38

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Atractores extraños y repulsores:

Relatos de epidemias, poblaciones, herraduras y el mapeo de Hénon.

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE

A C T U A R I O

P R E S E N T A:

Carlos Alberto Galindo López

DIRECTOR:

DR. RICARDO BERLANGA ZUBIAGA

2002

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito: "Atractores extraños y repulsores: relatos de epidemias, poblaciones, herraduras y el mapeo de Hénon."

realizado por Carlos Alberto Galindo López

con número de cuenta 97589312 , quien cubrió los créditos de la carrera de: Actuaría

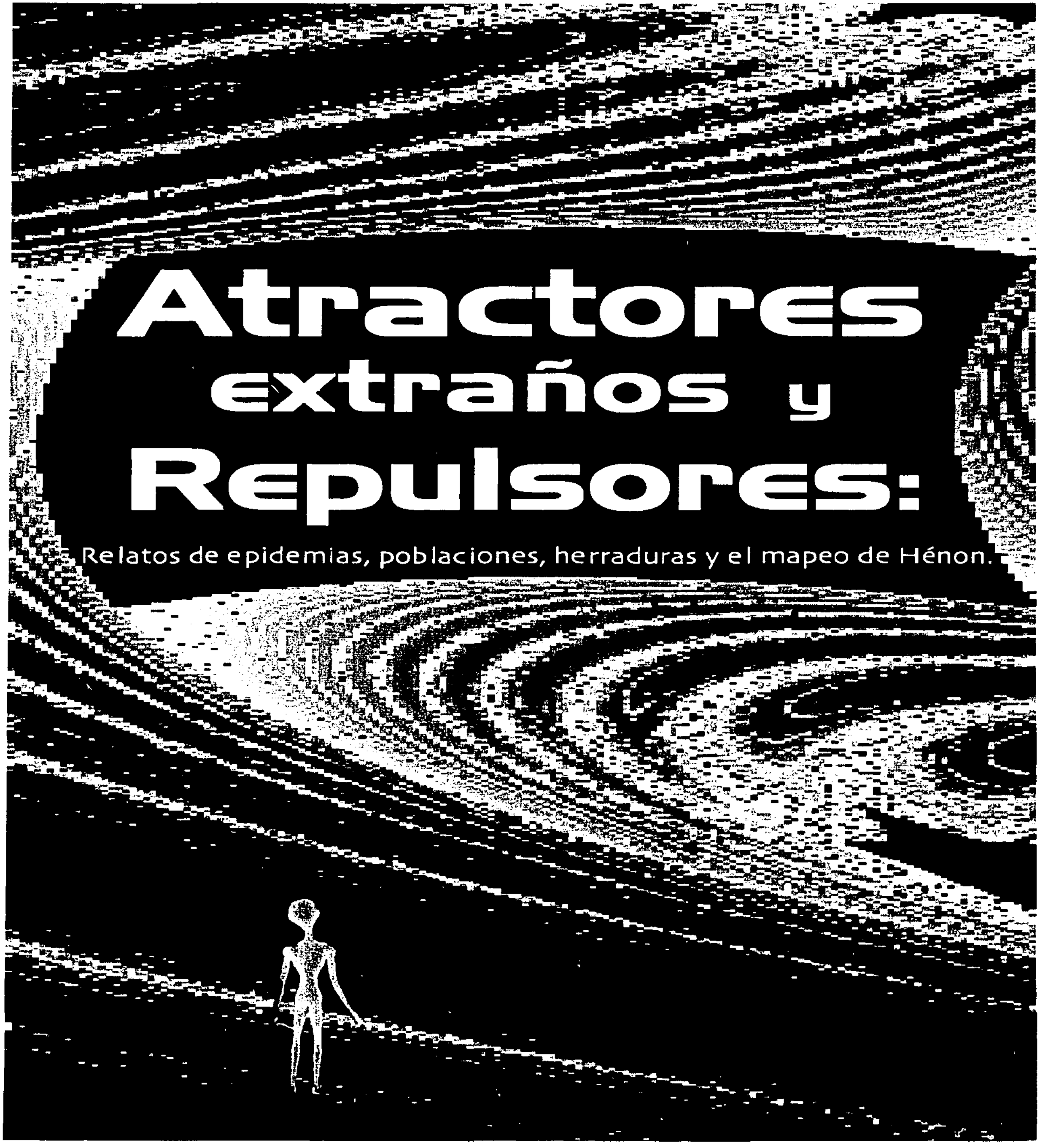
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis Propietario	Dr. Ricardo Berlanga Zubiaga	
Propietario	Act. Maribel Mercado Rejón	
Propietario	Dra. María de la Paz Álvarez Scherer	
Suplente	M. en C. Julieta Fierro Gossman	
Suplente	Mat. Concepción Ruiz Ruiz Funes	

Consejo Departamental de Matemáticas

M. en C. José Antonio Flores Díaz


Atractores
extraños y
Repulsores:
Relatos de epidemias, poblaciones, herraduras y el mapeo de Hénon.

A mi abuelo,

quien sentía sueño frente a libros de matemáticas.

Prefacio.

Cuando me llegó la hora de hacer la tesis no tenía la menor idea de qué tema escoger y comencé a preguntar por posibles temas para hacerla. Así fue como conocí al Dr. Belanga, quien se ofreció a explicarme uno de los temas de moda de las Matemáticas, la teoría de sistemas dinámicos. Decidí que sería un desperdicio dejar la Facultad de Ciencias sin haber siquiera escuchado las nociones de esta famosa teoría, comúnmente conocida como la teoría del caos. En el proceso de revisar los principios más básicos de los sistemas dinámicos, y de pensar exactamente qué escribir, me dí cuenta que lo más importante que había logrado aprender durante todos mis estudios es lo siguiente: aprendí a sentir un poco menos de aprensión y angustia al enfrentarme con el extraño lenguaje de las Matemáticas. Por eso creo que lo más útil e importante que puedo comunicar con mi tesis es justamente eso, sentir menos ansiedad y más curiosidad al acercarse al mundo de las Matemáticas.

La teoría del caos ha sido una de las teorías matemáticas más publicitadas de todos los tiempos. Acerca de ella existe una gran cantidad de libros de texto y divulgación. Pero al revisar algunos de estos libros, me sucedió que los de divulgación me resultaban muy agradables, con gráficas impresionantes y resultados sorprendentes, aunque al leerlos seguía siendo para mí un acto de magia obtener tales maravillas con sumas y multiplicaciones; y los libros de texto, que explican perfectamente este acto de magia, me exigían conocimientos y familiaridad previa con ciertos conceptos. Así que, si yo quería explicar lo que estaba estudiando a mis familiares y amigos, debía utilizar una mezcla de libros de texto y divulgación para que mi explicación les fuera cómoda. Por eso al decidir cómo sería mi tesis no tuve más opción, mi tesis sería un libro de divulgación no sólo de los sistemas dinámicos, sino también del lenguaje matemático; y ésta es la razón por la que las siguientes páginas son una extraña mezcla de libro de divulgación con un poco de libro de texto.

Un amigo que estudió Pedagogía me explicó que, en esta disciplina, se encuentran en boga algunas ideas sembradas por Piaget. Las cuales dicen que para mitigar la ansiedad natural que sienten las personas frente a conceptos nuevos, es recomendable rodear estos conceptos por un entorno ya conocido, así los conceptos nuevos adquieren una familiaridad que no tenían antes. Luego, esos concepto pueden usarse como base para aprender otros nuevos, formándose así una serie de redes complejas e impredecibles de asociaciones y conocimiento. Por eso intenté insertar los conceptos más básicos de los sistemas dinámicos en un ambiente agradable y entretenido. Sinceramente espero que si alguien llega a leer esta tesis, al leerla se divierta tanto como yo lo hice al escribirla.

Finalmente, quisiera hacer cuatro agradecimientos:

Un doble agradecimiento a Ricardo Berlanga. El primero por ser mi amigo. El segundo por haberme enseñado, con paciencia y buen humor, a vislumbrar el mundo de las matemáticas.

Gracias a mis amigos.

Gracias a mi madre.

Los personajes y nombres comerciales que aparecen en esta tesis son marcas registradas de sus propietarios y se presentan únicamente con fines didácticos, por lo que el autor de la misma no asume ninguna responsabilidad por el uso que se dé a estas imágenes y su respectiva información, ya que no infringe ningún derecho de registro de marca.

Tabla de contenido.

Cómo abordar. 1

INTRODUCCIÓN:
El origen de los expedientes secretos X de la PFP. 3

EXPEDIENTE 1:
Invasión extraterrestre. 13

EXPEDIENTE 2:
Chupacabras. 29

EXPEDIENTE 3:
Caos en la Zona del Silencio. 51

EXPEDIENTE 4:
La maldición de la llorona. 77

EXPEDIENTE 5:
La mulata de Córdoba. 91

EXPEDIENTE 5, VOLUMEN II:
La mulata de Córdoba, segunda parte. 121

Referencias. 145

Índice. 146

Cómo abordar.

El problema con los libros de matemáticas es que no fueron hechos para leerse, fueron hechos para escribir, y esta tesis no es la excepción. Un libro de matemáticas no puede leerse rápidamente porque no hay nada más confuso y aburrido que leer cálculos hechos por alguien más. Y es que con las Matemáticas sucede lo mismo que con cualquier juego, el que se aburre es el que no juega. Obviamente las Matemáticas no tienen por qué ser siempre divertidas pero, la actividad de comprender algo sí debería ser siempre placentera. Ser únicamente testigo de la comprensión de las Matemáticas no es agradable, lo verdaderamente placentero y enriquecedor es ser un jugador más y, la manera de jugar aquí es hacer los cálculos, trazar las gráficas y realizar las demostraciones; ésta es la forma de comprender Matemáticas. Sin duda alguna las reglas de este juego son difíciles de seguir pero como dice la *Invitación Diabólica* de Ricardo Berlanga:

> Lo que realmente me importa es comunicarles o, menos ambiciosamente, exhortarlos a que se asomen por cuenta propia al espíritu de las Matemáticas. Un espiritu activo y no contemplativo, de búsqueda disciplinada de aventuras intelectuales que exalta la fascinación del pensamiento independiente. Pensamiento que poco a poco descubre la delicada trama que hay en los sistemas matemáticos y que arroja luz fulgente sobre el resto de la civilización y los secretos de la naturaleza física...
>
> En el mundo histórico y actual de esta disciplina, nos podemos enfrentar ante problemas fascinantes y variadísimos. Muchos, muchísimos no resueltos y cuya solución será de trascendencia inmediata para todas las sociedades. Insisto una vez más, e insistiré siempre: las Matemáticas son una actividad contemporánea y efervescente donde las delicias de resolver un problema son paradisiacas pero la angustia de sentirse a un paso del argumento crítico y toparse con un muro es el infierno.
>
> Pero esto es lo que hace que valga la pena estar vivo en este mundo tan complejo y contradictorio. Lleno de maravillas al tiempo que lleno de injusticias.

Esa es la razón por la que esta tesis o cualquier libro de matemáticas es un libro para escribir, porque lo mejor es tomar un poco de valentía, una hoja de papel y un lápiz; y al avanzar la lectura, intentar repetir los cálculos, trazar las gráficas con ayuda de una regla o de la computadora y, escribir con cuidado las demostraciones. Éste es el camino para adentrarse con placer al infernal y paradisiaco mundo matemático. Aún así, a veces hace falta una buena invitación para entrar a lugares desconocidos, y la mejor invitación que he visto se encuentra en la sala de Matemáticas del Museo Universum:

> ... Visitante, si tu experiencia previa no corresponde a lo que aquí se dice, déjala un rato y date la libertad de apreciar las matemáticas de otra forma, de gozar el placer pequeñito de entender algo; intuye la fuerza seductora de aquello que por el momento nos rebasa, pero que se vislumbra con una explicación o razón de ser. Quizás cuando salgas la carga sea más leve y las dudas más profundas.

INTRODUCCIÓN:

El origen de los expedientes secretos X de la PFP.

En las clases de matemáticas siempre sentí que los maestros hablaban en chino. Tuvieron que pasar muchos años para darme cuenta de que tenía razón, los maestros de matemáticas realmente hablan un lenguaje distinto al mío. Porque para todos los que no hacemos o creamos matemáticas, éstas son, en términos prácticos, un lenguaje diferente que nos permite expresarnos con mayor precisión, sin contradicciones, ni ambigüedades. Claro que las matemáticas son mucho más: son poesía de la razón, son arte resultante de la creatividad y del pensamiento lógico, son *terra incognita* llena de monstruos y hadas donde la mente humana se abre camino, son un mundo existente en su propio derecho. Pero para lograr reconocer esta existencia y belleza matemática es necesario recibir un entrenamiento formal durante años o una genialidad concedida a muy pocos. Siendo así las cosas, para todos los que no tenemos entrenamiento ni genialidad, las matemáticas son una segunda lengua que nos ayuda a decir cosas de una manera única, de una manera para la cual no existen palabras en español, inglés, náhuatl, zwahili, etc... Es más, ni siquiera en chino.

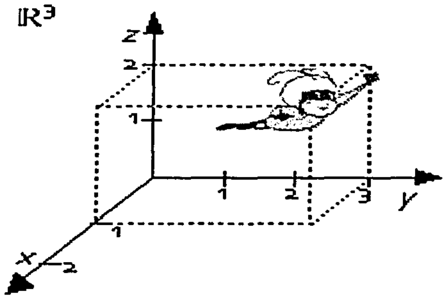
Es por eso que los expedientes secretos fueron escritos en español y matemáticas. Se necesitaba precisar los extraordinarios hechos que les dieron origen, había que darles coherencia, ordernarlos, pero sobre todas las cosas, intentar comprenderlos. Y esa es la gran cualidad de las matemáticas, gracias a su precisión y a su estructura lógica, las matemáticas son un lenguaje que nos ayuda a comprender. Aunque, por la naturaleza de los hechos que se narran en los expedientes secretos, es posible que jamás lleguemos a comprenderlos del todo. En todo caso, no tiene sentido discutir si algún día podremos entenderlos y conocer la verdad, porque esto sólo complicaría y alargaría la historia de cómo es que surgieron los expedientes secretos X de la PFP. Y es que esa historia es ya de por sí alucinante:

Se rumora que hace 50 años cayó un objeto volador no identificado en las afueras de Real de Catorce, San Luis Potosí. Algunos testigos afirmaron haber visto un extraño vehículo tripulado por seres evidentemente no humanos. También dijeron que horas después el ejército mexicano aseguró la zona y desapareció toda evidencia. Hoy en día, puede observarse en este lugar un cráter dentro del cual la tierra está literalmente cocida y a su alrededor se encuentra una cantidad exorbitante de yerba calcinada. Pero lo más sorprendente es que estos restos de yerba calcinada tienen forma de cigarros. Años después, en lugares muy distintos, han ocurrido otros hechos difíciles de explicar donde se han observado estos mismos restos sobrenaturales. Para explicar estos eventos se creó, en años recientes, una comisión especial de la Policía Federal Paranormal (PFP); el resultado de sus investigaciones se encuentra plasmado en los expedientes secretos.

Los expedientes no eran más que crónicas desordenadas hasta que se decidió añadirles un análisis lógico para explicar el comportamiento de los hechos ahí narrados e intentar predecir algún resultado, o sea, hasta que se decidió reescribir matemáticamente los sucesos sobrenaturales descritos por los expedientes secretos. Pero la tarea de describir cualquier cosa, en cualquier lenguaje, es prácticamente imposible por la enorme cantidad de características propias de la cosa y de sus interacciones con el resto del universo, es más, sería necesaria una discusión filosófica para decidir cuál es la descripción «real» de algo o para decidir cuándo algo es «real». Por eso es que al transcribir en lenguaje matemático algún suceso o fenómeno real, éste no se describe sino que se crea un modelo que simplifica e idealiza al fenómeno. La intención es analizar únicamente aquellas características o comportamientos que creemos relevantes. En particular, cuando se quiere analizar y predecir algún comportamiento, nos interesa observar el conjunto de reglas o principios sobre el fenómeno en estudio, que se encuentran enlazados entre sí y que cambian según vaya pasando el tiempo; es decir, para analizar y predecir el comportamiento de algún fenómeno consideramos un sistema «real» que se encuentra sujeto a una ley de evolución en el tiempo.

Si nos interesa estudiar cómo cambian las condiciones del sistema real a través del tiempo, necesitamos una manera sencilla para referirnos a las condiciones del sistema; esto se logra con ayuda de un ente matemático llamado espacio fase. Todos los estados o condiciones en que se pueda encontrar el sistema se representan con un conjunto X que deseamos tenga algunas propiedades matemáticas que hagan sencillo su estudio; y cuando conseguimos algún conjunto X que modele efectivamente las condiciones del sistema, este conjunto recibe el nombre de espacio fase. Pensando en esto, los expedientes secretos fueron bautizados con el nombre de expedientes secretos X.

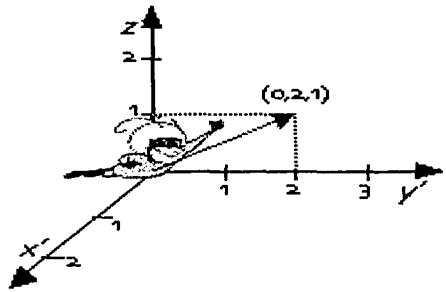
Para poder entender algo del párrafo anterior pongamos nuestra mente en blanco y pensemos en el movimiento de una hormiga voladora. El sistema «real» será la hormiga volando en el cielo, aquí existen características como la velocidad del viento, el peso del casco de la hormiga, el color de su sudadera, etcétera. Pero nuestro modelo únicamente consistirá de un espacio, las posiciones de la hormiga en ese espacio y una regla de cambio que nos diga hacia dónde y con qué rapidez vuela la hormiga. Al modelar nuestro sistema, hemos considerado que la hormiga voladora es tan fuerte que no importa la velocidad del viento, ni el peso del casco, etcétera, así hemos simplificado e idealizado nuestro sistema.



Para dar la localización del superhéroe más pequeño del mundo, en un espacio de tres dimensiones, podemos asociarla con un punto del espacio; en el caso del dibujo de al lado, la posición es: $h_0=(1,3,2)$
Como podemos «medir» en cada una de las dimensiones con la recta de números reales $\mathbb{R}$, este espacio tridimensional se conoce matemáticamente como $\mathbb{R}^3$ y cada uno de sus puntos representa una posible posición de la hormiga. Cuando tenemos cualquier espacio matemático donde podamos representar todas las posibles posiciones del sistema, le llamamos espacio de configuraciones. Y la posición que obtenemos, al hacer nuestra primera medición u observación, recibe el nombre de configuración inicial, en este caso el punto h_0 es la configuración inicial del sistema.

Todos sabemos que gracias a sus poderes radioactivos esta hormiga puede volar más rápido que una bala y, si sólo tenemos la posición de la hormiga no podremos comprender ni predecir su movimiento. Pero no hay ningún problema porque Newton nos dijo desde hace muchos años que, el movimiento de un cuerpo, si nada se le atraviesa, está determinado por su posición inicial y su velocidad. Hay que notar que la palabra interesante de la frase anterior es «determinado», la cual nos quiere decir que, mientras la hormiga no choque, nosotros podremos predecir su movimiento si conocemos su posición inicial y su velocidad. Como nuestro modelo no tiene fricción del viento, ni cambios en el clima, ni aviones, ni árboles contra los que pueda chocar la hormiga voladora, Newton nos dice que podremos predecir su movimiento si tenemos su posición inicial y su velocidad. Por eso nuestro modelo es determinista, porque sus condiciones a largo plazo están completamente predeterminadas. Pues bien, lo único que nos falta es conocer la velocidad de la hormiga, esto es, necesitamos saber hacia dónde va y con qué rapidez va. Los entes matemáticos que nos ayudan a representar esa información se llaman vectores, los cuales se pueden pintar como flechas, la punta de la flecha indica hacia dónde va la hormiga, lo largo de la flecha indica qué tan rápido se mueve. Se acostumbra poner una raya arriba del nombre de un vector para indicar que no estamos hablando de un punto del plano, veamos el dibujo de abajo.

Si tomamos ahora la posición de la hormiga como centro de otro espacio tridimensional, podemos expresar el vector que indica su velocidad como: $\overline{v}_0=(0,2,1)$
El espacio donde representamos las velocidades se llama, obviamente, espacio de velocidades. Y la velocidad que se observó junto con la configuración inicial se llama, obviamente, velocidad inicial. El vector $\overline{v}_0$ será nuestra velocidad inicial del sistema. Ahora sí, ya tenemos información suficiente para especificar el movimiento de la hormiga voladora.

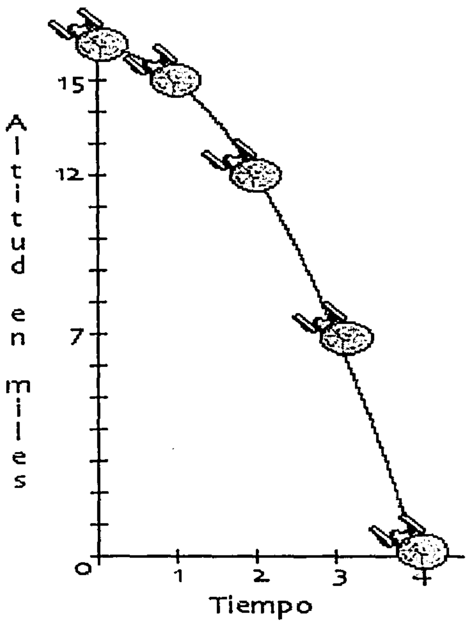


Decimos que las configuraciones junto con sus velocidades son las condiciones del sistema. Entonces, la condición inicial de nuestro sistema, la cual llamaremos x_0, está dada por la configuración inicial h_0, junto con la velocidad inicial $\overline{v}_0$, o sea, $x_0= (h_0, \overline{v}_0) = (1,3,2,0,2,1)$. Como ya sabemos, con esta condición inicial podremos predecir dónde se encontrará la hormiga después de que pase mucho tiempo pero, ¿qué sucedería si no tuviéramos la condición inicial? ¿o si no estuviéramos seguros de haberla medido bien? ¿o si nuestros instrumentos de medición no fueran exactos? pues obtendríamos una mala predicción. Estas preguntas no son tan banales como parecen porque ningún instrumento de medición es exacto, todos presentan un margen de error. Parece ser que estamos destinados a hacer malas predicciones, a menos que, encontremos la manera de estudiar todas las posibles condiciones iniciales del sistema, así, podríamos medir una condición inicial y revisar todas las que se encuentren dentro del rango de error de la medición. Con esto seríamos capaces de decir cuánto afectan los errores de medición el comportamiento del sistema y seríamos capaces de dar buenas predicciones. Cuando hacemos predicciones sobre todas las posibles condiciones iniciales del sistema, decimos que hacemos predicciones globales. Para poder hacerlas necesitamos representar, en un solo espacio, todas las posibles condiciones del sistema e investigar qué sucede con ellas al pasar el tiempo; esto es, necesitamos tener en el mismo espacio a las configuraciones y velocidades del sistema. Pues bien, el espacio en el que logremos acomodar a las configuraciones junto con las velocidades, será el espacio fase.

Al hablar de la condición incial, de la hormiga voladora, utilizamos tres dimensiones para fijar su posición y otras tres para su velocidad, $x_0=(1,3,2,0,2,1)$. Entonces necesitamos un espacio matemático de seis dimensiones $\mathbb{R}^6$, donde cada uno de sus puntos representará una posible condición del sistema. Así la condición inicial x_0, y todas las demás posibles condiciones, pertenecen a un conjunto X que en este ejemplo resultó ser $\mathbb{R}^6$. Para abreviar simplemente decimos que $\mathbb{R}^6$ es el espacio fase de nuestro sistema. El único problema es que para ver o imaginar un espacio de seis dimensiones, o cualquiera mayor de tres, necesitamos consumir yerba extraterrestre con forma de cigarro, lo cual no es recomendable. Aunque también podemos pedirle ayuda a la teoría termodinámica, la cual nos dice que algunas veces podemos «llevar» un espacio fase de n dimensiones a un espacio de estados de dos o tres dimensiones, el cual es fácilmente dibujable. Hablando únicamente en español, el espacio fase y el espacio de estados son más o menos lo mismo, pero hablando rigurosamente en matemáticas, las condiciones o estados del sistema se modelan en el espacio fase y, si se cumplen algunas suposiciones, podemos representar el espacio fase en un espacio de estados visualizable, sin embargo esto no siempre es necesario o posible.

Ahora el punto crucial es decir cómo se comporta el sistema al pasar el tiempo, en matemáticas esto se llama plantear el sistema dinámico. Para revisar un fenómeno que cambia con el tiempo, lo podemos considerar como un sistema que evoluciona, el cual debe regirse por una ley de evolución. Esta ley es la razón de cambio que presenta el sistema en cada instante y, puede obtenerse al medir u observar las diferencias que muestre el sistema al pasar el tiempo. Entonces podemos expresar la ley de evolución por medio de las diferencias que presente el sistema, luego podemos arreglar esta expresión para que nos indique la regla de cambio que haga que el sistema efectivamente presente estas diferencias; la regla de cambio quedará representada por una o varias ecuaciones. En español podemos decir que estas ecuaciones son la ley de evolución que rige al sistema; pero en matemáticas, para ser precisos, decimos que estas ecuaciones son la solución a la ley de evolución. Encontrar estas ecuaciones es lo que se denomina, plantear el sistema dinámico. Algunas veces es necesario realizar observaciones, expresar la ley de evolución y resolver esta ley para plantear el sistema dinámico pero, otras tantas veces, es posible plantearlo directamente; todo depende del fenómeno que queramos comprender y de la información que poseamos acerca de él. Entonces un sistema dinámico puede pensarse como cualquier conjunto de ecuaciones que representen el cambio del sistema «real» en el tiempo, partiendo del conocimiento del estado previo del sistema; si el modelo considerara eventos fortuitos que afectaran su comportamiento, sería en estas ecuaciones donde incluiríamos a la suerte como un término aleatorio o azaroso; si el modelo no considera eventos fortuitos, las ecuaciones son, como ya sabemos, deterministas. Además podemos considerar el paso del tiempo como algo continuo o como una sucesión de periodos bien identificados, esto es, se pueden observar y registrar los cambios del sistema continuamente o, podemos optar por hacerlo cada hora, cada tres meses o cada veinte años; si las ecuaciones consideran al tiempo como una sucesión de periodos se dice que son discretas. Si el sistema dinámico es determinista y discreto podremos obtener un sistema dinámico relativamente sencillo que, a primera vista, es fácil de estudiar pero aún así hay que mirarlo con respeto porque, como se concluyó en los expedientes secretos X, algunas veces puede volverse caótico.

El último concepto, que se utilizó para modelar los extraños sucesos de los expedientes secretos X, tiene que ver con las ecuaciones del sistema dinámico. Sabemos que cuando se tienen ecuaciones se está determinando un tipo de relación entre conjuntos y decimos que esta relación es una función, que «va» de un primer conjunto a otro, cuando a los elementos del primer conjunto solo se les relaciona con un elemento del segundo conjunto. Es decir, bajo una función un elemento del primer conjunto sólo puede estar relacionado con uno, no dos ni tres, del otro conjunto. Lo anterior suena complicado pero realmente es muy sencillo, veamos la siguiente gráfica:

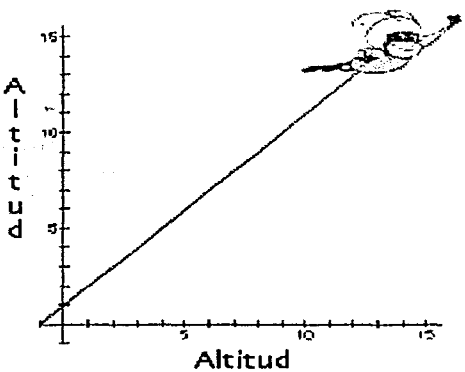


Al investigar los extraños acontecimientos de Real de Catorce, los agentes especiales de la PFP determinaron que el ovni fue visible por primera vez a los 16 mil metros de altitud; es decir, al tiempo de observación cero la altitud del objeto era de 16 mil metros, lo cual podemos expresar como una relación entre los conjuntos, tiempo y altitud, con tiempo cero altitud 16, (0,16). Después de un minuto el ovni se encontraba a 15 mil metros, (1,15); a los dos minutos llegó a los 12 mil, (2,12); a los tres minutos estuvo a 7 mil, (3,7); finalmente, a los cuatro minutos dejó de ser objeto volador y tuvo un encuentro cercano con el suelo, (4,0). En la gráfica de al lado hemos acomodado esta información dentro de un plano, en el eje X representamos al tiempo, en el eje Y la altitud. La información de la caída del ovni se representa con los puntos del plano que corresponden a lo que hemos dicho. Así, tenemos una relación entre los valores del tiempo y los de la altitud, esta relación es una función porque a un valor de tiempo únicamente le corresponde una altitud, no tenemos dos altitudes distintas al mismo tiempo. Si el objeto hubiera seguido volando a la misma altitud, tendríamos que a todos los tiempos les correspondería una misma altitud, con lo cual no habría ningún problema y seguiría siendo una función, porque se seguiría respetando el principio de que a cada valor de tiempo le corresponde un solo valor de altitud. Ahora bien, lo ideal es que la función esté definida para todos los valores del tiempo, es decir, que la función «llene los huecos» entre las observaciones. Después de pensar un poco, resulta que una función que llena de manera razonable estos huecos es $f(x)=16-x^2$; la gráfica de esta función es la línea que une a los puntos que representan las distintas observaciones. En matemáticas se acostumbra usar $f(x)$, que significa función f que depende de x, en este caso x es un periodo de tiempo.

En el caso de los sistemas dinámicos las funciones asocian un elemento del conjunto X, que llamamos espacio fase, con otro elemento del mismo conjunto; podemos decir que la función va del espacio fase al espacio fase, lo cual en matemáticas se escribe $f:X \rightarrow X$. Entonces, en la expresión $f(x)$, la x es un estado del sistema perteneciente al espacio fase y, la función f «manda» al sistema del estado en el que se encuentra a otro estado del mismo espacio fase. Y cuando tenemos cualquier función, que vaya de un conjunto al mismo conjunto, le llamamos mapeo. La función del ejemplo anterior, la caída del ovni, no es un mapeo porque toma valores del conjunto «tiempo» y los lleva a valores del conjunto «altitud», y un mapeo debería regresarlos al mismo conjunto, aunque los regrese un poco revueltos. Para dar un ejemplo de una función que sí es mapeo, volvamos a pensar en la hormiga voladora.

Si el superhéroe más pequeño del mundo hubiera sabido que un ovni se estrellaría contra el suelo, seguramente hubiera salido volando para evitarlo. Para predecir qué tan alto volaría la hormiga, estamos interesados en conocer cómo varía su altitud conforme pasa el tiempo pero ahora, revisaremos esta relación con un enfoque un poco distinto. Ya que el tiempo avanza sin importar lo que pase y es la altitud la que varía según avanza el tiempo, será la altitud la variable «interesante» para nosotros; vamos a usar la recta de números reales para representarla. Entonces nuestro espacio fase será la recta real. Ahora, queremos que un mapeo haga variar la altitud según pasa el tiempo, esto es, queremos una función que tome valores de la recta real y los regrese a otros valores, dentro de la misma recta real:

Con este enfoque, la aplicación del mapeo representa el avance del tiempo, esto es, podemos decir que cada vez que aplicamos el mapeo ha pasado un periodo de tiempo determinado. Si queremos la altitud de la hormiga cada minuto, la aplicación del mapeo representará el paso de un minuto. Ya no es necesario representar gráficamente al tiempo, para observar los cambios en nuestro sistema dinámico únicamente debemos representar a la altitud. Claro que si nos restringimos a ver solo una dimensión, la de la recta real, será muy difícil distinguir los efectos que produzca el mapeo. Sería más interesante ver cómo los puntos de la recta son reacomodados por el mapeo, es decir, cómo los saca, los mueve y los vuelve a acomodar. Pero para poder ver lo anterior, necesitaríamos permitirle a los puntos poder salir a un espacio de al menos dos dimensiones, vamos a construirlo. Si dejamos al espacio fase tal cual está y, por otra parte, tomamos a la recta que representa al espacio fase después de aplicarle el mapeo, la «paramos» y la ponemos sobre el espacio fase original, obtenemos los dos ejes de un plano. Dentro de este plano podremos ver los efectos del mapeo.



Volvamos a poner la altitud en miles. Digamos que la hormiga voladora sube mil metros cada minuto, vamos a traducir esto a matemáticas usando el concepto de función: $f(x) = x + 1$.

Por ejemplo, si la condición inicial de la hormiga es cero metros, después de un minuto estará a mil metros:

$$f(0) = 0+1 = 1.$$

La línea que cruza el plano es la gráfica de f, y en ella podemos ver los efectos del mapeo. Recordemos que el eje X representa al espacio fase, el eje Y al espacio fase después de aplicar el mapeo. Si nos paramos en el cero del eje X, la gráfica nos indica el uno del eje Y. Si nos paramos en el 1 del eje X, la gráfica nos indica el 2 del eje Y, es decir, si la condición inicial de la hormiga son mil metros, después de un minuto estará en los dos mil metros; además podemos predecir la altitud de la hormiga a largo plazo, por ejemplo, después de media hora de vuelo la hormiga alcanzará, gracias a sus poderes radioactivos, los 31 mil metros de altitud. Ahora sí, nuestro ejemplo es un verdadero sistema dinámico, que además es determinista y discreto.

Vamos a traducir a matemáticas, algunos conceptos que ya manejamos con el vuelo de la hormiga voladora; esto lo haremos para tener una manera rápida de referirnos a ellos cuando tengamos otros fenómenos qué modelar. Comencemos por la condición inicial, la cual corresponde a la observación hecha en el tiempo cero; podemos usar con ella un subíndice para indicar el tiempo, así, si tenemos la condición x observada en el tiempo cero, podemos usar:

x_0 = condición inicial del sistema dinámico.

entonces x_1 = condición del sistema después de un periodo determinado de tiempo.

x_1 se obtiene observando a dónde va a dar la condición inicial del sistema bajo el mapeo. Para abreviar lo anterior ponemos:

$x_1 = f(x_0)$ donde f es el mapeo que determina al sistema dinámico.

ahora $x_2 = f(x_1)$ pero $f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$, en general tenemos:

$x_n = f^n(x_0)$

x_n representa entonces, la condición del sistema dinámico después de que pasen n periodos de tiempo siempre que partamos de la condición inicial x_0. Recordemos ahora el vuelo de la hormiga voladora, si observamos que está a los 5 mil metros de altitud, no solo podemos predecir dónde estará al siguiente minuto, también podemos decir que el minuto anterior estaba a 4 mil metros de altitud. El que podamos conocer las altitudes pasadas de la hormiga se debe a que el sistema dinámico es determinista y, a que cada condición tiene un único pasado posible. Lo anterior no sucede generalmente, pero cuando sucede es posible estudiar cómo es que se llegó a la condición inicial, es decir, es posible estudiar el pasado del sistema dinámico. Para hablar del estado del sistema en n periodos de tiempo antes de la condición inicial, x_0 , usamos:

$$x_{-n} = f^{-n}(x_0).$$

El conjunto formado por $\{\ldots,x_{-3},x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,x_3,\ldots\}$ se llama órbita de x_0 , y generalmente usamos $O(x_0)$ para referirnos a ella. Cuando estudiamos únicamente el futuro tenemos órbitas hacia adelante y, cuando nos quedamos sólo con el pasado tenemos órbitas hacia atrás. Las órbitas se pueden pensar como estados consecutivos del sistema «real» según cambia éste con el tiempo. Como podemos imaginar, la teoría de sistemas dinámicos estudia principalmente las órbitas con el objeto de predecir su comportamiento a largo plazo, ya sea hacia adelante o hacia atrás.

El anterior fue el último concepto que se usó para traducir al lenguaje matemático los expedientes secretos X de la PFP. Ahora es obvio que fueron reescritos en matemáticas según el enfoque de la teoría de sistemas dinámicos, puede ser que nunca antes hayamos escuchado este nombre pero, es casi seguro que ya hayamos escuchado algo acerca de ella, porque entre los que no hacemos matemáticas es mejor conocida como la teoría del caos.

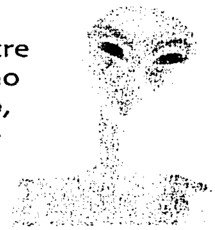
Pero... ¿es que los sistemas dinámicos sólo sirven para modelar fenómenos sobrenaturales? Por supuesto que no. En el expediente 1 se usa un modelo simple para el estudio de epidemias. Aunque en este caso se estudia el «contagio» de una creencia, de la misma manera puede modelarse el contagio de alguna enfermedad; de hecho un agente especial ha sugerido que también puede usarse para modelar efectos publicitarios. Ya que estamos en el tema, en el expediente 2 se usa el mapeo más publicitado de la teoría del caos: La ecuación logísitica. Este mapeo es el ejemplo más sencillo donde se puede estudiar comportamiento caótico y observar el nacimiento de un fractal. La logística ha sido usada para modelar poblaciones, ciclos económicos, contaminantes, ritmo cardiaco, etc. En el caso de poblaciones este mapeo se utiliza principalmente para modelar su crecimiento pero, con pequeñas modificaciones, pueden obtenerse estrategias de cosecha, modelos de especies en competencia, modelos presa-predador, etcétera, lo cual es un buen ejemplo de su utilidad y versatilidad. En el expediente 3 se da una definición de caos y se ejemplifica una tarea fundamental en las matemáticas, clasificar sus objetos para descubrirles razgos esenciales y simplificar su estudio. En el expediente 4 se expone la herradura de Smale, la cual presenta comportamiento caótico que genera otro fractal y, además, es un ejemplo sencillo de matemáticas a manos libres, sin fórmulas. Con la herradura se introducen de manera intuitiva los sistemas dinámicos en dimensión dos. En el expediente 5 se muestra el mapeo de Hénon, el cual es una simplificación del modelo climático propuesto por Lorenz. El mapeo de Hénon engloba todo lo que se presenta en los expedientes anteriores y formaliza el paso a la dimensión dos. El expediente 5, volumen II, es una invitación, para quién quiera aceptarla, a adentrarse en el mundo de los atractores extraños, del comportamiento caótico, de los fractales y de las matemáticas en general. En esta segunda parte, del último expediente, se presenta de manera informal el atractor extraño de Hénon y se enumeran varios desafíos que el mapeo de Hénon ofrece a la menta humana, los cuales no han podido ser resueltos hasta el día de hoy.

La teoría de sistemas dinámicos se utiliza para predecir cómo cambian las cosas con el paso del tiempo. Algunos fenómenos que pueden pensarse como dinámicos son: la disminución de los ahorros en el banco, el aumento en la concentración de alcohol en la sangre, el crecimiento de poblaciones, las fluctuaciones de precios, la evolución de los lenguajes, el comportamiento de los mercados, el flujo vehicular, el aumento de contaminantes en los mantos acuíferos, el decaimiento radiactivo, las turbulencias en los fluidos, la posición de un avión en pleno vuelo, el movimiento del sistema solar, la rotación de las galaxias, la expansión del universo, etcétera, etc. De hecho la teoría de sistemas dinámicos se utiliza para estudiar algunas cosas tan íntimamente relacionadas con el ser humano como son las enfermedades hereditarias, las arritmias del corazón, la paranoia o las irregularidades que se presentan en los electroencefalogramas. Aún más, fénomenos que parecieran no tener nada que ver con todo esto, como la música o las interacciones familiares, están mostrando tener propiedades y comportamientos que los relacionan con todo aquello que puede pensarse como sistema dinámico. Y con algunos descubrimientos como la estructura fractal de las redes de vasos sanguíneos o la existencia de atractores extraños en fenómenos meteorológicos, está cambiando nuestra manera de ver al universo y a nosotros mismos. Puede ser que la verdad no se encuentre ahí afuera pero cómo se aprende buscándola.

EXPEDIENTE 1:

Invasión extraterrestre.

Las investigaciones de los agentes especiales han revelado un terrible secreto: Seres extraterrestres se preparan para invadir la Tierra. Desde hace varios años alienígenas inteligentes han vigilado y estudiado a los seres humanos con la finalidad de descubrir nuestras debilidades. Para lograr esto realizan las llamadas «abducciones»: Usando su avanzada tecnología secuestran humanos, les practican terribles pruebas y los regresan horas después al lugar donde fueron raptados sin recuerdos de lo ocurrido. Bajo hipnosis algunas víctimas han logrado recordar estos raptos extraterrestres. Dentro de las naves espaciales los humanos son sometidos a toda clase de pruebas de resistencia física y mental, les son introducidos aparatos en el cuerpo y son obligados a aspirar el humo producido al quemar una extraña yerba verde con forma de cigarro.



Si los humanos supiéramos acerca de la inminente invasión extraterrestre podríamos prepararnos, resistir y evitarla, es por eso que los alienígenas no desean que la mayoría de la población crea en su existencia. Sin embargo, las investigaciones de los agentes especiales también han revelado el razonamiento usado por los extraterrestres para predecir y controlar la cantidad de humanos que cree en los «grises»:

Llamemos $C(n)$ a la fracción de la población que cree en los «grises» en el tiempo n, entonces $1-C(n)$ es la fracción que no cree. En cada periodo de tiempo los creyentes convencen a cierta proporción de no creyentes de que los platillos voladores existen, esta proporción depende de la interacción de creyentes y no creyentes, es decir, del producto $C(n)[1-C(n)]$. Cuando tenemos una población dividida en dos partes, $C(n)$ y $1-C(n)$, su producto es llamado el radio de contagio, $C(n)[1-C(n)]$. Así, considerando únicamente las interacciones de estas dos partes de la población tenemos:

$$C(n+1) = C(n) + \kappa C(n)[1-C(n)]$$

En donde la letra griega kappa, κ, es un parámetro que, como veremos más adelante, representa la tendencia a creer o no creer de la población. Decimos que $C(n)$ representa el porcentaje de población creyente al tiempo n pero también podemos decirlo así, $C(n)$ representa la proporción de creyentes en la población partiendo de una condición inicial después de n periodos de tiempo, $C(n)=f^n(x_o)$, es decir, podemos usar la notación que hemos propuesto para sistemas dinámicos. Entonces tenemos:

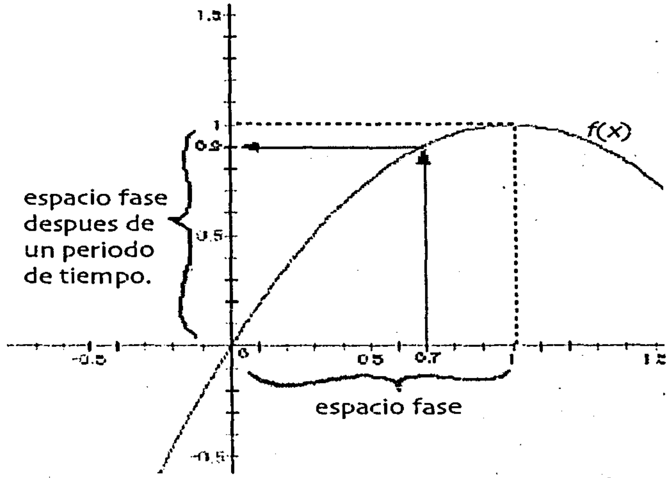
$$f(f^n(x_o)) = f^n(x_o) + \kappa f^n(x_o)[1-f^n(x_o)]$$

Lo cual nos indica que el mapeo que usaremos será:

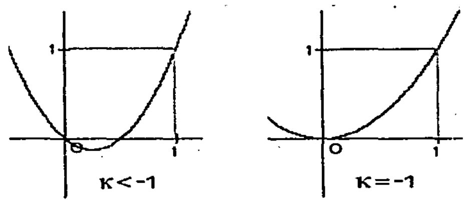
$$f(x) = x + \kappa x(1-x) = x + \kappa x - \kappa x^2 = (1+\kappa)x - \kappa x^2$$

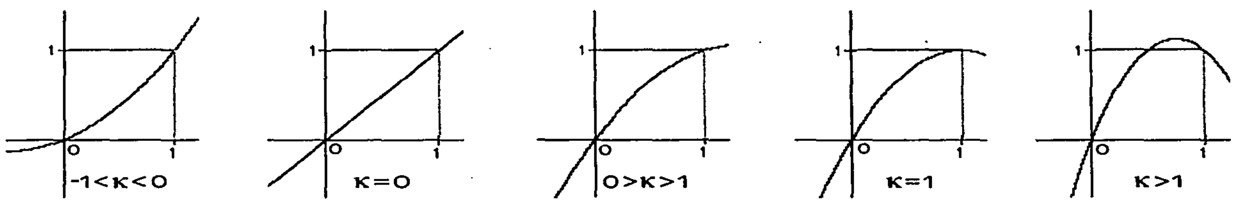
La idea es estudiar este mapeo para comprender el comportamiento de la proporción de creyentes en la población y, lo que nos interesa es predecir el comportamiento a largo plazo bajo distintas circunstancias. Ahora, cuando se habla de proporciones es común utilizar porcentajes pero es más sencillo manipular fracciones o decimales. Por lo tanto, para que x represente fracciones de población es conveniente que tome valores entre 0 y 1, donde obviamente el cero es el 0% de la población y el 1 es el 100%. Así tenemos que nuestro espacio fase es el pedazo de recta real entre cero y uno, intervalo [0,1] , y nuestro mapeo debe «tomar» una x dentro de este intervalo y «mandarla» dentro del mismo intervalo. No es deseable que x tome valores menores que cero o mayores que uno porque entonces el modelo deja de representar a la «realidad» y lo único que podríamos decir, sin confiar del todo, sería que, si $x<0$ no existen creyentes en la población, si $x>1$ todos son creyentes. Es casi seguro que una gráfica nos ayudará a comprender mejor todo esto.

Para graficar el mapeo $f(x)=(1+\kappa)x-\kappa x^2$ necesitamos asignarle un valor a κ, en la figura de al lado $\kappa=1$. El espacio fase es el intervalo [0,1] y las x que f toma del [0,1] nunca salen de este intervalo, por ejemplo: De la gráfica podemos ver que si el 70% son creyentes, después de un periodo de tiempo el 90% lo será. También podemos ver que f manda el 1 al 1, $f(1)=1$, además $f(0)=0$; y cuando sucede esto, $f(x)=x$, decimos que x es un punto fijo. En este caso el 1 y el 0 son puntos fijos y, lo que significa en la «realidad» es que: Si el 100% de la población es creyente seguirá siéndolo sin importar cuantos periodos de tiempo pasen o, si nadie es creyente nadie lo será jamás.



En la gráfica anterior utilizamos $\kappa=1$ por dogma de fe, porque todavía no tenemos idea de qué valores puede tomar. Algo sencillo es probar algunos valores de κ y revisar que el modelo siga teniendo significación, es decir, que κ no nos «saque» del intervalo [0,1].





Es fácil observar que cuando $\kappa<-1$ el mapeo da valores negativos al inicio del intervalo y cuando $\kappa>1$ da valores mayores que 1 al final del intervalo. Intuitivamente podemos decir que los valores que puede tomar el parámetro κ están dentro del intervalo [-1,1]. También de las gráficas pareciera ser que el cero y el uno son puntos fijos sin importar el valor de κ, pero en matemáticas, como en la vida, no es bueno dejarse llevar por las apariencias, debemos demostrar lo que afirmamos. Queremos revisar que con cualquier κ, $f(0)=0$, $f(1)=1$, para hacerlo solo necesitamos sustituir estos valores en el mapeo:

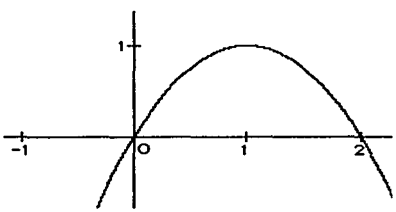
$$f(0) = (1+\kappa)0 - \kappa 0^2 = 0, \qquad f(1) = (1+\kappa)1 - \kappa 1^2 = 1 + \kappa - \kappa = 1$$

Por lo tanto, sin importar el valor de κ, el cero y el uno son puntos fijos. Los puntos fijos caracterizan de manera muy simple el sistema dinámico y son bastante útiles en términos de la «realidad», por ejemplo, al modelar fenómenos de la economía los puntos fijos representan equilibrios económicos. Pues bien, lo que todavía no sabemos es qué tiene que ver eso de la tendencia a creer o no creer con los valores de κ. Cuando $\kappa=0$ es fácil comprobar que todos los estados del sistema son puntos fijos, esto es:

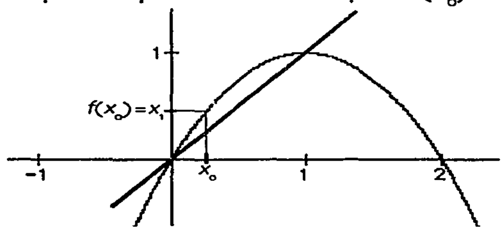
$$f(x) = (1+\kappa)x - \kappa x^2 = (1+0)x - 0x^2 = x$$

Entonces, cuando $\kappa=0$ el modelo representa una población con tendencia a mantener sus creencias cuya proporción inicial de creyentes no cambiará con el paso del tiempo. Este modelo donde a nadie le interesa lo que crean los demás podría ser, tristemente, muy adecuado en estas épocas pero matemáticamente no es interesante porque no cambia con el tiempo. Sería cómodo usar más gráficas para revisar qué pasa cuando κ toma valores mayores o menores que cero, pero las gráficas convencionales sólo nos dan información después de un periodo de tiempo y nosotros queremos saber qué pasa después de muchos peridos de tiempo. Para esto es mejor usar un método asombrosamente sencillo, que bien pudo haber sido inventado por un estudiante picado por una araña radioactiva, ya que algunos conocen a este método como La Telaraña:

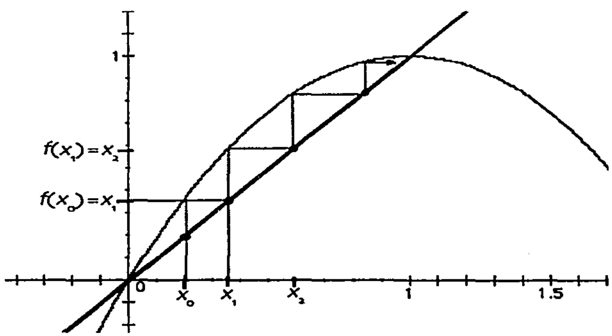
Primero graficamos el mapeo. En este caso usamos $\kappa=1$.



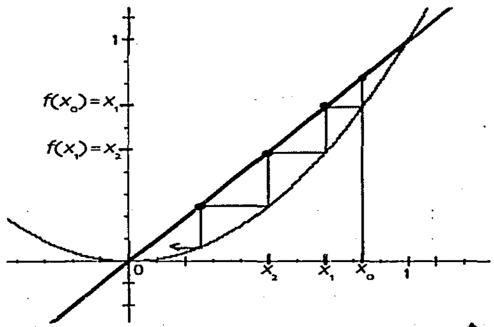
Luego se traza la identidad, es decir la diagonal $y=x$. Se toma un x_0 fijo y se observa a dónde lo manda f en el primer periodo de tiempo: $f(x_0)=x_1$



Ahora tejemos La Telaraña: Llevamos $f(x_0)$ horizontalmente y lo marcamos en la diagonal, bajamos este valor al eje horizontal y obtenemos x_1 dentro del espacio fase. Repetimos con x_1, lo subimos a la gráfica de f, llevamos $f(x_1)$ a la identidad, bajamos el valor y obtenemos x_2. Repetimos con x_2 y así seguimos. Este proceso de reevaluar valores se llama iterar. Después de iterar un rato vemos que los valores se acercan o tienden al uno.

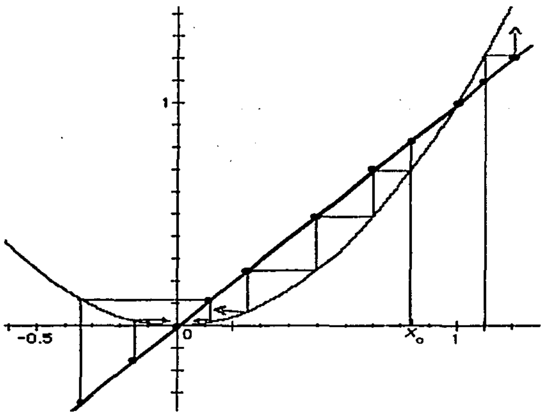


Entonces, según la telaraña anterior, cuando $\kappa=1$ el sistema tiende a 1; es decir, en el largo plazo casi el 100% de la población será creyente. Algunas veces es necesario probar con diferentes valores de x_0 antes de aventurar una afirmación como la anterior pero en este caso la gráfica es tan simple que no será necesario. Ahora, como las gráficas de los demás valores positivos que puede tomar κ, $0<\kappa<1$, son parecidas a la de $\kappa=1$, podemos afirmar intuitivamente que también representan comportamientos parecidos de la población. Por el momento esto será suficiente para concluir lo siguiente: Cuando el parámetro κ toma valores positivos, $0<\kappa\leq 1$, observamos una tendencia a creer. Cuando $\kappa=0$ teníamos una población indiferente a las creencias de los demás. Luego se antoja que cuando κ tome valores negativos tendremos una población con tendencia a no creer, y para ver esto tejemos la telaraña sobre la gráfica de $f(x)$ con $\kappa=-1$:

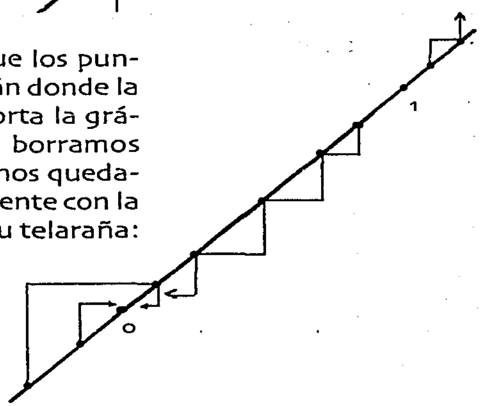


Efectivamente, observamos que en el largo plazo la proporción de creyentes en la población tiende al 0%. Razonando igual que en el caso anterior, podemos afirmar que para valores negativos de κ, $-1\leq\kappa<0$, la tendencia es no creer.

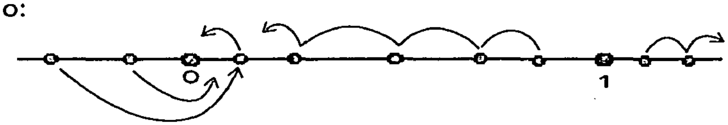
Con un interés más matemático haremos ahora esto: Marcamos en la diagonal los puntos fijos y tejemos también la telaraña en puntos cercanos a ellos:



Notamos que los puntos fijos están donde la identidad corta la gráfica. Ahora borramos la gráfica y nos quedamos únicamente con la diagonal y su telaraña:



Si curveamos la telaraña, repintamos la diagonal de manera horizontal y la escalamos, para que la distancia del 0 al 1 corresponda, obtenemos el retrato fase. En la figura de abajo el retrato fase ha sido agrandado y se le han añadido puntos fuera del intervalo [0,1] para entender mejor lo que está pasando:

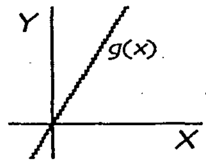


Los puntos cercanos al uno se alejan de él. Los puntos cercanos al cero son atraídos por él. Así vemos que los puntos en el espacio fase «migran» al cero mientras el tiempo avanza. Inutitivamente podemos decir que el uno repele a los puntos cercanos a él y, el cero los atrae. Entonces, con $-1<\kappa<0$, podríamos decir que el 0% de creyentes en la población es un estado atractor de nuestro sistema. Para entender lo que esto significa, vamos a platicar algunos conceptos en puro español y a utilizar el único requisito indispensable para comprender matemáticas, la imaginación. Un atractor es algo así como el hoyo negro de los sistemas dinámicos, cualquier punto que se le acerque terminará cayendo en el atractor y no escapará jamás. Algunos llaman «sumideros» a los atractores, tal vez porque así sea fácil representarlos mentalmente. Vamos a imaginar una alberca, el atractor será el hoyo del drenaje. Antes de aplicar el mapeo, el agua de la alberca estará tranquila porque el atractor estará como «tapado», ya que el tiempo no avanza y no existe ningún cambio en el sistema dinámico. Cuando dejamos que el tiempo corra, al comenzar a aplicar el mapeo, se «destapa» el atractor y el agua del aberca será succionada por él; el agua representa a la cuenca de atracción y está formada por todos los puntos cercanos al atractor. La gran diferencia entre el atractor matemático y el hoyo de la alberca, es que el agua se va a través del hoyo, mientras que los puntos llegan al atractor y permancen ahí, acumulándose en un único punto por el resto del tiempo.

Con la cuenca de atracción sucede algo bastante interesante, ya que la cuenca es un conjunto abierto. Vamos a pensar en el agua de la alberca, con el atractor «tapado» porque no hemos hecho que corra el tiempo; sabemos que el agua está delimitada por las paredes de la alberca, así que no se extiende infinitamente, pero el agua misma no tiene límites y no podemos hablar de la última gota de agua antes de la pared, porque cuando la buscamos siempre parece haber otra gota de agua antes de la pared. Es decir, los límites del agua están perfectamente claros, son los azulejos de la alberca pero, estos no pertenecen al conjunto formado por el agua. En español podemos decir que los conjuntos cerrados son aquellos que poseen límites bien definidos, mientras que los abiertos, aún cuando estén limitados, no poseen ellos mismos sus límites. La gran diferencia entre el agua de cualquier alberca y la cuenca de atracción, es que los puntos de la cuenca son infinitos y las moléculas de agua no. En la alberca no podemos encontrar la última gota de agua antes de la pared porque, con el menor movimiento, otra gota de agua se interpone entre esa gota y la pared, pero al final de cuentas, las moléculas de agua son finitas y si el agua estuviera perfectamente quieta, debería existir una última molécula de agua. Pero en la cuenca de atracción sí existe una infinidad de puntos, así que no podemos hablar del último punto porque siempre habrá otros adelante de él. Todo esto puede sonar un poco confuso ya que es resultado de considerar la posibilidad de que existan conjuntos infinitos. Podemos decir que los matemáticos consideran a un conjunto como infinito, si algunas de sus partes son iguales al todo. Por ejemplo, los números reales son infinitos y sus partes también lo son, por ejemplo, existe una infinidad de números entre el cero y el uno, así que podríamos acomodar a todos los reales entre estos dos números; tenemos un conjunto que es infinito aunque esté limitado por el cero y el uno, lo mismo puede suceder con las cuencas de atracción, aunque algunas sí serán infinitas e ilimitadas. Así que no importa cuánto tiempo pase, el atractor nunca terminará de succionar a su cuenca porque, aunque esté limitada, es infinita; o dicho de otro modo, la única cantidad de tiempo que le permitiría al atractor succionar toda su cuenca, sería la eternidad. Como podemos ver, la existencia del infinito es un tema fascinante pero profundizar en él nos desviaría demasiado de nuestra investigación.

Pues bien, siempre podemos considerar un conjunto abierto alrededor de cualquier punto, en particular, alrededor del atractor. En matemáticas, los conjuntos abiertos alrededor de un punto se conocen como vecindades del punto. Como podemos imaginar, se pueden considerar varias vecindades alrededor de un punto, unas más «chiquitas» dentro de otras. Las vecindades de interés de los atractores serán sus cuencas de atracción. La idea, será encontrar la más grande para no hablar de unas cuencas, si no de la «cuenca de cuencas». Para definir formalmente el concepto de atractor hay que recurrir a una herramienta matemática generalmente incomprendida, la derivada.

Las funciones pueden considerarse como transformaciones de conjuntos. Por ejemplo, nuestro mapeo transforma, en particular, un intervalo en sí mismo y nosotros asociamos esto con el paso de un periodo de tiempo en nuestro espacio fase. Otro ejemplo, la función $g(x)=2x$ toma al eje X y lo «aumenta» dos veces, es decir, transforma la recta real expandiéndola al doble; al representar esto en el plano el eje X es la recta original, el eje Y es la recta transformada y, la gráfica de la función, que indica cómo es la transformación, es una línea recta «inclinada» que pasa por el origen. Reconocemos que esta función es una transformación lineal porque su gráfica es una línea recta que cruza el origen. Cuando la gráfica es una línea recta pero no pasa por el origen, se dice que corresponde a una transformación afín a una lineal. Cuando las gráficas no se ven como líneas rectas, se dice que corresponden a transformaciones no lineales. La definición formal de función lineal tiene que ver con que la transformación «respete» el comportamiento que generan sumas y constantes:



Función lineal.

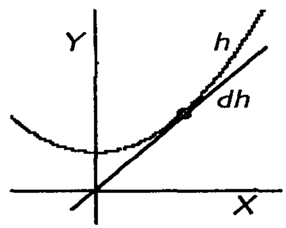
Se dice que la función f es lineal si:

i) $f(ax) = a\, f(x)$, donde a es una constante.

ii) $f(x+x') = f(x)+f(x')$

Las funciones no lineales son aquellas que no cumplen con esta definición, de ellas se acostumbra decir que no «abren» sumas, ni «sacan» constantes, y pensándolas como transformaciones de conjuntos son difíciles de describir. Por eso es mucho más sencillo trabajar con transformaciones lineales que con no lineales. Para comprender el comportamiento de una transformación no lineal, nos gustaría encontrar alguna que sí lo fuera y se comportara de manera semejante porque sería más sencilla de entender.

Pues bien, imaginemos que tenemos una transformación no lineal h. Si escogemos un punto en la gráfica de h, podemos trazar sobre él una línea recta tangente que localmente, cerca del punto, se parecerá mucho a h. Esta recta es la gráfica de una transformación lineal, con ayuda de la cual será más sencillo comprender el comportamiento de h alrededor del punto escogido. Esta transformación lineal se conoce como la diferencial de h, se acostumbra denotarla como dh y su gráfica es un linea recta que cruza por el origen. La pendiente de esta recta es la derivada de h, cuyo valor depende del punto que escogimos en la curva. Entonces, la derivada caracteriza la transformación lineal más parecida a la transformación no lineal que queremos comprender. La derivada es una herramienta que nos ayuda a estudiar cómo se comporta una transformación no lineal de manera local. Y justamente eso es lo que queremos hacer con nuestro atractor, describir el comportamiento de nuestro mapeo alrededor de ese punto. No sobra decir que todo esto está platicado únicamente en español. Ahora sí, ya podemos regresar con nuestro actractor, su cuenca infinita y, sus definiciones.



¿Cómo podemos estar seguros de que tenemos un verdadero atractor que succiona una cuenca infinita, si solo hicimos telarañas para unos cuantos puntos? Por eso en matemáticas uno no «observa» los resultados, ni afirma «intuitivamente» nada. En matemáticas la única manera de dar una conclusión es demostrándola. Y para que no se diga que los expedientes secretos no fueron hechos por profesionales vamos a demostrar nuestra última afirmación. Pero antes una advertencia: En la siguiente demostración aparecen términos matemáticos capaces de asustar a cualquiera pero, estos términos son como el mago de Oz, sólo impresionan a primera vista; y como sucede en la historia del mago de Oz, nosotros ya tenemos lo que necesitamos, únicamente requerimos de una dosis de confianza.

Por demostrar : El cero es atractor cuando $-1 \leq \kappa < 0$.

Lo primero que debemos saber es que cuando tenemos un ente matemático, que se comporta de manera interesante, buscamos clasificarlo de una manera más específica. Una clasificación de los puntos fijos se hace según una característica llamada hiperbolicidad. Hay que saber qué es esto para clasificar a nuestro punto fijo, el cero. Veamos la definición de punto fijo hiperbólico, la cual se comprenderá siguiendo la demostración.

Definición: Un punto fijo p es hiperbólico si el valor absoluto de su derivada es distinto de 1, esto es: $|f'(p)| \neq 1$.

Es fácil comprobar que el cero es hiperbólico. Primero calculamos la derivada de nuestro mapeo:

$$f(x) = (1+\kappa)x - \kappa x^2 \qquad \text{Derivando:} \quad f'(x) = (1+\kappa) - 2\kappa x$$

Depués sólo tenemos que sustuituir:

$$f'(0) = (1+\kappa) - 2\kappa(0) = 1+\kappa$$

Ahora hay que revisar qué valores toma la suma $1+\kappa$. Los valores de κ son: $-1 \leq \kappa < 0$. Si $\kappa = -1$ entonces $1+\kappa = 0$, si tuviéramos $\kappa = 0$ entonces $1+\kappa = 1$. Pero $k < 0$ entonces los valores que puede tomar la suma $1+\kappa$ son: $0 \leq 1+\kappa < 1$, sustituyendo: $0 \leq f'(0) < 1$. Así $f'(0)$ nunca toma el valor de 1 ni de -1. Luego entonces el valor absoluto de $f'(0)$ es distinto de 1:

$$|f'(0)| \neq 1$$

Por lo tanto, el punto fijo cero es hiperbólico.

Hasta ahora vamos bien y ya casi terminamos. Solo falta revisar la definición de punto fijo hiperbólico atractivo o atractor.

Definición: Un punto fijo hiperbólico p es atractivo o atractor si $|f'(p)| < 1$.

Pues ya terminamos porque ya sabemos que: $0 \leq f'(0) < 1$. Entonces el valor absoluto de $f'(0)$ siempre es menor que 1:

$$|f'(0)| < 1$$

Por lo tanto, el cero es atractor cuando $-1 \leq \kappa < 0$. Que es lo que había que demostrar.

Ahora sí, como ya lo demostramos ya podemos afirmar que: El estado del sistema en el que nadie cree en los extraterrestres es un atractor cuando $-1 \leq \kappa < 0$. La demostración de que el estado en el que 100% de la población cree es un repulsor, se puede hacer de la misma manera que la anterior. Como la idea es la misma, no realizaremos la demostración pero sí diremos que un punto fijo hiperbólico p es repulsivo o repulsor si $|f'(p)|>1$.

Entonces los puntos fijos pueden ser o no ser hiperbólicos, si lo son entonces son atractores o repulsores, pero ¿por qué se usan esas extrañas definiciones? No es la finalidad de este expediente explicar porque se definen así estos conceptos pero para disipar un poco el aire de misterio, vamos a platicar algo en puro español. La derivada evaluada en un punto puede pensarse como la razón de cambio del modelo en ese punto. En los puntos fijos esta razón de cambio «controla» la migración de puntos cercanos y, la transformación lineal que caracteriza es puramente contractiva en el caso de un atractor y expansiva en el de un repulsor. Ahora la pregunta es ¿cuáles puntos son cercanos y cuáles lejanos?.

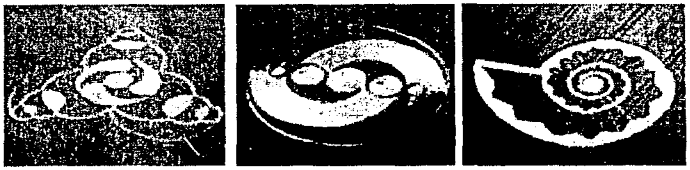
Primero vamos a darle nombre a los puntos que tarde o temprano terminan en otro punto. Es decir, puntos que después de muchas iteraciones de f llegan a un punto en especial y se quedan con él. Y aquí sí sabemos cuántas iteraciones son muchas: Una infinidad, bueno no exageremos, casi una infinidad. Digamos que p es un punto en especial, entonces le ponemos a x el nombre de asintótico hacia adelante a p, si el mapeo ha dejado a x en p cuando el número de iteraciones se acerca o tiende a infinito.

El conjunto de todos los puntos asintóticos hacia adelante a p se llama conjunto estable de p, y se denota por $W^s(p)$. Si el punto p es fijo hiperbólico atractivo su conjunto estable será una vecindad. Esto es, un intervalo que no contiene a sus extremos; por ejemplo, $0<x<1$, es el intervalo de todos los valores entre cero y uno pero no contiene a cero ni a uno, si p fuera 0.5 este intervalo sería una vecindad de p. Ahora, como esta vecindad está formada por puntos que se van acercando al atractor, la podemos ver como una «cuenca» de atracción. Podemos tener varias cuencas para un atractor, pero esta vecindad es la cuenca más grande que no está «rota». En puro español podemos decirlo así: esta vecindad es donde vive el atractor y donde todas las «niñas» sienten su poder de seducción, puede tener otros amores en otros lugares pero es en su vecindad donde es un verdadero Don Juan. En nuestro mapeo con valores $-1 \leq \kappa < 0$, el atractor es el cero y su conjunto estable es un intervalo abierto a su alrededor que va, desde números negativos, hasta antes del uno. Pero como nuestro espacio fase es $[0,1]$ no consideramos a los negativos y el conjunto estable serán todas las x que $0 \leq x < 1$, es decir $W^s(0)$ es $[0,1)$. O sea, todos los puntos «cercanos» al atractor son todas las condiciones iniciales de nuestro sistema exceptuando el 100% de creyentes en la población. Y esta última condición, el 100% , ya le queda «lejos» al atractor.

Podríamos hablar mucho más acerca de estos conceptos pero, como siempre sucede, lo urgente no deja tiempo para lo importante y, es urgente continuar la investigación de la invasión extraterrestre. Los alienígenas han diseñado una muestra aleatoria de la raza humana. Siguiendo este diseño realizan «abducciones» para hacer pruebas mentales. Gracias a esto, han determinado que la humanidad tiene tendencia a no creer en la existencia de los extraterrestres: $\kappa = -0.5$ Lo cual es preocupante porque les facilita la conquista de la Tierra. Con esto en mente, es momento de enfrentar el hecho más terrible revelado por las investigaciones de los agentes especiales: La invasión ya ha comenzado.

La invasión extraterrestre no será mediante armas de destrucción masiva, será paulatina, encubierta, sucederá frente a nuestros ojos sin que nos demos cuenta y, no veremos la verdad hasta que sea demasiado tarde, cuando la Tierra sea suya. Con este fin los alienígenas están implementando diversas estrategias:

- Para reducir la población humana han traído a la Tierra algunos organismos extraterrestres como el VIH.
- Para alterar genéticamente nuestras cosechas marcan los campos de cultivo con símbolos circulares como estos:

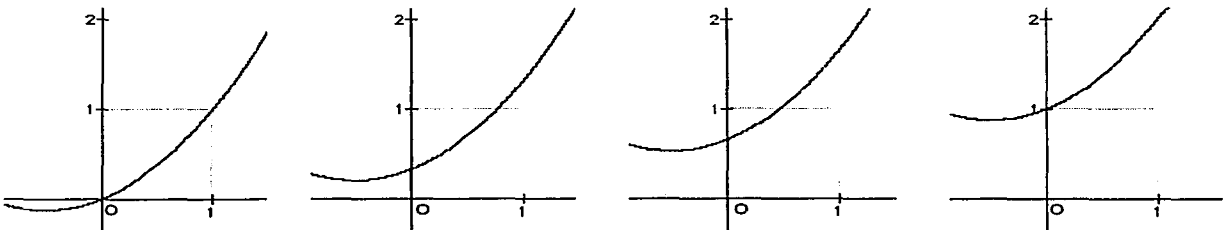


- Para adormecer nuestras mentes, mandan mensajes subliminales en los medios masivos de comunicación y reparten por el mundo una extraña yerba con forma de cigarro.
- Finalmente, para controlarnos, algunos «grises» han tomado forma humana y ocupado posiciones clave en la política y la economía mundial. Han logrado ocupar puestos en la oficina oval de la Casa Blanca, la organización mundial de globalifóbicos, la internacional socialista, la OTAN, el FMI, la FIFA y, el comité internacional del certamen Miss Universo.

Para llevar a cabo estas acciones los alienígenas deben, al menos, aterrizar sus platillos voladores en algún momento y así, exponerse a que una fracción de gente los vea cada periodo de tiempo. Entonces tenemos un porcentaje de nuevos creyentes debido a encuentros con extraterrestres y el anterior sistema dinámico se convierte en:

$$g(x) = 0.5\,x + 0.5\,x^2 + \lambda\,.$$

En donde hemos sustituido el valor $\kappa=-0.5$ y, ahora la letra griega lamda, λ, es un nuevo parámetro que representa la proporción de gente que ha tenido algún encuentro cercano del tercer tipo. Los alienígenas deben cuidar que no los vea mucha gente pero también necesitan continuar con sus estrategias de conquista. Entonces deben determinar qué tan grande puede ser λ sin tener a toda la humanidad creyendo en su existencia. Como λ representa proporciones de la población, los valores que evidentemente puede tomar son $0\leq\lambda\leq 1$. Para entender qué le hace este nuevo parámetro al modelo veamos las siguientes gráficas:



$\lambda=0$ $\lambda=0.33$ $\lambda=0.66$ $\lambda=1$

Mientras λ crece va levantando la gráfica del modelo. Desgraciadamente nos va sacando del espacio fase pero esto es lógico, por ejemplo, si tenemos 0% de población como creyentes y en un periodo el 100% tiene un encuentro cercano, tendremos a todos creyendo en un solo periodo de tiempo; esto es precisamente lo que nos muestra la última gráfica, $\lambda=1$. Algo más que podemos decir viendo las gráficas es que, ya no tendremos los mismos puntos fijos. En el modelo anterior, f, el cero y el uno se mantenían fijos y los cambios en el parámetro κ «torcían» la gráfica. En este nuevo mapeo, g, la gráfica se mantiene «rígida» y los cambios en el parámetro λ la suben y la bajan. Es por esto que ahora necesitamos buscar a los nuevos puntos fijos en el mundo matemático, lo cual no será complicado.

Para empezar, ya conocemos la definición de punto fijo:

$$g(x)=x \qquad \text{sustituyendo } g: \qquad 0.5\,x + 0.5\,x^2 + \lambda = x$$

Despejamos x:

$$0.5\,x^2 - 0.5\,x + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad 0.5\,(x^2 - x) + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - x + 2\lambda = 0$$

Nos hemos topado con este ente, un polinomio de segundo grado, que contiene a nuestros puntos fijos en sus entrañas, para llegar a ellos usamos la fórmula más famosa de la preparatoria:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(2\lambda)}}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 2\lambda}$$

Hemos encontrado que nuestros puntos fijos son:

$$x_{(1)} = 0.5 + \sqrt{0.25 - 2\lambda} \quad , \qquad x_{(2)} = 0.5 - \sqrt{0.25 - 2\lambda}$$

¿Por qué no hemos encontrado números como con el mapeo anterior? Porque ahora los puntos fijos dependen del valor de λ. Para que estos puntos fijos sean reales, en el sentido matemático, necesitamos que lo que está adentro de la raíz sea positivo:

$$0.25 - 2\lambda \geq 0 \Rightarrow \qquad -2\lambda \geq -0.25 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda \leq 0.125$$

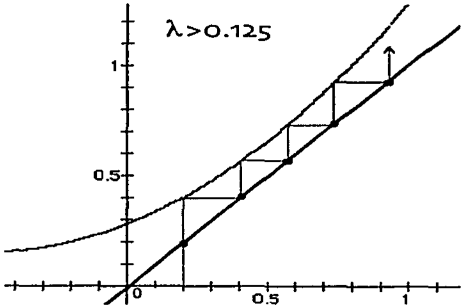
Ya está; aunque todavía no quede claro, ya tenemos a nuestros puntos fijos.

¿Qué significa lo que acabamos de encontrar? Que si λ toma valores mayores a 0.125 no hay puntos fijos; es decir, si la proporción de personas que tienen encuentros cercanos es mayor al 12.5%, todas las posibles condiciones iniciales de nuestra población migrarán hacia algún lado, podemos imaginar hacia dónde: A que todos crean, pero cuidado, matemáticamente este estado tampoco es fijo. Ahora, si $0 \leq \lambda \leq 0.125$ tendremos dos puntos fijos, $x_{(1)}$, $x_{(2)}$. Pero cuidado aquí también, algo raro sucede si $\lambda = 0.125$:

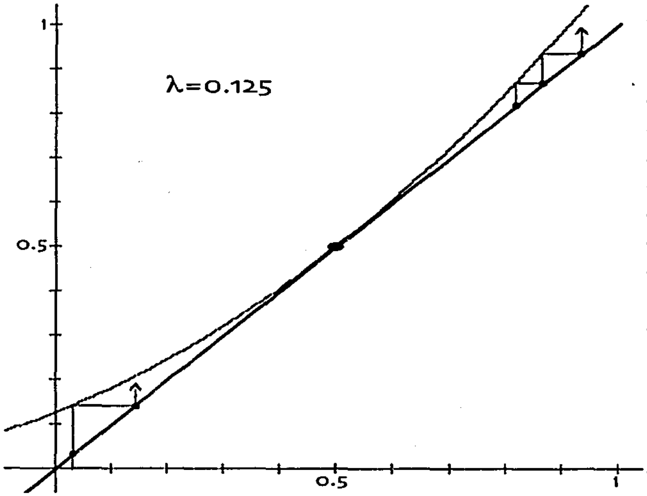
$$x_{(1)} = 0.5 + \sqrt{0.25 - 2\lambda} = 0.5$$

$$x_{(2)} = 0.5 - \sqrt{0.25 - 2\lambda} = 0.5$$

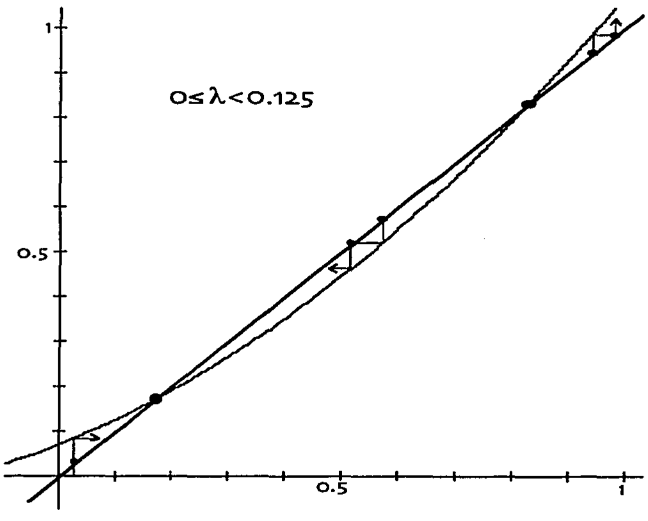
Resulta que $x_{(1)} = x_{(2)}$, o sea, tenemos un único punto fijo. Si ahora $\lambda = 0.1249$ es evidente que tendremos dos puntos fijos, aunque estén muy cercanos. Con esta información ya podemos hacer gráficas para entender que es lo que está pasando.



Cuando $\lambda>0.125$ la gráfica de *g* queda por arriba de la identidad, así vemos que no hay puntos fijos. Tejiendo la telaraña observamos que todos las posibles condiciones inciales salen del espacio fase. En la «realidad» esto quiere decir que más temprano que tarde todos creerán en los alienígenas. Absolutamente todos los puntos migran hacia el mismo lugar, fuera del plano; en español podríamos decir que se dirigen al infinito y más allá.



Cuando $\lambda=0.125$ la gráfica de *g* «roza» en un solo punto a la identidad, así tenemos un único punto fijo, $x=0.5$. Tejiendo la telaraña observamos que los puntos a la izquierda del fijo se acercan a él y, los que están a su derecha se alejan. Entonces, el 0.5 es atractor por la izquierda y repulsor por la derecha. En la «realidad» esto quiere decir que: Si la condición incial es menor que 0.5 en el largo plazo la mitad de la población será creyente y la otra mitad no, si la condición incial es mayor que 0.5 en el largo plazo todos creerán. Algo notable es la doble personalidad del punto fijo, por un lado es un debilucho amable que acerca a los demás, pero por el otro es un monstruo verde capaz de espantar a cualquiera y, un punto que se comporta así da mucho de que hablar.



Cuando $\lambda<0.125$ la gráfica de *g* corta en un dos puntos a la identidad, así tenemos dos puntos fijos. Tejiendo la telaraña observamos que un fijo, el de abajo, es atractor y, el otro fijo, el de mayor valor, es repulsor. Los valores numéricos de los fijos se obtienen con las fórmulas que encontramos antes. Si la condición inicial es menor que el punto fijo de mayor valor, el «de arriba», en el largo plazo el sistema se encontrará en el punto fijo de menor valor, el «de abajo»; si la condición inicial es mas grande que el fijo de mayor valor, tendremos en el futuro a toda la población creyendo. Mientras más pequeño sea λ más se separarán los puntos fijos, hasta llegar al cero y al uno.

Para llegar al fondo en una de nuestras líneas de investigación y dar un ejemplo de cómo se prueban las afirmaciones anteriores, vamos a demostrar que el punto fijo de mayor valor es repulsor; la demostración será muy parecida a la anterior, únicamente diferirá en que ahora operaremos sobre desigualdades. Tomamos nuestra dosis de confianza y recordamos cuáles eran nuestros puntos fijos:

$$x_{(1)} = 0.5 + \sqrt{0.25 - 2\lambda} \quad , \qquad x_{(2)} = 0.5 - \sqrt{0.25 - 2\lambda}$$

Por demostrar: $x_{(1)}$ es repulsor cuando $\lambda<0.125$

El mapeo es: $g(x) = 0.5\,x + 0.5\,x^2 + \lambda$, derivando: $g'(x) = 0.5 + x$

sustituimos: $g'(x_{(1)}) = 0.5 + (0.5 + \sqrt{0.25 - 2\lambda})$

Por otra parte tenemos que $\lambda<0.125$, vamos a hacerle cirugía plástica a esta desigualdad:

$$\lambda < 0.125 \Rightarrow -2\lambda > -0.25 \Rightarrow 0.25 - 2\lambda > 0 \Rightarrow \sqrt{0.25 - 2\lambda} > 0$$

$$\Rightarrow 0.5 + 0.5 + \sqrt{0.25 - 2\lambda} > 1 \quad , \text{pero} \quad g'(x_{(1)}) = 0.5 + 0.5 + \sqrt{0.25 - 2\lambda}$$

$$\Rightarrow g'(x_{(1)}) > 1 \Rightarrow |g'(x_{(1)})| > 1$$

Así es como la queríamos ver porque cumple con la defininción de repulsor. Por lo tanto, $x_{(1)}$ es repulsor cuando $\lambda<0.125$. Que es lo que había que demostrar.

Es hora de vernos las caras con el punto con problemas de personalidad, aunque hay que tratarlo bien porque ya sabemos que no es él cuando se enoja. Teníamos con $\lambda=0.125$ que:

$$x_{(1)} = 0.5 = x_{(2)}$$

Vamos a llamarlo $x_h = 0.5$. Ahora hay que intentar clasificarlo:

La derivada de g es: $g'(x) = 0.5 + x$ sustituimos : $g'(x_h) = 0.5 + 0.5$

$$\Rightarrow g'(x_h) = 1 \Rightarrow |g'(x_h)| = 1$$

Por lo tanto x_h es no hiperbólico, por eso es que tiene problemas de doble personalidad. Sin embargo lo más interesante de este punto no es su comportamiento, si no el fénomeno que sucede en estos puntos fijos no hiperbólicos: Bifurcación.

Para $\lambda>0.125$ tenemos la misma dinámica, es decir, en términos prácticos no existe diferencia entre el mapeo con $\lambda=0.145$ y con $\lambda=0.1451$. Pero sí existe una gran diferencia entre la dinámica del mapeo con $\lambda=0.125$ y con $\lambda=0.1251$, en el primero tenemos un punto fijo y en el segundo ya no tenemos ninguno . Si pensamos a $g(x)$ como una familia de funciones donde cada valor de λ nos da un hermano distinto, o un mapeo $g_\lambda(x)$ distinto, entonces tenemos que: Los hermanos mayores, $\lambda>0.125$, se comportan igual; los hermanos menores, $\lambda<0.125$, se comportan igual entre ellos pero no como los mayores; y tenemos un hermano incómodo, con $\lambda=0.125$, que está en la frontera entre los dos tipos de comportamiento y es único. Entonces la familia de funciones sufre un cambio drástico en su dinámica, cambia cualitativamente su comportamiento al tomar λ este valor. Decimos entonces que la familia de sistemas dinámicos pasa por una bifurcación.

Ya teníamos $x_h = 0.5$. Al valor especial de λ le pondremos $\lambda_h=0.125$. Para referirnos al hermano incómodo usaremos $g_{\lambda_h}(x) = 0.5\,x + 0.5\,x^2 + \lambda_h$. Ahora, con un hermano incómodo podemos hacer dos cosas, meterlo en un penal de máxima seguridad para evitar escándalos políticos o, intentar comprenderlo. Nos inclinaremos por la segunda opción. Buscaremos algún tipo de diagrama que nos muestre, de manera evidente, la información del hermano incómodo. De antemano no sabemos si este diagrama existe o, cómo construirlo; necesitamos definirlo. Sin embargo, la definición de este diagrama será distinta a las que hemos visto antes, porque este diagrama se define por construcción. Es decir, algunas veces en matemáticas uno puede garantizar la existencia de algo antes de tenerlo enfrente y, esta existencia se garantiza dando la manera de construir ese algo; el diagrama que buscamos es un buen ejemplo de esto, ya que su existencia se asegura por un resultado matemático que dice cómo construirlo, aún más, este resultado nos dice cómo reconocer mapeos que causan el tipo de bifurcación que hemos visto; el resultado se llama: Teorema de bifurcación nodo-silla

Como ya tenemos claro qué es lo que sucede con la bifurcación que estamos investigando, no será necesario comprender del todo este teorema, sólo lo usaremos para ejemplificar las definiciones por construcción y, para ver cómo es posible saber que algo existe antes de verlo. De hecho, la lógica de esto es sencilla, tenemos unas cuantas características que nos garantizan que cierto fenómeno sucede; cuando volvamos a observar estas mismas características en otro modelo, sabremos que el mismo fenómeno sucederá. En este caso, es el mapeo, al que apodamos hermano incómodo, el que posee características especiales, las cuales nos aseguran que ocurre la bifurcación que ya hemos descrito; así, cuando tengamos otro mapeo con estas mismas características, sabremos que será en ese mapeo donde su familia sufrirá un tipo de bifurcación, que según el teorema, se llama bifurcación nodo-silla.

Entonces revisemos las propiedades que el hermano incómodo, con su comportamiento delictivo, ha logrado reunir. Pero para esta investigación no será indispensable comprender del todo esta lista de características matemáticas:

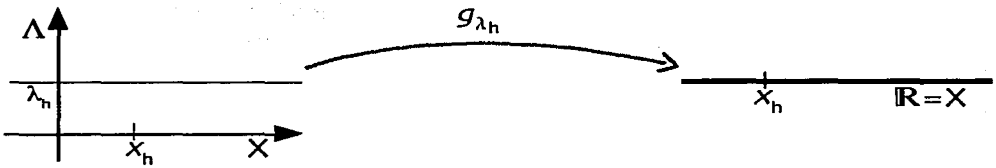
i) El mapeo tiene un punto fijo: $g_{\lambda_h}(x_h) = x_h$.

ii) El fijo es no hiperbólico, ya que la derivada de g evaluada en él vale uno: $g_{\lambda_h}'(x_h) = 1$.

iii) La segunda derivada evaluada en el punto es distinta de cero: $g_{\lambda_h}''(x_h) \neq 0$.

iv) La derivada de g con respecto del parámetro es distinta de cero: $\left.\frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_h}(x_h) \neq 0$.

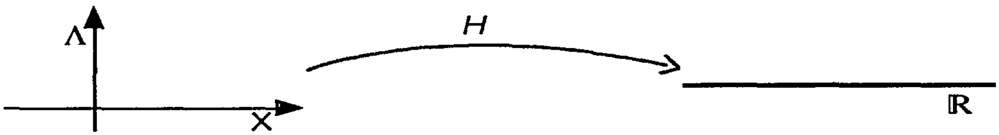
El primer inciso nos dice que el hermano incómodo debe tener un punto fijo, los otros tres incisos describen el comportamiento local del mapeo alrededor del punto fijo, que como hemos visto es un poco esquizofrénico, por eso es que su comportamiento se define de manera tan extraña. Veamos otra forma de representar lo que el hermano incómodo hace.



En el plano podemos usar el eje horizontal para representar los valores de x. El eje vertical para los de λ. Así, en el plano están todas las combinaciones (x,λ). Vemos que en este plano λ_h se representa como una recta. La cual consiste de puntos de este tipo: (x,λ_h).

Otra forma de explicar lo que el hermano incómodo hace, es la siguiente, el mapeo toma la recta λ_h y la manda a la recta real, revolviéndola un poco.

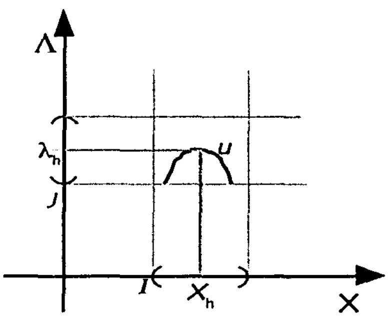
Ahora $\mathbb{R}$ representa los valores de x, después de una iteración del mapeo con el parámetro λ_h. La recta real se ha revuelto y el único punto que queda en su lugar es, obviamente, el punto fijo x_h.



Lo que tenemos en este plano, de donde tomamos la recta λ_h, es el espacio fase en el eje horizontal, y valores del parámetro en el vertical. Así podemos asociar estados del sistema con valores del parámetro.

De manera muy especial construimos una función H que vaya del plano a la recta real. Es decir, H «comprime» al plano en la recta real, $\mathbb{R}$.

La función H debe mandar los puntos fijos al cero y, su comportamiento alrededor del cero debe ser parecido al del mapeo alrededor del fijo.

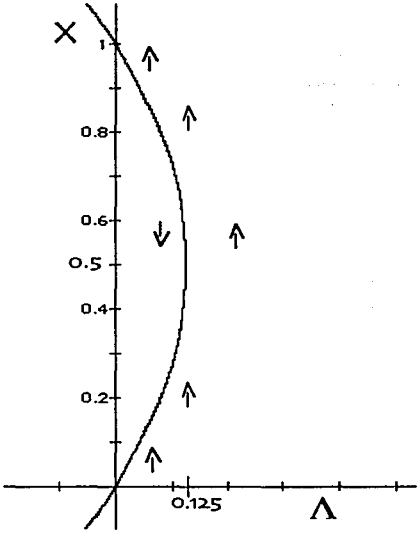


Gracias a que hemos construido a la función H de manera especial, y a las propiedades del hermano incómodo, podemos usar un resultado llamado: Teorema de la función implícita. El cual nos dice que en el plano debe existir un intervalo I alrededor de x_h, un intervalo J alrededor de λ_h y, una función u que va de I a J. Esta función u cumple, entre otras cosas:

-Manda a x_h en λ_h, $u(x_h)=\lambda_h$. Esto es, manda al punto fijo en el valor del parámetro que produce al hermano incómodo.

-Si la usamos como parámetro en g obtenemos siempre puntos fijos, $g_{u(x)}(x)=x$. Esto es, cuando le damos una x a esta función u, ella nos manda al valor de λ que hace que x sea un punto fijo para el mapeo g.

Entre otras cosas, la función u nos dice con qué parámetros tenemos puntos fijos. Vamos bien, aunque todavía no encontramos un dibujo que nos muestre claramente la información de la bifurcación, la función u ya la contiene, solo necestiamos acomodar la figura anterior de manera más útil. De hecho, lo único que tenemos que hacer es intercambiar los ejes, es decir, «voltear» la gráfica por fuera de la hoja para «levantar» al eje horizontal y «acostar» al vertical. Haciendo esto obtenemos un diagrama de bifurcación.



En el eje horizontal tenemos los valores de λ, en el eje vertical los de x. El diagrama toma los valores de λ y nos muestra cuáles valores de x son puntos fijos para nuestro mapeo g. Ya no necesitamos revisar varias gráficas, con solo ver este diagrama sabemos que:

- Con $\lambda>0.125$ no tenemos puntos fijos en g.
- En $\lambda=0.125$ existe un único punto fijo, $x=0.5$.
- Con $\lambda<0.125$ tenemos dos puntos fijos, de hecho, cuando $\lambda=0$, los puntos fijos son cero y uno.

Algunas personas gustan de condimentar sus diagramas con flechas que indiquen hacia dónde se dirigen los valores de x: Sin puntos fijos se van al infinito y más allá. En el único fijo, los que están debajo van hacia él y, los mayores que él salen del plano. Cuando tenemos dos fijos, los menores a los dos fijos van hacia el de menor valor, los que están en medio también de los fijos van hacia el de menor valor, los mayores a los dos fijos salen del plano.

Visto así, es obvio que los alienígenas buscan restringir su actividad de manera que menos del 12.5% de la población los observe en cada periodo de tiempo, $\lambda<0.125$. Con esto pueden continuar preparando al mundo para su conquista y, aún así, en el largo plazo la mayoría de la población no creerá en ellos. De hecho, agentes especiales han interceptado un mensaje del alto mando alienígena y, sabemos que sus órdenes son mantener a la raza humana con únicamente 10% de creyentes; con esto lograrán invadir la Tierra sin encontrar resistencia. Lo anterior en dicho matemáticas es: el punto fijo de menor valor, el atractor, debe ser igual a 0.10

$$x_{(2)}=0.1 \quad \Rightarrow \quad 0.5-\sqrt{0.25-2\lambda}=0.1 \quad \Rightarrow \quad 0.25-2\lambda=(0.4)^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda=0.045$$

Por lo tanto, los «grises» invadirán nuestro planeta cuidando que no los vea más del 4.5% de la población mundial en cada periodo de tiempo y así, únicamente el 10% llegará a creer en su existencia. Si los demás no creen, mucho menos se resistirán. Y el futuro de la humanidad será tan gris como el aire de la ciudad de México.

Ésta es la estrategia de los alienígenas, la cual les asegura no tener problemas con su invasión. Ya que, a largo plazo, únicamente el diez por ciento de la población se dará cuenta de que los extraterrestres nos están visitando, el resto de la población ni siquiera creerá en ellos.

Los agentes especiales han arriesgado su vida social para obtener esta información y plasmarla en este expediente. Sus investigaciones han revelado los planes de los «grises» y la forma en que los están llevando a cabo. Ahora es responsabilidad, de quien lea el expediente, luchar contra este gris futuro e intentar salvar a la humanidad, o por lo menos a las niñas del concurso Miss Universo, antes de que sea demasiado tarde.

EXPEDIENTE 2:

Chupacabras.

En los años setentas, la Secretaría de Gobernación recibió informes de extrañas muertes de ganado en las rancherías de Tepoztlán, Morelos. Fueron enviados policías judiciales para investigar y controlar la situación. Lo que ahí sucedió, es un misterio. Los informes iniciales fueron guardados como documentos confidenciales en el archivo de la nación. Los pocos testigos prefieren no hablar de lo sucedido y presentan una extraña fobia al agua mineral. Casi tres décadas después, la historia se repetiría en diferentes regiones del país. En pequeñas rancherias dispersas por todo el territorio mexicano comenzaron a aparecer cadáveres de ganado, en estos cadáveres no había una sola gota de sangre y todos presentaban dos pequeños orificios en el cuello. Jamás se encontró rastro alguno de la sangre faltante. Lo que sí se encontró junto a los animales inhertes, fue una cantidad considerable de yerba calcinada con forma de cigarro. Fue entonces cuando la comisión especial de la PFP decidió investigar estos hechos. Después de un año de seguir pistas por las zonas más recónditas del país, los agentes especiales llegaron al cerro del Tepozteco en Tepoztlán, Morelos. Ahí realizaron un descubrimiento sorprendente. Dentro de las intrincadas cavernas del Tepozteco crece una población de criaturas hasta ahora desconocidas, los chupacabras.

Usando avanzada tecnología infrarroja los agentes especiales han logrado estudiar y fotografiar a los chupacabras. Ahora sabemos que en las profundidades de las cavernas se encuentra la aldea donde se reproducen estos duendes azules, que evidentemente se alimentan con sangre. La población de duendes consiste de individuos machos, exceptuando una única hembra que convive con ellos pero no toma parte activa en el crecimiento de la población, ya que su reproducción es asexuada. Tal vez sea por estas razones que han desarrollado su instinto asesino. De hecho cada duende es capaz de generar su propia descendencia, esto es un caso único de clonación natural. Suponemos que los primeros duendes de la aldea fueron generados por un individuo, todavía vivo, a quien los demás llaman afectuosamente: Papá chupacabra.

La información anterior aclara un poco las extrañas muertes de ganado pero, para entender su repentino auge en diferentes regiones del país y evitar que sucedan de nuevo, necesitamos investigar, aún más, a la población de duendes azules chupasangre. Sea $P(n)$ la población de chupacabras al tiempo n. Por lo que sabemos, mientras sea mayor la cantidad de duendes existentes, mayor será la cantidad de nuevos clones de duende. Es decir, el crecimiento poblacional es directamente proporcional a la población existente, y esto se escribe así:

$$P(n+1) = \mu P(n)$$

Donde la letra griega mu, μ, es un parámetro que, representa la tasa de creciemiento poblacional anual. Por ejemplo, si $\mu=1$ significaría que la población del año siguiente será igual a la de este año. Si $\mu=1.1$, la población será la misma más un 10% de nuevos individuos. Sin embargo la población también decrece. Los duendes tienen que enfrentarse, principalmente, a escasez de alimento y, debido a su reducido tamaño, competencia directa con animales como murciélagos vampiro y, depredadores como gatos, perros, coyotes, etc. Mientras mayor sea la población menos alimento habrá y más individuos serán presa de los depredadores. Entonces, si la población es pequeña tendrá mucho alimento disponible y crecerá, si crece demasiado llegará un punto en el que las condiciones dejarán de ser propicias y decrecerá. Hay que añadir un factor de decrecimiento:

$$P(n+1) = \mu P(n)[1-P(n)]$$

Entonces, $P(n)$ representa el tamaño de la población partiendo de una condición inicial después de n periodos de tiempo, es decir, $P(n)= F^n(x_o)$. Entonces tenemos:

$$F(F^n(x_o)) = \mu F^n(x_o)[1-F^n(x_o)]$$

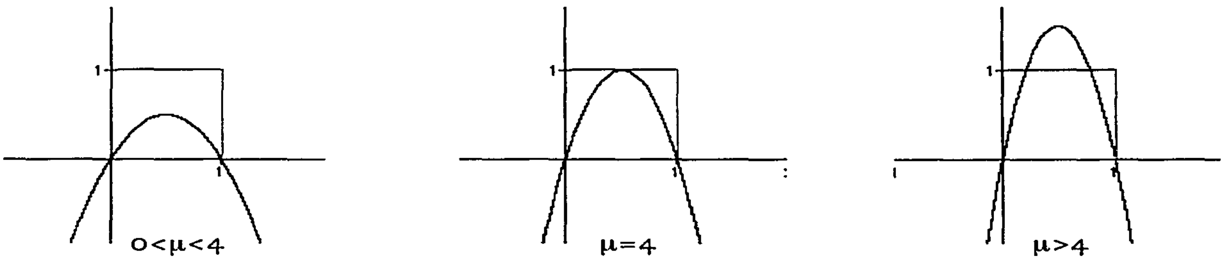
Lo cual nos indica que el mapeo que usaremos será:

$$F(x) = \mu x\,(1-x)$$

Aunque x representa tamaños de población, aquí también queremos trabajar con fracciones o proporciones para facilitar su estudio. Si consideramos un año base, su población representará el 100% . Los agentes especiales han logrado obtener algunos de los informes confidenciales de los años setentas, así tenemos 1975 como año base y la población existente en ese año como el 100%. Con esto podemos expresar los nuevos tamaños de la población como porcentaje de la existente en 1975, es decir, los valores de x representarán proporciones de esa población. Así nuestro espacio fase será nuevamente el intervalo [0,1] .

Suponemos que en 1975 la población superó la capacidad de carga de su medio ambiente y los chupacabras tuvieron que buscar alimento en las rancherías cercanas. Al ocurrir esto, suponemos que los judiciales utilizaron sus sutiles métodos para exterminarlos pero es obvio que fracasaron. Entonces, cuando x toma valores mayores o iguales que uno, el medio ambiente no soporta a tantos chupacabras y esto conlleva a su exterminio. Así se explica por qué el factor de decrecimiento es $(1-x)$.

Ya que hemos planteado el mapeo F, hagámosle una primera revisión.



Lo primero que vemos es que la parte de arriba de la gráfica se sale del intervalo cuando μ toma valores mayores que cuatro. Además podemos ver que los cambios en el parámetro «tuercen» la gráfica mientras que el cero y el uno permanecen «quietos». Pero, aunque el cero es punto fijo, el uno no lo es. Es más:

$$F(1) = \mu 1\,(1-1) = 0$$

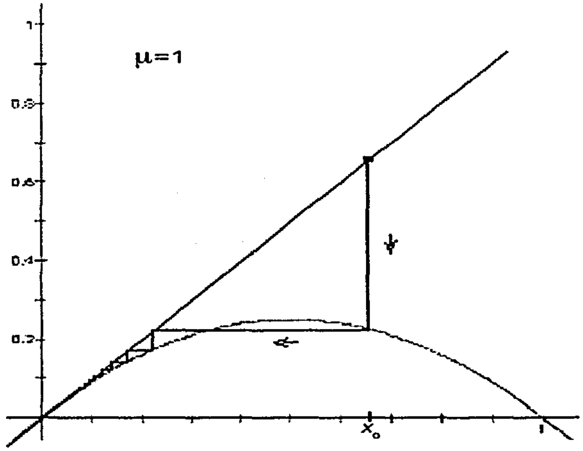
Sin importar el valor de μ, F manda el uno, en la primera iteración, al cero. En este caso decimos que el cero y el uno son los «ceros» o las raíces de nuestro mapeo. Vamos a buscar los puntos fijos:

$$F(x)=x \quad \Rightarrow \quad \mu x\,(1-x) = x \quad \Rightarrow \quad \mu x - \mu x^2 = x \quad \Rightarrow \quad -\mu x^2 + (\mu - 1)x = 0$$

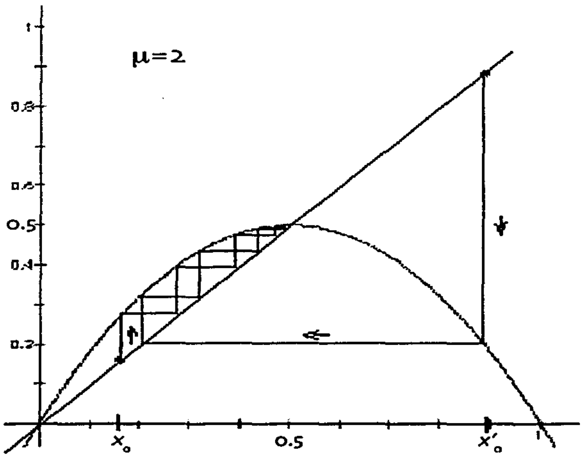
$$\Rightarrow \quad x = \frac{-(\mu-1) \pm \sqrt{(\mu-1)^2}}{-2\mu} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-(\mu-1) \pm (\mu-1)}{-2\mu}$$, entonces los puntos fijos son:

$$x_{(1)} = 0 \quad , \quad x_{(2)} = (\mu - 1) / \mu$$

Ya esperábamos que el cero apareciera en esta búsqueda. Esto tiene sentido en la «realidad» ya que el cero indica 0% de población, cero individuos, o sea la extinción de la especie. Y como hemos visto con varias especies de nuestro planeta, extinción significa para siempre. Entonces la extinción es un estado fijo del sistema. El otro punto fijo depende del valor que tome μ. Vamos a tejer algunas telarañas para darle más sentido a esta información.



Con $\mu=1$, tenemos que el punto fijo que depende de μ vale cero. Así existe un único punto fijo y todas las condiciones iniciales tienden hacia él. En la «realidad» esto significa que algún día se extinguirán los chupacabras. Si $\mu<1$ tenemos dos puntos fijos, el cero y otro negativo. Como un punto fijo negativo no tiene significación en la «realidad», podemos decir que cuando $\mu\leq 1$ la población tiende a desaparecer. Ahora, el cambio de dos fijos a uno solo, es obviamente una bifurcación. Esta no cumple exactamente con la lista de propiedades de la nodo-silla, pero presenta el mismo comportamiento. De hecho, surgen dos puntos fijos cuando $\mu<1$ y cuando $\mu>1$, entonces tenemos algo así como dos bifurcaciones nodo-silla unidas en $\mu=1$.



Con $\mu=2$, el cero ahora es repulsor y el otro punto fijo, 0.5, es atractor pero, los puntos que se encuentran a su derecha deben «rodearlo» para acercarse por su izquierda. En la «realidad» esto significa que, no importa cuántos chupacabras mataron los judiciales, en el largo plazo tendremos la mitad de la población de 1975. Si en algún momento la población fuera mayor que la mitad, primero se reduciría drásticamente y luego crecería para estabilizarse en la mitad. Aquí lo interesante es determinar para cuáles valores de μ tenemos un comportamiento similar.

Por demostrar: El cero es repulsor y el otro fijo es atractor, cuando $1<\mu<3$

La derivada es: $F'(x) = \mu - 2\mu x$, sustituimos: $F'(0) = \mu$

pero $1<\mu \Rightarrow |F'(0)| = \mu > 1$

Por lo tanto, el cero es repulsor, cuando $1<\mu<3$.

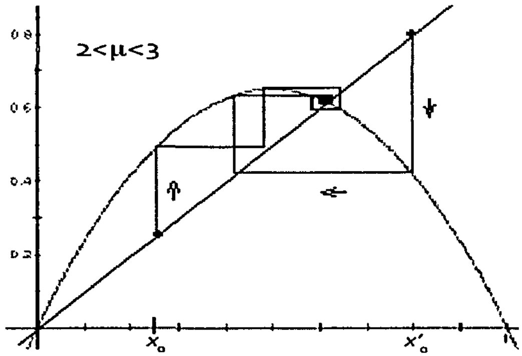
Sustituimos el otro fijo: $F'[(\mu -1) / \mu] = \mu - 2\mu[(\mu -1) / \mu] = \mu - 2(\mu-1) = 2-\mu$

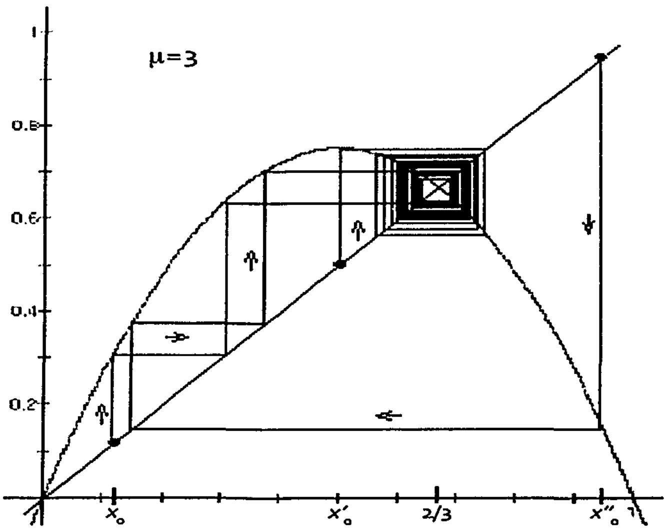
usamos la desigualdad: $1<\mu<3 \Rightarrow -1 > -\mu > -3 \Rightarrow 1 > 2-\mu > -1$

entonces $|F'[(\mu -1) / \mu]| < 1$

Por lo tanto, el fijo que depende del valor de μ es atractor, cuando $1<\mu<3$. QED.
(Se usan las siglas latinas QED como abreviación de: Que es lo que había que demostrar).

En la «realidad» esto quiere decir que, mientras la tasa de crecimiento esté entre uno y tres, la población de chupacabras tenderá a estabilizarse en algún valor, este valor dependerá de la tasa de crecimiento. Sin embargo, cuando μ toma valores entre dos y tres, hay una ligera diferencia. Los puntos se acercan al atractor brincando de un lado a otro, en la telaraña de al lado, esto se ve como una espiral o pequeño remolino que forman los puntos al acercarse al atractor.



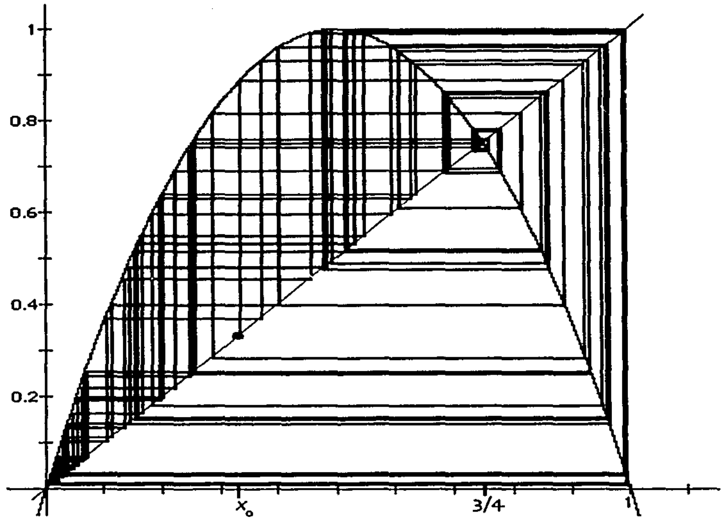


Cuando $\mu=3$ algo raro sucede. El cero es repulsor y en el otro punto fijo es 2/3. Pero los demás puntos parecieran girar mucho más rápido de lo que se acercan al fijo. Vamos a revisar a este punto fijo:

La derivada es: $F'(x) = \mu - 2\mu x$
sustituimos: $F'(2/3) = 3 - 6(2/3)$
$\Rightarrow F'(2/3) = 3 - 4 = -1$
$\Rightarrow |F'(2/3)| = 1$

El punto fijo 2/3, no es hiperbólico. Con razón se comporta tan raro. Entonces en $\mu=3$, el punto fijo que depende de μ, ya no forma remolinos. Ahora se ha convertido en el vórtice de la gran vorágine, la Moskoe-Ström, del cuento de Edgar Allan Poe.

$\mu=4$



¿Qué asombroso hombre arácnido ha pasado por aquí? En la figura de arriba, con $\mu=4$, se ha tejido la telaraña de una sola condición inicial. El punto fijo es 3/4 pero, lo único claro es que el comportamiento del sistema se ha vuelto demasiado complicado. Aunque esta telaraña verdaderamente parece haber sido tejida por un sorprendente hombre arácnido, no nos es útil, necesitamos algo más.

Como los duendes azules chupasangre se clonan a si mismos de manera natural, nada impide que la tasa de crecimiento sea mayor que cuatro. Pero ni siquiera entendemos las telarañas de las tasas 3 y 4, mucho menos podemos explicar qué sucede con la población de chupacabras. Definitivamente necesitamos algo más, necesitamos realizar una expedición a tierras desconocidas. Ha llegado la hora de recorrer la Ruta al Caos.

En matemáticas, como en todo, existe más de un camino para llegar a donde vayamos. La ruta que seguiremos se considera típica, pero no es la única. Y en matemáticas también es cierto que, un viaje de mil kilómetros comienza con el primer paso. Nuestros primeros pasos partirán de territorio conocido. Veamos un ejemplo del comportamiento de F, con $\mu=2$, usando números. Estos ejemplos numéricos aclaran las ideas pero es bueno mantener en mente que las calculadoras y computadoras redondean los números, y esto es una limitación que algunas veces puede confundirnos.

$F(x) = 2x(1-x)$	condición inicial =	0.2	condición inicial =	0.9
	iteración 1	0.32	iteración 1	0.18
	2	0.4352	2	0.2952
	3	0.4916	3	0.4161
	4	0.4998	4	0.4859
	5	0.4999	5	0.4996
	6	0.5	6	0.4999
	7	0.5	7	0.5
	8	0.5	8	0.5

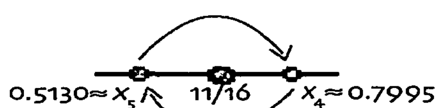
Con el ejemplo anterior revisamos lo que ya habíamos observado con la telaraña de $\mu=2$. Tomamos dos condiciones iniciales diferentes, y las dos se estabilizan en el mismo valor, 0.5. Cuando sucede que al tomar condiciones iniciales «cercanas» obtenemos, a largo plazo, resultados parecidos, decimos que el mapeo es insensible a las condiciones iniciales. Como ya sabemos, la cercanía o lejanía de los puntos, tiene que ver con intervalos a su alrededor, es decir, con sus vecindades. En este caso, el mapeo es insensible a las condiciones iniciales cuando se aplica en el intervalo (0,1), ya que todo el intervalo se comporta de manera similar. Las condiciones inciales cero y uno son casos especiales que no nos afectan. Es bueno recordar que este párrafo está escrito en español y no es una definición matemática. Entonces podemos decir en español que, F es insensible a las condiciones iniciales cuando $\mu=2$. Ahora veamos qué sucede con $\mu=3$ y $\mu=3.2$

$F(x) = 3x(1-x)$	
$x_0 =$	0.2
1	0.4800
2	0.7488
3	0.5643
4	0.7376
5	0.5806
6	0.7305
7	0.5906
8	0.7254
9	0.5976
10	0.7214

Aquí $\mu=3$. Por las pocas iteraciones que tenemos podemos suponer que, la condición inicial «brinca» de un lado al otro del punto fijo 2/3, aproximadamente 0.6666, y en cada brinco se acerca un poco más pero jamás llega a él. Esto sucede con diez, cien o mil iteraciones. Y si probamos con diferentes condiciones iniciales sucede lo mismo, el mapeo continúa siendo insensible a las condiciones iniciales. Una manera de imaginar lo que sucede es, mientras $2<\mu<3$, el fijo atrae a los demás haciéndolos girar en un remolino pero, en cuanto $\mu=3$, aumenta tanto el poder del remolino, que sería necesaria una infinidad de iteraciones para que los demás puntos dejaran de girar y llegaran al fijo. Verdaderamente estamos frente a una gran vorágine.

$F(x) = 3.2x(1-x)$	
$x_0 =$	0.2
1	0.5120
2	0.7995
3	0.5129
4	0.7995
5	0.5130
6	0.7995
7	0.5130
8	0.7995
9	0.5130
10	0.7995

Con $\mu=3.2$ la condición inicial, 0.2, oscila entre dos valores luego de varias iteraciones. En la «realidad» significaría que, después de cuatro años de la intervención de los judiciales, la población de chupacabras será el 79.95% de la de 1975, después de cinco será 51.30%, al año siguiente 79.95%, etcétera. Estos puntos que se repiten después de algunos periodos se llaman puntos periódicos. En este caso, 0.5130 y 0.7995, son puntos periodicos. Si del retrato fase solo consideramos a los puntos periódicos y al fijo que depende de μ, 11/16 , obtenemos:



En general, x es un punto periódico de periodo n si $f^n(x)=x$. Regresemos al ejemplo, el conjunto formado por $\{x_4, x_5\}$ es una órbita periódica; x_4 es un punto periódico al que regresamos cada dos iteraciones pero por supuesto que también lo hacemos cada cuatro, cada seis, etcétera; para evitar confusiones decimos que x_4 es un punto periódico de primer periodo 2. Así, los puntos fijos también pueden pensarse como puntos periódicos que regresan en un solo periodo, es decir, los puntos fijos son puntos periódicos de primer periodo 1. Esto es, en las iteraciones del ejemplo tenemos que:

$$x_4 = x_6 = x_8 \quad , \text{ entonces } \quad f^4(x_4) = x_8 = x_4 \quad , \text{ pero también } \quad f^2(x_4) = x_6 = x_4 \,;$$

de la misma manera razonamos con el punto fijo:

$$f^{99}(11/16) = 11/16 \;, \quad \text{pero también } f^1(11/16) = 11/16$$

Entonces, los puntos fijos son puntos periódicos de primer periodo uno. De hecho, las definiciones que conocemos de hiperbolicidad, atractor y repulsor, son casos particulares para puntos fijos porque estas definiciones se dan para puntos periódicos. En ninguna investigación es bueno olvidar cabos sin atar y para no hacerlo, vamos a dejar en el expediente las definiciones de hiperbolicidad, atractor y repulsor.

Hiperbolicidad:

Sea p un punto periódico de primer periodo n. El punto p es hiperbólico si $|(f^n)'(p)| \neq 1$.

Atractor y repulsor:

Sea p un punto periódico hiperbólico de primer periodo n.
El punto p es atractor si $|(f^n)'(p)| < 1$. El punto p es repulsor si $|(f^n)'(p)| > 1$.

Algo que ganamos con estas definiciones es que ahora podemos tener también órbitas atractoras o repulsoras, obviamente una órbita atractora es aquella en la que todos sus puntos son atractores. Otro concepto que también se extiende a los puntos periódicos es la bifurcación. De hecho, las bifurcaciones ocurren únicamente en puntos periódicos no hiperbólicos, esto si recordamos que los fijos también son periódicos. Ya que estamos en el tema, es bastante notable la bifurcación que sufre el sistema al pasar por $\mu=3$, antes tenemos un atractor, ahí una gran vorágine y después aparecen unos puntos periódicos que forman una órbita atractora. Todo esto amerita una investigación más a fondo. Entonces consideramos a nuestro mapeo, F, como una familia de funciones donde cada valor de μ nos da un hermano distinto. Esta familia es especial, en el mundo matemático es conocida como la familia cuadrática. De las telarañas ya intuimos que existen dos hermanos incómodos, $\mu=1$ y $\mu=3$. El primero de ellos no presenta comportamiento muy interesante pero el segundo, $\mu=3$, se comporta como la gran vorágine, así que no está de más ponerlo bajo vigilancia.

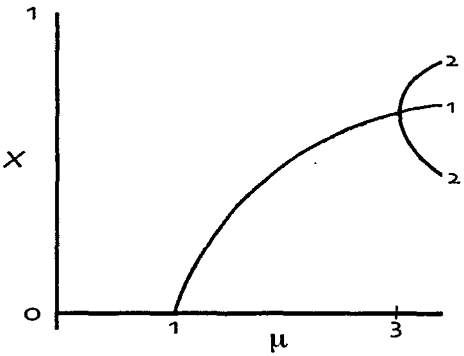
El tipo de bifurcación que conocemos, nodo-silla, es bastante distinto de éste que tenemos ahora. La diferencia consiste, básicamente, en las propiedades del hermano incómodo que genera la bifurcación. No es lo mismo tener un hermano incómodo con propiedades en Cancún, que uno con propiedades en Suiza y Cuba. Para no dejar cabos sueltos, vamos a dar la lista de propiedades matemáticas de este nuevo hermano incómodo, aunque para esta investigación no será indispensable comprenderlas del todo.

i) El mapeo tiene un punto fijo para una vecindad de μ_h: $F_\mu(x_h) = x_h \;\forall \mu \in I(\mu_h)$.

ii) El fijo es no hiperbólico, la derivada de F, evaluada en él vale menos uno: $F_{\mu_h}{}'(x_h) = -1$.

iii) La derivada de la segunda iteración de F con respecto del parámetro, evaluada en el fijo es distinta de cero: $\left.\frac{\partial g_\lambda}{\partial \lambda}\right|_{\lambda=\lambda_h}(x_h) \neq 0$.

Si revisamos las propiedades de la bifurcación nodo-silla, encontramos varias diferencias con esta nueva lista de propiedades. Es bueno recordar que ambas listas se mantienen para puntos periódicos. La nueva lista parece menos impresionante pero con ella es más probable que, el hermano incómodo, tenga problemas de enriquecimiento ilícito. Esto porque, si buscamos de la misma manera que lo hicimos con la bifurcación nodo-silla, encontramos que aquí también debe existir una función u que nos proporcione información. Solo que ahora la función u, no nos garantiza la existencia de puntos fijos, si no de puntos periódicos de primer orden dos. Es decir, $F^2_{u(x)}(x)=x$. Este resultado se llama: **Teorema de bifurcación de doblamiento de periodo.**



Este es el diagrama de bifurcación. Nuevamente tenemos un diagrama que toma los valores de μ y nos da los puntos fijos en x. Aún más, el diagrama también nos da los puntos periódicos en x. La línea central marcada con 1, representa el valor del punto fijo que surge cuando $\mu=1$. Las dos líneas marcadas con 2, rerpesentan a los puntos períodicos de primer periodo 2, que nacen cuando $\mu=3$. Ya no necesitamos revisar varios ejemplos numéricos, la información de lo que ha ocurrido está plasmada en este diagrama.

Gracias a la vigilancia que hemos puesto sobre el hermano incómodo, ahora conocemos la consecuencia de su anormal comportamiento: Bifurcación que dobla periodos. Aún más, ahora conocemos el verdadero nombre de la ruta que estamos recorriendo: La Ruta de doblamiento de periodo al Caos.

Seguimos adelante, veamos lo que sucede con valores mayores de μ. Para $\mu=3.5$ el tamaño de la población de chupacabras no oscila en dos valores finales, ahora tenemos cuatro valores finales, es decir, cuatro puntos periódicos de primer periodo 4.

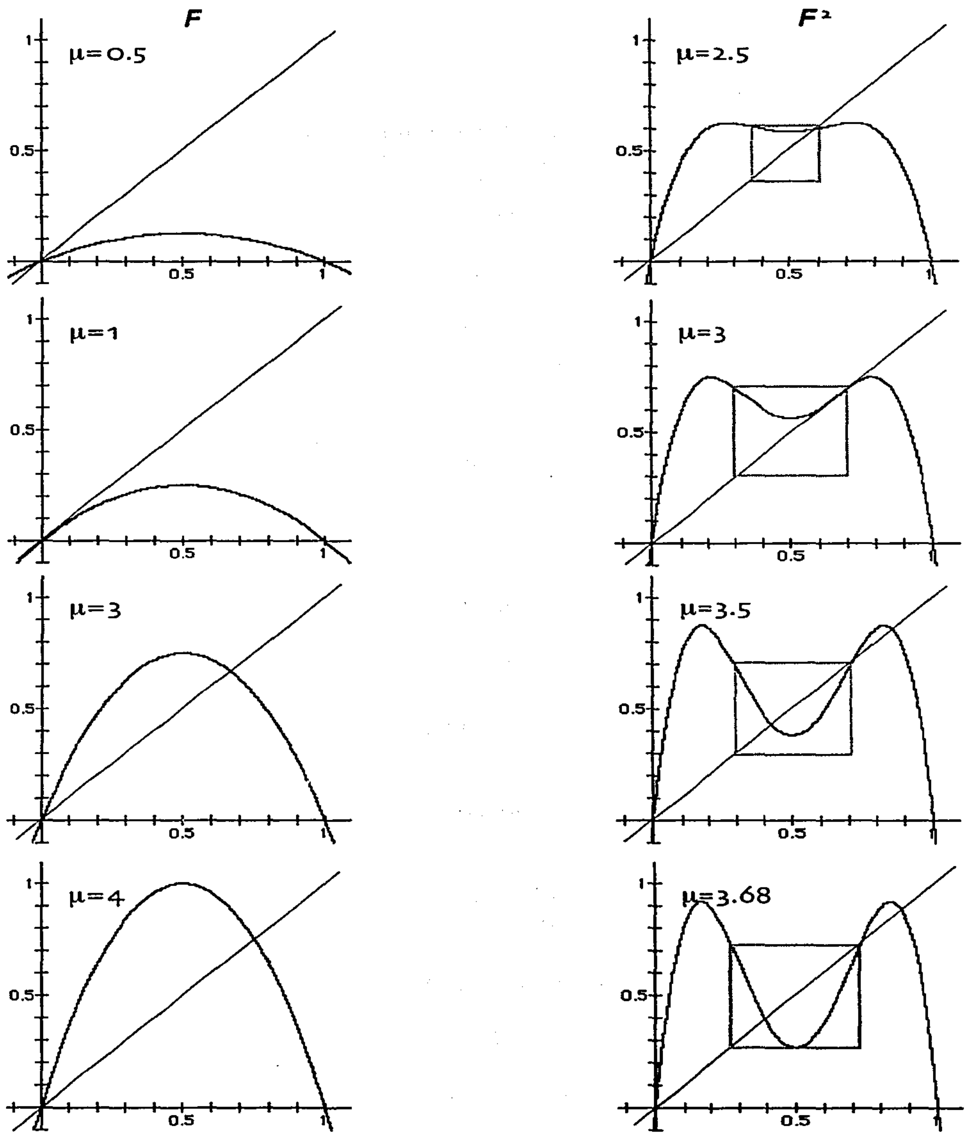
$x_0 = 0.2$ .... $x_{16} = 0.3828$ $x_{17} = 0.8269$ $x_{18} = 0.5009$ $x_{19} = 0.8750$

Para $\mu=3.55$ el tamaño de la población oscila en ocho valores finales, es decir, ocho puntos periódicos de primer periodo 8. Si probamos con $\mu=3.565$ ya tenemos 16 valores finales. Si seguimos aumentando ligeramente el valor de μ obtenemos 32, luego 64, 128, etcétera. ¿Qué está pasando? Podríamos suponer que el hermano incómodo sigue haciendo de las suyas pero es sencillo demostrar que, para μ mayor que tres, el punto fijo que depende de μ es hiperbólico repulsor, es decir, no suceden en él más bifurcaciones. Los únicos sospechosos que quedan son los puntos periódicos que se están formando.

Nuestro primer impulso es encontrar la fórmula explícita para la segunda iteración del mapeo, F^2, y revisar a los puntos periódicos de primer periodo 2, que serían fijos para F^2, los cuales sabemos cómo revisar. Después podríamos hacer los mismo con los demás periódicos. Pero esto resultaría cansado y tedioso porque con solo ver la fórmula para F^2:

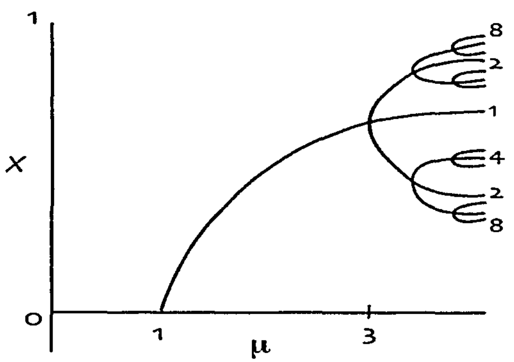
$$F^2(x)=\mu^3x^4+2\mu^3x^3-(\mu^3+\mu^2)x^2+\mu^2x$$

ya podemos imaginar la de F^4, F^{16}, F^{32}, etcétera. Y la idea de usar matemáticas no es hacer cuentas con enajenada alegría, usamos matemáticas para comprender lo que sucede. Busquemos otra manera de comprender. Observemos las gráficas de F y F^2.



En las gráficas de F^2, de la página anterior, nos fijamos en la zona enmarcada por un cuadrado, ahí podemos observar que, aunque estando «cabeza abajo» y con distintos valores de μ, la gráfica de F^2 presenta un comportamiento similar a la gráfica de F, esto es:
- En la esquina superior derecha del cuadrado, F^2 tiene un punto fijo, que para F^2 presenta el mismo comportamiento que el cero para F.
- F^2 tiene una «joroba» invertida, que crece hacia abajo mientras aumenta el valor de μ. Esta joroba, al ir creciendo, corta la diagonal, atraviesa el cuadrado y sigue hacia abajo.

Entonces, al aumentar μ, podemos esperar el nacimiento de un punto fijo dentro del cuadrado. Este punto será fijo para F^2, pero F^2 es la segunda iteración de F, entonces el punto será periódico de primer periodo 2 para F. Este punto comenzará como atractor, se convertirá en un hermano incómodo justo como sucedió en F, sufrirá una bifurcación de doblamiento de periodo y se convertirá en repulsor. Así producirá puntos de periodo 4. Ahora, en la gráfica de F^4 podemos encontrar un cuadrado pequeño en donde suceda lo mismo, es decir, donde encontremos un comportamiento similar a F. Y así sucederá en las gráficas de F^8, F^{16}, etcétera. Es bueno señalar que todas estas ideas han sido intuitivas, matemáticamente se formalizan con el concepto de renormalización, este se usa como un «microscopio» matemático que nos permite analizar las gráficas de las iteraciones de F.



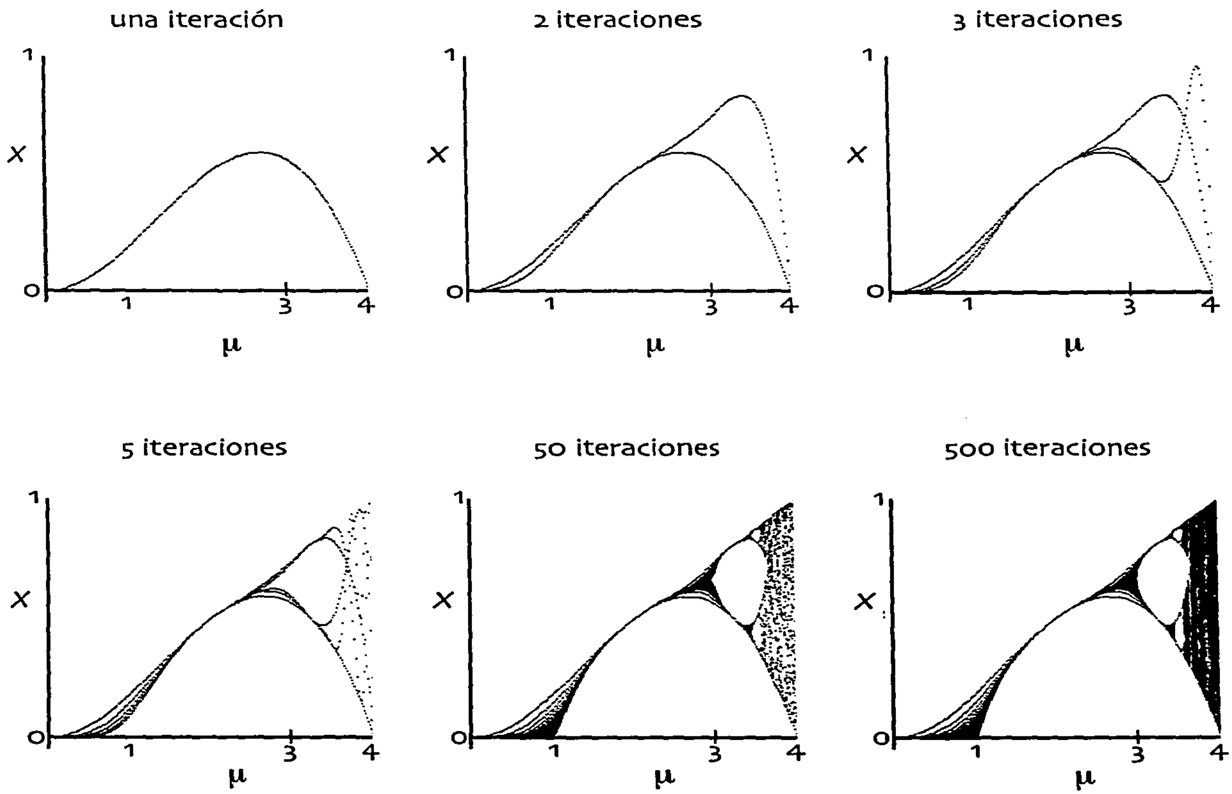
En el diagrama de bifurcación representamos lo que hemos encontrado. Primero observamos la línea que indica los puntos fijos, 1, y después las líneas que indican algunos puntos periódicos hasta los de primer periodo 8. Por lo que hemos razonado, sabemos que aquí se muestran valores de μ un poco mayores que tres. Al aumentar μ, más puntos periódicos surgirán.

Hemos encontrado que $F_\mu(x)=\mu x(1-x)$, conocida en el mundo matemático como familia cuadrática, es mejor conocida en el bajo mundo como la familia Corleone. En esta familia, el hermano incómodo más notorio, $\mu=3$, es El Padrino. Y como siempre sucede en las familias de la mafia, después del padrino tenemos muchísimos hermanos incómodos. Así, la familia de mapeos sufre una gran cantidad de bifurcaciones después de pasar por $\mu=3$. Y las bifurcaciones generarán puntos periódicos atractores que eventualmente se convertirán en repulsores. La investigación está dando resultados, pero apenas comenzamos a comprender el comportamiento de esta familia de la mafia matemática siciliana.

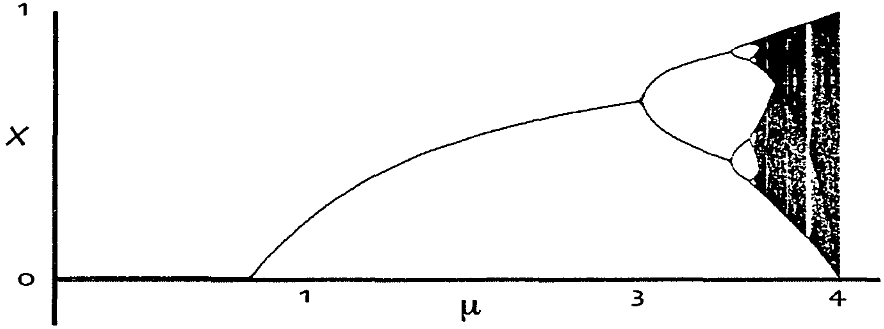
¿Cuántos puntos periódicos surgen exactamente? ¿Durante cuánto tiempo seguirán surgiendo? ¿Cómo será el comportamiento del sistema con un gran número de puntos periódicos atractores? ¿Qué sucederá con ellos cuando todos se vuelvan repulsores? Y finalmente, la pregunta que surge en este lugar de la ruta al caos: ¿Cómo afecta el comportamiento de la familia Corleone al crecimiento de la población de chupacabras?

Es evidente que un diagrama de bifurcación, con valores grandes para μ, puede contestarnos algunas de nuestras preguntas. El problema es que, un diagrama de bifurcación así, resulta difícil de construir. En lugar de un diagrama de bifurcación se acostumbra usar un diagrama de órbita, el cual resulta sencillo de construir con la ayuda de una computadora. La información del diagrama de órbita es casi la misma que la de un diagrama de bifurcación, de hecho el primero se encuentra dentro del segundo. Podemos decir que el diagrama de órbita es el «esqueleto» del de bifurcación y, como ya sabemos leer la información plasmada en este último, ya sabemos leer un diagrama de órbita. Sin embargo, aún así hay que respirar con calma al enfrentarse por primera vez con este diagrama.

Al igual que en el diagrama de bifurcación, el eje horizontal representa los valores de μ y el eje vertical los de x. Consideramos una condición inicial, se acostumbra usar 0.5 porque un resultado matemático nos dice que siempre es atraída por una órbita periódica atractora pero, esencialmente obtenemos la misma figura con cualquier otra condición dentro del espacio fase. Tomamos, del eje horizontal, los valores de μ y vemos a dónde mandan a nuestra condición inicial dentro de los valores de x, es decir, dentro del espacio fase. Si repetimos este procedimiento, la órbita de la condición inicial tenderá hacia los puntos periódicos atractores después de muchas iteraciones. Vayamos paso por paso:



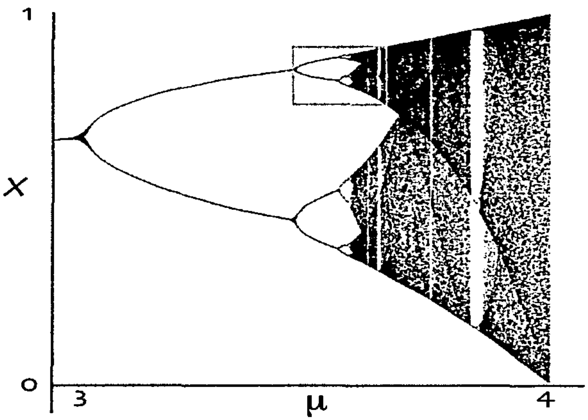
Si borramos las primeras 100 iteraciones, y nos quedamos con las siguientes 400, observamos un diagrama de órbita que contiene la información esencial de un diagrama de bifurcación.

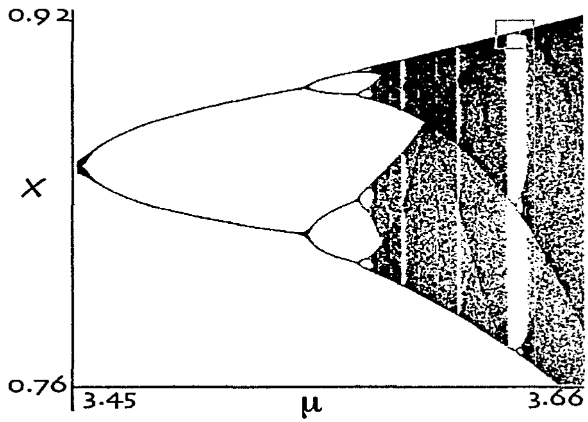


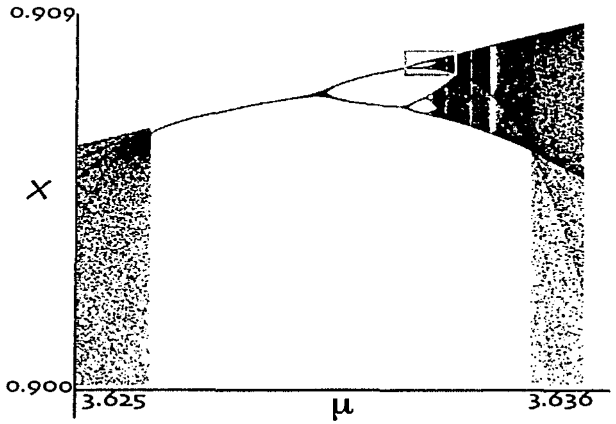
Cuando uno se enfrenta por primera vez a un objeto matemático de esta naturaleza, uno no lo observa, lo contempla. Así que, ponemos nuestra mente en blanco, usamos la lupa de la computadora, y nos sumergimos en el diagrama.

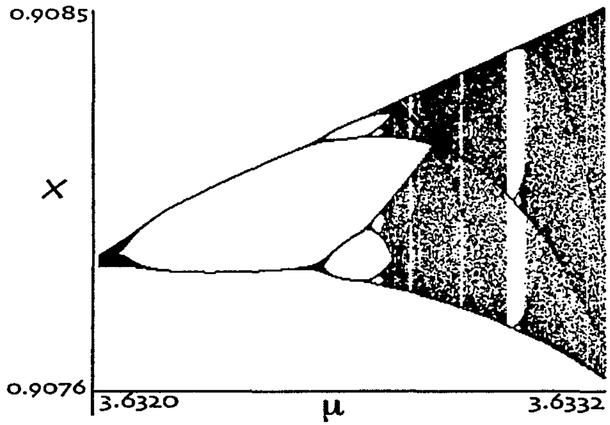
Comenzamos por aumentar el lugar interesante, los valores $3<\mu<4$. Nos fijamos en el área enmarcada por el cuadro gris.

Aumentamos esa área y ahora enmarcamos una más pequeña en la parte superior. La aumentamos y repetimos el proceso.







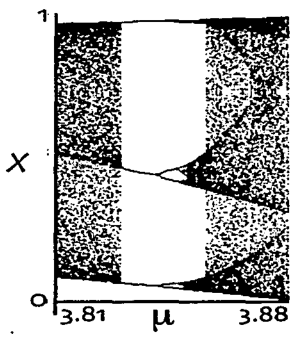


Es importante señalar que el diagrama de órbita, de la página anterior, posee una característica muy especial: La autosimilaridad. Cuando observamos fragmentos de este diagrama, no podemos decir a qué escala están, necesitamos revisar los ejes para tener una idea del tamaño del fragmento que estamos viendo. Es decir, si alguien nos diera una parte del diagrama, no podríamos decir si es una parte pequeña o grande de él, ya que al aumentar sucesivamente partes del mismo, éstas resultan similares. Puede ser que la palabra «autosimilar» no nos sea familiar pero el concepto, de que algo es parecido a si mismo a diferentes escalas, sí lo es. Al observar fotos de superficies rocosas no podemos decir si fueron obtenidas de una piedra, una montaña o un desierto rocoso. Lo mismo sucede con fotografías de las nubes o con las redes de bronquios dentro de nuestros pulmones. Es sorprendente darse cuenta de la gran cantidad de cosas en la naturaleza que son autosimliares.

Al estar frente a un objeto matemático que desafía de tal manera nuestra imaginación, uno se siente tentado a abandonar la expedición y vagar en su interior. Pero como siempre sucede, lo urgente no deja tiempo para la contemplación. Y antes de padecer otro ataque de duendes azules chupasangre, es urgente comprender el crecimiento de su población. O sea, es urgente terminar de recorrer nuestra ruta al caos.

Con el diagrama de órbita anterior, comprobamos experimentalmente nuestras sospechas. Para valores $3<\mu\leq 4$, la población de chupacabras crece de manera impredecible. En estos valores, surge una increíble cantidad de estados periódicos atractores en los que puede llegar a encontrarse el tamaño de la población; y por si esto fuera poco, los estados atractores se convierten eventualmente en repulsores. Sería conveniente precisar cuánto es una «increíble» cantidad de estados para nuestra población. Sin embargo, en algunos lugares del diagrama, pareciera ser que no tenemos muchísimos estados o puntos separados, sino columnas o intervalos completos a los que pudiera llegar nuestra condición inicial. Y la computadora no puede ayudarnos con esto, ya que su limitada precisión no puede separar ambos casos.

Para saber cuántos puntos periódicos llegan a crearse, necesitamos conocer un resultado que algunos matemáticos consideran una verdadera fusión de la creatividad y el razonamiento lógico. Pero antes, debemos revisar una evidencia en la que no hemos puesto atención. En el diagrama de órbita completo, poco antes de $\mu=4$, se aprecia una delgada franja blanca. Al aumentar el diagrama, para ver los valores $3<\mu<4$, se aprecian más franjas atravesadas por muy pocas líneas; estas franjas reciben el nombre de ventanas de predictibilidad. Observemos con cuidado, a esta ventana de predictibilidad que se distingue en el diagrama completo.



Resulta ser que esta ventana es atravesada únicamente por tres líneas. Es decir, existe una órbita periódica de primer periodo 3, la cual está formada, obviamente, por tres puntos periódicos de primer periodo 3. En la «realidad» esto significa que: Aunque no tenemos ni idea de qué sucederá con la población con valores de μ ligeramente mayores a 3.5, que es donde comienzan a surgir demasiados puntos periódicos, sí vemos que cuando μ es aproximadamente 3.829 existen únicamente tres estados posibles para la población. Aún cuando no sepamos en cuál de los tres estará, sí estamos seguros de que el tamaño de la población no podrá ser distinto a alguno de estos tres estados.

La existencia de estos tres puntos periódicos de primer periodo 3, es importantísima según el resultado matemático que vamos a utilizar. Este resultado creativo o poema lógico, se conoce como: El Teorema de Sarkovskii. Primero ordenamos a los puntos periódicos de una manera muy especial, con este fin, consideramos un nuevo orden de los números naturales. Vamos a decir que 3 va antes que 5 cuando veamos $3 \rhd 5$. En general, un número k irá antes que otro número l si vemos $k \rhd l$. Este nuevo orden de los números naturales es como sigue:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd \ldots \rhd 2\cdot 3 \rhd 2\cdot 5 \rhd 2\cdot 7 \rhd \ldots \rhd 2^2\cdot 3 \rhd 2^2\cdot 5 \rhd 2^2\cdot 7 \rhd \ldots \rhd 2^3\cdot 3 \rhd 2^3\cdot 5 \rhd 2^3\cdot 7 \rhd \ldots$$
$$\ldots \rhd 2^3 \rhd 2^2 \rhd 2^1 \rhd 2^0=1$$

Esto es, primero van todos los números impares sin el 1, después van estos impares multiplicados por 2, luego los impares por 2^2, luego por 2^3, luego por 2^4 y seguimos multiplicando por todas las potencias de 2; hasta el final van las potencias de 2 en orden descendente, y por supuesto, llegamos hasta 2^0 que es igual a 1. Es importante señalar que en este nuevo orden estamos considerando a todos los números naturales y, en matemáticas, cuando decimos todos, nos referimos a absolutamente todos. Es decir, le estamos dando un nuevo orden a la infinidad de números naturales. Una vez que tenemos este nuevo orden, podemos leer el poema lógico para explicarlo después.

Teorema de Sarkovskii.

Sea f una función que va de los números reales a los reales, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Supongamos que f es continua. Si f tiene un punto periódico de primer periodo k, y sucede que $k \rhd l$, entonces f también tiene un punto periódico de periodo l.

Lo primero que debemos notar es su sorprendente falta de hipótesis. Si recordamos, para obtener los teoremas de bifurcación, los hermanos incómodos necesitaban poseer una lista de complicadas propiedades matemáticas. Pero aquí sólo asumimos que la función es continua y con esa única suposición, obtenemos una fuerte conclusión. Extraigamos información de esta conclusión:

- El número 3 va primero en el orden de Sarkovskii. Entonces, si f tiene un punto periódico de primer periodo 3, f tiene puntos periódicos de todos los posibles periodos, o sea, f tiene puntos periódicos de tantos periodos como los números naturales, y estos son infinitos.
- Si f tiene un punto periódico cuyo periodo no sea potencia de 2, entonces f tiene una infinidad de puntos periódicos. Por ejemplo, si f tiene un punto periódico de periodo 10, ya sabemos que también tiene una infinidad de puntos periódicos cuyos periodos serán potencias de 2. Y viceversa, si f tiene un número finito de puntos periódicos, todos tendrán periodos que son potencias de 2.

Ahora usemos esta información para lo que nos interesa. Nuestro mapeo F es continuo. En el diagrama de órbita observamos puntos periódicos de primer periodo 3. Por el teorma de Sarkovskii podemos asegurar que: Al aumentar la tasa de crecimiento, llega un momento en que tenemos puntos periódicos de todos los posibles periodos, es decir, tenemos una infinidad de estados que se repiten periódicamente. Estos estados ya existen cuando observamos los puntos periódicos de primer periodo 3, pero el diagrama de órbita no los muestra juntos y al hacer ejercicios numéricos solo encontramos los puntos periódicos de periodo 3. Entonces tenemos una infinidad de estados periódicos que son «invisibles» o indetectables para la computadora debido, una vez más, a su limitada precisión. Necesitamos otra herramienta para comprender dónde está la infinidad de puntos periódicos y qué sucede con ellos.

Si recordamos los razonamientos que hemos hecho, las órbitas atractivas al sufrir una bifurcación de doblamiento de periodo se vuelven repulsoras. Podemos suponer, aunque parezca increíble, que aún teniendo una infinidad de órbitas periódicas solo la órbita de periodo 3 es atractora; todas las demás, son repulsoras. Si son repulsoras, no importa qué tan cerca tomemos una condición inicial, en el largo plazo, la condición terminará lejos de estas órbitas. Este hecho explicaría cómo es posible tener una infinidad de órbitas periódicas que son invisibles para las computadoras.

Los razonamientos anteriores se formalizan con el uso de una herramienta matemática. Pero uno podría preguntarse, para qué es necesario formalizarlos si intuimos que son correctos. La respuesta es simple, para generalizarlos. Es decir, si tuviéramos una herramienta para detectar estas situaciones, no necesitaríamos revisar diagramas y ejemplos numéricos, ni forzar nuestros cerebros; y obviamente, no queremos la herramienta para revisar sólo este mapeo, la queremos para revisar una gran cantidad de mapeos. Así debió pensar el matemático Schwarz, cuando desarrolló l a herramienta que lleva su nombre. Ya que hemos hablado de ella, sería de mala educación no presentar tal herramienta, pero no nos detendremos a revisarla con detalle porque debemos continuar con la investigación. Así presentamos a:

Derivada schwarziana.

La derivada shcwarziana, S, de una función f se calcula o define así

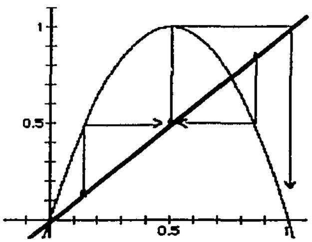
$$S f(x) = \frac{f'''(x)}{f''(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^3$$

A pesar de ser extraña a la vista, esta herramienta es sencilla de usar. Se requiere calcular, la derivada de la función, f', la segunda derivada, f'', la tercera, f''', y realizar con ellas las operaciones indicadas. Un teorema nos dice que, si la schwarziana es negativa, $Sf(x)<0$, y la función tiene n puntos donde la derivada vale cero, entonces la función tiene, como máximo, $n+2$ órbitas periódicas atractoras. Como podemos imaginar, nuestro mapeo F tiene derivada schwarziana negativa. Además, F solo tiene un punto cuya derivada vale cero, la punta de la joroba; entonces sabemos que, aunque tenga una infinidad de órbitas periódicas, sólo puede llegar a tener tres atractoras. Aún más, si nos detuviéramos a leer con cuidado el teorema y revisar el comportamiento de F, podríamos demostrar que nuestro mapeo sólo puede llegar a tener una órbita periódica atractiva para cada valor de μ. Que es lo que habíamos intuido. Es importante señalar que F puede no tener órbitas atractoras. De hecho, al revisar el diagrama de órbita podemos observar que para $\mu>4$ no tenemos nada, ni líneas, ni puntos; esto indica que no existen órbitas periódicas atractoras para esos valores. Pero bueno, todavía no llegamos al territorio de los valores de μ mayores que cuatro.

Hemos avanzado bastante en la expedición. Ahora sabemos que, si la tasa de crecimiento es mayor que tres y menor que cuatro, el crecimiento de la población de chupacabras es impredecible. Pero también sabemos que el crecimiento, aunque impredecible, no depende del azar, sino de patrones bien definidos por órbitas periódicas. Gracias a esto sabemos que existe, para cada tasa de crecimiento, un solo grupo de estados atractores a los que llegará la población. Por lo general, estos grupos contienen demasiados estados para aventurar predicciones, pero existen algunos grupos con pocos estados donde sí podemos dar opciones para los posibles tamaños de la población en el largo plazo. Es decir, gracias a que el crecimiento sigue patrones, sí tenemos algunas ventanas de predictibilidad. También sabemos que existe un número infinito de estados periódicos repulsores, pero por increíble que parezca, las computadoras no pueden detectarlos. El hecho de que sólo la mente humana sea capaz de percibir esta infinidad de puntos, debería ser motivo de orgullo. Así pues, el siguiente paso en nuestra ruta, es enfrentarnos con este motivo de orgullo y comprender lo que sucede con los repulsores.

Mientras suceden las bifurcaciones, $3\leq\mu<4$, surge esta infinidad de repulsores pero el comportamiento del sistema está claramente gobernado por las órbitas periódicas atractoras. Así, los repulsores se limitan a completar sus órbitas e intentan «empujar» a los demás puntos, pero la única órbita atractora que existe, para cada tasa de crecimiento, es capaz de dominar la situación. Sin embargo, así como sucede con el atractivo físico, las órbitas atractoras tienen que terminar algún día. Llega un momento en que los atractores desaparecen para no volver jamás y, en el espacio fase, se ha acumulado una infinidad de repulsores que no se soportan ni a si mismos; y de aquí en adelante, estos puntos periódicos repulsores que solamente pueden sentir odio por los demás, dominarán la situación. Este momento fatal es $\mu=4$ y podemos decir que, es en este valor cuando el señor de las moscas toma el control del espacio fase. Y desde este momento, nuestro sistema se convertirá en la granja de la novela de Orwell. Ahí dentro, la época francesa del terror volverá a repetirse.

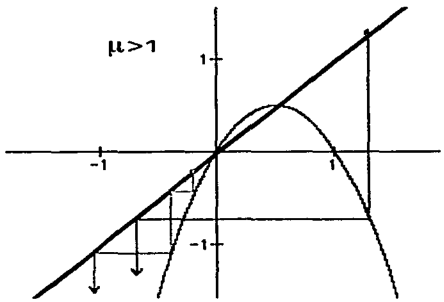
Revisemos $\mu=4$. Al hacer unos cuantos ejemplos numéricos de órbitas con diferentes condiciones inciales, obtenemos listas de números sin ningún patrón, de hecho parece que son números dados por el azar. Pareciera ser que todas las condiciones inciales, al pasar el tiempo, vagan de manera errática por el intervalo $(0,1)$, no siguen ningún orden, no se dirigen a algún punto en especial, solo «brincan» de un lugar a otro. Podemos decir que, sin importar la condición inicial, el tamaño que alcance la población será totalmente forutito, azaroso. Sin embargo, nosotros sabemos que no todas las condiciones iniciales se comportan así, porque ya hemos demostrado la existencia de un punto fijo que depende de μ. El punto fijo es $3/4$, y es sencillo demostrar que es repulsor. De hecho, es el primer repulsor que se formó con las bifurcaciones de doblamiento de periodo. Es más, sabemos que ahí están todos los puntos periódicos repulsores surgidos de las bifurcaciones y todos siguen, obviamente, sus órbitas periódicas. Además el cero es fijo y el uno va a dar al cero en la primera iteración. Aún más, otros cuantos puntos son mandados al cero después de varias iteraciones. En la telaraña vemos que el 0.5 va al uno y de ahí sabemos que se va al cero. Ahora, existen dos puntos que son mandados al 0.5, y deben existir otros cuatro que vayan a estos dos. Así tenemos que el



cero es fijo, el uno llega al cero bajo F, el 0.5 llega al cero después de dos iteraciones, F^2, dos puntos llegan al cero bajo F^3, cuatro puntos llegan bajo F^4, etcétera. El número total de estos puntos que se estacionan en cero, depende del número de iteraciones. Lo mismo sucede con el punto fijo que depende de μ, de hecho con este punto, esto siempre ha sucedido pero son tan pocos los que se estacionan en él que no afectan el comportamiento del sistema y por eso no los mencionamos.

De este modo tenemos que, es verdaderamente difícil imaginar lo que sucede en el espacio fase pero vamos a intentarlo. Bien podemos imaginar que nuestro espacio fase se ha convertido en un campo de concentración. Así, en el pequeño espacio que existe del cero al uno tenemos, una infinidad indetectable de nazis repulsores cuya única aspiración es deshacerse de los demás, algunos puntos que colaboran y se quedan con dos de los nazis, con los fijos, y todos los demás puntos prisioneros que corren sin rumbo ni descanso por el campo de concentración. Sin embargo, los puntos prisioneros son verdaderos héroes de la resistencia que solo están esperando el momento oportuno para realizar el gran escape.

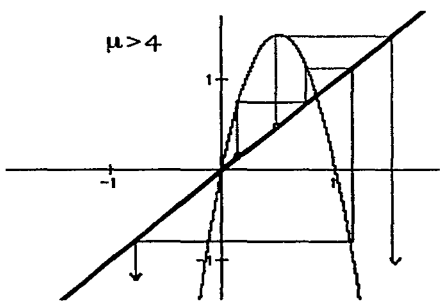
Con la imagen anterior en mente, es sencillo intuir que ya no importa qué tan cercanas tomemos las condiciones iniciales, después de un tiempo, obtendremos estados muy diferentes del sistema para cada condición inicial. Entonces intuimos que, ahora, nuestro mapeo es sensible a las condiciones iniciales. Así, con esta tasa de crecimiento, el comportamiento global del sistema es totalmente impredecible. Lo único que nos falta por comprender, es dónde están los nazis repulsores y cómo se comportan entre ellos mismos. Como ya sabemos, no los encontraremos calculando su posición, la única forma de hallarlos es razonando su posición. Sin embargo todavía no tenemos información suficiente para poder responder nuestras dudas. Entonces investiguemos los casos restantes, $\mu>4$, con la esperanza de que nos proporcionen la información que nos falta.



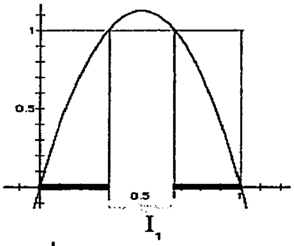
Si usamos la telaraña fuera del intervalo [0,1], para todas las tasas de crecimiento mayores que uno, $\mu>1$, vemos que todos los puntos de la recta real salen del plano por el lado de los negativos. Bien podemos decir que, todos los puntos fuera del espacio fase se van, al infinito negativo y menos allá.

La telaraña anterior viene al caso porque, con $\mu>4$, los puntos del espacio fase escapan fuera de él. Y se van, como el resto, al menos infinito. Que las condiciones inciales salgan del espacio fase significa en la «realidad» que, con tasas de crecimiento mayores que cuatro, la población en el largo plazo alcanza un tamaño mayor del que tenía en 1975, y después de esto, lo único que podemos decir es que los chupacabras se extinguirán rápidamente. O eso creemos, porque esta investigación ha revelado más sorpresas de las que esperábamos.

Nuestra duda es, una vez más, si realmente salen todos los puntos del espacio fase. La respuesta es, una vez más, la misma. Dentro del espacio fase permanecen el cero y un punto fijo que depende de μ, y las gráficas de las iteraciones de F siguen cortando la diagonal, entonces también permanece la infinidad de puntos periódicos. Aunque sigamos sin poder detectar a los repulsores nazis, ya podemos separar a los nazis de los prisioneros, porque en cuanto $\mu>4$, únicamente los héroes de la resistencia logran pasar la cerca del campo de concentración y realizar así, el gran escape.

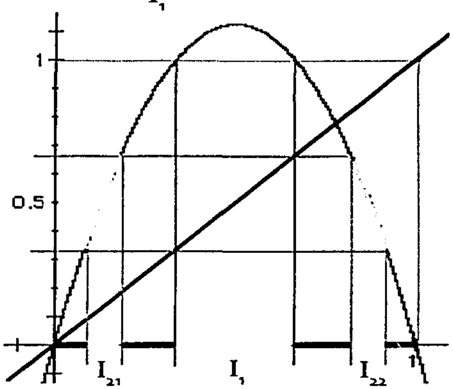


Entonces analicemos, paso a paso, a los héroes de la resistencia. Para no confundirnos, vamos a darle nombre a lo que vamos a analizar. Primero usamos una i mayúscula estilizada para llamar así al intervalo $[0,1] = \mathrm{I}$. Luego, los puntos que escapan del espacio fase, lo hacen por grupos en cada periodo de tiempo, es decir, en cada iteración de *F*. Usaremos la I con un subíndice para nombrar a cada grupo que escapa. La idea es separar cuidadosamente estos conjuntos que escapan para observar qué puntos quedan dentro del espacio fase. Estos que queden serán los repulsores nazis, y así, finalmente los expondremos.



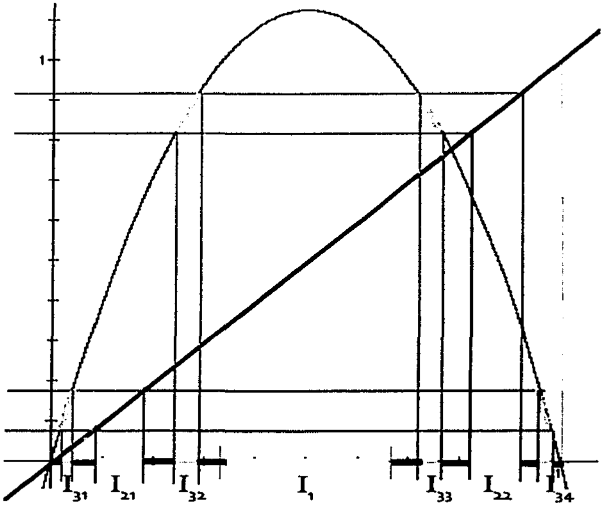
Llamamos I_1 al grupo que escapa en la primera iteración. Este grupo forma un intervalo con centro en 0.5 . En la gráfica podemos ver que los extremos de I_1 son mandados al uno y, van a dar al cero en la siguiente iteración. Matemáticamente, el primer grupo que escapa se define como, el conjunto de x en I tales que son mandadas por f a un valor mayor que uno; y se escribe así:

$$\mathrm{I}_1 = \{ x \in \mathrm{I} \mid f(x) > 1 \}$$



Ahora llamamos I_2 al grupo que escapa en la segunda iteración. Este grupo está formado por los puntos que llegan a I_1 en la primera iteración, de este modo podrán escapar en la segunda. Para encontrarlos ponemos la diagonal y trazamos dos rectas horizontales donde la corten los extremos de I_1 . Estas dos rectas cortan a la gráfica en ambos lados, bajamos al espacio fase y vemos qué puntos van a dar a estos pedazos de la gráfica. Así obtenemos dos intervalos que forman al grupo I_2 , a ellos los llamamos I_{21} , I_{22} . Ahora que los hemos encontrado, es fácil ver que estos dos intervalos salen del espacio fase en dos iteraciones. Matemáticamente este conjunto se define:

$$\mathrm{I}_2 = \{ x \in \mathrm{I} \mid f(x) \in \mathrm{I} \quad \text{y} \quad f^2(x) > 1 \}$$



Hacemos exactamente lo mismo con los dos intervalos que forman I_2 para encontrar al conjunto que escapa en la tercera iteración. A este conjunto lo llamamos I_3. Como podemos ver I_3 está formado por cuatro intervalos intercalados entre los conjuntos que escaparon antes, I_1 , I_2. A los cuatro intervalos intercalados les llamamos respectivamente, I_{31} , I_{32} , I_{33} , I_{34}.

$$\mathrm{I}_3 = \{ x \in \mathrm{I} \mid f^2(x) \in \mathrm{I} \quad \text{y} \quad f^3(x) > 1 \}$$

Debemos hacer exactamente lo mismo con I_3 para encontrar al conjunto de puntos que escapa en la cuarta iteración. Pero ya no lo haremos porque ahora es evidente el patrón a seguir. I_4 estará formado por ocho pequeños intervalos intercalados entre I_1, I_2, I_3.

Tenemos las definiciones de los conjuntos que escapan en las tres primeras iteraciones.

$$I_1 = \{ x \in I \mid f(x) > 1 \}$$
$$I_2 = \{ x \in I \mid f(x) \in I \quad y \quad f^2(x) > 1 \}$$
$$I_3 = \{ x \in I \mid f^2(x) \in I \quad y \quad f^3(x) > 1 \}$$

Sin embargo, hemos visto que I_2 «pasó» por I_1 antes de escapar. I_3 «pasó» por I_2. Los conjuntos que escapan «pasan» por el conjunto que salió antes, de hecho al pasar lo conforman. Si ahora imaginamos que no sabemos en qué periodo de tiempo estamos, y quisiéramos ver cuáles puntos han llegado o formado a I_1, tendríamos que revisar atrás en el tiempo, es decir el «pasado» de este intervalo. En matemáticas el «pasado» se llama, la imagen inversa. Entonces I_2 es la imagen inversa, en un periodo de tiempo hacia atrás, del intervalo I_1:

$$I_2 = f^{-1}(I_1) .$$

Entonces I_3 es la imagen inversa de I_2:

$$I_3 = f^{-1}(I_2) .$$

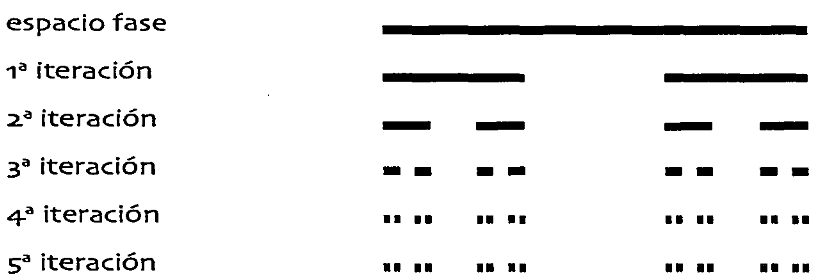
Así tenemos nuevas definiciones para los conjuntos que salen del espacio fase. Estas nuevas definiciones son más prácticas. Y buscamos una definición práctica, para dar la definición general de los siguientes conjuntos que escapen:

$$I_{n+1} = f^{-1}(I_n) .$$

Gracias al patrón que hemos visto en las gráficas, podemos pensar que I_{n+1} está formado por pequeños intervalos intercalados entre todos los otros conjuntos que han escapado antes. Aún más, el número de pequeños intervalos que tendremos será 2^{n+1}. Ya está, hemos comprendido quiénes son todos los puntos que escapan. Matemáticamente decimos que, los puntos que escapan del espacio fase cuando el número de iteraciones tiende a infinito, son la unión de los conjuntos I_n, donde n es un índice que va de uno a infinito. Esto se escribe así:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

Una vez que hemos separado a los héroes de la resistencia que escapan del espacio fase, podemos localizar a la infinidad de nazis repulsores. Entonces, del intervalo [0,1] , representado por la barra de abajo, vamos borrando, paso por paso, a los puntos que escapan.



Si la computadora pudiera continuar las iteraciones hasta un número suficientemente grande, obtendríamos el conjunto infinito de puntos periódicos repulsores. No importa que la computadora no pueda proporcionar la imagen exacta de este conjunto, nuestra mente ya la tiene. Y como podemos imaginar, la imagen de este conjunto es muy especial. Primero, es evidente que la imagen es autosimilar. Además, matemáticamente se considera que un punto no tiene anchura, largo ni grosor, es decir, un punto tiene dimensión cero; una línea solo tiene largo, es decir, tiene dimensión uno. Usando técnicas matemáticas para calcular su dimensión, resulta ser que este conjunto no tiene dimensión cero ni uno, este objeto matemático «vive» en una dimensión fraccionaria entre cero y uno, es decir, éste es un fractal. Evidentemente, es uno de los fractales más simples que ha creado o descubierto la mente humana, pero aún con su simpleza posee cualidades que desafían la imaginación.

Pongámosle un nombre a este fractal. Definimos al conjunto de repulsores tal y como construimos su imagen. El conjunto de puntos periódicos repulsores es el intevalo $[0,1]$, I, menos la unión de intervalos que salen de él, $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, y llamamos K a este conjunto. Esto se escribe así:

$$K = I \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n .$$

Pues bien, K tiene tres cualidades importantes que desafían a nuestra imaginación, tomemos nuestra dosis de confianza y veamos de frente a este conjunto:

i) K es un conjunto cerrado. Cualquier sucesión que puedan formar los puntos de K converge a algún punto dentro de K. Si recordamos, todos los I_n forman I_1 antes de escapar; pero los extremos de I_1 no escapan; así podemos intuir que I_1 es abierto, y que todos los I_n también lo son. Un teorema nos dice que la unión infinita de intervalos abiertos también es un conjunto abierto. Otro teorema nos dice que el complemento de un abierto es un conjunto cerrado. Y nosotros hemos definido K como el complemento de una unión infinta de abiertos. Así K es un conjunto cerrado. En español podemos decir que, a pesar de tener una estructura tan extraña que semeja polvo acomodado en una línea, K contiene a sus propios límites, los cuales están bien definidos dentro de él.

ii) K es totalmente disconexo. A pesar de estar formado por una infinidad de puntos, K no contiene un solo intervalo. Si tomamos cualquier intervalo abierto en I, del tamaño que sea, siempre existe un punto dentro de él que escapará en alguna iteración. Así K no contiene intervalos. En español podemos decir que, en el largo plazo, tendremos un ente matemático formado únicamente por puntos aislados, sin ningún pedacito de línea dentro de él; evidentemente, un ente así no puede ser trazado en una hoja, ni siquiera con ayuda de la computadora, sólo podemos representarlo en nuestra mente con ayuda de la imaginación.

iii) K es perfecto. Para cualquier punto que pertenezca a K, resulta ser que existe una sucesión de otros puntos de K que convergen a él. Es decir, todos sus puntos son puntos de acumulación. Si sobreponemos un intervalo, por más pequeño que sea, sobre un punto de K, tenemos que el intervalo cae sobre, al menos, otro punto de K. Así todos sus puntos son puntos de acumulación. En español podemos decir que, a pesar de las características anteriores, los puntos de K están increíblemente juntos y, si trazamos una pequeña línea sobre alguno de ellos, sin importar lo pequeña que sea, esta línea tocará a otro punto.

Cuando un conjunto tiene estas tres cualidades se dice que es un conjunto de Cántor, en honor a uno de los matemáticos más famosos de la historia. Entonces K es un fractal tipo Cántor. Algunos prefieren llamarlo con un nombre más sugestivo: Polvo de Cántor.

Por si lo anterior fuera poco, el polvo de Cántor posee una propiedad más, la cual se hace evidente por la forma en que descubrimos a este ente. Como ya sabemos, K está formado por puntos periódicos que nunca escapan del espacio fase, al aplicar el mapeo, estos puntos brincarán de un lado a otro dentro del espacio fase formando a K, pero este conjunto «visto desde lejos» no cambiará porque cuando un punto se mueva, otro tomará su lugar; es decir, las características que describen la estructura de K no varían cuando se aplica el mapeo, así no importa cuántas veces iteremos el mapeo, K seguirá siendo el mismo. Cuando sucede esto, decimos que el conjunto es invariante bajo el mapeo.

Por último, cuando podemos dar dos valores bien definidos entre los cuales está un conjunto, decimos que el conjunto es acotado; a K podemos acotarlo por el cero y el uno. Pues bien, cuando tenemos un conjunto cerrado, acotado e invariante bajo un mapeo y, además sucede que después de varias iteraciones de ese mapeo todos sus puntos son repulsores y continuarán siendo repulsores sin importar cuánto más se itere el mapeo, el conjunto recibe el nombre de conjunto hiperbólico repulsivo. En matemáticas esta definición se escribe:

Conjunto hiperbólico repulsivo:

Un conjunto C contenido en los números reales, es un conjunto hiperbólico repelente para el mapeo f, si C es cerrado, acotado e invariante bajo f y si, además, existe algún número de iteración mayor que cero, $N>0$, de manera que para todas las iteraciones siguientes, todos los puntos de C son repulsores, es decir, $|(f^n)'(x)|>1$ para toda $n>N$ y para toda x que pertenezca a C.

La definición de conjunto hiperbólico atractivo es similar, solo varía en que todos los puntos del conjunto deben ser atractores, $|(f^n)'(x)|<1$. Entonces, el polvo de Cántor es un conjunto hiperbólico repulsivo. Como podemos imaginar, el comportamiento de este ente es increíblemente difícil de describir y, aún así, buscamos comprender qué sucede dentro del polvo de Cántor al aplicar el mapeo, cómo viajan los puntos periódicos, cómo podremos describir y predecir su comportamiento, etcétera.

Los puntos del polvo de Cántor representan tamaños de la población de chupacabras que no los conducen a la extinción. El comportamiento de los puntos del Cántor bien podría explicar el crecimiento poblacional de los chupacabras. Por eso es que los agentes especiales deben comprender este comportamiento pero... ¿Cómo pueden comprender a la infinidad de repulsores nazis que forman al polvo de Cántor? ¿Cómo explicar y describir su enloquecido comportamiento? ¿Cómo deberían enfrentarse a este complicado ente?

El polvo de Cántor es el último hallazgo en esta extenuante investigación, ya que este ente matemático, hasta para los agentes especiales, es demasiado complicado. Los chupacabras han escogido un ente que guarda, con demasiado celo, el secreto de su crecimiento poblacional. Por esta razón, se ha decidido dejar abierto el expediente para reunir más evidencias.

Así que, debemos recuperar el aliento y prepararnos, porque comprender al polvo de Cántor es lo único que nos falta para terminar nuestro viaje de mil kilómetros. Finalmente, después de abrirnos paso con ejemplos numéricos, de descubrir estados periódicos, de desenmascarar a la familia Corleone repleta de hermanos incómodos, de ser arrastrados por las bifurcaciones de doblamiento de periodo, de contemplar la extraña belleza del diagrama de órbita, de deleitarnos con la sencillez de Sarkovskii, de ser infiltrados por una infinidad de puntos periódicos invisibles para las computadoras, de perder el control de las órbitas atractoras, de caer en la locura del azar en la época francesa del terror, de ser testigos impotentes del poder de los repulsores nazis, de acompañar a los puntos de la resistencia en el gran escape y, de presenciar el nacimiento de un fractal, estamos por concluir la Ruta al Caos.

EXPEDIENTE 3:

Caos en la Zona del Silencio.

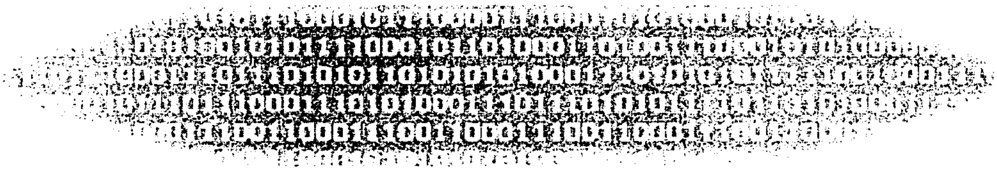
La principal preocupación de los agentes especiales, al dejar inconclusa la investigación de los chupacabras, era la posibilidad de que existieran otros lugares donde llevaran a cabo su reproducción. Si se lograra comprender por completo su comportamiento y crecimiento poblacional, sería sencillo analizar los reportes de las muertes de ganado para determinar si existen otras poblaciones de duendes azules chupasangre y predecir sus ataques. Como esto no se había logrado aún, se optó por otra línea de investigación que consistía en rastrear los orígenes de la población del Tepozteco. Esta nueva investigación confirmó los temores de los agentes especiales, los chupacabras no eran producto de una evolución aislada dentro del cerro, se habían establecido ahí después de una migración. Así que, no resultó ilógico considerar que existía otra población en el lugar de donde partió esta migración y que, pudieron ocurrir más migraciones con distintos destinos. Se hizo necesario ir a este probable lugar de origen, de los duendes azules chupasangre, para reunir más pruebas. Y este lugar, que se antonja tan insólito como sobrenatural, es la Zona del Silencio.

En la confluencia de los estados de Coahuila, Durango y Chihuahua, delimitado por la Sierra del Diablo y dominado por el solitario cerro de San Ignacio, se encuentra un desierto que, debido a sus caracterísitcas naturales, ha sido designado Reserva de la Biosfera de Mapimi. La leyenda cuenta que en este desierto se encuentra la misteriosa Zona del Silencio, formada por un cono magnético sobrenatural que atrae objetos del cielo, impide el paso de ondas electromagnéticas y altera brújulas, radios, computadoras, etcétera. Hasta ahora nadie había podido probar su existencia pero, gracias a su entrenamiento localizando talleres de autos robados en la legendaria ciudad Neza, los agentes especiales encontraron la Zona del Silencio. Ahí se toparon con evidencia reveladora, cantidades exorbitantes de yerba calcinada con forma de cigarro. Al seguir el rastro de yerba calcinada, dieron con lo que buscaban, la población original de chupacabras. Después de realizar estudios en este nuevo ambiente, se obtuvo la explicación del origen de estos duendes azules chupasangre, el cono magnético sobrenatural causa mutaciones anormales en la flora y la fauna de la Zona.

La mutación más interesante la ha sufrido un coyote, el cual ha aumentado su capacidad mental de tal manera, que ahora es capaz de alterar su medio ambiente y manipular el cono magnético de la Zona del Silencio a su antojo.

Inspirados por este singular ambiente y guiados por las enseñanzas del coyote, los agentes especiales decidieron retomar la investigación del crecimiento poblacional de los chupacabras; lo cual solo podía significar una cosa, concluir la Ruta al Caos. Pues bien, el último hallazgo de esta investigación, que se pudo observar con una tasa de crecimiento ligeramente mayor que cuatro, fue un fractal conocido como polvo de Cántor. Este fractal estaba conformado por una infinidad de puntos periódicos repulsores, los cuales representaban estados de la población cuyo comportamiento desafiaba la comprensión. Así, los agentes especiales vieron el polvo de Cántor en el sobrenatural ambiente de la Zona del Silencio y, observaron al místico coyote manipular el ambiente que lo rodeaba. Fue entonces cuando comprendieron lo que debían hacer, era necesario estudiar este mismo comportamiento en otro espacio, en un espacio que facilitara su comprensión. Era necesario hacer algo conocido por los matemáticos como dinámica simbólica.

La idea es, entonces, definir algún nuevo espacio cuyas caracterísitcas permitan comprender el comportamiento en el que estamos interesados. Un espacio así, resultará más abstracto de lo que podríamos suponer, pero esta abstracción es justamente lo que permitirá entender no sólo el comportamiento en el que estamos interesados, sino una gran cantidad de comportamientos distintos. Podemos imaginar un nuevo espacio como el cúmulo de información que viaja digitalmente por la red global de computadoras, es decir, una gran cantidad de información transformada o representada por únicamente dos símbolos, el cero y el uno; así se tienen secuencias o sucesiones binarias que conforman el espacio y proporcionan información. Si creyéramos que la realidad humana está regida por una supercomputadora, bien podríamos decir que el nuevo espacio es: La Matrix.



Llamemos M_2 a este nuevo espacio. Así tenemos que M_2 es un espacio de secuencias binarias y sus puntos, s, son sucesiones infinitas de ceros y unos. Matemáticamente esto se define:

Espacio de sucesiones:

$$M_2 = \{ s = (s_0, s_1, s_2, \ldots) \mid s_i = 0,1 \}$$

El coyote les ha dicho a los agentes especiales que, para alterar y manipular el espacio, es necesario entrenar la mente. O lo que es lo mismo, para sobrevivir en la Matrix sin perder la cordura, nuestra mente debe trascender el espacio mismo. Entonces, para alterar y manipular M_2, y lograr que sea un nuevo marco teórico dentro del cuál podamos explicar nuestro fenómeno, debemos entrenar nuestra mente. Tomemos nuestra dosis de confiaza, respiremos profundo, pongamos la mente en blanco y trascendamos nuestro espacio.

Primero necesitamos una regla para decir qué significa en M_2 que dos puntos estén «cerca» o «lejos». Vamos a definir cómo medir la distancia entre dos puntos cualesquiera, a los que llamaremos s y t. Como los dos puntos son sucesiones, consideramos cada una de sus entradas, $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$, $t = (t_0, t_1, t_2, \ldots)$. Tomamos el valor absoluto de su diferencia entrada por entrada: $|s_i - t_i|$. Dividimos este valor entre 2 elevado al número de entrada: $(|s_i - t_i|)/2^i$. Finalmente, la suma, de esta expresión para todas las entradas, será el valor de la distancia:

$$\frac{|s_0 - t_0|}{2^0} + \frac{|s_1 - t_1|}{2^1} + \frac{|s_2 - t_2|}{2^2} + \frac{|s_3 - t_3|}{2^3} + \ldots\ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

Entonces la distancia del punto s al punto t, $d[s,t]$, se calcula así:

$$d[s,t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i}$$

A pesar de su apariencia, esta regla es inofensiva para nuestra mente. Aunque se calculen usando una suma infinita, las distancias que arroja esta regla son perfectamente manejables, de hecho son bastante pequeñas. Gracias a que las entradas de la sucesión sólo pueden valer cero o uno, la distancia máxima que puede haber entre dos puntos será: 2. Así podríamos decir en mal español que es una regla «shakespiriana», ya que hace mucho ruido para tan pocas nueces. Veamos esto con más calma, el valor más grande que puede tomar la distancia entre dos puntos se da, por ejemplo, cuando tenemos $s = (1, 1, 1, \ldots)$, $t = (0, 0, 0, \ldots)$. Calculando su distancia resulta que:

$$d[s,t] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|1-0|}{2^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$$

Además, aunque no parezca, esta regla para medir distancias, d, mantiene las mismas características que las reglas comunes y corrientes:

- Nunca tendremos distancias negativas.
- Si s y t fueran el mismo punto, su distancia, $d[s,t]$, valdría cero.
- El valor que se obtiene al calcular la distancia del punto s al punto t, es el mismo que el que se obtiene al calcularla del punto t al punto s. Esto es, $d[s,t] = d[t,s]$.
- Si tenemos tres puntos, r,s,t, entonces la distancia que recorremos al pasar por los tres, al ir de r a s y luego a t, será mayor o igual que la distancia al pasar del primero al tercero, al ir de r a t. Esto es, $d[r,s] + d[s,t] \geq d[r,t]$.

Cuando una regla para medir distancias, mantiene estas caracterísitcas, decimos que es una métrica. Ahora sabremos qué tanto afectarán nuestras manipulaciones a la Matrix, porque hemos hecho de M_2 un espacio que podemos medir. Matemáticamente decimos que gracias a la métrica d, ahora M_2 es un espacio métrico. Gracias a la métrica d podemos decidir cuáles puntos o sucesiones están cerca de otras. Y dos sucesiones están cerca según coincidan sus primeras entradas, por ejemplo, si tenemos tres sucesiones:

$$r = (1, 1, 1, 1, 1, \ldots), \qquad s = (1, 0, 1, 1, 1, 1, \ldots), \qquad t = (1, 1, 0, 1, 1, 1, \ldots).$$

Tenemos que r coincide con s en todas sus entradas excepto en la segunda y, r coincide con t en todas sus entradas excepto en la tercera. Calculando sus distancias obtenemos:

$$d[r,s] = 0.5 \quad , \qquad d[r,t] = 0.25$$

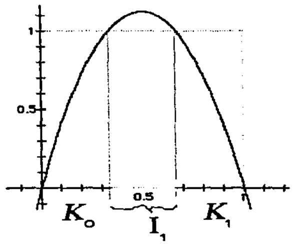
Resulta que r está más cerca de t que de s. Ahora que entendemos lo que significa estar cerca o lejos en M_2, podemos utilizar aquí todos los conceptos que tienen que ver con cercanía. Así, gracias a nuestro entrenamiento mental, ya podemos medir las alteraciones que le hagamos a este espacio. Sólo nos falta decidir cómo queremos manipular las sucesiones del nuevo espacio. Para alterar M_2 usaremos un mapeo con mala memoria, ya que simplemente «olvida» la primera entrada de la sucesión y recorre las demás entradas un lugar a la izquierda. El mapeo recibe el nombre de corrimiento de Bernoulli en honor a un famoso matemático y, se define así:

Corrimiento de Bernoulli:

B es un mapeo sobre M_2, es decir, B es una función que va de M_2 a M_2, $B: M_2 \rightarrow M_2$, y está dado por $B(s_0, s_1, s_2, \ldots) = (s_1, s_2, s_3, \ldots)$.

Esto es, si $s = (0, 1, 1, 1, \ldots)$, el corrimiento sobre s sería $B(s) = B(0, 1, 1, 1, \ldots) = (1, 1, 1, \ldots)$ El corrimiento ha «borrado» la primera entrada, que valía cero, y a recorrido las demás, los unos, a la izquierda. Este mapeo, aún siendo tan sencillo, nos reserva una sorpresa.

Habiendo definido cómo manipularemos la Matrix, hemos terminado nuestro entrenamiento mental, ya estamos listos para imbuirnos en ella sin perder la cordura. Así, gracias a las enseñanzas del coyote, ha llegado el momento de conocer una verdadera revelación. El corrimiento de Bernoulli y el mapeo que usamos para modelar el crecimiento poblacional de los chupacabras, $F(x) = \mu x\,(1-x)$, son lo mismo.



Para hacer nuestra la revelación anterior, debemos «entrar» en la Matrix y «esparcir» ahí dentro, el polvo de Cántor. Vamos a convertir la información del Cántor, K, en sucesiones infinitas de ceros y unos. Si recordamos, con μ ligeramente mayor que cuatro, K comenzó a mostrarse con los dos intervalos que no escapan en la primera iteración. Llamemos K_0 y K_1 a estos dos intervalos. Tomemos algún punto periódico repulsor de K, y apliquémosle una función S, que convierta la información de su comportamiento, o de su viaje dentro de K, en una sucesión. Y esta función que va del Cántor a la Matrix, $S: K \rightarrow M_2$, nos dará en la Matrix, el itinerario que sigue el punto en su viaje por el Cántor.

Antes de definir el itinerario, debemos precisar algo. Desde la formación del Cántor, estamos usamos una tasa de crecimiento ligeramente mayor que cuatro. Esto asegura que los puntos que escapan primero, I_1, forman un verdadero intervalo. Así existe una separación evidente entre los intervalos que permanecen, K_0 , K_1 , de manera que no habrá confusión en los razonamientos que haremos. Desde que μ es mayor que $2+\sqrt{5}$, aproximadamente $\mu>4.24$, nuestros razonamientos garantizan los resultados que obtengamos. Estos resultados también son ciertos para $\mu>4$, sólo que los razonamientos necesarios para garantizarlos son un poco más refinados. Hecha la precisión, podemos continuar.

Itinerario:

Llamemos x a cualquier punto que pertenezca a K. El itinerario de x es una sucesión $S(x)=(s_0, s_1, s_2, \ldots)$ donde cada entrada toma el valor de cero si x está en K_0 , o de uno si x está en K_1 , según la iteración que corresponda con el número de entrada. Esto se abrevia así: $s_j=0$ si $F^j(x) \in K_0$, $s_j=1$ si $F^j(x) \in K_1$.

Por ejemplo, si tenemos que x viaja de un intervalo a otro, o sea, x comienza en K_0, en la primera iteración pasa a K_1, luego regresa a K_0, después pasa a K_1, etcétera, el itinerario de x será $S(x) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots.)$.

Así vemos que lo que realmente hace la función, S, es codificar en sucesiones binarias el comportamiento de x. Es evidente que, usando su itinerario, todos los puntos del polvo de Cántor son imbuidos en la Matrix. Y como ya es costumbre, aunque los itineriarios sean sencillos, la función S posee características muy importantes:

- Dos puntos distintos del Cántor no pueden tener el mismo itinerario.
- Las sucesiones o itinerarios de todos los puntos del Cántor «llenan» la Matrix. Es decir, todas las sucesiones de M_2 son itinerarios de los puntos de K.
- Si tomamos dos puntos del Cántor que estén cercanos, sus itinerarios serán sucesiones cercanas, según la métrica d, en M_2. Es decir, S es una función continua.
- Si ahora consideramos dos sucesiones cercanas en M_2, tendremos que son los itinerarios de dos puntos cercanos en el Cántor. Es decir, la inversa de S también es continua.

Cuando una función posee estas caracterísitcas la llamamos homeomorfismo. En español esto significa: Transformación que produce formas semejantes. Entonces podemos decir en español que, gracias a los itinerarios, sabemos que el polvo de Cántor y la Matrix tienen esencialmente la misma forma. En matemáticas decimos que, la función S es un homeomorfismo y esto nos indica que, como conjuntos, K y M_2 son lo mismo.

Así comenzamos a ser concientes de la revelación del coyote. Gracias a nuestro entrenamiento mental, ahora somos capaces de reconocer que dos espacios aparentemente distintos, el Cántor y la Matrix, poseen formas semejantes. Aún más, estamos cercanos a completar la revelación que buscamos porque el homeomorfismo, S, da una equivalencia entre el comportamiento del corrimiento de Bernoulli, $\mathbf{B}$, sobre la Matrix, M_2, y el mapeo usado para modelar el crecimiento poblacional de los chupacabras, F, sobre el Cántor, K. Veamos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "F"] \arrow[d, "S"'] & K \arrow[d, "S"] \\ M_2 \arrow[r, "\mathbf{B}"] & M_2 \end{tikzcd}$$

Notamos que si partimos de K, no importa qué camino tomemos, llegamos al mismo resultado en M_2. Así, primero podemos «revolver» el Cántor usando F y después «transformarlo» en la Matrix usando S, o podemos «transformarlo» primero y después «revolver» la Matrix con $\mathbf{B}$, y de las dos maneras obtendremos el mismo resultado en la Matrix. Esto es, podemos aplicar F sobre K y luego usar S para llegar a M_2, o podemos usar primero S en K para llegar a M_2 y después aplicar $\mathbf{B}$ sobre M_2, y el comportamiento que obtendremos será el mismo. Entonces da lo mismo usar S después de F, $S \circ F$, que usar $\mathbf{B}$ después de S, $\mathbf{B} \circ S$, es decir:

$$S \circ F = \mathbf{B} \circ S.$$

Respiremos con calma porque hemos completado la revelación que buscamos. El coyote de la Zona del Silencio nos explicaría la revelación, en su místico español, de la siguiente manera: «Nuestra mente ha logrado trascender dos espacios aparentemente disintos, el Cántor y la Matrix, cuyas supuestas diferencias son simplemente facetas que nos impedían ver que los dos espacios son, en esencia, el mismo; aún más, las dos maneras aparentemente distintas en que alterábamos sendos espacios, el Cántor y la Matrix, también resultaron ser la misma alteración y, por lo tanto, producen el mismo efecto». Y esta revelación, según el coyote, le permite a la mente controlar el espacio.En matemáticas, la revelación anterior recibe el nombre de: **Conjugación**.

Teníamos que la función que produce itinerarios, S, es un homeomorfismo, lo cual indicaba que K y M_2 son lo mismo como conjuntos. Ahora, los mapeos $F{:}K \to K$, y $\mathbf{B}{:}M_2 \to M_2$, son conjugados porque existe el homeomorfismo $S{:}K \to M_2$, de tal manera que tenemos:

$S \circ F = \mathbf{B} \circ S.$ Así, S es la conjugación o el conjugante de F y $\mathbf{B}$.

Los mapeos conjugados presentan la misma dinámica o comportamiento. Así, al estar frente a un modelo que nos resulte complicado, podremos usar la dinámica simbólica para hacer un modelo más simple, en el que nos sea más sencillo investigar su comportamiento. Si logramos conjugar los mapeos de ambos modelos, la dinámica del modelo complicado deberá ser igual a la del más sencillo, facilitando así nuestra investigación. En español podemos decir que la dinámica simbólica y la conjugación, forman un verdadero dúo dinámico. Por ejemplo, si p es un punto fijo para F, entonces el itinerario de p es fijo para el corrimiento de Bernoulli. Aún más, los itinerarios de las órbitas periódicas de periodo n para el mapeo F, son órbitas periódicas de periodo n para el mapeo $\mathbf{B}$. Por ser conjugados, el mapeo F aplicado en K, tiene las mismas propiedades que $\mathbf{B}$ aplicado en $\mathbf{M}_2$. Por lo tanto, el corrimiento de Bernoulli es un modelo preciso del mapeo F. La revelación ya es nuestra.

Si el coyote estuviera junto a nosotros, podríamos escuchar sus palabras: «Felicidades mis pequeños saltamontes, han dado su primer paso hacia un mundo más vasto. Lo que deben hacer ahora, para lograr el entendimiento pleno, es regresar a la Matrix y descubrir las propiedades del corrimiento».

Seguiremos su consejo, tomemos otra dosis de confianza y regresemos a la Matrix. Para comenzar, es importante señalar que los puntos periódicos en $\mathbf{M}_2$ son sucesiones que se repiten, por ejemplo:

$$s = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots) \ , \qquad t = (0, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, \ldots)$$

La sucesión s se repite en la tercera entrada, así s es un punto periódico de periodo 3 para el corrimiento de Bernoulli. La sucesión t se repite en la quinta entrada, así t es un punto periódico periodo 5. En general, los puntos periódicos de periodo n son sucesiones cuyas primeras n entradas se repiten:

$$s = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_0, \ldots, s_{n-1}, s_0, \ldots)$$

Y como cada entrada puede tomar 2 valores, cero o uno, todas las posibles combinaciones de estos 2 valores, en las primeras n entradas, se cuentan multiplicando n veces 2, que son, en total, 2^n. Así tenemos la primera propiedad del corrimiento de Bernoulli:

- El número de puntos periódicos de periodo n que tiene $\mathbf{B}$, es, en total, 2^n.

Si ahora consideramos a cualquier punto de $\mathbf{M}_2$, $s = (s_0, s_1, s_2, \ldots)$, y pensamos en un punto periódico que tenga las primeras n entradas iguales, $t = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}, s_0, \ldots, s_{n-1}, s_0, \ldots)$, resulta que, según la métrica d, t está cerca de s. Si variamos el valor de n tenemos varios puntos periódicos t que se acercan a s. Pero s es cualquier punto, así tenemos que los puntos periódicos se acercan o tienden a cualquier punto de $\mathbf{M}_2$. Cuando esto sucede decimos que el conjunto de puntos periódicos es denso y, esto es la segunda propiedad del corrimiento:

- El conjunto de puntos periódicos, para $\mathbf{B}$, es denso en $\mathbf{M}_2$.

Ahora consideramos en punto en $\mathbf{M}_2$, que contenga las posibles combinaciones de unos y ceros de forma ordenada, $s = (0,1,0,0,1,1,0,0,0,1,1,1, \ldots)$. Tenemos que este punto, al ir borrando sus primeras entradas, o sea, bajo iteraciones del corrimiento de Bernoulli, se acerca a cualquier punto en $\mathbf{M}_2$. Cuando esto sucede decimos que, la órbita del punto es densa. Entonces, existe al menos una órbita densa en $\mathbf{M}_2$, lo cual es una tercera propiedad:

- Existe una órbita densa, para $\mathbf{B}$, en $\mathbf{M}_2$.

Haciendo buen uso de la revelación del coyote, la conjugación, sabemos que lo que hemos descubierto en la Matrix para $\mathbf{B}$, debe suceder en el Cántor para F. Así decimos que el mapeo $F(x) = \mu x(1-x)$, con $\mu>4$, tiene las siguientes propiedades:

- El número de puntos periódicos de periodo n que tiene F, es, en total, 2^n.
- El conjunto de puntos periódicos, para F, es denso en K.
- F tiene una órbita densa en K.

Debemos sentirnos satisfechos al observar estas propiedades, porque entender lo que implican, es el último paso en la Ruta al Caos. Los agentes especiales pensaron en pedirle al coyote la explicación de las propiedades pero, como podemos imaginar, su explicación resultó demasiado densa. No sabemos si su explicación resulto así porque las propiedadas tienen que ver con densidad o porque el coyote se alimenta con pequeños cactus alucinógenos del desierto. Y es que, aún con su sorprendente capacidad mental, el coyote no ha podido atrapar al ave que podría saciar su apetito, el correcaminos. Dejemos, entonces, que el coyote continúe su incansable persecusión del evasivo pájaro azul y, veamos, nosotros mismos, lo que implican las tres propiedades.

La primera propiedad, es puramente cuantitativa, nos da el número exacto de puntos periódicos. Aquí hay que notar que el número es total y no se refiere únicamente a los puntos periódicos de primer periodo, si no a todos los puntos periódicos de ese periodo. Así, esta propiedad es práctica y no será necesario profundizar en ella.

La segunda propiedad nos dice, en español, que los puntos periódicos «llenan» el Cántor. Esto podría no sorprendernos, ya que sabemos que en el Cántor hay una infinidad de puntos periódicos repulsores. Sin embargo, hay que recordar que estamos trabajando con conjuntos infinitos y, cuando hablamos del infinito, el sentido común deja de ser útil porque ninguna experiencia previa nos permite intuir lo que sucede. Por eso en matemáticas, como en la vida, no es bueno juzgar antes de intentar comprender, así que no debemos juzgar esta propiedad a la ligera. El tener juntas, a esta propiedad y a la siguiente, es un verdadero desafío para nuestra mente y puede confundirla. Vayamos poco a poco, primero intentemos dar una traducción de densidad matemática al español, podemos decir que un subconjunto denso «llena» el conjunto al que pertenece. Luego diremos en español que, al considerar conjuntos infinitos, «llenar» no es lo mismo que «formar»; es decir, cuando decimos que un conjunto se «llena» con algo, no quiere decir que este conjunto esté «formando» exclusivamente por eso que lo «llena». Nuestro sentido común nos dice exactamente lo contrario, por ejemplo, si el espacio vacío de un vaso se llena de agua, entonces ese espacio queda conformado únicamente por agua, si le metemos cualquier otra cosa al vaso, el agua dejará de llenarlo y ese espacio será llenado por el agua más la otra cosa. Pero esto no sucede así si consideramos un espacio infinito, ya que podemos acomodar una infinidad de elementos dentro de este conjunto para «llenarlo» y, aún así, todavía queda espacio para acomodar otra infinidad de elementos que también lo «llena» por si misma, sin ayuda de la otra infinidad de elementos. Aunque todo esto nos parezca sin sentido, sí es posible dar una serie de argumentos lógicos que respalden lo anterior, es decir, lógicamente sí es posilbe demostrar las fascinantes cualidades del infinito; pero para enumerar y explicar estos argumentos lógicos, necesitaríamos abrir otros expedientes que relataran diversas investigaciones matemáticas. Aún sin ser formales, el tema del infinito es tan interesante que podríamos reflexionar profundamente acerca de él pero, como siempre sucede, lo urgente no deja tiempo para reflexiones profundas y, en este momento, es urgente continuar con nuestra investigación.

Dejemos por un momento la segunda propiedad y veamos la tercera, después intentemos encontrar la explicación de ambas. La tercera propiedad nos dice, en español, que existe una órbita que «llena» el Cántor. Esta órbita pasa tan cerca de todos los rincones del Cántor que si sacamos los puntos del Cántor que no pertenecen a esta órbita, el Cántor continúa «lleno». Aunque parezca increíble, estamos retirando una cantidad infinita de puntos, de hecho, estamos retirando a la infinidad de puntos periódicos que «llenan» al Cántor pero, la órbita densa está formada por otra infinidad de puntos y es capaz de mantener la «consistencia» del Cántor. Es decir, no importa que al sacar puntos periódicos dejemos una infinidad de hoyos, porque los puntos de la órbita densa tienden a ellos, y se acercan tanto a todos los hoyos, que el Cántor mantiene su «densidad». Entonces, si escogemos algún pedacito del Cántor, sin importar qué tan pequeño o qué tan recóndito sea, en ese pedacito encontraremos puntos periódicos y puntos que pertenecen a la órbita densa; y en cualquier pedacito del Cántor sucederá lo mismo. Podemos decir todo esto de otra manera, si a la órbita densa le añadimos los puntos que le son cercanos, formaremos el Cantor; pero también resulta ser que, si al conjunto de puntos periódicos le añadimos los puntos a los que son cercanos, también formaremos el Cántor. En general, un subconjunto U contenido en un conjunto X es denso, si todo punto de U está arbitrariamente de toda x en X. No está demás recordar que lo anterior suena confuso porque, al considerar cantidades infinitas, el sentido común deja de funcionar. Tampoco sobra decir que esta explicación está escrita en español. La definición formal es:

Subconjunto denso.

Un subconjunto S contenido en X es denso en X si la cerradura de S es igual a X.

Ahora, que el mapeo F posea una órbita densa implica que F es topológicamente transitivo. El adverbio, topológicamente, nos indica en español que este concepto tiene que ver con el estudio de las formas o los lugares, así podríamos decir que el mapeo hace que la «forma» del conjunto sea transitiva. Es decir, un mapeo topológicamente transitivo tiene puntos que recurrentemente se moverán de una vecindad, por pequeña que sea, a cualquier otra. Supongamos que escogemos dos pedacitos del Cántor, uno de estos pedacitos estará fijo y al otro lo dejaremos vagar según el mapeo lo mueva, si esperamos el tiempo suficiente, F hará que estos dos pedacitos se mezclen; y esto suecederá con cualquier par de pedacitos que escojamos en el Cántor. Entonces la dinámica del sistema no puede descomponerse en subconjuntos o pedazos separados porque, tarde o temprano, estos subconjuntos se mezclarán. Un mapeo es topológicamente transitivo si para cualquier par de subconjuntos abiertos, existe alguna iteración del mapeo que haga que un subconjunto intersecte al otro. La definición formal de este concepto es la siguiente:

Transitividad topológica.

Se dice que el mapeo $f: X \to X$ es topológicamente transitivo si para cualquier par de subconjuntos abiertos U, V, contendios en X, existe $k>0$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

En español podemos decir que la transitividad topológica se debe a que, en cualquier pedacito que escojamos, encontraremos un punto de la órbita densa. Como los puntos de esta órbita viajan por todos los rincones del Cántor, su viaje no parece seguir ninguna regla y, como esta órbita es densa, el comportamiento del Cántor mismo no parece tener reglas. Es decir, la transitividad topológica hace que el comportamiento del Cántor se «vea» azaroso. Pero los puntos periódicos son densos en el Cántor, y los puntos periódicos describen patrones de comportamiento, así que, aunque nos resulte sorprendente, este conjunto presenta un comportamiento que parece azaroso pero que sigue patrones.

Para terminar con nuestras sorprendentes afirmaciones, existe una última característica de F que necesitamos revisar, lo cual no será problema ya que estamos familiarizados con ella. Si tomamos dos puntos distintos del Cántor, los que sean, sabemos que sus itinerarios son forzosamente distintos y deben diferir en al menos una entrada. Por ejemplo si x, y, son dos puntos distintos de manera que:

$$S(x) = (1,1,1,1,1,\dots), \qquad S(y) = (1,1,0,1,1,\dots)$$

Al aplicarle a estos itinerarios el corrimiento de Bernoulli, sabemos que después de suficientes iteraciones, diferirán en la primera entrada. En el ejemplo serán 2 iteraciones:

$$B^2 \circ S(x) = (1,1,1,\dots), \qquad B^2 \circ S(y) = (0,1,1,\dots)$$

Esto es, según la métrica d, existirá una distancia considerable entre ellos. Esto nos indica que estos dos puntos, por muy cercanos que estén, después de varias iteraciones de F, se encontrarán en lados opuestos del Cántor, es decir, se separarán una distancia considerable. Y ya sabemos lo que esto significa, que F es sensible a las condiciones iniciales. La definición matemática de esta característica es como sigue:

Sensibilidad a condiciones iniciales.

Un mapeo $f: X \to X$ es sensible a condiciones iniciales si existe $\delta>0$ tal que, para toda x en X y, toda vecindad N de x, existe x' en N y $n \geq 0$ tal que $|f^n(x) - f^n(x')| > \delta$.

Es decir, un mapeo es sensible a condiciones inciales si para cualquier punto existen otros, tan cercanos como queramos, que en algun momento se separarán una cierta distancia. Es bueno señalar que esta definición no dice que todas las condiciones iniciales cercanas se separarán, únicamente dice que no es seguro que al tomar condiciones iniciales cercanas, éstas se mantendrán juntas a largo plazo. Lo que sí es seguro es que, si tomamos cualquier pedacito del conjunto, no importa qué tan pequeño sea, siempre habrá en este pedacito algunos puntos que se alejen al pasar el tiempo.

Si un mapeo es sensible a las condiciones iniciales, su comportamiento desafía a las calculadoras y computadoras, de hecho, desafía cualquier intento de cálculo numérico. Esto sucede porque los errores de redondeo se magnifican con cada iteración, y así, el cálculo numérico de una órbita puede no parecerse a la órbita real. De manera particular, la representación que nos haga la computadora de una órbita puede no ser la real. En términos prácticos, si tenemos dos condiciones iniciales cercanas que finalmente se separarán, quiere decir que sus comportamientos a largo plazo serán muy diferentes; entonces, las predicciones a largo plazo son prácticamente imposibles cuando el modelo es sensible a condiciones iniciales. Esto porque cualquier medición que hagamos a un fenómeno real no será exacta, siempre se presentará un margen de error y no sabremos exactamente cuál condición inicial tenemos y, como las condiciones iniciales pueden separarse, cualquier predicción a largo plazo que hagamos será dudosa. El menor cambio cauntitativo, que hagamos a nuestra medición inicial, puede llevarnos a grandes diferencias cualitativas en el comportamiento a largo plazo. En pocas palabras, los sistemas sensibles a condiciones iniciales son impredecibles.

Hace casi cuarenta años, Edward Lorenz propuso un modelo del clima terrestre que presentaba sensibilidad a condiciones iniciales. Para explicar su descubrimiento dió una conferencia, a la que por razones publicitarias tituló «¿Puede una mariposa que agita las alas en Brasil provocar un tornado en Texas?». Ya en la conferencia Lorenz explicó que si al medir las condiciones climáticas, olvidábamos plasmar la alteración en el viento que producía el aleteo de una mariposa, la predicción a largo plazo que haríamos del clima podría ser muy distinta del clima verdadero, por ejemplo, podríamos predecir buen clima cuando realmente se presentaría un tornado. Así, lo único que el aleteo de una mariposa puede causar, es un error en nuestra medición de las condiciones climáticas y si usamos esta medición errónea como condición inicial en un modelo sensible a condiciones inciales, las predicciones que hagamos serán altamente cuestionables. Sin embargo, la prensa no entendió la explicación y apodó a la sensibilidad a las condiciones inciales como «el efecto mariposa» y, aún hoy, hay quien osa afirmar que la ciencia a demostrado que el aleteo de una mariposa aquí, puede crear un tornado en Japón pero no hay nada más alejado de la verdad. En fin, el «efecto mariposa» es la razón por la cual no se hacen predicciones serias del clima a largo plazo, porque los modelos del clima presentan sensibilidad a condiciones iniciales.

Pues bien, la sensibilidad a condiciones iniciales es la última característica del sorprendente comportamiento del Cántor bajo nuestro mapeo. Si recordamos, nuestro mapeo es determinista y, además, nos da una relga de cambio bastante simple y precisa, por eso es extraño que este mapeo genere un ente matemático tan extraño como el polvo de Cántor. Y es asombroso que un mapeo determinista, tan aparentemente sencillo, produzca un comportamiento tan complejo y difícil de comprender como el que hemos descrito; particularmente es asombroso presente un comportamiento impredecible si es determinista. Lo peor de todo es que el caso de este mapeo no es único, existe una infinidad de «sencillos» mapeos deterministas que presentan estas complejas características. Pero, si uno se detiene a pensar con cuidado, resulta que hemos descubierto que algo aparentemente aburrido y rutinario es, en realidad, bastante difícil de comprender y por lo mismo, terriblemente interesante. Así que, lo maravilloso de todo esto es que el caso de nuestro mapeo no es único, existen una gran cantidad de fenómenos que, al modelarse, presentan estas desafiantes características.

Y después de estas sorprendentes características ya no necesitaremos regresar a la Matrix, ni seguir las enseñanzas de ningún coyote, ni perseguir más chupacabras; porque después de todo lo que hemos pasado, nuestro viaje de mil kilómetros ha llegado a su fin. Aunque no lo tengamos claro, hemos completado la Ruta al Caos.

En el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española podemos leer:

caos.

(Del latín chaos, y este del griego $\chi\alpha o\xi$, abertura).

1. Estado amorfo e indefinido que se supone anterior a la ordenación del cosmos.
2. Confusión, desorden.
3. *Fís. y Mat.* Comportamiento aparentemente errático e impredecible de algunos sistemas dinámicos, aunque su formulación matemática sea en principio determinista.

Lo primero que notamos es que el concepto de caos, que usamos al hablar español, no es exactamente el mismo que el físico y matemático. De la filosofía griega, hemos adoptado la idea de que el caos es un estado de las cosas sin reglas, ni patrones, ni formas. Así, acostumbramos pensar al caos como lo opuesto al orden. Sin embargo, en matemáticas, la idea de desorden total se asocia con el concepto del azar, el cual es muy distinto del concepto matemático de caos. Generalmente, concibimos que el caos no existe por sí mismo, si no que es un estado, una propiedad, una característica, o un comportamiento de las cosas. Y básicamente, en matemáticas se comparte esta misma concepción con algunas especificaciones: En primer lugar, consideramos que «las cosas» están organizadas de alguna manera que cambia con el tiempo, así hablamos de sistemas dinámicos. Además, como hemos visto, consideramos que un estado del sistema es el conjunto de información que lo describe en un tiempo dado, y representamos los estados del sistema como puntos dentro del espacio fase; así, no pensamos en el caos como un estado del sistema. En matemáticas, el caos se concibe como un comportamiento especial y, se considera que los entes matemáticos que producen este comportamiento, tienen la propiedad de ser caóticos. Nosotros hemos recorrido la Ruta al Caos buscando comprender este comportamiento especial, así, durante nuestro viaje hemos construido la definición de caos. Esta definición se ha construido bajo el enfoque de la topología, que, en español podemos decir que, es la disciplina que estudia los espacios, las superficies y sus formas. Otras disciplinas matemáticas dan otras definiciones de caos pero, no existe confusión porque todas ellas se refieren al mismo fenómeno o comportamiento especial, y simplemente lo definen, o describen, usando su propia terminología. Entonces, la definición matemática de caos, que hemos construido, es:

Caos.

Sea V un conjunto cualquiera. El mapeo f produce caos en V, o lo que es lo mismo, $f: V \to V$ es caótico en V si:

i) f es sensible a condiciones iniciales.
ii) f es topológicamente transitivo.
iii) sus puntos periódicos son densos en V.

Lo que significan estas tres propiedades es, justamente, lo que hemos visto durante la Ruta al Caos. Y el comportamiento que producen es, precisamente, el que hemos tardado tanto en comprender y describir en el Cántor. Así, el significado real de la definición, es todo aquello que ya hemos entendido y por eso, intentar dar una breve explicación solo empobrecería nuestra concepción del caos matemático. Es por eso que sólo recordaremos que, el caos

- no es predecible por i),
- no puede romperse o descomponerse en subsistemas por ii),
- pero sí presenta patrones o mantiene un elemento regular por iii).

Pero, si el concepto matemático del caos no es el mismo que el que se usa comúnmente, si la definición de caos no puede traducirse de manera sencilla al español, si para entender esta definición es necesario familiarizarse con complicados conceptos matemáticos, si es evidente que los únicos que pueden manejar fácilmente esta definición son los físicos y los matemáticos, entonces por qué se dice que la teoría matemática del caos está revolucionando las demás áreas del conocimiento humano. ¿Cómo es que el caos matemático está influyendo en el arte, las ciencias sociales, y en general, el pensamiento humano?

La respuesta a esa pregunta debe darla la Filosofía. Y tristemente, ningún agente especial ha recibido entrenamiento filosófico, así, solo se dirá en este expediente que todo el conocimiento y el quehacer humano están relacionados. Toda obra o descubrimiento influye, en mayor o menor medida, en las demás obras y descubrimientos. En particular, el concepto de caos matemático se está aplicando a una gran variedad de fenómenos, y cada vez se obtienen más evidencias que indican que este comportamiento caótico se presenta en la evolución de las especies animales, las redes neuronales, las sociedades humanas, el clima, la economía, la creación artística, los lenguajes, etecétera, etc.

La relación que tiene la teoría del caos con cada una de las ciencias y las artes, es distinta y, no es la finalidad de este expediente explicar estas relaciones. Actualmente existe una gran cantidad de libros, de divulgación científica, que detallan la influencia y utilidad de la teoría del caos en las demás áreas del saber y hacer humano. La mayoría de estos libros evitan profundizar en el mundo matemático y, hacen énfasis en los resultados obtenidos al mirar el cosmos bajo la concepción matemática del caos.

Los agentes especiales, al no tener en la Zona del Silencio ninguno de estos libros, detuvieron momentáneamente su investigación para mirar el paisaje desértico que les rodeaba. Y por alguna extraña razón, que todavía no comprendían, sintieron que muchos de los conceptos surgidos en la Ruta al Caos estaban frente a ellos.

Junto con la definición matemática del caos, también llega el momento de resolver, por completo, el misterio que hemos perseguido por tanto tiempo y por tantos y tan insólitos lugares. Porque para los agentes especiales, entender el caos matemático influye en una cosa por sobre todas las demás, en la comprensión el crecimiento poblacional de los chupacabras.

Tal vez sea bueno recordar un poco, esta investigación. En 1975 la población de chupacabras creció tanto que el medio ambiente, del cerro del Tepozteco, dejó de sostenerla. Así, hubo un éxodo notorio de chupacabras en aquel año y, policías judiciales intentaron exterminarlos pero no lo lograron, dejando para 1976 una reducida población. Sin embargo, los policías judiciales mantuvieron sus actividades en secreto y no sabemos exactamente cuántos chupacabras había y cuántos quedaron vivos, peor aún, es posible que ni siquiera los mismos judiciales lo sepan. Más de veinte años después, se repitieron, en diferentes regiones, los ataques de chupacabras al ganado y fue entonces cuando los agentes especiales supieron, por primera vez, de su existencia y decidieron investigarlos. Sin embargo, la investigación presentó muchas dificultades ya que, al no tener el tamaño de la población en 1976, no podemos considerar una condición inicial única para explicar el crecimiento poblacional, en los últimos años, de los chupacabras; y al no tener el tamaño poblacional en ningún año, no podemos estimar una tasa de crecimiento. Pero los agentes especiales saben que siempre existen alternativas y decidieron plantear un modelo, $F(x) = \mu x\,(1-x)$, para explicar su crecimiento poblacional. El modelo, al considerar distintas tasas de crecimiento, es decir, distintos valores de μ, ha arrojado los siguientes resultados:

- $0 \leq \mu \leq 1$, se predice la extinción gradual de los chupacabras.
- $1<\mu<3$, se predice un tamaño estable para la población en el largo plazo.
- $\mu=3$, se predice un tamaño de población con tendencia a estabilizarse.
- $3<\mu<4$, se predicen distintos estados periódicos para el tamaño de la población, en algunos casos se tiene una cantidad razonable de opciones para estos estados y, en otros casos, se tienen tantos estados periódicos que prácticamente el crecimiento sería impredecible.
- $\mu=4$, se tiene un crecimiento poblacional impredecible, el cual creemos azaroso.

Cuando μ toma valores mayores que cuatro, la mayoría de los puntos escapan del intervalo $[0,1]$, lo cual significa en la «realidad» que: La mayoría de las condiciones iniciales que se consideren para la población, terminarán por llevarla a un tamaño mayor que el de la existente en 1975, y ya que el ambiente no soporta tal cantidad de chupacabras, la población se extinguirá o, por lo menos, tendrá que emigrar en busca de nuevos recursos, desapareciendo así del lugar dónde se encuentra. Sin embargo, dentro del intervalo $[0,1]$, permanece una infinidad de estados periódicos repulsores formando un fractal conocido como polvo Cántor. Este polvo de Cántor, es un ente matemático interesante por su estructura y, como ahora sabemos, porque el comportamiento de los puntos que lo conforman es caótico. En la «realidad» esto significa que existen estados periódicos para la población, los cuales, sin importar qué tan grande sea la tasa crecimiento, nunca sobrepasarán el tamaño de la de 1975 y, si la población se encontrara en alguno de ellos, su comportamiento sería caótico. Pero, aunque no sea imposible que la condición inicial de la población sea uno de estos estados, la teoría de la probabilidad no dice que, por ser el Cántor totalmente disconexo, es improbable que la población se encuentre jamás en alguno de los estados que lo conforman. Así, descartamos que la población se encuentre en el Cántor y tenemos que el modelo nos dice que:

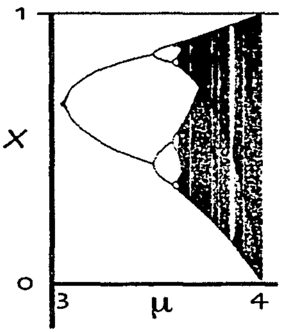
- $\mu>4$, se predice un crecimiento poblacional tan grande, que la excesiva cantidad de individuos llevará a la población a su desaparición.

Ahora bien, como todavía existe la población de los chupacabras dentro del Tepozteco y como se repitieron sus ataques al ganado, sabemos que la población no se ha extinguido ni parece estar en vías de hacerlo. Esto descarta la posibilidad de que su tasa de crecimiento sea menor o igual que uno, es decir, descartamos el caso: $0\leq\mu\leq1$. Por otra parte, sabemos que las condiciones de las cavernas del Tepozteco no han variado desde hace mucho tiempo, así, si la población tuviera tendencia a estabilizar su tamaño, no hubieran sucedido los ataques de los chupacabras fuera del Tepozteco, ni en años recientes, ni en 1975. Esto descarta la posibilidad de que la tasa de crecimiento sea igual o menor que tres, es decir, descartamos los casos: $1<\mu<3$ y $\mu=3$.

Podríamos adelantarnos y suponer que, la tasa de crecimiento es mayor que cuatro y así, tendríamos que la población creció tanto en los últimos años, que los chupacabras debieron que emigrar a otros lugares en busca de condiciones más favorables. Pero el modelo predice que, al alcanzar un tamaño relativamente grande, la población desaparecerá al año siguiente, por lo menos, del lugar en el que se encuentra y, como sabemos, todavía existe una población de chupacabras dentro del Tepozteco. Podríamos suponer que en 1975 la población alcanzó este tamaño fatal, y estaba destinada a extinguirse para el año siguiente, pero los policías judiciales mataron a tantos chupacabras, que los pocos que quedaron tuvieron alimento suficiente para mantener su reducida población. Así, los judiciales no sólo no lograron terminar con los chupacabras, si no que salvaron su población; lo cual no resulta difícil de creer si se considera la eficiencia que suelen mostrar los policías judiciales. Puede ser que alguien en Gobernación haya llegado a esta misma conclusión y, por esta razón, se decidiera mantener en secreto todo lo relacionado con los chupacabras. Pero de ser así, Gobernación llegó a una conclusión errónea, lo cuál tampoco resulta difícil de creer. La conclusión es errónea porque después de los últimos ataques de los chupacabras en años recientes, nadie intentó exterminarlos y aún así se mantiene la población del Tepozteco, es más, todavía existe la población original de chupacabras en la Zona del Silencio. Esto descarta la posibilidad de que la tasa de crecimiento sea mayor que cuatro, es decir, descartamos el caso $\mu>4$.

Sólo nos queda suponer que la tasa de crecimiento es tal, que en algunos periodos de tiempo, la población casi alcanza ese tamaño fatal en el cual su ambiente deja de sostenerla. Al acercarse a este tamaño, las condiciones para su supervivencia son tan malas que algunos individuos prefieren emigrar en busca de un mejor ambiente y, así, debido a las malas condiciones de supervivencia y a la migración, después de algún tiempo la población reducirá su tamaño pero no llegará a la extinción y eventualmente volverá a acercarse a este tamaño fatal. Esto explicaría los repentinos ataques de los chupacabras, debidos a migraciones fuera de sus lugares de reproducción y, también explicaría la permanencia de sus poblaciones en los dos lugares de reproducción que conocemos, el Tepozteco y la Zona del Silencio. Y esta suposición puede coincidir con el modelo, ya que los casos restantes, $3<\mu<4$, $\mu=4$, parecen llevarnos en esa dirección.

Si recordamos, al variar los valores de μ, se consideraba al mapeo $F(x) = \mu x(1-x)$ como una familia de mapeos, F_μ , donde cada valor de μ representa un hermano o sistema dinámico distinto. Al tomar la tasa de crecimiento valores mayores que tres, la familia F_μ sufría una serie de bifurcaciones y, estas alteraban el comportamiento de los distintos mapeos. Para representar esta información utilizamos un diagrama de órbita, que debemos revisar de nuevo, solo que ahora buscamos un hermano, o sistema dinámico, cuyo comportamiento acerque el tamaño de la población lo más que se pueda al uno, es decir, al tamaño fatal que llevará a la extinción de la población.



Recordamos que este diagrama, aunque haya sido construido con las órbitas de un solo punto, representa las órbitas de la gran mayoría de puntos en el intervalo (0,1). De hecho, para fines prácticos y hablando en español, representa todas las órbitas que nos importan. Matemáticamente no representa todas las órbitas porque sabemos que existen, por ahí, puntos periódicos repulsores indetectables, pero también sabemos que es improbable que la población llegue jamás a alguno de esos estados. Entonces, el diagrama marca los posibles valores que pueden alcanzar las órbitas según la tasa de crecimiento, de ahí queda claro que el sistema dinámico, que más acerca las órbitas al uno, es el que se obtiene con $\mu=4$.

Así, nuestro mejor candidato, para explicar el crecimiento poblacional de los chupacabras, es la tasa de crecimiento igual a cuatro. Podríamos preguntarnos por qué no considerar valores de μ ligeramente menores que cuatro, pero debemos recordar que queremos resolver un problema práctico y, para fines prácticos y hablando en español, al considerar $\mu=3.95$ obtenemos un comportamiento muy parecido al que obtenemos con $\mu=4$. Matemáticamente es posible formalizar lo anterior y, describir con cuidado las sutiles diferencias que se presentan, pero como siempre sucede, lo urgente no deja tiempo para lo formal. Entonces, revisemos nuevamente el comportamiento que se presenta con $\mu=4$, del cual sabemos que es impredecible y creemos totalmente azaroso. Sin embargo, ahora contamos con nuevos conceptos y herramientas que facilitarán esta nueva revisión.

Con este fin, usaremos nuevamente la dinámica simbólica, sólo que ahora no estudiaremos el comportamiento en la Matrix, si no en el círculo común y corriente. Para abreviar, llamemos S^1 al círculo. Le aplicaremos al círculo, S^1, un mapeo que lo expanda sobre si mismo, es decir, no aumentaremos su tamaño, tomaremos los arcos que lo forman y los abriremos. Digamos que θ es cualquier punto de S^1 dado por cualquier arco, y llamemos E al mapeo que los expanda, así tenemos:

Podriámos imaginar que el mapeo E, es un domador de puntos salvajes que amarra a los puntos del cuello y los hace correr en círculo. Ahora, queremos que el mapeo E duplique el tamaño de los arcos, es decir $E(\theta)=2\theta$. Y por supuesto, esperamos que la revelación del coyote, la conjugación, nos ayude a relacionar el comportamiento de E con el de F. Sin embargo, la conjugación será un poco más complicada ya que debemos llevar al círculo dentro del intervalo [0,1]. Veamos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
S^1 \arrow[r, "E"] \arrow[d, "h_1"'] & S^1 \arrow[d, "h_1"] \\
{[-1,1]} \arrow[r, "q"] \arrow[d, "h_2"'] & {[-1,1]} \arrow[d, "h_2"] \\
{[0,1]} \arrow[r, "F"] & {[0,1]}
\end{tikzcd}$$

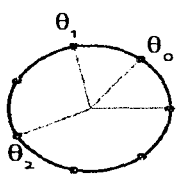
Primero tomamos puntos de S^1 y los convertimos en números reales usando la función coseno, $h_1(\theta)=\cos\theta$, esta función convierte al círculo en el intervalo $[-1,1]$. Después necesitamos tomar este nuevo intervalo y comprimirlo para llegar al $[0,1]$. Digamos que w es cualquier punto del intervalo $[-1,1]$, entonces, al usar la función $h_2(w)=(1-w)/2$, comprimimos todo el $[-1,1]$ dentro del $[0,1]$. Así tomamos al círculo y lo transformamos en el intervalo $[0,1]$. Ahora, para tener la explicación completa del diagrama, existe un mapeo q, sobre el intervalo $[-1,1]$, el cual se obtiene según la relación:

$$h_1\circ E = \cos(2\theta) = 2\cos^2\theta - 1 = q\circ h_1$$

así obtenemos las relaciones:

$$h_1\circ E = q\circ h_1 \quad , \qquad F\circ h_2 = h_2\circ q$$

Con estas aplastantes transformaciones relacionamos el comportamiento de E con el de F. Para ser precisos, la función coseno no es un homeomorfismo, así que obtuvimos una semiconjugación. Entonces, con $\mu=4$, el mapeo F, sobre el $[0,1]$, es semiconjugado con el mapeo E, sobre el círculo. Las propiedades de E son fáciles de revisar. Primero tenemos que todas las distancias en S^1 se doblan, así, todos sus puntos se separan el doble de su distancia inicial en cada iteración; es decir, E es sensible a condiciones iniciales. Después, si consideramos cualquier arco de S^1, por pequeño que sea, llegará un momento en que E lo expanda hasta cubrir todo S^1, así cualquier arco puede llegar a cubrir a cualquier otro; es decir, E es topológicamente transitivo. Por último, revisemos los puntos periódicos para E, lo cual será un poco más complicado. Veamos un ejemplo:



Si partimos de θ_0 y duplicamos el arco que lo formó, llegamos a θ_1. Si ahora doblamos el arco de θ_1 llegamos a θ_2, y si doblamos su arco regresamos a θ_0. Esto es $E(\theta_0)=2\theta_0=\theta_1$, $E(\theta_1)=\theta_2$, $E(\theta_2)=\theta_0$, entonces $E^3(\theta_0)=\theta_0$. Lo mismo sucede con los siete puntos indicados en el dibujo, es decir, son puntos periódicos de periodo 3 para E; de hecho el punto que no forma arco, el que se encuentra horizontal a la derecha, es fijo para E. Debemos notar que los puntos periódicos dividen al círculo en partes iguales y, siempre se considera al punto fijo ya que es periódico de todos los posibles periodos.

Si les damos una vuelta completa, $\theta=\theta+2\pi$, los puntos del círculo vuelven a ser los mismos, entonces los puntos periódicos de periodo n, tambén serán los mismos si llegamos a ellos dando muchas vueltas completas, $E^n(\theta)=\theta=\theta+2\pi k$, donde k indica el número de vueltas completas que damos. Pero como $E^n(\theta)=2^n\theta$, tenemos que $2^n\theta=\theta+2\pi k$. Si despejamos el valor del punto periódico, $\theta=(2\pi k)/(2^n-1)$, podemos concluir que: Los puntos periódicos de periodo n, dividen las vueltas completas, o sea, al círculo mismo, en 2^n-1 partes iguales, y estas partes iguales se forman tomando en cuenta al punto fijo. Así sabemos que existen puntos periódicos de todos los periodos y, mientras más grande sea su número de periodo, mayor será el número de partes iguales. Entonces, los puntos que marcan las partes iguales, es decir, los puntos periódicos, al aumentar su periodo se acercarán a cualquier punto del círculo. Por lo tanto, los puntos periódicos son densos en el círculo para E.

Entonces, el mapeo *E*, sobre el círculo, presenta las siguientes propiedades: Es sensible a condiciones inciales, es topológicamente transitivo y sus puntos periódicos son densos. Gracias a todo el esfuerzo que hemos hecho, ahora sabemos que, tener estas tres propiedades quiere decir que el mapeo *E* es caótico sobre el círculo. Y como, con $\mu=4$, el mapeo *F* es semiconjugado al mapeo *E*, ahora podemos afirmar que: El mapeo $F(x) = 4x(1-x)$, no presenta un comportamiento azaroso como alguna vez pensamos, si no que su comportamiento es caótico sobre todo el intervalo $[0,1]$.

Por lo tanto, el crecimiento poblacional de los chupacabras es caótico.

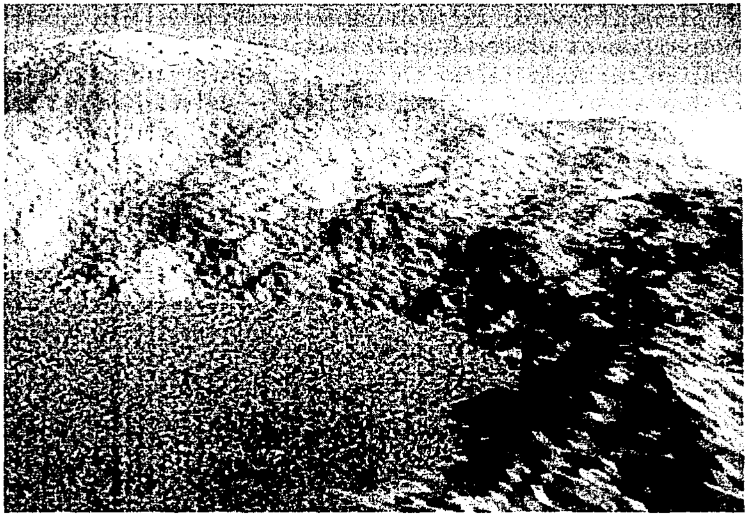
Podemos sentirnos satisfechos con nuestra investigación y festejar hasta el amanecer, ya que nuestra conclusión coincide con lo que suponíamos. Al tener una tasa de crecimiento igual a cuatro, cualquier condición inicial que consideremos, después de algún tiempo, se acercará lo suficiente al tamaño fatal como para observar migraciones de individuos. Pero, como las condiciones que efectivamente llegan a este tamaño fatal son pocas y están aisladas, es improbable que la población alcance exactamente este tamaño. Así, la población logrará mantenerse. Entonces ahora sabemos que el crecimiento poblacional de los chupacabras es impredecible. Además, sin importar cuál sea la condición incial de la población, sabemos que si esperamos el tiempo suficiente, ésta alcanzará todos los posibles tamaños que garanticen su supervivencia, es decir, alcanzará todos los tamaños menores a aquel que conlleva a su extinción. Pero también sabemos, que el crecimiento poblacional de los chupacabras no es totalmente desordenado, si no que presenta patrones o una cierta regularidad. Es decir, ahora sabemos que el caos rige el crecimiento poblacional de los chupacabras.

Esto que nos sucedió en la investigación, suponer que un comportamiento era azaroso y descubrir que realmente es caótico, es una de las implicaciones más fuertes de la teoría del caos. Lo cual no significa que la teoría del caos termine con el azar. Simplemente significa que algunos fenómenos, que durante mucho tiempo se consideraron totalmente azarosos, están resultando ser caóticos y, esto explica por qué, a pesar de su impredictibilidad, presentan ciertos patrones. Un ejemplo muy conocido de esto, es el clima.

Otro ejemplo de esto mismo, está profundamente relacionado con nuestra investigación: El crecimiento poblacional caótico explica, en la misma forma en que lo hicimos con los chupacabras, la aparición impredecible pero con ciertos patrones de algunas plagas, tal y como lo hacen, las plagas de langostas y ratones.

Es más, la teoría de sistemas dinámicos también se está usando para explicar fenómenos como el siguiente: Era desconcertante que, con únicamente cuatro bases nitrogenadas, que conforman el ADN, se heredara información genética capaz de generar un desarrollo, o crecimiento celular, tan complejo como el que presentan plantas y animales. Pero ahora, usando mapeos muy simples, podemos imitar los patrones que genera la naturaleza, tal y como se ha hecho con estos puntos que parecen formar la hoja de un helecho.

Al comprender esto, los agentes especiales detuvieron su alcoholizado festejo, y observaron con cuidado la vista que les ofrecía la Sierra del Diablo. Así, se dieron cuenta de que podían imitar esta formación rocosa, aplicando un mapeo simple sobre el plano. Digámoslo así, frente a la teoría del caos, la técnica de Bob Ross para pintar paisajes es demasiado tardada y complicada.



Agotados por el esfuerzo realizado, los agentes especiales dieron por terminada la investigación de los chupacabras aunque, todavía existía un detalle que les preocupaba. Así, decidieron salir del desierto, lo cual hubieran hecho de no ser por un inevitable encuentro. En las afueras del desierto, un grupo de viajeros aseguraba que los cerros de la Sierra del Diablo son en realidad pirámides escondidas, dentro de las cuales sobreviven descendientes directos de la raza Maya. Y para apoyar su alucinante afirmación, mostraban unos extraños restos de yerba calcinada con forma de cigarro, los cuales, decían, les habían sido regalados por los habitantes de estas pirámides camufladas. Fueron estos restos los que obligaron a los agentes especiales a regresar a la Zona del Silencio, porque eran, precisamente, el detalle que no habían cubierto al investigar a los chupacabras.

Los agentes especiales creían que los restos de yerba calcinada, con forma de cigarro, eran de origen extraterrestre. Pero los chupacabras también dejaban estos restos y, como se había descubierto en la Zona del Silencio, los chupacabras no eran seres extraterrestres, eran producto de mutaciones debidas al cono magnético de la Zona. Y ahora, parecía ser que los mayas, que vivían en las pirámides escondidas de la Sierra del Diablo, también dejaban estos restos de yerba calcinada. Debía existir, entonces, alguna relación entre los extraterrestres, los chupacabras y los mayas subterráneos. Y por seguridad nacional, los agentes especiales debían descubrir esta relación.

Al regresar a la Zona del Silencio, los agentes descubrieron que el cono magnético facilitaba el aterrizaje de las naves de los extraterrestres y, encontraron no solo a los chupacabras y a los mayas subterráneos, si no que, al seguir con más cuidado los restos de yerba calcinada, se toparon con toda clase de criaturas resultantes de las mutaciones anormales que produce el cono magnético. Así, era obvio que debía existir una íntima relación entre todos estos seres sobrenaturales pero eran tantos y tan diversos, que los agentes especiales pensaron pedirle ayuda al ejército mexicano para intentar exterminarlos. Antes de tan desesperada acción, decidieron hacer un último y atrevido esfuerzo por comprender lo que sucedía.

El primer impulso, de los agentes especiales, fue modelar los fenómenos que producían los nuevos seres sobrenaturales para intentar encontrar alguna relación entre ellos. Pero, si habían tardado tanto tiempo en comprender los modelos de los extraterrestres y los chupacabras ¿cuánto más tardarían en estudiar todos los demás modelos?. Peor aún, si el aparentemente simple modelo de los chupacabras había generado comportamientos tan interesantes y tan diversos ¿cuántos nuevos conceptos y herramientas necesitarían para los nuevos modelos?. La única opción, por atrevida que pareciera, era estudiar, al mismo tiempo, todos los modelos juntos.

Siempre es bueno comenzar por lo que ya conocemos. O sea, si existe una relación entre los extraterrestres y los chupacabras, debe existir alguna relación entre lo que hemos estudiado de ambos. Si recordamos, en el modelo del crecimiento poblacional de los chupacabras, usamos el mapeo:

$$F(x) = \mu x\,(1-x) = -\mu\, x^2 + \mu\, x$$

En los modelos para el comportamiento de la creencia en los extraterrestres, los mapeos eran:

$$f(x) = x + \kappa x\,(1-x) = -\kappa\, x^2 + (1+\kappa)\, x \qquad , \qquad g(x) = 0.5\, x^2 + 0.5\, x + \lambda\, .$$

Si los observamos con cuidado, notamos que son bastante parecidos. Los tres tienen una x^2, es decir, presentan un término cuadrático y, también tienen una x sin elevar a ninguna potencia, es decir, presentan un término lineal. Muy importante, ninguno posee un exponente mayor que 2. Esto es, los tres mapeos presentan la siguiente forma general:

$$P(x) = A\, x^2 + B\, x + C$$

Por ejemplo, en el mapeo g, tenemos que A=0.5, B=0.5, C=λ. En el mapeo F, A= -μ, B=μ, C=0. Las funciones con esta forma general reciben el nombre de polinomios cuadráticos, entonces, nuestros tres mapeos son polinomios cuadráticos. Aquí es importante notar que, para tener realmente un término cuadrático, A no debe valer cero.

Pues bien, los agentes especiales hicieron las simplificaciones e idealizaciones pertinentes para modelar los fenómenos que les interesaban de los nuevos seres sobrenaturales. Y se dieron cuenta de que podían plantear los nuevos modelos usando mapeos sin exponentes mayores que 2, o sea, sus nuevos mapeos también eran polinomios cuadráticos. Así, para estudiar a todos al mismo tiempo, debían estudiar los polinomios cuadráticos en general.

Luego entonces, debemos encontrar alguna manera de mostrar los posibles comportamientos que presenten todos los polinomios cuadráticos. Lo cual sería muy sencillo si tuviéramos alguna clasificación de estos polinomios. Es decir, si tuviéramos a estos polinomios agrupados en clases distintas según su comportamiento bastaría con acomodar a los nuevos mapeos con los de su clase para saber qué comportamiento presentarán. Ahora, cuando decimos que dos cosas son similares, estamos, de hecho, agrupándolas o clasificándolas según la caracterísitica que poseen en común; y es por esta razón que el concepto nacido de las enseñanzas del coyote es una verdadera revelación. El concepto de conjugación nos dice cuáles mapeos presentan comportamientos similares, es decir, usando la conjugación podemos clasificar según su dinámica a todos los polinomios cuadráticos. En español diríamos que, la conjugación nos ayudará a guardar, de un solo tirón, tomates con tomates y manzanas con manzanas.

Tomemos primero nuestra dosis de confianza y, después, a cualquier polinomio cuadrático, $p(x)= ax^2 + bx + c$. Intentemos clasificarlo, es decir, conjugarlo a otro más sencillo. Para lograr esto usaremos una transformación afín a una lineal, $r(x)=\alpha x+\beta$. Aunque de momento no lo parezcan, las transformaciones afines son muy simples. Las letras griegas alfa, α, y beta, β, representan cualquier valor, tal y como lo hacen a,b,c, en el polinomio cuadrático; y lo único que hacen, las transformaciones afines, es mover a la recta de números reales y expandirla o comprimirla, pero no la tuercen, ni la doblan, ni nada por el estilo, es decir, sus gráficas también son rectas. Podemos decir que las afines hacen, con la recta real, lo mismo que hacemos nosotros con las antenas del televisor cuando no podemos ver bien la pelota en un partido del mundial: Las movemos de lugar, las achicamos, las estiramos, las ponemos de cabeza, pero nunca las doblamos ni las rompemos. Pues bien, encontremos la conjugación del polinomio cuadrático:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "?"] \arrow[d, "r"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "r"] \\ \mathbb{R} \arrow[r, "p"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Buscamos alguna función misteriosa, ?, que también vaya de los reales a los reales y que sea conjugada a cualquier polinomio cuádratico. Y obviamente, queremos que esta función conjugada sea más simple que el polinomio. Para encontrarla, debemos revisar qué le hace esta función a los números reales, es decir, debemos llegar, por un camino distinto, al mismo lugar en el que estaríamos si hubiéramos usado esta función. Y una parte del camino distinto debe recorrerse en reversa, bueno, en inversa.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "?"] \arrow[d, "r"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \arrow[r, "p"] & \mathbb{R} \arrow[u, "r^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

Este diagrama nos muestra el camino que debemos seguir. Como la afín es un homeomorfismo, sabemos que tiene inversa, r^{-1}, y podemos usarla. Así, si partimos de los reales usando r, después p, y luego r^{-1}, llegamos al mismo lugar en el que estaríamos al usar la función misteriosa, ?. Entonces, si usamos r^{-1} después de usar p después de usar r, obtendremos a esta función misteriosa; y como ya sabemos, esto se escribe así:

$$r^{-1} \circ p \circ r = ?$$

Tenemos $r(x)=\alpha x+\beta$. Ahora apliquemos p después de la afín, es decir, usemos lo que resulte de la afín como puntos para p, dicho en español, «metamos» la afín dentro de p:

$$p \circ r(x) = a(\alpha x+\beta)^2 + b(\alpha x+\beta)+c$$

Ahora, la inversa es algo así como un superhéroe bizarro que hace exáctamente lo contrario que su original. Entonces la inversa se obtiene haciendo lo contrario que la afín, es decir, despejando al punto original, $r^{-1}(x)=(x-\beta)/\alpha$. Apliquemos la inversa de la afín:

$$r^{-1} \circ p \circ r = [\,(a(\alpha x+\beta)^2 + b(\alpha x+\beta)+c) - \beta\,] \,/\, \alpha .$$

Para que esta expresión nos diga algo, necesitamos arrastrar el lápiz para reunir a los términos semejantes, es decir, necesitamos hacer un poco de álgebra. Recordemos el álgebra que nos enseñaron en preparatoria y hagámosle un poco de cirugía plástica a esta expresión:

$$\begin{aligned} r^{-1}\circ p\circ r &= [\,(\,a\,(\alpha x+\beta)^2 + b\,(\alpha x+\beta) + c - \beta\,]\,/\,\alpha \\ &= [\,a\,(\alpha x)^2 + 2\alpha\beta a x + a\beta^2 + b\,\alpha x + b\beta + c - \beta\,]\,/\,\alpha \\ &= [\,a\,\alpha^2 x^2 + 2a\alpha\beta x + b\,\alpha x + (a\beta^2 + b\beta + c) - \beta\,]\,/\,\alpha \\ &= [\,a\,\alpha^2 x^2 + (2a\alpha\beta + b)x + p(\beta) - \beta\,]\,/\,\alpha \\ &= (a\,\alpha)\,x^2 + (2a\beta + b)\,x + (\,p(\beta) - \beta\,)/\,\alpha \end{aligned}$$

Entonces la función misteriosa dada por $r^{-1}\circ p\circ r$, también es de la forma $A x^2 + B x + C$, con $A = (a\alpha)$, $B = (2a\beta + b)$, $C = [(\,p(\beta) - \beta\,)/\,\alpha]$.

Gracias a la cirugía plástica que hemos hecho, ahora sabemos que la función misteriosa también es un polinomio cuadrático. Así, lo único que nos falta para conocer su verdadera identidad, es simplificar el polinomio que obtuvimos. Esto se logra escogiendo, con cuidado, valores para α y β:

$$\alpha = 1/a \qquad , \qquad \beta = -b/2a\ .$$

si sustituimos estos valores en la función misteriosa obtenemos:

$$\begin{aligned} r^{-1}\circ p\circ r &= x^2 + 0\,x + \{\,[\,(a(-b/2a\,)^2 + b(-b/2a\,) + c\,) - (\,-b/2a\,)\,]a\,\} \\ &= x^2 + \{\ -b^2/4 - b^2/2 + ac\ + b/2\ \} \\ &= x^2 + \{\ (\,-b^2 + 2b + 4ac\,)/4\ \} \end{aligned}$$

con cirugía plástica:

$$\begin{aligned} &= x^2 + \{\,[\,1 - (\,b^2 + 2b + 1 - 4ac\,)]\,/4\,\} \\ &= x^2 + \{\,[\,1 - ((b-1)^2 - 4ac\,)]\,/4\,\} \end{aligned}$$

Por último, sea la letra griega gama, γ, igual al último término, $\gamma = \{\,[\,1 - ((b-1)^2 - 4ac\,)]\,/4\,\}$. Entonces:

$$r^{-1}\circ p\circ r = x^2 + \gamma\ .$$

Esta es la verdadera identidad de la función misteriosa: $m(x) = x^2 + \gamma$. Ahora, como α, β, γ, dependen de los valores de a, b, c, de cada polinomio cuadrático, entonces la afín que logra la conjugación depende de cada polinomio. Es decir, la conjugación afín es única para cada polinomio y esto nos garantiza que podremos darles una única clasificación. Esto es un resultado importante para nuestra investigación, así que, enunciémoslo como tal.

Teorema.

Existe una única transformación afín tal que: $r^{-1}\circ p\circ r = x^2 + \gamma$.

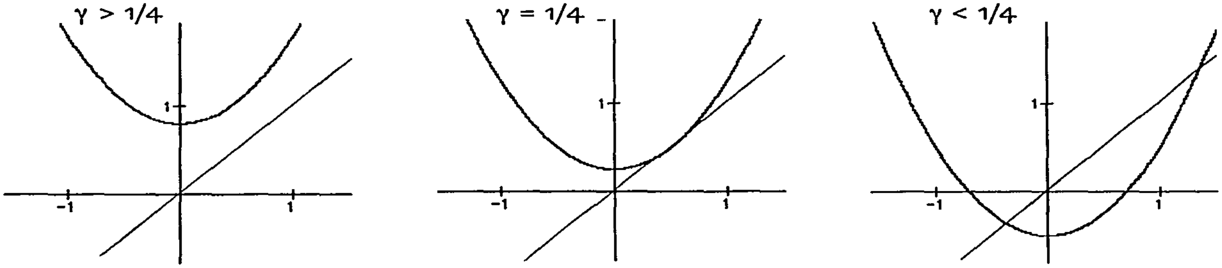
Ya sabemos que con las afines podemos clasificar bien a los polinomios cuadráticos y, ya casi tenemos su clasificación porque, de este resultado se desprende otro de manera casi automática. Los resultados semiautomáticos se llaman corolarios. Enunciemos nuestro corolario para explicarlo después.

Corolario.

Para cada clase de conjugación existe un único sistema dinámico de la siguiente forma

$$m(x) = x^2 + \gamma\ .$$

Expliquemos el corolario. Ya tenemos a la función conjugada, $m(x) = x^2 + \gamma$. Como γ puede tomar cualquier valor, tendremos una familia de funciones, m_γ, donde cada valor de γ es un hermano distinto. Cada hermano distinto representa un comportamiento distinto. Así hemos logrado una clasificación, con las transformaciones afines, de todos los polinomios cuadráticos de acuerdo a su comportamiento. Y tenemos tantas clases de comportamientos como valores de γ, es decir, tantas clases de dinámicas como números reales. En español podemos decir que, ya tenemos los estantes donde vamos a clasificar a los polinomios cuadráticos, y cada valor de γ es un estante distinto. Solo nos falta saber qué comportamientos representan los estantes., es decir, qué comportamiento tienen la familia de mapeos a la que pertenece la función misteriosa. Revisemos entonces los distintos estantes, es decir, las distintas dinámicas según el valor de γ.



Por todo lo que ya sabemos, con sólo ver estas gráficas podemos decir que los comportamientos que tendremos con $\gamma>1/4$, serán poco interesantes, ya que todos los puntos se irán hacia el infinito. En español podríamos decir que, en los estantes $\gamma>1/4$, estarán acomodados todos los polinomios aburridos. Esto nos deja dos casos interesantes, que obviamente son los que presentan puntos fijos. Veamos primero cuándo tendremos puntos fijos; según su definición, $m(x)=x$, observamos que:

$$x^2 + \gamma = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - x + \gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{(\pm)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\gamma}}{2}$$

sustituyendo el valor de γ : $\quad x_{(\pm)} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}}{2}$

Tendremos puntos fijos cuando lo que está adentro de la raíz no sea negativo. Y esto no será negativo cuando tengamos $(b-1)^2 \geq 4ac$. Esto explica por qué hemos escogido una cara, o presentación, tan extraña para el valor de γ, porque facilita la sustitución al buscar puntos fijos. Ahora, como la función misteriosa es conjugada a los polinomios cuadráticos, ya sabemos que estos tendrán puntos fijos cuando $(b-1)^2 \geq 4ac$. Entonces, cuando tengamos cualquier polinomio que cumpla esta condición, sabremos que presentará comportamiento interesante. Vamos bien, ya tenemos estantes para clasificar a los polinomios cuadráticos, ya sabemos cuáles estantes serán interesantes y cuáles no lo serán, y ahora, ya podemos determinar rápidamente si un polinomio merece ser acomodado en algún estante interesante.

Sólo nos falta revisar qué sucede si un polinomio cuadrático es interesante, es decir, qué implica que tenga puntos fijos. O lo que es lo mismo, queremos clasificar, de manera más obvia, a los polinomios cuadráticos interesantes y, como ya sabemos, esto se logra encontrando una función a la cual sean conjugados. Busquemos una nueva función conjugada.

Primero, supongamos que $p(x)$ tiene al menos un punto fijo, llamémoslo β_o, entonces $p(\beta_o)=\beta_o$. Hemos llamado así al punto fijo porque queremos usarlo en la transformación afín, es decir, le hemos dado una nueva cara al valor de β pero, en esencia, β sigue siendo el mismo porque puede tomar cualquier valor. En español podríamos decir que, α y β son como el camaleón, así que no importa de qué color los veamos porque esencialmente siguen siendo los mismos y, como pueden tomar cualquier color, usamos el color que más nos ayude. Lo que sí es importante es que sus valores sigan dependiendo de cada polinomio. Cambiemos ahora el color de α:

$$\alpha = -(2a\beta_o + b) / a$$

Ahora debemos sustituir α, β_o, en el camino que seguimos para descubrir la verdadera identidad de la función misteriosa:

$$\begin{aligned} r^{-1} \circ p \circ r &= -(2a\beta_o + b)\, x^2 + (2a\beta_o + b)\, x + (\, p(\beta_o) - \beta_o)/ (-(2a\beta_o + b)/a\,) \\ &= -(2a\beta_o + b)\, x^2 + (2a\beta_o + b)\, x + 0 \end{aligned}$$

Para descubrir la identidad de esta nueva función conjugada, sólo nos falta saber cómo son los puntos fijos para los polinomios cuadráticos. Vamos a encontrarlos:

$$ax^2 + bx + c = x \quad \Rightarrow \quad a\,x^2 + (b-1)\,x + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{(\pm)} = \frac{1 - b \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces sustituyamos, en la nueva función conjugada, el valor del punto fijo β_o:

$$r^{-1} \circ p \circ r = -(1 \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}\,)\, x^2 + (1 \pm \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}\,)\, x$$

Como queremos una clasificación única para cada polinomio, debemos tener una afín única, es decir, debemos escoger una de las dos raíces. Sin perder la generalidad podemos quedarnos con la raíz positiva, entonces:

$$r^{-1} \circ p \circ r = -(1 + \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}\,)\, x^2 + (1 + \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}\,)\, x$$

Hemos encontrado que la nueva función conjugada también tiene la forma $A\,x^2 + B\,x + C$, con $A = -(1 + \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}\,)$, $B = -A$, $C = 0$.

Es decir, esta función también es un polinomio cuadrático, sólo que no tiene término independiente C. Ahora, para que esta función conjugada exista para los números reales, necesitamos que lo que está dentro de la raíz no sea negativo y, como ya sabemos, cuando esto no es negativo tenemos puntos fijos. Así hemos obtenido un resultado doble: Si p es interesante entonces es conjugado, por una afín, a un polinomio sin término independiente; y viceversa, si p es conjugado a un polinomio con término independiente entonces es interesante, es decir, p tiene al menos un punto fijo. Este resultado doble es importante para nuestra investigación porque nos da nuevos estantes para los polinomios cuadráticos interesantes, y los polinomios se acomodan en los nuevos estantes según su característica más obvia, sus puntos fijos. Es decir, ahora clasificamos a los polinomios interesantes según su característica más fácil de revisar, sus puntos fijos. Enunciemos este resultado doble como debe hacerse:

Teorema.

El polinomio p es afinmente conjugado a un polinomio cuadrático sin término independiente si, y sólo si, p tiene al menos un punto fijo.

De este teorema también se desprende un resultado semiautomático, el cual terminará con nuestra investigación y nos revelará el secreto que buscamos, la relación entre los alienígenas, chupacabras, mayas subterráneos y demás seres sobrenaturales. Para observar este portentoso resultado semiautomático, lo único que debemos hacer es decir la palabras mágicas: Sea $\mu = (1 + \sqrt{(b-1)^2 - 4ac}\ )$, entonces:

$$r^{-1} \circ p \circ r \quad = \quad -\mu x^2 + \mu x \quad = \quad \mu x(1-x)$$

Corolario.

Las dinámicas interesantes están representadas por la familia:

$$F_\mu(x) = \mu x(1-x) \qquad \text{con} \qquad \mu \geq 1$$

Una vez más, hemos logrado concluir la investigación de forma satisfactoria. Aún más, esta investigación ha sido verdaderamente productiva. Hemos demostrado que todos los posibles comportamientos interesantes, de los polinomios cuadráticos, están representados por la familia de mapeos F_μ. Por eso es que esta familia recibe el nombre de familia cuadrática. Estamos seguros que ningún polinomio cuadrático presentará, jamás, algún comportamiento que no hayamos visto en nuestras investigaciones. Podemos afirmar, sin exagerar, que hemos observado todas las dinámicas que puedan presentar todos los polinomios cuadráticos y, cuando matemáticamente decimos todos, nos referimos a absolutamente todos, es decir, al número infinito de polinomios que pueden plantearse. Es más, cuando tengamos frente a nosotros a cualquier polinomio cuadrático que pueda resultar interesante, ni siquiera necesitaremos revisarlo porque, sea cual fuere el comportamiento que presente, podremos revisar ese mismo comportamiento en el mapeo F al que sea conjugado, es decir, solo tendremos que determinar el valor de μ que hace conjugado a F_μ con ese polinomio cualquiera y podremos revisar su dinámica en un ambiente que ya nos es familiar. Debemos estar satisfechos, ya que, gracias a este último corolario, nuestra investigación vale lo que una infinidad de investigaciones.

Y gracias a este último corolario, los agentes especiales entendieron la relación que existe entre los fenómenos que producen los seres sobrenaturales de la Zona del Silencio. Los extraterrestres, chupacabras, mayas subterráneos y demás seres extraños, se conocen entre sí e intercambian la extraña yerba con forma de cigarro. Ahora es evidente que esta yerba puede no ser de origen extraterrestre, ya que todos los seres sobrenaturales la usan para sus inimaginables propósitos. Los agentes especiales informaron de esto a su cuartel general, ahí se decidió que el ejército mexicano debía cercar la Zona del Silencio y vigilar la actividad paranormal del lugar. Si el ejército mexicano logra impedir que los seres sobrenaturales saquen del cerco su insólita yerba, el mundo estará a salvo.

EXPEDIENTE 4:

La maldición de la llorona.

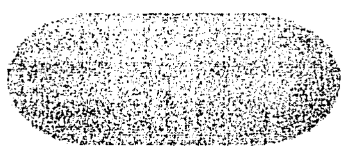
Durante un entrenamiento nocturno de la selección de fútbol, en el estadio México 68, una extraña mujer entró a la cancha lamentándose angustiosamente por sus hijos, se detuvo en el medio campo, lanzó una maldición y desapareció frente a los atónitos ojos de los deportistas. A la mañana siguiente fueron descubiertos restos de yerba calcinada, con forma de cigarro, en el lugar donde se había visto aquella aparición. Este hecho no habría llamado la atención de los agentes especiales de no ser porque, después de aquella fantasmal noche, cualquier balón que se pusiera en la cancha parecía moverse por sí mismo y viajaba erráticamente por el césped. Al revisar la sección confidencial del Archivo General de la Nación, los agentes especiales descubrieron que la Secretaría de Gobernación había mandado brujas de Catemaco, Veracruz, a «limpiar» el estadio para utilizarlo en el mundial de México 70 y, para el mundial de México 86 fue necesario realizar un exorcismo en la cancha del mismo. Algo misterioso se ocultaba en la historia del estadio.

Los agentes especiales, al no tener ninguna pista que seguir, decidieron consultar a la psíquica que asesora a la Procuraduría General de la República. Ella aconsejó realizar una sesión espiritista en el estadio para descubrir la historia detrás de aquella aparición y, como único requisito para la sesión, ella exigía una buena cantidad de jugo fermentado de piña. Los agentes especiales consiguieron aquel sugestivo jugo y lo llevaron a media noche al estadio. Después de ingerirlo y lanzar un conjuro, la psíquica contó lo siguiente:

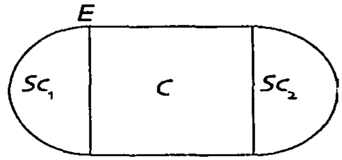
En el estadio se aparecía, de vez en cuando, el atormentado espíritu de una mujer. El espíritu habitaba en el plano astral donde sufría por el recuerdo de sus hijos. En vida, esta mujer fue panadera y tenía dos hijos cuyo mayor sueño era jugar, con la selección, el mundial México 70. Cuando fueron seleccionados, la mujer les preparó unos exquisitos panes para festejar pero, por la emoción, la experta panadera había amasado mal los panes y sus hijos tuvieron terribles dolores estomacales que les impideron cumplir su sueño. Desde entonces, su alma en pena desgarra con su llanto la tranquilidad del estadio olímpico universitario.

Según la psíquica, la llorona había logrado vincular el plano astral con el estadio y usando sus dotes de panadera, lo había transformado de alguna manera. Los agentes especiales debían comprender la maldición lanzada por la llorona para volver la cancha del estadio a la normalidad. Pero esto confundió, aún más, a los agentes especiales porque ninguna de las técnicas que conocían les permitía modelar una maldición. No era posible asociar fórmulas a la fantasmal transformación hecha por la llorona. Y lo único posible era hacer algo conocido como matemáticas a manos libres, o sea, matemáticas sin fórmulas.

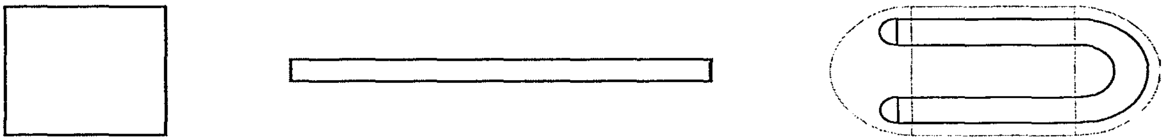
Para empezar, el espacio fase será ahora la cancha del estadio. Esto es, el espacio fase será un pedazo del plano con forma de estadio. Entonces, el espacio fase tendrá alto y largo, así podremos hablar de dirección horizontal y vertical. Ahora pensaremos no en una, sino en dos dimensiones.



Podemos pensar la forma del estadio como un cuadrado con dos semicírculos a los lados. Si consideramos que un lado del cuadrado es una unidad de medida, tenemos un cuadrado unitario con dos semicírculos de radio igual a 1/2. Llamemos E al estadio, C al cuadrado y Sc_1, Sc_2 a los semicírculos.

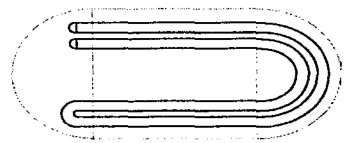


La llorona, utilizando sus técnicas de panadera, ha «amasado» el plano astral del estadio de la siguiente manera: Ha aplastado verticalmente al cuadrado y lo ha estirado horizontalmente, luego lo ha torcido en forma de herradura y lo ha vuelto a poner sobre el estadio mismo. Y finalmente, ha «achicado» los dos semicírculos para colocarlos en ambos lados del cuadrado «amasado», es decir, en los extremos de la herradura.



Es importante notar que, para que este proceso de «amasar» o transformar el estadio tenga sentido como en los dibujos, el cuadrado se aplasta para que quede más chico que la mitad de su tamaño original y se alarga para que quede a más del doble. Esto es, aplastamos verticalmente a C por un factor $m < 1/2$ y lo expandemos horizontalmente por un factor $1/m$. Y los semicírculos Sc_1, Sc_2, simplemente son contraidos y mapeados dentro de Sc_1, en los extremos de la herradura. Este proceso se conoce matemáticamente como la herradura de Smale.

Para amasar sus panes, la llorona debe hacer este proceso repetidamente. Si nosotros iteramos dos veces, obtenemos la figura de al lado. Con esto ya podemos imaginar lo que obtendríamos al hacer más iteraciones.



Ahora, llamemos G al proceso de «amasar» el estadio. G es un mapeo ya que manda al espacio fase dentro de sí mismo. Entonces, aunque no tengamos fórmulas, la maldición de la llorona puede pensarse como un sistema dinámico. La idea es comprender lo que hace este mapeo con el estadio para desentrañar la maldición. Podemos ver que G no manda, en una iteración, dos o más puntos distintos del estadio a un solo punto, esto es, dos puntos no pueden ir a dar al mismo lugar. Entonces G puede pensarse como una función uno a uno. También notamos que la herradura no cubre por completo al estadio, es decir, al aplicar G, el espacio fase queda «dentro» de sí mismo pero no queda «sobre» si mismo. Cuando esto sucede decimos que el mapeo no es sobre. Esto implica que si queremos «desamasar» el estadio, considerar la inversa del mapeo, sólo lo podremos hacer para aquellos puntos que sean cubiertos por la herradura. Y teniendo en cuenta estas propiedades, intentaremos comprender la dinámica del mapeo G en el estadio.

Para empezar, lo que G realmente hace con el semicírculo Sc_1 es contraerlo dentro de sí mismo. Esto quiere decir que todos los puntos de Sc_1 se van acercando entre sí con cada iteración pero, como G no «mueve» o traslada a Sc_1, si no simplemente lo contrae, debe existir un punto al que todos se acerquen y evidentemente, este punto no se mueve. Y ya sabemos como expresar esto matemáticamente: Existe un punto fijo atractor para F dentro de Sc_1 y, en el largo plazo, todos los puntos de Sc_1 llegarán a él. Es más, como todo Sc_2 es mapeado dentro de Sc_1 en la primera iteración, tenemos que, en el largo plazo, todos los puntos de Sc_2 también llegarán al mismo punto fijo. Y aún más, cuando se acomoda la herradura dentro del estadio, se ve que existen puntos del cuadrado C que son acomodados fuera del mismo y van a dar a los semicírculos y por esta razón, estos puntos también tienden al mismo punto fijo atractor. Es decir, todos los puntos del estadio que no van a dar dentro del cuadrado, son atraídos por este punto fijo atractor. Así, para entender la dinámica de G sobre el estadio sólo nos hace falta comprender a los puntos que permanecen, todo el tiempo, dentro del cuadrado.

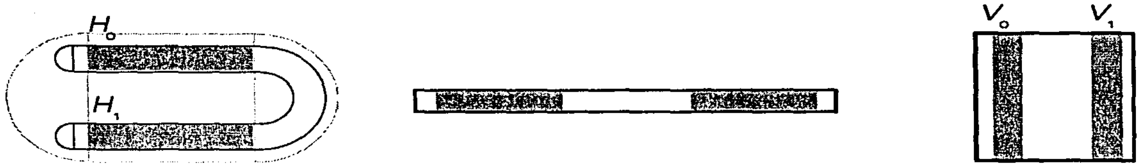
Los agentes especiales se dieron cuenta de que, como la llorona era un fantasma, su maldición podría actuar por toda la eternidad y, el gran problema con la eternidad no es que algo nunca termine, si no que ese algo, aunque exista, jamás comenzó. Así que al pensar en los puntos que permanecen «todo el tiempo», además de pensar en todo el tiempo que quedaba por pasar, debían pensar en el ya sucedido; es decir, debían intentar pensar en un gran lapso de tiempo pasado y futuro, que con mucha libertad poética, podrían llamar eternidad.

Cuando teníamos un mapeo sin inversa, únicamente podíamos iterarlo hacia adelante. Ahora que nuestro mapeo tiene inversa, podemos iterarlo una infinidad de veces hacia adelante y hacia atrás. Ya que hemos asociado las iteraciones del mapeo con el paso del tiempo, podríamos decir en español que iterar hacia atrás es revisar el pasado. Esto no significa que la eternidad o los viajes en el tiempo se puedan modelar con matemáticas, únicamente significa que podemos considerar cuantas iteraciones queramos en ambos sentidos y, con imaginación, podemos asociar un gran número de iteraciones con un «futuro» a largo plazo y con un «pasado» a largo plazo. Para poder comprender el comportamiento del mapeo durante «todo el tiempo», haremos iteraciones hacia adelante y hacia atrás; de manera que en español podríamos decir que para estudiar el avance y retroceso del tiempo, debemos colocarnos en distintos «presentes». Tal vez a esto se refería el perseguidor del cuento de Julio Cortázar cuando hablaba de un tiempo fuera del tiempo. Podríamos especular más acerca de los misterios del tiempo pero, como siempre sucede, lo urgente no deja tiempo para especulaciones. Así que, tomemos una dosis de confianza porque imbuirnos en la representación del tiempo no resultará tan confuso como parece, únicamente debemos hacerlo con cuidado para no terminar, al igual que el perseguidor, diciendo que: «Esto ya lo toqué mañana.»

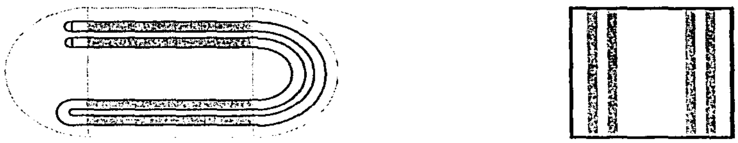
Llamemos K al conjunto de puntos que permanecen todo el tiempo dentro del cuadrado. Matemáticamente definimos a K como los puntos que pertenecen a C y que todas las iteraciones de G los mandan dentro de C. Esto se escribe así:

$$K = \{ q \in C \mid G^k(q) \in C \text{ para todo número entero } k \}$$

Primero buscamos a los puntos que son «amasados» dentro del cuadrado, es decir, los puntos cuyas órbitas hacia adelante caen en C. Para encontrarlos veamos la herradura resultante de una iteración, nos fijamos en los puntos que caen dentro del cuadrado y «desamasamos», es decir, aplicamos la inversa del mapeo.

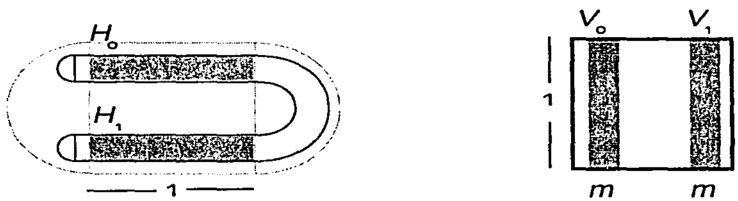


Los puntos de la herradura, que caen dentro del cuadrado, forman dos rectángulos horizontales que llamamos H_0, H_1. Estos rectángulos provienen de dos rectángulos verticales del cuadrado original, que llamaremos V_0, V_1. Es decir, si hacemos una iteración hacia adelante, es fácil ver que los rectángulos verticales están formados por puntos que permanecen en C. Si ahora consideramos a los puntos de la herradura que caen dentro del cuadrado en la segunda iteración, vemos que también provienen de puntos que pertenecen a los rectángulos verticales V_0, V_1. Es más, también forman rectángulos verticales, que están dentro de V_0, V_1, tal y como vemos en las figuras de abajo. Para «ver» esto debemos imaginar que «deshacemos» la herradura dos veces, la primera vez quedará una herradura normal, la segunda vez quedará el cuadrado de aquí abajo.

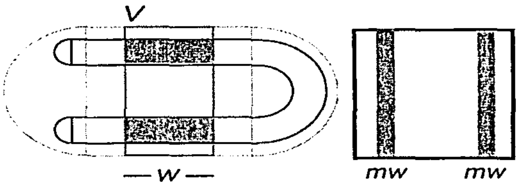


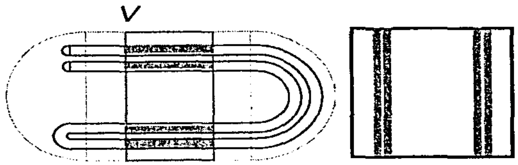
Con esto hemos entendido el patrón que siguen estos puntos. Para la tercera iteración tendremos cuatro rectángulos verticales, muy delgados, en el lugar de V_0 y otros cuatro en el lugar de V_1. Y así, nuestra mente puede ir imaginando los puntos que permancen en el cuadrado a la cuarta iteración, a la quinta, etcétera.

Aún más, también podemos dar los tamaños de los rectángulos que obtenemos. Como hemos considerado los lados del cuadrado como unidades de medida, podemos decir que cada lado mide uno. Entonces, los rectángulos horizontales H_0, H_1 miden 1 de largo. Al considerar la inversa del proceso, la longitud de estos rectángulos es acortada por el factor m, así los rectángulos V_0, V_1 miden m de largo y 1 de alto.



Ahora, también con la inversa del mapeo quisiéramos hacer predicciones a largo plazo, algo así como encontrar el pasado lejano del sistema. Entonces quisiéramos encontrar la imagen inversa de los rectángulos verticales V_0, V_1, aún más, quisiéramos encontrar un patrón que nos indicara cómo son las imágenes inversas de todas sus iteraciones hacia atrás. Esto podría parecer ambicioso y difícil de realizar pero, con un poco de cuidado, podemos generalizar lo que ya hemos razonado y, así, encontrar todas las imágenes inversas de V_0 , V_1. Primero consideremos, dentro del cuadrado, cualquier rectángulo vertical V que lo atraviese por completo y, revisemos de dónde proviene, es decir, su imagen inversa.

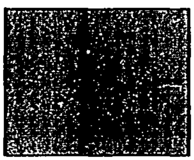




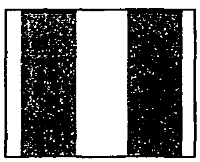
De cualquier rectángulo V, tenemos que los puntos de los cuales podemos considerar su imagen inversa son, evidentemente, aquellos que intersectan a la herradura. En las figuras de arriba a la izquierda vemos los puntos que caen en V a la primera iteración, en las de arriba a la derecha vemos los que caen en V a la segunda iteración. Estos puntos están, como era de esperarse, dentro de V_0, V_1. Si V mide de largo w, entonces la imagen inversa de V es un par de rectángulos verticales de largo mw, uno en V_0 otro en V_1. Si en lugar del rectángulo cualquiera V, tomamos a V_0 para buscar su segunda imagen inversa, tenemos que ésta consta de cuatro rectángulos verticales, y como V_0 mide m de largo, cada uno de los rectángulos de su imagen inversa medirá m^2 de largo, su tercera imagen inversa consiste de ocho rectángulos verticales de largo m^3, etcétera. Lo mismo sucede con las imágenes inversas de V_1. Ya tenemos el patrón que buscamos, hemos logrado describir los puntos que permancen en el cuadrado al aplicar G, es decir, a los puntos cuyas órbitas hacia adelante pertenecen a C. Matemáticamente definimos así al conjunto de estos puntos:

$$K_+ = \{ q \mid G^k(q) \in C \text{ para } k=0,1,2,\dots \}$$

Y si revisamos las propiedades de este conjunto tal y como lo hicimos con el polvo de Cántor, es claro que K_+ es el polvo de Cántor estirado hacia abajo, es decir, es el producto de un Cántor por un intervalo vertical.



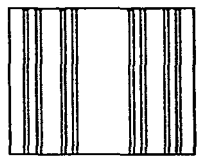
C



puntos que permanecen en C después de una iteración.

puntos que permanecen en C después de dos iteraciones.

puntos que permanecen en C después de tres iteraciones.

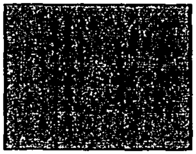


puntos que permanecen en C después de cuatro iteraciones.

Ahora consideramos a los puntos de las herraduras que caen dentro del cuadrado, es decir, aquellos puntos del cuadrado que podemos «desamasar». Si vemos algunas de las figuras anteriores, tenemos que los puntos de las herraduras que intersectan al cuadrado forman rectángulos horizontales y siguen un cierto patrón. Con ellos podemos razonar de la misma manera que lo hicimos con K_+ y así, podemos describir a los puntos del cuadrado sobre los cuales podemos aplicar la inversa de G, es decir, a los puntos cuyas órbitas hacia atrás pertenecen a C. Matemáticamente definimos así al conjunto de estos puntos:

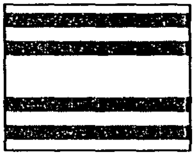
$$K_- = \{ q \mid G^{-k}(q) \in C \text{ para } k=1,2,3,\ldots \}$$

Y aquí también resulta que K_- es el polvo de Cántor estirado pero ahora hacia un lado, es decir, es el producto de un Cántor por un intervalo horizontal.

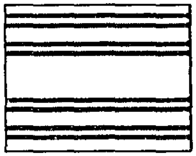


C

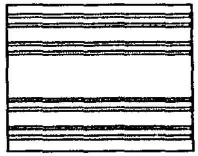
puntos cuya imagen inversa pertenece a C.



puntos cuya segunda imagen inversa pertenece a C.



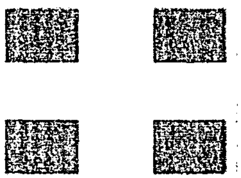
puntos cuya tercera imagen inversa pertenece a C.



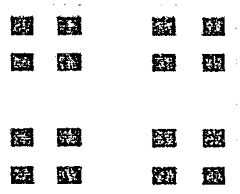
puntos cuya cuarta imagen inversa pertenece a C.

Así tenemos a los puntos que permanecen en el cuadrado todo el tiempo, al «amasar» y «desamasar». Estos puntos son los que pertenecen, al mismo tiempo, a los dos conjuntos que hemos encontrado, K_+, K_-, y matemáticamente los definimos como la intersección de ambos conjuntos:

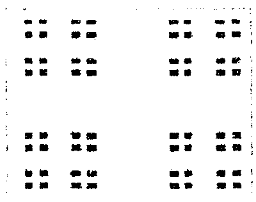
$$K = K_+ \cap K_-$$



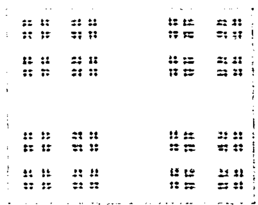
intersección de la primera iteración hacia adelante y hacia atrás.



intersección de la segunda iteración hacia adelante y hacia atrás.



intersección de la tercera iteración hacia adelante y hacia atrás.



intersección de la cuarta iteración hacia adelante y hacia atrás.

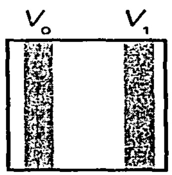
Como ya sabemos, la computadora sólo puede dibujarnos unas cuantas iteraciones pero nuestra mente puede formarse una muy buena imagen de K. Y así, hemos logrado separar aquellos puntos que escapan del cuadrado de aquellos otros que permanecen todo el tiempo dentro de él. De las imágenes de arriba es claro que si observamos las intersecciones sin el cuadrado, no podremos decir a qué escala están, ya que son autosimilares. Aún más, si continuamos con las iteraciones, a largo plazo obtendremos una infinidad de puntos que no formarán cuadraditos ni intervalos y, como podemos imaginar, el conjunto de estos puntos será un fractal. Aunque todavía no comprendamos del todo la dinámica del sistema, ya tenemos una idea de lo que está pasando.

Al comprender lo anterior, los agentes especiales supieron que la llorona, al unir fantasmalmente el plano astral con el estadio, había logrado vincular el comportamiento de los balones sobre la cancha con los puntos «amasados» del estadio. Así, los balones tendrían en el largo plazo dos comportamientos: Salir del cuadrado C y llegar al punto fijo en Sc_1, o quedarse indefinidamente vagando dentro del cuadrado. Sin embargo, para desentrañar la lacrimógena maldición, los agentes especiales aún debían comprender algunas otras cosas.

Era claro, para los agentes especiales, que esta investigación no podría avanzar más usando dibujos y figuras. Decidieron entonces reunir más jugo fermentado de piña para volver a solicitar la asesoría de la psíquica de la PGR. Pero esta vez la sesión espiritista no funcionó y lo único que pudo decirles fue que, la maldición de la llorona había creado un «ente» que gobernaba el comportamiento de los balones en el estadio y, se podía exorcizar a este «ente» llamándolo por su verdadero nombre. Desconcertados, los agentes especiales se sentaron a meditar sobre lo que habían descubierto usando matemáticas a manos libres. Les parecía lógico pensar que el «ente» que gobernaba el comportamiento de los puntos del estadio, era el conjunto de puntos que permanecen siempre al cuadrado. Ya que este conjunto K es realmente un ente matemático y todo indica que posee propiedades especiales. El único problema era cómo estudiarlo. La única opción que parecía viable era lo que habían aprendido del coyote de la Zona del Silencio, transformar su espacio con la dinámica simbólica.

Hemos usado la dinámica simbólica con un espacio de sucesiones, al cual apodamos «la Matrix», y con el espacio formado por los puntos del círculo. Ahora volveremos a usar la Matrix porque siempre es más sencillo trabajar con lo que uno ya conoce. Sólo necesitamos alguna manera de transformar nuestra nueva información en sucesiones binarias y, para hacerlo, tendremos que usar una Matrix «centrada».

La vez anterior usamos la Matrix para estudiar únicamente órbitas hacia adelante pero ahora, también tenemos órbitas hacia atrás. Primero pensemos en alguna manera de «transformar» las órbitas hacia adelante, K_+, en sucesiones binarias. Por lo que hemos visto, sabemos que los puntos que caen siempre dentro del cuadrado forman rectángulos verticales que vamos encontrando dentro de V_0 o V_1. Así sabemos que para que un punto se mantenga dentro del cuadrado, G debe mandarlo sobre V_0 o V_1, para que a la siguiente iteración vuelva a caer dentro del cuadrado y así podremos asociarle un cero o un uno dependiendo de si es mandado a V_0 o V_1. En matemáticas decimos que el término s_j de la sucesión será igual a cero o uno dependiendo si la j-ésima iteración del punto p cae en V_0 o en V_1, y esto se escribe:



$$s_j = k \quad \text{si, y solamente si,} \quad G^j(p) \text{ pertenece a } V_k.$$

Así tenemos una sucesión infinita de ceros y unos que representa la órbita hacia adelante de cualquier punto p. Y también podemos hacer lo mismo con su órbita hacia atrás. Si recordamos, las órbitas hacia atrás tienen que ir cayendo en intervalos horizontales que puedan ser «desamasados» pero, como estamos considerando a los puntos que permanecen siempre dentro del cuadrado, estos puntos deben intersectar V_0 o V_1 y así, también podemos asociarles una sucesión de ceros y unos dependiendo de si caen en V_0 o V_1. Por conveniencia, escribimos la secuencia para atrás de la izquierda a la derecha:

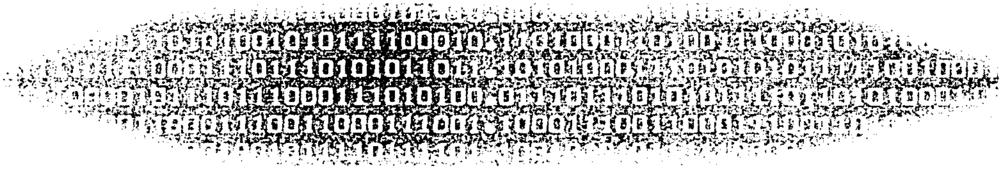
$$\ldots s_{-3}, s_{-2}, s_{-1} \qquad \text{donde } s_{-j} = k \text{ si } G^{-j}(p) \text{ pertenece a } V_k \text{ para } j=1, 2, 3, \ldots$$

Ahora simplemente juntamos las representaciones de las órbitas hacia adelante con las de las órbitas hacia atrás, es decir, juntamos las sucesiones que hemos definido; y las distinguimos colocando un punto, algo así como un punto decimal, entre ellas. Así obtenemos una sucesión doblemente infinita de unos y ceros y, nuevamente, la llamamos el itinerario del punto.

Itinerario:

Llamemos p a cualquier punto que pertenezca a K. El itinerario de x es una sucesión $S(p) = (\ldots s_{-3}, s_{-2}, s_{-1} \bullet s_0, s_1, s_2 \ldots)$ donde $s_j = 0$ si $G^j(x) \in V_0$, $s_j = 1$ si $G^j(x) \in V_1$.

Y nuevamente, los itinerarios forman un espacio de sucesiones binarias pero ahora las sucesiones son doblemente infinitas. Finalmente, usamos de nuevo M_2 para nombrar a este espacio. En español, bien podemos decir que hemos «centrado» a la Matrix y obviamente, el centro será el punto que separa la información de las órbitas hacia adelante de las que van hacia atrás. Podemos imaginar que la Matrix ahora se ve así:



La definición matemática de la Matrix, será ahora:

Espacio de sucesiones:

$$M_2 = \{ (s) = (\ldots s_{-3}, s_{-2}, s_{-1} \bullet s_0, s_1, s_2 \ldots) \mid s_i = 0,1 \}$$

Nuevamente necesitamos una regla para poder decidir cuáles sucesiones están cerca de otras. Para facilitarnos las cosas, usaremos la regla «shakespiriana» que ya conocemos. Entonces la distancia del punto s al punto t, $d[(s),(t)]$, se calcula así:

$$d[(s),(t)] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}$$

El punto que ahora «centra» la Matrix no influye en el cálculo de las distancias dentro de ella, así que, al igual que la vez anterior d es una métrica y, ahora, dos puntos están cerca según coincidan sus entradas centrales. Sólo nos falta definir alguna manera de «revolver» la Matrix centrada de manera que podamos usar la revelación del coyote: la conjugación. Aquí también sería práctico usar algo muy parecido al corrimiento de Bernoulli porque ya conocemos sus propiedades. Y aunque parezca extraño, podemos usar un corrimiento muy parecido. Definimos el corrimiento como:

$$B(\ldots s_{-3}, s_{-2}, s_{-1} \bullet s_0, s_1, s_2 \ldots) = (\ldots s_{-3}, s_{-2}, s_{-1}, s_0 \bullet s_1, s_2 \ldots).$$

El corrimiento B simplemente recorre el punto un lugar hacia la derecha. Si recordamos, el corrimiento de Bernoulli, **B**, borraba la primera entrada, así no podíamos recuperar la información borrada, es decir, no teníamos una función inversa. Pero este nuevo corrimiento sí tienen inversa, la cual consiste, simplemente, en mover el punto hacia la izquierda.

Pues bien, ahora que hemos definido todo lo que necesitamos estamos listos para usar la conjugación. Y la podemos usar porque este nuevo itinerario también cumple con las siguientes propiedades:

- Dos puntos distintos de K no pueden tener el mismo itinerario porque diferirán, al menos, en alguna entrada de la sucesión que representa sus órbitas hacia adelante o hacia atrás.
- Las sucesiones o itinerarios de todos los puntos de K «llenan» la Matrix centrada. Es decir, todas las sucesiones de M_2 son itinerarios de los puntos de K.
- Si tomamos dos puntos de K que estén cercanos, sus itinerarios serán sucesiones cercanas, según la métrica d, en M_2. Es decir, S es una función continua.
- Si ahora consideramos dos sucesiones cercanas en M_2, tendremos que son los itinerarios de dos puntos cercanos en K. Es decir, la inversa de S también es continua.

Así tenemos que S es un homeomorfismo que va de K a M_2, y ya sabemos que gracias a eso podemos decir que, el corrimiento B, sobre la Matrix centrada, es conjugado al «amasamiento», el mapeo G, sobre el conjunto de puntos que permanecen en el cuadrado del estadio. Este nuevo corrimiento sobre la Matrix centrada es ahora el modelo para G sobre K.

Ya sabemos que será necesario estudiar las propiedades de este nuevo corrimiento. Pero como es tan parecido al corrimiento de Bernoulli, podemos razonar de la misma manera con ambos y les encontramos exactamente las mismas características; ésta es la gran ventaja de usar herramientas matemáticas tan parecidas a las que ya hemos usado y comprendido. Así volvemos a tener que los puntos periódicos en la Matrix centrada son sucesiones que se repiten y podemos contar que existen, en total, 2^n puntos periódicos de periodo n para el nuevo corrimiento B. También tenemos que los puntos periódicos son densos; que existe una órbita densa, es decir, B es topológicamente transitivo; y si tomamos sucesiones cercanas, también se separarán bajo el corrimiento, es decir, B es sensible a condiciones iniciales. Y como G sobre K es conjugado a B, sabemos que presenta las mismas propiedades. También sabemos lo que estas propiedades implican: G produce caos en K.

Gracias a lo anterior, los agentes especiales supieron lo que la maldición de la llorona había hecho con la cancha del estadio, su «amasamiento» generaba un comportamiento caótico en los puntos que permanecen siempre dentro del cuadrado. Los demás puntos estaban siendo «amasados» fuera del cuadrado y terminarán, en el largo plazo, en el punto atractor del semicírculo de la derecha. Esto es, por un lado existe dentro del semicírculo Sc_1 un punto fijo que atrae a los demás puntos y, por otro lado, dentro del cuadrado C hay un conjunto de puntos que se comportan de manera caótica y que, en el largo plazo, mandarán fuera a los demás puntos. Debía ser K con su comportamiento caótico, el ente que la llorona había creado con sus fantasmales poderes y, éste obligaba a los balones que eran puestos en la cancha a seguir el comportamiento de los puntos «amasados». Unicamente les faltaba comprender cómo era que este ente expulsabadel cuadrado a los demás puntos.

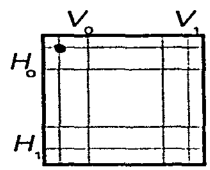
Cuando teníamos el espacio fase como un intervalo, es decir, de una dimensión, hablábamos de conjuntos de puntos que eran atraídos o repelidos. Aunque los puntos de estos conjuntos se encontraban a lo largo del intervalo y se movían únicamente sobre el intervalo, los imaginábamos como cuencas de atracción o repulsión. Ahora que nuestro espacio fase es de dos dimensiones, también tendremos estos conjuntos pero ahora los puntos se moverán sobre el plano. Para definirlos hacemos lo mismo que hicimos en una dimensión. Primero definimos el comportamiento de puntos que se acercan o se alejan. Tal y como lo hicimos antes, tomamos dos puntos cualesquiera que se acerquen o alejen y le damos el mismo nombre matemático que ya hemos usado:

Puntos asintóticos hacia adelante y hacia atrás:

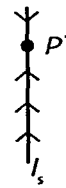
Tomamos dos puntos cualesquiera p_1, p_2, decimos que son asintóticos hacia adelante si la distancia entre ellos tiende a cero cuando el número de iteraciones tiende a infinito. Y decimos que son asintóticos hacia atrás si la distancia entre ellos tiende a cero cuando el número de iteraciones inversas tiende a infinito.

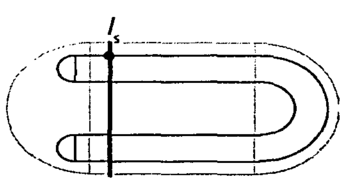
En español podemos decir que, dos puntos son asintóticos hacia adelante si sus órbitas hacia adelante se acercan en el largo plazo; y dos puntos cuyas órbitas hacia atrás se acerquen, en el pasado lejano, serán asintóticos hacia atrás. Por ejemplo, todos los puntos que salen del cuadrado son asintóticos hacia adelante al punto atractor. Igual que antes, ahora consideramos un punto cualquiera p, y decimos que el conjunto estable de p es el conjunto de puntos que sean asintóticos hacia adelante a él. También en español podemos decir que, el conjunto estable de p está formado por todos los puntos que se acerquen a él en el largo plazo. Por ejemplo, el conjunto estable del atractor en el semicírculo Sc_1, está formado por todos los puntos del estadio exceptuando a aquellos que permanecen siempre en el cuadrado. Hacemos lo mismo para definir el conjunto inestable de un punto, el cuál estará formado por todos los puntos que sean asintóticos hacia atrás a él.

Hasta aquí tenemos más o menos lo mismo que teníamos en una dimensión, la gran diferencia consiste en «ver» o imaginar estos conjuntos estables e inestables. Veamos lo que sucede con los puntos que permanecen siempre dentro del cuadrado. Es bueno comenzar por uno de los puntos más fáciles de describir de K. Pensemos en el punto que permanece siempre dentro de V_0. Este punto no sólo permanece siempre en V_0, sino que no se mueve al «amasar» o «desamasar» el estadio, es decir, este punto es fijo. Llamémoslo p^* y revisémoslo.



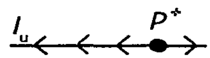
Tenemos que p^* está en el extremo derecho de V_0 y en el extremo superior de H_0, así este punto es fijo para G y para su inversa y, su itinerario es $S(p^*) = (\ldots 0, 0, 0 \bullet 0, 0, 0 \ldots)$. Si recordamos que la herradura se forma aplastando verticalmente y expandiendo horizontalmente el cuadrado, resulta que los puntos que se acercan a p^* son los que están arriba y abajo de él. Esto es, al aplastar el cuadrado, los puntos que están justo arriba y abajo se le acercan, y al expander el cuadrado, los puntos que están a su lado se le alejan. Entonces consideramos la línea vertical que pasa por el punto p^* y le llamamos l_s. Todos los puntos de esta línea se le irán acercando, esto es, son asintóticos hacia adelante a p^*. Entonces los puntos de l_s pertenecen al conjunto estable de p^*.





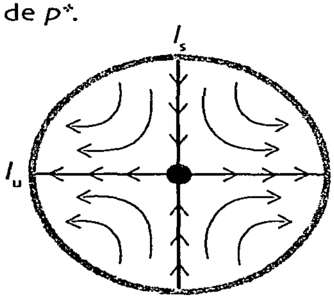
Pero estos no son los únicos puntos que se acercan a p^*, ya que deben existir algunos puntos del cuadrado que al «amasarlo» caigan sobre la línea l_s. Para encontrarlos debemos «desamasar» la línea, es decir, revisar su imagen inversa. Al «desamasar» la herradura es fácil ver que la imagen inversa de l_s son dos líneas verticales en el cuadrado. Estas dos líneas, al «amasar», caerán dentro de

l_s y así, se acercarán, en el largo plazo a p^*. Entonces, los puntos que se acercan a p^* son los de la línea l_s y aquellos que pertenecen a las imágenes inversas de la línea. Esto es, el conjunto estable de p^* está formado por l_s y sus imágenes inversas. Ya sabemos que éstas se escriben matemáticamente como $G^{-k}(l_s)$ con $k=1,2,3,...$ Como sabemos que al «desamasar» la herradura se dobla el número de intervalos, sabemos que tenemos exactamente 2^k líneas verticales que forman las imágenes inversas de l_s. Y así, hemos descrito el conjunto estable de p^*.



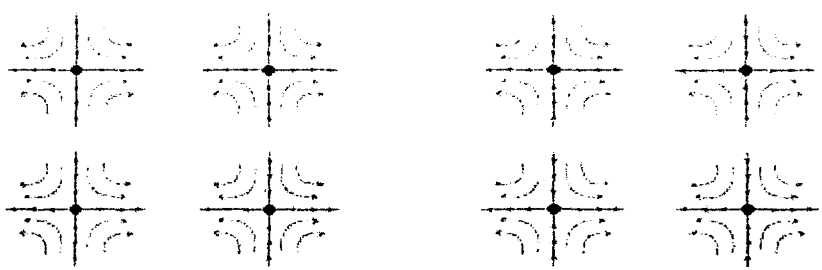
Para el conjunto inestable de p^* seguimos los mismos razonamientos, sólo que ahora la dirección en que se alejan los puntos es horizontal. Llamamos l_u a la línea horizontal que pasa por p^* y sabemos que sus puntos se alejan de él, es decir, en el pasado lejano estuvieron cerca de él. Así tenemos que l_u pertenece al conjunto inestable de p^*. Otros puntos que, en el pasado lejano, también estuvieron cerca de p^* tienen que haber estado alguna vez en l_u aunque ahora no lo estén. Para encontrarlos revisamos a dónde puede llegar esta línea, es decir, las imágenes de l_u. Y las imágenes de esta línea deben ir siguiendo la forma de la herradura, la cual va cortando horizontalmente al cuadrado, así también tendremos 2^k líneas horizontales dentro del cuadrado que pertenecen a las imágenes de l_u. Y así, hemos descrito el conjunto inestable de p^*.

Hay que precisar algo, la línea l_s, sin sus imágenes inversas, recibe el nombre de conjunto estable local de p^*; la línea l_u, sin sus imágenes, recibe el nombre de conjunto inestable local de p^*.



Ahora, si tuviéramos una lupa para ver lo que sucede cerca de p^*, veríamos algo parecido a la figura de la izquierda. De hecho, esto mismo sucede en las vecindades de cada uno de los puntos de este ente matemático, K, que se comporta de manera caótica y cuyos puntos atraen verticalmente a los demás pero los repelen horizontalmente. Podríamos decir en español que estos puntos sufren un terrible caso de doble personalidad, en una dirección son el Dr. Jekyll y en otra Mr. Hyde. Y ahora sí, ya podemos imaginar lo que sucede en el estadio.

Aunque puede ser que no resulte muy fácil imaginar lo que sucede en el estadio, ya que tenemos una infinidad de puntos cuyo comportamiento local es igual al que vemos en la figura de arriba. Debemos imaginar a esta infinidad de puntos empujándose por los lados y atrayéndose por arriba y abajo; este esquizofrénico comportamiento es lo que hace que el cuadrado se expanda horizontalmente y se contraiga verticalemente. La figura de abajo intenta representar lo que tenemos en la mente.



Así los agentes especiales, al hacer matemáticas a manos libres, comprendieron lo que estaba pasando en el estadio México 68. Finalmente habían descrito al ente que había creado la maldición de la llorona. Ahora sabían cómo se comportaba y cómo afectaba al resto del estadio. Solamente les faltaba descubrir su verdadero nombre, lo cual no sería difícil si usaban, una vez más, la dinámica simbólica.

La idea es descubrir las características de K mediante su modelo, la Matrix centrada. Al conocer sus características podemos revisar si coinciden con alguna definición matemática y así, obtendremos su nombre matemático. Pero una vez más queremos usar herramientas que ya conocemos para facilitar nuestra investigación. Primero notamos que la Matrix centrada es bastante parecida a la Matrix sin centrar, así que será muy fácil transformar esta última para obtener la primera, de la cual ya conocemos sus características. En un mal español, podríamos decir que queremos hacer el «centramiento» de la Matrix. Llamamos ${}_1M_2$ a la Matrix sin centrar, es decir, al espacio de sucesiones formado por sucesiones infinitas. A la Matrix centrada, es decir, al espacio de sucesiones formado por sucesiones doblemente infinitas, le dejamos el mismo nombre M_2. Y pensamos en alguna manera de reacomodar las sucesiones de ${}_1M_2$ para que se vean como las de de M_2, o sea, haremos algo así como una cirugía plástica muy sencilla. Definimos a esta transformación «centradora» como una función T que vaya de ${}_1M_2$ a M_2.

$$T : {}_1M_2 \rightarrow M_2 \quad , \qquad \text{que debe hacer lo siguiente:}$$

$$T(s_0, s_1, s_2, s_3, s_4 \dots) = (\dots s_5, s_3, s_1 \bullet s_0, s_2, s_4 \dots).$$

Esto es, la función T toma una sucesión de ${}_1M_2$ y la reacomoda alrededor de un punto, del lado derecho acomoda las entradas pares y del lado izquierdo las impares; así transforma la Matrix en la Matrix centrada. Si tomamos dos sucesiones distintas en ${}_1M_2$ la transformación nos da dos sucesiones distintas en M_2. Además, usando las sucesiones de ${}_1M_2$ podemos construir cualquier sucesión de M_2. Luego, si tomamos dos sucesiones cercanas en ${}_1M_2$ sabemos que coinciden sus primeras entradas y, al transformarlas, coincidirán sus entradas centrales, así también serán sucesiones cercanas en M_2; es decir, la transformación T es continua. Finalmente, la inversa de T es sencilla, simplemente toma sucesiones de M_2 y acomoda las entradas de la izquierda intercaladas entre las entradas del lado derecho. Entonces, si tomamos dos sucesiones cercanas en M_2 , al aplicar la inversa de T, obtendremos sucesiones cercanas en ${}_1M_2$, es decir, la inversa de T también es continua. Y todo esto implica, como ya sabemos, que la transformación T es un homeomorfismo. Por lo tanto, ${}_1M_2$ es homeomorfa a M_2. Podemos decir en español que, aunque la veamos distinta, la Matrix tiene forma semejante a la Matrix centrada y ambas comparten las mismas características, o sea, son escencialemente lo mismo.

Finalmente, recordamos que el polvo de Cántor era homeomorfo a la Matrix. Y como la Matrix es homeomorfa a la Matrix centrada, y la Matrix centrada es homeomorfa a este nuevo ente matemático K, tenemos que el polvo de Cántor es homeomorfo a K. Es decir, el polvo de Cántor es escencialmente lo mismo que el nuevo K. Esto podría parecer ilógico, ya que primero obtuvimos el polvo de Cántor quitando «pedazos» de un intervalo, así teníamos un espacio fase de una dimensión del cual obtuvimos este fractal pero, ahora, hemos obtenido al conjunto K removiendo «pedazos» de un cuadrado, así tenemos un espacio fase de dos dimensiones del cual obtuvimos este nuevo fractal. Podría parecer más lógico que K tuviera, al menos, el doble de puntos que el polvo de Cántor, ya que «vive» en un espacio de dos dimensiones pero no; como ambos fractales son homeomorfos, sabemos que tienen la misma cantidad de puntos y que comparten las mismas características. Así podemos afirmar, sin ningún temor, que K también es un conjunto de Cántor.

Al comprender lo anterior, los agentes especiales supieron que el verdadero nombre de este ente matemático era también polvo de Cántor. En español se podría decir que era el mismo polvo con el que habían trabajado antes y, ahora, simplemente había sido esparcido en un espacio de dos dimensiones. Esto preocupó a los agentes especiales, ya que la llorona no tenía ninguna relación con los alienígenas ni con los chupacabras pero, al igual que ellos, usaba al mismo ente, el polvo de Cántor, para proteger sus secretos. Aún peor, las apariciones de la llorona también dejaban restos de yerba calcinada con forma de cigarro pero, el ejército mexicano les aseguró que ningún ente sobrenatural había sacado su extraña yerba del cerco de la Zona del Silencio. Los agentes especiales se preguntaron qué podría significar todo esto pero, sin más información, resultaba imposible resolver sus dudas. Sin embargo todo parecía volver a la normalidad. Con lo que habían descubierto los agentes especiales se realizó un exorcismo en el estadio para que pudiera volver a ser utilizado. Así, desaparecieron los efectos de la maldición de la llorona. Pero los agentes especiales no se confiaron, ya que sabían que la llorona podría volver a aparecer con perversos y lacrimógenos conjuros.

EXPEDIENTE 5:

La mulata de Córdoba.

Con el verano llegaron las lluvias a Veracruz. Poco a poco las lluvias aumentaron su intensidad, el viento ganó fuerza y verdaderas trombas comenzaron a azotar las costas. Las lluvias se convirtieron en terribles tormentas y todo el Estado se declaró zona de desastre. Se dijo que el ejército mexicano debía actuar para salvar a la población de las inundaciones, sin embargo, se difundió el rumor de que durante los inclementes aguaceros se daban avistamientos de ovnis, ataques de chupacabras y apariciones de espectros. Y cuando los medios locales dieron la noticia de que los torrentes arrastraban grandes cantidades de yerba calcinada, con forma de cigarro, los agentes especiales de la PFP supieron que debían actuar.

En Veracruz, los agentes especiales constataron que durante los chubascos se veían ovnis, que en los campos inundados los chupacabras atacaban al ganado, que los truenos competían contra los gritos de la llorona y que, en medio de los cielos atormentados, una figura fantasmal parecía dirigir a la enfurecida naturaleza. Y lo más temible de esta fantasmal aparición era su belleza, ya que era, sin lugar a dudas, la mujer más hermosa que alguien hubiera visto jamás. Para conocer la identidad de esta arrebatadora visión los agentes especiales recurrieron a la psíquica de la PGR, quien sólo les dijo: «Ella es Soledad, la mulata de Córdoba».

Según la leyenda, hace más de dos siglos llegó a Córdoba, Veracruz, una preciosa joven de quien se enamoraron todos lo hombres. Pero ella a ninguno correspondía, a todos desdeñaba y a fuerza de verla sola, la llamaron Soledad. Se decía que jamás envejecía, que era una hechicera cuyo poder trastornaba las leyes de la naturaleza y que, por las noches, le entregaba su amor a un espíritu maligno. La joven fue acusada de brujería y llevada a las cárceles del «Santo Oficio» en donde esperaba ser quemada en la hoguera. Sin embargo, la noche anterior a su ejecución ella dibujó, con un carbón sobre la pared, un extraño mar sobre del cual podía verse algo parecido a un navío. En la madrugada, frente a los atónitos ojos de los guardias, la joven saltó dentro de su dibujo, se metió en su singular navío y desapareció por uno de los oscuros rincones del calabozo.

Copia fiel del maléfico Mar pintado por la bruja de Córdoba.

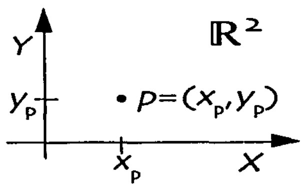
Los agentes especiales encontraron, en la sección confidencial del Archivo General de la Nación, antiguos registros de la inquisición en donde se describía aquel dibujo. En ellos se detallaba el extraño mar pero sólo se hacían vagas referencias al navío que había usado la mulata para escapar.

Junto a la copia del dibujo, el Gran Inquisidor anotó que la mulata había firmado su cuadro usando extravagantes símbolos paganos, confirmando así su relación con el mismísimo señor de las tinieblas. Bajo el dibujo, la mulata había anotado lo siguiente:

$$(x,y) \to (0.13 - 0.999\, y - x^2, x) \quad , \quad ✍\ |x_n| > 3$$

De inmediato, los agentes especiales se dieron cuenta de que no eran símbolos de religiones paganas, eran simplemente una forma de notación matemática. Luego de razonar un poco, llegaron a la conclusión de que eran las instrucciones para realizar el dibujo de la mulata.

Cualquier dibujo al ser realizado sobre una pared, aunque semeje tener profundidad, sólo posee dos dimensiones; es decir, el dibujo es plano o «vive» en el plano. Hace casi dos siglos, el filósofo René Descartes propuso un método para «nombrar» o localizar puntos sobre el plano y, por eso, al plano con puntos localizables lo llamamos plano cartesiano. El método es simple, al plano se le asocian dos direcciones fundamentales, las cuales reciben el nombre de ejes, se nombra cada punto del plano según su distancia a los ejes. Así, el punto p recibe el nombre, en el plano cartesiano, de (x_p, y_p). Por ejemplo, el origen, el lugar donde se cruzan los ejes recibe el nombre de (0,0), otro ejemplo, si quisiéramos localizar el punto llamado (1,1) simplemente avanzaríamos del origen una unidad en la dirección X y luego una unidad en la dirección Y. Pues bien, si ahora decimos que en los ejes se encuentran todos los números reales, podemos llamar $\mathbb{R}^2$ al plano cartesiano.



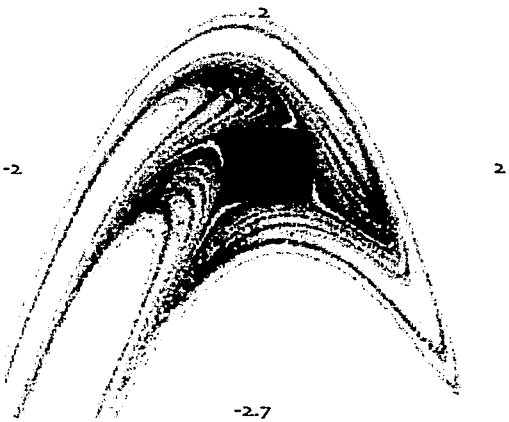
Los primeros símbolos usados por la mulata, los que están entre paréntesis, nos dan una regla de cambio para los puntos del plano. La regla es la siguiente, tomar cualquier punto (x,y) y llevarlo al punto (x_1,y_1), donde las nuevas coordenadas x_1, y_1 son:

$$x_1 = 0.13 - 0.999\, y - x^2$$
$$y_1 = x$$

Lo que tenemos es una función que lleva los puntos del plano a otros puntos en el mismo plano y, como ya sabemos, esto nos indica que la función es un mapeo. Una vez más podemos pensar todo esto como un sistema dinámico cuyo espacio fase será el plano. Una vez más estudiaremos las órbitas que genere un mapeo, sólo que esta vez, las condiciones iniciales tendrán la forma (x_0, y_0), y generarán órbitas así:

$$(x_0,y_0) \to (x_1,y_1) \to (x_2,y_2) \to (x_3,y_3)\ldots$$

El siguiente símbolo usado por la mulata, ✍ , no es un símbolo matemático, por eso es que los agentes especiales tardaron más tiempo en interpretarlo; finalmente decidieron que sólo podía significar «pintar». Entonces los símbolos siguientes indicarían: «pintar los puntos cuya primera coordenada, x, sea mayor que tres, en valor absoluto, después de varias iteraciones». Esto es, si al iterar el mapeo, un punto toma en su primera coordenada un valor mayor que tres o menor que menos tres, diremos que ha «escapado»; si esto sucede en pocas iteraciones, decimos que ha escapado rápidamente; si sucede en muchas iteraciones diremos que ha escapado lentamente. Y los puntos se colorean según su «rapidez» de escape. Los colores o tonos que se usan dependen del gusto de cada quién y, de lo que se quiera resaltar o estudiar. En el dibujo de la mulata, las zonas más claras tienen puntos que escapan rápidamente; conforme se oscurece el tono de gris, los puntos se tardan más en alcanzar esta condición; finalmente, los pintados de negro son puntos que nunca escapan. Básicamente, ésta es la misma técnica que usamos para descubrir a los repulsores que formaban el polvo de Cántor, separando a los puntos que escapaban de los que permanecían pero ahora, en lugar de trabajar sobre un intervalo, lo hacemos sobre el plano. Por último, los agentes especiales supusieron que los números en los extremos superiores del dibujo debían representar los valores extremos del eje *X*, esto es, los valores iniciales que *x* podría tomar son los comprendidos en el intervalo (-1,1). Y así, con ayuda de una computadora, los agentes fueron capaces de reproducir el dibujo de la mulata sobre todo el el plano.

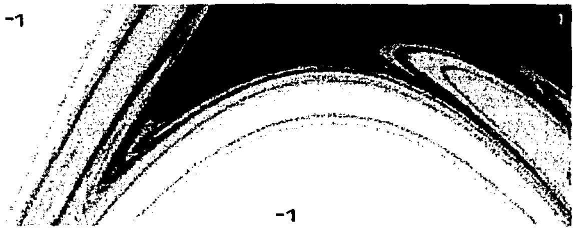


Gracias a este tipo de dibujos podemos tener una idea de qué tan rápido el mapeo hace crecer, o decrecer, el valor de los puntos, cuáles escapan y, cuáles se quedan. Para marcar de manera más clara, las diferentes velocidades de escape, se acostumbra usar colores distintos al presentar estos dibujos que se conocen como planos dinámicos. Aunque ahora no tengamos un método como la «telaraña», los tonos o colores nos dan una primera idea de la dinámica del sistema. Y no podemos construir una telaraña sobre la gráfica de la función porque, solamente para ver la gráfica, necesitaríamos algo así como un tercer ojo. Cuando el espacio fase era un intervalo de la recta real, su dimensión matemática era 1; para representar el modo en que un mapeo alteraba el espacio fase, trazábamos su gráfica en el plano y, decíamos que los ejes representaban al mismo espacio fase en periodos de tiempo distintos; así la gráfica «vivía» en el plano, en un espacio de dos dimensiones, tal y como la telaraña que le tejíamos encima. Ahora que el espacio fase es el plano mismo, para dibujar la gráfica del mapeo tendríamos que acomodar dos planos que representen el mismo espacio fase en dos periodos de tiempo distintos, dentro de un espacio de cuatro dimensiones y ahí sería el lugar donde «viviría» la gráfica y su telaraña. Aunque seamos capaces de imaginar esto, visualmente no podemos representarlo. Peor aún, si estuviéramos frente a la gráfica, en un espacio de cuatro dimensiones, no podríamos verla tal cual es, porque no tenemos un tercer ojo capaz de ver la cuarta dimensión. Si bien sí es posible proyectar esta gráfica cuatridimensional a un espacio de tres dimensiones, el resultado final no es tan útil como uno creería para estudiar comportamiento dinámico; y en matemáticas, como en todo, la idea es usar lo que más nos ayude.

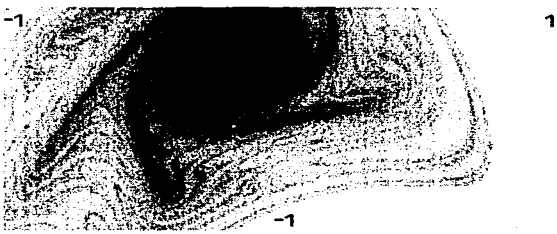
Sin embargo, nada parecía ayudar a los agentes especiales en esta investigación. Ninguno comprendía cómo podía haber escapado la mulata de Córdoba con este mapeo, qué relación tenía la mulata con los demás seres sobrenaturales o, cómo detener las tormentas que causaba la mulata. Los agentes especiales decidieron buscar ayuda con la única persona capaz de develar misterios ocultos bajo argumentos confusos, de unir grupos aparentemente contradictorios y, de sumir a todo el mundo en un profundo sueño para detener las más terribles tormentas legales: la máxima asesora del Congreso de la Unión. Como es de suponerse, esta persona vivía en el único lugar donde no azotaban las tormentas, en el único lugar donde confluyen los alienígenas y la brujería, Catemaco, Veracruz.

En este singular pueblo, los agentes especiales pidieron audiencia con la asesora del Congreso, la bruja más anciana de Catemaco. Ella les explicó que la mulata de Córdoba podía realizar, no uno, sino una infinidad de insólitos dibujos y, de una manera inexplicable, con oscuras e indescriptibles artes de brujería, la mulata podía meterse en sus dibujos y viajar a las estrellas, conjurar entes que controlan el clima y, realizar hazañas imposibles. Sin embargo, los secretos de estos dibujos eran conocidos sólo por la mulata, ya que se los había enseñado un espíritu de fuera de este mundo; así nadie podría, jamás, detener a la mulata de Córdoba. Los agentes especiales no se dejaron impresionar por las palabras de la bruja de Catemaco. Decidieron arriesgar sus vidas buscando, en medio de las tempestades, los embrujados dibujos de la mulata. Después de encontrar algunos y copiar cuidadosamente las anotaciones debajo de ellos, pudieron reproducirlos tal y como vemos en los ejemplos de abajo.

$x_1 = 0.13 - 0.97\,y - x^2$
$y_1 = x$



$x_1 = 0.9 - 1\,y - x^2$
$y_1 = x$



$x_1 = -0.4 - 1.05\,y - x^2$
$y_1 = x$

$x_1 = 0 - 1.04\,y - x^2$
$y_1 = x$

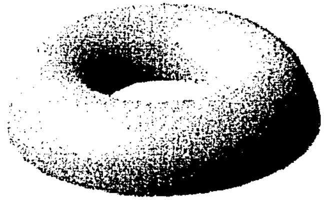
Después de revisar las instrucciones para realizar los dibujos, resulta evidente que todos ellos son generados por un solo mapeo, cuya forma general es:

$$x_1 = a - b\,y - x^2$$
$$y_1 = x$$

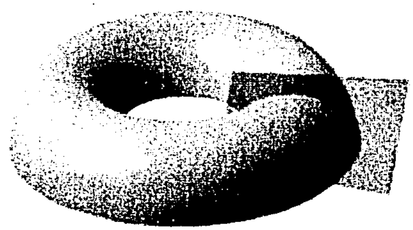
En donde las letras *a, b* son parámetros y, dándoles valores distintos a estos parámetros se obtienen los distintos dibujos.

Los agentes especiales se preguntaron entonces, cómo era que este mapeo le permitía tantas cosas a la mulata de Córdoba. Pero, sin saber qué podría representarse o para qué podría usarse este mapeo, difícilmente podrían contestar su pregunta. Por eso revisaron sus publicaciones matemáticas en busca del origen de este versátil mapeo.

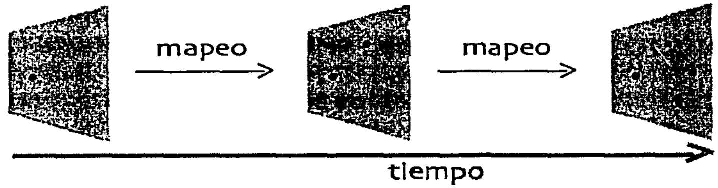
Pues bien, el origen de este mapeo se debe al astrónomo francés Michel Hénon y ha recibido, en reconocimiento, su nombre; así se le conoce como el mapeo de Hénon. A Hénon le interesaba estudiar el movimiento de las estrellas alrededor del centro de la galaxia. De manera muy simplificada podemos decir que, en las galaxias, el centro de gravedad alrededor del cual giran las estrellas no es un punto, sino un disco grueso tridimensional. También de manera simplificada, podemos decir que las estrellas forman al girar, una figura tridimensional que semeja una dona. Podemos imaginar un modelo de nuestra galaxia como una dona, en el hoyo está el centro de gravedad y dentro del cuerpo de la dona están girando las estrellas. La gran pregunta es: ¿cómo son las trayectorias de las estrellas dentro del cuerpo de la dona? Responder esta pregunta no es fácil porque, entre otras cosas, se deben estudiar en un espacio fase de tres dimensiones considerando tiempo continuo. Al estudiar las trayectorias, Hénon se enfrentó con extrañas propiedades que los matemáticos apenas comenzaban a descubrir. En 1963, Lorenz había propuesto un modelo para el clima de toda la tierra. Este modelo, aunque tridimensional con tiempo continuo, parecía relativamente simple pero le reservaba varias sorpresas a Lorenz. Con ciertos parámetros el modelo presentaba un atractor muy extraño, que no era un punto ni un conjunto de puntos periódicos, que tenía un comportamiento impredecible pero con ciertos patrones y que, parecía «vivir» en una dimensión fraccionaria. Este extraño atractor se hizo famoso con el tiempo y ahora se le conoce como el atractor de Lorenz. Pues bien, estas mismas propiedades parecían presentársele a Hénon al estudiar su modelo de las trayectorias estelares y, como podemos imaginar, estas propiedades en un espacio de tres dimensiones y con tiempo continuo son muy difíciles de estudiar. Hénon debía entonces simplificar su modelo pero cuidando que mantuviera las propiedades que diez años antes había descrito Lorenz.



Para lograr lo anterior, Hénon utilizó con sus estrellas una técnica usada para estudiar flujos de partículas, la cual había sido propuesta un siglo antes por el matemático Poincaré. En español podemos decir que la técnica es más o menos así: Se pone una «membrana», o superficie, cortando la dona y las estrellas al girar pasan por esta superficie haciéndole hoyos. Si consideramos una sola estrella, ésta hará un solo hoyo, después dará una vuelta y marcará otro hoyo; luego de muchas vueltas sacamos la superficie y observamos qué patrón deja marcado la estrella. Así obtenemos una primera idea de la trayectoria estelar. Esta técnica se conoce como la técnica de superficie de Poincaré. Ahora, si en la superficie pudiéramos saber cuál hoyo se marcó primero y cuál después, los hoyos podrían pensarse como una órbita de un sistema dinámico y, como están marcados en una superficie plana, el sistema dinámico consideraría dos dimensiones y además, podríamos pensar al tiempo discreto tomando cada vuelta alrededor de la dona como un periodo de tiempo. Así, el mapeo que pueda generar esta órbita en la superficie será bidimensional y considerará tiempo discreto, y obviamente, será mucho



más sencillo de estudiar. Los mapeos obtenidos así se conocen como mapeos de primer retorno de Poincaré. Finalmente, uno puede olvidarse de la dona y las estrellas, y observar únicamente la superficie con las órbitas que vaya generando el mapeo; porque la idea es, como siempre, comenzar a estudiar el fenómeno de la manera más sencilla posible.



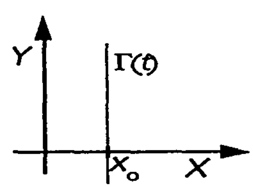
Gracias a las ideas de Poincaré, Hénon publicó,en 1976, un artículo en el que presentaba su mapeo. Ahí explicaba que había llegado a esta ecuación buscando un sistema que, siendo tan simple como fuera posible, exhibiera las mismas propiedades esenciales del modelo de Lorenz para ciertos valores de los parámetros del mismo. Su motivación, decía, era proveer un modelo más manejable para exploraciones numéricas. Luego entonces, del mapeo de Hénon puede decirse que, aunque no representa algún fenómeno real, simplifica otros modelos que sí intentan explicar fenómenos reales. En español podemos decir que tenemos un modelo de modelos y, las propiedades que lleguemos a encontrarle también se presentarán en otros modelos de la realidad.

Los agentes especiales consideraron seriamente todo lo que sabían: con sus oscuras artes de brujería, la mulata de Córdoba había utilizado casi dos siglos antes que Hénon este mapeo y, de él había comprendido los secretos del clima terrestre, de los movimientos estelares y, de quién sabe cuántos fenómenos más. Lo que tenían que hacer para poder detenerla, era descubrir lo que la mulata sabía acerca del mapeo , o por lo menos, tener una idea de lo que el mapeo hacía.

Cuando el espacio fase era un intervalo, podíamos «ver» lo que le hacía el mapeo con la gráfica, pero ahora no podemos ver la gráfica. Por eso, en lugar de visualizar lo que hace el mapeo será más fácil imaginarlo. Para entender algo en matemáticas, y en la vida, es mejor comenzar con ideas simples. Así que, antes de revisar como transforma este mapeo al plano completo, veamos qué le hace a las líneas. Primero pensemos una línea como una función. En español podríamos decir que vamos a pensar a una línea como el recorrido continuo de un punto según pasa el tiempo, o sea, consideramos un punto cualquiera, lo hacemos viajar conforme pasa el tiempo y una línea se va «pintando» por donde el punto viaja; y claro, si el punto no bebe alcohol mientras viaja, pues nos pintará una línea recta. Comencemos con una línea vertical. Por costumbre se usa la letra griega gamma, Γ, para nombrar a las funciones que «pintan» líneas y, diremos que la función Γ hace lo siguiente:

$$\Gamma(t) = (X_0, 0) + t(0,1) = (X_0, t)$$

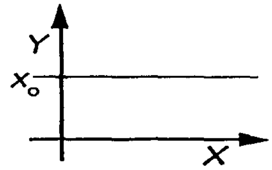
La función Γ toma a la variable t, luego se fija en un punto sobre el eje X, el punto $(X_0, 0)$, y le suma un vector vertical, el vector $(0,1)$, cuya longitud varía según el valor de t. Así Γ nos «pinta» una línea vertical que pasa por X_0, cuya longitud depende de t, es decir, la línea (X_0, t). Cuando pensamos a las líneas de esta manera, decimos que las parametrizamos, ya que las hacemos depender del parámetro t.



Entonces tomemos una línea vertical y veamos qué le hace el mapeo, o lo que es lo mismo, aplicamos el mapeo después de $\Gamma(t)$. Si recordamos, el mapeo de Hénon está dado por:

$$(x,y) \rightarrow (x_1, y_1) \quad \text{en donde:} \quad (x_1, y_1) = (a - by - x^2, x)$$

Entonces, si se lo aplicamos a la línea (x_0, t), tenemos: $(x_0, t) \rightarrow (a - bt - x_0^2, x_0)$



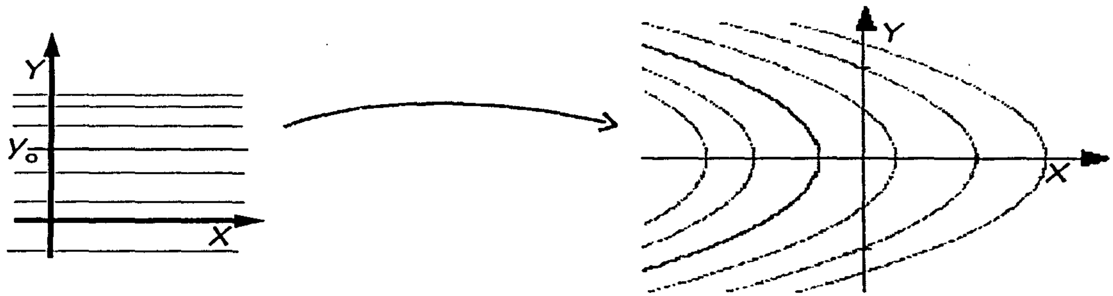
Hay que revisar qué forman estos nuevos puntos que obtuvimos; comenzamos por la parte fácil, la segunda coordenada, en ella tienen a x_0, el cual es simplemente un número dado. Es decir, todos los nuevos puntos tendrán, en el eje *Y*, el valor dado que tenga x_0. En su primera coordenada no importa mucho el valor de los parámetros *a*, *b* porque tienen un valor fijo y lo único que hacen es «ajustar» un poco el valor de *t*, que es el único que varía. Esto quiere decir que, hemos obtenido líneas horizontales, que cortan al eje *Y* en el valor x_0, cuya longitud depende del valor de *t* con unos cuantos ajustes.

Entonces el mapeo de Hénon transforma a las líneas verticales del plano en líneas horizontales; en español podríamos decir que las «acuesta». Ahora revisemos qué le hace el mapeo a las líneas horizontales. Digamos que ahora $\Gamma(t)$ nos da una línea horizontal, es decir, ahora Γ hace:

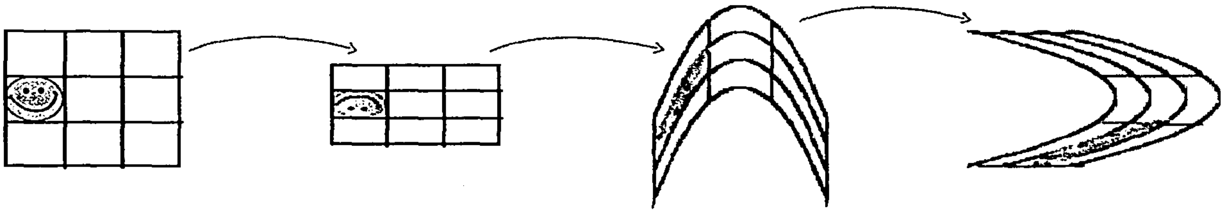
$$\Gamma(t) = (0, y_0) + t(1,0) = (t, y_0)$$

Si aplicamos el mapeo a esta línea horizontal obtenemos: $(t, y_0) \rightarrow (a - by_0 - t^2, t)$

Revisemos los nuevos puntos que hemos obtenido. En su segunda coordenada tenemos a *t*, cuyo valor varía libremente, esto quiere decir que ahora el eje *Y* tomará libremente sus valores sin depender del eje *X*. En la primera coordenada tenemos algunos números, *a*, *b* son parámetros con valores fijos, y_0 es un número dado, a estos números les restamos t^2. Esto quiere decir que los nuevos puntos se localizarán en el eje *X* según los valores de $-t^2$ con algunos ajustes, lo que nos da una parábola «acostada». Es decir, ahora que el eje *X* depende de los valores del eje *Y*, obtuvimos una parábola que abre hacia la parte negativa del eje *X*. Ahora generalicemos esto, porque la línea formada por $\Gamma(t)$ puede ser cualquier línea horizontal, entonces, el mapeo dobla de igual manera a todas las líneas horizontales del plano. Si imaginamos lo anterior, podemos «ver» cómo se dobla todo el plano sobre sí mismo. Las siguientes figuras intentan representar lo que tenemos en la imaginación.



Ya que tenemos claro lo que sucede con las líneas, podemos platicar en puro español cómo transforma el mapeo al plano mismo. Recordemos que los puntos que arroja el mapeo tienen esta forma $(a - by - x^2, x)$. Lo único que hace el parámetro *a*, es mover un poco las cosas de lugar, no dobla, no voltea, no rota, únicamente traslada. El signo negativo del parámetro *b* voltea las cosas de cabeza y, la *b*, dependiendo de su valor, comprime o expande verticalmente. El término $-x^2$ es el encargado de doblar el plano siguiendo la forma de una parábola que abre hacia abajo. Finalmente, cuando la segunda coordenada, *y*, toma el valor de *x*, la imagen se refleja sobre la diagonal. Las figuras de abajo dan una idea de cómo va cambiando el plano, la primera corresponde al plano original, la última al plano transformado por el mapeo de Hénon.



Al comprender lo anterior fue evidente, para los agentes especiales, que el mapeo usado por la mulata «amasa» al plano, es decir, actúa de manera muy similar a la maldición de la llorona. La cuestión era saber si ahora también resultaba posible deshacer los efectos del mapeo, es decir, si aquí también era posible «desamasar» al plano, o lo que es lo mismo, si el mapeo podía ser invertido.

Para calcular la inversa del mapeo de Hénon sólo hay que encontrar una función que «regrese» los puntos del plano a su posición original, esto es, que haga lo siguiente:

$$(x_1, y_1) \rightarrow (x, y)$$

Para encontrarla hay que reescribir los puntos originales en función de los producidos por el mapeo, esto se logra, simplemente, despejando *x*, *y*, de las ecuaciones de x_1, y_1

$$x = y_1$$
$$y = (-a + x_1 + y_1^2) / b$$

A primera vista, estas ecuaciones nos dicen que la inversa del mapeo efectivamente existe y la única restricción es que *b* no puede valer cero porque está dividiendo. Matemáticamente decimos que, cuando *b* es distinta de cero, el mapeo tiene inversa. Ya que tenemos una ligera idea de lo que hace el mapeo y de cómo se deshace lo que hace, deberíamos estudiar ambos procesos con cuidado pero, como siempre, la idea es simplificar nuestro estudio. Antes de dedicarnos a estudiar el mapeo o su inversa, revisemos si existe alguna manera de estudiarlos juntos, al mismo tiempo. Ya que ambos se parecen, tomemos una dosis de confianza e intentemos clasificarlos juntos, o lo que es lo mismo, conjugarlos. Para economizar letras es conveniente darle un nombre corto al mapeo de Hénon, llamémoslo H, entonces su inversa se llamará H^{-1} y como ya sabemos, H^{-1} producirá órbitas hacia atrás. Ahora, como H depende de los valores de sus parámetros, llamaremos $H_{a,b}$ al mapeo de Hénon con parámetros *a*, *b*. Su inversa se llamará $H_{a,b}^{-1}$. Encontrar la conjugación de H con H^{-1} no es inmediato, hay que probar algunas funciones hasta encontrar la adecuada. Claro que existen algunas reglas para facilitar esta búsqueda y, con un poco de práctica, uno puede encontrar la conjugación rápidamente, tal y como hemos encontrado conjugaciones en las investigaciones anteriores. Usemos la letra griega psi, ψ, para denotar a la función que necesitamos:

$$\psi(x, y) = (y, x) / b$$

La función ψ primero invierte los valores de x,y, luego los divide entre b. La inversa de ψ debe hacer lo contrario:

$$\psi^{-1}(x_1, y_1) = (by_1, bx_1)$$

Para revisar que ψ efectivamente es una conjugación, debemos hacer lo mismo que ya hemos hecho con las demás conjugaciones, evaluar un punto y ver a dónde nos conduce. Entonces tomamos un punto cualquiera (x,y) y le aplicamos la inversa de la conjugación:

$$\psi^{-1}(x,y) = (by, bx)$$

Al punto resultante (by, bx) le aplicamos el mapeo de Hénon:

$$H \circ \psi^{-1}(x,y) = (a - b^2x - b^2y^2, by)$$

Finalmente aplicamos la conjugación al punto $(a - b^2x - b^2y^2, by)$:

$$\psi \circ H \circ \psi^{-1}(x,y) = (y, (a/b) - bx - by^2)$$

Hemos obtenido un nuevo punto (x_1, y_1), en donde: $x_1 = y$
$y_1 = (a/b) - bx + by^2$

Esto es, tenemos una nueva función misteriosa, ?, que debe hacer:

$$?(x,y) = (y, (a/b) - bx + by^2)$$

Resulta ser que, esta nueva función misteriosa es la inversa del mapeo de Hénon con parámetros diferentes. Si tomamos $A = a/b^2$, $B = 1/b$, tenemos que $H_{A,B}$ hace lo siguiente:

$$H_{A,B}(x,y) = ((a/b^2) - (1/b)y - x^2, x)$$

Y como su inversa debe hacer exactamente lo contrario, despejamos y tenemos que $H_{A,B}^{-1}$ hace esto:

$$H_{A,B}^{-1}(x,y) = (y, (a/b) - bx + by^2)$$

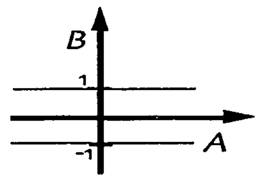
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "H_{a,b}"] \arrow[d, "\psi"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "H_{A,B}^{-1}"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

Ya está, hemos demostrado que $H_{a,b}$ es conjugado a $H_{A,B}^{-1}$. Es decir, el mapeo de Hénon es conjugado a su inversa con parámetros distintos. Entonces basta con estudiar al mapeo para saber cómo se comporta su inversa, sólo hay que tener cuidado con los valores de los parámetros de la inversa. Para representar todo esto, como vemos al lado, podemos usar el mismo tipo de diagrama que hemos usado antes.

El resultado anterior es más útil de lo que parece porque si estudiamos el mapeo con el parámetro b, obtenemos el comportamiento de su inversa con el parámetro $1/b$; si estudiamos el mapeo con el parámetro $1/b$ obtenemos el comportamiento de su inversa con el parámetro b. Entonces nos basta con estudiar el mapeo y su inversa, ambos con parámetro b, para conocer el comportamiento que obtendríamos si el parámetro fuera $1/b$ para el mapeo y su inversa. Esto nos ahorra mucho trabajo porque, por ejemplo, el mapeo de Hénon con $b=2$ se comporta igual que su inversa con $b=1/2$ y, viceversa. Con esto se reduce drásticamente lo que debemos investigar, si representamos todos los posibles valores de los parámetros en el plano, con el eje horizontal para el parámetro a, el vertical para b, sólo debemos revisar los valores de b dados por la franja $-1\leq b\leq 1$.

Por lo tanto, únicamente tenemos tres casos dinámicamente distintos para revisar:

i) Cuando $b=0$.
ii) Cuando $0<|b|<1$.
iii) Cuando $|b|=1$.

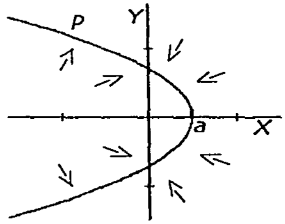


Gracias a lo que ya hemos hecho tenemos una idea de lo que sucede con estos tres casos. El primer caso presenta un comportamiento muy especial, es el único valor de b con el que el mapeo no tiene inversa; algo muy extraño debe suceder con él para que no pueda deshacerse lo que el mapeo hace. El segundo, cuando b toma un valor mayor que menos uno o menor que uno, pero b no puede valer cero; aquí la b comprime o reduce el área de figuras en el plano, por eso se le llama caso contractivo. Finalmente el tercer caso, cuando b vale uno o menos uno; aquí no se afecta el área, se queda exactamente igual, por eso se dice que preserva áreas. A veces se puede representar energía por medio de áreas y se asocian los cambios en el área con ganancia o pérdida de energía; por eso algunas personas llaman conservativo al caso que preserva áreas y disipativo al caso que reduce áreas.

Al tener únicamente tres casos por revisar, los agentes especiales supieron que se encontraban muy cerca de descubrir los secretos de la mulata de Córdoba. Sin embargo, también les quedaba claro que no tenían una sola clave de los efectos sobrenaturales que podrían liberar con ellos. Por eso decidieron regresar con la bruja de Catemaco, para decirle lo que sabían y pedirle que los preparara para enfrentarse a cualquier efecto maléfico que pudiera desencadenar. La bruja les confesó que no dominaba los indescriptibles hechizos de la mulata, sólo sabía liberar el poder de los dibujos pero no tenía idea de qué se podría desatar. Pero, sabía algo más, las antiguas brujas decían que la mulata había aprendido sus artes oscuras de un espíritu que no era de este mundo, pero había aprendido demasiado bien, superó a su maestro, lo traicionó y se encargó de que nadie pudiera volver a conjurarlo. Aunque muchas brujas de Catemaco habían intentado conjurarlo, ninguna había tenido éxito, porque ninguna de ellas podía reproducir los dibujos de la mulata de Córdoba.

Los agentes especiales consideraron seriamente lo dicho por la bruja de Catemaco. Ellos no querían llamar a ningún espíritu pero quizás él fuera el único capaz de hechizar correctamente los dibujos de la mulata. Así que se preguntaron con cuál de sus dibujos, la mulata podría haber atrapado al espíritu para que nadie pudiera liberarlo. La solución era obvia, con el único caso del mapeo cuyos efectos que no podían deshacerse, con el caso no invertible. Los agentes especiales le dijeron a la bruja que se preparara para conjurar al espíritu que no era de este mundo, porque ellos sabían cómo repetir el dibujo que lo encarcelaba.

Entonces sea b=o, veamos lo que obtenemos al aplicar H :



$$(x, y) \rightarrow (a - oy - x^2, x) \quad , \qquad \text{esto es:} \quad \begin{array}{l} x_1 = a - x^2 \\ y_1 = x \end{array}$$

Lo primero que vemos es que se descartan los valores originales de y, colapsándose así todo el plano en el eje X, luego el eje Y toma los valores de x convirtiéndose en la variable independiente, finalmente se dobla según la relación $a - x^2$. Es decir, cuando b=o, H colapsa o comprime a todo el plano en la parábola P :

$$P : x_1 = a - y_1^2$$

Si volvemos a pensar en la energía, este caso la anula por completo en un solo periodo de tiempo. Además, H no tiene inversa porque la inversa debería mandar un punto de la parábola a muchos puntos en el plano para cubrirlo y, ninguna función hace eso. Ahora, como ya sabemos, al estudiar un sistema dinámico no queremos aplicar una vez el mapeo, queremos aplicarlo muchas veces para estudiar el comportamiento a largo plazo pero aquí, al primer periodo de tiempo, el espacio fase ha dejado de ser el plano y se ha comprimido en una línea dentro del mismo, la parábola P. Para observar comportamiento a largo plazo ahora deberíamos aplicar H sobre la parábola varias veces y ver qué sucede con ella, empero, hemos aplicado mapeos sobre intervalos de líneas rectas, nunca sobre una línea curva. Podríamos volver a usar el mapeo sobre un nuevo plano que contuviera a la parábola, aunque claro, esto no produciría el mismo efecto en la parábola que al aplicar el mapeo únicamente sobre ella. Y si no podemos volver a aplicar el mapeo, hasta aquí podemos avanzar.

Los agentes especiales le explicaron a la bruja que ésta era la prisión perfecta, ya que el mapeo atrapaba absolutamente todo el plano en una línea, anulando la energía asociada, y producía efectos a largo plazo desconocidos y no invertibles. El espíritu debía estar confinado en la parábola. La bruja les pidió un poco de jugo de agave fermentado para su ritual, después de ingerirlo se concentró en la parábola y, se comunicó con el espíritu de fuera de este mundo. Éste le agradeció que trataran de liberarlo pero que no creía estar atrapado en una parábola, porque solamente veía una línea recta que lo mantenía atrapado. Los agentes especiales consideraron las palabras del espíritu y comprendieron, finalmente, cómo funcionaba la prisión parabólica que había creado la mulata.

Imaginemos por un momento, que somos confinados a un espacio de una sola dimensión. Dicho de otro modo, imaginemos que somos un punto de una línea. Para nosotros no existiría nada fuera de esta línea, ni siquiera más espacio a dónde ir; el único espacio hacia donde podríamos ir, o ver, sería esta misma línea. Aún si la línea fuera curva, nosotros no podríamos ver la curvatura de la línea, porque esta curvatura existe en un espacio de dos dimensiones y, nosotros únicamente podemos ver una dimensión. Así que para nosotros no existiría diferencia entre una línea recta y una curva. Tal vez, podríamos ver un poco más lejos sobre una línea recta que sobre una curva, tal y como sucede con nuestra visión sobre la Tierra, que sí es limitada por la curvatura de la Tierra aunque no podamos ver directamente esta curvatura. Regresemos a la parábola, si un observador fuera de ella nos dijera que nuestro espacio es curvo, le contestaríamos cortésmente que necesita internarse en un hospital psiquíatrico, porque nosotros no tenemos manera de notar la curvatura de nuestro espacio, y por lo tanto, para nostros nuestro espacio es recto, pero como Albert Einstein sabiamente diría: «Todo es relativo al punto de observación». Entonces sí podemos aplicar el mapeo de Hénon únicamente sobre la parábola, porque lo estamos aplicando sobre un espacio de una sola dimensión en donde no diferenciamos entre una línea recta y una curva pero, para lograr esto, debemos «quitarle» la curvatura a la parábola de alguna manera en que podamos «regresársela» después. Esto es, hay que proyectar la parábola sobre una línea recta y encontrar cuál función hace con ella, lo que nuestro mapeo hace sobre la parábola sin proyectar. La línea recta que más nos acomoda para proyectar la parábola es el eje Y. Usemos la letra griega phi, φ, para nombrar a la proyección, la cual será sencilla: Tomamos un punto del plano y nos olvidamos de la información del eje X, es decir, tomamos un punto cualquiera (x,y) y nos quedamos únicamente con y, así «aplanamos» a la parábola sobre el eje Y:

$$\varphi(x, y) = y$$

La inversa de esta proyección debe tomar a la recta y regresarla a parábola. Para no confundirnos con el eje Y original, le daremos un nombre distinto a esta recta, llamémosla U, entonces la inversa de φ será:

$$\varphi^{-1}(u) = (a - u^2, u)$$

Así tenemos que φ proyecta a la parábola sobre el eje Y, φ^{-1} toma la proyección recta de la parábola y la vuelve a convertir en parábola. Lo único que tenemos que hacer ahora, mediante la proyección, es conjugar el mapeo de Hénon con el parámetro $b=0$, $H_{a,0} = (a - x^2, x)$.

$$H_{a,0} \circ \varphi^{-1}(u) = (a - (a - u^2)^2, a - u^2)$$

$$\varphi \circ H_{a,0} \circ \varphi^{-1}(u) = a - u^2$$

Llamemos g, a esta nueva función que hemos encontrado. Hemos demostrado que el mapeo de Hénon con $b=0$, restringida su aplicación únicamente sobre la parábola, es conjugado a la función $g(u) = a - u^2$. La función g es claramente un mapeo cuadrático y en la investigación relatada en el expediente 3, nostros ya demostramos que todos los mapeos cuadráticos interesantes son conjugados al mapeo que usamos para modelar el crecimiento poblacional de los chupacabras, es decir, a la familia cuadrática. Por lo tanto, con ciertos valores de sus parámetros, el mapeo de Hénon presenta el mismo comportamiento que $F_\mu(x) = \mu x(1-x)$.

Gracias a la experiencia de las investigaciones anteriores, los agentes especiales determinaron rápidamente que, cuando $-1/4 < a < 1/4$, el mapeo g presenta un punto fijo atractor. Debía ser este atractor el que retenía al espíritu de fuera de este mundo. Los agentes especiales le indicaron a la bruja dónde debía encontrarse este atractor. La bruja reunió su poción mágica de jugo de agave extra fermentado y lanzó un indescriptible, inexplicable, inenarrable hechizo para liberar al espíritu de su prisión parabólica. Los agentes especiales se pusieron en guardia, listos para cualquier sorpresa, pero cuál sería su asombro cuando vieron frente a ellos, no exactamente a un espíritu, si no algo así como un fantasma o espectro. Y era claro que este espectro no era de este mundo, ya que parecía ser espacial o sideral.

El espectro sideral les contó a los agentes especiales lo que había sucedido con la mulata de Córdoba. Él, como tantos otros, se había enamorado de ella y la visitaba todas las noches; ingenuamente creyó que ella también se había enamorado de él, por eso le había enseñado sus poderosas técnicas. Cuando la mulata fue acusada de brujería, ella dibujó una puerta interestelar en la pared del calabozo por donde pudo abordar la nave espacial del espectro sideral. Él la llevó a su modesto asteroide donde pensaba que vivirían felices por el resto de la eternidad, pero ella pedía cada vez más lujos y comodidades que el espectro sideral, con su reducido sueldo de guardián del universo, no podía darle. Un día no muy especial, la mulata abandonó al espectro sideral, diciéndole que no estaba lista para una vida así. Tiempo después, al acudir a una llamada de auxilio, el espectro descubrió que la mulata había perfeccionado sus poderosas técnicas y, con ellas, robaba las riquezas que tanto anhelaba. Aunque la amara, él no podía permitirle eso, así se enfrentaron en una batalla titánica en donde el espectro sideral fue derrotado y aprisionado. A su vez, los agentes especiales le explicaron que la mulata, ayudada por alienígenas, chupacabras y la llorona, había regresado a la Tierra para vengarse del pueblo que había querido quemarla en la hoguera. El espectro sideral les contestó que si ellos lograban descifrar lo que la mulata sabía, él podría ayudarlos a derrotarla; y como lo más urgente era detener las tormentas, les dijo que de una manera mística e inescrutable, éstas podían pensarse como grandes cantidades de energía que liberaba la naturaleza. Los agentes especiales decidieron que el oscuro consejo del espectro sideral significaba que debían investigar los secretos del caso que contrae áreas, y que a veces puede asociarse a la disipación de energía, tal vez al revelar estos secretos podrían detener las tormentas pero debían tener cuidado al revisar esta caso ya que, según el espectro sideral, estos secretos eran custodiados por otro tipo de espectros.

Pues bien, para este caso asumimos que $0<|b|<1$. Con este caso debemos comenzar tal y como lo hicimos en investigaciones anteriores, desde el principio. Busquemos la característica dinámica más obvia que pudiera presentar el mapeo, sus puntos fijos. Queremos que:

$$H(x,y) = (a - by - x^2, x) = (x,y)$$

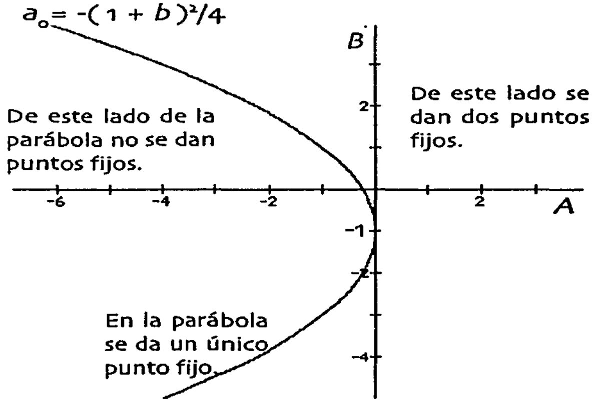
Para y queremos que $y=x$, de esta igualdad resulta que para x queremos $x=a-bx-x^2$, de este polinomio cuadrático obtenemos, tal y como hemos hecho antes con la misma fórmula de siempre, el valor de los puntos fijos que depende del valor de los parámetros:

$$x_{\pm} = \frac{-(1+b) \pm \sqrt{(1+b)^2+4a}}{2}$$

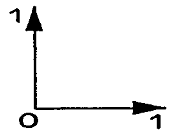
Aquí vemos que para que los puntos fijos existan, necesitamos que lo que está dentro de la raíz sea positivo, esto quiere decir que necesitamos que $4a > -(1+b)^2$. Así tenemos:

i) Cuando $4a < -(1+b)^2$ no hay puntos fijos.
ii) Cuando $4a = -(1+b)^2$ hay un único punto fijo.
iii) Cuando $4a > -(1+b)^2$ existen dos puntos fijos.

Será más sencillo representar lo anterior con una gráfica. Como ahora tenemos dos parámetros, podemos representar sus posibles valores en un plano. Digamos ahora que el eje horizontal representa los valores de a, el eje vertical los de b. Ya que hemos dividido nuestra investigación según los valores de b, pensemos a este parámetro como independiente y al parámetro a como dependiente, es decir, pensemos que a toma sus valores en función de b. Consideremos ahora la relación que nos da un único punto fijo, $4a = -(1+b)^2$, despejemos a; y para hacer énfasis en que ya no pensamos en un parámetro que toma valores arbitrariamente, sino en una función que toma sus valores según b, la llamamos a_0. Así obtenemos una función que nos da los valores de los parámetros con los cuales garantizamos la existencia de un único punto fijo. Esta función «vive» en el espacio donde «viven» los parámetros, el cual también es un plano.



Ahora nos preguntamos cómo son estos puntos fijos, cuándo atraen, cuándo repulsan, cuándo tienen problemas de doble personalidad, etcétera. Pero para eso necesitamos adaptar las definiciones que teníamos en una dimensión. Si recordamos, el que un punto fuera atractor o repulsor, dependía del valor de la derivada del mapeo evaluada en ese punto. Ahora la definición será casi igual, sólo cambiará la forma de calcular la derivada. En dos dimensiones, la idea detrás del concepto de derivada sigue siendo el mismo; podemos decir que seguimos buscando la transformación lineal que mejor se aproxime al mapeo en el punto que estudiamos pero, no podemos realizar esta búsqueda de la misma manera que lo hacíamos en una dimensión. No es la finalidad de este expediente explicar qué es lo que la derivada significa ni por qué se calcula así, por eso sólo plasmaremos aquí, en puro español, una ligera idea de la derivada de un mapeo sobre el plano.



Para localizar los puntos del plano hemos pensado en dos direcciones fundamentales, los ejes del plano. Esta misma idea puede pensarse de otra forma, imaginemos que tenemos únicamente dos líneas con dirección y sentido, las cuales sólo van del cero al uno; lo que estamos imaginando son dos vectores unitarios que preferimos sean perpendiculares, a los cuales los podemos expresar como (1,0), (0,1); con ellos podemos alcanzar o crear cualquier punto del plano. Por ejemplo, si queremos el punto (7,2) tenemos que multiplicar el primero por 7, el segundo por 2, y después los sumamos. De esta manera podemos construir o generar todo el plano. En matemáticas, se dice que la matriz formada por estos dos vectores es la base canónica del plano. Ahora, podemos escribir verticalmente a estos dos vectores por separado o como matriz:

Vector 1	Vector 2	Base canónica del plano.
$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

O sea, podemos expresar la base canónica del plano como una matriz. Las matrices son como cajoncitos donde acomodamos números, dependiendo del tamaño del cajoncito y de cómo estén acomodados los números, las matrices representarán diferente información. Como podemos imaginar, las matrices de dos renglones por dos columnas nos pueden ayudar a representar información de algunas tranformaciones del plano, para abreviar, las llamaremos matrices de dos por dos, 2x2. Con las matrices 2x2, tenemos una nueva manera de transformar el plano; la manera antigua requería mucho músculo, debíamos tomar y transformar a todos los puntos del plano, la manera nueva requiere menos esfuerzo, podemos transformar únicamente la base canónica y esto nos indicará cómo se ha transformado cada rincón del plano. La idea es ver cómo quedan los dos vectores canónicos porque de la misma manera ha sido afectado el plano completo. Las siguientes matrices son ejemplos de transformaciones del plano, debajo de ellas está escrita de manera antigua la misma transformación:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(x,y) \to (\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y) \qquad (x,y) \to (y,x) \qquad (x,y) \to (y,-x) \qquad (x,y) \to (x+2y, 3x+4y)$$

La primera transformación comprime el plano a la mitad de su tamaño, la segunda lo refleja por la diagonal, la tercera lo rota 90 grados y, la última lo expande, lo mueve, bueno, en español podemos decir que la última desfigura al plano. Por como estamos usando a estas matrices, resulta que las transformaciones que representan comparten una característica, todas son transformaciones lineales; no importa qué tan complicada sea una matriz 2x2, siempre nos representará una transformación lineal. Entonces en matemáticas, como en todos los lenguajes, existen diversas maneras de expresar una idea, y la idea de transformación lineal sobre el plano también se puede expresar como una matriz 2x2. Por lo tanto, buscar la derivada del mapeo ahora significará buscar una matriz 2x2, la cual deberá representar a la transformación lineal que mejor aproxime al mapeo alrededor un punto dado.

En dimensión 1, la derivada está dada por un número, en dimensión 2 está dada por una matriz 2x2, esto no es un cambio tan brusco como podría parecer, ya que un número puede pensarse como una matriz 1x1. Aunque ya sepamos que buscamos una matriz, es muy probable que no tengamos una idea en la mente de lo que queremos expresar. Sin embargo, este concepto resulta muy extraño si uno no está familiarizado con la concepción matemática del espacio y sus dimensiones; lamentablemente sólo podemos dedicarle pocas líneas a este tema porque ahondar en él nos alejaría demasiado de nuestra investigación. Olvidemos todo lo que acostumbramos pensar del espacio, pongamos nuestra mente en blanco, respiremos profundo e imaginemos lo siguiente. A los espacios matemáticos de más 3 dimensiones se le llama hiperespacios. Dentro de un hiperespacio, de 4 dimensiones, acomodamos al plano original de 2 dimensiones y al plano transformado por el mapeo en las otras 2 dimensiones; si pudiéramos ver la gráfica del mapeo, ésta se vería como una sábana bidimensional flotando en las 4 dimensiones. Ahora, el punto en el que queremos calcular la derivada es «levantado» del plano original por el mapeo a un punto en la sábana, y en este punto acomodamos un plano de manera tangente; este plano es la gráfica de una matriz, la cual representa a la transformación lineal que más se aproxima al mapeo alrededor de ese punto. Y al igual que antes, si esta matriz no se evalúa en un punto, esta matriz será la diferencial del mapeo; si la matriz se evalúa en un punto dado será la derivada del mapeo en ese punto.

Ya sabemos que la derivada se calculará con una matriz pero todavía no sabemos con cuál matriz. Primero necesitamos ponerle un nombre, llamemos *JH* a la derivada del mapeo de Hénon. Usamos la jota, *J*, porque se acostumbra llamar matriz jacobiana a la derivada en muchas dimensiones y, se usa este nombre para diferenciarla de las derivadas en una dimensión. Pues bien, con la fórmula para calcular la matriz jacobiana del mapeo de Hénon, JH, sucede lo mismo que con otras herramientas matemáticas, se ve impresionante a primera vista pero realmente es una oveja con piel de lobo. Primero veamos la fórmula con su piel de lobo y luego conozcamos a la oveja dentro de ella, la fórmula es:

$$JH = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x} & \frac{\partial x_1}{\partial y} \\ \frac{\partial y_1}{\partial x} & \frac{\partial y_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Veamos esta matriz poco a poco. Arriba a la izquierda tenemos $\frac{\partial x_1}{\partial x}$, que significa, la derivada parcial de x_1 con respecto a x. Esto no es nada complicado, tomamos $x_1 = a - by - x^2$, al derivar esta expresión con respecto de x obtenemos $-2x$, si la derivamos con respecto de y obtenemos $-b$. Entonces los valores dentro de la matriz jacobiana serán:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial x_1}{\partial y} = -b \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial y_1}{\partial y} = 0$$

Por lo tanto:

$$JH = \begin{pmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora necesitamos clasificar la matriz jacobiana que hemos obtenido. Si recordamos, para estudiar todos los posibles mapeos cuadráticos los clasificamos de acuerdo a su comportamiento dinámico. Esto que hicimos no es excepcional, todo lo contrario, en matemáticas se intenta clasificar todos los objetos para facilitar su estudio, se clasifican los números, los triángulos, las ecuaciones, las matrices, etcétera. La idea es que cuando necesitemos usar o estudiar un objeto matemático, simplemente veamos cómo se clasifica y así sabremos, de manera automática, las propiedades que presenta. Y como es de esperarse, la clasificación que usemos dependerá de lo que nos interese saber. Pues bien, la clasificación de las matrices que nos sirve para estudiar comportamiento dinámico, se hace según su espectro.

En español podemos decir que el espectro de una matriz nos da el comportamiento de la transformación lineal que representa y así podremos clasificarla. En matemáticas, como en todo, es importante que los resultados que obtengamos no sean contradictorios; por eso no importa que usemos herramientas diferentes para estudiar un mismo fenómeno, porque los resultados que arrojen las herramientas deben concordar; por ejemplo, si tenemos dos mapeos conjugados, los espectros de las matrices que los representan deben ser iguales, ya que los mapeos conjugados presentan el mismo comportamiento.

Los espectros matemáticos están formados por unas cosas llamadas valores propios o eigenvalores, usemos la letra griega lamda λ, para referirnos a ellos. Para obtener los eigenvalores de JH, le tenemos que restar a JH una matriz con lamdas en la diagonal, esto es:

$$JH - \lambda I = \begin{pmatrix} -2x & -b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - \lambda & -b \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Luego hay que hacer una operación que se llama determinante, la cual, como otras herramientas matemáticas, tiene un nombre imponente pero únicamente consiste en hacer multiplicaciones. Primero multiplicamos lo que hay en la diagonal de la matriz, luego multiplicamos lo que hay en la diagonal opuesta y, restamos:

$$\left|\begin{pmatrix} -2x-\lambda & -b \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}\right| = (-2x-\lambda)(-\lambda) - (-b)(1) = \lambda^2+2\lambda x+b$$

Hemos obtenido un polinomio, para enfatizar de dónde lo obtuvimos le llamamos polinomio característico de la matriz, el cual encierra en sus entrañas los valores de los eigenvalores. El por qué calculamos así los eigenvalores tiene que ver con las propiedades de las matrices, explicar esto detalladamente también nos desviaría de nuestra investigación; sólo diremos en español que los determinantes de las matrices y sus polinomios característicos nos dan clasificaciones «burdas». Por ejemplo, el determinante de la matriz jacobiana nos indica qué le sucede a las áreas de figuras en el plano bajo el mapeo; con la matriz jacobiana del mapeo de Hénon obtenemos un determinante igual a b, lo que nos indica que el mapeo contrae o expande las áreas según el valor del parámetro b. Ahora necesitamos ir refinando nuestra clasificación hasta obtener la que deseamos, la clasificación según el comportamiento dinámico. Si igualamos el polinomio característico a cero, $\lambda^2+2\lambda x+b=0$, el polinomio recibe el nombre de jacobiano, y se le pone este otro nombre para aclarar que de él podremos obtener el valor de los eigenvalores. Y podemos imaginar cómo sacar del jacobiano estos valores, con la fórmula de siempre:

$$\lambda_{\pm} = \frac{-2x \pm \sqrt{(2x)^2-4b}}{2} = -x \pm \sqrt{x^2-b}$$

Entonces, los eigenvalores de la matriz son: $\lambda_+= -x+\sqrt{x^2-b}$, $\lambda_-= -x-\sqrt{x^2-b}$. Hemos encontrado que el valor de los eigenvalores, en los puntos fijos del mapeo de Hénon, depende únicamente de los valores que tengan x, b. Pues bien, la búsqueda de los eigenvalores es relevante para nuestra investigación porque, al conjunto formado por los eigenvalores se le llama, en matemáticas, el espectro de la matriz. Y el espectro de la matriz nos revela el comportamiento de los puntos fijos según las siguientes definiciones:

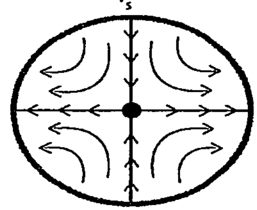
Definiciones:

Sea F un mapeo, sea p un punto periódico, $F^n(p)=p$, decimos que:

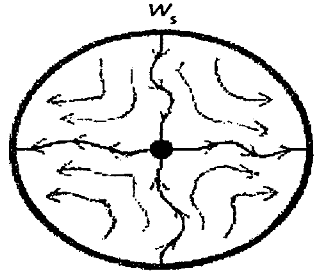
- El punto p es **atractor** si todos los eigenvalores de $JF^n(p)$ son menores que uno en valor absoluto.
- El punto p es **repulsor** si todos los eigenvalores de $JF^n(p)$ son mayores que uno en valor absoluto.
- El punto p es **punto silla** si algunos eigenvalores de $JF^n(p)$ son mayores y otros menores que uno en valor absoluto.

Lo primero que notamos es que en dos dimensiones no hemos usado el concepto de hiperbolicidad. Este concepto sigue siendo importante y los puntos continúan clasificándose como hiperbólicos y no hiperbólicos, luego los hiperbólicos se clasifican en tres tipos, atractores, repulsores y puntos silla. De momento, diremos que un caso particular de la definición de hiperbolicidad consiste en que los eigenvalores de los puntos sean distintos a uno o menos uno, pero para comprender la definción general de hiperbolicidad nos hacen falta otros conceptos. Por ahora nos basta con saber que ya no tenemos dos tipos, sino tres, de comportamiento de puntos hiperbólicos; con los cuales ya estamos familiarizados. Los puntos atractores y repulsores ya sabemos cómo actúan, y aunque no habíamos oído el nombre de puntos silla también conocemos lo que hacen estos puntos.

Los puntos silla actúan tal como el Dr. Jekyll, que como sabemos, también es Mr. Hyde, ya que se comportan como los puntos generados por la herradura de Smale, los que formaban el polvo de Cántor en dos dimensiones y tenían comportamiento caótico. Si tienen un eigenvalor menor que uno, en valor absoluto, existe una dirección en la que atraen a los demás puntos, si tienen otro eigenvalor mayor que uno, en valor absoluto, existe una dirección en la que repelen.



Aquí hay que aclarar algo acerca de los eigenvalores, lo cual haremos en puro español. Los eigenvalores únicamente nos dan información de la derivada y ésta es la que nos da información del mapeo. Esto es, al calcular la derivada obtenemos información de la transformación lineal que más se parece al mapeo alrededor del punto dado y, los eigenvalores nos dan el comportamiento de la transformación lineal, no del mapeo. Entonces, la figura de arriba nos muestra el comportamiento alrededor de los puntos silla con la transformación lineal, no con el mapeo, pero como sabemos, el comportamiento con el mapeo debe ser muy parecido. Podemos imaginar que el efecto del mapeo es algo así como un trapo arrugado, en él está pintado el comportamiento de los puntos, con la derivada estiramos el trapo en un pedacito que rodea al punto que queremos revisar, el trapo estirado es el efecto de la transformación lineal y con ella vemos la figura de arriba; pero el efecto real del mapeo es el trapo arrugado, en él los conjutos locales estable e inestable del punto silla, l_s, l_u, no son lineas rectas sino curvas; para diferenciar ambos casos, cuando hablamos de la transformación lineal usamos los nombres de conjuntos estables e inestables, cuando hablemos del mapeo usaremos los nombres de variedades estables e inestables. Entonces, el comportamiento de los puntos silla con el mapeo podría verse como la figura de al lado, en ella usamos W_s para señalar la variedad estable y, W_u para la variedad inestable; aunque en la figura sólo se representan las variedades estable e inestable locales.



Con lo anterior, los agentes especiales comprendieron qué clase de secretos custodiaban los espectros matemáticos, y no sólo eso, también supieron cómo desenterrar estos secretos. Además recordaron que fueron precisamente los puntos producidos por la maldición de la llorona, los que formaban el polvo de Cántor en dos dimensiones, los que presentaron comportamiento caótico en el estadio. Parecía ser que la mulata de Córdoba había convencido a la llorona de ayudarla en su despiadada venganza pero, también parecía ser que la mulata había superado el «amasado» fantasmal de la llorona y había producido puntos un poco más «esquizofrénicos». Si esto era verdad, la mulata podría conjurar entes más complejos que el polvo de Cántor en dos dimensiones. Los agentes especiales debían confirmar sus sospechas, debían descubrir los secretos que guardaban los espectros matemáticos para averiguar el comportamiento de los puntos producidos por los embrujos de la mulata de Córdoba y, qué mejores candidatos para confirmar sus sopechas que los puntos fijos.

Si recordamos, cuando el parámetro a era mayor que a_o, con $a_o = -(1+b)^2/4$, existían dos puntos fijos. Los cuales tienen los siguientes valores:

$$x_- = \frac{-(1+b) - \sqrt{(1+b)^2+4a}}{2} \quad , \qquad x_+ = \frac{-(1+b) + \sqrt{(1+b)^2+4a}}{2}$$

Para revisar los valores que toman los eigenvalores evaluados en estos puntos, únicamente tenemos que hacer cirugía plástica pero esta vez no la haremos sobre una igualdad, sino sobre una desigualdad, $a>a_o$. La idea es cambiarle la cara para que se parezca al valor del punto fijo, luego le volveremos a hacerle cirugía plástica para que se parezca a los eigenvalores, y así sabremos si son mayores o menores que uno. Esta cirugía plástica es igual de sencilla que las anteriores que hemos hecho, solo hay que tener cuidado para alterar únicamente la cara de la desigualdad, no a la desigualdad misma. Como podemos imaginar, esta cirugía, aunque rutinaria, será larga y por eso, obviaremos algunos pasos, pero cualquiera que recuerde el álgebra de secundaria puede realizarla. Comencemos por revisar x_-:

$$a>a_o \quad \Rightarrow \quad a > -(1+b)^2/4 \quad \Rightarrow \quad (1+b)^2+4a > 0 \quad \Rightarrow$$

$$-\sqrt{(1+b)^2+4a} < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-(1+b) - \sqrt{(1+b)^2+4a}}{2} < -(1+b)/2$$

Entonces: $\quad x_- < -(1+b)/2$

Hemos encontrado que cuando $a>a_o$ el valor del punto fijo x_- es menor que $-(1+b)/2$. Ahora queremos que la desigualdad se parezca a los eigenvalores. Comenzamos donde nos quedamos:

$$x_- < -(1+b)/2 \quad \Rightarrow \quad 1+2x_- < -b \quad \Rightarrow \quad 1+2x_- + x_-^2 < x_-^2 - b \quad \Rightarrow \quad (1+x_-)^2 < x_-^2 - b$$

Como $(1+x_-)^2$ es un número al cuadrado, tiene que ser positivo, entonces $0<(1+x_-)^2<x_-^2-b$. Hacemos énfasis en lo anterior porque queremos dejar de elevar al cuadrado, pero hay que tener cuidado al hacer esto porque todo número elevado al cuadrado tiene dos raíces. Por ejemplo, x^2 es el mismo número que $(-x)^2$, entonces hay que saber si al quitar el cuadrado estamos trabajando con x o con $-x$, porque si trabajamos con números negativos debemos voltear la desigualdad. Por ejemplo, de $(1+x_-)^2 < x_-^2-b$ no obtenemos $1+x_- < -\sqrt{x_-^2 - b}$, porque estamos trabajando con números negativos y, deberíamos voltear la desigualdad, es decir, $1+x_- > -\sqrt{x_-^2 - b}$. Después de razonar un poco, vemos que los casos que podemos obtener de $(1+x_-)^2 < x_-^2-b$ son cuatro:

$$1+x_- > -\sqrt{x_-^2 - b}\ , \quad 1+x_- < \sqrt{x_-^2 - b}\ , \quad -1-x_- > -\sqrt{x_-^2 - b}\ , \quad -1-x_- < \sqrt{x_-^2 - b}$$

Terminemos de hacer la cirugía plástica con el primer caso para que semeje algún eigenvalor:

$$1+x_- > -\sqrt{x_-^2 - b} \quad \Rightarrow \quad 1 > -x_- - \sqrt{x_-^2 - b} \quad \Rightarrow \quad 1 > \lambda_-(x_-)$$

Hemos obtenido que la restricción $a>a_0$ nos indica que el eigenvalor λ_-, del punto fijo x_-, es menor que uno. Vamos descubriendo poco a poco el comportamiento de este punto fijo. Ahora, si terminamos de hacerles cirugía plástica a los casos restantes, tal y como la hicimos en el caso anterior, obtenemos que $1 < \lambda_+(x_-)$. Entonces sabemos que $\lambda_-(x_-) < 1 < \lambda_+(x_-)$, es decir, un eigenvalor es menor que uno y otro es mayor que uno. Sólo nos falta saber si el que es menor que uno, lo es en valor absoluto, es decir, $-1 < \lambda_-(x_-) < 1$. Pero para revisar esto debemos recordar algo. Estamos revisando el caso contractivo, es decir, $0<|b|<1$, lo cual nos indica que $-1<b<1$. Si sustituimos los posibles valores de b tenemos que $-(1+b)/2$ es negativo, es decir, $-(1+b)/2 < 0$. Por lo tanto $x_- < -(1+b)/2 < 0$, es decir, el punto fijo x_- es negativo; ahora vamos a buscar un valor que nos ayude, porque en matemáticas, como en todo, la idea es utilizar lo que más nos ayude. Tomemos el valor positivo $(1+b)/2$ ya que, por lo que hemos hecho, podemos afirmar que $x_- < -(1+b)/2 < 0 < (1+b)/2$. Es decir, podemos afirmar que $x_- < (1+b)/2$, lo cual nos ayuda porque al hacerle cirugía plástica obtenemos:

$$x_- <(1+b)/2 \quad \Rightarrow \quad -1-b < -2x_- \quad \Rightarrow \quad x_-^2-b < 1-2x_- +x_-^2 \;\Rightarrow\; x_-^2-b < (1+x)^2$$

Como ya sabemos $0 < x_-^2-b$, entonces $0 < x_-^2-b < (1+x)^2$ nos da los siguientes casos:

$$-1+x_- < -\sqrt{x_-^2-b}\;,\quad 1-x_- > -\sqrt{x_-^2-b}\;,\quad -1+x_- < \sqrt{x_-^2-b}\;,\quad 1-x_- > \sqrt{x_-^2-b}$$

Si le hacemos cirugía plástica al primero para que semeje algún eigenvalor, tenemos que:

$$-1+x_- < -\sqrt{x_-^2-b} \quad \Rightarrow \quad -1 < -x_- -\sqrt{x_-^2-b} \quad \Rightarrow \quad -1 < \lambda_-(x_-)$$

Ya está, el eigenvalor λ_-, del punto fijo x_-, es menor que uno en valor absoluto porque, gracias a la cirugía plástica algebráica sabemos que $-1 < \lambda_-(x_-) < 1$. Y como el otro eigenvalor es mayor que uno, evidentemente en valor absoluto, podemos afirmar, sin ningún temor a equivocarnos, que el punto fijo x_- es un punto silla. Si escribiéramos con paciencia la cirugía plástica de todos los casos para evidenciar que no existen contradicciones, tendríamos la demostración matemática de nuestra afirmación anterior pero, ya es claro que no existe ninguna contradicción. Por lo tanto, x_- es punto silla.

Para revisar el otro punto fijo, x_+, hay que hacer exactamente lo mismo, una cirugía plástica rutinaria y larga. Las manipulaciones algebráicas que hay que hacer son exactamente iguales, por eso no las repetiremos. Sólo haremos énfasis en que algo diferente sucede con este punto. Resulta ser que cuando $a < 3(1 + b)^2/4$, ocurre algo distinto que cuando a es mayor que ese valor, es decir, tenemos dos casos distintos con este punto. Llamemos este valor especial del parámetro como $a_1=3(1 + b)^2/4$. El primero caso se da con $a_0<a<a_1$, el segundo con $a>a_1$. En ambos casos se hace la misma cirugía plástica para obtener los eigenvalores y lo que resulta es:

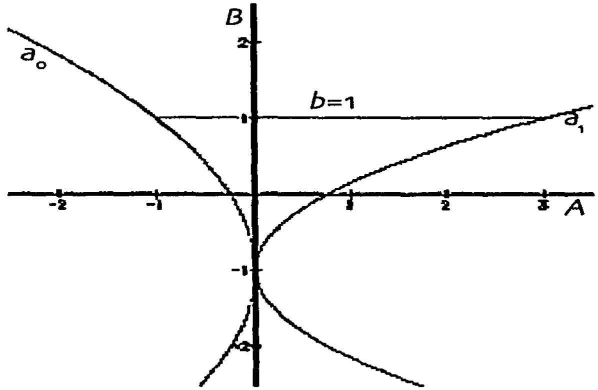
$$a_0<a<a_1 \quad \Rightarrow \quad -1 < \lambda_-(x_+) < 1\;,\; -1 < \lambda_+(x_+) < 1$$

$$a>a_1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_-(x_+) < -1\;,\; -1 < \lambda_+(x_+) < 1$$

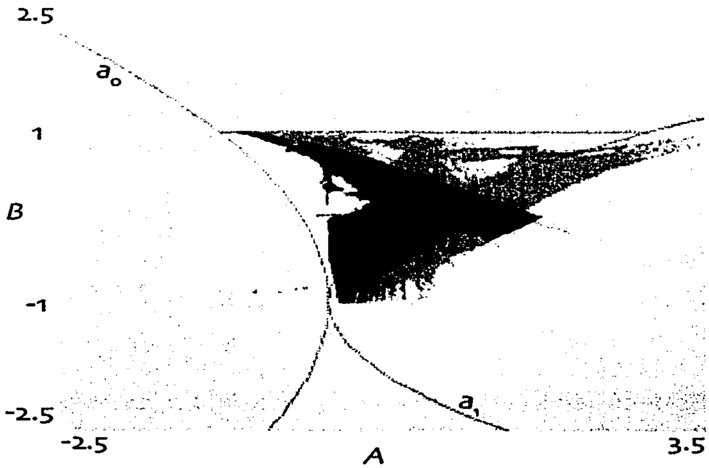
Es decir, en el primer caso el punto fijo x_+ es atractor, conforme crece el valor de a, y se hace mayor que a_1, el atractor se convierte en punto silla.

La información que hemos obtenido de los puntos fijos, nos indica que sucede una bifurcacón nodo silla cuando a pasa por a_0. Cuando a es menor que a_0 no tenemos puntos fijos, cuando es igual, aparece un fijo y cuando se vuelve mayor aparecen dos fijos, uno punto silla y otro atractor. Entonces cuando $a = a_0$ tenemos un único fijo no hiperbólico que, al aumentar a, se divide súbitamente en dos fijos hiperbólicos. Toda la evidencia nos dice que efectivamente sucede una bifuración nodo silla en el valor a_0.

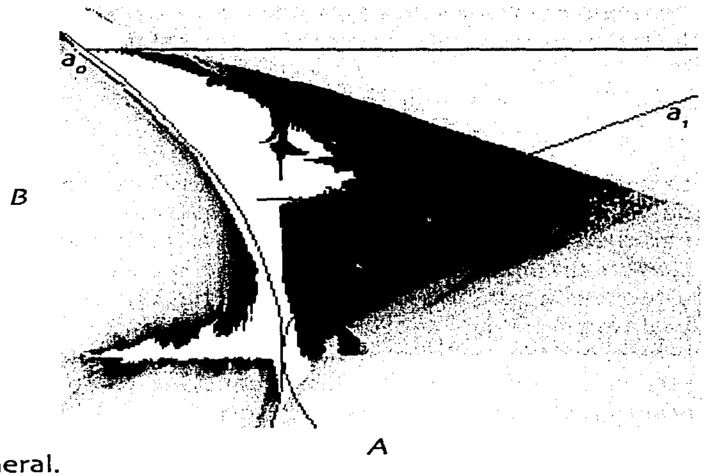
Vamos a resumir lo que hemos encontrado. Primero tomamos el espacio donde «viven» los parámetros y graficamos los valores especiales que hemos encontrado con nuestras cirugías plásticas algebráicas, a_0, a_1. Además trazamos la restricción que tenemos del parámetro b, $b<1$, el caso $-1<b$ no es necesario pintarlo porque las curvas de los valores de a marcan cuándo sucede. A la izquierda de a_0 no se producen puntos fijos, a su derecha se crean dos fijos, uno de ellos es punto silla, el otro es atractor cuando nos encontramos en el triángulo formado por a_0, $b=1$, a_1, pero cuando salimos del triángulo y pasamos a su derecha, el atractor se convierte en punto silla.



Ahora vamos a representar el comportamiento del espacio fase en el espacio de parámetros. Para esto necesitamos jugar con la computadora, vamos a pedirle que itere el mapeo de Hénon sobre algunos puntos críticos del plano original y que siga su órbita. Queremos que la computadora nos pinte de gris claro los valores de los parámetros que hagan que los puntos escapen, de gris oscuro los valores que hagan que algunos escapen y otros no, de negro los valores que hagan que ninguno escape, y que deje de blanco los valores con los que no sea capaz de seguir a los puntos. Veamos, entonces, el cuadro que la computadora nos ha pintado sobre el espacio de parámetros según nuestras indicaciones. Para apreciar mejor el cuadro borremos los ejes A, B, pero dejemos las curvas de a_0, $b=1$, a_1, y así, la pintura de la computadora queda como la vemos aquí al lado. Obviamente, la computadora obedece nuestras instrucciones lo mejor que puede con sus limitaciones, en algunas zonas en blanco nunca podrá seguir un punto por sus errores de redondeo o, si le pedimos que siga puntos diferentes nos dará pinturas un poco distintas pero, en general, nos da una idea de lo que sucede con distintos valores de los parámetros.



Para dar un ejemplo de cómo puede variar la información que nos da la computadora, veamos bajo la lupa al triángulo negro. Para observarlo mejor vamos a pintar de gris claro las zonas con gris oscuro, así nos quedamos solo con negro, gris claro y blanco. Vamos a pedirle a la computadora que ponga especial atención en la «punta» del triángulo negro. En la pintura anterior había marcado de negro esta punta pero, ahora, le ha puesto negro, blanco y todo tipo de grises. Esto nos indica que el comportamiento producido por esos valores de los parámetros es muy difícil de describir. Por eso sólo hay que tomar la información que obtengamos de la computadora, como una guía muy general.



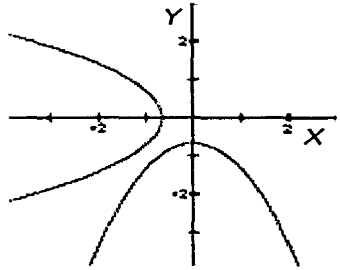
Hemos descubierto varias cosas. Sabemos con qué valores de los parámetros existe al menos un atractor; conocemos la existencia de puntos silla, de los cuales ya sabemos que pueden causar comportamiento caótico; por el cuadro de la computadora podemos suponer que, cuando a es un poco mayor que a_1, existen otros atractores; con los demás valores de los parámetros, los que se encuentran lejos del triángulo negro, podemos suponer que la gran mayoría de los puntos escapan; y además, vemos que se pueden dar comportamientos muy difíciles de describir. Hemos avanzado bastante pero todavía nos falta una evidencia que ha resultado crucial en otras investigaciones, la existencia de puntos periódicos que no sean fijos. Vamos a buscar puntos periódicos de periodo 2. Como ya sabemos, primero necesitamos desarrollar la segunda iteración del mapeo de Hénon, H^2. Hagamos lo mismo que hemos hecho con otros mapeos, tomamos nuestro mapeo $H(x,y)=(a-by-x^2, x)$ y lo aplicamos dos veces:

$$H^2(x,y) = H(a-by-x^2, x) = (a - b(x) - (a-by-x^2)^2 \ ,\ a-by-x^2)$$

Como podemos ver, únicamente hemos hecho dos veces lo que el mapeo nos indica. Para obtener lo que debe quedar en la primera coordenada pusimos a, luego le restamos lo que había en la segunda coordenada anterior multiplicado por b, $-bx$, y le restamos lo que había en la primera coordenada elevado al cuadrado, $-(a-by-x^2)^2$; en la segunda coordenada simplemente ponemos lo que había en la primera, $a-by-x^2$. Ahora buscamos los puntos fijos para esta expresión, que como ya sabemos, son los puntos periódicos de periodo dos para H. Entonces queremos los puntos que cumplan lo siguiente:

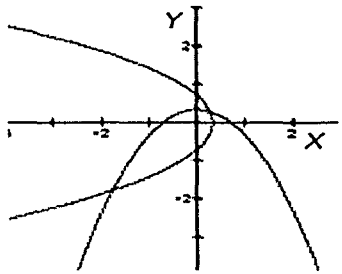
$$x = a - bx - (a-by-x^2)^2 = a-bx-y^2$$
$$y = a-by-x^2$$

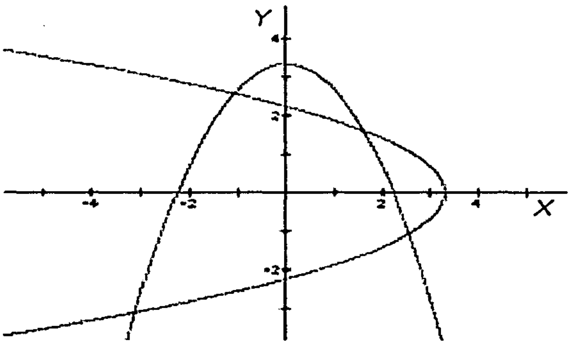
Resulta que en la expresión de x, lo que está elevado al cuadrado es exactamente igual a la expresión de y, entonces podemos escribir $x = a-bx-y^2$, de esta forma hemos obtenido dos ecuaciones que nos dan la información de los puntos periódicos de periodo 2. Afortunadamente, estas ecuaciones se grafican como parábolas y podemos ver fácilmente la información que contienen. Regresemos a nuestro espacio fase, reescribamos de manera más sencilla las expresiones despejando x,y; grafiquemos y observemos.



$$x = a - y^2 / 1 + b$$
$$y = a - x^2 / 1 + b$$

La expresión de x es una parábola que abre hacia la izquierda, la expresión de y una parábola que abre hacia abajo. El parámetro b únicamente hace que las parábolas se abran o cierren un poco más. El parámetro a las mueve de lugar, si a decrece la parábola de x se mueve hacia la izquierda, la de y se mueve hacia abajo; si a crece sucede lo contrario. Ahora, la información de los puntos periódicos se observa en las intersecciones de las parábolas. Cuando a toma valores menores que a_0, las parábolas no se tocan, y así sabemos que no existen puntos periódicos. Cuando a toma valores entre a_0 y a_1, las parábolas se intersectan en dos puntos, los cuales son los puntos fijos. Cuando a es mayor que a_1 las parábolas se intersectan en cuatro puntos, dos de los cuales sabemos que son fijos, los otros dos deben ser entonces dos puntos periódicos de primer periodo 2.

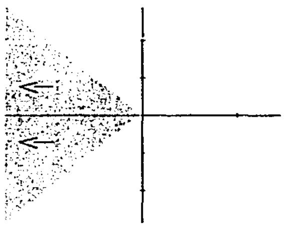




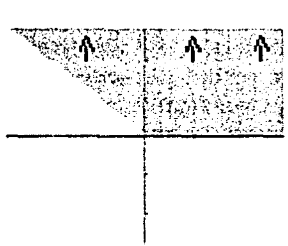
Después de que las parábolas se intersectan en cuatro puntos, no importa cuánto aumente el valor de a, ya no se intersectarán en más puntos. Esto quiere decir que únicamente existe una órbita periódica de primer periodo 2. Además, si hacemos crecer lentamente al parámetro a, vemos cómo se van moviendo las parábolas y podemos ver literalmente lo siguiente: Antes de que a tome al valor a_1, tenemos dos intersecciones; cuando a toma el valor a_1, de la intersección superior surgen las otras dos intersecciones faltanes que se irán separando mientras a aumenta. La intersección, de la cual surgen otras dos, corresponde al punto fijo que primero es atractor y luego punto silla, esto quiere decir que de él surgen dos puntos periódicos de primer periodo 2; si recordamos, esto nos indica que, aunque no lo hayamos demostrado, tenemos evidencia suficiente para afirmar que ha sucedido una bifurcación de doblamiento de periodo.

Una bifurcación nodo silla, un punto fijo atractor que sufre una bifurcación de doblamiento de periodo, aparición de puntos periódicos, comportamiento difícil de describir, etcétera. Este escenario ya era conocido por los agentes especiales, las investigaciones anteriores los habían preparado para reconocer estos indicios. Así que, uniendo estos indicios decidieron aventurar algunas afirmaciones. Claro que, siendo rigurosos, se debe demostrar matemáticamente toda afirmación. Pero, como siempre sucede, lo urgente no deja tiempo para lo riguroso y, en este momento, no hay nada más urgente que detener las tormentas que amenzan con convertir al Estado de Veracruz en un pantano.

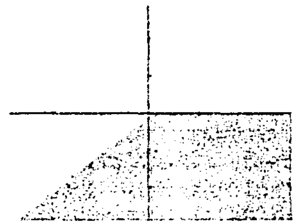
Por lo anterior, únicamente quedará plasmado en este expediente que, sí es posible demostrar las siguientes afirmaciones y esto se logra mediante una búsqueda matemática, la cual consiste en arreglar algebráicamente, con paciencia y creatividad, desigualdades que sabemos ciertas para que nos den la información que necesitamos, tal y como hemos hecho anteriormente. Hecha la aclaración, sigamos. Por cómo transforma el mapeo de Hénon al plano, por los puntos fijos y periódicos que hemos encontrado, y por el cuadro que ha pintado la computadora, podemos suponer que antes de que a sea mayor que a_0, no se presenta alguna dinámica interesante, el plano completo escapa. Esto es, antes de la bifurcación nodo silla que encontramos, no existe ningún comportamiento interesante. De hecho, antes de esta bifurcación el plano se comporta así:



Los puntos marcados con gris escapan, hacia la izquierda, bajo iteraciones hacia adelante de H.



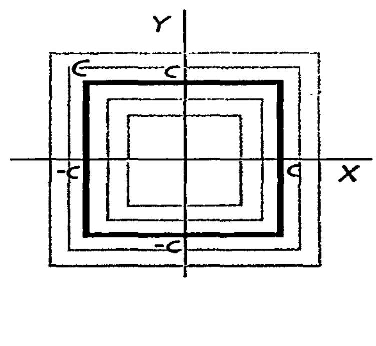
Los puntos marcados con gris escapan, hacia arriba, bajo iteraciones hacia atrás de H.



Los puntos marcados con gris caen, con una iteración de H, dentro del área marcada en la primera gráfica; y con una iteración hacia atrás de H, caen dentro del área marcada en la segunda gráfica.

Después de la bifurcación nodo-silla sabemos que existen puntos periódicos pero buscarlos poco a poco será tardado y desgastante. Vamos a intentar englobar a todos los puntos periódicos para revisarlos juntos. Primero vamos a trazar un cuadrado en nuestro espacio fase, la idea es que todo lo que esté fuera del cuadrado escape, así podremos asegurar que todos los puntos periódicos estarán dentro del cuadrado. Este cuadrado se traza centrado en el origen y, para que contenga a los puntos periódicos, debe ser suficientemente grande y su tamaño debe variar de acuerdo a los valores de los parámetros.

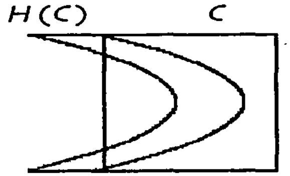
Para esta investigación nos basta saber que este cuadrado suficientemente grande existe. Usaremos una C mayúscula para referirnos a él, y diremos que su tamaño está dado por una relación de los parámetros del mapeo de Hénon, para nombrar este valor usaremos una c minúscula. Entonces el lado derecho del cuadrado C corta al eje X en los valores $-c$, c; al igual que sucede con el eje Y. Todo lo que se encuentra fuera del cuadrado se comporta igual que en las gráficas anteriores, es decir, escapa. Así que los puntos periódicos que puedan existir están dentro de C.

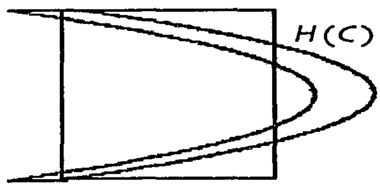


Un cuadrado está formado, obviamente, por líneas verticales y horizontales. Y nosotros ya sabemos lo que le hace el mapeo a estas líneas. Por eso, lo único que tenemos que hacer, para encontrar lo que le hace H al cuadrado, es sustituir el valor c en las ecuaciones de las rectas parametrizadas y, aplicarles el mapeo de Hénon; esto es:

$$(c,t) \rightarrow (a - bt - c^2,\ c)\ , \qquad (t,c) \rightarrow (a - bc - t^2,\ t)$$

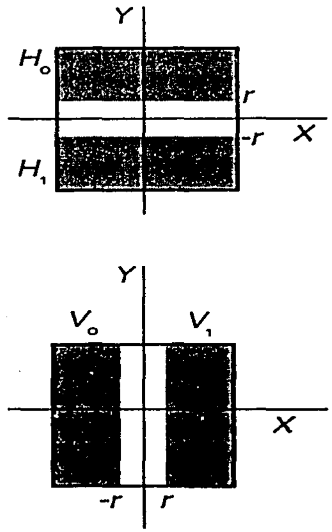
Con esas dos ecuaciones revisamos la línea superior y la línea derecha que forman el cuadrado, para los lados restantes simplemente usamos el valor $-c$. Si dejamos al cuadrado en el plano y trazamos la figura que obtenemos al transformar las líneas rectas, $H(C)$, obtenemos una figura famliar. Al cambiar los valores de los parámetros, la figura que parece herradura se mueve hacia la izquierda o derecha y varía su grosor; y por como hemos definido al cuadrado, sabemos que éste aumenta o disminuye su tamaño según el valor de los parámetros. Así que si tomamos el valor del parámetro a de manera que $a>2(1+b)^2$, obtenemos una figura demasiado familiar. Usemos a_2 para nombra a este valor especial, $a_2=2(1+b)^2$. Para obtener este valor sólo se tiene que revisar que el vértice de la parábola interior de la herradura tome el valor del lado derecho del cuadrado. Tenemos entonces que, cuando $a>a_2$ la imagen del cuadrado cruza por completo al original, dándonos una figura muy parecida a la herradura de Smale. De hecho, al ver la figura de al lado, es evidente que podemos usar la dinámica simbólica de la misma manera en que la usamos con la herradura de Smale.





$a>a_2$

Existen algunas ligeras diferencias al usar la dinámica simbólica pero son mínimas. Por ejemplo, los rectángulos que se usan para definir las secuencias de ceros y unos, ahora se encuentran en los extremos del cuadrado y, al igual que el cuadrado, su grosor depende de los valores que tomen los parámetros. Ya que el centro del cuadrado es el origen del plano y, ya que estamos trabajando con figuras simétricas, podemos usar un solo valor para dar el tamaño del los rectángulos. Llamemos r a este valor, el rectángulo H_0 va desde r en el eje Y hasta el lado superior del cuadrado, el rectángulo H_1 comienza en el valor $-r$ y llega hasta el lado inferior del cuadrado; para V_0 tenemos lo mismo, su grosor va desde el mismo valor $-r$ en el eje X hasta el lado izquierdo del cuadrado y, el valor donde comienza V_1 es r y llega hasta el lado derecho del cuadrado. Aquí sólo hay que cuidar que con el valor r ningún pedacito de la nueva herradura, o de su inversa, caiga dentro del cuadrado pero fuera de los rectángulos; para asegurarnos de que esto no suceda, hacemos que el vértice de la parábola interior de la herradura esté lo suficientemente lejos del cuadrado, así el resto de la herradura caerá



dentro de los rectángulos. Para lograr esto, debemos recordar que es el parámetro a el que modifica la posición de la herradura, así debemos cosiderar un valor suficientemente grande del parámetro a, usemos a_3 para nombrar el valor que nos funciona. Entonces, cuando a sea mayor que a_3 estaremos seguros de que la nueva herradura caerá dentro de los rectángulos, así como su inversa, y podremos usar la dinámica simbólica tal y como la usamos con la herradura de Smale.

Entonces volveremos a usar el espacio de sucesiones binarias con punto, $\mathcal{M}_2$, el que conocíamos como la Matrix centrada. Una vez más, la parte de las sucesiones que se encuentra a la derecha del punto representará las órbitas hacia adelante de los puntos, lo que se encuentra a la izquierda representará las órbitas hacia atrás. Como las sucesiones son doblemente inifinitas, una vez más representarán a los puntos que permanecen todo el tiempo dentro del cuadrado y, volveremos a usar la letra K para nombrar al conjunto que forman estos puntos. Como ya podemos imaginar, los puntos que jamás escapan se encuentran otra vez en las intersecciones de los rectángulos y forman, otra vez, al polvo de Cántor en dos dimensiones, la única diferencia es que ahora no se alinearán perfectamente como en el expediente anterior, ahora se acomodarán siguiendo la curva de la nueva herradura que forma el mapeo de Hénon. Una vez más el itinerario S, de un punto de K, convertirá la información de su órbita en una sucesión doblemente infinita de ceros y unos; el valor de uno o cero volverá a depender del rectángulo en el que caiga el punto con la iteración correspondiente, uno para V_1, cero para V_0. Una vez más, aplicaremos el corrimiento B sobre $\mathcal{M}_2$ y, razonando de manera análoga a como lo hicimos en el expediente anterior, tendremos que, una vez más, nuestro mapeo es conjugado a este corrimiento.

Luego entonces, con valores suficientemente grandes del parámetro a, el mapeo de Hénon genera un conjunto de Cántor en el plano, que al igual que el que genera la herradura de Smale, está formado por una infinidad de puntos silla y, así, este polvo de Cántor es otra vez un conjunto hiperbólico invariante. Aún más, también sabemos ahora que el mapeo de Hénon produce caos.

Los agentes especiales se detuvieron a meditar con calma lo que habían descubierto y, se dieron cuenta de que habían cometido una terrible omisión al investigar la maldición de la llorona. Y ahora, estaban a punto de volver a cometerla. Si la Matrix es homeomorfa a la Matrix centrada, el corrimiento de Bernoulli debe ser conjugado al corrimiento aplicado sobre la Matrix centrada. Esto es importante porque significa que el mapeo G, el que modelaba la maldición de la llorona, es conjugado al mapeo F, que modelaba el crecimiento poblacional de los chupacabras. Y ahora, el mapeo de Hénon también es conjugado a estos dos mapeos. La relación entre los alienígenas, chupacabras, la llorona y la mulata de Córdoba, había sido revelada.

Gracias a la dinámica simbólica se puede afirmar que, con ciertos valores de sus parámetros, el mapeo de Hénon es el análogo de la familia cuadrática en dimensión dos. Es más, ahora sabemos que todos los comportamientos que hemos investigado hasta este momento son, dinámicamente, los mismos. Así podemos afirmar que, con valores de sus parámetros bien escogidos, los mapeos cuadráticos «interesantes», el mapeo de la herradura de Smale y, el mapeo de Hénon, generan el mismo comportamiento dinámico.

Las sospechas de los agentes especiales no eran infundadas, habían descubierto la fuerte relación que unía a la mulata de Córdoba, la llorona, los chupacabras y alienígenas. Ahora era evidente que era la mulata de Córdoba quien producía, mediante sus inconcebibles embrujos, yerba con forma de cigarro, con la cual los demás seres sobrenaturales aumentaban sus alucinantes poderes; gracias a esto la mulata había logrado controlarlos. Y sólo después de este descubrimiento, fue que los agentes especiales se dieron cuenta de que ella era la mente maestra que orquestaba los insólitos sucesos que amenzaban la seguridad nacional y, probablemente, la seguridad del mundo entero. Era ella quien dirigía la invasión extraterrestre, la que criaba poblaciones de chupacabras y la que le había enseñado a la llorona a realizar sus fantasmales embrujos. Pero los agentes especiales no se preocuparon al saber esto, ya que habían comprendido que todos estos seres sobrenaturales usaban al polvo de Cántor para guardar sus secretos, y éste ya no era rival para ellos. Sin embargo, algo les molestaba profundamente. Al estudiar el crecimiento poblacional de los chupacabras habían comprendido perfectamente cómo surgía el caos, lo mismo había sucedido al estudiar la maldición de la llorona pero, ahora, no quedaba claro cómo se gestaba. De hecho, había muchos valores de los parámetros, del mapeo de Hénon, con los que los agentes especiales no tenían ni la más remota idea de qué tipo de comportamiento se generaba. Decidieron exponerle sus dudas a la bruja de Catemaco, la cual les contestó que los embrujos de la mulata de Córdoba habían conjurado a un ente mucho más temible que el que los agentes especiales suponían. Al hablar con el espectro sideral, éste les dijo que detectaba una presencia mucho más poderosa que la que habían encontrado. Ante tales respuestas, los agentes especiales sí se preocuparon, no podían creer que hubiera un ente más complejo e intrincado que el polvo de Cántor, no querían pensar que debían enfrentarse a un ser más desafiante. Pero ellos sabían que eran la primera, última y única línea de defensa contra la peor escoria del universo. Debían terminar lo que habían comenzado, debían adentrarse en la tierra incógnita donde se genera el caos y donde habita el misterioso ente que ha conjurado la mulata.

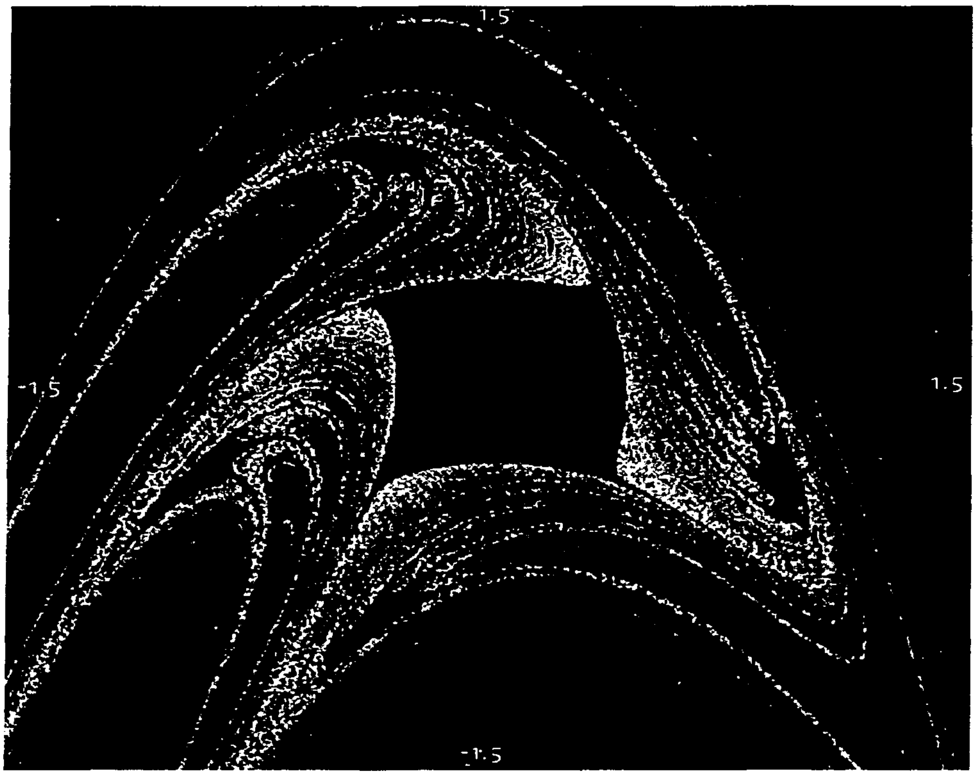
Al revisar nuevamente el cuadro de la computadora resulta claro que deben surgir algunos otros atractores además del punto fijo, pero cuántos, de qué manera, por qué surgen, cómo se comportan. ¿Son las bifurcaciones de doblamiento de periodo nuevamente culpables de llevarnos al caos? ¿Estamos frente a una ruta al caos distinta? ¿Qué nuevos efectos se producen al tener puntos silla junto a puntos atractores? ¿Qué entes matemáticos se esconden en esta tierra indómita?

Lamentablemente, ningún matemático ha podido resolver las dudas que asaltaron a los agentes especiales. Hasta el día de hoy, la transición de dinámicas simples a caóticas, en el mapeo de Hénon, no se ha comprendido totalmente y por eso es tema de constante investigación. Aún siendo la simplificación de modelos más complicados, este mapeo desafía tenazmente a la mente humana. La ruta al caos que toma el mapeo de Hénon cruza por lugares matemáticos tan oscuros, que nadie ha podido atravesarlos aún. La fortuna y la gloria están, desde los setentas hasta este momento, esperando a quien pueda recorrer este oscuro paraje matemático y sea capaz de regresar para contarnos su odisea.

En el momento exacto en que los agentes especiales se dieron cuenta de lo anterior, una intensa luz rasgó la oscuridad de la noche. El rugir del trueno quebró el silencio. Pesados granizos se abalanzaron sobre el desprevenido pueblo de Catemaco, Veracruz. Dentro de la misma residencia de la bruja, en la pared que se encontraba frente a los agentes especiales, unos símbolos comenzaron a formarse:

$$(x,y) \rightarrow (0.13 - 0.999\,y - x^2, x) \quad , \quad ✍■ \ |x_1| > 3 \quad , \quad ✍■ \ |x_n| < 3$$

Los agentes especiales reconocieron inmediatamente las instrucciones para realizar el dibujo de la mulata, la única diferencia con las anteriores es que ahora los puntos que escapan rápidamente, al igual que los que nunca lo hacen, están pintados de negro. Esto permite diferenciar mejor las velocidades intermedias de escape. Los agentes especiales se pusieron en guardia porque, como era de esperarse, un plano dinámico fue surgiendo lentamente en la pared. Poco a poco, frente a los atónitos ojos de la bruja de Catemaco y frente a la tensa calma del espectro sideral, el dibujo de la mulata de Córdoba se completó.



La historia relatada en este expediente continuará...

EXPEDIENTE 5, VOLUMEN II:

La mulata de Córdoba, segunda parte.

Fulgurantes luces aparecieron en el atormentado cielo de Catemaco, en los campos cercanos se escucharon gruñidos, desgarradores gritos llenaron la noche. Del plano dinámico, dibujado en la pared frente a los agentes especiales, surgió una hermosa y aterradora figura. Las demás brujas, del aquelarre de Catemaco, llegaron con sus reservas de jugo de agave fermentado para defender a su maestra y salvar su pueblo, juntas, decidieron hacerle frente a la llorona y a la mulata de Córdoba. El espectro sideral se apresuró a combatir a los alienígenas y chupacabras. Pero ni las brujas, ni el espectro, resistirían mucho tiempo si los agentes especiales no se apresuraban a descubrir la manera de derrotar a los tenebrosos entes sobrenaturales.

Los agentes especiales pidieron refuerzos a la Policía Federal Paranormal pero les informaron que Catemaco había sido declarado zona de desastre y, un batallón del ejército cercaba el pueblo. Nadie más podría acercase, nadie más podría ayudarlos. Todo estaba claro ahora, el ejército había encubierto, durante muchos años, las actividades sobrenaturales de los alienígenas. Era casi seguro que uno de los «grises», adoptando forma humana, estuviera comandando el batallón que los rodeaba. Los agentes especiales, y sus aliados, no solo debían enfrentarse a legiones de seres sobrenaturales, si no además, a un batallón completo del poderosísimo y temible ejército mexicano. Debían darse prisa, ya que del resultado de esta batalla dependían sus vidas y el destino de la humanidad.

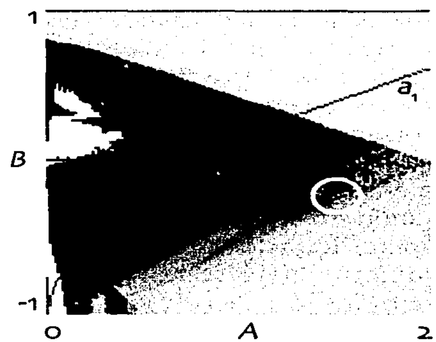
Los agentes especiales no iban a develar, en medio de una cruenta batalla, lo que matemáticos brillantes no habían podido resolver durante casi tres décadas. Pero no iban a darse por vencidos tan fácilmente, alguien, en algún momento, debío de vislumbrar algo que pudiera ayudarles en medio de la tierra incógnita matemática. Así que, se esforzaron por aclarar su mente y recordar cualquier cosa que pudiera serles útil en estos momentos de desesperación. Afortunadamente, la inspiración llega en los momentos menos esperados y, una agente especial recordó un indicio esperanzador.

El mismo Michel Hénon propuso hace casi tres décadas, estudiar su mapeo con ciertos valores de los parámetros ya que algo había llamado su atención, los valores son a=1.4, b=-0.3 Lo primero que debemos hacer, es verificar que esta propuesta de Hénon tenga que ver con lo que buscamos nosotros, es decir, que los valores de los parámetros efectivamente se encuentren dentro de la tierra incógnita, en la oscura zona del espacio de parámetros dónde se gesta el caos. Esperamos que estos valores estén después de aquellos que causan la bifurcación de doblamiento de periodo, a_1. Tomamos b=-0.3 y revisamos estos dos valores:

$$a_1 = 3(1 + b)^2/4 = 3(-1.3)^2/4 = 3(1.69)/4 \approx 1.27$$

$$\text{si} \quad a=1.4 \quad \text{entonces} \quad a_1 < a$$

Vamos a intentar ubicar a=1.4, b=-0.3 en el espacio de parámetros, de hecho, vamos a ubicarlos sobre el cuadro que pintó la computadora para darnos una idea del comportamiento que generan. En la figura de al lado, la zona alrededor de estos valores está demarcada por el círculo blanco. Y como podemos ver, el cuadro de la computadora no nos dice nada, esta región del espacio de parámetros se encuentra entre la zona negra, que burdamente describen un comportamiento atractivo y, una zona gris claro, que burdamente describen un comportamiento repulsivo. En todo caso, podemos decir que el cuadro de la computadora nos indica un comportamiento bastante difícil de describir.



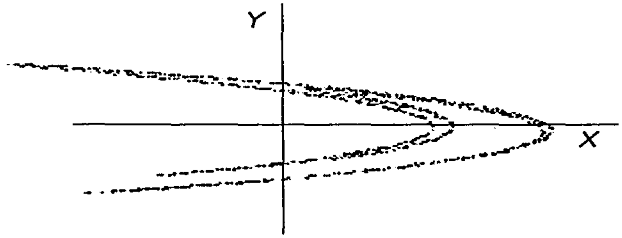
Un primer impulso válido, sería darle estos valores de los parámetros a la computadora para que nos diera exploraciones numéricas, órbitas, etcétera. Sin embargo, ya es obvio que la computadora no maneja bien el lenguaje de las matemáticas y no se le facilita trabajar con el mapeo de Hénon con los parámetros que nos interesan. Afortunadamente, nosotros ya sabemos encontrar dinámicas semejantes, así que podemos encontrar un mapeo con la misma dinámica pero que se acomode mejor a las limitaciones de la computadora, es decir, ya sabemos conjugar. Pues bien, el mapeo de Hénon con a=1.4, b=-0.3 es conjugado al mapeo:

$$x_1 = 1 + y - (1.4)\,x^2$$
$$y_1 = (0.3)\,x$$

La función que logra la conjugación es $f(x,y)=(x,-by)/a$. Y gracias a esta conjugación hemos obtenido un mapeo con el que la computadora puede trabajar fácilmente. Al final de cuentas, la idea de conjugar es encontrar objetos equivalentes y por eso se puede decir que este nuevo mapeo es dinámicamente equivalente al de Hénon con a=1.4, b=-0.3 .

De manera muy poética, podemos decir que con esta idea de equivalencia, en el mundo de las matemáticas sucede lo mismo que con el Axólotl de Julio Cortázar, no somos nosotros quienes miramos al ajolote en su acuario, es él quien, quieto, nos observa mientras nos movemos a su alrededor. Ya que con un poco de imaginación, se puede pensar que lo que hemos hecho es cambiar el lugar desde el cual observamos al mapeo de Hénon; los términos y signos que hemos cambiado no han alterado la naturaleza del mapeo y, al encontrar ecuaciones equivalentes, únicamente modificamos nuestra posición de observación. Y como sucede en el mundo «real», cambiar el lugar donde nos encontramos como observadores de algo, no altera la esencia ni el comportamiento de ese algo. La razón en matemáticas para cambiar nuestros lugares de observación es que, al igual que en el mundo «real», algunas veces los árboles nos impiden ver el bosque.

Regresemos a la investigación. Hemos alterado el modo en que vemos al mapeo de Hénon, pero como ya sabemos, su esencia peremanece inalterada, con la gran ventaja de que hemos obtenido ecuaciones suficientemente sencillas como para que la computadora pueda trabajar con ellas. Como queremos una idea de lo que sucede con nuestro espacio fase, vamos a pedirle a la computadora que calcule unas cuantas órbitas. Resulta que si tomamos puntos alejados del origen, después de algunas iteraciones se alejarán más, pero si tomamos puntos cercanos al origen se quedan vagando a su alrededor y como ya sabemos, esto nos indica que algo los atrae. Para darnos una ligera idea de cuántos y cómo son los atractores, vamos a pedirle a la computadora que nos dibuje un diagrama de órbita. Por ser ahora el espacio fase un plano y, por tener valores fijos para los parámetros, este diagrama de órbita será distinto al que obtuvimos con la familia cuadrática, de hecho será más sencillo. La computadora únicamente deberá tomar un punto, aplicarle varias veces el mapeo y, pintar los puntos que resulten en el espacio fase. Al igual que en el diagrama de órbita anterior, si borramos las primeras iteraciones, las restantes deben acercarse a algún atractor. Pues bien, si le damos a la computadora distintos puntos cercanos al origen, ésta nos da el mismo diagrama de órbita para todos ellos, en el cual se dibuja un único atractor, tal y como vemos abajo:



Para hacer este diagrama, la computadora ha tomado como condición inicial el origen, ha iterado el mapeo unas 5,000 veces y, ha borrado las primeras mil iteraciones. Lo primero que notamos es que el atractor no está formado por un punto, ni por unos cuántos puntos periódicos, es más, este voluntarioso atractor no forma un agradable círculo, ni una agraciada elipse, en cambio, forma una extraña figura que semeja parábolas cortadas. Al verlo ya formado, uno supondría que la órbita del punto va recorriendo su extraña silueta pero no es así, la órbita del punto va «saltando» de un lugar a otro en el plano, aparentemente sin orden ni dirección y sólo después de muchas iteraciones va surgiendo esta figura. Aún así, con su extraña forma y su paulatina manera de revelarse, este atractor parece bastante inofensivo; al verlo uno no puede explicarse cómo es que se ha ganado, entre los matemáticos, fama de esquivo rebelde sin causa.

Pues bien, este atractor es conocido como el atractor de Hénon y para poder comprender su insurrecta fama debemos comenzar desde el principio. Nosotros conocemos la definición de puntos atractores pero no conocemos qué es esto que tenemos enfrente, un conjunto atractor. Lo primero que debemos saber es que los conjuntos atractores, como cualquier otro ente peligroso que se respete, tienden trampas. El concepto de las trampas matemáticas es muy parecido al de las trampas «reales», son zonas o lugares que atrapan, al cerrarse sobre si mismas, cualquier cosa que caiga en ellas. La definición de trampa, en el plano, es como sigue:

Trampa.

Sea N una región cerrada del plano, N es una trampa para el mapeo F, si la imagen de N bajo el mapeo $F(N)$, está contenida en el interior de N.

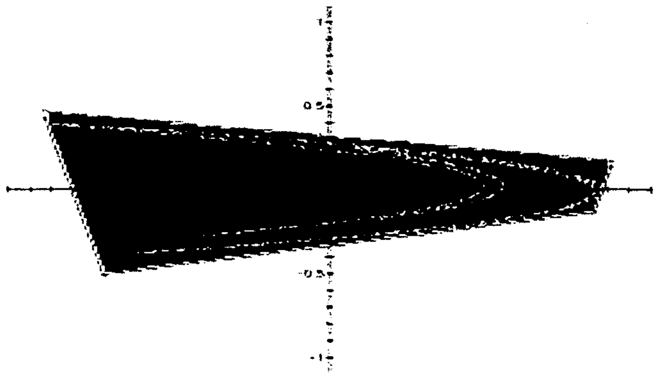
El concepto de región cerrada es casi igual al de conjunto cerrado, en español podemos decir que es un pedazo del plano cuyos bordes están bien definidos y se encuentran dentro de sí misma. Podemos imaginar lo que quiere decir que la imagen de la región esté contenida en su interior, esto es, que al aplicarle una vez el mapeo a la región, la nueva región que resulte debe caer dentro de la original sin tocar sus bordes. Por ejemplo, el cuadrado C no es una trampa ya que partes de las herraduras que produce caen fuera de él, pero el estadio dónde creábamos la herradura de Smale sí es una trampa, ya que su imagen cae por completo dentro de él. Pues bien, en español podemos decir que un conjunto es atractor si pone su trampa; en matemáticas decimos que:

Conjunto atractor.

Un conjunto K es atractor para un mapeo F, si existe una vecindad N del conjunto K para la cual la cerradura de N es una trampa y, si el conjunto K está formado por la intersección de las iteraciones hacia adelante de N, es decir:

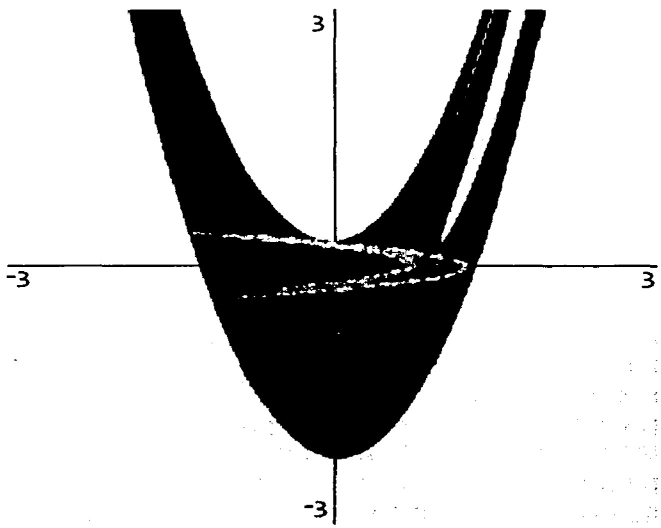
$$K=\bigcap_{n\geq 0} F^{n}(N)$$

Por ser la intersección de todas las iteraciones hacia adelante del mapeo sobre una vecindad, un atractor está presente en todas las iteraciones, es decir, un atractor es un conjunto de puntos que no cambia bajo iteraciones del mapeo; si recordamos, esto quiere decir que el atractor es un conjunto invariante. Como ya sabemos, a él convergerán todas las órbitas cercanas, lo cual lo vuelve «visible» o detectable para las computadoras, y gracias a eso podemos observar su gráfica, tal y como lo vemos aquí al lado, de color blanco, esperando dentro de su negra trampa. Los vértices de la trampa son:



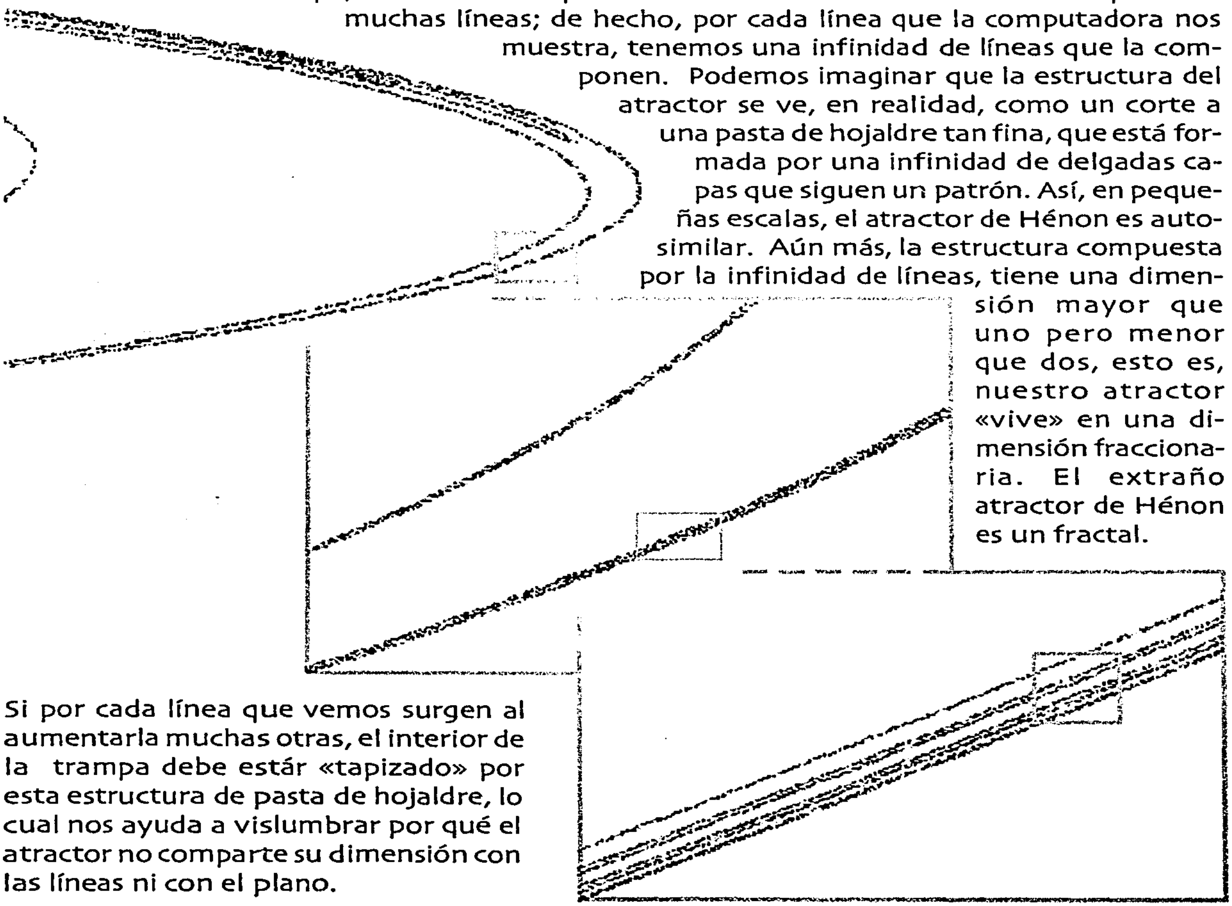
(-1.33,0.42), (1.32,0.13), (1.24,-0.14), (-1.06,-0.5).

Pero, si recordamos, los puntos atractores no tenían trampas, tenían cuencas atractoras, las cuales, en español, eran todos los puntos del espacio fase que caían bajo el influjo del atractor. Si nuestra teoría es consistente, los conjuntos atractores también deben tener cuencas que al igual que con los puntos, deben ser los mayores de todos los conjuntos abiertos alrededor del atractor cuyos puntos tiendan a él bajo iteraciones hacia adelante del mapeo. Vamos a pedirle a la computadora que pinte de negro todos los puntos que se dejen jalar por el atractor, el cual será pintado de blanco, tal y como vemos en el dibujo de al lado. Como podemos ver, la cuenca de atracción es infinita y «crece hacia arriba» por todo el plano. En español podemos decir que la cuenca difiere de la trampa porque la primera es un conjun-

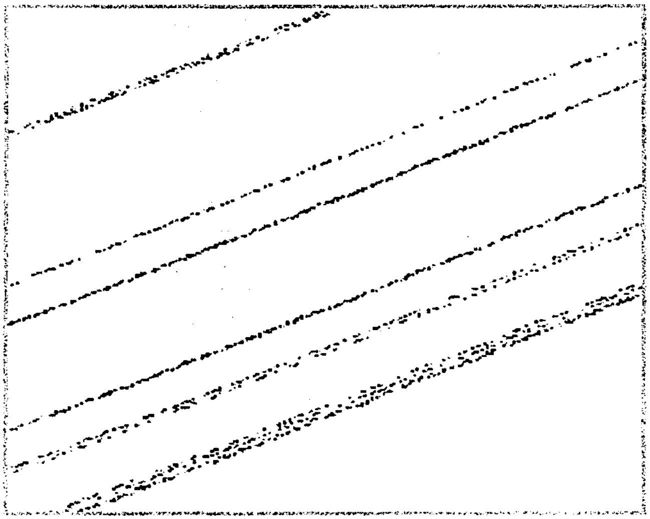


to abierto cuyos puntos son jalados por el atractor, mientras que la segunda es cerrada y la intersección de todas sus imágenes define al atractor.

Ya que sabemos qué es lo que tenemos frente a nosotros, podemos preguntarnos por qué es especial. Las razones por las que este ente es especial son varias, vayamos poco a poco. Así como sucede en el mundo «real», en el mundo matemático tampoco es bueno dejarse llevar por las apariencias, ya que aquí suceden más cosas de las que el ojo puede captar, o sea, aquí también debemos aprender a observar con nuestra mente ya que muchos entes matemáticos son más interesantes de lo que aparentan. En el diagrama de órbita de la familia cuadrática, la lupa de la computadora nos revelaba un intrincado paisaje digno de una absorta contemplación; ahora sucede lo mismo. Al usar la lupa sobre el atractor de Hénon se muestra un insospechado paisaje, lo que en un principio tomamos por unas pocas líneas, son, en realidad, grupos de una infinidad de líneas. Las «líneas» visibles del atractor, al posar bajo la lupa, revelan ser no una, si no muchas líneas muy cercanas que, de «lejos», parecen ser sólo una. La computadora, con sus limitaciones, solo puede trazar una silueta del atractor pero al usar la lupa, se nos revela que cada línea de esta silueta se descompone en muchas líneas; de hecho, por cada línea que la computadora nos muestra, tenemos una infinidad de líneas que la componen. Podemos imaginar que la estructura del atractor se ve, en realidad, como un corte a una pasta de hojaldre tan fina, que está formada por una infinidad de delgadas capas que siguen un patrón. Así, en pequeñas escalas, el atractor de Hénon es autosimilar. Aún más, la estructura compuesta por la infinidad de líneas, tiene una dimensión mayor que uno pero menor que dos, esto es, nuestro atractor «vive» en una dimensión fraccionaria. El extraño atractor de Hénon es un fractal.



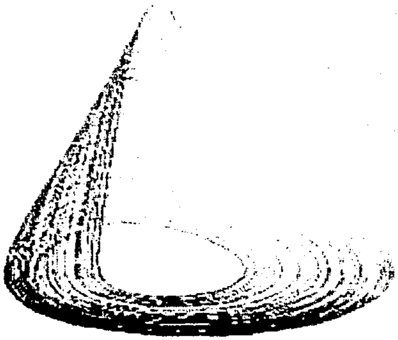
Si por cada línea que vemos surgen al aumentarla muchas otras, el interior de la trampa debe estár «tapizado» por esta estructura de pasta de hojaldre, lo cual nos ayuda a vislumbrar por qué el atractor no comparte su dimensión con las líneas ni con el plano.



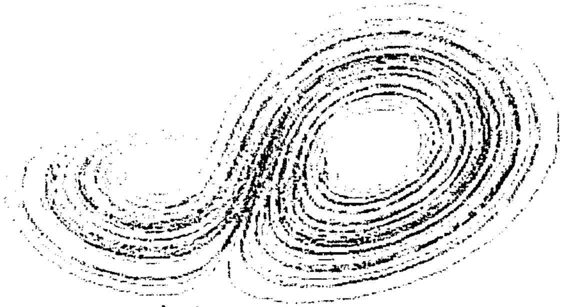
El ser un fractal es una de las excepcionales cualidades de nuestro atractor. Como podemos imaginar, la otra cualidad tiene que ver con su comportamiento dinámico, así que, ahora nos preguntaremos cómo se comporta. Lamentablemente, ningún matemático ha podido contestar esta pregunta. La computadora al calcular órbitas de puntos del atractor, nos muestra sensibilidad a condiciones iniciales pero como ya sabemos, la computadora no es confiable, así que hasta que no se demuestre, solamente podemos especular acerca de esta propiedad. Hasta el día de hoy no se sabe si el atractor es transitivo y, tampoco podemos asegurar que sus puntos periódicos sean densos, aunque sí existen indicios de que estas dos propiedades se presentan. En resumen, se supone que este atractor es caótico pero nadie lo ha demostrado. Como podemos ver, el comportamiento de este ente es indescriptible, por eso los matemáticos lo llaman atractor extraño, por que nadie a logrado comprenderlo; el día que la comunidad matemática logre describirlo satisfactoriamente dejará de ser extraño pero, mientras tanto, seguirá gozando de su sediciosa fama. Muchos brillantes invesitgadores se han dedicado a estudiar a los atractores extraños, sin embargo, estos complejos entes continúan desafiando nuestra capacidad de análisis. Aquí tambien la fortuna y la gloria están esperando a aquel capaz de domar a estos complicados entes matemáticos.

Alguna vez se creyó que a largo plazo los sistemas disipativos llevaban, siempre, a un equilibrio representable por un punto fijo atractor o, por un conjunto de puntos periódicos atractores que formaban un ciclo límite fácil de describir como un círculo o una elipse pero, como dice Peitgen en su libro *Chaos and Fractals: New frontiers of science*, «En contraste, los atractores extraños son esos patrones que caracterizan el estado final de sistemas disipativos altamente complejos y muestran todos los signos de caos. Desafían fuertemente el poder de la comprensión intuitiva y aún así, están probando estar alrededor de nosotros. Pareciera como si, súbitamente, todo un mundo nuevo de seres previamente invisibles estuviera volando a nuestro alrededor. Aún más, los atractores extraños son el lugar donde el caos y los fractales convergen de la manera más inevitable y natural: como patrones geométricos, los atractores extraños son fractales; como objetos dinámicos, los atractores extraños son caóticos. Ahora existe toda una nueva ciencia, teórica y experimental, lidiando con los atractores extraños, con su clasificación, las medidas de sus propiedades cuantitativas, su reconstrucción por medio de datos físicos, y más. Pero indudablemente, la comprensión matemática de los atractores extraños está apenas en su infancia y será uno de los grandes retos para las futuras generaciones de matemáticos.»

Lo que hemos descrito del atractor de Hénon puede aplicarse a algunos de los atractores extraños más famosos, su estructura de pasta de hojaldre con infinitas foliaciones, su comportamiento increíblemente difícil de describir, etcétera. Abajo tenemos cuatro famosos atractores extraños que han surgido al intentar solucionar problemas del mundo «real», aunque evidentemente son un poco más complicados que el atractor de Hénon, ya que «viven» en un espacio con dimensión fractal cercana a tres y el pasar del tiempo es continuo para ellos.



Atractor de Rössler



Atractor de Lorenz

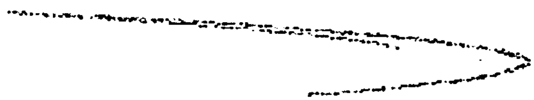
Atractor de Chua

Atractor de Duffing

Si el atractor de Hénon se veía sencillo cuando la computadora lo dibujó, cuántas otras maravillas esconderán estos atractores que a primera vista son complicados. Descifrar sus secretos es importante no sólo para los matemáticos, sino para los investigadores de diversas disciplinas naturales y sociales por lo siguiente: si recordamos, aunque el polvo de Cántor presentaba característcas muy interesantes, en la «práctica» jamás nos toparíamos con él por estar formado por una infinidad de repulsores; es decir, al modelar un problema «real» era improbable que nuestra condición inicial, sea cual fuere, nos llevara al conjunto de estados representados por un Cántor. Pero ahora nuestros conjuntos invariantes son atractores, esto significa que en la «práctica» podemos terminar imbuidos en el atractor extraño; es decir, al modelar un problema «real» existe la probabilidad de que nuestra condición inicial, sea cual sea, nos lleve al conjunto atractor y, como sabemos, una vez que el sistema llega a un estado o conjunto de estados atractores no los deja jamás, prediciendo así, un comportamiento a largo plazo caótico , o como en el caso del atractor de Hénon, un comportamiento muy difícil de describir que suponemos caótico. Las ventajas de que nuestro sistema tenga comportamiento caótico en lugar de azaroso son varias, tenemos predictibilidad a corto plazo, a largo plazo tenemos ventanas de predictibilidad y, por la mera existencia del atractor, a largo plazo nuestro sistema no estará en algún estado fuera del atractor, o sea, tenemos una burda predictibilidad a largo plazo, tenemos estados periódicos, etcétera.

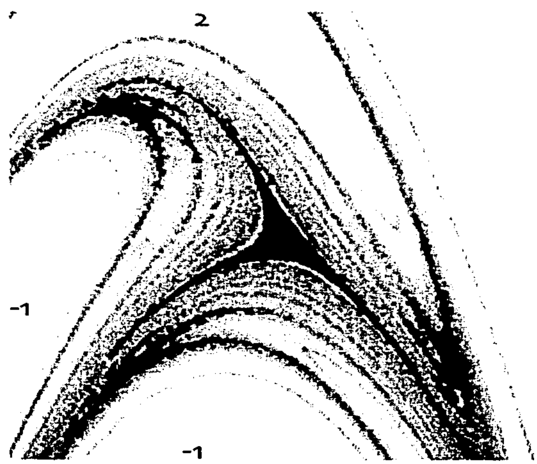
Aún más, en los atractores extraños que presentan estructuras con regiones más o menos definidas, algo así como protuberancias o ramificaciones, cada una de ellas representa un cierto patrón o colección de patrones dentro del sistema. Así, la misma estructura del atractor ayuda a predecir un comportamiento del sistema que al menos tendrá ciertos patrones. Por ejemplo, en 1991 Walter Freeman modeló el comportamiento de la corteza cerebral olfatoria de un reptil, la cual es muy parecida a la de los seres humanos; al hacer simulaciones en la computadora surgió un atractor extraño con forma de «burbuja con alas», cada ala representaba un olor conocido; cuando al modelo se le daba una condición inicial distinta a las del atractor, es decir, cuando el impulso de un nuevo olor llegaba a la corteza olfativa, su órbita vagaba azarosamente alrededor del atractor hasta que se restringían sus oscilaciones a un «ala» del atractor, representando así que el olor percibido finalmente caía bajo un patrón de reconocimiento.

Podríamos enumerar detalladamente una gran cantidad de campos de investigación en los cuáles se piensa que la existencia de atractores explicará procesos de difícil comprensión, pero como siempre sucede, lo urgente no deja tiempo para los detalles. Regresemos al mapeo de Hénon. Ya sabemos que nuestro mapeo presenta un atractor extraño con ciertos valores de sus parámetros pero ¿qué nos garantiza que con otros valores no existen otros atractores extraños? Pues bien, al jugar con los parámetros y la computadora, uno puede encontrar atractores formados por ciclos de puntos periódicos y, aún más, atractores formados por partes del atractor de Hénon que también son atractores extraños pero menos espectaculares que el original, y al variar ligeramente el valor de los parámetros obtenemos distintas partes del atractor extraño original. Esto es, el mapeo de Hénon no presenta un atractor extraño, si no una infinidad de ellos.



$x_1 = 1 + y - (1.3)\, x^2$
$y_1 = (0.2)\, x$

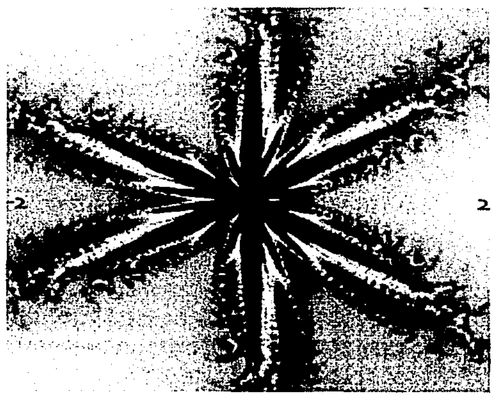
Pero lo anterior no es todo, los atractores del mapeo de Hénon todavía nos reservan otra sorpresa. Recordemos el diagrama de órbita de la familia cuadrática, al variar el parámetro μ podíamos tener un ciclo atractor formado por dos puntos periódicos atractores, o por cien puntos periódicos, o por un billón de puntos periódicos, pero siempre teníamos un único ciclo atractor; nunca tuvimos dos ciclos atractores conviviendo en el mismo espacio fase con un mismo valor del parámetro. Esto ha cambiado. En el plano dinámico de al lado, que se forma cuando a=1.1, b=0.96, los puntos de la figura triangular negra en el centro, caen bajo el influjo de un atractor dentro de la misma figura; los puntos de las tres figuras negras, que están alrededor de la figura triangular, son atraídos por tres puntos periódicos, de primer periodo tres, que se encuentran respectivamente dentro de cada una de ellas. En un mismo espacio fase, con los mismos valores de los pa-



rámetros, tenemos dos ciclos atractores distintos. En el plano dinámico anterior sólo se usaron tonos de gris muy claros para resaltar las zonas negras, pero al usar diferentes tonos de grises, se ven claramente estrías negras que corren a lo largo de la zona gris; en español podemos decir que, la zona gris es desgarrada cuando los dos conjuntos atractores se disputan el control de sus puntos. Estamos presenciando una verdadera batalla por el dominio del espacio fase entre dos conjuntos atractores. Ante esto surgen varias preguntas. ¿Cuántos conjuntos atractores pueden existir en un mismo espacio fase? ¿Pueden coexistir atractores extraños con ciclos atractores periódicos? ¿Que comportamiento dinámico se genera cuando los atractores luchan entre sí?

Si los agentes especiales hubieran tenido tiempo para contestar sus preguntas, tal vez hubieran encontrado una opción menos arriesgada. Pero tiempo era lo que menos tenían, la mayoría de las brujas de Catemaco ya había sucumbido frente a los poderes conjuntos de la llorona y la mulata de Córdoba, la energía del espectro sideral casi se había agotado luchando contra los alienígenas y chupacabras y, el cerco del batallón del ejército se achicaba cada vez más. Por eso decidieron realizar una última y deseperada acción. Los agentes especiales les gritaron a las brujas y al espectro sideral que no tenían otra opción más que rendirse. Los seres sobrenaturales los reunieron y rodearon, la mulata de Córdoba se acercó, se detuvo frente al espectro sideral, lo miró fríamente y le dijo: «Nos encontramos otra vez espectro sideral. El círculo se ha completado. Pero ahora yo soy la maestra y tú el aprendiz ...».

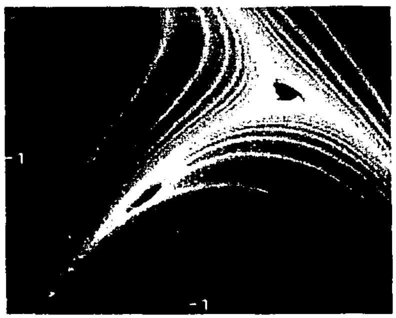
Mientras la mulata de Córdoba hablaba, los agentes especiales les mostraron a las brujas sobrevivientes, la infinidad de atractores extraños que se podían generar usando el mapeo de Hénon y, les explicaron lo que debían hacer. Velozmente, las brujas de Catemaco bebieron lo poco que les quedaba de su jugo fermentado de agave y, realizaron sus indescriptibles e inenarrables hechizos sobre los atractores extraños para liberar su inexplicable poder paranormal. Cuando los seres sobrenaturales se dieron cuenta de lo que sucedía fue demasiado tarde. Los agentes especiales le dijeron al espectro sideral que usara sus ilógicas e incomprensibles técnicas para dirigir el poder sobrenatural, que las brujas extraían de los atractores extraños, contra la mulata de Córdoba y sus huestes. Si, como suponían los agentes especiales, la mulata había conjurado al atractor extraño de Hénon y era este ente el que guardaba sus secretos y la dotaba de poderes insólitos, al ponerle enfrente una infinidad de atractores extraños, la mulata y sus seguidores quedarían atrapados en una zona en disputa por atractores. No tuvieron que esperar mucho tiempo para comprobar sus sospechas, las naves de los alienígenas fueron arrastradas de un lado a otro sin orden ni dirección, los chupacabras eran jaloneados hacia el cielo, el plano astral de la llorona se desgarraba, las sofisticadas armas del batallón del ejercito mexicano se deshacían y, la malévola energía de la mulata se disipaba rápidamente. Pero justo antes de que la mulata de Córdoba perdiera toda su energía, apareció un extraño diseño en el cielo. La mulata sonrió siniestramente y dijo: «Regresaré». Luego se adentró en su nuevo dibujo y desapareció.



Junto al dibujo pudieron leerse por unos instantes las instrucciones para realizarlo pero, eran distintas a todas las que la mulata había usado anteriormente:

$$(x,y) \longleftarrow (0 - 1\, y + x^2, x)\ ,\ \ x,y \in \mathbb{C}\ ,\ \ \oplus\ 0.3\ ,\ \ ✍\ x>3$$

Al menos la primera parte, lo que se encontraba entre paréntesis, se parecía mucho al mapeo de Hénon; de hecho, al observarlo atentamente fue claro que era un caso particular de este mapeo pero, como la flecha que une los paréntesis apunta hacia el punto original, (x,y), las instrucciones se referían a la inversa del mapeo de Hénon. Los siguientes símbolos indicaban que x,y pertenecían a algún conjunto que los agentes especiales no lograban identificar. Luego seguía un símbolo no matemático que podría significar aumentar y, finalmente, el símbolo no matemático que ya sabían que significaba pintar. Lo único evidente, era que el valor del parámetro b valía uno o menos uno, justamente el único valor que los agentes especiales no habían investigado. Por más que los agentes especiales intentaron reproducir el dibujo que había hecho la mulata, no lo lograron. Mientras tanto todo parecía estar bien, los seres sobrenaturales habían sido atrapados y se debatían en su extraña y atractiva prisión; las pocas brujas de Catemaco que quedaron vivas se dedicaban a limpiar su pueblo ya que, a causa de la batalla, había quedado completamente cubierto de restos de yerba calcinada con forma de cigarro. Sin embargo, el espectro sideral se acercó a los agentes especiales y les dijo que las brujas de Catemaco no podrían controlar por mucho tiempo la prisión atractiva, que él no sabía qué poderes paranormales habían desencadenado y que era seguro que, una vez recuperada su malévola energía, la mulata de Córdoba regresaría para liberar a sus huestes y vengar esta derrota. Les dijo que debían prepararse para enfrentar estos nuevos poderes que la mulata había usado y él conocía únicamente a un ser capaz de controlar estos poderes, el que lo había entrenado, su maestro.



Los agentes especiales estuvieron de acuerdo con el espectro sideral, quien escogió a uno de ellos para que entrenara con su maestro. El agente especial seleccionado subió a la nave del espectro pero antes, les prometió a los demás que regresaría antes que la mulata de Córdoba. Los demás agentes especiales generaron, a petición del espectro sideral, un plano dinámico del mapeo de Hénon, con a=1.12, b=1.05, con los puntos que escapan rápidamente pintados de negro, al igual que los que se quedan y, con los tonos de gris invertidos. La nave del espectro se metió en el plano dinámico y viajó rumbo a las estrellas, ya que el maestro del espectro sideral vivía, desde hace mucho tiempo, en una galaxia muy lejana.

Cuando el agente especial conoció al maestro del espectro sideral, le explicó que necesitaban su ayuda porque, aunque habían intentado detener a la mulata de Córdoba, no lo habían logrado y ahora no sabían cómo vencerla. El maestro miró al agente especial y le dirigió las siguientes palabras: «No intentes. Hazlo o no lo hagas. No hay intentos. Para entrenar debes desaprender lo aprendido y recordar que la energía nos rodea, nos une.»

El agente especial meditó las palabras de su nuevo maestro, las cuales eran aún más ambiguas e indescifrables que las del coyote de la Zona del Silencio. Por eso debía dejar a un lado lo que acostumbraba pensar y abrir su mente a nuevas posibilidades. Lo único que el agente especial asociaba con la energía era el plano pero esta asociación no es inmediata, ni obvia, ni usual. Sin embargo, era lo único que tenía para empezar a trabajar. Así que debía pensar en un plano que rodea, en un plano que unifica.

Hasta este momento, habíamos considerado al plano como el resultado de «asociar» el conjuntos de números reales consigo mismo. En matemáticas se le llama producto cartesiano a esta operación de asociar elementos de conjuntos para formar parejas. Por ejemplo, tomamos el número 1, el número 3, y sacamos su producto cartesiano $1\times3=(1,3)$. Cualquier punto del plano puede considerarse como el resultado del producto cartesiano de dos números reales. Así, el producto cartesiano de los reales por los reales es el plano, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$. Luego podemos considerar a estos puntos, por sí mismos, como entes manipulables del conjunto $\mathbb{R}^2$ y sumarlos, por ejemplo, $(1,2)+(3,4)=(4,6)$, y multiplicarlos por un real, $3(1,2)=(3,6)$; lo cual nos permite trabajar bastante bien con ellos. Pero sería mejor poder usar todas las operaciónes básicas de la artimética y, no tenemos definido cómo multiplicar dos puntos del plano entre sí, $(1,2)(3,4)=?$. Después de árduas investigaciones, los matemáticos dieron con una multiplicación muy conveniente de los puntos del plano, tomemos un punto cualquiera (x,y), luego tomemos otro (u,v) y multipliquémoslos según la siguiente regla:

$$(x,y)(u,v)=(\,xu-yv\;,\;xv+yu\,)$$

Como muchas otras herramientas matemáticas, esta multiplicación se ve extraña pero nos ofrece varias ventajas. La primera y más obvia, es que ahora el plano tiene una estructura aritmética más «robusta», ya que nuestra multiplicación es conmutativa, asociativa y distributiva, con un elemento neutro que además es la unidad $(1,0)$. Ahora podemos sumar, restar, multiplicar y, sorprendentemente, dividir. En español diríamos que la otra ventaja es más sutil pero más poderosa: tomemos el punto $(0,1)$ y elevémoslo al cuadrado:

$$(0,1)^2=(0,1)(0,1)=(\,0-1\;,\;0+0\,)=(-1,0)=-(1,0)$$

Para saber qué diablos tiene esto de especial, vamos a recordar algo que generalmente mal aprendemos, ya que comúnmente decimos de manera errónea que $\sqrt{-1}$ no existe. Lo que sí es correcto decir es que no existe un número real que se pueda expresar como $\sqrt{-1}$, pero nada impide que exista algún otro tipo de número que tenga ganas de ir en contra del orden establecido y, cuya existencia pueda expresarse como el ser la raíz cuadrada de menos uno. Así pensaron los matemáticos y decidieron que este nuevo número revolucionario debía llamarse número imaginario y usaron una i para referirse a él. Gracias a lo anterior, en el mundo de las matemáticas finalmente se pudo escribir la relación $i^2=-1$. Teniendo a i, fue sencillo escribir las raíces de cualquier número negativo, únicamente hubo que multiplicarlo por cualquier número real, es decir, si tomamos v como cualquier número real, podemos escribir iv, lo cual nos da las raíces de cualquier número negativo. Por ejemplo, la raíz de -4 es $i\,2$, aún más, es fácil darse cuenta que -4 tiene otra raíz, $i(-2)$. Así, los números negativos tuvieron dos raíces y, el mundo matemático contó con un nuevo tipo de números: los número imaginarios. Los matemáticos pasaron largas jornadas de trabajo haciendo que las reglas bajo las cuales viván los números reales gobernaran también a los imaginarios. Cuando lo lograron, unieron a los reales con los imaginarios en pacífica convivencia y pudieron dar solución a una inifinidad de problemas que antes se consideraban irresolubles. Usemos un ejemplo de esto que tenga que ver con nuestras investigaciones; si recordamos, el eigenvalor positivo de los puntos fijos del mapeo de Hénon estaba dado por:

$$\lambda_+ = -x + \sqrt{x^2 - b}$$

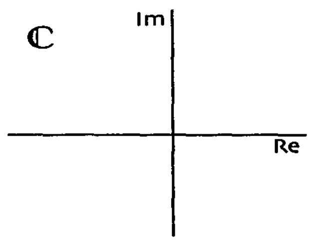
Supongamos que x=2, b=13. Entonces:

$$\lambda_+ = -x + \sqrt{x^2 - b} = -2 + \sqrt{4 - 13} = -2 + \sqrt{-9}$$

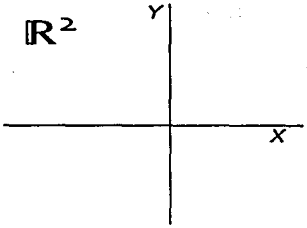
Y ahora, esta expresión tiene dos soluciones: $\lambda_+ = -2 + i3$, $\lambda_+ = -2 + i(-3)$.

A estas alturas, ya deberíamos estar acostumbrados a ver expresiones extrañas que resultan ser muy útiles. Porque los matemáticos al investigar este tipo de expresiones, $x + iy$, descubrieron que podían trabajar perfectamente con ellas, de hecho, podían manipularlas tan bien como a cualquier número. En matemáticas existe una profunda y complicada regla con la cual guiarse: Si se ve como un pato y se comporta como un pato, lo más probable es que sea un pato. Pues bien, después de revisar las reglas bajo las cuáles existen los números, resultó que este tipo de expresiones, $x + iy$, también son números. Los matemáticos vieron que esto era bueno y decidieron ponerles un nombre, les llamaron números complejos.

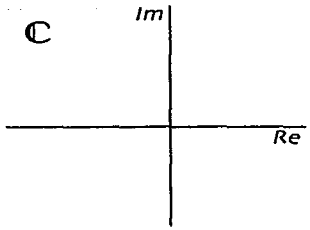
El mundo matemático se enriqueció enormemente con la creación, o descubrimiento, de los números complejos. Rápidamente los físicos los utilizaron para explicar y representar fenómenos naturales que antes escapaban a sus estudios. Y poco a poco, las demás ramas del saber humano fueron incorporando los números complejos a su repertorio de herramientas. Pero existía un problema, era demasiado difícil trabajar con este tipo de números que tenían expresiones complicadas y no podían representarse de una manera simple; mientras los matemáticos no pudieran darles una cara mas amable, el mundo entero miraría a estos números recién nacidos con recelo y desconfianza, causándoles un severo complejo de inferioridad. Después de quebrarse un rato la cabeza, los matemáticos descubrieron otra forma de representar a los complejos. Tomemos un complejo cualquiera, $x + iy$, tenemos que x es un número real y podemos usar a la rectar real para representarla, luego, iy es un número imaginario, el cual podemos pensar como la multiplicación de un real por i, así que también podemos usar una recta para representar esta parte. Ambas rectas se verán iguales pero mentalmente sabremos que la recta imaginaria es la recta real multiplicada por i. La diferencia entre estas dos rectas no se ve, se piensa. Así, podemos representar a los números complejos como la «unión» o suma de las dos rectas, la real, *Re*, y la imaginaria, *Im*. Bueno, ¿en qué forma más natural y sencilla podemos representar la «suma» o «unión» de dos rectas que con un plano? Entonces, los números complejos pueden representarse como puntos del plano. Si usamos una $\mathbb{C}$ para representar al conjunto de números complejos, tenemos el plano que vemos aquí al lado.



$\mathbb{R}^2$



$\mathbb{C}$



Ambos planos son iguales para nuestros ojos pero para nuestra mente son distintos; es decir, conceptualmente tenemos dos planos diferentes. El primero representa el producto cartesiano de los reales por los reales. El segundo representa a un único conjunto de números, los números complejos, los cuales están formados por la suma del conjunto de números reales más el conjunto de números imaginarios.

¿Cómo es posible que el plano pueda ser dos cosas distintas? Es que el plano no es dos cosas distintas, el plano simplemente representa dos cosas distintas. En el mundo matemático existe un único ente llamado El Plano, el cual existe por sí mismo sin importar qué pueda representar o para qué pueda servir. La existencia de este ente matemático es útil para nosotros porque podemos usarlo, algunas veces para representar el producto cartesiano de los reales por los reales, otras veces, para representar al conjunto de números complejos y, otras tantas veces más, para representar muchos otros conceptos distintos. Éste es un buen ejemplo de por qué es importante aprender a investigar con la mente, no con los ojos.

Entonces un punto (x,y) del plano complejo representa al número $x+iy$. Por ejemplo, los valores que obtuvimos para el eigenvalor λ_+, $-2+i\,3$, $-2+i\,(-3)$, se pueden representar con los puntos $(-2,3)$ y $(-2,-3)$. Pues bien, como nuestras diversas formas de expresar un mismo concepto no deben ser contradictorias, deberíamos tener una herramienta matemática que manipule los puntos del plano según la característica más evidente de los complejos, su parte imaginaria; con esta herramienta podríamos hacer evidente la diferencia conceptual que hay entre $\mathbb{R}^2$ y el plano complejo. Es aquí, donde nuestra multiplicación de los puntos del plano hace su glorosia aparición en el conocimiento humano, porque pensando en complejos tenenemos que:

$$(0,1) = 0+i\,1 = i = \sqrt{-1}$$

Y nuestra multiplicación de puntos del plano nos da:

$$(0,1)^2 = -(1,0) = -1-i\,0 = -1$$

Esto es, los puntos del plano se multiplican de esta extraña manera para que puedan representar la relación $i^2=-1$. Y así, gracias a esta forma de multiplicar los puntos del plano, los números complejos obtuvieron una cara menos oscura y misteriosa; el mundo entero los observó con familiaridad debido a su nueva cara de puntos del plano y de esta manera, pudieron continuar con sus numéricas vidas libres de complejos. Aún más, el inconforme y revolucionario número imaginario, finalmente pudo ser representado como (0,1), con lo cual pudo adaptarse plenamente a su numérica sociedad.

Entonces, cuando no definimos ninguna multiplicación de los puntos del plano, tenemos al viejo plano $\mathbb{R}^2$. Cuando definimos la multiplicación de los puntos del plano, tal y como la hemos visto, tenemos al nuevo plano complejo $\mathbb{C}$. Y como ya sabemos, estos son dos nombres distintos que indican diferentes máscaras para un único ente matemático que responde al nombre de plano. Ninguna concepción del plano es mejor que la otra, para investigar algunos fenómenos será más util $\mathbb{C}$, para investigar otros será más útil $\mathbb{R}^2$; es decir, según sean nuestras necesidades le pondremos una u otra máscara al plano, claro que deberemos tener cuidado de no confundir ambas máscaras. Cuando tengamos cualquier número x será importante especificar si pertence al conjunto de números reales, $x \in \mathbb{R}^2$, o si pertenece al de los complejos, $x \in \mathbb{C}$. Se acostumbra usar una zeta minúscula, z, para representar a un número complejo, así que generalmente, cuando queramos representar a un solo número, la x representará un real, la z un complejo; pero siempre hay que revisar qué tipo de números estamos viendo, porque si necesitamos representar varios números, las letras z, y, x, w, u, pueden usarse para representar reales o complejos.

Luego de pensar en lo anterior, el agente especial recordó las instrucciones del nuevo dibujo de la mulata:

$$(x,y) \longleftarrow (0 - 1\,y + x^2, x)\ ,\ \ x,y \in \mathbb{C}\ ,\ \ \oplus\ 0.3\ ,\ \ ✍\ x>3$$

Y ahora supo que eran instrucciones para trabajar con número complejos. Sin embargo, el agente especial no tenía ni idea de cómo aplicar el mapeo, ni cómo considerar a los parámetros, ni cómo usar los eigenvalores que obtendría, ni cómo realizar diagramas de órbita, etcétera, etc.

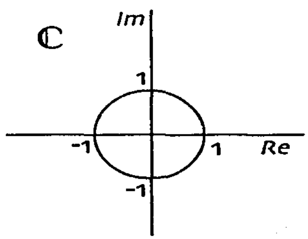
Leamos con más cuidado estás nuevas instrucciones, las cuales nos dicen que debemos aplicar la inversa de un caso particular del mapeo de Hénon sobre un espacio fase formado por dos conjuntos de números complejos. Al igual que cuando usábamos números reales, el valor de x «correrá» por uno de estos de estos conjuntos de números complejos, el valor de y «correrá» por el otro conjunto. Esto presenta a nuestra mente nuevos desafíos dignos de un buen esfuerzo. Vamos a platicar uno de ellos en puro español, recordando que ahora consideraremos números complejos. Si el espacio donde x vive es el plano complejo de 2 dimensiones, si el espacio donde y vive es otro plano complejo de 2 dimensiones, entonces el espacio fase, donde viven las combinaciones de ambos, (x,y), tendrá 4 dimensiones. Ante eso hay que respirar profundo y buscar un ejemplo: si la representación de x, en el plano complejo, es $x=(1,2)$, si la de y es $y=(3,4)$, entonces el producto cartesiano de ambos será $(x,y)=(1,2,3,4)$. Este punto, $(1,2,3,4)$, vive en un espacio fase de 4 dimensiones. Sigamos adelante, para trazar la gráfica del mapeo hay que considerar lo siguiente, necesitamos acomodar en un solo «lugar» dos espacios fase, uno tal cual sea y el otro alterado por una aplicación del mapeo; como los dos espacios fase tienen 4 dimensiones cada uno, el «lugar» donde los acomodaremos tendrá 8 dimensiones, ahí «vivirá» nuestra gráfica. Es claro que no podremos ver la gráfica y, sólo algunos genios podrán imaginársela, tal vez ninguno. Peor aún, ni siquiera podremos ver el espacio fase, ni podremos representarlo visualmente, así no tendremos diagramas de bifurcación, ni de órbita, etcétera. Lo único que podemos ver, es el plano complejo de x por separado del plano complejo de y. Con estas limitaciones, se busca comprender el comportamiento completo del sistema dinámico. Por supuesto que, como ya sabemos, en matemáticas existen muchos caminos para llegar a los mismos lugares. Así que, a veces, se deben abandonar los caminos que podemos explorar con lo ojos y seguir aquellos donde nuestra mente es lo único capaz de guiarnos.

Regresemos con el nuevo dibujo de la mulata. Ahora sabemos que no es un plano dinámico del espacio fase como lo eran todos los anteriores. Como sabemos que lo único representable son los planos complejos, y como las instrucciones dicen ✍ $x>3$, podemos suponer que el dibujo tiene que ver con el plano complejo de x. Es más, si todo funciona como antes, podemos suponer que estamos viendo, aunque suene extraño, el plano dinámico del plano complejo de x, en donde los valores de x que no escapan están pintados en negro, y los que sí escapan de diferentes tonos de grises y blanco, indicando así sus diferentes velocidades de escape. Pero hasta que no tengamos una idea clara de todas las cosas nuevas que tenemos por descubrir, no podremos estar seguros de nada.

Después de meditar largamente acerca de todos los conceptos nuevos que habían surgido frente a él, el agente especial llegó a la conclusión de que no tenía la menor idea de por dónde empezar, cómo estudiar el nuevo mapeo, qué herramientas usar, ni de cómo encarar estos nuevos desafíos. Entonces decidió acercarse nuevamente al maestro del espectro sideral, para preguntarle si sus pensamientos lo conducían por el camino correcto. El maestro del especto sideral le contestó que sus pensamientos iban por buen camino y que, gracias a su larga meditación, ya estaba listo para comenzar su entrenamiento. El agente espacial le pidió que le aclarara los misterios de los atractores extraños que los demás agentes no habían podido resolver, que le dijera cómo repetir el nuevo dibujo de la mulata de Córdoba y, que le explicara los secretos que se escondían detrás de este dibujo. El maestro del espectro sideral miró con serenidad al agente especial y le dijo: «Paciencia. Aclara tu mente de dudas. Si escoges el camino rápido y fácil para resolverlas, te convertirás en un agente del mal. Recuerda que el lado oscuro es más rápido, más fácil, más seductor.»

El agente especial escuchó con desgano estas palabras y, decidió meditar acerca de ellas. Debía comprender por qué no podía descubrir todo lo que necesitaba de una buena vez. Y poco a poco, fue imaginando todo aquello que debía aprender.

Para aprender a utilizar nuevas herramientas matemáticas, al igual que con las del mundo «real», hay que avanzar poco a poco, porque si no tenemos cuidado podemos equivocar el camino. Antes de considerar números complejos en el espacio fase, o en los parámetros, deberíamos revisar qué otros números menos «relevantes» pueden considerarse como complejos. De hecho ya hemos visto unos, los eigenvalores. Si permitimos que los eigenvalores sean complejos obtendremos algo que nos ha hecho falta desde el inico de la investigación, la definición de hiperbolicidad. Pero hasta para esta definición necesitamos conocer más a los complejos. Si trazamos un círculo de radio 1 en el plano complejo, obtenemos todos los complejos que son raíces de uno. Es decir, ya sabemos que sobre los ejes están las raíces cuadradas de uno y menos uno, pues en el resto del círculo están sus raíces cúbicas, cuartas, quintas, etcétera. A este círculo se le conoce como el círculo unitaro y es importante porque la definición de hiperbolicidad es:



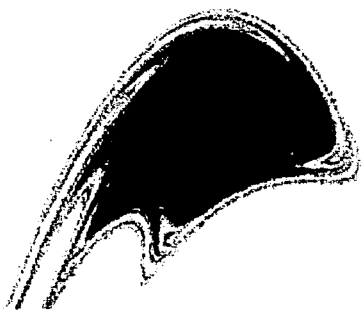
Hiperbolicidad.

Un punto fijo p es hiperbólico para un mapeo F, $F:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, si $JF(p)$ no tiene eigenvalores en el círculo unitario, en donde $JF(p)$ es la matriz jacobiana evaluada en p.

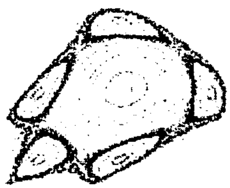
Si p es periódico de periodo m, entonces p es hiperbólico si $JF^m(p)$ no tiene eigenvalores en el círculo unitario.

Por eso es que no teníamos la definición de hiperbolicidad, porque no habíamos dejado que los eigenvalores tomaran valores complejos. Así, si la matriz jacobiana del mapeo evaluada en un punto tiene eigenvalores que son raíces de la unidad, diremos que el punto es no hiperbólico. Sin embargo, para entender todo lo que implica esta definición, debemos familiarizarnos aún más con los números complejos. Por que, como podemos imaginar, trabajar con complejos es distinto a trabajar con reales; por ejemplo, los complejos tienen algo así como contrapartes que se llaman conjugados, y al manipular complejos con sus conjugados se obtienen propiedades muy especiales. Veamos a otro ejemplo más relacionado con nuestra investigación. Si aplicamos el mapeo de Hénon sobre el mismo espacio fase que teníamos antes, $\mathbb{R}^2$, con el parámetro b=1, resulta ser que obtendremos puntos periódicos no hiperbólicos, los cuales tomarán el nombre de puntos elípticos y tendrán ciertas propiedades bastante complicadas. Entonces tendremos que el mapeo de Hénon produce atractores, repulsores, puntos silla y puntos elípticos. Pues bien, el comportamiento de los mapeos cerca de los puntos elípticos es generalmente complicado y, hasta el día de hoy, no ha podido ser entendido completamente. Un avance en este sentido es el teorema de giro, o de rotación, de Moser, el cual asegura que bajo ciertas condiciones existe una infinidad de de ciclos invariantes alrededor de un punto fijo elíptico; en los ciclos el mapeo produce rotaciones irracionales, es decir que el ángulo de rotación no pueden medirse con fracciones, y entre los ciclos el mapeo puede ser caótico. Veamos un ejemplo de esto:

Primero le pedimos a la computadora que nos haga un plano dinámico del mapeo de Hénon con parámetros a=-0.4, b=1

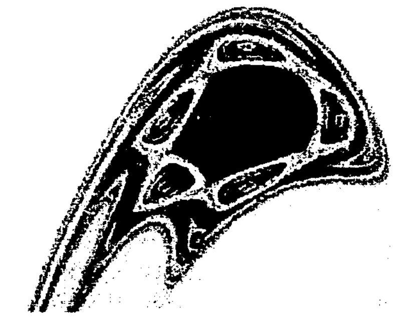


Luego le pedimos que nos haga un diagrama de órbita siguiendo varios puntos que se encuentran en el área marcada con negro del plano dinámico.

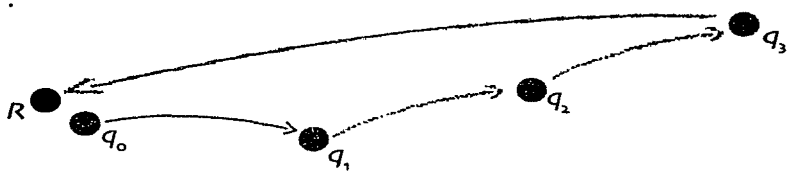


En el diagrama de órbita vemos algunos de los infinitos ciclos de los que hablábamos, de hecho podemos suponer que en el centro tenemos un punto fijo elíptico y, en las cinco «islas» a su alrededor tenemos cinco puntos periódicos elípticos. Alrededor de todos estos puntos elípticos se forman infinidades de ciclos y, entre ellos, existen puntos cuyo comportamiento es cáotico. Además vemos, como manchas grises algunas órbitas que parecen dadas al azar entre la «isla» central y las cinco «islas» a su alrededor. Si sobreponemos el diagrama de órbita con tonos claros de gris, sobre el plano dinámico obtenemos la figura de al lado, quién diría que tantas rarezas se producirían con este inocente mapeo:

$$x_1 = -0.4 - y - x^2$$
$$y_1 = x$$



Los puntos elípticos no son la única sorpresa que nos tiene el caso b=1. Si lo revisáramos con cuidado, veríamos que aparecen puntos que no son fijos pero sus imágenes caen casi exactamente arriba de ellos, en español podemos decir que sus imágenes se apilan toscamente sobre ellos, estos puntos se llaman puntos recurrentes. También aparecerán puntos recurrentes en cadena, que son parecidos a los puntos periódicos sólo que sus imágenes no caen exactamente encima de ellos; en puro español podemos decir que los puntos recurrentes son puntos fijos un poco ebrios, y los recurrentes en cadena son periódicos también un tanto ebrios. Además surgirán unos puntos un poco tercos, los puntos homoclínicos. Para describir brevemente el comportamiento de los puntos homoclínicos podemos decir que, son puntos despechados por los repulsores pero que después de un tiempo harán todo lo posible por regresar a vengarse del repulsor:

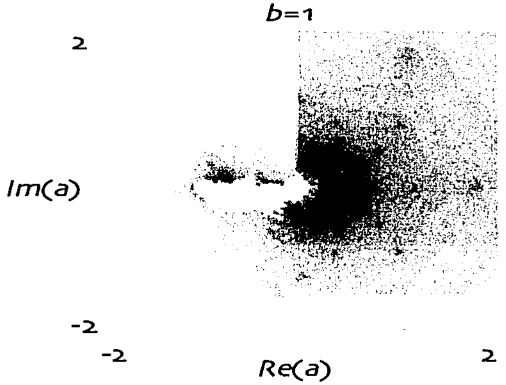


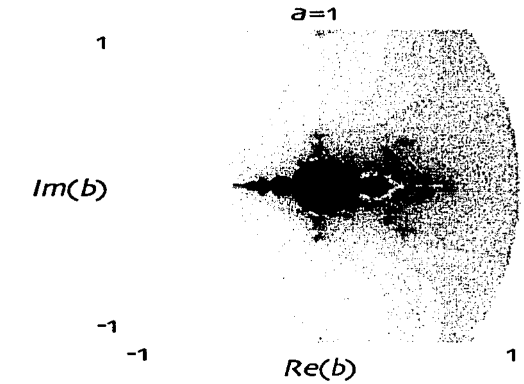
El punto negro R, es un repulsor que se esfuerza por expulsar al punto gris q, el cuál pertenece a la variedad inestable local de R. Pero después de unas cuantas iteraciones, q sale de la variedad inestable de R y regresa directamente sobre R. Cuando un punto presenta este vengativo comportamiento, se dice que es un punto homoclínico. Y de un repulsor como R, se dice que es un repulsor de rebote o de regreso rápido. Estos puntos homoclínicos nacen cuando se presentan bifurcaciones más complicadas que las nodo-silla y las de doblamiento de periodo, de hecho nacen cuando se presenta una bifuración que genera puntos de acumulación para las bifurcaciones anteriores, estas nuevas bifurciones reciben el nombre de bifurcaciones homoclínicas. Así, el mapeo de Hénon con b=1 presentará, además de las bifurcaciones nodo-silla y de doblamiento de periodo, bifurcaciones homoclínicas. De hecho, al igual que en el caso $0<|b|<1$, el mapeo de Hénon con b=1 desarrollará sus primeros puntos fijos con una bifuracación nodo-silla y, en cuanto aparezca el primer punto fijo hiperbólico, éste generará un punto homoclínico.

Como el mapeo de Hénon no está totalmente comprendido, nadie puede enumerar las sorpresas que nos presentarán si investigamos el caso b=1. Pero con las pocas cosas que hemos platicado en puro español, acerca de este caso que preserva áreas, podemos imaginar que el comportamiento que genera es sumamente distinto al caso contractivo que ya revisamos. Y lo único que hemos cambiado es el valor del parámetro b, porque seguimos aplicando el mapeo sobre nuestro antiguo espacio fase, $\mathbb{R}^2$; en el único momento en que hemos usado números complejos ha sido con los eigenvalores.

Si quisiéramos ser un poco más osados y permitiéramos que alguno de los parámetros tomara valores complejos, obtendríamos un mundo nuevo para investigar. Por ejemplo, vamos a dejar que el parámetro a tome valores complejos, mientras que b continúa siendo real. Luego vamos a pedirle a la computadora que nos pinte otro cuadro sobre el espacio de los parámetros pero, esta vez, sólo podrá pintar el cuadro sobre el plano complejo donde representemos los valores de a. La lógica del cuadro seguirá siendo la misma, las áreas negras representan valores de a con los que ningún punto crítico escapa, en las pintadas de gris oscuro algunos escapan y otros no lo hacen, en las áreas pintadas de gris claro todos escapan y, en las áreas blancas la computadora es incapaz de describir el comportamiento que se genera.

Así obtenemos el cuadro de la izquierda. Si después hacemos que $a=1$ y que b tome valores complejos, obtenemos el cuadro de la derecha.





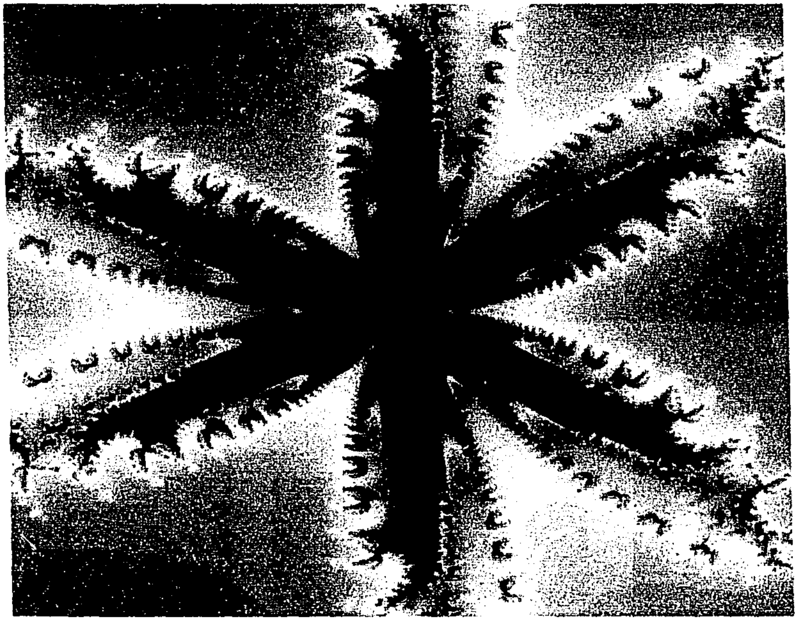
Con un poco más de valentía podríamos hacer que ambos parámetros tomaran valores complejos. Luego podríamos regresar los parámetros a valores reales y podríamos considerar valores complejos para el espacio fase; de hecho el último dibujo de la mulata fué hecho así, con $a=0$, $b=-1$, sobre el plano complejo que representa los valores de x. Finalmente, podríamos hacer uso de toda nuestra confianza y permitir que los parámetros y las varibales del espacio fase tomaran valores complejos. Y así, nos adentraríamos en exóticas y fascinantes tierras matemáticas; algunas de ellas inexploradas ya que existen vastas regiones del espacio paramétrico del mapeo de Hénon sobre las que ningún ser humano a posado su mente.

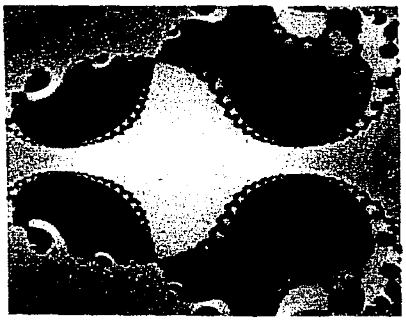
Al meditar en todo aquello que le faltaba comprender, el agente especial decidió que solo avanzando cuidadosamente podría entender los misterios que le rodeaban. Debía ordenar todo lo nuevo que ahora sabía, debía comprender a los números complejos y acostumbrarse a ellos, debía planear cuidadosamente cómo continuar su investigación. Entonces, el agente especial se volvió al espectro sideral y le pidió que avisara a los demás agentes especiales que su entrenamiento iba a ser un poco más largo de lo que habían creído pero que, aún así, lo terminaría antes de que regresara la mulata de Córdoba con sus maléficos, tormentosos, inefables e inexplicables embrujos.

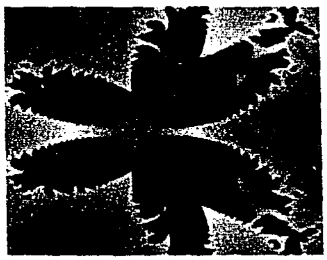
El especto sideral subió a su nave, le pidió a su computadora que generara el plano dinámico del mapeo de Hénon sobre $\mathbb{R}^2$ con las siguientes características, $a=0.66$, $b=1.06$, con los puntos que escapan rápidamente y los que no lo hacen pintados de negro y, con pocos tonos de gris que se repiten para diferenciar mejor las distintas velocidades de escape. El espectro sideral encendió su nave, utilizando sus ilógicos e incomprensibles poderes entró en el plano dinámico y dirigió su nave rumbo a la Tierra. Mientras se alejaba, se preguntó cuántos misterios del Universo le serían revelados al agente especial.

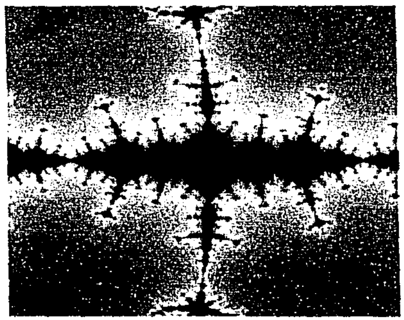
Nunca en los anales de la ciencia y la ingeniería ha existido un fenómeno tan ubicuo, un paradigma tan universal, o una disciplina tan multidisciplinaria como la del caos. Aún así el caos representa sólo la punta de un asombroso iceberg, debajo de él yace una finísima estructura de inmensa complejidad, un laberinto geométrico de infinitas convoluciones, y un paisaje surrealista de encantadora belleza.

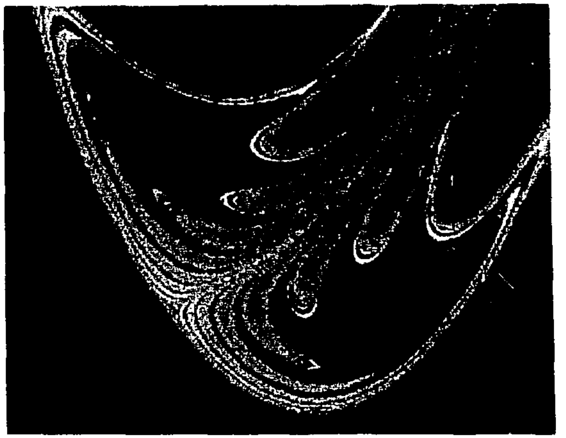
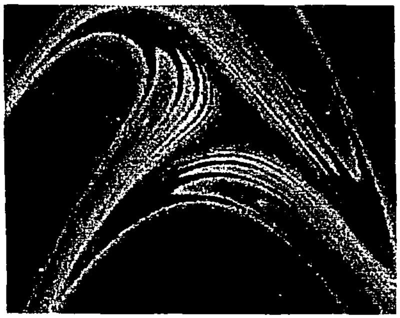
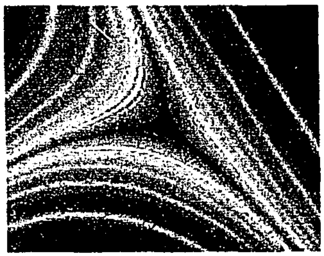
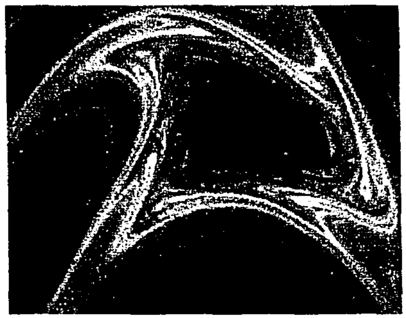
Leon O. Chua

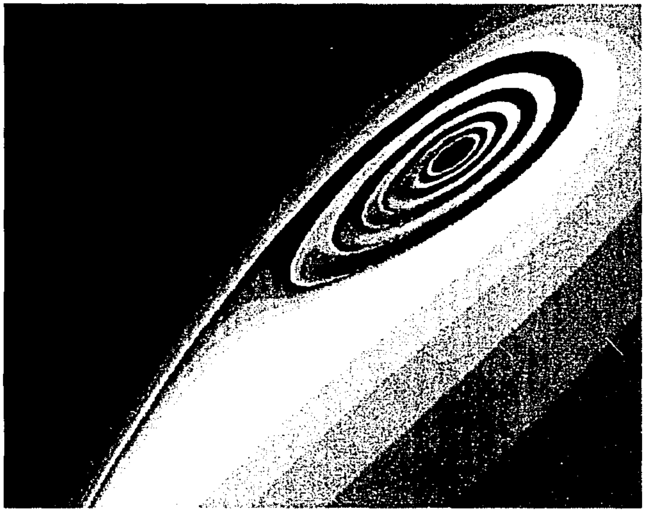


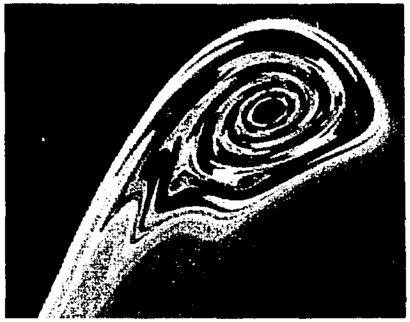


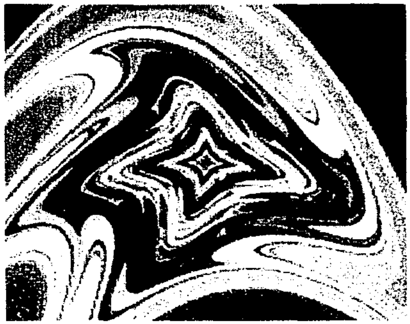


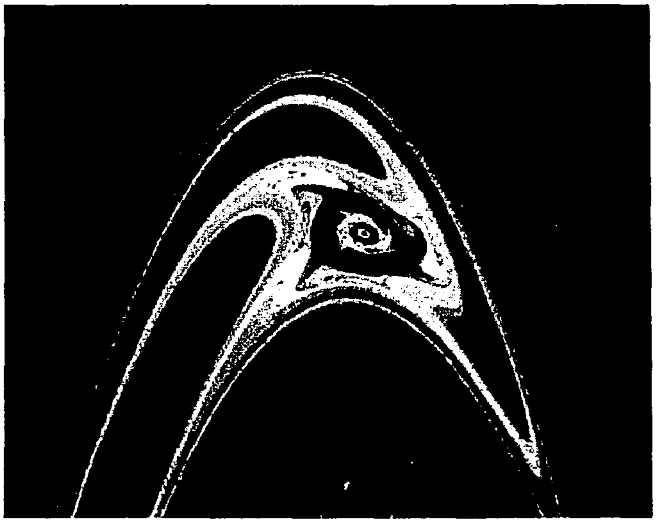


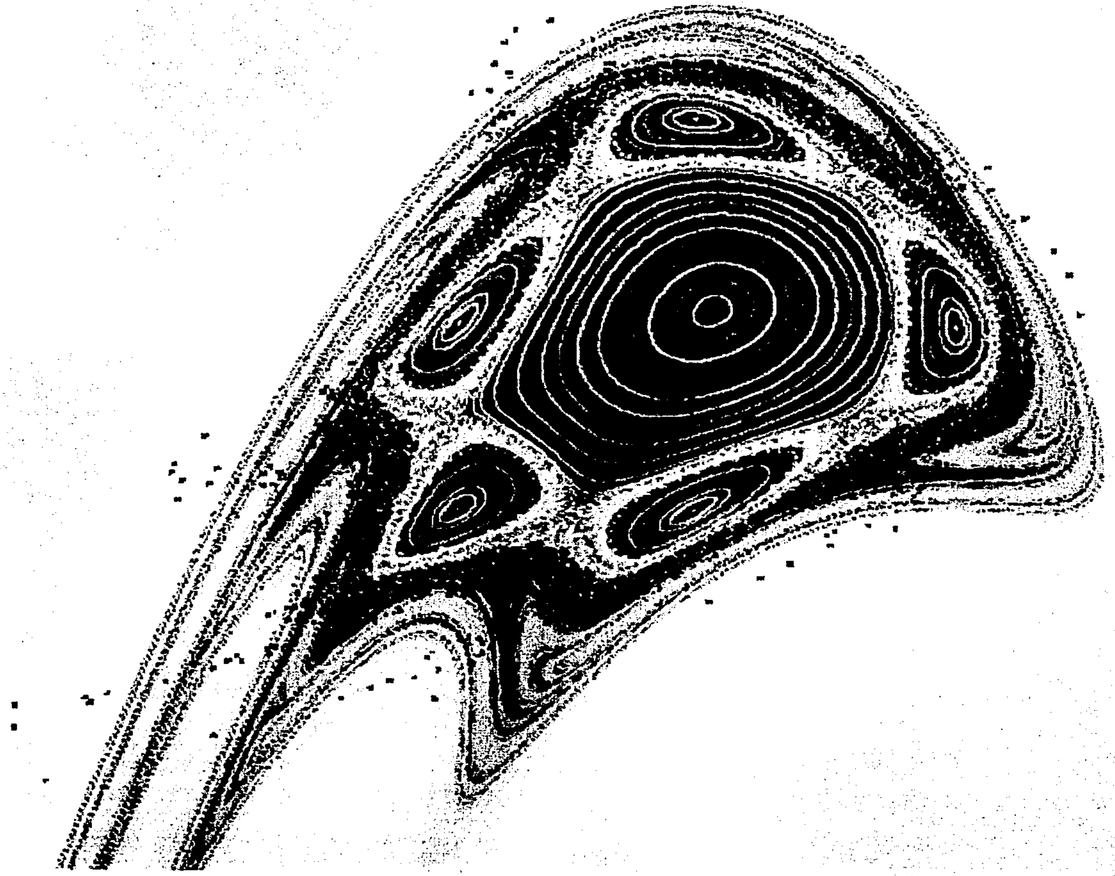














Referencias.

Beltrani, E. *Mathematics for Dynamic Modeling.* Academic Press, 1998.

Berlanga, R. *El álgebra de los números complejos.* ITAM, 1990.

Braun, E. *Caos, Fractales y Cosas Raras.* Fondo de Cultura Económica, 1996.

Devaney, R.L. *An introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison Wesley, 1989.

Lauwerier, H. *Fractals: endlessly repeated geometrical figures.* Princeton University Press, 1991.

Peitgen, Jürgens. *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science.* Springer Verlag, 1992.

Ruelle, David. *Chaotic evolution and strange attractors.* Cambridge University Press, 1992.

Sametband, M.J. *Entre el Orden y el Caos: la complejidad.* Fondo de Cultura Económica, 1999.

Sandefur, J.T. *Discrete Dynamical Systems: theory and applications.* Oxford University Press, 1990.

Applications of Fractals and Chaos. Crilly, Earnshaw, Jones, editores. Springer Verlag, 1994.

Chaos Theory in Psychology en life Sciences. Robertson, Combs, editores. Lawrence Erlbaum Assoc., 1994.

Coping with Chaos.: analysis of chaotic data and the exploitation of chaotic systems. Ott, Sauer, Yorke, editores. John Wiley & Sons, Inc., 1994.

Software de distribución gratuita usado bajo la condición de uso *fair use.*

1-D Chaos Explorer © 1992 Mathew Hall. Para trazar telarañas y diagramas de órbita de la función logística.

Chaotic Flows v1 de Lindner, Prusha, Bozeday. Para atractores extraños.

Fractal! v1.4.4 © 1993 Gonzo Systems. Para paisajes fractales.

Fractal/Chaos v2.7 de Paul Bourke. Para el atractor de Hénon.

Fractal Attraction v1.2 © 1991 Kevin D. Lee & Yosef Cohen. Para la hoja de helecho y el árbol.

Fractal Asm v0.6.6 de Karl Papadantonakis. Para planos dinámicos.

Gerry's Mandelbrot Set v1.5 de Gerry Begs. Para diagramas de órbita de la función logística.

Graphing Calculator v1.3 © 2000 Pacific Tech. Para graficar funciones.

SaddleDrop v0.5.5 de Karl Papadantonakis. Para el espacio paramétrico del mapeo de Hénon.

Standard Maps v3.7 © 2000 J.D. Meiss. Para diagramas de órbita del mapeo de Hénon.

Índice.

Atractor 20, 36, 108
de Hénon 124
extraño 127
Autosimilaridad 42
Bifurcación
nodo-silla 26
de doblamiento de periodo 37
Caos 62
Conjugación 56
Conjunto
atractor 125
de Cántor 49, 82, 83, 89
de números complejos 129
estable 87
hiperbólico repulsivo 50
inestable 88
Corrimiento de Bernoulli 54
Cuenca de atracción 18
Derivada Schwarziana 44
Diagrama
de bifurcaión 28, 37
de órbita 40
Eigenvalores 108
Espacio
de sucesiones 53, 85
fase 7
Espectro de la matríz 108
Familia cuadrática 39
Fractal 49
Función 7
Herradura de Smale 79
Hiperbolicidad 20, 36, 136
Homeomorfismo 56
Itinerario 55, 85
Jacobiano 108
Mapeo 8
conservativo 101
contractivo 101
de Hénon 95, 96
de primer retorno de Poincaré 97
disipativo 101
Matríz 105
jacobiana 107
Métrica 54
Número
imaginario 132
complejo 133
Órbita 10
Origen 93
Plano
cartesiano 93
dinámico 94
Polinomio cuadrático 70
Punto
asintótico hacia adelante 87
asintótico hacia atrás 87
fijo 15
homoclínico 138
periódico 35
silla 108
Repulsor 21, 36, 108
Retrato fase 17
Sensibilidad a condiciones iniciales 60
Subconjunto denso 59
Técnica de superficie de Poincaré 96
Telaraña 16
Teorema de Sarkovski 43
Trampa 124
Transformación lineal 19
Transitividad topológica 60
Variedad
estable 109
inestable 109
Vector 6, 105
Ventana de predictibilidad 42