00384

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

2

FACULTAD DE CIENCIAS

COMPACTACIONES EQUIVARIANTES DE G-ESPACIOS LIBRES Y SEMILIBRES

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE DOCTORA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

P R E S E N T A

M. en C. NATELLA ANTONYAN

DIRECTOR DE TESIS : DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA

MÉXICO, D.F. DICIEMBRE, 2002

Autorizo a la Dirección General de Bibliotecas de la UNAM a difundir en formato electrónico e impreso el contenido de mi trabajo recepcional.
NOMBRE: Natella Antonyan

FECHA: 3. XII. 2002
FIRMA: Наталья

Quisiera expresar mi sincero

agradecimiento a mi familia

y especialmente a mi esposo.

Sin su estímulo y su fe, tal vez este trabajo no habría realizado.

* * *

Quisiera agradecer a la máxima casa de estudios, la Universidad Nacional Autónoma de México, por darme la oportunidad de ser parte de su comunidad y realizar este trabajo de investigación.

Expreso mi más profundo agradecimiento a la Dra. Sylvia de Neymet y a el Dr. Ángel Tamariz por su amistad, ayuda y apoyo de todo tipo a lo largo de mi estancia en México y especialmente durante mis estudios en el doctorado.

Agradezco al comité tutoral por su valioso tiempo dedicado al desarrollo de la presente tesis.

Especialmente quisiera agradecer a los doctores María Isabel Puga Espinosa, Salvador García Ferreira, Alexander Bykov y Raúl Escobedo Conde, por la revisión preliminar del trabajo y por sus valiosos comentarios y sugerencias.

También agradezco a todas aquellas personas que de una ú otra manera apoyaron en la realización de la presente tesis.

Compactaciones equivariantes de G-espacios libres y semilibres

Natella Antonyan

Contenido

Introducción

La idea de un grupo toplógico de transformaciones ó un G-espacio se remota al inicio del siglo XX y es uno de los ejemplos más interesantes de la intersección exitosa de diversas áreas de las matemáticas, como la topología, el analysis funcional, el algebra y la geometría.

Por un grupo toplógico de transformaciones ó un G-espacio entendemos un espacio topológico X equipado con una acción continua de un grupo topológico G. Si X es an G-espacio entonces una G-compactación de X es un par (B, b) en donde B es un G-espacio compacto y $b : X \hookrightarrow B$ es un encaje equivariante tal que la imagen $b(X)$ es denso en B.

Uno de los problemas principales de la teoría de los grupos topológicos de transformaciones lo constituye el problema sobre la existencia de G-compactaciones de G-espacios de Tychonoff.

En 1960 R. Palais probó que si G es un grupo compacto de Lie entonces todo G-espacio de Tychonoff posee una G-compactación (ver [**29**, §1.5]). Este resultado fué generalizado por Jan de Vries [**33**] para el caso de los grupos localmente compactos de Hausdorff. Mientras que la demostración de Palais utiliza resultados profundos de la teoría de representaciones, la demostración de Jan de Vries es más elemental. En la sección 1 del capítulo 2 presentaremos esta demostración por completo. La compacidad local es esencial en el teorema de Jan de Vries. Fué M.G. Megrelishvili [**23**] quien en 1988 construyó un grupo separable y metrizable G y un G-espacio X también separable y metrizable tal que X no posee ninguna G-compactación. Más tarde M. Megrelishvili y T. Scarr [**24**] demostraron que para todo grupo G separable y metrizable que no es subgrupo de un grupo localmente compacto, existe un G-espacio de Tychonoff X el cual no admite un encaje equivariante en un G-espacio compacto. Otros trabajos importantes dedicados a las compactaciones equivariantes son los de J. de Groot y R.H. Mc Dowell [**15**], R.B. Brook [**7**], S.A. Antonyan [**2**], S.A. Antonyan y Yu.M. Smirnov [3], S.A. Antonyan y J. de Vries [4], S.V. Vlasov [**31**], etc.

En la presente tesis se destaca mayor interés en tres clases importantes de G-espacios: G-espacios *libres, semilibres* y *estrictamente semilibres.* Recordemos que un G-espacio X es libre si para todo $x \in X$ la igualdad $gx = x$ implica $g = e$, la unidad de G. Si en X hay un conjunto $F \subset X$ tal que $gx = x$ para todo $g \in G$ y $x \in F$ y la acción es libre en $X \setminus F$ entonces X se llama un G-espacio semilibre. Si además, F consta de un sólo punto entonces el G-espacio semilibre X se llama estrictamente semilibre.

Nosotros estamos interesados en el siguiente

Problema. Sea G un grupo compacto de Lie.

(1) Tiene todo G-espacio libre una G-compactación libre?

(2) Tiene todo G-espacio estrictamente semilibre una G-compactación también estrictamente semilibre?

(3) Tiene todo G-espacio semilibre una G-compactación también semilibre?

El presente trabajo se encuentra dentro de la rama de la teoría de las compactaciones equivariantes, y su objetivo principal es presentar resultados nuevos (que corresponden a los capítulos 2 y 3) acerca del problema arriba mencionado.

La tesis está estructurada en tres capítulos. En el primero se establecen los conceptos preliminares que serán utilizados a lo largo de todo el trabajo.

En el segundo capítulo se estudian las G-compactaciones en general y las G-compactaciones semilibres en particular. En la sección 2 del capítulo 2 demostramos que todo G-espacio semilibre posee una G-compactación también semilibre (corolario 2.2.15). Este resultado responde positivamente la tercera pregunta del problema arriba mencionado. El corolario 2.2.15 afirma que todo G-espacio libre posee una G-compactación estrictamente semilibre.

En la sección 3 del capítulo 2 se caracterizan las G-compactaciones de Stone-Čech $\beta_G X$ en diversos términos. Estas caracteristicas se aplican posteriormente para construir G-compactos libres universales en el capítulo 3.

El capítulo 3 está dedicado a los G-compactaciones libres. A diferencia de los G-espacios semilibres, los G-espacios libres no siempre poseen una G-compactación también libre; el ejemplo 3.1.11 y el ejemplo 3.1.13 presentan dos G-espacios relevantes. En este capítulo también se caracterizan los G-espacios libres que poseen G-compactaciones libres. Concretamente, en el teorema 3.1.6 probamos que cada G-espacio libre finitistic tiene una G-compactación libre. Esto implica particularmente, que todo G-espacio libre paracompacto y de dimensión finita tiene una G-compactación libre (Corolario 3.1.9).

Como consecuencia del corolario 2.2.15, todo G-espacio estrictamente semilibre tiene una G-compactación *semilibre*. Pero la respuesta de la segunda pregunta de nuestro problema básico es negativo en general; el ejemplo 3.1.14 muestra que no todo G-espacio estrictamente semilibre tiene una G-compactación también estrictamente semilibre.

Dentro de la variedad de G-espacios que admiten una G-compactación libre, construimos un G-espacio universal, compacto y libre, cuyo peso y dimensión son dadas (Teorema 3.2.1). Este resultado se extiende al caso de G-espacios con un sólo tipo de órbita (Teorema 3.3.2).

La mayoría de los resultados obtenidos en esta tesis constituyen parte de nuestro artículo "Equivariant embeddings and compactifications of free G-spaces" que está aceptado para su publicación en la revista *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*.

CAPITULO 1

Preliminares

1. Grupos topológicos

Las nociones básicas sobre la teoría de grupos de transformaciones de G-espacios topológicos se puede encontrar en los libros de G. Bredon [**6**], R. Palais [**29**] y J. de Vries [**33**]. Sin embargo será muy conveniente desarollar en ese capítulo algunos definiciones y teoremas de mayor importancia que vamos a utilizar frecuentemente en lo que sigue. Aquí el libro de S. de Neymet [**28**] es muy relevante.

1.1. Grupos topológicos.

Definición 1.1.1. *Un* grupo topológico *es un grupo G provisto de una topología tal que las operaciones multiplicación*

$$\mu : G \times G \to G, \quad \mu(g,h) = gh,$$

e inversión

$$\iota : G \to G, \quad \iota(g) = g^{-1}$$

son funciones continuas.

Es fácil comprobar que la condición de continuidad de ambas funciones μ e ι equivale a la condición de continuidad de la función "división"

$$\nu : G \times G \to G, \quad \text{dada por} \quad \nu(g,h) = gh^{-1}.$$

Para subconjuntos A y B de un grupo topológico G, usaremos la siguiente notación:

- $AB = \mu(A \times B) = \{ab|\ a \in A, b \in B\}$
- $A^{-1} = \iota(A) = \{a^{-1}|\ a \in A\}$
- $AB^{-1} = \nu(A \times B) = \{ab^{-1}|\ a \in A, b \in B\}$
- $A^2 = AA = \{a_1a_2 : a_1 \in A,\ a_2 \in A\}$.

Como su nombre lo indica un grupo topológico G posee dos estructuras, una algebraica y otra topológica, relacionadas entre sí de manera que la acción traslación de G en G resulta ser continua. De hecho tiene lugar el siguiente:

Teorema 1.1.2. *Sea G un grupo topológico. Si $g \in G$ es un elemento fijo arbitrario, entonces las funciones:*

$$L_g : G \to G, \qquad L_g(x) = gx$$

y

$$R_g : G \to G, \qquad R_g(x) = xg$$

son homeomorfismos. Las funciones L_g y R_g se llaman traslaciones por g derecha e izquierda, respectivamente.

Demostración. L_g es una función continua por la definición de grupo topológico. Suponemos que $L_g(x_1) = L_g(x_2)$, entonces $gx_1 = gx_2$, es decir $g^{-1}gx_1 = g^{-1}gx_2$. Así que $x_1 = x_2$ y L_g es inyectiva.
Como $L_g(g^{-1}x) = x$, donde $x \in G$, L_g es supraeyectiva.
Puesto que

$$L_{g^{-1}}(L_g(x)) = L_{g^{-1}}(gx) = g^{-1}gx = x,$$

tenemos que la inversa de L_g es $L_{g^{-1}}$. Tomando en cuenta que $L_{g^{-1}}$ es continua, L_g es un homeomorfismo. En forma similar se demuestra que la función R_g también es un homeomorfismo. □

Es facil de verificar que la inversión

$$i : G \to G \qquad i(x) = x^{-1}$$

y el automorfismo intero

$$g \mapsto xgx^{-1}$$

tambien son funciones homeomorfos.

El hecho que las traslaciones en los grupos topológicos son homeomorfismos se utiliza para probar lo siguiente:

1) Si A es abierto, AB y BA son abiertos para todo $B \subset G$, ya que $AB = \bigcup_{b \in B} Ab$ es unión de abiertos. De la misma forma vemos que BA es abierto.

2) Si A es cerrado y B finito, AB y BA son cerrados. En efecto, como antes

$$AB = \bigcup_{b \in B} Ab \quad \text{y} \quad BA = \bigcup_{b \in B} bA$$

son uniones finitas de cerrados y por lo tanto son cerrados.

En realidad esta propiedad es cierta para cualquier compacto B; esto lo veremos más adelante en el Teorema 1.3.

En adelante, con el símbolo e vamos a denotar la identidad de un grupo G.

Como L_g es un homeomorfismo, cualquier vecindad de $g \in G$ es de la forma gU ó Ug con U una vecindad de e. Además si U es una vecindad de e, entonces U^{-1} y $U \cap U^{-1}$ también lo son.

- Decimos que la vecindad de e es *simétrica* si $U = U^{-1}$. Las vecindades simétricas forman una base local para la identidad.

Es fácil de verificar, que G es un espacio homogéneo, pues dados $g_1, g_2 \in G$ existe un homeomorfismo $\varphi : \quad G \to G$ tal que $\varphi(g_1) = g_2$. En efecto, tome φ como la traslación izquierda por $g_2 g_1^{-1}$, es decir $\varphi = L_{g_1 g_2^{-1}}$.

Como todo grupo topológico es homogeneo, para probar que G satisface cierta propiedad local bastará probarlo para el elemento identidad e de G. Por ejemplo, es suficiente que e sea abierto, ó cerrado, ó bien tenga una base de vecindades contable, para que G sea discreto, ó T_1, ó satisfaga el primer axioma de numerabilidad, respectivamente.

En lo sucesivo denotaremos con $N^*(e)$ la base de vecindades abiertas y simétricas para el elemento identidad $e \in G$. El siguiente teorema es de suma importancia para el desarollo de la tesis:

Teorema 1.1.3. *Sea G un grupo topológico. Si $A \subset G$ es compacto y $B \subset G$ es cerrado, entonces AB y BA son cerrados.*

Demostración. Vamos a demostrar que BA es cerrado, lo que es equivalente a demostrar que $G \setminus BA$ es abierto. Sea $x \in G \setminus BA$. Para cada $a \in A$ tenemos que $a \notin Bx$ y Bx es cerrado. Así existen vecindades $U_x, V_x \in N^*(e)$ con

$$aU_x \cap Bx = \emptyset \text{ y } V_x^2 \subset U_x.$$

Tenemos

$$aV_xV_x \cap Bx = \emptyset \quad \text{que equivale a} \quad aV_x \cap BxV_x = \emptyset.$$

Los abiertos xV_x, $x \in A$, cubren a A; así, por compacidad de A existe una subfamilia finita $x_iV_{x_i}$, $i = 1, \ldots, n$, que cubre a A.
Sea $W = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$. El conjunto W es abierto y simétrico, además

$$aW \cap Bx_iV_{x_i} = \emptyset, \quad para \ \ todo \quad i \leq n.$$

Esto implica que $aW \cap BA = \emptyset$. Por lo tanto, aW es una vecindad abierta de a ajena a BA. □

1.2. Grupos de Lie.

En ese capítulo se introducen los grupos de Lie y se discuten algunos resultados y conceptos que serán importantes posteriormente.

Definición 1.1.4. *Un grupo topológico es un* grupo de Lie *si tiene una estructura de una variedad diferenciable tal que las operaciones de grupo μ e ι son diferenciables.*

Por la homogeneidad de G basta que exista una vecindad abierta U de e en G y un homeomorfismo $x : U \to W$ sobre un conjunto abierto $W \subset \mathbb{R}^n$ para algún n con $x(e) = 0$ tal que las operaciones del grupo sean diferenciables alrededor de e en estas coordenadas locales. Más precisamente, sea $g \in U$ y $x_i(g)$ la i-ésima coordenada de $x(g) \in \mathbb{R}^n$. Entonces para alguna vecindad abierta del punto $0 \in \mathbb{R}^K$ existen funciones differenciables φ_i tales que

$$x_i(gh) = \varphi_i\big(x_1(g), \dots, x_n(g), x_1(h), \dots, x_n(h)\big)$$

para todos g y h de alguna vecindad abierta $V \subset U$ del elemento e.

Similarmente

$$x_i(g^{-1}) = \psi_i\left(x_1(g), \dots, x_n(g)\right)$$

para g cercano a e, donde ψ_i son funciones differenciables definidas alrededor de $0 \in \mathbb{R}^n$.

Ejemplos.

(1) Cualquier grupo con la topología discreta es un grupo de Lie de dimensión 0.

(2) El espacio Euclideano $\mathbb{R}^n$ es un grupo de Lie para cada $n \geq 1$. En efecto con la topología usual, $\mathbb{R}^n$ es una variedad diferenciable y es un grupo topológico abeliano con las operaciones definidas por $(x, y) \mapsto x + y$ y $x \mapsto -x$ que son diferenciables.

(3) El circulo unitario $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{C} | \quad \|x\| = 1\}$ es un grupo de Lie compacto.

(4) El toro $\mathbb{T}^n \approx \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1$ es grupo de Lie dado que el producto finito de grupos de Lie es un grupo de Lie.

(5) El grupo general lineal: $GL(n,\mathbb{R}) = det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, donde det es la función del determinante.

En efecto, sea $M(n,\mathbb{R})$ la variedad de todas las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{R}$. Entonces $M(n,\mathbb{R})$ se identifica naturalmente con el espacio Euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$. Tenemos que $GL(n,\mathbb{R})$ es una subvariedad de $M(n,\mathbb{R})$ y es un grupo con respecto a la multiplicación de matrices. El producto AB en $GL(n,\mathbb{R})$ tiene entradas polinomiales en las componentes de A y B, y estas entradas son las expresiones en coordenadas locales de la función producto, que es diferenciable. Las entradas de A^{-1} son funciones racionales de las entradas de A con denominadores ($=detA$) diferentes de cero y es también diferenciable. Así $GL(n,\mathbb{R})$ es un grupo de Lie.

(6) Los subgrupos importantes de $GL(n,\mathbb{R})$:

- el grupo especial lineal

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{\mathbb{A} \in GL(n,\mathbb{R})| \ \det(A) = 1\},$$

- el grupo ortogonal $O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R})| \ AA^t = I\}$,
- el grupo especial ortogonal $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$.

(7) Los subgrupos importantes de $GL(n,\mathbb{C}{=}det^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$:

- el grupo especial lineal complejo:

$$SL(n,\mathbb{C}) = \{\mathbb{A} \in GL(n,\mathbb{C})| \ \det(A) = 1\},$$

- el grupo unitario $U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C})| \ A(\overline{A})^t = I\}$,
- el grupo especial unitario $SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$.

2. G-espacios

El concepto de un grupo topológico, junto con el de un espacio topológico y el de una acción, definirán lo que son los grupos topológicos de transformaciones.

Definición 1.2.1. *Por un* `Grupo Topológico de Transformaciones` *o un* G–`espacio` *se entenderá una terna* (G, X, θ) *donde* G *es un grupo topológico,* X *es un espacio topológico y*

$$\theta : G \times X \to X$$

es una función continua que satisface:

$$i)\ \theta(e, x) = x,\ \forall x \in X,\ \text{donde } e \text{ es la identidad de } G,$$

$$ii)\ \theta(h, \theta(g, x)) = \theta(hg, x),\ \forall x \in X,\ \forall g, h \in G.$$

La función θ se llama *acción del grupo G en X*. El espacio X con la acción fija θ se llama *G-espacio*.

Para simplificar las notaciones en los casos cuando no hay peligro de confusión, vamos a denotar a $\theta(g, x)$ como gx y a (G, X, θ) como X. En este caso las propiedades $i)$ y $ii)$ de la definición anterior toman las formas simples:

$$i)\quad ex = x$$

$$ii)\quad h(gx) = (hg)x$$

Ejemplos

1. Cualquier grupo G actúa en cualquier espacio topológico X mediante la acción trivial θ, es decir $(g, x) = x$, para todo $g \in G$, y $x \in X$.

2. Cualquier grupo G actúa en sí mismo mediante la multiplicación izquierda.

3. El grupo de círculo $G = \mathbb{S}^1$ actua en el plano complejo $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ mediate la acción

$$\theta : G \times X \to X, \quad \theta(e^{it}, re^{ix}) = re^{i(x+t)}.$$

4. El grupo $G = (\mathbb{R}, +)$ actua en $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mediante la acción

$$\theta : G \times X \to X, \quad (t, (x, y)) = (e^t x, e^t y).$$

5. El grupo de los reales $G = \mathbb{R}$ actua en $X = \mathbb{R}^2$ mediante la acción traslación:

$$\theta : G \times X \to X, \quad \theta(t, (x, y)) = (x, t + y)$$

La acción θ de G en X induce para cada $g \in G$ la transformación

$$\theta_g : X \to X, \quad \theta_g(x) = \theta(g, x)$$

que llamaremos *transición* por el elemento $g \in G$.

De la condición (i) de la Definición 1.5 tenemos que ψ_e es la función idéntica; de la condición (ii) tenemos que $\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh}$, por consiguente $(\theta)_g^{-1} = \theta_{g^{-1}}$. Esto demuestra que cada transformación θ es un homeo morfismo.

La correspondencia $g \to \theta_g$ es un **homomorfismo** de G en el grupo $H(X)$ de todos los homeomorfismos de X sobre sí mismo. Esto sigue de las propiedades:

$$\theta_g \circ \theta_h = \theta_{gh} \quad \text{y} \quad \theta_e = 1_x$$

arriba mencionados

En este trabajo básicamente nos van a interesar las acciones de los grupos compactos. Por eso a continuación demonstramos algunos propiedades de esas acciones.

Comenzamos con el siguiente

Teorema 1.2.2. *Sean G un grupo topológico, X un G-espacio, K un subconjunto de G y A un subconjunto de X. Se cumple,*

1. *Si A es abierto en X, entonces KA es abierto en X,*

2. *Si K es compacto y A es cerrado en X, entonces KA es cerrado en X,*

3. *Si tanto K como A son compactos, entonces KA es compacto.*

Demostración. 1) Si A es abierto, entonces $gA = \theta_g(A)$ es un abierto para cada $g \in G$, puesto que θ_g es un homeomorfismo. Así, el conjunto $KA = \bigcup_{g \in G} gA$, es también abierto.

2) Sea B un subconjunto cualquiera de X. Es fácil verificar que se cumplen las siguientes equivalencias:

$$B \cap KA = \emptyset \iff (K^{-1}B) \cap A = \emptyset$$

$$\iff (K^{-1} \times B) \cap \theta^{-1}(A) = \emptyset.$$

Fijemos $x \in X \setminus KA$ un punto arbitrario. Por la observación anterior se tiene que

$$(K^{-1} \times \{x\}) \cap \theta^{-1}(A) = \emptyset,$$

esto es,

$$K^{-1} \times \{x\} \subset (G \times X) \setminus \theta^{-1}(A).$$

Puesto que A es cerrado en X, entonces $\theta^{-1}(A)$ es cerrado en $G \times X$, y por lo tanto, $(G \times X) \setminus \theta^{-1}(A)$ es abierto y además contiene al conjunto $K^{-1} \times \{x\}$. Así, para cada punto $g \in K^{-1}$, existe una vecindad abierta $U_g \ni g$ en G y una vecindad abierta $V_g \ni x$ en X, tales que,

$$U_g \times V_g \subset (G \times X) \setminus \theta^{-1}(A).$$

Notemos que x es fijo, y que tanto U_g como V_g varían de acuerdo a $g \in K^{-1}$. Además, trivialmente se tiene que,

$$K^{-1} \subset \bigcup_{g \in K^{-1}} U_g.$$

Dado que K es compacto, K^{-1} es también compacto por la continuidad de la operación de inversión del grupo. Por lo tanto, existen

$$g_1, g_2, \ldots, g_n \in K^{-1},$$

tales que

$$K^{-1} \subset \bigcup_{i=1}^{n} U g_i,$$

Ahora bien, sea

$$U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{g_i}, \qquad V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{g_i},$$

los cuales son abiertos en G y X respectivamente.

Note que

$$K^{-1} \times V \subset U \times V \subset (G \times X) \setminus \theta^{-1}(A),$$

esto es,

$$(K^{-1} \times V) \cap \theta^{-1}(A) = \emptyset.$$

De esta manera, y usando las equivalencias mencionadas al principio de la prueba, se sigue que $V \cap KA = \emptyset$. Esto es, para cada $x \in X \setminus KA$, existe una vecindad abierta V de x en X tal que $x \in V \subset X \setminus KA$, lo cual significa que KA es cerrado en X.

3) Si K y A son compactos, su producto cartesiano $K \times A$ es también compacto. Entonces, su imagen $\theta(KA) = KA$ es compacto, por la continuidad de θ. $\square$

Proposición 1.2.3. *Sea G cualquier grupo, X un G-espacio con acción θ. Entonces θ es abierta. En el caso que G es compacto, θ es cerrada.*

Demostración. Como $G \times X$ tiene la topología producto, entonces sus abiertos básicos son de la forma $U \times V$ donde U es abierto en G y V es abierto en X. Luego, $\theta(U \times V) = UV$ y por (1) de la proposición anterior se tiene que UV es abierto y por lo tanto θ es abierta.
Mostremos ahora que θ es cerrada cuando G es compacto.
Sea C un cerrado de $G \times X$. Sea $\{g_\lambda x_\lambda\}$ una red en $\theta(C)$ que converge a x en X, donde $\{(g_\lambda, x_\lambda)\}$ está en C. Como G es compacto, existe una subred $\{g_{\lambda_\gamma}\}$ de $\{g_\lambda\}$ que converge a un elemento g de G. Luego $\{g_{\lambda_\gamma}^{-1}\}$ converge a g^{-1} y por continuidad de la acción, $\{x_{\lambda_\gamma}\} = \{g_{\lambda_\gamma}^{-1}(g_\lambda, x_{\lambda_\gamma})\}$ converge a $g^{-1}x$

Entonces la red $\{(g_{\lambda_\gamma}, x_{\lambda_\gamma})\}$ en C converge a $(g, g^{-1}x)$ y como C es cerrado, $(g, g^{-1}x) \in C$. Por lo tanto

$$x = \theta(g, g^{-1}x) \in \theta(C).$$

□

A continuación introducimos algunas notaciones y definiciones importantes.

Sean $H \subset G$, $x \in X$, y $A \subset X$:

- Por $H(A) = \{ha |\ h \in H,\ a \in A\}$ vamos a denotar la *H-saturación de A*.
- Si $H(A) = A$, entonces diremos que A es un conjunto *H-invariante*. En el en caso en que $H = G$, entonces A se dirá simplemente *invariante*.

Es fácil verificar, si A es invariante, entonces el interior y la cerradura de A son también invariantes. Si X es un G-espacio y H un subgrupo de G, entonces se induce una acción de H en X. En particular, si A es un conjunto invariante, la acción restringida al conjunto $G \times A$ es también una acción.

Definición 1.2.4. *Sea X un G-espacio y sea $x \in X$. El conjunto*

$$G_x = \{g \in G |\ gx = x\},$$

de elementos del grupo G que fijan a x se llama el estabilizador de x *ó* grupo de isotropía de x.

- Para cada subgrupo $H \subset G$, el conjunto de puntos H-*fijos* X^H se define como el conjunto $\{x \in X |\ H \subset G_x\}$.

- El *núcleo* del la acción del grupo G es el subgrupo normal de G:

$$N = \bigcap_{x \in X} G_x$$

En otras palabras $N = \{g \in G |\ gx = x, \text{ para todo } x \in X\}$

- Vamos a decir que la acción del grupo G en el espacio X es:
  - *trivial* si $G_x = G$ para todo $x \in X$;
  - *efectiva* ó *fiel* si $\bigcap_{x \in X} G_x = \{e\}$;
  - *transitiva* si tiene una sola órbita, es decir, $G(x) = X$ para todo $x \in X$.

Cuando G actua trivialmente en X, $gx = x$ para todo $g \in G$ y todo $x \in X$; esto es, todo elemento de X es un punto fijo: $X^G = X$.

La efectividad de la acción de G en X equivale a que si $g \neq e$ entonces $gx \neq x$ para algún x.

Finalmente, una acción es transitiva si y sólo si para x_1 y x_2 en X existe un $g \in G$ tal que $x_2 = gx_1$.

En lo que sigue, nos van a interesar las siguientes tres clases de G-espacios.

Definición 1.2.5. *Vamos a decir que la acción del grupo G en el espacio X (ó el G-espacio X) es*

- *libre si $G_x = \{e\}$ para todo $x \in X$;*
- *semilibre si para todo $x \in X$, $G_x = \{e\}$ ó $G_x = G$;*
- *estrictamente semilibre si X es semilibre y $G_a = G$ sólo para un único punto $a \in X$.*

Si G actua libremente en X entonces todo elemento g de G distinto de e mueve cada punto de X, es decir, $gx \neq x$ para todo $x \in X$. En el caso cuando X es un G-espacio semilibre, G actua libremente en el conjunto invariante $X \setminus X^G$, donde X^G es el conjunto de los puntos G-fijos. Cuando la acción de G en X, además de transitiva, es libre, para dos puntos x_1, $x_2 \in X$ el elemento g de G tal que $x_2 = gx_1$ es único.

Ahora, sea X un G-espacio, $x \in X$ y $A = \{x\}$.

- Por $G(x) = \{gx \in X |\ g \in G\}$ denotamos la `órbita` de x. El conjunto de las órbitas de X vamos a denotar por X/G.

Tenemos, si $x_1, x_2 \in X$, entonces

$$G(x_1) = G(x_2) \quad \text{ó} \quad G(x_1) \cap G(x_2) = \emptyset.$$

Esto origina una descomposición de X en las órbitas de cada uno de sus puntos. Así, la relación $x \sim y \Leftrightarrow G(x) = G(y)$ es una relación de equivalencia cuyas clases son precisamente las órbitas de X. El conjunto $X/\sim$ lo denotaremos por X/G y a la función que asocia a cada x con su clase de equivalencia, la representaremos por π y la llamaremos *proyección orbital*.

Definición 1.2.6. *Sean X un espacio topológico, Y un conjunto y $\pi : X \to Y$, una función suprayectiva. Entonces se define la topología cociente T en Y como*

$$T = \{U \subset Y |\ \pi^{-1}(U) \text{ es abierto en } X\},$$

donde π *se llamará la* `identificación`.

De aquí en adelante, X/G será considerado como un espacio topológico con la topología cociente.

Algunos propiedades importantes de la función proyección π se prueban a continuación.

Proposición 1.2.7. *Sean G un grupo topológico y X un G-espacio. Entonces la proyección orbital π es continua y abierta. Más aún, si G es compacto, se cumple lo siguiente:*

1. *π es cerrada;*
2. *X es de Hausdorff $\Rightarrow$ X/G es de Hausdorff;*
3. *X es compacto $\Leftrightarrow$ X/G es compacto;*
4. *X es localmente compacto $\Leftrightarrow$ X/G es localmente compacto.*

Demostración. La continuidad de π es evidente de la definición de la topología cociente.

Si O es un abierto en X, entonces por (1) de la Proposición 2.6, se tiene que $G(O)$ es abierto en X. Así,

$$\pi^{-1}(\pi(O)) = G(O)$$

es abierto en X, y puesto que X/G tiene la topología cociente, entonces $\pi(O)$ es abierto en X/G. Por lo tanto π es abierta.

Supongamos ahora que G es un grupo compacto y probemos la segunda parte de la proposición.

1) Sea A un subconjunto cualquiera de X. Entonces se cumple lo siguiente,

$$GA = \pi^{-1}(\pi(A)) = X \setminus \ \pi^{-1}[X/G \setminus \pi(A)] \tag{1.1}$$

Si A es cerrado en X, entonces GA es cerrado en X por (2) de la Proposición 2.6. De (1.1) se sigue que $\pi^{-1}[X/G \setminus \pi(A)]$ es abierto en X y por la definición de topología cociente, $X/G \setminus \pi(A)$ es abierto y entonces $\pi(A)$ es cerrado en X/G. Así π es cerrada.

2) Observamos que si X es de Hausdorff y G es compacto entonces las órbitas son compactas y cerradas por la Proposición 1.2.3.

Ahora bien, cualesquiera dos puntos diferentes de X/G pueden ser escritos como $\pi(x)$ y $\pi(y)$ para $x, y \in X$ con $G(x) \cap G(y) = \emptyset$. Dado que X es de Hausdorff, entonces existen conjuntos abiertos U y V tales que

$$G(x) \subset U, \quad G(y) \subset V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Por la Proposición 1.2.3, $\pi(U)$ es abierto, y por (1) de esta proposición, $(X/G) \setminus \pi(\overline{U})$ es tambien un abierto. Como $G(x) \in \pi(U)$, $G(y) \in (X/G) \setminus \pi(\overline{U})$ y los abiertos $(X/G) \setminus \pi(\overline{U})$ y $\pi(U)$ son disjuntos, concluimos que X/G es de Hausdorff.

3) $\Rightarrow$) Si X es compacto su imagen continua X/G es también compacto.

$\Leftarrow$) Dado que π es cerrada, que cada órbita es compacta y que

$$G(x) = \pi^{-1}(\pi(x)),$$

entonces $\pi^{-1}(C)$ es compacto para cada compacto C de X/G (ver [**21**, Corolario 2.67.1]). Por tanto, $\pi^{-1}(X/G) = X$ es compacto.

4) $\Rightarrow$) Dado $y \in X/G$, seleccionemos un punto arbitrario $x \in \pi^{-1}(y)$. Si X es localmente compacto, entonces existe una vecindad abierta U de x y un conjunto compacto C que contiene a U. Así,

$$y = \pi(x) \in \pi(U) \subset \pi(C)$$

Como $\pi(U)$ es abierto y $\pi(C)$ es compacto entonces X/G es localmente compacto.

$\Leftarrow$) Suponga que X/G es localmente compacto. Entonces, para cualquier $x \in X$, existe una vecindad abierta U de $\pi(x)$ y un conjunto compacto C que contiene a U. Se sigue que

$$x \in \pi^{-1}(U) \subset \pi^{-1}(C).$$

Se tiene que $\pi^{-1}(U)$ es abierto, y por [**21**, Corolario 2.67.1], $\pi^{-1}(C)$ es compacto. Entonces X es localmente compacto. □

La adaptación de teoremas topológicos clásicos a la teoría equivariante no siempre se lleva a cabo de manera natural. Uno de los factores que influyen para lograr lo anterior, es por supuesto la existencia de una acción en los espacios topológicos. Además de esto, en repetidas ocasiones será necesario que los subconjuntos de los G-espacios sean invariantes, lo cual no siempre se cumple. En particular, cuando se trata de obtener vecindades invariantes de algún punto o conjunto, la siguiente proposición es bastante útil.

Proposición 1.2.8. *Sean G un grupo topológico compacto y X un G-espacio. Entonces toda vecindad de un conjunto invariante A contiene una vecindad abierta invariante de A.*

Demostración. Supongamos que V es una vecindad abierta de un conjunto invariante A. El conjunto

$$U = (X/G) \setminus \pi(X \setminus V)$$

es un abierto de X/G que contiene a $\pi(A)$ y además $\pi^{-1}(U) \subset V$ debido a que si $u \in U$ entonces

$$\pi^{-1}(u) \cap (X \setminus V) = \emptyset.$$

De esta forma,

$$\pi^{-1}(U) = X \setminus \big(G(X \setminus V)\big)$$

es la vecindad abierta invariante de A contenida en V. □

Proposición 1.2.9. *Sean G un grupo compacto y X un G-espacio. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si X es de Tychonoff entonces X/G es de Tychonoff.*
2. *Si X es normal entonces X/G es normal.*

Para la demostración necesitamos el siguiente

Lema 1.2.10. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio. Entonces para cada función continua $f : X \to [0,1]$ la función $f^* : X \to [0,1]$ definida por*

$$f^*(x) = Sup\{f(gx)|\ g \in G\}$$

es una función continua e invariante.

Demostración. Sea $x_0 \in X$ un punto arbitrario, $g \in G$ y $\varepsilon > 0$. Como f es continua en el punto gx_0, existe una vecindad U_g de gx_0 tal que

$$f(gx_0) - \varepsilon < f(z) < f(gx_0) + \varepsilon \tag{1.2}$$

para todo $z \in U$.

Por la continuidad de la acción en el punto gx_0 existen una vecindad O_g de g en G y una vecindad W_g de x_0 en X tales que

$$O_g W_g \subset U_g.$$

Como G es compacto, existe un numero finito $U_{g_1}, \dots, U_{g_n}$ tales que

$$G = U_{g_1} \cup \dots U_{g_n}.$$

Sea $W = \cap_{i=1}^{n} W_{g_i}$. Entonces W es una vecindad de x_0. Sea $x \in W$ y $g \in G$ puntos cualesquiera. Entonces $g \in O_{g_i}$ para algún $1 \leq i \leq n$. Al mismo tiempo $x \in W_{g_i}$ y por lo tanto $gx \in O_{g_i} W_{g_i} \subset U_{g_i}$. De (1.1) tendremos

$$f(gx_0) - \varepsilon < f(gx) < f(gx_0) + \varepsilon$$

para todo $g \in G$, $x \in W$.

A su vez, este último implica

$$Sup\{f(gx_0)|\ g \in G\} - \varepsilon < Sup\{f(gx)|\ g \in G\}$$

$$< Sup\{f(gx_0)|\ g \in G\} + \varepsilon.$$

En otras palabras,

$$f^*(x_0) - \varepsilon < f^*(x) < f^*(x_0) + \varepsilon$$

para todo $x \in W$. Esto completa la prueba de la continuidad de f^*. □

Demostración de la proposición 1.2.9.

1. Sea X un G-espacio de Tychonoff, $A \subset X/G$ un cerrado y $z \in (X/G) \setminus A$. Sea $p : X \to X/G$ la proyección orbital. Consideremos los siguientes subconjuntos de X:

$$K = p^{-1}(z) \quad \text{y} \quad A' = p^{-1}(A).$$

Entonces A' es un cerrado en X, mientras que K es un compacto (K es una orbita y como G es compacto, esta orbita tiene que ser tanbién compacto). Elijamos una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(K) = 0$ y $f(A') = 1$. Entonces para la función invariante $f^* : X \to [0,1]$ del lema 1.2.10, tenemos $f^*(K) = 0$ y $f^*(A') = 1$. Como f^* es invariante, existe una única función continua $\widetilde{f} : X/G \to [0,1]$ tal que $f^* = \widetilde{f}p$. Para $\widetilde{f}$ tenemos

$$\widetilde{f}(z) = 0 \quad \text{y} \quad \widetilde{f}(A) = 1,$$

es decir f^* es la función buscada.

2. Sea X un G-espacio normal, A $B \subset X/G$ dos cerrados ajenos en X/G. Consideremos los siguientes subconjuntos de X:

$$A' = p^{-1}(A) \quad \text{y} \quad B' = p^{-1}(B).$$

Eligamos una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A') = 0$ y $f(B') = 1$. Entonces para la función invariante $f^* : X \to [0,1]$ del lema 1.2.10, tenemos $f^*(A') = 0$ y $f^*(B') = 1$. Como f^* es invariante, existe una única función continua $\widetilde{f} : X/G \to [0,1]$ tal que $f^* = \widetilde{f}p$. Para $\widetilde{f}$ tenemos

$$\widetilde{f}(A) = 0 \quad \text{y} \quad \widetilde{f}(B) = 1,$$

con lo cual se termina la demostración.

Por G/H denotaremos el G-espacio cociente $\{gH | \ g \in G\}$ bajo la acción inducida por la translación izquierda. La familia de todos los subgrupos de G que son conjugados de H lo denotaremos por (H):

$$(H) = \{gHg^{-1} | \ g \in G\}.$$

El conjunto (H) se llama *tipo orbital* (ó simplemente *un tipo de órbita)*. El conjunto de todos los tipos de órbita se denota por T_G.
Ahora, para dos tipos de órbita (H_1) y (H_2) se dice que $(H_1) \preceq (H_2)$ si y sólo si $H_1 \subset gH_2g^{-1}$ para algún $g \in G$.
Si $(H_1) \preceq (H_2)$ y $(H_1) \neq (H_2)$ entonces escribimos $(H_1) \prec (H_2)$. La relación $\preceq$ es un ordenamiento parcial en el conjunto de todos los tipos de G-órbitas

Ahora, sea X un G-espacio. Como $G_{gx} = gG_xg^{-1}$ para todo $x \in X$, $g \in G$, tenemos que

$$(G_x) = \{G_{gx} | \ g \in G\}.$$

Esto significa que los estabilizadores de puntos en la misma órbita $G(x)$ tienen el mismo tipo de órbita (G_x)

Si $(G_x) = (H)$ para todo $x \in X$ y un subgrupo serrado $H \subset G$ entonces se dice que X *tiene un solo tipo orbital* (H). Es claro que X es un G-espacio libre si y sólo si X tiene un solo tipo orbital del subgrupo trivial de G

Definición 1.2.11. *Una función continua $f : X \to Y$ entre G-espacios es una G*-`aplicación` *ó* `función equivariante` *si satisface*

$$f(gx) = gf(x), \quad \textit{para cada} \quad g \in G, \quad x \in X.$$

En el caso que Y es un G-espacio trivial, es decir G actúa trivialmente sobre Y, entonces la función equivariante $f : X \to Y$ será llamada invariante. Así, para una función equivariante se cumple

$$f(gx) = f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in X, \quad g \in G.$$

En lo que sigue $\cong_G$ significará *"es G-homeomorfo."*

Notamos que la función identidad es equivariante y la composición de dos funciones equivariantes es equivariante. Así, los G-espacios como objetos y las G-aplicaciones como morfismos forman una categoría, la cual denotaremos por G-Top. Tenemos que toda función equivariante f satisface $G_x \subset G_{f(x)}$ para todo $x \in X$. Además f transforma órbitas en órbitas puesto que $f(Gx) \subset G\big(f(x)\big)$, e induce una función en los espacios de órbitas, como veremos a continuación.

- Un mapeo equivariante $f : X \to Y$ de G espacios se dice *isovariante* si $G_x = G_{f(x)}$ para todo $x \in X$.
- Si X_λ, $\lambda \in \Lambda$ son G-espacios entonces el producto $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ será tratado como un G-espacio equipado por la *acción diagonal* de G, es decir

$$g\{x_\lambda\} = \{gx_\lambda\} \qquad \text{para todo} \qquad \{x_\lambda\} \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$$

- Un G-espacio X se llama *G-espacio lineal* si es un espacio topológico lineal con la acción lineal del grupo G, i.e.,

$$g(\lambda x + \mu y) = \lambda(gx) + \mu(gy) \text{ para todo } g \in G, \quad x, y \in X, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Un G-espacio es G-espacio *lineal normado (ó G-espacio de Banach, ó G-espacio Euclidiano)* es un espacio lineal normado (ó de Banach, ó Euclideano) con la acción lineal e isométrica de grupo G.

Lema 1.2.12. *Sea G un grupo y $f : X \to Y$ una función equivariante. Entonces existe una única función continua*

$$\tilde{f} : X/G \to Y/G$$

que hace conmutativa el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ p\downarrow & & q\downarrow \\ X/G & \xrightarrow{\widetilde{f}} & Y/G \end{array}$$

en donde p y q son las proyecciones orbitales.
Más aún, si f es un G-homeomorfismo, entonces $\widetilde{f}$ es un homeomorfismo.

Demostración. Definimos $\widetilde{f}$ según la regla

$$\widetilde{f}\big(G(x)\big) = G\big(f(x)\big), \qquad G(x) \in X/G.$$

Entonces $qf = \widetilde{f}p$, es decir el diagrama es conmutativo. Más aún, de la igualdad $qf = \widetilde{f}p$ se sigue la unicidad de la función $\widetilde{f}$. La continuidad de $\widetilde{f}$ se sigue de la siguiente igualdad:

$$\widetilde{f}^{-1}(V) = p\Big(f^{-1}\big(q^{-1}(U)\big)\Big),$$

donde V es un abierto en Y/G.
En efecto, como q y f son continuas, $f^{-1}\big(q^{-1}(U)\big)$ es abierto en X, y como la proyección p es abierta, entonces $\widetilde{f}^{-1}(V)$ es abierto en X/G.

Ahora, sea f un homeomorfismo equivariante. Entonces $\widetilde{f}$ es biyectiva. Verifiquemos que $\widetilde{(f)}$ es abierta. En efecto, sea $U \subset X/G$ un abierto. De la conmutatividad del diagrama sigue que

$$\widetilde{f}(U) = q\Big(f\big(p^{-1}(U)\big)\Big).$$

Como p es continua $p^{-1}(U)$ es abierto en X y como las funciones f y q son abiertas, entonces $\widetilde{f}(U)$ es abierto en Y/G. □

La noción de la rebanada quizás es la más poderoso en toda la teoría de los grupos topológicos de transformaciones. En los capitulos 2 y 3 esta noción jugará un papel desisivo. Aquí está la definición exacta [29, p. 27]:

Definición 1.2.13. *Un subconjunto S de un G-espacio X se llama una H-*rebanada *en X si*

1. *S es H-invariante, i.e., $H(S) = S$,*

2. *la saturación $G(S)$ es abierta en X,*

3. *si $g \in G \setminus H$ entonces $gS \cap S = \emptyset$,*

4. *S es cerrado en $G(S)$.*

*La saturación $G(S)$ se dice que es un H-*tubo. *Si además $G(S) = X$, entonces decimos que S es H-*rebanada global *de X.*

Con la noción de la rebanada está estrechamente relacionada la noción de *un producto torcido.*

Más precisamente, sea S un H-espacio con $H \subset G$ un subgrupo cerrado. Consideramos el producto $G \times S$ en el que H actúa mediante la regla:

$$h(g, s) = (gh^{-1}, hs), \quad \text{donde} \quad h \in H \quad \text{y} \quad (g, s) \in G \times S.$$

El producto torcido es simplemente el espacio orbital $(G \times S)/H$ que se denota por lo general como $G \times_H S$.

De vuelta G actúa en $G \times_H S$ por la fórmula

$$g'[g, s] = [g'g, s] \quad \text{donde} \quad g' \in G, \quad [g, s] \in G \times_H S.$$

Teorema 1.2.14. *Sea G un grupo compacto, H un subgrupo cerrado de G, X un G-espacio y S una H-rebanada global para X. Entonces X es G-homeomorfo al producto torcido $G \times_H S$.*

Demostración. Consideremos el siguiente diagrama conmutativa

$$\begin{tikzcd} G \times S \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "p"'] & X \\ G \times_H S \arrow[ur, "\tilde{\theta}"'] & \end{tikzcd}$$

donde θ es la acción, p es la proyección H-orbital y $\widetilde{\theta}$ es la función inducida por θ. Aquí, como θ evidentemente es constante sobre las H-orbitas del H-espacio $G \times S$, vemos que de verdad $\widetilde{\theta}$ está bien definida por la formula

$$\widetilde{\theta}([g,s]) = \theta(g,s).$$

Según la proposición 1.2.3, la acción θ es una funcción abierta y por lo tanto la función inducida $\widetilde{\theta}$ también es abierta. Como S es una H-rebanada global, θ es suprayectiva y por lo tanto $\widetilde{\theta}$ también es suprayectiva. Constatemos que $\widetilde{\theta}$ es inyectiva. En efecto, sea

$$\widetilde{\theta}([g_1,s_1]) = \widetilde{\theta}([g_2,s_2]),$$

donde $[g_1,s_1]$, $[g_2,s_2] \in G \times_H S$. Entonces tenemos $g_1 s_1 = g_2 s_2$, y por lo tanto, $s_1 = g_1^{-1} g_2 s_2$. Esto implica que $s_1 \in S \cap g_1^{-1} g_2 S$, y debido al hecho que S es una H-rebanada concluimos que $g_1^{-1} g_2 \in H$. Así, $g_1 = g_2 h^{-1}$ y $s_1 = h s_2$ con $h \in H$. De aquí sigue que $[g_1,s_1] = [g_2 h^{-1}, h s_2] = [g_2, s_2]$, i.e., $\widetilde{\theta}$ es inyectiva. Ahora, siendo una función biyectiva, continua y abierta, $\widetilde{\theta}$ es un homeomorfismo.

$\square$

Uno de los resultados básicos en la teoría de grupos de transformaciones es el siguiente Teorema sobre la Rebanada (ver e.g., [**29**, Teorema 1.7.18] ó [**6**, C.II, Teorema 5.4]) que afirma lo siguiente:

Teorema 1.2.15. *Si X es un G-espacio y $x \in X$ entonces existe una G_x-rebanada $S \subset X$ que contiene el punto x.*

Una consecuencia importante del Teorema sobre la Rebanada es que si X es un G-espacio con todas sus órbitas del mismo tipo, entonces el mapeo orbital $X \to X/G$ es una fibración localmente trivial [**6**, C.II, Teorema 5.8].

En el capítulo 2, vamos a necesitar el teorema sobre la rebanada el teorema sobre la rebanada en la siguiente forma más desarollada:

Teorema 1.2.16. *Si X es un G-espacio y $x \in X$ entonces existe una vecindad invariante V de la orbita $G(x)$ y una G-función equivariante y abierta $f : V \to G/G_x$ tal que $S = f^{-1}(eG_x)$ es una G_a-rebanada con $x \in S$.*

Demostración. Por el teorema 1.2.15, existe una G_x-rebanada S tal que $x \in S$. Entonces la saturación $V = G(S)$ es una vecindad invariante de la orbita $G(x)$. Según el teorema 1.2.14, V se puede identificar como G-espacio con el producto torcido $G \times_{G_a} S$ mediante el G-homeomorfismo $\widetilde{\theta} : G \times_{G_a} S \to G(S)$ de la demostración del teorema 1.2.14. Sea $p : G \times S \to G$ la proyección ordinaria y $h : G \times_{G_a} S \to G/G_x$ la función inducida por p. Como p es abierta, lo es h. Sea f la composición $h\widetilde{\theta}^{-1}$. Entonces $f : V \to G/G_x$ es una G-función equivariante y abierta. Además, la preimagen $f^{-1}(eG_x)$ es precisamente el conjunto S. $\square$

2.1. Métrica invariante. En esta subsección se menciona qué es una métrica invariante y cuáles son las condiciones para que en un G-espacio metrizable exista una métrica invarianre.

Definición 1.2.17. *Una métrica ρ para un G-espacio metrizable X, compatible con su topología, es una* `métrica invariante` *si*

$$\rho(gx, gy) = \rho(x, y) \quad \textit{para todo} \quad g \in G, \quad y \quad x, y \in X,$$

esto es, si el homemorfismo θ_g es una isometría respecto a la métrica ρ, para todo $g \in G$.

En este caso decimos que la acción del grupo G es isométrica (con respecto a la métrica ρ). La siguiente proposición establece una condición para la existencia de una métrica invariante.

Proposición 1.2.18. *Sean G un grupo compacto, X un G-espacio metrizable. Entonces existe una métrica invariante ρ para X.*

Demostración. Sea ρ cualquier métrica consistente con la topología de X. Para $x, y \in X$ definimos $d(x,y) = \sup_{g \in G} \rho(gx, gy)$. Afirmamos que d es la métrica buscada. En efecto,

$$d(hx, hy) = \sup_{g \in G} \rho(ghx, ghy) = \sup_{gh \in G} \rho(ghx, ghy) = d(x, y).$$

Probemos ahora que ρ y d generan la misma topología de X. Para esto, mostremos que cualquier sucesión de puntos $\{x_n\}$ en X converge a x_0 en (X, d) si y sólo si $\{x_n\}$ converge al mismo punto x_0 en (X, ρ). Como $\rho(x, y) \leq d(x, y)$, entonces claramente x_n converge a x_0 en (X, d) implica que x_n tiende a x_0 en (X, ρ).
Supongamos ahora que x_n tiende a x_0 en (X, ρ), es decir, para todo $\epsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $\rho(x_n, x_0) < \epsilon$, para toda $n \geq N$. Afirmamos que x_n tiende a x_0 en (X, d). En efecto, sean

$$\epsilon > 0, \quad g \in G \quad \text{y} \quad V_g = \{y \in X : \rho(gx_0, y) < \frac{\epsilon}{2}\}.$$

V_g es una vecindad abierta de gx_0. Por continuidad de la acción podemos elegir vecindades abiertas O_g de g y $W_g = \{y \in X : \rho(x_0, y) < \delta_g\}$ de x_0 tales que

$$\theta(O_g \times W_g) \subset V_g.$$

Luego, para cada $h \in O_g$ y $x \in W_g$, se tiene que $hx \in V_g$, esto es

$$(**) \qquad\qquad \rho(hx, gx_0) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por la compacidad de G existen $g_1, \ldots, g_n \in G$ y vecindades O_{g_i} de g_i con $i = 1, \ldots, n$, tales que

$$G = \bigcup_{i=1}^{n} O_{g_i}.$$

Además, para cada O_{g_i}, existe su respectivo

$$W_{g_i} = \{y \in X |\ \rho(x_o, y) < \delta_{g_i} \quad \text{tal que} \quad \theta(O_{g_i} \times W_{g_i}) \subset V_{g_i}.$$

Sea $\delta = \min\{\delta_{g_1}, \ldots, \delta_{g_n}\}$. Debido a que x_k converge a x_0 en (X, ρ),

entonces para cada δ existe $N_1 > 0$ tal que $\rho(x_k, x_0) < \delta \leq \delta_{g_i}$, para toda $k \geq N_1$.
Tenemos entonces que cualquier g debe estar en algún O_g y x_k en W_{g_i}, lo que implica, por (**), que

$$\rho(gx_k, g_i x_0) < \frac{\epsilon}{2}.$$

De esta manera,

$$\rho(gx_k, gx_0) \leq \rho(gx_k, g_i x_0) + \rho(g_i x_0, gx_0) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \text{para} \quad k \geq N_1.$$

Luego, tomando supremos, se tiene que $\sup\limits_{g \in G}(gx_k, gx_0) \leq \epsilon$, es decir,

$$d(x_k, x_0) \leq \epsilon, \quad \text{para toda} \quad k \geq N_1.$$

Hemos probado entonces que x_k tiende a x_0 en (X, d). □

3. Acciones en espacios de funciones

A continuación denotaremos por $C(X, Y)$ la familia de todas las funciones continuas del espacio X al espacio Y. Para un subconjunto K de X y un subconjunto U de Y, denotaremos

$$M[K, U] = \{f \in C(X, Y) | \ f(K) \subset U\}.$$

La familia de todos los subconjuntos de la forma $M[K, U]$, con K un subconjunto compacto de X y U un subconjunto abierto en Y, es una subbase para la llamada *topología compacto-abierta.* En este trabajo siempre vamos a considerar en $C(X, Y)$ la topología compacto-abierta.

La familia de intersecciones finitas de conjuntos $M[K, U]$ es una base para la topología compacto-abierta; así cada elemento de esta base es de la forma

$$\bigcap_{i=0}^{n} M[K_i, U_i]$$

con n un entero positivo, donde cada K_i es un subconjunto compacto de X y cada U_i es un subconjunto abierto de Y.

Ahora, sea G un grupo topológico, X un G-espacio y Y un espacio topológico.

Consideremos la acción ϕ de G en $C(X,Y)$ definida por:

$$(*) \qquad \begin{cases} \phi : G \times C(X,Y) \to C(X,Y) \\ (g,f) \to gf; \qquad (gf)(x) = f(g^{-1}x) \end{cases}$$

Tiene lugar el siguiente

Teorema 1.3.1. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces la acción $(*)$ arriba definida es continua.*

Demostración. Sea $g_0 \in G$, $f_0 \in C(X,Y)$, K un compacto en X, U un abierto en Y tal que $M[K,U]$ es un abierto de la subbase de la topología de $C(X,Y)$ que contiene a $g_o f_o$, es decir $(g_o f_o)(K) \subset U$. Sea $x \in K$, entonces $(g_o f_o)(x) = f_o(g_o^{-1}x) \in U$. Por la continuidad de f_o en el punto $g_o^{-1}x$, existe un abierto $W_x \subset X$ tal que $g_o^{-1}x \in W_x$ y $f_o(W_x) \subset U$. Ahora, por la continuidad de la acción G en X, para cada $x \in K$, existen abiertos $G \supset O_x \ni g_o$ y $X \supset S_x \ni x$ tales que $O_x^{-1}S_x \subset W_x$. Así, por ser G localmente compacto, existe $A_x \ni g_o$ tal que $\overline{A_x} \subset O_x$ y $\overline{A_x}$ es compacto. Ahora, la familia $\{S_x \mid x \in K\}$ es una cubierta abierta de K, y por ser éste compacto, existe una subfamilia finita $\{S_{x_1}, ..., S_{x_p}\}$ de $\{S_x \mid x \in K\}$ que cubre a K. Para cada S_{x_i} con $1 \leq i \leq p$, existen sus correspondientes O_{x_i} y los A_{x_i}. Ahora definimos $A = \bigcap_{i=1}^{i=p} A_{x_i}$. Entonces A es una vecindad de g_o y $\overline{A} \subset \bigcap_{i=1}^{i=p} \overline{A_{x_i}}$. Entonces $\overline{A}$ es compacto. Por lo tanto $T = \overline{A^{-1}}K$ es un compacto en X. Así $f_o \in M[T,U]$, porque para toda $t \in T$ existe $1 \leq i \leq p$ tal que $t \in \overline{A_{x_i}^{-1}}S_{x_i} \subset O_{x_i}^{-1}S_{x_i} \subset W_{x_i}$, así tenemos $f_o(T) \subset U$. Afirmamos que para todo $g \in A$ y para todo $\phi \in M[T,U]$ se cumple $g\phi \in M[K,U]$. En efecto, si $x \in K \subset \bigcup_{i=i}^{i=p} S_{x_i}$, existe $1 \leq j \leq p$ tal que $x \in S_{x_j}$ y $g \in A_{x_j}$, así

$$g^{-1}x \in A^{-1}S_{x_j} \subset \overline{A^{-1}}K = T$$

con lo cual $(g\phi)(x) = \phi(g^{-1}x) \in \phi(T) \subset U$, así $g\phi \in M[K, U]$ con esto la demostración está terminada. □

Otro caso en el que la acción $(*)$ es continua, es cuando se pide que X posea compacidad local mientras el grupo G puede ser cualquiera. Pero aquí no necesitaremos este resultado.

La acción $(*)$ arriba definida, en general, no es continua si no cuenta con restricciones de compacidad local como se pidió en los resultados anteriores. Ahora mostraremos en un ejemplo que la acción $(*)$ puede ser discontinua.

Ejemplo 1.3.2. *Sea $G = Q$ el grupo aditivo de números racionales. Entonces la función de evaluación $\omega : Q \times C(Q, I) \to I$ con $\omega(x, f) = f(x)$ es discontinua (ver* [**12**, pag. 419].

Ahora afirmamos que la acción $(*)$

$$\phi : Q \times C(Q, I) \to C(Q, I)$$

también es discontinua. En efecto, supongamos que ϕ es continua. Sea $\beta : C(Q, I) \to I$ la función definida por la fórmula $\beta(f) = f(0)$. Entonces la composición $\alpha = \beta\phi : Q \times C(Q, I) \to I$ también es continua. Pero $\alpha(x, f) = (\beta\phi)(x, f) = \beta[\phi(x, f)] = \beta(xf) = (xf)(0) = f(x)$ para todo $x \in Q$, $f \in C(Q, I)$. Por lo tanto $\alpha = \omega$. Pero ω no es continua. Esta contradicción muestra que en realidad la acción ϕ es discontinua.

En lo que sigue nosotros necesitaremos considerar el caso cuando G es un grupo cualquiera (no necesariamente localmente compacto), $Y = \mathbb{R}$, y además vamos considerar la restricción de la acción $(*)$ en subconjuntos equicontinuos E de $C(X, \mathbb{R})$. Resulta que en este caso la acción $(*)$ sigue siendo continua.

Primero vamos a establecer una cadena de lemas que culminan en la demostración de la afirmación que acabamos de mencionar.

Definición 1.3.3. *Un subconjunto $E \subset C(G, \mathbb{R})$ se llama equicontinuo en un punto dado $x_0 \in G$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una vecindad*

U de x_0 tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \textit{para todo} \qquad f \in E, \quad x \in U.$$

Tiene lugar el siguiente

Lema 1.3.4. *Si G un grupo cualquiera, X un G-espacio y $E \subset C(X, \mathbb{R})$ un subconjunto equicontinuo. Entonces la función*

$$\beta : G \times X \times E \to Y$$

definida con la regla

$$\beta(g, x, f) = f(g^{-1}x); \quad g \in G, \ x \in X, \ f \in E$$

es continua.

Demostración. Sean $(g_0, x_0, f_0) \in G \times X \times E$ y denotemos

$$y_0 = \beta(g_0, x_0, f_0) = f_0(g_0^{-1}x_0)$$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.

Por la equicontinuidad de E en el punto $g_0^{-1}x_0$, existe una vecindad $W \subset X$ de $g_0^{-1}x_0$ tal que

$$|f(x) - f(g_0^{-1}x_0)| < \varepsilon/2 \quad \text{para todo} \quad x \in W, \quad f \in E.$$

Por la continuidad de la acción G en X, existen una vecindad $O \subset G$ de g_0 y una vecindad $S \subset X$ de x_0 tal que $O^{-1}S \subset W$. Consideramos la siguiente vecindad de f_0 en $E \subset C(X, \mathbb{R})$:

$$M[g_0^{-1}x_0, U] = \Big\{\phi \in E | \ \phi(g_0^{-1}x_0) \in U\Big\},$$

donde $U = (y_0 - \varepsilon/2, y_0 + \varepsilon/2) \subset \mathbb{R}$.

Afirmamos que

$$\beta(g, x, \phi) \subset (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$$

para todo $g \in O$, $x \in S$ y $\phi \in M[g_0^{-1}x_0, U]$.

En efecto, tenemos que $g^{-1}x \in O^{-1}S \subset W$

$$(1.3) \qquad |\phi(g^{-1}x) - \phi(g_0^{-1}x_0)| < \varepsilon/2$$

$$(1.4) \qquad |\phi(g^{-1}x_0) - y_0| < \varepsilon/2.$$

Como $y_0 = f_0(g_0^{-1}x_0)$, de estas desigualdades se sigue que

$$|\phi(g^{-1}x) - y_0| < \varepsilon,$$

es decir, $\phi(g^{-1}x) \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Obsevando que $\beta(g, x, \phi) = \phi(g^{-1}x)$ se concluye la demostración. □

Lema 1.3.5. *Sea G, X, $E \subset C(X, \mathbb{R})$ y $\beta : G \times X \times E \to \mathbb{R}$ como en el lema anterior. Sean además K un compacto en X y ε un número real positivo. Entonces para cualesquiera $g_0 \in G$ y $f_0 \in E$, existen vecindades $O \subset G$ y $A \subset E$ de los puntos g_0 y f_0, respectivamente, tales que*

$$|\beta(g, x, f) - \beta(g_0, x, f_0)| < \varepsilon \quad \textit{para todo} \quad (g, f) \in O \times A, \quad x \in K.$$

Demostración. Para todo x en K consideremos $g_0^{-1}x \in X$. Como E es equicontinua en el punto $g_0^{-1}x$, entonces existe una vecindad W_x de $g_0^{-1}x$ tal que

$$(1.5) \qquad |f(z) - f(g_0^{-1}x))| < \varepsilon/4 \quad \text{para toda } f \in E, \quad z \in W_x.$$

Ahora, por la continuidad de la acción de G en X, existen para cada $x \in K$, $O_x \subset G$, una vecindad de g_0, y $S_x \subset X$, una vecindad de x, tales que

$$O_x^{-1} S_x \subset W_x.$$

Como K es compacto, su cubierta abierta

$$\gamma = \{S_x | \ x \in K\}$$

tiene una subcubierta finita $\{S_{x_1}, ..., S_{x_n}\}$.

Consideremos las correspondientes vecidades $O_{x_1}, ..., O_{x_n}$ de los elementos $g_0^{-1}x_1, g_0^{-1}x_2, ..., g_0^{-1}x_n$, respectivamente. Así, para $1 \leq i \leq n$, denotamos

$$A_i = \{\phi \in C(X,Y)\big| \ |\phi(g_0^{-1}x_i) - f_0(g_0^{-1}x_i)| < \varepsilon/4\}.$$

Como

$$A_i = M[g_0^{-1}x_i, U_i] \qquad \text{con} \qquad U_i = \left(f_0(g_0^{-1}x_i) - \varepsilon/4, f_0(g_0^{-1}x_i) + \varepsilon/4\right),$$

cocluimos que cada A_i, y por lo tanto la intersección $A' = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, son abiertos en $C(X,\mathbb{R})$. Sea

$$A = A' \cap E.$$

Entonces A es una vecindad de f_0 en E. Claramente, $O = \bigcap_{i=1}^{n} O_{x_i}$ es una vecindad de g_0 en G.

Afirmamos que A y O son las vecindades que necesitamos, es decir que satisfacen lo siguiente:

$$|(gf)(x) - (g_0f_0)(x)| = |f(g^{-1}x) - f_0(g_0^{-1}x)| < \varepsilon$$

siempre cuando x esté en K, f en A y g en O.

Si f está en A, entonces $f \in A_i$ para todo $1 \leq i \leq n$, y por lo tanto tendremos

$$(1.6) \qquad |f(g_0^{-1}x_i) - f_0(g_0^{-1}x_i)| < \varepsilon/4$$

Para toda $x \in K$ se tiene que $x \in S_{x_i}$ con algún $1 \leq i \leq n$. Al mismo tiempo, $g \in O \subset O_{x_i}$, y por lo tanto, $g^{-1}x \in O_{x_i}^{-1}S_{x_i} \subset W_{x_i}$. Consequentemente, si $f \in A$, obtendremos de (1.5)

$$(1.7) \qquad |f(g^{-1}x) - f(g_0^{-1}x_i)| < \varepsilon/4.$$

De la desigaldad (1.7), poniendo $f = f_0$, obtendremos

$$(1.8) \qquad |f_0(g_0^{-1}x_i) - f_0(g^{-1}x)| < \varepsilon/4.$$

De (1.6) y (1.8) tenemos

$$(1.9) \qquad |f_0(g^{-1}x) - f(g_0^{-1}x_i)| < \varepsilon/2.$$

Ahora (1.7) y (1.9) implican

$$\begin{aligned} |f(g^{-1}x) - f_0(g_0^{-1}x)| &\leq |f(g^{-1}x) - f(g_0^{-1}x_i)| \\ &+ |f(g_0^{-1}x_i) - f_0(g_0^{-1}x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Para concluir la demostración falta nada más ver que

$$|\beta(g, x, f) - \beta(g_0, x, f_0)| = |f(g^{-1}x) - f_0(g_0^{-1}x)|.$$

□

Teorema 1.3.6. *Sea G un grupo, X un G-espacio y E un subconjunto de $C(X, \mathbb{R})$ equicontinuo en cada punto del espacio X. Si E es invariante bajo la acción (∗) arriba definida, entonces la restricción de esta acción en E es continua.*

Demostración. Como el subconjunto E es equicontinuo, su topología compacto-abierta coincide con la topología de convergencia puntual y la función evaluación

$$\Omega : E \times X \to Y; \quad \Omega(f, x) = f(x),$$

es continua (ver [**20**, Ch. 7, Theorem 15]). Seleccionamos, de forma arbitraria, un punto $(g_0, f_0) \in G \times E$ y una vecindad subbásica $M[K, U]$ de $g_0 f_0$ en E, donde $K \subset X$ es un compacto y $U \subset \mathbb{R}$ es un abierto. Recordemos que $M[K, U]$ es la familia de todas las funciones $f \in C(X, \mathbb{R})$ tales que $f \in E$ y $f(K) \subset U$.

Como $(g_0 f_0)(K) = f_0(g_0^{-1}K)$ es compacto y está contenido en U, existe un $\varepsilon > 0$ tal que la ε-vecindad de $f_0(g_0^{-1}K)$ también está contenida en U.

Ahora apliquemos el lema 1.3.5 para $g_0 \in G$, $f_0 \in E$, $K \subset X$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existen una vecindad O de g_0 en G y una vecindad A de f_0 en E tales que

$$|\beta(g, x, f) - \beta(g_0, x, f_0)| < \varepsilon \qquad \text{para todo} \qquad x \in K,\ g \in O \text{ y } f \in A.$$

Como $\beta(g, x, f) = (gf)(x)$, se sigue que $(gf)(x)$ está contenida en la ε-vecindad de $(g_0 f_0)(K)$, y por lo tanto, en U. Así, $(gf)(K) \subset U$. Esto significa que

$$gf \in M[K, U] \qquad \text{para todo} \qquad g \in O, \quad f \in A,$$

y la demostración esta concluida. $\square$

CAPITULO 2

G-compactaciones semilibres

1. G-compactaciones de G-espacios

Definición 2.1.1. *Sea X un G-espacio. El par (BX, b), donde BX es un G-espacio compacto y $b : X \to BX$ es un encaje equivariante, tal que $\overline{b(X)} = BX$ se llama una* G-`compactación del` G-`espacio` *X.*

Problema 1. *Cuando un G-espacio X posee una G-compactación?*

En esta sección vamos a investigar esta importante pregunta que dió origien al tema principal de la tesis presente

Para dar una imagen completa de esta rama vamos a demostrar aquí el teorema famoso de Jan de Vries [**33**] sobre la existencia de la G-compactación.

Primero consideremos el caso de un G-espacio localmente compacto X con G cualquier grupo topológico. Sea $X^* = X \cup \{\infty\}$ es la compactación de un punto de X. Es claro que si definimos $g(\infty) = \infty$ para todo $g \in G$, entonces X^* es un G-espacio. Así, X^* es una G-compactación para X.

Si X no es localmente compacto trataremos de compactificar X mediante la compactación de Stone-Čech βX de X. Entonces cada operación $g : X \to X$ de G en X se extiende únicamente a un homeomorfismo $\widetilde{g} : \beta X \to \beta X$ de βX y la función que manda $g \in G$ en esta operación $\widetilde{g}$ extendida es un homomorfismo de G en el grupo $H(\beta X)$ de homeomorfismos de βX. Desafortunadamente la función natural

$(g,x) \to \widetilde{g}(x)$ de $G \times \beta X$ en βX no es en general continua y de hecho si tomamos $x^* \in (\beta X) \setminus X$, entonces la función $g \to \widetilde{g}(x^*)$ tampoco es en general continua. Un ejemplo simple desarrollado por M. Jerison es el siguiente: $X = \mathbb{C}$, el plano complejo, $G = \mathbb{S}^1$, el círculo unitario, y la acción de G en X es la multiplicación compleja.

Si $\mathbb{R}$ es el eje real considerado como una red en βX con su orden usual y x^* es un punto límite de $\mathbb{R}$ en βX, entonces $e^{i\theta}x^*$ será un punto límite de $e^{i\theta\mathbb{R}}$. Sea $\overline{K}$ la cerradura del conjunto

$$K = \left\{ z \in X \;\middle|\; |Im(z)| \geq |Re(z)|^{-1} \right\}$$

en βX. Entonces se ve rápidamente que $\overline{K}$ es ajeno de la cerradura de $\mathbb{R}$ en βX (K y $\mathbb{R}$ puede separase por una función continua y acotada de valores reales en X, y cuya única extensión a βX separa $\overline{K}$ de la cerradura de $\mathbb{R}$). Por lo tanto $\beta X \setminus \overline{K}$ es una vecindad de x^*. Por otro lado si $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$, la red $e^{i\theta}\mathbb{R}$ está eventualmente en K y por tanto $e^{i\theta}x^*$ no se aproxima a x^* cuando $\theta \to 0$.

Definición 2.1.2. *Sea G un grupo. Por un G*-`compacto convexo` *mencionaremos un subespacio compacto convexo $K \subset C(G,\mathbb{R})$ invariante con respecto a la acción $G \times C(G,\mathbb{R}) \to C(G,\mathbb{R})$ definida por*

$$(gf)(x) = f(xg), \quad f \in C(G,\mathbb{R}), \quad g,x \in G. \tag{2.1}$$

tal que la restricción de esta acción sobre $G \times K$ es continua.

Otra definición que será importante en el transcurso de la tesis es la de un espacio G-Tychonoff, pero antes de definirla nos hace falta otro concepto que a continuación se anuncia.

Definición 2.1.3. *Sea G un grupo topológico, Z un G-conjunto. Una función $f : Z \to \mathbb{R}$ se llama G*-`uniforme` *si para toda $\epsilon > 0$, existe una vecindad O de e en G tal que*

$$|f(gz) - f(z)| < \epsilon$$

para toda $g \in O$, *y* $z \in Z$.

El siguiente lema es casi una reformulación de la definición anterior:

Lema 2.1.4. *En los condiciones de la definición anterior las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *La función* f *es* G*-uniforme,*
2. *La familia de funciones* $\{f\pi_z | z \in Z\} \subset C(G, \mathbb{R})$ *es equicontinua en* $e \in G$,
3. *La familia de funciones* $\{f\pi_z | z \in Z\} \subset C(G, \mathbb{R})$ *es equicontinua en todo punto* $g \in\in G$.

Definición 2.1.5. *Un* G*-espacio* X *se dice que es* G-`Ticonoff` *si para cualquier conjunto cerrado* $A \subset X$ *y cualquier punto* $x \in X \setminus A$ *existe una función* G*-uniforme* $f : X \to [0, 1]$ *tal que* $f(x) = 0$ *y* $A \subset f^{-1}(1)$.

Proposición 2.1.6. *Sea* G *un grupo,* X *un* G*-espacio y*

$$f : X \to \mathbb{R}$$

un mapeo G*-uniforme, acotado y continuo. Entonces existe un* G*-compacto convexo* $K_f \subset C(G, \mathbb{R})$ *y un único mapeo equivariante*

$$f_* : X \to K_f, \qquad \text{tal que} \qquad p_e f_* = f,$$

donde $p_e : K_f \to \mathbb{R}$ *es el mapeo evaluación en* $e \in G$ *(es decir,* $p_e(\varphi) = \varphi(e)$ *para toda función* $\varphi \in K_f$*).*

Demostración. Al definir

$$f_*(x)(g) = f(gx), \quad x \in X, \ g \in G,$$

tenemos el mapeo $f_* : X \to C(G, \mathbb{R})$. La continuidad de f_* sigue de que la topologia compacto-abierta es propia [**13**, p.149]. La condición $p_e f_* = f$ es evidente. Notamos que por el lema 2.1.4, la G-continuidad del mapeo f siqnifica la equicontinuidad de la imagen $f_*(X) \subset C(G, \mathbb{R})$ en cada punto del grupo G. De eso sigue y la equicontinuidad de la envoltura convexa $conv f_*(X)$.

Para cualquier $g \in G$ por p_g denotamos el mapeo de evaluación

$$C(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

en el punto $g \in G$. Para todo $g \in G$ tenemos $p_g(conv f_*(X)) \subset f(X)$.

Como el mapeo f es acotado, la cerradura de $p_g(conv f_*(X)) \subset f(X)$ es compacta. Entonces, segun el teorema Arzela-Ascoli la cerradura $K_f = \overline{conv f_*(X)}$ es compacta (ver [**21**, Theorema 8.28]. Ademas, grácias a la equicontinuidad de $conv f_*(X)$, su cerradura K_f también es equicontinua [**20**, Ch. 7, Theorem 14]. Entonces, segun el teorema 1.3.6, la acción del grupo G en K_f es continua. Es facil de ver que el mapeo $f_* : X \to K_f$ es equivariante.

Entonces se cumplen todas las propiedades de la proposicion 2.1.6. Falta demonstrar la unicidad del mapeo f_*.

Sea $F : X \to K_f$ un mapeo equivariante que satisface la condición $p_e F = f$. Entonces para todos $g \in G, x \in X$ tenemos
$F(gx)(e) = f(gx)$. Usando la equivariancidad de F, tenemos

$$F(gx)(e) = [gF(x)](e) = F(x)(g)$$

Entonces

$$f_*(x)(g) = f(gx) = F(gx)(e) = F(x)(g), \quad \text{i.e.} \quad f_* = F.$$

$\square$

Proposición 2.1.7. *Sea G un grupo arbitrario, X-un Gespacio de Tychonoff, $A \subset X$ un conjunto cerrado y $x \in X \setminus A$. Entonces existe un G-compacto convexo (respectivamente, metrizable) K_f y una función equivariante*

$$f : X \to K_f \quad \textit{tal que} \quad f(x) \notin \overline{f(A)}.$$

Demostración. Sea $\varphi : X \to [0,1]$ una función G-uniforme tal que $\varphi(x) = 0$ y $A \subset \varphi^{-1}(1)$. Definimos la función $f : X \to C(G, \mathbb{R})$ por medio de la fórmula

$$f(x)g(x) = \varphi(gx), \quad x \in X, \quad g \in G.$$

Esta función es equivariante según de la Proposición 2.1.6.

Denotamos por U el subconjunto abierto de $C(G, \mathbb{R})$ que consta de todas las funciones $h : G \to [0,1]$ tal que $h(e) < \frac{1}{3}$, donde e es el elemento identidad del grupo G. Obviamente

$$f(x) \in U \quad \text{y} \quad U \cap f(A) = \emptyset.$$

Consecuentemente, $f(x) \notin \overline{f(A)}$.

Más aun, por el lema 2.1.4, la G-uniformidad de la función φ equivale a la equicontinuidad uniforme del conjunto $f(X)$ en $C(G, \mathbb{R})$. Pero la cerradura convexa K_f del conjunto $f(X)$ en $C_K(G, \mathbb{R})$ también es equicontinua (ver [**20**, Ch. 7, Theorem 14]). Por el teorema de Arzela-Ascoli ver [**21**, Teorema 8.28], K_f es un conjunto compacto. Nos falta que se cumpla que K_f está dotado con la acción del grupo G. Para este fin consideramos la acción definida en (2.1) sobre el espacio $C(G, \mathbb{R})$. De acuerdo con el teorema 1.3.6, la restricción de esta acción para el subconjunto $G \times K_f$ es continua. Una simple vetrificación muestra que K_f es invariante con respecto a la acción dada en (2.1). Así, K_f es un G-compacto convexo y $f : X \to K_f$ es la función requerida. □

Los siguientes dos lemas son conocidos pero no pudimos encontrar una referencia comoda para ellos.

Lema 2.1.8. *Sea $\mathcal{F} = \{f_\mu : X \to Y_\mu,\ \mu \in M\}$ una familia de funciones continuas del espacio X a los espacios Y_μ. Supongamos que $\mathcal{F}$ separa los puntos de cerrados en X. Entonces el producto diagonal $F = \Delta\mathcal{F} : X \to \prod_{\mu \in M} Y_\mu$ que esta definida por la formula*

$$F(x) = \{f_\mu(x)\}_{\mu \in M}, \quad x \in X$$

es un encaje topológico en el producto $\prod_{\mu \in M} Y_\mu$.

Demostración. Sean x y y dos puntos diferentes en X. Como X es T_1-espacio, por la hypotesis $f_\mu(x) \neq f_\mu(y)$ para alguna función $f_\mu \in \mathcal{F}$ lo que significa que $F(x) \neq F(y)$. Así, F es inyectiva. La continuidad de las funciones $f_\mu \in \mathcal{F}$ implica inmediatamente que F es una función continua. Por eso nos queda de verificar nada más que la función $F : X \to F(X)$ es cerrada.

Sea $A \subset X$ un cerrado de X. Vamos a demostrar que $F(A)$ es cerrado en $F(X)$, es decir tiene lugar la igualdad

$$F(A) = \overline{F(A)} \cap F(X)$$

donde $\overline{F(A)}$ es la cerradura de $F(A)$ en el producto $\prod_{\mu \in M} Y_\mu$.

Tomemos cualquier punto $z \in \overline{F(A)} \cap F(X)$. Entonces $z = F(x_0)$ para algun punto $x_0 \in X$. Si $x_0 \in A$ entonces $z \in F(A)$. Si $x_0 \notin A$, entonces por la hipotesis $f_\lambda(x_0) \notin \overline{f_\lambda(A)}$ para algun elemento $f_\lambda \in \mathcal{F}$. Sea $U_\lambda = X_\lambda \setminus \overline{f_\lambda(A)}$ y $U_\mu = X_\mu$ para $\mu \in M \setminus \{\lambda\}$. Entonces el producto $U = \prod_{\mu \in M} U_\mu$ es un a vecindad para el punto $z = \{f_\mu(x)\}$. Como $U_\lambda \cap f_\lambda(A) = \emptyset$, vimos que $U \cap F(A) = \emptyset$. Pero esto contradice a la inclusión $z \in \overline{F(A)}$. Así F es cerrada y la demostración esta completa $\square$

Lema 2.1.9. *Sean X y Y_λ, $\lambda \in \Lambda$ espacios Tychonoff y sea el peso $wX = \tau$ infinito. Sea $\mathcal{F} = \{f_\lambda : X \to Y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de funciones continuas. Si $\mathcal{F}$ separa puntos de conjuntos cerrados de X. Entonces existe una subfamilia $K \subset \mathcal{F}$ de cardinalidad $Card K = \tau$ la cual también separa puntos y conjuntos cerrados en X.*

Demostración. Sea B una base de abiertos de X de cardinalidad τ Considere la familia D de todos los pares $(U_1, U_2) \in B \times B$, tal que

$\overline{U_1} \subset U_2$. Entonces existe una función $f_\lambda \in \mathcal{F}$ cumpliendo

$$\overline{f_\lambda(\overline{U_1})} \cap \overline{f_\lambda(X \setminus U_2)} = \emptyset \tag{2.2}$$

Claramente, $CardD = \tau$. Elijamos para cada par $(U_1, U_2) \in D$ una función $f_\lambda \in \mathcal{F}$ que cumple con (2.2), y sea K la familia de todas las funciones obtenidas de esta forma. Así, $CardK \leq CardD = \tau$. Para completar la prueba, es suficiente mostrar que K separa puntos y conjuntos cerrados en X. Sea $A \subset X$ un conjunto cerrado y sea $x \in X \setminus A$. Siendo B una base, existe un $U_2 \in B$ tal que $x \in U_2 \subset X \setminus A$. Como $\mathcal{F}$ separa puntos y subconjuntos cerrados de X, existe una función $f_\lambda : X \to Y_\lambda$, $f_\lambda \in \mathcal{F}$ tal que

$$f_\lambda(x) \notin \overline{f_\lambda(X \setminus U_2)}. \tag{2.3}$$

Siendo X y Y_λ espacios Tychonoff y f_λ una función continua, (2.3) implica que existe un $U_1 \in B$ tal que $x \in U_1, \overline{U_1} \subset U_2$ y (2.2) se cumple. Consecuentemente, el par (U_1, U_2) pertenece a D. De aquí

$$\overline{f(\overline{U_1})} \cap \overline{f(X \setminus U_2)} = \emptyset \tag{2.4}$$

donde $f \in \mathcal{F}$ es la función correspondiente al par (U_1, U_2). Siendo $f \in K$ y siendo (2.4) implica $f(x) \notin \overline{f(X \setminus U_2)}$ para $x \in U_1$. Esto completa la prueba. □

Teorema 2.1.10. *Sea G un grupo. Entonces para cualquier espacio G-Tychonoff X de peso infinito $\omega(X) = \tau$ existe una familia de G-compactos convexos $\{K_f \mid f \in F\}$ tal que $|F| = \tau$, donde $\mid F \mid$ es la potencia de F, y X posee un encaje equivariante en el producto $\prod\limits_{f \in F} K_f$ (dotado con la acción diagonal del grupo).*

Demostración. Por la proposición 2.1.7, la familia Φ de todas las funciones, equivariantes $f : X \to K_f$ con rangos en G-compactos convexos separa puntos de conjuntos cerrados en X. Y de aquí por el lema 2.1.9, es posible elegir una subfamilia $F \subset \Phi$ de potencia $\mid F \mid = \tau = \omega X$ que también separa los puntos de conjuntos cerrados en X. Tomando el producto diagonal de todas las funciones $f \in F$ obtenemos el encaje equivariante deseado $i : X \to \prod_{f \in F} K_f$ (ver el lema 2.1.8). □

Aquí está otro resultado que en caso de un grupo localmente compacto establece la existencia de un G-compacto *universal* de un peso dado.

Teorema 2.1.11. *Sea τ un cardinal infinito y sea G un grupo localmente compacto de peso $w\,G \leq \tau$. Entonces existe una familia $\{K_f, f \in F\}$ de G-compactos convexos, tal que $\mid F \mid = \tau$, y cada espacio G-Tychonoff X de peso $w\,X \leq \tau$ posee un encaje equivariante en el G-espacio $\prod_{f \in F} K_f$.*

Demostración. Consideremos el G-espacio $C(G, I^\tau)$, $I = [0, 1]$, dotado con la acción definida en (2.1). En virtud de la compacidad local de G, esta acción es continua (ver Teorema 1.3.1), y tenemos $w\,C(G, I^\tau) = \tau$ (ver [**13**, Theorem 3.4.16]). Aplicando el Teorema 2.1.10, encontramos una familia $\{K_f | \ f \in F\}$ de G-compactos convexos tal que $\mid F \mid = \tau$, y el G-espacio $C(G, I^\tau)$ admite un encaje equivariante en el producto $\prod_{f \in F} K_f$. Queda por mostrar que para todo espacio G-Tychonoff X, con $\omega X \leq \tau$, existe un encaje equivariante en el espacio $C(G, I^\tau)$. Esto puede hacerse tomando un encaje topológico $i : X \to I^\tau$ y definiendo la función $j : X \to C(G, I^\tau)$ como sigue:

$$j(x)(g) = i(gx), \ x \in X, \ g \in G.$$

Entonces la verificación directa muestra que j es un encaje equivariante. Notemos que $w\left(\prod_{f \in F} K_f\right) = \tau$. □

Tiene lugar el siguiente criterio:

Proposición 2.1.12. *Un G-espacio X posee una G-compactación si y sólo si X es de G-Tychonoff.*

Demostración. Es fácil de demonstrar que cualquier función continua definida en un G-compacto es G-continua. Entonces, cada G-espacio compacto es de G-Tychonoff. Como sigue de la definición el hecho de ser G-Tychonoff es hereditario (similar de ser de Tychonoff). Entonces si un G-espacio X posee una G-compactación, es de G-Tychonoff. Ahora, sea X un G espacio de G-Tychonoff cualquiera. Segun el teorema 2.1.10, podemos considerar, que X es un subconjunto invariante de algun G-espácio compacto $K(=\prod K_f)$. Tomando la ceradura $\overline{X}$ en K, obtenemos una G-compactación de X. □

Finalmente nos acercamos al teorema principal de esta sección.

Teorema 2.1.13 (de Vries [**33**]). *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces todo G-espacio de Tychonoff es de G-Tychonoff.*

Segun de la proposición 2.1.12, es suficiente probar que las funciones G-uniformes $f : X \to [0,1]$ separan puntos de cerrados en X.

Primero establescamos algunos lemas necesarios.

Lema 2.1.14. *Existe un conjunto Φ de funciones de valor real en G, uniformemente continuas por la izquierda tal que*

(a) *Para cada $\phi \in \Phi$ se cumple $\phi(e) = 0$ y $\phi(t) \geq 0$, $t \in G$;*
(b) *Para todo $e \neq t \in G$ existe $\phi \in \Phi$ tal que $\phi(t) > 0]$;*
(c) *Para todo $\phi \in \Phi$ el conjunto $A_\phi = \{t \in G|\ \phi(t) \leq 2\}$ es un subconjunto compacto de G.*

Demostración. Como G es un grupo localmente compacto y Hausdorff, existe una base local β en e tal que $cl(U)$ es compacto para todo $U \in \beta$. Elijamos para todo $U \in \beta$ una función continua

$$\phi_U : G \to [0,3] \quad \text{tal que} \quad \phi_U(e) = 0 \quad \text{y} \quad \phi_U(t) = 3 \quad \text{si} \quad t \in G \setminus U.$$

Tomemos ahora $\Phi = \{\phi_U|\ U \in \beta\}$. Como para cada $U \in \beta$, ϕ_U es constante fuera de un conjunto compacto (viz. $cl(U)$), entonces es claro que ϕ_U es uniformemente continua por la izquierda. □

Observación 1. *Consideremos Φ como antes y si para $(n, \phi) \in N \times \Phi$ definimos*

$$U_{n,\phi} = \{t \in G | \ \phi(t) \leq 1/n\}$$

Entonces $U_{n,\phi}$ es una vecindad compacta de e en G y

$$\bigcap \left\{ U_{n,\phi} \middle| (n, \phi) \in N \times \Phi \right\} = \{e\}$$

De lo anterior se sigue fácilmente que $\{U_{n,\phi} | (n, \phi) \in N \times \Phi\}$ es una base local en e (ver e.g. [16], *la prueba del teorema 8.5, que puede ser adecuada a esta situación). En particular, si Φ es contable, entonces G es metrizable (cf.* [16, Theorem 8.3]*). De manera inversa, si G es metrizable, se puede elejir Φ tal que contenga un sólo elemento: el conjunto*

$$\phi(t) = \{d(e, t) \ |(t \in G)\}$$

donde d es una métrica invariante por izquierda para G tal que $\{t \in G | \ d(e, t) \leq 2\}$ sea compacto.

Fijemos un conjunto Φ como se indica en el lemma 2.1.14. Para toda $f \in C(X, [0, 1])$ y $\phi \in \Phi$, podemos definir $\hat{f}_\phi : X \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$\hat{f}_\phi(x) := \inf_{t \in G} \left\{ \phi(t) + f(tx) \right\} \tag{2.5}$$

para $x \in X$.

Lema 2.1.15. *Las funciones*

$$\hat{f}_\phi, \quad f \in C(X, [0, 1] \quad y \quad \phi \in \Phi$$

mapean X continuamente en el intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Claramente,

$$0 \leq \hat{f}_\phi(x) \leq \phi(e) + f(x) = f(x) \leq 1$$

para todo $x \in X$. Entonces sólo necesitamos probar la continuidad de $\hat{f}_\phi$. Para ello primero observemos que para todo $t \in G$ se tiene que

$$\phi(t) + f(tx) \geq 2 > 1 \geq \hat{f}_\phi(x).$$

Por lo tanto, con A_ϕ definida en (c) del lema 2.1.14, tenemos que

$$\hat{f}_\phi(x) = \inf_{t \in A_\phi} \left\{ \phi(t) + f(tx) \right\} \tag{2.6}$$

Sin embargo, la función

$$t \to \phi(t) + f(tx) : A_\phi \to \mathbb{R}$$

es continua, y A_ϕ es compacto. Esto implica que $\hat{f}_\phi$ es continua (ver la demostración del lema 1.2.10). □

Lema 2.1.16. *Si $f(x) = 0$ entonces $\hat{f}_\phi(x) = 0$ para todo $\phi \in \Phi$. Si $f(x) > 0$ entonces existe $\phi \in \Phi$ tal que $\hat{f}_\phi(x) > 0$.*

Demostración. Si $f(x) = 0$, entonces las desigualdades $0 \leq \hat{f}_\phi(x) \leq f(x)$ implica que $\hat{f}_\phi(x) = 0$.
Si $f(x) > 0$, entonces existe una vecindad de la identidad U en G tal que

$$f(tx) > (1/2)f(x) \quad \text{para todo} \quad t \in U$$

Por la observación 1 arriba, existen $\phi \in \Phi$ y $n \in N$ tales que $U_{n,\phi} \subset U$. Podemos asumir y así lo haremos, que $1/n \leq (1/2)f(x)$. Entonces tenemos que

$$\phi(t) + f(tx) > 1/n \quad \text{para todo} \quad t \in G$$

de donde se sigue que $\hat{f}_\phi(x) \geq 1/n > 0$. □

Lema 2.1.17. *Para todo $f \in C(X,[0,1])$ y $\phi \in \Phi$, la familia*

$$\{\hat{f}_\phi \circ \pi_x | x \in X\}$$

es equicontinua en e.

Demostración. Fijemos f y ϕ como se indica. Para todo $(t,x) \in G \times X$ tenemos que

$$\hat{f}_\phi(\pi(t,x)) = \inf_{s\in G}\Big\{\phi(s) + f(\pi(st,x))\Big\}$$

$$= \inf_{u\in G}\Big\{\phi(ut^{-1}) - \phi(u) + \phi(u) + f(\pi^u x)\Big\}$$

$$\geq \inf_{u\in G}\Big\{\phi(ut^{-1}) - \phi(u)\Big\} + \hat{f}_\phi(x)$$

Como ϕ es uniformemente continua por la izquierda en G, para toda $\epsilon > 0$ existe una vecindad U_ϵ de e en G tal que $|\phi(ut^{-1}) - \phi(u)| < \epsilon$ para todo $t \in U_\epsilon$ y $u \in G$. Poi lo tanto

$$\hat{f}_\phi(\pi(t,x)) \geq \hat{f}_\phi(x) - \epsilon \quad \text{para todo} \quad t \in U_\epsilon \quad \text{y todo} \quad x \in X.$$

Análogamente, existe una vecindad V_ϵ de e en G tal que

$$\hat{f}_\phi(x) \geq \hat{f}_\phi(\pi(t,x)) - \epsilon \quad \text{para todo} \quad t \in V_\epsilon \quad \text{y todo} \quad x \in X.$$

De lo anterior se sigue que

$$\Big|\hat{f}_\phi(\pi(t,x)) - \hat{f}_\phi(x)\Big| < \epsilon \tag{2.7}$$

para todo $t \in U_\epsilon \cap V_\epsilon$ y todo $x \in X$. □

Lema 2.1.18. *La familia $\{\hat{f}_\phi |\ f \in C(X,[0,1],\ \phi \in \Phi\}$ separa puntos de cerrados en X.*

Demostración. Sea $A \subset X$ un conjunto cerrado y $x \in X \setminus A$. Entonces existe una funccuon $f \in C(X,[0,1])$ tal que $f(x) = 1$ y $f(a) = 0$ para todo $a \in A$. Por el lema 2.1.16, existe una función $\phi \in \Phi$ tal que $\hat{f}_\phi(a) = 0$ para todo $a \in A$ y $\hat{f}_\phi(x) > 0$, es decir $\hat{f}_\phi(x) \notin \overline{\hat{f}_\phi(A)}$. □

Demostración del teorema 2.1.13. Inmediata de los lemas 2.1.17, 2.1.18 y de la proposición 2.1.12

Del teorema 2.1.13 y de la proposición 2.1.12 inmediatamente sigue el siguiente

Corolario 2.1.19. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces todo G-espacio de Tychonoff posee una G-compactación.*

Corolario 2.1.20. *Sea G un grupo. Entonces cada espacio G-Tychonoff X de peso infinito posee una G-compactación B del peso*

$$wB \leq \max\{wX, wG\}.$$

Demostración. Según el Teorema 2.1.10, podemos considerar que X es un subespacio invariante del espacio producto $\prod_{f \in F} K_f$ de algunos G-compactos convexos tales que $| F |= wX$. Según un resultado de E. Michael [**25**] (ver también [**13**, p. 217]), para el peso de red tenemos

$$nw\,(C(G)) \leq w\,(G)w\,(\mathbb{R}) = w\,(G)\aleph_0.$$

Pero como K_f es compacto, $wK_f = nw\,K_f$ [**13**, Theorem 3.1.19].

Entonces

$$wK_f = nw\,K_f \leq (w\,G)\aleph_0 \quad \text{para todo} \quad f \in F.$$

Finalmente obtendremos

$$w\,(\prod_{f \in F} K_f) \leq (w\,X)(wG).$$

Tomando como B la cerradura de X in $\prod_{f \in F} K_f$ obtenemos la G-compactación buscada. $\square$

2. Encajes equivariantes y G-compactaciones semilibres

2.1. Conos equivariantes y sus propiedades. El papel excepsional que juega el intervalo cerrado $I = [0, 1]$ en en topología se debe basicamente al hecho que en los "buenos" espacios topológicos hay suficientemente muchos funciones continuas con valores en I. En este parafo para un grupo compacto de Lie vamos a definir un objeto equivariante que juega precisamente el mismo papel del intervalo I en la categoría de los G-espacios libres y semilibres. Este objeto es el cono $Cone(G)$ sobre G. Vamos a pasar a las definiciones exactas

En lo que sigue para un espacio X denotaremos por $Cone(X)$ el conjunto cociente $[0,1]\times X/\{0\}\times X$ equipado con la topología cociente.

La imágen de un punto $(t,x) \in [0,1]\times X$ bajo la proyección canónica $p : [0,1] \times X \to Cone(X)$ se denotará por tx, y escribiremos simplemente θ (pensando en cero) en lugar de $0x$ para referirnos al vértice del cono.

Análogamente, para cualquier $A \subset [0,1]$ y $B \subset X$ escribiremos

$$A \cdot B = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Recordemos que un subconjunto $U \subset Cone(X)$ pertenece a la topología cociente si y sólo si $p^{-1}(U)$ es abierto en $[0,1] \times X$.

Es conocido que la topología cociente de $Cone(X)$ es metrizable si X es compacto y metrizable (ver [**17**, Ch. VI, Lemma 1.1]). Sin embargo, en la continuación se necesitará el siguiente resultado más preciso:

Proposición 2.2.1. *Sea (X, d) un espacio compacto métrico con $d(x_1, x_2) \leq 1$. Entonces*

(1) *la fórmula*

$$d^*(t_1x_1, t_2x_2) = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2\cos(d(x_1, x_2))}$$

define una métrica en $Cone(X)$;

(2) *para cualesquiera $t_1x_1,\ t_2x_2 \in Cone(X)$ es válida la siguiente desigualdad:*

$$|t_1 - t_2|^2 + \frac{t_1t_2}{2}(d(x_1,x_2))^2 \leq (d^*(t_1x_1,t_2x_2))^2 \leq$$
$$|t_1 - t_2|^2 + t_1t_2(d(x_1,x_2))^2;$$

(3) *d^* genera la topología cociente de $Cone(X)$;*

(4) *d^* es completa si y sólo si d es completa.*

Demostración.

(1) Sólo necesitamos verificar la desigualdad del triángulo, para lo cuál sea $t_ix_i \in Cone(X)$ con $i = 1, 2, 3$. Considérese un triángulo esférico ΔABC (posiblemente degenerado) constituido por círculos máximos de la esfera unitaria de $\mathbb{R}^3$ tal que los ángulos (esquinas de ΔABC) $\breve{AB}$, $\breve{BC}$ y $\breve{AC}$ miden $d(x_1,x_2)$, $d(x_2,x_3)$ y $d(x_1,x_3)$ respectivamente. Como $d \leq 1$, éste triángulo existe.
Sea O el centro de la esfera unitaria. Elijamos puntos

$$E \in OA, \quad F \in OB \quad \text{y} \quad L \in OC$$

tales que

$$|OE| = t_1, \quad |OF| = t_2 \quad \text{y} \quad |OL| = t_3.$$

Entonces, en el trángulo ordinario se tiene que:

$$|EF| = d^*(t_1x_1,t_2x_2), \quad |FL| = d^*(t_2x_2,t_3x_3) \quad \text{y} \quad |EL| = d^*(t_1x_1,t_3x_3)$$

de donde se sigue el resultado.

(2) Se sigue inmediatamente de las desigualdades

$$1 - \frac{1}{2}\alpha^2 \leq \cos\alpha \leq 1 - \frac{1}{4}\alpha^2 \quad \text{para todo} \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

(3) Es inmediato de (2).

(4) Es inmediato de (2).

$\square$

Si X es un G-espacio con G cualquier grupo topológico, entonces $Cone(X)$ es un G-espacio con respecto a la acción definida de la siguiente manera:

$$g(tx) = t(gx); \; g \in G, \; tx \in Cone(X).$$

Si además X es metrizable por una métrica d G-invariante con $d \leq 1$, entonces es fácil ver que la métrica inducida d^* en $Cone(X)$ es también G-invariante con $d^* \leq \sqrt{2}$.

A continuación estableceremos las definiciones de los espacios G-$AR(C)$, G-$ANR(C)$ y G-$AE(C)$, G-$ANE(C)$, donde G-C es una clase de G-espacios.

Para cualquier clase de espacios topológicos C, denotaremos por G-C la clase de todos los G-espacios X, tales que X como espacio topológico pertenece a C.

Definición 2.2.2. *Un G-espacio Y es llamado un G-extensor absoluto de vecindad para G-C (resp., G-extensor absoluto para G-C) si para cada $X \in G$-C y cada subconjunto cerrado invariante A de X, cualquier función equivariante $f : A \to Y$ puede ser extendida a una función equivariante $f : U \to Y$, donde U es una vecindad invariante de A en X (resp., $U = X$).*

Las denotaciónes serán: $Y \in G$-$ANE(C)$ y $Y \in G$-$AE(C)$ respectivamente.

El análogo de retracto en la categoría de los G-espacios, lo enunciamos a continuación.

Definición 2.2.3. *Un subconjunto invariante Y de un G-espacio Z es llamado un retracto equivariante de vecindad (resp., un retracto* *equivariante) de Z, si existe una retracción equivariante $r : U \to Y$, donde U es una vecindad invariante de Y en Z (resp., $U = Z$).*

Entonces podemos definir lo que es un espacio G-$AR(\mathcal{C}$ y G-$ANR(\mathcal{C})$.

Definición 2.2.4. *Y es llamado un G-retracto absoluto de vecindad para G-$\mathcal{C}$ (respectivamente, un G-retracto absoluto de G-$\mathcal{C}$)), si $Y \in G$-$\mathcal{C}$ y siempre que Y sea un cerrado invariante de un G-espacio $Z \in G$-$\mathcal{C}$, entonces Y es un retracto equivariante de vecindad (respectivamente, un retracto equivariante) de Z.*

Las denotaciónes serán: $Y \in G$-$ANR(\mathcal{C})$ y $Y \in G$-$AR(\mathcal{C})$ respectivamente.

En nuestro trabajo, los resultados serán sobre los espacios G-$AE(\mathcal{M})$, G-$ANE(\mathcal{M})$, G-$AR(\mathcal{M})$, G-$ANR(\mathcal{M})$, donde G-$\mathcal{M}$ es la clase de los G-espacios metrizables. Así, para simplificar la notación, dichos clases de G-espacios se denotarán simplemente como G-ANE, G-AE, G-ANR y G-AR omitiendo la denotación de la clase G-$\mathcal{M}$.

A veces vamos a necesitar la clase G-$\mathcal{N}$ de los G-espacios normales.

El útil resultado que a continuación se presenta es bien conocido en el caso no-equivariante (ver [**26**, Teorema 5.4.2]) y se extiende fácilmente al caso equivariante. La simple prueba que se da en el párrafo siguiente es sólo el caso equivariante de [**11**, Teorema 2.9]. La misma prueba puede también obtenerse de [**6**, Ch. II, Prueba del Lema 9.4].

Proposición 2.2.5. *Sea G un grupo y sea G-$\mathcal{K}$ cualquiera de las clases G-$\mathcal{M}$ y G-$\mathcal{N}$. Si $X \in G$-$ANE(\mathcal{K})$ entonces $Cone(X) \in G$-$AE(\mathcal{K})$.*

Demostración. Sea $Y \in G$-$\mathcal{K}$, B un cerrado invariante de Y y $f : B \to Cone(X)$ un G-mapeo. Sea f_1 la composición de f y la proyección $\pi_1 : Cone(X) \to [0, 1]$.

Debido a la normalidad de Y/G (ver proposición 1.2.9), podemos extender f_1 a una función invariante $\phi : Y \to [0,1]$. Sea $U = \phi^{-1}((0,1])$. Afirmamos que $U \in G\text{-}\mathcal{K}$. De hecho, para $G\text{-}\mathcal{M}$ la afirmación es evidente. Si $Y \in G\text{-}\mathcal{N}$ entonces U es normal ya que es un F_σ-subconjunto de Y. Por lo tanto según de la proposición 1.2.9, el espacio orbital U/G es normal. Así, $U \in G\text{-}\mathcal{K}$.

Sea $f_2 = \pi_2 f|_{U \cap B}$ donde $\pi_2 : (0,1] \cdot X \to [0,1]$ es la proyección. Como $U \in G\text{-}\mathcal{K}$, $U \cap B$ es un subconjunto cerrado e invariante de U y $X \in G\text{-}ANE(\mathcal{K})$, entonces la función f_2 tiene una G-extensión $F_2 : V \to X$ definida en alguna vecindad G-invariante V de $B \cap U$ en U. Elijamos una función G-invariante continua

$$\lambda : U \to [0,1] \quad \text{tal que} \quad \lambda|_{U \setminus V} = 0 \quad \text{y} \quad \lambda|_{B \cap U} = f_2.$$

Esto es posible por el Teorema de Tietze-Urysohn ya que el espacio orbital U/G es normal y $((U \setminus V) \cup (B \cap U))/G$ es un subconjunto cerrado del mismo. La G-extensión deseada $F : Y \to Cone(X)$ es entones definida de la siguiente manera:

$$F(y) = \begin{cases} \lambda(y)F_2(y), & si \;\; y \in V, \\ \theta, & si \;\; y \in Y \setminus V \end{cases}$$

□

Corolario 2.2.6. *Sea G un grupo de Lie compacto y H un subgrupo cerrado de G. Entonces $Cone(G/H)$ is un G-$AE(N)$*

Demostración. Por un resultado de Palais [**29**, Proposición 1.66], $G/H \in ANE(N)$. Ahora la afirmación se sigue de la proposición 2.2. □

Teorema 2.2.7. *Sea G un grupo compacto de Lie. X un G-espacio, $A \subset X$ un conjunto cerrado y $a \in X \setminus A$ un punto arbitrario. Entonces existe un G-mapeo*

$$f : X \to Cone(G/G_a) \quad \textit{tal que} \quad f(a) \neq \theta \quad y \quad f(a) \notin \overline{f(A)}.$$

Demostración. Por el teorema de la rebanada 1.2.15, existe una G-vecindad V de a y una G_a-rebanada S tal que $a \in S$ y $G(S) = V$.

Por la continuidad de la acción existe una vecindad O de la unidad de G y existe también una vecindad U de a en X tales que $OU \subset X \setminus A$. Considerando que el estabilizador G_a es compacto, podemos asumir que U es una vecindad G_a-invariante.
Sea

$$Q = S \cap U \quad \text{y} \quad W = G(Q).$$

Por el teorema 1.2.14, V puede ser identificado como el producto torcido $G \times_{G_a} S$. Como Q es abierto en S y como la función orbital $G \times S \to G \times_{G_a} S = V$ es abierta, concluimos que el conjunto $W = G(Q)$ es una vecindad abierta invariante de $G(a)$ en V y por lo tanto en X. De lo anterior se sigue que Q es una G_a-rebanada en X, y por el teorema 1.2.16, existe una función equivariante y abierta $\psi : G(Q) \to G/G_a$ tal que $Q = \psi^{-1}(eG_a)$.

De lo anterior se desprende que el conjunto $\psi(OQ)$ es abierto en G/G_a.
Afirmamos que

$$\psi(OQ) \cap \psi(A \cap W) = \emptyset.$$

Si suponemos lo contrario, entonces $\psi(tx) = \psi(gy)$ para algún $t \in O, g \in G$ y $x, y \in Q$ con $gy \in A \cap V$.

Como ψ es equivariante se tiene que $t\psi(x) = g\psi(y)$, y de que $\psi(x) = \psi(y) = eG_a$ se sigue que $g = th$ para algún $h \in G_a$; entonces $gy = thy \in tQ \subset OQ \subset X \setminus A$ lo que contradice que $gy \in A$. Esto prueba la afirmación.

Elijamos ahora una función continua G-invariante

$$\lambda : X \to [0,1] \quad \text{tal que} \quad \lambda|_{X \setminus W} = 0 \quad \text{y} \quad \lambda|_{G(a)} = 1.$$

Esto es posible ya que por la proposición 1.2.9 el espacio orbital de una G-espacio de Tychonoff es un espacio de Tychonoff. Definamos un G-mapeo $f : X \to Cone(G/G_a)$ de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda(x)\psi(x), & para\ x \in W \\ \theta, & para\ x \in X \setminus W \end{cases}$$

Verifique que f es la función deseada. Como

$$f(A \cap W) \subset (0,1] \cdot \psi(A \cap W) \quad \text{y} \quad f(A \cap (X \setminus W)) = \theta,$$

entonces vemos que

$$f(A) \subset [0,1] \cdot \psi(A \cap W)$$

Por otro lado $(0,1] \cdot \psi(OQ)$ es una vecindad de $f(a)$ en $Cone(G/G_a)$. Como

$$\psi(OQ) \quad \text{y} \quad \psi(A \cap W)$$

son disjuntos en G/G_a inferimos que los conjuntos $(0,1] \cdot \psi(OQ)$ y $[0,1] \cdot \psi(A \cap W)$ son disjuntos en $Cone(G/G_a)$. De lo anterior se sigue que $f(a) \notin \overline{f(A)}$. Falta por observar que $f(a) = 1 \cdot eG_a \neq \theta$. □

2.2. G-compactaciones semilibres. Recordemos que un G-espacio X es *libre* si $G_x = \{1\}$ para todo $x \in X$. El G-espacio X se llama *semilibre* si para los estabilzadores hay dos opciones nada más:

$$G_x = \{1\} \qquad \text{ó} \qquad G_x = G.$$

Si en X existe un solo punto $a \in X$ tal que $G_a = G$ y $G_x = \{1\}$ para todo $x \in X \setminus \{a\}$, entonces X se llama G-espacio *estrictamente semilibre*.

Del teorema 2.2.7 sigue inmediatamente el siguiente

Corolario 2.2.8. *Sea G un grupo compacto de Lie. Entonces para cada G-espacio libre X, el conjunto de todos los G-mapeos $X \to Cone(G)$ separa puntos de conjuntos cerrados en X.*

Corolario 2.2.9. *Sea G un grupo de Lie, X un G-espacio estrictamente semilibre. Entonces para todo par de puntos diferentes $a, b \in X$, existe un G-mapeo*

$$f : X \to Cone(G) \quad \textit{tal que} \quad f(a) \neq f(b).$$

Demostración. Como $a \neq b$, y por lo tanto, al menos uno de los puntos a y b tiene estabilizador trivial. Supongamos que G_a es trivial. Por el Teorema de la rebanada 1.2.16, existe una G-vecindad V de a y un G-mapeo $\phi : V \to G$ tal que $\phi(a) = e$ y $b \notin V$.

Elijamos un G-mapeo invariante y continuo

$$\lambda : X \to [0, 1] \quad \text{tal que} \quad \lambda|_{X \setminus V} = 0 \quad \text{y} \quad \lambda|_{G(x)} = 1.$$

Definamos un G-mapeo $f : X \to Cone(G)$ haciendo:

$$f(x) = \lambda(x)\phi(x) \quad \text{para} \quad x \in V \quad \text{y} \quad f(x) = \theta \quad \text{para} \quad x \in X \setminus V.$$

Evidentemente f es la función buscada. □

Teorema 2.2.10. *Sea G un grupo compacto de Lie. Entonces para cada G-espacio X de peso infinito $wX = \tau$ existen una familia*

$$\{H_\mu \mid \mu \in M\}$$

de subgrupos cerrados de G con $|M| = \tau$ y un encaje equivariante

$$f : X \hookrightarrow \prod_{\mu \in M} Cone(G/H_\mu).$$

Además, el G-compacto $B_\tau = \prod_{\mu \in M} Cone(G/H_\mu)$ es an G-$AE(\mathcal{N})$.

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ la familia de todas las funciones equivariantes $f : X \to Cone(G/H)$ continuas, donde H es algun subgrupo cerrado de G. Por el teorema 2.2.7, $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados en X. Por lo tanto según del lema 2.1.9, existe una subfamilia

$$\mathcal{K} = \{f_\mu : X \to Cone(G/H_\mu)\} \subset \mathcal{F}$$

con la cardinalidad $|M| = \tau$ que tambien separa puntos de cerrados de X. Según del lema 2.1.8, el producto diagonal

$$f = \Delta\mathcal{K} : X \to \prod_{\mu \in M} Cone(G/H_\mu)$$

realisa un encaje de X. Como todos los elementos de $\mathcal{K}$ son funciones equivariantes, el encaje f bambién es equivariante.

Según del corolario 2.2.6, cada G-espacio $Cone(G/H_\mu)$ es un G-$AE(\mathcal{N})$. Ahora B_τ siendo producto de G-$AE(\mathcal{N})$ espacios a su vez es un G-$AE(\mathcal{N})$. □

Teorema 2.2.11. *Sea G un grupo compacto de Lie. Entonces para cada G-espacio libre X de peso infinito $w\,X = \tau$ existe un encaje equivariante*

$$f : X \hookrightarrow (Cone(G))^\tau.$$

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ la familia de todas las funciones equivariantes $f : X \to Cone(G)$ continuas. Por corolario 2.2.8, $\mathcal{F}$ separa puntos de cerrados en X. Por lo tanto según del lema 2.1.9, existe una subfamilia $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ con la cardinalidad $|\mathcal{K}| = \tau$ que tambien separa puntos de cerrados de X. Según del lema 2.1.8, el producto diagonal

$$f = \Delta\mathcal{K} : X \to (Cone(G))^\tau$$

realisa un encaje de X. Como todos los elementos de $\mathcal{K}$ son funciones equivariantes el encaje f bambién es equivariante. □

Corolario 2.2.12. *Sea G un grupo copmpacto de Lie. Entonces todo G-espacio libre X de peso infinito $w\,X = \tau$ posee una G-compactación estrictamente semilibre del mismo peso.*

Demostración. Supongamos que X no posee una G-compactación libre. Por el teorema 2.2.11, X se puede realisar como un subespacio invariante de $(Cone(G))^\tau$ donde $\tau = w\,X$. Ahora la cerradura $B = \overline{X}$ es una G-compactación estrictamente semilibre para X de peso $w\,B = \tau$. □

Corolario 2.2.13. *Sea G un grupo copmpacto de Lie. Entonces todo G-espacio libre X de peso infinito $wX = \tau$ posee una G-extensión libre y localmente compacto del mismo peso.*

Demostración. Sea B la G-compactación estrictamente semilibre de X, que existe según del corolario anterior. Entonces el complemento $B \setminus \{*\}$ donde $*$ es el punto G-fijo de B, es la G-extensión localmente compacto de X. $\square$

Teorema 2.2.14. *Sea G un grupo copmpacto de Lie. Entonces para cada G-espacio semilibre X de peso infinito $wX = \tau$ existe un encaje equivariante*

$$f : X \hookrightarrow (Cone(G))^{\tau} \times I^{\tau}.$$

Demostración. Afirmamos que las funciones equivariantes $X \to Cone(G) \times I$ separan puntos de cerrados en X. En efecto, sea $A \subset X$ un cerrado y $b \in X \setminus A$. Segun del teorema 2.2.7, existe una función equivariante $f : X \to Cone(G/G_b)$ tal que $f(b) \notin \overline{f(A)}$. Pero en nuestro caso hay dos opciones nada más:

$$G_b = G \qquad \text{ó} \qquad G_b = \{e\}.$$

En el primer caso $Cone(G/G_b) = Cone(G)$, y en el segundo caso $Cone(G/G_b) = I$. Pero $Cone(G)$ como I son subconjuntos cerrados invariantes del producto $Cone(G) \times I$. Así, las funciones equivariantes $X \to Cone(G) \times I$ separan puntos de cerrados en X. Como en la demostración del teorema 2.2.11, existe una familia $\mathcal{K}$ de funciones equivariantes de X en $Cone(G) \times I$ con la cardinalidad $|\mathcal{K}| = \tau$, que separa puntos de cerrados de X. Según del lema 2.1.8, el producto diagonal $f = \Delta\mathcal{K}$ es un encaje de X en el producto $(Cone(G) \times I)^{\tau}$. Ahora nos falta nada más de observar que $(Cone(G) \times I)^{\tau}$ es G-homeomorfo al G-espacio $(Cone(G))^{\tau} \times I^{\tau}$. $\square$

Corolario 2.2.15. *Sea G un grupo compacto de Lie. Entonces todo G-espacio semilibre X de peso infinito $w\,X = \tau$ posee una G-compactación también semilibre del mismo peso.*

Demostración. Por el teorema 2.2.14, X se puede realisar como un subespacio invariante en el G-compacto semilibre $\left(Cone(G)\right)^{\tau} \times I^{\tau}$ donde $\tau = w\,X$. La cerradura $B = \overline{X}$ es una G-compactación semilibre para X de peso $w\,B = \tau$. □

El siguiente resultado en la presensia de la compacidad de X un poco mejora el teorema 2.2.14:

Teorema 2.2.16. *Sea G un grupo copmpacto de Lie Entonces para cada G-espacio compacto estrictamente semilibre X de peso infinito $w\,X = \tau$ existe un encaje equivariante*

$$f : X \hookrightarrow \left(Cone(G)\right)^{\tau}.$$

Demostración. Sea $\mathcal{K}$ la familia de todas las funciones equivariantes $f : X \to Cone(G)$. Por corolario 2.2.9, $\mathcal{F}$ separa puntos en X. Por lo tanto según del lema 2.1.9, existe una subfamilia $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$ con la cardinalidad $|\mathcal{K}| = \tau$ que también separa puntos de X. Entonces, el producto diagonal

$$f = \Delta\mathcal{K} : X \to \left(Cone(G)\right)^{\tau}$$

es inyectiva, continua y equivariante. Como X es compacto, f es un encaje. □

3. Caracteristicas de $\beta_G X$

Ahora probaremos que todo G-espacio admite una G-compactación Stone-Čech. La construcción es justamente una modificación de uno de los métodos clásicos para obtener compactificaciones de Stone-Čech ordinarias, modificada de tal forma que se tome en consideración la G-estrutura.

Recordemos que para un G-espacio X, el par (BX, b), donde BX es un G-espacio compacto y $b : X \to BX$ es un encaje equivariante, tal que $\overline{b(X)} = BX$ se llama una G-`compactación del` G-`espacio` X.

Como es común en la teoria de compactaciones en lugar del par (BX, b) vamos a escribir BX, donde $b : X \hookrightarrow BX$ simvoliza una G-encaje X en el G-espacio compacto BX. Para la comodidad vamos a identificar G-espacio X con el subespacio $b(X)$ de su alguna compactación BX.

Por $B_G(X)$ vamos a denotar la familia de todos G-compactaciones de G-espacio dado X. En $B_G(X)$ definimos la orden por la siguiente regla:

$$b_1X \preceq b_2X$$

si y sólo si existe un mapeo equivariante $f : b_2X \to b_1X$ tal que $fb_2 = b_1$. Es facil de verificar que si $b_1X \preceq b_2X$ y $b_2X \preceq b_1X$ entonces existe un homomorfismo equivariante $f : b_1X \to b_2X$ tal que $fb_1 = b_2$.

En este caso vamos a decir que las G-compactaciones b_1X y b_2X son equivalentes. Entonces tenemos una relación de equivalencia en el conjunto de G-compactaciones.

Es facil de verificar la siguiente proposición:

Proposición 2.3.1. *La relación de $\preceq$ es una relación de orden en la familia $B_G(X)$.*

Proposición 2.3.2. *Cualquier subfamilia $B \subset B_G(X)$ no vacia tiene un límite superior en $B_G(X)$ con respecto de órden $\preceq$.*

Demostración. Sea $B = \{b_\alpha X \mid \alpha \in A\}$. Consideremos el producto topológico $\prod_{\alpha \in A} b_\alpha X$ con la acción del grupo G coordenada por coordenada. Por el lema 2.1.8, tenemos que el producto diagonal

$$b = \triangle b_\alpha : X \to \prod_{\alpha \in A} b_\alpha X$$

es un encaje equivariante. Se comprueba facilmente que la cerradura $BX = \overline{b(X)} \subset \prod_{\alpha \in A} b_\alpha X$ es el límite superior de la familia B en $B_G(X)$.

□

Corolario 2.3.3. *Si $B_G(X) \neq \emptyset$, entonces existe un elemento superior con respecto del órden $\preceq$ en $B_G(X)$.*

Definición 2.3.4. *Si $B_G(X) \neq \emptyset$, el mayor elemento de la familia $B_G(X)$ se llama G-compactación maximal ó G-compactación de Stone-Čech para X y se denota por $\beta_G X$.*

Corolario 2.3.5. *Sea G un grupo localmente compacto. Entonces todo G-espacio admite una G-compactación de Stone-Čech.*

Demostración. Inmediato de los corolarios 2.1.19 y 2.3.3 □

A continuación vamos a dar diversas caracteristicas de la G-compactación maximal $\beta_G X$. Además vamos a demostrar la formula $(\beta_G X)/G = \beta(X/G)$.

Teorema 2.3.6. *Sea G un grupo y X un G-espacio. Entonces*

1. *Cada mapeo equivariante $f : X \to B$ de un G-espacio X en un G-compacto B posee una extensión equivariante $F : \beta_G X \to B$.*
2. *Sea BX una G-compactación de un espacio G-Tychonoff X tal que cada mapeo equivariante $f : X \to B$ en cualquier G-compacto B posee una extensión equivariante $F : BX \to B$. Entonces BX es equivalente a $\beta_G X$.*

Demostración. 1. Como X es un espacio de G-Tychonoff, según de la Proposicion 2.1.12 y Corolario 2.3.3, existe $\beta_G X$. Consideremos el producto diagonal

$$b = \beta_G \Delta f : X \to \beta_G X \times B,$$

el cual es un encaje equivariante (como β_G lo es).

Entonces

$$BX = \overline{b(X)} \subset \beta_G X \times B$$

es una G-compactación para X.

Gracias a la maximalidad de $\beta_G X$ existe un mapeo equivariante $\varphi : \beta_G X \to BX$ tal que $\varphi\beta_G = b$. Tomemos $F = p\varphi$, donde $p : BX \to B$ es la restrección de la segunda proyección $\beta_G X \times B \to B$ en BX. Es facil de ver que F es la función buscada.

2. Según la condición dada el encaje natural $\beta_G : X \to \beta_G X$ posee una extensión equivariante

$$\varphi : BX \to \beta_G X, \quad \text{i.e.,} \quad BX \succeq \beta_G X.$$

Como $\beta_G X \succeq BX$, tenemos que G-compactactaciones $\beta_G X$ y BX son equivalentes. □

Teorema 2.3.7. *Sea G un grupo y X un espacio G-Tychonoff. Entonces*

1. *Cada función G-iniforme $f : X \to [0,1]$ tiene una extensión continua $F : \beta_G X \to [0,1]$.*
2. *Sea BX una G-compactación de X tal que cada función G-uniforme $f : X \to [0,1]$ posee una extensión continua $F : BX \to [0,1]$. Entonces BX es equivalente a $\beta_G X$.*

Demostración. 1. Consideremos el mapeo equivariante

$$f_* : X \to K_f \subset C(G, \mathbb{R}),$$

definido en la Proposición 2.1.7. Aplicando la Propiedad (1) del teorema 2.3.6 obtenemos una extensión equivariante $f' : \beta_G X \to K_f$ del mapeo f_*. Sea $F = p_e f'$, donde $p_e : C(G, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es la función evaluacón en el elemento identidad $e \in G$. Es claro que $F : \beta_G X \to [0,1]$ es la extensión continua del mapeo f.

2. Vamos a usar la propiedad (2) del teorema 2.3.6. Para eso consideremos un mapeo equivariante en un G-compacto $\phi : X \to B$. Según del teorema 2.1.10, podemos considerar a B como subconjunto

invariante del producto $\prod K_f$ de G-compactos equicontinuos convexos $K_f \subset C(G,\mathbb{R})$. Para cada indice f denotemos por $\varphi_f : X \to K_f$ la composición $q_f\varphi$, donde $q_f : \prod K_f \to K_f$ es la proyeción en f-esimo espacio coordenado. Ahora tomando la composición $\psi_f = p\varphi_f$, donde $p : C(G,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ es la función evaluación en la identidad $e \in G$, obtenemos una función continua $\psi_f : X \to [0,1]$. Según de la hipotesis, existe una extensión G-uniforme $h_f : BX \to [0,1]$ de ψ_f. Según de la Proposición 2.1.7, h_f genera un G-mapeo

$$d_f = (h_f)_* : BX \to C(G,\mathbb{R})$$

Es facil de ver que d_f es una extensión para φ_f, y entonces

$$d_f(BX) \subset \overline{\varphi_f(X)} \subset K_f.$$

Tomando el producto diagonal $\psi = \Delta d_f$ de la familia d_f obtenemos la extensión equvariante $\psi : BX \to \prod K_f$ del mapeo ϕ. Tenemos

$$\psi(bX) \subset \overline{\psi(X)} = \overline{\phi(X)} \subset B.$$

Según de la proposición (2) del teorema 2.3.6, concluimos que la G-compactación BX es equivalente a $\beta_G X$. □

Aquí esta otro criterio de $\beta_G X$ en caso cuando el grupo G es compacto:

Teorema 2.3.8. *Sea G un grupo compacto y X un G-espacio de Tychonoff. Entonces*

1. *para cada subgrupo cerrado $H \subset G$, toda función G-equivariante $f : X \to Cone(G/H)$ tiene una extensión G-equivariante $F : \beta_G X \to Cone(G/H)$.*
2. *Sea BX una G-compactación de X tal que cada función G-equivariante $f : X \to Cone(G/H)$ posee una extensión G-equivariante $F : BX \to Cone(G/H)$. Entonces bX es equivariante a $\beta_G X$.*

Demostración. 1. La primera parte es caso particular de la primera propiedad del teorema 2.3.7.

2. Vamos a usar la propiedad (2) del teorema 2.3.6. Para eso consideremos un mapeo equivariante en un G-compacto $\phi : X \to B$. Según del teorema 2.2.10, podemos considerar B como subconjunto invariante del producto $\prod_{\mu \in M} Cone(G/H_\mu)$ de algunos conos $Cone(G/H_\mu)$. Para cada indice $\mu \in M$ denotemos por $f_\mu : X \to Cone(G/H_\mu)$ la composición $q_\mu f$, donde

$$q_\mu : \prod_{\mu \in M} Cone(G/H_\mu) \to Cone(G/H_\mu)$$

es la proyeción en μ-esimo espacio coordenado. Según de la hipotesis, existe una extensión G-equivariante $F_\mu : bX \to Cone(G/H_\mu)$ para f_μ.

Tomando el producto diagonal $F = \Delta F_\mu$ de la familia $\{F_\mu\}$, obtenemos la extensión equvariante

$$F : BX \to \prod_{\mu \in M} Cone(G/H_\mu)$$

del mapeo f. Tenemos

$$F(bX) \subset \overline{F(X)} = \overline{f(X)} \subset B.$$

Así, $F : bX \to B$ es una extensión equivariante de f. Según de la proposición (2) del teorema 2.3.6, concluimos que la G-compactación BX es equivalente a $\beta_G X$. $\square$

Antes de pasar a nuestro último resultato en este capítulo, vamos a demostrar el siguiente lema:

Lema 2.3.9. *Sea G un grupo, $H \subset G$ un subgrupo cerrado, X un G-espacio. Supongamos que A es un subconjunto denso de X y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua constante en las H-orbitas de A, es decir $f(ha) = f(a)$ para todo $a \in A$ y $h \in H$. Entonces f es constante en todas las H-orbitas de X.*

Demostración. Supongamos al contrario, que $f(hx) \neq f(x)$ para algunos $x \in X$ y $h \in H$ tales que $hx \neq x$. Sea

$$0 < r < (1/2)|f(x) - f(hx)|.$$

Denotamos por V la r-vecindad de $f(x)$ y por W la r-vecindad de $f(hx)$.

Como X es de Hausdorff y $hx \neq x$, por la continuidad de f se puede encontrar una vecindad U_x para x tal que es $U_x \cap hU_x = \emptyset$ y $f(U_x) \subset V$, $f(hU_x) \subset W$. Ahora, como A es denso en X existe un punto $a \in U_x \cap A$. Entonces $ha \in hU_x \cap A$. Pero $f(a) \in V$ y $f(ha) \in W$.

De otro lado, $f(ha) = f(a)$, cual resulta que $V \cap W \neq \emptyset$. Esta contradicción completa la demostración. □

Teorema 2.3.10. *Sea G un grupo compacto, H in subgrupo cerrado normal de G y X un G-espacio. Entonces tiene lugar la siguiente formula:*

$$(\beta_G X)/H = \beta_{G/H}(X/H).$$

En particular,

$$(\beta_G X)/G = \beta(X/G),$$

donde β es el functor de compactación de Stone-Čech ordinaria.

Demostración. Como H es compacto, por la proposición 1.2.9, X/H es de Tychonoff. Sea $i : X \to \beta_G X$ el G-encaje estandar y sean

$$p : X \to X/H \qquad \text{y} \qquad q : \beta_G X \to (\beta_G X)/H$$

dos mapeos orbitrales. Entonces existe un mapeo G/H-equivariante

$$j : X/H \to (\beta_G X)/H \qquad \text{tal que} \qquad qi = jp.$$

Ademas de Lema 1.2.12 sigue que j es un encaje. Tomando en cuenta la continuidad de q, tenemos

$$(\beta_G X)/H = q(\beta_G X) = q(\overline{iX}) \subset \overline{q(iX)} \subset \overline{j(X/H)}.$$

De aquí sigue que $(\beta_G X)/H = \overline{j(X/H)}$, es decir $\overline{j(X/H)}$ es denso en $(\beta_G X)/H$.

Como $(\beta_G X)/H$ es un G/H-compacto, entonces $(\beta_G X)/H$ es una G/H-compactación para X/H. Identifiquemos X/H con su imagen $j(X/H)$. Para la demonstración de la igualidad requierida según el teorema 2.3.7, falta comprobar que cada funcón G/H-iniforme $f : X/H \to [0,1]$ tiene una extensión continua $F : (\beta_G X)/H \to [0,1]$.

Consideremos el mapeo $\varphi = fp : X/H \to [0,1]$. Es evidente que φ es G-uniforme. Según el teorema 2.3.7, φ posee una extensión continua

$$\phi : \beta_G X \to [0,1].$$

Como el mapeo φ es H-invariante, es decir φ es constante en los H orbitas de X, por el lema 2.3.9, su extensión ϕ también tiene que ser H-invariante. Por eso ϕ induce un mapeo continuo $F : (\beta_G X)/H \to [0,1]$ tal que $Fq = \Phi$. Como ϕ es la extensión de φ, es facil ver que F es la extensión de f. Entonces $(\beta_G X)/H$ es la G/H-compactación maximal del G/H-espacio X/H, es decir

$$(\beta_G X)/H = \beta_{G/H}(X/H).$$

□

CAPITULO 3

G-compactaciones libres

En este capítulo siempre se supone que el grupo actuante G es un grupo compacto de Lie.

1. G-compactaciónes de un śolo tipo de órbita

Recordemos que el cono $Cone(X)$ sobre un espacio métrico compacto X es el conjunto cociente $([0,1] \times X)/(\{0\} \times X)$ equipado con la topología cociente. Esta topología es metrizable también (ver, [**17**, Ch VI, Lema 1.1]). La imagen del punto $(t,x) \in [0,1] \times X$ bajo la proyección canónica $p : [0,1] \times X \to con(X)$ se denotará por tx, y escribiremos simplemente θ (piense en cero) en cambio de $0x$; este es el vértice del cono. Es conveniente llamar el número t en tx la norma de tx y denotarla por $\|tx\|$.

Si $X_1, \dots, X_k$ son espacios métricos compactos, la join $X_1 * \cdots * X_k$ se define como el subconjunto del producto

$$Cone(X_1) \times \cdots \times Cone(X_k)$$

que consiste de todos los puntos $(t_1x_1, \dots, t_kx_k)$ para los cuales

$$\sum_{i=1}^{n} t_i = 1.$$

A continuación consideraremos el caso cuando

$$X_1 = \cdots = X_k = G/H,$$

donde H es un subgrupo cerrado de G. En este caso G actúa como coordenada-sabia en la k-join

$$\underbrace{G/H * \cdots * G/H}_{k\text{-veces}}$$

mediante la translación izquierda; entonces $G/H * \cdots * G/H$ es un G-espacio, que denotaremos por $(G/H)^{*k}$.

En lo que sigue sera más conveniente escribir $\widetilde{X} = X/G$ para el espacio orbital de X.

Recordemos que para un G-espacio X se dice que tiene un sólo tipo de órbita (H), si $(G_x) = (H)$ para todo $x \in X$. En otras palabras, para cada estabilizador G_x existe un elemento $g \in G$ tal que $gG_xg^{-1} = H$

Mas adelante vamos a necesitar la siguente noción importante introducida por J. Jaworowski [**19**]:

Definición 3.1.1. *Diremos que un G-espacio X con un sólo tipo de órbita (H) es de* `estructura finita` *si el mapeo orbital*

$$p : X \to \widetilde{X}$$

tiene una cubierta finita trivializante, es decir, existe una cubierta abierta finita $\{U_1, \ldots, U_n\}$ de $\widetilde{X}$ tal que cada $p^{-1}(U_i)$ es G-equivalente a $(G/H) \times U_i$, i.e., existe un G-homeomorfismo

$$f_i : p^{-1}(U_i) \to (G/H) \times U_i$$

$$\textit{tal que} \quad \pi\big(f_i(x)\big) = p(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in p^{-1}(U_i).$$

Es de importancia señalar que si "$p : X \to \widetilde{X}$ tiene una cubierta finita trivializante " es equivalente a que "X puede ser cubierto por un número finito de H-tubos".

Es evidente de la definición 3.1.1 que todo subspacio invariante de un G-espacio de estructura finita es de nuevo un G-espacio de estructura finita.

En los subsecuente, por un *G-espacio Euclidiano* entenderemos un espacio Euclidiano real E en el que G actúa mediante transformaciones ortogonales.

Definición 3.1.2. *Diremos que un G-espacio X es de tipo Euclideano si existe un mapeo isovariante $f : X \to E$ en un un G-espacio Euclideano E.*

Recordemos que un mapeo isovariante $f : X \to E$ es un mapeo equivariante tal que $G_x = G_{f(x)}$ para todo $x \in X$.

En [**19**], Jaworowski probó que cada G-espacio normal de estructura finita es de tipo Euclideano. Necesitaremos la siguiente versión más precisa del resultado de Jaworowski:

Lema 3.1.3. *Cualquier G-espacio normal X con órbitas de un sólo tipo (H) y de estructura finita admite un mapeo isovariante en un G-espacio D de dimensión finita, compacto, metrizable de tipo (H).*

Demostración. Es sabido que bajo las condiciones del lema, el mapeo orbital $p : X \to \widetilde{X}$ es una fibración localmente trivial (ver [**6**, C. 2, Teorema 5.8]).

Sea $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ una cubierta abierta y finita del espacio orbital $\widetilde{X}$ tal que, para todo

$$1 \leq n \leq k, \qquad p^{-1}(U_n)$$

es equivariantemente homeomorfo al producto $G/H \times U_n$, donde el grupo G actúa por la izquierda sobre G/H y de manera trivial sobre U_n.

Además, para cada $n \geq 1$, la primera proyección del producto $p^{-1}(U_n) = G/H \times U_n$ proporciona un mapeo isovariante

$$\varphi_n : p^{-1}(U_n) \to G/H.$$

Como el espacio orbital $\widetilde{X}$ es normal, existe un encojimiento (srinking) cerrado $\{F_1, \dots, F_k\}$ para $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ en $\widetilde{X}$, i.e., $F_n \subset U_n$ para todo

$$1 \leq n \leq k \qquad \text{y} \qquad \bigcup_{n=1}^{k} F = X.$$

[**14**, Teorema 1.7.8]

Sea $\psi_n : \widetilde{X} \to [0,1]$ una función continua tal que

$$F_n \subset \psi_n^{-1}(1) \quad \text{y} \quad \widetilde{X} \setminus U_n \subset \psi_n^{-1}(0)$$

Ahora definimos el mapeo $f_n : X \to Cone\,(G/H)$ por la fórmula

$$f_n(x) = \begin{cases} \theta, & \text{si } x \notin p^{-1}(U_n), \\ \psi_n(p(x))\varphi_n(x), & \text{si } x \in p^{-1}(U_n). \end{cases}$$

Es claro que f_n es un mapeo equivariante, y que su restrición a $p^{-1}(F_n)$ coincide con φ_n, y es entonces isovariante. Consideramos el producto diagonal

$$f = \triangle_{n=1}^{k} f_n : X \to \left(con\,(G/H)\right)^k$$

Entonces f es un mapeo equivariante. Como

$$\sum_{n=1}^{k} \|f_n(x)\| = 1 \quad \text{para todo} \quad x \in X,$$

concluimos que $f(x)$ pertenece a la k-join $(G/H)^{*k}$.

Sea $x \in X$ y $x \in p^{-1}(F_n)$, entonces

$$G_{f(x)} = \bigcap_{i=1}^{k} G_{f_k(x)} \subset G_{f_n(x)} = G_x$$

Por otro lado, $G_x \subset G_{f(x)}$, como f es equivariante. Es por ello que $G_x = G_{f(x)}$, i.e. $f : X \to (G/H)^*k$ es un mapeo isovariante.

Ahora deninimos D como la cerradura de $f(X)$ en $(G/H)^{*k}$. Entonces D es compacto, metrizable y de dimensión finita. Falta ver que D tiene el tipo de órbita (H). Sea $d \in D$ un punto arbitrario. Como cada tipo de órbita en $(G/H)^{*k}$ es $\preceq (H)$, vemos que $(G_d) \leq (H)$. Por otro lado, como $f(X)$ es denso en D y $f(X)$ es de tipo (H), se sigue del Teorema de Rebanada [6, Ch. II, Corolario 5.5], que $(H) \preceq (G_d)$. De esa manera se tiene que $(G_d) = (H)$, y entonces $f : X \to D$ es el mapeo buscado. □

Lema 3.1.4. *Sea $f : X \to S$ un mapeo isovariante de G-espacios. Entonces el mapeo*

$$h : X \to S \times (X/G) \quad \textit{definido por} \quad h(x) = \big(f(x), p(x)\big),$$

donde $p : X \to X/G$ es el mapeo orbital, es un encaje G-homeomorfo.

Teorema 3.1.5. *Para un G-espacio X de un sólo tipo de órbita (H) las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *X posee una G-compactación de tipo (H),*
2. *X posee un mapeo isovariante de un G-espacio D compacto, metrizable, de dimensión finita y de tipo (H),*
3. *X es de tipo Euclideano,*
4. *X posee un mapeo isovariante en un G-espacio compacto de tipo (H),*
5. *X posee una G-compactación de tipo (H) y del mismo peso $\mathrm{w}\, X$.*

Demostración. (1) $\Longrightarrow$ (2). Sea $b_G X$ una G-compactación de X de tipo (H). Por el Lema 3.1.3, existe un mapeo isovariante $\varphi : b_G X \to D$ en algún G-espacio D compacto, metrizable, de dimensión finita y de tipo (H). La restricción $\varphi|_X$ es el mapeo deseado.

(2) $\Longrightarrow$ (3). Sea $\varphi : X \to D$, un mapeo isovariante en un G-espacio D compacto, metrizable, de dimensión finita y de tipo (H). Como existe un encaje equivariante $i : D \to E$ en un G-espacio Euclidiano E

(ver [6, Ch. II, Teorema 10.1]), el mapeo composición $f = \varphi i$ mapea X de manera isovariante en E.

(3) $\Longrightarrow$ (4). Sea $\psi : X \to E$ un mapeo isovariante en un G-espacio Euclidiano E. Por el Lema 3.1.3 y el Lema 3.1.8, existe un mapeo isovariante $j : \psi(X) \to D$ en un G-espacio D compacto, metrizable, de dimensión finita y de tipo (H). Entonces la composición $j\psi : X \to D$ is el mapeo requerido.

(4) $\Longrightarrow$ (1) Sea $f : X \to Y$ un mapeo isovariante en un G-espacio Y compacto de tipo (H). Sea $p : X \to X/G$ el mapeo orbital. Por el Lema 3.1.4, el producto diagonal

$$i = \varphi \Delta p : X \to Y \times (X/G)$$

es un encaje equivariante.

Sea B cualquier compactificación del espacio orbital X/G. Entonces X puede ser realizado como un subconjunto invariante de un G-espacio compacto $Y \times B$, donde G actúa sobre B trivialmente. Ahora, la cerradura $\overline{X}$ de X en $Y \times B$ es una G-compactación de X. Como Y es de tipo (H), vemos que $Y \times B$ es también de tipo (H). Entonces, $b_G X = \overline{X}$ es una G-compactación de X de tipo (H).

(2) $\Longrightarrow$ (5) puede probarse como la implicación (4) $\Longrightarrow$ (1), usando D en lugar de Y. En ese caso si elegimos la compactificación B de X/G tal que

$$\mathrm{w}(B) = \mathrm{w}(X/G)$$

[13, Teorema 3.5.2], entonces la G-compactación $b_G X$ tendrá el peso $\mathrm{w}(b_G X) = \mathrm{w}(X/G)$ ya que $\mathrm{w}(D) = \aleph_0$. Falta sólo observar que $\mathrm{w}(X) = \mathrm{w}(X/G)$.

(5) $\Longrightarrow$ (1) es evidente. □

Recordando que un espacio X paracompacto se dice que es *finitistic* si para toda cubierta abierta de X tiene un refinamiento ω de orden finito, i.e., existe un número natural n (dependiendo de la cubierta ω)

tal que cualquier punto $x \in X$ puede pertenecer al más a n elementos de ω (ver [**30**]).

Evidentemente, cada espacio compacto, así como cada espacio paracompacto de dimensión finita, es finitistic.

Una amplia clase de G-espacios que admiten una G-compactación de un sólo tipo de órbita está dada por lo siguiente:

Teorema 3.1.6. *Todo G-espacio finitistic X de tipo (H) tiene una G-compactación $b_G X$ del mismo tipo (H) y del mismo peso* $\mathrm{w}\,X$.

Para la prueba necesitamos el siguiente resultado, mismo que para espacios de dimensión finita se estableció primeramente por J. Milnor (citado en [**29**, Teorema 1.8.2]):

Lema 3.1.7. *Sea X un espacio finitistic y sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta de X. Entonces existe un número natural n y una cubierta abierta $\{V_{i\beta}\}_{\beta\in B_i}$, $i = 0, \ldots, n$ de X refinando $\{U_\alpha\}$ tal que*

$$V_{i\beta} \cap V_{i\beta'} = \emptyset \quad \textit{siempre que} \quad \beta \neq \beta' \quad \textit{y} \quad 0 \leq i \leq n.$$

Demostración. Como X es finitistic hay un número natural n y un refinamento $\{W_\mu\}$ de $\{U_\alpha\}$ tal que el orden de la cubierta $\{W_\mu\}$ es a lo más n. Sea $\{\varphi_\mu\}$ una partición de la unidad localmente finita con $\varphi_\mu^{-1}\big((0,1]\big) \subset W_\mu$. Para todo $0 \leq i \leq n$, sea B_i el conjunto de todos los subconjuntos β del conjunto de índices de la cubierta $\{W_\mu\}$ con cardinalidad $|\beta| = i+1$.
Dado $\beta = (\mu_0, \ldots, \mu_i) \in B_i$, fijamos

$$V_{i\beta} = \{x \in X \mid \varphi_{\mu_j}(x) > 0 \;\text{ y }\; \varphi_\mu(x) < \varphi_{\mu_j}(x)$$

$$\text{para todo }\; 0 \leq j \leq i,\; \mu \notin \beta\}.$$

Como en una vecindad de cualquier punto x sólo un número finito de φ_μ no son idénticamente cero, se siguie que cada $V_{i\beta}$ es abierto.

Verifiquemos que $V_{i\beta} \cap V_{i\beta'} = \emptyset$ si $\beta \neq \beta'$. De hecho, como

$$|\beta| = i + 1 = |\beta'| \quad \text{y} \quad \beta \neq \beta',$$

inferimos que existen $\mu \in \beta \setminus \beta'$ y $\mu' \in \beta' \setminus \beta$. Si ahora $x \in V_{i\beta} \cap V_{i\beta'}$, se sigue que $\varphi_{\mu(x)} < \varphi_{\mu'}(x) < \varphi_{\mu}(x)$, lo cuál es una contradicción.

Verifiquemos que $\{V_{i\beta}\}$ es una cubierta de X. Si $x \in X$ y $\mu_0, \ldots, \mu_m$ son todos los índices con $\varphi_{\mu_k}(x) > 0$ arreglada de manera que

$$\varphi_{\mu_0}(x) = \varphi_{\mu_1}(x) = \cdots = \varphi_{\mu_i}(x) > \varphi_{\mu_{i+1}}(x) \geq \cdots \geq \varphi_{\mu_m}(x),$$

entonces evidentemente $x \in V_{m\beta}$, donde $\beta = \{\mu_0, \ldots, \mu_m\}$. Como

$$x \in \bigcap_{j=0}^{m} supp\ \varphi_{\mu_j} \subset \bigcap_{j=0}^{m} W_{\mu_j}$$

y $\{W_\mu\}$ tiene orden $\leq n$, esto implica que $m \leq n$ Es por ello que, $i \leq n$, y claramente $x \in V_{i\{\mu_0, \ldots \mu_i\}}$. Entonces $\{V_{i\beta}\}_{\beta \in B_i}$, $i = 0, \ldots, n$ es una cubierta abierta de X, y como $V_{i\beta} \subset W_\mu$ para todo $\mu \in i$, vemos que $\{V_{i\beta}\}$ refina la cubierta $\{W_\mu\}$, y entonces, la cubierta original $\{U_\alpha\}$. De lo anterior se sigue que $\{V_{i\beta}\}$ es la cubierta buscada. □

Lema 3.1.8. *Todo G-espacio finitistic X que tiene un sólo tipo de órbita es de estructura finita.*

Demostración. Sea (H) el único tipo de órbita de X. Sea $\{S_\alpha\}$ una familia de H-rebanadas en X tal que $X = \bigcup G(S_\alpha)$. Entonces

$$G(S_\alpha) \cong_G (G/H) \times p(S_\alpha)$$

y los conjuntos $p(G(S_\alpha)) = p(S_\alpha)$ constituyen una cubierta abierta del espacio orbital X/G.
Ahora, por [8], X/G siendo imagen perfecta de un espacio finitistic, es también finitistic, y por el Lema anterior se puede encontrar un número natural n así como una cubierta abierta $\{\widetilde{U}_{i\beta}\}_{\beta \in B_i}$, $i = 0, \ldots, n$ de X/G que refina a $\{p(S_\alpha)\}$ y es tal que

$$\widetilde{U}_{i\beta} \cap \widetilde{U}_{i\beta'} = \emptyset, \quad \beta \neq \beta'.$$

Entonces el conjunto $U_{i\beta} = p^{-1}(\widetilde{U}_{i\beta})$ es una H-tubo sobre $\widetilde{U}_{i\beta}$ [**29**, Proposición 1.7.2], i.e.,

$$G(U_{i\beta}) \cong_G (G/H) \times \widetilde{U}_{i\beta}$$

y $\widetilde{U}_{i\beta} = p(U_{i\beta})$. Se sigue entonces que la unión $U_i = \bigcup_{\beta \in B_i} U_{i\beta}$ es una H-tubo sobre $\widetilde{U}_i = \bigcup_{\beta \in B_i} \widetilde{U}_{i\beta}$ (ver [**29**, Proposición 1.7.3]). Entonces

$$G(U_i) \cong_G (G/H) \times \widetilde{U}_i,$$

y por lo tanto $\{\widetilde{U}_i\}_{i=1}^n$ es una cubierta finita trivializante para X/G. □

Demostración del Teorema 3.1.6. De los lemas 3.1.8 y 3.1.3 se sigue que X es de tipo Euclideano. Ahora el resto se desprende del Teorema 3.1.5.

Como todo espacio paracompacto de dimensión finita es finitistic, del teorema 3.1.6 obtendremos imediatamente el siguiente

Corolario 3.1.9. *Todo G-espacio libre, paracompacto de dimensión finita X posee una G-compactación b_GX también libre y del mismo peso* $\mathrm{w}X$.

Proposición 3.1.10. *Si un G-espacio X de tipo (H) admite una G-compactación b_GX del mismo tipo (H) entonces su G-compactación maximal β_GX es también del mismo tipo (H). En particular, si X tiene una G-compactación libre entonces β_GX es también libre.*

Demostración. Es claro que existe un G-mapeo $f : \beta_GX \to b_GX$ de manera que

$$(G_t) \preceq (G_{f(t)}) = (H) \quad \text{para todo} \quad t \in \beta_GX.$$

Por otro lado, como X es denso en β_GX y X es de tipo (H), se sigue del Teorema de Rebanada que $(H) \preceq (G_t)$ para todo $t \in \beta_GX$ (ver [**6**, Ch. II, Corolario 5.5]). Entonces, $(G_t) = (H)$ para todo $t \in \beta_GX$. □

A continuación se presenta un ejemplo de una $\mathbb{Z}_2$-acción libre en el cubo de Hilbert con un punto removido, el cual no tiene una $\mathbb{Z}_2$-compactificación libre.

Ejemplo 3.1.11 ([19]). *Sea* $X = [-1,1]^\infty \setminus \{0\}$, *donde* $0 = (0,0,\ldots) \in [-1,1]^\infty$, *y* $G = \mathbb{Z}_2$, *el grupo cíclico de orden dos. Entonces* X *es el cubo de Hilbert con un punto removido. Considere la acción libre de* $\mathbb{Z}_2$ *en* X *definida por la involución estándar:* $\{x_i\} \to \{-x_i\}$. *Afirmamos que el* $\mathbb{Z}_2$*-espacio lbre* X *no tiene una* $\mathbb{Z}_2$*-compactificación libre.*

Supongamos lo contrario. Entonces por el teorema 3.1.5, existe un mapeo isovariante $f : X \to E$ *en un* $\mathbb{Z}_2$*-espacio Euclidiano equpado co la acción antipodal. Como* X *es un* $\mathbb{Z}_2$*-espacio libre,* $f^{-1}(0) = \emptyset$, *donde* 0 *denota el origen de* E. *Claramente la retracción radial* $r : E \setminus \{0\} \to S$ *sobre la esfera unitaria de* E *es un mapeo isovariante. Por lo tanto la composición* $\varphi = rf : X \to S$ *es isovariante también.*

Sea S^k *una esfera de dimensión arbitraria* $k > 0$, *considerada como un* G*-espacio con la acción antipodal de* $\mathbb{Z}_2$.

Afirmación. *Cada esfera* S^k *puede ser encajada* $\mathbb{Z}_2$*-equivariantemente en el* $\mathbb{Z}_2$*-espacio* X.

Es suficiente mostrar que el $\mathbb{Z}_2$*-mapeo de* S^k *a* $[-1,1]$ *separa puntos en* S^k. *Para ello, sea* $a, b \in S^k$, $a \neq b$. *Si* $b = -a$ *entonces elejimos primero un mapeo continuo*

$$f : S^k \to [-1,1] \quad con \quad f(a) = 1 \quad y \quad f(b) = -1,$$

y luego definamos

$$f'(x) = \big(f(x) - f(-x)\big)/2, \quad x \in S^k.$$

Claramente, f' *es un* $\mathbb{Z}_2$*-mapeo con* $f'(a) = 1$ *y* $f'(b) = -1$.

Si $b \neq -a$ *entonces escogemos primero un mapeo continuo*

$$f : S^k \to [-1,1] \quad con \quad f(a) = f(-b) = 1 \quad y \quad f(b) = f(-a) = -1,$$

y luego definimos

$$f'(x) = \big(f(x) - f(-x)\big)/2, \quad x \in S^k.$$

Claramente f' es un $\mathbb{Z}_2$-mapeo con $f'(a) = 1$ y $f'(b) = -1$.

Ahora, por la afirmación anterior, existe un G-encaje $i : S^k \hookrightarrow X$. La composición $q = \varphi i : S^k \to S$ es entonces un mapeo equivariante (i.e., antipodal). Sin embargo, de acuerdo con el teorema clásico Borsuk-Ulam (ver [1, Teorema 10.8.23]*), no existe tal mapeo para $k >$* $\dim S$.

Este ejemplo tiene también la siguiente propiedad interesante en el sentido del artículo de E. K. van Douwen [9]:

Corolario 3.1.12. *Sea $f : X \to X$ la involución estándar en el cubo de Hilbert con un punto removido (Ejemplo 3.1.11). Entonces, la compactificación de Stone-Čech $\beta f : \beta X \to \beta X$ tiene un punto fijo.*

Demostración. En efecto, de otra manera βX es una $\mathbb{Z}_2$-compactificación libre de X, lo que contradice la afirmación del Ejemplo 3.1.11. □

A continuación presentamos otro ejemplo de una $\mathbb{Z}_2$-acción libre que no posee una $\mathbb{Z}_2$-compactación libre.

Ejemplo 3.1.13. *Sean $G = \mathbb{Z}_2$, $X = \bigsqcup_{n=0}^{\infty} S^n$ - la suma topológica (ó discreta) de esferas de todas las dimenciones.*

$\mathbb{Z}_2$ actua en cada S_n por la regla $x \to -x$. Cada esfera es un G-espacio libre, y por lo tanto X es un G-espacio libre.
Afirmamos que X no posee una $\mathbb{Z}_2$-compactación libre.

Supongamos el contrario, que B es una G-compactación libre para X. Por el teorema 3.1.5, existe una función isovariante $f : B \to S^{n-1}$ para algun $n \geq 1$, donde $\mathbb{Z}_2$ actua en S^{n-1} por la acción antipodal.

Por otra parte $X \hookrightarrow B \hookrightarrow S^{n-1}$. Entonces tenemos la siguiente composición:

$$S^k \subset X \hookrightarrow B \hookrightarrow S^{n-1}.$$

Como S^k *puede ser cualquier esfera, tomemos* $k > n - 1$. *Pero de acuerdo con el teorema clasico de Borsuk-Ulam (ver* [1, Teorema 10.8.23]*), no existe tal función para* $k > n - 1$.

Ejemplo 3.1.14. *Existen G-espacios estrictamente semilibres que no poseen G-compactacónes también estrictamente semilibres.*

En efecto, Sea $G = \mathbb{Z}_2$ *y* X *un* G *espacio libre que no posee G-compactación libre (como en los ejemplos 3.1.11 y 3.1.13). Sea* $Y = X \sqcup \{*\}$ *la suma discreta, en donde el grupo actua trivialmente en el punto* $\{*\}$ *y con la acción dada en* X. *Entonces* Y *es un G-espacio estrictamente semilibre. Afirmamos que* Y *no tiene G-compactación estrictamente semilibre.*

Supongamos al contrario y sea B *una compactación estrictamente semilibre para* Y. *Como el punto fijo* $\{*\}$ *no es punto de adherencia para* X *en* B*, inferimos que la cerradura* $\overline{X}$ *en* B *es un subconjunto invariante y libre. Pero* $\overline{X}$ *es una G-compactación de* X. *Eso contradice a la hypotesis que* X *no posee una G-compactación libre.*

2. G-compactos universales libres

En esta sección probaremos lo siguiente

Teorema 3.2.1. *Para todo número cardinal infinito* τ *y para todo entero no negativo* $n \geq \dim G$*, existe un G-espacio libre compacto* $\mathcal{F}_\tau^n$ *con*

$$\mathrm{w}\,(\mathcal{F}_\tau^n) = \tau, \quad \dim\,(\mathcal{F}_\tau^n) = n$$

que es universal en el siguiente sentido: $\mathcal{F}_\tau^n$ *contiene una copia G-homeomorfica de cualquier G-espacio libre* X *de tipo Euclideano con* $\mathrm{w}X \leq \tau$ *y* $\dim \beta_G X \leq n$.
En particular, $\mathcal{F}_\tau^n$ *contiene una copia G-homeomorfica de cada G-espacio paracompacto libre* X *con*

$$\mathrm{w}X \leq \tau \quad y \quad \dim X \leq n.$$

Notemos que se estableció un resultado similar en [**22**] para el caso no libre.

Antes de demostrar el teorema debemos establecer lo siguiente.

Lema 3.2.2. *Sea X un G-espacio libre paracompacto. Entonces se satisfacen las siguientes propiedades:*

1. $\dim X = \dim (X/G) + \dim G$;
2. $\dim \beta_G X = \dim X$.

Demostración. 1. Sea $p : X \to X/G$ el mapeo orbital. Es bien sabido [6, Ch. II, Teorema 5.8] que p es una fibración localmente trivial con fibras homeomorfas a G. Sea $\{U_\alpha\}$ una cubierta abierta trivializante del espacio orbital X/G, i.e.,

$$p^{-1}(U_\alpha) \cong_G G \times U_\alpha.$$

Por compacidad de G, el mapeo p es cerrado, y por el teorema de E. Michael [**13**, Teorema 5.1.13], el espacio orbital X/G es también paracompacto. Entonces existe una cubierta cerrada localmente finita $\{F_\alpha\}$ de X/G tal que $F_\alpha \subset U_\alpha$ para cada índice α. Se sigue que $p^{-1}(F_\alpha) \cong_G (G \times F_\alpha)$ y la familia $\{p^{-1}(F_\alpha)\}$ constituye una cubierta cerrada localmente finita de X. Entonces, de acuerdo al teorema de la suma [**14**, Teorem 3.1.10],

$$\dim X = max_\alpha\{\dim\ p^{-1}(F_\alpha)\}.$$

Pero $\dim\ p^{-1}(F_\alpha) = \dim (G \times F_\alpha)$.

Como subconjunto cerrado de un espacio paracompacto, F_α él mismo es paracompacto. Por otro lado G es un polihedro. Por lo tanto el teorema de Morita [27] es aplicable, y entonces la regla logarítmica es cierta:

$$\dim (G \times F_\alpha) = \dim G + \dim F_\alpha$$

Tenemos entonces,

$$\dim X = \dim G + max_\alpha\{\dim F_\alpha\}.$$

Aplicando una vez más el teorema de la suma obtenemos que

$$\dim(X/G) = max_\alpha\{\dim F_\alpha\}.$$

Consecuentemente,

$$\dim X = \dim(X/G) + \dim G.$$

2. Usaremos la fórmula $\beta(X/G) = (\beta_G X)/G$ (ver el teorema 2.3.10) y consideremos dos casos.

a) Sea $\dim X < \infty$. Entonces X tiene una estructura finita (lema 3.1.8) y $\beta_G X$ es un G-espacio libre (proposición 3.1.10). Aplicando dos veces la igualdad establecida en el paso anterior, se encuentra que

$$\dim \beta_G X = \dim(\beta_G X)/G + \dim G = \dim \beta(X/G) + \dim G$$
$$= \dim(X/G) + \dim G = \dim X.$$

b) Sea $\dim X = \infty$. Por la primera afirmación, se tiene que

$$\dim X = \dim G + \dim(\beta_G X)/G,$$

que implica que $\dim(\beta_G X)/G = \infty$. Sin embargo el mapeo orbital no aumenta la dimensión [8]; en particular,

$$\dim \beta_G X = \dim(\beta_G X)/G = \infty = \dim X.$$

□

El siguiente lema en el caso no libre lo probó Megrelishvili [22] aún para grupos no compactos:

Lema 3.2.3. *Sea $f : X \to Y$ un G-mapeo de un G-espacio libre y compacto X en un G-espacio compacto Y. Entonces existe un G-espacio libre compacto Z y dos G-mapeos*

$$\varphi : X \to Z, \quad \psi : Z \to Y \quad \textit{tal que} \quad f = \psi\varphi \quad y$$

$$\dim Z \leq \dim X, \qquad \mathrm{w}\, Z \leq \mathrm{w}\, Y.$$

Demostración. Probaremos primero la afirmación en el caso cuando Y es también un G-espacio libre. Consideremos el mapeo inducido $f' : X/G \to Y/G$. Por el teorema de factorización de Mardešić [**14**, Teorema 3.3.2], existe un Z' libre, compacto y dos mapeos continuos

$$\varphi' : X/G \to Z', \quad \psi' : Z' \to Y/G$$

tal que $\quad f' = \psi'\varphi' \quad$ y $\quad \dim Z' \leq \dim (X/G), \quad \mathrm{w}\, Z' \leq \mathrm{w}\,(Y/G).$

Denote por p el mapeo orbital $Y \to Y/G$. Es bien sabido [**18**, Ch. IV. Proposición 4.1] que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \downarrow \pi & & \downarrow p \\ Z' & \xrightarrow{\psi'} & Y/G \end{array}$$

donde Z es un G-espacio compacto con $Z/G{=}Z'$, $\pi : Z \to Z'$ –el mapeo orbital y ψ – un mapeo equivariante que induce el mapeo ψ'. De hecho Z es el subconjunto G-invariante $Z' \times Y$ definido como sigue:

$$Z = \{(z', y) |\ \psi'(z') = p(y)\},$$

donde G actua sobre $Z' \times Y$ por

$$g(z', y) = (gz', y) \quad \text{para} \quad g \in G \quad \text{y} \quad (z', y) \in Z' \times Y.$$

De esta manera, Z es un G-espacio libre, compacto y $\psi : Z \to Y$ es la restricción de la segunda proyección $Z' \times Y \to Y$.

Ahora definimos

$$\varphi : X \to Z \quad \text{por} \quad \varphi(x) = \big(\varphi' q(x), f(x)\big),$$

donde $q : X \to X/G$ es el mapeo orbital. Es fácil de verificar que $f = \psi\varphi$. Por otro lado

$$\mathrm{w}\, Z = \mathrm{w} Z' \leq \mathrm{w}\,(Y/G) = \mathrm{w}\, Y.$$

Verifiquemos que $\dim Z \leq \dim X$. Como Z es un G-espacio libre y paracompacto, podemos aplicar el Lema 3.2.2, de acuerdo al cual

$$\dim Z = \dim Z' + \dim G \leq \dim (X/G) + \dim G = \dim X.$$

Ahora demostramos el caso general. Por el lema 3.1.3, existe un mapeo isovariante $h : X \to D$ a un G-espacio libre y paracompacto D. Considere el producto $T = h(X) \times Y$ y el mapeo $r : X \to T$ definido por

$$r(x) = \big(h(x), f(x)\big), \quad x \in X.$$

Como X es libre y h es isovariante, inferimos que T es un G-espacio libre. Es claro que r es equivariante y $\mathrm{w}\,T = \mathrm{w}\,Y$.
Ahora aplicamos el caso anterior, y por lo tanto existe un G-espacio libre Z y un G-mapeo

$$\varphi : X \to Z, \quad \psi_1 : Z \to T \quad \text{tal que}$$

$$\dim Z \leq \dim X, \quad \mathrm{w}\,Z \leq \mathrm{w}\,T \quad \text{y} \quad r = \psi_1\varphi.$$

Observe que $\mathrm{w}\,T = \mathrm{w}\,Y$ ya que $\mathrm{w}\,h(X) = \aleph_0$; entonces $\mathrm{w}\,Z \leq \mathrm{w}\,Y$.

Hagamos $\psi = \pi_2\psi_1$, donde $\pi_2 : T \to Y$ es la segunda proyección. Entonces $\psi : Z \to Y$ es un G-mapeo tal que $f = \psi\varphi$. Falta observar que Z es un G-espacio libre; esto es inmediato del hecho que ψ_1 es equivariante y de que T es libre. □

Demostración del Teorema 3.2.1. Sea B_τ el G-compacto del teorema 2.2.10. Recordemos que B_τ es universal de en el sentido que contiene una copia G-homeomorfa a todo G-espacio de peso $\leq \tau$.

Sea $\{Y_t\}_{t\in T}$ la familia de todos los subconjuntos libres invariantes $Y_t \subset B_\tau$ de tipo Euclideano tal que $\dim \beta_G Y_t \leq n$. Esta familia es no vacía ya que el grupo G pertenece a ella. Para cada $t \in T$ denotamos por i_t el encaje identidad de Y_t en B_τ. Consideremos la suma discreta $Y = \bigoplus_{t\in T} \beta_G Y_t$, que naturalmente se convierte en un G-espacio. Por la proposición 3.1.10, cada $\beta_G Y_t$ es un G-espacio libre. Consecuentemente Y es un G-espacio libre y paracompacto. Como $\dim \beta_G Y_t \leq n$ para todo $t \in T$, entonces por el teorema de la suma [**14**, Teorem 3.1.10], tenemos que $\dim Y \leq n$. Finalmente por el lema 3.2.2,

$$\dim \beta_G Y = \dim Y \leq n.$$

Posteriormente, cada mapeo $i_t : Y_t \to B_\tau$ puede ser extendido a un G-mapeo $i'_t : \beta_G Y_t \to B_\tau$ según del teorema 2.3.6. Entonces se define el mapeo $i : Y \to B_\tau$ de manera que

$$i(y) = i'_t(y) \quad \text{para} \quad y \in \beta_G Y_t.$$

Aplicando una vez más el teorema 2.3.6, extenderemos el G-mapeo i a un G-mapeo $j : \beta_G Y \to B_\tau$. Como Y tiene estructura finita, de acuerdo con la proposición 3.1.10, $\beta_G Y$ es un G espacio libre y paracompacto. Por el lema 3.2.3, existe une G-espacio libre y compacto $\mathcal{F}^n_\tau$, así como G-mapeos

$$\varphi : \beta_G Y \to \mathcal{F}^n_\tau, \qquad \psi : \mathcal{F}^n_\tau \to B_\tau$$

tales que $i = \psi\varphi$ y $\dim \mathcal{F}^n_\tau \leq n$, $\mathrm{w}\,\mathcal{F}^n_\tau \leq \mathrm{w}\,B_\tau = \tau$.

Afirmamos que $\mathcal{F}^n_\tau$ es el G-espacio buscado.
En efecto, sea X un G-espacio libre arbitrario tal que $\dim X \leq n$ con $\mathrm{w}\,X \leq \tau$. Como X esta encajado equivariantemente en B_τ, existe un $t \in T$ tal que Y_t es G-homeomorfo a X. Como la restricción de i sobre Y_t es un homeomorfismo, la restricción $\varphi|_{Y_t}$ es también un homeomorfismo. Además, $\varphi|_{Y_t}$ es equivariante. Entonces, X esta encajado equivariantemente en $\mathcal{F}^n_\tau$.

Si X es paracompacto, entonces por el lema 3.2.2,

$$\dim \beta_G X = \dim X \leq n,$$

y por lo tanto X puede ser encajado equivariantemente en $\mathcal{F}^n_\tau$.

Para completar la demostración falta ver que $\dim \mathcal{F}_\tau^n = n$ y $\mathrm{w}\,\mathcal{F}_\tau^n = \tau$. Como $\mathcal{F}_\tau^n$ contiene una compia homeomorfa equivariante n-dimensional del G-espacio libre compacto $G \times I^k$ con $k = n - \dim G$, inferimos que $\dim \mathcal{F}_\tau^n = n$. Por otro lado, la suma discreta Z de τ copias de G es un G-espacio metrizable y libre de peso $\mathrm{w}\,Z = \tau$, y por lo tanto, $\mathcal{F}_\tau^n$ contiene una copia equivariante homeomora de Z. Esto da como resultado que $\mathrm{w}\,\mathcal{F}_\tau^n = \tau$. La demostración esta completa.

Del Teorema 3.2.1 se sigue inmediatamente el siguiente

Corolario 3.2.4. *Cualquier G-espacio paracompacto y libre X tiene una G-compactación libre $b_G X$ de peso* $\mathrm{w}\,(b_G X) \leq \mathrm{w}\,X$ *y de dimensión* $\dim b_G X \leq \dim X$.

Corolario 3.2.5. *Sea G un grupo finito. Entonces para cualquier entero $n \geq 0$ hay una acción libre de G en el compacto de Menger μ^n tal que todo G-espacio X metrizable, separable y libre con* $\dim X \leq n$ *admitea un encaje equivariante en μ^n.*

Demostración. Por el corolario anterior, X tiene una G-compactificación $b_G X$ libre, metrizable, compacta de $\dim b_G X \leq \dim X$. Nos resta aplicar el resultado de Dranishnikov [**10**, Corolario y Teorema 3] al hecho de que existe una única acción libre de G sobre el compacto de Menger μ^n tal que μ^n contiene una copia homeomorfa equivariante de cada G-espacio compacto, metrizable y libre de dimensión $\leq n$. □

3. G-compactos universales de un sólo tipo de órbita

En esta sección generalizaremos el Teorema 3.2.1 al caso de G-espacios de tipo Euclideano que pueden no ser libre, pero que tienen un sólo tipo de órbita.

Sea H un subgrupo cerrado de G y X un G-espacio de tipo (H). Sea $N(H)$ el normalizador de H en G y $W(H) = N(H)/H$, el grupo de Weyl. En lo que resta denotaremos por $\widetilde{n}$ la clase lateral nH para cualquier $n \in N(H)$. El grupo $W(H)$ actua libremente sobre X^H, el conjunto de puntos H-fijos de X. Al mismo tiempo $W(H)$ actua sobre G/H por la fórmula

$$\widetilde{n} * gH = gn^{-1}H, \qquad \widetilde{n} \in W(H), \quad gH \in G/H.$$

El producto torcido $(G/H) \times_{W(H)} X^H$ es sólo el espacio $W(H)$-orbital del producto $G/H \times X^H$ dotado con la acción diagonal de $W(H)$. Es conocido (ver [6, Ch. II, Corolario 5.11]) que X es G-homeomorfo al G-espacio $(G/H) \times_{W(H)} X^H$ equipado con la acción de G dada por la fórmula:

$$g' * [gH, x] = [g'gH, x], \qquad g' \in G, \ [gH, x] \in (G/H) \times_{W(H)} X^H.$$

Lema 3.3.1. *Si H es un subgrupo cerrado de G y Y es un $W(H)$-espacio libre, entonces el producto torcido $T = (G/H) \times_{W(H)} Y$ tiene un sólo tipo de órbita (H). Además,*

$$\mathrm{w}\, T = \mathrm{w}\, Y \quad y \quad \dim T = \dim Y + \dim \big(G/N(H)\big).$$

Demostración. En efecto, sea $[gH, x]$ un punto de $(G/H) \times_{W(H)} Y$ fijo bajo un elemento $g' \in G$. Entonces $[g'gH, x] = [gH, x]$, ó equivalentemente,

$$(g'gH, x) = (\widetilde{n} * gH, \widetilde{n}x), \quad \text{para algún} \quad n \in N(H).$$

Entonces $g'gH = gn^{-1}H$ y $x = \widetilde{n}x$.

Como $W(H)$ actua libremente sobre Y, la igualdad $x = \widetilde{n}x$ implica que $n \in H$. La igualdad $g'gH = gn^{-1}H$ da como resultado que $g' = gn^{-1}hg^{-1}$ para algún $h \in H$, y por lo tanto, $g' \in gHg^{-1}$. Por lo anterior, el estabilizador de $[gH, x]$ es sólo el grupo gHg^{-1}, y por lo tanto, el G-espacio $(G/H) \times_{W(H)} Y$ tiene un sólo tipo de órbita (H).

Como $\mathrm{w}\,(G/H) \leq \aleph_0$, notamos que

$$\mathrm{w}\,\big((G/H) \times_{W(H)} Y\big) \leq \mathrm{w}\, Y.$$

Por otro lado Y es un subconjunto de T, entonces $\mathrm{w}\, Y \leq \mathrm{w}\, T$.

Para la segunda igualdad, del lema 3.2.2 y por el anteriormente citado teorema de Morita [27], se tiene que

$$\begin{aligned} \dim T = \dim\big((G/H) \times_{W(H)} Y\big) &= \dim\big((G/H) \times Y\big) - \dim W(H) \\ &= \dim (G/H) + \dim Y - \big(\dim N(H) - \dim H\big) \\ &= \dim Y + \dim G - \dim H - \dim N(H) + \dim H \\ &= \dim Y + \dim G - \dim N(H) = \dim Y + \dim\big(G/N(H)\big). \end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.2. *Para cada subgrupo cerrado de $H \subset G$, todo número cardinal infinito τ y para todo entero no negativo $n \geq \dim G$, existe un G-espacio compacto $\mathcal{F}^n_\tau(H)$ de tipo (H) con $\mathrm{w}\,(\mathcal{F}^n_\tau(H)) = \tau$, $\dim(\mathcal{F}^n_\tau(H)) = n$ que es universal en siguiente sentido: $\mathcal{F}^n_\tau(H)$ contiene una copia G-homeomorfa de cualquier G-espacio X de tipo Euclideano y de un sólo tipo de órbita (H) tal que $\mathrm{w}\, X \leq \tau$ y $\dim \beta_G X \leq n$. En particular, $\mathcal{F}^n_\tau(H)$ contiene una copia G-homeomorfa de cada G-espacio paracompacto X de tipo (H) con $\mathrm{w}\, X \leq \tau$ y $\dim X \leq n$.*

Demostración. Sea

$$k = n - \dim\big(N(H)/H\big).$$

Entonces se tiene que

$$\begin{aligned} k = n - \dim\big(G/N(H)\big) = n - \dim G + \dim N(H) &\geq \dim N(H) - \dim H \\ &= \dim\big(N(H)/H\big) = \dim W(H) \end{aligned}$$

Por lo tanto por el teorema 3.2.1, existe un $W(H)$-espacio compacto libre y universal $\mathcal{F}^k_\tau$ de dimensión k y de peso τ.

Hagamos

$$\mathcal{F}^n_\tau(H) = (G/H) \times_{W(H)} \mathcal{F}^k_\tau.$$

Por el lema 3.3.1, $\mathcal{F}^n_\tau(H)$ es un G-espacio compacto de un sólo tipo de órbita (H). Afirmamos que es la requerida.

En efecto, por el lema 3.3.1,

$$\mathrm{w}\left((G/H)\times_{W(H)}\mathcal{F}^k_\tau\right)=\mathrm{w}\,\mathcal{F}^k_\tau=\tau$$

y

$$\begin{aligned}\dim\mathcal{F}^n_\tau(H)&=\dim\left((G/H)\times_{W(H)}\mathcal{F}^k_\tau\right)=\dim\mathcal{F}^k_\tau+\dim\big(G/N(H)\big)\\&=k+\dim\big(G/N(H)\big)=n.\end{aligned}$$

Ahora si X es un G-espacio con un sólo tipo de órbita (H) tal que $\mathrm{w}\,X\le\tau$ y $\dim X\le n$, entonces como $X=(G/H)\times_{W(H)}X^H$, se sigue del lema 3.3.1 que

$$\mathrm{w}\,(X^H)\le\tau\quad\text{y}\quad\dim X^H\le k.$$

Por el Teorema 3.2.1, hay un encaje $W(H)$-equivariante $f: X^H\hookrightarrow\mathcal{F}^k_\tau$. Entonces el mapeo

$$F:(G/H)\times_{W(H)}X^H\to(G/H)\times_{W(H)}\mathcal{F}^k_\tau,$$

generado por f es un encaje G-equivariante. Notamos que F se define de la siguiente manera:

$$F\big([gh,x]\big)=[gH,f(x)]\quad\text{para todo}\quad[gh,x]\in(G/H)\times_{W(H)}X^H$$

(ver [**29**, Teorema 1.7.10]). Sólo falta mencionar que

$$X=(G/H)\times_{W(H)}X^H\quad\text{y}\quad\mathcal{F}^n_\tau(H)=(G/H)\times_{W(H)}\mathcal{F}^k_\tau.$$

Esto completa la demostración. □

Del teorema 3.3.2 se sigue de manera inmediata el siguiente

Corolario 3.3.3. *Cualquier G-espacio paracompacto X de un sólo tipo de órbita (H) tiene una G-compactación b_GX del mismo tipo de órbita (H) tal que*

$$\mathrm{w}\,(b_GX)\le\mathrm{w}\,X\quad\textit{y}\quad\dim b_GX\le\dim X.$$

Bibliografia

1. M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto, Topología algebraica, McGraw-Hill, México, etc., 1998
2. S.A. Antonyan S.A., A new proof of the existence of compact G-extensions (Russian), Comment. Math. Univ. Carolinae **22** (1981), no. 4, 761–772.
3. S.A. Antonyan and Yu.M. Smirnov, Universal objects and bicompact extensions for topological transformation groups, (Russian), Doklady. Akad. Nauk S.S.S.R. **257** (1981), no 3, 521–526; English translat.: Soviet Math. Doklady. **23** (1981), no. 2, 279-284.
4. S.A. Antonian and J. de Vries, Tychonov theorem for G-spaces, Acta Math. Hung. **50** (1987), no 3-4, 253-257.
5. N. Bourbaki, General Topology, Chapters 5-10, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-London-Paris-Tokyo, 1989.
6. G. Bredon, *Introduction to compact transformation groups,* Academic Press, 1972.
7. R.B. Brook, A construction of the greatest ambit, Math. Systems theory **4** (1970), 243-248.
8. S. Deo and H. Tripathi, *Compact Lie group actions on finitistic spaces,* Topology **21, No. 4** (1982), 393-399.
9. E. K. van Douwen, *βX and fixed-point free maps*, Topology Appl. **51(2)** (1993), 191-195.
10. A. N. Dranishnikov, *On free actions of 0-dimensional compact groups* (Russian), Izvestiya Akad. Nauk SSSR. Ser. Mat. **52:1** (1988), 212-228; English translat.: Math. USSR Izvestiya **32:1** (1989), 217–232.
11. J. Dydak, Extension theory: the interface between set-theoretic and algebraic topology, Top. Appl. **74** (1996), 225-258.
12. R. Fox, On topologies of function spaces, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 429-432.
13. R. Engelking, *General Topology* , PWN-Pol. Sci. Publ., Warsaw, 1977.
14. R. Engelking, *Dimension Theory,* PWN-Pol. Sci. Publ., Warsaw, 1978.

15. J. de Groot and R.H. Mc Dowell, Extension of mappings on metric spaces, Fund. Math. **68** (1960), 251-263.

16. E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis, vol. 1*, Springer-Verlag, Berlin-heidelberg-New York, 1963

17. S.-T. Hu, *Theory of Retracts* , Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965.

18. D. Husemoller, *Fibre bundles*, Mc Graw-Hill, 1966.

19. J. Jaworowski, *An equivariant extension theorem and G-retracts with a finite structure*, Manuscripta Math. **35** (1981), 323-329.

20. J. L. Kelly, General Topology, Springer-Verlag, 1975.

21. A. García-Maynez, A. Tamariz Mascarúa, Topología general, Editorial Porrúa S.A., México, 1988

22. M. Megrelishvili, *A factorization theorem and universal compactifications of G-spaces*, Russian Math. Surv. **38, No. 6** (1983), 125-126.

23. M. Megrelishvili, *A Tychonoff G-space which has no compact extensions*, Russian Math. Surv. **43, No. 2** (1988), 177-278.

24. M. Megrelishvili (Levy) and T. Scar, *Constructing Tychonoff G-spaces which are not G-Tychonoff*, Topol. Appl. **86** (1998), 69- -81.

25. E. Michael, On a theorem of Rudin and Klee, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1961), p. 921.

26. J. van Mill, Infinite-dimensional topology Prerequisites and Introduction, North Holland, 1989

27. K. Morita, *On the dimension of product spaces*, Amer. J. Math. **75** (1953), 205–233.

28. S. de Neymet, Introducción a los grupos topológicos de transformaciones, por publicar.

29. R. Palais *The classification of G-spaces*, Memoirs of the AMS **36** (1960).

30. R. G. Swan, *A new method in fixed point theory*, Comm. Math. Helv. **34** (1960), 1-16

31 S.V. Vlasov, On perfect G-compactifications, Moscow Univ. Math. Bull. **46**(1991), no 4, 45-46.

32. J. de Vries, *Topological transformation groups*, Math. Centre tracts 65, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1975.

33 J. de Vries, *On the existence of G-compactifications*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. **26** (1978), 275-280.