

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO



FACULTAD DE CIENCIAS

"INTRODUCCION A LA GEOMETRIA FRACTAL Y A LA DINAMICA DEL CAOS".

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL TITULO DE:
M A T E M A T I C O
P R E S E N T A :
J O R G E R A M I R E Z L O P E Z



DIRECTORA DE TESIS: DR. FLORENTINA DE MARÍA SANCHEZ



MEXICO, D. F.

2002

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

Biblioteca Central



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



UNIVERSIDAD NACIONAL
DE INGENIERÍA

... a la Dirección General de Bibliotecas •
JNAM a difundir en formato electrónico e imprez
contenido de mi trabajo recepción:

NOMBRE: Jorge Ramírez López
FECHA: 6/15/2002
FIRMA: [Signature]

M. EN C. ELENA DE OTEYZA DE OTEYZA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

"Introducción a la Geometría Fractal y a la Dinámica del Caos"

realizado por Ramírez López Jorge

con número de cuenta 9653500-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de Matemáticas

Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

- | | | |
|-------------------|----------------------------------|--------------------|
| Director de Tesis | Dra. Flor de María Aceff Sánchez | <u>[Signature]</u> |
| Propietario | Dr. Fernando Brambila Paz | <u>[Signature]</u> |
| Propietario | M. en C. Alejandro Bravo Mojica | <u>[Signature]</u> |
| Suplente | M. en C. Miguel Lara Aparicio | <u>[Signature]</u> |
| Suplente | M. en C. Juan Rico Arvizu | <u>[Signature]</u> |

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Gómez Ortega

FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

Índice general

Introducción.....	5
CAPITULO 1.....	7
La Geometría Fractal y la dinámica del Caos.....	7
1.1 Introducción.....	7
1.2 Caos determinístico.....	11
CAPITULO 2.....	12
Fractales Regulares y Autosimilitud.....	12
2.1 Introducción.....	12
2.2 El conjunto de Cantor.....	12
2.3 Dimensiones no fractálicas: La dimensión euclidiana y la dimensión topológica.....	14
2.4 La Dimensión de Similitud (Ds).....	15
2.5 La curva de Koch.....	18
CAPITULO 3.....	21
Fractales Aleatorios.....	21
3.1 Introducción.....	21
3.2 Aleatorización del conjunto de Cantor y la curva de Koch.....	21
3.3 Fronteras que forman Fractales.....	23
3.4 La dimensión de conteo de caja y la dimensión de Hausdorff.....	24
3.5 La técnica de caminata estructurada y la dimensión divisora.....	33
CAPITULO 4.....	36
Movimiento Fraccional y Regular Browniano.....	36
4.1 Introducción.....	36
4.2 Movimiento Browniano Regular.....	36
4.3 Movimiento Fraccional Browniano: Trazas.....	49
4.5 Movimiento Fraccional Browniano: Trayectorias.....	58
4.6 El color y potencia del ruido.....	63
CAPITULO 5.....	65
Procesos Iterativos de retroalimentación y Caos.....	65
5.1 Introducción.....	65
5.2 Crecimiento de poblaciones y el modelo de Verhulst.....	65
5.3 La función logística.....	67
5.4 El efecto de variación en el parámetro de control.....	68
5.4.1 Parámetro de control: $a = 0.90$	69
5.4.2 Parámetro de control: $a = 3.20$	70
5.4.3 Parámetro de control: $a = 3.20$	71
5.4.4 Parámetro de control: $a = 3.52$	72
5.4.5 Parámetro de control: $a = 4.00$	72
5.5 Solución general de la función logística.....	73
5.6 Iteración grafica de la función logística.....	74
5.7 Bifurcación, estabilidad y el número de Feigenbaum.....	79
5.8 Una función bidimensional: el modelo de Henón.....	87
5.9 Iteraciones en el plano complejo: Conjuntos de Julia y el conjunto de Mandelbrot.....	92
CAPITULO 6.....	98
Oscilaciones caóticas.....	98
6.1 Introducción.....	98
6.2 Un oscilador mecánico no lineal: el oscilador Duffing.....	98

6.3 Caos en el clima: el modelo de Lorenz.....	109
6.4 Espacio fase, dimensión y forma de un atractor.....	117
CAPITULO 7.....	121
Caracterizando el Caos.....	121
7.1 Introducción.....	121
7.2 Caracterización preliminar: Inspección visual.....	121
7.3 Caracterización preliminar: El Espectro de frecuencia.....	122
7.4 Caracterizando el caos: Exponentes de Lyapunov.....	127
7.5 Caracterizando el caos: Estimadores de la dimensión.....	133
7.5.1 dimensión de conteo de caja.....	133
7.5.2 La dimensión de información.....	133
7.5.3 Dimensión de correlación.....	134
7.5.4 La dimensión puntual y la dimensión puntual promedio.....	139
7.5.5 La dimensión de Lyapunov.....	140
7.6 Reconstrucción del atractor.....	143
7.6.1 Método 1- Inspección visual del atractor reconstruido.....	147
7.6.2 Método 2- Periodo dominante.....	147
7.6.3 Método 3- Función de autocorrelación.....	147
7.6.4 Método 4- Criterio de la mínima información común.....	148
7.7 La dimensión de inmersión para la reconstrucción de atractores.....	153
7.8 El efecto del ruido.....	155
Conclusiones.....	157
Bibliografía.....	158

Índice de Figuras

Figura 1.1 Objetos fractales en la naturaleza.....	8
Figura 2.1 Construcción del conjunto de Cantor.....	13
Figura 2.2 Un conjunto de formas comunes con sus respectivas dimensiones euclidiana y topológica.....	15
Figura 2.3 Escalamiento y dimensión. Cada objeto consiste de N elementos de longitud ϵ , N está determinado por la elección de ϵ	16
Figura 2.4 Construcción de la curva de Koch y la isla de Koch.....	19
Figura 3.1 Dos métodos para aleatorizar el conjunto de Cantor y construcción de la curva de Koch aleatorizada.....	22
Figura 3.2 Acercamiento en el borde de una costa real, para revelar su estructura.....	23
Figura 3.3 Estimación de la dimensión de conteo de caja a partir de datos experimentales.....	26
Figura 3.4 Determinación de la dimensión fractal de una costa real, utilizando el método de conteo de caja.....	27
Figura 3.5 Medición de una curva suave.....	28
Figura 3.6 Medición de una superficie suave.....	30
Figura 3.7 Determinación de la dimensión fractal de una costa real usando la técnica de caminata estructurada.....	34
Figura 3.8 Gráfica de Richardson obtenido de la técnica de caminata estructurada.....	34
Figura 3.9 Regiones principales de la función de Richardson.....	35
Figura 4.1 Propiedades del movimiento browniano en el plano.....	38
Figura 4.2 Construcción y propiedades de la traza de un movimiento browniano.....	42
Figura 4.3 Escalamiento de los incrementos en la traza de un movimiento browniano.....	45
Figura 4.4 Escalamiento de una nube de difusión de partículas que siguen un movimiento browniano.....	47
Figura 4.5 Trazas de un movimiento fraccional browniano para diferentes exponentes de Hurst.....	50
Figura 4.6 Coeficiente de difusión fractal para un movimiento fraccional browniano.....	52
Figura 4.7 Propiedades de escalamiento de la traza de un mfb, contenida dentro de una caja unitaria (mfb persistente, $H=0.6$).....	53
Figura 4.8 Ilustración grafica de la construcción de la traza de un mfb.....	58
Figura 4.9 Generación de dos componentes que siguen un mfb respectivamente, en el plano.....	59
Figura 4.10 Propiedades de escalamiento de la trayectoria de un mfb.....	61
Figura 4.11 Escalamiento potencial del ruido de funciones.....	64
Figura 5.1 El proceso iterativo de retroalimentación de la función logística.....	69
Figura 5.2 Soluciones iteradas de la ecuación logística para diferentes parámetros de control.....	70
Figura 5.3 Iteración gráfica de la ecuación logística.....	75
Figura 5.4 El diagrama de bifurcación para la ecuación logística.....	80
Figura 5.5 Estabilidad local de los puntos fijos.....	82
Figura 5.6 El atractor de Henón.....	88
Figura 5.7 Iteraciones de la función compleja con $c=(-1+0i)$	92
Figura 5.8 Conjuntos prisioneros de la función compleja.....	94
Figura 5.9 Iteraciones de la función compleja con $c=(-1.1+0.2i)$	95
Figura 5.10 El conjunto de Mandelbrot.....	96
Figura 6.1 Modelo oscilador de un bloque deslizante.....	99
Figura 6.2 Series de tiempo del oscilador Duffing.....	103
Figura 6.3 Retratos fase del oscilador Duffing.....	105

Figura 6.4 Secciones de Poincaré para soluciones pos transitorias del oscilador Duffing.....	107
Figura 6.5 Dependencia sensitiva ante condiciones iniciales.....	108
Figura 6.6 Diagrama esquemático de la convección de Rayleigh-Bernard.....	110
Figura 6.7 Solución postransitoria no oscilatoria del sistema de Lorenz.....	112
Figura 6.8 Atractor extraño del modelo de Lorenz.....	113
Figura 6.9 La función de Lorenz.....	115
Figura 6.10 Atractor periódico para el modelo de Lorenz con $\sigma=10$, $b=2.67$ y $r=100.5$	116
Figura 6.11 Diagrama esquemático de distintos atractores con sus respectivas series de tiempo.....	120
Figura 7.1 Espectro de Fourier para el oscilador Duffing y el modelo de Lorenz.....	123
Figura 7.2 Diagrama esquemático de los exponentes de Lyapunov.....	127
Figura 7.3 Estimacion de la dimensión de correlación.....	136
Figura 7.4 Gráfica de la dimensión de correlación para el atractor extraño de Lorenz.....	138
Figura 7.5 Esquema de la definición de la dimensión de Lyapunov.....	142
Figura 7.6 Reconstrucción de un atractor usando el método de retardos de tiempo.....	146
FIGURA 7.7 Gráfica de la función de autocorrelación contra el retardo, para las variables x y z del atractor extraño del modelo de Lorenz.....	148
Figura 7.8 Esquema de la definición de la dimensión de mínima información común.....	151
FIGURA 7.9 Reconstrucción del atractor de Lorenz utilizando el criterio de mínima información común.....	152
Figura 7.10 Gráfica de la dimensión de correlación para el atractor extraño reconstruido del modelo de Lorenz, considerando dimensiones de inmersión, $m = 1-10$	155
Figura 7.11 El efecto del ruido en las gráficas de la dimensión de correlación.....	156

Introducción

El propósito de esta tesis es el de presentar una introducción a la geometría fractal y a la dinámica del caos. Estos temas han tenido gran interés por parte de diversas disciplinas tales como la ingeniería, la medicina y la economía, por nombrar sólo algunas. Es importante hacer notar al lector de esta tesis que ésta misma ha intentado ser lo más ilustrativa posible, por lo que se requerirá que el lector se refiera a las figuras, como apoyo en la comprensión de lo que se está mencionando.

El capítulo 1 revisa de forma general aspectos importantes de la geometría fractal y la dinámica del caos. El resto de la tesis se divide en dos partes: los capítulos del 2 al 4 tratan la geometría fractal y sus aplicaciones, mientras que la segunda parte, que consta de los capítulos del 5 al 7, trata la dinámica del caos. Muchos de los métodos de la geometría fractal desarrollados en la primera parte de esta tesis, serán utilizados en la caracterización y comprensión de los sistemas dinámicos caóticos, que encontraremos en la segunda parte de esta tesis.

El capítulo 2 cubre el tema de los fractales regulares, mientras que el capítulo 3 trata sobre los fractales aleatorios.

En el capítulo 4 investigamos las propiedades fractálicas y la gran utilidad práctica del movimiento fraccional browniano (mfb). Este capítulo es en cierta forma, una demostración de la gran aplicación que tiene la geometría fractal en distintas disciplinas, y esto es debido a que se ha encontrado la potencia de los métodos de la geometría fractal, para la explicación de ciertos comportamientos.

En el capítulo 5 se aborda el tema de los sistemas dinámicos discretos que experimentan comportamientos aperiódicos o simplemente caos. Mientras que en

el capítulo 6 se abordan los sistemas dinámicos continuos que experimentan caos; de esta forma en el capítulo 7 se presentan las herramientas matemáticas necesarias para la caracterización del caos. Entre muchas cosas más, el capítulo 7 liga la geometría fractal, presentada en los capítulos 2 y 3, con la dinámica del caos, presentada en los capítulos 5 y 6.

CAPITULO 1

La Geometría Fractal y la dinámica del Caos

1.1 Introducción

La geometría fractal se refiere al estudio de las propiedades de los fractales, pero ¿qué es un fractal?. Aquí nos encontramos con una pequeña complicación, ya que existen muchas definiciones de lo que es un fractal. Posiblemente la forma más sencilla de definir un fractal es la de un objeto que bajo cualquier grado de magnificación de él mismo, éste se parece a él mismo, es decir, un objeto que posee simetría aún variando la escala; en el cual cada pequeña parte del objeto replica la estructura del objeto total. Este hecho característico de los objetos fractales se le conoce como **autosimilitud**. El término simetría se debe entender como una propiedad que repite las partes de un objeto con respecto a una recta o un plano.

La mayoría de los fractales los podemos encontrar en la naturaleza, aunque también los podemos hallar mediante la iteración de alguna función particular. Los fractales que podemos encontrar en la naturaleza pueden ser desde la frontera que dibuja un cúmulo de nubes, las grietas que se forman en las paredes, la frontera que dibuja una montaña en el cielo; hasta la forma de un helecho natural. Los tres primeros objetos fractales mostrados en la figura 1.1, presentan autosimilitud en el sentido estadístico, ya que presentan el mismo grado de "rugosidad" en la medida en que hacemos un acercamiento gradual. Por su parte el helecho presenta una autosimilitud exacta, ya que cada ramificación del helecho es una mini copia del helecho total y así sucesivamente se conserva esta

propiedad en la medida que analizamos las ramificaciones de las ramificaciones anteriores.

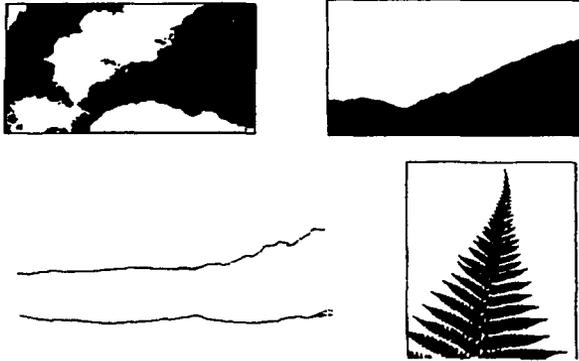


Figura 1.1 Objetos fractales en la naturaleza.

Los fractales también los podemos caracterizar según su dimensión (dimensión fractal), la cual puede ser distinta de la dimensión euclidiana o su dimensión topológica. La palabra dimensión se debe interpretar desde un punto de vista de las matemáticas, es decir, debemos entender la palabra dimensión para el caso de un objeto fractal como el espacio que ocupa éste en el espacio en el que se encuentra inmerso. La dimensión euclidiana y topológica se definen en la sección 2.3 del capítulo 2. De la misma forma que la definición de la palabra fractal, podemos encontrar diferentes definiciones de dimensión de un fractal o dimensión fractálica. Algunas de las definiciones que podemos hallar están: la dimensión de similitud, D_s ; la dimensión divisora, D_D ; la dimensión de Hausdorff,

D_H ; la dimensión de conteo de caja, D_B ; la dimensión de correlación, D_C ; la dimensión de información, D_I ; la dimensión puntual D_p ; la dimensión puntual promedio, D_A ; y la dimensión de Lyapunov D_L .

Estas definiciones las encontraremos a lo largo de esta tesis y las definiremos más formalmente.

Las siete dimensiones listadas anteriormente son de gran utilidad en la caracterización de una estructura fractal asociada a los atractores (que más adelante definiremos) que surgen en la dinámica del caos.

Es importante hacer notar la diferencia entre un objeto fractal que presenta la propiedad de *autosimilitud en todas partes* del objeto y aquellos que lo presentan en *un lugar en específico*. Para aclarar este hecho, consideremos los siguientes tres fractales: (a) una espiral logarítmica, (b) un árbol binario y (c) el triángulo de Sierpinsky, mostrados en la figura 1.2.

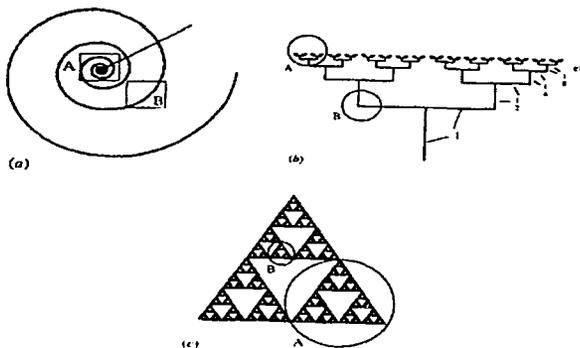


Figura 1.2 La naturaleza de la autosimilitud. (a) La espiral logarítmica es auto similar únicamente en su punto de convergencia. (b) El árbol binario es autosimilar únicamente en las ramas superiores. (c) El triángulo de Sierpinsky es autosimilar en todas partes.

En la espiral logarítmica observamos autosimilitud solo si consideramos un acercamiento en el punto de convergencia, esto es, la rama de la espiral contenida en la caja A contiene al punto de convergencia de la espiral y por tanto para todo acercamiento que hagamos dentro de la caja A, obtendremos infinitud de copias de la espiral. Por el contrario si consideramos la caja B, la cual obviamente no contiene el punto de convergencia de la espiral; podemos ver que esta no contendrá ninguna réplica de la espiral logarítmica por más que hagamos un acercamiento gradual.

El árbol binario es fácil de construir, simplemente agregando sucesivamente formas T a cada una de las terminaciones de arriba de la letra T. Este objeto fractal presenta autosimilitud sólo si consideramos las ramas superiores del mismo. Si consideramos el círculo A, podemos ver que existe una réplica del objeto total, por el contrario si consideramos el círculo B éste no contiene ninguna réplica del objeto total. Por último, el triángulo de Sierpinsky presenta la propiedad de autosimilitud en todas partes. No importa en qué lugar del triángulo hagamos un acercamiento siempre obtendremos una réplica del triángulo de Sierpinsky. Esta propiedad se conoce como **autosimilitud exacta**.

La frontera dibujada por un cúmulo de nubes, las grietas de una pared y la frontera dibujada en el cielo por una montaña tienen la propiedad de autosimilitud exacta; mientras que el helecho posee la propiedad de autosimilitud sólo en las ramificaciones.

Lo anterior es relativamente importante, ya que la mayoría de los objetos fractales que están presentes en la naturaleza, no poseen la propiedad de autosimilitud en

todas partes, pero si consideramos ciertas partes del objeto podemos hallar la autosimilitud requerida como para aplicar los métodos de la geometría fractal.

1.2 Caos determinístico

En la naturaleza como en la ciencia, las oscilaciones se presentan en cualquier momento. Las oscilaciones de un sistema dinámico pueden ser clasificadas en dos grandes categorías: lineales y no lineales. En general todos los sistemas reales son no lineales, pero por lo general una primera aproximación a la dinámica de un sistema particular, se hace de manera lineal. Los modelos lineales son preferibles a los modelos no lineales, ya que éstos son más fáciles de trabajar desde un análisis matemático; por el contrario los modelos no lineales son más difíciles de analizar matemáticamente ya que por lo regular no es posible encontrar soluciones analíticas asociadas a un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales. Sin embargo, únicamente los sistemas no lineales son los que presentan un comportamiento fascinante e interesante, conocido como **movimiento caótico**, o simplemente **caos**. Estos sistemas se comportan aparentemente de manera impredecible.

En 1963, Edward Lorenz publicó su trabajo titulado: Flujo determinístico no periódico (Deterministic nonperiodic Flow), en el cual detallaba el comportamiento, mediante un modelo matemático simplificado de la transmisión de calor en la atmósfera. Lorenz mostró cómo un modelo matemático determinístico (esto es, uno que no tiene asociado un componente aleatorio) podía producir aparentemente un comportamiento impredecible, el cual más tarde se le llamaría **caos**.

CAPITULO 2

Fractales Regulares y Autosimilitud

2.1 Introducción

Los objetos que poseen autosimilitud exacta son conocidos como **Fractales Regulares**.

En el capítulo 1 "definimos" un fractal como un objeto que conserva la propiedad de autosimilitud en varias escalas de magnificación del objeto, pero también como aquél cuya dimensión fractálica es mayor que su dimensión topológica y menor que su dimensión euclidiana. Esta dimensión es por lo general un número que no es entero.

Benoit Mandelbrot, considerado el padre de la geometría fractal, postuló la siguiente definición de fractal: "Un fractal es por definición un conjunto para el cual su dimensión de Hausdorff excede estrictamente su dimensión topológica", pero más tarde se retractó y la reemplazó por: "Un fractal es una forma la cual está compuesta de partes similares al objeto total".

Para evitar posibles confusiones en esta tesis, hemos adoptado la siguiente prueba la cual identificará si un objeto es un fractal, teniendo siempre en mente que tal definición es naturalmente ambigua. La prueba consiste en verificar que su dimensión fractálica exceda su dimensión topológica.

2.2 El conjunto de Cantor

Este conjunto considera inicialmente el intervalo unitario $[0,1]$, el conjunto es generado removiendo el tercio medio del intervalo $[0,1]$. De los dos subintervalos restantes se procede a remover los tercios medios de estos dos subintervalos. En seguida se remueven los tercios medios de los cuatro subintervalos anteriores, y

así sucesivamente se procede infinitamente. El conjunto de Cantor es un fractal regular ya que éste exhibe autosimilitud en cualquier escala que consideremos. Esta propiedad esta ilustrada en la figura 2.1, donde la parte izquierda es magnificada tres veces para obtener nuevamente el conjunto de cantor.

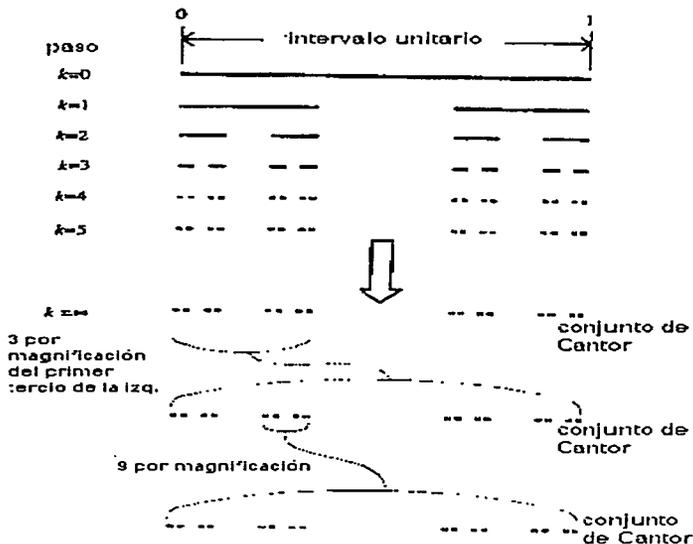


Figura 2.1 Construcción del conjunto de Cantor.

La construcción del conjunto de cantor es simple, sin embargo, es un objeto matemático cuya estructura es infinitamente rica. Este conjunto no llena continuamente el intervalo unitario como lo haría una línea recta, ni tampoco es un conjunto numerable; este conjunto se distribuye en el intervalo unitario de cierta forma que su dimensión es distinta de cero y de uno, es decir tiene una dimensión

fractal entre cero y uno. Las dimensiones no enteras o dimensiones fractales son difíciles de conceptualizar por lo que las trataremos en las próximas secciones, pero primero veamos las dimensiones no fractálicas.

2.3 Dimensiones no fractálicas: La dimensión euclidiana y la dimensión topológica

Generalmente concebimos los objetos como de dimensión cero (puntos), de dimensión uno (rectas), de dimensión dos (planos), de dimensión tres (sólidos).

La dimensión euclidiana D_E , es simplemente el número de coordenadas requeridas para especificar un objeto. Desde el punto de vista de la Topología, que trata acerca de las distintas maneras en como un objeto puede ser distorsionado de una forma en otra sin perder sus propiedades esenciales; considera que la dimensión topológica D_T , de un objeto, no cambia bajo una transformación del objeto (homeomorfismo). La dimensión topológica se obtiene cubriendo el objeto con discos abiertos de radio pequeño.

En la figura 2.2 podemos ver las dimensiones euclidianas y topológicas de algunos conjuntos comunes.

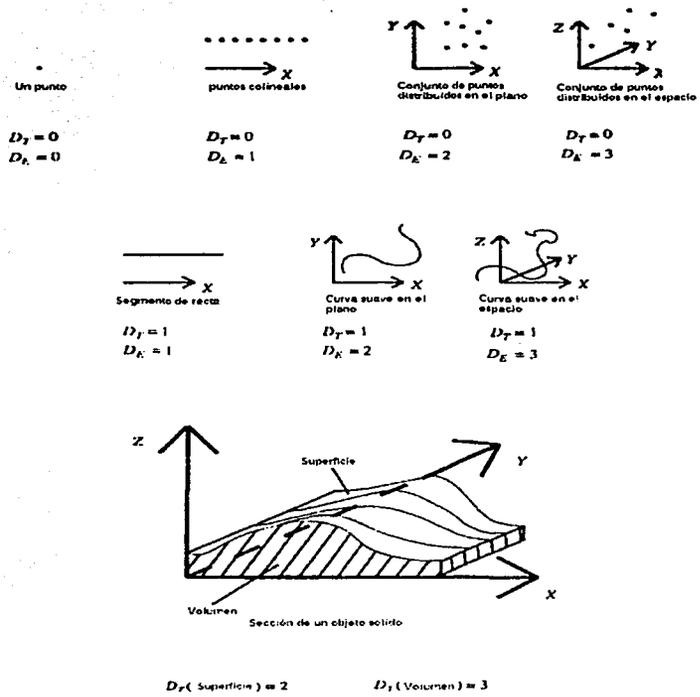


Figura 2.2 Un conjunto de formas comunes con sus respectivas dimensiones euclidiana y topológica.

2.4 La Dimensión de Similitud (D_s)

La dimensión de similitud la utilizaremos para caracterizar la construcción de objetos fractales regulares. El concepto de dimensión está estrechamente relacionado con el de escalamiento. Consideremos la línea, superficie y el sólido

dibujados en la figura 2.3. Cada uno de ellos está dividido respectivamente por subintervalos de longitud, subintervalos de área y subintervalos de volumen de longitud epsilon (ϵ). Para simplicidad consideremos que la longitud L , el área A y el volumen V , son iguales a uno.

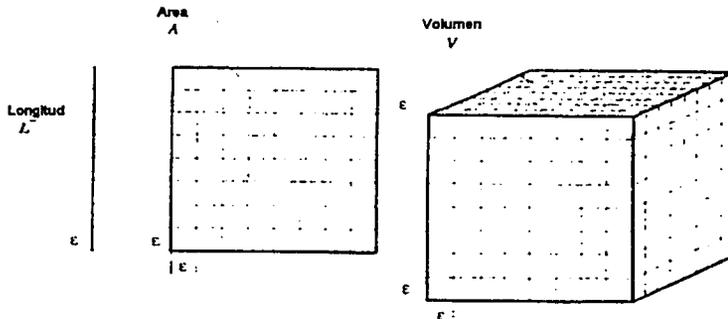


Figura 2.3 Escalamiento y dimensión. Cada objeto consiste de N elementos de longitud ϵ , N está determinado por la elección de ϵ .

Consideremos primero la línea. Si la línea es dividida en N pequeños segmentos auto similares, de longitud ϵ , entonces ϵ es el factor de escalamiento, es decir:

$$L = N\epsilon = 1 \tag{2.1a}$$

es decir la línea esta compuesta de N partes auto similares que están escaladas por $\epsilon = 1/N$.

Ahora consideremos el área unitaria. Si dividimos el área nuevamente en N segmentos de área ϵ^2 , entonces

$$A = N \epsilon^2 \tag{2.1b}$$

es decir, el área está compuesta de N partes auto similares escaladas por $\epsilon = 1 / N^{\frac{1}{2}}$. Análogamente, obtenemos que para el volumen:

$$V = N \epsilon^3 \quad (2.1c)$$

es decir, el sólido esta compuesto por N partes auto similares escaladas por $\epsilon = 1 / N^{\frac{1}{3}}$.

Examinando las igualdades anteriores podemos ver que el exponente ϵ es una medida de la (similaridad) dimensión del objeto, y por lo tanto tenemos en general que se cumple la siguiente relación:

$$N \epsilon^{D_s} = 1 \quad (2.2)$$

Usando logaritmos nos queda la siguiente expresión:

$$D_s = \text{Log} (N) / \text{Log} (1/\epsilon) \quad (2.3)$$

Apliquemos esta definición al conjunto de Cantor. Podemos ver que en el conjunto de Cantor $N= 2$, ya que en cada tercio existen dos copias idénticas del conjunto contenidas dentro del conjunto, y claramente $\epsilon= 1/3$, por lo que de acuerdo con la dimensión de similitud se tiene:

$$D_s = \text{Log} (2) / \text{Log} (1/(1/3)) = \text{Log} (2)/ \text{Log} (3)=0.6309.....$$

Entonces para el conjunto de Cantor, D_s es menor que uno y mayor que cero, y además $D_T < D_s < D_E$, como habíamos esperado que sucediera. De aquí que de acuerdo con nuestra convención, el conjunto de cantor es efectivamente un objeto fractal con dimensión de similitud igual a 0.6309.... Por otro lado consideremos el conjunto de Cantor escalado por $1/9$, en el cual hay 4 copias del conjunto, en cuyo caso nos da la siguiente dimensión de similitud:

$$D_s = \text{Log}(4) / \text{Log}(1/(1/9)) = \text{Log}(4) / \text{Log}(9) = 0.6309.....$$

Análogamente, hay ocho pequeños subintervalos que contienen copias idénticas del conjunto, cada uno de ellos a una escala de $1/27$ del conjunto original, por lo que:

$$D_s = \text{Log}(8) / \text{Log}(1/(1/27)) = \text{Log}(8) / \text{Log}(27) = 0.6309.....$$

Podemos entonces observar una regla general para la dimensión de similitud:

$$D_s = \text{Log}(2c) / \text{Log}(3c) = c \text{Log}(2) / c \text{Log}(3) = 0.6309.....$$

Donde c es el factor de escalamiento utilizado para identificar el grado de autosimilitud del conjunto. De lo anterior se deduce que la dimensión de similitud es independiente de la escala usada para investigar la estructura del objeto.

2.5 La curva de Koch

El método de construcción de ésta curva está ilustrada en la figura 2.4(a). Éste se construye considerando una línea de longitud uno la cual es dividida en tres partes iguales y el tercio medio es removido. En el tercio medio removido se coloca dos segmentos de longitud $1/3$ en forma de triángulo. Se procede sucesivamente de la misma forma en cada uno de los lados de la anterior figura, obteniendo así la curva de Koch. Una propiedad de la curva de Koch, es que tiene una longitud infinita, por lo que la longitud no es una medida adecuada para medir la curva. En cada iteración hay cuatro subsegmentos que forman la curva, cada una de ellas $1/3$ reducida de la curva original. Entonces, para la curva de Koch, $N=4$, $\epsilon=1/3$, se tiene que la dimensión de similitud nos da:

$$D_s = \text{Log}(N) / \text{Log}(1/\epsilon) = \text{Log}(4) / \text{Log}(3) = 1.2618.....$$

Por tanto la curva de Koch es un objeto Fractal ya que su dimensión fractal excede su dimensión topológica, la cual es igual a uno. Hemos mostrado fractales regulares cuyas dimensiones de similitud están estrictamente entre 0 y 1, 1 y 2, por lo que nos resta mostrar un fractal regular cuya dimensión esté estrictamente entre dos y tres. La figura 2.4(b) muestra la construcción de la isla de Koch, la cual es similar en su construcción a la curva de Koch, solo que esta vez estamos considerando un triángulo primero, y después procedemos, en cada uno de los lados del triángulo, de igual forma que como lo hicimos con la curva de Koch, obteniendo de esta forma la isla de Koch.

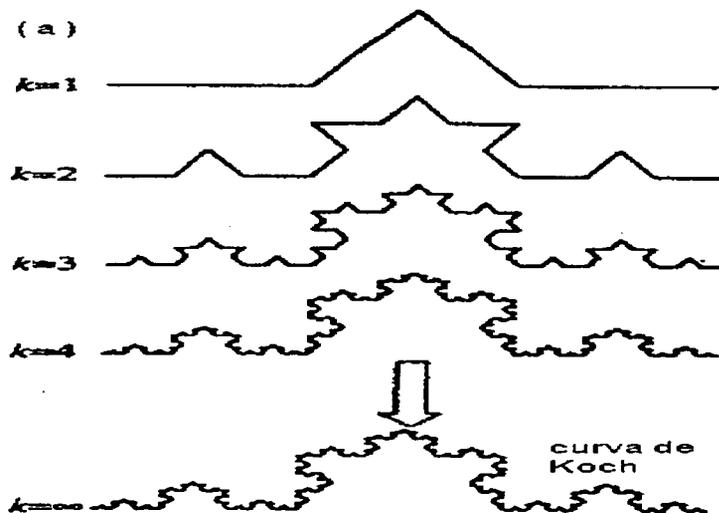


Figura 2.4 Construcción de la curva de Koch y la isla de Koch.

(b)

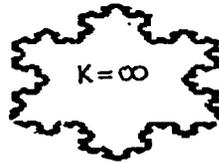
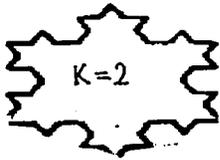
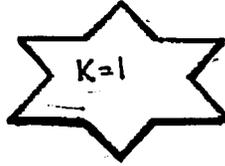
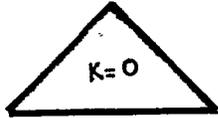


Figura 2.4 (continuación)

CAPITULO 3

Fractales Aleatorios

3.1 Introducción

En el capítulo 2 investigamos las propiedades de los fractales regulares —regulares en el sentido en que estos están compuestos de copias escaladas y posiblemente rotadas de ellos mismos. Sin embargo, existe otro grupo de fractales, conocidos como fractales aleatorios, los cuales contienen un componente aleatorio o estadístico. Cada pequeña parte de un fractal aleatorio tiene las mismas propiedades estadísticas que el total. Los fractales aleatorios son particularmente de gran utilidad para la descripción de propiedades de muchos procesos y objetos naturales.

3.2 Aleatorización del conjunto de Cantor y la curva de Koch

Una forma simple de generar un fractal mediante un componente aleatorio, consiste en agregar un elemento probabilístico al proceso de construcción de un fractal regular. Una versión aleatoria del conjunto de Cantor se puede producir de varias formas; en la figura de 3.1(a) se ilustran dos métodos para producir conjuntos de Cantor aleatorios.

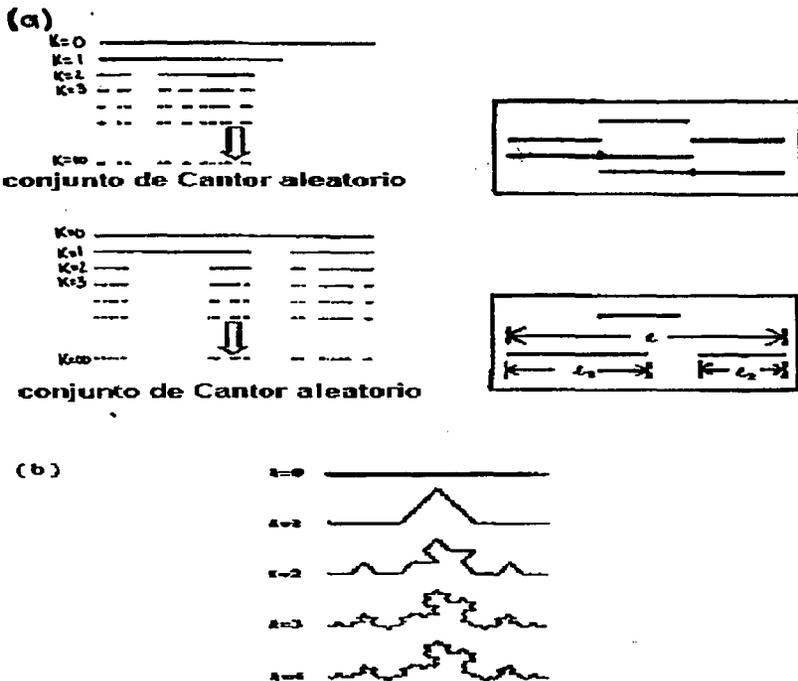


Figura 3.1 Dos métodos para aleatorizar el conjunto de Cantor y construcción de la curva de Koch aleatorizada.

En la curva de Koch se elige aleatoriamente el tercio que será removido y a su vez se reemplazará por un triángulo equilátero cuya posición puede ser aleatoria también: hacia adentro o hacia fuera, como se muestra en la figura 3.1(b).

3.3 Fronteras que forman Fractales

Una frontera que forma un fractal es una curva fractal que no se interseca consigo misma; esta frontera nos revela la estructura intrínseca de la curva en la medida en que hacemos cada vez un acercamiento mayor. En el capítulo 2 la curva de Koch tenía una frontera regular, pero la mayoría de las fronteras reales son esencialmente rugosas en todo nivel de magnificación de la misma, ésto se muestra esquemáticamente en la figura 3.2. Sin embargo, a diferencia de la curva de Koch, una costa o frontera real es estadísticamente autosimilar en cualquier segmento aleatorio que elijamos, este segmento poseerá las mismas propiedades estadísticas en todas las escalas de magnificación que hagamos. De esta forma las fronteras o costas son curvas fractales aleatorias.

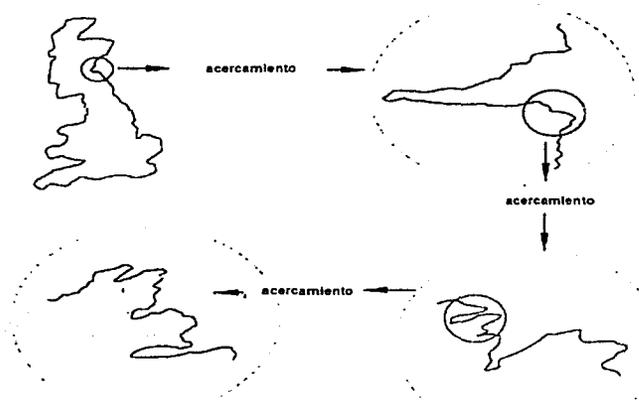


Figura 3.2 Acercamiento en el borde de una costa real, para revelar su estructura.

De lo anterior es importante establecer que cualquier objeto fractal, incluyendo fronteras, poseen autosimilitud sobre un rango finito de escala. Este rango finito hace posible que la geometría fractal desempeñe un papel importante en su caracterización. Este hecho importante tendrá que ver cuando discutamos las regiones típicas de la función de Richardson que veremos más adelante en esta tesis.

3.4 La dimensión de conteo de caja y la dimensión de Hausdorff.

El uso de una dimensión como medida de caracterización y cuantificación de la propiedad de autosimilitud estadística de fronteras fractales aleatorias es una buena forma de proceder, pero necesitamos una nueva definición de dimensión, ya que la utilizada en el capítulo 2 se refiere únicamente a fractales que poseen autosimilitud exacta. Para resolver tal requerimiento, existen dos estimadores de la dimensión fractal de fractales aleatorios que son de gran utilidad, éstos son el método de conteo de caja y la técnica de la caminata estructurada. La dimensión de conteo de caja está estrechamente relacionada con la dimensión de Hausdorff, la cual es de poca utilidad para el ingeniero o científico que desee cuantificar un fractal a partir de una base de datos, debido a su complejidad. De hecho una descripción matemática completa de la dimensión de Hausdorff está fuera del alcance de esta tesis. Es por esto que centraremos primero nuestra atención en la dimensión de conteo de caja, la cual es más conveniente para nuestros fines.

La dimensión de conteo de caja se obtiene a partir de cubrir al objeto fractal con cajas de longitud δ . El número de cajas, N , requeridas para cubrir el objeto fractal está relacionado con δ a través de su dimensión de conteo, D_b . Demos un

ejemplo: consideremos un segmento de línea recta (objeto unidimensional) de longitud unitaria. Coloquemos segmentos de longitud δ para cubrir el segmento de línea recta, para lo cual requerimos de N segmentos. De hecho para cubrir dicho segmento, podemos utilizar cualquier elemento con dimensión mayor o igual que la dimensión de la línea, es decir, dimensión uno. El número de segmentos que requerimos para cubrir este segmento de línea unitaria es igual a $N\delta$, entonces, $N\delta=1$, por lo tanto, $N=1/\delta^1$. Repitiendo el procedimiento anterior, pero ahora para un área unitaria, es fácil ver que para cubrir tal área unitaria requeriremos de $N=1/\delta^2$ cuadrados de longitud δ y dimensión euclidiana mayor o igual a dos. Similarmente, si cubrimos el objeto con cubos, requeriremos de $N=1/\delta^3$ cubos de longitud δ con dimensión euclidiana mayor o igual a tres para cubrir el objeto. De nuevo notemos que en cada caso el exponente de δ es una medida de la dimensión del objeto. En general, requerimos de $N=1/\delta^{D_B}$ cajas para cubrir el objeto donde el exponente D_B es la dimensión de conteo de caja del objeto. De esta forma llegamos a la siguiente fórmula general de D_B para objetos de hipervolumen unitario:

$$D_B = \frac{\log(N)}{\log(1/\delta)} \quad (3.1)$$

En general para calcular la dimensión de conteo de caja para un objeto con un hipervolumen (es decir, longitud, área, volumen, hipervolumen fractal) no unitario, dado por V^* , es igual a:

$$D_B = \frac{\log(N) - \log(V^*)}{\log(1/\delta)} \quad (3.2)$$

Ahora, si reagrupamos la fórmula anterior de la siguiente forma:

$$\text{Log}(N) = D_B \text{Log}(1/\delta) + \text{Log}(V^*), \quad (3.3)$$

entonces, podemos observar que ésta es la ecuación de una recta cuya pendiente es precisamente la dimensión de conteo de caja, D_B , y cuya ordenada al origen es $\text{Log}(V^*)$, como se muestra en la figura 3.3.

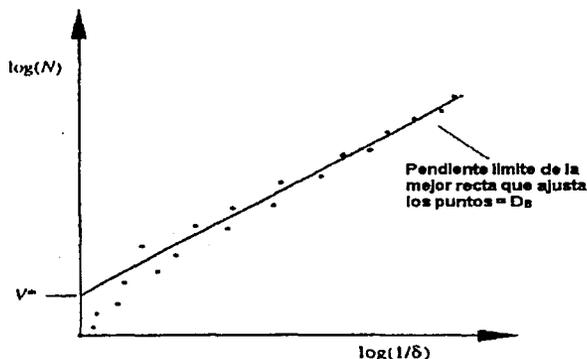


Figura 3.3 Estimación de la dimensión de conteo de caja a partir de datos experimentales.

En la figura 3.4 podemos ver tres formas de cubrir una costa, además podemos observar la cubierta de círculos abiertos de radio δ , pero sea cual sea el método utilizado podemos obtener la dimensión de conteo de caja al hacer δ tender a cero, obteniendo en el límite la pendiente de la recta que se ajusta a los puntos. De lo anterior se deduce la siguiente fórmula para el cálculo de la dimensión de conteo de caja:

$$D_B = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d(\log(N) - \log(V^*))}{d(\log(1/\delta))} \quad (3.4)$$

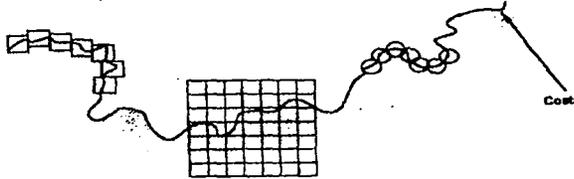


Figura 3.4 Determinación de la dimensión fractal de una costa real, utilizando el método de conteo de caja.

A pesar de que éstos son buenos estimadores de la dimensión de conteo de caja, la técnica más refinada es encontrar la pendiente de la recta que mejor se ajuste al conjunto de puntos, como se muestra en la figura 3.3. Por último, la ecuación (3.1) tiene un gran parecido con la ecuación (2.3) que corresponde a la dimensión de similitud. Sin embargo, no hay que confundirlas: el cálculo de D_s requiere que exactamente las partes autosimilares del fractal sean identificadas, mientras que para D_B , requerimos que el objeto sea cubierto con cajas autosimilares. Entonces, D_B nos permite más flexibilidad en el tipo de objeto fractal que investiguemos.

Existe una gran similitud entre la dimensión de conteo de caja y la dimensión de Hausdorff. Ambas usan elementos para cubrir el objeto en cuestión. La diferencia es esencialmente la siguiente: cuando usamos la dimensión de conteo de caja nos preguntamos ¿cuántas cajas o hipercubos necesitamos para cubrir el objeto?, en cuyo caso solo necesitamos probar cajas o hipercubos los cuales tengan dimensión entera igual o que exceda a la del objeto en cuestión. En contraste, cuando usamos la dimensión de Hausdorff lo que nos preguntamos es

¿cuál es el tamaño del objeto?, esto es lo que tratamos de medir. Para medir el tamaño o hipervolumen necesitamos usar una cubierta de hipercubos de dimensión apropiada, esta dimensión apropiada es la que se conoce como dimensión de Hausdorff. Aclaremos lo que hasta ahora se ha dicho acerca de la dimensión de Hausdorff. Para ello consideremos objetos regulares, no fractales o euclidianos. Si deseamos medir el tamaño de un objeto debemos usar una medida apropiada para su dimensión, es decir, la longitud es una medida natural para una línea, área para una superficie, y volumen para un sólido. Consideremos primero la medición de una curva suave como la de la figura 3.5.

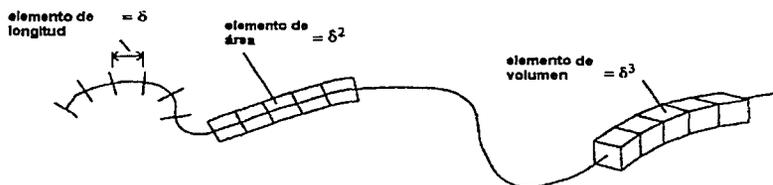


Figura 3.5 Medición de una curva suave.

Para medir esta curva podemos cubrirla con pequeñas líneas, cuadros o cubos de longitud δ ; como se muestra en la figura 3.5. Las magnitudes de longitud, área y volumen están dadas por δ , δ^2 , δ^3 respectivamente, o más generalmente dadas por δ^{D_E} , donde D_E es la dimensión euclidiana. Así como en la dimensión de conteo de caja, requerimos N elementos de longitud δ para cubrir la curva. La longitud medida de la línea, por los elementos de longitud δ , está dada por:

$$L_m = N \delta \quad (3.5a)$$

Así cuando $\delta \rightarrow 0$, la longitud estimada L_m tiende a la longitud real L , es decir:

$$L_m \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} L \quad (3.5b)$$

Ahora consideremos la cubierta de la curva usando los cuadrados de área δ^2 . El área estimada A_m asociada a la línea está dada por:

$$A_m = N \delta^2 \quad (3.6a)$$

Entonces, cuando δ tiende a cero, también lo hace el área estimada, es decir:

$$A_m \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (3.6b)$$

esto tiene sentido con el hecho de que una curva tenga área igual a cero. Análogamente el volumen estimado V_m , asociado a la curva tiende a cero cuando δ tiende a 0, es decir:

$$V_m = N \delta^3 \quad (3.7a)$$

$$V_m \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (3.7b)$$

Extendiendo el razonamiento anterior, usando elementos de mayor dimensión que tres, podemos ver que únicamente la medida de longitud de la curva nos arroja una medida finita distinta de cero, la cual es realmente la longitud de la curva, L .

Si requerimos N hipercubos para cubrir un objeto, entonces el hipervolumen estimado V_m^* está dado por el número de hipercubos multiplicado por el volumen de cada hipercubo, es decir:

$$V_m^* = N \delta^{D_r} \quad (3.8a)$$

En el límite, cuando δ tiende a cero, el hipervolumen estimado tiende asintóticamente al hipervolumen real del objeto, y es independiente de δ , es decir:

$$V_m^* \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} V^* \quad (3.8b)$$

Sin embargo, como vimos en el caso de la curva, la medición obtenida es únicamente sensible en la medida en que la dimensión de los elementos que utilizamos para medirla y la del objeto son la misma. Alternativamente, si medimos un objeto con elementos de medición no apropiados, entonces hallaremos que el hipervolumen estimado tiende a infinito para elementos de medición (hipercubos) de dimensión menor que la del objeto, o tiende a cero si usamos elementos de medición de dimensión más grande que la del objeto. Consideremos ahora el siguiente problema: se desea encontrar la longitud, área o volumen de una superficie usando líneas, cuadrados o cubos, como se muestra en la figura de 3.6.

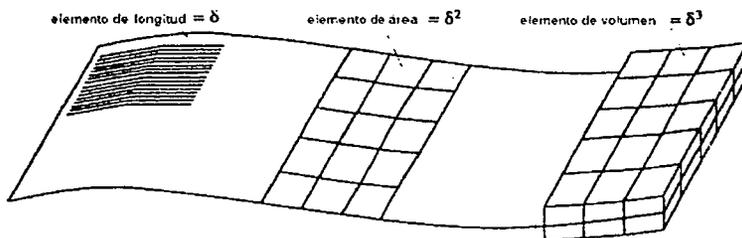


Figura 3.6 Medición de una superficie suave.

No podemos cubrir la superficie con un número finito de líneas, entonces el hipervolumen estimado, o longitud estimada de la superficie, diverge cuando la longitud de las líneas (longitud δ) tiende a cero.

Es decir:

$$V_m^* = N \delta \quad (3.9a)$$

$$N\delta \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty \quad (3.9b)$$

aquí, V_m^* es un hipervolumen unidimensional, es decir, la longitud. Análogamente si cubrimos la superficie con cubos de volumen δ^3 podemos ver que el volumen estimado tiende a cero cuando δ tiende a cero, es decir:

$$V_m^* = N \delta^3 \quad (3.10a)$$

$$N\delta^3 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (3.10b)$$

así también para hipercubos de dimensión mayor que tres, el hipervolumen tiende a cero cuando δ tiende a cero. Únicamente cuando medimos la superficie usando cuadrados, encontramos que el hipervolumen estimado tiende a un valor finito en el límite, es decir:

$$V_m^* = N \delta^2 \quad (3.11a)$$

$$N\delta^2 \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} V^* \quad (3.11b)$$

donde V^* es de hecho el área real de la superficie. Observamos que el hipervolumen estimado depende críticamente de la dimensión de los hipercubos utilizados. Generalmente el hipervolumen estimado es o cero o infinito, el cambio de cero a infinito ocurre cuando se usa la dimensión apropiada de los hipercubos. La dimensión de Hausdorff se basa en la observación anterior: en su definición podemos considerar hipercubos, o probar funciones, con hipervolumenes δ^D , donde el exponente D es no entero. La dimensión de Hausdorff D_H de un objeto está definida como la dimensión "crítica", D , para la cual el hipervolumen cambia de cero a infinito.

La dimensión de Hausdorff y la dimensión de conteo de caja nos dan dimensiones no enteras para cualquier curva fractal. Tomemos por ejemplo la curva de Koch, que tiene dimensión topológica igual a uno, dimensión euclidiana igual a dos y una dimensión de similitud igual a 1.2618.... Dijimos también que la longitud no es una buena forma de medir la curva de Koch ya que esta diverge a infinito al intentar medirla con pequeños segmentos de línea cada vez más pequeños. Por tanto, su dimensión de Hausdorff es mayor que uno. Si ahora intentamos medir la curva con cuadrados de lado δ , encontraremos que el área estimada tiende a cero cuando δ tiende a cero. Por tanto la dimensión de Hausdorff es menor que dos. En efecto, la curva de Koch tiene una dimensión de Hausdorff y de conteo de caja igual a su dimensión de similitud de 1.2618.....

En la práctica no es posible utilizar hipercubos cuya longitud no es entero, por tanto la estimación de la dimensión de Hausdorff no es muy útil para calcular la dimensión fractal de objetos reales.

La dimensión de conteo de caja está estrechamente relacionada a la dimensión de Hausdorff y en muchos de los casos ambas producen la misma dimensión fractal estimada. Además, éstas tendrán por lo general la misma estimación de la dimensión fractal de un fractal regular que la dimensión de similitud. Pero, existen algunos problemas cuando una curva fractal se interseca consigo misma, ya que la dimensión de Hausdorff y la de conteo de caja no toman en cuenta estas intersecciones, mientras que la dimensión de similitud si considera.

3.5 La técnica de caminata estructurada y la dimensión divisora.

Un método comúnmente usado para estimar la dimensión de curvas fractales en el plano, es la técnica de caminata estructurada. El método es presentado en los siguientes ocho pasos y además presentamos la ilustración grafica del método, en la figura 3.7.

- (i) Escojamos una longitud λ con la ayuda de un compás.
- (ii) Tomemos el punto inicial de la curva (o seleccionemos una posición adecuada si la curva es cerrada)
- (iii) Dibujemos un arco con centro en el punto inicial, que interseque la curva.
- (iv) El punto donde el arco interseque la curva será el nuevo centro del nuevo arco.
- (v) Dibuje el siguiente arco centrado en el punto de intersección del punto (iv). Repita los pasos (iv) y (v) hasta que se alcance el final de la curva.
- (vi) Grafique $\text{Log}(L)$ contra $\text{Log}(\lambda)$, donde L es la longitud de la curva usando λ , es decir $L=N\lambda$, donde N es el número de pasos tomados para "caminar" sobre la curva.
- (vii) Repita los pasos del (i) al (vi) para varias λ y, para cada una de estas λ , grafique $\text{Log}(L)$ contra $\text{Log}(\lambda)$. La gráfica resultante es conocida como gráfica de Richardson, la cual se muestra en la figura 3.8.
- (viii) La pendiente, S , de la curva resultante está relacionada a la dimensión divisora D_D , por la siguiente manera: $S = 1 - D_D$.

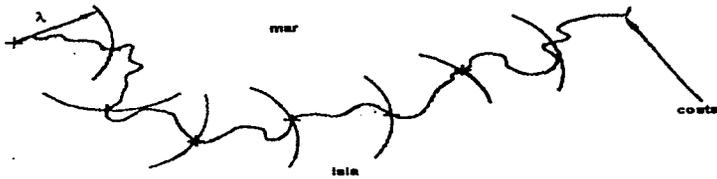


Figura 3.7 Determinación de la dimensión fractal de una costa real usando la técnica de caminata estructurada.

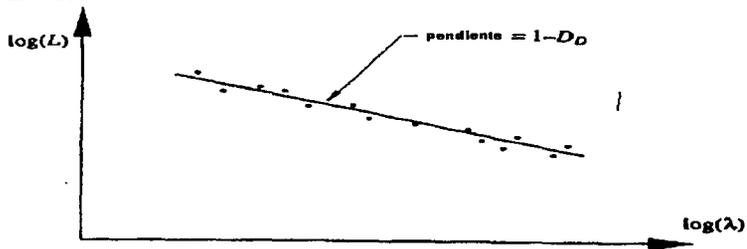


Figura 3.8 Gráfica de Richardson obtenido de la técnica de caminata estructurada.

La dimensión de la curva S se puede encontrar también mediante la obtención de la mejor línea que se ajuste al conjunto de puntos obtenidos en el paso (vii).

Usualmente existe más de una pendiente (típicamente tres) para la función de Richardson. La figura 3.9 muestra las pendientes típicas que pueden ser encontradas en el gráfico de Richardson.

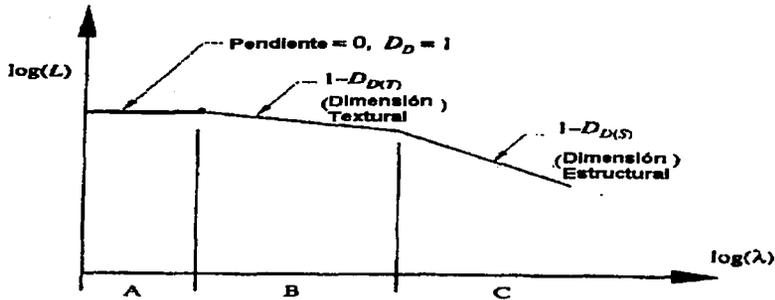


Figura 3.9 Regiones principales de la función de Richardson.

En la figura 3.9, tres distintas pendientes pueden observarse: éstas corresponden a las tres distintas regiones del objeto fractal en cuestión. Estas tres regiones las podemos describir mediante el siguiente sumario.

Región A: λ es muy pequeña. Un fractal puede no ser autosimilar bajo esta escala, o alternativamente, la resolución del fractal puede que no sea suficiente como para permitir un análisis bajo esta escala. Por tanto la curva parece ser muy suave a estos niveles de magnificación y la dimensión tiende a uno.

Región B: λ es pequeña. En esta región estamos midiendo la textura de la curva a una escala muy fina. Esto nos da la dimensión textural $D_{D(T)}$.

Región C: λ grande. Aquí estamos midiendo la estructura del fractal considerando una escala más grande. Esto nos da la dimensión estructural $D_{D(S)}$.

Las regiones B y C corresponden a dos diferentes fractales, interconectados uno con el otro para formar la curva. Objetos con dos o más dimensiones fractálicas se conocen como **Multifractales**.

CAPITULO 4

Movimiento Fraccional y Regular Browniano

4.1 Introducción

En este capítulo continuamos nuestra exposición acerca de los fractales aleatorios que discutimos en el capítulo anterior. Esta vez nos concentraremos en un conjunto específico de fractales aleatorios conocido como **movimiento fraccional Browniano (mfb)**, el cual ha probado ser de gran utilidad en la descripción y modelación de muchos fenómenos naturales tales como secuencias de DNA, colonias de bacterias, indicadores de mercado de acciones, por nombrar sólo algunos ejemplos. Empezaremos primero con el ya conocido movimiento browniano regular y de ahí investigaremos el movimiento fraccional browniano, para así poder investigar las propiedades fractales de ambos en sus trayectorias espaciales y en sus trazas espacio-temporales.

4.2 Movimiento Browniano Regular.

El movimiento regular browniano, o simplemente movimiento browniano, debe su nombre al botánico escocés Robert Brown(1773-1858) quien, mientras observaba en su microscopio granos de polen flotando en agua, notó que estos seguían movimientos muy rápidos e irregulares. Brown encontró también que otras pequeñas partículas exhibían estos aparentes impredecibles movimientos cuando los colocaba sobre una superficie de agua, por lo que dedujo que estos movimientos se debían meramente a causas físicas. Ahora se sabe que este movimiento tan irregular de partículas suspendidas en agua se debe al bombardeo de las moléculas del agua. Un ejemplo de la trayectoria de una partícula que sigue un movimiento browniano en el plano se muestra en la figura 4.1. La partícula fue

observada 16 384 veces en intervalos de tiempo homogéneos. Se muestra también el punto inicial y el punto final de la trayectoria. Notemos que a diferencia de las fronteras o curvas fractales examinadas anteriormente, la trayectoria de una curva que sigue un movimiento browniano en el plano puede intersectarse consigo misma. En la medida que hacemos un acercamiento gradual de la trayectoria browniana, más y más detallado es el comportamiento de la curva. Esto es ilustrado en la parte derecha de la figura 4.1(a), la cual contiene los primeros dieciséis pasos correspondientes al movimiento browniano de la izquierda, magnificado por un factor apropiado. La resolución de las dos funciones se ha mantenido igual y la similitud entre las dos funciones es evidente. La **autosimilitud estadística** se conserva sobre toda escala de magnificación. De esta forma el movimiento browniano en el plano es una curva fractal aleatoria.

Si consideramos un movimiento browniano en un tiempo discreto, es decir, considerando $\Delta t = t_1 - t_0, t_2 - t_1, t_i - t_{i-1}$, etc., y conectando los puntos observados con segmentos de línea recta, obtenemos una curva puntiaguda. Esta se muestra en la figura 4.1(b). Si denotamos las posiciones de los puntos en el tiempo t_i por (x_i, y_i) entonces la distribución de los saltos observados en el plano coordinado x-y, es decir, $\Delta x_i = (x_i - x_{i-1})$ y $\Delta y_i = (y_i - y_{i-1})$, siguen una distribución de probabilidad gaussiana (normal). Además, los pasos $r_i (= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2})$, entre los puntos observados, siguen una distribución gaussiana.

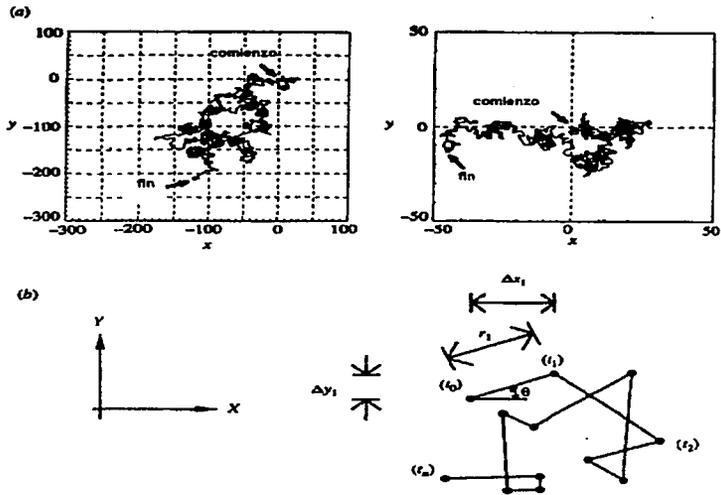


Figura 4.1 Propiedades del movimiento browniano en el plano.

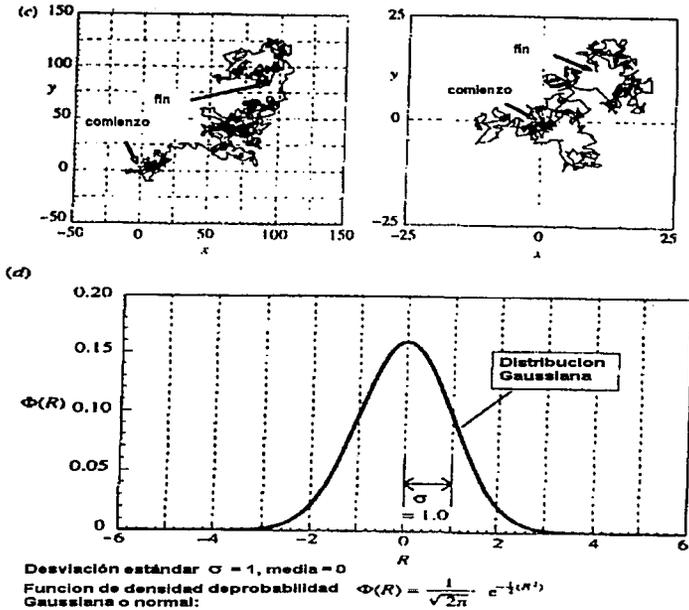


Figura 4.1 (continuación)

Los dos métodos numéricos más comunes para construir un movimiento browniano en el plano, consideran principalmente los dos aspectos mencionados anteriormente, es decir, podemos aleatoriamente seleccionar pasos en el plano coordenado, de una distribución normal y así construir el movimiento en el plano usando pasos Δx y Δy —el método x-y. Alternativamente, podemos elegir aleatoriamente un paso de longitud r , de una distribución normal y aleatoriamente elegir un ángulo θ en cada paso, de una distribución constante entre 0 y 2π rad

—el método $r-\theta$. El movimiento browniano mostrado en la figura 4.1(a) usa el método $x-y$ para generar la trayectoria en el plano. Esta contiene un movimiento browniano compuesto de 16 384 pasos aleatorios tomados en las direcciones de los ejes coordenados $x-y$, es decir 32 768 pasos en total, en donde cada 16 pasos es graficado en el plano $x-y$. Los pasos son tomados de una distribución de probabilidad gaussiana con media cero y varianza uno, la cual se muestra en la figura 4.1(d). La figura derecha de la figura 4.1(a) contiene los primeros 1024 puntos de la trayectoria de la izquierda: esta vez cada paso es graficado, dando la misma resolución para ambas gráficas. Como se mencionó anteriormente, la similitud del movimiento en las dos escalas es visualmente aparente, y de hecho si en las graficas omitiéramos las graduaciones correspondientes, sería imposible decir cuál es la grafica original y cuál fue la que se magnificó. Esto se debe a que ambas son estadísticamente autosimilares. La figura 4.1(c) usa el método $r-\theta$ para generar un movimiento browniano. Esta vez 16 384 pasos fueron tomados de la distribución gaussiana de la figura del inciso (d) y un ángulo aleatorio para cada paso. Las graficas de los incisos (a) y (c) consideran la distribución normal con media cero y varianza uno, por lo que de aquí en adelante utilizaremos este tipo de distribución normal estandarizada.

El término movimiento browniano ha sido usado para describir **curvas espaciales**, tales como la de los incisos (a) y (c) , y también para describir **curvas espacio-temporales**, es decir series de tiempo de las componentes del movimiento browniano. Es por esto que para evitar confusiones, nos referiremos al

término de **trayectorias** para curvas espaciales y el término de **trazas** para curvas espacio-temporales.

La traza en el tiempo de un movimiento browniano en una dirección coordenada, $B(t)$, se muestra en la figura 4.2(a). La traza es una serie de tiempo de una coordenada de una trayectoria browniana. Como mencionamos anteriormente, los incrementos sucesivos de la traza de un movimiento browniano, $B(t) - B(t - \Delta t)$, tienen una distribución gaussiana. De esta observación podemos hacer una aproximación en forma discreta de la traza de un movimiento Browniano, $B(t_i)$, la cual puede reproducirse a tiempos discretos, $t_i = i\Delta t$, sumando una serie de pasos aleatorios, $R(t_i)$, tomados de una distribución gaussiana, de la siguiente forma:

$$B(t_i) = \sum_{j=1}^i R(t_j) \quad (4.1)$$

El proceso de construcción de la traza de un movimiento browniano se ilustra en los incisos (a) y (b) de la figura 4.2

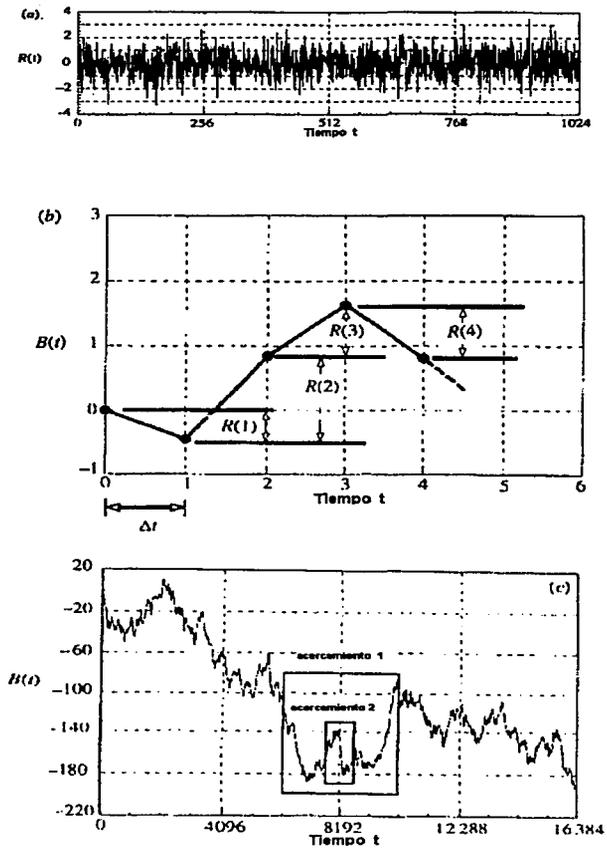


Figura 4.2 Construcción y propiedades de la traza de un movimiento browniano.

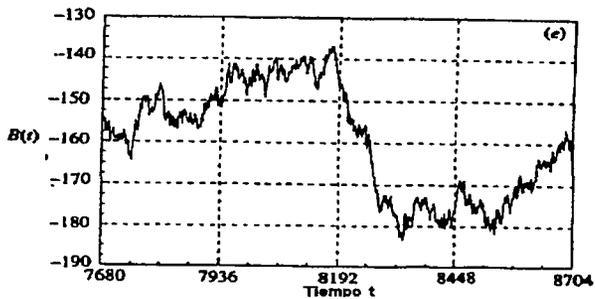
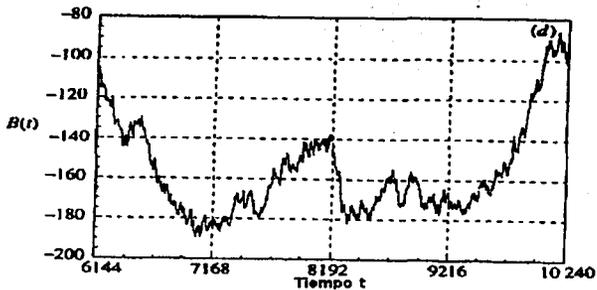


Figura 4.2 (continuación)

La figura 4.2 (a) muestra los primeros 1024 números aleatorios a tiempo discreto usados en la construcción de la traza browniana. Estos números son tomados de una distribución gaussiana, y son usados como los incrementos en los pasos $R(t_j)$, en la ecuación (4.1) que aproxima al movimiento browniano. La figura del inciso (b) muestra los primeros cuatro pasos de la traza browniana generada usando los primeros cuatro números aleatorios de la figura del inciso (a). Cuando

magnificamos la resolución de la figura del inciso (b) se hacen más evidentes los pasos.

Ahora que hemos generado una traza prefactal browniana (es decir, asumimos que tenemos una resolución lo bastante detallada), supondremos que es una traza que posee una resolución infinita, es decir, considerando $B(t)$, donde el tiempo t es continuo. La autosimilitud de $B(t)$ es evidente en la medida en que magnificamos hacia adentro de la traza. Este hecho se muestra en los incisos (c), (d) y (e) de la figura 4.2. La gráfica original y las magnificadas tienen la misma irregularidad, y de hecho son estadísticamente autosimilares. Notemos que los ejes han sido magnificados de manera diferente en cada magnificación. El segmento de la traza en el tiempo bajo observación fue escalada cuatro veces, por el contrario, la coordenada espacial, $B(t)$, fue únicamente escalada por un factor de dos. Entonces, dos diferentes factores de escalamiento son requeridos para retener la autosimilitud de la traza original y la de la traza escalada. Este requerimiento de escalamiento no uniforme o anisotrópico para la autosimilitud en las trazas brownianas, es considerada con más detalle a continuación.

Si consideramos un par de puntos en una traza browniana, los cuales estén separados por un tiempo T_s , encontramos que la media, la separación en valor absoluto de los dos puntos, es decir, $|\overline{\Delta B}| = \overline{B(t + T_s) - B(t)}$, es proporcional a la raíz cuadrada del tiempo de separación, es decir :

$$|\overline{\Delta B}| \propto T_s^{1/2} \quad (4.2)$$

donde el exponente, igual a un medio, es conocido como el **exponente de Hurst**, **H**. El valor promedio de la separación media se encuentra mediante el

desplazamiento de una ventana de longitud T_s sobre una porción suficientemente grande de la traza y promediando $|\Delta B|$. La figura 4.3 nos ilustra el método descrito.

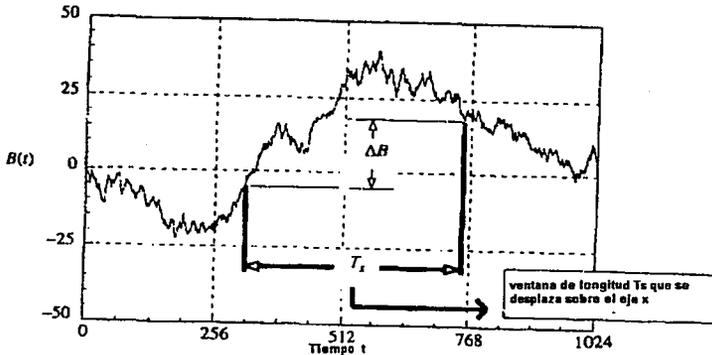


Figura 4.3 Escalamiento de los incrementos en la traza de un movimiento browniano.

Para un movimiento browniano, la suma de los incrementos estadísticamente independientes en el tiempo llegan a tener una divergencia de la media, la cual escala con la raíz cuadrada del tiempo. De esta forma la traza de un movimiento browniano se mantiene autosimilar bajo escalamientos únicamente cuando los ejes $B(t)$ y t son magnificados por diferentes factores. Esto es, si escalamos t por un factor A , debemos escalar $B(t)$ por un factor $A^{1/2}$. Esta propiedad de escalamiento no uniforme, o anisotrópica, se conoce como **autoafinidad**. La autoafinidad es la razón del requerimiento de dos factores de escalamiento al graficar las secciones magnificadas de las series de tiempo anteriores. Haciendo referencia a las gráficas de la figura 4.2; cuando magnificamos un cuarto hacia adentro de la serie de tiempo, el eje del tiempo fue magnificado por un factor de

cuatro, pero el eje $B(t)$ fue únicamente escalado por un factor de $(4)^{1/2} = 2$. Esto retiene la autosimilitud estadística de la traza de ambas gráficas (la original y la magnificada).

La figura 4.4 ilustra la difusión en el tiempo de partículas que siguen un movimiento browniano. Para claridad, únicamente diez trazas han sido graficadas. Al tiempo $t=0$ las diez trazas empiezan en $B(t)=0$ y comienzan notablemente a separarse del origen en la medida en que el tiempo se incrementa. Esta separación de $B(t)=0$ es en realidad un promedio, ya que como puede verse, algunas de las trazas retoman a $B(t)=0$ y de hecho varias veces, esto se ilustra en la figura 4.4(a).

Cuando consideremos problemas relacionados con difusión es más conveniente considerar la desviación estándar como medida de separación. La desviación estándar σ_c es proporcional a $|\Delta B|$ y la constante de proporcionalidad depende de la distribución de probabilidad de la función aleatoria $R(t)$. Se verifica que la desviación estándar de la nube de difusión, σ_c , escala de la misma forma que $|\Delta B|$, esto es:

$$\sigma_c \propto t^{1/2} \quad (4.3a)$$

La variación de σ_c en el tiempo para una nube de difusión de muchas partículas se muestra en el inciso (b) de la figura 4.4. Los procesos difusivos para los cuales escalan de esta forma se conocen como **procesos de Fickian**. Por ejemplo, la difusión molecular de un hielo en un ambiente líquido es un proceso de Fickian. Es usual expresar la razón de escalamiento con la siguiente igualdad:

$$\sigma_c = \sqrt{2Kt} \quad (4.3b)$$

donde **K** es conocido como el **coeficiente de difusión**, cuyas unidades son metros cuadrados por segundo.

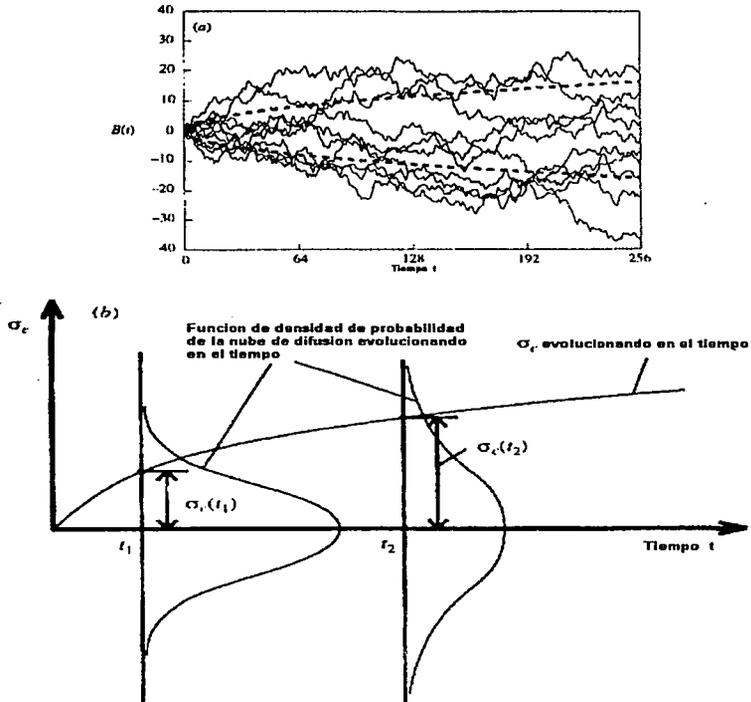


Figura 4.4 Escalamiento de una nube de difusion de particulas que siguen un movimiento browniano.

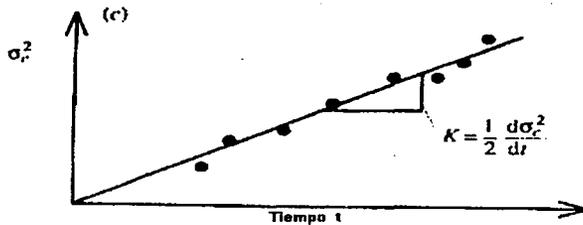


Figura 4.4 (continuación)

En la práctica, el coeficiente de difusión se obtiene de la nube de difusión, graficando la varianza σ_c^2 contra el tiempo. Este coeficiente resulta de una relación lineal para la cual la mejor línea que ajuste esta nube tiene una pendiente de dos veces el coeficiente de difusión. Esto se muestra en el inciso (c) de la figura 4.4.

Podemos generar un movimiento browniano $B(t)$ con un coeficiente de difusión específico, tomando incrementos $R(t_j)$ de una distribución gaussiana con desviación estándar, σ_p , dada por:

$$\sigma_p = \sqrt{2K\Delta t} \quad (4.3c)$$

entonces después de i pasos, cada uno de ellos de duración Δt y usando el hecho de que $\sigma_c = \sqrt{2Kt}$, se sigue que la desviación estándar de la nube de difusión de las partículas está dada por:

$$\sigma_c = \sigma_p(i)^{1/2} \quad (4.3d)$$

4.3 Movimiento Fraccional Browniano: Trazas

El movimiento browniano es de hecho un caso particular de una familia más grande conocida como **movimiento fraccional browniano**, usualmente abreviado como **mfb** son una generalización del movimiento browniano, sugerido por Benoit Mandelbrot. mfb's tienen exponentes de Hurst en el rango: $0 < H < 1$, donde el caso especial $H=0.5$ nos da el movimiento regular browniano que discutimos anteriormente. Como mencionamos al inicio de este capítulo, el mfb ha sido de gran utilidad para entender y modelar fenómenos irregulares en la ciencia y la naturaleza. Al igual que en el caso del movimiento regular browniano, diferenciaremos entre trazas espacio-temporales y trayectorias espaciales del movimiento. Investigaremos trazas de mfb's y trayectorias de mfb's separadamente, tratando primero las trazas de mfb's y después las trayectorias del mfb.

Denotaremos mfb por $B_H(t)$, donde el subíndice H es el exponente de Hurst, el cual clasifica el movimiento. Trazas de un mfb para $H=0.2$, 0.5 y 0.8 son mostrados en la figura 4.5 (Recordemos que $H=0.5$ corresponde a un movimiento regular browniano).

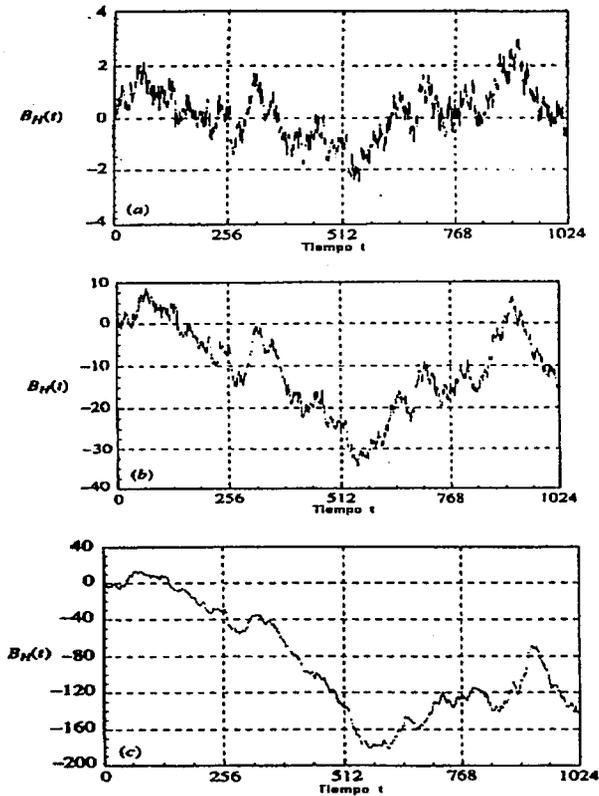


Figura 4.5 Trazas de un movimiento fraccional browniano para diferentes exponentes de Hurst.

Como podemos ver en la figura 4.5, existe una gran diferencia cualitativa entre cada una de las trazas. Trazas correspondientes a valores de H menores que 0.5 tienen una tendencia de regresar a sí mismas: esta propiedad es conocida como

antipersistencia. Por el contrario, para valores H mayores que 0.5, la traza tiene una tendencia de persistir en su progresión en la dirección en la cual se está moviendo: este comportamiento se conoce como **persistencia.**

De manera similar a como se discutió el movimiento regular browniano, los mfb's son procesos autoafines. Si escalamos una porción de una curva de un mfb, entonces para preservar la autosimilitud estadística requeriremos de dos factores de escalamiento independientes para el eje t y el eje $B_H(t)$, respectivamente. Al escalar al eje t por un factor A requerirá que el eje $B_H(t)$ sea escalado por A^H , entonces t se convierte en At y $B_H(t)$ en $A^H B_H(t)$. La separación media absoluta a lo largo de la traza de un mfb, $|\overline{\Delta B_H}|$, escala con el tiempo de separación mediante:

$$|\overline{\Delta B_H}| \propto T_s^H \quad (4.4)$$

similamente la desviación estándar de una nube de difusión de partículas de un mfb, escala mediante :

$$\sigma_c \propto t^H \quad (4.5a)$$

Estas últimas expresiones son básicamente las que presentamos en la sección anterior cuando hablamos del movimiento regular browniano, donde el exponente de Hurst es igual a $\frac{1}{2}$. Pero ahora ha sido reemplazado por el término general H del mfb con $0 < H < 1$. De acuerdo a la ultima expresión para la varianza, un coeficiente de difusión fractal K_f puede ser calculado al graficar $\sigma_c^{1/H}$ contra el tiempo t y además definiendo el **coeficiente de difusión fractal** como:

$$K_f = \frac{(\sigma_c)^{1/H}}{2t} \quad (4.5b)$$

Esta vez las unidades de K_f dependen de H . Las partículas de un mfb exhiben difusión no-Fickiana cuando $H \neq 1/2$. Al graficar $\sigma_c^{1/H}$ contra el tiempo obtendremos una relación lineal que se muestra en la el inciso (a) de la figura 4.6, donde la pendiente de la recta es igual a dos veces el coeficiente de difusión fractal. En la práctica, tanto H como K_f , pueden ser desconocidas. Si éste es el caso, entonces la mejor línea que ajuste a los datos en una función logarítmica de σ_c contra el tiempo puede ser usado, esto se muestra en el inciso (b) de la figura 4.6. La pendiente de la mejor recta que ajusta los datos es igual a H y el punto donde interseca al eje σ_c es igual a $H \log(2K_f)$.

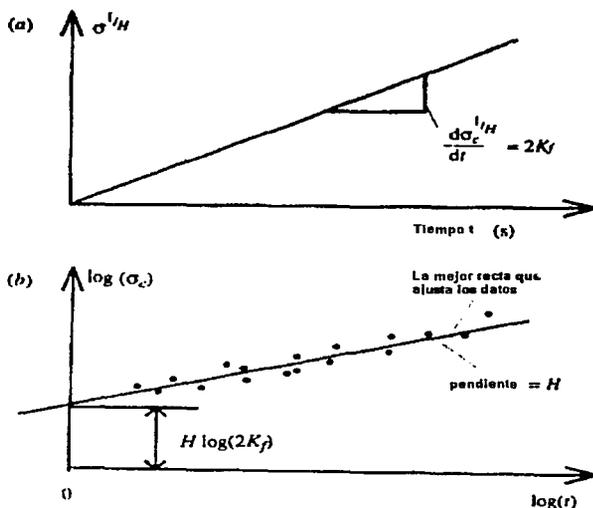


Figura 4.6 Coeficiente de difusión fractal para un movimiento fraccional browniano.

Como dijimos anteriormente, un movimiento fraccional browniano (mfb) es un proceso estadísticamente autosimilar, entonces es natural preguntarse: ¿cuál es su dimensión fractal?. Consideraremos primero la traza en el tiempo de un mfb y más adelante consideraremos la dimensión fractal en el caso de la trayectoria espacial. La dimensión fractal de conteo de caja, D_B , de la traza de un mfb, se puede obtener considerando una porción de la traza del mfb; la cual ha sido reescalada de tal forma que ésta se ajuste dentro de una caja unitaria, es decir, $0 \leq t \leq 1$ y $0 \leq B_H(t) \leq 1$, como se muestra en la figura 4.7.

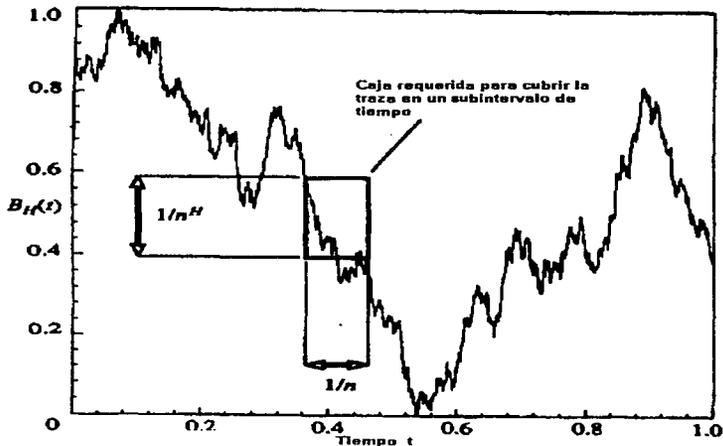


Figura 4.7 Propiedades de escalamiento de la traza de un mfb, contenida dentro de una caja unitaria (mfb persistente, $H=0.6$).

A continuación, dividimos el intervalo de tiempo unitario en n segmentos todos de longitud $1/n$. La altura de la caja que contendrá la traza en el tiempo sobre el

intervalo de $1/n$ escalará de manera distinta dependiendo de su base, debido a la naturaleza auto afin de la traza, es decir, que preserva su estructura. Por lo tanto el factor A de t es igual a $1/n$ y entonces el factor para $BH(t)=1$ es igual a $(1/n)^H$. El área de cada una de estas cajas rectangulares, requeridas para cubrir la traza en cada subintervalo de tiempo, es simplemente la longitud multiplicada por el ancho de la caja, es decir:

$$\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n^H}\right) = \frac{1}{n^{H+1}} \quad (4.6)$$

Sin embargo, necesitamos relacionar el escalamiento de cajas cuadradas más pequeñas con la caja cuadrada original de longitud igual a uno. Por otro lado, el número de cuadrados pequeños de área $(1/n)^2$ requeridos para cubrir la traza en cada subintervalo de tiempo es:

$$\left(\frac{1}{n^{H+1}}\right) / \left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^{H-1}} \quad (4.7)$$

Hay n tales subintervalos de tiempo de longitud $(1/n)$, entonces, el número de cajas, N, de longitud $\delta = 1/n$ requeridas para cubrir la porción original del mfb en la caja unitaria es:

$$N = n \left(\frac{1}{n^{H-1}}\right) = \left(\frac{1}{n^{H-2}}\right) \quad (4.8)$$

relacionando esto con la dimensión de conteo de caja dada anteriormente, obtenemos:

$$D_b = \frac{\log(N)}{\log(1/\delta)} = \frac{\log\left(\frac{1}{n^{H-2}}\right)}{\log(n)} = \frac{(2-H)\log(n)}{\log(n)} = 2-H. \quad (4.9a)$$

de esta forma obtenemos que la dimensión de conteo de caja para la traza de un mfb es:

$$D_B = 2 - H \quad (4.9b)$$

Entonces, las dimensiones fractales de las trazas de los movimientos brownianos dados anteriormente son: para $H=0.2$, $D_B=1.8$, para $H=0.5$ (movimiento regular browniano), $D_B=1.5$; y para $H=0.8$, $D_B=1.2$; es decir, mientras más torcida sea la traza, más grande será la dimensión. Esto parece encajar con nuestra intuición acerca de que la dimensión es una medida de la rugosidad o de lo retorcida que está una curva.

Un aspecto final a considerar es la siguiente pregunta: ¿cómo generamos una serie de tiempo de un movimiento fraccional browniano (mfb)? La traza de un movimiento fraccional browniano se define al tiempo t como:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \int_{-\infty}^0 [(t - t')^{H-\frac{1}{2}} - (-t')^{H-\frac{1}{2}}] dB(t') + \int_0^t (t - t')^{H-\frac{1}{2}} dB(t') \right\} \quad (4.12)$$

donde $B(t)$ es un movimiento regular browniano continuo y Γ es la función gamma. De hecho la generación de una traza discreta de un mfb es mucho más complicada ya que no podemos adherir simplemente un número aleatorio en cada etapa en la construcción del mfb, esto debido a que cada paso no es independiente, esto es, depende de la historia total. Dicho de otra manera, un mfb tiene asociada una memoria muy grande. Podemos generar una aproximación a un mfb usando incrementos sucesivos aleatorios tomados de una distribución

normal y que contengan una memoria finita. Los siguientes dos pasos generan una buena aproximación de un mfb (especialmente cuando $H > 0.5$).

(i) Cada incremento (paso) en el proceso de construcción es generado usando:

$$B_H(t_i) - B_H(t_{i-1}) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left[\sum_{j=i-M}^{i-2} \left((i-j)^{H-\frac{1}{2}} - (i-j-1)^{H-\frac{1}{2}} \right) R(t_j) + \sum_{j=i-1}^i (i-j)^{H-\frac{1}{2}} R(t_j) \right]. \quad (4.13a)$$

(ii) Al tiempo t_i , el mfb se define como la suma de estos incrementos, como sigue:

$$B_H(t_i) = \sum_{k=1}^i [B_H(t_k) - B_H(t_{k-1})] \quad (4.13b)$$

$B_H(t_i)$ es la i -ésima aproximación discreta del mfb al tiempo $t_i = i\Delta t$; Δt es un incremento discreto del tiempo usado; H es el exponente de Hurst de la traza; M es el número de pasos o incrementos de la limitada memoria usada en la aproximación del mfb, y $R(t_i)$ son pasos aleatorios muestreados discretamente de una distribución normal.

Si σ_p es la desviación estándar de $R(t_i)$, entonces después de i pasos, la desviación estándar de la nube del mfb σ_c está dada por:

$$\sigma_c = \sigma_p (i)^H \quad (4.14a)$$

la cual para un exponente de Hurst de 0.5 se reduce a la ecuación (4.3c) para el movimiento regular Browniano. Dado un coeficiente de difusión fractal, podemos reacomodar la ecuación (4.5b), para definir σ_p para nuestra aproximación de un mfb como:

$$\sigma_p = (2K_f \Delta t)^H \quad (4.14b)$$

En términos prácticos las ecuaciones (4.13a) y (4.13b) nos dicen que si queremos generar N pasos de un mfb, $B_H(t)$, entonces requerimos de N+M pasos aleatorios de una distribución normal, es decir requerimos $R(t_i)$ donde i va de cero a N+M. Para obtener una aproximación razonable a un mfb requerimos que la razón M/N sea muy grande.

Hay dos aspectos importantes de las ecuaciones (4.13a) y (4.13b): primero, el mfb generado usando estas ecuaciones pasa por el origen, es decir, $B_H(t_0) = 0$, y segundo, estas ecuaciones se reducen a un movimiento regular browniano cuando $H=0.5$.

El proceso de construcción está mostrado en la figura 4.9, donde 512 puntos de un mfb, con $H=0.8$ son generados usando 1024 números aleatorios, $R(t)$, tomados de una distribución normal de media cero y desviación estándar uno. La generación del i -ésimo punto en el mfb requiere de la suma de todos los números aleatorios sobre el intervalo de t_{i-M} a t_i , correspondientes a una memoria temporal $M\Delta t$.

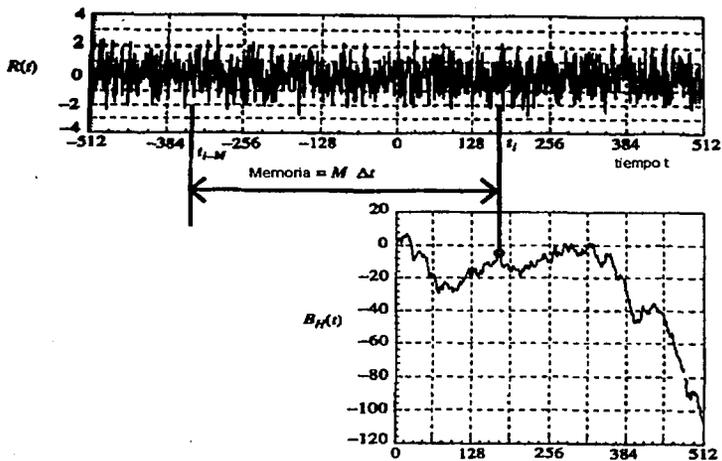


Figura 4.8 Ilustración gráfica de la construcción de la traza de un mfb.

4.5 Movimiento Fraccional Browniano: Trayectorias.

En el apartado anterior consideramos trazas espacio-temporales de un mfb, es decir, $B_H(t)$ contra el tiempo. Además $B_H(t)$ únicamente es la historia en el tiempo de un proceso unidimensional. La trayectoria de un mfb en el plano puede ser construida usando trazas independientes de un mfb. El método se muestra en la figura 4.10, donde las componentes espaciales de dos trazas de un mfb, $H=0.2$, son usadas como las componentes x , y ; de la trayectoria del mfb en el plano. Las figuras de los incisos (a), (b) y (c) contienen trayectorias que fueron construidas usando el mismo método con exponentes de Hurst de 0.2, 0.5 y 0.8 respectivamente.

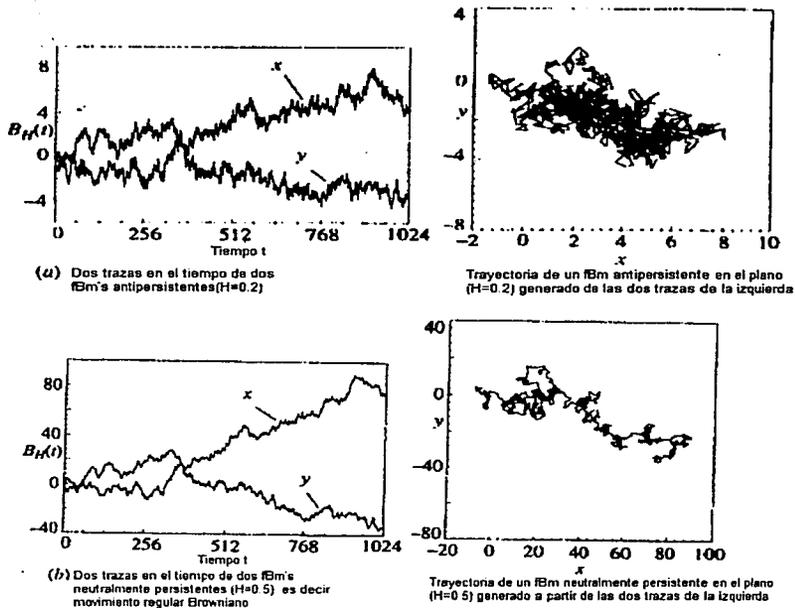


Figura 4.9 Generación de dos componentes que siguen un mfb respectivamente, en el plano.

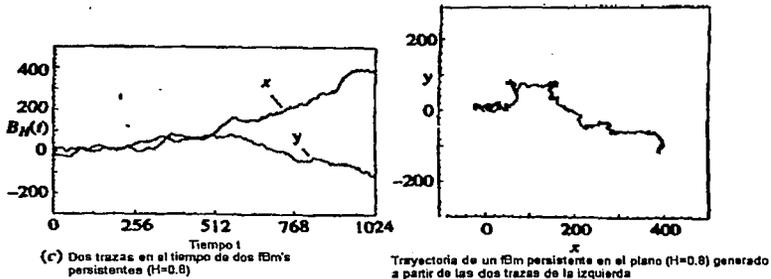


Figura 4.9 (continuación)

En contraste con las trazas de un mfb, donde la curva marcha continuamente a través del tiempo mediante desplazamientos aleatorios adheridos a cada intervalo de tiempo, las trayectorias de un mfb pueden intersecarse consigo mismas en el plano. Así como las trazas de un mfb, las trayectorias de un mfb son también fractales aleatorios con autosimilitud estadística en todas las escalas. Sin embargo, la dimensión fractal de una trayectoria de un mfb es diferente de la dimensión fractal de la correspondiente traza del mfb. La dimensión de conteo de caja, D_b , de la traza de un mfb puede ser obtenida considerando la trayectoria del mfb sobre un intervalo de tiempo T . Esto es mostrado esquemáticamente en la figura 4.11.

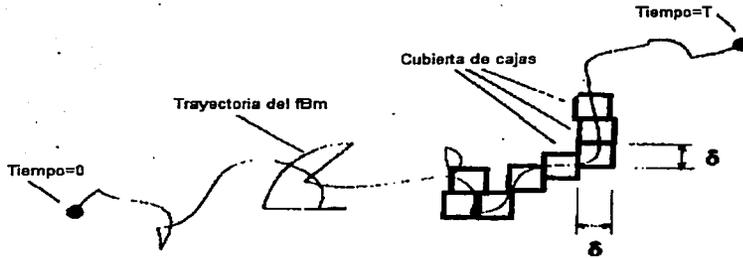


Figura 4.10 Propiedades de escalamiento de la trayectoria de un mfb.

Cada coordenada de la trayectoria de un mfb varía típicamente sobre subintervalos de tiempo Δt , por $|\Delta B_H| \propto \Delta t^H$. En una trayectoria, el número de cajas, N , de longitud δ , requeridos para cubrir la trayectoria escala con el tamaño o cantidad de la trayectoria en el periodo de tiempo del movimiento, T , es decir, $N \propto T / \Delta t$. Recordemos que la trayectoria no mezcla escalas espaciales y temporales, es decir, ésta no presenta auto afinidad pero sí presenta autosimilitud, consistiendo de dos ejes espaciales, ambos de los cuales tienen las mismas propiedades de escalamiento. La dimensión espacial de cada caja requerida para cubrir la trayectoria del mfb $\delta (= |\Delta B_H|)$ escala por Δt^H . De esta manera, en la medida en que reducimos la longitud δ de las cajas de prueba, obtenemos que la dimensión de conteo de caja:

$$D_B = \frac{\log(N)}{\log(1/\delta)} = \frac{\log(1/\Delta t)}{H \log(1/\Delta t)} = \frac{1}{H} \quad (4.15)$$

En el plano, sin embargo, la dimensión de conteo de caja no puede exceder 2. Entonces, la dimensión fractal de conteo de caja para una trayectoria de un mfb en el plano está dada por la expresión:

$$D_B = \text{mínimo} \left(\frac{1}{H}, 2 \right) \quad (4.16)$$

De esta forma, mfb's persistentes en el plano, es decir, aquellos con exponentes de Hurst menores que 0.5, tienen dimensión igual a dos y eventualmente llenarán el plano que circundan. mfb's persistentes tiene dimensión de conteo de caja menores que dos pero mayores que la unidad y no llenan el plano. Es interesante hacer notar que los patrones que siguen ciertas partículas en fluidos turbulentos son con frecuencia persistentes con exponentes de Hurst mayores que 0.5. Esto es una consecuencia de la gran escala de correlaciones, las cuales existen en un campo de flujo. Recientes estudios sobre mediciones satelitales acerca de las trayectorias de la superficie del océano han mostrado que estas se comportan como mfb's en el plano, con exponentes de Hurst cercanos a 0.78. Trayectorias en el espacio tridimensional pueden ser generadas de manera similar a las trayectorias en el plano simplemente usando tres trazas distintas de un mfb para cada una de las coordenadas de la partícula en el espacio. Extendiendo este razonamiento, podemos generar trayectorias de un mfb en espacios de mayor dimensión. La dimensión fractal de un mfb en un espacio euclidiano D_E -dimensional está dado por:

$$D_B = \text{mínimo} \left(\frac{1}{H}, D_E \right) \quad (4.17)$$

Si se deseara llenar un volumen determinado en el espacio tridimensional se requiere que el mfb sea antipersistente con un exponente de Hurst menor que 0.333.....

4.6 El color y potencia del ruido.

Muchas funciones aleatorias o ruidos encontrados en la ciencia y en la naturaleza tienen una potencia espectral, la cual experimenta una ley potencial. La potencia espectral se puede visualizar al graficar el cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier contra la frecuencia. Esta última sección brevemente menciona algunas relaciones comunes entre mfb's y otras funciones aleatorias. La frecuencia y la potencia espectral son tratadas con más detalle en el capítulo 7, por lo que es conveniente que vuelva a leer esta sección después de que haya cubierto el capítulo 7.

La traza en el tiempo de una variable aleatoria con una distribución normal como la que se muestra en la figura 4.2(a), se conoce como ruido blanco. La densidad de la potencia espectral, $P(f)$, de un ruido blanco permanece constante sobre el rango de frecuencia, f , esto es, éste es proporcional a $1/f^0$. La integral del ruido blanco nos da el movimiento regular browniano (también conocido como ruido Brown) con un exponente de Hurst de 0.5. La densidad espectral del movimiento browniano decrece al incrementar la frecuencia y es de hecho proporcional a $1/f^2$. Tanto el ruido blanco como los ruidos Brown son frecuentemente observados en la naturaleza. El ruido rosa está definido como aquel que tiene una densidad espectral proporcional a $1/f^1$. Los ruidos rosas se encuentran en una variedad de sistemas físicos. Finalmente, los ruidos que tienen densidades espectral proporcionales a $1/f^\phi$, donde ϕ es mayor que 2, son

comúnmente conocidos como ruidos negros. Una función logarítmica de la densidad de la potencia espectral contra la frecuencia nos permite medir el exponente de escalamiento al calcular la pendiente de la función. Esto último se muestra en la figura 4.12.

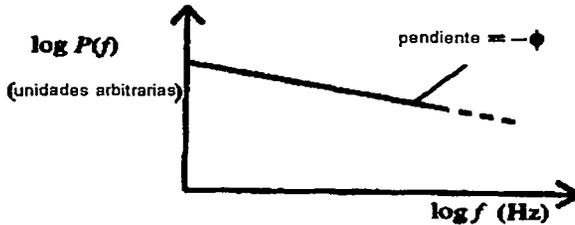


Figura 4.11 Escalamiento potencial del ruido de funciones.

El exponente de escalamiento de la traza de un mfb se relaciona con su dimensión fractal mediante la siguiente ecuación:

$$D_B = \left[\frac{5}{2} - \frac{\phi}{2} \right] \quad (4.18)$$

Comparando esta expresión con la ecuación 4.9(b), podemos deducir la siguiente relación entre el exponente espectral y el exponente de Hurst :

$$\phi = 1 + 2H \quad (4.19)$$

ésta nos arroja exponentes espectrales en el rango $1 < \phi < 3$ para mfb's. Por lo tanto, la potencia espectral es otro método para clasificar a los mfb's.

CAPITULO 5

Procesos Iterativos de retroalimentación y Caos

5.1 Introducción

En este capítulo investigaremos a los sistemas dinámicos discretos. Estos sistemas evolucionan a través de una serie de pasos o incrementos discretos en el tiempo, por el contrario a como lo hacen continuamente los sistemas dinámicos continuos, los cuales trataremos en los capítulos 6 y 7. Los sistemas dinámicos discretos evolucionan a través del tiempo mediante un proceso de iteración, donde el subsiguiente estado del sistema está determinado por su estado presente. Un ejemplo muy simple es considerar un sistema unidimensional cuyo estado está dado por la variable x cuando un valor inicial para x es dado. Dicho de otra forma, el valor de x al subsiguiente tiempo $(n+1)$ es una función únicamente de su presente estado al tiempo n . Esto se escribe como:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (5.1)$$

La ecuación (5.1) es conocida como función iterativa, ya que ésta aplica el valor presente de la variable x al tiempo n en el siguiente valor al tiempo $n+1$. La iteración repetida de ecuaciones simples de este tipo nos arroja comportamientos simples o por el contrario, complejos.

5.2 Crecimiento de poblaciones y el modelo de Verhulst.

El modelo más simple para modelar el crecimiento de ciertas poblaciones asume una tasa constante de crecimiento, esta tasa es por la cual la población crece en tamaño debido a una proporción fija en cada intervalo de tiempo. Esto puede escribirse de la siguiente manera:

$$P_{n+1} = P_n + r'P_n = (1 + r')P_n = rP_n \quad (5.2)$$

donde P_{n+1} es el tamaño de la población al tiempo $n+1$, P_n es el tamaño de la población al tiempo n ; r' , es la tasa de crecimiento y r es el factor de crecimiento igual a $1+r'$.

Se sigue de la ecuación (5.2) que $r' = (P_{n+1} - P_n) / P_n = \Delta P / P_n$, usualmente expresado como un porcentaje. Entonces:

$$P_n = (1 + r')^n P_0 = r^n P_0 \quad (5.3)$$

donde P_0 es la población inicial al tiempo $t=0$. Sin embargo, en este modelo tan simple (con r constante) la población crece sin cota alguna, es decir, en la medida que n tiende a infinito lo hace también la población, P . Claramente esto no sucede en las poblaciones de la vida real, las cuales están limitadas en su crecimiento por factores externos tales como la comida, espacio, enfermedades, etc. Por lo tanto, debe existir una población máxima, P_{MAX} . Para considerar el tamaño de esta población máxima en un modelo de poblaciones, se utiliza una tasa de crecimiento modificada, r' , la cual es proporcional a la diferencia entre el tamaño de la población al tiempo n (P_n) y el máximo tamaño posible de la población P_{MAX} , expresado como sigue:

$$r' = a(P_{MAX} - P_n) \quad (5.4)$$

donde a es una constante. Ahora, cuando $P_n = P_{MAX}$, se sigue que $r'=0$ y ninguna clase de crecimiento se experimenta. Al sustituir la ecuación (5.4) en la ecuación (5.2) se obtiene:

$$P_{n+1} = P_n + a(P_{MAX} - P_n)P_n \quad (5.5a)$$

y esta ecuación es conocida como el **modelo de Verhulst** del crecimiento de poblaciones. Si expandemos la ecuación (5.5a) obtenemos:

$$P_{n+1} = P_n + aP_{MAX}P_n - aP_n^2 \quad (5.5b)$$

Podemos ver que el último término arroja una retroalimentación negativa no lineal a la ecuación. Es este término el cual causa que el modelo de Verhulst, tenga una rica variedad de comportamientos incluyendo al movimiento caótico. Con frecuencia, es más cómodo usar tamaños de poblaciones relativas (denotadas con p minúscula) donde las poblaciones están expresadas como una fracción del tamaño máximo posible de la población (P_{MAX}). De esta forma la ecuación (5.5a) se convierte en:

$$p_{n+1} = p_n + ap_n(1 - p_n) \quad (5.6)$$

donde

$$p_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{P_{MAX}} \quad p_n = \frac{P_n}{P_{MAX}} \quad p_{MAX} = \frac{P_{MAX}}{P_{MAX}} = 1.$$

5.3 La función logística.

La ecuación (5.6) es el modelo de Verhulst normalizado por el tamaño máximo de la población. En esta sección y en las siguientes cuatro secciones, nos concentraremos en una versión más simple de la ecuación de Verhulst conocida como la **ecuación logística**. Para obtener esta función, simplemente removemos el primer término de la ecuación (5.6). En términos de la variable x en lugar de la variable p , la función logística queda de la siguiente forma:

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n) \quad (5.7a)$$

donde el valor presente de la variable x , es decir, x_n , es mapeado sobre el siguiente valor, es decir, x_{n+1} . La función logística es una función no invertible. No invertible significa que a pesar de que podamos iterar la función hacia delante en el tiempo con cada x_n , dándonos un único valor subsecuente, x_{n+1} ; el reverso no es verdad, es decir, iterando hacia atrás en el tiempo obtenemos dos soluciones x_n para cada valor de x_{n+1} . Al iterar repetidamente hacia adelante la ecuación logística, podemos observar varios comportamientos de las soluciones iteradas. La sucesión de las soluciones iteradas en la función logística se llaman **órbitas**. El comportamiento de iteraciones sucesivas dependen en ambos casos del parámetro de control, a , y de la condición inicial (o punto de comienzo) usado para las iteraciones. La función logística (5.7b), conocida como la **función logística** o **curva logística**, es la curva parabólica que contiene todas las posibles soluciones para x en la ecuación (5.7a).

$$f(x_n) = ax_n(1 - x_n) \quad (5.7b)$$

La curva logística forma parte de una gran familia de funciones iterativas conocidas como **funciones unimodales**, las cuales son curvas suaves con un solo máximo (en nuestro caso el máximo está en $x = \frac{1}{2}$).

En la sección 5.6 usaremos la curva logística para que de manera gráfica, podamos iterar la función de la ecuación (5.7a).

5.4 El efecto de variación en el parámetro de control.

En esta sección generaremos órbitas por medio de la ecuación (5.7a) para cinco valores del parámetro de control a . En cada paso de la iteración, el valor actual de

x es retroalimentado en la función para producir el valor siguiente, entonces este valor es usado para producir el siguiente y así en general, esto es:

$$\begin{aligned}x_1 &= ax_0(1-x_0) \\x_2 &= ax_1(1-x_1) \\x_3 &= ax_2(1-x_2) \\&\text{etc.}\end{aligned}$$

donde el valor inicial x_0 es conocido. Este proceso de retroalimentación se muestra en la figura 5.1. En cada uno de los siguientes casos, el valor inicial de x , es decir x_0 , es igual a 0.2.

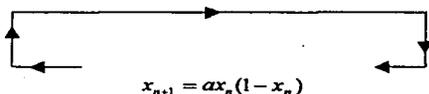


Figura 5.1 El proceso iterativo de retroalimentación de la función logística.

5.4.1 Parámetro de control: $a=0.90$

Iteraciones sucesivas de la función logística (5.7a) para el parámetro de control $a=0.90$ produce los siguientes valores de x :

$x_0=0.2$
 $x_1=0.1440$ $x_2=0.1109...$ $x_3=0.0887...$ $x_4=0.0727...$ $x_5=0.0607...$
 $x_6=0.0513...$ $x_7=0.0438...$ $x_8=0.0377...$ $x_9=0.0326...$ $x_{10}=0.0284...$
 $x_{11}=0.0248...$ $x_{12}=0.0218...$ $x_{13}=0.0192...$ $x_{14}=0.00169...$ $x_{15}=0.0150...$
 $x_{16}=0.0133...$ $x_{17}=0.0118...$ $x_{18}=0.01005...$ $x_{19}=0.0093...$ $x_{20}=0.0083...$
 etc.

En la figura (5.2a) se muestran las primeras iteraciones de la función logística, x_n , las cuales son graficadas contra n . Segmentos de línea recta son utilizados para conectar cada una de las iteraciones para efectos de visualización únicamente. Recuerde que el sistema no es continuo en el tiempo, pero sí es discreto, y entonces los segmentos de línea no representan algún patrón de una x a la siguiente. De hecho, para el parámetro de control $a=0.90$ y un valor inicial de

$x_0=0.2$, la órbita de la función logística tiende asintóticamente a cero cuando n tiende a infinito. Ciertamente, todos los valores de a entre cero y uno poseen iteraciones que decaen a cero cuando n es muy grande.

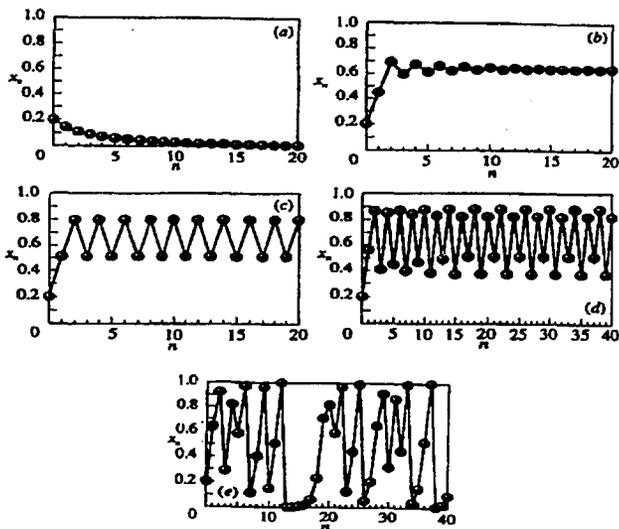


Figura 5.2 Soluciones iteradas de la ecuación logística para diferentes parámetros de control.

5.4.2 Parámetro de control: $a=3.20$

Iteraciones sucesivas de la función logística para un parámetro de control $a=3.20$ produce la siguiente sucesión de soluciones:

$x_0=0.2$
 $x_1=0.4160$ $x_2=0.6316\dots$ $x_3=0.6049\dots$ $x_4=0.6213\dots$ $x_5=0.6117\dots$
 $x_6=0.6175\dots$ $x_7=0.6140\dots$ $x_8=0.6161\dots$ $x_9=0.6149\dots$ $x_{10}=0.6156\dots$
 $x_{11}=0.6152\dots$ $x_{12}=0.6154\dots$ $x_{13}=0.6153\dots$ $x_{14}=0.6154\dots$ $x_{15}=0.6153\dots$
 $x_{16}=0.6153\dots$ $x_{17}=0.6153\dots$ $x_{18}=0.6153\dots$ $x_{19}=0.6153\dots$ $x_{20}=0.6153\dots$
 etc.

Las iteraciones parecen haberse estacionado en la solución 0.6153... Note que los valores de arriba son exactos en una cifra decimal de la solución final a partir de la segunda iteración (es decir, 0.6); correcta a dos cifras decimales después de cinco iteraciones (es decir 0.61), y correcta a tres cifras decimales después de 10 iteraciones (es decir 0.615). Después de quince iteraciones la solución se estaciona en le valor 0.6153. En general, una mayor precisión de la solución final requiere de más iteraciones. En la figura(5.2b), las primeras veinte iteraciones de la ecuación logística, x_n , son graficadas en contra de n para a =2.60 y $x_0=0.2$. Vemos en la figura que la función logística se estabiliza de forma oscilatoria al valor 0.6153. Esta solución final es conocida como **órbita de periodo uno**, ya que las iteraciones tienden a un valor fijo para el cual $x_{n+1} = x_n$ para n muy grande.

5.4.3 Parámetro de control: a =3.20

Iteraciones sucesivas de la función logística con un parámetro de control a =3.20 produce la siguiente sucesión de soluciones:

$x_0=3.20$
 $x_1=0.5120$ $x_2=0.7995...$ $x_3=0.5130...$ $x_4=0.7994...$ $x_5=0.5130...$
 $x_6=0.7994...$ $x_7=0.5130...$ $x_8=0.7994...$ $x_9=0.5130...$ $x_{10}=0.7994...$
 $x_{11}=0.5130...$ $x_{12}=0.7994...$ $x_{13}=0.5130...$ $x_{14}=0.7994...$ $x_{15}=0.5130...$
 $x_{16}=0.7994...$ $x_{17}=0.5130...$ $x_{18}=0.7994...$ $x_{19}=0.5130...$ $x_{20}=0.7994...$
 etc.

En este caso, las soluciones rápidamente convergen a dos puntos fijos que son atractores, 0.5130 y 0.7994. Estas soluciones de la función logística se repiten cada dos valores, es decir, $x_{n+2} = x_n$. Esta es conocida como una **órbita de periodo dos**. La órbita de periodo dos se muestra gráficamente en la figura 5.2(c) donde las primeras veinte iteraciones son graficados contra n.

5.4.4 Parámetro de control: $a = 3.52$

Iteraciones sucesivas de la función logística con parámetro de control $a = 3.52$ produce la siguiente sucesión de soluciones:

$x_0 = 0.20$
 $x_1 = 0.5632$ $x_2 = 0.8659...$ $x_3 = 0.4086...$ $x_4 = 0.8506...$ $x_5 = 0.4472...$
 $x_6 = 0.8702...$ $x_7 = 0.3975...$ $x_8 = 0.8430...$ $x_9 = 0.4657...$ $x_{10} = 0.8758...$
 $x_{11} = 0.3828...$ $x_{12} = 0.8315...$ $x_{13} = 0.4930...$ $x_{14} = 0.8798...$ $x_{15} = 0.3721...$
 $x_{16} = 0.8224...$ $x_{17} = 0.5139...$ $x_{18} = 0.8793...$ $x_{19} = 0.3735...$ $x_{20} = 0.8237...$
etc.

Podemos ver que las iteraciones de arriba no convergen. Sin embargo, si continuamos iterando producimos una órbita de periodo cuatro, $x_{n+4} = x_n$. Para obtener una resolución de cuatro decimales necesitamos de cuarenta iteraciones, como vemos a continuación:

$x_{37} = 0.5120...$ $x_{38} = 0.8794...$ $x_{39} = 0.3730...$ $x_{40} = 0.8233...$
 $x_{41} = 0.5120...$ $x_{42} = 0.8794...$ $x_{43} = 0.3730...$ $x_{44} = 0.8233...$
etc.

La figura 5.2(d) muestra las primeras cuarenta iteraciones de la función logística con un parámetro de control $a = 3.52$.

5.4.5 Parámetro de control: $a = 4.00$

Finalmente, consideremos la función logística con un parámetro de control $a = 4.00$, la cual produce las siguientes soluciones:

$x_0 = 0.20$
 $x_1 = 0.6400$ $x_2 = 0.9216...$ $x_3 = 0.2890...$ $x_4 = 0.8219...$ $x_5 = 0.5854...$
 $x_6 = 0.9708...$ $x_7 = 0.1133...$ $x_8 = 0.4019...$ $x_9 = 0.9615...$ $x_{10} = 0.1478...$
 $x_{11} = 0.5038...$ $x_{12} = 0.9999...$ $x_{13} = 0.0002...$ $x_{14} = 0.0009...$ $x_{15} = 0.0038...$
 $x_{16} = 0.0153...$ $x_{17} = 0.0605...$ $x_{18} = 0.2275...$ $x_{19} = 0.7031...$ $x_{20} = 0.8348...$
etc.

Las iteraciones de arriba notablemente no han convergido después de veinte iteraciones, en el caso de que siguiéramos iterando nunca produciríamos al menos un valor que se repita. Este comportamiento aperiódico es conocido como una **órbita caótica** o simplemente **caos**. Las primeras cuarenta iteraciones están

mostradas en la figura 5.2(e). Note que al iterar un valor x_n , éste puede ocurrir solo una vez, dado que si llegáramos a repetir este valor y dado el determinismo de las iteraciones, el siguiente valor debe ser una repetición de algún valor anterior, lo cual no puede ser cierto.

5.5 Solución general de la función logística

Cuando iteramos la función logística, las soluciones eventualmente se estacionan en un tipo de comportamiento final. La sucesión de soluciones iteradas producidas por las primeras iteraciones es conocida como la **órbita transitoria** del sistema. La sucesión final de valores iterados al cual las iteraciones tienden se conoce como **órbita postransitoria**. El comportamiento transitorio es evidente en la figura 5.2(a) donde la órbita tiende asintóticamente a cero. La órbita transitoria es también notable en la figura 5.2(b) como una oscilación que decae, especialmente en las primeras diez iteraciones, sin embargo, aproximadamente en la iteración veinte no es notable el cambio oscilatorio de las soluciones. De hecho la órbita tiende asintóticamente al punto fijo 0.6153.... . En la figura 5.2(c), el comportamiento transitorio parece desaparecer bastante rápido para generar la órbita de periodo dos. En la figura 5.2(d), una órbita postransitoria de periodo cuatro parece estar establecida alrededor de la décima iteración. El comportamiento transitorio no es nada notable en la figura 5.2(e) debido a la naturaleza errática de la órbita caótica postransitoria. Este comportamiento es frecuente en un movimiento caótico donde la estructura compleja del comportamiento postransitorio puede hacer difícil observar el comportamiento transitorio inicial. En general, las órbitas postransitorias son aproximadas

asintóticamente por las iteraciones de la función logística. En la práctica, una resolución finita (exactitud en un número determinado de decimales) de la órbita postransitoria es usualmente todo lo que se requiere. La resolución obtenida está directamente relacionada al número de iteraciones consideradas. Esto fue ilustrado en la sección anterior para el caso $a=2.6$. Note que si uno empieza el procedimiento de iterar sobre una órbita postransitoria, entonces, ninguna órbita transitoria ocurrirá.

De esta forma la órbita de una función logística es atraída, a través del proceso de iteración, hacia la órbita postransitoria, dependiendo de si ésta es caótica o periódica. El **atractor** es el conjunto de puntos aproximados por la órbita cuando el número de iteraciones tiende a infinito. Las sucesiones postransitorias de las soluciones de la función descansan sobre el atractor. Si el sistema se estabiliza en una órbita periódica, entonces el sistema se dice que tiene un **atractor periódico**, por ejemplo, un atractor de periodo 1, un atractor de periodo 2, atractor de periodo 4, y así hacia arriba. Si, por el contrario, el sistema se comporta caóticamente por medio de una órbita aperiódica, entonces el sistema se dice que tiene un **atractor caótico**, usualmente nombrado como un **atractor extraño** (strange atractor). La función logística con $a=4.0$ tiene un atractor extraño.

5.6 Iteración grafica de la función logística

Iteraciones sucesivas de la función logística pueden encontrarse gráficamente usando una grafica de la curva logística (ecuación (5.7b)) y la recta identidad. Este proceso es ilustrado en la figura 5.3(a). Empezamos en el eje horizontal con un

valor inicial x_0 y lo proyectamos hacia arriba hasta la curva logística. El punto en el cual esta proyección toque la curva nos proporciona el siguiente valor de x , es decir, x_1 , el cual leeremos al proyectarlo horizontalmente sobre el eje vertical, x_{n+1} . Para encontrar el segundo iterando, hacemos $x_1 = x_n$ y lo colocamos sobre el eje horizontal.

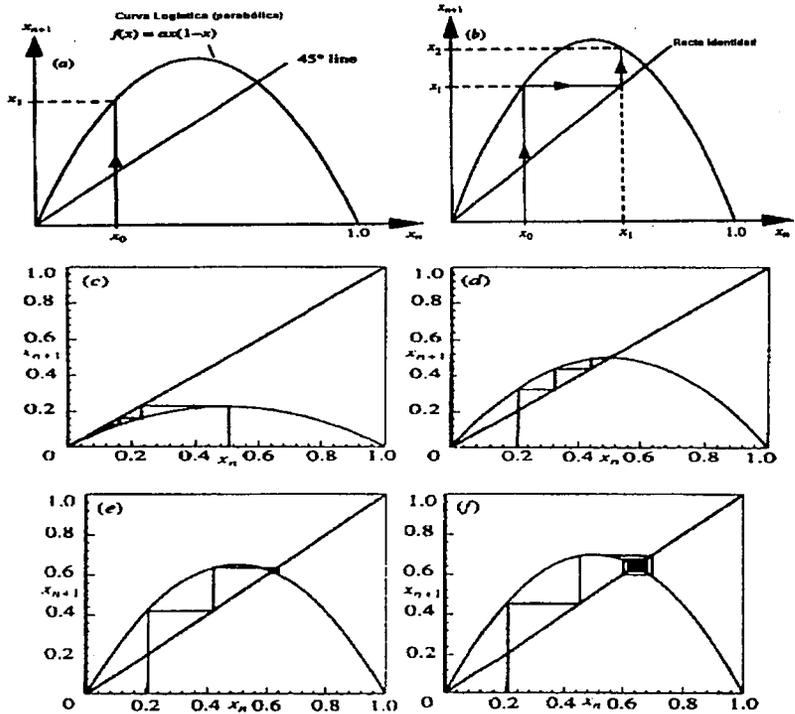


Figura 5.3 Iteración gráfica de la ecuación logística.

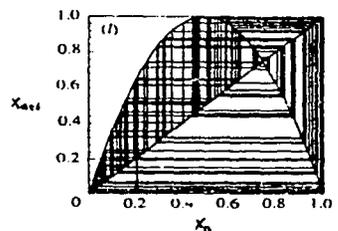
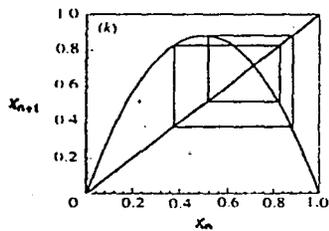
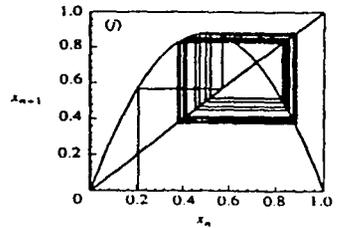
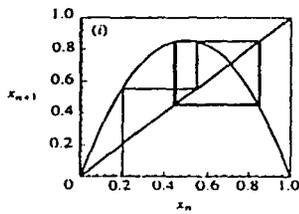
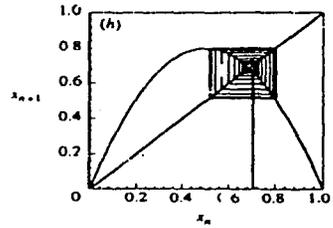
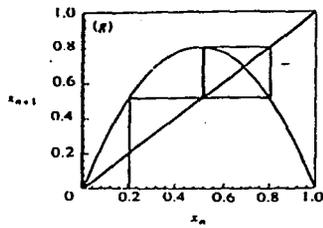


Figura 5.3 (continuación)

Para hacer esto, el valor de x_1 , es proyectado horizontalmente sobre la recta identidad, y de ahí se baja hacia el eje horizontal. Ahora tenemos a x_1 sobre el eje x_n . Para encontrar x_2 a partir de x_1 simplemente repetimos el procedimiento empleado para encontrar x_1 de x_0 . Esto se muestra en la figura 5.3(b). Este procedimiento gráfico es repetido una y otra vez para iterar la función.

Las figuras 5.3(c-l) contienen varias graficas de iteraciones de la función logística, algunos de los cuales están directamente relacionados a las órbitas de la figura 5.2. La figura 5.3(c) contiene las iteraciones graficas cuando $a = 0.9$. La atracción de las iteraciones hacia el origen es evidente en la figura: comparemos esto con la figura 5.2(a). (Notemos que por razones de claridad, las iteraciones en la figura 5.3(c) fueron inicializadas en $x_0 = 0.5$ y no en $x_0 = 0.2$ como en la figura 5.2(a). Todas las iteraciones de la función logística para $0 < a < 1$, arrojan órbitas que se acercan al origen, como punto fijo, es decir, $x_n = x_{n+1} = 0$, para n suficientemente grande. Esto se cumple para cualquier condición inicial, x_0 , entre cero y uno. La iteración gráfica de la función logística para $a = 2.0$ se muestra en la figura 5.3(d). En este valor del parámetro de control, la recta identidad intercepta a la parábola en su máximo. Todos los valores de a entre uno y dos producen atractores de periodo uno a la izquierda del máximo. Valores de a entre dos y tres producen atractores de periodo uno a la derecha del máximo. En la figura 5.3(e) la iteración gráfica se muestra para cuando $a = 2.60$ (comparémoslo con la figura 5.2(b)). La iteración se inicia en $x_0 = 0.2$, y la órbita rápidamente converge al punto fijo atractor $0.6153.....$. El atractor ocurre en el punto (distinto de cero) que corta a

la función logística, $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$, y la línea $x_{n+1} = x_n$. Sustituyendo para eliminar el término x_{n+1} obtenemos:

$$x_n((a-1) - ax_n) = 0 \quad (5.8)$$

La solución distinta de cero de esta ecuación es $(a-1)/a$. Aquí, $a=2.60$ nos da el punto fijo $8/13$ o $0.6153\dots$, el mismo que obtuvimos por iteración en la sección 5.4. La convergencia en el caso de que $a=2.80$ de la figura 5.3(f) es más lenta pero converge al punto fijo $9/14$ o 0.6428 . La figura 5.3(g) muestra la órbita de periodo 2 para $a=3.20$. En esta figura, la elección de la condición inicial $x_0=0.2$ ha arrojado una rápida convergencia de la solución a una órbita de periodo 2: $0.5130\dots$ y $0.7994\dots$. Contrastemos esto con la figura 5.3(h) donde las iteraciones comienzan en $x_0=0.7$ y las soluciones se alejan del punto fijo inestable 0.6875 , donde la curva logística parabólica y la recta identidad se interceptan. De hecho, todas las iteraciones empezaron en el intervalo $(0 < x_0 < 0.6875 ; 0.6875 < x_0 < 1)$ y terminaron aproximando el atractor de periodo dos. Este intervalo es conocido como la **cuenca de atracción** para un atractor de periodo dos. Las iteraciones comenzadas en $x_0=0$ o 1.0 se mantienen en el punto fijo 0 , solo las iteraciones que comienzan arriba del punto fijo inestable 0.6875 permanecen en este valor. La figura 5.3(i) muestra otra órbita de periodo dos para el caso en que $a=3.42$.

Como vimos en la figura 5.2(d), un atractor de periodo 4 existe para cuando $a=3.52$. La figura 5.3(j) muestra la proximidad de las iteraciones al atractor de periodo 4 con condición inicial $x_0=0.2$. El atractor de periodo 4 está oscurecido por las líneas de las soluciones que aproximan al atractor. Esto es verificado en la

figura 5.3(k), donde las primeras iteraciones transitorias no se muestran para que el atractor postransitorio de periodo cuatro se vea con claridad. Finalmente, la iteración gráfica para el parámetro de control $a = 4.0$ se muestra en la figura 5.3(l). En esta figura únicamente las primeras cien iteraciones se muestran para efectos de claridad, ya que las iteraciones rápidamente llenan la gráfica. Esta función tiene un atractor extraño y las iteraciones nunca se repiten.

5.7 Bifurcación, estabilidad y el número de Feigenbaum

Hemos observado atractores periódicos, de periodos 1, 2 y 4, y un atractor periódico para la función logística. Estos fueron obtenidos simplemente al cambiar el parámetro de control a . Para examinar el efecto global del parámetro de control a sobre el comportamiento de la función logística es de utilidad graficar las soluciones postransitorias de la función logística en contra del parámetro a . Tal gráfica se muestra en la figura 5.4(a). Como ya sabemos, las órbitas tienden a cero para valores de a entre 0 y 1. Valores de a entre 1 y 3 producen soluciones postransitorias las cuales son puntos fijos de periodo uno. El periodo de estos puntos fijos se incrementa al incrementar el valor de a , formando la línea continua de la figura 5.4(a), la cual va del eje a en $a = 1.0$ hasta la primera **bifurcación de periodo doble** en $a = 3.0$. Para valores del parámetro de control entre 3.0 y 3.449490... existe un atractor de periodo dos (ver la figura 5.4(b)). Entre 3.449490...y 3.544090...existe un atractor de periodo 4, seguido por una sucesión de atractores de periodo 8 (entre 3.544090...y 3.564407...), de periodo 16, periodo 32 y así sucesivamente. Esta sucesión continua en el tiempo presentan un comportamiento de periodos dobles, hasta que se obtenga un periodo infinito en el cual el parámetro de control tiene un valor $a = 3.569945.....$, en cuyo punto el

comportamiento es caótico y por lo tanto existe un atractor extraño. Esta sucesión es conocida como **ruta de periodo doble al caos**.

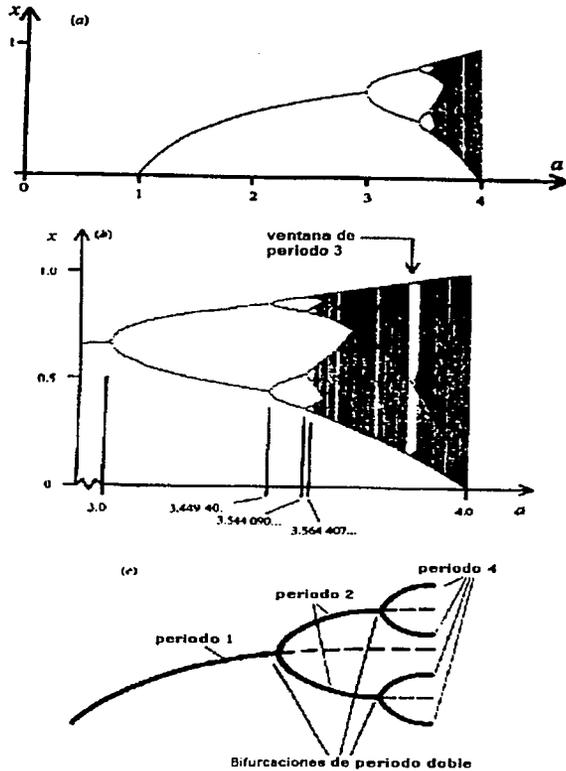


Figura 5.4 El diagrama de bifurcación para la ecuación logística.

Las primeras bifurcaciones de periodo doble pueden verse en la figura 5.4(b), las cuales contienen una ampliación del diagrama de la figura 5.4(a) en la región donde el parámetro de control se encuentra entre 3.0 y 4.0.

Entre $a=3.569945\dots$ y 4.0 existe una rica variedad de atractores, tanto periódicos como caóticos. Además, los atractores periódicos que ocurren en esta región, no son una potencia entera de dos. Atractores de periodos 3, 5, 7, 9 y 11, existen. De hecho, existen atractores periódicos para cualquier número impar. Por ejemplo, un atractor de periodo 3 ocurren cuando $a=3.828435\dots$, lo que causa que se abra una ventana en el diagrama de bifurcación. Esto se muestra en la figura 5.4(b). Este atractor de periodo 3 tiene una ruta de periodo doble al caos. De hecho, si observamos un periodo 3 en un sistema dinámico entonces esto implica que encontraremos caos en el sistema.

La secuencia de periodos dobles descrita arriba ocurre a través de la bifurcación de los puntos fijos previos cuando estos se vuelven inestables. Esto se muestra en la figura 5.4(c). En cada punto de bifurcación de periodo doble, el punto fijo periódico y atractor anterior, se vuelve inestable, esto es, empieza a repeler soluciones iteradas en su vecindad y dos nuevos puntos fijos estables emergen. Los puntos fijos inestables se muestran en la figura 5.4(c) en forma de pequeñas rayas. Estas bifurcaciones de periodo doble dan el nombre de **diagrama de bifurcación** mostrado en las figuras 5.4(a) y (b).

Los puntos fijos que atraen las soluciones de una función se conocen como **estables**; aquellos que repelen soluciones cercanas se conocen como **inestables**; aquellos que ni atraen ni repelen soluciones cercanas se conocen como **neutralmente estables** o **indiferentes**. La estabilidad local depende del valor

absoluto de la pendiente de la función de la función en cada uno de los puntos fijos, es decir:

$$\text{Estable: } |f'(x_n)| < 1 \quad (5.9a)$$

$$\text{Neutralmente estable: } |f'(x_n)| = 1 \quad (5.9b)$$

$$\text{Inestable: } |f'(x_n)| > 1 \quad (5.9c)$$

Esto está ilustrado gráficamente en las figuras 5.5(a)-(f), donde ampliamos la intercepción entre la curva logística y la recta identidad. Los puntos fijos atraen la órbita si $|f'(x_n)| < 1$, no atraen ni repelen si $|f'(x_n)| = 1$ y repelen si $|f'(x_n)| > 1$. La iteración gráfica de la órbita se muestra mediante la línea sólida en cada una de las figuras, y el punto fijo señalado por medio de pequeños círculos.

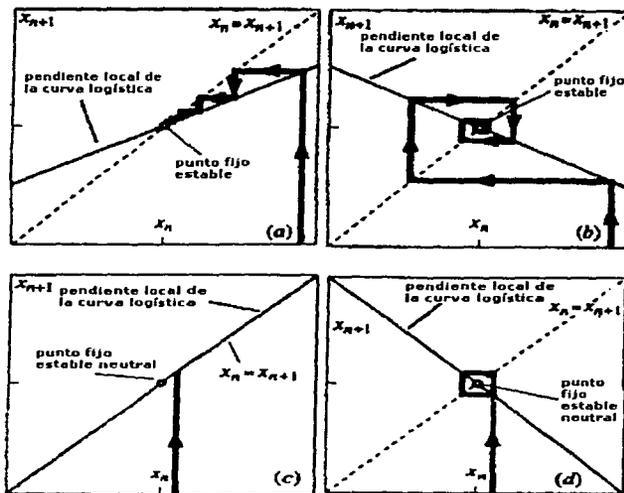


Figura 5.5 Estabilidad local de los puntos fijos.

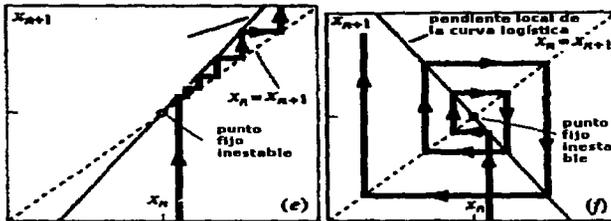


Figura 5.5 (continuación)

Las órbitas pueden ser atraídas o repelidas por los puntos fijos en dos formas: para pendientes localmente positivas de la curva logística se observa que la convergencia es en forma de una escalera (figuras 5.5(a) y (e)), o en forma de espiral para pendientes negativas de la curva logística. El comportamiento de puntos neutralmente estables se muestra en las figuras 5.5(c) y (d). Si tenemos una pendiente positiva (igual a +1) en la curva logística en una vecindad del punto fijo, la solución iterada permanece en un solo punto, el cual ni es atraído ni repelido por el punto fijo. Para una pendiente negativa (igual a -1) de la curva logística en una vecindad del punto fijo la solución iterada alterna alrededor del punto fijo y de nuevo ni se aleja ni es atraído hacia el punto fijo. Notemos que en este último caso no debe ser confundido con una solución de periodo 2, ya que aquí nos estamos fijando en la vecindad "inmediata" del punto fijo y hemos aproximado a la parábola logística con una línea recta.

La pendiente de la curva logística es:

$$f'(x_n) = a(1 - 2x_n) \quad (5.10)$$

y para valores de $a < 1$, la función logística tiene únicamente un punto fijo en el origen y únicamente atraviesa la línea $x_n = x_{n+1}$ en solo ese punto. De la ecuación (5.10) vemos que estos puntos fijos en $x_n = 0$ son estables para $a < 1$. Cuando $a > 1$, el punto fijo $x=0$ se vuelve inestable y un nuevo punto fijo estable emerge de la función logística en $x = (a-1)/a$ (como se vio en la sección anterior). Substituyendo este punto fijo en la ecuación (5.10) llegamos a:

$$f'(x_n) = a(1 - 2(\frac{a-1}{a})) = 2 - a \quad (5.11)$$

De esta manera, el punto fijo $(a-1)/a$ es estable para valores $a < 3$, dado que $|f'(x_n)| < 1$. En $a=1$ y $a=3$ el punto fijo es neutralmente estable. Por arriba de $a=3$, el punto fijo se vuelve inestable y una órbita de periodo 2 emerge, donde las consecutivas iteraciones alternan entre valores de x en ambos lados del actual punto fijo inestable. Los valores de la órbita de periodo 2 pueden ser encontrados de la misma forma que para el punto fijo $(a-1)/a$. Esta vez, además, requerimos:

$$x_{n+2} = x_n \quad (5.12a)$$

así que la función logística requiere ser iterada dos veces antes de retomar al punto fijo, es decir:

$$x_{n+2} = ax_{n+1}(1 - x_{n+1}) = a^2 x_n (1 - x_n)(1 - (ax_n(1 - x_n))) \quad (5.12b)$$

igualando la ecuación (5.12a) con (5.12b), encontramos x_n de la ecuación de cuarto orden:

$$x_n = a^2 x_n (1 - x_n)(1 - (ax_n(1 - x_n))) \quad (5.12c)$$

Dos soluciones ya son conocidas, a decir $x_n = 0$ y $x_n = (a-1)/a$; estas corresponden a los dos puntos fijos inestables del sistema. Las dos soluciones restantes son:

$$x_n = \frac{a+1 + \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \quad (5.13 a)$$

$$x_n = \frac{a+1 - \sqrt{a^2 - 2a - 3}}{2a} \quad (5.13 b)$$

Estos son los dos puntos fijos estables del sistema descrito en la ecuación (5.12c), los cuales son los dos valores de x visitados en el atractor de periodo 2. Note que estas soluciones están definidas únicamente para valores de a mayores o iguales que 3, donde la primera bifurcación toma lugar para la función logística. En $a=3$ el punto fijo inicial $(1-a)/a$ pierde estabilidad y se vuelve un punto fijo repelente. Los dos puntos fijos dados por (5.13 a, b) son atractores. Este es el mecanismo por el cual el periodo doble toma lugar. En cada bifurcación, cada punto fijo pierde estabilidad y es reemplazado por dos nuevos puntos fijos atractores (remítase a la figura 5.4(c)). Para encontrar el periodo 4, periodo 8, etc. Hacemos respectivamente $x_n = x_{n+4}$, $x_n = x_{n+8}$, etc. y procedemos como arriba. Es fácil de ver que el cálculo de estas raíces rápidamente se vuelve muy complicado, aún para periodos de relativamente pequeños.

La localización de los puntos de bifurcación en el diagrama de bifurcación es también interesante. Primero denotemos el valor de a_k a la k -ésima bifurcación de a . La primera bifurcación, del periodo 1 al periodo 2, ocurre en $a_1 = 3.0$, la segunda bifurcación; del periodo 2 al periodo 4 ocurre en $a_2 = 3.449490$ y así

sucesivamente. Después de cada punto de bifurcación el periodo es igual a 2^k .

Una lista de los primeros siete puntos de bifurcación se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}a_1 &= 3.0 \\a_2 &= 3.449490..... \\a_3 &= 3.544090..... \\a_4 &= 3.564407..... \\a_5 &= 3.568759..... \\a_6 &= 3.569692..... \\a_7 &= 3.569891.....\end{aligned}$$

Los radios de separaciones sucesivas de los puntos de bifurcación están dados por:

$$\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_2} \approx \frac{a_3 - a_2}{a_4 - a_3} \approx \frac{a_4 - a_3}{a_5 - a_4} \approx \frac{a_5 - a_4}{a_6 - a_5} \approx \dots \approx \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k+1} - a_k} \quad (5.14)$$

Estos radios tienen asociado un escalamiento. Los radios tienden a una constante en la medida que k tiende a infinito, más formalmente:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} - a_k} \right] = \delta = 4.669201 \quad (5.15)$$

El radio δ es conocido como el **número de Feigenbaum**. El número de Feigenbaum fue primero encontrado al iterar la función logística, además, ha sido encontrado en muchos otros sistemas, tanto matemáticos, y más importante para nosotros, en sistemas reales. El número δ es una constante universal como lo son π o e . Muchas funciones unidimensionales han sido investigados, los cuales contienen bifurcaciones de periodo doble en donde δ puede ser encontrado. Algunas de las funciones más comunes se listan abajo.

(i) La función seno: $x_{n+1} = ax^2 \text{sen}(\pi x_n)$ (5.16)

(ii) La función de la casa: $x_{n+1} = r(1 - |2x_n - 1|)$ (5.17)

(iii) La función de Baker: $x_{n+1} = 2x_n \text{ mod } 1$ (5.18)

(iv) La función círculo: $x_{n+1} = x_n + r - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n)$ (5.19)

(v) La función de Gauss: $x_{n+1} = e^{-bx^2} + c$ (5.20)

Iterando las funciones anteriores para varios valores del parámetro de control producen una rica variedad de comportamientos importantes.

5.8 Una función bidimensional: el modelo de Henón.

El modelo de Henón o función de Henón (ecuaciones (5.21 a, b)) es interesante en el hecho de que consiste de dos variables x y y . Los atractores caóticos o periódicos de la función de Henón deben ser encontrados dependiendo de la elección de los parámetros de control a y b .

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n \quad (5.21 \text{ a})$$

$$y_{n+1} = bx_n \quad (5.21 \text{ b})$$

En la tabla 5.1, la función de Henón es iterada para dos conjuntos de parámetros de control. El primer conjunto ($a=0.9$, $b=0.3$) inicia en una órbita postransitoria hasta un atractor periódico. El segundo conjunto de parámetros de control ($a=1.4$, $b=0.3$) inicia con una secuencia caótica de iteraciones. La tabla contiene las primeras diez iteraciones de la función de Henón para ambos conjuntos de parámetros junto con 255 iteraciones, y en donde se observa que el tiempo ha transcurrido lo suficiente y no se ha encontrado una solución periódica, es para el caso donde $a=0.9$ y $b=0.3$.

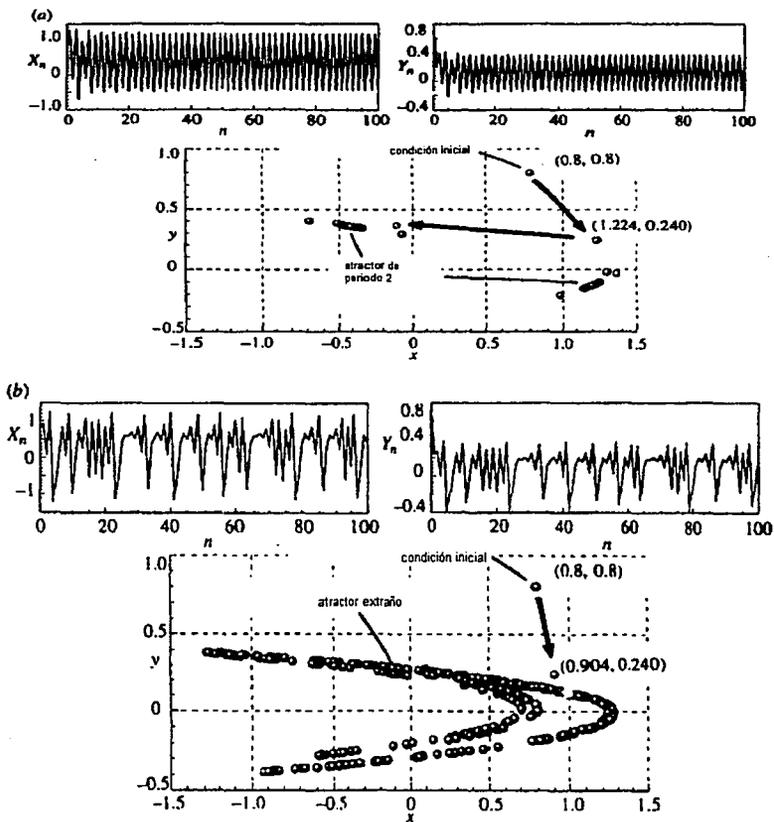


Figura 5.6 El atractor de Henón.

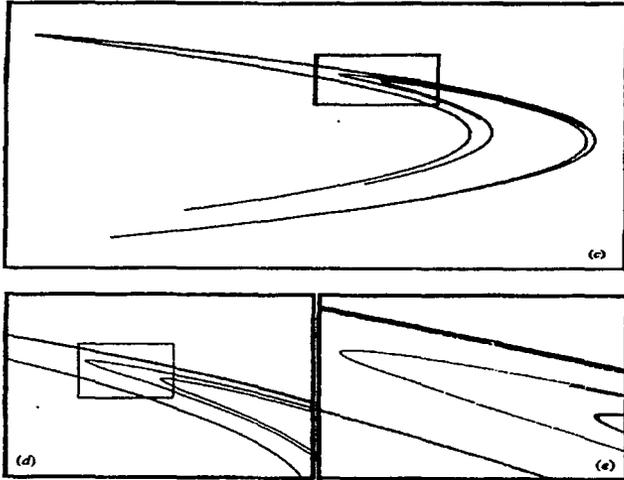


Figura 5.6 (continuación)

Las figuras 5.6(a)-(b) contienen gráficos de las soluciones iteradas para la función de Henón para los dos conjuntos de parámetros; ambas iteraciones comienzan en $x_0 = 0.8, y_0 = 0.8$. En la figura 5.6(a), la serie de tiempo de x como de y , son graficadas junto con las iteraciones considerando el plano x - y . De las cien iteraciones de la serie de tiempo, la convergencia de las órbitas transitorias sobre un atractor de periodo 2 es evidente. En el plano x - y la condición inicial y los dos primeros puntos aplicados están conectados por rayos. El punto inicial $(0.8, 0.8)$ es aplicado sobre $(1.224, 0.240)$, este punto es entonces aplicado sobre $(-0.1083\dots, 0.3672)$. En la medida que las iteraciones aumentan, los puntos transitorios convergen sobre el atractor de periodo 2 con coordenadas

$(-0.4262\dots, 0.3606)$ y $(1.2302\dots, -0.1251)$. En la figura 5.6(b), la misma condición inicial $(0.8, 0.8)$ es de nuevo usada. Esta vez, sin embargo, los puntos aplicados son caóticos y rápidamente convergen sobre el atractor extraño, el cual tiene la forma de una C puesta al revés. De hecho, la convergencia es tan rápida que únicamente los primeros dos valores transitorios son evidentes en el plano x - y , a decir: el punto inicial $(0.8, 0.8)$ y el primer punto iterado $(0.904, 0.240)$. Además la serie de tiempo parece consistir de varias estructuras similares. Ninguna de estas son idénticas dado que las órbitas nunca se repiten.

Si graficamos suficientes iteraciones postransitorias de la función de Henón podremos visualizar la estructura final de su atractor extraño. Esto se muestra en la figura 5.6(c), el cual es el atractor extraño de la figura 5.6(b), pero usando más puntos para su gráfico. La figura 5.6(d) muestra un acercamiento de la caja mostrada en la figura 5.6(c). En la figura 5.6(e) vemos lo que parece unas líneas sólidas en las figuras anteriores se han convertido en bandas. En la medida que nos acercamos dentro de estas bandas del atractor de Henón, más y más podremos observar su estructura. El atractor extraño para la función de Henón tiene una **estructura fractal**. Aun más, el atractor tiene una construcción a través de las bandas muy similar al conjunto de Cantor. Usando el método de conteo de caja descrito en el capítulo 3, la dimensión fractal del atractor de Henón se encuentra alrededor de 1.28.

Tabla 5.1. Soluciones iteradas del mapeo de Hénon

parametros de control				
n	a = 0.9, b = 0.3		a = 1.4, b = 0.3	
	x _n	y _n	x _n	y _n
0	0.8	0.8	0.8	0.8
1	1.224	0.24	0.904	0.24
2	-0.1083 ...	0.3672	0.0958 ...	0.2712
3	1.3566 ...	-0.0325 ...	1.2583 ...	0.0287 ...
4	-0.6889 ...	0.4069 ...	-1.1879 ...	0.3774 ...
5	0.9798 ...	-0.2066 ...	-0.5982 ...	-0.3563 ...
6	-0.0707 ...	0.2939 ...	0.1425 ...	-0.1794 ...
7	1.2894 ...	-0.0212 ...	0.7920 ...	0.0427 ...
8	-0.5176 ...	0.3868 ...	0.1643 ...	0.2376 ...
9	1.1456 ...	-0.1552 ...	1.1997 ...	0.0493 ...
10	-0.3366 ...	0.3437 ...	-0.9659 ...	0.3599 ...
.
250	-0.4262 ...	0.3606 ...	-1.2807 ...	0.3808 ...
251	1.2302 ...	-0.1251 ...	-0.9154 ...	-0.3842 ...
252	-0.4262 ...	0.3606 ...	-0.5575 ...	-0.2746 ...
253	1.2302 ...	-0.1251 ...	0.2901 ...	-0.1672 ...
254	-0.4262 ...	0.3606 ...	0.7148 ...	0.0870 ...
255	1.2302 ...	-0.1251 ...	0.3716 ...	0.2144 ...

Tabla 5.2 Las primera diez soluciones iteradas en el plano complejo para distintas condiciones iniciales y parámetros de control

n	parametros de control					
	c = -1 + 0i		c = -1 + 0i		c = -1.1 + 0.2i	
	Real z _n	Imag. z _n	Real z _n	Imag. z _n	Real z _n	Imag. z _n
0	0	0	0	1	0	0
1	-1	0	-2	0	-1.1	0.2
2	0	0	3	0	0.07	0.24
3	-1	0	8	0	-1.1527	0.1664
4	0	0	63	0	0.2010 ...	0.1836 ...
5	-1	0	3968	0	-1.0933 ...	0.1261 ...
6	0	0	15 745 023	0	0.0793 ...	-0.0758 ...
7	-1	0	2.479 × 10 ¹⁴	0	-1.0994 ...	0.1879 ...
8	0	0	6.145 × 10 ²⁸	0	0.0734 ...	-0.2132 ...
9	-1	0	3.77 × 10 ⁵⁷	0	-1.1400 ...	0.1686 ...
10	0	0	1.42 × 10 ¹¹⁵	0	0.1713 ...	-0.1845 ...

5.9 Iteraciones en el plano complejo: Conjuntos de Julia y el conjunto de Mandelbrot.

Esta sección contiene una pequeña revisión de iteraciones en el plano complejo de la forma:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \quad (5.22a)$$

donde z es un número complejo

$$z = a + bi \quad (5.22b)$$

con

$$i = \sqrt{-1} \quad (5.22c)$$

Como con la función logística, las soluciones iteradas en el plano complejo de la ecuación (5.22a) pueden exhibir una variedad de comportamientos dependiendo de los parámetros de control, c , y la condición inicial usada z_0 .

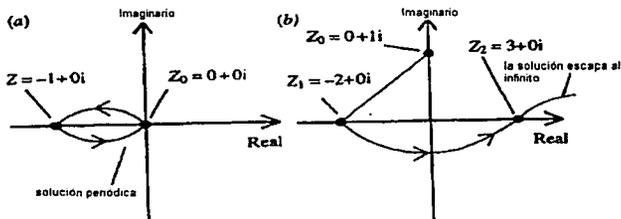


Figura 5.7 Iteraciones de la función compleja con $c = (-1 + 0i)$.

Primero, investigaremos el efecto de las condiciones iniciales sobre la órbita (o soluciones iteradas) en el plano complejo, manteniendo c como constante en $-1 + 0i$, e iteraremos la función usando los siguientes valores iniciales para z : $z_0 = (0 + 0i)$ y $z_0 = (0 + 1i)$. Las columnas 2-5 de la tabla 5.2 lista las iteraciones y la figura 5.7 muestra esquemáticamente el proceso de iteración. La iteración empezada en $z_0 = (0 + 1i)$ produce una órbita periódica la cual oscila entre

$z_0 = (0+0i)$ y $z_0 = (-1+0i)$. Sin embargo, la iteración empezada en $z_0 = (0+1i)$ se incrementa en magnitud escapando al infinito en la medida que las iteraciones tienden a infinito. Si continuamos iterando la función para otros valores de z_0 , encontraremos que algunas iteraciones escapan a infinito y otras son atraídas a la órbita de periodo 2. Todos los valores iniciales de z que no escapan a infinito son graficados en el plano complejo de la figura 5.8(a). Este conjunto de puntos mostrados en la figura en la parte oscura es conocido como el **conjunto prisionero** de la función compleja. El conjunto prisionero es la base de atracción para el atractor periódico. El conjunto de todos los puntos de la frontera entre el conjunto prisionero y todos los puntos que escapan al infinito es conocido como **conjunto de Julia**. El conjunto de Julia de la figura 5.8(a) es **conexo**, es decir, todos los puntos en el conjunto pueden ser alcanzados desde todos los demás puntos del conjunto por medio de algún recorrido que no se salga del conjunto. Sin embargo, para algunos valores del parámetro de control c , el conjunto de Julia es **disconexo**, por ejemplo en la figura 5.8(b), se muestra el conjunto de Julia para $c=(0.5+0.1i)$. Conjuntos de Julia desconexos, tienen una estructura similar al conjunto de Cantor en el plano.

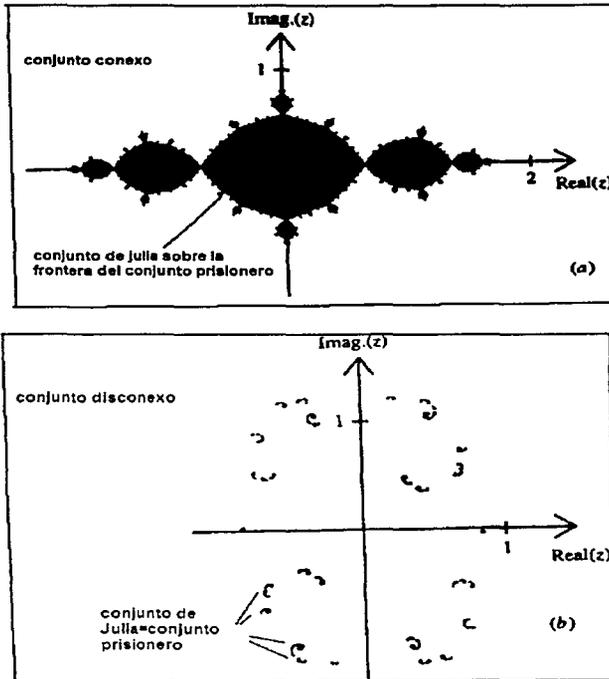


Figura 5.8 Conjuntos prisioneros de la función compleja.

Los valores de $z_0 = (0,0i)$ y $c = (-1+0i)$ usados en la ilustración de arriba dieron órbitas para la función compleja, el cual empezó sobre el atractor $(0,0i)$, $(-1,0i)$, y ningún estado transitorio se produjo después. Las ultimas dos columnas de la tabla 5.2 contienen las primeras 10 iteraciones de la función para $c=(-1.1,0.2i)$ con $z_0=(0,0i)$, y ningún comportamiento de la órbita es evidente al ver

la tabla. La figura 5.9(a) muestra las primeras 60 iteraciones de la serie de tiempo de la parte real e imaginaria de z . La figura 5.9(b) grafica estas iteraciones en el plano complejo. De ambas figuras vemos que la órbita se aproxima asintóticamente a un atractor de periodo dos en la medida que el numero de iteraciones n tiende a infinito. Este es el mismo tipo de comportamiento transitorio que encontramos en la función logística y el atractor de Henón.

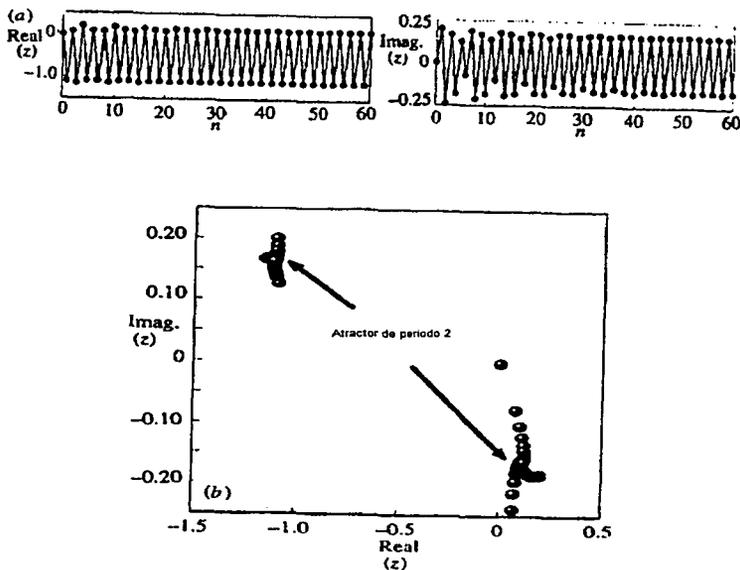


Figura 5.9 Iteraciones de la función compleja con $c=(-1.1+0.2i)$.

El iterar una función lo suficiente como para obtener el conjunto de Julia resultante, toma un esfuerzo de computo sorprendente. Sin embargo, una tarea más simple es determinar cuando un parámetro de control c produce un conjunto

de Julia conexo o desconexo. Para hacer esto, únicamente requerimos iterar la función compleja para cada valor de c , con un valor inicial $z_0=(0+0i)$. Si este punto escapa al infinito entonces el conjunto de Julia correspondiente al valor c es desconexo, de lo contrario el conjunto es conexo. Conjuntos de Julia conexos corresponden a órbitas periódicas o caóticas que no se escapan.

Ahora si graficamos todos los valores de c para los cuales se producen conjuntos de Julia conexos en el plano complejo c , obtenemos el **conjunto de Mandelbrot**, mostrado en la región oscura de la figura 5.10(a)

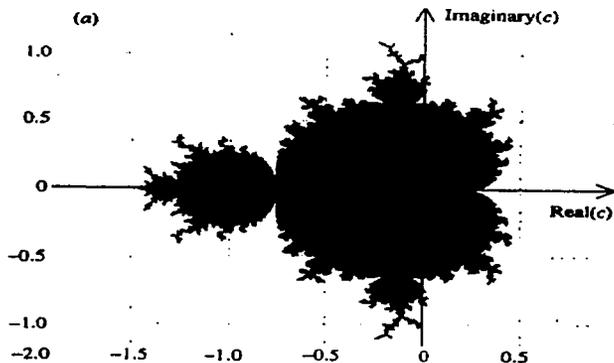


Figura 5.10 El conjunto de Mandelbrot.

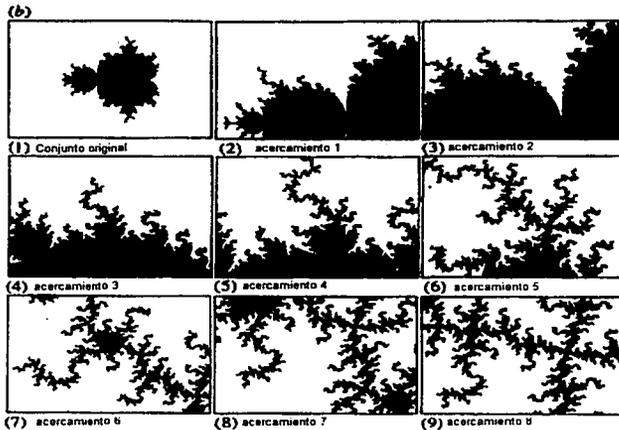


Figura 5.10 (continuación)

La frontera del conjunto de Mandelbrot tiene una estructura compleja infinita. Acercándonos dentro de la frontera está nos revela cada vez más detalles. Esto se muestra en la figura 5.10(b) donde cada imagen sucesiva es una magnificación de la imagen anterior. Diferentes regiones del conjunto corresponden a atractores de la función complejo en varios periodos. Un periodo doble de ruta al caos puede ser observado para el parámetro de control c a lo largo del eje real de derecha a izquierda.

CAPITULO 6

Oscilaciones caóticas

6.1 Introducción

En este capítulo nos concentraremos en el comportamiento oscilatorio de algunos sistemas dinámicos no lineales, los cuales evolucionan continuamente en el tiempo y cuyas evoluciones temporales están definidas por ecuaciones diferenciales de movimiento. Como en el caso discreto de estas ecuaciones, discutidas en el capítulo 5; los sistemas lineales continuos en el tiempo, pueden exhibir tanto oscilaciones periódicas como caóticas. Es importante hacer notar que los sistemas lineales no pueden exhibir caos. Hacia el final del capítulo revisamos brevemente más sistemas que pueden exhibir tanto complejidad espacial como temporal.

6.2 Un oscilador mecánico no lineal: el oscilador Duffing

La figura 6.1(a) es un diagrama de un bloque que se desliza sobre una superficie, el cual tiene una masa m , detenida de una pared mediante un resorte con un estiramiento s , una resistencia a la fricción r entre el bloque y la superficie, y una fuerza F actuando sobre la masa. Este modelo puede producir caos bajo ciertas condiciones.

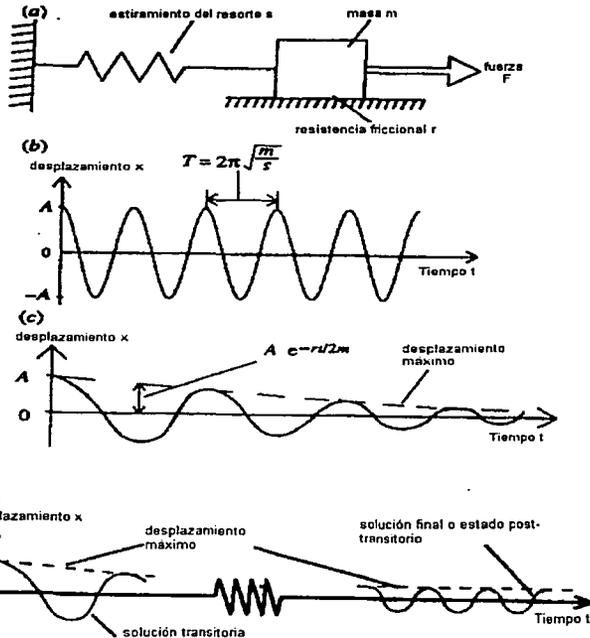


Figura 6.1 Modelo oscilador de un bloque deslizante.

Empecemos colocando el bloque de tal forma que el resorte no haga fuerza sobre éste. Si movemos su masa sentiremos una fuerza causada por el resorte, el cual quiere retener el objeto en su posición inicial, en descanso. Esta fuerza restablecedora, F_s , es simplemente igual al estiramiento del resorte multiplicado por la extensión del resorte, es decir, $F_s = -sx$. El signo negativo indica que la fuerza restablecedora está en dirección opuesta al movimiento de extensión, en la medida que el resorte se resiste a la extensión. Si ponemos la masa en una

nueva posición, digamos a una distancia A de su posición de reposo (equilibrio estable que se da en $x=0$), y lo soltamos, la masa oscilara hacia atrás y hacia adelante entre $+A$ y $-A$ de su posición de reposo. La serie de tiempo de este movimiento armónico se muestra en la figura 6.1(b), donde el periodo de oscilación T será igual a $2\pi\sqrt{\frac{m}{s}}$. Ahora, si incluimos un componente de fricción del bloque sobre la superficie, r , y de nueva cuenta colocamos el bloque a una distancia A , la masa oscilará hacia atrás y hacia delante, sólo que esta vez la amplitud del movimiento decrecerá. Así como con la fuerza del resorte, la fuerza de fricción, F_r , actúa contra el movimiento. Asumiremos que F_r es directamente proporcional a la velocidad que alcanza el bloque. La amplitud de las oscilaciones decae exponencialmente, ésto debido a la fricción presente en el sistema. Una serie de tiempo de este tipo de movimiento armónico se muestra en la figura 6.1(c). Si ahora aplicamos al sistema una fuerza, en un tiempo aleatorio, entonces las oscilaciones se mantendrán indefinidamente. Ahora, si volvemos a realizar el experimento, pero ahora considerando un desplazamiento arbitrario, entonces la evolución en el tiempo consistirá de dos regiones principales: la primera, una oscilación transitoria inicial que experimenta el sistema dinámico a partir de la condición inicial, que pasa a la segunda región consistente en una oscilación postransitoria (figura 6.1(d)). A partir de una condición inicial, el sistema dinámico es atraído a su solución postransitoria o **atractor**. Atractores postransitorios son típicos de los **sistemas dinámicos disipativos**, en este caso la disipación ocurre debido al término de fricción presente en las ecuaciones de movimiento. Una vez estando en la solución postransitoria, el sistema permanece ahí, a menos que sea

perturbado por una fuerza externa. Hablaremos entonces de aquí en adelante de **sistemas dinámicos disipativos**.

La solución postransitoria es aperiódica (una solución que no presenta un patrón de comportamiento definido): para obtener una solución postransitoria caótica necesitamos adherir un ingrediente más a nuestro sistema dinámico, éste es la no linealidad. Una manera simple de hacer esto es tener un "resorte no lineal", es decir, donde la fuerza restablecedora del resorte sea proporcional al cubo del desplazamiento x , es decir, $F_s = -sx^3$. Este oscilador no lineal es conocido como **oscilador Duffing**, y tiene como ecuación de movimiento:

$$m \ddot{x} + r \dot{x} + sx^3 = A_f \cos(\omega t) \quad (6.1)$$

Aquí hemos usado la nomenclatura abreviada, donde A_f es la amplitud de la fuerza aplicada, el desplazamiento está denotado por x , la velocidad, que es la primera derivada del desplazamiento con respecto del tiempo, dx/dt , está denotada por \dot{x} , y la aceleración, que es la segunda derivada del desplazamiento con respecto al tiempo, d^2x/dt^2 , está denotada por \ddot{x} . El sistema dinámico descrito por la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden dada en la ecuación (6.1) puede exhibir movimiento periódico o no periódico (caos) dependiendo de la elección de los parámetros del sistema. Debemos hacer notar que las soluciones analíticas de las ecuaciones de movimiento de sistemas no lineales son por lo general poco posibles, por lo que para los casos caóticos, que son de nuestro interés, esto también puede suceder. Sin embargo podemos generar soluciones numéricas a estas ecuaciones no lineales usando métodos

numéricos tales como Runge-Kutta o el método de diferencia finita. Todos los comportamientos caóticos mencionados en los ejemplos de este capítulo han sido generados usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden. Sin pérdida de generalidad, simplificaremos la ecuación de movimiento del oscilador Duffing (ecuación 6.1) haciendo la masa m , la rigidez del resorte, s , y la frecuencia regular, ω ; iguales a uno, para obtener:

$$\ddot{x} + r \dot{x} + x^3 = A_f \cos(\tau) \quad (6.2)$$

De esta forma tenemos únicamente dos parámetros de control: el coeficiente r y la amplitud de la fuerza A_f . Variando estos dos parámetros podemos localizar regímenes de oscilaciones periódicas o de oscilaciones caóticas. Por ejemplo, un comportamiento periódico es encontrado para valores de los parámetros $r=0.08$ y $A_f=0.20$, mientras que para $r=0.05$ y $A_f=7.50$ el comportamiento del sistema es caótico.

Con frecuencia más de una solución postransitoria es posible en un sistema caótico, cada una de éstas representa el movimiento a largo plazo del sistema. La solución postransitoria en turno depende de las condiciones iniciales del sistema, es decir, el desplazamiento inicial, x_0 , y de la velocidad, \dot{x}_0 . El conjunto de condiciones iniciales que alcanza una solución postransitoria particular es conocido como la **base de atracción** del atractor. De hecho para la ecuación (6.2) con parámetros de control $r=0.8$ y $A_f=0.20$ el oscilador Duffing puede ser atraído hacia varios estados postransitorios. Dos de estos están mostrados en las figuras

6.2(a) y (b), donde las series de tiempo transitorias y posttransitorias se muestran en ambos casos.

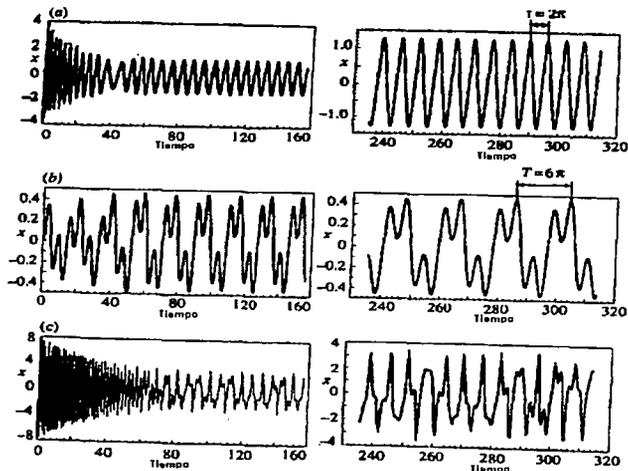


Figura 6.2 Series de tiempo del oscilador Duffing.

El oscilador Duffing con condiciones iniciales $x_0=3.0$, $\dot{x}_0=3.0$ acaba experimentando una oscilación larga con una amplitud que se repite en un periodo $T=2\pi$, el cual es el periodo de la función A_f . Por otra parte, oscilaciones que comienzan en $x_0=0.0$ y $\dot{x}_0=0.0$ experimentan un ciclo el cual contiene picos sobre intervalos de longitud 2π , en este caso sin embargo, tres diferentes picos pueden ser observados, y la oscilación se repite a sí misma cada tres periodos de la función de fuerza A_f , es decir, en intervalos de 6π .

Una oscilación caótica del oscilador Duffing se muestra en la figura 6.2(c), ésta corresponde al conjunto de parámetros de control $r=0.05$, $A_f=7.5$, y con condiciones iniciales $x=0.8$, $\dot{x}_0=0.0$. Una vez que la alta frecuencia transitoria desaparece, la oscilación experimenta un régimen caótico, el cual no se repite a sí mismo y parece muy irregular e impredecible.

En lugar de graficar la serie de tiempo del desplazamiento del oscilador de Duffing, podemos en cambio graficar el desplazamiento contra la velocidad en el plano fase (un espacio fase bidimensional). La figura 6.3 contiene el gráfico $x-\dot{x}$ (la posición contra la velocidad) del oscilador Duffing correspondiente a la serie de tiempo de la figura 6.2. El sistema dinámico evoluciona a través del tiempo como una curva continua en el plano fase. Las **trayectorias** solución para los casos periódicos están dadas en las figuras 6.3 (a) y (b). Las condiciones iniciales se muestran en las graficas con puntos gruesos. El comportamiento postransitorio en los casos periódicos muestra bucles cerrados en el plano fase, conocidos como **ciclos límite atractores**. El decaimiento del movimiento transitorio hacia el ciclo límite atractor postransitorio es particularmente obvio para el caso $x_0=3.0$, $\dot{x}_0=3.0$. Los bucles cerrados, correspondientes al comportamiento postransitorio del sistema, pueden ser pensados como un retrato del atractor periódico. Estos retratos fase son particularmente útiles para visualizar la dinámica del sistema. El retrato fase del atractor para el caso caótico se muestra en la figura 6.3 (c). Después de la alta frecuencia inicial del movimiento transitorio que decae, el sistema experimenta un atractor postransitorio para la solución caótica.

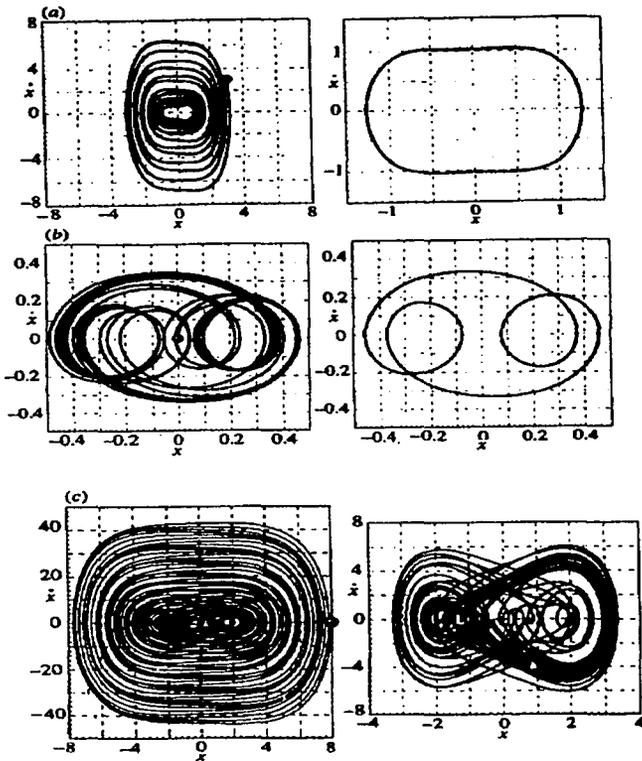


Figura 6.3 Retratos fase del oscilador Duffing.

Este atractor es mucho más exótico que los atractores periódicos. Este atractor conocido como **atractor caótico** o **extraño**, representa todos los posibles estados finales de la solución caótica. Unos pocos ciclos de la trayectoria alrededor del atractor extraño se muestran en el retrato fase de la derecha de la figura 6.3(c).

Podemos simplificar más los retratos fase haciendo un muestreo de la señal bajo estudio a intervalos iguales en el periodo característico del sistema. Para ello graficamos un punto en el espacio fase cada periodo característico (de la fuerza), en lugar de graficar la trayectoria total del espacio fase. De esta forma el diagrama fase puede ser simplificado, mostrando características que de otra forma serían ocultadas en la complejidad del retrato fase. Entonces, si el atractor es periódico con un periodo igual al periodo de fuerza, entonces únicamente un punto será graficado sobre sí mismo una y otra vez, una vez por cada periodo de fuerza. La figura 6.4(a) ilustra para el ciclo límite atractor de la figura 6.3(a). El punto grueso en la gráfica se muestra una por cada revolución de la trayectoria alrededor del ciclo límite. Similarmente la figura 6.4(b) grafica puntos muestreados para el atractor de periodo 3 de la figura 6.3(b). Esta vez observamos tres puntos muestreados, ya que el sistema toma tres periodos de la función de fuerza para retornar a su estado dinámico original. La figura 6.4(c) grafica los puntos muestreados para la solución caótica: esta vez la trayectoria (mostrada en la parte derecha de la figura 6.3(c)) es omitida por claridad. Esta grafica de puntos muestreados es conocida como **Función de Poincaré**.

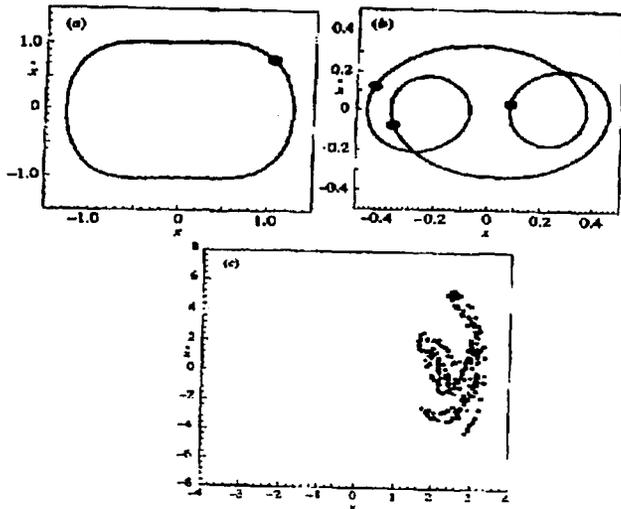


Figura 6.4 Secciones de Poincaré para soluciones pos transitorias del oscilador Duffing. Cada punto es mapeado sobre el siguiente a través de la acción del sistema dinámico en el espacio fase. Sin embargo, a diferencia de las funciones que investigamos en el capítulo 5, esta vez no estamos seguros acerca de la forma exacta de la función requerida para iterar los puntos en la función. Existe una diferencia remarcable en la apariencia de la función de Poincaré para la trayectoria caótica y el simple repetimiento de los puntos en los casos periódicos. De hecho, los puntos en la función de Poincaré para el caso caótico nunca reaparecen en el mismo lugar, debido a que si lo hicieran, el comportamiento en el sistema se repetiría. Oscilaciones caóticas del oscilador Duffing son aparentemente impredecibles. Sin embargo, a diferencia de una sucesión de números aleatorios,

estos no son impredecibles. Cada vez que empezamos una oscilación caótica en un conjunto específico de condiciones iniciales obtenemos series de tiempo idénticas. El sistema se dice determinístico cuando podemos determinar precisamente el comportamiento a largo plazo de un sistema caótico si conocemos exactamente las condiciones iniciales. Sin embargo, un pequeño cambio en las condiciones iniciales del sistema caótico arroja una serie totalmente distinta. Este fenómeno es conocido como **dependencia sensitiva ante condiciones iniciales**. Esta propiedad se ilustra en la figura 6.5, la cual contiene dos series de tiempo para el oscilador Duffing con dos distintas condiciones iniciales que distan muy poco.

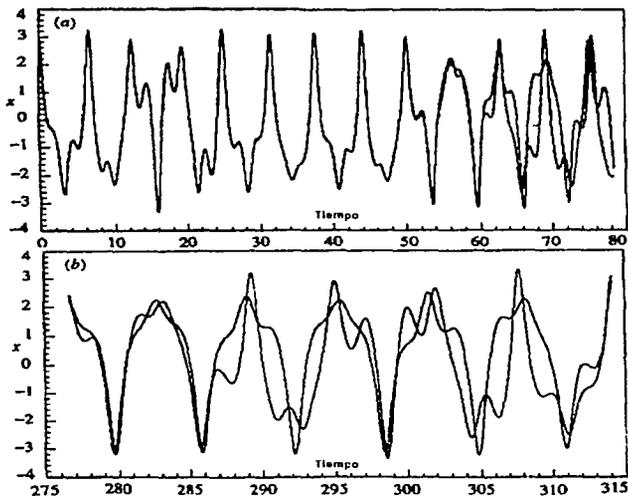


Figura 6.5 Dependencia sensitiva ante condiciones iniciales.

Una oscilación comienza en $x_0=3.0$, $\dot{x}=3.0$ y la otra en $x_0=3.01$, $\dot{x}=3.0$. Como puede verse en la figura, las dos soluciones parecen seguir un patrón similar (figura 6.5(a)). Sin embargo, en la medida que el tiempo pasa, el patrón de la solución empieza a diverger, alcanzando patrones a largo plazo totalmente distintos (figura 6.5(b)). Sobre pequeñas escalas, la separación de las tendencias de las dos soluciones es exponencial. La propiedad de divergencia puede ser cuantificada usando exponentes característicos conocidos como **exponentes de Lyapunov**. Estos serán discutidos en el capítulo 7. La sensibilidad ante condiciones iniciales es lo que causa la aparente impredecibilidad a largo plazo del movimiento caótico, debido a que un pequeño error en la medida de las condiciones iniciales del sistema dinámico, ocasiona un margen grande de error de predicción del comportamiento a largo plazo, aún conociendo exactamente las ecuaciones del movimiento.

6.3 Caos en el clima: el modelo de Lorenz

La dependencia sensitiva ante condiciones iniciales de sistemas caóticos como en el caso del oscilador Duffing es popularmente conocido como **efecto mariposa**. Este fenómeno fue primeramente observado por Edward Lorenz durante su investigación acerca de un par de ecuaciones diferenciales ordinarias que eran usadas como un modelo simplificado de una convección termal bidimensional, conocido como la convección Rayleigh-Bernard. Estas ecuaciones son conocidas ahora como las ecuaciones de Lorenz o **modelo de Lorenz**. La figura 6.6 muestra esquemáticamente un diagrama de la convección de Rayleigh-Bernard entre dos placas horizontales.

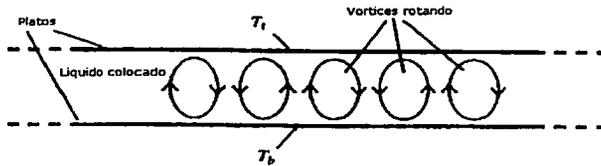


Figura 6.6 Diagrama esquemático de la convección de Rayleigh-Bernard.

La placa de abajo está a una temperatura T_b , la cual es mucho mayor que la temperatura de la placa de arriba, T_i . Para pequeñas diferencias entre las dos temperaturas, el calor es conducido a través del fluido estacionario situado entre las dos placas. Sin embargo cuando $T_b - T_i$ es suficientemente grande, las fuerzas boyantes dentro del líquido caliente superan la viscosidad interna del fluido y un patrón de rotación del líquido. Los vórtices gradualmente recirculantes se presentan entre las placas. Lorenz notó que en este modelo matemático simplificado de la convección de Rayleigh-Bernard, pequeñas variaciones en las condiciones iniciales provocan rápidamente enormes diferencias en el comportamiento final. Lorenz pensó que si este tipo de comportamiento podía ocurrir en un sistema dinámico tan simple, entonces podría ser posible también en muchos más sistemas físicos complejos tales como: el sistema del clima. De esta manera una pequeña perturbación causada por el vuelo de una mariposa, provocará rápidamente un cambio completo en el futuro en los patrones del clima. Las ecuaciones de Lorenz son:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= -\sigma(x - y) \\
 \dot{y} &= -xz + rx - y \\
 \dot{z} &= xy - bz
 \end{aligned}
 \tag{6.3}$$

el sistema cuenta con dos no linealidades, el término xz y el término xy , y exhibe tanto movimiento periódico como caótico dependiendo de los valores de los parámetros de control, σ , r y b . σ es el **número de Prandtl**, el cual relaciona la pérdida de energía dentro del fluido debido a la viscosidad con aquellos debidos a conducción termal; r es la medida de la diferencia de temperatura entre las placas, conocida como el **número de Rayleigh**, y b está relacionado al radio de la altura vertical del fluido colocado en la extensión horizontal de los rollos convectivos dentro de éste. Note además que las variables x , y y z no son coordenadas espaciales pero si representan el volcamiento convectivo, variación horizontal de la temperatura y la variación vertical de la temperatura, respectivamente.

Siguiendo a Lorenz, hacemos $\sigma=10$ y $b=2.67$ respectivamente y hacemos r un parámetro ajustable. Variando el valor de r se encuentra un valor crítico en $r_c = 24.74$, en el cual el comportamiento del sistema cambia dramáticamente. Por debajo de r_c el sistema decae a un estado regular, no oscilatorio. La figura 6.7 muestra las series de tiempo y los retratos fase x - y y x - z para el sistema con $r=16$. De nuevo, la condición inicial se muestra con un punto grueso en el plano fase. El rápido decaimiento de las oscilaciones a un punto fijo estable es evidente en ambas series de tiempo y en ambos retratos fase. Si r está por arriba de r_c , ocurre un comportamiento oscilatorio continuo. Un valor de $r=28$ produce un comportamiento aperiódico al cual Lorenz llamó "**Flujo determinístico no periódico**", y al cual actualmente nos referimos con el nombre de **caos**.

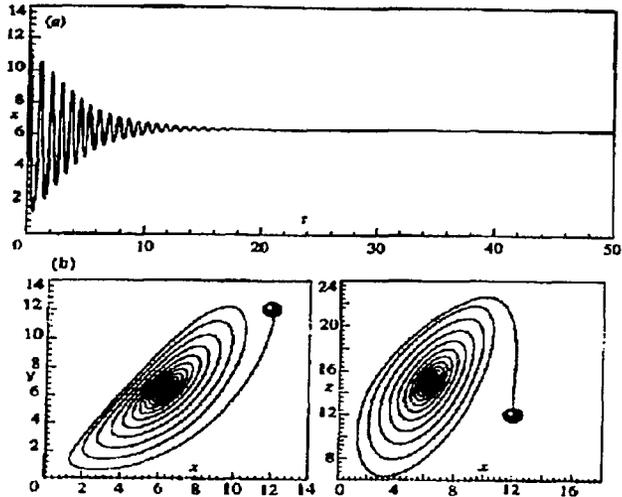


Figura 6.7 Solución postransitoria no oscilatoria del sistema de Lorenz.

Las figuras 6.8 (a)-(c) contienen las series de tiempo de los sistemas caóticos junto con los retratos fase en dos y tres dimensiones. Las trayectorias postransitorias de la solución caótica recaen sobre un atractor extraño. Podemos observar que en las figuras, las trayectorias pasean sobre dos distintas regiones del atractor. Después de un número de revoluciones dentro de una región del atractor la trayectoria cambia hacia la otra región del atractor. Permanece en esta región del atractor para después regresar a la anterior. El número de revoluciones que la trayectoria toma en cada región del atractor, antes de pasar a la otra región, es ¡impredecible!. La estructura del atractor de Lorenz es demasiado compleja. El atractor parece consistir de dos superficies las cuales parecen emerger. Sin

embargo, la trayectoria solución nunca se intersecará consigo misma, ya que si lo hiciera esto implicaría un ciclo periódico. Para lograr que las trayectorias no se intercepten consigo mismas, necesitamos de tres dimensiones para el espacio fase. La estructura fractal es una propiedad fundamental de los atractores extraños y es una característica más del movimiento caótico. El atractor de Lorenz tiene una dimensión fractal de aproximadamente 2.05. En el capítulo 7, estudiaremos las formas de estimar la dimensión fractal de los atractores extraños.

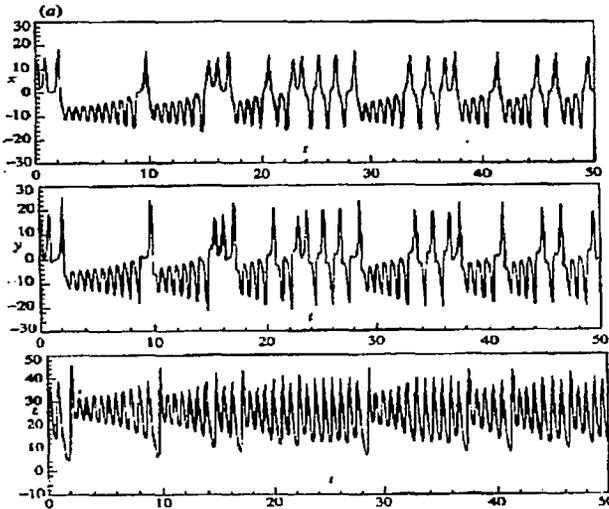


Figura 6.8 Atractor extraño del modelo de Lorenz.

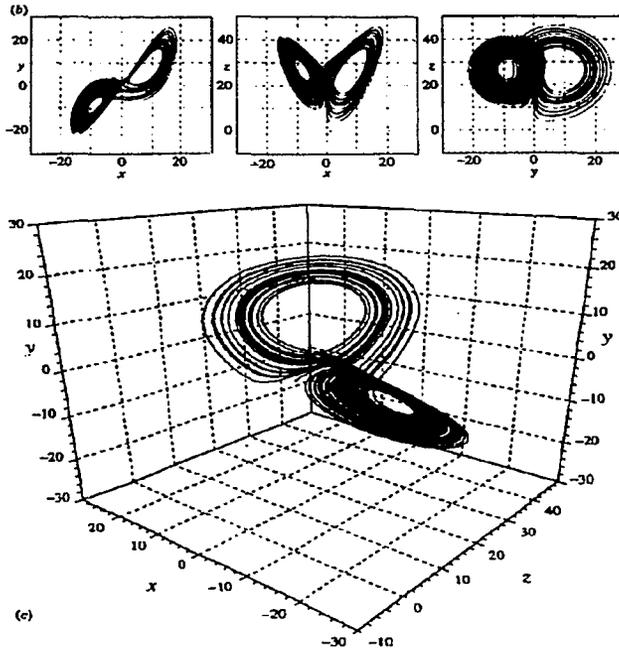


Figura 6.8 (continuación)

Una manera de simplificar la dinámica caótica del sistema de Lorenz es graficando el valor máximo de z , denotado por z_n , contra el siguiente máximo, denotado por z_{n+1} . Esto se muestra en la figura 6.9(a). Podemos ver que los puntos caen aproximadamente sobre una función unidimensional, el cual tiene un gradiente mayor y experimenta inestabilidad por arriba de la recta identidad. Iterando la función obtendremos una sucesión caótica de iterandos. La función de la casita de

la figura 6.9(b) nos proporciona una idealización de la **función de Lorenz**. Una iteración grafica de la función de la casita se muestra también en la figura 6.9. La función de Lorenz ha reducido al sistema dinámico de tres dimensiones en una función unidimensional (requiere una variable— z) no invertible. Si incrementamos el parámetro de control r por arriba de r_c , observamos series de bifurcaciones inversas de estados caóticos a orbitas periódicas. Una tal solución periódica se muestra en la figura 6.10(a)-(c) para $r=100.5$. Las ecuaciones de Lorenz poseen una importante simetría. Si $[x(t), y(t), z(t)]$ es una solución de las ecuaciones de Lorenz, entonces también lo será la solución $[-x(t), -y(t), z(t)]$. Por lo tanto, los atractores de Lorenz son simétricos o poseen un patrón de simetría. La figura 6.10(d) contiene el patrón simétrico de la solución dada en la figura 6.10(a)-(c). La propiedad de simetría es inmediata cuando comparamos la figura 6.10(b) con la figura 6.10(d).

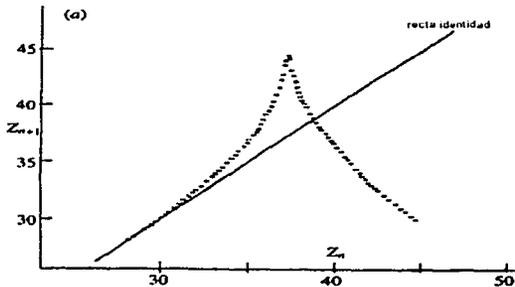


Figura 6.9 La función de Lorenz.

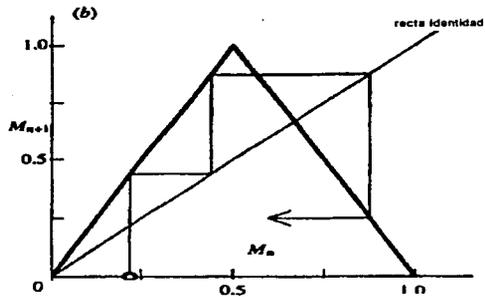


Figura 6.9 (continuación)

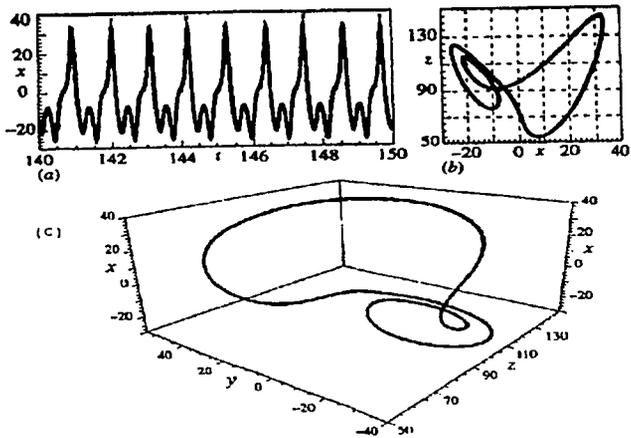


Figura 6.10 Atractor periódico para el modelo de Lorenz con $\sigma=10$, $b=2.67$ y $r=100.5$.

(d)

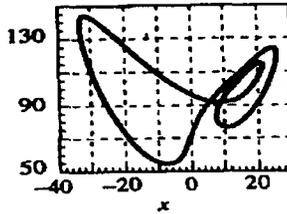


Figura 6.10 (continuación)

6.4 Espacio fase, dimensión y forma de un atractor.

En el actual contexto de los sistemas dinámicos, es fácil malinterpretar el concepto de dimensión. Por lo tanto, es un muy buen momento para poner en contexto los muchos significados que puedan surgir aquí. Empecemos definiendo los **grados de libertad**. El número de grados de libertad requeridos para una total descripción de un sistema dinámico está definido como el número de variables independientes requeridas para describir el estado instantáneo del sistema (por lo tanto, el espacio fase es usualmente referido como espacio estado). Así pues, el número de grados de libertad requeridos para una total descripción de un sistema dinámico es simplemente el número de condiciones iniciales que son requeridas para especificar el sistema. El **espacio fase** es definido como un "espacio matemático" con coordenadas ortogonales que representan cada una de las variables necesarias para especificar el estado instantáneo del sistema'. El número de grados de libertad es entonces la dimensión mínima requerida para el espacio fase del sistema. Para el modelo de Lorenz requerimos el conocimiento de tres condiciones iniciales y por tanto un espacio fase tridimensional es requerido para describir completamente la dinámica de este sistema. Con

respecto al oscilador Duffing, éste tiene una forma diferente en el par de ecuaciones diferenciales ordinarias que el modelo de Lorenz, además, la variable del tiempo aparece explícitamente en el oscilador Duffing, es decir, es un sistema no autónomo. Primeramente será útil describir el oscilador Duffing de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= A_f \cos z - r x - x^3 \\ \dot{z} &= 1 \end{aligned} \tag{6.6}$$

donde la introducción de las variables y y z ha descompuesto el sistema en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Además la variable auxiliar z ha removido la dependencia del tiempo en el sistema. En otras palabras, el sistema ahora es autónomo, como en el caso del modelo de Lorenz. Como las tres variables x , y y z describen totalmente al sistema, ahora podemos ver que un espacio fase tridimensional es necesario para el sistema. La dimensión espacial en la cual el sistema dinámico existe no es generalmente igual a la dimensión del espacio fase. El oscilador de Duffing modela un sistema dinámico, el cual está restringido a moverse en una sola dimensión espacial, x . El sistema de Lorenz modela la convección en un espacio bidimensional, donde las variables x , y y z están relacionadas a propiedades del sistema. Por lo tanto, vemos una diferencia entre la dimensión del espacio fase y la dimensión espacial del problema, a pesar de que ambas son dimensiones enteras.

La dimensión de un atractor en un espacio fase es de gran importancia; generalmente distinta de la dimensión espacial del sistema y la dimensión del

espacio fase. La dimensión de un atractor está relacionada con su forma geométrica. De hecho, una solución no oscilatoria corresponde a un punto fijo en el espacio fase el cual atrae trayectorias cercanas. Ya hemos visto que este tipo de comportamiento para el sistema de Lorenz en las figuras 6.7(a) y (b), donde las trayectorias rodeaban en forma de espiral dentro de las soluciones de puntos fijos. La figura 6.11(a) muestra esto esquemáticamente. La dimensión de un punto atractor es cero. Una vez que las oscilaciones comienzan a aparecer en el sistema, el atractor puede tomar diferentes formas. Una solución de periodo uno tiene un ciclo limite atractor, mostrado esquemáticamente en la figura 6.11(b). Ya habíamos observado este tipo de atractores (figura 6.4(a)). La curva cerrada del ciclo limite tiene dimensión uno. Una vez que una segunda frecuencia emerge en la solución de un sistema dinámico, entonces las dos frecuencias se enrollan en el espacio fase, una con otra sobre un toro, o en forma de una dona. Esto se muestra esquemáticamente en la figura 6.11(c), donde la oscilación de frecuencia f_2 se enrolla alrededor de la oscilación f_1 , en el espacio fase. Si las dos dimensiones son inconmensurables (es decir, la segunda frecuencia no está relacionada a la primera frecuencia) entonces la trayectoria llena completamente la superficie del toro en el espacio fase. La superficie del toro tiene dimensión dos. Si más frecuencias aparecen en el sistema, entonces un toro de mayor dimensión es creado, el cual requiere de un espacio fase de mayor dimensión. Finalmente, para un movimiento caótico, los atractores extraños aparecen y tienen una dimensión fractal, es decir, una dimensión no entera (figura 6.11(d)). Como un ejemplo de las diferentes dimensiones consideradas en la especificación de la

dinámica de los sistemas no lineales considere el sistema de Lorenz. Este modela la convección en dos dimensiones espaciales, tiene tres grados de libertad, y por lo tanto requiere de un espacio fase tridimensional, y puede bajo ciertos valores de los parámetros, desarrollar un atractor caótico (figura 6.8(c)) con una dimensión fractal un poco mayor que dos.

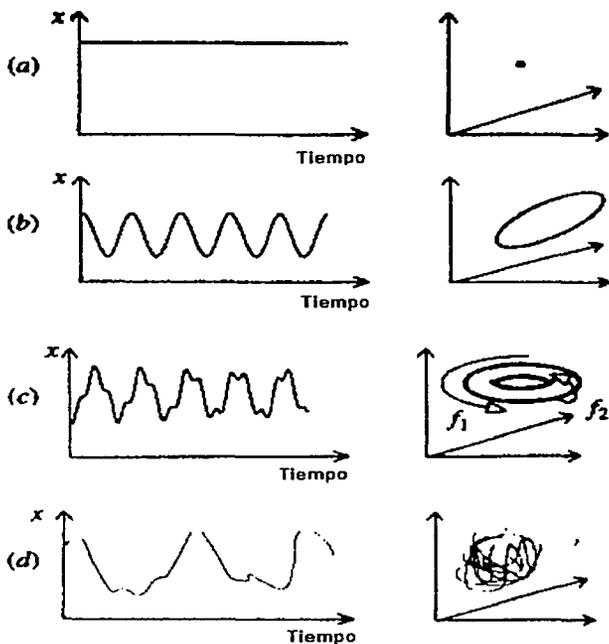


Figura 6.11 Diagrama esquemático de distintos atractores con sus respectivas series de tiempo.

CAPITULO 7

Caracterizando el Caos

7.1 Introducción

El movimiento caótico tiene diferentes propiedades y deben ser examinadas usando varias técnicas. El problema recae en encontrar métodos que nos permitan diferenciar entre series de tiempo puramente aleatorias y aquellas que son caóticas (es decir aparentemente impredecibles). En este capítulo investigaremos las características del movimiento caótico, lo cual nos permitirá cuantificarlo y distinguirlo de movimientos aleatorios o periódicos.

7.2 Caracterización preliminar: Inspección visual

Antes de usar cualquier método sofisticado o técnica numérica para analizar una serie de tiempo, debemos primero inspeccionar visualmente la serie, para ver si una característica particular está presente. Por ejemplo, a partir de una inspección visual de la traza en el tiempo de la velocidad de un fluido que fluye en cierto medio, podemos distinguir entre flujo laminar y flujo turbulento.

En el capítulo 6, observamos series de tiempo con soluciones periódicas y caóticas de varios sistemas dinámicos. Por ejemplo las figuras 6.2(a) y (b) contienen soluciones periódicas para el oscilador Duffing y la figura 6.2(c) contiene una solución caótica. Haciendo referencia a estas figuras podemos decir, simplemente al observarlas, que las soluciones periódicas parecen repetir su comportamiento a lo largo de la serie, mientras que para la solución caótica no parece repetirse algún patrón (al menos no en el segmento de serie de tiempo considerada). Una inspección visual del retrato fase (figura 6.3) y las secciones de Poincaré (figura 6.4) del oscilador de Duffing nos muestran de nueva cuenta el

evidente comportamiento periódico. Sin embargo, la inspección visual tiene ciertas deficiencias que resumimos a continuación:

- (i) No siempre es posible inspeccionar un segmento grande de la serie de tiempo para determinar cuando una serie de tiempo se repite a sí misma o cuando no lo hace.
- (ii) Es difícil determinar visualmente cuándo un signo que está compuesto de varias frecuencias es ciertamente periódico.
- (iii) Si la serie de tiempo está compuesta de varias frecuencias inconmensurables, entonces puede ser imposible determinar si una serie de tiempo es periódica o caótica.
- (iv) Una frecuencia dominante en una señal puede enmascarar otras frecuencias o a algún movimiento ligeramente caótico.

7.3 Caracterización preliminar: El Espectro de frecuencia.

La transformada de Fourier permite inspeccionar las distintas frecuencias presentes en una serie de tiempo (**espectro de frecuencias**). La popularidad de usar transformadas de Fourier en el análisis de señales se ha incrementado debido al desarrollo de un algoritmo para computadoras llamado **Transformada de Fourier Rápida** (FFT en inglés), el cual permite calcular de manera rápida transformadas de Fourier discretas. En esta sección, revisaremos rápidamente algunos aspectos importantes del análisis de Fourier. En vista de que únicamente trataremos con series de tiempo discretas, nos concentraremos en la transformada de Fourier discreta de una serie de tiempo discreta, x_j , $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$, definida como:

$$X_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j e^{-i2\pi k j / N} \quad k=0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.1a)$$

donde i es la raíz imaginaria -1 . El tiempo de espaciamento entre cada punto muestreado debe ser tal que su recíproco (es decir la frecuencia de muestreo) es al menos dos veces la resolución de la máxima frecuencia de la señal. La transformada inversa de 7.1(a) es:

$$x_j = \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{i2\pi k j / N} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (7.1b)$$

Al graficar la transformada de Fourier de una serie de tiempo, señales periódicas, múltiple periódicas, casi periódicas y señales no periódicas pueden ser identificadas. La figuras 7.1(a)-(b) contienen respectivamente el espectro de frecuencia asociado a la serie de tiempo de oscilaciones periódicas y oscilaciones caóticas del oscilador de Duffing.

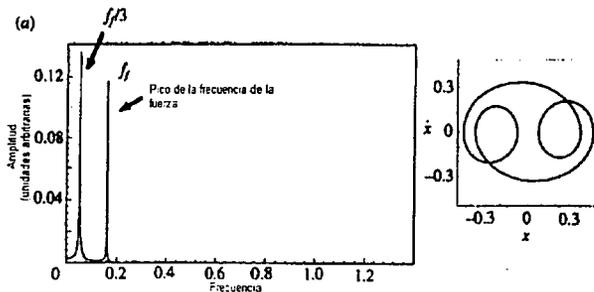


Figura 7.1 Espectro de Fourier para el oscilador Duffing y el modelo de Lorenz.

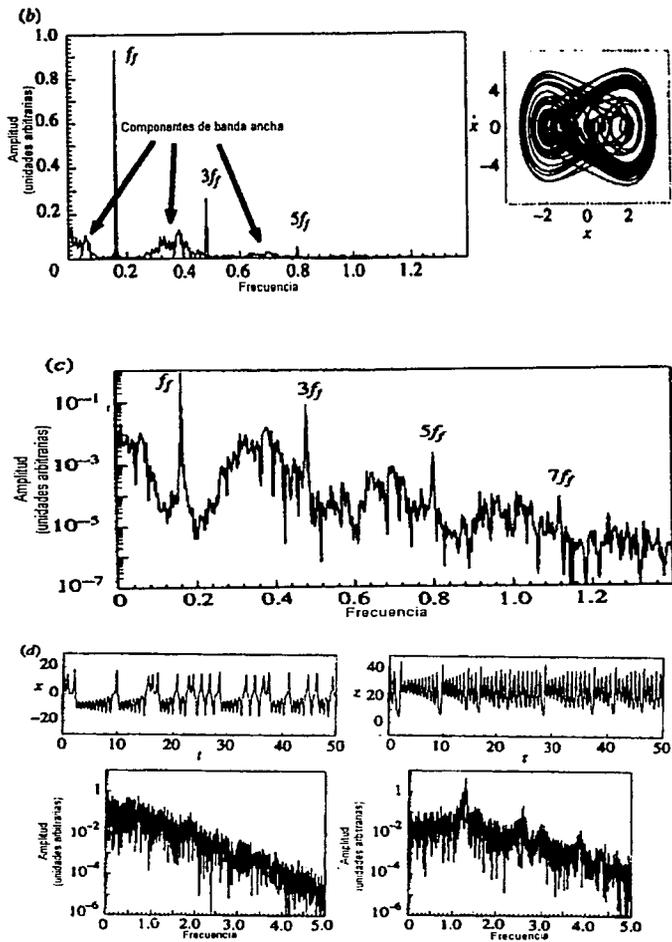


Figura 7.1 (continuación)

Los atractores están graficados a un lado del espectro de frecuencia. El espectro de frecuencia para el caso periódico (figura 7.1 (a)) está compuesto de dos picos, uno en la frecuencia de la fuerza, $f_f = 1/2\pi$, y la otra a un tercio de la frecuencia de la fuerza. Esto es consistente con la serie de tiempo (6.2(b)) y con la sección de Poincaré (figura 6.4(a)), en la cual vimos que ocurría en el sistema una oscilación de período tres. El espectro caótico de la figura 7.1(b) tiene distintos picos en la frecuencia de la fuerza y en sus armónicos, $3f_f$, $5f_f$ y $7f_f$. Además de esto, una banda ancha de espectro de componentes de Fourier ha aparecido entre los armónicos. En los sistemas determinísticos, esta banda ancha del espectro es un aviso del comienzo de un comportamiento caótico. Usualmente en lugar de considerar el espectro de la frecuencia, se grafica un espectro de potencia. El **espectro de potencia** es el cuadrado del espectro de frecuencia. La figura 7.1(c) contiene el espectro de potencia para el caso caótico de la figura 7.1(b). La escala vertical es logarítmica, y podemos ver que el grafico del espectro de potencia logarítmico muestra más claramente la banda ancha espectral de los componentes mezclados, por medio de mayores componentes de frecuencia.

La potencia espectral para el modelo de Lorenz en su versión caótica se muestra en la figura 7.1(d), (refiérase a la figura 6.8). Se muestra una serie de tiempo para la coordenada x, y otra serie de tiempo para la coordenada z. Ambas gráficas contienen componentes espectrales de banda ancha, sin embargo, existe un pico dominante en el espectro de z en una frecuencia alrededor de 1.35, correspondiente a la frecuencia orbital de la trayectoria alrededor de las dos regiones del atractor. Este pico no es muy evidente en el otro espectro. La serie de

tiempo de la coordenada z es ligeramente más simple en su forma, ya que no contiene los puntos de inflexión presentes en la serie de tiempo de x , que corresponden a la trayectoria que atraviesa de una región del atractor hacia la otra región del atractor. Los dos espectros ilustran la habilidad de obtener más información al escoger la 'mejor' variable dinámica a estudiar, y es aquí donde una inspección visual es de mucha ayuda, aunque éste no sea siempre el caso.

Componentes espectrales de banda ancha pueden surgir también en señales aleatorias (o ruido). Sin embargo, sabemos que el oscilador Duffing es un sistema determinístico y no incluye ningún componente aleatorio en sus ecuaciones de movimiento. Podemos entonces deducir que una frecuencia de banda ancha espectral es porque el sistema está experimentando caos. Si por el contrario, tenemos una serie de tiempo de un sistema dinámico real el cual pueda contener ruido, entonces es más difícil diferenciar entre los componentes de banda ancha asociados con el ruido, y aquellos asociados con un comportamiento caótico. Por lo tanto, el espectro de frecuencia generalmente no es suficiente para confirmar la presencia de caos en una señal experimental, la cual tendrá inevitablemente un elemento de ruido. Por lo tanto requerimos de técnicas que puedan diferenciar entre aquellas series de tiempo que son aleatorias (o ruidosas) y aquellas que son caóticas. Podemos hacer esto midiendo la divergencia exponencial de trayectorias cercanas del atractor, o también investigando la estructura fractal del atractor. En las siguientes dos secciones, algunos métodos son descritos para desarrollar estas medidas.

7.4 Caracterizando el caos: Exponentes de Lyapunov

Como vimos en el capítulo 6, trayectorias cercanas divergen exponencialmente sobre atractores extraños, dando lugar al efecto mariposa en los sistemas dinámicos caóticos. Podemos medir ésta divergencia exponencial y caracterizarla usando los exponentes de Lyapunov. Un diagrama esquemático de dos distintas trayectorias se muestran en la figura 7.2(a).

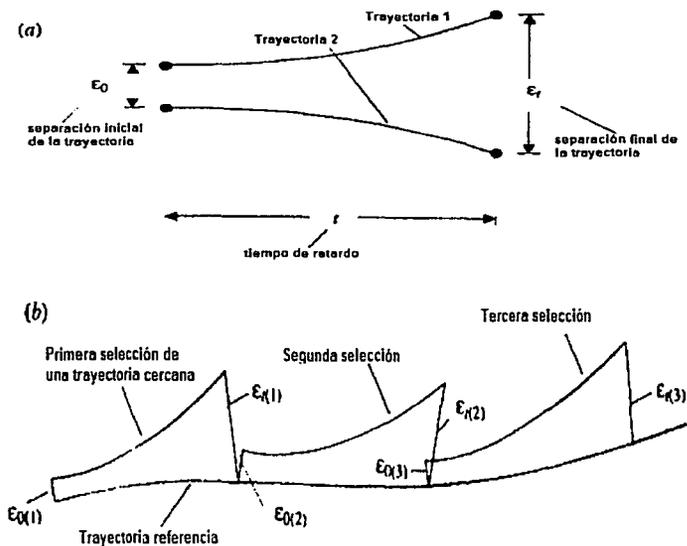


Figura 7.2 Diagrama esquemático de los exponentes de Lyapunov.

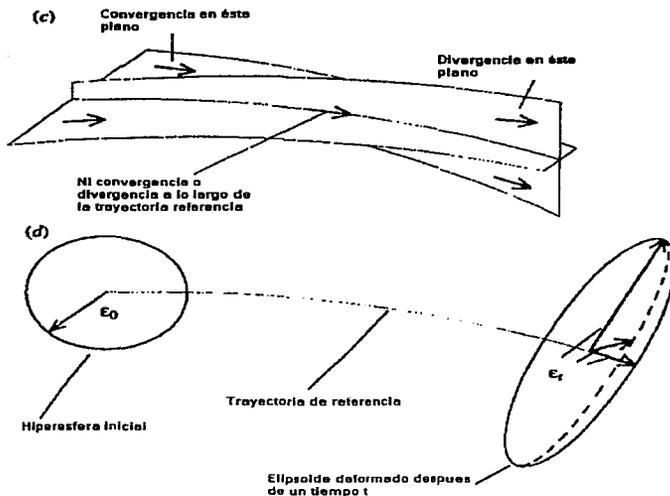


Figura 7.2 (continuación)

En esta figura, ϵ_0 es la separación observada de dos puntos cercanos sobre dos trayectorias separadas del atractor. Después de un tiempo t , las trayectorias divergen y su separación es ahora ϵ_t . Como esta separación es exponencial, podemos escribir:

$$\epsilon_t = \epsilon_0 e^{\lambda t} \quad (7.2a)$$

donde λ es el exponente de Lyapunov. Acomodando, tenemos:

$$\lambda = \frac{1}{t} \ln \left[\frac{\epsilon_t}{\epsilon_0} \right] \quad (7.2b)$$

Note que aquí hemos usado logaritmo natural para definir el exponente de Lyapunov, sin embargo, cualquier base puede ser usada. En la práctica, la base

10 y la base 2 son usadas con frecuencia, la base 2 da el exponente de Lyapunov en términos de bits de información perdida por segundo. La expresión de arriba para el exponente de Lyapunov es utilizada para medir la divergencia promedio en atractores extraños experimentales. Esto se hace siguiendo una trayectoria referencia a través del tiempo y comparando la divergencia de trayectorias cercanas sobre una porción del atractor en cierto tiempo. El método se ilustra en la figura 7.2(b), donde la trayectoria referencia es seguida y su divergencia de una trayectoria cercana es monitoreada. Una vez que la separación se vuelve más grande, otra trayectoria es seleccionada y así sucesivamente. El exponente de Lyapunov es calculado varias veces en varias partes del atractor, y se toma un promedio. Si monitoreamos N segmentos de trayectorias cercanas, entonces, el exponente de Lyapunov promedio del atractor es:

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{t} \ln \left[\frac{\varepsilon_{t(i)}}{\varepsilon_{0(i)}} \right] \quad (7.3)$$

aunque en la práctica la barra, arriba de λ (que denota la cantidad promedio), es usualmente omitida.

Como vimos en el capítulo 6, trayectorias cercanas sobre atractores extraños divergen, pero se mantienen en una región acotada del espacio fase debido al proceso de doblamiento o plegamiento. Además las trayectorias cercanas al atractor (pero no sobre el atractor) son atraídas al atractor, es decir, convergen al atractor (ver la figura 7.2(c)). Tenemos divergencia en algunas direcciones y convergencia en otras. Para caracterizar completamente las propiedades de convergencia y divergencia de un atractor requerimos un conjunto de exponentes de Lyapunov, uno por cada dirección ortogonal de convergencia/divergencia en el

espacio fase. El número de exponentes de Lyapunov requeridos para definir el atractor es igual a la dimensión de su espacio fase. Atractores caóticos tienen al menos un exponente de Lyapunov positivo. Por el contrario, atractores aleatorios (ruidosos) tienen un exponente de Lyapunov positivo infinito, dado que no existe correlación entre un punto sobre la trayectoria y el siguiente (no importa que tan cercanos estén), es decir, la divergencia es instantánea. Atractores estables periódicos tienen valores negativos o iguales a cero para λ . Por lo tanto, el exponente de Lyapunov es una medida, la cual puede ser usada para categorizar atractores extraños.

Si calculamos el exponente de Lyapunov para direcciones ortogonales de máxima divergencia en el espacio fase, obtendremos un conjunto de exponentes de Lyapunov $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$, donde n es la dimensión del espacio fase. Este conjunto de exponentes de Lyapunov es conocido como el **espectro de Lyapunov** y es frecuentemente ordenado del exponente de Lyapunov más grande, λ_1 , hacia el exponente de Lyapunov más negativo, λ_n , es decir, de máxima divergencia a máxima convergencia. El espectro de Lyapunov puede ser encontrado monitoreando la deformación de una hiperesfera infinitesimal de radio ϵ sobre el atractor (vea la figura 7.2d). A través del tiempo, la esfera se estrecha en las direcciones de divergencia (λ 's positivas) y se aprieta en direcciones de convergencia (λ 's negativas) tomando la forma de un elipsoide. Las tasas exponenciales de convergencia o de divergencia de los ejes principales del elipsoide nos da el espectro de los exponentes de Lyapunov. Uno de estos exponentes en el espectro es igual a cero y corresponde a la dirección en el

espacio fase alineado con la trayectoria, la cual ni se expande ni se contrae a través del tiempo.

Con frecuencia es suficiente denotar simbólicamente el espectro de Lyapunov. Por lo tanto $(+, +, 0, -)$ denotará un sistema dinámico con dos exponentes positivos, un exponente cero y uno negativo. Este sistema será de hecho hipercaótico debido al estrechamiento en las dos direcciones ortogonales principales. El hipercaos está definido como un sistema caótico que tiene más de un exponente de Lyapunov positivo, es decir, puede ser estrechado en dos o más direcciones. La existencia de un exponente de Lyapunov positivo nos indica que el sistema es caótico.

Podemos también encontrar exponentes de Lyapunov para atractores no caóticos. Un atractor-punto tiene únicamente exponentes de Lyapunov negativos, dado que las trayectorias giran en forma de espiral alrededor del punto fijo, es decir, para un espacio fase tridimensional obtenemos simbólicamente $(-, -, -)$. Otras posibilidades para un espacio fase tridimensional son las siguientes: un ciclo límite definido simbólicamente $(0, -, -)$ donde todas las trayectorias giran en forma de espiral sobre el ciclo límite, y el exponente cero corresponde a la dirección a lo largo de la trayectoria del ciclo límite. Otra posibilidad es un toro atractor definido como $(0, 0, -)$; y un atractor extraño definido como $(+, 0, -)$.

La suma de exponentes de Lyapunov es la tasa de contracción promedio de volúmenes en el espacio fase, es decir, la tasa de contracción del volumen del elipsoide de la figura 7.2(d). La suma es menor que cero en sistemas dinámicos disipativos, dado que las soluciones postransitorias recaen sobre atractores con volumen fase cero, es decir:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i < 0 \quad (7.4)$$

donde n es el número de exponentes de Lyapunov en el espectro. Por lo tanto, no podemos tener atractores de la forma $(+, +, 0)$ dado que exponentes de Lyapunov positivos nos adelantarán el crecimiento exponencial del volumen atractor. El espectro de Lyapunov para el atractor extraño de Lorenz (usando parámetros de control para el caso caótico del capítulo 6 han sido calculados: $(2.16, 0, -32.4)$.

Los exponentes de Lyapunov positivos están directamente relacionados a las direcciones de divergencia de la trayectoria en el espacio fase. Un conocimiento de estos exponentes positivos nos permite cuantificar las limitaciones de las predicciones sobre el futuro estado del sistema dinámico basado en el conocimiento del actual estado del sistema en base a una resolución finita. El error inherente en una medida de precisión finita crece exponencialmente y rápidamente se vuelve del orden del atractor mismo. Como un ejemplo, consideremos el atractor caótico de Lorenz $(+, 0, -)$ en un espacio fase tridimensional. Si denotamos el tamaño del atractor por ε_a , y la medida del error por ε_r , entonces el tiempo requerido para que el error crezca al mismo tamaño del atractor es:

$$t_p = \frac{1}{\lambda_1} \text{Ln} \left[\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_r} \right] \quad (7.5)$$

donde t_p es el horizonte de predicción. Notemos que t_p crece logarítmicamente con una precisión ε_r , ilustrando porqué únicamente términos de predicción a corto plazo son posibles en los sistemas dinámicos caóticos.

7.5 Caracterizando el caos: Estimadores de la dimensión

7.5.1 dimensión de conteo de caja

La dimensión de un atractor es una medida de sus propiedades geométricas cuando experimenta escalamiento, la dimensión ha sido considerada la propiedad más básica de un atractor. Sin embargo, como vimos en los capítulos 2 y 3, existen varias definiciones de dimensión. La definición de dimensión más simple y la más fácil de entender es la dimensión de conteo de caja, D_B , la cual tratamos mediante las ecuaciones (3.1)-(3.4). Para un atractor de hipervolumen unitario:

$$D_B = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{\log(N)}{\log(1/\delta)} \right] \quad (7.6)$$

donde N es el número de hipercubos de longitud δ usados para cubrir el atractor. Notemos que al igual que con los exponentes de Lyapunov, podemos usar cualquier base para el logaritmo. Aquí usaremos la base 10. La dimensión de los hipercubos que probaremos, es escogida de tal forma que sea igual a la dimensión del espacio fase. Así pues para encontrar la dimensión de conteo de caja para el sistema de Lorenz, hipercubos tridimensionales (es decir cajas) son usadas para tal propósito. Además la expresión de arriba asume un atractor de hipervolumen unitario, de otra forma se tendrá que requerir de una expresión general, basada en la ecuación 3.4(a), la cual defina D_B en términos de la pendiente de la gráfica $\log(N)$ - $\log(1/\delta)$.

7.5.2 La dimensión de información

Al igual que con la dimensión de conteo de caja, la dimensión de información; el atractor es cubierto con hipercubos con lados de longitud δ . Esta vez, sin

embargo, en lugar de contar cada cubo que contiene parte del atractor, queremos saber qué tanto del atractor está contenido en cada cubo. Esta medida busca informar acerca de las diferencias en la distribución de densidad de los puntos que cubren al atractor, y está definida como:

$$D_I = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{I(\delta)}{\log(1/\delta)} \right] \quad (7.7a)$$

donde $I(\delta)$ está dada por la fórmula de entropía de Shannon:

$$I(\delta) = -\sum_{i=1}^N P_i \log(P_i) \quad (7.7b)$$

donde P_i es la probabilidad de que una parte del atractor se encuentre en el i -ésimo hipercubo de longitud δ . Para el caso especial de un atractor con un número par de puntos, una distribución de probabilidad $P_i=1/N$ es asociada a cada caja. Por lo tanto, $I(\delta) = \log(N)$, y la ecuación (7.7a) se reduce a la dimensión de conteo de caja de la ecuación 7.6. Por lo tanto, D_B simplemente cuenta todos los hipercubos que contengan partes del atractor, mientras que D_I se pregunta qué cantidad de atractor hay en cada hipercubo y el correspondiente peso que tiene.

7.5.3 Dimensión de correlación

En la práctica el cálculo de D_B y de D_I requiere de una gran cantidad de tiempo, por lo que la dimensión más extensamente usada para calcular la dimensión de un atractor es la dimensión de Correlación, D_C , la cual es mucho más rápida de calcular. Para definir D_C primero necesitamos definir la suma de correlación, C_r , como sigue:

$$C_r = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \theta(r - |X_i - X_j|) \quad (7.8a)$$

donde θ es la función de Heaviside, r es el radio de una esfera n -dimensional centrada en cada punto muestreado sobre la trayectoria del atractor, $X_i, i = 1, 2, 3, \dots, N$. Aquí estamos usando la notación compacta X_i para denotar el vector multidimensional que es la i -ésima coordenada del espacio fase del atractor, es decir, para un atractor en un espacio fase tridimensional con coordenadas x, y y z , tenemos que $X_i = (x_i, y_i, z_i)$. Una ilustración de la definición 7.8(a) se da en la figura 7.3(a), donde la hiperesfera está centrada en uno de los puntos que están sobre una trayectoria del atractor, X_i . El número de puntos del atractor que están dentro de la hiperesfera son contados. Esto es de hecho lo que hace la función de Heaviside en la ecuación de arriba. La función de Heaviside es igual a uno (cero) si el valor dentro de los paréntesis es positivo (negativo). X_i son los puntos sobre la trayectoria referencia y X_j son otros puntos sobre el atractor en una vecindad de X_i . $|X_i - X_j|$ es la distancia de separación entre los dos puntos. $\theta(r - |X_i - X_j|)$ es igual a uno si la distancia entre los dos puntos es menor que el radio de la hiperesfera; si no es el caso, es igual a cero. De esta forma la función de Heaviside cuenta el número de puntos dentro de la hiperesfera. La suma acumulada de todos los puntos contados es entonces dividida por $N(N-1)$ para obtener la suma de correlación, C_r . El valor máximo de C_r es la unidad y éste máximo se tiene cuando el radio de las esferas que estamos probando, es mayor que el diámetro más grande del atractor y cuando todos los puntos son contados.

El valor mínimo de C_r es $2/(N(N-1))$ y éste es alcanzado cuando únicamente los dos puntos más cercanos sobre el atractor son contados.

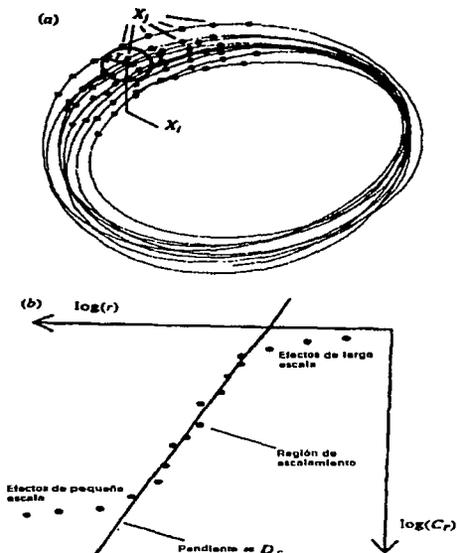


Figura 7.3 Estimación de la dimensión de correlación.

Notemos que la suma de correlación cuenta dos veces a su vecino más cercano (dando lugar al 2 en el numerador) en la medida que la esfera visita a ambos puntos en su viaje a lo largo del atractor.

La suma de correlación escala con el radio de la hipersfera de acuerdo a una potencia de la forma:

$$C_r \propto r^{-D_c} \quad (7.8b)$$

Por lo tanto, para diferentes radios de las hiperesferas, D_c es obtenida de la pendiente de la región escalante de una grafica $\log(r)$ - $\log(Cr)$, como se muestra en la figura 7.3(b). La región escalante es la principal región lineal de la curva de correlación, acotada por dos regiones de curva no lineales, en donde efectos de escala sobre el atractor (pequeñas o grandes) afectan la pendiente. En general, buenos estimadores de D_c requieren grandes cantidades de puntos, N (vea también la sección 7.8); sin embargo, el tiempo de cálculo requerido para calcular Cr se incrementa a razón de N^2 .

La dimensión de correlación, la dimensión de información y la dimensión de conteo de caja están relacionadas. De hecho, ellas son parte de una colección general de dimensiones, conocidas como **dimensiones Renyi**. Puede mostrarse que D_c es una cota inferior de D_I , la cuál a su vez es una cota inferior de D_B :

$$D_c \leq D_I \leq D_B \quad (7.9)$$

Además, D_c y D_I aproximan asintoticamente a D_B en la medida que el conjunto atractor se distribuye más uniformemente en el espacio fase. Si los puntos del atractor están uniformemente distribuidos entonces $D_c = D_I = D_B$. En muchos casos prácticos D_c es un muy buen estimador de D_B .

La figura 7.4 contiene una grafica $\log(r)$ - $\log(Cr)$ para el atractor extraño de Lorenz. El atractor fue generado usando $N = 16\ 384$ puntos. Para minimizar el tiempo de cálculo, las hiperesferas que probaremos, se detendrán cada 128 puntos sobre el atractor para medir el escalamiento del atractor, es decir, cada 128 ($=16384/128$) localizaciones fueron probadas, llamaremos a este número N_p . Los radios de las hiperesferas fueron considerados en un rango de 0.01 a 100. Sin

embargo, la manera adecuada de elegir éste rango es usar la serie de tiempo y localizar el máximo rango. Haciendo referencia a la serie de tiempo de Lorenz de la figura 6.8 vemos que los rangos de las variables x , y y z son aproximadamente igual a 35, 50 y 45 respectivamente. El atractor debe encajar dentro de una caja con estas dimensiones. El radio más grande de las hiperesferas debe de ser del orden de la diagonal de ésta caja, es decir, igual a 75.8. El valor escogido como el más cercano al valor 75.8 es un radio igual a 100. La suma de correlación es igual a 1 cuando todos los puntos sobre el atractor están dentro de la esfera. Esto ocurre cuando en la grafica $\log(r)=1.7$, es decir, $r=50.1$, el cual confirma nuestro valor aproximado obtenido mediante la inspección visual de las series de tiempo.

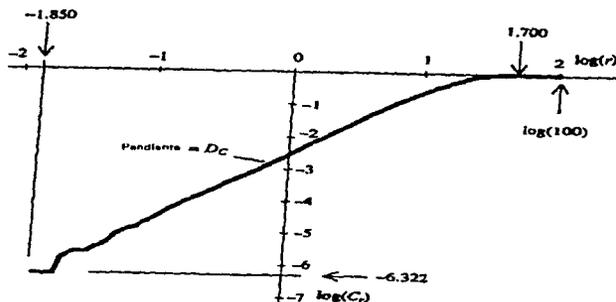


Figura 7.4 Gráfica de la dimensión de correlación para el atractor extraño de Lorenz. El rango mínimo para el radio de las hiperesferas es algo más difícil de estimar, por lo que se elige de tal forma que al ir reduciendo el radio se encuentre un radio de una hiperesfera que no contenga ningún punto de la trayectoria. En la gráfica de la figura 7.4, esto ocurre en $\log(r) = -1.850$, esto es $r = 0.0014$. La suma de

correlación en este punto es -6.322 , el cual es igual a $\log(1/(N_p(N-1)))$, correspondiente al único punto encontrado, dividido por el máximo número de puntos que pueden ser contados (que es igual al número de puntos visitados sobre el atractor multiplicado por el máximo número de puntos vecinos que pueden ser contados, es decir, $128 \times 16 = 383$). Note que en este caso el vecino más cercano ha sido contado una sola vez. Esto se debe a que la esfera se detiene cada 128 datos o puntos; lo cual significa que la suma de correlación ha pasado por alto a uno de los vecinos más cercanos.

Cuando r se aproxima a su valor máximo, la curva $\log(r)-\log(Cr)$ empieza a hacerse horizontal en la medida que los radios de las hiperesferas, r , no aportan nada a la suma de correlación. En la medida que r se aproxima a su valor mínimo, la curva $\log(r)-\log(Cr)$ empieza a fluctuar debido al pequeño número de puntos que no contribuyen a la suma de correlación. Entre el radio máximo y el radio mínimo de las hiperesferas, la curva $\log(r)-\log(Cr)$ parece tener un comportamiento lineal o de una recta, y esta pendiente es igual a la dimensión de correlación, D_c . La pendiente que se muestra en la figura 7.4 es aproximadamente igual a 2.04, que corresponde al paso de una región del atractor a la otra región del atractor.

7.5.4 La dimensión puntual y la dimensión puntual promedio.

Otro estimador de la dimensión que está muy relacionado con la dimensión de correlación es la dimensión puntual D_p . En lugar de observar ciertos comportamientos que escalan dentro de un atractor como un total, nos enfocaremos en aquéllos en ciertos puntos específicos del atractor, digamos en el

punto X_i . Para hacer esto contamos el número de puntos que están cerca, digamos P_r , dentro de una hipersfera de radio r , más formalmente:

$$P_r = \frac{1}{N-1} \sum_{j \neq i}^N \theta(r - |X_i - X_j|) \quad (7.10 a)$$

P_r tiene una dependencia con respecto del radio r , de forma potencial, dada por:

$$P_r \propto r^{D_p} \quad (7.10b)$$

donde el exponente D_p es la dimensión puntual. D_p puede ser calculada en un punto específico del atractor mediante una curva $\log(r)$ - $\log(P_r)$ como se hizo con la dimensión de correlación. La dimensión puntual es un estimador local de la dimensión y en la práctica puede variar alrededor del atractor total. Para este fin, la dimensión puntual promedio, D_A , puede ser definida como:

$$D_A = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N D_p \quad (7.10c)$$

Además ha sido sugerido por algunos autores que este estimador de la dimensión, D_A , es preferible a D_c , como una medida promedio de las propiedades fractales de los atractores extraños, sin embargo la dimensión de correlación es la más usada, debido a la rapidez de su cálculo.

7.5.5 La dimensión de Lyapunov

Una relación entre la dimensión fractal de atractores extraños y su espectro de Lyapunov, ha sido propuesto. La conjetura de Kaplan-Yorke, definen la dimensión de Lyapunov como:

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad (7.11a)$$

donde j es el entero más grande tal que:

$$\sum_{i=1}^j \lambda_i > 0 \quad (7.11b)$$

y el espectro es ordenado en la forma usual, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$, con $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n$.

Para clarificar las definiciones (7.11a) y (7.11b), consideremos un atractor caótico en un espacio fase tridimensional. Sabemos que para un atractor caótico en un espacio fase tridimensional hay una divergencia cero a lo largo de una trayectoria; la divergencia toma lugar en una dirección ortogonal; y la convergencia en otra dirección ortogonal. Estas direcciones ortogonales son los ejes principales del elipsoide de la figura 7.2(d). Si colocamos un cubo, cuyas aristas sean lo suficientemente pequeñas, de longitud ε , centrado sobre la trayectoria del atractor, cuyas aristas estén alineadas en cada dirección principal, entonces después de un tiempo t el cubo será deformado como se muestra en la figura 7.5(a). En la dirección de estrechamiento (λ positivo) la longitud de una arista ha sido estrechada en $\varepsilon_{i(1)} = \varepsilon_0 e^{\lambda t}$ con $\varepsilon_{i(1)} > \varepsilon_0$. A lo largo de la trayectoria no hay lugar a ninguna clase de estrechamiento, $\varepsilon_{i(2)} = \varepsilon_0 e^{\lambda_2 t}$, $\lambda_2 = 0$, por lo tanto, $\varepsilon_{i(2)} = \varepsilon_0$. En la tercera dirección ortogonal la convergencia ocurre y λ_3 es negativo, sin embargo $\varepsilon_{i(3)} < \varepsilon_0$. El volumen del cubo deformado se encuentra simplemente multiplicando las longitudes de los tres lados, es decir:

$$V_d = \varepsilon_{I(1)} \varepsilon_{I(2)} \varepsilon_{I(3)} \quad (7.12a)$$

o

$$V_d = \varepsilon_0^3 e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t} \quad (7.12b)$$

recuerde que $\lambda_2 = 0$.

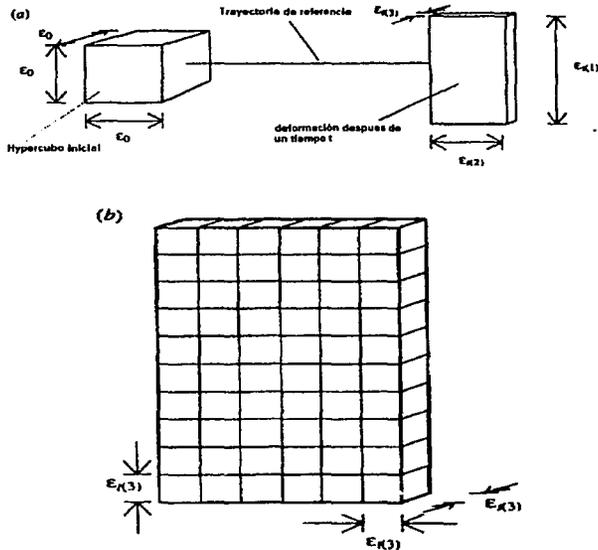


Figura 7.5 Esquema de la definición de la dimensión de Lyapunov.

Ahora nos gustaría encontrar una relación entre el hipercubo original y el hipercubo deformado en términos de la dimensión estimada. Podemos hacer esto cubriendo ambos hipercubos con hipercubos de longitud δ . Por simplicidad

haremos δ igual al lado más pequeño del cubo deformado, $\varepsilon_{l(3)}$ (figura 7.5(b)). De esta forma nuestra cubierta de hipercubos tiene un volumen:

$$V_c = \delta^3 = (\varepsilon_0 e^{\lambda_3 t})^3 \quad (7.13)$$

El número de pequeños hipercubos requeridos para cubrir el hipercubo deformado lo denotaremos con N, el cual se encuentra dividiendo V_d por V_c , como sigue:

$$N = \frac{\varepsilon_0^3 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)t}}{(\varepsilon_0 e^{\lambda_3 t})^3} = e^{(\lambda_1 - 2\lambda_3)t} \quad (7.14)$$

donde N es una función que depende del tiempo. En la medida que el tiempo se incrementa, el hipercubo inicial se deforma y cubre aproximadamente a todo el atractor. Además, la longitud de los cubos (de la cubierta), $\delta = \varepsilon_{l(3)} = \varepsilon_0 e^{\lambda_3 t}$, decrece rápidamente a cero. En el límite, cuando t tiende a infinito, podemos aproximar la dimensión de conteo de caja de la ecuación (7.6) como sigue:

$$D_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{\log(e^{(\lambda_1 - 2\lambda_3)t})}{-\log(\varepsilon_0 e^{\lambda_3 t})} \right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[\frac{(\lambda_1 - 2\lambda_3)t}{-\log(\varepsilon_0) - \lambda_3 t} \right] \quad (7.15a)$$

y en el límite, obtenemos:

$$D_L = 2 - \frac{\lambda_1}{\lambda_3} \quad (7.15b)$$

Comparemos esto con la ecuación más general (7.11) (recordemos que $\lambda_2 = 0$ y λ_3 es negativo). Por lo tanto, para el atractor de Lorenz, con exponentes de Lyapunov (2.16, 0, -32.4), tiene una dimensión de Lyapunov, D_L igual a 2.07.

7.6 Reconstrucción del atractor

Los sistemas dinámicos experimentales requieren de consideraciones especiales, dado que éstos exhiben un comportamiento complejo, tienen muchos grados de

libertad y experimentan ruido. Para probar si un sistema experimental posee caos primero necesitamos de un atractor. El problema es que a veces solo contamos con una serie de tiempo. Para construir un atractor del tal serie de tiempo podemos construir un pseudo espacio fase con coordenadas $x - x - \ddot{x} - \dots$. Sin embargo, la resolución de los datos o de la señal en estudio no es lo suficientemente precisa para permitir el cálculo de estas diferencias. Por lo tanto el **método de retardos de tiempo** es frecuentemente usado. Este método reconstruye un atractor (o pseudo atractor), el cual es inmerso dentro de un espacio de inmersión (o espacio pseudo fase) con una dimensión apropiada, m (distinta de la dimensión n del espacio fase, de la dinámica del sistema en estudio).

En el método de retardos de tiempo, sumergimos el atractor en un espacio m -dimensional y las m coordenadas, X_i , del atractor son construidas de la serie de tiempo original, x_i ($i=1,2,3,\dots,N$) como sigue:

$$X_i = (x_i, x_{i+\xi}, x_{i+2\xi}, x_{i+3\xi}, x_{i+4\xi}, \dots, x_{i+(m-1)\xi}) \quad (7.16)$$

$i = 1, 2, 3, \dots, (N-(m-1)\xi)$

donde X_i es el vector del atractor m -dimensional generado de la serie de tiempo muestreada x_i , y ξ es el retardo discreto. El tiempo de retardo entre las variables de reconstrucción es por lo tanto $\gamma = \xi \, dt$, donde dt es el intervalo de tiempo entre los puntos: i e $i+1$, de la serie de tiempo, conocido como intervalo muestral. En las figuras 7.6(a) y 7.6(b) se muestra una serie de tiempo y la reconstrucción de su atractor respectivamente. La figura 7.6(a) muestra un punto arbitrario j sobre la serie de tiempo, es decir, en $i=j$; junto con dos retardos $j+\xi$ y $j+2\xi$. Estos tres

puntos son usados para construir el j -ésimo punto del atractor en un espacio de inmersión tridimensional, $X_j = (x_j, x_{j+\xi}, x_{j+2\xi})$. El punto X_j se muestra en el atractor reconstruido (figura 7.6(b)) junto con dos puntos vecinos sobre la trayectoria reconstruida, X_{j-1} y X_{j+1} .

Pongamos un ejemplo de todo lo dicho anteriormente. Supongamos que queremos construir un atractor tridimensional a partir de la siguiente serie de tiempo, (1.01, 2.32, 1.93, 4.53, 2.22, 3.33, 3.34, 5.43, 5.55, 3.33, 4.02,.....) con un retardo $\xi=3$.

Las primeras cuatro coordenadas del atractor reconstruido serán $X_i = (x_i, x_{i+\xi}, x_{i+2\xi})$ con $i=1,2,3,4$; es decir, (1.10, 4.53, 3.34), (2.32, 2.22, 5.43), (1.93, 3.33, 5.55) y (4.53, 3.34, 3.33).

El método de retardos de tiempo nos proporciona una manera simple de construir un atractor de una serie de tiempo experimental. Sin embargo, todavía nos queda un problema: ¿cómo escoger el retardo ξ ? La elección de ξ no es tan trivial si es que queremos que las propiedades dinámicas del atractor reconstruido sean razonables o favorables para nuestro futuro análisis.

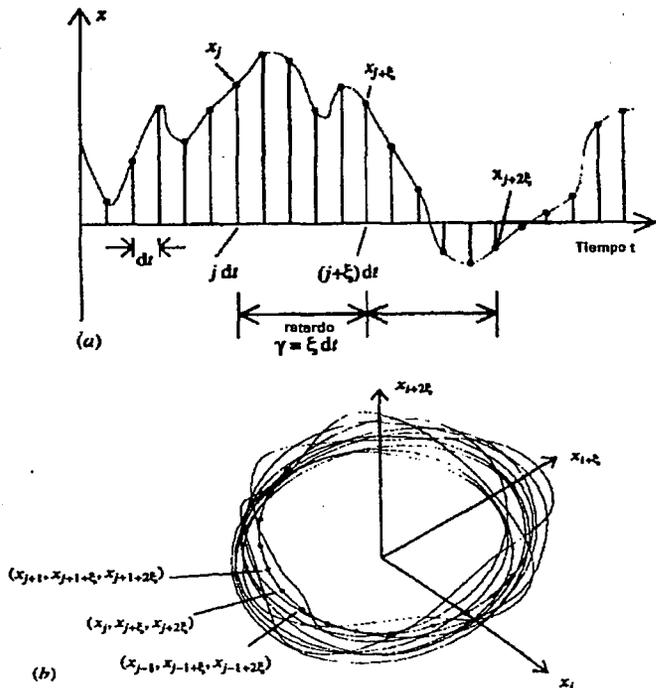


Figura 7.6 Reconstrucción de un atractor usando el método de retardos de tiempo.

Hay que hacer notar que si tenemos una serie de tiempo bastante grande con una precisión o resolución alta, entonces cualquier elección de ξ es adecuada. Sin embargo en la práctica este no es el caso, por lo que requerimos dispersar el atractor reconstruido en el espacio de inmersión de tal forma que tengamos una buena representación de la geometría del atractor en el espacio fase. Esto

funciona especialmente cuando tenemos poco ruido en la señal. Cuatro métodos comunes para determinar el retardo óptimo, se describen a continuación.

7.6.1 Método 1- Inspección visual del atractor reconstruido.

La manera más simple de escoger el retardo ξ es considerando valores cada vez más grandes de ξ y a partir de ello inspeccionar visualmente el retrato fase del atractor resultante, escogiendo ξ de tal forma que nos proporcione el atractor más disperso. Este método ha sido usado en la práctica pero funciona únicamente con sistemas relativamente muy simples.

7.6.2 Método 2- Periodo dominante.

Para atractores de dimensión pequeña en sistemas con una componente de fuerza, con cierto periodo, es recomendable que la mejor elección de ξ sea igual a un cuarto del periodo dominante. Esta es una forma rápida y fácil de determinar el retardo ξ para este tipo de sistemas (suponiendo que conocemos dt), sin embargo, muchos sistemas complejos no poseen una frecuencia dominante que provenga de una componente de fuerza.

7.6.3 Método 3- Función de autocorrelación.

La función de autocorrelación, C , compara dos puntos de la serie de tiempo, que están separados por un retardo ξ , y se define como:

$$C = \frac{\sum_{i=1}^{N-\xi} (x_i)(x_{i+\xi})}{\sum_{i=1}^{N-\xi} (x_i)^2} \quad (7.17a)$$

donde

$$x'_i = x_i - \bar{x}_i \quad (7.17b)$$

es decir el valor de x_i es separado de la media temporal \bar{x}_i . El retardo ξ para la reconstrucción del atractor se toma de tal forma que sea un punto limite de C. Algunas consideraciones para hacer esto son: el primer valor de ξ que dé un valor de $C=1/2$, el valor de ξ que dé un valor $C=0$ o el primer punto de inflexión de C. El comportamiento inconsistente con el uso de C para obtener el valor del retardo ξ se muestra en la figura 7.7, donde la función de autocorrelación de las variables x y z del atractor extraño de Lorenz es graficada contra el retardo ξ . Notemos que la función de autocorrelación exhibe un decaimiento de las fluctuaciones en la medida que avanza el tiempo. Las fluctuaciones en la variable z son más remarcadas que las de la variable x. Si tomamos el retardo tal que $C=1/2$, entonces $\xi=12$ para la variable z y $\xi=23$ para la variable x.

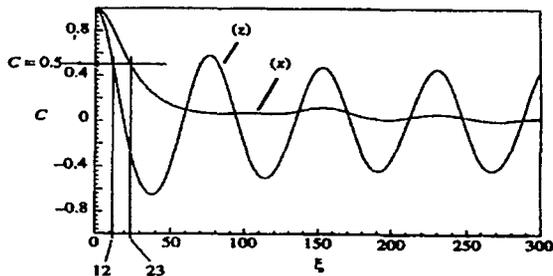


FIGURA 7.7 Gráfica de la función de autocorrelación contra el retardo, para las variables x y z del atractor extraño del modelo de Lorenz.

7.6.4 Método 4- Criterio de la mínima información común.

Se ha argumentado que mientras la función de autocorrelación mide la dependencia lineal de dos variables, la función de información común mide la

dependencia general de dos variables. La información común de la reconstrucción del atractor está definida como:

$$M = \sum_{i=1}^{N-(m-1)\xi} P(x_i, x_{i+\xi}, x_{i+2\xi}, \dots, x_{i+(m-1)\xi}) \times \log \left[\frac{P(x_i, x_{i+\xi}, x_{i+2\xi}, \dots, x_{i+(m-1)\xi})}{P(x_i)P(x_{i+\xi})P(x_{i+2\xi}) \dots P(x_{i+(m-1)\xi})} \right] \quad (7.18)$$

Donde $P(x_i)$ es la probabilidad de ocurrencia de la serie de tiempo de la variable x_i ; y $P(x_i, x_{i+\xi}, x_{i+2\xi}, \dots, x_{i+(m-1)\xi})$ es la probabilidad conjunta de ocurrencia de la coordenada $X_i = (x_i, x_{i+\xi}, x_{i+2\xi}, \dots, x_{i+(m-1)\xi})$ del atractor. M es una medida de la dependencia estadística de las variables de reconstrucción. Si las coordenadas son estadísticamente independientes entonces:

$$P(x_i, x_{i+\xi}, x_{i+2\xi}, \dots, x_{i+(m-1)\xi}) = P(x_i)P(x_{i+\xi})P(x_{i+2\xi}) \dots P(x_{i+(m-1)\xi}) \quad (7.19)$$

y se sigue que $M=0$. Esto ocurre cuando tenemos un proceso estocástico (aleatorio), tal como el ruido blanco. Por el contrario, si tenemos un proceso dependiente, entonces $M=\infty$. Para elegir el retardo de manera apropiada requerimos que la información común sea mínima. Cuando éste es el caso, el atractor se dispersa tanto como sea posible. Esta condición para la elección del tiempo de retardo se conoce como el **criterio de mínima información común**.

La implementación práctica de este criterio se ilustra en la figura 7.8. Una reconstrucción (bidimensional) de un atractor se muestra en el plano $x_i - x_{i+\xi}$ (figura 7.8(c)). Para calcular la información común, el plano es particionado en una especie de reja con N_c columnas y N_r renglones. Densidades de probabilidad discretas para x_i y para $x_{i+\xi}$ son generadas simplemente sumando

los puntos del atractor que se encuentran en cada columna y renglón de la reja respectivamente y dividiendo por el número total de puntos del atractor. $P(k)$ y $P(l)$ son las probabilidades de ocurrencia del atractor en la columna k y el renglón l respectivamente. La probabilidad conjunta de ocurrencia, $P(k,l)$, del atractor en cualquier caja se calcula contando el número de puntos discretos que están dentro de la caja y posteriormente dividiendo por el número total de puntos que están sobre la trayectoria del atractor. La información común se obtiene a partir de:

$$M = \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{l=1}^{N_r} P(k, l) \log \left[\frac{P(k, l)}{P(k)P(l)} \right] \quad (7.20)$$

El valor de ξ que dé el primer valor mínimo de la función de información común es elegido como el tiempo de retardo de la reconstrucción del atractor. Una grafica de M contra ξ se muestra en la figura 7.8(b). Formas típicas del atractor relacionadas con los puntos A-D (7.8(b)) se muestran en la figura 7.8(c). El punto A, corresponde a un retardo pequeño. Se observa que las coordenadas del atractor se acercan demasiado, lo que indica una alta correlación positiva y el atractor se pega mucho a la recta identidad (línea punteada de la grafica). Para el punto B las coordenadas se empiezan a separar, es decir, los puntos de la serie de tiempo se empiezan a decorrelacionar y el atractor se abre sobre el espacio fase. El mínimo se alcanza en el punto C, donde el atractor experimenta su apertura mayor en el espacio fase. Para retardos mayores que C, la información común se incrementa y el atractor empieza a cerrarse en el espacio fase (atractor del punto D).

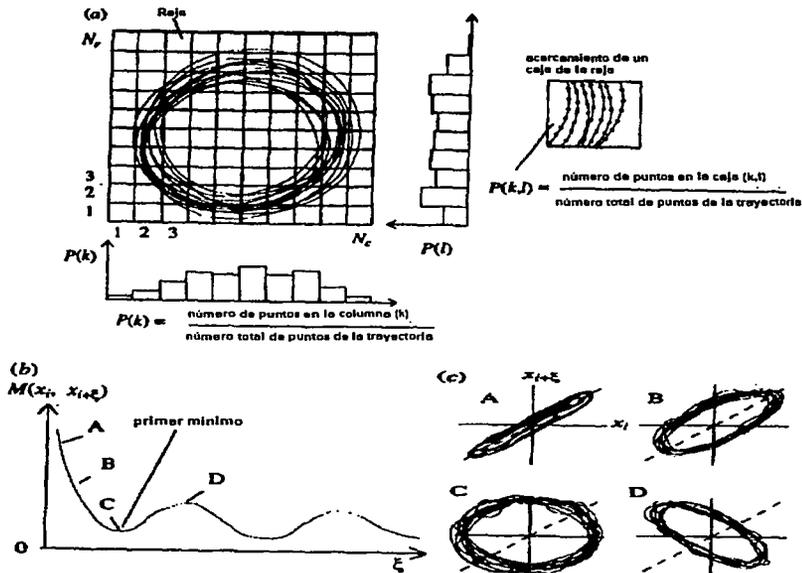


Figura 7.8 Esquema de la definición de la dimensión de mínima información común.

Se ha propuesto que el primer mínimo en la información común de un atractor bidimensional, es generalmente adecuado para determinar un retardo adecuado para reconstrucciones en mayores dimensiones, m .

Usando el método descrito arriba, la información mutua es calculada para el atractor de Lorenz, y se grafica contra el tiempo de retardo (figura 7.9(a)). El primer mínimo ocurre en el tiempo de retardo $\xi=1.5$. El atractor original es construido en el espacio fase usando un incremento en el tiempo $dt=0.01$. El tiempo de retardo es por lo tanto $\xi dt = 0.15$. Atractores reconstruidos se muestran

en la figura 7.9(b) junto con el retrato fase x-y del atractor extraño original. En $\xi=4$, el atractor se cierra y se pega a la recta identidad.

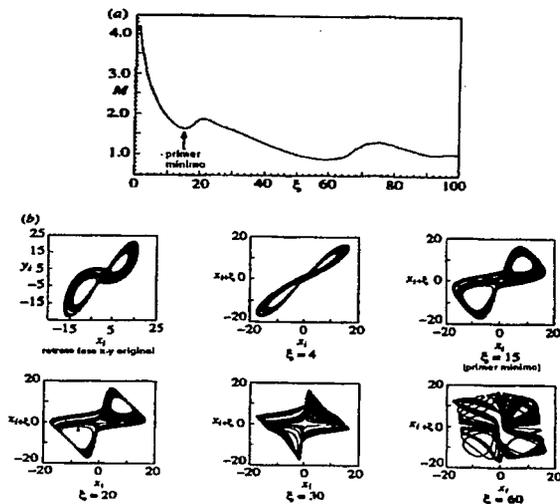


FIGURA 7.9 Reconstrucción del atractor de Lorenz utilizando el criterio de mínima información común.

En $\xi=15$, el primer mínimo en la información común, el atractor se abre. En $\xi=20$, ocurre un máximo local en la información común, que corresponde al atractor más estrecho posible de observar. En la medida que ξ se incrementa, la forma del atractor de Lorenz original se vuelve más difícil de discernir, y alrededor de $\xi=60$, se alcanza el segundo mínimo en la función de información común, pero el atractor es casi irreconocible.

En la sección 7.3 hablamos del espectro de frecuencia; encontramos que la frecuencia orbital para el atractor de Lorenz es aproximadamente igual a 1.35. Esto nos da un tiempo orbital de 0.74. Si consideramos a éste como la frecuencia dominante del sistema, entonces podemos tomar un tiempo de retardo igual a un cuarto del período, es decir, $\xi dt = 0.185$: un resultado no muy distinto del dado por el criterio de información mínima común, pero esta vez se produce un atractor que es significativamente más cerrado en el espacio fase (atractores para $\xi=15$ y $\xi=20$ de la figura 7.9(b))

7.7 La dimensión de inmersión para la reconstrucción de atractores.

Ahora podemos generar nuestro atractor reconstruido usando el método de los retardos de tiempo, donde el retardo ξ se encuentra a partir del criterio de información común. Pero debemos hacer una cosa antes de caracterizar el atractor, esto es, determinar la dimensión, m , del espacio de inmersión requerido para que contenga al atractor. En otras palabras, debemos encontrar la dimensión de inmersión mínima la cual le permitirá poseer las mismas propiedades geométricas que el espacio fase del atractor original del sistema. De acuerdo al teorema de inmersión de Whitney, un pseudo atractor puede en general ser reconstruido dentro de un espacio de inmersión de dimensión:

$$m = 2n + 1 \quad (7.21a)$$

donde n es la dimensión del espacio fase del atractor en cuestión. Alternativamente, si conocemos la dimensión de conteo de caja, entonces el estimador más cercano de la dimensión de inmersión mínima es:

$$m > 2 D_b \quad (7.21b)$$

obviamente con m un entero. Por ejemplo, para reconstruir un pseudo atractor extraño de la serie de tiempo caótica de Lorenz, y sabiendo que tiene un atractor extraño en el espacio fase x - y - z con una dimensión de conteo de caja un poco mayor que dos, entonces requeriremos un espacio de inmersión de dimensión cinco para estar seguros que el atractor reconstruido tenga las mismas propiedades dinámicas que el atractor original. Si solamente conociéramos D_c , entonces un estimador de la dimensión de inmersión es:

$$m > D_c \quad (7.21c)$$

Un problema más surge con las señales experimentales, esto es, puede que no conozcamos la dimensión del atractor o la del espacio fase del sistema dinámico. En este caso, el método más simple y práctico para determinar la dimensión de inmersión mínima del espacio de inmersión, es calcular la dimensión de correlación para el atractor reconstruido en espacios de inmersión de dimensiones más grandes. La pendiente de la gráfica $\log(r)$ - $\log(Cr)$ inicialmente se incrementará con la dimensión de inmersión, alcanzando un valor límite cuando el espacio de inmersión es lo suficientemente grande para el atractor, como para desenredarse a si mismo. Si incrementamos más la dimensión de inmersión no incrementara la dimensión de correlación. Esto se ilustra en la figura 7.10, donde las gráficas de correlación para el atractor extraño de Lorenz se dan para dimensiones de inmersión, m , de uno a diez. Note que la pendiente de la línea $\log(r)$ - $\log(Cr)$ es igual a uno para el atractor inmerso en un espacio unidimensional, es decir, a lo largo de una línea. La máxima pendiente para un atractor inmerso en ($m=2$) un espacio bidimensional es 2. Vemos que la pendiente de las líneas en la figura rápidamente alcanzan un valor límite de $D_c \approx 2.06$. Este

valor es muy cercano al valor 2.04 que encontramos arriba usando el atractor original en un espacio fase tridimensional. La pendiente límite se dibuja en la gráfica con una línea gruesa debajo de las curvas de correlación $\log(r) - \log(Cr)$.

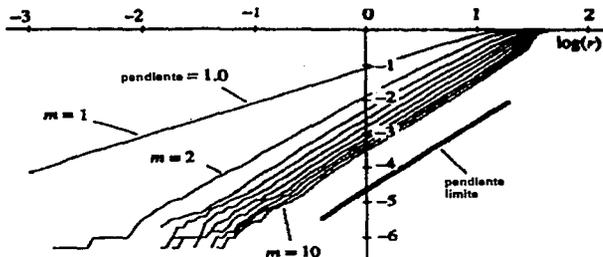


Figura 7.10 Gráfica de la dimensión de correlación para el atractor extraño reconstruido del modelo de Lorenz, considerando dimensiones de inmersión, $m = 1-10$.

7.8 El efecto del ruido

Los atractores experimentales siempre contienen un pequeño componente aleatorio conocido como ruido. Este puede ser debido a fluctuaciones aleatorias en el sistema dinámico —ruido dinámico— o puede ser debido a errores aleatorios adheridos a la señal que son generados por el sistema de medición —ruido de medición. El ruido cubre densamente el espacio fase, y ocasiona que la dimensión del atractor resultante se incremente y sea igual a la dimensión de inmersión, m . Esto se ilustra en la figura 7.11. La figura 7.11(a) contiene los retratos fase de ciclos seudo límites, los cuáles han sido construidos usando una función senoidal con un incremento en el ruido de 0% a 100% en cada pico de la amplitud. El ruido se ha tomado de un generador de números aleatorios con una función de densidad de probabilidad constante (ver figura 4.5(a)). En la figura

7.11(b) las gráficas de correlación para cada uno de los ciclos límite se dan para dimensiones de inmersión de dos a diez.

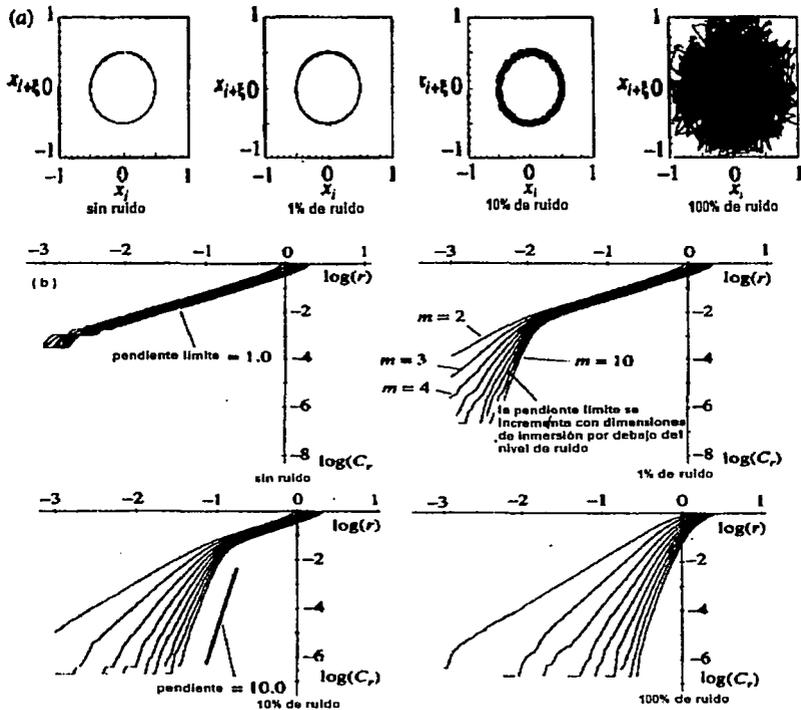


Figura 7.11 El efecto del ruido en las gráficas de la dimensión de correlación.

Conclusiones

A lo largo de esta tesis hemos presentado una breve introducción la geometría fractal y a la teoría del caos desde un punto de vista que sea accesible a cualquiera que tenga un conocimiento aceptable de matemáticas. Observamos que la geometría fractal tiene la potencia para poder explicar ciertos patrones existentes en la naturaleza, los cuales presentan un comportamiento que escala con el tiempo, y es de esta forma que la geometría fractal ejerce un papel importante en la caracterización de dichos fenómenos.

Vimos que el movimiento fraccional browniano (mfb) es una generalización del movimiento browniano (random walk); el cuál ha sido propuesto por Benoit Mandelbrot, como una generalización de movimientos que presentan comportamientos de persistencia o antipersistencia, es decir, son procesos que presentan cierto grado de memoria en su comportamiento, lo contrario a una caminata aleatoria.

También discutimos los comportamientos de sistemas dinámicos discretos y de sistemas dinámicos continuos, cuando variamos los parámetros de control; los cuales nos arrojaban distintos comportamientos del sistema en estudio, y de esta manera observar como evoluciona nuestro sistema a corto y largo plazo. De lo anterior pudimos observar, que nuestro sistema es sensible dependiendo de las condiciones iniciales que le demos, por lo que el error de nuestra estimación aumenta conforme avanza el tiempo. Por último nos dedicamos a medir las dimensiones de los atractores que surgen al considerar ciertos sistemas que experimentan comportamientos aperiódicos, y para ello calculamos respectivamente sus dimensiones fractales.

Bibliografia

Devaney R L 1989 An Introduction to Chaotic Dynamical Systems

Devaney R L and Keen L 1989 Chaos and Fractals

Eckman J-P and Ruelle D. 1985 Ergodic Theory of Chaos and Strange Attractors

Feigenbaum M J 1978 Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations

Mandelbrot B B 1977 Fractals: Form, Chance and Dimension

Mandelbrot B B 1982 The Fractal Geometry of Nature

Mandelbrot B B and Van Ness J W 1968 Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications

A

antipersistencia, 54
atractor, 77, 103, 115, 147, 152
atractor caótico, 77
atractor de Lorenz, 155
atractor periódico, 77
atractores extraños, 116
autoafinidad, 48
autosimilitud, 7
autosimilitud estadística 7, 25, 40, 49, 54, 63
autosimilitud exacta, 7, 10

B

base de atracción, 105
Benoit Mandelbrot, 12, 52
bifurcación de periodo doble, 82

C

caminata estructurada, 25
caos, 11, 75, 114
ciclos limite atractores, 107
coeficiente de Difusión, 50
coeficiente de difusión fractal, 54
conjunto de Cantor, 12
conjunto de Julia, 96
conjunto de Mandelbrot, 99
conjunto prisionero, 96
conjuntos de cantor aleatorios, 22
criterio de la mínima información común, 151
curva de Koch, 18
curva de Koch aleatorizada, 23
curva logística, 86

D

dependencia sensitiva ante condiciones iniciales, 111
diagrama de bifurcación, 84
difusión no-Fickciana, 55
dimensión, 8
dimensión de similitud, 8
dimensión de conteo de caja, 9, 25, 136
dimensión de correlación, 9, 137
dimensión de Hausdorff, 8, 25, 29
dimensión de información, 9, 136
dimensión de inmersión, 156
dimensión de Lyapunov, 9, 143
dimensión de Similitud, 15

dimensión de un atractor, 121
dimensión divisora, 8,33
dimensión euclidiana, 14
dimensión fractal, 8,25
dimensión fractal de conteo de caja, 65
dimensión puntual, 9, 142
dimensión puntual promedio, 9, 143
dimensión topológica, 14

E

ecuación logística, 70
ecuaciones de Lorenz, 113
efecto mariposa, 112
escalamiento, 15
espacio fase, 120, 133
espectro de potencia, 128
exponente de Hurst, 47, 67
exponente de Lyapunov promedio, 132
exponentes de Lyapunov, 112, 130

F

fractal, 12
fractales aleatorios, 22
fractales Regulares, 12
función de autocorrelación, 150
función de Heaviside, 138
función logística, 71
función de Richardson, 25,35
función de Henón, 90
función de Lorenz, 118
función de Poincaré, 109
función iterativo, 68

G

grados de libertad, 120

M

método de conteo de caja, 25
método de retardos de tiempo, 147
modelo de Lorenz, 112, 121
modelo de Verhulst, 70
movimiento caótico, 11
movimiento fraccional browniano, 52
movimiento regular browniano, 39
multifractales, 36

N

número de Feigenbaum, 89
número de Prandtl, 114

O

órbita, 74
órbita postransitoria, 76
órbita transitoria, 76
oscilador Duffing, 101, 104, 121, 124

P

parámetro de control, 72
periodo dominante, 150
persistencia, 54
potencia espectral, 66
procesos de Fickian, 49
puntos estables, 84
puntos inestables, 84
puntos neutralmente estables, 84

R

retrato fase, 107
ruido, 66, 158
ruta de periodo doble, 83

S

sección de Poincaré, 128
simetría, 118
sistemas dinámicos discretos, 68
sistemas dinámicos disipativos, 104

T

técnica de caminata estructurada, 33
transformada de Fourier, 66, 125
Transformada de Fourier Rápida, 125
trayectorias, 44, 61
trazas, 44