37



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES.

### "MODELADO Y SIMULACIÓN DE PROCESOS DE LAMINADO CONJUNTO"

# TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:

MAESTRO EN CIENCIA E INGENIERÍA DE MATERIALES

PRESENTA:

ING. HÉCTOR ADRIÁNQUIROZ GONZÁLEZ

DIRECTOR DE TESIS:

M. EN I. ARMANDO ORTIZ PRADO.

Unizo a la Dirección General de Bibliotecas un un JNAM a difundir en formato electrónico e impreso en onterido de mi trabajo recepcional VOMBRE: LICETVE NOELNY COMBRE: LICETVE NOELNY

México D.F.

**ENERO DE 2003.** 



Universidad Nacional Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas Tesis Digitales Restricciones de uso

### DERECHOS RESERVADOS © PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# PAGINACIÓN DISCONTINUA



INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATERIALES

### Posgrado en Ciencia e Ingeniería de Materiales Área de Materiales Metálicos

### "MODELADO Y SIMULACIÓN DE PROCESOS DE LAMINADO CONJUNTO"

**Resumen:** El presente estudio muestra el desarrollo e implementación de un modelo para la simulación de procesos de laminado conjunto simétricos. El fundamento físico consiste en la aplicación del teorema de límite superior y la descripción del flujo de material mediante el empleo de funciones de corriente. El objetivo principal es la predicción de las deformaciones relativas de cada una de las capas durante procesos de colaminado simétricos. Para la solución del modelo se hace uso del método de poliedro flexible. El modelo proporciona una descripción analítica del flujo para las capas del conglomerado con lo cual se puede inferir sobre el campo de deformaciones experimentales así como también el patrón de deformación del material a través de la rapidez de deformación equivalente. La sensibilidad del modelo a diversas condiciones de simulación es discutida para medir la incertidumbre en los parámetros de interés.

Ciudad Universitaria , Enero de 2003.



#### El presente trabajo fue realizado en la Unidad de Investigación y Asistencia Técnica en Materiales U.N.A.M.

El jurado estuvo integrado por:

Dr. Jaime Cervantes de Gortari. Dr. Guillermo Pulos Cárdenas. M.I. Armando Ortiz Prado. Dr. Gabriel Torres Villaseñor. Dr. Federico Méndez Lavielle. Presidente. Vocal. Secretario. Suplente. Suplente.

El comité tutorial estuvo integrado por:

Prof. Armando Ortiz Prado Dr. Francisco Solorio Ordaz. Dr. Gabriel Torres Villaseñor Facultad de Ingeniería Facultad de Ingeniería Instituto de Investigaciones en Materiales

a quienes agradezco el apoyo brindadao durante mi estancia como alumno del PCeIM.

Héctor A. Quiroz González.

### AGRADECIMIENTOS

La realización de este trabajo estuvo bajo la dirección del Prof. Armando Ortiz Prado auien а agradezco profundamente la amistad y el apoyo que me ha brindado durante los últimos cuatro años. Su experiencia. conocimiento y motivación por incursionar en temas avanzados de la metalurgia mecánica han sido parte fundamental del impulso que he recibido durante mi formación en esta universidad.

A la Unidad de Investigación y Asistencia Técnica en Materiales de la UNAM y al Laboratorio de Metalurgia de la Universidad de Gante, en especial al Dr. Yvan Houbaert por los recursos y el espacio que gentilmente me brindaron.

Al Dr. Guillermo Pulos mi sincero agradecimiento por su apoyo durante mi estancia como alumno en el IIM, por la asesoría brindada y por la minuciosa revisión de este trabajo.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por los recursos otorgados durante mi formación en el posgrado.

Héctor Quiroz.

Dedicado a mi hija Daniela y a Alejandra mi adorada esposa.

:

#### **INDICE DE CONTENIDO**

Prólogo	 iii
Nomenclatura	 <b>v</b>

#### **CAPITULO 1. ANTECEDENTES.**

CAPITULO 1. ANTECEDENTES.	이 가지 않는 것 같은 것 같
1.1. Introducción	1
1.2. Productos colaminados y sus aplicaciones	(注::::::::::::::::::::::::::::::::::::
1.3. Procesos de fabricación de conglomerados metáli	icos
1.4. Variantes del proceso de colaminado	·····································
1.4.1. Caso simétrico	1
1.4.2. Caso no simétrico	
1.5. Conceptos útiles de la teoría de plasticidad	
1.5.1. Tensor de deformaciones pequeñas	
1.5.2. Deformación plana.	9
1.5.3. Comportamiento rígido-plástico	
1.5.4. Criterios de Falla.	
1.5.5. Rapidez de Deformación Equivalente	
CAPITULO 2. PRINCIPIOS BÁSICOS.	

#### **CAPITULO 2. PRINCIPIOS BÁSICOS.**

2.1. Estado del arte.		15
2.1.1. Análisis del proceso de laminado conjunto m el método del planchón	ediante	16
2.1.2. Análisis del proceso de laminado conjunto m técnicas de límite superior y función de corri	ediante	18
2.1.3. Funciones de corriente útiles en el modelado de laminación.	de procesos	22
2.2. Métodos de límite	an a	25
2.2.1. Principio de Stokes de la potencia consumida		25
2.2.2. Teorema de límite inferior.		27
2.2.3. Teorema de límite superior.		28
2.3. Generalidades del método de límite superior	en sen 1999 - Talan Bardar Bardar 1995 - Talan Bardar B	29
2.3.1. Campo de velocidad		30
2.3.2. Superficies de discontinuidad de velocidad		32
2.3.3. Materiales rígido-nlásticos perfectos	·····································	33
2.4. Cálculo de la potencia requerida por el proceso		34
CAPITULO 3. SIMCLAD. DESCRIPCIÓN DEL MODELO.	nang sisangkang pas	

3.3.1.a. Región previa a la zona de deformación	L	. 44
3.3.1. Análisis del flujo de material en la capa externa.		. 43
3.3. Desarrollo del modelo de solución		. 42
3.2.1. Consideraciones.	1999年,1998年,1998年1998年(1997年) 1999年——————————————————————————————————	. 41
3.2. Definición del proceso a modelar.		. 40
3.1. Introducción.		. 39

3.3.1.b. Región del claro de laminación		44
3.3.2. Determinación del límite rígido plástico en la capa ext	terna ( $\Gamma_{s1}$ )	48
3.3.3. Análisis del flujo de material en la capa externa		50
3.3.3.a. Región previa a la zona de deformación		50
3.3.3.b. Región del claro de laminación		51
3.3.4. Determinación del límite rígido plástico en la capa inte	erna ( $\Gamma_{s_2}$ )	52
3.3.5. Tensores de rapidez de deformación y valor efectivo		
de rapidez de deformación.	्र्यः स्टित्स् विद्यार्थः व	53
3.3.6. Potencia interna consumida por deformación plástica.	- Errege Aderation ve	54
3.3.6.a. Capa externa.	r fret stranger i	54
3.3.6.b. Capa interna.		56
3.3.7. Potence consumida por discontinuidad de velocidad		
en linges rígido-plásticos.	er in Staatskardet	58
3.3.7.a. Capa externa.	e still the second state of the second	58
3.3.7.b. Capa interna	e entre provinsi entre la rectione	60
3.3.8. Potencia consumida por fricción en las herramientas		61
3.3.9. Potencia consumida por fricción en la interfase	an an an the state of the state	64
3.3.10. Cálculo de la potencia total consumida por el proceso		65
3.4. Carga aplicada por los rodillos	- 小学校開始の学校時代の 2	67
3.5. Optimación de J* mediante el método del poliedro flexible		67
- •		
CAPÍTULO 4. RESULTADOS.		

### **CAPÍTULO 4. RESULTADOS.**

4.1. Introducción		71
4.2. Descripción del equipo y materiales empleados		72
4.3. Descripción de las pruebas.		76
4.3.1. Preparación de las superficies.		76
4.3.2. Preparación de los rodillos.	一、四、元、金融、金融和学校、特征和学校、考试、二、	76
4.3.3. Secuencia de experimentación.		76
4.4. Resultados experimentales y discusión		79
4.5. Carga de laminación y potencia consumida por el pro	ceso	81
4.6. Análisis y simulación mediante SIMCLAD.		85
4.7. Estudio de la rapidez de deformación equivalente	en lener din konstructure (177	92
4.8. Análisis de sensibilidad de J*.	n - Alamada ya Tagada wasa ya Alamada ili ili ili	94
CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES	reaction of the second seco	99
	the first of the state of the	
BIBLIOGRAFÍA		101
ANEXO I. HERRAMIENTAS NUMÉRICAS DE CÁLCULO		103
ANEXO II. HISTORIAL DE EVOLUCIÓN DE PARÁMETRO	S PSEUDO-INDEPENDIENTES	107
ANEXO III. ARCHIVO DE RESULTADOS .CLR. SIMCLAI	D	112

# Prólogo.

Los procesos tradicionales de conformado han ido expandiéndose en diversas variantes que los hacen más versátiles y útiles. Dentro de este contexto, el laminado de productos planos se ha utilizado a lo largo del tiempo para la manufactura de láminas de diferentes calibres y propiedades que sirven finalmente para la elaboración de bienes de capital. Como la mayoría de los procesos de conformado, el beneficio directo de este proceso es su bajo costo y el excelente control dimensional que puede obtenerse en el producto final.

Recientemente, se ha puesto especial atención en una variante del proceso de laminación de productos planos conocida como *laminado conjunto* o simplemente como *colaminación*; en donde dos o más materiales se laminan uno sobre otro formando un conglomerado cuyas propiedades como producto final (que son función de la combinación óptima de materiales) resultan ser adecuadas para ciertas aplicaciones específicas. Una de estas aplicaciones recae en el ámbito automotriz, específicamente en la fabricación de cojinetes de deslizamiento para los motores de los vehículos productos se puede llegar fácilmente a la conclusión que, al implantar un proceso de colaminación, se pueden lograr ahorros significativos en su fabricación tanto en costos operativos como en tiempo de proceso sin modificar el desempeño de dichos componentes.

Dentro del entorno industrial automotriz del país, una empresa nacional dedicada a la manufactura de cojinetes de deslizamiento ha tomado la decisión de desarrollar una línea de producción de cojinetes colaminados consistentes en una capa de una aleación Al-Sn normalizada que funge como material superficial de desgaste, la cual es colaminada junto con otra capa que no es más que un respaldo de acero que sirve como soporte mecánico a la aleación, proporcionando la rigidez estructural necesaria para el buen desempeño del elemento mecánico. El diseño del proceso demanda entre otras cosas, conocer la serie de pasos de deformación necesarios para llegar a las dimensiones deseadas. Para ello resulta necesario contar con herramientas de cómputo que pronostiquen los espesores finales de las capas que se colaminan y proporcionen información adicional relativa al flujo de los materiales.

En el presente trabajo se expone el desarrollo de un modelo para la simulación del proceso de laminado conjunto. El programa resultante ha sido denominado SIMCLAD que es básicamente una herramienta de cómputo que analiza el caso simétrico de la colaminación bajo la aplicación del teorema de límite superior. La solución se ajusta a la primera etapa del proceso de fabricación de cojinetes de deslizamiento en donde la aleación Al-Sn es laminada conjuntamente con aluminio puro. Al final del proceso, el programa provee la información completa respecto al campo de deformación del material.

SIMCLAD se basa en la aplicación del Teorema del Límite Superior (TLS) el cual deriva en lo que se conoce comúnmente como Método de Límite Superior (MLS), bajo el planteamiento de un campo de velocidades cinemáticamente admisible. El perfil de velocidades para ambas capas queda expresado en función de un conjunto de cinco parámetros pseudo-independientes, cuyos valores óptimos proporcionan el carácter cualitativo del campo de velocidades, el cual cumple con minimizar la potencia total del proceso, criterio principal del TLS. El algoritmo fue programado en C y se puede utilizar como librería dentro del entorno de Microsoft Excel a través del cual se manipulan los datos de entrada, las salidas así como la visualización de resultados y el control de la ejecución SIMCLAD. Para validar el modelo se han llevado a cabo una serie de experimentos que proporcionan una idea general del desempeño del algoritmo.

Los valores pertinentes de los parámetros se determinan mediante un proceso de optimación para lo cual se recurre al método del *poliedro flexible* por ser éste el adecuado a la naturaleza de la función objetivo.

Adicionalmente los resultados obtenidos con SIMCLAD han sido comparados con simulaciones generadas mediante la aplicación del Método del Elemento Finito (MEF) utilizando software comercial (DEFORM<sup>®</sup>), así como mediante la comparación con soluciones analíticas de espectro general.

El trabajo está estructurado de tal forma que en el primer capítulo se describen los conceptos básicos relacionados con el proceso de conformado en cuestión. Asimismo se presentan los antecedentes de la teoría de plasticidad que dan el sustento teórico al modelo empleado por SIMCLAD.

En el segundo capítulo se presenta el concepto de función de corriente así como lo relacionado con los teoremas de límite, particularmente el de límite superior en su forma más general. Se mencionan los conceptos básicos en los que se basan las soluciones por límite superior como son la definición del campo de velocidad, las superficies de discontinuidad de velocidad y los mecanismos de evaluación de la funcional de potencia.

El tercer capítulo muestra la descripción del modelo, en éste se presenta la derivación de cada término de potencia y la forma para evaluarlo. Finalmente, para correlacionar la solución arrojada por SIMCLAD con datos experimentales se realizaron pruebas de colaminado de acero con aluminio. Los resultados pertinentes así como un análisis de la solución arrojada por el modelo se detallan en el capítulo 4.

Finalmente se espera que los resultados de este trabajo permitan establecer las bases para el desarrollo posterior de un modelo similar que proporcione una solución al análisis del caso no simétrico del colaminado en donde no existe un avance teórico formal.

> Héctor A. Quiroz González. Enero de 2003.

# Nomenclatura

La lista de símbolos que a continuación se muestra corresponde únicamente al desarrollo del modelo en cuestión y están referidos al contenido del capítulo tercero y cuarto.

$e_{li}$	Espesor inicial de la capa externa.
e <sub>2i</sub>	Mitad del espesor inicial de la capa interna.
emi	Mitad del espesor total inicial del conglomerado.
elf	Espesor final de las capa externa.
e2f	Mitad del espesor final de la capa interna.
emf	Mitad del espesor total final del conglomerado.
L	Longitud proyectada del arco de contacto.
$L_{1}, L_{2}$	Extensión de la región de deformación plástica en las capa externas e interna.
$\Gamma_{SI},\Gamma_{S2}$	Límites rígido-plásticos de las capas externas e interna.
Ψ	Interfase entre ambos materiales.
$Q_1, Q_2$	Gasto volumétrico por unidad de longitud. Capas externas e interna.
$\varphi$	Función de corriente.
Ū	Componente horizontal de la velocidad.
V	Componente vertical de la velocidad.
$m_{1}, m_{2}$	Factor de fricción entre el rodillo y el material así como entre capas.
Y1.Y2	Funciones límite a lo largo de la superficie del rodillo y la interfase entre
	materiales.
Y3.Y4	Funciones limite a lo largo del limite rigido plastico a la entrada del claro de
	laminacion en las capas externa e interna.
$W_i, W_s, W_f$	Energia interna de deformacion, perdidas internas por cortante en limites rigido
c	plasticos y perdidas por inccion en la superincie del rodino y en la interiase.
$C_{1}, C_{2}$	Velocidad li negl de les re dilles
	velocidad inical de los rodinos.
ĸ	Radio de los rodillos.

Subindices para funciones de corriente y componentes de velocidad:

0,3 Región previa al claro de laminación.

1,2 Región que comprende el claro de laminación.

# Capítulo 1 ANTECEDENTES

#### 1.1. INTRODUCCIÓN.

Hoy en día los productos laminados abarcan cerca del 90% de los productos fabricados mediante procesos de conformado tradicionales. Aún cuando existen productos laminados de las más diversas geometrias, la mayor parte de la demanda en el mercado es de productos planos. Por su importancia, en la manufactura de bienes de consumo primario, un gran número de investigadores se ha dedicado a tratar de comprender y explicar el fenómeno de laminación como una herramienta para la predicción de las características físicas del producto final.

Gracias a la capacidad de procesamiento de datos de las computadoras, actualmente los modelos numéricos de cálculo son herramientas posibles e indispensables en el diseño de procesos de conformado mecánico. Sin embargo, aún con todo el potencial de cálculo actual y los avances en la ciencia, no existen soluciones exactas que describan completa y cabalmente el fenómeno de deformación plástica y que por tanto, brinden una solución simultánea tanto al campo de deformaciones como al campo de esfuerzos asociados al proceso de conformado.

A pesar de ello, un sin número de aproximaciones han sido propuestas por varios autores para el modelado matemático y simulación de dichos procesos aplicando diversas teorías y herramientas matemáticas que buscan dar una solución al problema de predecir el comportamiento de un material durante su procesamiento así como los parámetros involucrados durante el mismo.

Los métodos tradicionales para análisis en procesos de conformado, así como la teoría de plasticidad proporcionan un marco de referencia para la comparación de soluciones alternativas de dichos procesos. Esto permite ubicar la solución propuesta dentro del conjunto existente de métodos de solución y comprender tanto sus ventajas como limitaciones frente a diversos métodos.

1

TESIS CON

FALLA DE ORIGEN

#### **1.2. PRODUCTOS COLAMINADOS Y SUS APLICACIONES.**

Una variante interesante del proceso de laminado de productos planos es conocida como *laminado conjunto o colaminado*. Este proceso consiste en unir, mediante el uso de un laminador, dos o más hojas de materiales metálicos de diferentes propiedades por la acción mecánica de la presión ejercida por los rodillos del laminador. El fenómeno que induce la unión durante la laminación de las diferentes capas de materiales no ha sido aún del todo caracterizado. Sin embargo, de los pocos trabajos publicados a la fecha se infiere que la presión ejercida por los rodillos, la deformación localizada de las superficies de las interfases, la resistencia relativa a la deformación plástica de ambos materiales y la rugosidad de los mismos son factores que determinan en gran medida la fuerza cohesiva de la unión.

Los productos colaminados son utilizados ampliamente en un campo de demanda que incluye entre otros, plantas químicas, refinerías de petróleo, plantas petroquímicas, plantas generadoras de electricidad, industria automotriz y casas de moneda.

Dentro de la industria y la vida cotidiana, las aplicaciones de este tipo de productos son muy variadas y comprenden desde cuestiones estéticas hasta aplicaciones de ingeniería aeroespacial. El compromiso entre propiedades físicas y mecánicas y los costos de los metales de ingeniería hacen del proceso una herramienta útil en la optimación de recursos.

Por ejemplo, se puede citar el caso de materiales cuya resistencia específica es muy grande, y que al combinarse con ciertos materiales se obtiene una mayor relación costobeneficio en donde se requiere, por ejemplo, un buen comportamiento contra la corrosión inducida por un medio ambiente hostil y adicionalmente una elevada resistencia mecánica. Un claro ejemplo de esta aplicación está en la producción de envases a presión, lo cual conduce a una importante reducción de costos al sustituir los onerosos aceros inoxidables por placas bimetálicas colaminadas de un metal resistente a la corrosión como puede ser una aleación de aluminio y un acero de contenido medio de carbono que proporcione la rigidez estructural al contenedor. Otro ejemplo tangible y cotidiano es en la producción de monedas, donde la combinación de diversas propiedades deseables en el producto final así como la reducción de los costos asociados al proceso se ven muy favorecidas con la utilización de conglomerados laminados de diferentes metales.

Ejemplos de otras aplicaciones específicas comprenden lo siguiente: juntas de transición en tuberías para aplicaciones criogénicas o al alto vacío, juntas estructurales para transportes marítimos, contenedores de productos químicos altamente corrosivos, juntas para aplicaciones eléctricas, utensilios para la cocción de alimentos (un conglomerado tricapa de acero inoxidable - acero de medio carbono - acero inoxidable.)<sup>a</sup>

El caso que motiva el desarrollo del presente trabajo, y que está directamente relacionado con la producción de motores de combustión interna actuales, es la reciente tendencia en la manufactura de los cojinetes del motor a productos colaminados. Este tipo de componentes consisten en una capa de una aleación aluminio-estaño la cual proporciona

20 SIS.

<sup>\*</sup> Fuente, www.asahi-kasei.co.jp

la capacidad lubricante del cojinete. El estaño es añadido para reducir la afinidad de la aleación con una segunda capa de acero la cual funciona como respaldo y soporte de la primera, proporcionando la resistencia mecánica necesaria de todo el conjunto. Así, el producto final consiste en una capa de acero, una capa intermedia de aluminio (que favorece la adhesión) y una capa de Al-Sn la cual se recubre con una película delgada de aluminio para proteger la capa de trabajo (Al-Sn) durante el proceso de manufactura del componente. Dicha capa es posteriormente removida del cojinete mediante un proceso de maquinado.



La producción de cojinetes de deslizamiento mediante este proceso se encuentra actualmente desplazando a los métodos tradicionales para la fabricación de este tipo de componentes, que actualidad consisten en la principalmente en procesos de sinterizado y deposición por inmersión húmeda. La principal ventaia del proceso de colaminación en la producción de cojinetes de deslizamiento es la alta velocidad de producción y

Figura 1.1. Cojinetes Colaminados de Al-Sn y respaldo de Acero.

por lo tanto la disminución de

costos asociados al proceso, simplificando adicionalmente los requerimientos del mismo.

#### 1.3. PROCESOS DE FABRICACIÓN DE CONGLOMERADOS METÁLICOS.

Los procesos para unir un conjunto de láminas de diferentes materiales se llevan a cabo mediante las siguientes técnicas:

- a) Detonación controlada de cargas explosivas dispuestas en las superficies de los materiales a unir.
- b) Laminado conjunto en donde la presión ejercida por los rodillos induce la deformación de los materiales y su unión.

El primero de estos procesos hace uso de la energía liberada por la combustión de explosivos, lo que proporciona la fuerza necesaria para unir de forma permanente dos materiales similares o de distinta naturaleza metalúrgica. Durante el proceso no se hace uso de agentes químicos o calor. El control dimensional del producto final es complicado debido a la gran dependencia de la energía liberada por la detonación de los explosivos con diversas variables del proceso, adicionalmente se requieren procesos subsecuentes de maquinado para obtener las dimensiones deseadas en el producto final.

Un mejor control dimensional se consigue al unir láminas de diferentes materiales por medio de la acción mecánica de un laminador. De la experiencia empírica es conocido

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

el hecho de que la unión de los materiales se logra bajo condiciones de deformación severas, es decir, cuando la reducción es elevada (>50%.)<sup>b</sup>

Durante los procesos de laminado conjunto, la diferencia entre el estado de esfuerzos de las capas que se colaminan conduce a una variación notable en los espesores relativos al final del proceso; los mecanismos de deformación plástica en el claro de laminación resultan así más complejos que en el caso de laminación convencional, y con ello el análisis del proceso. Debido a esto, los estudios concernientes a los mecanismos de deformación plástica de las hojas colaminadas en el claro de laminación resultan ser interesantes. Aún cuando existen trabajos relacionados con este proceso desde la década de los 50's, en su mayoría han sido basados en la experimentación y por lo tanto su alcance, en cuanto a generalidad se refiere, resulta ser muy limitado. De los pocos análisis teóricos desarrollados en aquella época, todos ellos resaltaban por la complejidad del cálculo numérico necesario, lo que se traducía en tiempo excesivo de cálculo y cuya precisión dejaba que desear con relación a los resultados experimentales.

#### **1.4. VARIANTES DEL PROCESO DE COLAMINADO.**

La simetría del proceso queda básicamente determinada por el número, disposición y espesor de las capas a unir. Adicionalmente la velocidad, dimensiones y rugosidad de los rodillos definirán también condiciones de simetría. La simetría se tomará con relación a la disposición de los materiales respecto al plano medio que divide al claro de laminación en dos partes iguales al considerar que los rodillos superior en inferior son iguales y los parámetros de operación los mismos. El análisis del proceso se simplifica cuando existe simetría tanto en la disposición del material como en la operación del laminador puesto que los flujos serán iguales para ambas mitades.

#### 1.4.1. Caso Simétrico.

Al contar con una disposición simétrica de los materiales a colaminar, cuando los rodillos del laminador en contacto con el material son del mismo diámetro y cuando las velocidades de éstos son iguales, el proceso de modelado se simplifica. Con esto se consigue un ahorro significante en recursos de cómputo. El colaminado simétrico facilita el modelado al requerir únicamente estudiar la deformación de la mitad del conglomerado. El ejemplo más sencillo de colaminado simétrico se muestra en la figura 1.2. en donde tres capas de materiales: dos de ellas iguales tanto en propiedades como en espesores (exteriores en contacto con los rodillos) y una tercera intermedia, son laminadas conjuntamente por un laminador con rodillos del mismo diámetro. Comúnmente se tiene que la capa menos deformable es la intermedia.

<sup>&</sup>lt;sup>b</sup> Este valor se desprende directamente de observaciones experimentales para la aleación Al-Sn y el respaldo de acero en la fabricación de cojinetes de deslizamiento. Clemex S.A. de C.V.

El colaminado simétrico, como el mostrado en la figura 1.2., se ajusta perfectamente a la primera etapa de la fabricación de cojinetes de deslizamiento, en donde se tiene un conglomerado tricapa Al— AlSn—Al.



Figura 1.2. Caso simétrico.

#### 1.4.2. Caso no Simétrico.

Cuando la disposición de los materiales no es simétrica, y el diámetro de los rodillos de trabajo no es el mismo o bien si las velocidades de éstos difieren, el análisis del proceso resulta más complejo. Una solución que parta del teorema de límite superior para este caso tendrá que considerar, entre otras cosas, que el equilibrio de fuerzas en la dirección vertical no provoca una deflexión del material a la entrada del claro de laminación, lo cual de otra manera complicaría el planteamiento del campo de velocidades necesario para un desarrollo de la solución por este método. Esto se puede aproximar si se considera un soporte rígido como el mostrado en la figura 1.3. que impide que el material se flexione, de tal manera que la representación matemática de los flujos a la entrada del material pueda establecerse sin grandes complicaciones.



Figura 1.3. Caso no simétrico.

En la figura 1.3. se muestra el caso no simétrico más simple, en donde la velocidad lineal de los rodillos es la misma. Sólo en este caso se puede proponer un perfil uniforme de velocidades a la salida del claro de laminación como el mostrado en la figura. Si las velocidades resultan ser diferentes la velocidad a la salida tendrá forzosamente una componente vertical de velocidad perfil con lo aue cl planteado se torna más complejo.



El laminado conjunto no-simétrico se ajusta a la etapa terminal de la fabricación de cojinetes de deslizamiento, en donde el conglomerado Al—AlSn—Al (que una vez conformado, prácticamente puede ser considerado como un único material) se une a una cinta de acero por medio de la acción mecánica del laminador.

#### 1.5. CONCEPTOS ÚTILES DE LA TEORÍA DE PLASTICIDAD.

La solución completa para el problema de predecir un cambio particular de forma de un cuerpo está dada cuando ambos tensores, el de deformaciones y el de esfuerzos son conocidos para cada punto al interior del cuerpo. El tensor de esfuerzos resultante deberá asegurar que las condiciones de frontera sean satisfechas y que el equilibrio de *momentum* se cumpla a lo largo del dominio espacial contespondiente al cuerpo que se deforma. Por otro lado, el tensor de deformaciones deberá ser tal que el volumen de un elemento diferencial se conserve a lo largo del proceso, que las ecuaciones de compatibilidad sean satisfechas y que las condiciones cinemáticas en las fronteras del flujo de material también se cumplan.

La teoría clásica de plasicidad asume de antemano un cuerpo plástico ideal; para lo cual el efecto Bauschinger<sup>b</sup> es despreciado. Se puede comprobar que la teoría es válida exclusivamente para el rango de temperatura para el cual los fenómenos de recristalización, termofluencia y cualquier otro de índole térmico pueden ser despreciados.

Aún cuando existen diversos métodos y teorías de análisis, las soluciones de problemas de deformación que recaen en el rango plástico son generalmente tratadas mediante la aplicación de dos teorías clásicas: la de Levy-Mises y la de Prandt-Reus, la primera es aplicable cuando la componente elástica de la deformación es despreciable mientras que la segunda considera su efecto. Las ecuaciones que derivan de ambas teorías proveen las relaciones necesarias entre los incrementos de deformación plástica y los esfuerzos.

En lo siguiente se plantearán los conceptos fundamentales de la teoría de plasticidad que dan sustento al modelo a desarrollar y que permiten establecer sus ventajas y limitaciones frente a otros posibles y potenciales métodos de solución.

<sup>&</sup>lt;sup>b</sup> El efecto Bauchinger se presenta, por ejemplo, cuando en un ensayo de tracción se invierte la dirección de deformación, la cedencia del material ocurre antes de que se alcance el esfuerzo de cedencia, σ, para compresión monotónica. La deformación plástica en una dirección afectará la subsiguiente deformación plástica en cualquier otra dirección.

#### 1.5.1. Tensor de deformaciones pequeñas.

El efecto acumulativo de la deformación causada por la variación de los esfuerzos a lo largo de un cuerpo origina la distorsión de la configuración espacial de puntos dentro del cuerpo. Esta distorsión por lo general va acompañada de una rotación de cuerpo rígido.

Al analizar la figura 1.4 se observa que el desplazamiento del punto P puede ser descrito por funciones continuas de x e y. Si se consideran solamente los desplazamientos en el plano xy, entonces:

$$u = u(x, y)$$
  $v = v(x, y)$  . . . (1.1a y 1.1b)

La posición de una partícula es función del tiempo, sin embargo los desplazamientos (que representan la diferencia absoluta entre las posiciones inicial y final de la partícula) son funciones exclusivamente de la posición de la partícula. Para efecto de evaluar el valor de las funciones en la vecindad del punto P, las funciones pueden ser expandidas alrededor de este punto mediante un desarrollo por expansión en series de Taylor. Si u,  $\partial u/\partial x$ ,  $\partial^2 u/\partial x^2$ , etc., se evalúan en el punto P. Por ejemplo, la deflexión para el punto C se escribe como:

$$u_{c} = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^{2} u}{\partial x^{2}} (\Delta x)^{2} + \dots \qquad (1.2.)$$

dado que C está a una distancia  $\Delta x$  de P.

Si se considera que  $\Delta x$  es muy pequeño, es posible despreciar los términos  $(\Delta x)^2$  o de orden mayor. De forma que:

$$u_C = u + \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$$
 . . . (1.3.)

De igual forma se obtiene una expresión para v(x,y):

$$v_c = v + \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x$$
 . . . (1.4.)

La anulación de los términos de orden mayor a uno tanto en  $u_c$  como en  $v_c$  llevan a una representación del campo de deformaciones mediante un tensor que es solamente válido para deformaciones muy pequeñas, es decir cuando  $|\Delta u| << |\Delta x|$ .

De manera similar, si las deflexiones para el punto A son desarrolladas a partir de una expansión en series de Taylor alrededor del punto Q, y  $\Delta y$  se considera que es muy pequeño, entonces:

$$u_A = u + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y$$
  $v_A = v + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y$  . . . (1.5a y 1.5b)





Figura 1.4. Deformación (rotación y distorsión) de un cuerpo rígido bidimensional.

Ahora bien, analizando la deformación que sufre el paralelogramo por segmentos y considerando que las variaciones angulares  $\alpha$  y  $\beta$  son muy pequeñas, la elongación  $\varepsilon_x$  se escribe como:

$$\varepsilon_x = \frac{P'C'-PC}{PC} = \frac{\left[u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x - (u - \Delta x)\right] - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad . \quad . \quad (1.6.)$$

repitiendo el cálculo de forma similar para las elongaciones en las direcciones coordenadas se obtiene lo siguiente:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad . . . (1.7.)$$

En el caso de las deformaciones angulares es necesario hacer uso de una definición de la medida de deformación angular. Por convención se considera lo siguiente:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \tan(\alpha + \beta) \qquad (1.8.)$$

Pero tomando en cuenta un valor sumamente pequeño tanto para  $\alpha$  como para  $\beta$  y despreciando los términos infinitesimales de orden superior al primero, la ecuación anterior se queda de la siguiente forma:

8

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \tan(\alpha + \beta) \cong \frac{1}{2} (\tan \alpha + \tan \beta) = \frac{1}{2} \left( \frac{\frac{\partial u}{\partial y} \Delta y}{\Delta y} + \frac{\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x}{\Delta x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad . \quad (1.9.)$$

Fórmulas similares para las deformaciones cortantes se obtienen de forma similar para los restantes planos de corte.

Asumiendo componentes infinitesimales, las deformaciones se relacionan con las variaciones espaciales del desplazamiento por medio de la siguiente ecuación que define las componentes del tensor de deformaciones pequeñas.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad . \quad . \quad (1.10.)$$

Este tensor es aplicable para la condición de deformaciones infinitesimales. Dado que, para el caso de un material que obedece a un comportamiento rígido-plástico, la respuesta del material es la misma bajo deformaciones grandes o pequeñas, es posible hacer uso de esta descripción de la deformación sin caer en contradicciones.

En un tiempo infinitesimal los desplazamientos relativos de los puntos materiales son infinitesimales respecto a su separación ( $|\Delta u| \ll |\Delta x|$ ) de tal manera que la condición de pequeñas deformaciones se satisface completamente.

Así que al considerar el término temporal durante la deformación el tensor de rapidez de deformación es:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad . \quad . \quad (1.11.)$$

#### 1.5.2. Deformación plana.

Un estado de deformación plana ocurre cuando, en la región de deformación, una de las dimensiones principales es visiblemente mayor que las otras dos. En laminación esto se cumple cuando el área de la sección transversal que comprende el claro de laminación es muy pequeña comparada con el espesor de la cinta. Comúnmente se puede considerar que si la relación entre el espesor del material a laminar y su ancho es de 1 a 10 la deformación en el eje perpendicular al flujo de material (eje  $\hat{e}_3$ , en la figura 1.5.) es despreciable y el tensor de deformaciones queda expresado por le ecuación (1.12.)

PALLA DE	ORIGEN
	Contraction of the local division of the loc



Un estado de deformación plana esta caracterizado por las siguientes propiedades:

- (i) El flujo es en cualquier punto paralelo a un plano dado.
- (ii) El movimiento es independiente del eje normal a dicho plano.

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad . . . (1.12.)$$

El casi nulo ensanchamiento del material de trabajo durante el proceso de laminación es un indicador de la aproximación a un estado de deformación plana.

#### 1.5.3. Comportamiento Rígido-Plástico.

Un material describe un comportamiento rígido-plástico cuando se le atribuye un modulo de Young de valor infinito. La componente de la deformación elástica es cero en el límite; bajo esta consideración se asume que no existe cambio de volumen. Un elemento permanecerá rígido cuando sea sometido a un esfuerzo efectivo por debajo del límite de cedencia del material. En la mayoría de los procesos de conformado mecánico, donde la deformación plástica total es muy grande, la distribución de esfuerzos calculada bajo la consideración de un comportamiento rígido-plástico se aproxima cercanamente a la distribución de esfuerzos generada por un material de comportamiento elasto-plástico bajo la misma trayectoria de deformación. La componente elástica de la deformación se torna despreciable comparada con la componente de deformación plástica.

La figura 1.6. muestra la curva esfuerzo deformación para un material rígido-plástico.



Figura 1.6. Comportamiento Rígido Plástico.

Este comportamiento se ajusta a un material plástico ideal, en donde el efecto del endurecimiento por trabajo en frío no es considerado. Sin embargo, tal efecto puede añadirse a un modelo de un material plástico ideal al considerar un esfuerzo promedio obtenido a partir de una integral de la siguiente forma:

$$\overline{\sigma} = \frac{1}{|\varepsilon_f - \varepsilon_i|} \int_{\varepsilon_i}^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon \qquad (1.13.)$$

donde  $\sigma$  representa la función que describe el endurecimiento del material en función de la deformación.

#### 1.5.4. Criterios de Falla.

Todo criterio de cedencia debe ser válido para cualquier estado de esfuerzos. Dado que la componente hidrostática del esfuerzo no contribuye al flujo plástico del material es deseable que el criterio de cedencia no incluya dicha componente. Así, los criterios de falla deben ser independientes del sistema de referencia seleccionado. Por lo tanto la función que describa el criterio de falla deberá tener la siguiente forma:

$$f(J'_2, J'_3) = 0$$
 . . . (1.14.)

Tresca (1864) concluyó que la cedencia ocurría cuando el máximo esfuerzo cortante alcanzaba un cierto valor. Es decir:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = cte.$$
 (1.15.)

donde  $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$ . El criterio puede ser escrito en términos de los invariantes del desviador de esfuerzos,  $J'_2 y J'_3$ , pero resulta ser complicado y sin utilidad alguna.<sup>1</sup>

FALLA DE ORIGEN

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ref[1]. pp. 59.

Otro criterio fue originalmente propuesto por Huber y establece lo siguiente: "Cuando la expresión:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \right]^{1/2} > \sigma_0 \qquad (1.16.)$$

se satisface, entonces habrá flujo plástico."

La parte del lado izquierdo de la ecuación (1.16). es conocida como esfuerzo efectivo. Este criterio fue establecido por von Mises sin tener una interpretación física como base. Actualmente es aceptado el hecho de que este criterio expresa el valor crítico de la componente *desviadora* de la energía de deformación de un cuerpo.

La validez de este criterio tiene una justificación física al considerar que la cedencia causada por los esfuerzos cortante máximos,  $\tau_{máx}$ , sólo ocurre en dos planos en el material. Por otra parte,  $\tau_h$ , el esfuerzo octaédrico, es sólo ligeramente menor a  $\tau_{máx}$  y además ocurre en cuatro planos en el material y por lo tanto,  $\tau_h$  tiene mayor oportunidad estadísticamente de encontrar planos cristalográficos que estén orientados favorablemente para el deslizamiento, con lo cual se supera su desventaja de ser ligeramente menor que  $\tau_{máx}$ .



Figura 1.7. Criterios de Tresca y von Mises.

La manera formal de expresar este criterio es por medio del segundo invariante del desviador de esfuerzos de la siguiente manera:

$$J_{2} = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\sigma_{ij} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{11}^{2} + \sigma_{22}^{2} + \sigma_{33}^{2}\right) + \sigma_{12}^{2} + \sigma_{23}^{2} + \sigma_{31}^{2} \le \frac{\sigma_{0}^{2}}{3} \qquad (1.17.)$$

En procesos de conformado mecánico, el criterio más útil es aquel que garantice una mejor predicción de la cedencia del material. De la figura 1.7. se aprecia que el criterio de mises o de máximo esfuerzo octaédrico cumple con esta condición.

#### 1.5.5. Rapidez de Deformación Equivalente.

De manera similar al desarrollo del esfuerzo efectivo se puede relacionar los incrementos de deformación de un estado general de deformación con un incremento equivalente en una prueba de tracción uniaxial.

Del concepto de estabilidad se deriva la *condición de normalidad* de los incrementos de deformación plástica la cual se escribe comúnmente como:

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \qquad (1.18.)$$

lo cual indica que los incrementos de deformación son proporcionales (en una magnitud desconocida  $d\lambda$ ) a la normal de la superficie que define la región de cedencia del material.

Considerando que el trabajo realizado en una condición uniaxial equivalente será el mismo que el realizado en un estado general se tiene lo siguiente:

$$\overline{\sigma}d\overline{\varepsilon} = \sigma_{\mu}d\varepsilon_{\mu}$$
 . . . (1.19.)

Al considerar lo anterior y la condición de normalidad se obtiene la siguiente expresión para el incremento equivalente de la deformación:

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\sigma_{ij} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\lambda}{\bar{\sigma}} \qquad (1.20.)$$

Al invertir la condición de normalidad, es decir $\sigma_{ij} = f(d\varepsilon_{ij})$  se puede expresar el incremento de la deformación plástica equivalente en términos de los incrementos de deformación para un estado general de deformación.

Para deformaciones principales la expresión resultante es:

$$d\overline{\varepsilon} = \frac{1}{3\overline{\sigma}d\lambda} \left[ d\varepsilon_1^2 + d\varepsilon_2^2 + d\varepsilon_3^2 \right] \qquad (1.21.)$$

Para un material que cumple con el criterio de cedencia de von Mises la constante  $d\lambda$  es:

$$d\lambda = \frac{d\overline{\varepsilon}}{2\overline{\sigma}} \qquad . \qquad . \qquad (1.22.)$$



Lo cual conduce finalmente a una expresión que en términos de un estado general de deformación queda de la siguiente forma:

$$d\overline{\varepsilon} = \left[\frac{2}{3}\left(d\varepsilon_{11}^{2} + d\varepsilon_{22}^{2} + d\varepsilon_{33}^{2} + 2d\varepsilon_{12}^{2} + 2d\varepsilon_{13}^{2} + 2d\varepsilon_{23}^{2}\right)\right]^{1/2} \quad . \quad . \quad (1.23.)$$

Una forma alternativa de esta expresión, que resulta de mayor utilidad para el caso en cuestión, es expresada en términos de las componentes del tensor de rapidez de deformación:

$$\dot{\vec{\varepsilon}} = \left[\frac{2}{3}\left(\dot{\varepsilon}_{11}^{2} + \dot{\varepsilon}_{22}^{2} + \dot{\varepsilon}_{33}^{2} + 2\dot{\varepsilon}_{12}^{2} + 2\dot{\varepsilon}_{13}^{2} + 2\dot{\varepsilon}_{23}^{2}\right)\right]^{1/2} \qquad (1.24.)$$

Finalmente es importante señalar que la ecuación (1.24.) representa el fundamento del modelo a desarrollar dado que las componentes del tensor de rapidez de deformación contenidas en (1.24.) pueden obtenerse a partir de conocer el campo de velocidades asociado al flujo de material y con ello, se está en posibilidad de evaluar la potencia consumida por el proceso simplemente mediante un análisis integral de la región de deformación.

14



# **PRINCIPIOS BÁSICOS**

#### 2.1. ESTADO DEL ARTE.

Aún cuando el proceso de laminado conjunto es un caso particular del proceso de laminado convencional de productos planos resulta dificil encontrar, en la literatura relacionada con el conformado mecánico de metales, trabajos relacionados con el tema. A la fecha, muy pocos estudios concernientes al análisis de este proceso han sido publicados. Es hasta finales de la década de los 50's cuando R.R. Arnold y P.W.Whitton<sup>1</sup> desarrollaron ecuaciones para la predicción de la fuerza de laminación y otros parámetros utilizando el *método de planchón* de un conglomerado de láminas previamente unidas antes de ser laminadas, el cual combinaba los métodos numéricos de Runge-Kutta y de bisección para resolver las ecuaciones del proceso. Sin embargo, el análisis convencional de planchón utilizando dichos métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales involucradas, consume demasiado tiempo de computadora y por lo tanto resulta ser inconveniente para su aplicación práctica en la industria debido a su costo asociado.

En la actualidad las cosas han evolucionado; estudios recientes, principalmente en la década de los noventa, han avanzado en el planteamiento matemático del problema, con lo que se facilita contar con una idea más precisa de lo que ocurre en los procesos de colaminado. Esto también resulta favorecido gracias a la creciente aceptación de los llamados métodos de límite, los cuales incluso rivalizan en ciertas aplicaciones con métodos de solución más complejos como es el caso del método del elemento finito (MEF), sobre todo por su bajo requerimiento de cálculo y la precisión de los resultados obtenidos. Los estudios más relevantes relativos a los procesos de colaminado han sido los desarrollados por el Dr. Yeong-Maw Hwang del departamento de ingeniería mecánica de la Universidad Nacional de Sun Yat-Sen en Tokio y conducen a un análisis por límite superior que parte del planteamiento analítico de un campo de velocidades cinemáticamente admisible. Si bien este modelo satisface las condiciones de frontera para la velocidad, desprecia el efecto del deslizamiento en la interfase entre los materiales que se colaminan. El modelo desarrollado a lo largo de este trabajo se basa en la solución planteada por Hwang; sin embargo, el término de potencia debido a la fricción entre las capas que se colaminan se ha incluido y se destaca su importancia en la determinación eficaz de los campos de velocidades de cada uno de los flujos de material. Aunado a lo anterior, se estudia la variabilidad de los parámetros pseudo-independientes planteados en el proceso y la homogeneidad de la deformación por medio del análisis de los gradientes de deformación en la dirección transversal al flujo de material.



<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ref. [2] pp.41.

La única solución analítica existente para el colaminado simétrico parte del modelo planteado por G.Y. Tzou del departamento de ingeniería del *Instituto de Tecnología Yung Tu* el cual considera entre otras cosas *fricción de Coulomb*.

#### 2.1.1. Análisis del proceso de laminado conjunto mediante el método del planchón.

Este modelo fue desarrollado recientemente por G.Y. Tzou (2001)<sup>2</sup> y tiene la aparente ventaja de poder ser resuelto de forma analítica sin utilizar el método numérico de Runge-Kutta para la solución de las ecuaciones que definen el proceso. La solución alcanzada por este método permite explorar el campo de esfuerzos de las capas colaminadas en el claro de laminación. La solución analítica de las ecuaciones de equilibrio resultantes proporciona la posibilidad de obtener una relativa conveniencia en cuanto a tiempo de cálculo requerido.

A continuación, y para efectos de poder hacer una comparación entre las bondades del método desarrollado en el presente trabajo, se hace una breve descripción del modelo propuesto por Tzou. El análisis parte de considerar el equilibrio en un elemento diferencial de un conglomerado tricapa como el mostrado en la figura 2.1. Para simplificar la formulación del modelo se hacen las siguientes consideraciones:

- 1. Los rodillos son rígidos y del mismo diámetro, y las capas a colaminar tienen un comportamiento rígido-plástico.
- 2. Deformación plana.
- 3. Los esfuerzos se presentan uniformemente distribuidos en lo elementos que se colaminan. El esfuerzo vertical (p) y los esfuerzos horizontales  $(q_c \ y \ q_m)$  son asumidos como esfuerzos principales.
- 4. El coeficiente de fricción entre los rodillos y el material de las capas externas y entre las capas que se colaminan es constante a lo largo del arco de contacto. Se hace uso del modelo de fricción de Coulomb, es decir:  $\tau = \mu p$ .
- 5. Las direcciones del flujo de las capas colaminadas a la entrada y a la salida son horizontales.
- 6. No existe deslizamiento entre la interfase de las hojas; por lo que el conglomerado que se colamina está unido completamente antes de ser laminado.

La disposición geométrica del conglomerado y la nomenclatura utilizada por el autor del artículo citado se muestran en la figura 2.1.

<sup>&</sup>lt;sup>2</sup> <u>Op.Cit</u>. Tzou G.Y.

Nomenclatura:

R-Radio de los rodillos.

- $h_0$  Mitad del espesor final del conglomerado.
- $h_l$  Mitad del espesor inicial del conglomerado.
- $h_{0c}$  Espesor final de la capa externa del conglomerado.
- hom Mitad del espesor final del núcleo del conglomerado.
- x<sub>n</sub> Posición del punto neutro.
- $q_0$  ~ Tensión frontal aplicada en el conglomerado.
- $q_i$  Tensión posterior aplicada en el conglomerado.



Figura. 2.1. Modelo de Tzou.

Básicamente, la solución parte de plantear las ecuaciones de equilibrio cuasi-estático de un elemento diferencial en cada capa y así, generar las ecuaciones diferenciales pertinentes que sustenten la condición de equilibrio de fuerzas al interior del material. Al contar con dos capas de materiales diferentes (la simetría se aplica en el desarrollo del modelo) se cuenta con un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, cuya solución resulta relativamente simple de evaluar al utilizar métodos convencionales para ecuaciones diferenciales. La solución final es función de los parámetros característicos del proceso y particularmente de un parámetro que se mantiene como incógnita a lo largo de la solución el cual es la relación de espesores entre las capas que se colaminan.

La mayor desventaja de este método radica en el hecho de que para simplificar el análisis y poder acoplar las ecuaciones diferenciales que gobiernan el fenómeno se recurre a considerar que los materiales han sido unidos de forma permanente previamente al proceso, con lo cual se desprecia el efecto que tiene la fricción debida al deslizamiento que ocurre entre las capas. La unión previa de las capas condiciona fuertemente los perfiles de flujo de material y con ello la deformación a la interfase de los materiales.

Otro inconveniente, y que quizá tenga mayor importancia que el anterior es que la solución del problema queda expresada en términos de la relación de espesores finales, por lo que dicha relación permanece desconocida a lo largo del proceso de solución.

En el campo de aplicación práctica de cualquier modelo que simule el proceso de colaminado la relación de espesores (y no la carga de laminación) será quizá la variable primordial de interés debido a que este parámetro define, en muchas aplicaciones, las características del producto final en el que el conglomerado será utilizado. Es por ello que, y debido a su omisión en la solución, el modelo desarrollado por Tzou no puede tener una aplicación práctica en la industria y resulta muy inconveniente cuando la variable primordial es la relación de espesores del producto final. Para condiciones particulares es posible establecer correlaciones entre carga y relación de espesor, sin embargo lo anterior no resulta idóneo al no contar con una solución general del problema.

TECIS CON FALLA DE ORIGEN

17

## 2.1.2. Análisis del proceso de laminado conjunto mediante técnicas de límite superior y función de corriente.

Aún cuando los orígenes de los análisis por límite se remontan hasta Galileo<sup>3</sup> los teoremas de límite se atribuyen a Gvozdek, Hill y Druker las aplicaciones prácticas de los teoremas de límite se le atribuyen a Betzalel Avitzur quien en la década de los 50's desarrolló varias soluciones utilizando este método para diversos procesos de conformado.

Por otro lado, es conocido el hecho de que soluciones por límite superior conducen en todos los casos a la obtención de un campo de velocidades, cualitativamente y cuantitativamente, próximo al campo real de velocidades.

Es por ello, que el procedimiento más eficaz para el desarrollo de una solución por límite superior es plantear familias de campos de velocidades que, en principio, sean cinemáticamente admisibles y que además queden expresados en términos de parámetros geométricos o característicos del proceso, y entonces reducir la solución a problema de optimación que por lo general resultará ser no lineal.

Es común encontrar, en la literatura concerniente a los procesos de conformado, diversos artículos que tratan del análisis de procesos de laminado convencional utilizando métodos de límite. Inclusive trabajos que relacionan el método de límite superior con un análisis de procesos de laminación tridimensional. La propuesta más notable en cuanto al planteamiento de un campo cinemáticamente admisible para describir el flujo de material en procesos de colaminación es la planteada por Hwang<sup>4</sup> quien propone una superposición de funciones de corriente, la cual representa cualitativamente el campo de velocidades real que se presenta en el claro de laminación para un caso de flujo bidimensional:

$$\varphi(x, y) = \Omega(x, y) + \Phi(x, y)$$
 . . . (2.1.)

La ecuación 2.1. expresa la forma general de dicha función de corriente, en donde se tiene que  $\Omega(x,y)$  representa un flujo uniforme, mientras que  $\Phi(x,y)$  representa un flujo linealmente distribuido, ambos referidos siempre a una sección transversal perpendicular a la dirección de flujo de material.

Resulta evidente, si se piensa un poco en la forma que tiene el perfil de velocidades de un flujo convergente, que la función de corriente descrita en la ecuación 2.1. puede representar de forma adecuada el flujo dentro del claro de laminación en cualquier proceso de conformado en donde el flujo de material se asemeje al de un canal convergente. Para ello la forma de  $\Omega y \Phi$  deberán ser tales que representen el cambio de la componente vertical de velocidad característica en este tipo de flujos.

En mecánica de fluidos, los flujos incompresibles e irrotacionales se tratan como flujo potencial, bajo esta aproximación las siguientes consideraciones son tomadas:

. . .

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> Ref. [3] pp. 23.

<sup>&</sup>lt;sup>4</sup> Ref. [5].

El flujo es:

- a) Incompresible.
- b) Estacionario.
- c) Sujeto a fuerzas conservativas.

Adicionalmente, cuando el flujo es irrotacional, entonces se cumple que:

rot  $\bar{u} = 0$  . . . (2.2.)

y por lo tanto:

 $\overline{u} = \operatorname{grad} \phi \quad . \quad . \quad (2.3.)$ 

a  $\phi$  se le conoce como función potencial de velocidad.

Las superficies equipotenciales se puede escribir como:

 $\phi(x, y, z) = cte.$  . . . (2.4.)

El vector normal a cada superficie equipotencial es:

 $\overline{\eta}(l,m,n)$  . . . (2.5.)

y del cálculo vectorial es simple demostrar lo siguiente:

 $\overline{\eta} \parallel \operatorname{grad} \phi$  . . . (2.6.)

y por lo tanto:

 $\overline{\eta} \parallel \overline{u}$  . . . (2.7.)

Así, para un flujo irrotacional los vectores de velocidad del flujo serán siempre ortogonales a las superficies equipotenciales de velocidad –ver figura 2.2. –.

Como puede observarse la existencia de  $\phi$  depende de la irrotacionalidad del flujo mientras que la función de corriente  $\phi$ , como se mostrará a continuación, depende exclusivamente de la condición de incompresibilidad.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



La condición de incompresibilidad en un flujo bidimensional introduce la ecuación de continuidad en el planteamiento:

div 
$$\overline{u} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$
 . . . (2.8.)

entonces necesariamente debe existir una función escalar,  $\varphi = \varphi(x, y, t)$ , tal que:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad . \qquad . \qquad (2.9.)$$

Si se considera un flujo estacionario que atraviesa las fronteras definidas por las curvas c y c' que unen a lo puntos A y P, la función  $\varphi$  describe la cantidad de flujo que pasa de izquierda a derecha por unidad de tiempo es entonces:



Figura 2.3. Flujo estacionario

$$\varphi(A,P,c) = \int_{t(c)}^{p} \overline{u}_{s} dS \qquad (2.10.)$$

Así  $\varphi(A, P, c)$  no depende de la elección de c y deberá pasar por c' exactamente la misma de flujo.

Si se fija la posición de A y se varía la posición de P,  $\varphi$ será función de P exclusivamente y entonces  $\varphi(P)$  será la función de corriente y representa la cantidad de flujo que atraviesa de izquierda a derecha cualquier segmento de curva que pase por A y por P expresado por unidad de longitud. Ahora considérense dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ :

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = \int_{1}^{P_2} \overline{u}_n dS - \int_{1}^{P_1} \overline{u}_n dS = \int_{P_1}^{P_2} \overline{u}_n dS \qquad (2.11.)$$

Si las coordenadas de P son (x,y) entonces  $\varphi(P) = \int_{a}^{b} u_{x} dS$  es función de (x,y).

Es conveniente contar con elementos para describir matemáticamente cualquier trayectoria particular de un flujo. Una descripción adecuada debe proporcionar la forma de las líneas de corriente (incluyendo las fronteras) y la escala de velocidad en puntos representativos en el flujo. La función de corriente  $\varphi$  es un instrumento matemático que sirve para ese propósito y está formulada como una relación entre líneas de corriente y lo establecido por la ecuación de conservación de masa.

Para entender el concepto de función de corriente es necesario recordar que las líneas de corriente son líneas que trazan el campo de velocidades, en cualquier instante de tiempo, de manera que, son siempre tangentes a la dirección de flujo en cualquier punto del campo de velocidades. Así, si  $d\vec{r}$  es un elemento diferencial de longitud a lo largo de una línea de corriente, la ecuación de la misma está dada por:

$$\vec{V} \times d\vec{r} = (u\hat{i} + v\hat{j}) \times (\hat{i}\,dx + \hat{j}\,dy) = \hat{k}(u\,dy - v\,dx) = 0$$
 . . . (2.12.)

La ecuación de una línea de corriente en un flujo bidimensional es:

$$u \, dy - v \, dx = 0$$
 . . . (2.13.)

Sustituyendo las expresiones para la velocidad u y v en términos de la función de corriente  $\varphi$ , se tienen que a lo largo de una línea de corriente se debe cumplir que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \qquad . \qquad . \qquad (2.14.)$$

Dado que  $\varphi = \varphi(x, y, t)$ , entonces en un instante  $t_0$ ,  $\varphi = \varphi(x, y, t_0)$ ; en ese instante, un cambio en  $\varphi$  puede ser evaluado solamente como  $\varphi = \varphi(x, y)$ . Así en cualquier instante:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \quad . \quad . \quad (2.15.)$$

Comparando las ecuaciones (2.14.) y (2.15.), se puede observar fácilmente que a lo largo de una linea de corriente en cualquier instante se cumple que  $d\varphi = 0$  y por lo tanto  $\varphi$  es constante a lo largo de una línea de corriente. Dado que la diferencial de  $\varphi$  es exacta, la integral de  $d\varphi$  entre cualesquiera dos puntos en un campo de flujo es simplemente:



$$\varphi_2 - \varphi_1$$
 . . . (2.16.)

y depende exclusivamente de los puntos de integración seleccionados.

Dado que  $\varphi$  es constante a lo largo de la línea de corriente se deduce fácilmente que no puede existir flujo que atraviese una línea de corriente.

De todo lo anterior se concluye que para un flujo incompresible e irrotacional se cumple que  $\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi = 0$  y entonces a  $\phi$  y  $\phi$  se les conoce como funciones armónicas conjugadas. Si rot  $\vec{u} \neq 0$  significa que el flujo puede tratarse como flujo potencial y podrá encontrarse una *función potencial de velocidad compleja* que represente el campo de velocidades asociado, de lo contrario si el flujo es incompresible y rotacional sólo se asegura que deberá existir una función  $\phi$  que cumpla con la ecuación de continuidad.

Para plantear una función de corriente es necesario conocer la forma de las fronteras que delimitan al flujo, ya que ello determina la forma que adquiere dicha función para un problema en particular.

En el caso en cuestión, y asociando el flujo que ocurre dentro del claro de laminación con el flujo laminar dentro de un canal convergente (como el mostrado en la figura 2.4.) el flujo resultante puede representarse como la suma de dos perfiles de carácter diferente, pero que en conjunto proporcionan la mejor aproximación cualitativa al flujo dentro del claro de laminación.

TESIS CON ALLA DE ORIGEN	
EA	

Figura 2.4. Flujo laminar en un canal convergente.

Un análisis cualitativo del flujo en el claro de laminación siguiere que en el aporte del flujo linealmente distribuido, deberá modificarse conforme el material se aproxima a la salida. Lo anterior puede añadirse, matemáticamente, al considerar un gradiente en la dirección x lo cual proveerá el efecto de la aceleración que experimenta el material.

#### 2.1.3. Funciones de corriente útiles en el modelado de procesos de laminación.

#### a) Flujo uniforme.

Un flujo uniforme en la dirección x (figura 2.5) queda representado por una función de corriente de la siguiente forma:

$$\varphi(x, y) = U_{\infty} y \qquad \dots \qquad (2.17.)$$

donde  $U_{\infty} = Q/A$  es la velocidad del flujo y Q representa el gasto volumétrico por unidad de ancho.(ver figura 2.5).



Figura 2.5. Flujo uniforme.

En el caso de un flujo uniforme confinado dentro de fronteras más complejas como es el caso mostrado en la figura (2.6) se debe ajustar la forma de la función de corriente de la siguiente manera:

$$\varphi(x, y) = \frac{Q(y - y_2)}{k}$$
 . . . (2.18.)

k es un factor de forma que representa la sección transversal entre las fronteras y tiene la forma siguiente:

$$k = y_1 - y_2$$
 . . . (2.19.)

Bajo la influencia de fronteras de geometría compleja un flujo uniforme se caracteriza por el hecho de que la componente de la velocidad normal a una sección transversal es constante a lo largo de un plano paralelo a dicha sección (ver figura 2.6.). La componente vertical de la velocidad cambia su magnitud en función de la extensión de la sección transversal que el flujo atraviesa para mantener el gasto constante y así preservar la condición de continuidad.

En el caso de laminación, en donde el flujo puede ser similar a aquel de un material que se mueve bajo la acción del movimiento inducido por una pared deslizante en un canal convergente, es lógico pensar que la componente de velocidad horizontal no ha de ser constante. De forma que resulta necesario adicionar un término extra que represente un flujo linealmente distribuido para incluir el efecto de aceleración del material dentro del claro de laminación.







Figura 2.6. Flujo entre dos fronteras complejas.

#### b) Flujo linealmente distribuido.

La forma más simple de un flujo linealmente distribuido se muestra en la figura 2.7.



La función de corriente más simple que representa un flujo linealmente distribuido es:

$$\varphi(x, y) = \frac{U_{\infty}C}{2}y^2$$
 . . . (2.20.)

donde  $U_{\infty}$  es la velocidad máxima del flujo (*u* evaluada en A) y  $C = \partial u/\partial y$ .

Figura 2.7. Flujo linealmente distribuido

Bajo el efecto inducido por fronteras de geometría compleja (ver figura 2.6.), un fluido linealmente distribuido puede representarse matemáticamente de la siguiente manera:

$$\varphi(x, y) = Q \cdot c \cdot (y - y_1)(y - y_2)$$
 . . . (2.21.)

donde c es ahora una constante de dimensiones  $L^{-2}$  y Q es el gasto por unidad de longitud que atraviesa una sección transversal paralela a cualquier plano vertical.

El gasto volumétrico, Q, puede escribirse de la siguiente manera:

$$Q = \int_{1}^{2} \frac{\partial q}{\partial y} dy \qquad (2.22.)$$

para cualquier valor arbitrario de x.
Las condiciones de frontera para la función de corriente mostrada en la ecuación (2.21.) pueden ser obtenidas de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \underline{u} \\ v \end{bmatrix}_{y=y_1} = \frac{-Q[-c \cdot y'_1(y_1 - y_2)]}{QC(y_1 - y_2)} = y'_1$$
  
$$\begin{bmatrix} \underline{u} \\ v \end{bmatrix}_{y=y_1} = \frac{-Q[-c \cdot y'_2(y_1 - y_2)]}{QC(y_1 - y_2)} = y'_2$$
  
(2.23.a y 2.23.b)

Con lo anterior se concluye que los campos de velocidades representados por la función de corriente mostrada la ecuación (2.21.) satisfacen las condiciones de frontera a lo largo de las curvas que definen las fronteras  $y_1 e y_2$ , cualquiera que sea su forma.

# 2.2. Métodos de Límite.

Es común encontrar en la literatura procedimientos que hacen uso del teorema de límite superior para determinar las fuerzas ejercidas por las herramientas durante procesos de conformado. Cuando se trata de diseñar elementos mecánicos que deber resistir un cierto estado de esfuerzos antes de llegar a deformarse plásticamente se hace uso del teorema de límite inferior con lo cual se asegura que la carga calculada será menor a aquella necesaria para que ocurra la deformación plástica.

En el diseño de un proceso de conformado es necesario calcular la carga bajo la cual se dará la deformación plástica del material; para ello se emplea el método del límite superior que asegura que la carga de deformación calculada será por lo menos igual o mayor a aquella necesaria para llevar a cabo la deformación. El teorema de limite superior proporciona información útil respecto al campo de deformación del material y se basan en el planteamiento del carácter cualitativo del campo de velocidades asociado. Este campo debe ser auto-consistente, es decir, debe satisfacer las condiciones de frontera impuestas y también la condición de incompresibilidad. Es evidente que al mejorar la descripción cualitativa del flujo la solución por límite superior mejorará.

En el caso de laminación, es factible aplicar el teorema de límite superior para modelar el proceso. Para ello basta con plantear una representación matemática del flujo de material en términos de un campo de velocidad cinemáticamente admisible. Como se mostrará más adelante, la forma de las herramientas y la condición de flujo del material hace necesario subdividir el campo de velocidades en diversas regiones para obtener una representación cuasi-continua del flujo de material durante el proceso. Esto facilita la aplicación del método de límite superior al permitir evaluar ciertos términos involucrados de manera sencilla.

#### 2.2.1. Principio de Stokes de la potencia consumida.

Es conocido el hecho de que la segunda ley de Newton y el principio de trabajo y energía son dos de las herramientas básicas para resolver problemas que se relacionan con movimiento de partículas y de cuerpos rígidos. Dado que las partículas de un cuerpo rígido permanecen equidistantes unas respecto de las otras, la posición de cada una de ellas puede ser conocida para cualquier instante de tiempo. Debido a lo anterior, el movimiento puede ser descrito por un pequeño número de parámetros que pueden ser, por ejemplo, la velocidad de translación del centro de gravedad del cuerpo y la velocidad angular respecto a ese centro. Aún más, dado que las fuerzas internas en un cuerpo rígido no realizan ningún trabajo, el principio del trabajo y la energía permanece siendo válido cuando es aplicado a cuerpos rígidos en movimiento.

En la mecánica de los cuerpos deformables, al contrario de lo que sucede en la mecánica de partículas y cuerpos rígidos, no se puede ignorar que existe un cambio de geometría bajo la acción de fuerzas de cuerpo y fuerzas de campo y por lo tanto cuerpos de forma similar pero de diferente material tendrán diferentes deformaciones cuando son sometidos a las mismas fuerzas.

Para considerar los fenómenos anteriores, que claramente distinguen a la mecánica de cuerpos deformables de la mecánica de partículas o cuerpos rígidos, se formularon leyes que proporcionan la descripción matemática del comportamiento de un cuerpo bajo condiciones de deformación.

El movimiento de los cuerpos deformables está gobernado por las ecuaciones de movimiento de Cauchy:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + \rho B_i = 0 \qquad . \qquad . \qquad (2.24.)$$

De las ecuaciones de *Cauchy* se desprende un principio importante para la mecánica de cuerpos deformables conocido como *principio de Stokes de la potencia consumida* el cual establece lo siguiente:

"La potencia neta de entrada de todas las fuerzas externas que actúan en un cuerpo deformable  $\dot{W_n}$  iguala a la potencia interna desarrollada por la deformación del material,  $\dot{W_i}$ , más la rapidez de cambio de la energía cinética del cuerpo,  $\dot{K}$ " <sup>5</sup>

$$\dot{W}_{\mu} = \dot{W}_{i} + \dot{K}$$
 . . . (2.25.)

El principio de Stokes es a la mecánica de los cuerpos deformables lo que el principio del trabajo y energía es a la mecánica de partículas y cuerpos rígidos.

En la mecánica de los cuerpos deformables las ecuaciones de Cauchy son complementadas por relaciones constitutivas. Dichas relaciones muestra la dependencia de los esfuerzos internos del material con la deformación inducida en el cuerpo. Las relaciones constitutivas modelan así el comportamiento del material bajo una cierta solicitación

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> Ref. [4] pp. 188.

externa. Dado que el principio de Stokes se enuncia en término de potencias y no de fuerzas es necesario conocer la velocidad de aplicación de dichas fuerzas.

Las relaciones constitutivas por lo general son expresadas por ecuaciones que incluyen coeficientes del material. Los valores de dichos coeficientes dependen de la naturaleza del material. Los coeficientes del material por lo común dependen también de la temperatura y la presión. Ejemplos de estos coeficientes son el módulo de Young y la relación de Poisson.

El principio de Stokes para la potencia consumida, al igual que la ley de Cauchy de la cual se deriva, debe ser acompañado por relaciones constitutivas. Sin embargo en este caso no es necesario conocer el estado de esfuerzos, sino que dichas relaciones se especifican entre la velocidad del flujo de material y la potencia necesaria para mantener dicho flujo.

# 2.2.2. Teorema de Límite Inferior.

Las soluciones por límite inferior son aquellas que garantizan proporcionar valores de la potencita total que son mucho menores o iguales a aquel valor real en cada caso. Cuando este teorema es combinado con la solución correspondiente de límite superior, se cuenta con un sistema de análisis por límite en donde la solución real está contenida entre ambas soluciones, obteniendo con ello una descripción completa del problema en términos de los campos de esfuerzo y deformación.

Generalmente la soluciones por límite inferior son más complejas y difíciles de obtener. Como resultado muy pocos análisis se han llevado aplicando el teorema de límite inferior.

En una solución por límite inferior, el primer paso es la formulación del tensor de esfuerzos, el cual es por lo general más dificil de concebir y plantear analíticamente.

Las condiciones necesarias para una solución precisa son aquellas relacionadas con la ecuación de equilibrio de momentum, conservación de volumen, relaciones esfuerzo deformación, criterio de cedencia, y condiciones de frontera. Para una solución por límite inferior ciertas condiciones no son necesariamente satisfechas. Por ejemplo:

- 1. No hay necesidad de cumplir con la condición de compatibilidad.
- 2. No hay necesidad de satisfacer la relación de esfuerzo y deformación.
- 3. Las condiciones geométricas de las fronteras no tienen que ser satisfechas.

Así, las ecuaciones de equilibrio, el criterio de cedencia, y las condiciones estáticas en las fronteras son las únicos requerimientos que deben ser satisfechos. A pesar de lo anterior, las soluciones por límite inferior son difíciles de obtener.

Como fue presentado por Prager y Hodge, la solución por límite inferior establece lo siguiente:

"De todos los campos estáticamente admisible de esfuerzos, el verdadero maximiza la siguiente expresión:

$$I = \int T_i v_i dS \quad . \quad . \quad (2.26.)$$

donde I es la potencia calculada desarrollada por las herramientas a través de las superficies de contacto entre el material de trabajo y la herramienta"  $^{6}$ 

 $T_i$  representa las componentes normales de tracción en las superficies de contacto entre el material y las herramientas y son calculados como *esfuerzos en la frontera* a partir de un campo admisible de esfuerzos, y  $v_i$  es la velocidad de las herramientas. La potencia real, *I*, nunca será menor que aquella representada por la expresión para límite inferior – ecuación (2.26.) –

#### 2.2.3. Teorema de Límite Superior.

Uno de los diversos enunciados acerca del teorema de límite superior expresa lo siguiente:

"De entre todos los campos de rapidez de deformación cinemáticamente posibles, el campo real minimiza la siguiente expresión "<sup>7</sup>

$$J^* = 2^{1/2} k \int_{V} (\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij})^{1/2} dV - \int_{S_i} T_i v_i dS \quad . \quad . \quad (2.27.)$$

Donde  $J^*$  representa el límite superior de la potencia consumida por el proceso. El primer término de la derecha es la potencia interna de deformación, y el segundo término es la potencia requerida para vencer los esfuerzos internos,  $T_i$ , debidos a la resistencia intrínseca del material, que se oponen al proceso de deformación.

En el análisis, se asume que el material presenta un comportamiento rígido-plástico, de tal manera que bajo el criterio de von Mises, k, el cortante crítico, estará dado por:

$$k = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \qquad (2.28.)$$

Bajo este criterio la ecuación que representa la solución por límite superior se puede entonces expresar como:

$$J^{\bullet} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_0 \iint_{\nu} \left( \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \right)^{1/2} dV - \iint_{S_i} T_i \nu_i dS \qquad (2.29.)$$

6 y 🐴

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> <u>Op Cit</u>. Avitzur, B. pp. 137. <sup>7</sup> <u>Ib</u>.

El antecedente físico más cercano al las soluciones por límite superior es el principio de Stokes del que se deriva el *Teorema de Límite Superior* el cual dice que si se desprecia el cambio en la energía cinética del cuerpo entonces se debe cumplir lo siguiente:

 $\dot{w}_{a}^{*} \leq \dot{w}_{i}^{*}$  . . . (2.30.)

en donde  $\dot{w}_{\pi}$  es la potencia neta desarrollada por las fuerzas externas y  $\dot{w}_i$  es la potencia interna consumida por la deformación; ambas potencias calculadas con un mismo campo de velocidades,  $v^*$ , el cual es propuesto de antemano.

El campo de velocidades  $v^*$  puede ser seleccionado arbitrariamente. No obstante, para ajustarse a una solución particular, debe satisfacer las condiciones de frontera impuestas en las superficies externas del cuerpo, y debe observar estricto cumplimiento a la condición de incompresibilidad a lo largo del volumen de control. Los campos de velocidad que cumplan con estas condiciones se dice que son *cinemáticamente admisibles*.

La desigualdad mostrada en la ecuación (2.30.) es una de las muchas formas y, quizá la más simple, del *teorema de límite superior*. Una representación más adecuada está dada por el *Principio Minimum de Markov* el cual se basa en los principios del cálculo de variaciones y que se ajusta además a campos de velocidades discontinuos. Este principio precede históricamente a todas las demás formas de expresar el teorema de límite superior.

Dicho principio establece lo siguiente:

"De todos lo campos cinemáticamente admisibles de velocidad, el único que minimiza la funcional J $^*$  es el campo de velocidad del flujo real"  $^8$ 

de forma que:

$$\dot{W}_{u} = J \leq J^{*}$$
 . . . (2.31.)

donde  $W_{\nu}$  representa la potencia neta desarrollada por todas las fuerzas externas que son aplicadas con una velocidad conocida.

Éste es el principio de Markov, y de él se concluye que el mínimo valor, J, de la funcional  $J^*$  proporciona el campo de velocidad que asegura la potencia necesaria para mantener el flujo plástico del material.

Usualmente el valor mínimo de J es desconocido y no puede ser obtenido. En vez de ello, se calcula  $J^*$  para un conjunto de campos de velocidades seleccionados y se escoge aquél que conduce al valor más bajo de  $J^*$ . Así el problema se reduce a un proceso de optimación, en el cual, el campo de velocidades que minimice  $J^*$  será la solución óptima.



<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Op.Cit. Talbert, S. et.al. pp. 143.

# 2.3. GENERALIDADES DEL MÉTODO DE LIMITE SUPERIOR.

Para concretar una solución por límite superior, en el caso más simple, es necesario encontrar una forma de evaluar las integrales que representan cada término de potencia en la ecuación (2.29.). Comúnmente resulta difícil plantear un tensor de rapidez de deformación que cumpla con las ecuaciones de compatibilidad. Dado que la solución por LS subyace en el planteamiento previo de un campo de velocidades, es posible aprovechar esto para utilizar una ecuación que relacione directamente el campo de velocidades con la rapidez de deformación del material.

#### 2.3.1. Campo de velocidades.

Cuando un material se deforma plásticamente, las posiciones relativas de puntos seleccionados al interior del material se modifican continuamente. El cambio de forma de un cuerpo puede ser descrito mediante la asignación de un vector de desplazamiento para cada punto del medio. De forma que, la descripción de la deformación que sufre el material puede representarse mediante un campo vectorial de desplazamientos o bien, de manera más precisa, involucrando la variable temporal, mediante un campo de velocidades que correlaciona las coordenadas de cada punto material con un vector de velocidad asociado.

Existen ciertos procesos de conformado metal-mecánico, como es el caso del estirado y de la laminación, en donde se tiene cierta ventaja respecto al planteamiento del campo de velocidad asociado al flujo de material. Estos procesos suelen ser considerados como procesos en estado permanente toda vez que se han superado los transitorios y el proceso se estabiliza. De manera que se puede considerar que el vector de velocidad cambia de un punto a otro en el espacio, pero permanece sin cambio respecto a la variable temporal. El proceso puede ser "congelado" en cualquier instante y obtener una solución que no sea función del tiempo, sino exclusiva de la posición material de cada partícula.

En la mayoría de los procesos de conformado, en donde las soluciones por límite son empleadas, la complejidad matemática en la representación de los campos de velocidades reales hacen necesario dividir en regiones discretas el dominio del flujo y adaptar a cada una de ellas un perfil de velocidades que represente de manera sencilla el perfil de flujo en dicha región. Dichas regiones comparten fronteras comunes las cuales, como se mostrará más adelante, resultan interesantes de analizar. La figura (2.8.) muestra un proceso de indentación. Para su análisis, el campo de velocidades real ha sido reemplazado por un campo de velocidades consistente en la superposición de varios dominios geométricos; en cuyo interior, se definen campos de velocidad de naturaleza muy simple.

Como puede apreciarse, la región cercana al indentador se ha discretizado en elementos geométricos simples, en este caso triángulos, que permiten visualizar el movimiento de cualquier punto que se encuentre dentro de los mismos. Así, en la región [1] el material desciende a la misma velocidad del punzón como un cuerpo rígido. Cuando cruza la superficie [1/2] y entra a la región [2], el material cambia la dirección de su velocidad y se mueve paralelo a la superficie del material de trabajo y permanece moviéndose como un cuerpo rígido. De esa manera la deformación se ha confinado exclusivamente en la superficie de corte [1/2] localizada entre ambas regiones.



Figura 2.8. Perfil de velocidades simplificado.

La solución del problema mediante LS se reduce en este caso a encontrar el valor adecuado de  $\theta$  para el cual  $J^*$  es mínimo. Con ello, dado que las componentes de velocidad son funciones de  $\theta$ , al final, se cuenta con la descripción cuantitativa del flujo de material. Esto es una característica del método de límite superior ya que la representación cualitativa del flujo (expresada en términos de parámetros desconocidos) arroja finalmente, después de un proceso de optimación, el carácter cuantitativo del flujo.

Resulta evidente que al aproximar cualquier campo de velocidad mediante una definición, en regiones discretas, de varios campos de velocidades, existirán forzosamente discontinuidades en la velocidad del flujo al pasar este de una región a otra, lo cual sugiere que, de existir "fisicamente", dichas discontinuidades generarán grandes esfuerzos de corte que deben ser tomados en cuenta en el balance energético del proceso. Lo anterior conduce a la necesidad de definir las superficies en donde se presentan dichas discontinuidades de velocidad como superficies de discontinuidad de velocidad en donde puede o no existir una transición de un estado rigido a un estado de flujo plástico dependiendo del proceso y de la forma en que el dominio del flujo es subdividido.

Una forma conveniente para manejar una descripción discreta del flujo, es definir el campo de velocidades mediante una descripción analítica que relacione las coordenadas de un punto con un vector velocidad dado. Existen campos de flujo cuya representación se puede adaptar de forma sencilla a una expresión analítica y con ello facilitar el manejo de las expresiones resultantes. Una representación analítica del campo de velocidades mediante una función continua para una región discreta del dominio de flujo de material, facilita el cálculo de los términos de potencia intrínsecos en la definición de límite superior además de mejorar sustancialmente la solución al eliminar los inconvenientes de una descripción discreta o puntual del campo de velocidades.



#### 2.3.2 Superficies de discontinuidad de velocidad.

Henri Tresca en Junio de 1874, reportó a la academia de ciencias de Francia sus observaciones respecto al calor generado dentro de un cuerpo deformable<sup>9</sup>. Tresca forjó y calentó una muestra de platino que posteriormente enfrió hasta el rojo vivo. En ese estado, un golpe sucesivo del martillo de forja, impulsado por vapor, deformó la pieza y la calentó aún más en espacios adyacentes a dos líneas inclinadas una respecto a la otra. El metal lentamente retornó al rojo vivo, mientras que líneas, formando una X de color blanco (debido la alta energía asociada a dichas regiones), se iban desvaneciendo siendo visibles por sólo algunos segundos. Tresca atribuyó estos dos trazos luminosos al desarrollo intenso de calor a lo largo de dichas líneas las que relacionó con una mayor manifestación de deformación.

El fenómeno se explica fácilmente si se considera que el platino es un mal conductor de calor, y por tanto la difusión del mismo en las superficies de corte a los alrededores es muy lenta; el incremento de temperatura es tan alto como para que la región poco a poco recupere la temperatura correspondiente al color rojo vivo y con ello se manifieste de forma visible la existencia de las superficies de corte como líneas, o más bien regiones rectilíneas, de color blanquecino que se toman, conforme el material se enfría, en un color marrón claro a lo que comúnmente se le conoce como 'rojo vivo'.

Haciendo uso de la figura 2.8. es importante aclarar que las superficies de corte no pertenecen a ninguna de las regiones. [1]  $\delta$  [2]. De forma que el campo de velocidades está indefinido a lo largo de las superficies de corte. La ausencia de definición de un campo de velocidades en las mismas no representa ningún problema físico ni matemático dado que las superficies de corte son superficies con espesor "cero" y por consiguiente no existen partículas a largo de las mismas que llenen un volumen en el espacio.<sup>10</sup>

Físicamente, la existencia de discontinuidades de velocidad se justifica. Si se piensa en un proceso de forja libre sin lubricación, en donde debido a la fricción con las herramientas, parte del material tendrá que quedarse adherido a las mismas, y por consiguiente, la velocidad de puntos dentro de dichas regiones será cero, o bien, de un valor muy cercano a cero y por tanto, dado que el material adyacente a estas regiones se mueve, las discontinuidades de velocidad no sólo se justifican sino que fisicamente se vuelven necesarias para hacer posible el proceso.

En el planteamiento de soluciones por límite superior la descripción del flujo de material lleva en repetidas ocasiones a plantear el campo de velocidades de manera discontinua para poder manipular las expresiones resultantes de manera sencilla. Esto conlleva tener que considerar las discontinuidades en el campo de velocidad global y el efecto que tendrán sobre la potencia neta consumida por el proceso. La división del campo debe hacerse con sentido común de manera que la forma cualitativa del flujo se asemeje en la mejor medida al campo real de velocidades esperado.

ERILAR ALLAR

<sup>&</sup>lt;sup>9</sup> Op. Cit. Talbert, S. & Avitzur. pp. 205.

<sup>&</sup>lt;sup>0</sup> <u>Op. Cit</u>. Talbert, S. & Avitzur pp. 215.

#### 2.3.3. Materiales rígido-plásticos perfectos.

Para modelar el comportamiento de un material bajo la acción de fuerzas externas es necesario hacer uso de relaciones constitutivas entre las deformaciones y los esfuerzos que ocurren en el material en cuestión.

En la literatura convencional a los materiales rígido-plásticos se les nombra en ocasiones como materiales de Mises. Esto significa que si un espécimen de metal se considera un material de Mises entonces:

- Se comporta como un cuerpo rígido cuando el esfuerzo efectivo, producto de la acción de fuerzas externas, es menor que un cierto valor σ<sub>0</sub>.
- Se deforma plásticamente y sin sufrir alguna alteración de sus propiedades físicas y/o químicas cuando el esfuerzo efectivo, es mayor que un cierto valor  $\sigma_0$ .

El objetivo de las operaciones de conformado mecánico es efectuar un cambio permanente en la forma de la pieza de trabajo a través de deformación plástica. Así, fuerzas suficientemente grandes son desarrolladas por las herramientas para causar esfuerzos y con ello el movimiento de dislocaciones lo que se traduce en un estado de deformación permanente.

Dada la complejidad que puede representar establecer criterios para correlacionar la cedencia de un material con los esfuerzos desarrollados bajo condiciones complejas de carga, es comúnmente aceptado el criterio de von Mises para estimar las condiciones de esfuerzo bajo las cuales ocurre la cedencia en un material. Este criterio propone que el flujo plástico comienza cuando el segundo invariante del desviador de esfuerzos alcanza un valor crítico. En forma matemática esto se escribe de la siguiente manera:

$$J_{2} = \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{1}{2} \left( \sigma'_{11}^{2} + \sigma'_{22}^{2} + \sigma'_{33}^{2} \right) + \sigma'_{12}^{2} + \sigma'_{23}^{2} + \sigma'_{31}^{2} \le \frac{\sigma_{0}^{2}}{3} \qquad (2.32.)$$

donde:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_k \qquad (2.33.)$$

$$\sigma_k = \frac{1}{3} \left( \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \right) \qquad (2.34.)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad (2.35.)$$

Bajo esta consideración, todo elemento diferencial al interior del material, que sufre una deformación permanente, debe obedecer el criterio de Mises. Esta restricción complementa la demanda de equilibrio de fuerzas como queda expresado por las

1		
1	TESIS CON	1
I	FALLA DE ODIGE	l
	UL URIGEN	

ecuaciones diferenciales de equilibrio. Los esfuerzos y las deformaciones son generados simultáneamente cuando la pieza es sometida a cargas externas. De forma que las componentes del tensor de esfuerzos son relacionadas con las componentes del tensor de deformaciones o bien del tensor de rapidez de deformación a través de lo que se conoce como *relaciones constitutivas*.

Para largas deformaciones plásticas en metales, las relaciones entre los esfuerzos y el flujo de material son muy complejas y no están totalmente determinadas. Cuando se consideran factores de endurecimiento, de velocidad de deformación, cambios de temperatura, inhomogeneidad del material, anisotropía, etc., se hace claro que la idea de una relación matemática precisa entre las deformaciones y los esfuerzos es insostenible para su manipulación matemática.

Para cuestiones prácticas el endurecimiento por deformación, los efectos de la velocidad de deformación, los cambios de la temperatura, y cualquier inhomogeneidad o anisotropía puede ser tomada en cuenta, introduciendo los valores efectivos de los esfuerzos, deformaciones y velocidades de deformación. En el modelo a desarrollar para la colaminación, justamente el efecto acumulado de la deformación en el material será introducido en el modelo a partir de considerar un esfuerzo promedio superior al de cedencia a partir de una relación empírica.

#### 2.4. CÁLCULO DE LA POTENCIA REQUERIDA POR EL PROCESO

Desde el punto de vista de la teoría clásica de plasticidad, existen diversos términos de potencia que pueden ser considerados en un análisis por límite superior. No obstante, en la mayoría de las aplicaciones muchos términos pueden ser despreciados sin perjuicio de la solución.

Cuando se asume que el material de trabajo se comporta como un sólido rígidoplástico la ecuación de límite superior tiene la forma mostrada en la ecuación (2.29.).

El signo negativo en el segundo término de dicha ecuación indica que las fuerzas actuantes en las superficies de tracción realizan trabajo sobre el sistema. Las superficies de tracción son aquellas en donde fuerzas normales actúan sobre la pieza de trabajo. La figura 3.9. muestra claramente este concepto, en donde una pieza cilíndrica sometida a esfuerzos de tracción en su eje longitudinal está a la vez sujeta a fuerzas de tracción en la superficie lateral del mismo, estas fuerzas se oponen a la deformación inducida por las fuerzas de tracción. Dichas superficies pueden ser sometidas de forma similar a esfuerzos de compresión sin que su significado físico se altere, cuando la pieza es cometida a esfuerzos normales compresivos.



Figura 2.9. Superficies de Tracción

Adicionalmente es necesario incluir otro término concerniente a la discontinuidad de velocidad dentro del metal que se deforma. La expresión para la potencia –ecuación 2.29– se modifica de la siguiente manera:

$$J^* = 2^{1/2} k \int_{V} (\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij})^{1/2} dV - \int_{S_i} T_i v_i dS + \int_{S_v} t \left| \Delta v \right| dS \qquad (2.36.)$$

donde  $S_{\nu}$  representa la superficie de discontinuidad de velocidad a lo largo de la cual se efectúa la integración correspondiente a  $|\Delta \nu|$ .

Cuando las fuerzas de cuerpo son considerables pueden ser introducidas como un termino adicional para tomar en cuenta la potencia requerida para vencer la inercia del material:

$$J^{*} = 2^{1/2} k \int_{V} (\dot{\varepsilon}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij})^{1/2} dV - \int_{S_{i}} T_{i} v_{i} dS + \int_{S_{v}} \tau \left| \Delta v dS + \frac{1}{2} \rho \int_{S_{v}} \dot{v}_{i}^{3} dS \right| \qquad (2.37.)$$

donde:

 $\rho$  – densidad.

 $\dot{v}_i$  – velocidad del centro de masa del material

 $S_n$  – área de la sección transversal perpendicular a la dirección del flujo.

Existen otros dos términos que pueden ser considerados y son relacionados con la apertura de poros al interior del material así como el cambio en la energía superficial. Su aportación resulta ser insignificante en la mayoría de los casos. No obstante, estos términos resultan de interés sobre todo para el estudio de la evolución de defectos del material, la falla y el daño interno asociado con los procesos de deformación.

Cuando ocurre que poros preexistentes se abren o se cierran, el volumen aparente de la pieza se incrementa o se reduce. La potencia asociada a este cambio de volumen aparente

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

debe ser considerada cuando la presencia de poros en el material es un factor predominante en el análisis de un proceso en particular y se escribe de la siguiente manera:

$$\dot{W}_{p} = \dot{V}p$$
 . . . (2.38.)

en donde  $\dot{V}$  es la rapidez de cambio de volumen de la pieza de trabajo y p es la componente hidrostática del tensor de esfuerzos. Es importante hacer notar el hecho de que la apertura de poros no viola el principio de conservación de volumen. La potencia representada por la ecuación (2.38.) es parte integral del segundo término de la ecuación (2.29.) y no necesita ser calculado por separado. Actualmente es aceptado el hecho de que al inducir altas presiones hidrostáticas externas durante los procesos de conformado se favorece la previsión de daños internos además de inducir la ductilidad del material que es procesado<sup>11</sup>.

Cuando un material es deformado plásticamente, la superficie del mismo puede presentar cambios de área. A estos cambios se encuentra asociada una cierta energía que comúnmente se conoce como *tensión superficial*. La energía necesaria para inducir dicho cambio en el área de la superficie es comúnmente ignorada en todos los análisis al ser ésta despreciable respecto a la energía necesaria para llevar a cabo la deformación plástica del material. Sin embargo, si el material está compuesto por fibras extremadamente finas, el término de energía asociado a la tensión superficial deberá ser tomado en cuenta, o aún más, si el daño interno es considerado, es decir, cuando millones de poros de un volumen extremadamente pequeño en conjunto provocan un cambio en el área superficial, la energía superficial puede convertirse en un factor que controle la trayectoria de la deformación.

La potencia requerida para provocar un cambio en la tensión superficial está dada por:

$$\dot{W}_{\gamma} = \gamma \frac{dS}{dt} \qquad (2.39.)$$

en donde

 $\gamma$  = incremento de energía con la introducción de una nueva unidad de área de superficie.

 $\frac{dS}{dt}$  = rapidez de cambio del área superficial.

El problema más evidente en la consideración de este término relacionado con la energía superficial es la falta de información respecto al procedimiento para estimar valores realistas para  $\gamma$ ; que es función de la forma de la superficie así como de la naturaleza del material, la atmósfera, la temperatura, etc.

De todo lo anterior, y de forma particular el análisis de la potencia se lleva a cabo al postular un campo cinemáticamente admisible y calculando a partir de él, la potencia interna de deformación  $\dot{W}_i$ , la potencia debida al cortante en las superficies de

<sup>&</sup>lt;sup>11</sup> <u>Op.Cit.</u> Avittarg B. pp. 25.

discontinuidad de velocidad  $\dot{W}_r$ , la potencia para vencer las fuerzas externas  $\dot{W}_b$ , las fuerzas inerciales  $\dot{W}_k$ , la potencia asociada a la apertura de poros  $\dot{W}_p$  y al cambio en la energía superficial  $\dot{W}_r$ . De forma que una expresión completa para  $J^*$  debe tener la forma siguiente:

$$J^* = \dot{W}_i + \dot{W}_s + \dot{W}_b + \dot{W}_b + \dot{W}_b + \dot{W}_s - ... \quad (2.40.)$$

en donde finalmente cada término de la ecuación (2.40.) se evalúa de la siguiente manera:

Como se verá en el capítulo tercero la mayor parte de los términos de potencia descritos por las ecuaciones anteriores no serán calculados. Sólo aquellos que justifiquen su costo de cálculo por su aportación a  $J^*$  se consideraran para la solución del problema.

En la mayoría de los procesos de conformado, el término de mayor importancia es el de potencia interna de deformación descrito por la ecuación (2.41.). Como se puede apreciar para evaluar dicho término es necesario conocer el tensor de rapidez de deformación asociado al flujo de material. No obstante, basta con conocer el campo de velocidades para determinar las componentes de dicho tensor mediante su definición como se mostró en el capítulo primero.

En el siguiente capítulo se mostrará la aplicación práctica del teorema de límite superior para la solución del caso particular de los procesos de colaminado. El mismo procedimiento resulta ser aplicable para laminación convencional simplificando su análisis de manera considerable.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

# **Capítulo 3** SIMCLAD Descripción del Modelo

# 3.1. INTRODUCCIÓN.

En los capítulos previos se ha establecido el fundamento teórico necesario para el desarrollo del modelo para el proceso de laminado conjunto simétrico. Este capítulo se dedica a describir dicho modelo cuya solución provecrá una respuesta a los problemas de colaminado simétrico. El modelo que representa la aproximación al fenómeno físico, y el cual está basado en el teorema de límite superior descrito en la sección 2.2.3. se completa cuando la funcional de potencia,  $J^*$ , que representa la potencia consumida por el proceso queda definida en términos de las componentes de velocidad del campo de velocidad propuesto y de un conjunto de parámetros pseudo-independientes cuyo valor deberá determinarse mediante un método de optimación que proporcione un conjunto de valores dichos parámetros que conducen a un valor mínimo de  $J^*$ .

Para definir la funcional de potencia,  $J^*$ , se consideran seis términos para cada una de las capas, los cuales son: la potencia interna consumida por deformación (para ambas capas), la potencia consumida por cortante en los límites rígido-plásticos (para ambas capas) y por otro lado: la potencia consumida por fricción entre el material de la capa externa y finalmente la potencia consumida por fricción debido al deslizamiento relativo entre las capas a colaminar. Éste último término no ha sido considerado por Hwang<sup>1</sup> y en lo siguiente se mostrará su importancia para la simulación del proceso.

Para la evaluación de la función que representa la potencia total consumida, se recurre principalmente a métodos de integración y derivación numéricos, mientras que para el proceso de optimación se hará uso de un método medianamente robusto conocido como *método simplex*<sup>a</sup>, o bien *método del poliedro flexible*. Aún cuando es deseable conocer la rapidez de convergencia y estabilidad de los algoritmos empleados, esto no resulta ser parte del presente trabajo por lo que solamente se escogieron aquellas estructuras de código y algoritmos numéricos de cálculo que, por su naturaleza, fuesen robustos tanto en la exactitud de sus resultados como en la rapidez para obtenerlos; esto se traduce en un ahorro en recursos lo cual es deseable para una aplicación eficiente del método.

La eficiencia del código computacional requerido se verá favorecida con el empleo de variables tipo apuntador que garantizan rapidez de acceso a los datos en la memoria durante la implementación del algoritmo en un sistema de cómputo.



<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Ref. [5].

<sup>&</sup>lt;sup>a</sup> No confundir con el método simplex de optimación lineal.

La recurrencia en el empleo de funciones durante la ejecución del código fuente es algo rutinario, por lo tanto el uso de apuntadores a funciones agiliza la solución del problema. El lenguaje seleccionado para programar el algoritmo ha sido C por su potencial para el manejo de este tipo de datos.

#### **3.2. DEFINICIÓN DEL PROCESO A MODELAR.**

El proceso consiste en la disminución del área de una sección transversal de un conglomerado consistente en tres capas de dos materiales diferentes dispuestos de forma simétrica respecto al plano medio horizontal de todo el conjunto (línea punteada, figura 3.1.)



Figura 3.1. Sandwich tricapa en disposición geométrica antes y después de la laminación.

Aún cuando no existe en estricto rigor ninguna condicionante respecto a la disposición de las capas en cuanto a su límite elástico, en lo siguiente se supondrá que la capa de mayor resistencia es la que se ubica en posición central, siendo entonces las capas externas las de menor resistencia e idénticas propiedades.

En lo siguiente se tomará como un hecho que el ancho de la cinta permanece inalterado aún después de la deformación impuesta. Ello se cumple al asumir que la deformación es plana y que por lo tanto el ensanchamiento es despreciable y con ello toda deformación o componente de deformación relacionada con dicha dirección. Esta condición se aproxima mejor cuando la relación entre el ancho de cinta "b" y el espesor total de la misma tiende a ser superior a diez<sup>2</sup>. El interés fundamental en el desarrollo del modelo es la definición de la relación de espesores final entre las capas que se colaminan. Los efectos y condiciones que favorezcan la adherencia entre las mismas no serán estudiados.

Como cualquier otro método, las soluciones por límite requieren la simplificación de ciertas condiciones durante el proceso. En el presente estudio, y bajo el contexto propio de los procesos de laminación se tomarán algunas consideraciones que proporcionarán validez al método presentado, y permitirán su aplicación sin degradar con ello la calidad de la solución.

<sup>2</sup> Ref. [6] pp. 47.

a strand a second a strand

the second second second second second

# 3.2.1. Consideraciones.

Para el modelado por MLS se requerirá tomar en cuenta las siguientes simplificaciones del proceso real:

- 1. Se desprecia toda deformación de los rodillos.
- 2. Deformación plana.
- 3. El material de ambas capas se considera rígido-plástico.
- 4. La fricción entre la capa superior y el rodillo así como la existente entre las mismas capas obedece el modelo de fricción constante.
- 5. Los campos de velocidades de ambos materiales se unifican a la salida, con lo que al final se tiene un mismo perfil de velocidades para ambas capas; lo que indica que los materiales se han unido de manera permanente.

Analizando cada punto anterior, se puede decir que en el primer caso, el considerar los rodillos como cuerpos rigidos permite eliminar el inconveniente de modelar la deformación elástica o plástica de los mismos y los esfuerzos asociados a dicha deformación. No obstante, la omisión en el análisis de la deformación de los rodillos conduce a una subestimación de las fuerzas durante el laminado. Por otra parte, dado que el flujo de material se ajusta a la frontera definida por la superficie del rodillo, el campo de velocidades cercano a dicha región puede representarse como función de una semicircunferencia cuya ecuación resulta ser relativamente sencilla de manipular (siendo posible inclusive aproximar su forma mediante el empleo de polinomios de aproximación como pueden ser los polinomios de aproximación de Newton o los de Lagrange).

En el segundo caso, resulta evidente que al considerar deformación plana, el efecto de la deformación del material en la dirección perpendicular al flujo no está presente; de manera que el análisis se simplifica al tener un campo bidimensional de velocidades reduciendo con ello el tiempo requerido para el cálculo de la solución.

La tercera condición es quizá la más importante, ya que al concebir al material como un cuerpo rígido-plástico perfecto se elimina cualquier posible efecto de la rapidez de deformación sobre el comportamiento del material<sup>3</sup>.

La cuantificación de las fuerzas de fricción desarrolladas entre el material de trabajo y las herramientas de formado resulta ser de vital importancia dentro del análisis de los procesos de conformado de metales. Las fuerzas de fricción en dichos procesos son un factor predominante y condicionante del comportamiento del material durante su deformación. En el caso en cuestión, es conveniente utilizar el modelo de fricción constante para incluir dicho término en la solución del problema en cuestión y eliminar el inconveniente de no conocer las fuerzas normales que actúan en las superficies donde se generan fuerzas de fricción.

<sup>&</sup>lt;sup>3</sup> El inconveniente de omitir este término, puede ser solventado, en caso de ser necesario (al aplicar, por ejemplo, grandes deformaciones) al considerar un esfuerzo de cedencia superior al real en función de algún modelo de endurecimiento.

La última condición está relacionada directamente con la consideración de que las capas se han unido de manera permanente a la salida del claro de laminación. Esto significa que el deslizamiento relativo entre las capas que se colaminan tienden a ser nulo conforme el material se aproxima al plano de salida del claro de laminación. Un punto relacionado con lo anterior y que no ha sido incluido en los resultados proporcionados por Hwang<sup>4</sup> es el hecho de considerar el término de fricción entre las capas que se colaminan. Para ello hay que integrar el término correspondiente a la diferencia de velocidades entre ambos materiales a lo largo de la curva que representa la superficie de la interfase. Dado que el proceso de solución consiste en la búsqueda de un conjunto óptimo de los parámetros del proceso que conduzca a un valor mínimo de la potencia total consumida, la consideración de dicho término agrega una condicionante más a la solución que está específicamente relacionada con la diferencia de velocidades entre las capas en la interfase, puesto que el valor de la misma definirá el peso de éste término de potencia. Con ello, el mecanismo de búsqueda limita el valor que tendrá la diferencia de velocidades entre las capas, de manera que este término no sea significativo o bien, se encuentre en un punto de equilibrio óptimo respecto al peso porcentual de los demás términos que son considerados.

Finalmente, cabe señalar que, dado que se estudia un proceso que resulta ser geométricamente simétrico respecto a un plano medio paralelo a la superficie del conglomerado, basta con analizar solo la mitad del flujo real para tener una definición completa del problema. Por lo tanto, será necesario multiplicar cada término de potencia por un factor de dos para determinar el total consumido por el proceso.

#### 3.3. DESARROLLO DEL MODELO DE SOLUCIÓN.

En lo siguiente se mostrará el desarrollo del modelo para la solución del problema de colaminación simétrica por límite superior. Los conceptos básicos de plasticidad presentados en el capítulo 1 serán de utilidad para la derivación del modelo.

El proceso de solución parte del planteamiento de un campo cinemáticamente admisible representado por la superposición de diversos campos de velocidades asociados a regiones dispuestas y delimitadas según la conveniencia de una solución matemática sencilla. Cada campo de velocidades estará descrito por una función de corriente que representa el gasto por unidad de ancho. Cada función será descritas y estudiada de forma individual.

Resulta evidente, al pensar un poco en la forma de los campos de velocidades antes y después del claro de laminación, que éstos pueden ser representados como flujos uniformes. Por otro lado, como se ha mostrado en la sección 2.1.3., el campo de velocidades dentro del claro de laminación puede ser representado por la superposición de un campo de velocidades uniforme y un campo linealmente distribuido, este último proveerá el efecto de un gradiente en la velocidad en la dirección horizontal con lo cual se podrá modelar el efecto de flujo en un canal convergente, que ocurre al interior del claro de laminación y que resulta de la acción mecánica de los rodillos sobre el material de trabajo.

<sup>4 &</sup>lt;u>Op.Cit</u>. Hwang, Y-M.

# 3.3.1. Análisis del flujo de material en la capa externa.

La figura 3.2. muestra el proceso de colaminado simétrico de dos hojas que se encuentran separadas antes de ser unidas por la acción mecánica de los rodillos. Para el análisis se considera que la región del claro de laminación está dividida en las siguientes regiones delimitadas por los puntos  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$ .

De forma que:

 $A_1A_2B_2B_1$  – Área correspondiente al material de la capa exterior.  $A_2A_3B_3B_2$  – Área correspondiente a la mitad del material de la capa interior.

 $\Gamma_{S1}$  – Superficie de discontinuidad de velocidad de la capa exterior.  $\Gamma_{S2}$  – Superficie de discontinuidad de velocidad de la capa interior.



Figura 3.2. Proceso de colaminado. Nomenclatura empleada.

El flujo de material se plantea, para ambas capas, en términos de funciones de corriente. Como se mostró en el capítulo 1, es posible definir una segunda función por un procedimiento complementario para flujos bidimensionales incompresibles, sean éstos rotacionales o irrotacionales; esta función es conocida como función de corriente y denotada por  $\varphi$ . Adicionalmente si el flujo es irrotacional, la función de corriente deberá, al igual que el potencial de velocidad, satisfacer la ecuación de Laplace, no siendo esto condición necesaria para su existencia. Las condiciones que debe cumplir dicha función han sido descritas a detalle en la sección 2.1.2.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

#### a) Región previa al claro de laminación

El flujo de material previo a la entrada al claro de laminación se puede modelar de manera sencilla como un flujo uniforme, de forma que:

FruitA DE ORIGEN 
$$\varphi_0(x,y) = Q_1 \left\{ \frac{y - e_{2i}}{e_{1i}} \right\} \qquad (3.1.)$$

Las componentes de velocidad para esta región son entonces:

$$U_{0}(x, y) = \frac{\partial \varphi_{0}}{\partial y} = Q_{1} \left\{ \frac{1}{e_{1i}} \right\} \qquad (3.2.)$$
$$V_{0}(x, y) = -\frac{\partial \varphi_{0}}{\partial x} = 0 \qquad (3.3.)$$

Considerando que el flujo es ideal y que no hay deflexión alguna del material antes de que éste ingrese a la zona de deformación al hacer contacto con los rodillos, el campo de velocidades descrito por las ecuaciones (3.2.) y (3.3.) se ajusta perfectamente a las condiciones del proceso.

A continuación se describe el campo de velocidades de la capa superior en la zona de deformación, la cual está definida a partir del punto de contacto entre material y rodillo. La extensión y forma del límite rígido-plástico el cual separa las zonas de deformación plástica y de no-deformación, se obtendrá a partir de forzar la continuidad entre las correspondientes líneas de corriente de ambas regiones.

#### b) Región del claro de laminación

El campo de velocidades para la zona que comprende el claro de laminación y que cumple con condiciones de frontera para el caso en cuestión, se deriva a partir de las funciones de corriente planteadas en las ecuaciones 2.17. y 2.21.:

$$\varphi_1(x,y) = Q_1 \left\{ \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} + C_1(y - y_2)(y - y_1) \right\} \qquad (3.4.)$$

En donde:

· •• • • •

. ..

 $Q_{I}$ : Gasto volumétrico de la capa superior por unidad de ancho de la cinta.

 $y_i$ : Frontera superior. (Superficie del rodillo).

 $y_2$ : Frontera inferior. (Interfase de los materiales).

 $C_l$ : Gradiente de perfil de velocidad linealmente distribuido.

El primer término dentro de las llaves corresponde a un flujo uniforme el cual es escalado en función de la geometría de las fronteras que restringen al flujo. El segundo término corresponde a un flujo linealmente distribuido que de igual manera es escalado en función de las fronteras del flujo y adicionalmente es afectado por un gradiente representado por  $C_1$ . La idea principal de dicho gradiente es modelar la aportación del flujo linealmente distribuido a lo largo del dominio del flujo. Es de esperarse que conforme el flujo se aproxime a la salida, el aporte de dicho término se vaya desvaneciendo. La forma del flujo quedará definida entonces en términos de la posición relativa de una partícula respecto a las fronteras del flujo.

Dado que el gasto volumétrico es el producto punto del vector velocidad con el vector normal a la superficie que define el área por la cual se mide el flujo, es evidente que el gasto volumétrico neto a lo largo de cualquier sección transversal vertical al flujo descrito por la ecuación (3.4) será igual a cero.

Dado que el término que representa el flujo linealmente distribuido representa en gran medida una perturbación del flujo uniforme y que, en caso de una reducción de magnitud muy cercana a cero, su aportación sería casi nula, el término  $C_1$  es un escalamiento de dicha variación y puede considerarse como un gradiente de la distribución lineal de velocidad.

Considerando que, dada la forma de las herramientas (en este caso rodillos), la velocidad varía en función de la coordenada x, por simplicidad se puede asumir que  $C_1$  puede ser función de x (y en realidad también de y). De forma que:

$$C_1 = f(x)$$
 . . . (3.5.)

Se puede definir el primer término dentro de las llaves en la ecuación (3.4.) de la siguiente manera:

$$\eta = \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} \quad . \quad . \quad (3.6.)$$

Considerando el flujo en la capa superior, las fronteras del mismo quedan definidas de la siguiente manera:

 $y_1(x) = R + e_{mf} - \sqrt{R^2 - x^2}$  ... (3.7.) (Representa la superficie del rodillo  $\Gamma_1$ ).  $y_2(x) = e_{2f} + bx^2$  ... (3.8.) (Representa la interfase de los materiales  $\Psi$ ).

Como se verá más adelante, el inconveniente principal en la manipulación algebraica de las ecuaciones, que finalmente deberán ser evaluadas durante el proceso de optimación, está precisamente en que el radical que aparece en la ecuación (3.7.) debe ser integrado en varias ocasiones durante el proceso de solución. Aún cuando es posible aminorar este problema mediante el empleo de una aproximación por series para el radical involucrado, el inconveniente se vuelve a presentar en las ecuaciones que definen los límites rígidoplásticos para ambas capas de material.

	مترقق	-10	CON
thi	LA.	DE	ORIGEN

Dado que la representación en series requiere de conocer las derivadas de la función, el problema se traduce entonces es que las expresiones que resultan se tornan muy complejas de manipular algebraicamente y por lo tanto, resulta conveniente, emplear métodos numéricos para su evaluación.

La forma de la interfase entre los materiales es función de la combinación de propiedades mecánicas de los mismos (e inclusive en un modelo más general, también función de las condiciones del proceso). Por ello, es de esperarse que su forma sea también parte de la solución. La descripción más simple para representar la interfase es mediante una función cuadrática de x, con lo cual se está considerando de antemano que la interfase tendrá una forma parabólica, dejando como un grado de libertad la amplitud de la misma. La ecuación (3.8.) representa dicha interfase y en ella se puede ver que la definición completa de su forma será parte de la solución a través de conocer los valores adecuados tanto de  $e_{2f}$  (que resulta ser el parámetro de mayor interés en la simulación del proceso) y b que denota la amplitud de la parábola.

Para plantear una definición para el gradiente del segundo término de la ecuación (3.1) Hwang propuso una relación cuadrática para ese término<sup>5</sup>, de la siguiente manera:

$$C_1 = C_1(x) = a_1 x^2$$
 . . . (3.9.)

El parámetro  $a_1$  es en realidad también un parámetro pseudo-independiente y su valor deberá ser determinado al final del proceso de optimación.

No existe razón fisica alguna para imponer una cierta forma para  $C_1$ . La forma descrita en la ecuación (3.9.) es quizá la más simplista que pueda existir (a excepción de considerar la relación lineal). Sin embargo, dado que en este caso el grado de libertad  $a_1$  (o parámetro pseudo-independiente) determina finalmente el valor de  $C_1$  para cada valor de x, entonces la única condicional para la definición de  $C_1$  es quizá el orden de magnitud que puede adquirir  $a_1$  y sus dimensiones, ya que al tomar valores muy pequeños puede volverse un parámetro conflictivo durante el tratamiento numérico del problema.

Con relación a lo anterior, y como se mostrará más adelante, un análisis de sensibilidad de la función objetivo muestra claramente que los valores tomados por este parámetro y otro de idéntica definición para el caso de la capa inferior, son extremadamente pequeños y que, en la mayoría de los casos, pequeñas variaciones de los mismos, provocan variaciones de orden considerable (si se comparan con el orden de magnitud del criterio de paro del proceso iterativo de optimación) que provocan inconvenientes en la ejecución del programa.

La forma de la interfase es propuesta considerando una posible primitiva de la misma (sin considerar la deformación localizada que podría hacer de ésta una superficie más compleja cuya representación analítica sería al mismo tiempo más complicada). Sin embargo, no es difícil suponer que una forma cuadrática se adaptará bien a la forma de la

<sup>&</sup>lt;sup>5</sup> <u>Op.Cit</u>. Hwang, Y-M.

interfase. Aún cuando es factible modelar la forma de la interfase por medio de una línea recta, resulta evidente que su apariencia deberá verse influenciada por la forma de las herramientas, en este caso los rodillos cuya perfil es cilíndrico.

Para ilustrar lo anterior, considérese el proceso de co-extrusión simétrica mostrado en la figura 3.3.



Figura 3.3. Proceso de co-extrusión. Forma de la interfase.

En este proceso, al igual que en el problema en cuestión, al final se cuenta con un producto que estará conformado por dos capas superpuestas de dos materiales diferentes. No obstante, en este caso las capas están dispuestas de forma concéntrica. Dado que el problema es axisimétrico puede ser tratado considerando solamente la mitad de una sección perteneciente a un plano que contenga al eje de simetría del conjunto. Para la evaluación de algunos términos del modelo es evidente que se deberán integrar las expresiones que resulten del análisis de la sección plana respecto al ángulo azimutal cuando esto sea requerido para así obtener las expresiones adecuadas para cada término en el modelo.

Dada la forma de las herramientas de deformación (en este caso los dados de extrusión) se puede esperar que la interfase entre ambos materiales adquiera una forma cercana a la superficie de un cono truncado. Para efectos de modelar la interfase se le puede considerar como una línea recta inclinada sobre la sección transversal plana que sirve para construir el modelo, en cuyo caso es posible definirla en términos de su pendiente, cuyo valor, al igual que b en el caso de colaminación, tendría ser determinado mediante un proceso de optimación.

Retomando la cinemática del problema, y una vez que la función de corriente ha sido propuesta y que se ha verificado que satisface las condiciones impuestas, el campo de velocidades para la capa superior se deriva de la propia definición de función de corriente, de manera que se obtienen las siguientes expresiones:

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

. . .

$$U_{1}(x,y) = \frac{\partial \varphi_{1}}{\partial y} = Q_{1} \left\{ \frac{1}{y_{1} - y_{2}} + 2C_{1} \left[ y - \frac{(y_{1} + y_{2})}{2} \right] \right\}$$
(3.10.)  
$$V_{1}(x,y) = -\frac{\partial \varphi_{1}}{\partial x} = Q_{1} \left\{ \eta' + C_{1}' \left( y - y_{1} \right) \left( y - y_{2} \right) - C_{1} \left( y - y_{2} \right) \left( y'_{1} - C_{1} \left( y - y_{1} \right) \right) \right\}$$
(3.11.)

donde:

$$\eta' = \frac{(y_1 - y_2) - (y_2 - y_2)(y_1 - y_2)}{(y_1 - y_2)^2} \qquad (3.12.)$$

y donde la prima denota la derivada respecto a x.

Es relativamente fácil comprobar que el campo de velocidades derivado a partir de la función de corriente propuesta satisface la condición de frontera a lo largo de la superficie del rodillo, la condición de frontera a lo largo de la interfase de los materiales y la ecuación de continuidad, por lo que resulta ser un campo cinemáticamente admisible.

Al analizar las expresiones resultantes para las componentes de velocidad en las ecuaciones (3.10.) y (3.11.) es fácil comprobar que la implementación de la solución analítica se torna compleja. Hasta este punto el único inconveniente al respecto (y que en realidad no tiene complicación algebraica alguna) es evaluar las derivadas de las funciones que describen las geometrías de las fronteras del flujo. Sin embargo, como se verá más adelante las expresiones que resulten finalmente serán difíciles de manipular por medios aritméticos lo cual hace necesario considerar la opción de evaluar tanto derivadas como integrales de forma numérica aún con el costo asociado en la exactitud de los resultados.

#### 3.3.2. Determinación del Límite rígido-plástico en la capa externa ( $\Gamma_{S1}$ ).

Dado que el perfil de velocidades descrito por las ecuaciones (3.10) y (3.11) describe solamente el flujo en la región que comprende el claro de laminación, es evidente que existirá una discontinuidad de velocidad entre dicho flujo y el descrito para flujo de la zona previa al claro de laminación por las ecuaciones (3.2) y (3.3).

A dichas discontinuidades en el flujo de material se les puede considerar simplemente como *límites rígido-plásticos* puesto que es a partir de ellos y en la dirección del flujo que el material comienza a deformarse plásticamente debido a la acción mecánica de la deformación impuesta por los rodillos, y aún cuando su existencia se basa exclusivamente en la necesidad intrínseca de describir un campo de deformaciones mediante la superposición de diversos campos de velocidades, es de esperarse que en los procesos de laminación reales que dichas superficies estén físicamente presentes en la región cercana a la zona de contacto entre el material y los rodillos.

Los esfuerzos de corte que ocurren sobre los límites rígido-plásticos serán un factor predominante dentro de la potencia total consumida por el proceso. Para la evaluación de este término será necesario determinar la diferencia de velocidades tangenciales entre ambos campos e integrar dicha diferencia a lo largo de la curva que define el límite rígidoplástico en cuestión.

El procedimiento para la obtención de la función matemática que describe la forma del límite rígido plástico en la capa superior consiste en plantear la continuidad de las líneas de corriente:

 $\varphi_0 = \varphi_1 \qquad \dots \qquad (3.13.)$ 

La solución de esta ecuación proporcionará la región en el plano cuyos puntos cumplen con la dicha condición.

La función que describe la forma del límite rígido-plástico ( $\Gamma_{s1}$ ) a la entrada del claro de laminación y que es solución de la igualdad mostrada en la ecuación (3.13.) (que finalmente adquiere la forma de un polinomio de segundo orden para y) queda de la siguiente manera:

$$y_3 = y_3(x) = \frac{-K \pm \sqrt{K^2 - 4C_1M}}{2C_1}$$
 ... (3.14.)

en donde:

$$K = \frac{1}{y_1 - y_2} - C_1 (y_1 + y_2) - \frac{1}{e_{1i}}$$
$$M = C_1 y_1 y_2 - \frac{y_2}{y_1 - y_2} + \frac{e_{2i}}{e_{1i}}$$

Dado que la ecuación del límite rígido-plástico se obtiene a partir de encontrar las raíces de un polinomio de segundo orden, existen aparentemente dos soluciones que satisfacen la continuidad en las líneas de corriente. Sin embargo, al elaborar las representaciones gráficas de ambas soluciones es evidente el hecho de que aquella solución con el signo positivo en el radical involucrado es la representación adecuada de dicho límite.

ſ	TESIS CON				
	FALLA DE ORIGI	EN			



La figura 3.4. muestra la forma de la función que representa el límite rígido-plástico para la capa externa (línea gruesa). El límite queda representado por el segmento de curva acotado entre los puntos A y B. Las líneas restantes representan los contornos tanto del rodillo, de los materiales como del límite rígido plástico de la capa inferior.

# 3.3.3. Análisis del flujo de material en la capa interna.

#### a) En la región previa al claro de laminación

El flujo de material de la capa interior, se puede modelar la misma manera que para el caso del flujo de la capa superior, de forma que:

$$\varphi_2(x, y) = Q_2 \left\{ \frac{y}{e_{2i}} \right\} \quad . \quad . \quad (3.15.)$$

Las componentes de velocidad para esta región son entonces:

$$U_{2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial \varphi_{2}}{\partial y} = Q_{2} \left\{ \frac{1}{e_{2i}} \right\} \qquad (3.16.)$$
$$V_{2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial \varphi_{2}}{\partial \mathbf{x}} = 0 \qquad (3.17.)$$

#### b) Región del claro de laminación.

La capa inferior a diferencia de la superior tiene como límites la propia interfase de ambos materiales ( $\Psi$ ) y el plano medio del conjunto de capas a colaminar el cual, al colocar el origen como se muestra en la figura 3.2., corresponde a la ecuación de la recta y = 0.

Dado el sistema de referencia elegido (ver figura 3.2) la función que representa el campo de velocidades del material de esta capa es sensiblemente más sencilla que la anterior. Al sustituir  $y = y_1 y_2 = y_2$  por  $y = y_2 y_2 = 0$  respectivamente en la ecuación 3.4. la función de corriente correspondiente al flujo de la capa inferior queda de la siguiente manera:

$$\varphi_3(x,y) = Q_2 \left\{ \frac{y}{y_2} + C_2 y \left( y - y_2 \right) \right\}$$
 . . . (3.18.)

en donde:

 $Q_2$  = Gasto volumétrico de la capa inferior.  $y_2$  = Frontera superior. (Entrecara de los materiales).  $C_2$  = Gradiente del perfil de velocidades lineal para la capa inferior.

En este caso,  $C_2$  se asume, al igual que en caso anterior, como una función cuadrática de x, de forma que:

$$C_2 = C_2(x) = a_2 x^2$$
 . . . (3.19.)

 $a_2$ , al igual que  $a_1$ , será uno de los parámetros pseudo-independientes a optimar.

Las componentes de velocidad en este caso se reducen a:

$$U_3(x,y) = \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = Q_2 \left\{ \frac{1}{y_2} + 2C_2 \left( y - \frac{y_2}{2} \right) \right\} \quad \dots \quad (3.20.)$$

$$V_{3}(x, y) = -\frac{\partial \varphi_{3}}{\partial x} = -Q_{2}y \left[ \frac{-y'_{2}}{y_{2}^{2}} - C'_{2} \left( y - y_{2} \right) + C_{2}y'_{2} \right] \qquad (3.21.)$$

Se puede verificar que el campo de velocidades expresado por las ecuaciones (3.20) y (3.21) es también cinemáticamente admisible lo cual significa que satisface todas las condiciones de velocidad en las fronteras y la conservación de masa.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

#### 3.3.4. Determinación del Límite rígido-plástico en la capa interna ( $\Gamma_{S2}$ ).

El límite rígido-plástico para la capa inferior se obtiene de igual manera al plantear la continuidad entre las líneas de corriente de los flujos dentro y fuera del claro de laminación:

$$\varphi_2 = \varphi_3 \qquad \dots \qquad (3.22.)$$

$$y_4 = y_4(x) = y_2 + \frac{[(1/e_{2l}) - (1/y_2)]}{C_2}$$
 ... (3.23.)

En este caso la igualdad mostrada en la ecuación 3.22, gueda representada por una ecuación cuadrática en términos de v<sub>4</sub>. La solución de la misma consiste en dos raíces con el mismo signo (raíces repetidas) las cuales quedan representadas por la ecuación (3.23.).



Figura 3.5. Representación gráfica del límite rígido-plástico. Capa interna.

La figura 3.5. muestra la forma de la función que representa el límite rígido-plástico para la capa interior (línea gruesa). El límite queda representado por el segmento de curva acotado entre los puntos A y B. Las líneas restantes representan los contornos tanto del rodillo, de los materiales como del límite rígido plástico de la capa externa.

Aparentemente son 6 los parámetros desconocidos hasta este punto; estos son:

 $Q_1$  – Gasto volumétrico de la capa externa por unidad de ancho de la cinta  $[m^2/s]$ 

 $Q_2$  – Gasto volumétrico de la capa interna por unidad de ancho de la cinta  $[m^2/s]$ 

 $\mathbf{a}_1$  – Constante que determina el gradiente de la componente lineal del flujo en la capa externa.

 $\mathbf{a}_2$  – Constante que determina el gradiente de velocidad la componente lineal del flujo en la capa interna.

**b** – Amplitud de la parábola que describe la forma de la interfase entre ambas capas.

 $e_{2f}$  – Mitad del espesor final de la capa interna.

. L.,

No obstante, acorde a la consideración (5) descrita al inicio de la sección 3.2.1., si las velocidades de ambos materiales son iguales a la salida se debe cumplir la siguiente relación:

$$\frac{Q_1}{e_{1f}} = \frac{Q_2}{e_{2f}}$$
 ... (3.24.)

de lo cual,  $Q_2$  no resulta ser independiente y depende exclusivamente de  $Q_1$ , y de  $e_{2f}$ (dado que  $e_{1f} = e_i(1-r) - e_{2f}$ , en donde  $e_i$  es conocido de antemano y  $e_{2f}$  se obtiene al final del procesos de optimación.)

En este punto, los campos de velocidades para cada una de las capas han sido derivados. En la siguiente sección se desarrollarán las expresiones que representan el proceso de deformación plástica de los materiales dentro del claro de deformación. Con dichas expresiones se estará en posibilidad de evaluar la energía de deformación necesaria para llevar a cabo el proceso.

#### 3.3.5. Tensores de rapidez de deformación y valor efectivo de rapidez de deformación.

El conocimiento del campo de velocidad durante la deformación de un material permite inferir de inmediato el campo de deformación asociado. La deformación del cuerpo queda descrita por el tensor de rapidez de deformación. En este caso, dicho tensor se simplifica considerablemente al tratar el problema bajo el esquema de deformación plana.

Bajo la consideración de deformaciones planas, el tensor de rapidez de deformación para este caso está dado por:

$$\dot{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} & \dot{\varepsilon}_{xy} & 0 \\ \dot{\varepsilon}_{yx} & \dot{\varepsilon}_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \qquad (3.25.)$$

y debido a que se trata de un tensor simétrico se tiene:

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{yx} \qquad \dots \qquad (3.26.)$$

Como es conocido, cada una de las componentes de dicho tensor se calculan a partir de conocer el campo de velocidades de la siguiente manera:

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \qquad (3.27.)$$
$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \qquad (3.28.)$$

$$\dot{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \quad . \quad . \quad (3.29.)$$

Como puede suponerse de antemano y dado que no existe deformación antes y después del claro de laminación, todas las componentes de los tensores de rapidez de deformación en dichas regiones valen cero.

$$\dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{xx} = \dot{\varepsilon}_{yx} = \dot{\varepsilon}_{xy} = \dot{\varepsilon}_{xy} = 0$$
 . . . (3.30.)

Conocidos los campos de velocidad para cada una de las capas sólo basta con calcular la rapidez de deformación plástica equivalente lo cual permite evaluar la potencia consumida por el proceso de forma escalar como se mostrará en la siguiente sección.

# 3.3.6. Potencia interna consumida por deformación plástica.

Los análisis por método de límite superior se basan en la minimización de una funcional que proporciona la mejor aproximación al valor de la potencia consumida por el proceso. Las expresiones que relacionan la rapidez de deformación con los diferentes términos de potencia que pueden ser considerados se han descrito ampliamente en la sección 2.4. y quedan descritas por las ecuaciones de la (2.42.) a la (2.47).

#### 3.3.6.a. Capa externa.

Para un material con que se deforma según lo descrito por la teoría de Levy-Mises el integrando de la ecuación (2.42.) puede evaluarse de forma escalar como la integral mostrada en la ecuación (3.31.).

$$\dot{W}_{i1} = \sigma_{0_1} \int_{v} \dot{\varepsilon}_{eq1} dV \qquad (3.31.)$$

Donde  $\dot{\varepsilon}_{eq1}$  es la deformación plástica equivalente y se evalúa a partir de la ecuación (1.24) haciendo uso de las expresiones para las componentes de velocidad – ecuaciones (3.16.) y (3.17) – .  $\sigma_0$  es el esfuerzo de cedencia del material de las capas externas.

La integral representada por la ecuación (3.31.) en principio es una integral de volumen. En el caso particular, dado que se trata de un análisis en el plano, la región de integración se convierte en un plano y este termino de potencia se evalúa mediante una integral doble simplemente. Los resultados obtenidos estarán expresados por unidad de longitud, teniendo después que multiplicar cada término por el ancho de la cinta. La figura 3.6. muestra la región de integración.



Figura 3.6. Evaluación de la potencia consumida por deformación. Capa externa.

 $y_1(x)$  – Superficie del rodillo ( $\Gamma_1$ ).

 $y_2(x)$  – Interfase de las capas exterior e interior ( $\Psi$ ).

 $y_3(x)$  – Límite rígido plástico de la capa exterior ( $\Gamma_{S1}$ ).

La integral sobre la región de interés (la parte sombreada) es:

$$\sigma_{0_{1}}\int_{V}\dot{\varepsilon}_{eq_{1}}dV = \sigma_{0_{1}}\left[\int_{0}^{L}\int_{1/2}^{y_{1}(x)}\dot{\varepsilon}_{eq_{1}}(x,y)dydx - \int_{L_{1}}^{L}\int_{1/2}^{y_{2}(x)}\dot{\varepsilon}_{eq_{1}}(x,y)dydx - \int_{0}^{L_{1}}\int_{1/2}^{y_{2}(x)}\dot{\varepsilon}_{eq_{1}}(x,y)dydx\right] \quad . \quad (3.32.)$$

en donde la segunda y tercera integral corresponden a las regiones 2 y D respectivamente.

En la evaluación de las integrales implícitas en la ecuación (3.32.) es necesario conocer tanto L, como  $L_l$ .

En el caso de L es sencillo calcular su valor, del análisis de la geometría del conjunto mostrado en la figura 3.2., es fácil demostrar que:

$$L = \sqrt{2R(e_{mi} - e_{mf}) - (e_{mi} - e_{mf})^{2}} \quad . \quad . \quad (3.33.)$$

Otra forma más simple de evaluar L se obtiene a partir de una aproximación por series y es:



Dado que la diferencia en tiempo de procesador necesario para evaluar cada uno de cualquiera de estas dos expresiones es insignificante, en el algoritmo desarrollado L se obtendrá de la ecuación (3.34.)

Para  $L_1$  es necesario hacer cualquiera de los dos procedimientos siguientes:

1. Resolver la ecuación que  $y_2(x) = t_{2i}$  de lo cual se obtiene:

$$L_{1} = \frac{t_{2i} - t_{2f}}{b} \qquad . . . (3.35.)$$

2. Encontrar la raíz de la siguiente ecuación:

$$y_3(x) = t_{2i}$$
 . . . (3.36.)

La segunda opción resulta inconveniente en función de que hay que implementar un algoritmo numérico para la búsqueda de la raíz. El problema de utilizar métodos numéricos para encontrar la raíz de la ecuación (3.36.) ocurre cuando el valor de la pendiente de  $y_3(x)$  tiende a ser infinita, es decir cuando el límite rígido plástico tiende a ser una línea vertical. Debido a que los métodos numéricos para encontrar la raíz de una ecuación utilizan incrementos diferenciales, la definición de un valor adecuado para dicho incrementos e torna difícil de manejar y su mala elección conlleva por lo común a incurrir en bucles infinitos durante la búsqueda de la raíz (como es el caso característico del método de Newton-Raphson). Como se mostrará a continuación para el caso de la capa inferior es necesario implementar un método numérico para encontrar un límite de integración. Una variante del método de bisección que resulta ser interesante por su simplicidad se desarrolló para dar solución al problema.

Conocidos los límites de integración y la forma de evaluar la integral a través de hacer uso de la propiedad de superposición del operador integral resulta fácil evaluar el término que define la potencia interna consumida por la deformación.

#### 3.3.6.b. Capa interna.

La evaluación del término de potencia disipada por deformación concerniente a la capa interna requiere que la siguiente integral sea evaluada:

$$\dot{W}_{i2} = \sigma_{0_2} \int_{V} \dot{\varepsilon}_{aq2} dV$$
 ... (3.37.)

En donde  $\dot{c}_{eq2}$  es la deformación plástica equivalente y se evalúa a partir de la ecuación (1.24.) haciendo uso de (3.20.) y (3.21.).  $\sigma_{o_2}$  es el esfuerzo de cedencia del material de la capa interna.

Capitulo 3. Descripción del modelo.



Figura 3.7. Región de Integración. Potencia consumida por deformación. Capa interna.

 $y_2(x)$  – Interfase de las capas exterior e interior ( $\Psi$ ).  $y_4(x)$  – Superficie de discontinuidad de velocidad de la capa interna ( $\Gamma_{S2}$ ).

La integral sobre la región de interés (la parte sombreada) es:

$$\sigma_{0_{2}} \int_{V}^{L} \dot{e}_{eq2} dV = \sigma_{0_{2}} \left[ \int_{0}^{L} \int_{0}^{y_{1}(x)} \dot{e}_{eq2}(x, y) dy dx - \int_{L_{1}}^{L} \int_{0}^{y_{1}(x)} \dot{e}_{eq2}(x, y) dy dx \right] \qquad (3.38.)$$

Donde la segunda integral corresponde a la región marcada como  $\Phi$ .

En la evaluación del segundo término de la ecuación (3.38.) es necesario conocer los límites de integración; L se calcula mediante la ecuación (3.34.) mientras que ahora para  $L_2$  es inevitable implementar un método numérico para determinar su valor. En la implantación del programa, en un principio se intentó utilizar el método de Newton-Raphson, el cual aseguraba una solución rápida y confiable. No obstante, en la práctica resultó no deseable su uso. Ello debido a que cuando el límite rígido plástico tiende a ser una línea vertical lo cual ocasionaba serios problemas al método.

Por ello se decidió, como una alternativa que evita el inconveniente de tener que calcular las derivadas de  $y_d(x)$ , utilizar el método de bisección pero haciendo una modificación que permite que el programa seleccione de manera conveniente los puntos entre los que se encuentra la raíz partiendo de un valor donde se sabe de antemano que la función toma un valor positivo y haciendo un avance progresivo sobre la función hasta encontrar un cambio de signo con lo cual se puede iniciar el proceso de búsqueda de la raíz.



Este método resultó ser el conveniente no solo para la determinación de  $L_2$  sino también de diversas raíces de ecuaciones que resultan necesarias a lo largo del desarrollo del algoritmo para el modelo.

# 3.3.7. Potencia interna consumida por cortante en las superficies de discontinuidad de velocidad.

El campo de velocidades para ambas capas ha sido planteado como la superposición geométrica de dos flujos distintos en distintas regiones, es decir, para el caso de la capa superior: un flujo para el claro de laminación descrito por la función de corriente  $\varphi_1$  y un flujo para el material que se dirige hacia el interior de dicho claro representado por la función de corriente  $\varphi_2$  y un flujo para el caro de laminación descrito por la función de laminación descrito por la función de corriente  $\varphi_2$  y un flujo para el claro de laminación descrito por la función de corriente  $\varphi_3$  y un flujo para el material que se dirige hacia el interior de dicho claro representado por la función de corriente  $\varphi_2$ .

Por ello, es necesario tomar en cuenta el termino asociado a ambas superficies de discontinuidad de velocidad que se generan  $(\Gamma_{51} \ y \ \Gamma_{52})$ . El efecto de los rodillos sobre el material que se interna en el claro de laminación es proveer una aceleración del mismo de forma que la condición de conservación de volumen sea satisfecha. Es por ello que el material pasa de un punto en donde la velocidad es horizontal a otro en donde su vector velocidad cambia tanto en magnitud (incrementándose ésta) como en dirección. Los límites rígido-plásticos puede considerarse como límites que indica la transición entre la región de deformación plástica y el flujo previo al claro de laminación.

#### 3.3.7.a. Capa externa.

s de bicas

La potencia necesaria para generar las superficies de discontinuidad de velocidad implícitas en la definición discontinua del campo de velocidad en la capa superior se evalúa a partir de la siguiente integral:

$$W_{s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{0_1} \iint_{\Gamma_{S1}} \Delta V \Big|_{\Gamma_{S1}} dS \qquad (3.39.)$$

En donde el factor  $1/\sqrt{3}$  define junto con  $\sigma_{o_1}$  el valor del cortante crítico para la capa superior.

El término  $\left|\Delta V\right|_{\Gamma_{s_1}}$  es la diferencia de velocidad tangencial entre ambos perfiles de velocidad (el definido por  $\phi_0$  y el definido por  $\phi_1$ ).

La figura 3.8. muestra los triángulos de velocidad correspondientes a los campos de velocidad definidos por  $\phi_1$  y  $\phi_2$  evaluados en el límite rígido plástico.



Figura 3.8. Descomposición de velocidades en componentes normal y tangencial.

Por continuidad, las componentes normales a la superficie de discontinuidad de velocidad para ambos flujos tendrán que ser iguales, de manera que:

en donde:

$$\theta = \tan^{-1} y'_{3}(x)$$
  $u_{0} = \frac{Q_{1}}{e_{11}}$ 

Sin embargo, las componentes tangenciales de velocidad no serán iguales y su diferencia puede evaluarse a partir de un análisis geométrico simple de la figura 3.8. de lo que se obtiene lo siguiente:

$$v_{i1} = u_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta \qquad \dots \qquad (3.41.)$$
$$v_{i0} = u_0 \cos \theta \qquad \dots \qquad (3.42.)$$

Debido a que tanto  $u_1$ ,  $v_1$  como  $u_0$  son todos funciones sólo de la posición (x,y), entonces  $\left|\Delta V\right|_{\Gamma_{s_1}}$  será también función sólo de la posición, de forma que finalmente se tiene lo siguiente:

$$\left|\Delta V\right|_{\Gamma_{S1}} = \left|\Delta V\right|_{\Gamma_{S1}}(x,y) = \left|u_1(x,y)\cos\theta + v_1(x,y)\sin\theta - u_0(x,y)\cos\theta\right| \qquad (3.43.)$$

Del análisis es en el plano, la integral de la ecuación 3.39. es en realidad una integral de línea. Haciendo uso de una definición del cálculo integral para la evaluación de integrales se puede demostrar que: si una curva C está dada por sus ecuaciones paramétricas x=g(t) y y = h(t) y definida dentro del intervalo  $a \le t \le b$  y si además f(x,y) es continua en una región D que contiene a C entonces se cumple lo siguiente:



$$\int_{C} f(x, y) dS = \int f(g(t), h(t)) \sqrt{[g'(t)^{2} + h'(t)^{2}]} dt \qquad (3.44.)$$

para el caso en particular del límite rígido-plástico,  $\Gamma_{S1}$ , y en el caso más sencillo, las ecuaciones paramétricas que definen el contorno de  $\Gamma_{S1}$ , pueden escribirse de la siguiente manera:

g(t) = t  $h(t) = y_3(t)$  g'(t) = 1  $h'(t) = y'_3(t)$ ... (3.45a y 3.45b) ... (3.46a y 3.46b)

Por otra parte en este caso, la función f(x,y) es la diferencia de velocidades tangenciales dada por la ecuación (3.38.) de forma que:

$$f(g(t),h(t)) = |\Delta V|_{\Gamma_3}(g(t),h(t)) \qquad (3.47.)$$

De la Figura 4.2. se puede observar claramente que los límites inferior y superior de integración para la superficie que define a  $\Gamma_{S1}$  son L1 y L respectivamente.

De forma que al sustituir la ecuación (3.38) en (3.34.) y haciendo uso de la definición dada por (3.39.) y las ecuaciones paramétricas (3.40a, 3.40b, 3.41a y 3.41b), la ecuación (3.34) se puede rescribir de la siguiente manera:

$$W_{S1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{0_1} \int_{L_1}^{L_1} |u_1(t, y_3(t)) \cos \theta + v_1(t, y_3(t)) \sin \theta - u_0(t, y_3(t)) \cos \theta |\sqrt{1 + y'_3(t)^2} dt \qquad (3.48.)$$

La ecuación 3.48. representa, en su forma más extensa, la forma en la que el término  $W_{SI}$  será evaluado.

#### 3.3.7.b. Capa interna.

Este término de potencia está dado por:

and a second second second

$$W_{S2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{o_2} \int_{\Gamma_{S2}} \left| \Delta V \right|_{\Gamma_{S2}} dS \quad . \quad . \quad (3.49.)$$

donde al igual que en caso anterior el cociente  $\sigma_{02}/\sqrt{3}$  representa el cortante crítico para la capa interna.
. ċ

El procedimiento resulta ser el mismo que el anterior. La construcción de un hodógrafo similar al mostrado en la figura 3.9. arroja las siguientes relaciones entre las componentes de velocidad en el límite rígido-plástico.

$$u_1 \operatorname{sen} \theta - v_1 \cos \theta = u_2 \operatorname{sen} \theta$$
 ... (3.50.)

donde:

$$\theta = \tan^{-1} y'_4(x)$$
  $u_2 = \frac{Q_2}{e_{2i}}$ 

La diferencia de velocidades tangenciales al límite rígido plástico,  $\Gamma_{S2}$ , es:

$$\left|\Delta V\right|_{\Gamma_{s_2}} = \left|\Delta V\right|_{\Gamma_{s_2}}(x,y) = \left|u_3(x,y)\cos\theta + v_3(x,y)\sin\theta - u_2(x,y)\cos\theta\right| \qquad (3.51.)$$

Las ecuaciones paramétricas para el límite rígido plástico,  $\Gamma_{S2}$ , son:

$$g(t) = t$$
  

$$h(t) = y_4(t)$$
  

$$g'(t) = 1$$
  

$$h'(t) = y'_4(t)$$
  

$$(3.52a y 3.52b)$$
  

$$(3.53a y 3.53b)$$

De la Figura 3.2. se observa claramente que los límites de integración para la superficie que define a  $\Gamma_{S2}$  son  $L_1$  y  $L_2$  (limite inferior y límite superior respectivamente).  $L_1$  se calcula con la ecuación 3.35, mientras que  $L_2$  deberá ser de nuevo obtenido mediante el método de bisección como se mostró en la sección 3.3.6b.

Finalmente la expresión que resulta para la evaluación de  $W_{S2}$  es:

$$W_{s2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{0_2} \int_{L}^{L_2} |u_3(t, y_4(t)) \cos \theta + v_3(t, y_4(t)) \sin \theta - u_2(t, y_3(t)) \cos \theta | \sqrt{1 + y'_4(t)^2} dt \quad (3.54.)$$

# 3.3.8. Potencia consumida por fricción entre el rodillo y el material de las capas externas.

Debido al deslizamiento relativo que ocurre entre las superficies de los rodillos y del material de la capa externa la potencia consumida por el proceso se incrementa. La fricción será función de la cantidad de deslizamiento relativo entre ambas superficies así como de la rugosidad y condiciones superficiales de las mismas.

La expresión para evaluar este término está dada por:



En este caso se está considerando que la fricción entre los rodillos y el material obedece al modelo de fricción constante, en donde  $m_i$  es conocido comúnmente como el factor de fricción y su valor, dependiendo de la condición de lubricación, está comprendido en el intervalo  $0 \le m \le 1$ . La utilización de este modelo resulta conveniente ya que no es necesario conocer las fuerzas normales para calcular la fricción como es el caso del modelo de Coulomb,  $\tau = \mu P$ .

El primer paso para el cálculo de la potencia disipada por fricción es evaluar la diferencia de velocidades tangenciales entre ambas superficies. Las figuras 3.9. y 3.10. muestran los vectores de velocidad correspondientes a un punto coincidente tanto para el rodillo como para la capa externa. El punto neutro es denotado por N. La velocidad del material antes del punto neutro es menor que la del rodillo la magnitud del vector  $V_2$ , que representa la velocidad del material en dicho punto, será menor que la correspondiente magnitud del vector  $V_r$  que representa la velocidad tangencial del rodillo.

En principio aparentemente es necesario evaluar la diferencia de velocidad (implícita en la ecuación 3.55.) por intervalos separados por la ubicación del punto neutro. Sin embargo, esto no resulta necesario pues para términos de potencia el sentido de la fuerza de fricción no tiene ninguna implicación física respecto dado que la potencia es una función escalar independiente de la dirección en la que se desarrolla el trabajo.

Por otra parte,  $\Gamma_1$  representa la superficie del rodillo y está descrita por  $y_1(x)$  -ecuación (3.7.) –



La velocidad tangencial del rodillo  $\overline{V_r}$  se puede expresar de forma vectorial como el producto cruz del radio vector:

$$\vec{r} = r_x \hat{i} + r_y \hat{j}$$
 . . . (3.56.)

que indica la posición de cualquier punto sobre la superficie del rodillo, con el vector:

$$\overline{\omega} = -\omega \hat{k} \qquad \qquad \dots \qquad (3.57.)$$

que representa la velocidad angular de los rodillos. El signo menos corresponde al sentido de giro de los rodillos que en este caso se considera en la dirección de avance de las manecillas del reloj.

Asi, 
$$\overline{V}_r$$
 es:  
 $\overline{V}_r = \overline{\omega} \times \overline{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega \\ r_x & r_y & 0 \end{vmatrix} = -\omega r_y \hat{i} + \omega r_x \hat{j} \qquad \dots \quad (3.58.)$ 

donde:

$$r_x = x = R \sin \alpha$$
  
 $r_y = R \cos \alpha$  ... (3.59a y 3.59b)  
 $\alpha = \arcsin\left(\frac{x}{R}\right)$  ... (3.60.)

de forma que las componentes de la velocidad tangencial del rodillo se pueden escribir de la siguiente manera:

$$V_{\alpha}(x) = -\omega R \cos \alpha \qquad (3.61a)$$
$$V_{\alpha}(x) = \omega x \qquad (3.61b)$$

La velocidad del material está dada simplemente por las ecuaciones (3.10.) y (3.11.) evaluadas en  $\Gamma_1$ , es decir:

$$U_{1}(x, y)\Big|_{y=y_{1}(x)} = \frac{\partial \varphi_{1}}{\partial y}\Big|_{y=y_{1}(x)} \qquad (3.62a)$$
$$V_{1}(x, y)\Big|_{y=y_{1}(x)} = -\frac{\partial \varphi_{1}}{\partial x}\Big|_{y=y_{1}(x)} \qquad (3.62b)$$

Al sustituir  $y_1(x)$  por y las ecuaciones para la velocidad del material de la capa superior quedan sólo en función de x y de los parámetros geométricos del proceso.

Las diferencias entre las componentes cartesianas son entonces funciones exclusivamente de x y se pueden evaluar como:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN
$$\Delta V_i = V_{rx}(x) - U_1(x, y)\Big|_{y=y_1(x)} \quad ... \quad (3.63a)$$

$$\Delta V_j = V_{ry}(x) - V_1(x, y)\Big|_{y=y_1(x)} \quad ... \quad (3.63b)$$

De forma que la diferencia de velocidades en la integral de la ecuación (3.55.) puede evaluar finalmente como:

$$\left|\Delta V\right|_{\Gamma_{i}} = \sqrt{\Delta V_{i}^{2} + \Delta V_{j}^{2}} \qquad (3.64.)$$

y entonces el término de potencia que representa las pérdidas por fricción en con los rodillos puede ser evaluado de manera sencilla.

### 3.3.9. Potencia consumida por fricción en la interfase.

Dado que es posible que ocurra deslizamiento entre las capas durante su paso a través del claro de laminación la potencia asociada a la fricción existente debida al deslizamiento podría jugar un papel importante en la solución del problema. Si bien, de antemano se espera que su contribución a la potencia total sea mínima y muy por debajo de la potencia necesaria para llevar a cabo la deformación e inclusive a aquella debida a la fricción en la superficie de los rodillos, la consideración de este término conduce a una mejora en el proceso de optimación.

Lo anterior debido a que por su naturaleza, este término constituye una limitante para la diferencia de velocidades entre ambas capas, es decir, que el mínimo de energía deberá coincidir con la condición de mínimo deslizamiento relativo entre ambas capas para asegurar que no exista un excedente en la potencia necesaria para la deformación por un término que en nada contribuye a la deformación.

La expresión para el cálculo de este término esta dada por:

$$W_{f} = \frac{m_2}{\sqrt{3}} \sigma_{02} \iint_{\Psi} \Delta V \Big|_{\Psi} dS \qquad (3.65.)$$

El conflicto aparente en la omisión de este término por Hwang puede ser debido a que resulta difícil, en principio, calcularlo utilizando el modelo de fricción constante, puesto que se necesita definir un esfuerzo para su cálculo y ocurre que en la interfase son dos materiales los que deslizan uno sobre el otro.

Este inconveniente puede ser solventado si se piensa en la capa superior como una extensión de los rodillos. Y únicamente, para efectos de calcular este término de potencia, se le considera un cuerpo rígido. Físicamente esto puede estar sustentado si se considera el proceso estacionario, es decir cuando no existen cambios en el tiempo de las variables del proceso. Aún cuando esto resulta ser poco realista, permite aproximar el problema de una mejor manera.

Así, la capa superior funge como herramienta de deformación para la capa inferior y esta es una posible justificación para introducir en la ecuación el esfuerzo de cedencia de la capa inferior,  $\sigma_{02}$ , para el cálculo de la potencia disipada por fricción en la interfase.

Para la evaluación de este término de potencia, al igual que en el caso anterior, es necesario plantear la diferencia de velocidades entre las capas en términos de las diferencias de las componentes horizontal y vertical entre cada una de las capas. De manera que para ello es sólo necesario calcular las diferencias de cada una de las componentes de velocidad de ambas capas evaluadas en la superficie que define la interfase (Ψ) y obtener la diferencia entre ambas. Por ejemplo, para el caso de la capa superior se tiene lo siguiente:

$$U_{1}\Big|_{\Psi} = U_{1}(x, y)\Big|_{y=y_{2}(x)} \qquad (3.66a)$$
$$V_{1}\Big|_{\Psi} = V_{1}(x, y)\Big|_{y=y_{2}(x)} \qquad (3.66b)$$

y de manera similar para la capa inferior se tiene lo siguiente:

 $U_{2}|_{\psi} = U_{2}(x, y)|_{y=y_{2}(x)} \qquad (3.67a)$  $V_{2}|_{\psi} = V_{2}(x, y)|_{y=y_{2}(x)} \qquad (3.67b)$ 

Y la diferencia de velocidades se evalúa simplemente al considerar la magnitud de la diferencia total, es decir:

$$\left|\Delta V\right|_{\Psi} = \sqrt{\left(U_2 - U_1\right)_{\Psi}^2 + \left(V_2 - V_1\right)_{\Psi}^2} \qquad (3.68.)$$

#### 3.3.10. Cálculo de la potencia total consumida por el proceso.

El cálculo de la potencia total se obtiene al sumar los términos individuales de potencia descritos anteriormente.

Los términos de potencia considerados se resumen a continuación.

- 1. Potencia interna consumida por deformación plástica en ambas capas. (Wi).
- 2. Potencia consumida por diferencia de velocidades tangenciales en los límites rígidoplásticos de ambas capas (*W<sub>s</sub>*).
- 3. Potencia consumida por fricción entre los rodillos y el material de las capas externas (W<sub>j</sub>).
- 4. Dado que se considera que los materiales se unen a la salida se debe considerar la potencia disipada por fricción en la interfase de las capas que se colaminan  $(W_{fl})$ .

Finalmente a continuación se muestra en resumen las ecuaciones que permiten la evaluación de cada uno de estos términos:

# **CAPA SUPERIOR:**

$$\dot{W}_{i1} = \sigma_{0_1} \int_{V_1} \dot{\varepsilon}_{eq} dV$$
$$W_{s1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{0_1} \int_{\Gamma_{wi}} \Delta V \Big|_{\Gamma_{s1}} dS$$

 $W_f = \frac{m_1}{\sqrt{3}} \sigma_{o_1} \int_{\Gamma_1} \Delta V \Big|_{\Gamma_1} dS$ 

(Potencia interna consumida por deformación plástica).

(Potencia consumida por diferencia de velocidad tangencial

en la superficie de corte).

(Potencia consumida por fricción entre el rodillo y la capa superior).

# **CAPA INFERIOR:**

$$\dot{W}_{i2} = \sigma_{02} \int_{V_2} \dot{\varepsilon}_{eq} dV$$
$$W_{s2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_{02} \int_{\Gamma_{s2}} \left| \Delta V \right|_{\Gamma_{s2}} dS$$

(Potencia interna consumida por deformación plástica).

(Potencia consumida por diferencia de velocidad tangencial en la superficie de corte).

INTERFASE:  

$$W_{fl} = \frac{m_2}{\sqrt{3}} \sigma_{02} \iint_{\Gamma_2} \Delta V|_{\Gamma_2} dS$$
 (Potencia consumida por fricción entre el material de la capa inferior y la capa superior).

De lo anterior resultan, finalmente, seis los términos de potencia a evaluar. De forma que la potencia total  $J^*$  queda expresada como:

$$J^* = \dot{W}_{i1} + \dot{W}_{i2} + \dot{W}_{s1} + \dot{W}_{s2} + \dot{W}_{f} + \dot{W}_{fl} \qquad (3.69.)$$

La minimización de  $J^*$ , que finalmente queda expresada en términos de  $Q_1$ , b,  $a_1$ ,  $a_2$ y  $e_{2f}$  (llamados parámetros pseudo-independientes) se realiza mediante el llamado método de búsqueda del *poliedro flexible*.

## 3.4. CARGA APLICADA POR LOS RODILLOS.

Una estimación de la carga aplicada por los rodillos se obtiene a partir de la definición de par y es un método de medir la fuerza desarrollada por los rodillos de forma indirecta mediante el valor de la potencia calculada al final del proceso de optimación.

La expresión para el cálculo de la fuerza de laminación (P) es:

$$P = \frac{J^{\bullet} \cdot R}{L \cdot U_r} \quad . \quad . \quad (3.70.)$$

donde,  $J^*$  es el valor de la funcional descrita por la ecuación 3.69., R es el radio de los rodillos, L es la longitud proyectada del arco de contacto –ecuación 3.33– y  $U_r$  es la velocidad lineal de los rodillos.

El cálculo de la carga de laminación permitirá evaluar la correlación entre los resultados experimentales (en donde comúnmente la carga puede medirse mediante los transductores apropiados) con la potencia calculada mediante límite superior.

# 3.5. OPTIMACIÓN DE J\* MEDIANTE EL MÉTODO DEL POLIEDRO FLEXIBLE.

La minimización de la funcional  $J^*$  proporciona el campo de velocidad más próximo al real y con ello también los valores de los parámetros que definen la configuración geométrica y cinemática del proceso. Evidentemente el parámetro  $e_{2f}$  será el más importante en función de que las características de los productos finales dependerán fuertemente de su valor.

Para encontrar el mínimo de la ecuación (3.69.) se puede hacer uso de diversos métodos existentes para tal fin. No obstante, hasta este punto, puede verse fácilmente que se requiere hacer uso de métodos numéricos para evaluar  $J^*$  para un cierto conjunto de parámetros. Por ello cualquier método analítico para la minimización de  $J^*$  no necesariamente será conveniente.

En programación no lineal sin restricciones, existen diferentes métodos que permiten optimizar un conjunto de variables cuya combinación proporciona un mínimo o un máximo de una función. La gran mayoría de estos métodos hace un uso eficiente de la información que las derivadas de la función objetivo proporcionan respecto a la topología de la función. Así, si se piensa en una función que describe una superficie en el espacio de tres dimensiones, los gradientes o derivadas direccionales de dicha función. En algunas ocasiones sucede que se desea optimar una función objetivo que resulta ser no diferenciable, o bien, el cálculo de sus derivadas resulta ser incómodo en términos de programación. En tales casos, contar con un método que haga uso exclusivo de los valores de la función es sumamente deseable. Para hacer que un algoritmo escoja la dirección hacia donde avanzar en la búsqueda de valores extremos de la función se han propuesto varios esquemas. Algunos utilizan simplemente las direcciones de los vectores unitarios del espacio *n*-dimensional donde se define la función objetivo para ir en búsqueda de un mínimo; sin embargo, existe un método más efectivo que construye la trayectoria hacia el mínimo de la función a partir de movilizar un conjunto de puntos en dicho espacio que constituyen lo que se conoce como un *simplex* o bien un *poliedro* el cual, durante el proceso, se regenera y avanza (expandiéndose, contrayéndose y rotando) en la dirección de la trayectoria óptima que conduce hacia un mínimo de la función objetivo. Comúnmente este conjunto de puntos se le denomina *poliedro flexible* por la re-configuración geométrica que éste sufre durante la búsqueda del mínimo de la función. Este algoritmo fue desarrollado por Nelder y Mead en la década de los 60's<sup>6</sup>.

Este esquema es popular debido a lo robusto de su capacidad para encontrar mínimos en procesos de optimación de funciones cuyas variables no están restringidas<sup>a</sup> sin hacer uso de derivadas de la función.

En el caso en estudio, el algoritmo se ajusta perfectamente a la condición de la función objetivo  $(J^*)$ , dado que si bien no resulta ser imposible calcular sus derivadas la forma de la función le supone un proceso demasiado complejo, si no imposible(ya que  $J^*$  está definida en términos de integrales que no resultan ser nada triviales). Y aún cuando es factible calcular numéricamente su derivada por medio de los esquemas conocidos para este objetivo, el hacerlo así, implicaría una mayor propagación del error asociado al cálculo mismo de  $J^*$  ya que el cálculo numérico de derivadas hace uso exclusivo de evaluaciones de la función por lo que resulta evidente descartar esta opción por ser redundante en el problema de pérdida de precisión en la solución.

De un análisis cualitativo del efecto de los parámetros sobre la configuración geométrica que adquiere el modelo, se desprenden las siguientes restricciones para los mismos:

1. 
$$b > b_{min.}$$
 donde  $b_{min.} = \frac{e_{2i} - e_{2f}}{x_{cont.}}$  ... (3.71.)

y  $x_{cont.}$  es la distancia desde el plano de salida del material hasta el punto donde el material de la capa superior hace contacto con los rodillos, denotado por L en las ecuaciones del modelo. El valor de b no podrá superar el mínimo expresado en la ecuación (3.71.) debido a que ello implicaría que el punto de unión  $P_k$  (ver figura 3.2.) se encontraría más allá del plano de entrada del material lo cual resulta fisicamente imposible.

2.  $a_1 > 0$  . . . (3.72a)

<sup>&</sup>lt;sup>6</sup> Ref. [7].

<sup>\*</sup> Se mostrará más adelante la posibilidad y utilidad de restringir por medio de hiperplanos la región de búsqueda para el caso en cuestión.

# 3. $a_2 > 0$ . . . (3.72b)

Las restricciones impuestas por las ecuaciones (3.72a) y (3.72b) tienen su justificación principalmente en que el valor tanto de  $a_1$  como el de  $a_2$  representan la aportación del flujo linealmente distribuido al flujo uniforme. Dado que este término representa una perturbación cualitativa del flujo uniforme, una aportación negativa en este sentido no tendría significado físico.

Aún más, de las ecuaciones que describen los límites rígido-plásticos para cada una de las capas, es fácil demostrar que las ecuaciones respectivas se indeterminan cuando  $a_1$  ó  $a_2$  toman un valor de cero.

4. 
$$Q_1 < 0.$$
 . . . (3.73)

Aún cuando esta restricción carece de significado físico resulta necesario introducirle en el código fuente debido a la combinación entre el sistema de referencia elegido y la dirección de flujo de material (izquierda a derecha).

5. 
$$|Q_t| > |Q_{min}|$$
, donde  $|Q_t| = |Q_t| + |Q_2| y |Q_{min}| = |\omega, R.e_{mf}|$  (3.74)

Esta restricción está basada en el hecho de que la velocidad de flujo de material en el mejor de los casos será igual a la velocidad de los rodillos. Esto permite restringir el gasto total de ambas capas a un valor mínimo denotado por  $Q_{min}$  lo que corresponde al gasto que se tiene cuando la velocidad del material a la salida del claro de laminación es igual a la velocidad lineal del rodillo.

6.	$e_{2f} < e_{2i}$	•	٠	•	(3.75a)
7.	$e_{lf} < e_{li}$	•	•		(3.75b)

Estas dos restricciones son triviales en principio. No obstante, dado que el algoritmo de optimación no reconoce el significado físico de los parámetros a optimizar en necesario introducirles para evitar caer en incoherencias físicas.

Todas estas ecuaciones representan las restricciones físicas del proceso y pueden ser añadidas al modelo de optimación lo cual hace que el simplex se contraiga cuando se rebasan alguno de estos límites (que se pueden interpretar como hiperplanos en un espacio de 5 dimensiones), esto se logra provocando que la función adquiera un valor muy grande lo que induce la contracción del simplex acotando de esta manera todos sus puntos dentro del lado permitido del hiperplano en cuestión.

Esta técnica es validada originalmente en la propuesta inicial del método desarrollada por Nelder y Mead y en el caso en cuestión evita, entre otras cosas, que el valor de la función adquiera valores negativos, lo cual resulta ser físicamente inadmisible para el caso en cuestión dado que no es posible tener valores negativos para J\*.

e de la companya de la comp



# 4.1. INTRODUCCIÓN.

En la elaboración de un modelo que predice el comportamiento de alguna variable durante un proceso físico, resulta indispensable comparar la respuesta proporcionada por el mismo con la respuesta real del material durante el proceso. Esto sólo puede llevarse a cabo mediante el diseño de un experimento que se ajuste en la mejor medida a las condiciones planteadas por el modelo y que permita medir directa o indirectamente el comportamiento de ciertas variables de interés.

En el caso de los procesos de laminación, la carga aplicada por los rodillos se mide indirectamente mediante transductores que relacionan el desplazamiento con la fuerza desarrollada por los rodillos.

En el contexto del modelado del proceso de colaminado, las variables de interés principales serán la resistencia de la unión y la deformación individual de cada una de las capas. Aún cuando no existen demasiadas publicaciones relacionadas con la caracterización de la unión en los productos colaminados algunos autores y profesionales dedicados a la manufactura de los mismos coinciden en que tanto la temperatura, la presión y la velocidad de laminación son factores que se relacionan de forma directa con la resistencia y carácter final de la unión.

Dado que el método presentado en este trabajo se basa en la minimización de la potencia necesaria para llevar a cabo el proceso, resulta deseable, para efecto de validar la solución proporcionada por el modelo, conocer el valor de la potencia real suministrada por el laminador. La fuerza aplicada por los rodillos es función de la potencia consumida por el proceso y por lo tanto es posible correlacionar la potencia indirectamente mediante la comparación entre la carga registrada por el sistema de adquisición de datos del laminador y aquella calculada a partir de la solución por LS.

Cabe reiterar que el modelo desarrollado no predice la naturaleza de la unión entre los materiales colaminados. Sin embargo durante las pruebas experimentales se indujeron las condiciones físicas necesarias que aseguran una elevada fricción entre las capas y entre los rodillos y el material de la capa superior. Esto permite modelar el fenómeno bajo una condición límite de fricción seca y comparar los resultados experimentales y los arrojados por el modelo, sin caer en complicaciones de tener que determinar el coeficiente de fricción correspondiente a cada caso.

A continuación se presentan los resultados obtenidos de la experimentación y simulación de un caso particular de colaminado de acero y aluminio.



# 4.2. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO EXPERIMENTAL.

Las pruebas se llevaron a cabo en los laboratorios de metalurgia de la Universidad de Gante en Bélgica. El laminador empleado, con una capacidad de 150 Ton., cuenta con la instrumentación necesaria para el registro de la fuerza y velocidad de los rodillos, así como también de temperatura en las zonas anterior y posterior al claro de laminación y la corriente del motor que impulsa el tren de accionamiento de los rodillos.

Las figuras 4.1. y 4.2. muestran el equipo empleado. Los rodillos utilizados son para el laminado en caliente y tienen un diámetro de 315 mm. A pesar de trabajar con rodillos para laminado en caliente, las pruebas se realizaron a temperatura ambiente. La razón fundamental para el empleo de rodillos para laminado en caliente es que su uso favorece un aumento en la fricción debido a la rugosidad característica de los mismos. Aún cuando la dureza de este tipo de rodillos es significativamente menor que la de aquellos empleados para el laminado en frío, la rigidez estructural de las columnas del laminador así como el tamaño de los rodillos permite trabajar con reducciones elevadas en un solo paso sin provocar daños en la superficie de los rodillos o bien en los demás componentes del laminador.





Figura 4.1. Laminador empleado.



Figura 4.2. Detalle de los rodillos.

Dada la disponibilidad de material para llevar a cabo los experimentos, los materiales seleccionados para la colaminación fueron acero de bajo contenido de carbono y aluminio grado alta pureza, siendo éstos muy similares en cuanto a su comportamiento mecánico respecto a los empleados en la fabricación de cojinetes de deslizamiento. Las hojas de los materiales empleados tienen los siguientes espesores:

Material	Espesor
	[mm]
Acero	4.80
Aluminio	1.98

La disposición de las capas se muestra en la figura 4.3.



Figura 4.3. Disposición de capas.

Debido a la incertidumbre respecto al tipo de acero empleado se requirió analizar la composición química del mismo, la cual se obtuvo mediante un análisis químico por chispa.

	C	Si	Mn	P	S	Cr	Mo	Ni	AI	Cu	Nb
	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
x	0.12	0.009	0.50	0.009	0.012	0.063	0.014	0.050	0.045	0.081	< 0.00
	Ti	V	W	Pb	Sn	As	Zr	B	N	Fe	
x	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%	%
	~0.00	~0.00	0.016	0.008	0.004	0.006	0.006	~0.00	0.0069	~99.1	1

Tabla 4.1.

Las propiedades mecánicas se obtuvieron mediante prueba de tracción en probetas tipo A25 para el acero; mientras que para el aluminio se ensayaron probetas tipo A80. Los parámetros para modelar el fenómeno de endurecimiento en ambos materiales fueron obtenidos mediante un ajuste por mínimos cuadrados de los datos experimentales de esfuerzo y deformación verdaderos. Los resultados de dichos análisis se muestran condensados en la tabla 4.2.

En el caso particular del aluminio, la respuesta del esfuerzo de cedencia durante la deformación no mostró un efecto significante de endurecimiento por trabajo en frío. La figura 4.4. muestra tres de las curvas resultantes de las probetas ensayadas. Lo anterior puede deberse a una gran cantidad previa de trabajo en frío.





Figura 4.4. Pruebas de tracción. Relación esfuerzo-deformación.

La figura 4.5. y 4.6 muestran los histogramas de frecuencia para la medición experimental del esfuerzo de cedencia del acero y del aluminio respectivamente. Éstos muestran una tendencia favorable en cuanto a la desviación en los resultados. Impurezas y defectos en el maquinado de las probetas son factores que originan diferencias.

Tabla	4.2.
-------	------

Асего	Media	Desv. Std.	Unidades
Esfuerzo de cedencia 0.2 % ( $\sigma_v$ ):	292.35	16.74	MPa
Exponente de endurecimiento (n):	0.206	0.005	-
Coeficiente de endurecimiento por TF (K):	697.00	29.13	MPa
Aluminio	Media	Desv. Std.	Unidades
Esfuerzo de cedencia 0.2% ( $\sigma_v$ ):	110.00	1.26	MPa
Exponente de endurecimiento (n):	0.00	0.00	-
Coeficiente de endurecimiento por TF (K):	110.00	-	-

TF: Trabajo en frío.

200 0163

Los resultados de las pruebas arrojan que el comportamiento del acero cae dentro del rango típico para este tipo de material. Por otro lado, en el caso de aluminio se trata de una lámina rolada en frio. Situación por la cual no presenta endurecimiento por deformación previo a la fractura del material. El valor del esfuerzo de cedencia confirma esta suposición al ser sensiblemente mayor que el valor característico para este tipo de aluminio.



Figura 4.5. Esfuerzo de cedencia. Acero.



Figura 4.6. Esfuerzo de cedencia. Aluminio.

De los datos obtenidos de las pruebas mecánicas se puede concluir que se cuenta con dos materiales de comportamiento mecánico esencialmente diferente. En el caso del acero cuya estructura cristalina es cúbica centrada en el cuerpo (BCC) el endurecimiento tiene un comportamiento tradicional para este tipo de aleación. Por otro lado de las pruebas arrojadas respecto al aluminio utilizado, cuya estructura es cúbica centrada en las caras (FCC), se observa que tiene la particularidad de no presentar endurecimiento con la deformación. La relación entre el esfuerzo de cedencia del acero respecto al aluminio es de aproximadamente 3 a 1 y esto aunado al comportamiento de los materiales durante la deformación



#### 4.3. DESCRIPCIÓN DE LAS PRUEBAS.

Para la realización de los ensayos se procedió a limpiar mecánica y químicamente las superficies para asegurar condiciones de fricción seca durante el proceso. Dado que el estudio de la unión no es abordado por el presente trabajo, solamente se efectuaron aquellos procedimientos que favorecieran un alto coeficiente de fricción entre los materiales así como entre los rodillos y el material de las capas externas. A continuación se describen brevemente los procedimientos de limpieza empleados así como la preparación de las probetas respectivas para colaminación.

# 4.3.1. Preparación de las superficies.

Se indujo deformación local en la superficie del acero mediante granallado, aún cuando esto provoca un aumento en la dureza superficial del material mejora la condición de no-deslizamiento entre los rodillos y las capas externas al aumentar el coeficiente de fricción con el incremento en la rugosidad superficial inducido por dicho proceso de preparación.

Para efecto de asegurar la condición de fricción seca, al momento de llevar a cabo las pruebas, las superficies fueron despojadas de suciedad y óxidos mediante un proceso mecánico abrasivo utilizando papel lija de un grado fino. Lo anterior fue suficiente para proveer una superficie limpia en ambos materiales. Posteriormente se efectúo una limpieza química utilizando acetona y un paño limpio para remover residuos metálicos y cualquier tipo de grasa de las superficies de los materiales a colaminar. Finalmente se procedió a marcar la superficie de las capas externas (en contacto con los rodillos) produciendo marcas longitudinales a  $45^\circ$  y  $-45^\circ$  respecto a la dirección de laminación para favorecer tanto la aceptación del material como un elevado coeficiente de fricción entre los rodillos y el material. Dado que el aluminio tiene la particulandad de oxidarse en fracciones de segundo, resulta imposible (mediante un proceso mecánico) inhibir el fenómeno de oxidación para el larminado conjunto.

## 4.3.2. Preparación de los rodillos.

Se removió toda la grasa y suciedad presente en los rodillos limpiando con un paño limpio y acetona. Esto favoreció tanto la aceptación del material por los rodillos como la condición de fricción seca.

#### 4.3.3. Secuencia de experimentación.

Se prepararon diez probetas con las dimensiones mostradas en la figura 4.7., para efecto de facilitar la introducción del material al claro de laminación se realizó un doblez de la capa de aluminio sobre la capa de acero como se indica en el detalle de la figura 4.7.



Figura 4.7. Probetas empleadas para colaminado.

El laminador se ajustó al 15% de la velocidad máxima permisible. Sin embargo, durante el proceso la velocidad resulta ser variable. La figura 4.8. proporciona una idea del comportamiento típico de la velocidad durante el proceso. El eje de las ordenadas muestra el tiempo en milisegundos mientras que el de las abscisas muestra las revoluciones por minuto (en múltiplos de 100).



Figura 4.8. Comportamiento típico de la velocidad durante la colaminación de las probetas.

Al analizar la figura 4.8. se puede observar que al introducir el material al claro de laminación la velocidad decrece drásticamente para posteriormente incrementarse hasta un

**TESIS CON** FALLA DE ORIGEN

cierto valor (que en este caso corresponde a 5.80 RPM). Se puede concluir que debido a la longitud de las probetas empleadas, la velocidad del proceso no se estabiliza hasta que aproximadamente el 50% del material ha sido alimentado dentro del laminador; es decir la combinación entre velocidad y longitud de las probetas determina si es posible medir un valor no transitorio para este parámetro. Ello supone que tanto la potencia como la fuerza aplicada por los rodillos (parámetro que es registrado) no fue constante durante los experimentos realizados. En la práctica real, la velocidad aún cuando tiende a diferir al inicio del proceso tiende a estabilizarse rápidamente, considerando además que la alimentación del material es continua, por lo que el efecto de los transitorios durante el proceso real se torna despreciable.

Dado que para ambos materiales se supone un comportamiento rígido-plástico, el efecto de la velocidad sobre las deformaciones parciales de cada una de las capas es nulo. Sin embargo, la potencia y carga calculadas pueden no coincidir plenamente con las mediciones reales debido a la variación de la velocidad. Para efectos de cálculo, durante la simulación, se tomaron aquellos valores de velocidad más próximos a la salida del material. En el caso mostrado en la figura 4.8. la magnitud de la velocidad se consideró un valor de 5.80 rev/min.

Se condujeron dos series de pruebas consecutivas aplicando reducciones en un solo paso en el siguiente orden: 10%,20%,30%,40%,50%.

La combinación de espesor total del sandwich y el diámetro de los rodillos limita la aceptación inicial del material. No obstante, la utilización de rodillos para laminado en caliente favoreció la entrada del material al claro de laminación. Aún bajo estas condiciones, la máxima reducción que se pudo aplicar en un solo paso fue del 50%.

Dado que la deformación elástica de la estructura del laminador y la recuperación elástica de los materiales provoca que la reducción aplicada, mediante el cierre del claro de laminación, no sea la real al final del proceso, es necesario realizar los cálculos pertinentes para ajustar este parámetro.

La tabla 4.3. muestra la correlación entre las reducciones aplicadas y las reales al final del proceso. Se observa fácilmente que la diferencia entre el valor nominal y el real se incrementa conforme se aumenta la reducción. Este comportamiento se ve acentuado por las propiedades mecánicas del material de los rodillos empleados, los cuales, comparados con rodillos para laminado en frío, presentan por lo general una dureza superficial sensiblemente menor y por ende una menor rigidez estructural lo cual favorece su deflexión.

78

. :

Tabla 4.3.

Reducción nominal.	Reducción real.
10%	9.91%
20%	19.93%
30%	29.49%
40%	38.02%
50%	44.24%

# 4.4. Resultados experimentales y discusión.

Bajo las condiciones experimentales planteadas se obtuvieron resultados referentes a la deformación parcial de cada una de las capas así como la fuerza aplicada por los rodillos. Dichos resultados se condensan en la tabla 4.4., en donde se muestra el promedio de ambos experimentos, en donde cada uno de ellos consiste en la laminación de cinco probetas cuyo espesor total se disminuyó según la secuencia de reducciones (en un solo paso) mostrada en la tabla 4.3.

### Tabla 4.4.

Reducción nominal [%]	Reducción Real [%]	Espesor de capas ext. [mm]	Espesor de capas int. [mm]	Espesor total. [mm]
10	9.91	1.67	4.49	7.83
20	19.93	1.47	4.02	6.96
30	29.49	1.27	3.59	6.13
40	38.02	1.02	3.34	5.38
50	44.24	0.95	2.94	4.84

Dado que los espesores son complementarios, basta con analizar la evolución de una de las capas para comprender el comportamiento de ambas. La figura 4.9. muestra el efecto de la reducción sobre la reducción parcial de cada material.





Una forma de visualizar el efecto de la reducción sobre el espesor de las capas es considerar la deformación relativa de las capas respecto al espesor total del conglomerado. La tabla 4.5. muestra los resultados obtenidos para las probetas ensayadas.

Tabla 4.5.



1.1

Reducción Real [%]	r <sub>p, acere</sub>	Γ <sub>p, aluminio</sub>
9.91	0.4258	0.5742
19.93	0.4216	0.5784
29.49	0.4134	0.5866
38.02	0.3786	0.6214
44.24	0.3919	0.6081

donde:

 $\Gamma_{p, acero} = e_{1f}/e_{f}$  $\Gamma_{p, aluminio} = e_{2f}/e_{f}$ 

La representación gráfica del comportamiento de este parámetro provee los elementos para relacionar las propiedades mecánicas del material con su respuesta durante el colaminado. Las figura 4.10. muestra el comportamiento del acero durante el proceso.



Figura 4.10. Reducción relativa del acero.

El análisis de la figura 4.10. proporciona una idea más clara del comportamiento de cada uno de los materiales durante la deformación. La respuesta del aluminio sería simplemente lo opuesto al comportamiento mostrado en la figura 4.10. En un principio el acero, quien tiene una resistencia relativa de 3 a 1 respecto al aluminio y que además presenta el fenómeno de endurecimiento por deformación. se deforma prácticamente con

una relación exponencial con la cantidad de deformación o reducción aplicada a todo el conglomerado; conforme aumenta la reducción el acero se deforma en menor proporción hasta llegar a un punto crítico en donde el espesor de la capa de aluminio (debido al incremento de carga necesario para deformarse) actúa como limitante para la deformación y entonces se presenta un decremento en la reducción relativa, permitiendo de esta manera una reducción parcial mayor en el aluminio. Este fenómeno se traduce en lograr un equilibrio en la proporción de la energía suministrada para la deformación en cada material. Este comportamiento resulta evidente si se considera el efecto que la relación entre espesor inicial y espesor final tiene en la carga necesaria para la deformación. Un ejemplo claro de lo anterior se aprecia en el caso de forja libre bajo un análisis por método del planchón, en donde se aprecia que la diferencia entre el espesor inicial del material de forja  $(H_0)$  y su valor al final del proceso (H) se relacionan con la presión requerida para llevar a cabo la deformación mediante una relación exponencial, lo cual implica que al contar con un material sumamente delgado, si se mantiene el espesor final constante, la presión necesaria para inducir una cierta deformación se incrementa sustancialmente al reducir el espesor inicial  $(H_0)$ . La lógica sugiere que la respuesta de los materiales durante la colaminación dependerá de la diferencia entre las propiedades mecánicas entre los materiales empleados.

Mediante un ajuste por mínimos cuadrados se puede ajustar casi perfectamente el comportamiento tanto del acero como del aluminio a las siguientes relaciones exponenciales:

$$r_{p,scero} = 0.2201 e^{1.6697r}$$
  
 $r_{q,aluminio} = 1.7838 e^{-2.4945r}$  (4.1a y 4.1b)

en donde r corresponde a la reducción aplicada a todo el conglomerado.

Los parámetros de las ecuaciones 4.1a y 4.1b dependen de la combinación de propiedades mecánicas de ambos materiales. La suma de las deformaciones parciales de ambos materiales será siempre igual a uno.

## 4.5. CARGA DE LAMINACIÓN Y POTENCIA CONSUMIDA POR EL PROCESO.

Resulta sencillo relacionar la potencia directamente con la fuerza aplicada por los rodillos. Para ello basta con calcular el par equivalente aplicado por los rodillos y conocer la velocidad angular de los mismos. La figura 4.11. muestra el comportamiento este último parámetro durante el proceso donde se puede observar que su relación con la reducción es prácticamente lineal dentro del rango de prueba seleccionado.

Se puede verificar fácilmente, en la literatura convencional, que el comportamiento arrojado para el caso experimental en cuestión corresponde íntegramente al comportamiento típico de la fuerza de laminación.

Aún cuando a primera vista el orden de magnitud de las cargas registradas por el sistema de adquisición de datos del equipo empleado cae dentro de un rango aceptable, fue necesario corroborar los datos obtenidos para asegurar que no existieran discrepancias de un orden de magnitud considerable debido a desajustes o errores durante el proceso de medición.

Para efecto de comprobar la fuerza durante el proceso de colaminación se puede hacer uso de diversos métodos de cálculo para estimar dicho parámetro. Existen muchos modelos empíricos que por lo general arrojan un estimado razonable de la fuerza necesaria para la



laminación. A continuación se muestran algunos que pueden ser de utilidad para el objetivo deseado.

Figura 4.11. Fuerza de laminación durante el colaminado. Resultados experimentales.

Un modelo simple, y lo suficientemente práctico para cálculos de campo para la fuerza de separación de los rodillos fue presentada por Schey (1987). El modelo expresa la fuerza de separación de los rodillos en términos del esfuerzo promedio de fluencia del material en un solo paso  $(\sigma_{\rm fm})$ , la longitud del arco proyectado (L), un multiplicador  $Q_p$  cuyo valor es siempre mayor a uno y que toma en cuenta el factor de forma (relación ancho-espesor) y el coeficiente de fricción. La constante numérica es un factor de corrección para la condición de deformación plana. La expresión algebraica de este modelo es:

$$P \approx 1.15 Q_p \sigma_{vm} L \qquad (4.2.)$$

en donde el esfuerzo de cedencia promedio del material se obtiene de integrar la función que define el comportamiento del material en la región plástica a lo largo de la trayectoria de deformación, de manera que:

$$\sigma_{jm} = \frac{1}{\varepsilon_{max}} \int_{0}^{\infty} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon \qquad (4.3.)$$

para una reducción en un solo paso

Realizando una analogía de laminación con forja se llega a expresiones como:

$$P = \overline{\sigma_0} b_{L_p} \left( l + \frac{L_p}{4h} \right) \qquad (4.4.)$$

para una condición de fricción seca.

$$P = \overline{\sigma}_{o} b L_{p} \left( 1 + \mu \frac{L_{p}}{2h} \right) \qquad (4.5.)$$
$$\overline{h} = \frac{h_{o} + h_{f}}{2}$$

donde:

- $\overline{h}$  espesor promedio,  $\overline{h} = \frac{h_0 + h_f}{2}$
- $\mu$  coeficiente de fricción (el cual será estudiado posteriormente)
- $\overline{\sigma}_0$  esfuerzo de cedencia promedio

Método de Eckelund. Arroja una ecuación que permite estimar la carga de laminación basada en un análisis simplificado de esfuerzos.

$$P_{o} = \sigma_{o} b L_{p} \left( I + \frac{I.6 \mu L_{p} - I.2 \Delta h}{h_{o} + h_{f}} \right) \quad . \quad . \quad (4.6.)$$

donde:

$$L_{p'} = \sqrt{R' \Delta h} \qquad . \qquad . \qquad (4.7.)$$

Un análisis simplificado para las condiciones del problema en cuestión arroja los resultados mostrados en las figuras 4.12. y 4.13.



Figura 4.12. Comparación con diversas teorías.



En la figura 4.12. se muestran los datos obtenidos experimentalmente y lo obtenidos durante la simulación del proceso mediante MLS. Las demás curvas sirven para efectos comparativos en cuanto a orden de magnitud. La ecuación empírica, correspondiente a la forma más simplista de evaluar la carga, fue calculada considerando que todo el material es acero (con un esfuerzo de cedencia de 293 MPa). La ecuación de Schey, que considera el endurecimiento por trabajo en frio, fue calculada considerando que todo el material es acero de nuevo. El método de Eckelund fue aplicado considerando un esfuerzo de cedencia ponderado respecto a los espesores relativos antes del laminado y los esfuerzos de cedencia respectivos del acero y del aluminio.

Como puede observarse, cualquiera de las estimaciones realizadas arroja una incoherencia en los resultados experimentales. Lo anterior basado en el hecho de que en cualquiera de los casos la carga debería ser menor dada la combinación de las propiedades mecánicas del aluminio y el acero al ser laminados conjuntamente. Aún cuando resulta evidente que la carga en ambos materiales es la misma, las deformaciones de cada uno de ellos tendrán que ser diferentes dependiendo de las propiedades mecánicas de cada uno de ellos tendrán que ser diferentes dependiendo de las propiedades mecánicas de cada material. Dado que en el caso en cuestión se cuenta con un total de aluminio que representa, en términos de espesores, casi un 45% del total de material resulta lógico pensar que, si por ejemplo se compara lo arrojado por el método de Schey, la carga en este caso tendría que ser considerablemente menor dadas las propiedades mecánicas del aluminio comparadas con las del acero y sobre todo considerando que será el aluminio el que se deforma en mayor proporción.

El método de Eckelund arroja una carga sensiblemente menor que la medida experimentalmente para el colaminado en cuestión cuando se considera un esfuerzo ponderado para el aluminio y el acero (que en este caso corresponde a 211 MPa).



Figura 4.13. Cargas por estimación de Schey para deformaciones correspondientes.



La figura 4.13. muestra otra comparación tomando como referencia el método de Schey con endurecimiento por trabajo en frío, al considerar la carga correspondiente a la deformación que sufre el acero. Lo anterior permite estimar la carga necesaria para deformar el acero según la trayectoria medida experimentalmente y compararla con la carga medida durante los ensayos de colaminación. De ahí se desprende que la carga necesaria para deformar el acero en las proporciones arrojadas por los resultados experimentales es del mismo orden de magnitud de aquella estimada mediante MLS, dado que la carga deberá ser la misma para el aluminio es de esperarse que no podrán existir variaciones notables en los valores de carga que se asemejen con los valores medidos experimentalmente.

En conclusión queda demostrado que los valores de carga obtenidos experimentalmente no pueden ser verídicos para el caso en cuestión. La proporción total de aluminio y su menor resistencia, sugieren una disminución sustancial de la carga de laminación comparada con un proceso de laminado convencional de una lámina de acero del mismo espesor, por lo que los resultados obtenidos experimentalmente distan mucho de ser reales y por tanto se concluye que existió un error de medición.

## 4.6. ANÁLISIS Y SIMULACIÓN DEL PROBLEMA MEDIANTE SIMCLAD.

Resulta evidente que pese a la imposibilidad de comparar la solución, en cuanto a fuerza de laminación se refiere, y siendo el parámetro de mayor importancia la relación de espesores al final del proceso es posible evaluar el rendimiento del modelo comparando este parámetro con las mediciones experimentales.

Para ello, se cuenta con la información necesaria para alimentar el programa y con los datos experimentales tomados con lo cual es factible comparar la solución proporcionada por el modelo de simulación con las lecturas realizadas.

La implantación del algoritmo se concretó utilizando el lenguaje de programación C. Se desarrollaron herramientas adicionales particularmente en VBA para Microsoft Excel<sup>®</sup> y en Mathematica<sup>®</sup> con el fin de dar solución al problema de plantear los vértices del simplex inicial para el proceso de optimación de manera semi-automatizada.

Dado que el tiempo de solución depende básicamente de la forma del simplex inicial es necesario plantear este último lo más acertadamente posible. Los valores de los parámetros pseudo-independientes para el simplex inicial se determinan mediante una representación gráfica sencilla de la configuración de las diferentes regiones geométricas físicas (rodillos, capas e interfase entre capas) y abstractas (como es el caso de los límites rígido-plásticos descritos en las secciones 3.3.2. y 3.3.4.) y de la condición límite para el gasto de material planteada como la igualdad de la velocidad del material de la capa superior a la salida del claro de laminación con la velocidad lineal del rodillo, lo cual representa que el punto neutro se encuentra justamente en el plano de salida del material. Con la automatización del procedimiento la determinación de los puntos del simplex inicial se agiliza, y el proceso se hace más eficiente al evitar valores prohibidos para los parámetros de optimación.

Los resultados relativos a los espesores y potencia para cada reducción aplicada se resumen en la tabla 4.6.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN	
------------------------------	--

Tabla 4.6.	
------------	--

Reducción	e <sub>zf</sub>	<b>0</b> 1f	•R	e im	@26/@1	@1#@f	Potencia	Carga
[%]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]		- 1	[W/mm]	[N/mm]
9.91	2.31	1.60	7.82	3.91	0.5908	0.4092	20.29	3019.3
19.93	2.15	1.33	6.95	3.48	0.6187	0.3813	48.83	5125.7
29.49	1.99	1.07	6.12	3.06	0.6503	0.3497	81.24	7014.3
38.01	1.79	0.90	5.38	2.69	0.6653	0.3347	114.46	8710.2
44.23	1.59	0.83	4.84	2.42	0.6569	0.3431	140.21	9894.7

Debido a que los resultados potencia y carga están expresados por unidad de ancho y considerando que la cinta conglomerada tienen un ancho de 100[mm] los resultados para este caso -ver figura 4.7.-, se muestran en la tabla 4.7.

#### Tabla 4.7.

Reducción	Potencia	Carga
[%]	[kW]	[Ton]
9.91	2.03	30.78
19.93	4.88	52.25
29.49	8.12	71.50
38.01	11.45	88.79
44.23	14.02	100.86



Los resultados relativos a la carga de laminación se muestran gráficamente en las figuras 4.13. y 4.14. Del análisis de las figuras y comparando los diversos resultados mostrados se puede concluir que los resultados obtenidos mediante la simulación para la fuerza de laminación están dentro de un orden de magnitud coherente. Sin embargo, dada la incertidumbre en los resultados experimentales no es posible concluir nada respecto a la condición de límite superior de la solución.

La figura 4.14. muestra, para el caso en estudio, la proporción de los diversos términos de potencia respecto al total de la potencia consumida por el proceso para cada valor de reducción.

Como se puede observar la tendencia del término  $W_{i2}$ , que representa la potencia consumida por deformación del acero se incrementa con la reducción, esto puede deberse al incremento sustancial en la dureza que presenta el acero aunado al incremento en su deformación. Para mantener el equilibrio el término  $W_{i1}$  que representa la potencia por deformación del aluminio se reduce conforme la reducción total aumenta, sin embargo cabe

÷.\*

destacar que el término  $W_{sl}$ , correspondiente a la potencia disipada por cortante en el límite rígido-plástico del aluminio, representa una cantidad considerable del trabajo desarrollado para cada condición de reducción. Esto puede estar relacionado con el hecho de que la capa de aluminio es la que sufre en mayor medida la curvatura de los rodillos fenómeno que provoca que la transición entre la zona plástica y la zona rígida sea más marcada, haciendo esto que la diferencia de velocidades tangenciales en el límite rígido-plástico sea mayor que para el caso del acero. Este fenómeno se ve disminuido al aumentar la reducción debido a que la velocidad del material se incrementa y ello provoca un cambio más drástico en los límites rígido-plásticos para ambos materiales. En ambos casos la tendencia de este término de potencia es a disminuir conforme aumenta la reducción, esto debido a lincremento en la severidad de la deformación que provoca que los límites rígido-plásticos tiendan a ser líneas verticales limitando con ello el valor que pueda tomar la diferencia de velocidades tangenciales.



Figura 4.14. Razones proporcionales de los términos de potencia considerados para las reducciones aplicadas.

La figura 4.15. muestra los pesos porcentuales de los términos de potencia interna consumida por deformación tanto para el aluminio como para el acero. Se aprecia la tendencia decreciente de este término para el aluminio.





Figura 4... Porcentaje de la potencia por deformación respecto al total.

La figura 4.16. muestra que los términos de potencia consumida por cortante en los límite rígido plásticos tiene una tendencia decreciente en ambos casos.



Figura 4.16. Porcentaje de la potencia disipada por cortante en límites rígido-plásticos respecto al total.

El comportamiento de la fricción con los rodillos se aprecia en la figura 4.14. Este término representa una grande proporción de la potencia consumida por el proceso. Sin embargo, la figura indica que para grandes va es de reducción, específicamente para el valor correspondiente a la última condición de reducción, su proporción tiende a decrecer. Este comportamiento puede deberse al incremento sustancial en la potencia interna de deformación del acero, así como también a una disminución en el deslizamiento relativo entre ambos materiales.

La figura 4.17. muestra el comportamiento de la velocidad de la superficie en contacto con los rodillos del material de la capa superior para las condiciones de laminación correspondientes a una reducción del 40%.

88

17 In <u>11</u>977 1911 - The Alexandron (1917) 1911 - The Alexandron (1917)



Figura 4.17. Velocidad del material en contacto con los rodillos. 40% reducción.

La gráfica muestra la velocidad desde el punto de contacto con los rodillos (x = L = 22.7[mm]) hasta el plano de salida (x = 0). La línea horizontal representa la velocidad del rodillo. Como puede apreciarse, el material al entrar en contacto con los rodillos se acelera hasta una velocidad muy próxima a 68[mm/s] hasta alcanzar la velocidad del rodillo aproximadamente en  $\alpha_{neutro} = 2.91^{\circ}$ , en donde se ubica el punto neutro, para después incrementar su velocidad hasta 93.23 mm/s.

La gráfica en la figura 4.18. muestra el comportamiento de la potencia consumida por fricción con los rodillos, aún cuando su valor neto tiende a aumentar conforme aumenta la reducción resulta interesante observar su comportamiento respecto al total de los demás términos considerados. Como puede observarse el comportamiento es creciente hasta un cierto valor de reducción.



Figura 4.18. Fricción entre rodillos y material de las capas externas.

La figura 4.19. muestra el comportamiento de la velocidad de la superficie del material de las capas externas para una reducción del 50%. La línea horizontal representa la velocidad lineal de los rodillos. Como se mostró en la sección 3.3.8. el término de potencia

TTESIS CON	
FALLA DE ORIGEN	

representado en la gráfica de la figura 4.18. depende directamente de la diferencia de ambas velocidades.



y velocidad de los rodillos (línea horizontal).

La proporción de la fricción en la interfase de los materiales se muestra en la figura 4.20. El comportamiento es creciente para todo el rango de reducción impuesto. Sin embargo, como se había supuesto desde un principio su valor es muy pequeño si se le compara con el valor de cualquiera otro de los términos de potencia considerados.



Figura 4.20. Porcentaje de la potencia consumida por fricción en la interfase respecto al total.

Finalmente, si se analiza el parámetro de interés, en este caso la deformación de la capa de acero (la deformación del aluminio es complementaria) se puede observar que el comportamiento de la deformación es cualitativamente igual que el medido experimentalmente – comparar figuras 4.21 y 4.9.

El error máximo respecto a la medición correspondiente es de aproximadamente 10% lo cual es un buen indicador del desempeño del modelo.

. . . .



Figura 4.21. Relación de espesor final. Capa de acero. Resultado experimental y solución mediante MLS.

La figura 4.22. muestra el comportamiento de la extensión de las regiones de deformación plástica. Definiendo éstas como el cociente de  $L_1$  y  $L_2$  entre L el cual permanece constante para una cierta reducción. Esto proporciona un indicador de la magnitud de la deformación plástica durante el proceso. Como es de esperarse, la cantidad de deformación tiende a incrementarse conforme aumenta la reducción.



Figura 4.22. Extensión de las regiones de deformación plástica.

#### 4.7. ESTUDIO DE LA RAPIDEZ DE DEFORMACIÓN EQUIVALENTE.

Conocidos las funciones que describen los perfiles de velocidad para cada una de las capas es posible inferir algunos aspectos importantes en cuanto a la rapidez de deformación. Las figura 4.23. y 4.24. muestran los valores de rapidez de deformación equivalente para los materiales de las capas externa e interna respectivamente, para una condición de laminación con r = 40%,  $m_1 = 0.75$  y  $m_2 = 1$ . La coordenada x corresponde a



la dirección de laminación, mientras que la coordenada y representa la dirección de la sección transversal del material en cada caso.



Figura 4.23.  $\dot{\varepsilon}_{eq}$ . Capa externa.

Tels CON

Figura 4.24.  $\dot{\mathcal{E}}_{eq}$ . Capa interna.

La figura 4.25. muestra dos secciones de corte de las superficie que describe la rapidez de deformación equivalente en la capa superior -ver figura 4.23-. Las secciones corresponden a las regiones que comprenden a la interfase entre ambos materiales (línea discontinua) y la superficie de contacto entre el material de las capas externas y los rodillos (línea continua).



Figura 4.25. Rapidez de deformación equivalente en la interfase y la superficie de contacto con rodillos. Capa externa.

De la figura 4.25. se observa inmediatamente que existe un gradiente a lo largo del espesor del material (eje coordenado y). El análisis de la figura 4.23. pone en evidencia lo anterior, mostrando que efectivamente el material en contacto con los rodillos se deforma a una rapidez de deformación equivalente menor que la correspondiente al material que forma la interfase con la capa interna. Sin embargo se puede observar que esto sólo ocurre hasta un cierto punto en donde la condición se invierte. Lo anterior corresponde aproximadamente en la ubicación del punto neutro en la superficie del material –ver figura 4.17.–. Del análisis realizado bajo diversas condiciones de fricción se concluye que la

fricción juega un papel primordial en dicho comportamiento. Cuando la fricción tiende a ser despreciable, las diferencias de rapidez de deformación a lo largo del ancho del material se tornan insignificativas.

La figura 4.26. muestra las curvas de rapidez de deformación equivalentes para los puntos al interior del material que yacen en el plano medio del sandwich (línea discontinua) y de aquellos que forman la interfase entre ambos materiales (línea continua):



De lo cual se puede concluir lo siguiente:

- (i) Al tener un deslizamiento relativo pequeño entre ambos materiales la diferencia en la rapidez de deformación equivalente a lo largo del espesor de la capa interna es menos notoria que en el caso previo; de manera que la deformación en esta capa tiende a presentar una mayor homogeneidad comparada con la capa superior.
- (ii) De lo antes expuesto de concluye que ésta funciona como un agente "protector" que favorece la homogeneidad de la deformación de la capa interna.
- (iii) Se observa que, en efecto, el material ubicado en el plano no se deforma lo que concuerda plenamente con la condición de simetría planteada. La diferencia entre valores de  $\dot{\varepsilon}_{eq}$  que se aprecia en la figura 4.26., en la región correspondiente al plano de salida del material, se justifica debido al efecto gradual de la curvatura de la interfase sobre el campo de velocidad asociado al material.

Finalmente la figura 4.27. muestra el gradiente en la dirección transversal de la rapidez de deformación equivalente. Existe una región para la cual no hay gradiente de deformación en la dirección "y". La información proporcionada por la superficie representada en la figura 4.27. aporta elementos para inferir sobre la evolución de la textura de ambos materiales durante el proceso de colaminación y con ello la calidad del producto final.





Figura 4.27. Gradiente de  $\dot{\mathcal{E}}_{ea}$  en la dirección "y".

# 4.8. ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD DE J\*.

En sentido estricto un análisis de sensibilidad debe ser efectuado de forma que arroje conclusiones generales de la sensibilidad de la función objetivo respecto a cada uno de los parámetros que la componen.

En este caso la función objetivo,  $J^*$ , es una función escalar dependiente de cinco parámetros:  $a_1$ ,  $a_2$ , b,  $Q_1$  y  $e_{2f}$  desconocidos. Sin embargo la función también depende de los parámetros del proceso como son: el radio de los rodillos, la relación de espesores inicial, la velocidad del proceso, las condiciones de fricción, etc. Bajo una cierta combinación de valores para estos parámetros del proceso la función  $J^*$  adquiere una cierta forma desconocida que puede influir o no en el comportamiento de la función respecto a los parámetros pseudo-independientes. Un análisis completo de sensibilidad requerirá considerar el efecto de la variación de las condiciones del proceso sobre la sensibilidad de la función respecto a cada uno de los parámetros que la definen.

El Anexo II contiene las gráficas correspondientes a la evolución del valor de cada uno de los parámetros pseudo-independientes durante la simulación del proceso experimental descrito en este capítulo.

Una particularidad en la evolución de los parámetros pseudo-independientes se visualiza al analizar el comportamiento tanto de  $a_1$  como de  $a_2$ . El valor de estos parámetros es siempre muy pequeño. Sin embargo se observa que pequeñas variaciones en los mismos inducen cambios sustanciales en el valor de la función objetivo. Por lo general estos cambios inducidos en la función son mayores que el criterio de paro del método de optimación. Esto se deduce al visualizar el comportamiento de los demás parámetros durante el proceso de optimación. Tanto b,  $Q_1$  como  $e_{27}$  tienden a alcanzar un valor estable en un menor tiempo. Lo anterior provoca que aún cuando aparentemente el proceso de

optimación ha encontrado un mínimo, el programa no se detiene hasta que los valores tanto de  $a_1$  como de  $a_2$  han alcanzado un valor estable.

Cabe señalar lo anterior es válido únicamente para el caso en cuestión y bajo las condiciones del proceso correspondientes. Sin embargo, de lo observado en el transcurso del desarrollo del algoritmo durante la fase de prueba del algoritmo se concluyó que estos dos parámetros  $(a_1 \ y \ a_2)$  resultan inconvenientes durante el proceso de optimación debido a los valores tan pequeños que adquieren y el orden de magnitud de los cambios que pequeñas variaciones en los mismos provocan en el valor de la función objetivo.



La figura 4.28. muestra dicho comportamiento.

Figura 4.28. Proceso de estabilización de a1 y a2 durante el proceso de optimación de J\* para un 10% de reducción.

Como puede verse en el caso planteado en la figura 4.28., aún cuando los parámetros  $a_1$  y  $a_2$  se estabilizan en 150 iteraciones el valor de la función no alcanza un valor estable debido a la sensibilidad de la función respecto a estos parámetros.

Lo anterior es sólo un ejemplo de la necesidad de estudiar el comportamiento de las variables durante el proceso de optimación. Ello permitirá establecer un criterio de confianza para los valores de los parámetros pseudo-independientes obtenidos.

Como puede verse en las gráficas mostradas en el anexo II el comportamiento de los demás parámetros arroja como conclusión que son bastante confiables en función de que la sensibilidad de la función a variaciones en orden de magnitud de los mismos es pequeña.

Otro aspecto importante es el relacionado con la convergencia del método cuando se parte de diferentes simplex iniciales. Del análisis efectuado al respecto se puede concluir que las diferencias no son substanciales en los parámetros de interés, particularmente el espesor de la capa interna después de la deformación.



La figura 4.29. muestra que la diferencia porcentual entre el valor del parámetro  $e_{2f}$  es de 3% si se considera que la solución arrojada a partir del Simplex B es la mejor aproximación (dado que la potencia resultante resulta ser menor que para el caso del simplex A).



Figura 4.29. Variación en  $e_{2f}$  en función del simplex inicial seleccionado.

Puede observarse también, el criterio de paro del algoritmo se alcanza con mayor rapidez en el caso del Simplex B, sin embargo el valor de la función objetivo (53.76 W/mm) en este caso es ligeramente mayor que el que se alcanza al partir del simplex A (54.07 W/mm). La lógica sugiere que dado que el método de optimación empleado construye la ruta que ha de seguir en la búsqueda del valor mínimo de la función a partir de la geometría del simplex inicial y de la forma de la región que describe a  $J^*$  en el espacio penta-dimensional, el criterio de paro de la función se cumplirá bajo diferentes condiciones dependiendo del gradiente de la función en la dirección que avanza el simplex y el grado de contracción del mismo.

De la misma manera se puede analizar el comportamiento de los demás parámetros cuando se parte de un simplex diferente, la tabla 4.8. muestra lo anterior:

Parámetro	Valor		Diferencia	
	Simplex A	Simplex B	porcentual.	
a	$2.4958 \times 10^{-5}$	$3.3484 \times 10^{-5}$	34.16%	
a2	$1.1094 \times 10^{-5}$	$8.5115 \times 10^{-6}$	23.27%	
Ь	$2.19 \times 10^{-3}$	$2.13 \times 10^{-3}$	2.74%	
<i>Q</i> ,	-82.32	-85.27	3.58%	
e <sub>2f</sub>	1.8081	1.7536	3.01%	
Aún cuando es necesaria una mayor cantidad de información respecto a la confiabilidad de los parámetros se puede concluir que existe una gran incertidumbre respecto al valor de los parámetros  $a_1$  y  $a_2$ . Durante la fase de validación del modelo se pudo observar el mismo comportamiento bajo diferentes condiciones de laminación y variando en repetidas ocasiones el simplex inicial. Los parámetros que demostraron una mayor confiabilidad a variaciones en la configuración del simplex inicial son b,  $Q_1$  y  $e_{2f}$ .

Lo anterior lleva a concluir que para el objetivo primordial, que es la determinación de los espesores relativos al final del proceso, el modelo satisface en buena medida las expectativas en la predicción de dicho parámetro.

No obstante que  $a_1$  y  $a_2$  han demostrado ser tanto inestables durante el proceso de optimación y ser muy susceptibles a variaciones del simplex inicial, dichas variaciones provocan cambios poco significativos en los perfiles de flujo de ambos materiales por lo que su determinación numérica exacta se torna irrelevante para fines útiles.

and the second second

a kan bereka kan berakan berak Berakan berakan



100

# **Capítulo 5** Conclusiones

Un método alternativo y sistemáticamente planteado para la simulación de procesos simétricos de laminado conjunto ha sido desarrollado a lo largo de este trabajo. El modelo que resulta está basado en el teorema de límite superior y una vez resuelto provee el campo de deformación asociado a la deformación de ambas capas y los espesores finales de cada una de ellas. La predicción de espesores parciales es bastante aceptable tomando en cuenta, para el caso experimental simulado, que la máxima incertidumbre en dicho parámetro fue siempre menor al 10%.

Es evidente que para una validación total del modelo es necesario llevar a cabo un gran número de experimentos variando los parámetros del proceso y comparando los resultados para diversas condiciones con lo medido experimentalmente. Sin embargo, los resultados experimentales descritos en el capítulo cuarto y la comparación con la solución arrojada por SIMCLAD dan una idea general del comportamiento del modelo.

Durante la fase de prueba del algoritmo se realizaron diversas corridas del programa comparándose sus resultados con los proporcionados por DEFORM. La figura 5.1. muestra una comparación entre los resultados para un proceso de colaminado de dos capas de aluminio de la misma naturaleza.



Figura 5.1. Colaminación Al-Al. Solución por LS y MEF.

Se puede observar, si se considera la solución proporcionada por DEFORM como referencia, que el máximo error se presenta para un 50% de reducción y es de aproximadamente un 7%.

Desafortunadamente los datos experimentales relativos a la fuerza de laminación no resultaron ser confiables, lo que ocasiona el inconveniente de no poder concluir nada respecto al cumplimiento del teorema de límite superior para el modelo desarrollado. No obstante, de las estimaciones realizadas mediante diversos métodos para el cálculo de carga

TECIC	CON
12010	
PATTA DE	ODICEN
FALLA UL	Charles in 1

durante el laminado convencional se puede concluir que los valores obtenidos por SIMCLAD son por lo menos de un orden de magnitud físicamente racionales.

De lo anterior queda clara la conveniencia de realizar una serie de experimentos adicionales para determinar la fiabilidad del cálculo de carga que SIMCLAD proporciona. Adicionalmente es recomendable explorar otras posibles formas para el planteamiento de la función de corriente para los flujos de materiales en el claro de laminación. Una mejora en la aproximación cualitativa al flujo real redundará en beneficio de la precisión de los resultados. Otro aspecto importante de considerar es la condición de deslizamiento entre los materiales durante la laminación. En el presente modelo se ha fijado una condición de deslizamiento a lo largo del claro de laminación lo cual podría o no cumplirse en la realidad. Por ello, en estudios posteriores se puede plantear un modelo alternativo que considere un parámetro adicional que represente la ubicación del punto en donde el deslizamiento sea nulo. La adherencia de ambos materiales está determinada, en parte, por el tiempo en que éstos viajan unidos sin existir deslizamiento sin la existencia de esfuerzos tangenciales. Por esto la determinación del punto de unión de ambos materiales puede resultar de particular interés en la predicción de la adherencia durante el colaminado.

Dado que la fracción de potencia consumida por fricción en la interfase de ambos materiales resulta ser insignificante respecto al total de la potencia consumida por el proceso es evidente que el efecto de añadir dicho parámetro será siempre en decremento de este término al reducir la región de deslizamiento entre los materiales y por lo tanto la fricción existente.

Aún cuando queda mucho por analizar respecto al desempeño de SIMCLAD los resultados mostrados en este trabajo permiten obtener una idea del comportamiento del modelo y con ello establecer las mejoras pertinentes para incrementar el nivel de exactitud de los resultados. La intención es también que el presente trabajo sea punto partida para el desarrollo de un modelo para la solución del caso no simétrico que resulta de particular interés en el diseño del proceso de fabricación de cojinetes de deslizamiento por técnicas de colaminado.

Por otra parte, la posibilidad de inferir sobre el campo de deformaciones mediante la rapidez de deformación equivalente resulta también interesante, debido a que permite explorar la evolución de la microestructura de cada una de las capas en función de las diversas condiciones de laminación que se pueden presentar en el proceso real; ello mediante el análisis de la rapidez de deformación equivalente que está ligada a la homogeneidad de la deformación como se mostró en el capítulo cuarto.

Las herramientas de cómputo desarrolladas pueden ser fácilmente modificadas ya que fueron construidas en forma modular lo que permite adicionar módulos de cálculo o definiciones adicionales que se requieran. Esto permitirá en un futuro cercano añadir las funciones de corriente para el caso de colaminado no simétrico y con ello tener una herramienta completa para el análisis de este tipo de procesos.

# **BIBLIOGRAFÍA.**

[1] Kobayashi, Shiro. Oh, Soo-Ik. Altan, Taylan. <u>Metal Forming & The Finit Element</u> <u>Method.</u> 1<sup>st</sup> Edition.Oxford University Press. USA, 1989. ISBN 0 19 504402 9

۰.

[2] Tzou, G.Y. <u>Theorical Study on the Cold Sandwich Sheet Rolling Considering Coulomb</u> <u>Friction.</u> Journal of Materials Processing. 114 (2001). pp. 41-50.

[3] Avitzur, Betzalel. <u>Metal Forming. The Application of Limit Analysis.</u> 1st Edition. Marcel Dekker, Inc. USA, 1980. ISBN 0-8247-6847-7

[4] Talbert, Samuel H. & Avitzur, Betzalel. <u>Elementary Mechanics of Plastic Flow In Metal</u> Forming. 1st Edition. John Wiley & Sons. England, 1996. ISBN 0 471 96003 9

[5] Hwang, Yeong-Maw. Hsu, Hung-Hsiou. Lee, Hung-Jen. <u>Analysis of Sandwich Sheet</u> <u>Rolling by Stream Function Method.</u> International Journal of Mechanical Science. Vol. 37 No. 3. pp 297, 315. Elsevier Science. 1995.

[6] Kalpakjian, Serope. <u>Manufacturing Processes for Engineering Materials</u>. 3<sup>rd</sup> Edition. Addison Wesley. USA. 1997. ISBN 0-201-82370-5.

[7] Nelder, J.A. Mead, R. <u>A Simplex Method for Function Minimization</u>. Computer Science. (1965) Vol. 7 pp. 308-313.

[9] Budynas, Richard G. <u>Advanced Strength and Applied Stress Analysis</u>. 2<sup>nd</sup> Edition. McGraW-Hill. USA, 1999. ISBN 0-07-116099-X

[10] Choi, Shi-Hoon. <u>Tensile Deformation Behavior of Stainless Steel Clad Aluminum</u> <u>Bilayer Sheet.</u> Materials Science and Engineering. A222 (1997) pp. 158-165.

[11] Hosford, William F. & Caddell, Robert M. <u>Metal Forming. Mechanics and Metallurgy.</u> 2<sup>nd</sup> Edition. Prentice Hall.USA, 1993. ISBN 0 13 588526 4.

[12] Hwang, Yeong-Maw. Hsu, Hung-Hsiou. Hwang, Yuh-Lin. <u>Analytical and</u> <u>Experimental Study on Bonding Behavior at the Roll Gap during Complex Rolling of</u> <u>Sandwich Sheets.</u> International Journal of Mechanical Sciences. 42 (2000) pp. 2417-2437.

[13] J.G. Lenard, M. Pietrzyk, L. Cser. <u>Mathematical and Physical Simulation of the</u> <u>Properties of Hot Rolled Products</u>. 1<sup>st</sup> Edition. Elservier Science. UK, 1999. ISBN 0 08 042701 4.

[14] Jiang, Z.Y., Tieu, A.K. <u>A Simulation of Three-dimensional Metal Rolling Process by</u> <u>Rigid-Plastic Finite Element Method.</u> Journal of Materials Processing Technology. 112 (2001) pp. 144-151. [15] Lin, Zone-Ching. Huang, Tang-Guo. <u>Hot Rolling of an Aluminum-Copper Sandwich Flat Strip with Three-dimensional Finite Element Method.</u> Journal of Materials Processing Technology 99 (2000) pp. 154-168.

[16] Quan Z. <u>Solid Phase Roll Cladding of Bimetallic Strip by Cross Shear Cold Rolling</u>. Advanced Technology of Plasticity. vol. II. 1987 p. 789.

[17] R.H. Wagoner, J.-L. Chenot <u>Fundamentals of Metal Forming</u>. 1<sup>st</sup> Edition. John Wiley & Sons. USA, 1997. ISBN 0-471-57004-4.

[18] R.R. Arnold, Pw. Whitton. <u>Stress and Deformations Studies for Sandwich Rolling Hard Metals</u>. Proc. Instn. Mech. Engrs. 173 (8) (1959) pp. 241-256.

[19] Rardin, Ronald R. Optimization in Operations Research. 1<sup>st</sup> Edition. Prentice-Hall, Inc. USA 1998. ISBN 0 02 398415 5

[20] Richelsen, Ann Bettina. <u>Elastic-Plastic Analysis of the Stress and Strain Distribution</u> in <u>Asymmetric Rolling</u>. International Journal of Mechanical Sciences. Vol. 39 No. 11 pp. 1199-1211. 1997.

[21] Rowe, G.W. Sturgess, C.E.N. Hartley, P. Pillinger, I. <u>Finit Element Plasticity and</u> <u>Metal Forming Analysis</u>. 1<sup>st</sup> Edition. Cambridge University Press. Great Britain, Cambridge 1991. ISBN 0 521 38362 5

[22] Teukolsky, Saul A. <u>Numerical Recipes in C</u>. William H. Press. Cambridge Press. 1992.

[23] Wagoner, R.H. & Chenot. J.-L. <u>Metal Forming Analysis.</u> 1<sup>st</sup> Edition. Cambridge University Press. USA, 2001. ISBN 0 521 64267 1

[24] Wusatowsky, Zigmunt. <u>Fundamentals of Rolling.</u> 1<sup>st</sup> Edition. Pergamon Press. Poland 1969.

[25] Yong, Jiang. Dashu, Peng. Dong, Lu. Luoxing, Li. <u>Analysis of Clad Sheet Bonding by</u> <u>Cold Rolling</u>. Journal of Materials Processing Technology. 105 (2000) pp. 32-37.

# ANEXO I.

Para la evaluación de la funcional de potencia,  $J^*$ , se deben emplear métodos de cálculo numéricos que permitan evaluar tanto integrales como derivadas. La elección del método adecuado obedece principalmente al compromiso entre exactitud y costo de cálculo. En lo siguiente se hace una breve descripción de los métodos empleados en la construcción de SIMCLAD.

#### Integración numérica.

Los métodos de integración comúnmente utilizados pueden clasificarse en dos grupos: los que emplean lo valores dados de la función f(x) en abscisas equidistantes y que se conocen como fórmulas de Newton-Cotes, y aquellos que utilizan valores de f(x) en abscisas desigualmente espaciadas determinadas por ciertas propiedades de familias de polinomios ortogonales, conocidas como fórmulas de cuadratura gaussiana.

Los métodos de integración que hacen uso de las fórmulas de Newton-Cotes son ampliamente utilizados. La estrategía común al desarrollar fórmulas para la integración numérica es similar a lo que ocurre con la diferenciación numérica. Se obtiene una aproximación polinómica de la función que se desea integrar y luego se integra dicho polinomio en el intervalo o región de interés. Esto permite integrar una función conociendo sólo una tabla de sus valores.

$$\int f(x)dx = \int P_n(x_x)dx \qquad . \qquad . \qquad (AI.1.)$$

Hay varias formas en que se puede utilizar la ecuación (AI.1.). El intervalo de integración (a,b) deberá caer dentro del rango de ajuste del polinomio  $(x_0, x_n)$  en este caso se obtienen las fórmulas de Newton-Cotes las cuales son un conjunto de reglas de integración que corresponden a los diversos grados del polinomio interpolante.

Las primeras tres fórmulas que representan un polinomio de grados uno, dos y tres, son particularmente importantes. Si el grado del polinomio es elevado, los errores debidos al redondeo y las irregularidades locales en la aproximación pueden ocasionar problemas de exactitud.

Dado que las aproximaciones por polinomios de Taylor sólo son válidas en la región cercana al punto de expansión de la serie, en los métodos de integración numéricos es necesario utilizar un polinomio de aproximación que sea válido en un rango más amplio. Los polinomios de Lagrange proporcionan las características necesarias para la evaluación de integrales de funciones. Las fórmulas de Newton-Cotes se basan en la interpolación mediante polinomios de Lagrange.

#### Regla de Simpson 1/3

El polinomio de Lagrange de segundo orden es:

$$f_{2}(x) = \frac{(x-x_{1})(x-x_{2})}{(x_{0}-x_{1})(x_{0}-x_{1})}f(x_{0}) + \frac{(x-x_{0})(x-x_{2})}{(x_{1}-x_{0})(x_{1}-x_{2})}f(x_{1}) + \frac{(x-x_{0})(x-x_{1})}{(x_{2}-x_{0})(x_{2}-x_{1})}f(x_{2})$$
. . . (AI.2.)

La segunda fórmula de Newton-Cotes es para una cuadrática aproximada en dos intervalos de anchura uniforme y se expresa como:

$$\int f(x)dx \cong \int f_2(x) = \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) - \frac{h^5}{90}f^{\prime\prime\prime}(\xi) \quad . \quad . \quad (AI.3.)$$

Esta es la conocida regla de Simpson 1/3 la cual tiene un error local  $O(h^3)$ .

La descomposición de la región de integración en elementos discretos para la aplicación del la regla de Simpson 1/3 es un factor crítico que compromete la exactitud del resultado de la integral con el tiempo requerido para su evaluación.

Para determinar la densidad del "mallado" en la evaluación de las integrales se probó el algoritmo de integración con diversas funciones cuyo valor de la integral en un cierto intervalo se obtuvo de manera analítica.

Una gráfica que muestre el efecto de la densidad del mallado sobre el error se muestra en la figura 4.11. Como puede observarse, el error se incrementa sustancialmente cuando la densidad del mallado sobrepasa un valor aproximado de  $10^2$ . Lo anterior ocurre debido a que el error de redondeo adquiere un mayor peso cuando el número de operaciones se incrementa con una alta densidad de mallado. Para mejorar el comportamiento del método se han utilizado variables de doble precisión.

Para el cálculo de integrales se ha seleccionado una densidad de mallado de entre 80 y 140 segmentos obteniéndose buenos resultados al ser comparada la solución numérica con funciones simples de integrar mediante métodos analíticos.

#### Derivación numérica.

Dado que la derivación numérica tiende a incrementar el error, la evaluación de derivadas mediante técnicas numéricas durante la solución del modelo se ha minimizado a lo indispensable.

Por otra parte es importante hacer notar el efecto del redondeo sobre la precisión de las derivadas calculadas por medio de fórmulas de diferencias finitas. Conforme h decrece teóricamente se incrementa la precisión, sin embargo al reducir h se requiere restar valores de la función que son casi del mismo valor y esto hace que se incurra en un gran error

debido al redondeo que depende de la precisión del tipo de dato que puede manipular el procesador de datos numéricos.

La fórmula para la evaluación de las derivadas seleccionada fue la de *diferencia* central de cuarto orden cuya fórmula se muestra a continuación:

$$\frac{df}{dx} \cong \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + O(h^4) \quad . \quad . \quad (AI.4.)$$

Como puede verse este método solo requiere de cuatro evaluaciones de la función y el error local es  $O(h^4)$ .

#### Método Simplex (Poliedro flexible).

La forma de la función objetivo  $(J^*)$  en el modelo planteado hace necesario considerar métodos de optimación que no hagan uso de la derivada de la función. Debido a que J\* se evalúa íntegramente mediante el uso de métodos numéricos es deseable no recurrir más a ellos durante la etapa de optimación. De todos los métodos existentes para la minimización de una función de N-variables existe uno denominado método del poliedro flexible que tiene marcadas ventajas respecto a otros métodos quizá más veloces en la solución del problema en cuestión.

Este método tiene como objetivo encontrar el mínimo de una función de más de una variable independiente. El método Simplex fue desarrollado por Nelder y Mead, una de las ventajas de este método es que solo requiere evaluaciones de la función objetivo y no así sus derivadas. No resulta muy eficiente en términos del número de evaluaciones de la función objetivo que se requieren. El método de Powell es quizá seguramente más rápido en la mayoría de las aplicaciones. Sin embargo el método Simplex es frecuentemente, el mejor método si el criterio para su selección es "tener algo que trabaje rápidamente" para un problema cuya carga computacional es pequeña.

El método tiene una naturaleza puramente geométrica la cual se describe a continuación:

Un simplex es una figura geométrica consistente en N dimensiones, de N+1 puntos o vértices y todos ellos interconectados por segmentos de líneas, caras poligonales, etc. En dos dimensiones, un simplex es un triángulo. En tres dimensiones es un tetraedro, no necesariamente un tetraedro regular. En general se está solamente interesado en los simplex que no se degeneran, por ejemplo, que encierran un volumen interior finito N-dimensional. Si cualquier punto de un simplex no degenerado es tomado como el origen, entonces los N otros puntos definen las direcciones de los vectores que definen al espacio vectorial N-dimensional.

En una minimización unidimensional, es posible acotar un mínimo, de tal manera que el éxito de un subsecuente aislamiento de un punto está garantizado. No existe un procedimiento análogo en los espacios multidimensionales. Para la minimización unidimensional, lo mejor que se puede hacer es dar al algoritmo una apuesta inicial, esto es, un vector de N variables independientes como el primer punto a probar. El algoritmo se propone entonces de manera que construya su propio camino hacia el punto más óptimo a través de la inimaginable complejidad de una topografia N-dimensional hasta encontrar un mínimo que por lo general resulta ser local. El método simplex debe comenzar no sólo con un solo punto, sino con N+1 puntos definiendo así el simplex inicial. Si se piensa en unos de estos puntos (no importa cual) como el punto inicial  $P_0$ , entonces se pueden obtener los otros puntos a partir de:

$$P_i = P_0 + \lambda e_i \quad \dots \quad (AI.5.)$$

donde los  $e_i$  son los N vectores unitarios, y donde  $\lambda$  es una constante la cual debe ser propuesta en función de la escala característica del problema (o bien se puede tener una  $\lambda$  diferente para cada vector).

El método simplex, ahora toma una serie de pasos, muchos de ellos solo para mover el punto del simplex donde la función toma el máximo valor ("el punto más alto") a través de la cara opuesta del simplex hasta un punto más bajo. Estos pasos son llamados reflexiones, y estas son construidas de manera que se conserve el volumen del simplex (por lo tanto éste no se degenera). Cuando esto se puede hacer así, el método expande el simplex en una u otra dirección para tomar pasos más grandes. Cuando el método detecta hay una dirección favorable expande el simplex en esta dirección. Cuando se alcanza el "fondo de un valle" el método contrae el simplex en la dirección transversal y trata de dirigirse hacia el valle. Si hay una situación en donde el simple se encuentra tratando de pasar a "través del ojillo de una aguja" se contrae a sí mismo en todas direcciones, empujándose así mismo alrededor de su punto más bajo (el mejor).

El criterio de terminación del algoritmo puede ser punto muy delicado en cualquier rutina de minimización multidimensional. Sin una posibilidad de acotamiento, y con más de una variable independiente, no se puede tener la opción que requerir cierta tolerancia para una única variable dependiente. Típicamente se puede identificar un "ciclo" o "paso" en el algoritmo multidimensional. Es entonces es posible terminar cuando la distancia del vector que se mueve en ese paso es fraccionalmente menor en magnitud que alguna tolerancia tol. Alternativamente se puede requerir que el decremento en el valor de la función en el paso terminal sea menor que alguna tolerancia ftol. Se debe notar que tol no debe ser menor que la raíz cuadrada de la precisión de la computadora, es perfectamente apropiado dejar a *ftol* ser del orden de la precisión de la computadora. Es una práctica sana reiniciar una rutina de minimización multidimensional en el punto en donde se cree haber encontrado un mínimo. Para este reinicio se deben reinicializar cualquier variable auxiliar que sirva de entrada. En el método simplex, por ejemplo, se deben reiniciar N de los N+1vértices del simplex de nuevo aplicando la ecuación (AI.5.), con  $P_0$  siendo uno de los vértices del mínimo anunciado en el último paso. La regla es siempre que el reinicio no sea tan costoso.

Anexo II. Historial de evolución de parámetros pseudo-independientes.

# **ANEXO II.**



### **REDUCCIÓN: 10%**





### **REDUCCIÓN: 20%**

108

.



### **REDUCCIÓN: 30%**





### **REDUCCIÓN: 40%**

110

1. 1. 1. M



**REDUCCIÓN: 50%** 



## **ANEXO III.**

SIMCLAD genera dos archivos de salida. Uno de ellos con extensión .prm contiene los valores de los parámetros pseudo-independientes y de la función objetivo,  $J^*$ , correspondientes a cada paso durante el proceso de optimación. El otro, con extensión .clr contiene tanto la definición del problema en términos de los parámetros del proceso, los puntos iniciales del simplex así como diversos resultados.

A continuación se muestra un ejemplo del archivo de salida .clr y se describen las partes que lo componen.

SYMMETRICAL CLADDING ANALYSIS -File name: Steel&Al\_r50.clr-Start Date: Sat Dec 07 12:00:47 2002 Fecha de inicio del análisis.

· · · · · · PROBLEM DATA · · · ·

ROLL RADIUS = 157.500000 [mm] ANGULAR ROLL SPEED = -0.578000 [rad/seg] LINEAR ROLL SPEED = -0.578000 [mm] TOTAL INTIAL THICKNESS = 8.680000 [mm] TOTAL FINAL THICKNESS = 4.840036 [mm] TOTAL REDUCTION = 44.23\* EXTERNAL LAYER THICKNESS = 1.940000 [mm] INTERNAL LAYER THICKNESS = 4.800000 [mm] FIL = 10.0000 (Hardening exponent) -OUTER LAYER-N2 = 0.2070 (Hardening exponent) -INNER LAYER-FRICTION FACTOR (ROLLS <> EXTERNAL LAYER.) = 1.000000 FRICTION FACTOR (INTERNAL LAYER <> EXTERNAL LAYER) = 1.000000

Parámetros del proceso



	-
THITTLAL CIMPLEY IMPROVID	
VERIERS:	
VERTEX 1:	
21 [1] - 0 0000400000000	
$a_{1}[1] = 0.00004000000000000000000000000000000$	
b[1] = 0.00229000	
Q1[1] = -130.000000	
e2f[1] = 1.078000	
J[1] = 89813.584492	
VERTEX 2.	
a1[2] = 0.0000390000000	
$a_2[2] = 0.00005050000000$	
<b>50 B</b> [2] = 0.00179000 01(2) = -107 000000	
2f [2] = 1.328000	
J[2] = 90697.927767	
VERTEX 3:	
a1 [3] = 0.0000180000000	
$a_2[3] = 0.0000505000000$	
b[3] = 0.00269000	
Q1[3] = -124.000000	Vértices del simplex inicial y el
e2f[3] = 1.138000	valor respectivo de la función (I*)
J[3] = 89914.524457	valor respectivo de la función (5 )
VERTEX 4:	
a1[4] = 0.0000420000000	
$a_2[4] = 0.00005050000000$	
D[4] = 0.00269000	
$e_{2f[4]} = 0.918000$	
J[4] = 100804.161185	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
VERTEX 5:	
a1[5] = 0.00004200000000	
a2[5] = 0.00007450000000	
b[5] = 0.00099000	
Q1[5] = -63.000000	
$E_{21}[5] = 1.818000$ $T_{15}[5] = 367043.792787$	
0(5) - 10/045//52/0/	
VERTEX 6:	
a1[6] = 0.0000660000000	
$a_{2}[6] = 0.0000405000000$	
O1[6] = -93.000000	
e2f[6] = 1.488000	
J[6] = 99830.504108	
NUMBER OF FUNCTION EVALUATIONS - 295	Número de evaluaciones de la función
LAST SIMPLEX VERTEXES AND Y	Manuel de craitaciones de la funcion.
FUNCTION VALUE IN EACH ONE:	
i al[i] a2[i] - b[i]	Q1[1] e2f[i] VAL.DE P
1 0.0000363310 0.000011216 0021626141	-83.8541366321 1.5947546326 70102.052
2 0.0000363305 0.0000112169 0.0021626231	-83.8531721155 1.5947652963 70102.053
3 0.0000363304 0.0000112169 0.0021626225	-83.8531053878 1.5947660476 70102.058
4 0.0000363304 0.0000112170 0.0021626280	-83.8528082527 1.5947693144 70102.056
5 0.0000363304 0.0000112169 0.0021626215	-83.8531554839 1.5947654977 70102.058
6 0.0000363301 0.0000112170 0.0021626241	-83.8528663330 1.5947711375 70102.058



End Date: Sat Dec 07 12:35:20 2002 Fecha de fin del análisis.

**TESIS CON** LA DE ORIGEN

•

114