

00362
2



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

POSGRADO EN CIENCIAS FISICAS
CENTRO DE INVESTIGACION EN ENERGIA

ESTUDIO TEORICO- EXPERIMENTAL DE LA
DINAMICA DE FLUIDOS VISCOELASTICOS
EN TUBOS

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE:
MAESTRIA EN CIENCIAS (FISICAS)
P R E S E N T A:
FIS. JOSE RAFAEL CASTREJON PITA

DIRECTOR: DR. JESUS ANTONIO DEL RIO PORTILLA

pcf

MEXICO, D. F.

ENERO, 2003

1

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.

**TESIS
CON
FALLA DE
ORIGEN**

ANEXO a la Dirección General de Bibliotecas ...
UNAM a difundir en formato electrónico e impres.
contenido de mi trabajo recepción
NOMBRE: Castrejón Pita
José Rafael
FECHA: 10-01-2003
FIRMA: J. Rafael Castrejón Pita

Estudio Teórico-Experimental de la dinámica de fluidos viscoelásticos en tubos

Tesis

José Rafael Castrejón Pita

Director: Jesús Antonio del Río Portilla

2

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

A mis padres

A mis buenos amigos y profesores:

Dra. Guadalupe Huelsz, Dr. Antonio Sarmiento, Dr. Jaime de Urquijo, Dr. Mariano López de Haro y Dra. Julia Tagüeña.

Al Fís. A. A. Castrejón Pita y la Fís. Linda Uruchurtu.

A mi tutor, el Dr. Antonio del Río.

Al Dr. Rosalío Rodríguez y a la Dra. Catalina Stern.

CONTENIDO

1	INTRODUCCIÓN	2
2	ELEMENTOS BÁSICOS	5
2.1	Permeabilidad de un fluido Newtoniano	9
2.2	Permeabilidad dinámica de fluidos Maxwellianos	12
2.3	Incremento en la permeabilidad dinámica	16
3	DESARROLLO TEÓRICO	23
3.1	Presión de oscilación armónica	23
3.2	Respuesta dinámica puntual <i>rms</i>	25
3.3	Tren de Pulsos	29
4	DESARROLLO EXPERIMENTAL	34
4.1	Dispositivo Experimental	34
4.2	Presión de oscilación armónica	39
5	RESULTADOS	41
5.1	Anemometría láser Doppler	41
5.2	Anemómetro por imágenes de partículas.	45
6	CONCLUSIONES	49

TESIS CON
FALLA DE ORIGEN

1 INTRODUCCIÓN

El estudio teórico y experimental de la dinámica de fluidos viscosos y elásticos (fluidos viscoelásticos) ha sido abordado desde diversos ángulos de la física. Esta tesis busca, mediante modelos y experimentos básicamente sencillos, desarrollar y explicar con claridad la física de estos sistemas complejos. La propiedad principal que se busca estudiar en este trabajo, es la permeabilidad dinámica. Esta se puede entender como la facilidad para permitir el paso de un fluido a través de un sistema (es por ello que también se le llama conductividad hidráulica). Así, la permeabilidad es el término asociado a la conductividad del fluido y nos indica qué tan fácilmente fluye a través de un medio. Se acostumbra utilizar al Darcy como la unidad de medición de la permeabilidad, su equivalencia es de 9.87 cm en el sistema MKS.

El concepto de permeabilidad dinámica fue propuesto hace algunos años [1], [2] y actualmente su uso se ha extendido a problemas prácticos muy diversos. Como ejemplo podemos citar aplicaciones en la extracción petrolera [3], el transporte de agua en medios granulares [4], propagación de ondas acústicas en medios porosos [5] y en espumas [6], y la circulación de fluidos biológicos en seres vivos [7]. Todos los estudios anteriores, al ser tan diversos, han sido aplicados a diferentes sistemas. Por ejemplo, con esta herramienta han sido estudiados fluidos Newtonianos, fluidos viscoelásticos, fluidos compresibles y fluidos incompresibles. Además de todas estas posibles aplicaciones, su estudio presenta interés científico debido a que es una parte fundamental de la mecánica de fluidos que no ha sido del todo entendida. Este trabajo se enfoca al estudio de fluidos Newtonianos y Maxwellianos (estos últimos son un caso específico de los viscoelásticos). Los análisis son ilustrados con medios porosos debido a que en estos medios se encuentra una de las más importantes posibilidades de aplicación [8]. Por otro lado, quizás las aplicaciones más interesantes sean en sistemas biológicos, un ejemplo se encuentra en [9].

Los fluidos más sencillos de describir son los llamados Newtonianos. En éstos, los esfuerzos aplicados producen un cambio en la velocidad de manera

directa y en forma lineal. Los fluidos viscoelásticos son más complicados: la aplicación de un esfuerzo en estos fluidos es retardada por términos elásticos. Por otro lado, los fluidos Maxwellianos son un caso particular de los viscoelásticos, éstos únicamente tienen un término disipativo llamado tiempo de relajación. En otras palabras, un fluido Maxwelliano tiene un tiempo de reacción a las perturbaciones. Recientemente, estos últimos fluidos han tomado interés, debido a que estudios teóricos han predicho un incremento de varios órdenes de magnitud en la permeabilidad dinámica en frecuencias específicas [9], [10], [11], [12]. Este comportamiento se debe a resonancias en las propiedades elásticas del fluido, algo completamente distinto del comportamiento disipativo de los fluidos Newtonianos [2].

Aunque algunos experimentos han demostrado que existe un incremento en el flujo de sistemas viscoelásticos, [13], [14] [15], [16], los fluidos utilizados en estos experimentos tienen la propiedad de cambiar su viscosidad con la frecuencia de excitación, tienen varios tiempos de relajación y a la fecha, no hay modelo alguno que logre reproducir los resultados experimentales. A diferencia de esto, en este trabajo se presenta un modelo dinámico, en el que el fluido Maxwelliano se encuentra excitado armónicamente. Además, se muestran los dispositivos experimentales capaces de reproducir estas condiciones y finalmente se presentan los resultados teóricos y experimentales que demuestran la capacidad del modelo de predecir el incremento mencionado en las referencias, [10], [11], [9], [12] y [17]. Es importante mencionar que antes de este trabajo, el incremento de velocidad o de permeabilidad dinámica en sistemas Maxwellianos no había sido observado experimentalmente.

De esta manera, en este trabajo se comprueba experimentalmente el incremento en la respuesta dinámica de los sistemas Maxwellianos; también se demuestra teórica y experimentalmente, que existe un aumento en la velocidad de estos sistemas cuando son perturbados oscilatoriamente en frecuencias específicas. Aunado a esto, se demuestra experimentalmente que el modelo aplicado al sistema oscilatorio, es capaz de reproducir cualitativamente la tendencia del perfil de velocidades dinámico. Finalmente, se demuestra que el modelo teórico predice un incremento en el gasto neto de sistemas Maxwellianos que son bombeados a frecuencias específicas.

La organización del trabajo es como sigue: en el primer capítulo se da una pequeña introducción a los temas que serán abordados extensamente en el trabajo y se da una pequeña reseña de los investigaciones previas relacionados a esta tesis.

En el segundo capítulo da un resumen de los trabajos previos ([10], [11],

[9] y [12]), que son el sustento teórico de los conceptos que son desarrollados en capítulos posteriores. Para iniciar, se define y calcula la permeabilidad de fluidos Newtonianos. Se presenta la solución del problema para el flujo de Poiseuille usando un manójo de tubos capilares. Posteriormente, se resuelve el mismo problema pero para un fluido de Maxwell en estado dinámico. Con este último modelo se generaliza la definición de permeabilidad al caso dinámico y se muestra que este modelo predice un incremento en la permeabilidad dinámica a frecuencias específicas. Se obtiene, como caso límite, la permeabilidad dinámica del fluido Newtoniano. También se analiza el comportamiento de la permeabilidad dinámica en términos de la frecuencia y se muestra que existe un incremento de varios órdenes de magnitud de esta propiedad dependiendo de la frecuencia de excitación. Finalmente, se presentan aproximaciones que relacionan, el valor máximo de la permeabilidad, con las propiedades físicas del fluido y del sistema que lo contiene.

En el tercer capítulo se presentan las contribuciones teóricas de este trabajo. Se presenta el caso de gradiente de presión armónica oscilatoria, que tiene la particularidad de tener una solución completamente analítica. Se presentan los perfiles de velocidad dinámicos para un fluido Maxwelliano bajo este gradiente de presión y se obtiene una expresión puntual para la permeabilidad dinámica. También se calcula, en el espacio de frecuencias, la respuesta del flujo medio de un fluido Maxwelliano expuesto a un bombeo con pulsos gaussianos. Debido a que el problema no es analítico, se calcula numéricamente el flujo neto y se muestra que existe un incremento en el gasto efectivo para frecuencias específicas de bombeo.

En el cuarto capítulo se presentan las contribuciones experimentales del trabajo. Se explica el dispositivo construido para reproducir el gradiente de presión oscilatoria. También se presenta la instrumentación utilizada para medir la velocidad del fluido en el sistema (anemómetro láser doppler y velocímetro por imágenes de partículas).

En el quinto capítulo se discuten los resultados obtenidos con las técnicas de anemometría; con ellos se calcula y se presenta la respuesta dinámica del sistema, y se muestran los perfiles de velocidad generados de los datos adquiridos. La importancia de este capítulo radica en el hecho de que el desarrollo teórico es confrontado con su contraparte experimental, la pertinencia del modelo teórico es confirmada.

En el capítulo 6 se presentan las conclusiones de este trabajo y sus expectativas.

2 ELEMENTOS BÁSICOS

Las ecuaciones que describen el movimiento de fluidos incompresibles en condiciones isotérmicas, son la ecuación de conservación de masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad (1)$$

y la ecuación de conservación de cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \nabla \cdot \overleftrightarrow{\tau}, \quad (2)$$

donde \mathbf{v} es el campo de velocidades, p la presión, ρ es la densidad del fluido y $\overleftrightarrow{\tau}$ el tensor de esfuerzos viscosos [18]. La ecuación (1) es la llamada ecuación de continuidad que representa la conservación de la masa. Matemáticamente, para que este conjunto de ecuaciones formen un problema bien definido hacen faltan las condiciones iniciales y de frontera. Desde el punto de vista físico, estas ecuaciones requieren información adicional, una ecuación de estado entre la presión y la densidad y otra relación entre el tensor de esfuerzos viscosos y el gradiente de velocidades. Precisamente, las ecuaciones constitutivas y de estado especifican el tipo de fluido que se pretende describir. Estas relaciones hacen la distinción entre un gas, un fluido incompresible y Newtoniano (como el agua) o uno incompresible y viscoelástico (como la saliva o la sangre). Aunque, como se menciona más adelante, los fluidos caracterizados como Maxwellianos son escasos, podemos ejemplificarlos como aquellos fluidos que generan hebras antes de romperse cuando son sometidos a esfuerzos cortantes, como la saliva. La aproximación de fluido incompresible es usual en líquidos, la mayoría de ellos tienen cambios muy pequeños en su densidad bajo condiciones ambientales, de hecho para el agua es del orden de $\frac{\Delta \rho}{\rho} \sim 10^{-5}$, a una atmósfera de presión. La clasificación de fluido Newtoniano tiene que ver con la ecuación constitutiva que relaciona al tensor de esfuerzos con el gradiente de velocidades en una forma lineal. Con esto se puede escribir, para el caso de fluidos Newtonianos

$$\overleftrightarrow{\tau} = -\eta \nabla \mathbf{v}, \quad (3)$$

donde η es la viscosidad dinámica. Esto indica que una variación en los esfuerzos aplicados, implica una variación lineal en el gradiente de velocidad. Al sustituir la ecuación (3) en (2), se tiene en conjunto con (1), dos ecuaciones para dos incógnitas, p y \mathbf{v} que dadas las condiciones iniciales y de

frontera pueden resolverse. Sin embargo, en este trabajo, se intenta ilustrar qué pasa en los fluidos que intervienen en la explotación petrolera, en los reactores químicos y los biofluidos que presentan propiedades que los hacen ser llamados no Newtonianos. La característica fundamental de los fluidos no Newtonianos es que su ecuación constitutiva ya no es simple [19].

Los fluidos no Newtonianos tienen muchas propiedades diferentes a las expuestas anteriormente, por ejemplo, algunos muestran elasticidad. Estos fluidos, llamados viscoelásticos, se caracterizan por presentar comportamiento disipativo como la viscosidad y una propiedad de restitución ante los esfuerzos (la elasticidad antes mencionada). El modelo más simple que describe a los fluidos viscoelásticos es el llamado fluido de Maxwell, que es un modelo lineal. Este fluido [20],[21] tiene la siguiente ecuación constitutiva

$$t_m \frac{\partial^* \overline{\tau}}{\partial t} = -\eta \nabla \mathbf{v} - \overline{\tau}, \quad (4)$$

donde t_m es el tiempo de relajación de Maxwell. Claramente si $t_m \rightarrow 0$ la ecuación constitutiva del fluido Newtoniano se recupera (ecuación (3)), por supuesto, este modelo es completamente lineal. El modelo anterior fue propuesto por Maxwell para introducir la inercia en el sistema y aunque tiene limitaciones como su linealidad, sirve para ilustrar el comportamiento viscoelástico de algunos fluidos no Newtonianos. Existen otros modelos que describen con mayor exactitud a este tipo de fluidos [15], [19], [21]; pero las aproximaciones que se abordan en este trabajo son lineales, por lo que el modelo de Maxwell es suficiente.

Hasta aquí se ha descrito a los fluidos, pero se debe también definir el medio que los contiene o en el que fluyen. Para este fin se utiliza la definición de medio poroso (MP) como un cuerpo sólido con hoyos interconectados (poros). Estos poros pueden ser espacios extremadamente pequeños, intersticios moleculares, y otros muy grandes, cavernas. Con esta definición se abarca desde membranas muy poco permeables hasta la corteza terrestre en escalas muy diferentes. Para este trabajo, la idea de poro se toma como el espacio intermedio entre los dos extremos señalados, de tal forma que los espacios sean grandes desde el punto de vista microscópico, pero pequeños desde el punto de vista macroscópico, ver ejemplo en las figuras 1 y 2. Otra condición para que un medio sea poroso es que los espacios entre los objetos sólidos estén interconectados. Con el fin de simplificar las expresiones, se modelan los sistemas porosos como un conjunto de subsistemas. Prácticamente se requiere encontrar espacios huecos interconectados en los sistemas originales,

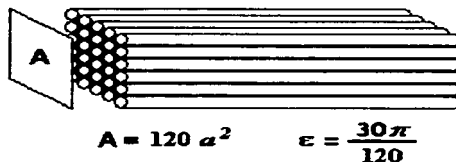


Figura 1. Modelo simple para medio poroso, A representa el área total transversal, a es el diámetro de cada tubo y ϵ es la porosidad.

resolver cada uno por separado y después superponer estas soluciones particulares para obtener la solución general. El medio poroso puede ser caracterizado por varias propiedades geométricas. La porosidad ϵ está definida como la fracción de espacio vacío con respecto al volumen total, en nuestro caso, el espacio interconectado. Es común que en la literatura se use el término de diámetro promedio del poro, pero éste sólo tendría sentido estrictamente si los huecos tuvieran forma cilíndrica o esférica [22]. Sin embargo, el concepto de diámetro promedio será utilizado a lo largo de este trabajo.

Existen muchas formas de modelar un medio poroso, por ejemplo considerérese un sólido al que se le barrena en múltiples lugares conservando los ejes de los barrenos paralelos, esto sería un manojito de tubos, figura 1. Si se supone que se tiene un medio poroso saturado (un medio poroso en donde el espacio vacío está inundado completamente) con un fluido Newtoniano incompresible de viscosidad dinámica η y cuyos poros tienen un radio promedio a . En este trabajo, se modela el medio poroso como un manojito de pequeños tubos capilares construyendo así una red con una porosidad ϵ , ver ejemplo en figura 1. Otra forma de modelar sería considerar un sistema compuesto por un conglomerado de esferas sólidas fijas azarosamente distribuidas. Se ha encontrado que algunos medios porosos muestran características de autosimilaridad [23] y por ello también se han tratado de modelar a los medios porosos como fractales [24], [25], [26]. Como se observa, describir la microestructura de un medio poroso es un tema abierto y lleno de posibilidades. Ahora se puede comprender cómo la descripción del transporte en medios porosos presenta dificultades que radican tanto en la compleja estructura del medio poroso, cómo en las propiedades físicas de los fluidos. Esta complejidad del

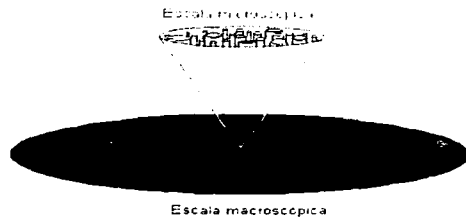


Figura 2. Ejemplificación ilustrativa de las escalas presentes en el medio poroso.

transporte en medios porosos se presenta claramente al describir el conjunto de ecuaciones de balance y ecuaciones constitutivas, consideradas para modelar el flujo en medios porosos. Antes de comenzar y para centrar la atención en la permeabilidad se debe hacer una aproximación y suponer que el transporte de calor en el sistema no es importante.

Entonces, bajo una situación isotérmica e incompresible, para describir el flujo a través de un medio poroso se requiere en principio, resolver el problema dado por las ecuaciones (1) y (2), que deben resolverse bajo condiciones de frontera tan complejas como las ilustradas en la figura 2. La complejidad radica en las condiciones de frontera, generalmente se toman como la condición de no deslizamiento

$$\mathbf{v} = 0 \quad \text{en } S,$$

donde S es la superficie del sólido indicada en la figura 2. Evidentemente el desorden de la superficie introduce una complejidad adicional a la no linealidad de la ecuación (2). Además de la condición de frontera, también se requiere la condición inicial en todo el campo de velocidades para la solución del problema; esto normalmente representa otro reto mayor. Por otro lado, como se aclaró, el sistema de ecuaciones (1) y (2) no es cerrado, es necesario introducir dos ecuaciones más que especifiquen el tipo de fluido de trabajo. La primera es la ecuación de estado entre la presión y la densidad, la segunda se refiere a la ecuación constitutiva para el tensor de esfuerzos viscosos; éstas son escogidas entre las ecuaciones (3) ó (4). Como se mencionó, la selección

de esta última ecuación es donde se centran las diferencias entre los fluidos Newtoniano y Maxwelliano.

Por lo tanto, bajo la hipótesis de incompresibilidad, el sistema de ecuaciones (1) y (2) se transforma en

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (5)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}. \quad (6)$$

Estas son las ecuaciones diferenciales parciales no lineales que se tienen que resolver en la geometría elegida para cada problema. Aquí se aborda, de una forma simple, la descripción del flujo de dos tipos de fluidos, uno Newtoniano y otro Maxwelliano a través de un medio poroso.

2.1 Permeabilidad de un fluido Newtoniano

En esta sección se utiliza el flujo de fluido Newtoniano en un tubo para definir un modelo simple para la permeabilidad. Para ello se utiliza el modelo de medio poroso presentado en la figura 1. Al tener un manajo de tubos, se puede calcular el flujo en uno de ellos y luego multiplicar el resultado por el número de tubos para obtener el flujo total que pasa a través del medio poroso.

Para comenzar se sustituye la ecuación constitutiva del fluido Newtoniano (3), en la ecuación de balance de cantidad de movimiento (6) llegamos a

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (7)$$

que es la llamada ecuación de Navier-Stokes. Aunque el interés de este trabajo es el caso dinámico, para esta sección basta con considerar el problema más simple: se supone un flujo estacionario en un ducto de sección circular constante despreciando los efectos de borde, es decir, los producidos a la entrada y la salida del tubo, ver figura 3. Bajo estas condiciones la velocidad tiene la siguiente forma $\mathbf{v} = (v_x(y, z), 0, 0)$ y la presión solamente depende de la coordenada axial; $p = p(x)$. Al sustituir las formas funcionales de \mathbf{v} y p en la ecuación de Navier-Stokes (7) y expresando el resultado en coordenadas cilíndricas se obtiene

$$\eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_x}{\partial r} \right) = \frac{d}{dx} p, \quad (8)$$

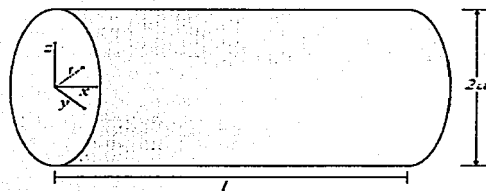


Figura 3. Geometría empleada en esta tesis.

con las condiciones de frontera

$$v_x(0) = \text{finita} \quad (9)$$

y

$$v_x(a) = 0, \quad (10)$$

donde a es el radio del tubo. La ecuación (8) es fácilmente integrable [27] y su resultado es

$$v_x(r) = \frac{1}{\eta} \left(\frac{d}{dx} p \right) \frac{r^2}{4} + A \log r + B, \quad (11)$$

y al imponer las condiciones (9) y (10) se determinan las constantes

$$A = 0, \quad B = -\frac{1}{4\eta} a^2 \frac{d}{dx} p. \quad (12)$$

Por lo tanto, la solución para el perfil de velocidades está dada por

$$v_x(r) = -\frac{1}{4\eta} \left(\frac{d}{dx} p \right) (a^2 - r^2). \quad (13)$$

Esto es un perfil parabólico que depende linealmente del gradiente de presiones. Claramente se ve que la velocidad máxima ocurre para $r = 0$. Este perfil de velocidades aparece en cada uno de los tubos del modelo de medio poroso elegido, figura 1. El flujo volumétrico promedio se obtiene al integrar el perfil de velocidades.

$$q = \int_0^{2\pi} \int_0^a v_x(r) r dr d\theta.$$

Al usar la expresión (13) para el perfil de velocidades e integrar se obtiene

$$q = -\frac{\pi a^4}{8\eta} \left(\frac{d}{dx} p \right).$$

Para obtener la descripción de flujo a través del medio poroso solamente se calcula la sección transversal que es ocupada por los tubos en relación a área total del medio poroso. Dado que el modelo elegido es un manojito de tubos capilares, entonces se tiene que multiplicar el flujo en el tubo por la porosidad ε para obtener el flujo volumétrico que pasa por el medio poroso. Por lo tanto, el flujo de un fluido Newtoniano e incompresible con viscosidad η a través de un medio poroso con porosidad ε y con un radio promedio de poro a está dado por:

$$q^* = q\varepsilon = -\frac{\pi\varepsilon a^4}{8\eta} \left(\frac{d}{dx} p \right).$$

Con este simple modelo se ha encontrado un parámetro que depende únicamente de las propiedades del medio poroso: la porosidad y el valor del radio promedio de poro, este parámetro es la permeabilidad (k) y está dada por

$$k = \frac{\pi\varepsilon a^4}{8}. \quad (14)$$

Este parámetro pretende desacoplar las propiedades del medio poroso y las del fluido, así que se puede escribir $k = -\frac{q}{dp/dx}\eta$, que es la llamada ley de Darcy, muy usada en el transporte de fluidos en medios porosos [22], [28], [29]. Esta ley dice que el flujo promedio en un medio poroso es proporcional al gradiente de presiones y que la constante de proporcionalidad es la permeabilidad dividida por la viscosidad dinámica. Entonces, la permeabilidad da una medida de la facilidad con la que un fluido fluye a través de un medio poroso; por eso también se le ha llamado conductividad hidráulica [4]. Una permeabilidad grande significa que el fluido puede transportarse libremente, una permeabilidad baja significa que se requiere una mayor presión para producir un flujo equivalente.

Debido a que también hay un interés en desarrollar expresiones para la permeabilidad para casos viscoelásticos, en la siguiente sección, partiendo de las expresiones Newtonianas, se aborda este problema.

2.2 Permeabilidad dinámica de fluidos Maxwellianos

En la presente sección, se estudiará la dinámica de los sistemas viscoelásticos utilizando el caso de flujos Maxwellianos dependientes del tiempo. Se continúa con el modelo de tubos capilares infinitos para el medio poroso, las aproximaciones de incompresibilidad y de no deslizamiento en las paredes para el fluido y la geometría de la figura 3 continúan siendo usadas.

Bajo estas condiciones las ecuaciones (5), (6) y (4) son las adecuadas para describir el sistema. Como se tiene la misma geometría que en la sección anterior, se tiene que $\mathbf{v} = (v_x(t, y, z), 0, 0)$ y $p = p(t, x)$. Aunque estas condiciones bastan para anular la parte no lineal de la ecuación de Navier-Stokes, esto no siempre sucede en los sistemas reales dinámicos. Para comprender esto, se adimensionaliza la ecuación (7) y se llega a la conocida ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t} + \text{Re}(\mathbf{v}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{v}^* = -\nabla^* p^* - \nabla^{*2} \mathbf{v}^*, \quad (15)$$

donde los operadores diferenciales (por ejemplo ∇^*) operan sobre x^* . Para esta adimensionalización, $x^* = x/a$, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}/\bar{v}$, $p^* = pa/\rho\nu\eta$ y Re es el número de Reynolds. De esta forma, todas las cantidades de la ecuación (15) son adimensionales e incorporan las propiedades del sistema, del fluido y de su dinámica. Específicamente $\text{Re} = \rho a \bar{v} / \eta$, a es el radio característico del sistema, \bar{v} la velocidad característica del fluido dentro del sistema y η la viscosidad dinámica. Es bien sabido que a números de Reynolds altos se presenta turbulencia incluso en sistemas tan simples como el presentado en la sección anterior, esto se puede consultar en [30]. Para asegurar que la parte no lineal sea pequeña o cero, hay que imponer la restricción

$$\text{Re} \ll 1, \quad (16)$$

o en otras palabras

$$\frac{\rho a \bar{v}}{\eta} \ll 1.$$

A partir de este punto la restricción más fuerte que se impone al modelo, es la de conservar el sistema en las condiciones de la relación (16). Para continuar con la deducción de la permeabilidad dinámica, se debe tomar la derivada temporal de la ecuación (6), por supuesto sin considerar el término no lineal, esto es

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -\frac{\partial \nabla p}{\partial t} - \nabla \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial t}, \quad (17)$$

donde se han intercambiado las derivadas parciales temporales y espaciales ya que son independientes. Se toma la divergencia de la ecuación (4) y se llega a

$$t_m \nabla \cdot \frac{\partial \vec{\tau}}{\partial t} = -\eta \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla \cdot \vec{\tau}. \quad (18)$$

Combinando las ecuaciones (17) y (18)

$$\rho t_m \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = -t_m \frac{\partial \nabla p}{\partial t} + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \nabla \cdot \vec{\tau}, \quad (19)$$

y finalmente, usando la ecuación (6)

$$t_m \rho \left(\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} \right) + \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right) = -t_m \frac{\partial \nabla p}{\partial t} - \nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (20)$$

que es la ecuación diferencial para la velocidad acorde con el modelo Maxwelliano.

A fin de resolver la ecuación (20) se puede utilizar la transformada de Fourier sin perder detalle en la descripción de ningún estado transitorio ya que hay términos de todas las frecuencias; matemáticamente la convergencia es perfecta si el número de frecuencias utilizadas es infinito [31]. El uso adecuado de la transformada de Fourier está garantizado por el hecho de que la ecuación (20) es lineal. La transformada de Fourier de la función $w(\mathbf{r}, t)$ se define como

$$W(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} w(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t} dt, \quad (21)$$

donde ω es la frecuencia y $W(\mathbf{r}, \omega)$ es la amplitud de cada una de las componentes de Fourier para reconstruir $w(\mathbf{r}, t)$. Se usan las mayúsculas para denotar funciones en el dominio de la frecuencia y las minúsculas se han usado en el dominio temporal o de configuración. En el dominio de las frecuencias hay un cambio a un espacio donde se consideran todos los posibles estados transitorios que puede describir la ecuación (20) y por esta razón no son necesarias las condiciones iniciales para transformar el problema.

Usando la definición (21) y transformando la ecuación (20) se tiene

$$-\rho (t_m \omega^2 + i\omega) \mathbf{V} = -(1 - i\omega t_m) \nabla P + \eta \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (22)$$

reescribiendo

$$\rho (t_m \omega^2 + i\omega) \mathbf{V} + \eta \nabla^2 \mathbf{V} = (1 - i\omega t_m) \nabla P. \quad (23)$$

Nótese que la ecuación diferencial es respecto a la variable espacial; pero que respecto a ω es únicamente algebraica. Como en la sección anterior, la descripción en coordenadas cilíndricas es la más adecuada. En este sistema coordenado la ecuación resultante es

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\rho(t_m \omega^2 + i\omega)}{\eta} V = \frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta} \frac{dP}{dx}, \quad (24)$$

que es una ecuación de Bessel de orden cero. La solución general de la parte homogénea de esta ecuación está dada por $V(r) = C J_0(\beta r) + C_1 Y_0(\beta r)$ donde $J_0(x)$ y $Y_0(x)$ son las funciones cilíndricas de Bessel de primera y segunda clase, para ver una solución detallada de este problema se puede consultar [31]. Al igual que en el problema Newtoniano, la velocidad debe ser finita en $r = 0$, por lo tanto, $C_1 = 0$. De esta forma, la solución de la ecuación (24) puede ser escrita como

$$V(r, \omega) = C J_0(\beta r) - \frac{1 - i\omega t_m}{\eta \beta^2} \frac{dP}{dx}, \quad (25)$$

donde C es una constante y el parámetro $\beta(\omega)$ está dado por

$$\beta = \left(\frac{\rho}{\eta t_m} [(t_m \omega)^2 + i\omega t_m] \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para evaluar la constante C se utiliza la condición de no deslizamiento sobre las paredes del cilindro; $V(a, \omega) = 0$, de esta forma

$$C = \frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta \beta^2 J_0(\beta a)} \frac{dP}{dx}$$

y por lo tanto la solución final es

$$V(r, \omega) = \frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta \beta^2 J_0(\beta a)} J_0(\beta r) \frac{dP}{dx} - \frac{1 - i\omega t_m}{\eta \beta^2} \frac{dP}{dx},$$

que puede ser arreglada como

$$V(r, \omega) = -\frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta \beta^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \frac{dP}{dx}. \quad (26)$$

Nótese que la solución sólo está definida en el intervalo $0 < r < a$ y que si no existe gradiente de presiones no existe un perfil de velocidades. La parte

imaginaria de la ecuación (26) está relacionada con la diferencia de fase (θ) entre la presión y la respuesta del sistema, la parte real es la que tiene el significado físico. En principio con este perfil dependiente de la frecuencia, se puede tomar la transformada inversa y describir su evolución en el tiempo, como se presenta más adelante, no cualquier gradiente de presión puede ser invertido al espacio real. Por ahora, en lugar de atacar este problema, se calcula el flujo promedio en un tubo para obtener una respuesta global del sistema. Para obtener la expresión del flujo, se integra la velocidad sobre la sección de área transversal, esto es

$$Q(\omega) = -2\pi \int_0^a \left[-\frac{(1 - i\omega t_m)}{\eta\beta^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \frac{dP}{dx} \right] r dr,$$

que al integrar da como resultado

$$Q(\omega) = \frac{(1 - i\omega t_m) \pi}{\eta\beta^2} \left[a^2 - \frac{2aJ_1(\beta a)}{\beta J_0(\beta a)} \right] \frac{dP}{dx},$$

que reescrito es

$$Q(\omega) = \frac{(1 - i\omega t_m) \pi a^2}{\eta\beta^2} \left[1 - \frac{2J_1(\beta a)}{a\beta J_0(\beta a)} \right] \frac{dP}{dx}. \quad (27)$$

Al multiplicar por la porosidad, análogamente al cálculo de la sección anterior, se llega a una relación para el flujo medio a través del medio poroso, esto es

$$Q^*(\omega) = \frac{\varepsilon\pi a^2 (1 - i\omega t_m)}{\eta\beta^2} \left[1 - \frac{2J_1(\beta a)}{a\beta J_0(\beta a)} \right] \frac{dP}{dx}, \quad (28)$$

donde queda una ecuación generalizada de Darcy

$$Q^*(\omega) = -\frac{K(\beta, \omega)}{\eta} \frac{dP}{dx}, \quad (29)$$

donde la permeabilidad dinámica está dada por

$$K(\beta, \omega) = -\frac{\varepsilon\pi a^2 (1 - i\omega t_m)}{\beta^2} \left[1 - \frac{2J_1(\beta a)}{a\beta J_0(\beta a)} \right]. \quad (30)$$

Para un análisis de este resultado es conveniente definir un número adimensional dado por

$$\alpha = \frac{\rho a^2}{\eta t_m}. \quad (31)$$

Este parámetro indica la importancia relativa de los efectos viscosos y los elásticos del fluido en el problema. Más adelante se deducirá una relación para determinar, mediante el parámetro α , cuando los efectos elásticos son importantes, es decir, cuándo existen resonancias en el flujo a través del medio poroso. En términos del parámetro α , β puede ser expresado como

$$\beta = \sqrt{\frac{\alpha \varpi}{a^2}}, \quad (32)$$

donde se ha definido ϖ como

$$\varpi(\omega) = (\omega^*)^2 + i\omega^*.$$

La frecuencia dimensional es

$$\omega^* = t_m \omega.$$

Claramente el argumento de las funciones Bessel está dado por

$$\beta a = a \sqrt{\frac{\alpha \varpi}{a^2}} = \sqrt{\alpha \varpi}. \quad (33)$$

Con esta notación la permeabilidad se escribe como

$$K(\alpha, \omega) = -\frac{\varepsilon \pi a^4 (1 - i\omega^*)}{\alpha \varpi} \left[1 - \frac{2J_1(\sqrt{\alpha \varpi})}{\sqrt{\alpha \varpi} J_0(\sqrt{\alpha \varpi})} \right]. \quad (34)$$

Este resultado para la permeabilidad dinámica también puede ser obtenido usando una metodología de medio efectivo [11], o para el mismo problema [9] y para tubos concéntricos bajo campos magnéticos [32]; sin embargo el desarrollo aquí presentado es más explícito y sencillo.

Como se mencionó, uno de los temas principales de esta tesis es el estudio de la permeabilidad dinámica, en la siguiente sección, partiendo de las bases asentadas, se describen algunas de sus propiedades.

2.3 Incremento en la permeabilidad dinámica

Para analizar el comportamiento de la permeabilidad dinámica, ecuación (34), es útil comparar su magnitud con respecto a la permeabilidad estática,

ecuación (14). Por lo tanto, se define la forma adimensional de la permeabilidad dinámica con respecto a la permeabilidad estática como

$$K^*(\omega) = \frac{K(\omega)}{K(0)},$$

donde $K(0)$ fue definida en (14). La permeabilidad adimensional indica cuántas veces es mayor la permeabilidad dinámica con respecto a la estática. Explícitamente la forma adimensional para la permeabilidad dinámica está dada por

$$K^*(\omega) = -\frac{8(1-i\omega^*)}{\alpha\omega} \left[1 - \frac{2J_1(\sqrt{\alpha\omega})}{\sqrt{\alpha\omega}J_0(\sqrt{\alpha\omega})} \right]. \quad (35)$$

Un punto importante aquí es el límite $t_m \rightarrow 0$, donde como cabe esperar, se recupera el comportamiento Newtoniano. Para clarificar este punto, se toma el valor $\alpha\omega$ cuando $t_m \rightarrow 0$, esto es

$$\begin{aligned} \lim_{t_m \rightarrow 0} \alpha\omega &= \lim_{t_m \rightarrow 0} \frac{\rho a^2}{\eta t_m} ((\omega^*)^2 + i\omega^*) \\ &= \lim_{t_m \rightarrow 0} \frac{\rho a^2}{\eta} (t_m \omega^2 + i\omega) \\ &= i \frac{\rho a^2}{\eta} \omega. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para el caso Newtoniano la permeabilidad dinámica está dada por

$$\lim_{t_m \rightarrow 0} K^*(\omega) = i \frac{8}{\lambda\omega} \left[1 - \frac{2J_1(\sqrt{i\lambda\omega})}{\sqrt{i\lambda\omega}J_0(\sqrt{i\lambda\omega})} \right], \quad (36)$$

donde $\lambda = \frac{\rho a^2}{\eta}$. Este resultado fue obtenido hace algunos años [2] y ha sido verificado experimentalmente para el transporte de ondas acústicas [5], en el presente trabajo se demostrará experimentalmente esta relación para un fluido incompresible (glicerol). En la figura 4 se ilustra el comportamiento de la ecuación (36), se observa el carácter disipativo del fluido Newtoniano. Es decir, la respuesta a oscilaciones de presión con frecuencias altas es menor en comparación con la respuesta a frecuencias bajas. La magnitud de la permeabilidad se obtiene de la expresión $\sqrt{(\text{Re})^2 + (\text{Im})^2}$ y la relación $\theta = \text{arctg}(\text{Im}/\text{Re})$ indica la fase relativa entre el gradiente de presión y la respuesta del gasto instantáneo. En este caso la magnitud es decreciente

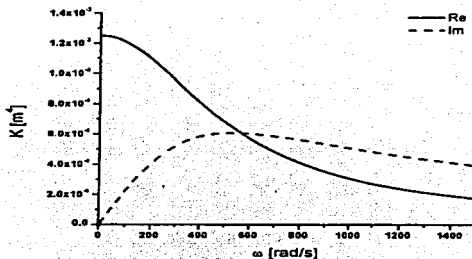


Figura 4. Respuesta en frecuencias de un fluido Newtoniano, fluido con $t_m = 0$, parte real e imaginaria.

con la frecuencia, la fase vale cero sólo en $\omega = 0$ (es decir, cuando la fase no tiene sentido) y es monótona creciente tendiendo a $\pi/2$ para frecuencias altas. Esto es, la respuesta del gasto instantáneo siempre está en la dirección del gradiente de presión.

De hecho, cualquier perturbación es atenuada con respecto al estado estacionario, $\omega = 0$. Este comportamiento disipativo también se puede apreciar en la figura 5, donde se presenta el resultado para la permeabilidad dinámica con $t_m \neq 0$ y $\alpha = 11$. Sin embargo, en el caso $\alpha = 0.0021$, la situación es dramáticamente diferente, aquí se aprecia un incremento en la permeabilidad dinámica de varios órdenes de magnitud, figura 6. Esto indica que el comportamiento elástico del fluido se manifiesta para frecuencias específicas y las perturbaciones con dicha frecuencia se transmiten eficientemente a lo largo del medio poroso. Es claro observar, que en los puntos en que la parte imaginaria es cero (en este punto la presión está en fase con el gasto) la parte real presenta un máximo.

Hasta ahora se ha identificado un cambio dramático en la respuesta del sistema, se han desarrollado y explicado los límites de validez del modelo; pero aún falta discutir esto en las posibles situaciones experimentales. Además de las limitaciones del modelo, para la planeación y desarrollo de los dispositivos experimentales, se necesita poder estimar la respuesta de los sistema

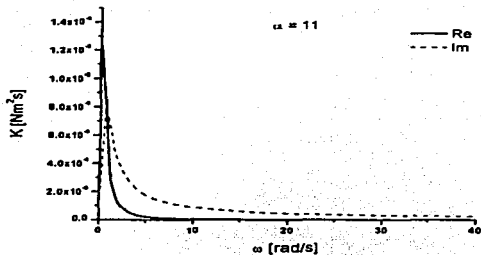


Figura 5. Respuesta en frecuencias de un fluido ligeramente Maxwelliano, parte real e imaginaria.

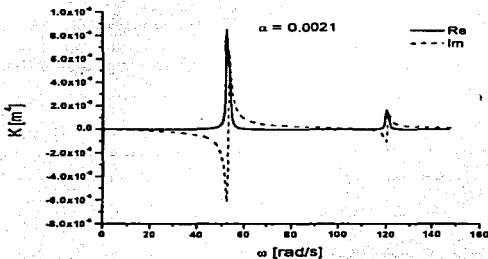


Figura 6. Respuesta en frecuencias, fluido Maxwelliano, parte real e imaginaria.

para saber si son experimentalmente viables. Por ejemplo, una vez que se han elegido los fluidos de trabajo y la geometría del sistema, la variable α

queda determinada pero aún no se conoce el valor máximo de la permeabilidad dinámica para dicho valor dado. Tampoco se sabe, dado este α , a qué frecuencia ocurre el máximo. Para responder a las primeras dos preguntas se procede a calcular el máximo de la permeabilidad dinámica en términos del parámetro α . Aunque es posible realizar el cálculo analítico, mediante la búsqueda de máximos a través de los puntos críticos de la función, la complejidad del resultado no permite vislumbrar el comportamiento global de forma sencilla. Por ello, en la figura 7 se presenta este resultado en una forma esquemática.

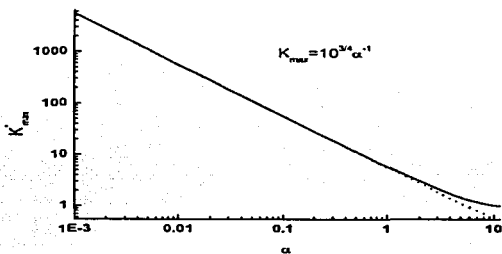


Figura 7. Ajuste exponencial de K en función de α . La línea sólida es el resultado exacto proveniente de la búsqueda diferencial de puntos críticos, la línea punteada es el ajuste, [9], [17].

A la vista de estos resultados surge la inquietud de generar un ajuste lineal sobre el intervalo correspondiente que reproduzca la compleja relación entre la permeabilidad máxima y el parámetro α , figura 7. La correlación

$$K_{\max}^* \approx 10^3 \alpha^{-1}, \quad (37)$$

es la relación que ajusta mejor y puede ser considerada una buena fórmula para el diseño de experimentos, [9], [17]. Una situación semejante ocurre en la relación entre la frecuencia a la que ocurre el máximo y el valor de α . En

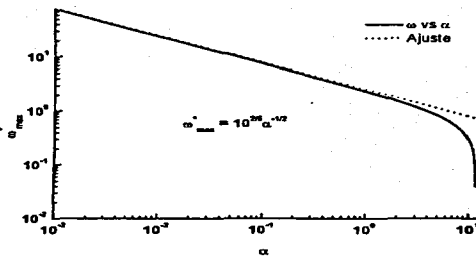


Figura 8. Ajuste exponencial de α en función de la frecuencia. La línea sólida es el resultado exacto proveniente de la búsqueda diferencial de puntos críticos, la línea punteada es el ajuste, [9], [17].

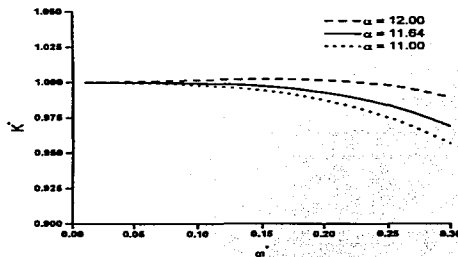


Figura 9. Comportamiento de la permeabilidad dinámica en función de α , [9], [17].

la figura 8 se presentan los valores reales de esta relación y su ajuste que da como resultado

$$\omega_{\max}^* \simeq 10^{\frac{3}{2}} \alpha^{-1/2}, \quad (38)$$

mostrando también que esta última es una buena aproximación, [9], [17].

Finalmente, al analizar detalladamente la transición entre la respuesta viscosa y la respuesta elástica (ver figura 9) se obtiene el valor crítico α_c donde el comportamiento cambia de ser disipativo a elástico [11], es decir,

$$\alpha_c \simeq 11.64.$$

Estos resultados facilitan la elección del fluido de trabajo y son de gran utilidad para el desarrollo del dispositivo experimental. De este modo, las últimas preguntas a resolver, son las relativas a la existencia de algún tipo de gradiente de presión que pueda ser reproducido experimentalmente y que tenga solución analítica en el espacio temporal. En el siguiente capítulo se muestra un caso sencillo que es completamente analítico y que sirvió para diseñar el dispositivo experimental.

3 DESARROLLO TEÓRICO

Ahora que se está familiarizado con las ideas fundamentales de las propiedades de fluidos y sistemas viscoelásticos, se está en la capacidad de centrar la atención en la deducción de expresiones de utilidad práctica. Las ecuaciones desarrolladas con anterioridad son, en cierto modo, generales ya que consideran una presión arbitraria. En este capítulo, se deducen expresiones particulares para sistemas sencillos, que además dan pauta para plantear experimentos específicos para su comprobación. En la siguiente sección, se aborda un caso completamente analítico cuyas condiciones son reproducidas experimentalmente.

3.1 Presión de oscilación armónica

Hasta ahora, los desarrollos teóricos han analizado la respuesta en frecuencias y el problema no ha sido transformado al espacio temporal. La transformación al espacio de configuración de la ecuación (26) resulta ser analítica sólo en un reducido número de casos. Esto se debe principalmente a que la antitransformada de Fourier no es analítica para cualquier gradiente de presiones [17]. En esta sección, se estudia el caso de presión oscilatoria armónica, presión que tiene muchas ventajas, tanto teóricas como experimentales. Lo último se debe a que su expresión en el espacio de Fourier es analítica y que además su expresión para la velocidad, ecuación (26), puede ser antitransformada al espacio temporal también analíticamente. Sumado a esto, experimentalmente es posible reproducir este tipo de presiones con sistemas simples.

Dicho lo anterior, en el espacio temporal, la presión oscilatoria armónica a lo largo de un tubo se puede escribir como

$$P(x, t) = \frac{P_0}{l} x e^{i\omega_0 t}. \quad (39)$$

donde P_0 es la amplitud de la oscilación, ω_0 la frecuencia, x es la posición en la dirección del movimiento en el marco de referencia que se ha venido utilizando, figura 3, y l es el largo de la columna de fluido. De esta forma, el gradiente queda definido como

$$\frac{dP(t)}{dx} = \frac{P_0}{l} e^{i\omega_0 t}. \quad (40)$$

Como ya se mencionó, esta ecuación es fácilmente transformada al espacio de frecuencias mediante la transformada de Fourier [31]. Esto es

$$\frac{dP(\omega)}{dx} = \sqrt{2\pi} \frac{P_0}{l} \delta(\omega - \omega_0). \quad (41)$$

Esta expresión puede sustituirse en la ecuación (26) y obtener la velocidad definida en el espacio de frecuencias

$$V(r, \omega) = -\frac{\sqrt{2\pi} (1 - i\omega^*) P_0}{\eta l \beta^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right) \delta(\omega - \omega_0). \quad (42)$$

Para obtener el perfil de velocidades en el espacio temporal, se antitransforma la expresión anterior, es decir, con la integral

$$v(r, t) = \int_0^{\infty} \frac{(1 - i\omega^*) P_0}{\eta l \beta^2} \left[1 - \frac{J_0(\beta r)}{J_0(\beta a)} \right] \delta(\omega - \omega_0) e^{i\omega t} d\omega, \quad (43)$$

que tiene la ventaja de ser completamente analítica. Con las propiedades de la delta de Dirac [31], se obtiene

$$v(r, t) = \frac{(1 - i\omega_0^*) P_0}{\eta l \beta_0^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta_0 r)}{J_0(\beta_0 a)} \right) e^{i\omega_0 t}. \quad (44)$$

donde $\beta_0 = \left(\frac{\rho}{\eta t_m} [(t_m \omega_0)^2 + i\omega_0 t_m] \right)^{\frac{1}{2}}$ y $\omega_0^* = t_m \omega_0$. Esta última expresión es de mucha utilidad para la comparación de los perfiles de velocidad obtenidos mediante la velocimetría por imágenes de partículas. Sin embargo, para propósitos de demostrar el aumento de flujo en sistemas viscoelásticos, esta expresión no es útil ya que el flujo promedio, para un ciclo completo o un periodo (T), es nulo.

$$q = \int_0^{T=2\pi/\omega_0} \frac{(1 - i\omega_0^*) \pi a^2 P_0}{\eta \beta_0^2} \left(1 - \frac{2J_1(\beta_0 a)}{a J_0(\beta_0 a)} \right) e^{i\omega_0 t} dt = 0, \quad (45)$$

como debe de esperarse en un sistema armónico, no hay flujo másico neto.

Aunque este sencillo sistema no es apto para la demostración del aumento de gasto, es de mucha utilidad más adelante para el desarrollo del dispositivo experimental que demuestra el aumento de la permeabilidad dinámica y la capacidad del modelo de reproducir el perfil de velocidades.

Con el afán de ilustrar el comportamiento teórico de la dinámica de fluidos Maxwellianos, en la figura 10 se presenta el perfil de velocidades para un fluido con $t_m = 2$ s, $\eta = 60$ Pa.s y $\rho = 1.05 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, en un sistema con $a = 2.5$ cm, $\omega = 9.4$ rad/seg ó 1.5 Hz y $l = 1$ m (estas propiedades son las del fluido Maxwelliano CPyCl/NaSal, [33] y [34]). Estos análisis, son los primeros en su tipo en el espacio de configuración [17] y como se explica en el capítulo siguiente, resultaron determinantes en la construcción del dispositivo experimental.

Aunque las últimas expresiones contienen elementos que pueden ser recreados experimentalmente, no todas dependen aún de cantidades que puedan ser directamente medidas con los instrumentos utilizados en esta tesis. En la siguiente sección, se deducen ecuaciones que tienen características que hacen que la confrontación experimental sea aún más directa.

3.2 Respuesta dinámica puntual *rms*.

Las expresiones, hasta ahora modeladas, representan cantidades sobre toda la región espacial y temporal en la que está definido el problema. Estos tipos de expresiones pocas veces pueden ser confrontadas experimentalmente, esto se debe a que la mayoría de los sensores son intrínsecamente puntuales (como el LDA, el pitot, el termopar, etc.). Debido a que el anemómetro láser Doppler es un sensor cuasi-puntual (el volumen de medición es sumamente pequeño), se deben obtener expresiones puntuales para la velocidad y para la permeabilidad. Además de esto, se buscan expresiones que no tengan dependencia temporal, así se tendrían ecuaciones que representan globalmente al fenómeno. Esta sección se dedica a obtener las expresiones teóricas específicas que son después confrontadas experimentalmente. Cabe resaltar, que en el caso de PIV, es posible comparar la expresión obtenida en la ecuación (44) con su contraparte experimental. Lo último se debe a que el PIV es un instrumento capaz de medir simultáneamente sobre todo el campo espacial, además de que tiene una buena resolución temporal.

Cuando los sistemas son del tipo oscilatorio y los instrumentos de son de medición puntual, se puede optar por medir la amplitud o la magnitud *rms*. Para este trabajo, se han elegido propiedades *rms* cuando se tratan las expresiones teóricas que después serán confrontadas con los experimentos de LDA. La raíz cuadrática media de la velocidad (*rms*) está definida como

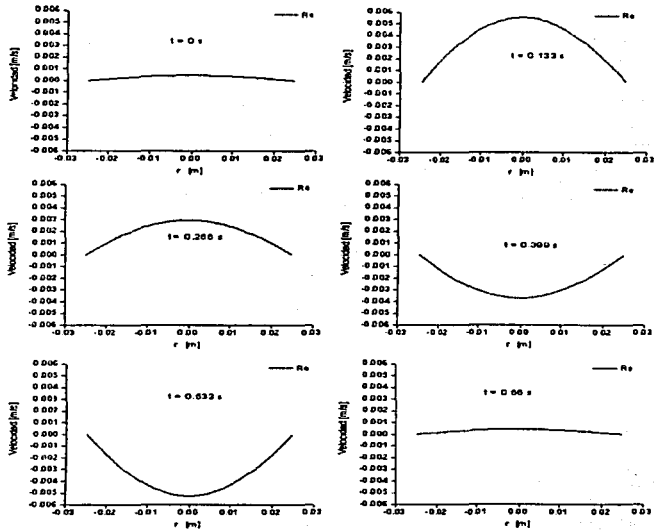


Figura 10. Perfil de velocidades dinámico, fluido Maxwelliano sometido a gradiente de presión oscilatorio de 1.5 Hz.

$$v_{rms}(r) = \frac{1}{2} \sqrt{\int_0^{T=2\pi/\omega_0} v^2(r, t) dt.} \quad (46)$$

Que aplicada al caso de presión oscilatoria ecuación (44) da

$$v_{rms}(r) = \frac{-(1 - i\omega_0^2) P_0}{\sqrt{2}\eta l \beta_0^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta_0 r)}{J_0(\beta_0 a)} \right). \quad (47)$$

Para ejemplificar el comportamiento de esta expresión, los perfiles de ve-

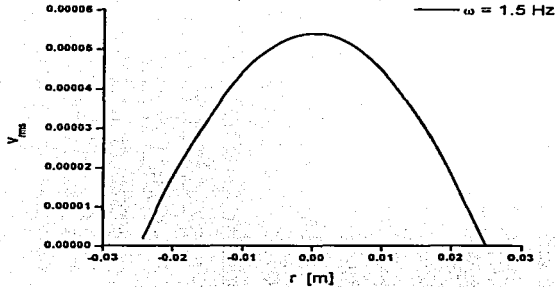


Figura 11. Perfil de velocidades rms para gradiente oscilatorio, frecuencia de 1.5 Hz.

locidades para la solución CPyCl/NaSal se presentan en la figura 11 y 12.

Con esto se ha resuelto el problema de la dependencia temporal, para obtener la expresión puntual, se puede evaluar la velocidad en el centro del cilindro ($r = 0$). Esto es

$$v_{rms}(r = 0) = \frac{-(1 - i\omega_0^2)P_0}{\sqrt{2}\eta l \beta_0^2} \left(1 - \frac{1}{J_0(\beta_0 a)}\right). \quad (48)$$

Se ha elegido el centro del cilindro ya que experimentalmente es un punto que se puede detectar con mucha precisión. Como se puede observar en las figuras 11 y 12, el máximo de velocidad ocurre en ese punto, así, experimentalmente únicamente se debe buscar el lugar en el que la velocidad es máxima. Con la ecuación (48), se define la respuesta local rms , basada en la ecuación (29)

$$\xi_{rms} = -\frac{v_{rms}}{\frac{dv_{rms}}{dx}} \eta, \quad (49)$$

que para el caso aquí estudiado es

$$\xi_{rms}(r = 0) = \frac{(1 - i\omega_0^2)}{\beta_0^2} \left(1 - \frac{1}{J_0(\beta_0 a)}\right), \quad (50)$$

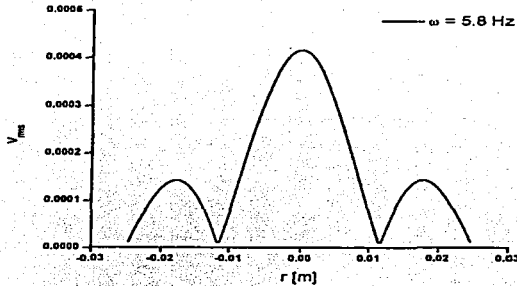


Figura 12. Perfil de velocidades *rms* para gradiente oscilatorio, frecuencia de máxima amplitud de oscilación.

o para un fluido Newtoniano

$$\lim_{t_m \rightarrow 0} \xi_{rms}^{Newton}(r=0) = i \frac{1}{\lambda \omega} \left[1 - \frac{1}{J_0(\sqrt{i \lambda \omega})} \right] \quad (51)$$

Cabe señalar, que la respuesta del sistema (ξ), es únicamente una forma de representar la dinámica del sistema. Una expresión similar pueden ser obtenida con la amplitud de la velocidad sin perder la representación del problema. Esto aclara el hecho de que, en este trabajo, no se ha utilizado el término "respuesta" bajo el criterio de Kubo [35], ya que la ecuaciones (50) y (51) no son las únicas al representar la física del problema.

Estas expresiones son de mucha ayuda ya que el sistemas de anemometría láser Doppler (LDA), puede medir con gran resolución la velocidad puntual *rms*. Recapitulando, se ha desarrollando una expresión puntual *rms* para el centro del cilindro basada en la permeabilidad dinámica. Por motivos experimentales, esta expresión se ha evaluado en el centro del sistema debido a que puede ser un criterio de localización, ya que el máximo de velocidad se encuentra en ese punto, además de esto el LDA es más sensible a detectar partículas lejos de las paredes.

Además del problema de oscilación armónica, el modelo teórico es aplicable a cualquier otro gradiente de presión. A continuación se presenta otro caso con implicaciones notables.

3.3 Tren de Pulsos

En esta sección se muestra cuantitativamente el aumento del flujo medio en bombeo viscoelástico. Para ello se analiza un fluido Maxwelliano contenido en un tubo saturado y que es sometido a una presión de bombeo pulsante. Se busca ilustrar un problema en el que se pueda acoplar la respuesta de la presión y la respuesta del sistema con el fluido. La importancia de esta sección radica en el hecho de que el problema que se presenta a continuación, es un problema con gasto efectivo. Una resonancia en este sistema implicará un aumento del gasto en flujos Maxwellianos que son sometidos a pulsaciones con cierta periodicidad, las aplicaciones de esto son innumerables y se discuten al final del trabajo.

Para iniciar, se define el tren de pulsos gaussianos como:

$$p(x, t) = p_0 \frac{x}{l} \sum_{j=0}^6 e^{-(t-jT\pi)^2}, \quad (52)$$

donde p_0 es la amplitud y T controla el periodo de tiempo entre dos pulsos, en la figura 13 se encuentra representado el gradiente de esta expresión.

Para utilizar las expresiones desarrolladas con anterioridad, se debe transformar esta expresión al espacio de frecuencias. Al igual que la presión oscilatoria armónica, esta expresión tiene una transformada de Fourier analítica, esto es, en el espacio de frecuencias

$$\frac{dP(\omega)}{dx} = \frac{p_0}{\sqrt{2\pi}l} e^{-\omega^2/4} \left[1 + \sum_{j=0}^6 e^{iT\pi j\omega} \right], \quad (53)$$

En la figura 14 se puede apreciar el comportamiento de esta expresión para una presión normalizada y $T = 2$ s, se nota claramente que la presión tiene una frecuencia característica en $\omega = 1$ rad/s. Como se busca acoplar esta frecuencia característica, con la frecuencia de resonancia de la permeabilidad, se debe elegir un fluido y un sistema que cumplan con esta condición. Utilizando la ecuación (38), se deduce que un fluido y un sistema con $\alpha = 0.39$, también generan una resonancia en la permeabilidad en $\omega = 1$ rad/s. La

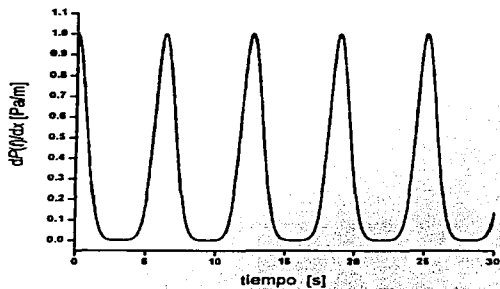


Figura 13. Gradiente de presión para un tren de pulsos gaussianos, $T = 2$ s, $p_0 = 1$ Pa y $l = 1$ m.

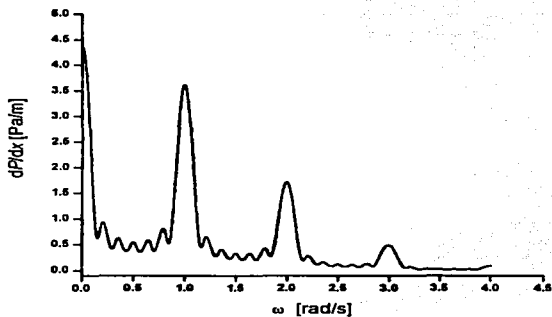


Figura 14. Transformada al espacio de frecuencias del tren de pulsos gaussianos, $T = 2$ s, $p_0 = 1$ Pa y $l = 1$ m.

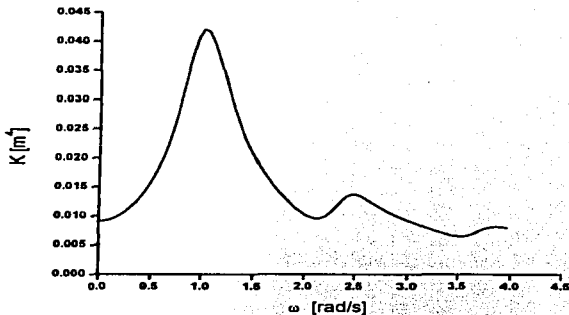


Figura 15. Permeabilidad dinámica para un sistema con $\alpha = 0.39$.

expresión analítica de la permeabilidad dinámica de este sistema se presenta en la figura 15.

Para analizar el comportamiento del flujo medio con este tipo de pulsaciones, se debe sustituir la ecuación (53) en la ecuación (27). De esta forma, se obtiene el flujo en el dominio de las frecuencias

$$Q(\omega) = \frac{p_0 K(\omega)}{\sqrt{2\pi l \eta}} e^{-\omega^2/4} \left[1 + \sum_{j=0}^5 e^{iT\pi j \omega} \right]. \quad (54)$$

La última relación proviene de la ecuación generalizada de Darcy, en donde el gasto medio depende de la permeabilidad dinámica. Para saber si ambos sistemas se han acoplado y con ello generado una respuesta resonante en el flujo medio, el comportamiento de la ecuación (54) se encuentra en la figura 16.

Con el fin de comparar diferentes flujos con pulsaciones de diferente frecuencia, se ha graficado el flujo instantáneo con $T = 3$ s (con este periodo se generan pulsos con $\omega = 0.53$ rad/seg), ver figura 16. Los resultados son concluyentes, en el caso resonante existe una sola frecuencia de gran magnitud. En el caso no resonante, se aprecia que hay dos frecuencias características de amplitud parecida. El último paso restante es calcular el gasto neto de estos

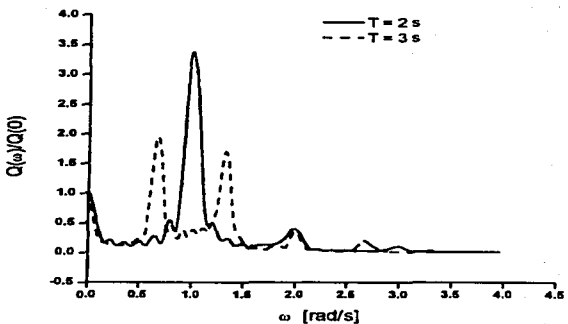


Figura 16. Flujo instantáneo en el espacio de frecuencias, para dos frecuencias de bombeo gaussiano.

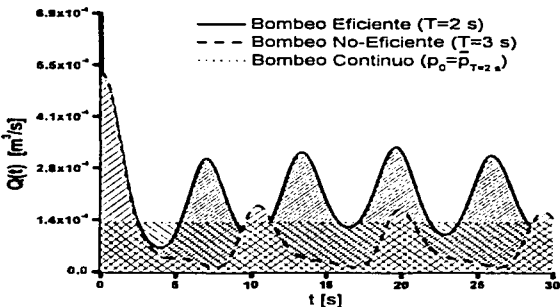


Figura 17. Flujo instantáneo en el espacio temporal, el área sombreada debajo de la curva representa el gasto neto. Claramente, el área debajo de la curva del caso resonante ($T=2$ s) es mucho mayor.

sistemas. Aunque la ecuación (54) no puede ser transformada al espacio temporal analíticamente, sí puede ser calculada numéricamente. Así, tomando la transformada inversa de Fourier numérica, se obtiene el gasto instantáneo en la figura 17, el sombreado representa el gasto neto durante el periodo total. También numéricamente, se obtiene el gasto neto integrando sobre el periodo de tiempo presentado en la figura 17 (se ha representado esta integral como el área debajo de la curva). Además de pulsaciones gaussianas, en la figura 17 se ha incluido el flujo con un gradiente de presión constante (con una amplitud igual a la amplitud media del gradiente oscilatorio con $T = 2$ s). Para el gasto eficiente $Q_{T=2\text{ s}} = 8 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, para el gasto no eficiente $Q_{T=3\text{ s}} = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ y para el gasto constante $Q_{cte} = 4.2 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. El bombeo pulsado eficiente presenta un aumento efectivo de cuatro veces el gasto con respecto al pulsado no eficiente y hay un aumento de casi el doble respecto al bombeo constante.

Hasta el momento se han desarrollado expresiones que pueden ser reproducibles experimentalmente. En el siguiente capítulo, partiendo del modelado teórico del gradiente de presión oscilatorio, se detalla, el diseño, la construcción y el funcionamiento, del dispositivo experimental que es capaz de reproducir las condiciones teóricas en las que este modelo es pertinente.

4 DESARROLLO EXPERIMENTAL

Ahora que se está relacionado con los problemas dinámicos de flujos y sistemas Maxwellianos, se está listo para la hacer la comparación experimental. Para esto, las expresiones matemáticas, deducidas con anterioridad, deben ser manipuladas para que contengan variables que puedan ser medidas directa o indirectamente. En este trabajo, se desarrolla, se explica y se utiliza un dispositivo experimental que es capaz de reproducir las condiciones del gradiente oscilatorio de presión.

4.1 Dispositivo Experimental

El sistema se diseñó tratando de reproducir las condiciones impuestas en el problema de la presión de oscilación armónica, resuelto en el capítulo anterior. El dispositivo además debía tener las características ópticas para que se obtuviera una buena señal en los anemómetros y finalmente debía funcionar en el intervalo adecuado al modelo. Esencialmente, este dispositivo se basa en el movimiento oscilatorio de una columna cilíndrica de fluido. El movimiento se genera a través de un pistón acoplado a un motor de frecuencia regulable. Un esquema del dispositivo se muestra en la figura 18.

El cilindro utilizado es de acrílico transparente, de diámetro interior de 5 cm y 50 cm de largo. Este tubo está unido por una brida en su parte inferior, a una camisa de acero inoxidable del mismo diámetro interior. Dentro de la camisa de acero inoxidable se encuentra un pistón de teflón que oscila verticalmente mediante una vuela movida por un motor industrial marca Siemens de 1 Hp. La amplitud máxima de desplazamiento del pistón es de 0.0008 m. Las revoluciones del motor están reguladas por un sistema "Varispeed 606PC3" el cual permite variar la frecuencia de oscilación del pistón en un rango desde 1.5 Hz hasta 200 Hz. Se debe recordar que la principal limitación del modelo teórico es su linealidad, este sólo es válido para números de Reynolds $\ll 1$. Con el desplazamiento del pistón y dentro del intervalo de frecuencias mencionado, es posible garantizar un $Re < 7 \times 10^{-4}$. El sistema, por encima de la brida, está contenido en una cavidad de acrílico transparente, esto con el fin de corregir la aberración cilíndrica provocada por la diferencia de índice de refracción entre el fluido de estudio y el acrílico. Dentro de este recipiente se vierte algún fluido con índice de refracción similar al acrílico para evitar la llamada aberración cilíndrica (deformación debida a que el cilindro actúa como una lente). De no corregirse estas aberraciones los haces láser pueden

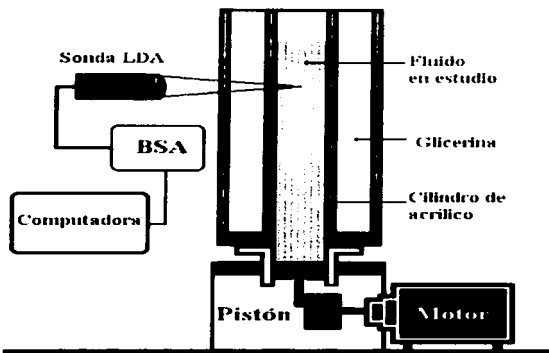


Figura 18. Dispositivo experimental utilizado para la anemometría láser Doppler.

no intersectarse o provocar que estos no estén alineados al fotomultiplicador. En nuestro caso, utilizamos glicerol como acoplador de índices de refracción y también como fluido de estudio, ya que es Newtoniano.

Como parte de la instrumentación del dispositivo experimental, se utilizaron el anemómetro láser Doppler y el anemómetro por imágenes de partículas. Aunque estos instrumentos sólo son aplicables si los fluidos y los sistemas permiten el acceso óptico adecuado, esto no representó un problema ya que el dispositivo se construyó y diseñó pensando en ello.

La anemometría láser doppler está basada en la detección de cambios de frecuencia de patrones de interferencia oscilantes, generados por el movimiento de partículas suspendidas dentro del fluido. En este sistema, la fuente de luz láser es dividida en dos, uno de los haces pasa a través de una celda de Bragg en donde se modula con una frecuencia de 40 Hz. Después de esto, ambos haces son intersectan en una región que forma el volumen de medición. Cuando una partícula pasa a través del volumen de medición, la luz proveniente de los haces, es dispersada y recibida como patrón de interferencia en la superficie del fotodetector. Mientras la partícula se mueva dentro del volumen de

medición, las diferencias de camino óptico entre las dos componentes producen un patrón luminoso pulsante en el fotomultiplicador, figura 19. Con la frecuencia de estas pulsaciones (f_p) y con la separación entre franjas (d_f), es posible calcular la velocidad de la partícula mediante la relación

$$v = d_f \cdot f_p, \quad (55)$$

donde $d_f = \frac{\lambda}{2 \sin(\theta/2)}$, λ es la longitud de onda del láser y θ el ángulo de intersección de los haces, ver figuras 18 y 19.

Para resolver la dirección de la velocidad, la celda de Bragg genera un patrón oscilante en el fotodetector. Las condiciones para que esta instrumentación pueda ser utilizada son: el fluido a analizar debe ser ópticamente transparente, así como el medio en el que está contenido, y el fluido debe contener partículas suspendidas. Estas partículas necesitan ser lo bastante pequeñas para seguir el flujo con un mínimo arrastre, pero suficientemente grandes para dispersar luz y obtener una buena señal en el fotomultiplicador.

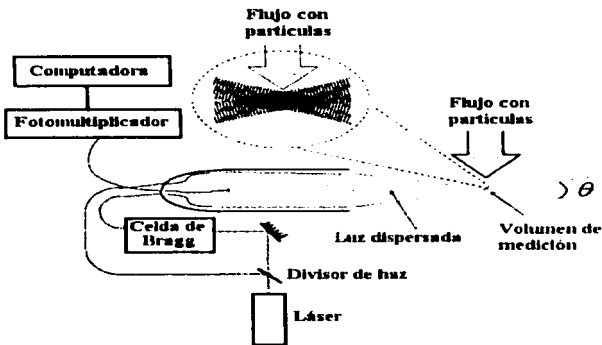


Figura 19. Esquema del anemómetro láser Doppler (LDA).

El LDA utilizado consiste en una sonda (Dantec FiberFlow 60x20), un fotomultiplicador, un Analizador de Ráfaga (Dantec BSA 57N11) y un láser

de Argón (Spectra Physics modelo 177) emitiendo en cuatro longitudes de onda (sólo se utilizó la línea de 488 nm con 200 mW), y una PC con el software de Dantec FlowManager. El volumen de medición es de 0.64 mm \times 0.075 mm \times 0.075 mm. La sonda de LDA era fijada en un sistema del posicionamiento (con precisión de 1 μ m) y se colocó en una mesa diferente del resto del dispositivo, para prevenir oscilaciones que pudieran alterar los datos experimentales. El volumen de medición se alineó en el centro del cilindro de acrílico y la velocidad *rms* fue calculada de los datos adquiridos.

Además de las mediciones puntuales de velocidad, en este trabajo también se midió el campo de velocidades dinámico del sistema. Para ello, se utilizó un velocímetro por imágenes de partículas, el dispositivo utilizado se esquematiza en la figura 20. La velocimetría por imágenes de partículas (*Particle Image Velocimetry*, PIV) es una técnica que provee las mediciones instantáneas de vectores de velocidad en un plano del flujo. Con esta técnica es posible obtener los mapas de velocidad en tiempo prácticamente real. Los vectores de velocidad son obtenidos por la medida del movimiento estadístico de partículas en el fluido entre dos pulsos de luz en secciones del área de estudio. El área de estudio es iluminada por una hoja luminosa producida por un láser pulsado. La captura digital de las imágenes es a través de un CCD que puede capturar, en cada pulso láser, una imagen diferente. Cada pulso de luz, es sincronizado con la adquisición de imágenes para obtener la escala de tiempo. Cada secuencia de dos pulsos genera un par de imágenes que son guardadas en formato digital. Estas imágenes son divididas en pequeñas secciones, llamadas áreas de interrogación (IA). Estas áreas de interrogación de cada imagen, son correlacionadas por el método de correlación cruzada, por transformada de Fourier. Esta correlación identifica los desplazamientos estadísticos de las partículas, no de cada una de ellas. Cualquier partícula que siga satisfactoriamente al flujo y que disperse suficiente luz, puede ser usada para capturar las imágenes usando la cámara CCD. El número de partículas en el flujo es de mucha importancia para obtener buenas señales en la correlación cruzada. Es conveniente tener entre 10 a 25 partículas en cada área de interrogación.

El PIV utilizado en este trabajo consiste en un láser doble de Nd-YAG de frecuencia de pulseo variable y con 4 líneas de emisión (1062nm/150mJ, 532nm/100mJ, 355nm/50mJ, 266nm/30mJ). La hoja de luz se obtuvo utilizando un sistema óptico ya integrado al sistema consistente en un lente cilíndrico de 4 mm. El grueso de la hoja láser fue $<$ 1 mm. Para la digitalización de imágenes se utilizó una cámara de alta resolución Kodak modelo

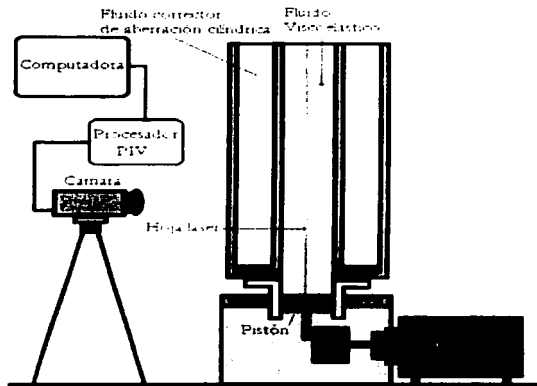


Figura 20. Dispositivo experimental utilizado para la anemometría de imagen de partículas.

E1.0. Las subsecciones de medición en la imagen fueron de $2.01 \text{ mm} \times 2.01 \text{ mm}$ equivalentes a 16 píxeles \times 16 píxeles. El tiempo entre pares de fotos fue de 0.066 s en todas las mediciones. El cálculo de los vectores de velocidad se realizó con el software de Dantec Flow Map y un procesador Flow Map PIV 1100.

La óptica necesaria para esta instrumentación fué montada en soportes separados del resto del dispositivo. La hoja de luz láser se alineó al centro del cilindro de acrílico. Las partículas utilizadas en esta configuración fueron las mismas que para el LDA, esferas de poliamida de $20 \mu\text{m}$ DANTEC ya que permanecen suspendidas largo tiempo, tienen baja velocidad de arrastre y tienen tamaño uniforme por lo que generan baja desviación estándar en los datos adquiridos.

Para ambos instrumentos, las mediciones se realizaron al menos 5 minutos después de que se hiciera un cambio de frecuencia, esto para asegurar que no existiesen estados transitorios. Con el dispositivo experimental se

analizaron dos fluidos: uno Newtoniano y uno Maxwelliano. Como fluido Newtoniano se utilizó glicerol comercial con $\eta = 1$ Pa.s y $\rho = 1250$ kg/m³. La elección del fluido Maxwelliano fue difícil debido a que su caracterización depende del estado dinámico en el que se trabaje. Por ejemplo, en flujos centrífugos con presiones oscilatorias < 40 Pa y 25°C, se sabe que el fluido CPyCl/NaSal se comporta como Maxwelliano [33]. Sin embargo, el mismo fluido bajo condiciones de flujo continuo, es caracterizado como Maxwelliano siempre que la rapidez de deformación no exceda 1 s⁻¹ [34], es decir, el comportamiento viscoelástico es diferente bajo condiciones de flujo diferentes. En las condiciones de flujo constante, el fluido CPyCl/NaSal, en proporción de concentración de 100 mmol/l - 60 mmol/l, tiene las siguientes propiedades: $\eta = 60$ Pa.s $t_m = 2$ s y $\rho = 1050$ kg/m³ [33], [34]. Aunque las condiciones experimentales en este trabajo son diferentes, estos fueron los valores que se utilizaron ya que son los únicos disponibles y como se verá a continuación existe concordancia entre teoría y experimento.

En la siguiente sección se deduce una expresión teórica que es directamente compatible con las mediciones, hechas con el anemómetro láser Doppler, en este dispositivo.

4.2 Presión de oscilación armónica

Como se ha explicado, la anemometría laser Doppler es capaz de registrar la velocidad del fluido en una región cuasi-puntual del espacio. Esto puede parecer inútil cuando se intenta medir una propiedad, como la permeabilidad, que no es local (entiéndase local como una región pequeña del espacio). Con el fin de obtener la forma de la presión en el sistema experimental, se puede partir del hecho de que la posición del pistón durante la oscilación puede ser fácilmente descrita como:

$$x = x_0 e^{i\omega t}, \quad (56)$$

donde x_0 es la amplitud de recorrido del pistón. Al calcular la velocidad para este sistema

$$v = \frac{dx}{dt} = ix_0\omega e^{i\omega t}. \quad (57)$$

De forma directa se puede obtener la expresión de la aceleración

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -x_0\omega^2 e^{i\omega t}. \quad (58)$$

Mediante sencillas sustituciones se obtiene la presión en función de x y t

$$P(x, t) = \frac{\rho Ax}{A} \frac{d^2 x}{dt^2} = -x \rho x_0 \omega_0^2 e^{i\omega_0 t}, \quad (59)$$

donde A es el área transversal del cilindro, x es la altura de la columna de fluido y ρAx es la masa de ese volumen. Finalmente la expresión del gradiente queda determinada como

$$\frac{dP}{dx} = -\rho x_0 \omega_0^2 e^{i\omega_0 t}. \quad (60)$$

Si se compara esta expresión con su contraparte teórica, ecuación (40), se puede ver que $\frac{P_1}{l} = \rho x_0 \omega^2$.

Esto corresponde a una presión debida a movimientos oscilatorios en la dirección x (en este caso la geometría de la figura 3 se encuentra orientada hacia arriba). Finalmente para obtener la expresión de la respuesta puntual del sistema se sustituye la ecuación (60) en (49) y se obtiene

$$\xi_{rms} = \eta \frac{v_{rms}}{\frac{dP_{rms}}{dz}} = \frac{\sqrt{2} \eta v_{rms}}{\rho x_0 \omega_0^2}, \quad (61)$$

que es una expresión con parámetros completamente experimentales y que puede ser comparada con su contraparte teórica, ecuación (50).

Por otro lado, para la comparación experimental de los perfiles de velocidad con el PIV, es fácil obtener esta expresión sustituyendo en la ecuación (26) la expresión para el gradiente de presión, esto es

$$v(r, t) = -\frac{\rho x_0 \omega_0^2 (1 - i\omega_0^*)}{\eta \beta_0^2} \left(1 - \frac{J_0(\beta_0 r)}{J_0(\beta_0 a)} \right) e^{i\omega_0 t}. \quad (62)$$

Se debe notar que esta ecuación es dinámica, como la presentada en figura 10. Como se menciona en el siguiente capítulo, para la correcta comprobación experimental del modelo, los dispositivos utilizados deben ser capaces de medir indirectamente la fase de la presión armónica. Una vez expuestos los dispositivos experimentales y su instrumentación, se presentan, en el siguiente capítulo, los resultados obtenidos.

5 RESULTADOS

Como ya se mencionó, con el fin de comparar la respuesta dinámica de los fluidos Newtonianos y Maxwellianos, se deducieron las expresiones para la respuesta de estos sistemas. En las siguientes secciones, se presentan las mediciones experimentales y su confrontación teórica.

5.1 Anemometría láser Doppler

Para ambos fluidos, con el LDA, se adquirieron 2,000 datos de velocidad en el centro del cilindro de fluido, a 40 cm por encima del pistón y en el intervalo de temperatura de 25 ± 0.5 °C. Los experimentos fueron realizados en el rango de frecuencia de oscilación del pistón de 1.5 a 15 Hz. La velocidad *rms* es calculada de los datos adquiridos. Ejemplos de la adquisición con el LDA en el CPyCl/NaSal se muestran en las figuras 21 y 22.

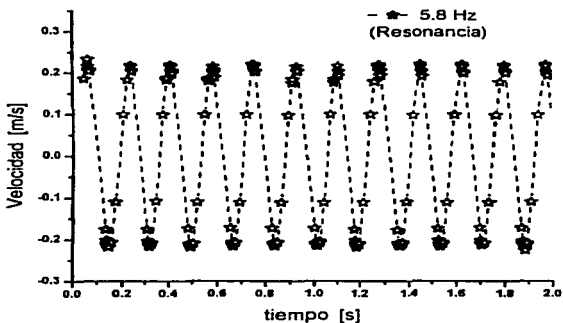


Figura 21. Ejemplo de la adquisición de datos de velocidad con LDA, frecuencia de 5.8 Hz. Los círculos indican la adquisición de velocidad de una partícula, en línea segmentada se muestra la tendencia de los datos.

La velocidad *rms* de los datos de LDA para glicerol y el CPyCl/NaSal se muestra en la figura 23, como función de la frecuencia de oscilación. Un

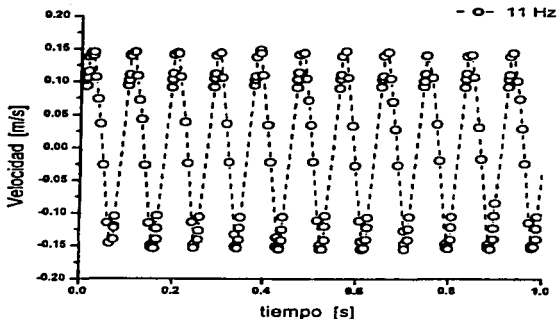


Figura 22. Ejemplo de la adquisición de datos de velocidad con LDA, frecuencia de 11 Hz.

importante punto a notar es el comportamiento lineal de la velocidad en el fluido Newtoniano. Esta linealidad indica que el modelo de presión oscilatoria está bien planteado, ya que reproduce el comportamiento cuantitativo y cualitativo de la ecuación (57).

Como se aprecia, el comportamiento de la velocidad del fluido Maxwelliano es dramáticamente diferente al Newtoniano. Claramente la velocidad se incrementa con la frecuencia en ambos casos, pero en el caso viscoelástico se presentan picos de resonancia muy bien definidos.

Utilizando el modelado de la presión y la velocidad rms calculada de las mediciones experimentales, se obtiene la respuesta dinámica de los sistemas Newtonianos y Maxwellianos (ξ). Las predicciones teóricas fueron calculadas utilizando las propiedades físicas de los fluidos [34], [33]. Se adimensionalizó la frecuencia utilizando el tiempo viscoso (τ) definido en el trabajo de Zhou y Sheng, ver [2]. Esto es

$$\tau = \frac{a^2 \rho}{\eta}. \quad (63)$$

La respuesta dinámica adimensionalizada experimental y teórica, para el fluido Newtoniano, se encuentra en la figura 24. Como se observa, en este caso, el modelo teórico coincide con los resultados presentados por Zhou y

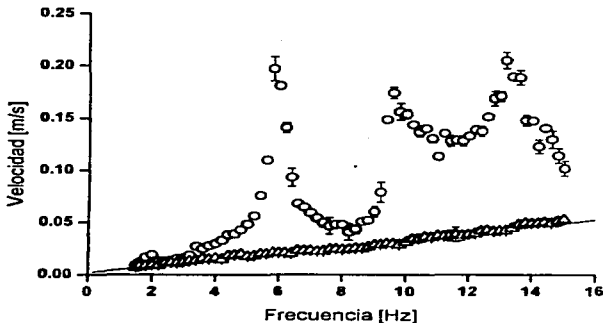


Figura 23. Velocidad v_{ms} puntual en el centro del cilindro. Los círculos corresponden al fluido viscoelástico y los triángulos al fluido Newtoniano.

Sheng [2]. En estos resultados se nota claramente el carácter disipativo del fluido Newtoniano, tal como lo predice la ecuación (51). Este trabajo, de forma original para líquidos, comprueba experimentalmente la predicción de Sheng [2].

La respuesta dinámica adimensionalizada para el fluido Maxwelliano se encuentran en la figura 25, los valores experimentales se encuentran graficados junto con su contraparte teórica.

Las frecuencias de resonancia son claramente visibles en el caso Maxwelliano, existe un acuerdo cualitativo entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas. Aunque cuantitativamente los máximos de las resonancia no son iguales, se debe recordar que el modelo es lineal, desprecia términos convectivos y términos viscoelásticos no lineales. Lo importante a destacar en este caso, es la capacidad del modelo teórico de predecir el comportamiento resonante, más aún de predecir con bastante exactitud las frecuencias a las que sucede esto, en especial en el intervalo $0.3 < \tau < 0.75$. Estos resultados son la primera evidencia experimental del comportamiento resonante del fluido Maxwelliano.

Con el fin de reforzar la pertinencia del modelo teórico para Maxwellianos,

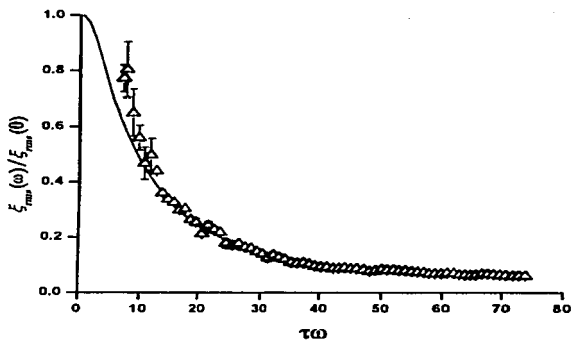


Figura 24. Respuesta dinámica del glicerol. En triángulos los valores adimensionales experimentales y en línea la predicción teórica.

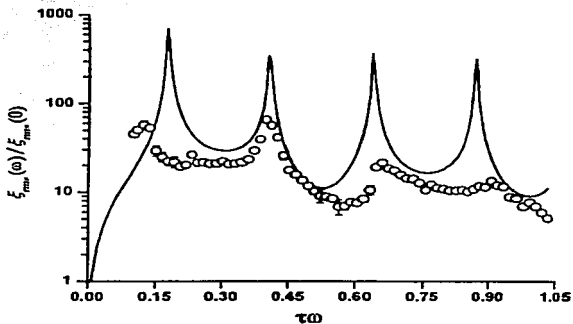


Figura 25. Respuesta dinámica para el fluido CPyCl/NaSal. En círculos los valores adimensionales experimentales, en línea la predicción teórica.

en la siguiente sección se presentan los resultados experimentales obtenidos con el anemómetro por imágenes de partículas.

5.2 Anemómetro por imágenes de partículas.

Las mediciones experimentales de los perfiles de velocidad, al ser dinámicos, requieren del cálculo de la fase relativa a la presión oscilatoria. En el sistema de PIV utilizado para este trabajo, esto no es fácil, ya que la cámara digital fotográfica del instrumento no es de alta velocidad. Esto, aunado al hecho de que la cámara sólo puede registrar cada par de imágenes cada tiempo establecido, trae como inconveniente la falta de datos para poder reconstruir la onda y con ello estimar la fase relativa. En realidad, la cámara digital sólo puede adquirir imágenes en intervalos de tiempos múltiplos de 0.066 s ó a 1.5 Hz (se entiende que es imposible hacer mediciones dinámicas a frecuencias que son múltiplos de la frecuencia de adquisición de la cámara).

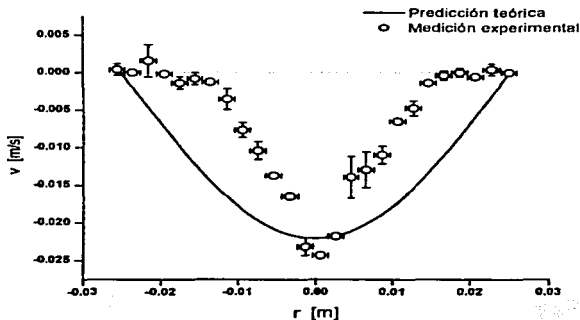


Figura 26. Perfil de velocidades con frecuencia de oscilación de 2 Hz. Modelando la velocidad como un seno, la fase temporal es de 0.347 s ó $\theta = 250^\circ$.

Como esto no se puede medir directamente, la fase se calculó a partir de la razón entre el valor de la velocidad en el centro del perfil y el valor de la

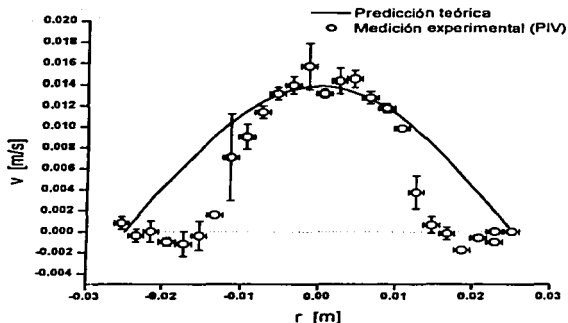


Figura 27. Perfil de velocidades con frecuencia de oscilación de 2 Hz. Modelando la velocidad como un seno, la fase temporal es de 0.044 s ó $\theta = 31^\circ$.

amplitud de velocidad obtenida de los valores *rms* dados por el LDA. Los perfiles de velocidad, obtenidos de las mediciones con PIV y su contraparte teórica, se presentan en las figuras 26-31.

Confirmando los resultados del LDA, se puede observar que el modelo ajusta mejor a los datos experimentales para frecuencias mayores a 4 Hz. Los perfiles teóricos asociados a las frecuencias de 6.5 y 10 Hz, logran reproducir los puntos de inflexión de sus contrapartes experimentales. Es importante destacar que tanto en el modelo teórico como en los resultados experimentales, existen puntos de estancamiento. Esto implica que hay regiones bien definidas dentro del flujo oscilatorio Maxwelliano que permanecen sin movimiento. En el modelo teórico esto es debido a las raíces que presentan los polinomios de Bessel ($J_0(r)$). Como lo demuestran también los resultados de LDA, la velocidad es siempre sobre-estimada por el modelo teórico, aspecto que debe ser analizado con mayor detenimiento y será objetivo de trabajo futuro.

Una vez presentados los resultados, en donde se confrontan teoría y experimento, no queda más que reseñar, en el siguiente capítulo, las conclusiones.

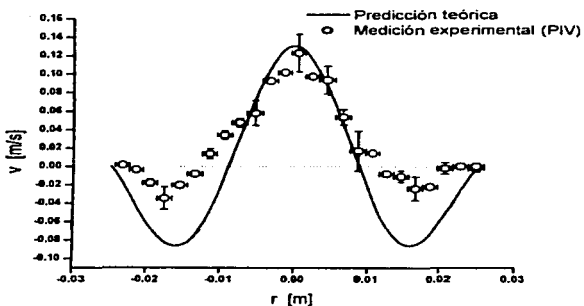


Figura 28. Perfil de velocidades con frecuencia de oscilación de 6.5 Hz. Modelando la velocidad como un seno, la fase temporal es de 0.057 s ó $\theta = 137^\circ$.

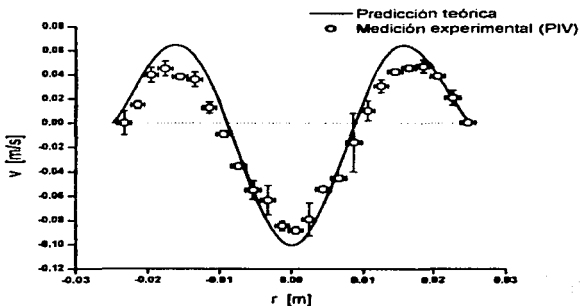


Figura 29. Perfil de velocidades con frecuencia de oscilación de 6.5 Hz. Modelando la velocidad como un seno, la fase temporal es de 0.141 s ó $\theta = 338^\circ$.

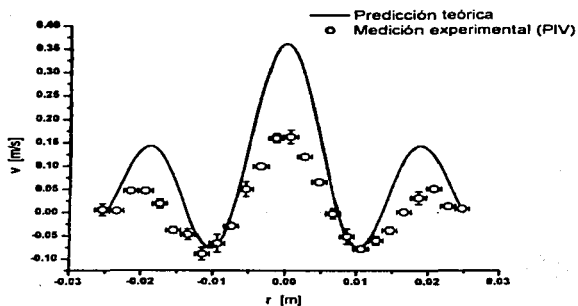


Figura 30. Perfil de velocidades con frecuencia de oscilación de 10 Hz. Modelando la velocidad como un seno, la fase temporal es de 0.022 s ó $\theta = 79^\circ$.

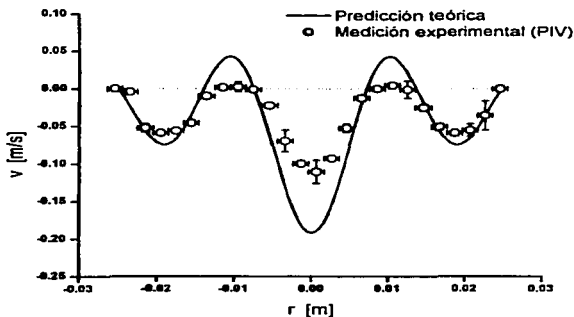


Figura 31. Perfil de velocidades con frecuencia de oscilación de 2 Hz. Modelando la velocidad como un seno, la fase temporal es de 0.092 s ó $\theta = 331^\circ$.

6 CONCLUSIONES

Este trabajo es la consecuencia de considerar una predicción teórica y buscar su confrontación experimental. Se simplificaron los resultados teóricos para obtener expresiones fácilmente verificables con la realidad. La concordancia cualitativa de estas expresiones con los resultados de una cuidadosa experimentación ha sido evidente. En particular se calculó teóricamente la solución para el perfil de velocidades de un fluido Maxwelliano que es sometido a un gradiente de oscilación armónica, partiendo de la teoría de del Río *et al.* [9]. Además de esto, ésta expresión fue comparada con su contraparte experimental, para lo cual se diseñó, construyó e instrumentó el dispositivo experimental necesario.

También se desarrolló teóricamente la solución, en el espacio de frecuencias, del gasto instantáneo para un bombeo de un fluido Maxwelliano sometido a un gradiente de presión de pulsos gaussianos. Aunque este problema no es analítico en el espacio de configuración, se hizo la transformación numéricamente y con ello se demostró que existe un incremento, en el flujo neto de estos sistemas, a ciertas frecuencias de bombeo.

Para comprobar experimentalmente el aumento de la respuesta dinámica de los fluidos Maxwellianos, se desarrolló una expresión puntual basada en la permeabilidad dinámica para estos fluidos. Esta respuesta fue medida y comparada experimentalmente para un fluido Newtoniano y otro Maxwelliano. En ambos casos el acuerdo con la teoría es cualitativamente evidente. Claramente, los resultados experimentales muestran que la respuesta dinámica de los fluidos viscoelásticos excede la respuesta estática para algunas frecuencias específicas y bien definidas.

Lo anterior muestra que el modelo propuesto por del Río *et al.*, [9], es capaz de reproducir el comportamiento resonante de los fluidos Maxwellianos, aún con sus drásticas simplificaciones. Además, este modelo es capaz de reproducir el comportamiento general del sistema, como lo muestran los puntos de estancamiento en los perfiles de velocidad.

La verificación experimental de la existencia de frecuencias de resonancia en fluidos Maxwellianos, refuerza la posibilidad del aumento de gasto neto en estos flujos cuando son excitados con su frecuencia de resonancia. Si consideramos que algunos fluidos orgánicos, comerciales e industriales (como el petróleo) pueden ser modelados como flujos viscoelásticos, las aplicaciones de este trabajos son innumerables y serán orientadas a mejorar los métodos de transferencia, extracción o inyección de dichos fluidos.

Por otra parte, la mayoría de de los fluidos orgánicos son viscoelásticos y por lo tanto, este trabajo refuerza la búsqueda de aplicaciones en campos como la medicina y la fisiología. Las posibilidades de aplicación en estos y otros sistemas son innumerables, esto se puede pronosticar en cierta medida por la comprensión experimental y teórica que este trabajo intenta realizar.

Referencias

- [1] D.L. Johnson, J. Koplik and R. Dashen, *J. Fluid Mech.* **176**, 379 (1987).
- [2] M. Y Zhou and P. Sheng, *Phys. Rev. B*, **39**, 12 027 (1989).
- [3] I.A. Beresnev and P.A. Johnson, *Geophysics* **59**, 1000 (1994).
- [4] H. S. Salem, *Energy Sources*, **23**, 5 (2001).
- [5] Y. Bernabe, *Pure Appl. Geophys.* **149**, 489 (1997).
- [6] P. Leclair, L. Kelders, W. Lauriks, J.F. Allard and C. Glorieux, *Appl. Phys. Lett.* **69**, 2641 (1996).
- [7] G. B. Thurston, *Biorheology* **13**, 191 (1976).
- [8] E. Corvera-Poiré and J. A. del Río, arXiv:physics/0208078 (2002).
- [9] J.A. del Río, M. López de Haro and S Whitaker, *Phys. Rev. E*, **58**, 6323 (1998); idem **64**, 5, 039901 (2001).
- [10] M. López de Haro, J. A. del Río and S. Whitaker, en *Lectures on Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Eds. M. Costas, R.F. Rodríguez and A.L. Benavides, (World Scientific, Singapore,1994), pp. 54-70.
- [11] M. López de Haro, J. A. del Río, and S. Whitaker, *Transp. Porous Media* **25**, 167 (1996).
- [12] D. Tsiklauri and I. M. Beresnev, *Phys. Rev. E* **63**, 046304 (2001).
- [13] G.B. Thurston, *J. Acoust. Soc. Am.* **25**, 653 (1952).
- [14] H.A. Barnes, P. Townsend and K. Walters, *Nature* **224**, 585 (1969).
- [15] O. Manero and K. Walters *Rheol. Acta* **19**, 598 (1980).
- [16] J.M. Davies and T.E.R. Jones, *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* **23**, 73 (1987).
- [17] J. A. del Río y J. R. Castrejón Pita, Modelo Simple para la Permeabilidad de Fluidos Viscoelásticos, *Rev. Mex. Fís.*, aceptado, 2003.

- [18] I. G. Currie, *Fundamental Mechanics of Fluids*, (McGraw-Hill Press, New York, 1974).
- [19] L.S. García-Colín y R.F. Rodríguez, *Fluidos Exóticos*, (Trillas, México 1991).
- [20] J.A. del Río and M. López de Haro, J. Non-Equilib. Thermodyn. 1990 y F. Vázquez and J.A. del Río, Rev. Mex. Fís. (1990).
- [21] J. P. Boon and S. Yip, *Molecular Hydrodynamics*, (Dover, New York, 1980).
- [22] A. E. Scheidegger, J. Appl. Phys., **25**, 8 (1954).
- [23] E. Braun, *Un movimiento en ZigZag*, (FCE, México, 1986).
- [24] A. B. Moslov and O.Y. Dinariev, Sov. Phys. Tech. Phys., **32** (1987).
- [25] R. Jullien, Contemp. Phys., **28** (1987).
- [26] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, (W. H. Freeman and Company , New York, 1977).
- [27] S. L. Ross, *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, 3ª Edición. (McGraw-Hill Press, New York, 1989) .
- [28] S. Whitaker, *Transport in Porous Media*, **1**, **3**, (1986).
- [29] S. Whitaker, *Method of Volume Averaging*, Kluwer, (Netherlands 1999).
- [30] K. Gieck, *Manual de Fórmulas Técnicas*, 19a. edición, (Alfaomega, México, 1989).
- [31] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physics*, (Academic Press, New York, 1970).
- [32] S. Cuevas and J. A. del Río, Phys. Rev. E, **64**, 016313 (2001).
- [33] J. F. Berret, J. Apell and G. Porte, Langmuir, **9** (1993).
- [34] A. F. Méndez-Sánchez, M. R. López-González, V. H. Rolón-Garrido, J. Pérez-González and L. de Vargas, Rheol. Acta, (en prensa 2002).
- [35] R. Kubo and H. Ichimura, *Statistical Mechanics*, 12th Edition, (North-Holland, Amsterdam, 1993).