00324
36

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

"EL LAPLACIANO EN EL TRIÁNGULO DE SIERPINSKY".

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

M A T E M Á T I C O

P R E S E N T A :

OMAR ALEJANDRO SUÁREZ GUERRERO

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN C. GUILLERMO GÓMEZ ALCARAZ

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2003

A

PAGINACIÓN

DISCONTINUA

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"El Laplaciano en el Triángulo de Sierpinsky"

realizado por Omar Alejandro Suárez Guerrero

con número de cuenta 09653512-7 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	M. en C. Guillermo Gómez Alcaraz
Propietario	Dr. Pedro Eduardo Miramontes Vidal
Propietario	Dra. Ana Margarita Guzmán Gómez
Suplente	Mat. Luis Manuel Hernández Gallardo
Suplente	Mat. Alejandro Martínez Ireneo

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

B

A mi madre
María Teresa Guerrero Gutiérrez.

A mi Abuela, tíos y primos de la familia Guerrero Gutiérrez.

A mis amigos
Gamaliel Bautista, Alejandro Martínez, Rafael Molina, Enrique González, Héctor Cejudo.

A mis sinodales
Luis Manuel, Ana Guzmán, Pedro Miramontes, Alejandro Martínez.

A mi Director de Tesis
Guillermo Gómez Alcaraz.

A Héctor Hugo Luis e Irma D.

La verdadera virtud(te) no atesora su virtud
por eso es virtud
La virtud inferior atesora su virtud
por eso no posee virtud
La verdadera virtud emplea el no-actuar(wu-wei)
pero nada deja sin acabar
La virtud inferior actúa
pero no concluye sus obras.

Lao-Tzu, Tao-Te-Ching. 38.

El Laplaciano en el Triángulo de Sierpinsky.

Omar Alejandro Suárez Guerrero

II

Índice general

Introducción

En este texto tratamos acerca de la construcción del Laplaciano en el Triángulo de Sierpinsky, así como el problema clásico de Dirichlet con respecto a este Laplaciano. En este documento tomamos en cuenta la geometría, la topología y las funciones continuas en este conjunto que es un caso particular de los conjuntos fractales autosemejantes o llamados por los fundadores de esta teoría de análisis sobre fractales (Robert Strichartz y Jun Kigami) como fractales de límite poscrítico (p.c.f en inglés).

Después definiremos las funciones continuas, las funciones lineales o afines por pedazos. Luego procedemos a definir el funcional que denominamos el Laplaciano discreto sobre un punto dado, y este funcional se hace cero en determinadas colecciones de puntos, a estas se le denominarán funciones armónicas por pedazos o m-armónicas. Estas funciones nos permitirán aproximar cualquier función continua en el triángulo de Sierpinsky. De manera análoga se aproximan las funcionales lineales continuas utilizando la convergencia débil*. Con base en esto, construiremos una sucesión de operadores lineales que tendrán como límite el operador laplaciano en el triángulo de Sierpinsky. Para luego construir la solución de la ecuación de Poisson para este operador y su problema de Dirichlet, repasamos la integral de Lebesgue con respecto a la medida de Hausdorff y esta integral nos permite construir un funcional para comprobar la convergencia la solución de aquel problema de Dirichlet.

En el primer capítulo estudia la geometría del Triángulo de Sierpinsky, que construimos mediante funciones de similitud, y luego tratamos un poco con la topología de este conjunto. El material de este capítulo lo utilizaremos como base para formular las proposiciones que necesitamos en los siguientes capítulos.

En el segundo capítulo se realiza la construcción de las diferencias armónicas, que son funcionales parecidos a las diferencias discretas que se utilizan para aproximar las segundas derivadas en un intervalo finito de la recta real. Construimos las funciones armónicas y m-armónicas, finalmente damos una base del espacio vectorial de las funciones m-armónicas.

En el tercer capítulo se hace un estudio breve de la aproximación débil* de los funcionales lineales mediante los funcionales que definimos en el capítulo anterior de diferencias armónicas.

En el cuarto capítulo desarrollamos la medida en el triángulo de Sierpinsky, que es una medida de Hausdorff normalizada y que se conserva al hacer transformaciones isométricas; luego desarrollamos la integración con respecto a esta medida; para luego descubrir que la integral de las funciones m-armónicas con las que se aproximan funciones según el capítulo dos, son iguales si tienen el mismo grado de afinación en el conjunto. Para concluir que podemos integrar funciones continuas mediante su aproximación m-armónica.

En el capítulo final se construye el operador laplaciano mediante las funciones lineales por tramos cuyos valores en los puntos de un conjunto que aproxima al triángulo de Sierpinsky son iguales a las diferencias armónicas en los mismos. Luego se plantea el problema de Dirichlet y se estudia la convergencia de una sucesión de funciones dada, que es la que se comprueba luego que es la única solución del problema de Dirichlet. Y se concluye con un caso especial de que la ecuación de Laplace en este conjunto tiene una única solución y son efectivamente las funciones armónicas en todo el triángulo.

Capítulo 1

El Triángulo de Sierpinsky.

El desarrollo del presente trabajo está dado en $\mathbb{R}^2$, pero los conceptos que aquí se desarrollan se pueden extender a R^n sin modificar esencialmente este desarrollo.

1.1. Funciones afines.

Aquí el conjunto $\mathbb{R}^2$ será el espacio vectorial usual, y cada uno de sus puntos será un vector por lo que podemos sumar y multiplicar por escalares a los puntos de $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.1 *Decimos que $L_b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ para $b \in \mathbb{R}^2$ dada por $L_b(x) = x + b$ es una traslación en $\mathbb{R}^2$.*

Observemos que las traslaciones son biyectivas pues la suma en $\mathbb{R}^2$ forma un grupo abeliano, y para la ecuación $y = x + b$ existe una única solución x y si $x = y - b$, entonces $y = (y - b) + b = y$, lo que significa que $L_b^{-1} = L_{-b}$. Por lo tanto L_{-b} es la inversa de L_b.

Definición 1.2 *Decimos que una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es afín si y sólo si es de la forma $f = L_b \circ A$. donde L_b es una traslación y $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función lineal de $\mathbb{R}^2$.*

Para la construcción de los conjuntos fractales necesitaremos el concepto de función afín.

Definición 1.3 *Sean $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ dos puntos distintos. Definimos a la línea generada por p_1, p_2 como el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 | x = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$.*

Veamos que las funciones afines se pueden definir mediante tres puntos que son no colineales.

Definición 1.4 *Decimos que tres puntos diferentes $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ son colineales si existen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tales que $p_3 = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.*

Es claro que si cambiamos el orden de estos puntos la ecuación es la misma. Por ejemplo, si $p_3 = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ entonces $p_1 = -\frac{1}{\lambda_1} p_3 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} p_2$ pero si $\lambda_1 = 0$ entonces $\lambda_2 = 1$ y por lo tanto $p_3 = p_2$. Entonces no influye el permutar los puntos. En la siguiente proposición probaremos que una función afín lleva líneas a líneas y que la descripción de un punto en la línea con respecto a los puntos que la definen se preserva bajo esa función.

Proposición 1.5 *Sea $L = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1\}$ donde $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ son dos puntos distintos. Entonces $F(L)$ es una línea generada por $F(p_1), F(p_2)$. Además si $x = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in L$ entonces $F(x) = \lambda_1 F(p_1) + \lambda_2 F(p_2)$.*

Demostración: Sea $x = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in L$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, entonces $F(x) = A(x) + b = \lambda_1 A(p_1) + \lambda_2 A(p_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)b = \lambda_1(A(p_1) + b) + \lambda_2(A(p_2) + b)$ por lo que $F(x) = \lambda_1 F(p_1) + \lambda_2 F(p_2)$. Si $y = \lambda_1 F(p_1) + \lambda_2 F(p_2)$ con $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ entonces damos $x = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in L$ y por el procedimiento anterior $F(x) = y \in F(L)$ y por lo tanto $F(L)$ es la línea generada por $F(p_1)$ y $F(p_2)$ si estos dos puntos son distintos. ■

Observemos que en la proposición anterior las imágenes de p_1 y p_2 pueden no ser diferentes y entonces se colapsa toda la línea recta L a un punto $F(p_1)$.

Proposición 1.6 *Los puntos $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ son no colineales si y sólo si $p_2 - p_1$, $p_3 - p_1$ son linealmente independientes.*

Demostración: Supongamos que no son linealmente independientes. Entonces existen $\lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ tal que $\lambda_2(p_2 - p_1) + \lambda_3(p_3 - p_1) = 0$, y al ser puntos distintos podemos observar que $p_2 - p_1 \neq 0$ y $p_3 - p_1 \neq 0$. Por esto si $\lambda_2 = 0$ entonces $\lambda_3 = 0$, y recíprocamente. Entonces $\lambda_3 p_3 = (\lambda_2 + \lambda_3)p_1 - \lambda_2 p_2$ y dividiendo $p_3 = \frac{(\lambda_2+\lambda_3)}{\lambda_3} p_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} p_2$, por lo que concluiríamos que estos tres puntos son colineales y esto es una contradicción.

Por otro lado, supongamos que p_1, p_2, p_3 son colineales. entonces $p_3 = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$, donde $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y ninguna es cero. Entonces $p_3 = (1 - \lambda_2)p_1 + \lambda_2 p_2 = p_1 + \lambda_2(p_2 - p1)$ y tenemos $(p_3 - p_1) - \lambda_2(p_2 - p1) = 0$ lo que nos dice que $p_3 - p_1$ y $p_2 - p_1$ son linealmente dependientes. Contradiciendo la hipótesis de reducción al absurdo. Por lo tanto se da el "si y sólo si". ■

Usaremos este hecho para probar que dados tres puntos no colineales podemos obtener cualquier otro en el plano en términos de aquellos. A esto lo denominaremos las *coordenadas baricéntricas* de un punto con respecto a tres no colineales. La geometría de funciones afines y coordenadas baricéntricas se desarrolla con más detalle en [Ryan].

Proposición 1.7 *Para todo $x \in \mathbb{R}^2$, y dados p_1, p_2, p_3 no colineales. Entonces existen $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $x - p_1 = \lambda_2(p_2 - p_1) + \lambda_3(p_3 - p_1)$. Y existen $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{R}$ tales que $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$ y $x = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2 + \mu_3 p_3$. Y se relacionan por las formulas: $\mu_2 = \lambda_2$, $\mu_3 = \lambda_3$ y $\mu_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3$. Los números μ_1, μ_2, μ_3 son los únicos con estas propiedades.*

Demostración: Como p_1, p_2, p_3 son no colineales, por 1.6, $p_3 - p_1, p_2 - p_1$ son linealmente independientes, entonces existen únicos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x - p_1 = \lambda_2(p_2 - p_1) + \lambda_3(p_3 - p_1)$.

Luego $x = p_1 + \lambda_2(p_2 - p_1) + \lambda_3(p_3 - p_1) = (1 - \lambda_2 - \lambda_3)p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$ y si damos $\mu_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3$, $\mu_2 = \lambda_2$, $\mu_3 = \lambda_3$ entonces $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1$. Supongamos que existen $\mu_1', \mu_2', \mu_3' \in \mathbb{R}$ tales que $x = \mu_1' p_1 + \mu_2' p_2 + \mu_3' p_3$ y $\mu_1' + \mu_2' + \mu_3' = 1$, de donde $x = (1 - \mu_2' - \mu_3')p_1 + \mu_2' p_2 + \mu_3' p_3$, entonces $x - p_1 = \mu_2'(p_2 - p_1) + \mu_3'(p_3 - p_1)$ que implica que $\mu_2' = \lambda_2 = \mu_2$, $\mu_3' = \lambda_3 = \mu_3$ y $\mu_1' = 1 - \mu_2' - \mu_3' = \mu_1$ lo cual prueba la unicidad. ■

Definición 1.8 *Sean $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ distintos, decimos que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}^2$ son las coordenadas baricéntricas para el punto $x \in \mathbb{R}^2$ respecto a $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^2$ si $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ y $x = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$.*

Veamos como se portan las transformaciones afines con respecto a las coordenadas baricéntricas, y que una transformación afín se puede determinar mediante las coordenadas baricéntricas de $\mathbb{R}^2$.

Las siguientes proposiciones nos garantizan la existencia de una única función que lleva tres puntos no colineales a otros tres puntos dados, así como la forma de determinar tal función. Los conceptos de álgebra lineal que utilizamos se encuentran en [Friedberg].

Proposición 1.9 *Dados x_1, x_2, x_3 y y_1, y_2, y_3, ternas no colineales. Existe una única función afín T tal que $T(x_i) = y_i$.*

Demostración: Escribimos para $x \in \mathbb{R}^2$, $T(x) = Ax + b$ con $b \in \mathbb{R}^2$ y $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal. Entonces lo escribimos en su forma matricial:

$x_i = \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Y tenemos el sistema de ecuaciones para cada $i = 1, 2, 3$ como

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{i1} \\ x_{i2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \end{bmatrix}$, que para cada componente tenemos un sistema de tres ecuaciones:

$a_{11}x_{i1} + a_{12}x_{i2} + b_1 = y_{i1}$ y $a_{21}x_{i1} + a_{22}x_{i2} + b_2 = y_{i2}$ para $i = 1, 2, 3$. En forma matricial tenemos:

$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & 1 \\ x_{21} & x_{22} & 1 \\ x_{31} & x_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{k1} \\ a_{k2} \\ b_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ y_{3k} \end{bmatrix}$ para $k = 1, 2$.

Sea $\overline{x_i} = \begin{bmatrix} x_{i1} & x_{i2} & 1 \end{bmatrix}$. Si $\lambda_1\overline{x_1} + \lambda_2\overline{x_2} - \lambda_3\overline{x_3} = 0$ entonces

$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\overline{x_1} + \lambda_2(\overline{x_2} - \overline{x_1}) + \lambda_3(\overline{x_3} - \overline{x_1}) = 0$

como $\overline{x_i} - \overline{x_1} = \begin{bmatrix} x_{i1} - x_{11} & x_{i2} - x_{12} & 0 \end{bmatrix}$ para $i = 2, 3$ entonces

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$, luego $\lambda_2(\overline{x_2} - \overline{x_1}) + \lambda_3(\overline{x_3} - \overline{x_1}) = 0$ pero si sólo nos fijamos en las dos primeras coordenadas es lo mismo que $\lambda_2(x_2 - x_1) + \lambda_3(x_3 - x_1) = 0$ entonces $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ por 1.6, por lo tanto $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$, por lo que $\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3}$ son linealmente independientes y por lo tanto la matriz que teníamos es invertible, por lo que las soluciones a la ecuación son únicas y entonces hemos encontrado A y b únicos y por lo tanto determinan una única transformación afín $f = L_b \circ A$. ■

Observemos que si $x, y \in \mathbb{R}^2$ y f función afín, entonces $f(x) - f(y) = A(x - y)$ donde A es la parte lineal de f.

Proposición 1.10 *La única transformación afín que lleva x_1, x_2, x_3 a y_1, y_2, y_3 está determinada por $b = y_1 - A(x_1)$ y donde A es la única que lleva el sistema $\{x_2 - x_1, x_3 - x_1\}$ al sistema $\{y_2 - y_1, y_3 - y_1\}$.*

Demostración: Sean

$X = \begin{bmatrix} x_{21} - x_{11} & x_{31} - x_{11} \\ x_{22} - x_{12} & x_{32} - x_{12} \end{bmatrix}$ y $Y = \begin{bmatrix} y_{21} - y_{11} & y_{31} - y_{11} \\ y_{22} - y_{12} & y_{32} - y_{12} \end{bmatrix}$, donde el primer subíndice $i = 0, 1, 2$ denota el punto x_i o y_i, y el último denota la coordenada. Por esto la condición de este resultado se reescribe como $AX = Y$. X tiene columnas linealmente independientes, por lo que tiene determinante diferente de cero, y la única solución para A está dada por $A = YX^{-1}$. Por otro lado $b = y_1 - A(x_1)$, entonces

$T(x_1) = A(x_1) + b = A(x_1) + y_1 - A(x_1) = y_1$,
$T(x_2) = A(x_2) + b = T(x_1) + A(x_2 - x_1) = y_1 + (y_2 - y_1) = y_2$ y
$T(x_3) = A(x_3) + b = T(x_1) + A(x_3 - x_1) = y_1 + (y_3 - y_1) = y_3$.
La T propuesta es única por la proposición anterior. ■

En la siguiente proposición se demuestra que una función afín se determina por una triada de puntos no colineales, y si su imagen también es otra triada de puntos no colineales, entonces tal función es biyectiva.

Proposición 1.11 *a)Dados x_1, x_2, x_3 y y_1, y_2, y_3 tal que $\{x_2 - x_1, x_3 - x_1\}$ sea base de $\mathbb{R}^2$, T una transformación afín tal que $T(x_i) = y_i$, si $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ para $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ con $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ entonces $y = T(x) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$.*

b)Si $\{y_2 - y_1, y_3 - y_1\}$ es también una base de $\mathbb{R}^2$ entonces T es biyectiva.

Demostración: a)Usando la definición $T = L_b \circ A$, y $T(x_i) = y_i$. Y sea $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$, en coordenadas baricéntricas, entonces:
$T(x) = A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + b = A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)b =$
$= \lambda_1 A(x_1) + \lambda_2 A(x_2) + \lambda_3 A(x_3) + \lambda_1 b + \lambda_2 b + \lambda_3 b =$
$= \lambda_1(A(x_1) + b) + \lambda_2(A(x_2) + b) + \lambda_3(A(x_3) + b) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$.

b)Probemos que T es biyectiva. sea $x' = \lambda'_1 x_1 + \lambda'_2 x_2 + \lambda'_3 x_3$, tal que $T(x') = y$. entonces $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = \lambda'_1 y_1 + \lambda'_2 y_2 + \lambda'_3 y_3$ por lo que usando la descripción mediante la base $\{y_2 - y_1, y_3 - y_1\}$ entonces $y - y_1 = \lambda_2(y_2 - y_1) + \lambda_3(y_3 - y_1) = \lambda'_2(y_2 - y_1) + \lambda'_3(y_3 - y_1)$, lo que implica que $\lambda_2 = \lambda'_2$ y $\lambda_3 = \lambda'_3$, y como $\lambda_1 = 1 - \lambda_2 - \lambda_3$ y $\lambda'_1 = 1 - \lambda'_2 - \lambda'_3$ entonces $\lambda_1 = \lambda'_1$. Por lo tanto $x = x'$ y T es inyectiva.

Sea $z \in \mathbb{R}^2$. entonces existen únicos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ y $z = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$ por 1.7. Demos $x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ y entonces $T(x) = \lambda_1 T(x_1) + \lambda_2 T(x_2) + \lambda_3 T(x_3) = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 = z$, por lo tanto T es suprayectiva. Por lo tanto T es biyectiva. ■

Observemos que la proposición 1.5 es un caso particular de la que acabamos de probar. En el resultado anterior hemos probado que la función afín que lleva puntos no colineales a no colineales es biyectiva, ahora veamos que cualquier función afín biyectiva preserva la no colinealidad.

Proposición 1.12 *Una función afín T biyectiva, lleva a tres puntos x_1, x_2, x_3 no colineales a puntos no colineales.*

Demostración: Sea $y_i = T(x_i)$ para $i = 0, 1, 2$. Por 1.6 $\{x_2 - x_1, x_3 - x_1\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$. entonces probemos que $\{y_3 - y_1, y_2 - y_1\}$ es linealmente independiente. Supongamos que existen $\lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, al menos uno no cero, tal que $0 = \lambda_2(y_2 - y_1) + \lambda_3(y_3 - y_1)$. sumamos y_1 y tenemos $y_1 = (1 - \lambda_2 - \lambda_3)y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3$, por otro lado existe un único $x = x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 = T(x)$, por otro lado $T((1 - \lambda_2 - \lambda_3)x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) = y_1$ por 1.11, lo que implica $(1 - \lambda_2 - \lambda_3)x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = x_1$ que por 1.7 tenemos $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0$. de donde concluimos que $\{y_3 - y_1, y_2 - y_1\}$ es linealmente independiente, y como la dimensión de $\mathbb{R}^2$ es dos, entonces es base de $\mathbb{R}^2$. Y por 1.6 son no colineales. ■

En las dos proposiciones pasadas probamos que la función afín es biyectiva si y solo si preserva la no colinealidad, entonces probemos que estas transformaciones forman un grupo.

Proposición 1.13 *a)Sean f, g transformaciones afines, entonces $f \circ g$ es afín.*
b)Sea f una transformación afín biyectiva, entonces su función inversa g es afín.

Demostración: a)Si $x \in \mathbb{R}^2$ y $f = L_{b1} \circ A_1$ $g = L_{b2} \circ A_2$ entonces $f(g(x)) = A_1(A_2(x) + b_2) + b_1 = A_1A_2(x) + A_1b_2 + b_1 = L_{b1+A1b2} \circ A_1A_2(x)$ que es afín.

b)Como la inversa de una función biyectiva es única, entonces proponemos $g = A^{-1} \circ L_b^{-1}$ para $f = L_b \circ A$. A es invertible pues manda una base de $\mathbb{R}^2$ a otra de $\mathbb{R}^2$. Entonces $g \circ f = A^{-1} \circ L_b^{-1} \circ L_b \circ A = I_d$ y entonces solo nos queda probar que g es afín.

Sea $x \in \mathbb{R}^2$ y tenemos $g(x) = A^{-1} \circ L_{-b}(x) = A^{-1}(x - b) = A^{-1}(x) - A^{-1}b = L_{-A^{-1}b} \circ A^{-1}(x)$ y por lo tanto g es afín. ■

Definición 1.14 *Al grupo formado por funciones afines biyectivas y con identidad igual a la identidad de $\mathbb{R}^2$ le llamamos grupo afín $Af(\mathbb{R}^2)$.*

A veces denotaremos fg en lugar de $f \circ g$ para la composición de funciones. El grupo afín nos será de gran importancia pues utilizaremos dos subgrupos muy importantes: los de homotecias y los de isometrías, que utilizaremos para estudiar funciones en el conjunto que pretendemos construir.

Definición 1.15 *Decimos que $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $F(x) = r(x - p) + p$ con $x, p \in \mathbb{R}^2$ es una homotecia en $\mathbb{R}^2$. A p se le llama centro de la homotecia y a $r > 0 \in \mathbb{R}$ la razón o constante de proporcionalidad.*

Observemos que F es afín pues $F(x) = r(x - p) + p = B(x) + (p - Bp)$ donde $B = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} = rI_d$. Y por lo tanto F es una función afín biyectiva. Su inversa $F^{-1} = L_{-B^{-1}(p-Bp)} \circ B^{-1} = L_{p-B^{-1}p} \circ B^{-1}$ es una homotecia pues $B^{-1} = \frac{1}{r}I_d$ y $F^{-1}(x) = B^{-1}(x) + p - B^{-1}p = \frac{1}{r}(x - p) + p$.

Las homotecias son importantes para la generación de fractales autosemejantes. Muchos otros fractales como los IFS(sistemas de funciones iteradas) de Barnsley son generados con composiciones de homotecias y de isometrías que preservan el centro de homotecia, algunos otros son generados por funciones afines que pertenecen a $Af(\mathbb{R})$. En nuestra construcción usaremos ciertos conjuntos fundamentales con los que podremos generar nuestro fractal autosemejante.

Definición 1.16 *Sean $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ tres puntos no colineales. Decimos que el conjunto $M = \{x \in \mathbb{R}^2 | x = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$; donde $\lambda_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1,2,3} \lambda_i = 1\}$ es un triángulo generado por p_0, p_1, p_2.*

Para cada triángulo M generado por p_0, p_1, p_2 denotaremos el conjunto de vértices de M por $V(M) = \{p_0, p_1, p_2\}$.

También usaremos $|p_0, p_1, p_2|$ para denotar al triángulo M generado por p_0, p_1, p_2, además debemos entender por coordenadas baricéntricas respecto a M como las coordenadas baricéntricas respecto a p_0, p_1, p_2. Algunos materiales sobre todo de topología ([Hocking])tratan a estos conjuntos como los n-simplex, un punto es un 0-simplex, un segmento es un 1-simplex, los triángulos definidos arriba son 2-simplex, un tetraedro es un 3-simplex, etcétera, pero en este trabajo no será utilizado este concepto.

Estaremos probando una serie de propiedades importantes para entender la estructura de nuestro futuro conjunto.

Proposición 1.17 *Si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está en $Af(\mathbb{R}^2)$, $M \subset \mathbb{R}^2$ es un triángulo generado por p_0, p_1, p_2 entonces $F(M)$ es el triángulo generado por $F(p_0), F(p_1), F(p_2)$. Además $V(F(M)) = F(V(M))$.*

Demostración: Como la función es afín, entonces tenemos que F lleva la triada p_0, p_1, p_2 a $F(p_0), F(p_1), F(p_2)$, y por otro lado como la función es biyectiva entonces $F(p_0), F(p_1), F(p_2)$ son no colineales por 1.12. Sea $x = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 \in M$ con $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_i \in [0,1]$ para $i = 0, 1, 2$, entonces $F(x) = \lambda_0 F(p_0) + \lambda_1 F(p_1) + \lambda_2 F(p_2)$ por 1.11, como $\lambda_i \in [0,1]$ entonces $F(x)$ está en el triángulo generado por $F(p_0), F(p_1), F(p_2)$.

Por otro lado sea $p = \lambda_0 F(p_0) + \lambda_1 F(p_1) + \lambda_2 F(p_2)$, donde $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_i \in [0,1]$ para $i = 0, 1, 2$, damos $x = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2$ y por 1.11 $F(x) = \lambda_0 F(p_0) + \lambda_1 F(p_1) + \lambda_2 F(p_2) = p$. Por lo tanto $F(M)$ es el triángulo generado por $F(p_0), F(p_1), F(p_2)$.

$V(F(M)) = \{F(p_0), F(p_1), F(p_2)\}$ y $F(V(M)) = \{F(p_0), F(p_1), F(p_2)\}$ y es claro que los dos conjuntos son iguales. ■

La misma construcción que empleamos para las coordenadas baricéntricas en el plano la podemos hacer en el caso de una recta, y análogo a la construcción de un triángulo en el plano, construiremos lo que es un segmento en la recta, además definiremos su punto medio.

Definición 1.18 *Sean $p_0 \neq p_1 \in \mathbb{R}^2$, diremos que el conjunto $\{x \in \mathbb{R}^2 | x = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1,$ $\lambda_0, \lambda_1 \in [0,1]$ y $\lambda_0 + \lambda_1 = 1\}$ es un segmento en $\mathbb{R}^2$ y lo denotaremos como $p_0 p_1$.*

si $p_0 \neq p$, al punto $\frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_1$, lo llamaremos el punto medio del segmento $p_0 p_1$ y lo denotaremos como $\frac{1}{2}p_0 p_1$.

Notemos que el punto $\frac{1}{2}pp$ es igual al punto p. Pues $\frac{1}{2}pp = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p = p$.

además $\frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}qp$ pues $\frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}qp$.

También tenemos $F(\frac{1}{2}pq) = F(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q) = \frac{1}{2}F(p) + \frac{1}{2}F(q) = \frac{1}{2}F(p)F(q)$. Esta será una propiedad fundamental que utilizaremos en nuestro desarrollo.

De ahora en adelante supondremos que el segmento pq es generado por p y q distintos, o dicho de otro modo, el segmento es no singular. De no ser singular probaremos la siguiente proposición que confirma nuestra intuición de que los puntos son distintos, y están en una misma línea recta.

Proposición 1.19 *Si $p \neq q$, entonces los puntos $p, q, \frac{1}{2}pq$ son colineales y son distintos.*

Demostración: $\frac{1}{2}pq = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q$ por lo que es claro que está en la línea p, q. Si $p \neq q$ y $\frac{1}{2}pq = p$, entonces $\frac{1}{2}pq - p = 0 = \frac{1}{2}q - \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}(q - p)$, lo que implica que $p - q = 0$, nos lleva a una contradicción. Lo mismo si $\frac{1}{2}pq = q$ y por lo tanto los tres puntos son distintos. ■

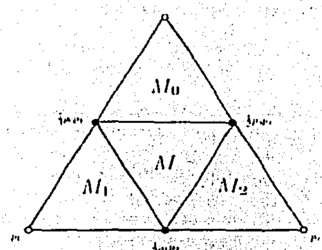
1.2. Homotecias, Triángulos y sus propiedades.

Podemos ahora definir nuevos conjuntos, en la siguiente definición notaremos la estructura hereditaria que podemos obtener a partir de un triángulo dado, análoga al caso de partir un intervalo en mitades que nos permite obtener varios resultados básicos del análisis.

Definición 1.20 *Sea* $M = |p_0, p_1, p_2|$. *A* $S(M) = \{\frac{1}{2}p_ip_j | i \neq j; i, j = 0, 1, 2\}$, *le llamamos conjunto de puntos descendientes de* M *o de hijos de* M.

A $D(M) = \{|\frac{1}{2}p_0p_j, \frac{1}{2}p_1p_j, \frac{1}{2}p_2p_j| \mid j = 0, 1, 2\}$ *el conjunto de triángulos descendientes de* M *o de hijas de* M, *denotamos a cada triángulo en* $D(M)$ *como* $(M)_i = |\frac{1}{2}p_0p_i, \frac{1}{2}p_1p_i, \frac{1}{2}p_2p_i|$, *con* $i \in \{0, 1, 2\}$.

En ambos casos se dice que M *es el triángulo madre de cada punto en* $S(M)$ *o de cada triángulo en* $D(M)$.



Notemos que $D(M) = \{(M)_0, (M)_1, (M)_2\}$. La notación $()_i$ nos dará una idea de cómo apareamos cada triángulo en la colección $D(M)$ con un vértice de M. Notemos que $S(M) \cap V(M) = \varnothing$ ya que $\frac{1}{2}p_kp_j$ es distinto de p_k y p_j, cuando estos son distintos según 1.19 y por lo tanto $k \neq j$ para $k, j = 0, 1, 2$.

Asumiremos de ahora en adelante que los puntos p_0, p_1, p_2 están en un triángulo equilátero y que las distancias euclídeas entre dos de ellos distintos son iguales a 1.

La siguiente definición nos da un sistema finito de homotecias, un requisito indispensable para poder definir fractales autosemejantes.

Definición 1.21 *Sean* p_0, p_1, p_2 *tres puntos no colineales, decimos que las homotecias* $F_0, F_1, F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dadas por*

$F_0 = \frac{1}{2}(x - p_0) + p_0,$

$F_1 = \frac{1}{2}(x - p_1) + p_1,$

$F_2 = \frac{1}{2}(x - p_2) + p_2,$

forman un sistema de homotecias correspondiente a la triada p_0, p_1, p_2, *asumiremos que* F_i *es la homotecia con razón* $\frac{1}{2}$ *y centro* p_i.

En otros términos, $F_i = L_{p_i - Bp_i} \circ B = L_{Bp_i} \circ B$ para $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ por lo que $F_i(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}p_i$. Es esencial la siguiente proposición pues nos dice que el punto medio de un segmento se obtiene mediante una homotecia con centro en cada uno de sus extremos.

Proposición 1.22 *Sea p_0, p_1, p_2 una triada de puntos no colineales, y $\{F_i\}$ su sistema correspondiente, entonces $F_i(p_j) = \frac{1}{2}p_ip_j$ y $F_i(p_i) = p_i$.*

Demostración: $F_i(p_j) = \frac{1}{2}p_j + \frac{1}{2}p_i = \frac{1}{2}p_ip_j$ para cualquier $i, j = 0, 1, 2$. Si $i = j$ entonces $\frac{1}{2}p_ip_i = p_i$. ■

Continuamos con nuestra tendencia de describir puntos medios y triángulos descendientes haciendo que nuestro tratamiento con coordenadas baricéntricas sea el mismo que con homotecias.

Los siguientes dos resultados nos describen la relación entre los elementos de $D(M)$ y las imágenes de M bajo homotecias. En particular en el segundo resultado se enfatiza el resultado de la primera al tratarlo respecto a composiciones.

Proposición 1.23 *Sea p_0, p_1, p_2 una triada no colineal, $\{F_i\}$ su sistema correspondiente y sea $M = |p_0, p_1, p_2|$, entonces $(M)_i = F_i(M)$. Además $F_i(M) \subset M$.*

Demostración: Por definición $(M)_i = |\frac{1}{2}p_0p_i, \frac{1}{2}p_1p_i, \frac{1}{2}p_2p_i|$, por otro lado $F_i(p_j) = \frac{1}{2}p_ip_j = \frac{1}{2}p_jp_i$ para $j = 0, 1, 2$ por 1.22, y que por 1.17 podemos concluir que $(M)_i = F_i(M)$.

Sea $q = \lambda_0(\frac{1}{2}p_0p_i) + \lambda_1(\frac{1}{2}p_1p_i) + \lambda_2(\frac{1}{2}p_2p_i) \in (M)_i$ con $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ y $\lambda_j \in [0, 1]$, sin pérdida de generalidad supongamos que $i = 0$, entonces $q = \frac{1}{2}\lambda_0(p_0 + p_0) + \frac{1}{2}\lambda_1(p_1 + p_0) + \frac{1}{2}\lambda_2(p_2 + p_0) = \frac{1}{2}(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)p_0 + \frac{1}{2}(\lambda_0p_0 + \lambda_1p_1 + \lambda_2p_2) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_0)p_0 + \frac{1}{2}\lambda_1p_1 + \frac{1}{2}\lambda_2p_2$. Ésta es la expresión baricéntrica de q con respecto a p_0, p_1, p_2, que es única por 1.7, y es claro que $\frac{1}{2}\lambda_0, \frac{1}{2}\lambda_1, \frac{1}{2}\lambda_2 \in [0, \frac{1}{2}] \subset [0, 1]$ y $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda_0 \in [\frac{1}{2}, 1] \subset [0, 1]$ por las propiedades de la multiplicación en desigualdades por $\frac{1}{2} > 0$. De donde concluimos que $(M)_i \subset M$. ■

Ahora veamos que este proceso se puede continuar, o iterar, pues nuestras homotecias están en $Af(\mathbb{R}^2)$, entonces veamos que en este nivel es válido continuar con la proposición 1.23.

Proposición 1.24 *Sea $M = |p_0, p_1, p_2|$, y $\{F_i\}$ el sistema de homotecias respecto a p_i con $i = 0, 1, 2$, asumamos que $q_i = F_{i_1} ... F_{i_{m-1}}(p_i)$ para $i = 0, 1, 2$ y $N = F_{i_1} ... F_{i_{m-1}}(M)$, entonces $F_{i_1} ... F_{i_m}(M) = (F_{i_1} ... F_{i_{m-1}}(M))_{i_m} \in D(F_{i_1} ... F_{i_{m-1}}(M))$ para todos $i_k \in \{0, 1, 2\}$ con $k \in \{1, ..., m\}$ y todo $m \in \mathbb{N}$.*

Demostración: Por 1.23, $F_{i_m}(M) = (M)_{i_m}$ y si $N = F_{i_1} ... F_{i_{m-1}}(M) = |q_0, q_1, q_2|$, entonces $V((N)_{i_m}) = \{\frac{1}{2}q_iq_{i_m} \mid i \in \{0, 1, 2\}\}$ y por otro lado $F_{i_1} ... F_{i_{m-1}}F_{i_m}(p_i) = F_{i_1} ... F_{i_{m-1}}(\frac{1}{2}p_{i_m} + \frac{1}{2}p_i)$

$= \frac{1}{2}F_{i_1} ... F_{i_{m-1}}(p_{i_m}) + \frac{1}{2}F_{i_1} ... F_{i_{m-1}}(p_i) = \frac{1}{2}q_i + \frac{1}{2}q_{i_m} = \frac{1}{2}q_iq_{i_m}$ (por 1.5) que está en $V((N)_{i_m})$ y esto sucede para $i = 0, 1, 2$, entonces por 1.17 $F_{i_1} ... F_{i_m}(M) = (N)_{i_m} \in D(N)$, y por lo tanto $F_{i_1} ... F_{i_m}(M) \in D(F_{i_1} ... F_{i_{m-1}}(M))$. ■

El siguiente resultado es esencial para las demostraciones que haremos pues nos describe las intersecciones de los triángulos en $D(M)$, y la relación entre estas intersecciones y los puntos de $S(M)$.

Lema 1.25 *Sean $M = |p_0, p_1, p_2|$, y $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$, se cumple:*
a)Si $(M)_i, (M)_j \in D(M)$, entonces $(M)_i \cap (M)_j = V((M)_i) \cap V((M)_j) = \{\frac{1}{2}p_ip_j\} \subset S(M)$.
b)$S(M) = \bigcup_{\substack{i,j\in\{0,1,2\}\\ i\neq j}} V((M)_i) \cap V((M)_j)$.
c)Si $p = \frac{1}{2}p_ip_j$, entonces $p \notin V((M)_k)$.

Demostración: a)Lo demostraremos para $(M)_0$ y $(M)_1$. $(M)_0 = |p_0, \frac{1}{2}p_1p_0, \frac{1}{2}p_2p_0|$ y $(M)_1 = |\frac{1}{2}p_0p_1, p_1, \frac{1}{2}p_2p_1|$. Sea $x \in (M)_0 \cap (M)_1$, entonces usando las coordenadas baricéntricas respecto $(M)_0$ tenemos:
$x = \mu_0p_0 + \mu_1[\frac{1}{2}p_1p_0] + \mu_2[\frac{1}{2}p_2p_0] = \mu_0p_0 + \frac{1}{2}\mu_1p_0 + \frac{1}{2}\mu_1p_1 + \frac{1}{2}\mu_2p_0 + \frac{1}{2}\mu_2p_2$
$= (\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2})p_0 + \frac{1}{2}\mu_1p_1 + \frac{1}{2}\mu_2p_2$.
Y respecto $(M)_1$:
$x = \nu_0[\frac{1}{2}p_0p_1] + \nu_1p_1 + \nu_2[\frac{1}{2}p_2p_1] = \frac{1}{2}\nu_0p_0 + \frac{1}{2}\nu_0p_1 + \nu_1p_1 + \frac{1}{2}\nu_2p_2 + \frac{1}{2}\nu_2p_1$
$= \frac{1}{2}\nu_0p_0 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu_1)p_1 + \frac{1}{2}\nu_2p_2$.
Ambas coordenadas baricéntricas son iguales por que p_0, p_1, p_2 son no colineales y por 1.7. Por lo que $\frac{1}{2}\mu_2 = \frac{1}{2}\nu_2$, $\frac{1}{2}\mu_0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\nu_0$ y $\frac{1}{2}\mu_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\nu_1$, entonces $\mu_0 + 1 = \nu_0$ y como $\mu_0, \nu_0 \in [0, 1]$, entonces no le queda mas que ser $\nu_0 = 1$ y $\mu_0 = 0$. Luego $\mu_1 = \nu_1 + 1$ y como $\nu_1, \mu_1 \in [0, 1]$ entonces $\mu_1 = 1$ y $\nu_1 = 0$, lo que implica $\nu_2 = 1 - \nu_1 - \nu_0 = 0 = 1 - \mu_1 - \mu_0 = \mu_2$. Por lo tanto $x = \frac{1}{2}p_0 + \frac{1}{2}p_1 = \frac{1}{2}p_0p_1 \in (M)_0 \cap (M)_1$. Para $i, j = 0, 1, 2$ distintos se obtiene $\frac{1}{2}p_ip_j \in (M)_i \cap (M)_j$, además $\frac{1}{2}p_ip_j \in S(M)$ y $\frac{1}{2}p_ip_j \in V((M)_i) \cap V((M)_j)$.
b)Si $p \in S(M)$ entonces $p = \frac{1}{2}p_ip_j$ con $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$, $\frac{1}{2}p_jp_i \in V((M)_i)$ y $\frac{1}{2}p_ip_j \in V((M)_j)$ por lo que $p \in V((M)_i) \cap V((M)_j)$. La otra contención se probó en a).
c)Si $p = \frac{1}{2}p_ip_j \in V((M)_k)$ entonces $p = \frac{1}{2}p_ip_k$ o $p = \frac{1}{2}p_jp_k$, luego $\frac{1}{2}p_ip_j = \frac{1}{2}p_ip_k$, desarrollando obtenemos $\frac{1}{2}p_i + \frac{1}{2}p_j = \frac{1}{2}p_i + \frac{1}{2}p_k$ lo que implica $p_j = p_k$ y es una contradicción, para el otro caso es lo mismo, por lo tanto $\frac{1}{2}p_ip_j \notin V((M)_k)$. ∎

Ahora el siguiente resultado nos da relaciones entre los vértices de cada $N \in D(M)$ y los vértices e *hijos* de M.

Proposición 1.26 *Sea $M = |q_0, q_1, q_2|$ un triángulo en $\mathbb{R}^2$, entonces*
a)$V(M) \cup S(M) = \bigcup_{N\in D(M)} V(N)$.
b)Si $N \in D(M)$ entonces $V(N) \cap V(M) = \{q\}$.
c)Si $q \in V(M)$ entonces existe un único $N \in D(M)$ tal que $q \in V(N) \cap V(M)$.
d)Si $N \in D(M)$ es tal que $p \in V(M) \cap N$ entonces $p \in V(N)$.

Demostración: a)Como $D(M) = \{(M)_0, (M)_1, (M)_2\}$ entonces
$\bigcup_{i\in\{0,1,2\}} V((M)_i) = \{q_0, q_1, q_2, \frac{1}{2}q_0q_1, \frac{1}{2}q_0q_2, \frac{1}{2}q_1q_2\} = V(M) \cup S(M)$.
b)Sin pérdida de generalidad supongamos que $N = (M)_0$. Entonces $(M)_0 = |q_0, \frac{1}{2}q_1q_0, \frac{1}{2}q_2q_0|$ y por lo tanto $V((M)_0) = \{q_0, \frac{1}{2}q_1q_0, \frac{1}{2}q_2q_0\}$, y como $V(M) = |q_0, q_1, q_2|$ entonces $V(M) \cap V(N) = \{q_0\}$.
c)Sea $q = q_i \in V(M)$ para $i = 0, 1, 2$, es claro que $q_i \in V((M)_i)$, de existir $j \neq i \in \{0, 1, 2\}$ tal que $q \in V((M)_j)$, por lema 1.25 tenemos $q \in V((M)_i) \cap V((M)_j) \subset S(M)$ pero $S(M) \cap V(M) = \varnothing$. Por lo tanto $q \in V(N)$ con $N = (M)_i$ y N es el único triángulo en $D(M)$ con esa propiedad.

d)Sea $p = q_i \in V(M)$, entonces $q_i \in V((M)_i) \cap N$, si $(M)_i \neq N$, por 1.25, $q \in S(M) \cap V(M) = \varnothing$, lo cual no es cierto, entonces $N = (M)_i$ y $p \in V(N)$. ■

Hemos probado la relación entre $V(M)$ y $S(M)$ y todos los vértices de los triángulos en $D(M)$, estas son las relaciones que hay entre el triángulo y sus estructuras mas finas conformadas por $S(M)$ y $D(M)$.

1.3. Conjuntos de triángulos y el triángulo de Sierpinsky.

Definición 1.27 *considerarемos los siguientes conjuntos:*
$K_0 = |p_0, p_1, p_2|$,
$G_0 = \{K_0\}$, *los siguientes se definen recursivamente:*
$G_m = \bigcup_{M \in G_{m-1}} D(M)$ *para cada* $m \geq 1$.
$K_m = \bigcup_{M \in G_m} M$. *al subíndice* m *le llamaremos el orden de cada uno de estos conjuntos.*

Notemos que G_m para cada $m \in \mathbb{N}$ es un conjunto de triángulos, mientras K_m es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Enseguida probaremos proposiciones referentes a las relaciones entre los elementos de G_m y las composiciones de la forma $F_{i_1} \ldots F_{i_m}$ que están en $Af(\mathbb{R}^2)$, y de esta forma obtendremos una descripción más clara de G_m.

Sea $\{F_i\}$ el sistema de homotecias correspondiente a la triada p_0, p_1, p_2 de puntos no colineales, de ahora en adelante lo llamaremos el sistema de homotecias asociado al triángulo $M = |p_0, p_1, p_2|$, o simplemente el sistema asociado a M.

Proposición 1.28 *Sea* $\{F_i\}$ *el sistema asociado a* M, *entonces* $F_{i_1} \ldots F_{i_m}(M) \in G_m$ *para cada* $i_k = 0, 1, 2$ *y* $1 \leq k \leq m$.

Demostración: Por inducción, es claro que $(M)_i \in G_1$ pues $(M)_i \in D(K_0)$ y por 1.23 $(M)_i = F_i(K_0)$ para cada $i = 0, 1, 2$, y por ello cada una está en G_1.

Ahora supongamos que $F_{i_1} \ldots F_{i_{m-1}}(M) \in G_{m-1}$. Tomamos $i_1, \ldots, i_m$ de tal manera que por 1.24 $F_{i_1} \ldots F_{i_m}(M)$ está en $D(F_{i_1} \ldots F_{i_{m-1}}(M))$ y como $F_{i_1} \ldots F_{i_{m-1}}(M) \in G_{m-1}$ entonces se cumple que $F_{i_1} \ldots F_{i_m}(M) \in G_m$. ■

Es necesario utilizar una notación que intente reflejar más claramente esta estructura hereditaria de G_m y nos aclare las relaciones entre elementos de G_m y entre elementos de G_n para $n \neq m$.

Sea $\{F_i\}$ correspondiente a K_0, entonces a $F_{i_1} \ldots F_{i_m}(K_0)$ lo denotaremos como $M_{i_1 \ldots i_m}$. Denotaremos a K_0 como M_* en algunos casos. De ahora en adelante asumiremos que el sistema $\{F_i\}$ está asociado a M_*, a menos que se diga lo contrario.

Definición 1.29 *Sea* $\mathbb{S}_m = \{1, 2, \ldots, m\} \subset \mathbb{N}$, *entonces decimos que* $\mathbb{A}_m = \{\alpha : \mathbb{S}_m \to \{0, 1, 2\}\}$ *es un conjunto denotador o de índices, y denotamos a* $M_{i_1 \ldots i_m}$ *como* M_α, *siendo* $\alpha(j) = i_j$ *para* $j \in \mathbb{S}_m$. *Si* $m = 0$ *diremos que* $\mathbb{A}_0 = \{*\}$ *y* $M_\alpha = M_*$ *para* $\alpha \in \mathbb{A}_0$.

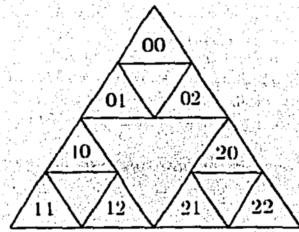


Figura 1.1: Los subíndices que denotan a $M \in G_2$.

Esta definición la utilizaremos en algunas demostraciones en este capítulo.

La proposición 1.28 nos indica que $M_\alpha \in G_m$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{A}_m$. Como F_i para $i = \{0, 1, 2\}$ es biyectiva y pertenece a $Af(\mathbb{R}^2)$, entonces $M_{i_1 \ldots i_m}$ está bien definida, y además para cada $M_{i_1 \ldots i_m}$ existirá un único triángulo $M_{i_n \ldots i_m}$ con $1 < n < m$ tal que $F_{i_1} \ldots F_{i_{n-1}}(M_{i_n \ldots i_m}) = M_{i_1 \ldots i_m}$. Por lo tanto tiene sentido que $\mathrm{xc}(M_{i_1 \ldots i_m})_j = M_{i_1 \ldots i_m j}$ siempre que $q_i = F_{i_1} \ldots F_{i_m}(p_i)$ y $V(M_{i_1 \ldots i_m}) = [q_0, q_1, q_2]$, y entonces nuestra definición es consistente con la composición de homotecias $\{F_i\}$ asociadas a $M_\bullet$.

Nos serán de gran importancia los siguientes resultados, ya que nos describen la correspondencia que hay entre $\mathbb{A}_m$ y G_m.

Proposición 1.30 *Para todo* $m \in \mathbb{N}$, $G_m = \{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}_m}$.

Demostración: Sólo hay que probar que $G_m \subseteq \{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}_m}$ pues la otra contención ya se probó. Por inducción sea $N \in G_1$, entonces $N \in D(M_\bullet)$ y por definición $N = (M_\bullet)_i$ para algún $i = 0, 1, 2$, Como $(M_\bullet)_i = F_i(M_\bullet) = M_i$ entonces $N = M_i \in \{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}_1}$.

Supongamos que es cierto para $m > 1$ que $G_m \subseteq \{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}_m}$. Sea $N \in G_{m+1}$, por definición $N \in D(L)$ para algún $L \in G_m$, y por definición $N = (L)_j$ para algún $j = 0, 1, 2$. Por hipótesis de inducción existe $\alpha = \{i_1, \ldots, i_m\} \in \mathbb{A}_m$ tal que $L = M_\alpha$. Como $F_{i_1} \ldots F_{i_m} F_j(K_0) = (F_{i_1} \ldots F_{i_m}(K_0))_j = (L)_j = N$ por 1.24. Entonces $N = M_\beta$ donde $\beta = \{i_1, \ldots, i_m, j\} \in \mathbb{A}_{m+1}$. Por lo tanto hemos encontrado para todo $N \in G_{m-1}$ un $\beta \in \mathbb{A}_{m+1}$ tal que $N = M_\beta \in \{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}_{m+1}}$ y por lo tanto $G_{m+1} \subseteq \{M_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{A}_{m+1}}$. ■

La siguiente proposición, aunque parece un hecho intuitivo que dos triángulos distintos en G_m, de intersectarse, lo hacen en un vértice común, es un hecho que tiene que probarse de acuerdo a nuestro desarrollo.

Proposición 1.31 *Si* $M, N \in G_m$ *y* $M \neq N$ *y* $M \cap N \neq \varnothing$, *entonces* $M \cap N = \{q\}$ *y* $\{q\} = V(M) \cap V(N)$.

Demostración: Por inducción, si $M, N \in G_1$ entonces $M, N \in D(K_0)$ y por el lema 1.25, $M \cap N = \{p\}$ y $p \in V(M) \cap V(N) \subset S(K_0)$.

Supongamos que $m > 0$, $M, N \in G_m$, $M \neq N$ y $M \cap N \neq \varnothing$, entonces $M \cap N = V(M) \cap V(N) = \{q\}$. Sean $M, N \in G_{m+1}$, $M \neq N$ y $M \cap N \neq \varnothing$. Existen por definición $M', N' \in G_m$ tal que $M \in D(M')$ y $N \in D(N')$. Si $M' = N'$, entonces $M, N \in D(M')$ y por el lema 1.25 $M \cap N = \{q\} \in S(M')$ y $\{q\} = V(M) \cap V(N)$. Si $M' \neq N'$, tenemos $\varnothing \neq M \cap N \subset M' \cap N'$ pues $M \subset M'$ y $N \subset N'$ por 1.23, por hipótesis de inducción $M' \cap N' = \{q\} = V(M') \cap V(N')$ y por lo tanto $\{q\} = M \cap N$. Y por 1.26.d) concluimos que $q \in V(M) \cap V(N)$. ■

Otro hecho intuitivo es que un triángulo descendiente y un punto hijo tienen sólo un triángulo madre.

Proposición 1.32 *Sea $M \in G_{m-1}$ y sean $p \in S(M)$ y $N \in D(M)$, entonces M es la única con estas dos propiedades y con $p \in M$ y $N \subset M$.*

Demostración: Supongamos que $N \in D(M')$ para $M' \in G_{m-1} \setminus \{M\}$, y por 1.23, $N \subset M \cap M'$, entonces por 1.31 $N \subset \{p\} = M \cap N$, lo cual no es cierto. Por lo tanto $M' = M$.

Sea $p \in S(M)$, supongamos que existe $M' \in G_{m-1} \setminus \{M\}$ tal que $p \in M'$, entonces $p \in M' \cap M = V(M') \cap V(M)$ por 1.31, por lo que $p \in V(M) \cap S(M) = \varnothing$ y esto no es cierto. Por lo tanto $M = M'$. ■

En la siguiente proposición probamos que la correspondencia entre $\mathbb{A}_m$ y G_m es uno a uno.

Proposición 1.33 *Para toda $m > 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{A}_m$ y $\alpha \neq \beta \Leftrightarrow M_\alpha \neq M_\beta$.*

Demostración: Sean $\alpha = \{i_1, ..., i_m\}$ y $\beta = \{j_1, ..., j_m\}$ distintos y dividimos en dos casos: Si $i_k = j_k$ para todo $0 < k < m$ entonces $F_{i_m} \neq F_{j_m}$, si suponemos $F_{i_1}...F_{i_{m-1}}F_{i_m}(M_*) = F_{i_1}...F_{i_{m-1}}F_{j_m}(M_*)$, como estas funciones están en $Af(\mathbb{R}^2)$ entonces aplicamos las $m-1$ inversas y obtenemos $F_{i_m}(M_*) = F_{j_m}(M_*)$, luego $F_{j_m}^{-1}F_{i_m}(M_*) = M_*$ que en forma explícita obtenemos

$F_{j_m}^{-1}F_{i_n} = L_{-B^{-1}Bp_{j_m}} \circ B^{-1} \circ L_{Bp_{i_m}} \circ B = L_{-p_{j_m}} \circ B^{-1} \circ L_{Bp_{i_m}} \circ B = L_{p_{i_m} - p_{j_m}}$, por lo que

$F_{j_m}^{-1}F_{i_m}(p_i) = p_i + p_{i_m} - p_{j_m} = p_j$ donde j le corresponde a cada i, entonces $p_{i_m} - p_{j_m} = p_j - p_i$ para todo i y su j correspondiente, lo que nos diría junto con el resultado 1.17 que M_* está generado por una triada colineal, lo que no es posible, entonces $F_{i_m} = F_{j_m}$ lo cual contradice que $F_{i_m} \neq F_{j_m}$. Si $F_{i_1}...F_{i_{m-1}}(M_*) \neq F_{j_1}...F_{j_{m-1}}(M_*)$, por 1.24 $F_{i_1}...F_{i_m}(M_*) \in D(F_{i_1}...F_{i_{m-1}}(M_*))$ y $F_{i_1}...F_{i_m}(M_*) \in D(F_{j_1}...F_{j_{m-1}}(M_*))$, por ello $F_{i_1}...F_{i_m}(M_*) \subseteq F_{i_1}...F_{i_{m-1}}(M_*) \cap F_{j_1}...F_{j_{m-1}}(M_*) = \{p\}$ lo cual no es cierto. Por lo tanto $M_\alpha \neq M_\beta$.

Por otro lado si $M_\alpha \neq M_\beta$ pero $\alpha = \{i_1 ... i_m\} = \beta$ entonces $M_\alpha = F_{i_1}...F_{i_m}(K_0) = M_\beta$ que es una contradicción con $M_\alpha \neq M_\beta$. Por lo tanto $\alpha \neq \beta$ si y solo si $M_\alpha \neq M_\beta$. ■

Hasta ahora hemos trabajado con las "generaciones" de triángulos, pero ahora estudiaremos lo que sucede con diferentes niveles de puntos.

Definición 1.34 *Sean los siguientes conjuntos:*

$V_0 = \{p_0, p_1, p_2\}$, $V_n = \bigcup_{i=0,1,2} F_i(V_{n-1})$. *Decimos que V_m es el conjunto de vértices de orden m.*

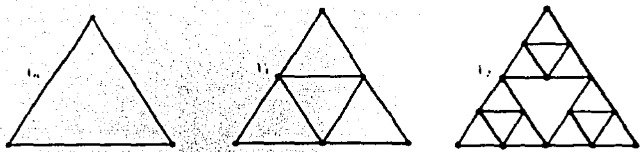


Figura 1.2: De izquierda a derecha, V_0, V_1 y V_2 van aumentando el número de vértices, y los de la izquierda están contenidos en los de la derecha.

Necesitamos probar la relación entre los puntos en V_m y los triángulos en G_m.

Proposición 1.35 *Para todo $m \in \mathbb{N}$, se cumple $V_m = \bigcup_{M \in G_m} V(M)$.*

Demostración: Por Inducción. Es claro que $V_0 = \{p_0, p_1, p_2\} = V(K_0)$.

Supongamos que $V_m = \bigcup_{M \in G_m} V(M)$ para $m \geq 1$ .Para $m+1$, si $p \in V_{m+1}$ entonces existe $q \in V_m$ y $j \in \{0, 1, 2\}$ tal que $F_j(q) = p$, por hipótesis de inducción existe $N_{i_1 \dots i_m} \in G_m$ tal que $q \in V(N_{i_1 \dots i_m})$, luego $F_j(N_{i_1 \dots i_m}) = N_{j, i_1 \dots i_m} \in G_{m+1}$ por 1.28, por lo tanto $p \in V(N_{j, i_1 \dots i_m})$.

Si $p \in V(M)$ para $M \in G_{m+1}$ entonces por 1.30 existe $\alpha = \{i_1, \dots, i_{m+1}\} \in \mathbb{A}_{m+1}$ tal que $M = M_\alpha$, entonces $M = F_{i_1}(M_{i_2 \dots i_m})$, por 1.17 y por ser F_{i_1} biyectiva, existe $q \in V(M_{i_1 \dots i_m})$ tal que $F_{i_1}(q) = p$, pero por hipótesis de inducción $q \in V_m$ entonces $p \in F_{i_1}(V_m)$ y en consecuencia $p \in V_{m+1}$. Por lo tanto se ha comprobado la igualdad. ■

En las siguientes dos proposiciones probaremos propiedades fundamentales de los conjuntos V_m, tanto relaciones entre diferentes V_m como con los hijos y vértices de triángulos en G_m.

Proposición 1.36 *Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces: a) $V_m \subset V_{m+1}$.*

b) $V_m = V_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{m} V_i - V_{i-1})$, la unión es disjunta.

Demostración: a)Sea $M \in G_m$, por 1.26 tenemos $V(M) \subset \bigcup_{N \in D(M)} V(N) \subset \bigcup_{N \in G_{m+1}} V(N) = V_{m+1}$, como $V_m = \bigcup_{N \in G_m} V(N)$ entonces $V(M) \subset V_{m+1}$ para todo $M \in G_m$, por lo tanto $V_m \subset V_{m+1}$.

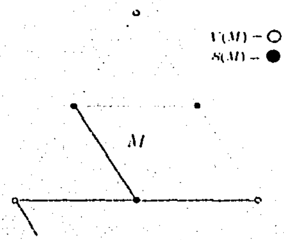
b)$V_0 = V_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{0} V_i - V_{i-1}) = V_0 \cup \varnothing = V_0$. Para $m > 0$ tenemos:

$V_m = (V_m \cap V_{m-1}) \cup (V_m - V_{m-1}) = V_{m-1} \cup (V_m - V_{m-1}) =$

$= V_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{m-1} V_i - V_{i-1}) \cup (V_m - V_{m-1}) = V_0 \cup (\bigcup_{i=1}^{m} V_i - V_{i-1})$.

Si $i \geq 0$ y $j > i$ tenemos $V_i \subseteq V_{j-1}$ y $(V_{j-1})^c \subseteq (V_i)^c$, entonces

$(V_j - V_{j-1}) \cap (V_i - V_{i-1}) \subseteq (V_j \cap (V_{j-1})^c) \cap V_i \subseteq V_j \cap ((V_i)^c \cap V_i) = \varnothing$. Es válido para $i = 0$ pues $V_{i-1} = \varnothing$ y $V_i \setminus V_{i-1} = V_0$. ■



Proposición 1.37 *Sea $m \in \mathbb{N}$, entonces: a)$V_{m+1} = \bigcup\limits_{M \in G_m} (V(M) \cup S(M))$.*

b)$V_{m+1} \setminus V_m = \bigcup\limits_{M \in G_m} S(M)$

Demostración: a)Sea $p \in V_{m+1}$, por 1.35 existe $M \in G_{m+1}$ tal que $p \in V(M)$. Por proposición 1.32 existe un único $M' \in G_m$ tal que $M \in D(M')$, de tal manera que $p \in V(M') \cup S(M')$ por 1.26.

Si $M \in G_m$ tal que $p \in V(M) \cup S(M)$, por 1.26 tenemos que $p \in \bigcup\limits_{N \in D(M)} V(N)$, por lo que existe $N \in D(M)$ tal que $p \in V(N)$, y como $N \in G_{m+1}$ y por 1.35 concluimos que $p \in V_{m+1}$.

b)Si $p \in V_{m+1} \setminus V_m$ entonces para todo $M \in G_m$, $p \notin V(M)$ pues $V(M) \subseteq V_m$, entonces $p \in S(M)$ para algún $M \in G_m$.

Si $p \in S(M)$ para algún $M \in G_m$, por 1.26 existe $N \in D(M) \subseteq G_{m+1}$ tal que $p \in V(N)$, M es la única que contiene a p por 1.32, entonces $p \in V_{m+1} \setminus V_m$. ■

El enunciado anterior nos caracteriza los puntos de V_m en términos de vértices e hijos de triángulos en G_{m-1}, lo cual será útil más adelante.

Daremos un resultado importante que nos dice cuantos triángulos pueden contener a un sólo punto dado, dependiendo de si éste se encuentra en V_0 o en $V_m - V_0$.

Lema 1.38 *Sea $m \in \mathbb{N}$. a)Si $p \in V_0$ entonces existe un único $N \in G_m$ tal que $p \in V(N)$.*

b)Si $p \in V_m - V_0$ entonces existen solo dos $M, N \in G_m$ tal que $p \in V(N) \cap V(M)$.

Demostración: a)Sea $p_j \in V_0$. Por inducción, si $m = 0$ es claro que $p_j \in V(M_*)$ y no existe otro con esta propiedad. Supongamos que $p_j \in V(N)$ para un único $N \in G_m$ y $m > 0$. Por 1.26, $p \in V(M)$ para un único $M \in D(N)$, si $p \in M' \in G_{m+1} \setminus D(N)$, por 1.32 existe un único $N' \in G_m \setminus \{N\}$ tal que $M' \in D(N')$, y por 1.26 $p \in N' \cap N = V(N') \cap V(N)$, contradiciendo la unicidad de N. Por lo tanto M es única.

b)Sea $p \in V_{m+1} \setminus V_m$, por 1.37 se cumple $p \in \bigcup\limits_{M \in G_m} S(M)$, y por 1.32 existe un único $M' \in G_m$ tal que $p \in S(M')$, Por 1.25 $M, N \in D(M')$ son las únicas tales que $p \in V(M) \cap V(N)$,

por 1.32 $M' \in G_m$ es la única tal que $p \in M'$, por lo tanto sólo M y N cumplen con la afirmación.

Por inducción. Si $m = 1$, $p \in V_1 \setminus V_0$ entonces del párrafo anterior se deduce que sólo existen $M, N \in G_1$ tal que $p \in V(M) \cap V(N)$. Supongamos que si $p \in V_m$ entonces existen sólo $M', N' \in G_m$ tales que $p \in M' \cap N'$. El caso $p \in V_{m+1} \setminus V_m$ ya se probo, si $p \in V_m$ directamente de la hipótesis de inducción $p \in M' \cap N'$, por 1.26 existe un único $M \in D(M')$ y $N \in D(N')$ tales que $p \in V(M) \cap V(N)$. M y N son los únicos en G_{m+1} tales que $p \in V(M) \cap V(N)$ pues si $p \in V(L)$, $L \in G_{m+1} \setminus \{M, N\}$ y por 1.32 $L \in D(L')$ para un único $L' \in G_m$, pero por hipótesis de inducción $L' \in \{M', N'\}$, de donde $L \in D(M') \cup D(N')$, pero por la unicidad de las M, N en $D(M'), D(N')$ concluimos que $L \in \{M, N\}$. ■

Notación: Sea $p \in V_m$, sea $\{F_i\}$ el sistema asociado a $M_* = |p_0, p_1, p_2|$, diremos que $p = p_{i_0 \ldots i_m} = F_{i_0} \ldots F_{i_{m-1}}(p_{i_m})$. Para $m = 0$ esta definición es consistente pues $p_i = I_d(p_i)$. Denominamos a esta notación como la representación de p en V_m respecto a $\{p_i\}_{i=0,1,2}$.

De lo anterior deducimos una especie de "coordenadas artificiales" que nos dan una idea más clara de la ubicación de un punto en cada V_m para $m \in \mathbb{N}$, y la siguiente proposición nos muestra la relación entre esto y la descripción de G_m.

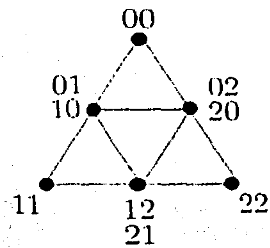


Figura 1.3: Representaciones de $p \in V_2$

Proposición 1.39 *Si $p = p_{i_0 \ldots i_m}$, entonces $p \in V(M_{i_0 \ldots i_{m-1}})$. Si $p \in V(M_{i_0 \ldots i_{m-1}})$ entonces $p = p_{i_0 \ldots i_{m-1} j}$ es una representación de p en V_m para algún $j = 0, 1, 2$.*

Demostración: Si $m = 0$ es claro que $p_i \in V(K_0)$ para $i = 0, 1, 2$.

Para el caso $m > 0$, como $p = F_{i_0} \ldots F_{i_{m-1}}(p_{i_m}) \in F_{i_0} \ldots F_{i_{m-1}}(K_0)$ pues $p_{i_m} \in V(K_0)$, por 1.17 $p \in V(M_{i_0 \ldots i_{m-1}})$.

Si $p \in V(M_{i_0 \ldots i_{m-1}})$ entonces $p \in F_{i_0} \ldots F_{i_{m-1}}(K_0)$, por 1.17, $V(F_{i_0} \ldots F_{i_{m-1}}(K_0)) = F_{i_0} \ldots F_{i_{m-1}}(V(K_0))$, entonces existe $p_j \in K_0$ tal que $F_{i_0} \ldots F_{i_{m-1}}(p_j) = p$ y por lo tanto $p = p_{i_0 \ldots i_{m-1} j}$ en V_m. ■

Basándonos en el lema 1.38 probemos el siguiente resultado que se da en consecuencia al resultado anterior.

Teorema 1.40 *Si $p \in V_0$ entonces tiene una única representación en V_m. Si $p \in V_m \setminus V_0$ con $m > 0$ entonces tiene dos representaciones en V_m.*

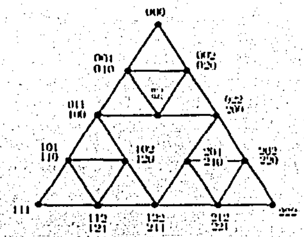


Figura 1.4: Representaciones de p en V_3

Demostración: Para el caso $m = 0$ es claro que la representación de p_j para $j = 0, 1, 2$ es única.

Si $m > 0$ y $p = p_j \in V_0 \subset V_m$, entonces $p \in V(M)$ para un único $M \in G_m$ (1.38), $p = p_j = F_j...F_j(p_j)$ con m composiciones, entonces $p \in V(F_j...F_j(K_0)) = V(M_{j...j})$ siendo $M_{j...j} = M$, y como $F_j...F_j$ es biyectiva, entonces p_j es único para el cual $F_j...F_j(p_j) = p$ y $p_{j...j}$ es su única representación en V_m.

Si $p \in V_m - V_0$ entonces existen $M, N \in G_m$ tal que $p \in V(M) \cap V(N)$. $M = M_\alpha$ y $N = M_\beta$ para $\alpha = \{i_0...i_{m-1}\}, \beta = \{j_0...j_{m-1}\} \in \mathbb{A}_m$ distintas, $F_{i_0}...F_{i_{m-1}}$ y $F_{j_0}...F_{j_{m-1}}$ son biyectivas, por lo que existen únicos $i_m, j_m \in \{0, 1, 2\}$ tal que $F_{i_0}...F_{i_{m-1}}(p_{i_m}) = p$ y $F_{j_0}...F_{j_{m-1}}(p_{j_m}) = p$, pero por el lema 1.38 no existe $\gamma \in \mathbb{A}_m \setminus \{\alpha, \beta\}$ tal que $p \in V(M_\gamma)$ y por lo tanto $p = p_{i_0...i_m} = p_{j_0...j_m}$ son las únicas dos representaciones de p en V_m. ∎

Hasta ahora no hemos hecho explícita la observación de que los puntos tienen siempre un primer $n \geq 0$ tal que $p \in V_n$ pero no está en V_{n-1} si $n > 0$, por eso daremos la siguiente definición.

Definición 1.41 *Sea $p \in V_m$, diremos que el valor $i(p)$ está dado por* $\min\{n | p \in V_n\}$.

Observemos que si $i(p) > 0$, entonces $p \in V_{i(p)} \setminus V_{i(p)-1}$ y por 1.37 $p \in S(M)$ para algún $M \in G_{i(p)-1}$.

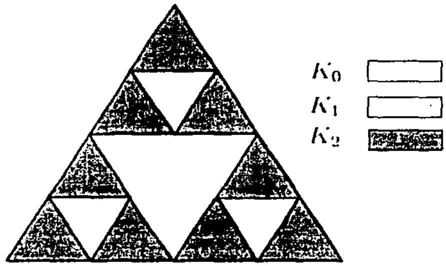
Este es el resultado que nos da de manera explícita las "coordenadas" de un punto. Pensemos esto de la misma forma que cuando describimos los puntos de la recta real en términos de números binarios, pero aquí utilizamos números "ternarios".

Corolario 1.42 *Sea $n = i(p) > 0$, $p \in V_m$ y $m \geq n$, entonces las dos representaciones de $p \in V_m$ son $p_{i_0...i_m}$ y $p_{i'_0...i'_m}$, donde $i_k = i_n$ para $n \leq k \leq m$, y* $i'_k = \begin{cases} i_k & si\ 0 \leq k < n-1 \\ i_n & si\ k = n-1 \\ i_{n-1} & si\ n \leq k \leq m \end{cases}$.

Demostración:Por 1.32 y 1.37 existe un único $L = |q_0, q_1, q_2| \in G_{n-1}$ tal que $p \in S(L)$, y por 1.25 existen $M', N' \in D(L)$ tal que $p \in V(M') \cap V(N')$, entonces $M' = (L)_i$ y $N' = (L)_j$ para $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$, suponemos $p = \frac{1}{2}q_iq_j$. Luego existe un único $\gamma = \{l_0...l_{n-2}\} \in \mathbb{A}_{n-1}$

tal que $L = M_\gamma$, si $n = 1$ entonces $M_\gamma = K_0$. Por 1.24 $(L)_i = M_{l_0 \dots l_{n-2} i}$ y $(L)_j = M_{l_0 \dots l_{n-2} j}$. Demos $p = p_{i_0 \dots i_m} = p_{i'_0 \dots i'_m}$ donde $i_k = l_k$ si $0 \le k \le n-2$, $i_k = i$ si $k = n-1$, $i_k = j$ si $n \le k \le m$, así también $i'_k = i_k, 0 \le k \le n-2$, $i'_k = j = i_n, k = n-1$, y $i'_k = i = i_{n-1}, n \le k \le m$. Como $F_{l_0} \dots F_{l_{n-2}} F_i F_j \dots F_j(p_j) = F_{l_0} \dots F_{l_{n-2}} F_i(p_j) = F_{l_0} \dots F_{l_{n-2}}(\frac{1}{2} p_i p_j) = \frac{1}{2} q_i q_j = p$ y por algo similar $F_{l_0} \dots F_{l_{n-2}} F_j F_i \dots F_i(p_j) = p$, entonces $p_{i_0 \dots i_m}$ y $p_{i'_0 \dots i'_m}$ son sus dos únicas representaciones en V_m. ■

Ahora describiremos las estructuras K_m.



En la figura 1.3 las capas más oscuras van denotando valores más altos de m, de donde parte la idea de la siguiente proposición.

Proposición 1.43 *Para todo $m \in \mathbb{N}$, $K_{m+1} \subset K_m$.*

Demostración: Sea $N \in G_{m+1}$, $N \subset K_{m+1}$, entonces existe $M \in G_m$ tal que $N \in D(M)$, por lo tanto $N \subset M \subset K_m$, entonces $K_{m+1} \subset K_m$. ■

En la siguiente proposición demostramos que K_{m+1} se obtiene a partir de K_m utilizando las homotecias, esto es una función que lleva conjuntos en conjuntos, en [Barnsley] esta función se le llama el Operador de Hutchinson.

Proposición 1.44 *Para todo $m \in N$, se cumple que $K_{m+1} = \bigcup_{i=0,1,2} F_i(K_m)$.*

Demostración: Por inducción, si $m = 0$ es claro que $G_1 = \{M_i \mid i = 0, 1, 2\} = \{F_i(K_0) \mid i = 0, 1, 2\}$ y por lo tanto $K_1 = \bigcup_{i=0,1,2} M_i = \bigcup_{i=0,1,2} F_i(K_0)$. Supongamos que $K_m = \bigcup_{i=0,1,2} F_i(K_{m-1})$ para $m > 0$. Si $M \in G_{m+1}$, por 1.30, $M = M_\alpha$ para algún $\alpha = \{i_0 \dots i_m\} \in \mathbb{A}_{m+1}$, si $M' = M_{i_1 \dots i_m} \in G_m$ tenemos $F_{i_0}(M') = F_{i_0} F_{i_1} \dots F_{i_m}(K_0) = M$, pero $M' \subset K_m$, por lo que concluimos que $K_{m+1} \subset \bigcup_{i=0,1,2} F_i(K_m)$. ■

En [Barnsley] se define el triángulo de Sierpinsky como el conjunto límite de una sucesión de conjuntos obtenidos al iterar el operador de Hutchinson en el conjunto potencia de $\mathbb{R}^2$ con condición inicial M_*, pero no utilizaremos esta formulación.

Definición 1.45 *Al conjunto* $SG = \bigcap_{m\geq 0} K_m$ *le llamaremos triángulo de Sierpinsky, que denotaremos también por* K. *Además al conjunto* $\bigcup_{m=0}^{\infty} V_m$ *lo denotaremos por* V_*.

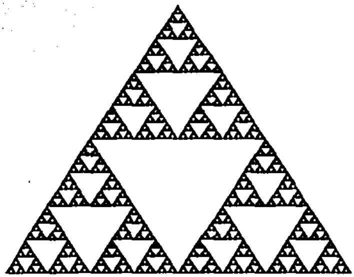


Figura 1.5: Una aproximación al triángulo de Sierpinsky.

Lo anterior nos da más información acerca de la relación que hay entre las definiciones referentes a los triángulos que hemos definido, que en la literatura son referidos como 2-simplex, y el tratamiento por medio de los vértices. De tal manera que podemos definir las gráficas que aproximen el triángulo de Sierpinsky y las definiciones por medio de estos triángulos "llenos", En algunos contextos nos será útil una y en otros contextos en especial en los algoritmos será útil la definición por gráficas.

1.4. Gráficas y conjuntos locales.

Definición 1.46 *Una gráfica* Γ *es un par* (V, A) *tal que* V *son los vértices y* $A \subseteq V \times V$ *son las aristas. A esta gráfica general también se le conoce como gráfica dirigida. La gráfica* Γ *es regular si no contiene aristas de la forma* (a, a) *tal que* $a \in V$.

Definición 1.47 *Una gráfica* Γ *es no dirigida si dada* $(a, b) \in A$ *implica que* $(b, a) \in A$. *asumiremos que* $(a, b) = (b, a)$ *en nuestra relación de igualdad y así denotaremos una arista* $(a, b) \in A$.

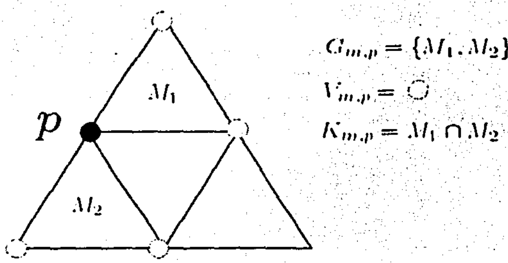
Las gráficas con las que trabajaremos en este texto serán no dirigidas y regulares.

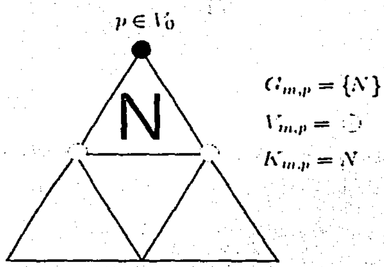
Definición 1.48 *Sea* S *un conjunto dado. Una relación de proximidad* R *en* S *es una relación* $R \subseteq S \times S$ *que satisface:* $(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R$ *y donde* $(a, a) \notin R$ *para todo* $a \in S$.

Definición 1.49 *Consideraremos las gráficas Γ_m de la siguiente forma: Los vértices V_m dados en la definición 1.34, las aristas A_m las definiremos por la relación de proximidad siguiente: para $x, y \in V_m$ tenemos la relación $x \underset{m}{\sim} y$ si $x, y \in V(M) \subset M \in G_m$ y $x \neq y$. Y definimos el conjunto de aristas $A_m = \{(x, y) | x \underset{m}{\sim} y\}$.*

Haremos la siguiente definición de los conjuntos de proximidad a un punto.

Definición 1.50 *Sea $p \in V_m$, consideraremos los siguientes conjuntos:*
$G_{m,p} = \{M \in G_m | p \in M\}$.
$K_{m,p} = \bigcup_{M \in G_{m,p}} M$.
$V_{m,p} = \bigcup_{M \in G_{m,p}} V(M) \setminus \{p\}$.





En la figura 1.4 está representado el caso en que $p \in V_m - V_0$, y en la figura 1.4 el caso en que $p \in V_0$.

Si $p \in V_m$ y $M \in G_{m,p}$ entonces existe $M' \in G_m$ tal que $p \in V(M')$, si $M \neq M'$ entonces $p \in M' \cap M = V(M') \cap V(M)$ por lo que $p \in V(M)$, y a la misma conclusión llegamos si $M = M'$.

Observemos que $G_{m,p} \subset G_m$ y que $V_{m,p} \subset V_m$ pues $M \in G_{m,p}$ y entonces $V(M) \subset V_m$.

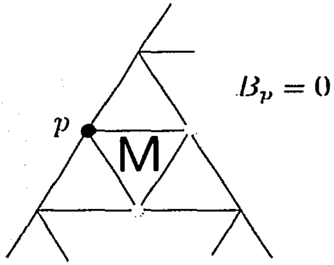
Lema 1.51 *Si $p \in V_m$ entonces $V_{m,p} = \{x \in V_m | x \underset{m}{\sim} p\}$. Si $p \in V_0$ entonces $\#(V_{m,p}) = 2$ y $\#(G_{m,p}) = 1$. Si $p \in V_m - V_0$ entonces $\#(V_{m,p}) = 4$ y $\#(G_{m,p}) = 2$.*

Demostración: Si $q \in V_{m,p}$ entonces para algún $M \in G_{m,p}$, $q \in V(M)$ y $p \in V(M)$, como $M \in G_m$ concluimos que $q \underset{m}{\sim} p$. Si $q \underset{m}{\sim} p$ entonces existe $M \in G_m$ tal que $q, p \in V(M)$, además $q \in V(M) \setminus \{p\}$ y como $p \in M$ entonces $M \in G_{m,p}$, y en consecuencia $q \in V_{m,p}$.

Si $p \in V_0$ entonces por 1.38 existe un único $M \in G_m$ tal que $p \in M$, además $\#(V(M) \setminus \{p\}) = 2$, y si $p \in V_m \setminus V_0$ entonces por 1.38 existen sólo dos $M, N \in G_m$ tales que $p \in M \cap N$, por lo que $G_{m,p} = \{M, N\}$ y $\#(V(M) \cup V(N) \setminus \{p\}) = 3 - 1 + 3 - 1 = 4$. ■

A continuación daremos algunas definiciones que usaremos en los próximos capítulos y probaremos algunas de sus propiedades.

Definición 1.52 *Al conjunto V_0 le llamaremos la frontera del triángulo de Sierpinsky y lo denotaremos como ∂K. Consideraremos los siguientes conjuntos: $V_m^o = V_m \setminus V_0$ y $V_*^o = V_* \setminus V_0$. Además para todo $p \in V_*^o$ denotaremos al único $M \in G_{i(p)-1}$ tal que $p \in S(M)$ como M_p, y denotamos a $S(M_p) \cap V_{i(p),p}$ como B_p y lo llamaremos el conjunto de hermanos de p.*



En la figura 1.4 los puntos huecos representan a los hermanos de p.

Observemos que $V_*^o = (\bigcup_{m=0}^{\infty} V_m) \setminus V_0 = \bigcup_{m=0}^{\infty} (V_m \setminus V_0) = \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m^o$.

Proposición 1.53 *Sea $p \in V_*^o$, entonces $B_p = S(M_p) \setminus \{p\}$.*

Demostración: Sea $M_p = [p_1, p_2, p_3]$, luego $p = \frac{1}{2}p_ip_j$ para $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$, $p \in (M_p)_i \cap (M_p)_j$ y por 1.38 son los únicos con esa propiedad, entonces $p \underset{m}{\sim} \frac{1}{2}p_kp_i$ y $p \underset{m}{\sim} \frac{1}{2}p_kp_j$, ambos puntos pertenecen a $S(M_p)$ y a $V_{i(p),p}$, y como $S(M_p) \setminus \{\frac{1}{2}p_ip_j\} = \{\frac{1}{2}p_kp_i, \frac{1}{2}p_kp_j\}$ entonces la igualdad entre B_p y $S(M_p) \setminus \{p\}$ se ha comprobado.

1.5. Topología y continuidad.

Enunciaremos algunos resultados de topología y continuidad que serán indispensables a lo largo del presente trabajo.

En la siguiente proposición usaremos la topología usual de $\mathbb{R}^2$ y una propiedad importante que será la que probaremos es la de que el triángulo de Sierpinsky es un espacio compacto con la topología relativa de $\mathbb{R}^2$.

Proposición 1.54 *Las funciones afines son continuas.*

Demostración: Sea $f = L_b \circ A$, la función L_b es continua pues para todo $\varepsilon > 0$ y $x \in \mathbb{R}^2$, demos $\delta = \varepsilon$ de tal forma que si $y \in B_\delta(x)$ entonces $d(L_b(y), L_b(x)) = \|x + b - y - b\| = \|x - y\| = d(x, y) < \delta = \varepsilon$.

A es una función lineal la cual es continua en espacios de dimensión finita; y como la composición de funciones continuas es continua, por lo tanto f es continua. ■

Definimos funcionales afines $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la forma que $f(x) = A(x) + b$ donde $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es lineal y $b \in \mathbb{R}$. Entonces la función es continua pues A es continua, y de la misma forma que arriba se prueba que la función $L_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $L_b(x) = x + b$, es continua y por lo tanto la función f también es continua. Simplemente las llamaremos funciones afines de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$.

Enunciaremos la siguiente proposición, la cual no probaremos pues es una prueba de geometría que podemos encontrar en [Ryan] y [Fleming].

Proposición 1.55 *Sea $M = |p_0, p_1, p_2|$, entonces $Diam(M) = \max(d(p_i, p_j))$.*

Proposición 1.56 *a)$M = |p0, p1, p2|$ es cerrado. b)K_m es cerrado. c)SG es cerrado.*

Demostración: a)Como los puntos p_0, p_1, p_2 son no colineales, y sean $Q_0 = (0,0)$, $Q_1 = (1,0)$, $Q_2 = (0,1)$ que también son no colineales, por 1.9 existe una única función afín f tal que $f(p_i) = Q_i$, $i = 0,1,2$, f es biyectiva por 1.11 y por esto $f \in Af(\mathbb{R}^2)$, entonces $f(M) = |Q_0, Q_1, Q_2|$, es claro que la imagen inversa de $|Q_0, Q_1, Q_2|$ es M. Por otro lado si $x = \lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ con $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ y $\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ entonces $x = (\lambda_1, \lambda_2) \in [0,1]^2$, pero como $0 \leq \lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2 \leq 1$ entonces $1 \geq \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0$, que implica $\lambda_1 + \lambda_2 \in [0,1]$ y $(\lambda_1, \lambda_2) \in A = \{(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 | \lambda_1 + \lambda_2 \in [0,1]\}$, entonces $|Q_0, Q_1, Q_2| = [0,1]^2 \cap A$ pero si $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define como $h(x,y) = x + y$, que sabemos que es continua y entonces $A = h^{-1}([0,1])$ es cerrado, en consecuencia $|Q_0, Q_1, Q_2|$ es cerrado, por lo tanto M es cerrado.

b)$K_m = \bigcup_{M \in G_m} M$ es una unión finita de cerrados, por lo tanto es cerrado.

c)$SG = \bigcap_{m=0}^{\infty} K_m$ es intersección de cerrados, por lo tanto es cerrado. ■

Ahora probemos que SG es igual a la cerradura de V_*, para lo cual recordemos que estamos asumiendo que K_0 es equilátero con $Diam(K_0) = \sup\{d(x,y) | x, y \in K_0\}$ igual a 1.

Lema 1.57 *a)Sea F una homotecia con razón r, entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$, $d(F(x), F(y)) = rd(x,y)$ b)Sea $A \subset \mathbb{R}^2$ tal que $Diam(A) < \infty$, F una homotecia con razón r, entonces $Diam(F(A)) = rDiam(A)$.*

c) Si $M \in G_m$, entonces $Diam(M) = \frac{1}{2^m}$.

Demostración: a)Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$, como $F = L_c \circ B$ para $c \in \mathbb{R}^2$ y $B = rId$ con $r > 0$, entonces $d(F(x), F(y)) = \|Bx + c - By - c\| = \|B(x-y)\|$, entonces $\|r(x-y)\| = r\|x-y\| = rd(x,y)$.

b)Los conjuntos $E1 = \{d(x', y') | x', y' \in F(A)\}$ y $E2 = \{d(F(x), F(y)) | x, y \in A\}$ son iguales, pues $d(x', y') \in E1$ entonces existen $x, y \in A$ tales que $F(x) = x'$ y $F(y) = y'$. Entonces $Diam(F(A)) = \sup E1 = \sup\{E2\}$, por otro lado como $d(F(x), F(y)) = rd(x,y)$, entonces $rE3 = \{rd(x,y) | x, y \in A\} = E2$ y por lo tanto $\sup E1 = \sup rE3 = r\sup E3$, esto debido a que $r > 0$ y $\sup rE = r\sup E$, $E \subset \mathbb{R}$. Por lo tanto $Diam(F(A)) = rDiam(A)$.

c)Por inducción, es claro que $G_0 = \{K_0\}$ y $Diam(K_0) = 1$. Supongamos que dada $m > 0$ y $M \in G_{m-1}$, tenemos $Diam(M) = \frac{1}{2^{m-1}}$. Sea $N \in G_m$, por 1.30 $N = M_\alpha$ para un $\alpha = \{i_1 ... i_m\} \in \mathbb{A}_m$, de donde $N = F_{i_1}(M_{i_2 ... i_m})$ pero $M_{i_2 ... i_m} \in G_{m-1}$, entonces $Diam(N) = \frac{1}{2} Diam(M_{i_2 ... i_m}) = \frac{1}{2}\frac{1}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^m}$. ■

Proposición 1.58 $\overline{\bigcup_{m=0}^{\infty} V_m} = SG$. *SG es compacto.*

Demostración: Como $K_m \subset K_n$ y $V_n \subset V_m$ si $n < m$, entonces $V_n \subset V_m \subset K_m \subset K_n$, entonces para todo $m > n$ $V_n \subset K_m$, pero también $V_n \subset K_m$ para toda $m \geq 0$, entonces $V_n \subset \bigcap_{m=0}^{\infty} K_m$, pero esto sucede para cualquier $n \geq 0$, entonces $\bigcup_{m=0}^{\infty} V_m = V_* \subset SG$. Como SG es cerrado entonces $\overline{V_*} \subseteq SG$.

Sea $x \in \bigcap_{m=0}^{\infty} K_m$, para todo $\delta > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \delta$, $x \in K_m$ pues está en todas ellas, entonces existe $M \in G_m$ tal que $x \in M$, si $p \in V(M)$ entonces $d(p, x) \leq Diam(M) = \frac{1}{2^m} < \delta$ y por lo tanto para todo $\delta > 0$, $B_\delta(x) \cap \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n \neq \emptyset$. Por lo tanto $x \in \overline{V_*}$ para todo $x \in SG$ y concluimos que $SG \subseteq \overline{V_*}$.

SG es cerrado, es acotado pues $Diam(K_0) = 1$ y $SG \subset K_0$, entonces $B_2(p_0)$ contiene a K_0 y por esto K_0 es acotado. Por lo tanto SG es compacto. ■

Con lo de arriba hemos mostrado que SG es un espacio topológico donde los abiertos en esta topología son los que están dados por la topología relativa inducida por la de $\mathbb{R}^2$.

Definición 1.59 *Una función $f : SG \to \mathbb{R}$ es continua si lo es respecto a la topología relativa de SG en $\mathbb{R}^2$. y restringiéndola a SG. En otras palabras, f es continua si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in SG$ con $d(x,y) < \delta$, implica que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$.*

Pero muchas veces para probar la continuidad de una función es suficiente probarla en un conjunto denso en el que es posible trabajar mejor, por lo que formulamos el siguiente resultado.

Proposición 1.60 $f : SG \to \mathbb{R}$ *es continua si y sólo si es uniformemente continua en* V_*.

Demostración: Usemos el hecho de que V_* es denso en SG, y también el resultado clásico de análisis [Rudin] que establece que una función que va de un espacio métrico X a $\mathbb{R}$ es continua si y sólo si es uniformemente continua en un denso $E \subset X$. ■

Observemos que si una función es continua en $\mathbb{R}^2$ y como SG hereda la topología de $\mathbb{R}^2$ entonces será continua en SG.

Para futuras definiciones necesitaremos una función que sea afín por tramos y continua. Primero probaremos que una función definida por pedazos que se intersectan en puntos aislados son continuas.

Lema 1.61 *Sean $j = 1, ..., m$, C_j conjuntos cerrados contenidos en $\mathbb{R}^n$ tales que $B = \bigcup_{i \neq k}^{m} (C_j \cap C_k)$ es un conjunto finito, y $f_j : C_j \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas tales que $f_j(x) = f_k(x)$ para $x \in C_j \cap C_k$ y $j \neq k$, entonces la función $g : \bigcup_{j=0}^{m} C_j \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = f_j(x)$ para $x \in C_j$, es continua.*

Demostración: Sea $\varepsilon > 0$, entonces hay dos casos. Si $x \in B$ sea $\mathcal{I} = \{j | x \in C_j\}$ y $\mathcal{J} = \mathbb{S}_m \setminus \mathcal{I}$, luego para todo $j \in \mathcal{I}$ existe $\delta_j > 0$ tal que si $y \in B_{\delta_j}(x) \cap C_j$, entonces $|f_j(y) - f_j(x)| < \varepsilon$. Sea $\delta' = \min_{j \in \mathcal{I}}\{\delta_j\}$ y como $\bigcup_{j=0}^{m} C_j \setminus \bigcup_{k \in \mathcal{J}} C_k$ es un conjunto abierto, existe $\delta'' > 0$ tal que $B_{\delta''}(x) \cap \bigcup_{k \in \mathcal{J}} C_k = \varnothing$, por lo que daremos $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Entonces para todo $y \in B_\delta(x)$ está contenida en $B_{\delta_j}(x)$ y en C_j para $j \in \mathcal{I}$, por lo tanto $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$, y como $\bigcup_{j=0}^{m} C_j \cap B_\delta(x) \subset \bigcup_{k \in \mathcal{I}} C_k$ entonces g está definida en $\bigcup_{k \in \mathcal{I}} C_k$ y por lo tanto g es continua en x. Por otro lado si $x \in C_j \setminus \bigcup_{k \neq j} C_k$ el cual es abierto en C_j, entonces existe $\delta' > 0$ tal que $B_{\delta'}(x) \cap \bigcup_{k \neq j} C_k = \varnothing$, y dada $\varepsilon > 0$ existe $\delta_j > 0$ tal que para todo $y \in B_\delta(x)$ con $\delta = \min\{\delta', \delta_j\}$ implica que $|f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon$, y como $g(y) = f_j(y)$, entonces g es continua en x. Por lo tanto g es continua en $\bigcup_{j=0}^{m} C_j$. ∎

Definición 1.62 *Para $p \in V_m$ demos la función $\eta_p^m : K_m \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*
$\eta_p^m(x) = 0$ si $x \in (K_m - K_{m,p}) \cap SG$.
$\eta_p^m(x) = 1 - (\rho_1 + \rho_2)$ si $x \in M = |p, p_1, p_2| \in G_{m,p}$ tal que $x = (1 - \rho_1 - \rho_2)p_0 + \rho_1 p_1 + \rho_2 p_2$ y consideraremos a η_p^m restringida a SG.

Veamos que $\eta_p^m : SG \to \mathbb{R}$ es continua.

Proposición 1.63 *η_p^m es continua para todo $m \geq 0$ y para todo $p \in V_m$.*

Demostración: Para todo $M \in G_m$ la función es continua en K_m, pues si $M \in G_m \setminus G_{m,p}$ entonces $\eta_p^m|_M = 0$, si $M \in G_{m,p}$ es una función afín y por lo tanto continua en todo $M \in G_m$, y está definida en V_m pues es 1 en p, y es cero en $V_m \setminus \{p\}$, luego por el lema 1.61 es continua. Por lo tanto la restricción a SG es continua. ∎

Capítulo 2

Diferencias Armónicas.

2.1. Las Diferencias armónicas.

En este capítulo desarrollamos las diferencias armónicas, y basándonos en los conceptos desarrollados en el capítulo anterior, construiremos funcionales parecidos a al caso de los funcionales de diferencias discretas en los reales.

Definiremos ahora nuestro espacio de funciones en el triángulo de Sierpinsky. De ahora en adelante usaremos K en lugar de SG para denotar el triángulo de Sierpinsky.

Definición 2.1 *Decimos que* $\mathbb{R}(K) = \{f : K \to \mathbb{R}\}$ *es el espacio vectorial de las funciones de* K *a* $\mathbb{R}$*, con la suma y la multiplicación por escalares dadas por* $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ *y* $(rf)(x) = rf(x)$*, donde* $f, g \in \mathbb{R}(K)$*,* $r \in \mathbb{R}$ *y* $x \in K$*. Diremos que* $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R} \mid f$ *es continua*$\}$*, es el espacio de funciones continuas.*

Observemos que $C(K)$ es un subespacio de $\mathbb{R}(K)$, pues la suma de funciones continuas es continua, y el producto por un real también.

Usaremos la norma para el espacio $C(K)$ dada por $\|f\| = \sup_{x\in K} |f(x)|$, y recordemos que un espacio normado es completo si toda sucesión de Cauchy converge en este espacio. Usaremos la métrica $d(f, g) = \|x - y\|$ obtenida a partir de la norma definida arriba.

Proposición 2.2 $C(K)$ *con la norma que definimos es un espacio completo.*

Demostración: Sea $\{f_m\} \subset C(K)$ una sucesión de Cauchy, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n > N$ tenemos $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$, pero por otro lado para todo $x \in K$, $|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\| < \varepsilon$, por lo que cumple con el criterio de convergencia de Cauchy, y además es uniforme y las funciones f_m son continuas, por lo tanto converge a $f \in C(K)$.. ■

Ahora definiremos las funcionales que serán fundamentales para construir el Laplaciano. Los resultados que utilizamos para probar el resultado anterior se encuentran en [Rudin]. Hemos probado que el espacio normado $C(K)$ es un espacio de Banach (normado y completo). Ahora construiremos los funcionales más importantes del presente trabajo, pues nos permitirán construir el Laplaciano y las funciones armónicas.

Definición 2.3 *Sea $f : K \to \mathbb{R}$ y $p \in V_m^o$, daremos los funcionales $\Delta_{m,p} : \mathbb{R}(K) \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:*

$\Delta_{m,p} f = \sum\limits_{q \in V_{m,p}} (f(q) - f(p)) = \sum\limits_{q \in V_{m,p}} f(q) - 4f(p).$

A $\Delta_{m,p}$ le llamaremos la diferencia m-armónica de f en $p \in V_m^o$.

El artículo [Kigami] en el que se basa este trabajo denota a la diferencias m-armónica por $H_{m,p}$ pero hemos preferido utilizar $\Delta_{m,p}$ para denotar que es una diferencia finita y dejaremos la H para el desarrollo de la medida en K. Ahora demostraremos que $\Delta_{m,p}$ que es un funcional lineal y continuo de modo que más adelante podremos construir el espacio $C(K)^*$ así como probar algunas proposiciones que hacen uso de este funcional.

Proposición 2.4 *$\Delta_{m,p}$ es lineal y continua.*

Demostración: Sean $f, g \in C(K)$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces $\Delta_{m,p}(cf + g) = \sum\limits_{q \in V_{m,p}} (cf + g)(q) - 4(cf+g)(p) = \sum\limits_{q \in V_{m,p}} (cf(q) + g(q)) - 4cf(p) - 4g(p) = \sum\limits_{q \in V_{m,p}} cf(q) - 4cf(p) + \sum\limits_{q \in V_{m,p}} g(q) - 4g(p)$
$= c(\sum\limits_{q \in V_{m,p}} f(q) - 4f(p)) + \sum\limits_{q \in V_{m,p}} g(q) - 4g(p) = c\Delta_{m,p} f + \Delta_{m,p} g$ y por lo tanto es lineal.

Un operador T entre dos espacios de Banach X, Y es acotado, si existe $C > 0$ tal que para todo $x \in X$, $\|Ax\|_Y = C\|x\|_X$, y además un operador es continuo si es acotado (Véase [Royden]), de donde $|\Delta_{m,p} f| = \left| \sum\limits_{q \in V_{m,p}} (f(q) - f(p)) \right| \leq \sum\limits_{q \in V_{m,p}} |(f(q) - f(p))|$ por la desigualdad del triángulo, luego

$\sum\limits_{q \in V_{m,p}} |(f(q) - f(p))| \leq \sum\limits_{q \in V_{m,p}} |f(q)| + 4|f(p)|,$

$\sum\limits_{q \in V_{m,p}} |f(q)| + 4|f(p)| \leq 8 \sup\limits_{x \in K} |f(x)| = 8\|f\|$, pues recordemos que $\#(V_{m,p}) = 4$, por lo tanto $\Delta_{m,p}$ resulta ser acotado y en consecuencia es continuo. ■

A partir de ahora utilizaremos la convención de denotar a $f(q_{ij}) = f_{ij}$, a menos que exista una ambigüedad al designar a los puntos de otra forma, de acuerdo al triángulo $|q_0, q_1, q_2|$ con respecto al que se tomen los índices, así también utilizaremos la notación $\Delta_{m,ij}$.

El siguiente teorema es de gran importancia en los próximos capítulos, pues cuando construyamos las diferencias armónicas y queramos igualarlas a algún valor dado entonces surgirán sistemas de ecuaciones "locales", así como para demostrar unicidad de expansiones armónicas.

Lema 2.5 *Sea $M = |q_0, q_1, q_2| \in G_m$ entonces dado el sistema de 3 ecuaciones de 3 incógnitas q_{01}, q_{02}, q_{12}:*

$-4f(q_{01}) + f(q_{02}) + f(q_{12}) = g(q_{01}),$
$f(q_{01}) - 4f(q_{02}) + f(q_{12}) = g(q_{02}),$
$f(q_{01}) + f(q_{02}) - 4f(q_{12}) = g(q_{12}).$

Tiene una única solución:

$f(q_{01}) = -\frac{3}{10}g(q_{01}) - \frac{1}{10}g(q_{02}) - \frac{1}{10}g(q_{12}),$
$f(q_{02}) = -\frac{1}{10}g(q_{01}) - \frac{3}{10}g(q_{02}) - \frac{1}{10}g(q_{12}),$
$f(q_{12}) = -\frac{1}{10}g(q_{01}) - \frac{1}{10}g(q_{02}) - \frac{3}{10}g(q_{12}).$

Demostración: Expresando el sistema en forma matricial obtenemos:
$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{01} \\ f_{02} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{01} \\ g_{02} \\ g_{12} \end{bmatrix}$, donde $f_{ij} = f(q_{ij})$ y $g_{ij} = g(q_{ij})$, entonces la inversa de la matriz es
$\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$ y haciendo la operación $\begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{01} \\ g_{02} \\ g_{12} \end{bmatrix}$ obtenemos
$\begin{bmatrix} f_{01} \\ f_{02} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{01} \\ g_{02} \\ g_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10}g_{01} - \frac{1}{10}g_{02} - \frac{1}{10}g_{12} \\ -\frac{1}{10}g_{01} - \frac{3}{10}g_{02} - \frac{1}{10}g_{12} \\ -\frac{1}{10}g_{01} - \frac{1}{10}g_{02} - \frac{3}{10}g_{12} \end{bmatrix}$
que es la solución esperada, y es única pues $\det \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} = -50 \neq 0$. ■

Expresado de otra forma, el sistema $\sum_{q\in B_p} f(q) - 4f(p) = g(p)$ tiene como única solución $f(p) = -\frac{3}{10}g(p) - \frac{1}{10}\sum_{q\in B_p} g(q)$.

Teorema 2.6 *Sea* $M = |p_0, p_1, p_2| \in G_m$, $f : V(M) \cup S(M) \to \mathbb{R}$ *y* $g : S(M) \to \mathbb{R}$, *entonces para cualquier* $p = p_{ij} \in S(M)$, $\Delta_{m+1,p} f = g(p)$ *sí y sólo si* $f(p) = \frac{1}{5}(f(p_i) + f(p_j) + \sum_{k=0}^{2} f(p_k)) - \frac{1}{10}\sum_{q\in B_p} g(q) - \frac{3}{10}g(p)$.

Demostración: Sin perdida de generalidad, suponemos que $i = 0$, $j = 1$, sea $f_{ij} = f(p_{ij})$ y $g_{ij} = g(p_{ij})$, además $V_{m+1,p_{01}} = \{p_0, p_{02}, p_1, p_{12}\}$ entonces
$\Delta_{m-1,01} f = f_0 + f_1 + f_{02} + f_{12} - 4f_{01} = g_{01}$.
Reescribiendo: $f_{02} + f_{12} - 4f_{01} = g_{01} - f_0 - f_1$.
Análogamente para $i \neq j$ arbitrarios en $\{0, 1, 2\}$.
Entonces se genera el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} f_{02} + f_{12} - 4f_{01} &= g_{01} - f_0 - f_1 = x(p_{01}) \\ f_{01} + f_{12} - 4f_{02} &= g_{02} - f_0 - f_2 = x(p_{02}) \\ f_{01} + f_{02} - 4f_{12} &= g_{12} - f_1 - f_2 = x(p_{12}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

o bien $\sum_{q\in B_p} f(q) - 4f(p) = g_{ij} - f_i - f_j = x(p_{ij})$.
Por 2.5 tiene solución:
$f_{ij} = -\frac{3}{10}x(p_{ij}) - \frac{1}{10}x(p_{ik}) - \frac{1}{10}x(p_{jk})$, para $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$, luego

$$\begin{aligned} f_{ij} &= -\tfrac{3}{10}(g_{ij} - f_i - f_j) - \tfrac{1}{10}(g_{ik} - f_i - f_k) - \tfrac{1}{10}(g_{jk} - f_j - f_k) \\ &= \tfrac{4}{10}(f_i + f_j) + \tfrac{2}{10}f_k - \tfrac{1}{10}(g_{ik} + g_{jk}) - \tfrac{3}{10}g_{ij} \\ &= \tfrac{1}{5}(f_i + f_j + \sum_{l=0}^{2} f_l) - \tfrac{1}{10}\sum_{q\in B_{p_{ij}}} g(q) - \tfrac{3}{10}g_{ij} \end{aligned}$$

lo cual vale para $p = p_{ij}$ con $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$, y concluimos que

$$f_{ij} = \frac{1}{5}(f_i + f_j + \sum_{k=0}^{2} f_k) - \frac{1}{10}\sum_{q\in B_p} g(q) - \frac{3}{10} g_{ij}. \tag{2.2}$$

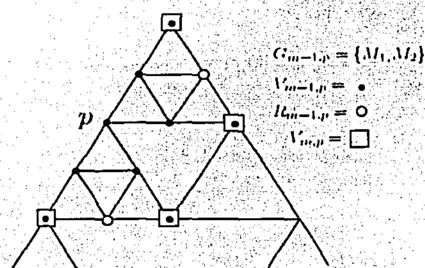
Esto se cumple para cualquier $p \in S(M)$ y $M \in G_m$. Por otro lado (2.2) es la única solución del sistema $\sum_{q\in B_p} f(q) - 4f(p) = x(p_{ij})$, por el teorema 2.5, y por lo tanto cumplen $\Delta_{m+1,p} f = g(p)$. ■

La solución de $\Delta_{m+1,p} f = g(p)$ existe y es única dados $f(q_i)$ para $q_i \in V(M)$ y $M \in G_m$, y la que se ha obtenido (2.2) es la solución de dicho sistema. En el desarrollo del presente trabajo esto nos será útil para hacer la "metamorfosis" de un tipo de expresión a otro ya sea para simplificar o desarrollar, según sea el caso.

Ahora procederemos a definir los *sobrinos* de un punto $p \in V_m^o$; tengamos presente que $\#(G_{m,p}) = 2$, y que N_i no es lo mismo que $(N)_i$ hasta que consideremos lo contrario en el capítulo 4.

Definición 2.7 *Si $p \in V_m^o$ y $G_{m,p} = \{N_1, N_2\}$, consideraremos el conjunto $R_{m-1,p} = S(N_1) \cup S(N_2) \setminus V_{m-1,p}$.*

En la figura 2.1 se ilistran cada uno de estos conjuntos.



Proposición 2.8 *a)Sean $p \in V_m^o$ y $G_{m,p} = \{N_1, N_2\}$, entonces $V_{m+1,p} \subset S(N_1) \cup S(N_2)$.*

b)$\#(R_{m-1,p}) = 2$

Demostración: a)Sean $N_1' \in D(N_1)$ y $N_2' \in D(N_2)$, como $N_1', N_2' \in G_{m+1}$ y $p \in N_1' \cap N_2'$, entonces $G_{m+1,p} = \{N_1', N_2'\}$, luego $V(N_1') \subset S(N_1) \cup V(N_1)$ por 1.26 y además $V(N_1') \cap V(N_1) = \{p\}$, por lo que $V(N_1') \setminus \{p\} \subset S(N_1)$, por lo mismo $V(N_2') \setminus \{p\} \subset S(N_2)$ y concluimos que $V_{m+1,p} \subset S(N_1) \cup S(N_2)$.

b)Con base en (a) y dada $i = 1, 2$, tenemos que $V_{m+1} \cap S(N_i) = V(N_i') \setminus \{p\}$, luego $\#(V(N_i') \setminus \{p\}) = 2$ y $\#(S(N_i)) = 3$, por lo que $\#(S(N_i) \setminus V_{m+1,p}) = \#(S(N_i) \setminus (V(N_i') \setminus$

$\{p\})) = 1$. Por otro lado la unión $(S(N_1) \setminus V_{m+1,p}) \cup (S(N_2) \setminus V_{m+1,p})$ es disjunta, por lo que $\#(R_{m+1,p}) = \#(S(N_1) \setminus V_{m+1,p}) + \#(S(N_2) \setminus V_{m+1,p}) = 2$. ■

Para describir la relación entre $\Delta_{m+1,p}$ y $\Delta_{m,p}$ necesitamos el siguiente resultado que nos servirá para separar sumas de valores de una función en los puntos "más" cercanos a p.

Proposición 2.9 *Si $p \in V_m^o$, entonces $\{p\} \cup V_{m,p} \cup V_{m+1,p} \cup R_{m+1,p}$ es una unión disjunta.*

Demostración: Sea $G_{m,p} = \{N_1, N_2\}$. Es claro que $p \notin V_{m,p} \cup V_{m+1,p}$ por las definiciones, también $R_{m+1,p} \subset S(N_1) \cup S(N_2)$ de donde $p \notin R_{m+1,p}$.

Si $q \in V_{m,p} \cap V_{m+1,p}$, tenemos $q \in V(N_1) \cup V(N_2)$ y $q \in S(N_1) \cup S(N_2)$ lo cual contradice $V(N_r) \cap (S(N_1) \cup S(N_2)) = \varnothing$ para $r = 1, 2$ por lo que $V_{m,p} \cap V_{m+1,p} = \varnothing$. Por otro lado $R_{m+1,p} \subset S(N_1) \cup S(N_2)$ y por un argumento similar tenemos que $R_{m+1,p} \cap V_{m,p} = \varnothing$.

Finalmente $R_{m+1,p} \cap V_{m+1,p} = ((S(N_1) \cup S(N_2)) \setminus V_{m+1,p}) \cap V_{m+1,p} = \varnothing$.

Por lo tanto $\{p\} \cup V_{m,p} \cup V_{m+1,p} \cup R_{m+1,p}$ es una unión disjunta. ■

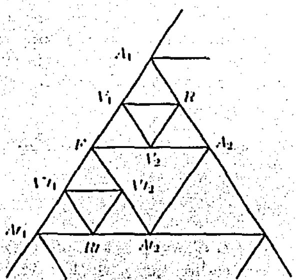
El resultado anterior nos será de utilidad para probar lo que básicamente es la relación entre $\Delta_{m,p}$ y $\Delta_{m+1,p}$ para $p \in V_m^o$.

Notemos que si $N = |q_0, q_1, q_2| \in G_m$ entonces $q_1 \underset{m}{\sim} q_0$, $q_2 \underset{m}{\sim} q_0$, también para $i \neq j \in \{0, 1, 2\}$ tenemos $q_{ij} \underset{m+1}{\sim} q_{ik}$ para $k \in \{0, 1, 2\} \setminus \{j\}$ y $q_{ij} \underset{m+1}{\sim} q_{jk}$ para $k \in \{0, 1, 2\} \setminus \{i\}$, además $R_{m+1,p}, \cap S(N) = \{q_{jk}\}$ pues $q_{jk} \in S(N)$ no se relaciona con q_i en V_{m+1}. Lo que hemos hecho nos ayuda a dar una descripción explícita de los conjuntos $V_{m,p}$, $V_{m+1,p}$ y $R_{m+1,p}$.

Proposición 2.10 *Sea $p \in V_m^o$, entonces*

$$3\Delta_{m,p} f = 5\Delta_{m+1,p} f + 2 \sum_{q \in V_{m+1,p}} \Delta_{m+1,q} f + \sum_{q \in R_{m+1,p}} \Delta_{m+1,q} f$$

Demostración: Supongamos que $G_{m,p} = \{N, N'\}$, luego $N = |q_0, q_1, q_2|$ y $N' = |p_0, p_1, p_2|$, supongamos además que $p = q_0 = p_0$, de tal forma que $V_{m,p} = \{q_1, q_2, p_1, p_2\}$, luego $V_{m+1,p} = \{q_{01}, q_{02}, p_{01}, p_{02}\}$ y $R_{m+1,p} = \{q_{12}, p_{12}\}$. Que concuerdan con la observación ya hecha y con $\#(V_{m+1,p}) = \#(V_{m,p}) = 4$ y $\#(R_{m+1,p}) = 2$.



Demos valores (Figura 2.1):

$A_1 = f(q_1)$, $A_2 = f(q_2)$, $A'_1 = f(p_1)$, $A'_2 = f(p_2)$
$V_1 = f(q_{01})$, $V_2 = f(q_{02})$, $V'_1 = f(p_{01})$, $V'_2 = f(p_{02})$
$R = f(q_{12})$, $R' = f(p_{12})$
Finalmente $F = f(q_0) = f(p_0)$. Ahora calculemos las diferencias:
$3\Delta_{m,p}f = 3(A_1 + A_2 + A'_1 + A'_2 - 4F) = 3A_1 + 3A_2 + 3A'_1 + 3A'_2 - 12F$
$5\Delta_{m+1,p}f = 5(V_1 + V_2 + V'_1 + V'_2 - 4F) = 5V_1 + 5V_2 + 5V'_1 + 5V'_2 - 20F$
$\Delta_{m+1,q01}f = F + R + V_2 + A_1 - 4V_1 \quad \Delta_{m+1,q02}f = F + R + V_1 + A_2 - 4V_2$
$\Delta_{m+1,p01}f = F + R' + V'_2 + A'_1 - 4V'_1 \quad \Delta_{m+1,p02}f = F + R' + V'_1 + A'_2 - 4V'_2$
$\Delta_{m+1,q12}f = A_1 + A_2 + V_1 + V_2 - 4R \quad \Delta_{m+1,p12}f = A'_1 + A'_2 + V'_1 + V'_2 - 4R'$.
Luego calculamos las sumas:
$2 \sum_{q \in V_{m+1,p}} \Delta_{m+1,q}f = 2(4F + 2R + A_1 + A_2 - 3V_1 - 3V_2 + 2R' + A'_1 + A'_2 - 3V'_1 - 3V'_2)$
$= 2A_1 + 2A_2 - 6V_1 - 6V_2 + 4R + 2A'_1 + 2A'_2 - 6V'_1 - 6V'_2 + 4R' + 8F$
$\sum_{q \in R_{m+1,p}} \Delta_{m+1,q}f = A_1 + A_2 + V_1 + V_2 - 4R + A'_1 + A'_2 + V'_1 + V'_2 - 4R'$
haciendo la suma $5\Delta_{m+1,p}f + 2 \sum_{q \in V_{m+1,p}} \Delta_{m+1,q}f + \sum_{q \in R_{m+1,p}} \Delta_{m+1,q}f$
$= 3A_1 + 3A_2 + 3A'_1 + 3A'_2 - 12F = 3\Delta_{m,p}$, y se ha terminado la prueba. ■

2.2. Funciones armónicas.

Definiremos en esta sección lo que son las funciones m-armónicas y armónicas en K y en algún $M \cap K$ para cada $M \in G_m$.

Definición 2.11 *Consideraremos los siguientes conjuntos dado $M \in G_m$:*
$K_M = K \cap M$,
$V_M = V_* \cap M$,
$V^o_M = (V_* \setminus V_m) \cap M$.

Observemos que si $M = K_0$ entonces $K_M = K$ y $V^o_M = V^o_*$.

Como el triángulo de Sierpinsky es un conjunto autosemejante [Barnsley], entonces podemos estudiar el comportamiento de una función en K_M con respecto al de K, y recíprocamente, de tal modo que las funciones m-armónicas se comportan como hechas de funciones armónicas por pedazos. El siguiente resultado nos dice como deben ser los puntos que caen dentro de M.

Proposición 2.12 *Sea $M \in G_m$: a)Si $p \in V^o_M$, entonces $i(p) > m$.*
b)$V_M \cap V_m = V(M)$.
c)$K_M = \bigcup_{N \in D(M)} K_N$.

Demostración: a)Supongamos $M \in G_m$, y $p \in V^o_M$, pero $i(p) \leq m$ lo que implica $V_{i(p)} \subseteq V_m$, entonces $p \in V_m$ pero esto contradice que $p \in (V_* \setminus V_m) \cap M \subset (V_m)^c$. Por lo tanto $i(p) > m$.

b)La contención $\supseteq$ es clara. Si $p \in V_M \cap V_m$, existe $M' \in G_m$ tal que $p \in V(M')$, pero por 1.31, $p \in M' \cap M = V(M') \cap V(M)$, entonces $p \in V(M)$.

c)Como $K \cap M \subset K_{m+1} \cap M$, y por 1.32 $N \subset M$ si y solo si $N \in D(M)$, de donde $K_{m+1} = \bigcup_{N \in D(M)} K_N$, por lo tanto $K_M \subseteq \bigcup_{N \in D(M)} K_N$. Por otro lado si $N \in D(M)$, tenemos $K \cap N \subset N \subset M$ por lo que $\bigcup_{N \in D(M)} K_N \subseteq K_M$. ■

Definición 2.13 *Sea $f \in C(K_M)$, donde $M \in G_m$. entonces decimos que f es armónica en K_M si $\Delta_{n,p} f = 0$ para todo $p \in V_M^o$ y $n > m$.*

El resultado principal de este capítulo es un teorema de existencia y unicidad, pero para probarlo necesitamos los siguientes lemas. En el primero se construye una sucesión de funciones, luego se prueban ciertas acotaciones para esta sucesión, luego un lema técnico y finalmente la convergencia de las sucesión.

Lema 2.14 *Sea $g : V_0 \to \mathbb{R}$. Construyamos la sucesión de funciones $\{f_m\}_{m \geq 0} \subseteq \mathbb{R}(K)$ de la siguiente forma:*

i)$f_0|_{V_0} = g$.

ii)$f_m = \sum_{q \in V_m} f_m(q) \eta_q^m$ para todo $m \geq 0$,

iii)$f_{m-1}|_{V_m} = f_m|_{V_m}$.

iv)Para $q \in V_{m+1} \setminus V_m$, suponiendo $M_q = |q_0, q_1, q_2| \in G_m$ y $q = q_{ij}$ para $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$, tenemos $f_{m+1}(q) = \frac{1}{5}(2f_m(q_i) + 2f_m(q_j) + f_m(q_k))$.

Entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

a)$f_0|_{V_0} = g$

b)$f_{m+1}|_{V_m} = f_m|_{V_m}$,

c)$\Delta_{m-1,p} f_{m+1} = 0$ para $m \geq 0$ y $p \in V_{m+1}^o$, y

d)$d_m \leq \left(\frac{3}{5}\right)^m d_0$ donde $d_m = \text{máx}\left\{ f_m(p) - f_m(q) \mid p \underset{m}{\sim} q,\ p, q \in V_m \right\}$ para $m \in \mathbb{N}$.

Demostración: a)f_0 ya está dada por g.

b)$f_{m-1}|_{V_m} = f_m|_{V_m}$ está dada en una de las condiciones.

Para c) y d), la hipótesis de inducción será que c) y d) son válidas para $m > 0$.

c)Hay dos casos, $p \in V_{m+1} \setminus V_m$ o $p \in V_m$. En el primero, la condición (iv) es equivalente a $\Delta_{m+1,p} f_{m+1} = 0$ por el teorema 2.6. Si $p \in V_m$, por 2.10 tenemos
$3\Delta_{m,p} f_{m-1} = 3\Delta_{m,p} f_m = 5\Delta_{m+1,p} f_{m+1} + 2 \sum_{q \in V_{m+1,p}} \Delta_{m+1,q} f_{m+1} + \sum_{q \in R_{m-1,p}} \Delta_{m+1,q} f_{m+1} = 0$ pues estamos asumiendo $\Delta_{m,p} f_m = 0$, y $\Delta_{m+1,q} f_{m+1} = 0$ para $q \in V_{m+1,p} \cup R_{m+1,p} \subset V_{m+1} \setminus V_m$(por 2.8) . Por lo que concluimos que $\Delta_{m+1,p} f_{m+1} = 0$.

d)Sean $p, q \in V_{m+1}$ tales que $p \underset{m+1}{\sim} q$, entonces existe $M \in G_{m+1}$ tal que $p, q \in V(M)$, por 1.32 existe un único $M' = |q_0, q_1, q_2| \in G_m$ tal que $M \in D(M')$. Sea $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ tal que $M = (M')_i$ y $V(M) = \{q_i, q_{ij}, q_{ik}\}$, supongamos que $p = q_{ij}$. Entonces $V((M')_i) \setminus \{p\} = \{q_i, q_{ik}\}$, por lo que q cumple dos casos:

Si $q = q_i$ entonces

$$|f_{m+1}(p) - f_{m-1}(q_i)| = |\tfrac{1}{5}(2f_m(q_i) + 2f_m(q_j) + f_m(q_k)) - f_m(q_i)| =$$
$$= \tfrac{1}{5}|2f_m(q_j) + f_m(q_k) - 3f_m(q_i)| \leq \tfrac{1}{5}\,|f_m(q_j) - f_m(q_i)| + \tfrac{1}{5}\,|f_m(q_j) - f_m(q_i)| +$$
$$+ \tfrac{1}{5}\,|f_m(q_k) - f_m(q_i)| \leq \tfrac{3}{5} \max_{l \in \{0,1,2\}} \{|f_m(q_l) - f_m(q_i)|\} \leq \tfrac{3}{5} d_m$$

Si $q = q_{ik}$ entonces

$|f_{m+1}(p)-f_{m+1}(q_{ik})| = \left|\frac{1}{5}(2f_m(q_i)+2f_m(q_j)+f_m(q_k)-(2f_m(q_i)+f_m(q_j)+2f_m(q_k)))\right|$
$=\frac{1}{5}|f_m(q_j)-f_m(q_k)| \leq \frac{3}{5}|f_m(q_j)-f_m(q_k)| \leq \frac{3}{5}\max_{l\in\{0,1,2\}}\{|f_m(q_l)-f_m(q_i)|\} \leq \frac{3}{5}d_m$.

Lo que asegura que $|f_{m+1}(p)-f_{m+1}(q)| \leq \frac{3}{5}d_m$ para todo $p,q \in V_{m+1}$ tal que $p \underset{m+1}{\sim} q$ y por lo tanto $d_{m+1} \leq \frac{3}{5}d_m$. De donde concluimos que $d_{m+1} \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{m+1} d_0$. ■

Lema 2.15 *La sucesión construida en el lema anterior cumple las siguientes propiedades para $m \in \mathbb{N}$:*

a)Para todo $N \in G_m$ y $x \in K_N$, $|f_{m+1}(x)-f_m(x)| \leq \max_{p\in S(N)} |f_{m+1}(p)-f_m(p)|$.

b)Para todo $x \in K$, $|f_{m+1}(x)-f_m(x)| \leq \max_{p\in V_{m+1}\setminus V_m} |f_{m+1}(p)-f_m(p)|$.

Demostración: a)Sea $N' \in G_{m+1}$, existe un único $N \in G_m$ tal que $N' \in D(N)$. La función f_m es afín en N' pues es afín en todo N, y f_{m+1} es afín en N' por construcción, entonces la función afín $f_{m+1}-f_m|_{N'}$ alcanza su mínimo y su máximo en $V(N')$ pues N' es un polígono convexo y compacto (Véase [Fleming]) y en consecuencia $f_{m+1}-f_m|_N$ alcanza su máximo y su mínimo en $V(N)\cup S(N)$.

Sea $N=|q_0,q_1,q_2| \in G_m$ tal que $x \in K_N$, y definamos $v_{ij}=f_{m+1}(q_{ij})-f_m(q_{ij})$ para $i,j=0,1,2$. $v_{ii}=0$ por definición de f_{m+1}, sean $a=\min\{v_{ij} \mid i,j=0,1,2\}$, $b=\max\{v_{ij} \mid i,j=0,1,2\}$ y $c=\max\{|a|,|b|\}$, luego $-c \leq a \leq b \leq c$ y $-c \leq -b \leq -a \leq c$, por lo que $[a,b] \in [-c,c]$ y $[-b,-a] \in [-c,c]$ y en consecuencia si $y \in [a,b]$ entonces $-y \in [-c,c]$ y $|y| \leq c$. Por otro lado para todo $x \in K_N$ tenemos que $x \in K_{N'}$ para algún $N' \in D(N)$ por el resultado 2.12.(c) y por el párrafo anterior tenemos que $a \leq f_{m+1}(x)-f_m(x) \leq b$, en consecuencia $|f_{m+1}(x)-f_m(x)| \leq c = \max_{i,j\leq\{0,1,2\}}|v_{ij}| = \max_{i\neq j\in\{0,1,2\}}|v_{ij}|$ pues $0 \leq |r|$ para todo $r \in \mathbb{R}$.

b)Sea $x \in K$, como $K \subset K_m$ existe $N \in G_m$ tal que $x \in N$, entonces $|f_{m+1}(x)-f_m(x)| \leq \max_{p\in S(N)}|f_{m+1}(p)-f_m(p)| \leq \max_{p\in V_{m+1}\setminus V_m}|f_{m+1}(p)-f_m(p)|$ pues $S(N) \subseteq V_{m+1}\setminus V_m$, por lo tanto $|f_{m+1}(x)-f_m(x)| \leq \max_{p\in V_{m+1}\setminus V_m}|f_{m+1}(p)-f_m(p)|$ para todo $x \in K$. ■

Lema 2.16 *Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión tal que $|x_{k+1}-x_k| \leq cr^k$ para algún $m \in \mathbb{N}$ y para todo $k \geq m \in \mathbb{N}$, entonces $\{x_n\}$ converge.*

Demostración: Sea $n \geq l \geq m$, entonces haciendo "suma telescópica."btenemos:
$|x_n-x_l| = \left|\sum_{k=l}^{n-1} x_{k+1}-x_k\right| \leq \sum_{k=l}^{n-1}|x_{k+1}-x_k| \leq c\sum_{k=l}^{n-1} r^k = c\frac{r^l-r^n}{1-r}$. Por otro lado como $\lim_{m\to\infty} r^m = 0$ si $r \in [0,1)$ entonces para $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $r^m < \frac{\varepsilon}{c}(1-r)$ y para $l \geq m$ se cumple $r^l \leq r^m$, luego como $1-r^{n-l} \leq 1$ para $n > l$ entonces $r^l(1-r^{n-l}) \leq r^l$ de donde $r^l-r^n \leq r^l \leq r^m < \frac{\varepsilon}{c}(1-r)$. Por lo que $\{x_k\}$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto converge a algún $x \in \mathbb{R}$. ■

Lema 2.17 *La sucesión de funciones del lema 2.14 converge uniformemente.*

Demostración: Sea $p \in V_{m+1}\setminus V_m$ tal que $|f_{m+1}(x)-f_m(x)| \leq |f_{m+1}(p)-f_m(p)|$ para todo $x \in K$ (Por 2.15), sea $M_p=|q_0,q_1,q_2| \in G_m$, y supongamos $p=q_{01}$, entonces

$f_m(p) = f_m(q_0)\eta^m_{q_0}(p) + f_m(q_1)\eta^m_{q_1}(p) + f_m(q_2)\eta^m_{q_2}(p)$, como $p = \frac{1}{2}q_0q_1 = q_0 + \frac{1}{2}(q_1 - q_0)$ tenemos $\eta^m_{q_0}(p) = \eta^m_{q_1}(p) = \frac{1}{2}$ y $\eta^m_{q_2}(p) = 0$, por lo tanto

$f_m(p) = \frac{1}{2}(f_m(q_0) + f_m(q_1))$. Luego $f_{m+1}(p) = \frac{1}{5}(2f_m(q_0) + 2f_m(q_1) + f_m(q_2))$ y desarrollando:

$|f_{m+1}(p) - f_m(p)| = \frac{1}{10}|4f_m(q_0) + 4f_m(q_1) + 2f_m(q_2) - 5f_m(q_0) - 5f_m(q_1)|$
$= \frac{1}{10}|2f_m(q_2) - f_m(q_0) - f_m(q_1)| \leq \frac{1}{10}(|f_m(q_2) - f_m(q_0)| + |f_m(q_2) - f_m(q_1)|)$
$\leq \frac{2}{10}\max\{|f_m(q_2) - f_m(q_0)|, |f_m(q_2) - f_m(q_1)|\} \leq \frac{1}{5}d_m$.

Por lo tanto $|(f_{m+1} - f_m)(x)| \leq |(f_{m+1} - f_m)(p)| \leq \frac{1}{5}d_m$ para todo $x \in K$, luego $\frac{1}{5}d_m \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^m d_0$ por 2.14.(d), haciendo $c = \frac{1}{5}d_0$ y $r = \frac{3}{5}$, la sucesión $\{f_m(x)\}$ converge a $f(x)$, y los l, n tales que $r^l - r^n < \frac{\varepsilon}{c}(1-r)$ no dependen de x, entonces la convergencia de la sucesión $\{f_m\}$ es uniforme. ■

El siguiente teorema plantea lo que se le conoce como Problema de Dirichlet en K_M para funciones armónicas.

Teorema 2.18 *Sea $M \in G_m$ y sea $g : V(M) \to \mathbb{R}$. Entonces existe una única función $f : K_M \to \mathbb{R}$ armónica en K_M que cumple $f|_{V(M)} = g$.*

Demostración: Supongamos que M es K, y entonces el problema es ver que existe una función f armónica en K tal que $f|_{\partial K} = g$ donde $g : V_0 \to \mathbb{R}$.

Sea $\{f_k\}_{k\geq 0}$ la sucesión construida en el lema 2.14, entonces por lema 2.17 converge uniformemente, como las funciones η^m_p son continuas, entonces una combinación lineal finita de ellas es continua, entonces $f_m(x)$ es continua. Por lo tanto $\{f_m\}_{m\geq 0}$ converge uniformemente a f que es una función continua.

Si $p \in V_n$ para cualquier $n \geq 0$, entonces $f_{n+1}(p) - f_n(p) = 0$, y si $V_n \subset V_m$ para toda $m > n$, se satisface $f_m(p) - f_n(p) = 0$, entonces se cumple que $f(p) - f_n(p) = 0$, por lo que concluimos que f es tal que $f|_{\partial K} = g$ y $\Delta_{m,p}f = 0$ para $m > 0$ y $p \in V^o_m$. Por lo tanto hemos demostrado la existencia.

Demostremos la unicidad. Si existiera $f^* \in C(K)$ tal que $f^*|_{\partial K} = g$ y $\Delta_{m,p}f^* = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y $p \in G_m$, entonces $f^*|_{\partial K} = f|_{\partial K}$, si asumimos $f^*|_{V_m} = f|_{V_m}$ para m dado, para todo $p \in V_{m+1} \setminus V_m$ y dado $M_p = |q_0, q_1, q_2|$ y $p = q_{ij}$ para $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$ se cumple que $\Delta_{m+1,p}f^* = 0$, sí y sólo si

$f^*(p) = \frac{1}{5}(2f^*(q_i) + 2f^*(q_j) + f^*(q_k)) = \frac{1}{5}(2f(q_i) + 2f(q_j) + f(q_k)) = f(p)$ de donde concluimos que $f^*|_{V_{m+1}} = f|_{V_{m+1}}$ y por lo tanto $f^*|_{V_*} = f|_{V_*}$. Como V_* es denso en K y tanto f como f^* son continuas en K, entonces $f^* = f$ y por lo tanto hemos terminado la prueba. ■

Lema 2.19 *Sea $N = |q_0, q_1, q_2| \in G_m$ y $p \in S(N)$ y f armónica, entonces a) $\min\limits_{l=0,1,2} f(q_l) < f(p) < \max\limits_{l=0,1,2} f(q_l)$, o se da la igualdad si $f(q_0) = f(q_1) = f(q_2)$.*

b)Si $f(q_{ij}) = f(q_{ik}) = f(q_i)$ con $\{i,j,k\} = \{0,1,2\}$, entonces $f|_{V(N)}$ es constante.

Demostración: a)Supongamos $p = q_{ij}$ para $i \neq j \in \{0,1,2\}$, como $\Delta_{m+1,p}f = 0$ entonces $f(p) = \frac{1}{5}(2f(q_i) + 2f(q_j) + f(q_k))$ de donde $\min\limits_{l=0,1,2} f(q_l) \leq f(p) \leq \max\limits_{l=0,1,2} f(q_l)$ y se verifica la igualdad sí y sólo si $f(q_0) = f(q_1) = f(q_2)$.

b)De $f(q_{ij}) = \frac{1}{5}(2f(q_i) + 2f(q_j) + f(q_k))$ y $f(q_{ik}) = \frac{1}{5}(2f(q_i) + 2f(q_k) + f(q_j))$ obtenemos

$5f(q_i) - 2f(q_i) = 2f(q_j) + f(q_k)$ y $5f(q_i) - 2f(q_i) = 2f(q_k) + f(q_j)$, por lo que $2f(q_j) + f(q_k) = 2f(q_k) + f(q_j)$ de donde $f(q_j) = f(q_k)$, luego

$3f(q_i) = 2f(q_j) + f(q_k) = 3f(q_j)$, lo que implica $f(q_i) = f(q_j) = f(q_k)$. ∎

En especial la propiedad (b) nos dice que podemos ir de triángulos más pequeños a más grandes para probar que necesariamente la función es constante en el triángulo más grande si lo es en *hija*. El siguiente resultado es una propiedad de las funciones armónicas en K_M, que su máximo y su mínimo lo asumen en los puntos $V(M)$, y algún punto en $K_M \setminus V(M)$ asume uno de estos valores sí y sólo si la función es constante en K_M.

Teorema 2.20 *Sea $M \in G_m$, f armónica en K_M, entonces para toda $x \in K_M - V(M)$ se cumple:*

$\min_{p\in V(M)} f(p) < f(x) < \max_{p\in V(M)} f(p)$ *o la igualdad se da si f es constante en K_M. [v1]*

Demostración: Supongamos que $M = M_*$ y f armónica en $K = K_{M_*}$.

Si $p \in V_1^o = S(M_*)$, por el lema anterior concluimos que [v1] es válida. Supongamos que [v1] es válida para un $m > 0$ y V_m^o, sea $p \in V_{m+1}^o$,[v1] ya es válida para $p \in V_m^o$. Sea $p \in V_{m+1} \setminus V_m$, existe $N_p = [q_0, q_1, q_2] \in G_m$, y por el lema anterior $\min_{q\in V(N_p)} f(q) < f(p) < \max_{q\in V(N_p)} f(q)$ o se da la igualdad si $f|_{K_{N_p}}$ es constante, lo cual sucede si $f|_{\partial K}$ es constante, pues aplicamos la parte b) del lema anterior m veces hasta llegar a $V(M_*)$, de no ser constante se tiene que

$\min_{q\in V(M_*)} f(q) \leq \min_{q\in V(N_p)} f(q) < f(p) < \max_{q\in V(N_p)} f(q) \leq \max_{q\in V(M_*)} f(q)$. Entonces [v1] se cumple para $m + 1$.

Sea $x \in K \setminus V_*$, entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \cap \partial K = \varnothing$, si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $\frac{1}{2^n} < \delta$ entonces para todo $k > 0$ y como $x \in K \subset K_{n+k}$, existe $L_{(k)} \in G_{n+k}$ tal que $x \in L_{(k)}$ y se cumple que $d(x, y) \leq Diam(L_{(k)}) = \frac{1}{2^{n+k}} < \delta$ para todo $y \in L_{(k)}$ y por lo tanto $L_{(k)} \subset B_\delta(x)$ y además $V(L_{(k)}) \cap \partial K = \varnothing$. Sean $f(x_k) = \min_{q\in V(L_{(k)})} f(q)$ y $f(y_k) = \max_{q\in V(L_{(k)})} f(q)$ y $L = L_{(1)}$, las sucesiones $\{x_k\}$ y $\{y_k\}$ convergen a x, y las sucesiones $\{f(x_k)\}$ y $\{f(y_k)\}$ convergen a $f(x)$ pues f es continua, además son monótonas, por lo que $f(x_k) < f(x) < f(y_k)$ y por lo tanto $\min_{p\in V(L)} f(p) < f(x) < \max_{p\in V(L)} f(p)$, o se dan las igualdades cuando $f|_{V(L)}$ es constante, por lo que [v1] se satisface para todo $x \in K$. ∎

Las funciones m-armónicas las definiremos como funciones que se forman al pegar pedazos de funciones armónicas en cada $M \in G_m$.

Definición 2.21 *$f \in C(K)$, entonces decimos que f es m-armónica si $f|_{K_M}$ es armónica en K_M para todo $M \in G_m$.*

Veamos que las funciones $m-$armónicas son continuas y están determinadas por los valores en V_m. También tienen su problema de Dirichlet.

Teorema 2.22 *Sea $g : V_m \to \mathbb{R}$, entonces existe una única función m-armónica f tal que $f|_{V_m} = g$.*

Demostración: Para cualquier $M \in G_m$, tenemos una función f_M armónica en K_M de tal manera que $f_M|_{V(M)} = g|_{V(M)}$ y $f_M = 0$ en $K \setminus K_M$, entonces proponemos $f(x) = f_M(x)$ si $x \in K_M$. Es claro que $f|_M = f_M$ es continua en M, Si $N \in G_m \setminus \{M\}$ por 1.31, $N \cap M \subset V_m$, si $x \in V(M) \cap V(N)$ tenemos que $f(x) = f_M(x) = f_N(x) = g(x)$, además $x \in K_M \cap K_N \subset V(N) \cap V(M) = \{x\}$, por lo que aplicamos el lema 1.61 y obtenemos que la función es continua en todo K.

Sea h otra función m-armónica tal que $h|_{V_m} = g$, si $M \in G_m$ entonces $h|_{V(M)} = g|_{V(M)} = f|_{V(M)}$, como h es armónica en K_M entonces $h|_{K_M} = f|_{K_M}$, de donde concluimos que $f = h$. ■

Con lo anterior podremos considerar el problema de Dirichlet de funciones m-armónicas y construir las siguientes funciones:

Sea $g_p : V_m \to \mathbb{R}$ con $p \in V_m$ definida como $g_p(p) = 1$ y $g_p(q) = 0$ para $q \neq p$. Entonces existe una única función m-armónica que extiende a g_p en K. A estas funciones las denotaremos de la siguiente forma.

Definición 2.23 *Diremos que la función $\psi_p^m : K \to \mathbb{R}$ es la función m-armónica tal que $\psi_p^m|_{V_m} = g_p$.*

Estas funciones las utilizaremos en la próxima sección como aproximantes a cualquier función en $C(K)$, para algún estudio posterior sería conveniente ver a las funciones $\{\psi_p^m\}_{m=0}^{\infty}$ como una base ortogonal o biortogonal de $C(K)$, es decir, que sean ondeletas para describir a este espacio, así como ver que cumplan las propiedades de escala y traslación para que puedan formar un análisis multiresolución de $C(K)$. Véase [Kaiser] y [Aboufadel] para más información sobre estos temas.

El siguiente resultado en esencia nos dice que la única función m-armónica tal que $f|_{V_m} = g$ se obtiene justo de las combinaciones lineales de ψ_p^m con coeficientes $g(p)$. A veces será útil denotar a $f(p)$ como f_p.

Proposición 2.24 *Sea $g : V_m \to \mathbb{R}$, la única función m-armónica $g^* : K \to \mathbb{R}$ tal que $g^*|_{V_m} = g$ está dada por $g^* = \sum_{p \in V_m} g_p \psi_p^m$*

Demostración: Sea $p \in V_m$, entonces $g^*(p) = \sum_{q \in V_m} g(q)\psi_q^m(p) = g(p)$ por lo tanto $g^*|_{V_m} = g$.

Por la linealidad de $\Delta_{n,p}$ donde $n \geq i(p)$ y $p \in V_n \setminus V_m$, y como existe un único $M \in G_m$ tal que $p \in K_M \subset M$, tenemos $\Delta_{n,p} g^* = \sum_{q \in V_m} g(q)\Delta_{n,p}\psi_q^m = 0$, de donde g^* es armónica en K_M y como es válido para cualquier $M \in G_m$ entonces g^* es m-armónica . Por lo tanto g^* es la única función m-armónica que satisface $g^*|_{V_m} = g$. ■

Con esto hemos probado que las ψ_p^m forman una base para las funciones m-armónicas, pero ¿Las funciones m-armónicas forman un subespacio vectorial de $C(K)$?

Proposición 2.25 *Las funciones m-armónicas forman un subespacio vectorial de $C(K)$.*

Demostración: Sean $f = \sum_{q \in V_m} f_q \psi_q^m$ y $g = \sum_{q \in V_m} g_q \psi_q^m$ que son dos funciones m-armónicas, entonces para todo $r \in \mathbb{R}$ tenemos que $rf = r \sum_{q \in V_m} f_q \psi_q^m = \sum_{q \in V_m} r f_q \psi_q^m$ que es m-armónica. $f - g = \sum_{q \in V_m} f_q \psi_q^m - \sum_{q \in V_m} g_q \psi_q^m$ y agrupando las sumas

$f - g = \sum_{q \in V_m} (f_q \psi_q^m - g_q \psi_q^m) = \sum_{q \in V_m} (f_q - g_q) \psi_q^m$ que es una función m-armónica. Por lo tanto forman un espacio vectorial. ■

Capítulo 3

Expansión armónica y expansión armónica débil*.

3.1. Expansión armónica.

Las funciones ψ_p^m forman un espacio vectorial, veremos que con estas podremos aproximar cualquier función en $C(K)$. La siguiente definición correspondería a las funciones lo más burdas posibles respecto al orden de un punto $p \in V_*$. Denominaremos a las funciones ψ_p^m las funciones m-armónicas elementales.

Definición 3.1 *Sea $p \in V_*$, entonces diremos que ψ_p está dada por $\psi_p^{o(p)}$.*

Ahora definamos lo que es la aproximación armónica de una función mediante funciones m-armónicas elementales.

Definición 3.2 *Sea $f \in C(K)$, al límite uniforme de la sucesión de funciones $\left\{ \sum_{p \in V_m} \gamma(p)\psi_p \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ le llamamos la expansión armónica de f si f es ese límite, y lo denotamos por $\sum_{p \in V_*} \gamma(p)\psi_p$ donde $\gamma : V_* \to \mathbb{R}$.*

Probaremos más adelante que f es un límite uniforme de una sucesión de funciones $\{f_m\}$ sí y sólo si lo es en la norma de $C(K)$.

Necesitamos dos lemas para conocer la interacción entre la diferencia armónica discreta $\Delta_{m,p}$ y las funciones m-armónicas elementales ψ_p^n, para probar la existencia y unicidad de una expansión armónica de una función en $C(K)$.

Lema 3.3 *Sean $m, n \geq 0$, $p \in V_m$ y $q \in V_n^o$. Entonces:*

$$(\tfrac{3}{5})^m \Delta_{n,q} \psi_p^m = (\tfrac{3}{5})^{\max\{m,n\}} \begin{cases} -4 & p = q \\ 1 & p \underset{l}{\sim} q \ y \ l = \min\{n, m\} \\ 0 & \text{en los demás casos.} \end{cases}$$

Demostración: Probemos por casos:

1) $p = q$, Si $m \geq n$ entonces $V_m \supseteq V_n$ por lo que $\psi_p'''|_{V_{n,p}} = 0$, entonces $\Delta_{n,p}\psi_p''' = -4$.

Si $m < n$, supongamos que $n = m + 1$. Entonces

$3\Delta_{m,q}\psi_p''' = 5\Delta_{m+1,q}\psi_p''' + 2 \sum_{q' \in V_{m+1,p}} \Delta_{m+1,q'}\psi_p''' + \sum_{q' \in R_{m+1,p}} \Delta_{m+1,q'}\psi_p'''$.

Por ser ψ_p''' es m-armónica y como $q' \in V_{m+1,p} \cup R_{m+1,p} \subset V_{m+1} \setminus V_m$, implica $\Delta_{m+1,q'}\psi_p''' = 0$, entonces las dos últimas sumas se anulan. Entonces

$3\Delta_{m,q}\psi_p''' = 5\Delta_{m+1,q}\psi_p'''$ de donde $\Delta_{n,q}\psi_p''' = \frac{3}{5}\Delta_{m,q}\psi_p''' = -4\frac{3}{5}$. El mismo procedimiento se aplica por inducción sobre $n > m$ para obtener $\Delta_{n,q}\psi_p''' = (\frac{3}{5})^{n-m}\Delta_{m,q}\psi_p''' = -4(\frac{3}{5})^{n-m}$.

2) $p \underset{l}{\sim} q$ y $l = \min\{n, m\}$. Si $l = n$ entonces $V_n \subseteq V_m$, por lo que si $q' \underset{n}{\sim} q$ y $q' \neq p$ entonces $\psi_p'''(q') = 0$, luego $\psi_p'''(q) = 0$ y $\psi_p'''(p) = 1$, por lo tanto $\Delta_{n,q}\psi_p''' = 1$, que es coherente con $m = \max\{m, n\}$.

Si $l = m$ y $m < n$. Supongamos que $n = m + 1$ entonces

$3\Delta_{m,q}\psi_p''' = 5\Delta_{m+1,q}\psi_p''' + 2 \sum_{q' \in V_{m+1,q}} \Delta_{m+1,q'}\psi_p''' + \sum_{q' \in R_{m+1,q}} \Delta_{m+1,q'}\psi_p'''$.

Como $q' \in V_{m+1,q} \cup R_{m+1,q} \subset V_{m+1} \setminus V_m$, y por ser ψ_p''' m-armónica entonces las dos últimas sumas se anulan. Por lo tanto $3\Delta_{m,q}\psi_p''' = 5\Delta_{m+1,q}\psi_p'''$ de donde $\Delta_{m+1,q}\psi_p''' = \frac{3}{5}\Delta_{m,q}\psi_p''' = \frac{3}{5}$. Y aplicando este procedimiento inductivamente sobre n desde $n = m + 1$ concluimos que $\Delta_{n,q}\psi_p''' = (\frac{3}{5})^{n-m}$.

3) Si $m \geq n$, $q \neq p$, y no es cierto $p \underset{n}{\sim} q$, tenemos $V_n \subseteq V_m$, de donde $\psi_p'''|_{V_{n,q}} = 0$ y $\psi_p'''(q) = 0$, por lo tanto $\Delta_{n,q}\psi_p''' = 0$.

Si $m < n$, $q \neq p$ y no se cumple $p \underset{m}{\sim} q$, entonces $q \in V_n \supset V_m$ por lo que hay dos casos. Si $q \in V_n \setminus V_m$ existe $M \in G_m$ tal que $q \in V_M^o$, de donde $\Delta_{n,q}\psi_p''' = 0$ pues ψ_p''' es armónica en K_M. Si $q \in V_m \setminus V_{m,p}$ y $G_{m,q} = \{N_1, N_2\}$ entonces $\psi_p''' = 0$ en $K_{N_1} \cup K_{N_2}$, de donde $V_{n,q} \subset K_{n,q} \subset K_{m,q}$ y por lo tanto $\Delta_{n,q}\psi_p''' = 0$. ■

Definición 3.4 *Sea $q \in V_*^o$, entonces consideraremos el funcional $\Delta_q^* = \Delta_{i(q),q}$.*

De manera análoga a ψ_p hemos definido Δ_p^* como la diferencia armónica más burda posible. Veamos como es la interacción entre estas dos.

Lema 3.5 *Sean $p \in V_*$ y $q \in V_*^o$, entonces* $\Delta_q^*\psi_p = \begin{cases} -4 \ si \ p = q \\ 1 \ si \ p \in B_q \\ 0 \ otros \ casos \end{cases}$.

Demostración: Basándonos en 3.3 y en la igualdad $\Delta_q^*\psi_p = \Delta_{i(q),q}\psi_p^{i(p)}$. Si $p = q$ es cierto que $i(p) = i(q)$ entonces $\Delta_{i(p),p}\psi_p^{i(p)} = -4$.

Si $p \in B_q$ entonces $i(p) = i(q)$ y sea $N = [q_0, q_1, q_2] \in G_{i(q)-1}$ tal que $p, q \in S(N)$, supongamos $p = q_{ij}$ y $q = q_{ki}$ o $q = q_{kj}$ para $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$, en el primer caso $q, p \in (N)_i$, y en el segundo $q, p \in (N)_j$, $D(N) \subset G_{i(q)}$, por lo tanto $q \underset{i(q)}{\sim} p$, de donde $\Delta_{i(q),q}\psi_p^{i(p)} = 1$.

Si $q \underset{i(q)}{\sim} p$ y $i(q) \leq i(p)$ entonces $p \in V_{i(q),q} \subset V_{i(q)}$ por lo que $i(p) \leq i(q)$ y entonces $i(p) = i(q)$.

Si $q \underset{i(p)}{\sim} p$ y $i(p) \leq i(q)$ entonces $q \in V_{i(p),p} \subset V_{i(p)}$ de donde $i(q) \leq i(p)$, por lo que $i(q) = i(p)$.

En estos dos casos $q \underset{i(q)}{\sim} p$ y $q, p \in V_{i(q)} \setminus V_{i(q)-1}$, existe un único $N' \in G_{i(q)}$ tal que $p, q \in V(N')$ y por otro lado existe un único $N \in G_{i(q)-1}$ tal que $N' \in D(N)$, luego $V_{i(q)} \setminus V_{i(q)-1} = \bigcup_{M \in G_{i(q)-1}} S(M)$, por lo que $q, p \in S(N)$ y por lo tanto $p \in B_q$ y $\Delta_{i(q),q}\psi_p^{i(p)} = 1$.

En los demás casos $\Delta_{i(q),q}\psi_p^{i(p)} = 0$. ■

Ahora probemos este resultado que nos permite expresar de otra forma a $\sum_{p \in V_m} f(p)\psi_p^m$.

Proposición 3.6 *Sea $f \in C(K)$ y sea* $\gamma_p(f) = \begin{cases} f(p) & p \in V_0 \\ -\frac{3}{10}\Delta_p^* f - \frac{1}{10}\sum_{q \in B_p} \Delta_q^* f & p \in V_*^o \end{cases}$

Entonces para todo $m \geq 0$ tenemos que $\sum_{p \in V_m} \gamma_p(f)\psi_p = \sum_{p \in V_m} f(p)\psi_p^m$.

Demostración: Definimos $h_m = \sum_{p \in V_m} \gamma_p(f)\psi_p$. Probemos que h_m es m-armónica.

Sea $p \in V_m$, si $i(p) = m$ entonces $\psi_p = \psi_p^m$ es claro que es m-armónica. Si $i(p) < m$ tenemos que $K_m \subset K_{i(p)}$, por lo que para todo $M \in G_m$ existe un único $N \in G_{i(p)}$ tal que $M \subset N$, por lo tanto al ser $\psi_p^{i(p)}$ armónica en K_N entonces lo es también en K_M, entonces ψ_p es m-armónica. Luego h_m es combinación lineal de funciones m-armónicas, por esto h_m es m-armónica.

$f_m^* = \sum_{p \in V_m} f(p)\psi_p^m$ es m-armónica y satisface $f_m^*|_{V_m} = f|_{V_m}$. Por lo que si $h_m|_{V_m} = f|_{V_m}$ entonces $h_m = f_m^*$.

Por inducción. $p \in V_0$, entonces $h_0(p) = \sum_{q \in V_0} \gamma_q(f)\psi_q(p) = \sum_{q \in V_0} f(q)\psi_q^0(p) = f(q)$ por lo tanto $h_0 = \sum_{q \in V_0} f(q)\psi_q^0$.

Para $m > 0$ supongamos que $h_m = \sum_{p \in V_m} f(p)\psi_p^m$ y probemos que $h_{m+1} = \sum_{p \in V_{m+1}} f(p)\psi_p^{m+1}$.

Desarrollando h_{m+1} obtenemos:

$h_{m+1} = \sum_{p \in V_{m+1}} \gamma_p(f)\psi_p = \sum_{p \in V_m} \gamma_p(f)\psi_p + \sum_{q \in V_{m+1} \setminus V_m} \gamma_q(f)\psi_q = h_m + \sum_{i(q)=m+1} \gamma_q(f)\psi_q$. Donde la última igualdad se obtiene de la hipótesis de inducción.

Si $p \in V_m$ entonces $h_{m+1}(p) = h_m(p) = f(p)$.

Si $p \in V_{m+1} \setminus V_m$ entonces $h_{m+1}(p) = h_m(p) + \gamma_p(f)$. Para $p \in V_{m-1} \setminus V_m$ existe un único $M_p = |q_0, q_1, q_2| \in G_m$ tal que $p \in S(M)$. Supongamos que $p = q_{ij}$ para $\{i, j, k\} \in \{0, 1, 2\}$, por hipótesis de inducción $h_m = \sum_{q \in V_m} f(q)\psi_q^m$, que es m-armónica, entonces:

$\Delta_{m+1,p}h_m = 0$ si y sólo si $h_m(p) = \sum_{q \in V_m} f(q)\psi_q^m(p) = \frac{1}{5}(2f(q_i) + 2f(q_j) + f(q_k))$.

Por otro lado, utilizando la notación $f(q_i) = f_i$, tenemos $\gamma_p(f) = -\frac{3}{10}\Delta_p^* f - \frac{1}{10}\sum_{q \in B_p} \Delta_q^* f =$

$= -\frac{1}{10}(3(f_i + f_j + f_{ik} + f_{jk} - 4f_{ij}) + f_i + f_k + f_{ij} + f_{kj} - 4f_{ik} + f_j + f_k + f_{ji} + f_{ki} - 4f_{jk})$
$= -\frac{1}{10}(4f_i + 4f_j + 2f_k - 10f_{ij}) = -\frac{1}{5}(2f_i + 2f_j + f_k - 5f_{ij})$.

Entonces $h_{m+1}(p) = h_m(p) + \gamma_p(f)$
$= \frac{1}{5}(2f(q_i) + 2f(q_j) + f(q_k)) - \frac{1}{5}(2f(q_i) + 2f(q_j) + f(q_k)) + f(q_{ij})$
$= f(q_{ij}) = f(p)$.

En consecuencia $h_{m+1}(p) = f(p)$ y por lo tanto hemos demostrado que $h_m|_{V_m} = f|_{V_m}$ para toda $m \geq 0$ y por el teorema 2.22,concluimos que $h_m = \sum_{p\in V_m} f(p)\psi_p^m$. ■

Lema 3.7 *Una sucesión de funciones $\{f_m\} \subset C(K)$ converge uniformemente sí y sólo si converge en la norma de $C(K)$.*

Demostración: Si converge uniformemente, sea $\varepsilon > 0$, y $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m$ tenemos $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in K$, como K es compacto y $C(K)$ es completo, entonces existe $y \in K$ tal que $|f_n(y) - f(y)| = \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)|$, de donde $\|f_n - f\| = |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$.

Si f_n converge a f en la norma de $C(K)$, sea $\varepsilon > 0$ y un $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n > m$ entonces $\|f_n - f\| = \sup_{x\in K} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, entonces para todo $x \in K$, se tiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\| < \varepsilon$. ■

El siguiente resultado es la existencia y unicidad de la expansión armónica.

Teorema 3.8 *Para toda $f \in C(K)$ existe una única expansión armónica $\sum_{p\in V_*} \gamma_p(f)\psi_p$.*

Demostración: Supongamos que existe otra expansión armónica $\sum_{q\in V_*} \beta(q)\psi_q$ para f. Si $p \in V_n^o$ entonces $\lim_{m\to\infty} \sum_{q\in V_m} \beta(q)\psi_p = f$ en $C(K)$, como $\Delta_{n,p}$ es continuo, entonces $\Delta_{n,p} \lim_{m\to\infty} f_m = \lim_{m\to\infty} \Delta_{n,p} f_m$. De donde resultan las siguientes expresiones:

$$\Delta_{n,p} f = \Delta_{n,p} \lim_{m\to\infty} \sum_{q\in V_m} \beta(q)\psi_q = \lim_{m\to\infty} \Delta_{n,p} \sum_{q\in V_m} \beta(q)\psi_q$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{q'\in V_{n,p}} \Big(\sum_{q\in V_m} \beta(q)\psi_q(q')\Big) - 4 \sum_{q\in V_m} \beta(q)\psi_q(p) \right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{q\in V_m} \Big(\sum_{q'\in V_{n,p}} \beta(q)\psi_q(q')\Big) - 4 \sum_{q\in V_m} \beta(q)\psi_q(p) \right)$$

$$= \lim_{m\to\infty} \left[\sum_{q\in V_m} \left(\sum_{q'\in V_{n,p}} (\beta(q)\psi_q(q') - 4\beta(q)\psi_q^m(p)) \right) \right]$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{q\in V_m} \Delta_{n,p}\beta(q)\psi_q = \lim_{m\to\infty} \sum_{q\in V_m} \beta(q)\Delta_{n,p}\psi_q.$$ En particular $\Delta_p^* f = \lim_{m\to\infty} \sum_{q\in V_m} \beta(q)\Delta_p^*\psi_q$.

Si $q = p$ o $q \in B_p$ tenemos que $i(p) = i(q)$, entonces por el lema 3.5, si $m < i(p)$ entonces $\sum_{q\in V_m} \beta(q)\Delta_p^*\psi_q = 0$, y si $m \geq i(p)$, entonces $\sum_{q\in V_m} \beta(q)\Delta_p^*\psi_q = \sum_{q\in V_{i(p)}} \beta(q)\Delta_p^*\psi_q + \sum_{q\in V_m \setminus V_{i(p)}} \beta(q)\Delta_p^*\psi_q = \sum_{q\in B_p} \beta(q) - 4\beta(p)$. En consecuencia $\lim_{m\to\infty} \sum_{q\in V_m} \beta(q)\Delta_p^*\psi_q = \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{q\in B_p} \beta(q) - 4\beta(p) \right) = \sum_{q\in B_p} \beta(q) - 4\beta(p)$ pues las relaciones $p = q$ o $q \in B_p$ no dependen de m.

Por otro lado por 2.5. $\sum_{q\in B_p} \beta(q) - 4\beta(p) = x(p) = \Delta_p^* f$ tiene como única solución $\beta(p) = -\frac{3}{10}\Delta_p^* f - \frac{1}{10} \sum_{q\in B_p} \Delta_q^* f$, que por definición es $\gamma_p(f)$ y por lo tanto $\sum_{p\in V_*} \gamma_p(f)\psi_p = \sum_{p\in V_*} \beta(p)\psi_p$.

Considerando la sucesión de funciones $h_m = \sum_{p\in V_m} \gamma_p(f)\psi_p$, probemos que es uniformemente convergente a f. Como f es continua en K que es compacto, sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ y existe $l \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > l$ y $M \in G_m$ tenemos $Diam(M) = \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^l} < \delta$, para todo $x, y \in K_M$ implica que $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, para todo $x \in K \subset K_m$ existe $M \in G_m$ tal que $x \in K_M \subset M$ y por el resultado anterior, $h_m = \sum_{p\in V_m} f(p)\psi_p^m$, además $h_m|_{V_m} = f|_{V_m}$, $h_m|_{K_M}$ es armónica pues h_m es m-armónica, entonces:

$\min_{p\in V(M)} h_m(p) = \min_{p\in V(M)} f(p) \leq h_m(x) \leq \max_{p\in V(M)} h_m(p) = \max_{p\in V(M)} f(p)$.

Por lo que $\max_{p\in V(M)} h_m(p) - \min_{p\in V(M)} h_m(p) = \max_{p\in V(M)} f(p) - \min_{p\in V(M)} f(p) < \frac{\varepsilon}{2}$,

de donde $h_m(x) - \min_{p\in V(M)} f(p) \leq \max_{p\in V(M)} h_m(p) - \min_{p\in V(M)} h_m(p) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Si $p' \in V(M)$ es tal que $f(p') = \min_{p\in V(M)} h_m(p)$ entonces para todo $x \in K_M$, $|f(x) - f(p')| < \frac{\varepsilon}{2}$, entonces $|h_m(x) - f(x)| \leq |h_m(x) - f(p')| + |f(p') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Por lo tanto la convergencia $h_m \to f$ es uniforme. ■

3.2. La expansión armónica débil*.

Estudiaremos el cómo podemos desarrollar un funcional en $C(K)^*$, del mismo modo en que desarrollamos una función en $C(K)$.

Recordemos que si X,Y son dos espacios de Banach, podemos definir la norma del operador lineal $A : X \to Y$ como $\|A\| = \sup_{x\in X} \frac{|Ax|}{|x|}$.

Definición 3.9 *Sea el conjunto $C(K)^* = \{g : C(K) \to \mathbb{R} \mid g$ es lineal$\}$, le llamaremos el espacio dual del espacio $C(K)$ o de funcionales lineales sobre $C(K)$ con la norma de los operadores continuos.*

En [Royden] se define la topología débil para el espacio X con respecto al conjunto $\mathcal{F}$ de funcionales como la topología más pequeña tal que toda $f \in \mathcal{F}$ sea continua. Luego consideramos el espacio X^* y le damos la topología mas pequeña tal que toda función en $X^{**} = \{f : X^* \to \mathbb{R}\}$ sea continua. Pero esta topología es muy débil así que nos restringiremos al conjunto $\{[x] : X^* \to \mathbb{R} \,|[x]f = f(x)$ para $f \in X^*\}$, y entonces la topología débil con respecto a este conjunto la denominaremos la topología débil*.

Los abiertos de esta topología débil están contenidos en la topología que induce la norma de X^*.

La siguiente es una forma de separar un funcional $\nu \in C(K)^*$ dependiendo de la expansión armónica de cualquier función $f \in C(K)$.

Proposición 3.10 *Sea $\nu \in C(K)^*$, $f \in C(K)$ y sea $f_m = \sum_{pV_m} \gamma_p/f)\psi_p$, entonces*

$$\nu(f_m) = \sum_{p\in\partial K} \nu(\psi_p)f(p) + \sum_{p\in V_m^o} \nu(\omega_p)\Delta_p^* f, \text{ donde } \omega_p = -\tfrac{3}{10}\psi_p - \tfrac{1}{10}\sum_{q\in B_p} \psi_q.$$

Demostración: Aplicando directamente ν:

$\nu(f_m) = \sum_{p\in V_m} \gamma_p(f)\nu(\psi_p) = \sum_{p\in\partial K} \gamma_p(f)\nu(\psi_p) + \sum_{p\in V_m^o} \gamma_p(f)\nu(\psi_p) =$

$$= \sum_{p\in\partial K} f(p)\nu(\psi_p) + \sum_{p\in V_m^o} \left(-\tfrac{3}{10}\Delta_p^* f - \tfrac{1}{10}\sum_{q\in B_p}\Delta_q^* f\right)\nu(\psi_p)$$
$$= \sum_{p\in\partial K} f(p)\nu(\psi_p) + \nu\left(\sum_{p\in V_m^o}\left(-\tfrac{3}{10}\Delta_p^* f - \tfrac{1}{10}\sum_{q\in B_p}\Delta_q^* f\right)\psi_p\right),$$

la última suma por linealidad de ν, luego

$$\sum_{p\in V_m^o}\left(-\tfrac{3}{10}\Delta_p^* f - \tfrac{1}{10}\sum_{q\in B_p}\Delta_q^* f\right)\psi_p = -\tfrac{3}{10}\sum_{p\in V_m^o}\Delta_p^* f\psi_p - \tfrac{1}{10}\sum_{p\in V_m^o}\sum_{q\in B_p}\Delta_q^* f\psi_p$$

en donde la última suma es separada basándonos en que $V_m \setminus V_0 = \bigcup_{l=1}^{m}(V_l\setminus V_{l-1})$, que es una unión disjunta, entonces

$$\sum_{p\in V_m^o}\sum_{q\in B_p}\Delta_q^* f\psi_p = \sum_{l=1}^{m}\sum_{p\in V_l\setminus V_{l-1}}\sum_{q\in B_p}\Delta_q^* f\psi_p$$

Como $p\in V_l\setminus V_{l-1} = \bigcup_{N\in G_{l-1}} S(N)$ entonces separamos la suma en términos de $N\in G_{l-1}$ pues es más sencillo entender que $\sum_{p\in S(N)}\sum_{\substack{q\in S(N)\\ q\neq p}}\Delta_q^* f\psi_p = \sum_{p\in S(N)}\sum_{\substack{q\in S(N)\\ q\neq p}}\Delta_p^* f\psi_q$, entonces

$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{p\in V_l\setminus V_{l-1}}\sum_{q\in B_p}\Delta_q^* f\psi_p = \sum_{l=1}^{m}\sum_{N\in G_{l-1}}\left(\sum_{p\in S(N)}\sum_{\substack{q\in S(N)\\ q\neq p}}\Delta_q^* f\psi_p\right) =$$
$$\sum_{l=1}^{m}\sum_{N\in G_{l-1}}\left(\sum_{p\in S(N)}\sum_{\substack{q\in S(N)\\ q\neq p}}\Delta_p^* f\psi_q\right) = \sum_{p\in V_m^o}\sum_{q\in B_p}\Delta_p^* f\psi_q.$$

En las sumas originales obtenemos

$$-\tfrac{3}{10}\sum_{p\in V_m^o}\Delta_p^* f\psi_p - \tfrac{1}{10}\sum_{p\in V_m^o}\sum_{q\in B_p}\Delta_q^* f\psi_p = -\tfrac{3}{10}\sum_{p\in V_m^o}\psi_p\Delta_p^* f - \tfrac{1}{10}\sum_{p\in V_m^o}\sum_{q\in B_p}\psi_q\Delta_p^* f$$
$$= \sum_{p\in V_m^o}\left(-\tfrac{3}{10}\sum_{p\in V_m^o}\psi_p - \tfrac{1}{10}\sum_{q\in B_p}\psi_q\right)\Delta_p^* f$$

entonces

$$\sum_{p\in\partial K} f(p)\nu(\psi_p) + \sum_{p\in V_m^o}\nu\left(\left(-\tfrac{3}{10}\Delta_p^* f - \tfrac{1}{10}\sum_{q\in B_p}\Delta_q^* f\right)\psi_p\right) =$$
$$= \sum_{p\in\partial K} f(p)\nu(\psi_p) + \sum_{p\in V_m^o}\nu\left(-\tfrac{3}{10}\sum_{p\in V_m^o}\psi_p - \tfrac{1}{10}\sum_{q\in B_p}\psi_q\right)\Delta_p^* f$$
$$= \sum_{p\in\partial K} f(p)\nu(\psi_p) + \sum_{p\in V_m^o}\nu(\omega_p)\Delta_p^* f$$ que es lo que se quería demostrar. ■

Definiremos el funcional $\delta_p \in C(K)^*$ como $\delta_p f = f(p)$ para toda $f\in C(K)$, a δ_p la conocemos como la delta de Dirac de una función respecto a un punto p.

Así como en las funciones, los generadores eran las funciones ψ_p, ahora los funcionales μ_p lo serán para el espacio $C(K)^*$ de funcionales lineales continuos.

Definición 3.11 *Sea $p\in V_*$, consideraremos el funcional $\mu_p \in C(K)^*$ dado por:*

$$\mu_p = \begin{cases} \delta_p \text{ si } p \in \partial K \\ \Delta_p^* \text{ si } p \in V_*^o \end{cases}$$

Definición 3.12 *Sea $\nu \in C(K)^*$, si la sucesión $\left\{ \sum_{p \in V_m} \beta_p \mu_p \right\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge débilmente* a ν, le llamamos la expansión armónica débil* de ν, y la denotamos por $\sum_{p \in V_*} \beta_p \mu_p$.*

Observemos que la convergencia se da en la topología débil*.

Análogo al resultado de expansión armónica de una función en $C(K)$, ahora la desarrollaremos para $C(K)^*$.

Teorema 3.13 *Para toda $\nu \in C(K)^*$ existe una única expansión armónica débil $\sum_{p \in V_*} \beta_p(\nu) \mu_p$ tal que para todo $p \in V_*$ se define:*

$$\beta_p(\nu) = \begin{cases} \nu(\psi_p) \text{ si } p \in \partial K \\ \nu(\omega_p) \text{ si } p \in V_*^o \end{cases}.$$

Demostración: Sea $\sum_{p \in V_*} \beta_p \mu_p$ una expansión armónica débil* de ν. Entonces para cualquier $p \in V_*$ evaluamos $\nu(\psi_p) = \lim_{m \to \infty} \sum_{q \in V_m} \beta_q \mu_q(\psi_p)$, es decir $[\psi_p](\nu) = [\psi_p](\lim_{m \to \infty} \sum_{q \in V_m} \beta_q(\nu) \mu_q)$ en la topología débil de $C(K)^*$.

Si $p \in \partial K$ entonces $\sum_{q \in V_m} \beta_q \mu_q(\psi_p) = \sum_{q \in \partial K} \beta_q \psi_p(q) + \sum_{q \in V_m^o} \beta_q \Delta_q^* \psi_p$, como $i(q) > 0 = i(p)$ para $q \in V_m^o$, tenemos $q \neq p$ y $p \notin B_q$, entonces $\Delta_q^* \psi_p = 0$, por lo tanto $\sum_{q \in V_m} \beta_q \mu_q(\psi_p) = \beta_p = \nu(\psi_p)$.

Si $p \in V_*^o$ entonces

$\sum_{q \in V_m} \beta_q \mu_q(\psi_p) = \sum_{q \in \partial K} \beta_q \psi_p(q) + \sum_{q \in V_m^o} \beta_q \Delta_q^* \psi_p = \sum_{q \in V_m^o} \beta_q \Delta_q^* \psi_p$ pues $V_0 \subset V_{i(p)}$ y $\psi_p|_{V_{i(p)} \setminus \{p\}} = 0$.

Si $q = p$ entonces $\Delta_q^* \psi_p = -4$, si $q \in B_p$ entonces $\Delta_q^* \psi_p = 1$ y en los demás casos es cero. Por esto tenemos $\sum_{q \in V_m^o} \beta_q \Delta_q^* \psi_p = \sum_{q \in B_p} \beta_q - 4\beta_p$.

Si $p \in \partial K$ entonces $\lim_{m \to \infty} \sum_{q \in V_m} \beta_q \mu_q(\psi_p) = \lim_{m \to \infty} \beta_p = \beta_p$, y si $p \in V_*^o$ entonces

$\lim_{m \to \infty} \sum_{q \in V_m} \beta_q \mu_q(\psi_p) = \lim_{m \to \infty} \left(\sum_{q \in B_p} \beta_q - 4\beta_p \right) = \sum_{q \in B_p} \beta_q - 4\beta_p$ pues en ambos casos son independientes de m, entonces

$$\nu(\psi_p) = \begin{cases} \beta_p & \text{si } p \in \partial K \\ \sum_{q \in B_p} \beta_q - 4\beta_p & \text{si } p \in V_*^o \end{cases}.$$

Si $p \in V_*^o$ entonces tenemos el sistema de ecuaciones $\nu(\psi_p) = \sum_{q \in B_p} \beta_q - 4\beta_p$ con solución única $\beta_p = -\frac{3}{10}\nu(\psi_p) - \frac{1}{10} \sum_{q \in B_p} \nu(\psi_q) = \nu(\omega_p) = \beta_p(\nu)$.

Si $p \in \partial K$ entonces $\beta_p = \nu(\psi_p) = \beta_p(\nu)$ y con esto se ha demostrado la unicidad.

Ahora probaremos que la sucesión $\nu_m = \sum_{p \in V_m} \beta_p(\nu) \mu_p$ converge débilmente* a ν.

Sea $f \in C(K)$, Sea $f_m = \sum_{p \in V_m} \gamma_p(f) \psi_p$, la sucesión que converge a f, entonces

$$\nu(f_m) = \sum_{p\in \partial K} f(p)\nu(\psi_p) + \sum_{p\in V_m^o} \nu(\omega_p)\Delta_p^* f = \sum_{p\in \partial K} \beta_p(\nu)\delta_p(f) + \sum_{p\in V_m^o} \beta_p(\nu)\Delta_p^* f$$
$$= \sum_{p\in V_m} \beta_p(\nu)\mu_p f = \nu_m(f) = [f](\nu_m) \text{ con } [f] \in C(K)^{**}.$$

Por continuidad de ν, $\lim\limits_{m\to\infty} \nu(f_m) = \nu(f)$, y por lo anterior $\lim\limits_{m\to\infty} \nu_m(f) = \lim\limits_{m\to\infty} \nu(f_m) = \nu(f)$ en la topología débil*, y al ser $[f]$ continua en esta topología, para cualquier $f \in C(K)$, entonces $\{\nu_m\}$ converge a ν débilmente*. ■

Si tenemos la convergencia de funcionales en $C(K)^*$ y por otro lado la convergencia en $C(K)$ de las expansiones armónicas correspondientes, entonces podremos estudiar la convergencia de las soluciones que daremos al problema de Dirichlet para el Laplaciano que construiremos, pero para definir un funcional especial en $C(K)^*$ necesitamos el siguiente capítulo, pues tal funcional se formulará en términos de una integral.

Capítulo 4

Integrales en el Triángulo de Sierpinsky.

En el presente capítulo daremos un repaso a la integral en un triángulo de Sierpinsky. Primero desarrollamos la medida de Hausdorff de dimensión igual a la dimensión fractal del triángulo de Sierpinsky, de lo cual el material [Edgar] tiene más información en este tema. Para luego poder definir la integral como en [Barnsley], la diferencia está en que la medida que está en [Barnsley] está dada en términos probabilísticos, la de este texto es la integral basada en la medida de Hausdorff con dimensión $\log 3/\log 2$.

4.1. Medida de Hausdorff en K.

Definición 4.1 *Decimos que una función $M : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty)$ es una medida exterior si cumple las condiciones:*
a)$M(\varnothing) = 0$,
b)Si $A \subseteq B$ entonces $M(A) \leq M(B)$,
c)Sea $\mathfrak{A}$ una colección contable de subconjuntos de X, entonces $M(\bigcup_{A\in\mathfrak{A}} A) \leq \sum_{A\in\mathfrak{A}} M(A)$.
Esta última propiedad se le denomina subaditividad contable.

La medida definida en abstracto no nos es de utilidad en este trabajo, por lo que definiremos una medida generada por una colección de subconjuntos del espacio en cuestión.

Sea $C : \mathcal{A} \to [0.\infty)$ una función donde $\mathcal{A}$ es una colección de subconjuntos de X que además es una cubierta de X,

Proposición 4.2 *Existe una única medida exterior M en X con la siguientes propiedades:*
1) $M(A) \leq C(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.
2) Sea N otra medida exterior en X tal que $N(A) \leq C(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $N(B) \leq M(B)$ para todo $B \subset X$.

En el material [Edgar] se prueba esta proposición, define una función $M : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty)$ como $M(B) = \inf_{B\subset\mathcal{A}} \{ \sum_{A_i\in B} C(A_i)\}$ para todo $B \subseteq X$ y el ínfimo se toma sobre todas las cubiertas contables de B, prueba que es una medida exterior y que satisface las condiciones (1) y (2). Además diremos que esta es una función generada por C.

En [Edgar] le denomina a este teorema el "Método I" para crear una medida a partir de una función de subconjuntos dada. De esta forma haremos la definición de la medida parametrizada de Hausdorff H_ε.

Definición 4.3 *Sea $\mathcal{A}$ una cubierta de Vitali de K (es decir $\mathcal{A}$ es una cubierta abierta y para todo $x \in K$ y para todo $\varepsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $x \in A$ y $Diam(A) < \varepsilon$), consideraremos $\mathcal{A}_\varepsilon = \{A \in \mathcal{A} | Diam(A) < \varepsilon\}$.*

Daremos la medida H_ε o H_ε^s como la medida generada por la función de subconjuntos de $\mathcal{A}_\varepsilon$ dada por $C(A) = Diam(A)^s$ para $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$ y $s > 0$, y entonces para $B \subset K$, $H_\varepsilon(B) = \inf\limits_{B \subset \mathcal{A}_\varepsilon} \{ \sum\limits_{A_i \in B} C(A_i)\}$, donde el ínfimo se toma para todas las cubiertas contables del conjunto B.

Es claro por la definición de H_ε que cumple con la proposición anterior, asumimos implícitamente que trabajamos con $H_\varepsilon = H_\varepsilon^s$ donde fijamos $s > 0$. Ahora enunciamos una propiedad de estas medidas parametrizadas por $\varepsilon > 0$, entre más finos los subconjuntos de $\mathcal{A}$ que cubren a uno dado de X, más elevado es el valor de la medida con respecto a estas cubiertas. Asumiremos que las cubiertas que cubran a un $B \subset X$, son contables, a menos que digamos lo contrario.

Proposición 4.4 *Si $0 < \delta < \varepsilon$ entonces $H_\delta(B) \geq H_\varepsilon(B)$ para toda $B \subset K$.*

Demostración: En primer lugar, $\mathcal{A}_\delta \subseteq \mathcal{A}_\varepsilon$, pues para todo $A \in \mathcal{A}_\delta$, $Diam(A) \leq \delta \leq \varepsilon$, entonces $A \in \mathcal{A}_\varepsilon$. Luego para toda $B \subseteq \mathcal{A}_\delta \subseteq \mathcal{A}_\varepsilon$ cubierta contable de $B \subseteq X$, tenemos

$H_\varepsilon(B) = \inf\limits_{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_\varepsilon} \{ \sum\limits_{A \in \mathcal{D}} C(A)\} \leq \sum\limits_{A \in B} C(A)$ para cada $\mathcal{D}$ cubierta de B, por lo que

$H_\varepsilon(B) = \inf\limits_{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}_\varepsilon} \{ \sum\limits_{A \in \mathcal{D}} C(A)\} \leq \inf\limits_{B \subseteq \mathcal{A}_\delta} \{ \sum\limits_{A \in B} C(A)\} = H_\delta(B)$. ■

Por lo anterior, podemos construir el supremo de todas estas H_ε mientras ε se acerca a 0, entonces este supremo también será una medida exterior. A la construcción de esta medida en [Edgar] se le denomina "Método II".

De aquí definimos la medida en la que nos basaremos para definir la integral.

Definición 4.5 *La Medida de Hausdorff es $H^s(B) = \sup\limits_{\varepsilon > 0}\{H_\varepsilon(B)\}$ para $s > 0$.*

Probemos que es en realidad una medida exterior.

Proposición 4.6 *Sea $s > 0 \in \mathbb{R}$, entonces H^s es una medida exterior.*

Demostración: $H^s(\varnothing) = 0$ pues $H_\varepsilon(\varnothing) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$ y $\sup\limits_{\varepsilon > 0} 0 = 0$.

Si $A \subseteq B$, entonces $H^s(A) \leq H^s(B)$, pues $H_\varepsilon(A) \leq H_\varepsilon(B)$ para todo $\varepsilon > 0$, lo que implica $\sup\limits_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon(A) \leq \sup\limits_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon(B)$.

Sea $\{B_i\}_{i \in I \subseteq \mathbb{N}}$ una colección contable de subconjuntos de X, entonces $H_\varepsilon(\bigcup\limits_{i \in I} B_i) \leq \sum\limits_{i \in I} H_\varepsilon(B_i)$ para todo $\varepsilon > 0$, como $\sum\limits_{i \in I} H_\varepsilon(B_i) \leq \sum\limits_{i \in I} \sup\limits_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon(B_i)$, entonces $H_\varepsilon(\bigcup\limits_{i \in I} B_i) \leq \sum\limits_{i \in I} H^s(B_i)$, por lo que $\sup\limits_{\varepsilon > 0} H_\varepsilon(\bigcup\limits_{i \in I} B_i) = H^s(\bigcup\limits_{i \in I} B_i) \leq \sum\limits_{i \in I} H^s(B_i)$.

Por lo tanto H^s es una medida exterior. ■

Observemos que no estamos utilizando la notación H_ε^s pues ya estamos asumiendo que s está fijo. De acuerdo al parámetro s, [Barnsley] [Edgar] tenemos que al ser este muy pequeño, tiende a hacer del supremo un valor infinito, por otro lado al ir aumentando el parámetro s, tenemos que el supremo tiende a cero. Si ε es entero, esta medida es la misma que la medida exterior de Lebesgue, por lo que si tenemos una recta o una curva diferenciable, su medida será cero, mientras que si tenemos una región, ésta tendrá medida igual a su área. Pero hay figuras que parecen estar más llenas que una simple línea, pero menos que un plano, si medimos la longitud de tales curvas obtendremos un valor infinito, si medimos su área valdrá cero, La existencia de un valor intermedio para el que nuestra figura tendrá "área" es lo que se enuncia en el siguiente resultado.

Teorema 4.7 *Existe un único* $s \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $0 < H^s(K) < \infty$.

A este número se le denomina la dimensión de Hausdorff de K. De otra forma, esto significa que la dimensión de Hausdorff es única para cada espacio métrico que tengamos. Ahora diremos cual es la dimensión de nuestro triángulo de Sierpinsky.

Proposición 4.8 *La dimensión de Hausdorff de* K *es* $\log(3)/\log(2)$.

Se prueba en [Barnsley].

El siguiente enunciado nos dice que la dimensión de Hausdorff es igual si aplicamos una homotecia en un conjunto, pero la medida de este conjunto cambia respecto a r^s.

Proposición 4.9 *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *una homotecia con razón* $r > 0$. *entonces* $H(f(B)) \leq r^s H(B)$.

Se prueba en [Edgar].

Podemos ver que para nuestras funciones F_i con las que construimos el triángulo de Sierpinsky, y $s = \log(3)/\log(2)$, tenemos $H^s(F(B)) = (\frac{1}{2})^s = 2^{-\log_2 3} = \frac{1}{3}$.

Como corolario veamos qué pasa cuando la función es justo una isometría.

Definición 4.10 *A la función biyectiva* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *que satisface* $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ *la llamamos isometría de* $\mathbb{R}^2$.

Asimiremos que las isometrías son funciones afines. Observemos que f^{-1} es también una isometría, pues $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) = d(ff^{-1}(x), ff^{-1}(y)) = d(x, y)$, por lo que las isometrías están en $Af(\mathbb{R}^2)$ y forman un subgrupo.

Proposición 4.11 *La medida de Hausdorff es invariante bajo isometrías.*

Este es un corolario de la proposición anterior, con $r = 1$.

Probemos que los conjuntos finitos tienen medida de Hausdorff cero en el triángulo de Sierpinsky, para probarlo necesitamos establecer que la medida de Hausdorff es métrica, es decir que separa la medida de una unión finita de conjuntos en una suma finita de sus medidas, si dos a dos están separados por la métrica del espacio métrico donde se encuentran.

Definición 4.12 *Sea X un espacio métrico, se dice que M es una medida exterior métrica si para cualesquiera dos conjuntos $A, B \subset X$ tales que existe un $r > 0$ donde $d(a,b) \geq r$ para todo $a \in A$ y $b \in B$, satisface $M(A \cup B) = M(A) + M(B)$.*

En [Edgar] se prueba que la medida de Hausdorff, generada por el "Método II" es métrica.

Proposición 4.13 *Sea $A \subset K$ un conjunto finito, entonces $H^s(A) = 0$ para $s > 0$.*

Demostración: Sea $A = \{p\}$, entonces $H^s_\varepsilon(\{p\}) = 0$ pues para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\delta^s < \varepsilon$ y entonces $Diam(B_{\delta/2}(p)) = \delta^s < \varepsilon$, y usamos el carácter creciente y continuo de la función x^s y que además $0^s = 0$, de donde concluimos $H^s_\varepsilon(\{p\}) = 0$ pues para todo $\varepsilon > 0$, y $H^s(\{p\}) = \sup\limits_{\varepsilon>0} 0 = 0$.

Si $A = \{x_1, ..., x_m\}$ entonces $A = \bigcup\limits_{i=1}^{m}\{x_i\}$, de donde $H^s(\bigcup\limits_{i=1}^{m}\{x_i\}) = \sum\limits_{i=1}^{m} H^s(\{x_i\}) = 0$, pues H^s es una medida exterior métrica y $\min\limits_{1\leq i,j\leq m} d(x_i, x_j) > 0$. ■

En la siguiente definición trataremos a la medida de Hausdorff de tal forma que la medida sea normalizada, sin importar cual sea el valor real de $H^s(K)$.

La medida que utilizaremos de ahora en adelante es la medida $h(B) = \frac{H^s(B)}{H^s(K)}$ para $B \subset K$ y $s = \log(3)/\log(2)$.

Observemos que la medida h es normalizada pues $h(K) = 1$ y con esta medida trabajaremos, y a partir de ahora $s = \log(3)/\log(2)$.

Proposición 4.14 *Sea $B \subseteq K$, y $\{F_i\}$ el sistema de homotecias asociado a K_0, entonces $h(F_{i_1}...F_{i_k}(B)) = \frac{1}{3^k}h(B)$.*

Demostración: Por inducción. $h(F_i(B)) = \frac{1}{3}h(B)$ por que $(\frac{1}{2})^s = \frac{1}{3}$. Si $h(F_{i_1}...F_{i_n}(B)) = \frac{1}{3^n}h(B)$ entonces para $F_{i_0}(F_{i_1}...F_{i_n}(B))$ tenemos $h(F_{i_0}(F_{i_1}...F_{i_n}(B))) = \frac{1}{3}h(F_{i_1}...F_{i_n}(B)) = \frac{1}{3^{n+1}}h(B)$ por lo que se ha probado esta identidad. ■

Lo que pretenderíamos es utilizar K_M's en lugar de abiertos arbitrarios para obtener tanto una medida como una integral. Del resultado anterior suena adecuado tomar K y luego estudiar sus imágenes bajo F_i's, probemos estos dos resultados.

Proposición 4.15 *Sea $\alpha = \{i_1...i_m\} \in \mathbb{A}_m$, y $\{F_i\}$ asociado a K_0, entonces $F_{i_1}...F_{i_m}(K) = K_{M_\alpha}$.*

Demostración: Probemos primero que $\bigcap\limits_{l\geq 0} K_{m+l} \cap M = F_{i_1}...F_{i_m}(\bigcap\limits_{l\geq 0} K_l)$. Si $N \in G_l$ para $l \geq 0$ entonces $F_{i_1}...F_{i_m}(N) \in G_{m+l}$, por lo que $F_{i_1}...F_{i_m}(K_l) \subset K_{m+l}$, además $F_{i_1}...F_{i_m}(K_l) \subset F_{i_1}...F_{i_m}(K_0) = M_\alpha$ pues $K_l \subset K_0$. Por otro lado si $N \in G_{m+l}$ con $N \subset M_\alpha$ y $\beta = \{j_1, ..., j_m, ..., j_{m+l}\}$. tenemos que $N \subset M_{j_1...j_m}$ pero $N \subset M_\alpha \cap M_{j_1...j_m}$, de donde $N \subset \{p\}$ para $p \in V_m$. lo cual no es posible, y por lo tanto $\beta = \{i_1, ..., i_m, ..., j_{m+l}\}$ y $F_{i_1}...F_{i_m}(M_{j_{m+1}...j_{m+l}}) = M_{i_1...i_m j_{m+1}...j_{m+l}} = N$, por lo que concluimos que $K_{m+l} \cap M_\alpha \subseteq F_{i_1}...F_{i_m}(K_l)$. Como es válido para todo $l \geq 0$ y la función es biyectiva, entonces $F_{i_1}...F_{i_m}(\bigcap\limits_{l\geq 0} K_l) = \bigcap\limits_{l\geq 0} F_{i_1}...F_{i_m}(K_l) = \bigcap\limits_{l\geq 0} K_{m+l} \cap M_\alpha$ y podemos concluir que $F_{i_1}...F_{i_m}(K) = K \cap M_\alpha$ que es lo que se quería demostrar. ■

Usando este resultado y el anterior, probaremos el siguiente, que nos da la medida de una imagen del triángulo de Sierpinsky bajo la composición de las homotecias $\{F_i\}$.

Proposición 4.16 *Sea $M = M_{i_1 \dots i_m} \in G_m$ entonces $h(K_M) = \frac{1}{3^m}$.*

Demostración: De lo anterior, $h(K_M) = h(F_{i_1} \dots F_{i_m}(K)) = \frac{1}{3^m h(K)} = \frac{1}{3^m}$. ■
Recordemos lo que significa que un conjunto dado sea medible.

Definición 4.17 *Un subconjunto E es medible si para todo subconjunto A se cumple $h(A) = h(A \cap E) + h(A \setminus E)$.*

Notemos que los conjuntos que son medibles forman una σ-álgebra, es decir, uniones contables, complementos e intersecciones locales caen dentro de la σ-álgebra. Una medida se restringe a esta σ-álgebra y cumple la propiedad de que para una sucesión $\{E_i\}$ tal que son conjuntos disjuntos dos a dos, se cumple
$h(\bigcup_{i \in I} E_i) = \sum_{i \in I} h(E_i)$.
Un tipo especial de conjuntos medibles son los conjuntos de Borel, que es la σ-álgebra más pequeña tal que contiene a los conjuntos abiertos (y cerrados). Restringiremos nuestra atención a los conjuntos de Borel, como en [Barnsley].

4.2. Integral de Lebesgue en K.

Una vez desarrollada la medida que utilizaremos para este conjunto, desarrollaremos las funciones simples, que nos serán útiles para definir la integral. Esto se da de acuerdo a [Royden].

Proposición 4.18 *Sea la función $f : K \to \mathbb{R}$. Entonces son equivalentes las siguientes:*
a)$\{x \in K | f(x) < a\} \forall a \in \mathbb{R}$ es medible.
b)$\{x \in K | f(x) \leq a\} \forall a \in \mathbb{R}$ es medible.
c)$\{x \in K | f(x) > a\} \forall a \in \mathbb{R}$ es medible.
d)$\{x \in K | f(x) \geq a\} \forall a \in \mathbb{R}$ es medible.

Definición 4.19 *La función $f : K \to \mathbb{R}$ es medible si f satisface la proposición anterior.*

Definición 4.20 *A la función $\theta : K \to \mathbb{R}$ dada por $\theta = \sum_{i=1}^{L} r_i \chi_{A_i}$ donde $A_1, \dots, A_L$ es una colección finita de subconjuntos de Borel de K, tales que $K = A_1 \cup \dots \cup A_L$, $r_1, \dots, r_L \in \mathbb{R}$, y donde $\chi_{A_i}(p) = \begin{cases} 1 & p \in A_i \\ 0 & p \in K \setminus A_i \end{cases}$*
la denominaremos función simple.

Es claro que las funciones simples θ son funciones medibles.
Para una sola función simple pueden existir varias formas de expresarla, por lo que algunas veces necesitaremos una expresión estándar en términos de subconjuntos disjuntos.

Definición 4.21 *Sea θ una función simple, la expresión dada como $\theta = \sum_{i=1}^{L'} s_i \chi_{B_i}$ donde $s_i \in \mathbb{R}$ y B_i conjuntos de Borel, es la representación canónica de θ, si $\bigcup_{i=1}^{L'} B_i = K$ y para todo $i \neq j \in \{1 \dots L'\}$, $B_i \cap B_j = \varnothing$.*

Definición 4.22 *Sea θ una función simple, decimos que la integral dada por:*
$\int_K \theta dh = \sum_{i=1}^{L} r_i h(A_i)$ *es la Integral de Lebesgue de θ.*

Notemos que así la definimos, pero en realidad la definición no depende de la representación que le demos a la función simple.

Definición 4.23 *Sea f una función medible, la Integral en el el triángulo de Sierpinsky en el sentido de Lebesgue está dada de la siguiente forma:*
Si $f(x) > 0$ para toda $x \in K$,
$\int_K f dh = \sup_{0<\theta<f} \int_K \theta dh.$
y para cualquier f damos las funciones $f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$ y $f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$, entonces la integral de f está dada por $\int_K f dh = \int_K f^+ dh - \int_K f^- dh$.

Proposición 4.24 *La integral es invariante bajo isometrías.*

Demostración: Sea T una isometría, entonces para cualquier función simple tenemos $\theta \circ T = \sum_{i=1}^{L} r_i \chi_{A_i} \circ T$, pero $\chi_A \circ T = \chi_{T^{-1}(A)}$ pues $\chi_A \circ T(x) = 1$ si y solo si $T(x) \in A$ si y solo si $x \in T^{-1}(A)$, por lo que $\theta \circ T = \sum_{i=1}^{L} r_i \chi_{T^{-1}(A_i)}$. Luego $\int_K \theta \circ T dh = \sum_{i=1}^{L} r_i h(T^{-1}(A_i)) = \sum_{i=1}^{L} r_i h(A_i)$ pues la isometría preserva la medida y por lo tanto $\int_K \theta \circ T dh = \int_K \theta dh$. Sea $f : K \to \mathbb{R}$ medible, entonces $\int_K f \circ T dh = \sup_{0<\theta<f} \int_K \theta \circ T dh = \sup_{0<\theta<f} \int_K \theta dh$ que es lo que se quería demostrar. ■

Lo que vamos a probar ahora es que la integral de las funciones ψ_p^m es siempre $\frac{2}{3^m}$ sin importar quien sea $p \in V_m^o$ o $\frac{1}{3^m}$ si $p \in V_0$, pero para ello necesitamos repasar un poco las simetrías que podemos obtener en el triángulo de Sierpinsky, y luego resolver la conmutación de estas simetrías con las funciones armónicas.

Usaremos el grupo D_3 para estudiar las simetrías del triángulo de Sierpinsky.

Hemos trabajado con el supuesto de que $M \in G_o$ es un triángulo equilátero, y como las transformaciones F_i son homotecias entonces preservan semejanza de triángulos por lo que $M \in G_m$ es también un triángulo equilátero. En [Fraleigh] se estudian más detalladamente los grupos de permutaciones, y de ahí se toma la terminología y las notaciones.

Definición 4.25 *Las acciones de las permutaciones $\sigma \in D_3$ están dadas de la siguiente forma:*

sea $\alpha = \{i_1 ... i_m\} \in \mathbb{A}_m$ entonces su imagen será $\sigma(\alpha) = \{\sigma(i_0), ..., \sigma(i_m)\}$ donde $\sigma : \{0, 1, 2\} \to \{0, 1, 2\}$ es una permutación habitual. lo mismo para $\mathbb{N}^{\{0,1,2\}}$. En términos formales $\sigma(\alpha) = \sigma \circ \alpha$ donde σ es la permutación habitual. Denotaremos a los elementos de D_3 de la siguiente forma:

$\sigma_0 = (12)$, $\sigma_1 = (02)$, $\sigma_2 = (01)$, son reflexiones que intercambian los símbolos en los paréntesis; $r_1 = (012)$, $r_2 = (021)$ son la rotaciones y se sigue la notación estándar para las permutaciones; finalmente la identidad se denota por e o r_0. La multiplicación se denota simplemente concatenando los símbolos como por ejemplo $r_1\sigma_0$.

El grupo D_3 es generado por las reflexiones $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$. Véase [Fraleigh] para los conceptos de grupos, acciones y permutaciones. Recordemos la notación utilizada en la sección 1.1, y el producto euclídeo estándar de $\mathbb{R}^2$.

Proposición 4.26 *Dados x_1, x_2, x_3 y y_1, y_2, y_3 tales que $\{x_2 - x_1, x_3 - x_1\}$ es linealmente independiente, existe T afín tal que $T(x_i) = y_i$, y $\langle(x_i - x_1),(x_j - x_1)\rangle = \langle(y_i - y_1),(y_j - y_1)\rangle$ con el producto euclídeo de $\mathbb{R}^2$, para $i, j = 2, 3$, entonces T es una isometría.*

Demostración: Sea $T = L_b \circ A$, sabemos que existe un único T afín tal que $T(x_i) = y_i$ para $i = 1, 2, 3$, entonces veamos que L_b y A son isometrías y de ello se concluye que T es isometría.

L_b es isometría, pues si damos $u, v \in \mathbb{R}^2$ y $u' = L_b(u) = u + b$, $v' = L_b(v) = v + b$ entonces $\langle u' - v', u' - v'\rangle = \langle u + b - v - b, u + b - v - b\rangle = \langle u - v, u - v\rangle$.

Por otro lado como $\langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle = \langle y_i - y_1, y_j - y_1\rangle$ y la matriz Y tiene como sus vectores columna $(y_i - y_1)$ entonces $(Y^TY)_{ij} = \sum\limits_{k=1,2}(y_{ik} - y_{1k})(y_{jk} - y_{1k}) = \langle y_i - y_1, y_j - y_1\rangle = \langle x_i - x_1, x_j - x_1\rangle = \sum\limits_{k=1,2}(x_{ik} - x_{1k})(x_{jk} - x_{1k}) = (X^TX)_{ij}$ por lo tanto $Y^TY = X^TX$ y como $A^T = (X^T)^{-1}Y^T$ entonces $A^TA = (X^T)^{-1}Y^TYX^{-1} = (X^T)^{-1}X^TXX^{-1} = I_d$ lo cual prueba que $A \in O(2)$ (el grupo ortogonal o matrices que preservan métricas) y entonces A es isometría.

Por lo tanto $T = L_b \circ A$ es una isometría. ■

Véase [Friedberg] para los conceptos de álgebra lineal que hemos empleado.

Definición 4.27 *Sea $M = |p_0, p_1, p_2|$ un triángulo dado y sea $\sigma \in D_3$, consideraremos la función afín $T_\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T_\sigma(p_i) = p_{\sigma(i)}$ para todo $i = 0, 1, 2$.*

Pero si queremos que T_σ sea isometría, entonces en particular $\langle p_i - p_0, p_i - p_0\rangle = \langle p_{\sigma(i)} - p_{\sigma(0)}, p_{\sigma(i)} - p_{\sigma(0)}\rangle$ por lo que el triángulo tiene que ser equilátero, lo cual es cierto pues es lo que hemos estado suponiendo para $M_\bullet$. Luego $T_\sigma \in Af(\mathbb{R}^2)$ pues lleva puntos no colineales a otros no colineales, por lo que es biyectiva.

En realidad, tenemos que probar que las T_σ forman una acción del grupo D_3 en $\mathbb{R}^2$ y además dejaremos sentado que T_σ es una acción continua.

Proposición 4.28 *Si $\Phi : D_3 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ está definida como $\Phi(\sigma, x) = T_\sigma(x)$, entonces es una acción en $\mathbb{R}^2$ del grupo D_3. además T_σ es homeomorfismo.*

Demostración: T_σ es una función biyectiva y pertenece al grupo afín $Af(\mathbb{R}^2)$. Entonces $\Phi(gh, x) = T_{gh}(x) = \lambda_0 p_{gh(0)} + \lambda_1 p_{gh(1)} + \lambda_2 p_{gh(2)} = = T_g(\lambda_0 p_{h(0)} + \lambda_1 p_{h(1)} + \lambda_2 p_{h(2)}) = T_g T_h(\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = \Phi(g, \Phi(h, x))$.

$\Phi(e, x) = T_e(\lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2) = \lambda_0 p_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 = I_d(x)$.

Por lo tanto Φ es acción. T_σ es continua y también $T_{\sigma^{-1}}$ es continua, entonces T_σ es homeomorfismo. ■

Utilizaremos de ahora en adelante la notación $\sigma(x) = T_\sigma(x)$ para $x \in \mathbb{R}^2$.

Estudiaremos la forma en que conmutan las homotecias fundamentales F_i y las acciones T_σ.

Proposición 4.29 *Si $\sigma \in D_3$, y $\{F_i\}$ es el sistema de homotecias asociado a K_0, entonces $\sigma \circ F_i = F_{\sigma(i)} \circ \sigma$.*

Demostración: $\sigma(x) = Ax + b$, que es isometría, y $F_i(x) = Bx + c_i$, donde $B = \frac{1}{2}I_d$, y evaluando en p_i tenemos $F_i(p_i) = \frac{1}{2}p_i + c_i = p_i$ por lo tanto $c_i = \frac{1}{2}p_i$.

En base a lo anterior, si $x \in \mathbb{R}^2$, tenemos

$\sigma(F_i(x)) = A(Bx + \frac{1}{2}p_i) + b = ABx + \frac{1}{2}Ap_i + b = BAx + \frac{1}{2}Ap_i + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b =$

$BAx + Bb + \frac{1}{2}(Ap_i + b) = B(Ax + b) + \frac{1}{2}\sigma(p_i)$

$= B(\sigma(x)) + \frac{1}{2}p_{\sigma(i)} = F_{\sigma(i)}(\sigma(x))$. ■

Por definición sabemos que $T_\sigma(p_i) = p_{\sigma(i)}$ para p_i, $i \in \{0, 1, 2\}$. Algo similar probaremos a continuación para poder escribir a $\sigma(p)$ en términos de la acción de σ en A_m. Recordemos la notación para describir a un punto $p \in V_*$ dada en la sección1.3.

Proposición 4.30 *Para $\sigma \in D_3$ se cumple: a) $\sigma(p_{i_0 \ldots i_m}) = p_{\sigma(i_0 \ldots i_m)}$. b)Si $M \in G_m$ entonces $\sigma(M) \in G_m$ y además si $M = M_\alpha = |q_0, q_1, q_2|$ entonces $\sigma(M) = |\sigma(q_0), \sigma(q_1), \sigma(q_2)|$.*

Demostración: a)Para p_i con $i = 0, 1, 2$ tenemos $\sigma(p_i) = p_{\sigma(i)}$ por definición de $\sigma = T_\sigma$.

Si $m > 0$ tenemos $p_{i_0 \ldots i_m} = F_{i_0} \ldots F_{i_{m-1}}(p_{i_m})$, por lo que $\sigma(F_{i_0} \ldots F_{i_{m-1}}(p_{i_m})) =$ $F_{\sigma(i_0)}\sigma(F_{i_1} \ldots F_{i_{m-1}}(p_{i_m})) = \ldots = F_{\sigma(i_0)} \ldots F_{\sigma(i_{m-1})}(p_{\sigma(i_m)})$,

que por definición es $p_{\sigma(i_0) \ldots \sigma(i_m)} = p_{\sigma(i_0 \ldots i_m)}$.

b)$\sigma(M_*) = M_*$ donde $M_* = |p_0, p_1, p_2|$, pues σ es una biyección de $\{p_0, p_1, p_2\}$ en si mismo tal y como definimos la acción de D_3, y de esta forma $T_\sigma(M_*) = M_*$.

Si $M = M_\alpha \in G_m$ donde $\alpha = \{i_1 \ldots i_m\} \in \{0, 1, 2\}^m$, entonces $M = F_{i_1} \ldots F_{i_m}(M_*)$ y

$\sigma(M) = \sigma(F_{i_1} \ldots F_{i_m}(M_0)) = F_{\sigma(i_1)} \ldots F_{\sigma(i_m)}(\sigma(M_*)) = M_{\sigma(i_1) \cdots \sigma(i_m)}$, por lo que $\sigma(M) = M_\beta$ con $\beta = \sigma(\alpha) \in \mathbb{A}_m$ y por lo tanto $\sigma(M) \in G_m$. Sea $M = |q_0, q_1, q_2|$ siendo $q_k = F_{i_1} \ldots F_{i_m}(p_k)$ para $k \in \{0, 1, 2\}$, luego $\sigma(F_{i_1} \ldots F_{i_m}(p_k)) = F_{\sigma(i_1)} \ldots F_{\sigma(i_m)}(p_{\sigma(k)}) \in V(\sigma(M))$ y por lo tanto $\sigma(M) = |\sigma(q_0), \sigma(q_1), \sigma(q_2)|$. ■

Ahora veamos como conmutan dos funciones armónicas con respecto a una acción σ.

Proposición 4.31 *Sea $\sigma \in D_3$ la acción de σ en K y sean f, g funciones armónicas tales que $(f \circ \sigma)|_{V_0} = g|_{V_0}$, entonces $f \circ \sigma = g$.*

Demostración: Como σ es afín, $f \circ \sigma$ es una función continua falta probar que es armónica, es decir que para todo $n > 0$ y todo punto $p \in V_n^o$ se cumple que $\Delta_{n,p} f \circ \sigma = 0$. Para cada $p \in V_m^o$, tenemos $V_{m,p} = \bigcup_{M \in G_{m,p}} V(N) \setminus \{p\}$ y denotamos $G_{m,p} = \{N_1, N_2\}$, como $\sigma(N_1) = |\sigma(q_0), \sigma(q_1), \sigma(q_2)| \in G_m$ (pues σ es afín) donde $N_1 = |q_0, q_1, q_2|$, y algo similar para N_2, entonces $\sigma(p) \in \sigma(N_1) \cap \sigma(N_2)$ y por lo tanto $V_{m,\sigma(p)} = \sigma(V_{m,p})$. Entonces $\Delta_{m,p} f \circ \sigma =$ $\bigcup_{q \in V_{m,p}} f \circ \sigma(q) - 4f \circ \sigma(p) = \bigcup_{q \in V_{m,\sigma(p)}} f(q) - 4f(\sigma(p)) = 0.$

Por lo tanto es armónica con $f \circ \sigma(p_i) = g(p_1)$ y por 2.18 concluimos que $f \circ \sigma = g$. ■

Dadas las reflexiones de D_3 que denotamos como $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2$, probaremos que $\psi^0_{p_i}$ es igual a otra $\psi^0_{p_k}$ siempre que exista una reflexión $\sigma_j \in D_3$ que mande p_i a p_k.

Proposición 4.32 *Sean $p_i \in V(K_0)$, y $\sigma_j \in D_3$ una reflexión, con $i, j \in \{0, 1, 2\}$, entonces $\psi_{\sigma_i(p_j)} \circ \sigma_i = \psi_{p_j}$.*

Demostración: Tenemos que $\psi_{\sigma_i(p_j)}(\sigma_i(p_j)) = 1 = \psi_{p_j}(p_j)$. Si $k \in \{0, 1, 2\} \setminus \{j\}$ tenemos $\sigma_i(k) \neq \sigma_i(j)$ por biyectividad, entonces $\psi_{\sigma_i(p_j)} \circ \sigma_i(p_k) = 0 = \psi_{p_j}(p_k)$, y por proposición 4.31 concluimos que $\psi_{\sigma_i(p_j)} \circ \sigma_i = \psi_{p_j}$. ■

Un caso particular de esto es cuando $i = j$ y esto implica que la función $\psi^0_{p_i}$ es simétrica respecto al eje de simetría que pasa por p_i.

Así como los conjuntos fractales K y K_M son semejantes, también probaremos que lo son las funciones ψ^m_p y $\psi^0_{p_i}$ respecto a las homotecias.

Proposición 4.33 *Sea $M = M_{i_1 \ldots i_m} \in G_m$ y $p = p_{i_1 \ldots i_m, j} \in V(M)$, entonces $\psi^m_p \circ F_{i_1} \ldots F_{i_m} = \psi^0_{p_j}$.*

Demostración: Por ser $F_{i_1} \ldots F_{i_m}$ afín, entonces $\psi^m_p \circ F_{i_1} \ldots F_{i_m}$ es continua. Como $F_{i_1} \ldots F_{i_m}$ es biyectiva, entonces existe un único punto $p_j \in V_0$ tal que $p = F_{i_1} \ldots F_{i_m}(p_j)$ y $\psi^m_p(p) = 1 = \psi^0_{p_j}(p_j)$. Si $q \neq p \in V(M_{i_1 \ldots i_m})$ entonces existe un único $p_l \in V_0 \setminus \{p_j\}$ tal que $F_{i_1} \ldots F_{i_m}(p_l) = q$ y por lo tanto $\psi^m_p \circ F_{i_1} \ldots F_{i_m}(p_l) = \psi^m_p(q) = 0 = \psi^0_{p_j}(p_l)$.

Por lo tanto por ser iguales en ∂K, y por 4.31 se cumple $\psi^m_p \circ F_{i_1} \ldots F_{i_m} = \psi^0_{p_j}$. ■

Todo lo anterior lo emplearemos para calcular la integral de la función ψ^m_p con respecto a algún K_M con $M \in G_{m,p}$ usando el truco de que si sumamos tres funciones ψ^m_p en los vértices de M obtenemos la constante uno, la integral de la suma es $h(K_M)$, las tres integrales son la misma, y luego en todo K, ya sea que $p \in V_0$ o $p \in V^o_m$.

Proposición 4.34 *Sea $M = [q_0, q_1, q_2] \in G_m$, entonces $\int_{K_M} \psi^m_{q_i} dh = \frac{1}{3^{m+1}}$. Por lo tanto $\int_K \psi^m_p dh = \frac{1}{3^{m+1}}$ si $p \in \partial K$, y $\int_K \psi^m_p dh = \frac{2}{3^{m+1}}$ si $p \in V^o_m$.*

Demostración: Como $\psi^m_{q_i}(q_i) = 1$, y $\psi^m_{q_i}(q_j) = 0$ si $j \neq i$, entonces $(\psi^m_{q_0} + \psi^m_{q_1} + \psi^m_{q_2})(q_i) = 1$ para todo $q_i \in V(M)$. entonces $(\psi^m_{q_0} + \psi^m_{q_1} + \psi^m_{q_2})|_{K_M} = 1$ pues es una función armónica en K_M, y los máximos y mínimos están en $V(M)$. Esta función es simple en K_M y entonces $\int_{K_M} (\psi^m_{q_0} + \psi^m_{q_1} + \psi^m_{q_2}) dh = h(K_M)$, pero como se puede obtener $\psi^m_{q_i}$ a partir de $\psi^m_{q_j}$ mediante la acción de una reflexión σ_k que es una isometría, entonces sus integrales son iguales, es decir $\int_{K_M} \psi^m_{q_i} dh = \int_{K_M} \psi^m_{q_j} dh$ entonces tenemos $\int_{K_M} \psi^m_{q_0} dh = \frac{1}{3} h(K_M) = \frac{1}{3^{m+1}}$.

Si $p \in V_0$ entonces $G_{m,p} = \{M\}$ para $m \geq 0$, y para $N \in G_m \setminus \{M\}$ se cumple $\psi^m_p|_{K_N} = 0$, por lo tanto $\int_K \psi^m_p dh = \int_{K_M} \psi^m_p dh = \frac{1}{3^{m+1}}$.

Si $p \in V^o_*$ entonces $m \geq i(p)$, luego $G_{m,p} = \{M_1, M_2\}$ y si $N \in G_m \setminus \{M_1, M_2\}$ tenemos $\psi^m_p|_{K_N} = 0$, por lo tanto $\int_K \psi^m_p dh) = \int_{K_{M1}} \psi^m_p dh + \int_{K_{M2}} \psi^m_p dh = \frac{2}{3^{m+1}}$, donde la suma se separa pues $K_{M_1} \cap K_{M_2} = \{p\}$ que es de medida cero. ■

Con estos resultados ya sabemos como obtener integrales de funciones ψ^m_p. Enunciamos el siguiente resultado para obtener integrales de cualquier función $f \in C(K)$, para ello utilizaremos la expansión armónica y el siguiente enunciado.

Teorema 4.35 *(Teorema de la convergencia de Lebesgue): Sea $\{f_m\}$ una sucesión de funciones medibles en K tal que $|f_n(x)| < g(x)$ para todo $x \in K$ y para alguna g no negativa e integrable (g medible y con integral finita) y $f_n(x) \to f(x)$ para casi todo $x \in K$ (es decir, excepto en un conjunto de medida cero), entonces*

$$\int_K f dh = \lim_{m\to\infty} \int_K f_m dh.$$

El desarrollo de la demostración se encuentra en [Royden].

De esta forma la integral de una función continua la deducimos de la sucesión de funciones $f_m = \sum_{p\in V_m} \gamma_p(f)\psi_p$, pero como esta sucesión converge uniformemente en todo $x \in K$, entonces usamos el resultado anterior y el hecho de que conocemos la integral de $\psi_p^{i(p)}$ para luego igualar los límites.

Finalmente definimos un funcional $\pi_g[\,] = \int_K [\,]g dh$ dada una función $g \in C(K)$, que no es difícil comprobar que es continuo, y por lo tanto podemos darle una expansión armónica débil*.

Capítulo 5

El operador laplaciano.

En este capítulo ya podremos resolver el problema de Dirichlet para un Laplaciano continuo dado en [Kigami] que es un operador que aproximamos como el límite uniforme de funciones afines por pedazos. Primero definimos un funcional de diferencias armónicas "normalizadas", luego tomamos combinaciones lineales de funciones afines por tramos con respecto a estas diferencias armónicas, y obtenemos después el operador laplaciano discreto, después definimos el Laplaciano y probar la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación de Poisson $\Delta f = g$ en el triángulo de Sierpinsky el cual es el objetivo principal del presente trabajo.

Definición 5.1 *Sean $f \in C(K)$ y $m > 0$, el funcional $\widetilde{\Delta_{m,p}} \in C(K)^*$ está dado por:*

$$\widetilde{\Delta_{m,p}}f = \begin{cases} 5^m \Delta_{m,p} f & si\ p \in V_*^o \\ (\frac{1}{2}) \sum\limits_{q \underset{m}{\sim} p} 5^m \Delta_{m,q} f & si\ p \in \partial K \end{cases}.$$

Este funcional es lineal pues es multiplicar por una constante a $\Delta_{m,p}$, y por otro lado en la frontera lo es pues es una combinación lineal de funcionales lineales $\Delta_{m,p}$. Por las mismas razones es un funcional continuo.

Definición 5.2 *Definimos el operador $\Delta_m : C(K) \to C(K)$ como $\Delta_m f = \sum\limits_{p \in V_m} (\widetilde{\Delta_{m,p}} f)\eta_p^m$.*

Proposición 5.3 *Δ_m es lineal.*

Demostración: $\widetilde{\Delta_{m,p}}$ es lineal pues $\Delta_{m,p}$ es lineal para todo $p \in V_*^o$. Sean $f, g \in C(K)$ y $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, entonces $\Delta_m(r_1 f + r_2 g) = \sum\limits_{p \in V_m} (\widetilde{\Delta_{m,p}}(r_1 f + r_2 g))\eta_p^m = \sum\limits_{p \in V_m} (r_1 \widetilde{\Delta_{m,p}} f + r_2 \widetilde{\Delta_{m,p}} g)\eta_p^m =$
$= r_1 \sum\limits_{p \in V_m} \widetilde{\Delta_{m,p}} f \eta_p^m + r_2 \sum\limits_{p \in V_m} \widetilde{\Delta_{m,p}} g \eta_p^m = r_1 \Delta_m f + r_2 \Delta_m g$. ■

Así como hicimos para dar una relación entre $\Delta_{m,p}$ y $\Delta_{m+1,p}$, ahora daremos una relación entre Δ_m y Δ_{m+1} que nos será útil para estudiar convergencia.

Proposición 5.4 *Para todo $f \in C(K)$, $\|\Delta_m f\| \leq \|\Delta_{m+1} f\|$.*

Demostración: $\|\Delta_m f\| = \sup_{x\in K}|\Delta_m f(x)| = \sup_{x\in K}|\sum_{p\in V_m}\widetilde{\Delta_{m,p}f}\eta_p^m(x)|$. Para cada $M \in G_m$, $\Delta_m f|_{K_M}$ es un funcional afín y ya se conoce que alcanza su máximo y su mínimo en $V(M)$, por lo que

$\sup_{x\in K}|\sum_{p\in V_m}\widetilde{\Delta_{m,p}f}\eta_p^m(x)| = \max_{p\in V_m}|\widetilde{\Delta_{m,p}f}|$

Si suponemos que $p \in \partial K$ y que $M = |p = q_0, q_1, q_2| \in G_m$, y además $\Delta_{m,q_1}f \leq \Delta_{m,q_2}f$, entonces

$\widetilde{\Delta_{m,q_1}f} = 5^m\Delta_{m,q_1}f \leq \widetilde{\Delta_{m,p}f} = (\frac{1}{2})(5^m\Delta_{m,q_1}f + 5^m\Delta_{m,q_2}f \leq 5^m\Delta_{m,q_2}f = \widetilde{\Delta_{m,q_2}f}$.

Por lo que el máximo y el mínimo se alcanzan en V_m^o y por lo tanto

$\max_{p\in V_m}|\widetilde{\Delta_{m,p}f}| = \max_{p\in V_m^o}|\widetilde{\Delta_{m,p}f}|$. Por lo tanto $\|\Delta_m f\| = \max_{p\in V_m^o}|\widetilde{\Delta_{m,p}f}|$.

Para $p \in V_m^o$, tenemos $\widetilde{\Delta_{m,p}f} = 5^m\Delta_{m,p}f$ y por 2.10 tenemos

$3\Delta_{m,p}f = 5\Delta_{m+1,p}f + 2\sum_{q\in V_{m+1,p}}\Delta_{m+1,q}f + \sum_{q\in R_{m+1,p}}\Delta_{m+1,q}f$

desarrollando obtenemos

$\frac{3}{5^m}\widetilde{\Delta_{m,p}f} = \frac{1}{5^{m+1}}(5\widetilde{\Delta_{m+1,p}f} + 2\sum_{q\in V_{m+1,p}}\widetilde{\Delta_{m+1,q}f} + \sum_{q\in R_{m+1,p}}\widetilde{\Delta_{m+1,q}f})$ multiplicando por 5^{m+1}

$15\widetilde{\Delta_{m,p}f} = 5\widetilde{\Delta_{m+1,p}f} + 2\sum_{q\in V_{m+1,p}}\widetilde{\Delta_{m+1,q}f} + \sum_{q\in R_{m+1,p}}\widetilde{\Delta_{m+1,q}f}$. En valores absolutos tenemos

$15|\widetilde{\Delta_{m,p}f}| = |5\widetilde{\Delta_{m+1,p}f} + 2\sum_{q\in V_{m+1,p}}\widetilde{\Delta_{m+1,q}f} + \sum_{q\in R_{m+1,p}}\widetilde{\Delta_{m+1,q}f}|$

$\leq 5|\widetilde{\Delta_{m+1,p}f}| + 2\sum_{q\in V_{m+1,p}}|\widetilde{\Delta_{m+1,q}f}| + \sum_{q\in R_{m+1,p}}|\widetilde{\Delta_{m+1,q}f}| \leq (5 + 2\cdot 4 + 2)\max_{q\in V_{m+1}}|\widetilde{\Delta_{m+1,q}f}|$

$= 15\max_{q\in V_{m+1}^o}|\widetilde{\Delta_{m+1,q}f}|$.

Por lo tanto $\|\Delta_m f\| \leq \max_{q\in V_{m+1}^o}|\widetilde{\Delta_{m+1,q}f}| = \|\Delta_{m+1}f\|$. ■

Definiremos el operador laplaciano. En [Dalrymple] se intenta definir como la convergencia de $\Delta_m f$, pero no se menciona en que espacios, bajo que métricas y qué tipo de convergencia. Recordemos que en el presente trabajo una sucesión en $C(K)$ converge uniformemente en $C(K)$ si y sólo si lo hace con la norma del supremo que se dio para $C(K)$.

Definición 5.5 *Sea el operador $\Delta : Dom_\Delta \subset C(K) \to C(K)$ dado de la siguiente forma: Si para $f \in C(K)$ existe $g \in C(K)$ de tal forma que $\Delta_m f$ converge uniformemente a g entonces $\Delta f = g$, a este le llamamos el operador laplaciano, si f cumple con esta propiedad decimos que $f \in Dom_\Delta$.*

En las referencias del artículo [Strichartz] se menciona un artículo donde se estudia qué es lo que no está en Dom_Δ. Así también en [Dalrymple] se menciona que pueden definirse otros Laplacianos en el triángulo de Sierpinsky, lo cual representa problemas abiertos para intentar abordar en trabajos posteriores.

Recordemos que trabajamos de igual manera la convergencia uniforme y la convergencia en $C(K)$.

Proposición 5.6 *Δ es un operador lineal.*

Demostración: Sean $\varepsilon > 0$, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g \in Dom_\Delta \subset C(K)$, sabemos que $c\Delta f + \Delta g$ está en $C(K)$, y existen $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $m > \text{máx}\{l_1, l_2\}$ implica $\|\Delta_m f - \Delta f\| < \frac{\varepsilon}{2|c|}$ y $\|\Delta_m g - \Delta g\| < \frac{\varepsilon}{2}$, luego $\|\Delta_m(cf + g) - c\Delta f - \Delta g\| = \|c\Delta_m f + \Delta_m g - c\Delta f - \Delta g\| \leq \|c\Delta_m f - c\Delta f\| + \|\Delta_m g - \Delta g\| < \varepsilon$, pues Δ_m es lineal, de donde $\{\Delta_m(cf + g)\}_m$ converge a $c\Delta f + \Delta g$, pero también converge a $\Delta(cf + g)$ por definición, entonces $cf + g$ está en Dom_Δ y $c\Delta f + \Delta g = \Delta(cf + g)$, por lo tanto Δ es lineal. ■

Definiremos el problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson.

Definición 5.7 *Sea $g \in Dom_\Delta$. entonces el problema de Dirichlet consiste en: Encontrar $f \in C(K)$ tal que*

$$\begin{cases} \Delta f = g \\ f|_{\partial K} = \zeta \end{cases}$$

para $\zeta : \partial K \to \mathbb{R}$.

Para probar la existencia y unicidad de la solución, necesitamos el siguiente lema que asocia a una función en ∂K y un funcional en $C(K)^*$, una sucesión de funciones que converge y la utilizaremos para trabajar con $\nu = \pi_g$, por lo que la sucesión convergerá a la solución de la ecuación de Poisson.

Lema 5.8 *Dadas $\nu \in C(K)^*$, $\zeta : \partial K \to \mathbb{R}$ y*

$f_m = \sum\limits_{p \in \partial K} \zeta_p \psi_p + \frac{3}{2} \sum\limits_{p \in V_m^o} \beta_p(\nu)(\frac{3}{5})^{i(p)} \psi_p$. *Entonces se cumple lo siguiente:*

1) f_m converge uniformemente a una función $f_{\nu,\zeta}$.

2) $f = f_{\nu,\zeta}$ satisface para toda $m > 0$ y para todo $p \in V_m^o$

$\Delta_{m,p} f = \frac{3}{2}(\frac{3}{5})^m \nu(\psi_p^m)$.

Demostración: 1) Definimos $F_m = \sum\limits_{i(p)=m} \beta_p(\nu)\psi_p$, es claro que F_m es m-armónica y entonces

$\|F_m\| = \sup\limits_{x \in K} |F_m(x)| = \max\limits_{p \in V_m} |F_m(p)| = \max\limits_{i(p)=m} |F_m(p)|$ pues $\psi_p^m|_{V_n} = 0$ para $n \leq m$ y $i(p) = m$, y usando el hecho de que el supremo se alcanza en algún $p \in V_m$ para funciones m-armónicas.

Por definición $\beta_p(\nu) = \nu(\omega_p)$ y como ν es un funcional lineal continuo, es acotado, entonces existe $B \in \mathbb{R}$ tal que $|\nu(h)| \leq B\,\|h\|$. Entonces

$|\beta_p(\nu)| = |\nu(\omega_p)| \leq B\,\|\omega_p\|$. Como $\omega_p = -\frac{3}{10}\psi_p - \frac{1}{10}\sum\limits_{q \in B_p} \psi_q$ es una función m-armónica tenemos

$\sup\limits_{x \in K} |-\frac{3}{10}\psi_p(x) - \frac{1}{10}\sum\limits_{q \in B_p} \psi_q(x)| = |-\frac{3}{10}|$, pues $\omega_p(q) \neq 0$ en V_m si $q = p$ o $q \in B_p$, y $\frac{1}{10} < \frac{3}{10}$. Entonces $\|\omega_p\| \leq \frac{3}{10}$. De donde $\max\limits_{i(p)=m} |F_m(p)| = \max\limits_{i(p)=m} |\beta_p(\nu)| \leq \frac{3}{10} B$.

Por otro lado una suma $\sum\limits_{p \in V_m^o}$ se puede separar en $\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{i(p)=l}$ por lo que la sumas $\sum\limits_{p \in \partial K}$ y $\sum\limits_{l=1}^{m}\sum\limits_{i(p)=l}$ aparecen en f_{m+1} y en f_m, entonces

$$\|f_{m+1} - f_m\| = \left\| \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{m+1} \sum_{i(p)=m+1} \beta_p(\nu)\psi_p \right\| = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^{m+1} \|F_{m+1}\|$$

$= \frac{3}{2}(\frac{3}{5})^{m+1} \max_{i(p)=m} |\beta_p(\nu)| \leq \frac{3}{10}\frac{3}{2}(\frac{3}{5})^{m+1}B = C(\frac{3}{5})^{m+1}$ con $C = \frac{3}{10}\frac{3}{2}B$. Por lo tanto $|f_{m+1} - f_m| \leq C(\frac{3}{5})^{m+1}$.

Por el lema 2.16 concluimos que f_m converge uniformemente a una función $f_{\nu,\zeta}$.

2) Utilizando la continuidad de $\Delta_{m,p}$, y la parte (1) tenemos:

$\Delta_{m,p} f_n = \Delta_{m,p}\left(\sum_{p\in\partial K}\zeta_p\psi_p + \frac{3}{2}\sum_{q\in V_n^o}\beta_q(\nu)(\frac{3}{5})^{i(q)}\psi_q\right) = \sum_{q\in\partial K}\zeta_q\Delta_{m,p}\psi_q$
$+\frac{3}{2}\sum_{q\in V_n^o}\beta_q(\nu)(\frac{3}{5})^{i(q)}\Delta_{m,p}\psi_q = \frac{3}{2}\sum_{q\in V_n^o}\beta_q(\nu)(\frac{3}{5})^{i(q)}\Delta_{m,p}\psi_q$ pues $p \in V_m^o$ y $\min(0,m) < m$.

Por otro lado sean $l = \min\{i(q), m\}$ y $L = \max\{i(q), m\}$. Usando 3.3 tenemos dos casos: Si $q = p$ entonces $(\frac{3}{5})^{i(q)}\Delta_{m,p}\psi_q^{i(q)} = -4(\frac{3}{5})^L = (\frac{3}{5})^m\Delta_{i(q),q}\psi_p^m$. Si $q \underset{l}{\sim} p$ entonces $(\frac{3}{5})^{i(q)}\Delta_{m,p}\psi_q^{i(q)} = (\frac{3}{5})^L = (\frac{3}{5})^m\Delta_{i(q),q}\psi_p^m$.

Usando esto tenemos

$\Delta_{m,p} f_n = \frac{3}{2}(\frac{3}{5})^m\sum_{q\in V_n^o}\beta_q(\nu)\Delta_q^*\psi_p^m = \frac{3}{2}(\frac{3}{5})^m\sum_{q\in V_n^o}\beta_q(\nu)\mu_q\psi_p^m$, y como $\mu_q\psi_p^m = 0$ para $q \in \partial K$, entonces $\Delta_{m,p} f_n = \frac{3}{2}(\frac{3}{5})^m\sum_{q\in V_n}\beta_q(\nu)\mu_q\psi_p^m$.

Por lo tanto $\Delta_{m,p} f = \lim_{n\to\infty}\Delta_{m,p} f_n = \frac{3}{2}(\frac{3}{5})^m \lim_{n\to\infty}\sum_{q\in V_n}\beta_q(\nu)\mu_q(\psi_p^m) = \frac{3}{2}(\frac{3}{5})^m\nu(\psi_p^m)$ por convergencia débil*. ■

El resultado anterior lo aplicaremos a π_g y con esto obtendremos una solución del problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson, que es el resultado principal de este trabajo.

Teorema 5.9 *Dadas $g \in C(K)$ y $\zeta : \partial K \to \mathbb{R}$ existe una única solución del problema de Dirichlet*
$\begin{cases} \Delta f = g \\ f|_{\partial K} = \zeta \end{cases}$ *, donde la solución está dada en expansión armónica como:* $f = \sum_{p\in\partial K}\zeta_p\psi_p + \sum_{p\in V_*^o}\beta_p(\pi_g)(\frac{3}{5})^{i(p)}\psi_p$.

Demostración: Si $g = 0$ y $\zeta = 0$. Si $\Delta f = 0$ entonces $\Delta_m f$ converge a 0. Por otro lado como $|\Delta_m f| \leq |\Delta_{m-1} f|$ y $|\Delta_m f|$ converge a 0, entonces $\Delta_m f = 0$ para toda m, entonces $\widetilde{\Delta_{m,p}} f = 0$ y $\Delta_{m,p} f = 0$ para toda $p \in V_m^o$ y para toda $m > 0$. Por lo tanto f es armónica en K y por lo tanto $f = 0$.

Si existe f^* tal que cumple el problema de Dirichlet, entonces $\Delta(f^* - f) = 0$ y $(f^* - f)|_{\partial K} = 0$ pero $f^* - f \neq 0$ lo cual contradice lo anterior.

Ahora probemos que $\Delta_m f$ converge uniformemente a g. Usando el lema anterior con $\nu = \pi_g$, y $p \in V_m^o$, tenemos que $\Delta_{m,p} f = \frac{3}{2}(\frac{3}{5})^m\nu(\psi_p^m)$. En consecuencia $\widetilde{\Delta_{m,p}} f = \frac{3}{2}(\frac{3}{5})^m 5^m\pi_g(\psi_p^m) = \frac{1}{2}(3)^{m+1}\int_K \psi_p^m g\,dh$. Si $p \in \partial K$ tenemos que $\widetilde{\Delta_{m,p}} f = \frac{1}{2}5^m(\Delta_{m,q_1} f + \Delta_{m,q_2} f)$
$= \frac{1}{4}(3)^{m+1}(\int_K \psi_{q_1}^m g\,dh + \int_K \psi_{q_2}^m g\,dh)$ para $V_{m,p} = \{q_1, q_2\}$.

Como g es uniformemente continua, sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x, y \in K$ tales que $d(x,y) < \delta$ implica $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Luego para todo $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \delta$, para todo $n > m$ y $x, y \in K_{n,p}$ para $p \in V_m$, se cumple $d(x,y) \leq d(x,p) + d(p,y) \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2^m} < \delta$, por lo que $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$. Sean $m_g = \min_{x\in K_{n,p}} g(x)$ y $M_g = \max_{x\in K_{n,p}} g(x)$, entonces $M_g - m_g < \varepsilon$. Si $p \in V_m^o$, tenemos

$m_g\frac{1}{2}(3)^{n+1}\int_K \psi_p^n dh = m_g \leq \frac{1}{2}(3)^{n+1}\int_K \psi_p^n g dh \leq M_g\frac{1}{2}(3)^{n+1}\int_K \psi_p^n dh = M_g$, pues $\frac{1}{2}(3)^{n+1}\int_K \psi_p^n dh = 1$, de donde $|\frac{1}{2}(3)^{n+1}\int_K \psi_p^n g dh - g(p)\frac{1}{2}(3)^{n+1}\int_K \psi_p^n dh| \leq M_g - m_g < \varepsilon$. Si $p \in \partial K$ y $V_{n,p} = \{q_1, q_2\}$, de igual forma obtenemos:

$|\frac{1}{4}(3)^{n+1}(\int_K \psi_{q_1}^n g dh + \int_K \psi_{q_2}^n g dh) - g(p)| < \varepsilon$, Por lo que $|\widetilde{\Delta_{n,p}f} - g(p)| < \varepsilon$ para todo $p \in V_m$ y $n > m$. Por lo tanto $\{\widetilde{\Delta_{m,p}f}\}_m$ converge a $g(p)$ uniformemente respecto a $V_{i(p)}$ para todo $p \in V_*$.

Sea $x \in K$, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ y para todo $x, y \in K$ tales que $d(x,y) < \delta$ implica $|g(x) - g(y)| < \varepsilon/5$. Sea m tal que $\frac{1}{2^m} < \delta$, y $x \in M = |q_0, q_1, q_2| \in G_m$, luego $\Delta_m f(x) = \sum_{p \in V_m} (\widetilde{\Delta_{m,p}f})\eta_p^m(x) = \sum_{p \in V(M)} (\widetilde{\Delta_{m,p}f})\eta_p^m(x)$ alcanza su máximo y su mínimo en $V(M)$ pues es afín en M, de donde $\min_{p \in V(M)}(\widetilde{\Delta_{m,p}f}) \leq \Delta_m f(x) \leq \max_{p \in V(M)}(\widetilde{\Delta_{m,p}f})$. Supongamos que $(\widetilde{\Delta_{m,q2}f}) = \max_{p \in V(M)}(\widetilde{\Delta_{m,p}f})$ y $(\widetilde{\Delta_{m,q1}f}) = \min_{p \in V(M)}(\widetilde{\Delta_{m,p}f})$, y además $|\widetilde{\Delta_{m,q}f} - g(q)| < \frac{\varepsilon}{5}$ para $q \in V(M)$, lo que equivale a que $|\Delta_m f(q) - g(q)| < \frac{\varepsilon}{5}$, entonces

$\widetilde{\Delta_{m,q2}f} - \widetilde{\Delta_{m,q1}f} \leq |\widetilde{\Delta_{m,q2}f} - g(q_2)| + |\widetilde{\Delta_{m,q1}f} - g(q_1)| + |g(q_2) - g(q_1)| < 3\varepsilon/5$, por lo que $\Delta_m f(q_2) - \Delta_m f(x) < 3\varepsilon/5$. Por lo tanto

$|\Delta_m f(x) - g(x)| \leq |\Delta_m f(x) - \Delta_m f(q_2)| + |\Delta_m f(q_2) - g(q_2)| + |g(q_2) - g(x)| < \varepsilon$.

Por esto concluimos que $\{\Delta_m f\}$ converge uniformemente a g y f es la solución de la ecuación de Poisson. ■

Este es el resultado esencial para varios problemas del análisis sobre el Triángulo de Sierpinsky, ahora probemos que las funciones armónicas en el sentido del capítulo 2 lo son en el sentido de la ecuación de Laplace.

Corolario 5.10 *Sea $f \in Dom_\Delta$ y $f|_{\partial K} = \zeta$. Entonces $\Delta f = 0$ si y solo si f es armónica en K.*

Demostración: La solución es $f = \sum_{p \in \partial K} \zeta_p \psi_p + \sum_{p \in V_*^o} \beta_p(\pi_g)(\frac{3}{5})^{i(p)}\psi_p$

$\pi_g = \int_K 0 \cdot [\ ]dh = 0$, por lo que $\beta_p(\pi_g) = \int_K 0 \cdot [\omega_p]dh = 0$ si $p \in V_*^o$ y $\beta_p(\pi_g) = \int_K 0 \cdot [\psi_p]dh = 0$ si $p \in V_0$, por lo que $f = \sum_{p \in \partial K} \zeta_p \psi_p$ es una función armónica en K.

Si f es armónica en K, entonces $\gamma_p(f) = f(p)$ si $p \in \partial K$, y $\gamma_p(f) = 0$ con $p \in V_*^o$ pues $\Delta_p^* f = 0$, entonces $f = \sum_{p \in \partial K} f(p)\psi_p$, luego $\widetilde{\Delta_{m,p}f} = 5^m \Delta_{m,p} f = 0$ si $p \in V_*^o$ y $\widetilde{\Delta_{m,p}f} = (\frac{1}{2})\sum_{q \underset{m}{\sim} p} 5^m \Delta_{m,q} f = 0$ si $p \in \partial K$, por lo que $\Delta_m f = 0$ para todo m, claramente converge uniformemente a 0, y $\zeta(p) = f(p)$ para todo $p \in \partial K$, por lo que satisface el problema de Dirichlet y además $f \in Dom_\Delta$ pues 0 es una función continua. ■

60

Conclusiones

En este trabajo dimos un desarrollo a la construcción del Laplaciano en el Triángulo de Sierpinsky en $\mathbb{R}^2$, así como el problema de Dirichlet para obtener el caso particular de las funciones armónicas en el triángulo de Sierpinsky. El desarrollo de este documento se basó principalmente en el trabajo de [Kigami] agregando en varios casos teoremas que detallan lo que se afirma en ese artículo. Además agregamos el enfoque de los artículos [Strichartz] y [Kigami] para el tratamiento mediante gráficas. Hemos profundizado en la construcción del triángulo de Sierpinsky mediante funciones afines en $\mathbb{R}^2$ y desarrollamos con más detalle varias demostraciones de [Kigami].

Así también con respecto a ese artículo, nos restringimos a $\mathbb{R}^2$, pero lo desarrollado aquí puede extenderse a mas de 2 dimensiones, así también restringimos a los triángulos de Sierpinsky solamente, pero según el artículo [Strichartz] de la Notices, se puede extender a otros conjuntos con estructura autosemejante, como los "Hexagaskets". Hay otras direcciones no abordadas en este documento, como son la definición de otros operadores laplacianos, otros funcionales parecidos a los de diferencias armónicas con diferentes propiedades, y encajar el triángulo de Sierpinsky en espacios métricos (encaje no isométrico) para luego definir otro Laplaciano en donde las funciones armónicas sean distintas a las que aquí se estudiaron. Todo estos son temas para un desarrollo posterior.

La ecuación de Laplace en el triángulo de Sierpinsky es un caso particular de ecuaciones diferenciales parciales en este conjunto, pues por ejemplo en [Dalrymple] se estudian las funciones propias del Laplaciano con condiciones de Dirichlet, así como ecuaciones que dependen del tiempo como la de calor clásica y la de onda.

Hay muchos problemas que no se abordan en el presente trabajo y algunos se encuentran en la literatura en la que los autores Strichartz y Kigami son los principales investigadores. Los problemas de funcionales, operadores y espacios de funciones se pudieron extender al caso complejo, hay muchos problemas relacionados con la teoría de la medida en este conjunto. Los problemas de Análisis de Fourier y ondeletas en el Triángulo de Sierpinsky se han desarrollado tanto por Strichartz como por Kigami.

Bibliografía

[Dalrymple] Dalrymple, Kyallee; Strichartz, Robert S.; Vinson, Jade P. Fractal differential equations on the Sierpinski gasket. J. Fourier Anal. Appl. 5 (1999), no. 2-3, 203-284.

[Strichartz] Strichartz, Robert S. Analysis on fractals. Notices Amer. Math. Soc. 46 (1999), no. 10, 1199-1208.

[Kigami] Kigami, Jun A harmonic calculus on the Sierpinski spaces. Japan J. Appl. Math. 6 (1989), no. 2, 259-290.

[Royden] Royden, H. L. Real Analysis, Macmillan Publishing Co, New York, 2a Edición, 1968.

[Rudin] Rudin, Walter, Principles of mathematical analysis. McGrow Hill, 3a Edición, 1976.

[Edgar] Edgar, Gerald A. Measure, Topology and Fractal Geometry. Undergraduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1990.

[Ryan] Ryan Patrick, Euclidean and non-euclidean Geometry: An analytic approach, Cambridge University Press, 1986.

[Barnsley] Barnsley, Michael, Fractals Everywhere, Academic Press Inc. 1988.

[Aboufadel] Aboufadel, Edward. Discovering Wavelets, Ed. Wiley, New York, 1999.

[Kaiser] Kaiser, Gerald. A friendly guide to Wavelets, Birkhauser, 1994.

[Kolmogorov] Kolmogorov, A. N, Fomin, S. V. Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional, Editorial Mir, Moscú, 1975.

[Friedberg] Friedberg, Stephen H. Insel, A. J, Spence L. E. Linear Algebra. Prentice Hall, 2a Edición, 1989.

[Hocking] Hocking, John G. Young, Gall S. Topology. Dover Publications Inc. New York, 1961.

[Fraleigh] Fraleigh, John B. Algebra Abstracta. Addison-Wesley Iberoamericana, 3a Edición, 1987.

[Peitgen] Peitgen, Heinz O, Chaos and Fractals: new frontiers of science, Springer, New York, 1992.

[Fleming] Fleming, W. A. Functions of Several Variables, Springer-Verlag, New York, 2a Edición, 1977.