003323

13

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

ALGEBRAS DE CLIFFORD Y ESPINORES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:

F I S I C A

P R E S E N T A :

DALIA BERENICE CERVANTES CABRERA

DIRECTOR DE TESIS: DR. MIGUEL SOCOLOVSKY VAJOVSKY

FACULTAD DE CIENCIAS
UNAM

2003

A

VNIVERSIDAD NACIONAL
AVTONOMA DE
MEXICO

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:
"Algebras de Clifford y Espinores"

realizado por Cervantes Cabrera Dalia Berenice

con número de cuenta 9333431-6, quien cubrió los créditos de la carrera de: Física.

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Miguel Socolovsky Vajovsky	
Propietario	Dr. Zbigniew Oziewicz Kwass	Zbigniew Oziewicz
Propietario	Dr. Moriel Axel de la Macorra Pettersson	
Suplente	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía	Hugo A. Rincón M.
Suplente	Dr. José Antonio García Zenteno	

Consejo Departamental de Física

DRA. PATRICIA GOLDSTEIN MENACHE
Coordinadora de Licenciatura

Deseo agradecer la ayuda, apoyo y comprensión de mi asesor el Dr. Miguel Socolovsky. Doy también las gracias a los profesores Dr. Hugo Rincón y Dr. Oziewicz. De manera especial quiero expresar el agradecimiento a mi familia y amigos.

Índice General

0.1 Introducción.

En 1932, Paul Dirac introdujo un operador diferencial de primer orden para describir la evolución de la función de onda que representa la mecánica cuántica del electrón. Este es un operador sobre el espacio $\mathbb{R}^4$ provisto de la métrica de Minkowski (Espacio-Tiempo Plano). Una peculiaridad del operador de Dirac fué que no actúa en funciones escalares, si no en funciones vectoriales, con lo cual los coeficientes de este operador son matrices. El álgebra generada por estas matrices, ya eran bien conocida en matemáticas, y era la llamada álgebra de Clifford.

Las álgebras de Clifford tienen una gran importancia tanto en el área matemática como física. Por ejemplo los generadores de estas álgebras representan operadores de creación y aniquilación de partículas fermiónicas, la teoría geométrica de Cartan sobre ellas, da conceptos de gran utilidad en teorías de partículas elementales.

El objetivo de este trabajo es conocer y manejar la teoría de las álgebras de Clifford para describir algunas de sus aplicaciones en la mecánica cuántica, especificamente las álgebras de Dirac y Pauli. También dar una clasificación de los espinores sobre los que actúa el operador de Dirac.

En el capítulo 1, se define el álgebra de Clifford asociada a un espacio vectorial real de dimensión finita, dotado de una forma cuadrática. Se muestra la existencia de la propiedad universal de las álgebras de Clifford, la cual es muy útil al demostrar los teoremas en los capítulos 1 y 2. También el teorema 1 es importante ya que da la forma de construir una base para el álgebra partiendo de una del espacio vectorial, además se conoce la dimensión, y si la forma bilineal asociada es no degenerada, se describen características del álgebra que ayudaran a entender los tipos de representación y con ello parte de la clasificación de los espinores.

Como ejemplos sencillos pero importantes se calculan seis álgebras "básicas".

Se discuten propiedades como la graduación del álgebra, la definición del funtor Cl, el objeto universal $(C(V,Q),i)$ del funtor $\varphi_{(V,Q)}$, lo que implica la existencia de una equivalencia natural, haciendo a $(C(V,Q),i)$ natural en el sentido técnico y como veremos los espinores son elementos de estas álgebras, haciendolos naturales también.

En el capítulo 2, habiendo calculado ya las álgebras de Clifford y dado sus propiedades universales, usando teoremas de periodicidad los cuales permiten separar el álgebra de manera más sencilla, como el de periodicidad 2 o la proposición 7 entre los más importantes, podemos hacer de manera inductiva la clasificación de las álgebras de Clifford reales de dimensión finita (proposición 12). Definiendo la signatura y la signatura módulo ocho, recopilamos la clasificación en el diagrama de Hurewicz.

Complejificando obtenemos también la clasificación de las álgebras de Clifford complejas de dimensión finita.

Por último definimos la K-representación del álgebra de Clifford, dada la forma de las álgebras que obtuvimos antes, se muestra la existencia de representaciones irreducibles. Que será fundamental en la definición de los espinores.

En el capítulo 3, como casos importantes en la física, se estudian las álgebras de Pauli y Dirac.

De la construcción de la ecuación de Dirac, se observa que las matrices gamma son los generadores de las álgebras de Clifford $C_{1,3}$ y $C_{3,1}$ según la signatura de la forma bilineal en el espacio tiempo. Como los fenómenos físicos no dependen de la elección de esta signatura, este hecho muestra la necesidad de la complejificación de las álgebras anteriores, lo que da el álgebra de Dirac física $D^{16} \cong \mathbb{C}(4)$. También se discuten tres representaciones de la ecuación de Dirac: estándar, Majorana y de cuaternios, y las transformaciones entre ellas.

En el capítulo 4, teniendo la clasificación de las álgebras de Clifford reales y complejas, y la definición del espinor como la función de onda sobre la cual actúa el operador de Dirac, damos una clasificación de los espinores según la dimensión del espacio y la signatura módulo ocho de la métrica, encontrando espinores de Dirac, Majorana, Pseudo Majorana, Weyl , Majorana-Weyl, Pseudo Majorna-Weyl.

Por último se presentan dos apéndices, en el primero se estudia brevemente los conceptos de cateogorías, productos y coproductos, así como funtores, permitiendo definir universales y probar las propiedades universales de las bases, de conúcleo y del producto tensorial.

Se da la definición de álgebras, con lo cual se hace la construcción del álgebra tensorial y del álgebra exterior.

Finalmente se prueban algunas propiedades del producto tensorial las cuales son utilizadas a lo largo del desarrollo de los capítulos.

En el segundo apéndice, dada la importancia en la mecánica cuántica que tienen los espacios vectoriales complejos se dan tres formas equivalentes de complejificar un espacio vectoral real.

Capítulo 1

Álgebras de Clifford.

En éste capítulo daremos una definición del álgebra de Clifford para cualquier espacio vectorial real de dimensión finita, dotado de la forma cuadrática Q, como el álgebra cociente $\frac{T(V)}{K_Q}$. Mediante algunos teoremas, se prueba la existencia, unicidad, simplicidad y la forma explicita de las álgebas de Clifford.

Como ejemplos simples pero importantes, se calcula el álgebra de Clifford para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^{p+q}$ sobre el campo $\mathbb{R}$ con forma cuadrática Q cuya forma bilineal asociada B es no degenerada, $B = diag\{\underbrace{-1,-1,...,-1}_{p},\underbrace{1,1,...,1}_{q}\}$ para $p = q = 0, p = 1$ y $q = 0, p = 0$ y $q = 1, p = q = 1, p = 2$ y $q = 0, p = 0$ y $q = 2$.

Con ello se discuten propiedades universales, su $\mathbb{Z}_2-$graduación, la existencia del funtor covariante Cl de la categoría de espacios cuadráticos e isometrías a la categoría de álgebras asociativas y morfismos de álgebras. El carácter de $(C(V,Q),i)$ como objeto universal para el funtor $\varphi_{(V,Q)}$ el cual induce un funtor canónico $H(C(V,Q),-)$ con el cual se establece una equivalencia natural entre los funtores $\varphi_{(V,Q)}$ y $H(C(V,Q),-)$, aún más $\varphi_{(V,Q)}$ es representable y su representación es $H(C(V,Q),-)$. Lo que hace $(C(V,Q),i)$ "natural".

1.1 Álgebras de Clifford

Sea V un espacio vectorial sobre un campo F de dimensión finita, dotado con una forma cuadrática Q, la cual es una función de V en F tal que:

1. $Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x), \quad \alpha \in F, x \in V;$
2. $B(x,y) \equiv Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ es bilineal.

Es claro que $B(x,y)$ es simétrica; esto es, $B(x,y) = B(y,x)$ y además $B(x,x) = 2Q(x)$.

Ahora usaremos Q para definir el álgebra como sigue:

Nota 1 *Apartir de ahora, a menos que se especifique, consideramos que el producto tensorial y la suma directa estan sobre el mismo campo que el espacio vectorial V es decir $\otimes = \otimes_F$ y $\oplus = \oplus_F$.*

Sea V un espacio de dimensión n sobre el campo F, Q una forma cuadrática en V. Y $T(V) = F \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus (V \otimes V \otimes V) \oplus ...$, el álgebra tensorial definida por V (ver sección 4.5), K_Q ideal en $T(V)$ generado por todos los elementos de la forma

$$x \otimes x - Q(x)\bar{1}, \quad x \in V.$$

Definimos el **álgebra de Clifford** de la forma cuadrática Q como el álgebra

$$C(V,Q) = \frac{T(V)}{K_Q}. \tag{1.1}$$

Si $a \in T(V)$, escribimos $\overline{a} = a + K_Q \in C(V,Q)$. Tenemos la asignación $i : V \longrightarrow C(V,Q)$ dada por $x \mapsto \overline{x} = x + K_Q$. Ya que V genera a $T(V)$, $i(V)$ genera el álgebra de Clifford $C(V,Q)$.

Tenemos $\overline{x}^2 = \overline{x}\overline{x} = \overline{x \otimes x} = \underbrace{x \otimes x - Q(x)1}_{\in K_Q} + K_Q + Q(x)1 = \overline{Q(x)1} = Q(x)\overline{1}$, es decir

$$\overline{x}^2 = Q(x)\overline{1}. \tag{1.2}$$

La función i tiene la siguiente propiedad universal : Si f es una función lineal de V a un álgebra A tal que $f(x)^2 = Q(x)1$, $x \in V$, entonces existe un único morfismo de álgebras g de $C(V,Q)$ en A tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & C(V,Q) \arrow[dl, "g"] \\ A & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Para probarlo recordemos que $(T(V), in)$, donde $in : V \longrightarrow T(V)$ el mapeo canónico, es un universal desde V a F, F el funtor "que olvida" (ver sección 4.4). Esto significa que cualquier función lineal de V en un álgebra A, tiene una única extensión a un morfismo de álgebras f' de $T(V)$ a A.

Ahora cada elemento $x \otimes x - Q(x)1$, $x \in V$, esta contenido en el núcleo de f', ya que

$$f'(x \otimes x - Q(x)1) = f'(x \otimes x) - f'(Q(x)1) = f'(x)f'(x) - Q(x)f'(1) = f(x)^2 - Q(x)1 = 0.$$

Luego, el ideal $K_Q \subset$ Kernel de f'. Así, tenemos el morfismo inducido $g : C(V,Q) \longrightarrow$

A con $a+K_Q \longmapsto f'(a)$. Así $g(\overline{x}) = f'(x) = f(x)$, con lo que se sigue la conmutatividad en el diagrama anterior.

Para probar la unicidad de g supongamos que existe $h : C(V,Q) \longrightarrow A$ tal que $h \circ i = f$ entonces $h \circ i(x) = h(\overline{x}) = f(x) = f'(x) = g(\overline{x})$ para toda $x \in V$ con lo que $h = g$.

Un elemento en el ideal K_Q es

$$((x+y)\otimes(x+y)) - Q(x+y)\overline{1} = x\otimes x + x\otimes y + y\otimes x + y\otimes y - Q(x)\overline{1} - Q(y)\overline{1} - B(x,y)\overline{1}$$

donde $x, y \in V$. Pero $x \otimes x - Q(x)1$ y $y \otimes y - Q(y)1 \in K_Q$ con lo que

$$x \otimes y + y \otimes x - B(x,y)\overline{1} \in K_Q. \tag{1.4}$$

Al aplicar en (1.4) la función f' y ya que $K_Q \subset$ Kernel de f', una relación equivalente a (1.4) es

$$\overline{xy} + \overline{yx} = B(x,y)\overline{1} \text{ en } C(V,Q) \tag{1.5}$$

y $\overline{x}^2 = Q(x)\overline{1}$ $[ref.11]$.

Podemos usar esto para probar el siguiente lema

Lema 1 *Si los elementos $u_1, ..., u_n$ generan el espacio vectorial V sobre el campo F, entonces los elementos*

$$1 = \overline{1}, \quad \overline{u_{i_1} u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_r}}, \quad i_1 < i_2 < \cdots < i_r, \quad 1 \leq r \leq n \tag{1.6}$$

generan el espacio vectorial $C(V,Q)$ sobre F.

Demostración.

Sabemos que $T(V)$ esta generada por V (ver sección 4.5) y los u_i generan a V. Entonces los u_i generan a $T(V)$, esto es, todo elemento de $T(V)$ es una combinación lineal de 1 y u_i's de grado positivo. Llamemos a 1, $u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \cdots \otimes u_{i_r}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, $1 \leq r \leq n$ "estándares" y sea S el conjunto de sus imagenes bajo la función proyección $\pi : T(V) \longrightarrow C(V, Q)$, $\{\overline{1}, \overline{u_{i_1}u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_r}} \mid i_1 < i_2 < \cdots < i_r, 1 \leq r \leq n\}$.

Probaremos por inducción sobre i y en el grado de $\overline{u} \in S$ que $\overline{u_i u}$ es congruente módulo el ideal K_Q a una combinación lineal de elementos de S de $grado \leq grado(\overline{u}) +$ 1.

Supongamos que $u = u_{i_1} \otimes u_{i_2} \otimes \cdots \otimes u_{i_r}$

Si $r > 0$, $i = 1$ entonces $\overline{u_i u}$ es

$$\overline{u_1}(\ \overline{u_{i_1}}\ \overline{u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_r}})$$

para el cual tenemos dos casos

Cuando $i_1 > 1$ así

$$\overline{u_1}(\ \overline{u_{i_1}}\ \overline{u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_r}}) \in S$$

Y para $i_1 = 1$,

$$\overline{u_1}(\ \overline{u_1}\ \overline{u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_r}}) \equiv Q(u_1)\overline{u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_r}} \pmod{K_Q}.$$

Donde $grado(Q(u_1)\overline{u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_r}}) = r - 1 \leq grado(\overline{u}) + 1 = r + 1$.

Ahora sea $i > 1$, $r > 0$

Como se hizo antes, si $i < i_1$ entonces

$$\overline{u_i}(\ \overline{u_{i_1}}\ \overline{u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_r}}) \in S$$

para $i = i_1$

$$\overline{u_i}(\overline{u_{i_1}}\,\overline{u_{i_2}}\cdots\overline{u_{i_r}}) \equiv Q(u_i)\overline{u_{i_2}}\cdots\overline{u_{i_r}} \pmod{K_Q}.$$

Cuando $i > i_1$ se tiene $\overline{u_i}(\overline{u_{i_1}}) = B(u_i, u_{i_1})\overline{1} - \overline{u_{i_1}}(\overline{u_i})$ así

$$\overline{u_i}(\,\overline{u_{i_1}}\,\overline{u_{i_2}}\cdots\overline{u_{i_r}}) \equiv B(u_i, u_{i_1})\overline{1}\overline{u_{i_2}}\cdots\overline{u_{i_r}} - \overline{u_{i_1}}(\overline{u_i}\,\overline{u_{i_2}}\cdots\overline{u_{i_r}}).$$

Por la hipótesis de inducción $\overline{u_i}\,\overline{u_{i_2}}\cdots\overline{u_{i_r}}$ es congruente módulo K_Q a una combinación lineal de elementos de S. Y $grado(\overline{u_i}(\,\overline{u_{i_1}u_{i_2}}\cdots\overline{u_{i_r}})) \leq r+1$.

Este resultado implica que si C' es el subespacio de $C(V,Q)$ generado por los elementos $\overline{1}$, $\overline{u_{i_1}u_{i_2}}\cdots\overline{u_{i_r}}$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_r$, $1 \leq r \leq n$, entonces $\overline{u_i}C' \subset C'$. Con lo que $C'C' \subset C'$ así C' es una subálgebra de $C(V,Q)$. Ya que C' contiene a $\overline{V} = \{\overline{x} = i(x) \mid x \in V\}$ y $\overline{V}$ genera $C(V,Q)$ se sigue $C' = C(V,Q)$.■

Lema 2 *Si $B(x,y)$ es no degenerada y $n = 1$, entonces* $\dim C(V,Q) = 2$ *y si $V = Fu$, entonces $C(V,Q)$ es un campo o es suma directa de dos copias de F según si $Q(u)$ es o no un cuadrado en F.*

Demostración.

Del lema 1 sabemos $\dim C(V,Q) \leq 2$ y si $V = Fu$, entonces $\overline{u}^2 = Q(u)\overline{1}$ con $Q(u) \neq 0$ ya que B en no degenerada.

Definiendo el álgebra $A = \frac{F[t]}{(t^2 - Q(u)1)}$, para $\overline{t} \in A$, $\overline{t} = t + (t^2 - Q(u)1)$. Ya que $\overline{(t^2 - Q(u)1)} = \overline{0}$ entonces $\overline{t^2} = Q(u)\overline{1}$. Entonces la función lineal f de V a A tal que $f(u) = \overline{t}$ satisface $f(x)^2 = Q(x)\overline{1}$, $x \in V$. Se sigue de la propiedad universal del álgebra de Clifford, la existencia de un morfismo de álgebras g de $C(V,Q)$ en A donde $\overline{u} \mapsto \overline{t}$, el cual es suprayectivo.

Sea $\overline{g(t)} \in A$ entonces $\overline{g(t)} = \overline{q(t)(t^2 - Q(u)1)} + \overline{r(t)}$, donde $r(t)$ y $q(t) \in F[t]$, el primer término de la suma esta en la clase de $\overline{0}$ y $r(t) = a + bt$ así $\overline{r(t)} = a\overline{1} + b\overline{t}$ con lo que $\overline{g(t)} = a\overline{1} + b\overline{t}$, el $grado(r(t)) < 2$ o $r(t) = 0$, luego $(1, \overline{t})$ es base de A y $\dim A = 2$.

Del morfismo suprayectivo g y $\dim C(V,Q) \leq 2$, tenemos $\dim C(V,Q) = 2$, es decir g es un isomorfismo.

Si $Q(u)$ no se puede escribir como un cuadrado en F, entonces $t^2 - Q(u)1$ es irreducible en $F[t]$ y $C(V,Q)$ es un campo.

Si $Q(u) = \beta^2$, $\beta \in F$, sea $e' = \overline{u} - \beta\overline{1}$ que satisface

$$e'^2 = \overline{u}^2 - 2\beta\overline{u} + \beta^2\overline{1} = 2Q(u)\overline{1} - 2\beta\overline{u} = -2\beta(\overline{u} - \beta\overline{1}) = -2\beta e'$$

y ya que $e = -(2\beta)^{-1}e'$ es un idempotente $\neq 0, 1$ $(e^2 = e)$, en $C(V,Q)$. Entonces $C(V,Q) = Fe \oplus F(1-e)$, una suma directa de dos copias de F. Ver $[ref.10]$ ■

Ejemplo 1 *Sea* $B(x,y)$ *no degenerada y* $n = 2$ *entonces* $\dim C(V,Q) = 4$.

Demostración.

Eligiendo una base ortogonal (u, v) para V. Entonces $Q(u)Q(v) \neq 0$, ya que B es no degenerada. Sea C' el álgebra de Clifford con forma cuadrática Q' la cual es la restricción de Q a Fu. C' tiene base $(1, \overline{u})$, como se hizo en el lema 2. Consideramos las matrices

$$u' = \begin{pmatrix} \overline{u} & 0 \\ 0 & -\overline{u} \end{pmatrix}, \quad v' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ Q(v)1 & 0 \end{pmatrix},$$

en $M_2(C')$, es decir matrices de 2×2 con entradas en C'. Donde

$$u'v' = \begin{pmatrix} 0 & \overline{u} \\ -Q(v)\overline{u} & 0 \end{pmatrix}, \quad v'u' = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{u} \\ Q(v)\overline{u} & 0 \end{pmatrix}$$

cumplen $u'v' + v'u' = 0$. También $u'^2 = Q(u)1$, $v'^2 = Q(v)1$, $1 \in M_2(C')$ y $A = F1 + Fu' + Fv' + Fu'v'$ es una subálgebra de $M_2(C')$. Podemos ver que las matrices $1, u', v', u'v'$ son linealmente independientes. Con lo que $\dim A = 4$.

También, la función f lineal de V en A tal que $u \mapsto u', v \mapsto v'$ satisface $f(x)^2 = Q(x)1$, $x \in V$. Por la propiedad universal del álgebra de Clifford existe una extensión de f, el morfismo de álgebras g de $C(V,Q)$ en A tal que $g(\overline{u}) = u', g(\overline{v}) = v'$. Ya que g es suprayectiva, la $\dim C(V,Q) \leq 4$ y $\dim A = 4$, implica $\dim C(V,Q) = 4$, aún más g es un isomorfismo.■

Un álgebra A sobre un campo F de característica $\neq 2$ (Un campo F se dice que es de característica p si es un número primo tal que $\underbrace{a + ... + a}_{p} = 0$, para toda $a \in F$.) es llamada un **álgebra de cuaternios** si A es generada por dos elementos i y j tales que

$$i^2 = \alpha 1 \neq 0, \quad j^2 = \beta 1 \neq 0, \quad ij = -ji$$

donde $\alpha, \beta \in F$.

Lema 3 *Toda álgebra de cuaternios es simple central sobre F con dimensión 4.(Un álgebra simple es aquella cuyos únicos ideales son los triviales es decir $\{0\}$ o A y es central si su centro es $C = F1 = \{\alpha 1, \alpha \in F\}$; el centro es el conjunto de elementos que conmutan con todos los otros elementos del conjunto.)*

Demostración.

De la definición anterior, implica que cualquier elemento de A es una combinación lineal de los elementos $1, i, j, ij$. Supongamos que

$$\lambda 1 + \mu i + \upsilon j + \rho ij = 0 \tag{1.7}$$

para $\lambda, \mu, \upsilon, \rho \in F$. Si multiplicamos (1.7) por i del lado izquierdo y del lado derecho por $i^{-1} = \alpha^{-1} i$, obtenemos

$$\lambda 1 + \mu i - \upsilon j - \rho ij = 0, \tag{1.8}$$

sumando y restando (1.8) con (1.7) tenemos

$$\lambda 1 + \mu i = 0 \ \text{ y } \ \upsilon j + \rho ij = 0, \tag{1.9}$$

ahora multiplicando (1.9) del lado izquierdo por j y del derecho por $j^{-1} = \beta j$ tenemos

$$\lambda 1 - \mu i = 0 \ \text{ y } \ \upsilon j - \rho ij = 0, \tag{1.10}$$

sumando y restando (1.10) con (1.9), obtenemos $\lambda 1 = \mu i = \upsilon j = \rho ij = 0$ con lo que $\lambda = \mu = \upsilon = \rho = 0$. Así $1, i, j, ij$ son linealmente independientes luego constituyen una base de A y $\dim A = 4$. Sea I un ideal $\neq A$ y $\overline{1} = 1 + I, \overline{i} = i + I, \overline{j} = j + I$ que satisfacen $\overline{i}^2 = \overline{ii} = \overline{\alpha 1} = \alpha \overline{1} \neq 0, \overline{j}^2 = \beta \overline{1} \neq 0, \overline{ij} = -\overline{ji}$. Entonces $\frac{A}{I}$ es una álgebra de cuaternios y $\dim \frac{A}{I} = 4$. Así $I = 0$ con lo que A es simple.

Demostremos que el centro de A es $F1$. Sea $c = \lambda 1 + \mu i + \upsilon j + \rho ij$ en el centro de A, se debe cumplir $ci = ic$ con lo que $\upsilon = \rho = 0$ también $cj = jc$ así $\mu = 0$. Luego $c = \lambda 1$ entonces el centro es $F1$.■

Lema 4 *Si $B(x, y)$ es no degenerada y $n = 2$ entonces $C(V, Q)$ es un álgebra de cuaternios.*

Demostración.

En el ejemplo anterior probamos que existe un isomorfismo de $C(V,Q)$ con el álgebra A generada por u' y v' que cumplen $u'^2 = Q(u)1 \neq 0$, $v'^2 = Q(v)1 \neq 0$, $u'v' = -v'u'$. Entonces $C(V,Q)$ es un álgebra de cuaternios.■

Si $B(x,y)$ es una forma simétrica, bilineal de un espacio vectorial V y $(u_1, ..., u_n)$ una base para V entonces $\delta = \det(B(u_i, u_j))$ es **llamado el discriminante** de B.

Lema 5 *Para $B(x,y)$ no degenerada y* $\dim V \geq 3$. *Sea U un subespacio de V de dimensión 2, en que la restricción de B a U es no degenerada. Escribimos $V = U \oplus U^{\perp}$ y Q', Q'' las restricciones de Q a U y $U^{\perp}$ respectivamente. Entonces*

$$C(V,Q) \cong C(U,Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$$

donde δ' es el discriminante de la restricción de B a U.

Demostración.

Sean $i' : U \longrightarrow C(U,Q')$ y $i'' : U^{\perp} \longrightarrow C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$ las funciones canónicas del álgebra de Clifford donde $y \longmapsto y'$, $z \longmapsto z''$ respectivamente. Y (u,v) una base ortogonal para U, definamos $\overline{d} = 2\overline{u}\,\overline{v}$, se cumple $\overline{u}^2 = Q(u)1$, $\overline{v}^2 = Q(v)1$ y $\overline{u}\,\overline{v} = -\overline{v}\,\overline{u}$ (por la relación (1.5) y la ortogonalidad de u, v), con lo que

$$\overline{d}^2 = -4\overline{u}^2\overline{v}^2 = -4Q(u)Q(v) = -B(u,u)B(v,v)1 = -\delta' 1$$

donde $\delta' = \det \begin{pmatrix} B(u,u) & 0 \\ 0 & B(v,v) \end{pmatrix}$ es decir el discriminante de la restricción de B a U definida por la base (u,v).

También si $y \in U, z \in U^{\perp}$, entonces $\overline{y}\overline{d} = -\overline{d}\overline{y}$, $\overline{y}\overline{z} = -\overline{z}\overline{y}$ y $\overline{d}\overline{z} = \overline{z}\overline{d}$, para ver la primera igualdad, tenemos $y = \alpha u + \beta v$ con $\alpha, \beta \in F$ luego $\overline{y} = \alpha\overline{u} + \beta\overline{v}$ así

$$\overline{y}\overline{d} = (\alpha\overline{u} + \beta\overline{v})(2\overline{u}\overline{v}) = 2\alpha Q(u)\overline{v} - 2\beta Q(v)\overline{u} = -(2\overline{u}\overline{v})(\alpha\overline{u} + \beta\overline{v}) = -\overline{d}\overline{y}$$

la segunda y tercera igualdad podemos seguirlas usando la relación (1.5) y la ortogonalidad, $\overline{y}\overline{z} + \overline{z}\overline{y} = 2B(y,z)1 = 0$ con lo que $\overline{y}\overline{z} = -\overline{z}\overline{y}$ y $\overline{d}\overline{z} = (2\overline{u}\overline{v})\overline{z} = -2\overline{u}\overline{z}\overline{v} = \overline{z}(2\overline{u}\overline{v}) = \overline{z}\overline{d}$, así

$$\overline{y}(\overline{d}\overline{z}) = -(\overline{d}\overline{y})\overline{z} = (\overline{d}\overline{y})\overline{z}, \qquad (\overline{d}\overline{z})^2 = \overline{d}^2\overline{z}^2 = -\delta' Q(z)1. \tag{1.11}$$

Y $\overline{y}^2 = Q(y)1$ y $(\overline{d}\overline{z})^2 = -\delta' Q(z)1$, luego la propiedad universal del álgebra de Clifford implica la existencia de los morfismos de álgebras g' y g'' de $C(U,Q')$ y $C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$ en $C(V,Q)$ donde $y' \longmapsto \overline{y}$, $z'' \longmapsto \overline{d}\overline{z}$ respectivamente es decir satisfacen los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "i"'] & C(U,Q') \arrow[dl, "g'"] \\ C(V,Q) & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} U^{\perp} \arrow[r, "i''"] \arrow[d, "i"'] & C(U^{\perp}, -\delta' Q'') \arrow[dl, "g''"] \\ C(V,Q) & \end{tikzcd}$$

Tenemos los morfismos bilineales

$$\tau : C(U,Q') \times C(U^{\perp}, -\delta' Q'') \to C(U,Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$$

y

$$(g', g'') : C(U,Q') \times C(U^{\perp}, -\delta' Q'') \to C(V,Q).$$

Por la propiedad universal del producto tensorial (sección 4.5, ejemplo17), existe el morfismo h de $C(U,Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$ en $C(V,Q)$ tal que $y' \longmapsto \overline{y}$, $z'' \longmapsto \overline{d}\overline{z}$.

Considere el elemento $d' = 2u'v'$ en $C(U, Q')$. Como lo hicimos antes, podemos ver $d'y' = -y'd'$ y $d'^2 = -\delta' 1$ con lo que d' es invertible y su inversa es $d'^{-1} = \frac{d'}{-\delta'} \in C(U, Q')$.

Además consideremos el elemento $y' + d'^{-1}1$ de $C(U, Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$, el cual satisface

$$\begin{aligned}
(y' + d'^{-1}z'')^2 &= y'^2 + (y'd'^{-1} + d'^{-1}y')z'' + z''^2 = y'^2 + (-\frac{y'd'}{\delta'} - \frac{d'y'}{\delta'})z'' + z''^2 = \\
y'^2 + z''^2 &= Q(y)1 + Q(z)1 = Q(y+z)1.
\end{aligned}$$

Entonces por la propiedad universal de $C(V, Q)$ tenemos el morfismo g de $C(V, Q)$ en $C(U, Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$ tal que $\overline{y} + \overline{z} \longmapsto y' + d'^{-1}z''$, es decir se sigue el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
C(U, Q') \times C(U^{\perp}, -\delta' Q'') \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "(g',g'')"'] & C(U, Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'') \arrow[dl, shift left, "g"] \\
C(V, Q) \arrow[ur, shift left, "h"] & V = U \oplus U^{\perp} \arrow[l, "i"] \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

τ y (g', g'') estan definidas por $\tau(y', z'') := y' + d'^{-1}z''$ y $(g', g'')(y', z'') := g'(y')g''(z'') = \overline{y}(\overline{dz})$ para $(y', z'') \in C(U, Q') \times C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$. También $f(y) := y'$, $f(z) := d'^{-1}z''$ la cual cumple $f(y \oplus z)^2 = (y' + d'^{-1}z'')^2 = Q(y+z)1$.

Basta ver en los generadores que $gh = 1$ en $C(U, Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$, también $hg = 1$ en $C(V, Q)$. Con lo que $C(V, Q) \cong C(U, Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$.

Teorema 1 *Sea Q forma cuadrática de un espacio vectorial V de dimensión n, sobre un campo F de característica distinta de 2. Entonces*

(a) $\dim C(V, Q) = 2^n$ *y si $(u_1, ..., u_n)$ es base de V, entonces los elementos*

$$1 = \overline{1}, \ \ \overline{u_{i_1} u_{i_2}} \cdots \overline{u_{i_r}}, \ \ i_1 < i_2 < \cdots < i_r, \ 1 \leq r \leq n, \tag{1.12}$$

forman una base para $C(V,Q)$ sobre F.

(b) La función canónica $i : V \longrightarrow C(V,Q)$ donde $x \longmapsto \overline{x}$ es inyectiva.

(c) Si la forma bilineal asociada donde Q es no degenerada, entonces $C(V,Q)$ es simple central si n es par y para $n = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{Z}$, $C(V,Q)$ es simple con centro un campo de dimensión 2 o es suma directa de dos álgebras simples centrales isomorfas, según si $(-1)^{\nu}2\delta$ es o no un cuadrado en F, δ es el discriminante de B.

Demostración.

Por el lema 1 , los elementos en (1.12) generan a $C(V,Q)$. Ya que el número de estos elementos es menor o igual que 2^n, si $\dim C(V,Q) = 2^n$, éstos forman una base (un conjunto de generadores cuyo número es igual a la dimensión del espacio, es una base para el espacio), con lo que implica también que $\overline{u_i}$, $1 \leq i \leq n$, son linealmente independientes, así la función i es inyectiva (Sean V, W espacios vectoriales, y sea $T : V \longrightarrow W$ lineal. Entonces T es inyectiva si y sólo si T lleva subconjuntos linealmente independientes de V en conjuntos linealmente independientes de W.)

Ahora probaremos la relación de la dimensión y (c) para el caso no degenerado.

Para $n = 1$, el resultado se sigue del lema 2, es decir $\dim C(V,Q) = 2$, si $V = Fu$, entonces $C(V,Q)$ es un campo con lo que es simple y su centro es la misma álgebra, o es suma directa de dos copias de F según si $Q(u)$ puede escribirse o no como un cuadrado en F. Para el último caso $C(V,Q) \cong Fe + F(1-e)$ las cuales son simples centrales e isomorfas.

Si $n = 2$ entonces del ejemplo1 y los lemas 3 y 4 se obtiene $C(V,Q)$ es un álgebra simple central y $\dim C(V,Q) = 2^n = 4$.

Ahora para $n > 2$. Podemos encontrar un subespacio U de dimensión 2 en el cual la restricción de B no sea degenerada. Por el lema 5, $C(V,Q) \cong C(U,Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$ donde δ' es el discriminante de la restricción de B a U. Además $C(U,Q')$ es un álgebra de cuaternios, por lo que es de dimensión 4, simple central.

Usando la hipótesis de inducción podemos asumir el resultado para la forma cuadrática $-\delta' Q''$ en $U^{\perp}$ así $\dim C(U^{\perp}, -\delta' Q'') = 2^{n-2}$ y es simple central si $n-2$ es par, entonces $\dim C(V,Q) = 2^2 2^{n-2}$ (ya que $\dim C(V,Q) = \dim(C(U,Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')) = \dim C(U,Q') \dim C(U^{\perp}, -\delta' Q'') = 2^2 2^{n-2}$) y por el teorema 2 (***) (que se encuentra adelante), $C(V,Q)$ es simple central si n es par.

Si $n = 2\nu + 1, n-2 = 2(\nu - 1) + 1$, la hipótesis de inducción implica que si δ'' es el discriminante de la restricción de B a $U^{\perp}$, entonces $C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$ es simple con centro un campo de dimensión 2 o es suma directa de dos álgebras simples centrales isomorfas, según si $(-1)^{\nu-1} 2(-\delta')^{n-2}\delta''$ es o no un cuadrado en F. (La matriz de la nueva forma cuadrática $-\delta' Q''$ es $\begin{pmatrix} -\delta' B(w_1, w_1) & & \\ & \ddots & \\ & & -\delta' B(w_{n-2}, w_{n-2}) \end{pmatrix}_{(n-2)\times(n-2)}$ donde $w_1, ..., w_{n-2} \in U^{\perp}$, con lo que el discriminante es $(-\delta')^{n-2}\delta''$).

De acuerdo con esto $C(V,Q)$ es simple (por el corolario 2 (***)), con centro un campo de dimensión 2 ya que tiene el mismo centro que $C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$ o es suma directa de dos álgebras simples centrales isomorfas E y E' con lo que $C(V,Q) \cong C(U,Q') \otimes (E \oplus E') \cong (C(U,Q') \otimes E) \oplus (C(U,Q') \otimes E')$ que nuevamente por el corolario 2 (***) $C(V,Q)$ es suma directa de dos álgebras simples centrales isomorfas.

Donde

$$(-1)^{\nu-1}2(-\delta')^{n-2}\delta'' = (-1)^{\nu}(\delta')^{n-3}2\delta'\delta'' = (-1)^{\nu}(\delta')^{n-3}2\delta$$

y dado que $n-3$ es par, la expresión anterior es un cuadrado si y sólo si $(-1)^{\nu}2\delta$ es un cuadrado, con lo que se prueba (c).

Queda probar la fórmula de la dimensión en el caso degenerado.

Para ésto, encajamos V en un espacio vectorial de dimensión finita W con una forma cuadrática cuya forma bilineal asociada es no degenerada y es una extensión de Q. Para esto escribimos $V = V^{\perp} \oplus U$ para algún subespacio U, entonces la restricción de B a U es no degenerada. Sea $W = V^{\perp} \oplus U \oplus (V^{\perp})^*$ donde $(V^{\perp})^*$ es el espacio de funciones lineales en $V^{\perp}$. Y para $x = z + y + f$ con $z \in V^{\perp}, y \in U, f \in (V^{\perp})^*$, definamos

$$\widetilde{Q}(x) = Q(z) + Q(y) + f(z) \tag{1.13}$$

Podemos ver que $\widetilde{Q}$ es una forma cuadrática en W cuya forma bilineal, simétrica asociada $\widetilde{B}$ es no degenerada. Sea $v = z + y$, ya que $\widetilde{B}(x_1, x_2) = \widetilde{Q}(x_1 + x_2) - \widetilde{Q}(x_1) - \widetilde{Q}(x_2)$, donde $z_1, z_2 \in V^{\perp}$, $y_1, y_2 \in U$, $f_1, f_2 \in (V^{\perp})^*$, usando (1.13), tenemos

$$\widetilde{B}(x_1, x_2) = Q(v_1 + v_2) - Q(v_1) - Q(v_2) + f_1(z_2) + f_2(z_1), \tag{1.14}$$

de (1.14), podemos ver que $\widetilde{B}$ es simétrica, ya que si intercambiamos x_1 por x_2 nada cambia.

Dado que $(x_1, v_2) \xmapsto{P} (v_1, v_2) \xmapsto{\widetilde{B}} B(v_1, v_2) + f_1(z_2) + f_2(z_1)$, $\widetilde{B} \circ P$ es lineal, ya que es combinación de funciones lineales ($f_2(z_1)$ y $f_1(z_2)$ son lineales, para $x_1 = z_1 + y_1 + f_1$ y $x_2 = z_2 + y_2 + f_2$ la función $f_2(z_1) = f_2 \circ P_1(x_1)$ donde $(x_1 \overset{P_1}{\mapsto} z_1)$, es lineal, dado que f_2 y P_1 lo son. Y de manera análoga para $f_1(z_2) = Ev_{z_2} \circ P_3(x_1)$ con $x_1 \overset{P_3}{\mapsto} f_1$ y

$f_1 \overset{Ev_{z_2}}{\mapsto} f_1(z_2))$, sabemos que $\widetilde{B}$ es simétrica se con lo que podemos afirmar que $\widetilde{B}$ es bilineal.

$\widetilde{B}$ es no degenerada, lo que significa que si $\widetilde{B}(x_1, x_2) = 0$ para toda $x_1 \in W$ entonces $x_2 = 0$.

Para $x_1 = y_1$, $0 = \widetilde{B}(x_1, x_2) = Q(y_1 + v_2) - Q(y_1) - Q(v_2) = 4B(y_1, y_2)$ para toda $y_1 \in U$, pero ya que B en no degenerada, entonces $y_2 = 0$.

Si $x_1 = f_1$ luego $0 = \widetilde{B}(x_1, x_2) = f_1(z_2)$ para toda $f_1 \in (V^{\perp})^*$ con lo que $z_2 = 0$. Para $x_1 = z_1$ entonces $0 = \widetilde{B}(x_1, x_2) = Q(z_1 + v_2) - Q(z_1) - Q(v_2) + f_2(z_1) = f_2(z_1)$ para toda $z_1 \in V^{\perp}$ de este modo $f_2 = 0$. Así $x_2 = 0$.

Tenemos $\widetilde{i} : W \longrightarrow C(W, \widetilde{Q})$ con $x \mapsto \widetilde{x}$ la función canónica de Clifford. Se sigue de la propiedad universal de $C(V, Q)$ que existe un morfismo de $C(V, Q)$ en $C(W, \widetilde{Q})$.

Sea $(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_q)$ base de W, tal que $(u_1, \ldots, u_n)$ es base para V. Ya que $\widetilde{B}$ es no degenerada, los elementos $\widetilde{u_{j_1}} \cdots \widetilde{u_{j_s}}$, $j_1 < \cdots < j_s, 1 \leq s \leq q$ son linealmente independientes (para el caso no degenerado la función canónica es inyectiva), los que contienen a $\widetilde{u_{i_1}} \cdots \widetilde{u_{i_r}}$, $i_1 < \cdots < i_r, 1 \leq r \leq n$. Del monomorfismo entre $C(V, Q)$ a $C(W, \widetilde{Q})$ el cual manda $\overline{u_{i_1}} \cdots \overline{u_{i_r}}$ en $\widetilde{u_{i_1}} \cdots \widetilde{u_{i_r}}$, vemos que $\overline{u_{i_1}} \cdots \overline{u_{i_r}}$, $i_1 < \cdots < i_r$, $1 \leq r \leq n$ son linealmente independientes. Por lo tanto $\dim C(V, Q) = 2^n$.■

Teorema 2 *(***) Sea A una subálgebra simple central de dimensión finita de un álgebra B. Entonces $B \cong A \otimes C$ donde C es el centralizador de A en B. Entonces la función de $I \longmapsto AI$ es una biyección del conjunto de ideales de C en el conjunto de ideales de B. Además el centro de B coincide con el centro de C. Ver* [ref.11]

Corolario 1 *(***) Sea A un álgebra de dimensión finita simple central, sobre F, C*

cualquier álgebra sobre F. Entonces $A \otimes C$ es simple si C es simple y $A \otimes C$ es central si C es central.

Corolario 2 *(***) El producto tensorial $A_1 \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes A_r$ de un número finito de álgebras de dimensión finita, simples centrales, es de dimensión finita, simple central.*

Ya que la función canónica $i : x \mapsto \overline{x}$ de V a $C(V, Q)$ es inyectiva, podemos identificar V con su imagen en $C(V, Q)$. Desde ahora consideramos $V \subset C(V, Q)$. Si U es un subespacio de V, entonces la subálgebra de $C(V, Q)$ generada por U puede ser identificada con $C(U, Q')$ donde Q' es la restricción de Q a U, como se hizo antes si $(u_1, ..., u_m)$ una base para U sobre F, entonces se demuestra en el Teorema 1 que los elementos $1, u_{i_1} \cdots u_{i_r}, i_1 < i_2 < \cdots < i_r, 1 \leq r \leq m$, son linealmente independientes así el morfismo canónico de $C(U, Q')$ en $C(V, Q)$ es un monomorfismo.

Corolario 3 *Sea Q una forma cuadrática de un espacio vectorial sobre un campo F de dimensión n, con característica $\neq 2$, tal que la forma bilineal asociada es no degenerada. entonces $C(V, Q)$ es producto tensorial de álgebras de cuaternios si n es par, y es producto tensorial de álgebras de cuaternios y su centro si n es impar.*

Demostración. Ver $[ref.11]$

Para algunas aplicaciones de las álgebras de Clifford en el estudio de grupos ortogonales, es necesario introducir el **álgebra de Clifford par $\mathbf{C^+(V, Q)}$** definida como la subálgebra de $C(V, Q)$ generada por todos los productos $uv, u, v \in V$.

Un vector u es llamado **no isotrópico** si $Q(u) \neq 0$. Si u_1 es no isotrópico, luego

$$(u_1 u)(u_1 v) = u_1(-u_1 u + B(u, u_1)1)v = -Q(u_1)uv + B(u, u_1)u_1 v$$

entonces

$$uv = Q(u_1)^{-1}(B(u,u_1)u_1v - (u_1u)(u_1v)),$$

con lo que vemos que $C^+(V,Q)$ está generada por los elementos $u_1u, u \in V$. Podemos escribir $V = Fu_1 + (Fu_1)^\perp$, $u = \alpha u_1 + v$ donde $\alpha \in F$ y v, u_1 son ortogonales. Entonces $u_1u = \alpha Q(u_1)1 + u_1v$. Se sigue que C^+ esta generada por el subespacio $V_1 = u_1(Fu_1)^\perp$, de dimensión $n-1$. Tenemos

$$(u_1v)^2 = -u_1^2v^2 = -Q(u_1)Q(v)1,$$

y la restricción de $-Q(u_1)Q(v)$ a $(Fu_1)^\perp$ es una forma cuadrática Q_1 con su forma bilineal asociada no degenerada B_1. Lo cual implica el morfismo suprayectivo de $C((Fu_1)^\perp, Q_1)$ en $C^+(V,Q) \equiv C^+$. Por otro lado, si $(u_1,...,u_n)$ es una base para V, entonces $1, u_{i_1}\cdots u_{i_r}$, $i_1 < \cdots < i_r$ es una base para $C(V,Q)$. Luego los elementos 1, y $u_{i_1}\cdots u_{i_r}$ con r par están contenidos en C^+ y hay 2^{n-1} de éstos. Y $\dim C^+ \geq 2^{n-1}$, entonces $\dim C((u_1(Fu_1)^\perp, Q_1) = 2^{n-1}$. Se sigue $C^+ \cong C((u_1(Fu_1)^\perp, Q_1)$.

Teorema 3 *Sea B no degenerada y de característica distinta de 2. Entonces el álgebra de Clifford par $C^+(V,Q) \cong C((u_1(Fu_1)^\perp, Q_1)$ donde u_1 es un vector no isotrópico y Q_1 es la restricción de $-Q(u_1)Q$ a $u_1(Fu_1)^\perp$. $C^+(V,Q)$ es simple central si la dimensión n del espacio V es impar y es un producto tensorial de álgebras simples centrales y un álgebra D de dimensión 2, la cual es un campo o suma directa de dos copias de F para $n = 2\nu$. Las dos posibilidades para D corresponden a si $(-1)^\nu\delta$ es o no un cuadrado en F, donde δ es un discriminante para B_1.*

Demostración. Ver [$ref.$11]

Definición 1 *El **grupo de Clifford** $\Gamma(V,Q)$ es el subgrupo de elementos invertibles $u \in C(V,Q)$ tales que $uxu^{-1} \in V$. Es claro que es un subgrupo del grupo multiplicativo de elementos invertibles de $C(V,Q)$. El grupo de Clifford par es $\Gamma^+(V,Q) = \Gamma(V,Q) \cap C^+(V,Q)$.*

1.2 Algunas Álgebras de Clifford Reales.

Como base para la clasificación de las álgebras de Clifford reales y complejas. Obtendremos la estructura explicita de $C(V,Q)$ para algunos casos sencillos pero importantes.

Para ello resolvemos los siguientes ejercicios.

Ejercicio 1 *Sea n par y $(u_1, u_2, ..., u_n)$ una base ortogonal para V sobre F, entonces $Q(u_i) = \gamma_i \neq 0$. Obtenga la fórmula explícita*

$$C(V,Q) \cong (\alpha_1, \beta_1) \otimes (\alpha_2, \beta_2) \otimes \cdots \otimes (\alpha_\nu, \beta_\nu) \tag{1.15}$$

donde $\nu = \frac{n}{2}$ y (α, β) denota el álgebra con base $(1, i, j, k)$, tales que $i^2 = \alpha 1, j^2 = \beta 1, ij = k = -ji$.

Demostración.

Por el Corolario 1 sabemos que $C(V,Q)$ es un producto tensorial de álgebras de cuaternios para el caso en el que n par.

Para $n = 2$, en el lema 4, probamos que $C(V,Q)$ es un álgebra de cuaternios y $C(V,Q) \cong A$ donde A es el álgebra generada por u' y v' los cuales satisfacen

$u'^2 = Q(u)1 \neq 0, v'^2 = Q(v)1 \neq 0$, y $u'v' = -v'u'$. Entonces podemos identificar a (α_1, β_1) con $\alpha_1 = Q(u)$ y $\beta_1 = Q(v)$.

Ahora para n par y $n > 2$.

Del el lema 5 tenemos $C(V, Q) \cong C(U, Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$ donde U es un subespacio de V de dimensión 2 , así $C(U, Q')$ es un álgebra de cuaternios, siguiendo (1.15) tenemos

$$C(V, Q) \cong (\alpha_1, \beta_1) \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q''),$$

aplicando el lema 5 al álgebra $C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$, obtenemos

$$C(V, Q) \cong (\alpha_1, \beta_1) \otimes (\alpha_2, \beta_2) \otimes C(U_1^{\perp}, -\delta_1' Q_1'')$$

donde $\alpha_2 = -\delta' Q(u_3), \beta_2 = -\delta' Q(u_4)$ pero $\delta' = \det \begin{pmatrix} Q(u_1) & 0 \\ 0 & Q(u_2) \end{pmatrix} = \alpha_1 \beta_1$, entonces $\alpha_2 = -\alpha_1 \beta_1 Q(u_3)$, $\beta_2 = -\alpha_1 \beta_1 Q(u_4)$, y así sucesivamente, los términos n-esimos serán

$$\alpha_n = -\alpha_{n-1} \beta_{n-1} Q(u_{n-1}),\ \beta_{n=} - \alpha_{n-1} \beta_{n-1} Q(u_n). \blacksquare$$

Ahora sea $V = \mathbb{R}^n$ un espacio vectorial sobre el campo $F = \mathbb{R}$ de característica $\neq 2$ con Q una forma cuadrática cuya forma bilineal asociada $B = diag(Q(u_1), Q(u_2), ..., Q(u_n))$.

Entonces para $n = 2$ y forma bilineal $B = diag(Q(u_1), Q(u_2)) = diag(-1, -1)$, tenemos

$$C(V, Q) \cong (\alpha_1, \beta_1)$$

donde $\alpha_1 = Q(u_1) = -1, \beta_1 = Q(u_2) = -1$, así el álgebra de Clifford es el álgebra con base $\{1, i, j, k\}$ tal que $i^2 = -1, j^2 = -1, ij = k = -ji$, pero existe un isomorfismo entre $C(V,Q)$ y el álgebra de cuaternios, con asignación $i \mapsto \iota, j \mapsto \gamma, k \mapsto \kappa$, así

$$C(V,Q) \cong \mathbb{H}.$$

Para $n = 2$ y $B = diag(Q(u_1), Q(u_2)) = diag(-1, 1)$ tenemos

$$C(V,Q) \cong (\alpha_1, \beta_1)$$

donde $\alpha_1 = Q(u_1) = -1, \beta_1 = Q(u_2) = 1$, así el álgebra de Clifford es el álgebra con base $\{1, i, j, k\}$ tal que $i^2 = -1, j^2 = 1, ij = k = -ji$. Haciendo la asociación

$$1 \mapsto 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \mapsto \alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, j \mapsto \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } k \mapsto \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

las cuales cumplen $\alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = -1$ y $\alpha_1\alpha_2 = -\alpha_2\alpha_1$. Sabemos que la base canónica de $\mathbb{R}(2)$ es $\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Para ésta base

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + \alpha_1\alpha_2),\ e_2 = \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2),\ e_3 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_1),\ e_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1\alpha_2).$$

es decir

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{M_{ij}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix},$$

$e_i = \frac{1}{2}M_{ij}a_j, 1 \leq i, j \leq 4$,donde $a_1 = 1, a_2 = \alpha_1, a_3 = \alpha_2, a_4 = \alpha_3$ y $\det(\frac{1}{2}M_{ij}) = \frac{1}{4} \neq 0$, entonces $\frac{1}{2}M_{ij} \in GL_4(\mathbb{R})$, así $\{1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ es una base de $\mathbb{R}(2)$ luego

$$C(V,Q) \cong \mathbb{R}(2).$$

Para $n = 2$ y $B = diag(Q(u_1), Q(u_2)) = diag(1, 1)$ tenemos

$$C(V, Q) \cong (\alpha_1, \beta_1)$$

donde $\alpha_1 = Q(u_1) = 1, \beta_1 = Q(u_2) = 1$, así el álgebra de Clifford es el álgebra con base $\{1, i, j, k\}$ tal que $i^2 = 1, j^2 = 1, ij = k = -ji$. Pero si identificamos

$$1 \mapsto 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; i \mapsto \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; j \mapsto \beta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; k \mapsto \beta_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

entonces la base canónica de $\mathbb{R}(2)$ se escribe como

$$e_1 = \frac{1}{2}(1 + \beta_1), e_2 = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_1\beta_2), e_3 = \frac{1}{2}(\beta_2 - \beta_1\beta_2), e_4 = \frac{1}{2}(1 - \beta_1)$$

es decir

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{M_{ij}} \begin{pmatrix} 1 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

resulta $e_i = \frac{1}{2}M_{ij}b_j, 1 \leq i, j \leq 4$,donde $b_1 = 1, b_2 = \beta_1, b_3 = \beta_2, b_4 = \beta_3$ y $\det(\frac{1}{2}M_{ij}) = \frac{1}{8} \neq 0$, entonces $\frac{1}{2}M_{ij} \in GL_4(\mathbb{R})$, así $\{1, \beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ es una base de $\mathbb{R}(2)$ y

$$C(V, Q) \cong \mathbb{R}(2).$$

Ejercicio 2 *Sea n impar, $(u_1, u_2, ..., u_n)$ una base ortogonal para V sobre F, entonces $Q(u_i) = \gamma_i \neq 0$. Obtenga una fórmula como (1.15), tensor el centro de $C(V, Q)$.*

Demostración.

Para $n = 1$, del lema 2 y el corolario 1 vemos que $C(V,Q) \cong C$ donde C es su centro, y C es el álgebra generada por $(1,\bar{t})$.

Para $n > 1$ impar.

Podemos usar como se hizo en el ejercicio anterior, el lema 5 es decir $C(V,Q) \cong C(U,Q') \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$ y tener la fórmula

$$C(V,Q) \cong (\alpha_1, \beta_1) \otimes C(U^{\perp}, -\delta' Q'')$$

como antes $\alpha_1 = Q(u_1), \beta_1 = Q(u_2)$, donde (u_1, u_2) son base de U subespacio de dimensión 2. Si $\dim U^{\perp} = 1$, entonces $C(U^{\perp}, -\delta' Q'') \cong C$ centro de $C(V,Q)$.

Si no es así nuevamente por el lema 5 tenemos

$$C(V,Q) \cong (\alpha_1, \beta_1) \otimes (\alpha_2, \beta_2) \otimes C(U_1^{\perp}, -\delta_1' Q_1'')$$

donde $\alpha_2 = -\alpha_1\beta_1 Q(u_3), \beta_2 = -\alpha_1\beta_1 Q(u_4)$. Si $\dim U_1^{\perp} = 1$ entonces $C(U_1^{\perp}, -\delta_1' Q_1'') = C$ el centro de $C(V,Q)$.

Así

$$C(V,Q) \cong (\alpha_1, \beta_1) \otimes (\alpha_2, \beta_2) \otimes \cdots \otimes (\alpha_\nu, \beta_\nu) \otimes C$$

con $\alpha_\nu = -\alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1} Q(u_{\nu-2}), \beta_\nu = -\alpha_{\nu-1}\beta_{\nu-1} Q(u_{\nu-1})$, el centro por el corolario 1, $C = F(c)$ donde $c^2 = (-1)^\nu 2^{-n} \delta 1$, δ un discriminante, y C es campo o suma directa de dos copias de F según si $(-1)^\nu (2\delta)$ es o no un cuadrado en F.■

Para $n = 1$ y $Q(u) = 1$, con lo que $u^2 = 1$, sabemos por el lema 2 que $C(V,Q) \cong Fe \oplus F(1-e)$ ya que $Q(u) = 1 = \beta^2$ es decir se puede escribir como un cuadrado en $F = \mathbb{R}$, donde $c = -(2\beta) - 1c'$ y $c' = u - \beta 1$.

Si $\beta = 1$, entonces $e = -\frac{1}{2}(u-1)$ con lo que $C(V,Q) \cong (-\frac{1}{2}(u-1))\mathbb{R} \oplus (-\frac{1}{2}(u-3))\mathbb{R} \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.

Para $\beta = -1$, luego $e = \frac{1}{2}(u+1)$, así $C(V,Q) \cong (\frac{1}{2}(u+1))\mathbb{R}\oplus(-\frac{1}{2}(u+1))\mathbb{R} \cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$. Por lo tanto

$$C(V,Q) \cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$$

Para $n = 1$ y $Q(u) = -1$, donde $u^2 = -1$, vemos que $Q(u)$ no tiene cuadrado en el campo $\mathbb{R}$. Con lo que el lema 2 nos dice que $C(V,Q) \cong A = \frac{F[t]}{(t^2+1)}$ cuya base es $(1, \overline{t})$, el cual satisface $\overline{t}^2 = -1$, entonces podemos identificar a $\overline{t}$ con i (el número complejo), con lo que

$$C(V,Q) \cong \mathbb{C}.$$

Por último calcularemos el álgebra de Clifford para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}$ sobre el campo $\mathbb{R}$, con forma bilineal $B = diag\{0\}$, ésta no puede ser calculada con los teoremas anteriores, ya que una de las hipótesis es $n > 0$. Así partiremos de la definición como el álgebra cociente

$$C(V,Q) = \frac{T(V)}{K_Q}$$

donde el ideal K_Q es generado por los elementos de la forma $x\otimes x$, para $x \in V = \mathbb{R}$.

Como podemos ver en el ejemplo 19 de la sección 4.6, $C(V,Q)$, es el álgebra exterior $E(B)$ para V.

Dado que la función canónica $p : V \longrightarrow E(B)$ es inyectiva, podemos identificar la imagen $p(V) \in E(B)$ con V, y la dim $E(B) = 1$ para $V = \mathbb{R}$, con lo que implica que

$$C(V,Q) = E(B) \cong \mathbb{R}.$$

1.3 Funtorialidad de Cl.

Teorema 4 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita, sobre un campo F, dotado con una forma cuadrática Q (al par (V, Q) se le llama* ***espacio cuadrático****) y $\varphi \in End_{\mathbb{R}}(V) = Hom_{\mathbb{R}}(V, V)$ luego $Q' = Q \circ \varphi$ es una forma cuadrática de V.*

Demostración.

$Q \circ \varphi = Q' : V \longrightarrow \mathbb{R}$ con $Q'(\lambda x) = Q(\varphi(\lambda x)) = Q(\lambda\varphi(x)) = \lambda^2 Q(\varphi(x)) = \lambda^2 Q'(x)$. Si existe φ^{-1} se dice que Q' es una reparametrización de Q.■

Definición 2 *Sean V, V' espacios vectoriales como en el teorema anterior y Q, Q' sus formas cuadráticas, se dice que $\varphi : V \longrightarrow V'$ preserva la función cuadrática y se le llama* ***isometría*** *si $Q(x') = Q(x)$ con $x' = \varphi(x)$.*

Así $\varphi : V \longrightarrow V'$ una isometría y $C(V, Q)$ y $C(V', Q')$ las respectivas álgebras de Clifford, cumplen el diagrama:

$$\begin{tikzcd} V' \arrow[r, "i'"] & C(V', Q') \\ V \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "i"'] & C(V, Q) \arrow[u, "Cl(\varphi) \equiv \varphi_*"'] \end{tikzcd}$$

Mostraremos que $i' \circ \varphi$ es un morfismo de álgebras y cumple $(i' \circ \varphi)(v)^2 = Q(v)1$.

i) $i' \circ \varphi$ es un morfismo de álgebras pues i' y φ lo son.

ii) $(i' \circ \varphi(v))^2 = (i'(\varphi(v)))^2 = Q'(\varphi(v))1 = (Q' \circ \varphi)(v)1 = Q(v)1$.■

Luego existe un único $\varphi_* \equiv Cl((\varphi)$ (de la propiedad universal del álgebra de Clifford y que φ es una isometría), morfismo de álgebras asociativas tal que $\varphi_* \circ i =$

$i' \circ \varphi$. Se tiene $\varphi_* \circ i(x) = \varphi_*(x + K_Q) = i'(\varphi(x)) = \varphi(x) + K_Q$ es decir $\varphi_*(\overline{x}) = \overline{\varphi(x)}$ (ver sección 1.1).

Consideremos el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
V'' \arrow[r, "i''"] & C(V'',Q'') \\
V' \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "i'"] & C(V',Q') \arrow[u, "\psi_*"'] \\
V \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "i"'] & C(V,Q) \arrow[u, "\varphi_*"']
\end{tikzcd}$$

Entonces

$$(\psi_* \circ \varphi_*)(i(x)) = \psi_*(\varphi_*(i(x)) = \psi_*(i'(\varphi(x)) = i'' \circ \psi(\varphi(x)) = i''((\psi \circ \varphi)(x))$$

$$= \quad (i'' \circ (\psi \circ \varphi))(x) = (\psi \circ \varphi)_*(i(x)).$$

También

$$\psi_* \circ \varphi_*(1_{C(V,Q)}) = \psi_*(1_{C(V',Q')}) = 1_{C(V'',Q'')} = (\psi \circ \varphi)_*(1_{C(V,Q)}).$$

Las dos propiedades anteriores implican que **Cl es un funtor covariante** de la categoría de Espacios Cuadráticos a la categoría Álgebras asociativas con unidad.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Espacios Cuadráticos (objetos)} \\ \\ \text{Isometrías (morfismos)} \end{array} \right\} \overset{Cl}{\Rightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{Álgebras Asociativas con unidad (objetos)} \\ \\ \text{Morfismo de álgebras (morfismos)} \end{array} \right\}.$$

1.4 $C(V,Q)$ es un Álgebra $\mathbb{Z}_2$-Graduada.

Sea la isometría $\varphi = -Id_V$ que cumple el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] & C(V,Q) \\ V \arrow[u, "-Id_V"] \arrow[r, "i"'] & C(V,Q) \arrow[u, "(-Id_V)_*=\alpha"'] \end{tikzcd}$$

donde $Cl(-Id_V) \equiv (-Id_V)_* = \alpha, \alpha^2 = (-Id_V)_* \circ (-Id_V)_* = (-Id_V \circ -Id_V)_* = (Id_V)_* = Id_{C(V,Q)}$. Se dice que α es la **involución canónica** en el álgebra de Clifford.

Siguiendo el diagrama anterior y ya que i es inyectiva, lo que permite identificar a V con su imagen en $C(V,Q)$, $\alpha(1) = 1; \alpha(i(x)) \cong \alpha(x) = i(-id_V(x)) = i(-x) \cong -x$. Entonces

$$\alpha(i(x_1)...i(x_k)) \cong (-1)^k i(x_1)...i(x_k).$$

Es fácil ver que los éigen-valores de α son -1 y $+1$.

Con lo que

$$C(V,Q) = C^0(V,Q) \oplus C^1(V,Q)$$

donde $C^0(V,q) = \{x \in C(V,Q);\ \alpha(x) = x\}$ y $C^1(V,Q) = \{x \in C(V,Q);\ \alpha(x) = -x\}$ esto es $C^0(V,Q) = \langle\{1, v_1 \cdots v_{2k}\}\rangle_{k\in\mathbf{Z}^+}$ y $C^1(V,Q) = \langle\{v_1 \cdots v_{2k+1}\}\rangle_{k\in\mathbf{Z}}$.

Ya que,

Si $x, y \in C^0(V,Q)$ entonces $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) = xy \in C^0(V,Q)$.

Para $x, y \in C^1(V,Q)$ luego $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) = (-x)(-y) = xy \in C^0(V,Q)$.

Si $x \in C^0(V,Q)$ y $y \in C^1(V,Q)$ así $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) = (x)(-y) = -xy \in C^1(V,Q)$.

Si $y \in C^0(V,Q)$ y $x \in C^1(V,Q)$ entonces $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y) = (-x)(y) = -xy \in C^1(V,Q)$.

Es decir

$$C^{\mu}C^{\nu} \subset C^{\mu+\nu}$$

donde $\mu, \nu \in \{0,1\}$, siguen la tabla de sumar de $\mathbb{Z}_2$.

Las propieadades anteriores implica $C(V,Q)$ es una álgebra asociativa con unidad $\mathbb{Z}_2-$graduada (ver sección 4.6).

1.5 $(C(V,Q), i)$ Objeto Universal.

Definición 3 *Sea un funtor arbitrario covariante T de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría Set, un objeto universal (sección 4.5) para T es el par (C_o, a_o) donde C_o es un objeto en $\mathcal{C}$ y a_o es un elemento de $T(C_o)$ de tal manera que para cualquier C objeto en $\mathcal{C}$ y cualquier elemento a en $T(C)$ existe un único morfismo $\alpha : C_o \longrightarrow C$ con imagen funtorial α_* tal que $a = \alpha_*(a_o)$.*

Nota 2 *En el apéndice 1 se prueba que un objeto universal con la definición 3 induce un universal desde a_o hasta el funtor T.*

$(C(V,Q), i)$ es un objeto universal del funtor

$$\varphi_{(V,Q)} : \{\text{Álgebras asociativas con unidad, sobre el campo } F\ \} \longrightarrow Set.$$

Para un álgebra asociativa con unidad A y $v \in V$.

$$\varphi_{(V,Q)}(A) = \{\alpha : V \longrightarrow A \text{ lineal}, \ \alpha^2(v) = Q(v)1_A\} \equiv Cliff(V,A)$$

en objetos, y para morfismos

$$\varphi_{(V,Q)}(\lambda : A_1 \longrightarrow A_2) \equiv \lambda_*$$

$$\lambda_* : \{r : V \longrightarrow A_1, r^2(v) = Q(v)1_{A_1}\} \longrightarrow \{s : V \longrightarrow A_2, s^2(v) = Q(v)1_{A_2}\}$$

tal que

$$\lambda_*(r) = \lambda \circ r$$

Se tiene el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi_{(V,Q)}"] & Cliff(V,A) \ni f \\ C(V,Q) \arrow[u, "\overline{f}"] \arrow[r, "\varphi_{(V,Q)}"'] & Cliff(V,Cl(V,Q)) \ni \gamma \arrow[u, "\overline{f}_*"'] \end{tikzcd}$$

donde $\overline{f}_*(i) = \overline{f} \circ i$, identificando con la definición $C_o = C(V,Q)$, $a_o = i$, $C = A$, $a = f$, $\alpha = \overline{f}$ y $\alpha_* = \overline{f}_*$.

Definición 4 *Si φ y ψ son funtores covariantes de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría $\mathcal{D}$. Una* ***transformación natural*** *$\Phi : \varphi \longrightarrow \psi$, a cada objeto X en $\mathcal{C}$ asigna un morfismo $\Phi(X) : \varphi(X) \longrightarrow \psi(X)$ en $\mathcal{D}$, para cuaquier morfismo $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$ el siguiente diagrama debe conmutar:*

$$\begin{tikzcd} \varphi(X) \arrow[r, "\varphi(f)"] \arrow[d, "\Phi(X)"'] & \varphi(Y) \arrow[d, "\Phi(Y)"] \\ \psi(X) \arrow[r, "\psi(f)"'] & \psi(Y) \end{tikzcd}$$

es decir $\Phi(Y) \circ \varphi(f) = \psi(f) \circ \Phi(X)$.

Para funtores contravariantes φ y ψ las flechas horizontales son invertidas en el diagrama. Si Z en $\mathcal{C}$ cualquier objeto, tal que $\Phi(Z)$ es un isomorfismo, entonces la transformación natural es llamada una **equivalencia natural**.

Un objeto universal induce dos funtores canónicos (ver sección 4.5.1) $H(C_o,-)$ y $H(-,C_o)$, covariante y contravariante respectivamente.

Consideremos los funtores covariantes T y $H(C_o,-)$ de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría Set.

Teorema 5 *La transformación natural* $\Phi_{(C_o,a_o)} : T \longrightarrow H(C_o,-)$ *dada por*

$$\begin{aligned} \Phi_{(C_o,a_o)}(C) : \ T(C) &\longrightarrow \ H(C_o,C) \\ a &\longmapsto \ \Phi_{(C_o,a_o)}(C)(a) = \alpha \end{aligned}$$

es una biyección de conjuntos, con α como en la definición 3.

Para T contravariante usamos el funtor canónico $H(-,C_o)$.

Demostración.

Sea $a_1, a_2 \in T(C)$ donde $a_1 \neq a_2$, supongamos que $\alpha_{a_1} = \alpha_{a_2}$, luego las imagenes funtoriales $\alpha_{a_1 *} = \alpha_{a_2 *}$, dado que $a_1 = \alpha_{a_1 *}(a_o)$ y $a_2 = \alpha_{a_2 *}(a_o)$ entonces $a_1 = a_2$ lo cual es una contradicción. Así la asignación $\Phi_{(C_o,a_o)}(C) : T(C) \longrightarrow H(C_o,C)$, $a \mapsto \Phi_{(C_o,a_o)}(C)(a) = \alpha_a$ es inyectiva . Más aún la asignación es siempre suprayectiva:

Dada $\alpha_1 \in H(C_o,C)$ obtenemos $\alpha_{1*} = T(\ \alpha_1)$ y $\alpha_{1*}(a_o) = a_1 \in T(C)$ claramente $\Phi_{(C_o,a_o)}(C)(a_1) = \alpha_1$.

Con lo que $\Phi_{(C_o,a_o)}(C) : T(C) \longrightarrow H(C_o,C)$ es una biyección entre conjuntos y $\Phi_{(C_o,a_o)}(C)$ es un isomorfismo en esta categoría.■

Afirmamos que $\Phi_{(C_o,a_o)}$ es una representación del funtor T representable con $H(C_o,-)$, es decir se da la conmutatividad del siguiente diagrama.

Para $f : X \longrightarrow Y$ en $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\Phi_{(C_o,a_o)}(X)"'] & T(Y) \arrow[d, "\Phi_{(C_o,a_o)}(Y)"] \\ H(C_o,X) \arrow[r, "H(C_o,-)(f)"'] & H(C_o,Y) \end{tikzcd}$$

es decir

$$\Phi_{(C_o,a_o)}(Y) \circ T(f) = H(C_o,-)(f) \circ \Phi_{(C_o,a_o)}(X).$$

Demostración.

Para cualquier $a_1 \in T(X)$, debemos tener

$$(\Phi_{(C_o,a_o)}(Y) \circ T(f))(a_1) = H(C_o,-)(f)(\Phi_{(C_o,a_o)}(X)(a_1)) = f \circ (\Phi_{(C_o,a_o)}(X))(a_1).$$

Sea el siguiente diagrama, considerando la definición de (C_o, a_o) como un objeto universal del funtor T

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "T"] & T(Y) \\ X \arrow[u, "f"] \arrow[r, "T"] & T(X) \arrow[u, "T(f)"'] \\ C_o \arrow[u, "\gamma"] \arrow[r, "T"'] & T(C_o) \arrow[u, "\gamma_*"'] \end{tikzcd}$$

donde $\gamma = \Phi_{(C_o,a_o)}(X)(a_1)$, $a_1 = \gamma_*(a_o)$, $a_2 = T(f)(a_1)$ y el morfismo $\beta : C_o \to Y$ definido como $\beta \equiv \Phi_{(C_o,a_o)}(Y)(T(f)(a_1))$.

Pero también β y $f \circ \gamma \in H(C_o, Y)$, satisfacen $\beta_*(a_o) = a_2$ y $(f \circ \gamma)_*(a_o) = (f_* \circ \gamma_*)(a_o) = f_*(\gamma_*(a_o)) = f_*(a_1) = a_2$ entonces por la unicidad del morfismo tenemos $\beta = f \circ \gamma$.■

En resumén, si (C_o, a_o) es un objeto universal de un funtor covariante $T : \mathcal{C} \longrightarrow Set$, **existe** una equivalencia natural $\Phi_{(C_o,a_o)}$ de los funtores T y $H(C_o, -)$. Podemos decir que T es un **funtor representable** y que la equivalencia natural $\Phi_{(C_o,a_o)}$ **es su representación.**

De manera similar para funtores contravariantes.

Ejemplo 2 *El funtor representable $\varphi_{(V_1\otimes V_2,\tau)}$ covariante de la categoria de espacios vectoriales $Vect_K$ a la categoría Set, con objeto universal $(V_1 \otimes V_2, \tau)$ con representación $\Phi_{V_1\otimes V_2}$, la equivalencia natural entre los funtores $\varphi_{(V_1\otimes V_2,\tau)}$ y $H(V_1 \otimes V_2, -)$.*

Ejemplo 3 *El funtor T_V $(V \in Vect_{\mathbb{R}})$ covariante de la categoría $Vect_{\mathbb{C}}$ a la categoría Set, y objeto universal (V^c, ι) (complejificación) cuya representación $\Phi_{(V^c,\iota)}$ es la equivalencia natural entre los funtores T_V y $H(V^c, -)$.*

Ejemplo 4 ***El funtor $\varphi_{(V,Q)}$ covariante, de la categoría de álgebras asociativas con unidad A a la categoría Set, con objeto universal $(C(V,Q),i)$ cuya representación $\Phi_{(C(V,Q),i)}$ equivalencia natural entre los funtores $\varphi_{(V,Q)}$ y $H(C(V,Q),-)$.***

1.6 Naturalidad de las Álgebras de Clifford.

Ya que $(C(V,Q),i)$ es **un objeto universal del funtor**

$$\varphi_{V,q} : \{\text{Álgebras asociativas con unidad, sobre el campo } k \ (k = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})\} \longrightarrow Set,$$

$(C(V,Q),i)$ induce el funtor canónico $H(C(V,Q),-)$ con el cual se establece una **equivalencia natural** entre el $\varphi_{(V,Q)}$ y $H(C(V,Q),-)$, aún más $\varphi_{(V,Q)}$ es representable y su representación es $H(C(V,Q),-)$, lo que hace a $(C(V,Q),i)$ **natural** en un sentido técnico.

Capítulo 2

Clasificación.

Habiendo calculado el álgebra de Clifford y mostrado propiedades importantes, como la universal, la definición del funtor de Clifford, etc., podemos, usando teoremas de periodicidad como $C_{n,0} \otimes C_{2,0} \cong C_{n+2,0}$, $C_{r,s} \otimes C_{1,1} \cong C_{r+1,s+1}$, entre los más importantes, junto con propiedades del producto tensorial, hacer de forma inductiva la clasificación de las álgebras de Clifford reales de dimensión finita. Definiendo la signatura $\sigma(B)$ (el número de $+$ menos el número de $-$) y la signatura módulo ocho q que cumple $\sigma(B) = q + 8m$ donde $m \in \mathbb{Z}$ y $q \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, podemos recopilar la clasificación de las álgebras en el diagrama de Hurewicz.

Para el caso complejo basta tomar el producto tensorial de $\mathbb{C}$ (ver apéndice 2), y las álgebras reales obtenidas, teniendo para n la dimensión de V par $\mathbb{C}^{(n)} \cong \mathbb{C}(2^{\frac{n}{2}})$ y $\mathbb{C}^{(n)} \cong \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]}) \oplus \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]})$ para n impar.

Por último encontramos la definición de una $K-$representación del álgebra de Clifford, y dada la forma de las álgebras de Clifford reales $K(2^n)$ o $K(2^n) \oplus K(2^n)$ donde $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, se muestra la existencia de una representación irreducible para el caso par y dos para el caso impar en el álgebra de matrices. Siendo fundamental para la definición de los espinores en el capítulo 4.

2.1 Algunos Teoremas Importantes

Sea un **espacio cuadrático** (V, Q).

Si $\mathbf{x} \in V$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}^T = (x_1, ..., x_n)$, la forma cuadrática se escribe como

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j = \mathbf{x}^T M_Q \mathbf{x}, \tag{2.1}$$

donde $\alpha_{ij} \in F, (M_Q)_{ij} = \alpha_{ij}$ y $M_Q \in GL_n(F)$ (El grupo de funciones lineales, invertibles con entradas en el campo F.)

Decimos que dos formas cuadráticas Q y Q' son equivalentes si existe $C \in GL_n(F)$ tal que $Q(\mathbf{x}) = Q'(C\mathbf{x})$, escribimos $Q \simeq Q'$.

Entonces $\mathbf{x}^T M_Q \mathbf{x} = (C\mathbf{x})^T M_{Q'} C\mathbf{x} = \mathbf{x}^T C^T M_{Q'} C\mathbf{x}$, así $Q \simeq Q'$ si existe $C \in GL_n(F)$ tal que $M_Q = C^T M_{Q'} C$ (ver teorema 4).

Estudiaremos ahora las álgebras de Clifford $C_{r,s} \equiv C(V, Q)$ donde $V = \mathbb{R}^{r+s}$ y

$$Q(\mathbf{x}) = -x_1^2 - ... - x_r^2 + x_{r+1}^2 + ... + x_{r+s}^2.$$

así

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) == \mathbf{x}^T M_Q \mathbf{x} \tag{2.2}$$

con $M_Q = M_Q^T = diag(\underbrace{-1, ..., -1}_{r}, \underbrace{1, ...1}_{s})$.

Proposición 1. *Sea $\mu : V \longrightarrow V'$ una isometría y B no degenerada, entonces μ es inyectiva.*

Demostración.

μ una isometría entonces $B'(\mu(x), \mu(y)) = B(x,y)$ para todo $x, y \in V$. Sea $x \in Ker(\mu)$, así $B(x,y) = B'(\mu(x), \mu(y)) = B(0,y) = 0$ para todo $y \in V$, luego $x = 0$ ya que B es no degenerada, con lo que $Ker(\mu) = 0$.■

Aún más μ es biyectiva.

Sea $\mu : V \longrightarrow V'$ una isometría, por la propiedad universal del álgebra de Clifford, existe un único morfismo de álgebras $h : C(V,Q) \longrightarrow C(V',Q')$ ya que $((i' \circ \mu)(x))^2 = Q'(\mu(x))1 = Q(x)1$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & C(V,Q) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mu} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h} \\ V' & \xrightarrow[i']{} & C(V',Q') \end{array}$$

Ya que Cl es un funtor (ver sección 1.3) y μ biyectiva, luego Cl manda equivalencias en equivalencias (ver sección 4.3, proposición 1), con lo que se sigue h es un isomorfismo.

Si $(\mathbb{C}^n, Q_+)$ y $(\mathbb{C}^n, Q_-)$ son dos espacios cuadráticos **complejos** (ver apéndice 2), $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ donde

$$Q_+(\mathbf{z}) = z_1^2 + \cdots + z_n^2$$

y

$$Q_-(\mathbf{z}) = -z_1^2 - \cdots - z_n^2$$

pero $Q_+ \simeq Q_-$ con $C = diag(\underbrace{i,...,i}_{n})$ y $C \in GL_n(\mathbb{C})$ es decir $C : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ y cumple $C^T = C$, $C^* = -C = C^{-1}$ por lo tanto C es antihermitiana, unitaria y con $\det C = (i)^n$, así

$$C(\mathbb{C}^n, Q_+) \cong C(\mathbb{C}^n, Q_-)$$

Ahora $(\mathbb{C}^n, Q_s)$ y $(\mathbb{C}^n, Q_{s+s'})$ espacios cuadráticos complejos con

$$Q_s(\mathrm{z}) = z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_n^2$$

$$Q_{s+s'}(\mathrm{z}) = z_1^2 + \cdots + z_{s+s'}^2 - z_{s+s'+1}^2 - \cdots - z_n^2$$

pero $Q_s \simeq Q_{s+s'}$ donde

$$C = diag(\underbrace{1,...,1}_{s}, \underbrace{i,...,i}_{s'}, \underbrace{1,...,1}_{n-(s+s')}),$$

cumpliendo $C^T = C$, $C^* = C^{-1}$ (unitaria) y $\det C = i^{s'}$. Así para las álgebras de Clifford tenemos

$$C(\mathbb{C}^n, Q_s) \cong C(\mathbb{C}^n, Q_{s+s'})$$

el resultado vale para toda $s' \in \{1, 2, ..., n\}$ por lo tanto

$$C(\mathbb{C}^n, Q_s) \cong \mathbb{C}l_n$$

donde $\mathbb{C}l_n \equiv C(\mathbb{C}^n, Q_+)$ y $Q_0 = Q_-, ..., Q_n = Q_+$.

Proposición 2

$$\mathbb{C}l_n \cong \mathbb{C} \otimes C_{0,n}$$

Demostración.

Sabemos $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^n$ (ver apéndice 2) y $C_{0,n} = C(\mathbb{R}^n, Q_+^r)$, lo que debemos mostrar es

$$C(\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^n, Q_+^c) \cong \mathbb{C} \otimes C(\mathbb{R}^n, Q_+^r)$$

donde:

$$Q_+^c : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C},\ Q_+^c(\mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{n} z_k^2,\quad Q_+^r : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ Q_+^r(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$$

en ambos casos

$$M_r = M_c = diag(1, ..., 1).$$

Por la propiedad universal del álgebra de Clifford tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^n \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "id \otimes i"'] & C(\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^n, Q_+^c) \arrow[dl, "h"] \\ \mathbb{C} \otimes C(\mathbb{R}^n, Q_+^r) & \end{tikzcd}$$

ya que $((id \otimes i)(\mathbf{z}))^2 = \mathbb{C} \otimes Q_+^r(\mathbf{z})1$, donde $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$. Pero h es suprayectiva y

$$\dim_{\mathbb{R}}(C(\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}^n, Q_+^c)) = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C} \otimes C(\mathbb{R}^n, Q_+^r)) = 2^{n+2}$$

entonces h es un isomorfismo.■

Proposición 3 *Se cumple*

$$\mathbb{C} \otimes C_{n,0} \cong \mathbb{C} \otimes C_{0,n}$$

Demostración.

Con lo hecho anteriormente basta probar que $Q_{n,0} \simeq Q_{0,n}$. Dado que la forma cuadrática

$$Q_{n,0}(x_1,...,x_n) \equiv f(x_1,...,x_n) = -x_1^2 - ... - x_n^2 = \mathbf{x}^T \;\; M_f \;\; \mathbf{x}$$

y la forma cuadrática

$$Q_{0,n}(x_1,...,x_n) \equiv h(x_1,...,x_n) = x_1^2 + ... + x_n^2 = \mathbf{x}^T \;\; M_h \;\; \mathbf{x},$$

con $M_f = diag(\underbrace{-1,...,-1}_{n})$ y $M_h = diag(\underbrace{1,...,1}_{n})$ las que son equivalentes ya que $M_f = CM_hC^T$ donde $C \in GL_n(\mathbb{C})$ dada por $C = diag(\underbrace{i,...,i}_{n})$. ■

Observación 1 *Es claro que* $C_{n,0} \ncong C_{0,n}$. *Al introducir la complejificación "permite" tomar* $C \in GL_n(\mathbb{C})$.

Lema 6 *Se tiene*

$$i)\; \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C} \cong \mathbb{C}\oplus_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$$

$$ii)\; \mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2)$$

$$iii)\; \mathbb{H}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4)$$

Demostración.

i) Sabemos de la sección 1.*2* que $C_{1,0} \cong \mathbb{C}$ y $C_{0,1} \cong \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$, por la proposición 3, se sigue

$$\mathbb{C}\otimes C_{1,0} \cong \mathbb{C}\otimes\mathbb{C} \cong \mathbb{C}\otimes C_{0,1} \cong \mathbb{C}\otimes(\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}) \cong (\mathbb{C}\otimes\mathbb{R})\oplus(\mathbb{C}\otimes\mathbb{R}) \cong \mathbb{C}\oplus\mathbb{C}.$$

ii) Ya que tenemos $C_{2,0} \cong \mathbb{H}$, $C_{0,2} \cong \mathbb{R}(2)$ entonces

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{C}(2).$$

iii) Para la dimensión tenemos $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) = 16 = \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}(4))$. Sea w la extensión lineal definida por $w : \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}(4)$, $x_1 \otimes x_2 \longmapsto w(x_1 \otimes x_2) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ pero ya que $\mathbb{R}^4 \cong \mathbb{H}$, entonces $w(x_1 \otimes x_2) : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ donde $w(x_1 \otimes x_2)(y) := x_1 y \, \overline{x_2}$ con x_1, $x_2, y \in \mathbb{H}$. Pero $w(x_1 \otimes x_2)$ es un isomorfismo ya que para los generadores de $\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}$ y $y = a1 + b\iota + c\gamma + d\kappa$ un elemento de $\mathbb{H}$ tenemos:

$w(1 \otimes 1)(y) = a1 + b\iota + c\gamma + d\kappa, w(1 \otimes \iota)(y) = b1 - a\iota - d\gamma + c\kappa, w(1 \otimes \gamma)(y) = c1 + d\iota - a\gamma - b\kappa.,w(1 \otimes \kappa)(y) = d1 - c\iota + b\gamma - a\kappa, w(\iota \otimes 1)(y) = -b1 + a\iota + c\gamma - d\kappa, w(\iota \otimes \iota)(y) = a1 + b\iota - c\gamma - d\kappa, w(\iota \otimes \gamma)(y) = -d1 + c\iota + b\gamma - a\kappa, w(\iota \otimes \kappa)(y) = c1 + d\iota + a\gamma + b\kappa, w(\gamma \otimes 1)(y) = -c1 + d\iota + a\gamma - b\kappa, w(\gamma \otimes \iota)(y) = d1 + c\iota + b\gamma + a\kappa, w(\gamma \otimes \gamma)(y) = -a1 - b\iota - c\gamma - d\kappa, w(\gamma \otimes \gamma)(y) = -a1 - b\iota - c\gamma - d\kappa, w(\gamma \otimes \kappa)(y) = -b1 - a\iota + d\gamma + c\kappa, w(\kappa \otimes 1)(y) = -d1 - c\iota + b\gamma + a\kappa, w(\kappa \otimes \iota)(y) = -c1 + d\iota - a\gamma + b\kappa, w(\kappa \otimes \gamma)(y) = b1 + a\iota + d\gamma + c\kappa, w(\kappa \otimes \kappa)(y) = a1 - b\iota - c\gamma + d\kappa$ ■

Proposición 4 *(Periodicidad módulo dos)*

$$C_{n,0} \otimes C_{0,2} \cong C_{0,n+2}$$

$$C_{0,n} \otimes C_{2,0} \cong C_{n+2,0}$$

Demostración.

Sea $e_1, ..., e_{n+2}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+2}$, $e'_1, ..., e'_n$ base ortonormal de $\mathbb{R}^n \subset C_{n,0}$ y e''_1, e''_2 base ortonormal de $\mathbb{R}^2 \subset C_{0,2}$. Definimos la función $f : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow C_{n,0} \otimes C_{0,2}$

en los elementos base, como

$$f(e_i) = \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 e''_2 & \text{para } 1 \leq i \leq n \\ 1 \otimes e''_{i-n} & \text{para } i = n+1, n+2 \end{cases}$$

y extendiendo linealmente para los demás elementos. Ahora para $1 \leq i, j \leq n$, se cumple $f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = (e'_i e'_j + e'_j e'_i) \otimes (-1) = \delta_{ij} 1 \otimes 1$, cuando $n+1 \leq \alpha, \beta \leq n+2$ se tiene $f(e_\alpha)f(e_\beta) + f(e_\beta)f(e_\alpha) = 1 \otimes (e''_{\alpha-n}e''_{\beta-n} + e''_{\beta-n}e''_{\alpha-n}) = \delta_{\alpha\beta} 1 \otimes 1$. También $f(e_i)f(e_\alpha) + f(e_\alpha)f(e_i) = 0$. Con lo que $f(x)f(x) = Q(x)1 \otimes 1$ para toda $x \in \mathbb{R}^{n+2}$. Así por la propiedad universal del álgebra de Clifford, existe un morfimo de álgebras $\widetilde{f} : C_{0,n+2} \longrightarrow C_{n,0} \otimes C_{0,2}$. Ya que $\widetilde{f}$ es suprayectiva y $\dim C_{0,n+2} = \dim(C_{n,0} \otimes C_{0,2}) = 2^{n+2}$. Se sigue que $\widetilde{f}$ es un isomorfismo. La prueba es análoga para $C_{0,n} \otimes C_{2,0} \cong C_{n+2,0}$. [$ref$.14] ■

Ejemplo 5

$$C_{4,0} \cong C_{0,2} \otimes C_{2,0} \cong C_{0,2} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}(2).$$

y

$$C_{0,4} \cong C_{2,0} \otimes C_{0,2} \cong C_{2,0} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{H}(2).$$

Proposición 5 *(Periodicidad módulo cuatro).*

$$C_{n+4,0} \cong C_{n,0} \otimes C_{4,0}$$

$$C_{0,n+4} \cong C_{0,n} \otimes C_{0,4}$$

Demostración.

Por la proposición *4*, $C_{n+4,0} \cong C_{0,n+2} \otimes C_{2,0} \cong C_{n,0} \otimes (C_{0,2} \otimes C_{2,0}) \cong C_{n,0} \otimes C_{0,4}$. Análogamente para $C_{0,n+4} \cong C_{0,n} \otimes C_{0,4}$.■

Ejemplo 6

$$C_{8,0} \cong \mathbb{R}(16)$$

$C_{8,0} \cong C_{4,0} \otimes C_{4,0} \cong \mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \cong (\mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2)) \otimes (\mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2)) \cong (\mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2)) \otimes$

$(\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}) \cong$

$\mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(4) \cong \mathbb{R}(16).$■

Proposición 6 *(Periodicidad **módulo ocho**).*

$$C_{n+8,0} \cong C_{n,0} \otimes C_{8,0} \cong C_{n,0} \otimes \mathbb{R}(16)$$

$$C_{0,8+n} \cong C_{0,n} \otimes C_{0,8} \cong C_{0,n} \otimes \mathbb{R}(16)$$

Demostración.

Usando el resultado de la proposición *5* $C_{n+8,0} \cong C_{n+4,0} \otimes C_{4,0} \cong C_{n,0} \otimes C_{4,0} \otimes C_{4,0} \cong C_{n,0} \otimes C_{0,4} \otimes C_{4,0} \cong C_{n,0} \otimes C_{8,0}$. Análogamente para $C_{0,8+n} \cong C_{0,n} \otimes \mathbb{R}(16)$.■

Proposición 7

$$C_{r+1,s+1} \cong C_{r,s} \otimes C_{1,1}$$

para toda $r, s \geq 0$.

Demostración.

Sea una base ortogonal $e_1, ..., e_{r+1}, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{s+1}$ para $\mathbb{R}^{r+s+2}$ tal que $Q(e_i) = 1$ y $Q(\varepsilon_j) = -1$ para toda i, j. Sea también $e_1', ..., e_r', \varepsilon_1', ..., \varepsilon_s'$ base ortogonal para $\mathbb{R}^{r+s} \subset C_{r,s}$ y e_1'', ε_1'' para $\mathbb{R}^2$, definimos la función $f : \mathbb{R}^{r+s+2} \longrightarrow C_{r,s} \otimes C_{1,1}$ como

$$f(e_i) = \begin{cases} e_i' \otimes e_1''\varepsilon_1'' & \text{para } 1 \leq i \leq r \\ 1 \otimes e_1'' & \text{para } \quad i = r+1 \end{cases}$$

y

$$f(\varepsilon_j) = \begin{cases} \varepsilon'_j \otimes e''_1\varepsilon''_1 \text{ para } 1 \leq j \leq s \\ 1 \otimes \varepsilon''_1 \quad \text{ para } \ j = s+1 \end{cases}$$

y extendiendo linealmente. Por la propiedad universal de las álgebras de Clifford existe una función suprayectiva $\widetilde{f} : C_{r+1,s+1} \longrightarrow C_{r,s} \otimes C_{1,1}$ y ya que la $\dim(C_{r+1,s+1}) = \dim(C_{r,s} \otimes C_{1,1}) = 2^{r+s+2}$, entonces $\widetilde{f}$ es un isomorfismo.[ref.14] ■

Análogamente para $C_{p,q+8} \cong C_{p,q} \otimes C_{0,8}$.

Proposición 8

$$C_{n,n} \cong \mathbb{R}(2^n)$$

para todo $n \in \mathbb{Z}^+$

Demostración.

De la proposición 7 y ya que $C_{1,1} \cong \mathbb{R}(2)$.

$$\begin{aligned} C_{n,n} &\cong C_{n-1,n-1} \otimes C_{1,1} \cong C_{n-2,n-2} \otimes C_{1,1} \otimes C_{1,1} \cong \underbrace{C_{1,1} \otimes C_{1,1} \otimes \ldots \otimes C_{1,1}}_{n} \\ &\cong \underbrace{\mathbb{R}(2) \otimes \ldots \otimes \mathbb{R}(2)}_{n} \cong \mathbb{R}(2^n). \blacksquare \end{aligned}$$

Proposición 9

$$C_{r+n,s+n} \cong C_{r,s} \otimes \mathbb{R}(2^n) \cong C_{r,s}(2^n)$$

Demostración.

Lo probaremos por inducción.

Para $n = 1$, se sigue de la proposición 7.

Supongamos que es cierto para n y probemo para $n+1$, sabiendo que $C_{1,1} \cong \mathbb{R}(2)$.

$$C_{r+n+1,s+n+1} \underset{prop.7}{\cong} C_{r+n,s+n} \otimes C_{1,1} \underset{hip.ind.}{\cong} C_{r,s} \otimes \mathbb{R}(2^n) \otimes C_{1,1} \cong C_{r,s} \otimes \mathbb{R}(2^{n+1}). \blacksquare$$

Proposición 10 *Vale lo siguiente:*

$$C_{r,0} = \begin{cases} \mathbb{C} & r=1 \\ \mathbb{H} & r=2 \\ \mathbb{H}\oplus\mathbb{H} & r=3 \\ \mathbb{H}(2) & r=4 \\ \mathbb{C}(4) & r=5 \\ \mathbb{R}(8) & r=6 \\ \mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8) & r=7 \\ \mathbb{R}(16) & r=8 \end{cases}$$

$$C_{0,s} = \begin{cases} \mathbb{R}\oplus\mathbb{R} & s=1 \\ \mathbb{R}(2) & s=2 \\ \mathbb{C}(2) & s=3 \\ \mathbb{H}(2) & s=4 \\ \mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2) & s=5 \\ \mathbb{H}(4) & s=6 \\ \mathbb{C}(8) & s=7 \\ \mathbb{R}(16) & s=8 \end{cases}$$

Demostración.

Para esta demostración usaremos las proposiciones 4 y 5 y las propiedades del producto tensorial, que se demuestran en el apéndice 1.

Sabemos de la sección *1.2* que $C_{0,0} \cong \mathbb{R}$, $C_{1,0} \cong \mathbb{C}$, $C_{0,1} \cong \mathbb{R}\oplus_{\mathbb{R}}\mathbb{R}$, $C_{1,1} \cong \mathbb{R}(2)$, $C_{0,2} \cong \mathbb{R}(2)$, $C_{2,0} \cong \mathbb{H}$.

Entonces:

$\mathbf{C}_{0,3} \cong C_{1,0} \otimes C_{0,2} \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{C}(2)$.

$\mathbf{C}_{3,0} \cong C_{0,1} \otimes C_{2,0} \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes \mathbb{H}. \cong (\mathbb{R} \otimes \mathbb{H}) \oplus (\mathbb{R} \otimes \mathbb{H}) \cong \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$.

$\mathbf{C}_{0,4} \cong C_{2,0} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{H}(2)$.

$\mathbf{C}_{4,0} \cong C_{0,2} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}(2)$.

$\mathbf{C}_{0,5} \cong C_{3,0} \otimes \mathbb{R}(2) \cong (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes \mathbb{R}(2) \cong (\mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2)) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2)) \cong$

$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$.

$\mathbf{C}_{5,0} \cong C_{0,3} \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{C}(2) \otimes \mathbb{H} \cong (\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(4) \cong \mathbb{C}(4)$.

$\mathbf{C}_{0,6} \cong C_{0,2} \otimes C_{0,4} \cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{H} \cong \mathbb{H}(4)$.

$\mathbf{C}_{6,0} \cong C_{2,0} \otimes C_{4,0} \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{H}(2) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}(8)$.

$\mathbf{C}_{0,7} \cong C_{0,3} \otimes C_{0,4} \cong \mathbb{C}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong$

$\mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{C}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{R}(8) \otimes \mathbb{C} \cong \mathbb{C}(8)$.

$\mathbf{C}_{7,0} \cong C_{3,0} \otimes C_{4,0} \cong (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes \mathbb{H}(2) \cong (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}(2)) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{H}(2)) \cong$

$(\mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(2)) \oplus (\mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(2)) \cong \mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$.

$C_{8,0} \cong C_{4,0} \otimes C_{0,4} \cong \mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \cong (\mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H}) \otimes (\mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2)) \cong$

$\mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(4) \cong \mathbb{R}(16)$.

$C_{8,0} \cong C_{0,4} \otimes C_{4,0} \cong \mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{H}(2) \cong (\mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H}) \otimes (\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}(2)) \cong$

$\mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(4) \cong \mathbb{R}(16)$.■

Proposición 11 *Para $k \in \mathbb{Z}^+$ se tiene lo siguiente:*

$$C_{r,0} \cong \begin{cases} \mathbb{C}(2^{4k}) & r = 8k+1 \\ \mathbb{H}(2^{4k}) & r = 8k+2 \\ \mathbb{H}(2^{4k}) \oplus \mathbb{H}(2^{4k}) & r = 8k+3 \\ \mathbb{H}(2^{4k+1}) & r = 8k+4 \\ \mathbb{C}(2^{4k+2}) & r = 8k+5 \\ \mathbb{R}(2^{4k+3}) & r = 8k+6 \\ \mathbb{R}(2^{4k+3}) \oplus \mathbb{R}(2^{4k+3}) & r = 8k+7 \\ \mathbb{R}(2^{4k+4}) & r = 8k+8 \end{cases}$$

$$C_{0,s} \cong \begin{cases} \mathbb{R}(2^{4k}) \oplus \mathbb{R}(2^{4k}) & s = 8k+1 \\ \mathbb{R}(2^{4k+1}) & s = 8k+2 \\ \mathbb{C}(2^{4k+1}) & s = 8k+3 \\ \mathbb{H}(2^{4k+1}) & s = 8k+4 \\ \mathbb{H}(2^{4k+1}) \oplus \mathbb{H}(2^{4k+1}) & s = 8k+5 \\ \mathbb{H}(2^{4k+2}) & s = 8k+6 \\ \mathbb{C}(2^{4k+3}) & s = 8k+7 \\ \mathbb{R}(2^{4k+4}) & s = 8k+8 \end{cases}$$

Demostración.

Se usará el método inductivo, además de los resultados de la sección 4.6.

i)Vale para $k = 0$ el cual es el resultado de la proposición *10.*

ii)Supongamos cierto para k y se demostrará para $k + 1$

$C_{8(k+1)+1,0} = C_{(8k+1)+8,0} \cong C_{8k+1,0} \otimes C_{8,0} \cong \mathbb{C}(2^{4k}) \otimes \mathbb{R}(16) \cong$

$$\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{4k}) \otimes \mathbb{R}(2^4) \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{4k+4}) \cong \mathbb{C}(2^{4k+4}) \cong \mathbb{C}(2^{4(k+1)}).$$

$$C_{0,8(k+1)+1} = C_{0,(8k+1)+8} \cong C_{0,8k+1} \otimes C_{0,8} \cong (\mathbb{R}(2^{4k}) \oplus \mathbb{R}(2^{4k})) \otimes \mathbb{R}(2^4) \cong$$

$$(\mathbb{R}(2^{4k}) \otimes \mathbb{R}(2^4)) \oplus (\mathbb{R}(2^{4k}) \otimes \mathbb{R}(2^4)) \cong \mathbb{R}(2^{4(k+1)}) \oplus \mathbb{R}(2^{4(k+1)}).$$

Así para las demás álgebras.■

Proposición 12

$$C_{r,s} = C(\mathbb{R}^{r+s}, B_{r,s}) = \begin{cases} C_{r-s,0} \otimes \mathbb{R}(2^s) \cong C_{r-s,0}(2^s), & r > s \\ \mathbb{R}(2^r), & r = s = \frac{n}{2} \text{ } (n \text{ } par) \\ C_{0,r-s} \otimes \mathbb{R}(2^r), & r > s \end{cases}$$

$r, s \in \mathbb{Z}^+$; $r + s = n$.

Demostración.

Si $r = s$ entonces

$$C_{r,r} \cong \mathbb{R}(2^r)$$

se sigue de la proposición *8*.

Para $r > s$, $r - s = m > 0$ con lo que $r = m + s$ y

$$C_{r,s} = C_{m+s,0+s} \cong C_{m,0} \otimes C_{s,s} \cong C_{m,0} \otimes \mathbb{R}(2^s) \cong C_{r-s,0} \otimes \mathbb{R}(2^s) \cong C_{r-s,0}(2^s).■$$

Para $r < s$ tenemos $s - r = n > 0$ donde $s = n + r$ así

$$C_{r,s} = C_{0+r,n+r} \cong C_{0,n} \otimes C_{r,r} \cong C_{0,s-r} \otimes \mathbb{R}(2^r) \cong C_{0,s-r}(2^r)■$$

Observación 2 *La proposición anterior contiene* ***todas*** *las álgebras de Clifford reales de dimensión finita, con forma bilineal no degenerada.*

Ejemplo 7

$$C_{3,1} \cong C_{2,0} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{H}(2).$$

$$C_{1,3} \cong C_{0,2} \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \cong \mathbb{R}(4)$$

es decir

$$\mathbb{H}(2) \cong C(\mathbb{R}^4, (-,-,-,+)) \ncong C(\mathbb{R}^4, (-,+,+,+)) \cong \mathbb{R}(4)$$

.

Como hemos visto, la **signatura** $\sigma(B) = s - r$ de la forma bilineal B puede ser mayor, menor o igual a cero con $r = \textit{Número de } -1$, s $= \textit{Número de } 1$ y $n = r + s$ entonces

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}(n - \sigma(B)) \\ s &= \frac{1}{2}(n + \sigma(B)), \end{aligned}$$

así que

$$C_{r,s} = C_{\frac{1}{2}(n-\sigma)\,,\frac{1}{2}(n+\sigma)}.$$

Observación 3 $\sigma(B) = r - s = s - (n - s) = 2s - n$ *luego* ***paridad*** $\sigma(B) =$ ***paridad*** n, *es decir,* $\sigma(B)$ *es par si y sólo si* n *es par y análogamente para el caso impar.*

Proposición 13

$$C_{r,s} \cong \begin{cases} C_{|\sigma|\,,\,0}\ (2^{\frac{1}{2}(n-|\sigma|)}) \ \textit{para } \sigma(B) < 0 \\ C_{0,|\sigma|}\ (2^{\frac{1}{2}(n-|\sigma|)}) \ \textit{para } \sigma(B) > 0 \end{cases}$$

En el caso en que $\sigma(B) = 0$ *resulta de cualquiera los dos casos.*

Demostración.

De la proposición 12 tenemos:

Para $r > s$

$$C_{r,s} \cong C_{-\sigma,0}\,(2^{\frac{1}{2}(n+\sigma)}) = C_{|\sigma|\,,\,0}(2^{\frac{1}{2}(n-|\sigma|)}) \text{ con } \sigma(B) < 0$$

y cuando $r < s$

$$C_{r,s} \cong C_{0,\sigma}\,(2^{\frac{1}{2}(n-\sigma)}) = C_{0,|\sigma|}(2^{\frac{1}{2}(n-|\sigma|)}) \quad \text{con } \sigma(B) > 0$$

■

Se sigue

$$C_{r,s} \cong C_{\frac{1}{2}(n-\sigma)\,,\frac{1}{2}(n+\sigma)} \cong C_{\frac{1}{2}(|\sigma|-\sigma)\,,\frac{1}{2}(|\sigma|+\sigma)}\,(2^{\frac{1}{2}(n-|\sigma|)})$$

Proposición 14 *Cualquiera que sea $\sigma(B)$ existe, de manera* ***única****, la descomposición*

$$\sigma(B) = q + 8m$$

donde $m \in \mathbb{Z}$ y $q \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$.

Se dice $q = \sigma(B) \pmod 8$.

Demostración.

Si $\sigma(B) > 0$ entonces q es el resto de dividir $\sigma(B)$ por 8.

Si $\sigma(B) < 0$ entonces m es el mayor entero negativo tal que $8m \leq \sigma(B)$ así $q = \sigma(B) - 8m$.

Si $\sigma(B) = 0$ entonces $0 = 0 + 8 \times 0$ es decir $0 = 0 \pmod 8$.

Finalmente $\sigma(B) - q = 8m$ el cual es un número par por lo que *paridad* $\sigma =$ *paridad* q.■

2.2 Forma Final para las Álgebras de Clifford Reales de Dimensión Finita, con Forma Bilineal no Degenerada.

(i) Para la signatura $\sigma(B) = q + 8m = 0$ donde $m \in \mathbb{Z}$ implica que $q = 0$ (signatura módulo ocho) y $n = p + q$ es una cantidad par, del resultado de la proposición *12*, y del cálculo previo de algunas álgebras de Clifford tenemos que

$$C_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} = C_{0,0}(2^{\frac{n}{2}}) \cong \mathbb{R}(2^{\frac{n}{2}}).$$

(ii) Para $q = 1$ entonces $\sigma(B) = 1 + 8m$ donde $\sigma(B)$ cifra impar, luego n es impar.

Si $\sigma(g) > 0$ usando los resultados de las proposiciones *11, 12 y 13,* más propiedades del producto tensorial obtenemos:

$$C_{0,8m+1}(2^{\frac{1}{2}(n-1-8m)}) \cong C_{0,1+8m} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-1-8m)})$$

$$\cong (\mathbb{R}(2^{4m}) \oplus \mathbb{R}(2^{4m})) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-1-8m)}$$

$$\cong (\mathbb{R}(2^{4m}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-1-8m)})) \oplus (\mathbb{R}(2^{4m}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-1-8m)}))$$

$$\cong \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-1)}) \oplus \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-1)})$$

$$\cong \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]}) \oplus \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]})$$

donde usamos la definición de la parte entera de un número $\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n-1}{2}$.

Si $\sigma(B) = 1 + 8m < 0$ implica $m < 0$ y $|\sigma(B)| = -1 - 8m = -1 + 8|m|$ así

$$C_{-8m-1,0}(2^{\frac{1}{2}(n+1-8|m|)}) \cong C_{8(|m|-1)+7,0}(2^{\frac{1}{2}(n+1-8|m|)}))$$

$$\cong C_{8(|m|-1)+7,0} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+1-8|m|)})$$

$$\cong (\mathbb{R}(2^{4(|m|-1)+3}) \oplus \mathbb{R}(2^{4(|m|-1)+3})) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+1-8|m|)}) \cong \mathbb{R}(2^{\frac{n-1}{2}}) \oplus \mathbb{R}(2^{\frac{n-1}{2}})$$

$$\cong \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]}) \oplus \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]}).$$

(iii) Para $q = 2$, la signatura $\sigma(B) = 2 + 8m > 0$ entonces $m \in \mathbb{Z}^+$y

$$C_{0,2+8m}(2^{\frac{1}{2}(n-2-8m)}) \cong C_{0,2+8m} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-2-8m)}) \cong \mathbb{R}(2^{4m+1}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-2-8m)}) \cong$$

$$\mathbb{R}(2^{\frac{n}{2}})$$

Con $\sigma(B) = 2 + 8m < 0$ entonces $m \in \mathbb{Z}^-$, $| m |= -m$ y

$$C_{-2-8m,0}(2^{\frac{1}{2}(n+2-8|m|)}) \cong C_{0,8|m|-2} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+2-8|m|)}) \cong C_{0,8(|m|-1)+6} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+2-8|m|)}) \cong$$

$$\mathbb{R}(2^{4(|m|-1)+3}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+2-8|m|)}) \cong$$

$$\mathbb{R}(2^{\frac{n}{2}})$$

(iv) Para $q = 3$, la signatura es $\sigma(B) = 3 + 8m > 0$ se sigue

$$C_{0,8m+3}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-3)}) \cong C_{0,8m+3} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-3)}) \cong \mathbb{C}(2^{4m+1}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-3)})$$

$$\cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{4m+1}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{n-1}{2}-4m-1}) \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{n-1}{2}}) \cong$$

$$\mathbb{C}(2^{\frac{n}{2}}).$$

Para signatura $\sigma(B) = 3 + 8m < 0$, $\mid \sigma(B) \mid = -3 + 8 \mid m \mid$ luego

$$C_{8|m|+3,0}(2^{\frac{1}{2}(n+3-8|m|)}) \cong C_{8(|m|-1)+5,0}(2^{\frac{1}{2}(n+3-8|m|)}) \cong \mathbb{C}(2^{4(|m|-1)+2}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+3-8|m|)})$$

$$\cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]})$$

$$\cong \mathbb{C}(2^{\frac{n}{2}})$$

(v) Con $q = 4$, la signatura es $\sigma(B) = 4 + 8m$.

Si $\sigma(B) > 0$

$$C_{0,8m+4}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-4)}) \cong C_{0,8m+4} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-4)}) \cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{4m+1}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-4)})$$

$$\cong \mathbb{H}(2^{\frac{n}{2}-1})$$

Para $\sigma(B) < 0$

$m < 0$ y $|\sigma(B)| = -\sigma(B) = -4 - 8m = -4 + 8\,|m| = 8(|m| - 1) + 4$ así

$$C_{8|m|-4,0}(2^{\frac{1}{2}(n+4-8|m|)}) \cong C_{8(|m|-1)+4,0} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+4-8|m|)})$$

$$\cong \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{4(|m|-1)+1}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+4-8|m|)})$$

$$\cong \mathbb{H}(2^{\frac{n}{2}-1})$$

(vi) Para $q = 5$, la signatura se escribe $\sigma(B) = 5 + 8m$,

Si $\sigma(B) > 0$

$$C_{0,8m+5}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-5)}) \cong C_{0,8m+5} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-5)})$$

$$\cong ((\mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{4m+1}) \oplus \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{4m+1})) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-5)})$$

$$\cong (\mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{n-3}{2}})) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{n-3}{2}})) \cong \mathbb{H}(2^{\frac{n-1}{2}-1}) \oplus \mathbb{H}(2^{\frac{n-1}{2}-1})$$

$$\cong \mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \oplus \mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1})$$

Si $\sigma(B) < 0$

implica $m < 0$ y el valor absoluto de la signatura $|\sigma(B)| = -5 - 8m = -5 + 8\,|m|$

entonces

$$C_{8|m|-5,0}(2^{\frac{1}{2}(n-8|m|-5)}) \cong C_{8(|m|-1)+3,0} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8|m|-5)})$$

$$\cong (\mathbb{H}(2^{4(|m|-1)}) \oplus \mathbb{H}(2^{4(|m|-1)})) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8|m|-5)})$$

$$\cong (\mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{4(|m|-1)}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8|m|-5)})) \oplus (\mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{4(|m|-1)}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8|m|-5)}))$$

$$\cong \mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \oplus \mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1})$$

(vi) Si $q = 6$ se tiene $\sigma(B) = 6 + 8m$

Con $\sigma(B) > 0$

$$C_{0,8m+6}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-6)}) \cong C_{0,8m+6} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-6)}) \cong \mathbb{H}(2^{4m+2}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-6)}) \cong$$

$$\mathbb{H}(2^{\frac{n}{2}-1})$$

Con $\sigma(B) < 0$

entonces $m < 0$ y $|\sigma(B)| = -6 - 8m = -6 + 8\,|m|$

$$C_{8|m|-6,0}(2^{\frac{1}{2}(n+6-8|m|)}) \cong C_{8(|m|-1)+2,0} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+6-8|m|)})$$

$$\cong \mathbb{H}(2^{4(|m|-1)}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+6-8|m|)})$$

$$\cong \mathbb{H}(2^{\frac{n}{2}-1})$$

(vii) Para $q = 7$ entonces $\sigma(B) = 7 + 8m$

Si $\sigma(B) > 0$

$$C_{0,8m+7}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-7)}) \cong C_{0,8m+7} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-7)}) \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{4m+3}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n-8m-7)})$$

$$\cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{n-1}{2}}) \cong \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]})$$

Si $\sigma(B) < 0$

$$C_{8|m|-7,0}(2^{\frac{1}{2}(n+7-8|m|)}) \cong C_{8(|m|-1)+1,0} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+7-8|m|)}) \cong$$

$$\cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{4(|m|-1)}) \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{1}{2}(n+7-8|m|)})$$

$$\cong \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]}).\blacksquare$$

Como **resumen** para (V, Q) un espacio cuadrático de dimensión finita n, la forma bilineal $V \times V \xrightarrow{B} k$ diagonal, simétrica, no degenerada con signatura $\sigma(B)$ definida como la diferencia del número de $+$ y el número de $-$, y q la signatura módulo ocho $q \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$ donde $\sigma(B) = q + 8m$, $m \in \mathbb{Z}$. Satisface los siguiente. (Para la paridad se tiene $paridad(q) = paridad(n) = paridad(\sigma(B))$.

(i) Para $q = \sigma(B) (\mathrm{mod}\, 8) = 0, 2$ (n par)

$$C(V, Q) \cong \mathbb{R}(2^{\frac{n}{2}})$$

(ii) Para $q = \sigma(B) (\mathrm{mod}\, 8) = 1$ (n impar)

$$C(V, Q) \cong \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]}) \oplus \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]})$$

(iii) Para $q = \sigma(B)(\text{mod}\, 8) = 3, 7$ (n impar)

$$C(V, Q) \cong \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]})$$

(iv) Para $q = \sigma(B)(\text{mod}\, 8) = 4, 6$ (n par)

$$C(V, Q) \cong \mathbb{H}(2^{\frac{n}{2}-1})$$

(v) Para $q = \sigma(B)(\text{mod}\, 8) = 5$ (n impar)

$$C(V, Q) \cong \mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \oplus \mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1})$$

Las álgebras de Clifford reales $C(\mathbb{R}^n, Q)$ de dimensión real finita se resumen según su signatura q en la figura (2.1) la cual es llamada **diagrama de Hurewicz.** Demostración.

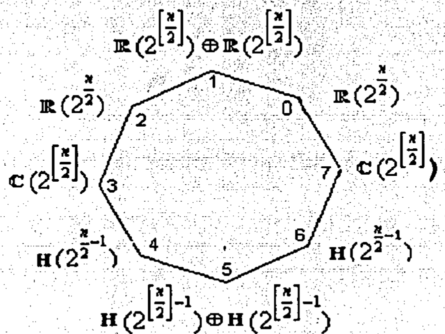

Figura 2.1: Diagrama de Hurewicz.

Se sigue del resumen anterior.■

Ejemplo 8 *$C_{25,1}$ entonces $n = 26$, $\sigma(B) = 1 - 25 = -24 = q + 8m$ así que $q = 0$ (la signatura módulo ocho) y $m = -4$ por lo tanto $C_{25,1}$* $\cong \mathbb{R}(2^{\frac{26}{2}}) = \mathbb{R}(2^{13})$.

Ejemplo 9 *Un ejemplo importante para la física es $C_{3,1} = C(\mathbb{R}^4, (+,-,-,-))$ tenemos $n = 4$, la signatura $\sigma(B) = 1 - 3 = -2 = q + 8m$ entonces $m = -1$ y $q = 6$ por lo tanto según el diagrama de Hurewicz $C_{3,1} \cong \mathbb{H}(2) \cong D^{16}(+,-,-,-) \equiv D^{16}_{+-}$ ésta última el álgebra de Dirac con la métrica $(+,-,-,-)$.*

Ejemplo 10 *Para $C_{1,3} = C(\mathbb{R}^4, (-,+,+,+))$, la signatura $\sigma(B) = 3-1 = 2 = q+8m$ así $m = 0$ y $q = 2$ por lo que $C_{1,3} \cong \mathbb{R}(4) \cong D^{16}(-,+,+,+) \equiv D^{16}_{-+}$.*

Observemos que son distintas las álgebras de Clifford que generan las métricas $(-,+,+,+)$ y $(-,+,+,+)$, usualmente se elige de forma arbitraria, pero veremos en el capítulo 3, que en la complejificación estas álgebras coinciden.

2.3 Álgebras Complejas.

Como vimos en la sección 2.1, dos formas Q y Q' son equivalentes si existe $C \in GL_n(F)$ tal que $M_Q = C^T M_{Q'} C$. Con la matríz $C = diag(\underbrace{1, ..., 1}_{r}, i, \underbrace{1, ..., 1}_{s-1})$ podemos ver que $B_{r,s} = diag(\underbrace{-1, ..., -1}_{r}, \underbrace{1, ..., 1}_{s})$ y $B'_{r+1,s-1} = diag(\underbrace{-1, ..., -1}_{r+1}, \underbrace{1, ..., 1}_{s-1})$ son equivalentes, es decir $B'_{r+1,s-1} = C^T B_{r,s} C$.

Donde $\det C = i$, $C^{-1} = diag(\underbrace{-1, ..., -1}_{r}, -i, \underbrace{1, ..., 1}_{s-1}) = \overline{C^T} \equiv C^\dagger$.

Así se establece una relación de equivalencia entre las $n + 1$ formas bilineales: $B_{0,n} \sim B_{1,n-1} \sim ... \sim B_{n,0} \equiv B_n$.

La complejificación de las álgebras de Clifford reales se obtienen a través del producto tensorial con $\mathbb{C}$ (ver apéndice 2)

$$\mathbb{C}_{r,s} := \mathbb{C} \otimes C_{r,s}$$

Si $r+s=n$ entonces $\mathbb{C}^{0,n} \cong \mathbb{C}^{1,n-1} \cong \ldots \cong \mathbb{C}^{n,0}$, de lo que se obtuvo en la sección anterior y las propiedades del producto tensorial, podemos encontrar la complejificación del álgebra de Clifford según su signatura módulo ocho.

Para $q = \sigma(B) (\bmod 8) = 0$ o 2

$\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{\frac{n}{2}})$

$$\cong \mathbb{C}(2^{\frac{n}{2}})$$

Para $q = \sigma(B) (\bmod 8) = 1$

$\mathbb{C} \otimes (\mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]}) \oplus \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]})) \cong (\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]})) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]}))$

$$\cong \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]}) \oplus \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]})$$

Para $q = \sigma(B) (\bmod 8) = 3, 7$

$\mathbb{C} \otimes \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]}) \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]}) \cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]})$

$\cong (\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]})) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]}))$

$$\cong \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]}) \oplus \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]})$$

Para $q = \sigma(B) (\bmod 8) = 4, 6$

$\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \cong \mathbb{C}(2) \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \cong \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]-1})$

$$\cong \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]})$$

Para $q = \sigma(B) (\bmod 8) = 5$

$\mathbb{C} \otimes (\mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \oplus \mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1})) \cong (\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{H}(2^{[\frac{n}{2}]-1})) \cong$

$(\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \oplus (\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \cong (\mathbb{C}(2) \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]-1}) \oplus (\mathbb{C}(2) \otimes \mathbb{R}(2^{[\frac{n}{2}]-1})$

$$\cong \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]}) \oplus \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]}).$$

Es decir

$$\mathbb{C}^{(n)} = \begin{cases} \mathbb{C}(2^{\frac{n}{2}}) & \text{si } n \text{ es par} \\ \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]}) \oplus \mathbb{C}(2^{[\frac{n}{2}]}) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \tag{2.3}$$

$n \in \mathbb{Z}^+$.

2.4 Una K-representación del Álgebra de Clifford

Definición 5 *Sea $K \supseteqq F$ un campo que contiene a F. Entonces una* ***K-representación*** *de un álgebra de Clifford $C(V,Q)$ es un* ***K-homomorfismo de álgebras***

$$\rho : C(V,Q) \longrightarrow Hom_K(W,W)$$

cuya imagen está en el álgebra de funciones lineales de un espacio vectorial de dimensión finita W sobre K .

El espacio W es llamado un $\mathbf{C(V,Q)}$**-módulo** sobre K. En notación simplificada podemos escribir

$$\rho(x)(w) \equiv x \cdot w$$

para $x \in C(V,Q)$ y $w \in W$. El producto $x{\cdot}w$ es llamada **multiplicación de Clifford.**

ρ un **K-homomorfismo de álgebras,** lo consideramos una función k-lineal que satisface la propiedad $\rho(xy) = \rho(x) \circ \rho(y)$ para toda $x, y \in C(V,Q)$.

Definición 6 *Sea $V, Q, k \subseteqq K$ como en la definición anterior. Una $K-$representación $\rho : C(V,Q) \longrightarrow Hom_K(W,W)$ decimos que es* ***reducible*** *si el espacio vectorial W puede ser escrito de una manera no trivial como suma directa (sobre K).*

$$W = W_1 \oplus_K W_2$$

tal que $\rho(x)(W_j) \subseteqq W_j$ para $j = 1, 2$ y para todo $x \in C(V, Q)$. Note que en este caso podemos escribir

$$\rho = \rho_1 \oplus_K \rho_2$$

donde $\rho_j(x) \equiv \rho(x)|_{W_j}$ para $j = 1, 2$. Una representación es llamada ***irreducible*** *si no es reducible.*

Definición 7 *Dos representaciones $\rho_j : C(V, Q) \longrightarrow Hom_K(W_j, W_j)$ para $j = 1, 2$ se dice que son* ***equivalentes*** *si existe un isomorfimo K-lineal $F : W_1 \longrightarrow W_2$ tal que*

$$F \circ \rho_1(x) \circ F^{-1} = \rho_2(x)$$

para todo $x \in C(V, Q)$.

De la clasificación que se encontró en la sección 1.2 vemos que cada álgebra de Clifford $Cl_{r,s}$ es de la "forma" $K(2^m)$ o $K(2^m) \oplus K(2^m)$, para $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$.

Teorema 6 *Sea $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ o $\mathbb{H}$, considere el anillo $K(n)$ de las K-matrices de $n \times n$ como una álgebra sobre $\mathbb{R}$. Entonces la representación natural ρ de $K(n)$ en el espacio vectorial K^n es , salvo equivalencia, la única representación real irreducible de $K(n)$.*

El álgebra $K(n) \oplus K(n)$ tiene exactamente dos clases de equivalencia de representaciones reales irreducibles, dado por

$$\rho_1(x_1, x_2) \equiv \rho(x_1) \quad \text{y} \quad \rho_1(x_1, x_2) \equiv \rho(x_2)$$

actuando en K^n.

Demostración.

Esto se sigue del hecho que las álgebras $K(n)$ son simples y las álgebras simples tienen una representación irreducible, salvo equivalencias. Ver [ref.13]

Capítulo 3

Álgebras de Dirac y Pauli.

Como casos importantes de la física en este capítulo se estudiará el álgebra de Dirac que tiene como generadores algebraícos las matrices γ_μ, las cuales satisfacen $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu}1$, donde $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ con signatura $\sigma(\eta_{\mu\nu}) = -2$ o $\widetilde{\eta}_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$ con $\sigma(\widetilde{\eta}_{\mu\nu}) = 2$ son métricas en el espacio de Minkowski M^4. Como los fenómenos físicos no dependen de la elección de la métrica, se muestra la necesidad de la complejificación de las álgebras $C(\mathbb{R}^4, \eta_{\mu\nu}) \cong \mathbb{H}(2)$ y $C(\mathbb{R}^4, \widetilde{\eta}_{\mu\nu}) \cong \mathbb{R}(4)$, las cuales coinciden en el álgebra física de Dirac $D^{16} \cong \mathbb{C}(4)$.

También se encuentra el álgebra de Pauli y se muestra su naturaleza como la subálgebra par del álgebra de Dirac.

Por último se dan tres representaciones de la ecuación de Dirac: estándar, Majorana y de cuaterníos, así como las transformaciones entre ellas.

Nota 3 *Un espacio vectorial V sobre un campo F, se dice que es un espacio con producto interior, si existe una función F-valuada $(\cdot\ ,\cdot) : V \times V \to F$, tal que* *satisface las cuatro condiciones siguientes, para toda $x, y, z \in V$ y $\alpha \in F$.*

(i) $(x,x) \geq 0$ *y* $(x,x) = 0$ *si y sólo si* $x = 0$

(ii) $(x, y+z) = (x,y) + (x+z)$

(iii) $(x, \alpha y) = \alpha(x,y)$

(iv) $(x,y) = \overline{(y,x)}$.

Cada espacio vectorial con producto interior es un espacio lineal normado con norma (métrica) $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ $[ref.17]$.

Así la función bilineal B asociada a la forma cuadrática Q induce un producto interior y con ello un espacio normado (espacio métrico).

3.0.1 La ecuación de Dirac para la Partícula Libre.

Si consideramos la relación no relativista

$$H = \frac{|\overrightarrow{p}|^2}{2m}, \tag{3.1}$$

sustituyendo en (3.1)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{p} &\rightarrow \overrightarrow{P} = -i\hbar\nabla \\ H &\rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

de ambos lados el vector de estado ψ, obtenemos la ecuación de Schrödinger para una partícula libre

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\overrightarrow{P}^2}{2m}\psi = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi \tag{3.3}$$

En el caso relativista

$$H = (c^2p^2 + m^2c^4)^{1/2}, \tag{3.4}$$

sustituyendo por operadores, obtenemos

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (c^2\overrightarrow{P}^2 + m^2c^4)^{1/2}\psi, \tag{3.5}$$

la cual no es agradable ya que existe asimetría en el tratamiento del tiempo y del espacio, lo que se ve claramente cuando expandemos la raíz cuadrada y (3.4) se escribe

$$i\hbar\frac{\partial\psi(\overrightarrow{p},t)}{\partial t} = mc^2\left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} - \frac{p^4}{8m^4c^4} + ...\right)\psi(\overrightarrow{p},t).$$

Se desarrollaron varias formas para obtener una ecuación simétrica. Una de ellas se sigue de (3.4),

$$H^2 = c^2p^2 + m^2c^4,$$

y hacer la sustitución (3.2), con algo de álgebra, tenemos:

$$\left[\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + \left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)^2\right]\psi = 0,$$

llamada **ecuación de Klein-Gordon**. Esta ecuación es un buen candidato para partículas como piones, kaones, etc., es decir partículas con espín cero [ref.19].

3.0.2 Ecuación de Dirac.

Otra forma, fué desarrollada por Dirac. Si consideramos que la cantidad dentro de la raíz en (3.5), puede escribirse como un cuadrado perfecto de un término lineal en $\overrightarrow{P}$, es decir

$$c^2\overrightarrow{P}^2 + m^2c^4 = (c\alpha_xP_x + c\alpha_yP_y + c\alpha_zP_z + \beta mc^2)^2,$$

$$= (c\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{P} + \beta mc^2)^2,$$

donde $\overrightarrow{\alpha}, \beta$ pueden determinarse comparando los dos lados de la ecuación, para ello

$$\begin{aligned} c^2(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2) + m^2c^4 &= \left[c^2(\alpha_x^2 P_x^2 + \alpha_y^2 P_y^2 + \alpha_z^2 P_z^2) + \beta^2 m^2 c^4\right] \\ &\quad + \left[c^2 P_x P_y(\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x) + \text{permutaciones cíclicas}\right] \\ &\quad + \left[mc^3 P_x(\alpha_x\beta + \beta\alpha_x) + x \to y + x \to z\right]. \end{aligned}$$

Consideramos $\overrightarrow{\alpha}, \beta$ espacialmente independientes, que es razonable para una partícula libre. Entonces se debe tener:

$$\alpha_i^2 = \beta^2 = 1 \qquad (i = x, y, z),$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0 \qquad (i \neq j),$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = \{\alpha_i, \beta\} = 0,$$

Es evidente que $\overrightarrow{\alpha}, \beta \notin \mathbb{R}$. Son matrices, hermitianas (ya que el Hamiltoniano $H = c\overrightarrow{\alpha}.\overrightarrow{P} + \beta mc^2$ es hermitiano), de traza 0 y con eigen-valores ± 1, implica que deben tener dimensión par. No pueden ser matrices de 2×2 ya que corresponde al limite no relativista (matrices de Pauli), entonces las siguientes de menor dimensión, son las matrices 4×4. Frecuentemente las cuatro matrices usadas son las siguientes:

$$\overrightarrow{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \overrightarrow{\sigma} \\ \overrightarrow{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

donde $\overrightarrow{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ son las matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Las matrices $\overrightarrow{\alpha}$, β y I definen la **representación estándar** de la ecuación de Dirac.

Así la ecuación de Dirac

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = (c\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{P} + \beta mc^2)\psi. \tag{3.6}$$

Definiendo

$$\gamma_0 = \beta \text{ y } \gamma_i = \beta\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

las cuales cumplen

$$\{\gamma_i, \gamma_j\} = -2\delta_{ij}1,\ \gamma_0^2 = 1, \{\gamma_i, \gamma_0\} = 0,$$

es decir

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2\eta_{\mu\nu}1 \tag{3.7}$$

donde $\eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ es la métrica de Minkowski. γ_0 es hermitiana es decir $\gamma_0^\dagger = \gamma_0$ mientras que γ_i para $i = 1, 2, 3$ son anti-hermitianas $\gamma_i^\dagger = -\gamma_i$. La ecuación (3.6) podemos escribirla en términos de las matrices γ_μ como:

$$(i\hbar\sum_{\mu=0}^{3}\gamma_\mu\frac{\partial}{\partial x^\mu} - mc)\psi = 0, \tag{3.8}$$

donde $x^0 = ct$, y $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$, con $\psi_i : M^4 \longrightarrow \mathbb{C}$, también llamado espinor de Dirac.

Nota 4 *Operador de Dirac (teoría local).*

Sea $C^\infty(U;\mathbb{C}^N)$ el espacio lineal de funciones análiticas (es decir que tiene derivada en todos los ordenes) con valores en $\mathbb{C}^N$, de un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$, y

$$\triangle : C^\infty(U;\mathbb{C}^N) \longrightarrow C^\infty(U;\mathbb{C}^N), \quad \triangle = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

el operador de Laplace. Cualquier operador diferencial de primer orden

$$D : C^\infty(U;\mathbb{C}^N) \longrightarrow C^\infty(U;\mathbb{C}^N)$$

tal que $D^2 = \triangle$ es llamado un **operador de Dirac** *(local).*

Sea $D = \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$ donde A_k son matrices de $N \times N$, con entradas complejas. Entonces

$$D^2 = \sum_{k,l} A_k \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(A_l \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}) = \sum_{k,l} A_k A_l \frac{\partial^2}{\partial x_k^2 \partial x_l^2} = \sum_k A_k^2 \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \sum_{k<l} (A_k A_l + A_l A_k) \frac{\partial^2}{\partial x_k^2 \partial x_l^2}.$$

y de la condición $D^2 = \triangle$ implica

$$\begin{cases} A_k^2 = -1 \text{ para toda } k, \text{ y} \\ A_k A_l + A_l A_k = 0 \text{ para toda } k \neq l. \end{cases} \tag{3.9}$$

Como hicimos en la sección 2.4, sea ρ cualquier $\mathbb{C}-$representación

$$\rho : C(\mathbb{R}^n) \longrightarrow End(\mathbb{C}^N),$$

en el álgebra de endomorfismos, las matrices $\rho(e_k)$ donde $\{e_i\}$ son base de $\mathbb{R}^n$, satisfacen (3.9).

Entonces de la representación podemos definir el operador de Dirac como

$$D : C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N),$$

$$D(\psi)(x) = D = \sum_{k=1}^{n} \rho(e_k) \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x_k^2},$$

donde vemos que $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^N)$, *para el caso* $N = 4$, *y la métrica de Minkowski,* $\psi \in C^\infty(M^4, \mathbb{C}^4)$ *es decir* $\psi : M^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4$. *Así* $\psi(\overrightarrow{p}, t) \in \mathbb{C}^4$ $[ref.3]$.

Con las operaciones de suma, multiplicación entre matrices y multiplicación por escalares, las γ_μ definen el álgebra llamada **álgebra de Dirac** D^{16}_{+-}, de dimensión real 16. Entre el álgebra D^{16}_{+-} y el álgebra de Clifford para el Espacio-tiempo de Minkowski $M^4 = (\mathbb{R}^4, \eta_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1))$ con signatura módulo ocho $q = 6$, $C(M^4) \cong \mathbb{H}(2)$ (según el diagrama 2.1) existe un isomorfismo representado por la matriz unitaria

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & -i \end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

con lo que podemos definir las matrices

$$\Gamma_\mu = U \gamma_\mu U^\dagger, \tag{3.11}$$

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_j = \begin{pmatrix} i\sigma_j & 0 \\ 0 & -i\sigma_j \end{pmatrix}, \ j = 1, 2, 3,$$

que satisfacen

$$\Gamma_0^\dagger = \Gamma_0, \Gamma_j^\dagger = -\Gamma_j, \text{ y } \{\Gamma_\mu, \Gamma_\upsilon\} = 2\eta_{\mu\nu} I, \tag{3.12}$$

Si llamamos

$$i\sigma_3 \equiv \iota, \ i\sigma_2 \equiv \gamma, \ i\sigma_1 \equiv \kappa. \tag{3.13}$$

las cuales satisfacen

$$\iota^2 = \gamma^2 = \kappa^2 = -1, \ \iota\gamma = -\gamma\iota = \kappa, \ \gamma\kappa = -\gamma\kappa = \iota, \ \kappa\iota = - \ \iota\kappa = \gamma.$$

es decir ι, γ, κ pueden ser identificados con las tres unidades imaginaria del álgebra de cuaternios $\mathbb{H}$ con dimensión real 4.

Se ve claramente $\Gamma_\mu \in \mathbb{H}(2)$ y las 16 matrices linealmente independientes que se dan a continuación son base para $\mathbb{H}(2)$. Por lo tanto también para el álgebra de Dirac

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_1 = \begin{pmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix}, \ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & -\iota \end{pmatrix}, \ \Gamma_0\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ \kappa & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_0\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_0\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -\iota \\ \iota & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1\Gamma_2 = \begin{pmatrix} -\iota & 0 \\ 0 & -\iota \end{pmatrix}, \ \Gamma_2\Gamma_3 = \begin{pmatrix} -\kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{pmatrix}, \ \Gamma_3\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\iota \\ -\iota & 0 \end{pmatrix}, \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \ \Gamma_2\Gamma_3\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \\ -\kappa & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3\Gamma_0\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{pmatrix}, \ \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $I, \Gamma_0, \Gamma_0\Gamma_1, \Gamma_0\Gamma_2, \Gamma_0\Gamma_3$, y $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ son hermitianas, y $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_1\Gamma_2, \Gamma_2\Gamma_3, \Gamma_3\Gamma_1, \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2$, $\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_0, \Gamma_3\Gamma_0\Gamma_1$ y $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ son anti-hermitiana. Para un elemento arbitrario en el álgebra D^{16}_{+-}.

$$d = \beta I + \alpha_0\Gamma_0 + \alpha_1\Gamma_1 + \ldots + \alpha_{0123}\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3.$$

con $\beta, \alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{0123} \in \mathbb{R}$, si

$$d = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{H}(2),$$

donde

$$q_{11} = (\beta + \alpha_{123})I + (\alpha_3 - \alpha_{12})\iota + (\alpha_2 - \alpha_{31})\gamma + (\alpha_1 - \alpha_{23})\kappa \ ,$$

$$q_{22} = (\beta - \alpha_{123})I + (-\alpha_3 - \alpha_{12})\iota + (-\alpha_2 - \alpha_{31})\gamma + (-\alpha_1 - \alpha_{23})\kappa \ ,$$

$$q_{12} = (\alpha_0 - \alpha_{0123})I + (-\alpha_{03} - \alpha_{012})\iota + (-\alpha_{02} + \alpha_{301})\gamma + (-\alpha_{01} - \alpha_{230})\kappa \ ,$$

$$q_{21} = (\alpha_0 + \alpha_{0123})I + (\alpha_{03} - \alpha_{012})\iota + (\alpha_{02} + \alpha_{301})\gamma + (\alpha_{01} - \alpha_{230})\kappa \ .$$

De (3.11),(3.6) y (3.13), la ecuación de Dirac se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} i\hbar(\kappa\partial_x + \gamma\partial_y + \iota\partial_z) - mc & \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} & -(i\hbar(\kappa\partial_x + \gamma\partial_y + \iota\partial_z) + mc) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$q_1 = \varphi \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1 + \psi_3) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_2 + \psi_4) \end{pmatrix}, \ q_2 = \varphi \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_1 - \psi_3) \\ \frac{i}{\sqrt{2}}(\psi_2 - \psi_4) \end{pmatrix},$$

y

$$\varphi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{H},$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto (a + b\iota) + (c + d\iota)\gamma.$$

Análogamente al álgebra de Dirac, las matrices σ_i definidas anteriormente con las operaciones de suma, multiplicación entre matrices y la multiplicación por escalares definen el álgebra llamada álgebra de Pauli, la cual es isomorfa al álgebra de Clifford para el espacio cuadrático $(\mathbb{R}^3, diag(1,1,1))$, según el diagrama 2.1, $C(\mathbb{R}^3, diag(1,1,1)) \equiv P \cong \mathbb{C}(2)$.

También podemos ver que el álgebra de Pauli es la subálgebra par del álgebra de Dirac.

De la definición del álgebra par en el capítulo 1, sección 1.1, la subálgebra estará generada por

$$I,\ \Gamma_0\Gamma_1,\ \Gamma_0\Gamma_2,\ \Gamma_0\Gamma_3,\ \Gamma_1\Gamma_2,\ \Gamma_1\Gamma_3,\ \Gamma_2\Gamma_3,\ \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3.$$

Sea $\{f_i\}_{i=1,2,3.}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. Identificando

$$f_1 \mapsto \Gamma_0\Gamma_1,\ f_2 \mapsto \Gamma_0\Gamma_2,\ f_3 \mapsto \Gamma_0\Gamma_3,$$

define un isomorfismo entre $(D^{16}_{+-})^+$ y P.

En términos de la representación cuaterníonica del álgebra de Dirac, este hecho se sigue de la inclusión $\iota_+ : \mathbb{C}(2) \longrightarrow \mathbb{H}(2)$ dado por

$$1 \mapsto 1,\ \sigma_k \mapsto \Gamma_0\Gamma_k,\ k = 1, 2, 3$$

que implica

$$\sigma_1\sigma_2 \mapsto -\Gamma_1\Gamma_2,\ \sigma_2\sigma_3 \mapsto -\Gamma_2\Gamma_3, \sigma_2\sigma_3 \mapsto -\Gamma_3\Gamma_1,\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \mapsto -\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3.$$

Ya que $\kappa = \iota\gamma$, un cuaternión arbitrario $a1 + b\iota + c\gamma + d\kappa$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, puede ser escrito como $(a1+b\iota)+(c1+d\iota)\gamma$; entonces existe una inclusión canónica $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}$, donde $a + bi \mapsto a1 + b\iota$, con la cual induce $\iota_0 : \mathbb{C}(2) \longrightarrow \mathbb{H}(2)$ dado por

$$1 \mapsto 1,\ \sigma_1 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -\iota \\ \iota & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así

$$\sigma_1\sigma_2 \mapsto \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & -\iota \end{pmatrix}, \sigma_2\sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \iota \\ \iota & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2\sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \mapsto \begin{pmatrix} \iota & 0 \\ 0 & \iota \end{pmatrix}.$$

Podemos ver que $\iota_0 \neq \iota_+$. Pero existe un isomorfismo de álgebras $\rho : \mathbb{H}(2) \longrightarrow \mathbb{H}(2)$, tal que $\rho \circ \iota_0 = \iota_+$.

Así tenemos:

$\rho(1) = 1,$

$\rho(\Gamma_0) = \Gamma_0\Gamma_1,$

$\rho(\Gamma_0\Gamma_3) = \Gamma_0\Gamma_2,$

$\rho(\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3) = \Gamma_0\Gamma_3,$

$\rho(\Gamma_3) = -\Gamma_1\Gamma_2,$

$\rho(\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2) = \Gamma_2\Gamma_3,$

$\rho(\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3) = \Gamma_3\Gamma_1,$

$\rho(\Gamma_1\Gamma_2) = \Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3,$

$\rho(\Gamma_1) = -\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2,$

$\rho(\Gamma_2) = -\Gamma_3,$

$\rho(\Gamma_0\Gamma_1) = -\Gamma_2,$

$\rho(\Gamma_0\Gamma_2) = -\Gamma_3\Gamma_0\Gamma_1,$

$\rho(\Gamma_1\Gamma_3) = \Gamma_0,$

$\rho(\Gamma_2\Gamma_3) = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3,$

$\rho(\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_0) = \Gamma_2\Gamma_3\Gamma_0,$

$\rho(\Gamma_3\Gamma_0\Gamma_1) = \Gamma_1.$

$[ref.21]$

La representación estándar, es usada para obtener el límite no-relativista. Si escribimos $\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \end{pmatrix}$ con χ, ϕ : $M^4 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ en la ecuación (3.6) obtenemos el sistema de ecuaciones

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}mc^2 & c\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\sigma}\\ c\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\sigma} & -mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix};$$

el sistema se desacopla para $\overrightarrow{p}=0$, que corresponde a la partícula en reposo:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix}=mc^2\begin{pmatrix}\chi\\ -\phi\end{pmatrix},$$

con la solución $\chi(t)=\exp(\frac{-imc^2t}{\hbar})\chi(0)$ para energía en reposo $E=+mc^2$, y $\phi(t)=\exp(\frac{imc^2t}{\hbar})\phi(0)$ para energía negativa $E=-mc^2$.

En el general, si $\psi(t)=e^{\frac{-iEt}{\hbar}}\psi$ en la ecuación (3.6):

$$\begin{pmatrix}E-mc^2 & -c\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\sigma}\\ -c\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\sigma} & E+mc^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\chi\\ \phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

De la segunda ecuación, $\phi=\frac{c\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\sigma}}{E+mc^2}\chi$. Pero $E+mc^2=E-mc^2+2mc^2=E_S+2mc^2$ con $E_S=E-mc^2=\frac{|\overrightarrow{p}|^2}{2m}+O\left(\frac{|\overrightarrow{p}|}{mc}\right)^4$, para velocidades bajas $E_S<<2mc^2$ y

$$\phi=\frac{\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\sigma}}{2mc}\chi,$$

de la ecuación anterior la componente χsatisface

$$E_S\chi=c\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\sigma}\phi\cong\frac{(\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{\sigma})^2}{2m}\chi=\frac{|\overrightarrow{p}|^2}{2m}\chi$$

la cual es llamada **ecuación de Pauli**.

Otra representación para la ecuación de Dirac es la de Majorana, si definimos las matrices:

$$\lambda_k:=i\Gamma_k,\ k=1,2,3,$$

la ecuación (3.8) puede escribirse como:

$$(i\Gamma_0\partial_0 + \sum_{k=1}^{3}\lambda_k\partial_k - \frac{mc}{\hbar})\widetilde{\psi} = 0, \tag{3.14}$$

de (3.12), vemos que las matrices λ_k son hermitianas y satisfacen $\lambda_k^2 = 1$, $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$ para $i \neq j$. Sólo la matriz que contiene la unidad imaginaria es $\lambda_2 = \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}$, el intercambio de Γ_0 con λ_2 permitirá tener sólo entradas reales.

La matriz

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda_2 + \Gamma_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & i & 1 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & i & 0 \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

cumplen $V = V^{-1} = V^{\dagger}$ y $\det(V) = 1$, así $V \in SU(4) \subset U(4)$. Introduciendo $VV = 1$ y multiplicando V por la izquierda, en la ecuación (3.14), definimos $\Psi = V \circ \widetilde{\psi}$, obtenemos

$$(i\lambda_2\partial_0 - \lambda_1\partial_1 + \Gamma_0\partial_2 - \lambda_3\partial_3 - \frac{mc}{\hbar})\Psi = 0$$

donde $V\Gamma_0 V = \lambda_2$, $V\lambda_1 V = -\lambda_1$, $V\lambda_3 V = -\lambda_3$ y $V\lambda_2 V = \Gamma_0$. Finalmente en terminos de las matrices

$$\rho_0 = i\lambda_2, \rho_1 = -\lambda_1, \rho_2 = \Gamma_0, \text{ y } \rho_3 = -\lambda_3,$$

con $\rho_\mu \in \mathbb{R}(4)$, que satisfacen

$$\{\rho_\mu, \rho_v\} = \rho_\mu\rho_v + \rho_v\rho_\mu = 2\widetilde{\eta}_{\mu\nu}1, \tag{3.16}$$

la ecuación de Dirac es

$$(\sum_{\mu=0}^{3}\rho_\mu\partial_\mu - \frac{mc}{\hbar})\Psi = 0. \tag{3.17}$$

De la clasificación de las álgebras de Clifford que hicimos en el capítulo anterio tenemos el álgebra de Dirac $D^{16}_{-+} = C_{1,3} \cong \mathbb{R}(4)$ (para la métrica $\widetilde{\eta}_{\mu\upsilon} = diag(-1,+1,+1,+1)$, con signatura es $+2$).

Se puede demostrar que las 16 matrices reales $1, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_0\rho_1, \rho_0\rho_2, \rho_0\rho_3, \rho_1\rho_2, \rho_1\rho_3, \rho_2\rho_3, \rho_0\rho_1\rho_2, \rho_1\rho_2\rho_3, \rho_2\rho_3\rho_0, \rho_3\rho_0\rho_1$ y $\rho_0\rho_1\rho_2\rho_3$, son linealmente independientes sobre los números reales, es decir forman una base de $\mathbb{R}(4)$ y ya que satisfacen la condición (3.16), obtenemos $D^{16}_{+-} = Cl(\mathbb{R}^{16}, (-1,+1,+1,+1)) \cong \mathbb{R}(4)$.

Con las matrices U y V definidas por (3.10) y (3.15) tenemos:

$$\rho_0 = U\gamma_2 U^\dagger, \rho_1 = -iU\gamma_1 U^\dagger, \rho_2 = U\gamma_0 U^\dagger, \rho_3 = -iU\gamma_3 U^\dagger,$$

con lo que podemos ver claramente que las álgebras reales D^{16}_{+-} y D^{16}_{-+} no son isomorfas, luego no hay una matriz unitaria que pase de γ_μ a ρ_μ.

En resumen, con las métricas $\eta_{\mu\nu}$ y $\widetilde{\eta}_{\mu\nu}$ tenemos distintas álgebras reales de Dirac, $D^{16}_{+-} \cong \mathbb{H}(2)$ y $D^{16}_{-+} \cong \mathbb{R}(4)$ respectivamente. Estas dos álgebras $\mathbb{H}(2)$ y $\mathbb{R}(4)$ coinciden bajo una complejificación (ver apéndice 2) en el álgebra $\mathbb{C}(4)$. Desde el punto de vista físico, $\eta_{\mu\nu}$ y $\widetilde{\eta}_{\mu\nu}$ son métricas equivalentes: su elección consiste en elegir los signos del los cuadrados del intervalo temporal y del los intervalos espaciales .

La equivalencia de las métricas ($\eta_{\mu\nu} \sim \widetilde{\eta}_{\mu\nu}$) se obtiene através de definir la matriz compleja unitaria (ver sección 2.1)

$$C = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} = C^T = -C^\dagger = -C^{-1},$$

satisface

$$\eta_{\mu\nu} = C\widetilde{\eta}_{\mu\nu}C^T.$$

Así se da el isomorfismo entre las álgebras.

$$(D^{16}_{+-})^c = \mathbb{C}\otimes D^{16}_{+-} \cong \mathbb{C}\otimes\mathbb{H}(2) \cong \mathbb{C}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{R}(2) \cong \mathbb{C}(2)\otimes\mathbb{R}(2)$$

$$\cong \mathbb{C}\otimes\mathbb{R}(2)\otimes\mathbb{R}(2) \cong \mathbb{C}\otimes\mathbb{R}(4) \cong \mathbb{C}(4),$$

$$(D^{16}_{-+})^c = \mathbb{C}\otimes D^{16}_{-+} \cong \mathbb{C}\otimes\mathbb{R}(4) \cong \mathbb{C}(4).$$

es decir

$$(D^{16}_{+-})^c \cong (D^{16}_{-+})^c \cong \mathbb{C}(4),$$

la cual identificamos con **el álgebra física de Dirac $\mathbf{D}^{16}$**.

Nota 5 *También podemos ver que ψ es una sección de haz $M^4 \times \mathbb{C}^4$.[ref.9]*

Sea una representación como en la nota anterior, pero para el espacio tangente de cada punto de M^4, $\rho_x : C(T_xM^4) \longrightarrow End(\mathbb{C}^4_x)$, donde $\mathbb{C}^4_x = \mathbb{C}^4$ para todo $x \in M^4$. Entonces $C^\infty(U;\mathbb{C}^4) = \{\psi : U \subset M^4 \longrightarrow \mathbb{C}^4\}$ y el operador de Dirac,

$$D_\rho(\psi)(x) = \sum_{i=1}^{4} \rho_x(e_i)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\right)_x$$

tal que $D^2_\rho = \triangle$.

Definimos la función

$$\rho : \bigcup_{x\in M^4} C(T_xM^4) \longrightarrow \bigcup_{x\in M^4} End(\mathbb{C}^4_x)$$

tal que $v \mapsto \rho(v) = \rho_x(v)$, donde $\bigcup_{x\in M^4} C(T_xM^4) = C(TM^4)$ (haz Clifford), $\bigcup_{x\in M^4} End(\mathbb{C}^4_x) = End(M^4 \times \mathbb{C}^4)$. Entonces el operador de Dirac

$$\widetilde{D_\rho} : C^\infty(M^4; M^4 \times \mathbb{C}^4) \longrightarrow C^\infty(M^4; M^4 \times \mathbb{C}^4)$$

para la función de onda $\widetilde{\psi} \in C^{\infty}(M^4; M^4 \times \mathbb{C}^4)$, $\widetilde{D_\rho}(\widetilde{\psi})(x) \equiv (x, D_{\rho_x}(\psi)(x))$.

Ahora podemos decir $\widetilde{\psi}$ *es la sección del haz* $M^4 \times \mathbb{C}^4$, *es decir* $\widetilde{\psi} : M^4 \longrightarrow M^4 \times \mathbb{C}^4$ *tal que* $x \mapsto (x, \psi(x))$.

Hablemos un poco acerca de la definición física de los espinores.

El momento cinético propio de una partícula se llama su **espín**, que se distingue del momento cinético ligado al movimiento de la partícula en el espacio, llamado **momento cinético orbital** [*ref*.9]. El espín de una partícula (medido al igual que el momento cinético orbital en unidades de $\hbar$) lo representaremos por s. Esta propiedad de las partículas es específicamente cuántica (desaparece cuando se pasa al límite $\hbar \longrightarrow 0$), por lo tanto no admite una interpretación clásica.

Para determinar por completo el estado de una partícula deben darse, no sólo sus coordenadas, sino también la dirección del vector espín. Por ello, la función de onda de una partícula debe ser función de cuatro variables, las tres coordenadas y la variable espín, que indica el valor de la proyección del espín sobre la dirección elegida en el espacio, y que toma un número limitado de valores discretos. Estos valores se pueden representar por medio de una función de onda con varias componentes en forma de índice. De esta manera la función de onda de una partícula que tiene espín no nulo, es, en realidad, no una, sino el conjunto de funciones que difieren por un índice de espín.

El operador que en la mecánica cuántica corresponde al espín de una partícula es tal que al aplicarlo a una función de onda actúa precisamente sobre la variable de espín.

Los operadores de espín S satisfacen las siguientes reglas de conmutación, como lo hacen los operadores del momento cinético orbital L :

$$[S_i, S_j] = i\hbar\varepsilon_{ijk}S_k,$$

junto con todas las consecuencias físicas que se siguen de ellas.

Definiendo los operadores $S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ tenemos

$$[S^2, S_i] = 0, \; i = 1, 2, 3.$$

Para la ecuación de valores propios,

$$\begin{aligned} S^2\psi_s^\sigma &= \hbar^2 s(s+1)\psi_s^\sigma \\ S_z\psi_s^\sigma &= \hbar\sigma\psi_s^\sigma \end{aligned}$$

con $s \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...\}$, $\sigma = \{-s, ..., s\}$ y la función de onda para una partícula ψ_s^σ ; σ representa la componente z del espín. $[ref.12]$

El momento cinético total de una partícula es la suma de su momento cinético orbital L y del espín S. Los correspondientes operadores, que se aplican a funciones de variables distintas, deben conmutar.

Los valores propios del momento cinético total son

$$j = l + s.$$

Así para los valores dados l, s, el momento cinético total puede tomar los valores $l+s, l+s-1, ..., |l-s|$. Por ejemplo, para el electrón (espín $\frac{1}{2}$) de momento cinético orbital distinto de cero, el momento cinético total puede ser $j = l \pm \frac{1}{2}$.

Resulta, definiendo $S_{\pm} = S_x \pm iS_y$ (subida y bajada) que tenemos

$$S_{\pm}\psi_s^{\sigma} = \hbar\sqrt{(s \mp \sigma)(s \pm \sigma + 1)}\psi_s^{\sigma\pm 1}$$

ver $[ref.20]$, podemos obtener los elementos de matriz para $S_x, S_y, S_z, S_{\pm}$.

$$(\psi_{s'}^{\sigma'}, S_x\psi_s^{\sigma}) = \frac{\hbar}{2}\left(\sqrt{(s-\sigma)(s+\sigma+1)}\delta^{\sigma',\sigma+1} + \sqrt{(s+\sigma)(s-\sigma+1)}\delta^{\sigma',\sigma-1}\right),$$

análogamente para las demás matrices.

En el caso importante de espín $s = \frac{1}{2}$ entonces $\sigma = \pm\frac{1}{2}$, estas matrices son de segundo orden y tienen la forma

$$S_x^{\sigma',\sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\; S_y^{\sigma',\sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\; S_x^{\sigma',\sigma} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Las funciones de onda de las partículas de espín $\frac{1}{2}$ tienen dos componentes $\psi(\frac{1}{2})$ y $\psi(-\frac{1}{2})$, las cuales designaremos por ψ^1, ψ^2. En una rotación arbitraria del sistema de coordenadas, ψ^1, ψ^2 experimentan una transformación lineal

$$\psi^{1'} = \alpha\psi^1 + \beta\psi^2,\; \psi^{2'} = \gamma\psi^1 + \delta\psi^2. \tag{3.18}$$

Los coeficientes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ (se les llama parámetros de Cayley-Klein), están ligados entre sí por una relación que se deducirá a partir de considerar la forma bilineal

$$\psi^1\phi^1 - \psi^2\phi^2 \tag{3.19}$$

donde (ψ^1, ψ^2) y (ϕ^1, ϕ^2) son dos funciones de onda que se transforman según (3.18). Un calculo sencillo da

$$\psi^{1'}\phi^{1'} - \psi^{2'}\phi^{2'} = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\psi^1\phi^1 - \psi^2\phi^2)$$

es decir, en una rotación del sistema de coordenadas, la cantidad (3.19) se transforma linealmente en sí misma. Pero si existe sólo una función cuya transformada es un múltiplo de ella, dicha función puede considerarse como correspondiente a espín nulo, y por lo tanto, debe ser un escalar, es decir debe permanecer invariante en las rotaciones del sistema de coordenadas. De aquí se sigue la igualdad

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Las transformaciones lineales (3.18) que dejan invariante la forma bilineal (3.19) se les llama binarias. La magnitud de dos componentes (ψ^1, ψ^2) que se transforman en una rotación del sistema de coordenadas según una transformación binaria, se llama espinor. Así pues, la función de onda de una partícula de espín $\frac{1}{2}$ es un espinor.

Capítulo 4

Clasificación de Espinores.

Teniendo la clasificación de las álgebras de Clifford reales y complejas que se encontró en el capítulo 2, y la definición del espinor como la función de onda sobre la cual actúa el operador de Dirac, daremos una clasificación de los espinores según la dimensión del espacio y la signatura módulo ocho de la métrica, encontrando espinores de Dirac, Majorana, Pseudo Majorana, Weyl , Majorana-Weyl y Pseudo Majorna-Weyl.

4.1 Espinores.

Dada la representación matricial del álgebra de Clifford, los elementos del correspondiente espacio de representación son llamados **espinores**.

Definición 8 *Los elementos del espacio de representación para el álgebra* $\mathbb{C}^{(n)}$ *son llamados* ***espinores complejos de Dirac.***

Del diagrama 2.1 podemos ver que los espinores de Dirac, existen en cualquier dimensión y tienen $2^{[\frac{1}{2}n]}$ componentes.

Definición 9 ***(Espinores de Majorana)*** *Estos espinores son reales y existen en cualquier dimensión con signatura módulo ocho* $q = 0, 1, 2$.

Para la métrica $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1)$ cuya signatura módulo ocho es $q = 2$ existen los espinores de Majorana, pero no así cuando la métrica es $\widetilde{\eta}_{\mu\nu} = diag(1, -1, -1, -1)$ y $q = 6$.

Proposición 15 *Existen los espinores imaginarios puros o* ***Pseudo-Majorana****, en cualquier dimensión con signatura módulo ocho* $q' = 0, 6, 7$.

Demostración.

Cuando $q = 0, 1, 2$ es posible tener espinores de Majorana los cuales inducen espinores de pseudo-Majorana .

Si $q = 2$, los generadores del álgebra $\gamma_\mu \in \mathbb{R}(M)$ donde $M = 2^{\frac{n}{2}}$, para algún n, $n = s + r$, donde s es el número de términos positivos y r es el número de términos negativos en la métrica diagonal $B = diag(\underbrace{+1, ..., +1}_{s}, \underbrace{-1, ..., -1}_{r})$, así la signatura $\sigma(B) = s - r = 8m + 2$ con $m \in \mathbb{Z}$; cuando hacemos el cambio γ_μ por $\gamma'_\mu := i\gamma_\mu$, el término s cambia por r y r por s, es decir B es sustituida por B', y cumple

$$\sigma(B') = r - s = -\sigma(B) = -8m - 2 = -8(m + 1) + 8 - 2$$

$$= 8m' + 6 \ ; \text{ con } \ m' = -m - 1 \in \mathbb{Z}.$$

por lo tanto

$$q' = 6.$$

Para $q = 1$, los generadores del álgebran $\gamma_\mu \in \mathbb{R}(M)$ y $\sigma(B) = s - r = 8m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$ haciendo el cambio γ_μ a $\gamma'_\mu := i\gamma_\mu$ para toda μ, s cambia por r y r por s, tal que

$$\sigma(B') = r - s = -\sigma(B) = -8m - 1 = -8(m+1) + 8 - 1$$

$$= 8m' + 7 \ ; \text{ con } \ m' = -m - 1 \in \mathbb{Z}.$$

así

$$q' = 7.$$

Y para $q = 0$, los generadores del álgebra $\gamma_\mu \in \mathbb{R}(M)$, $n = s + r$, donde $\sigma(B) = s - r = 8m + 0$, $m \in \mathbb{Z}$, con la misma asignación que antes obtenemos

$$\sigma(B') = r - s = -\sigma(B) = -8m$$

por lo tanto

$$q' = 0. \blacksquare$$

Ejemplo 11 *Sea el espacio vectorial* $V = \mathbb{R}^6$ *y* $q = 2$ *la signatura módulo ocho para la forma* $B = diag(1,1,1,1,-1,-1)$ *donde se cumple* $\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = \gamma_4^2 = 1$ *y* $\gamma_5^2 = \gamma_6^2 = -1$ *(ver sección 1.1) todos los* γ_i *son reales puros, si escribimos* $\gamma'_i = i\ \gamma_i$ *imaginarios puros, que satisfacen* $\gamma_1'^2 = \gamma_2'^2 = \gamma_3'^2 = \gamma_4'^2 = -1$ *y* $\gamma_5'^2 = \gamma_6'^2 = 1$ *con métrica* $B' = diag(-1,-1,-1,-1,1,1)$ *y signatura* $\sigma(B') = 2 - 4 = -2 = 8(-1) + 6$ *entonces* $q' = 6$*. Análogamente para* $q = 0, 1$ *que inducen* $q' = 0, 7$ *respectivamente.*

Consideremos ahora la representación de Majorana para la ecuación de Dirac que se encontró en (3.17) donde vemos que $\rho_\mu \equiv \gamma_\mu$, siendo γ_μ los generadores del álgebra, como en la definición anterior

$$(\rho_\mu \partial_\mu - m)\Psi = 0, \tag{4.1}$$

hemos tomado $\hbar = c{=}1$ y usamos la convención de Einstein: subíndices griegos repetidos se suman de cero a tres.

De la ecuación podemos ver que todas las componentes de Ψ se pueden elegir reales (espinores de Majorana) o imaginarios puros (espinores de pseudo-Majorana), independientemente del valor de m ($m = 0$ o $m > 0$).

Si tenemos una representación de la "ecuación de Dirac" de la forma

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \tag{4.2}$$

para $\gamma_\mu \in \mathbb{R}(M)$, en principio todas las componentes ψ^α de ψ pueden elegirse reales o imaginarias puras, si $m = 0$, pero no de lo contrario ya que:

$$\text{Si } \psi^\alpha \in \mathbb{R} \text{ entonces } i\gamma_\mu \partial_\mu \psi^\alpha \in i\,\mathrm{Im}\,, \text{ pero } m\psi \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } \psi^\alpha \in i\,\mathrm{Im} \text{ entonces } i\gamma_\mu \partial_\mu \psi^\alpha \in \mathbb{R}, \text{ pero } m\psi \in i\,\mathrm{Im}\,.$$

Por lo tanto con $q = 0, 1, 2$, $\gamma_\mu \in \mathbb{R}(M)$ y en particular para la métrica $\eta_{\mu\nu} = diag(-1, +1, +1, +1)$, no se pueden tener espinores masivos de Majorana o de pseudo-Majorana.

Consideremos el espacio cuadrático $(V = \mathbb{R}^{2n}, \delta_{ij})$ el álgebra de Clifford correspondiente es $\mathbb{R}(2^n)$ (ver ejercicio 1, sección 1.2), la complejificación para ella

$\mathbb{C}\otimes\ \mathbb{R}(2^n)\ \cong\ \mathbb{C}(2^n)\ \equiv\ H$ tiene como generadores $u_1, ..., u_{2n}$, los que satisfacen $u_i u_j + u_j u_i = 2\delta_{ij} 1$ (ver 1.5). Del estudio de osciladores fermionicos [$ref.2$] podemos extraer algunos principios importantes y definir las matrices $a_j = \frac{1}{2}\left(u_{2j-1} + iu_{2j}\right)$, $a_j^* = \frac{1}{2}\left(u_{2j-1} - iu_{2j}\right)$ para $j = 1, .., n$, las que cumplen

$$\begin{aligned}\{a_i, a_j\} &= \{a_i^*, a_j^*\} = 0 \\ \{a_i, a_j^*\} &= \delta_{ij} 1.\end{aligned}$$

Existe el operador $N_j = a_j^* a_j$, tal que $N_j^2 = N_j$. Con ello definimos el operador **quiralidad**

$$\Gamma \equiv \exp(i\pi \sum_{j=1}^{n} N_j) = \prod_{j=1}^{n} (1 - 2N_j) = (-i)^n u_1 u_2 \cdots u_{2n} \tag{4.3}$$

podemos ver que $\Gamma^2 = 1$, y sus valores propios son $\lambda = \pm 1$. Ésto nos permite definir el operador

$$P_{\pm} \equiv \frac{1 \pm \Gamma}{2}$$

donde $P_{\pm} v$ es un vector propio de Γ con valor propio ± 1 y $v \in \mathbb{C}^{2^n}$, es decir $P_{\pm}$ son **operadores de proyección**. Así

$$H_{\pm} \equiv P_{\pm} H = \{P_{\pm} v \mid v \in H\}$$

y ya que Γ es hermitiano los vectores propios son ortogonales, con lo cual

$$H = H_{+} \oplus H_{-}.$$

Para los elementos $v \in H$, $v = v_{+} \oplus v_{-}$. Por último $\dim H_{\pm} = \frac{1}{2} H = 2^{n-1}$. Los elementos de $H_{\pm}$ son los llamados **espinores complejos de Weyl**.

Nota 6 *Para $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ tenemos el isomorfismo de álgebras*

$$\varphi : K(n) \oplus K(n) \longrightarrow (K \oplus K)(n)$$

dado por

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} . \longmapsto \begin{pmatrix} (a_{11}, b_{11}) & \cdots & (a_{1n}, b_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (a_{n1}, b_{n1}) & \cdots & (a_{nn}, b_{nn}) \end{pmatrix}_{2n \times 2n} ,$$

se usa el isomorfismo $K(n) \oplus K(n) \cong K(2n)$.

Así $K(n) \oplus K(n) \ni x : (K \oplus K)^n \longrightarrow (K \oplus K)^n$ es decir $x \in End_K((K \oplus K)^n)$,

donde

$$x \cdot v = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_1, k_1') \\ \\ \vdots \\ \\ (k_n, k_n') \end{pmatrix} \equiv \varphi(x) v = \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^{n} a_{1j} k_j, \sum_{j=1}^{n} b_{1j} k_j') \\ \\ \vdots \\ \\ (\sum_{j=1}^{n} a_{nj} k_j, \sum_{j=1}^{n} b_{nj} k_j') \end{pmatrix}$$

Nota 7 *en particular para*

$$v = \begin{pmatrix} (k_1, 0) \\ \vdots \\ (k_n, 0) \end{pmatrix} \in (K \oplus 0)^n \quad \textit{así} \quad x \cdot v = \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^{n} a_{1j} k_j, 0) \\ \vdots \\ (\sum_{j=1}^{n} a_{nj} k_j, 0) \end{pmatrix} \in (K \oplus 0)^n;$$

y para

$$v = \begin{pmatrix} (0, k'_1) \\ \vdots \\ (0, k'_n) \end{pmatrix} \in (0 \oplus K)^n, \;\; \textit{se tiene} \; x \cdot v = \begin{pmatrix} (0\, , \sum_{j=1}^{n} b_{1j} k'_j) \\ \vdots \\ (0\, , \sum_{j=1}^{n} b_{nj} k'_j) \end{pmatrix} \in (0 \oplus K)^n;$$

por lo tanto, $(K \oplus 0)^n, (0 \oplus K)^n$ *son representaciones irreducibles de* $K(n) \oplus K(n)$.

Con la observación anterior y la sección 2.3, podemos ver claramente que

$$\psi \in \begin{cases} \underbrace{\mathbb{C}^{2^{n/2}}}_{Dirac} \cong \underbrace{\mathbb{C}^{2^{(n/2)-1}}}_{Weyl} \oplus \underbrace{\mathbb{C}^{2^{(n/2)-1}}}_{Weyl} & n - \text{par} \\ (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^{2^{[n/2]}} \cong \underbrace{(\mathbb{C})^{2^{[n/2]}}}_{\frac{1}{2} Espinor} \oplus \underbrace{(\mathbb{C})^{2^{[n/2]}}}_{\frac{1}{2} Espinor} & n - \text{impar} \end{cases}$$

Observación 4 *Los $\frac{1}{2}$ espinores no son espinores de Weyl.*

Ejemplos 12 *Para $n = 4$,*

$$\underbrace{\mathbb{C}^4}_{Dirac} \cong \underbrace{\mathbb{C}^2}_{Weyl} \oplus \underbrace{\mathbb{C}^2}_{Weyl}$$

y la función de onda es

$$\psi = w_+ \oplus w_-.$$

Para $n = 5$,

$$(\mathbb{C} \oplus \mathbb{C})^4 \cong \underbrace{\mathbb{C}^4}_{\frac{1}{2}Espinor} \oplus \underbrace{\mathbb{C}^4}_{\frac{1}{2}Espinor}.$$

La condición para tener espinores de Majorana, puede considerarse junto con la condición de Weyl, y así poder definir el espinor llamado de **Majorana-Weyl.**

Para los espinores de Weyl, sabemos que la dimensión del espacio vectorial debe ser $s + r = 2n$, con lo cual se definió el operador quiralidad Γ y el de proyección $P_{\pm} = \frac{1 \pm \Gamma}{2}$ con la propiedad $P_{\pm}^2 = P_{\pm}$, mientra que para los espinores de Majorana o pseudo-Majorana, todos los generadores del álgebra γ_μ son reales o imaginarios puros, respectivamente.

Dado que la matriz 1 es real, para preservar el carácter real o imaginario puro de las proyecciones de la función ψ bajo $P_{\pm}$, Γ debe ser real. Así de (4.3) tenemos

$$\Gamma = (-i)^{\frac{s}{2}}(i)^{\frac{r}{2}}\gamma_1 \cdots \gamma_{r+s}$$

para $s + r = 2n$ y s par,

$$\Gamma = -(-i)^{\frac{s-1}{2}}(i)^{\frac{r-1}{2}}\gamma_1 \cdots \gamma_{r+s}$$

para $s + r = 2n$ y s impar. El producto de las γ_μ tanto en el caso de ser todos reales como imaginarios puros, es real pues $s + r$ es un número par. Debemos tener

$$i^{\frac{r-s}{2}} \in \mathbb{R} \text{ entonces } s - r = 0 \mod 4.$$

Por lo tanto una condición necesaria para la existencia de espinores de Majorana-Weyl o pseudo Majorana-Weyl es $s - r = 0 \text{ mód} 4$.

Para $q = 2, 1, 0$ donde existen los espinores de Majorana, luego:

$q = 2$, es decir $s + r = 8m + 2$, $m \in \mathbb{Z}$, pero $s - r = 4m' + 2$ entonces $s - r = 2 \mod 4$, por lo tanto no existen los espinores Majorana-Weyl.

$q = 1$ es decir $s - r = 8m + 1$, $m \in \mathbb{Z}$, $s + r = 2r + 8m + 1$ un número impar y $s - n = 1 \mod 4$, por lo tanto no podemos tener espinores de Majorana-Weyl.

$q = 0$, $s - r = 8m + 0$ también $s - r = 0 \text{ mód} 4$, así podemos tener espinores de Majorana-Weyl.

Para $q = 7, 6, 0$ donde podemos tener espinores pseudo-Majorana, así:

$q = 7$, $s - r = 8m + 7$, $m \in \mathbb{Z}$, $s + n = 2r + 8m + 7$ una cantidad impar, por lo tanto no podemos tener espinores de pseudo-Majorana-Weyl.

$q = 6$, $s - r = 8m + 6$, pero también $s - r = 6 \text{ mód} 4$, por lo tanto tampoco podemos tener pseudo Majorana-Weyl.

$q = 0$, $s - r = 0 \text{ mód} 4$, entonces si podemos tener espinores pseudo Majorana-Weyl.

Por lo tanto espinores de Majorana-Weyl o pseudo Majora-Weyl en la ecuación de Dirac (4.1) o (4.2) existen sólo para $q = 0$.

Ejemplos 13 *Algunos ejemplos en los que podemos tener espinores de Majorana-Weyl.*

$n = s + r = 2$ y $s = r = 1$, el álgebra de Clifford para el espacio cuadrático $(\mathbb{R}^2, diag(-1, 1))$ es isomorfa a $\mathbb{R}(2)$ (ver sección 1.2) y ya que $s - r = 0$, $q = 0$ (la

signatura módulo ocho).

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \\ \psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \psi_2 \end{pmatrix}.$$

Si $n = 10$ *y* $s = 9$, $r = 1$, *el álgebra de Clifford para el espacio cuadrático* $(\mathbb{R}^{10}, \eta_{ij})$ *es isomorfa a* $\mathbb{R}(2^5)$ *y la signatura módulo ocho* $q = 0$, *y* $s - r = 0 \,\text{mód}\, 4$.

4.2 Conclusiones.

La finalidad de este trabajo ha sido conocer y manejar la teoría de las álgebras de Clifford, resaltando algunas aplicaciones de éstas en la física.

La motivado ha sido la importancia que tienen las álgebras de Clifford tanto en el área matemática como física. Por ejemplo los generadores de estas álgebras representan operadores de creación y aniquilación de partículas fermiónicas, la naturaleza de las muy recurridas álgebras de Dirac y Pauli como las álgebras de Clifford para los espacios cuadráticos $(V = \mathbb{R}^4, \eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1))$ y $\mathbb{E}_3^+ = (V = \mathbb{R}^3, \eta_{ij} = diag(1,1,1))$ respectivamente, así como la teoría geométrica de Cartan sobre ellas, la cual da conceptos de gran utilidad en teorías de partículas elementales.

Puntos importantes obtenidos en la tesis son:

1. La naturalidad en sentido técnico de las álgebras de Clifford. Y ya que los espinores son elementos de estas álgebras tenemos la naturalidad de ellos también.

2. La necesidad de la complejificación de las álgebras $C(V = \mathbb{R}^4, \eta_{\mu\nu} = diag(-1,1,1,1)) \cong \mathbb{R}(4)$ y $C(V = \mathbb{R}^4, \eta_{\mu\nu} = diag(1,-1,-1,-1)) \cong \mathbb{H}(2)$, las cuales coinciden en el álgebra física de Dirac

$$D^{16} \cong \mathbb{C}(4)$$

es decir el álgebra de Dirac es compleja.

3. Se desarrollan representaciones distintas de la ecuación de Dirac, una de ellas real (Majorana) y otra cuaterniónica. También damos las transformaciones entre ellas

y la representación estándar, que es bien conocida.

Además se muestra la existencia de una representación natural, real irreducible, única salvo equivalencias para las álgebras de Clifford que son de la forma $K(2^n)$ o $K(2^n) \oplus K(2^n)$ para $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, según la clasificación que se recopila en el diagrama de Hurewicz.

Siguiendo la clasificación de las álgebras de Clifford reales y complejas, así como su representación matricial, damos una clasificación de los espinores según la dimensión del espacio y la signatura módulo ocho de la métrica.

Un hecho que se omite en muchos textos es, notar que la función de onda ψ que satisface la ecuación de Dirac es un elemento de $C^\infty(M^4, \mathbb{C}^4)$ y no de $\mathbb{C}^4$, nosotros lo discutimos brevemente en la Nota 4.

En un proyecto posterior nos interesaría generalizar las álgebras de Clifford a espacios vectoriales de dimensión infinita, encontrar la relación de éstas álgebras y los espacios de Hilbert sobre los cuales se módela la mecánica cuántica, entender la teoría de haces de Clifford y sus aplicaciones en la física.

Apéndice 1.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

4.3 Categorías.

Definición 10 *Una categoría C consiste de*

(a) Una clase de **objetos**

(b) Para cada pareja ordenada de objetos X, Y, un conjunto $\hom(X,Y)$ de **morfismos** con dominio X y rango Y. Si $f \in \hom(X,Y)$, escribimos $f : X \longrightarrow Y$.

(c) Una función que asigna a cada terna ordenada de objetos X, Y, Z, una función

$$\hom(Y,Z) \times \hom(X,Y) \longrightarrow \hom(X,Z).$$

Para morfismos $g : Y \longrightarrow Z$ y $f : X \longrightarrow Y$ esta función es escrita como $(g,f) \longmapsto g \circ f$, y el morfismo $g \circ f : X \longrightarrow Z$ es llamado la **composición** de f con g.

Estos objetos y morfismos satisfacen los siguientes axiomas:

Asociatividad: Si $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ y $h : Z \longrightarrow W$, entonces

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f : X \longrightarrow W$$

Identidad: Para cada objeto Y, existe un morfismo $1_Y : Y \longrightarrow Y$ tal que si $f : X \longrightarrow Y$, luego $1_Y \circ f = f$, y si $h : Y \longrightarrow Z$, entonces $h \circ 1_Y = h$.

1. La categoría de conjuntos y funciones: $\hom(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y : f \text{ función}\}$, llamada categoría "*Set*".

2. La categoría de conjuntos e inyecciones (suprayecciones o biyecciones): $\hom(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y : f \text{ función inyectiva (suprayectiva o biyectiva.)}\}$

3. La categoría de espacios topológicos y funciones continuas ("*Top*"): $\hom(X,Y) = \{f : X \longrightarrow Y : f \text{ función continua}\}$.

4. La categoría de grupos y morfismos: $\hom(X,Y) =$

$\{f : X \longrightarrow Y,\ f \text{ momorfismo de grupos}\}$.

5. La categoría de R-módulos y morfismos: $\hom(X,Y) =$

$\{f : X \longrightarrow Y,\ f \text{ morfismo de } R-\textit{módulos}\}$.

6. La categoría de variedades diferenciables y funciones C^∞ : $\hom(X,Y) =$ $\{f : X \longrightarrow Y : f \text{ función con derivadas de todos los órdenes}\}$, también llamada categoría "*Suave*".

7. La categoría de espacios vectoriales y transformaciones $\mathbb{R}-$lineales: $\hom(X,Y) =$ $\{f : X \longrightarrow Y : f \text{ es función } \mathbb{R}-\text{lineal}\}$.

Definición 11 *Una* ***subcategoría*** $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}$ *es una categoría tal que:*

a) Los objetos de $\mathcal{C}'$ son también objetos de $\mathcal{C}$.

b) Para cualesquiera objetos X' y Y' de $\mathcal{C}'$, $\hom_{\mathcal{C}'}(X',Y') \subset \hom_{\mathcal{C}}(X',Y')$.

c) Si $f' : X' \longrightarrow Y'$ y $g' : Y' \longrightarrow Z'$ son morfismos en $\mathcal{C}'$, la composición en $\mathcal{C}'$ es igual a su composición en $\mathcal{C}$.

1. El ejemplo 2 es una subcategoría del ejemplo 1.

Definición 12 *Un objeto X en una categoría $\mathcal{C}$ se llama un* ***objeto inicial*** *si para cada objeto Y en $\mathcal{C}$, el conjunto* $\hom(X,Y)$ *contiene exactamente un elemento. Un objeto Z de $\mathcal{C}$ se llama un* ***objeto final*** *(terminal) si para cada objeto Y de $\mathcal{C}$, el conjunto* $\hom(Y,Z)$ *contiene exactamente un elemento.*

Observemos que cualesquiera dos objetos iniciales (o terminales) de $\mathcal{C}$ son equivalentes.

1. En las categorías *Set* y *Top* el conjunto vacío es un objeto inicial y cualquier conjunto de un punto es un objeto final.

4.4 Productos y Coproductos

Definición 13 *Sea A_1 y A_2 objetos en la categoría $\mathcal{C}$. Un producto de A_1 y A_2 en $\mathcal{C}$ es una terna (A, p_1, p_2) donde $A \in Obj(\mathcal{C})$ y $p_i \in \hom_{\mathcal{C}}(A, A_i)$, tal que si B es un objeto en $\mathcal{C}$ y $f_i \in \hom_{\mathcal{C}}(B, A_i), i = 1, 2,$ entonces existe un único $f \in \hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f"'] & A_i \\ & A \arrow[u, "p_i"'] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 14 *Sean G_1, G_2 grupos, entoces $(G = G_1 \times G_2, p_1, p_2)$ es un producto de G_1 y G_2 en la categoría de grupos $\mathcal{G}$.*

G es el grupo de pares (g_1, g_2) con $g_i \in G_i$ y multiplicación dada por

$$(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (g_1h_1, g_2h_2),$$

unidad $1 = (1_1, 1_2)$ donde 1_i es unidad en G_i y $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1}, g_2^{-1})$.

Tenemos las proyecciones $p_i : G \longrightarrow G_i$ definida por:

$$p_1 : (g_1, g_2) \mapsto g_1 \ , \ p_2 : (g_1, g_2) \mapsto g_2.$$

Ya que $p_1((g_1, g_2)(h_1, h_2)) = p_1(g_1h_1, g_2h_2) = g_1h_1 = (p_1(g_1, g_2))(p_1(h_1, h_2))$ y $p_1(1) = 1$, análogamente para p_2, se sigue que p_1, p_2 son morfismos de grupos.

Sea H cualquier otro grupo y sea $f_i : H \longrightarrow G_i$ morfismos. Entonces definimos la función f de H a $G = G_1 \times G_2$ por

$$h \mapsto (f_1(h), f_2(h)),$$

siendo también un morfismo que satisface $(p_i \circ f)(h) = p_i(f_1(h), f_2(h)) = f_i(h)$. Con lo que hace conmutativo el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "f"'] & G_i \\ & G \arrow[u, "p_i"'] \end{tikzcd}$$

Sea f' cualquier morfismo de H a G tal que $p_i f' = f_i$ para $i = 1, 2$. Entonces $f'(h) = (f_1(h), f_2(h)) = f(h)$ así $f' = f$. Luego f es única.■

El concepto de producto en una categoría puede ser generalizado a más de dos objetos

Definición 14 *Sea $\{A_\alpha; \alpha \in I\}$ un conjunto indicado de objetos en una categoría C. Definimos el* **producto** *ΠA_α de objetos A_α como el conjunto $\{A, p_\alpha; \alpha \in I\}$ donde A es objeto de C, $p_\alpha \in \hom_C(A, A_\alpha)$ tal que si B objeto de C y $f_\alpha \in \hom_C(B, A_\alpha), \alpha \in I$, entonces existe un único $f \in \hom_C(B, A)$ tal que cada diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & A_\alpha \\ & A \arrow[u, "p_\alpha"'] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 15 *Sea $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ un conjunto indicado de conjuntos. Tenemos el conjunto producto $A = \Pi\{A_\alpha\} = \{a : I \longrightarrow A_\alpha \mid \text{para toda } \alpha \in I, a(\alpha) \in A_\alpha\}$, y para cada $\alpha \in I$ la proyección $p_\alpha : a \mapsto a(\alpha)$. $\{A, p_\alpha\}$ es un producto de A_α's en la categoría Set.*

Para ver esto sea B un conjunto y para cada $\alpha \in I$ sea $f_\alpha : B \longrightarrow A_\alpha$. Entonces tenemos el mapeo $f : B \longrightarrow A$ definido por $f(b)(\alpha) \equiv f_\alpha(b)$ con $b \in B$, el cual satisface

$$p_\alpha \circ f = f_\alpha. \tag{4.5}$$

Supongamos que existe f' de B a A tal que $p_\alpha \circ h = f_\alpha$ entonces $p_a(h(b)) = h(b)(\alpha) = f_\alpha(b) = f(b)(\alpha)$ para toda $\alpha \in I, b \in B$ por lo que $f' = f$. Así f es única.

Definición 15 *Sea $\{A_\alpha; \alpha \in I\}$ un conjunto indicado de objetos de un categoría $\mathcal{C}$. Definimos un* ***coproducto*** *objetos de A_α como el conjunto $\{A, i_a; \alpha \in I\}$ donde A es un objeto de $\mathcal{C}$ y $i_\alpha \in \hom_{\mathcal{C}}(A_\alpha, A)$ tal que si B objeto de $\mathcal{C}$ y $g_\alpha \in \hom_{\mathcal{C}}(A_\alpha, B)$, $\alpha \in I$, entonces existe un único $g \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ tal que cada diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd} B & A_\alpha \arrow[l, "g_\alpha"'] \arrow[d, "i_\alpha"] \\ & A \arrow[ul, "g"] \end{tikzcd}$$

Ejemplo 16 *Si $\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ conjunto indicado de conjuntos, tenemos $\dot{\cup}\ \{A_\alpha\} = \{(x, \alpha) \mid x \in A_\alpha, \alpha \in I\}$ la unión disjunta de conjuntos A_α. Sea i_α la inyección de A_α a $\dot{\cup}\ \{A_\alpha\}$ donde $i_\alpha : x \longmapsto (x, \alpha)$. Y B un conjunto, si para cada α tenemos el mapeo $g_\alpha : A_\alpha \longrightarrow B$. Entonces $\left\{\dot{\cup}\ \{A_\beta\}, i_\alpha\right\}$ es un coproducto de A_α en Set.*

Para ver esto, definimos el mapeo $g : \dot{\cup}\ \{A_\beta\} \longrightarrow B$ donde $(x, \beta) \mapsto g_\beta(x)$, $\beta \in I$, que satisface $g \circ i_\alpha = g_\alpha$. Sea g' es una función de $\dot{\cup}\ \{A_\beta\}$ en B tal que $g' \circ i_\alpha = g_\alpha$ entonces $g'(x, \alpha) = g_\alpha(x) = g(x, \alpha)$ para toda $\alpha \in I$ y $x \in A_\beta$, luego $g' = g$. Con lo que $\left\{\dot{\cup}\ \{A_\beta\}, i_\alpha\right\}$ es un coproducto de la A_α's.

Ejemplo 17 *Sea $\{M_\alpha; \alpha \in I\}$ un conjunto indicado de $R-$módulos izquierdos, para el anillo R, y sea $\prod\limits_{\alpha \in I} \{M_\alpha\}$ el conjunto producto de M_α, dotado con una estructura* *de $R-$módulo izquierdo, en el cual para $x, y \in \prod_{\alpha\in I}\{M_\alpha\}$ y $r \in R$, $(x+y)(\alpha) = x(\alpha)+x(\alpha)$, $r(x)(\alpha) = r(x(\alpha))$.*

Sea el submódulo $\oplus\{M_\alpha\} = \left\{ f \in \prod_{\alpha\in I}\{M_\alpha\}\,;\, f(\alpha) \neq 0 \text{ para un número finito} \right\}$ de $\prod_{\alpha\in I}\{M_\alpha\}$. Tenemos la función $i_\beta : M_\beta \longrightarrow \oplus\{M_\alpha\}$ donde $x \mapsto i_\beta(x) : I \longrightarrow M_\beta$ y $\alpha \mapsto i_\beta(x)(\alpha) = \delta_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} x \text{ si } \alpha = \beta \\ 0 \text{ si } \alpha \neq \beta \end{cases}$.

Sea B un conjunto y supongamos que para cada β tenemos el mapeo $g_\beta : M_\beta \longrightarrow B$. Entonces definimos $g : \oplus\{M_\alpha\} \longrightarrow B$ donde a $f \mapsto g(f) = \sum_{\alpha\in\sup(f)} g_\alpha(f(\alpha))$. Entonces $g(i_\beta(x)) = \sum_{\alpha\in\sup(f)} g_\alpha(i_\beta(x)(\alpha)) = \sum_{\alpha\in\sup(f)} g_\alpha(\delta_{\alpha,\beta}(x)) = g_\beta(x)$ es decir se sigue el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B & \oplus\{M_\beta\} \arrow[l, "g"'] \\ & M_\beta \arrow[ul, "g_\beta"] \arrow[u, "i_\beta"'] \end{tikzcd}$$

Así $\{\oplus\{M_\alpha\}, i_\alpha\}$ es un coproducto en la categoría $R-$*mód* de los M_α's.

4.5 Funtores.

Definición 16 *Sea $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un* ***funtor convariante*** *(resp.* ***funtor contravariante****) T de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ consiste de una* ***función-objeto*** *que asigna a cada objeto X de $\mathcal{C}$ un objeto $T(X)$ de $\mathcal{D}$ y una* ***función-morfismo*** *que asigna a cada morfismo $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ un morfismo $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$ (resp. $T(f) : T(Y) \longrightarrow T(X)$) de $\mathcal{D}$ tal que*

(a) $T(1_X) = 1_{T(X)}$

FALTA LAS PAGINAS

107 A 108

cuando el funtor es contravariante la flecha de α cambia de dirección.

Definición 18 *Sea C, D categorías, F un funtor de C a D y B un objeto en D. Un universal desde B a el funtor F es el par (U,u), donde U es un objeto de C y u es un morfismo desde B a FU tal que si g es cualquier morfismo de B a FA, entonces existe un único morfismo $\widetilde{g}$ de U en A en C, tal que*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "u"] \arrow[d, "g"'] & FU \arrow[dl, "F(\widetilde{g})"] \\ FA & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. U es llamado un universal $C-$objeto para B y u la función universal.

Ejemplo 18 *(Propiedad universal de las bases)*

Sea el funtor $F : Vect \longrightarrow Set$ el "que olvida" y B un conjunto, decimos que el universal desde B a el funtor F es el par $(k^{(B)}, \delta)$ donde k campo sobre el que se define los espacios vectoriales de $Vect$, y $k^{(B)} = \{f : B \longrightarrow k; \sup(B) < \infty\}$, definimos δ un morfismo en Set tal que

$$\delta : B \longrightarrow F(k^{(B)}) = k^{(B)} \text{ (sólo como conjunto)}$$

como $\delta(b) = \delta_b : B \longrightarrow k$, donde $b \in B$ y para cada $c \in B$

$$\delta_b(c) = \begin{cases} 1 \text{ si } c = b \\ 0 \text{ si } c \neq b \end{cases}$$

Pero el conjunto $\{\delta_b; b \in B\}$ es una base para $k^{(B)}$ ya que, si $\alpha_b \in k$ donde $b \in \sup(B)$ y $c \in B$ arbitrario, tomando una combinación lineal igual a cero tenemos

$$0 = \sum_{b \in B} \alpha_b \delta_b(c) = \alpha_c$$

así $\alpha_c = 0$, pero c fué arbitrario, por lo tanto los coeficientes son iguales a cero y $\{\delta_b; b \in B\}$ es linealmente independientes y también genera, dado que si $f \in k^{(B)}$ luego

$$f(c) = \sum_{b \in B} \alpha_b \delta_b(c) = \alpha_c$$

entonces

$$f = \sum_{b \in B} f(b)\delta_b$$

así

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "g"'] & k^{(B)} \arrow[dl, "F(\widetilde{g})"] \\ F(A) & \end{tikzcd}$$

$F(\widetilde{g}) = \widetilde{g}$ olvidando que es lineal. Siendo $\widetilde{g}(\delta_b) = g(b)$ con lo que $F(\widetilde{g}) \circ \delta = g$. Para probar la unicidad supongamos que existe $h : k^{(B)} \longrightarrow A$ tal que $F(h) \circ \delta = g$ así $F(h)(\delta_b)(c) = h(\delta_b(c)) = \widetilde{g}(\delta_b(c))$ si $b = c$, $h(1) = \widetilde{g}(1)$ si $b \neq c$, $h(0) = \widetilde{g}(0) = 0$, son únicos los valores que pueden tomar, luego $h = \widetilde{g}$.

Proposición 18 *La definición 17 y 18 son equivalentes.*

Demostración.

Sea (C_o, a_o) un objeto universal del funtor $F : \mathcal{C} \longrightarrow Set$, según la definición 17, entonces para cualquier otro par (C, a) existe un único morfismo $\alpha : C_o \to C$ tal que $\alpha_*(a_o) = a$.

Afirmamos que (C_o, in) es un universal desde a_o a F, donde $a_o \overset{in}{\hookrightarrow} F(C_o)$ la inclusión. Para $a \in F(C)$, definimos $\beta : F(C_o) \longrightarrow F(C)$ tal que $a_o \mapsto a$, existe un morfismo único $\alpha : C_o \longrightarrow C$. Así $(\alpha_* \circ in)(a_o) = \alpha_*(a_o) = \beta(a_o) = a$.

Ahora para el universal desde B a el funtor F, podemos definir el funtor $G : \mathcal{C} \longrightarrow Set$ tal que $U \mapsto G(U) = Hom(B, F(U)) = \{f : B \longrightarrow F(U)\}$ para objetos. Así (U_B, u_B), donde $U_B \in Obj\ \mathcal{C}$, y $u_B \in Hom(B, F(U))$, es un objeto universal, tal que para el par (A, g) donde $g \in Hom(B, F(A))$, conmuta el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "u_B"] \arrow[dr, "g"'] & F(U) \arrow[d, "F(\bar{g})"] \\ & F(A) \end{tikzcd}$$

.■

Proposición 19 *Sea C_0 un objeto inicial en la categoría $\mathcal{C}$, éste induce un universal para el funtor $Id : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, también del universal desde B a el funtor F de la categoría $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$, induce un objeto inicial en la categoría $\mathcal{A}$ cuyos objetos son parejas $(A, B \xrightarrow{g} F(A))$ y morfismos satisfacen el diagrama conmutativo siguientes:*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ & F(X) \end{tikzcd}$$

.

Demostración.

Sea C_o un objeto inicial en la categoría $\mathcal{C}$,entonces para todo C objeto en $\mathcal{C}$, existe un único morfismo $u_c : C_o \longrightarrow C$.

Para el funtor identidad $Id : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, (Id, C_o) es universal y cumple el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C_o \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "u_c"'] & C_o \arrow[dl, "u_c"] \\ F(A) & \end{tikzcd}$$

Definimos la categoría $\mathcal{A}$ cuyos objetos son parejas $(A, B \xrightarrow{g} F(A))$ (donde A es objeto de $\mathcal{C}$ y g es un morfismo en $\mathcal{D}$) y sus morfismos satisfacen

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\ & F(X) \end{tikzcd}$$

para $f : A \longrightarrow X$. Entonces $(A, B \xrightarrow{g} F(A))$ es un objeto inicial de la categoría $\mathcal{A}$.■

Usaremos lo anterior para demostrar una propiedad universal muy importante y de gran utilidad.

Ejemplo 19 *(La propiedad universal del Conúcleo). Sean V, W, X, Z espacios vectoriales sobre el campo k y f, g, h funciones lineales, tales que $g \circ f = 0$. Entonces existe un único $\widetilde{g}$ de X a Z que hace conmutativo el siguiente diagrama.*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[dl, "\widetilde{g}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Demostración.

Sea $\mathcal{C}$ la categoría cuyos objetos son de la forma

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0"'] & W \arrow[dl, "g"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

, con V, W y f fijos. Para objetos

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0"'] & W \arrow[dl, "g"] \\ Z & \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0"'] & W \arrow[dl, "h"] \\ X & \end{tikzcd}$$

, el morfismo $\widetilde{g}$ tal que

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[dl, "\widetilde{g}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Afirmamos que

$$C_o = \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "0"'] & W \arrow[dl, "\pi"] \\ W/Im(f) & \end{tikzcd}$$

es objeto inicial en la categoría $\mathcal{C}$.

Ya que para cualquier objeto en $\mathcal{C}$ existe un único morfismo $\widetilde{g} : C_o \longrightarrow C$, que hace el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "0"'] & W \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & W/Im(f) \arrow[dl, "\widetilde{g}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

para $v \in V$, $f(v) \equiv w$ y la función la proyección $\pi(w) \equiv \overline{w}$ con lo que definimos $\widetilde{g}(\overline{w}) \equiv g(w)$. Si $\overline{w} = \overline{w_1}$ para $\overline{w}, \overline{w_1} \in W$ entonces $w - w_1 \in \mathrm{Im}(f)$ y $g(w - w_1) = 0$ ya que g es lineal, $g(w) - g(w_1) = 0$ entonces $g(w) = g(w_1)$, así que $\widetilde{g}$ esta bien definida.

Para probar la unicidad del morfismo, supongamos que existe $\psi : \frac{W}{\mathrm{Im}(f)} \longrightarrow Z$, tal que $\psi(\overline{w}) = g(w) = 0$, pero también $\psi(\overline{w}) = g(w) = \widetilde{g}(\overline{w})$ para toda $\overline{w}$ así $\psi = \widetilde{g}$.■

Usando las propiedades universales anteriores probaremos la propiedad universal del producto tensorial.

Ejemplo 20 *(Propiedad universal del Producto Tensorial). Sean V_1, V_2, A, B espacios vectoriales sobre el campo k, $\tau : V_1 \times V_2 \longrightarrow B$, función bilineal, es decir $\tau(v_1+v_2, w_1) = \tau(v_1, w_1)+\tau(v_2, w_1)$, $\tau(v_1, w_1+w_2) = \tau(v_1, w_1)+\tau(v_1, w_2)$, $\tau(\lambda v_1, v_2) = \tau(v_1, \lambda v_2) = \lambda\tau(v_1, v_2)$, $v_1, v_2 \in V_1$, $w_1, w_2 \in V_2, \lambda \in k$. Y $g : V_1 \times V_2 \longrightarrow A$, entonces existe una función lineal $\widetilde{g} : B \to A$, tal que hace conmutativo el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[dl, "\widetilde{g}"] \\
A &
\end{tikzcd}$$

Demostración.

Sea Bil_k la categoría de funciones bilineales de $V_1 \times V_2$ a C un espacio vectorial arbitrario sobre el campo k. Para objetos $f : V_1 \times V_2 \longrightarrow C, g : V_1 \times V_2 \longrightarrow D$, definimos el morfismo φ, tal que

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times V_2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[dl, "\varphi"] \\
D &
\end{tikzcd}$$

conmuta. Para la función $\delta : V_1 \times V_2 \longrightarrow F^{(V_1 \times V_2)}$, donde $F^{(V_1 \times V_2)} = \{\alpha : V_1 \times V_2 \longrightarrow k\}$, $(w_1, w_2) \mapsto \delta_{(w_1,w_2)}(v_1, v_2) \equiv \delta_{w_1}(v_1)\delta_{w_2}(v_2)$ con lo que, tenemos el espacio

$$Q = \left\langle \left\{ \begin{array}{c} \delta(v_1 + v_2, w_1) - \delta(v_1, w_1) - \delta(v_2, w_1) \\ \delta(v_1, w_1 + w_2) - \delta(v_1, w_1) - \delta(v_1, w_2) \\ \delta(\lambda v_1, w_1) - \lambda\delta(v_1, w_1) \\ \delta(v_1, \lambda w_1) - \lambda\delta(v_1, w_1) \end{array} \right\} \right\rangle$$

para $v_1, v_2 \in V_1, w_1, w_2 \in V_2, \lambda \in k$.

Con la función proyección $\pi : F^{(V_1\times V_2)} \longrightarrow F^{(V_1\times V_2)}/Q$, se satisface el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr, "g"'] & F^{(V\times W)} \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{g}"] & \dfrac{F^{(V\times W)}}{Q} \arrow[dl, "\widetilde{g}"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

donde $\overline{g}$ existe y es única, por la propiedad universal de las bases, pero ya que $\overline{g}$ se anula en Q, podemos usar la propiedad universal del conúcleo, con lo que se sigue la existencia y unicidad de $\widetilde{g}$, para ver que $\overline{g}$ se anula en Q basta probarlo en los generadores $\overline{g}(\delta(v_1+v_2,w_1)-\delta(v_1,w_1)-\delta(v_2,w_1)) = \overline{g}(\delta(v_1+v_2,w_1))-\overline{g}(\delta(v_1,w_1))-\overline{g}(\delta(v_2,w_1)) =$ $g(v_1+v_2,w_1)-g(v_1,w_1)-g(v_2,w_1) = g(v_1,w_1)+g(v_2,w_1)-g(v_1,w_1)-g(v_2,w_1) = 0.$ La segunda igualdad se tiene de la conmutatividad del triángulo izquierdo del diagrama anterior, y la tercera del hecho que g es bilineal.

De manera análoga para los demás generadores.■

4.6.1 Funtores Canónicos.

Definición 19 *Sea $(C_o, -)$ un objeto universal de T un funtor covariante de una categoría $\mathcal{C}$ a la categoría Set . Existen dos* ***funtores canónicos*** $\mathbf{H}(\mathbf{C}_o,-)$ *(covariante) y* $\mathbf{H}(-,\mathbf{C}_o)$ *(contravariante) de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría Set.*

También para X y $X \xrightarrow{f} Y$ objeto y morfismo de $\mathcal{C}$ definimos los funtores como sigue:

$H(C_o,-)(X) = H(C_o,X) = \{\alpha \mid \alpha : C_o \longrightarrow X,$ morfismo de conjuntos$\}$ (sobre objetos)

$H(C_o,-)(f) : H(C_o,X) \longrightarrow H(C_o,Y)$ con $g \longmapsto f \circ g$ es decir,

$$\begin{tikzcd} Y & \\ C_o \arrow[u, "f\circ g"] \arrow[r, "g"'] & X \arrow[ul, "f"'] \end{tikzcd}$$

.

Y

$$\begin{aligned} H(-,C_o)(X) &= H(X,C_o), \\ H(-,C_o)(f) &: H(Y,C_o) \longrightarrow H(X,C_o),\ g \longmapsto g \circ f. \end{aligned}$$

Ejemplo:

Si $\mathcal{C} = \mathcal{G}$ (un grupo con solamente un elemento), $C_o = e$, se inducen los funtores $H(e,-)$ y $H(-,e)$ de la categoría $\mathcal{G}$ a la categoría Set definidos por:

$H(e,-)(e) = H(e) = \mathcal{G}$ (sobre el único objeto) y $(H(e,-)(e \xrightarrow{g} e))(e \xrightarrow{g'} e) = g \circ g'$.

$H(-,e)(e) = H(e) = \mathcal{G}$ y $(H(-,e)(e \xrightarrow{g} e))(e \xrightarrow{g'} e) = g' \circ g$.

4.6.2 Funtores Representables.

Definición 20 *Una representación de un funtor T de la categoría $\mathcal{C}$ a la categoría Set, es el par (R,ϕ) que consiste de un objeto R en $\mathcal{C}$ y una familia de biyecciones*

$$\phi_C : \hom_{\mathcal{C}}(R,C) \cong T(C)$$

naturales en C. Un funtor T con tal representación se dice que es representable y representado por R.

4.7 Álgebras.

Definición 21 *Sea R un anillo arbitrario con un elemento identidad. Por un módulo sobre R o un $R-$módulo, entendemos a un grupo aditivo Abeliano X, junto con una función*

$$\mu : R \times X \longrightarrow X$$

que satisface las tres condiciones siguientes:

1. *La función μ es biaditiva, es decir*

$$\mu(\alpha + \beta, x) = \mu(\alpha, x) + \mu(\beta, x),$$

$$\mu(\alpha, x + y) = \mu(\alpha, x) + \mu(\alpha, y).$$

2.

$$\mu[\alpha, \mu(\beta, x)] = \mu(\alpha\beta, x).$$

3.

$$\mu(1, x) = x.$$

para toda $\alpha, \beta \in R$ y $x, y \in X$.

La función μ es llamada la multiplicación por escalar de el módulo X [ref.22].

Definición 22 *Un álgebra sobre un anillo R se entiende como un módulo X sobre R , junto con otra operación binaria en X, llamada la multiplicación en X, tales que*

$$(\alpha u + \beta v)w = \alpha(uw) + \beta(uw)$$

$$w(\alpha u + \beta v) = \alpha(uw) + \beta(uw)$$

para todo elemento $\alpha, \beta \in R$ *y* $u, v, w \in X$. *En particular*

$$(\alpha u)v = \alpha(uv) = u(\alpha v)$$

Definición 23 *Si* k *es un anillo conmutativo, una álgebra asociativa sobre* k *(o la* $k-$*álgebra) es la terna* (A, π, ε), *donde* A *es un* $k-$*módulo,* π *un* $k-$*morfismo de* $A \otimes A$ *en* A, *y* ε *un* $k-$*morfismo de* k *en* A *tal que los siguientes diagramas son conmutativos*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\pi\otimes 1"] \arrow[d, "1\otimes\pi"'] & A \otimes A \arrow[d, "\pi"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\pi"'] & A \otimes A
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes A \arrow[dd, "\pi"'] & \\
k \otimes A \arrow[ur, "\varepsilon\otimes 1"] \arrow[dr, "n"'] & & A \otimes k \arrow[ul, "1\otimes\varepsilon"'] \arrow[dl, "n"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Las funciones n, *para* $k \otimes x, x \in A$, $n(k \otimes x) = kx$, $n(x \otimes k) = xk$ *y* $xk = kx$.

De acuerdo con la definición, tomemos el producto

$$xy = \pi(x \otimes y)$$

en A y 1 en A, dado por

$$\varepsilon 1 = 1.$$

Sea $x, y, z \in A$, por la conmutatividad del primer diagrama $\pi(\pi \otimes 1)((x \otimes y) \otimes z) = \pi(xy \otimes z) = (xy)z = \pi(1 \otimes \pi)(x \otimes (y \otimes z)) = \pi(x \otimes (yz)) = x(yz)$, es decir la ley de asociatividad

$$(xy)z = x(yz).$$

Sea $k \otimes x \in k \otimes A$, por la conmutatividad en el triángulo izquierdo del segundo diagrama $kx = \pi(\varepsilon \otimes 1)(k \otimes x) = \pi(k1 \otimes x) = (k1)x$. Del lado derecho del diagrama obtenemos $x(k1) = kx$. Luego $1x = x = x1$, cumpliendo la condición del álgebra $k(xy) = (kx)y = x(ky)$ (definición 20), por la ley de asociatividad aplicada a $k1, x$ y y.

Partiendo de la definición 20. El producto xy es $k-$bilineal, entonces tenemos el $k-$morfismo, π de $A \otimes A$ en A tal que $\pi(x \otimes y) = xy$. Definimos $\varepsilon : k \longrightarrow A$ donde $k \mapsto k1$. Luego tenemos el primer diagrama conmutativo. Y por la ley de asociatividad del segundo diagrama $kx = (k1)x = x(k1)$, con lo que $k(xy) = (kx)y = x(ky)$.

Así que las dos definiciones son equivalentes $[ref.11]$.

Lema 7 *Se cumple*

$$N \otimes (M_1 \oplus M_2) \cong (N \otimes M_1) \oplus (N \otimes M_2).$$

Demostración.

De la propiedad universal del producto tensorial se sigue el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \otimes (M_1 \oplus M_2) \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\
N \times (M_1 \oplus M_2) \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "f"'] & (N \otimes M_1) \oplus (N \otimes M_2)
\end{tikzcd}$$

Sea $(n, (m_1 \oplus m_2)) \in N \times (M_1 \oplus M_2)$ entonces τ y f funciones bilineales estan definidas por $\tau(n, (m_1 \oplus m_2)) = n \otimes (m_1 \oplus m_2)$ y $f(n, (m_1 \oplus m_2)) = (n \otimes m_1) \oplus (n \otimes m_2)$.

Con la asignación anterior podemos definir $\widetilde{f}$ y probar que es lineal.

$$\widetilde{f}(n \otimes (m_1 \oplus m_2)) = (n \otimes m_1) \oplus (n \otimes m_2)$$

$$\widetilde{f}((n_1+n_2)\otimes(m_1\oplus m_2)) =$$

$$((n_1+n_2)\otimes m_1)\oplus((n_1+n_2)\otimes m_2) =$$

$$((n_1\otimes m_1)+(n_2\otimes m_1),(n_1\otimes m_2)+(n_2\otimes m_2)) =$$

$$\widetilde{f}(n_1,\otimes(m_1\oplus m_2))+\widetilde{f}(n_2,\otimes(m_1\oplus m_2)).$$

Análogamente para la entrada derecha

$$\begin{aligned}
\widetilde{f}(n_1\otimes((m_1\oplus m_2)+(m_3\oplus m_4)) &= \\
\widetilde{f}((n_1\otimes((m_1+m_3)\oplus(m_2+m_4))) &= \\
(n_1\otimes(m_1+m_3))\oplus(n_1\otimes(m_2+m_4)) &= \\
((n_1\otimes m_1)+(n_1\otimes m_3))\oplus((n_1\otimes m_2)+(n_1\otimes m_4)) &= \\
((n_1\otimes m_1)\oplus((n_1\otimes m_2))+((n_1\otimes m_3)\oplus(n_1\otimes m_4)) &=
\end{aligned}$$

$$\widetilde{f}(n_1\otimes(m_1\oplus m_2)\widetilde{f}(n_1\otimes(m_3\oplus m_4).$$

Sea $\lambda\in k$, entonces

$$\widetilde{f}(\lambda n\otimes(m_1\oplus m_2))=(\lambda n\otimes m_1)\oplus(\lambda n\otimes m_2)=n\otimes\lambda(m_1\oplus m_2)=\lambda(n\otimes(m_1\oplus m_2)).$$

Basta probar que $\widetilde{f}$ es biyectiva. Es inyectiva ya que

$$\widetilde{f}(n\otimes(m_1\oplus m_2))=(n\otimes m_1)\oplus(n\otimes m_2)=(0,0)$$

si y sólo si $n\otimes m_1=0$ y $n\otimes m_2=0$ entonces $n=0$ o $m_1=m_2=0$ es decir $n\otimes(m_1,m_2)=0$.

Y para cualquier $n\otimes(m_1\oplus m_2)\in(N\otimes M_1)\oplus(N\otimes M_2)$ tenemos

$$\widetilde{f}(n\otimes(m_1\oplus m_2))=(n\otimes m_1)\oplus(n\otimes m_2)$$

así que $\widetilde{f}$ es suprayectiva.■

Lema 8

$$N \otimes (\bigoplus_{i\in I} M_i) \cong \bigoplus_{i\in I} (N \otimes M_i)$$

Usando la proposición anterior y de la propiedad universal del producto tensorial tenemos el diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \otimes (\oplus M_i) \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ N \times (\oplus M_i) \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "f"'] & \oplus(N \otimes M_i) \end{tikzcd}$$

recordamos que $\bigoplus_{i\in I} M_i = \left\{ h : I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} \{M_i\} \right\}$.

Para $(x,h) \in N \times (\bigoplus_{i\in I} M_i)$ entonces $\tau(x,h) := x \otimes h$ y $f(x,h)() := \sum_{i \sup h} (x \otimes h(i))\delta_i()$, para $j \in I$, $f(x,h)(j) = \sum_{i \sup h} (x \otimes h(i))\delta_i(j) = x \otimes h(j)$, debemos tener $\widetilde{f}(x \otimes h) = f(x,h)()$ y $f(x,h)(j) = \sum_{i \sup h} (x \otimes h(i))\delta_i(j) = x \otimes h(j)$ para $j \in I$.

Para probar que $\widetilde{f}$ es biyectiva, basta probar que tiene inversa, usando la propiedad universal de la suma directa $[ref.10]$ tenemos

$$\begin{tikzcd} N \otimes (\oplus M_i) & \\ N \otimes M_i \arrow[u, "s"] \arrow[r, "in."'] & \oplus(N \otimes M_i) \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

para $x \otimes y_i \in N \otimes M_i$ la asignación $s(x \otimes y_i) = x \otimes y_i\delta_i()$ y $in(x \otimes y_i) = (x \otimes y_i)\delta_i()$ luego $g(in(x \otimes_k y_i)) = g((x \otimes y_i)\delta_i()) = x \otimes y_i\delta_i()$.

Tenemos que $g \circ \widetilde{f} = Id_{N\otimes(\bigoplus_{i\in I} M_i)}$ y $\widetilde{f} \circ g = Id_{\bigoplus_{i\in I}(N\otimes M_i)}$. Ya que $(x \otimes y_i)\delta_i() \in \bigoplus_{i\in I} (N \otimes M_i)$ entonces

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(g((x \otimes y_i)\delta_i()) &= \widetilde{f}(x \otimes y_i\delta_i()) = f(x \otimes y_j\delta_i()) \\ &= \sum_{i\in \sup \delta} (x \otimes y_j\delta_i(i))\delta_i() = (x \otimes y_i)\delta_i() \end{aligned}$$

y sea $x \otimes h \in N \otimes (\bigoplus_{i \in I} M_i)$ entonces

$$g(\widetilde{f}(x \otimes h)) = g(\sum_{i \,\mathrm{sup}\; h} (x \otimes h(i))\delta_i()) = \sum_{i \,\mathrm{sup}\; h} x \otimes h(i)\delta_i().$$

evaluando para algún $j \in I$.

$$g(\widetilde{f}(x \otimes h(j))) = g(\sum_{i \,\mathrm{sup}\; h} (x \otimes h(i))\delta_i(j)) = g(x \otimes h(j)) = x \otimes h(j)\delta_i(j) = x \otimes h(j).\blacksquare$$

Ejemplo 21 *Construcción del álgebra tensorial.*

Sea $M_1, M_2, ..., M_n$, $k-$módulos. Definimos $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$, inductivamente por $M_1 \otimes \cdots \otimes M_i = (M_1 \otimes \cdots \otimes M_{i-1}) \otimes M_i$. Si $1 \leq m < n$, existe un isomorfismo $\pi_{m,n}$ de $(M_1 \otimes \cdots \otimes M_m) \otimes (M_{m+1} \otimes \cdots \otimes M_n)$ a $M_1 \otimes \cdots \otimes M_n$, tal que $\pi_{m,n}((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) \otimes (x_{m+1} \otimes \cdots \otimes x_n)) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes x_{m+1} \otimes \cdots \otimes x_n$.

Ahora sean $M_i = M$, un $k-$módulo, y digamos que $M^{(i)} = M \otimes \cdots \otimes M$, $i-$veces, $i = 1, 2, 3, ...$ Donde $M^{(0)} = k$, $\pi_{0,n} : k \otimes M^{(n)} \longrightarrow M^{(n)}$, $n = 0, 1, ...,$ como el isomorfismo canónico, el cual manda $k \otimes x$ en kx. Para el $k-$módulo formado por

$$T(M) \equiv \bigoplus_{0}^{\infty} M^{(i)} = k \oplus M^{(1)} \oplus M^{(2)} \oplus \cdots \tag{4.6}$$

Y ya que $\oplus(M^{(i)} \otimes M^{(j)})$ es el coproducto de los módulos $M^{(i)} \otimes M^{(j)}$ (ver sección 4.3), tenemos el morfismo π' de $\oplus(M^{(i)} \otimes M^{(j)})$ en $T(M)$, que coincide (identificada con su imagen) en $\oplus(M^{(i)} \otimes M^{(j)})$ con $(\iota_{i+j} \circ \pi_{i,j})$ donde $\iota_{i+j} : M^{(i+j)} \longrightarrow T(M)$. También tenemos el isomorfismo de $T(M) \otimes T(M) = (\oplus M^{(i)}) \otimes (\oplus M^{(j)})$ en $\oplus(M^{(i)} \otimes M^{(j)})$.

Así el morfismo π de $T(M) \otimes T(M)$ en $T(M)$, es $\pi' \circ \beta$. Y ε una función inyectiva de k a $T(M) = \oplus M^{(i)}$.

Es decir tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T(M) & \oplus(M^{(i)} \otimes M^{(j)}) \cong T(M) \otimes T(M) \arrow[l, "\pi"'] \\
& M^{(i)} \otimes M^{(j)} \arrow[u, "\iota_i \otimes \iota_j"'] \arrow[ul, "\iota_{i+j} \circ \pi_{i,j}"]
\end{tikzcd}$$

Afirmamos que $(T(M), \pi, \varepsilon)$ es un álgebra, según la definición 21, o equivalentemente, se cumple $xy = \pi(x \otimes y)$ la ley de asociatividad y $1x = x = x1$. Para verlo, notemos que cualquier elemento de $T(M)$ es suma de términos de la forma $k1$ y $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$, así es suficiente probar la asociatividad de la multiplicación en términos de esta forma. La cual se sigue de la propiedad distributiva.

Considere $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$, $y = y_1 \otimes \cdots \otimes y_n$, $z = z_1 \otimes \cdots \otimes z_p$, $m, n, p > 0$. De la definición de π se sigue

$$(xy)z = ((x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n))(z_1 \otimes \cdots \otimes z_p) =$$

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)(z_1 \otimes \cdots \otimes z_p) =$$

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \otimes y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \otimes z_1 \otimes \cdots \otimes z_p.$$

También $(k1)x = kx = x(k1)$.

Por lo tanto se cumple las condiciones de una $k-$álgebra. La cual es llamada el **álgebra tensorial** $T(M)$ definida por el $k-$módulo M.

Consideremos el funtor que olvida F, de la categoría "$k-$álgebras", a la categoría "$k-$módulos". Se tiene que $(T(M), i)$ donde i es la función inyectiva de M en $T(M)$ es un universal desde M a F (ver sección 4.5). Para ello, sea f un morfismo de M en A una $k-$álgebra. Definimos el $k-$morfismo $f^{(n)}$ de $M^{(n)}$ en A, $n = 1, 2, \ldots$,

$$f^{(n)}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \equiv f(x_1) \cdots f(x_n), \tag{4.7}$$

donde $f^{(0)} : k \longrightarrow A$, $k \mapsto k1$. Sea f^{*} el morfismo de $k-$módulos de $T(M)$ en A que coincide con $f^{(n)}$ en $M^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, ...$Se sigue de (4.7) que $f^{(*)}$ es un morfismo de álgebras. Así de la definición de $T(M)$ sabemos que M genera a $T(M)$. Luego $f^{(*)}$ es el único morfismo de $T(M)$ en A que coincide con f en M. Implica que $(T(M), i)$ es un universal desde M a el funtor F el "que olvida" de la categoría $k-$álgebras a la categoría $k-$módulos.

Un álgebra A es llamada **graduada** si $A = \overset{\infty}{\underset{0}{\oplus}} A_i$ donde A_i es un submódulo de A y $A_i A_j \subset A_{i+j}$. El submódulo A_i es llamado la parte homogénea de grado i de A. El álgebra tensorial $T(M)$ es graduada por sus submódulos $M^{(i)}$ ya que $T(M) = \oplus M^{(i)}$ y $M^{(i)} M^{(j)} = M^{(i)} \otimes M^{(j)} \subset M^{(i+j)}$.

Ejemplo 22 *Álgebra Exterior*

Definimos el **álgebra exterior** $E(M)$ de el $k-$módulo M, como:

$$E(M) = T(M)/B$$

donde B es el ideal en $T(M)$ generado por los elementos

$$x \otimes x,$$

$x \in M$. De la definición del ideal B podemos ver que sus elementos estan contenidos en $\sum\limits_{i \geq 2} M^{(i)}$.

Así $B \cap M = 0$ y la restricción de M en el morfismo canónico p de $T(M)$ en $E(M)$ es inyectivo, ya que $p(x) = x + B = 0$ donde $x \in M$, pero $B \cap M = 0$, con lo que $x = 0$, es decir el kernel de p es el cero. Entonces podemos identificar M con su imagen y considerar M como un subconjunto de $E(M)$.

También B es homogéneo dado que podemos escribir $B = \sum B^{(i)}$ donde $B^{(i)} = B \cap M^{(i)}$. Con lo que $E(M)$ es graduada por los subconjuntos $E^{(i)} = (M^{(i)} + B)/B$, es decir $E(M) = \oplus E^{(i)}$ y $E^{(i)}E^{(j)} \subset E^{(i+j)}$.

Ahora suponga que A es una $K-$álgebra y f es un $K-$morfismo de M en A, tal que $f(x)^2 = 0$ en A para cada $x \in M$. De la propiedad universal de $T(M)$ da un morfimso f^* de $T(M)$ en A , que extiende la función f de M. Ya que $0 = f(x)^2 = (f^*(i(x))^2 = f^*(x)^2$, y $B \subset$ kernel de f^* por que $f^*(x \otimes x) = f(x)f(x) = f^2(x) = 0$. Con lo anterior y la propiedad universal del conúcleo (ver sección 4.5), tenemos el morfismo $\overline{f}$ de $E(M)$ en A, donde manda a x (como elemento de $E(M)$) en $f(x)$, es decir se cumple el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "f=0"'] & T(M) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f^*"] & T(M)/B \arrow[dl, "\overline{f}"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Ya que $E(M)$ es generado por M, implica que este morfismo es único. Entonces $E(M)$ tiene la propiedad universal, que para cualquier morfismo de $k-$ módulos f de M en una $K-$álgebra A tal que $f(x)^2 = 0$ para toda $x \in M$, se tiene una extensión única a un morfismo de álgebras de $E(M)$ en A.

4.8 Algunas Propiedades del Producto Tensorial.

$$V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1.$$

$$V \otimes k \cong V.$$

Demostración:

i) Sean las funciones biyectivas τ y τ' tales que $V_1 \times V_2 \xrightarrow{\tau} V_1 \otimes V_2$ y $V_2 \times V_1 \xrightarrow{\tau'} V_2 \otimes V_1$. Y de la propiedad universal del producto tensorial se tiene los diagramas

$$\begin{tikzcd} V_1 \otimes V_2 & \\ V_2 \times V_1 \arrow[u, "\varphi'"] \arrow[r, "\tau'"'] & V_2 \otimes V_1 \arrow[ul, "h'"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} V_2 \otimes V_1 & \\ V_1 \times V_2 \arrow[u, "\varphi"] \arrow[r, "\tau"'] & V_1 \otimes V_2 \arrow[ul, "h"'] \end{tikzcd}$$

donde $\varphi' = h' \circ \tau'$, $\varphi = h \circ \tau$. Para h, h' lineales y únicas. Definimos $\sigma : V_1 \times V_2 \longrightarrow V_2 \times V_1$, $\sigma(v_1, v_2) \longmapsto (v_2, v_1)$, resulta $\sigma \circ \sigma = Id$ es decir $\sigma^{-1} = \sigma$;

Los diagramas anteriores se pueden escribir

$$\begin{tikzcd} V_2 \times V_1 \arrow[r, "\tau'"] & V_2 \otimes V_1 \\ V_1 \times V_2 \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "\tau"'] & V_1 \otimes V_2 \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "\tau"] & V_1 \otimes V_2 \\ V_2 \times V_1 \arrow[u, "\sigma"] \arrow[r, "\tau'"'] & V_2 \otimes V_1 \arrow[u, "h'"'] \end{tikzcd}$$

Entonces $h \circ \tau = \tau' \circ \sigma$ así $h \circ \tau \circ \sigma = \tau' \circ \sigma \circ \sigma = \tau'$ y de $\tau \circ \sigma = \varphi = h' \circ \tau'$ resulta $h \circ h' \circ \tau' = \tau'$.

$$\begin{tikzcd} V_2 \otimes V_1 & \\ V_2 \times V_1 \arrow[u, "\tau'"] \arrow[r, "\tau'"'] & V_2 \otimes V_1 \arrow[ul, "hh'"'] \end{tikzcd}$$

es decir $hh' = Id_{V_2 \otimes V_1}$, por lo tanto h' es inyectiva y h es suprayectiva; $h' \circ \tau' = \tau \circ \sigma$ entonces $h' \circ \tau' \circ \sigma = \tau \circ \sigma \circ \sigma = \tau$ y de $\tau' \circ \sigma = \varphi' = h \circ \tau$ resulta $h' \circ h \circ \tau = \tau$:

$$\begin{tikzcd} V_1 \otimes V_2 & \\ V_1 \times V_2 \arrow[u, "\tau"] \arrow[r, "\tau"'] & V_1 \otimes V_2 \arrow[ul, "h'h"'] \end{tikzcd}$$

esto es $h'h = Id_{V_1 \otimes V_2}$ con lo cual h es inyectiva y h' es suprayectiva. Luego h y h' son isomorfismos lineales con $h' = h^{-1}$, luego $V_1 \otimes V_2 \cong V_2 \otimes V_1$.■

ii) k es un espacio vectorial sobre k cuya $\dim_k(k) = 1$. Podemos definir τ :

$V \times k \longrightarrow V \otimes k$, $\tau(v,\lambda) = \lambda v \otimes 1$, así para $\alpha : V \times k \longrightarrow V$ existe una única $h : V \otimes k \longrightarrow V$, $h(v \otimes 1) = v$ con inversa $h^{-1}(v) = v \otimes 1$.

Se cumple $k \otimes V \cong V \otimes k \cong V$.■

Proposición 20

$$V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \cong (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \cong V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3).$$

Demostración:

Llamemos $T_{123} = V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, $T_{(12)3} = (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ y

$$T_{1(23)} = V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3);$$

tenemos las funciones biyectivas:

$$\tau : V_1 \times V_2 \times V_3 \longrightarrow T_{123}, \tau(v,w,z) = v \otimes w \otimes z.$$

$$\tau' : (V_1 \times V_2) \times V_3 \longrightarrow T_{(12)3}, \tau'(v,w,z) = (v \otimes w) \otimes z.$$

Sea $f : V_1 \times V_2 \times V_3 \longrightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$, $f(v,w,z) = (v \otimes w) \otimes z$ claramente f es trilineal y existe una única función lineal $h : T_{123} \longrightarrow T_{(12)3}$ dada por

$$h(v \otimes w \otimes z) = f(v,w,z) = (v \otimes w) \otimes z$$

tal que conmuta el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_{(12)3} & \\
V_1 \times V_2 \times V_3 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\tau"'] & T_{123} \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

Se tiene también el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
T_{123} & \\
(V_1 \times V_2) \times V_3 \arrow[u, "f'"] \arrow[r, "\tau"'] & T_{(12)3} \arrow[ul, "h'"']
\end{tikzcd}$$

donde $f'((u,v),z) \equiv u \otimes v \otimes z$. De la propiedad universal, $h'h = Id_{T_{123}}$ es decir $h' = h^{-1}$; análogamente se prueban los demás isomorfismos. Se tiene entonces:

$$\begin{tikzcd}
V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) \arrow[dr, "l"] & \\
V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \arrow[u, "k"] \arrow[r, "h"'] & (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3
\end{tikzcd}$$

donde $k(v \otimes w \otimes z) = v \otimes (w \otimes z)$,

$l(k(v \otimes w)) = l(v \otimes (w \otimes z)) = (v \otimes w) \otimes z = h(v \otimes w \otimes z) = h \circ k^{-1}(v \otimes (w \otimes z))$.■

Apéndice 2.

4.9 Complejificación de un Espacio Vectorial Real.

Dada la importancia que tienen en mecánica cuántica los espacios vectoriales complejos expondremos a continuación tres formas equivalentes de la complejificación de un espacio vectorial real.

4.9.1 Primera Forma para la Complejificación.

Definición 1. Una **estructura compleja** sobre V es una función lineal $J : V \longrightarrow V$ tal que $J \circ J = -Id_V$. Se tiene que $J^2(v) = -v$ y $J^{-1} = -J$.

$-J$ es la estructura compleja sobre V **conjugada a** J.

Ejemplo: En $W = V \oplus V = \{u \oplus v \cong (u,v)\}$ definimos $J_0(u,v) := (-v,u)$. Claramente J_0 es lineal:

$$J_0((u,v) + (u', v')) = J_0((u+u', v+v')) = (-v-v', u+u') = (-v,u) + (-v', u')$$

$$= J_0(u,v) + J_0(u', v').$$

$$J_0(\lambda(u,v)) = J_0(\lambda u, \lambda v) = (-\lambda v, \lambda u) = \lambda(-v,u) = \lambda J_0(u,v);$$

y satisface

$$J_0^2(u,v) = J_0(-v,u) = (-u,-v) = -(u,v)$$

es decir $J_0^2 = -Id_V$. Por lo tanto J_0 es una estructura compleja en $V \oplus V$ y se le denomina la **estructura compleja canónica en** $V \oplus V$.

Sea J una estructura compleja sobre V y $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$.

Definimos el producto $\cdot : \mathbb{C} \times V \longrightarrow V$, dado por $(z,v) \longmapsto z \cdot v := \alpha v + \beta J(v)$. En particular $i \cdot v = J(v)$, para $z = \alpha + i\beta$. Se puede verificar (todo lo hereda de las propiedades del producto definido en los números complejos) que $(zz') \cdot v = z \cdot (z' \cdot v)$, $z \cdot (v + v') = z \cdot v + z \cdot v'$, $(z + z') \cdot v = z \cdot v + z' \cdot v$. Por lo tanto $(V, +; \mathbb{C}, \cdot)$ es un **espacio vectorial complejo.**

La **complejificación** de V, V^c es el espacio vectorial complejo $(V \oplus V, +; \mathbb{C}, \cdot)$ con $i \cdot (u, v) := J_0(u, v)$.

Observación 5 *Es la estructura compleja canónica en $V \oplus V$ la que determina V^c y no una arbitraria.*

Las operaciones en V^c son:

i) $(u \oplus v) + (u' \oplus v') = (u + u') \oplus (v + v')$.

ii) Para $z = a + ib \in \mathbb{C}$,

$$z \cdot (u \oplus v) = (a + ib) \cdot (u \oplus v) = (au) \oplus (av) + b(-v \oplus u)$$

$$= (au \oplus av) + (-bv \oplus bu) = (au - bv) \oplus (av + bu).$$

4.9.2 Segunda Forma para la Complejificación.

Definimos,

$$V^{c'} := \{u + iv;\ u, v \in V\}$$

con las operaciones

$$(u + iv) + (u' + iv') := (u + u') + i(v + v'),$$

$$(\alpha + i\beta)(u + iv) := (\alpha u - \beta v) + i(\alpha v + \beta u).$$

Sea el isomorfismo $\psi : V^c \longrightarrow V^{c'}$ definido por $\psi(u \oplus v) := u + iv$. En efecto, ψ es $\mathbb{C}-$lineal y es una biyección

$$\psi((\alpha+i\beta)(u\oplus v)) = \psi((\alpha u-\beta v)\oplus(\alpha v+\beta u)) = (\alpha u-\beta v)+i(\alpha v+\beta u) = (\alpha+i\beta)\psi(u,v).$$

$$\psi((u \oplus v) + (u' \oplus v')) = \psi((u + u') \oplus (v + v')) = (u + u') + i(v + v')$$

$$= (u + iv) + (u' + iv') = \psi(u, v) + \psi(u', v').$$

es decir ψ es $\mathbb{C} -$ *lineal.*

Sea $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una base de V, para $v \in V$, $v = \sum\limits_{\alpha\in I} r_\alpha e_\alpha$ con $r_\alpha \in \mathbb{R}$ y sólo un número finito de r_α están en $\mathbb{R}- \{0\}$. El conjunto de vectores $\left\{ f_\alpha, \widetilde{f}_\alpha \right\}_{\alpha\in I}$ donde

$$f_\alpha = e_\alpha \oplus 0 \text{ y } \widetilde{f}_\alpha = 0 \oplus e_\alpha$$

constituyen una base de $V \oplus V$ (como espacio vectorial), entonces $J_0(f_\alpha) = \widetilde{f}_\alpha$ y $J_0(\widetilde{f}_\alpha) = -f_\alpha$. Tomando $v \in V^c$ se sigue

$$v = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha f_\alpha + \sum_{\alpha\in I} \varphi_\alpha \widetilde{f}_\alpha = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha f_\alpha + \sum_{\alpha\in I} \varphi_\alpha J_0(f_\alpha)$$

$$= \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha f_\alpha + \sum_{\alpha\in I} \varphi_\alpha i f_\alpha = \sum_{\alpha\in I} (\lambda_\alpha + i\varphi_\alpha) f_\alpha = \sum_{\alpha\in I} - \lambda_\alpha J_0(\widetilde{f}_\alpha) +$$

$$\sum_{\alpha\in I} \varphi_\alpha \widetilde{f}_\alpha = \sum_{\alpha\in I} - \lambda_\alpha i\widetilde{f}_\alpha + \sum_{\alpha\in I} \varphi_\alpha \widetilde{f}_\alpha = \sum_{\alpha\in I} (\lambda_\alpha + i\varphi_\alpha)(-i\widetilde{f}_\alpha) \equiv \sum_{\alpha\in I} z_\alpha(-i\widetilde{f}_\alpha).$$

es decir $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ y $\left\{-i\widetilde{f}_\alpha\right\}_{\alpha\in I}$ son bases de V^c , teniendo $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{C}} V^c$.

Las operaciones en V^c en la base $\{f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ son

i)$(\sum\limits_{\alpha\in I} z_\alpha f_\alpha) + (\sum\limits_{\alpha\in I} w_\alpha f_\alpha) = \sum\limits_{\alpha\in I} (z_\alpha + w_\alpha) f_\alpha$

ii) $z(\sum\limits_{\alpha\in I} z_\alpha f_\alpha) = \sum\limits_{\alpha\in I} (zz_\alpha) f_\alpha$, donde $z_\alpha + w_\alpha$ y zz_α son la suma y multiplicación ordinarias en $\mathbb{C}$.

Otra manera de expresar este resultado. Para una base de un espacio vectorial real, la complejificación equivale a cambiar coeficientes reales por complejos.

4.9.3 Tercera Forma para la Complejificación.

Sea $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una base de V. $\{1,i\}$ base canónica de $\mathbb{C}$ y $\{1\otimes e_\alpha, i\otimes e_\alpha\}$ base de $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$ como espacio vectorial real. Si la dimensión real de V es n entonces la dimensión real de $\mathbb{C}\otimes_{\mathbb{R}}V$ es $2n$; si $x\in\mathbb{C}\otimes V$ entonces $x=\sum\limits_{\alpha\in I}(r_\alpha(1\otimes e_\alpha)+s_\alpha(i\otimes e_\alpha))$, $r_\alpha, s_\alpha\in\mathbb{R}$.

Pero la función $\varphi:\mathbb{C}\otimes V\longrightarrow V\oplus V$ dada por la extensión lineal de $\varphi(1\otimes e_\alpha):=f_\alpha$ y $\varphi(i\otimes e_\alpha)=\widetilde{f}_\alpha$ es un isomorfismo de espacios vectoriales (reales). J_0 en $V\oplus V$ induce $\widetilde{J}_0$ en $\mathbb{C}\otimes V$ tal que

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}\otimes V & V\oplus V \arrow[l, "\varphi^{-1}"'] \\ \mathbb{C}\otimes V \arrow[u, "\widetilde{J}_o"] \arrow[r, "\varphi"'] & V\oplus V \arrow[u, "J_o"'] \end{tikzcd}$$

es decir $\widetilde{J}_o=\varphi^{-1}\circ J_o\circ\varphi$, donde $\widetilde{J}_o^2=\varphi^{-1}\circ J_o\circ\varphi\circ\varphi^{-1}\circ J_o\circ\varphi=\varphi^{-1}\circ J_o^2\circ\varphi=$ $\varphi^{-1}\circ(-Id_{V\oplus V})\circ\varphi=-Id_{\mathbb{C}\otimes V}$ y

$$\widetilde{J}_o(1\otimes e_\alpha)=\varphi^{-1}\circ J_o(\varphi(1\otimes e_\alpha))=\varphi^{-1}(J_o(f_\alpha))=\varphi^{-1}(\widetilde{f}_\alpha)=i\otimes e_\alpha$$

$$\widetilde{J}_o(i\otimes e_\alpha)=\varphi^{-1}\circ J_o(\varphi(i\otimes e_\alpha))=\varphi^{-1}(J_o(\widetilde{f}_\alpha))=\varphi^{-1}(-f_\alpha)=-1\otimes e_\alpha.$$

Por lo tanto $(\mathbb{C}\otimes V,+;\mathbb{C},\cdot)$ es un espacio vectorial complejo, isomorfo a través de φ a V^c;

$\varphi:\mathbb{C}\otimes V\longrightarrow V^c$. Tomando como base $\{1\otimes e_\alpha\}$, para $x\in\mathbb{C}\otimes V$ se tiene $x=\sum\limits_{\alpha\in I}(r_\alpha+is_\alpha)1\otimes e_\alpha=\sum\limits_{\alpha\in I}z_\alpha 1\otimes e_\alpha$, y las operaciones en $\mathbb{C}\otimes V$ como espacio vectorial complejo son:

$$x+x'=\sum_{\alpha\in I}(z_\alpha+z_\alpha')1\otimes e_\alpha$$

$$z\cdot x=z\cdot(\sum_{\alpha\in I}z_\alpha(1\otimes e_\alpha))=\sum_{\alpha\in I}zz_\alpha 1\otimes e_\alpha.$$

Para verificar que φ es $\mathbb{C}-$ *lineal* , escribimos

$$(a+ib)\cdot x=(a+ib)\cdot(\sum_{\alpha\in I}(r_\alpha(1\otimes e_\alpha)+s_\alpha(i\otimes e_\alpha)))=$$

$$\sum_{\alpha\in I}((ar_\alpha)1\otimes e_\alpha+(as_\alpha)i\otimes e_\alpha)+\widetilde{J}_0(\sum_{\alpha\in I}(br_\alpha(1\otimes e_\alpha)+bs_\alpha(i\otimes e_\alpha)))=$$
$$\sum_{\alpha\in I}((ar_\alpha)1\otimes e_\alpha+(as_\alpha)i\otimes e_\alpha)+\sum_{\alpha\in I}((br_\alpha)i\otimes e_\alpha+(bs_\alpha)(-1\otimes e_\alpha))=$$
$$\sum_{\alpha\in I}(ar_\alpha-bs_\alpha)1\otimes e_\alpha+(as_\alpha+br_\alpha)i\otimes e_\alpha.$$

teniendo

$$\varphi((a+ib)\cdot x)=\sum_{\alpha\in I}(ar_\alpha-bs_\alpha)\varphi(1\otimes e_\alpha)+(as_\alpha+br_\alpha)\varphi(i\otimes e_\alpha)=$$
$$\sum_{\alpha\in I}(ar_\alpha-bs_\alpha)(e_\alpha\oplus 0)+(as_\alpha+br_\alpha)(0\oplus e_\alpha)=$$
$$(\sum_{\alpha\in I}(ar_\alpha-bs_\alpha)e_\alpha)\oplus(\sum_{\alpha\in I}(as_\alpha+br_\alpha)e_\alpha);$$

pero

$$(a+ib)\cdot\varphi(x)=(a+ib)\cdot\varphi(\sum_{\alpha\in I}(r_\alpha(1\otimes e_\alpha)+s_\alpha(i\otimes e_\alpha)))=$$
$$(a+ib)\cdot(\sum_{\alpha\in I}(r_\alpha(e_\alpha\oplus 0)+s_\alpha(0\oplus e_\alpha)))=$$
$$(a+ib)\cdot(\sum_{\alpha\in I}r_\alpha e_\alpha\oplus\sum_{\alpha\in I}s_\alpha e_\alpha)=$$
$$(a\sum_{\alpha\in I}r_\alpha e_\alpha-b\sum_{\alpha\in I}s_\alpha e_\alpha)\oplus(a\sum_{\alpha\in I}s_\alpha e_\alpha+b\sum_{\alpha\in I}r_\alpha e_\alpha)=$$
$$\left(\sum_{\alpha\in I}(ar_\alpha-bs_\alpha)e_\alpha\right)\oplus\left(\sum_{\alpha\in I}(as_\alpha+br_\alpha)e_\alpha\right).$$

Es decir $\varphi((a+ib)\cdot x)=(a+ib)\cdot\varphi(x)$.

Resumen. Se tiene tres formas para la compejificación de V^c de $V:\ V\oplus V$, $V+iV$ y $\mathbb{C}\otimes V$. Los isomorfismos $\mathbb{C}-$*lineales* ψ y ϕ define el isomorfismo $\rho:\mathbb{C}\otimes V\longrightarrow V+iV$ a través del diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}\otimes V \arrow[d, "\phi"'] \arrow[dr, "\rho"] & \\
V\oplus V \arrow[r, "\psi"'] & V+iV
\end{tikzcd}$$

esto es $\rho := \psi \circ \phi$.

Sobre generadores tenemos $\rho(1\otimes u + i\otimes u) = \psi\circ\phi(1\otimes u + i\otimes v) = \psi(u\oplus v) = u+iv$.

4.10 Referencias.

1. J. Adem, Lecciones de Álgebras de Clifford, CINVESTAV, (no editadas), 1988.

2. Orlando Alvarez, Lectures on Quantum Field Theory Mechanics and the Index theorem, pag. 276-322, IAS-Park City Mathematics Series, Vol. 1, Geometry and Quantum Field , ed. Daniel S. Freed and Karen K. Uhlenbeck, 1995.

3 . F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro, Clifford modules, Topology 3, suplemento 1, 1964.

4. I.M. Benn, R.W. Tucker, An Introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics. Adam Hilger, Bristol and New York, 1987.

5. J. D. Bjorken y S.D. Drell, Relativistic Quantum Mechanics, MacGraw-Hill, New York, 1964.

6. C. Chevalley. The Algebraic Theory of Spinors. Columbia University Press, Ney York, 1994.

7. A. Crumeyrolle. Orthogonal and Symplectic Clifford Algebras, Spinor Structures, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, 1990.

8. Peter.G.O. Freund, Introduction to Supersymmetry, Cambridge University Press Cambridge, New York, 1986.

9. D. Husemiller, Fibre Bundes, Springer-Verlag, New York, 2^{da} edición, 1974.

10. Jacobson Nathan, Basic Algebra I, 2^{da} edición, W.H. Freeman and Company, 1910.

11. Jacobson Nathan, Basic Algebra II, 2^{da} edición, W.H. Freeman and Company.

12. Landau, Mecánica Cuántica no relativista

13. Lang Serge, Algebra, Addison-Wesley, 1969.

14. Lawson H. B. y M. L. Michelsohn, Spin Geometry, Princeton University Press, Princeton, New Jersey,1989.

15. Pertti Lounesto, Clifford Algebras and Spinors, Cambridge University Press, 2^{da} edición, 2001.

16. I. R. Porteous. Clifford Algebras and the Classical Groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

17. M. Reed, B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Academic Press, New York, 1972.

18. L. H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

19. Shankar R., Principles of Quantum Mechanics, 2^{da} edición, Plenum Press, New York, 1994.

20. M. Socolovsky, Introducción a la Mecánica Cuántica, notas del curso de Física Teórica IV, 2000.

21. M. Socolovsky, On the Geometry of Spin 1/2, Advances in Applied Clifford Algebras 11, No. 1, 109-127, 2001.

22. Sze-Tsen-Hu, Elements of Modern Algebra, Holden-Day, Inc., San Francisco, London, Amsterdan, 1965.