

01130  
11

**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**



FACULTAD DE INGENIERIA

**EVALUACION E IMPLANTACION DE ALGORITMOS DE FILTRADO  
ADAPTABLE PARA LA IGUALACION DE CANAL EN SISTEMAS DE  
COMUNICACIÓN DIGITAL**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE :

**INGENIERO EN TELECOMUNICACIONES**

P R E S E N T A N :

**NADIR CASTAÑEDA PALOMINO**

**JOSE ALONSO YBAÑEZ ZEPEDA**

DIRECTOR DE TESIS: DR. ROGELIO ALCANTARA SILVA



MEXICO ,D .F.

ENERO

2003

11



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

# **PAGINACIÓN DISCONTINUA**

*A mi familia*



# Agradecimientos

Quisieramos agradecer a nuestros padres y hermanas cuyo cariño y respaldo han hecho que logros como éste sean posibles.

A nuestros amigos por la amistad, el apoyo y la confianza durante toda la carrera.

Además quisieramos expresar nuestro más sincero agradecimiento al **Dr. Rogelio Alcántara Silva**, nuestro director de tesis. Su paciencia y constante apoyo fueron esenciales para la realización de este trabajo.

A todos aquellos profesores que han contribuido de una manera positiva en nuestra formación profesional, especialmente al **Dr. Francisco García Ugalde**, **Dr. Miguel Moctezuma Flores** y a la **Ing. Gloria Mata Hernandez**.

Al **M.I. Larry H. Escobar Salguero** por haber aceptado ser parte de nuestro jurado y por sus valiosos comentarios en la revisión final de este trabajo.

Nadir Castañeda Palomino

José Alonso Ybáñez Zepeda

0

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>I</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>IV</b>
<b>Índice de cuadros</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>VIII</b>
<b>Introducción</b>	<b>1</b>
Organización de la Tesis . . . . .	2
<b>1. Sistemas de Comunicación</b>	<b>5</b>
1.1. Sistema General de Comunicación . . . . .	6
1.2. Canales de Comunicación . . . . .	7
1.2.1. Canal de Comunicación Alámbrico . . . . .	7
1.2.2. Canal de Comunicación Inalámbrico . . . . .	10
1.3. Modelado de los Canales de Comunicación . . . . .	11
1.3.1. Canal Gaussiano . . . . .	11
1.3.2. Canal Lineal de Banda Limitada . . . . .	12
1.3.3. Canal Lineal de Banda Limitada Variante con el Tiempo . . . . .	13
1.3.4. Canales Aleatorios Variantes con el Tiempo . . . . .	13
1.4. Interferencia entre Símbolos (ISI) . . . . .	14
1.4.1. Interferencia entre Símbolos en Sistemas de Comunicación por Modulación de Pulso . . . . .	14
1.5. Conclusiones . . . . .	19
<b>2. Igualadores de Canal</b>	<b>21</b>
2.1. Estructuras de Filtros . . . . .	22
2.1.1. Estructura Transversal . . . . .	22
2.1.2. Estructura Lattice . . . . .	24
2.1.3. Estructura Lattice-Ladder . . . . .	25
2.2. Igualadores Adaptables . . . . .	26
2.2.1. Igualadores Lineales . . . . .	29

2.2.2.	Igualador Fraccionalmente Espaciado (FSE)	32
2.2.3.	Igualador de Decisión Retroalimentada (DFE)	34
2.3.	Conclusiones	35
<b>3.</b>	<b>Algoritmos de Filtrado Adaptable para la Igualación de Canal</b>	<b>37</b>
3.1.	Algoritmos Basados en el Error Cuadrático Promedio	39
3.1.1.	Algoritmo de los Pasos Descendentes	39
3.1.2.	Algoritmo del Gradiente Estocástico (LMS)	41
3.1.3.	Versiones Simplificadas y Modificadas del Algoritmo LMS	42
3.2.	Algoritmos de los Mínimos Cuadrados	46
3.2.1.	Algoritmo Clásico de los Mínimos Cuadrados para el problema de Filtrado	46
3.2.2.	Algoritmo Recursivo de los Mínimos Cuadrados	47
3.2.3.	Algoritmos Rápidos	51
3.3.	Conclusiones	59
<b>4.</b>	<b>Pruebas y Validación de los Igualadores</b>	<b>61</b>
4.1.	Descripción de las Simulaciones	61
4.2.	Canales Empleados	62
4.3.	Igualadores Lineales	65
4.3.1.	Algoritmo Zero-Forcing	65
4.3.2.	Algoritmo LMS	67
4.3.3.	Algoritmo ARK	68
4.4.	Igualadores Fraccionalmente Espaciados	69
4.4.1.	Algoritmo LMS	69
4.4.2.	Algoritmo ARK	76
4.5.	Igualadores de Decisión Retroalimentada	80
4.6.	Comparación entre los Diferentes Igualadores de Canal	81
4.7.	Conclusiones	84
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y Perspectivas</b>	<b>86</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>89</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>93</b>
<b>A.</b>	<b>Matriz Particionada</b>	<b>93</b>
A.1.	Definición de Matriz Particionada	93
A.1.1.	Relaciones Importantes del Lema de Inversión Matricial	94
<b>B.</b>	<b>Predicción Lineal</b>	<b>96</b>
B.1.	Predicción Forward	96
B.2.	Predicción Backward	101
B.3.	Recursiones en Tiempo y Relaciones de los Parámetros de Predicción	103

<b>C. Filtros Paso-Todo y Filtros de Fase Mínima</b>	<b>108</b>
<b>D. Tipos de Modulación</b>	<b>112</b>
D.1. Modulación Banda Base	112
D.1.1. Modulación de Amplitud de Pulso (PAM)	113
D.1.2. Modulación de Pulso PWM y PPM	113
D.1.3. Modulación por Codificación de Pulsos (PCM)	115
D.2. Modulación Paso Banda	116
D.2.1. Modulación por Cambio en la Amplitud (ASK)	116
D.2.2. Modulación por Cambio en la Fase (PSK)	117
D.2.3. Modulación por Cambio en la Frecuencia (FSK)	118
D.2.4. Modulación en Amplitud y Fase (QAM)	119
<b>E. Coseno Elevado</b>	<b>121</b>
<b>Glosario</b>	<b>123</b>

# Índice de figuras

1.1. Sistema de comunicación. . . . .	6
1.2. Canal Gaussiano. . . . .	11
1.3. Canal lineal de banda limitada. . . . .	12
1.4. Filtro lineal ideal. . . . .	12
1.5. Canal lineal de banda limitada variante con el tiempo. . . . .	13
1.6. Modelo general del canal lineal aleatorio variante con el tiempo. . . . .	14
1.7. Dispersión temporal del símbolo. . . . .	15
1.8. Interferencia entre símbolos. . . . .	15
1.9. Sistema de comunicación digital banda base PAM. . . . .	16
1.10. <i>Patrón de ojo</i> para una modulación PAM binaria. . . . .	18
1.11. <i>Patrón de ojo</i> para una modulación (a) 4-PSK y (b) 8-QAM. . . . .	18
2.1. Estructura transversal. . . . .	23
2.2. Estructura lattice (filtro de análisis). . . . .	24
2.3. Estructura lattice (filtro de síntesis). . . . .	25
2.4. Estructura Lattice-Ladder. . . . .	26
2.5. Estructura general del filtro igualador adaptable. . . . .	27
2.6. Igualador adaptable. . . . .	28
2.7. Sistema de comunicación. . . . .	30
2.8. Convergencia en un algoritmo de gradiente. . . . .	31
2.9. Filtro lineal transversal. . . . .	33
2.10. Igualador DFE. . . . .	34
3.1. Igualador de canal adaptable. . . . .	37
3.2. Superficie MSE . . . . .	40
4.1. Canales $H_{C1}(z)$ , $H_{C2}(z)$ y $H_{C3}(z)$ de fase mínima. . . . .	63
4.2. Canales $H_{C4}(z)$ y $H_{C5}(z)$ de fase mínima. . . . .	64
4.3. Canales $H_{C6}(z)$ y $H_{C7}(z)$ de fase no mínima. . . . .	64
4.4. Canales $H_{C8}(z)$ , $H_{C9}(z)$ y $H_{C10}(z)$ de fase máxima. . . . .	65
4.5. Respuesta en frecuencia del algoritmo "zero-forcing" con $\mu = 0,00042$ y: (a) orden $p = 5$ (b) orden $p = 15$ . . . . .	66
4.6. Error del algoritmo "zero-forcing" (realización simple) con $\mu = 0,00042$ y: (a) orden $p = 5$ (b) orden $p = 15$ . . . . .	67

4.7. Algoritmo LMS con $\Delta = 0,051$ y orden $p = 15$ : (a) respuesta en frecuencia (b) error de una realización. . . . .	68
4.8. Igualador rápido de Kalman ARK con $\delta = 0,01$ , $\lambda = 1$ y orden $p = 10$ : (a) respuesta en frecuencia (b) error de una realización. . . . .	69
4.9. Comportamiento del error del algoritmo LMS con variaciones del paso $\Delta$ . . . . .	70
4.10. Respuesta en frecuencia del igualador LMS con $\Delta = 0,15$ y: (a) orden $p = 15$ (b) orden $p = 120$ . . . . .	71
4.11. Comportamiento del error del algoritmo LMS ante variaciones del orden $p$ . . . . .	71
4.12. Respuesta en frecuencia con orden $p = 15$ y ruido con varianza de 0.0626 del: (a) algoritmo clásico con $\Delta = 0,025$ (b) algoritmo con promedio en el gradiente con $\Delta = 0,25$ , y $N = 400$ . . . . .	72
4.13. Error de los tres algoritmos signum con orden $p = 15$ , y $\Delta = 0,12$ para el algoritmo LMSSD y $\Delta = 0,002$ para los algoritmos LMSSE y LMSSS. . . . .	74
4.14. Error del algoritmo LMSSD contra el error del algoritmo LMS. . . . .	75
4.15. Respuesta en frecuencia con orden $p = 15$ y $\Delta = 0,045$ de: (a) algoritmo LMS (b) algoritmo LMSSD . . . . .	75
4.16. Comportamiento del error del algoritmo ARK con variaciones de $\delta$ . . . . .	77
4.17. Comportamiento del error del algoritmo ARK ante variaciones del orden con $\lambda = 1$ y $\delta = 0,1$ . . . . .	77
4.18. Comportamiento del error del algoritmo ARK con variaciones de $\lambda$ , orden $p = 15$ y $\delta = 0,1$ . . . . .	78
4.19. Comportamiento del error del algoritmo ARK y ARKV4, orden $p = 15$ , $\delta = 0,1$ y $\lambda = 1$ . . . . .	79
4.20. Respuesta en frecuencia con orden $p = 15$ y $\delta = 0,01$ (a) ARK (b) ARKV4 . . . . .	79
4.21. (a) Respuesta en frecuencia con orden $p = 15$ , $\Delta_{forward} = 0,045$ y $\Delta_{feedback} = 0,0002$ del algoritmo DFE (b) error del algoritmo DFE. . . . .	80
4.22. Respuesta en frecuencia con orden $p = 15$ , $\delta = 0,01$ del algoritmo (a) ARK espaciado a la tasa de símbolos (b) ARK fraccionalmente espaciado. . . . .	81
4.23. Comportamiento del error de los algoritmos ARK espaciado a la tasa de símbolos y ARK fraccionalmente espaciado. . . . .	82
4.24. Respuesta en frecuencia de los algoritmos LMS, ARK y DFE. . . . .	83
4.25. Comportamiento del error de los algoritmos LMS, ARK y DFE. . . . .	83
B.1. Predicción forward. . . . .	97
B.2. Predicción backward. . . . .	101
C.1. Patrón de polos y ceros de filtros <i>paso-todo</i> : (a) <i>Primer orden</i> (b) <i>Segundo orden</i> . . . . .	109

C.2. Patrón de polos y ceros de un filtro de <i>fase mínima</i> . . . . .	110
C.3. Representación de un filtro de <i>fase no mínima</i> como la conexión en cascada de un filtro <i>paso-todo</i> y un filtro de <i>fase mínima</i> . . . . .	110
C.4. Patrón de polos y ceros de (a) filtro de <i>fase no mínima</i> , (b) componente <i>paso-todo</i> y (c) componente de <i>fase mínima</i> . . . . .	111
D.1. Diagrama de un sistema digital de comunicaciones banda base . . . . .	113
D.2. Modulación de amplitud de pulso . . . . .	114
D.3. Modulación PWM y PPM . . . . .	114
D.4. PCM con cuantización: (a) Lineal (b) No lineal . . . . .	115
D.5. Modulación digital. . . . .	116
D.6. Modulación en la amplitud de una señal sinusoidal. . . . .	117
D.7. Modulación ASK Binaria. . . . .	117
D.8. Modulación PSK Binaria. . . . .	118
D.9. Modulación FSK Binaria. . . . .	118
D.10. Modulador QAM. . . . .	119
D.11. Constelación para una modulación 16-QAM. . . . .	120
E.1. Pulsos (a) que tienen espectro de <i>coseno elevado</i> (b). . . . .	122

# Índice de cuadros

3.1. Algoritmo "Least-Mean-Square" . . . . .	42
3.2. Algoritmos "Least-Mean-Square" Signum . . . . .	44
3.3. Algoritmo LMS con Promedio en el Gradiente . . . . .	45
3.4. Algoritmo LMS con Factor de Fuga . . . . .	45
3.5. Algoritmo Recursivo de los Mínimos Cuadrados para el Filtrado . . . . .	49
3.6. Versión dos del <b>ARMC</b> . . . . .	50
3.7. Algoritmo Rápido de Kalman <i>a priori</i> . . . . .	55
3.8. Versión dos y tres del Algoritmo Rápido de Kalman <i>a priori</i> . . . . .	56
3.9. Versión cuatro del Algoritmo Rápido de Kalman <i>a posteriori</i> . . . . .	57
3.10. Versión cinco y seis del Algoritmo Rápido de Kalman <i>a posteriori</i> . . . . .	58
3.11. Complejidad computacional en los algoritmos <b>LMS</b> y <b>ARK</b> . . . . .	59
4.1. Canales empleados en las simulaciones. . . . .	63
5.1. Incremento de la complejidad computacional al utilizar igualadores FSE. . . . .	87
B.1. Algoritmo Recursivo de los Mínimos Cuadrados Predicción Forward . . . . .	100

## Resumen

La transmisión de datos, empleando de forma eficiente el ancho de banda disponible, sobre cualquier canal de comunicación, es posible gracias al uso de *igualadores adaptables* que compensan la dispersión temporal introducida por el canal. Desde los años 60 hasta la fecha se ha impulsado de manera importante la investigación de la *igualación adaptable*, así como de campos más generales tales como la *recepción de señales digitales*, el *filtrado adaptable* y la *identificación de sistemas*. En respuesta al constante y rápido crecimiento de esta área de las comunicaciones y con el fin de integrarse a ella se desarrolla la presente tesis.

Los igualadores adaptables son filtros (cuya realización puede ser por medio de estructuras *transversales* o *lattice*) de coeficientes ajustables, cuya respuesta en frecuencia se busca sea igual a la inversa de la respuesta en frecuencia del canal, a través del ajuste periódico de los coeficientes que modelan la respuesta al impulso del filtro igualador. Dicho ajuste se lleva a cabo por medio de algún algoritmo adaptable, tales como los que se basan en la minimización del *error cuadrático promedio (MSE)* o bien en el de los *mínimos cuadrados (MC)*. El empleo de una u otra familia de algoritmos (*MSE* o *MC*) determina características tales como velocidad de convergencia, complejidad computacional y estabilidad numérica de los algoritmos, entre otras. Con base en los resultados obtenidos en la presente tesis, es posible afirmar, que los algoritmos de tipo *MC*, presentan un comportamiento superior respecto al de los de tipo *MSE*, en cuanto a velocidad de convergencia se refiere. Por su parte, los algoritmos *MSE* presentan ventajas tales como facilidad de implantación y estabilidad numérica. En lo que respecta a la configuración del filtro igualador, ésta puede ser: *lineal*, en la cual se utiliza una frecuencia de muestreo igual a la tasa de símbolos; *fraccionalmente espaciada*, la cual, gracias a su frecuencia de muestreo (dos veces mayor a la lineal), presenta la ventaja de igualar canales cuya respuesta en frecuencia tiene cambios bruscos, a costa de duplicar la cantidad de información a procesar, y por último; la configuración de *decisión retroalimentada*, en la que se emplea un filtro de retroalimentación para cancelar el *ISI* provocado por los símbolos previamente detectados sobre el símbolo actual. Esta última configuración, aunque presenta la desventaja de ser más compleja tanto en estructura como en calibración e implantación, es ideal para canales que introducen una gran distorsión en la amplitud de la señal que se propaga por ellos.

La conclusión general de la presente tesis enfatiza la importancia de contar con un igualador de canal, sobre todo en los sistemas de comunicación digital actuales, los cuales presentan anchos de banda restringidos y demandan una mayor velocidad de transmisión. La forma de implantar uno u otro igualador, bajo la utilización de los diversos algoritmos aquí presentados, depende de las necesidades y recursos disponibles de la aplicación en particular.

# Introducción

Existen diversas razones por las cuales un sistema de comunicación digital es preferido en lugar de uno analógico en el intercambio de información, a pesar de que este último requiere de un menor ancho de banda para enviar la misma cantidad de información que en el caso digital. Ésto se debe, principalmente, a que los circuitos digitales son menos sensibles al ruido, ya que al tener un número finito de valores (símbolos del sistema) que se pueden tomar, es posible regenerar la señal original y por ende se evitan los efectos acumulativos del ruido y la distorsión en el "viaje" de la señal desde el transmisor hasta el receptor. Por el contrario, como las señales analógicas pueden tomar un número infinito de valores, cualquier variación de la señal original se ve reflejada como una distorsión, difícil de eliminar, en la señal recibida.

Un elemento de suma importancia presente en todo sistema de comunicación, sea analógico o digital, es el canal por el cual la señal de información es enviada. En general, éste introduce ruido, además, debido a que cuenta con un ancho de banda finito, produce un efecto de alargamiento en el tiempo de la señal que se propaga en él. Tal alargamiento en el tiempo, es uno de los problemas más grandes en los sistemas de comunicación digital, que operan a altas velocidades, ya que produce un efecto denominado *interferencia entre símbolos*, el cual junto con el ruido son la principal causa de errores en la interpretación de los símbolos transmitidos.

Una característica de los sistemas de comunicación en tiempo real, es la utilización de canales cuyo comportamiento en el tiempo no es constante, lo cual impone ciertas restricciones en el diseño de dichos sistemas para la eliminación de los efectos producidos por el canal en la señal recibida. Una de las estrategias más utilizadas en la actualidad, es la de emplear filtros ubicados en el receptor, cuya respuesta en frecuencia sea la inversa a la del canal y cuyos coeficientes se adaptan periódicamente, con el fin de seguir las variaciones en el tiempo que experimenta dicho canal. De esta forma se reduce el efecto de la interferencia entre símbolos introducido por éste último. Tal estrategia es conocida como *igualación de canal*.

En un principio, los *igualadores* eran filtros fijos que trataban de compensar los efectos negativos producidos por el canal (previamente modelado) en la señal recibida. Posteriormente a principios de 1960, la investigación realizada para la igualación

adaptable en sistemas PAM condujo a la teoría básica y estructura de los igualadores adaptables denominados *zero-forcing* [29]. A finales de 1960, los igualadores adaptables basados en el error cuadrático promedio (**LMS**), propuestos por Widrow y Hoff a principios de esa misma década, ya habían sido del todo descritos y entendidos. Años después, principios de 1970, los igualadores transversales y de decisión retroalimentada con bloques de retardo menores al intervalo del símbolo fueron propuestos. Éstos igualadores, conocidos como *fraccionalmente espaciados*, encontraron aplicación inmediata en líneas telefónicas comerciales, así como en sistemas de radio militares, debido a un mejor desempeño respecto de los igualadores convencionales. En la década de los 70s y principios de los 80s, el trabajo realizado en esta área condujo a una nueva familia de algoritmos basada en el criterio de los *mínimos cuadrados* (**MC**), los cuales exhibían propiedades de convergencia extremadamente rápidas en comparación con los algoritmos LMS [25], [29].

Debido a la necesidad de contar con algoritmos que requieran de un número menor de operaciones por iteración, en el cálculo de los coeficientes del filtro receptor, los algoritmos clásicos sufren ciertas modificaciones, las cuales, por un lado, mejoran su velocidad de convergencia pero introducen, por otro lado, problemas de inestabilidad a largo plazo. Diversas soluciones han sido propuestas para contrarrestar tal efecto, dentro de las técnicas más empleadas, se encuentra la de obtener versiones normalizadas de los algoritmos, por medio de las cuales, se reduce la dinámica en valores que toman las diversas variables que los conforman, produciendo de esta manera, algoritmos numéricamente más robustos.

La posibilidad de combinar los algoritmos de los **MC** y del **LMS** con las diferentes configuraciones para resolver el problema de la igualación de canal, de forma adaptable, nos conduce a una gran diversidad de soluciones, cada una de las cuales presenta una serie de ventajas y desventajas, que deben ser tomadas en consideración de acuerdo con los recursos computacionales disponibles. Así por ejemplo, si se dispone de un dispositivo para el procesamiento digital de señales (**DSP**) relativamente poderoso, generalmente se prefiere una configuración *fraccionalmente espaciada* sobre una convencional, ya que la primera, al procesar un mayor número de información (prácticamente del doble), tiene un mejor seguimiento en la variación de las características del canal con el tiempo. Por su parte una configuración de decisión retroalimentada, presenta una serie de ventajas únicas, cuando el medio de transmisión introduce una severa distorsión en la amplitud de la señal que por éste se propaga. Desafortunadamente su implantación, calibración y carga computacional, aún cuando se utilicen algoritmos simples como el LMS, para la actualización de los coeficientes del filtro igualador, son factores determinantes.

## Organización de la Tesis

En el **capítulo 1** se presenta la problemática de la interferencia entre símbolos, en los sistemas de comunicación por modulación de pulso. Con el fin de ubicar tal problema dentro de un sistema de comunicaciones, primeramente se presenta una descripción de dicho sistema, prestando una mayor atención al canal de comunicación.

Por medio del **capítulo 2** se presenta un panorama general de las configuraciones empleadas por los igualadores adaptables más utilizados en la práctica, tales como las *lineales*, las *fraccionalmente espaciadas* o bien las de *decisión retroalimentada*.

En el **capítulo 3**, se realiza un estudio detallado de los algoritmos del filtrado adaptable para resolver el problema de la igualación de canal. Empleando el criterio del *error cuadrático promedio* (MSE), así como el de los *mínimos cuadrados* (MC) para encontrar los coeficientes óptimos del filtro igualador con estructura transversal.

La validación de los diferentes algoritmos deducidos, que operan bajo alguna configuración, es presentada en el **capítulo 4**. Con el fin de hacer una comparación entre los algoritmos más representativos de cada familia (sea la familia de los algoritmos basados en el MSE o en MC), primeramente se presentan las pruebas realizadas a los algoritmos que constituyen a cada una de éstas.

Para finalizar, en el **capítulo 5** se presentan las conclusiones generales de la presente tesis, así como las perspectivas del área de la igualación de canal.

Como material de apoyo para los capítulos, previamente descritos, se incluye una sección final de apéndices.

# **CAPÍTULO 1**

## **SISTEMAS DE COMUNICACIÓN**

# Capítulo 1

## Sistemas de Comunicación

El diseño de un sistema de comunicación, sea analógico o digital, banda base o paso banda, depende de las propiedades físicas del canal, el cual puede ser visto como aquella parte que provee la conexión entre el transmisor y el receptor [21]. El canal físico puede ser el par de alambres que lleva señales eléctricas, la fibra óptica que conduce la información por medio de la modulación en la intensidad de un haz luminoso o bien el espacio libre, en el cual la información es radiada por medio de una antena.

Debido a limitaciones físicas, los canales de comunicación tienen un ancho de banda finito y la información que transportan a menudo sufre distorsión en la amplitud y fase, así como también disminución en la potencia, debido a la atenuación provocada por el mismo. Además, la información transmitida es alterada por señales eléctricas impredecibles, comúnmente llamadas *ruido*. Mientras algunos efectos ocasionados por el canal pueden ser eliminados o compensados, los efectos debido al *ruido* no pueden ser completamente removidos [31]. Es por ello que en la práctica se emplean modelos matemáticos, que describen las características más importantes del canal, tales como el ruido, la atenuación y el comportamiento del mismo con el paso del tiempo.

El modelo de canal *dispersivo* más simple es el *canal de banda limitada*, cuya respuesta al impulso es la de un filtro ideal paso bajas. Dicho filtro esparce en el tiempo a la señal transmitida, provocando que los símbolos enviados en una secuencia se encimen entre sí. La interferencia resultante, llamada *interferencia entre símbolos* (ISI), es uno de los mayores obstáculos para una transmisión confiable a alta velocidad sobre canales de banda limitada con alto nivel de ruido [16].

El objetivo del presente capítulo es el de introducir la problemática del ISI en los sistemas de comunicación que operan a altas velocidades. Con el fin de ubicar tal problema dentro del sistema de comunicación, primeramente se describen los distintos elementos que componen a éste. Posteriormente, se presenta un resumen de

los medios de transmisión (canales) y sus modelos matemáticos más utilizados en la práctica, enfatizando la degradación que experimenta la señal que por éstos se propaga. Por último, con base en el análisis de un sistema de comunicación por modulación de pulso, se introduce la interferencia entre símbolos, presentando dos posibles soluciones para mitigar dicho efecto.

## 1.1. Sistema General de Comunicación

El propósito de un sistema de comunicación es el de transmitir un mensaje  $d(t)$  de una fuente a un destino. El mensaje corrupto entregado a éste último se denota por  $\hat{d}(t)$ , ver figura 1.1. Dicho mensaje, analógico o digital (dependiendo del sistema), puede representar audio, video o algún otro tipo de información. El espectro de  $d(t)$  y de  $\hat{d}(t)$  está concentrado alrededor de  $f = 0$ , lo que significa, que ambas son señales en banda base.

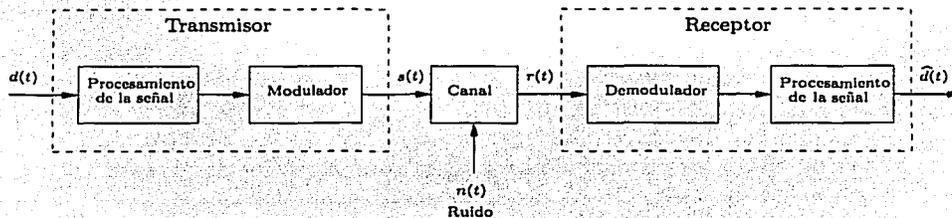


Figura 1.1: Sistema de comunicación.

El bloque *procesamiento de la señal*, en el transmisor, acondiciona la fuente para una transmisión más eficiente. Por ejemplo, en un sistema digital el procesador puede consistir de una minicomputadora o un microprocesador, el cual provee una reducción en la redundancia de la fuente, así como también la codificación de canal para que la detección y corrección de errores pueda ser llevada a cabo por el bloque *procesamiento de la señal* en el receptor, de esta forma se reduce la cantidad de errores causados por el ruido en el canal [10]. En un sistema analógico el procesador de señales no es más que un filtro analógico paso bajas y en un sistema híbrido, éste puede tomar muestras de una entrada analógica y digitalizarlas para producir una modulación por codificación de pulsos (PCM) para ser transmitidos sobre dicho sistema. Las señales a la salida del procesador son, también, señales en banda base.

El *modulador* convierte la señal banda base, previamente procesada, en una señal cuyas componentes espectrales están dentro de la banda pasante del medio de trans-

misión (canal). Si el canal sólo propaga señales en banda base, entonces no es necesario el uso del modulador y  $s(t)$  puede ser solo la salida del bloque de procesamiento en el transmisor. De esta manera, el modulador sólomente se necesita cuando el canal propaga frecuencias en una banda ubicada al rededor de  $f_c$ , donde  $f_c \gg 0$ . En este caso, la señal  $s(t)$  es denominada *señal paso banda*, ya que está diseñada para tener frecuencias ubicadas en una banda al rededor de  $f_c$ . El mapeo de la forma de onda en banda base  $d(t)$  sobre la señal paso banda  $s(t)$  es llamado *modulación* [10].

Los canales pueden ser clasificados en dos categorías (tratados a detalle en la siguiente sección): alámbricos e inalámbricos. Dentro de los primeros se encuentra el par de alambres, el cable coaxial y la fibra óptica, mientras que en los inalámbricos está el aire, el vacío, etc. Aunque las características del canal pueden imponer ciertas limitantes que favorecen a un particular tipo de señales, los principios generales de la modulación analógica o digital aplican para todo tipo de canales. En general, el canal atenúa a la señal, de tal forma que el nivel de ruido del canal y/o el ruido introducido por un receptor imperfecto, causan que la señal entregada  $r(t)$  sea una versión corrupta de  $d(t)$ .

El receptor toma la señal corrupta, a la salida del canal, y la convierte a una señal banda base que puede ser manejada por un procesador en el receptor. Éste "limpia" la señal y entrega un estimado de la fuente  $\hat{d}(t)$  a la salida del sistema de comunicación.

## 1.2. Canales de Comunicación

A continuación se presentan las características más importantes de algunos de los canales de comunicación (medios físicos) más utilizados en la actualidad, tales como el par de alambres, cable coaxial, fibra óptica y espacio libre. Prestando un mayor interés a los efectos que dichos canales producen en la señal que por ellos se propaga, ya sea eléctrica u ópticamente, veremos que tales efectos, independientemente del medio de propagación, afectan a la señal transmitida de una forma muy parecida.

### 1.2.1. Canal de Comunicación Alámbrico

El uso de líneas alámbricas para la transmisión de voz, datos y video en la red telefónica es evidente. Las *líneas de par trenzado* y *cable coaxial* son, básicamente, canales que propagan ondas electromagnéticas y que proveen anchos de banda modestos. La línea telefónica, típicamente, utilizada para conectar al usuario final con la central ofrece un ancho de banda máximo de unos cientos de kilohertz, mientras que el cable coaxial tiene un ancho de banda del orden de los megahertz [25].

## **Par de Alambres y Par Trenzado**

Uno de los canales alámbricos más simples es el llamado *par de alambres* que, como su nombre lo indica, consiste de dos conductores, comúnmente hechos de cobre.

La transmisión de información a través del par de alambres, por ejemplo en una línea telefónica, sufre entre otras distorsiones, la ocasionada por la diafonía. Ésta aparece como una conversación ajena a nuestra llamada telefónica. La causa principal de este fenómeno se debe a que otros pares de alambres comparten el mismo cable que nuestra línea. Tales pares, eventualmente, llevarán conversaciones, las cuales pueden ser eléctricamente inducidas en nuestra línea. Para mitigar este efecto, se realizan torceduras físicas en cada par de alambres dentro del cable. Generalmente hay de dos a doce torceduras por pie en un par de alambres. El tipo de configuración resultante recibe el nombre de *par trenzado* [13].

## **Cable Coaxial**

Un cable coaxial es una línea de transmisión que consiste de un par no balanceado de conductores, dispuestos en forma concéntrica y separados por un material dieléctrico.<sup>1</sup> Generalmente el conductor externo, que envuelve al material dieléctrico, es tierra y provee al conductor interno de inmunidad a interferencias externas. Por su parte el dieléctrico puede ser de distintos materiales tales como polietileno, espuma, aire, etc.

## **Principales Limitaciones en Canales Alámbricos**

Existen, básicamente, tres limitantes en los canales de transmisión alámbricos:

1. **Distorsión en amplitud.** Ésta se presenta cuando la respuesta del canal no es "plana" sobre el intervalo de frecuencias para el cual el espectro de entrada no es cero, de esta manera las diferentes componentes espectrales de la señal de entrada se modifican de forma diferente, unas sufren atenuación y otras ganancia [31].
2. **Distorsión en fase.** Si el cambio de fase, producido por el canal, es de manera arbitraria, entonces las diversas componentes espectrales de la señal de entrada sufren distintos retardos dando por resultado la *distorsión en fase o retardo* de la señal transmitida [31]. Dicho tipo de distorsión resulta ser un problema en la transmisión de información por pulsos, ya que éstos experimentan un efecto de ensanchamiento en el tiempo.
3. **Ruido.** Éste es, básicamente, cualquier señal no deseada en el sistema de comunicación que limita el desempeño del mismo. Típicamente tenemos el

---

<sup>1</sup>Material aislante.

*Ruido térmico*, el cual está presente en cualquier medio de transmisión y en todos los circuitos integrados [13].

### **Canal de Comunicación Óptico**

Debido a la creciente necesidad para transmitir información a una velocidad mayor que la que se puede alcanzar por medio del par de alambres o el cable coaxial, las centrales telefónicas han tenido que optar por un medio de transmisión de mayor capacidad como lo es la fibra óptica. Ésta es, básicamente, una guía de ondas que transporta información por medio de la modulación en la intensidad de un haz luminoso y está formada, principalmente, por un núcleo central, dentro del cual se confina el campo electromagnético, cubierto por una capa de revestimiento del mismo material (sílice) pero de índice de refracción menor. Con el fin de proteger la fibra óptica, generalmente, se recubre con una capa de plástico. Las fibras ópticas poseen características únicas que las hacen altamente atractivas como medio de transmisión [18]. En particular, éstas ofrecen las siguientes ventajas:

**Gran banda de paso.** Con una frecuencia de portadora óptica de casi  $2 \times 10^{14} [Hz]$ , es posible tener un ancho de banda teórico de alrededor de  $2 \times 10^{13} [Hz]$ .<sup>2</sup>

**Baja atenuación.** Típicamente de  $0,2 [dB/km]$ , permitiendo de esta manera, acrecentar la distancia entre las repetidoras en un sistema de comunicación por fibra óptica.

**Aislamiento eléctrico.** Las fibras se hacen de materiales aislantes eléctricos (vidrios, plásticos). Esto hace que las interferencias electromagnéticas externas no perturben la transmisión en la fibra.

**Peso y dimensiones.** Un cable de fibra óptica es por lo menos diez veces más ligero y más compacto que un cable coaxial.

Lamentablemente en la fibra óptica, al igual que en el par de alambres y el cable coaxial, está presente la dispersión temporal y la atenuación de la señal transmitida.

### ***Dispersión Temporal en la Fibra Óptica***

La dispersión en el tiempo de una señal que se propaga en una fibra óptica se debe principalmente a dos fenómenos conocidos como *dispersión cromática* y *dispersión modal*. La primera de ellas surge como consecuencia de una fuente emisora que no es monocromática, sino que el rayo de luz que emite está compuesto de múltiples componentes espectrales, cada una de las cuales se propaga con una velocidad diferente a lo largo de la fibra a causa de la relación no lineal entre el índice de refracción y la longitud de onda asociada a cada componente. La dispersión modal es un efecto

---

<sup>2</sup>Tomando el ancho de banda igual al diez por ciento de la frecuencia de portadora.

comúnmente observado en fibras multimodo y resulta del hecho de que la luz puede viajar, dentro de la fibra, por múltiples trayectorias con retrasos y atenuaciones distintas [24].

### ***Atenuación en la Fibra Óptica***

Son varios los mecanismos de degradación que contribuyen a la atenuación de la señal transmitida, siendo unos de carácter intrínseco a la fibra, tal como la composición del vidrio, y otros de origen extrínseco, causados por impurezas, defectos de cableado, de geometría de la fibra, etc. La atenuación que proporcionan estos últimos es muy variable y puede minimizarse en muchos casos con un estudio adecuado de las condiciones de fabricación, mientras que los primeros son inherentes a los fenómenos físicos que ocurren en el interior de la fibra y dependerán del material de dopado del núcleo y de la longitud de onda de trabajo.

### **1.2.2. Canal de Comunicación Inalámbrico**

En la actualidad existe una creciente demanda en los servicios de comunicaciones móviles. De hecho, uno de los objetivos primordiales en un sistema de comunicación inalámbrica es el de ofrecer servicios de calidad en la transmisión de voz y datos entre dos puntos, sin importar la distancia entre ellos. Lamentablemente los canales de comunicación inalámbricos son un medio árido para el transporte de la información. Ésto se debe, principalmente, a que la propagación de la información en dichos canales, puede tener múltiples trayectorias, debidas a la refracción y dispersión atmosférica, o bien a las reflexiones de las ondas electromagnéticas en edificios u otros objetos [22]. En una situación como ésta, la señal que llega a lo largo de las diferentes trayectorias tendrá distintas atenuaciones y retardos que pueden sumarse en la antena receptora, ya sea constructiva o destructivamente. Si además, las longitudes y/o geometría de las trayectorias cambian, debido al movimiento relativo de las antenas (caso de la comunicación móvil), la potencia de la señal recibida puede estar sujeta a severas variaciones y cuando ésta es pequeña se tiene por resultado el desvanecimiento de la señal. A ésto se le conoce, comúnmente, como *desvanecimiento por multitrayectoria* [33].

La *dispersión temporal* y el *desvanecimiento con selectividad frecuencial* son consecuencias directas de la propagación por múltiples trayectorias. La presencia de un efecto por fuerza implica la presencia del otro. De esta forma, la dispersión temporal estira o hace más ancha a la señal en el tiempo, por lo que la duración de la señal recibida es mayor que el de la transmitida. Este efecto es causado, principalmente, por los diferentes tiempos que tardan las señales en cruzar el canal por las diferentes trayectorias. Por su parte el desvanecimiento con selectividad frecuencial filtra la señal transmitida atenuando ciertas componentes más que otras [20]. De esta manera si las componentes guardan una distancia relativamente corta la una de la otra,

se verán afectadas en la misma proporción, pero a medida que el ancho de banda de transmisión crezca, las componentes espectrales en los extremos del espectro transmitido comenzarán a ser atenuados por diferentes cantidades provocando una distorsión en la forma de onda transmitida.

### 1.3. Modelado de los Canales de Comunicación

Como se pudo apreciar a lo largo de las secciones previamente tratadas, el canal produce una serie de efectos no deseables en la señal que por éste se propaga. Una de las razones que provoca tales efectos es un ancho de banda reducido debido a las limitaciones físicas del medio, así como de los componentes electrónicos que constituyen el transmisor y el receptor [28]. Estas dos limitantes provocan que la cantidad de datos que se pueden transmitir de manera confiable sea pequeña.

Con el fin de analizar las características más importantes del medio de transmisión, es necesario contar con modelos matemáticos, algunos de los cuales se presentan a continuación.

#### 1.3.1. Canal Gaussiano

El Canal Gaussiano, a menudo llamado canal de *ruido blanco aditivo Gaussiano* (AWGN), es el más simple de los modelos asociados a canales de comunicación. Básicamente se refiere al ruido generado por los elementos electrónicos (ruido térmico) que componen al receptor cuando la trayectoria de transmisión es ideal, es decir, la forma de onda recibida es, antes de sumarse el ruido, una réplica exacta de la forma de onda transmitida: ni la fase, ni la amplitud son perturbadas [28], [20]. Se asume que el ruido tiene una densidad espectral de potencia constante sobre el ancho de banda del canal y una amplitud cuya función de densidad de probabilidad es Gaussiana. En la figura 1.2 se muestra la salida  $r(t)$  de un canal con AWGN  $n(t)$  debida a una entrada  $s(t)$ .

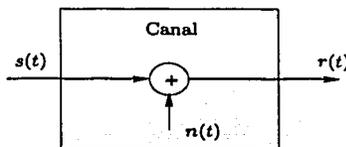


Figura 1.2: Canal Gaussiano.

donde

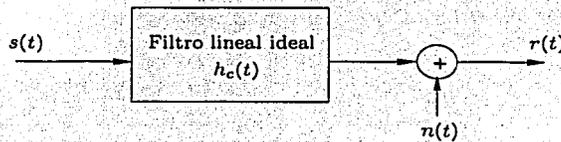
$$r(t) = s(t) + n(t) \quad (1.1)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 1.3.2. Canal Lineal de Banda Limitada

En algunos canales físicos, como los cables telefónicos o el cable coaxial, se usan filtros para asegurar que las señales transmitidas no excedan las limitaciones del ancho de banda del canal. Las señales transmitidas en dichos canales son distorsionadas, tanto en amplitud como en fase, además de ser degradadas por ruido aditivo. Debido a que los canales alámbricos transportan un gran porcentaje de nuestras comunicaciones diarias, se ha dedicado un tiempo considerablemente grande a la investigación para la caracterización de sus propiedades de transmisión, así como a los métodos para mitigar las distorsiones en amplitud y fase encontradas en la transmisión de las señales.

Estos canales son modelados matemáticamente como filtros lineales ideales a los cuales se les puede agregar el ruido aditivo a la entrada del receptor, tal y como se muestra en la figura 1.3.



TESIS  
FALLA DE ORIGEN

Figura 1.3: Canal lineal de banda limitada.

El filtro lineal ideal tiene una respuesta frecuencial plana con fase lineal en la banda de paso, ver figura 1.4.

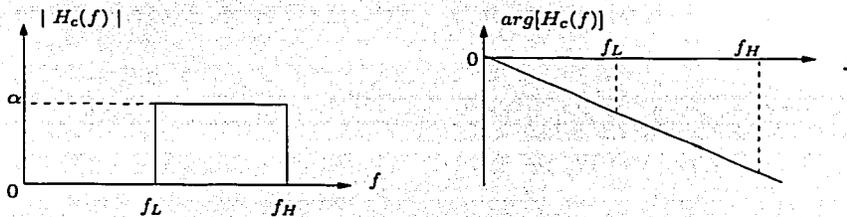


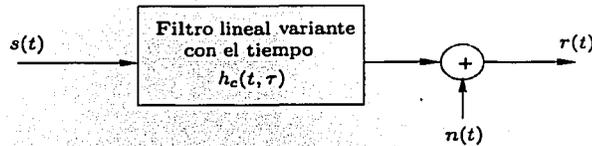
Figura 1.4: Filtro lineal ideal.

De esta forma si la entrada al canal, con respuesta al impulso  $h_c(t)$ , es la señal  $s(t)$ , entonces la salida  $r(t)$  está dada por:

$$r(t) = s(t) * h_c(t) + n(t) \quad (1.2)$$

### 1.3.3. Canal Lineal de Banda Limitada Variante con el Tiempo

Los canales físicos tales como los empleados para las comunicaciones móviles resultan en una propagación variante con el tiempo y por múltiples trayectorias de la señal transmitida. Dichos canales pueden ser caracterizados matemáticamente como filtros lineales de banda limitada variantes en el tiempo, los cuales tienen una respuesta al impulso  $h_c(t, \tau)$  dependiente del tiempo. El modelo del canal con ruido aditivo se muestra en la figura 1.5 [28].



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 1.5: Canal lineal de banda limitada variante con el tiempo.

donde

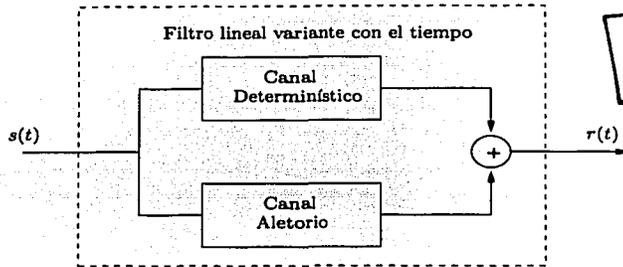
$$r(t) = s(t) * h_c(t, \tau) + n(t) \quad (1.3)$$

Dada la gran aplicación de los filtros de banda limitada variantes con el tiempo (sean aleatorios o no) en la caracterización de los canales de comunicación, se ha dedicado arduo trabajo al modelado matemático de los mismos, a través de funciones que describen la relación entre la entrada y la salida de un filtro. Personajes como Zadeh y Kailath sentaron las bases para describir dicha relación. Posteriormente los trabajos de Bello demuestran que los filtros lineales de banda limitada variantes con el tiempo (canales) pueden ser caracterizados, en su totalidad, por medio de una de las ocho funciones que propone en parejas duales (tiempo-frecuencia) [3], donde el completo conocimiento de una de ellas nos permite el cálculo de cualquiera de las otras.

### 1.3.4. Canales Aleatorios Variantes con el Tiempo

En general un canal (filtro) lineal variante con el tiempo puede ser visto como la superposición de un canal determinístico y uno puramente aleatorio [3], ver figura

1.6. El canal determinístico puede ser caracterizado en su totalidad empleando cualquiera de las ocho funciones propuestas por Bello [20]. Sin embargo, dichas funciones se convierten en procesos estocásticos cuando se les usa para describir un canal aleatorio. Tal es el caso de los canales de comunicación móviles, en donde las variaciones aleatorias en la potencia de la señal recibida, provocadas por el desvanecimiento, pueden ser modeladas si se trata a la envolvente compleja de la respuesta al impulso del canal, como un proceso aleatorio en  $t$ .



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 1.6: Modelo general del canal lineal aleatorio variante con el tiempo.

## 1.4. Interferencia entre Símbolos (ISI)

La presente sección tiene por objetivo mostrar la problemática de la interferencia entre símbolos, ya sea en sistemas de comunicación alámbricos, de radiocomunicaciones o bien por fibra óptica, que utilizan, para transmitir información, alguna técnica de modulación de pulso. Veremos que, aunque el origen de la dispersión temporal para cada uno de los casos antes mencionados se debe a fenómenos físicos diferentes, las consecuencias, al concebir un sistema de transmisión digital a altas velocidades, se traducen en la interferencia entre símbolos.

### 1.4.1. Interferencia entre Símbolos en Sistemas de Comunicación por Modulación de Pulso

Los canales lineales de banda limitada, tales como las líneas telefónicas, proporcionan diferentes retardos a las componentes espectrales de la forma de onda que por ellas se propaga, lo que provoca, en el caso digital, que la duración del símbolo recibido  $T_r$ , sea mayor a la del símbolo enviado  $T_t$  (dispersión temporal del símbolo). Este efecto, no es exclusivo de los sistemas alámbricos, tales como el par de alambres o el cable

coaxial, sino que también está presente en los sistemas de radiocomunicación, cuyo canal se caracteriza por tener múltiples trayectorias, cada una de las cuales propaga una versión atenuada y retrasada de la señal transmitida. Este hecho provoca que la antena receptora capte una señal con dispersión temporal también conocida como *selectividad frecuencial* [22] ver figura 1.7.

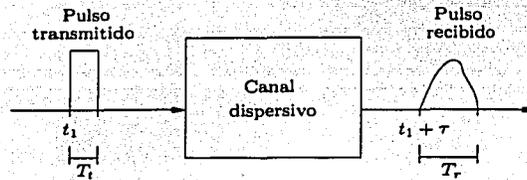


Figura 1.7: Dispersión temporal del símbolo.

Por su parte, la principal distorsión en la fibra óptica es la dispersión temporal de los símbolos [1]. Tales situaciones se convierten en un problema al considerar los sistemas de transmisión que operan a altas velocidades, ya que la "distancia temporal" entre los símbolos enviados en una secuencia es muy pequeña. Esto, aunado a la dispersión temporal provoca que los símbolos adyacentes comiencen a encimarse, dando origen al fenómeno conocido como *interferencia entre símbolos*, figura 1.8.



Figura 1.8: Interferencia entre símbolos.

La interferencia entre símbolos surge en todos los sistemas de modulación de pulsos, incluyendo la modulación en frecuencia (FSK), en fase (PSK) o bien en amplitud y fase (QAM). Sin embargo, su efecto puede ser más fácilmente observado en un sistema banda base con modulación por amplitud de pulso (PAM) [29].<sup>3</sup> Además, dicha modulación es particularmente adecuada para canales de banda limitada gracias a

<sup>3</sup>En el apéndice D se presenta un resumen de los principales tipos de modulación de pulso.

su alta eficiencia en el uso del ancho de banda [28].

Consideremos el sistema de comunicación digital PAM banda base mostrado en la figura 1.9. Como se puede observar el sistema está compuesto de un filtro transmisor cuya respuesta al impulso está dada por  $h_T(t)$ , un canal lineal,  $h_c(t)$ , con AWGN, un filtro receptor con respuesta al impulso  $h_R(t)$ , un muestreador que periódicamente muestrea la salida del filtro receptor y un detector de símbolos[26].

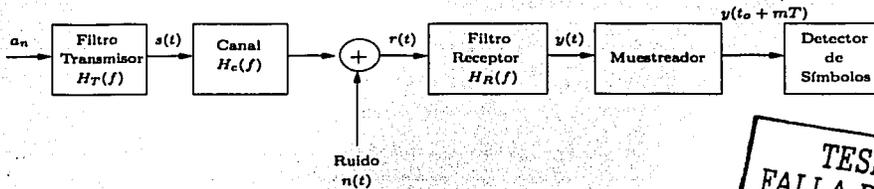


Figura 1.9: Sistema de comunicación digital banda base PAM.

Una transmisión digital PAM puede ser vista como una secuencia binaria de entrada, subdividida en  $k$ -bits llamados símbolos. A cada símbolo le es asignado un cierto nivel de amplitud,  $a_n$ , de duración  $T$ , el cual es enviado al medio de transmisión por medio de un filtro transmisor, cuya respuesta al impulso asegura que la forma de onda a su salida, posea un espectro que esté dentro de la banda pasante del canal, es decir;

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h_T(t - nT) \quad (1.4)$$

en donde  $1/T$  representa la tasa de símbolos.

De esta forma, la salida del filtro receptor  $y(t)$  es;

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t - nT) + v_o(t) \quad (1.5)$$

en donde  $x(t)$  es la respuesta al impulso en cascada del filtro transmisor, canal y filtro receptor, es decir;  $x(t) = h_T(t - nT) * h_c(t) * h_R(t)$  y  $v_o(t) = n(t) * h_R(t)$  es la componente de ruido blanco aditivo Gaussiano.

Con el objeto de recobrar la información de interés  $a_n$ , se muestrea periódicamente la salida del filtro receptor cada  $t = t_o + mT$  segundos, de esta manera tenemos;

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$$y(t_o + mT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n x(t_o + mT - nT) + v_o(t_o + mT)$$

o bien,

$$y(t_o + mT) = x(t_o) a_m + \sum_{n \neq m} a_n x(t_o + mT - nT) + v_o(t_o + mT) \quad (1.6)$$

Como podemos apreciar, el primer término del lado derecho de la ecuación 1.6 representa el símbolo transmitido ponderado por el factor  $x(t_o)$ , el último término es la componente de ruido aditivo, y el término central representa el efecto de los símbolos adyacentes en el instante de muestreo  $t = t_o + mT$ . A dicho efecto se le conoce con el nombre de *interferencia entre símbolos* (ISI). Tal término es cero si y solo si  $x(t_o + lT) = 0$  para  $l \neq 0$ , esto significa que la respuesta al impulso del sistema (filtro transmisor, canal, filtro receptor) tiene cruces por cero cada  $T$  intervalos de símbolo. Cuando la respuesta al impulso tiene tal uniformidad en los cruces por cero, entonces se dice que satisface el *primer criterio de Nyquist* [28], [29]. El cual en el dominio de la frecuencia tiene la siguiente representación:

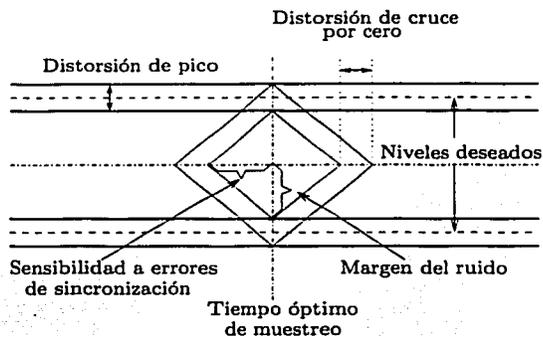
$$X'(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - \frac{n}{T}) = T \quad (1.7)$$

en donde  $X(f)$  es la respuesta en frecuencia del sistema y  $X'(f)$  es el espectro translapado de la respuesta en frecuencia del canal después de haber sido muestreado a la tasa  $1/T$ .

La ecuación 1.7, establece que para tener un sistema  $x(t)$  físicamente realizable, la tasa máxima de símbolos que se pueden enviar por unidad de tiempo, sobre un canal con un ancho de banda  $W$ , sin tener interferencia entre símbolos en el receptor es  $1/T < 2W$ , donde a  $2W$  se le conoce como *tasa de Nyquist* [26], [29].

En la práctica, el efecto de la interferencia entre símbolos puede ser observado por medio de un osciloscopio cuya base de tiempo esté sincronizada a la tasa de símbolos. El diagrama resultante (para un sistema de transmisión PAM de dos niveles), mostrado en la figura 1.10, es comúnmente conocido como *patrón de ojo* [29]. Si el sistema cumple la condición de cero ISI, entonces sólo habrá dos niveles distintos para el instante de muestreo. Por lo que el "ojo estará completamente abierto" y la distorsión de pico será cero. De lo contrario, dicha distorsión estará presente cuando los términos de ISI se sumen de tal forma que se produzca una máxima desviación de la señal deseada en el instante de muestreo. Ésto, a su vez, puede provocar, en el peor de los casos, que el nivel recibido sea mucho menor que el deseado, produciéndose una disminución en el margen para que el ruido aditivo cause error. Por otra parte, dicho efecto distorsiona los cruces por cero ocasionando errores de sincronización en el sistema.

El *patrón de ojo* observado para la modulación en fase (PSK), así como para la de amplitud y fase (QAM) se muestran en la figura 1.11. Donde los círculos representan los símbolos transmitidos, mientras que los recibidos están representados por puntos. El ruido y la interferencia entre símbolos, presentes en el sistema, provoca que las muestras recibidas  $\{y(t_o + mT)\}$ , para cada instante de tiempo  $mT$ , tengan distintas posiciones (puntos) a las deseadas (círculos). Entre mayor sea el ruido y la interferencia entre símbolos, mayor espaciamiento tendrán las muestras de la señal recibida [26].



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 1.10: *Patrón de ojo* para una modulación PAM binaria.

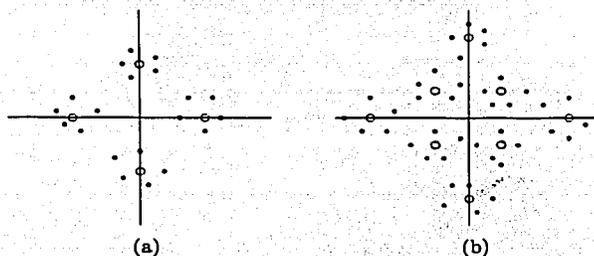


Figura 1.11: *Patrón de ojo* para una modulación (a) 4-PSK y (b) 8-QAM.

Existen dos maneras para poder alcanzar tasas de transmisión cercanas a la *tasa de Nyquist*. La primera de ellas establece que para alcanzar una tasa de transmisión de  $2W$  símbolos/s, es necesario permitir una cierta cantidad, controlada, de ISI. Es decir, como hemos visto la condición para cero ISI es  $x(t_o + lT) = 0$  para  $l \neq 0$ . Si, ahora, permitimos la presencia de ISI podríamos suponer un sistema cuya respuesta fuera tal que cumpliera con  $x(t_o + lT) = 0$  para  $l \neq 0, \pm 1, \dots, \pm L$ . De esta forma la cantidad de ISI introducida es determinística y por lo tanto puede ser tomada en cuenta en el receptor. De esto podemos concluir que existen tantos diseños de sistemas de transmisión  $x(t)$ , como términos de ISI diferentes de cero  $L$  permitamos en dicho diseño [26]. Sin embargo, entre más términos de ISI diferentes de cero permitamos, el problema de eliminarlos en el receptor se vuelve un factor determinante.

Lamentablemente, la estrategia previamente descrita supone un conocimiento *a priori* de la respuesta en frecuencia del canal. Lo cual no siempre es posible, sobre todo cuando tratamos sistemas de transmisión en los cuales el canal varía con el tiempo, tal es el caso de las comunicaciones móviles y las satelitales entre otras. Es por ello que una segunda estrategia, que consiste en filtrar la señal recibida con el fin de eliminar el efecto ISI introducido por la respuesta al impulso del canal, es más comúnmente utilizada para dichos sistemas. A este método se le conoce como *igualación de canal*, el cual es el objeto de la presente tesis.

## 1.5. Conclusiones

A lo largo del presente capítulo, pudimos observar que un factor determinante en el diseño de un sistema de comunicaciones, es el canal o medio de transmisión por el cual se propaga la información. Éste puede ser modelado, en el caso más general, como un sistema lineal variante con el tiempo de banda limitada. Tal restricción en el ancho de banda provoca que la señal transmitida, experimente lo que comúnmente se conoce como *dispersión temporal*, esto es, un alargamiento en la duración de la forma de onda recibida con respecto de la transmitida. Este fenómeno afecta directamente a los sistemas de comunicación que trabajan a altas velocidades y por medio de la modulación de pulsos, cuyas características están determinadas por el símbolo que se desea transmitir. Esto es debido a que en el envío de información a altas tasas de transmisión, los símbolos guardan entre sí una distancia temporal muy reducida, lo cual junto con la dispersión temporal, provoca que éstos se traslapen, dando por resultado lo que se conoce como *interferencia entre símbolos* (ISI). El ISI, por su parte, puede ser removido, ya sea por medio del diseño de *pulsos de transmisión*, para lo cual se necesita el conocimiento *a priori* de las características del canal, o bien por medio de filtros, ubicados en el receptor. Tales filtros son tratados a detalle en los capítulos siguientes.

## **CAPÍTULO 2**

### **IGUALADORES DE CANAL**

## Capítulo 2

# Igualadores de Canal

Un problema de gran importancia en las comunicaciones, consiste en diseñar filtros igualadores, ya sea en hardware o software, que ayuden a reducir los efectos del ruido y de la distorsión que son introducidos por el sistema de comunicación a la señal que viaja a través de éste. Teniendo anchos de banda finitos, los canales distorsionan a la señal tanto en fase como en amplitud, además, los canales de los sistemas de comunicación y los dispositivos que constituyen al receptor y al transmisor son ruidosos, lo que provoca que la señal portadora de información llegue atenuada y corrupta [4]. Los filtros sirven como una etapa de preprocesamiento, después de la cual la señal portadora de información, o sus parámetros, pueden identificarse de una forma más clara que a la entrada del filtro.

La igualación de canal (también conocida como filtrado inverso), por tanto, consiste en estimar una función de transferencia que compense la distorsión lineal provocada por el canal [11].

Es importante hacer notar que existen dos métodos para el diseño de los filtros. El primero es el método clásico, que utiliza el contenido espectral de la señal y del ruido. Como ejemplo de este método tenemos los filtros Butterworth y Chebyshev, los cuales estaban implementados principalmente con elementos analógicos pasivos, sin embargo, con el desarrollo de las computadoras y de los circuitos integrados, se logró implementar estos filtros sin la necesidad de utilizar los inductores, que eran costosos y ocupaban mucho espacio, logrando así que se extendiera la utilización de estos filtros. En el segundo método, para el diseño del filtro se requiere del conocimiento a priori de las características estadísticas de la señal, del canal y del ruido. Las bases para este tipo de filtros fueron sentadas por Wiener y Kolmogorov [15]. Sin embargo, en la práctica es común encontrarse con canales cuyas características de respuesta en frecuencia no son conocidas a priori o cambian con el tiempo, como en el caso de la transmisión de datos sobre la red telefónica, en la cual el canal de comunicación será diferente cada vez que marquemos un número. Esto es porque la ruta seguida por la señal es diferente en cada ocasión. Una vez que la conexión se

realiza, el canal será invariante con el tiempo por un periodo largo. Este es un ejemplo de canal cuyas características son desconocidas a priori. Los canales de radio, tales como los canales para sistemas móviles son un ejemplo de canal variante con el tiempo. En dichos canales los filtros en el transmisor y receptor no pueden ser establecidos de antemano [28].

Los filtros adaptables son variantes con el tiempo. Esto se debe a que los coeficientes de este tipo de filtros igualadores cambian de acuerdo a algún criterio de optimización predeterminado [23].

De acuerdo a los requerimientos de la aplicación, se tendrán diferentes filtros igualadores dependiendo del criterio de optimización utilizado, de la estructura del filtro, de la manera de actualizar los parámetros correspondientes, etc. Este capítulo está organizado de la siguiente manera: en la sección 2.1 se hablará de las principales estructuras de los filtros, posteriormente en la sección 2.2 se estudiarán los filtros adaptables desde un punto de vista general para poder hacer una clasificación de dichos filtros atendiendo a su configuración.

## 2.1. Estructuras de Filtros

El funcionamiento de un algoritmo para el filtrado lineal adaptable involucra dos procesos básicos; (1) un proceso de filtrado, diseñado para producir una salida en respuesta a una secuencia de datos de entrada y (2) un proceso adaptable, cuyo propósito es el de proveer un mecanismo para el control adaptable de un conjunto de parámetros ajustables empleados en el proceso de filtrado. Estos dos procesos trabajan de forma interactiva el uno con el otro. Por lo que la elección de una estructura para el proceso de filtrado tiene un profundo efecto en la operación del algoritmo como un todo [19].

Existen tres tipos de estructuras que se distinguen en el contexto del filtrado adaptable, las cuales se describen a continuación.

### 2.1.1. Estructura Transversal

Dentro de las estructuras existentes, más simples, para llevar a cabo el proceso de filtrado se encuentra la *estructura transversal*, que como se observa en la figura 2.1 consiste, básicamente, de bloques de retardos, multiplicadores y sumadores.

El número de elementos de retardo empleados en la estructura determina la duración (finita o infinita, según sea el caso) de su respuesta al impulso, dicho número también hace referencia al orden del filtro que emplea tal estructura. Los elementos de retardo se identifican por medio del operador  $z^{-1}$ . De esta forma, cuando  $z^{-1}$  opera sobre la

entrada  $x[k]$ , el resultado es  $x[k - 1]$ . La función de cada multiplicador dentro de la estructura es la de ponderar la entrada (a la cual está conectado) por un coeficiente conocido como *coeficiente de ponderación*. Por su parte el sumador tiene la función de producir una salida *total*  $y[k]$  del sistema, formada de elementos ponderados de la señal de entrada, que puede ser expresada como la suma de convolución entre los coeficientes  $b_i$  del filtro con las  $p$  muestras retardadas de la señal de entrada  $x[k]$ , de esta forma tenemos la relación 2.1.

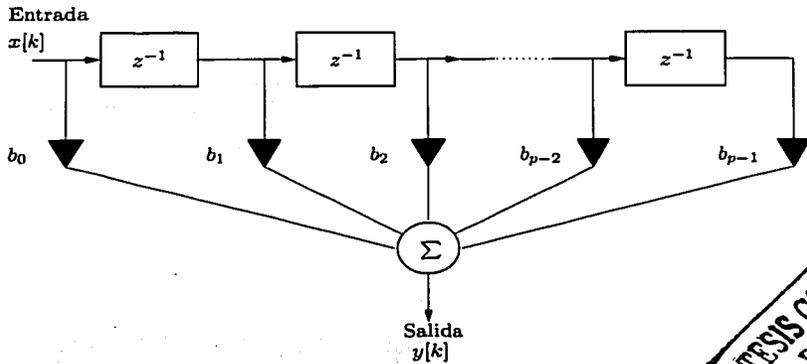
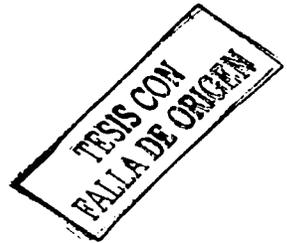


Figura 2.1: Estructura transversal.

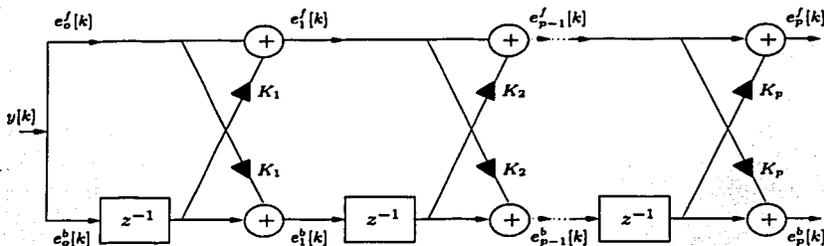
$$y[k] = \sum_{i=0}^{p-1} b_i x[k - i] \quad (2.1)$$

Lamentablemente, a pesar de ser una estructura muy simple de implementar, la estructura transversal posee coeficientes *fijos*, por lo que un cambio en el orden (aumento o disminución) resulta en un nuevo conjunto de coeficientes totalmente diferentes a los anteriores [27].



## 2.1.2. Estructura Lattice

La estructura *lattice*, como su nombre en inglés lo indica, es una estructura con forma de *enrejado*, compuesta de retardos, sumas y multiplicadores por coeficientes  $K_p$ , ver figura 2.2. Estos últimos conocidos como *coeficientes de reflexión* guardan una relación con los coeficientes  $b_i$  de la estructura transversal, la cual está dada, en el caso particular de la predicción lineal,<sup>1</sup> por el algoritmo de Levinson-Durbin [16].



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 2.2: Estructura lattice (filtro de análisis).

De esta manera, como se observa en la figura 2.2, un filtro (predictor) *lattice* es una estructura modular que está formada de un número  $p$  de etapas independientes que corresponde al orden del filtro. Por lo que, las salidas de la  $p$ -ésima etapa se definen por las relaciones:

$$e_0^f[k] = e_0^b[k] = y[k] \quad (2.2)$$

$$e_p^f[k] = e_{p-1}^f[k] + K_p e_{p-1}^b[k-1] \quad (2.3)$$

$$e_p^b[k] = e_{p-1}^b[k-1] + K_p e_{p-1}^f[k] \quad (2.4)$$

donde  $e_p^f[k]$  es el error de *predicción forward* (hacia adelante) y  $e_p^b[k]$  el error de *predicción backward* (hacia atrás). El error forward se define como la diferencia entre la entrada  $y[k]$  y su valor predicho; este último basado en un conjunto de  $p$  muestras pasadas  $y[k-1], \dots, y[k-p]$ . Por su parte, el error backward se define como la diferencia entre la entrada  $y[k-p]$  y su predicción backward basada en un conjunto de  $p$  entradas futuras  $y[k], \dots, y[k-p+1]$  [19].

<sup>1</sup>Para una mayor referencia relacionada al tema de predicción lineal, ver apéndice B.

Se puede demostrar fácilmente que el filtro de síntesis, figura 2.3, queda definido por las ecuaciones 2.4 y 2.5:

$$e_{p-1}^f[k] = e_p^f[k] - K_p e_{p-1}^b[k-1] \quad (2.5)$$

Aunque la estructura lattice no posee un número mínimo de multiplicadores y sumadores para una función de transferencia dada, sí tiene varias propiedades de gran ventaja, entre las que destacan; el uso de secciones idénticas en cascada y coeficientes de magnitud menor a uno, lo que asegura estabilidad, para el caso monodimensional [7]. Además, la estructura lattice ortogonaliza la señal de entrada etapa por etapa lo que conduce a poder aumentar o disminuir el orden del filtro sin afectar los *coeficientes de reflexión* de las etapas previas [27]. Todo esto lleva a una rápida convergencia y una alta capacidad de seguimiento.

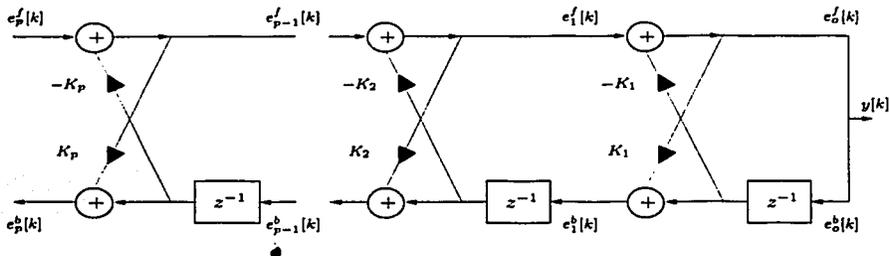


Figura 2.3: Estructura lattice (filtro de síntesis).

### 2.1.3. Estructura Lattice-Ladder

Muchos problemas prácticos requieren la interacción conjunta de dos o más procesos en lugar de la predicción de un proceso basado en sus muestras pasadas [7]. Si se emplean los errores de predicción backward  $e_0^b[k]$ ,  $e_1^b[k]$ , ...,  $e_{p-1}^b[k]$  de una estructura lattice como entradas a un filtro transversal cuyo vector de coeficientes está dado por la regresión:  $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{p-1}$ , se obtiene un estimador de la respuesta deseada  $\hat{d}[k]$ . La estructura resultante, mostrada en la figura 2.4, es conocida como *estimador conjunto* ya que resuelve el problema de estimar el proceso deseado  $d[k]$  a partir de las muestras del proceso de entrada  $y[k]$ , esto es, se tiene un proceso conjunto  $(\hat{d}[k], y[k])$  [30], [27].

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

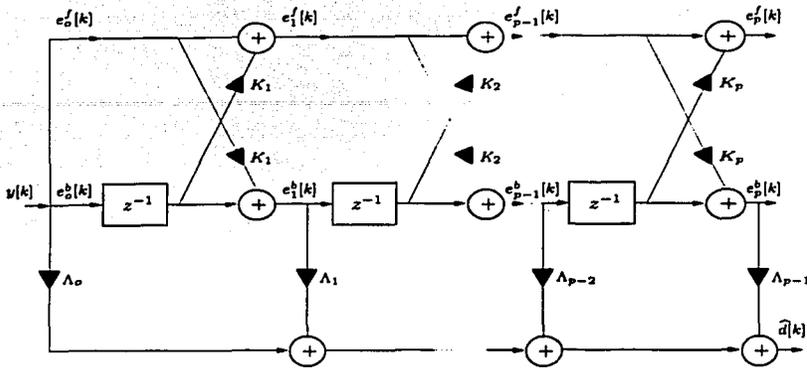


Figura 2.4: Estructura Lattice-Ladder.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

## 2.2. Igualadores Adaptables

Los sistemas de comunicaciones actuales utilizan a los igualadores adaptables como una pieza clave del receptor, ya que el desempeño de dicho igualador determinará la calidad del sistema. El surgimiento de estos igualadores se dió rápidamente sobre todo en aplicaciones con consideraciones económicas o regulatorias que limitaban el ancho de banda utilizable [37].

La estructura general de un filtro igualador adaptable es la que se muestra en la figura 2.5, donde se tiene una secuencia  $y[k]$  que es alimentada a un filtro lineal y de coeficientes ajustables con salida  $\hat{d}[k]$ .

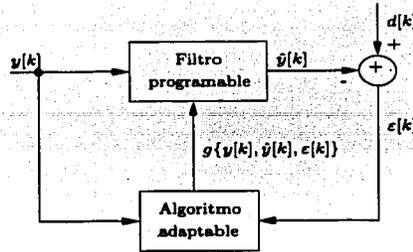
Los coeficientes de este filtro se actualizarán a través de una recursión o algoritmo adaptable de la siguiente forma:

$$h_i[k + 1] = h_i[k] + g\{y[k], \hat{d}[k], \varepsilon[k]\}\varepsilon[k] \quad (2.6)$$

donde  $h_i[k]$  es el  $i$ -ésimo coeficiente del filtro al tiempo  $k$ , y  $\varepsilon[k]$  es el error de la señal al instante  $k$ , definido de la siguiente manera:

$$\varepsilon[k] = d[k] - \hat{d}[k] \quad (2.7)$$

donde  $d[k]$  es la secuencia de entrenamiento del igualador, de la cual se hablará más adelante, y  $g\{\cdot\}$  es una función de adaptación de los parámetros del filtro.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Figura 2.5: Estructura general del filtro igualador adaptable

La ecuación 2.6 es la recursión sobre la cual los coeficientes del igualador se actualizarán. Es posible ver que los coeficientes del filtro al instante actual dependen de los valores correspondientes al instante anterior y de una ganancia de adaptación que generalmente es función de las entradas y salidas del filtro, y del error de filtrado. La forma de la ganancia de adaptación depende del criterio de optimización utilizado, obteniéndose un desempeño específico para cada caso. Algunas de las características más importantes a considerar para la utilización de algún criterio en particular son:

- Complejidad computacional
- Estabilidad
- Velocidad de convergencia
- Consistencia de la velocidad de convergencia ante variaciones en el condicionamiento de la señal.
- Habilidad de seguir las variaciones del canal.
- Robustez al ruido aditivo.
- Robustez numérica.

El desempeño de cualquier algoritmo con respecto a alguna de estas características dependerá en gran medida de la selección del criterio de optimización [23]. A su vez cada criterio implicará un algoritmo (secuencia ordenada de ecuaciones) para la evaluación de la ganancia de adaptación y en consecuencia la actualización de los parámetros del filtro.

### Periodo de Entrenamiento del Igualador

Antes de que comience la transmisión de datos deben de resolverse un cierto número de ecuaciones simultaneas para obtener los coeficientes del igualador, siendo ésto realizado durante un periodo llamado *de entrenamiento*.

Durante el *periodo de entrenamiento*, una secuencia de datos, llamada *secuencia de entrenamiento*, con características estadísticas semejantes a las de los datos que serán posteriormente transmitidos a través del canal, es enviada. Dicha secuencia, conocida por el receptor, es generada y sincronizada por el mismo, con el fin de obtener durante el periodo de entrenamiento los coeficientes óptimos del filtro igualador. La *secuencia de entrenamiento* debe ser por lo menos tan larga como el igualador, de tal forma que se tenga la información suficiente para que éste pueda inicializarse correctamente.

En algunas aplicaciones, los igualadores deben establecer el comportamiento de sus coeficientes sin utilizar una secuencia de entrenamiento. Dichos igualadores se llaman *igualadores ciegos*.

Después del *periodo de entrenamiento*, los coeficientes del igualador adaptable se deben de estar ajustando continuamente. Para esto, una vez que se ha terminado el *periodo de entrenamiento*, el igualador adaptable cambia la retroalimentación del dispositivo generador de la secuencia de entrenamiento al dispositivo de decisión tal como se muestra en la figura 2.6. De esta forma la señal de error es derivada de la señal estimada por el receptor, la cual no es necesariamente correcta. Si el funcionamiento del igualador es bajo condiciones normales, se tiene una alta probabilidad de que las decisiones tomadas por el igualador sean correctas. Es importante señalar que el igualador puede seguir variaciones lentas del canal, así como inestabilidades de fase en el receptor [28].

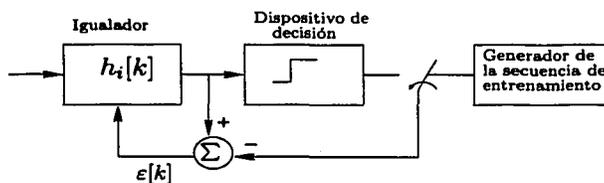


Figura 2.6: Igualador adaptable.

Dentro de los diversos igualadores adaptables, con secuencia de entrenamiento, podemos distinguir tres grandes familias:

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

- Igualadores Lineales
- Igualadores Fraccionalmente Espaciados (FSE)
- Igualadores con Decisión Retroalimentada (DFE)

A continuación se mencionarán las características principales de cada una de estas familias.

### 2.2.1. Igualadores Lineales

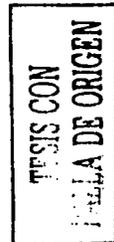
Para compensar la distorsión introducida por el canal es necesario utilizar un filtro lineal que posea parámetros que puedan ser ajustados, ver figura 2.6. Si se tiene un canal que es invariante con el tiempo, pero su respuesta en frecuencia es desconocida, se miden las características del canal y se ajustan los parámetros del igualador de canal. Una vez hecho esto, los parámetros se conservarán durante toda la transmisión de datos. Si las características del canal varían con el tiempo se utilizan los filtros adaptables, los cuales ajustan periódicamente sus parámetros durante la transmisión de datos [28].

#### *Igualador Zero-Forcing ZF*

De acuerdo a su topología estos igualadores pueden tener una estructura transversal o una estructura "Lattice." Entre las estructuras antes mencionadas, la más simple es la estructura transversal. En este tipo de estructura, los valores presentes y pasados de la señal recibida son ponderados por los coeficientes del igualador  $h_i$  y sumados para así obtener la salida. Si los retardos y multiplicadores son analógicos, la salida analógica del igualador es muestreada a la tasa de símbolos y estas muestras se envían al circuito de decisión. Los coeficientes del igualador  $h_i$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1, N$ ; deben de escogerse de tal forma que hagan que las muestras del canal y la respuesta al impulso del igualador sean cero para todos los valores excepto uno de los  $N$  instantes. Este tipo de igualador es llamado *igualador "zero-forcing" ZF* [26].

Si dejamos que el número de coeficientes del igualador **ZF** crezca de manera ilimitada, se obtendrá un igualador de longitud infinita con cero ISI a su salida. La respuesta de tal igualador será periódica con periodo igual a la tasa de símbolos. Es posible demostrar que un igualador de longitud infinita con cero ISI es simplemente un filtro inverso de la respuesta en frecuencia del canal. Sin embargo, tal tipo de igualador amplificará el ruido en las frecuencias para las cuales el espectro del canal tiene grandes atenuaciones [29].

Consideremos el canal que se muestra en la figura 2.7. En este esquema el demodulador consiste del filtro receptor con respuesta en frecuencia  $H_R(f)$  en cascada con un igualador de canal con respuesta  $H_E(f)$ . Como  $H_R(f)$  está acoplado con el filtro



transmisor  $H_T(f)$  y su respuesta en cascada es igual a la de un *coseno elevado*<sup>2</sup> [25],  $X_{ce}(f)$ , se tiene la siguiente condición:

$$|H_T(f)||H_R(f)| = X_{ce}(f) \quad (2.8)$$

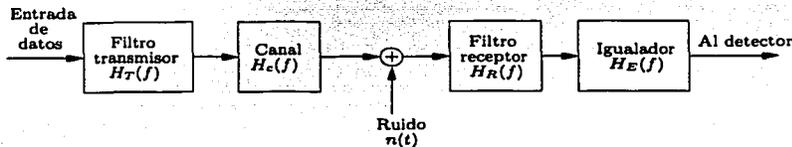


Figura 2.7: Sistema de comunicación.

$|H_E(f)|$  debe de compensar la distorsión del canal, de tal forma que la respuesta en frecuencia del igualador sea igual al inverso de la respuesta en frecuencia del canal:

$$H_E(f) = \frac{1}{H_c(f)} = \frac{1}{|H_c(f)|} e^{-j\Theta_c(f)} \quad |f| \leq W \quad (2.9)$$

donde  $|H_E(f)| = \frac{1}{|H_c(f)|}$  y la característica de fase del igualador es  $\Theta_E(f) = -\Theta_c(f)$ . De esta forma se tiene que el igualador es el *filtro inverso* de la respuesta del canal [28].

La entrada del igualador es de la forma:

$$y(t_0 + mT) = g(t_0 + mT) + v(t_0 + mT)$$

donde  $g(t_0 + mT)$  es la convolución de la respuesta al impulso del sistema con la señal de entrada al mismo, y  $v(t_0 + mT)$  es ruido Gaussiano con media cero y varianza:

$$\begin{aligned} \sigma_v^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} S_n(f) |H_R(f)|^2 |H_E(f)|^2 df \\ &= \int_{-W}^W \frac{S_n(f) |X_{ce}(f)|}{|H_c(f)|^2} df \end{aligned} \quad (2.10)$$

siendo  $S_n(f)$  la densidad espectral de potencia del ruido. Cuando el ruido es blanco,  $S_n(f) = N_0/2$ . Es importante señalar que la varianza del ruido a la salida del igualador **ZF** es mayor que a la entrada de éste, lo cual se debe principalmente a que el igualador compensa los efectos del canal, y como ya se dijo anteriormente, amplifica las frecuencias atenuadas por el canal, así como el ruido presente en estas frecuencias. Ésta es la principal desventaja que presenta el igualador **ZF**, el no tomar en cuenta la presencia del ruido aditivo, sin embargo a veces es utilizado por su simplicidad [36],[29]. Una alternativa para evitar ésto consiste en relajar la condición de

<sup>2</sup>Ver apéndice E



cero ISI y escoger las características del igualador de canal tales que la potencia combinada del ISI residual y el ruido aditivo en la salida del igualador sean mínimas [28].

Un igualador mucho más robusto se obtiene al utilizar el criterio del *error cuadrático promedio MSE* para encontrar los coeficientes óptimos del mismo. Esto es debido a que este tipo de igualadores maximiza la razón señal a distorsión a su salida [29]. Tal tipo de igualadores es descrito de manera más exhaustiva en el siguiente capítulo.

### Igualador de los Pasos Descendentes

La optimización del criterio **MSE** respecto de los coeficientes del igualador, nos lleva a una ecuación general de la forma [38]:

$$H_p[k] = R_p^{-1}[k]r_p[k] \quad (2.11)$$

La cual es conocida como la *ecuación de Wiener-Hopf* [15]. En las implementaciones prácticas de este tipo de igualadores, la solución para los coeficientes óptimos del igualador se obtiene empleando un procedimiento recursivo que evita la inversión directa de la matriz  $R_p^{-1}[k]$ . El procedimiento más simple es el *método de los pasos descendentes*, que consiste en escoger un vector arbitrario  $H_0$ , el cual corresponde a un punto sobre la superficie cuadrática **MSE**. El vector gradiente es entonces calculado en este punto, pero como éste apunta en la dirección de más rápido crecimiento de la superficie, y el punto mínimo buscado está en la dirección opuesta a éste, es necesario cambiar la dirección de dicho vector en cada iteración. En la figura 2.8 se muestra un ejemplo bidimensional de convergencia [28].

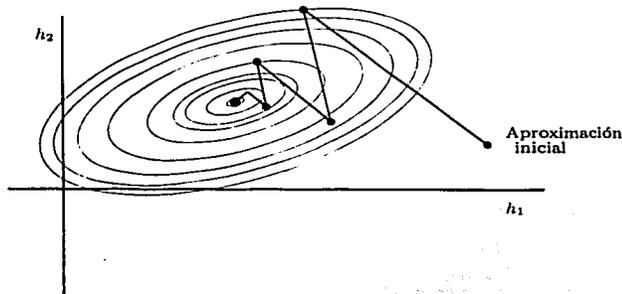


Figura 2.8: Convergencia en un algoritmo de gradiente.

Este método presenta el inconveniente de no llegar a los  $H_p$  óptimos en número finito de iteraciones, sin embargo se puede obtener una buena aproximación con algunos cientos de iteraciones.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Igualador del Gradiente Estocástico

La igualación de canal adaptable es requerida principalmente en canales que varían con el tiempo, para los cuales no se conocen de antemano las características de los mismos. Por esto se modifica el algoritmo anterior con el fin de estimar la componente del gradiente que se expresa como:

$$\hat{H}_p[k+1] = \hat{H}_p[k] - \Delta \hat{G}_p[k] \quad (2.12)$$

donde  $\hat{G}_p[k]$  es el estimado del vector de gradiente<sup>3</sup>  $G_p[k]$  y  $\hat{H}_p[k]$  denota el estimado del vector de coeficientes. Aplicando ésto a la ecuación de recursividad se tiene:

$$\hat{H}_p[k+1] = \hat{H}_p[k] + \Delta \varepsilon[k] Y_p[k] \quad (2.13)$$

Este algoritmo es conocido como *algoritmo LMS* o *algoritmo de gradiente estocástico*. Al igual que el *algoritmo de pasos descendentes*, es necesario tener un compromiso entre velocidad de convergencia y el valor mínimo del MSE [28].

## Algoritmos de los Mínimos Cuadrados

Otro criterio consiste en minimizar la suma de los cuadrados de la diferencia entre la señal deseada y el modelo de salida del igualador. Dentro de este criterio también puede plantearse un método recursivo para resolver el problema de la igualación de canal.

Este tipo de algoritmos es conocido por su rápida convergencia y por su buen desempeño al trabajar en canales variantes con el tiempo. Sin embargo, estas ventajas vienen acompañadas de una complejidad computacional elevada, además de problemas de estabilidad, que no son vistos en los algoritmos LMS [11].

### 2.2.2. Igualador Fraccionalmente Espaciado (FSE)

El ISI en canales reales sólo afecta un número finito de muestras "L". Ésto trae como consecuencia que se utilice un filtro transversal a respuesta impulsional finita (FIR) o infinita (IIR), con coeficientes variables. En la figura 2.9 se muestra un igualador FSE a respuesta impulsional finita. El tiempo de retardo  $\tau$  se debe de escoger tan largo como T, el intervalo entre símbolos. Si  $\tau$  se escoge de tal forma que  $1/\tau \geq 2W > 1/T$ , no ocurre traslape entre los símbolos y por lo tanto el igualador inverso al canal compensa la distorsión del mismo. Como  $\tau < T$  el canal es llamado *fraccionalmente espaciado* y de ahí su nombre de *igualador fraccionalmente espaciado* (**FSE** de sus siglas en inglés "Fractionally Spaced Equaliser"). El valor que más se utiliza en la práctica es  $\tau = T/2$ .

<sup>3</sup>Para mayor detalle, ver la sección 3.1.



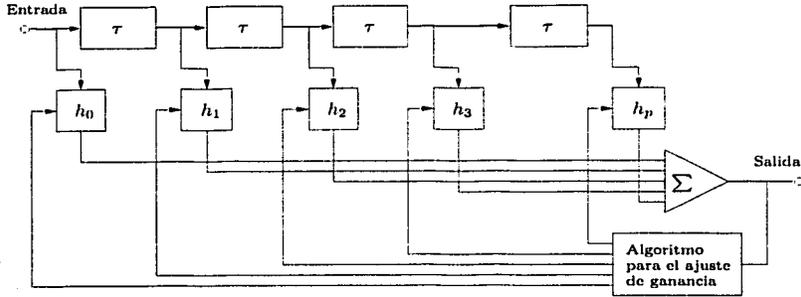


Figura 2.9: Filtro lineal transversal.

La respuesta al impulso del igualador a respuesta impulsional finita (FIR) es:

$$h_E(t) = \sum_{i=-N}^N h_i \delta(t - i\tau) \quad (2.14)$$

Y la respuesta en frecuencia es:

$$H_E(f) = \sum_{i=-N}^N h_i e^{-j2\pi f i \tau} \quad (2.15)$$

donde  $\{h_i\}$  son los coeficientes del igualador y  $N$  debe ser tal que incluya todos los términos afectados por la duración del ISI [28].

Los *FSE*, gracias a su frecuencia de muestreo, pueden obtener las mejores características de un filtro acoplado adaptable, dentro de las limitaciones de su periodo, además un *FSE* puede compensar distorsiones de retardo más severas con menos amplificación del ruido.

Es posible demostrar que con un diseño adecuado de la característica del filtro, la tasa de símbolos a la salida del *igualador fraccionalmente espaciado*, puede utilizarse sin dejar de ser óptima, para cualquier receptor lineal o no lineal sin importar el criterio de optimización empleado, esto es, puede aplicarse cualquiera de los igualadores antes mencionados únicamente variando la tasa de muestreo en la entrada del igualador [29].

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

### 2.2.3. Igualador de Decisión Retroalimentada (DFE)

Hasta este punto se ha hablado de igualadores lineales que son efectivos en canales donde el ISI no es muy severo, tales como los canales de las líneas telefónicas. Sin embargo los igualadores no lineales son muy eficaces en canales con una distorsión en amplitud bastante severa, utilizando una retroalimentación para cancelar al ISI provocada por los símbolos previamente detectados sobre el símbolo actual. La figura 2.10 muestra el diagrama de bloques de un igualador DFE, el cual consiste de dos filtros. El primero es conocido como filtro "forward" y es un filtro lineal transversal como los mencionados anteriormente. La entrada de este filtro es la señal recibida. El segundo filtro es el filtro de retroalimentación. Es a través de este filtro que se retroalimentan las decisiones tomadas sobre la señal igualada, ya que a su entrada tenemos los símbolos que ya han sido detectados, y la salida que se obtiene es restada a la salida del primer filtro. Es necesario señalar que este filtro puede ser un filtro como los antes mencionados, o bien un filtro predictor,<sup>4</sup> dependiendo de las características del canal a tratar, [28].

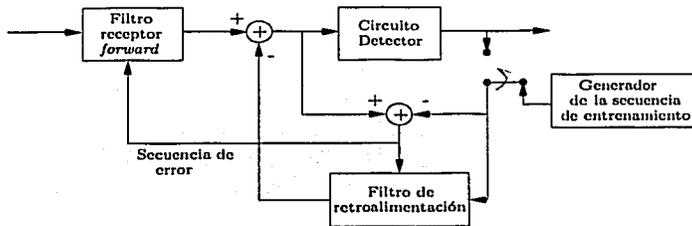


Figura 2.10: Igualador DFE.

Los coeficientes de ambos filtros son ajustados de manera simultánea para minimizar algún parámetro de desempeño. Debido a su simplicidad matemática, el criterio más utilizado es el MSE, y un *algoritmo de gradiente estocástico* es empleado para hacerlo adaptable. Hay que hacer notar que la salida del filtro de retroalimentación es la suma ponderada de las decisiones pasadas, y que los errores de decisión del detector que son alimentados a través de este filtro tienen muy poco efecto en el desempeño del DFE, es decir, los errores de decisión no son catastróficos pues solo estarán presentes en una ráfaga que afecta el desempeño del sistema de una forma apenas perceptible [28].

Los DFE pueden compensar la distorsión de amplitud sin amplificar de manera significativa el ruido como lo hacen los igualadores lineales. Además, los DFE tienen

<sup>4</sup>Ver apéndice B de predicción lineal.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

un desempeño menos sensible a la fase de muestreo. Esto se debe a que los coeficientes en un igualador transversal lineal son escogidos para forzar la respuesta del canal y el filtro en cascada a un pulso. En un DFE, la propiedad que presenta la retroalimentación para eliminar el ISI, gracias a los símbolos ya obtenidos, da cierta libertad al seleccionar los coeficientes del primer filtro. Esto permite que el primer filtro no tenga que ser el inverso de las características del canal lo cual evita que se amplifique el ruido y que el sistema sea sensible a la fase de muestreo [29].

### 2.3. Conclusiones

Por medio del trabajo presentado en este capítulo, pudimos comprender, en una primera instancia, la importancia de los filtros igualadores de canal en los sistemas de comunicación digital, sean invariantes o variantes con el tiempo, lo que implica el utilizar filtros fijos o bien adaptables, respectivamente. Tales filtros pueden emplear una estructura transversal o bien lattice para su realización, lo que afectará de una manera considerable características tales como convergencia, estabilidad y facilidad de implementación, entre otras. Por otra parte, se realizó una clasificación de los principales tipos de igualadores, atendiendo a su configuración, ésto es, sean de decisión retroalimentada o no, los cuales, a su vez, pueden ser fraccionalmente espaciados.

En el siguiente capítulo, se retomará el problema de la igualación de canal, con el objetivo de converger a un conjunto de algoritmos recursivos que nos proporcionen los coeficientes óptimos del filtro igualador. Empleando para dicha tarea, dos criterios de optimización; el *criterio del error cuadrático promedio* y el de los *mínimos cuadrados*.

## **CAPÍTULO 3**

### **ALGORITMOS DE FILTRADO ADAPTABLE PARA LA IGUALACIÓN DE CANAL**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Capítulo 3

# Algoritmos de Filtrado Adaptable para la Igualación de Canal

Supóngase que en una primera instancia en el receptor se cuenta con una versión de las mismas características de la señal que se transmite  $d[k]$  (*secuencia de entrenamiento*), por un canal cuya función de transferencia  $h_c[k]$  degrada a dicha secuencia convirtiéndola en la señal  $y[k]$ , ver figura 3.1. Para contrarrestar los efectos negativos del canal se deberá filtrar la señal  $y[k]$  que llega al filtro igualador. El filtro, por su parte, tendrá que adaptar sus coeficientes  $h[k]$  para cada muestra de entrada de tal forma que el error  $\varepsilon_p[k]$  entre la señal filtrada  $\hat{d}[k]$  (estimador) y la señal deseada  $d[k]$  sea mínimo. Una vez que los coeficientes  $h[k]$  sean óptimos, bajo algún criterio, se iniciará la transmisión de la información. El ajuste, periódico posterior a la etapa de entrenamiento, de los coeficientes del igualador se realizará con base en la señal entregada  $\hat{d}[k]$  por un dispositivo de decisión.

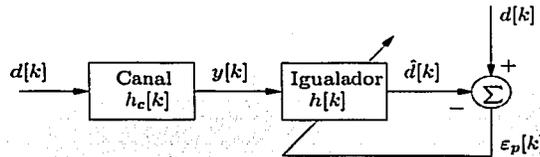


Figura 3.1: Igualador de canal adaptable.

De esta forma el predictor  $\hat{d}[k]$  puede expresarse a través de la suma de convolución entre los coeficientes del igualador y la señal recibida de la siguiente forma:

$$\hat{d}[k] = \sum_{i=M}^N h_i[k] y[k - i + 1] \quad (3.1)$$

donde  $M$  y  $N$  son los límites de la ventana de valores que se analizan de la señal  $y[k]$ . El término ventana a lo largo de este documento, hace referencia al hecho en el cual se igualan a cero  $p - 1$  muestras, antes del inicio y/o después del fin de la información procesada, es decir, se establecen condiciones iniciales (*prewindowed*) y/o finales (*fullwindowed/postwindowed*) de la señal  $y[k]$  [5].

Expresando 3.1 en su forma vectorial, se tiene:

$$\hat{d}[k] = H_p^T[k] Y_p[k] \quad (3.2)$$

donde el superíndice  $T$  indica *transpuesto* y los vectores de coeficientes  $H_p[k]$  y el de muestras  $Y_p[k]$ , para el caso *prewindowed* ( $M = 1$  y  $N = p$ ), considerado en este capítulo, están definidos como;

$$H_p^T[k] = [h_1^T[k] \ h_2^T[k] \ h_3^T[k] \ \dots \ h_p^T[k]] \quad (3.3)$$

$$Y_p^T[k] = [y^T[k] \ y^T[k-1] \ y^T[k-2] \ \dots \ y^T[k-p+1]] \quad (3.4)$$

Para evaluar la calidad del estimador, se define el *error de filtrado a posteriori* como la diferencia entre la señal deseada y su valor estimado, es decir;

$$\varepsilon_p[k] = d[k] - \hat{d}[k] \quad (3.5)$$

$$= d[k] - H_p^T[k] Y_p[k] \quad (3.6)$$

Por último, con el fin de encontrar los coeficientes del igualador de forma recursiva, tales que produzcan un  $\varepsilon_p[k]$  mínimo, se deberá minimizar algún criterio de optimización respecto de dichos coeficientes. Con este propósito, a continuación se presentan dos familias de algoritmos basadas en diferentes criterios de optimización. La primera de ellas emplea el criterio del *error cuadrático promedio* (**MSE**, del inglés "Mean Square Error") y la segunda el de los *mínimos cuadrados* (**MC**).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

### 3.1. Algoritmos Basados en el Error Cuadrático Promedio

Los algoritmos basados en el criterio del *error cuadrático promedio (MSE)* emplean la teoría de filtrado de Wiener, para encontrar los coeficientes óptimos del filtro igualador tales que minimicen el valor cuadrático promedio de la señal error, la cual, a su vez, está formada por la diferencia entre la señal deseada y la señal estimada por dicho filtro. La función de *costo* de este criterio está dada por:

$$J_{mse} = E\{\varepsilon[k]\varepsilon^*[k]\} \quad (3.7)$$

donde  $E\{\cdot\}$  es el operador esperanza y  $*$  denota complejo conjugado transpuesto. Esta función es válida para el caso más general, que es cuando la señal es compleja y multivariable. En este capítulo se tratarán señales reales, por lo que la función anterior se reduce a  $E\{\varepsilon[k]\varepsilon^T[k]\}$ .

Puesto que se desea minimizar la potencia del error respecto a los coeficientes del filtro, lo que es equivalente a ortogonalizar al error respecto a la señal  $y[k]$  [14], si se toma 3.6 y se sustituye en 3.7, además de minimizar el criterio respecto a  $H_p[k]$ , se llega a la siguiente expresión:<sup>1</sup>

$$H_p[k] = R_p^{-1}[k]r_p[k] \quad (3.8)$$

donde la matriz de covarianza  $R_p[k]$ , para el caso en el que la entrada al filtro es una señal aleatoria estacionaria en sentido amplio (WSS), se define como:

$$R_p[k] = E\{Y_p[k]Y_p^T[k]\} = \begin{bmatrix} r_y[0] & r_y[1] & \dots & r_y[p-1] \\ r_y[1] & r_y[0] & \dots & r_y[p-2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_y[p-1] & r_y[p-2] & \dots & r_y[0] \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

y el vector de correlación  $r_p[k]$ , cuando las señales  $y[k]$  y  $d[k]$  son conjuntamente estacionarias en sentido amplio, es:

$$r_p^T[k] = E\{Y_p[k]d[k]\}^T = [r_{yd}^T[1] \ r_{yd}^T[2] \ \dots \ r_{yd}^T[p-1] \ r_{yd}^T[p]] \quad (3.10)$$

#### 3.1.1. Algoritmo de los Pasos Descendentes

A la ecuación 3.8 se le conoce como *ecuación de Wiener-Hopf* [15]. De ésta es posible ver que para obtener los coeficientes óptimos  $H_p[k]$  es necesario invertir la matriz  $R_p[k]$ . Un procedimiento que evita el realizar la inversión directa de la matriz, de una

<sup>1</sup>Un procedimiento similar, para encontrar los coeficientes óptimos en la predicción lineal, se desarrolla en el apéndice B.



forma simple, es el método de los pasos descendentes, en donde se propone un vector inicial arbitrario  $H_0$ , al cuál le corresponde un punto sobre la superficie cuadrática MSE  $p$ -dimensional del espacio de coeficientes. Para el caso de dos coeficientes es posible ver esta superficie en la figura 3.2 [11].

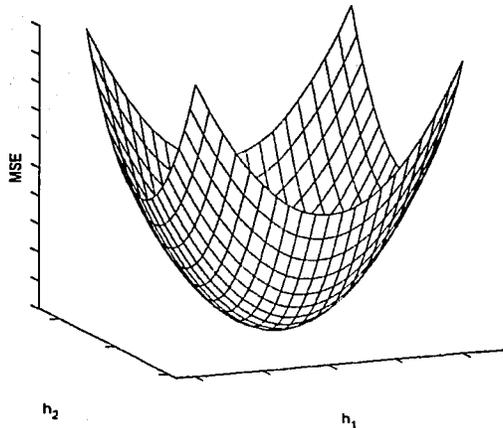


Figura 3.2: Superficie MSE

El vector gradiente  $G[k]$  tendrá  $p$  componentes  $\frac{\partial J_{mse}}{\partial h_p}$  y será calculado en el punto  $H_0$ . Cada coeficiente es ajustado en la dirección contraria a la componente del gradiente correspondiente. Los coeficientes  $H_p[k]$  se obtienen recursivamente de la siguiente manera:

$$H_p[k+1] = H_p[k] - \Delta G[k] \quad (3.11)$$

donde el vector gradiente  $G[k]$  está dado por:

$$G[k] = \frac{1}{2} \frac{dJ_{mse}}{dH_p[k]} = R_p[k]H_p[k] - r_p[k] = -E\{\varepsilon[k]Y_p^T[k]\} \quad (3.12)$$

y  $\Delta$  es un número positivo lo suficientemente pequeño para asegurar la convergencia del procedimiento iterativo, acotado por:

$$0 < \Delta < \frac{2}{\lambda_{max}} \quad (3.13)$$

donde  $\lambda_{max}$  es el máximo valor característico de los  $p$  asociados a la matriz de covarianza  $R_p[k]$  [38],[14]. Sin embargo se debe tener un compromiso entre el tiempo de convergencia y  $\Delta$ , ya que entre más pequeño sea  $\Delta$ , menor será el MSE, sin embargo el tiempo de convergencia será mucho mayor, en cambio, si  $\Delta$  es mayor, el tiempo de convergencia es mucho menor pero el MSE mínimo será mayor que en el primer caso mencionado [29]. Si en algún momento se alcanza el mínimo de la superficie MSE,  $G[k] = 0$ , no se necesitarán más ajustes en el vector  $H_p[k]$ . En general esta condición no puede alcanzarse en un número finito de iteraciones, pero sí es posible obtener una buena aproximación con algunos cientos de iteraciones.

### 3.1.2. Algoritmo del Gradiente Estocástico (LMS)

La principal dificultad con el algoritmo descrito en la sección anterior radica en la falta de conocimiento de la matriz de covarianza  $R_p[k]$  y del vector de correlación  $r_p[k]$ . Dado que éstos dependen de datos desconocidos en el receptor, es necesario emplear un estimador del gradiente, con lo cual se obtiene el algoritmo:

$$\hat{H}_p[k+1] = \hat{H}_p[k] - \Delta \hat{G}[k] \quad (3.14)$$

donde  $\hat{H}_p[k]$  es el estimado del vector de coeficientes  $H_p[k]$  y  $\hat{G}[k]$  es el estimado del vector gradiente  $G[k]$ . Además, en este caso  $\Delta$  estará acotada por los límites:

$$0 < \Delta < \frac{2}{PY_p} \quad (3.15)$$

donde  $PY_p$  es la potencia en el vector de entrada  $Y_p[k]$ . De la ecuación 3.12 es posible ver que  $G[k]$  es el negativo del valor esperado de  $\varepsilon[k]Y_p^T[k]$ , por lo tanto podemos tomar un estimado de la siguiente forma:

$$\hat{G}[k] = -\varepsilon[k]Y_p^T[k] \quad (3.16)$$

como  $E\{\hat{G}[k]\} = G[k]$ , el estimador del vector gradiente  $\hat{G}[k]$  es no sesgado. Sustituyendo 3.16 en 3.14 se obtiene:

$$\hat{H}_p[k+1] = \hat{H}_p[k] + \Delta \varepsilon[k]Y_p^T[k] \quad (3.17)$$

que es el algoritmo LMS tradicional para el ajuste de los parámetros del igualador [26] (Ver cuadro 3.1).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

LMS [11],[38]	
Para el instante $k - 1$ :	
$Y_p[k - 1] = H_p[k - 1] = 0$	
Filtrado	Ecs.
$\varepsilon[k] = d[k] - Y_p^T[k]H_p[k]$	3.6
$\hat{H}_p[k + 1] = \hat{H}_p[k] + \Delta\varepsilon[k]Y_p^T[k]$	3.14



Cuadro 3.1: Algoritmo "Least-Mean-Square"

### 3.1.3. Versiones Simplificadas y Modificadas del Algoritmo LMS

Alrededor del algoritmo LMS existen diversas variantes, las cuales buscan alguna mejora en las propiedades del algoritmo convencional, tales como su simplicidad de implementación, robustez numérica, inmunidad al ruido, etc. A continuación se presentan algunas de las versiones más empleadas.

#### LMS Signum

Existen tres variaciones del algoritmo LMS que utilizan la información contenida en el signo de la señal de error y/o en las componentes de  $Y_p[k]$ . Estas variantes son [26]:

$$\hat{H}_p[k + 1] = \hat{H}_p[k] + \Delta csgn(\varepsilon[k])Y_p^*[k - i] \quad (3.18)$$

$$\hat{H}_p[k + 1] = \hat{H}_p[k] + \Delta\varepsilon[k]csgn(Y_p^*[k - i]) \quad (3.19)$$

$$\hat{H}_p[k + 1] = \hat{H}_p[k] + \Delta csgn(\varepsilon[k])csgn(Y_p^*[k - i]) \quad (3.20)$$

donde  $0 \leq i \leq p - 1$  y  $csgn(x)$  está definido por:

$$csgn(x) = \begin{cases} 1 + j & [Re(x) > 0, Im(x) > 0] \\ 1 - j & [Re(x) > 0, Im(x) < 0] \\ -1 + j & [Re(x) < 0, Im(x) > 0] \\ -1 - j & [Re(x) < 0, Im(x) < 0] \end{cases} \quad (3.21)$$

donde  $j \equiv \sqrt{-1}$ .

Estas versiones son conocidas como *signum-error* (LMSSE), *signum-data* (LMSDD) y *signum-signum* (LMSSS) respectivamente. Estos algoritmos requieren de  $p$  multiplicaciones y sumas, y si el paso  $\Delta$  es una potencia de 2, entonces se tendrán  $p$  corrimientos y sumas. Debido a lo anterior, estos algoritmos presentan un desempeño más rápido que el algoritmo LMS convencional, dependiendo de la velocidad de ejecución de las sumas y multiplicaciones.

La versión *signum-error* sólo hace el escalamiento diferente, mientras que el *signum-data* modifica la dirección del vector LMS. El algoritmo *signum-signum* se volvió popular debido a que no requería multiplicaciones para la ecuación de adaptación. Sin embargo estos algoritmos utilizan un estimado del gradiente bastante ruidoso, lo cual hace que en algunos casos sean divergentes cuando el algoritmo LMS tradicional no lo es [38].

Las diferentes versiones del algoritmo LMS Signum se encuentran resumidas en el cuadro 3.2.

### LMS con Promedio en el Gradiente (LMSG)

Otra variación del algoritmo LMS consiste en promediar los vectores del gradiente sobre algunas iteraciones antes de hacer ajustes a los coeficientes del igualador, de la siguiente manera:

$$\bar{G}[mN] = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon[mN+n] Y_p^T[mN+n] \quad (3.22)$$

y la recursión correspondiente para la actualización de los coeficientes está dada por:

$$\hat{H}_p[(k+1)N] = \hat{H}_p[kN] - \Delta \bar{G}[kN] \quad (3.23)$$

La principal ventaja de este algoritmo consiste en reducir el efecto del ruido en el estimado del vector gradiente [26], ver cuadro 3.3.

### LMS con Factor de Fuga (LMSF)

Cuando la matriz asociada al proceso de entrada del igualador de canal tiene uno o más valores característicos iguales a cero pueden ocurrir los siguientes casos:

1. El filtro adaptable no converge a una solución única.
2. Los coeficientes no convergen.
3. Los coeficientes crecen sin límites.



Para tratar este problema, se han propuesto varias soluciones, siendo la más utilizada aquella que emplea un factor de "fuga" para los coeficientes, de esta forma se tiene:

$$H_p[k+1] = (1 - \Delta\psi)H_p[k] + \Delta\epsilon[k]Y_p[k] \quad (3.24)$$

Al igual que  $\Delta$  es pequeña y positiva, el factor de "fuga"  $\psi$  también lo es. La introducción de este factor asegura la convergencia a una solución única. El precio que se paga por dicho factor es el aumento en la complejidad computacional del algoritmo y la introducción de un sesgo en la solución a la cual se converge. Este sesgo es introducido ya que el vector de coeficientes  $H_p[k]$  converge a la solución

$$\lim_{k \rightarrow \infty} H_p[k] = (R_p[k] + \psi I)^{-1} r_p[k] \quad (3.25)$$

la cuál no representa la solución general de la ecuación 3.8 de Wiener-Hopf [38].

En el cuadro 3.4 se muestra el algoritmo LMSF.

LMS Signum [38]		
Para el instante $k - 1$ :		
$\Delta = 2^x, x < 0$		
$Y_p[k - 1] = H_p[k - 1] = 0$		
Versión	Filtrado	Ecs.
	$\epsilon[k] = d[k] - Y_p^T[k]H_p[k]$	3.6
<b>LMSSE</b>	$\hat{H}_p[k+1] = \hat{H}_p[k] + \Delta \text{csgn}(\epsilon[k])Y_p^*[k-i]$	3.18
<b>LMSSD</b>	$\hat{H}_p[k+1] = \hat{H}_p[k] + \Delta \epsilon[k] \text{csgn}(Y_p^*[k-i])$	3.19
<b>LMSSS</b>	$\hat{H}_p[k] + \Delta \text{csgn}(\epsilon[k]) \text{csgn}(Y_p^*[k-i])$	3.20

Cuadro 3.2: Algoritmos "Least-Mean-Square" Signum

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

<b>LMSG [26]</b>	
Para el instante $k - 1$ :	
$Y_p[k - 1] = H_p[k - 1] = 0$	
Filtrado	Ecs.
$\epsilon[k] = d[k] - Y_p^T[k]H_p[k]$	3.6
$\bar{G}[mN] = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \epsilon[mN + n]Y_p^T[mN + n]$	3.22
Después de $N$ iteraciones;	
$\hat{H}_p[(k + 1)N] = \hat{H}_p[kN] - \Delta\bar{G}[kN]$	3.23

Cuadro 3.3: Algoritmo LMS con Promedio en el Gradiente

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

<b>LMSF [38]</b>	
Para el instante $k - 1$ :	
$0 < \psi < 1$	
$Y_p[k - 1] = H_p[k - 1] = 0$	
Filtrado	Ecs.
$\epsilon[k] = d[k] - Y_p^T[k]H_p[k]$	3.6
$H_p[k + 1] = (1 - \Delta\psi)H_p[k] + \Delta\epsilon[k]Y_p[k]$	3.24

Cuadro 3.4: Algoritmo LMS con Factor de Fuga

## 3.2. Algoritmos de los Mínimos Cuadrados

En esta sección, con el fin de encontrar los coeficientes óptimos del filtro igualador, emplearemos un procedimiento alternativo conocido como *método de los mínimos cuadrados (MC)*, el cual está basado en la siguiente idea; supóngase que se tiene un conjunto de valores medidos reales  $\hat{d}[1]$ ,  $\hat{d}[2]$ , ...,  $\hat{d}[i]$ , realizados en los instantes de tiempo 1, 2, ...,  $i$ , respectivamente y el requisito es el de construir una curva  $d[i]$  que sirva para ajustar estos puntos de alguna manera óptima. De acuerdo con el método de los mínimos cuadrados, el mejor ajuste se obtiene minimizando la suma de los cuadrados de la diferencia entre  $d[i]$  y  $\hat{d}[i]$  (ec. 3.26) para  $i = 1, 2, \dots, k$ , [19].

$$E_{mc}[k] = \sum_{i=1}^k \varepsilon_p[i] \varepsilon_p^T[i] \quad (3.26)$$

donde  $E_{mc}[k]$  es conocida como la función *costo* de los mínimos cuadrados.

Con el fin de seguir variaciones lentas en el tiempo de los parámetros del filtro, la función costo de los mínimos cuadrados, ec. 3.26, se ve ligeramente modificada por el factor  $\lambda$ , llamado "factor de olvido," ya que pondera las muestras más antiguas con un factor de menor magnitud comparado con aquel que pondera a las muestras más actuales [9], es decir;

$$J_{mc}[k] = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \varepsilon_p[i] \varepsilon_p^T[i] \quad (3.27)$$

En la teoría del filtrado de Wiener, los filtros que se obtienen (óptimos en un sentido probabilístico) están basados en promedios conjuntos de todas las realizaciones de un cierto entorno, que se asume es estacionario. Por su parte, el método de los mínimos cuadrados es una aproximación determinística que involucra promedios temporales, sin la necesidad de hacer suposiciones sobre los datos de interés, lo que provoca que el filtro sólo dependa del número de muestras usadas en el cálculo de los coeficientes [19], [26].

### 3.2.1. Algoritmo Clásico de los Mínimos Cuadrados para el problema de Filtrado

Con el propósito de simplificar la notación subsecuente, se redefinirá el estimador  $\hat{d}[k]$ , ecuación 3.2, como;

$$\hat{d}[k] = -H_p^T[k] Y_p[k] \quad (3.28)$$

Por lo que el error de filtrado *a posteriori* queda definido como:

$$\varepsilon_p[k] = d[k] + H_p^T[k] Y_p[k] \quad (3.29)$$



De esta forma, la minimización de 3.27 respecto de  $H_p[k]$ , después de haber sustituido 3.29 en tal ecuación, nos lleva a obtener los coeficientes del filtro igualador óptimos definidos por la siguiente relación;<sup>2</sup>

$$H_p[k] = -R_p^{-1}[k]r_p[k] \quad (3.30)$$

donde

$$R_p[k] = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} Y_p[j] Y_p^T[j] \quad (3.31)$$

$$r_p[k] = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} Y_p[j] d^T[j] \quad (3.32)$$

Nótese que la ecuación 3.30 es parecida a la ecuación de Wiener-Hopf. La diferencia radica en la definición de la *matriz de covarianza*  $R_p[k]$  y el *vector de correlación*  $r_p[k]$ , que en este caso están dadas por las ecuaciones 3.31 y 3.32 respectivamente [30].

Como se puede observar de la ecuación 3.30 es necesario invertir la matriz de covarianza  $R_p[k]$  para poder encontrar los coeficientes  $H_p[k]$  óptimos. Lo cual implica una cantidad de operaciones del orden de  $p^3$ , es decir,  $O(p^3)$ . Con el fin de encontrar una alternativa que requiera de menos operaciones para el cálculo de los coeficientes  $H_p[k]$ , en la siguiente sección se hará uso de ecuaciones recursivas en tiempo.

### 3.2.2. Algoritmo Recursivo de los Mínimos Cuadrados

Como pudimos ver en la sección previa, la actualización de los coeficientes óptimos  $H_p[k]$  requiere del orden de  $p^3$  operaciones, por lo que el objetivo del algoritmo recursivo de los mínimos cuadrados (ARMC), es el de calcular los parámetros del filtro de manera secuencial, es decir, a medida que la señal llega al filtro, con un número menor de operaciones. Para lograr ésto, el ARMC se basa, principalmente, en el uso del *lema de inversión matricial* con el propósito de encontrar ecuaciones recursivas, que en conjunto necesitan de  $O(p^2)$  operaciones aritméticas para la actualización de los coeficientes  $H_p[k]$ . Es por ello que a continuación se presentan las recursiones en tiempo de las variables que integran el ARMC.

#### Recursión para $R_p[k]$ y $R_p^{-1}[k]$

De 3.31 tenemos que la matriz de *covarianza*  $R_p[k]$  se puede escribir, de forma recursiva, como sigue;

<sup>2</sup>Para una mayor referencia en cuanto a la deducción de los coeficientes óptimos de filtrado, consultar el apéndice B de predicción lineal.



$$R_p[k] = \lambda R_p[k-1] + Y_p[k] Y_p^T[k] \quad (3.33)$$

Para invertir la matriz  $R_p[k]$  se aplica el *lema de inversión matricial*,<sup>3</sup> ecuación A.20, a 3.33, obteniéndose, después de acomodar términos una recursión para su inversa;

$$R_p^{-1}[k] = \frac{1}{\lambda} \left[ R_p^{-1}[k-1] - \frac{R_p^{-1}[k-1] Y_p[k] Y_p^T[k] R_p^{-1}[k-1]}{\lambda + Y_p^T[k] R_p^{-1}[k-1] Y_p[k]} \right] \quad (3.34)$$

O bien;

$$R_p^{-1}[k] = \lambda^{-1} R_p^{-1}[k-1] - W_p[k] \gamma_p[k] W_p^T[k] \quad (3.35)$$

donde el factor  $W_p[k]$  es comúnmente conocido como **ganacia dual de Kalman**, la cual está dada por [2];

$$W_p[k] \equiv -\frac{1}{\lambda} R_p^{-1}[k-1] Y_p[k] \quad (3.36)$$

y la **variable de similitud**  $\gamma_p[k]$  definida como [5];

$$\gamma_p[k] \equiv \frac{1}{1 - Y_p^T[k] W_p[k]} \quad (3.37)$$

### Recursión en el Vector de Coeficientes $H_p[k]$

Para aplicaciones en tiempo real, el cálculo de los coeficientes del igualador de forma recursiva, es de suma importancia. Por lo que si se toma 3.30 y se realizan algunas manipulaciones matemáticas, se demuestra que el vector de coeficientes  $H_p[k]$  puede ser actualizado, de forma recursiva, por medio de la siguiente relación:<sup>4</sup>

$$H_p[k] = H_p[k-1] + K_p[k] e_p^T[k] \quad (3.38)$$

donde el factor  $K_p[k]$  es comúnmente conocido como **ganancia de Kalman** [2], [5];

$$K_p[k] = -R_p^{-1}[k] Y_p[k] \quad (3.39)$$

y el **error de filtrado a priori**  $e_p[k]$  está dado por;

$$e_p[k] = d[k] + H_p^T[k-1] Y_p[k] \quad (3.40)$$

Finalmente, a partir de 3.35 y con la ayuda de 3.37 se puede encontrar una relación entre las ganancias de Kalman, definida como;

<sup>3</sup>Para mayor referencia consultar el apéndice A.

<sup>4</sup>La recursión en  $H_p[k]$  se puede obtener por medio de un procedimiento equivalente al utilizado para obtener el vector de coeficientes en la predicción forward, ver apéndice B de predicción lineal.



$$K_p[k] = W_p[k]\gamma_p[k] \quad (3.41)$$

A continuación, en el cuadro 3.5, se presenta el algoritmo recursivo de los mínimos cuadrados para el problema de filtrado.

Varias versiones más del **ARMC** se pueden obtener si se involucra la ganancia dual de Kalman, así como la variable de similitud en el cálculo de la inversa de la matriz de covarianza, una de estas versiones se muestra en el cuadro 3.6. La principal diferencia en la implementación de una u otra versión radica en su robustez numérica, así como del número de ecuaciones necesarias para la actualización de los coeficientes.

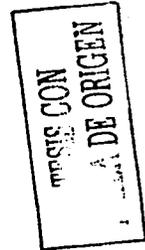
<b>ARMC</b>	
Para el instante $k - 1$ :	
$R_p^{-1}[k - 1] = \delta^{-1}I, \delta > 0, Y_p[k - 1] = H_p[k - 1] = 0$	
Filtrado	Ecs.
$e_p[k] = d[k] + H_p^T[k - 1]Y_p[k]$	3.40
$H_p[k] = H_p[k - 1] + K_p[k]e_p^T[k]$	3.38
$R_p^{-1}[k] = \frac{1}{\lambda} \left[ R_p^{-1}[k - 1] - \frac{R_p^{-1}[k - 1]Y_p[k]Y_p^T[k]R_p^{-1}[k - 1]}{\lambda + Y_p^T[k]R_p^{-1}[k - 1]Y_p[k]} \right]$	3.34
$K_p[k] = -R_p^{-1}[k]Y_p[k]$	3.39

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Cuadro 3.5: Algoritmo Recursivo de los Mínimos Cuadrados para el Filtrado

Algoritmo ARMC2	
Para el instante $k - 1$ :	
$R_p^{-1}[k - 1] = \delta^{-1}I, \delta > 0, \mathbf{Y}_p[k - 1] = \mathbf{H}_p[k - 1] = 0$	
Filtrado	
$e_p[k] = d[k] + \mathbf{H}_p^T[k - 1]\mathbf{Y}_p[k]$	3.40
$\mathbf{H}_p[k] = \mathbf{H}_p[k - 1] + \mathbf{K}_p[k]e_p^T[k]$	3.38
$\mathbf{W}_p[k] \equiv -\frac{1}{\lambda}R_p^{-1}[k - 1]\mathbf{Y}_p[k]$	3.36
$\gamma_p[k] \equiv \frac{1}{1 - \mathbf{Y}_p^T[k]\mathbf{W}_p[k]}$	3.37
$R_p^{-1}[k] = \lambda^{-1}R_p^{-1}[k - 1] - \mathbf{W}_p[k]\gamma_p[k]\mathbf{W}_p^T[k]$	3.35
$\mathbf{K}_p[k] = \mathbf{W}_p[k]\gamma_p[k]$	3.41

Cuadro 3.6: Versión dos del ARMC



### 3.2.3. Algoritmos Rápidos

La razón principal para desarrollar los algoritmos recursivos, como el que se trató en la sección previa, fué para reducir la cantidad de operaciones requeridas en cada actualización. Esto se logró explotando una propiedad especial de  $R_p[k]$  que permitía obtener un procedimiento computacionalmente menos caro para calcular su inversa. En particular, notamos que  $R_p[k]$  se convertía en  $R_p[k+1]$  si se le sumaba un producto de vectores. Tomando en consideración este hecho, se aplicó el *lema de inversión matricial* en 3.33 con el fin de obtener un procedimiento recursivo en la obtención de  $R_p^{-1}[k]$  a partir de  $R_p^{-1}[k-1]$ , reduciendo la carga computacional de  $O(p^3)$  a  $O(p^2)$  por iteración. Ahora, en esta sección, se consideran los casos en los cuales se reduce la carga computacional aún más, hasta el punto en el que sólomente se requieren de  $O(p)$  por iteración. Los algoritmos que logran hacer ésto han sido llamados "algoritmos rápidos" [38].

Los algoritmos rápidos explotan una propiedad llamada "propiedad de corrimiento" [12], [2], la cual considera que el vector  $Y_p[k]$  se convierte en  $Y_p[k+1]$  con la incorporación de sólo una nueva muestra de entrada, es decir, de las  $p$  muestras, la más antigua es desechada, una nueva es incorporada y las  $p-1$  restantes permanecen. La consideración de este hecho, en los algoritmos rápidos, conduce a un mejoramiento en la eficiencia de cálculo por iteración, comparable con aquella del algoritmo del gradiente estocástico, la cual necesita  $2p$  operaciones aritméticas por iteración, pero con un tiempo de convergencia más elevado [2].

En esta sección, se presenta el "algoritmo rápido de Kalman" introducido por Falconer y Ljung en [12], del cual se pueden obtener varias versiones más, dependiendo de las relaciones empleadas y de la secuencia que a éstas se les dé. De estas versiones se presentan cinco, cuya importancia radica, principalmente, en la disminución del número de operaciones por iteración. Tales algoritmos pueden ser subdivididos en dos categorías; los llamados "algoritmos rápidos a priori" y los "a posteriori," dicha clasificación proviene del hecho, de que los primeros se basan, principalmente, en el uso de las fórmulas para los errores *a priori* y los segundos en el de las *a posteriori*. Es importante hacer notar que el desarrollo de los algoritmos rápidos se basa en el uso de los predictores forward y backward, así como de la relación que entre éstos existe. Es por ello que en el apéndice B se ha desarrollado un resumen de predicción lineal, en el cual se sientan las bases para un mejor entendimiento de la promemática tratada en esta sección.

#### Algoritmo Rápido de Kalman (ARK)

La obtención del ARK emplea un método semejante a la recursión de Levinson-Durbin, ésto es, se utilizan los predictores *forward* y *backward* (óptimos en el sentido

de los mínimos cuadrados)<sup>5</sup> para obtener la ganancia de Kalman [14]. De esta forma la actualización de  $R_p^{-1}[k]$  y su multiplicación por  $Y_p[k]$ , para obtener dicha ganancia, no son necesarias, lo cual es de suma importancia, ya que estos dos pasos son los que requieren, cada uno, del orden de  $p^2$  multiplicaciones. Para lograr ésto se emplean las ganancias de Kalman al orden  $p + 1$  calculadas en el apéndice B, sección B.3, ecuaciones 3.42 y 3.43;

$$\mathbf{K}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} 0 \\ K_p[k-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ A_p[k] \end{bmatrix} \left[ \alpha_p^{-f}[k] e_p^f[k] \right] \quad (3.42)$$

$$\mathbf{K}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} K_p[k] \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_p[k] \\ I \end{bmatrix} \left[ \alpha_p^{-b}[k] e_p^b[k] \right] \quad (3.43)$$

particionando  $\mathbf{K}_{p+1}[k]$  como;

$$\mathbf{K}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p[k] \\ \mu[k] \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

resolviendo 3.42 y 3.43 se puede escribir;

$$\mu[k] = -\alpha_p^{-b}[k] e_p^b[k] \quad (3.45)$$

y

$$K_p[k] = \mathbf{M}_p[k] - B_p[k] \mu[k] \quad (3.46)$$

Sustituyendo la definición del predictor backward B.35 en 3.46 se obtiene una expresión para  $K_p[k]$ :

$$K_p[k] = [\mathbf{M}_p[k] - B_p[k-1] \mu[k]] [I + e_p^{bT}[k] \mu[k]]^{-1} \quad (3.47)$$

El cuadro 3.7 muestra la secuencia de relaciones que conforman el algoritmo rápido de Kalman.

### Algoritmo Rápido de Kalman Versión Dos (ARKV2) y Tres (ARKV3)

Una versión mejorada del algoritmo rápido de Kalman, se puede obtener, si el cálculo de los errores de predicción *a posteriori* se realiza por medio de las expresiones 3.48 y 3.49. Ésto implica una reducción en el número de operaciones por iteración, ya que algunos productos de vectores son reemplazados por productos entre escalares.

$$e_p^f[k] = e_p^f[k] \gamma_p[k-1] \quad (3.48)$$

$$e_p^b[k] = e_p^b[k] \gamma_p[k] \quad (3.49)$$

<sup>5</sup>Ver apéndice B, sección B.3.



donde la variable de similitud al orden  $p$  (ec. 3.50) es actualizada con la ayuda de 3.51 para el caso multivariable o bien con 3.52 para el escalar;

$$\gamma_p[k] = \gamma_{p+1}[k](I + e_p^{bT}[k]\mu[k])^{-1} \quad (3.50)$$

$$\gamma_{p+1}[k] = \gamma_p[k-1] - \varepsilon_p^{fT}[k]\alpha_p^{-f}[k]\varepsilon_p^f[k] \quad (3.51)$$

$$\gamma_{p+1}[k] = \lambda\gamma_p[k-1]\alpha_p^f[k-1]\alpha_p^{-f}[k] \quad (3.52)$$

Por último, si tomamos  $\varepsilon_p^b[k]$  de 3.45 y se sustituye  $\alpha_p^b[k]$  por su recursión, es decir por B.50, considerando 3.49 obtenemos:

$$e_p^b[k] = -\lambda\alpha_p^b[k-1]\mu[k]\gamma_{p+1}^{-1}[k] \quad (3.53)$$

El cuadro 3.8 muestra un resumen de ambos algoritmos (multivariable y escalar).

#### Algoritmo Rápido de Kalman Versión Cuatro (ARKV4)

Esta versión, propuesta por Carayannis en [6], se basa principalmente en la actualización de los coeficientes de predicción y filtrado con la ayuda de la ganancia dual de Kalman. Logrando de esta forma una reducción en el número de operaciones por iteración respecto del ARKV3. Para ésto, se utilizan las ganancias duales de Kalman al orden  $p+1$  (ecs. 3.54 y 3.55) demostradas en el apéndice B, sección B.3;

$$W_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} 0 \\ W_p[k-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ A_p[k-1] \end{bmatrix} \left[ \lambda^{-1}\alpha_p^{-f}[k-1]e_p^f[k] \right] \quad (3.54)$$

$$W_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} W_p[k-1] \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_p[k-1] \\ I \end{bmatrix} \left[ \lambda^{-1}\alpha_p^{-b}[k-1]e_p^b[k] \right] \quad (3.55)$$

particionando  $W_{p+1}[k]$  como;

$$W_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} D_p[k] \\ \delta[k] \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

y resolviendo 3.54 y 3.55 podemos llegar a las siguientes relaciones;

$$\delta[k] = -\lambda^{-1}\alpha_p^{-b}[k-1]e_p^b[k] \quad (3.57)$$

y

$$W_p[k] = D_p[k] - B_p[k-1]\delta[k] \quad (3.58)$$

Despejando  $e_p^b[k]$  de 3.57 tenemos:



$$e_p^b[k] = -\lambda \alpha_p^b[k-1] \delta[k] \quad (3.59)$$

La actualización de la *variable de similitud* se realiza por medio de su inversa  $\gamma_p^{-1}[k]$ , es decir, de B.67 se tiene:

$$\gamma_p^{-1}[k] = \gamma_{p+1}^{-1}[k] - \lambda^{-1} e_p^{bT}[k] \alpha_p^{-b}[k-1] e_p^b[k] \quad (3.60)$$

y con la ayuda de 3.57, 3.60 se convierte en;

$$\gamma_p^{-1}[k] = \gamma_{p+1}^{-1}[k] + e_p^{bT}[k] \delta[k] \quad (3.61)$$

donde

$$\gamma_{p+1}^{-1}[k] = \gamma_p^{-1}[k-1] + \lambda^{-1} e_p^{fT}[k] \alpha_p^{-f}[k-1] e_p^f[k] \quad (3.62)$$

Por último los errores de predicción forward y backward *a posteriori* son calculados con las mismas relaciones empleadas por el ARKV3 (ecs. 3.48 y 3.49), a las cuales se añade la de filtrado definida por 3.63;

$$e_p[k] = e_p[k] \gamma_p[k] \quad (3.63)$$

El cuadro 3.9 muestra la secuencia de relaciones que conforman el algoritmo rápido de Kalman versión cuatro.

#### Algoritmo Rápido de Kalman Versión Cinco (ARKV5) y Seis (ARKV6)

Otras dos versiones más del ARK pueden surgir, si se actualiza la *variable de similitud*  $\gamma_p[k]$  (ec. 3.64) por medio de la ecuación 3.51 para el caso multivariable, o bien con 3.52 para el escalar.

La relación 3.61 se expresa de manera equivalente como;

$$\gamma_p[k] = (I + \gamma_{p+1}[k] e_p^{bT}[k] \delta[k])^{-1} \gamma_{p+1}[k] \quad (3.64)$$

El cuadro 3.10 muestra la secuencia de relaciones que conforman ambos algoritmos (multivariable y escalar).

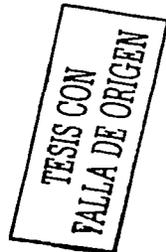
ARK [12]	
Para el instante $k - 1$ : $\alpha_p^f[k - 1] = \delta > 0$ $\mathbf{B}_p[k - 1] = \mathbf{H}_p[k - 1] = \mathbf{K}_p[k - 1] = \mathbf{Y}_p[k - 1] = \mathbf{A}_p[k - 1] = \mathbf{0}$	
Predicción	
$e_p^f[k] = y[k] + \mathbf{A}_p^T[k - 1]\mathbf{Y}_p[k - 1]$	B.22
$\mathbf{A}_p[k] = \mathbf{A}_p[k - 1] + \mathbf{K}_p[k - 1]e_p^{fT}[k]$	B.20
$\varepsilon_p^f[k] = y[k] + \mathbf{A}_p^T[k]\mathbf{Y}_p[k - 1]$	B.5
$\alpha_p^f[k] = \lambda\alpha_p^f[k - 1] + \varepsilon_p^f[k]e_p^{fT}[k]$	B.48
$\mathbf{K}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{K}_p[k - 1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ \mathbf{A}_p[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_p^{-f}[k]e_p^f[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p[k] \\ \mu[k] \end{bmatrix}$	3.42
$e_p^b[k] = y[k - p] + \mathbf{B}_p^T[k - 1]\mathbf{Y}_p[k]$	B.36
$\mathbf{K}_p[k] = [\mathbf{M}_p[k] - \mathbf{B}_p[k - 1]\mu[k]][I + e_p^{bT}[k]\mu[k]]^{-1}$	3.47
$\mathbf{B}_p[k] = \mathbf{B}_p[k - 1] + \mathbf{K}_p[k]e_p^{bT}[k]$	B.35
Filtrado	
$e_p[k] = d[k] + \mathbf{H}_p^T[k - 1]\mathbf{Y}_p[k]$	3.40
$\mathbf{H}_p[k] = \mathbf{H}_p[k - 1] + \mathbf{K}_p[k]e_p^T[k]$	3.38

Cuadro 3.7: Algoritmo Rápido de Kalman *a priori*



<b>ARKV2 (Multivariable) y ARKV3 (Escalar) [8]</b>	
Para el instante $k - 1$ :	
$\alpha_p^b[k - 1] = \delta > 0, \alpha_p^b[k - 1] = \lambda^{-p}, \gamma_p[k - 1] = 1$	
$\mathbf{B}_p[k - 1] = \mathbf{H}_p[k - 1] = \mathbf{K}_p[k - 1] = \mathbf{Y}_p[k - 1] = \mathbf{A}_p[k - 1] = \mathbf{0}$	
Predicción	
$e_p^f[k] = y[k] + \mathbf{A}_p^T[k - 1]\mathbf{Y}_p[k - 1]$	B.22
$\mathbf{A}_p[k] = \mathbf{A}_p[k - 1] + \mathbf{K}_p[k - 1]e_p^{fT}[k]$	B.20
$e_p^f[k] = e_p^f[k]\gamma_p[k - 1]$	3.48
$\alpha_p^f[k] = \lambda\alpha_p^f[k - 1] + e_p^f[k]e_p^{fT}[k]$	B.48
$\gamma_{p+1}[k] = \gamma_p[k - 1] - e_p^{fT}[k]\alpha_p^{-f}[k]e_p^f[k]$	3.51
(Versión escalar ARKV3 $\gamma_{p+1}[k] = \lambda\gamma_p[k - 1]\alpha_p^{-f}[k - 1]\alpha_p^{-f}[k]$ )	3.52
$\mathbf{K}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_p[k - 1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_p[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_p^{-f}[k]e_p^f[k] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_p[k] \\ \mu[k] \end{bmatrix}$	3.42
$e_p^b[k] = -\lambda\alpha_p^b[k - 1]\mu[k]\gamma_{p+1}^{-1}[k]$	3.53
$\gamma_p[k] = \gamma_{p+1}[k](\mathbf{I} + e_p^{bT}[k]\mu[k])^{-1}$	3.50
$e_p^b[k] = e_p^b[k]\gamma_p[k]$	3.49
$\alpha_p^b[k] = \lambda\alpha_p^b[k - 1] + e_p^b[k]e_p^{bT}[k]$	B.50
$\mathbf{K}_p[k] = [\mathbf{M}_p[k] - \mathbf{B}_p[k - 1]\mu[k]](\mathbf{I} + e_p^{bT}[k]\mu[k])^{-1}$	3.47
$\mathbf{B}_p[k] = \mathbf{B}_p[k - 1] + \mathbf{K}_p[k]e_p^{bT}[k]$	B.35
Filtrado	
$e_p[k] = d[k] + \mathbf{H}_p^T[k - 1]\mathbf{Y}_p[k]$	3.40
$\mathbf{H}_p[k] = \mathbf{H}_p[k - 1] + \mathbf{K}_p[k]e_p^T[k]$	3.38

Cuadro 3.8: Versión dos y tres del Algoritmo Rápido de Kalman *a priori*



**ARKV4 (Multivariable) [6]**

Inicialización para el instante  $k - 1$  :

$$\alpha_p^f[k-1] = \delta > 0, \alpha_p^b[k-1] = \lambda^{-p}\delta, \gamma_p[k-1] = 1$$

$$\mathbf{B}_p[k-1] = \mathbf{H}_p[k-1] = \mathbf{W}_p[k-1] = \mathbf{Y}_p[k-1] = \mathbf{A}_p[k-1] = 0$$

Predicción	Ecs.
$e_p^f[k] = y[k] + \mathbf{A}_p^T[k-1]\mathbf{Y}_p[k-1]$	B.22
$\varepsilon_p^f[k] = e_p^f[k]\gamma_p[k-1]$	3.48
$\gamma_{p+1}^{-1}[k] = \gamma_p^{-1}[k-1] + \lambda^{-1}e_p^{fT}[k]\alpha_p^{-f}[k-1]e_p^f[k]$	3.62
$\alpha_p^f[k] = \lambda\alpha_p^f[k-1] + \varepsilon_p^f[k]e_p^{fT}[k]$	B.48
$\mathbf{W}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W}_p[k-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_p[k-1] \end{bmatrix} [\lambda^{-1}\alpha_p^{-f}[k-1]e_p^f[k]] = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p[k] \\ \delta[k] \end{bmatrix}$	3.54
$\mathbf{A}_p[k] = \mathbf{A}_p[k-1] + \mathbf{W}_p[k-1]\varepsilon_p^{fT}[k]$	B.41
$e_p^b[k] = -\lambda\alpha_p^b[k-1]\delta[k]$	3.59
$\gamma_p^{-1}[k] = \gamma_{p+1}^{-1}[k] + e_p^{bT}[k]\delta[k]$	3.61
$\varepsilon_p^b[k] = e_p^b[k]\gamma_p[k]$	3.49
$\alpha_p^b[k] = \lambda\alpha_p^b[k-1] + \varepsilon_p^b[k]e_p^{bT}[k]$	B.50
$\mathbf{W}_p[k] = \mathbf{D}_p[k] - \mathbf{B}_p[k-1]\delta[k]$	3.58
$\mathbf{B}_p[k] = \mathbf{B}_p[k-1] + \mathbf{W}_p[k]\varepsilon_p^{bT}[k]$	B.43
Filtrado	Ecs.
$e_p[k] = d[k] + \mathbf{H}_p^T[k-1]\mathbf{Y}_p[k]$	3.40
$\varepsilon_p[k] = e_p[k]\gamma_p[k]$	3.63
$\mathbf{H}_p[k] = \mathbf{H}_p[k-1] + \mathbf{W}_p[k]\varepsilon_p^T[k]$	B.45

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Cuadro 3.9: Versión cuatro del Algoritmo Rápido de Kalman *a posteriori*

ARKV5 (Multivariable) y ARKV6 (Escalar) [9]	
Para el instante $k - 1$ :	
$\alpha_p^f[k - 1] = \delta > 0, \alpha_p^b[k - 1] = \lambda^{-p}\delta, \gamma_p[k - 1] = 1$	
$\mathbf{B}_p[k - 1] = \mathbf{H}_p[k - 1] = \mathbf{W}_p[k - 1] = \mathbf{Y}_p[k - 1] = \mathbf{A}_p[k - 1] = 0$	
Predicción	Ecs.
$e_p^f[k] = y[k] + \mathbf{A}_p^T[k - 1]\mathbf{Y}_p[k - 1]$	B.22
$\varepsilon_p^f[k] = e_p^f[k]\gamma_p[k - 1]$	3.48
$\alpha_p^f[k] = \lambda\alpha_p^f[k - 1] + \varepsilon_p^f[k]e_p^{fT}[k]$	B.48
$\gamma_{p+1}[k] = \gamma_p[k - 1] - \varepsilon_p^{fT}[k]\alpha_p^{-f}[k]e_p^f[k]$	3.51
( Versión escalar ARKV6 $\gamma_{p+1}[k] = \lambda\gamma_p[k - 1]\alpha_p^f[k - 1]\alpha_p^{-f}[k]$ )	3.52
$\mathbf{W}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{W}_p[k - 1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A}_p[k - 1] \end{bmatrix} [\lambda^{-1}\alpha_p^{-f}[k - 1]e_p^f[k]] = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_p[k] \\ \delta[k] \end{bmatrix}$	3.54
$\mathbf{A}_p[k] = \mathbf{A}_p[k - 1] + \mathbf{W}_p[k - 1]e_p^{fT}[k]$	B.41
$e_p^b[k] = -\lambda\alpha_p^b[k - 1]\delta[k]$	3.59
$\gamma_p[k] = (\mathbf{I} + \gamma_{p+1}[k]e_p^{bT}[k]\delta[k])^{-1}\gamma_{p+1}[k]$	3.64
$e_p^b[k] = e_p^b[k]\gamma_p[k]$	3.49
$\alpha_p^b[k] = \lambda\alpha_p^b[k - 1] + e_p^b[k]e_p^{bT}[k]$	B.50
$\mathbf{W}_p[k] = \mathbf{D}_p[k] - \mathbf{B}_p[k - 1]\delta[k]$	3.58
$\mathbf{B}_p[k] = \mathbf{B}_p[k - 1] + \mathbf{W}_p[k]e_p^{bT}[k]$	B.43
Filtrado	Ecs.
$e_p[k] = d[k] + \mathbf{H}_p^T[k - 1]\mathbf{Y}_p[k]$	3.40
$\varepsilon_p[k] = e_p[k]\gamma_p[k]$	3.63
$\mathbf{H}_p[k] = \mathbf{H}_p[k - 1] + \mathbf{W}_p[k]e_p^T[k]$	B.45

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Cuadro 3.10: Versión cinco y seis del Algoritmo Rápido de Kalman *a posteriori*

### 3.3. Conclusiones

En este capítulo se presentaron varios algoritmos del filtrado adaptable, con el fin de resolver el problema de la igualación de canal, basados en el procesamiento de señales *prewindowed* y empleando dos criterios de optimización diferentes. El primero de ellos, el *criterio del error cuadrático promedio (MSE)*, nos condujo a una familia de algoritmos relativamente simples de implementar y con un número de operaciones por iteración reducido, en comparación con aquellos algoritmos obtenidos por medio de la minimización del *criterio de los mínimos cuadrados (MC)*, ver cuadro 3.11. Por otra parte, mientras que los algoritmos basados en la minimización del **MSE** dependen de las características estadísticas de sus entradas, las cuales deben ser procesos estocásticos estacionarios, los algoritmos de los mínimos cuadrados no hacen ninguna suposición sobre tales entradas.

No obstante que el trabajo realizado en este capítulo, para la obtención de las diferentes ecuaciones involucradas en los algoritmos de los mínimos cuadrados, es puramente algebraico, existe una estrategia geométrica, la cual puede ser consultada en [9].

En el capítulo subsecuente se presentan las simulaciones de los algoritmos aquí introducidos, señalando las ventajas de uno respecto del otro, dentro de una misma familia para, posteriormente, hacer una comparación entre los "mejores" algoritmos que constituyen dichas familias.

Algoritmos Recursivos operaciones/iteración		
Algoritmo	Filtrado	
	*	÷
LMSF	$3p$	0
LMSG	$2p$	0
LMS	$2p$	0
LMSSE	$p$	0
LMSSD	$p$	0
LMSSS	$p$	0
ARK	$10p$	2
ARKV2	$8p$	2
ARKV3	$8p$	2
ARKV4	$7p$	2
ARKV5	$7p$	2
ARKV6	$7p$	2

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Cuadro 3.11: Complejidad computacional en los algoritmos **LMS** y **ARK**.

## **CAPÍTULO 4**

### **PRUEBAS Y VALIDACIÓN DE LOS IGUALADORES**

## Capítulo 4

# Pruebas y Validación de los Igualadores



En este capítulo se presentan las pruebas realizadas a los igualadores de canal tratados en el capítulo 2, sección 2.2, empleando para dicha tarea, los algoritmos estudiados en el capítulo 3. De esta manera, los algoritmos basados en el criterio del error cuadrático promedio y de los mínimos cuadrados, además del algoritmo zero-forcing, serán probados a lo largo de este capítulo bajo las principales configuraciones de los igualadores de canal. Cabe señalar que debido a la gran diversidad en cuanto a posibles combinaciones, entre las diferentes configuraciones para los igualadores y los algoritmos previamente mencionados, solamente se simularán los más representativos, con el fin de mantener dentro de un límite razonable este trabajo.

### 4.1. Descripción de las Simulaciones

Con el fin de validar los algoritmos utilizados para la igualación de canal, se utilizó un sistema de comunicación digital PAM de dos niveles (binario). La secuencia binaria equiprobable utilizada (-1 y 1) se generó a partir de la función "randint" de MATLAB, y después se alargó el ancho de cada bit. La secuencia resultante sirvió entonces como entrada a los diversos canales, así como de secuencia de entrenamiento en el receptor. Los canales utilizados se escogieron debido a sus características de fase, de tal forma que se pudiera apreciar la robustez de los algoritmos ante variaciones de ésta.

Es importante señalar que dentro de los criterios de comparación se utilizaron, principalmente, las gráficas de la energía del error en dBs ( $E_{error}[dB] = 20 \log(d[k] - \hat{d}[k])$ ) de cada algoritmo, promediando 100 realizaciones para mejorar la presentación de las mismas debido al comportamiento del error (en el caso de no realizar este promedio, se indicará en la gráfica correspondiente), así como la respuesta en frecuencia del canal contra la respuesta en frecuencia de los coeficientes obtenidos con el algoritmo igualador. En el caso en el cual la respuesta en frecuencia de los diferentes

igualadores sea la misma, o las diferencias no sean perceptibles, sólo se hará mención de ésto para evitar redundancia.

La organización de este capítulo es la siguiente; en la sección 4.2 se enlistarán los canales utilizados para las pruebas de los algoritmos indicando las referencias de las cuales fueron obtenidos. Posteriormente en las secciones 4.3, 4.4 y 4.5 se presentarán los resultados de las pruebas realizadas a los igualadores de acuerdo a su configuración, sea lineal, fraccionalmente espaciada y con decisión retroalimentada, respectivamente. Para los casos en los que existan diversas variantes sobre algún algoritmo, se compararán estas variantes entre sí. Dentro de cada comparación se mencionarán los desempeños de los diversos igualadores ante factores tales como ruido, orden, parámetros inherentes a cada igualador, etc. Finalmente, en la sección 4.6, se realizará la comparación entre las diversas familias de algoritmos, señalando sus desempeños y las principales ventajas y desventajas que ofrece cada una bajo alguna configuración específica.

## 4.2. Canales Empleados

Para validar el funcionamiento y comportamiento de los algoritmos antes descritos se escogieron diversos canales, los cuáles pueden agruparse como:<sup>1</sup>

- *Canales de fase mínima*
- *Canales de fase no mínima*
- *Canales de fase máxima*

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Estos canales están definidos por su función de transferencia mostrada en el cuadro 4.1 y sus respuestas en frecuencia pueden verse en las figuras 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4. Tales canales fueron utilizados para la gran mayoría de los algoritmos programados, sin embargo, sólo se presentarán los resultados más significativos que se hayan obtenido. Cabe señalar que para los canales de fase no mínima y de fase máxima existe una dificultad al obtener el filtro igualador, ya que debido a sus características, estos canales no son invertibles, razón por la cuál sólo es posible aproximar su respuesta inversa mediante un filtro de respuesta impulsorial finita de orden grande.

---

<sup>1</sup>Ver apéndice C

Canales de Fase Mínima	
Función de Transferencia	Referencia
$H_{C1} = 1 + 0,2z^{-1} - 0,6z^{-2}$	[16]
$H_{C2} = 1 + 0,51z^{-1} + 0,1997z^{-2}$	[16]
$H_{C3} = 1 + 0,536z^{-1} + 0,0718z^{-2}$	[16]
$H_{C4} = 1 - 1,6z^{-1} + 0,95z^{-2}$	[14]
$H_{C5} = 1 - 1,9z^{-1} + 0,95z^{-2}$	[14]
Canales de Fase No Mínima	
Función de Transferencia	Referencia
$H_{C6} = 0,407 + 0,815z^{-1} + 0,407z^{-2}$	[26]
$H_{C7} = 0,04 - 0,05z^{-1} + 0,07z^{-2} - 0,21z^{-3} - 0,5z^{-4} + 0,72z^{-5} + 0,36z^{-6} + 0,21z^{-8} + 0,03z^{-9} + 0,07z^{-10}$	[26]
Canales de Fase Máxima	
Función de Transferencia	Referencia
$H_{C8} = 1 + 7,462z^{-1} + 13,9204z^{-2}$	[16]
$H_{C9} = 1 - 0,333z^{-1} - 1,6662z^{-2}$	[16]
$H_{C10} = 1 + 2,55z^{-1} + 5,0002z^{-2}$	[16]

Cuadro 4.1: Canales empleados en las simulaciones.

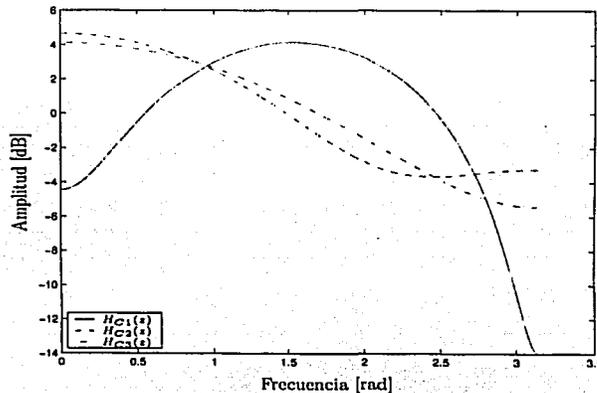


Figura 4.1: Canales  $H_{C1}(z)$ ,  $H_{C2}(z)$  y  $H_{C3}(z)$  de fase mínima

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

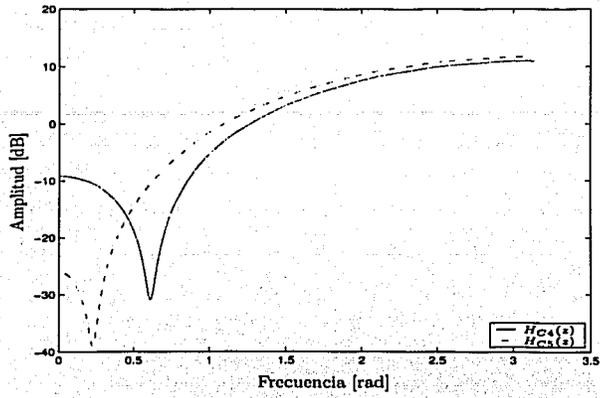


Figura 4.2: Canales  $H_{C4}(z)$  y  $H_{C5}(z)$  de fase mínima.

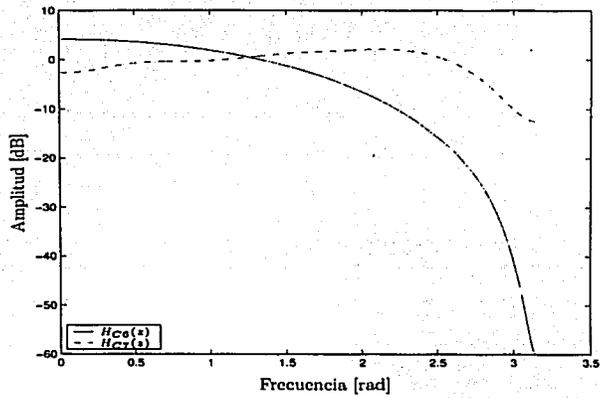


Figura 4.3: Canales  $H_{C6}(z)$  y  $H_{C7}(z)$  de fase no mínima.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

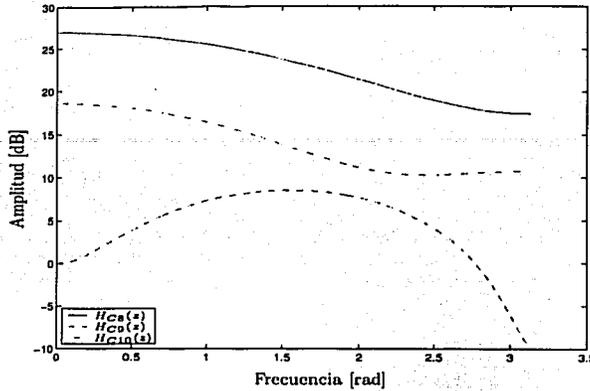


Figura 4.4: Canales  $H_{C8}(z)$ ,  $H_{C9}(z)$  y  $H_{C10}(z)$  de fase máxima.

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

### 4.3. Igualadores Lineales

Para los igualadores lineales se realizó un muestreo a la tasa de símbolos a la salida del canal, lo cuál trajo como consecuencia que el comportamiento de éstos fuera inferior sobre todo en las altas frecuencias. Por esta razón sólo se presentarán las respuestas en frecuencia de los igualadores más representativos de cada familia, utilizando los canales con los cuales presentaron un mejor desempeño, sin entrar en detalle en su comportamiento, con excepción del igualador "zero-forcing," para el cual sí se presentan las gráficas de su error. Para los igualadores fraccionalmente espaciados "FSE" se hará un análisis más detallado de las diversas variantes que existen de cada algoritmo.

#### 4.3.1. Algoritmo Zero-Forcing

Este algoritmo presentó un desempeño inferior a los demás, debido principalmente a las limitaciones que implica su utilización, ya que requiere un canal que produzca poco ISI, ruido muy bajo y que la transmisión sea a bajas velocidades [29].

Debido a esto, para dicho algoritmo únicamente se realizaron pruebas con respecto al orden, viéndose en la figura 4.5 que conforme éste aumenta, la respuesta en frecuencia del algoritmo presenta oscilaciones. Por medio de la figura 4.6 se puede observar que el error al cual converge el algoritmo ZF es inferior comparado con aquel al que convergen los demás algoritmos, siendo además su tiempo de conver-

gencia muy parecido al del algoritmo LMS.

Cabe señalar que este algoritmo fué simulado únicamente debido a su simplicidad y popularidad alcanzada a principios de los años 60. Con el surgimiento de los algoritmos basados en el criterio del error cuadrático promedio y de los mínimos cuadrados, cuyas características principales son la robustez numérica, el algoritmo ZF cayó en desuso. Con base en lo antes mencionado, sólo se presenta este algoritmo de una forma breve e ilustrativa y no se comparará con los demás algoritmos.

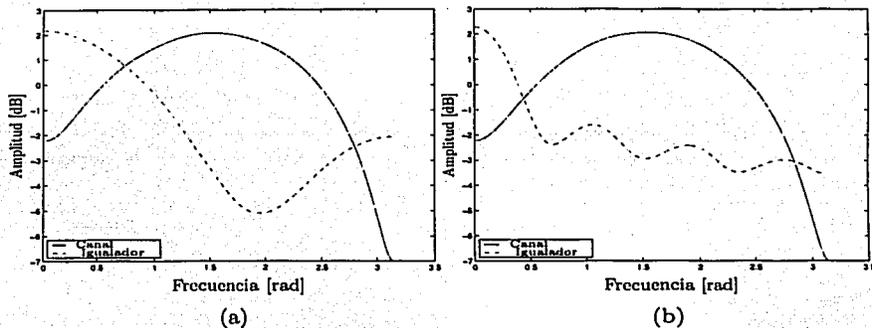


Figura 4.5: Respuesta en frecuencia del algoritmo "zero-forcing" con  $\mu = 0,00042$  y: (a) orden  $p = 5$  (b) orden  $p = 15$ .

En la figura 4.6 es posible ver el comportamiento del error cuando no se realizan promedios de las diversas realizaciones. En este caso las oscilaciones observadas en el error también aumentan conforme el orden crece.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

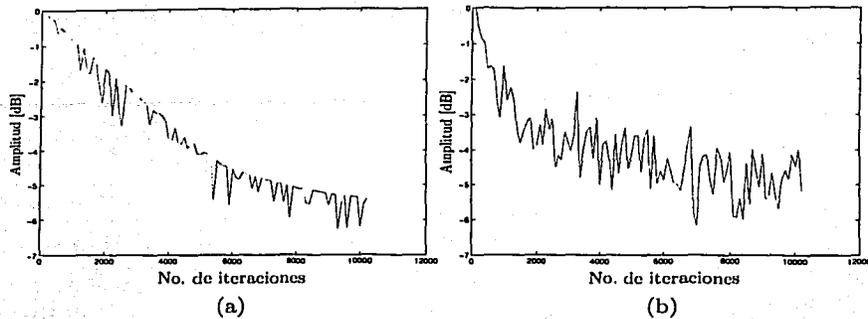


Figura 4.6: Error del algoritmo "zero-forcing" (realización simple) con  $\mu = 0,00042$  y: (a) orden  $p = 5$  (b) orden  $p = 15$ .

### 4.3.2. Algoritmo LMS

Para el algoritmo LMS, cuando se muestreaba a la tasa de símbolos, se obtenía una respuesta en frecuencia aceptable solo para ciertos *canales de fase mínima*. En la figura 4.7.a es posible ver que para el canal  $H_{C3}(z)$ , se logró una igualación bastante buena. Esto se debe, principalmente, a que el canal no presenta variaciones muy bruscas en su respuesta en frecuencia. Sin embargo, cuando se utilizaron canales con cambios bruscos en las frecuencias cercanas a  $\pi$ , se observó que este algoritmo no seguía completamente el comportamiento del canal. A pesar de lo anterior, el error al cuál convergía el algoritmo LMS era bastante bueno, razón por la cual se puede decir que viendo únicamente la gráfica del error no es posible determinar si el comportamiento del algoritmo es aceptable o no.

En la figura 4.7.b se muestra la realización simple del error, en la cual se puede apreciar que la convergencia de éste es más rápida que en el caso del algoritmo zero-forcing, y el valor al cual se llega es mucho menor que para dicho algoritmo, ver figuras 4.6.b y 4.7.b.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

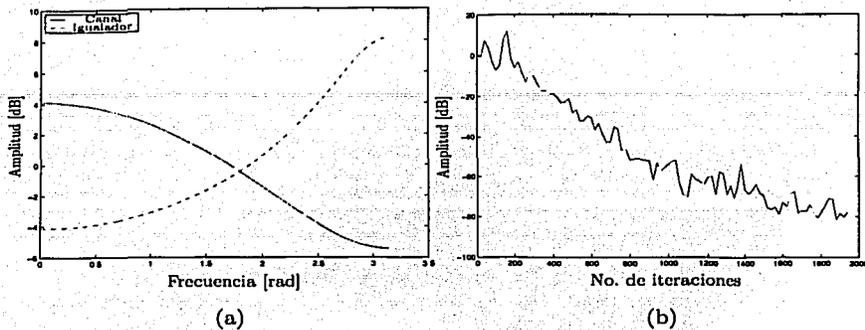


Figura 4.7: Algoritmo LMS con  $\Delta = 0,051$  y orden  $p = 15$ : (a) respuesta en frecuencia (b) error de una realización.

### 4.3.3. Algoritmo ARK

Al igual que en el caso del algoritmo LMS, el ARK presentó un comportamiento aceptable solo en los canales que como el canal  $H_{C3}(z)$  no presentaban un cambio brusco en las frecuencias cercanas a  $\pi$ . Sin embargo, es posible ver, si comparamos el error de este algoritmo con el del LMS, que su convergencia es mucho más rápida, aunque en el caso del LMS, el error al cual se converge es menor. Esto se ve en las figuras 4.7.b y 4.8.b, en las cuales es posible ver que cuando el algoritmo LMS converge, llega a un valor de -80 dB, pero para llegar a este valor requiere 2000 iteraciones, mientras que el ARK converge a un valor alrededor de los -65 dB, aunque lo hace en menos de 100 iteraciones.

En esta familia de igualadores, también conocidos como espaciados intersimbólicamente o a la tasa de símbolos, se maneja una tasa de datos igual a la tasa de símbolos, de ahí su nombre, lo cual puede resultar ventajoso cuando en el receptor no se tiene gran capacidad de procesamiento.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

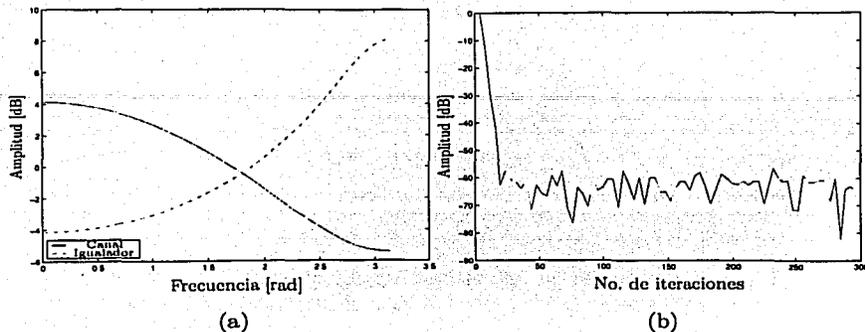


Figura 4.8: Igualador rápido de Kalman ARK con  $\delta = 0,01$ ,  $\lambda = 1$  y orden  $p = 10$ : (a) respuesta en frecuencia (b) error de una realización.

## 4.4. Igualadores Fraccionalmente Espaciados

Como ya se ha dicho, el desempeño de los igualadores fraccionalmente espaciados es mejor al de los igualadores separados a la tasa de símbolos [29] (en el capítulo 3 se habla de esta diferencia en el desempeño). Debido a esto, se analizarán los algoritmos previamente vistos, exceptuando el algoritmo zero-forcing y se describirá su comportamiento y principales características. Cabe señalar que la cantidad de información que manejan estos igualadores es superior a la tasa de símbolos, lo cual hace que presenten un mejor desempeño al costo de una mayor cantidad de procesamiento.

### 4.4.1. Algoritmo LMS

Para este algoritmo existen diversas variantes, las cuales presentan ciertas ventajas de acuerdo a las modificaciones que hacen con respecto al algoritmo original. A continuación se presentarán las principales características del algoritmo clásico LMS, las cuales se aplican a todas sus variantes, y después se realizará una comparación entre dichas variantes y el algoritmo clásico.

#### LMS

En la figura 4.9 es posible observar el comportamiento del algoritmo LMS ante variaciones del paso  $\Delta$ . Como ya se había mencionado, entre más pequeño es el

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

paso, menor es el error de convergencia, pero se requieren de más iteraciones para converger, y si se tiene un paso mas grande (dentro del rango antes descrito), la convergencia será más rápida, sin embargo el error al cual se llegará será mayor que cuando se tiene el paso pequeño. Cabe señalar que este algoritmo presenta una gran simplicidad operacional, además de aproximarse a los coeficientes óptimos del igualador con un error muy bajo, razón por la cual fué ampliamente utilizado, sin embargo presenta la principal desventaja de tener una convergencia muy lenta. Otra característica que se observó de este algoritmo radica en su comportamiento ante variaciones en el orden del mismo (Ver figuras 4.10 y 4.11), ya que de acuerdo a éste, la velocidad de convergencia varía, al igual que el error al cual se converge, y la respuesta en frecuencia es mejor entre mayor sea el orden. Esto se debe principalmente a que se está utilizando un igualador con respuesta impulsional finita (FIR) para aproximar canales que no necesariamente son de fase mínima, y como ya se dijo, no son invertibles, es por esto que conforme aumenta el orden del filtro igualador será mejor su comportamiento, sin embargo se tendrá una convergencia más lenta y se requerirá de un mayor número de operaciones algebraicas a realizar.

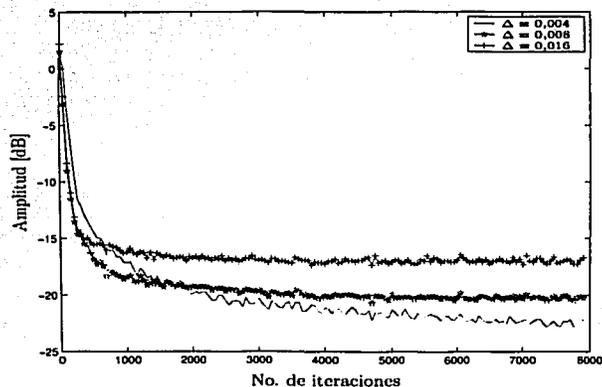


Figura 4.9: Comportamiento del error del algoritmo LMS con variaciones del paso  $\Delta$ .

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

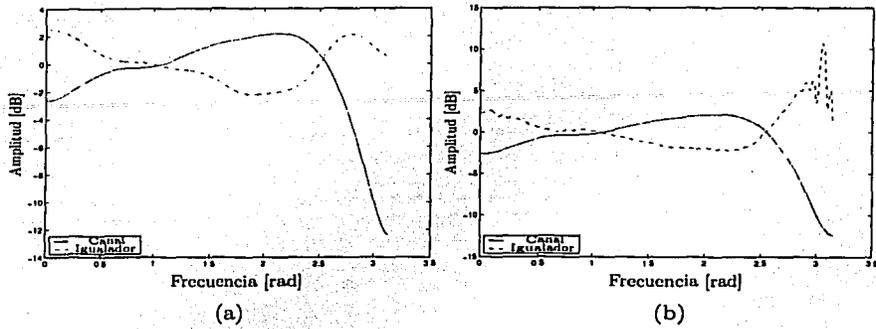


Figura 4.10: Respuesta en frecuencia del igualador LMS con  $\Delta = 0,15$  y: (a) orden  $p = 15$  (b) orden  $p = 120$ .

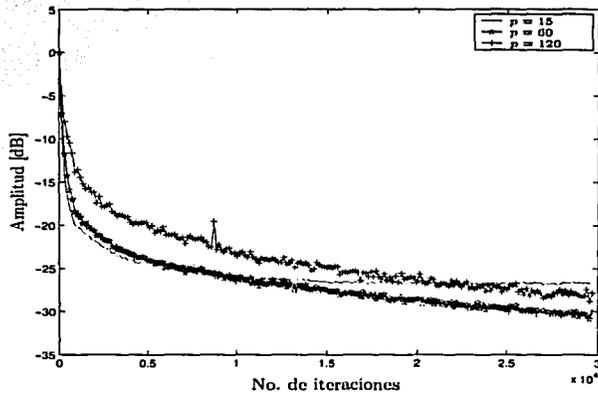


Figura 4.11: Comportamiento del error del algoritmo LMS ante variaciones del orden  $p$ .

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Cabe señalar que al aumentar el orden, el paso debe de hacerse más pequeño, ya que si se conserva el mismo valor de  $\Delta$ , el algoritmo tiende a diverger cuando se está en el límite superior del paso. El comportamiento de los demás algoritmos LMS con respecto a los parámetros antes mencionados es el mismo.

### LMS con Promedio en el Gradiente

Para este algoritmo se utilizó el paso  $\Delta$  del algoritmo clásico, multiplicado por un factor  $M$  que por lo general estaba en un rango de 10 a 20. De esta forma, el comportamiento de los dos algoritmos era muy similar en ausencia de ruido aditivo. Sin embargo, si se agregaba ruido a la salida del canal, se observaba un desempeño mejor en este algoritmo con respecto al algoritmo tradicional (Ver figura 4.12). Es importante señalar que la mejora del desempeño de este algoritmo se debe a que al realizar un promedio sobre cierto número de iteraciones, se logra obtener un estimado del gradiente menos ruidoso que cuando se utiliza directamente el gradiente en cada iteración.

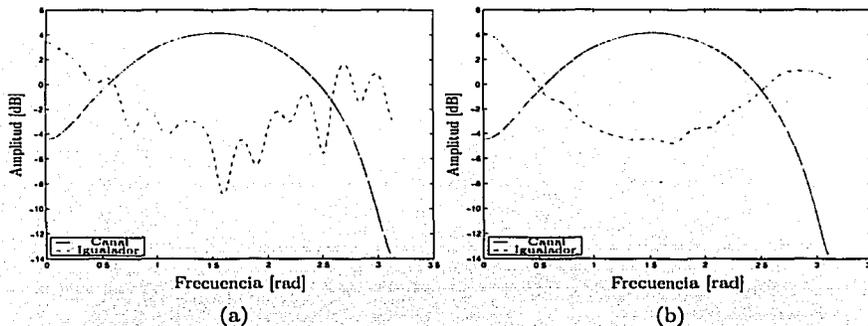


Figura 4.12: Respuesta en frecuencia con orden  $p = 15$  y ruido con varianza de 0.0626 del: (a) algoritmo clásico con  $\Delta = 0,025$  (b) algoritmo con promedio en el gradiente con  $\Delta = 0,25$ , y  $N = 400$

### LMS con Factor de Fuga

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, la importancia de este algoritmo radica en el hecho de mejorar el comportamiento del mismo ante sistemas que tienen asociadas una matriz con valores característicos iguales a cero. En este caso, los canales

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

utilizados para las simulaciones tienen una matriz no singular asociada, razón por la cual no es posible ver una diferencia notable entre el algoritmo clásico y éste. Cabe señalar que si el valor del factor de fuga  $\gamma$  es muy pequeño, el comportamiento de este algoritmo es casi idéntico al del algoritmo LMS tradicional.

### LMS Signum

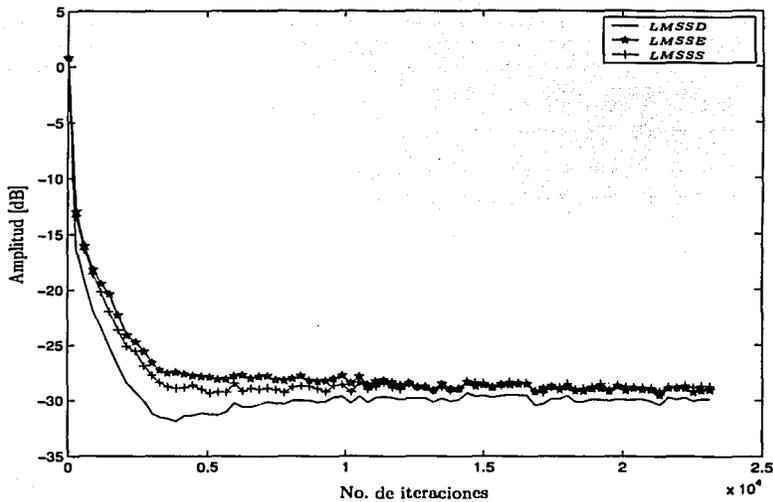
Éstos surgieron debido a la necesidad de tener algoritmos más rápidos para la igualación de canal. Para lograr ésto, lo que se propone es realizar un análisis del signo del error y/o de los datos, de tal forma que se disminuya el número de operaciones por iteración. Sin embargo, estos algoritmos son menos robustos que el algoritmo tradicional, y esto se pudo observar al tratar de igualar canales de fase no mínima y de fase máxima, los cuales presentaban un comportamiento divergente, mientras que el algoritmo LMS tradicional convergía a una solución.

Para garantizar la convergencia de los algoritmos que utilizan la información contenida en el signo del error, fué necesario utilizar un paso mucho más pequeño. Ésto se debe a que el error tiende a ser muy pequeño cuando el algoritmo converge, sin embargo como estos algoritmos sólo emplean la información del signo y no de la magnitud, es necesario compensar este efecto disminuyendo el tamaño del paso. El utilizar únicamente el signo del error, provoca también que la convergencia sea homogénea durante el funcionamiento del algoritmo, lo cual no pasa con los algoritmos que si toman en cuenta la magnitud del error, ya que en éstos el error al principio es semejante a la unidad, lo cuál provoca que la función de adaptación tenga un valor mayor que en el caso cuando el algoritmo ha convergido, en donde el valor del error es el mínimo posible. Por lo tanto los algoritmos que si emplean la magnitud del error presentan una convergencia más rápida.

De la figura 4.13 es posible ver que los algoritmos LMSSE y LMSSS convergen a un error muy parecido, aunque el algoritmo LMSSS convergió más rápido. Ésto se debe principalmente a que el algoritmo LMSSS, al considerar tanto el signo del error como el de los datos, no es afectado por la amplitud de éstos lo cuál es equivalente a tener un paso mayor, considerando que los datos están atenuados (recordando que los datos estaban acotados a 1 y -1 antes de pasar por el canal). De estos algoritmos el que tiene un mejor desempeño en cuanto a convergencia se refiere, es el LMSSD, razón por la cuál se utilizó tal algoritmo para compararlo con el algoritmo clásico.

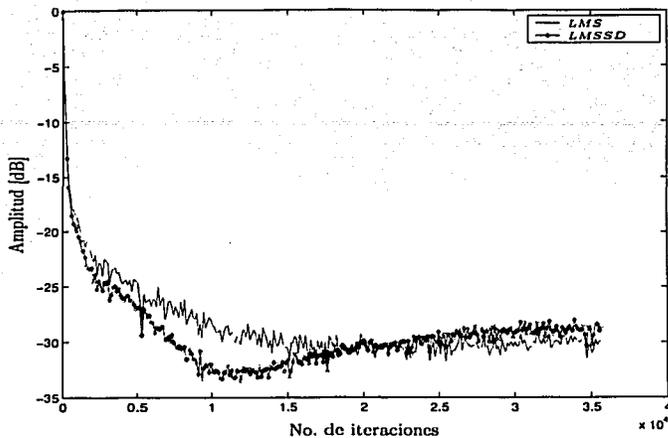
En la comparación del algoritmo clásico con el algoritmo LMSSD se presentó un comportamiento inicial mucho más rápido, en cuanto a la disminución del error se refiere, para éste último, sin embargo, después de llegar a un cierto valor el error presentaba un "rebote" y convergía a un error más grande, sin diverger (ver gráfica 4.14). Esto se debe, principalmente, a las características del canal, ya que para los canales que atenuaban a la señal transmitida al solo tomar el signo y no el valor de

los datos se tenía una función de actualización con un valor más grande, razón por la cuál el algoritmo convergía más rápido y el error final al que se llegaba era mayor. Cabe señalar que para algunos canales el algoritmo LMSSD divergía mientras que el algoritmo LMS lograba igualar el canal.



TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Figura 4.13: Error de los tres algoritmos signum con orden  $p = 15$ , y  $\Delta = 0,12$  para el algoritmo LMSSD y  $\Delta = 0,002$  para los algoritmos LMSSE y LMSSS.



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura 4.14: Error del algoritmo LMSSD contra el error del algoritmo LMS.

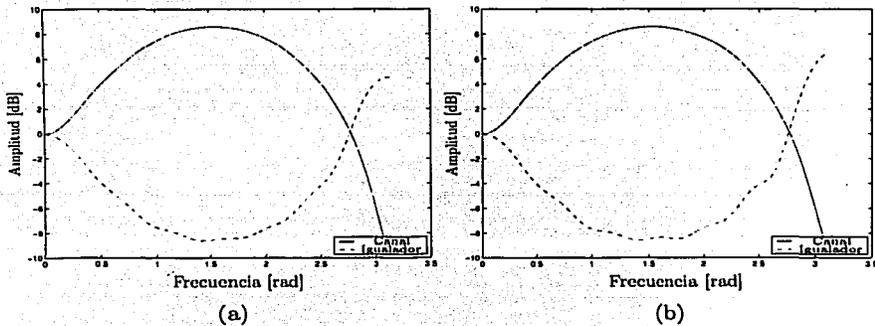


Figura 4.15: Respuesta en frecuencia con orden  $p = 15$  y  $\Delta = 0,045$  de: (a) algoritmo LMS (b) algoritmo LMSSD

Es importante señalar que para los algoritmos LMS se obtuvo una respuesta en frecuencia muy buena y un error de convergencia muy bajo, aunque presentaron el inconveniente de llegar a este error después de una gran cantidad de iteraciones.

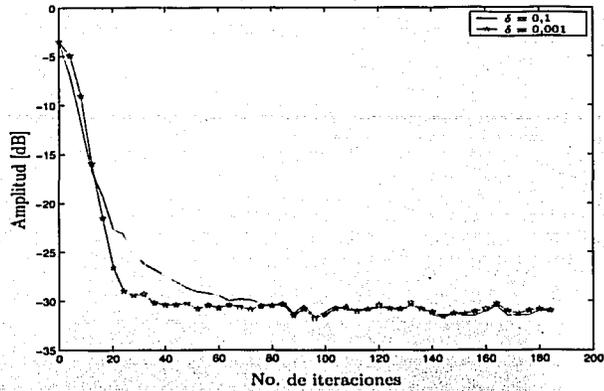
#### 4.4.2. Algoritmo ARK

Estos algoritmos presentaron un excelente desempeño, ya que su velocidad de convergencia es muy rápida en comparación con los de tipo gradiente. Cabe señalar que todas las versiones del algoritmo rápido de Kalman (ARK) se comportaron de la misma forma en todos los casos, con excepción de la versión introducida por Carayannis en [6], de la cual se presentan resultados comparativos con respecto al ARK más adelante. El comportamiento de esta familia de algoritmos puede apreciarse en las siguientes figuras, en las cuales se ve como es su desempeño ante variaciones de los diversos parámetros con los que cuenta. Hay que señalar que el comportamiento de este algoritmo fué muy parecido para casi todos los canales, razón por la cuál no se reportan las gráficas de la respuesta en frecuencia excepto cuando se requiera para enfatizar alguna característica específica de alguno de estos algoritmos.

En la figura 4.16 es posible ver el comportamiento del algoritmo rápido de Kalman ante variaciones de  $\delta$  (inicialización). En dicha figura se observa que dependiendo del parámetro de inicialización es posible lograr una convergencia más rápida cuando éste es más pequeño. Sin embargo, este parámetro sólo afecta el tiempo de convergencia y no el valor del error al cual converge el algoritmo.

Cuando se varia el orden del algoritmo (ver figura 4.17), éste tarda más tiempo en converger, sin embargo llega a un error menor. Ésto se debe principalmente a que se está aproximando un sistema todo polos mediante un sistema todo ceros, lo cual hace que para tener la respuesta en frecuencia deseada se requiera teóricamente de un filtro de orden infinito o bien aproximarse con un filtro de orden muy grande. Sin embargo, como el tamaño del filtro se traduce en complejidad computacional, es necesario tener un compromiso entre dicho tamaño y la respuesta obtenida.

Otra prueba realizada a este algoritmo fué la de variar el factor de olvido  $\lambda$ , pudiéndose observar ésto en la figura 4.18. En dicha figura se observa que al hacer  $\lambda < 1$  se logra una convergencia más rápida. Sin embargo, también es posible observar, con un mayor número de iteraciones, que si se deja correr el algoritmo con esta  $\lambda$ , después de cierto tiempo el algoritmo suele diverger. Considerando que el factor de olvido (cuando su valor es menor a uno) sirve para seguir pequeñas variaciones en los coeficientes del filtro igualador, en entornos no estacionarios, debe haber un compromiso entre la velocidad de convergencia y estabilidad del algoritmo.



TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Figura 4.16: Comportamiento del error del algoritmo ARK con variaciones de  $\delta$ .

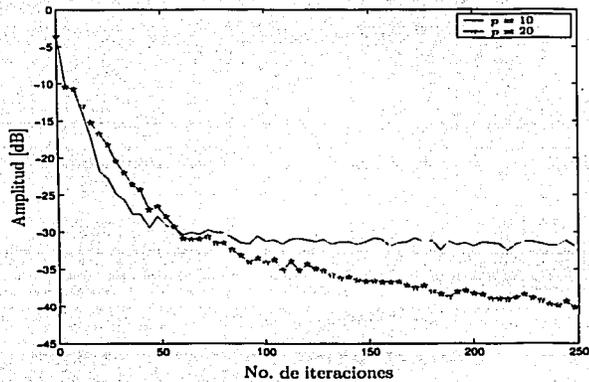
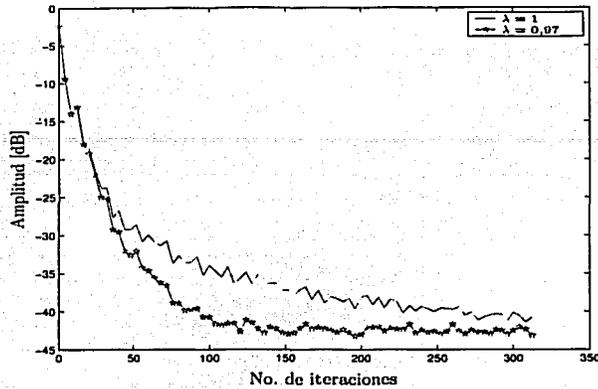


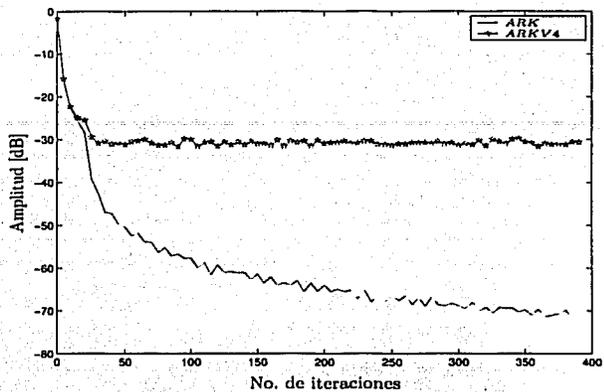
Figura 4.17: Comportamiento del error del algoritmo ARK ante variaciones del orden con  $\lambda = 1$  y  $\delta = 0,1$



TRAZO CON  
 ... DE ORIGEN

Figura 4.18: Comportamiento del error del algoritmo ARK con variaciones de  $\lambda$ , orden  $p = 15$  y  $\delta = 0,1$ .

En las figuras 4.19 y 4.20 es posible ver el comportamiento del algoritmo propuesto por Carayannis (ARKV4) respecto al algoritmo rápido de Kalman (ARK). Este algoritmo presenta un comportamiento diferente respecto de las versiones restantes del algoritmo rápido de Kalman incluyendo a éste último, aún cuando los parámetros de inicialización son los mismos. Para compensar este comportamiento del ARKV4, se necesita aumentar el orden del filtro además de tener una  $\lambda < 1$  específica y diferente a las demás. El desempeño inferior observado en este algoritmo se debe principalmente a la utilización de un gran número de ecuaciones en comparación con las demás versiones, de esta forma al presentarse errores de truncamiento se afecta un mayor número de variables. Por otra parte, la actualización de la variable  $\gamma_p[k]$  se realiza por medio de su inversa al orden superior, lo cual no es conveniente debido a la alta dependencia en el desempeño del algoritmo respecto de una variable tan sensible como ésta.



TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Figura 4.19: Comportamiento del error del algoritmo ARK y ARKV4, orden  $p = 15$ ,  $\delta = 0,1$  y  $\lambda = 1$ .

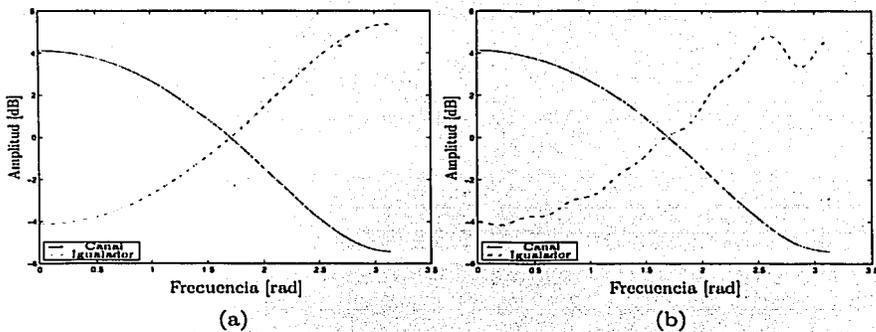


Figura 4.20: Respuesta en frecuencia con orden  $p = 15$  y  $\delta = 0,01$  (a) ARK (b) ARKV4

## 4.5. Igualadores de Decisión Retroalimentada

### DFE basado en algoritmos LMS

Este tipo de igualadores presenta una complejidad computacional y estructural mayor que los igualadores fraccionalmente espaciados. Debido a esto, por lo general se implementan utilizando algoritmos LMS. Este tipo de igualador presenta la dificultad de calibrarlo, ya que se tienen más parámetros que influyen directamente en el desempeño del mismo, sin embargo, su error y su respuesta en frecuencia son muy buenos en situaciones en las que se presenta una gran distorsión en amplitud de la señal recibida.

Para estos igualadores se observó que la estabilidad del mismo dependía del algoritmo de retroalimentación. Para evitar un comportamiento divergente fué necesario emplear un paso para el algoritmo de retroalimentación mucho menor al empleado en el algoritmo forward.

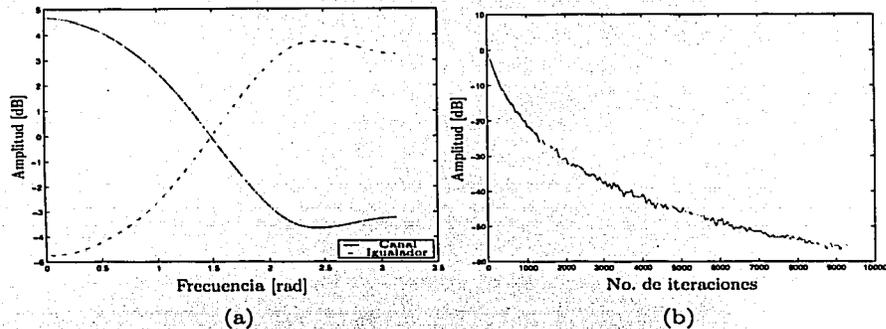


Figura 4.21: (a) Respuesta en frecuencia con orden  $p = 15$ ,  $\Delta_{forward} = 0,045$  y  $\Delta_{feedback} = 0,0002$  del algoritmo DFE (b) error del algoritmo DFE.

Hay que hacer notar que la velocidad de convergencia de éste igualador respecto del fraccionalmente espaciado LMS es muy parecida, ya que el DFE emplea el mismo algoritmo, ver figura 4.21.

TESIS CON  
FOLIA DE ORIGEN

## 4.6. Comparación entre los Diferentes Igualadores de Canal

En esta sección se presentarán los resultados obtenidos de comparar las diversas configuraciones entre sí, utilizando los algoritmos más representativos de cada familia para su implantación (exceptuando el zero-forcing).

En la figura 4.22 se tiene la respuesta en frecuencia del algoritmo rápido de Kalman en las configuraciones espaciado a la tasa de símbolos y fraccionalmente espaciados. En ésta es posible apreciar que, para el canal empleado, los igualadores simbólicamente espaciados no pueden seguir a este canal por las variaciones que presenta, mientras que el fraccionalmente espaciados no tiene problemas para hacerlo. También es importante destacar que el error de convergencia es menor para el igualador separado a la tasa de símbolos (figura 4.23), lo cual nos confirma que el error no es criterio suficiente para saber si el igualador tiene un desempeño adecuado.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

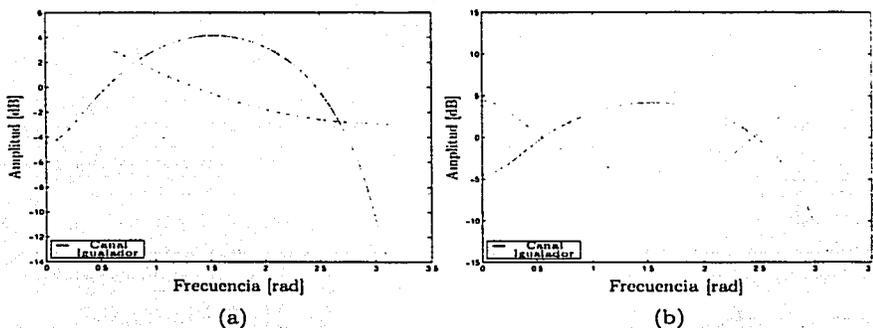
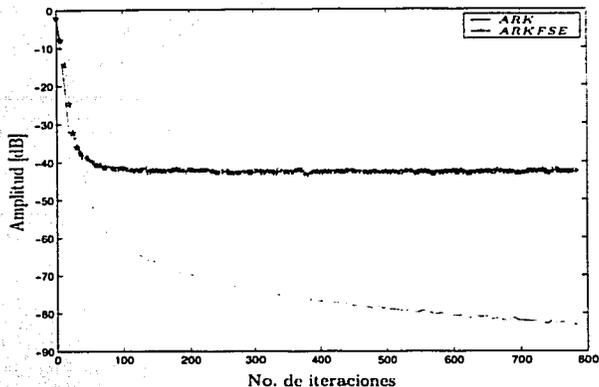


Figura 4.22: Respuesta en frecuencia con orden  $p = 15$ ,  $\delta = 0,01$  del algoritmo (a) ARK espaciado a la tasa de símbolos (b) ARK fraccionalmente espaciado.



TESIS CON  
DE ORIGEN

Figura 4.23: Comportamiento del error de los algoritmos ARK espaciado a la tasa de símbolos y ARK fraccionalmente espaciado.

Una vez que se ha visto el desempeño de los igualadores separados a la tasa de símbolos, se comparará el comportamiento de los igualadores fraccionalmente espaciados con las dos familias de algoritmos y los de decisión retroalimentada. En la figura 4.24 es posible ver que los tres algoritmos implementados trataron de igualar el canal  $H_{C4}(z)$ , sin embargo este canal presentaba un pico que es difícil de igualar por los algoritmos además de una gran distorsión en amplitud. Las respuestas en frecuencia de los tres algoritmos son muy parecidas, sin embargo en la figura 4.25 es posible ver que el algoritmo rápido de Kalman converge mucho más rápido y a un error muy parecido al error al cual converge el algoritmo LMS, y aunque el algoritmo DFE presenta un comportamiento lento en cuanto a velocidad de convergencia se refiere, logra un error mucho menor que los otros dos algoritmos. Esto se debe principalmente a que el canal utilizado presenta una gran distorsión en amplitud, razón por la cual se logra ver la robustez del algoritmo DFE. Sin embargo, cuando se utilizaron otros canales sin una distorsión en amplitud considerable, el algoritmo de Kalman presentó un mejor comportamiento que los otros dos algoritmos.

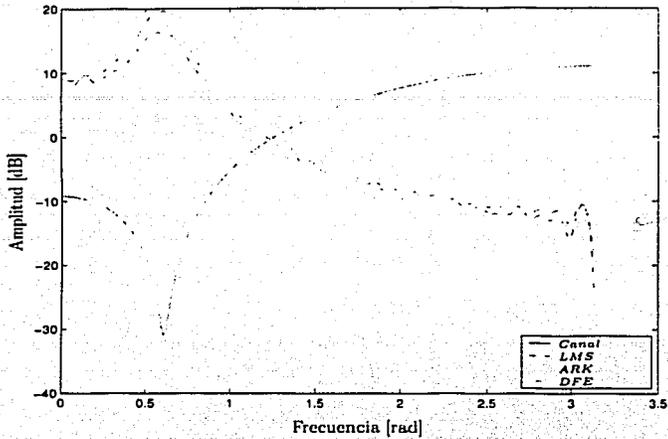


Figura 4.24: Respuesta en frecuencia de los algoritmos LMS, ARK y DFE.

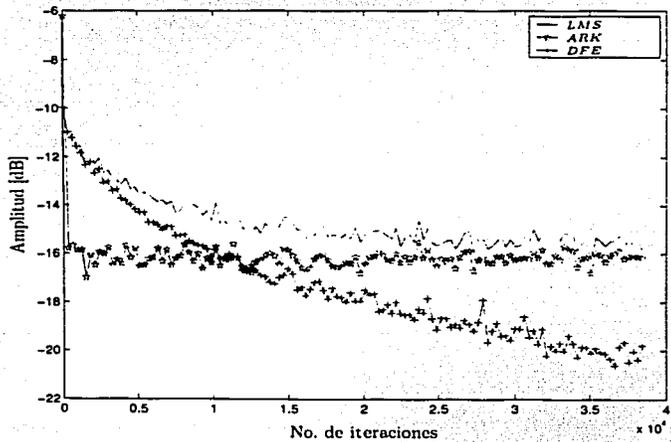


Figura 4.25: Comportamiento del error de los algoritmos LMS, ARK y DFE.

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

## 4.7. Conclusiones

En este capítulo se analizaron las principales configuraciones de los igualadores de canal así como los diversos algoritmos que se pueden utilizar en cada una de dichas configuraciones.

Dependiendo de la aplicación que se tenga, es recomendable algún tipo de configuración, así como el tipo de algoritmo. Por ejemplo, en cuanto a configuraciones, si el canal que se tiene no presenta variaciones bruscas en su respuesta en frecuencia y no se cuenta con un procesador rápido, entonces es posible utilizar un igualador espaciado a la tasa de símbolos, ya que éste no requiere aumentar la velocidad de procesamiento, en comparación con los igualadores FSE, sin embargo, si el canal presenta cambios bruscos es necesario utilizar un igualador fraccionalmente espaciado a costa de duplicar la cantidad de información a procesar. Los igualadores DFE presentan la desventaja de ser más complejos tanto en su estructura como en su calibración e implementación con respecto a los igualadores FSE, pero son más robustos en canales que presentan una gran distorsión en amplitud.

En cuanto a los algoritmos, es posible concluir que los algoritmos Kalman presentan un comportamiento mucho más rápido que los algoritmos LMS, sin embargo, las versiones rápidas tienen problemas numéricos que tienden a hacerlos diverger, principalmente al trabajar en implementaciones bajo arquitecturas con precisión finita. Otra desventaja que presentan estos algoritmos es su complejidad computacional.

Por último, los algoritmos LMS presentan la principal ventaja de ser sencillos de implementar, y no son propensos a diverger, sin embargo tienen una convergencia muy lenta en comparación con los algoritmos rápidos de Kalman.

Debido a lo anterior se puede concluir que no hay un algoritmo que resuelva todos los problemas, sino que es necesario establecer un compromiso entre las necesidades de la aplicación y el algoritmo que se utilice.

## **CAPÍTULO 5**

### **CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS**

## Capítulo 5

### Conclusiones y Perspectivas

Como se pudo observar, por medio del desarrollo de la presente tesis, para poder hacer uso eficiente de los recursos frecuenciales en un sistema de comunicación digital, es necesario emplear filtros en el receptor, que compensen los efectos producidos por el canal de comunicación, principalmente el debido a la *interferencia entre símbolos*. Cuando las características del canal son desconocidas de antemano, la mejor forma de eliminar tales efectos, es por medio de un *filtro adaptable*. El desempeño de éste para resolver un problema, como el de la *igualación de canal*, dependerá de factores tales como *estructura, configuración y algoritmos* empleados para la actualización de los coeficientes.

Aún cuando la *estructura* utilizada por los filtros adaptables, estudiados en esta tesis, fue únicamente *transversal*, debido a la facilidad de su implantación, cabe señalar que existe la estructura *lattice*, la cual exhibe mejores propiedades de estabilidad con la desventaja de presentar una complejidad computacional más grande respecto de la primera.

La utilización de una u otra *configuración* del filtro igualador, así como de los *algoritmos* empleados para actualizar los coeficientes de dicho filtro de forma adaptable, tales como los estudiados en el capítulo 2 y 3 respectivamente, dependerán de las necesidades y recursos disponibles de una aplicación en particular. Así por ejemplo, una aplicación en donde la velocidad de inicio es un factor determinante, deberá emplear un algoritmo basado en el criterio de los mínimos cuadrados (tales como los ARK), debido a que éstos presentan una rápida convergencia en comparación con aquella que caracteriza a los algoritmos de tipo LMS. Además, si se dispone de una arquitectura para el procesamiento digital de señales (DSP), relativamente poderosa, entonces es conveniente emplear una configuración *fraccionalmente espaciada* (FSE), la cual ofrece la ventaja de compensar distorsiones de retardo severas con una amplificación de ruido mínima, pero con el inconveniente de incrementar la carga computacional a más del doble, tal y como lo muestra el cuadro 5.1 donde se lista el número de operaciones (multiplicaciones y divisiones) por iteración para los

algoritmos adaptables, que utilizan una estructura transversal de orden  $p$  con espaciamiento igual a la duración del símbolo ( $T$ ) y para los FSE ( $T/2$ ). Por su parte, los igualadores de decisión retroalimentada (DFE) aunque útiles cuando la distorsión en amplitud es bastante severa, presentan dificultades de calibración, además de que se aumenta el número de operaciones por iteración, incluso cuando los algoritmos empleados bajo esta configuración son de tipo LMS.

Número de operaciones por iteración [29]		
Algoritmo	Espaciamiento del igualador	
	$T$	$T/2$
LMS	$2p$	$4p$
ARMC	$2p^2 + 5p$	$8p^2 + 10p$
ARKV4	$7p + 14$	$24p + 45$

Cuadro 5.1: Incremento de la complejidad computacional al utilizar igualadores FSE.

Respecto a la estabilidad de los algoritmos implementados, es posible concluir, que los algoritmos rápidos (basados en los MC), después de un número considerable de iteraciones, son los que presentan ciertos problemas de estabilidad, aún en su implantación en aritmética de punto flotante, lo cual no es observado en los algoritmos de tipo gradiente. Ésto se debe a la sensibilidad de tales algoritmos en la acumulación de errores numéricos a largo plazo. Una de las formas más utilizadas para poder superar este inconveniente, es por medio de reinicializaciones periódicas del algoritmo para evitar la acumulación de errores de precisión [29]. El factor estabilidad es de suma importancia ya que los algoritmos aquí simulados en lenguaje de alto nivel, eventualmente tendrán que ser implantados en algún DSP, cuya longitud de palabra es finita, para una aplicación en tiempo real.

Existen diversos factores que contribuyen al desempeño de los algoritmos, cada uno de los cuales constituye un área de investigación que está en continuo y rápido crecimiento; éstos van desde la inicialización, la estabilidad numérica, el número mínimo de operaciones por iteración, la implantación en aritmética de punto fijo y la convergencia. Todos estos factores, en el caso óptimo, presentes en un algoritmo contribuyen a la robustez numérica del mismo, esencial en aplicaciones de tiempo real.

Debido a un ancho de banda limitado presente en todos los sistemas de comunicación digital y a que la principal demanda es una velocidad de transmisión cada vez mayor, para satisfacer necesidades tales como la transmisión de voz y video de calidad en tiempo real, el futuro de la igualación de canal, para llevar a cabo dicha tarea, está asegurado. No solamente a través de la estrategia clásica, tratada en esta tesis, en donde el igualador es alimentado por la salida del *demodulador* y no utiliza la redundancia introducida por el *codificador de canal* para ejecutar su

procesamiento, sino por una técnica más reciente denominada *turbo-igualación*, en la cual se mejora el desempeño del receptor, al ser alimentado el igualador por la salida del *demodulador* y por la del *decodificador de canal*.

Los algoritmos adaptables presentados en esta tesis, requieren de un periodo de entrenamiento para poder obtener los coeficientes óptimos del filtro igualador, antes de que la información sea transmitida. Esto limita su aplicación a sistemas de comunicación en los cuales la variación del canal con respecto del tiempo es lenta. Por su parte, la igualación de canal en sistemas de comunicación en donde el envío de secuencias de entrenamiento se torna inútil, debido a la rapidez con la que varía el canal de comunicación, representa, hoy en día, una nueva área de la igualación adaptable denominada *igualación de canal ciega*, la cual se plantea el problema de recuperar los datos de entrada y posiblemente la respuesta al impulso del canal, conociendo la salida de éste, así como las estadísticas de la entrada al mismo [17].

En esta tesis se ha presentado un panorama general de la problemática para la igualación de canal, introduciendo los algoritmos clásicos del filtrado adaptable, para resolver dicho problema. Así mismo se han presentado las simulaciones de tales algoritmos, en lenguaje de alto nivel, con el fin de evaluar características tales como facilidad de implantación, velocidad de convergencia y número de operaciones por iteración, entre otras. De esta forma, el trabajo aquí desarrollado sienta las bases para resolver uno de los problemas más importantes en cuanto a las comunicaciones digitales de alta velocidad se refiere, éste es, el de la interferencia entre símbolos.

## Bibliografía

- [1] Govind P Agrawal, *Fiber-optic communication systems.*, segunda ed., Wiley-Interscience, USA, 1998.
- [2] Rogelio Alcántara, *Implantation d'algorithmes rapides sur des processeurs de traitement du signal*, Ph.D. thesis, École Nationale Supérieure des Télécommunications, Department Systemes et Communications, 1986.
- [3] PHILIP A. BELLO, *Characterization of randomly time-variant linear channels.* IEEE Transactions on Communications Systems cs-11 (1963), no. 4, 360-393.
- [4] Sergio Benedetto, Ezio Biglieri, and Valentino Castellani, *Digital transmission theory*, primera ed., PRENTICE HALL, New Jersey, USA, 1987.
- [5] G. Carayannis, D. Manolakis, and N. Kalouptsidis, *A unified view of parametric processing algorithms*, Signal Processing **10** (1986), no. 4, 335-368.
- [6] George Carayannis, Dimitris G. Manolakis, and Nicholas Kalouptsidis, *A fast sequential algorithm for least-squares filtering and prediction*, IEEE Trans. Acoust., Signal Processing **ASSP-31** (1983), no. 6, 1394-1402.
- [7] P.M. Grant C.F.N. Cowan, *Adaptive filters*, primera ed., PRENTICE HALL, New Jersey, USA, 1985.
- [8] J. M. Cioffi and T. Kailath, *Fast, fixed order, least-squares algorithms for adaptive filtering*, in Proc. ICASSP 83 (1983).
- [9] John M. Cioffi and Thomas Kailath, *Fast, recursive-least-squares transversal filters for adaptive filtering*, IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing. **ASSP-32** (1984), no. 2, 304-337.
- [10] Leon W. Couch II, *Digital and analog communication systems*, tercera ed., Macmillan, New York, USA, 1990.
- [11] Paulo Sergio Ramirez Diniz, *Adaptive filtering, algorithms and practical implementation.*, primera ed., Kluwer Academic Publisher., USA, 1997.

- [12] David D. Falconer and Lennart Ljung, *Application of fast kalman estimation to adaptive equalization*, IEEE Transactions on Communications COM-26 (1978). no. 10, 1439-1446.
- [13] Roger L. Freeman, *Fundamentals of telecommunications*. primera ed.. JOHN WILEY & SONS, Inc., New York, USA, 1999.
- [14] Simon Haykin, *Introduction to adaptive filters*, primera ed., Macmillan, New York, USA, 1984.
- [15] \_\_\_\_\_, *Modern filters*, primera ed., Mcmillan Publishing Company, New York, USA, 1989.
- [16] \_\_\_\_\_, *Adaptive filter theory*, primera ed., PRENTICE HALL, New Jersey, USA, 1991.
- [17] \_\_\_\_\_, *Blind deconvolution*, primera ed., PRENTICE HALL, Inc.. New Jersey, USA, 1994.
- [18] \_\_\_\_\_, *Communication systems*, tercera ed., JOHN WILEY & SONS. Inc.. 1994.
- [19] \_\_\_\_\_, *Adaptive filter theory*, tercera ed., PRENTICE HALL, New Jersey, USA, 1996.
- [20] Robert S. Kennedy, *Fading dispersive communication channels*, segunda ed., WILEY-INTERCIENCE, New York, USA. 1999.
- [21] Edward A. Lee and David G. Messerschmitt, *Digital communication*, tercera ed., Kluwer Academic Publishers, Boston, USA, 1990.
- [22] Philip Balaban Michel C. Jeruchim and K. Sam Shanmugan, *Simulation of communication systems*, segunda ed., JOHN WILEY & SONS, LTD, New York, USA, 1999.
- [23] Bernard Mulgrew and Colin F.Ñ. Cowan, *Adaptive filters and equalisers.*, primera ed., Kluwer Academic Publishers, Massachusetts, USA, 1988.
- [24] Jean Pierre Nérou, *Introducción a las telecomunicaciones por fibras ópticas*, primera ed., Trillas, México, D. F., 1991.
- [25] John G. Proakis, *Digital communications*, tercera ed.. McGraw-Hill, New York, USA, 1995.
- [26] \_\_\_\_\_, *Digital communications*, cuarta ed., McGraw-Hill. New York, USA. 2001.

- [27] John G. Proakis, Charles M. Rader, Fuyun Ling, and Chrysostomos L. Nikias, *Advanced digital signal processing*, primera ed., Macmillan, New York, USA, 1992.
- [28] John G. Proakis and Masoud Salehi, *Communication systems engineering*, primera ed., PRENTICE HALL, New Jersey, USA, 1994.
- [29] Shahid U. H. Qureshi, *Adaptative equalization*, Proceedings of the IEEE 73 (1985), no. 9, 1349-1387, Invited Paper.
- [30] Larry H. Escobar Salguero, *Algoritmos de filtrado adaptable: Implementación, evaluación, comparación y aplicaciones en telecomunicaciones*, Master's thesis, UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Eléctrica, 1997.
- [31] K. Sam Shanmugan, *Digital and analog communication systems*, primera ed., JOHN WILEY & SONS, USA, 1979.
- [32] Bernard Sklar, *Digital communications, fundamentals and aplicaciones.*, primera ed., PRENTICE HALL, New Jersey, USA, 1988.
- [33] Raymond Steele and Lajos Hanzo, *Mobile radio communications*, segunda ed., JOHN WILEY & SONS, LTD, New York, USA, 1999.
- [34] Ferrel G. Stremmer, *Introduction to communication systems*, segunda ed., ADDISON-WESLEY, 1982.
- [35] Ferrel G. Stremmer, *Introducción a los sistemas de comunicación.*, tercera ed., ADDISON-WESLEY, USA, 1993.
- [36] José Eduardo Torres, *Estudio y comparación de algortimo de filtrado adaptable para la igualación de canal*, Master's thesis, UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado, Eléctrica, 1997.
- [37] John R. Treichler, I. Fijalkow, and C. Richard Johnson, Jr., *Fractionally spaced equalizers*, IEEE Signal Processing Magazine 13 (1996), no. 3, 65-81.
- [38] John R. Treichler, C. Richard Johnson, Jr., and Michael G. Larimore, *Theory and desing of adaptive filters*, primera ed., JOHN WILEY & SONS, Inc., USA, 1987.

## APÉNDICES

# Apéndice A

## Matriz Particionada

### A.1. Definición de Matriz Particionada

Sea  $M$  una matriz, si ésta puede ser expresada mediante una matriz particionada de la siguiente forma:

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

donde  $A$  y  $D$  son matrices cuadradas no singulares y los elementos  $B$  y  $C$  son vectores renglón y columna respectivamente, entonces existe una  $M^{-1}$  definida como;

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

de la cual se puede establecer la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Desarrollando el miembro derecho de la ecuación A.3 se obtienen las siguientes expresiones:

$$A \cdot \alpha + B \cdot \gamma = I \quad (\text{A.4})$$

$$A \cdot \beta + B \cdot \delta = 0 \quad (\text{A.5})$$

$$C \cdot \alpha + D \cdot \gamma = 0 \quad (\text{A.6})$$

$$C \cdot \beta + D \cdot \delta = I \quad (\text{A.7})$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene de la ecuación A.6:

$$\gamma = -D^{-1}C\alpha \quad (\text{A.8})$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

sustituyendo A.8 en A.4 y agrupando términos se obtiene:

$$\alpha = (A - BD^{-1}C)^{-1} \quad (A.9)$$

y sustituyendo este último resultado en A.8 se llega a:

$$\gamma = -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} \quad (A.10)$$

Siguiendo el mismo procedimiento utilizando las ecuaciones A.5 y A.7, se llega a los siguientes resultados:

$$\beta = -A^{-1}B\delta \quad (A.11)$$

$$\delta = (D - CA^{-1}B)^{-1} \quad (A.12)$$

$$\beta = -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \quad (A.13)$$

y sustituyendo en A.2 se tiene

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix} \quad (A.14)$$

### A.1.1. Relaciones Importantes del Lema de Inversión Matricial

Si ahora escribimos la ecuación A.3 de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (A.15)$$

y se desarrolla el miembro derecho, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\alpha \cdot A + \beta \cdot C = I \quad (A.16)$$

$$\alpha \cdot B + \beta \cdot D = 0 \quad (A.17)$$

$$\gamma \cdot A + \delta \cdot C = 0 \quad (A.18)$$

$$\gamma \cdot B + \delta \cdot D = I \quad (A.19)$$

Si en A.16 sustituimos A.9 y A.13 y postmultiplicamos por  $A^{-1}$  se obtiene:

$$\alpha = (A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \quad (A.20)$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

de manera semejante en A.19 con ayuda de A.12 y A.10 se llega a:

$$\delta = (\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{D}^{-1} + \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{BD}^{-1} \quad (\text{A.21})$$

siendo las ecuaciones A.20 y A.21 conocidas como el lema de inversión matricial. Si ahora sustituimos A.9 y A.13 en A.17 y A.10 y A.12 en A.18 llegamos a las siguientes expresiones:

$$-\beta = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1} = (\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}\mathbf{BD}^{-1} \quad (\text{A.22})$$

$$-\gamma = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1} = (\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{CA}^{-1} \quad (\text{A.23})$$

De las ecuaciones A.20, A.21, A.22 y A.23, podemos ver que todos los elementos de  $\mathbf{M}^{-1}$  pueden ser escritos en términos de  $(\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}$  o en términos de  $(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}$  obteniéndose respectivamente las siguientes relaciones:

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} [(\mathbf{A} - \mathbf{BD}^{-1}\mathbf{C})^{-1}] \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{BD}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} [(\mathbf{D} - \mathbf{CA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}] \begin{bmatrix} -\mathbf{CA}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{A.25})$$

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Apéndice B

### Predicción Lineal

Uno de los problemas más importantes en el análisis de series temporales es aquel de predecir un valor futuro de un proceso estocástico, conociendo un conjunto de muestras pasadas de dicho proceso. Es decir, considerese una serie temporal  $y[k]$ ,  $y[k-1]$ , ...,  $y[k-p]$  que representa las  $p+1$  muestras del proceso estocástico. La operación de predicción puede, por ejemplo, involucrar las muestras  $y[k-1]$ ,  $y[k-2]$ , ...,  $y[k-p]$  para predecir el valor de  $y[k]$ . Esta operación conocida como *predicción forward* (hacia adelante) se dice que es *lineal*, ya que el valor a predecir se obtiene mediante una combinación lineal del espacio generado por las  $p$  muestras pasadas del proceso. En otra forma de predicción, se usan las muestras  $y[k]$ ,  $y[k-1]$ , ...,  $y[k-p+1]$ , con el fin de hacer una predicción de la muestra pasada  $y[k-p]$ . A esta segunda forma se le conoce como *predicción backward* (hacia atrás) [16].

En esta sección se tratarán ambos casos de predicción lineal (forward y backward). En particular, se empleará el criterio de los mínimos cuadrados para optimizar el diseño de los predictores. Por último se encontrarán algunas relaciones, de importancia para los algoritmos rápidos, entre los diferentes parámetros que intervienen en ambos predictores.

#### B.1. Predicción Forward

Como previamente se comentó, una de las formas más simples de conocer el valor futuro de una señal, es por medio de una combinación lineal de sus muestras en tiempos pasados, es decir, sea  $y[k]$  la señal a predecir en el tiempo  $k$  y  $y[k-1]$ ,  $y[k-2]$  hasta  $y[k-p]$  las  $p$  muestras pasadas y conocidas de dicha señal, ver figura B.1.

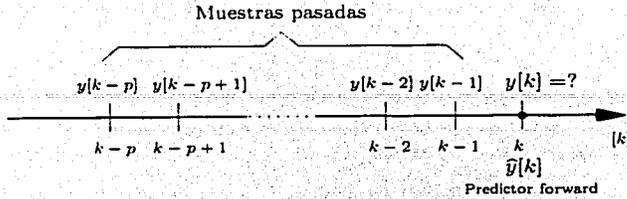


Figura B.1: Predicción forward.

Establecido lo anterior se propone el siguiente predictor de  $y[k]$ :

$$\hat{y}[k] = - \sum_{j=1}^p a_j[k] y[k-j] \quad (\text{B.1})$$

O bien en su forma vectorial;

$$\hat{y}[k] = -A_p^T[k] Y_p[k-1] \quad (\text{B.2})$$

donde,

$$Y_p^T[k-1] \equiv [y^T[k-1] \ y^T[k-2] \ \dots \ y^T[k-p]] \quad (\text{B.3})$$

$$A_p^T[k] \equiv [a_1^T[k] \ a_2^T[k] \ \dots \ a_p^T[k]] \quad (\text{B.4})$$

a su vez,  $a_j[k]$ , para  $j = 1, 2, \dots, p$ , representa los coeficientes de ponderación para las  $p$  muestras pasadas en el instante  $k$ .

Definiendo el **error de predicción forward a posteriori** como:

$$\varepsilon_p^f[k] = y[k] - \hat{y}[k] = y[k] + A_p^T[k] Y_p[k-1] \quad (\text{B.5})$$

$$E[k] = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} \varepsilon_p^f[j] \varepsilon_p^{fT}[j] \quad (\text{B.6})$$

y sustituyendo la ecuación B.5 en la función *costo de los mínimos cuadrados*  $E[k]$  (ec. B.6), realizando productos y reduciendo términos se obtiene:

$$\sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} \{ y[j] y^T[j] + 2A_p^T[k] Y_p[j-1] y^T[j] + A_p^T[k] Y_p[j-1] Y_p^T[j-1] A_p[k] \} \quad (\text{B.7})$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Para poder obtener los coeficientes  $a_j$ , tales que produzcan un valor mínimo en la función costo de los mínimos cuadrados, procederemos a derivar la ecuación B.7 respecto de dichos coeficientes.

$$\sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} \left\{ \frac{dy[j]y^T[j]}{dA_p[k]} + 2 \frac{dA_p^T[k]Y_p[j-1]y^T[j]}{dA_p[k]} + \frac{dA_p^T[k]Y_p[j-1]Y_p^T[j-1]A_p[k]}{dA_p[k]} \right\} = 0$$

Considerando que,

$$\frac{d(x^T M x)}{dx} = 2Mx$$

cuando  $M$  es simétrica y dado que el producto  $Y_p[j-1]Y_p^T[j-1]$  cumple con dicha condición, tenemos;

$$\sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} \{ 2Y_p[j-1]y^T[j] + 2Y_p[j-1]Y_p^T[j-1]A_p[k] \} = 0$$

$$A_p[k] = - \left[ \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} Y_p[j-1]Y_p^T[j-1] \right]^{-1} \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} Y_p[j-1]y^T[j]$$

O bien;

$$A_p[k] = -R_p^{-1}[k-1]r_p^f[k] \quad (B.8)$$

donde la *matriz de covarianza* está definida como:

$$R_p[k-1] = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} Y_p[j-1]Y_p^T[j-1] \quad (B.9)$$

y los *vectores de correlación* están dados por:

$$r_p^f[k] = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} Y_p[j-1]y^T[j] \quad (B.10)$$

$$r_{po}^f[k] = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} y[j]y^T[j] \quad (B.11)$$

Con el fin de encontrar un algoritmo más eficiente, en el sentido de número de operaciones por actualización de  $A_p[k]$ , que evite la inversión de la matriz de covarianza de forma convencional, se deberán encontrar relaciones recursivas sobre la misma.

TESIS CON  
COPIA DE ORIGEN

### Recursiones para $R_p[k]$ y $r_p^f[k]$

De B.9 tenemos para la matriz de covarianza,

$$R_p[k] = \lambda R_p[k-1] + Y_p[k] Y_p^T[k] \quad (\text{B.12})$$

De igual forma para B.10 y B.11 tenemos,

$$r_p^f[k] = \lambda r_p^f[k-1] + Y_p[k-1] y^T[k] \quad (\text{B.13})$$

$$r_{po}^f[k] = \lambda r_{po}^f[k-1] + y[k] y^T[k] \quad (\text{B.14})$$

### Recursión para la Inversa de la Matriz $R_p[k]$

Aplicando la ecuación A.20 del *lema de inversión matricial*<sup>1</sup> en B.12 obtenemos, después de acomodar términos;

$$R_p^{-1}[k] = \lambda^{-1} R_p^{-1}[k-1] - W_p[k] \gamma_p[k] W_p^T[k] \quad (\text{B.15})$$

donde la *ganancia dual de Kalman*  $W_p[k]$ , está dada por;

$$W_p[k] \equiv -\frac{1}{\lambda} R_p^{-1}[k-1] Y_p[k] \quad (\text{B.16})$$

y la *variable de similitud* definida como;

$$\gamma_p[k] \equiv \frac{1}{1 - Y_p^T[k] W_p[k]} \quad (\text{B.17})$$

### Recursión para los Coeficientes de Predicción Forward $A_p[k]$

Sustituyendo B.13 en B.8 se obtiene:

$$R_p[k-1] A_p[k] = -\lambda r_p^f[k-1] - Y_p[k-1] y^T[k] \quad (\text{B.18})$$

Ahora, tomando la ecuación B.8 al instante  $k-1$  y sustituyéndola en B.18 se tiene;

$$R_p[k-1] A_p[k] = \lambda R_p[k-2] A_p[k-1] - Y_p[k-1] y^T[k] \quad (\text{B.19})$$

Sumando y restado  $Y_p[k-1] Y_p^T[k-1] A_p[k-1]$  a B.19, además de factorizar  $A_p[k-1]$  y  $Y_p[k-1]$ , se puede demostrar que;

$$A_p[k] = A_p[k-1] + K_p[k-1] e_p^f[k] \quad (\text{B.20})$$

<sup>1</sup>Para mayor referencia consultar el apéndice A

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

donde la **ganancia de Kalman**  $K_p[k]$  está dada por;

$$K_p[k] = -R_p^{-1}[k]Y_p[k] \quad (\text{B.21})$$

y el **error de predicción forward a priori** es:

$$e_p^f[k] = y[k] + A_p^T[k-1]Y_p[k-1] \quad (\text{B.22})$$

También se puede demostrar que la relación entre las ganancias de Kalman es;

$$K_p[k] = W_p[k]\gamma_p[k] \quad (\text{B.23})$$

Por último despejando  $W_p[k]$  de B.23 y sustituyendola en B.17 se demuestra que;

$$\gamma_p[k] \equiv I + Y_p^T[k]K_p[k] \quad (\text{B.24})$$

A continuación, en el cuadro B.1, se presenta, una versión, del algoritmo para la predicción forward.

ARMCF	
Inicialización para el instante $k-1$ :	
$R_p^{-1}[k-1] = \delta^{-1}I, \delta > 0, Y_p[k-1] = A_p[k-1] = 0$	
Predicción Forward	Ecs.
$e_p^f[k] = y[k] + A_p^T[k-1]Y_p[k-1]$	B.22
$A_p[k] = A_p[k-1] + K_p[k-1]e_p^{fT}[k]$	B.20
$W_p[k] \equiv -\frac{1}{\lambda}R_p^{-1}[k-1]Y_p[k]$	B.16
$\gamma_p[k] \equiv \frac{1}{1-Y_p^T[k]W_p[k]}$	B.17
$R_p^{-1}[k] = \lambda^{-1}R_p^{-1}[k-1] - W_p[k]\gamma_p[k]W_p^T[k]$	B.15
$K_p[k] = W_p[k]\gamma_p[k]$	B.23

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Cuadro B.1: Algoritmo Recursivo de los Mínimos Cuadrados Predicción Forward

## B.2. Predicción Backward

En la sección B.1 se pudo apreciar, como para obtener el valor futuro  $y[k]$  de una señal, se hizo uso de sus  $p$  muestras pasadas para *estimar* de una manera óptima, minimizando el criterio de los mínimos cuadrados, dicha señal  $y[k]$ , a este proceso se le llamó *predicción forward*. Siguiendo esta misma idea, se plantea, ahora, el problema de estimar el valor pasado  $y[k-p]$  de una cierta señal, conocidas sus  $p$  muestras "futuras"  $y[k]$ ,  $y[k-1]$ , ...,  $y[k-p+1]$ , ver figura B.2. Esta segunda operación recibe el nombre de *predicción backward* (hacia atrás).

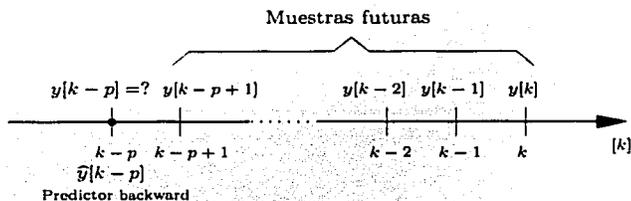


Figura B.2: Predicción backward.

Con base en lo anterior se propone el siguiente predictor de  $y[k-p]$ :

$$\hat{y}[k-p] = - \sum_{j=1}^p b_j[k-p] y[k+j-p] \quad (\text{B.25})$$

O bien, expresándolo en forma vectorial tenemos;

$$\hat{y}[k-p] = -B_p^T[k] Y_p[k] \quad (\text{B.26})$$

donde,

$$Y_p^T[k] \equiv [y^T[k] \quad y^T[k-1] \quad y^T[k-2] \quad \dots \quad y^T[k-p+1]] \quad (\text{B.27})$$

$$B_p^T[k] \equiv [b_p^T[k-p] \quad b_{p-1}^T[k-p] \quad \dots \quad b_1^T[k-p]] \quad (\text{B.28})$$

y  $b_j[k-p]$  representa los coeficientes de ponderación para las  $p$  muestras "futuras" en el instante de tiempo  $k-p$ .

Al igual que en la predicción forward, con el fin de verificar la calidad del predictor, se define el siguiente *error de predicción backward a posteriori*:

$$\epsilon_p^b[k] = y[k-p] - \hat{y}[k-p] = y[k-p] + B_p^T[k] Y_p[k] \quad (\text{B.29})$$

TESIS CON FALLA DE ORIGEN

El cálculo de los coeficientes óptimos de predicción backward  $B_p[k]$  (ec. B.30), que se obtienen a través de la minimización del criterio de los mínimos cuadrados respecto de tales coeficientes, nos lleva a soluciones para la matriz y vector de correlación completamente análogas a las obtenidas en la predicción forward. Ésto implica que el procedimiento para obtener las recursiones en tiempo de dichas correlaciones y coeficientes de predicción sea el mismo, e incluso, en el caso específico de las relaciones para la recursión de la inversa de  $R_p[k]$  (ec. B.15), las ganancias de Kalman (ecs. B.21 y B.16) y la variable de similitud (ec. B.17) sean las mismas. Por esta razón, a continuación sólo se presentan los resultados de las relaciones que hacen la diferencia entre ambas predicciones.

$$B_p[k] = -R_p^{-1}[k]r_p^b[k] \quad (\text{B.30})$$

donde la matriz de covarianza  $R_p[k]$  está definida de igual forma que en el caso forward por la ecuación B.9 solo que al instante de tiempo  $k$ , y

$$r_p^b[k] = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} Y_p[j] y^T[j-p] \quad (\text{B.31})$$

Además la autocorrelación de  $y[k-p]$  es;

$$r_{po}^b[k] = \sum_{j=1}^k \lambda^{k-j} y[j-p] y^T[j-p] \quad (\text{B.32})$$

Debido a que la matriz de covarianza se define de igual forma que en el caso de predicción forward, su recursión también es la misma y está definida por la ecuación B.12. Si además se sigue un procedimiento similar al empleado para encontrar una recursión en tiempo para el vector de correlación  $r_p^f[k]$  y la autocorrelación de  $y[k]$ , podemos obtener de manera análoga de B.31 y B.32 dichas recursiones para los mismos parámetros de la predicción backward:

$$r_p^b[k] = \lambda r_p^b[k-1] + Y_p[k] y^T[k-p] \quad (\text{B.33})$$

$$r_{po}^b[k] = \lambda r_{po}^b[k-1] + y[k-p] y^T[k-p] \quad (\text{B.34})$$

De manera equivalente a la predicción forward, la recursión para los coeficientes de predicción backward, ec. B.35, queda definida en función de los coeficientes de predicción al instante anterior, así como también por la *ganancia de Kalman* definida por la ecuación B.21 y por el *error de predicción backward a priori* ecuación B.36.

$$B_p[k] = B_p[k-1] + K_p[k] e_p^{bT}[k] \quad (\text{B.35})$$

$$e_p^b[k] = y[k - p] + B_p^T[k - 1]Y_p[k] \quad (\text{B.36})$$

### B.3. Recursiones en Tiempo y Relaciones de los Parámetros de Predicción

La presente sección tiene como objetivo encontrar recursiones en tiempo y relaciones entre los distintos parámetros de predicción. Esto con el fin de proveer las ecuaciones empleadas por los "algoritmos rápidos."

#### Representación del Vector de Muestras $Y[k]$ al Orden Superior

Considerando el vector  $Y_p^T[k]$  al orden  $p + 1$  tenemos:

$$Y_{p+1}^T[k] = \{y^T[k], \dots, y^T[k - p + 1], y^T[k - p]\} \quad (\text{B.37})$$

Ahora si tomamos B.3 de la predicción forward podemos reescribir B.37 como sigue:

$$Y_{p+1}^T[k] = \{y^T[k], Y_p^T[k - 1]\} \quad (\text{B.38})$$

Por otro lado, si tomamos la definición B.27 de  $Y_p^T[k]$  para la predicción Backward tenemos otra forma para B.37:

$$Y_{p+1}^T[k] = \{Y_p^T[k], y^T[k - p]\} \quad (\text{B.39})$$

#### Relación entre los Errores de Estimación y la Variable de Similitud $\gamma_p[k]$

Sustituyendo B.23 al instante  $k - 1$  en B.20 se puede obtener la siguiente relación:

$$A_p[k] = A_p[k - 1] + W_p[k - 1]\gamma_p[k - 1]e_p^{fT}[k] \quad (\text{B.40})$$

Si ahora sustituimos  $\gamma_p[k - 1]$  por B.24 y  $e_p^f[k]$  por B.22 llegamos a:

$$A_p[k] = A_p[k - 1] + W_p[k - 1]e_p^{fT}[k] \quad (\text{B.41})$$

Por último si comparamos B.40 con B.41 llegamos a la siguiente relación:

$$e_p^f[k] = e_p^f[k]\gamma_p[k - 1] \quad (\text{B.42})$$

Siguiendo un procedimiento similar al previamente empleado, tenemos para los casos de predicción backward y filtrado las siguientes relaciones:

$$B_p[k] = B_p[k - 1] + W_p[k]e_p^{bT}[k] \quad (\text{B.43})$$



$$\varepsilon_p^b[k] = e_p^b[k] \gamma_p[k] \quad (\text{B.44})$$

y

$$H_p[k] = H_p[k-1] + W_p[k] \varepsilon_p^T[k] \quad (\text{B.45})$$

$$\varepsilon_p[k] = e_p[k] \gamma_p[k] \quad (\text{B.46})$$

### Cálculo de las Energías Residuales

Al sustituir los parámetros óptimos para la predicción forward  $A_p[k]$  en la expresión B.6, la función *costo* alcanzará su mínimo valor teórico, dicho valor recibe el nombre de *energía residual para la predicción forward*  $\alpha_p^f[k]$ , definida como:

$$\alpha_p^f[k] = r_{po}^f[k] + r_p^{fT}[k] A_p[k] \quad (\text{B.47})$$

la cual puede ser expresada de forma recursiva, si sustituimos B.13, B.14 y B.20 en B.47, como:

$$\alpha_p^f[k] = \lambda \alpha_p^f[k-1] + \varepsilon_p^f[k] e_p^{fT}[k] \quad (\text{B.48})$$

De una manera equivalente se tiene la *energía residual para la predicción backward*  $\alpha_p^b[k]$  y su recursión:

$$\alpha_p^b[k] = r_{po}^b[k] + r_p^{bT}[k] B_p[k] \quad (\text{B.49})$$

$$\alpha_p^b[k] = \lambda \alpha_p^b[k-1] + \varepsilon_p^b[k] e_p^{bT}[k] \quad (\text{B.50})$$

### Recursión en las Ganancias de Kalman

De B.9 tenemos que la matriz de correlación al instante  $k$  y al orden  $p+1$ , ya sea para la predicción forward o backward, está dada por la siguiente relación:

$$R_{p+1}[k] = \sum_{j=0}^k \lambda^{k-j} Y_{p+1}[j] Y_{p+1}^T[j] \quad (\text{B.51})$$

La sustitución de B.38 en B.51 nos permite escribir la matriz de covarianza en términos de los parámetros de predicción forward de la siguiente manera:

$$R_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} r_{po}^f[k] & r_p^{fT}[k] \\ r_p^f[k] & R_p[k-1] \end{bmatrix} \quad (\text{B.52})$$



Un procedimiento similar al anterior, sustituyendo B.39 en B.51 nos conduce a una segunda definición para  $R_{p+1}[k]$  en términos de parámetros para la predicción backward:

$$R_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} R_p[k] & r_p^b[k] \\ r_p^{bT}[k] & r_{po}^b[k] \end{bmatrix} \quad (\text{B.53})$$

Empleando la identidad A.24 de la inversa de una matriz particionada, para obtener la inversa de las relaciones B.52 y B.53, tenemos:

$$\mathbf{R}_{p+1}^{-1}[k] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R_p^{-1}[k-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I \\ A_p[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_p^{-f}[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & A_p^T[k] \end{bmatrix} \quad (\text{B.54})$$

$$\mathbf{R}_{p+1}^{-1}[k] = \begin{bmatrix} R_p^{-1}[k] & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_p[k] \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_p^{-b}[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_p^T[k] & I \end{bmatrix} \quad (\text{B.55})$$

Tomando la ganancia de Kalman, ecuación B.16, para el instante de tiempo  $k$  y para el orden  $p+1$  tenemos:

$$k_{p+1}[k] = -R_{p+1}^{-1}[k]Y_{p+1}[k] \quad (\text{B.56})$$

Si ahora sustituimos B.38 y B.54 en B.56, además de desarrollar productos, obtenemos:

$$\mathbf{K}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} 0 \\ K_p[k-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ A_p[k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_p^{-f}[k] \epsilon_p^f[k] \end{bmatrix} \quad (\text{B.57})$$

De forma equivalente, si empleamos B.39 y B.55 en B.56 llegamos a:

$$\mathbf{K}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} K_p[k] \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_p[k] \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_p^{-b}[k] \epsilon_p^b[k] \end{bmatrix} \quad (\text{B.58})$$

Por otra parte, si tomamos las ecuaciones B.54 y B.55 al instante de tiempo  $k-1$  y las postmultiplicamos por  $-\lambda^{-1}Y_{p+1}[k]$  obtendremos la ganancia dual de Kalman al orden  $p+1$   $W_{p+1}[k]$  de la siguiente manera:

$$\mathbf{W}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} 0 \\ W_p[k-1] \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I \\ A_p[k-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{-1} \alpha_p^{-f}[k-1] \epsilon_p^f[k] \end{bmatrix} \quad (\text{B.59})$$

$$\mathbf{W}_{p+1}[k] = \begin{bmatrix} W_p[k-1] \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} B_p[k-1] \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^{-1} \alpha_p^{-b}[k-1] \epsilon_p^b[k] \end{bmatrix} \quad (\text{B.60})$$



## Recursiones para la Variable de Similitud $\gamma_p[k]$

### Caso vectorial

Tomando B.24 al orden  $p + 1$  se obtiene:

$$\gamma_{p+1}[k] \equiv J + Y_{p+1}^T[k]K_{p+1}[k] \quad (\text{B.61})$$

Sustituyendo B.57 y B.38 en B.61, además de efectuar los productos, se encuentra una recursión para  $\gamma_{p+1}[k]$ :

$$\gamma_{p+1}[k] = \gamma_p[k-1] - \varepsilon_p^{fT}[k]\alpha_p^{-f}[k]\varepsilon_p^f[k] \quad (\text{B.62})$$

De forma equivalente se puede demostrar que la variable de similitud en función del error de predicción backward a *posteriori*, está dada por;

$$\gamma_{p+1}[k] = \gamma_p[k] - \varepsilon_p^{bT}[k]\alpha_p^{-b}[k]\varepsilon_p^b[k] \quad (\text{B.63})$$

### Caso escalar

Si en la ecuación B.62 sustituimos  $\varepsilon_p^f[k]$  por la definición B.42 se tiene:

$$\gamma_{p+1}[k] = \gamma_p[k-1] - \gamma_p[k-1]e_p^f[k]\alpha_p^{-f}[k]\varepsilon_p^f[k]$$

Factorizando  $\gamma_p[k-1]$  y  $\alpha_p^{-f}[k]$  tenemos;

$$\gamma_{p+1}[k] = \gamma_p[k-1]\{\alpha_p^f[k] - e_p^f[k]\varepsilon_p^f[k]\}\alpha_p^{-f}[k]$$

Finalmente si se sustituye  $\alpha_p^f[k]$  por B.48 se obtiene;

$$\gamma_{p+1}[k] = \lambda\gamma_p[k-1]\alpha_p^f[k-1]\alpha_p^{-f}[k] \quad (\text{B.64})$$

Un procedimiento equivalente que involucre las energías residuales de la predicción backward nos conduce a;

$$\gamma_{p+1}[k] = \lambda\gamma_p[k]\alpha_p^b[k-1]\alpha_p^{-b}[k] \quad (\text{B.65})$$

## Recursiones para la Inversa de la Variable de Similitud $\gamma_p^{-1}[k]$

Sustituyendo B.38 y B.59 en B.17 al orden  $p + 1$  se obtiene;

$$\gamma_{p+1}^{-1}[k] = \gamma_p^{-1}[k-1] + \lambda^{-1}e_p^{fT}[k]\alpha_p^{-f}[k-1]\varepsilon_p^f[k] \quad (\text{B.66})$$



De manera similar, se puede demostrar que la variable de similitud, para el orden  $p + 1$ , en términos de los errores de predicción backward *a priori* es:

$$\gamma_{p+1}^{-1}[k] = \gamma_p^{-1}[k] + \lambda^{-1} e_p^{bT}[k] a_p^{-b}[k-1] e_p^b[k] \quad (B.67)$$



## Apéndice C

# Filtros Paso-Todo y Filtros de Fase Mínima

Dependiendo de las características de fase y magnitud de un filtro se pueden distinguir dos tipos básicos de filtros, los filtros *paso-todo* y los filtros de *fase mínima*.

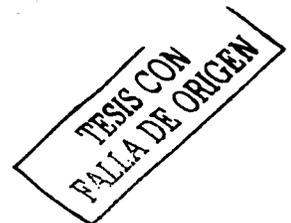
### Filtro Paso-Todo

Un filtro discreto en el tiempo, caracterizado en el dominio del tiempo por su respuesta al impulso  $h_{ap}[k]$  es *paso-todo* si satisface las siguientes condiciones:

- $h_{ap}[k]$  es real para todo  $k$ .
- $h_{ap}[k] = 0$  para  $k < 0$ , es decir, el filtro es causal.
- $|h_{ap}[0]| < 1$
- $\sum_{k=0}^{\infty} h_{ap}^2[k] = 1$

Equivalentemente, si lo caracterizamos desde el dominio del plano- $Z$ , por su función de transferencia,  $H_{ap}(z)$ , es *paso-todo* si:

- Los polos y ceros de  $H_{ap}(z)$  son reales u ocurren en parejas de complejos conjugados.
- Los polos de  $H_{ap}(z)$  están dentro del círculo unitario en el plano- $Z$ .
- $H_{ap}(z)$  no tiene polos o ceros en  $z = 0$ .
- La amplitud de la respuesta en frecuencia es igual a la unidad para todo  $w$ ,  $|H_{ap}(e^{jw})| = 1 \forall w$ . Para que esta condición pueda cumplirse,  $H_{ap}(z)$  debe de tener un número igual de polos y de ceros que estén *inversamente relacionados* entre sí con respecto al círculo unitario, en otras palabras el módulo del cero es el inverso del módulo del polo.



Estas condiciones se ilustran en la figura C.1. Cabe destacar que cualquier filtro *paso-todo* puede ser visto como una conexión en cascada de secciones de primer y segundo orden de filtros *paso-todo*.

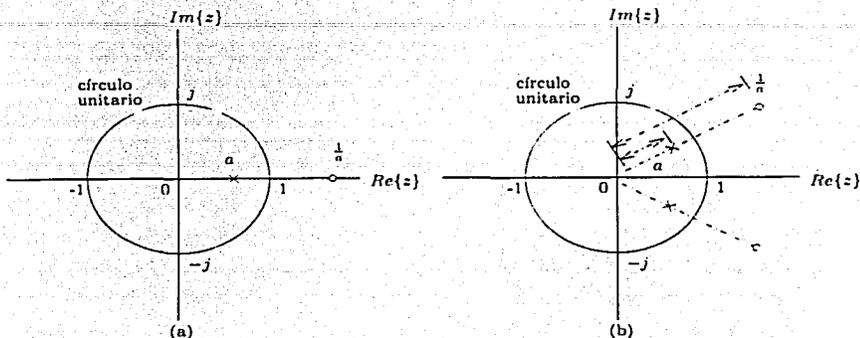


Figura C.1: Patrón de polos y ceros de filtros *paso-todo*: (a) Primer orden (b) Segundo orden

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

### Filtro de Fase Mínima

Para describir las características de un filtro de *fase mínima* es conveniente representarlo en el dominio del plano- $Z$  mediante sus polos y ceros. El filtro será de *fase mínima* si  $H_{mp}(z)$  cumple las siguientes condiciones (ilustradas en la figura C.2):

- Los polos de  $H_{mp}(z)$  se encuentran dentro del círculo unitario en el plano- $Z$ .
- Los ceros de  $H_{mp}(z)$  también se encuentran dentro del círculo unitario o sobre él.

De manera equivalente, para una amplitud de la respuesta en frecuencia,  $|H_{pm}(e^{j\omega})|$ , dada, la pendiente de la fase de la respuesta en frecuencia para cualquier  $\omega$  será de magnitud la mínima posible. Debido a que el negativo de la derivada de la fase respecto a la frecuencia angular es igual al *retardo de grupo*, se tiene que el retardo de grupo de un filtro de fase mínima, para una amplitud de la respuesta en frecuencia,  $|H_{pm}(e^{j\omega})|$ , específica, será el menor posible. Como una consecuencia de esto, se tiene que la respuesta al impulso de un filtro de fase mínima es retrazada lo menos posible con respecto al instante en que el impulso fué aplicado a la entrada del filtro [15].

Si alguno de los ceros de la función de transferencia del filtro está ubicado fuera del

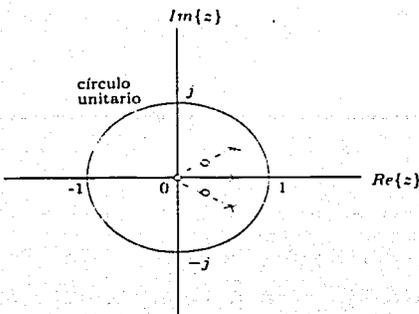


Figura C.2: Patrón de polos y ceros de un filtro de *fase mínima*

círculo unitario, entonces el filtro será de *fase no mínima*. Si todos los ceros de la función de transferencia están afuera del círculo unitario, entonces el filtro será de *fase máxima*.

Cualquier filtro de fase no mínima se puede factorizar en dos componentes, la componente paso-todo y la componente de fase mínima, y su función de transferencia  $H_{nmp}(z)$  se puede expresar en términos de estas componentes de la siguiente forma:

$$H_{nmp}(z) = H_{mp}(z)H_{ap}(z) \quad (C.1)$$

donde se tiene que:

$$|H_{nmp}(e^{j\omega})| = |H_{mp}(e^{j\omega})| \quad (C.2)$$

pues  $|H_{ap}(z)| = 1$ , y

$$\arg[H_{nmp}(e^{j\omega})] = \arg[H_{mp}(e^{j\omega})] + \arg[H_{ap}(e^{j\omega})] \quad (C.3)$$

En la figura C.3 vemos la descomposición en bloques de un filtro de fase no mínima, y en la figura C.4 vemos el diadrama de polos y ceros equivalente.



Figura C.3: Representación de un filtro de *fase no mínima* como la conexión en cascada de un filtro *paso-todo* y un filtro de *fase mínima*

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

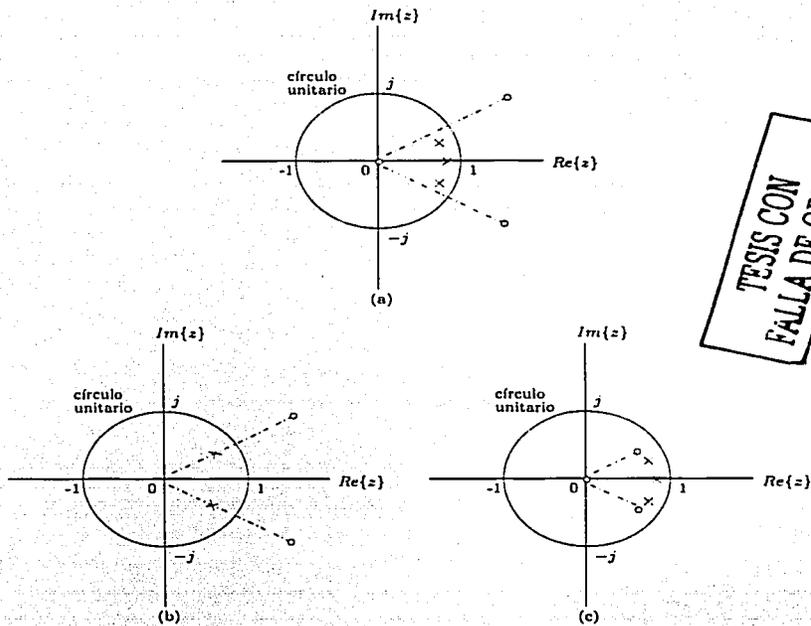


Figura C.4: Patrón de polos y ceros de (a) filtro de *fase no mínima*, (b) componente *paso-todo* y (c) componente de *fase mínima*

## Apéndice D

### Tipos de Modulación

#### D.1. Modulación Banda Base

En la figura D.1 podemos ver una versión del sistema digital de comunicaciones (SDC) enfocado principalmente a las señales banda base [32]. En este diagrama es posible apreciar que las señales que ya tienen un formato digital son enviadas directamente al modulador de pulso. La información en forma de texto es enviada a un codificador para ser transformada en dígitos binarios<sup>1</sup>, y la información analógica, en el caso más general, es muestreada, cuantificada y codificada [10],[32].

Una vez en el modulador, la señal digital es transformada a formas de onda compatibles con el canal de transmisión, siendo en el caso de los canales banda base pulsos. Después de ser transmitidos a través del canal, las formas de onda que son detectadas en el receptor producen una estimación de la señal original, y después se lleva el proceso de formato que recupera un estimado de la información transmitida.

El muestreo consiste en producir una forma de onda discreta modulada en amplitud por nuestro mensaje. La señal moduladora es de banda limitada que no tiene componentes frecuenciales arriba de los  $f_m$  hertz. Por lo tanto, del teorema del muestreo se sabe que para obtener la versión discreta de nuestra señal continua debemos de utilizar un frecuencia de muestreo:

$$f_s \geq 2f_m \quad (D.1)$$

En la modulación de pulso, las muestras son utilizadas para variar algún parámetro de los pulsos que serán transmitidos, pudiendo ser la amplitud, el ancho, la posición, etc, el parámetro a modificar. Es importante señalar que el sistema no debe de utilizar un ancho de banda mayor que el necesario para la transmisión de la señal digital.

---

<sup>1</sup>ASCII y EBCDIC son ejemplos de algunos formatos normalizados para la transformación de texto alfanumérico a formato digital.

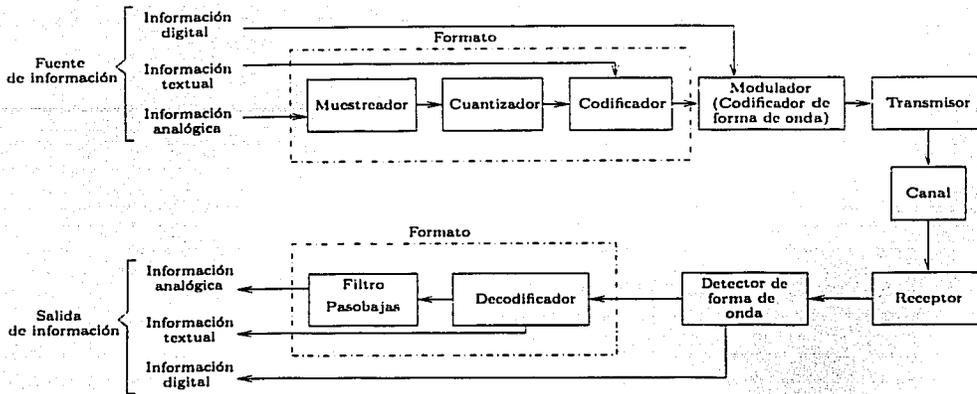


Figura D.1: Diagrama de un sistema digital de comunicaciones banda base

### D.1.1. Modulación de Amplitud de Pulso (PAM)

En esta modulación, la amplitud de un tren de pulsos de ancho constante varían en proporción a los valores muestreados de la señal moduladora. En general, los pulsos se toman en intervalos de tiempo equidistantes tal como se muestra en la figura D.2 [35].

### D.1.2. Modulación de Pulso PWM y PPM

Otro tipo de modulación utilizado consiste en la *modulación por ancho de pulso* PWM, en donde se emplean pulsos de amplitud constante pero cuyo ancho varia de manera proporcional al valor de la señal moduladora. Es importante señalar que entre cada pulso se deja un tiempo de guardia  $\tau_g$ . Este tipo de modulación se utiliza cuando se desea controlar algún dispositivo remoto, pero presenta la desventaja de requerir la detección de los dos flancos del pulso y un tiempo de guardia relativamente largo [35].

Otra posibilidad de modulación consiste en mantener constante el ancho y amplitud del pulso y modificar su posición en proporción a las señal de información. A este tipo de modulación se le llama *modulación por posición de pulso* PPM. En la figura D.3 se muestran las señales PWM y PPM para una función  $f(t)$  dada. Estos tipos de modulaciones son no lineales, razón por la cual no son tan fáciles de analizar.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

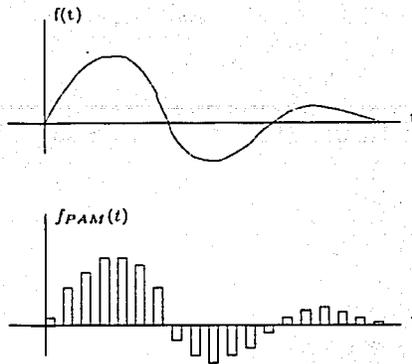


Figura D.2: Modulación de amplitud de pulso

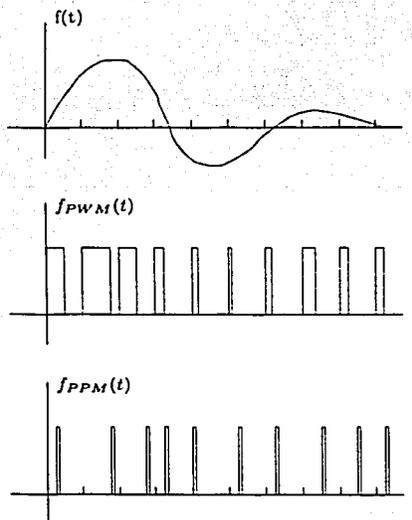
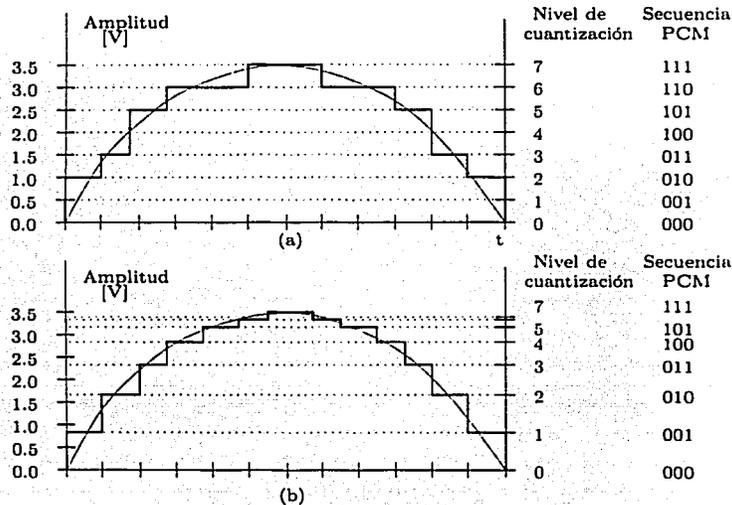


Figura D.3: Modulación PWM y PPM

TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

### D.1.3. Modulación por Codificación de Pulsos (PCM)

Los tipos de modulación de pulso descritos anteriormente utilizaban las muestras discretas en el tiempo de señales analógicas, esto es, la transmisión estaba compuesta de información analógica enviada en tiempos discretos [35]. La modulación por codificación de pulso, PCM, es el nombre dado a un tipo de señal banda base obtenida de cuantizar señales PAM codificando cada muestra cuantizada en una palabra digital. La información de la fuente es muestreada y cuantizada dentro de alguno de los  $L$  niveles; entonces cada muestra cuantizada es codificada en alguna palabra del código de  $l - bit(l = \log_2 L)$ . Para la transmisión en banda base, estos bits de la palabra código deben de transformarse en formas de onda para ser transmitidas [32].



TESIS CON FALLA DE ORIGEN

Figura D.4: PCM con cuantización: (a) Lineal (b) No lineal

Supongase que se tiene una señal como la de la figura D.4. En cada tiempo de muestra debe decidirse cual de los ocho niveles es la mejor aproximación a la señal. Este proceso introduce una distorsión a la señal conocida como *ruido de cuantización*. Entre más niveles de cuantificación se tengan menor será este ruido, sin embargo se requerirá un mayor ancho de banda pues el tamaño de la palabra aumenta. En la figura D.4(a) se tiene una cuantización lineal, es decir, los niveles están separados a una misma distancia, mientras que en la figura D.4(b) se tiene una cuantización

no lineal, es decir, la distancia entre los niveles es no uniforme. Este último tipo de cuantización se utiliza en los sistemas en los que existen diversas señales, fuertes y una débiles, de tal forma que se mejora la SNR para la señal débil que es más probable a cambio de disminuir la SNR en la señal fuerte menos probable [35],[32].

## D.2. Modulación Paso Banda

Las señales banda base no son apropiadas para transmitirse en todos los canales de transmisión, ya que existen canales de comunicación, tales como los telefónicos, los de radio y los satelitales, en los que sólo pasan señales cuyo espectro está dentro de la banda pasante del canal, la cual se sitúa lejos de la frecuencia cero (*dc*). Este tipo de canales son llamados *paso banda*. En tal situación, la información digital puede ser transmitida usando una portadora sinusoidal modulada por la secuencia de información a transmitir, ya sea en amplitud, fase, frecuencia o bien una combinación de amplitud y fase [28]. El efecto de multiplicar la señal de información banda base por una o más ondas sinusoidales, es el de desplazar el contenido frecuencial de la señal transmitida a una frecuencia apropiada dentro de la banda pasante del canal. De esta forma la información es transmitida mediante la modulación de una portadora.

En el sistema de modulación digital mostrado en la figura D.5, la entrada  $s_m(t)$  es una secuencia de señales de banda limitada, cada una de las cuales, en el caso más general (caso  $M$ -ario), representa un símbolo que corresponde a una secuencia de  $k = \log_2 M$  bits.

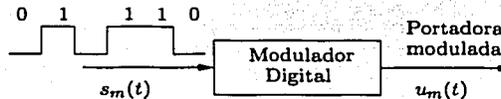
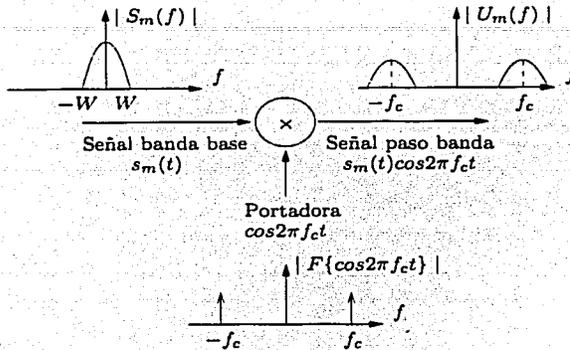


Figura D.5: Modulación digital.

### D.2.1. Modulación por Cambio en la Amplitud (ASK)

Para transmitir las señales digitales a través del canal paso banda, por medio de la *modulación en amplitud*, las señales en banda base  $s_m(t)$ ,  $m = 1, 2, \dots, M$ , son multiplicadas por una portadora sinusoidal de forma  $\cos 2\pi f_c t$ , donde  $f_c$  es la frecuencia de portadora que corresponde a la frecuencia central de la banda de paso del canal (ver figura D.6) [31],[34].

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



ORIGEN CON  
 DE

Figura D.6: Modulación en la amplitud de una señal sinusoidal.

De esta manera, las señales transmitidas pueden ser expresadas como:

$$u_m(t) = s_m(t) \cos 2\pi f_c t, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (D.2)$$

Por lo tanto, si la entrada al modulador digital fuera la secuencia binaria de pulsos cuadrados  $s_m(t)$  mostrada en la figura D.5, la salida del sistema  $u_m(t)$  sería la mostrada en la figura D.7:

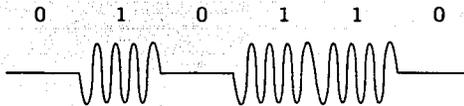


Figura D.7: Modulación ASK Binaria.

### D.2.2. Modulación por Cambio en la Fase (PSK)

En la modulación *por cambio en la fase* la transmisión de la información digital se lleva a cabo por medio del cambio en la fase de una onda portadora. Debido a que el

intervalo de valores que puede tomar la fase de la onda portadora está en  $0 \leq \theta < 2\pi$ . el intervalo de fases usado para transmitir información digital, vía modulación digital en la fase, es  $\theta_m = 2\pi m/M$ ,  $m = 0, 1, \dots, M - 1$  [28],[34]. Así para el caso binario ( $M=2$ ), las dos fases de la portadora son  $\theta = 0$  y  $\theta_1 = \pi$  radianes, por lo que para una secuencia binaria de entrada, como la que se muestra en la figura D.5, la salida del modulador digital (en fase) sería la mostrada en la figura D.8.

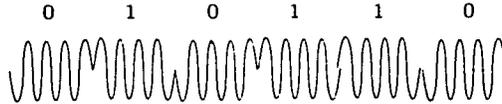


Figura D.8: Modulación PSK Binaria.

La representación general (caso  $M$ -ario) de la forma de onda resultante  $u_m(t)$  es:

$$u_m(t) = s_{T_s}(t) \cos\left(2\pi f_c t + \frac{2\pi m}{M}\right), \quad m = 0, 1, \dots, M - 1. \quad (D.3)$$

donde  $s_{T_s}(t)$ , para el caso ideal, tiene la forma de un pulso rectangular de duración  $T_s$  (duración del símbolo).

### D.2.3. Modulación por Cambio en la Frecuencia (FSK)

La modulación por cambio en la frecuencia más simple es la binaria, es decir, existen sólo dos frecuencias  $f_1$  y  $f_2$  para representar los dos estados posibles de la información [31]. Por ejemplo, para la secuencia binaria de entrada mostrada en la figura D.5, la modulación FSK es la mostrada en la figura D.9:

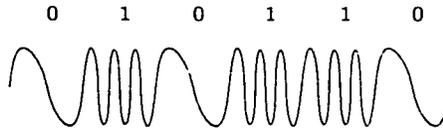
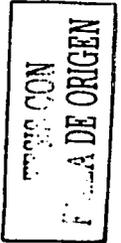


Figura D.9: Modulación FSK Binaria.

En su forma más general, la modulación FSK  $M$ -aria puede ser usada para transmitir un bloque de  $k = \log_2 M$  bits por forma de onda. En este caso, las  $M$  formas de onda pueden ser expresadas como:



$$u_m(t) = \sqrt{\frac{2E_s}{T_s}} \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t), \quad m = 0, 1, \dots, M-1. \quad 0 \leq t \leq T_s \quad (D.4)$$

donde  $E_s = kE_b$  es la energía por símbolo,  $T_s = kT_b$  es la duración del símbolo y  $\Delta f$  es la separación entre las distintas frecuencias que componen el sistema. Se puede demostrar, por medio del coeficiente de autocorrelación de la señal de salida  $u(t)$  que la mínima separación  $\Delta f$ , entre las señales que representan los símbolos, debe ser  $1/2T_s$ , para asegurar la ortogonalidad de dichas señales [28].

#### D.2.4. Modulación en Amplitud y Fase (QAM)

En los sistemas de modulación digital binarios, sólo una de las dos posibles señales puede ser enviada a la vez. Lo que significa que se tiene una eficiencia del ancho de banda teórico de  $1 \text{bps}/\text{Hz}$ . En muchas aplicaciones, los sistemas de transmisión son más efectivos si dentro de un ancho de banda dado, más bits por segundo pueden ser transmitidos. Ésto lleva a considerar sistemas de modulación  $M$ -arios, en los que una de las  $M$  posibles señales puede transportar  $k = \log_2 M$  bits [34].

Una de las formas para aumentar la eficiencia espectral es usando la *modulación en amplitud y fase*, en la cual dos señales moduladas se combinan en cuadratura de fase. El diagrama mostrado en la figura D.10 muestra como lograr dicha modulación.

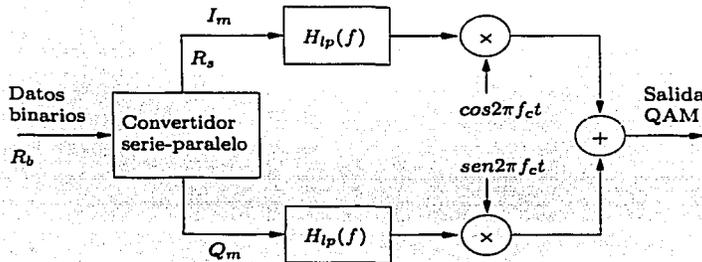


Figura D.10: Modulador QAM.

En el sistema QAM mostrado (figura D.10), el convertidor *serie-paralelo* subdivide la secuencia de datos binarios, que llegan a una tasa de  $R_b = 1/T_b$  bps, en bloques de  $k$ -bits para después mapearlos en dos niveles de amplitud ( $I_m$  y  $Q_m$ ) en paralelo a una tasa  $R_s = 1/T_s$  sps, donde  $T_s = kT_b$ . Seguido de la conversión *serie-paralelo*,

TRÁGICO CON  
 FALLA DE ORIGEN

se emplean filtros paso bajas con el fin de limitar el ancho de banda, además de proveer la forma espectral deseada a las señales  $I_m$  y  $Q_m$ , las cuales modulan a una portadora en *fase* y a una en *cuadratura*, respectivamente. Por último las señales moduladas se suman para formar la señal QAM [28],[34].

De esta manera, la forma de onda transmitida es:

$$u_m(t) = I_m h_{lp}(t) \cos 2\pi f_c t + Q_m h_{lp}(t) \sin 2\pi f_c t, \quad m = 1, 2, \dots, M \quad (D.5)$$

Notese que por medio de los niveles  $\{I_m\}$  y  $\{Q_m\}$  y la respuesta al impulso del filtro paso bajas  $h_{lp}(t)$  podemos ponderar las portadoras con el fin de obtener una señal que nos represente cualquier punto (símbolo) en una constelación, por ejemplo, 16-QAM que se muestra en la figura D.11:

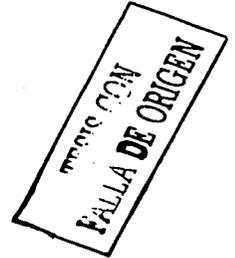
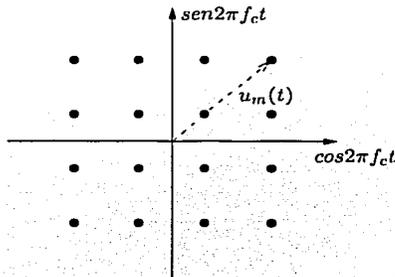


Figura D.11: Constelación para una modulación 16-QAM.

## Apéndice E

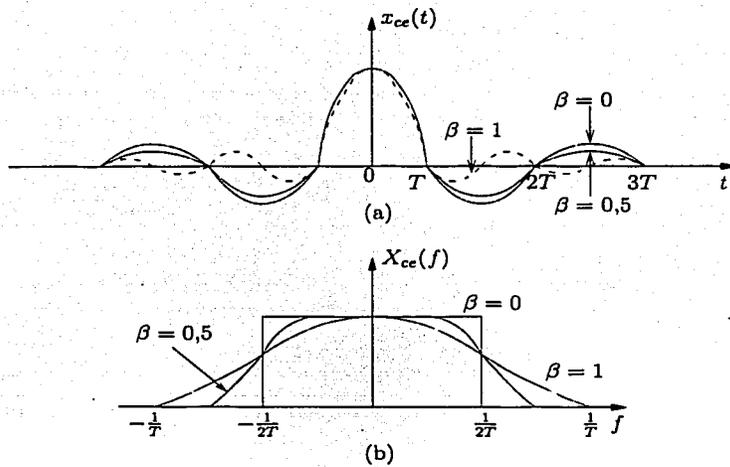
### Coseno Elevado

Un sistema (filtro transmisor, canal, filtro receptor) que ha sido ampliamente utilizado es aquel que posee un espectro con la forma del *coseno elevado*, el cual está definido por la relación E.1 y cuya respuesta temporal y frecuencial se muestran en la figura E.1.

$$X_{ce}(f) = \begin{cases} T & 0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2} \left\{ 1 + \cos \left[ \frac{\pi T}{\beta} \left( |f| - \frac{1-\beta}{2T} \right) \right] \right\} & \frac{1-\beta}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\beta}{2T} \\ 0 & |f| > \frac{1+\beta}{2T} \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

donde  $\beta$  es conocido como el factor de *roll-off* y toma valores en el intervalo  $0 \leq \beta \leq 1$ . El ancho de banda ocupado por la señal más allá de la frecuencia de Nyquist  $1/2T$  es llamado *exceso de ancho de banda*  $W_{ex}$ .





TESIS CON  
 FALLA DE ORIGEN

Figura E.1: Pulsos (a) que tienen espectro de *coseno elevado* (b).

# Glosario

**ARK** Algoritmo rápido de Kalman.

**ARMC** Algoritmo recursivo de los mínimos cuadrados.

**ASK** Modulación por cambio en la amplitud, del inglés "Amplitude Shift Keying".

**AWGN** Ruido blanco aditivo Gaussiano, del inglés "Additive White Gaussian Noise".

**DFE** Igualador de decisión retroalimentada, del inglés "Decision Feedback Equaliser".

**FIR** Respuesta impulsional finita, del inglés "Finite Impulse Response".

**FSE** Igualador fraccionalmente espaciado, del inglés "Fractionally Spaced Equaliser".

**FSK** Modulación por Cambio en la Frecuencia, del inglés "Frequency Shift Keying".

**IIR** Respuesta impulsional infinita, del inglés "Infinite Impulse Response".

**ISI** Interferencia entre símbolos, del inglés Intersymbol Interference.

**LMSF** LMS con Factor de Fuga.

**LMSG** LMS con Promedio en el Gradiente.

**LMSSD** LMS signum-data.

**LMSSE** LMS signum-error.

**LMSSS** LMS signum-signum.

**LMS** Algoritmo del gradiente estocástico, en inglés "Least Mean Square".

**MC** Mínimos cuadrados.

**MSE** Error cuadrático promedio, del inglés "Mean Square Error".

**PAM** Modulación de amplitud de pulso, del inglés "Pulse Amplitude Modulation".

**PCM** Modulación por codificación de pulso, del inglés "Pulse Code Modulation".

**PPM** Modulación por posición de pulso, del inglés "Pulse Position Modulation".

**PSK** Modulación por Cambio en la Fase, del inglés "Phase Shift Keying".

**PWM** Modulación por ancho de pulso, del inglés "Pulse Width Modulation".

**QAM** Modulación en Amplitud y Fase, en inglés "Quadrature Amplitude Modulation".

**WSS** Estacionaria en sentido amplio, del inglés "Wide Sense Stationary".

**ZF** "Del inglés zero-forcing"