

00324  
31



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**REGLA DE EJERCICIO Y ALGORITMO DINÁMICO  
PARA VALUAR LA OPCIÓN BANXICO.**

**T E S I S**

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
**M A T E M Á T I C A**  
P R E S E N T A :  
**PATRICIA SAAVEDRA BARRERA**

DIRECTORA DE TESIS: DRA. MARÍA ASUNCIÓN BEGOÑA FERNÁNDEZ FERNÁNDEZ



**FACULTAD DE CIENCIAS  
SECCION ESCOLAR**

A

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**PAGINACIÓN**

**DISCONTINUA**



UNIVERSIDAD NACIONAL  
AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.

NOMBRE: Saavedra Barrera  
Patricia

FECHA: 21-01-2003

FIRMA: Patricia Saavedra

**DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA**  
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la  
Facultad de Ciencias  
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

Regla de ejercicio y Algoritmo dinámico para valuar la Opción Binómica  
realizado por Patricia Saavedra Barrera

con número de cuenta 07156444-3 , quien cubrió los créditos de la carrera de:  
Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Dra. María Asunción Begofía Fernández Fernández

Propietario Dra. Ana Meda Guardiola

Propietario M. en C. Beatriz Eugenia Rodríguez Fernández

Suplente M. en I. María del Carmen Hernández Ayuso

Suplente Mat. Margarita Elvira Chávez Cano

*Maria Asunción Begofía Fernández*  
*Ana Meda Guardiola*  
*Beatriz Rodríguez Fernández*  
*María del Carmen Hernández Ayuso*  
*Margarita Elvira Chávez Cano*

Consejo Departamental de Matemáticas



FACULTAD DE CIENCIAS  
CONSEJO DEPARTAMENTAL  
DE  
MATEMÁTICAS

## **Agradecimientos**

Agradezco a la Dra. Begoña Fernández Fernández el haber aceptado ser mi directora de tesis. Espero que este trabajo sea un fruto más de una larga colaboración y de una larga amistad.

Agradezco a todas las sinodales: la Mat. Margarita Chávez Cano, la M. en I. María del Carmen Hernández Ayuso, la Dra. Ana Meda Guardiola y la M. en C. Beatriz Eugenia Rodríguez Fernández sus comentarios, sugerencias y el haber aceptado revisar este trabajo.

# Indice

<b>Introducción</b>	<b>5</b>
<b>1 La opción Banxico</b>	<b>7</b>
1.1 Introducción a las opciones	7
1.2 Descripción y Características de la Opción	8
1.3 Notación y algunos antecedentes matemáticos	11
<b>2 Modelo discreto para la opción Banxico</b>	<b>17</b>
2.1 Modelo Discreto	17
2.2 Simulación numérica del modelo discreto	22
2.2.1 Árboles binarios y látices	22
2.2.2 Valuación de opciones bermuda con el modelo de Cox-Ross y Rubinstein y látices	24
2.2.3 Aplicación a la opción bermuda asociada a la Banxico	25
2.2.4 Aplicación a la opción Banxico	27
2.2.5 Resultados Numéricos	28
<b>3 Modelación semicontinua de la opción Banxico</b>	<b>31</b>
3.1 Un tiempo de ejercicio para el modelo continuo	31
3.2 Resultados numéricos del caso semicontinuo	38
3.2.1 Algoritmo para calcular el valor de la opción Bermuda asociado a la Banxico	40
3.2.2 Resultados numéricos con las dos reglas de ejercicio	41
3.2.3 Algoritmo dinámico para ejercer la opción Banxico	46
<b>4 El algoritmo dinámico y la Opción Banxico.</b>	<b>49</b>
4.1 Algoritmo Heurístico	49
4.2 La Opción Banxico	50
4.3 Conclusiones	54
4.4 Conclusiones generales	55



# Introducción

A raíz de la crisis financiera mexicana de 1994-1995, las reservas internacionales del Banco de México disminuyeron en forma importante. En 1996 la Comisión de Cambios consideró que era prudente aumentar el nivel de éstas sin presionar al tipo de cambio de manera indeseable y sin enviar señales que pudieran interpretarse de forma errónea por los agentes económicos. Se estimó que la disponibilidad de un monto mayor de activos internacionales contribuiría a lograr mejoras en el costo y plazo del financiamiento externo.

El esquema que se decidió adoptar dio origen a lo que se conoce hoy como la Opción Banxico, que consiste de un mecanismo de intervención en el mercado cambiario. Este instrumento es un contrato opcional tipo *put* sobre dólares que emite el Instituto Central mensualmente y lo pone a subasta entre las distintas instituciones de crédito del país.

Este trabajo tiene como objetivo general el estudio de la valuación y del tiempo óptimo de ejercicio de la Opción Banxico. Los objetivos específicos son los siguientes:

1. Estimar mensualmente la postura a presentar durante la subasta.
2. Estimar el valor diario de la opción con el fin de poder ofrecerla en el mercado secundario.
3. Determinar un procedimiento que permita decidir si conviene en el día  $\tau$  ejercer la opción.
4. Comparar los desempeños del modelo discreto de Cox-Ross y Rubinstein y del modelo de Black-Scholes en la valuación de la opción Banxico.
5. Estudiar el uso de los métodos de Monte-Carlo y árboles para estimar su valor en caso que no se pueda determinar una fórmula cerrada para valuarla.
6. Determinar un criterio de ejercicio, eficiente y sencillo de usar, que sea mejor que el que aplicaron las instituciones financieras a lo largo de la vigencia de la opción.
7. Aplicación de este criterio a datos reales.

En el capítulo 1 se presenta una rápida introducción a las opciones, se describe con detalle el diseño y las características de la opción Banxico y los problemas que se presentan al valuarla y al determinar el tiempo óptimo de paro o de ejercicio. En el capítulo 2 se analiza la modelación matemática de la opción a través de un modelo discreto, se determina el tiempo óptimo de ejercicio y se obtienen estimaciones numéricas del valor

de la opción. En el capítulo 3 se presenta un modelo semicontinuo y se obtiene una regla de ejercicio para la opción Banxico que sirve como base para proponer un algoritmo dinámico de ejercicio. Por último, en el capítulo 4, se aplica este algoritmo a datos reales y se compara su desempeño con otras reglas de ejercicio a lo largo de todo el periodo de vigencia de la opción.

Los resultados numéricos muestran que si las instituciones financieras hubieran aplicado este algoritmo para ejercer la opción, hubieran obtenido una ganancia neta de aproximadamente 50 millones de pesos.

# Capítulo 1

## La opción Banxico

En este capítulo se presenta una breve introducción a las opciones y en particular a la opción Banxico. Asimismo se introduce la notación y la terminología que se utilizará a lo largo de la tesis y por último se dan algunos antecedentes matemáticos.

### 1.1 Introducción a las opciones

Un derivado es un instrumento financiero cuyo rendimiento depende de otro bien o activo que se conoce como subyacente. Ejemplo de ello es un bono cuyo valor depende de las tasas de interés o del precio del petróleo. Ejemplos de derivados son los futuros, los forwards, las opciones, los warrants, etc.

Una opción europea es un contrato entre dos personas para adquirir o vender un bien o un activo llamado subyacente a un precio y en una fecha fijados de antemano. A la fecha se le llama fecha de maduración y al precio se le conoce como precio de ejercicio. Si la opción es de compra se llama un call, si es de venta se llama un put.

En una opción siempre hay dos partes: por un lado, quien compra la opción y por otro quien la suscribe. El primero adquiere el derecho, pero no la obligación, de ejercer la opción en la fecha de maduración. En cambio, la contra-parte se obliga a cumplir el contrato, independientemente de lo que convenga a sus intereses. Para compensar esta asimetría y que el contrato sea justo para ambas partes, quien compra la opción le paga a quien la suscribe una prima que le permita cubrirse contra futuras pérdidas, debidas al cambio de precio del subyacente durante la vigencia de la opción.

Una opción puede negociarse en el mercado secundario por lo que es importante determinar su valor  $V_t$  para cada tiempo  $t \in [0, T]$ . En particular, la prima que se paga al adquirir la opción es igual al valor de la opción en el tiempo  $t = 0$ .

Por ejemplo, supongamos que Y compra una opción call para adquirir la casa de X dentro de  $T = 3$  meses a un precio  $K$ . Pasados los tres meses, Y observa cuál es el precio  $S_T$  de la casa en el mercado inmobiliario. Si el precio es menor que  $K$ , a Y no le conviene ejercer la opción porque compraría una casa en un valor superior al que tiene en el mercado. Observemos que si Y no ejerce la opción, no obtiene ganancia alguna. En cambio si el valor de la casa se incrementa, ejerce la opción, pues compra una casa a un valor inferior al que tiene, y con ello obtiene una ganancia igual a  $S_T - K$ . En ambos

casos X debe cumplir con lo pactado, por ello recibe al principio una prima que le permite cubrirse en caso de que el precio de la casa se incremente.

La ganancia que obtiene quien adquiere la opción se llama función de pago o payoff y claramente depende del valor del subyacente. Denotemos a esta función como  $h$ .  $h : [0, \infty > \rightarrow [0, \infty >$  con regla de correspondencia igual a

$$h(S) = \text{Max}\{S(T) - K, 0\}$$

en caso de un call e igual a

$$h(S) = \text{Max}\{K - S(T), 0\}$$

en caso de un put.

Hay una gran variedad de opciones en el mercado y éstas se clasifican según su función de pago y la forma en que pueden ejercerse. Las opciones que tienen como función de pago a la función  $h$  antes definida, se llaman opciones vainilla. Hay otras opciones llamadas exóticas cuya función de pago depende de la trayectoria que siga el precio del subyacente. Por ejemplo, entre las exóticas está la opción asiática cuya función de pago tiene como variable dependiente al promedio del subyacente a lo largo del tiempo de maduración. O sea para un call se tiene que

$$h(S) = \text{Max}\left\{\frac{1}{T} \int_0^T S(x) dx - K, 0\right\}.$$

Otras opciones se distinguen por la forma en que se ejercen. Ya vimos que las europeas se ejercen únicamente en el tiempo de maduración; las americanas pueden ejercerse en cualquier tiempo  $t \in [0, T]$ , mientras que la opción Bermuda sólo tiene un número finito de tiempos de ejercicio. El problema matemático a resolver para estas opciones es un poco distinto al de las europeas, pues al mismo tiempo que hay que valorarlas también hay que determinar el momento óptimo de ejercerlas.

Hay una gran variedad de opciones en el mercado, la valuación de muchas de ellas representa un problema matemático muy interesante, tanto para los probabilistas como para los analistas numéricos, porque un buen número de ellas no pueden ser valuadas a través de una fórmula cerrada y su valor debe aproximarse numéricamente.

## 1.2 Descripción y Características de la Opción

La Opción Banxico la da a conocer el Banco de México el primero de agosto de 1996, mediante una circular dirigida a las instituciones de crédito del país, en la cual se les informa que a partir de esa fecha, cada fin de mes se substarán contratos opcionales contra el pago de una prima en pesos, que otorgarán al tenedor del contrato el derecho, más no la obligación (opción), de vender una cantidad predeterminada de dólares contra pesos al Instituto Central.

La Opción Banxico perseguía en su diseño varios objetivos: el primero ciertamente era el de incrementar las reservas internacionales del Instituto Central que a finales de

1995 habían disminuido a niveles históricamente bajos. Sin embargo, la acumulación de reservas se debía de realizar de manera tal que no provocara volatilidad innecesaria en los mercados, tarea que no resultaba fácil en el mercado cambiario mexicano, en el que la poca profundidad del mismo, hace que la participación o sólo sospecha de participación del Banco Central provoque movimientos cambiarios importantes.

Las intervenciones en el mercado cambiario mediante compra directa de dólares a los participantes, tiene el inconveniente de marcar niveles del tipo de cambio -que son interpretados como señales- que a juicio del mercado significan que el Banco Central sugiere que la moneda nacional debe dejar de depreciarse. Esta reacción es correcta si lo que busca el Banco Central es modificar el nivel del tipo de cambio, como sucede en la mayoría de las intervenciones de los bancos centrales, pero no es conveniente cuando lo que busca la Institución es aumentar sus reservas internacionales y dejar al mercado la libre determinación del nivel del tipo de cambio. Inclusive una estrategia de acumulación basada en opciones tradicionales tendría el mismo problema, pues el precio de ejercicio sería interpretado por el mercado como un piso.

Por otro lado, el Banco de México buscaba aumentar la transparencia en las acciones que realizaba en materia de política cambiaria. Se perseguía entonces definir reglas claras que aumentarían la información y disminuirían la discrecionalidad del Instituto Central en esta materia. El reto no era fácil, se pretendía aumentar las reservas internacionales con la compra de dólares a las instituciones de crédito y al mismo tiempo, se buscaba que estas compras o acciones del Banco Central no distorsionaran el mercado mandando señales que provocarían un mercado volátil. Por último, se pretendía retirar dólares del mercado cuando éstos presentaran una franca tendencia a la apreciación -posible indicación de una entrada de dólares a la economía- y no sólo una apreciación de un día con respecto al anterior.

Para evitar una lectura incorrecta sobre las intenciones del Instituto Central, se sugirió que la acción de aumentar las reservas internacionales debería de estar en manos de las instituciones de crédito y no del Banco Central. De esta manera, la estrategia de acumulación de reservas sería pasiva y totalmente dependiente de estas instituciones. El Banco de México sólo acumularía reservas si los bancos optaban por venderle dólares en lugar de hacerlo en el mercado. Adicionalmente, se evitó marcar niveles o mandar señales sobre niveles de intervención del tipo de cambio, permitiendo que el precio de ejercicio de las opciones fuera determinado diariamente por el mercado sin la intervención del Instituto Central. Resumiendo, el mecanismo de intervención perseguía los siguientes objetivos:

1. Incrementar las reservas internacionales.
2. Acumular reservas minimizando los posibles efectos colaterales indeseables.
3. No alterar la naturaleza del régimen cambiario en vigor, una de cuyas características principales es no predeterminar un nivel o una trayectoria del tipo de cambio.
4. Las intervenciones deben ser transparentes para los participantes en el mercado y completamente esterilizadas.

5. Inducir las compras de divisas por parte del Banco Central cuando el peso se está apreciando y desincentivarlas cuando se está depreciando.

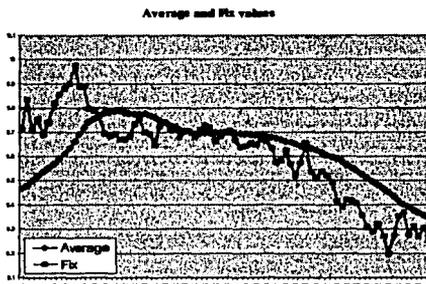
Tomando en consideración los propósitos del Banco de México se diseñó la Opción Banxico que describimos a continuación:

1. El último día hábil de cada mes el Banco de México subasta, entre las instituciones de crédito mexicanas, opciones para vender dólares al Banco Central.
2. El contravalor de la operación descrita en el punto (1), se realizará en pesos y se calculará utilizando el tipo de cambio *fix* determinado por el mercado el día hábil anterior.
3. El plazo de vigencia para el ejercicio de la opción corresponderá al mes calendario posterior al día en que se realizó la subasta.
4. Los montos se asignarán ordenando de mayor a menor las primas contenidas en las posturas de los participantes. Los montos demandados, se otorgarán en dicho orden hasta colocar la oferta total. En caso de existir un empate en la última postura, los montos se asignarán a pro-rata entre los participantes empatados.
5. Las opciones se podrán ejecutar de forma parcial o total hasta por el monto asignado. El monto mínimo de ejercicio es de un millón de dólares.
6. Las opciones sólo podrán ser ejecutadas, si el precio de ejercicio, es decir, el tipo de cambio *fix* determinado el día hábil anterior al ejercicio es no mayor al promedio de los veinte tipos de cambio *fix* previamente determinados al día en que se ha decidido ejercer la opción. A este promedio que cambia día a día le llamaremos promedio móvil.
7. Se permite la compra venta de estos derechos en el mercado secundario.
8. Al término de la subasta el Banco de México aplica un sistema de esterilización con objeto de no afectar el circulante: vende CETES por el monto equivalente a los dólares que adquirió con objeto de retirar del mercado el mismo monto de pesos que se introdujeron con la compra de los dólares.

En la gráfica 1 se muestra el tipo de cambio *fix* del primero de enero al 30 de abril del 2000. Los primeros dieciséis días la opción no pudo ejercerse debido a que el valor del *fix* está por encima del valor promedio; es hasta el día dieciocho que se pudo ejercer por primera vez la opción, dado que el día anterior el valor del *fix* estaba por debajo del valor promedio.

Claramente las características (1) y (2) antes descritas dejan en manos del mercado tanto el precio del instrumento como el precio de ejercicio, la característica (6) tiene el propósito de retirar dólares del mercado cuando éste presenta una franca tendencia a la apreciación.

En suma la opción Banxico es una opción exótica distinta de las que se encuentran en el mercado, ver Zhang [10], con tiempo de maduración de un mes, en la que la fecha



Gráfica 1

de ejercicio puede ser cualquier día hábil durante la vigencia del contrato. El precio de ejercicio es aleatorio y contiene una restricción de ejercicio que depende del promedio de los tipos de cambio *fix* hasta el día inmediato anterior a la fecha de ejercicio.

Esta opción plantea los siguientes problemas a las instituciones crediticias:

- I.- Calcular el valor de la opción al momento de la firma del contrato para presentar una postura en la subasta mensual.
- II.- Dado que es permitido el mercado secundario, estimar el valor de la opción diariamente durante la vigencia del contrato.
- III.- Dar un criterio de ejercicio que les permita optimizar sus ganancias.

Las respuestas a estos problemas son tema central de esta tesis y, como veremos más adelante, dependen tanto del modelo que se elija para valorar el instrumento como del criterio de optimalidad que se escoja para determinar el tiempo óptimo de ejercicio.

A continuación se presenta la notación que se utilizará a lo largo de este trabajo así como algunos resultados matemáticos que pueden verse en detalle en el Lamberton [7].

### 1.3 Notación y algunos antecedentes matemáticos

Denótese con  $N$  al número total de días hábiles de un mes y a  $T = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ . Sea  $r_1$  la tasa diaria de interés doméstica, en pesos, y  $r_2$  la tasa foránea en dólares.

Sea  $S_n^0 = e^{r_1 n}$  el activo libre de riesgo al tiempo  $n$  y  $S_n$  el tipo de cambio *fix* al tiempo  $n \in T$ . Para cada  $n$ ,  $S_n$  es una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Para cada  $n \in T$  sea  $\mathcal{F}_n$  la  $\sigma$ -álgebra generada por  $S_0, S_1, \dots, S_n$ .

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

Los rendimientos  $T_n$  en el tiempo  $n$  debidos a la variación del tipo de cambio *fix* en el día  $n$  son también variables aleatorias dadas por

$$T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} \quad \text{para } n = \{1, \dots, N\}.$$

Por otro lado, considérese un portafolio autofinanciable integrado por  $\phi_n^0$  unidades invertidas a la tasa  $r_1$  y por  $\phi_n$  unidades invertidas a la tasa  $r_2$ . El valor en pesos del portafolio  $\pi_n$  en el tiempo  $n \in T$  está dado por

$$\pi_n = \phi_n^0 e^{r_1 n} + \phi_n e^{r_2 n} S_n$$

Denotemos por  $\tilde{X}_n$  el valor presente o descontado de la variable aleatoria  $X_n$  que es igual a  $X_n/e^{r_1 n}$ , para  $n = 1, \dots, N$ . El valor presente del portafolio  $\tilde{\pi}_n$  está dado por la siguiente expresión

$$\tilde{\pi}_n = \phi_n^0 + \phi_n e^{r_2 n} \tilde{S}_n.$$

Si el mercado es viable y completo, es decir no hay posibilidades de arbitraje y cualquier reclamo contingente se puede replicar a través de un portafolio autofinanciable, entonces existe una única probabilidad, llamada probabilidad de riesgo neutro, equivalente a  $P$  para la cual el proceso  $\{e^{r_2 n} \tilde{S}_n\}_{0 \leq n \leq N}$  es una martingala, es decir

$$E^*(e^{r_2(n+1)} \tilde{S}_{n+1} | F_n) = e^{r_2 n} \tilde{S}_n.$$

### Valuación de opciones europeas sobre el tipo de cambio

Si la opción que nos interesa valuar es europea, es decir que únicamente puede ejercerse en el tiempo  $N$ , sabemos que el valor de la opción  $V_n$  en el tiempo  $n \in T$  está dado por

$$V_n = E^*(e^{-r_1(N-n)} h(S_N) | F_n),$$

con  $h(S_N)$  la función de pago de la opción en el tiempo  $N$ .

Para calcular esta esperanza condicionada se puede aplicar el principio de la programación dinámica que da lugar al siguiente algoritmo recursivo: Denotemos por  $\tilde{h}(S_n)$  el valor presente de la función de pago para  $n = 1, \dots, N$ , es decir,

$$\tilde{h}(S_n) = \frac{h(S_N)}{e^{r_1 n}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \tilde{V}_N &= \tilde{h}(S_N), \\ \tilde{V}_n &= E^*\{\tilde{V}_{n+1} | F_n\}, \quad n = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

### Valuación de opciones tipo Bermuda sobre el tipo de cambio

Una opción es tipo Bermuda si puede ejercerse en cualquier día  $n \in T$ . La forma de valuar esta opción es también a través de un algoritmo recursivo que se obtiene al aplicar

el principio de la programación dinámica. Sea  $h(S_n)$  la función de pago evaluada en el día  $n$ , entonces el valor presente de la opción en el día  $n$ ,  $\tilde{U}_n$  está dado por

$$\begin{aligned}\tilde{U}_N &= \tilde{h}(S_N), \\ \tilde{U}_n &= \text{Max}\{\tilde{h}(S_n), E^*[\tilde{U}_{n+1} | F_n]\}, \quad n = 0, \dots, N-1.\end{aligned}$$

Este es un procedimiento hacia atrás que tiene como fundamento una idea muy intuitiva: el valor presente del contrato al tiempo  $n$  es el máximo entre la función de pago en ese tiempo y el valor futuro del contrato. Más precisamente, al tiempo de expiración  $N$  del contrato

$$\tilde{U}_N = h(\tilde{S}_N),$$

es decir, si la opción no se ha ejercido al tiempo de expiración, su valor es igual al de la función de pago. Si al tiempo  $N-1$ , el tenedor del contrato no ha ejercido su derecho, puede ocurrir que lo ejerza en ese tiempo o se espere al tiempo  $N$ . Por lo que el valor de la opción al tiempo  $N-1$ , será igual al máximo entre la función de pago al tiempo  $N-1$  y el valor futuro de la opción, que es interpretado como el valor esperado de  $\tilde{U}_N$  dada la información del tipo de cambio hasta el día  $N-1$ , o sea, como  $E^*[\tilde{U}_N | F_{N-1}]$ . Siguiendo este mismo razonamiento se obtiene que el valor del contrato en cada tiempo está dado por:

$$\tilde{U}_n = \max\left(h(\tilde{S}_n), E^*[\tilde{U}_{n+1} | F_n]\right).$$

Este procedimiento resuelve al menos teóricamente la valuación de la opción en cada tiempo.

Se sabe que si  $\tilde{U}_n$  se obtiene por este algoritmo recursivo entonces esta sucesión es una supermartingala que es la envoltura de Snell de la sucesión  $\{\tilde{h}(S_n)\}_{0 \leq n \leq N}$ . Es decir por un lado,

$$E^*(\tilde{U}_{n+1} | F_n) \leq \tilde{U}_n$$

y por otro

$$\tilde{U}_n \geq \tilde{h}(S_n), \quad \text{para toda } n \in T.$$

Además  $\tilde{U}_n$  es la sucesión más pequeña que acota superiormente a  $\tilde{h}(S_n)$  en el siguiente sentido: si existe otra sucesión  $(\tilde{W}_n)_{0 \leq n \leq N}$  tal que  $\tilde{W}_n \geq \tilde{h}(S_n)$  para toda  $n \in T$  entonces  $\tilde{W}_n \geq \tilde{U}_n$ , para  $n = 0, \dots, N$ .

A continuación se presentará otro enfoque para valuar estas opciones a partir del concepto de tiempo de paro.

### Tiempo de paro óptimo

**Definición.1.3.1.** Una variable aleatoria  $\tau$  que toma valores en  $T$  es un tiempo de paro en el espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$  respecto a la filtración  $F_n$  si para toda  $n \in T$  el conjunto  $\{\tau = n\} \in F_n$ . Denotemos como  $\mathcal{T}$  los tiempos de paro que toman valores en  $T$ .

**Teorema 1.3.1.** La variable aleatoria definida por

$$\tau_0 = \begin{cases} \inf\{0 \leq n \leq N \mid \tilde{U}_n = \tilde{h}(S_n)\}, & \text{para alguna } n, \\ N, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.1)$$

verifica

$$\tilde{U}_0 = E^*(\tilde{h}(S_{\tau_0}) | F_0) = \text{Sup}_{\tau \in \mathcal{T}} E^*(\tilde{h}(S_\tau) | F_0).$$

Este teorema es conocido con el nombre del Teorema de paro óptimo y nos da una caracterización de los tiempos de paro o de ejercicio de la opción. El tiempo de paro  $\tau$  es igual a  $n \in T$  si la ganancia que se obtiene al ejercer la opción en el día  $n$  es superior al valor esperado de la misma. Además este teorema nos indica que de todos los tiempos posibles de ejercicio, el que nos da la máxima ganancia es el más pequeño de todos ellos. Obsérvese que en caso que nunca se cumpla que  $\tilde{U}_n = \tilde{h}(S_n)$ , entonces  $\tau_0$  es igual a  $N$ , o sea al tiempo de ejercicio de una opción europea.

**Definición 1.3.2.** Se llama tiempo de paro óptimo de la sucesión  $(\tilde{Z}_n)_{0 \leq n \leq N}$  a todo tiempo de paro  $\nu$  que satisface

$$E^*(\tilde{Z}_\nu | F_0) = \text{Sup}_{\tau \in \mathcal{T}} E^*(\tilde{Z}_\tau | F_0).$$

Por lo que el tiempo de paro  $\tau_0$  definido en el teorema 1.3.1 es un tiempo de paro óptimo para la sucesión  $\{h(S_n)\}$ .

Este enfoque se aplica de la forma siguiente al caso de la valuación de una opción bermuda. Si conocemos el tiempo de paro óptimo entonces podemos valorar la opción en forma directa sin necesidad de aplicar el algoritmo recursivo ya que

$$\tilde{U}_n = E^*(\tilde{h}(S_n) | F_n).$$

Determinar el tiempo de paro óptimo no es tarea fácil por lo que se hace lo siguiente en la práctica: se aplica el algoritmo recursivo y posteriormente se determina el tiempo de paro óptimo a través de la expresión (1.1).

Para fines de este trabajo se usará tiempo de ejercicio en lugar de tiempo de paro por considerarlo más apropiado cuando este concepto se aplica a las opciones.

### Aplicación de los resultados anteriores a la opción Banxico

A lo largo de este trabajo se estudiará además de la opción Banxico, la opción que se obtiene al considerar a la Banxico sin la restricción del promedio, lo que se reduce a una opción bermuda con la misma función de pago que la Banxico. Llamaremos a esta opción la opción bermuda asociada a la opción Banxico.

Denotaremos como función de pago en el día  $n$  de la opción bermuda asociada a la Banxico a la variable aleatoria  $Z_n^1$ . Recuérdese que en el día  $n$  se usa como tipo de cambio el valor del *fix* en el día  $n-1$ , por lo que  $Z_n^1$  está dada por

$$\begin{aligned} Z_n^1 &= \text{Max}\{S_{n-1} - S_n, 0\}, \\ &= S_{n-1} \text{Max}\{1 - T_n, 0\}, \\ &= S_{n-1}(1 - T_n)_+, \\ Z_0^1 &= 0. \end{aligned}$$

Para definir la función de pago de la opción Banxico, introduzcamos la función indicadora  $\mathbb{1}_{[\cdot]}$ , que vale 1 cuando  $[\cdot]$  se cumple y cero en otro caso. Sean  $x_{-19}, \dots, x_0$  valores del *fix* conocidos y definanse  $S_{-19} = x_{-19}, \dots, S_0 = x_0$ . Para  $n \in \{1, \dots, N\}$  sea

$$R_n = \mathbb{1}_{\{M_{n-1} \geq S_{n-1}\}}, \quad (1.2)$$

con

$$M_{n-1} = \frac{1}{20} \sum_{i=0}^{19} S_{n-t-1}.$$

Entonces para cada  $n \in T$  la función de pago  $Z_n^2$  de la opción Bancico se define por

$$\begin{aligned} Z_n^2 &= R_n S_{n-1} (1 - T_n)_+, \\ Z_n^2 &= 0. \end{aligned}$$

El valor presente de la funciones de pago de ambas opciones se denotarán por  $\bar{Z}_n^i$ ,  $i = 1, 2$ . Asimismo denótese con  $\bar{U}_n^i$  el valor presente de la opción bermuda y Bancico, respectivamente. Estos valores pueden calcularse a través del algoritmo recursivo antes visto para opciones bermuda, lo que nos da

$$\begin{aligned} \bar{U}_N^i &= \bar{Z}_N^i, \\ \bar{U}_n^i &= \max(\bar{Z}_n^i, E^*[\bar{U}_{n+1}^i | \mathcal{F}_n]), \\ \bar{U}_0^i &= E^*[\bar{U}_0^i | \mathcal{F}_0], \quad (\bar{U}_0^i = U_0^i). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Asimismo, por el Teorema de paro óptimo se tiene que si

$$\tau_0^i = \begin{cases} \inf\{1 \leq n \leq N \mid \bar{Z}_n^i \geq E^*[\bar{U}_{n+1}^i | \mathcal{F}_n]\}, & \text{para alguna } n, \\ N, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

con  $T = \{\tau \text{ es un tiempo de ejercicio, } 0 < \tau \leq N\}$  entonces

$$U_0^i = \sup_{\tau \in T} E^*[\bar{Z}_\tau^i] = E^*[\bar{Z}_{\tau_0}^i].$$

En principio, contamos con todos los elementos para valuar la opción Bancico y para determinar el tiempo de ejercicio óptimo, por lo que sólo resta modelar el comportamiento del subyacente, en este caso el *fix*  $S_n$ .

En los capítulos siguientes estudiaremos el comportamiento de  $S_n$  a través de un modelo discreto, suponiendo que  $T_n$  es una variable binomial, y posteriormente se hará la hipótesis que satisface el modelo de Black-Scholes. Como se verá, la forma en que se modela el subyacente es determinante para valuar la opción y el tiempo de ejercicio óptimo.



## Capítulo 2

# Modelo discreto para la opción Banxico

En este capítulo se presentan la valuación y determinación del tiempo de paro óptimo tanto de la opción bermuda asociada a la Banxico como de la opción Banxico. En la primera sección se supone que el precio del tipo de cambio se comporta en forma binomial, a través del conocido modelo de Cox-Ross y Rubinstein adaptado al tipo de cambio. En la segunda sección se estudia la simulación numérica del modelo discreto a través del método de árboles. En la tercera sección se presentan algunos resultados numéricos que ilustran los resultados teóricos y, por último, se presentan los alcances del modelo discreto.

### 2.1 Modelo Discreto

En esta sección vamos a considerar el modelo binomial conocido con el nombre de Cox-Ross y Rubinstein con la modificación sugerida por Garman y Kohlhagen par el tipo de cambio, ver [5]. Dado  $T = \{0, \dots, N\}$  y  $S_0 = x_0$ , supongamos que  $S_n$  satisface para cada  $n \in \{1, \dots, N\}$  que

$$S_n = S_{n-1} T_n. \quad (2.1)$$

Con  $T_n$  una variable aleatoria que puede tomar dos valores

$$T_n = \begin{cases} e^{r_1 - r_2 + \sigma/\sqrt{N}}, \\ e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}, \end{cases}$$

donde  $\sigma > 0$  es la volatilidad mensual del tipo de cambio y  $r_1$  y  $r_2$  son la tasa diaria libre de riesgo doméstica y foránea, respectivamente.

Supongamos que  $r_1 - r_2 + \sigma/\sqrt{N} > 0$  y que  $r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N} < 0$  para que en cada tiempo  $n \in \{1, \dots, N\}$  exista la posibilidad que  $S_n < S_{n-1}$  y que  $S_n > S_{n-1}$ .

En este marco tomemos a  $\Omega = \{e^{r_1 - r_2 + \sigma/\sqrt{N}}, e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}\}^N$ , en el que cada éneada representa los posibles valores que puede tomar  $S_n/S_{n-1}$ ,  $n = 1, \dots, N$ , sean  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$  y  $P$  una probabilidad tal que  $P[\{\omega\}] > 0$  para cada  $\omega \in \Omega$ . Para cada  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{F}_n = \sigma\{S_1, \dots, S_n\}$  y  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ .

Si suponemos que  $T_1, \dots, T_N$  son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, que  $r_1 - r_2 \in [\frac{r_2}{\sqrt{N}}, \frac{r_1}{\sqrt{N}}]$  y que existe una única probabilidad  $P^*$  equivalente a  $P$  para la cual  $E^*(T_{n+1} | F_n) = e^{r_1 - r_2}$  entonces se tienen que  $\{e^{r_2 n} \tilde{S}_n\}$  es una martingala y que el mercado es viable y completo.

$P^*$  está dada por

$$p = P^*[T_n = e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}] = \frac{1 - e^{\sigma/\sqrt{N}}}{e^{-\sigma/\sqrt{N}} - e^{\sigma/\sqrt{N}}} = 1 - P^*[T_n = e^{r_1 - r_2 + \sigma/\sqrt{N}}].$$

Bajo estas hipótesis vamos primero a determinar el valor de la opción bermuda asociada a la Banxico. Denotemos por  $\tilde{U}_n^{1,B}$  el valor de esta opción bajo el modelo binomial, entonces el valor de  $\tilde{U}_n^{1,B}$  está dado por el siguiente teorema que se obtiene al aplicar el algoritmo recursivo (1.3) visto en el capítulo anterior.

**Teorema 2.1.1.** *Bajo el modelo binomial, para cada  $k \in \{1, \dots, N-1\}$ ,*

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{N-k}^{1,B} &= \frac{\tilde{S}_{N-k-1}}{e^{r_1}} \left[ \mathbb{1}_{[T_{N-k} = e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}]} (1 - T_{N-k}) \right. \\ &\quad \left. + \mathbb{1}_{[T_{N-k} = e^{r_1 - r_2 + \sigma/\sqrt{N}}]} \frac{T_{N-k}}{e^{r_1}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p \sum_{i=0}^k (e^{-r_2} p)^i \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

y

$$U_0^{1,B} = \frac{S_0}{e^{r_1}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) \frac{p}{1 - e^{-r_2} p} (1 - (e^{-r_2} p)^N). \quad (2.3)$$

**Dem:** Observemos que

$$pe^{-\sigma/\sqrt{N}} = 1 - p < 1 \quad (2.4)$$

y

$$(1-p)e^{\sigma/\sqrt{N}} = p < 1. \quad (2.5)$$

Aplicando el algoritmo recursivo (1.3) se tiene que

$$\tilde{U}_N^{1,B} = \tilde{Z}_N^1 = \frac{\tilde{S}_{N-1}}{e^{r_1}} (1 - T_N)_+.$$

Demostremos por inducción que la expresión (2.2) se cumple para  $k = 1, \dots, N-1$ .

Para  $k = 1$  se tienen lo siguiente:

$$\begin{aligned} E^*[\tilde{U}_N^{1,B} | \mathcal{F}_{N-1}] &= \frac{\tilde{S}_{N-1}}{e^{r_1}} E^*[(1 - T_N)_+], \\ &= \frac{\tilde{S}_{N-2}}{e^{r_1}} \frac{T_{N-1}}{e^{r_1}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\tilde{Z}_{N-1}^1 = \frac{\tilde{S}_{N-2}}{e^{r_1}} (1 - T_{N-1})_+,$$

así que  $\tilde{U}_{N-1}^{1,B}$  está dado por

$$\tilde{U}_{N-1}^{1,B} = \frac{\tilde{S}_{N-2}}{e^{r_1}} \max \left[ (1 - T_{N-1})_+, \frac{T_{N-1}}{e^{r_1}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p \right].$$

El único caso que hay que analizar es cuando  $(1 - T_{N-1}) > 0$  y esto sucede cuando  $T_{N-1} = e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}$ . Al usar la relación (2.4) se obtiene que

$$\frac{T_{N-1}}{e^{r_1}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p = e^{-r_2} (1 - p) (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) < 1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \max & \left[ (1 - T_{N-1})_+, \frac{T_{N-1}}{e^{r_1}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p \right] \\ &= \begin{cases} (1 - T_{N-1}), & \text{if } T_{N-1} = e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}, \\ \frac{T_{N-1}}{e^{r_1}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p, & \text{if } T_{N-1} = e^{r_1 - r_2 + \sigma/\sqrt{N}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Por lo tanto la ecuación (2.2) se cumple para  $k = 1$ . Supongamos que la ecuación (2.2) se cumple para  $k$ , entonces se tiene para  $k + 1$  que

$$\begin{aligned} E^*[\tilde{U}_{N-k}^{1,B} | \mathcal{F}_{N-(k+1)}] &= \frac{\tilde{S}_{N-(k+1)}}{e^{r_1}} \left( e^{-r_2} p (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p \sum_{i=0}^{k-1} (e^{-r_2} p)^i + p (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) \right) \\ &= \frac{\tilde{S}_{N-(k+1)}}{e^{r_1}} \left( (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p \sum_{i=0}^k (e^{-r_2} p)^i \right) \\ &= \frac{\tilde{S}_{N-(k+2)}}{e^{r_1}} \frac{T_{N-(k+1)}}{e^{r_1}} \left( (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p \sum_{i=0}^k (e^{-r_2} p)^i \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Procedamos a comparar la ecuación (2.6) con

$$\tilde{Z}_{N-(k+1)}^1 = \frac{\tilde{S}_{N-(k+2)}}{e^{r_1}} (1 - T_{N-(k+1)})_+,$$

cuando  $(1 - T_{N-(k+1)}) > 0$ . Esto se reduce a comparar

$$(1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}), \quad e^{-r_2 - \sigma/\sqrt{N}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p \sum_{i=0}^k (e^{-r_2} p)^i.$$

Usando de nuevo la relación (2.4) se tiene que

$$\begin{aligned} e^{-r_2 - \sigma/\sqrt{N}}(1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}})p \sum_{i=0}^k (e^{-r_2}p)^i \\ = e^{-r_2}(1-p)(1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) \sum_{i=0}^k (e^{-r_2}p)^i \\ < e^{-r_2}(1-p)(1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) \sum_{i=0}^k p^i \\ < (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}). \end{aligned}$$

Por lo tanto la expresión (2.2) se satisface para  $k = 1, \dots, N-1$ .

Por último, para calcular  $\bar{U}_0^{1,B}$  se calcula  $E^*[\bar{U}_1^{1,B}]$  lo que nos da

$$E^*[\bar{U}_1^{1,B}] = \frac{S_0}{e^{r_1}} [p(1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) + (1-p)e^{-r_2 + \sigma/\sqrt{N}}p(1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) \sum_{i=0}^{N-1} (e^{-r_2}p)^i]$$

$$\begin{aligned} E^*[\bar{U}_1^{1,B}] &= \frac{S_0}{e^{r_1}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p [1 + e^{-r_2} \sum_{i=0}^{N-1} (e^{-r_2}p)^i], \\ &= \frac{S_0}{e^{r_1}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) p \sum_{i=0}^N (e^{-r_2}p)^i, \\ &= \frac{S_0}{e^{r_1}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}) \frac{p}{1 - (e^{-r_2}p)} [1 - (e^{-r_2}p)^N]. \end{aligned}$$

Lo que prueba el teorema. □

Observemos que este teorema nos dice que el máximo entre  $\bar{Z}_n^1$  y  $E^*[\bar{U}_{n+1}^{1,B} | \mathcal{F}_n]$  es  $\bar{Z}_n^1$  si  $\bar{Z}_n^1 > 0$ , lo que implica el siguiente resultado:

**Corolario 2.1.2.** *Bajo el modelo binomial, el tiempo de ejercicio óptimo  $\tau_0^{1,B}$  para la opción bermuda asociada a la Banxico está dado por*

$$\tau_0^{1,B} = \begin{cases} \inf\{0 < n \leq N \mid \bar{Z}_n^1 > 0\}, & \text{si } \bar{Z}_n^1 > 0, \text{ para algún } n, \\ N, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En suma el tiempo de ejercicio óptimo es la primera vez que puede ejercerse la opción.

En el caso de la opción Banxico no es posible obtener por medio del algoritmo recursivo (1.3) una expresión cerrada, como (2.2) y (2.3), debido a la presencia de la variable aleatoria  $R_n$ . Sin embargo, si denotamos con  $\bar{U}_{n+1}^{2,B}$  el valor de la opción Banxico en el tiempo  $n$ , podemos determinar el tiempo de ejercicio óptimo dado que

$$E^*[\bar{U}_{n+1}^{1,B} | \mathcal{F}_n] \geq E^*[\bar{U}_{n+1}^{2,B} | \mathcal{F}_n],$$

para cada  $n \in \{0, \dots, N-1\}$ .

Por otro lado si  $\bar{Z}_n^2 > 0$  entonces  $\bar{Z}_n^1 = \bar{Z}_n^2$ , y

$$\bar{Z}_n^2 > E^*[\bar{U}_{n+1}^{2,B} | \mathcal{F}_n].$$

Por lo que obtenemos el siguiente resultado:

**Corolario 2.1.3.** *Bajo el modelo binomial, un tiempo de ejercicio óptimo  $\tau_0^{2,B}$  para la opción Banxico está dado por*

$$\tau_0^{2,B} = \begin{cases} \inf \{0 < n \leq N \mid \bar{Z}_n^2 > 0\}, & \text{si } \bar{Z}_n^2 > 0, \text{ para algún } n, \\ N, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En otras palabras el tiempo de ejercicio óptimo es la primera vez que se puede ejercer la opción Banxico dado que se satisface la restricción del promedio y que  $(1 - T_{\tau_0})_+ > 0$ . Por lo tanto, teóricamente la opción se puede valorar de la siguiente forma: primero se determina el tiempo de ejercicio óptimo y posteriormente, para calcular el valor de  $\bar{U}_n^{2,B}$ , se evalúa la siguiente expresión:

$$\bar{U}_n^{2,B} = E^*(\bar{Z}_{\tau_0} | \mathcal{F}_n).$$

Este resultado explica el hecho de que este criterio de ejercicio fue el que utilizaron varias instituciones financieras para ejercer la opción. Sin embargo, como veremos más adelante, este no es el mejor criterio de ejercicio ya que el modelo binomial no es muy realista al suponer que, en cada tiempo  $n$ , el tipo de cambio *fix* se incrementa o se reduce en una proporción que permanece constante a lo largo del tiempo. Esta hipótesis nos impide analizar el caso cuando la diferencia  $(S_{n-1} - S_n)_+$  es pequeña. Una forma de superar este inconveniente es usar el hecho de que en el límite el modelo binomial aproxima al modelo de Black-Scholes; por lo que, en principio, basta con refinar el modelo binomial para mejorar los resultados. Sin embargo, esta solución es inmanejable desde el punto de vista computacional, como se verá en la siguiente sección.

Por último es importante mencionar que el principal impedimento para valorar la opción Banxico en forma exacta es la presencia de la restricción del promedio móvil. Trabajar con el promedio móvil tiene serios inconvenientes. En particular el promedio móvil del día  $n$  se relaciona con el día anterior a través de la siguiente relación

$$M_n = M_{n-1} + \frac{1}{20}[S_n - S_{n-20}].$$

Como se observa el valor que toma  $M_n$  no sólo depende del valor del promedio móvil del día anterior sino también de la relación que existe entre el valor del subyacente en el día  $n$  y el valor que tomo veinte días antes. Por lo que es muy difícil predecir si la restricción se satisficará el día  $n$  dado que lo hizo el día  $n-1$ , pues este es un problema que depende de 20 variables aleatorias. Además el calcular en forma analítica la esperanza condicional de una expresión que involucra la variable aleatoria  $R_n$ , dada por 1.2, presenta varias dificultades que en este trabajo no se pudieron superar. El determinar que el tiempo de ejercicio óptimo de la opción Banxico es el primer día que se satisface la restricción del promedio y que la ganancia es positiva permite darle la vuelta a este problema.

## 2.2 Simulación numérica del modelo discreto

La simulación numérica del modelo discreto se hace a través de árboles binarios. El árbol binario es una gráfica que permite representar todos los posibles valores que toma el subyacente a lo largo del tiempo de maduración. Para poder aplicarlo se requiere que se cumplan las siguientes hipótesis:

1. Dado  $T$ , sólo nos interesa el valor que toma el subyacente para un número finito de tiempos en el intervalo  $[0, T]$ . Para ello dado  $N \in \mathcal{N}$ , sea  $h = T/N$  y asociado a  $h$  definase como  $t_0 = 0$ ,  $t_i = ih$  y  $t_N = T$  una discretización del tiempo y denótese por  $S_n$  el valor del subyacente en el tiempo  $t_n$ .
2. Dado  $S_0$ , el subyacente  $S_n$  satisface

$$S_n = S_{n-1}T_n,$$

con  $T_n$  una variable aleatoria binomial, independiente de  $F_n$ , que toma el valor  $u$  con probabilidad  $p$  y el valor  $d$  con probabilidad  $1 - p$ , con  $u > 1 > d > 0$ .

3. El mercado es viable y completo.

Con estas hipótesis se obtienen a continuación un conjunto de algoritmos que permiten, de manera rápida y eficiente desde el punto de vista computacional, estimar el valor de las opciones bermuda y de la opción Banxico. Como primer paso se presentan los métodos de árboles binarios y de latices.

### 2.2.1 Árboles binarios y latices

El método de árbol binario consiste en representar gráficamente los valores que puede tomar un activo a lo largo del tiempo y a través de esta gráfica y el principio de la programación dinámica determinar en forma recursiva el valor de una opción. Una gráfica de árboles se compone de ramas y nodos. El árbol tiene un nodo inicial, del cual salen dos ramas con sus respectivos nodos, cada uno de estos nodos da lugar a otras dos ramas y así sucesivamente.

En el caso de que se quiera describir el comportamiento futuro de un activo  $S$ , el nodo inicial del árbol debe representar el valor de  $S$  en el tiempo  $n = 0$ , o sea se le asocia a ese nodo el valor  $S_0$ . Para representar lo que sucede en el tiempo  $n = 1$ , conforme a la hipótesis 2, se dibujan dos ramas que salen del nodo inicial, cuyo extremo derecho termina en un nodo al que se le asocia uno y sólo uno de los valores que toma  $S$  en el tiempo  $n = 1$ :  $S_0u$  y  $S_0d$ . Denótese estos dos valores por  $S_1^u = S_0u$  y  $S_1^d = S_0d$ . De cada uno de estos nodos salen 2 ramas, cuyos nodos en el extremo derecho denotan los valores que toma  $S$  en el tiempo  $n = 2$ . Obsérvese que  $S_2$  puede tomar los valores  $S_1^u u$ ,  $S_1^d u$ ,  $S_1^u d$  y que  $S_1^d d = S_1^d u$ .

A partir del tiempo  $n = 2$ , la gráfica toma formas distintas dependiendo si las opciones a valuar son europeas y bermuda, en las que no importa los valores que haya tomado el subyacente antes, o exóticas en las que la trayectoria que sigue el subyacente juega un

papel esencial. Para las primeras, dado que sólo importa el valor que toma el subyacente en el tiempo  $n = 2$ , sin importar los valores que ha tomado antes, se necesitan únicamente de tres nodos para representar todos los distintos valores que puede tomar el subyacente, por lo que la segunda y tercera rama se intersectan en un mismo nodo. De esta forma, el primer nodo representa el valor  $S_2^0 = S_1^0 u$ , el segundo el valor  $S_2^1 = S_1^0 d$  y el último  $S_2^2 = S_1^1 d$ , como se ilustra en la Figura 1.

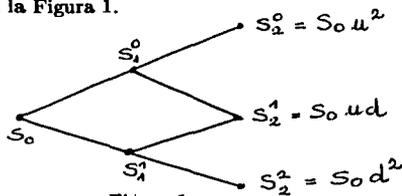


Figura 1

Por lo tanto la gráfica, en este caso, es una latiz. Para el tiempo  $n$ , la gráfica tiene  $n+1$  nodos que representan todos los valores distintos posibles que puede tomar el subyacente y que se denotarán como  $S_n^i$ . Estos valores, en términos de  $S_0$ ,  $u$  y  $d$ , están dados por la siguiente expresión:

$$S_n^i = S_0 u^{n-i} d^i, \quad i = 0, \dots, n.$$

De esta forma, para representar los valores que puede tomar un activo en  $N$  subintervalos de tiempo, se requiere de una latiz que en cada tiempo  $n$  tenga  $n+1$  nodos. Para  $N$  subintervalos esto implica construir una latiz con un total de  $\frac{(N+1)(N+2)}{2}$  nodos. Por ejemplo, en la Figura 2 se presenta una latiz que representa todos los posibles valores de un activo  $S$ , para  $N = 4$ , que satisface la hipótesis 2.

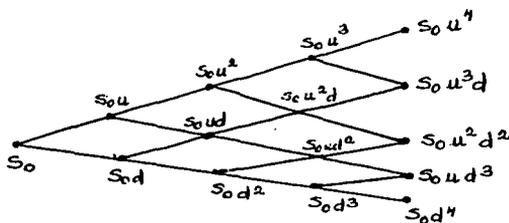


Figura 2

En el caso de opciones exóticas, los nodos del árbol no sólo deben identificar el valor que toma  $S$  en el tiempo  $n$ , también deben distinguir la trayectoria que ha seguido el subyacente desde el inicio, por lo que las ramas no se intersectan, aunque el subyacente tome el mismo valor en el extremo derecho. Entonces para el tiempo  $n$  se requieren de  $2^n$

nodos para representar todas las posibles trayectorias que pudo seguir el subyacente antes de tomar el valor  $S_n$ . Para valorar una opción con  $N$  periodos de tiempo se requiere un total de  $2^{N+1} - 1$  nodos. Obsérvese que utilizar el método de árboles binarios es mucho más costoso, desde el punto de vista de memoria y cálculo, que el de latices. En la figura 3 se ilustra un árbol binario para  $N = 3$ .

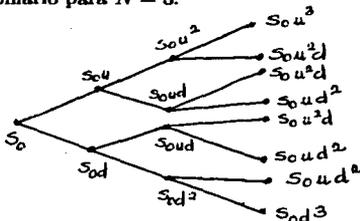


Figura 3.

Recuérdese que la opción Banxico únicamente puede ejercerse si la restricción del promedio se satisface y que esta restricción depende del promedio de los veinte valores anteriores que ha tomado el subyacente, por lo que se debe usar árboles binarios para representar todas las trayectorias que ha seguido el subyacente.

A continuación se presenta cómo usar las latices para valorar opciones bermuda, que se usarán para valorar la opción bermuda asociada a la Banxico, y cómo usar los árboles binarios para valorar la opción Banxico.

## 2.2.2 Valuación de opciones bermuda con el modelo de Cox-Ross y Rubistein y latices

Supóngase que se tiene una opción put bermuda para vender un activo  $S$  en  $T = \{0, \dots, N\}$  a un precio de ejercicio  $K$ . Supóngase que  $\sigma$  es la volatilidad por el periodo  $T$  del activo y que  $r$  es la tasa libre de riesgo para el periodo  $T$ . En este caso la función de pago está dada por

$$h(S_n) = (K - S_n)_+.$$

El modelo de Cox-Ross y Rubistein es un modelo binomial con  $u$  y  $d$  de la forma siguiente

$$u = e^{\sigma\sqrt{N}} \quad y \quad d = e^{-\sigma\sqrt{N}},$$

lo que implica que el valor de la probabilidad de riesgo neutro es

$$p^* = \frac{e^{r/N} - d}{u - d} = \frac{e^{r/N} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}{e^{\sigma/\sqrt{N}} - e^{-\sigma/\sqrt{N}}}.$$

Para esta probabilidad  $\{\tilde{S}_n, 0 < n \leq N\}$  es una martingala. Es decir

$$E^*(\tilde{S}_{n+1} | F_n) = \tilde{S}_n.$$

Para valuar la opción put bermuda se supone que se cumplen las hipótesis 1 al 3, se aplica el principio de la programación dinámica a través del algoritmo recursivo (1.3) para opciones bermuda y se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se determinan  $u$ ,  $d$  y  $p^*$ , para el modelo de Cox-Ross y Rubinstein.
2. Se genera, a través de una latiz, todos los posibles valores que puede tomar el subyacente en cada subintervalo.
3. Para el tiempo  $N$  valuar la función de pago para los  $N + 1$  distintos valores que puede tomar el subyacente. Denótese por  $P_n^i$  el valor de la opción put bermuda en el nodo  $i$  en el tiempo  $n$ . Entonces

$$P_N^i = h(S_N^i).$$

4. Usar el algoritmo (1.3) para valuar, de atrás hacia adelante, el valor de la opción en cada uno de los nodos de la latiz a través de la relación

$$P_n = \text{Max}\{h(S_n), E^*(e^{-r/N} P_{n+1} | \mathbb{F}_n)\}.$$

En términos de la latiz para el nodo  $i$  en el tiempo  $n$  se tiene que

$$P_n^i = \text{Max}\left\{h(S_n^i), \frac{p^* P_{n+1}^i + (1-p^*)P_{n+1}^{i+1}}{e^{r/N}}\right\},$$

para  $i = 0, \dots, N - 1$ .

### 2.2.3 Aplicación a la opción bermuda asociada a la Banxico

En este caso se tienen una opción put bermuda para vender el día  $n \in T$  con  $T = \{0, \dots, N\}$ , un dolar a un precio de ejercicio igual a  $S_{n-1}$ . Supongamos que  $\sigma$  es la volatilidad por el periodo  $T$  del tipo de cambio. A lo largo de este trabajo se tomará la volatilidad histórica para estimar la volatilidad. La volatilidad histórica  $\sigma$  se calcula de la forma usual:

$$\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \text{Ln}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)$$

$$\sigma = \frac{1}{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} \left(\text{Ln}\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right) - \mu\right)^2.$$

Se toma al CETES por 28 días como la tasa libre de riesgo doméstica y como tasa foránea la de un bono del tesoro americano para el período  $T$ ,  $r_1$  y  $r_2$  denotarán la tasa diaria doméstica y foránea, respectivamente. En este caso la función de pago está dada por

$$Z_n^1 = S_{n-1}(1 - T_n)_+.$$

El modelo de Cox-Ross y Rubinstein se modifica para trabajar con el tipo de cambio según el método de Garman y Kohlhagen:

$$u = e^{r_1 - r_2 + \sigma/\sqrt{N}} \quad y \quad d = e^{r_1 - r_2 - \sigma/\sqrt{N}}. \quad (2.7)$$

La probabilidad de riesgo neutro está dada por

$$p^* = \frac{1 - e^{\sigma/\sqrt{N}}}{e^{-\sigma/\sqrt{N}} - e^{\sigma/\sqrt{N}}},$$

con  $p^* = P(T_n = d)$  y  $1 - p^* = P(T_n = u)$ .

En el caso de la opción bermuda asociada a la Banxico no se puede trabajar con latices debido a la forma que tiene la función de pago. Esta en el tiempo  $n$  es igual a  $S_{n-1}(1 - T_n)_+$ . Valuar esta función en todo nodo del árbol implica conocer en el tiempo  $n$  quién es nodo en el tiempo  $n - 1$ , al que llamaremos nodo padre, que dio lugar a este nodo, por lo que la trayectoria importa. En este caso se debe generar un árbol binario de  $2^{N+1} - 1$  nodos. La forma en que se maneja el asociarle a un nodo  $n_i$  en el tiempo  $n$  a su nodo padre en el tiempo  $n - 1$  es a través de una función muy sencilla, sea  $l: [0, 2^{N+1} - 1] \rightarrow [0, 2^N - 1]$ , con la siguiente regla de correspondencia:  $l(i) = [i/2]$ , con  $[ \cdot ]$  la función máximo entero. Como el número de días hábiles que se tienen en un mes varía entre 18 a 23 días, así que se requerirá a lo más de un árbol de  $2^{24} - 1$  nodos.

1. Se genera a través de un árbol binario, con  $u$  y  $d$  dados por (3.9), todos los posibles valores que puede tomar el subyacente para  $n \in T$ .
2. Para el tiempo  $N$  se valúa la función de pago para los  $2^N$  distintas trayectorias que sigue el subyacente. Denotemos por  $U_N^{1,B,i}$  el valor de opción Banxico en el nodo  $i$  en el tiempo  $n$ . Entonces

$$U_N^{1,B,i} = Z_N^{1,i} = \frac{S_{N-1}^{i(i)}}{e^{r_1}} (1 - T_N^i)_+.$$

3. Usar el algoritmo (1.3) para valuar de atrás hacia adelante el valor de la opción en cada uno de los nodos del árbol a través de la relación

$$U_n^{1,B,i} = \text{Max} \left\{ Z_n^{1,i}, \frac{(1 - p^*)U_{n+1}^{1,B,2i} + p^*U_{n+1}^{1,B,2i+1}}{e^{r_1}} \right\}, \quad (2.8)$$

para  $n = 1, \dots, N - 1$ .

$$U_0^{1,B} = \frac{(1 - p^*)U_1^{1,B,0} + p^*U_1^{1,B,1}}{e^{r_1}}.$$

### 2.2.4 Aplicación a la opción Banxico

En este caso como en el anterior hay que usar árboles binomiales para representar todas las trayectorias posibles que sigue el *fix*. La restricción del promedio se implementa computacionalmente, al mismo tiempo que se genera el árbol, de la siguiente forma: en el tiempo  $n$ , a cada  $i$ -ésimo nodo, con  $i = 0, \dots, 2^n - 1$ , se le asigna, además del valor del subyacente, el valor 1 si se satisface la condición del promedio o el valor cero si no se satisface. Estos valores se guardan en un arreglo bidimensional. Cuando todo el árbol ha sido generado, se aplica el algoritmo recursivo (1.3) para determinar el valor de la opción en cada uno de los nodos. A continuación se presenta el algoritmo correspondiente:

- (a) Se genera a través de un árbol binario, con  $u$  y  $d$  dados por (3.9), todos los posibles valores que puede tomar el subyacente para  $n \in T$ . Al mismo tiempo se etiquetan los nodos de la siguiente forma: para  $i = 0, \dots, N$  sea  $M_{i-1}^j = \sum_{k=0}^{19} S_{i-1-k}^j$  donde  $S_{i-1-k}^j$ , para  $k = 0, \dots, 19$ , son los veinte valores que tomó antes  $S_{i-1}^j$  incluyendo él mismo. Sea  $R(j, i)$  un arreglo bidimensional que almacena la etiqueta del nodo  $\pi_i^j$ , con  $i = 0, \dots, N$  indicando el  $i$ -ésimo día hábil y  $j = 0, \dots, 2^j - 1$  denotando el nodo correspondiente a la  $j$ -ésima trayectoria. Este arreglo toma dos valores, uno o cero, dependiendo que la restricción del promedio se cumpla, es decir

$$R(j, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } M_{i-1}^j \geq S_{i-1}^j, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- (b) Para el tiempo  $N$  se valúa la función de pago para los  $2^N$  distintas trayectorias que sigue el subyacente. Denotemos por  $U_n^{2,B,j}$  el valor de opción Banxico en el nodo  $j$  en el tiempo  $n$ . Entonces

$$U_N^{2,B,j} = Z_N^{2,j} = R(j, N) Z_N^{1,j}.$$

- (c) Dado que  $Z_n^{2,j} = R(j, n) Z_n^{1,j}$ , con  $j = 0, \dots, 2^n - 1$ . Usar el algoritmo (1.3) para valuar, de atrás hacia adelante, el valor de la opción en cada uno de los nodos del árbol binario a través de la relación

$$U_n^{2,B,j} = \text{Max} \left\{ Z_n^{2,j}, \frac{(1-p^*)U_{n+1}^{2,B,2j} + p^*U_{n+1}^{2,B,2j+1}}{e^{r_1}} \right\}, \quad (2.9)$$

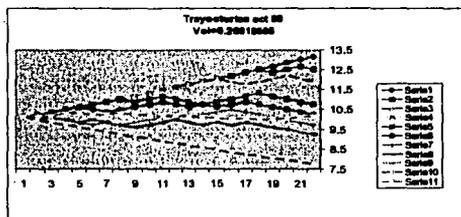
para  $n = 1, \dots, N-1$  y  $j = 0, \dots, 2^n - 1$ .

$$U_0^{2,B,i} = \frac{(1-p^*)U_1^{2,B,0} + p^*U_1^{2,B,1}}{e^{r_1}}.$$

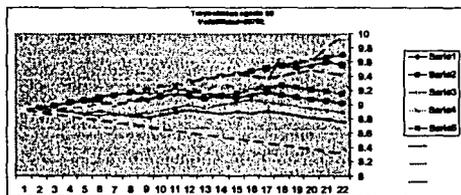
A continuación se presenta el desempeño de la opción bermuda asociada a la Banxico y de la opción Banxico. En la obtención de estos resultados se usaron los resultados teóricos (2.2) y se aplicaron los algoritmos antes vistos.

### 2.2.5 Resultados Numéricos

Para comenzar se muestra cómo funciona el árbol binomial cuando se usan datos reales para valuar la opción Banxico. En la gráfica 2 se presenta el árbol binomial con varias de sus trayectorias que se utilizó para valuar la opción Banxico para el mes de octubre de 1998. Como se observa el árbol representa una muestra de los posibles valores futuros que puede tomar el *fix* durante ese mes. Todos los valores quedan en el interior del ángulo que forma la trayectoria en la que siempre se incrementa el subyacente en *u* y la que siempre decrece el valor de  $T_n$  en *d*. El tamaño del ángulo tiene que ver con la expresión  $r_1 - r_2 + \sigma$ , mientras más grande sea esta expresión, mayor el ángulo. Cuando la volatilidad histórica es un buen estimador de la volatilidad futura, se tiene que la trayectoria que realmente sigue el *fix* queda en el interior de este ángulo, como es el caso de la gráfica 2, en cambio en la gráfica 3, en la que se presenta el comportamiento del *fix* durante el mes de agosto de 1998 la trayectoria sale del ángulo lo que implica que se subestimó la volatilidad.



Gráfica 2



Gráfica 3

Los datos que se presentan en la tabla 1 y que ilustran el desempeño de los algoritmos de la sección anterior son datos reales y se escogieron por varias razones. El mes de noviembre de 1996 muestra el desempeño de la opción Banxico en una época que se caracterizó por tasas domésticas muy altas: alrededor del 28%. Agosto y septiembre de 1998 fueron algunos de los meses de mayor volatilidad durante el período de vigencia de la opción y finalmente los tres meses del 2000 ilustran el

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

comportamiento de ésta en una situación económica más estable, en las que algunas ocasiones el peso se depreció respecto al dolar, como durante el mes de junio, o viceversa como en el mes de julio.

Para validar los algoritmos numéricos se compara en la tabla 1, para distintos valores anuales de  $\sigma$  y  $r = r_1 - r_2$ , tanto el valor teórico de la opción bermuda asociada a la Banxico, dado por (2.2) como el estimado por el algoritmo (2.8). Al primero se denota por  $U_0^{1,B}$ , mientras que el segundo por  $\hat{U}_0^{1,B}$ . En la misma tabla se muestra el valor que se obtiene para la opción Banxico a través del algoritmo (2.9) y que se denota por  $\hat{U}_0^{2,B}$ . El valor de las opciones es por un dolar.

Cuadro 1: Modelo discreto

Fecha	$\hat{U}_0^{1,B}$	$U_0^{1,B}$	Error	$\hat{U}_0^{2,B}$	$\sigma$	$r_1 - r_2$	$S_0 - M_0$
11 - 96	.04162	.04101	.015	0.01891	0.092	.2073	0.3070
08 - 98	.02491	.02462	.011	0.01449	0.05033	.1512	0.0366
09 - 98	.11009	.10872	.012	0.06309	0.17987	.1767	0.6189
06 - 00	.04130	.04096	.008	0.03803	0.07184	.0868	-.0145
07 - 00	.06984	.06926	.008	0.06104	0.11586	.1015	-.0378
08 - 00	.03676	.0365	.007	0.0355	0.06527	.0823	-.0508

Como se sabe, ver Hull [6], al valuar opciones el valor de la opción depende tanto del valor de  $\sigma$  como de  $r_1 - r_2$ . En el caso de las opciones put a mayor valor de la volatilidad, mayor el valor de la opción y a mayor valor de la diferencia de las tasas, menor el valor de la opción. Aunque la muestra es pequeña se observa que el error relativo que se comete con el algoritmo numérico es menor que .02 y que es mayor cuando la volatilidad y la diferencia de tasas es alta. Este error es debido a la implementación computacional.

Observése que el valor de la opción sin la restricción del promedio es siempre mayor al de la opción Banxico, lo cual es natural porque en el primer caso todos los días son días de ejercicio siempre que  $Z_n^1 > 0$ , mientras que en el caso de la Banxico esto no es cierto porque, además de cumplirse lo anterior, se debe cumplir la restricción del promedio.

Por otro lado, para la opción Banxico también juega un papel muy importante el valor de  $S_0 - M_0$ , con  $M_0 = \frac{1}{20} \sum_{i=0}^{19} S_{-i}$ . Si esta diferencia es igual a cero o negativa, la opción puede ejercerse desde el primer día, por lo que su valor se acerca al de la opción bermuda, como es el caso del mes de junio, julio y agosto del 2000. Pero a medida que esta diferencia se incrementa, el valor de la opción decrece al disminuir el número de días en que puede ejercerse y su valor se acerca más al de una opción europea, como es el caso del mes de noviembre del 96 y el de septiembre de 1998.

Una forma de mejorar los resultados de esta estimación es incrementando el valor de  $N$ , pero esto es poco práctico ya que para valores grandes de  $N$  se aumentaría con-

siderablemente los requerimientos de memoria y tiempo de máquina. Esto motiva a buscar otro tipo de modelos para estimar la solución.

## Capítulo 3

# Modelación semicontinua de la opción Banxico

En este capítulo se supone que el subyacente satisface el modelo de Black-Scholes y bajo esa hipótesis se determina en forma explícita el valor como el tiempo óptimo de ejercicio de la opción bermuda asociada a la Banxico. Desafortunadamente, no podemos extender estos resultados para la opción Banxico, pero podemos proponer una regla de ejercicio que permita estimar el valor de la opción por medio del método de Monte-Carlo. En la primera sección se determina el valor de la opción y el tiempo de ejercicio para la opción bermuda y se dan dos reglas de ejercicio para estimar el tiempo de paro óptimo de la opción Banxico. En la segunda sección se presenta el método de Monte-Carlo y su aplicación a un estudio numérico del desempeño de las dos reglas de ejercicio y, con base a los resultados obtenidos, se propone un algoritmo dinámico para valuar la opción Banxico y determinar la fecha de ejercicio.

### 3.1 Un tiempo de ejercicio para el modelo continuo

Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ , un espacio de probabilidad, y  $T = [0, N]$ . Considérese un movimiento browniano estándar  $B_t, t \in T$  en este espacio de probabilidad, sea  $\mathcal{F}_t, t \in T$ , la filtración browniana usual. Asumamos las siguientes hipótesis del modelo de Black-Scholes:

- 1.- El tipo de cambio  $S_t, t \geq 0$  está dado por el siguiente movimiento browniano geométrico:

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t \right),$$

con  $\mu$  y  $\sigma$  constantes y  $\sigma > 0$ .

- 2.- Existe un activo libre de riesgo dado por  $S_t^0 = e^{rt}$ .

3.- El mercado es viable y completo lo que implica que existe una única probabilidad  $P^*$  equivalente de  $P$ , conocida como la probabilidad de riesgo neutro, para la cual el tipo de cambio es de la forma

$$S_t = S_0 \exp \left( (r_1 - r_2 - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \right),$$

con  $W_t$ ,  $t \in T$ , un movimiento browniano estándar dado por

$$W_t = B_t + \frac{\mu - (r_1 - r_2)}{\sigma} t.$$

En este análisis se estudia el modelo semicontinuo debido a la naturaleza discreta del problema; es decir, dado que únicamente una vez al día cambia de valor el tipo de cambio *fix* entonces sólo una vez al día puede ejercerse la opción. Por lo que  $\{S_t, t \in \{0, \dots, N\}\}$  es un proceso estocástico discreto en el que las variables aleatorias  $S_t$  son continuas.

Bajo la probabilidad de riesgo neutro  $P^*$ , para cada  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,

$$T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}},$$

es una variable aleatoria log-normal, o sea es de la forma:

$$T_n = e^{r_1 - r_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma X_n}, \quad (3.1)$$

con  $X_n$  una variable aleatoria, independiente de  $\mathcal{F}_n$ , con distribución gaussiana con media cero y varianza 1. En otras palabras  $X_n$  satisface:

$$X_n = \frac{\log T_n}{\sigma} + K_1, \quad K_1 = \frac{1}{2}(\sigma - k), \quad k = \frac{2(r_1 - r_2)}{\sigma}. \quad (3.2)$$

En lo que sigue haremos uso de las siguientes variables:

$$Y_N = K_1, \quad (3.3)$$

$$A_N = \Phi(K_1) - e^{r_1 - r_2} \Phi\left(-\frac{k + \sigma}{2}\right) \quad (3.4)$$

y para  $n \in \{1, \dots, N\}$

$$Y_{N-n} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{\sigma} \log (e^{-r_2} A_{N-n+1} + e^{r_1 - r_2}) \quad (3.5)$$

$$A_{N-n} = \Phi(Y_{N-n}) - \Phi(Y_{N-n} - \sigma) [e^{r_1 - r_2} + e^{-r_2} A_{N-n+1}] + e^{-r_2} A_{N-n+1}, \quad (3.6)$$

denotando por  $\Phi$  a la gaussiana acumulada.

Bajo el modelo de Black-Scholes, denótese como  $\tilde{U}_i^1, C$ ,  $0 \leq n \leq N$ ,  $i = 1, 2$ , el valor presente de la opción bermuda asociada a la Banxico y el de la opción Banxico, respectivamente.

A continuación se obtendrá el valor de la opción bermuda asociada a la Banxico y el tiempo de ejercicio óptimo.

**Teorema 3.1.1.** *Bajo el modelo de Black-Scholes el valor de la opción bermuda asociada a la Banxico satisface para  $n \in \{1, \dots, N-1\}$  que*

$$\tilde{U}_{N-n}^1, C = \frac{\tilde{S}_{N-n-1}}{e^{r_1}} \left[ \mathbf{1}_{\{X_{N-n} < Y_{N-n}\}} (1 - T_{N-n}) + \mathbf{1}_{\{X_{N-n} \geq Y_{N-n}\}} \frac{T_{N-n}}{e^{r_1}} A_{N-n+1} \right] \quad (3.7)$$

y

$$U_0^1, C = \frac{S_0}{e^{r_1}} A_1.$$

donde  $T_n$ ,  $X_n$  y  $Y_n$  están dados por las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.5), respectivamente.

**Dem:** Como en el caso discreto la demostración se hará por inducción y se usará el principio de la programación dinámica, a través del algoritmo (1.3), para estimar el valor de la opción.

En el tiempo  $N$  el valor de la opción está dado por

$$\tilde{U}_N^1, C = \tilde{Z}_N^1 = \frac{\tilde{S}_{N-1}}{e^{r_1}} (1 - T_N)_+.$$

A continuación se demostrará que la ecuación (3.7) se cumple para  $k = 1$ . Para ello, obsérvese que

$$\begin{aligned} E^*[\tilde{U}_N^1, C \mid \mathcal{F}_{N-1}] &= \frac{\tilde{S}_{N-1}}{e^{r_1}} E^*[(1 - T_N)_+] \\ &= \frac{\tilde{S}_{N-1}}{e^{r_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma^2/2 + \sigma x})_+ e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{\tilde{S}_{N-1}}{e^{r_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{K_1} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma^2/2 + \sigma x}) e^{-x^2/2} dx \\ &= \frac{\tilde{S}_{N-1}}{e^{r_1}} \left( \Phi(K_1) - \frac{e^{r_1 - r_2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{K_1} e^{-(x-\sigma)^2/2} dx \right) \\ &= \frac{\tilde{S}_{N-1}}{e^{r_1}} (\Phi(K_1) - e^{r_1 - r_2} \Phi(K_1 - \sigma)) \\ &= \frac{\tilde{S}_{N-1}}{e^{r_1}} A_N \\ &= \frac{\tilde{S}_{N-2}}{e^{r_1}} \frac{T_{N-1}}{e^{r_1}} A_N. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Por otro lado, se tiene que

$$\bar{Z}_{N-1}^1 = \frac{\bar{S}_{N-2}}{e^{r_1}}(1 - T_{N-1})_+ \quad (3.9)$$

Por el algoritmo recursivo

$$\dot{U}_{N-1}^{1C} = \text{Max}\{\bar{Z}_{N-1}^1, E^*[U_N^{1C} | \mathcal{F}_{N-1}]\}.$$

Para determinar  $\bar{U}_{N-1}^{1C}$  sólo resta comparar las siguientes variables aleatorias de las expresiones (3.8) y (3.9)

$$(1 - T_{N-1})_+ \quad \text{y} \quad \frac{T_{N-1}}{e^{r_1}} A_N.$$

Por la definición de  $T_{N-1}$  (3.1), esto se reduce a analizar para  $y \in (-\infty, y_N)$  las funciones

$$g_1^{N-1}(y) = 1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma^2/2 + \sigma y}, \quad g_2^{N-1}(y) = e^{-r_2 - \sigma^2/2 + \sigma y} A_N.$$

Por un lado se tiene que  $g_1^{N-1}$  es una función continua decreciente que satisface

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} g_1^{N-1}(y) = 1$$

y  $g_2^{N-1}(y)$  es una función continua creciente tal que

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} g_2^{N-1}(y) = 0.$$

Estas dos funciones se intersectan exactamente en el punto  $Y_{N-1} < Y_N$  y

$$\max [g_1^{N-1}(y), g_2^{N-1}(y)] = \begin{cases} g_1^{N-1}(y), & \text{si } y < Y_{N-1}, \\ g_2^{N-1}(y), & \text{si } y \geq Y_{N-1}, \end{cases}$$

por lo que  $\bar{U}_{N-1}^{1C}$  satisface la ecuación (3.7).

Supóngase que esta ecuación es válida para  $k$  entonces se tiene que  $Y_{N-k} < Y_N$  y por la ecuación (3.7)

$$\begin{aligned}
 E^*[\bar{U}_{N-n}^{1,C} \mid \mathcal{F}_{N-(n+1)}] &= \frac{\bar{S}_{N-(n+1)}}{e^{r_1}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x < Y_{N-n}\}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma^2/2 + \sigma x}) e^{-x^2/2} dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A_{N-n+1}}{e^{r_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{\{x \geq Y_{N-n}\}} e^{r_1 - r_2 - \sigma^2/2 + \sigma x} e^{-x^2/2} dx \right] \\
 &= \frac{\bar{S}_{N-(n+1)}}{e^{r_1}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Y_{N-n}} (1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma^2/2 + \sigma x}) e^{-x^2/2} dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A_{N-n+1}}{e^{r_1}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{Y_{N-n}}^{\infty} e^{r_1 - r_2 - \sigma^2/2 + \sigma x} e^{-x^2/2} dx \right] \\
 &= \frac{\bar{S}_{N-(n+1)}}{e^{r_1}} \left[ \Phi(Y_{N-n}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{r_1 - r_2} \int_{-\infty}^{Y_{N-n}} e^{-(x-\sigma)^2/2} dx \right. \\
 &\quad \left. + \frac{A_{N-n+1}}{e^{r_1}} \frac{e^{r_1 - r_2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{Y_{N-n}}^{\infty} e^{-(x-\sigma)^2/2} dx \right] \\
 &= \frac{\bar{S}_{N-(n+1)}}{e^{r_1}} \left[ \Phi(Y_{N-n}) - e^{r_1 - r_2} \Phi(Y_{N-n} - \sigma) \right. \\
 &\quad \left. + e^{-r_2} A_{N-n+1} (1 - \Phi(Y_{N-n} - \sigma)) \right] \\
 &= \frac{\bar{S}_{N-(n+1)}}{e^{r_1}} A_{N-n}.
 \end{aligned}$$

Al aplicar el mismo razonamiento que para  $k = 1$  hay que analizar las funciones

$$g_1^{N-(n+1)} = 1 - e^{r_1 - r_2 - \sigma^2/2 + \sigma y}, \quad g_2^{N-(n+1)} = e^{-r_2 - \sigma^2/2 + \sigma y} A_{N-n},$$

que, como se observa, se intersectan exactamente en el punto  $Y_{N-n} < Y_N$  y que

$$\max \{g_1^{N-n}(y), g_2^{N-n}(y)\} = \begin{cases} g_1^{N-n}(y), & \text{si } y < Y_{N-n}, \\ g_2^{N-n}(y), & \text{si } y \geq Y_{N-n}, \end{cases}$$

De esta forma se demuestra el teorema para  $k + 1$ .

Por último para obtener el valor de  $U_0^{1,C}$  se calcula  $E^*[\bar{U}_1^{1,C}]$  que está dado por la siguiente expresión:

$$E^*[\bar{U}_1^{1,C}] = E^* \left( \frac{S_0}{e^{r_1}} \left[ \mathbb{1}_{\{x_1 < y_1\}} (1 - T_1) + \mathbb{1}_{\{x_1 \geq y_1\}} \frac{T_1}{e^{r_1}} A_2 \right] \right).$$

Se obtiene el resultado deseado al aplicar el mismo razonamiento anterior.

□

De la expresión 3.7 se obtiene el siguiente corolario:

**Corolario 3.1.2.** *Bajo el modelo de Black-Scholes un tiempo de ejercicio óptimo está dado por  $\tau_0^{1,C}$  para la opción bermuda asociada a la Banzico y es de la forma:*

$$\tau_0^{1,C} = \begin{cases} \inf\{0 < n \leq N \mid X_n < Y_n\}, & \text{si } X_n < Y_n, \text{ para alguna } n, \\ N, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.10)$$

con  $X_n$  y  $Y_n$  dados por las ecuaciones (3.2) y (3.5), respectivamente.

Obsérvese que a partir de (3.2) se puede también expresar el tiempo de ejercicio  $\tau_0^{1,C}$  por:

$$\tau_0^{1,C} = \begin{cases} \inf\{0 < n \leq N \mid \log T_n < \sigma(Y_n - K_1)\}, & \text{si } \log T_n < \sigma(Y_n - K_1), \text{ para alguna } n, \\ N, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

con  $Y_n$  dado por la ecuación (3.5).

Como en el caso discreto, también se cumple que

$$E^*[\bar{U}_{n+1}^{1,C} \mid \mathcal{F}_n] \geq E^*[\bar{U}_{n+1}^{2,C} \mid \mathcal{F}_n].$$

Desafortunadamente, en este caso no es suficiente esta relación para determinar el tiempo de ejercicio óptimo para la opción Banzico. Sin embargo tanto el tiempo de ejercicio óptimo discreto como el semicontinuo nos dan dos reglas de ejercicio para ejercer la opción Banzico y de esta forma valuar la opción. Estas dos reglas de ejercicio se denotarán por  $(\tau^{2,1}, \tau^{2,2})$  con

$$\tau^{2,1} = \begin{cases} \inf\{0 < n \leq N \mid \bar{Z}_n^2 > 0\}, & \text{si } \bar{Z}_n^2 > 0 \text{ para alguna } n, \\ N, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$\tau^{2,2} = \begin{cases} \inf\{0 < n \leq N \mid X_n < Y_n, \bar{Z}_n^2 > 0\}, & \text{si } X_n < Y_n, \bar{Z}_n^2 > 0 \text{ para alguna } n, \\ N, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $X_n, Y_n$  están dados por las ecuaciones (3.2), (3.5), respectivamente.

También, a partir de (3.2), el tiempo de ejercicio  $\tau^{2,2}$  se puede expresar por:

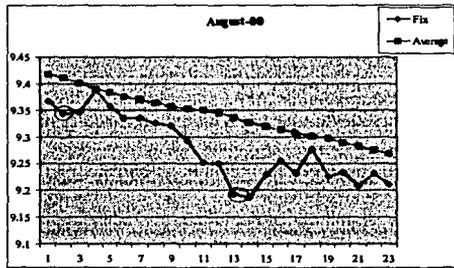
$$\tau^{2,2} = \begin{cases} \inf\{0 < n \leq N \mid \log T_n < \sigma(Y_n - K_1), R_n > 0\}, & \text{si } \log T_n < \sigma(Y_n - K_1), R_n > 0 \text{ para alguna } n, \\ N, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

donde  $Y_n$  está dado por la ecuación (3.5).

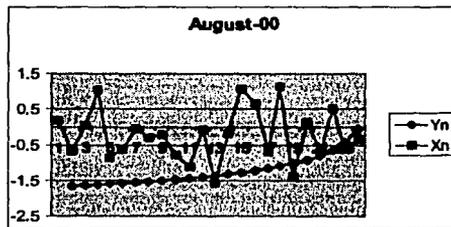
Con estas dos reglas de ejercicio obtenemos cotas inferiores del valor de la opción Banzico ya que se cumple lo siguiente:

$$E^*[\bar{Z}_{\tau^{2,i}}^2] \leq \sup_{\tau \in T} E^*[\bar{Z}_{\tau,i}^2] = U_0^{2,C}.$$

A continuación se presentan algunas gráficas para ilustrar el comportamiento de estas reglas de ejercicio. La Gráfica 4 muestra el comportamiento del tipo de cambio *fix* durante el mes de agosto del 2000 a partir del último día del mes anterior, o sea es la gráfica de  $S_n$  para  $n = 0, \dots, 23$ . Como podemos observar todos los días hábiles de este mes se cumple la restricción del promedio móvil. Si se aplica la regla de ejercicio  $\tau^{2,1}$ , el primer día hábil es un día de ejercicio, se indica en la gráfica con un círculo, por lo que al ejercer la opción se obtendría una ganancia de \$23.90 pesos por mil dólares. En cambio si se aplica la regla de ejercicio  $\tau^{2,2}$  se debe buscar el primer día en el que se satisface que  $X_n < Y_n$ .



Gráfica 4



Gráfica 5

La Gráfica 5 muestra los valores que toman estas dos variables durante este mes. Obsérvese que el intervalo de valores que puede tomar  $X_n$  para que se satisfaga la restricción  $X_n, Y_n$  se va incrementando a medida que nos acercamos a la fecha de vencimiento. Esto es muy natural ya que al principio se exige una mayor ganancia para ejercer la opción que al final cuando quedan menos días para ejercerla. En este caso  $X_n < Y_n$ , en el doceavo, décimo octavo, vigésimo segundo y vigésimo tercer días; el doceavo es el primer día por lo que si se ejerce ese día se obtiene una ganancia de \$58.10 pesos por 1000 dólares, la mayor posible durante el mes. En el

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

cuadro siguiente se muestra los valores que toma el subyacente, el promedio móvil,  $X_n$  y  $Y_n$  para este mes.

Cuadro 2

Day	$S_n$	$R_n$	$S_{n-1} - S_n$	$M_n$	$X_n$	$A_n$	$Y_n$
0	9.366		-0.0089	9.4174			
1	9.342	1	0.0239	9.4111	0.1794	0.00672	-1.6727
2	9.346	1	-0.0034	9.4008	-0.6731	0.00669	-1.6526
3	9.388	1	-0.0419	9.3903	0.0367	0.00660	-1.6314
4	9.357	1	0.0307	9.3834	-0.8483	0.00651	-1.6091
5	9.335	1	0.0221	9.3757	-0.6268	0.00642	-1.5855
6	9.335	1	0	9.3709	-0.0517	0.00632	-1.5604
7	9.326	1	0.0093	9.3635	-0.2941	0.00622	-1.5338
8	9.319	1	0.0062	9.3577	-0.2134	0.00611	-1.5053
9	9.291	1	0.0280	9.3527	-0.7835	0.00599	-1.4747
10	9.251	1	0.0402	9.3496	-1.1062	0.00587	-1.4418
11	9.250	1	0.0012	9.3454	-0.0832	0.00573	-1.4061
12	9.192	1	0.0581	9.3369	-1.5841	0.00558	-1.3672
13	9.187	1	0.0050	9.3328	-0.1840	0.00542	-1.3245
14	9.229	1	-0.0420	9.3195	1.0576	0.00524	-1.2772
15	9.256	1	-0.0270	9.3140	0.6587	0.00505	-1.2244
16	9.232	1	0.0241	9.3083	-0.6857	0.00483	-1.1648
17	9.277	1	-0.0451	9.3014	1.1335	0.00458	-1.0962
18	9.226	1	0.0505	9.2970	-1.3792	0.00430	-1.0161
19	9.234	1	-0.0074	9.2901	0.14328	0.00397	-0.9201
20	9.209	1	0.0249	9.2836	-0.7084	0.00357	-0.8008
21	9.231	1	-0.0224	9.2753	0.5391	0.00308	-0.6461
22	9.210	1	0.0209	9.2695	-0.6029	0.00244	-0.4239
23	9.199	1	0.0113		-0.3502	0.00153	-0.05171

Por medio del método de Monte-Carlo y con datos reales del tipo de cambio *fix* se estimará  $E^*[\bar{Z}_{\tau^2, i}^2]$ ,  $i = 1, 2$  en la siguiente sección. Los resultados numéricos permiten concluir que  $\tau^{2,2}$  es una mejor regla de ejercicio que  $\tau^{2,1}$ , ya que siempre obtenemos que

$$\hat{U}_0^{2,1} = \hat{E}^*[\bar{Z}_{\tau^{2,1}}^2] < \hat{E}^*[\bar{Z}_{\tau^{2,2}}^2] = \hat{U}_0^{2,2}.$$

### 3.2 Resultados numéricos del caso semicontinuo

Se sabe por la Ley de los Grandes Números que un buen estimador del valor esperado de una variable aleatoria continua  $X$  con distribución  $F$  es el valor promedio de una muestra finita de variables aleatorias, independientes con distribución  $F$ . Es decir

$$E(X) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i.$$

Como la esperanza de una variable aleatoria continua es una integral, la media muestral se puede usar para estimar el valor de una integral. Esta es la idea que está detrás del método de Monte-Carlo, ver [8].

En el caso que nos ocupa, se desea estimar el valor esperado de una función continua  $g$  cuyo argumento es una variable aleatoria. Entonces sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  números aleatorios independientes idénticamente distribuidos, el método de Monte-Carlo consiste en aplicar la Ley de los Grandes Números para aproximar el valor esperado  $E(g(X))$  por

$$E(g(X)) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(X_i).$$

El Teorema del Límite Central nos permite estimar el error que se comete al usar Monte-Carlo para estimar esta integral. Sean  $I = E(g(x))$  y  $\bar{I}_M = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g(X_i)$  entonces si  $\sigma$  es la desviación estándar de  $g(X)$ , se tiene que  $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$  es la desviación estándar de  $\bar{I}_M$ , por lo que

$$P(|I - \bar{I}_M| < \frac{c\sigma}{\sqrt{M}}) \approx P(|Z_M| < c) = 2\Phi(c),$$

con  $Z_M = \frac{I - \bar{I}_M}{\sigma/\sqrt{M}}$ ,  $\Phi(c) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^c e^{-x^2/2}$  y  $c$  se selecciona dependiendo de la probabilidad que se desee obtener. Por ejemplo si se quiere que la probabilidad sea .95 se selecciona a  $c$  como 1.96.

Por lo tanto el error que se comete al usar el método de Monte-Carlo es aproximadamente  $\frac{\sigma}{\sqrt{M}}$ . Como observamos, si  $\sigma \approx 1$ , se requiere de una  $M$  suficientemente grande para tener al menos dos cifras significativas.

Este resultado nos permite estimar un intervalo de confianza de  $\alpha\%$ . Para ello se selecciona  $c$  de tal forma que  $\Phi(c) = \frac{\alpha}{2}$ . De esta forma, con probabilidad  $\alpha$  podemos asegurar que el valor exacto de la integral  $I$  está en el intervalo

$$[\bar{I} - \frac{c\sigma}{\sqrt{M}}, \bar{I} + \frac{c\sigma}{\sqrt{M}}].$$

El problema para usar el resultado anterior es que hay que conocer el valor de la desviación estándar de la  $g(x)$ . Lo que se hace en la práctica es estimarla por la varianza muestral  $\bar{\sigma}$ , ver S.Ross [9], que se calcula por

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (g(X_i) - \bar{I}_M)^2.$$

Con ese estimador podemos determinar el tamaño que se requiere que tenga  $M$  para tener la precisión deseada. Por ejemplo, si se desea tener un intervalo de confianza del 95% de longitud  $10^{-2}$  se debe escoger  $M > (1.96)^2 \bar{\sigma}^2 10^4$ .

El algoritmo de Monte-Carlo para estimar un intervalo de confianza del 95% de la esperanza de una función  $F(x)$ , con  $x$  una variable aleatoria gaussiana estándar es el siguiente:

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

- (a) Sea  $S_1 = 0; \bar{I}_0 = 0; \bar{I}_1 = X_1$ .
- (b) Para  $i = 1, \dots, M$  generar números aleatorios  $X_i$  gaussiano con media cero y varianza uno.
- (c)  $\bar{I}_{i+1} = \bar{I}_i + \frac{F(X_{i+1}) - \bar{I}_i}{i+1}; S_{i+1} = (1 - \frac{1}{i})S_i + (i+1)(\bar{I}_{i+1} - \bar{I}_i)^2$ .
- (d)  $I \in [\bar{I}_M - \frac{1.965\sqrt{M}}{\sqrt{M}}, \bar{I}_M + \frac{1.965\sqrt{M}}{\sqrt{M}}]$ .

A continuación se presentan algunos resultados numéricos para el caso semicontinuo usando el método de Monte-Carlo.

### 3.2.1 Algoritmo para calcular el valor de la opción Bermuda asociado a la Banxico

El método de Monte-Carlo no se recomienda para estimar el valor de las opciones bermuda o americanas. Sin embargo, si se determina el día óptimo de ejercicio o una estimación del mismo puede aplicarse el método con grandes ventajas: su implementación computacional es mucho más sencilla que la del modelo binomial y el tiempo de cómputo es considerablemente menor.

Por el corolario 3.2 sabemos que el valor de la opción bermuda asociada a la Banxico está dado por  $E(\bar{Z}_{\tau_0}^1)$  con  $\tau_0$  el tiempo de ejercicio óptimo para esta opción dado por 3.10. Este resultado nos permite diseñar un algoritmo que estima el valor de esta opción por medio de Monte-Carlo, con todas las ventajas que ésto implica. Este es una de las contribuciones más importantes de este trabajo.

- (a) Se toman  $r_1, r_2$  como la tasa diaria de CETES y la tasa de los American Treasury Bills del mes anterior, respectivamente. Se estima la volatilidad diaria  $\sigma$ , con la información del tipo de cambio de los últimos veintinueve días.
- (b) Con estas cantidades se calculan las constantes  $Y_k, A_k, k = 1, \dots, N$ , de las ecuaciones (3.2) y (3.5).
- (c) Para  $i = 1, \dots, M$  se genera una trayectoria  $S_n^i$  del *fix* usando la siguiente expresión

$$S_n^i = S_{n-1}^i e^{r_1 - r_2 - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma X_n^i},$$

con  $X_n^i$  una variable aleatoria gaussiana estándar.

- (d) Se determina el primer entero  $n$  para el que se cumple  $X_n^i < Y_n^i$ , sea  $\tau_0^i$  dicho entero. En caso de que esta condición no se cumpla para alguna  $n \in \{1, \dots, N\}$  entonces  $\tau_0^i = N$ .
- (e) Cálculése  $\bar{Z}_{\tau_0}^{1,i} = \frac{Z_{\tau_0}^{1,i}}{e^{r_1 \tau_0^i}}$ .
- (f)

$$E(Z_{\tau_0}^1) \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{Z}_{\tau_0}^{1,i}.$$

A continuación se presentan algunos resultados numéricos para el caso de la opción Banxico sin restricciones para validar el algoritmo numérico. Se estimó con un intervalo de confianza del 95% el valor de  $U_0^{1,C}$  que se denotará por  $\hat{U}_0^{1,C}$ . Con  $M = 10,000$  trayectorias se tiene para todos los meses un intervalo de longitud a lo más de .003. En la tabla 2 se comparan para los mismos datos del caso binomial los valores de  $U_0^{1,C}$ , calculado por medio de la expresión (3.7), y el valor de  $U_0^{1,C}$ .

Cuadro 3: Modelo semicontinuo

Fecha	$\hat{U}_0^{1,C}$	$U_0^{1,C}$	Intervalo de confianza del 95%
11 - 96	.07003	.07012	.06950, .07055
08 - 98	.04317	.04332	.04285, .04349
09 - 98	.18356	.18355	.1822, .1848
06 - 00	.070172	.070174	.0696, .0706
07 - 00	.11601	.116548	.1152, .1168
08 - 2000	.063376	.063377	.0629, .0646

Obsérvese que el valor exacto se encuentre siempre dentro del intervalo de confianza que se obtuvo por el método de Monte-Carlo. Estos resultados permiten validar nuestro algoritmo de Monte-Carlo. Por otro lado si se comparan los resultados de este cuadro con los del cuadro 1, se observa que siempre es mayor el valor que se obtiene con el modelo semicontinuo que con el discreto, alrededor de un 70%. Esto muestra que el modelo binomial aproxima inferiormente el valor de la opción bermuda y es una cota inferior más pequeña que la que se obtiene con el modelo semicontinuo.

### 3.2.2 Resultados numéricos con las dos reglas de ejercicio

El algoritmo que se aplica para estimar el valor de la opción Banxico con las reglas de ejercicio  $\tau^{2,j}$ , con  $j = 1, 2$  es el siguiente:

- El paso 1, 2 y 3 son similares al algoritmo de la opción bermuda.
- Para cada trayectoria determínese la primera  $n$  para la cual se satisface que  $R_n > 0$  y  $(1 - T_n) > 0$ . Supongamos que esto sucede para  $n = \tau_0^{2,j,i}$ . En caso de no cumplirse para alguna  $n$  ambas condiciones  $\tau_0^{2,j,i} = N$ .
- Calcúlese  $\bar{Z}_{\tau^{2,j}}$ .
- El valor de la opción está dado por

$$E^*[\bar{Z}_{\tau^{2,j}}] = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \bar{Z}_{\tau_0^{2,j,i}}^{2,j,i}$$

En el cuadro 4 se compara, para distintos valores de los parámetros, los intervalos de confianza del 95% del valor de la opción Banxico en el tiempo inicial  $\hat{U}_0^{2,1}$  cuando se usa la primera regla de ejercicio  $\tau^{2,1}$  y el valor de  $\hat{U}_0^{2,2}$  cuando se usa la regla de ejercicio  $\tau^{2,2}$ . Ambos valores se estimaron por medio del método de Monte-Carlo para  $M = 10,000$  trayectorias para  $N = 21$ . También se lista los valores que se obtienen al usar el método de árboles binomiales.

**Cuadro 4**

$\hat{U}_0^{2,B}$	$\hat{U}_0^{2,2}$	$\hat{U}_0^{2,1}$	$\sigma$	$r_1 - r_2$	$S_0 - M_0$
.02989	[.0328, .0341]	[.0242, .025]	.0619	.0722	-.060
.02388	[.0260, .027]	[.0201, .0208]	.05		
.03619	[.0404, .042]	[.030, .0311]	.075		
.04700	[.0551, .0571]	[.0403, .0417]	0.1		
.05922	[.0697, .0723]	[.0503, .0521]	0.125		
.07140	[.0824, .0854]	[.0609, .0630]	0.15		
.09583	[.1104, .1144]	[.0807, .0835]	.2		
.04793	[.0565, .0586]	[.0410, .0424]	0.1	.0422	
.04608	[.0530, .0550]	[.0401, .0415]		0.1022	
.04549	[.0518, .0539]	[.0396, .0401]		0.1222	
.04458	[.0501, .0526]	[.0385, .0399]		0.1522	
.04320	[.0470, .0490]	[.0375, .0389]		0.2022	
.04175	[.0466, .0487]	[.0341, .0355]	0.1	0.0722	0.0
.04118	[.0412, .0431]	[.0310, .0325]			0.05
.03713	[.0375, .0393]	[.0278, .0291]			0.1
.03176	[.0313, .0330]	[.0240, .0253]			0.25
.02823	[.027, .0286]	[.0210, .0223]			0.5

Como se puede ver el intervalo de confianza de  $\hat{U}_0^{2,2}$  y el de  $\hat{U}_0^{2,1}$  son siempre ajenos y muestran que el primer estimador es una cota superior más grande que el segundo para todos los distintos valores de los parámetros, por lo que se puede concluir que la segunda regla de ejercicio  $\tau^{2,2}$  es un mejor criterio que  $\tau^{2,1}$ .

Por otro lado los valores de  $\hat{U}_0^{2,2}$  y  $\hat{U}_0^{2,B}$  muestran que las estimaciones se comportan como se esperaba cuando la volatilidad o  $r_1 - r_2$  o  $S_0 - M_0$  se incrementan. Obsérvese que el valor de la estimación binomial, cuando se modifican el valor de la volatilidad o de las tasas, siempre está por debajo del intervalo de confianza de  $\hat{U}_0^{2,2}$ . Sin embargo, cuando  $S_0 - M_0$  se incrementa, el valor del modelo binomial se aproxima a  $\hat{U}_0^{2,2}$ , de hecho se encuentra en el intervalo de confianza de  $\hat{U}_0^{2,2}$ , lo que quiere decir que cuando se reduce la posibilidad de ejercer antes de la fecha de maduración, los dos modelos describen bien lo que sucede con la opción.

En el Cuadro 5 se comparan los valores de la subasta con los resultados obtenidos para el modelo semicontinuo  $\hat{U}_0^{2,2}$ , con la segunda regla de ejercicio, y con los que se obtuvieron por el modelo binomial  $\hat{U}_0^{2,B}$ . Para los valores del modelo semicontinuo se da un intervalo

de confianza del 95%. Estos valores se estimaron utilizando la volatilidad histórica dado que se desconoce la volatilidad que usaron las instituciones financieras para presentar sus posturas en la subasta. Como se observa los tres primeros valores estimados son muy diferentes a los valores de la subasta. La mayor diferencia se obtiene en el mes de septiembre del 98. En esa ocasión las instituciones financieras castigaron a la opción debido a que durante el mes anterior, ver gráfica 7, en ninguno de los días hábiles se pudo ejercer la opción. No estuvieron dispuestos a pagar más a pesar de que la volatilidad histórica fue del 17%. En cambio en los meses del 2000 no difieren tanto. En ese año la economía se había estabilizado y las instituciones financieras le tenían más confianza a la opción Banxico.

Cuadro 5

Fecha	Subasta	$\hat{U}_0^{2,B}$	Intervalo de confianza 95% $\hat{U}_0^{2,B}$
Noviembre - 96	.01032	.01891	.0186, .0198
Agosto - 98	.01967	.01449	.0131, .0139
Septiembre - 98	.01243	.06309	.0624, .0656
Junio - 2000	.03570	.03803	.0466, .0480
Julio - 2000	.05990	.06104	.0727, .0752
Agosto - 2000	.03578	.03550	.0445, .0456

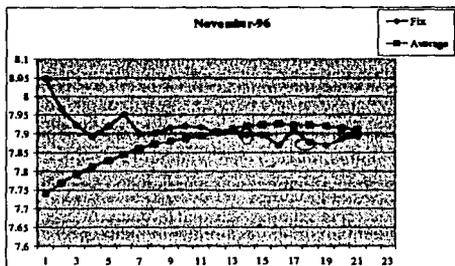
Obsérvese que cuando  $S_0 - M_0 > 0$ , el modelo binomial y el modelo semicontinuo con regla de ejercicio  $\tau^{2,2}$  son muy cercanos, conforme a los resultados del cuadro 4. Pero cuando se puede ejercer desde el primer día, como es el caso de los últimos tres meses, el valor de las opciones difieren mucho y siempre es mayor la del modelo semicontinuo. Esto quiere decir que el modelo binomial aproxima bien a la opción Banxico cuando la opción se acerca más a una europea, pero cuando la opción se acerca a la bermuda la estimación binomial es una cota inferior más pequeña que la del modelo semicontinuo. Esto explica el por qué de que en los meses del 2000, la opción binomial sea parecida al valor de la subasta. Se tiene la sospecha que buena parte de las instituciones financieras estimaron el precio de la opción por medio de una opción europea. Estos resultados, aunque pocos, nos permiten asegurar que se obtiene un mejor algoritmo para estimar la opción Banxico a partir del modelo semicontinuo con regla de ejercicio  $\tau^{2,2}$ .

También es importante señalar que el valor de la opción Banxico en el modelo semicontinuo se acerca al valor de la opción bermuda cuando  $S_0 - M_0 < 0$  y se alejan cuando  $S_0 - M_0 > 0$ . Esto nos permite corroborar lo que ya se había observado en forma más pronunciada en el caso discreto y permite entender un poco más el papel que juega la restricción del promedio móvil: cuando la opción puede ejercerse desde el primer día el valor de la opción se acerca a una opción bermuda, en cambio cuando disminuye el número de días que puede ejercerse la opción se acerca a una opción europea.

Por último analicemos para los meses del Cuadro 5 las ganancias que se hubieran obtenido si se aplican los algoritmos de Monte-Carlo con regla de ejercicio  $\tau^{2,i}$ ,  $i = 1, 2$  para ejercer

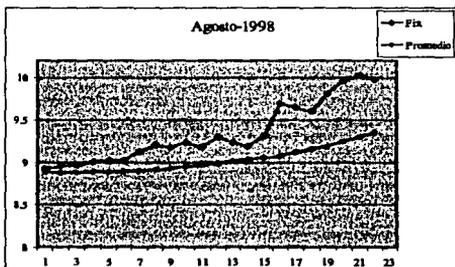
#### 44 CAPÍTULO 3. MODELACIÓN SEMICONTINUA DE LA OPCIÓN BANXICO

la opción. A continuación se presentan las gráficas del valor del fix y del promedio móvil para cada uno de estos meses.



Gráfica 6

En el mes de noviembre del 96, ver gráfica 6, ambas reglas de ejercicio nos dan un día óptimo de ejercicio. Nótese que aún cuando la opción puede ejercerse por primera vez en el treceavo día, la segunda regla de ejercicio no se cumple sino hasta al diecisieteavo día que es cuando se obtiene la máxima ganancia del mes.

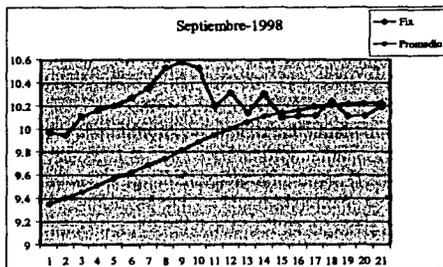


Gráfica 7

En el mes de agosto del 98, ver gráfica 7, ningún día es día de ejercicio al estar el valor del fix siempre por encima del valor promedio. En el mes de septiembre, ver gráfica 8, con la primera regla de ejercicio, se ejerce el día 16 lo que da una ganancia de 4.20 pesos por mil dólares, muy por debajo de lo que se pagó en la subasta. Esta ganancia tan pequeña no la detecta el segundo criterio, por lo que para ella no conviene ejercer ese mes.

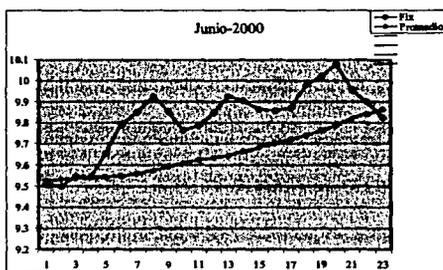
Durante los meses del 2000, ver gráficas 4, 9 y 10, la condición del promedio se cumple siempre el primer día hábil. En el mes de junio, el fix se aprecia respecto al dolar a partir del segundo día, por lo que la condición del promedio sólo se cumple el primer día.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



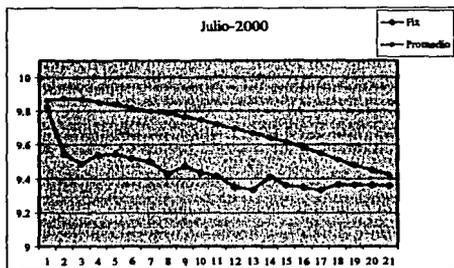
Gráfica 8

Este es el día óptimo de ejercicio para la primera regla, pero la ganancia, 12.20 pesos por mil dólares, es muy pequeña para el segundo criterio, por lo que de nuevo con la segunda regla no se ejercería ese mes la opción. Este ejemplo junto con el de septiembre de 1998 muestran que el segundo criterio es un poco restrictivo. En cambio, en julio ambos criterios escogen al primer día hábil como día óptimo de ejercicio ya que la ganancia es la mayor del mes y también de toda la vida de la opción Banxico. Por último durante el mes de agosto, la segunda regla de ejercicio nos permite escoger el día en que se obtiene la ganancia máxima del mes, mientras que la primera regla de ejercicio selecciona al primer día con una ganancia menor.



Gráfica 9

A continuación se muestran para cada uno de estos meses el día óptimo de ejercicio, según cada regla, y su ganancia correspondiente. Se indica con 1 y 2 los resultados para cada regla de ejercicio.



Gráfica 10

Cuadro 6

<i>Fecha</i>	<i>Día Opt. 1</i>	<i>Ganancia 1</i>	<i>Día Opt. 2</i>	<i>Ganancia 2</i>
<i>Noviembre - 96</i>	13	11.0	17	34.50
<i>Agosto - 98</i>	—	—	—	—
<i>Septiembre - 98</i>	16	4.20	—	—
<i>Junio - 2000</i>	1	12.20	—	—
<i>Julio - 2000</i>	1	278.20	1	278.20
<i>Agosto - 2000</i>	1	23.90	12	58.10
<i>Total</i>	—	329.50	—	370.80

Como se puede ver, a pesar de que la segunda regla de ejercicio es un poco restrictiva, la suma total de las ganancias son mayores para la segunda regla de ejercicio que para la primera. Esto nos permite concluir que el tiempo de ejercicio óptimo binomial no es tan buena estimación del tiempo de ejercicio óptimo de la opción Banxico como lo es la del modelo semicontinuo con regla de ejercicio  $\tau^{2,2}$ .

Los resultados anteriores nos indican que el modelo semicontinuo con regla de ejercicio  $\tau^{2,2}$  es un buen criterio tanto para estimar la opción Banxico como para estimar el tiempo óptimo de ejercicio. Con base en estos resultados, se presenta a continuación un algoritmo dinámico para ejercer la opción Banxico.

### 3.2.3 Algoritmo dinámico para ejercer la opción Banxico

Como se vió en la sección anterior al utilizar a  $\tau^{2,2}$  como una regla de ejercicio garantizamos que el valor de la función de pago en ese tiempo sea mayor que el valor futuro de la opción, pero es posible que ocurra que nunca se pueda ejercer, por lo que puede ser un criterio muy restrictivo. Sin embargo, dado que los resultados obtenidos son válidos para cualquier valor de  $N$  (es decir, del tiempo de expiración) proponemos un algoritmo dinámico para

estimar inferiormente el valor de la opción diariamente. Más precisamente proponemos el siguiente algoritmo para calcular tanto el valor de la opción en cada día como para decidir si se ejerce o no ese día:

- (1) Se toman  $r_1, r_2$  como la tasa de CETES y la tasa de los American Treasury Bills, respectivamente.
- (2) Se estima la volatilidad  $\sigma^n$ , con la información del tipo de cambio hasta el tiempo  $n - 1$ .
- (3) Con estas cantidades se calculan las constantes  $Y_k^n, A_k^n$ ,  $n < k \leq N$ , de las ecuaciones (1) y (2).
- (4) Por el Método Monte-Carlo y usando la regla de ejercicio  $\tau$  se estima  $E^*[\bar{Z}_r^n]$ .
- (5) Si la función de pago al tiempo  $n$  es mayor que la esperanza estimada, se ejerce la opción si no se espera y el día  $n + 1$ , se repite el procedimiento anterior con la información actualizada.

En el siguiente capítulo se aplica este algoritmo a datos reales para analizar su desempeño y se compara con otro criterio de ejercicio encontrado por M. Galán.



## Capítulo 4

# El algoritmo dinámico y la Opción Banxico.

En este capítulo se aplica el algoritmo dinámico, visto en el capítulo anterior, a la opción Banxico durante los meses que estuvo vigente. Se compara las ganancias obtenidas por las instituciones financieras con las que se hubieran obtenido si se hubiera ejercido la opción con el algoritmo dinámico. Asimismo se compara también con las que se hubieran obtenido si se hubiera aplicado el algoritmo heurístico de M. Galán. En la primera sección se presenta dicho algoritmo y en la segunda sección se presentan los resultados obtenidos. En la última sección se dan las conclusiones que arroja este estudio.

### 4.1 Algoritmo Heurístico

Supóngase que el tenedor del contrato busca obtener una regla de ejercicio relacionada directamente con la volatilidad y que maximice el beneficio esperado. Más precisamente, obsérvese que la distribución de los rendimientos  $T_n$ , es independiente de  $n$ , ya que

$$T_n = \frac{S_n}{S_{n-1}} = e^{\gamma + \sigma X_n},$$

donde  $X_n$  es una variable aleatoria Gaussiana estándar. Así se denotarán genéricamente a los rendimientos por  $T$ . Para cada  $\alpha < 0$ , el beneficio económico esperado -denotado por  $G(\alpha)$ - que resultaría de ejercer la opción en función directa de la volatilidad estaría dado por:

$$G(\alpha) = -E[\log T \mid \log T < \alpha\sigma].$$

Obsérvese que  $\alpha < 0$ , pues de ejercer la opción, el logaritmo de los rendimientos es negativo. Ya que lo que se desea es maximizar el beneficio esperado se requiere encontrar  $\alpha^*$  tal que

$$G(\alpha^*) = \max_{\alpha} G(\alpha).$$

Derivando  $G(\alpha)$  con respecto a  $\alpha$  e igualando a cero se obtiene que es óptimo ejercer cuando  $\text{Log } T < \left(-1 + \frac{\gamma}{\sigma}\right) \sigma$ . El cociente  $\frac{\gamma}{\sigma}$  depende de la relación entre la diferencia de la tasa doméstica y foránea y de la volatilidad. Esta relación está lejos de ser una constante. En Galán, ver [3], a partir de los valores observados durante los primeros meses de vigencia de la opción, se sugiere que este cociente sea igual a 0.2. Por lo que se propone seguir el siguiente algoritmo heurístico para ejercer la opción:

- (1) La volatilidad  $\sigma^n$  del día  $n$  se estima con la información del tipo de cambio hasta ese día.
- (2) Si el día  $n$  se cumple la restricción del promedio y  $L_n\left(\frac{s_n}{s_{n-1}}\right) \leq -0.8 \sigma^n$  se ejerce la opción. Si no se espera y se repite el procedimiento para el día  $n+1$ .

## 4.2 La Opción Banxico

A continuación se presenta el resumen del comportamiento de la opción Banxico de agosto de 1996 a junio del 2001, período en que estuvo en operación la opción. Hay que mencionar que durante 1997 y 1998 se decidió llevar a cabo dos subastas por mes, siempre y cuando antes del quinceavo día del mes respectivo se hubiera ejercido más del 80% del monto adjudicado a principios del mes. Estos datos se tomaron de Galán, ver [2] y [4].

No. De subastas realizadas	62
No. De subastas en las que se pudo ejercer al menos en un día	51
Monto total ofrecido en las subastas	16,330 mdd
Monto total colocado	16,330 mdd
Monto total ejercido	12,245 mdd
Monto total de primas recibidas	430 mdp
Beneficio económico obtenido al ejercer la opción	422 mdp

En la cuadro 7 se muestra el comportamiento mensual de la opción Banxico. En la primera columna se indica el mes; cuando hay dos subastas en un mes, se identifica la primera con un 1 y la segunda con un dos. La tercera columna presenta el valor estimado de la prima de la opción cuando se aplica el modelo log-normal con la volatilidad histórica y la regla de ejercicio  $\tau$ . El precio de la subasta y el valor estimado es por mil dólares.

En la cuarta columna se indican los millones de pesos subastados ese mes. En la quinta columna,  $C$ , se muestra el monto mensual, en millones de pesos, que recibió Banxico como producto de la subasta; en la sexta columna se presentan las ganancias obtenidas por las instituciones financieras:  $G1$ , y en la séptima y octava columna se muestran las ganancias que se hubieran obtenido si se hubiera ejercido con el algoritmo dinámico,  $G2$ , o con la regla heurística  $G3$ , respectivamente. Estas dos cantidades se calculan mensualmente de la siguiente forma: se determina el día óptimo del mes según la regla que corresponda;

se calcula la ganancia total multiplicando la ganancia obtenida por dólar ese día por el monto total de dólares que se asignaron en la subasta mensual.

Por último, en la novena, décima y onceava columna se presentan las ganancias netas, es decir las ganancias totales menos el pago de la subasta, que obtuvieron las instituciones financieras,  $G1 - C$ , y las que hubieran obtenido con el algoritmo dinámico,  $G2 - C$  y con el algoritmo heurístico  $G3 - C$ .

En aquellos meses que aparece un cero en la columna  $G1$  se indica así que durante ese mes no se pudo ejercer la opción; si aparece 0 en la columna de  $G2$  o  $G3$  implica que el criterio para ejercer la opción del algoritmo dinámico o heurístico no se cumplió a lo largo del mes, respectivamente.

Observemos que el precio de la subasta está en promedio por debajo del valor estimado. Cabe señalar que es difícil comparar estas cifras porque el precio real que pagaron las instituciones financieras se fijó a través de una subasta y dependió de muchos factores, entre los que destacan la volatilidad del mercado y el comportamiento de la opción en el mes anterior. Por ejemplo, durante el mes de agosto de 1998 no se cumplió la restricción del promedio en todo el mes por lo que los compradores de la opción no estuvieron dispuestos a pagar mucho por la opción de septiembre, a pesar de que la volatilidad histórica el día de la subasta era superior al 20% anual. Por otro lado, el valor estimado siempre se calculó con la volatilidad histórica y su valor se incrementa a medida que crece ésta. Por ello, en algunos meses en los que la volatilidad es superior al 20% anual, la diferencia entre el valor real de la subasta y el estimado es considerable, como por ejemplo en la primera quincena del mes de diciembre de 1997, en septiembre de 1998, en febrero de 1999 o en agosto del 2000. Sin embargo, a pesar de estas consideraciones, se puede concluir que las instituciones financieras pagaron en promedio por debajo de su valor a la opción.

En cambio el Banco de México pudo cubrirse perfectamente con lo recibido en la subasta, sin tomar en cuenta el costo del proceso de esterilización, ya que la ganancia neta de las instituciones financieras fue de -7.85 millones de pesos. Esto quiere decir que en promedio las instituciones financieras no ejercieron la opción cuando más les convenía. De hecho cerca del 30% del monto total ejercido, se ejerció el primer día que se cumplió la restricción del promedio y que la ganancia era positiva. Incluso algunas instituciones lo hicieron el primer día en que se pudo ejercer la opción aunque la ganancia fuera negativa, con lo cual se contempla la posibilidad de que estaban más interesadas en vender los dólares que en la ganancia que pudieran hacer. Hay que observar también que no estamos tomando en consideración, pues no se cuenta con esa información, el tipo de cambio al cual las instituciones adquirieron los dólares.

Por otro lado la efectividad de los algoritmos dinámico y heurístico se muestra al observar en el último renglón que si las instituciones financieras hubieran ejercido con estos algoritmos hubieran obtenido casi 51 millones de pesos o cerca de 41 millones de ganancia neta, respectivamente.

Cuadro 7

Mes	Subas.	$U_0$	Monto	C	G1	G2	G3	G1 - C	G2 - C	G3 - C
1996										
Agosto	11.68	14.88	130	6.06	2.238	3.704	2.301	-3.822	-2.356	-3.75
Sep.	4.65	6.06	200	0.93	1.497	0	0	0.567	-0.93	-0.93
Oct.	10.18	22.92	200	2.036	2.68	0	0	0.644	-2.03	-2.03
Nov.	10.32	19.20	200	2.064	3.64	6.9	0	1.576	4.836	-2.06
Dic.	14.43	17.73	200	2.886	4.275	2.82	7.42	1.389	-0.066	4.53
Total			930	13.98	14.33	13.42	9.721	0.354	-0.552	-4.25
1997										
Enero	13.75	16.33	300	4.125	5.403	4.68	6.03	1.278	0.555	1.90
Feb - 1	16.14	9.9	300	4.842	2.51	3.54	3.54	-2.332	-1.30	-1.30
Feb - 2	15.08		300	4.524	1.702	3.69	3.69	-2.822	-0.83	-0.83
Marzo	10.4	11.16	300	3.12	-2.24	0	0	-5.36	-3.12	-3.12
Abril - 1	21.86	46.11	300	6.558	5.82	14.28	14.28	-0.738	7.72	7.72
Abril - 2	13.86		300	4.158	3.005	0	0	-1.153	-4.15	-4.15
Mayo	14.38	10.16	300	4.314	2.3	6.69	6.69	-2.014	2.37	2.37
Junio	11.74	16.64	300	3.522	-0.14	0	0	-3.662	-3.52	-3.52
Julio - 1	20.61	20.61	300	6.183	5.69	11.61	6.18	-0.493	5.427	-0.003
Julio - 2	19.57		300	5.871	2.7	11.61	11.61	-3.171	5.73	5.73
Agosto	23.26	29.89	500	11.63	11.3	0	0	-0.33	-11.63	-11.63
Sep.	12.27	9.53	500	6.135	7.94	6.55	6.55	1.805	0.41	0.41
Oct.	16.1	20.99	400	6.44	7.09	8.56	8.56	0.65	2.12	2.12
Nov.	13.05	60.62	250	3.262	3.68	0.75	0	0.417	-2.515	-3.26
Dic - 1	30.5	88.38	250	7.625	9.47	15.55	15.55	1.845	7.92	7.92
Dic - 2	33.81		250	8.452	10.03	11.5	11.5	1.577	3.04	3.04
Total			5150	90.76	76.26	99.01	94.18	-14.50	8.248	3.41
1998										
Enero	33.54	33.55	250	8.385	0.793	0	0	-7.591	-8.38	-8.38
Febrero	15.85	41.92	250	3.962	0	0	0	-3.962	-3.96	-3.96
Marzo	30.25	28.54	250	7.562	10.4	10.4	10.4	2.837	2.83	2.83
Abril - 1	33.6		250	8.4	9.05	10.1	10.1	0.65	1.7	1.7
Abril - 2	24.09	29.86	250	6.022				-6.022	-6.02	-6.02
Mayo	24.51	12.97	250	6.1275	2.154	4.025	4.025	-3.973	-2.10	-2.10
Junio	10.24	40.52	250	2.56	0	0	0	-2.56	-2.56	-2.56
Julio - 1	24.85		250	6.2125	9.025	11.92	11.92	2.812	5.71	5.71
Julio - 2	23.76	51.91	250	5.94	6.82	0	8.05	0.88	-5.94	2.11
Agosto	19.67	13.50	250	4.9175	0	0	0	-4.917	-4.91	-4.91
Sep.	12.43	64.00	250	3.1075	-0.394	0	0	-3.501	-3.10	-3.10
Oct.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Nov.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Dic.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total			2750	63.195	37.84	36.45	44.5	-25.35	-26.75	-18.69

1999										
Enero	24.38	19.76	250	6.095	11.99	11.38	11.38	5.895	5.28	5.28
Febrero	36.63	116.3	250	9.1575	9.9	5.2	9.88	0.742	-3.957	0.72
Marzo	46.62	30.36	250	11.655	8.51	9.23	7.68	-3.145	-2.425	-3.97
Abril	33.84	33.81	250	8.46	13.02	10	12.78	4.56	1.54	4.32
Mayo	35.34	44.1	250	8.835	10	12.2	12.2	1.165	3.36	3.36
Junio	20.01	46.14	250	5.0025	11.54	17.75	17.75	6.5375	12.74	12.74
Julio	50.89	53.25	250	12.722	11.12	15.9	8.35	-1.602	3.177	-4.37
Agosto	31.25	38.24	250	7.8125	6.3	10.83	10.83	-1.512	3.01	3.01
Sept.	36.93	28.32	250	9.2325	4.16	8.925	7.43	-5.072	-0.307	-1.80
Oct.	26.36	16.8	250	6.59	0	0	0	-6.59	-6.59	-6.59
Nov.	29.59	32.15	250	7.3975	21	21	21	13.60	13.60	13.60
Dic. - 99	23.44	22.6	250	5.86	0.688	5.3	7	-5.172	-0.56	1.14
Total			3000	98.82	108.2	127.71	126.2	9.408	28.89	27.46
2000										
Enero	36.56	18.33	250	9.14	7.519	0	0	-1.621	-9.14	-9.14
Febrero	30.22	29.72	250	7.555	11.9	11.9	11.9	4.345	4.34	4.34
Marzo	33.37	31.73	250	8.3425	7.18	6.68	6.28	-1.162	-1.662	-2.06
Abril	35.32	21.29	250	8.83	0	0	0	-8.83	-8.83	-8.83
Mayo	34.34	40.03	250	8.585	0.9	0	0	-7.685	-8.58	-8.58
Junio	35.7	47.30	250	8.925	0	0	0	-8.92	-8.92	-8.92
Julio	59.9	70.92	250	14.975	69.55	69.55	69.55	54.57	54.57	54.57
Agosto	35.78	41.70	250	8.945	9.011	7.68	7.68	0.066	-1.26	-1.26
Sept.	31.6	27.83	250	7.9	0	0	0	-7.9	-7.9	-7.9
Oct.	25.68	24.95	250	6.42	0	0	0	-6.42	-6.42	-6.42
Nov.	32.4	25.23	250	8.1	15.43	15.43	15.43	7.33	7.33	7.33
Dic.	34.7	30.34	250	8.675	6.08	9.88	9.88	-2.595	1.20	1.20
Total			3000	106.39	127.5	121.12	120.72	21.17	14.72	14.32
2001										
Enero	21.56	35.66	250	5.39	3.59	0	0	-1.8	-5.39	-5.39
Febrero	43.82	60.54	250	10.955	13.68	14.05	14.05	2.725	3.09	3.09
Marzo	39.02	27.15	250	9.755	7.87	7.63	7.95	-1.885	-2.125	-1.80
Abril	48.14	44.08	250	12.035	19.53	19.53	11.8	7.495	7.495	-0.23
Mayo	47.8	54.17	250	11.95	8.92	42.33	42.33	-3.03	30.38	30.38
Junio	27.36	34.45	250	6.84	4.4	0	0	-2.44	-6.84	-6.84
Total			1500	56.925	57.99	83.54	76.13	1.065	26.61	19.20
Tot. Gral.			16330	430.07	422.2	481.2	471.53	-7.846	51.18	41.45

A continuación se muestra un resumen del comportamiento de los algoritmos dinámico y heurístico al aplicarse a la opción Banxico durante su período de operación.

No. de subastas realizadas.	62
No. de subastas con ejercicio	51
No. de subastas con ejercicio con el Algoritmo Dinámico	38
No. de subastas con ejercicio con el Algoritmo Heurístico	40
Monto total ejercido	12,245 mdd
Monto ejercido la primera vez	31%
Monto ejercido en el óptimo del Algoritmo Dinámico	23.8%
Monto ejercido en el óptimo con Algoritmo Heurístico	23.4%
Monto total de primas recibidas	430 mdp
Beneficio observado	422.22 mdp
Beneficio potencial en el óptimo Algoritmo Dinámico	481.25 mdp
Beneficio potencial en el óptimo Algoritmo Heurístico	471.53 mdp
Beneficio neto observado	-7.84 mdp
Beneficio neto en el óptimo Algoritmo Dinámico	51.18 mdp
Beneficio neto en el óptimo Algoritmo Heurístico	41.45 mdp

### 4.3 Conclusiones

Los resultados que se obtienen muestran que el Banco Central incrementó sus reservas en 12,500 millones de dólares y que las instituciones financieras adquirieron la opción a un precio en promedio inferior al valor estimado. Sin embargo, su política de ejercicio no fue la más adecuada. De haber ejercido con alguna de las reglas propuestas habrían obtenido más de 50 millones de pesos adicionales a su ganancia.

- (a) Bajo la hipótesis que el tipo de cambio  $fx$  tiene una distribución log-normal los resultados sugieren que la Opción Banxico fue comprada en promedio por debajo de su valor.
- (b) Las instituciones financieras no ejercieron, en promedio, el día que mejor les convenía, generando con ello una pérdida de 7.85 millones de pesos al considerarse las primas pagadas.
- (c) La Opción Banxico cumplió perfectamente con su cometido al permitirle al Banco de México incrementar sus reservas internacionales.
- (d) La regla de ejercicio  $\tau^{2,2}$  propuesta, permite estimar inferiormente el valor de la opción en cada tiempo por medio del Monte-Carlo que es un procedimiento flexible y sencillo de aplicar.
- (e) El algoritmo dinámico que se propone no sólo permite estimar inferiormente el valor de la opción, sino también da un criterio de ejercicio que -el análisis del comportamiento de la opción sugiere- es mejor que el criterio heurístico y las reglas que siguieron las instituciones financieras.

## 4.4 Conclusiones generales

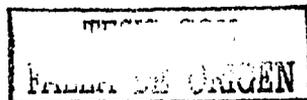
Desde un principio se sabía que sería difícil determinar una fórmula cerrada para valorar la opción, dado que la opción Banxico es a la vez una opción exótica y bermuda. En el caso de la opción bermuda también se tenían dudas ya que por lo general son pocas las opciones de este tipo que pueden valorarse en forma exacta. El que se hayan determinado, tanto para el modelo discreto como para el semicontinuo, fórmulas cerradas para valorar esta opción jugó un papel fundamental en el desarrollo de este trabajo. Por un lado permitió encontrar un procedimiento sencillo para estimar el valor de la opción Banxico, sin tener que meterse a fondo con la restricción del promedio móvil, y por otro nos permitió definir una buena regla de ejercicio. Además esta opción pasa a formar parte del pequeño conjunto de opciones bermuda que pueden valorarse en forma exacta.

En el caso de la opción Banxico se estudió la valuación tanto con el modelo de Cox-Ross y Rubinstein como el de Black-Scholes, tomando como  $N$  el número de días hábiles del mes. En el caso discreto se encontró una forma de aproximar el valor de la opción a través de la determinación del tiempo de ejercicio óptimo. Los resultados numéricos muestran que este modelo tiene sus limitaciones: el valor de la opción del modelo discreto es una buena cota inferior al valor exacto, pero en el caso del tiempo de ejercicio óptimo al modelo no da resultados satisfactorios. En cambio, en el modelo semicontinuo se obtuvo una regla de ejercicio que permite estimar el valor de la opción y determinar si en el día  $n$  conviene o no ejercerla. Los resultados numéricos muestran que la estimación del modelo semicontinuo con regla de ejercicio  $\tau^{2,2}$  es mejor que el modelo discreto tanto para valorar la opción como para ejercerla.

Como fruto de este estudio se propone en este trabajo un algoritmo dinámico para ejercer la opción Banxico. Sus bondades se hicieron patentes al aplicarlo a datos reales y mostrar que si las instituciones financieras lo hubieran usado, habrían obtenido una ganancia superior a los 50 millones.

Otra aportación es la utilización del método de Monte-Carlo para valorar la opción Banxico, este método es mucho más sencillo y eficiente, en cuanto a memoria y rapidez de cálculo, que el árbol binomial.

Por todo lo anterior se puede concluir que los objetivos de este trabajo se cumplieron en buena medida. Sin embargo, el estudio de la opción Banxico está lejos de haberse agotado. Entre los puntos importantes a tratar en el futuro están el obtener mejores estimaciones del valor de la opción y del tiempo de ejercicio óptimo. Asimismo sería interesante analizar la cobertura de la opción, tema que no fue analizado en este trabajo, y por último buscar otro enfoque que nos permita entender mejor el papel que juegan las restricciones en los problemas de paro óptimo.





## Bibliografía

- [1] Fernández B. y Saavedra P., Valuation and Optimal Exercise Time for the Banxico Put Option. Aceptado para publicación en el International Journal of Theoretical and Applied Finance.
- [2] Fernández B., Galán M. y Saavedra P. Dos estrategias ganadoras para la Opción Banxico. Aceptado para publicación en la revista Economía Mexicana del Cide.
- [3] Galán, M., Duclaud González y Castilla, J, García Tamés A., Una estrategia de reservas mediante opciones de venta de dólares. Derivados Financieros. Teoría y Práctica. Operadora de Bolsa Serfin. 1996, 234-250.
- [4] Galán, M. La Experiencia del Banco de México. Conferencia impartida en el III Taller sobre Matemáticas y Finanzas, organizado por la Sociedad Matemática Mexicana. 6 de Septiembre del 2000.
- [5] Garman, M and Kohlhagen S., Foreign Currency Option Values. Journal of International Monetary and Finance 2. 1983. 231-237.
- [6] Hull J.C. Options, Futures and other Derivatives. Third edition. 1997.
- [7] Lamberton D. y Lapeyre B. Introduction au calcul stochastique appliqué 'a la Finance. ellipses. 1997.
- [8] Lapeyre, B., E. Pardoux, R. Sentis. Introduction aux methodes de Monte-Carlo pour les equations de transport et de diffusion. Collections Mathematiques and applications. Vol 29. Springer Verlag. 1998.
- [9] Ross M. Sheldon. Simulation. Second Edition. Academic Press. 1997.
- [10] Zhang P., Exotic Options : A guide to second generation options. World Scientific Publishing Co. 2nd edition. 1998.