UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

ESCUELA NACIONAL DE ESTUDIOS PROFESIONALES
"A C A T L Á N"

ESTRATEGIA DE INVERSIÓN CON CADENAS DE MARKOV

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

LIC. EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

P R E S E N T A

DAVID ELIAS MARTÍNEZ MERCADO

Director: M. C. Francisco Javier Patiño Donnadieu

Naucalpan, Edo. de México Diciembre 2002

A

DEDICATORIA

Gracias a mi Padre

Dámaso Martínez Puga

y a mi Madre María Elena Mercado Yáñez.

B

RECONOCIMIENTO

Al maestro Francisco Patiño, por ser un ejemplo de un Universitario comprometido y una guía para el alumno.

Al Doctor José de Jesús Medel.

Con especial mención a todos aquellos que me tendieron la mano e hicieron de mi formación académica una experiencia enriquecedora.

A mi Alma Mater.

ÍNDICE GENERAL

RESUMEN

Este proyecto tiene por objetivo proponer una herramienta de análisis sobre el comportamiento en el tiempo de una emisión de acciones que cotiza en la Bolsa Mexicana de Valores; la técnica de análisis financiero determina el comportamiento de la emisión de acción a partir de sus cuatro grados o estados de bursatilidad. La herramienta de análisis técnico propuesta con cadenas de Markov está orientada al inversionista que evalúa el grado de inversión de la acción en el tiempo y elabora estrategias de inversión a través de Opciones de Inversion en el Mercado de Opciones, y tiene la posibilidad de cuantificar el estado de su inversión previo análisis fundamental -sistémico- del sector económico donde cotiza la acción. El margen de error y consecuentemente de ésta tesis depende del análisis sistémico o fundamental que el decisor realize del entorno bursátil del mercado donde cotiza una acción, un buen análisis financiero se traduce en una adecuada asignación de probabilidad de transición de la cadena de Markov. En el capítulo tres se aborda una aplicación para determinar el comportamiento sobre la emisión de acciones de la empresa Bimbo en su serie A; la aplicación se desarrolló en Maple y Matlab 6.0.

1. ESTRATEGIAS DE INVERSIÓN

El proceso de decisión es fundamental para el desarrollo de un proyecto, de ahí que surja la necesidad de una buena decisión que canalize los esfuerzos y los recursos a el éxito de una estrategia: *"La decisión es una acción a partir del análisis de un problema al que se enfrenta un decisor en un tiempo determinado".*

Cruz Durán considera una decisión como *"el conjunto de acciones adoptadas en un momento específico como resultado de la aplicación de ciertas reglas y políticas a las condiciones particulares existentes en dicho momento".*[1]

Visto desde un enfoque sistemico[2], la metodología sugerida para resolver un problema es la siguiente:

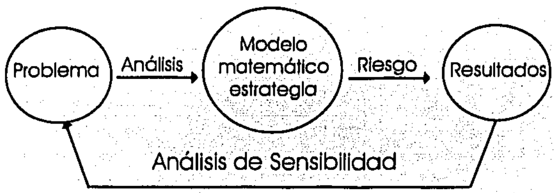

Figura 1.1

Un método empírico para seleccionar decisiones es el siguiente:

[1] Citado en Zamudio Uribe. "Toma de decisiones en condiciones de incertidumbre". UNAM, FE, 1998, pág. 11

[2] La teoría de enfoque de sistemas es una corriente desarrollada en los 80's, sus principales exponentes son Vohn Bertanlanfy "El enfoque de sistemas", 1984; Lilinfield, R. "Teoría de los sistemas: origen y aplicación a las Ciencias Sociales", 1984 y; Van Gigch, J. P. "Teoría general de los sistemas", 1987.

1) Definición del problema

2) Análisis de la información disponible

3) Desarrollo de las soluciones alternativas

4) Selección de la decisión

5) Implantación de la estrategia elegida

Un decisor ante la necesidad de resolver un problema deberá seguir una serie de pasos para cumplir sus objetivos, de manera que un buen análisis y la implementación de una estrategia fundamentada en un modelo matemático es una excelente alternativa para determinar una decisión.

Los pasos que describe el sistema proporcionan una metodología para la toma de decisiones. Es común que el tomador de decisiones constantemente esté supervisando y analizando la decisión y si es necesario, modificar o mejorar la estrategia. El factor tiempo y riesgo son fundamentales para el éxito o fracaso de una decisión.

¿Qué sucede cuando el decisor se encuentra en la incertidumbre de actuar?.

Véase a fondo éste análisis a partir del diagrama de decisión que propone Robert J. Korsan en su esquema "el paradigma del Análisis de decisión"[2]:

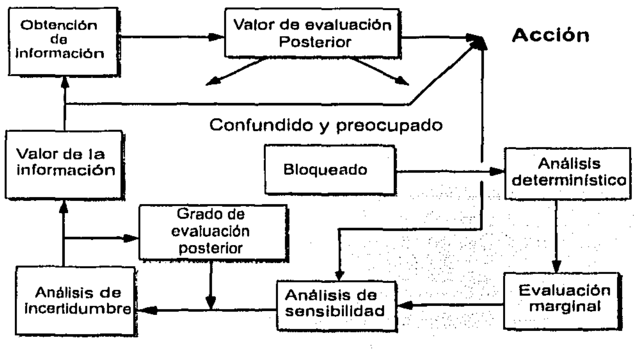

Figura 1.2. El paradigma del análisis de decisión

El sistema representa un camino de procedimientos orientados a profundizar y entender las etapas críticas de el análisis para la toma de decisiones.

Las "espirales" propician la salida hacia la decisión final y la retroalimentación de las etapas. Como norma de cada etapa, el analista deberá saber si se encuentra lo suficiente informado para actuar.

El análisis comienza en la etapa *"bloqueado"*, donde el decisor se encuentra preocupado y confundido. La etapa crítica se localiza en este punto, puesto que es aquí donde se establecen los objetivos a cubrir. Entendiendo el costo y objetivos requeridos para actuar -si es necesario-, en un rango de posibles resultados favorables que se presenten al decisor. Si la situación no es asumida por el tomador de decisiones, entonces, se encontrará en un estado de preocupación y confusión, es decir, se encontrará bloqueado.

El siguiente paso es enfocarse hacia una posible salida, en el caso de encontrarse bloqueado, será necesario informarse para aclarar todas las dudas y proceder a la siguiente etapa; donde se establecerá un análisis determinista, esto es, determinar las variables y restricciones que involucran nuestro problema, dicho de otra manera, establecer el modelo matemático que represente nuestro problema. El modelo tendrá un conjunto de variables de incertidumbre con un peso específico en nuestro problema. Lo importante de esta etapa y las siguientes dos, será el determinar las variables que tienen un valor y un peso suficiente en cualquier escenario de nuestro problema. Estas variables son prevenidas y evaluadas cuantitativamente con un resultado o saldo esperado en nuestro problema, llámese costo o beneficio.

Para cada conjunto de posibles resultados de variables de incertidumbre y para cada conjunto de variables de decisión, el programa matemático computará un conjunto de posibles valores y costos para el tomador de decisiones. Evaluar las distribuciones marginales para estas variables. Esto implica un análisis matemático y una visión sobre el comportamiento de los resultados obtenidos por el programa, a saber, datos llevados a estadísticas que respalden las decisiones, esto es lo que se denomina evaluación marginal.

Una vez concretado el estudio de distribuciones marginales, se ejecuta un análisis de sensibilidad, consistente en alterar algunas variables de nuestro problema para determinar el comportamiento del problema y sus consecuencias, así, establecemos una estrategia dominante, donde la mejor estrategia es evitar el peor resultado que ofrece la estrategia menos óptima. La estrategia escogida nos permitirá establecer el rango de salidas y valores esperados para actuar por primera vez.

Si más de una estrategia es implementada procedemos a realizar un análisis de incertidumbre; usando la información disponible y con el auxilio de datos estadísticos como promedios y desviaciones estandar de las distribuciones marginales, es decir, información de los datos. En lo que se denomina el valor de mejores cálculos o grado de evaluación posterior. El siguiente paso para el decisor es analizar nuevamente el valor de la información, y la consecuente decisión, sino se dispone de la información suficiente, se repite el ciclo hasta obtener mayor información y evaluación de mayores cálculos. El decisor termina el ciclo una vez que toma una decisión.

Una decisión involucra un riesgo y puesto que una solución determina el curso de acción en el tiempo; existen técnicas para determinar el riesgo en una decisión. Las matemáticas ofrecen la mejor herramienta para cuantificar el riesgo, entendiendo como riesgo *"un factor de éxito o fracaso en una decisión"*.

Las estrategias nacen como una respuesta de la empresa o ejecutivo de afrontar los retos que implica la competencia y la vida de la empresa. Las estrategias son cursos de acción general o alternativas, que muestran la dirección y el empleo general de los recursos y esfuerzos, para lograr los objetivos en las condiciones más ventajosas,[3] es decir, son cursos de acción que muestran el camino a seguir de una empresa o un proyecto para la consecución de un objetivo optimizando recursos.

Al establecer estrategias es conveniente seguir cuatro etapas:

1 **Determinación de los cursos de acción.** Consiste en buscar el mayor número de alternativas para lograr cada uno de los objetivos.

2 **Evaluación.** Analizar y evaluar cada una de las alternativas, tomando en

consideración las ventajas y desventajas de cada una de ellas, auxiliándose de la investigación y de algunas técnicas como investigación de operaciones, árboles de decisión, etc.

3 **Selección de alternativas.** Considerar las alternativas idóneas en cuanto a factibilidad y ventajas, seleccionando aquellas que permiten lograr con mayor eficiencia y eficacia los objetivos de la empresa.

4 **Implementación de las alternativas seleccionadas.** La supervisión de la alternativa durante su implementación es responsabilidad del analista. La habilidad y experiencia del decisor son fundamentales para afrontar los imprevistos a los que se enfrenta para lograr su objetivo en el tiempo estimado.

Un decisor debe considerar un número mínimo de áreas clave en torno a las cuales se establezcan las estrategias. Esto facilitará la elección de las alternativas, y la utilización de los recursos para lograr los objetivos. Un área clave de resultados es una actividad dentro de una empresa, que está relacionada con el desarrollo total de la misma.

Las áreas clave dentro de una empresa son de diferente índole, sin embargo, hay algunas áreas básicas como son rentabilidad sobre la inversión, posición o participación de mercado, productividad, desarrollo de personal, capacidad de producción e innovación.

1.1. *Estrategia de decisión en condiciones deterministas*

Al decidir en condiciones de certeza, o situaciones deterministas, el único problema es el número de variables que a nivel táctico presentan los planes de acción. Es el planteamiento típico de la búsqueda entre muchas alternativas de los métodos de programación matemática, para una solución óptima. Conocido el estado de la naturaleza que se va a presentar, el problema se reduce a valorar términos económicos de los diferentes desenlaces y elegir aquella estrategia que conduce al resultado más favorable.[1]

Cuando se conoce con certeza las condiciones de un problema, sus variables y restricciones, y en general, cuando se fijan con anterioridad los objetivos del problema susceptibles de satisfacer mediante las matemáticas, decimos entonces que el problema a resolver es determinista. En tal caso nuestro objetivo es maximizar las utilidades, para lo cual se propone una función de costos z susceptibles de ser optimizado, esto es:

$$z = cx.$$

donde c es un vector de costos, x es el conjunto de variables y z se encuentra sujeta a condiciones de linealidad que expresan un sistema lineal de ecuaciones.

$$Ax = b; \qquad x \geqslant 0.$$

Mediante programación lineal se encuentra la solución óptima a partir de una solución básica factible, finalmente, cuando z toma el valor óptimo se tiene la solución óptima de nuestro problema.

Dentro del ámbito empresarial cada vez que una función administrativa se divide en un conjunto de subfunciones diferentes, se crea una nueva tarea que es integrarlas de tal manera que sirvan eficientemente a los intereses de un todo. La tarea de integración es la función ejecutiva de la administración. Esta tarea es muy importante, pues frecuentemente los objetivos de las subfunciones chocan y crean conflictos. Para ilustrar esto, podemos considerar el siguiente ejemplo:

El ejecutivo de una empresa normalmente establece los siguientes objetivos para las principales funciones de las mismas:

- Producción. Maximizar la cantidad de bienes o servicios producidos y minimizar el costo unitario de la producción.

- Ventas. Maximizar la cantidad vendida y minimizar el costo unitario de las ventas.

- Finanzas. Minimizar el capital requerido para mantener cierto nivel del negocio.
- Personal. Mantener la moral y la alta productividad entre los empleados.

Después de un breve análisis de estos objetivos, vemos que perseguirlos causa conflicto entre las unidades. El departamento de producción necesita producir tanto como sea posible al costo mínimo. Esto sólo se puede lograr si se fabrica un solo producto en forma continua. Esta política minimiza el tiempo perdido en cambiar equipo con objeto de producir otro artículo y se logran las eficiencias que proporciona la práctica de corridas largas de producción. Si el departamento de producción tuviera que manufacturar relativamente pocos productos en corridas de producción tan largas y continuas como sea posible, se tendría un gran inventario compuesto de unos cuantos artículos. Así, el departamento de producción mantendrá una línea de producción pequeña y un gran inventario", haciendo cambiar las condiciones de su línea de producción conforme se requiera administrar los recursos.

El departamento de ventas también necesita grandes inventarios de manera que al cliente siempre se le pueda surtir hoy lo que quizá quiera mañana. Para poder vender tanto como sea posible en cada pedido, el departamento de ventas debe poder surtir la más amplia variedad de productos, de aquí que los departamentos de producción y ventas suelan tener fricciones en cuanto a la amplitud de la línea de productos. Incluso, frecuentemente el departamento de ventas insiste en incluir muchos artículos de bajo volumen de ventas y aún improductivos en tanto que el departamento de producción pide su exclusión.

El departamento de finanzas, tratando de lograr su objetivo, procura reducir sus inventarios, y por consiguiente, el capital invertido en ellos. El departamento de finanzas normalmente cree que los inventarios deberían aumentar o disminuir en proporción a la fluctuación de las ventas de la empresa. Sin embargo, cuando las ventas son bajas, el departamento de personal y el de producción no quieren reducir la producción, ni despedir personal, debido a que estas medidas repercuten en la moral del personal, reduce la mano de obra calificada disponible, e implican costos al liquidar el personal y posteriormente, contratar y adiestrar nuevos trabajadores. Por lo tanto, al departamento de personal le interesa mantener la producción a un nivel tan constante como sea posible. Esto significa producir hasta el nivel de inventario cuando las ventas son bajas y agotarlo cuando estas son altas.

De ahí que los departamentos de personal y de finanzas tengan ideas diferentes acerca de cual deberá ser la política de inventarios de la empresa. Otro problema relacionado con el anterior es que a medida que aumenta la complejidad y especialización de de los departamentos, en una organización se vuelve más difícil la asignación de recursos entre varias actividades en forma tal que sea más efectivo para la organización.[4]

Esta clase de problemas y la necesidad de encontrar una forma mejor de resolverlos propició el ambiente adecuado para el desarrollo de la Investigación de Operaciones, en lo que se denomina programación lineal, dinámica o heurística, incluyendo problemas de transporte y ruta crítica. En general, la solución a estos problemas de decisión se obtiene mediante optimización matemática y técnica de investigación operativa desarrollada.

"La Investigación de Operaciones proporciona una estrategia de decisión óptima en condiciones de certeza o situaciones deterministas a partir de las variables involucradas en el problema, en las áreas: industrial, negocios y gubernamental".

1.2. Estrategias de decisión en condiciones de riesgo

Con anterioridad se define el riesgo como la probabilidad de éxito o fracaso de una decisión. La falta de certeza sobre el futuro es lo que provoca que una decisión con elementos económicos sea un reto para el inversionista.

Frecuentemente se distingue entre situaciones de riesgo e incertidumbre[2]
Riesgo

- Se saben cuales son los eventos futuros;

[2] Zamudio Uribe, Op. cit. p 18

- Se conoce la dimensión de los mismos en términos de la inversión que se analiza; y
- Anticipadamente, también se conocen las probabilidades de ocurrencia de los eventos

Incertidumbre

- Se tiene conocimiento ampliado de los eventos futuros;
- Puede o no conocerse la dimensión de los mismos; y
- No se conocen con anticipación las probabilidades de los mismos

La probabilidad de que ocurra un evento en el futuro puede explicarse por medio de un número que representa la posibilidad de la ocurrencia. Esta posibilidad puede determinarse examinando todas las evidencias disponibles relacionadas con la ocurrencia del evento en un espacio muestral.

La teoría de probabilidad se ocupa de establecer las reglas que gobiernan los fenómenos al azar. Podría parecer extraordinario hablar de reglas sobre el comportamiento de algo cuya naturaleza es esencialmente erróneo e impredecible, sin embargo, es un intento bastante exitoso de sistematizar las características de los fenómenos de azar, y obtener así toda la información posible sobre como se realizan. Esto permitirá, en todo caso, indicar cuáles son los resultados más viables, o de hecho más probables, para un cierto fenómeno y, así, orientar las previsiones de manera racional. Es importante acotar esto porque en torno a la teoría de probabilidades, y mas concretamente, los procesos aleatorios, son los que darán la pauta para los siguientes temas.

¿En qué forma es posible obtener información sobre el comportamiento de algún fenómeno aleatorio?, ¿es posible obtener resultados anticipados acerca de lo que sucederá en condiciones aleatorias o de riesgo?.

La teoría de probabilidad es capaz, efectivamente, de evaluar en forma cuantitativa aspectos importantes de lo que puede esperarse al observar acontecimientos aleatorios. Y para efectos de este proyecto, dará la pauta para fundamentar una decisión de inversión.

1.3. Técnicas de medición del riesgo

El decisor se interesa por los llamados estados de la naturaleza que afectan los resultados de una decisión. En un sentido más estrecho, nos interesamos por el estado de cierto componente de decisión que es función de algún parámetro desconocido. Si conociéramos el valor de este parámetro dado, conoceríamos también el estado correspondiente de la naturaleza y nuestra decisión no se tomaría ya en condiciones de incertidumbre. En esta incertidumbre sobre los estados de la naturaleza o el valor del parámetro desconocido lo que tratamos de expresar en términos de un sistema por la probabilidad relativa de que ocurra cada uno de los estados posibles de la naturaleza o conjunto de eventos; sería lógico adoptar un sistema intuitivo en donde se utilizarán como pasos los valores de probabilidad. Después de determinar los pasos que vayan a emplearse, tendremos algo que parecerá mucho a una distribución de probabilidad sobre los estados de la naturaleza, que es esencialmente lo mismo, sobre el parámetro desconocido.

Un parámetro por sí mismo no es una distribución de probabilidad, sin embargo, las estimaciones que se derivan de muestras constituyen distribuciones de probabilidad sobre un parámetro.

Este capítulo habla sobre el riesgo y toma de decisiones, y como tal, una forma de medirlo es una distribución de densidad de probabilidad. Las distribuciones probabilísticas son una buena estimación para disminuir el riesgo en la toma de decisiones y aumentar la confiabilidad de los factores y variables que involucran un problema.

1.4. Distribución de probabilidad a posteriori

Cuando el tomador de decisiones cuenta con la información que le proporciona un análisis cuantitativo del problema, mediante técnicas probabilísticas que le permiten estimar los parámetros de la situación. El analista hace uso de una distribución de densidad de probabilidad a posteriori. El resultado de la estimación de los parámetros a evaluar es fundamental para la toma de decisión. La decisión que toma el analista es completamente empírica, e involucra el muestreo, la observación y experimentación para encontrar la distribución apropiada acorde al fenómeno de estudio.

Aquí es pertinente mencionar que en este proyecto la distribución de probabilidad que implementará el analista financiero, será aquella que considere el tiempo como variable aleatoria independiente y el grado de incertidumbre estará a cargo del analista, quien ubicará la estrategia de inversión en un contexto financiero del sector donde cotiza la emisión de Acciones en el Mercado de Derivados su intuición y experiencia son determinantes en el cálculo de probabilidades para la evaluación de la acción.

1.5. Distribución de probabilidad a priori

El sistema intuitivo o la distribución de probabilidad que se utiliza al iniciarse el análisis de decisión se denomina generalmente distribución teórica o a priori. En muchos casos, es posible desarrollar la distribución a priori a partir de datos o información empírica que ya se encuentra disponible; por ejemplo, los datos históricos sobre el número de ventas o pedidos de un artículo dado, cada día, durante un período de cien días proporcionará una distribución de frecuencias, a partir de la cual se podrá calcular las probabilidades. Es razonable suponer que el fenómeno que interesa sigue una distribución teórica dada y que los parámetros de esa distribución pueden estimarse a partir de los datos disponibles.

Cuando no se tenga información empírica, será preciso determinar subjetivamente la distribución teórica. Las estimaciones subjetivas que conducen a la distribución teórica deberán fundamentarse en la intuición y experiencia del analista. Es preciso que se deriven de un análisis cuidadoso de la situación y una evaluación, por el tomador de decisiones, de las probabilidades que prevalezcan en cierto estado de la naturaleza. Si esta información no existe en alguna forma objetiva y cuantitativa, no quiere decir que sea inútil o que deba descartarse. Una posible alternativa para resolver esta situación será el uso de la simulación,[3] donde se podrá generar una muestra aleatoria de datos a partir de la posible distribución de probabilidad que el analista suponga o intuya; al proponerse una distribución de probabilidad para generar datos hablamos de una decisión a priori.

"Las probabilidades a priori reflejan la incertidumbre en la mente del tomador de decisiones, en lo relativo a los estados desconocidos de la naturaleza que afecta a su problema. No es preciso que estén respaldadas por evidencias empíricas, y es muy probable que dos tomadores de decisiones que se enfrenten a situaciones idénticas evaluarían las probabilidades de modos distintos; no obstante, una vez determinadas esas probabilidades anteriores para una situación dada, se considerancomo cualquier otro valor de probabilidades y se aplican a ellas las reglas clásicas de probabilidad".[4]

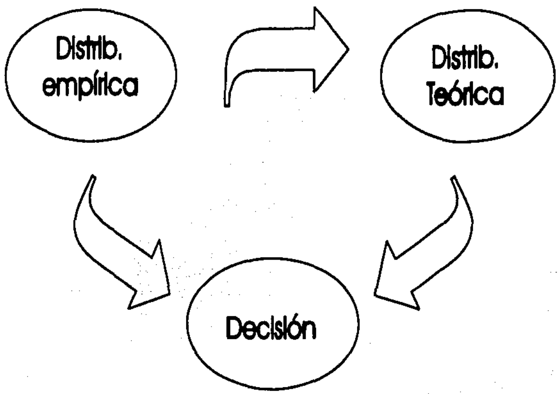

Figura 1.3

[3] La simulación es una técnica de investigación que reproduce en forma semejante o aproximada los eventos reales y los procesa bajo ciertas condiciones de prueba, definidas con anterioridad.

[4] Zamudio Uribe, Op. cit. pag 28-35

Para el tomador de decisiones un análisis objetivo que involucre, la consideración sobre el tiempo, las diferentes alternativas y, las técnicas para minimizar riesgos son fundamentales para el éxito de una decisión.

1.6. Decisiones de inversión

Anteriormente se planteó la necesidad de una correcta toma de decisiones, sin embargo, desde la perspectiva de un inversionista, ¿qué elementos involucran una decisión?, ¿qué aspectos considera un inversionista para realizar una inversión?. Las herramientas matemáticas y un análisis bursátil orientarán la decisión de inversión.

Algunas definiciones a cerca de inversión.

- Se considera una inversión a las compras, por parte de la empresa, de edificios y equipo nuevos así como aumentos de inventarios, todo lo cual aumenta el acervo de capital de la empresa.[3]
- Gasto monetario en la adquisición de capital fijo o capital circulante. Flujo de producción encaminado a aumentar el capital fijo de la sociedad o el volumen de existencias.[4]
- Compra o venta de activos financieros para obtener unos beneficios en forma de plusvalías, dividendos o intereses.

La inversión se compone de los siguientes pasos:

1. Objetivos y metas de inversión
2. Elección de inversión
3. Creación de una cartera diversificada

[3] Karl Case, y Ray C. Fair. "Fundamentos de Economía", México. Prentice Hall. 2ª. Edición. Sección Glosario

[4] Eurobanco. "Diccionario de términos financieros", 1997.

En lo particular, el invertir implica arriesgar un capital con un rendimiento esperado y la consecuente utilidad en el corto y largo plazo.

El proceso de inversión se estructura en torno de las instituciones y los mercados financieros, en donde se encuentran tanto proveedores como demandantes de fondos. Los inversionistas que pueden ser institucionales o individuales. La importancia de la inversión radica en aportar los fondos necesarios para que el capital funcione y crezca. Las retribuciones de la inversión pueden recibirse en forma de ingreso corriente o aumento de valor. [6]

Las decisiones de inversión dependen tanto rentabilidad esperada de los proyectos, como la capacidad de la empresa para obtener financiamiento y del costo asumido.

En los planes de inversión deben tomarse en cuenta, por principio tanto los beneficios previstos como los fondos disponibles, a fin de determinar el nivel actual de inversión requerida para la consecución de cada una de las metas. Los instrumentos de inversión que se elijan dependerán en buena medida tanto de los ciclos económicos y del mercado, como de la etapa de la vida en la que se encuentran los proyectos del inversionista. Las metas y planes de inversión deben proporcionar la adecuada liquidez, lo cual puede conseguirse mediante la posesión de valores a corto plazo. Estos instrumentos pueden ganar intereses a una pérdida potencial de su poder adquisitivo. La variedad de instrumentos de inversión a corto plazo pueden obtenerse en bancos, firmas de intermediación bursátil e instituciones gubernamentales. Su conveniencia depende de la postura del inversionista frente a su disponibilidad, seguridad, liquidez y rendimiento.

En otras palabras, una decisión de inversión es la correcta si cumple con: [7]

- Ganancia marginal > rendimiento en el mercado de capitales.
- El valor presente > valor de cambio a futuro
- Según Stanford,[5] una adecuada administración de cartera debe cubrir los siguientes puntos:

[5] Citado en E. Villegas, R. M. Ortega. "Administración de Inversiones". México, McGraw-Hill, 1997.

- Mayor rendimiento de cartera
- Mantenimiento de la posición de liquidez
- Ganancias de capital
- Seguridad de cartera
- Limitación de la deuda a un nivel no perjudicial.

Hay dos tipos de inversionistas: los pequeños y los grandes ahorradores, y un equilibrio que separa a los ahorradores pequeños que invierten en deuda, y a los grandes ahorradores que invierten en instrumentos de acciones.

Como regla general, se ha observado que las acciones, en su mayor parte, rinden más a largo plazo, que cualquier otro tipo de inversiones. No obstante, invertir en acciones a corto plazo puede ser peligroso ya que no son muy estables. Una de las reglas de oro para todo inversionista es que a mayor riesgo se obtienen mayores retornos. Lógicamente, cuando los inversionistas toman mayores riesgos, esperan recibir a cambio ganancias más elevadas. Es por esta razón que las acciones son un ejemplo de lo anterior, porque son percibidas como más volátiles y obtienen ganancias más extensas que los bonos, los cuales son vistos con mayor estabilidad. Tradicionalmente los bonos tienen menores riesgos, puesto que a largo plazo la emisión de un bono se traduce en una mayor utilidad que los bonos a corto plazo. Entre mayor sea el tiempo que un inversionista tenga que esperar para recibir su dinero, serán mayores las posibilidades de que algun suceso macroeconómico o político intervenga y afecte la utilidad de la inversión, por tanto se asume un nivel de riesgo más amplio y esto se traduce en mayores retornos.

El único determinante o condicionante del precio de una acción es la ganancia de la misma. A corto plazo, las acciones pueden fluctuar debido a las tasas de interés, el entorno, el estado del tiempo, la opinión generalizada y las variables exógenas pueden afectar los precios. Sin embargo lo importante es a largo plazo y aquí lo que interesa es la ganancia. Si las ganancias o dividendos de una acción se mantienen y crecen considerablemente en un período de diez años, hemos seleccionado acertadamente, ya que nuestros dividendos también crecerán.

En opinión de una experta, *"la diversificación de las inversiones es fundamental. Esta es la única manera de controlar y balancear una inversión. Además, un portafolio diversificado representa menores riesgos, en otras palabras, aún cuando algunas de las inversiones caigan, otras subirán. Esto significa que en un portafolio debe estar integrado por diferentes tipos de inversiones, algunas que representan mayores riesgos y otras que proporcionen un poco de estabilidad y confianza"*. Valeria Cáceres Martes[6].

Un inversionista bursátil considera el riesgo, rendimiento y tiempo como factores fundamentales para invertir su capital. Las técnicas matemáticas de medición de riesgos son herramientas indispensables para auxiliar al decisor en su etapa de planeación de riesgos.

1.7. Clases de inversiones

Se definió una inversión como el hecho de arriesgar un capital con la consecuente utilidad en el corto y largo plazo. Una forma de saber que hacer con el dinero es atender un poco a la economía y recordar que existen tres motivos para mantenerlo.

- La inversión operativa el cual obliga a las empresas a mantener dinero invertido en alternativas que le permitan funcionar; a las familias, en alternativas que les permitan subsistir; es decir, pagar renta, ropa, luz, alimentación, etc.

- La inversión precautoria que conduce a mantener inversiones para imprevistos, ya sea por causas contingentes o por mala planeación. Para reducir

[6] Columna periodística "El ABC de las inversiones ". Periódico "El Economista". México, D.F. Octubre 17 del 2001, Sección Análisis Financiero.

estos imprevistos se debe contar con una adecuada administración de riesgos (cobertura de riesgos cambiarios, tesobonos, seguros, etc.).

- La inversión especulativa permite a las empresas e inversionistas aumentar su capital al adquirir mayores riesgos con el dinero sobrante.

Otra clase de inversión según el diccionario de bolsa

- Inversión de cartera: inversión en acciones de una sociedad con un objetivo de rentabilidad y sin interés en el control de la sociedad.
- Inversión extranjera: inversiones realizadas en los mercados financieros por residentes en el exterior. En bolsa suele corresponder con grandes inversores institucionales.
- Inversión institucional: conjunto de inversiones realizadas en bolsa y otros mercados financieros por las instituciones de inversión colectiva (fondos, etc.,) y las instituciones financieras (bancos, casas de bolsa, etc.,). Generalmente se realizan mediante operaciones muy fuertes y suelen tener un carácter estable.

Las inversiones pueden ser definidas en función de las estructuras de la corriente de cobros y pagos que generan. En este sentido, teniendo en cuenta el signo de la corriente de flujos netos de caja, podríamos dividir las inversiones simples y no simples.

Son inversiones simples aquéllas cuya corriente de fondos se canaliza por un desembolso inicial y varios ingresos posteriores, aquellas que solamente se produce un cambio de signo en los flujos de caja. Los signos de los fondos serán:

$$\begin{array}{ccc} - & + & + \ldots + \\ t_0 & t_1 & t_2 \ldots t_n \end{array}$$

Son inversiones no simples aquellas cuyos flujos de fondos posteriores al desembolso inicial son tanto positivos como negativos:

$$\begin{array}{ccc} - & + & - \ldots + \\ t_0 & t_1 & t_2 \ldots t_n \end{array}$$

Los elementos que intervienen en el cálculo de los flujos de fondos son:

- Costos de la inversión. Se pueden agrupar en dos grandes apartados: el coste del activo propiamente dicho y los costos operacionales o derivados de la utilización de la inversión;
- Duración de la inversión. Es el lapso de tiempo durante el cual la inversión generará flujos financieros en la empresa (cobros o pagos);
- Cálculo de las entradas de fondos provenientes de la inversión. Las entradas de fondos corresponden con los cobros producidos por la inversión, magnitud que, por lo general, no suele coincidir con los ingresos;
- Cálculo de salidas de fondos. Una inversión origina tres tipos diferentes de salidas de fondos: el desembolso o desembolsos derivados del proyecto de inversión propiamente dicho; los costos operacionales de la inversión; y la variación (incremento o disminución) de impuestos sobre los beneficios que surgen como consecuencia de la realización de la inversión.

Analíticamente, toda inversión puede ser definida como una serie de flujos financieros en el tiempo de la forma:

$$\begin{array}{cccccc} - & + & - & - & \ldots & + \\ -FC_0 & +FC_1 & -FC_2 & -FC_3 & \ldots & +FC_n \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & \ldots & t_n \end{array}$$

FC_0: desembolso o pago inicial de la inversión.

FC_1: flujos netos de caja generados en el período t, como consecuencia de la realización de la inversión; esto es, la diferencia entre cobros y pagos del correspondiente lapso.

Una vez definida así la inversión, habrá de cumplir dos condiciones previas para su realización:

- Condición de probabilidad o riesgo del proyecto

- Condición de factibilidad, también llamada rentabilidad financiera.

$$\sum_{t=1}^{n} FC_t > 0. \tag{1.1}$$

$$\sum_{t=1}^{n} FC_t - FC_0 > 0. \tag{1.2}$$

La primera consiste en el hecho de que el proyecto arroje una cifra de cobros superior a la de pagos, mientras la *"segunda condición exige que la rentabilidad del proyecto de inversión supere al costo de la financiación, esto es, la rentabilidad de la inversión supere al costo marginal del capital".*[9] O bien,

$$\mathbf{r} > \mathbf{k}. \tag{1.3}$$

donde, r: rentabilidad de la inversión y k: costo marginal de capital invertido.

1.8. Decisiones de financiamiento

El director financiero tiene varias formas para poder financiar sus proyectos y una de ellas es emitir activos financieros y llevarlos a negociar en los mercados financieros. Existen muchas formas, pero no se debe pasar por alto que cada opción lleva consigo un costo, y es responsabilidad directa del director financiero conseguir recursos al menor costo posible y que éstos generen recursos superiores a su costo. Además se debe de encargar de conseguir y mantener a lo largo del tiempo un grado aceptable de liquidez y solvencia de la empresa a su cargo.

La función financiera de la empresa abarca también los aspectos de dimensión y crecimiento de la empresa. La preocupación sobre la solvencia y el análisis financiero constituyen aspectos cruciales en la supervivencia y expansión de la empresa.

Las decisiones financieras se fundamentan en tres variables:

[9] Zamudio Uribe, Op. cit. p. 32

1 *Rentabilidad o flujo neto de caja*

2 *Liquidez*

3 *Seguridad determinada por el nivel de riesgo*

Las funciones que cumplen los mercados de capitales, concretamente, los intermediarios financieros, se pueden resumir en las siguientes:

Transformación de ahorro en inversión mediante la creación de activos financieros, facilitando la transformación, dilución y eliminación de riesgos.

¿A qué se atribuye la necesidad de mantener un mercado financiero?, y ¿a qué expectativas e intereses del inversionista, responde el invertir en la Bolsa Mexicana de Valores?.

La importancia de un mercado financiero radica en la necesidad de la empresa de requerir de un mercado de Valores eficiente para financiar su desarrollo, y por consiguiente, el desarrollo de la economía en México; de otra forma no podría asegurar su subsistencia.

Así, los objetivos de un mercado financiero son:[8]

Permitir el comercio de activos financieros nuevos, acciones y diferentes tipos de deuda en el mercado primario, es decir, la obtención de recursos financieros por parte de la empresa y gobierno.

Permitir el comercio de activos financieros existentes para dar liquidez al mercado y fomentar la formación de carteras.

1.9. Clasificación de mercados financieros

Un mercado financiero satisface las condiciones de un tianguis, un comprador, -demandante-, un vendedor, -oferente- y un bien, la diferencia entre un tianguis y un mercado financiero es que en el segundo, sólo se puede negociar papel comercial e instrumentos financieros, es decir, adquirir activos financieros, mientras que en el primero se comercializa cualquier tipo de bien. Sin embargo, la adquisición de productos agrícolas, monedas y metales se aplica para ambos tipos de mercado.

Los cuadros de resumen simplifican los tipos de mercado financiero a partir del tipo, renta y destino de los fondos.

tiempo	**Mercado de dinero:** recursos financieros a corto plazo: Cetes, papel comercial, tesobonos y cuentas bancarias. **Mercado de capital**: acciones, obligaciones, pagarés de mediano plazo, pagarés financieros, e inversiones bancarias a largo plazo.
renta	**Instrumentos de renta variable:** no representan ningún pago por concepto de interés, ni ganancia alguna, no poseen fecha específica de vencimiento; el mercado accionario, metales preciosos. **Instrumentos de deuda:** dinero a préstamo.
destino de los fondos	**Mercado primario:** dinero invertido por la empresa o inversionista que se destina a las empresas o gobierno: colocación de Cetes por el gobierno o acciones por la iniciativa privada. **Mercado secundario:** éste otorga liquidez al mercado financiero, pues sin éste no funcionaría bien el otro. En este mercado el tenedor de un título lo vende a terceros.

Si se habla de mercado de dinero, se refiere a negociar la mercancía llamada dinero, representado por títulos de valor representativo de deuda, ya sea gubernamental o privada. El costo de estos instrumentos es la tasa de interés o la tasa de descuento, de las cuales se deriva el rendimiento que puede brindar las inversiones en éste tipo de instrumentos.

1.10. Mercado de productos derivados

Los riesgos de operación que se realizan a través de éste mercado son:

- No se cuenta con liquidez, no hay un buen mercado secundario, por lo cual, quien opera en este mercado tiene que mantener su posición hasta el vencimiento y cumplimiento del contrato.
- Al ser un contrato privado, puede existir el deseo de alguno de los participantes de no cumplir las obligaciones especificadas en el mismo.

El mercado de productos derivados se denomina así porque el precio al que se va a vender para entrega en una fecha futura se deriva del precio que está vigente en el mercado en este momento, de las perspectivas de los precios futuros, y de las perspectivas de las tasas de interés y las condiciones económicas que se estiman prevalecer en el futuro y de otra serie de factores importantes, que varían de acuerdo con el mercado de que se trate. Los productos derivados que se pueden operar en México son el más antiguo y del que más se ha operado; el mercado de anticipados, además del mercado de futuros y los warrants o títulos opcionales, en mercados internacionales el mercado de opciones.

1.11. Opciones de inversión

En esencia, una opción o forward es adquirir el derecho más no la obligación de comprar o vender un determinado volumen de un bien subyacente. Como es notorio el concepto, existen dos tipos de opciones, las de compra o "calls" y las de venta o *"puts"*.

Las *opciones de compra* confieren al tenedor de la misma el derecho a comprar un determinado volumen de un bien subyacente a determinado precio; se utilizan cuando se espera que el precio de ese bien subyacente aumente. A manera de ejemplo, supóngase que adquirió en 0.30 dólares el derecho de comprar maíz para entrega en julio a un precio de 3.00 dólares. Suponiendo que el precio del maíz subió a 3.50 dólares, el precio de la opción ya tiene un valor de 0.50 dólares dado que el precio de ejercicio es de 3.00 dólares, 0.50 dólares más barato que el precio en el mercado de físicos. El tenedor de esta opción tiene el derecho de ejercerla o venderla en el mercado. Con esto garantiza que aun cuando el precio suba, por el diferencial de precios entre el precio que pagó por la opción y el precio al que se pueda vender en el mercado, podrá tener una compensación que le ayude a nivelar el alza en el precio del bien subyacente, en éste caso el maíz. Su ganancia neta será de 0.20 dólares.

Las opciones de venta confieren al tenedor de la misma el derecho a vender un determinado volumen de un bien subyacente a determinado precio; se utilizan cuando se espera que el precio de ese bien subyacente disminuya. A manera de ejemplo, supóngase que adquirió en 0.30 dólares el derecho de vender maíz para entrega en julio a un precio de 3.00 dólares. Suponiendo que el precio del maíz bajó a 2.5 dólares, el precio de la opción ya tiene un valor subyacente de 0.50 dólares dado que el precio del ejercicio es de 3.00 dólares, 0.50 dólares más caro que el precio en el mercado de físicos. El tenedor de esta opción tiene el derecho de ejercerla o venderla en el mercado. Con esto garantiza que aun cuando el precio baje, por el diferencial de precios entre el precio que pagó por la opción y el precio al que se pueda vender en el mercado, podrá tener una compensación que le ayude a nivelar la baja en el precio del bien subyacente, en éste caso el maíz. Su ganancia será de 0.20 dólares.

El tenedor de una opción de compra o venta tendrá una utilidad si el valor futuro de su activo es mayor con respecto al precio del valor del activo en el momento de su inversión. Tradicionalmente es el mercado de divisas el que mejor se adapta a las necesidades de este tipo de estrategia de inversión.

1.12. *Instrumentación de una estrategia financiera*

"Una estrategia financiera es el conjunto de acciones tomadas para administrar los riesgos y flujos de capital de una empresa o inversionista". Un inversionista tendrá que instrumentar una estrategia financiera acorde a los beneficios esperados en una inversión.

Los Futuros negociados son instrumentos financieros que sirven para controlar y gestionar el riesgo que implican las inversiones en Bolsa, así como instrumentos para realizar inversiones que pueden proporcionar una rentabilidad proporcional al riesgo que se desee asumir. Anteriormente se indicó que a menor riesgo menor rentabilidad y a mayor riesgo mayor rentabilidad, obviamente esta rentabilidad se concreta a través del tiempo.

El riesgo se mencionó es la probabilidad de ganancia para un tenedor de instrumentos financieros. En el Mercado existen varios tipos de riesgo, entre estos se encuentran el riesgo de Mercado y riesgo Precio, en el primero es el que afecta al tenedor de cualquier tipo de valor, ante las fluctuaciones de precio ocasionadas por los movimientos normales del mercado; mientras que el segundo es el riesgo asociado con movimientos adversos en el precio del activo o valor sobre el cual se mantiene alguna posición.

Por otra parte, además de los dos tipos de opciones, de compra o de venta, existen dos estilos, el americano y el europeo. La opción estilo americano permite a su tenedor el ejercicio del derecho de compra o venta en cualquier momento durante la vigencia de la opción. La opción estilo Americano, sólo permite el ejercicio del derecho de compra o venta en cualquier momento durante la vigencia de la opción. La opción estilo Europeo, sólo permite el ejercicio de la opción de compra o venta la vencimiento. Ambos tipos de opciones son iguales.

Así, los plazos de entrega de divisas a futuro se integran por los contratos de opciones de divisas o de activos financieros.

Se tiene la opción de comprar el contrato mas no la obligación de ejercerlo. Previo pago de prima a la casa de Bolsa. La prima depende de la evaluación del riesgo, a partir de las expectativas de fluctuación, es decir, costo actual y costo futuro. Se les denominan contratos adelantados –forward- cuyo plazo es preestablecido con cierta flexibilidad.

El comprador de una opción call anticipa un mercado alcista, mientras que el tenedor de una opción put anticipa un mercado a la baja, si su expectativa es correcta el precio de compra, denominado precio de ejercicio, negociado en la Opción cobra la forma de un premio o utilidad.

Por el contrario, el emisor de la Opción recibe un pago, denominado prima, por la suscripción de la Opción, el cual retendrá al término del contrato si su expectativa de precios es correcta.

Activo Financiero	**Forward o TÍtulo Opcional**
Tamaño	A la medida
Especificación del subyacente	La que convenga a las dos partes
Método de liquidación	Entre las partes
Mecanismos de negociación	No se negocian en mercados organizados
Compensación diaria	No la hay

En México se operan títulos opcionales o warrant, sus únicas diferencias que existen entre ambos son la estandarización, y se operan en mercados establecidos. Por lo demás, todos los cálculos son iguales.

Supóngase que el 14 de Diciembre de 1995 se adquirió una opción IPC605A DC025 con un precio de ejercicio de 2001.15, con fecha de vencimiento 26 de abril de 1996 a un precio de \$750. El precio del bien subyacente o precio de mercado es de 2575.44 y la primera emisión fue de \$846,487.00.

Precio bien subyacente	2,575.44
Precio de ejercicio	2,001.15
Valor intrínseco	574.29
Precio de la Opción	750.00
Utilidad	−175.71
Rendimiento	−23.43

Se adquirió un warrant IPC504A, lo que quiere decir, con las letras IPC, que se refiere al Incide de Precios y Cotizaciones de la Bolsa Mexicana de Valores, con el número 605, y la fecha de vencimiento es el mes de abril de 1996. La letra A indica que es de estilo americano. Después se lee que es DC025 lo cual quiere decir que es de tipo compra y en la serie 025.

Un dato importante de la operación con respecto a las características del warrant, está la fecha exacta de vencimiento, 26 de abril de 1996, y el precio de ejercicio, 2001.5. Como dato adicional se tiene el hecho de que la prima de emisión fue de $846, 487.00, dato que sólo sirve para saber que los que invirtieron en la emisión han perdido, pues ahora el precio del warrant es de $750.00.

Suponiendo que en el mes de abril de 1996 el IPC de la Bolsa Mexicana de Valores alcanzó un nivel de 3000 puntos, lo que ganaría el tenedor de esta opción se calcula de la siguiente manera:

Precio bien subyacente	3000.00
Precio de ejercicio	2001.15
Valor intrínseco	998.85
Precio de la Opción	750.00
Utilidad	175.71
Rendimiento	33.18

Dos personas A y B, piensan firmar un contrato de Opción de compra. El mismo le permitirá A comprarle a B 1000 acciones de CEMEX a un precio de $60 en cualquier momento durante los próximos nueve meses.

Actualmente se venden estas acciones a $55.00. El inversionista A considera que el valor de CEMEX subirá considerablemente en los próximos meses, en cambio el inversionista B piensa que el valor no ascenderá más de $60 durante este periodo. A tiene que pagar a B una prima al firmar el contrato, debido a que B necesita una compensación por el riesgo adquirido. Supongamos que en este caso la prima es de $3.00 pesos por acción, es decir, $3000.00 pesos de prima.

La posición larga es la que presenta A al ser el comprador de la Opción, y se puede observar su postura en la siguiente gráfica.

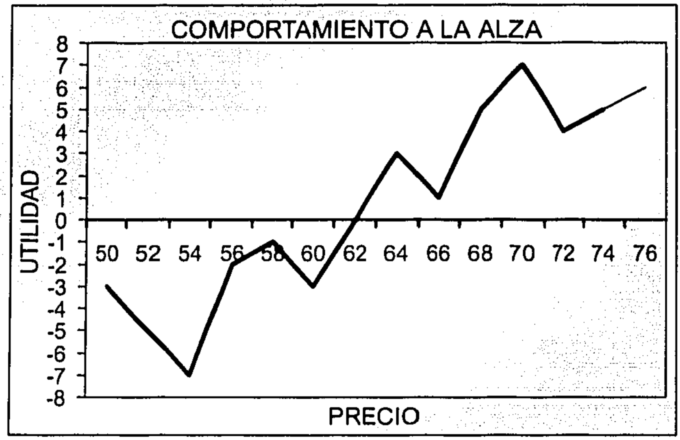

Figura 1.4

Si el precio de la acción se mantiene por debajo del precio de ejercicio -$60.00-, la pérdida que obtiene es la prima que pagó en un principio al comprar la Opción, a partir del precio de ejercicio, la gráfica se convierte en ascendente, aunque sigue obteniendo pérdidas hasta llegar al precio a $63.00 y a partir de este punto logra ganancias.

La posición larga la presenta B el emisor, esta postura se observa en la siguiente gráfica.

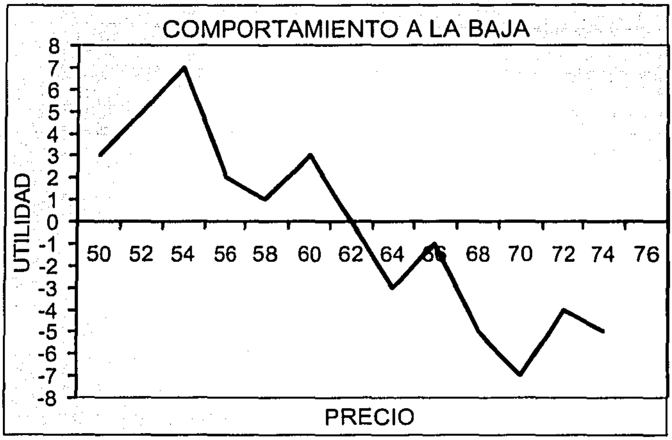

Figura 1.5

Obsérvese que en el precio de la acción a \$60.00 pesos representa una utilidad de \$3.00 pesos por acción, sin embargo, la utilidad es negativa cuando la opción se encuentra en un precio de \$70.00. La utilidad total cuando el precio es de \$70.00 pesos en la fecha de ejercicio será de −7.00 pesos por acción.

El precio por acción o bien subyacente en la fecha de ejercicio es de \$62.00 pesos por acción. El inversionista A obtiene una utilidad negativa de \$1000.00 pesos, equivalente a un −33 % de su inversión inicial, en este caso, el costo de la prima, el cual fue de \$3000.00 pesos, mientras que el inversionista B adquiere una ganancia de \$1000.00, equivalentes al 33 % de la acción al momento del precio de ejercicio de la Opción.

BIBLIOGRAFíA

[1] Uribe, Zamudio. **"Toma de decisiones en condiciones de incertidumbre"**. México, UNAM, FE, 1998.

[2] Varian, H. R, **Economic and Financial with modeling Mathemathica"**, Ed. TELOS, 1996, p. 125-133

[3] **Manual de apuntes de la materia Planeación Estratégica.** México, UPIICSA, IPN, 1998.

[4] de los Reyes García, Manuel, Ramos Cortés, José C. **"Investigación de Operaciones I"**. México: Universidad Autónoma Metropolitana, 2^a reimpresión, 1997. p 1-18

[5] Garza, Tomás . **"Elementos de cálculo de probabilidades"**. México: UNAM, Textos Universitarios, 1990.

[6] Bueno Cruz, Durán. **"Economía y dirección financiera de la empresa"**. México: Ed. Pirámide. p. 413.

[7] Villavicencio, Rodolfo. Curso: **Dinámica de los Negocios Internacionales**. UNAM, Campus Acatlán. 1998

[8] Villegas, Eduardo, Ortega, R. M. **"Administración de Inversiones"**. México: McGraw-Hill, 1997 p 3-22

34.

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

2. CADENAS DE MARKOV

2.1. Procesos de decisión de Markov

Los procesos de decisión de Markov son una aplicación de la programación dinámica a la solución de un proceso de decisión estocástico, que se puede escribir a través de un número finito de estados. Las probabilidades de transición entre los estados se describen por medio de una cadena de Markov. La estructura de remuneración del proceso la describe también una matriz, cuyos elementos individuales representan el ingreso o costo resultante del cambio de un estado a otro. Las matrices de transición y de ingreso, dependen de las alternativas de decisión disponibles para la persona que toma la decisión. "El objetivo del problema es el de determinar la política o curso de acción óptimo que maximice el ingreso esperado del proceso en un número de etapas finito o infinito".[10]

Un proceso estocástico es un proceso probabilístico donde el tiempo es la variable aleatoria independiente, encontrar la relación de interdependencia y comportamiento límite de variables aletorias es el objeto de estudio de la teoría estocástica. Se observa un proceso estocástico siempre que se desarrolla el tiempo de manera controlada por leyes probabilísticas.

Las aplicaciones de procesos estocásticos son amplias, el análisis de la dinámica de una población o el comportamiento de una epidemia; el flujo del mercado de futuros y derivados; fenómenos de comportamiento en geofísica y bioquímica, son ejemplos de procesos estocásticos.

Un proceso estocástico es una familia de variables aletorias $\{X_{t_n}\}$, donde t es un parámetro que denota el tiempo sobre el conjunto T. Por simplicidad de su representación, al referirme a t será como tiempo y $\{X_{t_n}\}$ como proceso estocástico con tiempo discreto cuando $T = Z^+ = \{0, 1, 2, ..., n, n+1, ..., n+m\}$ y un proceso estocástico con tiempo continuo cuando $T = R^+ = [0, \infty)$.

Un proceso estocástico se distingue por un espacio de estados S, el rango de posibles valores para la variable aleatoria X_{t_n}, una función de probabilidad conocida por su estrucutra de dependencia para todo n y todo $t_{0,...}t_n$ donde $t_i \in T$, $i = 1, .., n$. Los procesos de Markov tienen una estructura de dependencia que los hace un caso singular de procesos estocásticos

Una secuencia de variables aleatorias X_t es denominada proceso estocástico con parámetro de tiempo discreto o simplemente con tiempo discreto cuando a sus variables se les asigna un valor en S.

Definición 2.1. Un proceso estocástico es un espacio probabilístico (Ω, F, P) donde:

Ω es el espacio muestral probabilístico.

El campo F es el conjunto de eventos del espacio muestral Ω. $\Omega \subset F$;

$S = \{1, 2, 3, ..i \mid i \in N\}$ es el espacio o vector de estados, necesariamente $S \in F$.

P es la función de densidad de probabilidad f de la variable aleatoria estocástica X_t. que representa el estado i del sistema al tiempo n, definida por la relación $f : S \longrightarrow R^2$.

Así, para saber el estado del sistema $X_{t_{n+1}}$ en el tiempo futuro dado X_{t_n} en un tiempo pasado, se tiene la función de transición de un estado i_{t_n} a un estado $i_{t_{n+1}}$ en un tiempo n.

$$P(X_{t_n}) = P[X_{t_{n+1}} = i_{t_{n+1}} / X_{t_n} = i_{t_n}].$$

Una característica común en un Proceso de Markov es que el tiempo no influye en el desarrollo de un evento, sin embargo, se puede determinar el comportamiento de un fenómeno probabilístico a través del tiempo.[1]

[1] Andrei Andreivich MARKOV (1856 - 1922) es pionero en el desarrollo de la teoría de Markov. Matemático ruso, discípulo de Tchevichev. Sus primeros trabajos versaban sobre la teoría de las probabilidades. En 1906 desarrolló las llamadas cadenas de Markov, para analizar

El pasado de las vbes. aleatorias $\{X_{t_0}, X_{t_1}, ..., X_{t_{n-1}}\}$, y el futuro de las vbes. aleatorias $\{X_{t_{n+1}}, ..., X_{t_{n+m}}\}$ son condicionalmente independientes dado el presente $X_{t_n} = i_{t_n}$, esta característica es lo que se denomina propiedad de Markov, ver figura 2.6.[11]

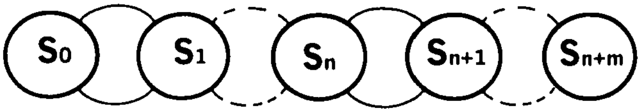

Figura 2.6

Definición 2.2. Un proceso estocástico X_{t_n}, es un proceso de Markov si cumple con la siguiente propiedad:

$$\exists \quad t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_n; \qquad o\ bien, \quad t_1 \uparrow t_n \qquad t \in R^+$$

la distribución condicional de probabilidad para X_{t_n} depende exclusivamente del valor $X_{t_n} = i_{t_n}$, esto es,

$$P\left[X_{t_{n+1}} = i_{t_{n+1}} / X_{t_0} = i_{t_0}, ..., X_{t_n} = i_{t_n}\right] = P[X_{t_{n+1}} = i_{t_{n+1}} / X_{t_n} = i_{t_n}] \quad (2.1)$$

para efectos de éste trabajo el tiempo t tendrá valores discretos y la v. a. X_{t_n} valores continuos.

Un proceso de decisión de Markov está definido dentro de un espacio de Banach β. Un espacio de valores aleatorios de Banach se denomina espacio lineal completamente normalizado, y es representado por una variable aleatoria estocástica X_{t_n} con un espacio finito de estados S, denotando la norma de X_{t_n} por $\|\cdot\|$. La norma de un espacio de Banach es 1, necesariamente. La característica fundamental de un espacio aleatorio β es la posibilidad de mapear funciones de probabilidad a espacios vectoriales en R^2.

procesos de física y metereología. Una cadena de markov es un proceso al azar con la inusual característica de que su futuro desenvolvimiento puede ser pronosticado a partir de su estado presente, la predicción es tan exacta como si se conociera su entera historia pasada.

2.2. Tipos de procesos estocásticos

- Serie Estocástica Discreta

En este sistema el espacio de estados es Discreto y espacio Paramétrico Discreto

Ejemplo:

X_t = Tiempo de espera del n-ésimo cliente en una fila de una gasolineria.

$T = \{0, 1, 2, ..., 10\}$ Minutos de espera de los clientes en ser atendidos.

$S = \{1, 2, ..., n\}$ Cantidad de clientes posibles.

- Proceso Estocástico Discreto

Es el sistema con espacio de estados Discreto y un espacio Paramétrico continuo

Ejemplo:

X_t = Número de clientes en la fila de la cafetería en el tiempo t.

$S = \{0, 1, 2, ..., m\}$ Cantidad de clientes.

$T = [0, n]$ Instante de la observación.

- Serie Estocástica Continua

Este sistema tiene un espacio de Estados continuo y un Espacio Paramétrico Discreto.

Ejemplo:

X_t = Cantidad de agua del vaso del cliente t.

$S = [0, max]$ agua.

$T = (0, n]$ tiempo.

- Proceso Estocástico Continuo

En este sistema ambos, el Espacio de Estados como el Espacio Paramétrico son Continuos.

Ejemplo:

X_t = Litros de agua en una sisterna en el instante t.

$S = [0, 10000]$ cantidad de agua en la sisterna.

$T = [0, n]$ instante del tiempo.

2.2.1. *Características de un proceso de Markov*

- Un proceso de Markov es homogéneo durante el tiempo t_{n+1} si:

$$\exists \quad P[X_{t_{n+1}} = i_{t_{n+1}}/X_{t_n} = i_{t_n}].$$

- En un proceso de Markov con tiempo continuo la distribución del tiempo entre cambios de estados se distribuye como una distribución exponencial:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

- En un proceso de Markov de tiempo discreto, la distribución del tiempo entre cambios de estado es geométrica:

$$p(x) = (1-p)^{x-1}p.$$

Cuando se tiene un proceso estocástico con la propiedad de Markov y tiempo continuo se habla de un Proceso de Markov, mientras que un proceso estocástico con propiedad de Markov y tiempo discreto es una cadena de Markov. [12]

Definición 2.3. Un proceso estocástico X_{t_n}, es una cadena de Markov si $\forall \quad t_0, t_1...t_n$; la distribución condicional de probabilidad para X_{t_n}depende exclusivamente del valor $X_{t_n} = i_{t_n}$, esto es,

$$P[X_{t_{n+1}} = i_{t_{n+1}}/X_{t_0} = i_{t_0}, ..., X_{t_n} = i_{t_n}] = P[X_{t_{n+1}} = i_{t_{n+1}}/X_{t_n} = i_{t_n}].$$

El conjunto del tiempo T es el conjunto paramétrico.

$$T = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}\}.$$

El conjunto de estados S es la posición que ocupa la cadena en el tiempo T.

$$S = \{S_0, S_1, S_2, ..., S_n, S_{n+1}\}$$

Ejemplos de cadenas de Markov son, el comportamiento de una población de bacterias o de un volcán, la ubicación de un barco a la deriva en el tiempo t_n.

2.3. *Matriz de Markov*

Por definición, una matriz de Markov es semidefinida positiva y tiene la singularidad de que los elementos de sus vectores columna de la matriz suman la unidad, esto es, dada la matriz A de orden $m_x n$, que se expresa como:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \qquad i = 1, ..., m.$$

y se cumple

$$a_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = 1.$$

Considérense tres ciudades, México, Guadalajara y Monterrey, que denotamos por DF, GL, y MT respectivamente. Supongase que en cualquier año n, algunas personas salen de estas ciudades para ir a alguna de las otras.

El porcentaje de las personas que salen y llegan anualmente es de la siguiente forma:

$\frac{1}{5}$DF se dirige a GL y $\frac{1}{4}$DF se dirige a MT
$\frac{1}{5}$GL se dirige a DF y $\frac{1}{4}$GL se dirige a MT
$\frac{1}{4}$MT se dirige a DF y $\frac{3}{8}$MT se dirige a GL

Sean x_n, y_n, z_n las poblaciones de DF, GL y MT, respectivamente en el año n. Entonces se puede expresar la población en el $n - \acute{e}simo + 1$ año de la siguiente forma, y sea $S = \{x_n, y_n, z_n\}$ el conjunto de estados S_n; sea $T = \{0, 1, 2, 3, ..., n, n+1\}$ el conjunto de tiempo.

S	x_n	y_n	x_n
x_n	$\frac{11}{20}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{8}$
y_n	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$
z_n	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$

En el $n - \acute{e}simo + 1$ año, $\frac{1}{5}$ de la problación del DF se dirige a GL y $\frac{1}{4}$ de la problación del DF se dirige a MT, esto es, $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$; la población que permanece en el DF es:

$$1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}.$$

En el $n - \acute{e}simo + 1$ año, $\frac{1}{5}$ de la problación de GL se dirige a DF y $\frac{1}{4}$ de la problación de GL se dirige a MT, esto es, $\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$; así, la población que permanece en GL es:

$$1 - \frac{9}{20} = \frac{11}{20}.$$

En el $n - \acute{e}simo + 1$ año, $\frac{1}{4}$ de la problación de MT se dirige a DF y $\frac{3}{8}$ de la población de MT se dirige a GL, esto es, $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$; y la población que permanece en MT es:

$$1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}.$$

La matriz de Markov representa el valor numérico de probabilidad asociado a los estados de transición S_i, a saber:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{11}{20} & \frac{5}{12} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{8} \end{bmatrix};$$

Para cada vector columna de la matriz, las probabilidades de transición tienen una suma igual a la unidad, es decir, la suma de los componentes de los vectores columna X, Y, Z es igual a la unidad, donde:

$$X^T = \begin{bmatrix} \frac{11}{20} \\ \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \quad Y^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}; \quad Z^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{4}{8} \end{bmatrix};$$

A partir del fenómeno poblacional de las tres ciudades, se pueden determinar las siguientes ecuaciones:

- La población total del estado x_n se mantendrá en el $n+1$ tiempo es:

$$\frac{11}{20}x_n + \frac{1}{5}y_n + \frac{1}{4}z_n = x_{n+1}.$$

- La población total del estado y_n se mantendrá en el n+1 tiempo es:

$$\frac{5}{12}x_n + \frac{1}{3}y_n + \frac{1}{4}z_n = y_{n+1}.$$

- La población total del estado z_n se mantendrá en el n+1 tiempo es:

$$\frac{1}{4}x_n + \frac{1}{4}y_n + \frac{4}{8}z_n = z_{n+1}.$$

2.4. Matriz estocástica de probabilidades

La matriz Estocástica representa las probabilidades de transición entre los estados de la cadena de Markov. Por definición, una matriz de estocástica es semidefinida positiva y a diferencia de la matriz de Markov los elementos de sus renglones suman la unidad, esto es, dada la matriz P de orden $m_x n$, que se expresa como

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}, \qquad i = 1, ..., m.$$

y se cumple

$$p_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1.$$

Una forma sencilla de expresar la relación entre la matriz de Markov y la matriz estocástica es

$$A_{ij} = P_{ij}^T$$

La matriz de estocástica de transición es equivalente a la transpuesta de la Matriz de Markov.

2.5. Distribución de probabilidad

Sean A_{mxn} una matriz estocástica y el vector $x \in R^n$, de tal manera que las componentes de Ax son:

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \qquad i = 1, ..., m. \tag{2.2}$$

y se cumple:

$$p_{ij} \geqslant 0, \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

que cada renglón o hilera de A_i es una distribución de probabilidad en $\{1, ..., n\}$ y las sumas de (2.2) pueden darse en la forma de [15]

$$y_i = E_i X, \qquad i = 1, ..., m. \tag{2.3}$$

Aquí, E_i denota la operación de tomar el valor esperado con respecto a la distribución A_i, en tanto que X es una variable aleatoria definida por

$$P(X = x_j) = a_{ij} \qquad \text{bajo} \qquad A_i$$

Teorema 2.1. Dada una matriz estocástica P de orden $n_x n$ y dado el vector probabilístico π cuyos índices se encuentran en N. Entonces, existe un espacio probabilístico (Ω, F, P) y una cadena de Markov homogénea X_n con tiempo discreto definida sobre el espacio de estados N, la distribución inicial π y la matriz de transición P.

- $j = 1, ..., n; \qquad i = 1, ..., m.$

Corolario 2.1. Sea $P[X_{t_{n+1}} = i_{t_{n+1}}/X_{t_n} = i_{t_n}] = X_{t_{n+1}}$,un proceso de Markov con $T = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}\}$, $S = \{S_0, S_1, S_2, ..., S_n, S_{n+1}\}$, entonces existe una función de probabilidad asociada al Proceso de Markov.

$$p_{i,j}(n, n+1) = P\left[X_{n+1} = j/X_n = i\right];$$

Una Cadena de Markov X_i con tiempo T discreto y espacio de estados S discreto tiene una función de masa de probabilidad, para ello basta con establecer para todos los instantes $n \geq 0$; y los estados i, j para la distribución de probabilidad.

$$p_{i,j}(n, n+1) = P\left[X_{n+1} = j/X_n = i\right];$$

$$P\left[X_{n+1} = j/X_n = i\right] = P(i,j) \geq 0; \qquad i,j \in S; \tag{2.4}$$

y satisface las siguientes condiciones

1. La suma de las probabilidades es igual a la unidad

$$\sum_{j}^{S} P(i,j) = 1; \qquad j \in S; \tag{2.5}$$

2. Una cadena de Markov es denotada por una distribución marginal de probabilidad de variables aleatorias en el tiempo $\{X_{t_0}, \cdots, X_{t_{n+1}}\}$, donde los valores son totalmente independientes de los estados X_{t_n}.

Una función es homogénea si satisface:

$$f(x_t, y_t, z_t, ...) = t^n f(x, y, z, ...).$$

de manera análoga una cadena de Markov es homogénea o estacionaria si su función de masa de probabilidad cumple con 2.5, esto es; el comportamiento de la v. a. X_{t_n}es idéntico en el tiempo $[t_n, t_{n+1})$. Así, la función de probabilidad de n pasos de la cadena de Markov es homogénea, o tiene probabilidades de transición homogeneas si $p_{i,j}(t,s)$ depende solo de la diferencia $(t-s)>0$, esto es,[13]

$$\begin{aligned} p_{i,j}(s,t) &= P\left[X_t = j/X_s = i\right]; \qquad s \geq 0;\ t \geq 1; \\ p_{i,j}(n,n+1) &= P\left[X_{n+1} = j/X_n = i\right]; \qquad n \geq 0; \end{aligned}$$

Sea X_{t_n} una cadena Markov con espacio paramétrico $T = \{t_0, t_1, t_2, ..., t_n, t_{n+1}\}$, espacio de estados $S = \{S_0, S_1, S_2, ..., S_n, S_{n+1}\}$, $S \subseteq Z$, y sea $p_{i,j}$ la distribución de probabilidad de X_{t_n}, existe una matriz de transición P asociada al Proceso de Markov que representa las probabilidades de transición, $P_{i,j} = P(i,j)$, por la ecuación (2.4) sabemos que:

$$\begin{aligned} p_{i,j}(n,m) &= P\left[X_m = j/X_n = i\right]. \qquad (2.6) \\ P\left[X_{t_n} = j/X_{t_{n-1}} = i\right] &= P\left[X_m = j/X_n = i\right]. \end{aligned}$$

La matriz P es otra forma de representar las probabilidades de transición de un proceso de Markov y se denomina Matriz estocástica de transición o Matriz de probabilidad de transición.

La matriz estocástica representa las probabilidades condicionales de alcanzar un estado j a partir de un estado i, esto es, $P(i,j)$.

$$\rho_{i,j} = P_i(T_j < \infty).$$

La siguiente gráfica de la cadena de Markov ejemplificará lo anteriror:

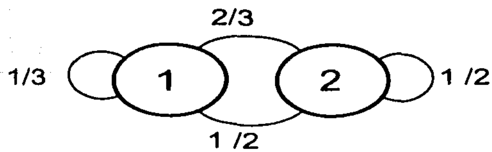

Figura 2.7

Para la cadena de Markov X_{t_n} de la figura se tiene:

$$p_{i,j}(n,m) = P[X_{t_m} = i_{t_m}/X_{t_n} = i_{t_n}];$$

$$n \geq 1; \qquad t \geq 0; \qquad T = \{0, 1, 2, ..., n, n+1\}; \qquad S = 1, 2, ..n$$

El conjunto S de estados se puede descomponer de la siguiente forma

El estado 2 es accesible desde el estado 1: $1 \rightarrow 2$

El estado 1 es accesible desde el estado 2: $2 \rightarrow 1$

Ambos estados son accesibles desde su propio estado $1 \rightarrow 1$; $2 \rightarrow 2$.

Un estado j es accesible desde un estado i siempre que exista un camino que conecte al estado i con el estado j.

Obsérvese que del estado i al estado j siempre existe un camino, de manera que todas las probabilidades se encuentran definidas con valor positivo, $\rho_{i,j} > 0$.

Las probabilidades $\rho_{i,j} > 0$ satisfacen las condiciones de un proceso probabilístico:

$$\rho_{1,1},\ \rho_{1,2},\ \rho_{2,1},\ \rho_{2,2} > 0;$$

De aquí podemos encontrar una propiedad interesante para una función de probabilidad de una Cadena de Markov.

Si $\rho_{i,j} > 0$ *entonces* existe al menos un camino del estado i al estado j.

Si $\rho_{i,j} = 1$ *entonces* el estado j es un estado absorbente.

Si $\rho_{i,j} = 0$ *entonces* no existe ningún camino que conecte el estado i con j.

La Matriz de Accesibilidad representa el valor numérico asociado a una gráfica y sus diferentes estados. La Cadena de Markov vista como una gráfica no dirigida se representa mediante la Matriz de Accesibilidad para los valores $\rho_{i,j}$.

$$m_{i,j} = \begin{cases} + & \text{si } \rho_{i,j} > 0 \\ 0 & \text{si } \rho_{i,j} = 0 \end{cases}$$

$$m_{i,j} = \begin{bmatrix} + & + \\ + & + \end{bmatrix}$$

La tabla siguiente representa los estados con sus probabilidades de transición $\rho_{i,j}$.

S_i	1	2
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La Matriz $P_{i,j}$ de transición de probabilidades representa los valores probabilísticos de una Cadena de Markov y se denomina Matriz estocástica

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

de aquí se obtiene las probabilidades de transición entre los diferentes estados.

$$\begin{aligned} P[X_{t_1} &= 2/X_{t_0} = 1] = P(1,2) = \frac{2}{3}; \\ P[X_{t_1} &= 1/X_{t_0} = 1] = P(1,1) = \frac{1}{3}; \\ P[X_{t_1} &= 1/X_{t_0} = 2] = P(2,1) = \frac{1}{2}; \\ P[X_{t_1} &= 2/X_{t_0} = 2] = P(2,2) = \frac{1}{2}; \end{aligned}$$

Definición 2.4. Una matriz M_{nxn} es una matriz de transición P o matriz estocástica si cumple las siguientes condiciones:

- La suma por renglón es siempre la unidad: $\sum_{i=1,j=1}^{n} \ P_{i,j} = 1.$ ($i,j \in S$)
- Un número uno en la diagonal principal indica que el estado correspondiente es absorbente.
- Un uno fuera de la diagonal principal significa que el estado destino es una barrera reflejante.

Dada X_{t_n} la cadena Markov con

$T = \{t_0, t_1, ..., t_n, t_{n+1}\}$, T^+, $S = \{S_0, S_1, ..., S_n, S_{n+1}\}$, $S \subseteq Z^+$, y sea $p_{i,j}$

la distribución de probabilidad de X_{t_n}, la matriz de transición P se representa por la siguiente matriz.

$$P = \begin{bmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \cdots & \cdots & \rho_{1,n} \\ \rho_{2,1} & \rho_{2,2} & \cdots & \cdots & \rho_{2,n} \\ \vdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \rho_{n-1,n-1} & \vdots \\ \rho_{n,1} & \rho_{n,2} & \cdots & \cdots & \rho_{n,n} \end{bmatrix}$$

2.5.1. *Ecuación Chapman-Kolmogorov*

El estado del sistema es el número de estado en el cual nos encontramos actualmente en la cadena de Markov. El estado siguiente es probabilísticamente dependiente sobre el actual estado pero independiente del resto de los estados.

El estado de sistema se define por el vector de probabilidades $\pi_t(i)$, y su interpretación es "la probabilidad de que el sistema ocupará el estado i después de t transiciones", siempre que el estado es conocido e inicia en $t = 0$. Cuando $t = 0$, entonces el sistema está en el estado inicial i en el tiempo t, esto es, $\pi_t(i)$.

La función $\pi_t(i)$, $i \in S$, se define

$$\pi_t(i) = P(X_t = i); \qquad i \in S;$$

y es denominada la distribucion inicial de la cadena de Markov.

Para un tiempo $t = 0$;

$$\pi_0(i) = P(X_0 = i); \qquad i \in S;$$

$$\sum_{i=0}^{n} \pi_t(i) = 1; \tag{2.7}$$

Durante el tiempo, la ecuación que indica el estado del sistema en el tiempo $t + 1$, está dado por la ecuación Chapman-Kolmogorov:

$$\pi_t(i+1) = \pi_t(i)P^t \tag{2.8}$$

Las probabilidades se estabilizan lentamente y tienden a la siguiente matriz Obsérvese el ejemplo para la cadena de Markov de tres estados con $S = \{1, 2, 3\}$, y T={0,1,...,n}.

Expresando la cadena en forma gráfica, véase la figura 2.8.

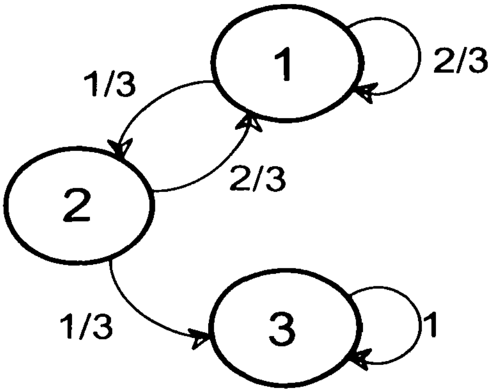

Figura 2.8

La siguiente tabla permite evaluar la transición entre los estados S_i.

S_i	1	2	3
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
3	0	0	1

Su matriz de accesibilidad nos permite un mejor análisis entre los elementos S_i de la cadena de Markov y su comportamiento a través del tiempo.

$$m_{i,j} = \begin{bmatrix} + & + & \\ + & & + \\ & & + \end{bmatrix}$$

En términos probabilísticos:

$\rho_{i,j} > 0$; por lo menos existe un camino entre el estado i y el estado j

$$\rho_{1,1}, \rho_{1,2}, \rho_{2,1}, \rho_{2,3}, \rho_{3,3} \quad > \quad 0;$$

$\rho_{i,i} = 1$; el estado i es un estado absorbente, $\quad \rho_{3,3} \quad = \quad 1;$

$\rho_{i,j} = 0$; no existe ningún camino que conecte el estado i con el estado j, $\rho_{3,1}, \rho_{3,2} = 0$;

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

2.6. *Cadenas de Markov de dos estados*

Sea X_{t_n} una cadena Markov con $T = \{0, 1, 2, ..., n, n+1\}$, $\quad S = \{0, 1\}$, y sea $P(x, y)$ la distribución de probabilidad de X_{t_n}. Ver figura 2.9

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix};$$

de aquí se obtiene las probabilidades de transición entre los diferentes estados.

$$\begin{aligned} P[X_{t_1} = 1/X_{t_0} = 0] &= P(1,0) = p; \\ P[X_{t_1} = 0/X_{t_0} = 0] &= P(0,0) = 1-p; \\ P[X_{t_1} = 0/X_{t_0} = 1] &= P(0,1) = q; \\ P[X_{t_1} = 1/X_{t_0} = 1] &= P(1,1) = 1-q; \end{aligned}$$

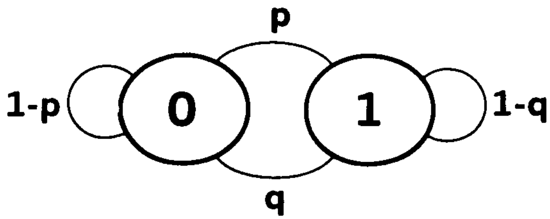

Figura 2.9

Planteando el vector de probabilidades $\pi_i(t)$ para un tiempo $t = 0$, y estado $i = 0$, cuya matriz estocástica está representada por P_{ij}.

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \pi_0(0) &= P(X_0 = 0); \\ \pi_0(0) &= (1, 0); \end{aligned} \tag{2.9}$$

puesto que:

$$\pi_1(0) = (\pi_1(0), \pi_1(1));$$

por condición de probabilidad estocástica se plantea la siguiente ecuación,

$$\pi_0(0) + \pi_0(1) = 1; \tag{2.10}$$

de ahí que;

$$\begin{aligned} \pi_1(0) &= 1 - \pi_1(1); \\ \pi_1(0) &= 1 - (1 - p); \\ \pi_1(0) &= p; \end{aligned}$$

Ahora bien, la probabilidad de mantenerse en el estado $S = 0$ durante un tiempo n se expresa mediante la ecuación:

$$P(X_{n+1} = 0) = P(0,0) + P(0,1)P(1,0);$$
$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0) + P(X_n = 1)P(X_{n+1} = 0);$$
$$P(X_{n+1} = 0) = P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 0) + P(X_n = 0)P(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1);$$
$$P(X_{n+1} = 0) = (1-p)P(X_n = 0) + qP(X_n = 1);$$
$$P(X_{n+1} = 0) = (1-p)P(X_n = 0) + q\left[1 - P(X_n = 0)\right];$$
$$P(X_{n+1} = 0) = (1-p-q)P(X_n = 0) + q;$$

Dado que $P(X_0 = 0) = \pi_0(0)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
P(X_1 &= 0) = (1-p-q)\pi_0(0) + q;\\
P(X_2 &= 0) = (1-p-q)P(X_1 = 0) + q;\\
P(X_2 &= 0) = (1-p-q)^2\pi_0(0) + q(1-p-q);\\
&\dots\\
P(X_t &= 0) = (1-p-q)^t\pi_0(0) + q(1-p-q)^t;
\end{aligned}$$

De la ecuación Chapman-Kolmogorov se obtiene:

$$\begin{aligned}
\pi_1(1) &= P\pi_0(0). \qquad (2.11)\\
\pi_2(0) &= P\pi_2(0) = PP\pi_0(0).\\
\pi_2(0) &= P^2\pi_0(0).\\
\pi_3(0) &= P\pi_2(0) = PP^2\pi_0(0).\\
\pi_3(0) &= P^3\pi_0(0).\\
&\dots\\
\pi_n(0) &= P^n\pi_n(0).
\end{aligned}$$

Obsérvese que

$$\pi_{n+1}(0) = P(X_{n+1} = 0).$$

$$P^n\pi_n(0) = (1-p-q)^n\pi_0(0) + \sum_{j=1}^{n}(1-p-q)^j;$$

Una observación interesante es determinar el comportamiento de la matriz P a largo plazo; ¿el estado inicial del sistema dependerá del comportamiento de la matriz M en el tiempo? .El modelo de cadenas de Markov para determinar el comportamiento del grado de bursatilidad de una acción en el tiempo, se de efectúa mediante una matriz de probabilidades de transición de estados P_{ij}, de ahí que se denomine cadena de Markov homogénea.

2.7. Clasificación de estados

Lema 2.1. Si el estado j es recurrente y $j \rightarrow i$, entonces el estado i es recurrente.

Prueba. Bajo la condición de que $j \rightarrow i$, tenemos que $i \rightarrow j$, de otra forma, j no puede ser recurrente. De aquí se sigue que hay un entero l tal que $p_{ij}(l) > 0$. Dado un enetero m tal que $p_{ij}(m) > 0$ y dado la ecuación

$$a = p_{ij}(l)p_{ij}(m).$$

La ecuación Chapman-Kolmogorov indica (ver 2.8)

$$p_{ij}(m+n) = \sum_k p_{ik}(m)p_{kj}(n), \qquad m,n = 0,1... \tag{2.12}$$

manipulando la ecuación anterior

$$p_{ii}(l+m+n) = \sum_k p_{ij}(l)p_{jj}(n)p_{ji}(m) = ap_{jj}(n), \qquad m,n = 0,1... \tag{2.13}$$

Luego

$$p_{ii} \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}(l+m+n) \geq a\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}. \tag{2.14}$$

puesto que j es recurrente, entonces p_{jj}=∞. También, $a > 0$. De aquí se sigue que el estado i es recurrente.

Teorema 2.2. Suponga que el estado i es accesible desde el estado j y el estado j es accesible desde el estado i.

(i) Si el estado i es positivo recurrente entonces el estado j es positivo recurrente

(ii) Si el estado i es nulo recurrente entonces el estado j es nulo recurrente.

(iii) Si el estado i es transitorio entonces el estado j es transitorio.

(iv) Si el estado i es aperiódico entonces el estado j es aperiódico. Si el estado i es periódico con periodo $d \geq 2$ entonces el estado j es periódico con periodo d.

Prueba. Si i es recurrente, entonces, por el Lema 2.1, j es recurrente. Del lema 2.1 se sigue que si $i \leftrightarrow j$ son accesibles, implica que si el estado i es transitorio, entonces el estado j también es transitorio. Ahora, supongase que si el estado i es nulo recurrente, entonces $\lim_{n\to\infty} p_{ii} = 0$. Dado l, m y a definidos en la prueba del lema 2.1, entonces, de 2.13 se tiene que $\lim_{n\to\infty} p_{jj} = 0$. Decimos entonces que j es recurrente, esto sucede si y sólo si es nulo recurrente. Así quedan probadas las premisas (i) a (iii).

Para probar la parte (iv), suponga que i es periodica con periodo d. Entonces, puesto que

$$p_{ii}(l+m) \geq p_{ij}(l)p_{ji}(m) = a > 0.$$

y dado que i tiene periodo d, $l+m$ tendrá periodo múltiplo de d. Si n no es un multiplo de d entonces, ni n es un múltiplo de d entonces tampoco $l+n+m$ lo es. De manera que de la ecuación 2.13 se sigue que

$$0 = p_{ii}(l+n+m) \geq ap_{jj}(n) \geq 0.$$

de ahí que $p_{jj}(n) = 0$ siempre que n no es múltiplo de d. De aquí se sigue que j deberá ser periódico con periodo $d \geq d$. Pero si j es periódico con periodo d, entonces, invirtiendo los papeles de j e i, concluimos que i es periódico con periodo $d \geq d$. Luego $d = d$ y la prueba está completada.

Dada X_{t_n} una cadena Markov con espacio paramétrico $T \in Z^+$, y espacio de estados $S \in Z^+$, y sea $p_{i,j}(n,m) = P\left[X_{n+1} = j/X_n = i\right]$ la distribución de transición de probabilidad.

$$\rho_{xy} = P_x(T_y < \infty). \tag{2.15}$$

ρ_{xy} denota la probabilidad de que la cadena de Markov comenzando en x estará en el estado y en algún tiempo $n \geq 0$.

Si se tiene $\rho_{xy} = 0$, entonces el estado y es cerrado, esto es, la probabilidad de salir del estado x y alcanzar y en cualquier tiempo con probabilidad de cero, en otras palabras, no existe un camino que comunique al extado x con el estado y.

$$\rho_{xy} = P(x,y) = 0. \tag{2.16}$$

De aquí se puede obtener una observación singular, siempre que se encuentre en un estado cerrado C siempre se tendrá probabilidad de uno de permanecer en ese estado en el tiempo n.

Cuando se tiene $\rho_{yy} = 1$, entonces el estado y es recurrente, esto es, la probabilidad de salir del estado y y alcanzar y en cualquier tiempo con probabilidad de uno, en otras palabras, siempre que se salga del estado y se retornará al estado durante el tiempo.

$$\rho_{yy} = P(y,y) = 1. \tag{2.17}$$

Si y es un estado absorbente, con probabilidad $\rho_{jj=}\rho_{yy} = P(y,y) = 1$, entonces, y es un estado necesariamente recurrente.

Si existe un estado y accesible desde el estado x; $x \longrightarrow y$, y se satisface que x sea accesible desde el estado y con probabilidad 1; $y \longrightarrow x$, entonces, x es un estado absorbente y es al mismo tiempo un estado cerrado.

Si un estado es absorbente, se tiene

$$\begin{aligned} \rho_{xy} &= P_x(T_y = 1). \\ P(x,y) &= 1. \end{aligned}$$

Si se tiene que $\rho_{xy} < 1$, entonces, el estado y es transitorio y por 2.16 sabemos que se estará en el estado y un número finito de veces.

Si existe un estado y accesible desde el estado x; $x \longrightarrow y$, pero no se satisface que x sea accesible desde el estado y; $y \nrightarrow x$, entonces, x es un estado transitorio.

Así, un estado transitorio X_i puede ser visitado un finito número de veces con probabilidad menor a uno, sin embargo, siempre se podrá salir de ese estado, véase los estados 1 y 2 de la figura 2.5.

De aquí se desprende la siguiente ecuación para un estado transitorio siempre que.

$$\rho_{xy} = 1 - \rho_{yy}. \tag{2.18}$$

y para un estado absorbente.

$$\rho_{yy} = 1 - \rho_{xy}. \tag{2.19}$$

Supóngase que si $i \longrightarrow j$ entonces:

- Si el estado i es positivo recurrente entonces el estado j es positivo recurrente.
- Si el estado i es nulo recurrente entonces el estado j es nulo recurrente.
- Si el estado i es transitorio entonces el estado j es transitorio
- Si el estado i es aperiódico entonces el estado j es aperiódico. Si el estado i es periódico con periodo $d \geq 2$ entonces el estado j es periódico con periodo d.

Definición 2.5. Un estado recurrente j es periódico con periódo d siempre que satisface un número de periódo $d \geq 2$ y cumple con $n|d$;

El número de pasos para ir de i a j siempre será positivo.

$$\rho_{ij}(n) > 0.$$
$$P_i(T_j > 0). \quad n \geq 0$$

Si $d \ngeq 2$ entonces, decimos que j es un estado aperiódico.

Si $i \rightarrow j$ entonces, $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{ij}(n) > 0.$

El número de pasos para ir del estado i al estado j siempre será positivo y sus probabilidades ρ_{ij} siempre serán mayores a cero necesariamente.

- Un conjunto de estados es denominado cerrado si no existe un estado externo accesible desde un estado interno.

- Un estado formado por un conjunto cerrado sobre símismo es denominado absorbente.

- Un conjunto cerrado de estados se denomina irreducible si no contiene un subconjunto propio cerrado.

- Una cadena de Markov es llamada irreducible si contiene exclusivamente un subconjunto cerrado de todo el conjunto de espacio de estados. [14]

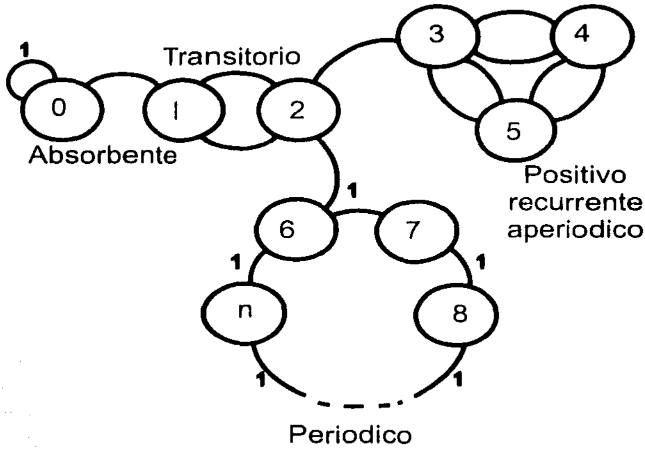

Figura 2.10

La siguiente tabla ejemplifica lo anteriormente dicho.

clasificación	núm. veces visitado	núm. esperado de pasos	fórmula
transitorio	$<\infty$	-	$\rho_{xx} < 1$
positivo recurrente	∞	$<\infty$	$\rho_{xx} = 1$
nulo recurrente	∞	∞	$\rho_{xx} = 1$

A partir de la Figura 2.10 se observa que todo conjunto o estado recurrente positivo X_i es aperiódico; es decir, cumple con la transición del estado X_i al estado X_j y la recurrencia sobre el estado final X_j sobre símismo, y se puede expresar

$$\rho_{x_i x_j} \rho_{x_j, x_j}.$$

Esta expresión se lee como la probabilidad de ir del estado X_i al estado X_j y permanecer en el estado X_j en la siguiente unidad de tiempo.

Mientras que un estado nulo recurrente X_i siempre tendrá probabilidad igual a uno y el número esperado de pasos para llegar al estado X_i será infinito, por lo tanto es una clase de estado probabilístico periódico.

Observése también que la diferencia entre un estado transitorio y un estado recurrente está definida por el número esperado de visitas para llegar a un estado X_j a partir del estado X_i.

Una característica singular de la cadena de Markov es determinar su comportamiento en el tiempo, a través de las transiciones; así, el número de pasos necesarios para que la cadena visite el estado y_j por primera vez en n pasos o unidades de tiempo a partir del estado x_i.

Analíticamente es posible representar esta propiedad mediante la ecuación siguiente:

$$P_x(T_y = n) = \rho_{xy}\rho_{yy}. \tag{2.20}$$

cumpliendo

$$P_x(T_y = n) = P_x(T_y = m)P_y(T_y = n), \; m < n. \tag{2.21}$$

con n que ocurre un instante de tiempo posterior a m.

$$\begin{aligned} P_x(T_y &= n) = P_x(T_y = m)P_y(T_y = m + h), \; h > 0. && (2.22) \\ P_x(T_y &= n) = \sum_{i=1}^{m} P_x(T_{y_i})P_y(T_{y_j}). \end{aligned}$$

$$\text{donde } T_{y_j} = j, \qquad j = i + 1; \text{ con } n = 1,$$

para que se cumpla la condición 2.21. [13]

$$P_{x_m}(T_{y_n}) \leqslant \sum_{i=1}^{m} P_x(T_{y_i}) \sum_{j=i+1}^{n} P_y(T_{y_j}). \tag{2.23}$$

Un conjunto cerrado C es denominado irreducible si el estado x se dirige al estado y para todas las opciones de x e y en el conjunto C. De aquí se sigue que si el conjunto C es cerrado e irreducible, entonces cada estado del conjunto C es recurrente o cada estado del conjunto C es transitorio.

Teorema 2.3. Dada un conjunto C de estados finitos cerrados irreducibles, entonces cada estado de C es recurrente.

Corolario 2.2. Dado un conjunto C cerrado e irreducible formado por un conjunto de estados recurrentes. Entonces

$$\sum_n \sum_m \rho_{x_m y_n} n \longrightarrow \infty \longrightarrow 1, \text{ si } \sum_n P_{x_m}(T_{y_n \to \infty}) \longrightarrow 1. \tag{2.24}$$

y analálogamente, el valor esperado de pasos para alcanzar y_n a partir de x_m es infinito, $G(x, y) = \infty$ para todas las secuencias de $\{x_i\}$ e $\{y_j\} \subseteq C$.

"Siempre que se tenga un una cadena de Markov irreducible, su espacio de estados es recurrente: Cada estado de la cadena en el tiempo m regresa al mismo estado en un tiempo n, toda vez que haya visitado los estados transitorios de la cadena, siempre tendrá al menos un estado recurrente".

Dado un conjunto cerrado C con una gráfica G que representa la cadena de Markov, por mera inspección la gráfica G es irreducible si la gráfica es fuertemente conexa, esto es, todos los nodos de la gráfica se encuentran fuertemente conectados.

2.8. *Probabilidades de absorción*

Sea C un conjunto finito de estados recurrentes, la probabilidad de que la cadena se absorbida por C se denota por:

$$\rho_{xc} = P_x(T_c < \infty);$$

se requieren dos condiciones:

- Dirigirse del estado x a un estado transitorio S_T y después al estado C

$$\rho_{xc} = \sum_{y \in S_T} P(x, y)\rho_{yc} + \sum_{z \in C} P(x, z); \tag{2.25}$$

- Dirigirse directamente del estado x al estado $z \in C$; en cuyo caso se tendrá la siguiente ecuación:

$$\rho_{xc} = \sum_{z \in C} P(x, z); \tag{2.26}$$

Corolario 2.3. Un estado j es recurrente siempre que exista un camino que conecte al estado j con el estado i.

Es pertinente tener la condición inicial de que el estado j sea accesible desde el estado i,

$i \rightarrow j$; para satisfacer la recurrencia del estado i con el estado j, $j \rightarrow i$.

De ahí que exista un entero l y m tal que:

$$a \equiv \rho_{ij}(l)\rho_{ji}(m); \qquad \rho_{ij}(l) > 0, \qquad \rho_{ij}(m) > 0.$$

De la ecuación Chapman-Kolmogorov se tiene:

$$\rho_{ij}\,(m+n) = \sum_k \rho_{ik}(m)\rho_{kj}(n), \qquad m, n = 0, 1, ... \tag{2.27}$$

y nuevamente para un tiempo l tenemos:

$$\rho_{ij}\,(l+m+n) \geq \rho_{ij}(l)\rho_{jj}(n)\rho_{ji}(m) = a\rho_{jj}(n), \qquad m, n = 0, 1, ...$$

siempre se cumple que:

$$\rho_{ii} \geqq \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{ji}(l+m+n) \geq a\sum_{n=0}^{\infty} \rho_{jj}(n), \qquad m, n = 0, 1, ... \tag{2.28}$$

En estricto sentido, siempre que se tengan dos estados recurrentes i, j; entonces, las probabilidades: $\rho_{ii} = \infty$; $\rho_{jj} = \infty$ y ambos estados recurrentes i, j satisfacen $i \longleftrightarrow j$.

Corolario 2.4. Para una cadena de Markov irreducible, todos sus estados son positivos recurrentes o todos sus estados son nulos recurrentes o todos sus estados son transitorios. También se tiene que cualquiera de los estados de la cadena son recurrentes aperiódicos o estados recurrentes periódicos con el mismo periodo.

Del anterior Corolario se obtiene la definición siguiente para determinar el comportamiento de una cadena de Markov por mera inspección.

Definición 2.6. Una cadena de Markov irreducible es denominada positiva recurrente -nula recurrente o transitoria, respectivamente-, si todos los estados son positivos recurrentes -nulos recurrentes o transitorios-. Una cadena de Markov es llamada aperiódica o periódica con periodo d si todos los estados son aperiódicos o periódicos con periodo d respectivamente. (Ver cita 11.)

Corolario 2.5. Para una cadena de Markov finita X_n no todos los estados son nulos recurrentes y no todos los estados son transitorios.

De aquí se desprende que debe existir al menos una clase positiva recurrente para cualquier cadena de Markov finita. Si una cadena de Markov tiene r clases positivas recurrentes, sus matrices de transición P tienen la forma canónica.

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & P_r & \vdots \\ T_1 & T_2 & \dots & T_r & T \end{bmatrix}$$

donde cada $P_i, i = 1, \dots, r$, denota una matriz estocástica correspondiente a la clase recurrente i, T_i, es una matriz subestocastica de transición de probabilidades desde la clase de estados transitorios a la clase recurrente i, y T es estrictamente una matriz subestocástica de transición de probabilidades con una clase transitoria.

Corolario 2.6. Para una cadena de Markov finita irreducible, existe una clase recurrente positiva solamente.

2.9. Valor esperado de una cadena de Markov

El valor esperado de pasos para alcanzar y_n a partir de x_m se define como:[14]

$$G(x,y) = E_x\left[N(y)\right] = \sum_{n=0}^{\infty} P^n(x,y). \tag{2.29}$$

El conjunto S de estados puede tener tres situaciones, a saber:

- El estado j es aislado con el estado i; $i \nrightarrow j$

$$\rho_{i,j} = \rho_{xy} = 0; \Rightarrow E_x\left[N(y)\right] = \infty. \tag{2.30}$$

- El estado j es recurrente periódico con el estado i; $i \longrightarrow j$

$$\rho_{i,j} = \rho_{xy} = 1; \Rightarrow E_x\left[T(x)\right] = 0. \tag{2.31}$$

- El estado j es recurrente aperiódico con el estado i; $i \longrightarrow j$ [11]

$$E_x\left[f(X_n)\right] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j f_j p_{ji}^R(n)}{\pi_i}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.32}$$

Sabemos por el teorema de convergencia (véase 2.33) que

$$\lim_{n \to \infty} p_{ji}^R(n) = \pi.$$

por lo tanto, la ecuación (2.28) puede ser vista como:

$$\lim n \longrightarrow \infty \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j f_i p_{ji}^R(n)}{\pi_i} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi_j f_i \pi_i}{\pi_i}.$$

Sin embargo, es más significativo decir que $E_x\left[f(X_n)\right]$ converge si:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} E_x\left[\sum_{j=0}^{\infty} f(X_n)\right] = \pi^T f. \tag{2.33}$$

donde $\pi = \pi_i$.

Esto es, si la función $f(j)$ es la función esperada siempre que la cadena de Markov $\{X_n\}$ estuviese en el estado j, entonces el valor esperado a obtener a lo largo del tiempo tendrá a converger a una constante $\pi^T f$, esto se aplica también para cualquier función f definida sobre los números Naturales, teniéndose:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{n=0}^{\infty} f(X_n) = \pi^T f.$$

en casi todos los puntos.

A esta ecuación se denomina la propiedad ergódica de Markov para la ley de los grandes números.

2.10. *Estacionaridad de una cadena de Markov*

Teorema 2.4. Un proceso estocástico es estacionario si cumple que su función de probabilidad se comporta de manera idéntica para cada intervalo de igual medida,

$$f\left(x_i,\ i=\overline{1,n}\right) \approxeq f(y_i,\ \ i=\overline{1,n}),\ y_i = x_i + h,\ h > 0.$$

De ahí que un proceso estocástico es estacionario si su distribución de probabilidad $F(x_n)$ cumple:

$$\|\lim_{n\to\infty} F(x_n)\| \leq 1. \qquad (2.34)$$

En sentido estricto, el límite de la función de probabilidad converge en el tiempo a un valor numérico.

Corolario 2.7. Una cadena de Markov es estacionaria si tiene una clase final única y aperiódica, por lo tanto es posible pronosticar su comportamiento en el tiempo.

Dada una cadena de Markov X_n con espacio de estados Z^+ y matriz de transición $P = p_{ij,}$ Entonces X_n es transitorio si y sólo si el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=0}^{\infty} p_{ij} y_j = y_i, \qquad i = 1, 2, ..., \qquad (2.35)$$

tiene como límite una solución no constante.

El vector y_i toma valores no constantes conforme $n \to \infty$, así, el vector y_i es finito en el tiempo.

Otra definición de cadenas de Markov estacionarias segun Hoel, Port and Stone [14] es la siguiente:

Dada una cadena de Markov X_n con espacio de estados Z^+y función de transición $P(x,y) = p_{ij}$. Si $\pi(x), \quad x \in S$, es una función cuya suma es la unidad y x son números positivos, y si:

$$\sum_x \pi(x)P(x,y) = \pi(y); \qquad y \in S, \tag{2.36}$$

tiene como límite una solución no constante. Entonces, la distribución X_n se tiende a un vector de probabilidades o función probabilística $\pi(y)$ conforme $n \to \infty$. Así, $\pi(y)$ es denominado distribución de convergencia de estados.

2.10.1. Propiedades de un proceso estacionario

Sea X_n un proceso de Markov y $\pi(y)$ es una distribución estacionaria que cumple con:

$$P(X_n = y) = \pi(y);$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_x \pi(x)P^2(x,y) &= \sum_x \pi(x) \sum_z P(x,z)P(z,y); \\
&= \sum_z (\sum_x \pi(x)P(x,z))P(z,y); \\
&= \sum_z \pi(z)P(z,y) = \pi(y);
\end{aligned}$$

Similarmente, para un tiempo n tendremos:

$$\sum_x \pi(x)P^{n+1}(x,y) = \sum_z P^n(x,z)P(z,y); \tag{2.37}$$

$$\sum_x \pi(x)P^n(x,y) = \pi(y); \qquad y \in S. \tag{2.38}$$

Sabiendo que X_n es una cadena de Markov independiente del tiempo n, entonces se puede planter la siguiente ecuación para un tiempo n.

$$\begin{aligned} P(X_n &= y) = \pi(y); \\ P(X_0 &= y) = P(X_1 = y) = \pi(y) = \sum_x \pi_0(x)P(x,y); \end{aligned}$$

En consecuencia, $\pi_0(x)$ es la distribución estacionaria, por 2.34

Así, la distribución de X_n es independiente de n, si y solo si la distribución inicial es una distribución estacionaria.

Finalmente, sustituyendo en la ecuación (2.34)

$$P(X_n = y) = \sum_x \pi_0(x)P^n(x,y), \qquad y \in S; \quad \cdot$$

(2.39)

A partir del teorema de estacionaridad (ver 2.34) podemos plantear la siguiente expresión:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = y) = \sum_x \pi_0(x)\pi(y); \tag{2.40}$$

donde $\sum_x \pi_0(x) = 1$, tendremos:

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = y) = \pi(y);$$

Para grandes valores de n la distribución de X_n es aproximadamente igual a la distribución estacionaria π. De ahí que la distribución estacionaria de X_n es $\pi(y) = \pi_0(y)$.

2.11. Ergodicidad de una cadena de Markov

Teorema 2.5. Si una Cadena de Markov es un proceso aperiódico positivo e irreducible, entonces, es un proceso ergódico.

- Una cadena de Markov X_n es irreducible si todos sus estados son mutuamente accesibles. Esto se observa en que los estados no pueden renumerarse de manera tal que la matriz de transición sea triangular por bloques.

- Una cadena de Markov X_n es aperiódica si ninguno de sus estados tiene periodo finito. Un estado tiene periodo d si $p_{ii}^n > 0$ siempre que n sea múltipo de d.

Corolario 2.8. Una cadena de Markov es ergódica si dada su matriz de probabilidades P_{ij} que cumple con 2.5 se encuentra acotada en su forma mínima por una matrix no nula A_{nxn}:

$$\lim_{n \to \infty} P^n \longrightarrow A. \tag{2.41}$$

A continuación veáse el cálculo del la matriz correspondiente a la figura 2.3 y su comportamiento en el tiempo durante los das $1, 2, 3, 7, 28, 30$ y 90.

La matriz de estocástica P asociada a los estados de transición S_i está representada por las probabilidades $\rho_{i,j}$ de la cadena de Markov, ver gráfica 2.3.

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

La matriz de Markov M asociada a la cadena de Markov está dada por:

$$M_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix};$$

Obsérvese que $M = P^T$, mientras la matriz de Markov M tiene una suma igual a la unidad por cada columna j, en la matriz estocástica P la suma por renglón i es igual a la unidad.

Estas matrices representan las probabilidades de pasar de un estado a otro en n pasos o unidades de tiempo, es decir $M^{(n)}(x, y)$ y $P^{(n)}(x, y)$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0.665334 & 0.4435560 & 0 \\ 0.221778 & 0.221778 & 0 \\ 0.110889 & 0.333 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M^3 = \begin{bmatrix} 0.590816 & 0.443112 & 0 \\ 0.221556 & 0.147704 & 0 \\ 0.184741 & 0.406852 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M^7 = \begin{bmatrix} 0.406834 & 0.297860 & 0 \\ 0.148930 & 0.108973 & 0 \\ 0.438516 & 0.588763 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M^{28} = \begin{bmatrix} 0.0558498 & 0.0408849 & 0 \\ 0.0204424 & 0.0149649 & 0 \\ 0.912674 & 0.935858 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M^{30} = \begin{bmatrix} 0.0462262 & 0.0338399 & 0 \\ 0.0169199 & 0.0123862 & 0 \\ 0.925675 & 0.945375 & 1 \end{bmatrix};$$

$$M^{90} = \begin{bmatrix} 0.000158806 & 0.000116254 & 0 \\ 0.0000581272 & 0.0000425521 & 0 \\ 0.987907 & 0.990932 & 1 \end{bmatrix};$$

$$\vdots$$

$$\lim_{n\to\infty} M^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

y de manera análoga, la matriz estocástica P tiende a una matriz A_{nxn}.

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que P_{nxn} representa las probabilidades de transición p_{ij} de la cadena de Markov

- Suponga que una cadena de Markov X_n es ergódica con una distribución estacionaria $\pi = (\pi_j)$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} P\left[X_n = j\right] \overset{c.t.p}{=} \pi_j;^2 \tag{2.42}$$

De la ecuación (2.32) sabemos que el número promedio de estados para visitar j durante los primeros n pasos es aproximadamente igual a un vector de probabilidades π_j para un tiempo n. Este es un valor muy práctico para la estimación de la estacionaridad de la distribución $\pi = (\pi_j)$.

Teorema 2.6. Suponga que X_n es positiva recurrente y periódica con periodo d. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} p_{ij}(k) = \frac{\pi_j}{d}; \qquad i,j \in N.$$

- Si una Cadena de Markov es un proceso aperiódico positivo e irreducible, entonces, es un proceso ergódico.
- Una cadena de Markov X_i es irreducible si todos sus estados son mutuamente accesibles. Esto se observa en tanto que los estados no pueden renumerarse de manera tal que la matriz de transición sea triangular por bloques.
- Una cadena de Markov X_i es aperiódica si ninguno de sus estados tiene periodo finito. un estado tiene periodo d si $p_{ii}^n > 0$ siempre que n sea múltipo de d.[17]

A partir de la relación encontrada de la ecuación Chapman-Kolmogorov se tiene la relación fundamental para determinar el comportamiento del sistema en el tiempo a partir de un vector inicial $\pi_n(0)$. ver 2.11

$$\pi_n(0) = P_{ij}^n \pi_{n-1}(0).$$

y si nuestro interés es el comportamiento asintótico de p_{ij}^n, esto es, $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n$, entonces nuestro problema es encontrar las condiciones para que este límite exista, y en caso de existir, ¿dependerá del estado inicial del sistema $\pi_n(0)$?

[2] $c.t.p$ significa, en casi todos los puntos.

Bajo condiciones de regularidad[3] la distribución asintótica existe, y la distribución en el límite sera independiente de la distribución inicial. El comportamiento asintótico del vector π_n está dado por el siguiente teorema básico del límite para cadenas de Markov.

Teorema 2.7. En una cadena de Markov recurrente irreducible y aperiódica se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^n = \frac{1}{\sum\limits_{n=1}^{\infty} np_{ii}^n}; \qquad i \in S. \tag{2.43}$$

y además

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^n = \lim_{n\to\infty} p_{ii}^n; \tag{2.44}$$

Algunas conclusiones que podemos obtener son:

1. Si P_{ii}^n es la matriz de Markov, y si suponemos que esta cadena es recurrente, irreducible y aperiódica, se nos garantiza la existencia de la matriz P^∞ donde la entrada (j,i) es la $P_{ij}^\infty = \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n$, pero como $P_{ij}^n = P_{ii}^n$, se concluye que la matriz P^∞ tiene sus columnas iguales, esto es, de la forma:

$$P^\infty = \begin{bmatrix} P_{00}^\infty & P_{00}^\infty & P_{00}^\infty & \cdots \\ P_{11}^\infty & P_{11}^\infty & P_{11}^\infty & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ P_{ii}^\infty & P_{ii}^\infty & P_{ii}^\infty & \ddots \end{bmatrix}$$

2. Sea C una cadena irreducible y recurrente, entonces $P_{ij}^n = 0$ para $j \in C, i \notin C \quad \forall\, n$.

Esto es, una vez que entemos en C no es posible abandonarlo, luego, la submatriz P_{ij} con $i, j \in C$, estará asociada a una cadena de Markov irreducible y recurrente, luego, el teorema básico es aplicable si la clase resulta ser aperiódica.

[3] Una condición de regularidad es aquella en la que los valores de una matriz son todos positivos al evaluar al exponente n la matriz. Necesariamente la distribución toma valores positivos cuando el límite de la variable de una distribución tiende a infinito.

Ahora, si $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^n = \pi_i = 0$ y la clase es recurrente, se dirá entonces que la clase es débilmente ergódica o nula recurrente. El vector π_i no converge y por tal razón no hay un proceso ergódico en sentido estricto.

3. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^n = \pi_i > 0$ para algún i en una clase aperiódica recurrente, entonces $\pi_j > 0$ para todo j que esté en la clase i. Si este es el caso diremos que la clase es positiva recurrente o fuertemente ergódica. En estricto sentido se tiene un proceso ergódico y un vector π_i cuya convergencia existe y esta definida.

4. El valor $\sum_{n=1}^{\infty} np_{ii}^n = m_i$; se define como el tiempo medio de recurrencia del estado i. Ahora se asegura, sin demostración, que bajo las condiciones de regularidad del teorema anterior, que

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^n = \frac{1}{m_i} = \pi_i.$$

El cálculo de los π_i se entrega en el siguiente teorema

Teorema 2.8. En una clase aperiódica positiva recurrente con estados $i, j \in S$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^n = \pi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \rho_{ij}; \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = 1. \tag{2.45}$$

Cualqier π_i que satisface (2.38) se llama probabilidad de distribución estacionaria de la cadena de Markov.

Observese que si P_{ij} es la matriz de transición asociada a una clase recurrente ergódica positiva, entonces la ecuación $\sum_{k=1}^{\infty} \pi_k \rho_{kj} = \pi_i$ llevada a su forma matricial se expresa como

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \dots & \pi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_{10} & \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1i} \\ \rho_{20} & \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2i} \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ \rho_{i0} & \rho_{i1} & \dots & \dots & \rho_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \vdots \\ \pi_i \end{bmatrix}$$

Se establece que $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ..., \pi_i)^T$ es un eigenvector de la matriz P_{ij} asociado al eigenvalor 1. Para esto debemos saber que toda matriz de Markov tiene un autovalor igual a 1, más aún, este valor será el mayor, en valor absoluto, si la matriz es primitva, esto es, si todas sus entradas son positivas para alguna potencia de la matriz.Ver la figura 2.11 para ilustrar lo anteriormente expuesto.

De lo anterior podemos concluir que una cadena de Markov tiene un único limite o distrribución estacionaria la cual es un vector renglón n-dimensional π correspondiente correspondiente a cualquier renglón del límite de la matriz P.

$$\lim_{n \to \infty} P_{ii}^n$$

El vector π satisface necesariamente:

$$\begin{aligned} \pi_i &> 0. \\ \sum_i \pi_i &= 1. \\ \pi P &= \pi. \end{aligned}$$

ver la imagen para ilustrar la ecuación anterior.

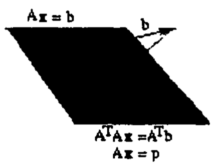

Figura 2.11

2.12. *Eigenvalores y eigenvectores*

Dada una transformación lineal $T : V \to N$ de un espacio vectorial sobre símismo, es posible obtener:

$$T(V) = \lambda V; \qquad \lambda \in R,$$

donde λ es un valor característico o eigenvalor de T y V es el vector característico o eigenvector de T.[16]

Dada $A_{n\times n}$ matriz y suponga que existe una base $V_1, ..., V_n$ en R^n para cada i,

$$AV_i = \lambda_i V_i. \tag{2.46}$$

para algún escalar λ_i; V_i es un un eigenvector correspondiente al eigenvalor λ_i.

Ver la figura 2.12 que representa la ecuación 2.46.

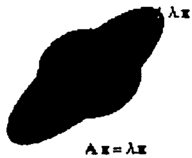

Figura 2.12

Dado una matriz P_{nxn} cuyas columnas son los vectores $V_1, ..., V_n$, esto es, $P = [V_1, V_2, ..., V_n]$, donde las columnas de P son la base vectorial en R^n.

Esto implica que el espacio de columnas de P se encuentran todos en R^n, cuyo rango es $P = n$ de ahí que P es una matriz no singular.

Dada una matriz $A = a_{ij} \in R^{nxn}, A$ es definida positiva/negativa si:

$$x^T Ax > / < 0 \qquad A > 0, x \neq 0, x \in R^{nxn}.$$

A es semidefinida positiva/negativa si:

$$x^T Ax \geq / \leq 0 \qquad A > 0, x \neq 0, x \in R^{nxn}. \tag{2.47}$$

y cumplen con la siguiente propiedad

Si A es una matriz normal, A^TA y AA^T son matrices positivas semidefinidas para cualquier A, de tal forma que A puede ser factorizada como

$$A = VDV^{-1}. \tag{2.48}$$

donde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y $V = [V_1, V_2, \ldots, V_n]$.

Para encontrar los eigenvalores basta con resolver la siguiente expresión:

$$det(A - \lambda I) = 0.$$

Sea A_{3x3} una matriz positiva $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;con tres eigenvalores λ_1, λ_2, λ_3, a saber:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3\lambda \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= 0; \\ det(A - \lambda I) &= -9\lambda^2 + 20 + 3\lambda^3 + 8\lambda; \\ 0 &= -9\lambda^2 + 20 + 3\lambda^3 + 8\lambda; \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación para λ cuyos eigenvalores son: $\lambda_3 = 8, \lambda_1 = -1,$

$\lambda_2 = -1$;y sus eigenvectores estan determinados por:

$$V_1 = \left\{ \begin{array}{c} -0.49410142535549 \\ -0.47201892938335 \ , \\ 0.73011089004717 \end{array} \right\};$$

$$V_2 = \left\{ \begin{array}{c} -0.55804958293796 \\ 0.81614154360177 \\ 0.14997881113707 \end{array} \right\};$$

$$V_3 = \left\{ \begin{array}{c} 0.66666666666667 \\ 0.33333333333333 \\ 0.66666666666667 \end{array} \right\};$$

de aquí podemos plantear la matriz D que cumple con $P = VDV^{-1}$(ver 2.51).

$$V = \begin{bmatrix} -0.494101 & -0.55804 & 0.66666 \\ -0.472018 & 0.816141 & 0.33333 \\ 0.730110 & 0.149978 & 0.66666 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix};$$

los vectores columna que integran la matriz son linealmente independientes cada uno conrespecto del otro.

Obsérvese también que las matrices V^{-1}y V^T son matrices ortogonales porque son iguales.

$$P = VDV^{-1} = \begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 4.0 \\ 2.0 & 0 & 2.0 \\ 4.0 & 2.0 & 3.0 \end{bmatrix}$$

Corolario 2.9. Para una matriz A definida positiva todos los valores característicos son positivos.

Una matriz A cuadrada no negativa tiene un eigenvalor máximo no negativo el cual no es excedido en valor absoluto por ningún otro eigenvalor y le corresponde un eigenvector no negativo.

Si A es una matriz irreducible y no negativa, entonces, sus eigenvalores estan determinados por:

$$|\lambda I - A| \tag{2.49}$$

donde I es la matriz Identidad y λ son los eigenvectores de A.

- Si $[V_1, V_2, ..., V_n]$ son los eigenvectores de una matriz A y si los correspondientes eigenvalores son todos diferentes, entonces, $[V_1, V_2, ..., V_n]$ son linealmente independientes.

- Si una matriz A_{nxn} es simétrica entonces sus eigenvectores correspondientes a eigenvalores diferentes son mutuamente ortogonales. Aun más, en este caso, existen n eigenvectores linealmente independiente para A, de ahí que A sea diagonalizable.

- En el caso de que una matriz A_{nxn} sea simétrica con n diferentes eigenvectores, no necesariamente todos corresponden a eigenvalores diferentes, y no todos pueden ser ortogonales.

2.12.1. Matrices positivas irreducibles

Teorema 2.9. Teorema de Perron-Frobenius. Suponga que $A \geq 0$ e irreducible. Entonces,

1. A tiene un eigenvalor λ_1 real positivo con las siguientes propiedades.

2. Para cada eigenvalor λ_1 hay un eigenvector x cuyos elementos pueden ser positivos,

$$Ax = \lambda_1 x; \tag{2.50}$$

3. Si α es cualquier otro eigenvalor de A, entonces,

$$\lambda_1 \geq | \alpha | .$$

4 λ_1 es una raíz de la ecuación determinante de A.

$$|\lambda I - A| = 0. \tag{2.51}$$

5 λ_1 se incrementa conforme cualquier valor de A incrementa.

6 $\lambda_i = a_{ii}$ si y solo si A es una matriz triangular superior o inferior

Corolario 2.10. Si una cadena de Markov es ergódica entonces su matriz de transición P es e irreducible, esto es, P tiene un simple eigenvalor unitario el cual excede a los demás en valor numérico -módulo-, recíprocamente, si P es una matriz de transición irreducible, entonces, es un sistema ergódico.

Corolario 2.11. Si una cadena es irreducible, esto es, consiste de un solo conjunto cerrado y periódico con periodo d, entonces, la matriz de transición P es irreducible y tiene exactamente d eigenvalores de modulo unitario, cuyos valores son de menor módulo que la unidad. De forma recíproca, los estados de la cadena se dividen en mutuamente excluyentes en subconjuntos cíclicos.

Veamos de que forma se aplican los anteriores corolarios a la cadena de Markov antes mencionada

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \lambda & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\lambda & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix};$$

cuyo determinante se calcula de la siguiente forma

$$\begin{aligned} det(A - \lambda I) &= 0; \\ det(A - \lambda I) &= \frac{2}{3}\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{2}{9}\lambda; \\ 0 &= \frac{2}{3}\lambda^2 - \lambda^3 + \frac{2}{9}\lambda; \end{aligned}$$

resolviendo la ecuación para λ cuyos eigenvalores son

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1, \\
\lambda_2 &= \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3} = 0.90977291892044 = 0.91, \\
\lambda_3 &= \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3} = -0.24377291892044 = -0.2438;
\end{aligned}
$$

y sus eigenvectores están dados por

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \{3322/4117, 368/623, 0\}; \\
V_2 &= \{5539/9642, 121/210, 568/977\}; \\
V_3 &= \{-408/1187, 1233/1313, 0\};
\end{aligned}
$$

$$
V_1^T = \begin{bmatrix} 3322/4117 \\ 368/623 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V_2^T = \begin{bmatrix} 5539/9642 \\ 121/210 \\ 568/977 \end{bmatrix} \qquad V_3^T = \begin{bmatrix} -408/1187 \\ 1233/1313 \\ 0 \end{bmatrix},
$$

de aquí podemos plantear la matriz D que cumple con $P = VDV^{-1}(2.47)$.

$$
\begin{aligned}
V &= \begin{bmatrix} 3322/4117 & 5539/9642 & -408/1187 \\ 368/623 & 121/210 & 1233/1313 \\ 0 & 568/977 & 0 \end{bmatrix}; D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.91 & 0 \\ 0 & 0 & -0.2438 \end{bmatrix} \\
V^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{125\,13000\,28587}{128\,02122\,94150} & \frac{22\,90037\,28044}{64\,01061\,47075} & -\frac{46287\,67176\,73249\,94701}{35056\,41171\,01518\,12000} \\ 0 & 0 & \frac{977}{568} \\ -\frac{118\,06308\,71368}{192\,03184\,41225} & \frac{161\,27725\,54393}{192\,03184\,41225} & -\frac{3941\,30085\,91977\,85187}{17528\,20585\,50759\,06000} \end{bmatrix};
\end{aligned}
$$

los vectores columna que integran la matriz son linealmente independientes cada uno conrespecto del otro.

Obsérvese también que las matrices V^{-1}y V^T no son matrices ortogonales porque son iguales.

$$
P = VDV^{-1} = \begin{bmatrix} .73715 & .35905 & -.018506 \\ .71811 & .01 & .17344 \\ 0 & 0 & .91 \end{bmatrix}
$$

BIBLIOGRAFíA

[10] Taha, Hamdy. "**Investigación de operaciones**". Alfaomega. 5^a Edición, 1995, México, p 798

[11] Kijima, Masaaki. "**Stochastic Processes**".University of Tsukuba, Ed. Chapman & Hall, Tokyo, Japan. 1a. Edición.

[12] Videgaray Gonzalez, Maricarmen. "**Curso: Procesos Estocasticos**", UNAM, Campus Acatlán, 1997.

[13] Miramontes Hercog, Marcela. Tesis Profeisonal. "**La evolución del S.I.D.A. (Sindrome de Inmuno Deficiencia Adquirido) en Mexico. Una proyección a través de las cadenas de Markov**". México: UNAM, Campus Acatlán. 1998

[14] Hoel, Port, Stone. "**Introduction to stochastic processes**". University of L. A., Houghton Mufflin Co., 4th. Ed. 1989.

[15] Hernández Castaños Diego Bricio, Alvarez Luis Javier. "**Método Monte Carlo**". Vol II, Sociedad Matemática Mexicana, UAM-Iztapalapa. 1995.

[16] Grossman, Stanley I. "**Algebra Lineal**", Ed. Iberoamaricana, México, 2a. Edición, 1988.

[17] Cox, D. R., Miller, H. F. "**Stochastic Processes**", Chapman & Hall,. Great Britain, 1996.

80

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

3. APLICACIÓN

3.1. Comportamiento accionario de Bimbo en su serie A

Las acciones representan una parte proporcional del capital social de una empresa. Otorgan derechos a sus tenedores. La forma de conseguir capital en el mercado bursátil es en primera instancia, la Oferta Pública de acciones, con la que se invita al público inversionista a hacerse socio de la empresa. Estas acciones pueden ser parte del capital de la empresa emisora, o una ampliación del mismo.

En la Oferta Pública, el precio es determinado de manera conjunta por el emisor y el intermediario colocador (casa de bolsa) atendiendo a condiciones del mercado y al potencial de la empresa. En el mercado secundario, el precio lo determina la libre oferta y demanda.

Entre las ventajas que ofrece una Oferta Pública a la empresa es el hecho de que puede allegarse de recursos frescos, fortalecer la estructura financiera por incremento de su capitalización, consolidar y liquidar pasivos, liberar liquidez y diversificación de sus fuentes de financiamiento.

Una emisión de acciones que cotiza en el mercado de derivados en la Bolsa Mexicana de Valores fundamentalmente se evalua a través de la estrategia financiera que el inversionista diseña, esta estrategia involucra el análisis fundamental y el análisis técnico o estadístico. El inversionista o administrador (portfolio manager) evalua el riesgo, rentabilidad en el tiempo sobre el comportamiento de una acción, y a partir del análisis realizado decide si la acción se encontrará depreciada de su valor actual o apreciada con respecto a su precio en el mercado.

Quien invierte en el mercado de acciones deben decidir no solamente que acciones comprar sino también cuando comprarlas y cuando venderlas. Existen varios métodos comunmente utilizados por analistas financieros para calcular el rendimiento y riesgo de las acciones. Sin embargo, el panorama financiero y la expectativa de retorno de inversión juegan un papel fundamental para las decisiones de financiamiento y formación de portafolios. La calidad de esas decisiones dependerá en buena medida del grado de realismo de nuestras expectativas, indica Andrés ínon, analista de Patagon para el periódico El Economista."El pesimismo excesivo puede ser inclusomás dañino que el optimismo irracional," comenta el autor [20]; "en México no hay datos en torno a las expectativas que tiene la población con relación a los retornos que puede ofrecer la bolsa local, el hecho de que menos de 1 % de los hogares invierta en acciones apunta a que existe un esceptismo profundo. Esto a pesar de que el Indice de Precios y Cotizaciones ha otorgado rendimientos anuales del 16 % en promedio durante los últimos 18 años". En otras palabras, el conservadurismo excesivo se refleja en retornos menores a los que se pudieran haber generado una estrategia prudente de inversión a largo plazo. Esto implica tener que ahorrar más dinero para la obtención de una meta, por ejemplo, la educación escolar o la adquisición de un bien.

Un inísionista precavido instrumenta una estrategia de inversión a partir del análisis fundamental y el análisis técnico, ésta estrategia visualiza un panorama en el tiempo a partir delos estados de bursatilidad de la acción y el entorno económico donde cotiza la emisión de acciones a invertir, el panorama siempre será positivo para el inversionista y el efecto foxista será mínimo en tanto que la estrategia sea prudente y lejos de todo optimismo exacerbado.

Así, sería conveniente aprovechar los sucesos pasados y realizar un balance adecuado para las decisiones pertinentes.

El caso de la emisión de acciones de la empresa Mexicana "BIMBO" en su serie A tuvo el siguiente comportamiento en el Sector de Alimentos durante el periodo mensual 9/2001 al periodo del 1/2002.[1]

[1] Gráfica obtenida del Portal Financiero Invertia. Dirección:

El comportamiento mensual se puede observar en la siguiente gráfica obtenida del portal financiero INVERTIA.

Figura 3.13

El precio mínimo obtenido por acción fue de $17.5, mientras que el máximo se registró en el mes de Octubre con un precio de $19.60 por acción. Lo singular es determinar su precio para el año 2002. Algunas proyecciones interesantes publicadas en el boletin semanal del Grupo Financiero BANAMEX, en la semana del 7 al 11 de Enero del 2002 son tomadas para ampliar el análisis de la gráfica.

EMPRESA	RECOMENDACION	PRECIO OBJETIVO 2002	REPORTE 2001
BIMBO A	COMPRA	$23.00 pesos	29 Junio

Es importante mencionar que Grupo BIMBO cotiza en el sector de alimentos y que durante los últimos 18 meses esta división ha mantenido el comportamiento siguiente:

PROYECCIONES DEL PIB SECTOR 2001
SECTOR ALIMENTOS Y BEBIDAS*

I	II	III	IVe	ANUALe
1.5	2.7	1.6	3.0	2.2

http://www.invertia.com.mx/empresas. Consultado el 28/01/2002

*Tasas de crecimiento al mismo periodo del año anterior

PROYECCIONES DEL PIB SECTOR 2002
SECTOR ALIMENTOS Y BEBIDAS*

Ie	IIe	IIIe	IVe	ANUALe
0.9	1.0	1.2	1.1	1.0

*Tasas de crecimiento al mismo periodo del año anterior

La letra "e" hace referencia al valor estimado

PRODUCTO INTERNO BRUTO SECTORIAL

SECTOR INDUSTRIA MANUFACTURERA	2000	2001p	2002p
ALIMENTOS Y BEBIDAS DIVISION I del sector	3.6	2.7	2.8

Crecimiento anual porcentual

p = Pronóstico BANAMEX

fuente: Grupo Financiero BANAMEX. ESTUDIOS ECONOMICOS Y SOCIALES

PRODUCCION INDUSTRIAL MEXICO

	Variación %	Variación %
SECTOR	Ago-01/Ago-00	Ene-Ago/01 vs Ene-Ago/00
ALIMENTOS Y BEBIDAS	1.74	2.07

PRODUCCION INDUSTRIAL MEXICO*

DIVISION ALIMENTOS Y BEBIDAS	I	II	III	IV	2001
CRECIMIENTO TRIMESTRE	1.6	1.3	1.3	1.2	1.35

*Fuente: BANAMEX, cálculos propios con datos del INEGI, Encuesta Industria mensu

Los ratings financieros asignados por el Grupo Bursamétrica para las emisoras que cotizan en el sector estan determinados en la siguente tabla.

Sector Alimentos Emisora	Indice Bursátil	Perspect. Sector	Perspect. Empresa	Situacion Financiera
AGRIEP A	C	C	C	B
ALSEA	C	B	B	B
BACHOCO	B	C	C	B
BAFAR B	C	B	B	B
BIMBO A	**A**	**C**	**B**	**B**
CAMPUS B	D	B	C	C
GMACMA B	C	B	C	D
GMODERN*	C	C	D	B
GRUMA B	B	D	C	C
HERDEZ B	B	D	D	C
MAIZORO*	C	B	C	C
MASECA B	B	D	D	C
MINSA C	C	B	B	C
NUTRISA*	D	B	C	B
SAVIA A	A	D	D	D

En las recomendaciones de compra son una buena oportunidad de inversión en el momento de una mayor estabilidad en los mercados, esto es, en el momento en el cual la volatilidad disminuya.[2]

Las siglas L.P. hacen referencia a Largo Plazo

BURSATILIDAD

A	B	C	D
ALTA	MEDIA	BAJA	NULA

El índice de inflación registrado en México durante los últimos 18 años es el siguiente. [23]

[2] Por razones de espacio se omitió la columna correspondiente a la "Recomendacin Global" que otorga Bursamétrica a las empresas indicadas en la anterior tabla, sin embargo, BIMBO es la que tuvo calificación de Venta en éste ramo de Alimentos y Bebidas. Mayor información consultar la revista "Grupo Bursametrica". Sección Ratings financieros, México. Ao II Reporte Semanal del 16 al 30 de Noviembre del 2001. p 78-80.

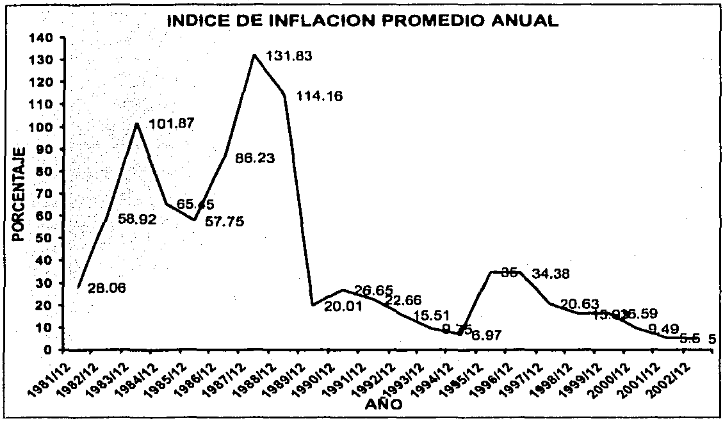

Figura 3.14

3.2. *Grado de bursatilidad de una accion*

Cuando se desea realizar una inversión, el inversionista precavido elegirá el instrumento que mejor se adecúe a sus expectativas de rendimiento, de riesgo, y que, además, le permita obtener la mayor liquidez posible en caso de que así lo requiera. La liquidez está en función directa de la facilidad con la cual el instrumento adquirido puede volver a venderse sin menoscabo del valor que se haya pagado por él y de la ganancia generada durante el tiempo que haya permanecido en calidad de inversión. ¿Cómo puede conocerse qué tan líquido puede ser un valor?. En el caso de las acciones la respuesta es por medio de la bursatilidad.

"El índice de bursatilidad es un parámetro que indica el grado de operatividad que registra una acción en comparación con otras en el Mercado, y permite establecer una clasificación de las mismas en función del comportamiento de sus principales variables Operativas".[3]

Descripción de variables Operativas:

- Número de Operaciones:

Son las transacciones realizadas sobre una acción en un período determinado, en este caso seis meses, no incluyendo las transacciones que operen menos del volumen que establecen los Lotes.

- El volumen de acciones negociadas

Es el número de acciones negociadas sin contemplar las ofertas públicas, ni operaciones de registro, en paquete o con picos.[4]

- Importe operado

Es el monto en pesos de las transacciones que se realizan en el mercado. Visto unitariamente con una emisora, aparece como una variable dependiente del volumen (importe = precio*volumen); sin embargo, al efectuarse el cálculo de los importes de todas las empresas, la gran diversificación de precios (desde $10.00 hasta $200.00) hace evidente que no necesariamente a mayor volumen se tiene mayor importe. A partir de la idea anterior, esta variable es incluida en el análisis de bursatilidad -de igual forma que en el punto anterior se discriminan operaciones de registro, en paquetes, con picos, y ofertas públicas-.

- Valor de capitalización

Es el producto que resulta de multiplicar el precio de mercado de una acción por el número de valores de esa serie inscritos en bolsa. Este monto es utilizado

[3] Fuente: México Analytica, Consultoria Financiera. Información proporcionada por el Lic. Francisco López Contreras, Analista. 2001. México

[4] Se considera como paquete toda operación que exceda el 2 % de valores inscritos en bolsa por una acción.

Pico es aquella operación cuyo volumen es menor al lote establecido para cierta acción de acuerdo a su precio.

para medir su tamaño con respecto al total de empresas que tienen acciones enla Bolsa Mexicana de Valores. Asímismo, esta variable es combinada con el importe operado para determinar su grado de rotación (TURN OVER).

- Lotes de acciones

Los lotes son un concepto utilzado en el salón de remates para determinar el volumen mínimo por el cual las acciones de una emisora se pueden negociar, siendo influido directamente por el precio de mercado de las mismas.

- Dias de operación

Periodo en dias durante el que se desea evaluar la bursatilidad. Normalmente los días hábiles bursátiles comprendidos en un periódo de *seis meses*.

A partir del calculo de las variables operativas se asigna cuatro diferentes grados de bursatilidad a una emisión en la Bolsa Mexicana de Valores y cuyo comportamiento bursátil se observa en la tabla.

NIVELES	CATEGORIAS	RANGO BURSATIL
acciones no bursátiles	bursatilidad nula	0 – 6.092
	bursatilidad baja	6.093 – 7.910
acciones bursátiles	bursatilidad media	7.911 – 9.123
	bursatilidad baja	9.1.24 – 10

Debido a que la bursatilidad cambia constantemente de acuerdo al mercado, los rangos de bursatilidad que corresponden a cada uno de los estratos anteriores son variables y se determinan por un criterio dinámico.

De manera que el grado de bursatilidad se comporta como una variable estocástica X_{τ}, con $\tau \in Z$; es decir, una variable probabilística en el tiempo cuyo escenario es el número de estados o grados de Bursatilidad S_i asignados a una emisión de acciones.

Para efectos de este capítulo se utilizará el grado de bursatilidad asignado asignado por el periódico "El Financiero" en la sección análisis financiero durante el último trimestre del año 2001.

En el caso de la emisión de acciones de la Empresa BIMBO en su serie A, el rango de bursatilidad asignado diariamente en el periódo de Septiembre del 2001 a Diciembre del 2001 se muestra en la siguiente tabla:

INDICE BURSATILIDAD	
MES/AÑO	**GRADO**
10/01	A
11/01	A
12/01	A
1/02	A

BIMBO es una empresa cuyo crecimiento sostenido es viable gracias a que pertenece al ramo Alimentos, Bebidas y Tabaco; el menos volátil de las empresas que cotizan en la Bolsa Mexicana de Valores y con un crecimiento anual para el 2001 de alrededor 1.3 % y puesto que la inflación promedio mensual y trimestral se mantendrá con una variación de un 5.6 por ciento, en el año 2002 con respecto al año 2001, promediando un total anual estimado en 5 %, el grado de bursatilidad se mantendrá Alta "A" durante los siguientes 6 meses del 2001; siendo el sector alimenticio una de las áreas que mantendran su crecimiento en el 2002 en un nivel de 4 %, superior al 1.5 % anual registrado en el 2001, considerando que la recesión económica mundial fue más drástica en el año 2001. La posición obtenida por la acción en los últimos seis meses en el mercado accionario ofrece rendimientos positivos al inversionista, así lo confirman el grado de bursatilidad asignado (B) por la consultoría Grupo Bursamétrica, de tal forma que implementar una estrategia de inversión en títulos de opciones es una excelente alternativa a los inversionistas. [5]

3.3. Estrategia de inversión con cadenas de Markov

[5] Revista Mercados Financieros: Proyecciones-Perspectivas-Estrategias. Grupo Bursamétrica. Año 11, Reporte Semanal del 26 al 30 de Noviembre de 2001.

Sea S el conjunto de estados posibles de una emisión de acción que cotiza en la BMV y sea T el espacio paramétrio del tiempo de la cadena de Markov de cuatro estados de bursatilidad de una acción.

Una estrategia es una regla que asigna a cada estado de rentabilidad de la acción, una probabilidad p_{ij} de transición; esto es, una estrategia R es una función definida en los números reales por:

$$R : S \longrightarrow S$$

donde $S = \{0, 1, 2, 3\}$ y $T = \{0, 1, 2, 3, ..., n, n+1\}$

Cuya cadena de Markov con cuatro estados está representada por la siguiente figura:

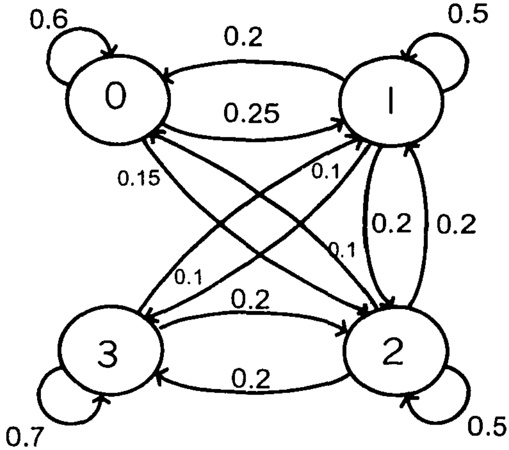

Figura 3.15

Una estrategia financiera está compuesta por un conjunto de estados de bursatilidad S a través de un tiempo T, con un tiempo inicial 0, y un tiempo de vencimiento n para hacer ejercer el derecho a adquirir una opción en el mercado de derivados con una utilidad positiva o negativa para el oferente y demandante del activo financiero:

$$\begin{array}{lcl} 0 & \longrightarrow & bursatilidad\ nula \\ 1 & \longrightarrow & bursatilidad\ baja \\ 2 & \longrightarrow & bursatilidad\ media \\ 3 & \longrightarrow & bursatilidad\ alta \end{array}$$

La gráfica dirigida asociada a los estados de bursatilidad S_i de la cadena de Markov es:

Cuya función de probabilidad $\rho_{i,j}$ se comporta de la siguiente forma en los diferentes estados S_i de la cadena de Markov.

$$\begin{array}{ccccc} S_i & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & .6 & .25 & .15 & 0 \\ 1 & .2 & .5 & .2 & .1 \\ 2 & .1 & .2 & .5 & .2 \\ 3 & 0 & .1 & .2 & .7 \end{array};$$

En términos probabilísticos $\rho_{i,j} > 0$.

$$\begin{array}{lcl} \rho_{1,1}, \rho_{1,2}, \rho_{1,3}, \rho_{1,4} & > & 0; \\ \rho_{2,1}, \rho_{2,2}, \rho_{2,3}, \rho_{2,4} & > & 0; \\ \rho_{3,1}, \rho_{3,2}, \rho_{3,3}, \rho_{3,4} & > & 0; \\ \rho_{4,1}, \rho_{4,2}, \rho_{4,3}, \rho_{4,4} & > & 0; \end{array}$$

Cada uno de los renglones j de la matriz P satisface la condición 2.4

$$\sum_{j}^{S} P(i,j) = 1; \qquad j \in S.$$

La cadena de Markov es una gráfica dirigida, siempre existe un camino que conecte a cada estado de rentabilidad S_i con otro estado S_i . Por lo menos existe un camino entre el estado i y el estado j.

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3 & \nrightarrow & 0; & 3 & \longrightarrow & 1; & 3 & \longrightarrow & 2; & 3 & \longrightarrow & 3; \\ 2 & \longrightarrow & 0; & 2 & \longrightarrow & 1; & 2 & \longrightarrow & 2; & 2 & \longrightarrow & 3; \\ 1 & \longrightarrow & 0; & 1 & \longrightarrow & 1; & 1 & \longrightarrow & 2; & 1 & \longrightarrow & 3; \\ 0 & \longrightarrow & 0; & 0 & \longrightarrow & 1; & 0 & \longrightarrow & 2; & 0 & \nrightarrow & 3; \end{array}$$

La cadena de Markov P es una matriz definida positiva, es un sistema compatible, cuyo determinante $\Delta = 0.0\,559$; su rango es 4 y el sistema tiene solución en R^n.

La Matriz de Accesibilidad para los valores $\rho_{i,j}$.

$$m_{i,j} = \begin{bmatrix} + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \\ + & + & + & + \end{bmatrix};$$

La cadena de Markov es una matriz semidefinida positiva dado que $\rho_{i,j} \geq 0$.

La matriz de transición de probabilidades asociada a la cadena de Markov está dada por la matriz P_{4x4}.

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} .6 & .25 & .15 & 0 \\ .2 & .5 & .2 & .1 \\ .1 & .2 & .5 & .2 \\ 0 & .1 & .2 & .7 \end{bmatrix};$$

$$P_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{6}{10} & \frac{25}{100} & \frac{15}{100} & 0 \\ \frac{2}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{5}{10} & \frac{2}{10} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2}{10} & \frac{7}{10} \end{bmatrix};$$

y sus eigenvalores están dados por:

$\lambda_1 = 1.025$, $\lambda_2 = 0.66426$, $\lambda_3 = 0.\,33338$ $\lambda_4 = 0.27731$, ;

sus eigenvectores V_i correspondientes al eigenvalor λ_i.

$$V_1^T = \begin{Bmatrix} .51094 \\ .53462 \\ .55677 \\ .67154 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \lambda_1 = 1.025,$$

$$V_2^T = \begin{Bmatrix} .67429 \\ .24867 \\ -.12557 \\ -.68895 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \lambda_2 = 0.66426;$$

$$V_3^T = \begin{Bmatrix} .64539 \\ -.28979 \\ -.66418 \\ .52041 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \lambda_3 = 0.33338;$$

$$V_4^T = \begin{Bmatrix} .44155 \\ -.71704 \\ .24519 \\ .22326 \end{Bmatrix} \leftrightarrow \lambda_4 = 0.27731;$$

polinomio caracteristico: $X^4 - 2.3X^3 + 1.805X^2 - .572X + .06295$

Del valor carcterístico $\lambda_1 = 1.025$, se desprende que la cadena de Markov tiene un nodo absorvente, sin embargo, dado que no hay probabilidad de un 100 % de salir de un estado i al estado j en un paso (ver figura 3.3), entonces se rechaza el hecho de que la cadena tenga un estado absorvente.

Se cumple la condición 2.45 para el eigenvalor $\lambda_1 = 1.025$ se tiene un autovector $V_1 = (0.51094, 0.53462, 0.55677, 0.67154)$

$$AV_1 = \lambda_1 V_1.$$

La cadena de Markov P es una matriz definida positiva, y es un sistema compatible, cuyo determinante $\Delta = 0.0559$ con rango 4; el sistema tiene solución en $\overline{R}^n$.

De la ecuación 2.45 podemos plantear la siguiente premisa:

$$PX = X$$

para $\lambda_1 = 1$,donde X necesariamente es un autovector de la matriz estocástica P.

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.25 & 0.15 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.25 & 0.15 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

de aquí se obtienen los valores del vector

$$X = (1, 1, 1, 1) = [x_1, x_2, x_3, x_4]$$

$$X^T = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

al vector X se le denomina vector π de probabilidades, y puesto que se cumple la ecuación 2.45 entonces tenemos que el vector π existe y es único y finito en el tiempo.

Veamos que sucede con la matriz P a lo largo del tiempo, digamos, en el día $7, 14, 28$, 90 y 360.

A lo largo de 7 días el escenario S_i de la acción está dado por la siguiente matriz:

$$P^7 = \begin{bmatrix} 0.225849 & 0.274454 & 0.267808 & 0.231886 \\ 0.209525 & 0.266994 & 0.270136 & 0.253343 \\ 0.195269 & 0.260125 & 0.27220 & 0.272400 \\ 0.171412 & 0.248269 & 0.274937 & 0.305380 \end{bmatrix};$$

tenemos que la matriz estará en los estados S_i con las siguientes probabilidades:

S_i	0	1	2	3
0	22.6 %	27.5 %	26.8 %	23 %
1	20 %	27 %	27 %	25 %
2	20 %	26 %	27 %	27.2 %
3	17 %	25 %	27.5 %	30.5 %

A lo largo de 14 días el escenario de S_i, cuyo comportamiento de la acción está dado por la siguiente matriz:

$$P^{14} = \begin{bmatrix} 0.2006 & 0.2625 & 0.2713 & 0.2657 \\ 0.1994 & 0.2620 & 0.2714 & 0.2672 \\ 0.1985 & 0.2615 & 0.2716 & 0.2685 \\ 0.1968 & 0.2607 & 0.2718 & 0.2708 \end{bmatrix}$$

A lo largo de 28 días el escenario de S_i comportamiento de la acción está dado por la siguiente matriz:

$$P^{28} = \begin{bmatrix} 0.198684 & 0.261593 & 0.27152 & 0.268199 \\ 0.198679 & 0.261591 & 0.271522 & 0.268206 \\ 0.198674 & 0.261588 & 0.271523 & 0.268213 \\ 0.198666 & 0.261584 & 0.271524 & 0.268224 \end{bmatrix};$$

tenemos que la matriz estará en los estados S_i con las siguientes probabilidades:

S_i	0	1	2	3
0	20 %	27 %	27 %	27 %
1	20 %	26 %	27 %	27 %
2	20 %	26 %	27 %	27 %
3	20 %	26 %	27 %	27 %

A lo largo de 90 días el escenario de S_i comportamiento de la acción está dado por la siguiente matriz.

$$P^{90} = \begin{bmatrix} 0.198675 & 0.261589 & 0.271523 & 0.268211 \\ 0.198675 & 0.261589 & 0.271523 & 0.268211 \\ 0.198675 & 0.261589 & 0.271523 & 0.268211 \\ 0.198675 & 0.261589 & 0.271523 & 0.268211 \end{bmatrix};$$

tenemos que la matriz estará en los estados S_i con las siguientes probabilidades:

S$_i$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	20 %	26 %	27 %	27 %
1	20 %	26 %	27 %	27 %
2	20 %	26 %	27 %	27 %
3	20 %	26 %	27 %	27 %

A lo largo del tiempo n el escenario de comportamiento S_i de la acción converge a la siguiente matriz de transición de probabilidades:

$$P^{n} = \begin{bmatrix} 0.198675 & 0.261589 & 0.271523 & 0.268211 \\ 0.198675 & 0.261589 & 0.271523 & 0.268211 \\ 0.198675 & 0.261589 & 0.271523 & 0.268211 \\ 0.198675 & 0.261589 & 0.271523 & 0.268211 \end{bmatrix};$$

tenemos que la matriz estará en los estados S_i con las siguientes probabilidades para un tiempo n:

S$_i$	**0**	**1**	**2**	**3**
0	20 %	26 %	27 %	27 %
1	20 %	26 %	27 %	27 %
2	20 %	26 %	27 %	27 %
3	20 %	26 %	27 %	27 %

La cadena de Markov es una cadena de estado finito con cuatro estados, al converger en el tiempo su matriz estocástica P a una matriz A_{nxn}, donde $A \geq 0$ define un proceso ergódico.2.46

$$\lim_{n \to \infty} P^{n} \to A.$$

La cadena de Markov de cuatro estados que representa el grado de bursatilidad es aperiódica e irreducible en tanto que no hay un estado absorvente o un periodo cíclico.

3.3.1. Estrategia de inversion pesimista y optimista

A partir del comportamiento asintótico de la matriz de estocástica P, se pueden establecer dos estrategias; una estrategia financiera optimista y una estrategia financiera pesimista, cada una dependerá del estado S_i donde se inicie la cadena de Markov, a saber, los estados de bursatilidad nula y alta son los que determinarán el curso de cada una de estas dos estrategias.

Inicialmente se tiene un vector probabilístico que cumple con ver 2.5, esto es, el vector probabilístico j que corresponde a cada uno de los renglones de la matriz estocástica $P_{i,j}$ y cuya suma de componentes es igual a la unidad.

El escenario de la acción involucra una estrategia de inversión a partir de un estado de bursatilidad i, cuando el vector de distribución inicial se encuentra en la componente correspondiente al estado i.

$$\begin{array}{cc} \text{i} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \pi_i(t) & \left[\begin{array}{cccc} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{array} \right] \end{array}$$

Ahora bien, la probabilidad de mantenerse en el estado $S = 0$ durante un tiempo n se expresa mediante $\pi_0(x)$, $x \in S_i$, se define por:

$$\pi_i(t) = P(X_t = i); \qquad x \in S;$$

y es denominada la Distribucion Inicial de la cadena de Markov, si satisface la ecuación: 2.8.

Durante el tiempo la ecuación que indica el estado del sistema en el tiempo $(t + 1)$, está dado por la siguiente ecuación:

donde P es la matriz estocástica de probabilidades p_{ij}.

La estrategia financiera la determina el vector 2.9.

$$\pi_i(t_{t+1}) = \pi_i(t)P^t$$

Estrategia financiera pesimista

El escenario pesimista supone implementar una estrategia de inversión a partir de un estado de bursatilidad NULA, cuando el vector de distribución inicial se encuentra en la componente correspondiente al estado $i = 0$.

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{i} & & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \pi_0(t) = & [& 1 & 0 & 0 & 0 &] \end{array}$$

Asi, se tiene el siguiente vector de probabilidades $\pi_0(t)$ para un tiempo $t = n$ es el siguiente:

$$\pi_0(t) = P(X_0 = x); \qquad x \in S_i;$$

Planteando el vector de distribución inicial para un tiempo $t = 0$, y estado de bursatilidad $i = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} \pi_0(0) &= P(X_0 = 0); \\ \pi_0(0) &= (1, 0, 0, 0); \end{aligned}$$

En el primer día el escenario está dado por $\pi_0(1)$ con $t = 1$.

$$\begin{aligned} \pi_0(1) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .6 & .25 & .15 & 0 \\ .2 & .5 & .2 & .1 \\ .1 & .2 & .5 & .2 \\ 0 & .1 & .2 & .7 \end{bmatrix} \\ \pi_0(1) &= \begin{bmatrix} .6 & .25 & .15 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

para el día t-ésimo el comportamiento del vector π_0 es:

$$\pi_0(2) = \begin{bmatrix} .6 & .25 & .15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .425 & .305 & .215 & .055 \\ .24 & .35 & .25 & .16 \\ .15 & .245 & .345 & .26 \\ .04 & .16 & .26 & .54 \end{bmatrix};$$

$$\pi_0(2) = \begin{bmatrix} .3375 & .30725 & .24325 & .112 \end{bmatrix};$$

$$\pi_0(3) = \begin{bmatrix} .3375 & .30725 & .24325 & .112 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .3375 & .30725 & .24325 & .112 \\ .239 & .301 & .263 & .197 \\ .1735 & .255 & .296 & .2755 \\ .082 & .196 & .276 & .446 \end{bmatrix};$$

$$\pi_0(3) = \begin{bmatrix} .23873 & .28016 & .26582 & .2153 \end{bmatrix};$$

$$\vdots$$

$$\pi_0(5) = \begin{bmatrix} .2073 & .26575 & .2704 & .25657 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .25815 & .28799 & .26242 & .19145 \\ .22115 & .2742 & .26859 & .23607 \\ .19036 & .25877 & .27481 & .27607 \\ .14113 & .23259 & .27781 & .34847 \end{bmatrix};$$

$$\pi_0(5) = \begin{bmatrix} .19997 & .26222 & .27136 & .26648 \end{bmatrix};$$

$$\pi_0(6) = \begin{bmatrix} .19997 & .26222 & .27136 & .26648 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .23873 & .28016 & .26582 & .2153 \\ .21439 & .26971 & .26952 & .24639 \\ .19345 & .25954 & .27293 & .27409 \\ .15898 & .24199 & .27629 & .32275 \end{bmatrix};$$

$$\pi_0(6) = \begin{bmatrix} .19882 & .26166 & .27152 & .26805 \end{bmatrix};$$

$$\pi_0(7) = \begin{bmatrix} .19882 & .26166 & .27152 & .26805 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .22585 & .27446 & .26781 & .23189 \\ .20953 & .267 & .27014 & .25335 \\ .19527 & .26013 & .27221 & .2724 \\ .17142 & .24827 & .27494 & .30538 \end{bmatrix};$$

$$\pi_0(7) = \begin{bmatrix} .1987 & .26161 & .27154 & .26822 \end{bmatrix};$$

En el día 7 el escenario de la acción es el siguiente:

$$\pi_0(7) = \begin{bmatrix} .1987 & .26161 & .27154 & .26822 \end{bmatrix};$$

En el día 14 el escenario de la acción es el siguiente:

$$\pi_0(14) = \begin{bmatrix} 0.1987 & 0.2616 & 0.2715 & 0.2682 \end{bmatrix};$$

En el día 21 el escenario de la acción es el siguiente:

$$\pi_0(21) = \begin{bmatrix} 0.1987 & 0.2616 & 0.2715 & 0.2682 \end{bmatrix};$$

En el día 28 el escenario pesimista de la acción es el siguiente:

$$\pi_0(28) = \begin{bmatrix} 0.1987 & 0.2616 & 0.2715 & 0.2682 \end{bmatrix};$$

En el día 90 el escenario pesimista de la acción es el siguiente:

$$\pi_0(90) = \begin{bmatrix} 0.1987 & 0.2616 & 0.2715 & 0.2682 \end{bmatrix};$$

En el día 360 el escenario pesimista de la acción es el siguiente:

$$\pi_0(360) = \begin{bmatrix} 0.1987 & 0.2616 & 0.2715 & 0.2682 \end{bmatrix};$$

Iniciando en el estado de NULA Bursatilidad se encontrará que a partir del día 7 la acción tendrá una bursatilidad NULA con una probabilidad de 20 %; una probabilidad de 26 % de mantenerse en bursatilidad BAJA, y una probabilidad equiprobable de 27 % de encontrarse en rentabilidad MEDIA y ALTA. Por lo que será conveniente vender o comprar titulos con tendencia a la alza, en este caso, las acciones de la emisora BIMBO en su serie A.

Así, el inversionista que apueste a que un escenario pesimista cuya utilidad se concreta a partir del día 7, adoptará una posición de mercado a la alza como estrategia pesimista.

Ver gráfica del comportamiento asintótico del vector probabilístico.

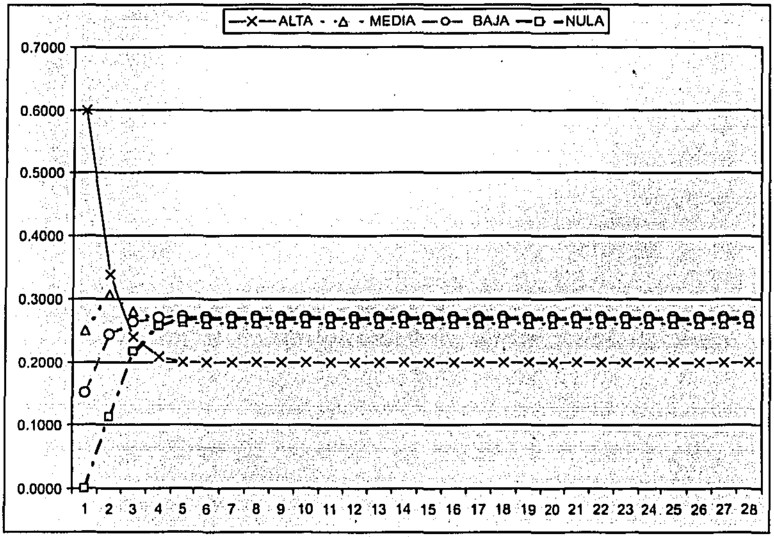

Figura 3.16

A partir del día 7 el vector probabilístico converge a una probabilidad 0.20 para el estado de bursatilidad ALTA y una probabilidad 0.26 de situarse en una bursatilidad MEDIA, se estará en los estados de bursatilidad BAJA y NULA con una probabilidad de 27 %. En el día 7 el inversionista podrá ejercer su opción de compra o venta y obtener una utilidad positiva. El vector inicial $\pi_0(t)$ a partir del día 7 converge y muestra un comportamiento asintótico en el mercado de Opciones durante los siguientes dias.

Estrategia financiera optimista.

El escenario optimista involucra comenzar en el estado 3, con bursatilidad Alta y terminar en ese estado a lo largo del tiempo.

$$\pi_3(t) = P(X_t = 3);$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{array} \\ \pi_3(t) = & \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{array}$$

Para un tiempo $t = 0$ y un estado de bursatilidad $i = 3$, el vector de distribución inicial es:

$$\pi_3(0) = [0, 0, 0, 1]\,;$$

La estrategia financiera pesimista la determina el vector 2.9.

$$\pi_i(t+1) = \pi_i(t)P^t$$

En el primer día el escenario está dado por $\pi_3(1)$.

$$\pi_3(1) = \pi_3(0)P^1.$$

$$\begin{aligned}
\pi_3(0) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.25 & 0.15 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}; \\
\pi_3(1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}; \\
\pi_3(2) &= \begin{bmatrix} .04 & .16 & .26 & .54 \end{bmatrix}; \\
\pi_3(3) &= \begin{bmatrix} .082 & .196 & .276 & .446 \end{bmatrix}; \\
\pi_3(4) &= \begin{bmatrix} .116 & .2183 & .2787 & .387 \end{bmatrix}; \\
\pi_3(5) &= \begin{bmatrix} .14113 & .23259 & .27781 & .34847 \end{bmatrix}; \\
\pi_3(6) &= \begin{bmatrix} .15898 & .24199 & .27629 & .32275 \end{bmatrix}; \\
\pi_3(7) &= \begin{bmatrix} .17142 & .24827 & .27494 & .30538 \end{bmatrix}; \\
\pi_3(8) &= \begin{bmatrix} .18 & .25252 & .27391 & .29358 \end{bmatrix}; \\
&\vdots \\
\pi_3(14) &= \begin{bmatrix} .19677 & .26067 & .27177 & .2708 \end{bmatrix} \\
\pi_3(15) &= \begin{bmatrix} .19737 & .26096 & .27169 & .26998 \end{bmatrix} \\
\pi_3(16) &= \begin{bmatrix} .19778 & .26116 & .27164 & .26942 \end{bmatrix} \\
\pi_3(17) &= \begin{bmatrix} .19806 & .2613 & .2716 & .26904 \end{bmatrix} \\
\pi_3(18) &= \begin{bmatrix} .19826 & .26139 & .27158 & .26878 \end{bmatrix} \\
\pi_3(19) &= \begin{bmatrix} .19839 & .26145 & .27156 & .2686 \end{bmatrix} \\
\pi_3(20) &= \begin{bmatrix} .19854 & .26152 & .27154 & .2684 \end{bmatrix} \\
\pi_3(21) &= \begin{bmatrix} .19858 & .26154 & .27154 & .26834 \end{bmatrix} \\
\pi_3(22) &= \begin{bmatrix} .19861 & .26156 & .27153 & .2683 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
\pi_3(28) &= \begin{bmatrix} .19859 & .26150 & .27149 & .2680 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} .19858 & .26154 & .27154 & .26834 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6 & 0.25 & 0.15 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{bmatrix};$$

En el día 7 el escenario de la acción es el siguiente:

$$\pi_0(7) = \begin{bmatrix} .17142 & .24827 & .27494 & .30538 \end{bmatrix};$$

En el día 10 el escenario de la acción es el siguiente:

$$\pi_3(13) = \begin{bmatrix} .19588 & .26024 & .27189 & .27199 \end{bmatrix};$$

En el día 14 el escenario de la acción es el siguiente:

$$\pi_3(14) = \begin{bmatrix} .19677 & .26067 & .27177 & .2708 \end{bmatrix};$$

En el día 21 el escenario optimista de la acción es el siguiente:

$$\pi_3(21) = \begin{bmatrix} .19858 & .26154 & .27154 & .26834 \end{bmatrix};$$

En el día 28 el escenario optimista de la acción es el siguiente:

$$\pi_3(28) = \begin{bmatrix} 0.1987 & 0.2616 & 0.2715 & 0.2682 \end{bmatrix};$$

En el día 90 el escenario optimista de la acción es el siguiente:

$$\pi_3(90) = \begin{bmatrix} 0.1987 & 0.2616 & 0.2715 & 0.2682 \end{bmatrix};$$

En el día 360 el escenario optimista de la acción es el siguiente:

$$\pi_3(360) = \begin{bmatrix} 0.1987 & 0.2616 & 0.2715 & 0.2682 \end{bmatrix};$$

Iniciando en el estado de Alta Bursatilidad se observará que a partir del día 13 la acción se mantendrá en bursatilidad NULA con probabilidad de 20 %; una probabilidad de 26.16 % de mantenerse en bursatilidad BAJA, una probabilidad de 26.7 % de encontrarse en bursatilidad MEDIA, y una probabilidad de 27.15 % de encontrarse en bursatilidad ALTA.

El inversionista que apueste a que un escenario optimista cuya utilidad se concreta a partir del día 13, adoptará una posición de tendencia a la alza en los títulos de opciones para implementar una estrategia optimista y podrá ejercer su cobertura de compra o venta a partir del día 13.

El vector inicial $\pi_3(t)$ a partir del día 13 converge y muestra un comportamiento asintótico en el mercado de Opciones durante los siguientes dias.

Comportamiento asintótico del vector probabilístico.

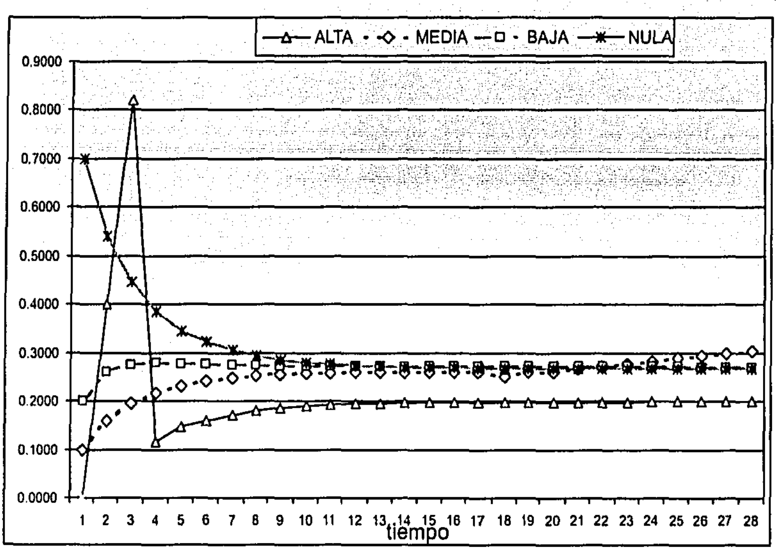

Figura 3.17

3.4. Probabilidades de alcance en m pasos

La probabilidad de salir de un estado i y alcanzar un estado j en m pasos por primera vez está dada por la siguiente ecuación.

$$P_x(T_y = m) = P^n(x,y) \quad - \quad \sum_{m=1}^{n-1} P_x(T_y = m) P^{n-m}(y,y). \tag{3.1}$$

El cómputo se realizó en Matlab 6.0 con un error absoluto = 0.0001. En el programa siguiente M representa la matriz P en el tiempo n.Los parámetros de entrada para la función recursiva *prob*(x, y, n, P) son x, y, n y P que toman valores de estado inicial, estado final, tiempo o día n y la matriz P a evaluar en el día n, respectivamente.

```
function f = prob(x,y,n,P)
M = P^n;
vi = M(x,y);
if n==1
f = vi;
return
end
S = 0;
for m=1:n-1
B = P^(n-m);
S = S + prob(x,y,m,P)*B(y,y);
end
f = vi - S;
```

La probabilidad de salir del estado de bursatilidad nula -0- y alcanzar el estado de bursatilidad alta -3- por primera vez en $7, 14$ y 21 días esta indicado por la siguiente tabla.

$P_x(T_y = m) \leq 1$	%
$P_0(T_3 = 1) = 0.6000$	60
$P_0(T_3 = 2) = 0.0550$	6.5
$P_0(T_3 = 3) = 0.0435$	4.35
$P_0(T_3 = 4) = 0.0766$	7.66
$P_0(T_3 = 5) = 0.0736$	7.36
$P_0(T_3 = 6) = 0.0683$	6.83
$P_0(T_3 = 7) = 0.0625$	6.25
$P_0(T_3 = 14) = 0.0310$	3.10
$P_0(T_3 = 17) = 0.0229$	2.3
$P_0(T_3 = 18) = 0.0207$	2.07
$P_0(T_3 = 19) = 0.0187$	1.87
$P_0(T_3 = 20) = 0.0169$	1.69
$P_0(T_3 = 21) = 0.0152$	1.52

La probabilidad de salir del estado de bursatilidad nula y terminar por primera vez en 7 dias en el estado de bursatilidad alta, es de un 2.5 %; para un tiempo de 14 dias, la probabilidad es de un 3.1 %; mientras que para un plazo de 21 dias, la probabilidad es 1.52 %. Se observa que para un plazo de siete dias la probabilidad de obtener una ganancia es mas factible que para un tiempo mayor.

La probabilidad de salir del estado de bursatilidad alta -3- y alcanzar el estado de bursatilidad nula -0- por primera vez en $7, 14$ y 21 días esta indicado por la siguiente tabla.

$P_x(T_y = m) \leq 1$	%
$P_3(T_0 = 1) = 0.000$	0
$P_3(T_0 = 2) = 0.0400$	4.0
$P_3(T_0 = 3) = 0.0580$	5.80
$P_3(T_0 = 4) = 0.0642$	6,42
$P_3(T_0 = 5) = 0.0645$	6.45
$P_3(T_0 = 6) = 0.0619$	6.83
$P_3(T_0 = 7) = 0.0582$	5.82
$P_3(T_0 = 14) = 0.0324$	3.24
$P_3(T_0 = 17) = 0.0250$	2.5
$P_3(T_0 = 19) = 0.0210$	2.1
$P_3(T_0 = 20) = 0.0192$	1.92
$P_3(T_0 = 21) = 0.0176$	1.76

La probabilidad de salir del estado de bursatilidad alta y terminar por primera vez en 7 dias en el estado de bursatilidad nula, es de un 5.82 %; para un tiempo de 14 dias, la probabilidad es de un 3.24 %; mientras que para un plazo de 21 dias, la probabilidad es 1.76 %.

En el caso de salir de un estado de bursatilidad alta y terminar por primera vez en bursatilidad nula la probabilidad de un 5.82 % para un plazo de 7 dias, y para un plazo de 14 dias la probabilidad se reduce a 3.24 %, puesto que a partir del día 13 se concreta el vector asintítico para la estrategia financiera optimista, para este plazo es factible obtener una ganancia positiva en el mercado de Opciones, para los dias 21 y 28 la probabilidad es mínima.

BIBLIOGRAFíA

[20] Periódico "El Economista", p 25, Jueves 25 de Noviembre del 2001. México.

[21] Portal financiero Patagon. www.patagon.com

[22] Revista Mercados Financieros: Proyecciones-Perspectivas-Estrategias. Grupo Bursamétrica. Año 11, Reporte Semanal del 26 al 30 de Noviembre de 2001.

[23] INEGI, 2001, banco de datos en línea. México.

[24] Periódico "El Financiero", Sección Análisis. México. 2001

[25] Eduardo Villegas, Rosa Ma. Ortega. "Administración de Inversiónes", Ed. Mc Graw Hill, México, 1997. México.

[26] "Matlab Financial Toolbox". Matlab 6.0, 1999.Chapter 2, p 62-66.

4. CONCLUSIONES

- Un inversionista inteligente que requiere de incrementar su capital mediante una inversión financiera al adquirir instrumentos financieros y una empresa que planea su desarrollo a través del financiamiento mediante la colocación de activos financieros, establecerán una estrategia financiera para implementar su inversión. Esta estrategia orienta las acciones y los recursos de manera tal, que involucre técnicas de decisión fundamentadas en herramientas matemáticas que cuantifiquen el riesgo y el comportamiento de su inversión durante el tiempo. La probabilidad y estadística son excelentes métodos de evaluación de riesgos y pronóstico del comportamiento de títulos de opciones en el mercado de derivados. El manejo de la información para establecer e implementar la estrategia está fundamentada en el procesamiento de la información mediante el cómputo de programas matemáticos a partir del manejo de las variables y restricciones que intervienen en el modelo matemático, que representen la inversión y propicien los flujos de información necesaria para su evaluación y la consecuente decisión de la estrategia financiera óptima.

- El comportamiento de la matriz estocástica $P_{i,j}$ de la Cadena de Markov a lo largo del tiempo ofrece al decisor una técnica que le permite cuantificar riesgos y evaluar alternativas, esta alternativa se obtiene del resultado de evaluar la matriz $P_{i,j}$ en el tiempo.

- Un proceso estacionario es ergódico si su vector de probabilidades es finito a través del tiempo.

- El vector probabilístico π_i converge en el tiempo y la cadena de Markov es aperiódica, positiva e irreducible puesto que la matriz de transición P^n tiende a una matriz semidefinida positiva A.

- El vector probabilístico π_i es un proceso estacionario y finito en el tiempo y su convergencia no depende del estado inicial.

- El vector π_i de probabilidades, existe y es finito en el tiempo, e indica que se mantendrá a través del tiempo en un 70 % en cada uno de los estados partiendo de cualquier estado inicial de bursatilidad S_i. Es factible proponer una matriz de transición doblemente estocástica para modelar la rama de Alimentos y Bebidas del sector Manufactura de la Economía de México. Con la variante de que para una matriz doblemente estocástica el vector de estados π_i converge de manera idéntica para cada estado $i \in S$.

- Para modelar cualquier otro sector de la Bolsa mediante cadenas de Markov a través de su grado de bursatilidad, es factible proponer una cadena de Markov fuertemente dirigida, esto es, siempre hay un camino que conecte el estado de bursatilidad NULA con el estado de bursatilidad ALTA en un solo paso y un trayecto que conecte el estado de bursatilidad ALTA con el estado de bursatilidad NULA en un solo paso.

APÉNDICE

14

A. MODELO BLACK SCHOLES

El modelo Black & Scholes es una ecuación diferencial estocástica de primer orden con parámetros $Beta, Delta, Gamma, Vega$ y Rho; e i, S, T, P, R. Es utilizada en el mercado de Derivados para determinar el precio de una opción Europea a través del tiempo, es un modelo que se toma como referencia en los mercados de la Bolsa de Valores. Se aborda porque se analizará su relación con el Modelo de Cadenas de Markov a partir de la obtención de una utilidad.

Este modelo desarrollado or Fischer Black y Myron Scholes busca valorar las opciones (C), en función del periodo de vigencia de la opción (T), la tasa de interés libre de riesgo (i), y el precio de ejercicio de la opción (Pe), el precio del bien subyacente (S) y la tasa de rendimiento instantánea (R):

$$C = S * N(D_1) - Pe * e^{-i*T} * N(d_2) \tag{A.1}$$

donde:

$C =$ valor de la opción

$S =$ Precio del bien subyacente

$N(d_i)$ =Función de distribución de la variable normal aleatoria de desviación estándar unitaria y de media cero, esto es, $N(0, 1)$.

$Pe =$ precio de ejercicio de la opción

$i =$ tasa libre de riesgo a corto plazo

T =periodo de vigencia de la opción

El modelo parte, entre otros, de los siguientes supuestos:

1. El precio del bien subyacente (S) cambia suave y coninuamente teniendo una tasa de rendimiento instantánea (R) en un periodo de tiempo corto (D_t)

. Entonces, el crecimiento del subyacente (Ds) se explicaría con la siguiente fórmula:

$$Ds = S * R * Dt \tag{A.2}$$

Esta ecuación tiene un comportamiento con un grado de certeza, y puesto que en la práctica el comportamiento es aleatorio, habrá que agregar un componente impredecible que depende de la volatilidad del precio del subyacente y de un componente aleatorio distribuido normalmente. Entonces, el cambio aleatorio (Ds_2) está dado por la multiplicación del precio del subyacente (S), por la volatilidad elevada al cuadrado (V^2), y por un número aleatorio normal (Z) con la siguiente fórmula:

$$Ds_2 = S * V^2 * Z \tag{A.3}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene que una acción se comporta en el tiempo de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$Ds_2 = S * V^2 * Z + S * R * Dt \tag{A.4}$$

El precio de la opcion sigue un proceso Ito.

2. La acción subyacente no paga dividendos.

3. La volatilidad es conocida y constante durante la vigencia de la opción.

4. La tasa de interés libre de riesgo (i) se mantiene también constante durante la vigencia de la opción.

5. No hay costos de transacción para las acciones o las opciones.

6. No considera el aspecto impositivo.

7. La opción es estilo europeo, es decir, sólo se puede ejercer a vencimiento.

8. El comercio se encuentra proceso continuo.

La volatilidad implicita de una opcion es la variacion que se produce en el precio de compra de la opción como consecuencia del mercado de precios donde cotiza la emisión. Es un parámetro usado para estimar la volatilidad futura de una accion y provee una volatilidad base o de entrada para cualquier portafolio de inversión. La volatilidad se puede obtener de los indicadores financieros de la

Bolsa Mexicana de Valores. Anteriormente se hizo incapié que la volatilidad en el precio de una acción está regulada por las condiciones del mercado donde cotiza la emisión, la cadena de Markov involucre el manejo de la variable volatilidad para determianr su comportamiento.

Si alguna de estas suposiciones no se cumple, entonces el modelo Black-Scholes no puede implementarse.

Este modelo es usado por analistas técnicos (traders) que conocen el mercado de opciones, no obstante que es un modelo estático, puesto que considera la volatilidad y tasa de interés constantes a través de la vida de la acción. El modelo calcula ciertos indicadores de opciones que pueden resultar muy útiles para calcular modificaciones en el precio de las opciones o warrants. Para entender su utilización conviene considerar un ejemplo.

El warrant IPC702EDC032 con fecha de vencimiento 4 de febrero de 1997, 223 días por vencer, tuvo un precio el 25 de junio de 1996 de $476.00. El bien subyacente alcanzó un nivel de 3177.91 y el precio de ejercicio es de 3400.00. Como dato adicional, la tasa de Cetes se estima en 29%.(Ver cita 25, pag 159-162).

Introduciendo estos datos en el modelo de Black Schoes se obtuvieron los siguientes valores para los indicadores que explico a continuación:

Volatilidad	29.9758 %
Delta	0.72074
Gamma	0.00045
Theta	−2.0036
Vega	8.3786

Volatilidad: Es la dispersión de los precios del bien subyacente, ya que no existen dos casas de bolsa que tengan la misma medida de volatilidad. En realidad debe ser un insumo para el modelo y algunos usuarios la utilizan, bien o mal, como medida para definir si el precio de la opción o warrant es caro o barato, o como indicador de cuándo puede haber un cambio de tendencia. No se ha encontrado ningún fundamento que ampare esta utilización.

En este caso, como es un ejemplo didáctico, se ha calculado la volatilidad a partir de los datos dados, suponiendo que el mercado descontaba dentro del precio del warrant o título opcional la volatilidad, y la cual resultó de 29.9758.

Delta de la opción: Este indicador muestra cuánto variaría el precio de la opción si el precio del bien subyacente aumenta $1.00. Esto quiere decir que de acuerdo con los datos, si el precio del subyacente aumenta a 3178.91, entonces el precio de la opción aumenta a $476.72 (476 del precio original de la opción mas 0.72 del valor delta).

Gama de la opción: Indica en cuánto variará la delta de la opción con una variación de $1.00 en el precio del bien subyacente. En nuestro caso aumentaría 0.00045 y la delta sería de 0.72119 (0.72074 de la delta original mas 0.00045).

Theta de la opción: Este indiador se basa en el tiempo y, conforme avanza éste, se reduce la posibilidad de que el precio se recupere. Normalmente conviene invertir en opcione so títulos opcionales con vencimento largos. El valor de −2.0036 indica que, por cada día que pase, manteniendo todo lo demás constante, el precio del título opcional bajará $2.0036. Si en lugar de hacer el cálculo el 26 de junio de 1996, el precio se reduciría a $473.99 ($476 del precio del original menos 2.0036 del día que pasó).

Vega de la opción: El indicador que nos dice por cada punto porcentual que varíe la volatilidad cuánto variará el precio de la opción. En nuestro caso, si se aumenta la volatilidad de 29.9758 % a 30.9758 %, el precio de la opción debe aumentar en $8.3786 a $484.3785 ($476 del precio original más $8.3786 del valor de vega).

Veamos ahora un ejemplo para el mercado de Divisas o Spot del mercado cambiario

A.0.1. Herramienta financiera del modelo Black Scholes

Veamos ahora como se construye en Matlab el modelo Black-Scholes a partir de las funciones Financial toolbox Black-Scholes model.

La Función "blslambda" devolverá un valor numérico que representa la elasticicad de la opción.

Sintaxis:

[CallEl, PutEl] = blslambda(Price, Strike, Rate, Time, Volatility, DividendRate)

Argumentos

Price: precio actual de la opción

Strike:precio de ejercicio de la opción.

Rate: tasa libre de riesgo

Time: tiempo de vida de la opción en años.

Volatilidad: desviación estandar anualizada de la tasa de interés compuesto de retorno de la acción.

Denominada volatilidad de la acción.

DividendRate: tasa de dividendo, valor por omisión = 0.

Ejemplo

$$\begin{aligned} [CallEl, PutEl] &= blslambda(50, 50, 0.12, 0.25, 0.3) \\ Opci\acute{o}ndecompra &: CallEl = +8.1274 \\ Opci\acute{o}ndeventa &: PutEl = -8.6466 \end{aligned}$$

CallEl es la elasticidad de la opción o factor de apalancamiento y, PutEl es la elasticidad opción de venta elasticity o factor de apalancamiento.

La elasticidad es una medida de cambio de porcentaje en el precio de una opción por cada cambio en una unidad de porcentaje en el precio del bien subyacente de la opción.

La Función "blsprice" devolverá el precio de compra y venta de la opcion usando la formula Black-Scholes.

Sintaxis:

[CallPrice, PutPrice] = blsprice(Price, Strike, Rate, Time, Volatility, DividendRate)

Argumentos

Price: precio actual de la opción

Strike: precio de ejercicio de la opción.

Rate: tasa libre de riesgo

Time: tiempo de vida de la opción en años.

Volatilidad: desviación estandar anualizada de la tasa de interés compuesto de retorno de la acción.

Denominada volatilidad de la acción.

DividendRate: tasa de dividendo, valor por omisión = 0.

Ejemplo

El precio actual del bien subyacente es $100, el precio de ejercicio de la opción es $95, tasa libre de riesgo es 10 %, tiempo de vida de la opción es: 0.25 years, y la desviación estandar de l bien es 50 %.

$$\begin{aligned}
[CallPrice, PutPrice] &= blsprice(100, 95, 0.1, 0.25, 0.5) \\
CallPrice &= 13.70 \\
PutPrice &= 6.35
\end{aligned}$$

Este ejemplo calcula los precios de compra y venta de opciones europeas y sus letras griegas delta, gamma, lambda, y volatilidad implicita. El valor del precio de la opción es $100.00, el precio de ejercicio es $95.00, la tasa de interes de riesgo libre es 10 %, el tiempo duración de la opcion es 0.25 años, la volatilidad es 0.50, y la tasa de dividendo o utilidad es 0. Ejecutando las funciones de Matlab toolbox se tiene:

$$
\begin{aligned}
[optcall, optput] &= blsprice(100, 95, 0.10, 0.25, 0.50, 0);\\
[callval, putval] &= blsdelta(100, 95, 0.10, 0.25, 0.50, 0);\\
gammaval &= blsgamma(100, 95, 0.10, 0.25, 0.50, 0);\\
vegaval &= blsvega(100, 95, 0.10, 0.25, 0.50, 0);\\
[lamcall, lamput] &= blslambda(100, 95, 0.10, 0.25, 0.50, 0);\\
preciodecompradelaopcion &: optcall = \$13.70\\
preciodecierredelaopcion &: optput = \$6.35\\
deltaparacompra &: callval = 0.6665\\
deltaparaventa &: putval = -0.3335\\
valordegamma &: gammaval = 0.0145\\
valordevega &: vegaval = 18.1843\\
valordelambdaparaopciónde compra &: lamcall = 4.8664\\
lambdaparaopcióndeventa &: lamput = 5.2528
\end{aligned}
$$

Ahora el cómputo evalua, y encuentra la volatilidad implicita de la opcion usando la opcion de compra (call) mediante la función de precio Black-Scholes blsprice.

Volatilidad = blsimpv(100, 95, 0.10, 0.25, *optcall*);

La función devuelve la volatilidad implicita cuyo valor es 0.500.

$$Volatilidad = blsimpv(100, 95, 0.10, 0.25, optcall) = 0.5$$

A.0.2. Portafolio de opciones europeas

Veamos ahora como se estructura el Modelo Black Scholes en Matlab 6.0 para una Gama, Delta, ßeta y Theta neutrales.

Las medidas de sensibilidad comunes a la mayoría des los traders son referidas por las letras griegas : delta, gamma, vega, lamda, rho y theta.

La delta es la sensibilidad del precio de una opción con respecto a los cambios en el precio del bien subyacente. Representa una medida de sensibilidad de primer orden, análogo a la duración en mercados de ingreso fijos.

La gamma es la sensibilidad del delta de una opción a los cambios en el precio del bien subyacente o del valor de la opción, y representa una sensibilidad de precio de segundo-orden análogo a la convexidad en mercados del ingreso fijos.

Vega es la sensibilidad del precio de una opción con respecto a los cambios en la volatilidad del recurso subyacente.

Los parámetros de las letras griegas de una opción particular estan en función del modelo de comportamiento de la opción. Sin embargo, un trader o agente puede construir un portafolio con cualquier valor para las letras griegas.. Por ejemplo, para aislar el valor de un portafolio de la opción de los cambios pequeños en el precio del recurso subyacente, un comerciante podría construir una carpeta de la opción cuyo delta es cero.

Para reducir las vulnerabilidad de los cambios del portafolio en el precio de la Delta del bien subyacente, un trader puede diseñar un portafolio cuya Delta es cero. Se dice que el portafolio tiene una Delta neutral. Otro trader podría pensar que la volatilidad de una acción podría incrementarse por encima de las expectativas de mercado, de tal forma que quiera construir un portafolio con una Vega grande y comprar este portafolio.

Este ejemplo genera dos portafolios de opciones iguales, cada uno protegido por riesgo de una o mas paramétros griegos. Esto involucra el hecho de que un particular valor de la letra griega para una opción de portafolio tiene un peso promedio ponderado de el valor de la misma letra griega para cada opción individual, donde los pesos estan dados por las letras griegas del portafolio de opciones. Equlibrando los riesgos mediante estas letras griegas, el resto es resolver un sistema lineal de ecuaciones, la implementación se realiza en Matlab 6.0.[26]

El diseño de un portafolio de opciones con una delta neutral. Cada renglon de la matriz de opciones contiene las entradas estandar de las funciones en "financial Tool Box Black-Scholes Model": precio actual, precio de ejercicio, tasa de interes de riesgo, años de madurez de la opción, volatilidad y tasa de dividendo.

Paso 1

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{Nombre Columna} \\
 & \begin{array}{ccccccc} \text{Price} & \text{Strike Price} & \text{Rate} & \text{Years} & \text{Volume} & \text{Div} & \text{Put/Call} \end{array} \\
\mathsf{DataMatrix}= & \left[\begin{array}{ccccccc}
100.00 & 100.00 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & 1 \\
119.10 & 125.00 & 0.25 & 0.2 & 0.20 & 0.0250 & 0 \\
87.20 & 85.00 & 0.19 & 0.1 & 0.23 & 0 & 1 \\
301.1250 & 315.00 & 0.1 & 0.5 & 0.25 & 0.0333 & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{c} \textit{Put} \\ \textit{Call} \\ \textit{Put} \\ \textit{Call} \end{array}
\end{array}
$$

$$\mathsf{RiskFreeRate} = 0.10;$$

Cada uno de las columnas de la matriz DataMatrix se almacenan en los vectores precio de la acción, precio de ejercicio, tiempo de expiración, volatilidad y tasa de dividendos:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{StockPrice} &= \mathsf{DataMatrix}(:,1); \\
\mathsf{StrikePrice} &= \mathsf{DataMatrix}(:,2); \\
\mathsf{ExpiryTime} &= \mathsf{DataMatrix}(:,3); \\
\mathsf{Volatility} &= \mathsf{DataMatrix}(:,4); \\
\mathsf{DividendRate} &= \mathsf{DataMatrix}(:,5);
\end{aligned}
$$

Paso 2.

El calculo Black-Scholes de los precios de las dos opciones de la matriz DataMatrix, al igual que el calculo de sensivilidad de las letras griegas delta, gamma, y vega para cada una de las cuatro opciones. Se realiza mediante las funciones estandar de MATLAB para obtener el precio de compra (call) en primer lugar y posteriormente el precio de cierre (put) de las opciones.

Las funciones blsprice y blsdelta tienen dos salidas, mientras, blsgamma y blsvega tienen solo una salida. El precio y la delta de la opcion de compra difiere del precio de la opcion de venta, en contraste la gamma y vega son validas para ambos precios: calls y puts.

[CallPrices, PutPrices] = blsprice(StockPrice, StrikePrice,...RiskFreeRate, ExpiryTime, Volatility, DividendRate);

Cálculo de las deltas de ambas opciones usadas para contruir el portafolio de riesgos.

[CallDeltas, PutDeltas] = blsdelta(StockPrice,...StrikePrice, RiskFreeRate, ExpiryTime, Volatility,...DividendRate);

posteriormente se efectua el cálculo del análisis de sensibilidad.

Gammas = blsgamma(StockPrice, StrikePrice, RiskFreeRate,...ExpiryTime, Volatility , DividendRate);

Vegas = blsvega(StockPrice, StrikePrice, RiskFreeRate,...ExpiryTime, Volatility , DividendRate);

Posteriormente se extraen los precios y deltas de interes de conteo para distinguir entre las opciones call y puts.

Prices = [CallPrices(1) PutPrices(2) CallPrices(3)...PutPrices(4)];
Deltas = [CallDeltas(1) PutDeltas(2) CallDeltas(3)...PutDeltas(4)];

Paso 3.

Asumiendo un valor de portafolio arbitrario de $17000.00, el programa configura este precio inicial y resuelve el sistema lineal de ecuaciones de tal forma que la opcion total de portafolio es simultaneamente delta, gamma y vega neutrales. La solución computa el valor de un particular parámetro griego de opciones de portafolio como el peso promedio de las griegas correspondientes para cada opcion individual del portafolio.

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= [\mathsf{Deltas;\ Gammas;\ Vegas;\ Prices}]; \\ \mathsf{b} &= [0;\ 0;\ 0;\ 17000]; \end{aligned}$$

Se determina a continuación la Delta de compra (call) y la Delta de cierre (put) para la opción 2, esto es, resolver el sistema lineal $Ax = b$.

$$\mathsf{OptionQuantities} = \mathsf{A}\backslash\mathsf{b};$$

Paso 4.

Finalmente se computa el valor de mercado de la delta, gamma, y vega del portafolio como peso promedio de los correspondientes parametros que integran las opciones. El peso promedio es computado como el producto interno de dos vectores. Plantear y resolver la matriz de ecuaciones expresa un equilibrio de riesgos a nuestro portafolio.

Calcular los valores de la opción involucra plantear los productos internos de dos vectores que determinan el valor de portalio y sus parametros griegos.

$$\begin{aligned} \mathsf{PortfolioValue} &= \mathsf{Prices} * \mathsf{OptionQuantities} \\ \mathsf{PortfolioDelta} &= \mathsf{Deltas} * \mathsf{OptionQuantities} \\ \mathsf{PortfolioGamma} &= \mathsf{Gammas} * \mathsf{OptionQuantities} \\ \mathsf{PortfolioVega} &= \mathsf{Vegas} * \mathsf{OptionQuantities} \end{aligned}$$

Los resultados del cómputo en Matlab 6.0 son los siguientes:

$$\mathsf{DataMatrix} = \begin{bmatrix} 100.00 & 100.00 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0 & 1 \\ 119.10 & 125.00 & 0.25 & 0.2 & 0.20 & 0.0250 & 0 \\ 87.20 & 85.00 & 0.19 & 0.1 & 0.23 & 0 & 1 \\ 301.1250 & 315.00 & 0.1 & 0.5 & 0.25 & 0.0333 & 0 \end{bmatrix}$$

$$StockPrice = \begin{bmatrix} 100.0000 \\ 119.1000 \\ 87.2000 \\ 301.1250 \end{bmatrix}$$

$$StrikePrice = \begin{bmatrix} 100 \\ 125 \\ 85 \\ 315 \end{bmatrix}$$

$$ExpiryTime = \begin{bmatrix} 0.2000 \\ 0.2000 \\ 0.1000 \\ 0.5000 \end{bmatrix}$$

$$Volatility = \begin{bmatrix} 0.3000 \\ 0.2000 \\ 0.2300 \\ 0.2500 \end{bmatrix}$$

$$DividendRate = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.0250 \\ 0 \\ 0.0333 \end{bmatrix}$$

$$CallDeltas = \begin{bmatrix} 0.5856 \\ 0.3695 \\ 0.7003 \\ 0.5005 \end{bmatrix}$$

$$PutDeltas = \begin{bmatrix} -0.4144 \\ -0.6255 \\ -0.2997 \\ -0.4830 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
Gammas &= \begin{bmatrix} 0.0290 & 0.0353 & 0.0548 & 0.0074 \end{bmatrix} \\
Vegas &= \begin{bmatrix} 17.4293 & 20.0347 & 9.5837 & 83.5225 \end{bmatrix} \\
A &= \begin{bmatrix} 0.5856 & -0.6255 & 0.7003 & -0.4830 \\ 0.0290 & 0.0353 & 0.0548 & 0.0074 \\ 17.4293 & 20.0347 & 9.5837 & 83.5225 \\ 6.3441 & 6.6035 & 4.2993 & 22.7694 \end{bmatrix}; \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 17000 \end{bmatrix} \\
OptionQuantities &= \begin{bmatrix} 1.0e+004 * 2.2333 \\ 0.6864 \\ -1.5655 \\ -0.4511 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PortfolioValue &= 1.7000e+004 = 17000.00 \\
PortfolioDelta &= 1.8190e-012 = 0 \\
PortfolioGamma &= -1.5632e-013 = 0 \\
PortfolioVega &= 0
\end{aligned} \tag{A.5}
$$