

00762  
H



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**POSGRADO EN CIENCIAS  
FÍSICAS**

**“ Estabilidad de dos fluidos superpuestos en  
rotación entre dos cilindros concéntricos ”**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

P R E S E N T A :

Edgar Vázquez Luis



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Director de Tesis  
Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco

posgrado en ciencias físicas  
u n a m

MEXICO, D. F.

2003

1



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

## Agradecimientos

Al Dr. Luis Antonio Dávalos Orozco por ser el director de la tesis

Al Dr. Gerardo Ruiz Chavarría, Dra. Catalina Elizabeth Stern Forgach, Dr. Roberto Zenit Camacho y al Dr. José Julio Herrera Velázquez por sus valiosas observaciones y por ser sinodales del presente trabajo

Al Instituto de Investigaciones en Materiales, UNAM por todas las facilidades otorgadas para la realización de este trabajo.

A la DGAPA en el Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación, Proyecto IN119200 , Nombre: Efectos de Memoria en Sistemas Complejos.

A la DGEP por complemento de beca en el Programa de Becas Nacionales para Estudios de Posgrado

Al CONACYT en el Programa de Becas-Crédito Nacionales

Al Dr. Luis Felipe Del Castillo Dávila por todos los apoyos brindados

Al Fis. Raúl Reyes, Ing. Caín Gonzáles Sánchez e Ing. Nelly Molotla por el soporte técnico brindado para la realización de este trabajo

NOTIFICAR a la Dirección General de Bibliotecas:  
UNAM a difundir en formato electrónico e impr.  
contenido de mi trabajo recepción  
NOMBRE: Edgar Velázquez Luis

FECHA: 21/01/05

FIRMA: [Firma]

2

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**A mi madre  
a Rocío  
y a mi Adriana**

3

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

**Estabilidad de dos fluidos superpuestos en  
rotación entre dos cilindros concéntricos**

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

# **PAGINACIÓN DISCONTINUA**

## Resumen

Se investiga la estabilidad de dos fluidos inviscidos inmiscibles que giran inicialmente como cuerpo rígido entre dos cilindros concéntricos sin gravedad. Se plantean las ecuaciones de Euler en el sistema en rotación y se establecen las condiciones en la frontera. A partir de estas expresiones se obtienen las ecuaciones para las perturbaciones, las cuales son linealizadas y expresadas en modos normales junto con las condiciones de frontera.

Inicialmente se investiga la estabilidad de una capa de líquido con superficie libre que cubre a un cilindro en rotación. En este caso se obtiene una condición suficiente de la estabilidad para las perturbaciones azimutales planares (con número de onda axial cero y azimutal distinto de cero) y además una solución analítica para las razones de crecimiento de sus modos azimutales planares mayores a dos. En el caso de las perturbaciones axisimétricas y espirales (número de onda axial distinto de cero) se calculan numéricamente los valores propios (las razones de crecimiento, números de onda y las frecuencias de oscilación) a partir de las soluciones analíticas. Después de comparar todos los modos, se seleccionan las perturbaciones con el máximo crecimiento respecto al parámetro adimensional  $L_1 = \gamma/\rho_1\Omega^2 a^3$  (donde  $\gamma$  es el coeficiente de tensión superficial,  $\rho_1$  es la densidad del líquido,  $\Omega$  es la velocidad angular y  $a$  es el radio de la entrecara). Se encontró que la presencia del cilindro interno en el sistema hace posible la aparición del modo uno planar, como el de máxima inestabilidad para ciertos valores de su radio. En otros casos permite la aparición de los modos azimutales espirales como los de máximo crecimiento. Además, se encuentra que existe un valor de  $\kappa_1$  (el cociente del radio de la entrecara entre el radio del cilindro interno) en la cual la curva de la razón de máximo crecimiento obtiene su magnitud mas grande para un  $L_1$  dado.

A continuación se investigó la estabilidad del sistema de dos fluidos superpuestos en rotación entre dos cilindros concéntricos. Para este caso también se obtiene una condición analítica suficiente para la estabilidad que muestra entre otras cosas que para los modos axisimétricos el crecimiento en el tiempo es monótono. A partir de las soluciones analíticas, se calculan numéricamente las máximas razones de crecimiento y su correspondiente número de onda para el modo axisimétrico. Se encuentra que éste modo se desestabiliza para distintas magnitudes de  $\kappa_1$  y del cociente de densidades. Para este caso se encontró que  $\kappa_1$  tiene una influencia importante en el decremento del máximo de la razón de crecimiento. Además, el análisis demostró que el crecimiento de  $\kappa_1$  tiene un efecto clave en la localización de los puntos de transición de inestabilidad capilar a inestabilidad centrífuga.

## **TABLA DE CONTENIDO**

<b>Resumen</b>	<b>ii</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Formulación del problema</b>	<b>4</b>
<b>3. Resultados Preliminares</b>	<b>8</b>
<b>4. Capa de fluido que cubre un cilindro en rotación</b>	<b>9</b>
<b>4.1 Capa de fluido cubriendo un cilindro en rotación:         Caso axisimétrico</b>	<b>11</b>
<b>4.2 Capa de fluido cubriendo un cilindro en rotación:         Perturbaciones espirales</b>	<b>14</b>
<b>5. Sistema de dos fluidos superpuestos en rotación     entre dos cilindros concéntricos</b>	<b>18</b>
<b>6. Conclusiones</b>	<b>26</b>
<b>Apéndices</b>	
<b>A. Criterio para la estabilidad</b>	<b>28</b>
<b>B. Cálculo de la razón de crecimiento de perturbaciones planares     en una capa de fluido sobre un cilindro en rotación</b>	<b>30</b>
<b>Referencias</b>	<b>32</b>



# 1 Introducción

La estabilidad de una columna de líquido viscoso, sin rotación fue estudiada por Rayleigh (1878)[1] quien mostró que las perturbaciones axisimétricas de longitudes de onda mas grandes que la circunferencia de la columna hacen decrecer el área superficial y por tanto aumentan la energía superficial que permite el crecimiento de la perturbación. Rayleigh (1892)[2] también consideró el efecto viscoso para el mismo problema y encontró que para viscosidades grandes el rango de estabilidad permanece inalterado. Para el caso de perturbaciones que están en planos perpendiculares al eje de la columna, encontró que la columna es estable para esas perturbaciones.

En cuanto a resultados de columnas en rotación, los primeros resultados también se debieron a Rayleigh (1916) [3]. El investigó la estabilidad de dos fluidos inviscidos inmiscibles entre dos cilindros concéntricos en rotación de cuerpo rígido y obtuvo una condición necesaria y suficiente para la estabilidad ante perturbaciones axisimétricas y concluyó: "el fluido sera inestable si el valor del cuadrado de la circulación decrece con el radio en cualquier punto".

El problema con los efectos combinados de la tensión superficial y la rotación para una columna de fluido lo encontramos en el trabajo de Hocking y Michael [4]. Ellos estudiaron la estabilidad de una columna en rotación de cuerpo rígido y en rotación no uniforme. Identificaron las fuentes de inestabilidad en estos sistemas y determinaron solo la primera inestabilidad en el caso de rotación de cuerpo rígido. Sus resultados muestran que, en caso de tener una tensión superficial pequeña, el movimiento es inestable ante perturbaciones azimutales planares (con número de onda cero), pero si la tensión superficial se encuentra por encima de cierto valor crítico todas las perturbaciones se estabilizan. En el caso de rotación no uniforme la tensión superficial no alcanza a estabilizar la perturbación en la entrecara de los fluidos por tener distinta velocidad angular. En el mismo año en que Hocking y Michael obtienen sus resultados, Yih [5] estudia experimentalmente los anillos que se forman en una capa de fluido que cubre a un cilindro circular horizontal en rotación. Hasta ese momento se suponía que la tensión superficial, y presumiblemente la viscosidad, estabilizaban al sistema, pero Yih muestra que la inestabilidad ocurre a grandes valores de la tensión superficial y a números de Reynolds pequeños (basados en la velocidad angular). Además, muestra que el número de onda crítico depende principalmente de la tensión superficial. El análisis lo hace para números de Reynolds pequeños y grandes, con diferentes espesores de la capa, varios radios del cilindro y distintos valores de tensión superficial. Compara sus resultados con experimentos realizados con glicerina, agua y glicerina y agua obteniendo resultados analíticos satisfactorios.

En un trabajo posterior Hocking [6] investigó la estabilidad de una columna de líquido en rotación de cuerpo rígido ante perturbaciones axisimétricas y azimutales planares. Encontró que la rotación desestabiliza de tal modo que las perturbaciones axisimétricas de la columna son inestables si la longitud de onda de la perturbación excede la circunferencia de la columna, como lo hizo Rayleigh. Para longitudes de onda más pequeñas la tensión superficial deberá ser

suficientemente grande para vencer a la fuerza centrífuga y así poder estabilizar.

Resultados más amplios fueron obtenidos por Pedley [7], al investigar la estabilidad de pequeñas perturbaciones de una columna de fluido inviscido en rotación cuya velocidad en coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$  es de la forma  $(0, V(r), 0)$  y con una condición de frontera de superficie libre con tensión superficial y la del otro fluido en infinito o en un cilindro rígido. Pedley encontró una condición necesaria y suficiente para la estabilidad de las perturbaciones axisimétricas y azimutales que generalizan las de Hocking para velocidades que dependen directa e inversamente con respecto al radio. Muestra que los modos azimutales son los más inestables si la rotación es suficientemente grande.

El problema inviscido y viscoso fué también investigado por Boudouires y Davis [8]. Para el caso inviscido dan una condición necesaria y suficiente para la estabilidad tomando en cuenta efectos combinados de capilaridad, Rayleigh-Taylor y mecanismos centrífugos. En el caso viscoso solo dan una condición suficiente para la estabilidad. Joseph, et al. [9] investigaron la estabilidad de dos líquidos inmiscibles con diferentes viscosidades y densidades contenidos entre dos cilindros concéntricos rotando a la misma velocidad angular. En su estudio ignoran la gravedad y toman en cuenta la tensión superficial. Además, usan el método de la energía para determinar la estabilidad y muestran bajo qué criterios el radio de la entrecara se mantiene estable.

Un antecedente importante de nuestro trabajo es la investigación realizada por Weidman (1994) [10] sobre la estabilidad de dos fluidos inmiscibles en rotación de cuerpo rígido. Él investigó perturbaciones en presencia de tensión superficial y la estabilidad de Rayleigh-Taylor debida a la fuerza centrífuga en ausencia de gravedad. Encontró criterios de estabilidad para perturbaciones axisimétricas, azimutales planares y espirales para fluidos inviscidos y solo para las axisimétricas de fluidos viscosos.

En su artículo Weidman, et al. (1997) [11] realizaron una investigación que se ha tomado como punto de partida para el presente trabajo. Ellos investigaron la estabilidad de una columna de dos fluidos inviscidos inmiscibles dentro de un cilindro en rotación de cuerpo rígido en ausencia de gravedad. Obtuvieron una condición necesaria y suficiente para la estabilidad que incluye modos axisimétricos y azimutales. Por otro lado, calculan numéricamente las razones de máximo crecimiento en función de los parámetros del problema. Investigaron el caso de una sola columna de fluido con superficie libre y el de dos fluidos superpuestos. La primera investigación es el caso extremo de una situación inestable en que solo hay fluido interior. En este caso encontraron que las perturbaciones con máximo crecimiento son axisimétricas o azimutales planares (con número de onda cero) dependiendo de la tensión superficial y de la rapidez de rotación. En el segundo caso consideraron una estratificación estable y encontraron que éste solo se desestabiliza con perturbaciones axisimétricas. También investigaron el caso extremo en que solo hay fluido exterior.

El interés por entender la aparición de modos azimutales como los más inestables se ha reflejado en distintas publicaciones recientes. Por ejemplo, Dávalos-Orozco y Ruiz-Chavarría (1993) [12] investigaron la estabilidad lineal de una capa de fluido descendiendo por dentro o fuera de un cilindro en rotación. Hicieron

dos aproximaciones, a número de onda pequeño y a número de Reynolds pequeño. Obtuvieron como resultado general que para el flujo fuera del cilindro y cierta magnitud de la fuerza centrífuga y del número de onda el modo dominante de la inestabilidad puede pasar del cero (modo axisimétrico) al uno. En el caso de flujo por dentro, el modo cero es el más inestable. Posteriormente, Ruiz-Chavarría y Dávalos-Orozco (1996) [13] investigaron analíticamente con detalle los efectos de la fuerza de Coriolis en la estabilidad. Se calcularon razones de crecimiento para los modos azimutales  $\pm 1$  para flujo dentro y fuera del cilindro. Para rotaciones lentas encontraron que bajo ciertas circunstancias el modo  $-1$  puede ser el más inestable. Por otro lado, Ruiz-Chavarría y Dávalos-Orozco (1997) [14] realizaron un análisis numérico de las ecuaciones de movimiento lineales completas para un rango amplio de los parámetros.

Más adelante, Dávalos-Orozco y You (2000) [15] investigaron la inestabilidad termocapilar tridimensional de una capa de fluido que cubre un cilindro vertical por fuera y por dentro, tanto en ausencia como en presencia de gravedad. En el caso puramente termocapilar (en ausencia de gravedad y por tanto sin flujo vertical) se encontró que no es necesaria la rotación del cilindro para excitar los grandes modos azimutales, aún en el interior del cilindro. Sin embargo, en el interior del cilindro el modo cero es el más inestable. Cuando la acción de la gravedad está presente el flujo de líquido influye para que, en comparación al caso anterior, se encuentren modos azimutales mayores tanto por dentro como por fuera. Pero de nuevo, en el interior el modo cero es el más inestable.

En la presente tesis se investiga la estabilidad de dos fluidos inviscidos inmiscibles contenidos entre dos cilindros concéntricos en rotación. Aquí el efecto del cilindro interior es el objetivo de la investigación que aquí se presenta. Como se verá, la introducción de esa nueva frontera traerá como consecuencia novedosos e interesantes resultados. Un caso particular incluye al de una capa de fluido que cubre a un cilindro sólido en rotación.

El trabajo empieza con la formulación del problema y la presentación de las ecuaciones que satisfacen las perturbaciones lineales. En el capítulo tres se presenta un resumen de los criterios de estabilidad y fórmulas analíticas para las razones de crecimiento de las perturbaciones axisimétricas y azimutales planares. En el capítulo cuatro se describen los algoritmos y métodos numéricos utilizados para la solución de las ecuaciones de valor propio. Por otro lado, se presentan resultados de cálculos numéricos y analíticos para el caso de una columna con superficie libre y núcleo sólido. Los resultados del problema de dos fluidos entre dos cilindros en rotación se dan en el capítulo cinco. La discusión y conclusiones se exponen en el capítulo seis. Finalmente, se dan dos apéndices para completar la teoría.

## 2 Formulación del problema

El sistema cuya estabilidad se investiga consiste de dos fluidos inviscidos inmiscibles que giran inicialmente como cuerpo rígido entre dos cilindros concéntricos y de longitud infinita. Esta configuración se muestra en la Fig. 1 donde las coordenadas cilíndricas son  $(r, \theta, z)$ . Allí se observa que el radio del cilindro interno es  $r = c$ , que la entrecara de los dos fluidos está en  $r = a$  y que la pared del cilindro exterior se encuentra en  $r = b$ . Los fluidos tienen densidades  $\rho_i$  constantes, donde suponemos que  $i = 1$  y  $2$  para el fluido interior y el exterior, respectivamente. Los vectores unitarios en la dirección de los ejes coordenados son  $e_r, e_\theta, e_z$ . Así, el vector velocidad angular del sistema se puede representar como  $\vec{\Omega} = \Omega e_z$ , siendo  $\Omega$  la magnitud de la rapidez de rotación. El coeficiente de tensión superficial entre los dos fluidos se denota por  $\gamma$ .

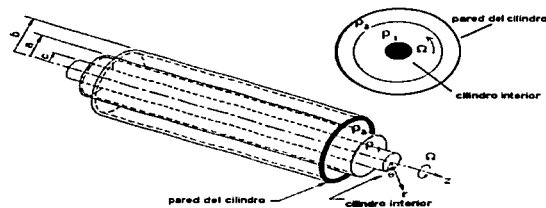


Figura 1. Dos capas de fluidos entre dos cilindros concéntricos en rotación. Se muestran los radios del cilindro interior  $r = c$ , de la entrecara  $r = a$  y del cilindro exterior  $r = b$ .

El comportamiento de los fluidos se describe por medio de las ecuaciones de Euler correspondientes a un sistema de referencia en rotación y en ausencia de gravedad

$$\frac{D\vec{u}_i}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u}_i = -\frac{1}{\rho_i} \nabla p_i + \nabla \left[ \frac{(\vec{\Omega} \times \vec{r})^2}{2} \right] \quad (1)$$

junto con la ecuación de continuidad para fluidos incompresibles

$$\nabla \cdot \vec{u}_i = 0 \quad (2)$$

Aquí,  $t$  es el tiempo,  $\vec{r}$  es el vector de posición con  $r$  su magnitud, y  $\vec{u}_i = (u_i, v_i, w_i)$  son los vectores de velocidad y sus componentes correspondientes a las direcciones de los vectores unitarios. Las variables se adimensionalizan

escalando el tiempo con  $\Omega^{-1}$ , las longitudes con el radio donde se localiza la entrecara  $a$ , las velocidades con  $a\Omega$  y la presión con  $\rho_2\Omega^2 a^2$ . De este modo, las Ecs. (1) en coordenadas cilíndricas y en su forma adimensional están dadas por

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (u_i \cdot \nabla) u_i - \frac{v_i^2}{r} - 2v_i = -\frac{1}{\lambda^{2-i}} \frac{\partial}{\partial r} \left[ p_i - \frac{\lambda^{2-i}}{2} r^2 \right] \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + (u_i \cdot \nabla) v_i - \frac{u_i v_i}{r} - 2u_i = -\frac{1}{\lambda^{2-i}} \frac{1}{r} \frac{\partial p_i}{\partial \theta} \quad (4)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + (u_i \cdot \nabla) w_i = -\frac{1}{\lambda^{2-i}} \frac{\partial p_i}{\partial z} \quad (5)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_i) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

donde  $\lambda = \rho_1/\rho_2$  es la razón de las densidades y

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial}{\partial z} e_z$$

En estas condiciones, la entrecara se encuentra en  $r = 1$ , la pared del cilindro exterior en  $r = \kappa = b/a$  y la pared del cilindro interior en  $\kappa_1 = c/a$  donde ( $\kappa_1 < 1 < \kappa$ ). Así, la posición de la perturbación de la entrecara se localiza en  $r = 1 + \eta(\theta, z, t)$  y el vector normal a la entrecara está dado por:

$$\vec{n} = \left( e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} e_\theta + \frac{\partial \eta}{\partial z} e_z \right) \left[ 1 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right]^{-1/2}$$

Las condiciones de frontera son respectivamente

$$p_1 = p_0 \quad \text{en } r = \kappa_1 \quad (7)$$

$$u_1 = 0 \quad \text{en } r = \kappa_1 \quad (8)$$

$$u_2 = 0 \quad \text{en } r = \kappa \quad (9)$$

Donde  $p_0$  es una presión de referencia y en la entrecara es necesario que la deformación cumpla con la continuidad en las velocidades

$$u_i - \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{v_i}{r} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} + w_i \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) = 0 \quad \text{en } r = 1 + \eta \quad (10)$$

La discontinuidad en la presión se debe a la tensión superficial y está dada por la ecuación de Young y Laplace

$$p_2 - p_1 = L_2 \nabla \cdot \vec{n} \quad \text{en } r = 1 + \eta \quad (11)$$

En el estado hidrostático el sistema completo rota como cuerpo rígido y en el dominio de cada fluido tenemos, respectivamente, que

$$p_{01} = p_0 + \frac{1}{2} \lambda (r^2 - \kappa_1^2) \quad \kappa_1 \leq r \leq 1 \quad (12)$$

$$p_{02} = p_0 + \frac{1}{2} r^2 + \frac{\lambda - 1}{2} - \frac{1}{2} \lambda \kappa_1^2 - L_2 \quad 1 \leq r \leq \kappa \quad (13)$$

Aquí, se define a  $L_i = \gamma / \rho_i \Omega^2 a^3$  como la razón de la fuerza de tensión superficial entre la fuerza centrífuga del fluido  $i = 1$  o  $2$  evaluada en la entrecara.

Ahora, para linealizar las ecuaciones, consideramos perturbaciones muy pequeñas  $\vec{u}_i$ ,  $p_i$ ,  $\eta$ , del vector velocidad, de la presión y de la entrecara, respectivamente. Entonces, el estado hidrostático del sistema se perturba como sigue

$$\begin{pmatrix} \vec{u}_i \\ p_i \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ p_i \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \vec{u}_i \\ p_i \\ \eta \end{pmatrix} \quad (14)$$

Esto se sustituye en las ecuaciones de movimiento (3) a (6). Después de sustraer la parte correspondiente a la solución hidrostática, se linealizan las ecuaciones para dar lugar a las ecuaciones de las perturbaciones en cada región

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} - 2v_i = -\frac{1}{\lambda^2 - 1} \frac{\partial p_i}{\partial r} \quad (15)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + 2u_i = -\frac{1}{\lambda^2 - 1} \frac{1}{r} \frac{\partial p_i}{\partial \theta} \quad (16)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} = -\frac{1}{\lambda^2 - 1} \frac{\partial p_i}{\partial z} \quad (17)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_i) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} + \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

Las condiciones de frontera linealizadas para las perturbaciones son

$$u_i = 0 \quad \text{en } r = \kappa_1 \quad (19)$$

$$w_2 = 0 \quad \text{en } r = \kappa \quad (20)$$

donde la condición cinemática es:

$$w_i - \frac{\partial \eta'}{\partial t} = 0 \quad \text{en } r = 1 \quad (21)$$

y la ecuación de Young-Laplace queda:

$$p_2 - p_1 = -(1 - \lambda) \eta' + L_2 \left( \eta' + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \eta'}{\partial z^2} \right) \quad \text{en } r = 1 \quad (22)$$

En adelante, se supondrán perturbaciones en modos normales de la forma  $(u_i, v_i, w_i, p_i, \eta') = (U_i(r), V_i(r), W_i(r), P_i(r), A) e^{i(kz+n\theta)+st}$ , siendo  $U_i(r)$ ,  $V_i(r)$ ,  $W_i(r)$ ,  $P_i(r)$  y  $A$  las amplitudes de las tres componentes de la velocidad, de la presión y de la perturbación de la entrecara, respectivamente. Además,  $k$  es el número de onda axial,  $n$  es el número azimutal y  $s = \sigma + i\omega$  es un número complejo cuya parte real es la razón de crecimiento de la perturbación y cuya parte imaginaria es la frecuencia de oscilación de la perturbación. Así, los modos normales se sustituyen en las Ecs. (15) a (18). Las ecuaciones que satisfacen las amplitudes son

$$sU_i - 2V_i = -\frac{1}{\lambda^2 - i} DP_i \quad (23)$$

$$sV_i + 2U_i = -\frac{in}{r\lambda^2 - i} P_i \quad (24)$$

$$sW_i = -\frac{ik}{\lambda^2 - i} P_i \quad (25)$$

$$\frac{1}{r} D(rU_i) + \frac{in}{r} V_i + ikW_i = 0 \quad (26)$$

junto con las condiciones de frontera

$$U_1 = 0 \quad \text{en } r = \kappa_1 \quad (27)$$

$$U_2 = 0 \quad \text{en } r = \kappa \quad (28)$$

$$U_1 = U_2 = sA \quad \text{en } r = 1 \quad (29)$$

$$P_2 - P_1 = -\Psi A \quad \text{en } r = 1 \quad (30)$$

siendo  $D \equiv d/dr$  un operador y

$$\Psi = (1 - \lambda) - L_2 (1 - n^2 - k^2) \quad (31)$$

### 3 Resultados preliminares

A continuación se muestran algunos resultados analíticos preliminares para entender la estabilidad del sistema de dos fluidos en rotación. Un criterio de estabilidad preliminar se demuestra en el Apéndice A donde se usa un método similar al de Chandrasekhar[16]. Por este método se llega a una condición suficiente para la estabilidad por medio de la desigualdad

$$(1 - n^2 - k^2) L_2 < (1 - \lambda) \quad (32)$$

De esta manera, cualquier inestabilidad en el flujo es posible solo cuando  $k < k_0$ , donde el número de onda que marca el punto límite de estabilidad está dado por

$$k_0 = \sqrt{(1 - n^2) - \frac{1 - \lambda}{L_2}} \quad (33)$$

Los resultados obtenidos en el Apéndice A para nuestro sistema con el cilindro interior coinciden con los resultados de Weidman et. al. [11] ya que en el método empleado no es necesario utilizar explícitamente las condiciones de frontera. La expresión Ec. (32) será de utilidad en la búsqueda de los números de onda de las perturbaciones inestables en los cálculos numéricos. Por ejemplo, si  $0 \leq \lambda \leq 1$  el fluido interno es menos denso que el externo y por tanto todos los modos azimutales planares ( $k = 0, n \neq 0$ ) así como los modos espirales ( $|n| \geq 1, k \neq 0$ ) son estables (ver Apéndice A). Sin embargo, los modos axisimétricos ( $n = 0$ ) son estables solo en el caso que  $L_2 < (1 - \lambda)$ . En el Apéndice A se obtiene además la condición de intercambio de estabildades para el caso inviscido axisimétrico.

Un caso particular de interés es aquel en que  $\lambda^{-1} = 0$  correspondiente a una capa de líquido con superficie libre cubriendo a un cilindro en rotación. Éste caso, como el estudiado por Hocking y Michael [4] sin cilindro interior, es un sistema susceptible a perturbaciones inestable axisimétricas, acimutales y espirales. Al generalizar el procedimiento de Hocking y Michael, se encontró que



la capa de líquido que cubre al cilindro es estable para perturbaciones acimutales planares ( $k = 0$ ) si el modo  $n$  satisface

$$L_1 > \frac{n - C}{n(n^2 - 1)} \quad (n \geq 2) \quad (34)$$

siendo  $L_1 = \gamma/\rho_1 \Omega^2 a^3$  y  $C = \frac{1 - \kappa_1^{2n}}{1 + \kappa_1^{2n}}$ . Así, la columna es estable si para todos los modos acimutales planares se cumple la Ec. (34) y cuando ésto no se satisface el flujo es inestable con una razón de crecimiento (ver Apéndice B) del modo ( $n \geq 1$ ) correspondiente dada por

$$\sigma_n = \sqrt{C\{(n-1)[1 - L_1 n(n+1)] + 1 - C\}} \quad (n \geq 1) \quad (35)$$

Esta última expresión se reduce al caso de Hocking y Michael [4] si hacemos  $\kappa_1 \rightarrow 0$ , es decir, si  $C = 1$ . Nótese que Hocking y Michael solo aceptan como físicamente posibles en al Ec. (35) a los modos  $n \geq 2$  debido a que el modo  $n = 1$  corresponde a un simple desplazamiento de la columna infinita de fluido (no sucede nada realmente). Por esa razón  $\sigma_n = 0$  si  $n = 1$  cuando  $\kappa_1 \rightarrow 0$  y  $k = 0$ . Sin embargo, en nuestro caso el modo  $n = 1$  sí es físicamente posible por que se tiene como referencia el cilindro interior y por tanto lo que haría la capa de fluido en este modo es aparecer como un cilindro excéntrico con respecto al cilindro interior. Más aún, si se sustituye  $n = 1$  en la Ec. (35) se obtendrá para el  $\kappa_1$  dado el valor constante obtenido numéricamente y mostrado más adelante en las Figs. 5 y 7.

Ahora, solo queda por determinar para qué perturbación se tiene la mayor razón de crecimiento, aquella que corresponda será la que prevalezca ya que dominará sobre las otras perturbaciones. Pedley [7] et al. y, más recientemente, Weidman et al. [11] resuelven el problema para el caso en ausencia de cilindro interior. Ellos concluyen que los modos azimutales planares ( $k = 0$ ) son los que dominan sobre los modos donde el máximo crecimiento se encuentra a un número de onda finito,  $k \neq 0$ . Sin embargo, el papel de los modos espirales todavía queda como una pregunta abierta para la columna de fluido rotando con un cilindro interior. Ésto se discutirá más adelante.

#### 4 Capa de fluido que cubre un cilindro en rotación

Antes de entrar en materia se dan algunas explicaciones sobre el procedimiento numérico utilizado para obtener los valores propios de  $n$ ,  $k$ , y  $s$  de la perturbación. Los cálculos necesarios para determinar la estabilidad del sistema, como es el caso de la evaluación de las funciones propias (funciones modificadas de Bessel), utilizan las librerías DCBIS, DCBKS del IMSL en lenguaje FORTRAN. En muchos de los cálculos es necesario determinar las raíces y los máximos de funciones implícitas. La determinación de raíces se hizo utilizando el método de Newton-Raphson y en otros casos, alternativamente el método de

Müller. Para la determinación de los máximos se escribieron algoritmos adecuados. En general, los valores propios se obtuvieron a partir de una ecuación implícita analítica deducida directamente de las ecuaciones diferenciales parciales de movimiento reducidas a ordinarias por medio de modos normales, como se explicó en las secciones anteriores.

El problema físico a discutir en esta sección es el de una capa de fluido que cubre a un cilindro en rotación. Suponemos que el único efecto que la capa sienta del fluido exterior es la presión, que puede ser considerada como la presión atmosférica, ya que en este caso el cilindro exterior no tiene influencia en la estabilidad. Así, la densidad del fluido exterior es cero y por tanto  $\lambda^{-1} = 0$ . Las ecuaciones perturbadas y las condiciones de frontera que satisfacen la capa de fluido son la Ec. (23) y (31) con  $i = 1$ . Al eliminar las componentes de la velocidad, se obtiene una ecuación para la presión

$$D^2 P_1 + \frac{1}{r} D P_1 - \left[ \frac{n^2}{r^2} + \alpha^2 \right] P_1 = 0 \quad (36)$$

siendo  $\alpha^2 = k^2 (s^2 + 4) / s^2$ . La solución de esta ecuación deberá ser tal que se satisfaga la condición de que la velocidad radial en la superficie cilindro interior sea cero. A partir de las ecuaciones, se tiene el resultado general

$$U_1 = -\frac{1}{\lambda (s^2 + 4)} \left( s D P_1 + \frac{2in}{r} P_1 \right) = 0 \quad \text{en } r = \kappa_1 \quad (37)$$

La solución para la presión tiene la forma

$$P_1(r) = A_1 I_n(\alpha r) + B_1 K_n(\alpha r) \quad (38)$$

siendo  $I_n(z)$  y  $K_n(z)$  las funciones modificadas de Bessel de primer y segundo tipo, cuyo argumento  $z$  es en general complejo. Ahora, se introduce la solución Ec. (38) en la condición de la entrecara Ec. (30) y en las condiciones Ecs. (29) y (37). Por otro lado, se utiliza el hecho de que cuando  $\lambda^{-1} \rightarrow 0$  entonces  $\Psi/\lambda = -[1 + L_1(1 - n^2 - k^2)]$  y la presión se adimensionaliza usando  $\rho_1$  en lugar de  $\rho_2$ . De todo esto, se obtiene la siguiente ecuación de valor propio para  $s$  en función de  $k$ ,  $n$  y  $\kappa_1$ .

$$\alpha \left[ \frac{I_n'(\alpha) - \frac{I_n'(\alpha\kappa_1) + \frac{2in}{\kappa_1} I_n(\alpha\kappa_1)}{K_n'(\alpha\kappa_1) + \frac{2in}{\kappa_1} K_n(\alpha\kappa_1)} K_n'(\alpha)}{I_n(\alpha) - \frac{I_n(\alpha\kappa_1) + \frac{2in}{\kappa_1} I_n(\alpha\kappa_1)}{K_n(\alpha\kappa_1) + \frac{2in}{\kappa_1} K_n(\alpha\kappa_1)} K_n(\alpha)} \right] = \frac{s^2 + 4}{1 + (1 - k^2 - n^2) L_1} - \frac{2in}{s} \quad (39)$$

Aquí, las primas denotan derivada respecto al argumento de las funciones de Bessel. En caso de tomar el límite  $\kappa_1 \rightarrow 0$  el cilindro interior tiende a desaparecer y se obtiene la expresión reportada por Weidman et al. [11] para una columna de líquido en rotación.

#### 4.1 Capa de fluido cubriendo un cilindro en rotación: Caso axisimétrico

En el caso particular de perturbaciones axisimétricas ( $n = 0$ ) se demuestra en el Apéndice A que la frecuencia  $\omega = 0$ , o sea que el flujo es estacionario y  $s = \sigma$  es real. Así, se obtiene que la Ec. (39) de valor propio toma la forma

$$\alpha \left[ \frac{I'_0(\alpha) - \frac{I_1(\alpha\kappa_1)}{K_1(\alpha\kappa_1)} K'_0(\alpha)}{I_0(\alpha) - \frac{I_1(\alpha\kappa_1)}{K_1(\alpha\kappa_1)} K_0(\alpha)} \right] = \frac{s^2 + 4}{1 + (1 - k^2) L_1} \quad (40)$$

Notese que ahora  $\alpha = k\sqrt{\sigma^2 + 4}/\sigma$ . Para flujo estacionario se puede tomar el límite  $\Omega \rightarrow 0$  para entender un poco más el comportamiento de los valores propios. Para ésto, es necesario cambiar a la Ec. (40) a su forma dimensional y tomar el límite adecuadamente. De nuevo, en forma adimensional, el resultado es

$$\sigma^2 \approx k(1 - k^2) \frac{I'_0(k) - \frac{I_1(k\kappa_1)}{K_1(k\kappa_1)} K'_0(k)}{I_0(k) - \frac{I_1(k\kappa_1)}{K_1(k\kappa_1)} K_0(k)} L_1 \quad (L_1 \rightarrow \infty) \quad (41)$$

el cual, en el límite  $\kappa_1 \rightarrow 0$ , también se reduce a la expresión obtenida por Weidman et al. [11] que corresponde al límite reportado por Rayleigh [2].

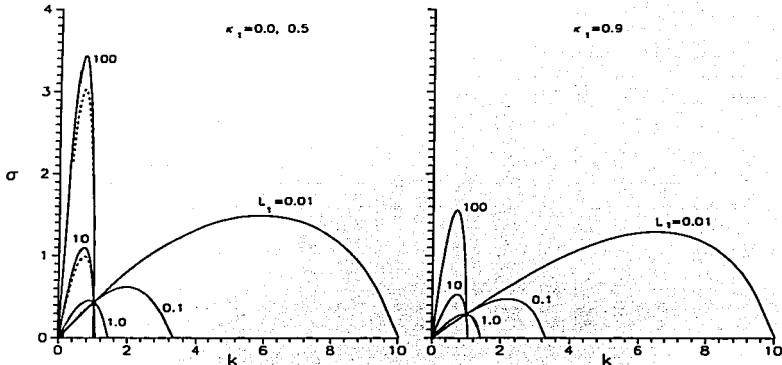


Figura 2. Curvas de  $\sigma$  vs  $k$  para distintos valores de  $L_1$ . Para  $\kappa_1 = 0$  y 0.5 (figura de la izquierda) las curvas se sobrepone excepto cuando  $L_1 = 10$  y 100 ( la línea punteada corresponde a  $\kappa_1 = 0.5$  ). Las curvas de  $\kappa_1 = 0.9$  están en la figura de la derecha.

Notese en la Ec. (40) que  $L_1$  desaparece cuando  $k = 1$  por lo que  $\sigma$  depende sólomente de  $\kappa_1$  en este caso. Ejemplos de las curvas de razón de crecimiento  $\sigma$  vs  $k$  para tres valores de  $\kappa_1$  y varios valores de  $L_1$  se presentan en la Fig. 2. En ella se observa que las curvas de  $\kappa_1 = 0.5$  y  $0.0$  (caso de Weidman et al.) se superponen excepto cuando  $L_1 = 10$  y  $100$  donde la línea punteada indica el caso  $\kappa_1 = 0.5$ . Para  $k = 1$ , las curvas correspondientes a  $\kappa_1 = 0$  y  $0.5$  se intersectan en  $\sigma = 0.43323$  y las de  $\kappa_1 = 0.9$  en  $\sigma = 0.28721$ .

También se observa que las razones de crecimiento disminuyen conforme se aumenta el parámetro  $0 \leq \kappa_1 \leq 1$ . Ésto se debe a la disminución de masa de fluido en la capa, que empieza a percibir una menor fuerza centrífuga conforme el radio del cilindro interior se acerca al de la superficie libre.

El máximo de la razón de crecimiento se puede calcular derivando la Ec. (40) con respecto a  $k$  e igualando a cero  $\partial\sigma/\partial k$ . Después de usar las propiedades de las funciones de Bessel se obtiene

$$L_1 = \frac{(\sigma + 4)(\kappa_1 G_1 + G_2) - \alpha(\kappa_1 G_3 + G_4)}{\alpha(1 - k^2)(\kappa_1 G_3 + G_4) - 2kG_2} \quad (42)$$

donde

$$G_1 = I_0(\alpha) K_0(\alpha\kappa_1) - K_0(\alpha) I_0(\alpha\kappa_1)$$

$$G_2 = I'_0(\alpha) K'_0(\alpha\kappa_1) - K'_0(\alpha) I'_0(\alpha\kappa_1)$$

$$G_3 = I'_0(\alpha) K_0(\alpha\kappa_1) - K'_0(\alpha) I_0(\alpha\kappa_1)$$

$$G_4 = I_0(\alpha) K'_0(\alpha\kappa_1) - K_0(\alpha) I'_0(\alpha\kappa_1)$$

La Ec. (42) se usa para eliminar  $L_1$  de la Ec. (40). De este modo se obtiene una ecuación trascendental que implícitamente determina a  $\sigma_m$  como una función de  $k_m$  y de  $\kappa_1$ . Después de evaluar, los valores obtenidos se sustituyen en la Ec. (42) para obtener el valor correspondiente de  $L_1$ . De este modo, se obtienen las curvas de máximo crecimiento para el caso axisimétrico ( $n = 0$ ) que se presentan en la Fig. 3. En ella se observan las curvas de máximo crecimiento incluyendo el caso  $\kappa_1 = 0$ . Una tendencia general es el decremento de los máximos a medida que el parámetro  $\kappa_1$  aumenta de  $0.5$  a  $0.9$ .

La existencia de un mínimo se debe al equilibrio entre los efectos centrífugos y capilares. Se puede ver que en la zona donde dominan los efectos de la rotación (a la izquierda del mínimo) las curvas se aproximan entre sí, lo cual nos indica que los efectos centrífugos que promueven la inestabilidad no son afectados por

la variación en el espesor de la capa cuando el cilindro interior crece. En cambio en la zona donde dominan los efectos capilares ( a la derecha del mínimo) las curvas se separan claramente haciéndose evidente que al disminuir el espesor de la capa hay un efecto estabilizador.

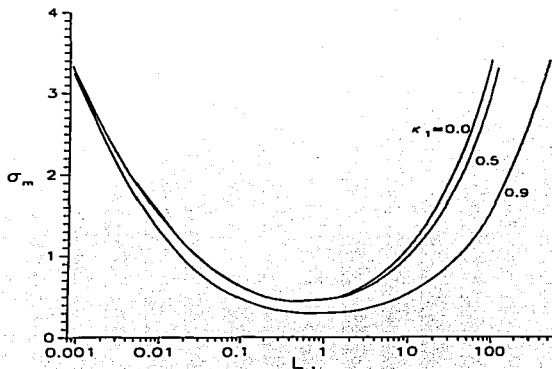


Figura 3. Razón de máximo crecimiento contra el parámetro  $L_1$  para distintos valores de  $\kappa_1$ .

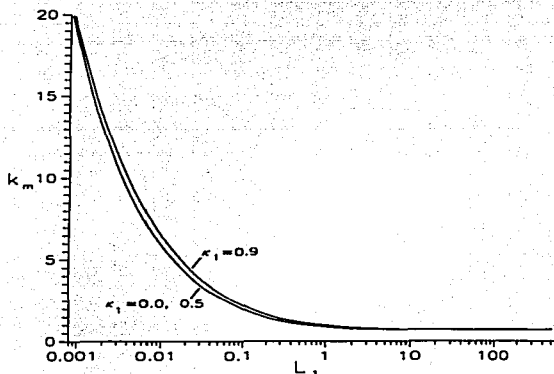


Figura 4. Número de onda correspondiente al máximo crecimiento contra  $L_1$  para distintos valores de  $\kappa_1$ .

En la Fig. 4 se muestran los resultados de los números de onda correspondientes al máximo crecimiento  $k_m$ . Se encuentra que el número de onda tiende a crecer moderadamente conforme se aumenta el parámetro  $\kappa_1$  de 0.5 a 0.9 en valores intermedios de  $L_1$ . Para los valores en los límites  $L_1 \rightarrow 0$  y  $L_1 \rightarrow \infty$  se obtienen resultados semejantes a los de  $\kappa_1 = 0.0$ . El comportamiento que se observa en dicha gráfica se debe a que en la superficie libre los números de onda pequeños son los que sobreviven al incrementar  $L_1$  (o sea la tensión superficial longitudinal). Si  $L_1$  decrece (la rotación aumenta o la tensión superficial decrece) los números de onda cada vez más grandes empiezan a tener posibilidades de desestabilizarse. Esto se entiende observando que la tensión superficial y el número de onda longitudinal se encuentran en producto en la condición de frontera del salto de presiones Ec. (30) (ver Ec. (31) cuando  $n = 0$ ).

## 4.2 Capa de fluido cubriendo un cilindro en rotación: Perturbaciones espirales

En el caso de perturbaciones espirales ( $n \geq 1, k \neq 0$ ) sabemos por el Apéndice A que  $\omega \neq 0$  y por tanto la Ec. (39) de valor propio se evalúa tomando  $s = \sigma + i\omega$  como compleja. Aquí se barrieron en un amplio intervalo los valores

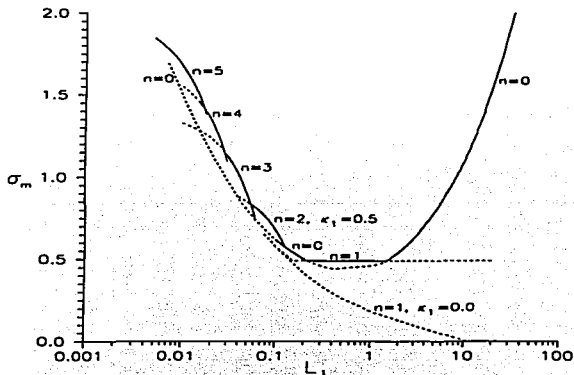


Figura 5. Razón de máximo crecimiento contra  $L_1$  para  $\kappa_1 = 0, 0.5$ . Competencia entre modos azimutales planares. Las líneas continuas indican el intervalo de  $L_1$  donde los modos son los más inestables.

de los parámetros  $L_1$  y  $\kappa_1$  para calcular numéricamente las curvas de  $\sigma$  y  $\omega$  contra  $k$ . Para el modo espiral  $n = 1$ , en el caso  $\kappa_1 = 0.5$ , se encontró que la

curva de máximo crecimiento puede estar arriba de la correspondiente al modo  $n = 0$  en un intervalo de valores de  $L_1$  comprendidos aproximadamente entre  $0.22 < L_1 < 1.46$ . Dentro de este intervalo se encuentra el mínimo con respecto a  $L_1$  de los máximos crecimientos del modo  $n = 0$ . Estos resultados marcan una diferencia importante con respecto a los obtenidos por Weidman et al. Para valores desde  $L_1 = 1.46$  hasta  $L_1 \rightarrow \infty$  el modo axisimétrico es el más inestable. Cuando  $L_1 < 0.22$  de nuevo el modo axisimétrico es el más inestable en un corto rango de valores, para dar paso a modos azimutales planares y espirales cuando  $L_1$  se hace aún más pequeña.

Los resultados obtenidos para la razón de máximo crecimiento en el caso  $\kappa_1 = 0.5$  se resumen en la Fig. 5. Aquí se encuentra que casi todas las curvas calculadas se superponen al caso  $\kappa_1 = 0$  excepto cuando el modo es  $n = 1$ , ya discutido y cuando es  $n = 2$ , el cual tiene una razón de crecimiento ligeramente mayor. Entonces, en resumen, para  $\kappa_1 = 0.5$  el sistema es inestable solamente para modos axisimétricos y acimutales planares. El modo de inestabilidad es axisimétrico para toda  $L_1 > 1.46$ . Por abajo de este valor encontramos que el modo  $n = 1$  es el más inestable hasta el valor de  $L_1 = 0.22$ , donde el modo axisimétrico  $n = 0$  domina disminuyendo hasta el valor  $L_1 = 0.1053$  a partir del cual domina el modo azimutal planar  $n = 2$ , y así sucesivamente. Para saber si nuestros resultados eran definitivos y poder concluir que los modos espirales con  $k \neq 0$  no aparecen como los de máxima razón de crecimiento, fue necesario calcular numéricamente las gráficas de  $\sigma$  vs  $k$  para una amplia gama de valores de  $L_1$ ,  $\kappa_1$  y  $n$ .

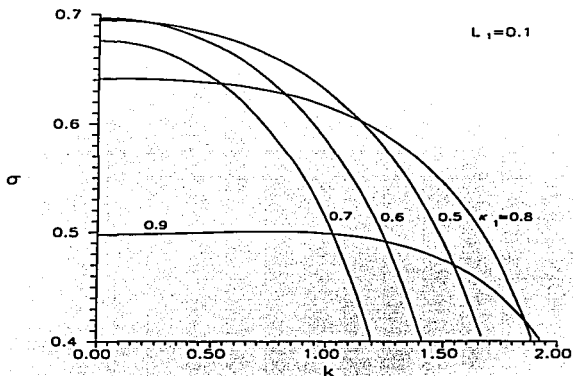


Figura 6. Razón de crecimiento contra número de onda. Se observa la transición de los máximos de número de onda cero a número de onda finito al variar  $\kappa_1$  de 0.8 a 0.9.

Se obtuvieron resultados cuantitativamente muy distintos cuando se tomó  $\kappa_1 = 0.9$ . Por ejemplo en la Fig. 6 para  $L = 0.1$  se muestra el proceso de cambio de las curvas de la razón de crecimiento contra el número de onda conforme se incrementa el valor de  $\kappa_1$ . Notese que el número de onda correspondiente al máximo crecimiento deja de ser cero a partir de un valor de  $\kappa_1$ . Todos los resultados para  $\kappa_1 = 0.9$  se describirán como sigue. Primero se calculó el modo axisimétrico y después el modo azimutal planar  $n = 1$ . Aquí, estos modos tienen algún parecido al caso anterior. El modo  $n = 1$  domina ahora en el intervalo  $0.18 < L_1 < 2.0$  sobre el caso axisimétrico el cual vuelve a dominar para  $L_1 > 2.0$ . Para  $L_1 < 0.18$  aparece el modo  $n = 2$ . Notese que el modo  $n = 0$  ya no es importante para  $L_1$  pequeña.

De nuevo a medida que  $L_1$  decrece, transiciones sucesivas dan lugar a modos azimutales planares y también a algunos modos espirales con  $k \neq 0$ , ausentes en el caso anterior para modos del primero en adelante. Estos resultados se resumen en la Fig. 7 donde los fragmentos de curva con estrellas indican modos espirales.

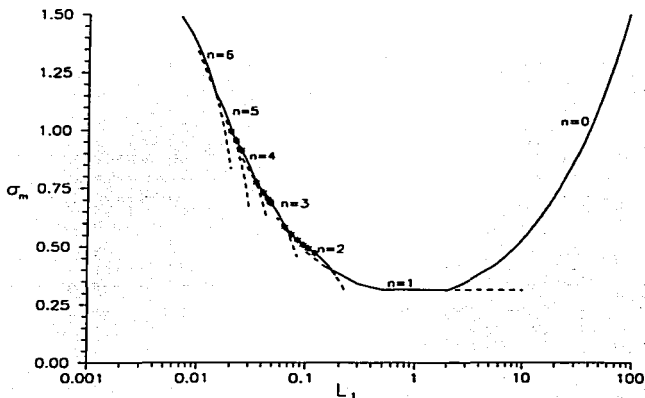


Figura 7. Razón de máximo crecimiento contra  $L_1$  para  $\kappa_1 = 0.9$ . Competencia entre modos azimutales planares y espirales. Las líneas continuas indican el intervalo de  $L_1$  donde los modos son los más inestables. Las partes con estrellas corresponden a modos espirales.

En la Fig. 8 se da una ampliación de los resultados obtenidos para los modos espirales. En ellas se muestra cada modo separado en dos partes. Una de ellas es una línea continua correspondiente al caso acimutal planar  $k = 0$  y como su continuación hacia la izquierda se encuentra una línea estrellada la cual corresponde a los casos donde el número de onda es finito (modo azimutal



espiral). Los modos espirales ocurrieron con  $n = 2, 3, 4$ . En el caso  $n = 5$  no domina hacia la izquierda su modo espiral porque antes comienza a dominar

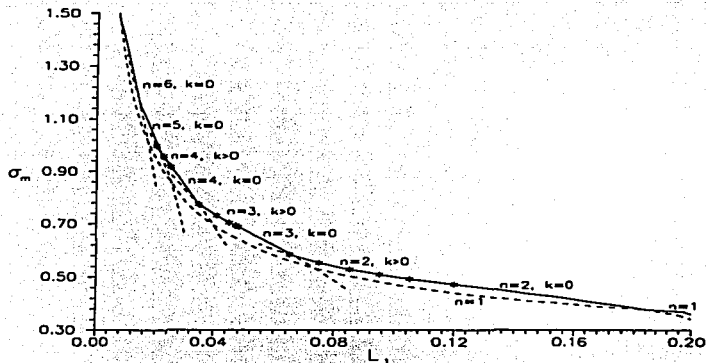


Figura 8. Ampliación de la Fig. 7 para  $\kappa_1 = 0.9$ . Las curvas con estrellas indican el intervalo donde son más inestables los modos acimutales espirales ( $k \neq 0$ ).

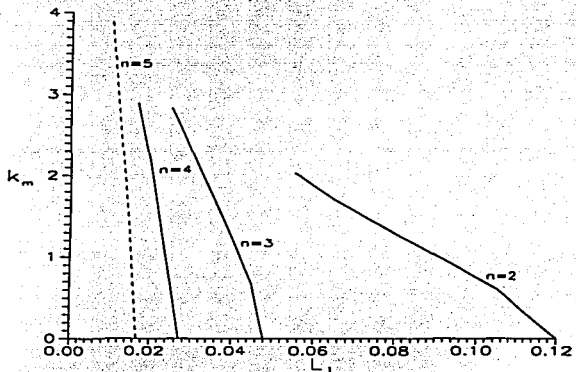


Figura 9. Número de onda correspondiente a la razón de máximo crecimiento para los modos acimutales espirales ( $\kappa_1 = 0.9$ ). Cada curva decrece conforme  $L_1$  crece hasta que el modo espiral pasa a ser planar ( $k_m = 0$ ).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

$n = 6$  con  $k = 0$ . La líneas punteadas indican que el modo correspondiente deja de ser el más importante.

La Fig. 9 presenta los resultados obtenidos para el número de onda correspondiente al máximo crecimiento de los modos espirales  $k \neq 0$  cuando  $\kappa_1 = 0.9$ . Obsérvese cómo el número de onda crece a partir de cero (modo azimutal planar).

En nuestros resultados se encontró un amplio intervalo de valores de  $\kappa_1$  en los que  $n = 1$  fue el modo más inestable. Por ejemplo, como se muestra en la Fig. 10 para  $L_1 = 1$ , ésto sucede para valores de  $\kappa_1$  mayores que 0.4.

En la Fig. 10 se observa la transición de máximo crecimiento entre dos modos conforme cambia el parámetro  $\kappa_1$ . Para valores de  $\kappa_1 < 0.4$  el modo  $n = 0$  es el de máxima inestabilidad en cambio para  $\kappa_1 > 0.4$  el modo  $n = 1$  resulta ser el de máximo crecimiento. En esta figura también se observa lo ocurrido con los máximos crecimientos del modo negativo  $n = -1$  el cual, corresponde a perturbaciones que se mueven en sentido contrario a la rotación de cuerpo rígido. Nótese que para el modo  $n = 1$  la curva de máximo crecimiento con respecto a  $\kappa_1$  tiene a su vez un máximo alrededor de  $\kappa_1 = 0.6$ .

## 5 Sistema de dos fluidos superpuestos en rotación entre dos cilindros concéntricos

En el caso de dos fluidos inviscidos inmiscibles superpuestos en rotación entre dos cilindros concéntricos se requiere de una nueva ecuación de valor propio más

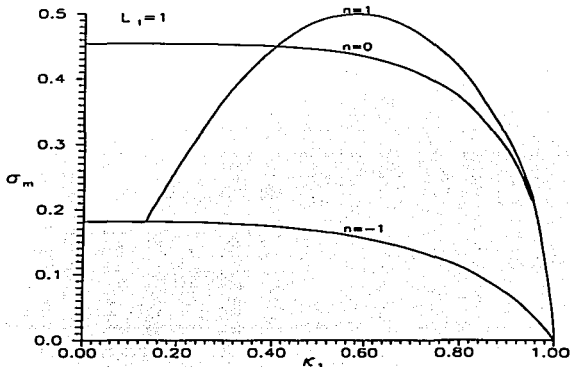


Figura 10. Razón de máximo crecimiento contra  $\kappa_1$  para  $L_1 = 1$  y  $n = -1, 0, 1$ . Tiende a cero conforme  $\kappa_1 \rightarrow 1$ .

general para describir el comportamiento de sus perturbaciones tridimensionales.

Para ello se eliminan de nuevo las componentes de la velocidad en las Ecs. (23) a la (26) para obtener una ecuación similar a la Ec. (36) para cada fluido, el de la región interna (subíndice 1) y el de la región externa (subíndice 2). Sus soluciones generales son

$$P_1(r) = A_1 I_n(\alpha r) + B_1 K_n(\alpha r) \quad (43)$$

$$P_2(r) = A_2 I_n(\alpha r) + B_2 K_n(\alpha r) \quad (44)$$

Para determinar los campos de presión en cada región en términos de las velocidades radiales, las condiciones Ecs. (27) a la (30) se escriben como:

$$sDP_1 + \frac{2in}{\kappa_1} P_1 = 0 \quad \text{en } r = \kappa_1 \quad (45)$$

$$sDP_2 + \frac{2in}{\kappa} P_2 = 0 \quad \text{en } r = \kappa \quad (46)$$

$$(sDP_1 + 2inP_1) = \lambda (sDP_2 + 2inP_2) \quad \text{en } r = 1 \quad (47)$$

$$P_2 - P_1 = \frac{\Psi}{s^2 + 4} \left[ DP_2 + \frac{2in}{s} P_2 \right] \quad \text{en } r = 1 \quad (48)$$

Ahora, se sustituyen las soluciones Ecs. (43) y (44) en éstas condiciones de frontera para obtener la ecuación de valor propio más general.

El caso que se investigó inicialmente, en la primera parte de este trabajo, corresponde a la situación más inestable, es decir, es aquel en que la capa de fluido rota y no tiene un fluido en su exterior (equivalente a densidad cero). Por esta razón, aquí solo se investigará el caso en que el fluido exterior es más denso que el interior. Ésta es una situación hidrostáticamente estable ante la fuerza centrífuga. De acuerdo a lo discutido en el capítulo de resultados preliminares en estas condiciones, las perturbaciones al flujo son estables para los modos acimutales planares y espirales. Entonces, solo resta investigar la inestabilidad respecto a perturbaciones axisimétricas que, de acuerdo a los resultados del Apéndice A, deben ser estacionarias, es decir,  $\omega = 0$ . Ésto muestra que, aún en una estratificación estable, es posible tener inestabilidad, sobre todo debido al ahorcamiento que produce la tensión superficial al no poder ser controlada por la fuerza centrífuga. Así, suponiendo  $n = 0$  y  $s = \sigma$  se obtiene la siguiente ecuación de valor propio

$$[\alpha \Psi_2 I_0(\alpha) - \lambda (s^2 + 4)] F_1(\alpha, \beta) - (s^2 + 4) I_0(\alpha) F_2(\alpha, \beta)$$

$$+ C' \{ [\alpha \Psi_2 I_0(\alpha) - \lambda (s^2 + 4)] F_1(\alpha, \beta) - (s^2 + 4) I_0(\alpha) F_2(\alpha, \beta) \} = 0 \quad (49)$$

siendo

$$F_1(\alpha, \beta) = I_0(\alpha) K'_0(\beta) - K'_0(\alpha) I_0(\beta) \quad (50)$$

$$F_2(\alpha, \beta) = I_0(\alpha) K'_0(\beta) - K_0(\alpha) I_0(\beta) \quad (51)$$

Además,  $C' = I_1(\alpha \kappa_1) / K_1(\alpha \kappa_1)$  y se tiene que  $\alpha = k\sqrt{\sigma^2 + 4}/\sigma$ ,  $\beta = \kappa\alpha$  y  $\Psi_2 = \Psi(n=0) = 1 + L_2(k^2 - 1)$ . Esta ecuación se puede resolver numéricamente para valores arbitrarios de  $\lambda$ ,  $L_2$ ,  $\kappa$  y  $\kappa_1$  en los rangos donde el número de onda es menor que el punto límite de inestabilidad dado por la Ec. (33). Al resolver numéricamente la Ec. (49) se obtuvieron curvas de  $\sigma$  vs  $k$  de donde se determinó el máximo de  $\sigma$ . Estos valores de  $\sigma_m$  y  $k_m$  se obtuvieron en un amplio intervalo de valores de  $L_2$  para  $\lambda = 1/4$  y  $3/4$ , y para  $\kappa_1 = 0.0, 0.5$ , y  $0.9$  suponiendo  $\kappa = 1.2$ . Los resultados de  $\sigma_m$  se dan en la Fig. 11. La razón entre radios de las capas de fluido en un sistema con  $\kappa = 1.2$  corresponde a aquel donde el fluido interno junto con el cilindro interior ocupan la mayor parte (83%) del dominio radial. Para este caso existen razones de crecimiento positivas para toda  $L_2 > (1 - \lambda)$  por lo que los puntos límite de inestabilidad no dependen de  $\kappa_1$  y todos ellos se intersectan en el mismo punto del eje  $L_2$  dependiendo solo de  $\lambda$ . En estas gráficas se observa que la presencia del núcleo sólido influye en el decremento de la razón de máximo crecimiento. Este decremento es evidente solo cuando el parámetro  $\kappa_1$  se encuentra arriba de 0.5, es decir, cuando la capa de fluido interior es muy delgada. En las curvas también se observan puntos de cruce para los dos distintos valores de  $\lambda$  calculados (puntos de cruce entre las curvas continuas ( $\lambda = 1/4$ ) y punteadas ( $\lambda = 3/4$ ) de la figura). Estos puntos de cruce varían con el parámetro  $\kappa_1$  (en el caso  $\kappa_1 = 0$  el cruce aparece en  $L_2 \approx 3.3$ ). La existencia de puntos de cruce entre las curvas de  $\lambda = 1/4$  y  $3/4$  se debe a que la tensión superficial deja de ser importante cuando  $L_2$  decrece para dar lugar a una inestabilidad debida a la fuerza centrífuga conforme este parámetro se vuelve aun más pequeño. La razón es que, cuando  $\rho_1 (< \rho_2)$  se acerca a  $\rho_2$ , el fluido interior aumenta sus posibilidades de poder penetrar al fluido exterior, que es más denso, debido a efectos de la fuerza centrífuga sobre las perturbaciones. De este modo, cuando el fluido interior tiene una densidad menor pero cercana a la del fluido exterior, la situación se vuelve más inestable para  $L_2$  pequeña que cuando el fluido interior es mucho menos denso. Por otro lado, es claro que la tensión superficial desestabiliza más fácilmente cuando el fluido interior es mucho menos denso porque su efecto de ahorcamiento, que precisamente se dirige hacia el centro de los dos cilindros, es más eficiente debido a que requiere desplazar líquido de menor densidad (menor inercia).

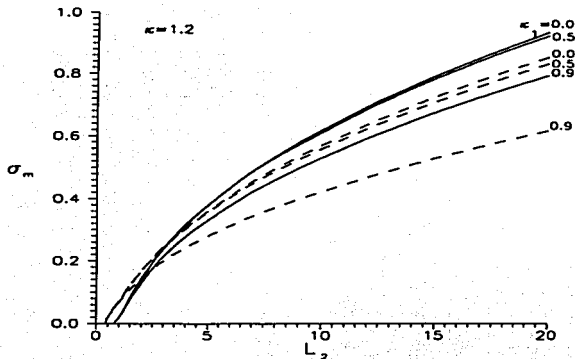


Figura 11. Razón de máximo crecimiento contra  $L_2$  para  $n = 0$ ,  $\kappa = 1.2$ ,  $\lambda = 0.25$  (línea continua) y  $0.75$  (línea punteada) y varios valores de  $\kappa_1$ . Caso de dos fluidos estratificados establemente.

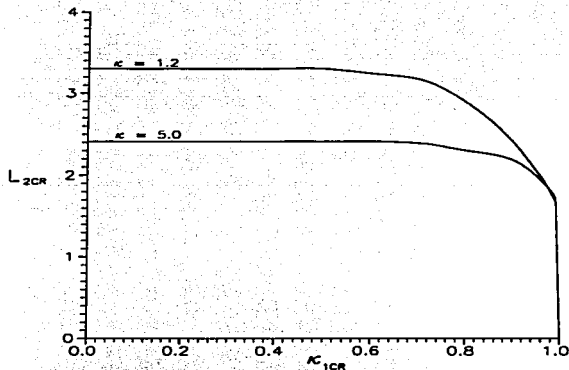


Figura 12.  $L_{2cr}$  contra  $\kappa_{1cr}$  para  $\kappa = 1.2$  y  $5$ . Curvas de los puntos de cruce que ocurren en las gráficas de  $\sigma_m$  contra  $L_2$  entre las curvas de  $\lambda = 0.25$  y  $0.75$ . Casos particulares de  $\kappa_1$  se muestran en las Figs. 11 y 15.

La Fig. 12 muestra resultados numéricos de la variación de  $L_2$  correspondien-

te a los puntos de cruce en función de  $\kappa_1$ . Aquí se dan resultados para dos valores de  $\kappa = 1.2$  y  $5$ . Se concluye que  $L_{2cr}$  es más pequeña (mayor velocidad angular) conforme  $\kappa_1$  se acerca a  $1$ .

En la Fig. 13 se presenta la razón de máximo crecimiento correspondiente a los puntos de cruce en función de  $\kappa_1$  para los mismo dos valores de  $\kappa$ . Se observa en ambas curvas que el cilindro interior empieza a tener efecto en los puntos de cruce para valores de  $\kappa_1$  muy cercanos a uno y que, por otro lado, conforme  $\kappa_1 \rightarrow 1$  la razón de crecimiento tiende a cero. Ésto es físicamente razonable pues la capa de fluido tiende a adquirir un espesor cero y por tanto a desaparecer.

En la Fig. 14 se presentan los resultados del número de onda correspondiente a la razón de máximo crecimiento ( $k_m$ ) de las Fig. 11, como función de  $L_2$ . En ella se observa que la curva para  $\kappa_1 = 0.5$  se superpone con la de  $\kappa_1 = 0$  y que solo se aprecian diferencias cuando  $\kappa_1 = 0.9$ . En el caso límite de rotación cero, es decir,  $L_2 \rightarrow \infty$ , la gráfica muestra que, en efecto, el número de onda se vuelve independiente de  $\lambda$ , como lo demuestran Weidman et al [11], pero aquí sigue siendo dependiente de  $\kappa_1$ .

La Fig. 15 muestra los resultados obtenidos para  $\kappa = 5.0$  que corresponde al caso en que el fluido interno y el cilindro interior ocupan la menor parte (20%) del dominio radial. Ahora, el efecto del cilindro interior se vuelve más evidente haciendo decrecer la magnitud de la razón de crecimiento.

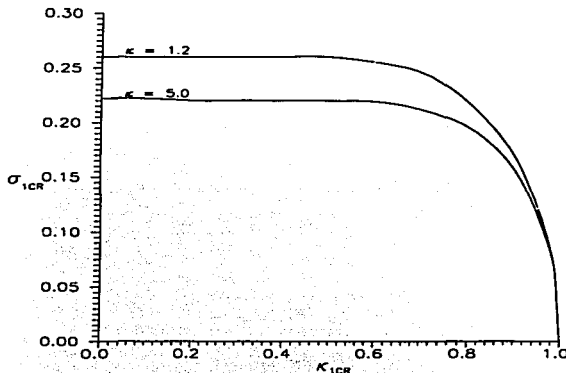


Figura 13.  $\sigma_{mcr}$  contra  $\kappa_{1cr}$  para  $\kappa = 1.2$  y  $5$ . Curvas de los puntos de cruce que ocurren en las gráficas de  $\sigma_m$  contra  $L_2$  entre las curvas de  $\lambda = 0.25$  y  $0.75$ . Casos particulares de  $\kappa_1$  se muestran en las Figs. 11 y 15.

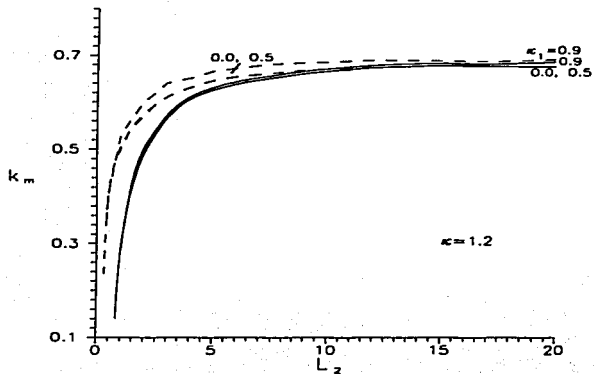


Figura 14. Número de onda correspondiente al máximo crecimiento contra  $L_2$  para  $\kappa = 1.2$ ,  $\lambda = 0.25$  (línea continua) y  $0.75$  (línea punteada), y varios valores de  $\kappa_1$ .

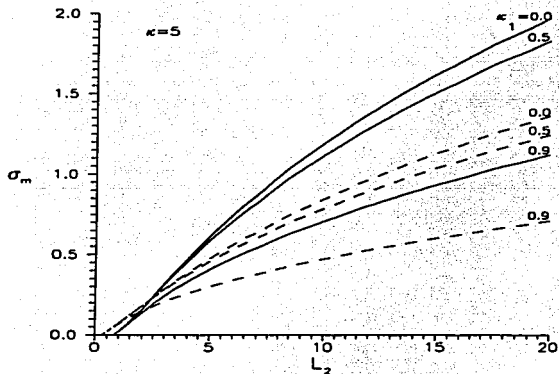


Figura 15. Razón de máximo crecimiento para  $z = 0$ ,  $\kappa = 5.0$ ,  $\lambda = 0.25$  (línea continua) y  $0.75$  (línea punteada), y varios valores de  $\kappa_1$ .

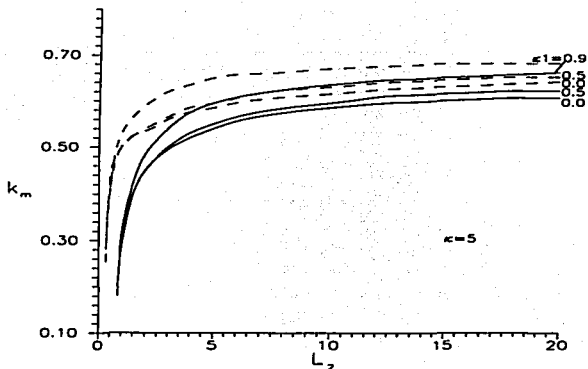


Figura 16. Número de onda correspondiente al máximo crecimiento contra  $L_2$  para  $\kappa = 5$ ,  $\lambda = 0.25$  (línea continua) y  $0.75$  (línea punteada), y varios valores de  $\kappa_1$ .

Además, en la Fig. 15 se observa una separación más amplia entre curvas con distintos valores de  $\kappa_1$  en comparación con las gráficas anteriores con otro valor de  $\kappa$ . Las gráficas de los puntos de cruce para éste valor de  $\kappa$  se presentan en las Fig. 12 y 13. En ellas se observa que los puntos de cruce dependen tanto de  $\kappa_1$  como de  $\kappa$ . Además, cuando  $\kappa_1 \rightarrow 0$  se obtiene el valor límite calculado por Weidman et al [11].

En la Fig. 16 se muestran las curvas del número de onda correspondiente al máximo crecimiento de la perturbación para  $\kappa = 5$ . Se ve que  $k$  crece con  $\kappa_1$  presentándose una separación muy clara entre curvas. Las gráficas tienden a superponerse cuando  $L_2 \rightarrow 0$  para los distintos valores de  $\kappa_1$ . En el límite de rotación cero, es decir  $L_2 \rightarrow \infty$ ,  $k$  depende tanto de  $\lambda$  (de acuerdo con resultados de Weidman et al [11]) como de  $\kappa_1$ .

Con el fin de revelar claramente el efecto que tiene el cilindro interno sobre la estabilidad, se grafica la razón de máximo crecimiento con respecto al parámetro  $\kappa_1$  para  $\lambda = 0.25$  y los valores  $L_2 = 1, 2, 5, 10$ , como se muestra en las Figs. 17 y 18 para  $\kappa = 1.2$  y  $5$ , respectivamente. El parámetro  $\kappa_1$  tiene un efecto importante junto con el parámetro  $\kappa$  aún cuando el cilindro interno es relativamente pequeño. A pesar de ello, se ve en las gráficas que la razón de máximo crecimiento tiende a cero cuando  $\kappa_1 \rightarrow 0$ , lo cual es físicamente correcto ya que la capa de fluido interior tiende a desaparecer.



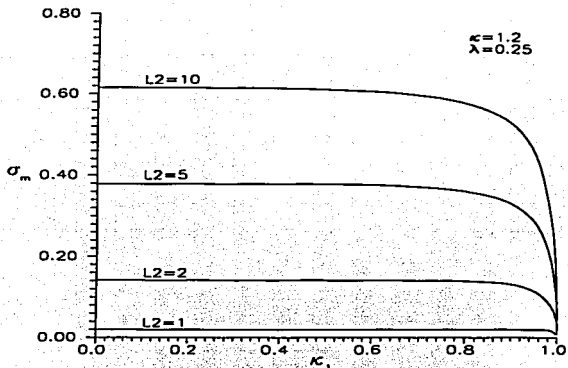


Figura 17. Razón de máximo crecimiento contra  $\kappa_1$  para  $\kappa = 1.2$ ,  $\lambda = 0.25$  y varios valores de  $L_2$ .

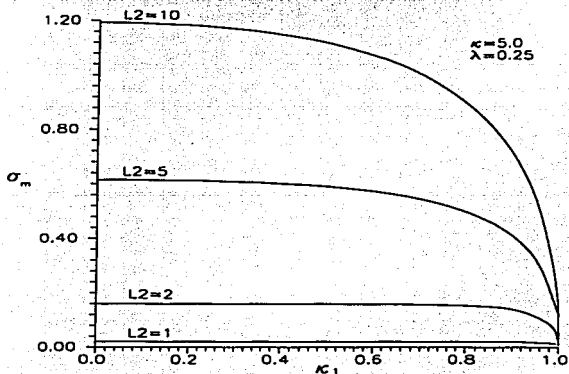


Figura 18. Razón de máximo crecimiento contra  $\kappa_1$  para  $\kappa = 5$ ,  $\lambda = 0.25$  y varios valores de  $L_2$ . La influencia de  $\kappa_1$  sobre  $\sigma_m$  comienza para valores más pequeños en comparación a la Fig. 17.

## 6 Conclusiones

La presente investigación da una visión general de la estabilidad de un sistema de dos fluidos inmiscibles inviscidos entre dos cilindros en rotación uniforme. Los resultados se dividieron en dos partes. La primera corresponde a la situación hidrostática más inestable, ésto es, a resultados de una capa de fluido con superficie libre cubriendo un cilindro. En la segunda parte se investiga una situación estable desde el punto de vista de la hidrostática, ésto es, el problema de dos fluidos en rotación de cuerpo rígido entre dos cilindros con el fluido exterior de mayor densidad.

Los resultados obtenidos en la primera parte son una ampliación de la investigación de Weidman et. al.[10] en el que hemos podido dar un amplio panorama sobre los modos y números de onda para los que las perturbaciones son inestables en el espacio de parámetros adimensionales. Los resultados se comparan continuamente con trabajos publicados previamente sobre todo cuando se toma el límite  $\kappa_1 \rightarrow 0$  en que el núcleo sólido desaparece.

La presencia del cilindro interior en el sistema hace posible la aparición del modo  $n = 1$  como el de máxima inestabilidad en un amplio intervalo de valores  $0.22 < L_1 < 1.46$  cuando el radio del cilindro interior es la mitad del radio de la superficie libre de la capa de fluido. También aparece en el intervalo  $0.18 < L_1 < 2.0$  cuando el cilindro interior tiene el 90% del radio de la superficie libre. Este es un resultado nuevo e inesperado en contraste con los Weidman et al. [11] quienes nunca obtienen al modo  $n = 1$  como el de máxima inestabilidad. También sucede que existe un "radio óptimo del cilindro interior" para el que la razón de crecimiento es la más grande de todos los máximos encontrados, para un  $L_1$  dado.

Otro resultado nuevo es que conforme  $L_1$  decrece hay intervalos en los que la máxima razón de crecimiento la tienen los modos acimutales espirales. Éstos no se encontraron como los de mayor razón de crecimiento cuando  $\kappa_1 = 0$  y ahora aquí su aparición depende de  $\kappa_1$ . En nuestros cálculos aparecen cuando la capa de fluido es muy delgada, es decir,  $\kappa_1 = 0.9$ .

En la segunda parte (el caso de dos fluidos superpuestos) se encuentra que los criterios de estabilidad no cambian con respecto al caso  $\kappa_1 = 0$  pues sigue siendo estable ante perturbaciones acimutales espirales y planares si  $0 \leq \lambda \leq 1$  y para perturbaciones axisimétricas se asegura estabilidad solo cuando  $L_2 < 1 - \lambda$ . Se hicieron cálculos numéricos para dos valores de  $\kappa = 1.2$  y 5. Se encuentra que cuando  $\kappa_1 > 0.5$  el cilindro interior influye en el decremento de la razón de máximo crecimiento. Se observa que los puntos de cruce entre las curvas con parámetros  $\lambda = 0.25$  y 0.75 comienzan a cambiar cuando  $\kappa_1$  está muy cercano a uno. Además, si  $\kappa_1 \rightarrow 1$  las razones de crecimiento tienden a cero, lo cual es físicamente razonable ya que la capa de fluido interior tiende a desaparecer.

A futuro queda por investigar el efecto que tiene la viscosidad en la estabilidad del sistema que aquí se estudia. Ésto se justifica porque la influencia del cilindro interior junto con la del cilindro externo del caso general de dos fluidos podría tener también un papel importante ya que como reportó Pedley [7], la viscosidad también tiene un efecto desestabilizador. El cálculo para el problema

viscoso es más complejo y es de interés buscar los medios para encontrar también resultados analíticos.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## A Criterio para la estabilidad

Un criterio general de estabilidad se puede obtener para perturbaciones arbitrarias tanto espaciales como temporales para un sistema de dos fluidos en rotación. Siguiendo el método propuesto por Chandrasekhar [16], a partir de las Ecs. (25) y (26) es posible eliminar  $V_i$  y  $W_i$  para determinar la presión en términos de las velocidades radiales

$$P_i = \xi(r) \lambda^{2-i} \left[ \frac{2in}{r} U_i - s \frac{1}{r} D(rU_i) \right] \quad (52)$$

siendo

$$\xi(r) = \frac{r^2}{k^2 r^2 + n^2} \quad (53)$$

Luego,  $P_i$ ,  $V_i$  y  $W_i$  se eliminan para obtener una ecuación de segundo orden solo para  $G_i(r) = rU_i(r)$  en cada capa de fluido

$$s^2 D \left( \frac{\xi}{r} D G_i \right) + \left[ 4in k^2 s \frac{\xi^2}{r^3} - \frac{4k^2 \xi + s^2}{r} \right] G_i = 0 \quad (54)$$

Ahora, se multiplica la Ec. (54) por  $G_i^*$ , el complejo conjugado de  $G_i$ , y se integra por partes sobre los dominios  $[\kappa_i, 1]$  para  $i = 1$  y sobre  $[1, \kappa]$  para  $i = 2$ . Además, se multiplica la ecuación con subíndice  $i = 1$  por  $\lambda$  y se suma con la ecuación correspondiente a  $i = 2$ . Así, se obtiene

$$\begin{aligned} \xi(1) s^2 [\lambda G_1^* D G_1 - G_2^* D G_2]_{r=1} &= \lambda [s^2 (I_{10} + J_{11}) - 4in s k^2 I_{12} + 4k^2 I_{11}] \\ &+ [s^2 (I_{20} + J_{21}) - 4in s k^2 I_{22} + 4k^2 I_{21}] \end{aligned} \quad (55)$$

donde las integrales positivas definidas con primer subíndice 1 están dadas por

$$I_{10} = \int_{\kappa_1}^1 \frac{|G_1|^2}{r} dr, \quad I_{11} = \int_{\kappa_1}^1 \frac{\xi |G_1|^2}{r} dr$$

$$I_{12} = \int_{\kappa_1}^1 \frac{\xi^2 |G_1|^2}{r^3} dr, \quad J_{10} = \int_{\kappa_1}^1 \frac{\xi |D G_1|^2}{r} dr$$

Las integrales con el primer subíndice 2 se definen de modo que se reemplaza  $G_1$  por  $G_2$  y se cambian los límites de integración  $[\kappa_1, 1]$  por  $[1, \kappa]$ . Al sustituir las presiones Ec. (53) en la condición de frontera de la entrecara Ec. (30) y multiplicando por  $s G_2^*(1)$  se obtiene

$$\xi(1) s^2 [\lambda G_1^* D G_1 - G_2^* D G_2]_{r=1} = [2\xi(1) (\lambda - 1) ins - \Psi] |G_2(1)|^2 \quad (56)$$

después de tomar en cuenta la Ec. (29). Ahora, se sustituye la Ec. (55) para obtener finalmente una ecuación cuadrática para  $s$

$$K_0 s^2 + 2inK_1 s + K_2 = 0 \quad (57)$$

siendo

$$K_0 = (I_{20} + J_{21}) + \lambda (I_{10} + J_{11}) \quad (58)$$

$$K_1 = \xi(1)(1 - \lambda) |G_2(1)|^2 - 2k^2 (I_{22} + \lambda I_{12}) \quad (59)$$

$$K_2 = 4k^2 (I_{12} + \lambda I_{11}) + \Psi |G_2(1)|^2 \quad (60)$$

Sustituyendo  $s = \sigma + i\omega$  en la Ec. (57) se pueden calcular las siguientes expresiones para  $\sigma$  y  $\omega$

$$\omega = -n \frac{K_1}{K_0} \quad (61)$$

$$\sigma = -\frac{1}{K_0} \left( K_2 + n^2 \frac{K_1^2}{K_0} \right) \quad (62)$$

De aquí se sigue que, para cada valor de  $n$ , una condición suficiente para tener estabilidad es  $K_2 > 0$ . Ésto se puede garantizar si  $\Psi > 0$  en la Ec. (60). Entonces, la condición suficiente para la estabilidad con respecto a perturbaciones tridimensionales se traduce en

$$(k^2 + n^2 - 1) L_2 > (\lambda - 1) \quad (63)$$

Además, a partir de la Ec. (61) se tiene que si  $n = 0$  entonces  $\omega = 0$ . De este modo, la inestabilidad temporal monótona prevalece cuando las perturbaciones son axisimétricas.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## B Cálculo analítico de la razón de crecimiento de perturbaciones planares en una capa de fluido sobre un cilindro en rotación

A partir del método propuesto por Hocking y Michael [4] se puede encontrar analíticamente una fórmula para la razón de crecimiento de las perturbaciones acimutales planares de una capa de fluido inviscido cubriendo el exterior de un cilindro en rotación. La fórmula solo será válida cuando  $n \geq 1$ .

Para empezar, se propone un potencial de velocidad de la perturbación  $\phi$ , que satisface la ecuación de continuidad y la irrotacionalidad del flujo. En modos normales tiene la forma:

$$\phi = f(r)e^{in\theta+st} \quad (64)$$

donde se propone como solución

$$f(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-n} \quad (65)$$

siendo  $n$  un número entero positivo. La superficie libre se ubica en  $r = 1$  y el núcleo sólido tiene radio  $r = \kappa_1$  en notación adimensional. Entonces, la función debe satisfacer:

$$\frac{df}{dr} = 0 \quad \text{en } r = \kappa_1 \quad (66)$$

Así, la solución toma la forma

$$f(r) = A_1 \kappa_1^n \left[ \left( \frac{r}{\kappa_1} \right)^n + \left( \frac{\kappa_1}{r} \right)^n \right] \quad (67)$$

El desarrollo temporal de la perturbación se determina por los valores característicos del exponente  $s$ . Este valor se obtiene a partir de las condiciones en la superficie libre. La condición cinemática en forma adimensional y para perturbaciones pequeñas se escribe como

$$u - \frac{\partial \eta}{\partial \theta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad \text{en } r = 1 \quad (68)$$

La perturbación de la superficie se supone de la forma

$$\eta = b e^{in\theta+st} \quad (69)$$

por lo que  $b$  tiene la solución

$$b = -A_1 n \frac{1 - k_1^{2n}}{s + in} \quad (70)$$

La perturbación de la presión se encuentra a partir de las ecuaciones de balance de momento lineales. Ésta es:

$$p = -iA_1 [2(1 - k_1^{2n}) + (s - n)(1 + k_1^{2n})] e^{in\theta + st} \quad (71)$$

De la condición de esfuerzos normales se tiene

$$p + \eta + L_1 \left( \eta + \frac{\partial^2 \eta}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (72)$$

Sustituyendo (70) y (71) en (72) obtenemos:

$$[s + i(n - C)]^2 = C\{(n - 1)[1 - L_1 n(n + 1)] + 1 - C\} \quad (73)$$

siendo  $C = \left( \frac{1 - k_1^{2n}}{1 + k_1^{2n}} \right)$ . Si el miembro derecho es positivo la parte real de  $s$  es la razón de crecimiento, ésto es

$$\sigma_n = \sqrt{C\{(n - 1)[1 - L_1 n(n + 1)] + 1 - C\}} \quad (n \geq 1) \quad (74)$$

Ver en el texto la discusión sobre esta ecuación.

## Referencias

- [1] J.W.S. Rayleigh. *On the instability of jets*, Proc. London Math. Soc. **10**, 4 (1879).
- [2] J.W.S. Rayleigh, *On the Instability of a Cylinder of Viscous Liquid Under Capillary Force*, Phil. Mag. **34**, 145 (1892).
- [3] J.W.S. Rayleigh, *On the dynamics of revolving fluids*. Proc. London Math. Soc. A, **93**, 148 (1916).
- [4] L.M. Hocking y D.H. Michael. *The Stability of a column of rotating liquid*. Mathematika **6**, 25 (1959).
- [5] Ch.S. Yih. *Instability of a rotating liquid film with a free surface*. Proc. R. Soc. Lond. A **258**, 63 (1960).
- [6] L.M. Hocking *The stability of rigidly rotating column of liquid*. Mathematika **7**, 1 (1960).
- [7] T.J. Pedley *The stability of rotating flows with a cylindrical free surface*. J.Fluid Mech. **30** (1), 127 (1967).
- [8] M.A. Boudorides y S.H. Davis. *Stability criteria for swirl flows with free surfaces*. Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP) **37**, 597 (1986).
- [9] D. D. Joseph, Y. Renardy, M. Renardy y K. Nguyen. *Stability of rigid motions and rollers in bicomponent flows of immiscible liquids*. J. Fluid Mech. **153**, 151 (1985).
- [10] P.D. Weidman . *Stability criteria for two immiscible fluids rigidly rotating in zero gravity* Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl., **39**, 481 (1994).
- [11] P.D. Weidman, M. Goto y A. Fridberg. *On the instability of inviscid, rigidly rotating immiscible fluids in zero gravity*. Z. Angew. Math. Phys. (ZAMP) **48**, 921 (1997).
- [12] L.A. Dávalos-Orozco y G. Ruiz-Chavarría *Hydrodynamic instability of a fluid layer flowing down a rotating cylinder*. Phys. Fluids A **5**, 2390 (1993).
- [13] G. Ruiz-Chavarría y L.A. Dávalos-Orozco. *Stability of a liquid film flowing down a rotating cylinder subject to azimuthal disturbances*. J. Phys. II **6**, 1219 (1996).
- [14] G. Ruiz-Chavarría y L.A. Dávalos-Orozco. *Azimuthal and streamwise disturbances in a fluid layer flowing down a rotating cylinder*. Phys Fluids **9**, 2899 (1997).
- [15] L.A. Dávalos-Orozco y X. You. *Three-dimensional instability of a liquid layer flowing down a heated vertical cylinder*. Phys. Fluids, **12**, 2198 (2000).



- [16] S. Chandrasekhar, "*Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*" Capitulo 12, Dover, New York (1981).

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN