

01190

2



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE
MÉXICO**

Facultad de Ingeniería

División de estudios de Posgrado

Tesis:

**Sistemas Dinámicos en Termodinámica No-
Endorreversible**

Presenta:

Oscar Eladio Bautista Godínez

Para obtener el grado de:

Doctor en Ingeniería

**TESIS CON
FALLA DE ORIGEN**

Tutor: Dr. Federico Méndez Lavielle



México, D. F. 2003.



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

Sistemas Dinámicos en Termodinámica No-Endorreversible

Resumen

En este trabajo se determina el coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador endorreversible y de uno no-endorreversible con tres depósitos térmicos, mismos que se ven afectados por irreversibilidades debidas a resistencias térmicas entre la sustancia de trabajo y los depósitos térmicos así como debidas a irreversibilidades internas de la sustancia de trabajo, las que se contabilizan a través de un parámetro de irreversibilidad. Para llevar a cabo este estudio, ambos sistemas se pueden tratar como sistemas combinados que consisten de una máquina térmica endorreversible (y no-endorreversible), que activa a un refrigerador endorreversible (no-endorreversible) de dos depósitos térmicos. Para el análisis se utiliza la teoría de Termodinámica de Tiempo Finito en ciclos de dos depósitos térmicos y se obtienen sus relaciones termodinámicas óptimas. De esta manera, en esta investigación se presenta el efecto fundamental debido a las irreversibilidades antes citadas sobre el funcionamiento óptimo de un refrigerador de tres depósitos térmicos con capacidades térmicas finitas e infinitas. Se puede concluir que los resultados que se obtienen en este trabajo son más realistas que las presentadas por la Termodinámica Clásica. En consecuencia, el esquema teórico desarrollado en el presente trabajo proporciona bases teóricas nuevas para el mayor entendimiento de la operación termodinámica óptima de refrigeradores de tres depósitos térmicos que suelen utilizarse en sistemas que operan con energía solar, energía geotérmica y/o calor de desecho, entre otras relevantes aplicaciones.

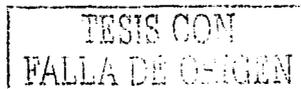
Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico el contenido de mi trabajo.

NOMBRE: Oscar Eladio

Bautista Godínez

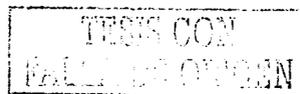
FECHA: 31-enero-2003

FIRMA: 



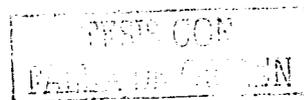
Abstract

In this work the optimal coefficient of performance of an endoreversible and a non-endoreversible refrigerator, operating between three heat reservoirs, is determined. Both systems are affected by irreversibilities due to the heat resistances between the working fluid and the heat reservoirs (endoreversible case) and internal to the working fluid (non-endoreversible case), in this latter case the internal irreversibility is taken into account as a constant parameter. In order to do this study both systems are considered as combined subsystems that consist of an endoreversible Carnot heat engine (and non-endoreversible Carnot heat engine) which activates an endoreversible Carnot refrigerator (and non-endoreversible Carnot refrigerator), both operating between two heat reservoirs. The analysis done in this investigation was conducted following the Finite Time Thermodynamic theory (FTT) applied to cycles with two heat reservoirs where optimal thermodynamic relations were found. In this way, the fundamental effect on the optimal performance of the refrigerator with three heat reservoirs (finite and infinite reservoirs) due to the irreversibilities is presented. It can be concluded that the results obtained are more realistic than those obtained by the classical thermodynamics. In consequence, the theoretical scheme developed in the present research gives new theoretical bases for a better understanding of the optimal thermodynamic operation about refrigerators operating between three heat reservoirs that can be used as systems that use solar energy, geothermal energy and waste heat.



Índice General

1	Antecedentes	16
1.1	Antecedentes históricos de la Termodinámica de Tiempo Finito	17
1.2	La connotación de la Termodinámica de Tiempo Finito.	19
1.3	El estado del arte de la Termodinámica de Tiempo Finito.	20
1.3.1	La máquina térmica con la ley de Newton de transferencia de calor acoplada a depósitos térmicos con capacidad térmica infinita . . .	20
1.3.2	El objetivo extremo para procesos termodinámicos dados (ciclo teórico)	21
1.3.3	Ciclos termodinámicos óptimos sujetos a condiciones dadas	23
1.3.4	Efectos de modelos de pérdidas sobre el funcionamiento óptimo de máquinas térmicas.	23
1.3.5	Efecto del modelo de depósito térmicos sobre el funcionamiento de una máquina térmica.	25
1.3.6	Estudios para ciclos de refrigeración	26
I	Modelo endorreversible	30
2	Sistema combinado equivalente de un refrigerador endorreversible con tres depósitos térmicos.	31
2.1	Límites de funcionamiento de una máquina térmica con dos depósitos tér- micos	38

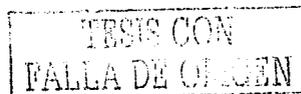


2.1.1	El modelo matemático	38
2.2	Solución del problema de máxima eficiencia para Q_{hw} dado.	43
2.2.1	Etapa de alta temperatura	44
2.2.2	Etapa de baja temperatura	47
2.2.3	Acoplamiento de los ciclos parciales	49
2.3	Coefficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador para remover calor (Q_{cr}) de un depósito térmico a una tasa dada	53
2.3.1	La etapa de baja temperatura	55
2.3.2	Etapa de alta temperatura	57
2.3.3	Acoplamiento de los ciclos parciales	59
2.4	Optimización del sistema combinado equivalente para un refrigerador endorreversible que opera entre tres depósitos térmicos de capacidad térmica finita	63
2.4.1	Adimensionalización del coeficiente de funcionamiento global	65
2.4.2	Optimización	67

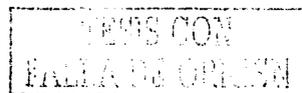
II Modelo no-endorreversible **71**

3 Sistema combinado equivalente de un refrigerador no-endorreversible con tres depósitos térmicos. **72**

3.1	Eficiencia óptima de una máquina térmica no-endorreversible que opera a una tasa de calor dada entre el depósito de alta temperatura y la sustancia de trabajo.	77
3.1.1	Modelo del ciclo	77
3.1.2	Configuración del ciclo óptimo	79
3.2	Coefficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador no-endorreversible que opera a una tasa de refrigeración dada.	84
3.2.1	Modelo del ciclo	84



3.2.2	Configuración del ciclo óptimo	85
3.3	Optimización del sistema combinado equivalente para un refrigerador no- endorreversible que opera entre tres depósitos térmicos	91
3.3.1	Adimensionalización	93
3.4	Resultados y conclusiones	95



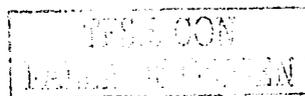
Nomenclatura

Símbolos latinos

Q	Transferencia de calor por unidad de longitud (J/m)
C	Capacidad térmica de los depósitos térmicos (J/m K)
T	Temperatura (°C)
W	Trabajo (J)
P	Potencia (W)
K	Conductancia global equivalente (W/m K)
K	Conductividad térmica en el sistema no-endorreversible (W/m K)
S	Entropía (J/m K)
L	Función de Lagrange
R	Función de Lagrange para las etapas parciales (alta y baja temperatura)
R	Parámetro de irreversibilidad
t	tiempo (s)
m	Constante definida en las ecuaciones (2.35) y (2.48)
k	Constante definidas en las ecuaciones (2.81) y (2.90)
q	rapidez de transferencia de calor por unidad de longitud (W/m)

Símbolos griegos

ψ	Coefficiente de funcionamiento del refrigerador endorreversible de tres depósitos térmicos
ψ^*	Coefficiente de funcionamiento del refrigerador no-endorreversible de tres depósitos térmicos
η	Eficiencia térmica de la máquina térmica endorreversible
ϕ	Coefficiente de funcionamiento del refrigerador endorreversible de dos depósitos térmicos
η^*	Eficiencia térmica de la máquina térmica endorreversible
ϕ^*	Coefficiente de funcionamiento del refrigerador no-endorreversible de dos depósitos térmicos
τ	Tiempo del ciclo de la máquina térmica y del refrigerador
τ^*	Tiempo adimensional
α	Conductividad térmica (W/m K)
α	Parámetro adimensional definido en (2.115) y (3.68)
β	Parámetro adimensional definido en (3.68)
β_w	Parámetro adimensional definido en (2.115)
β_r	Parámetro adimensional definido en (2.115)
ε_w	Parámetro adimensional definido en (2.115)
ε_r	Parámetro adimensional definido en (2.115)



γ	Parámetro adimensional definido en (2.115) y (3.68)
δ	Parámetro adimensional definido en (2.115)
λ	Multiplicador de Lagrange
Π^*	Carga de refrigeración adimensional

Subíndices

() _C	Carnot
() _{CA}	Curzon-Ahlborn
() ₀	Condiciones iniciales
() _w	Referente a la máquina térmica
() _r	Referente al refrigerador
() _{hw}	Referente a la etapa de alta temperatura en la máquina térmica
() _{ew}	Referente a la etapa de baja temperatura en la máquina térmica
() _{hr}	Referente a la etapa de alta temperatura en el refrigerador
() _{er}	Referente a la etapa de baja temperatura en el refrigerador

Introducción

El problema de Carnot de determinar los límites naturales de funcionamiento de máquinas térmicas fue el origen de la termodinámica como una ciencia. Recientemente se ha planteado el problema de obtener los límites de funcionamiento de varios sistemas termodinámicos con rapidezces de transferencia de calor y/o duraciones de estos procesos fijos. Las herramientas para el análisis de tales sistemas son principalmente la teoría del control óptimo y cálculo variacional. A esta rama reciente de la termodinámica se denominó Termodinámica de Tiempo Finito [66], [67], [86].

Entre los más importantes resultados obtenidos en la Termodinámica de Tiempo Finito destacan los siguientes: las condiciones termodinámicamente óptimas para procesos de transferencia de calor (áreas óptimas de transferencia de calor, tiempos óptimos de intercambio térmico, etc.), estimación de los límites de transformación de calor en trabajo para máquinas térmicas restringidas por rapidezces de transferencia de operación o potencia dada y de manera equivalente, resultados similares para refrigeradores y bombas de calor.

En diversas ocasiones, las consideraciones termodinámicas son el fundamento de la mayoría de los procesos tecnológicos. El diseño óptimo es la base para las tecnologías conocidas para el ahorro de energía, por esta razón en este trabajo se plantea la necesidad de estimar el coeficiente de funcionamiento óptimo del equivalente termodinámico de un refrigerador no convencional, por eyecto-compresión, sujeto a ciertas restricciones como son rapidezces de operación, tiempo y áreas de transferencia finitas.

Sistema de refrigeración por eyecto-compresión

Hoy en día a escala mundial se ha incrementado notablemente el consumo de energía, conduciendo a que la relación entre suministro y demanda sea por lo mismo más desafiante, y la cuestión de ahorro energético se convierte entónces en un problema molecular. En particular, también se incrementa la proporción de las cargas de refrigeración

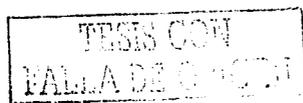


y aire acondicionado en los niveles del consumo actual de energía. Debido a esto, la aplicación de fuentes térmicas de bajo nivel, tales como energía solar, energía geotérmica, calor de desecho de procesos industriales, etc., se empiezan a tomar en cuenta cada vez más para su utilización en el uso en máquinas térmicas, refrigeradores, bombas de calor, dispositivos de generación de potencia, etcetera.

De los equipos de refrigeración que utilizan calor de bajo nivel se puede mencionar a los que operan entre tres depósitos térmicos, como puede ser el caso del sistema de eyecto-compresión. Estos equipos tienen la ventaja de funcionar con un bajo costo de mantenimiento y corto tiempo de recuperación de inversión. Como consecuencia, el desarrollo y la aplicación de dichos dispositivos ha originado que se ponga especial atención en ellos. Sin embargo, actualmente la mayoría de la teoría termodinámica concerniente con este tipo de sistemas se basa en la Termodinámica Clásica, por lo que es muy sugestivo desde el punto de vista fundamental establecer la teoría de la Termodinámica de Tiempo Finito para refrigeradores que operan entre tres depósitos térmicos.

Un sistema de refrigeración por eyecto-compresión es una máquina térmica que trabaja entre tres depósitos térmicos, que requiere de un elevado suministro de energía térmica y de una baja ó nula alimentación de energía eléctrica con la finalidad de proporcionar un determinado efecto de enfriamiento. Este ciclo es capaz de convertir calor de una fuente apropiada en refrigeración.

El sistema de refrigeración por eyecto-compresión se muestra de manera esquemática en la Figura 1. El calor entregado al refrigerante por el colector solar ocasiona la evaporación del líquido de alta presión (estado 1 en la Figura 1) en el generador de vapor. El vapor (estado 2) se expande a través de una tobera convergente-divergente en el eyector. El cambio de presión que se presenta en esta expansión origina la succión del vapor que proviene del evaporador (estado 3). Las dos corrientes se mezclan y entonces se lleva a cabo un proceso de recuperación de presión (estado 4) en la sección del difusor del eyector. La corriente que proviene del eyector fluye hacia el condensador y en éste se transfiere calor del refrigerante hacia los alrededores, dando como resultado refrigerante



líquido condensado a la salida del condensador. El líquido se divide en dos corrientes: una entra al evaporador después de una reducción de presión en la válvula de expansión (estado 6) y la otra se va hacia el generador después de incrementar la presión por medio de una bomba (estado 1).

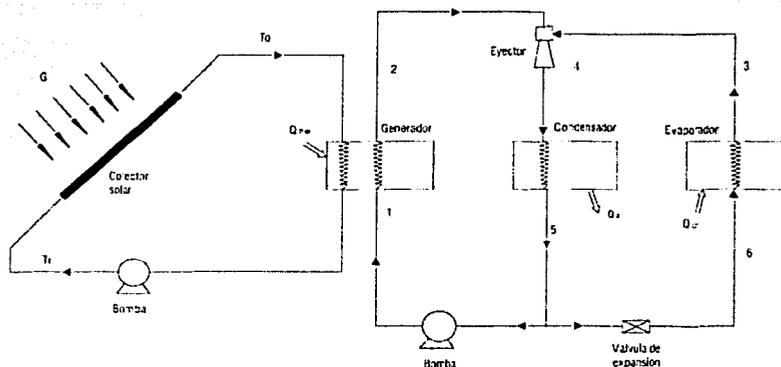


Figura 1. Diagrama de bloques de un refrigerador por eyector, activado por energía solar.

La fuente de calor solar está representada en la Figura 1 por un colector en el que se lleva a cabo un proceso de transferencia de calor hacia el fluido. Este fluido entra al colector con un gasto másico \dot{m} y una temperatura T_i . La radiación solar que es absorbida por el colector ocasiona un incremento en la temperatura de salida T_o . El calor que se transmite hacia el refrigerante causa que la temperatura del fluido a la salida del generador caiga a T_i . Bajo condiciones ideales de intercambio térmico T_g y T_o son iguales. Sin embargo, en la práctica, para propósitos de transferencia de calor, T_o deberá

ser mayor que T_g .

El ciclo del eyector está compuesto básicamente por dos sub-ciclos [87]. Un subciclo de potencia (1)-(2)-(4)-(5) en el que el refrigerante que fluye a través de la bomba opera entre los estados termodinámicos del generador y del condensador genera la corriente motriz para la compresión. De manera similar, el sub-ciclo de refrigeración (6)-(3)-(4)-(5) opera entre el evaporador y el condensador.

El coeficiente de funcionamiento (COP) de un cualquier ciclo de refrigeración se define como la razón entre la refrigeración generada y la energía suministrada al ciclo. En la Figura 1 Q_{cw} , Q_a y Q_{cr} representan las rapidezces de intercambio térmico en el evaporador, condensador y generador, respectivamente. Por otra parte, la máxima utilización de energía solar es aquella que se estima cuando el ciclo lleva a cabo procesos ideales, la cual proporcionará la eficiencia del ciclo máxima posible. El término ideal se refiere a un sistema compuesto de un ciclo de refrigeración reversible.

Van Wylen y Sonntag [92] mencionan que el sistema dual turbina-compresor es el equivalente termodinámico del sistema de eyecto-compresión, donde la turbina y el compresor substituyen al eyector, como se observa en la Figura 2, donde se muestra de forma sencilla, como el sistema de eyecto-compresión es resultado de la interacción de un subsistema de potencia con uno de refrigeración. Como resultado, se supone que el sistema opera entre depósitos térmicos a temperaturas \bar{T}_{hw} , \bar{T}_a , \bar{T}_{cr} y se le denomina sistema térmico de tres temperaturas, en analogía con las máquinas térmicas y refrigeradores llamados sistemas térmicos de dos temperaturas.

$$5 \leq \bar{T}_{cr} \leq 15^\circ\text{C}$$

De acuerdo a la termodinámica clásica, el máximo coeficiente de funcionamiento de un refrigerador de Carnot que opera entre tres depósitos térmicos se calcula con la Ecuación (0.1) [61]. Sin embargo, cuando el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador de tres depósitos está dado por la Ecuación (0.1), el proceso cíclico debe ser reversible, mientras que los refrigeradores reales de tres depósitos son irreversibles y ninguno de sus coeficientes de funcionamiento puede alcanzar ψ_C . Por ejemplo, en un refrigerador de energía solar que opera entre tres depósitos térmicos y a temperaturas $\bar{T}_{hw} = 120^\circ\text{C}$, $\bar{T}_a = 40^\circ\text{C}$ y $\bar{T}_{cr} = 15^\circ\text{C}$, ψ_C calculado con la Ecuación (0.1) es igual a 2.35, mientras que los coeficientes de funcionamiento reales son aproximadamente 0.5 – 0.6 [100]. Es claro que aunque el límite superior ψ_C de la termodinámica clásica es importante en teoría, ésta es usualmente muy burda para predecir el comportamiento de funcionamiento de refrigeradores reales. Por lo tanto, es necesario establecer las fronteras de Termodinámica de Tiempo Finito en ciclos de tres depósitos térmicos [31], [100].

Al considerar la Termodinámica de Tiempo Finito, muchos autores han llevado a cabo investigaciones y han obtenido importantes conclusiones [22], [31], [50], [67], [76]. La mayoría de éstas conciernen a la teoría óptima de ciclos endorreversibles de dos depósitos térmicos, mismas que tienen un importante significado para la búsqueda del funcionamiento óptimo de refrigeradores endorreversibles de tres depósitos térmicos.

Objetivo de este trabajo

La motivación de este trabajo surge por la necesidad de predecir el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador por efecto-compresión. Hasta la fecha, la mayoría de las investigaciones realizadas a este sistema se hacen con base en la Termodinámica Clásica, y viendo la semejanza de este sistema con máquinas térmicas que operan entre tres depósitos térmicos se propone establecer el coeficiente de funcionamiento para una máquina térmica de este tipo, aplicando la teoría de Termodinámica de Tiempo Finito. Cabe subrayar que dentro de este esquema se investiga el efecto que tienen las irrever-



sibilidades, debidas a la conducción de calor entre los depósitos térmicos y la sustancia de trabajo así como aquellas que son internas en ésta. Al llevar a cabo un análisis del sistema de refrigeración de tres depósitos mediante la Termodinámica de Tiempo Finito se obtendrán los límites superiores de funcionamiento de éste, pues se plantea un modelo termodinámico más apegado a ciclos reales.

La presente investigación se divide en dos partes: en la primera se establece el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador endorreversible que opera entre tres depósitos térmicos de capacidad térmica finita, debiendo su irreversibilidad únicamente a la transferencia de calor que se lleva a cabo entre los depósitos térmicos y la sustancia de trabajo; en la segunda parte se obtiene el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador no-endorreversible que opera entre tres depósitos térmicos de capacidad térmica infinita, en este caso los efectos de irreversibilidad, además de considerar aquella debida a la transferencia de calor entre los depósitos térmicos y la sustancia de trabajo, considera los efectos disipativos internos de la sustancia de trabajo.

Capítulo 1

Antecedentes

En 1824 Sadi Carnot publicó su famoso artículo "Reflctions on the motive power of fire" [28], en donde se establecieron los resultados de los primeros estudios sistemáticos de los procesos físicos que describían a las máquinas de vapor. Esto fue el inicio de una nueva ciencia: la termodinámica. Uno de los aspectos importantes de la termodinámica consiste en formular criterios para comparar el funcionamiento de procesos reales con ideales. Carnot [28] demostró que ninguna máquina térmica que opera entre una fuente de calor a alta temperatura \bar{T}_{hw} y un depósito térmico de baja temperatura \bar{T}_{cw} podría tener una eficiencia de funcionamiento mayor que la máquina de Carnot.

Recientemente han surgido problemas para delimitar el funcionamiento de sistemas termodinámicos con rapidez de transferencia de calor y/o duraciones fijas de estos procesos, con esto se han publicado numerosos libros [18], [22], [86], [97], en los que se resume el estado del arte y futuros potenciales de las principales ramas de la termodinámica moderna, siendo una de éstas la Termodinámica de Tiempo Finito

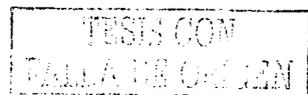
1.1 Antecedentes históricos de la Termodinámica de Tiempo Finito

De acuerdo a la Termodinámica Clásica, la máxima eficiencia que una máquina térmica puede alcanzar es

$$\eta_C = 1 - \frac{\bar{T}_{cw}}{\bar{T}_{hw}}, \quad (1.1)$$

que tradicionalmente se conoce como la eficiencia de Carnot. Esta fórmula proporciona el límite superior de eficiencia para cualquier máquina térmica trabajando entre dos depósitos térmicos de alta y baja temperatura, \bar{T}_{hw} y \bar{T}_{cw} , respectivamente. Clausius, Kelvin y otros hicieron uso de la Termodinámica como una herramienta para encontrar los límites de trabajo, transferencia de calor, eficiencia, coeficiente de funcionamiento (COP), etc.

El punto de vista Carnot-Clausius-Kelvin enfatiza la interacción de un sistema termodinámico con sus alrededores, mientras que el enfoque de Gibbs hace a las propiedades del sistema dominantes y se enfoca en estados de equilibrio. La Termodinámica Clásica contemporánea proporciona una descripción bastante completa de estados de equilibrio y procesos reversibles. Por otro lado, las características más sobresalientes que conciernen a los procesos reales es que estos procesos irreversibles producen menos trabajo y más entropía que los correspondientes procesos reversibles. Dichos procesos reversibles están definidos únicamente en el límite de ejecución infinitamente lenta. La metodología de solución propia de la Termodinámica Clásica supone procesos termodinámicos reversibles, es decir, procesos en los cuales el sistema preserva equilibrio interno, la entropía total del sistema y el ambiente no se incrementa, la rapidez de intercambio térmico entre el sistema y el ambiente es infinitesimalmente pequeña y la duración del proceso es infinitamente grande. Una consecuencia de esto es una tasa nula de salida (potencia de salida para una máquina térmica, carga de refrigeración para un refrigerador y carga de calentamiento para una bomba de calor) para la duración promedio de los procesos. Los límites de funcionamiento que se obtienen con la ayuda de los procesos reversibles son



independientes de la ecuación de estado del sistema y son límites en el sentido de que ellos siguen siendo inalcanzables en todos los procesos reales.

Todo proceso termodinámico real es irreversible debido a que la rapidez de intercambio entre el sistema y el ambiente no es infinitesimalmente pequeño, el sistema no mantiene equilibrio interno y la duración del proceso es finito. Las fronteras reversibles clásicas son muy altas para procesos reales y requieren un refinamiento adicional. Las preguntas básicas son: (1) ¿los límites reversibles son lo suficientemente cercanos al funcionamiento real para ser útiles en la mejora de procesos? (2) ¿Es posible encontrar límites más reales al funcionamiento de procesos reales (tiempo finito y/o tamaño finito) y dispositivos? (3) ¿Podemos usar tales fronteras para determinar mejores criterios de mérito útiles al evaluar procesos reales y dispositivos? (4) ¿Podemos usar tales criterios para optimizar el funcionamiento de procesos reales y dispositivos, y proporcionar una guía científica y precisa para resolver problemas prácticos de ingeniería?

La aplicación de los principios de la Termodinámica Clásica y la solución de fronteras termodinámicas para procesos termodinámicos de tiempo finito y/o tamaño finito, que son caracterizados por una rapidez finita de intercambio entre el sistema y el ambiente, fueron los primeros pasos hacia el campo de la Termodinámica de Tiempo Finito. Novikov [70], Chambadal[29] y Curzon y Ahlborn [50] postularon una máquina de Carnot, con potencia de salida estando limitada por las rapidezces de transferencia de calor hacia y desde la sustancia de trabajo, y concluyeron de manera independiente que las temperaturas extremas (caliente y fría) de una planta de potencia se pueden optimizar con una potencia de salida máxima. La eficiencia a máxima potencia de salida es

$$\eta_{CA} = 1 - \sqrt{\frac{\bar{T}_{lw}}{\bar{T}_{hw}}} \quad (1.2)$$

La Ecuación (1.2) proporciona un nuevo límite de funcionamiento, el cual resulta diferente cuando se le compara con la eficiencia de Carnot, para una máquina térmica caracterizada por rapidezces finitas, duración finita y tamaño finito. La ecuación (1.2) es una

nueva eficiencia límite obtenida inicialmente en la literatura especializada de Ingeniería Nuclear [29], [70] y redescubierta también en la literatura de Física [50]. Desde mediados de 1970, la búsqueda por tratar de identificar los límites de funcionamiento de procesos termodinámicos y llevar a cabo la optimización de los mismos ha tenido un gran progreso en los campos de Física y de la Ingeniería. En Física, a este campo de investigación se le denominó Termodinámica de Tiempo Finito (FTT por sus siglas en inglés) por R. S. Berry [22], B. Andresen [5], P. Salamon, M. J. Ondrechen, A. M. Tsirlin and S. Sieniutycz [86], entre otros, o Termodinámica Endorreversible por A. De Vos and K. H. Hoffmann [59]. En Ingeniería se le llamó Minimización de la Generación de Entropía (EGM) por A. Bejan [18]. El carácter fundamental de ambos puntos de vista, FTT y EGM, son los mismos, encontrar la liga entre la Termodinámica, la Transferencia de Calor, la Mecánica de los Fluidos, y optimizar termodinámicamente el funcionamiento de sistemas termodinámicos de tiempo finito y/o tamaño finito, que incluyen las irreversibilidades de transferencia de calor, flujo de fluidos e internas en la sustancia de trabajo.

1.2 La connotación de la Termodinámica de Tiempo Finito.

El campo de estudio cubierto por FTT es muy amplio. sus aplicaciones incluyen todos los procesos con fenómenos térmicos y todos los dispositivos y sistemas que operan con la presencia de los efectos térmicos con las restricciones de tiempo finito y/o tamaño finito.

Típicamente, la línea de investigación de FTT procede de la siguiente manera: hace algunas suposiciones para un proceso real para establecer un modelo termodinámico; dada una serie de restricciones, define la trayectoria probable del proceso; resuelve para la trayectoria establecida (o trayectoria óptima) de la variable del proceso especificado para obtener el funcionamiento del proceso definido. Por lo tanto, FTT puede responder algunas preguntas globales mismas que la termodinámica clásica no responde y que la termodinámica irreversible convencional tampoco lo hace debido al punto de vista mi-

microscópico con que trata. Los ejemplos a dichas preguntas son: (1) ¿cuál es la mínima energía requerida por una máquina determinada para producir un trabajo fijo en un tiempo dado? (2) ¿cuál es el máximo trabajo que puede producir una máquina dada en un tiempo establecido, utilizando una energía fija? (3) ¿cuál es la forma más eficiente para operar un proceso termodinámico dado (trayectoria óptima) en tiempo finito? (4) ¿cuál es el proceso óptimo dependiente del tiempo? (5) ¿cuál es la distribución óptima entre superficies de intercambio térmico o las conductancias térmicas correspondientes al funcionamiento óptimo de los dispositivos termodinámicos para un área total de intercambio térmico dada o conductancia térmica total? (6) ¿cuáles son las características cuantitativas y cualitativas de los efectos de resistencias térmicas, irreversibilidades internas, etc., sobre el funcionamiento de procesos y dispositivos termodinámicos?

La Termodinámica de Tiempo Finito es una nueva e independiente disciplina científica que no puede ser simplemente clasificada como una combinación de termodinámica clásica y termodinámica irreversible convencional. La relación entre FTT y la termodinámica irreversible convencional fue discutida recientemente por Verhás y De Vos [94].

1.3 El estado del arte de la Termodinámica de Tiempo Finito.

1.3.1 La máquina térmica con la ley de Newton de transferencia de calor acoplada a depósitos térmicos con capacidad térmica infinita

La Termodinámica Clásica investiga ciclos reversibles, tales ciclos toman tiempo infinito (o área de intercambio térmico infinita) para llevarse a cabo. Así, la tasa de salida promedio de dichos ciclos para el periodo que realiza éste (potencia de salida promedio) se aproxima a cero. El ciclo endorreversible (internamente reversible) es el modelo físico fundamental adoptado en el análisis de FTT. Cuando la sustancia de trabajo de

una máquina térmica realiza un ciclo de Carnot cuasisetático se le llama endorreversible, siempre y cuando se acepte que existe una diferencia finita de temperaturas entre la sustancia de trabajo y los depósitos térmicos. En la mayoría de los estudios se supone que la transferencia de calor entre los depósitos térmicos y la sustancia de trabajo obedece a la Ley de Newton (lineal) y que los depósitos tienen capacidad térmica infinita (de temperatura constante). Los estudios de este tipo de sistemas involucran dos aspectos: el primero es determinar los límites de la función objetivo y la relación entre las funciones objetivo para los sistemas termodinámicos dados, es decir, encontrar los límites de funcionamiento de la Termodinámica de Tiempo Finito; el segundo es determinar el proceso termodinámico óptimo (trayectoria óptima) para la función objetivo establecida. La optimización de objetivos posibles incluye varios criterios de funcionamiento, por ejemplo, trabajo, potencia, eficiencia, rapidez de generación de entropía, costos, potencia específica (potencia promedio para la superficie total de transferencia de calor), densidad de potencia (potencia promedio para el máximo volumen específico en el ciclo) y objetivo ecológico (compromiso entre potencia de salida y generación de entropía).

1.3.2 El objetivo extremo para procesos termodinámicos dados (ciclo teórico)

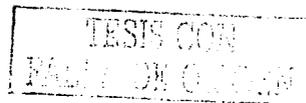
El ciclo teórico se refiere a un ciclo de Carnot endorreversible para distinguirlo de ciclos de interés práctico en ingeniería. Para un proceso termodinámico dado, se pueden determinar las temperaturas del fluido de trabajo y los tiempos óptimos (o áreas de las superficies de transferencia de calor), y obtener los límites de funcionamiento, y la relación óptima fundamental entre eficiencia y potencia de salida. En 1957, Novikov [70], investigó el funcionamiento de una planta de potencia de turbina de gas. Después de señalar las temperaturas óptimas del fluido de trabajo correspondientes a máxima potencia de salida (considerando la existencia de la transferencia de calor debida a diferencias de temperaturas), obtuvo la eficiencia de la planta dada por la Ecuación (1.2). También en 1957, Chambadal [29] llegó al mismo resultado cuando analizó una planta de potencia

activada por un fluido caliente en una sola fase. La fórmula de la eficiencia, Ecuación (1.2), fue redescubierta por Curzon y Ahlborn [50], quienes trataron una máquina de Carnot con potencia de salida limitada por las rapidezces de transferencia de calor hacia y desde la sustancia de trabajo. Luego de optimizar las temperaturas de trabajo correspondientes a la máxima potencia de salida, derivaron la eficiencia a máxima potencia de salida, y obtuvieron la Ecuación (1.2). Por otra parte, Bejan [17] sugirió que la ecuación de eficiencia a máxima potencia de salida, Ecuación (1.2), fuera llamada la eficiencia Novikov-Chambadal-Curzon-Ahlborn (NCCA) (en este trabajo la llamaremos eficiencia CA). El significado relevante de la Ecuación (1.2) es que proporciona la eficiencia límite de una máquina de Carnot a máxima potencia de salida. El modelo de la máquina CA y la eficiencia CA ha sido ya introducida en algunos libros de texto [16], [27].

Rubin [67] determinó la eficiencia máxima η_{max} para un suministro de calor dado, en la que η_{max} es menor que la eficiencia de Carnot, η_C , si el suministro de calor no es cero. La potencia de salida se obtiene al considerar la eficiencia como una función costo. Además de las características de potencia máxima de una máquina térmica [56], también se ha puesto atención a la eficiencia óptima para alguna potencia de salida arbitraria. Yan [104] encontró la relación entre la eficiencia óptima y la potencia de salida óptima para una máquina de Carnot endorreversible. La relación incluye a η_C para $P = 0$ y P_{max} para η_{CA} y es llamada la relación fundamental óptima. Chen y Yan [34] derivaron la relación fundamental óptima de una máquina con una razón de compresión finita.

Además de la potencia y eficiencia como objetivos, Salamon y Nitzan [76] investigaron el funcionamiento óptimo de una máquina de Carnot endorreversible al tomar a la exergía como la función objetivo a optimizar. Sobre la base del trabajo de Salamon [76], en 1990 Chen *et al.* proporcionaron el método de análisis exergoeconómico, usando la combinación de FTT y termodinámica [23], [86], [91] y obtuvieron los límites de funcionamiento exergoeconómico, relaciones óptimas y parámetros de criterios de optimización en tiempo finito. Una idea similar fue proporcionada por De Vos [46], [48].

En 1991, Angulo y Brown [6] introdujeron la función ecológica (E) (relación entre



potencia de salida y la rapidez de generación de entropía) como objetivo. La eficiencia η_E a máxima E es $(\eta_C + \eta_{CA})/2$. Esta es una propiedad general de una máquina térmica utilizando la ley de Newton de transferencia de calor [10], [11].

Sahin *et al.* [84] tomaron la densidad de potencia (razón de la potencia de salida al máximo volumen específico en el ciclo) como la optimización objetivo para investigar el funcionamiento de la máquina de Carnot, entre otras.

1.3.3 Ciclos termodinámicos óptimos sujetos a condiciones dadas

Para obtener el máximo trabajo de salida, potencia de salida o eficiencia para condiciones externas fijas, se necesita especificar las variables de control y sus límites, construir las ecuaciones que describen el fenómeno, buscar las restricciones que son impuestas sobre el sistema, y establecer la función objetivo. Procaccia y Ross [78] concluyeron que en todos los ciclos analizados, un ciclo de Carnot endorreversible con una mayor razón de compresión puede producir máxima potencia, es decir, el ciclo de CA es la configuración óptima teniendo solamente como restricciones a la Primera y Segunda Ley de la termodinámica. Salamon y Nitzan [76] demostraron que el proceso óptimo corresponde a una rapidez constante de transferencia de calor entre el fluido de trabajo y los depósitos térmicos para varias funciones objetivo. Tsirlin, Rozonoer [81] y Kuznetsov *et al.* [63] y Orlov [73] derivaron la configuración termodinámica óptima y la región del ciclo óptimo para una máquina endorreversible con diferentes condiciones de restricción.

1.3.4 Efectos de modelos de pérdidas sobre el funcionamiento óptimo de máquinas térmicas.

En una máquina real no todas las formas de transferencia de calor entre el fluido de trabajo y los depósitos térmicos corresponden a la Ley de Newton, sino que puede existir alguna ley fenomenológica que rige el modo de transferencia de energía y que se presentan a

continuación.

Efectos de modelos de resistencias térmicas (leyes de transferencia de calor)

Se pueden obtener los límites de funcionamiento y la relación fundamental óptima para una máquina térmica endorreversible con diferentes leyes de transferencia de calor. Proccaccia y Ross [78] hallaron la eficiencia límite de una máquina térmica de Carnot con la ley de transferencia de calor $q \propto (\Delta T)^n$, donde n es una constante que depende del tipo de proceso de intercambio de calor. Una gran parte de la literatura ha estudiado las relaciones entre potencia de salida y eficiencia, funcionamiento óptimo ecológico y funcionamiento óptimo exergoeconómico en tiempo finito de máquinas térmicas con (1) transferencia de calor por radiación, (2) transferencia de calor dada por $q \propto (\Delta T)^n$ y (3) leyes mezcladas de transferencia de calor [16], [44].

Efecto de otras irreversibilidades

Andresen *et al.* [5] proporcionaron un formalismo con el que analizaron el funcionamiento de una máquina térmica de Carnot con las irreversibilidades debidas a la resistencia térmica y a la fricción. Fairen y Ross [51] estudiaron el efecto de inercia sobre el funcionamiento y la configuración óptima de una máquina térmica. Richter y Ross [80] investigaron el funcionamiento de una máquina térmica incluyendo a la fricción, la inercia, y Delgado [49] determinó la configuración óptima de este tipo de máquina. En las referencias, [20], [60], [70] se aplicó una constante para representar todas las irreversibilidades presentes en una máquina térmica, incluyendo las pérdidas de calor, la fricción y la debida a efectos disipativos en la sustancia de trabajo, pero excluyendo resistencias térmicas. Basado en el fundamento de modelos específicos para pérdidas de calor introducido por Bejan ([18], [20]), Chen *et al.* [42] derivaron la relación óptima entre potencia de salida y eficiencia, la cual es consistente con el funcionamiento de máquinas reales [54].

1.3.5 Efecto del modelo de depósito térmicos sobre el funcionamiento de una máquina térmica.

Depósitos térmicos de capacidad térmica finita.

En la práctica, la potencia se genera del calor que es transportado a través de una cantidad finita de sustancia de trabajo con capacidad térmica finita y no a través del calor que se extrae de un depósito térmico de capacidad térmica infinita. En la suposición de que los procesos termodinámicos son reversibles, el ciclo termodinámico proporciona el máximo trabajo; por otro lado, si se considera que los depósitos térmicos son de capacidad térmica finita, su eficiencia teórica es considerablemente más pequeña [71]. Para el ciclo endorreversible, la investigación de los efectos de un depósito térmico con capacidad finita sobre el funcionamiento incluye dos aspectos: el primero es determinar el funcionamiento óptimo de ciclos que operan entre depósitos térmicos con capacidad finita, tal como el ciclo de Carnot [58], [105], ciclo Rankine [64], ciclo Brayton [62], etc. La optimización se puede realizar fijando el suministro de calor [105] o con suministro de calor variable [58], [62], [64]. El segundo es encontrar la configuración óptima de esas máquinas térmicas con las condiciones dadas. Por ejemplo: la configuración óptima de una máquina térmica con depósitos térmicos de temperatura constante es la máquina de Curzon-Ahlborn; y la configuración óptima de un sistema con la ley de Newton con depósitos de temperatura variable es una máquina térmica de Carnot endorreversible [72], [103] (donde la temperatura de los depósitos térmicos y del fluido de trabajo varían de manera exponencial como función del tiempo y la razón de las temperaturas del fluido de trabajo y con los depósitos térmicos es una constante). Los estudios han demostrado que la ley de transferencia de calor [104] afecta la configuración óptima.

Band *et al.* [12], [13], Aizebund y Band [4], Aizebund *et al.* [3] y Gordon y Huleihil [55] investigaron el problema de maximizar el trabajo obtenido de un gas ideal calentado por una fuente de calor a una tasa arbitraria en un cilindro con un pistón en movimiento. En este tipo de problemas se utilizó la ley de Newton de transferencia de calor.

Rubin y Andresen [82] hallaron la configuración óptima de una máquina térmica combinada formada por dos máquinas térmicas endorreversibles con depósitos térmicos intermedios. Wu [99] analizó la potencia de salida óptima de plantas de potencia combinadas. El efecto de resistencias térmicas e irreversibilidades internas fue examinado en [75], [83], en donde se estableció un modelo de máquina térmica combinada irreversible generalizada y se derivaron sus características óptimas.

Entre las aplicaciones de la Termodinámica de Tiempo Finito se puede mencionar también a aquellas relacionadas con máquinas de combustión interna. En una máquina convencional de este tipo el pistón se mueve prácticamente bajo una trayectoria sinusoidal. En la referencia [69] la trayectoria del pistón de los ciclos Otto y diesel se optimiza mediante la teoría del control óptimo. La eficiencia y la potencia de salida del ciclo óptimo se incrementarían más del 10 % con respecto a ciclos convencionales, teniendo las mismas irreversibilidades. Existe un gran número de publicaciones concernientes a las irreversibilidades debidas a la transferencia de calor, a la fricción y a la combustión sobre el funcionamiento de los ciclos Otto [41] y Diesel [26].

1.3.6 Estudios para ciclos de refrigeración

Los estudios de la Termodinámica de Tiempo Finito se pueden extender a la investigación de refrigeradores y bombas de calor que operan entre dos y tres depósitos térmicos. El objetivo primordial es establecer los límites de funcionamiento óptimo para este tipo de dispositivos y determinar la relación existente entre la carga de refrigeración y el coeficiente de funcionamiento bajo restricciones de diversa índole (tiempos y tasas de intercambio térmico finitos). Inicialmente los estudios correspondientes con estos dispositivos consideraban irreversibilidades debidas únicamente a la transferencia de calor entre el sistema y los alrededores que operan entre depósitos térmicos de capacidad térmica infinita, posteriormente éstos se extendieron a considerar depósitos térmicos de capacidad térmica finita, incluyendo además efectos disipativos en la sustancia de trabajo. En los párrafos que siguen se mencionan los análisis mencionados.

Leff y Tecter [65] fueron los primeros en extender el análisis de Curzon y Ahlborn [50] a ciclos de refrigeración. Rozonoer *et al* [81] obtuvieron el máximo COP para una potencia de entrada fija para un refrigerador de Carnot (con rapidez de transferencia de calor dadas por la ley de Newton). Yan [101] determinó el COP óptimo (ε) para una carga de refrigeración fija (R), es decir, la relación fundamental óptima. Además, estudió el funcionamiento óptimo cuando (εR) se maximiza. Entre los estudios de FTT se han considerado también aquellos que presentan modelos de pérdidas sobre el funcionamiento de refrigeradores de dos depósitos térmicos, en las referencias [1] y [2] se utiliza un parámetro constante para representar todas las demás irreversibilidades, excepto el de la resistencia térmica para estudiar el efecto de la irreversibilidad interna sobre el funcionamiento del refrigerador. Sobre la base de modelos de pérdidas de calor proporcionadas por Bejan [15], [18], Chen *et al* [35] establecieron un modelo de refrigerador irreversible, el cual involucra las irreversibilidades debidas a las resistencias térmicas, a las pérdidas de calor, y a otras disipaciones internas, y estudiaron el efecto de leyes de transferencia de calor sobre el funcionamiento del modelo generalizado. También se analizaron en las referencias [22] y [36] los efectos de la capacidad térmica finita y de las pérdidas de calor sobre la configuración óptima de refrigeradores de dos depósitos térmicos y sobre el funcionamiento óptimo de un refrigerador de Carnot.

Por otra lado, se han llevado a cabo estudios para refrigeradores prácticos de dos depósitos térmicos. Chen y Yan [30] investigaron la configuración óptima del ciclo de refrigeración, mientras que Chen *et al* [37] estudiaron la optimización de la carga de refrigeración específica del ciclo y analizaron el efecto de las pérdidas de calor sobre el funcionamiento óptimo del ciclo combinado [40]. Sobre la base de introducir irreversibilidades internas [52] se estableció un modelo de ciclo de refrigeración combinado irreversible y también se investigó su funcionamiento óptimo.

Una gran cantidad de trabajos se han publicado sobre la optimización del funcionamiento de refrigeradores de compresión de vapor. De manera destacable se pueden citar algunos [79], [93], en los que se trata la optimización de refrigeradores reales y se

determinan los tiempos óptimos (on/off en inglés) que logran que el coeficiente de funcionamiento sea óptimo. Chen *et al* [39] analizaron el funcionamiento de un ciclo irreversible de refrigeración Brayton acoplado a depósitos térmicos de temperatura variable, en dicho trabajo se hallaron expresiones analíticas de la carga de refrigeración y el COP. Entre los estudios para ciclos de refrigeración por absorción se encuentran los siguientes: Yan [101] estableció el modelo teórico de un refrigerador endorreversible con tres depósitos térmicos, y determinó el COP límite correspondiente a máxima carga de enfriamiento y la relación fundamental óptima entre el coeficiente de funcionamiento y la carga de refrigeración para sistemas con transferencia de calor que siguen la ley de Newton. Parte de la literatura, incluyendo las referencias [95]-[96] estudiaron la optimización de la carga de refrigeración, la optimización de las áreas de la superficie de transferencia de calor, y los efectos de pérdidas de calor e irreversibilidades internas sobre el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador que opera entre tres depósitos térmicos.

Es de destacar que en la actualidad no existen trabajos que analicen sistemas de refrigeración que operan entre tres depósitos térmicos de capacidad térmica finita, y que además consideren irreversibilidades entre el sistema y los alrededores así como aquellas que son internas al sistema (efectos disipativos). Es por ello que es necesario plantear el efecto que tienen dichas variables sobre el funcionamiento de estas máquinas térmicas, lo que conducirá a obtener parámetros de funcionamiento que se apegan más al caso de máquinas térmicas reales. En las secciones siguientes se resuelve el problema de la optimización termodinámica de un refrigerador que opera entre tres depósitos térmicos con capacidades térmicas finitas, teniendo como hipótesis de trabajo las concernientes con la Termodinámica de Tiempo Finito, tales como considerar que dicho ciclo opera en tiempos finitos y con rapidez de transferencia de calor finitas.

Para llevar a cabo el presente análisis, el trabajo se divide en dos partes, en la primera se estudia el sistema de refrigeración endorreversible de tres depósitos térmicos con capacidades térmicas finitas, y que considera exclusivamente el efecto que tienen las irreversibilidades debidas a la transferencia de calor entre el sistema y los alrededores en

el coeficiente de funcionamiento; en la segunda, se determina la optimización termodinámica del refrigerador no-endorreversible, tomando en cuenta en este último caso que existen irreversibilidades entre el sistema y los alrededores así como también dentro de la sustancia de trabajo, con la salvedad de que este sistema opera entre depósitos de capacidad térmica infinita.

Parte I

Modelo endorreversible

Capítulo 2

Sistema combinado equivalente de un refrigerador endorreversible con tres depósitos térmicos.

Como se mencionó, un refrigerador por ecyecto-compresión puede funcionar con fuentes de energía de desecho o energía solar, mismo que para operar requiere de tres depósitos térmicos. Para obtener el coeficiente de funcionamiento de dicho sistema de refrigeración se ha hecho uso de la termodinámica clásica y siendo ésta una herramienta que considera procesos reversibles, el valor que se obtiene de éste es altamente idealizado. Por este motivo algunos autores ([31] y [100]) se han planteado el problema de determinar el coeficiente de funcionamiento de un sistema de refrigeración que opera entre tres depósitos térmicos, en analogía al sistema por ecyecto-compresión, utilizando un sistema termodinámico equivalente, Figura 2, propuesto por Van Wylen [92]. Sin embargo, en tales estudios consideran que los depósitos térmicos son de capacidad térmica infinita e internamente reversibles, es por esta razón que en este trabajo se plantea determinar el coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador endorreversible bajo ciertas condiciones establecidas que se mencionaran posteriormente, lo que conducirá a obtener un coeficiente de funcionamiento más apegado a la realidad; es necesario mencionar que para llevar a

cabo esta tarea la optimización se realizará mediante técnicas de la Termodinámica de Tiempo Finito, las que se puntualizarán en las secciones siguientes.

Como primer paso se determinará el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador que opera entre tres depósitos térmicos. Considérese un refrigerador endorreversible que opera con tres depósitos térmicos de capacidades térmicas finitas C_{hw} , C_a , C_{cr} y temperaturas iniciales T_{0hw} , T_{0a} , T_{0cr} ($T_{0hw} > T_{0a} > T_{0cr}$), como se muestra en la Figura 3.

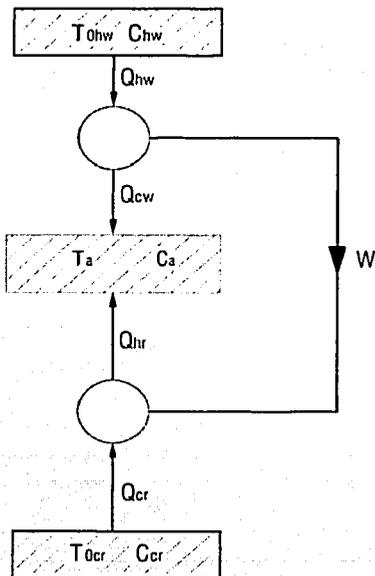


Figura 3. Refrigerador endorreversible de tres depósitos térmicos de capacidades térmicas finitas.

De acuerdo a la primera ley de la termodinámica se tiene que:

$$Q_{hw} + Q_{cr} = Q_a, \quad (2.1)$$

de la Figura 3 Q_a está definido como $Q_a = Q_{cw} + Q_{hr}$. Considerando la segunda ley de la termodinámica, el cambio de entropía para un ciclo reversible se puede escribir como:

$$\Delta S = \frac{Q_{hw}}{T_{0hw}} + \frac{Q_{cr}}{T_{cr}} - \frac{Q_a}{T_{0a}} = 0 \quad (2.2)$$

Al dividir la Ecuación (2.1) por T_{0a} se tiene

$$\frac{Q_{hw}}{T_{0a}} + \frac{Q_{cr}}{T_{0a}} = \frac{Q_a}{T_{0a}} \quad (2.3)$$

y sustituyendo esta última ecuación en la Ecuación (2.2) se llega a:

$$\frac{Q_{hw}}{T_{0hw}} + \frac{Q_{cr}}{T_{0cr}} = \frac{Q_{hw}}{T_{0a}} + \frac{Q_{cr}}{T_{0a}}, \quad (2.4)$$

de donde se obtiene

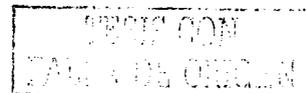
$$Q_{hw} \left(\frac{1}{T_{0hw}} - \frac{1}{T_{0cr}} \right) = Q_{cr} \left(\frac{1}{T_{0a}} - \frac{1}{T_{0cr}} \right), \quad (2.5)$$

misma que se puede escribir como:

$$\psi_C = \frac{Q_{hw}}{Q_{cr}} = \left(1 - \frac{T_{0a}}{T_{0hw}} \right) \left(\frac{T_{0cr}}{T_{0a} - T_{0cr}} \right). \quad (2.6)$$

La Ecuación (2.6) representa el coeficiente de funcionamiento (ψ_C) de un refrigerador de Carnot reversible que opera entre tres depósitos térmicos. Atendiendo la Ecuación (2.6), se observa que ésta es el producto de la eficiencia de una máquina térmica de Carnot y del coeficiente de funcionamiento de un refrigerador de Carnot, ambos reversibles.

De la fórmula (2.6), válida para un refrigerador que opera entre tres depósitos térmicos



cos, es factible que un refrigerador endorreversible de tres depósitos térmicos se pueda concebir como un sistema combinado, como lo demostraron Yan y Chen [100] para el caso de depósitos térmicos con capacidades térmicas infinitas. En este caso el refrigerador es activado por una máquina térmica, considerando que el único efecto de irreversibilidad se debe a la transferencia de calor entre el fluido de trabajo y los depósitos térmicos. Por lo tanto, el refrigerador endorreversible de tres depósitos térmicos con capacidades térmicas finitas se puede representar como un sistema combinado que consiste de una máquina térmica de Carnot endorreversible que activa a un refrigerador de Carnot endorreversible (Figura 4).

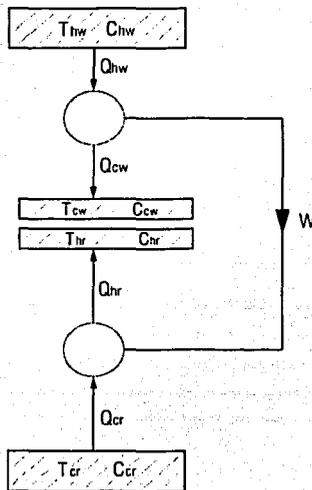


Figura 4. Sistema combinado equivalente del refrigerador endorreversible de tres depósitos térmicos, compuesto por una máquina térmica y un refrigerador endorreversible.

En los párrafos siguientes, siguiendo el procedimiento desarrollado por Chen [31],

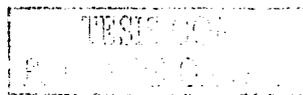
se supone que la máquina térmica y el refrigerador operan de manera alternada para el sistema de refrigeración combinado, es decir, la máquina térmica lleva a cabo un ciclo termodinámico durante un tiempo total τ_w y produce una cantidad de trabajo W , durante este ciclo termodinámico se suministra una cantidad de calor Q_{hw} a la máquina térmica y libera una cantidad de calor Q_a al depósito de baja temperatura; mientras esto sucede, el refrigerador permanece inactivo. Después de que la máquina térmica ha realizado el ciclo termodinámico, el subsistema de refrigeración se activa gracias a que se le suministra el trabajo W producido por la máquina térmica, éste ejecuta un ciclo termodinámico durante un tiempo τ_r , extrayendo del depósito de baja temperatura una cantidad de calor Q_{cr} y desechando una cantidad de calor Q_a . Por lo tanto se puede establecer que la duración total del ciclo termodinámico, τ , del sistema de refrigeración combinado se puede expresar como

$$\tau = \tau_w + \tau_r. \quad (2.7)$$

En este problema, por simplicidad, se asumirá que el tiempo total del ciclo τ permanece constante siendo esto una restricción para la solución del problema, aunque de manera general puede ser variable. Por lo que respecta a los tiempos parciales para cada ciclo τ_w y τ_r , éstos son variables. Para este caso, teniendo en cuenta la Ecuación (2.6), el coeficiente de funcionamiento del sistema endorreversible combinado, ψ_C , se puede expresar como [31]

$$\psi = \frac{Q_{cr}}{Q_{hw}} = \frac{W}{Q_{hw}} \frac{Q_{cr}}{W} = \eta \cdot \varphi, \quad (2.8)$$

donde η y φ son la eficiencia de una máquina de Carnot endorreversible y el coeficiente de un refrigerador de Carnot endorreversible, respectivamente. Q_{hw} y Q_{cr} son los calores absorbidos de los depósitos a temperaturas T_{0hw} y T_{0cr} por el fluido de trabajo por cada ciclo y W es el trabajo que se extrae de la máquina térmica y suministrado al refrigerador endorreversible. De la Ecuación (2.8) se percibe que cuando η y φ son óptimos, ψ también resulta óptima. De esta manera, la fórmula anterior sugiere que se deben establecer los



valores óptimos de η y φ .

De acuerdo al procedimiento de optimización desarrollado por Chen et al [31], teniendo como restricciones a la duración τ_r del ciclo termodinámico y la cantidad de calor removido Q_{cr} desde el depósito de baja temperatura, el coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador de Carnot endorreversible que opera entre dos depósitos térmicos con capacidades térmicas finitas C_{cr} y C_{hr} , y temperaturas iniciales $T_{0cr} < T_{0hr}$ es [22], puede escribirse como:

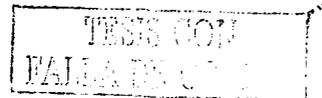
$$\varphi = \frac{Q_{cr}}{C_{hr}T_{0hr} \left\{ \exp \left[\frac{\frac{C_{cr}}{C_{hr}} \ln \left(\frac{C_{cr}T_{0cr}}{C_{cr}T_{0cr} - Q_{cr}} \right)}{1 - \frac{C_{cr}}{K_r \tau_r} \ln \left(\frac{C_{cr}T_{0cr}}{C_{cr}T_{0cr} - Q_{cr}} \right)} \right] - 1 \right\} - Q_{cr}}, \quad (2.9)$$

donde $K_r = \alpha_{cr}\alpha_{hr} / (\sqrt{\alpha_{cr}} + \sqrt{\alpha_{hr}})^2$, y representa una conductancia global equivalente del refrigerador endorreversible. α_{cr} y α_{hr} son las conductancias térmicas entre el fluido de trabajo y los depósitos de baja y alta temperatura, respectivamente. Similarmente, para una máquina térmica de Carnot endorreversible que opera entre dos depósitos térmicos con capacidades térmicas finitas C_{hw} y C_{cw} , y temperaturas iniciales $T_{0hw} > T_{0cw}$, que ejecuta un ciclo termodinámico en un tiempo τ_w fijo y suministrando a ésta una cantidad de calor Q_{hw} , su eficiencia térmica óptima está dada por [22]:

$$\eta = 1 - \frac{C_{cw}T_{0cw} \left\{ \exp \left[\frac{-\frac{C_{hw}}{C_{cw}} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0hw}} \right)}{1 + \frac{C_{hw}}{K_w \tau_w} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0hw}} \right)} \right] - 1 \right\}}{Q_{hw}}, \quad (2.10)$$

donde $K_w = \alpha_{hw}\alpha_{cw} / (\sqrt{\alpha_{hw}} + \sqrt{\alpha_{cw}})^2$, representa la conductancia global equivalente de la máquina térmica endorreversible. α_{hw} y α_{cw} son las conductancias térmicas entre el fluido de trabajo y los depósitos de alta y baja temperatura, respectivamente.

Para estimar el coeficiente de funcionamiento óptimo del sistema de refrigeración



combinado se hará uso de técnicas del cálculo de variaciones y teoría del control óptimo [22] (apéndice A), en este tipo de problemas se busca la solución de un problema dinámico continuo en el tiempo que es una función continua (o un conjunto de funciones) que indica la trayectoria óptima que deben seguir las variables a través del tiempo (o el espacio). Como una breve introducción, se puede decir que el cálculo de variaciones es una rama de las matemáticas que se puede definir como una teoría general sobre los valores extremos de una funcional. El origen de esta herramienta se remonta al problema clásico de la braquistócrona que trata de determinar, si un objeto pequeño se mueve bajo la influencia de la gravedad, cuál es la trayectoria que debe seguir entre dos puntos fijos para llevar a cabo el viaje en el menor tiempo posible. Otros tipos de problemas que se pueden resolver mediante esta técnica son: el problema de superficie mínima de revolución, esto es, dados dos puntos en un plano, unirlos mediante una curva de tal forma que la superficie generada por la rotación de esta curva a lo largo del eje tenga la menor área posible.

El problema general del cálculo de variaciones se plantea como: determinar los valores extremos de una funcional donde dicha funcional es una función de otra función.

Un ejemplo de una funcional es:

$$I = I[y(x)]$$

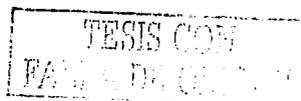
donde el argumento es la función $y(x)$.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx$$

Se debe hallar la función que haga que la funcional I sea óptima.

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f[y(x)] dx$$

donde I es una función que depende de una función argumento y una variable independiente (en el caso del problema unidimensional), f es una función conocida. Se desea



calcular el valor extremo de I , para lo cual se deberá encontrar el valor particular de $y(x)$ que optimice I .

La relación que existe entre esta teoría y la presente investigación es que se tienen que determinar ciertas funciones óptimas (el coeficiente de funcionamiento y la eficiencia térmica) sujetas a ciertas restricciones, como son los tiempos fijos de cada ciclo y las cantidades de calor transferidas fijas en determinadas etapas de los ciclos termodinámicos correspondientes.

Para resolver problemas variacionales con restricciones existen dos clases de procedimientos, uno de ellos es el de los multiplicadores de Lagrange (ver apéndice); es por ello que para determinar el coeficiente de funcionamiento óptimo se selecciona la Ecuación (2.8) como una función objetivo y junto con la restricción de que el tiempo total τ del sistema combinado es fijo dado por la Ecuación (2.7), se tiene la siguiente función de Lagrange:

$$L(\tau_w, \tau_r) = \psi(\tau_w, \tau_r) + \lambda(\tau - \tau_w - \tau_r), \quad (2.11)$$

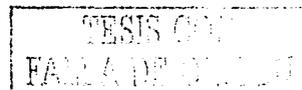
y el modelo matemático se puede resolver mediante el uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange. En la Ecuación (2.11) las variables independientes son τ_w y τ_r .

En la siguiente sección se plantean los aspectos teóricos de optimización para una máquina térmica y un refrigerador (ambos endorreversibles) que trabajan entre depósitos térmicos de capacidad térmica finita.

2.1 Límites de funcionamiento de una máquina térmica con dos depósitos térmicos

2.1.1 El modelo matemático

Considérese una máquina térmica como la mostrada en la Figura 5, que opera entre dos depósitos térmicos con temperaturas T_{hw} y T_{cw} ($T_{hw} > T_{cw}$) y una sustancia de trabajo,



la cual puede estar en contacto térmico con esos depósitos de tal suerte que la energía en forma de calor se transfiera a (o se extrae desde) la sustancia de trabajo. Los flujos de energía dependen de la temperatura T de la sustancia de trabajo y de la temperatura de los depósitos térmicos:

$$Q_{hw} = Q_{hw}(T_{hw}, T), \quad Q_{cw} = Q_{cw}(T_{cw}, T) \quad (2.12)$$

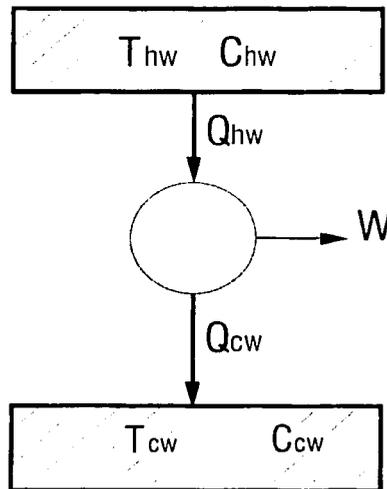


Figura 5. Máquina térmica de Carnot endorreversible de dos depósitos térmicos de capacidad térmica finita.

El estado termodinámico de la sustancia de trabajo cambia cíclicamente de tal forma que ésta realiza un trabajo W durante un tiempo τ_w de su ciclo. El proceso toma lugar durante un tiempo determinado y también puede variar en el espacio, sin embargo en este trabajo no se consideran estas variaciones, pues el problema se dificulta en gran medida, lo que daría pie a que se tuvieran que resolver las ecuaciones de movimiento en la sustancia de trabajo. El estado de la sustancia de trabajo se puede describir mediante su entropía s y su energía interna E , que cambian de acuerdo a las ecuaciones

$$\dot{S} = \frac{1}{T} \dot{Q}_r(T_r, T), \quad (2.13)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dq_r(T_r, T)}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{dq_r(T_r, T)}{dt} - P(t), \quad (2.14)$$

donde $T_r = T_{hw}$ ó T_{cw} , y $P(t)$ es la potencia, t es el tiempo

$$\dot{Q}(T_r, T) = \begin{cases} \dot{Q}_{hw}(T_{hw}, T), & \text{para } T_{hw} > T, \\ \dot{Q}_{cw}(T_{cw}, T) & \text{para } T_{cw} < T. \end{cases} \quad (2.15)$$

Las condiciones cíclicas impuestas sobre el estado de la sustancia de trabajo requieren que el cambio de entropía en un ciclo internamente reversible sea igual a cero, así como el cambio en la energía interna también:

$$\int_0^{\tau_w} \frac{1}{T} \dot{Q}(T_r, T) dt = \tau_w \overline{\left(\frac{\dot{Q}}{T}\right)} = 0, \quad (2.16)$$

$$\int_0^{\tau_w} [\dot{Q}(T_r, T) - P] dt = \tau_w (\bar{Q} - \bar{W}) = 0. \quad (2.17)$$

En las condiciones anteriores la barra sobre las variables significa que éstas son promediadas en el tiempo, esto es, para cualquier función f el promedio temporal se define

como:

$$\bar{f} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt; \quad (2.18)$$

y \bar{P} es la potencia promedio de la máquina térmica,

$$\bar{P} = \frac{W}{\tau_w}. \quad (2.19)$$

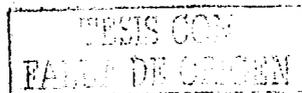
La suposición de que las temperaturas T_r de los depósitos térmicos no cambian es equivalente a que éstos tienen capacidad térmica infinita, en caso contrario son de capacidad térmica finita; es decir, si se aplica la primera ley de la termodinámica a un depósito térmico, por ejemplo al de alta temperatura, se tiene que:

$$\frac{q_{hw}}{C_{hw}} = -\frac{dT_{hw}}{dt}$$

de donde claramente se aprecia que cuando $C_{hw} \rightarrow \infty$ el cociente $Q_{hw}/C_{hw} \rightarrow 0$, lo que indica que T_{hw} permanece constante.

Para el análisis de máquinas térmicas existen algunos problemas de optimización asociados con éstas; como puede ser el caso de potencia máxima, P_{\max} , ó la obtención de la eficiencia térmica máxima $\eta_{\max} = (W/Q_{hw})$, donde Q_{hw} es el calor removido desde el depósito de alta temperatura durante un ciclo. Las variables cuyos valores óptimos se obtienen en ambos problemas son las temperaturas de la sustancia de trabajo $T(t)$ y de los depósitos térmicos $T_r(t)$. Se supone que la duración del ciclo τ es fija. En este tipo de problemas, las temperaturas óptimas proporcionan los límites superiores para P y η . En dicha situación la eficiencia que se obtiene corresponde al funcionamiento de un sistema con procesos irreversibles. Esto significa que la eficiencia obtenida por medio de un análisis con restricciones de tiempo finito es mucho más cercano a la realidad que la que se obtiene con un sistema reversible, tal como ocurre con la estimación de la eficiencia de Carnot.

En termodinámica clásica, aquellos ciclos que producen máxima eficiencia térmica



de un sistema con depósitos de capacidad térmica finita son llamados ciclos de Lorentz [22], [86]. En esta sección, el problema de Lorentz se generaliza para describir ciclos con duración finita τ_w y capacidad térmica finita de los depósitos térmicos.

Habiendo descrito en párrafos anteriores el modelo matemático para resolver problemas de optimización termodinámica a continuación se describe de manera particular los problemas citados, máximo trabajo y eficiencia máxima; el criterio de optimización para el problema de máximo trabajo está dado por

$$W = \int_0^{\tau_w} \dot{Q}(T_r, T) dt = (Q_{hw} - Q_{cw}) \rightarrow max, \quad (2.20)$$

y para el problema de máxima eficiencia

$$\eta = \frac{W}{Q_{hw}} = 1 - \frac{Q_{cw}}{Q_{hw}} \rightarrow max, \quad (2.21)$$

sujeta a la obtención de trabajo fijo W_0 por cada ciclo

$$Q_{hw} - Q_{cw} = W_0 \quad (2.22)$$

Como es claro, para la duración fija del ciclo τ_w , el máximo W corresponde a la máxima potencia $P = (W/\tau_w)$ y el trabajo fijo W_0 corresponde a la potencia fija $P = W_0/\tau_w$.

A continuación se presenta el esquema para resolver problemas de optimización termodinámica cuando se tiene una ley arbitraria de transferencia de calor entre la sustancia de trabajo y los depósitos térmicos, posteriormente se aplicará este esquema al problema de un sistema que obedece a la ley de transferencia de calor lineal y coeficientes de transferencia de calor α_{hw} y α_{cw} para el contacto térmico entre los depósitos de alta y baja temperatura con la sustancia de trabajo. El esquema para la solución de este tipo de problemas, en general, es como sigue:

a) Se obtienen los valores de las variables que optimizan el proceso durante la etapa de intercambio térmico entre la sustancia de trabajo y el depósito de alta temperatura; estas

variables son: el tiempo óptimo t_{hw} de intercambio térmico, la temperatura óptima que debe alcanzar el depósito térmico al final de esta etapa y el cambio de entropía durante esta etapa del ciclo termodinámico.

b) De manera similar al inciso a) se optimiza la etapa de baja temperatura del ciclo, donde la sustancia de trabajo libera calor hacia el depósito de baja temperatura.

c) Finalmente se acoplan las porciones optimizadas del ciclo combinado determinando los parámetros que satisfacen el criterio de optimización global (eficiencia máxima o trabajo máximo).

Para llevar a cabo la optimización termodinámica se supone que las temperaturas iniciales y finales de los depósitos térmicos son constantes durante la optimización de las etapas de alta y baja temperatura; por lo tanto el máximo trabajo corresponde a la mínima rapidez del cambio de entropía. De acuerdo a Tsirlin *et al* [22], la necesidad de que el incremento de la entropía total sea mínima ΔS_{sist} se puede reemplazar con el requerimiento de que el incremento de entropía en la etapa de alta temperatura del ciclo sea un mínimo y en la porción de baja temperatura del ciclo sea un máximo.

El incremento de las entropías se puede escribir como la suma de los incrementos de las entropías de la sustancia de trabajo y los depósitos

2.2 Solución del problema de máxima eficiencia para Q_{hw} dado.

Para el análisis de optimización del presente modelo, la máquina térmica endorreversible con depósitos de capacidad térmica finita se divide en dos etapas, una de alta y otra de baja temperatura, que posteriormente serán acopladas. En cada una de ellas, se desarrolla un procedimiento de optimización apropiado basado en el método de los multiplicadores de Lagrange (ver apéndice), y al resolver cada etapa, la eficiencia se puede calcular

mediante la expresión:

$$\eta = \frac{Q_{hw} - Q_{cw}}{Q_{hw}} = 1 - \frac{Q_{cw}}{Q_{hw}} = 1 - \frac{\alpha_{cw} (T_{cw} - T) t_{cw}}{Q_{hw}} \quad (2.23)$$

Por lo tanto, se puede suponer el siguiente criterio de optimización para la máquina térmica: de la Ecuación (2.23) se observa que la eficiencia es máxima cuando se minimiza la cantidad de calor Q_{cw} para un valor fijo del calor absorbido desde el depósito térmico de alta temperatura, lo anterior se logra siempre y cuando se conozca la temperatura del depósito térmico T_{cw} y de la sustancia de trabajo T , ambas óptimas. El problema se puede optimizar considerando los cambios de entropía en cada etapa basándonos en el siguiente criterio:

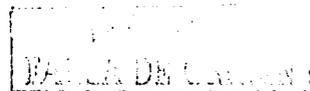
2.2.1 Etapa de alta temperatura

Se considera que la duración de la etapa de alta temperatura del ciclo es t_{hw} y la temperatura correspondiente al final de esta etapa es $\bar{T}_{hw} = T_{hw}(t_{hw})$. Si se consideran valores fijos de la temperatura inicial del depósito térmico, T_{0hw} y de la temperatura \bar{T}_{hw} , esto resulta equivalente a fijar la cantidad de calor Q_{hw} transferido a la sustancia de trabajo, ya que $Q_{hw} = C_{hw} (\bar{T}_{hw} - T_{hw0})$. Por otro lado, el cambio de entropía total, ΔS , en el ciclo termodinámico analizado se puede escribir como:

$$\Delta S = \Delta S_{hw} - \Delta S_{cw}, \quad (2.24)$$

y el proceso será óptimo cuando ΔS sea un mínimo. Esto último sucede cuando se minimiza ΔS_{hw} y se maximiza ΔS_{cw} . Por tal motivo, para la etapa de alta temperatura se plantea el siguiente problema:

$$\Delta S_{hw} = \int_0^{t_{hw}} \frac{q_{hw}(T_{hw}, T)}{T} dt \rightarrow \min, \quad (2.25)$$



sujeto a las restricciones

$$\int_0^{t_{hw}} q_{hw}(T_{hw}, T) dt = Q_{hw}, \quad (2.26)$$

$$\frac{dT_{hw}}{dt} = -\frac{q_{hw}(T_{hw}, T)}{C_{hw}}, T_{hw}(0) = T_{0hw}. \quad (2.27)$$

Aquí se minimiza el incremento de la entropía de la sustancia de trabajo (o fluido de trabajo en una máquina típica), en lugar del incremento de entropía del sistema entero.

En las Ecuaciones (2.25)-(2.27) se considera que la temperatura de la sustancia de trabajo es una variable de control en el problema. Ya que la temperatura del depósito $T_{hw}(t)$ depende monótonicamente del tiempo t , se puede reemplazar la variable independiente t del problema como

$$dt = -\frac{C_{hw}}{q_{hw}} dT_{hw}, \quad (2.28)$$

y sustituyendo la definición anterior en el problema (2.25)-(2.27), el problema matemático se transforma en

$$\Delta S_{hw} = \int_{T_{hw}}^{T_{0hw}} \frac{C_{hw}}{T} dT_{hw}, \quad (2.29)$$

$$Q_{hw} = \int_{T_{hw}}^{T_{0hw}} C_{hw} dT_{hw}, \quad (2.30)$$

y

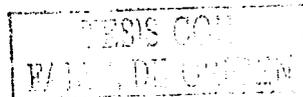
$$t_{hw} = \int_{T_{hw}}^{T_{0hw}} -\frac{C_{hw}}{q_{hw}(T_{hw}, T)} dT_{hw} \quad (2.31)$$

La función de Lagrange, L_{hw} , del problema (2.29)-(2.31) se puede escribir como

$$L_{hw} = \frac{C_{hw}}{T} + \lambda_{1h} C_{hw} + \lambda_{2h} \frac{C_{hw}}{q_{hw}(T_{hw}, T)}, \quad (2.32)$$

donde λ_{1h} y λ_{2h} son multiplicadores de Lagrange, y para este caso son constantes por tener restricciones integrales.

De acuerdo al método de los multiplicadores de Lagrange, la condición estacionaria



de esta función sobre T es

$$\frac{\partial L_{hw}}{\partial T} = -\frac{C_{hw}}{T^2} - \lambda_{2h} \frac{C_{hw}}{(q_{hw})^2} \frac{\partial q_{hw}}{\partial T} = 0 \quad (2.33)$$

ó bien:

$$\frac{T^2}{(q_{hw})^2} \frac{\partial q_{hw}}{\partial T} = -\lambda_{2h} = \text{constante}, \quad (2.34)$$

donde $q_{hw} = \alpha_{hw} (T_{hw} - T)$, y α_{hw} es constante (el coeficiente de transferencia de calor de la superficie neta de intercambio térmico). De la Ecuación (2.34), y de la definición de q_{hw} se tiene que:

$$\frac{T}{T_{hw}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\lambda_{2h}}{\alpha_{hw}}}} = m_{hw} < 1; \quad T = m_{hw} T_{hw}. \quad (2.35)$$

De la Ecuación (2.35) se establece que el parámetro m_{hw} representa la razón de las temperaturas de la sustancia de trabajo a la del depósito térmico en la etapa de alta temperatura, y permanece constante cuando el proceso es óptimo. En este caso la temperatura de la sustancia de trabajo debe ser menor a la del depósito térmico, por tal motivo se establece que el parámetro m_{hw} debe ser menor que uno.

Sustituyendo la Ecuación (2.35) en las Ecuaciones (2.29) y (2.31) se obtienen los valores de ΔS_{hw} y t_{hw} en términos de m_{hw} , respectivamente:

$$\Delta S_{hw} = \frac{C_{hw}}{m_{hw}} \ln \frac{T_{0hw}}{T_{hw}} \quad (2.36)$$

y

$$t_{hw} = \frac{C_{hw}}{\alpha_{hw} (1 - m_{hw})} \ln \frac{T_{0hw}}{T_{hw}} \quad (2.37)$$

En las ecuaciones anteriores la constante m_{hw} es desconocida, ya que si se observa la Ecuación (2.35) se nota que la temperatura de la sustancia de trabajo T aún es una incógnita misma que depende de dicho parámetro. La determinación de m_{hw} se tiene que determinar posteriormente al llevar a cabo el acoplamiento de las etapas de baja y alta

temperatura.

2.2.2 Etapa de baja temperatura

De manera similar al caso de la etapa de alta temperatura se establece el siguiente problema para la etapa de baja temperatura del ciclo: de la Ecuación (2.24) se estableció que para minimizar el cambio total de la entropía del ciclo se debe satisfacer la condición de que el cambio de entropía en la etapa de alta temperatura sea un mínimo y para la etapa de baja temperatura sea un máximo, por lo tanto se tiene que:

$$\Delta S_{cw} = \int_0^{t_{cw}} \frac{q_{cw}(T, T_{cw})}{T} dt \rightarrow max \quad (2.38)$$

sujeto a las restricciones

$$\int_0^{t_{cw}} q_{cw}(T, T_{cw}) dt = Q_{cw}, \quad (2.39)$$

$$\frac{dT_{cw}}{dt} = \frac{q_{cw}(T, T_{cw})}{C_{cw}}, T_{cw}(0) = T_{0cw}. \quad (2.40)$$

Si se considera que la variable independiente del problema es el tiempo t y que la temperatura del depósito térmico depende monotónicamente en esta variable, se puede usar el siguiente cambio de variable mediante la Ecuación (2.40)

$$dt = \frac{C_{cw}}{q_{cw}} dT_{cw} \quad (2.41)$$

entonces el problema (2.38)-(2.40) se puede reescribir como:

$$\Delta S_{cw} = \int_{T_{0cw}}^{\bar{T}_{cw}} \frac{C_{cw}}{T} dT_{cw} \rightarrow max, \quad (2.42)$$

junto con

$$t_{cw} = \int_{T_{0cw}}^{\bar{T}_{cw}} \frac{C_{cw}}{q_{cw}(T, T_{cw})} dT_{cw} \quad (2.43)$$

y

$$Q_{cw} = \int_{T_{0cw}}^{\bar{T}_{cw}} C_{cw} dT_{cw} \quad (2.44)$$

Para este caso la función de Lagrange, R_{cw} , para el problema (2.42)-(2.44) puede escribirse como:

$$L_{cw} = \frac{C_{cw}}{T} + \lambda_{1c} C_{cw} + \lambda_{2c} \frac{C_{cw}}{q_{cw}}, \quad (2.45)$$

y la condición estacionaria de esta función en T está dada por

$$\frac{\partial L_{cw}}{\partial T} = -\frac{C_{cw}}{T^2} - \lambda_{2c} \frac{C_{cw}}{q_{cw}^2} \frac{\partial q_{cw}}{\partial T} = 0 \quad (2.46)$$

que se puede reescribir como:

$$\frac{T^2}{q_{cw}^2} \frac{\partial q_{cw}}{\partial T} = -\lambda_{2c}, \quad (2.47)$$

donde $q_{cw} = \alpha_{cw} (T - T_{cw})$, α_{cw} es la conductancia térmica en la etapa de baja temperatura entre la sustancia de trabajo y el depósito térmico. De la condición estacionaria, Ecuación (2.47), y de la definición de q_{cw} , se tiene

$$\frac{T}{T_{cw}} = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{2c}}{\alpha_{cw}}}} = m_{cw} > 1, \quad T = m_{cw} T_{cw}, \quad (2.48)$$

donde m_{cw} es una constante y representa la razón de la temperatura de la sustancia de trabajo a la temperatura del depósito de baja temperatura, además debe ser mayor que la unidad puesto que en esta etapa $T > T_{cw}$. Esta constante tiene que ser determinada de tal manera que satisfaga las condiciones de optimización; sustituyendo la Ecuación (2.48) en las Ecuaciones (2.42) y (2.43) se puede fácilmente obtener el cambio de entropía y duración del proceso óptimos, esto es:

$$\Delta S_{cw} = \frac{C_{cw}}{m_{cw}} \ln \frac{\bar{T}_{cw}}{T_{0cw}} \quad (2.49)$$

y

$$t_{cw} = -\frac{C_{cw}}{\alpha_{cw}(1-m_{cw})} \ln \frac{\bar{T}_{cw}}{T_{0cw}}. \quad (2.50)$$

Análogamente al caso de la etapa de alta temperatura, en las Ecuaciones (2.49) y (2.50) la constante m_{cw} es aún desconocida y se tiene que determinar del acoplamiento de las etapas parciales de alta y baja temperatura.

2.2.3 Acoplamiento de los ciclos parciales

Para el ciclo termodinámico de la máquina térmica se pretende que la eficiencia térmica sea máxima para valores fijos de Q_{hw} . Lo anterior se logra minimizando Q_{cw} , lo que es equivalente a determinar la temperatura óptima del depósito térmico de baja temperatura al final del proceso en la etapa correspondiente. El problema del acoplamiento óptimo de los ciclos parciales adquiere la forma de cuatro ecuaciones simultáneas, teniendo en cuenta las Ecuaciones (2.36), (2.37), (2.49) y (2.50), junto con la condición de que Q_{cw} debe ser mínimo. Lo anterior es equivalente a resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$Q_{cw} = C_{cw} (\bar{T}_{cw} - T_{0cw}) \rightarrow \min, \quad (2.51)$$

sujeto a las restricciones:

$$t_{cw} + t_{hw} = \frac{C_{cw}}{\alpha_{cw}(1-m_{cw})} \ln \frac{T_{0cw}}{\bar{T}_{cw}} + \frac{C_{hw}}{\alpha_{hw}(1-m_{hw})} \ln \frac{T_{0hw}}{\bar{T}_{hw}} = \tau_w, \quad (2.52)$$

$$\Delta S_{hw} - \Delta S_{cw} = \frac{C_{hw}}{m_{hw}} \ln \frac{T_{0hw}}{\bar{T}_{hw}} + \frac{C_{cw}}{m_{cw}} \ln \frac{T_{0cw}}{\bar{T}_{cw}} = 0, \quad (2.53)$$

y

$$\bar{T}_{hw} = T_{0hw} - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}}, \quad (2.54)$$

donde los parámetros desconocidos m_{hw} , m_{cw} , t_{hw} y t_{cw} son parte del problema. La función de Lagrange para el sistema de Ecuaciones (2.51)-(2.54) viene dado por la siguiente

expresión:

$$L_w = C_{cw} [\bar{T}_{cw} - T_{0cw}] \quad (2.55)$$

$$+ \lambda_1 \left[\frac{C_{cw}}{\alpha_{cw} (1 - m_{cw})} \ln \frac{T_{0cw}}{\bar{T}_{cw}} + \frac{C_{hw}}{\alpha_{hw} (1 - m_{hw})} \ln \frac{T_{0hw}}{\bar{T}_{hw}} \right] \quad (2.56)$$

$$+ \lambda_2 \left[\frac{C_{hw}}{m_{hw}} \ln \frac{T_{0hw}}{\bar{T}_{hw}} + \frac{C_{cw}}{m_{cw}} \ln \frac{T_{0cw}}{\bar{T}_{cw}} \right]$$

y la condición estacionaria con respecto a m_{cw} y m_{hw} conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial L_w}{\partial m_{cw}} = \frac{\lambda_1 C_{cw}}{\alpha_{cw} (1 - m_{cw})^2} \ln \frac{T_{0cw}}{\bar{T}_{cw}} - \frac{\lambda_2 C_{cw}}{m_{cw}^2} \ln \frac{T_{0cw}}{\bar{T}_{cw}} = 0 \quad (2.57)$$

$$\frac{\partial L_w}{\partial m_{hw}} = \frac{\lambda_1 C_{hw}}{\alpha_{hw} (1 - m_{hw})^2} \ln \frac{T_{0hw}}{\bar{T}_{hw}} - \frac{\lambda_2 C_{hw}}{m_{hw}^2} \ln \frac{T_{0hw}}{\bar{T}_{hw}} = 0, \quad (2.58)$$

y resolviendo simultáneamente estas últimas ecuaciones se obtiene que:

$$\frac{m_{cw}}{m_{hw}} = \frac{m_{cw} - 1}{1 - m_{hw}} \sqrt{\frac{\alpha_{cw}}{\alpha_{hw}}}, \quad (2.59)$$

y despejando m_{cw} se puede escribir que:

$$m_{cw} = \frac{m_{hw} \sqrt{\frac{\alpha_{cw}}{\alpha_{hw}}}}{1 - m_{hw} \left(1 + \sqrt{\frac{\alpha_{cw}}{\alpha_{hw}}} \right)}. \quad (2.60)$$

Por otra parte, de la Ecuación (2.37) se determina que m_{hw} está dada por:

$$m_{hw} = 1 - \frac{C_{hw}}{\alpha_{hw} t_{hw}} \ln \left(\frac{T_{0hw}}{\bar{T}_{hw}} \right), \quad (2.61)$$

y si se toma en cuenta la Ecuación (2.54), la Ecuación (2.61) se transforma en

$$m_{hw} = 1 + \frac{C_{hw}}{\alpha_{hw} t_{hw}} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw} T_{0hw}} \right). \quad (2.62)$$



Combinando las Ecuaciones (2.37) y (2.50) se tiene que:

$$\frac{\ln \frac{T_{0cw}}{\bar{T}_{cw}}}{\ln \frac{T_{0hw}}{\bar{T}_{hw}}} = \frac{t_{cw} \alpha_{cw} C_{hw} (1 - m_{cw})}{t_{hw} \alpha_{hw} C_{cw} (1 - m_{hw})}, \quad (2.63)$$

e igualando las Ecuaciones (2.59) y (2.63) se determina la razón de la duración de los tiempos óptimos de cada etapa:

$$\frac{t_{cw}}{t_{hw}} = \sqrt{\frac{\alpha_{hw}}{\alpha_{cw}}}. \quad (2.64)$$

La Ecuación (2.64) indica que la razón de la duración de las etapas de alta y baja temperatura del ciclo es, en el ciclo optimizado, inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la razón de los coeficientes de transferencia de calor; es decir, las dos porciones son de igual duración si los coeficientes globales de transferencia de calor son iguales.

Recordando que $t_{hw} + t_{cw} = \tau_w$, de la Ecuación (2.64) se tiene que:

$$t_{hw} = \tau_w \frac{\sqrt{\alpha_{cw}}}{\sqrt{\alpha_{cw}} + \sqrt{\alpha_{hw}}} \text{ y } t_{cw} = \tau_w \frac{\sqrt{\alpha_{hw}}}{\sqrt{\alpha_{cw}} + \sqrt{\alpha_{hw}}}. \quad (2.65)$$

A partir de la Ecuación (2.65), los tiempos óptimos de las etapas de alta y baja temperatura, se pueden determinar los parámetros m_{hw} y m_{cw} con la ayuda de las Ecuaciones (2.60) y (2.62), de tal manera que esto permite conocer la temperatura óptima del depósito térmico de baja temperatura al final de la etapa correspondiente y con ayuda de la Ecuación (2.50) se tiene que:

$$\bar{T}_{cw} = T_{0cw} \exp \left[-\frac{\alpha_{cw} (1 - m_{cw})}{C_{cw}} t_{cw} \right]. \quad (2.66)$$

Al combinar las ecuaciones que definen los parámetros de m_{hw} , m_{cw} , t_{hw} y t_{cw} , (2.60), (2.63), (2.64) y (2.65), junto con la Ecuación (2.66) se obtiene la temperatura óptima

\bar{T}_{cw} del depósito térmico de baja temperatura como:

$$\bar{T}_{cw} = T_{0cw} \exp \left[\frac{-\frac{C_{hw}}{C_{cw}} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0hw}} \right)}{1 + \frac{C_{hw}}{K_w \tau_w} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0hw}} \right)} \right] \quad (2.67)$$

Al sustituir la Ecuación (2.67) en la Ecuación (2.51) se determina la expresión para el calor transferido hacia el depósito de baja temperatura que hace que el proceso sea óptimo y está dado por:

$$Q_{cw} = C_{cw}T_{0cw} \left\{ \exp \left[\frac{-\frac{C_{hw}}{C_{cw}} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0hw}} \right)}{1 + \frac{C_{hw}}{K_w \tau_w} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0hw}} \right)} \right] - 1 \right\}, \quad (2.68)$$

por lo tanto, la eficiencia máxima de la máquina térmica, de acuerdo a la Ecuaciones (2.23) y (2.68), está dada por

$$\eta = 1 - \frac{C_{cw}T_{0cw} \left\{ \exp \left[\frac{-\frac{C_{hw}}{C_{cw}} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0hw}} \right)}{1 + \frac{C_{hw}}{K_w \tau_w} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0hw}} \right)} \right] - 1 \right\}}{Q_{hw}} \quad (2.69)$$

La Ecuación (2.69) es la eficiencia óptima de la máquina de Carnot endorreversible que opera entre dos depósitos térmicos de capacidad térmica finita, para valores fijos de Q_{hw} y τ_w . Esta ecuación es consistente con el caso de Carnot, como caso particular cuando se toma el límite de C_{hw} , C_{cw} y τ_w tender a cero se obtiene la eficiencia de una máquina térmica reversible de Carnot, como se mostrará en la sección de conclusiones de este trabajo.

2.3 Coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador para remover calor (Q_{cr}) de un depósito térmico a una tasa dada

En esta sección se desarrolla un método de optimización termodinámica para el caso de un refrigerador endorreversible que opera entre dos depósitos térmicos de capacidad térmica finita, con el fin

de obtener su coeficiente de funcionamiento óptimo. Es necesario destacar que se sigue un procedimiento análogo al utilizado en el caso de la máquina térmica, obteniendo con ello los parámetros que hacen que el ciclo termodinámico sea óptimo, éstos son: el tiempo óptimo en cada etapa del ciclo, la temperatura de la sustancia de trabajo y del depósito de alta temperatura al final del proceso; hasta la fecha en la literatura relacionada con la optimización termodinámica de ciclos de refrigeración no se ha llevado a cabo un análisis como el que se presenta a continuación, en este caso en particular se determina el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador considerando que el calor que se requiere extraer del espacio a refrigerar es fijo.

En la Figura 6 se presenta un modelo simplificado de un refrigerador endorreversible que opera entre dos depósitos térmicos, uno de alta y otro de baja temperatura, con capacidades térmicas C_{hr} y C_{cr} , respectivamente; las temperaturas correspondientes de dichos depósitos son T_{hr} y T_{cr} , y la temperatura de la sustancia de trabajo es T . Para el análisis de este refrigerador primero se optimizan por separado las etapas de alta y baja temperatura. En cada una de éstas se desarrolla un procedimiento de optimización similar al utilizado para el caso de la máquina térmica. Posteriormente se acoplan dichas etapas para satisfacer de manera global el criterio de optimización. En este caso, el coeficiente de funcionamiento φ está dado por:

$$\varphi = \frac{Q_{cr}}{Q_{hr} - Q_{cr}} \quad (2.70)$$

donde Q_{cr} es el calor extraído por cada ciclo del depósito de baja temperatura y Q_{hr} es el calor liberado hacia el depósito térmico de alta temperatura. De la Ecuación (2.70) se observa que para valores fijos de Q_{cr} el coeficiente de funcionamiento es máximo cuando Q_{hr} es mínimo.

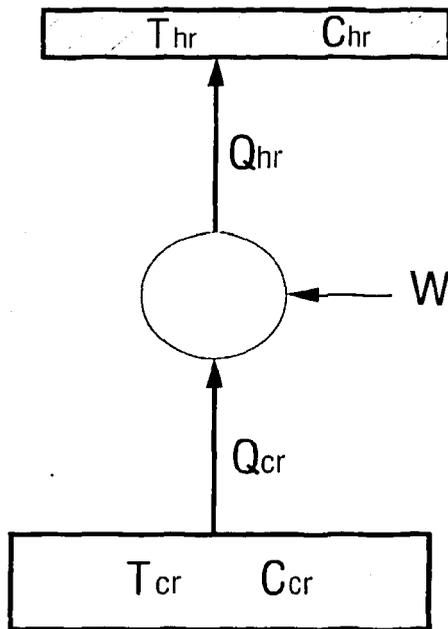


Figura 6. Refrigerador de Carnot endorreversible de dos depósitos térmicos con capacidades térmicas finitas.

A continuación se optimizan las etapas de alta y baja temperatura, teniendo en cuenta que el ciclo se lleva a cabo en un tiempo fijo τ_r .

2.3.1 La etapa de baja temperatura

Debido a que el calor extraído del depósito de baja temperatura se puede escribir como:

$$Q_{cr} = C_{cr} (T_{0cr} - \bar{T}_{cr}), \quad (2.71)$$

donde T_{0cr} representa la temperatura inicial del depósito de baja temperatura y \bar{T}_{cr} es la temperatura final del depósito térmico al final de la etapa correspondiente. De la Ecuación (2.71), puesto que Q_{cr} , C_{cr} y T_{0cr} son fijos, entonces la temperatura final del depósito de baja temperatura se mantiene fija y está dada por la expresión

$$\bar{T}_{cr} = T_{0cr} - \frac{Q_{cr}}{C_{cr}} \quad (2.72)$$

En esta etapa el proceso de optimización corresponde a determinar el valor óptimo del calor Q_{cr} que se puede extraer desde el depósito de baja temperatura:

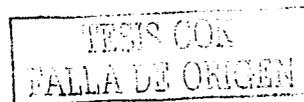
$$Q_{cr} = \int_0^{t_{cr}} q_{cr}(T_{cr}, T) dt = C_{cr} (T_{0cr} - \bar{T}_{cr}) \rightarrow \max, \quad (2.73)$$

Las restricciones asociadas con este problema son:

$$\frac{dT_{cr}}{dt} = -\frac{q_{cr}}{C_{cr}} \quad (2.74)$$

$$\Delta S_{cr} = \int_0^{t_{cr}} \frac{q_{cr}}{T} dt \quad (2.75)$$

donde $q_{cr} = \alpha_{cr} (T_{cr} - T)$, t_{cr} es la duración del proceso en esta etapa y $T = T(t)$ representa la temperatura de la sustancia de trabajo. La Ecuación (2.74) proviene de llevar a cabo un balance de energía en el depósito térmico, la Ecuación (2.75) representa el cambio de entropía que se lleva a cabo en la sustancia de trabajo en la etapa corres-



pondiente. Se considera a la temperatura de la sustancia de trabajo como una variable de control para las Ecuaciones (2.73)-(2.75). Debido a que la temperatura del depósito térmico, $T_{cr}(t)$, depende monótonicamente sobre la duración del proceso t , se puede usar la Ecuación (2.74) para reemplazar la variable independiente t en términos de T_{cr} y el problema equivalente es:

$$Q_{cr} = - \int_{T_{0cr}}^{\bar{T}_{cr}} C_{cr} dT_{cr} \rightarrow max, \quad (2.76)$$

$$\Delta S_{cr} = - \int_{T_{0cr}}^{\bar{T}_{cr}} \frac{C_{cr}}{T} dT_{cr} \quad (2.77)$$

$$t_{cr} = - \int_{T_{0cr}}^{\bar{T}_{cr}} \frac{C_{cr}}{q_{cr}} dT_{cr}. \quad (2.78)$$

Para la optimización parcial de esta etapa se supone que ΔS_{cr} y t_{cr} son parámetros fijos, aunque en el proceso de optimización global del ciclo son desconocidos y sus valores se determinan en el acoplamiento de las etapas de baja y alta temperatura.

Siguiendo el procedimiento de optimización descrito para la máquina térmica, la función de Lagrange asociada al problema (2.76)-(2.78) se puede escribir como:

$$L_{cr} = C_{cr} + \lambda_{1c} \frac{C_{cr}}{T} + \lambda_{2c} \frac{C_{cr}}{q_{cr}}, \quad (2.79)$$

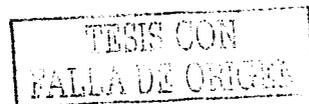
donde λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange para esta etapa.

La condición estacionaria de esta función sobre T es

$$\frac{\partial L_{cr}}{\partial T} = - \frac{\lambda_1 C_{cr}}{T^2} - \frac{\lambda_2 C_{cr}}{q_{cr}^2} \frac{\partial q_{cr}}{\partial T} = 0, \quad (2.80)$$

y de esta ecuación, se obtiene que:

$$\frac{T}{T_{cr}} = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \alpha_{cr}}} = k_{cr} = constant < 1. \quad T = k_{cr} T_{cr} \quad (2.81)$$



donde k_{cr} es una constante que representa la razón de la temperatura de la sustancia de trabajo a la del depósito térmico y se determinará posteriormente. De esta última ecuación, se observa que la constante k_{cr} debe ser constante cuando el proceso es óptimo, puesto que en ésta los parámetros que intervienen son constantes (λ_1 , λ_2 y α_{cr}).

Usando la Ecuación (2.81) junto con las Ecuaciones (2.77) y (2.78) se puede expresar ΔS_{cr} y t_{cr} en términos de k_{cr} , dando como resultado:

$$\Delta S_{cr} = \frac{C_{cr}}{k_{cr}} \ln \frac{T_{0cr}}{\bar{T}_{cr}} \quad (2.82)$$

$$t_{cr} = \frac{C_{cr}}{\alpha_{cr}(1 - k_{cr})} \ln \frac{T_{0cr}}{\bar{T}_{cr}}. \quad (2.83)$$

En las Ecuaciones (2.82) y (2.83) el parámetro k_{cr} es desconocido y como en secciones anteriores se convierte en parte del problema.

2.3.2 Etapa de alta temperatura

Siguiendo un procedimiento semejante al usado en la etapa de baja temperatura, el planteamiento formal del problema en la etapa de alta temperatura tiene una forma similar al de la etapa fría. De manera particular, en esta etapa se desea que el calor :

$$Q_{hr} = \int_{T_{0hr}}^{\bar{T}_{hr}} C_{hr} dT_{hr} = C_{hr} (\bar{T}_{hr} - T_{0hr}) \rightarrow max, \quad (2.84)$$

y

$$t_{hr} = \int_{T_{0hr}}^{\bar{T}_{hr}} \frac{C_{hr}}{q_{hr}} dT_{hr}, \quad (2.85)$$

$$\Delta S_{hr} = \int_{T_{0hr}}^{\bar{T}_{hr}} \frac{C_{hr}}{T} dT_{hr}. \quad (2.86)$$

donde $q_{hr} = \alpha_{hr}(T - T_{hr})$. t_{hr} es la duración del proceso en esta etapa y \bar{T}_{hr} y T_{0hr} representan las temperaturas del depósito térmico al final y al inicio del proceso, respectivamente. Al llevar a cabo un balance de energía en el depósito térmico, la temperatura

en éste cambia de acuerdo a la siguiente ecuación

$$\frac{dT_{hr}}{dt} = \frac{q_{hr}(T_{hr}, T)}{C_{hr}} \quad (2.87)$$

Para este caso la función de Lagrange está dada por:

$$L_{hr} = C_{hr} + \lambda_{1r} \frac{C_{hr}}{T} + \lambda_{2r} \frac{C_{hr}}{q_{hr}} \quad (2.88)$$

y su condición estacionaria puede escribirse como:

$$\frac{\partial R}{\partial T} = -\frac{\lambda_{1r} C_{hr}}{T^2} - \frac{\lambda_{2r} C_{hr}}{q_{hr}^2} \frac{\partial q_{hr}}{\partial T} = 0 \quad (2.89)$$

obteniendo que:

$$\frac{T}{T_{hr}} = \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{\lambda_{2r}}{\lambda_{1r} \alpha_{hr}}}} = k_{hr} > 1 = cte. \quad T = k_{hr} T_{hr}, \quad (2.90)$$

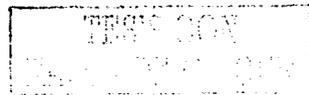
en este caso, la razón de la temperatura de la sustancia de trabajo a la del depósito también debe permanecer constante cuando el proceso es óptimo.

Sustituyendo la Ecuación (2.90) en las Ecuaciones (2.85) y(2.86), se puede expresar a t_{hr} y ΔS_{hr} en términos de k_{hr} , mediante las siguientes expresiones:

$$t_{hr} = -\frac{C_{hr}}{\alpha_{hr} (1 - k_{hr})} \ln \frac{\bar{T}_{hr}}{T_{0hr}}, \quad (2.91)$$

$$\Delta S_{hr} = \frac{C_{hr}}{k_{hr}} \ln \frac{\bar{T}_{hr}}{T_{0hr}}. \quad (2.92)$$

De manera similar a los resultados de la etapa de alta temperatura, las Ecuaciones (2.91) y (2.92) tienen al parámetro k_{hr} como una incógnita.



2.3.3 Acoplamiento de los ciclos parciales

Como se mencionó anteriormente, las Ecuaciones (2.82), (2.83), (2.91) y (2.92) tienen como parámetros desconocidos a k_{cr} y k_{hr} , mismos que se tienen que determinar a partir del acoplamiento de las etapas parciales de tal forma que satisfagan un criterio de optimización $Q_{hr} \rightarrow \min$ para obtener el coeficiente de funcionamiento máximo, teniendo como restricciones la duración fija del ciclo, τ_r , el cambio en la entropía del ciclo ΔS (que debe ser igual a cero), así como un valor fijo de Q_{cr} . En este caso, para obtener un máximo de φ de la Ecuación (2.70), se acepta que para un tiempo τ_r y una rapidez de calor Q_{cr} fijos, es equivalente a tener un mínimo de Q_{hr} . Por lo tanto, el problema de la optimización global del ciclo de refrigeración toma la forma de cuatro ecuaciones simultáneas. Considerando las Ecuaciones (2.82), (2.83), (2.91), (2.92) se tiene que:

$$Q_{hr} = C_{hr} (\bar{T}_{hr} - T_{0hr}) \rightarrow \min, \quad (2.93)$$

$$\tau_r = t_{cr} + t_{hr} = \frac{C_{cr}}{\alpha_{cr}(1 - k_{cr})} \ln \frac{T_{0cr}}{\bar{T}_{cr}} + \frac{C_{hr}}{\alpha_{hr}(1 - k_{hr})} \ln \frac{T_{0hr}}{\bar{T}_{hr}}, \quad (2.94)$$

$$\Delta S_{hr} - \Delta S_{cr} = \frac{C_{hr}}{k_{hr}} \ln \frac{T_{0hr}}{\bar{T}_{hr}} + \frac{C_{cr}}{t_{cr} + t_{hr}} \ln \frac{T_{0cr}}{\bar{T}_{cr}} = 0, \quad (2.95)$$

y

$$\bar{T}_{cr} = T_{0cr} - \frac{Q_{cr}}{C_{cr}}, \quad (2.96)$$

donde la Ecuación (2.93) representa la función que se desea optimizar y la (2.96) proviene de la cantidad de calor extraído desde el depósito de baja temperatura. En las ecuaciones anteriores se tienen como parámetros desconocidos a t_{cr} , t_{hr} , k_{cr} y k_{hr} . Las Ecuaciones (2.94) y (2.95) representan la duración del ciclo τ_r y la condición cíclica de la entropía del ciclo.

Para determinar los parámetros t_{cr} , t_{hr} , k_{cr} y k_{hr} que hacen que el ciclo sea óptimo, considerando las Ecuaciones (2.93)-(2.96), la correspondiente función de Lagrange para

la optimización del refrigerador endorreversible puede escribirse como:

$$L_r = C_{hr} (\bar{T}_{hr} - T_{0hr}) \quad (2.97)$$

$$+ \lambda_{1r} \left[\frac{C_{cr}}{\alpha_{cr} (1 - k_{cr})} \ln \frac{T_{0cr}}{\bar{T}_{cr}} + \frac{C_{hr}}{\alpha_{hr} (1 - k_{hr})} \ln \frac{T_{0hr}}{\bar{T}_{hr}} \right] \quad (2.98)$$

$$+ \lambda_{2r} \left[\frac{C_{cr}}{k_{cr}} \ln \frac{T_{0cr}}{\bar{T}_{cr}} + \frac{C_{hr}}{k_{hr}} \ln \frac{T_{0hr}}{\bar{T}_{hr}} \right].$$

De la Ecuación (2.97), considerando que se requiere determinar los parámetros que optimizan el ciclo termodinámico se puede tomar la condición estacionaria con respecto a k_{cr} , $\frac{\partial L_r}{\partial k_{cr}} = 0$, se tiene que:

$$\frac{\lambda_{1r}}{\lambda_{2r}} = \alpha_{cr} \left(\frac{1 - k_{cr}}{k_{cr}} \right)^2, \quad (2.99)$$

y de manera similar, de la condición estacionaria con respecto a k_{hr} , $\frac{\partial L_r}{\partial k_{hr}} = 0$, produce la expresión

$$\frac{\lambda_{1r}}{\lambda_{2r}} = \alpha_{hr} \left(\frac{1 - k_{hr}}{k_{hr}} \right)^2. \quad (2.100)$$

Resolviendo simultáneamente las Ecuaciones (2.99) y (2.100) se llega a:

$$\frac{k_{cr}}{k_{hr}} = \frac{1 - k_{cr}}{k_{hr} - 1} \sqrt{\frac{\alpha_{cr}}{\alpha_{hr}}}. \quad (2.101)$$

La Ecuación (2.101) es una función implícita en k_{hr} y k_{cr} , por lo tanto, para la solución del problema se hace uso de las ecs (2.83) de donde se obtiene:

$$1 - k_{cr} = \frac{C_{cr}}{\alpha_{cr} t_{cr}} \ln \left(\frac{T_{0cr}}{\bar{T}_{cr}} \right), \quad (2.102)$$

de la que se puede despejar al parámetro k_{cr} para obtener:

$$k_{cr} = 1 - \frac{C_{cr}}{\alpha_{cr} t_{cr}} \ln \left(\frac{T_{0cr}}{\bar{T}_{cr}} \right) \quad (2.103)$$



y si se considera que $\bar{T}_{cr} = T_{0cr} - Q_{cr}/C_{cr}$, la Ecuación (2.103) se convierte en:

$$k_{cr} = 1 - \frac{C_{cr}}{\alpha_{cr} t_{cr}} \ln \frac{C_{cr} T_{0cr}}{C_{cr} T_{0cr} - Q_{cr}}, \quad (2.104)$$

misma que define el parámetro k_{cr} , siempre y cuando se conozca t_{cr} . De la Ecuación (2.101) k_{hr} se puede expresar como

$$k_{hr} = \frac{k_{cr} \sqrt{\alpha_{hr}}}{k_{cr} (\sqrt{\alpha_{cr}} + \sqrt{\alpha_{hr}}) - \sqrt{\alpha_{cr}}}. \quad (2.105)$$

Por otra parte, de la Ecuación (2.95) se deduce que

$$\frac{\ln \frac{T_{0cr}}{T_{cr}}}{\ln \frac{T_{0hr}}{T_{hr}}} = - \frac{C_{hr} k_{cr}}{C_{cr} k_{hr}}, \quad (2.106)$$

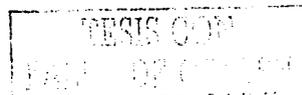
y combinando las Ecuaciones (2.83), (2.91) y (2.101), se llega a:

$$\frac{t_{cr}}{t_{hr}} = \sqrt{\frac{\alpha_{hr}}{\alpha_{cr}}}. \quad (2.107)$$

La ecuación anterior muestra que la razón de las duraciones de las etapas de baja y alta temperatura en el ciclo de refrigeración es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la razón de los coeficientes de transferencia de calor de los procesos correspondientes. De esta razón se obtiene un caso particular del caso optimizado: las dos etapas son de la misma duración si los coeficientes de transferencia de calor son iguales.

De la Ecuación (2.107) y considerando que el tiempo total del ciclo de refrigeración es $t_{hr} + t_{cr} = \tau_r$, los tiempos de cada etapa que hacen que el ciclo sea óptimo son

$$t_{hr} = \tau_r \frac{\sqrt{\alpha_{cr}}}{\sqrt{\alpha_{cr}} + \sqrt{\alpha_{hr}}} \text{ y } t_{cr} = \tau_r \frac{\sqrt{\alpha_{hr}}}{\sqrt{\alpha_{cr}} + \sqrt{\alpha_{hr}}} \quad (2.108)$$



Por otro lado, la Ecuación (2.91) se puede reescribir como:

$$\ln \frac{\bar{T}_{hr}}{T_{0hr}} = -\frac{\alpha_{hr} (1 - k_{hr})}{C_{hr}} t_{hr},$$

de esta última ecuación la temperatura del depósito de alta temperatura al final de esta etapa se puede escribir como:

$$\bar{T}_{hr} = T_{0hr} \exp \left[-\frac{t_{hr} \alpha_{hr} (1 - k_{hr})}{C_{hr}} \right]. \quad (2.109)$$

Con ayuda de las ecuaciones que definen los parámetros que optimizan el ciclo, k_{hr} , k_{cr} , t_{hr} y t_{cr} , Ecuaciones (2.104), (2.105) y (2.108), la Ecuación (2.109) se puede reescribir como:

$$\bar{T}_{hr} = T_{0hr} \exp \left[\frac{\frac{C_{cr}}{C_{hr}} \ln \left(\frac{C_{cr} T_{0cr}}{C_{cr} T_{0cr} - Q_{cr}} \right)}{1 - \frac{C_{cr}}{K_r \tau_r} \ln \left(\frac{C_{cr} T_{0cr}}{C_{cr} T_{0cr} - Q_{cr}} \right)} \right], \quad (2.110)$$

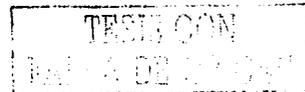
Ahora bien, de la Ecuación (2.93), que representa la función optimizada, se tiene

$$Q_{hr} = C_{hr} (\bar{T}_{hr} - T_{0hr}),$$

y sustituyendo la Ecuación (2.110) en esta última, se determina el calor transferido al depósito térmico de alta temperatura de tal manera que el calor rechazado desde la sustancia de trabajo hacia el depósito de alta temperatura, está dado por

$$Q_{hr} = C_{hr} T_{0hr} \left(\exp \frac{\frac{C_{cr}}{C_{hr}} \ln \left(\frac{C_{cr} T_{0cr}}{C_{cr} T_{0cr} - Q_{cr}} \right)}{1 - \frac{C_{cr}}{K_r \tau_r} \ln \left(\frac{C_{cr} T_{0cr}}{C_{cr} T_{0cr} - Q_{cr}} \right)} - 1 \right). \quad (2.111)$$

Ya que se determinó el calor óptimo que se transfiere hacia el depósito de alta temperatura se sustituye la Ecuación (2.111) en la definición del coeficiente de funcionamiento del refrigerador endorreversible, con esto se tiene que el coeficiente de funcionamiento



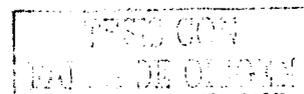
óptimo correspondiente es:

$$\varphi = \frac{Q_{cr}}{C_{hr}T_{0hr} \left\{ \exp \left[\frac{\frac{C_{cr}}{C_{hr}} \ln \left(\frac{C_{cr}T_{0cr}}{C_{cr}T_{0cr} - Q_{cr}} \right)}{1 - \frac{C_{cr}}{K_r\tau_r} \ln \left(\frac{C_{cr}T_{0cr}}{C_{cr}T_{0cr} - Q_{cr}} \right)} \right] - 1 \right\} - Q_{cr}} \quad (2.112)$$

La Ecuación (2.112) representa el coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador endorreversible que opera entre dos depósitos térmicos de capacidad térmica finita, teniendo como parámetros fijos a la cantidad de calor absorbido, Q_{cr} , desde el depósito de baja temperatura y la duración del ciclo τ_r . Al igual que para el caso de la eficiencia óptima de la máquina térmica, si se toma el límite de la Ecuación (2.112) cuando C_{hr} , C_{cr} y τ_r tender a cero, se obtiene el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador de Carnot reversible que opera entre depósitos térmicos de capacidad térmica infinita.

2.4 Optimización del sistema combinado equivalente para un refrigerador endorreversible que opera entre tres depósitos térmicos de capacidad térmica finita

El motivo de esta primera parte de este trabajo está centrado en la determinación del coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador endorreversible que opera entre tres depósitos térmicos de capacidad térmica finita; se demostró que dicho parámetro está dado por el producto de la eficiencia de una máquina térmica y del coeficiente de funcionamiento de un refrigerador, Ecuación (2.8), de tal suerte que el coeficiente de funcionamiento global es óptimo cuando ambos, la eficiencia y el coeficiente de funcionamiento de los subsistemas que componen el sistema de tres depósitos son óptimos, por esta razón en los párrafos anteriores se determinaron las expresiones que representan los



valores óptimos de la eficiencia de una máquina térmica y coeficiente de funcionamiento de un refrigerador, ambos endorreversibles y que operan entre depósitos de capacidad térmica finita. Teniendo como base la Ecuación (2.8) que representa el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador que opera entre tres depósitos térmicos, y considerando la ecuación que representa la eficiencia óptima de una máquina térmica endorreversible, Ecuación (2.69) y del coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador endorreversible, Ecuación (2.112), ambos de dos depósitos térmicos de capacidad térmica finita, el coeficiente de funcionamiento global se puede escribir como:

$$\psi = \left\{ 1 - \frac{C_{cw}T_{0cw} \left\{ \exp \left[\frac{-\frac{C_{hw}}{C_{cw}} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0hw}} \right)}{1 + \frac{C_{hw}}{K_w \tau_w} \ln \left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0hw}} \right)} \right] - 1 \right\}}{Q_{hw}} \right\} * \left(\frac{C_{hr}T_{0hr}}{Q_{cr}} \left\{ \exp \left[\frac{\frac{C_{cr}}{C_{hr}} \ln \left(\frac{C_{cr}T_{0cr}}{C_{cr}T_{0cr} - Q_{cr}} \right)}{1 - \frac{C_{cr}}{K_r \tau_r} \ln \left(\frac{C_{cr}T_{0cr}}{C_{cr}T_{0cr} - Q_{cr}} \right)} \right] - 1 \right\} - 1 \right)^{-1} \quad (2.113)$$

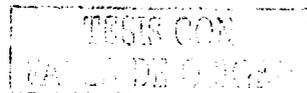
La ecuación anterior depende de diversos parámetros, uno de ellos es el calor que se transfiere desde el depósito de alta temperatura hacia la sustancia de trabajo, Q_{hw} ; en virtud de que existe una relación entre el coeficiente de funcionamiento global ψ y Q_{hw} dada por $\psi = Q_{cr}/Q_{hr}$, la ecuación anterior se puede reescribir como:

$$\psi = \left\{ 1 - \frac{C_{cw}T_{0cw} \left\{ \exp \left[\frac{-\frac{C_{hw}}{C_{cw}} \ln \left(1 - \frac{Q_{cr}}{\psi C_{hw}T_{0hw}} \right)}{1 + \frac{C_{hw}}{K_w \tau_w} \ln \left(1 - \frac{Q_{cr}}{\psi C_{hw}T_{0hw}} \right)} \right] - 1 \right\}}{\frac{Q_{cr}}{\psi}} \right\} * \left\{ \frac{C_{hr}T_{0hr}}{Q_{cr}} \left\{ \exp \left[\frac{\frac{C_{cr}}{C_{hr}} \ln \left(\frac{C_{cr}T_{0cr}}{C_{cr}T_{0cr} - Q_{cr}} \right)}{1 - \frac{C_{cr}}{K_r \tau_r} \ln \left(\frac{C_{cr}T_{0cr}}{C_{cr}T_{0cr} - Q_{cr}} \right)} \right] - 1 \right\} - 1 \right\}^{-1} \quad (2.114)$$

en la que se considera que a Q_{cr} como un parámetro fijo, siendo la duración de los ciclos parciales, τ_w y τ_r , variables. La Ecuación (2.114) resulta ser una función implícita y altamente no lineal en la variable ψ , lo que implica una gran dificultad para determinar su solución.

2.4.1 Adimensionalización del coeficiente de funcionamiento global

Analizando detalladamente la ecuación que define el coeficiente de funcionamiento global, Ecuación (2.114), se observa que es una función que involucra una gran diversidad de parámetros, además se tiene la dificultad para obtener valores numéricos reales de los mismos, lo que dificulta el análisis de ésta, por esta razón es necesario escribirla en una forma más útil y eficiente para su estudio. Esto se logra al llevar a cabo la adimensionalización de dicha función, lo que no solo conduce tener un número mínimo de parámetros sino que la solución obtenida es universal para los valores numéricos asignados a los parámetros involucrados. Para realizar la adimensionalización de la Ecuación (2.114) es



necesario definir los siguientes parámetros adimensionales:

$$\alpha = \frac{Q_{cr}}{C_{cr}T_{0cr}}, \beta = \frac{C_{cr}T_{0cr}}{C_{hw}T_{0hw}}, \gamma = \frac{C_{cw}T_{0cw}}{C_{cr}T_{0cr}}, \delta = \frac{C_{hr}T_{0hr}}{C_{cr}T_{0cr}}, \beta_w = \frac{C_{hw}}{K_2\tau}, \quad (2.115)$$

$$\beta_r = \frac{C_{cr}}{K_w\tau}, \varepsilon_w = \frac{C_{hw}}{C_{cw}}, \varepsilon_r = \frac{C_{cr}}{C_{hr}}, \tau_w^* = \frac{\tau_w}{\tau}, \tau_r^* = \frac{\tau_r}{\tau},$$

y por lo tanto, la Ecuación (2.114) se puede reescribir como:

$$\psi = \left\{ 1 - \frac{\gamma\psi}{\alpha} \left\{ \exp \left[\frac{-\varepsilon_w \ln \left(1 - \frac{\alpha\beta}{\psi} \right)}{1 + \frac{\beta_w}{\tau_w^*} \ln \left(1 - \frac{\alpha\beta}{\psi} \right)} \right] - 1 \right\} \right\} \quad (2.116)$$

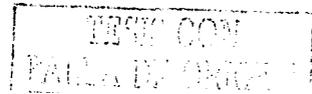
$$* \left\{ \frac{\delta}{\alpha} \left\{ \exp \left[\frac{\varepsilon_r \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)}{1 - \frac{\beta_r}{\tau_r^*} \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right)} \right] - 1 \right\} - 1 \right\}^{-1}.$$

Si adicionalmente se define la tasa de refrigeración como $\Pi = Q_{cr}/\tau$, la ecuación anterior (2.116) toma la forma:

$$\psi = \left\{ 1 - \frac{\gamma\beta_r\psi}{\Pi^*} \left\{ \exp \left[\frac{-\varepsilon_w \ln \left(1 - \frac{\Pi^*\beta}{\beta_r\psi} \right)}{1 + \frac{\beta_w}{\tau_w^*} \ln \left(1 - \frac{\Pi^*\beta}{\beta_r\psi} \right)} \right] - 1 \right\} \right\} \quad (2.117)$$

$$* \frac{1}{\frac{\delta\beta_r}{\Pi^*} \left\{ \exp \left[\frac{\varepsilon_r \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)}{1 - \frac{\beta_r}{\tau_r^*} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)} \right] - 1 \right\} - 1},$$

donde la tasa de refrigeración adimensional Π^* se define como $\Pi^* = \alpha\beta_r$. Ahora bien, para optimizar el ciclo endorreversible de tres depósitos térmicos con capacidades térmicas finitas se supone que los tiempos parciales, escritos en forma adimensional, τ_w^* y τ_r^* son



variables del problema, mientras que Π^* permanece constante en la Ecuación (2.117), de acuerdo al procedimiento seguido por Chen et al [31].

2.4.2 Optimización

Puesto que la Ecuación (2.117) que se va a optimizar es una función implícita en ψ que depende de τ_w^* y τ_r^* es necesario hacer uso del teorema de la función implícita [68] (ver apéndice); de acuerdo a esto es necesario formar una función F definida como $F = \psi - \eta\varphi$, que proviene de la definición del coeficiente de funcionamiento global $\psi = \eta\varphi$. Considerando la Ecuación (2.117), la función F esta dada por:

$$F = \psi - \left\{ 1 - \frac{\gamma\beta_r\psi}{\Pi^*} \left\{ \exp \left[\frac{-\varepsilon_w \ln \left(1 - \frac{\Pi^*\beta}{\beta_r\psi} \right)}{1 + \frac{\beta_w}{\tau_w^*} \ln \left(1 - \frac{\Pi^*\beta}{\beta_r\psi} \right)} \right] - 1 \right\} \right\} \quad (2.118)$$

$$* \frac{1}{\frac{\delta\beta_r}{\Pi^*} \left\{ \exp \left[\frac{\varepsilon_r \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)}{1 - \frac{\beta_r}{\tau_r^*} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)} \right] - 1 \right\} - 1},$$

y por el teorema de la función implícita se puede demostrar que satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial F}{\partial \tau_w^*} = \frac{\partial F}{\partial \tau_r^*}. \quad (2.119)$$

Al aplicar la Ecuación (2.119) a la Ecuación (2.117) se obtiene

$$\frac{\eta \delta \varepsilon_r \beta_r \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right) \right]^2 \exp \left[\frac{\varepsilon_r \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)}{1 - \frac{\beta_r}{\tau_r^*} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)} \right]}{\alpha \left\{ \left[\frac{\delta}{\alpha} \exp \left[\frac{\varepsilon_r \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)}{1 - \frac{\beta_r}{\tau_r^*} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)} \right] - 1 \right] - 1 \right\}^2 \left[\tau_r^* - \beta_r \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right) \right]^2} = \frac{\varphi \gamma \beta_r \psi \varepsilon_w \beta_w \left[\ln \left(1 - \frac{\Pi^* \beta}{\beta_r \psi} \right) \right]^2 \exp \left[\frac{-\varepsilon_w \ln \left(1 - \frac{\Pi^* \beta}{\beta_r \psi} \right)}{1 + \frac{\beta_w}{\tau_w^*} \ln \left(1 - \frac{\Pi^* \beta}{\beta_r \psi} \right)} \right]}{\Pi^* \left[\tau_w^* + \beta_w \ln \left(1 - \frac{\Pi^* \beta}{\beta_r \psi} \right) \right]^2} \quad (2.120)$$

Si se considera que el tiempo total del ciclo está dado por

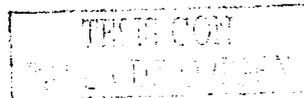
$$\tau = \tau_w + \tau_r, \quad (2.121)$$

y escrito en forma adimensional como:

$$1 = \tau_w^* + \tau_r^* \quad (2.122)$$

las Ecuaciones (2.117) y (2.120) se pueden reescribir como:

$$\psi = \left\{ 1 - \frac{\gamma \beta_r \psi}{\Pi^*} \left\{ \exp \left[\frac{-\varepsilon_w \ln \left(1 - \frac{\Pi^* \beta}{\beta_r \psi} \right)}{1 + \frac{\beta_w}{\tau_w^*} \ln \left(1 - \frac{\Pi^* \beta}{\beta_r \psi} \right)} \right] - 1 \right\} \right\} \quad (2.123)$$



$$* \frac{1}{\frac{\delta \beta_r}{\Pi^*} \left\{ \exp \left[\frac{\varepsilon_r \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)}{1 - \frac{\beta_r}{1 - \tau_w^*} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)} \right] - 1 \right\} - 1}$$

y

$$\frac{\eta \delta \varepsilon_r \beta_r \left[\ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right) \right]^2 \exp \left[\frac{\varepsilon_r \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)}{1 - \frac{\beta_r}{1 - \tau_w^*} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)} \right]}{\alpha \left\{ \left[\frac{\delta}{\alpha} \exp \left[\frac{\varepsilon_r \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)}{1 - \frac{\beta_r}{1 - \tau_w^*} \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right)} \right] - 1 \right] - 1 \right\}^2 \left[1 - \tau_w^* - \beta_r \ln \left(\frac{1}{1 - \frac{\Pi^*}{\beta_r}} \right) \right]^2}$$

$$\frac{\varphi \gamma \beta_r \psi \varepsilon_w \beta_w \left[\ln \left(1 - \frac{\Pi^* \beta}{\beta_r \psi} \right) \right]^2 \exp \left[\frac{-\varepsilon_w \ln \left(1 - \frac{\Pi^* \beta}{\beta_r \psi} \right)}{1 + \frac{\beta_w}{\tau_w^*} \ln \left(1 - \frac{\Pi^* \beta}{\beta_r \psi} \right)} \right]}{\Pi^* \left[\tau_w^* + \beta_w \ln \left(1 - \frac{\Pi^* \beta}{\beta_r \psi} \right) \right]^2} \quad (2.124)$$

Las Ecuaciones (2.123) y (2.124) son un conjunto de ecuaciones simultáneas que son funciones exclusivamente de ψ y τ_w^* , al ser resueltas proporcionan los valores de τ_w^* que hacen que el coeficiente de funcionamiento ψ sea óptimo al fijar los demás parámetros involucrados. La solución de este par de ecuaciones se hace numéricamente debido a la no linealidad de las mismas.

Como en sistemas termodinámicos reales es importante conocer la tasa de salida, (potencia de salida en el caso de una máquina térmica, carga de refrigeración en el caso de un refrigerador), en el presente trabajo se obtuvieron estas variables, la variación de Π^* contra ψ ; lo anterior se logró al resolver simultáneamente las Ecuaciones (2.123) y

(2.124) asignando valores a Π^* y obteniendo los correspondientes valores del coeficiente de funcionamiento óptimo de refrigeración ψ . Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras (10) y (11) y serán discutidos en la sección de resultados.

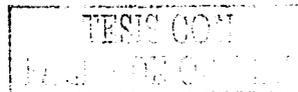
Parte II

Modelo no-endorreversible

Capítulo 3

Sistema combinado equivalente de un refrigerador no-endorreversible con tres depósitos térmicos.

Debido a que todos los procesos reales que se llevan a cabo en cualquier dispositivo termodinámico son irreversibles es necesario realizar un análisis considerando las irreversibilidades presentes. Es por ello que en esta sección se estudia un modelo de refrigerador de tres depósitos térmicos considerando en éste las irreversibilidades a que se encuentra sometido. La necesidad de realizar este estudio es ver cómo afectan dichas irreversibilidades al funcionamiento del refrigerador de tres depósitos térmicos. Aunque existen estudios similares en los que se han introducido diversos parámetros de irreversibilidad, la diferencia con el modelo que se presenta es que en aquellos la única restricción que se tiene es la segunda ley de la termodinámica sin considerar la tasa de salida (carga de refrigeración), que como se mencionó en la sección anterior es uno de los parámetros más importantes del funcionamiento de este tipo de refrigerador. Es de suponer que la eficiencia del refrigerador disminuirá en la medida de que las irreversibilidades presentes sean mayores. Por esto es necesario estudiar el comportamiento (carga de refrigeración contra el coeficiente de funcionamiento) de estos sistemas y obtener los parámetros que



hacen que el funcionamiento sea óptimo considerando los efectos de las irreversibilidades.

Previamente se determinó el coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador endorreversible que opera entre tres depósitos térmicos. Como se estableció en el capítulo anterior, el término endorreversible significa internamente reversible; esto es, aquella máquina térmica que lleva a cabo procesos internamente reversibles, aceptando que las únicas irreversibilidades están presentes en las fronteras del sistema con los alrededores [22].

Por otra parte, en la literatura se ha usado el término no-endorreversible para caracterizar a aquellos sistemas termodinámicos en los que se considera que la sustancia de trabajo está sujeta a efectos disipativos y que los procesos que ocurren en ésta son irreversibles, aceptando también que las irreversibilidades están presentes entre el sistema y los alrededores [53]. Para describir cuantitativamente el grado de la disipación interna en la sustancia de trabajo, a la que se hace referencia, se introduce un parámetro R que contabiliza el grado de irreversibilidad interna en la sustancia de trabajo, mismo que se explicará mas adelante.

Como se demostró en la primera parte de este trabajo, un refrigerador endorreversible que opera entre tres depósitos térmicos se puede tratar como un ciclo combinado de una máquina de Carnot y un refrigerador de Carnot endorreversibles. Por lo tanto, un refrigerador no-endorreversible que opera entre tres depósitos térmicos se puede concebir en principio de la misma manera; la diferencia radica en que en este último, tanto la máquina térmica como el refrigerador, son internamente irreversibles.

Para la determinación del coeficiente de funcionamiento óptimo se procede de manera análoga al caso del refrigerador endorreversible; es decir, el sistema de tres depósitos térmicos se separa en dos subsistemas (la máquina térmica y el refrigerador, y en este caso ambos subsistemas serán no-endorreversibles).

La máquina térmica de Carnot no-endorreversible (Figura 7a) opera entre dos depósitos térmicos, uno de alta y otro de baja temperatura, con temperaturas \bar{T}_{hw} y \bar{T}_{cw} , respectivamente, las temperaturas correspondientes de la sustancia de trabajo son

T_{hw} y T_{cw} .

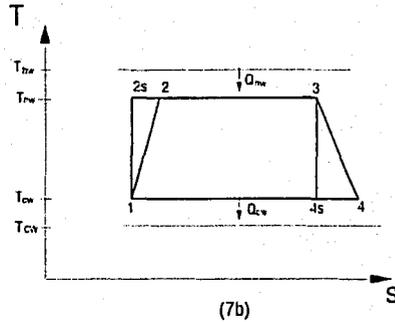
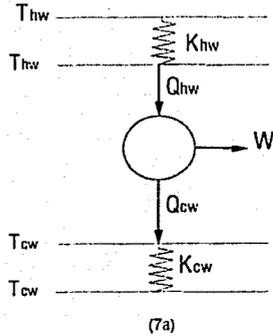


Figura 7. a) Máquina térmica de Carnot no-endorreversible con depósitos térmicos de capacidad térmica infinita. b) Diagrama T-S de la máquina térmica no-endorreversible

El refrigerador de Carnot no-endorreversible (Figura 8a) opera entre dos depósitos térmicos, la temperatura del depósito térmico de alta temperatura es \bar{T}_{hr} y la del depósito de baja temperatura es \bar{T}_{cr} . La temperatura de la sustancia de trabajo en las etapas de alta y baja temperatura son T_{hr} y T_{cr} , respectivamente.

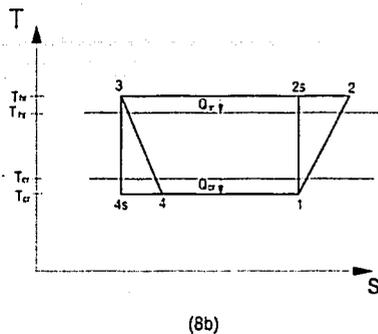
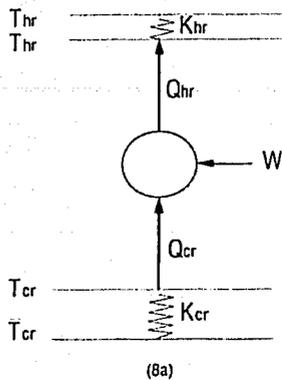


Figura 8. a) Refrigerador de Carnot no-endorreversible con depósitos térmicos infinitos.
 b) Diagrama T-S del refrigerador no-endorreversible.

En esta parte del trabajo se considera que la temperatura de los depósitos térmicos permanece constante ya que se supone que los depósitos son de capacidad térmica infinita. Siguiendo la hipótesis planteada para el caso endorreversible, en esta sección se supone que la máquina y el refrigerador en el ciclo combinado operan de manera alternada [31]. Por lo tanto, el tiempo total en que ocurre un ciclo en el sistema combinado se puede expresar como

$$\tau = \tau_w + \tau_r = \text{constante}, \quad (3.1)$$

donde τ_w y τ_r son los tiempos de los ciclos de la máquina térmica y del refrigerador en el ciclo combinado no-endorreversible, respectivamente.

De acuerdo a la Ecuación (2.8), el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador

no-endorreversible de tres depósitos térmicos se puede escribir como:

$$\psi^* = \frac{Q_{cr}}{Q_{hw}} = \eta^* \varphi^*, \quad (3.2)$$

donde η^* y φ^* son la eficiencia de la máquina de Carnot y el coeficiente de funcionamiento del refrigerador de Carnot no-endorreversibles. Q_{cr} y Q_{hw} son los calores que se transfieren desde los depósitos de alta y baja temperatura hacia la sustancia de trabajo, respectivamente, en el sistema global de tres depósitos térmicos. De manera similar al caso endorreversible, la Ecuación (3.2) muestra que ψ^* es óptimo cuando η^* y φ^* son óptimas. Por lo tanto, para determinar el coeficiente de funcionamiento global óptimo del sistema de tres depósitos térmicos no-endorreversible es necesario establecer los valores óptimos de η^* y φ^* ; para conseguir esto se seguirá el procedimiento utilizado en el caso endorreversible.

La hipótesis de trabajo es como sigue: optimizar el coeficiente de funcionamiento, Ecuación (3.2), del refrigerador no-endorreversible de tres depósitos térmicos, teniendo como restricciones que el tiempo total τ del ciclo es fijo y que la máquina térmica y el refrigerador, dentro del sistema global de tres depósitos, operan de manera alternada. De lo anterior y de la Ecuación (3.2) se formula la siguiente función de Lagrange:

$$L = \psi^* + \lambda (\tau - \tau_w - \tau_r), \quad (3.3)$$

3.1 Eficiencia óptima de una máquina térmica no-endorreversible que opera a una tasa de calor dada entre el depósito de alta temperatura y la sustancia de trabajo.

Con base en los comentarios de la sección anterior, en esta sección se determina la eficiencia térmica óptima de una máquina térmica no-endorreversible que opera entre dos depósitos térmicos de capacidad térmica infinita (Figura 7). Se acepta que existen irreversibilidades debido a la conducción de calor entre los depósitos térmicos y la sustancia de trabajo, así como debido a efectos disipativos dentro de ésta, como son fricción, gradientes de temperatura, gradientes de presión, etc. [53].

3.1.1 Modelo del ciclo

El diagrama $T - S$ de una máquina de Carnot no-endorreversible se muestra en la Figura 7b. El ciclo opera entre dos depósitos térmicos a temperatura \bar{T}_{hw} y \bar{T}_{cw} ($\bar{T}_{hw} > \bar{T}_{cw}$). T_{hw} y T_{cw} denotan las temperaturas de la sustancia de trabajo en las etapas de alta y baja temperatura, respectivamente. El proceso isotérmico de adición de calor entre 2s y 3 se lleva a cabo a la temperatura T_{hw} la cual es más baja que \bar{T}_{hw} . De manera similar, la sustracción de calor desde la sustancia de trabajo a temperatura T_{hw} hacia el depósito de baja temperatura se realiza a T_{cw} , que es más alta que \bar{T}_{cw} . Por otro lado, el calor Q_{hw} absorbido desde el depósito de alta temperatura y el calor liberado hacia el depósito de baja temperatura Q_{cw} se puede escribir como:

$$Q_{hw} = \int_0^{\tau_w} K_{hw}(t) [\bar{T}_{hw} - T_{hw}(t)] dt, \quad (3.4)$$

$$Q_{cw} = \int_0^{\tau_w} K_{cw}(t) [T_{hw}(t) - \bar{T}_{cw}] dt, \quad (3.5)$$

donde $K_{hw}(t)$ y $K_{cw}(t)$ son las conductividades térmicas para los procesos de transferencia de calor entre la sustancia de trabajo y los depósitos de alta y baja temperatura, respectivamente. Se supone que en el tiempo $t = 0$ la sustancia de trabajo empieza a tener contacto térmico con el depósito de alta temperatura. Por lo tanto se puede escribir a $K_{hw}(t)$ y $K_{cw}(t)$ como

$$K_{hw}(t) = \begin{cases} K_{hw} & 0 \leq t < t_{hw}, \\ 0 & t_{hw} \leq t < \tau_w, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$K_{cw}(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_{hw}, \\ K_{cw} & t_{hw} \leq t < \tau_w, \end{cases} \quad (3.7)$$

donde t_{hw} es el tiempo de suministro de calor, K_{hw} y K_{cw} se consideran constantes ya que se supone, por simplificación del problema, que las propiedades de la sustancia de trabajo durante cada etapa permanecen constantes. Las ecuaciones (3.6) y (3.7) se basan en la hipótesis de que el sistema opera de manera alternada entre las etapas de alta y baja temperatura, existe una especie "switchco", esto es, mientras ocurre el proceso de intercambio térmico entre la sustancia de trabajo y el depósito térmico de alta temperatura, en la etapa de baja temperatura no existe tal. De manera inversa, cuando el proceso se lleva a cabo en la etapa de baja temperatura, en la etapa de alta no ocurre ningún fenómeno de transferencia de calor.

Por otra parte, para describir cuantitativamente el efecto de la disipación interna de la sustancia de trabajo de la máquina térmica se puede introducir el parámetro R_w que cuantifica el grado de disipación interna en la sustancia de trabajo; de la segunda ley de la termodinámica

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_{hw}}{T_{hw}} - \frac{Q_{cw}}{T_{cw}} < 0. \quad (3.8)$$

La desigualdad (3.8) se puede reescribir como una igualdad introduciendo el parámetro

R_w mencionado de tal forma que se obtiene:

$$\frac{Q_{hw}}{T_{hw}} = R_w \frac{Q_{cw}}{T_{cw}}, \quad 0 < R_w < 1. \quad (3.9)$$

En la ecuación anterior R_w adquiere valores entre 0.0 y 1.0, esto se deduce si se observa la Ecuación (3.8), el término Q_{cw}/T_{cw} es mayor que Q_{hw}/T_{hw} por lo tanto, para lograr que dicha ecuación se convierta en una igualdad es necesario afectar el término que es mayor por una constante que sea menor que 1.0.

Con la definición anterior R_w puede escribirse como:

$$R_w = \frac{Q_{hw}T_{cw}}{Q_{cw}T_{hw}} = \frac{T_{hw}(S_3 - S_2)T_{cw}}{T_{cw}(S_4 - S_1)T_{hw}} = \frac{S_3 - S_2}{S_4 - S_1}, \quad (3.10)$$

y caracteriza totalmente el grado de irreversibilidad interna de la sustancia de trabajo. Como se observa de la Ecuación (3.10), el parámetro R_w representa la razón del cambio de entropía entre los procesos isotérmicos de transferencia de calor. La Ecuación (3.10) muestra que cuando $R_w = 1$, la máquina térmica es endorreversible [50], [31], [54]; y cuando $R_w < 1$, la máquina es internamente irreversible. A R_w se le llama el parámetro de la irreversibilidad del ciclo [98] y S es la entropía específica. El modelo del ciclo adoptado en esta sección se aproxima más a máquinas térmicas reales que el modelo endorreversible, debido a que todas las máquinas son internamente irreversibles, y es el caso analizado en esta sección.

3.1.2 Configuración del ciclo óptimo

De la primera ley de la termodinámica, el trabajo total producido por la máquina térmica introducida anteriormente en un ciclo, se puede escribir como

$$W = \int_0^{\tau_w} \{K_{hw}(t) [\bar{T}_{hw} - T_{hw}(t)] - K_{cw}(t) [T_{lw}(t) - \bar{T}_{lw}]\} dt \quad (3.11)$$

y de la segunda ley de la termodinámica, el cambio de entropía de la sustancia de trabajo por ciclo es

$$\Delta S = \int_0^{\tau_w} \left\{ K_{hw}(t) \left[\frac{\bar{T}_{hw}(t)}{T_{hw}(t)} - 1 \right] - R_w K_{cw}(t) \left[1 - \frac{\bar{T}_{cw}}{T_{cw}(t)} \right] \right\} dt = 0, \quad (3.12)$$

debido a que el ciclo es internamente irreversible.

Ahora para analizar la configuración óptima del ciclo, se puede obtener la eficiencia óptima bajo las condiciones de que el tiempo del ciclo $\tau_w = t_{hw} + t_{cw}$ (t_{hw} y t_{cw} son los tiempos de suministro de calor hacia la sustancia de trabajo y extracción de calor desde ésta, respectivamente) y el calor suministrado Q_{hw} son dados. La definición de eficiencia térmica para una máquina térmica es:

$$\eta^* = 1 - \frac{Q_{cw}}{Q_{hw}} \quad (3.13)$$

Maximizar la eficiencia η^* bajo las condiciones anteriormente establecidas es equivalente a determinar el mínimo Q_{cw} bajo las condiciones de que τ_w y Q_{hw} son dados. Este es un problema de optimización que se puede resolver por el método de multiplicadores de Lagrange [72], [100]. Por esta razón, usando la Ecuación (3.5) y las ecuaciones de restricción (3.4), (3.12), la función de Lagrange para este problema se puede escribir como:

$$L_w = K_{cw}(t) [T_{cw}(t) - \bar{T}_{cw}] + \lambda_1 K_{hw}(t) [\bar{T}_{hw} - T_{hw}(t)] + \quad (3.14)$$

$$\lambda_2 \left\{ K_{hw}(t) \left[\frac{\bar{T}_{hw}}{T_{hw}(t)} - 1 \right] - R_w K_{cw}(t) \left[1 - \frac{\bar{T}_{cw}}{T_{cw}(t)} \right] \right\}. \quad (3.15)$$

donde λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange. Al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a la Ecuación (3.14), $\frac{\partial L_w}{\partial T_{cw}} = 0$ y $\frac{\partial L_w}{\partial T_{hw}} = 0$, se llega a:

$$1 - \lambda_2 R_w \frac{\bar{T}_{cw}}{T_{cw}^2(t)} = 0 \text{ y } \lambda_1 - \lambda_2 \frac{\bar{T}_{hw}}{T_{hw}^2(t)} = 0$$

de donde se obtiene fácilmente que:

$$T_{cw}(t) = \sqrt{\lambda_2 R_w \bar{T}_{cw}} = T_1 = \text{constante} \quad (3.16)$$

y

$$T_{hw}(t) = \sqrt{\frac{\lambda_2 \bar{T}_{hw}}{\lambda_1}} = T_2 = \text{constante}. \quad (3.17)$$

De las Ecuaciones (3.16) y (3.17) se establece que las temperaturas óptimas de la sustancia de trabajo en las etapas de baja y alta temperatura permanecen constantes cuando los depósitos térmicos se consideran de capacidad térmica infinita, mismas que tienen que ser determinadas en términos de los parámetros involucrados.

Sustituyendo las Ecuaciones (3.16) y (3.17) en la ecuación de la condición cíclica de la entropía, Ecuación (3.12), se tiene que:

$$K_{hw} t_{hw} \left(\frac{\bar{T}_{hw}}{T_2} - 1 \right) + K_{cw} t_{cw} R_w \left(\frac{\bar{T}_{cw}}{T_1} - 1 \right) = 0. \quad (3.18)$$

Para determinar las temperaturas óptimas de la sustancia de trabajo, se integra la Ecuación (3.4), que define el calor absorbido por la sustancia de trabajo en la etapa de alta temperatura, con lo que se obtiene:

$$Q_{hw} = K_{hw} [\bar{T}_{hw} - T_{hw}(= T_2)] t_{hw}$$

de donde se tiene que T_2 esta definida por:

$$T_2 = T_{hw} = \bar{T}_{hw} - \frac{Q_{hw}}{K_{hw} t_{hw}}, \quad (3.19)$$

y sustituyendo la Ecuación (3.19) en la Ecuación (3.18) se puede escribir como:

$$T_1 = T_{cw} = \frac{\bar{T}_{cw} \left(\bar{T}_{hw} - \frac{Q_{hw}}{K_{hw} t_{hw}} \right)}{\bar{T}_{hw} - Q_{hw} \left(\frac{1}{K_{hw} t_{hw}} - \frac{1}{K_{cw} t_{cw} R_w} \right)}. \quad (3.20)$$

Las Ecuaciones (3.19) y (3.20) definen las temperaturas óptimas de la sustancia de trabajo en la etapa de alta y baja temperatura, respectivamente, siempre y cuando se conozcan t_{hw} y t_{cw} , que también son parte del problema y tienen que determinarse. Por otra parte, si se integra la Ecuación (3.5) se obtiene:

$$Q_{cw} = K_{cw} t_{cw} \bar{T}_{cw} (T_1 / \bar{T}_{cw} - 1) \quad (3.21)$$

y sustituyendo la Ecuación (3.20) en la Ecuación (3.21), se obtiene que:

$$Q_{cw} = K_{cw} t_{cw} \bar{T}_{cw} \left[\frac{\bar{T}_{hw} - \frac{Q_{hw}}{K_{hw} t_{hw}}}{\bar{T}_{hw} - Q_{hw} \left(\frac{1}{K_{hw} t_{hw}} + \frac{1}{K_{cw} t_{cw} R_w} \right)} - 1 \right]. \quad (3.22)$$

Por lo tanto, de las Ecuaciones (3.13) y (3.22), la eficiencia del ciclo se puede expresar como:

$$\eta^* = 1 - \frac{Q_{cw}}{Q_{hw}} = 1 - \frac{1}{R_w} \frac{\bar{T}_{cw}}{\bar{T}_{hw} - Q_{hw} \left(\frac{1}{K_{hw} t_{hw}} + \frac{1}{K_{cw} t_{cw} R_w} \right)}. \quad (3.23)$$

Puesto que la eficiencia debe ser maximizada con respecto a los parámetros desconocidos (t_{hw} y t_{cw}), teniendo como restricción que el ciclo se lleva a cabo en un tiempo fijo $\tau_w = t_{hw} + t_{cw}$, se puede formular la siguiente lagrangiana siendo la función objetivo η^*

$$L = \eta^* (t_{hw}, t_{cw}) + \lambda (\tau_w - t_{hw} - t_{cw}) \quad (3.24)$$

lo que nos proporcionará los valores de t_{hw} y t_{cw} que hacen que η^* sea óptima. De las ecuaciones de Euler-Lagrange se tiene que

$$\frac{\partial L}{\partial t_{hw}} = 0 \text{ y } \frac{\partial L}{\partial t_{cw}} = 0 \quad (3.25)$$

donde

$$\frac{\partial L}{\partial t_{hw}} = \frac{1}{R_w} \frac{\bar{T}_{cw} \left(\frac{Q_{hw}}{K_{hw} t_{hw}^2} \right)}{\left[\bar{T}_{hw} - Q_{hw} \left(\frac{1}{K_{hw} t_{hw}} + \frac{1}{K_{cw} t_{cw} R_w} \right) \right]^2} \quad (3.26)$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial t_{cw}} = \frac{1}{R_w} \frac{\bar{T}_{cw} \left(\frac{Q_{hw}}{K_{cw} t_{cw}^2 R_w} \right)}{\left[\bar{T}_{hw} - Q_{hw} \left(\frac{1}{K_{hw} t_{hw}} + \frac{1}{K_{cw} t_{cw} R_w} \right) \right]^2} \quad (3.27)$$

de las Ecuaciones (3.25)-(3.27) se determinan las duraciones óptimas de alta y baja temperatura y considerando que $\tau_w = t_{hw} + t_{cw}$, se tiene que:

$$t_{hw} = \tau_w \frac{\sqrt{R_w K_{cw}}}{\sqrt{K_{hw}} + \sqrt{R_w K_{cw}}}, \quad (3.28)$$

y

$$t_{cw} = \tau_w \frac{\sqrt{K_{hw}}}{\sqrt{K_{hw}} + \sqrt{R_w K_{cw}}}. \quad (3.29)$$

De aquí que la eficiencia máxima, Ecuación (3.23), bajo las condiciones dadas, se puede escribir como:

$$\eta^* = 1 - \frac{1}{R_w} \frac{\bar{T}_{cw}}{\bar{T}_{hw} - \frac{Q_{hw}}{K_w \tau_w}}, \quad (3.30)$$

donde $K_w = R_w K_{hw} K_{cw} / (\sqrt{K_{hw}} + \sqrt{R_w K_{cw}})^2$. En este caso, K_w representa una conductancia global equivalente para la máquina térmica. De la Ecuación (3.30) se puede ver que cuando $R_w = 1$, se obtiene la eficiencia óptima de una máquina térmica de Carnot endorreversible que opera entre dos depósitos de capacidad térmica infinita.

3.2 Coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador no-endorreversible que opera a una tasa de refrigeración dada.

En esta sección se determina el coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador no-endorreversible que opera entre dos depósitos térmicos de capacidad térmica infinita (Figura 8a). Se supone que existen irreversibilidades debido a la conducción de calor entre los depósitos térmicos y la sustancia de trabajo, así como debido a efectos disipativos internos en ésta.

3.2.1 Modelo del ciclo

El diagrama $T-S$ de un refrigerador de Carnot no-endorreversible se muestra en la Figura 8b. El ciclo opera entre dos depósitos térmicos a temperatura \bar{T}_{hr} y \bar{T}_{cr} ($\bar{T}_{hr} > \bar{T}_{cr}$). T_{hr} y T_{cr} denotan las temperaturas de la sustancia de trabajo en las etapas de alta y baja temperatura, respectivamente. El proceso isotérmico de adición de calor entre 4 y 1 se lleva a cabo a T_{cr} la cual es más baja que \bar{T}_{cr} . De manera similar, la transferencia de calor desde la sustancia de trabajo a temperatura T_{hr} hacia el depósito de alta temperatura se lleva a cabo a T_{hr} , que es más alta que \bar{T}_{hr} . Por otro lado, el calor Q_{cr} absorbido desde el depósito de baja temperatura y el calor liberado Q_{hr} hacia el depósito de alta temperatura por la sustancia de trabajo están dados por las siguientes expresiones:

$$Q_{cr} = \int_0^{T_r} K_{cr}(t) (\bar{T}_{cr} - T_{cr}) dt \quad (3.31)$$

$$Q_{hr} = \int_0^{T_r} K_{hr}(t) (T_{hr} - \bar{T}_{hr}) dt \quad (3.32)$$

donde $K_{cr}(t)$ y $K_{hr}(t)$ son, las conductividades térmicas para la transferencia de calor entre la sustancia de trabajo y los depósitos térmicos de baja y alta temperatura, respectivamente. Se supone que en el tiempo inicial de este ciclo $t = 0$, la sustancia de trabajo

empieza a tener contacto con el depósito de baja temperatura. Por lo tanto se puede escribir a $K_{cr}(t)$ y $K_{hr}(t)$ como

$$K_{cr}(t) = \begin{cases} K_{cr} & 0 \leq t < t_{cr}, \\ 0 & t_{cr} \leq t < \tau_r, \end{cases} \quad (3.33)$$

$$K_{hr}(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < t_{cr}, \\ K_{hr} & t_{cr} \leq t < \tau_r, \end{cases} \quad (3.34)$$

donde t_{cr} es el tiempo de suministro de calor hacia la sustancia de trabajo. K_{cr} y K_{hr} son constantes.

De manera análoga al caso de la máquina térmica, se considerarán los efectos de irreversibilidades internas en la sustancia de trabajo, incluyéndolas en el parámetro R_r , en la segunda ley de la termodinámica.

3.2.2 Configuración del ciclo óptimo

En esta sección se determinará el coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador no-endorreversible definido como:

$$\varphi^* = \left(\frac{Q_{hr}}{Q_{cr}} - 1 \right)^{-1}. \quad (3.35)$$

De la Ecuación (3.35) se puede observar que para una tasa refrigeración Q_{cr} fija, el coeficiente de funcionamiento es máximo cuando Q_{hr} es mínimo, por esta razón se procederá a optimizar la función que define a Q_{hr} . Se considera que el ciclo tiene una duración total $\tau_r = t_{cr} + t_{hr}$, donde t_{cr} y t_{hr} son las duraciones cuando la sustancia de trabajo está en contacto térmico con los depósitos de baja y alta temperatura, respectivamente.

Para este ciclo termodinámico, la segunda ley de la termodinámica, se puede escribir como:

$$\Delta S = \int_0^{\tau_r} \left\{ K_{cr} \left(\frac{\bar{T}_{cr}}{T_{cr}} - 1 \right) - R_r K_{hr} \left(1 - \frac{\bar{T}_{hr}}{T_{hr}} \right) \right\} dt = 0, \quad (3.36)$$

donde el parámetro R_r representa el grado de irreversibilidad interna en la sustancia de trabajo, dicho parámetro proviene de la desigualdad de Clausius que se establece para este ciclo como:

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_{cr}}{T_{cr}} - \frac{Q_{hr}}{T_{hr}} < 0, \quad (3.37)$$

y que es válida para cualquier tipo de procesos, sean reversibles o irreversibles. Para que la Ecuación (3.37) se convierta en una igualdad se puede introducir en ésta una constante, con lo que se tiene:

$$\frac{Q_{cr}}{T_{cr}} - R_r \frac{Q_{hr}}{T_{hr}} = 0, \quad (3.38)$$

de aquí que el parámetro R_r está definido como:

$$R_r = \frac{Q_{cr} T_{hr}}{Q_{hr} T_{cr}}. \quad (3.39)$$

Además, del diagrama de temperatura-entropía para este ciclo (Figura 8), la Ecuación (3.39) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$R_r = \frac{T_{cr} (S_1 - S_4) T_{hr}}{T_{hr} (S_2 - S_3) T_{cr}} = \frac{(S_1 - S_4)}{(S_2 - S_3)}.$$

La ecuación anterior muestra también que el parámetro R_r representa la razón del cambio de entropía que se lleva a cabo en la sustancia de trabajo en la etapa de baja temperatura al cambio de entropía que ocurre en la etapa de alta temperatura. Del diagrama $T-S$ de la Figura 8 se observa que $(S_1 - S_4) < (S_2 - S_3)$, lo que conduce a decir que los valores que puede tomar R_r están entre 0 y 1.

Como se mencionó anteriormente, para optimizar el coeficiente de funcionamiento, Ecuación (3.35), para un valor fijo de Q_{cr} , se observa que Q_{hr} debe ser mínimo, Ecuación (3.32). Para este problema la función de Lagrange se puede escribir como:

$$L_r = K_{hr} (T_{hr} - \bar{T}_{hr}) + \lambda_1 K_{cr} (\bar{T}_{cr} - T_{cr}) + \lambda_2 \left[K_{cr} \left(\frac{\bar{T}_{cr}}{T_{cr}} - 1 \right) - R_r K_{hr} \left(1 - \frac{\bar{T}_{hr}}{T_{hr}} \right) \right] \quad (3.40)$$

donde el primero, segundo y tercer términos del lado derecho representan, el calor rechazado en la etapa de alta temperatura, el calor suministrado a la sustancia de trabajo en la etapa de baja temperatura y la condición cíclica de la entropía en el ciclo, respectivamente. λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange.

Al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a la Ecuación (3.40), $\frac{\partial L_r}{\partial T_{cr}} = 0$ y $\frac{\partial L_r}{\partial T_{hr}} = 0$, se llega a:

$$\frac{\partial L_r}{\partial T_{cr}} = \lambda_1 K_{cr} - \lambda_2 K_{cr} \frac{\bar{T}_{cr}}{T_{cr}^2} = 0 \quad (3.41)$$

y

$$\frac{\partial L_r}{\partial T_{hr}} = -K_{hr} - \lambda_2 R_r K_{hr} \frac{\bar{T}_{hr}}{T_{hr}^2} T_{hr} = 0. \quad (3.42)$$

De la Ecuación (3.41) se demuestra fácilmente que la temperatura de la sustancia de trabajo en la etapa de baja temperatura está dado por:

$$T_{cr} = \sqrt{\frac{\lambda_2 \bar{T}_{cr}}{\lambda_1}} = \text{constante}, \quad (3.43)$$

y de la Ecuación (3.42) la correspondiente temperatura de la sustancia de trabajo en la etapa de alta temperatura es:

$$T_{hr} = \sqrt{-\lambda_2 R_r \bar{T}_{hr}} = \text{constante}.$$

De las Ecuaciones (3.41) y (3.43) se establece que las temperaturas de la sustancia de trabajo en las etapas de baja y alta temperatura permanecen constantes cuando el ciclo es óptimo, mismas que tienen que ser determinadas en términos de los parámetros involucrados (Q_{cr} , \bar{T}_{cr} , \bar{T}_{hr} , K_{cr} , K_{hr} , t_{cr} y t_{hr}).

Por otro lado, al sustituir la restricción de que Q_{cr} es fijo, Ecuación (3.31) $T_{cr} = \bar{T}_{cr} - Q_{cr}/K_{cr}t_{cr}$, en la condición cíclica de la entropía, Ecuación (3.36), se tiene que:

$$K_{cr}t_{cr} \left(\frac{\bar{T}_{cr}}{T_{cr}} - 1 \right) + R_r K_{hr}t_{hr} \left(\frac{\bar{T}_{hr}}{T_{hr}} - 1 \right) = 0, \quad (3.44)$$

y entonces se determina la temperatura de la sustancia de trabajo en la etapa de alta temperatura como:

$$T_{hr} = \frac{\bar{T}_{hr} \left(\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_{cr}t_{cr}} \right)}{\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{1}{K_{cr}t_{cr}} + \frac{1}{R_r K_{hr}t_{hr}} \right)} \quad (3.45)$$

Esta última ecuación representa la temperatura óptima de la sustancia de trabajo en la etapa de alta temperatura. De la definición de $Q_{hr} = K_{hr}t_{hr} (T_{hr}/\bar{T}_{hr} - 1)$, el término T_{hr}/\bar{T}_{hr} se puede escribir, de la Ecuación (3.45,) como:

$$\frac{T_{hr}}{\bar{T}_{hr}} = \frac{\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_{cr}t_{cr}}}{\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{1}{K_{cr}t_{cr}} + \frac{1}{R_r K_{hr}t_{hr}} \right)} \quad (3.46)$$

que al sustituir esta última ecuación en la definición de Q_{hr} , se tiene que:

$$Q_{hr} = K_{hr}t_{hr}\bar{T}_{hr} \left(\frac{\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_{cr}t_{cr}}}{\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{1}{K_{cr}t_{cr}} + \frac{1}{R_r K_{hr}t_{hr}} \right)} - 1 \right) \quad (3.47)$$

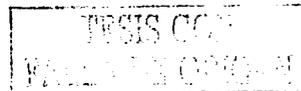
De la definición del coeficiente de funcionamiento, y teniendo presente la Ecuación (3.47), el término Q_{hr}/Q_{cr} , está dado por:

$$\frac{Q_{hr}}{Q_{cr}} = \frac{K_{hr}t_{hr}\bar{T}_{hr}}{Q_{cr}} \left[\frac{\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_{cr}t_{cr}}}{\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{1}{K_{cr}t_{cr}} + \frac{1}{R_r K_{hr}t_{hr}} \right)} - 1 \right] \quad (3.48)$$

y simplificando conduce a que:

$$\frac{Q_{hr}}{Q_{cr}} = \frac{\bar{T}_{hr}}{R_r \left[\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{1}{K_{cr}t_{cr}} + \frac{1}{R_r K_{hr}t_{hr}} \right) \right]} \quad (3.49)$$

Finalmente, sustituyendo la Ecuación (3.49) en la Ecuación (3.35), el coeficiente de fun-



cionamiento se puede escribir como

$$\varphi^* = \left[\frac{\bar{T}_{hr}}{R_r \left[\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{1}{K_{cr} t_{cr}} + \frac{1}{R_r K_{hr} t_{hr}} \right) \right]} - 1 \right]^{-1} \quad (3.50)$$

Debido a que en esta última ecuación se tienen aún como parámetros desconocidos a t_{cr} y t_{hr} , el coeficiente de funcionamiento se debe maximizar con respecto a éstos. Por lo tanto, considerando a φ^* como una función objetivo y teniendo como parámetros fijos a $\tau_r = t_{cr} + t_{hr}$ y Q_{cr} , se puede formular la siguiente función de Lagrange:

$$L_r = \varphi^* (t_{cr}, t_{hr}) + \lambda (\tau_r - t_{cr} - t_{hr}), \quad (3.51)$$

que al aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange ($\frac{\partial \varphi^*}{\partial t_{cr}} = 0$ y $\frac{\partial \varphi^*}{\partial t_{hr}} = 0$) a la Ecuación (3.51) y considerando la Ecuación (3.50) se tiene que:

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial t_{cr}} = \left\{ \frac{\bar{T}_{hr}}{R_r \left[\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{1}{K_{cr} t_{cr}} + \frac{1}{R_r K_{hr} t_{hr}} \right) \right]} - 1 \right\}^{-2} \left\{ \frac{\bar{T}_{hr} \frac{Q_{cr}}{K_{cr} t_{cr}^2}}{R_r \left[\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{1}{K_{cr} t_{cr}} + \frac{1}{R_r K_{hr} t_{hr}} \right) \right]^2} \right\} \quad (3.52)$$

y

$$\frac{\partial \varphi^*}{\partial t_{hr}} = \left[\frac{\bar{T}_{hr}}{R_r \left[\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{1}{K_{cr} t_{cr}} + \frac{1}{R_r K_{hr} t_{hr}} \right) \right]} - 1 \right]^{-2} \left\{ \frac{\bar{T}_{hr} \frac{Q_{cr}}{R_r K_{hr} t_{hr}^2}}{R_r \left[\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{1}{K_{cr} t_{cr}} + \frac{1}{R_r K_{hr} t_{hr}} \right) \right]^2} \right\} \quad (3.53)$$

Al igualar las Ecuaciones (3.52) y (3.53) se obtiene

$$\frac{1}{K_{cr} t_{cr}^2} = \frac{1}{R_r K_{hr} t_{hr}^2} \quad (3.54)$$

de donde se llega a que:

$$t_{cr} = t_{hr} \sqrt{\frac{K_{hr}}{K_{cr}} R_r} \quad (3.55)$$

y al sustituir la Ecuación (3.55) en $\tau_r = t_{cr} + t_{hr}$, se determinan las duraciones óptimas de las etapas de baja y alta temperatura como

$$t_{cr} = \tau_r \frac{\sqrt{R_r K_{hr}}}{\sqrt{K_{cr}} + \sqrt{R_r K_{hr}}}, \quad (3.56)$$

y

$$t_{hr} = \tau_r \frac{\sqrt{K_{cr}}}{\sqrt{K_{cr}} + \sqrt{R_r K_{hr}}}. \quad (3.57)$$

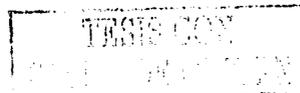
Finalmente, al sustituir las Ecuaciones (3.56) y (3.57) en la Ecuación (3.50), se obtiene el coeficiente de funcionamiento óptimo para el refrigerador no-endorreversible como

$$\varphi^* = \left[\frac{\bar{T}_{hr}}{R_r \left[\bar{T}_{cr} - Q_{cr} \left(\frac{\sqrt{K_{cr}} + \sqrt{R_r K_{hr}}}{K_{cr} \tau_r \sqrt{R_r K_{hr}}} + \frac{\sqrt{K_{cr}} + \sqrt{R_r K_{hr}}}{R_r K_{hr} \tau_r \sqrt{K_{cr}}} \right) \right]} - 1 \right]^{-1}, \quad (3.58)$$

simplificando la expresión anterior

$$\varphi^* = \left(\frac{1}{R_r} \frac{\bar{T}_{hr}}{T_{cr}} - 1 \right)^{-1} \quad (3.59)$$

donde $K_r = R_r K_{cr} K_{hr} / (\sqrt{K_{cr}} + \sqrt{R_r K_{hr}})^2$ y representa una conductancia global equivalente en el refrigerador no-endorreversible. Como se puede apreciar, cuando $R_r = 1$ se tiene el coeficiente de funcionamiento del refrigerador endorreversible.



3.3 Optimización del sistema combinado equivalente para un refrigerador no-endorreversible que opera entre tres depósitos térmicos

Siguiendo la metodología utilizada en la optimización del refrigerador endorreversible de tres depósitos térmicos, en la que se demostró que el coeficiente de funcionamiento global para un sistema de refrigeración de tres depósitos térmicos está dado como el producto de la eficiencia de una máquina térmica y del coeficiente de funcionamiento de un refrigerador de dos depósitos térmicos, el coeficiente de funcionamiento para el refrigerador no-endorreversible se puede escribir como:

$$\psi^* = \left[1 - \frac{1}{R_w} \frac{\bar{T}_0}{\bar{T}_{hw} - \frac{Q_{hw}}{K_w \tau_w}} \right] \left[\frac{R_r \left(\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r} \right)}{\bar{T}_0 - R_r \left(\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r} \right)} \right]. \quad (3.60)$$

El primero y segundo término del lado derecho de esta última ecuación son la eficiencia óptima de una máquina térmica, Ecuación (3.30), y el coeficiente de funcionamiento óptimo de un refrigerador, ambos no-endorreversibles, respectivamente. Tomando en consideración el coeficiente de funcionamiento, se puede hacer el siguiente cambio de variable $Q_{hw} = Q_{cr}/\psi^*$, con lo que la Ecuación (3.60) se puede reescribir como:

$$\psi^* = \left[1 - \frac{1}{R_w} \frac{\bar{T}_0}{\bar{T}_{hw} - \frac{Q_{cr}}{\psi^* K_w \tau_w}} \right] \left[\frac{R_r \left(\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r} \right)}{\bar{T}_0 - R_r \left(\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r} \right)} \right]. \quad (3.61)$$

Al igual que para el caso endorreversible, esta última ecuación resulta en una función implícita en ψ^* , donde se tiene como parámetro fijo a Q_{cr} , siendolos tiempos τ_w y τ_r variables. En la última ecuación se considera que $\bar{T}_{cw} = \bar{T}_{hr} = T_0$. Ahora, para optimizar el ciclo no-endorreversible de tres depósitos térmicos con capacidades térmicas infinitas se supone a τ_w y τ_r como variables, mientras que Q_{cr} y τ ($\tau = \tau_w + \tau_r$) permanencen

constantes en la Ecuación (3.61). Considerando las restricciones anteriores, se toma a ψ^* como una función objetivo, y al derivarla parcialmente con respecto a las variables τ_w y τ_r , aplicando el teorema de la función implícita [68], se llega a:

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \tau_w} = \left[\frac{\bar{T}_0 \frac{Q_{cr}}{\psi^* K_w \tau_w^2}}{R_w \left(\bar{T}_{hw} - \frac{Q_{cr}}{\psi^* K_w \tau_w} \right)^2} \right] \left[\frac{R_r \left(\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r} \right)}{\bar{T}_0 - R_r \left(\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r} \right)} \right] \quad (3.62)$$

y

$$\frac{\partial \psi^*}{\partial \tau_r} = \left[1 - \frac{\bar{T}_0}{R_w \left(\bar{T}_{hw} - \frac{Q_{cr}}{\psi^* K_w \tau_w} \right)} \right] \left\{ \frac{\left[\bar{T}_0 - R_r \left(\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r} \right) \right] \frac{R_r Q_{cr}}{K_r \tau_r^2} + R_r^2 \left(\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r} \right) \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r^2}}{\bar{T}_0 - R_r \left(\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r} \right)^2} \right\} \quad (3.63)$$

Al igualar las ecuaciones (3.62) y (3.63) se obtiene:

$$\psi^* = \frac{K_r^{1/2} \tau_r R_r^{1/2}}{K_w^{1/2} \tau_w R_w^{1/2}} \frac{\bar{T}_{cr} - \frac{Q_{cr}}{K_r \tau_r}}{\bar{T}_{hw} - \frac{Q_{cr}}{\psi^* K_w \tau_w}} \quad (3.64)$$

Combinando la Ecuación (3.64) junto con $\tau = \tau_w + \tau_r$, los tiempos óptimos de duración de las etapas de alta y baja temperatura pueden escribirse como:

$$\tau_w = \frac{\sqrt{R_r K_r} \bar{T}_{cr} \tau + Q_{cr} \left(\sqrt{\frac{R_w}{K_w}} - \sqrt{\frac{R_r}{K_r}} \right)}{\sqrt{R_r K_w} \bar{T}_{hw} \psi^* + \bar{T}_{cr} \sqrt{R_r K_r}} \quad (3.65)$$

y

$$\tau_r = \frac{\sqrt{R_w K_w} \bar{T}_{hw} \tau \psi^* - Q_{cr} \left(\sqrt{\frac{R_w}{K_w}} - \sqrt{\frac{R_r}{K_r}} \right)}{\sqrt{R_r K_w} \bar{T}_{hw} \psi^* + \bar{T}_{cr} \sqrt{R_r K_r}} \quad (3.66)$$

Finalmente, la sustitución de las Ecuaciones (3.65) y (3.66) en la Ecuación (3.61) proporciona el coeficiente de funcionamiento óptimo bajo las condiciones de Q_{cr} y τ fijos, y

está dado por la expresión

$$\psi^* = \left[1 - \left(\frac{1}{R_w} \frac{\bar{T}_0}{\bar{T}_{hw}} \right) \frac{1}{1 - \frac{Q_{cr}}{\psi^* K_r \bar{T}_{cr} \tau} \frac{K_r \bar{T}_{cr} \tau}{K_w \bar{T}_{hw} \tau_w}} \right] \left\{ \frac{R_r \bar{T}_{cr} \left(1 - \frac{Q_{cr}}{K_r \bar{T}_{cr} \tau} \frac{\tau}{\tau_r} \right)}{\bar{T}_0 \left[1 - R_r \frac{\bar{T}_{cr}}{\bar{T}_0} \left(1 - \frac{Q_{cr}}{K_r \bar{T}_{cr} \tau} \frac{\tau}{\tau_r} \right) \right]} \right\}. \quad (3.67)$$

La Ecuación (3.67) muestra que el coeficiente de funcionamiento óptimo es una función implícita en ψ^* .

3.3.1 Adimensionalización

En virtud de que la Ecuación (3.67) es una función que depende de una gran variedad de parámetros, es necesario establecerla en una forma que permita estudiarla de manera eficiente y universal, es por ello que se tiene la necesidad de escribirla en forma adimensional, para ello se definen los siguientes parámetros adimensionales:

$$\alpha = \frac{\bar{T}_0}{\bar{T}_{hw}}, \beta = \frac{\bar{T}_{cr}}{\bar{T}_{hr}}, \gamma = \frac{\bar{T}_{cr}}{\bar{T}_0}, K = \frac{K_r}{K_w}, \tau_w^* = \frac{\tau_w}{\tau}, \tau_r^* = \frac{\tau_r}{\tau} \quad (3.68)$$

y notando que $\tau_w^* + \tau_r^* = 1$, la Ecuación (3.67) se transforma en

$$\psi^* = \left\{ 1 - \frac{\alpha}{R_w} \frac{1}{1 - \frac{K\Pi}{\psi^*} \frac{\gamma}{1 - \tau_r^*}} \right\} \left\{ \frac{R_r \beta \left(1 - \frac{\Pi}{\tau_r^*} \right)}{1 - R_r \beta \left(1 - \frac{\Pi}{\tau_r^*} \right)} \right\}, \quad (3.69)$$

donde se define la carga de refrigeración adimensional como $\Pi = Q_{cr}/K_r T_{cr} \tau$ y los tiempos óptimos de cada ciclo, escritos en forma adimensional, serán:

$$\tau_w^* = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\sqrt{R_r K} \gamma + K \gamma \Pi \left(\sqrt{R_w} - \sqrt{\frac{R_r}{K}} \right)}{\sqrt{\frac{R_w}{K}} \psi^* + \sqrt{R_r} \gamma} \quad (3.70)$$

y

$$\tau_r^* = \frac{1}{\sqrt{K}} \frac{\sqrt{R_w} \psi^* - K \gamma \Pi \left(\sqrt{R_w} - \sqrt{\frac{R_r}{K}} \right)}{\sqrt{\frac{R_w}{K}} \psi^* + \sqrt{R_r} \gamma} \quad (3.71)$$

En las Figuras 11 y 12 se presentan los principales resultados que muestran la variación de la carga de refrigeración como una función del coeficiente de funcionamiento para el refrigerador no-endorreversible, para valores fijos de los diversos parámetros involucrados. El análisis de estas gráficas se discutirá en el apartado de resultados.

3.4 Resultados y conclusiones

Modelo endorreversible

En la primera parte de este trabajo se desarrolló un modelo generalizado de un refrigerador endorreversible de tres depósitos térmicos con capacidades térmicas finitas para evaluar el coeficiente de funcionamiento. Se demuestra que este refrigerador es equivalente a un sistema combinado de un refrigerador endorreversible activado por una máquina térmica de Carnot endorreversible. Por lo tanto ambas máquinas operan de manera alternada. En las Figuras 9 y 10 se muestran los principales resultados numéricos. En la Figura 11 se grafica el coeficiente de funcionamiento óptimo ψ como una función del parámetro adimensional β_r con $\alpha = 0.004$, $\beta = 0.71$, $\gamma = \delta = 1.09$ y $\varepsilon_w = \varepsilon_r = 1.0$ y dos valores diferentes del parámetro adimensional β_w : $\beta_w = 5$ y 7 . Se considera que β_r (o β_w) se puede interpretar como la competencia entre la capacidad térmica del depósito de baja temperatura (depósito de alta temperatura) y las tasa de transferencia de calor global del refrigerador endorreversible (o la máquina térmica de Carnot) con los alrededores. Para ambos valores del parámetro β_w , el coeficiente de funcionamiento óptimo siempre decrece para valores crecientes del parámetro adimensional β_r y este efecto se incrementa fuertemente para valores crecientes del parámetro β_w . Físicamente esto significa que el sistema de refrigeración entero opera mejor si la operación de la máquina de Carnot endorreversible garantiza un balance razonable entre la fuente de calor del depósito de alta temperatura y la razón de transferencia de calor global de la máquina de Carnot con los alrededores. Por lo tanto se recomiendan valores de β_w de orden unidad. De la misma Figura 9, se nota que existen múltiples soluciones. Para un valor fijo de ψ , se obtienen dos valores del parámetro β_r . Por lo tanto un refrigerador con baja capacidad térmica del depósito de baja temperatura puede operar como un refrigerador con una gran capacidad térmica del depósito de baja temperatura, siempre y cuando se seleccionen valores apro-

piados del parámetro β_w . Se debe enfatizar que las conclusiones anteriores son válidas únicamente para los valores propuestos de los parámetros involucrados. En la Figura 10 se grafica la carga de refrigeración adimensional Π^* , como una función del coeficiente de funcionamiento, ψ , para $\beta_r = 8$ y $\beta_w = 5$ y 8. De igual manera, se aprecia que existen soluciones múltiples y para un valor dado del coeficiente de funcionamiento óptimo ψ , se obtiene dos valores de la carga de refrigeración adimensional Π^* . Este resultado tiene una importancia práctica significativa, debido a que de esta manera se alcanza un mejor proceso de enfriamiento, únicamente controlado por los valores propuestos del parámetro β_w . En la misma Figura se aprecia que para $\psi \sim 0.3$, los valores de la carga de refrigeración adimensional Π^* son máximos para cada valor de β_w . Por lo tanto para valores crecientes de β_w y $\psi \sim 0.3$ se obtiene el mejor efecto de enfriamiento. También, en esta figura se indica en $\psi_C = 2.35$ y $\Pi^* = 0$ la correspondiente solución clásica dada por la ecuación (2.6). Para este límite se debe recordar que la termodinámica clásica indica que existe un efecto neto de enfriamiento únicamente para una duración del ciclo que tiende a infinito, causando que la correspondiente carga de refrigeración Π^* es estrictamente igual a cero. Los valores numéricos para los parámetros adimensionales usados en este trabajo fueron tomados de [100]. Finalmente, para el caso endorreversible, es importante subrayar que la influencia simultánea de considerar valores finitos de las capacidades térmicas de los depósitos revela claramente nuevas características relacionadas directamente con la operación de un refrigerador que opera entre tres depósitos térmicos, como se puede observar de los resultados obtenidos las temperaturas son funciones tanto del tiempo como de parámetros que involucran las conductancias térmicas globales de intercambio térmico y de las capacidades térmicas, que son elementos que realmente están presentes en cualquier dispositivo real.

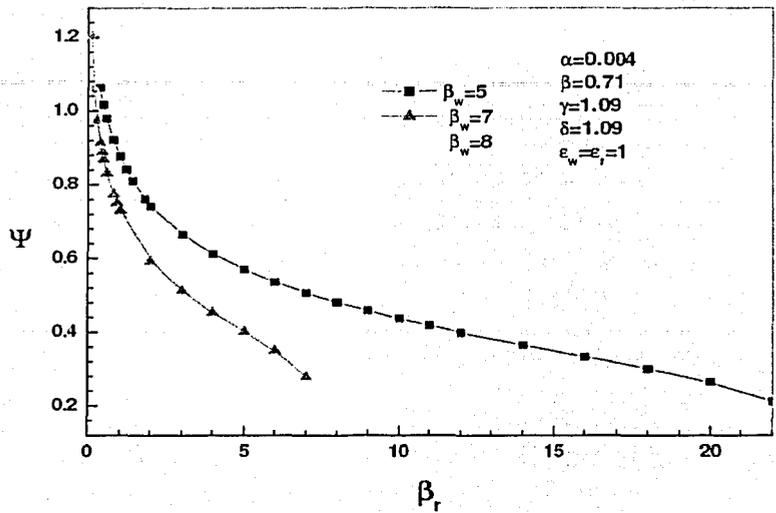


Figura 9.

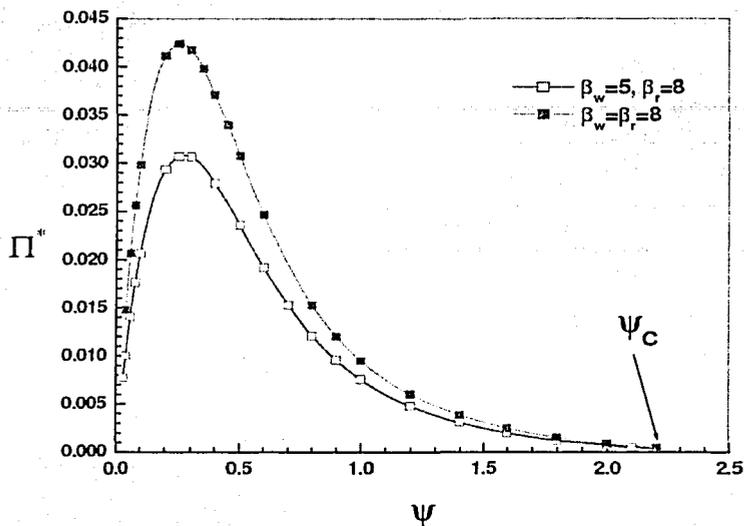


Figura 10.

Modelo no-endorreversible

En la Figura 11 se muestra la gráfica de la carga de refrigeración Π contra el coeficiente de funcionamiento óptimo ψ^* (ecuación 3.69) cuando el sistema es internamente reversible ($R_w = R_r = 1$), para diferentes valores del parámetro $K (= K_r/K_w = 0.5, 1.0, 1.5)$, que se puede interpretar como la competencia entre las conductancias térmicas equivalentes de los dos subsistemas (refrigerador y máquina térmica) que forman el sistema global de tres depósitos térmicos. En esta gráfica se observa que el sistema proporciona mejor carga de refrigeración cuando la conductancia equivalente del subsistema referente a la máquina térmica es mayor que la del refrigerador, asimismo, se nota que para cada curva, para un valor de la carga de refrigeración, se tienen dos valores del coeficiente de funcionamiento óptimo, es decir, el sistema opera de manera más eficiente tomando los valores de ψ^* aproximadamente mayores a 0.5.

Por otro lado, en la Figura 12 se grafica la curva que muestra el comportamiento de la carga de refrigeración contra el coeficiente de funcionamiento óptimo para el refrigerador no-endorreversible. En ésta se presentan los casos en que el parámetro de irreversibilidad interna en cada subsistema (máquina térmica y refrigerador) toman valores de $R_r = R_w = 0.9, 0.95, 0.975$ y 1.0 , para un valor de $K = 0.5$. Se puede observar que para valores decrecientes de los parámetros de irreversibilidad (mayor irreversibilidad interna), tanto el coeficiente de funcionamiento como la carga de refrigeración tienden a disminuir de manera radical.

En las figs. 11 y 12 se muestran que para un valor máximo del coeficiente de funcionamiento se tiene cero carga de refrigeración para cualquier valor de R_w, R_r y K , que es el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador de Carnot.

En la Figura 13 se observa la influencia de los correspondientes parámetros de irreversibilidad R_r y R_w ; es claro que la carga de refrigeración se ve afectada de manera negativa cuando la irreversibilidad es mayor en el subsistema de la máquina térmica. Además, si se comparan las figs 12 y 13, se puede establecer que para un valor fijo de la carga de refrigeración, se obtiene un mejor coeficiente de funcionamiento óptimo cuando hay un balance entre las irreversibilidades internas de los dos subsistemas que conforman el sistema global. Por ejemplo, de la Figura 12, para un valor de $\Pi \sim 0.03$ se tiene un coeficiente de funcionamiento $\psi^* \sim 0.9$, mientras que de la Figura 13, para el mismo valor de la carga de refrigeración, $\psi^* \sim 0.73$.

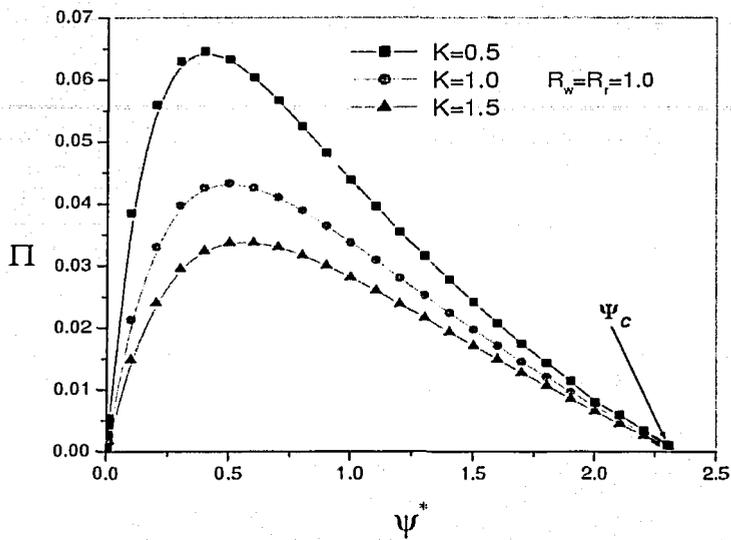


Figura 11.

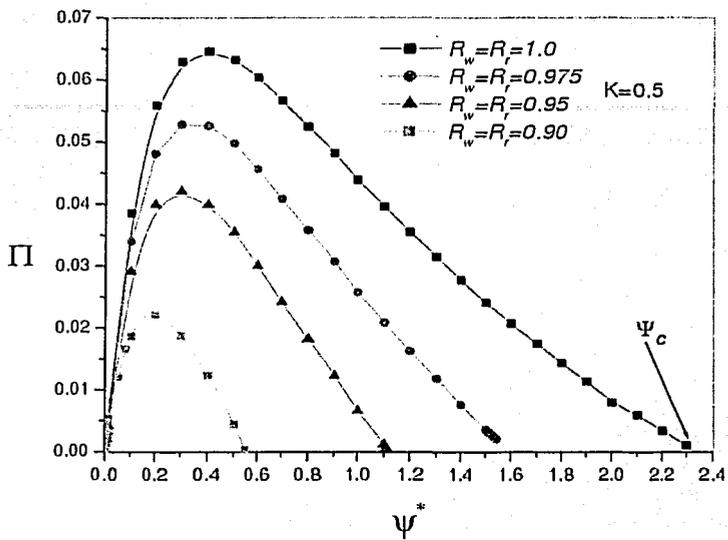


Figura 12.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

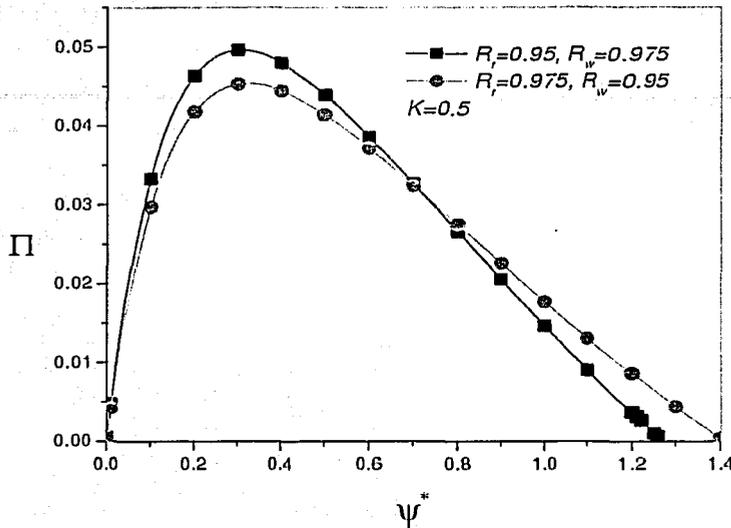


Figura 13.

Conclusiones particulares

De la Ecuaciones (2.69) y (2.112), se pueden hacer algunas observaciones importantes:

(1) Cuando $\alpha_{hw} \rightarrow \infty$ y $\alpha_{cw} \rightarrow \infty$, es decir, las resistencias térmicas se pueden despreciar, el ciclo es reversible, y la ecuación (2.69) se reduce a

$$\eta = 1 - \frac{C_{cw}T_{0cw}}{Q_{hw}} \left[\left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0cw}} \right)^{-C_{hw}/C_{cw}} - 1 \right] \equiv 1 - \frac{T_{0cw}}{T_{hw}^*}, \quad (3.72)$$

donde η^* es la eficiencia de una máquina térmica reversible de dos depósitos térmicos con capacidad térmica finita y

$$T_{hw}^* = \frac{Q_{hw}}{C_{cw}} \left[\left(1 - \frac{Q_{hw}}{C_{hw}T_{0cw}} \right)^{-C_{hw}/C_{cw}} - 1 \right]^{-1} \quad (3.73)$$

es la temperatura equivalente del depósito de alta temperatura de un ciclo de Carnot equivalente del ciclo reversible de dos depósitos térmicos finitos, y la temperatura del depósito de baja temperatura del ciclo de Carnot equivalente es T_{0cw} .

(2) En la ecuación (3.72), cuando se hace $C_{cw} \rightarrow \infty$ y $C_{hw} \rightarrow \infty$, se obtiene la eficiencia de Carnot $\eta = \eta_C$

De manera similar, de la ecuación (2.112):

(1) Cuando $\alpha_{cr} \rightarrow \infty$ y $\alpha_{hr} \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\varphi^* = \frac{1}{\frac{C_{hr}T_{0hr}}{Q_{cr}} \left[\frac{C_{cr}T_{0cr}}{C_{cr}T_{0cr} - Q_{cr}} - 1 \right] - 1} \quad (3.74)$$

donde φ^* es el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador reversible de dos depósitos térmicos con capacidad térmica finita.

(2) En la ecuación (3.74), cuando se hace $C_{cr} \rightarrow \infty$ y $C_{hr} \rightarrow \infty$, se obtiene el coeficiente de funcionamiento de un refrigerador de Carnot.

Finalmente, de las conclusiones observaciones anteriores, cuando $C_{cw} \rightarrow \infty$, $C_{hw} \rightarrow \infty$, $\alpha_{cr} \rightarrow \infty$, $\alpha_{hr} \rightarrow \infty$, $C_{cw} \rightarrow \infty$ y $C_{hw} \rightarrow \infty$, el coeficiente de funcionamiento del refrigerador de tres depósitos térmicos es el de Carnot reversible.

De manera similar, de las Ecuaciones (3.30) y (3.59), que representan la eficiencia térmica y el coeficiente de funcionamiento óptimos de una máquina térmica y de un refrigerador no-endorreversible, respectivamente, se pueden hacer algunas observaciones. Si se toma el límite de la eficiencia térmica, Ecuación (3.30), cuando K_w y τ_w tienden ∞ , el resultado que se obtiene es la eficiencia térmica de Carnot reversible. De igual manera, si se toma el límite del coeficiente de funcionamiento, Ecuación (3.59), cuando K_w y τ_w tienden ∞ , el coeficiente de funcionamiento obtenido es el caso del Carnot reversible, debido a lo anterior se tendrá que el coeficiente de funcionamiento del sistema combinado será el de un refrigerador de Carnot reversible que opera entre tres depósitos de capacidad térmica infinita.

Conclusiones generales

Atendiendo las preguntas planteadas en la sección 1.2, las que hacen referencia básicamente al tema central que trata la Termodinámica de Tiempo Finito, en este trabajo se han respondido la mayoría de ellas, como son:

a) Para el caso endorreversible se determinaron diversos parámetros que hacen que el coeficiente de funcionamiento sea óptimo, entre éstos se pueden citar la trayectoria óptima de las temperaturas de los depósitos térmicos y de la sustancia de trabajo que hacen que el ciclo termodinámico sea óptimo; los tiempos óptimos de los procesos de intercambio térmico entre el sistema y los alrededores. Es importante señalar la importancia que tiene el considerar a los depósitos térmicos como finitos, pues se nota claramente cómo la variación de éstas es exponencial con respecto al tiempo y no una constante, como lo trata la termodinámica clásica.

b) Para el caso no-endorreversible se determinaron las mismas variables antes citadas, con la diferencia de que se trato al sistema operando entre depósitos térmicos de capacidad térmica infinita, pero incluyendo de manera cualitativa el efecto que tienen las irreversibilidades internas en el funcionamiento del sistema de refrigeración.

Por lo anterior se puede concluir que el modelo estudiado se apega de manera más real al funcionamiento de máquinas térmicas reales, las que operan en tiempos finitos, a razones de transferencia de calor dadas y los procesos que se llevan a cabo en ellas son totalmente irreversibles. Es necesario resaltar que el coeficiente de funcionamiento óptimo que se determinó, así como los demás parámetros involucrados, nos proporciona un mejor entendimiento de las máquinas térmicas reales y representan las fronteras superiores a la que pueden llegar a operar refrigeradores reales de tres depósitos térmicos bajo las condiciones de operación establecidas.

Como recomendación final es preciso señalar que quedan abiertas aún muchas interrogantes, que pueden explorarse y que proporcionarían un análisis complementario al problema planteado, por ejemplo: ¿qué sucede si en lugar de considerar que los tiempos de duración de los procesos son fijos se consideran variables?, esto conduciría a tener un

problema de optimización con extremos variables; ¿qué pasa si se considera la evolución de las propiedades de la sustancia de trabajo varían en el espacio y el tiempo?, implicaría tener que determinar la evolución de estas variables de manera espacial y temporal, lo que complicaría demasiado el problema. Otro punto a mejorar es el de tomar en cuenta que realmente el sistema opera de manera continua y no de manera alternada, como se supuso en la hipótesis de trabajo. Así también se pueden citar otros tipos de optimización para este problema, proporcionando una gran variedad de restricciones como pueden ser: optimizar el proceso de tal manera que se determinen las áreas de transferencia de intercambio térmico que sean óptimas, se podría introducir el gasto másico de la sustancia de trabajo, que en general no se incluye en análisis de Termodinámica de Tiempo Finito, ya sea como una restricción o como una variable del problema. Finalmente, otro problema relacionado con el proceso de optimización planteado sería el de trabajarlo de manera experimental, es decir, validar el modelo obtenido con un prototipo físico, lo que conduciría a la mejora de modelos matemáticos como el obtenido en esta investigación. De esta manera se pueden mencionar muchos casos particulares más, sin embargo, la presente investigación queda como una puerta abierta para llevar a cabo la mejora continua de análisis de optimización termodinámica de máquinas térmicas reales.

APÉNDICE

Cálculo Variacional

El problema básico en cálculo variacional consiste en determinar, de entre las funciones que poseen ciertas propiedades, aquella función para la cual una función integral dada (funcional) alcanza su valor máximo o mínimo. El integrando de la integral en cuestión depende de la función y sus derivadas.

Considere los diversos valores de la integral

$$I = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (.75)$$

donde $y(x)$ es desconocida, y $y' = dy/dx$. La función especial y para la cual I alcanza un extremo satisface la ecuación de Euler:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = 0 \quad (.76)$$

Si, además de maximizar o minimizar I , la función $y(x)$ descada satisface una restricción integral del tipo

$$C = \int_a^b G(x, y, y') dx \quad (.77)$$

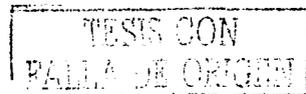
entonces $y(x)$ satisface la nueva ecuación de Euler

$$\frac{\partial H}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial H}{\partial y'} \right) = 0 \quad (.78)$$

donde

$$H = F + \lambda G, \quad (.79)$$

es la función de Lagrange. La constante λ es un multiplicador de Lagrange, su valor se determina al sustituir la solución $y(x, \lambda)$ de la Ecuación (.78) en la restricción integral (.77).



En general, la integral puede depender en las primeras n derivadas de la función incognita $y(x)$,

$$I = \int_a^b F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) dx \quad (.80)$$

En este caso la condición para I para tener un extremo es

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial F}{\partial y''} \right) - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right] = 0 \quad (.81)$$

La ecuación diferencial anterior para $y(x)$ se llama ecuación de Euler-Poisson.

Si la integral depende no solo en una, sino en k funciones desconocidas $y_i (i = 1, \dots, k)$ y sus primeras derivadas y_i'

$$I = \int_a^b F(x, y_1, \dots, y_k, y_1', \dots, y_k') dx \quad (.82)$$

entonces las k funciones $y_i(x)$ que maximiza o minimizan I satisface el sistema de Ecuaciones de Euler

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'} \right) = 0, i = 1, \dots, k \quad (.83)$$

Entre los problemas de cálculo variacional las restricciones pueden ser de tres tipos:

1. algebraicas,
2. integrales,
3. diferenciales.

Para resolver estos problemas con restricciones se puede recurrir al método de multiplicadores de Lagrange. Los problemas con el tipo de restricciones mencionadas se resuelven como sigue:

Restricciones algebraicas

Sea el problema de optimizar:

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

sujeta a

$$G(x, y) = 0,$$

formado la función de Lagrange $L(x, y, y)$

$$L(x, y, y) = F(x, y, y) + \lambda(x) G(x, y),$$

en este caso el multiplicador de Lagrange λ es función de la variable independiente, de manera que la ecuación de Euler sin restricciones que se debe resolver es:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Problemas con más de una restricción requieren más de un multiplicador de Lagrange.

Restricciones integrales (problemas isoperimétricos)

Sea el problema de optimizar:

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y) dx$$

sujeto a

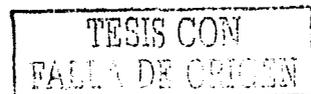
$$J = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y) dx,$$

donde J es una constante. Se forma la función de Lagrange $L(x, y, y)$,

$$L(x, y, y) = F(x, y, y) + \lambda(x) G(x, y)$$

y se resuelve la ecuación de Euler,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$



conjuntamente con la restricción

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = \text{constante} = J.$$

Se debe notar que para restricciones integrales los multiplicadores de Lagrange λ son constantes.

Restricciones en forma de ecuaciones diferenciales

Sea el problema de optimizar:

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx$$

sujeto a

$$G(x, y, y') = 0.$$

Se forma la función de Lagrange $L(x, y, y')$,

$$L(x, y, y') = F(x, y, y') + \lambda(x) G(x, y, y')$$

y se resuelve la ecuación de Euler,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

simultáneamente con $G(x, y, y') = 0$.

En este caso, los multiplicadores de Lagrange $\lambda(x)$ son función de la variable independiente.

Teorema de la función implícita

Sea $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ una función dada que tiene derivadas parciales continuas. Sean los puntos en \mathbb{R}^{n+1} denotados por (\mathbf{x}, z_0) , donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (\mathbf{x} es un vector) y $z \in \mathbb{R}$. Supóngase

que (\mathbf{x}, z_0) es un punto que satisface

$$F(\mathbf{x}, z_0) = 0 \text{ y } \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, z_0) \neq 0$$

entonces existe un conjunto U que contiene a \mathbf{x}_0 en \mathbb{R}^n y una vecindad V de z_0 en \mathbb{R} tal que existe una función única $z=g(\mathbf{x})$ definida para \mathbf{x} en U y z en V que satisface

$$F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0.$$

Además, $z = g(\mathbf{x})$ es continuamente diferenciable con la derivada dada por

$$Dg(\mathbf{x}) = -\frac{D_{\mathbf{x}}F(\mathbf{x}, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}$$

donde $D_{\mathbf{x}}F$ representa la derivada de F con respecto a la variable \mathbf{x} , $D_{\mathbf{x}}F = [\partial F/\partial x_1, \dots, \partial F/\partial x_n]$; esto es,

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} / \frac{\partial F}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, n$$

Bibliografía

- [1] Ait-Ali M. A class of internally irreversible refrigeration cycles. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1996, 29(3): 593-599.
- [2] Ait-Ali M. The maximum coefficient of performance of internally irreversible refrigerators and heat pumps. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 1996, 29(4): 975-980.
- [3] Aizebund, B. M., Band, Y. B., Kafri, O., Optimization of a model internal combustion engine, *J. Appl. Phys.*, 53 (1982), 1277-1282.
- [4] Aizebund, B. M., Band, Y. B., Power considerations in the operation of a piston fitted inside a cylinder containing a dynamically heated working fluid, *J. Appl. Phys.*, 52 (1981), 3742-3744.
- [5] Andresen, B., Salamon, P., Berry, R. S., Thermodynamics in finite time: extremal for imperfect heat engines, *J. Chem. Phys.*, 66 (1977), 1571-1577.
- [6] Angulo-Brown, F., Ecological optimization criterion for finite-time heat engines, *J. Am. Phys.*, 69 (1991), 7465-7469.
- [7] Angulo-Brown, F., Fernandez-Betanzos, J., Diaz-Pico, C. A., Compression ratio of an optimized air standar Otto-cycle model, *Eur. J. Phys.*, 15 (1994), 38-42.
- [8] Angulo-Brown, F., Pacz-Hernandez, R., Endorreversible thermal cycle with a non-linear heat transfer law, *J. Appl. Phys.*, 74 (1993), 2216-2219.

- [9] Angulo-Brown, F., Rocha-Martinez, J. A., Navarrete-Gonzalez, I. D., A non-endoreversible Otto cycle model: improving power output and efficiency, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, 29 (1996), 80-83.
- [10] Arias-Hernandez, L. A., Angulo-Brown, F., A general property of endoreversible thermal engines, *J. Appl. Phys.*, 81 (1997), 1602-1609.
- [11] Arias-Hernandez, L. A., Angulo-Brown, F., Thermodynamic optimization of endoreversible engines, *Revista Mexicana de Física*, 40 (1994), 866-877.
- [12] Band, Y. B., Kafri, O., Salamon, P., Finite time thermodynamics: Optimal expansion of a heated working fluid, *J. Appl. Phys.*, 53 (1982), 8-28.
- [13] Band, Y. B., Kafri, O., Salamon, P., Optimization of a model external combustion engine, *J. Appl. Phys.*, 53 (1982), 29-33.
- [14] Bejan, A. and Vargas, J. Optimal allocation of a heat exchanger inventory in heat driven refrigerators. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 1995, 38(16): 2997-3004.
- [15] Bejan, A. Theory of heat transfer-irreversible refrigeration plants. *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 1989, 32(9): 1631-1639.
- [16] Bejan, A., *Advanced Engineering Thermodynamics*, Chap 10-12. 2nd Ed. Wiley, New York, 1997
- [17] Bejan, A., Engineering advances on finite-time thermodynamics, *Am. J. Phys.*, 62 (1994), 11-12
- [18] Bejan, A., *Entropy Generation through Heat and Fluid Flow*. Wiley, New York, 1982.
- [19] Bejan, A., *Entropy Generation Minimization*, CRC Press, Boca Raton FL, 1996.
- [20] Bejan, A., Theory of heat transfer-irreversible power plant, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 31, (1988), 1211-1219.

- [21] Bejan, A., Tsatsaronis, G., Moran, M., *Thermal Design & Optimization*. Wiley, New York, 1996.
- [22] Berry, Kazakov, *Optimization of finite time processes*. Capítulos 1-6, John Wiley, 2000.
- [23] Berry, R. S., Salamon, P., Heal G., On a relation between economic and thermodynamic ptima, *Resources and Energy*, 1 (1978), 125-137.
- [24] Blanchard, C., Coefficient of performance for finite speed heat pump. *J. Appl. Phys.*, 1980, 51(5): 2471-2472.
- [25] Blank, D. A., Wu, C., Optimization of the endoreversible Otto cycle with respect to both power and mean effective pressure. *Energy Convers. Mgmt.*, 34 (1993), 1255-1209.
- [26] Blank, D. A., Wu, C., The effects of combustion on a power optimized endoreversible Diesel cycle, *Energy Convers. Mgmt.*, 34 (1993), 493-498.
- [27] Callen, H. B., *Thermodynamics and an Introduction to Thermostatics*, p.127 2nd Edition Wiley, New York, 1985.
- [28] Carnot, S., *Reflections on the motive power of fire*. Bachelier, Paris, 1824.
- [29] Chambadal, P., *Les Centrales Nucleaires* pp 41-58, Armand Colin, Paris, 1957.
- [30] Chen, J. Yan, Z. Optimal performance of an endoreversible-combined refrigeration cycle. *J. Appl. Phys.*, 1988, 63(10): 4795-4799.
- [31] Chen J. and Yan Z., Three-heat source-heat pumps. *J. Chem. Phys.* Vol (90), No. 9, 1 May 1989.
- [32] Chen, J., An universal model of an irreversible combined Carnot cycle system and its general performance characteristics, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 31 (1998), 3383-3394.

- [33] Chen, J., Wu, C., Kiang, R. L., Maximum specific power output of an irreversible radiant heat engine, *Energy Convers. Mgmt.* 37 (1996), 17-22.
- [34] Chen, J., Yan, Z., The relation between optimal efficiency and power output for a Carnot engine with finite compression ratio, *J. Xiamen Univers.*, 28 (1989), 225-260.
- [35] Chen, L, Sun, F., Wu, C. and Kiang, R. A generalized model of a real refrigerator and its performance. *Appl. Thermal Engng.*, 1997, 17(4): 401-412.
- [36] Chen, L. Sun, F., Ni, N. and Wu, C. Optimal configuration of a class of two-heat-reservoir refrigeration cycles. *Energy Convers. Magnt.*, 1998, 39(8): 767-773.
- [37] Chen, L., Sun, F. and Chen, W. Optimization of the specif rate of refrigeration in combined refrigeration cycles. *Energy, The Int. J.*, 1995, 20(10): 1049-1053.
- [38] Chen, L., Sun, F., Wu, C., Optimal expansion of a heated working fluid with phenomenological heat transfer, *Energy Convers. Mgmt.*, 39 (1998), 149-156.
- [39] Chen, L., Wu, C. and Sun, F. Cooling load versus COP characteristics for an irreversible air refrigeration cycle. *Energy Convers. Mgmt.*, 1998, 39(1/2): 117-126.
- [40] Chen, L., Wu, C., and Sun, F. Steady flow combined refrigeration cycleperformance with heat leak. *Appl. Thermal Engng.*, 1997, 17(7): 639-645.
- [41] Chen, L., Wu, C., Heat transfer effect on the net work output vs. efficiency characteristics for an air standard Otto cycle, *Energy Convers. Mgmt.*, 39 (1998), 643-648.
- [42] Chen, L., Wu, C., The influence of internal heat leak on the power vs. efficiency characteristics of heat engines, *Energy Convers. Mgmt.*, 38 (1997), 1501-1507.
- [43] Chen, L., Yan, Z., The effect of heat transfer law on the performance of a two-heat-source endoreversible cycle, *J. Chem. Phys.*, 90 (1989), 3740-3743.

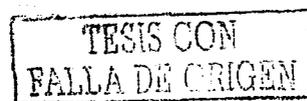
- [44] Chen, W., Sun, F., Cheng, S., Study on optimal performance and working temperature of endoreversible forward and reverse Carnot cycles, *Int. J. Energy Res.*, 19 (1995), 751-759.
- [45] De Vos, A., Efficiency of some heat engines at maximum power conditions, *Am. J. Phys.*, 53 (1985), 570-573
- [46] De Vos, A., Endoreversible economics, *Energy Convers. Mgmt.*, 38 (1997), 311-317.
- [47] De Vos, A., *Endoreversible Thermodynamics of Solar Energy Conversion*, Oxford University, Oxford, 1992.
- [48] De Vos, A., Endoreversible thermoeconomics, *Energy Convers. Mgmt.*, 36 (1995), 1-5.
- [49] Delgado, R., E. J., A thermal engine driven by a thermokinetic oscillator, *J. Phys. Chem.*, 100 (1996) 1144-1147.
- [50] F. L. Curzon and B. Ahlborn, Maximum-power Efficiency of a Carnot Engine, *Am. J. Phys.* 43, 22 (1975)
- [51] Fairen, V., Ross, J., On the efficiency of engines operating around a steady state at fine frequency, *J. Chem. Phys.*, 75 (1981), 5485-5496.
- [52] Goktun, S., Coefficient of performance for an irreversible combined refrigeration cycle. *Energy, The Int. J.* 1996, 21(7/8), 721-724.
- [53] Goktun, S., Ozkaynak, S., Yavuz, H., Design parameters of a radiative heat engine, *Energy, the Int. J.*, 18 (1993), 651-655.
- [54] Gordon, J. M., Huleihil, G., General performance characteristics of real heat engine, *J. Appl. Phys.*, 72 (1992), 829-837.
- [55] Gordon, J. M., Huleihil, M., On optimizing maximum power heat engines, *J. Appl. Phys.*, 69 (1991), 1-7.

- [56] Gordon, J. M., Maximum power points characteristics of heat engines as a general thermodynamic problem, *Am. J. Phys.*, 57 (1989), 1136-1142.
- [57] Grazzini, G. Irreversible refrigerators with isothermal heat exchangers. *Int. J. Re-frig.*, 1993, 16(2) 101-106.
- [58] Grazzini, G., Work from irreversible heat engines. *Energy, The Int. J.*, 16 (1991), 747-755.
- [59] Hoffman, K. H., Berry, R. S., Optimal paths for thermodynamic systems. The ideal Diesel cycle, *J. Appl. Phys.*, 58 (1985), 2125-2134.
- [60] Howe, J. P., The maximum power, heat demand and efficiency of a heat engine operating in steady state at less Carnot efficiency, *Energy, the Int. J.*, 7 (1982), 401-402.
- [61] Huang Francis, *Ingeniería Termodinámica fundamentos y aplicación*. CECSA 1994.
- [62] Ibrahim, O. M., Klein S. A., Mitchell, J. W., Optimum heat power cycles for specified boundary conditions, *Trans. ASME J. Engng. Gas turbine Power*, 113 (1991), 514-521.
- [63] Kuznetsov, A. G., Rudenko, A. V., Tsirlin, A. M., Optimal control in thermodynamic systems with sources of finite capacities, *Autom. Remote Control*, 6 (1986), 693-705.
- [64] Lee, W. Y., Kim, S. S., An analytical formula for the estimations Rankine cycle heat engine efficiency at maximum power, *Int. J. Energy Res.*, 15 (1991), 149-159.
- [65] Leff, H. S., Teeter, W. D., EER, COP, and 2nd law efficiency for air-conditioners, *Am. J. Phys.*, 46 (1978), 19-22.
- [66] M. H. Rubin, Optimal configuration of a class of irreversible heat engines I. *Phys. Rev. A* 19 (1979), 1272-1276.

- [67] M. H. Rubin, Optimal configuration of a class of irreversible heat engines II. Phys. Rev. A 19 (1979), 1277-1289.
- [68] Marsden J., Tromba A., *Vector Calculus*, 2nd ed. Ed. Freeman 1981.
- [69] Mozurkewich, M., Berry, R. S., Optimal paths for thermodynamic systems. The ideal Otto cycle, J. Appl. Phys. 53 (1982), 34-42.
- [70] Novikov, I. I., The efficiency of atomic power stations (A review). Atomnaya Energiya, 11 (1957), 409.
- [71] Ondrechen, M. J., Andresen, B., Mozurkewich, M., Berry, R. S., Maximum work from a finite reservoir by sequential Carnot cycles, Am. J. Phys., 49 (1981), 681-685.
- [72] Ondrechen, M. J., Rubin, M. H., Band, Y. B., The generalized Carnot cycles: A working fluid operating in finite-time between finite heat sources and sinks, J. Chem. Phys., 78 (1983), 4721-4727.
- [73] Orlov, V. N. Optimal control of an irreversible Carnot engine. Avtomat. Telemekh., 4 (1989), 64-74.
- [74] Orlov, V. N., and Rudenko, A. V., Optimal control in problems of extremal irreversible thermodynamic processes, Avtomatika Telemekhanika, 5 (1985), 7-41.
- [75] Ozkaynak, S., The theoretical efficiency limits for a combined cycle under the condition of maximum power output, J. Phys. D: Appl., 28 (1995), 2024-2028.
- [76] P. Salamon and A. Nitzan, Finite time optimizations of a Newton's law Carnot cycle. J. Chem. Phys. 74, 3546 (1981).
- [77] Pathria, R. K., Nulton, J. D., Salamon, P., Carnot-like processes in finite time: Applications to model cycles, Am. J. Phys., 61 (1995), 377-389.

- [78] Procaccia, D. J., Ross, J., On the efficiency of rate processes: Power and efficiency of heat engines, *J. Chem. Phys.*, 69 (1978), 3898-3906.
- [79] Radcenco, V., Vargas, J., Bejan, A., Two design aspects of defrosting refrigerators. *Int. J. Refrig.*, 1995, 18(2): 76-78.
- [80] Richter, P. H., Ross, J., The efficiency of engines operating around a steady state at finite frequency, *J. chem. Phys.*, 69 (1978), 5521-5531
- [81] Rozonoer, L. I., Tsirlin, A. M., Optimal control of thermodynamic processes. I, II and III, *Avtomat. Telemekh*, 1 (1983), 70-79.
- [82] Rubin, M. H., Andresen, B., Optimal staging of endoreversible heat engines, *J. Appl. Phys.*, 53 (1982), 1-7.
- [83] Sahin, B., Kodali, A., Steady-state thermodynamic analysis of a combined Carnot cycle with internal irreversibility, *Energy, The Int. J.*, 20 (1995), 1285-1289.
- [84] Sahin, B., Kodali, A., Yavuz H., Maximum power density analysis of an endoreversible Carnot heat engine. *Energy, The Int. J.*, 21 (1996), 1219-1225.
- [85] Salamon, P., Band, Y. B., Kafri, O., Maximum power from a cycling working fluid, *J. Appl. Phys.*, 53 (1982), 197-202.
- [86] Sieniutycz, S., Salamon, P. *Advances in Thermodynamics. Volume 4: Finite Time Thermodynamics and Thermoeconomics.* Taylor and Francis, New York, 1990.
- [87] Sokolov, M. and Hershgal, Enhanced ejector refrigeration cycles powered by low grade heat. Part I: Systems characterization, *Int. J. Refrigeration* 13 (6), 351-356 (1990).
- [88] Sokolov, M. and Hershgal, Enhanced ejector refrigeration cycles powered by low grade heat. Part II: Design Procedures, *Int. J. Refrigeration* 13 (6), 357-363 (1990).

- [89] Sokolov, M. and Hershgal, Optimal coupling and feasibility of a solar powered year-round ejector air conditioner. *Solar Energy*, vol. 50, No. 6, pp 507-516, 1993.
- [90] Sun, F., Chen, W., Finite time thermodynamic analysis and evaluation for a heat engine with steady-state energy conversion between two heat reservoirs, *J. Eng. Thermal Energy Pow.*, 4 (1989), 1-6.
- [91] Tsatsaronis, G., Thermoeconomic analysis and optimization of energy systems, *Progress in Energy and combustion Science*, 19,(1993) 227-257.
- [92] Van wylen, G. Sonntag, R. E., Borgnakke, C. *Fundamentos de Termodinámica*, p 455, 2a ed., Ed. Linusa 2000.
- [93] Velasco, S., Roco, J., Medina, A. and Calvo, H., Irreversible refrigerators under per-unit-time coefficient of performance optimization. *Appl. Phys. Lett.*, 1997, 71(8): 1130-1132.
- [94] Verhás, J., De Vos, A., How endoreversible thermodynamics relates to Onsager's nonequilibrium thermodynamics. *J. Appl. Phys.*, 82 (1997), 40-42.
- [95] Wijesundera, N., Performance of three-heat-reservoir absorption cycles with external and internal irreversibilities. *Appl. Thermal Engng.*, 1997, 17(12): 1151-1161.
- [96] Wu, C. Maximum cooling load of a heat-engine driven refrigerator. *energy Convers. Mgmt.*, 1993, 34(8): 691-696.
- [97] Wu, C., Chen, L., Chen, J. *Recent Advances in Finite-Time Thermodynamics*. Nova Science Publishers, Inc. New York, 1999.
- [98] Wu, C., Kiang, R. L., Finite-time thermodynamic analysis of a Carnot engine with internal irreveribility, *Energy, The Int. J.*, 17 (1992) 1173-1178.
- [99] Wu, C., Power performance of a cascade endoreversible cycle, *Energy Convers. Mgmt.*, 30 (1990), 261-266.



- [100] Yan, A. and Chen, J. An optimal endoreversible three-heat-source refrigerator. J. Appl. Phys., 1989, 65(1) 1-4.
- [101] Yan, Z. The optimal relation between COP and cooling load of a Carnot refrigerator. Physics. 1984, 13(12): 768-770.
- [102] Yan, Z., Chen, J., Optimal performance of a generalized Carnot cycle for another linear heat transfer law, J. Chem. Phys., 92 (1990), 1994-1998.
- [103] Yan, Z., Chen, L., Optimal performance of an endoreversible cycle operating between a heat source and sink of finite capacities, J. Phys. A: Math. Gen., 30 (1997), 8119-8127.
- [104] Yan, Z., The relation between optimal efficiency and power output of a Carnot engine, Chinese J. Eng. Thermophys., 6 (1985), 1-6.
- [105] Yan, Z., Thermal efficiency of a Carnot heat engine at the maximum power output with finite thermal capacity heat reservoir. Chinese J. Engng. thermophys., 5 (1984), 125- 131.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN