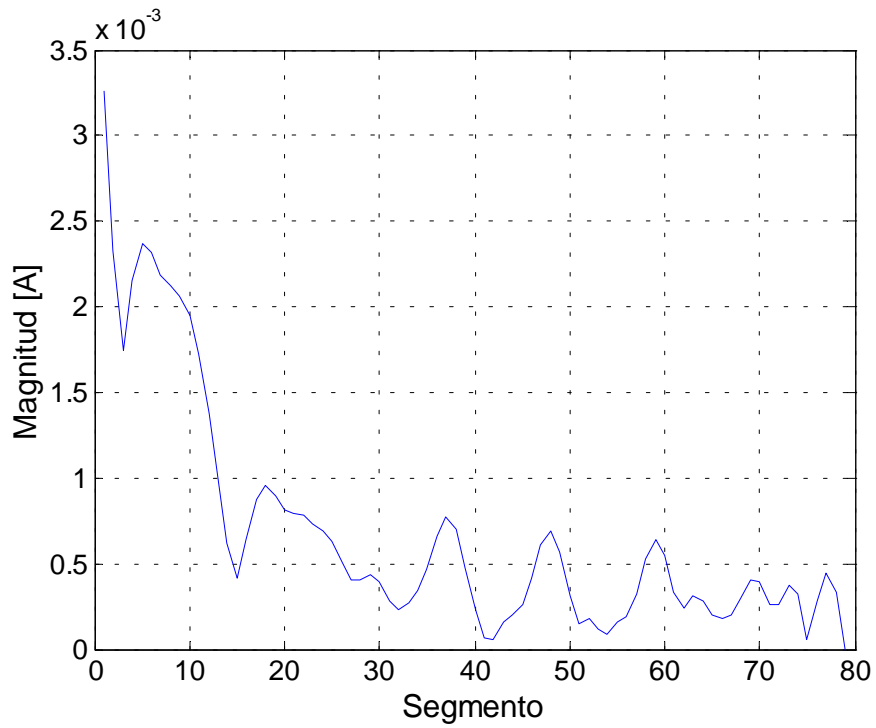
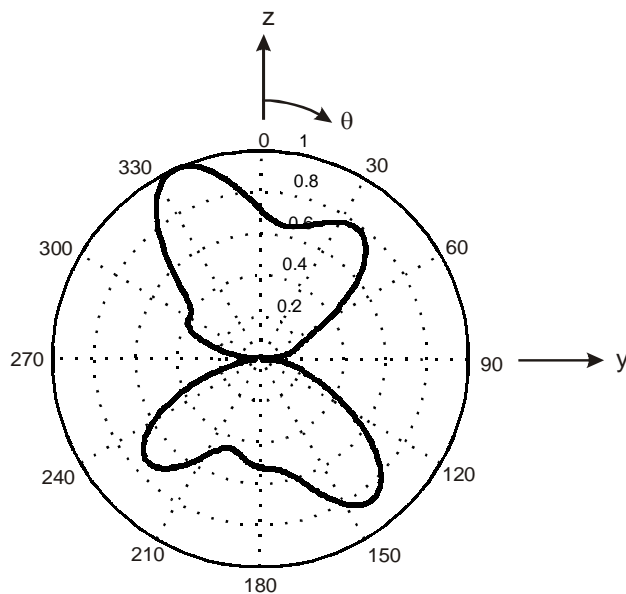
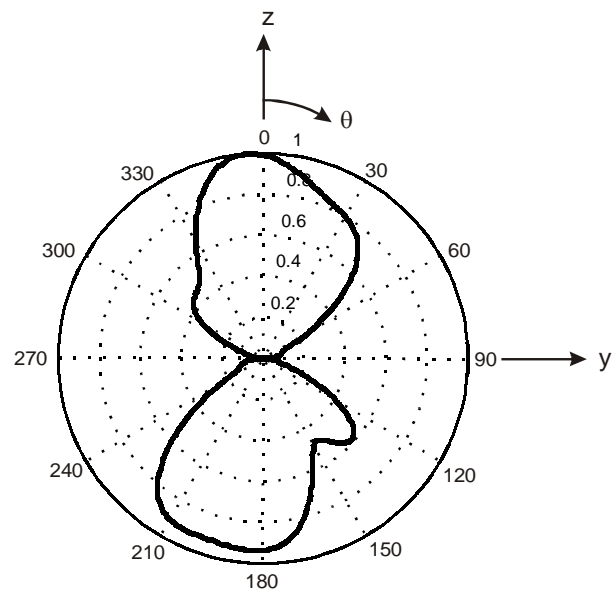


Figura 3.38e. Distribución de corriente para una arreglo con  $d_\lambda = 2.0$ .

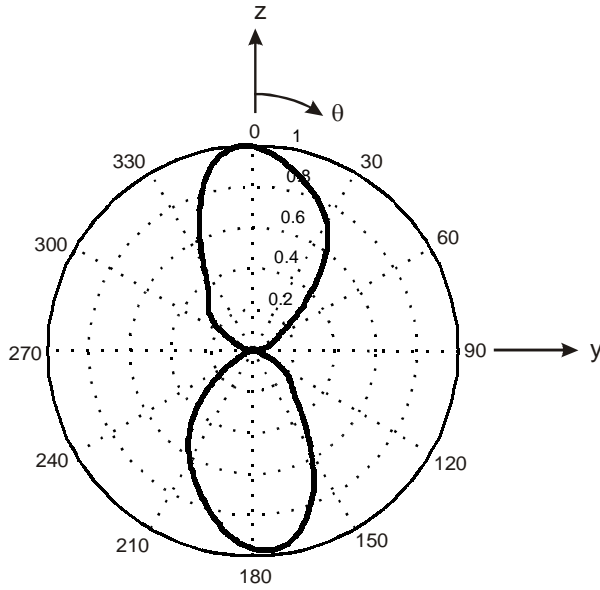
De las figuras anteriores se observa que conforme se incrementa  $d_\lambda$ , la distribución de corrientes se asemeja más a la distribución de corrientes de una sola hélice (Fig. 2.68). De la figura 3.38a, se observa que en este caso la distribución de corrientes no muestra una forma bien definida, lo que nos hace pensar que los valores de la impedancias mutuas entre las antenas es muy grande. Para  $d_\lambda = 0.75$ , la distribución de corrientes muestra ya un máximo en los primeros segmentos con variaciones muy grandes y va decreciendo a lo largo de la hélice, pero en este caso no se tiene un máximo a la entrada (primer segmento de la hélice), sino que se encuentra hasta el segundo segmento. Para  $d_\lambda = 1.0$ , las variaciones bruscas de la entrada desaparecen, pero tampoco se registra el máximo a la entrada de la hélice; en este caso, en la parte central del largo de la hélice presenta ya una onda progresiva bien definida. La figura 3.38d presenta la distribución de corrientes para  $d_\lambda = 1.5$ ; en este caso se tiene la amplitud máxima en el extremo de la hélice, pero nuevamente aparecen oscilaciones grandes a la entrada. Finalmente se presenta la distribución de corrientes para  $d_\lambda = 2$ , en la cual ya se tiene una distribución de corrientes muy semejante a la de una antena helicoidal con aro como elemento reflector. Considerando únicamente la distribución de corrientes, se puede decir que a partir de  $d_\lambda = 1.5$  ó  $d_\lambda = 1.0$ , bajo ciertas reservas, ya se puede emplear el principio de multiplicación de patrones ya que el acoplamiento mutuo entre las antenas es poco.



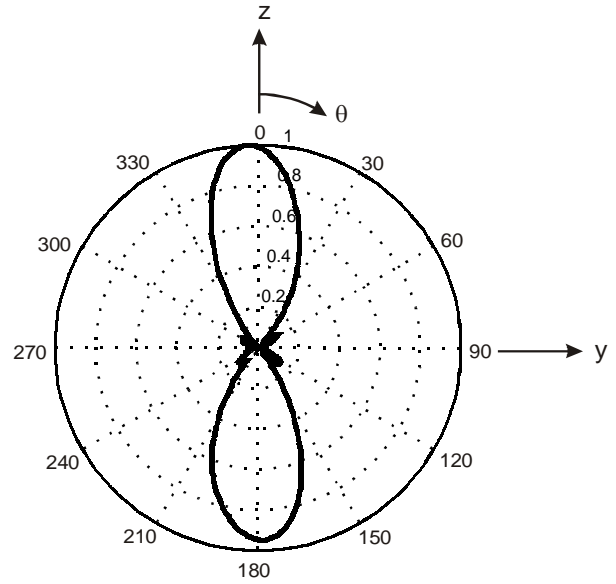
**Figura 3.39a.** Patrón de radiación total para  $d_\lambda = 0.4$ .



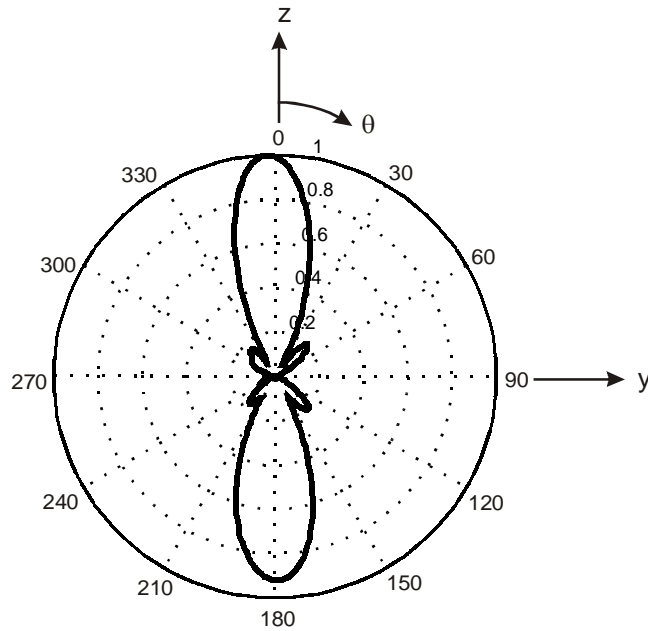
**Figura 3.39b.** Patrón de radiación total para  $d_\lambda = 0.75$ .



**Figura 3.39c.** Patrón de radiación total para  $d_\lambda = 1.00$ .



**Figura 3.39d.** Patrón de radiación total para  $d_\lambda = 1.5$ .



**Figura 3.39e.** Patrón de radiación total para  $d_\lambda = 2.0$ .

Las figuras anteriores muestran los patrones de radiación obtenidos al variar la distancia  $d_\lambda$  y aplicar al arreglo completo el MM. La figura 3.39a muestra el patrón para  $d_\lambda = 0.4$ ; en este caso el patrón obtenido es muy semejante al patrón de radiación cuando se tienen aros parásitos como elementos reflectores

(Zainud-Deen, 1998 y sección 2.5.7 de esta tesis); la diferencia entre estos casos es el ancho del haz del patrón. Con esto se puede concluir que cuando las hélices se encuentran a distancias muy cortas entre ellas, pueden ser vistas como una sola pero con varios aros como reflectores. La figura 3.39b presenta el patrón de radiación para  $d_\lambda = 0.75$ ; en este caso vuelve a aparecer la radiación backfire pero el haz principal sigue siendo el endfire; asimismo se observa un decremento en los anchos de los haces del patrón. Cabe mencionar que los haces para este caso no son simétricos, sino que tiene una forma irregular. La figura 3.39c presenta los patrones para  $d_\lambda = 1.0$ ; en este caso se presenta nuevamente un decremento en los anchos de los haces pero siguen siendo lóbulos asimétricos. Los patrones para  $d_\lambda = 1.5$  y  $d_\lambda = 2$  son muy parecidos, variando en el ancho del haz y en la magnitud de los lóbulos laterales. El ancho del haz para  $d_\lambda = 2$  es más delgado que para  $d_\lambda = 1.5$ , variando en unos cuantos grados. Con lo referente a los lóbulos laterales, su magnitud es mayor para  $d_\lambda = 2$  que para  $d_\lambda = 1.5$ .

### 3.5.2 Principio de Multiplicación de Patrones

En esta sección se analiza el arreglo helicoidal con aro en lugar de plano de tierra por medio del Principio de Multiplicación de Patrones. En cada una de las figuras se muestra el patrón de radiación del elemento, el factor del arreglo y el patrón de radiación total al realizar el producto de los dos patrones anteriores.

Como se puede observar en las figuras 3.40a, 3.40b, 3.40c, 3.40d y 3.40e, a partir de  $d_\lambda = 0.75$  quien determina el ancho del haz del arreglo es el factor del arreglo, ya que conforme se incrementa la distancia, disminuye el ancho del haz del lóbulo del factor del arreglo en la dirección  $\theta = 0^\circ$ . Cuando  $d_\lambda = 0.4$ , el patrón del arreglo es muy similar al de una hélice aislada, ya que el factor del arreglo tiene lóbulos muy anchos en las direcciones de máxima radiación del patrón del elemento, y los mínimos del factor del arreglo coinciden con los nulos del patrón de una hélice aislada. Para  $d_\lambda = 1$  el haz se estrecha y surge dos pequeños lóbulos laterales. Conforme la distancia aumenta los haces se hacen más delgados y los lóbulos laterales aumentan su amplitud.

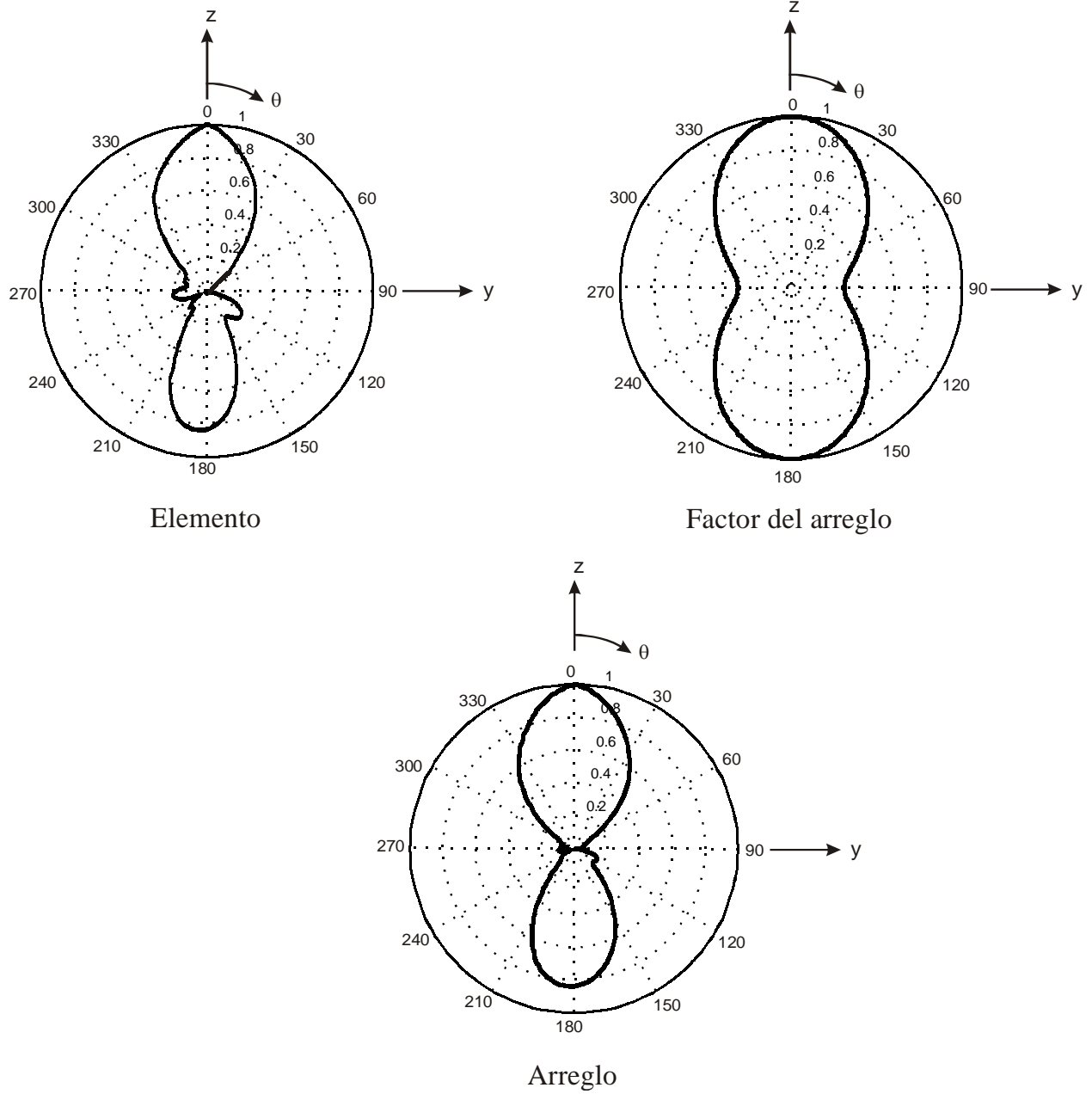
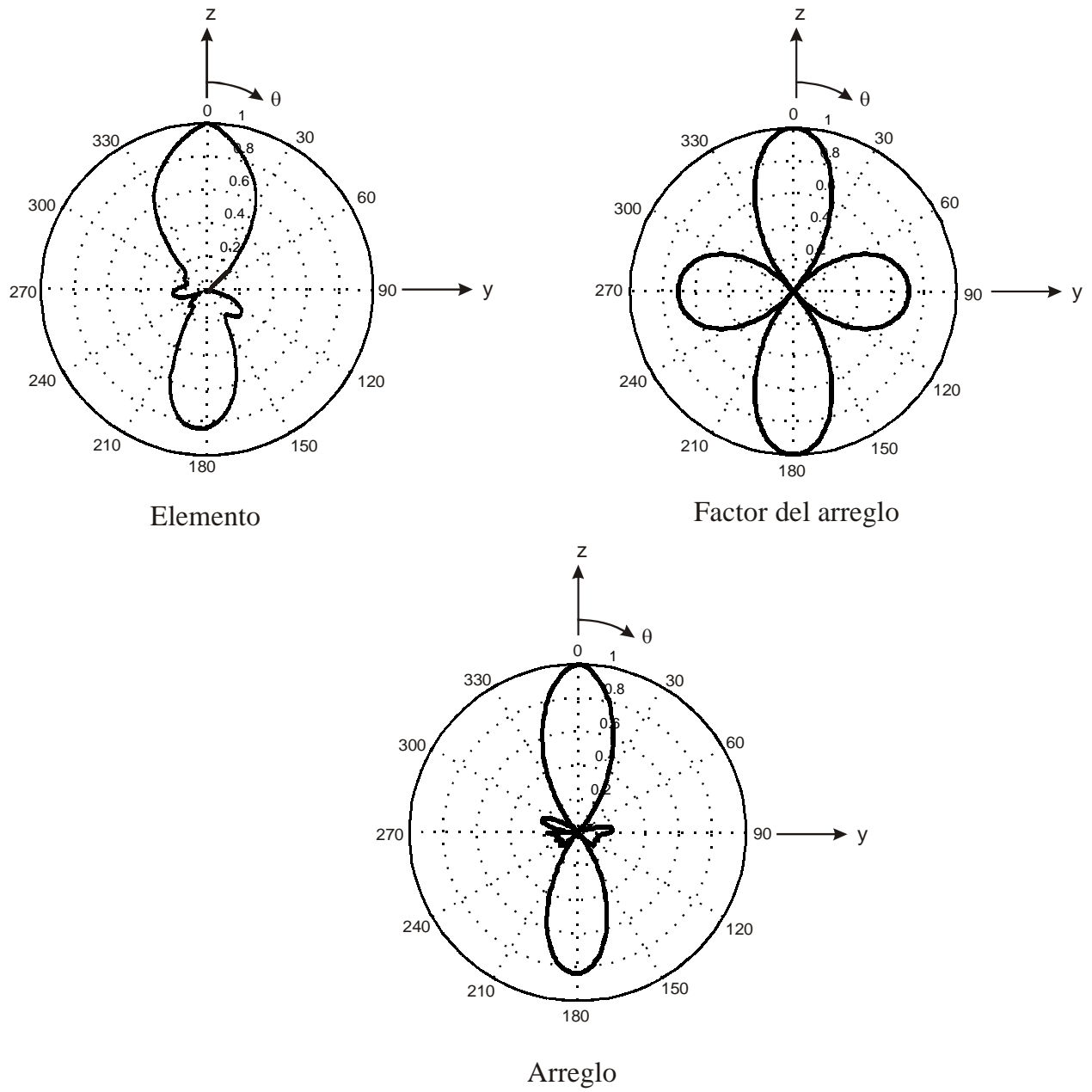


Figura 3.40a. Patrón de radiación para  $d_\lambda = 0.4$ .



**Figura 3.40b.** Patrón de radiación para  $d_\lambda = 0.75$ .

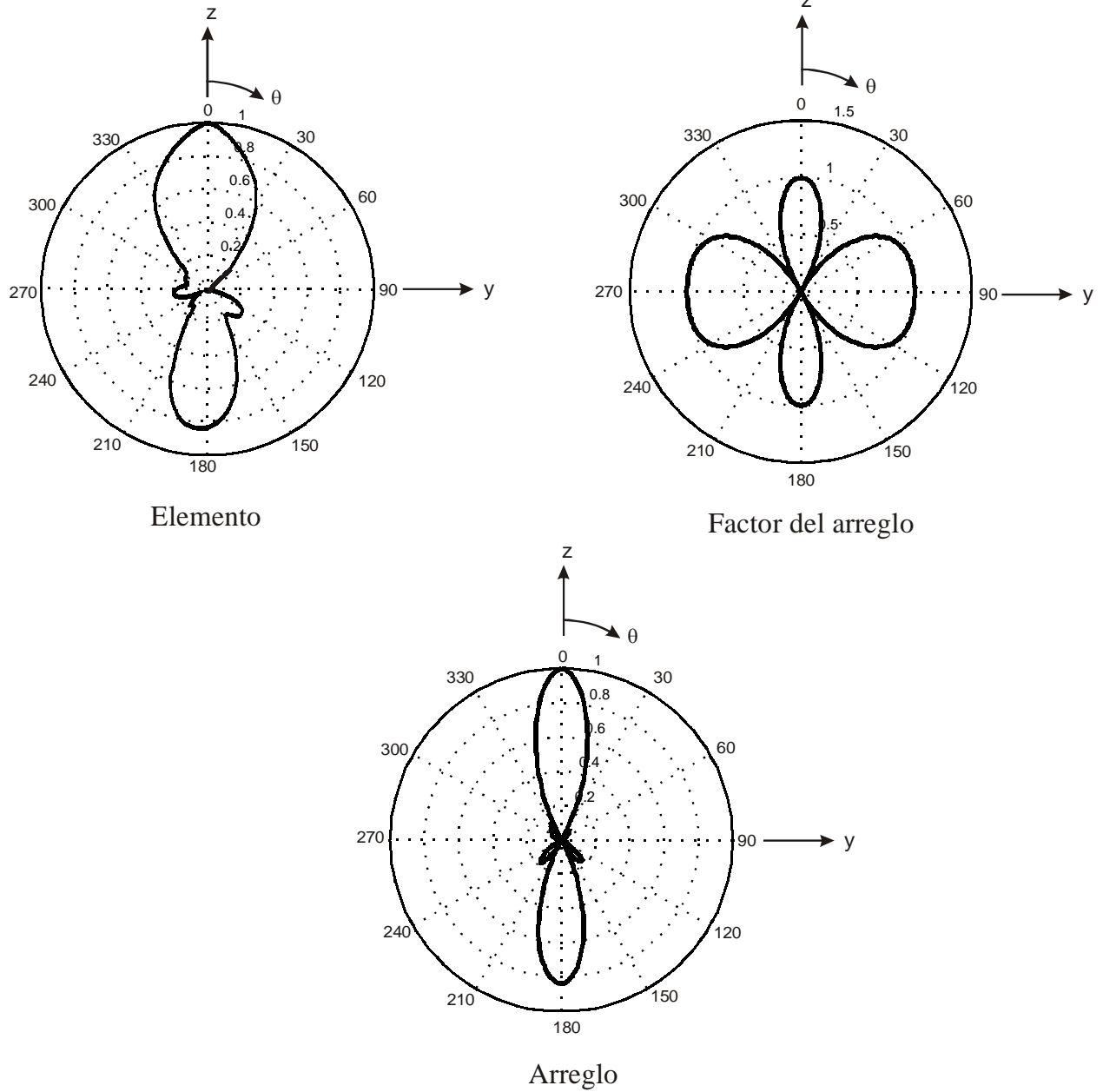
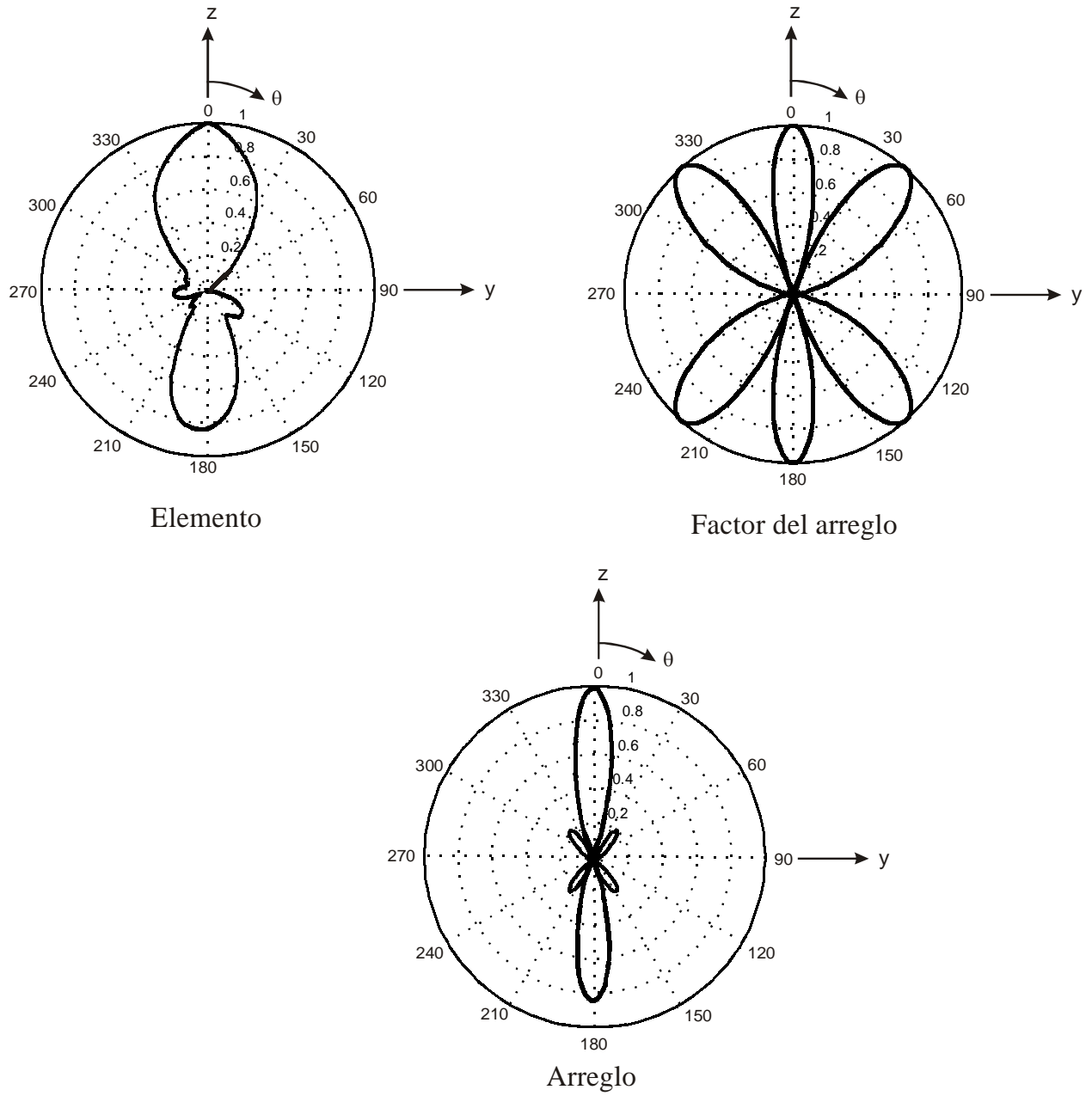


Figura 3.40c. Patrón de radiación para  $d_\lambda = 1.00$ .





**Figura 3.40d.** Patrón de radiación para  $d_\lambda = 1.5$ .

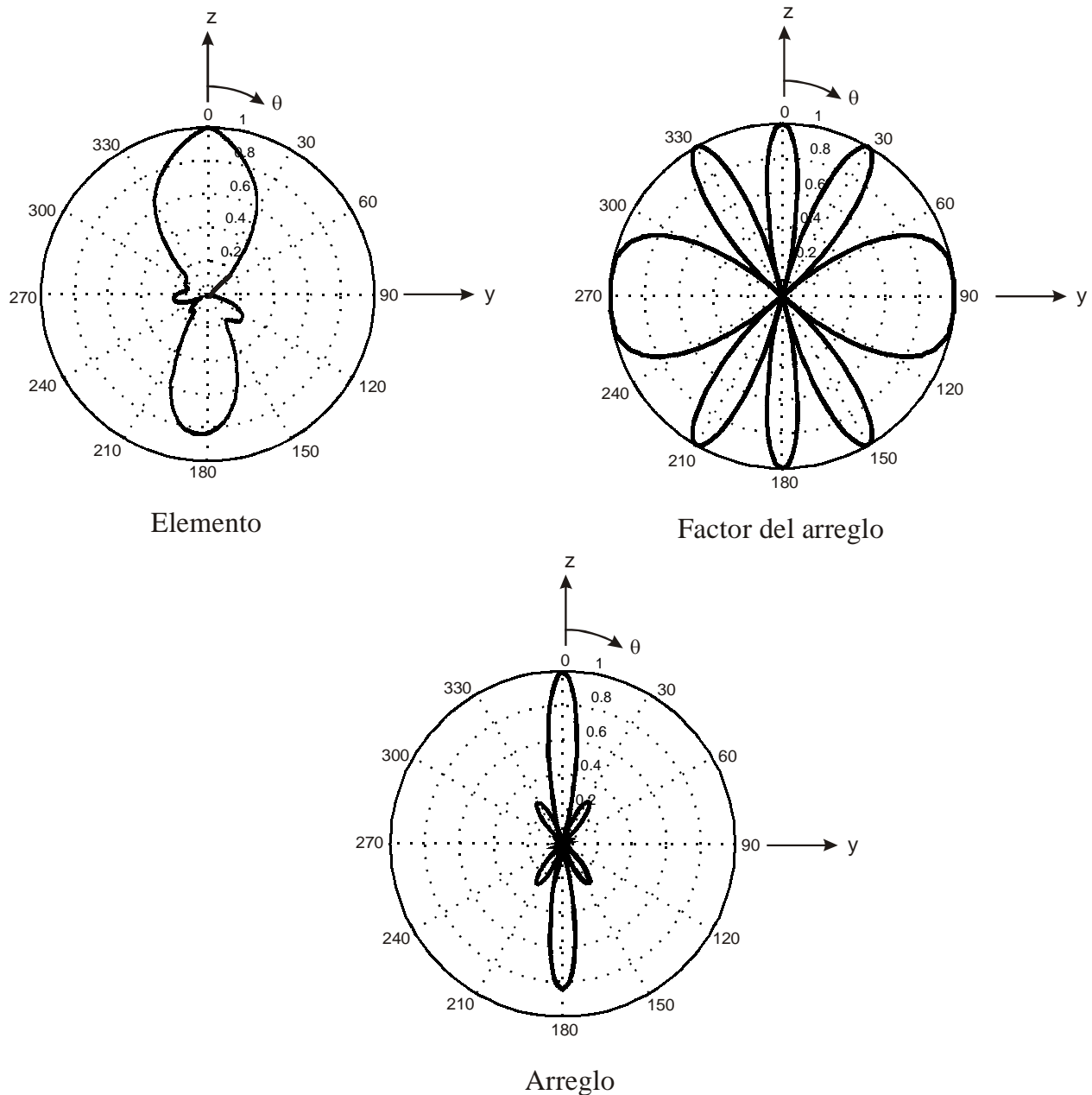


Figura 3.40e. Patrón de radiación para  $d_\lambda = 2.0$ .

### 3.5.3 Comparación

Como se puede observar, para separaciones muy pequeñas entre las hélices, no es posible emplear el principio de multiplicación de patrones ya que el error es muy grande. Para distancias mayores o iguales que  $1.5\lambda$  ya es posible emplear el PMP para conocer los patrones de radiación del arreglo. Las principales diferencias cuando entre el MM y el PMP para distancias cortas es que el MM ve al arreglo como una

sola antena con varios aros reflectores y el PMP muestra prácticamente una copia del patrón de un elemento. Esto se debe a que el PMP no toma en cuenta el acoplamiento mutuo entre los elementos.

Otra diferencia se observa en el ancho del haz de los patrones de radiación. El PMP debido al factor del arreglo siempre entrega patrones con haces muy delgados, mientras que en el MM el ancho del haz decrece gradualmente. Estos dos métodos, en cuanto al ancho del haz se refiere, convergen para distancias mayores a  $1.5\lambda$ .

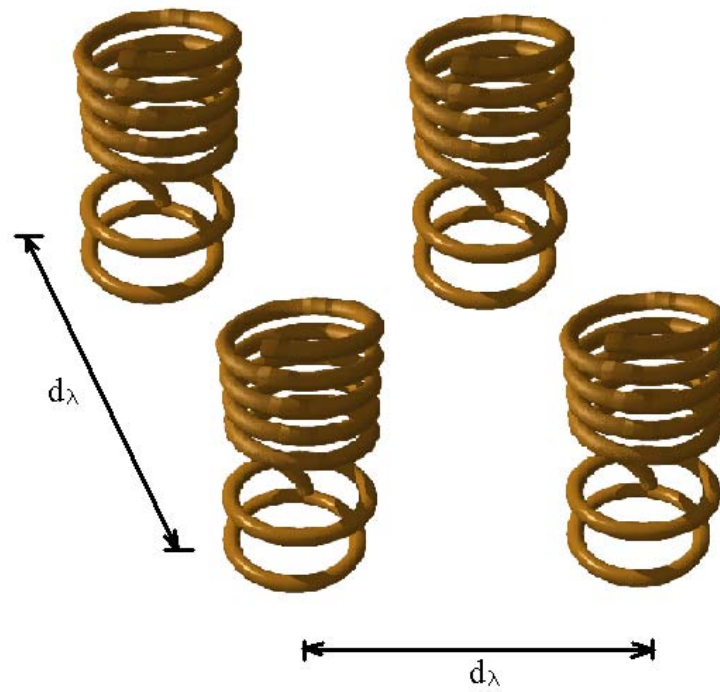
Una tercera diferencia se encuentra en la amplitud de los lóbulos laterales, ya que por medio del Método de Momentos los lóbulos laterales presentan amplitudes ligeramente menores que por medio del Principio de Multiplicación de Patrones.

### **3.5.4 Arreglo helicoidal con aros parásitos empleando el PMP**

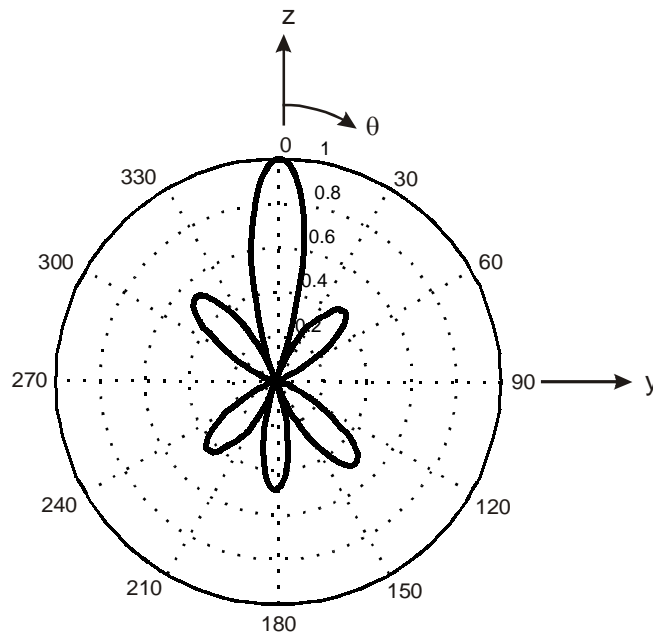
Con lo estudiado anteriormente se concluyó que el MM y el PMP convergen, en cuanto a patrones de radiación se refiere, a partir de distancias mayores o iguales que  $1.5\lambda$ . En la práctica un arreglo helicoidal cuya radiación sea endfire y backfire no se usa. Se emplean arreglos backfire como alimentadores y una arreglo endfire como radiador por lo que es necesario proponer una configuración que permita a la antena radiar en una sola modo (endfire o backfire).

En el capítulo 2 se observó que un antena con un aro reflector y un aro parásito puede entregar radiación endfire si se coloca el aro parásito a una distancia igual o mayor que  $0.25\lambda$ . Por lo tanto, si se emplea el PMP a esta antena para una distancia de  $1.5\lambda$ , se pueden conocer los efectos que presenta.

La figura 3.41 muestra una animación de un arreglo de una hélice con dos aros. La figura 3.42 presenta el campo radiado en el plano de elevación (Plano YZ). Del patrón de radiación se observa que se tiene una radiación endfire, presentándose cinco lóbulo laterales de magnitudes similares, pero el lóbulo principal está bien definido. Además se observa que el ancho del haz es delgado, aproximadamente de  $15^\circ$ . La relación frente atrás es de 2.5, con lo cual se elimina considerablemente la magnitud de la radiación backfire.



**Figura 3.41.** Arreglo de 4 hélices cuando cada una posee un aro reflector (adyacente) y un aro parásito.



**Figura 3.42.** Patrón de radiación cuando se tienen dos aros y una distancia  $d_\lambda = 1.5$ .

### 3.7 Conclusiones de los arreglos estudiados

En este capítulo se presentó un estudio teórico de un arreglo de 4 hélices con diferentes elementos reflectores (con un plano de tierra infinito, con un aro reflector y con un aro adyacente y un aro parásito).

Al comparar los resultados obtenidos cuando se tiene un plano de tierra infinito y cuando se tiene un aro reflector, se observa que en el segundo caso se presenta una radiación backfire muy grande, mientras que cuando se tiene un plano de tierra infinito no se tiene radiación backfire. Obviamente, hablar de un plano infinito es una idealización, pero se pueden emplear elementos reflectores de grandes dimensiones eléctricas para aproximar este efecto. Dada la radiación backfire se concluye que un solo aro reflector no es suficiente para lograr una radiación endfire y de esta forma simplificar el plano de tierra. Tomando los resultados obtenidos se advierte que el ancho del haz cuando se tiene un plano de tierra es más delgado que cuando se tiene un aro; numéricamente, el HPBW para un plano infinito es de  $22^\circ$ , mientras que con un aro reflector es de  $34^\circ$ . Al comparar las amplitudes de los campos eléctricos se observa que para una  $d_\lambda = 1.5$ , cuando se tiene un plano de tierra se tienen prácticamente el doble (1.8) que cuando se tiene un aro reflector; esto se debe a que parte de la potencia se está radiando hacia atrás, lo que implica pérdidas.

Para lograr una radiación endfire se propuso un arreglo de 4 hélices con dos aros, guardando una distancia de  $0.25\lambda$  entre ellos. Con este arreglo sí se logró una radiación endfire. Al comparar los resultados de este arreglo con los obtenidos con un plano de tierra infinito se tiene que el ancho del haz es ligeramente más ancho cuando se tienen aros parásitos. La amplitud del campo en la máxima dirección aumenta en comparación cuando sólo se tiene un aro, ya que los lóbulos laterales y el trasero son relativamente pequeños.

Como se dijo anteriormente, en este capítulo se realizaron únicamente estudios teóricos, pero en la práctica también es necesario considerar el tipo de alimentador y el acoplamiento de los elementos radiadores del arreglo con los alimentadores. Con la experiencia obtenida en el Capítulo 2 en la construcción de la antena, se observa que el tener una hélice con un aro radiador a una frecuencia de operación mayor que 5 GHz implica trabajar con material más especializado y ya no es posible construir el aro con un conductor circular (alambre). La dificultad de colocar uno o varios aros en un arreglo helicoidal consiste en cómo conectar la antena y cómo construir los aros.

Algunos investigadores han construido algunos arreglos helicoidales alimentados por medio de cables coaxiales (Kraus, 1948) y algunos otros por medio de guía de ondas radiales (Nakano, 1992). En cada uno

de los casos se consideraron planos de tierra infinitos, pero fue necesario considerar los acoplamientos con estas líneas de transmisión y los rebotes de las ondas que se tuvieran en las mismas.

En el caso de un arreglo helicoidal con un solo aro reflector y alimentación central, para frecuencias mayores que 5 GHz, se podría emplear nuevamente la lámina Ultralam 2000 e imprimir los aros; para la alimentación se podría realizar por medio un cable coaxial semi-rígido colocado por debajo de la placa de vidrio y fijado en el centro de la misma. Para realizar la conexión en cada una de las hélices se podrían colocar pequeños trozos de coaxial de longitudes  $\lambda/2$  o bien múltiplos de  $\lambda/2$  para asegurar que las 4 hélices posean la misma fase si así se desea. Otra forma de alimentar es por medio de una guía circular, y colocar pequeños trozos de un alambre para conectar a la antena. Si se deseara alimentación periférica las antenas podrían ser alimentadas de forma horizontal por medio de cable coaxiales (Kraus, 1995).

Con lo que respecta a un arreglo con dos aros parásitos una alimentación central es muy difícil ya que si se hace por medio de un cable coaxial es necesario asegurar un buen blindaje, ya que se estaría induciendo una corriente parásita a cada aro, y en los aros se tendrían dos corrientes, una inducida por la hélice y la otra por el coaxial. En lo personal, recomendaría una alimentación periférica para evitar este problema.

Dentro de la teoría de arreglos, existen los llamados arreglos de fase, los cuales consisten en alimentar con diferentes fases a cada uno de los elementos (Balanis, 1997). Los arreglos helicoidales pueden emplearse como arreglos de fase para aplicaciones en radares (Kraus, 2002). Lamentablemente, por cuestiones de tiempo, esta tesis ya no alcanzó a investigar el comportamiento de los arreglos helicoidales con aros como arreglos de fase.

## 4. Conclusiones

La presente tesis muestra un estudio realizado a una antena helicoidal con aros en lugar de un plano de tierra, así como un arreglo conformado por 4 de estas antenas. Para lograr este estudio, se emplearon diversos métodos, los cuales son: el Método de Momentos, el Principio de Multiplicación de Patrones y el Principio de Imágenes. Asimismo, para comprobar algunos de los resultados se empleó el paquete NEC. Dentro del Método de Momentos se describieron las geometrías curvas por medio de ecuaciones paramétricas; estas ecuaciones permitieron un manejo de funciones vectoriales para la programación del método.

Como primera instancia se realizó una actualización del estado del arte de las antenas helicoidales (Capítulo 1), presentando algunos estudios en los cuales se varían las características geométricas de la hélice y del plano de tierra (Kraus, 1995) y es aquí en donde surge la inquietud por estudiar un arreglo que no contenga plano de tierra sino que en su lugar posea aros, pudiéndose colocar uno o dos aros, dependiendo de la respuesta deseada.

Para realizar el análisis de la antena con aros se creó un programa en el paquete MATLAB, basado en el Método de Momentos (MM). El primer paso para corroborar que el MM programado es correcto fue la verificación de la matriz de impedancias de la antena. En esta tesis se plantea una antena que posee geometrías rectas y curvas, pero al buscar resultados que sirvieran como puntos de comparación se observó que únicamente existe literatura para geometrías rectas. Esto requirió llevar a cabo una pequeña investigación sobre la impedancia mutua de un dipolo corto curvo y conocer el error que se tiene al modelar una antena curva por medio de dipolos cortos rectos (véase el Apéndice A). De esta investigación se concluyó que la resistencia propia de un dipolo curvo decae exponencialmente en función de su radio de curvatura, mientras que la reactancia propia (de tipo capacitivo) crece exponencialmente; ambas componentes de la impedancia propia convergen muy rápido para  $\rho \geq 2\lambda$  hacia la impedancia propia de un dipolo recto. Por lo tanto, cualquier antena con geometría cónica puede ser modelada por el método de momentos segmentándola con dipolos rectos, siempre y cuando  $\rho \geq 2\lambda$ . Esta información puede ser muy útil para alumnos, profesores e investigadores que escriban sus propios programas de computadora para analizar antenas con geometría cónica.

Con la información recabada se tenían suficientes bases teóricas para la comprobación de la impedancia mutua de dipolos cortos curvos, pero faltaba aún conocer los efectos de la curvatura de los dipolos cortos

en otros parámetros de las antenas. En el Apéndice D se presenta un estudio de una antena circular para conocer la longitud necesaria del dipolo corto curvo para determinar la impedancia de entrada de dicha antena con un buen nivel de precisión. En este estudio se observa que para obtener un resultado cercano al teórico es necesario simular a la antena por medio de dipolos cortos curvos con longitud menor o igual que  $0.05\lambda$ , a diferencia de los dipolos cortos utilizados para modelar antenas de geometría recta, cuya longitud máxima permisible para tener una aproximación aceptable es de  $0.1\lambda$  (Neri, 1999). Asimismo, dividiendo una antena circular con segmentos de longitud  $0.05\lambda$  se obtuvieron tanto la distribución de corriente en la antena como su patrón de radiación. Al comparar estos resultados con los teóricos (Rao, 1968; Le-Wei Li, 1999) se observa que las diferencias son mínimas.

Teniendo ya un punto de comprobación sólido, se modeló la antena helicoidal en el programa de MATLAB antes mencionado. Con los resultados obtenidos se verificaron la impedancia de entrada, la distribución de corriente y el patrón de radiación de una antena helicoidal aislada. Se observó una gran similitud entre la distribución de corriente obtenida a través de la simulación y la distribución de corriente teórica (Kraus, 2002; Markov, 1968) pero se hallaron ligeras diferencias en el patrón de radiación de la simulación en relación con los resultados obtenidos por Kraus (Kraus, 2002) y Nakano (Nakano, 1987). En un primer diseño se plantearon 4 geometrías: una sección helicoidal, una sección circular, una sección horizontal y una sección vertical. Se varió la longitud del elemento vertical para conocer la distancia óptima entre el plano de tierra y la hélice (Fig. 2.15), encontrándose que se obtiene radiación tipo endfire cuando no existe dicho elemento. Con los resultados obtenidos se observa que conforme la longitud del dipolo tiende a  $0.5\lambda$ , la radiación se vuelve normal, radiándose la mayor parte de la potencia de forma lateral.

Como los resultados obtenidos con un solo aro radiador fueron adversos, se presenta una configuración que contiene dos aros parásitos. En este último diseño se establece una distancia a partir de la cual se obtiene una radiación endfire, cuyo valor numérico es  $0.25\lambda$  de separación entre los aros. Estos resultados fueron comparados con los trabajos presentados por Kraus (Kraus, 1995) y Zainud-Deen (Zainud-Deen, 1998), advirtiéndose una gran semejanza con los resultados reportados por Zainud, pero no con los publicados por Kraus.

Aplicando nuevamente el Método de Momentos, se estudio un arreglo conformado por 4 hélices con un aro reflector en cada una. Se observó el comportamiento del arreglo al variar la distancia entre los elementos que conformaban el mismo, con el fin de establecer los rangos en los cuales es posible utilizar la simplificación que representa el principio de multiplicación de patrones, que desprecia los



acoplamientos de impedancias. Cuando los acoplamientos mutuos pueden ser despreciados, el uso de simplificaciones permite obtener resultados adecuados y con un bajo porcentaje de error. De acuerdo con los resultados obtenidos en el capítulo 3, para aplicar el principio de multiplicación de patrones se requiere una distancia de  $1.5\lambda$  entre los elementos adyacentes, ya que las diferencias que presentan los resultados utilizando el principio de multiplicación de patrones y el método de momentos a esa distancia son mínimas.

En cuanto a la parte experimental, lo reportado en la tesis es una etapa inicial para que se continúe el estudio de este tema. En el capítulo 2 se diseñó una antena para 10 GHz, lo que requirió el empleo de material especial para microondas, por lo que fue necesario trabajar con técnicas de impresión para circuitos en línea cinta, cables coaxiales semi-rígidos y un conector K. Específicamente, se aporta información sobre la técnica de fotolitografía, ya que si esto se quisiera fabricar, conviene el elaborar el aro por medio de dicha técnica de impresión. De acuerdo con Hegase (Hegase, 1994) sólo es necesario considerar la radiación con  $z > 0$  cuando se tienen aros impresos sobre sustratos dieléctricos.

---

## 6. Referencias

1. Anton, H. (1998) “*Introducción al álgebra lineal*”. Editorial Limusa, México.
2. Awadalla, K. H.; Zainud-Deen, S. H. et Sharsher, H. A. (1992) “*Analysis of normal mode helical antenna and scatterer*”. Antennas and Propagation Society International Sym., 1992. AP-S 1992 Digest, IEEE.
3. Balanis, C. A. (1997) “*Antenna theory. Analysis and Design*”. John Wiley and Sons, Inc. 2<sup>nd</sup> Edition, USA.
4. Collin, R. E. (1985) “*Antennas and Radiowave Propagation*”. Mc Graw Hill, Inc. United States.
5. Combes, P. F. (1997) “*Micro-ondes. Vol. 2: Circuits passifs, propagation et antennes*”. Dunod, Paris.
6. Cheng, D. K. (1999) “*Field and Wave Electromagnetics*”. Addison-Wesley Publishing, Company. 2<sup>nd</sup> Edition, USA.
7. Elkamchouchi, H. M. et Salem, A. I. (2001) “*Helical Antennas with Nonuniform Helix Diameter*”. Eighteenth National Radio Science Conference. pp 143-152.
8. Fujimoto, K. et James, J. R. (1994) “*Mobile Antennas Systems Handbook*”. Artech House Inc., Boston, London.
9. Glasser, O. J. et Kraus, J. D. (1948) “*Measured Impedances of Helical Beam Antennas*”. Journal of Applied Physics, Vol. 19, February 1948. pp 193-197.
10. Granville, W. A. (1995) “*Cálculo Diferencial e Integral*”. Noriega Editores, México.
11. Haapala, P.; Vainikainen, P. et Erätuuli, P. (1996) “*Dual Frequency Helical Antennas for Handsets*”. IEEE 46th Vehicular Tech. Conference. pp 336-338.
12. Harrington, R. F. (1968) “*Field Computation by Moment Methods*”. Macmillan, New York.
13. Hegase, H. A. N. (1994) “*Analysis of a printed wire loop antenna*”. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 42, Issue 2, February 1994. pp. 227-233.
14. Hernández, V.; Valiente, L.A. et Neri R. (2001) “*Input Impedance, Current Distributions and Radiation Properties of Thick and Widely Spaced Folded Dipoles*”. Electromagnetics, Vol. 21, No. 5, pp. 435 – 449.
15. Iizuka, K.; King, R. W. P. et Harrison, C. W. Jr. (1966) “*Self and mutual admittances of two identical circular loop antennas in a conducting medium and in air*”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-14, No. 4, July 1966. pp. 440-450.
16. Johnson, R. C. et Cotton, R. B. (1984) “*A Backfire Helical Feed*”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-32, No. 10, October 1984. pp 1126-1127.

17. Kazama, Y. et Tokumaru, S. (1998) "*Quadri-filar helical antennas with parasitic loops*". IEICE Transactions on Communications, Vol. E81-B, No. 11, November 1998. pp 2212-2218.
18. Kildal, P.-S. (1990) "*Artificially soft and hard surfaces in Electromagnetics*". IEEE Transactions on Antennas and Propagation. Vol. AP-38, February 1990. pp 168-170.
19. King, H. E. et Wong, J. L. (1980) "*Characteristics of 1 to 8 Wavelength Uniform Helical Antennas*". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-28, No. 2, March 1980. pp 291-296.
20. King, H. E. et Wong, J. L. (1979). "*Broadband Quasi-Taper Helical Antennas*". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-27, No. 1, January 1979. pp 72-78.
21. King, H. E. et Wong, J. L. (1985) "*Helical Antennas*". The Aerospace Corporation
22. Kraus, J. D. (1948) "*Helical Beam Antennas for Wide-Band Applications*". Proceedings of the IRE, Vol. 36, October 1948. pp 1236-1242.
23. Kraus, J. D. (1977) "*A 50-Ohm Input Impedance for Helical Beam Antennas*". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-25, No. 6, November 1977. pp 913.
24. Kraus, J. D. (1984) "*Electromagnetics*". Mc Graw Hill, 3<sup>rd</sup> edition, USA.
25. Kraus, J. D. (1995) "*A Helical-Beam Antenna Without a Ground Plane*". IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 37, No. 2, April 1995. pp 45.
26. Kraus, J. D. et Marhefka, R. J.(2002) "*Antennas for all applications*". McGraw Hill, 3<sup>rd</sup> Edition, USA.
27. Li, L.-W.; Leong, M.-S.; Kooi, P.-S. et Yeo, T.-S (1997). "*Exact Solutions of Electromagnetics Fields in Both Near and Far Zones Radiated by Thin Circular-Loop Antennas: A General Representation*", IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 45, No. 12, December 1997. pp. 1741 – 1748.
28. Li, L.-W.; Lim, C.-P. et Leong, M.-S. (1999) "*Method-of-moments analysis of electrically large circular-loop antennas: Nonuniform currents*". Microwave, Antennas and Propagation, IEE Proceedings, Vol. 146, Issue 6, December 1999.
29. Maclean, T.S.M. (1963) "*An engineering study of the helical aerial*". Proceedings IEEE, Vol. 110, No. 1, January 1963. pp 112-116.
30. Markov, G. et Sazonov, D. (1978) "*Antenas*". Editorial MIR, Moscú. Traducción del ruso al español por el Ing. A. Grdian.
31. Martínez, J.; Carrasco, E. et Neri, R. (2000) "*On the radiation and impedance effects of coupling between helices of a two-element array without a ground plane*". International Conference on Telecommunications 2000, May 2000.

32. Mimaki, H. et Nakano, H. (1998) “*Double Pitch Helical Antenna*”. IEEE International Symposium 1998, Antennas and Propagation Society. pp 2320-2323.
33. Nakamura, S. (1992) “*Análisis numérico y visualización gráfica en MATLAB*”. Prentice-Hall, México.
34. Nakano, H. (1987) “*Helical and Spiral Antennas*”. New York, Research Studies Press, John Wiley and Sons Inc.
35. Nakano, H.; Yamauchi, J. et Mimaki, H. (1988) “*Backfire Radiation from a Monofilar Helix with a Small Ground Plane*”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 36, No. 10, October 1988. pp 1359-1364.
36. Nakano, H.; Takeda, H.; Honma, T.; Mimaki, H. et Yamauchi, J. (1991) “*Extremely Low-Profile Helix Radiating a Circularly Polarized Wave*”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 39, No. 6, June 1991. pp 754 –757.
37. Nakano, H.; Takeda, H.; Honma, T.; Mimaki, H. et Yamauchi, J. (1992) “*Low-Profile Helical Array Antenna Fed from a Radial Waveguide*”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 40, No. 3, March 1992. pp 279 –284.
38. Nakano, H.; Ikeda, N.; Wu, Y.; Suzuki, R.; Mimaki, H. et Yamauchi, J. (1998) “*Realization of Dual-Frequency and Wide-Band VSWR Performances Using Normal-Mode Helical and Inverted-F Antennas*”. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 46, No. 6, June 1998. pp 788-793.
39. Neri, R. et Maclean T.S.M. (1978) “*On-axis fields of small grid paraboloid by moment method*”. Microwave, Optics and Acoustics, IEE, Vol. 2, No. 4, England. pp. 123-128.
40. Neri, R. et Maclean, T.S. M. (1978 bis) “*Axial-line-current approximation for short cylindrical wires*”. Electronics Letters, Vol. 14, No. 24, pp. 776 – 778.
41. Neri, R. (1980) “*Self and mutual impedances between sub-elements of dipole antenas: contributions from currents and charges*”. Int. J. Electronics, Vol. 48, No.5. pp 435-442.
42. Neri, R. (1999) “*Análisis de antenas lineales por el Método de Momentos*”. Ingeniería, Investigación y Tecnología, I:2, UNAM, pp 73-83.
43. O’Neil, P. V. (1999) “*Matemáticas Avanzadas para ingeniería*”. 3ª edición, Vol. 2, CECOSA, México.
44. Phongcharoenpanich, C.; Lertwiriyaprapa, T.; Lamultree, S.; Wouchoum, P; Kosulvit, S. et Krairiksh, M. (2001) “*Characteristics of a Helical Array Antenna Radiating Circularly Polarized Conical Beam*”. IEEE Antennas and Propagation Society, International Symposium 2001.
45. Pozar, D. M. (1990) “*Microwave Engineering*”. Addison-Wesley Publishing Company, U. S.

- 
46. Rao, B. R. (1968) "*Far field patterns of large circular loop antennas. Theoretical and experimental results*". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, AP-16, March 1968. pp. 269-270.
  47. Solis, R.; Nolasco, J. et Victoria, A. (1995) "*Geometría Analítica*". Limusa, Noriega Editores, 5ª edición, México.
  48. Spiegel, M. R.; Liu, J. et Avellanas, L. (2000) "*Fórmulas y tablas de matemáticas aplicadas*". McGraw-Hill, 2ª edición, España.
  49. Storer, J. E. (1956) "*Impedance of thin-wire loop antennas*". Transactions AIEE, Part I (Communication and Electronics), Vol. 75, November 1956. pp. 606-619.
  50. Stuzman, W. (1997) "*Antenna Theory and Design*". John Wiley & Sons, 2<sup>nd</sup> edition, USA.
  51. Tice, T. E. et Kraus, J. D. (1949) "*The Influence of Conductor Size on the Properties of Helical Beam Antennas*". Proceedings of the I.R.E., Vol. 37, November 1949. pp 1296.
  52. Tranquilla, J. M. et Best S. R. (1990) "*A Study of the Quadrifilar Helix Antena for Global Positioning System (GPS) Applications*". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. 38, No. 10, October 1990, pp 1545-1550.
  53. Vassilikos, E. et Al-Charchafchi. (1995) "*Input impedance measurements of helical antennae in the L-band*". IEEE International Symposium 1995, Antennas and Propagation Society. pp 1746-1749.
  54. Vaughan, R.G. et Andersen, J.B. (1985) "*Polarization properties of the axial mode helix antenna*". IEEE Transac. on Antennas and Propagation, Vol. 33, No. 1. January 1985. pp 10- 20.
  55. Wong, J. L. et King, H. E. (1979) "*Broadband Quasi-Taper Helical Antennas*". IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol. AP-37, No. 1. January 1979. pp 72-78.
  56. Ying, Z. et Kildal, P.-S. (1993) "*Reduced sidelobes and cross-polarization of axial mode using a soft corrugated ground plane*". Proceedings of IEEE AP-S symposium, 1993. pp 462-465.
  57. Zainud-Deen, S. H.; Awadalla, K. H. et Sharshar, H. A. (1995) "*Analysis of Normal Mode Helical Antenna on Finite Ground Plane*". IEEE International Symposium 1995, Ant. and Prop. Society. pp 632-637.
  58. Zainud-Deen, S. H. (1998) "*Analysis of axial-mode helix without a ground plane*". URSI Fifteenth Radio Science Conference, Feb. 24 –26.

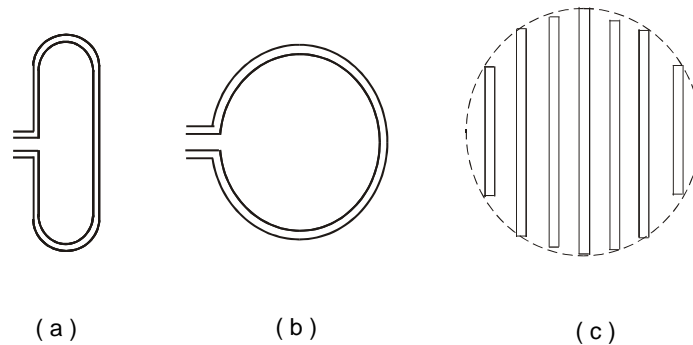
## Apéndice A. Impedancia Propia de dipolos cortos con geometrías cónicas

El trabajo presentado en este apéndice sirvió como material para la realización de un artículo de investigación enviado a la revista “*Ingeniería, Investigación y Tecnología*”.

### A.1 Introducción

En todo sistema de comunicación inalámbrica es necesario caracterizar las antenas por medio de sus propiedades de radiación. Existen varios métodos numéricos que facilitan estos cálculos. Uno de ellos es el Método de Momentos, que divide a la antena bajo estudio en  $N$  segmentos, considerados como dipolos cortos, mismos que pueden o no tener la misma longitud. Cada segmento tiene una impedancia propia asociada; y, debido a la proximidad física entre todos los segmentos del conductor, también existe una impedancia mutua entre cada par de ellos (Harrington, 1968).

En un artículo publicado en la revista “*Ingeniería, Investigación y Tecnología*” (Neri, 1999) se explica todo el procedimiento matemático para obtener la matriz de impedancias de cualquier antena lineal arbitraria por el Método de Momentos (MM); asimismo, se incluyen algunos resultados para antenas tipo Yagi-Uda, con todos sus elementos rectos. Sin embargo, no todas las antenas lineales consisten de elementos rectos, sino que pueden tener diversas curvaturas. Ejemplos típicos (Figura A.1) son el dipolo doblado (Hernández, 2001), la antena circular y la antena parabólica de rejilla o tubular (Neri, 1978).



**Figura A.1.** Ejemplos de antenas lineales formadas con elementos tubulares curvos: (a) dipolo doblado, (b) lazo circular y (c) paraboloide de rejilla visto de frente.

Uno de los mayores problemas que un alumno de la asignatura “Antenas y propagación” o un investigador enfrenta cuando desea emplear el MM por primera vez e ir adquiriendo experiencia y certidumbre en sus

resultados, es cómo verificar si la matriz de impedancias calculada es correcta o no, antes de invertirla y proseguir con la obtención de las corrientes y los campos radiados. Para el caso de los conductores rectos sí existe una referencia que permite comprobar dichas impedancias y la eficacia del programa de computadora que haya sido elaborado en forma personal (Neri, 1980). Sin embargo, para el caso de elementos curvos no hay datos disponibles en la literatura y queda la duda sobre qué tanto influye la curvatura o si la impedancia propia es igual a la de un dipolo recto por el hecho de que ambos sean muy cortos. Por tanto, en este trabajo se aporta información que permita verificar, como primer paso, la diagonal principal de la matriz compleja tomando en cuenta la curvatura de la antena. En esta diagonal principal están todas las impedancias propias de los segmentos en que la antena ha sido subdividida; si todos éstos son de la misma longitud y curvatura, por ejemplo en una antena de lazo circular, entonces basta con conocer una sola impedancia propia, ya que todas las demás de la diagonal principal deben ser iguales. Pero si los segmentos cambian de curvatura en diferentes secciones de la antena, como por ejemplo en cada conductor parabólico de los que forman a la antena mostrada en la Figura A.1c, entonces las impedancias de la diagonal principal ya no son necesariamente idénticas. Los resultados aquí presentados permiten verificarlas una a una, conforme su radio de curvatura varía, al igual que las impedancias propias de los segmentos de otras antenas curvas.

## A.2 Desarrollo

En este análisis general de la impedancia propia de dipolos cortos y curvos, es decir, con geometría cónica, conviene trabajar en coordenadas polares. Una cónica se define como la curva trazada por un punto P que se mueve de tal manera que la distancia entre este punto móvil y otro punto fijo (llamado foco), dividida entre la distancia de P a una recta fija (llamada directriz) resulta ser una razón constante. La razón constante es la excentricidad  $e$  de la curva (Solís, 1995). En la Figura 2 se muestra esta geometría, donde el foco coincide con el origen y el eje focal es colineal con el eje polar. La ecuación que representa a esta cónica en coordenadas polares es (Spiegel, 2000):

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (\text{A-1})$$

donde  $p$  es la distancia del foco a la directriz y  $r$  es la distancia del foco a un punto de la cónica e igual a la magnitud de  $R(\theta)$ .

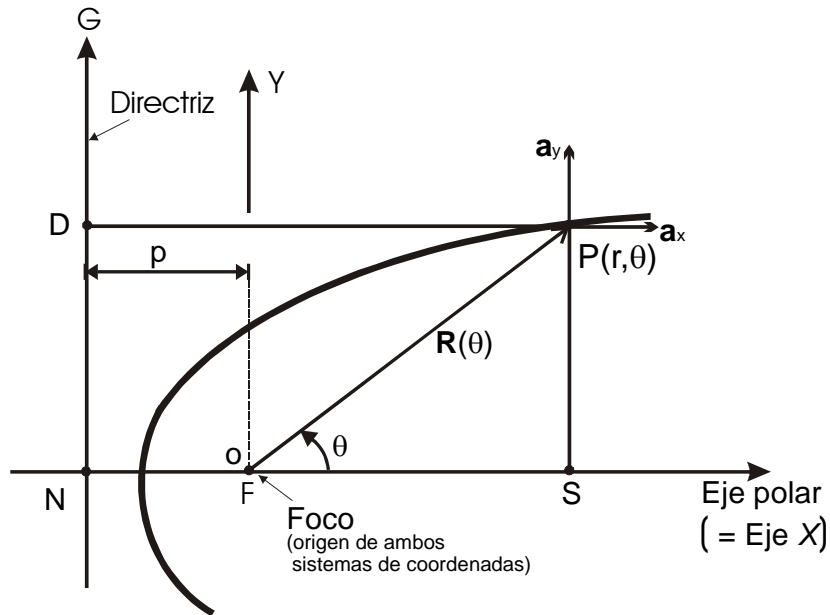
Ahora bien, la función vectorial en coordenadas cartesianas que representa a la misma cónica está dada por la expresión:

$$\mathbf{R} = x \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y \quad (\text{A-2})$$

o bien, en términos de la variable  $\theta$  y sustituyendo la ecuación (A-1) en la ecuación (A-2), con  $p$  y  $r$  en longitudes de onda:

$$\mathbf{R}(\theta) = \frac{p\lambda \cos \theta}{1 - e \cos \theta} \mathbf{a}_x + \frac{p\lambda \sin \theta}{1 - e \cos \theta} \mathbf{a}_y \quad (\text{A-3})$$

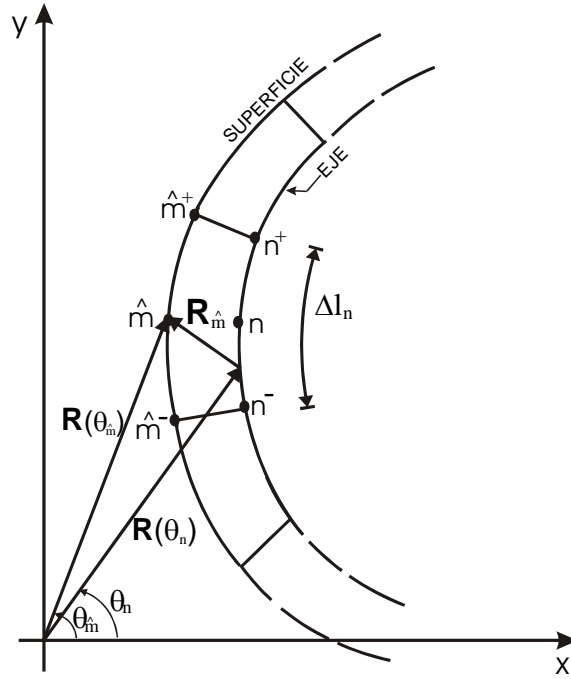
donde  $\mathbf{R}$  es el vector de posición de la función vectorial y  $\mathbf{a}_x$  y  $\mathbf{a}_y$  son los vectores unitarios del sistema (Fig. A.2).



**Figura A.2.** Geometría de una cónica en los sistemas polar y cartesiano.

Como se muestra en la Figura A.3, para poder aplicar el MM, es necesario caracterizar a cada conductor tubular de la antena por medio de una curva que represente a la curvatura del segmento sobre su eje y otra que represente a la curvatura sobre su superficie .





**Figura A.3.** Modelo de un segmento curvo a lo largo del conductor. Sólo se indican el eje y una de las dos superficies laterales

La distancia  $R_{\hat{m}}$  se mide desde un punto fuente sobre el eje de cada segmento  $n$  hacia el punto central sobre la superficie del segmento  $\hat{m}$ , y se calcula como la magnitud de la siguiente ecuación vectorial:

$$R_{\hat{m}} = \left| \mathbf{R}(\theta_{\hat{m}}) - \mathbf{R}(\theta_n) \right| \quad (\text{A-4})$$

donde  $\theta_{\hat{m}}$  y  $\theta_n$  son los ángulos que determinan la posición del punto central del segmento  $\hat{m}$  y el punto fuente sobre el eje del segmento  $n$ , respectivamente.

Si la magnitud de  $\mathbf{R}(\theta_{\hat{m}})$  y  $\mathbf{R}(\theta_n)$  se representa, respectivamente, como  $r_{\hat{m}}$  y  $r_n$ , la ecuación A-4 en coordenadas polares es equivalente a la distancia entre dos puntos:

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{r_{\hat{m}}^2 + r_n^2 - 2r_{\hat{m}}r_n \cos(\theta_{\hat{m}} - \theta_n)} \quad (\text{A-5})$$

donde:

$$r_m^\wedge = \frac{P\lambda}{1 - e \cos \theta_m^\wedge} \quad (\text{A-5a})$$

$$r_n = \frac{P\lambda}{1 - e \cos \theta_n} \quad (\text{A-5b})$$

$R_m^\wedge$ ,  $r_m^\wedge$  y  $r_n$  están en longitudes de onda.

Para aplicar las ecuaciones que permiten calcular las impedancias propias (Neri, 1999) es necesario conocer el ángulo  $\beta$  formado entre el vector tangente a la superficie del conductor en el segmento  $\hat{m}$  y el vector de potencial magnético  $\mathbf{A}$  en el mismo segmento; dicho vector  $\mathbf{A}$  es producido por la corriente que fluye en el segmento  $n$  y tiene la misma dirección que la corriente en este último segmento. Por lo tanto, este ángulo  $\beta$  puede ser calculado por medio de la definición del producto escalar (Anton, 1998):

$$\mathbf{R}'(\theta_m^\wedge) \cdot \mathbf{R}'(\theta_n) = \left| \mathbf{R}'(\theta_m^\wedge) \right| \left| \mathbf{R}'(\theta_n) \right| \cos \beta \quad (\text{A-6})$$

de donde:

$$\cos \beta = \frac{\mathbf{R}'(\theta_m^\wedge) \cdot \mathbf{R}'(\theta_n)}{\left| \mathbf{R}'(\theta_m^\wedge) \right| \left| \mathbf{R}'(\theta_n) \right|} \quad (\text{A-7})$$

en la cual,  $\mathbf{R}'(\theta_m^\wedge)$  y  $\mathbf{R}'(\theta_n)$  son los vectores tangentes a los segmentos  $\hat{m}$  y  $n$ , respectivamente (O'Neil, 1999). Para obtener estos vectores tangentes es necesario derivar la ecuación (A-3), por lo que se tiene:

$$\mathbf{R}'(\theta) = \left[ \frac{-p_\lambda \text{sen}\theta}{(1-e\cos\theta)^2} \right] \mathbf{a}_x + \left[ \frac{p_\lambda \cos\theta - e p_\lambda}{(1-e\cos\theta)^2} \right] \mathbf{a}_y \quad (\text{A-8})$$

$$|\mathbf{R}'(\theta)| = \frac{p_\lambda \sqrt{1 - 2e\cos\theta + e^2}}{(1-e\cos\theta)^2} \quad (\text{A-9})$$

Sustituyendo las ecuaciones (A-8) y (A-9) en (A-7) se puede conocer el valor de  $\beta$ . Después de efectuar las derivadas necesarias y simplificar, el coseno de dicho ángulo es:

$$\cos\beta = \frac{A+B}{C D} \quad (\text{A-10})$$

donde:

$$A = p_\lambda \text{sen}\theta_n \left[ p_\lambda \text{sen}\theta_{\hat{m}} + \frac{d}{2} \text{sen}\theta_{\hat{m}} (1 - e\cos\theta_{\hat{m}})^2 \right] \quad (\text{A-10a})$$

$$B = (p_\lambda \cos\theta_n - e p_\lambda) \left[ p_\lambda \cos\theta_{\hat{m}} - e p_\lambda + \frac{d}{2} \cos\theta_{\hat{m}} (1 - e\cos\theta_{\hat{m}})^2 \right] \quad (\text{A-10b})$$

$$C = \sqrt{p_\lambda^2 - 2p_\lambda^2 e\cos\theta_n + e^2 p_\lambda^2} \quad (\text{A-10c})$$

$$D = \sqrt{\left[ p_\lambda \text{sen}\theta_{\hat{m}} + \frac{d}{2} \text{sen}\theta_{\hat{m}} (1 - e\cos\theta_{\hat{m}})^2 \right]^2 + \left[ p_\lambda \text{sen}\theta_{\hat{m}} - e p_\lambda + \frac{d}{2} \text{sen}\theta_{\hat{m}} (1 - e\cos\theta_{\hat{m}})^2 \right]^2} \quad (\text{A-10d})$$

en donde  $d$  es el diámetro del tubo de la antena en longitudes de onda.

La expresión de la diferencial  $dl$  a lo largo del eje del segmento  $n$  también es necesaria para efectuar las integrales de longitud requeridas en el Método de Momentos, y puede ser obtenida con la longitud de arco de una curva, definida diferencialmente en coordenadas polares por la expresión (O'Neil, 1999):

$$(dl)^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 \quad (\text{A-11})$$

Al sustituir la ecuación (A-1) en la (A-11), se tiene que<sup>1</sup> :

$$dl = \frac{p\sqrt{1-e^2\text{sen}^2\theta}}{1-e\text{sen}\theta} d\theta \quad (\text{A-12})$$

Finalmente, las ecuaciones que permiten calcular la matriz de impedancias para un geometría cónica son (Neri, 1999):

$$Z_{mn} = \frac{j\omega\mu}{4\pi} \Delta l_n \Delta l_m \psi(n, \hat{m}) + \frac{1}{4\pi\epsilon j\omega} [\psi(n^+, \hat{m}^+) - \psi(n^-, \hat{m}^+) - \psi(n^+, \hat{m}^-) + \psi(n^-, \hat{m}^-)] \quad (\text{A-13})$$

donde las integrales  $\psi$  son del tipo:

$$\psi(n, \hat{m}) = \frac{p_\lambda}{\Delta l_n} \int_{\Delta l_n} \cos \beta \frac{\exp(-jkE)}{F} \sqrt{1-e^2\text{sen}^2\theta_n} d\theta_n \quad (\text{A-13a})$$

$$E = \frac{\sqrt{r_m^2(1-e\cos\theta_n) + p_\lambda^2 - 2r_m p_\lambda(1-e\cos\theta_n)\cos(\theta_m - \theta_n)}}{(1-e\cos\theta_n)} \quad (\text{A-13b})$$

y

<sup>1</sup> Esta expresión se maneja en el análisis matemático como una ecuación diferencial, ya que si se quiere encontrar su ecuación primitiva es necesario un método numérico para resolver la integral elíptica que se presenta.

$$F = \sqrt{r_m^2 (1 - e \cos \theta_n) + p_\lambda^2 - 2r_m p_\lambda (1 - e \cos \theta_n) \cos(\theta_m - \theta_n)} \quad (\text{A-13c})$$

Ahora bien, como se desea realizar un análisis comparativo entre varias geometrías curvas para presentar los resultados con gráficas de fácil comprensión, conviene usar como variable al radio de curvatura  $\rho$ , que es el inverso de la curvatura  $k$  (Granville, 1995), es decir:

$$\rho(\theta) = \frac{1}{k(\theta)} \quad (\text{A-14})$$

en donde  $k$ , para coordenadas polares, es igual a:

$$k(\theta) = \frac{r^2 + 2r'r'' - rr'''}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{A-15})$$

donde  $r'$  y  $r''$  son, respectivamente, la primera y segunda derivada de la magnitud del radio vector  $R(\theta_n)$ , cuya posición varía conforme se desplaza el punto fuente desde  $n^-$  hasta  $n^+$  a lo largo del segmento  $n$ .

Por lo tanto, al derivar la ecuación (A-1) dos veces y sustituir en la ecuación (A-14), se tiene que:

$$\rho(\theta) = \frac{p_\lambda (1 - 2e \cos \theta + e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 - e \cos \theta)^3} \quad (\text{A-16})$$

y los resultados mostrados más adelante están en términos de esta variable.

### A.3 Ejemplo para una geometría parabólica

Una de las geometrías curvas más empleadas para el diseño de antenas es la parabólica, ya sea con superficie lisa y continua, o bien, integrada por varios tubos parabólicos (Neri, 1978). Una forma de analizar las propiedades del enrejado de una antena parabólica es por medio del Método de Momentos, donde hay que calcular, como primer paso, la matriz de impedancias. Considerando la geometría de la Figura A.4, la ecuación que representa a la curva parabólica es:

$$y^2 = 4ax \tag{A-17a}$$

o bien:

$$x = \frac{y^2}{4a} \tag{A-17b}$$

en donde  $a$  es la distancia del vértice al foco de la parábola.

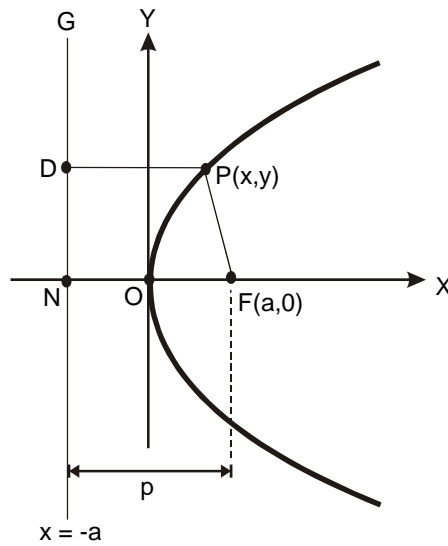


Figura A.4. Geometría de un conductor parabólico .

Para conocer todos los términos que se requieren en el cálculo de la matriz de impedancias ( $\mathbf{R}$ ,  $R_m$ ,  $\cos\beta$  y  $dl$ ) se puede sustituir  $e = 1$  (excentricidad de la parábola) en las ecs. (A-3), (A-5), (A-7) y (A-12). Estas expresiones, ya simplificadas y escritas en coordenadas cartesianas, son:

$$\mathbf{R}(y) = \frac{y^2}{4a} \mathbf{a}_x + y \mathbf{a}_y \quad (\text{A-18})$$

$$R_{\hat{m}} = \sqrt{\left(\frac{y_{\hat{m}}^2}{4a} - \frac{y_n^2}{4a}\right)^2 + \left(y_{\hat{m}} - y_n\right)^2} \quad (\text{A-19})$$

$$\cos \beta = \frac{y_n y_{\hat{m}} + 4a^2}{\left[\left(y_n^2 + 4a^2\right)\left(y_{\hat{m}}^2 + 4a^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A-20})$$

$$l = \frac{y_n}{4a} \sqrt{y_n^2 + 4a^2} + a \ln\left(y_n + \sqrt{y_n^2 + 4a^2}\right) - a \ln(2a) \quad (\text{A-21})$$

$$dl = \frac{1}{2a} \sqrt{y_n^2 + 4a^2} dy_n \quad (\text{A-22})$$

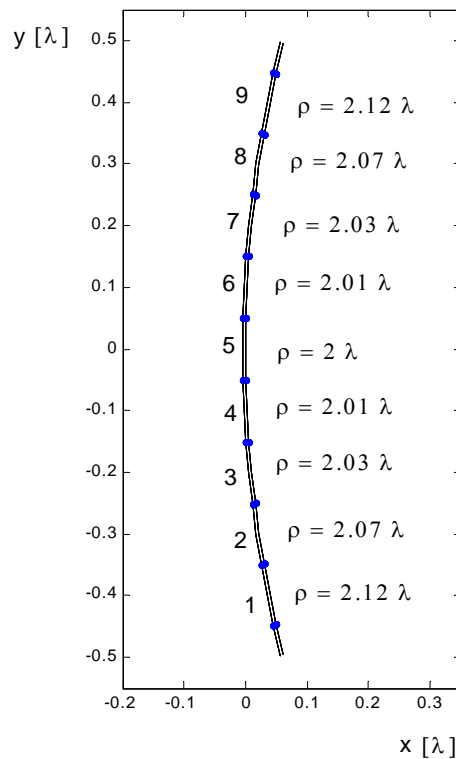
Al programar estas expresiones, es posible obtener la matriz de impedancias para una antena tubular con geometría parabólica por el método de momentos (Neri, 1999). A continuación se muestra esta matriz, cuando  $a = 1\lambda$  (distancia focal), la longitud total axial de la antena es  $0.6\lambda$ , el diámetro del tubo es  $0.01\lambda$ ,  $f = 300$  MHz y  $\Delta l_n = 0.1\lambda$ .

$$[Z] = \begin{bmatrix} \mathbf{7.97 - 370i} & 7.6 + 224.4i & 6.7 + 25.3i & 5.4 + 5.9i & 3.8 + 1.1i & 2.3 - 0.7i & 1 - 1.2i & 0.2 - 1.2i & -0.4 - 0.8i \\ 7.6 + 222.8i & \mathbf{7.97 - 370i} & 7.6 + 223.5i & 6.7 + 25.5i & 5.4 + 5.9i & 3.8 + 1.2i & 2.3 - 0.7i & 1.1 - 1.2i & 0.2 - 1.2i \\ 6.7 + 260.9i & 7.6 + 222.3i & \mathbf{7.97 - 368.9i} & 7.7 + 222.8i & 6.7 + 25.6 & 5.4 + 5.9i & 3.8 - 1.2i & 2.3 - 0.7i & 1.1 - 1.2i \\ 5.4 + 6i & 6.7 + 26i & 7.7 + 222.1i & \mathbf{7.97 - 368.3i} & 7.7 + 222.4i & 6.7 + 25.7i & 5.4 + 6i & 3.9 + 1.2i & 2.3 - 0.7i \\ 3.9 + 1.2i & 5.4 + 6i & 6.7 + 25.8i & 7.7 + 222.1i & \mathbf{7.97 - 368.2i} & 7.7 + 222.1i & 6.7 + 25.8i & 5.4 + 6i & 3.9 + 1.2i \\ 2.3 - 0.65i & 3.8 + 1.2i & 5.4 + 6i & 6.7 + 25.7i & 7.7 + 222.4i & \mathbf{7.97 - 368.3i} & 7.7 + 222.1i & 6.7 + 25.5i & 5.4 + 6i \\ 1.1 - 1.2i & 2.3 + 0.7i & 3.8 + 1.2i & 5.4 + 5.9i & 6.7 + 25.6i & 7.7 + 222.8i & \mathbf{7.97 - 368.9i} & 7.7 + 222.3i & 6.7 + 26.1i \\ 0.2 - 1.2i & 1.1 - 1.2i & 2.3 + 0.7i & 3.8 + 1.2i & 5.4 + 5.9i & 6.7 + 25.5i & 7.7 + 223.5i & \mathbf{7.97 - 370i} & 7.7 + 222.8i \\ -0.3 - 0.8i & 0.2 - 1.2i & 1.1 - 1.2i & 2.3 - 0.7i & 3.8 + 1.2i & 5.4 + 5.9i & 6.7 + 25.4i & 7.7 + 222.8 & \mathbf{7.97 - 370i} \end{bmatrix}$$

Las impedancias propias han sido escritas con negritas para resaltarlas. Nótese que los mismos valores de éstas pueden ser obtenidos de las gráficas de la Figura A.7 en combinación con la Figura A.5, conociendo la excentricidad y el radio de curvatura del segmento en estudio. El radio de curvatura para un segmento parabólico se obtiene al sustituir  $e = 1$  y  $p = 2a$  en la ecuación (A-16), o bien, conociendo la posición de dicho segmento, por medio de la fórmula (Granville, 1995):

$$\rho(y) = \frac{(4a^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}{-4a^2} \quad (\text{A-23})$$

en la cual, el signo negativo únicamente indica que la posición del foco se encuentra a la derecha del vértice, como en la Fig. A.4. El lector interesado en conocer el procedimiento matemático para obtener los campos radiados por uno o varios tubos parabólicos en conjunto puede consultar (Neri, 1978).

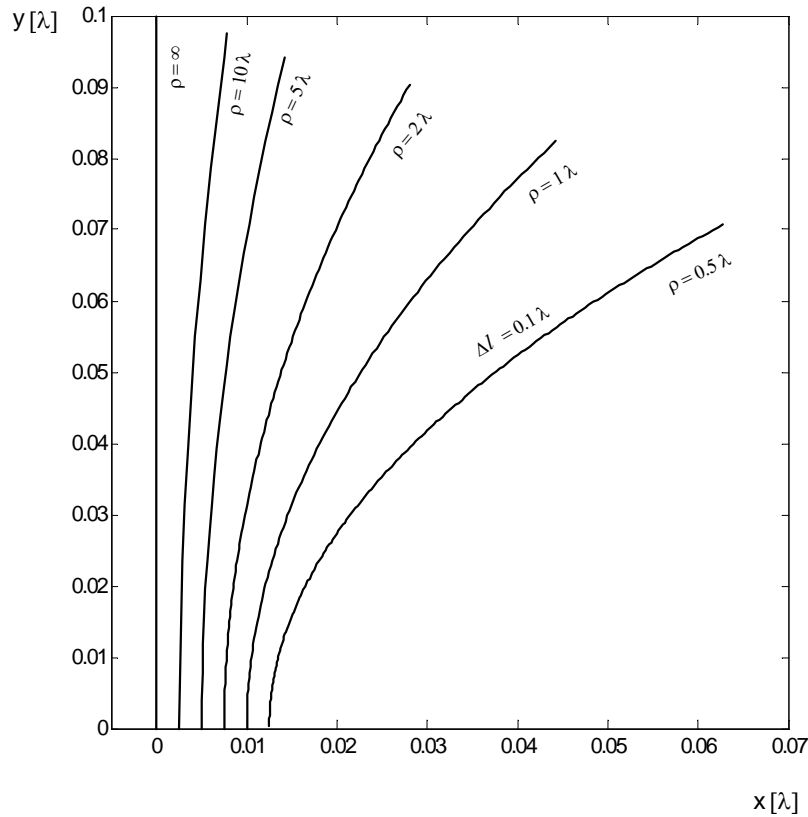


**Figura 5.** División de un conductor parabólico de longitud = 1 λ en nueve segmentos de 0.1λ y dos semisegmentos extremos de 0.05λ. Cada segmento está designado con su número correspondiente y a su derecha se indica su radio de curvatura promedio, en longitudes de onda.



### A.4 Simulación y Resultados

En la Figura A.6 se muestran varios dipolos cortos o filamentos de longitud  $\Delta l = 0.1\lambda$ , con diferentes radios de curvatura ( $\rho$ ), trazados sobre un plano con coordenadas  $x$ ,  $y$  en longitudes de onda. Al programar las ecuaciones descritas en este trabajo, para diferentes radios de curvatura, se obtuvieron las gráficas mostradas en la Figura A.7.



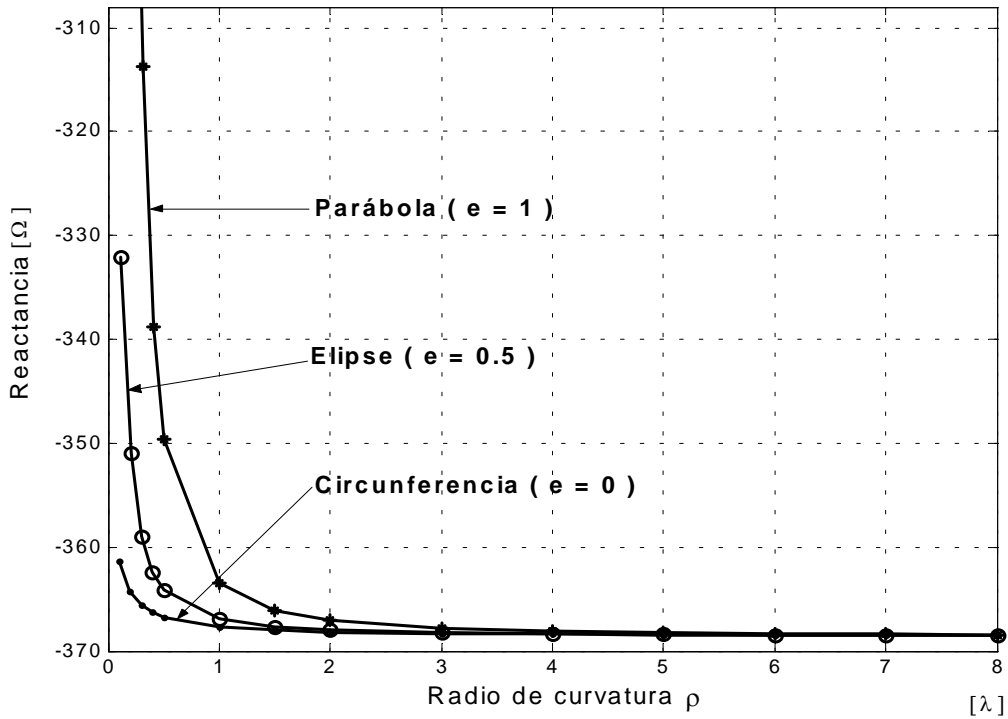
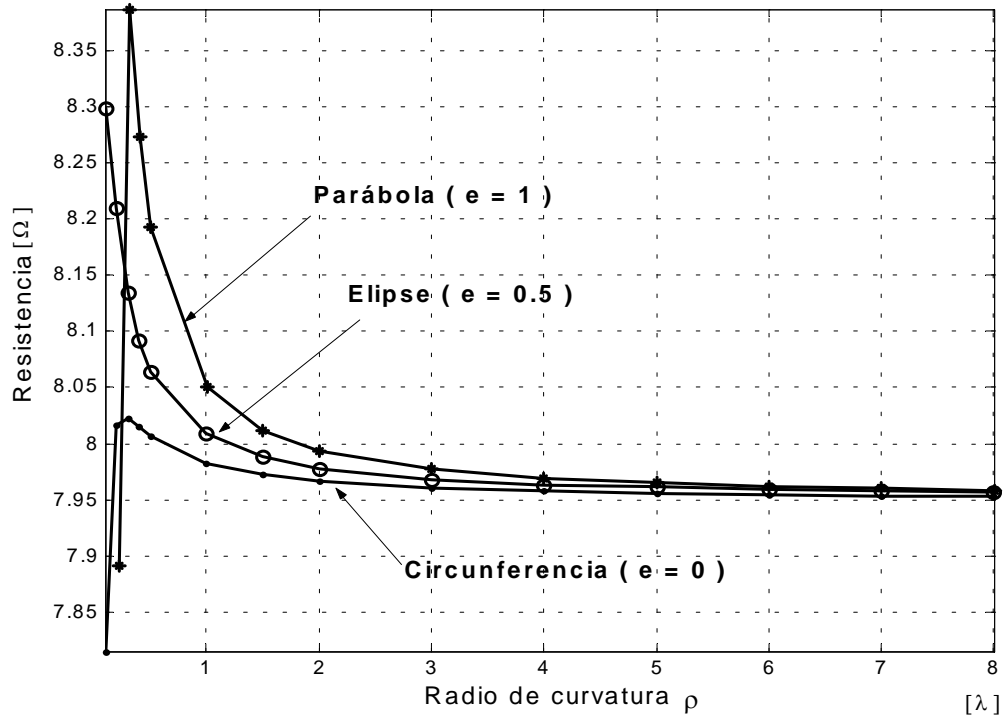
**Figura 6.** Dipolos cortos o segmentos de longitud  $\Delta l = 0.1\lambda$  y con diferentes radios de curvatura  $\rho$ , que definen al eje (segmento  $n$ ) o a la superficie (segmento  $\hat{m}$ ) del modelo de la Figura A.3.

Se observa que el valor de la impedancia propia de cada segmento está en función de la excentricidad de la cónica a la que pertenece y a su radio de curvatura, según su posición sobre la cónica. La excentricidad es una característica de la curva, mientras que el radio de curvatura es una propiedad puntual, por lo que en una misma cónica se pueden tener segmentos cortos con diferentes radios de curvatura.

Para este análisis se consideraron tres valores diferentes de excentricidad: los dos casos extremos y un caso promedio. Los casos extremos son  $e = 0$  (que representa una circunferencia) y  $e = 1$  (que describe a una parábola), y el caso promedio es  $e = 0.5$  (cuyo valor corresponde a una elipse). El radio de curvatura se evaluó en el punto central de cada segmento. Para el caso especial de la circunferencia, todos los puntos sobre ella tienen el mismo radio de curvatura; para variar  $\rho$  es necesario modificar el radio de la circunferencia, ya que de acuerdo con la ecuación 16, sustituyendo  $e = 0$ , resulta que  $\rho = p_\lambda = \text{radio}$ .

De la Figura 7 se observa que, cuando el radio de curvatura es aproximadamente  $0.5\lambda$ , se tiene un valor máximo de la resistencia propia del dipolo, mientras que para radios de curvatura grandes tiende a  $7.95 [\Omega]$ , que es la misma resistencia de un segmento recto, con la misma longitud y diámetro (Neri, 1980). Se puede concluir entonces que la resistencia aumenta al disminuir el radio de curvatura. En cuanto a la parte imaginaria de la impedancia propia, también se observa que, conforme  $\rho$  aumenta, la reactancia (que es capacitiva) converge a un valor constante de  $-367 [\Omega]$  e igual al de un dipolo recto (Neri, 1980). Se concluye que si el radio de curvatura es igual o mayor que aproximadamente 2, por lo que se refiere a las impedancias propias, todo segmento curvo de una antena con geometría cónica puede ser considerado como recto sin que se introduzca ningún error significativo en la matriz de impedancias. Pero conforme el radio de curvatura se reduce hacia 1 o menos, es imprescindible modelar los segmentos con su curvatura correcta, ya que aproximarlos por dipolos rectos introduciría errores del orden de 5% y 18 % en la resistencia y la reactancia, respectivamente. Estos errores tendrían un efecto acumulativo aún mayor al invertir la matriz, y las corrientes obtenidas no serían las correctas, dado que éstas quedan determinadas por una de las columnas de la matriz inversa. Otra solución cuando el radio de curvatura es muy pequeño sería usar segmentos o dipolos con longitudes menores que  $0.1\lambda$ , siempre y cuando se respete la regla de que el cociente *longitud/diámetro* de cada segmento sea del orden de 5 o mayor (Neri, 1978 bis).

Asimismo, se observa que la cónica que tiene una mayor variación en las impedancias propias de sus elementos es la parábola ( $e = 1$ ), ya que presenta valores muy altos para una  $\rho$  pequeña y converge hacia  $7.95 [\Omega]$  aproximadamente para  $\rho > 4$ . Por el contrario, la curva que posee el comportamiento más estable, para un mayor rango de  $\rho$ , es la circunferencia.



**Figura A.7.** Impedancia propia de un dipolo corto con geometría cónica en función de su radio de curvatura  $\rho$  (ecs. A-10 y A-12) y excentricidad  $e$ . Diámetro del conductor =  $0.01\lambda$  y longitud  $\Delta l = 0.1\lambda$ .

## A.5 Conclusiones

La resistencia propia de un dipolo curvo decae exponencialmente en función de su radio de curvatura, mientras que la reactancia propia (de tipo capacitivo) crece exponencialmente; ambas componentes de la impedancia propia convergen muy rápido para  $\rho \geq 2$  hacia la impedancia propia de un dipolo recto. Por lo tanto, cualquier antena con geometría cónica puede ser modelada por el método de momentos segmentándola con dipolos rectos, siempre y cuando  $\rho \geq 2$ . Esta información puede ser muy útil para alumnos, profesores e investigadores que escriban sus propios programas de computadora para analizar antenas con geometría cónica.

## Apéndice B. Regla compuesta de Simpson

### B.1 Teorema (Nakamura, 1992)

Supongamos que se divide el intervalo  $[a, b]$  en  $2M$  subintervalos  $[x_k, x_{k+1}]$  de la misma anchura  $h = (b-a)/(2M)$  mediante una partición de nodos equiespaciados  $x_k = a + kh$ , para  $k = 0, 1, \dots, 2M$ . La regla compuesta de Simpson con  $2M$  subintervalos se puede expresar de cualquiera de las siguientes formas:

$$S(f, h) = \frac{h}{3} \sum_{k=1}^M [f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})] \quad (\text{B-1})$$

o bien

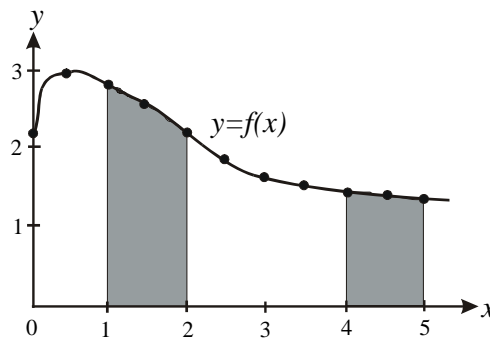
$$S(f, h) = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{2M-2} + 4f_{2M-1} + f_{2M}) \quad (\text{B-2})$$

o bien

$$S(f, h) = \frac{h}{3} [f(a) + f(b)] + \frac{2h}{3} \sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3} \sum_{k=1}^M f(x_{2k-1}) \quad (\text{B-3})$$

Este valor es una aproximación a la integral de  $f(x)$  en  $[a, b]$ , lo que se escribe como:

$$\int_a^b f(x) dx \approx S(f, h) \quad (\text{B-4})$$



**Figura B.1** Aproximación del área limitada por la curva  $y = 2 + \text{sen}(2\sqrt{x})$  mediante la regla compuesta de Simpson

## B.2 Programación

Para obtener el valor de una integral definida por medio de la regla compuesta de Simpson se elaboró en MATLAB el siguiente programa:

```
function integ = rcsimp(fun,a,b,M,varargin)

% Elaborado por Alejandro Monsiváis Huertero
% Facultad de Ingeniería, UNAM.
% Última revisión 21 de octubre de 2001.

% f es el integrando, declarado como cadena de caracteres
% a y b son los extremos de integración inferior y superior del intervalo de integración.
% M es el número máximo de subintervalos
% integ es la aproximación obtenida con el método numérico.

if nargin < 4 | isempty(M), M = 50; end;

f = fcnchk(fun);

h=(b-a)/(2*M);
s1=0;
s2=0;
for kk=1:M
    z=a+h*(2*kk-1);
    s1=s1+feval(f,z,varargin{:});
end
for kk=1:(M-1)
    z=a+h*2*kk;
    s2=s2+feval(f,z,varargin{:});
end

integ=h*(feval(f,a,varargin{:})+feval(f,b,varargin{:})+4*s1+2*s2)/3;
```

## Apéndice C. Cálculo de los campos de radiación en el campo lejano por medio del método de momentos

### A.1 Cálculo del vector de potencial magnético

Los campos radiados por antenas de dimensiones finitas son ondas esféricas. Para este tipo de radiadores, una solución general del vector potencial magnético tiene la forma:

$$\mathbf{A} = A_r(r, \theta, \phi) \mathbf{a}_r + A_\theta(r, \theta, \phi) \mathbf{a}_\theta + A_\phi(r, \theta, \phi) \mathbf{a}_\phi \quad (\text{C-1})$$

o bien, en coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{A} = A_x(x, y, z) \mathbf{a}_x + A_y(x, y, z) \mathbf{a}_y + A_z(x, y, z) \mathbf{a}_z \quad (\text{C-2})$$

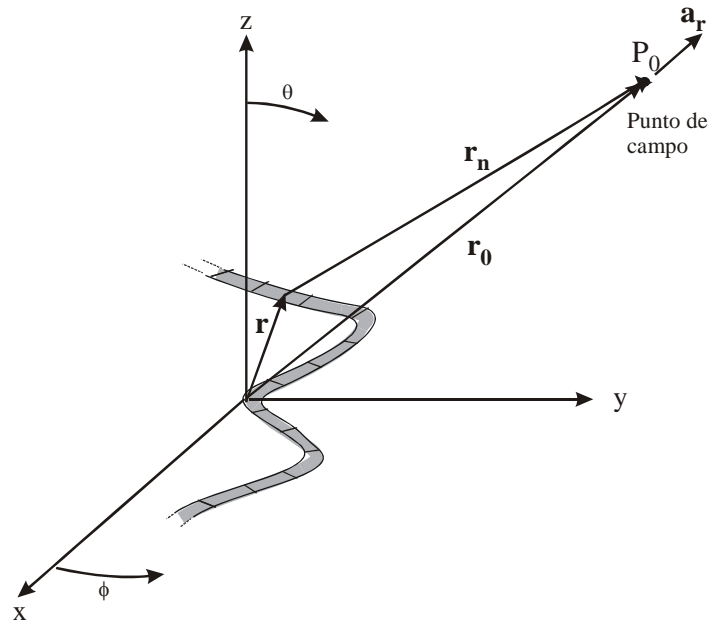
donde las componentes son:

$$A_x(P_0) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_{n_x} \int_{\Delta l_{n_x}} \frac{e^{-jkr_n}}{r_n} dx' \quad (\text{C-3})$$

$$A_y(P_0) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_{n_y} \int_{\Delta l_{n_y}} \frac{e^{-jkr_n}}{r_n} dy' \quad (\text{C-4})$$

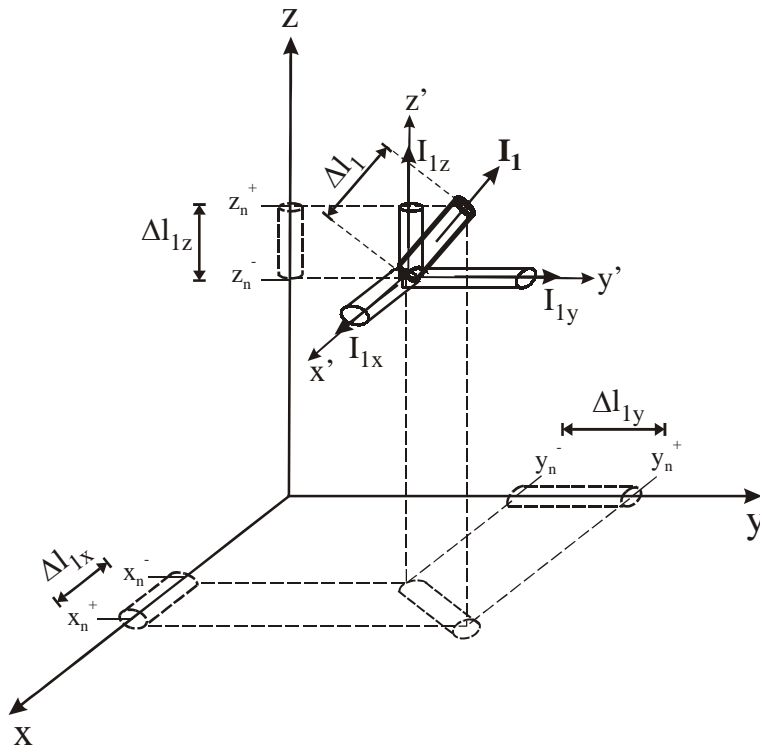
$$A_z(P_0) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{n=1}^N I_{n_z} \int_{\Delta l_{n_z}} \frac{e^{-jkr_n}}{r_n} dz' \quad (\text{C-5})$$

De acuerdo con el método de momentos, la antena está representada como una red de dipolo cortos, por lo que el vector de potencial magnético total es igual a la suma de los vectores de potencial magnético producidos por cada uno de los dipolos cortos.



**Figura C.1.** Geometría para el cálculo del campo de radiación.

Cualquier dipolo de la red de la Fig. C.1 puede ser analizado por medio de sus componentes (Fig. C.2), es decir, analizar la contribución de cada una de sus componentes.



**Figura C.2.** Componentes vectoriales de un dipolo en el espacio.



Las ecuaciones que nos permiten conocer la contribución de un solo dipolo al vector de potencial magnético son:

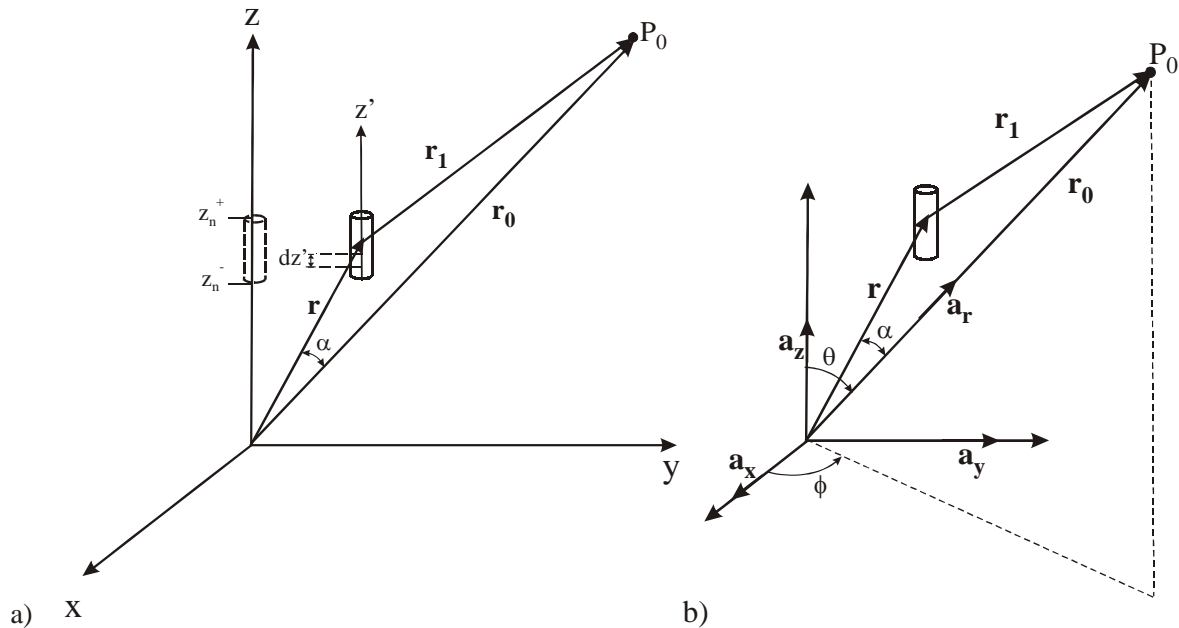
$$A_{1_x}(P_0) = \frac{\mu}{4\pi} I_{1_x} \int_{\Delta l_{1_x}} \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} dx' \quad (C-6)$$

$$A_{1_y}(P_0) = \frac{\mu}{4\pi} I_{1_y} \int_{\Delta l_{1_y}} \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} dy' \quad (C-7)$$

$$A_{1_z}(P_0) = \frac{\mu}{4\pi} I_{1_z} \int_{\Delta l_{1_z}} \frac{e^{-jkr_1}}{r_1} dz' \quad (C-8)$$

donde el subíndice 1 indica que se está analizando un solo dipolo.

Empezaremos primero analizando la componente  $\mathbf{a}_z$  ya que es uno de los casos más comunes.



**Figura C.3.** a) Geometría para el cálculo de la contribución de la componente  $\mathbf{a}_z$ . b) Geometría para el análisis del efecto de la fase de la onda.

De la figura C.3a, se observa que:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \quad (\text{C-9})$$

Dado que estamos realizando el estudio para el campo lejano, podemos suponer que:

$$|\mathbf{r}_1| \approx |\mathbf{r}_0| \quad (\text{C-10})$$

ya que el punto  $P_0$  se encuentra a una distancia igual a varias longitudes de onda del dipolo en estudio.

La figura C.3b nos permite obtener la ecuación (Markov, 1968):

$$r_1 = r_0 - r \cos \alpha \quad (\text{C-11})$$

Para conocer la diferencia de corrido  $r \cos \alpha$ , se observa que es la proyección del vector:

$$\mathbf{r} = x' \mathbf{a}_x + y' \mathbf{a}_y + z' \mathbf{a}_z \quad (\text{C-11a})$$

en la dirección del vector unitario, que parte del origen al punto de campo:

$$\frac{\mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_0|} = \text{sen} \theta \cos \phi \mathbf{a}_x + \text{sen} \theta \text{sen} \phi \mathbf{a}_y + \cos \theta \mathbf{a}_z \quad (\text{C-11b})$$

El producto escalar de los vectores (C-11a) y (C-11b) permite encontrar la expresión para la diferencia de recorrido. Por lo tanto la ecuación (C-11) se puede escribir como:

$$r_1 = r_0 - (x' \text{sen} \theta \cos \phi + y' \text{sen} \theta \text{sen} \phi + z' \cos \theta) \quad (\text{C-11c})$$

Esta ecuación nos indica que, para este caso, la magnitud del vector  $r_0$  es mayor que la del vector  $r_1$ ; es decir, que una onda que siga la trayectoria del vector  $r_1$  llegará antes al punto  $P_0$  que una que recorra la trayectoria del vector  $r_0$ , lo que nos provocará una diferencia de fase entre dichas ondas. Esta diferencia de fase puede ser conocida por medio de la ecuación (C-11c).

Al sustituir la ecuaciones (C-10) y (C-11c) en (C-8), se tiene:

$$A_{1_z}(P_0) = \frac{\mu}{4\pi r_0} I_{1_z} \int_{\Delta l_{1_z}} e^{-jk(r_0 - (x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \cos\phi + z' \cos\theta))} dz' \quad (\text{C-12})$$

Aplicando leyes de los exponentes, la ecuación (C-12) se puede escribir como:

$$A_{1_z}(P_0) = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} I_{1_z} \int_{\Delta l_{1_z}} e^{jk(x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \cos\phi + z' \cos\theta)} dz' \quad (\text{C-13})$$

Se puede observar que el integrando de la ecuación (C-13) es una exponencial compleja, también llamada forma de Euler de un número complejo (Anton, 1998). La expresión que permite escribir la exponencial de Euler a la forma trigonométrica de los números complejos es:

$$e^{ja} = \cos(a) + j\text{sen}(a) \quad (\text{C-14})$$

Esto nos permite escribir a la integral de la ecuación (C-13) como:

$$\int_{z_n^-}^{z_n^+} e^{jk(x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \cos\phi + z' \cos\theta)} dz' = \int_{z_n^-}^{z_n^+} \cos(k(x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \cos\phi + z' \cos\theta)) dz' + j \int_{z_n^-}^{z_n^+} \text{sen}(k(x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \cos\phi + z' \cos\theta)) dz' \quad (\text{C-15})$$

Las dos integrales resultantes son integrales de dos funciones armónicas, es decir, poseen un periodo en el cual las señales repiten sus valores. Asimismo, se observa que ambas señales tienen el mismo periodo. Si analizamos el argumento de cualquiera de las dos funciones, se tiene que el periodo de la función es:

$$T = \frac{2\pi}{k \cos\theta} = \frac{\lambda}{\cos\theta} \quad (\text{C-16a})$$

y una fase inicial:

$$\gamma_0 = kx' \text{sen}\theta \cos\phi + ky' \text{sen}\theta \cos\phi \quad (\text{C-16b})$$

Se advierte fácilmente que el periodo de la señal es muy grande en comparación con el intervalo de integración, lo que nos permite considerar a la función como constante. Al aplicar el Teorema de Valor Medio del Cálculo Integral (Granville, 1995) a la ecuación (C-15), el resultado de la integral es:

$$\begin{aligned} \int_{z_n^-}^{z_n^+} e^{jk(x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \cos\phi + z' \cos\theta)} dz' &= \cos(k(x_1 \text{sen}\theta \cos\phi + y_1 \text{sen}\theta \cos\phi + z_1 \cos\theta))(z_1^+ - z_1^-) \\ &\quad + j \text{sen}(k(x_1 \text{sen}\theta \cos\phi + y_1 \text{sen}\theta \cos\phi + z_1 \cos\theta))(z_1^+ - z_1^-) \\ \Rightarrow \int_{z_n^-}^{z_n^+} e^{jk(x' \text{sen}\theta \cos\phi + y' \text{sen}\theta \cos\phi + z' \cos\theta)} dz' &= (z_1^+ - z_1^-) e^{jk(x_1 \text{sen}\theta \cos\phi + y_1 \text{sen}\theta \cos\phi + z_1 \cos\theta)} \end{aligned} \quad (\text{C-17})$$

Sustituyendo el resultado de la ecuación(C-17) en (C-13), se obtiene la contribución del dipolo en la dirección  $\mathbf{a}_z$ , que es:

$$A_{1_z}(P_0) = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} I_{1_z} e^{jk(x_1 \text{sen}\theta \cos\phi + y_1 \text{sen}\theta \cos\phi + z_1 \cos\theta)} (z_1^+ - z_1^-) \quad (\text{C-18})$$

La figura C.4 muestra la geometría y el análisis de fase para el estudio de la contribución del dipolo en la dirección  $\mathbf{a}_y$ .

De acuerdo con la figura C.4a, el vector  $\mathbf{r}_1$ , en este caso, está dado por:

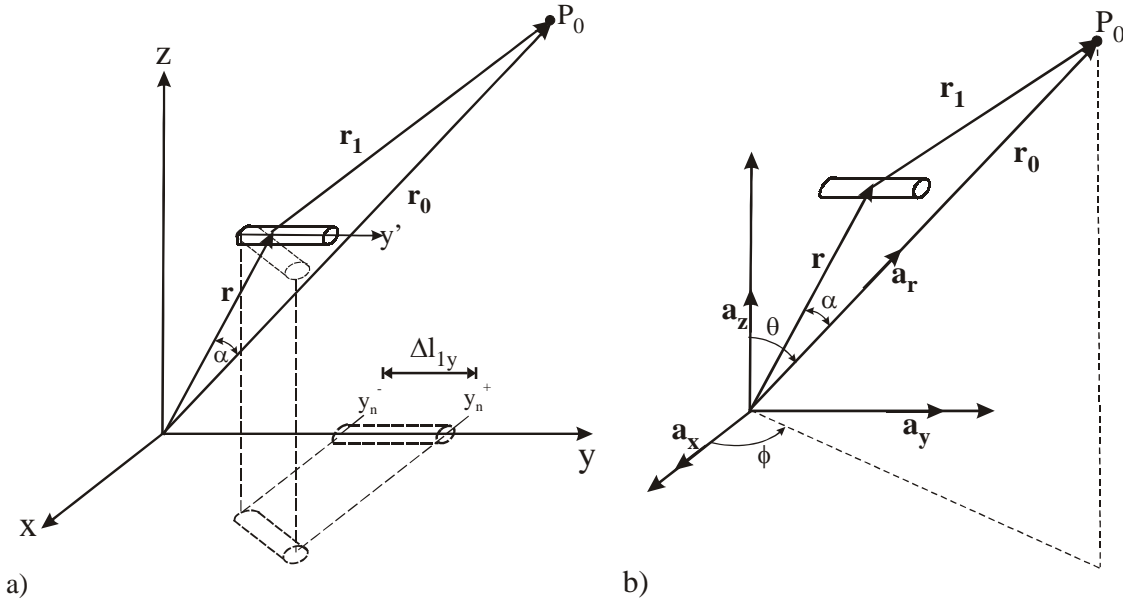
$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \quad (\text{C-19})$$

Nuevamente podemos considerar que la amplitudes de los vectores  $\mathbf{r}_1$  y  $\mathbf{r}_0$  son iguales. Tomando en cuenta la figura C.4b, la relación de fase está dada por:

$$\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{a}_r = \mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{a}_r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{a}_r \quad (\text{C-20})$$

o bien,

$$r_1 = r_0 - (x' \operatorname{sen} \theta \cos \phi + y' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + z' \cos \theta) \quad (\text{C-21})$$



**Figura C.4.** a) Geometría para el cálculo de la contribución de la componente  $\mathbf{a}_y$ . b) Geometría para el análisis del efecto de la fase de la onda.

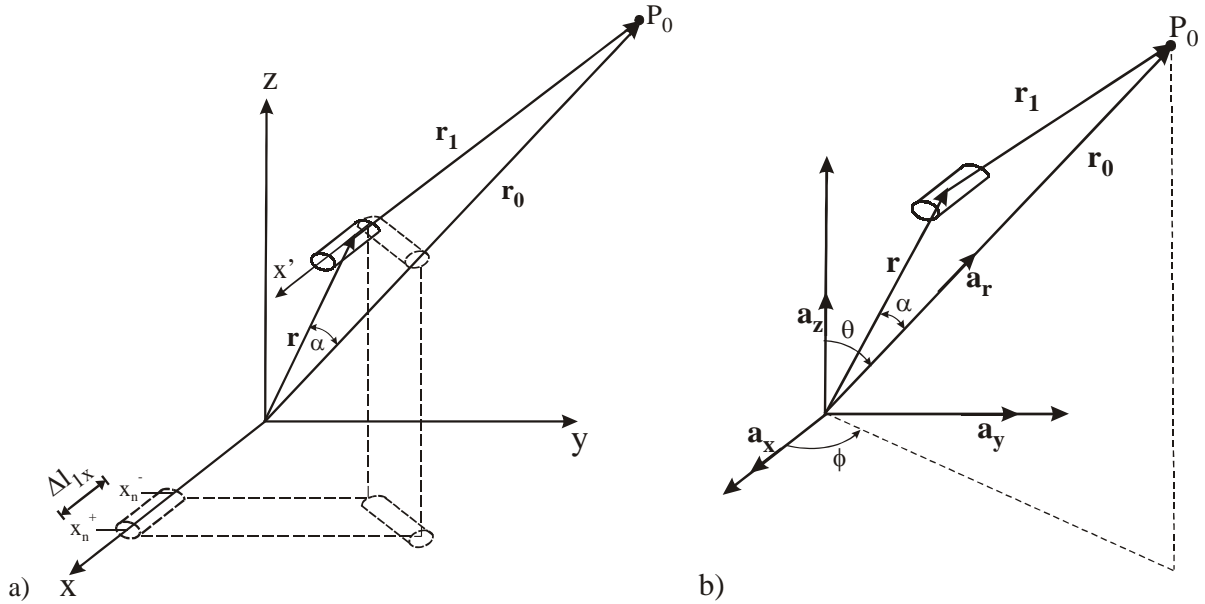
Al sustituir la ecuación (C-21) en (C-7), se tiene:

$$A_{1_y}(P_0) = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} I_{1_y} \int_{\Delta l_{1_y}} e^{jk(x' \operatorname{sen} \theta \cos \phi + y' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + z' \cos \theta)} dy' \quad (\text{C-22})$$

Realizando el procedimiento descrito anteriormente, la contribución del dipolo en la dirección  $\mathbf{a}_y$  es:

$$A_{1_y}(P_0) = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} I_{1_y} e^{jk(x_1 \operatorname{sen} \theta \cos \phi + y_1 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi + z_1 \cos \theta)} (y_1^+ - y_1^-) \quad (\text{C-23})$$

La figura C.5 muestra la geometría para el cálculo de la amplitud y fase en la dirección  $\mathbf{a}_x$ .



**Figura C.5.** a) Geometría para el cálculo de la contribución de la componente  $\mathbf{a}_x$ . b) Geometría para el análisis del efecto de la fase de la onda.

El vector  $\mathbf{r}_1$  mostrado en la figura C.5a está dado por:

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 - \mathbf{r} \quad (\text{C-24})$$

A nivel de fase (Fig. C.5b), se tiene la relación:

$$r_1 = r_0 - (x' \text{sen} \theta \cos \phi + y' \text{sen} \theta \text{sen} \phi + z' \cos \theta) \quad (\text{C-25})$$

Sustituyendo la ecuación (C-25) en (C-6), se obtiene:

$$A_{1_x}(P_0) = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} I_{1_x} \int_{\Delta l_x} e^{jk(x' \text{sen} \theta \cos \phi + y' \text{sen} \theta \text{sen} \phi + z' \cos \theta)} dx' \quad (\text{C-26})$$

Finalmente, la contribución del dipolo en la dirección  $\mathbf{a}_x$  es:

$$A_{I_x}(P_0) = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} I_{I_x} e^{jk(x_1 \text{sen}\theta \cos\phi + y_1 \text{sen}\theta \cos\phi + z_1 \cos\theta)} (x_1^+ - x_1^-) \quad (\text{C-27})$$

El vector de potencial magnético producido por un dipolo en el punto  $P_0$  expresado vectorialmente es:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \left[ I_{I_x} (x_1^+ - x_1^-) \mathbf{a}_x + I_{I_y} (y_1^+ - y_1^-) \mathbf{a}_y + I_{I_z} (z_1^+ - z_1^-) \mathbf{a}_z \right] \times e^{jk(x_1 \text{sen}\theta \cos\phi + y_1 \text{sen}\theta \cos\phi + z_1 \cos\theta)} \quad (\text{C-28})$$

La expresión anterior escrita en coordenadas esféricas tiene las siguientes componentes:

$$A_{r_1} = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \left[ \text{sen}\theta \cos\phi I_{I_x} (x_1^+ - x_1^-) + \text{sen}\theta \text{sen}\phi I_{I_y} (y_1^+ - y_1^-) + \cos\theta I_{I_z} (z_1^+ - z_1^-) \right] \times e^{jk(x_1 \text{sen}\theta \cos\phi + y_1 \text{sen}\theta \cos\phi + z_1 \cos\theta)} \quad (\text{C-29})$$

$$A_{\theta_1} = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \left[ \cos\theta \cos\phi I_{I_x} (x_1^+ - x_1^-) + \cos\theta \text{sen}\phi I_{I_y} (y_1^+ - y_1^-) - \text{sen}\theta I_{I_z} (z_1^+ - z_1^-) \right] \times e^{jk(x_1 \text{sen}\theta \cos\phi + y_1 \text{sen}\theta \cos\phi + z_1 \cos\theta)} \quad (\text{C-30})$$

$$A_{\phi_1} = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \left[ -\text{sen}\phi I_{I_x} (x_1^+ - x_1^-) + \cos\phi I_{I_y} (y_1^+ - y_1^-) \right] \times e^{jk(x_1 \text{sen}\theta \cos\phi + y_1 \text{sen}\theta \cos\phi + z_1 \cos\theta)} \quad (\text{C-31})$$

El vector de potencial magnético total debido al conjunto de dipolos corto está dado por:

$$\mathbf{A} = \sum_{n=1}^N \mathbf{A}_n = \sum_{n=1}^N \left( A_{r_n} \mathbf{a}_r + A_{\theta_n} \mathbf{a}_\theta + A_{\phi_n} \mathbf{a}_\phi \right) = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi \quad (\text{C-32})$$

donde:

$$A_r = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ \text{sen}\theta \cos\phi I_{n_x} (x_n^+ - x_n^-) + \text{sen}\theta \text{sen}\phi I_{n_y} (y_n^+ - y_n^-) + \cos\theta I_{n_z} (z_n^+ - z_n^-) \right] \times e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \cos\phi + z_n \cos\theta)} \quad (\text{C-33})$$

$$A_{\theta} = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ \cos \theta \cos \phi I_{n_x} (x_n^+ - x_n^-) + \cos \theta \text{sen} \phi I_{n_y} (y_n^+ - y_n^-) - \text{sen} \theta I_{n_z} (z_n^+ - z_n^-) \right] \times e^{jk(x_n \text{sen} \theta \cos \phi + y_n \text{sen} \theta \text{sen} \phi + z_n \cos \theta)} \quad (\text{C-34})$$

$$A_{\phi} = \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ -\text{sen} \phi I_{n_x} (x_n^+ - x_n^-) + \cos \phi I_{n_y} (y_n^+ - y_n^-) \right] \times e^{jk(x_n \text{sen} \theta \cos \phi + y_n \text{sen} \theta \text{sen} \phi + z_n \cos \theta)} \quad (\text{C-35})$$

## C.2 Cálculo de los campos electromagnéticos en el campo lejano

Para el cálculo de los campos tomaremos como base las ecuaciones (2-23) y (2-24), las dos primeras ecuaciones de Maxwell (ecuaciones (C-36) y (C-37)) y las relaciones entre los campos y flujos radiados (ecuaciones (C-38) y (C-39)).

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (\text{C-36})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} \quad (\text{C-37})$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (\text{C-38})$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \quad (\text{C-39})$$

Empleando la ecuación (C-38), podemos escribir a (2-23) como:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{C-40})$$

Esta ecuación es la definición del rotacional del vector de potencial magnético (Cheng, 1999). Al sustituir la ecuación (C-40) en (C-36), se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{C-41})$$

Una forma equivalente de escribir la ecuación (C-41) es:

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (\text{C-42})$$



Aplicando la propiedad distributiva del producto cruz a la ecuación (C-42):

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = 0 \quad (\text{C-43})$$

La ecuación (C-43) indica que la expresión  $\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}$  es un gradiente de una función escalar ya que su rotacional es cero (O'Neil, 1999). Desde el punto de vista del electromagnetismo, el rotacional nulo indica que sólo existe electrostática, por lo que la expresión  $\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}$  puede ser definida como:

$$-\nabla\phi = \mathbf{E} + j\omega\mathbf{A} \quad (\text{C-44})$$

donde el signo menos del gradiente es sólo por convención del potencial eléctrico (Cheng, 1999).

Despejando el campo eléctrico, la ecuación (C-44) se escribe como:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi \quad (\text{C-45})$$

Por otro lado, al sustituir las ecuaciones (C-38) y (C-39) en (C-37), se tiene:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{B} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (\text{C-46})$$

Sustituyendo (C-40) en la expresión anterior:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = j\omega\epsilon\mu\mathbf{E} + \mu\mathbf{J} \quad (\text{C-47})$$

Si ahora, también se sustituye la ecuación (C-45), se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = j\omega\epsilon\mu(-j\omega\mathbf{A} - \nabla\phi) + \mu\mathbf{J} \quad (\text{C-48})$$

Al desarrollar los productos indicados y empleando la definición de la constante de propagación, que es  $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ , se tiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = k^2\mathbf{A} - j\omega\mu\epsilon\nabla\phi + \mu\mathbf{J} \quad (\text{C-49})$$

De las identidades de los operadores diferenciales en el cálculo vectorial (Spiegel, 2000) se sabe que:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{C-50})$$

Por lo tanto, la ecuación (C-49) se puede escribir como:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = k^2 \mathbf{A} - j\omega\mu\epsilon\nabla\phi + \mu\mathbf{J} \quad (\text{C-51})$$

Reordenando términos:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + j\omega\mu\epsilon\nabla\phi - \mu\mathbf{J} \quad (\text{C-52})$$

Aplicando la propiedad distributiva del operador gradiente, la ecuación (C-52) se puede escribir como:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\epsilon\phi) - \mu\mathbf{J} \quad (\text{C-53})$$

La definición de un vector requiere la especificación de su rotacional y su divergencia. La ecuación (C-40) define el rotacional del vector  $\mathbf{A}$ , teniéndose la libertad de definir la divergencia. Su divergencia se define como (Cheng, 1999):

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\mu\epsilon\phi = 0 \quad (\text{C-54})$$

La expresión (C-54) se conoce como la condición de Lorentz para potenciales.

Al aplicar esta definición en la ecuación (C-53), se obtiene:

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \quad (\text{C-55})$$

Esta última expresión se conoce como ecuación de onda no homogénea para el vector de potencial magnético.

Al despejar el potencial eléctrico  $\phi$  de la ecuación (C-54), se tiene:

$$\phi = \frac{-\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\mu\epsilon} \quad (\text{C-56})$$

Sustituyendo (C-56) en (C-45), se obtiene:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \nabla \left[ \frac{-\nabla \cdot \mathbf{A}}{j\omega\mu\epsilon} \right] \quad (\text{C-57})$$

Finalmente, la expresiones que nos permiten conocer los campos radiados son:

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} + \frac{\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})}{j\omega\mu\epsilon} \quad (\text{C-58})$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{C-59})$$

De las ecuaciones (C-33), (C-34) y (C-35) se observa que las variaciones en la dirección  $\mathbf{a}_r$  son separables de las variaciones en  $\mathbf{a}_\theta$  y  $\mathbf{a}_\phi$ , por lo que el vector de  $\mathbf{A}$  para el cálculo de la radiación en el campo lejano puede ser escrito como (Balanis, 1997):

$$\mathbf{A} \approx \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \left[ A'_r(\theta, \phi) \mathbf{a}_r + A'_\theta(\theta, \phi) \mathbf{a}_\theta + A'_\phi(\theta, \phi) \mathbf{a}_\phi \right] \quad (\text{C-60})$$

Sustituyendo (C-60) en (C-58):

$$\mathbf{E} = \frac{\mu}{4\pi r_0} \left\{ j\omega e^{-jkr_0} \left[ (0) \mathbf{a}_r + A'_\theta(\theta, \phi) \mathbf{a}_\theta + A'_\phi(\theta, \phi) \mathbf{a}_\phi \right] \right\} + \frac{\mu}{4\pi r_0^2} \{ \dots \} + \dots \quad (\text{C-61})$$

La componente radial del campo eléctrico es cero ya que las contribuciones del primer y segundo término de la ecuación (C-58) se cancelan mutuamente. Similarmente, empleando (C-60) en (C-59) se tiene:

$$\mathbf{H} = \frac{\mu}{4\pi r_0} \left\{ -j \frac{\omega}{\eta} e^{-jkr_0} \left[ (0) \mathbf{a}_r + A'_\theta(\theta, \phi) \mathbf{a}_\theta - A'_\phi(\theta, \phi) \mathbf{a}_\phi \right] \right\} + \frac{\mu}{4\pi r_0^2} \{ \dots \} + \dots \quad (\text{C-62})$$

donde  $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  es la impedancia intrínseca del medio.

Despreciando los términos de alto orden de  $\frac{1}{r^n}$ , los campos radiados  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  sólo tiene componentes  $\theta$  y  $\phi$ .

Por lo tanto, una aproximación para obtener los campos radiados en el campo lejano está dada por (Balanis, 1997):

$$\begin{cases} E_r \approx 0 \\ E_\theta \approx -j\omega A_\theta \\ E_\phi \approx -j\omega A_\phi \end{cases} \quad (\text{C-63})$$

$$\begin{cases} H_r \approx 0 \\ H_\theta \approx +j \frac{\omega}{\eta} A_\theta = -\frac{E_\phi}{\eta} \\ H_\phi \approx -j \frac{\omega}{\eta} A_\phi = +\frac{E_\theta}{\eta} \end{cases} \quad (\text{C-64})$$

Al sustituir (C-34) y (C-35) en (C-63) y (C-64), se tiene:

$$E_\theta = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ \cos \theta \cos \phi I_{n_x} (x_n^+ - x_n^-) + \cos \theta \sin \phi I_{n_y} (y_n^+ - y_n^-) - \sin \theta I_{n_z} (z_n^+ - z_n^-) \right] \times e^{jk(x_n \sin \theta \cos \phi + y_n \sin \theta \sin \phi + z_n \cos \theta)} \quad (\text{C-65})$$

$$E_{\phi} = -j\omega \frac{\mu e^{-jkr_0}}{4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ -\text{sen}\phi I_{n_x} (x_n^+ - x_n^-) + \cos\phi I_{n_y} (y_n^+ - y_n^-) \right] \times e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z_n \cos\theta)} \quad (\text{C-66})$$

$$H_{\theta} = j \frac{\omega \mu e^{-jkr_0}}{\eta 4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ -\text{sen}\phi I_{n_x} (x_n^+ - x_n^-) + \cos\phi I_{n_y} (y_n^+ - y_n^-) \right] \times e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z_n \cos\theta)} \quad (\text{C-67})$$

$$H_{\phi} = -j \frac{\omega \mu e^{-jkr_0}}{\eta 4\pi r_0} \sum_{n=1}^N \left[ \cos\theta \cos\phi I_{n_x} (x_n^+ - x_n^-) + \cos\theta \text{sen}\phi I_{n_y} (y_n^+ - y_n^-) - \text{sen}\theta I_{n_z} (z_n^+ - z_n^-) \right] \times e^{jk(x_n \text{sen}\theta \cos\phi + y_n \text{sen}\theta \text{sen}\phi + z_n \cos\theta)} \quad (\text{C-68})$$

donde:

$r_0$  es la distancia del origen del sistemas de coordenadas esféricas al punto de campo.

$(x_n, y_n, z_n)$  son las coordenadas cartesianas del punto central del segmento  $n$

$(x_n^+, y_n^+, z_n^+)$  son las coordenadas cartesianas del punto superior del segmento  $n$

$(x_n^-, y_n^-, z_n^-)$  son las coordenadas cartesianas del punto inferior del segmento  $n$

$I_{n_x}$  es la componente en x de la corriente que se presenta en el segmento  $n$ .

$I_{n_y}$  es la componente en y de la corriente que se presenta en el segmento  $n$ .

$I_{n_z}$  es la componente en z de la corriente que se presenta en el segmento  $n$ .

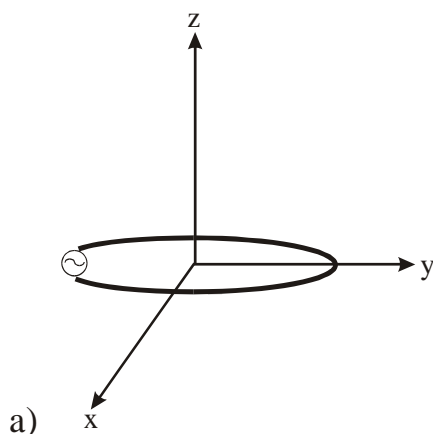
## Apéndice D. Análisis de una antena circular.

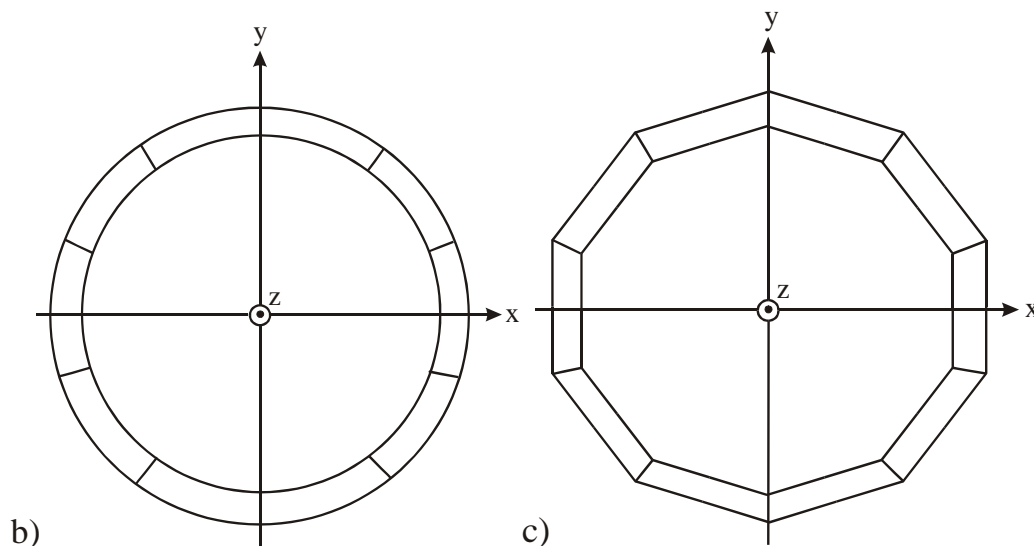
### D.1 Introducción

En el Apéndice A se presentó un estudio comparativo entre la impedancia mutua de un dipolo curvo y un dipolo recto. Obviamente, al ser simulado por medio del Método de Momentos, el estudio presentado en ese apéndice está restringido al número de segmentos en que se dividió el dipolo corto; por lo tanto, es necesario aclarar que en dicho estudio el dipolo fue fragmentado en 10 secciones. En este apéndice se presenta un análisis comparativo entre los resultados entregados por el MM cuando una antena circular es dividida en 10 segmentos de  $0.1\lambda$  de longitud cada uno; asimismo, se presenta una gráfica para conocer la estabilidad del MM para el cálculo de la impedancia de entrada entre un aro y un dipolo de igual longitud y grosor.

### D.2 Desarrollo

Para poder realizar el estudio comparativo entre una antena circular y una antena decagonal se tomarán los estudios realizados por Le-Wei Li (Le-Wei Li, 1997; Le-Wei Li, 1999) e Iizuka (Iizuka, 1966). Estos estudios se emplean como punto de comparación teórico; en ellos se presentan las ecuaciones para el cálculo de la distribución de corriente para aros de diferentes longitudes. La figura D.1 muestra las geometrías empleadas en cada caso.





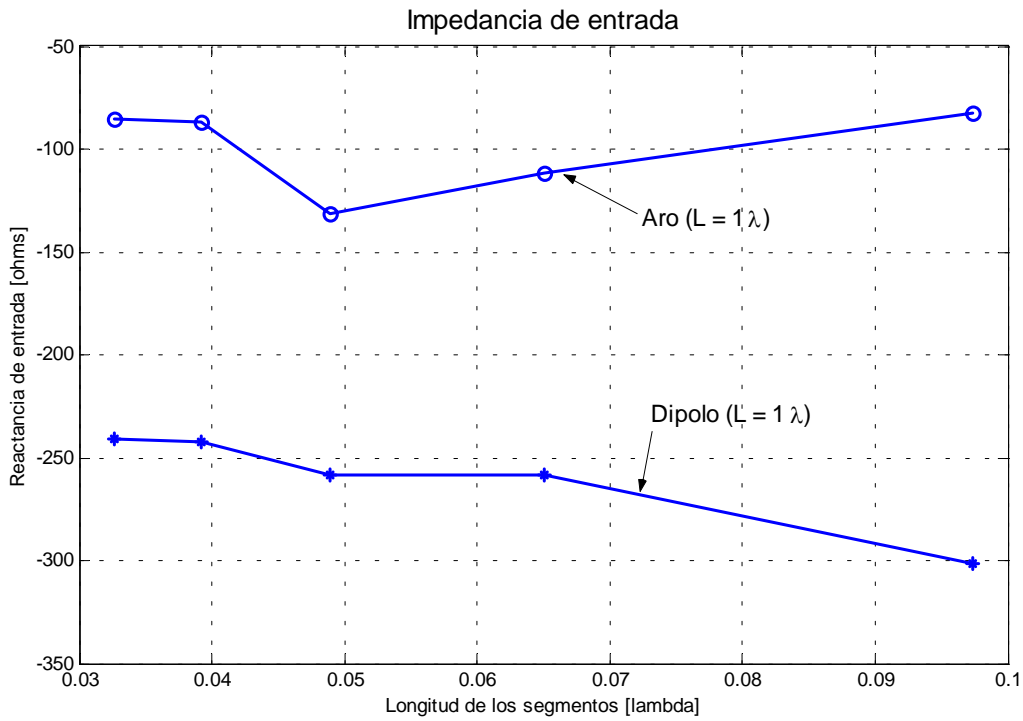
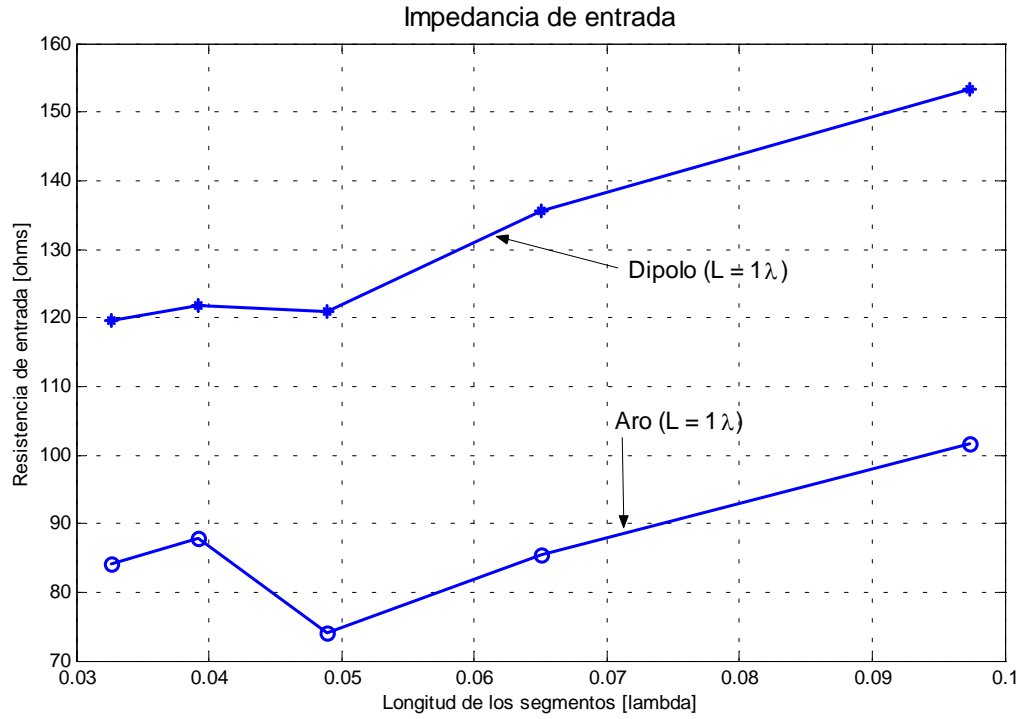
**Figura D.1.** a) Antena circular b) Modelado por medio de dipolos cortos curvos. c) Modelado por medio de dipolos cortos rectos (Antena decagonal).

Las simulaciones por medio del Método de Momentos fueron programadas por medio del programa MATLAB empleando el análisis presentado en la sección 2.4.1.4 y por medio del programa NEC.

## D.2 Impedancia de entrada

Como primer punto se simuló un aro circular de circunferencia igual a  $1\lambda$  y un grosor de  $0.03\lambda$  y se comparó con un dipolo de igual longitud y grosor, mostrándose en la figura D.2 los resultados obtenidos.

Se observa, en ambas geometrías y en su parte resistiva, que se requieren dipolos de longitudes aproximadas a  $0.05\lambda$  para tener una resistencia de entrada estable, es decir, que las variaciones en el valor ya no sean tan grandes. La variación máxima del dipolo recto es menor a  $20 \Omega$ , mientras que en el aro es aproximadamente  $30 \Omega$ . Con lo referente a la reactancia de entrada, se percibe que la variación en la geometría curva es mayor; asimismo también requiere segmentos de longitudes menores que en el caso recto. Las variaciones máximas en las geometrías recta y curva son de  $20 \Omega$  en ambos casos, pero los cambios son más bruscos en el aro. Con longitudes mayores a  $0.06\lambda$  en el dipolo recto ya es posible predecir una reactancia de entrada, ya que su valor es casi constante, pero en el caso del aro es necesario una longitud de  $0.05\lambda$  como mínimo para conocer el valor hacia el cual tiende la reactancia. La impedancia de entrada obtenida en la simulación para el aro es de  $84.0661 - 85.6732j [\Omega]$ , y el valor teórico reportado es de  $88.52 - 94.7j [\Omega]$  (Iizuka, 1966; Storer, 1956).



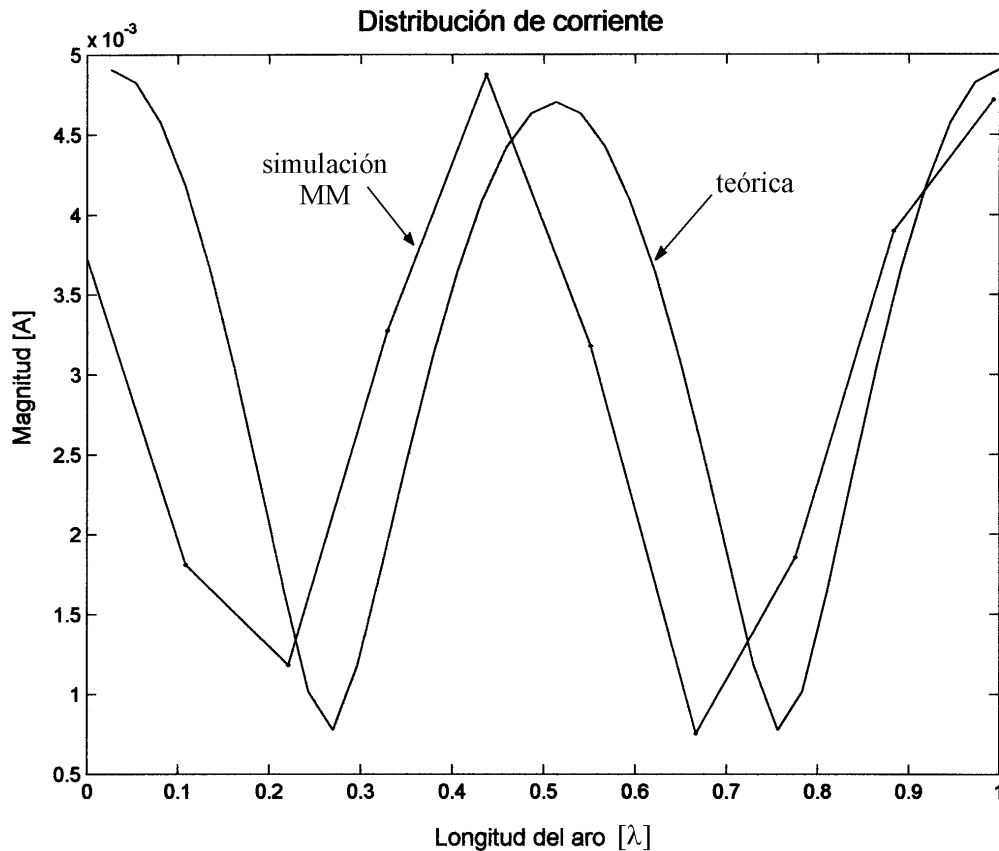
**Figura D.2.** Impedancia de entrada de un aro de longitud  $1\lambda$  y un dipolo recto de igual longitud.

Nota: Collin reporta en su libro (Collin, 1985) el valor de  $120-254.7j \Omega$  para la impedancia de entrada de un dipolo de longitud igual a  $1\lambda$ .



### D.3 Distribución de corriente

En la figura D.3 se muestra la comparación entre la distribución teórica del aro y la obtenida por medio del MM para un aro dividido en 10 segmentos; se puede observar que existe una gran similitud. De acuerdo con lo estudios realizados para un aro de longitud igual a  $1\lambda$ , su distribución de corriente puede ser vista como una serie de Fourier (Le-Wei Li, 1997) y dicha distribución se asemeja a una función coseno. Para la obtención de la siguiente figura, en la simulación por el MM se alimentó en el centro del aro, mientras que Le-Wei Li (valor teórico) alimentó al aro en su inicio, pero aún con esta diferencia las distribuciones de corriente son muy similares.



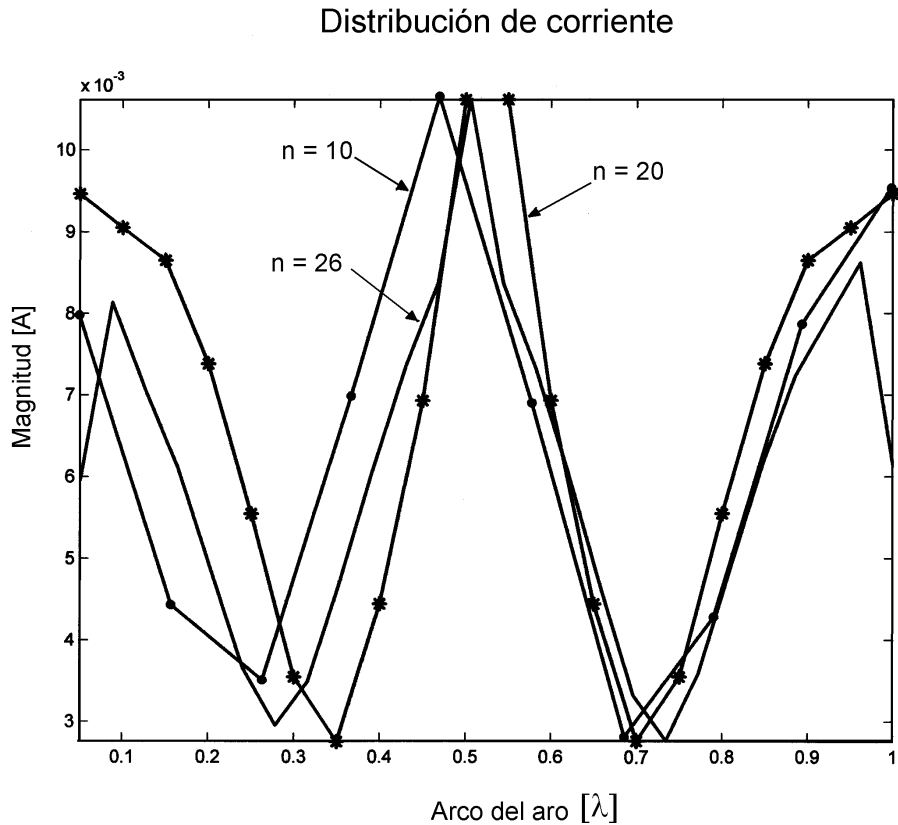
**Figura D.3.** Comparación entre la distribución de corriente teórica y la obtenida por medio del MM mediante las ecuaciones descritas en la sección 2.4.1.4.

En la figura D.4 se muestran tres distribuciones de corriente para diferentes números de segmentos. Se observa que entre mayor sea el número de segmentos la distribución de corrientes se asemeja más a una función coseno. Cabe aclarar que de acuerdo a la teoría de las antenas circulares o aros, la mejor

aproximación se logra cuando en el Método de Momentos se considera que la distribución de corriente es una suma de funciones armónicas (Le-Wei Li, 1999); en esta tesis el MM se consideró como un arreglo de dipolos cortos cuyas corrientes son constantes a lo largo de dichos dipolos. Esta diferencia se acentúa en los extremos del aro, es decir, en donde se considera el inicio y fin del aro. La corriente teórica, considerando 9 términos de la serie de Fourier es:

$$\begin{aligned}
 I(\phi) = & (4.836 \times 10^{-6} - 8.061 \times 10^5 j) + 2 \times \{ (2.352 \times 10^{-3} + 3.821 \times 10^{-4} j) \cos(\phi) + \\
 & (4.012 \times 10^{-7} + 3.464 \times 10^{-4} j) \cos(2\phi) + (9.566 \times 10^{-10} + 1.509 \times 10^{-4} j) \cos(3\phi) + \\
 & (1.428 \times 10^{-10} + 1.506 \times 10^{-4} j) \cos(4\phi) + (5.169 \times 10^{-13} + 1.019 \times 10^{-4} j) \cos(5\phi) + \\
 & (1.483 \times 10^{-15} + 7.604 \times 10^{-5} j) \cos(6\phi) + (3.377 \times 10^{-18} + 6.021 \times 10^{-5} j) \cos(7\phi) + \\
 & (6.182 \times 10^{-21} + 4.963 \times 10^{-5} j) \cos(8\phi) + (9.258 \times 10^{-24} + 4.213 \times 10^{-5} j) \cos(9\phi) \}
 \end{aligned}
 \tag{D-1}$$

Donde  $\phi$  es el ángulo que barre el arco del aro.



**Figura D.4.** Distribución de corriente para diferentes segmentaciones del aro. La variable  $n$  representa el número de segmentos en los cuales fue dividido el aro.

### D.4 Patrones de radiación

De acuerdo a la teoría de antenas (Balanis, 1997) si se considera el campo lejano de un aro, éste tiene una distribución de corriente cosenoidal y el patrón de radiación en el plano de azimut es muy parecido al patrón de radiación de un dipolo de  $\lambda/2$  en su plano de elevación.

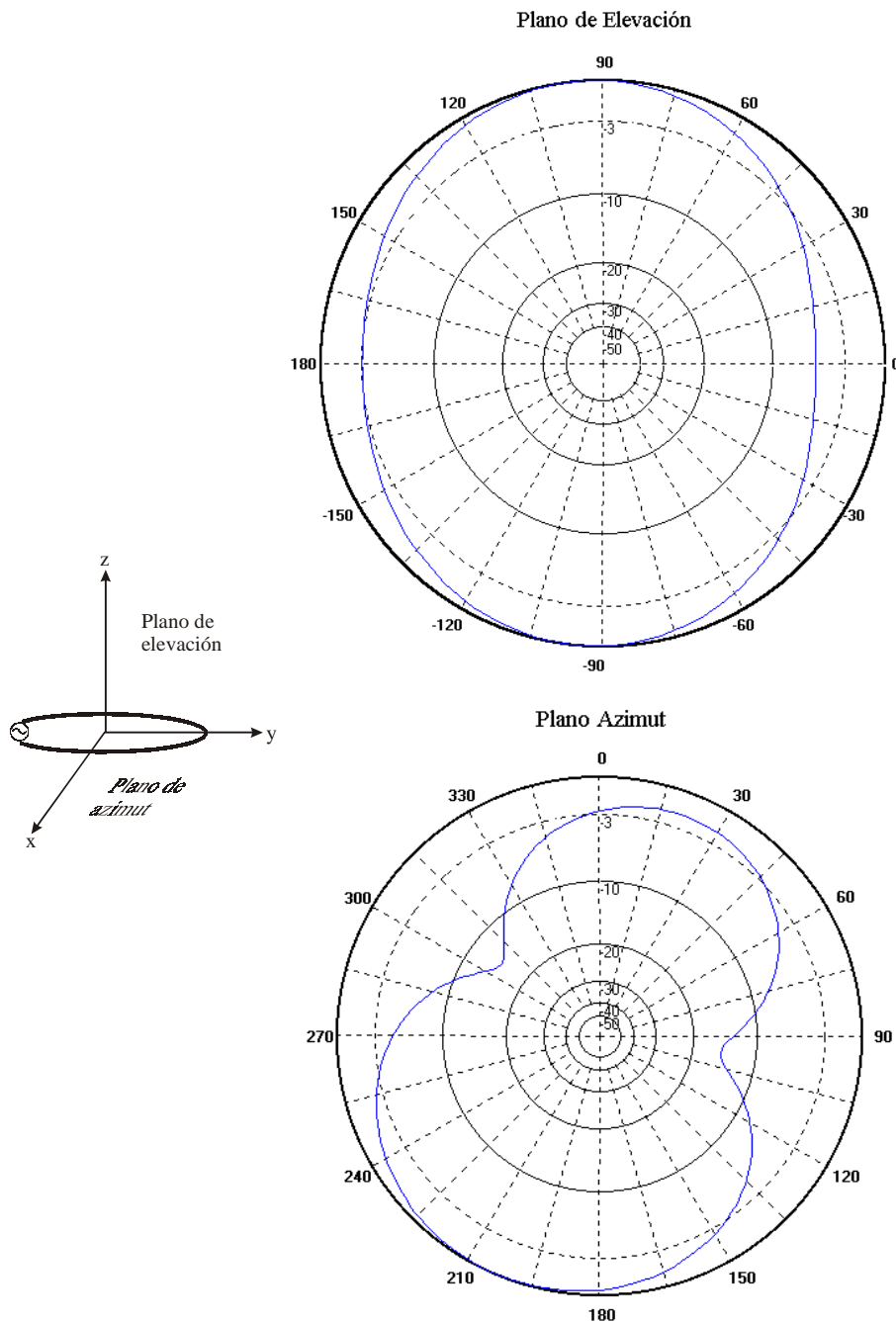
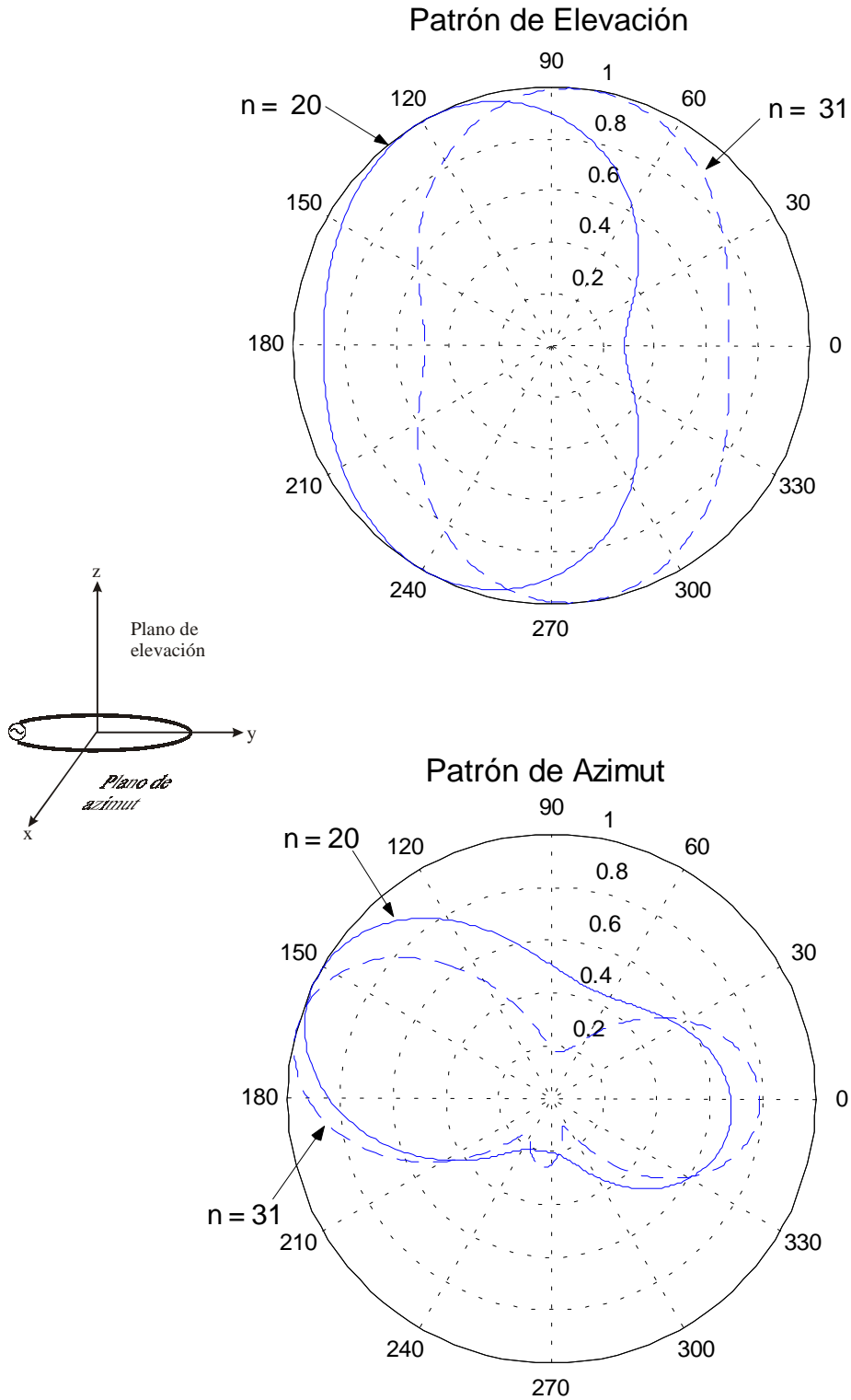


Figura D.5 Patrones de radiación obtenidos por medio del programa NEC para una antena circular con  $n = 10$ .



**Figura D.6** Patrones de radiación obtenidos por medio de las ecuaciones (2-132) y (2-133).

La figura D.6 muestra los patrones de radiación para dos aros segmentados de diferentes formas ( $n = 31$  y  $n = 20$ ); dichos patrones fueron obtenidos aplicando las ecuaciones (2-132) y (2-133). Como se puede observar para obtener un patrón de radiación similar al teórico fue necesario segmentar el aro con dipolos menores a  $0.05\lambda$ . Al comparar las figuras D.5 y D.6, se observa que la figura D.5 presenta un ligero giro en el plano azimut además de no conservar una simetría en ambos lóbulos; la figura D.6 tiende hacia una simetría pero se requirió un gran número de segmentos, lo cual implica tiempo de ejecución.

## D.5 Conclusiones

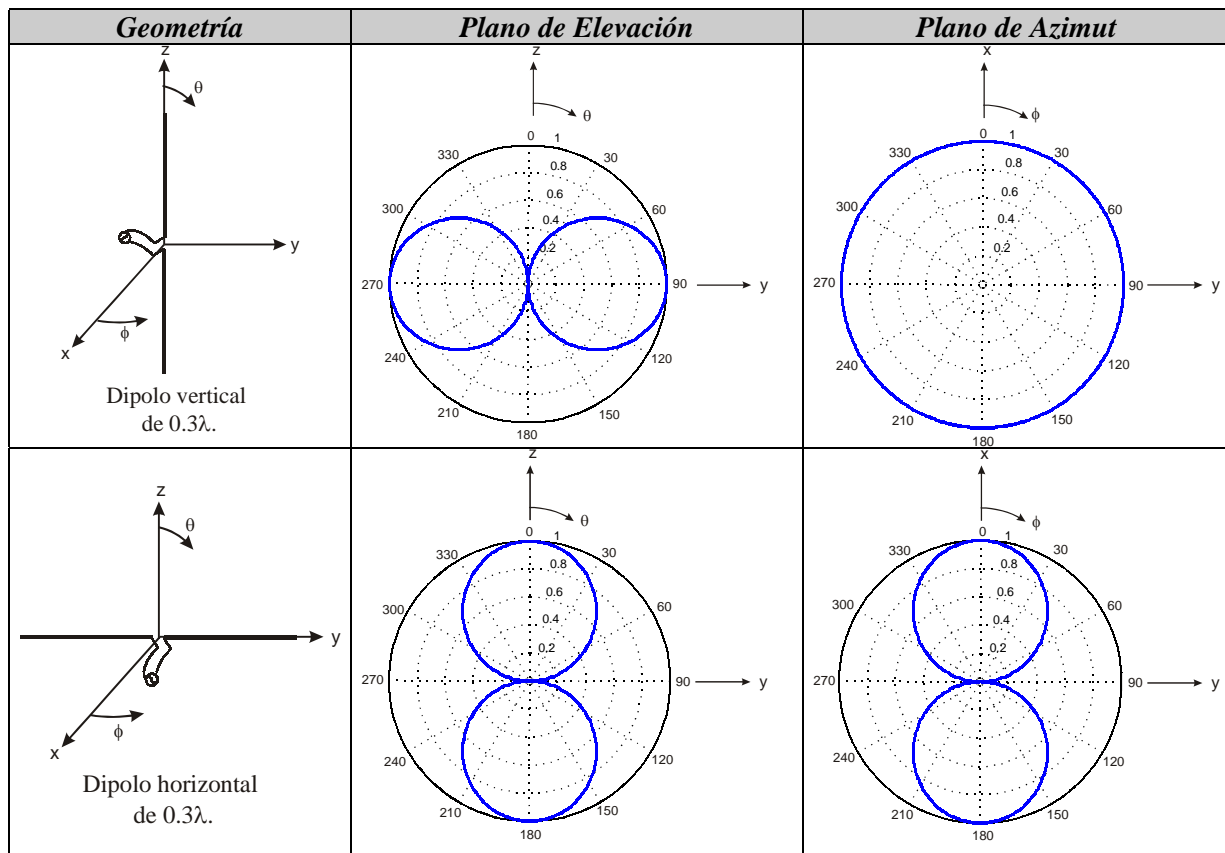
En este apéndice se realizó un estudio de una antena circular por medio del método de momentos con el algoritmo mostrado en la sección 2.2.1. Se puede observar que para geometrías curvas es necesario considerar segmentos más cortos que  $0.1\lambda$  para obtener un error pequeño en la impedancia de entrada, por lo que la longitud de los dipolos de la red debe ser aproximadamente  $0.05\lambda$  o menor. Con lo referente a la distribución de corriente, se observa que la longitud del dipolo ya no es tan crítica como en el caso de la impedancia de entrada, por lo que se obtiene una buena aproximación a la distribución teórica (ecuación D-1) con una segmentación de dipolos de  $0.1\lambda$  pero se recomiendan menores longitudes para el cálculo de los campos radiados. En las gráficas que muestran los patrones de radiación se observa que dichos patrones son sensibles al número de dipolos en los que se divide el aro, ya que para un antena circular dividida en 10 segmentos (antena decagonal) el patrón en el plano azimut sufre un giro dependiendo del punto de alimentación y no tiene una simetría que se esperaría debido a la distribución cosenoidal de la corriente. Al aumentar el número de segmentos (Fig. D.6) se obtiene una tendencia hacia una simetría esperada y la dirección teórica del patrón, pero se tiene el inconveniente del tiempo de ejecución del programa ya que se requieren dipolos de longitudes menores a  $0.05\lambda$ .

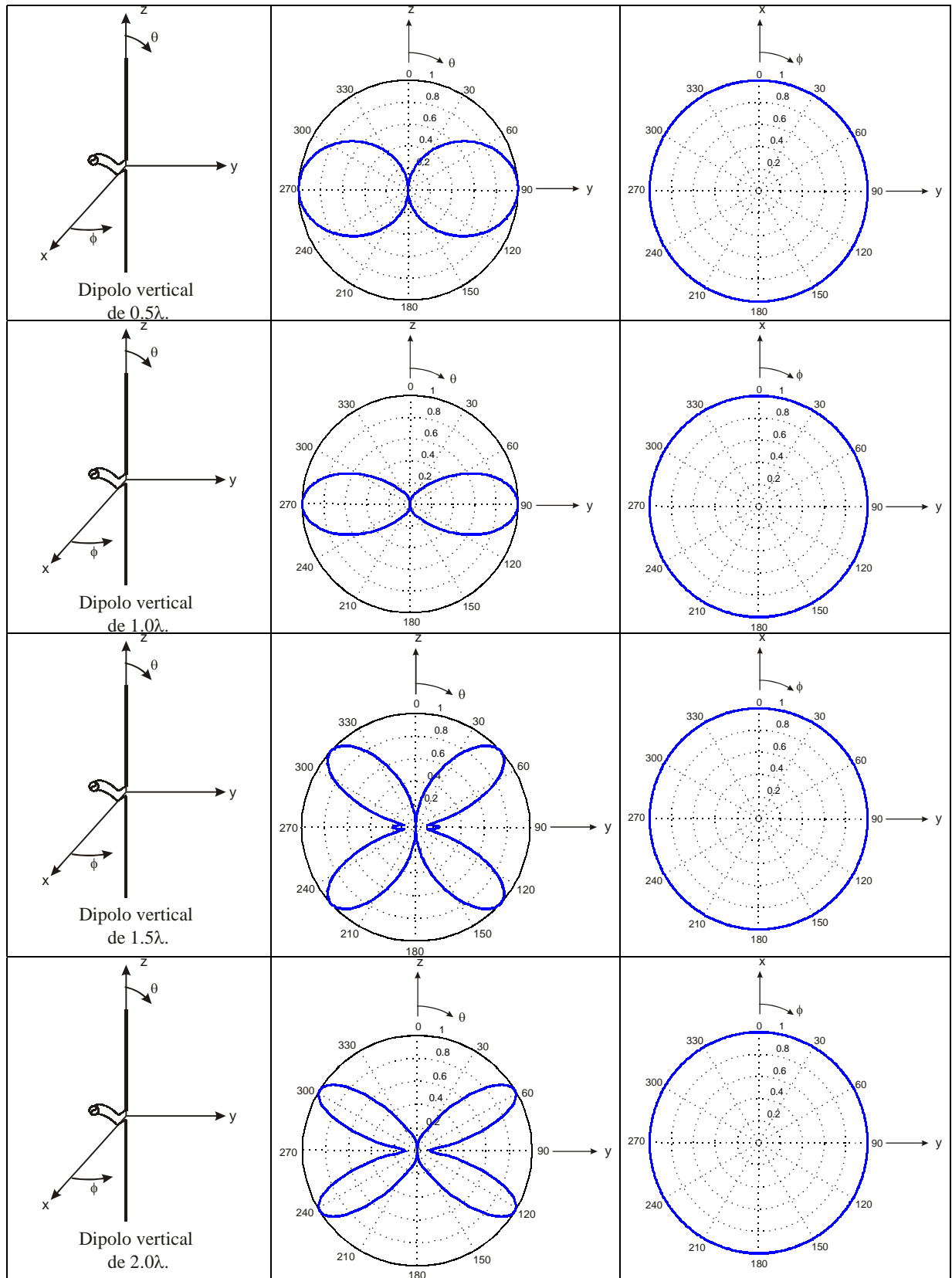
## Apéndice E. Patrones de radiación para antenas con geometrías rectas y circulares por medio del MM

En este apéndice se muestran los patrones de radiación obtenidos para diferentes geometrías por medio de las ecuaciones deducidas en el Apéndice C. Los patrones presentados en este apéndice serán comparados con los patrones teóricos.

### E.1 Antenas con geometría recta

Para la obtención de los patrones de radiación de geometrías rectas se emplearon segmentos de longitud  $0.1\lambda$ .

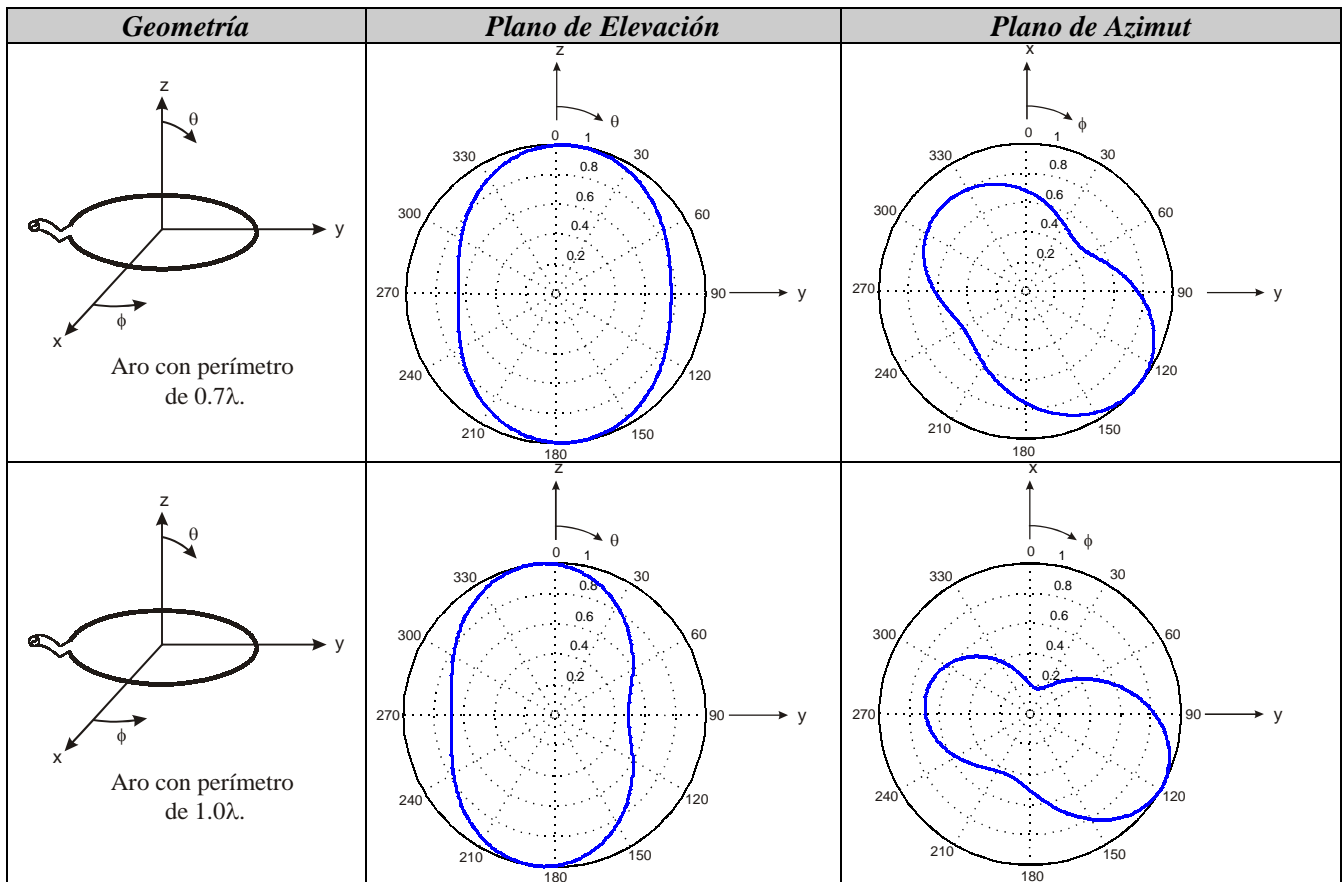




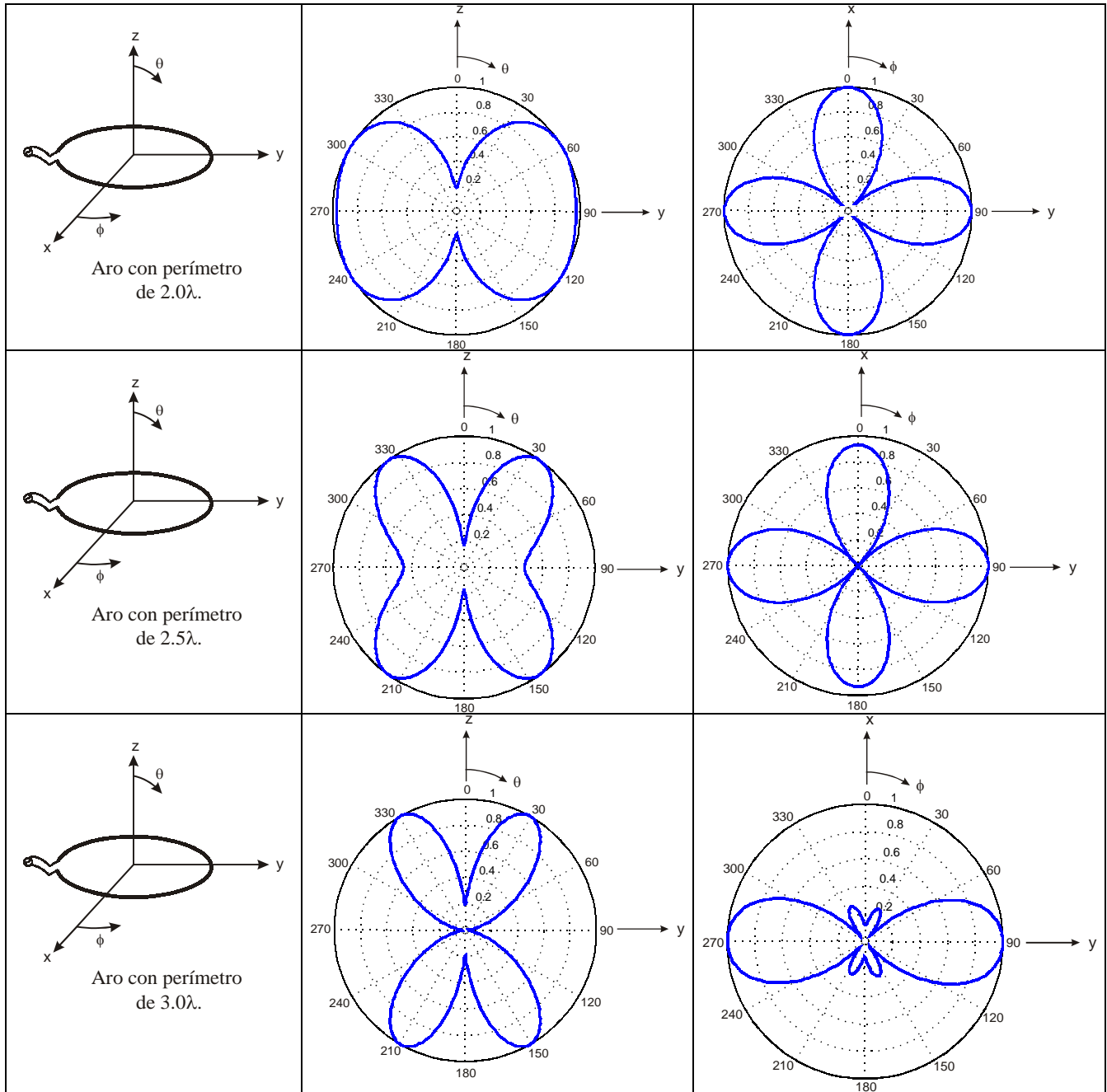
Como se puede observar, los patrones de radiación son prácticamente iguales a los obtenidos teóricamente (Balanis, 1997; Kraus, 2002). Asimismo, se comprueba que al aumentar la longitud del brazo hasta  $l = \lambda$ , el patrón de radiación en el plano de elevación se estrecha y para longitudes mayores que  $\lambda$  además del lóbulo principal, aparecen lóbulos laterales suplementarios.

## E.2 Antenas con geometría circular

En esta sección se presentan los patrones de radiación obtenidos por medio MM para una geometría circular. Debido a los resultados presentados en el Apéndice D, los segmentos en los cuales fueron divididas las antenas tienen una longitud de  $0.05\lambda$ .







Al comparar estos patrones de radiación con los obtenidos por Rao (Rao, 1968) y Le-Wei Li (Le-Wei Li, 1999) se observa que son muy similares, con lo cual se confirma que las ecuaciones del Apéndice C permiten un cálculo correcto para conocer los patrones de radiación radiados.

## Apéndice F. Técnica de Fotolitografía

### F.1 Definición de fotolitografía

La fotolitografía es una tecnología que permite transferir la información de la máscara sobre una oblea (placa delgada), separando las zonas donde se quiera que esté. El material fotorresistivo o litográfico es un material sensible a la luz, es decir, que cambia sus propiedades y estructura al ser iluminado (normalmente por UV), parecido a la capa exterior de una película fotográfica; además, posee la característica de ser un líquido polimérico viscoso.

### F.2 Proceso de la técnica de fotolitografía

Se coloca un material fotosensible sobre la oblea con el fin de grabar la información contenida en la máscara. La resina define las zonas de actuación. Existen dos tipos de resinas:

- Positiva: Es un material inicialmente insoluble, que al ser expuesto a la luz, se convierte en un material soluble. Es poco sensible pero se obtiene una buena resolución, por lo que la forma grabada queda bien definida.
- Negativa: Es un material inicialmente soluble que, expuesto a la luz, pasa a ser insoluble; este proceso se conoce como polimerización. Al aplicar el corrosivo, o mordiente (“etch”), las zonas de óxido que no estaban cubiertas por material fotorresistivo son destruidas.

Se graba en el  $\text{SiO}_2$  que no está protegido. Al eliminar la resina con la luz sabemos qué puntos del  $\text{SiO}_2$  hemos conservado.

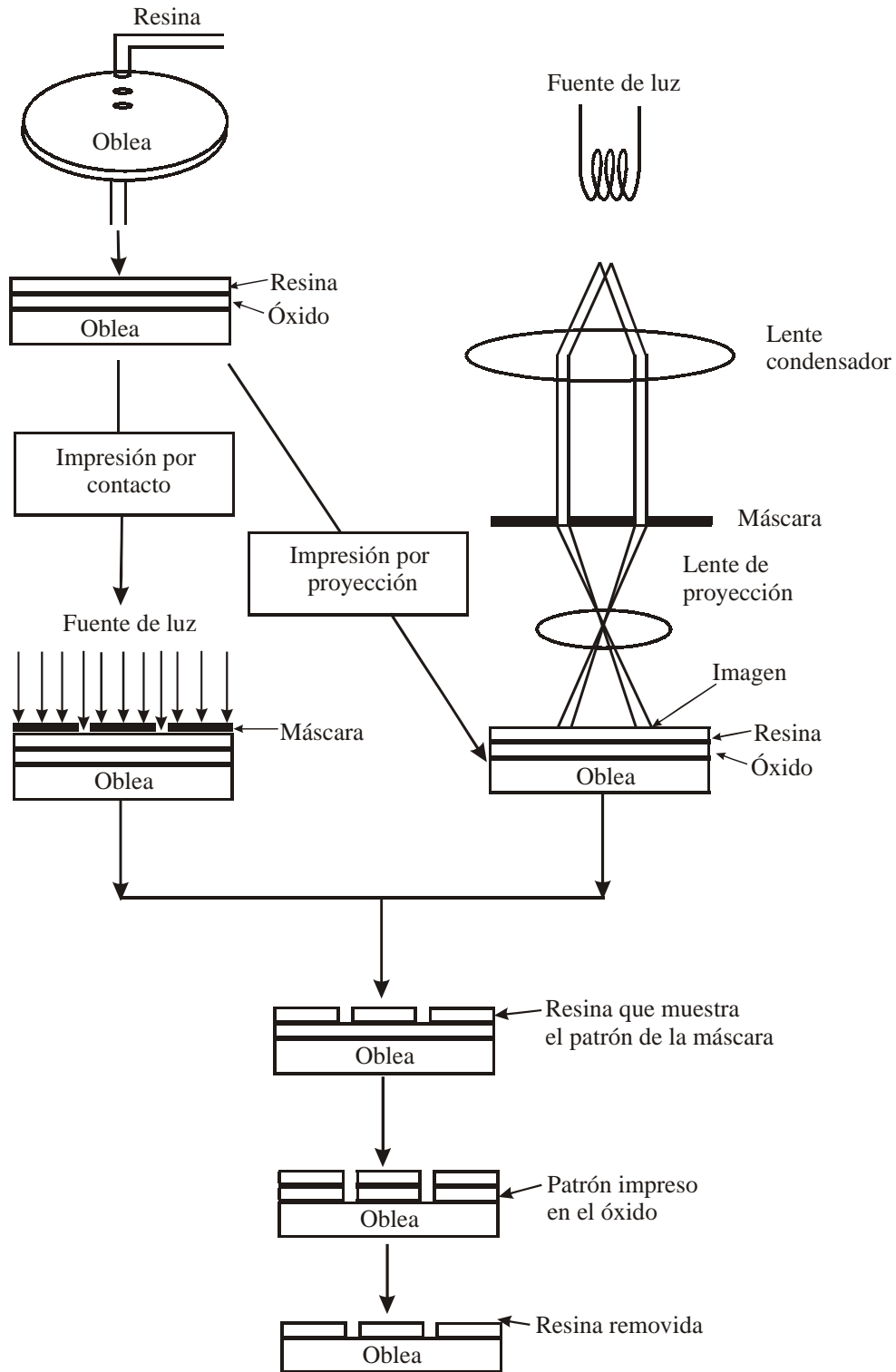
La máscara (plantilla) es una capa que contiene zonas opacas y zonas transparentes, que en conjunto dibujan el circuito que queremos grabar en la oblea. Según la proyección de las máscaras, se dividen en:

- *Máscaras de proyección*: se sitúan a una cierta distancia de la oblea sin tocarla. Tienen el inconveniente de que el coste del equipo de fabricación es muy elevado y tenemos problemas de difracción.
- *Máscaras de contacto*: se sitúan encima de la oblea, obteniendo menor difracción y por lo tanto mayor resolución. Tiene el inconveniente de que se deterioran rápidamente.

Cuando aplicamos luz sobre el material litográfico, las zonas expuestas a la luz (es decir, las que quedan por debajo de las zonas transparentes de la oblea) pasan a ser solubles (resina negativa) o insolubles (resina positiva). Al eliminar el material litográfico de la superficie de la oblea, se obtiene un patrón de óxido de la misma forma que el patrón de la máscara. Si se considera resina negativa, las zonas transparentes de la máscara corresponden a zonas insolubles, es decir a capas de óxido, mientras que las capas opacas corresponden a “huecos” de aislante (en un material positivo sucedería lo contrario). De esta manera disponemos ya de la oblea, con sus porciones aislantes (cubiertas de óxido) y las conductoras (las faltas de óxido).

Algunas de las modificaciones que se pueden realizar al proceso de la fotolitografía es utilizar rayos de luz de frecuencia más elevada, por ejemplo rayos X; a esta técnica se le conoce como "Electron-Beam" o barrido de electrones. Con esta variante se obtiene una mejor precisión y se puede prescindir de la máscara; su inconveniente es una técnica muy lenta en ejecución y tiene un costo muy elevado.

Otra variante del proceso de fotolitografía consiste en aplicar sobre papel o plástico un fotopolímero líquido que se solidifica cuando queda expuesto a radiación ultravioleta. A continuación se elimina el líquido sobrante. Estas planchas se fabrican en poco tiempo y resultan muy apropiadas para la tirada de periódicos, donde resultan muy importantes los plazos de confección.

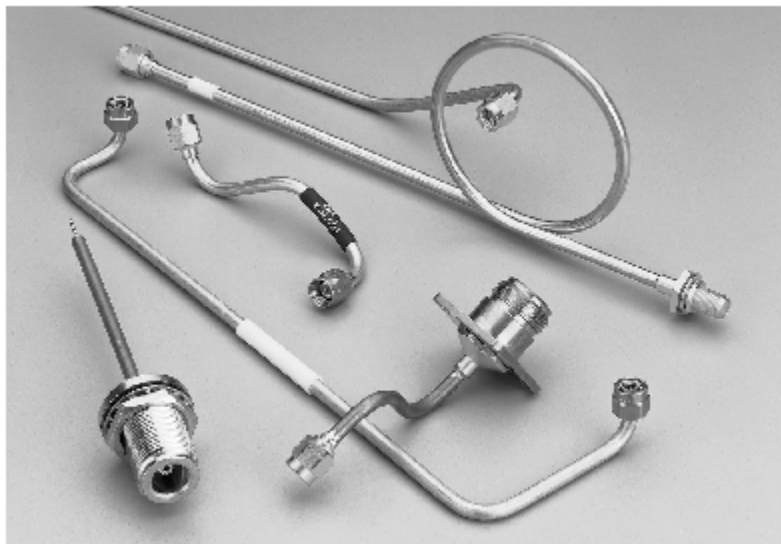


**Figura F.1** *Proceso de fotolitografía.*

## Apéndice G. Cable coaxial semi-rígido y conector K

### G.1 Cable coaxial semi-rígido

El cable coaxial es una línea de transmisión muy empleada para la alimentación de antenas. La elección del tipo de coaxial a emplearse depende de las frecuencias de trabajo y de las aplicaciones que se tengan. En particular, para frecuencias de microondas se emplean los cables coaxiales semi-rígidos, los cuales tiene la característica de que su conductor externo ya no es una malla sino que es un tubo de algún material conductor. La razón del cambio de la malla por un forro conductor sólido es para ofrecer un mejor blindaje. Para el desarrollo de esta tesis se empleó el cable coaxial semi-rígido 141.



**Figura G.1.** *Cable coaxial semi-rígido 141.*

El cable coaxial semi-rígido 141 ofrece bajas pérdidas cuando se encuentra trabajando a frecuencias menores o iguales que 34 GHz. El diámetro de 0.25 pulgadas (1/4 in) permite emplear conectores de alta frecuencia, como conectores K (2.9 mm), BMA y SMA. El material del conductor externo puede ser aluminio o cobre y el conductor central está hecho con cobre.

Las características que presenta son las siguientes:

- La frecuencia máxima de operación es 35 GHz.
- Mayor efectividad de blindaje
- Disponibilidad de conectores con teñidura de acero

- Disponibilidad del conjunto de herramientas para el ajuste de fase (la tolerancia estándar es de  $\pm 1$  grado por GHz)
- Alta resistencia a vibraciones

Sus características físicas se muestran en la tabla G.1.

Cubierta Exterior	Cobre
Conductor interior [in]	0.036
Material Dieléctrico [in]	0.119
Velocidad	69.50%
Capacitancia [pf/ft]	29.5
Frecuencia de corte [GHz]	35
Rango de temperatura [°C]	-40 a +125
Radio mínimo [in]	0.25
Efectividad de blindaje	>100 dB

**Tabla G.1.** Características físicas:

Las pérdidas típicas y las potencias máximas que soporta por frecuencia se muestran en la tabla G.2 y G.3, respectivamente.

<i>Frecuencia</i> [GHz]	<i>Pérdidas típicas</i> [dB/100 ft]
1	11.2
2	16.5
3	20.9
4	24.8
5	28.3
6	31.7
8	37.9
10	43.6
11	46.3
12	49
14	54.2

<i>Frecuencia</i> [GHz]	<i>Pérdidas típicas</i> [dB/100 ft]
16	59.2
18	64
20	68.7
22	73.3
24	77.8
26	82.2
28	86.5
30	90.7
32	94.9
34	99.1
35	101.1

**Tabla G.2.** Pérdidas típicas.

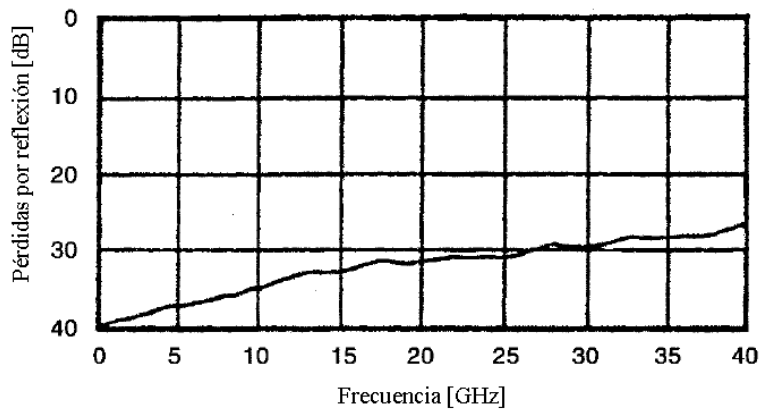
<i>Frecuencia</i> [GHz]	<i>Potencia</i> [Watts]
1	450
10	110
18	75

**Tabla G.3.** *Potencia máxima.*

Dentro de las aplicaciones que presenta este cable, se encuentran instrumentación, comunicaciones satelitales, aplicaciones militares y en algunos sistemas donde se requieran instrumentos de bajo peso.

## G.2 Conector K

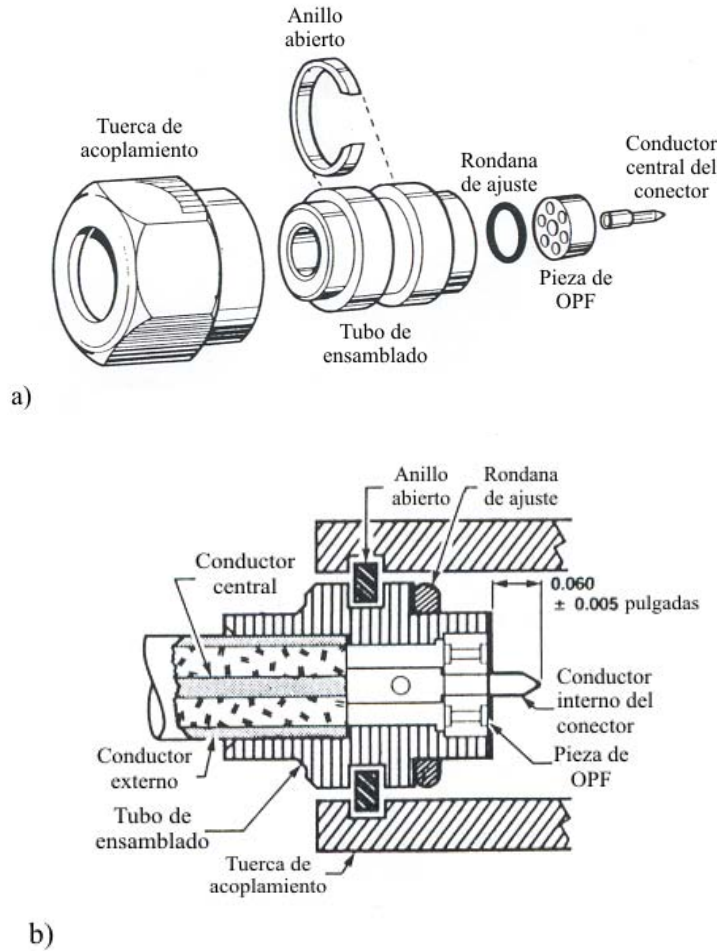
Un tipo de conector empleado para cables coaxiales semi-rígidos es el conector K (2.9 mm). Este conector tiene resultados óptimos para frecuencias menores o iguales que 46 GHz y en aplicaciones con cables coaxiales semi-rígidos.



**Figura G.2.** *Pérdidas del conector K.*

El conector K está formado de una pieza de óxido polifenólico (OPF) y de varias partes de metal. Las partes de metal no sufren modificaciones con variaciones de temperatura, pero la pieza de OPF sufre modificaciones a temperaturas mayores que 125°C; es por ello que las pruebas para este conector toman como temperatura máxima 125°C. Si la pieza de OPF es sujeta a temperaturas mayores que 100°C por más de cinco minutos se encogerá ligeramente, pero no modificará considerablemente la transferencia de

electrones. Su impedancia característica es de  $50 \Omega$ . Las pérdidas por reflexión se observan en la figura G.2.



**Figura G.3.** Conector K101 macho. a) Piezas sin ensamblar. b) Piezas ensambladas.

Para la elaboración de esta tesis se empleó el conector K101M de la empresa Anritsu. Las instrucciones para el armado de este conector son las siguientes:

- a. Remueva aproximadamente 0.25 pulgadas del conductor externo de uno de los extremos del coaxial. El conductor externo debe ser cortado de forma vertical y libre de sobrantes.
- b. Recorte el teflón (dieléctrico del coaxial), teniendo cuidado de no dañar el conductor central. El corte del dieléctrico debe ser ajustado al corte del conductor externo para introducir correctamente el conductor central del conector (espetón).
- c. Corte y ajuste cuidadosamente la longitud del conductor central expuesto a 0.090 pulgadas y estáñelo.

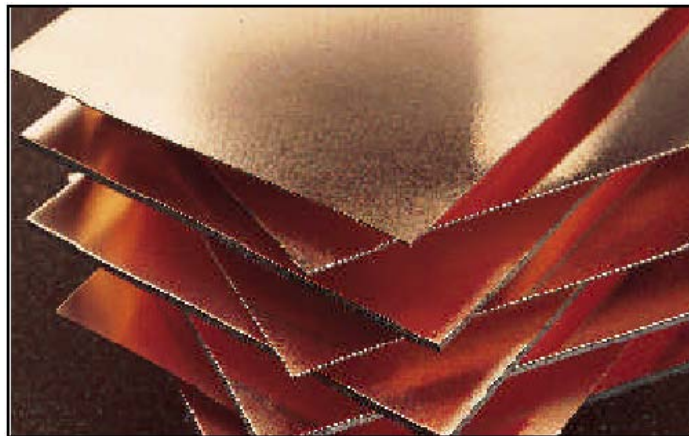


- d. Caliente el espetón del conector y deslícelo a través del conductor central hasta que tope con el dieléctrico del coaxial. Evite dejar residuos de soldadura en el exterior del espetón.
- e. Limpie el conductor central del conector y el extremo del coaxial que se va a unir al conector.
- f. Oriente el tubo de ensamblado para que el conector y el extremo del coaxial se puedan unir.
- g. Deslice el tubo de ensamblado a través del cable hasta el extremo final del tubo. Cuando esté correctamente ensamblado, el conductor interno del conector se verá con en la figura G.3b.
- h. Sostenga el tubo de ensamblado por medio de unas pinzas y apriete la tuerca de ajuste. Aplique soldadura en el extremo posterior del tubo y suelde con el cable.
- i. Verifique que el tubo y el coaxial hayan quedado soldados correctamente y que la soldadura no haya corrido hasta el espetón.
- j. Coloque el anillo abierto sobre la ranura del tubo de ensamblado.
- k. Coloque la rondana a lo largo del extremo frontal del tubo, procurando ajustarlo correctamente.
- l. Apriete y cierre el anillo abierto, asimismo apriete la tuerca para fijar el conector.
- m. Coloque la pieza de OPF en el extremo frontal del tubo de ensamblado. Procurando no meter el centro del conductor del conector.
- n. Verifique que el conector haya quedado correctamente ensamblado.

## Apéndice H. Lámina ULTRALAM 2000

### H.1 Características generales

La lámina ULTRALAM 2000 es una lámina de fibra de vidrio reforzada para aplicaciones de microondas (Figura H.1). Este tipo de lámina fue diseñada para aplicaciones de circuitos en línea cinta y microcinta.



**Figura H.1.** Lámina *ULTRALAM 2000*.

Las fibras de vidrio de refuerzo están dispuestas en el plano XY de la lámina. Esta orientación maximiza la estabilidad dimensional y disminuye las expansiones térmicas del material cuando el circuito se encuentra en sus condiciones críticas.

La constante dieléctrica del material de la lámina ULTRALAM 2000 tiene una desviación de  $\pm 0.04$  del valor nominal, ubicándose en el rango de 2.4 a 2.6; esta característica se encuentra constante en cada panel. El factor de disipación permite un uso óptimo en todo el rango de frecuencias de la banda K (de 17 a 27 GHz). Asimismo tiene estabilidad en sus propiedades eléctricas en las frecuencias de la banda K, lo que le permite trabajar en aplicaciones de banda ancha.

La lámina ULTRALAM 2000 puede ser cortada, dividida o modificada mecánicamente para ajustar su forma. Tiene una excelente resistencia a todos los solventes y reactivos, tanto a bajas como altas temperaturas. Normalmente se emplea en circuitos impresos grabados y de relieve. Gracias a su excelente resistencia química, se disminuyen los daños al material en los procesos de fabricación y ensamblado.

## H.2 Especificaciones técnicas

<i>Propiedad</i>	<i>Valor típico</i>	<i>Dirección</i>	<i>Unidades [SI]</i>
<b>Constante Dieléctrica</b> $\epsilon_r$	2.4 – 2.6 (23°C)	Z	
<b>Factor de disipación</b> $\tan \delta$	0.0022 máx. (23°C)	Z	
<b>Resistividad volumétrica</b>	$2.0 \times 10^7$	Z	Mohm cm
<b>Resistividad superficial</b>	$4.1 \times 10^7$	X, Y	Mohm
<b>Voltaje de ruptura dieléctrica</b>	>50	X, Y	kV
<b>Resistencia de arco</b>	185	X, Y	seg.
<b>Módulo de tensión</b>	11.7 (1700) 9.0 (1300)	X Y	GPa (kpsi)
<b>Fuerza de tensión</b>	147 (21.3) 136 (19.7)	X Y	MPa (kpsi)
<b>Módulo de compresión</b>	11.0 (1600) 9.0 (1300)	X Y	GPa (kpsi)
<b>Fuerza de compresión</b>	>70 (>10.2) 58 (9.4)	X Y	MPa (kpsi)
<b>Flexibilidad de doblado</b>	170 (24.6) 104 (15.1)	X Y	MPa
<b>Absorción de agua</b>	0.03		%
<b>Coefficiente de expansión térmica</b>	9.5 (25 – 150°C) 9.5 (25 – 150°C)	X Y	ppm/°C
<b>Densidad</b>	2.2		gm/cm <sup>2</sup>

## G.3 Aplicaciones

Entre sus principales aplicaciones se encuentran sistemas de comunicaciones inalámbricos, estaciones bases de celulares, sistemas LAN, electrónica automotriz, receptores de televisión vía satelital, componentes en RF y microondas, sistemas de radar, sistemas de comunicación móvil y equipo de instrumentación entre otros.

## Apéndice I. Analizador de redes

### I.1 Analizador de redes (Combes, 1997)

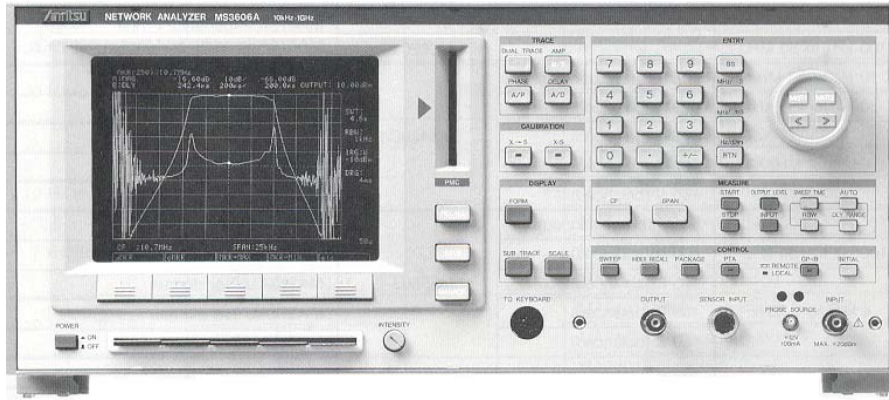


Figura I.1 Analizador de redes.

El analizador de redes es un aparato muy empleado en los laboratorios de microondas. Este dispositivo permite comparar las amplitudes complejas de dos ondas para proporcionar el valor de sus módulos y la diferencia entre sus fases. Siendo dos ondas representadas por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} a &= A \cos(\omega t + \varphi_a) \\ b &= B \cos(\omega t + \varphi_b) \end{aligned} \quad (\text{I-1})$$

Si estas ondas poseen una frecuencia superior a 100 MHz, su pulsación  $\omega$  es muy alta para que se puedan realizar las mediciones de sus defasajes relativos. El procesador interno (computadora) del analizador de redes realiza una transformación al dominio de la frecuencia, caracterizado por una pulsación  $\Omega$  a la cual las mediciones de defasajes relativos son posibles. Bajo estas condiciones, las dos ondas son representadas por :

$$\begin{aligned} a' &= A' \cos(\Omega t + \varphi_{a'}) \\ b' &= B' \cos(\Omega t + \varphi_{b'}) \end{aligned} \quad (\text{I-2})$$

Evidentemente es necesario que en la transformación al dominio de la frecuencia se conserven las amplitudes y fases relativas, por lo que:

$$\frac{A'}{B'} = \frac{A}{B} \quad y \quad \varphi_{a'} - \varphi_{b'} = \varphi_a - \varphi_b \quad (I-3)$$

Los analizadores de redes actuales permiten medir variaciones de  $S_{ii}$  o de  $S_{ij}$  (elementos de la matriz de dispersión) en una banda de frecuencias. Para medir los parámetros en cada una de las frecuencias, los analizadores de redes son programados; los valores medidos de amplitud y fase son calculados por medio de los valores de las tablas ya programadas. Estos aparatos son muy rápidos y entregan una alta precisión (Fig. I.1).

### I.2 Método de medición de los parámetros S

a) **Mediciones de  $S_{11}$  ( $S_{22}$ ).** Es necesario comparar la onda reflejada  $B_1$  ( $B_2$ ) y la onda incidente  $A_1$  ( $A_2$ ). El banco de medidas está constituido por un generador G, un acoplador direccional, el dispositivo a caracterizar (cuadripolo) y una carga adaptada (Fig. I.2).

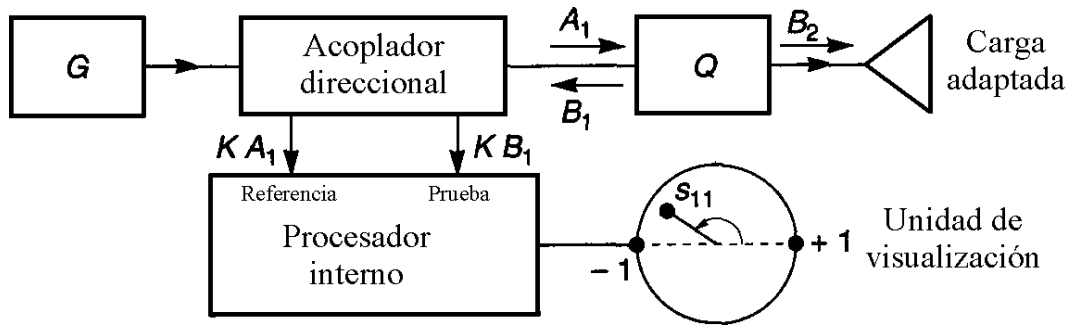


Figura I.2. Medición de los parámetros  $S_{11}$  y  $S_{22}$ .

El acoplador direccional es un aparato capaz de separar las ondas incidente y reflejada que se propagan sobre la línea que comunica al cuadripolo. Por lo que se proporcionará:

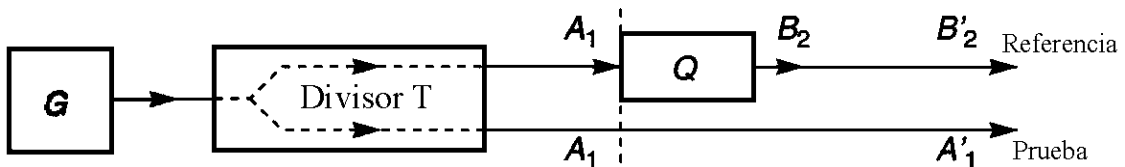
- A la salida, una señal proporcional a  $A_1$  ( $KA_1$ ).
- En la otra salida, una señal proporcional a  $B_1$  ( $KB_1$ ), con el mismo coeficiente de proporcionalidad K.

Estas señales son enviadas, respectivamente, sobre la vía de referencia y sobre la vía de prueba del analizador de redes. El procesador interno del analizador permite compararlos en amplitud y fase. La unidad de visualización permite observar los valores medidos en una pantalla.

Estas mediciones proporcionan  $S_{11}$  (o  $S_{22}$  si el cuadripolo es colocado en sentido inverso) pero haciendo un patrón previo (calibración del aparato), lo cual consiste en reemplazar el cuadripolo y la carga por una carga conocida, por ejemplo un circuito corto cuyo coeficiente de reflexión es  $S_{11} = -1$ . De los valores previos de amplitud y fase, proporcionados al analizador de redes, permiten llevar el punto representativo al punto del diagrama de Smith correspondiente a  $-1$ .

b) **Mediciones de  $S_{21}$  ( $S_{12}$ ).** Es necesario comparar la onda transmitida  $B_2$  ( $B_1$ ) y la onda incidente  $A_1$  ( $A_2$ ). Para lo cual, se divide la señal entregada por el generador  $G$  hacia las dos vías (Fig. I.3) :

- Uno que será dirigido directamente a la entrada de la referencia del analizador de redes.
- Otro que será enviado, a través de cuadripolo, a la entrada de la prueba del analizador.



**Figura I.3.** Medición de los parámetros  $S_{12}$  y  $S_{21}$ .

Sean  $A_1'$  y  $B_2'$  las señales que inciden en el punto de referencia y al punto de prueba, respectivamente. Para que se cumpla:

$$\frac{B_2'}{A_1'} = \frac{B_2}{A_1} = S_{21} \tag{I-4}$$

es necesario igualar los defasajes debido a los recorridos sobre las dos vías (de referencia y de prueba). Para ello, se requiere hacer una lectura previa sin el dispositivo a caracterizar. En esta medición se calibra la amplitud y fase del analizador igualando las amplitudes complejas de las señales medidas por el analizador. En estas condiciones, el punto representado se encuentra exactamente en el punto correspondiente a  $-1$  en la carta de Smith. Los analizadores de redes comerciales cuentan con su kit de calibración proporcionado por el distribuidor del aparato.