



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTONOMA DE MEXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

TRES MODELOS DEL ESPACIO HIPERBOLICO N-DIMENSIONAL

TESIS

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE

MATEMATICO

PRESENTA:

SERGIO JIMENEZ SERRANO



DIRECTOR DE TESIS: DR. ANTONIO LASCUAÍN ORIVE



FACULTAD DE CIENCIAS
SECRETARÍA GENERAL

2002

TESIS CON FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional
Autónoma de México



UNAM – Dirección General de Bibliotecas
Tesis Digitales
Restricciones de uso

DERECHOS RESERVADOS ©
PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



Dirección General de Bibliotecas de la
Universidad de la Habana
Estado de mi trabajo recepcional
NOMBRE: Jiménez Serrano
Sergio
FECHA: 25-nov-2003
LUGAR: HA

DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA
Jefa de la División de Estudios Profesionales de la
Facultad de Ciencias
Presente

Comunicamos a usted que hemos revisado el trabajo escrito:

TRES MODELOS DEL ESPACIO HIPERBOLICO N-DIMENSIONAL
realizado por SERGIO JIMENEZ SERRANO
con número de cuenta 0-8853031-0 , quien cubrió los créditos de la carrera de:
MATEMATICAS
Dicho trabajo cuenta con nuestro voto aprobatorio.

Atentamente

Director de Tesis

Propietario

DR. ANTONIO LASCURAIN ORIVE

Propietario

M. EN C. PILAR MARTINEZ TELLEZ

Propietario

M. EN C. FRANCISCO STRUCK CHAVEZ

Suplente

DR. ALBERTO LEON KUSHNER SCHNUR

Suplente

DR. JAVIER PAEZ CARDENAS

Antonio Lascurain Orive
Pilar Martínez Tellez
Francisco Struck Chávez
Alberto León Kushner Schnur
Javier Páez Cardenas

Consejo Departamental de MATEMATICAS

P.A.

M. EN C. JOSE ANTONIO GÓMEZ ORTEGA

A Isabel y Nancy, que son mi estímulo, por su paciencia y apoyo.

A mis padres Sabino y Francisca, a mi hermano Luis y a mis suegros Rubén y Margarita.

Agradecimientos:

Agradezco al Dr. Antonio Lascurain Orive, por el tiempo y paciencia que dedicó para la realización de este trabajo.

Agradezco a la M. en C. Pilar Martínez Téllez, al M. en C. Francisco Struck Chávez, al Dr. Alberto León Kushner Shnur y al Dr. Javier Páez Cárdenas por sus sugerencias y comentarios al presente trabajo.

A todas las personas que tuvieron interés por la realización de este trabajo y estuvieron pendientes de su desarrollo, gracias.

Índice General

Introducción	2
I Preliminares	3
Densidades	3
Reflexiones	3
II Modelo del semiespacio superior	10
III Modelo de la bola unitaria	25
IV Forma general de las transformaciones de Möbius	34
V Modelo del hiperboloide	38
Formas y variedades	38
Métricas Riemannianas	41
El modelo del hiperboloide	42
Bibliografía	63

Introducción

El estudio de la geometría hiperbólica n -dimensional ha tenido en la últimas décadas especial importancia, en particular por su gran impacto en la topología, por ejemplo en los trabajos de Thurston sobre variedades Haken.

En esta tesis se muestra la equivalencia isométrica de tres modelos del espacio hiperbólico n -dimensional: el del semiespacio, el de la bola y el del hiperboloide. Uno de los principales resultados consiste en mostrar mediante el uso de las formas diferenciales y del *pullback* la equivalencia isométrica entre la bola y el hiperboloide (teorema 5.12). Otro importante resultado es la caracterización del grupo de isometrías del hiperboloide en matrices de Lorentz (teorema 5.20).

El punto de inicio de la tesis es la caracterización de las isometrías del semiespacio como las extensiones de Poincaré (teorema 2.10). En el desarrollo de la tesis se muestra que toda isometría hiperbólica del semiespacio o de la bola es necesariamente de Möbius (teorema 5.15). Otros resultados exhiben las formas generales de las transformaciones de Möbius así como la discusión de las esferas isométricas (teoremas 4.1, 4.2 y 4.3).

Finalmente, es importante destacar que el teorema 5.18 corrige un error importante en el texto de Alan Beardon [1] (Cf. p.57), que es una de las referencias actuales más importantes sobre la geometría hiperbólica.

Capítulo I Preliminares

A continuación se presenta el material que servirá de base para el desarrollo del presente trabajo, iniciando con los temas de densidades y reflexiones en esferas y planos.

Densidades

Extendemos primero el concepto de conformalidad a cualquier dimensión:

Definición. 1.1 Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, A abierto, f diferenciable, se dice que f es conforme en $x \in A$ si $Df(x)$ es un múltiplo escalar $\mu(x)$ de una matriz ortogonal, a $\mu(x)$ se le llama el factor de conformalidad.

Para generar una métrica es útil el concepto de densidad.

Definición. 1.2 Sea D una región en \mathbb{R}^n , y $\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}^+$, se dice que λ es una densidad si es continua en D , bajo estas hipótesis, se define la longitud de una curva γ de clase C^1 con respecto a λ como :

$$\int_a^b \lambda(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt,$$

donde $\gamma : [a, b] \rightarrow D$, a esta longitud la denotamos por $l_\lambda(\gamma)$, esta definición se extiende de manera natural para curvas C^1 por tramos.

Usando la definición anterior se puede definir una distancia para los puntos en D , de la siguiente manera:

$$\rho(x, y) = \inf_{\gamma} l_\lambda(\gamma),$$

donde es el ínfimo de las distancias sobre todas las curvas γ de clase C^1 que unen x con y . Dada λ una densidad en D , la distancia $\rho(x, y)$ define una métrica en D , Cf. [1], p.3.

Si f es una biyección conforme de D en la región abierta D_1 y λ es una densidad en D , entonces se puede definir una densidad en D_1 de tal manera que f sea una isometría, ésta se define como:

$$(1.1) \quad \sigma(f(x)) = \lambda(x)/\mu(x),$$

Cf. [1], p.7.

Reflexiones

Ahora se definirán las esferas y planos, y las reflexiones sobre ellos.

Definición 1.3. Denotaremos por $S(a, r)$ a la esfera en \mathbb{R}^n con centro en a y radio r , es decir:

$$(1.2) \quad S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - a| = r\}.$$

Definición 1.4 . La reflexión sobre $S(a, r)$ está dada por

$$(1.3) \quad \phi(x) = a + \left(\frac{r}{|x - a|} \right)^2 (x - a) ,$$

en particular, la reflexión sobre la esfera unitaria centrada en el origen está dada por

$$(1.4) \quad \phi(x) = \frac{x}{|x|^2} ,$$

denotaremos por x^* a $\frac{x}{|x|^2}$.

La reflexión sobre $S(a, r)$ no está definida en a , sin embargo, si se extiende el dominio a

$$\widehat{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} ,$$

se puede definir $\phi(a) = \infty$, e inversamente $\phi(\infty) = a$.

Definición 1.5 Se denotará por $P(a, t)$ al plano definido como:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : (x \cdot a) = t\} \cup \{\infty\} ,$$

donde $a \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, y $(x \cdot a)$ es el producto punto usual.

En particular, si $|a| = 1$, la distancia del plano al origen es precisamente $|t|$.

Definición 1.6 Se define la reflexión sobre $P(a, t)$ como

$$\phi(x) = x - 2[(x \cdot a) - t]a^* ,$$

donde $a \in \mathbb{R}^n$, $\phi(\infty) = \infty$.

Denotaremos por "esfera" a cualquier plano o esfera, si ϕ es una reflexión sobre una "esfera", se puede verificar que es una transformación uno a uno de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en sí mismo y que $\phi^2(x) = x$; asimismo, $\phi(x) = x$ si y solo si x es un elemento de la "esfera".

A continuación se define una métrica sobre la cual las reflexiones en esferas o planos son continuas aún en los puntos ∞ y $\phi^{-1}(\infty)$.

Primero se encaja $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ mediante la transformación

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \bar{x} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) &\rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n, 0) \\ \text{y } \infty &= \infty , \end{aligned}$$

así se tiene una transformación uno a uno de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$, donde la imagen es el plano $x_{n+1} = 0$ en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$.

Ahora se transforma el plano $x_{n+1} = 0$ en la esfera S^n mediante la transformación $\pi(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, la cual proyecta cada punto $\bar{x} \in \widehat{\mathbb{R}}^n$ al punto donde la línea de \bar{x} a $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ intersecta a S^n (ver figura 1.1).

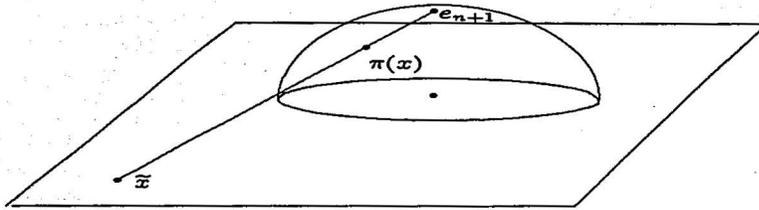


Figura 1.1 Proyección estereográfica

De manera analítica se describe $\pi(x)$ como

$$\pi(x) = \tilde{x} + t(e_{n+1} - \tilde{x}),$$

donde t es tal que $|\pi(x)| = 1$, resolviendo (1.5) se obtiene como solución no trivial $t = \frac{|\tilde{x}|^2 - 1}{|\tilde{x}|^2 + 1}$, por lo que la forma explícita de $\pi(x)$ es:

$$(1.5) \quad \pi(x) = \left(\frac{2x_1}{|\tilde{x}|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|\tilde{x}|^2 + 1}, \frac{|\tilde{x}|^2 - 1}{|\tilde{x}|^2 + 1} \right),$$

y definimos $\pi(\infty) = e_{n+1}$.

De manera análoga, podemos encontrar la inversa de π , para lo cual construimos $\psi: S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\psi(y) = e_{n+1} + t(y - e_{n+1})$, donde t es tal que $\psi(y) \cdot e_{n+1} = 0$, es decir, $\psi(y) \in \mathbb{R}^n$. Resolviendo se tiene $t = \frac{1}{1 - y_{n+1}}$, por lo tanto $\pi^{-1}(y) = \psi(y) = \frac{\hat{y}}{1 - y_{n+1}}$, donde $\hat{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Obsérvese que la proyección estereográfica es precisamente la reflexión $\phi_0(x)$ en la esfera $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$ restringida al plano $x_{n+1} = 0$, lo anterior puede verificarse de forma sencilla: Si aplicamos $\phi_0(x)$ a un punto en el plano $x_{n+1} = 0$ se tiene que:

$$\begin{aligned} |\phi_0(x)|^2 &= \phi_0(x) \cdot \phi_0(x) \\ &= \left(e_{n+1} + \frac{2(\tilde{x} - e_{n+1})}{|\tilde{x} - e_{n+1}|^2} \right) \cdot \left(e_{n+1} + \frac{2(\tilde{x} - e_{n+1})}{|\tilde{x} - e_{n+1}|^2} \right) \\ &= |e_{n+1}|^2 + 4 \frac{e_{n+1} \cdot (\tilde{x} - e_{n+1})}{|\tilde{x} - e_{n+1}|^2} + 4 \frac{|\tilde{x} - e_{n+1}|^2}{|\tilde{x} - e_{n+1}|^4} \\ &= 1 - \frac{4}{|\tilde{x} - e_{n+1}|^2} + \frac{4}{|\tilde{x} - e_{n+1}|^2} = 1. \end{aligned}$$

es decir, $\phi_0(x)$ está en la esfera unitaria y está en la dirección de x hacia e_{n+1} .

Una manera aún más simple de probar esta afirmación es observar que si $x \in \mathbb{R}^n$ la reflexión ϕ_0 está dada por:

$$\begin{aligned}\phi_0(x) &= e_{n+1} + \frac{2(x - e_{n+1})}{|x - e_{n+1}|^2} = e_{n+1} + \frac{2(x_1, \dots, x_n, -1)}{1 + |x|^2} \\ &= \left(\frac{2x_1}{1 + |x|^2}, \dots, \frac{2x_n}{1 + |x|^2}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right),\end{aligned}$$

que es precisamente la fórmula de la proyección estereográfica (1.5).

Por lo tanto ϕ_0 transforma el plano $x_{n+1} = 0$ en la esfera unitaria, más aún, ϕ_0 transforma el semiespacio inferior en el interior de la esfera unitaria, esto se sigue por conexidad y biyectividad ya que al aplicar ϕ al "polo sur" de la esfera unitaria, se tiene que $\phi(-e_{n+1}) = 0$. En consecuencia el semiespacio H^{n+1} definido por $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} > 0\}$, es transformado por ϕ_0 en el exterior de la esfera unitaria.

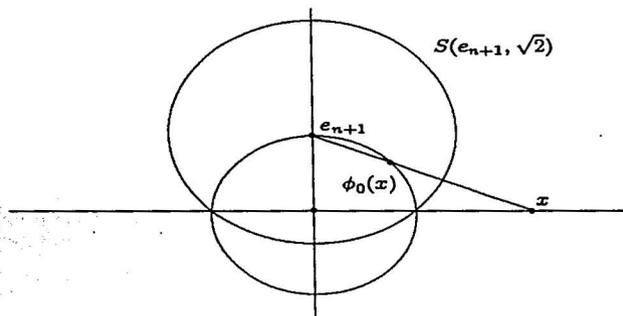


Figura 1.2 Reflexión en la esfera $S(e_{n+1}, \sqrt{2})$

Se tiene entonces que si σ denota la reflexión sobre el plano $x_{n+1} = 0$, la función:

$$(1.6) \quad \phi = \phi_0 \circ \sigma$$

transforma biyectivamente H^{n+1} en $B^{n+1} = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| < 1\}$.

Teorema 1.7 (Fórmula de la distorsión de las reflexiones en esferas): Si σ es la reflexión en $S(a, r)$, entonces:

$$(1.7) \quad |\sigma(y) - \sigma(x)| = \frac{r^2 |y - x|}{|x - a| |y - a|}.$$

DEMOSTRACION.

$$|\sigma(y) - \sigma(x)| = |(a + r^2(y - a)^*) - (a + r^2(x - a)^*)|$$

$$\begin{aligned}
&= r^2 |(y-a)^* - (x-a)^*| \\
&= r^2 [((y-a)^* - (x-a)^*) \cdot ((y-a)^* - (x-a)^*)]^{1/2} \\
&= r^2 \left[\frac{1}{|y-a|^2} - \frac{2(x-a) \cdot (y-a)}{|x-a|^2 |y-a|^2} + \frac{1}{|x-a|^2} \right]^{1/2} \\
&= r^2 \left[\frac{1}{|y-a|^2} - \frac{2x \cdot y - 2x \cdot a - 2y \cdot a + 2|a|^2}{|x-a|^2 |y-a|^2} + \frac{1}{|x-a|^2} \right]^{1/2} \\
&= r^2 \left[\frac{1}{|y-a|^2} - \frac{|x-a|^2 + |y-a|^2 + 2x \cdot y - |x|^2 - |y|^2}{|x-a|^2 |y-a|^2} + \frac{1}{|x-a|^2} \right]^{1/2} \\
&= r^2 \left[\frac{|x-a|^2}{|y-a|^2 |x-a|^2} - \frac{|x-a|^2 + |y-a|^2 - |y-x|^2}{|x-a|^2 |y-a|^2} + \frac{|y-a|^2}{|y-a|^2 |x-a|^2} \right]^{1/2} \\
&= \frac{r^2 |y-x|}{|x-a| |y-a|} \quad \square
\end{aligned}$$

Obsérvese que la relación (1.7) nos da una medida de la distorsión local en x , como consecuencia, se obtiene el factor de conformalidad de ϕ en x .

$$(1.8) \quad \mu_\phi(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\sigma(x+h) - \sigma(x)|}{|h|} = \frac{r^2}{|x-a|^2}.$$

Usando la fórmula (1.5), podemos definir la métrica en $\widehat{\mathbb{R}}^n$.

Definición 1.8 Se define una métrica d en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ llamada métrica cordal como

$$d(x, y) = |\pi(x) - \pi(y)|,$$

donde $x, y \in \widehat{\mathbb{R}}^n$.

Teorema 1.9 la métrica cordal puede expresarse de manera explícita como:

$$d(x, y) = \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{\frac{1}{2}}(1+|y|^2)^{\frac{1}{2}}}$$

DEMOSTRACION. El hecho de que la proyección estereográfica sea la restricción de una reflexión nos permite probar de una manera fácil la fórmula de la distancia cordal, usando esta fórmula se tiene que si $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= |\phi_0(x) - \phi_0(y)| \\
 &= \frac{2|x-y|}{|x - e_{n+1}| |y - e_{n+1}|} \\
 &= \frac{2|x-y|}{(1+|x|^2)^{1/2} (1+|y|^2)^{1/2}}.
 \end{aligned}$$

Un cálculo sencillo demuestra que cuando $y = \infty$,

$$d(x, y) = \frac{2}{(1+|x|^2)^{1/2}}. \quad \square$$

Con esta métrica cordal se puede probar que las reflexiones en "esferas" son continuas en $\widehat{\mathbb{R}}^n$. Cf. [1], p. 22.

Definición 1.10: Una transformación de Möbius en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ es una composición finita de reflexiones en esferas y planos.

Obsérvese que cualquier transformación de Möbius es un homeomorfismo de $\widehat{\mathbb{R}}^n$ sobre sí mismo. Como cualquier composición finita de transformaciones de Möbius es de Möbius, y la inversa de una transformación de Möbius también es de Möbius y la identidad es una transformación de Möbius, estas transformaciones forman un grupo llamado Grupo General de Möbius, el cual es denotado por $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$.

Si ϕ es una isometría euclidiana y fija el 0, entonces puede probarse que preserva la norma de los vectores y el producto vectorial, más aún, ϕ es de la forma:

$$(1.9) \quad \phi(x) = xA + x_0,$$

donde A es una matriz ortogonal y $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Cf. [1], p.p. 23-24 Teoremas 3.1.3 y 3.1.4.

Las reflexiones en "esferas" son conformes e invierten la orientación, Cf. [1], p. 25, 26., por lo cual la composición de un número par de reflexiones conservan la orientación, mientras que la composición de un número impar invierte la orientación. Se define el Grupo de Möbius denotado por $M(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ como el subgrupo de $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ formado por las transformaciones que preservan la orientación.

Teorema 1.11: Las transformaciones de Möbius transforman "esferas" en "esferas".

Una demostración de este resultado se puede consultar en [1], p. 28 Teorema 3.2.1.

Dadas dos "esferas" Σ y Σ' se define un producto entre ellas $(\Sigma, \Sigma') \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ llamado el producto inversivo de Σ y Σ' . Este producto se puede expresar de manera explícita como sigue: (Cf. [1], p. 29.)

a) si $\Sigma = S(a, r)$ y $\Sigma' = S(b, t)$, entonces:

$$(1.10) \quad (\Sigma, \Sigma') = \frac{|r^2 + t^2 - |a - b|^2|}{2rt}.$$

b) si $\Sigma = S(a, r)$ y $\Sigma' = P(b, t)$, entonces:

$$(1.11) \quad (\Sigma, \Sigma') = \frac{|(a \cdot b) - t|}{r|b|}.$$

c) si $\Sigma = P(a, r)$ y $\Sigma' = P(b, t)$, entonces:

$$(1.12) \quad (\Sigma, \Sigma') = \frac{|(a \cdot b)|}{|a||b|}.$$

Este producto conlleva la geometría de la relación entre las dos "esferas"; si Σ y Σ' se intersectan, $(\Sigma, \Sigma') = \cos \theta$, donde θ es uno de los ángulos de intersección, (el ángulo de intersección se mide con las normales) y en consecuencia $(\Sigma, \Sigma') = 0$ si y solo si Σ y Σ' son ortogonales. También resulta que las transformaciones de Möbius preservan el producto inversivo.

Finalmente enunciamos tres resultados que usaremos en esta tesis, las demostraciones pueden consultarse en [1] p.p. 31,32. En el tercer resultado se emplea la razón cruzada, la cual se define para cuatro puntos distintos x, y, u, v en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ como

$$[x, y, u, v] = \frac{d(x, u)d(y, v)}{d(x, y)d(u, v)}.$$

Teorema 1.13: Sea Σ una "esfera", σ la reflexión en Σ e I la transformación identidad. Si ϕ es una transformación de Möbius que fija puntualmente Σ , entonces $\phi = I$ o $\phi = \sigma$.

Teorema 1.14: Sean x, y puntos inversos respecto a Σ y sea ϕ una transformación de Möbius, entonces $\phi(x)$ y $\phi(y)$ son puntos inversos con respecto a $\phi(\Sigma)$.

Teorema 1.15: Una transformación $\phi : \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ es una transformación de Möbius, si y solo si preserva la razón cruzada.

Capítulo II Modelo del semiespacio superior

En este capítulo se estudiará el primer modelo del espacio hiperbólico n -dimensional, al cual llamaremos modelo del semiespacio superior. Trabajaremos inicialmente con extensiones de reflexiones en esferas y planos en \mathbb{R}^n hasta llegar a la definición de la Extensión de Poincaré de una transformación en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, para finalmente exhibir la métrica hiperbólica en este modelo.

Definición 2.1. Sea ϕ la reflexión sobre el plano $P(a, t)$, $a \in \mathbb{R}^n$, se define la extensión de Poincaré de ϕ a \mathbb{R}^{n+1} como la reflexión sobre $P(\bar{a}, t)$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{a} = (a, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ y se denota por $\tilde{\phi}$.

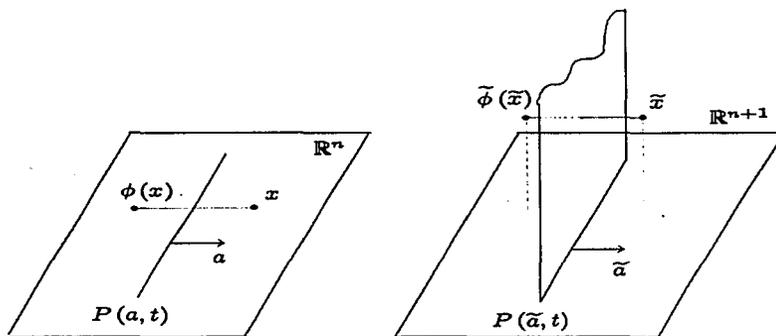


Figura 2.1 Extensión de Poincaré de una reflexión en un plano

Como se observa en la figura, la extensión es una reflexión sobre un Plano que tiene el mismo vector normal.

Definición. 2.2 Sea ϕ la reflexión sobre la esfera $S(a, r)$, $a \in \mathbb{R}^n$, se define la extensión de Poincaré de ϕ a \mathbb{R}^{n+1} denotada por $\tilde{\phi}$ como la reflexión sobre $S(\bar{a}, r)$, $\bar{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{a} = (a, 0) \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 2.3. Si ϕ es una reflexión sobre una "esfera" en \mathbb{R}^n , $\tilde{\phi}$ extiende a ϕ en el sentido siguiente

$$\tilde{\phi} | \mathbb{R}^n = \phi.$$

DEMOSTRACION. Sea $\bar{a} = (a, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{x} = (x, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Caso 1. Si ϕ es reflexión sobre $P(a, t)$

$$\tilde{\phi}(\bar{x}) = \bar{x} - 2[\bar{x} \cdot \bar{a} - t] \bar{a}$$

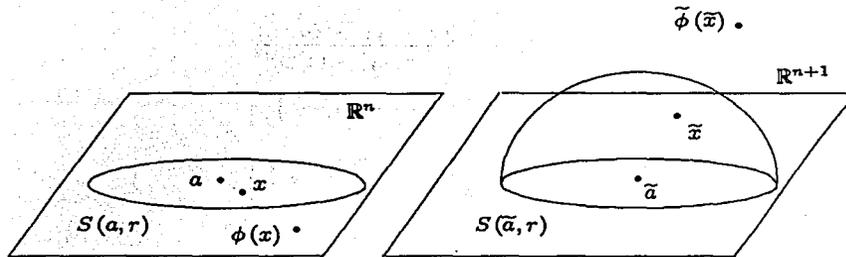


Figura 2.2 Extensión de Poincaré de una reflexión en una esfera

$$\begin{aligned}
 &= (x, 0) - 2[(x, 0) \cdot (a, 0) - t](a, 0) \\
 &= (x - 2(x \cdot a - t)a, 0) \\
 &= (\phi(x), 0) .
 \end{aligned}$$

Caso 2. Si ϕ es reflexión sobre $S(a, r)$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\phi}(\tilde{x}) &= \bar{a} + r^2(\tilde{x} - \bar{a})^* \\
 &= (a, 0) + r^2 \left(\frac{(x, 0) - (a, 0)}{|\tilde{x} - \bar{a}|^2} \right) \\
 &= \left(a + r^2 \frac{(x - a)}{|x - a|^2}, 0 \right) \\
 &= (\phi(x), 0) . \quad \square
 \end{aligned}$$

Obsérvese que como consecuencia de esta proposición si $\phi \in GM(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{\phi}$ preserva el plano $x_{n+1} = 0$.

Proposición 2.4 Si ϕ es una reflexión sobre una "esfera", $\tilde{\phi}$ preserva el semiespacio superior y por lo tanto el semiespacio inferior.

DEMOSTRACION. Si ϕ es la reflexión sobre $P(a, t)$ y $(x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $x_{n+1} \in \mathbb{R}^+$, entonces

$$\begin{aligned}
 \tilde{\phi}(x, x_{n+1}) &= (x, x_{n+1}) - 2[(x, x_{n+1}) \cdot (a, 0) - t](a, 0) \\
 &= (x - 2(x \cdot a - t)a, x_{n+1}) \\
 &= (\phi(x), x_{n+1}) .
 \end{aligned}$$

Si ϕ es la reflexión sobre $S(a, r)$,

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x, x_{n+1}) &= (a, 0) + r^2 \frac{[(x, x_{n+1}) - (a, 0)]}{|(x, x_{n+1}) - (a, 0)|^2} \\ &= (a, 0) + r^2 \left(\frac{(x - a, x_{n+1})}{|\tilde{x} - \tilde{a}|^2} \right) \\ &= \left(a + r^2 \frac{(x - a)}{|\tilde{x} - \tilde{a}|^2}, \frac{r^2 x_{n+1}}{|\tilde{x} - \tilde{a}|^2} \right),\end{aligned}$$

y en ambos casos $[\tilde{\phi}(\tilde{x})]_{n+1} > 0$, si $x_{n+1} > 0$. \square

Obsérvese que en el caso de una reflexión sobre un plano, $\tilde{\phi}$ conserva la coordenada $n + 1$, esto es:

$$(2.1) \quad [\tilde{\phi}(y)]_{n+1} = y_{n+1}.$$

También si $\tilde{\phi}$ es reflexión sobre una esfera:

$$(2.2) \quad [\tilde{\phi}(y)]_{n+1} = \frac{r^2 y_{n+1}}{|y - \tilde{a}|^2}.$$

Lema 2.5. Sea $\phi \in GM(\mathbb{R}^n)$, $\phi = \phi_n \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1 = \psi_m \circ \dots \circ \psi_2 \circ \psi_1$ donde ϕ_j y ψ_i ; $j = 1, \dots, n$ y $i = 1, \dots, m$, son reflexiones sobre "esferas", entonces

$$\tilde{\phi}_n \circ \dots \circ \tilde{\phi}_2 \circ \tilde{\phi}_1 = \tilde{\psi}_m \circ \dots \circ \tilde{\psi}_2 \circ \tilde{\psi}_1$$

DEMOSTRACION. Como $\tilde{\phi}_n \circ \dots \circ \tilde{\phi}_2 \circ \tilde{\phi}_1 | \mathbb{R}^n = \phi$ y $\tilde{\psi}_m \circ \dots \circ \tilde{\psi}_2 \circ \tilde{\psi}_1 | \mathbb{R}^n = \phi$ se tiene que $\tilde{\psi}_1^{-1} \circ \tilde{\psi}_2^{-1} \circ \dots \circ \tilde{\psi}_m^{-1} \circ \tilde{\phi}_n \circ \dots \circ \tilde{\phi}_2 \circ \tilde{\phi}_1$ fija el plano $x_{n+1} = 0$ y preserva H^{n+1} . Por consiguiente el resultado se sigue del teorema 1.13. \square

Lema 2.6. Sea $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ y $\psi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n+1})$ tal que ψ preserva el semiespacio superior y $\psi | \widehat{\mathbb{R}}^n = \phi$, entonces ψ es la extensión de Poincaré de ϕ .

DEMOSTRACION. Obsérvese que la composición $\psi^{-1} \circ \phi$ es la identidad en $(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ y dado que ψ preserva H^{n+1} , se sigue del teorema 1.13 que $\psi(y) = \tilde{\phi}(y)$ para toda $y \in \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$. \square

El lema 2.5 nos permite definir la extensión de Poincaré de cualquier transformación en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$.

Definición 2.7. Sea $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$, $\phi = \phi_n \circ \dots \circ \phi_2 \circ \phi_1$ donde ϕ_i , $i = 1, \dots, n$, son reflexiones sobre "esferas". Se define la extensión de Poincaré de ϕ en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ como $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_n \circ \dots \circ \tilde{\phi}_2 \circ \tilde{\phi}_1$.

Proposición 2.8. *La expresión*

$$\frac{|y-x|^2}{y_{n+1}x_{n+1}}$$

$x, y \in \mathbb{H}^{n+1}$, es invariante bajo $\tilde{\phi}$, donde $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$.

DEMOSTRACION. Basta probar el caso cuando ϕ es reflexión sobre una "esfera".

Caso 1. Si $\tilde{\phi}$ es la reflexión sobre $S(\bar{a}, r)$, $\bar{a} = (a, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{x} = (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$\phi(\bar{x}) = \bar{a} + r^2(\bar{x} - \bar{a})^*$$

usando la fórmula de distorsión de las reflexiones en esferas se tiene

$$(2.3) \quad |\phi(y) - \phi(x)| = \frac{r^2 |y-x|}{|\bar{x}-\bar{a}| |\bar{y}-\bar{a}|},$$

por lo cual, usando (2.2)

$$\begin{aligned} \frac{|\phi(y) - \phi(x)|^2}{[\phi(\bar{y})]_{n+1} [\phi(\bar{x})]_{n+1}} &= \frac{r^4 |y-x|^2 |\bar{x}-\bar{a}|^2 |\bar{y}-\bar{a}|^2}{|x-\bar{a}|^2 |y-\bar{a}|^2 r^4 x_{n+1} y_{n+1}} \\ &= \frac{|y-x|^2}{x_{n+1} y_{n+1}}. \end{aligned}$$

Caso 2. Si $\tilde{\phi}$ es la reflexión sobre el plano $P(\bar{a}, t)$, $\bar{a} = (a, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Como $\tilde{\phi}$ es una isometría euclidiana y se sigue de (2.1) que $[\tilde{\phi}(\bar{x})]_{n+1} = x_{n+1}$, el resultado es inmediato. \square

Definición 2.9 Se define la métrica hiperbólica en \mathbb{H}^{n+1} como la métrica determinada por la densidad:

$$\lambda : \mathbb{H}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad \lambda(x) = \frac{1}{[x]_{n+1}}.$$

Teorema 2.10 Las extensiones de Poincaré de las transformaciones en $GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ son isometrías hiperbólicas de \mathbb{H}^{n+1} .

DEMOSTRACION. Dada $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ se sigue de la discusión sobre densidades que ϕ es una isometría hiperbólica si se cumple

$$(2.4) \quad \lambda(\tilde{\phi}(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu_{\tilde{\phi}}(x)},$$

donde $\lambda(x) = [x]_{n+1}$ y $\mu_{\tilde{\phi}}(x)$ es el factor de conformalidad de $\tilde{\phi}$ en x . Basta probar (2.4) en los casos en que ϕ es la reflexión en una "esfera". Recordamos también

que si f es conforme, entonces el factor de conformalidad de f en x está dado por

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|},$$

en particular, si ϕ es la reflexión en $S(\bar{a}, r)$, se deduce directamente de (2.3) que

$$\mu_{\bar{\phi}}(x) = \frac{r^2}{|x - \bar{a}|^2},$$

usando la relación (2.2) se tiene $\lambda(\bar{\phi}(x)) = \frac{|x - \bar{a}|^2}{r^2 x_{n+1}}$ lo cual es (2.4).

En el caso de ϕ reflexión en un plano, ϕ es isometría euclidiana, por lo que $\mu_{\bar{\phi}}(x) = 1, \forall x \in H^{n+1}$ y la relación (2.4) es la relación (2.1). \square

Ahora se exhiben fórmulas explícitas para la distancia hiperbólica, denotamos por $l_h(\gamma)$ a la longitud hiperbólica de una curva γ .

Teorema 2.11. Si $x = pe_{n+1}$ y $y = qe_{n+1}$, $q > p > 0$ entonces

$$\rho(x, y) = \log \frac{q}{p}.$$

DEMOSTRACION: Sea $\gamma: [a, b] \rightarrow H^{n+1}$ de clase C^1 , $\gamma(a) = pe_{n+1}$, $\gamma(b) = qe_{n+1}$.

$$\begin{aligned} l_h(\gamma) &= \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\gamma_{n+1}(t)} dt \\ &= \int_a^b \frac{\left[\sum_{i=1}^n (\gamma'_i(t))^2 \right]^{1/2}}{\gamma_{n+1}(t)} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{|\gamma'_{n+1}(t)|}{\gamma_{n+1}(t)} dt \\ &\geq \int_a^b \frac{\gamma'_{n+1}(t)}{\gamma_{n+1}(t)} dt \\ &= \log \gamma_{n+1}(t) \Big|_a^b \\ &= \log \frac{q}{p}, \end{aligned}$$

por lo cual $l_h(\gamma) \geq \log \frac{q}{p}$. Este argumento se generaliza para curvas C^1 por tramos.

Ahora, sea $\gamma: [a, b] \rightarrow H^{n+1}$, $\gamma(t) = te_{n+1}$

$$(2.5) \quad l_h(\gamma) = \int_p^q \frac{|\gamma'_{n+1}(t)|}{\gamma_{n+1}(t)} dt = \int_p^q \frac{1}{t} dt = \log \frac{q}{p}. \quad \square$$

De la demostración de este teorema se sigue que la distancia mínima entre los puntos x y y se alcanza en un segmento de la recta $\{te_{n+1}, t \in \mathbb{R}\}$.

Posteriormente se exhibirán fórmulas para todo $x, y \in H_{n+1}$, necesitamos primero algunos resultados.

Teorema 2.12 Sea $\{\Sigma_i\}_{i=1,\dots,m}$ una colección de planos en $\widehat{\mathbb{R}}^n$, entonces $\bigcap_{i=1}^m \Sigma_i$ es un subespacio afín, y viceversa, un subespacio afín de dimensión k es la intersección de $n - k$ planos cuyos vectores normales forman un conjunto de vectores ortonormales.

DEMOSTRACION. Sean $\Sigma_i = P(a_i, t_i)$, $i = 1, \dots, m$, y $W = \bigcap_{i=1}^m \Sigma_i$.

Caso 1. $0 \in W$, esto es, $t_i = 0 \forall i$. En este caso W es un subespacio vectorial, ya que $0 \in W$ y para todo $x, y \in W$, el elemento $(x + \lambda y) \cdot a_i = 0 \forall i$, y por lo tanto esta en W .

Caso 2. $0 \notin W$. Sea $x \in W$ y $\forall i$ sean $\Sigma'_i = \Sigma_i - x$, entonces $0 \in \bigcap_{i=1}^m \Sigma'_i$ y por lo tanto $\bigcap_{i=1}^m \Sigma'_i$ es un subespacio vectorial. Ahora, si se demuestra que $W = x + \bigcap_{i=1}^m \Sigma'_i$, entonces por definición W es un espacio vectorial afín. Para probar lo anterior, sea $x + y \in x + \bigcap_{i=1}^m \Sigma'_i$, entonces $y \in \bigcap_{i=1}^m \Sigma'_i$ y por definición $x + y \in \bigcap_{i=1}^m \Sigma_i$. Viceversa, si $z \in \bigcap_{i=1}^m \Sigma_i$, entonces $y = z - x \in \bigcap_{i=1}^m \Sigma'_i$ y finalmente $z = x + y \in x + \bigcap_{i=1}^m \Sigma'_i$.

Ahora, sea W un subespacio afín de dimensión k en \mathbb{R}^n .

Caso 1. $0 \in W$.

Sea $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ una base ortonormal de W y $\{v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ una extensión de ésta a una base ortonormal de \mathbb{R}^n . Sea $\Pi_j = P(v_{k+j}, 0)$, con $j = 1, 2, \dots, n - k$, entonces se afirma que $\bigcap_{j=1}^{n-k} \Pi_j = W$.

Primero, sea $x \in W$, entonces $x \cdot v_{k+j} = 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, n - k\}$, por lo tanto $x \in \Pi_j$ para cada j y por lo tanto en su intersección, esto es: $W \subseteq \bigcap_{j=1}^{n-k} \Pi_j$. Por otra parte, sea $x \in \bigcap_{j=1}^{n-k} \Pi_j$, x puede expresarse como $x = \sum_{i=1}^n s_i v_i$, como $x \in \Pi_j$, $s_i = 0 \quad \forall j = k + 1, k + 2, \dots, n$ y por lo tanto $x = \sum_{i=1}^k s_i v_i \in W$.

Caso 2. $0 \notin W$. Sea $x \in W$ y sea $V = W - x$, entonces $0 \in V$, se sigue del caso 1 que V es la intersección de $n - k$ planos $\bigcap_{j=1}^{n-k} \Pi_j$. Ahora, sean $\Pi'_i = x + \Pi_i$, $i = 1, 2, \dots, n - k$, basta demostrar que $W = \bigcap_{i=1}^{n-k} \Pi'_i$. Sea $x + y \in \bigcap_{i=1}^{n-k} \Pi'_i$, entonces $y \in \bigcap_{i=1}^{n-k} \Pi_i$ y por definición $x + y \in W$. Viceversa, si $z \in W$, entonces $y = z - x \in \bigcap_{i=1}^{n-k} \Pi_i$ y finalmente $z = x + y \in x + \bigcap_{i=1}^{n-k} \Pi'_i$.

Teorema 2.13 La intersección de dos esferas es vacía o un punto o la intersección de una esfera con un plano ortogonal a la recta que une los centros.

DEMOSTRACION

Sea $\Sigma = S(a, r)$ y $\Sigma' = S(b, t)$ esferas en \mathbb{R}^n :

Si $|a - b| > r + t$, entonces, $\Sigma \cap \Sigma' = \emptyset$.

Si $|a - b| = r + t$, entonces la intersección $\Sigma \cap \Sigma'$ es el punto:
 $a + r \frac{(b-a)}{|b-a|} = b + t \frac{(a-b)}{|a-b|}$.

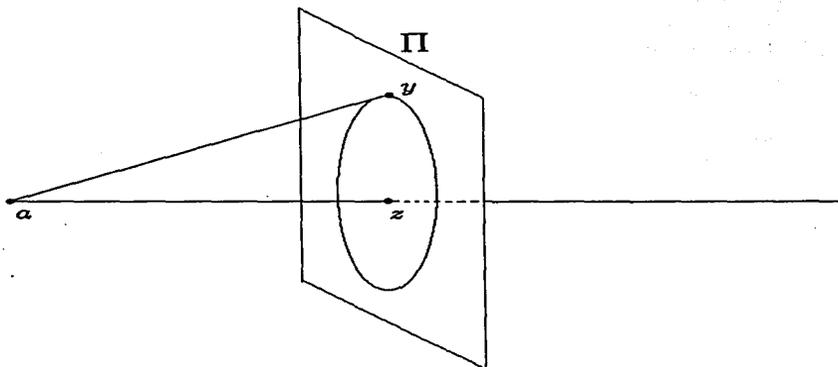


Figura 2.3 Intersección de dos esferas.

Si la intersección no es un punto ni es vacía, sea $y = \Sigma \cap \Sigma'$ y z la proyección ortogonal de y a la recta por a, b , se afirma que $\Sigma \cap \Sigma' = \Pi \cap \Sigma''$, donde Π es el plano ortogonal a $b - a$ por z y $\Sigma'' = S(z, |z - y|)$. Para probar esto se tiene por el Teorema de Pitágoras que

$$|y - a|^2 = |a - z|^2 + |y - z|^2 .$$

Obsérvese que z está unívocamente determinado, es decir, no depende de y , como

$$|y - z|^2 + |z - a|^2 = r^2 \quad \text{y} \quad |y - z|^2 + |b - z|^2 = t^2$$

se tiene

$$|z - a|^2 - r^2 = |z - b|^2 - t^2 ,$$

por lo que, si $z = a + k(b - a)$, $k \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |a - z|^2 - r^2 &= |b - z|^2 - t^2 \\ |k(b - a)|^2 - r^2 &= |(a - b) + k(b - a)|^2 - t^2 \\ k^2 |b - a|^2 - r^2 &= |b - a|^2 |1 - k|^2 - t^2 \end{aligned}$$

$$k^2 - |1 - k|^2 = \frac{r^2 - t^2}{|b - a|^2}$$

$$2k - 1 = \frac{r^2 - t^2}{|b - a|^2}$$

Probemos ahora que $\Sigma \cap \Sigma' \subseteq \Pi \cap \Sigma''$: sea $x \in \Sigma \cap \Sigma'$, como z está unívocamente determinada, entonces $(z - x)$ es ortogonal a $(a - b)$, es decir, $x \in \Pi$, y de nuevo por el Teorema de Pitágoras:

$$|x - z|^2 = |x - a|^2 - |a - z|^2 = |y - z|^2,$$

y por lo tanto $x \in \Pi \cap \Sigma''$.

Por otro lado, sea $x \in \Pi \cap \Sigma''$, entonces $(z - x)$ es ortogonal a $(a - b)$, y $|z - x| = |y - z|$, por lo cual:

$$|x - a|^2 = |x - z|^2 + |a - z|^2 = |y - z|^2 + |a - z|^2 = r^2,$$

y por lo tanto $x \in \Sigma$, análogamente $x \in \Sigma'$. \square

Definición 2.14. Denotamos por " k -esfera" a una esfera de dimensión k en \mathbb{R}^n , o un espacio afín de dimensión k en \mathbb{R}^n .

Se sigue de las observaciones anteriores que la intersección finita de "esferas" es vacío, o un punto, o un espacio afín de dimensión k en \mathbb{R}^n o es la intersección de un espacio afín y una esfera. Esto se sigue ya que se puede intercambiar la intersección de dos esferas por la intersección de una esfera con un plano. También es cierto que una " k -esfera" es la intersección de "esferas".

Teorema 2.15. Las transformaciones de Möbius mandan " k -esferas" en " k -esferas".

DEMOSTRACION. Sea $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ y W una " k -esfera" en \mathbb{R}^n , entonces

$$W = \bigcap_{i=1}^m \Pi_j, \text{ donde } \Pi_j \text{ son "esferas" en } \mathbb{R}^n,$$

como se mencionó en Preliminares, las transformaciones de Möbius mandan "esferas" en "esferas" y como también son biyectivas se tiene que:

$$\phi \left(\bigcap_{i=1}^m \Pi_j \right) = \bigcap_{i=1}^m \phi(\Pi_j),$$

por lo tanto $\phi(W)$ es una " m -esfera".

Basta probar que $m = k$. Usando el teorema de la función implícita se pueden encontrar k curvas por x cuyos vectores tangentes forman una base ortogonal del plano tangente a W en x ; se sigue por consiguiente de la conformalidad de ϕ que las tangentes a las imágenes de dichas curvas en $\phi(x)$ son ortogonales, es decir, el plano tangente a $\phi(W)$ en $\phi(x)$ tiene dimensión $\geq k$. Aplicando este argumento a ϕ^{-1} se sigue que la dimensión es k . En el caso de una k -esfera, para aplicar el

teorema de la función implícita se puede trasladar su centro al origen y aplicar una transformación ortogonal, de tal manera que en una vecindad de x la esfera sea la gráfica de una función de \mathbb{R}^k en \mathbb{R} (en un subespacio \mathbb{R}^{k+1} de \mathbb{R}^n). \square

Para continuar con la discusión acerca de las curvas que minimizan distancias se necesita un lema:

Lema 2.16. *Dados $x, y \in H^{n+1}$ existe $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^n)$ tal que $\tilde{\phi}(x) = p e_{n+1}$, $\tilde{\phi}(y) = q e_{n+1}$, donde $p, q \in \mathbb{R}^+$.*

DEMOSTRACION. Sean $x, y \in H^{n+1}$,

Caso 1. La línea que une x con y es paralela a e_{n+1} . Sea x_0 la proyección en \mathbb{R}^n de x, y , y $T: \widehat{\mathbb{R}}^n \rightarrow \widehat{\mathbb{R}}^n$ dada por $T(x) = x - x_0$, la extensión de Poincaré de esta transformación traslada los puntos x y y al eje e_{n+1} . Como \widehat{T} es una isometría se sigue el resultado.

Caso 2. La línea que une x con y no es paralela al eje e_{n+1} . Considerando el 2-plano determinado por el eje e_{n+1} y la recta l que pasa por x y y , se puede trazar un círculo C ortogonal al plano $x_{n+1} = 0$ que pasa por los puntos x, y ; denotemos por z el centro (Figura 2.4).

Mediante la traslación $T_1(x) = x - z$ llevamos el centro z del círculo C al origen. Por la proposición 2.6 la extensión de Poincaré de T es de nuevo la misma traslación actuando en \mathbb{R}^{n+1} . (Figura 2.5).

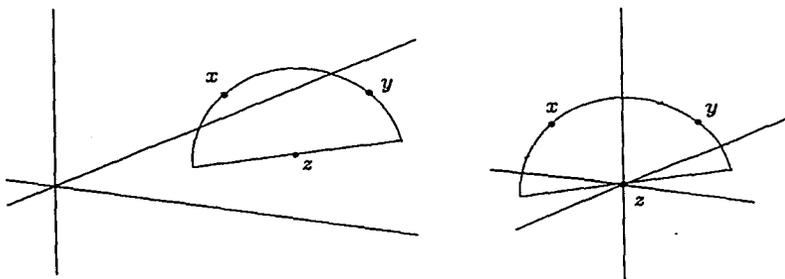


Figura 2.4 Círculo ortogonal al plano que pasa por x y y . Figura 2.5 traslación de C al origen.

Ahora mediante una rotación en $\widehat{\mathbb{R}}^n$ se hace coincidir la proyección de l en el plano $x_{n+1} = 0$ con el eje e_1 . Se puede definir esta misma rotación en $\widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ obteniendo así su extensión de Poincaré, posteriormente una homotecia coloca al círculo sobre la esfera unitaria, análogamente esta homotecia es una extensión de Poincaré.

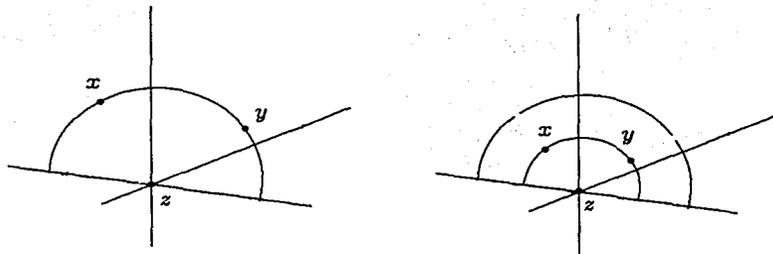


Figura 2.6 Rotación hacia el eje e_1 . Figura 2.7 Homotecia de C .

Finalmente, de manera análoga a la discusión en los preliminares (Cf. p.6) se aplica la reflexión sobre $S(e_1, \sqrt{2})$ la cual envía las imágenes de x, y a puntos en el eje e_{n+1} y entonces aplica el caso 1. De nuevo esta transformación se extiende a \mathbb{R}^{n+1} , y ésta es la extensión de Poincaré.

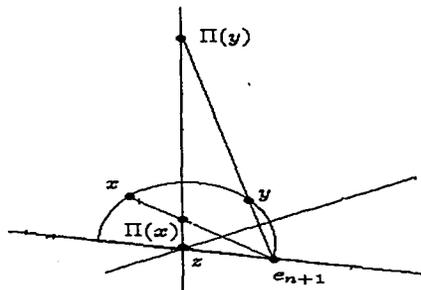


Figura 2.8. Reflexión sobre $S(e_1, \sqrt{2})$

Otra forma de demostrar el caso 2 es la siguiente: Sea C el círculo como se definió anteriormente y sea a uno de los puntos donde C intersecta al plano $x_{n+1} = 0$ (Figura 2.9), si f es la reflexión en \mathbb{R}^n de la esfera $S(a, r)$, entonces la extensión de Poincaré de f , \tilde{f} reflexión en $S(\tilde{a}, r)$, transforma C en una recta paralela al eje e_{n+1} (esto se sigue por conformalidad y el teorema 2.10). Finalmente aplicamos el caso 1. \square

Obsérvese que por conformalidad las extensiones de Poincaré transforman "círculos" ortogonales a \mathbb{R}^n en "círculos" ortogonales a \mathbb{R}^n y que el lema 2.16 establece que estos "círculos" son transitivos bajo las extensiones de Poincaré.

Definición. 2.17 Una geodésica en H^{n+1} es una curva que minimiza la distancia hiperbólica.

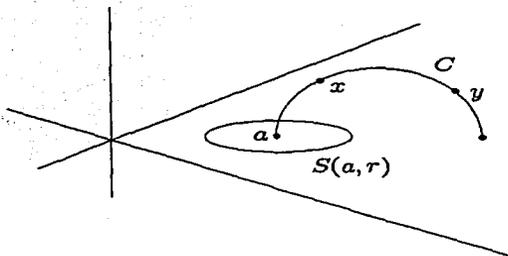


Figura 2.9 Círculo ortogonal al plano que pasa por x y y . Reflexión en $S(a, r)$.

Como se observó en el teorema 2.11, la recta sobre el eje e_{n+1} es una geodésica y en consecuencia cualquier recta ortogonal al plano $x_{n+1} = 0$ es una geodésica. Por otra parte, como consecuencia del lema 2.16, todo semicírculo ortogonal al plano $x_{n+1} = 0$ es una geodésica. Además éstas son las únicas geodésicas, ya que si hubiera otras, por transitividad se tendría que para el caso $x = pe_{n+1}$ y $y = qe_{n+1}$, $p, q \in \mathbb{R}^+$, habría al menos otra curva que minimizara la distancia entre estos dos puntos, sin embargo, la demostración del teorema 2.11 establece que esto no es posible.

Ahora damos una fórmula explícita de la distancia hiperbólica.

Teorema 2.18. Sean $x, y \in H^{n+1}$, entonces $\cosh \rho(x, y) = 1 + \frac{[x - y]^2}{2x_{n+1}y_{n+1}}$.

DEMOSTRACION. Primero se verifica en el caso de $x = pe_{n+1}$, $y = qe_{n+1}$, $p < q$.

Como $\rho(x, y) = \log q/p$

$$\begin{aligned} \cosh(\rho(x, y)) &= \frac{e^{\log q/p} + e^{\log p/q}}{2} \\ &= \frac{q/p + p/q}{2} \\ &= \frac{q^2 + p^2}{2qp} \\ &= 1 + \frac{(p - q)^2}{2pq} \end{aligned}$$

El caso general se sigue del lema 2.16 ya que cualesquiera dos puntos en H^{n+1} pueden trasladarse al eje e_{n+1} mediante una extensión de Poincaré, por lo cual:

$$\begin{aligned} \cosh(\rho(x, y)) &= \cosh(\rho(\widehat{\phi}(x), \widehat{\phi}(y))) \\ &= 1 + \frac{|\widehat{\phi}(x) - \widehat{\phi}(y)|^2}{2[\widehat{\phi}(x)]_{n+1}[\widehat{\phi}(y)]_{n+1}}. \end{aligned}$$

Finalmente se sigue de la proposición 2.8

$$\cosh(\rho(x, y)) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2[x]_{n+1}[y]_{n+1}}. \quad \square$$

Teorema 2.19. La esfera hiperbólica $\{x \in H^{n+1} \mid \rho(x, y) = r\}$ con centro hiperbólico en $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n+1})$ y radio hiperbólico r es precisamente la esfera euclidiana

$$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 + (x_{n+1} - y_{n+1} \cosh r)^2 = (y_{n+1} \operatorname{senhr})^2.$$

DEMOSTRACION. Sabemos que $\cosh(\rho(x, y)) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2[x]_{n+1}[y]_{n+1}}$ por lo que la esfera hiperbólica puede expresarse como

$$S_h(y, r) = \left\{ x \in H^{n+1} \mid \cosh r = 1 + \frac{|x - y|^2}{2[x]_{n+1}[y]_{n+1}} \right\},$$

entonces

$$|x - y|^2 = -2x_{n+1}y_{n+1} + 2 \cosh r x_{n+1}y_{n+1},$$

$$= -2x_{n+1}y_{n+1} + 2 \cosh r x_{n+1}y_{n+1} + x_{n+1}^2 - x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 (-\operatorname{senhr}^2 + \cosh r^2),$$

agrupando se tiene

$$|x - y|^2 = (x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}y_{n+1} + y_{n+1}^2) + (-x_{n+1}^2 + 2 \cosh r x_{n+1}y_{n+1} - y_{n+1}^2 \cosh r^2) - y_{n+1}^2 (-\operatorname{senhr}^2),$$

y

$$|x - y|^2 = (x_{n+1} - y_{n+1})^2 - (x_{n+1} - y_{n+1} \cosh r)^2 - y_{n+1}^2 (-\operatorname{senhr}^2),$$

por lo que

$$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 + (x_{n+1} - y_{n+1} \cosh r)^2 = (y_{n+1} \operatorname{senhr})^2. \quad \square$$

Se pueden obtener otras expresiones para la distancia hiperbólica.

Corolario 2.20. Para toda $x, y \in H^{n+1}$ se cumple que

$$\sinh^2 \frac{1}{2} \rho(x, y) = \frac{|x - y|^2}{4 x_{n+1} y_{n+1}} .$$

DEMOSTRACION. Como $\cosh^2 t = \frac{1}{2}(\cosh 2t + 1)$, se tiene

$$\cosh \rho(x, y) = 2 \cosh^2 \left(\frac{\rho(x, y)}{2} \right) - 1$$

por lo que

$$\begin{aligned} \sinh^2 \left(\frac{1}{2} \rho(x, y) \right) &= \cosh^2 \left(\frac{\rho(x, y)}{2} \right) - 1 \\ &= \frac{\cosh \rho(x, y) + 1}{2} - 1 \\ &= \frac{1}{2} \left[2 + \frac{|x - y|^2}{2 x_{n+1} y_{n+1}} \right] - 1 \\ &= \frac{|x - y|^2}{4 [x]_{n+1} [y]_{n+1}} . \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 2.21. Si $x \in H^{n+1}$ entonces :

$$\cosh \rho(x, |x| e_{n+1}) = \frac{|x|^2}{x_{n+1}} .$$

DEMOSTRACION. Por el teorema 2.18 se tiene

$$\begin{aligned} \cosh \rho(x, |x| e_{n+1}) &= 1 + \frac{|x - |x| e_{n+1}|^2}{2 |x| x_{n+1}} \\ &= 1 + \frac{|x|^2 - 2 |x| x_{n+1} + |x|^2}{2 |x| x_{n+1}} \\ &= \frac{2 |x|^2}{2 |x| x_{n+1}} \\ &= \frac{|x|^2}{x_{n+1}} . \quad \square \end{aligned}$$

Geoméricamente podemos observar que la distancia hiperbólica de x a $|x| e_{n+1}$ es la longitud del segmento de círculo con centro en el origen y radio r entre x y $|x| e_{n+1}$. El resultado nos indica que el coseno hiperbólico de la longitud está dada por la razón entre $|x|$ y x_{n+1} , es decir, la cosecante del ángulo α (ver figura 2.10). Otra forma de observar lo anterior es el hecho de que las homotecias son extensiones de Poincaré y en consecuencia son isometrías hiperbólicas (ver figura 2.11).

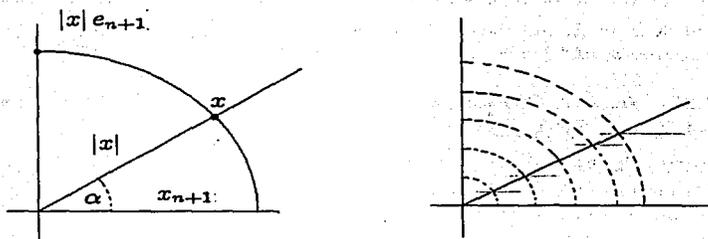


Fig. 2.10 Segmento de geodésica de x a $|x|e_{n+1}$. Fig. 2.11 Homotecia.

Una expresión de la esfera en términos de puntos simétricos esta dada por el siguiente resultado.

Teorema 2.22. Sea S la esfera hiperbólica en H^{n+1} con centro hiperbólico y y radio hiperbólico r , si \bar{y} denota la reflexión de y en el plano $x_{n+1} = 0$, se tiene que

$$S = \left\{ x \mid \frac{|x-y|}{|x-\bar{y}|} = \tanh\left(\frac{r}{2}\right) \right\}.$$

DEMOSTRACION. Analíticamente, puede escribirse la ecuación como:

$$|x-y| \cosh \frac{r}{2} = |x-\bar{y}| \sinh \frac{r}{2},$$

equivalentemente

$$\left[|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2 \right] \cosh^2 \frac{r}{2} = \left[|x|^2 - 2x \cdot \bar{y} + |y|^2 \right] \sinh^2 \frac{r}{2},$$

por lo que

$$|x|^2 - 2\hat{x} \cdot \hat{y} + |y|^2 - 2x_{n+1}y_{n+1}(\cosh^2 \frac{r}{2} + \sinh^2 \frac{r}{2}) = 0,$$

donde \hat{x}, \hat{y} son las proyecciones de x, y en el plano $x_{n+1} = 0$, finalmente esta ecuación es:

$$|x-y|^2 + 2x_{n+1}y_{n+1} - 2x_{n+1}y_{n+1} \cosh r = 0,$$

que es precisamente la ecuación de la esfera. \square

De manera geométrica, la ecuación define el conjunto de puntos que cumplen $\frac{|x-a|}{|x-\bar{a}|} = k$ lo cual es precisamente la definición de las "esferas" de Apolonio; obsérvese que si $k = 1$, entonces se define el plano $x_{n+1} = 0$, pero si $k > 1$, entonces, dado que $\operatorname{senht} \leq \cosh t$, se definen círculos o esferas en H^{n+1} .

Teorema 2.23. Sea $\phi \in GM(\widehat{\mathbb{R}^{n+1}})$ tal que ϕ preserva H^{n+1} , entonces ϕ es la extensión de Poincaré de alguna ψ en $GM(\mathbb{R}^n)$.

DEMOSTRACION. Como ϕ preserva H^{n+1} , por continuidad ϕ preserva $\widehat{\mathbb{R}^n}$. Ahora, sea ψ la restricción de ϕ a $\widehat{\mathbb{R}^n}$, ψ es de Möbius como transformación de $\widehat{\mathbb{R}^n}$ ya que preserva la razón cruzada (teorema 1.15).

Finalmente $\phi^{-1} \circ \widehat{\psi}$ es de Möbius y fija puntualmente $\widehat{\mathbb{R}^n}$ y preserva H^{n+1} , por lo tanto $\phi^{-1} \circ \widehat{\psi} = Id$ de acuerdo al teorema 1.13 y entonces $\phi = \widehat{\psi}$. \square

CAPITULO III Modelo de la Bola Unitaria

Estudiaremos ahora un segundo modelo, más homogéneo, del espacio hiperbólico n -dimensional donde ∞ ya no aparece como un punto especial. Para esto primero consideramos la transformación (1.6) $\phi = \phi_0 \circ \sigma$ la cual transforma H^{n+1} en B^{n+1} .

Usando esta transformación encontraremos una densidad en la bola unitaria inducida por la densidad en H^{n+1} de tal manera que $\phi = \phi_0 \circ \sigma$ sea una isometría. Esta métrica en la bola será la hiperbólica. Primero se dará una expresión para $|\phi_0(x)|^2$: Sea $x \in \widehat{\mathbb{R}}^{n+1}$ entonces

$$\begin{aligned} |\phi_0(x)|^2 &= \left(e_{n+1} + \frac{2(x - e_{n+1})}{|x - e_{n+1}|^2} \right) \cdot \left(e_{n+1} + \frac{2(x - e_{n+1})}{|x - e_{n+1}|^2} \right) \\ &= 1 + \frac{4[e_{n+1} \cdot (x - e_{n+1})]}{|x - e_{n+1}|^2} + \frac{4}{|x - e_{n+1}|^2} \\ &= 1 + \frac{4x_{n+1}}{|x - e_{n+1}|^2}, \end{aligned}$$

por lo cual

$$(3.1) \quad |\phi_0(x)|^2 = 1 + \frac{4x_{n+1}}{|x - e_{n+1}|^2}.$$

Usando (1.1), se tiene que la densidad buscada en B^{n+1} está dada por

$$\beta(\phi(x)) = \frac{\lambda(x)}{\mu_\phi(x)},$$

donde λ es la densidad hiperbólica en el semiespacio H^{n+1} y $\mu_\phi(x)$ es el factor de conformalidad de $\phi(x)$.

Ahora, el factor de conformalidad de ϕ esta dado por:

$$\begin{aligned} \mu_\phi(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{|\phi(y) - \phi(x)|}{|y - x|} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{|\phi_0(\sigma(y)) - \phi_0(\sigma(x))|}{|y - x|} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{|\phi_0(\sigma(y)) - \phi_0(\sigma(x))|}{|\sigma(y) - \sigma(x)|}, \end{aligned}$$

usando la fórmula de la distorsión de reflexiones en esferas (1.7), se tiene

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{|\phi_0(\sigma(y)) - \phi_0(\sigma(x))|}{|\sigma(y) - \sigma(x)|} = \frac{2}{|\sigma(x) - e_{n+1}|^2},$$

y despejando en (3.1)

$$\begin{aligned}
 1 - |\phi(x)|^2 &= 1 - |\phi_0(\sigma(x))|^2 \\
 &= \frac{4[\sigma(x)]_{n+1}}{|\sigma(x) - e_{n+1}|^2} \\
 &= \frac{4x_{n+1}}{|\sigma(x) - e_{n+1}|^2},
 \end{aligned}$$

por lo cual

$$(3.2) \quad \mu_\phi(x) = \frac{1 - |\phi(x)|^2}{2x_{n+1}}.$$

De lo anterior se concluye que la densidad buscada en B^{n+1} es:

$$\beta(\phi(x)) = \frac{\frac{1}{x_{n+1}}}{\frac{1 - |\phi(x)|^2}{2x_{n+1}}} = \frac{2}{1 - |\phi(x)|^2}.$$

En consecuencia, la nueva métrica, también llamada hiperbólica, está dada por la densidad

$$(3.3) \quad \beta(x) = \frac{2}{1 - |x|^2}.$$

Del resultado anterior se concluye que si ψ es una isometría en H^{n+1} , la transformación conjugada $\phi\psi\phi^{-1}$ es una isometría en B^{n+1} y viceversa, si ψ es una isometría en B^{n+1} entonces $\phi^{-1}\psi\phi$ lo es de H^{n+1} . Más aún, cualquier transformación en $GM(\mathbb{R}^{n+1})$ que deje invariante a B^{n+1} es una isometría hiperbólica, ésto se sigue ya que si $\psi(B^{n+1}) = B^{n+1}$ entonces $\phi\psi\phi^{-1}(H^{n+1}) = H^{n+1}$ y es por lo tanto una extensión de Poincaré de algún elemento en $GM(\mathbb{R}^{n+1})$ de acuerdo al teorema 2.23.

Definición 3.1 Las geodésicas en B^{n+1} son las curvas que minimizan la distancia hiperbólica.

Proposición 3.2. En el modelo de B^{n+1} , las geodésicas son:

- 1) Segmentos de recta por el origen (diámetros),
- 2) Círculos ortogonales a S^n .

DEMOSTRACION. Se probó que las geodésicas en el modelo del semiespacio superior son rectas paralelas al vector e_{n+1} y semicírculos que intersectan ortogonalmente a \mathbb{R}^n , es decir, "1-esferas". Ahora, ya que ϕ es una isometría, las geodésicas en el modelo B^{n+1} deben ser imágenes bajo ϕ de las geodésicas en H^{n+1} . En consecuencia, se tiene por conformalidad que las geodésicas en B^n son "1-esferas" que intersectan ortogonalmente a S^n ya que $\phi(\mathbb{R}^n) = S^n$ \square

Obsérvese que como $\phi(\infty) = \phi_0\sigma(\infty) = \phi_0(\infty) = e_{n+1}$, las geodésicas que son rectas en H^{n+1} corresponden a círculos y rectas ortogonales a S^n que pasan por e_{n+1} . Como $\phi^{-1}(x) = \sigma \circ \phi_0(x)$ entonces: $\phi^{-1}(0) = \sigma \circ \phi_0(0) = \sigma(-e_{n+1}) = e_{n+1}$,

por lo tanto las geodésicas en H^{n+1} que pasan por e_{n+1} son las que corresponden a diámetros en B^n .

En la discusión que sigue trabajaremos en B^n .

Teorema 3.3 Dado $x \in B^n$, la distancia hiperbólica $\rho(0, x)$ está dada por

$$\rho(0, x) = \log \left(\frac{1 + |x|}{1 - |x|} \right)$$

DEMOSTRACION. Podemos suponer que $x = re_1$ ya que el vector tx , $t \in \mathbb{R}$, se puede rotar mediante una transformación ortogonal al vector te_1 , $t \in \mathbb{R}$, como una transformación ortogonal es de Möbius y preserva B^n , es una isometría hiperbólica, por lo cual $\rho(0, x) = \rho(0, |x|e_1)$, si denotamos por $r = |x|$. Por lo anterior, usamos la recta por el origen te_1 en B^n . Parametrizando $\gamma(t) = te_1$, $t \in [0, r]$, $0 < r < 1$ se tiene

$$\begin{aligned} l_h(\gamma) &= \int_0^r \beta(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^r \frac{2}{1-t^2} dt \\ &= \int_0^r \frac{1}{1+t} dt + \int_0^r \frac{1}{1-t} dt \\ &= \log(1+r) - \log(1-r) \\ &= \log \frac{1+r}{1-r} \\ &= \log \frac{1+|x|}{1-|x|} \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 3.4. Sea ϕ una transformación de Möbius con $\phi(0) = 0$ y $\phi(B^n) = B^n$, entonces existe una matriz ortogonal A tal que $\phi(x) = xA$.

DEMOSTRACION. Por una parte sabemos por el teorema 1.14 que si x, y son inversos con respecto a una esfera Σ entonces $\phi(x)$ y $\phi(y)$ son inversos con respecto a $\phi(\Sigma)$ por lo que $\phi(\infty) = \infty$, y por otra parte también sabemos de acuerdo al teorema 1.15 que si $\phi(x)$ es una transformación de Möbius entonces preserva la razón cruzada y por lo tanto es una similitud euclidiana, entonces

$$\frac{|\phi(x) - \phi(0)|}{|x - 0|} = \frac{|\phi(x)|}{|x|} = k,$$

para toda $x \in B^n$.

Tomando x en la frontera de B^n tenemos $\frac{|\phi(x)|}{|x|} = 1$, por lo tanto ϕ es una isometría euclidiana y en consecuencia por (1.6) $\phi(x) = xA$, donde A es una matriz ortogonal. \square

Obsérvese que $P(a, t)$ deja B^n invariante si y solo si $t = 0$, $0 \in P(a, t)$, como $(S^{n-1}, P(a, t)) = 0$ entonces $(\phi(S^{n-1}), \phi(P(a, t))) = 0$, ahora, dado que $\phi(0) = 0$ y $\phi(\infty) = \infty$, entonces ϕ es ortogonal y por lo tanto $\phi(S^{n-1}) = S^{n-1}$.

Teorema 3.5. Sea ϕ una reflexión en $S(a, r)$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) $S(a, r)$ y S^{n-1} son ortogonales;
- ii) $|a|^2 = r^2 + 1$;
- iii) $\phi(a^*) = 0$ (equivalentemente $\phi(0) = a^*$);
- iv) $\phi(B^n) = B^n$.

DEMOSTRACION.

i) \Leftrightarrow ii) El producto inversivo de $S(a, r)$ y S^{n-1} esta dado por:

$$\frac{|r^2 + 1 - |a|^2|}{2r},$$

Por lo cual éste es cero si y solo si $r^2 + 1 = |a|^2$.

Recuérdese de los Preliminares que el producto inversivo de dos esferas que se intersectan es cero si y solo si éstas son ortogonales. Si $S(a, r)$ y S^{n-1} no se intersectan $|a|^2 > 1 + r^2$.

ii) \Leftrightarrow iii) se tiene que

$$\begin{aligned} \phi(0) &= a - r^2 a^* \\ &= |a|^2 a^* - r^2 a^* \\ &= a^* (|a|^2 - r^2). \end{aligned}$$

En consecuencia $\phi(0) = a^*$ si y solo si $|a|^2 - r^2 = 1$.

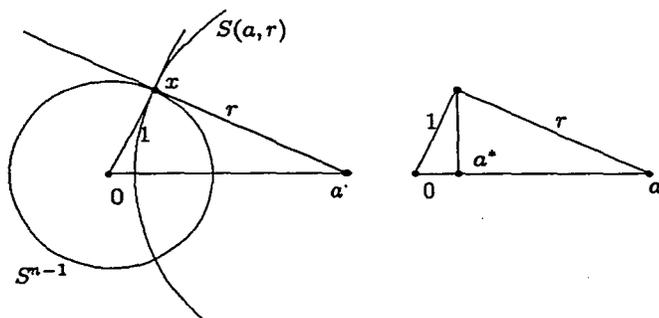


Figura 3.1 Esferas ortogonales. Figura 3.2 Ubicación de a^* .

iv) \Rightarrow *iii*) Por definición a y a^* son inversos respecto a S^{n-1} y se tiene por *iv*) que $\phi(S^{n-1}) = S^{n-1}$, por lo que $\phi(a)$ y $\phi(a^*)$ son inversos respecto a $\phi(S^{n-1})$ (teorema 1.14).

Finalmente, como $\phi(a) = \infty$ entonces $\phi(a^*) = 0$.

ii) + *iii*) \Rightarrow *iv*) Usando *iii*) se tiene:

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &= |\phi(x) - \phi(a^*)| \\ &= \frac{r^2 |x - a^*|}{|x - a| |a^* - a|}, \end{aligned}$$

en virtud del teorema 1.7. Por lo cual usando *ii*) se tiene:

$$\begin{aligned} |\phi(x)| &= \frac{(|a|^2 - 1) |x - a^*|}{|a| \left| \frac{1}{|a|^2} - 1 \right| |x - a|} \\ &= \frac{|x - a^*| (|a|^2 - 1)}{|x - a| \frac{(|a|^2 - 1)}{|a|}} \\ &= \frac{|x - a^*| |a|}{|x - a|} \end{aligned}$$

En consecuencia

$$1 - |\phi(x)|^2 = \frac{|x - a|^2 - |x - a^*|^2 |a|^2}{|x - a|^2},$$

el numerador de esta expresión es

$$\begin{aligned} &(x - a) \cdot (x - a) - \left(|a| x - \frac{a}{|a|} \right) \cdot \left(|a| x - \frac{a}{|a|} \right) \\ &= |x|^2 - 2x \cdot a + |a|^2 - |a|^2 |x|^2 + 2x \cdot a - 1 \\ &= |x|^2 (1 - |a|^2) + |a|^2 - 1 \\ &= -|x|^2 r^2 + r^2 \\ &= r^2 (1 - |x|^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(3.4) \quad 1 - |\phi(x)|^2 = \frac{r^2 (1 - |x|^2)}{|x - a|^2},$$

y ϕ preserva $S(0, 1)$. \square

Obsérvese que si $x \in S(0,1) \cap S(a,r)$ y $S(0,1)$ es ortogonal a $S(a,r)$, entonces si y es la proyección de x en el segmento \overline{oa} (ver figura 3.2), se tiene $y = a^*$. Esto se sigue ya que los triángulos Δoxy y Δoax son semejantes por tener los ángulos iguales, por lo cual $\frac{\overline{oy}}{\overline{ox}} = \frac{\overline{ox}}{\overline{oa}}$ y $\overline{oy} \cdot \overline{oa} = 1$, es decir $y = a^*$.

Teorema 3.6. Las reflexiones en "esferas" ortogonales a S^{n-1} generan $GM(B^n)$.

DEMOSTRACION. Sea $\psi \in GM(B^n)$ entonces se tiene que $\phi^{-1}\psi\phi$ preserva H^{n+1} y por el teorema 2.23 es una extensión de Poincaré de alguna $g \in GM(\widehat{\mathbb{R}}^{n-1})$, la cual sabemos es de la forma $g = g_n \circ g_{n-1} \circ \dots \circ g_1$, donde cada g_i es reflexión en una "esfera" en $\widehat{\mathbb{R}}^{n-1}$ y por lo tanto

$$\psi = (\phi^{-1}\tilde{g}_n\phi) \circ (\phi^{-1}\tilde{g}_{n-1}\phi) \circ \dots \circ (\phi^{-1}\tilde{g}_1\phi),$$

obsérvese que $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $(\phi^{-1}\tilde{g}_i\phi)$ es una reflexión que preserva B^n , y cada \tilde{g}_i es la reflexión en una "esfera" Σ ortogonal al plano $x_{n+1} = 0$, por lo que cada $\phi^{-1}\tilde{g}_i\phi$ es de la reflexión en la esfera $\phi(\Sigma)$ ortogonal a $S(0,1)$. (Esto se sigue del teorema 1.15) \square

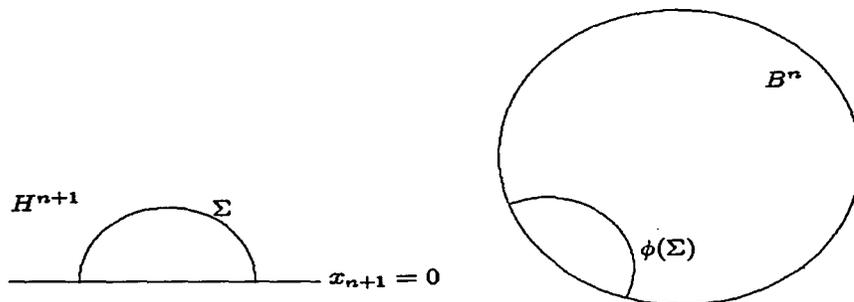


Figura 3.3 Transformación de la esfera Σ de H^{n+1} a B^n .

Obsérvese que para todo $x \in B^n$ es posible encontrar $\psi \in GM(B^n)$ tal que $\psi(x) = 0$, para esto se considera $a = x^*$ y entonces ψ será la reflexión en la esfera $S(a,r)$, donde r es tal que $|a| = 1+r^2$, entonces por el teorema 3.5 $\psi(x) = \psi(a^*) = 0$. Otra forma es conjugar y aplicar la transitividad de las extensiones de Poincaré.

Teorema 3.7. La expresión:

$$(3.5) \quad \frac{|x-y|^2}{(1-|x|^2)(1-|y|^2)},$$

$x, y \in B^n$, es invariante bajo las transformaciones en $GM(B^n)$.

DEMOSTRACION. Por el teorema anterior basta probar este teorema para "esferas" ortogonales a S^{n-1} . Si ψ es la reflexión sobre un plano por el origen, ψ es ortogonal y es claro que ψ preserva (3.5) ya que es una isometría euclidiana. Si ψ es la reflexión en $S(a, r)$, esfera ortogonal a $S(0, 1)$, usando la fórmula de distorsión de las reflexiones en esferas y el resultado (3.4) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|^2}{(1 - |\psi(x)|^2)(1 - |\psi(y)|^2)} &= \frac{|x - a|^2 |y - a|^2}{(1 - |x|^2)^2 (1 - |y|^2)^2} \cdot \frac{r^4 |x - y|^2}{|x - a|^2 |y - a|^2} \\ &= \frac{|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}. \quad \square \end{aligned}$$

Corolario 3.8. Si ψ preserva B^n , el factor de conformalidad está dado por:

$$(3.6) \quad \frac{1 - |\psi(x)|^2}{1 - |x|^2}.$$

DEMOSTRACION. Se sigue del teorema anterior que :

$$\frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} = \left[\frac{(1 - |\psi(x)|^2)(1 - |\psi(y)|^2)}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)} \right]^{1/2},$$

tomando el límite

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} &= \lim_{y \rightarrow x} \left[\frac{(1 - |\psi(x)|^2)(1 - |\psi(y)|^2)}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)} \right]^{1/2} \\ &= \frac{1 - |\psi(x)|^2}{1 - |x|^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Este corolario exhibe otra demostración de que $GM(B^n)$ es un grupo de isometrías de la bola hiperbólica: si ψ preserva B^n y τ es la densidad hiperbólica (3.3), se cumple la relación (1.1) de los preliminares:

$$\begin{aligned} \mu_\psi(x) \tau(\psi(x)) &= \frac{1 - |\psi(x)|^2}{1 - |x|^2} \cdot \frac{2}{1 - |\psi(x)|^2} \\ &= \frac{2}{1 - |x|^2} = \tau(x), \end{aligned}$$

y por lo tanto ψ es una isometría.

Ahora se generaliza la fórmula de la distancia dada en el teorema 3.3 .

Corolario 3.9. Si ρ denota la distancia hiperbólica en B^n , entonces:

$$(3.7) \quad \operatorname{senh}^2 \frac{\rho(x, y)}{2} = \frac{|x - y|^2}{(1 - |x|^2)(1 - |y|^2)}.$$

DEMOSTRACION. Primero se demuestra para el caso $y = 0$, por el teorema 3.3 se tiene que :

$$\rho(0, x) = \log \frac{1 + |x|}{1 - |x|},$$

si denotamos por $r = \log \frac{1 + |x|}{1 - |x|}$ y por $t = |x|$ se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}^2 \frac{\rho(0, x)}{2} &= \left[\frac{e^{r/2} - e^{-r/2}}{2} \right]^2 = \frac{e^r - 2 + e^{-r}}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{1+t}{1-t} - 2 + \frac{1-t}{1+t} \right] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+t)^2 - 2(1-t^2) + (1-t)^2}{1-t^2} \\ &= \frac{t^2}{1-t^2} = \frac{|x-0|}{1-|x|^2}. \end{aligned}$$

El caso general se sigue de la invariancia derivada del teorema 3.7 y por la transitividad de $GM(B^n)$. \square

El teorema 3.5 puede generalizarse de la siguiente manera.

Proposición 3.10. Si $S_1 = S(a, r)$ y $S_2 = S(b, t)$ son esferas en \mathbb{R}^n y si f y g son las reflexiones en S_1 y S_2 respectivamente, entonces las esferas son ortogonales si y solo si $f(b) = g(a)$.

DEMOSTRACION. Considérese primero el caso $S_1 = S(0, 1)$ y $S_2 = S(b, t)$, por el teorema (3.5) las esferas son ortogonales si y solo si $g(0) = b^*$, es decir, si y solo si $g(0) = f(b)$.

Para el caso general, sea $T = \frac{x-a}{r}$, entonces $T(S_1) = S(0, 1)$ y $T(S_2)$ es otra esfera $S(c, m)$, si denotamos por $h(x) = x^*$ y por ψ la reflexión en $S(c, m)$ se sigue del teorema 1.13 que $f = T^{-1} \circ h \circ T$ y $g = T^{-1} \circ \psi \circ T$. Por el primer caso $S(0, 1)$ y $S(c, m)$ son ortogonales si y solo si

$$\begin{aligned} \psi(0) &= h(c) \\ \Leftrightarrow \psi(T^{-1}(a)) &= h(T^{-1}(b)) \\ \Leftrightarrow T \circ \psi \circ T^{-1}(a) &= T \circ h \circ T^{-1}(b) \\ \Leftrightarrow g(a) &= f(b). \quad \square \end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra una relación entre el radio euclidiano y la distancia hiperbólica.

Proposición 3.11. Si $S_1 = S(a, r)$ es ortogonal a $S(0, 1)$ y ψ denota la reflexión en $S(a, r)$, entonces:

$$\operatorname{senh} \frac{\rho(0, \psi(0))}{2} = \frac{1}{r}.$$

DEMOSTRACION. Aplicando el corolario 3.9 se tiene que

$$\operatorname{senh} \frac{\rho(0, \psi(0))}{2} = \left[\frac{|\psi(0)|^2}{(1 - |\psi(0)|^2)} \right]^{1/2} = \left[\frac{|a^*|^2}{(1 - |a^*|^2)} \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{|a|^2 - 1} \right]^{1/2},$$

usando el teorema 3.5

$$\operatorname{senh} \frac{\rho(0, \psi(0))}{2} = \frac{1}{r} \quad \square$$

En particular $\forall x \in B^n$ se tiene

$$|\psi(x) - a| \cdot |x - a| = \frac{1}{\operatorname{senh} \frac{\rho(0, \psi(0))}{2}}.$$

Capítulo IV

Forma General de las Transformaciones de Möbius

Se presenta en el presente capítulo una caracterización de las transformaciones de Möbius junto con importantes resultados que usaremos en el siguiente capítulo.

Teorema 4.1 Sea ψ una transformación de Möbius en $GM(\mathbb{R}^n)$ entonces:

a) Si ψ preserva B^n , entonces $\psi(x) = A(\sigma(x))$ donde σ es la reflexión en una esfera ortogonal a $S(0, 1)$ y $A \in O(n)$.

b) Si $\psi(\infty) = \infty$, entonces $\psi(x) = r(A(x)) + x_0$, donde $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $A \in O(n)$.

c) Si $\psi(\infty) \neq \infty$, entonces $\psi(x) = r(A(\sigma(x))) + x_0$, donde $r > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in O(n)$ y σ es una reflexión en una esfera.

DEMOSTRACION: a) Sea σ la reflexión en la esfera $S(a, r)$, donde $\psi(a) = \infty$ y $|a|^2 = 1 + r^2$, entonces:

$$\begin{aligned}\sigma(0) &= a + r^2(-a)^* \\ &= a + (|a|^2 - 1) \frac{-a}{|a|^2} \\ &= a^* ,\end{aligned}$$

por el teorema 3.5 $S(a, r)$ es ortogonal a S^{n-1} , ahora como ψ preserva B^n , $\psi \circ \sigma$ también la preserva. Como $\psi(a) = \infty$ y ψ manda puntos inversos en puntos inversos (con respecto a $S(0, 1)$), $\psi(a^*) = 0$, esto es $\psi \circ \sigma$ fija al 0; entonces por el teorema 3.4 $\psi \circ \sigma$ es una transformación ortogonal, esto es $\psi \circ \sigma(x) = A(x)$, $A \in O(n)$ y $\psi(x) = A \circ \sigma(x)$.

b) Si ψ fija ∞ , ψ transforma $S(0, 1)$ en una esfera y no en un plano, digamos $S(x_0, r)$, sea $f(x) = \frac{x - x_0}{r}$, por lo cual $f \circ \psi$ fija ∞ y preserva $S(0, 1)$, entonces también fija el 0 y por el teorema 3.4 $f \circ \psi$ es de la forma $f \circ \psi(x) = A(x)$ donde A es una transformación ortogonal. Finalmente componiendo con f^{-1} por la izquierda se tiene $\psi(x) = r(A(x)) + x_0$.

c) Si ψ no fija ∞ , sea a tal que $\psi(a) = \infty$ y sean $S(a, t)$ una esfera con centro en a y σ la reflexión en $S(a, t)$, se tiene que:

$$\psi \circ \sigma(\infty) = \infty ,$$

entonces por b)

$$(\psi \circ \sigma)(x) = r(A(x)) + x_0 ,$$

es decir,

$$\psi(x) = r(A(\sigma(x))) + x_0. \quad \square$$

La descomposición en c) muestra una relación entre r y t .

Teorema 4.2 Sea $\psi \in GM(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(a) = \infty$, $a \neq \infty$, entonces ψ actúa como isometría euclidiana en la esfera $S(a, t\sqrt{r})$, donde

$$\psi(x) = rA(\sigma(x)) + x_0,$$

y σ es la reflexión en $S(a, t)$.

DEMOSTRACION. Sean $x, y \in S(a, t\sqrt{r})$, entonces usando el teorema 1.7 :

$$\begin{aligned} |\psi(x) - \psi(y)| &= |rA(\sigma(x)) - rA(\sigma(y))| \\ &= r|\sigma(x) - \sigma(y)| \\ &= \frac{rt^2|x-y|}{|x-a||y-a|} \\ &= |x-y|. \quad \square \end{aligned}$$

Obsérvese que si $\psi \in GM(\mathbb{R}^n)$ es como en el teorema 4.2, el factor de conformidad está dado por:

$$\begin{aligned} \mu_\psi(x) &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{|\psi(x) - \psi(y)|}{|x - y|} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{r|\sigma(x) - \sigma(y)|}{|x - y|} \\ &= \lim_{y \rightarrow x} \frac{rt^2|x-y|}{|x-a||y-a|} \\ (4.1) \quad &= \frac{rt^2}{|x-a|^2}. \end{aligned}$$

Teorema 4.3 Sean ψ , a , t y r como en el teorema 4.2, entonces:

$$\mu_\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in S(a, t\sqrt{r}) \\ > 1 & \text{si } x \in \text{int } S(a, t\sqrt{r}) \\ < 1 & \text{si } x \in \text{ext } S(a, t\sqrt{r}) \end{cases}$$

DEMOSTRACION: El resultado es consecuencia inmediata de la fórmula (4.1) ya que la función $x \rightarrow \frac{rt^2}{|x-a|^2}$ de $\mathbb{R}^n - \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^+$ es continua. \square

Este teorema y el anterior definen una esfera que caracteriza la acción de ψ .

Definición 4.4 Sea $\psi \in GM(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(a) = \infty$ y $a \neq \infty$, entonces, a la esfera $S(a, t\sqrt{r})$, donde t y r están determinados por el teorema 4.2., se le llama esfera isométrica de ψ y se le denota por $I(\psi)$.

La esfera isométrica tiene varias propiedades importantes:

Propiedad 1.

$$\psi(I(\psi)) = I(\psi^{-1}) .$$

Esto se sigue de la regla de la cadena ya que si $x \in I(\psi)$, entonces

$$\begin{aligned} D\psi^{-1}(\psi(x))D\psi(x) &= Id, \\ D\psi^{-1}(\psi(x)) &= [D\psi(x)]^{-1}, \end{aligned}$$

ahora como ψ es conforme, se tiene que

$$D\psi(x) = (\mu(x)I)A,$$

donde $A \in O(n)$ y $\mu(x)$ es el factor de conformalidad de ψ en x , entonces

$$\begin{aligned} D\psi^{-1}(\psi(x)) &= [\mu_{\psi(x)}(I)A]^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{\mu_{\psi(x)}}\right)IA^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo cual

$$(4.2) \quad \mu_{\psi^{-1}}(\psi(x)) = \frac{1}{\mu_{\psi(x)}},$$

y si $x \in I(\psi)$ entonces $\psi(x) \in I(\psi^{-1})$ por el teorema 4.3 .

Propiedad 2. La esfera isométrica es la única esfera donde ψ actúa como una isometría euclidiana.

DEMOSTRACION: Si ψ actúa euclidianamente en una esfera Σ distinta de $I(\psi)$ entonces existe una sucesión de puntos $\{x_n\} \rightarrow x$ tales que $x \in \Sigma - I(\psi)$, se tendría que en dicha sucesión

$$\lim_{x_n \rightarrow x} \frac{\psi(x_n) - \psi(x)}{|x_n - x|} = 1 ,$$

es decir $\mu_{\psi(x)} = 1$, lo cual contradice la elección de x .

Propiedad 3.

$$\psi(\text{ext } I(\psi)) = \text{int } I(\psi^{-1}) .$$

Esto es una consecuencia de (4.2) y del teorema 4.3 ya que $\mu_{\psi(x)} < 1$ si y solo si $\mu_{\psi^{-1}}(\psi(x)) > 1$. Por supuesto también se tiene que:

$$\psi(\text{int } I(\psi)) = \text{ext } I(\psi^{-1}) .$$

Propiedad 4. Sea τ la reflexión en la esfera isométrica de ψ , entonces $\psi \circ \tau$ es una isometría euclidiana y por lo tanto para toda $\psi \in GM(\mathbb{R}^n)$ tal que $\psi(\infty) \neq \infty$ se tiene que

$$\psi = E \circ \tau,$$

donde τ es la reflexión en $I(\psi)$ y E es una isometría euclidiana.

Para probar esta propiedad se tiene que $I(\psi) = S(a, t\sqrt{r})$ donde a , t , y r son como en el teorema 4.2, por lo tanto $\psi \circ \tau(\infty) = \infty$ y se sigue del teorema 4.1 b) que ψ es una similitud euclidiana, es decir:

$$|\psi \circ \tau(x) - \psi \circ \tau(y)| = k|x - y|,$$

en particular si $x, y \in I(\psi)$, se tiene que

$$\begin{aligned} |x - y| &= |\phi(x) - \phi(y)| \\ &= |\psi \circ \tau(x) - \psi \circ \tau(y)| \\ &= k|x - y|, \end{aligned}$$

y $k = 1$, esto es, $\psi \circ \tau$ es una isometría euclidiana.

Propiedad 5. Sea $\psi \in GM(B^n)$ tal que $\psi(\infty) \neq \infty$, supóngase que $\psi(x) = A\sigma(x)$ donde σ es la reflexión en una esfera Σ y A es ortogonal, entonces $\Sigma = I(\psi)$. En Σ , σ y A actúan como isometría euclidiana, por lo que esta propiedad es consecuencia de la propiedad 2.

Obsérvese que la propiedad 5 refina el teorema 5.1 a) estableciendo que si σ es la reflexión en la esfera isométrica.

En el modelo de la Bola se probó que si $S(a, r)$ es una esfera ortogonal a $S(0, 1)$ y si ϕ denota la reflexión en $S(a, r)$ entonces

$$\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(0, \phi(0)) = \frac{1}{r},$$

por lo cual si $I(\psi) = S(a, r)$ se tiene que el radio de $I(\psi)$ es

$$\frac{1}{\operatorname{senh} \frac{1}{2} \rho(0, \psi(0))}.$$

Capítulo 5 Modelo del Hiperboloide

Formas y Variedades

Introducimos primero los conceptos de variedad diferencial y de métricas Riemannianas y de 1-formas. Esto es necesario ya que para este modelo no se puede aplicar el método de densidades.

Definición 5.1 Sean $X \subseteq \mathbb{R}^k$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^l$, no necesariamente abiertos y $f: X \rightarrow Y$, se dice que f es C^∞ si $\forall x \in X$ existe un abierto U vecindad de x y una función $F: U \rightarrow \mathbb{R}^l$ de clase C^∞ en U , tal que $F|_{U \cap X} = f|_{U \cap X}$.

Definición 5.2 Sean $X \subseteq \mathbb{R}^k$ y $Y \subseteq \mathbb{R}^l$ y $f: X \rightarrow Y$, donde f es C^∞ , se dice que f es un difeomorfismo si existe $f^{-1}: Y \rightarrow X$, donde f y f^{-1} son C^∞ .

Definición 5.3 Sea $M \subseteq \mathbb{R}^k$, se dice que M es una variedad C^∞ de dimensión m , si $\forall x \in M$ existe una vecindad W de x tal que $W \cap M$ es difeomorfo a un subconjunto abierto de \mathbb{R}^m .

Definición 5.4 Sea $M \subseteq \mathbb{R}^k$, una variedad C^∞ de dimensión m , a cualquier difeomorfismo $g: U \rightarrow W \cap M$ se le llama una parametrización de la región $W \cap M$, a la función inversa $g^{-1}: W \cap M \rightarrow U$, se le llama sistema de coordenadas en $W \cap M$.

Obsérvese que el hiperboloide de un manto descrito por la gráfica de la función:

$$\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \sqrt{1 + \sum_{i=1}^n x_i^2}$$

es una variedad diferenciable, como $\phi(x)$ nunca es cero, ϕ es C^∞ y la proyección natural de \mathbb{R}^{n+1} en \mathbb{R}^n es el inverso de ϕ , o sistema de coordenadas.

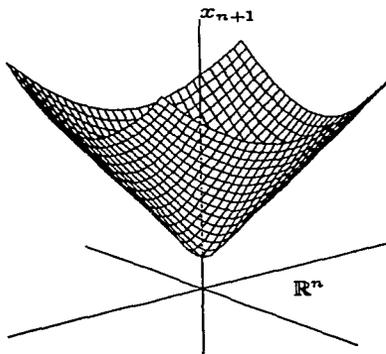


Figura 5.1

Definición 5.5 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y $g : U \rightarrow W \cap M$ una parametrización de una vecindad de $x \in M$, si $g(u) = x$, se define el plano tangente a $x \in M$, denotado por TM_x , como $dg(u)(\mathbb{R}^m)$.

Ahora se probará que el plano tangente no depende de la parametrización.

Sean $h : V \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$ y $g : U \rightarrow M \subset \mathbb{R}^k$ dos parametrizaciones, $v = h^{-1}(x)$ y $u = g^{-1}(x)$, entonces $h^{-1} \circ g$ transforma difeomórficamente una vecindad U_1 de u en una V_1 de v . (figura 5.2).

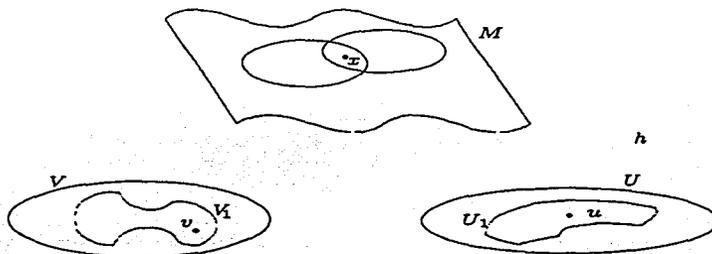


Figura 5.2

Por consiguiente se tiene un diagrama conmutativo de conjuntos abiertos, en el cual las funciones son C^∞ , por lo que se induce de la regla de la cadena otro diagrama conmutativo de transformaciones lineales (figura 5.3).



Figura 5.3

Se tiene que $(h^{-1} \circ g)$ es un difeomorfismo entre abiertos de \mathbb{R}^m entonces $D(h^{-1} \circ g)(u)$ es un isomorfismo lineal y por lo tanto:

$$\text{Im}(dg(u)) = \text{Im}(dh(v)),$$

es decir TM_x no depende de la parametrización.

Proposición 5.6 Sea M una variedad diferenciable de dimensión m y $g: U \rightarrow W \cap M$ una parametrización de una vecindad de $x \in M$, la dimensión del plano tangente TM_x es m .

DEMOSTRACION. Sea $g: U \rightarrow M$ una parametrización tal que $x \in g(U)$, como $g^{-1}: g(U) \rightarrow U$ es C^∞ , existe un abierto $W \subset \mathbb{R}^k$ vecindad de x y $F: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^∞ tal que $F|_{W \cap g(U)} = g^{-1}|_{g(U) \cap W}$. Sea $U_0 = g^{-1}(W \cap g(U))$, se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

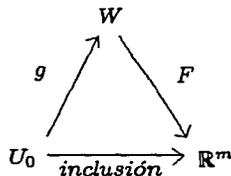


Figura 5.4

Derivando se obtiene otro diagrama conmutativo de transformaciones lineales.

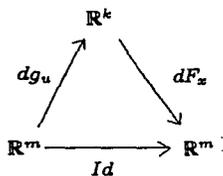


Figura 5.5

Finalmente, el rango de $dg(u)$ debe ser m , de otra manera el diagrama no conmuta. \square

Sean dos variedades $M \subset \mathbb{R}^k$ y $N \subset \mathbb{R}^s$, y $f: M \rightarrow N$ una función C^∞ , se puede probar que si $f(x) = y$ y $F: U \rightarrow \mathbb{R}^s$ es de clase C^∞ y U es una vecindad de $x \in \mathbb{R}^k$ tal que $F|_{U \cap M} = f|_{U \cap M}$, entonces $DF(x)$ transforma TM_x en un subespacio de TN_y y que esta función denotada por $df(x)$ no depende de F , Cf. [2] p.6.

Definición 5.7 Se define una 1-forma en un abierto U en \mathbb{R}^n como una función que a cada $x \in U$ le asocia una función lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} .

Como ejemplo, si $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, la diferencial $df(x)$ se puede pensar como una 1-forma ya que definida como $df(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ y dada por $df(x)(u) = \nabla f(x) \cdot u$ es una función lineal $\forall x \in U$. Otro ejemplo esta dado por las 1-formas canónicas definidas en \mathbb{R}^n , dadas por:

$$dx_j(x)(v) = v_j,$$

como estas no dependen de x , se escribe simplemente $dx_j(v)$ o dx_j .

Definición 5.8 Sea $M \subset \mathbb{R}^k$ una m -variedad C^∞ se define una 1-forma en M como una función g con dominio M y codominio el conjunto de transformaciones lineales de TM_x en los reales, con x variando en M , de tal forma que $g(x)$ es una transformación lineal de TM_x en \mathbb{R} , a la transformación lineal se le denota g_x .

Si se define una topología en el conjunto de los planos tangentes, denominado el haz tangente, se dice que una 1-forma es continua, C^1 , C^∞ , etc.

Definición 5.9 Sea f una función C^∞ entre dos variedades M y N , y w una 1-forma en N , se define el "pull back" de w como una 1-forma en M , denotada por $f^*(w)$, y definida como sigue :

$$(f^*(w))_x(v) = w_{f(x)}(df(x)(v)),$$

donde $x \in M$, $v \in TM_x$.

Métricas Riemannianas

Definición 5.10 Una métrica Riemanniana en una variedad M es una función que a cada $x \in M$ le asocia un producto interno definido positivo en TM_x .

Si $v, w \in TM_x$ se denota por $\langle v, w \rangle_x$ el producto interno de v y w . Esta métrica permite definir longitudes de los vectores en TM_x de la siguiente manera:

$$\|v\| = (\langle v, v \rangle_x)^{1/2}.$$

Más aún, si $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ es una curva C^1 , la métrica Riemanniana permite definir la longitud de γ como

$$l(\gamma) = \int_a^b (\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)})^{1/2} dt,$$

esta observación se extiende a curvas C^1 por tramos.

Por ejemplo en H^2 se define la métrica Riemanniana

$$\langle v, w \rangle_z = \frac{v \cdot w}{(\operatorname{Im} z)^2},$$

y se obtiene la métrica hiperbólica definida anteriormente, ya que si $\gamma : [a, b] \rightarrow H^2$ es de clase C^1 ,

$$\begin{aligned} l_h(\gamma) &= \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im} \gamma(t)} \\ &= \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle_{\gamma(t)} dt. \end{aligned}$$

En general, una métrica Riemanniana induce una métrica en el sentido usual como sigue:

$$\rho(p, q) = \inf_{\gamma} l(\gamma),$$

donde γ es cualquier curva de clase C^1 por tramos que une p con q .

De manera análoga a la discusión de densidades, se siguen directamente las propiedades de una métrica: simetría $\rho(x, x) = 0$, reflexividad $\rho(y, x) = \rho(x, y)$ y desigualdad del triángulo $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$. La única propiedad no trivial de probar es la que establece que si $\rho(x, y) = 0$ entonces $x = y$, una demostración de este hecho se puede consultar en [3] p.p.427-429.

Recordemos que una forma bilineal induce una forma cuadrática y viceversa, por lo que en muchas ocasiones las métricas Riemannianas están dadas en términos de formas cuadráticas.

El Modelo del Hiperboloide

Definición 5.11 Sea $q(x, y)$ la forma cuadrática dada por:

$$q(x, y) = x_0 y_0 - (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n).$$

La ecuación $q(x, y) = 1$ define un hiperboloide de dos mantos en \mathbb{R}^{n+1} .

Trabajaremos con el manto definido por :

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid q(x, x) = 1, x_0 > 0\},$$

que será nuestro tercer modelo del espacio hiperbólico n -dimensional (figura 5.6).

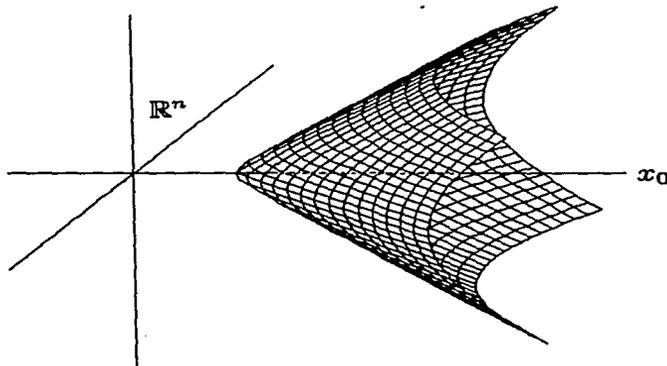


Figura 5.6

Definiremos una métrica en Q , sea γ una curva lisa en Q , $\gamma : [a, b] \rightarrow Q$, $\gamma(t) = (\gamma_0(t), \dots, \gamma_n(t))$, entonces

$$\gamma_0^2(t) = \sum_{i=1}^n \gamma_i^2(t) + 1,$$

derivando

$$\begin{aligned} \gamma_0(t)\gamma_0'(t) &= \sum_{i=1}^n \gamma_i(t)\gamma_i'(t)dt, \\ \gamma_0'(t) &= \frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i(t)\gamma_i'(t)dt}{\gamma_0(t)}. \end{aligned}$$

Usando esta identidad se tiene:

$$\begin{aligned} q(\gamma_0'(t), \gamma_0'(t)) &= \gamma_0'^2(t) - \sum_{i=1}^n \gamma_i'^2(t) \\ &= \frac{\left[\sum_{i=1}^n \gamma_i(t)\gamma_i'(t) \right]^2}{\gamma_0^2(t)} - \sum_{i=1}^n \gamma_i'^2(t) \\ &\leq \frac{\left[\sum_{i=1}^n \gamma_i^2(t) \right]^2 \left[\sum_{j=1}^n \gamma_j'^2(t) \right]}{\gamma_0^2(t)} - \sum_{i=1}^n \gamma_i'^2(t) \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i'^2(t) \left(\frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i^2(t)}{\gamma_0^2(t)} - 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \gamma_i'^2(t) \left(\frac{-1}{\gamma_0^2(t)} \right) \\ &= - \left(\frac{\sum_{i=1}^n \gamma_i'^2(t)}{\gamma_0^2(t)} \right) \leq 0. \end{aligned}$$

Se sigue entonces que puede definirse una métrica Riemanniana en Q de la siguiente manera: Si $v, w \in TQ_x$

$$\langle v, w \rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i w_i - v_0 w_0}$$

donde $v = (v_0, \dots, v_n)$ y $w = (w_0, \dots, w_n)$.

Esta métrica Riemanniana puede expresarse en términos de las 1 -formas canónicas como

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_0^2} ,$$

o

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n dx_i^2 - dx_0^2 ,$$

a la expresión ds se le llama elemento de línea.

Ahora se demostrará que el modelo del hiperboloide es isométrico a los dos ya expuestos. Primero se exhibirá una función que transforma difeomórficamente el modelo del hiperboloide en la bola unitaria.

La función que se busca esta formada por dos transformaciones, primero se considera un corte del hiperboloide con altura x_0 , lo cual determina una $n-1$ esfera en \mathbb{R}^{n+1} de radio $\sqrt{x_0^2 - 1}$, la primera transformación consiste en proyectarla al plano $x_0 = 0$, la segunda transformación envía esta esfera dentro de la bola unitaria, mediante la homotecia $y = \frac{x}{1+x_0}$. (figura 5.7).

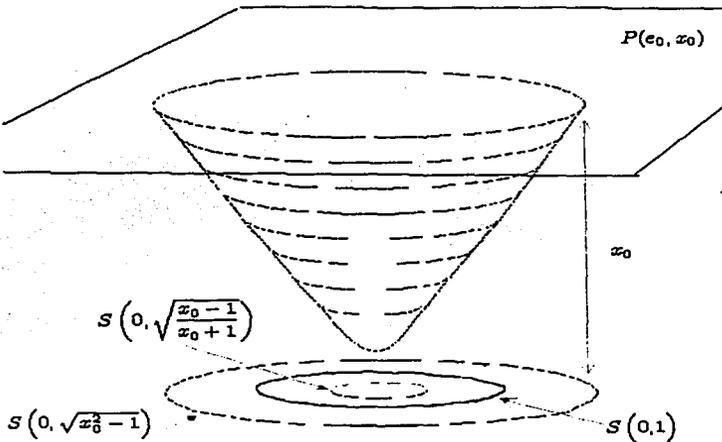


Figura 5.7

Teorema 5.12 Sea $F : Q \rightarrow B^n$ dado por

$$(5.1) \quad F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \dots, \frac{x_n}{1+x_0} \right)$$

entonces F es un difeomorfismo C^∞ .

DEMOSTRACIÓN. Usando la observación previa al teorema, se tiene que cada $x_0 > 1$ constante, determina un corte transversal al hiperboloide que es una $n-1$ esfera, por lo cual se sigue que si $x_0 \neq x'_0$, $x_0, x'_0 > 1$, las $(n-1)$ esferas correspondientes se transforman en esferas con centro en el origen y radios $\sqrt{\frac{x_0-1}{x_0+1}}$ y $\sqrt{\frac{x'_0-1}{x'_0+1}}$ respectivamente.

En consecuencia F es inyectiva ya que si $x_0 = x'_0$ y $F(x_0, \dots, x_n) = F(x'_0, \dots, x'_n)$ se sigue de (5.1) que $x_i = x'_i \forall i$.

La transformación F es la composición de dos funciones: la proyección en el plano $x_0 = 0$ dada por $\Pi(x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$, seguida de la contracción $H(\bar{x}) \rightarrow \frac{\bar{x}}{1+x_0}$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$.

Dado x_0 constante con $x_0 > 1$, el hiperboloide intersectado con el plano $P(e_0, x_0)$ es una n -esfera con centro en $x_0 e_0$ en \mathbb{R}^{n+1} , determinada por la ecuación:

$$(5.2) \quad x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = x_0^2 - 1$$

Aplicando Π a la esfera (5.2), se tiene una esfera de radio $x_0^2 - 1$ en \mathbb{R}^n y con centro en el origen, aplicando la homotecia $H(x) = y = \frac{x}{1+x_0}$ a esta esfera se tiene que su imagen es la esfera en \mathbb{R}^n dada por la ecuación

$$\begin{aligned} y_1^2 + \dots + y_n^2 &= \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{(1+x_0)^2} \\ &= \frac{x_0^2 - 1}{(1+x_0)^2} \\ &= \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1}, \end{aligned}$$

por lo que la imagen de la esfera (5.2) bajo $H \circ \Pi$ es:

$$(5.3) \quad S \left(0, \sqrt{\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1}} \right).$$

Obsérvese que como $x_0 \geq 1$, entonces $0 \leq \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} < 1$ y $\frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} \rightarrow 1$ cuando $x_0 \rightarrow \infty$. Como la función $t \rightarrow \frac{t-1}{t+1}$ es un difeomorfismo de $[1, \infty)$ en $[0, 1)$, y $F(e_0) = 0$, se sigue que F es inyectiva.

Ahora debe probarse que la inversa es una función suave, para deducir la inversa se tiene:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} &= |y|^2, \\ x_0 - 1 &= |y|^2 (x_0 + 1), \\ x_0(1 - |y|^2) &= |y|^2 + 1, \end{aligned}$$

por lo tanto $x_0 = \frac{1 + |y|^2}{1 - |y|^2}$ y $1 - |y|^2 = \frac{2}{1 + x_0}$.

Despejando se obtiene la inversa:

$$(5.5) \quad g(y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{1 + |y|^2}{1 - |y|^2}, \frac{2y_1}{1 - |y|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 - |y|^2} \right),$$

obsérvese que g es inversa izquierda de F , usando (5.4) se tiene:

$$\begin{aligned} &g \circ F(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ &= g\left(\frac{x_1}{1 + x_0}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_0}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{2x_0}{1 + x_0}}{\frac{1 + x_0}{2}}, \frac{\frac{2x_1}{1 + x_0}}{\frac{1 + x_0}{2}}, \dots, \frac{\frac{2x_n}{1 + x_0}}{\frac{1 + x_0}{2}} \right) \\ &= (x_0, x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

es decir, $g \circ F = I_Q$, y entonces g es inyectiva.

Por lo anterior, se observa que F y g son inyectivas y por lo tanto se tiene una biyección. Finalmente F es de clase C^∞ en una vecindad de Q y g en B^n , ya que $1 + x_0 \neq 0$ para todo $x \in Q$ y $1 - |y|^2 \neq 0$ para todo $y \in B^n$. Entonces se tiene un difeomorfismo entre variedades C^∞ , dados por un solo sistema de coordenadas $F: Q \rightarrow B^n$ y parametrización $g: B^n \rightarrow Q$. \square

Teorema 5.13 La función $F: Q \rightarrow B^n$

$$F(x_0, x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{1 + x_0}, \dots, \frac{x_n}{1 + x_0} \right)$$

es una isometría.

DEMOSTRACION. Obsérvese que

$$DF = \begin{pmatrix} \frac{-x_1}{(1+x_0)^2} & \frac{1}{1+x_0} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{-x_2}{(1+x_0)^2} & 0 & \frac{1}{1+x_0} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{-x_n}{(1+x_0)^2} & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{1+x_0} & 0 \end{pmatrix}$$

entonces:

$$\begin{aligned} (f^* dy_j)_x v &= (dy_j)_{f(x)}(df(x)(v)) \\ &= dy_j df(x)v \\ &= df_j(x)(v) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) v_i \\ &= \frac{-x_j}{(1+x_0)^2} v_0 + \frac{1}{1+x_0} v_j \\ &= \frac{-x_j}{(1+x_0)^2} dx_0 + \frac{dx_j(v)}{1+x_0} \end{aligned}$$

Se afirma que para llegar al resultado basta probar que para todo $x \in Q$ se tiene que si $f(x) = y$ entonces

$$(5.6) \quad \frac{4(f^* dy_i)^2 + \dots + (f^* dy_n)^2}{(1-|y|^2)^2} = \sum_{j=1}^n dx_j^2 - dx_0^2.$$

Para probar esto sean $z, w \in Q$ y $\gamma: [a, b] \rightarrow Q$, γ una curva de clase C^1 tal que $\gamma(a) = z$ y $\gamma(b) = w$. Se demostrará que $l_h^Q(\gamma) = l_h^B(F(\gamma))$:

$$\begin{aligned} l_h^B(F \circ \gamma) &= \int_a^b \frac{2|(F \circ \gamma)'(t)|}{1-|(F \circ \gamma)(t)|^2} dt \\ &= \int_a^b \frac{2|DF(\gamma(t))\gamma'(t)|}{1-|(F \circ \gamma)(t)|^2} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \sqrt{\frac{4 \sum_{i=1}^n [dF_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)]^2}{1 - |(F \circ \gamma)(t)|^2}} dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\frac{4 \sum_{i=1}^n [(F^* d\gamma_i)_{\gamma(t)} \cdot (\gamma'(t))]^2}{1 - |(F \circ \gamma)(t)|^2}} dt
\end{aligned}$$

aplicando la afirmación

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b \sqrt{\sum_{i=1}^n [(dx_i)_{\gamma(t)} \cdot (\gamma'(t))]^2 - [(dx_0)_{\gamma(t)} \cdot (\gamma'(t))]^2} dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\sum_{j=1}^n (\gamma'_j(t))^2 - (\gamma'_0(t))^2} dt \\
&= l_h^Q(\gamma) \quad \square
\end{aligned}$$

Ahora se demuestra la afirmación (5.6).

Se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{4 \sum_{i=1}^n [(f^* dy_i)_x(v)]^2}{(1 - |y|^2)^2} &= \frac{4 \sum_{i=1}^n \left[\frac{(dx_i)_x(v)}{1 + x_0} - \frac{x_i (dx_0)_x(v)}{(1 + x_0)^2} \right]^2}{\left(\frac{2}{x_0 + 1} \right)^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \left[dx_i(v) - \frac{x_i dx_0(v)}{1 + x_0} \right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \left[(dx_i(v))^2 - \frac{2x_i}{1 + x_0} dx_i(v) dx_0(v) + \frac{x_i^2 (dx_0(v))^2}{(1 + x_0)^2} \right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^n (dx_i(v))^2 - \frac{2dx_0(v)}{1 + x_0} \sum_{i=1}^n x_i dx_i(v) + \frac{x_0^2 - 1}{(1 + x_0)^2} (dx_0(v))^2,
\end{aligned}$$

por lo que basta probar que

$$-\frac{2dx_0(v)}{1 + x_0} \sum_{i=1}^n x_i dx_i(v) + \frac{x_0^2 - 1}{(1 + x_0)^2} (dx_0(v))^2 = -(dx_0(v))^2.$$

Obsérvese que si dos funciones f_1, f_2 diferenciables en una variedad diferenciable U son tales que

$$f_1|_U = f_2|_U$$

se sigue que $df_1|_U = df_2|_U$, entonces se tiene también que

$$d(x_0^2 - 1) = d\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right) = 2 \sum_{i=1}^n x_i dx_i$$

por lo que

$$\begin{aligned} & -\frac{(dx_0)_x(v)}{1+x_0} d(x_0^2 - 1)_x(v) + \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} ((dx_0)_x(v))^2 \\ &= \frac{-dx_0(v)}{1+x_0} 2dx_0(v)(x_0) + \frac{x_0 - 1}{x_0 + 1} (dx_0(v))^2 \\ &= -(dx_0(v))^2 \quad \square \end{aligned}$$

Definición 5.14 Sea A una región y $\phi : A \subseteq H^n \rightarrow H^n$ una función diferenciable, se dice que ϕ es una isometría hiperbólica si para todo $x, y \in H^n$ se cumple que $l_h(x, y) = l_h(\phi(x), \phi(y))$. De manera análoga se define para funciones de B^n en B^n .

Teorema 5.15 Sea $\phi : B^n \rightarrow B^n$ una isometría hiperbólica, entonces $\phi \in GM(B^n)$.

DEMOSTRACION. Se puede suponer que $\phi(0) = 0$, ya que si $\phi(0) = a$, usando $f \in GM(B^n)$ tal que $f(a) = 0$, se tiene que $f \circ \phi(0) = 0$ y si $f \circ \phi \in GM(B^n)$ entonces $\phi \in GM(B^n)$ (Cf. Teorema 3.6).

Ahora probamos que $D\phi(0) \in O(n)$, por ser ϕ diferenciable se tiene que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\phi(0+h) - \phi(0)| - |D\phi(0)h|}{|h|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\phi(0+h) - D\phi(0)h|}{|h|} = 0.$$

Dado que

$$\frac{|\phi(h)|}{|h|} = 1 \quad \forall h \in B^n$$

y

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \left| \frac{\phi(h)}{h} \right| - \left| \frac{D\phi(0)h}{h} \right| \right| = 0$$

se obtiene

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{|D\phi(0)h|}{|h|} \right| = 1,$$

tomando $h = tv$, $|v| = 1$

$$\left| \frac{D\phi(0)(tv)}{|tv|} \right| = |D\phi(0)v|,$$

es decir $\forall v \in S^{n-1} \quad |D\phi(0)v| = 1$, por lo cual $D\phi(0) \in O(n)$.

Como las esferas euclidianas de radio < 1 y con centro en el origen equidistan hiperbólicamente del origen, ϕ preserva estas esferas, en consecuencia se tiene que $D\phi(0)$ preserva la longitud de todo vector tangente. Si denotamos por $g(u)$ a $(D\phi(0))^{-1}(u)$ entonces se tiene por la regla de la cadena que

$$D(g \circ \phi)(0) = Id,$$

ya que

$$Dg(\phi(0))D\phi(0) = g \circ g^{-1} = Id$$

y se tiene que $g \circ \phi$ preserva toda esfera concéntrica al origen y preserva todo rayo por el origen, por lo que

$$g \circ \phi = Id \quad \text{y} \quad \phi \in GM(B^n).$$

Esta última afirmación se sigue ya que al ser $g \circ \phi$ una isometría, manda diámetros en diámetros, si $g \circ \phi(x) = y$, x, y hiperbólicamente equidistantes del origen y $x \neq y$, entonces se tendría que $D(g \circ \phi)(0) \neq Id$ (ver figura 5.8). \square

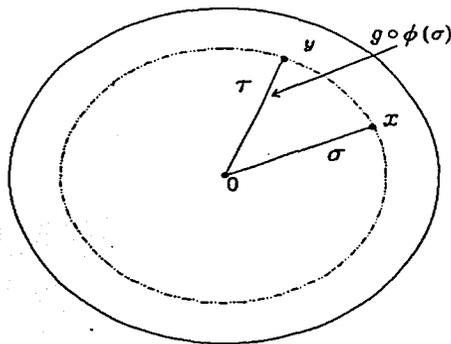


Figura 5.8

Denotamos por $G(Q)$ el grupo de isometrías de Q , por los resultados anteriores se concluye que $G(Q)$ es conjugado e isomorfo a $GM(B^n)$ ya que si $\phi \in GM(B^n)$, entonces $F^{-1} \circ \phi \circ F \in G(Q)$ y viceversa ya que F es una isometría.

A continuación se da una caracterización de $G(Q)$, pero primero se necesita un resultado.

Definición 5.16 Sea $O(1, n)$ el grupo de matrices $(n+1) \times (n+1)$ cuya acción por la derecha en \mathbb{R}^{n+1} es invariante bajo la forma cuadrática $q(x, x) = x_0^2 - \sum_{i=1}^n x_i^2$, es decir, si $A \in O(1, n)$, entonces $q(xA, xA) = q(x, x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$. A este grupo se le llama el grupo de Lorentz.

Lema 5.17 Sea $A \in O(1, n)$, $\psi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $\psi(x) = xA$, supóngase también que $F: Q \rightarrow B^n$ es como en el teorema 5.13 y

$$F \circ \psi \circ F^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (w_1, w_2, \dots, w_n),$$

entonces $\forall j$

$$w_j = \frac{(1 + |y|^2) a_{0j} + 2(y_1 a_{1j} + \dots + y_n a_{nj})}{|y|^2 (a_{00} - 1) + 2(y_1 a_{10} + \dots + y_n a_{n0}) + (a_{00} + 1)},$$

donde $A = (a_{ij})$.

DEMOSTRACION. Sean

$$\begin{aligned} F^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) &= (u_0, u_1, \dots, u_n), \\ \psi(u_0, u_1, \dots, u_n) &= (v_0, v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

y

$$F(v_0, v_1, \dots, v_n) = (w_1, w_2, \dots, w_n).$$

Como $(v_0, v_1, \dots, v_n) = (u_0, u_1, \dots, u_n)A$, para toda j se tiene que

$$v_j = u_0 a_{0j} + \dots + u_n a_{nj},$$

también

$$F^{-1}(y) = \left(\frac{1 + |y|^2}{1 - |y|^2}, \frac{2y_1}{1 - |y|^2}, \dots, \frac{2y_n}{1 - |y|^2} \right) = (u_0, u_1, \dots, u_n),$$

por lo que

$$(1 - |y|^2) v_j = ((1 + |y|^2) a_{0j} + 2(y_1 a_{1j} + \dots + y_n a_{nj})).$$

Finalmente se sigue de la definición de F que

$$\begin{aligned} w_j &= \frac{v_j}{1 + v_0} = \frac{(1 - |y|^2) v_j}{1 - |y|^2 + (1 - |y|^2) v_0} \\ &= \frac{(1 + |y|^2) a_{0j} + 2 \sum_{i=1}^n y_i a_{ij}}{1 - |y|^2 + (1 + |y|^2) a_{00} + 2 \sum_{i=1}^n y_i a_{i0}}. \quad \square \end{aligned}$$

Teorema 5.18 El grupo de isometrías del hiperboloide Q consiste de las transformaciones determinadas por el grupo de Lorentz $O(1, n)$ que no intercambian los mantos del hiperboloide $q(x, x) = 1$.

DEMOSTRACION. Sea $A \in O(1, n)$ y $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $\psi(x) = xA$, tal que $\psi(Q) = Q$ y γ una curva de clase C^1 en Q , entonces

$$q((\gamma'(t))A, (\gamma'(t))A) = q(\gamma'(t), \gamma'(t))$$

y como A es lineal $\psi'(x) = \psi(x)$, ahora

$$\begin{aligned} q((\psi \circ \gamma)'(t), (\psi \circ \gamma)'(t)) &= q(\psi'(\gamma(t))\gamma'(t), \psi'(\gamma(t))\gamma'(t)) \\ &= q(\psi(\gamma'(t)), \psi(\gamma'(t))) \\ &= q(\gamma'(t)A, \gamma'(t)A) \\ &= q(\gamma'(t), \gamma'(t)), \end{aligned}$$

por lo cual

$$l_h(\psi \circ \gamma) = l_h(\gamma)$$

y por lo tanto ψ es una isometría de Q .

Este argumento se generaliza a curvas C^1 por tramos, por lo que dicho subgrupo de $O(1, n)$ consiste de isometrías, viceversa, se probará que toda isometría es de esa forma y que el grupo de isometrías hiperbólicas en el hiperboloide es conjugado al grupo de isometrías de la bola.

Como las isometrías de B^n pertenecen al grupo de Möbius y son de la forma $x \rightarrow T \circ \sigma(x)$, donde $T \in O(n)$, y σ es la reflexión en la esfera isométrica (Cf. Teorema 4.1), basta probar que

$$F^{-1} \circ T \circ \sigma \circ F = (F^{-1} \circ T \circ F) \circ (F^{-1} \circ \sigma \circ F)$$

es una transformación determinada por $O(1, n)$ que preserva Q , o dicho de otra manera, T y σ son de la forma $F \circ \psi \circ F^{-1}$ donde $\psi(x) = xA$, $A \in O(1, n)$, y $\psi(Q) = Q$.

Primero se demuestra que T es de dicha forma. Sea $A_0 \in O(n)$ tal que $T(x) = xA_0$. Se afirma que si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

y $\psi(x) = xA$, entonces $A \in O(1, n)$, $\psi(Q) = Q$ y $F \circ \psi \circ F^{-1} = T$.

Usando el lema 5.17 se tiene que si $y = (y_1, \dots, y_n) \in B^n$,

$$[F \circ \psi \circ F^{-1}(y_1, \dots, y_n)]_j = w_j = \frac{(1 + |y|^2) a_{0j} + 2 \sum_{i=1}^n y_i a_{ij}}{1 - |y|^2 + (1 + |y|^2) a_{00} + 2 \sum_{i=1}^n y_i a_{i0}},$$

como $a_{0j} = 0$ si $j \neq 0$ y $a_{00} = 1$,

$$\begin{aligned} F \circ \psi \circ F^{-1}(y) &= \left(\frac{2 \sum_{k=1}^n y_k a_{k1}}{2}, \dots, \frac{2 \sum_{k=1}^n y_k a_{kn}}{2} \right) \\ &= yA_0 = T(y). \end{aligned}$$

Ahora, si $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$,

$$\begin{aligned} q(xA, xA) &= [(xA)_0]^2 - \sum_{j=1}^n [(xA)_j]^2 \\ &= x_0^2 - \sum_{j=1}^n (x_0 a_{j0})^2 \end{aligned}$$

donde $\hat{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Como $A_0 \in O(n)$, entonces $\hat{x}A \cdot \hat{x}A = \hat{x} \cdot \hat{x}$ y además $\hat{x} \cdot \hat{x} = x \cdot x$, entonces

$$\begin{aligned} q(xA, xA) &= x_0^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 \\ &= q(x, x). \end{aligned}$$

Finalmente ψ preserva Q y como la primer entrada de $xA = (x_0, \dots)$, entonces preserva los mantos de hiperboloide.

Probamos ahora que si σ es la reflexión en una esfera $S(\alpha, \tau)$ ortogonal a $S(0, 1)$, entonces σ es de la forma $F \circ \psi \circ F^{-1}$ donde $\psi(x) = xA$, $A \in O(1, n)$, y $\psi(Q) = Q$.

Como σ es una reflexión en una esfera ortogonal a $S(0, 1)$, se puede suponer que $\alpha = (s, 0, \dots, 0)$, ya que si g es una transformación que manda α en $(s, 0, \dots, 0)$ dada por xB con $B \in O(n)$ y τ es la reflexión en la nueva esfera con centro en $(s, 0, \dots, 0)$, y se demuestra que $\tau(x) = F \circ \psi' \circ F^{-1}$, donde $\psi'(x) = xA'$, $A' \in O(1, n)$, y $\psi'(Q) = Q$, entonces como $\sigma(x) = g \circ \tau \circ g^{-1}$, donde $g(x) = xB$, se tiene por la primera parte, que σ es de la forma (Cf. Teorema 4.1)

$$\sigma = F \circ \psi \circ F^{-1} \circ F \circ \psi' \circ F^{-1} \circ F \circ \psi^{-1} \circ F^{-1},$$

esto es

$$\sigma = F \circ \psi \circ \psi' \circ \psi^{-1} \circ F^{-1},$$

donde ψ esta determinado por la g como en la primera parte. Obsérvese que ψ tiene inversa ya que g la tiene, si ψ esta determinada por la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in O(1, n)$, entonces ψ^{-1} está determinada por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \in O(1, n)$.

Ahora se introduce un nuevo parámetro

$$\alpha = (c(t), 0, \dots, 0), \quad t \in (0, \infty)$$

donde $c(t) = \frac{\cosh t}{\sinh t} = \coth t$. Obsérvese que la elección del parámetro es correcta ya que el centro de la esfera ortogonal tiene magnitud entre 1 y ∞ y cualquier real en $(1, \infty)$ es de la forma $\frac{\cosh t}{\sinh t}$ con $t \in (0, \infty)$. Esto se sigue ya que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cosh t}{\sinh t} = \infty \quad \text{dado que} \quad \left| \frac{\cosh t}{\sinh t} \right| > \left| \frac{1}{\sinh t} \right|$$

y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\cosh t}{\sinh t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-2t}}{1 - e^{-2t}} = 1,$$

y también como

$$c'(t) = \frac{\sinh^2 t - \cosh^2 t}{\sinh^2 t} = \frac{-1}{\sinh^2 t},$$

$c'(t)$ es decreciente.

Por la ortogonalidad de la esfera con centro en $(c(t), 0, \dots, 0)$ y de radio r se tiene que

$$1 + r^2 = c^2(t),$$

es decir

$$(5.7) \quad r^2 = \frac{\cosh^2 t}{\sinh^2 t} - 1 = \frac{1}{\sinh^2 t}.$$

Bajo esta notación se define

$$P = \begin{pmatrix} \cosh 2t & \sinh 2t & \dots & 0 \\ -\sinh 2t & -\cosh 2t & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

Se afirma que $P \in O(1, n)$ y que si $h(x) = xP$, entonces $F \circ h \circ F^{-1}(x) = \sigma(x) \quad \forall x \in B^n$.

Se demuestra que h preserva la forma cuadrática $q(x, x)$.

$$\begin{aligned}
 q(xP, xP) &= q[(x_0 \cosh 2t - x_1 \sinh 2t, x_0 \sinh 2t - x_1 \cosh 2t, x_2, \dots, x_n), \\
 &\quad (x_0 \cosh 2t - x_1 \sinh 2t, x_0 \sinh 2t - x_1 \cosh 2t, x_2, \dots, x_n)] \\
 &= (x_0 \cosh 2t - x_1 \sinh 2t)^2 - (x_0 \sinh 2t - x_1 \cosh 2t)^2 - \sum_{j=2}^n x_j^2 \\
 &= x_0^2 \cosh^2 2t + x_1^2 \sinh^2 2t - 2x_0 x_1 \cosh 2t \cdot \sinh 2t - \\
 &\quad - x_0^2 \sinh^2 2t - x_1^2 \cosh^2 2t + 2x_0 x_1 \sinh 2t \cdot \cosh 2t - \\
 &\quad - \sum_{j=2}^n x_j^2 \\
 &= x_0^2 (\cosh^2 2t - \sinh^2 2t) - x_1^2 (\cosh^2 2t - \sinh^2 2t) - \sum_{j=2}^n x_j^2 \\
 &= q(x, x) .
 \end{aligned}$$

y por lo tanto preserva la forma cuadrática.

Finalmente se demuestra que $F^{-1} \circ h \circ F = \sigma$, para esto se utilizarán las siguientes identidades:

$$(5.8) \quad 2 \sinh^2 t = \cosh 2t - 1 ,$$

$$(5.9) \quad \sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t ,$$

$$(5.10) \quad 2 \cosh^2 t = \cosh 2t + 1 ,$$

Por el lema 5.17, si $F \circ \psi \circ F^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, entonces $\forall j$

$$w_j = \frac{(1 + |y|^2) a_{0j} + 2(y_1 a_{1j} + \dots + y_n a_{nj})}{|y|^2 (a_{00} - 1) + 2(y_1 a_{10} + \dots + y_n a_{n0}) + (a_{00} + 1)} .$$

Obsérvese que como

$$2(y_1 a_{10} + \dots + y_n a_{n0}) = 2y_1 (-\sinh 2t),$$

el denominador de w_j es

$$= |y|^2 (\cosh 2t - 1) + 2y_1 (-\sinh 2t) + (\cosh 2t + 1) .$$

Usando (5.8) , (5.9) y (5.10) se tiene que este denominador está dado por

$$\begin{aligned}
& |y|^2 2\operatorname{senh}^2 t - 4y_1 \cosh t \operatorname{senh} t + 2\cosh^2 t \\
= & \left(2 \sum_{j=1}^n y_j^2 \right) \operatorname{senh}^2 t - 4y_1 c(t) \operatorname{senh}^2 t + 2\cosh^2 t \\
= & 2\operatorname{senh}^2 t \left[\sum_{j=2}^n y_j^2 + y_1^2 - 2y_1 c(t) + c^2(t) \right] \\
= & 2\operatorname{senh}^2 t \left[(y_1 - c(t))^2 + \sum_{j=2}^n y_j^2 \right] \\
= & 2\operatorname{senh}^2 t |y - \alpha|^2 .
\end{aligned}$$

Ahora usando (5.7) el denominador de w_j es

$$= \frac{2|y - \alpha|^2}{r^2} .$$

En consecuencia si $j > 2$

$$\begin{aligned}
(5.12) \quad w_j &= \frac{r^2}{2|y - \alpha|^2} 2y_j a_{jj} \\
&= \frac{y_j r^2}{|y - \alpha|^2} ,
\end{aligned}$$

y para $j = 1$

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{(1 + |y|^2) a_{00} + 2y_1 a_{11}}{2|y - \alpha|^2 \operatorname{senh}^2 t} \\
&= \frac{(1 + |y|^2) \operatorname{senh} 2t - 2y_1 \cosh 2t}{2|y - \alpha|^2 \operatorname{senh}^2 t} \\
&= \frac{(1 + |y|^2) (2\operatorname{senh} t \cosh t) - 2y_1 (2 \cosh^2 t - 1)}{2|y - \alpha|^2 \operatorname{senh}^2 t} .
\end{aligned}$$

Si denotamos $\operatorname{senh} t = u$, y $\cosh t = v$, se tiene que $r^2 = \frac{1}{u^2}$, y sustituyendo $|y|^2$ por $|y - \alpha|^2$ con el objeto de homologar numerador y denominador, se tiene que como $|y - \alpha|^2 = |y|^2 + |\alpha|^2 - 2y \cdot \alpha$

$$\begin{aligned}
w_1 &= \frac{2uv(1 + |y - \alpha|^2 + 2y \cdot \alpha - |\alpha|^2) - 2y_1(2v^2 - 1)}{2|y - \alpha|^2 u^2} \\
&= \frac{2uv|y - \alpha|^2 + 2uv + 4uv(y \cdot \alpha) - 2uv|\alpha|^2 - 2y_1(2v^2 - 1)}{2|y - \alpha|^2 u^2} \\
&= \frac{v}{u} + \frac{r^2}{|y - \alpha|^2} \left[uv + 2uv(y \cdot \alpha) - uv|\alpha|^2 - y_1(2v^2 - 1) \right] \\
&= \frac{v}{u} + \frac{r^2}{|y - \alpha|^2} \left[uv + 2uvy_1 \frac{v}{u} - uv \frac{v^2}{u^2} + y_1 - 2y_1v^2 \right] \\
&= \frac{v}{u} + \frac{r^2}{|y - \alpha|^2} \left[y_1 + uv \left(1 - \frac{v^2}{u^2}\right) \right] \\
&= \frac{v}{u} + \frac{r^2}{|y - \alpha|^2} \left[y_1 - \frac{v}{u} \right].
\end{aligned}$$

Se sigue entonces de (5.12) que

$$F \circ \psi \circ F^{-1}(y_1, y_2, \dots, y_n) = \alpha + \frac{r^2}{|y - \alpha|^2} (y - \alpha) = \sigma(y_1, y_2, \dots, y_n)$$

donde σ es la reflexión en la esfera $S(a, r)$. \square

Es importante mencionar que en el libro de Alan Beardon[1] se menciona que las isometrías de Q son exactamente las matrices de $(n+1) \times (n+1)$ que preservan la forma cuadrática $q(x, x)$ y el semiespacio definido por $x_0 > 0$, es decir, a diferencia de las hipótesis dadas para el teorema 5.18, Beardon establece como condición necesaria que ambos semiespacios se preserven. Sin embargo esto es falso, ya que dada cualquier isometría $P \in O(1, n)$

$$P = \begin{pmatrix} \cosh 2t & \sinh 2t & \cdots & 0 \\ -\sinh 2t & -\cosh 2t & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

ya $h: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ definido como $h(x) = xP$, si se toma el parámetro t fijo (como en la prueba del teorema 5.18), y $x_0 > 0$ fija, entonces es posible encontrar un elemento $\tilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ en el semiespacio superior, tal que $h(\tilde{x})$ se encuentre en el semiespacio inferior. Se tiene que

$$\begin{aligned}
[\tilde{x}P]_0 &= x_0 \cosh 2t - x_1 \sinh 2t < 0 \\
&\Leftrightarrow \\
x_1 &> x_0 \frac{\cosh 2t}{\sinh 2t}
\end{aligned}$$

lo cual siempre se puede lograr con x_0 y t fijas.

Lema 5.19 Sea $A \in O(1, n)$, y

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & -I_n & \\ 0 & & \end{pmatrix},$$

entonces $AJA^t = J$.

DEMOSTRACION. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & & \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} AJA^t &= \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{10} & a_{11} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n0} & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & -I_n & \\ 0 & & \end{pmatrix} A^t \\ &= \begin{pmatrix} a_{00} & -a_{01} & \dots & -a_{0n} \\ a_{10} & -a_{11} & & -a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n0} & -a_{n1} & \dots & -a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{10} & \dots & a_{1n} \\ a_{01} & a_{11} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{0n} & & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} q(e_0A, e_0A) & q(e_0A, e_1A) & \dots & q(e_0A, e_nA) \\ q(e_1A, e_0A) & q(e_1A, e_1A) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ q(e_nA, e_0A) & & \dots & q(e_nA, e_nA) \end{pmatrix} = J. \end{aligned}$$

La penúltima igualdad se sigue de que $e_jA = (a_{j0}, \dots, a_{jn})$, y la última igualdad es consecuencia de que A preserva la forma cuadrática y de que

$$q(e_i A, e_j A) = q(e_i, e_j) = \begin{cases} -\delta_{ij} & \text{si } i, j \neq 0 \\ 1 & \text{si } i = j = 0 \end{cases}$$

Se sigue del lema 5.19 que si $A \in O(1, n)$, entonces A tiene inversa ya que

$$(-1)^n \det(A^2) = \det(AJA^t) = \det(J) = (-1)^n$$

es decir, $\det(A^2) = 1$, $\det(A) = \pm 1$. Más aún, si $A \in O(1, n)$ y B es su inversa, entonces B preserva la forma cuadrática $q(x, y)$, dadas $z, w \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que $z = xA$ y $w = yA$, entonces

$$q(z, w) = q(xA, yA) = q(x, y) = q(zB, wB)$$

y por lo tanto $B \in O(1, n)$.

También se tiene que si $A_1, A_2 \in O(1, n)$, $A_1 A_2 \in O(1, n)$, ya que dados $x, y \in \mathbb{R}^{n+1}$, entonces

$$q(xA_1 A_2, yA_1 A_2) = q(xA_1, yA_1) = q(x, y).$$

En consecuencia, $O(1, n)$ es un grupo. Obsérvese que otra forma de demostrar estas propiedades de grupo es a partir de que los elementos en $O(1, n)$ son conjugados a isometrías de la bola.

Se denota por $SO(0, 1)$ al subgrupo de matrices de $O(1, n)$ con determinante 1. A partir del lema 5.19 se obtiene una expresión simple de la inversa de $A \in O(1, n)$

$$A^{-1} = (JAJ)^t = JA^t J,$$

esto se sigue ya que

$$A(JAJ)^t = AJA^t J = JJ = I.$$

Obsérvese que $J \in O(1, n)$, ya que

$$\begin{aligned} & q(xJ, xJ) \\ &= q((x_0, -x_1, \dots, -x_n), (x_0, -x_1, \dots, -x_n)) \\ &= q(x, x), \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned}$$

Definición 5.20 Se denota por $O^+(1, n)$ el subgrupo de matrices de $O(1, n)$ para las cuales $a_{00} > 0$.

Obsérvese que $O^+(1, n)$ es en efecto un subgrupo.

a) Si $A \in O^+(1, n)$, se tiene que $A^{-1} \in O^+(1, n)$, ya que $A^{-1} = (JAJ)^t = JA^t J$

b) Si $A, B \in O^+(1, n)$, y $C = AB$, entonces $C \in O^+(1, n)$. Se tiene que

$$\begin{aligned}
 c_{00} &= a_{00}b_{00} + a_{01}b_{10} + \dots + a_{0n}b_{n0} \\
 &\geq a_{00}b_{00} - |a_{01}b_{10} + \dots + a_{0n}b_{n0}| \\
 (5.13) \quad &\geq a_{00}b_{00} - \left[\left(\sum_{i=1}^n a_{0i}^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_{i0}^2 \right) \right]^{1/2}.
 \end{aligned}$$

Se tiene también que como A y B preservan la forma cuadrática $q(x, x)$

$$q(e_0 A, e_0 A) = 1 = q(e_0 B^t, e_0 B^t)$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
 a_{00}^2 - \sum_{i=1}^n a_{0i}^2 &= 1 \\
 (5.14) \quad b_{00}^2 - \sum_{i=1}^n b_{i0}^2 &= 1
 \end{aligned}$$

Reemplazando estas igualdades en (5.13) se tiene que

$$c_{00} \geq a_{00}b_{00} - [(a_{00}^2 - 1)(b_{00}^2 - 1)]^{1/2} > 0,$$

ya que

$$a_{00}^2 b_{00}^2 \geq (a_{00}^2 - 1)(b_{00}^2 - 1)$$

si y solo si

$$a_{00}^2 + b_{00}^2 \geq 1,$$

y esto es consecuencia de (5.14), ya que éstas igualdades implican que $a_{00} \geq 1$ y $b_{00} \geq 1$.

Estos argumentos muestran también otra forma de definir $O^+(1, n)$, como las matrices $A \in O(1, n)$ tales que $a_{00} \geq 1$, más aún, si $A \in O(1, n)$, $|a_{00}| \geq 1$.

Teorema 5.21 *El grupo de Lorentz, es decir, el grupo de isometrías del hiperboloide Q es precisamente el grupo $O^+(1, n)$.*

DEMOSTRACION. Si $A \in O^+(1, n)$, entonces

$$e_0 A = (a_{00}, a_{01}, \dots, a_{0n})$$

y como $e_0 \in Q$, $e_0 A$ también está en Q , ya que $a_{00} > 0$ y se sigue por conexidad que A es de Lorentz.

Viceversa, si $A \in O(1, n)$ es de Lorentz, se sigue de la demostración del teorema 5.17 que A está generada por matrices del tipo

$$P = \begin{pmatrix} \cosh 2t & \sinh 2t & \cdots & 0 \\ -\sinh 2t & -\cosh 2t & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & I_{n-1} \end{pmatrix} \quad \circ \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A_0 & \\ 0 & & & \end{pmatrix},$$

donde $A \in O(1, n)$, las cuales pertenecen a $O^+(1, n)$, y como el producto de matrices en $O^+(1, n)$ es una matriz también en $O^+(1, n)$ se sigue el resultado. \square

Finalmente, considérese el hiperboloide Q en \mathbb{R}^3 , se afirma que las geodésicas en B^2 corresponden mediante F^{-1} a las intersecciones de Q con planos en \mathbb{R}^3 . Primero para una recta por el origen, digamos $x_1 a_1 + x_2 a_2 = 0$, aplicando

$$F^{-1}((x_1, x_2)) = \left(\frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}, \frac{2x_1}{1 - |x|^2}, \frac{2x_2}{1 - |x|^2} \right),$$

donde $x = (x_1, x_2)$ se sigue que la imagen en Q está contenida en el plano $0 \cdot x_1 + x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = 0$. Viceversa, como

$$F((x_0, x_1, x_2)) = \left(\frac{x_1}{1 + x_0}, \frac{x_2}{1 + x_0} \right)$$

si (x_0, x_1, x_2) pertenece al plano $0 \cdot x_1 + x_1 \cdot a_1 + x_2 \cdot a_2 = 0$ se sigue que $F((x_0, x_1, x_2))$ está contenido en la recta por el origen $x_1 a_1 + x_2 a_2 = 0$.

Las geodésicas que no pasan por el origen en B^2 son de la forma

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 1.$$

Esta ecuación se cumple si y solo si

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - 2x \cdot (a_1, a_2) &= -1, \\ &\Leftrightarrow \\ |x|^2 + 1 &= 2x \cdot (a_1, a_2). \end{aligned}$$

como

$$\begin{aligned} F^{-1}(x_1, x_2) &= \left(\frac{1 + |x|^2}{1 - |x|^2}, \frac{2x_1}{1 - |x|^2}, \frac{2x_2}{1 - |x|^2} \right) \\ &= \frac{1}{1 - |x|^2} (2x \cdot (a_1, a_2), 2x_1, 2x_2), \end{aligned}$$

se sigue que estos puntos están contenidos en el plano

$$P((-1, a_1, a_2), 0) .$$

Viceversa, si $(x_0, x_1, x_2) \in P((-1, a_1, a_2), 0) \cap Q^3$, entonces

$$\begin{aligned} -x_0 + x_1 a_1 + x_2 a_2 &= 0 \text{ y} \\ x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 &= 1, \end{aligned}$$

aplicando

$$F(x_0, x_1, x_2) = \left(\frac{x_1}{1+x_0}, \frac{x_2}{1+x_0} \right),$$

la imagen está contenida en el círculo

$$\begin{aligned} \left(\frac{x_1}{1+x_0} - a_1 \right)^2 + \left(\frac{x_2}{1+x_0} - a_2 \right)^2 &= |a|^2 - 1 \\ \Leftrightarrow \\ \frac{x_1^2}{(1+x_0)^2} - \frac{2x_1 a_1}{1+x_0} + \frac{x_2^2}{(1+x_0)^2} - \frac{2x_2 a_2}{1+x_0} &= -1 \\ \Leftrightarrow \\ \frac{x_0^2 - 1}{(1+x_0)^2} - \frac{2x_0}{1+x_0} &= -1 \\ \Leftrightarrow \\ \frac{x_0 - 1}{1+x_0} + \frac{-2x_0 + 1 + x_0}{1+x_0} &= 0 . \end{aligned}$$

Bibliografia

- [1] A. F. BEARDON, *The Geometry of Discrete Groups*, Cambridge: Springer-Verlag (1983).
- [2] J. MILNOR, *Topology from a differentiable viewpoint*, The University Press of Virginia, Charlottesville. (1965).
- [3] SPIVAK, *Differential Geometry*, Volume I, Publish or Perish(1970).