



00576  
2

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE  
MÉXICO

**PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS  
QUÍMICAS**

**TEMA DE TESIS**

**ANÁLISIS DE DATOS PARA PROCESOS CONTINUOS  
APLICADO AL CASO PARTICULAR DE UN TOKAMAK**

TESIS  
PARA OPTAR POR GRADO DE

**MAESTRO EN CIENCIAS NUCLEARES**

PRESENTA

**OSBALDO FEDERICO RAMÍREZ NORIEGA**

TUTOR

**M. en C. JUAN LARTIGUE GORDILLO**



2002

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN



Universidad Nacional  
Autónoma de México

Dirección General de Bibliotecas de la UNAM

**Biblioteca Central**



**UNAM – Dirección General de Bibliotecas**  
**Tesis Digitales**  
**Restricciones de uso**

**DERECHOS RESERVADOS ©**  
**PROHIBIDA SU REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL**

Todo el material contenido en esta tesis esta protegido por la Ley Federal del Derecho de Autor (LFDA) de los Estados Unidos Mexicanos (México).

El uso de imágenes, fragmentos de videos, y demás material que sea objeto de protección de los derechos de autor, será exclusivamente para fines educativos e informativos y deberá citar la fuente donde la obtuvo mencionando el autor o autores. Cualquier uso distinto como el lucro, reproducción, edición o modificación, será perseguido y sancionado por el respectivo titular de los Derechos de Autor.



OF.CPCQ.1159/02

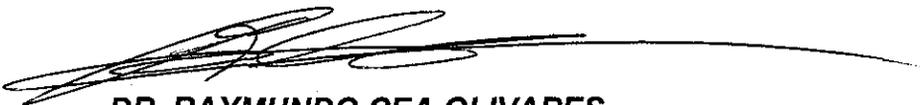
**BIÓL. FRANCISCO INCERA UGALDE**  
Jefe de la Unidad de Administración del Posgrado  
**Presente**

Me es grato informarle que el alumno **OSBALDO FEDERICO RAMÍREZ NORIEGA**, con número de cuenta 63038006 y expediente 100380, presentará su examen para optar por el grado de Maestro en Ciencias Nucleares, quien defenderá el proyecto de investigación titulado "**Análisis de Datos para Procesos Continuos Aplicado al Caso Particular de un Reactor Tokamak**", ante el siguiente jurado:

Presidente	Dr. Sergio Ramos Bernal	Instituto de Ciencias Nucleares
Vocal	Dra. Alicia Negrón Mendoza	Instituto de Ciencias Nucleares
Secretario	Dr. Samuel Roberto Barocio Delgado	ININ
Primer suplente	Dra. Blanca Emma Mendoza Ortega	Instituto de Geofísica
Segundo suplente	Dr. Juan Manuel Navarrete Tejero	Facultad de Química, UNAM

Sin otro particular de momento, aprovecho la ocasión para enviarle un cordial saludo.

Atentamente.  
"POR MI RAZA HABLARÁ EL ESPÍRITU"  
Cd. Universitaria, D.F. a 16 de octubre de 2002.



**DR. RAYMUNDO CEA OLIVARES**  
Coordinador del Programa

c.c.p. Integrantes del Jurado  
Presidente del SAO  
Interesado  
Expediente  
Sección Escolar de la División de Estudios de Posgrado, Facultad de Química.

Nota: Se recuerda a los miembros del jurado que el plazo máximo para revisión de la tesis es de 30 días naturales a partir de la recepción de la misma.

# Índice

	página
<b>Resumen</b> <i>Describe el contenido de la tesis</i>	i
<b>Introducción</b> <i>Algunas interrogantes y especulaciones que motivaron esta tesis</i>	1
<b>Capítulo 1</b> <i>Algunas razones que justifican el continuar investigando en fusión nuclear y la intención de introducir a la Teoría del Caos en esta investigación.</i>	3
<b>Capítulo 2</b> <i>Breve descripción del funcionamiento de un tokamak</i>	10
<b>Capítulo 3</b> <i>Se establecen los objetivos específicos de la tesis</i>	15
<b>Capítulo 4</b> <i>Se desarrolla detalladamente el procedimiento de análisis realizado con los datos obtenidos en el primer experimento</i>	21
<b>Capítulo 5</b> <i>Se desarrolla detalladamente el procedimiento de análisis realizado con los datos obtenidos en el segundo experimento</i>	47
<b>Capítulo 6</b> <i>Se interpretan resultados, se argumentan las razones que motivan las suposiciones y se proponen algunas rutas de investigación</i>	66
<b>Capítulo 7</b> <i>Consideraciones finales y conclusiones</i>	76
<b>Bibliografía</b> <i>Apoyo bibliográfico para desarrollar la tesis, herramientas y bibliografía de complemento</i>	78
<b>Apéndice</b> <i>Contiene algunos de los valores experimentales que se analizaron</i>	80

## Resumen

El Sol es el resultado de una enorme cantidad de reacciones termonucleares que se dan en el seno de la materia que lo compone y esta en estado plasma.

Plasma es el cuarto estado de la materia y tiene, entre otras características, la de estar formado por partículas con carga de un mismo tipo.

Para la investigación experimental en plasmas es necesaria, desde luego, contar con plasma y con la posibilidad de manipularlo. Para tal efecto se han construido diferentes aparatos que permiten estas posibilidades de generación y manipuleo del plasma. Uno de tales aparatos es el tokamak.

Llevar a la materia a su condición de plasma implica someterla a condiciones muy drásticas de temperatura y presión pues únicamente así se logra que las partículas que la constituyen rompan sus asociaciones y alcancen una relativa individualidad que es lo característico del plasma. El tokamak es un dispositivo que permite crear las condiciones que requiere el plasma para su existencia.

Las circunstancias propias del tokamak son muy inestables y por eso, uno de los ideales que se persiguen en la investigación que se realiza en este campo es encontrar la manera de operar a este dispositivo en condiciones de estables lo que, necesariamente implica contar con plasma estable.

Una posibilidad de acercarse a este ideal podría ser que las hipótesis que más adelante se proponen tuvieran validez y que se fundamentan en las implicaciones que tiene la constante de Liapunov.

En otras palabras, cuando un sistema tiene comportamiento periódico los valores que van tomando algunas de las variables que

influyen en este deben mostrar también comportamiento periódico.

Si esto sucede entonces es posible representar, aproximadamente, la conducta de la variable seleccionada mediante una ecuación periódica.

La manera como evoluciona el proceso permite que el resultado de la suma de los logaritmos de las pendientes evaluadas a través de la ecuación antes señalada se mantiene menor que  $-1$ , el sistema evolucionará hasta llegar al equilibrio de acuerdo a lo que propone Liapunov.

Aun en condiciones de muy alta turbulencia hay circunstancias en las cuales la constante de Liapunov continúan cumpliendo la condición de ser menor a  $-1$  y con fundamento en esto surgen las hipótesis que motivan esta tesis:

- ***Es posible encontrar comportamiento periódico en condiciones muy específicas de operación del tokamak en alguna de las variables que influyen en el comportamiento de este y***
- ***Dicho comportamiento evoluciona hacia uno o más atractores***

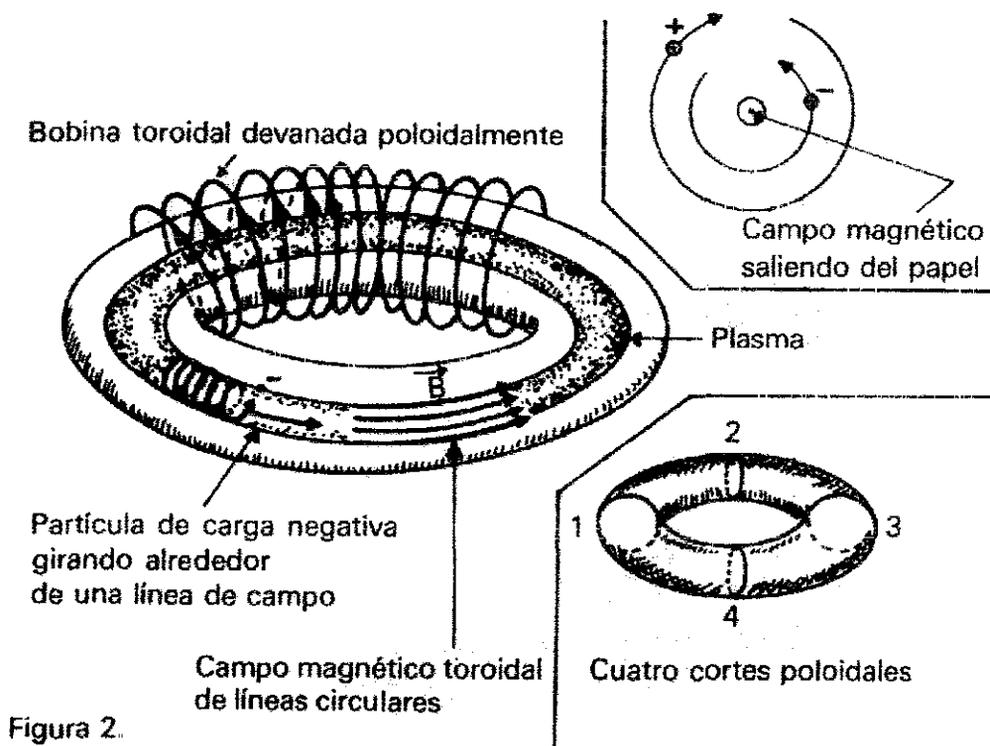
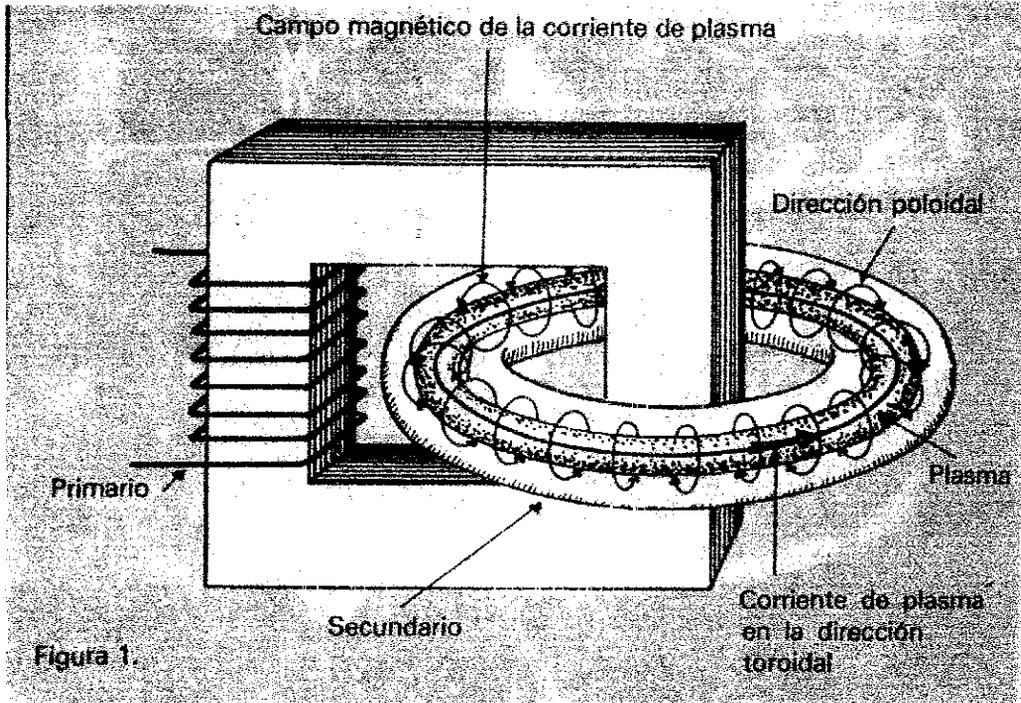
El trabajo efectuado para la realización de esta tesis consistió en analizar dos conjuntos de datos registrados durante la operación menos exigente para el tokamak, como son las descargas de Taylor (de limpieza) para demostrar la veracidad de las hipótesis.

La principal aportación de este trabajo es la propuesta de manejo de los datos que permite extraer mayor información de ellos.

Al revisar el índice de la tesis se puede obtener un panorama de la secuencia seguida en este trabajo.

- En la introducción se busca dar una semblanza de algunas interrogantes que sirvieron como motivadores para el desarrollo de este tema.

- En el capítulo 1 se argumentan razones más pragmáticas para justificar este trabajo.
- En el capítulo 2 y con ayuda de las figuras que se muestran adelante, se busca explicar como funciona el tokamak.
- El capítulo 3 es importante porque se detallan las suposiciones que sirvieron para las hipótesis que se investigaron en este trabajo.
- En los capítulos 4 y 5 se analizan dos conjuntos de datos. Contienen la descripción detallada de la metodología propuesta para el análisis de los datos.
- En el capítulo 7 se hacen las consideraciones finales y se presentan las conclusiones obtenidas.



TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

## Introducción

### *Algunas interrogantes y especulaciones que motivaron esta tesis*

En muchas ocasiones se tiene una solución pero no se cuenta con un problema donde aplicarla. Tal ha sido el caso, por ejemplo, del rayo láser. Se contaba con el rayo mucho antes de haberle encontrado aplicación.

Con la Teoría del Caos ocurre algo parecido. Conceptos novedosos propios de esta teoría, como el fractal, la realimentación o la autosimilitud entre otros están, poco a poco, encontrando aplicación en diferentes campos de la ciencia.

Es posible que la lentitud con que se están aplicando los conceptos propios del Caos al análisis y solución de problemas tenga su origen en las condiciones, tan peculiares, que debe tener la información que sirve de base para la aplicación de dichos conceptos.

La principal especulación que motivó esta tesis consiste en suponer que la adecuación de la información a la Teoría del Caos es posible y el objetivo general de la misma es presentar el procedimiento que se propone para lograr esto.

Los fenómenos en donde la Teoría del Caos puede encontrar aplicación deben tener ciertas características que se van detallando a través de este trabajo.

El comportamiento del plasma y las implicaciones de éste en la reacción de fusión termonuclear representan un muy amplio campo de investigación en donde el procedimiento de adecuación de la información es necesario para permitir la aplicación posterior de los criterios del Caos.

Dada la creciente demanda de energía del género humano, uno de los grandes retos actuales para la ciencia y la tecnología es lograr la realización, en forma controlada y económicamente rentable de alguna de las reacciones de fusión termonuclear.

Se prevé que las reacciones de este tipo se han de desarrollar en circunstancias extremadamente turbulentas y su control implica poder realizarlas en condiciones más estables.

¿Existe contradicción? ¿Es correcto proponer estabilidad cuando se reconoce de antemano su realización en condiciones de extrema turbulencia?

Diferentes criterios teóricos se han utilizado para fundamentar las hipótesis en las que se han basado los diseños y la construcción de los distintos equipos donde se investigan múltiples aspectos relacionados con la fusión termonuclear.

Uno de los criterios más sólidos que han condicionado el diseño de los tokamaks es el criterio de Lawson<sup>1</sup> mientras que, con relación a la estabilidad, destaca el criterio propuesto por Kruskal y Shafranov<sup>2</sup> a través del factor de seguridad. Magníficos avances se han logrado con la implementación de estos pero, desafortunadamente, aún no se ha logrado operación controlada estable indefinidamente.

¿Cómo complementar los conceptos existentes? ¿Se cuenta con otras opciones teóricas donde buscar estabilidad dentro de la turbulencia?

Una opción parece ser el proceso de iteración estudiado, mediante mapas, en la Teoría del Caos<sup>3</sup>. En éste<sup>4</sup>, al desarrollar la iteración de ciertas variables y regulando dicho desarrollo mediante el efecto de diferentes parámetros, se cruza del orden al desorden pasando por zonas de estabilidad. El Caos describe la evolución de la estabilidad a la turbulencia, postula regiones con orden dentro del desorden y describe atractores extraños.

¿El comportamiento teórico observado en el Caos tiene alguna similitud que le permita ser

aplicable en la búsqueda del control de las reacciones de fusión termonuclear<sup>5</sup>? ¿Ocurre algo semejante a lo descrito por el Caos en los sistemas del tokamak o en el plasma que éste genera? ¿Es posible utilizar la información experimental bajo las consideraciones y limitaciones que impone la Teoría del Caos para guiar la investigación por la ruta que conduce a la estabilidad que ésta predice dentro de la turbulencia<sup>6</sup>?

Son muchas las preguntas que se pueden plantear y muy pocas tienen respuesta.

Esta tesis describe los resultados obtenidos en el intento por demostrar la validez de las especulaciones, presentadas a continuación, que se han hecho buscando contribuir con los esfuerzos que se realizan para vencer el reto que representa el control de las reacciones de fusión termonuclear. Estas especulaciones son:

- Es posible encontrar similitud entre la información experimental obtenida en la operación de un tokamak (ver Cap.2) y la información teórica que aporta Caos con relación a la evolución de procesos continuos con realimentación
- Es factible dar a los datos experimentales la estructura que impone Caos.
- Es posible utilizar la información extraída a los datos experimentales para guiar la investigación por la ruta que conduce a la estabilidad predicha por el Caos.

En la medida en que se logre lo anterior se contará con una nueva herramienta que ayude a lograr el objetivo mencionado.

---

#### REFERENCIAS

<sup>1</sup> Miyamoto [1], p. 8.

<sup>2</sup> Hagler y Kristiansen [2] p. 64.

<sup>3</sup> Otero Siliceo Enrique, "Caos versus caos", Revista de la Universidad Nacional Autónoma de México núm.606, p. 46-50 julio de 2001

<sup>4</sup> Ikeda Y. Tokinaga S. "Controlling the chaotic dynamics by using approximated system equations obtained by the genetic programming". Faculty of Economics Shinshu University, Matsumoto-shi 390-8621, Japan. IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences v E84-A n 9. September 2001 p. 2118-2127.

<sup>5</sup> Buchner, T Zebrowski, J.J. "Logistic map with a delayed feedback: Stability of a discrete time-delay control of chaos". Warsaw Univ. of Technology, Warsaw, Pol. Physical Review E. Statistical Physics, Plasmas Fluids, and Related, Interdisciplinary Topics v 63 n 1 II. Jan 2001 p 016210-1-016210-7.

<sup>6</sup> Magnitskii, N.A. "Stabilization of unstable periodic orbits of chaotic maps". Russian Acad. of Science, Moscow, Russia. Computers & Mathematics with Applications v 34 n 2-4. Jul 1997 p 369-372.

## Capítulo 1

*Algunas razones que justifican el continuar investigando en fusión nuclear y la intención de introducir a la Teoría del Caos en esta investigación*

### 1.1.

La población del mundo esta incrementándose en casi 100 millones de personas cada año y este incremento es más significativo en los países pobres.

La calidad de vida esta relacionada con la riqueza de la sociedad y dicha riqueza se genera mediante el uso de la energía para realizar el trabajo.

La búsqueda de energía abundante al servicio de la humanidad es prioridad permanente, sobre todo, si los intentos por disminuir la tasa de natalidad se contrarrestan por el aumento en la esperanza de vida y por el constante aumento en el consumo de energía per capita.

La población esperada para el 2050 será de unos diez mil millones de personas.

El consumo de energía para esas fechas se estima en 278 terawatts hora o su equivalente que es de unos 28,000 metros cúbicos de gasolina por hora.

La hidroelectricidad aportará el doble de su nivel actual si es que se aprovechan todos los sitios propicios para ello, es decir, aproximadamente el 2 por ciento de la demanda futura

El carbón, el petróleo y el gas natural aportarán entre un 50 y un 60 por ciento del consumo mundial.

La biomasa podría aportar hasta un 12 por ciento de la demanda para el año 2050 a condición de que se intensifique la agricultura, el manejo de los bosques y se incremente el uso de fertilizantes<sup>7</sup>.

Tal vez, la aportación de otras energías renovables, aunque poco densas, como la geotérmica, la eólica, la maremotriz o la energía solar llegue a ser significativa pero,

existen muchas probabilidades de que esto no ocurra con lo que su contribución será como hasta ahora: poco relevante.

La energía nuclear tiene buenas posibilidades<sup>8</sup> de participar, como proveedor, en una fracción mucho mayor de la creciente demanda mundial de energía.

Materializar el suministro de energía obtenida en reactores de fisión térmicos, implica varias condiciones y el nivel en que esto se logre dependerá, al menos, de:

- Que la seguridad se incremente.
- Que los costos y tiempo de construcción disminuyan.
- Que los costos de operación bajen.
- Que se cuente con un manejo adecuado de los desechos radiactivos.
- Que se maneje apropiadamente la minería del uranio y torio.
- Que se tenga estricto control sobre el plutonio producido.
- Que se cuente con la tecnología apropiada para el desmantelamiento de los reactores.
- Que se cuente con instalaciones adecuadas para el ciclo de combustible.
- Que se logre reducir los temores infundados de la población con respecto a la industria nuclear<sup>9</sup>.

Dado que el aprovechamiento del uranio en los reactores térmicos es muy bajo, pensar en resolver el suministro de energía con la actual tecnología, resulta aventurado.

El isótopo de uranio 235, que es el sustento del reactor térmico, es relativamente escaso y si se aprovecha este como única fuente de combustible, con los recursos actualmente conocidos, se tendría energía para 25 años. Por fortuna, el potencial aprovechamiento de la energía nuclear no se reduce al reactor térmico operado en las condiciones actuales.

Existe, en primera instancia, la posibilidad de desarrollar los recursos indefinidamente por medio del reciclado del combustible. Se podría reciclar tanto al uranio como al torio (y al plutonio en reactores rápidos).

Una tecnología diferente, la de los reactores de fisión rápidos reproductores o de cría, permite aprovechar todos los isótopos del uranio o del torio con lo que se podría asegurar la disponibilidad de combustible por muchos siglos.

En estas condiciones la energía nuclear sí representa una alternativa que resuelve el reto futuro de abasto energético.

Si la tecnología de reactores rápidos demuestra no ser económica, se prevé una alternativa para la producción de materiales fisionables mediante las reacciones de fragmentación llevadas a cabo en reactores-aceleradores.

Las reacciones de fragmentación utilizan rayos de protones de alta energía (típicos de 1 a 2 gigaelectronvoltios y hasta los 100 miliamperes) para bombardear un blanco de metal pesado, tal como el eutéctico (mezcla cristalográfica con el más bajo punto de fundición) de plomo-bismuto.

Las reacciones de fragmentación producen, al menos, 40 neutrones por colisión de protón y la absorción de estos neutrones en torio producen el uranio fisionable 233 para uso de reactores térmicos convencionales.

Este procedimiento ofrece las ventajas de manejar materiales químicos menos reactivos que el sodio de los reactores rápidos y un montaje subcrítico en lugar de un sistema crítico de neutrones rápidos.

Por una parte, la tecnología de los aceleradores está todavía por desarrollarse y por la otra, la tecnología de reactores de fisión rápidos es poco probable que domine el suministro de energía en los próximos 50 años.

## 1.2.

Existe una posibilidad de solución definitiva al suministro ilimitado de energía: la fusión nuclear.

Esta reacción es más energética, por unidad de masa, que la de fisión: libera casi el doble.

Debido a que la reacción sostenida de fusión, con los equipos actuales, no ha producido una ganancia neta en energía, es improbable que la fusión sea significativa en el mercado de la energía antes de 30 años.

Con los conocimientos disponibles actualmente, parece que el costo de las fuentes de energía competitivas continuarán incrementándose hasta que la fusión pueda ser atractiva económicamente. Es decir, los precios del petróleo o del carbón, incluyendo el costo de eliminar la contaminación que generan, etc. tendrán que incrementarse muy significativamente como para motivar la aportación de recursos que conduzcan a la implementación de la tecnología de la fusión nuclear.

De un modo u otro la humanidad enfrenta un futuro difícil, al menos en lo que toca a la disponibilidad de energía y no se vislumbran otras alternativas viables, diferentes, para superar estas dificultades, que no sean las ya conocidas y que consisten en encontrar y explotar nuevos yacimientos de combustibles tradicionales, sobre todo en el mar o, desarrollar intensamente, la investigación científica y tecnológica para abrir nuevas vías de oportunidad.

La primera alternativa es simplemente paliativa; la segunda es la que ha demostrado ser la alternativa real y permanente para resolver los problemas que ahora o en el futuro enfrente la especie humana.

La investigación avanzada es, cada vez, más cara y en consecuencia, más difícil de realizar sobre todo por los países pobres que son los que, paradójicamente, mayores problemas tienen, más necesitan de los resultados de la investigación y menos pueden desarrollarla.

Parece una mejor alternativa crear un laboratorio mundial sustentado con recursos aportados por todas las naciones del mundo.

La cooperación internacional para el desarrollo del reactor de fusión podría desalentarse ante la lejana perspectiva de

obtener beneficios económicos pero, todo parece indicar que no será así, pues, si bien es cierto que la ciencia y tecnología que se requieren son en extremo desafiantes, también es cierto que el campo de investigación que esta meta representa, ofrece posibilidades de alcances insospechados con beneficios más amplios que los representados por la sola venta de energía

Las investigaciones para lograr un reactor que realice la reacción termonuclear con deuterio y tritio como combustible han progresado durante los últimos cincuenta años y seguramente continuarán.

Cincuenta años de investigación tratando de controlar la reacción termonuclear han originado muchos conocimientos, la construcción de infraestructura impresionante y el desarrollo de recursos humanos muy valiosos. No sería razonable cancelar la línea de investigación y desperdiciar todo lo alcanzado.

El impulsor del proyecto de fusión no es ya, únicamente, la necesidad de desarrollar una fuente de energía más, sino la necesidad humana de extender las fronteras de su conocimiento, de su ciencia y de su tecnología.

Los que investigan y trabajan en las fronteras del conocimiento enfrentan todo tipo de dificultades, siendo una de ellas, el análisis de los datos resultantes que obtienen de sus experimentos.

En los capítulos que siguen se presenta una descripción breve de la manera como trabaja el tokamak, se establecen los objetivos de la tesis, se desarrollan los procedimientos propuestos para el análisis de los datos, se interpretan los resultados y se hacen las consideraciones finales.

### 1.3.

El estudio de los sistemas dinámicos continuos se realiza, típicamente, comenzando con el movimiento de un péndulo sin fricción el cual es un ejemplo de fenómeno continuo y ordenado. Un fenómeno es ordenado si sus variaciones se pueden explicar en un esquema de causa y

efecto representado por una ecuación diferencial lineal.<sup>10</sup>

Las ecuaciones diferenciales que se necesitan para describir al fenómeno expresarán las tasas de cambio o proporciones de variación de las diferentes variables con respecto al tiempo o con respecto a otras variables y serán las expresiones matemáticas de las leyes que rigen a dicho fenómeno.

Si hay dos soluciones particulares a una ecuación diferencial dada y si la suma de los múltiplos de estas soluciones sigue siendo solución de la diferencial, entonces, la ecuación diferencial planteada es de naturaleza lineal y el fenómeno estudiado es ordenado.

El estudio de un fenómeno ordenado se realizará con base en la premisa de que cambios pequeños producen pequeños efectos y los grandes efectos son el resultado de la suma de muchos cambios pequeños.

El péndulo sin fricción es un sistema idealizado que se puede concebir como un sistema cerrado, conservativo o Hamiltoniano y que cumple con las condiciones descritas en el capítulo 2. (sección 2.4.)

Se pueden deducir leyes y hacer predicciones correctas respecto a este móvil suponiendo que no hay fricción, que el campo gravitatorio es constante, que no influyen otros cuerpos, etc. También se pueden hacer predicciones que estén de acuerdo con los resultados experimentales si se minimizan estas influencias o reduciendo el experimento a un solo ciclo.

Un péndulo real no puede cumplir con las condiciones necesarias para constituir un sistema conservativo. Los péndulos reales son sistemas disipativos.

El péndulo real constituye un sistema disipativo que desarrolla un fenómeno armónico de evolución continua.

Los sistemas disipativos tienen comportamiento diferente al caso ideal así, por ejemplo, presentan bifurcaciones en su comportamiento, es decir, pueden encontrar estabilidad en condiciones inesperadas como

puede ser el caso de estabilizarse en dos puntos atractores diferentes, lo cual puede ser el resultado de, que al péndulo se le adapte algún mecanismo que compense su pérdida de energía.

#### 1.4.

Mucho de lo que se puede decir con relación a los sistemas disipativos<sup>11</sup> tiene que ver con la manera como evolucionan al transcurrir el tiempo. En general estos sistemas tienen un régimen de evolución más complicado que el de un simple decaimiento.<sup>12</sup>

El estudio de la evolución de sistemas donde se desarrollan fenómenos continuos en el tiempo tiene otras complicaciones.<sup>13</sup> A medida que el fenómeno se desarrolla en tiempos cada vez mayores se observa que el sistema no es ordenado ni preciso: es inestable.

La causa de esto es que los factores exteriores al sistema y los propios factores interiores influyen y autogeneran condiciones de inestabilidad.

Experimentando con un péndulo real que evolucione libremente, sometido a las influencias propias del ambiente, se observará la disipación de la energía, la inestabilidad del sistema y, probablemente, habrá que aceptar la incapacidad para expresar el comportamiento observado con ecuaciones lineales.

Se observará cómo, en cada ciclo, la iteración irá liberando la complejidad en el comportamiento del sistema y cómo la realimentación de las condiciones iniciales, propias de cada ciclo, irá amplificando su efecto.

Al final, como este móvil constituye un sistema disipativo, el péndulo alcanza su punto de equilibrio o atractor final y se detendrá.

Una manera de conducir la experimentación con el péndulo real consiste en restituir la energía disipada y así mantener las oscilaciones durante el tiempo que se desee. Este es el caso de un péndulo forzado.

La única manera de evitar que un sistema disipativo, como el péndulo, se detenga consiste en introducirle, continuamente, la energía que pierde. Las estructuras disipativas son sistemas capaces de mantener su identidad sólo si permanecen continuamente abiertos a los flujos del ambiente.<sup>14</sup>

La regularidad en el comportamiento del péndulo estará condicionada a la manera y uniformidad como se compensen las pérdidas energéticas. El sistema péndulo tendrá que acoplarse, al menos, con otro sistema externo que es quien le suministrará la energía requerida.

La regularidad del péndulo dependerá de la manera en que ocurra el acoplamiento entre los sistemas interactuantes. La magnitud y frecuencia con la que se suministra la energía podrá mantener, amplificar o interferir la oscilación del péndulo.

De la interacción entre sistemas surge la realimentación.

La realimentación negativa permite regular la conducta del sistema y la positiva amplifica los efectos llevando el sistema al caos.

El que se produzca una u otra forma de realimentación depende de la proporción que guardan las frecuencias de los sistemas acoplados y de la magnitud de la energía involucrada.

Si se aplica un impulso en el momento de máxima elongación, el sistema absorberá, íntegramente, la energía suministrada.

Si la magnitud de esta energía es mayor que la energía disipada durante el ciclo y si el siguiente impulso ocurre nuevamente en el momento de máxima elongación, el sistema se desquicia.

Existe estabilidad si los sistemas interactuantes son cuasiperiódicos. Esto implica que no haya, ni incremento ni disminución de energía en el sistema.

La estabilidad se alcanza cuando las frecuencias de oscilación ó influencia de los sistemas acoplados tienen una proporción

que se puede expresar mediante un número irracional.

Habrà resonancia sí la proporción entre las frecuencias de los sistemas se expresa por un número racional y, si hay resonancia, los sistemas evolucionarán al caos por acumulación de energía.

Se puede afirmar que, como propuso Henri Poincaré<sup>15-16</sup> para que haya acumulación de energía los impulsos sucesivos deben ser separados por intervalos iguales o múltiplos enteros de medio periodo del oscilador estable.

### 1.5.

El péndulo paramétrico ejemplifica, en el laboratorio, el caso más real de oscilador pues sus parámetros cambian al transcurrir el tiempo y hay que suministrarles energía para poder mantener sus oscilaciones.

En los osciladores paramétricos se complica aun más la representación matemática de su conducta debido a que sus parámetros cambian con el tiempo.

Las ecuaciones diferenciales utilizadas para describir el comportamiento de estos osciladores no son integrables para una función arbitraria que dependa del tiempo.

Esto significa que no se sabe cómo resolver estas ecuaciones, ni por cuadratura, ni en términos de integrales usuales ordinarias o funciones transcendentales como funciones racionales, exponenciales, elípticas, etc.

Uno de los modelos más eficientes para representar el comportamiento del péndulo paramétrico está materializado en la ecuación de Mathieu (sección 3.4.); de aquí el interés por ella dado que, puede ser el punto de inicio de modelos para otros sistemas.

### 1.6.

Alcanzar la meta de controlar la reacción termonuclear implica vencer una problemática muy amplia y variada la cual se puede clasificar en, al menos, los siguientes campos:

- Plasma. Es necesario ampliar más el conocimiento que se tiene de este estado de la materia.
- Confinamiento. Tiempo, temperatura y densidad de partículas o energética.
- Impurezas. Composición de la mezcla en cada ciclo.
- Inestabilidad. Acoplamiento de los sistemas para que den respuesta armónica.

Al estudiar fenómenos representativos de cada uno de estos campos se observan en ellos conductas típicas estudiadas por la Teoría del Caos.

Al analizar el comportamiento del péndulo paramétrico se observan similitudes entre la conducta de éste y la conducta del plasma en el tokamak lo cual deriva en la posibilidad de utilizar los modelos desarrollados para el primero y adaptarlos a un modelo aplicable al plasma.

Si los criterios del Caos se verifican en el comportamiento del tokamak y si las ecuaciones obtenidas de los datos experimentales satisfacen el modelo del péndulo paramétrico será posible determinar las condiciones que deben cumplir las diferentes variables involucradas en la operación del tokamak para que éste trabaje establemente en condiciones muy turbulentas.

El péndulo es ejemplo representativo de los sistemas dinámicos continuos. Se ha mencionado que, en el posible funcionamiento de un reactor termonuclear se trabajará continuamente desarrollando ciclos que involucran carga de gases, liberación de energía, eliminación de desechos y nueva recarga para continuar el ciclo lo cual implica que el plasma involucrado estará experimentando variaciones cíclicas por lo que, dicho plasma, es otro caso de sistema dinámico continuo.

El péndulo presenta inestabilidades al transcurrir el tiempo. Las condiciones dentro de la cámara del tokamak se alteran continuamente razón por la que el plasma llegará, como el péndulo, inevitablemente a condiciones de inestabilidad.

El péndulo es un sistema disipativo. Otra característica del plasma es la de ser disipativo también. La energía que almacena, continuamente trata de dispersarse y buena parte del reto tecnológico consiste en encontrar las condiciones que lo impidan.

Que el plasma constituya un sistema disipativo no implica, necesariamente, que su comportamiento sea desordenado y con esto en la mente se hace la propuesta del capítulo 3, al preguntarse en qué medida o bajo qué condiciones el comportamiento de un plasma puede llevarse a las zonas de intermitencia (sección 3.3.) en las cuales es factible esperar un comportamiento ordenado.

En el péndulo paramétrico la evolución no es un simple decaimiento que culmina con la detención del evento; se le inyecta energía continuamente para lograr su permanencia.

El péndulo permanece continuamente abierto al intercambio con su entorno en un proceso de realimentación continua y de aquí que su inestabilidad se origine tanto en factores externos como internos.

El plasma constituye un sistema abierto en realimentación continua de los flujos de los sistemas con los que se acopla. Entre otras cosas debe recibir y ceder energía constantemente y por eso la regularidad en el comportamiento del plasma estará condicionada a la manera y uniformidad como se realice el intercambio con su medio ambiente

El péndulo paramétrico se acopla con sistemas externos. El plasma se puede concebir como un conjunto de sistemas interactuantes y, para que el plasma sea estable, sus sistemas no deben fallar.

1.7.

Son tan diversas las áreas de investigación en donde existen posibilidades de aplicación del método de análisis que se desarrolla en esta tesis, que se ha considerado pertinente terminar este capítulo, comentando algunas de las investigaciones que actualmente se están realizando y en las cuales dicho método podría ser utilizado.

Simplemente, como ilustración y sin entrar en mayores detalles, se señalan algunos casos específicos.<sup>17</sup>

- Cinética de iones en canales. Al estudiar el transporte de iones sodio, potasio o cloro a través de las membranas celulares que hay en la cornea del ojo.
- La dinámica no lineal de la glicólisis. Al estudiar desordenes en el procesamiento de la glucosa.
- Crecimiento bacteriano. Al estudiar la variación espacio temporal de la densidad de población bacteriana y la concentración de nutrientes.
- Enfermedades periodontales. Al estudiar la manera como se integran diferentes factores que actúan a diferentes frecuencias en procesos acumulativos.
- Cardiomiopatía. Al estudiar las enfermedades del corazón.
- EEG/ERP. Al estudiar las ondas cerebrales mediante electroencefalogramas.

En biología y medicina la lista de posibles aplicaciones puede continuar y sin embargo, dicha lista, es pequeña al compararla con las potenciales aplicaciones en las ciencias duras.

---

## REFERENCIAS

<sup>7</sup> I.N.S.C. [3] p 11-30.

<sup>8</sup> Delgado G. José Luis, "Energía nuclear, una verdadera opción energética", Revista de la Universidad Nacional Autónoma de México núm 605 p. 31-34, junio de 2001.

<sup>9</sup> Bello Rivera Rubén, "Energía nuclear: ¿nos beneficia ó nos perjudica", Revista de la Universidad Nacional Autónoma de México. núm 606 p 18-22 julio de 2001.

<sup>10</sup> Symon [11]. Cap. 3.

<sup>11</sup> Baranger, M Latora V. Rapisarda A. "Time evolution of thermodynamic entropy for conservative and dissipative chaotic maps". Dipartimento di Fisica e Astronomia Università di Catania INFN sezione di Catania, I-95129 Catania, Italy. Chaos Solitons and Fractals v 13 n 3 March 2002. p 471-478

<sup>12</sup> Leonel, E D Da Silva, J.K.L. Kamphorst, S O. "Transients in a time-dependent logistic map". Departamento de Física Instituto de Ciências Exatas. Universidade Federal de Minas Gerais, 30123-970 Belo Horizonte, MG, Brazil. Physica A Statistical Mechanics and its Applications v 295 n 1-2 Jun 1,2001. p. 280-284.

<sup>13</sup> Cao, Q. Xu, L. Djidjeli, K. Price, W.G. Twizell, E.H. "Analysis of period-doubling and chaos of a non-symmetric oscillator with piecewise-linearity". Department of Ship Science University of Southampton, Southampton SO17 1BJ, United Kingdom. Chaos, Solitons and Fractals v 12 n 10. August 2001 p. 1917-1927.

<sup>14</sup> Hu, H.Y. "Adaptive control scheme for recovering periodic motion of chaotic systems". Nanjing Univ of Aeronautics and Astronautics, Nanjing, China. Journal of Sound and Vibration v 199 n 2 Jan 16 1997. p 269-274.

<sup>15</sup> Abraham [9]. p. 170-173.

<sup>16</sup> Briggs [5] p. 42

<sup>17</sup> La referencia [10] que trata sobre los sistemas biológicos, detalla ampliamente con relación a estos avances. En la bibliografía de complemento se sugieren lecturas que profundizan sobre las aplicaciones que aquí se comentan superficialmente.

## Capítulo 2

### Breve descripción del funcionamiento de un tokamak

#### 2.1.

Una sustancia consistente en una mezcla globalmente neutra de electrones libres y núcleos cargados positivamente (núcleos que han sido privados de sus electrones circundantes, a veces, mediante colisiones) se denomina plasma.

Actualmente un tema central de investigación en el campo de la fusión nuclear es el relacionado con la física de plasmas.

Diversos aparatos y equipos se han construido en diferentes partes del mundo destinados a la comprobación de hipótesis, prueba de materiales, experimentos de exploración, etc., relacionados con este tema.

El plasma necesariamente existe a temperaturas elevadas; aun los denominados plasmas fríos implican miles de grados Kelvin.

Esto impone, al menos, dos condiciones al equipo que opera con plasma: debe ser capaz de calentarlo y debe ser capaz de contenerlo. Un tokamak es capaz de hacer eso.

#### 2.2.

Profesionales egresados de la UNAM y del IPN desarrollados hasta constituirse como excelentes investigadores mexicanos, diseñaron y construyeron, en el Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares, un equipo de confinamiento magnético, denominado *Tokamak Novillo* \*, con el que es posible realizar muchas de las investigaciones que permiten mantener los conocimientos del país, en el campo de la física de plasmas aplicada al tokamak, a la vanguardia.

Con equipos como el antes señalado ha sido posible concebir, modificar y a veces

materializar ideas novedosas que permiten continuar el avance de la tecnología.<sup>18</sup>

Dado que no existe algún material capaz de soportar las temperaturas que necesita el plasma de reacción termonuclear para existir, se ha recurrido a confinarlo, es decir, a mantenerlo suspendido dentro de campos magnéticos. (Ver fig. 1 y 2 del resumen)

Se ha creado una especie de recipiente cuyas paredes están formadas por dichos campos dentro de los cuales se encuentra atrapado, flotando, el plasma.

Intentando describir de la manera más simple posible a los elementos principales que integran a un tokamak se propone imaginarlo como un transformador de corriente.

El tokamak, como el transformador, tiene dos bobinas. La bobina primaria y el plasma mismo que hace el papel de secundario. El recipiente que lo envuelve tiene la estructura geométrica de un toroide. El primario es capaz de generar un poderoso campo eléctrico, con la energía suficiente para ionizar al gas contenido en dicho recipiente.

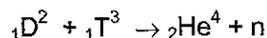
Dado que esta espira del secundario está cerrada sobre sí misma y no tiene salida, la energía que recibe del primario se transforma en movimiento de las partículas que constituyen al plasma, lo cual incrementa el número y la energía implicados en los choques que ocurren entre ellas.

Si los núcleos que chocan tienen energía suficiente como para vencer el rechazo coulombiano que existe entre ellos, entonces los núcleos pueden fusionarse creando un nuevo núcleo de mayor número atómico: helio.

La masa de este nuevo núcleo es menor que la conjunta de los núcleos que, al fusionarse, le dieron origen, y la diferencia de masa se

manifiesta como liberación de energía en concordancia con la relación  $E=mc^2$ .

Si el plasma estuviese formado por núcleos de deuterio y tritio, al fusionarse éstos, la energía liberada estaría contenida, principalmente, en el helio y en los neutrones resultantes de la reacción. Típicamente:



Se libera radiación electromagnética indirectamente que, desde luego, lleva energía, pero en cuantía menos significativa.

De lo anterior resalta la importancia que tiene lograr la máxima capturar de las partículas liberadas por la reacción, principalmente neutrones, pues son estas las portadoras de la energía susceptible de aprovechamiento.

El reactor tokamak debe tener dispositivos que puedan captar estas partículas para aprovechar su energía en la generación de calor.

Las partículas pueden ser atrapadas por capas externas envolventes o mantos que podrían ser de litio, las cuales podrían estar montadas sobre grafito que puede transmitir el calor producido al agua refrigerante que enfría a éste, lo que a su vez daría origen al vapor que movería las turbinas generadoras de corriente eléctrica.

Probablemente las diferentes etapas involucradas en la operación de un reactor termonuclear llegarán a ser, al menos, las siguientes:

- Limpiar y crear vacío casi absoluto en la cámara de confinamiento e inyectar la mezcla de isótopos del hidrógeno a la cámara.
- Ionizar el gas y crear el plasma.
- Calentar y comprimir el plasma.
- Fusionar los núcleos.
- Liberar las partículas energizadas.
- Transformar la energía cinética de las partículas que alcanzan los mantos en calor
- Calor que se genera cuando estos llegan a la capa de grafito para
- Generar vapor a partir de este calor y
- Extraer, de la cámara de confinamiento, las impurezas.

- Recuperar isótopos para realimentación.
- Inyectar nueva mezcla isotópica para reiniciar el ciclo.

Los pasos antes descritos integran un ciclo, de ahí que el proceso sería cíclico y por lo mismo intermitente, al menos en un principio.

Cada pulso constituirá un ciclo único e independiente y la operación global se llevará a cabo desarrollando dichos ciclos.

En la siguiente generación de reactores de fusión, la operación será continua con base en la impulsión de corriente autosostenida estimulada por medio de inyección de radiofrecuencia y/o partículas que, en principio, podrán provenir parcialmente de las mismas reacciones de fusión.

En estas circunstancias, la operación de un reactor de fusión controlada estará sometida a un proceso de realimentación continua en el que la evolución de cada ciclo en particular estará influida por las condiciones en que inicia éste, es decir, por las condiciones en que concluyó el ciclo inmediato. Así, irremediablemente, se presentará el arrastre y acumulación de factores, lo cual puede ocasionar pérdida de linealidad en el proceso debido al incremento de la turbulencia en el interior de la cámara lo que, a su vez, puede conducir al caos.

### 2.3.

El párrafo anterior contiene un concepto complicado que es necesario aclarar tanto como sea posible, porque se recurre a él continuamente a través de todo lo que en este trabajo se expone.

Este concepto es la realimentación. El prefijo "re" implica repetición y para que sea necesaria la realimentación debe estar ocurriendo un proceso continuo por lo que, la realimentación, implica a su vez continuidad.

La realimentación provoca alteraciones que se manifiestan al final de cada etapa o ciclo condicionando, en consecuencia, la manera como se va dando la evolución global del proceso.

Cuando se controlan las condiciones de la realimentación en circunstancias tales que no

produzcan alteraciones posteriores, se desarrolla un proceso ordenado, estable o lineal.

La característica principal de un proceso ordenado radica en que, es posible predecir cuales serán las condiciones finales que se alcanzarán al concluir dicho proceso.

Pero, si la realimentación induce alteraciones, las condiciones futuras del proceso pueden llegar a ser imprevisibles debido a la pérdida de orden, estabilidad o linealidad.

Los procesos no lineales se caracterizan por la incertidumbre que hay en la predicción de sus condiciones futuras.

Puesto que, uno de los objetivos es desarrollar la reacción termonuclear en forma controlada, entonces es indispensable descubrir como hacer que la realimentación no provoque alteraciones significativas ni permanentes.

El objetivo es lograr que la reacción termonuclear se desarrolle en condiciones tan cercanas como sea posible a los procesos ordenados.

Se proponen a continuación algunos criterios que podrían servir en el momento de diseñar algún modelo al respecto.

#### 2.4.

Algunas de las condiciones permanentes, mas o menos estables, que son indispensables dentro de la cámara de confinamiento del futuro reactor de fusión tendrán, entre otras, las siguientes características:

- Las variables propias del plasma se verán sometidas a cambios muy violentos debido a la operación intermitente del aparato (sí es que trabaja con intermitencia).
- La presión será muy baja.
- La temperatura será muy alta.
- La densidad de partículas variará considerablemente entre ciclo y ciclo.
- Habrá realimentación de condiciones entre ciclo y ciclo.
- El intercambio de materia y energía con el ambiente será permanente y

- Todos los sistemas deberán trabajar en condiciones muy extremas

En el ININ se logra encender el plasma sin recurrir a la preionización.<sup>19</sup> Este es un enorme avance, poco conocido y valorado, sobre todo, por la comunidad científica nacional.

Adicionalmente sí al plasma se le quiere concebir como un sistema cerrado y conservativo e incluso, Hamiltoniano<sup>20</sup>, se deben satisfacer, entre otras, las siguientes condiciones:

- Debe estar aislado del exterior.
- Su composición debe ser la más homogénea posible.
- Debe tener reversibilidad.
- Debe tener invariancia en su energía.
- Debe conservarse el flujo magnético toroidal.
- Debe conservar el área en el espacio de fases (espacio de estados).

Éstas y muchas otras cualidades se deben considerar antes de alcanzar realidades tangibles.

#### 2.5.

Una vez que se ha desarrollado un modelo consistente, lo típico es realizar cálculos preliminares que se materializan en algún equipo, también preliminar, que permita simular las condiciones de trabajo y permita medir las consecuencias de operar bajo diferentes condiciones.

Desde luego, la metodología de trabajo que antes se ha propuesto no implica ninguna novedad pues, con sus diversas peculiaridades, cada grupo de investigadores ha trabajado más o menos en forma similar.

Se han construido diversos aparatos con la expectativa real de materializar las condiciones teóricas que permitan mantener sustentada la reacción de fusión, pero no se han alcanzado, simultáneamente, las metas consistentes en operación continua, estable y con balance positivo de energía.

En forma muy general, la razón de no haber alcanzado las metas antes señaladas se resume así: si se alcanza la temperatura se tiende a reducir el tiempo de permanencia; si

se alcanza la temperatura y el tiempo de permanencia se puede reducir drásticamente la densidad de partículas y en general no se ha logrado llegar a las condiciones teóricas óptimas requeridas.

Los avances más significativos se han logrado en equipos de confinamiento inercial y particularmente en equipos de confinamiento magnético, siendo el tokamak el más representativo de estos últimos.

Lo que procede es rediseñar una y otra vez, integrando nuevos conceptos<sup>21</sup> y realizando la construcción de lo necesario para comprobar la validez de los modelos propuestos.

Tal es el caso del Tokamak. Con este tipo de equipo se realiza la búsqueda de indicios<sup>22-23</sup> que sirvan de guía para materializar el concepto de reactor termonuclear.

El principal objetivo de la línea de investigación que se desarrolla en el tokamak es lograr la regularidad en el comportamiento del plasma a las condiciones en que se produce la reacción termonuclear, lo cual exige un armonioso acoplamiento<sup>24-25</sup> entre todos los sistemas involucrados.

Un balance preliminar de los resultados alcanzados hasta la fecha muestra lo siguiente:

- No se ha logrado el objetivo principal que es recuperar más energía de la que se alimenta y que es consecuencia de un comportamiento regular.
- No hay comportamiento regular en algunos de los sistemas y por lo mismo, en algunas de las variables involucradas.
- Solamente en condiciones muy específicas se logra algo de regularidad en el comportamiento de algunas variables.
- Los éxitos, aunque significativos, son parciales y se reducen, por el momento, a situarnos en el umbral de alcanzar las condiciones que, teóricamente permitirán la operación continua del reactor termonuclear.
- Se reitera que el problema es muy complejo.

Encontrar las leyes que rigen el comportamiento de las variables controlantes

que regulan la conducta del plasma, desenmarañar la complicada trama de interacciones que existen entre ellas a las condiciones tan extremas en que operan, desarrollar los materiales, sistemas de medición y control, recursos humanos, infraestructura de todo tipo y en general desarrollar todo aquello que permitirá alcanzar finalmente al reactor de fusión, requiere aun de incontables horas de trabajo, de investigación y de recursos.

Sin embargo se puede afirmar que todo proyecto de investigación rinde beneficios. Aun aquellos que no llegan a la meta propuesta rinden, al menos, el beneficio de señalar que se busca por la ruta equivocada.

Los diferentes proyectos de investigación desarrollados en relación a las reacciones de fusión, han generado un rico legado de conocimientos teóricos y prácticos, de aplicación inmediata y de largo alcance, en campos tan diversos como la electrónica, materiales, sistemas de control, modelos matemáticos y teorías con potenciales insospechados.

De entre los muchos beneficios que han dejado las investigaciones en tokamaks está la gran cantidad de datos que se han obtenido y es absolutamente indispensable extraer la información, no siempre evidente, que dichos datos contienen y así obtener la guía que esta información puede dar a los futuros modelos y proyectos de investigación en este campo.

---

## REFERENCIAS

\* Jiménez Domínguez H. Meléndez Lugo L. "Que es el tokamak, cómo funciona y para que sirve". *Ciencia y Desarrollo*, No 73 p. 95 (1973).

<sup>18</sup> L. Meléndez, E. Chávez, S.R. Barocio, A. Flores, G.J. Cruz, R. López, M.G. Olayo. "Start-Up Without Preionization in NOVILLO Tokamak". *IEEE Transactions on Plasma Science*. Vol. 28. No 5, octubre 2000

<sup>19</sup> L. Meléndez, E. Chávez, S.R. Barocio, A. Flores, G.J. Cruz, R. López, M.G. Olayo. "Start-Up Without Preionization in NOVILLO Tokamak". *IEEE Transactions on Plasma Science*. Vol. 28. No 5, octubre 2000.

- <sup>20</sup> Curado, E.M.F. Rego-Monteiro M.A. "Thermodynamic properties of a solid exhibiting the energy spectrum given by the logistic map". Centro Brasileiro de Pesquisas Fisicas, Rio de Janeiro, Brazil. *Physical Review E. Statistical Physics, Plasmas Fluids, and Related Interdisciplinary Topics* v 61 n 6 A. Jun 2000. p 6255-6260.
- <sup>21</sup> Shibata, Hiroshi. "Fluctuation of mean Lyapunov exponent for a coupled map lattice model... Sojo Univ, Kumamoto, Jpn. *Physics Statistical Mechanics and its Applications* v 284 n 1 Sep 2000. p 124-130.
- <sup>22</sup> Hammad A. Jonckheere E. Cheng. C Y Bhajekar S. Chien. "Stabilization of chaotic dynamics: a modern control approach". Univ of Southern California, Los Angeles, CA, USA. *International Journal of Control* v 64 n 4 Jul 10 1996 p 663-677.
- <sup>23</sup> Nair P.R. Krishnan. Nandakumaran, V.M. "Existence of multiple attractors and the nature of bifurcations in a discontinuous logistic map". Cochin Univ. of Science and Technology, Cochin, India. *Pramana - Journal of Physics* 51 3-4. Oct. 1998. p 377-385.
- <sup>24</sup> Roy, Manojit. Amritkar, R.E. "Effect of noise on coupled chaotic systems". Univ of Pune, Pune, India. *Pramana - Journal of Physics* v 48 n 1 pt 1 Jan 1997. p 271-285.
- <sup>25</sup> Nandakumaran, V.M. "Chaos in modulated logistic systems". Cochin Univ. of Science and Technology, Cochin, India. *Pramana Journal of Physics* v 48 n 1 pt 1. Jan 1997. p 99-108.

## Capítulo 3

### Se establecen los objetivos específicos de la tesis

#### 3.1.

Las reacciones termonucleares de fusión se desarrollan en condiciones tan severas, desordenadas y turbulentas que hay motivos para pensar que será imposible llegar a las condiciones que permitan manejar ese desorden en forma controlada.

Por otra parte, existen evidencias teóricas, como las zonas de intermitencia presentes en los diagramas de bifurcación de diferentes mapas estudiados en la Teoría del Caos<sup>26</sup> y evidencias experimentales, como el *modo de operación H (self-organisation)* del tokamak que sugieren lo contrario. Con base en esto último, es posible suponer que las reacciones de fusión se autoregulen a medida que las condiciones en que se desarrollan van siendo más severas.

Frente a esta disyuntiva se encuentra la comunidad que trabaja con tokamaks y son muchos los que han podido continuar con la búsqueda de las condiciones óptimas, aunque por el momento sean teóricas, de las características que debe satisfacer el reactor termonuclear para trabajar con estabilidad.

Existen afirmaciones de grupos que trabajan con grandes tokamaks en el sentido de haber observado comportamientos estables de la máquina cuando operaba, en condiciones tan severas que, inducían a esperar todo, menos estabilidad. El *modo H* (operación estable en condiciones extremas) es ya la forma usual de operación de los tokamaks avanzados.

Es mucho lo que falta por investigar respecto a las condiciones y características de operación bajo las que dicha estabilidad se manifiesta pero lo arduo de la tarea no debe amedrentar ni es motivo que justifique la cancelación de apoyos o proyectos.

#### 3.2.

Con base en la hipótesis de que la Teoría del Caos contiene proposiciones que abren la posibilidad de entender, explicar y proponer,

al menos, una manera de llegar al comportamiento estable del tokamak y con base en la proposición de que la ecuación de Mathieu (sección 3.4.) puede ser utilizada como punto de partida para crear un modelo que permita abordar ciertos aspectos propios involucrados en el estudio del plasma y del tokamak, se plantean los siguientes objetivos específicos de esta tesis:

- Presentar evidencias basadas en la información experimental disponible, que refuercen la hipótesis de que el tokamak manifiesta comportamientos descritos por la Teoría del Caos y
- Proponer una ecuación que describa el comportamiento experimental observado en una de las variables seleccionadas para estudiar la conducta de un tokamak.

#### 3.3.

La Teoría del Caos trata, entre otros temas, el de la transición del estado periódico al de caos o bien, de la estabilidad a la turbulencia.

El estudio de dicha transición ha revelado la existencia de regiones de estabilidad y calma incrustadas en zonas donde lo dominante es la inestabilidad y desorden.<sup>27</sup>

Se ha confirmado que estas circunstancias teóricas ocurren en la naturaleza y esto da confianza para proponer que esta transición también pueda ocurrir en el tokamak.<sup>28</sup>

Estas zonas de estabilidad corresponden a las zonas de intermitencia estudiadas en Caos.

Con fundamento en lo que la intermitencia implica, se propone en esta tesis que la Teoría del Caos puede servir como guía en la búsqueda por encontrar como controlar la reacción termonuclear y se propone que esto

será posible cuando las variables involucradas mantengan la operación del reactor en las condiciones correspondientes a alguna de las zonas de intermitencia.

Desde luego, todo esto es hipotético y, desde luego, no se sabe cuales deben ser todas las condiciones que conducen a las zonas de intermitencia y por eso, para sustituir la suposición por certeza, hay que investigar.

No existe ninguna definición universal para intermitencia en el sentido utilizado en Caos. Se puede proponer que sea aquella señal sujeta a variaciones infrecuentes de gran amplitud que no son simples de describir en función de la estadística tradicional en la que se involucran términos como distribución de probabilidades, valores medios o varianzas.<sup>29</sup>

Otra opción es la siguiente: una variable  $x$  es intermitente si el peso relativo de las grandes fluctuaciones crece continuamente al incrementar el tamaño de las muestras estadísticas.<sup>30</sup>

Simplificando mucho se puede decir que la intermitencia se asocia con zonas de tranquilidad rodeadas de zonas de enorme turbulencia.

Para dar una idea preliminar de cómo visualiza la Teoría del Caos estas zonas de intermitencia, se presentan a continuación, en las gráficas 3.1, 3.2, 3.3 y 3.4, los diagramas de bifurcación del mapa logístico y del mapa seno (ver 4.6.), así como sus respectivos diagramas de iteración.

Estas imágenes permiten formarse una idea de lo que se debe buscar. Estas imágenes fueron tomadas del libro elaborado por Brian Davis<sup>31</sup> de la Universidad Nacional Australiana. Estas imágenes no son originales de él y se pueden encontrar en otras publicaciones.<sup>32-33</sup>

Cada punto del plano representa el estado que puede alcanzar el sistema en función de un parámetro característico de cada mapa.

Así, por ejemplo, el mapa logístico cuya representación algebraica es

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (3.1)$$

se presenta en la gráfica 3.1. Cada punto de la imagen corresponde a un punto atractor, es decir, condiciones en las que el sistema puede funcionar.

La ecuación (3.1) es un caso particular de los que estudia la Teoría del Caos. El significado o lo que representan, tanto la variable  $x_n$  como el parámetro  $r$ , dependen de la posible aplicación práctica que se le quiera dar. Con el objeto de ilustrar, aunque burdamente, su significado, se bosqueja la siguiente situación, absolutamente particular y que, por lo mismo, no es restrictiva.

Después de la evacuación preliminar de sustancias presentes en el interior de la cámara del tokamak se procede a eliminar, mediante descargas de Taylor, materiales adheridos en la superficie interior de ésta, para lo cual se necesita que los sistemas del aparato trabajen en condiciones muy específicas. Dichas condiciones específicas se manifiestan como un valor característico del parámetro de operación, representado por la letra  $r$ .

Las condiciones de operación  $y$ , por lo mismo, las variables involucradas en ésta, deben permanecer constantes para que el funcionamiento del aparato sea estable. Sin embargo, no es posible esperar que, instantáneamente, al iniciar la operación, el aparato ya esté en equilibrio.

Lo anterior permite postular la existencia de un proceso evolutivo entre el momento en que se inicia la operación y el momento en el que se llega al equilibrio o estabilidad.

La ecuación (3.1) sirve, en esta ocasión, para ilustrar la manera como se desarrolla dicho proceso evolutivo.

$x_n$  puede representar cualquier variable que permita seguir esta evolución, por ejemplo, el vacío, la temperatura, la corriente inducida o cualquier otra.

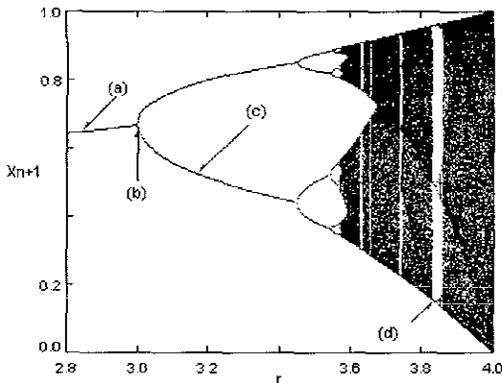
Supóngase que las condiciones de operación son tales que, al parámetro  $r$  le corresponda un valor inferior a 3, entonces, el proceso hacia la estabilidad seguirá una ruta como la bosquejada en la gráfica 4.13 del próximo capítulo 4;  $x_n$  oscilará y cuando deje de hacerlo, se estabilizará en algún punto

localizado en la vecindad del segmento marcado con la letra (a) en la gráfica 3.1

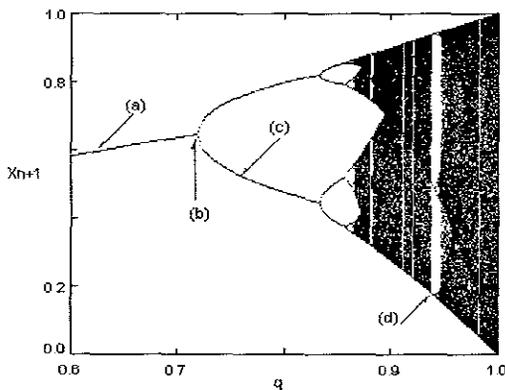
Este punto quedará localizado dentro del segmento (a) si se han producido suficientes descargas (iteraciones  $n$ ) como para llegar al equilibrio.

Dicho punto (atractor) corresponderá a un valor particular,  $x_{n+1}$ , de la variable  $x_n$  seleccionada para seguir la evolución del proceso. Este valor se alcanza después de muchas descargas representadas, cada una, por cada cresta y valle de las ondas de la gráfica 4.13. (Por favor vea el capítulo 4)

Dado que, para cada valor de  $r < 3$  hay un valor atractor, entonces, la operación estable del aparato estará representada por el segmento (a) que va del eje y al punto de bifurcación (momento donde la conducta cambia como indica (b) en la gráfica 3.1)\*



Gráfica 3.1 Diagrama de bifurcación del mapa logístico (a) zona de un atractor (b) punto de bifurcación.



Gráfica 3.2. Diagrama de bifurcación del mapa seno (c) zona de dos atractores. (d) zona de intermitencia.

La gráfica 3.2 corresponde al mapa seno cuya representación algebraica es:

$$x_{n+1} = q \text{sen}(\pi x_n) \tag{3.2}$$

Este mapa seno, al igual que el mapa logístico anterior, puede utilizarse para representar la evolución que experimenta el aparato antes de llegar a su estado de equilibrio.

Como en la ecuación (3.1), el valor que corresponde al parámetro  $q$  dependerá de las condiciones que tengan cada una de las variables que influyen en el proceso. Por ejemplo, si las condiciones son tales que:

$$0.7 < q < 0.83$$

el sistema alcanzará su estabilidad oscilando permanentemente dado que, dichas condiciones sitúan al proceso dentro de la zona (c) que corresponde a dos atractores, cada uno representado por las curvas o ramas que parten del punto de bifurcación (b) y concluyen en otros puntos de bifurcación que nacen cuando  $q > 0.83$ .

La variable seleccionada para dar seguimiento al proceso, representada por  $x_n$  mostrará, alternadamente, valores que caen entre una y otra rama y de ahí la oscilación antes mencionada.

Conforme se incrementa el valor del parámetro correspondiente, las opciones de estabilidad se incrementan hasta llegar a las zonas oscuras de turbulencia donde el atractor extraño se manifiesta.

El atractor extraño corresponde a la zona donde es imposible predecir que valores mostrará la variable, aún cuando se tenga la certeza de que se encuentra dentro de una zona acotada.

Si las condiciones son tales que la  $q$  corresponde a la zona oscura se tendrá evidencia para afirmar que el proceso oscilará de tal manera que la variable  $x_{n+1}$ , al transcurrir el tiempo, habrá de tomar cada uno de los valores correspondientes a cada uno de los diferentes puntos que constituyen la zona oscura.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

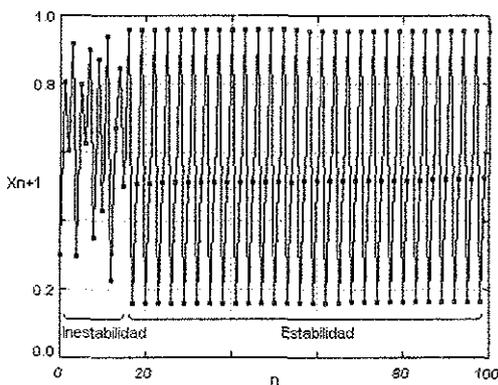
Para ambos mapas la zona oscura es consecuencia del enorme número de puntos atractores que deben ser tocados durante la evolución del proceso.

La zona oscura representa una enorme cantidad de opciones de estancia, todas con similar probabilidad, lo que, paradójicamente, se traduce en inestabilidad pues hace imposible predecir las condiciones en las que se encuentra el sistema, aún cuando exista la certeza de que la conducta del mismo está acotada.

Es conveniente recalcar que, para valores grandes del parámetro (por ejemplo, para  $r$  mayor a 3.7 y menor a 4) no es posible determinar en cual punto atractor esta el sistema pero, si es posible afirmar que el sistema está acotado y que se encuentra atrapado en esa multitud de opciones que en conjunto se denomina atractor extraño.

Dentro de la zona oscura de ambos diagramas se notan franjas blancas que corresponden a las zonas de intermitencia (d) las cuales son de suma importancia pues representan las zonas, dentro de la turbulencia, donde es posible encontrar estabilidad. Estas zonas se manifiestan en valores específicos del parámetro de control como son  $r$  ó  $q$  en los mapas mostrados.

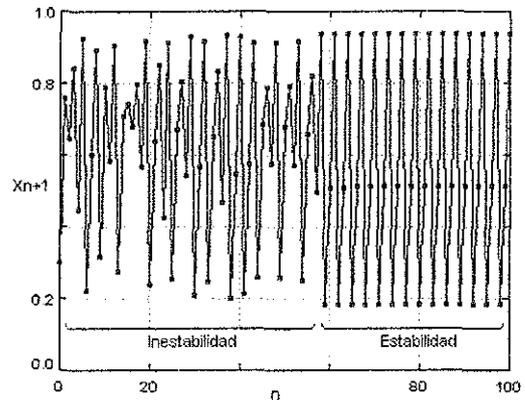
Por ejemplo en la vecindad de  $r = 3.83$  para el mapa logístico o en  $q = 0.94$  para el mapa seno.



Gráfica 3.3. Diagrama de iteración del mapa logístico. Se muestran las primeros  $n=100$  iteraciones.  $r=3.83$

Las gráficas 3.3 y 3.4 corresponden a los diagramas de iteración de los mapas anteriores, es decir, corresponden a la iteración de las ecuaciones (3.1) y (3.2). La iteración permite visualizar la evolución del proceso. Aquí la iteración se realizó asignando un valor a los parámetros de control  $r = 3.83$  o  $q = 0.94$ ; se tomó, para la primera iteración ( $n = 1$ ) el valor inicial  $x_n=0.3$  y se aplicaron las ecuaciones (3.1) ó (3.2), según fue el caso.

Es posible apreciar como se manifiesta la estabilidad en una zona de intermitencia: hay regularidad en la oscilación.



Gráfica 3.4. Diagrama de iteración del mapa seno. Se presentan las primeras  $n=100$  iteraciones.  $q=0.94$

Las condiciones, altamente demandantes, que se requieren para llevar a cabo las reacciones termonucleares en forma controlada, implican que los parámetros de operación, digamos  $r$  o  $q$ , tengan valores asociados con alta turbulencia.

Esta tesis propone que, penetrar en las zonas de alta turbulencia no es impedimento para una operación controlada ya que, existe la posibilidad de llegar a condiciones tales que se alcancen zonas de intermitencia donde el proceso se podría desarrollar en condiciones estables aún dentro de la turbulencia.

Con fundamento en lo anterior se reitera la propuesta de esta tesis con relación a la existencia de zonas tranquilas en el seno de la turbulencia lo que induce a suponer que, en el comportamiento profundamente turbulento del plasma requerido para las



reacciones termonucleares, podrían existir condiciones de estabilidad.

La principal aportación que se ofrece en esta tesis con relación a la búsqueda de estabilidad consiste en asociar, a los datos obtenidos experimentalmente, ecuaciones como la (3.1) o (3.2) lo que conlleva a proponer un método para evaluar los parámetros de operación que corresponden a las condiciones bajo las que se ha realizado dicho experimento, con el beneficio de saber que tan cerca se está de las zonas de intermitencia.

### 3.4.

La ecuación de Mathieu<sup>34</sup> resume un conjunto de suposiciones y criterios, con respecto a comportamientos armónicos, que podrían servir, después de adecuarlos, como fundamento para desarrollar explicaciones complementarias para entender el comportamiento del plasma en un reactor termonuclear.

Con el objeto de indicar, brevemente, la secuencia de razonamientos que se han seguido para llegar a la ecuación de Mathieu se presenta las siguientes expresiones que sintetizan esta secuencia.

Iniciando con

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{G}{I} \text{sen}\theta = 0 \quad (3.3)$$

que es una ecuación que idealiza el comportamiento de un oscilador para el cual se supone que:

- No hay fricción.
- G y I permanecen constantes y
- El desplazamiento  $\theta$  con relación al punto de equilibrio, es pequeño pues de otro modo la ecuación es no lineal.

Se puede deducir que, en el oscilador no hay pérdida de energía dado que:

$$\frac{dE}{dt} = \left[ \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{G}{I} \text{sen}\theta \right] \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad (3.4)$$

Como esto no ocurre en la práctica, se realizan ajustes para poder proponer una

ecuación que refleje más adecuadamente la realidad.

Un ajuste consiste en introducir los factores  $\gamma$  y  $\omega$  tales que:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \text{ donde } \omega^2 = \frac{G}{I} \quad (3.5)$$

Con lo que se llega a:

$$\frac{dE}{dt} = -\gamma \left[ \frac{d\theta}{dt} \right]^2 \quad (3.6)$$

Si  $\gamma = 0$  la energía del sistema se conserva y si  $\gamma > 0$  la energía decrece.

Otro ajuste es originado por la necesidad que hay de suministrar energía desde el exterior, para compensar las pérdidas y mantener las condiciones de oscilación.

Van der Pol<sup>35</sup> propuso que:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} - \gamma_0 \left[ 1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right] \frac{d\theta}{dt} + \omega^2\theta = 0 \quad (3.7)$$

En la cual se introduce un término que considera las condiciones de suministro de energía que se deben cumplir para que el proceso permanezca estable.

Lo anterior requiere que el suministro de energía sea constante.

La constante G agrupa al conjunto de factores responsables de la pérdida de energía.

Dado que, prácticamente no es posible esperar que los factores permanezcan inalterados al transcurrir el tiempo, es posible esperar que G sea modificada continuamente por una interferencia  $\beta$  tal que:

$$G(t) = G_0 + \beta(t) \quad (3.8)$$

y de aquí que:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{G(t)}{I} \theta = 0 \quad (3.9)$$

Como esta ecuación no es integrable para una función arbitraria  $G(t)$  se propuso que ésta sea una función periódica del tiempo cambiando a lo que se denomina ecuación de Hill.<sup>36</sup>

Simplificando y haciendo que  $\theta(t)$  sea una función circular se llega al caso particular representado por la ecuación de Mathieu (3.11) para lo cual, si

$$G(t) = G_0 + G_1 \cos(2\omega t) \quad (3.10)$$

se llega a

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega t)]\theta = 0 \quad (3.11)$$

donde

$$h = \frac{G_1}{G_0} \quad \text{y} \quad \omega_0^2 = \frac{G_0}{I} \quad (3.12)$$

La cual es una ecuación lineal de segundo orden en  $\theta$ , con una condición inicial  $\theta(0)$  y donde la derivada de esta última sufre en cada periodo

$$[(\pi/\omega), (2\pi/\omega), (3\pi/\omega), \dots] \quad (3.13)$$

una transformación lineal que es equivalente a multiplicar las coordenadas en el plano

$$(\theta, d\theta/dt) \quad (3.14)$$

por una matriz  $M$ .

Basándose en estas observaciones, la Teoría de Floquet<sup>37</sup> de las ecuaciones lineales con coeficientes periódicos demuestra que las soluciones a la ecuación de Mathieu son de la forma

$$\theta(t) = e^{\mu t} P(t) \quad (3.15)$$

donde  $\mu$  es un eigenvalor de la matriz  $M$  y  $P(t)$  es una función de periodo  $T = \pi/\omega$ .

### 3.5.

La hipótesis que se busca demostrar en esta tesis también se puede expresar así:

Algunas conductas observadas durante la operación del tokamak corresponden a comportamientos estudiados por la Teoría del Caos.

Demostrar que es verdadera la hipótesis anterior conlleva la posibilidad de representar el comportamiento, de alguna de las variables que influyen en la conducta del tokamak, por ecuaciones de las formas dadas por (3.10) y (3.15) de donde algunas de las condiciones de operación del aparato podrían explicarse con base en las implicaciones de la ecuación de Mathieu.

---

### REFERENCIAS

\* La correlación entre los elementos de un sistema en evolución permanece relativamente constante para una amplia gama de valores pero, en un cierto punto crítico, la correlación se divide y el comportamiento del sistema se lanza hacia nuevos puntos atractores. Cuando esto acontece se dice que ha ocurrido una *bifurcación*.

<sup>26</sup> Bergé [4]. p 201.

<sup>27</sup> Briggs [5] p. 60 a 62.

<sup>28</sup> Briggs [5], Cap.1 y 2.

<sup>29</sup> Bergé [4], p. 223.

<sup>30</sup> Briggs [5] p.62

<sup>31</sup> Davis [6]. p.27 y 69.

<sup>32</sup> Briggs [5] p.61

<sup>33</sup> Korsch [7]. p.192

<sup>34</sup> Bergé [4]. p. 31.

<sup>35</sup> Rajasekar. S. Chinnathambi, V. "Variation of certain statistical quantities near critical bifurcations" Manonmaniam Sundaranar Univ, Tamilnadu, India Chaos Solitons and Fractals v 11 n 6 May 2000. p 859-870

<sup>36</sup> Bergé [4]. p. 31 y 32

<sup>37</sup> Bergé[4] p.68.

## Capítulo 4

*Se desarrolla detalladamente el procedimiento de análisis realizado con los datos obtenidos en el primer experimento.*

### 4.1.

Independientemente del objetivo particular que se pretenda alcanzar en experimentos que involucren la operación de un tokamak, es posible afirmar que se inician las pruebas una vez que la cámara toroidal esta tan libre de impurezas como para permitir la generación del plasma.

Entre las alternativas que se aplican para lograr limpieza en el interior de la cámara del tokamak, se recurre al proceso de limpieza mediante descargas de Taylor. Este procedimiento permite desprender las capas imperceptibles de material extraño adheridas a las paredes de la cámara al mismo tiempo que se evacuan las sustancias volátiles que flotan en el interior de ésta.

Explicar las condiciones que deben satisfacer las variables que determinan la estabilidad en el funcionamiento del tokamak y el significado de ellas, está fuera del objetivo de este trabajo.

Lo que se pretende es proponer un método para analizar datos que se generan en los experimentos de evolución continua con realimentación, como es el caso de estas descargas de limpieza y extraer la información que contienen con el objeto de poder guiar la experimentación por una ruta que permita llegar a las zonas de intermitencia comentadas en el capítulo anterior.

Este trabajo se desarrolla analizando dos conjuntos de valores que muestran la intensidad de corriente inducida en el plasma por las descargas de limpieza bajo condiciones similares de operación, excepto en el potencial utilizado en la bobina primaria.

Es decir, la única diferencia entre una prueba y otra consistió en utilizar una diferencia de 500 voltios en la bobina primaria.

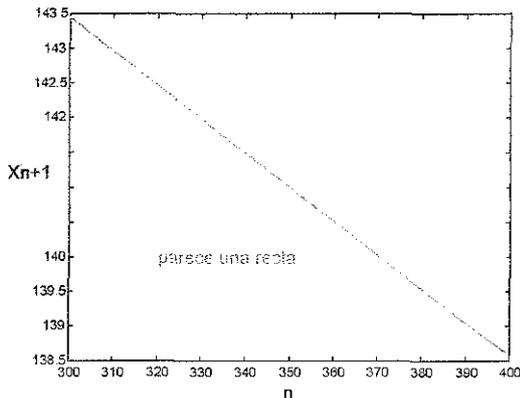
Al primer registro de la intensidad de corriente (en microamp.) se le identificó como  $x_0$ , al siguiente registro (sucesor) se le identificó como  $x_1$  y así sucesivamente.

Las pruebas fueron así:

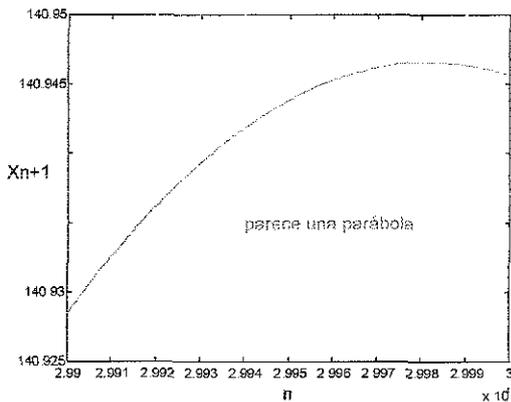
- Durante 60 000 segundos se realizaron descargas de limpieza.
- Se dio seguimiento a la evolución del proceso con base en los resultados obtenidos al medir la variable  $x$ .
- Cada dato registrado  $x_{n+1}$  corresponde con el número de lectura  $n$  en el orden con el cual este se tomó.
- Se tuvo control sobre las restantes variables que influyeron en el proceso y se mantuvieron estables.
- Las descargas de limpieza ocurrieron cada 2 segundos.
- Para el análisis que aquí se desarrolla no es fundamental establecer la identidad de la variable de control  $x_{n+1}$ . Puede ser cualquiera de las involucradas en el proceso. Se pretende con esto ampliar los alcances del procedimiento. Aquí, por ejemplo,  $x_{n+1}$  fue la corriente registrada en cada tiempo  $n+1$ .

De lo anterior se puede concluir que, cada grupo de valores registros está integrada por, aproximadamente, 30 000 valores tomados a través de la prueba, cada una de las cuales tuvieron una duración de 60 000 segundos. La tabla 1 y la 11 del apéndice contienen algunos de los valores registrados. Se juzgó que no es necesario reproducirlos todos.

Es razonable realizar una exploración preliminar y descubrir si la evolución en el comportamiento del proceso que se estudia se puede determinar, sin entrar en complicaciones innecesarias. Para ello se tomaron arbitrariamente cinco lotes de cien valores y con los registros de cada lote se construyeron gráficas de las cuales se muestran, a continuación, las obtenidas con los registros del  $n = 300$  al  $n = 399$  y del  $n = 29900$  al  $n = 29999$ .



Gráfica 4.1. Muestra los valores de las lecturas tomadas entre  $n = 300$  y  $n = 399$



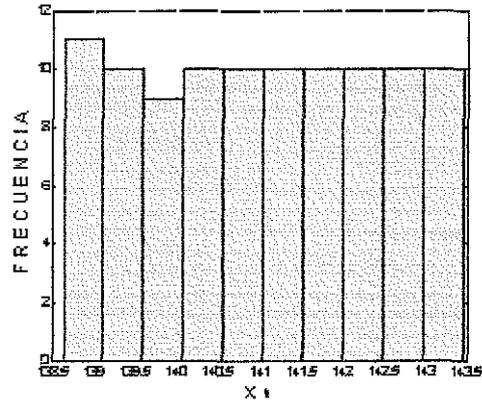
Gráfica 4.2. Es para los valores que van de  $n = 29900$  a  $n = 29999$

No se puede sacar ninguna conclusión contundente respecto al comportamiento del proceso que se investiga basándose únicamente en esta información fragmentada.

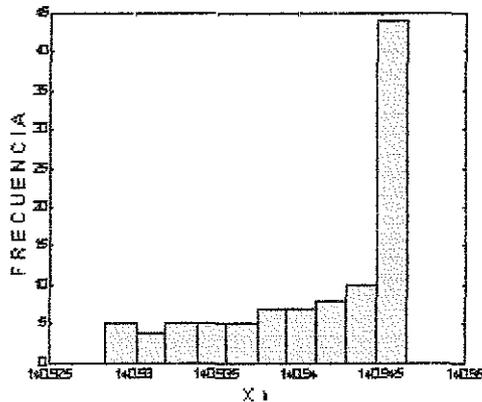
Las tendencias que se pueden observar aquí no dan indicios sólidos con respecto al comportamiento de todo el conjunto de datos ya que, por ejemplo, las pendientes de las gráficas no guardan similitud y esto,

seguramente, es por la fragmentación que se hizo de los datos.

Cada uno de los lotes seleccionados se dividieron en diez intervalos y con ellos se construyeron histogramas de los cuales se presentan los correspondientes a los mismos valores de las gráficas anteriores.



Gráfica 4.3. Construido con los valores que van de  $n = 300$  a  $n = 399$



Gráfica 4.4. Construido con los valores que van de  $n = 29900$  a  $n = 29999$ .

En la primera gráfica no se observa nada que sugiera la posibilidad de azar en la conducta de los valores. Es, aparentemente clara, la tendencia descendente y lineal. La gráfica 4.3 refuerza esta apreciación dado que se obtienen barras de, más o menos, igual frecuencia.

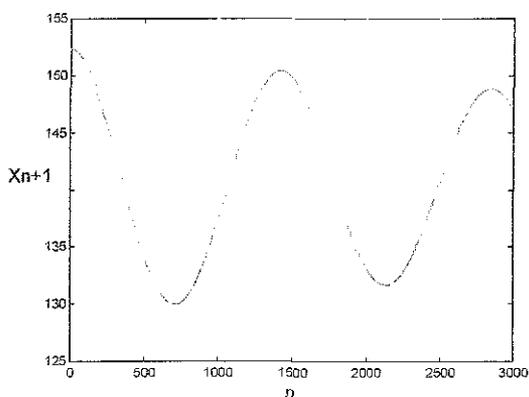
Sin embargo, la gráfica 4.2 y la gráfica 4.4 muestran argumentos totalmente opuestos a los anteriores: en lugar de línea descendente hay curva ascendente y en lugar de barras



de igual frecuencia se obtiene evidencia de que existe una tendencia a favorecer un cierto valor.

Todo lo anterior puede tener diferentes implicaciones y la más inmediata que se puede analizar tiene relación con el tamaño de los lotes que se seleccionaron.

Se considera pertinente graficar los primeros 3000 datos registrados (los cuales se presentan en la tabla 1 del apéndice), buscando que no se encubra la realidad de dicho comportamiento, en la pequeñez de la ventana seleccionada. El resultado se muestra en la siguiente gráfica 4.5.



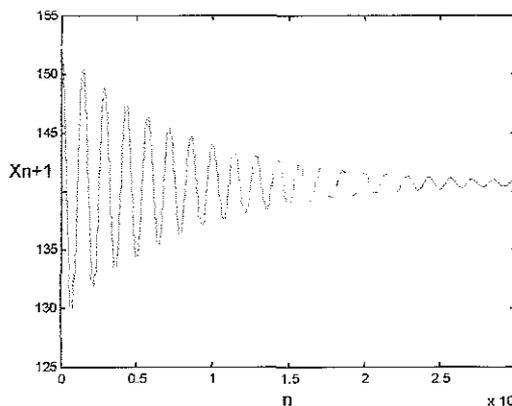
Gráfica 4.5 Muestra el comportamiento de los primeros 3000 datos registrados

Tomando un tamaño adecuado de ventana se hacen notorias conductas que de otra manera pasan desapercibidas. En este caso resulta evidente que la variable que se investiga tiene comportamiento periódico.

Para confirmar la suposición anterior con relación a comportamiento periódico e identificar con plenitud las características de dicho comportamiento, es necesario realizar, al menos, el procedimiento que en las siguientes líneas se bosqueja.

Al hacer la grafica del total de datos se obtiene una perspectiva del comportamiento completo en la gráfica 4.6.<sup>38</sup>

Esta gráfica deja en claro muchas características del experimento que se hacen evidentes únicamente cuando se analiza todo el conjunto de valores.<sup>39-40</sup>



Gráfica 4.6 Permite visualizar la conducta de los 30000 datos. Se puede contar 21 ondas en esta ventana

Esta gráfica induce a concluir muchas características del experimento que se hacen evidentes únicamente cuando se analiza todo el conjunto de valores.

El experimento del que se tomaron estos datos corresponde al tipo de los comportamientos a los que se hará referencia posteriormente en el sentido de que, al ir transcurriendo el tiempo, presentan una realimentación de condiciones que hace inviable su estudio con base en lotes pequeños de datos seleccionados aleatoriamente. Para estos procesos, lo fundamental es entender como va ocurriendo el cambio, de un estado a otro, a medida que se desarrolla el evento.

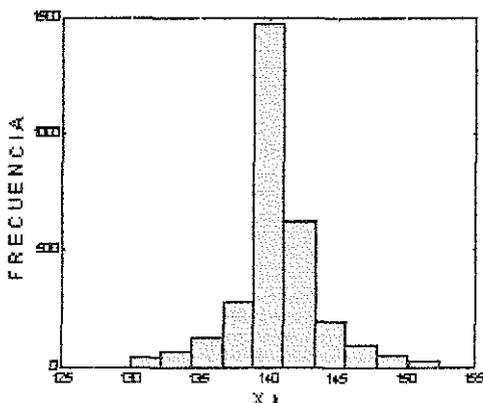
Cabe hacer notar que estas aseveraciones se aplican a cualquier tipo de análisis de datos: entre mayor es el tamaño de la serie, la información extraída es mejor.

Es conveniente alertar acerca de la necesidad de planear adecuadamente la toma de muestras para monitorear la evolución de un proceso continuo. Es decir, se debe tener cuidado al establecer el tamaño de ventana lo cual involucra establecer el número de muestras, el intervalo de tiempo entre muestra y muestra y la uniformidad o no en la toma de lecturas.

De no cubrir estas precauciones se pueden cometer fallas; por ejemplo, en el presente caso se puede pensar que el comportamiento es aleatorio si el juicio se basa en la gráfica 4.3 o gaussiano si la

base es el histograma de la gráfica 4.7.

El histograma de la gráfica 4.7 fue construido con los 30000 datos registrados y tiene la siguiente apariencia:



Gráfica 4.7 El histograma fue construido con el total de datos registrados

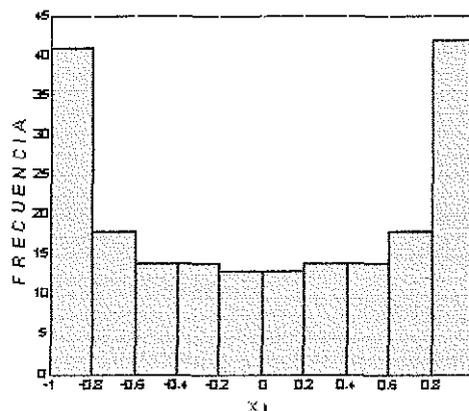
Los valores se dispersan a uno y otro lado de un valor central pero no como consecuencia de que haya un proceso gaussiano sino como consecuencia de que el proceso se mueve, con evolución periódica, hacia un punto atractor el cual, en cierta medida, guarda correspondencia con el valor de tendencia central o media aritmética ( $M$ )

Conviene alertar en el sentido de que, no es el mismo concepto referirse "a un valor de tendencia central" de acuerdo con la terminología de la estadística que hablar de "punto atractor" de acuerdo con la Teoría del Caos.

Si al conjunto de todos los 30 000 datos correspondiera un comportamiento aleatorio uniforme, la imagen tendría una apariencia como la del histograma de la gráfica 4.3 pues todos los valores tendrían la misma probabilidad de ocurrir.

Si dicho conjunto de valores fuera la manifestación de una conducta ondulatoria pura, la imagen tendría una apariencia como la del siguiente histograma de la gráfica 4.8 en el que, el aumento en la frecuencia de los valores extremos indica el efecto de compactación que tiene la amplitud de la onda en los puntos de inflexión presentes en la cresta o en el valle. Es decir, en la cúspide de la cresta o en el fondo del valle los valores

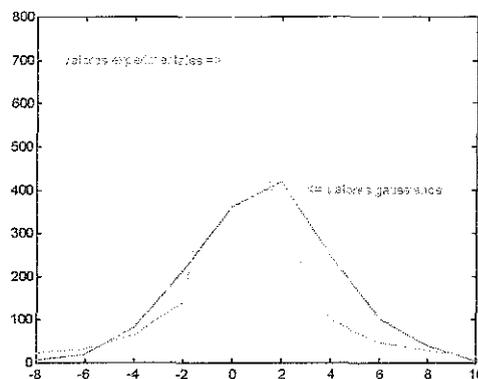
sucesivos de la amplitud varían lentamente en cambio, a la mitad, entre la cresta y el valle, los valores de la amplitud se dispersan más rápidamente.



Gráfica 4.8. Muestra las frecuencias para valores originados en un proceso ondulatorio puro

Cuando las sucesiones aleatorias tienen valores con mayor probabilidad de ocurrir que otros, a menudo pueden modelarse con números aleatorios gaussianos. Si este modelaje es factible para los 30 000 datos, entonces, una campana de Gauss podría asociarse al histograma de la gráfica 4.7.

La gráfica 4.9 permite visualizar el resultado de tal intento de asociación



Gráfica 4.9 Muestra el resultado que se obtiene del intento por asociar, a los datos experimentales un modelo gaussiano.

El comportamiento gaussiano se caracteriza por tener un valor central y un valor de dispersión. Al conjunto de datos que se



analiza se le puede calcular su media aritmética y su desviación estándar.

Se puede encontrar una campana de Gauss para los valores de la media y la desviación anteriores o se puede tomar, al azar, un conjunto de valores gaussianos iguales en número, a los datos que se analiza y comparar los resultados. Esto último es lo que se hizo y el resultado que se obtiene se muestra en la gráfica 4.9.

Al intentar la asociación propuesta se presentan dos situaciones:

- Si la campana respeta la dispersión de los datos, la altura de ésta es inferior a la que presentan los mismos.
- Si, por el contrario, la altura de la campana es similar a la de los datos la dispersión es menor.

Por esto, se concluye que no hay manera de ajustar las imágenes de la gráfica 4.9 para que coincidan y, por lo mismo, no se puede asociar, a los datos experimentales, un modelo gaussiano puesto que, para un tamaño dado en el lote de datos, una desviación estándar fija y una media aritmética, también fija, existe solo una campana de Gauss que se puede asociar.

El conjunto de datos que producen las gráficas 4.6 y 4.7 son el resultado del efecto combinado de una conducta ondulatoria y de un decaimiento.

Es la conducta ondulatoria quien motiva la posible asociación a los datos con un modelo gaussiano y es el decaimiento de la amplitud de la onda quien destruye esta posibilidad.

La tendencia de los valores a concentrarse en un atractor tiene su origen en el decaimiento.

Con base en lo anterior se pueden hacer las siguientes observaciones con relación a la conducta de los datos que se analizan:

- Hay comportamiento periódico.
- La amplitud decae.
- La longitud de onda permanece constante.
- Se observan, aproximadamente, 21 ciclos completos en el intervalo de las 30000 lecturas.

- 30000 lecturas implican 600000 segundos que fue el tiempo que requirió el experimento.
- La frecuencia a la que evolucionó el experimento está comprendida en el intervalo de 21 ciclos / 600000 segundo = 0.00035 c/ s.
- El decaimiento es exponencial.
- La amplitud de la onda disminuye en, aproximadamente, 11 unidades en el intervalo de los 21 ciclos. Es decir, de una amplitud inicial de 152 se reduce a 141 al final del evento.

#### 4.2.

Conviene detenerse en este punto para recapitular respecto a ciertos aspectos fundamentales para continuar este desarrollo.

Si se denomina señal a la serie de datos en el tiempo<sup>41-42-43</sup> que se analiza, se puede afirmar que, del examen de las primeras gráficas que mostraron la señal en el dominio del tiempo se pudo determinar que la señal fue periódica y no aleatoria, se calculó su media, su atractor y en general sus características más importantes y entonces ¿para qué calcular la Transformada Rápida de Fourier (TRF)?

Una respuesta es que, casi nunca, la señal es tan simple como la que ahora se analiza. Lo común es que la señal sea el resultado de la sobreposición de muchas ondas, de diferentes frecuencias y amplitudes y cuyo análisis es muy difícil, y tal vez hasta imposible de realizar sin la ayuda de la TRF.

Si la señal se muestrea cada  $t$  segundos, se obtienen  $1/t$  muestras por segundo lo cual da origen al concepto "tasa de muestreo" el cual debe escogerse cuidadosamente para evitar un tipo de interferencia, denominado "alisamiento" (aliasing) que se presenta cuando la tasa de muestreo es demasiado lenta.

Se demuestra que se evita el alisamiento si se registra una señal con una tasa de muestreo mayor que dos veces la frecuencia de cualquier senoide de la señal.

La frecuencia de Nyquist es igual a la mitad de la frecuencia de muestreo y representa el

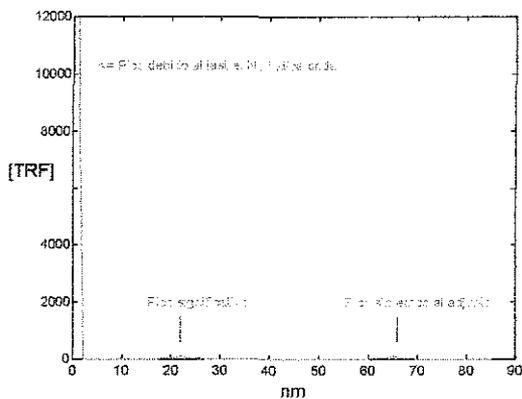
límite superior de las frecuencias que pueden estar contenidas en la señal digital.

Otra manera de definir la frecuencia de Nyquist es afirmar que la mayor frecuencia senoidal que se puede definir a una cierta proporción de muestreo constituye la frecuencia de Nyquist.

### 4.3

Para confirmar que hubo comportamiento periódico, los valores experimentales fueron manipulados de la siguiente manera:

- Se tomaron, de los 30000 datos, aquellos que se registraron entre cada 714 lecturas.
- Se les calculó su TRF.
- Se les calculó su complejo conjugado.
- Se multiplicó la TRF por el conjugado y
- Se obtuvo la gráfica 4.10.



Gráfica 4.10. Presenta la TRF calculada para los números  $nm$  que son múltiplos de  $m=714$

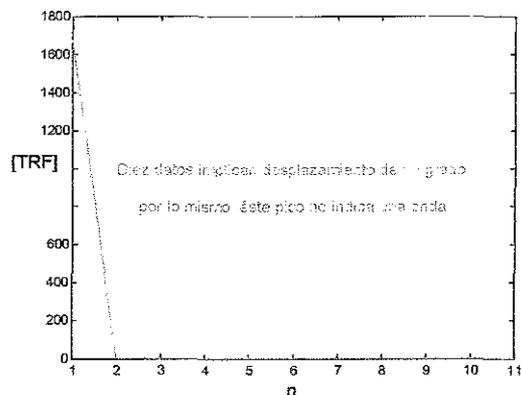
En la gráfica 4.6 se muestra que, los 30000 valores registrados contienen un poco más de 21 ondas ( $42\pi$ ), de donde 714 registros corresponden, aproximadamente, a  $\pi/2$  y por eso, el cálculo de la TRF se hizo utilizando aquellos valores que se dieron a intervalos de 714 lecturas. En lo sucesivo, a los valores registrados cada 714 lecturas, se les identificará como valores  $nm$ .

Se obtuvo un pico muy cercano al eje de las ordenadas; su abscisa es 1. Se obtiene también un pico en la abscisa 22 (y su simétrico en la posición 62 que no aporta información adicional) lo cual podría inducir a pensar que el conjunto de valores contiene

dos ondas sobrepuestas, una de 21 ciclos, lo cual es cierto según lo mostrado en la gráfica 4.6 y otra de 1 ciclo, lo cual es falso.

La diferencia de tamaño entre el primer pico y el segundo es muy grande lo cual también es algo muy irregular aunque, desde luego, no es imposible.

La explicación es simple pero, antes de presentarla y con el objeto de dar sustento previo a tal explicación, se presenta en la gráfica 4.11 el resultado de repetir lo hecho para la gráfica 4.10 utilizando, únicamente, los primeros diez valores de la lista de los 30000 datos registrados



Gráfica 4.11. Se repite la gráfica anterior pero ahora se tomaron, únicamente, los diez primeros valores:  $n=10$ .

Es evidente, con base en lo discutido previamente, que en los primeros diez valores no está contenida una onda completa como podría interpretarse erróneamente de la gráfica 4.11 por lo que, este primer pico debe reconocerse como indicador de la existencia de un valor base alrededor del cual se produce la oscilación.

Es decir, la oscilación no se realiza en rededor del cero sino alrededor de un valor base que es mayor que cero.

Este valor base representa un lastre que debe eliminarse porque enmascara la información que aporta la TRF. Dicho lastre eclipsa la información contenida en los picos significativos.

Cuando las ondas no oscilan alrededor del cero y lo hacen alrededor de un cierto valor, que se puede denominar "lastre" ( $M$ ), al



calcular la TRF, se produce una amplificación de este valor a niveles exagerados.

Esta amplificación se debe a que, al calcular la TRF, este valor se multiplica repetidamente por si mismo creando un parámetro de crecimiento exponencial que se arrastra hasta el final del calculo y se muestra en el resultado.

Algo parecido ocurre con respecto a la amplitud de las ondas. Por eso es necesaria la división de los datos entre la magnitud que tiene dicha amplitud y así eliminar esta distorsión.

La necesidad de eliminar este lastre se debe a que, se generan valores en el proceso de cálculo de la TRF que carecen de utilidad y que se manifiestan, al hacer su grafica, como un pico en la primera posición de la gráfica de la TRF, con el inconveniente de no aportar ninguna información respecto al comportamiento ondulatorio del proceso.

Cuando a los datos se les resta el lastre y se dividen entre la amplitud de la onda, lo que se hace es normalizarlos.

Si a cada uno de los valores que se muestran en la tabla 1 se les resta el valor, al rededor del cual se producen las oscilaciones, se obtienen nuevos valores que ya no acarrear el lastre.

Algunos de ellos se muestran en la tabla 4. Esta tabla 4 tiene el propósito de dar alguna visión de la presentación que tienen estos nuevos valores. Desde luego la información esencial que contienen no cambia pero si se facilita su análisis.

En particular, la eliminación o filtración de esta interferencia se realiza restando 140.9416 a cada uno de los valores registrados a través del experimento.

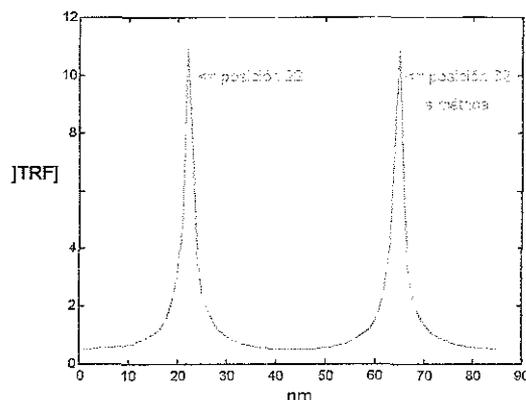
El número 140.9416 corresponde al valor alrededor del cual oscilan las últimas lecturas registradas, es decir, la lectura 29999 que se puede localizar en la tabla 2 del apéndice.

Este valor se encuentra en la vecindad del punto atractor al cual tiende la variable que se midió durante el experimento.

Este valor corresponde con la media de los 30000 valores, la cual es  $M = 140.6732$ .

Los valores filtrados de la tabla 4 continúan siendo claramente periódicos de donde, se puede afirmar que, los datos que originan los picos pequeños mostrados en la gráfica 4.10 no corresponden a ruido y, por lo mismo, no se considera necesario estimar la eficiencia de la TRF para garantizar la validez de las conclusiones obtenidas con base en ella, pues no hay motivos para poner en duda la conducta periódica mostrada por el proceso.

Se repite el cálculo de la TRF y la multiplicación de ésta por su conjugada, es decir, se repite el cálculo de la norma y ahora, lo que se obtiene en la gráfica 4.12; difiere de lo que se obtuvo en la 4.10, en que, ya no hay interferencia debida al lastre que arrastran los datos, lo cual ocasiona la desaparición del primer pico y hace notable el pico de la abscisa 22 que indica 21 ondas contenidas en el conjunto de datos. Todo en armonía con la gráfica 4.6

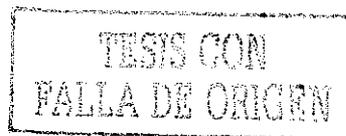


Gráfica 4.12. La norma de la TRF calculada para el total de 30000 datos normalizados. Como se tomaron los datos registrados cada 714 segundos  $nm=84$

Se reitera, para normalizar a los valores experimentales de la tabla 1 y obtener los de la tabla 4, se les resta el valor 140.9616 ( $M$ ), que es alrededor del cual se produce la oscilación y se dividen entre 11.6736 ( $R$ ), que es la amplitud de la primera onda.

La siguiente ecuación<sup>44</sup> (4.1)

$$X_d(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[ x(n) \cos\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) - jx(n) \text{sen}\left(\frac{2\pi kn}{N}\right) \right]$$



permite calcular la Transformada de Fourier para datos discretos.  $X(n)$  es cada uno de los datos discretos registrados a través del experimento; estos deben normalizarse a la forma  $x(n)$  para poder usarse en la ecuación anterior.

En el experimento los datos se registran, generalmente, con la forma  $(X \text{ y } x)$

$$X(n) = Rx(n) + M \tag{4.2}$$

y por eso la resta de  $M$  y la división por  $R$  de acuerdo con la reiteración anterior.

En la tabla 5 se presentan algunos valores ya normalizados dado que no se pueden obtener, con precisión, directamente de la gráfica 4.12 y que ayudan en la interpretación que se busca.

Al observar la gráfica 4.12 se puede notar que los picos se localizan a 22 lugares o posiciones a la derecha o a la izquierda de los extremos. Los picos se localizan en la posición 21, después de corregir por Nyquist o en la posición 62, si se considera la posición simétrica del mismo pico.

La posición de cada uno de los picos, que entre paréntesis están simétricos con relación al centro, indica el número de ondas completas encerradas en el intervalo de muestreo que en este caso fue de 30000 registros tomados, cada uno, a intervalos de 2 segundos.

La frecuencia, tiene entonces un valor aproximado de  $21/(2 \times 30000) = 0.00035$  Hz.

Para el caso específico de la gráfica 4.12 o la tabla 5, la frecuencia de Nyquist se obtiene al dividir la abscisa a la mitad de la ventana entre el tiempo que le corresponde a esta.

La información que se puede obtener de las gráficas 4.10 y 4.11 es:

- Las ventanas consideradas tienen un tamaño que incluyen 30000 datos en la primera y 10 en la segunda, es decir, el tamaño de las ventanas implica un tiempo de 60000 segundos y 20 segundos respectivamente.
- La frecuencia de Nyquist es  $42 / 60000$ , siendo 42 el valor de la abscisa a la mitad de la gráfica el cual se divide entre

60000 que es el tiempo contenido en el tamaño de la ventana.

- Tomando la frecuencia mostrada por los datos como  $0.00035 \text{ seg}^{-1}$  la frecuencia de Nyquist debe ser, por lo menos  $2f = 0.0007$  Hz.
- Entonces se debe registrar lectura, al menos, una cada 1428.57 segundos, siendo ésta, la mínima frecuencia de muestreo.
- Las gráficas 4.10 y 4.11 tienen la utilidad de evidenciar la presencia del pico debido al lastre el cual siempre esta en la posición cero.
- La frecuencia de Nyquist presenta el lastre en la primera posición, por lo que, para eliminarlo, se debe restar un lugar en la posición de los picos.
- Se necesita muestrear durante 2857 segundos para que se incluya en el muestreo, al menos, una onda.

Anteriormente se señaló que la frecuencia del proceso era  $0.00035 \text{ seg}^{-1}$  y ahora, estas evidencias refuerzan que la frecuencia propuesta es correcta.

La TRF transforma datos que evolucionan en el tiempo a datos que evolucionan en la frecuencia y, desde luego, se puede realizar la transformación inversa, es decir, pasar de la frecuencia al tiempo.

Esto ocasiona confusiones sobre todo si, como es el caso, se utilizan los mismos símbolos para referirse a cosas diferentes.

Por ejemplo, es común encontrar en la literatura como, en unos casos, la letra  $N$  se utiliza para indicar el tiempo total de una ventana y en otros para indicar el número de ciclos que hay contenidos en dicha ventana. Esto conduce a las siguientes expresiones:

$$N = nx \text{ y} \tag{4.3}$$

$$N = fT \tag{4.4}$$

Donde  $n$  se refiere al número de lectura y  $x$  al intervalo de tiempo entre  $n$  y  $n+1$  y, continuando con (4.3),  $N$  es el tiempo total entre  $n$  y  $n+1$ . Por otra parte,  $f$  es la frecuencia de un evento y  $T$  es el tiempo durante el cual se observó el mismo y ahora, en (4.4),  $N$  indica el número de ciclos observados en el tiempo  $T$  y la confusión se

puede presentar cuando  $N$ , de (4.3), se confunde con  $T$  de (4.4)

Así, con base en (4.3), si se toma  $n = 84$  lecturas y entre cada lectura hay un intervalo de tiempo de  $x = 714$  segundos (nótese que no es lo mismo  $x$  que  $x_n$ ), lo cual se representa como:

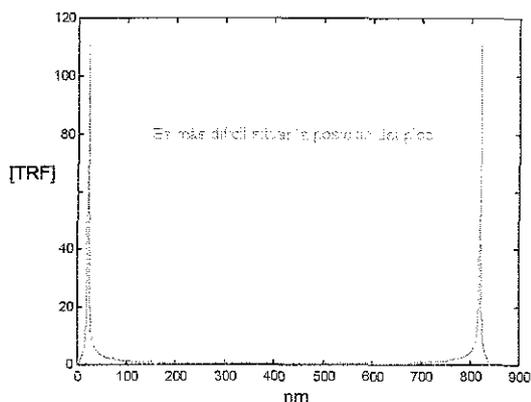
$$x = [0:714:60000]$$

conduce a que el tiempo total de muestreo es de  $N = 60000$  segundos y la información de la gráfica 4.12 y la siguiente 4.13 deben interpretarse así:

En la gráfica 4.12 hay un pico en la posición 22. Su simétrico está en la posición 62 luego los picos están a 21 posiciones del extremo más cercano y esto significa que, en la ventana de 60 000 segundos hay 21 ciclos y por eso la frecuencia a la que oscila el proceso es  $0.00035 \text{ seg}^{-1}$ .

Ahora, con base en (4.4), si el tiempo de muestreo fue  $T = 60000$  segundos y la frecuencia del evento fue  $f = 0.00035 \text{ seg}^{-1}$  el número de ciclos contenidos en la ventana fue  $N = 21$ .

Modificar el tiempo entre lecturas,  $x$ , no altera la esencia de la información obtenida con base en la gráfica pues, a lo sumo, se facilita o complica la obtención de ésta. En 4.13,  $x = [0:71.4:60000]$  y el pico está nuevamente en la posición 22, es decir están a 21 lugares del extremo y por lo tanto en la ventana, que sigue siendo de 60000 segundos, continúan atrapados 21 ciclos, como antes

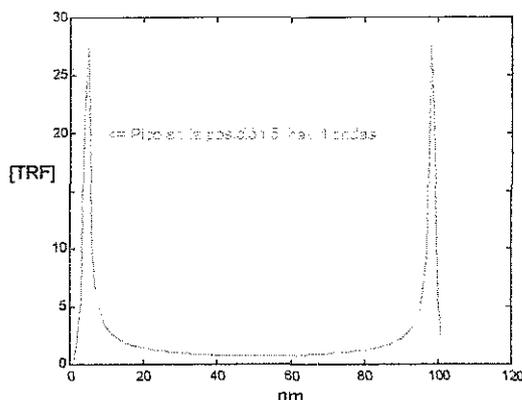


Gráfica 4.13 El tamaño de la ventana es de 60 000 segundos. Las muestras que se tomaron fueron 840

La tabla 6 contiene datos de la norma calculada para diferentes tamaños de ventana. Se observa que, al variar el tamaño de ésta, varía la dispersión del pico pero no se altera la posición de éste.

La siguiente gráfica 4.14 se construye con  $x = [0: 100: 10000]$  es decir, se seleccionan los valores que se registraron cada cien segundos para una ventana cuyo intervalo de tiempo es 10000 segundos.

Por lo mismo, el lote consta de  $n = 100$  datos y es de esperar, más o menos, cuatro ondas contenidas en este lote. Por otro lado, no hay argumentos que justifiquen el que la frecuencia sufra algún tipo de modificación.



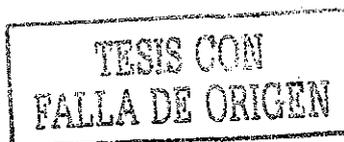
Gráfica 4.14. La diferencia con la gráfica anterior, 4.9, consiste en que ahora la ventana es seis veces menor y debe contener seis veces menos ondas

El señalamiento de "más o menos" se hace porque la ventana de 10000 segundos debe contener un poco más de tres ondas de acuerdo con lo que antes se demostró: en 60000 segundos hay 21 ondas.

Con base en la información de la gráfica 4.14 la frecuencia debería ser 4 ciclos / 10000seg = 0.0004 Hertz.

Luego, para llegar gráficamente al valor más preciso posible de la frecuencia, es necesario realizar tanteos con diferentes tamaños de ventana hasta llegar al tamaño de esta que menor dispersión produce en el pico.

Si se requiere mayor precisión en la estimación de la frecuencia se debe recurrir directamente a los valores experimentales.



En el presente caso se recurre a la tabla 1 para buscar el valor exacto en que ocurre la inflexión.

Encerrados entre corchetes, en la tabla 1, se encuentra el primer valor en el que ocurre la inflexión o punto máximo de la onda, lo cual ocurre en el valor que esta en la posición 1428. Por lo tanto, la frecuencia más precisa que se puede obtener de estos datos es 1 ciclo en 2856 seg. o  $f = 0.00035014$  ciclos / segundo.

Si el punto máximo de la onda se presenta en la posición 1428 (cresta), entonces debe presentarse un mínimo (valle) en la posición  $1428 / 2 = 714$ . Así ocurre. El valor en el que esto sucede también esta encerrado entre corchetes.

De igual manera entre corchetes se encuentran los demás valores de la tabla 1 en los que se presenta un máximo o mínimo.

Si se modifica el tamaño de ventana se modifica la posición de los picos según el número de ondas que contiene.

Se puede concluir que la frecuencia de la señal se puede estimar utilizando la gráfica 4.4 pero, se tiene que recurrir a la TRF para aumentar la precisión de la medida.

#### 4.4.

Como el objetivo es el modelaje del proceso experimental con base en los datos registrados se propone una ecuación para representar el comportamiento mostrado por el conjunto de datos contenidos en la tabla 1. La ecuación propuesta es:

$$x_{n+1} = A + BK \cos(2\pi ft) \quad (4.5) \text{ (similar a 4.30)}$$

Las razones que condujeron a proponer esta estructura algebraica se explican a continuación.

La gráfica 4.6 sugiere que la oscilación ocurre alrededor de un valor fijo hacia el que tienden todos los valores registrados y se ha propuesto que este punto corresponde a un punto atractor.

Este valor está representado por el parámetro  $A$  y es este quien da origen al lastre.

Para determinar el valor de  $A$  se pueden seguir diferentes rutas. La que se aplica a continuación consiste en tomar promedio a los últimos valores donde se producen inflexiones. El valor obtenido así para  $A$  es 140.664.

El parámetro  $B (-R)$  o intervalo, cuyo origen es la amplitud máxima de las ondas registradas corresponde, a su vez, a la cantidad máxima que hay que sumarle o restarle al valor central  $A (-M)$  para obtener la máxima amplitud registrada.

En este caso  $152.3376 - 140.664 = 11.6736$ . Esta cantidad que se suma o resta debe ir disminuyendo a medida que el proceso transcurre.

Más adelante se detalla el procedimiento para determinar cuanto se debe restar o sumar y así tener concordancia con lo señalado en la gráfica 4.6.

El parámetro  $K$  tiene que ser un factor de peso que vaya amortiguando la señal para con eso cumplir con las condiciones dadas en el párrafo anterior.

Para determinar las características de este parámetro y el valor que le corresponde se procede así.

Si  $0.00035014 \times 60000 = 21.0084$  entonces, se produjeron 21 ondas en el intervalo de 29988 lecturas. Es decir:

$$59976 \times 0.00035014 = 21.$$

En la lectura 29988 se presenta un punto de inflexión que corresponde a un máximo, el cual tiene el valor 140.9424. Esto significa que la señal se amortiguó, al transcurrir 21 ondas, en 11.3956 a partir de su inicio en 152.3376.

De igual manera, en la lectura 29274 se presenta un punto de inflexión que corresponde a un mínimo, el cual tiene el valor 140.3598 lo cual significa que la señal se amortiguó, al transcurrir 20 ondas, en 10.3757 a partir de su inicio en 129.9841.

Cabe hacer notar que los anteriores valores 140.9424 y 140.3598 se localizan a uno y otro lado, respectivamente, del valor atractor A y esto pueden servir para justificar el valor, 140.664 propuesto para este parámetro A.

Se propone que el factor de amortiguamiento se introduzca en (4.5) haciendo la siguiente sustitución:

$$BK \cos(2\pi ft) = Be^{-wt} \cos(2\pi ft) \quad (4.6)$$

para que se cumpla con las siguientes condiciones:

- Cuando, al multiplicar la frecuencia por el tiempo se obtienen múltiplos exactos de 1/2,  $\cos(2\pi ft)$  tiene el valor -1, lo cual provoca que  $Be^{-wt}$  se reste de 140.664.
- Cuando, al multiplicar la frecuencia por el tiempo el resultado obtenido es un número entero,  $\cos(2\pi ft)$  tiene el valor 1, lo cual provoca que  $Be^{-wt}$  se sume con 140.664.
- Al transcurrir el tiempo, la variación se va amortiguando de tal manera que, para tiempos muy grandes, la variación se hace imperceptible, asintótica y por lo mismo tiende a cero.

Lo anterior pone de manifiesto y especifica la manera como va evolucionando el proceso al transcurrir el tiempo.

Se puede estimar el valor del parámetro w que se utiliza en el argumento de la exponencial así:

En la lectura 2142 se obtuvo el valor 131.7249 el cual se aleja del valor atractor 140.664 en 8.9391 luego, la variación después de 4284 segundos es,

$$11.6736e^{-wt} = 8.9391$$

o, lo que es lo mismo

$$w = -1/t \ln(8.9391 / 11.6736)$$

$$w = -0.00006205$$

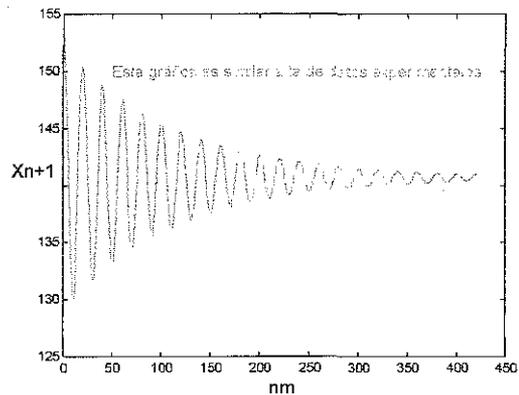
En la lectura 29998 se obtuvo el valor 140.9424 y, calculando igual, se obtiene:

$$w = -0.00006205$$

Queda demostrado entonces que la siguiente ecuación (4.7), la cual es un caso particular de la ecuación (4.5), representa el comportamiento del conjunto de valores registrados durante el experimento mediante la variable  $x_{n+1}$

$$x_{n+1} = 140.664 + 11.6736 \exp(-0.00006205 t) \cos(2\pi t \cdot 0.00035014) \quad (4.7)$$

La gráfica 4.15 corresponde a la ecuación anterior desarrollada para los 30000 datos registrados y se puede observar la similitud tan grande que tiene con la gráfica 4.6 que muestra únicamente a los datos experimentales.



Gráfica 4.15 Se obtiene de la ecuación (4.7) Se tomaron 840 valores del total de 30000 por lo que cada valor corresponde a un tiempo de 142.8 seg

Analizando con mucho detalle los valores registrados en la tabla 1 se observa que los puntos de inflexión no ocurren en tiempos totalmente estables.

Así, por ejemplo, la primera inflexión ocurre en la lectura número 711, es decir, 1422 segundos después de iniciada la corrida experimental

Por otro lado, la lectura número 29988 muestra un tiempo de 1430 segundos entre inflexión e inflexión, es decir, presenta un retraso de  $1430 - 1422 = 8$  segundos con respecto los puntos de inflexión iniciales, lo que indica una leve disminución de la frecuencia a medida que el proceso avanza

Si bien es cierto que esto no influye significativamente en el comportamiento general del evento, también es cierto que influye en la precisión con la que posteriores ajustes se pueden realizar.

4.5.

La ecuación (4.5) representa entonces, la conducta de procesos que evolucionan de la manera que se ilustra en la gráfica 4.15, es decir, conductas periódicas convergentes.

Resulta conveniente puntualizar la manera como influyen (y otros procedimientos que se pueden utilizar para calcularlos) los parámetros de la ecuación (4.5) en la evolución del proceso.

Otro método que se propone para la estimación de dichos parámetros consiste en aplicar los valores experimentales en las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10)

Tiene una limitante el uso de este método: los datos deben corresponder a puntos de inflexión y deben ser, preferentemente, consecutivos. Tiene la ventaja de proporcionar valores confiables para los parámetros a partir de tres o cuatro valores experimentales.

El parámetro  $A$  toma el valor que le corresponde al punto atractor y se puede estimar utilizando los valores experimentales de la tabla 1 en la ecuación (4.8)

El sistema desarrolla su movimiento armónico de convergencia con una amplitud indicada en cualquier momento por la ecuación (4.9) mediante el parámetro  $A$  que se ha calculado utilizando la ecuación (4.8)

En cada oscilación la amplitud se amortigua con una tasa de reducción constante indicada mediante el parámetro  $w$  que se puede calcular utilizando la ecuación (4.10)

Mediante la frecuencia  $f$  y el tiempo de cada oscilación se pueden determinar el número de ciclos que requiere el sistema para llegar a un nivel dado de equilibrio.

Las siguientes tres ecuaciones permiten calcular el valor del atractor  $A$ , el parámetro de variación  $B$  y el parámetro de disminución o amortiguamiento  $w$ . Como se dijo en la sección 4.4 anterior,  $A$  es el valor central alrededor del cual se realiza la oscilación,  $B$  es la máxima amplitud registrada y  $w$  es parte del exponente para la atenuación. Se deducen algebraicamente a partir de esto.

$$A = \frac{x_0 x_2 - (x_1)^2}{x_0 + x_2 - 2x_1} \tag{4.8}$$

$$w = -\frac{1}{t_n} \ln \frac{A - x_1}{x_0 - A} \tag{4.9}$$

$$B = x_0 - A \tag{4.10}$$

Para ilustrar el empleo de las ecuaciones anteriores se puede tomar, de la tabla 1, los tres primeros valores registrados que corresponden a puntos de inflexión. Estos valores se registraron a los 0 segundos, 1428 segundos y 2856 segundos respectivamente y fueron los registros  $n=0$ ,  $n=714$  y  $n=1428$ .

En la ecuación (4.9)  $t_n$  es el tiempo transcurrido entre  $x_0$  y  $x_1$ . Entonces:

$$A = \frac{(152.33)(150.44) - (129.98)^2}{152.33 + 150.44 - (2)(129.98)}$$

$$A = 140.664$$

$$w = -\frac{1}{1428} \ln \frac{140.66 - 129.98}{152.33 - 140.66}$$

$$w = -0.00006205$$

$$B = 152.33 - 140.66$$

$$B = 11.6736$$

4.6.

La ecuación (4.7) describe el comportamiento experimental que se analiza y se procede ahora a demostrar que ésta ecuación manifiesta comportamientos descritos por la Teoría del Caos. Para ello es necesario analizar, paso a paso, la evolución del proceso.

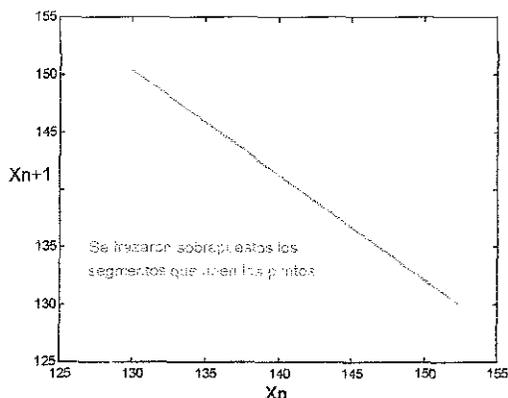
Se crea una nueva tabla con los valores a los cuales ocurren las inflexiones en los 30000 datos registrados, recordando que solo algunos de ellos se muestran en la tabla 1.

Esta nueva tabla se denomina tabla 8-a. A partir de ésta 8-a se crea la tabla 8-b eliminando el primer valor de 8-a y respetando el valor y posición del resto de los valores.

En forma más puntual: la única particularidad de 8-b es, simplemente que, los datos de 8-a se recorrieron un lugar.

Lo anterior permite obtener los elementos necesarios para crear pares ordenados formados por el valor  $x_n$  y su sucesor  $x_{n+1}$ .

Al hacer la grafica con estos pares se visualiza la manera como evoluciona el proceso dado que es posible observar los cambios de punto a punto.



Gráfica 4.16. Muestra el resultado de graficar la iteración de  $x_n$

Esta gráfica por sí sola pudiera parecer de poca utilidad dado que la información que contiene no resulta evidente a simple vista. Así, por ejemplo, da la impresión que los puntos se agrupan en un segmento de recta y no es así y, sobre todo, induce a pensar que los puntos se van agrupando, paulatinamente, uno a continuación del otro y este evento tampoco ocurre.

La imagen se crea al trazar un segmento, desde el primer par ordenado al segundo, del segundo al tercero y así sucesivamente. Este proceso sobrepone una serie de segmentos que dan la imagen incierta de la gráfica 4.16

Incierta en el sentido de no hacer evidente la rica información que puede aportar si en lugar de unirse todos los puntos se hace el seguimiento de cómo se van produciendo cada uno de ellos

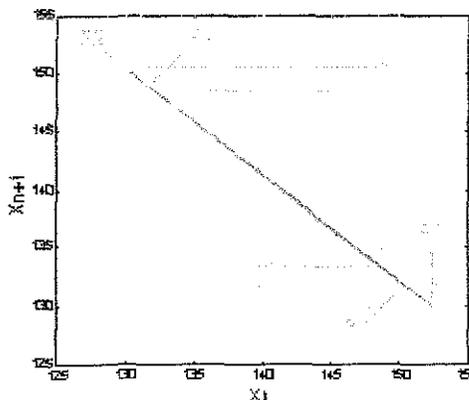
Resulta más conveniente explicar cómo se forma esta grafica resaltando el desplazamiento, eje por eje, para visualizar el orden como se van acomodando cada uno de los puntos y, en consecuencia, como se va dando la evolución del proceso que se estudia. Para ello se utilizan los primeros seis pares ordenados:

(152.3376, 129.9803), (129.9803, 150.4418)  
 (150.4418, 131.7153), (131.7153, 148.8539)  
 (148.8539, 133.1686), (133.1686, 147.5238)

El primer punto se sitúa en la gráfica 4.17 localizando la intersección del valor 152.3376 como abscisa y su valor sucesor 129.9803 como ordenada.

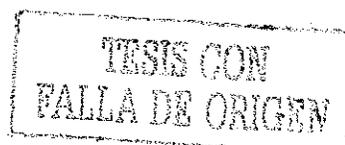
El segundo punto se localiza en la intersección del valor 129.9803 con el valor 150.4418 y así sucesivamente

La utilidad que tiene hacer este seguimiento, punto por punto, reside en que se hace evidente el proceso de realimentación en la evolución del proceso.



Gráfica 4.17. Muestra la secuencia que va siguiendo las iteraciones de  $x_n$

Pudiera pensarse que resulta obvia la manera como se produce la realimentación de valores bosquejada en la gráfica anterior pero, por ser una conclusión de suma importancia para esta tesis se juzga



pertinente resaltar dicha conclusión, tanto como sea posible:

*En los mapas utilizados en la Teoría del Caos, a cada valor  $x_n$  y su sucesor  $x_{n+1}$  se les puede hacer corresponder con un punto de inflexión de una onda.*

En la gráfica 4.17 se utilizan las flechas para enfatizar la evolución que sigue el proceso que se analiza.

Para pasar del punto P1 (152.3376 - 129.9803) al punto P2 (129.9803-150.4418) se indica el desplazamiento, primero, con una flecha horizontal que va de derecha a izquierda y después con otra flecha vertical que va de abajo hacia arriba.

Después, una flecha horizontal que va de izquierda a derecha y otra que va de arriba hacia abajo muestra la ruta de transición del segundo punto al tercero y así sucesivamente.

El proceso se repite para cada punto y el recurrir a las flechas tiene la utilidad de ilustrar como se dan los desplazamientos que conducen al equilibrio.

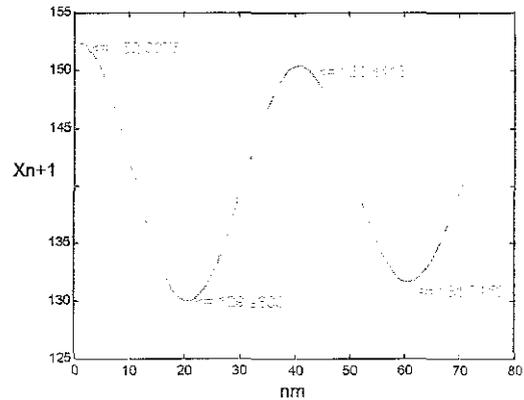
En cada ciclo de realimentación, el valor más grande que alcanza la cresta corresponde al valor inicial del medio ciclo que comienza y que concluye en el valor más pequeño en el fondo del valle, en el cual se inicia otro medio ciclo que llega, nuevamente a la cúspide de la cresta y así sucesivamente.

La gráfica 4.18 ilustra lo que se expresa en el párrafo anterior y permite formar una idea de la posición que tiene cada valor inicial y su respectivo sucesor.

Esta gráfica 4.18 complementa la información de la gráfica 4.17 dado que muestra lo mismo desde otra perspectiva pues ilustra qué ocurre cuando el valor de la ordenada se transforma en el valor de abscisa siguiente y esta abscisa nuevamente se transforma en ordenada y así sucesivamente.

Este procedimiento y estas gráficas tiene la utilidad de hacer evidente la realimentación de condiciones, es decir, se pone en evidencia la influencia de las condiciones iniciales en las que se inicia un ciclo y las condiciones finales en las que el mismo

concluye logrando, al mismo tiempo, tener una perspectiva que permite visualizar la evolución del proceso iterativo completo.



Gráfica 4.18 Presenta la posición que ocupan en la onda algunos de los valores utilizados en la gráfica 4.17.

#### 4.7.

El conjunto de puntos de la gráfica 4.16 induce a pensar que dichos puntos podrían formar parte de una línea recta; en realidad, como se verá a continuación, forman parte de una parábola.

Para demostrar esto se propone lo siguiente: si se calcula la pendiente que tiene el segmento que une al segundo punto con el primero, o al segundo punto con el punto atractor se obtienen las siguientes inclinaciones:

$$m_1 = -0.9152044 \text{ y}$$

$$m_2 = -0.9152072$$

las cuales, por ser diferentes, no pueden formar parte de una línea.

Desde luego lo anterior no es prueba definitiva para concluir que los puntos no forman parte de un segmento lineal pero, se puede demostrar en forma concluyente que los puntos corresponden a una parábola. Para ello se propone lo que sigue.



Suponiendo que los puntos de inflexión como los de la gráfica 4.18, formen parte de una parábola, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones que permite calcular el valor de los parámetros que debe tener ésta, para que dichos puntos se localicen en esa región del espacio.

Iniciando con la ecuación general de la parábola:

$$y - k = -\mu(x - h)^2 \quad (4.11)$$

y suponiendo que son conocidas las coordenadas de tres puntos de la misma, se puede plantear el siguiente grupo de ecuaciones simultaneas que permite encontrar el valor que corresponde a cada uno de los parámetros y así determinar la parábola, que en específico, corresponde a estos puntos:

$$\begin{aligned} y_1 + \mu x_1^2 - 2\mu h x_1 + \mu h^2 - k &= 0 \\ y_2 + \mu x_2^2 - 2\mu h x_2 + \mu h^2 - k &= 0 \quad (4.12, a, b, c) \\ y_3 + \mu x_3^2 - 2\mu h x_3 + \mu h^2 - k &= 0 \end{aligned}$$

Si las coordenadas utilizadas son los puntos de inflexión antes mencionados entonces, la ecuación (4.11) también se puede expresar así;

$$x_{n+1} - k = \mu(x_n - h)^2 \quad (4.13)$$

donde  $y = y_n = x_{n+1}$  y  $x = x_n$

Se puede resolver el grupo de simultaneas (4.12) con los valores experimentales correspondientes a los puntos de inflexión, como los de la gráfica 4.18 y simplificando, a través de aplicar la condición particular de que se cumple con la siguiente propiedad:

$$\mu h^2 = k \quad (4.14)$$

Se proponen las siguientes ecuaciones para evaluar los parámetros de la parábola utilizando los valores experimentales:

$$h = \frac{y_n x_{n+1}^2 - y_{n+1} x_n^2}{2(y_n x_{n+1} - y_{n+1} x_n)} \quad (4.15)$$

$$\mu = \frac{y_n}{2h x_n - x_n^2} \quad (4.16)$$

o bien, se puede utilizar la siguiente opción:

$$\mu = \frac{y_{n+1} x_n - y_n x_{n+1}}{x_n^2 x_{n+1} - x_{n+1}^2 x_n} \quad (4.17)$$

$$h = \frac{y_n + \mu x_n^2}{2\mu x_n} \quad (4.18)$$

Al asociar una cierta parábola, cuyas constantes se evalúan, con base, en los puntos de inflexión obtenidos durante la experimentación, se observa que no hay tal constancia y que, en todo caso, se puede asociar una parábola "promedio" que más o menos se ajusta a los datos.

Esta situación era previsible dado que hay fluctuaciones durante la experimentación.

De la tabla 8-a se toman seis puntos de inflexión espaciados a intervalos iguales y con ellos se evalúa  $h$  y  $k$  que, de acuerdo a los puntos utilizados se producen los siguientes resultados:

$h = 108.834$	$\mu = 0.0131$	(1,2)
$h = 106.3215$	$\mu = 0.0139$	(2,3)
$h = 107.3988$	$\mu = 0.0135$	(3,4)
$h = 106.9034$	$\mu = 0.0137$	(4,5)
$h = 105.8120$	$\mu = 0.0141$	(2,5)
$h = 105.5990$	$\mu = 0.0142$	(2,6)

De donde se proponen los siguientes promedios para las constantes de la parábola que se aproxima mejor a los valores experimentales:

$$\begin{aligned} \mu &= 0.0135 \\ h &= 107.612 \\ k &= 155.8987 \end{aligned}$$

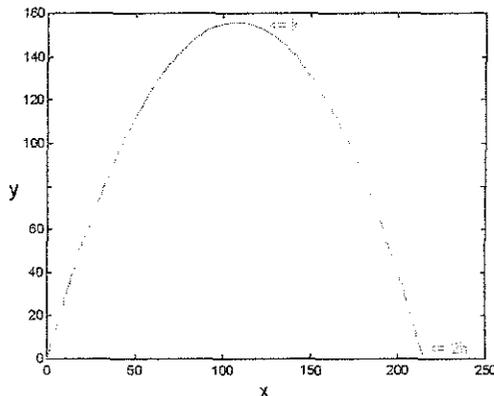
y se concluye que la parábola a la que pertenecen los puntos de inflexión obtenidos experimentalmente tiene la siguiente expresión:

$$y - 155.8987 = -.0135(x - 107.3604)^2 \quad (4.19)$$

La gráfica 4.19 muestra la ecuación anterior para valores de  $x$  que van de cero a  $2h$ , es decir, de cero a 214.7208.

El valor 155.8987 es el valor de la ordenada en el punto más alto de la parábola y, ambos

valores, 107 3604 y 155 8987 localizan el vértice de ésta.



Gráfica 4.19. Corresponde a la ecuación (4.19) e ilustra el significado de los parámetros h y k

El valor 0.0135 es el doble de la distancia que hay entre el foco y el vértice.

La ecuación (4.19) permite calcular la ordenada de cualquier abscisa es decir, el sucesor de cualquiera de los valores obtenidos en el experimento.

Por lo mismo se puede afirmar que esta ecuación es otra manera de representar el comportamiento mostrado por los datos del experimento y complementa, más no sustituye, a la ecuación (4.7)

La coincidencia de (4.7) y (4.19) se da únicamente, en los puntos de inflexión.

La ecuación (4.19) que tiene la estructura típica utilizada en geometría analítica se adapta, para representar a los datos experimentales, mediante un cambio de variables, de acuerdo a la nomenclatura utilizada en la ecuación (4.13) para quedar así:

$$x_{n+1} - 155\,8987 = -0.0135(t - 107\,3604)^2 \quad (4.20)$$

Sustituyendo los diferentes valores sucesivos de tiempo registrados como lecturas

$$n_1, n_2, n_3$$

y que corresponden a los tiempos en los que la ecuación (4.7) presenta puntos de inflexión, se establece correspondencia entre datos experimentales y los mapas utilizados

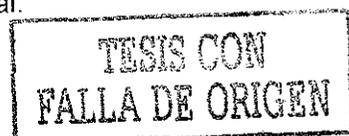
en la Teoría del Caos y se logra asociar, a cada punto de iteración, un tiempo.

La ecuación (4.20) debe ser normalizada antes de lograr la correspondencia completa con las estructuras propias de la Teoría del Caos lo cual es uno de los objetivos de esta tesis y para realizar dicha normalización es fundamental determinar las coordenadas (h,k) del vértice de la parábola.

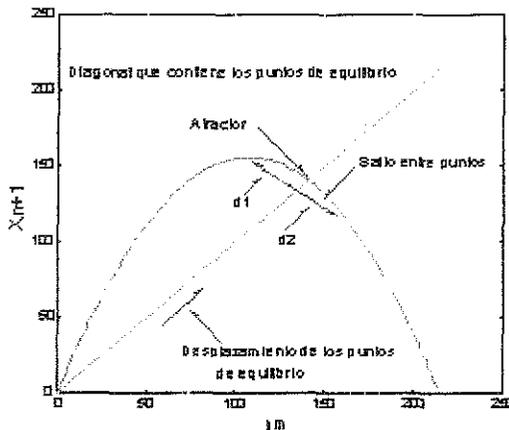
#### 4.8.

Conviene apoyarse en la gráfica 4.17 para comprender mejor lo que se dice a continuación. Al pasar del punto P1 al punto P2, el cual es el sucesor de P1, y de P2 al P3 y así sucesivamente, se observan diferentes peculiaridades:

- Se producen saltos alternados a uno y otro lado de un punto de equilibrio
- La secuencia o trayectoria del salto, entre punto y punto, se indica con las flechas.
- El punto de equilibrio se localiza sobre la diagonal que se construye a partir del origen de coordenadas.
- La distancia del punto de equilibrio a P1 se denota como  $d_1$ , y la distancia del punto de equilibrio a P2 se denota como  $d_2$ .
- A medida que la iteración se desarrolla,  $d_1$  y  $d_2$  tienden a cero, de donde se concluye que, estas distancias se igualan en el momento de llegar al punto atractor.
- En consecuencia,  $d_1$  y  $d_2$  son iguales únicamente cuando valen cero. Esto es cierto, solamente para el caso particular cuando el proceso evoluciona hacia un atractor único.
- $d_1$  y  $d_2$  son las amplitudes del valle y de la cresta para la onda en el instante de la medida, las cuales se determinan a partir del punto de equilibrio alrededor del cual se produce la vibración.
- Los puntos de equilibrio, para cada par de puntos, se desplazan hacia el atractor a medida que se desarrolla la iteración.
- La trayectoria seguida por el desplazamiento de los puntos de equilibrio justifica la inclusión de la diagonal.



- Si únicamente se hace la gráfica de pequeños lotes, como en la gráfica 4.16, los puntos en el eje de las abscisas y sus sucesores en el eje de las ordenadas, se obtiene un segmento de parábola.
- Al trazar la parábola completa que corresponde al segmento y la diagonal por donde se desplazan los puntos de equilibrio se obtiene la gráfica 4.20.



Gráfica 4.20. A la gráfica 4.19 se le añade la diagonal donde se desplazan los puntos de equilibrio

Para este caso en particular (proceso que decae a un punto único), el punto de intersección de la diagonal y la parábola corresponden con las coordenadas del punto atractor, es decir, el punto donde se cumple con la condición de que  $x = y$  o bien  $X_n = X_{n+1}$ . Esto no ocurre si hay dos o más atractores.

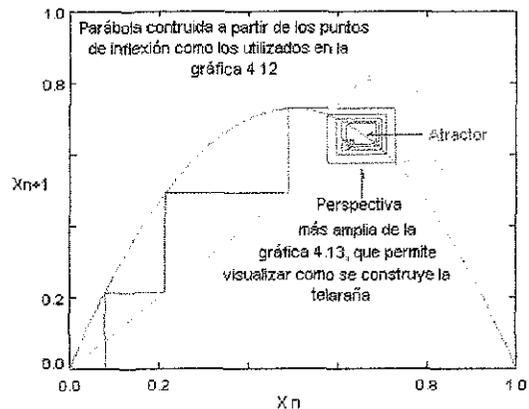
Sí, tanto los valores de  $x$  como los de  $y$  involucrados de la ecuación (4.19) o los valores  $X_n$  y  $X_{n+1}$  de la ecuación (4.20) se dividen entre 214 se normalizarán y sí, con los valores normalizados se repite lo hecho en la gráfica 4.17, se obtiene la gráfica 4.21 en la cual, es posible apreciar como se teje la telaraña alrededor del punto atractor

En esta gráfica se puede apreciar mejor la utilidad que tiene utilizar las flechas para ir dando seguimiento a la evolución del proceso.

Dichas flechas ponen en evidencia el hecho de que, al evolucionar el proceso, los puntos de inflexión saltan a uno y otro lado de la diagonal que divide al plano.

Es de esperar estos saltos dado que, los valores que producen la parábola corresponden a los puntos de inflexión que se originan en la conducta ondulatoria del proceso y son consecuencia de la transición desde el punto más alto de la cresta a lo profundo del valle de la onda y por lo mismo, a uno y otro lado del valor de equilibrio.

Si el proceso se hubiese continuado con todos los puntos restantes sería más evidente la manera como se va tejiendo la telaraña que concluye en el atractor



Gráfica 4.21 Permite apreciar integrado el proceso que se sigue para llegar al atractor

Esta gráfica 4.21 se puede aprovechar también para estimar el número de iteraciones que se requieren para que el proceso quede estable, lo cual ocurre cuando se alcanza el punto de equilibrio. Para ello hay que contar el número de vueltas que da la telaraña hasta llegar al atractor.

El punto de estabilidad o atractor esta tipificado por los valores que corresponden a la intersección de la parábola con la diagonal, es decir, la estabilidad esta indicada por el atractor

El atractor da indicio de las condiciones que hay que lograr para que el proceso se desarrolle con estabilidad y las iteraciones realizadas para llegar al atractor permiten estimar en cuanto tiempo de operación se llega al equilibrio.

Así, por ejemplo, las condiciones de operación del tokamak que originaron al



conjunto de datos que se analiza, se dieron en tales circunstancias que, la variable que se decidió monitorear, tuvo un valor inicial cercano a 16 (0.08 en valores normalizados para la gráfica 4.21) y hubo necesidad de operar el sistema durante 8568 segundos, que fue el tiempo necesario para desarrollar tres ciclos completos, antes de llegar a las condiciones que generaran señales de respuesta y se iniciara el comportamiento cíclico.

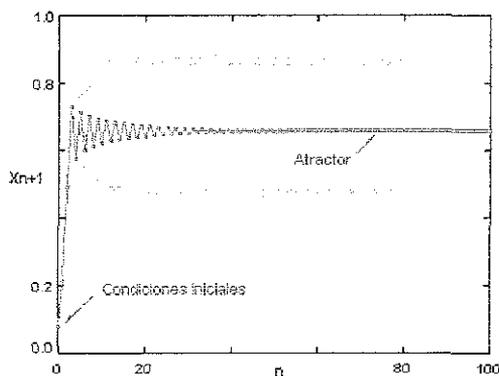
Después se necesitaron, aproximadamente, veinte ciclos para que la variable monitoreada oscilara con  $\pm 0.2\%$  alrededor del atractor.

Por lo anterior, se puede entender la importancia que tiene para el investigador que busca alcanzar condiciones de operación estable (y no solo para el caso del tokamak) el conocer, o predecir, bajo que condiciones y en cuanto tiempo, el proceso llega al equilibrio.

Seguramente la meta debe ser lograr estabilidad a la brevedad posible.

Las condiciones iniciales son las que determinan el número de iteraciones previas al equilibrio.

La gráfica 4.22, similar a la 4.21 con relación a la conducta del proceso muestra, más claramente, el comportamiento oscilatorio del proceso.



Gráfica 4.22. Permite visualizar las oscilaciones previas al punto donde se alcanza el equilibrio.

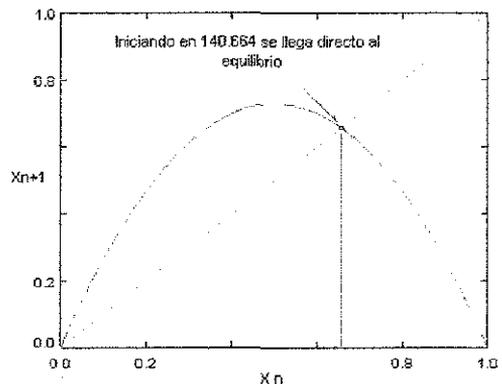
La oscilación inicia cuando se alcanza la conjunción de factores que ponen en marcha el desarrollo del proceso, lo cual se materializa, cuando la variable monitoreada rebasa al punto más alto de la parábola.

En teoría se puede determinar cuáles deben ser las condiciones que conducen inmediatamente a la estabilidad del sistema, más esto no significa que los equipos estén en condiciones de satisfacer los requerimientos que se les pide, ni que se pueda manipular, a los diferentes factores, en condiciones tales que permitan alcanzar el valor necesario en la variable monitoreada.

Para eso puede requerirse aún de mucho diseño y construcción de equipo.

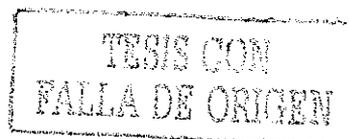
Así, por ejemplo, si las condiciones de operación del tokamak permitieran iniciar en circunstancias tales que, la variable monitoreada comenzara en 140.664, el aparato trabajaría, desde un principio, en condiciones estables.

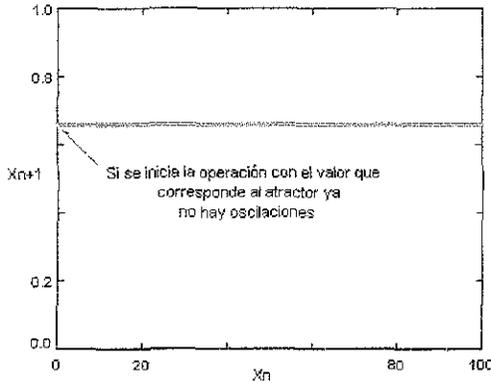
Las gráficas 4.23 y 4.24 ilustran cómo se comportaría el aparato con las condiciones iniciales antes señaladas.



Gráfica 4.23. Si fuese posible que las condiciones iniciales comenzaran en 140.664 no habría telaraña.

Las condiciones necesarias para lograr una operación como la que se ilustra en las gráficas implican que, el proceso inicie estrictamente cuando los diferentes factores conduzcan, lo más cercanamente posible, al valor 140.664.





Gráfica 4.24. Si el inicio fuera en 140 664 no habría oscilaciones

Sin embargo, desde el arranque influyen la inercia y la histéresis lo cual hace inevitable la oscilación.

Las condiciones necesarias para lograr una operación como la que se ilustra en las gráficas anteriores, es decir operar con estabilidad desde el principio, implican que, el proceso debe iniciar estrictamente cuando los diferentes factores conduzcan, lo más cercanamente posible, al valor 140 664.

Buscando materializar o darle sentido a la conclusión anterior, con relación al funcionamiento del tokamak, podría sugerirse que el valor 140 664 implica que, el balance de energía en todos los sistemas que integran al aparato, se mantiene constante en estas condiciones. Es decir, que las pérdidas energéticas se compensen con energía suministrada al sistema desde el exterior.

#### 4.9.

Regresando a la gráfica 4.21, se observan evidencias que demuestran que el proceso evoluciona en forma iterativa y que se encuentra sometido a un proceso de realimentación continua de condiciones. El concepto contenido en estas últimas palabras se trata de aclarar recurriendo al siguiente ejemplo:

Al producirse la primer descarga de Taylor hay cierta cantidad de impurezas en la cámara y son éstas las que condicionan el resultado que se obtiene. Al inicio de la segunda descarga las circunstancias han cambiado con respecto a la primera dado que, ahora la cantidad de impurezas es diferente a las que había al inicio de la operación y por lo mismo el resultado obtenido en la segunda descarga es diferente al obtenido antes

En la tercer descarga se presenta la misma situación de realimentación: las condiciones iniciales a la descarga de Taylor nuevamente son diferentes y de aquí que haya realimentación continua de condiciones.

Esto es típico del Caos.

Luego entonces todo lo anterior constituye evidencia que refuerza la hipótesis de que el tokamak presenta conductas descritas por la Teoría del Caos.

#### 4.10.

Se procede a continuación con la tarea de asociar la ecuación (4.20), con un mapa (una ecuación que se puede iterar) propio del Caos.

En la Teoría del Caos se proponen diferentes modelos aplicables a los procesos con realimentación, como son el mapa logístico, el mapa seno o el mapa cúbico, entre otros.

Para asociar alguno de estos modelos a los datos experimentales se tienen que tomar algunas precauciones que, al menos, deben ser las siguientes:

- Determinar a cuantos atractores tiende el sistema.
- El número de variables de estado que necesita el sistema para ser modelado.
- El número de iteraciones estimadas que se necesitan para llevar al sistema a un nivel dado de equilibrio.
- El valor del factor de normalización que permite transformar los datos experimentales a la estructura que requieren los modelos del Caos.

- El valor que le corresponde al atractor en función del modelo que se va a asociar y, sobre todo
- El valor del parámetro que le corresponde al mapa seleccionado para ser asociado a los valores experimentales.

El conjunto de valores que se analiza y que está contenido en la tabla 1, se puede ubicar dentro de los más simples que se pueden presentar entre aquellos a los que se puede asociar algún modelo del Caos.

Esta afirmación se basa en que, dicho proceso tiende a un solo atractor, involucra una sola variable y, como se puede ver en la gráfica 4.6, a que después de 21 ciclos, el evento casi logra estabilizarse.

Esto último es de importancia menor dado que, como ya se mencionó, las oscilaciones previas al equilibrio son susceptibles de ser alteradas en la medida que las condiciones iniciales se puedan modificar.

Lo anterior da fundamento para clasificar al proceso que se estudia, dentro de los sistemas dinámicos discretos unidimensionales.

Se denomina a una ecuación de la forma

$$x_{n+1} = f(x_n, r) \quad (4.21)$$

como un *sistema dinámico discreto unidimensional* en el cual, la variable  $x_n$  es la variable de estado y  $r$  es el parámetro de control

Al parámetro de control se le puede asignar otra letra. Así, por ejemplo, al parámetro de control del mapa seno se le asigna la letra  $q$ .

La función  $f$  debe tener la propiedad de que la señal de entrada sea *mapeada* consigo misma y así permitir la iteración.

La manera como se hizo el manejo de los datos en la gráfica 4.17, es un mapeo y no todas las funciones permiten este tipo de manejo. Por esta razón, Brian Davis propuso<sup>45</sup> el término *mapa* en lugar de *función* para este tipo de ecuaciones.

La siguiente proposición contiene la principal aportación de este trabajo de tesis pues dicha proposición permite:

- Abrir la posibilidad de analizar cualquier conjunto de valores, como pueden ser las series en el tiempo, desde la perspectiva y con los fundamentos de la Teoría del Caos.
- Conectar ecuaciones de la Teoría del Caos, que implican datos discretos, con ecuaciones que permiten datos o variables continuas, como el tiempo.
- Demostrar que los sucesores en el proceso iterativo corresponden a los puntos de inflexión de un proceso oscilatorio y sobre todo
- Abrir la posibilidad de concebir y analizar a la Teoría del Caos desde una postura epistemológica diferente: desde una postura más pragmática. (Ver (4.30))

Se propone asociar, por ser los que mejor ajustan, (Ver gráfica 4.26) el sistema mapa logístico y el sistema mapa seno, al conjunto de datos de la tabla 1.

Es conveniente hacer notar que se puede asociar cualquier otro mapa y, por lo mismo, la propuesta anterior no es limitativa.

Con fundamento en los señalamientos anteriores se pueden proponer diferentes ecuaciones, por ejemplo, la (4.7), la (4.20), la (4.29) o la (4.30) para modelar y representar el comportamiento de los datos experimental que se analizan.

La siguiente ecuación corresponde al denominado mapa logístico.<sup>46</sup> ((3.1) en cap.3)

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) = 4\beta x_n(1-x_n) \quad (4.22)$$

y esta otra, al mapa seno<sup>47</sup> ((3.2) en cap. 3):

$$x_{n+1} = qsen(\pi x_n) \quad (4.23)$$

ambos son casos particulares de la (4.21): cada una representa un sistema dinámico discreto unidimensional.

Para que dicha asociación sea válida es necesario satisfacer una condición general y un conjunto de condiciones específicas que dependen de cada mapa en particular.

Se describen a continuación los requisitos que exigen tales condiciones específicas.

La condición general se puede expresar de la siguiente manera:

De los valores experimentales de la tabla 1, únicamente se deben considerar aquellos que corresponden a puntos de inflexión, pues son los únicos que pueden considerarse como  $x_n$  en la ecuación (4.22) o en la ecuación (4.23)

Adicionalmente, el mapa logístico satisface ciertas condiciones específicas que se describen enseguida.

La ecuación (4.22), correspondiente al mapa logístico, cumple con las siguientes restricciones:

$$0 \leq r \leq 4 \quad \text{y} \quad 0 \leq x_n \leq 1$$

Esto último origina la necesidad de utilizar el *factor de normalización* ( $F$ ) que se especifica a continuación y que tiene la finalidad de adecuar, las series en el tiempo, a las restricciones que imponen los mapas.

Para trasladar la ecuación (4.7) al dominio del Caos y asociarle un sistema propio de esta Teoría es absolutamente indispensable normalizar todos los valores de la tabla 1.

Esta normalización se realiza dividiendo dichos valores por el factor que se denomina factor de normalización y que se denota con la letra  $F$ .

El valor del factor de normalización se puede calcular utilizando datos experimentales de la tabla 1, seleccionando aquellos que cumplen con las condiciones ya mencionadas:

- son valores consecutivos ( $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ ) y
- son puntos de inflexión.

Con los valores seleccionados, tomados de la tabla 1, se puede calcular el factor de normalización aplicando la ecuación:

$$F = \frac{(x_{n+2})(x_n)^2 - (x_{n+1})^3}{(x_{n+2})(x_n) - (x_{n+1})^2} \quad (4.24)$$

Se puede calcular el valor del parámetro de control,  $r$ , con los mismos datos mediante la siguiente ecuación:

$$r = \frac{F(x_{n+1})}{(F - (x_n))(x_n)} \quad (4.25)$$

En los datos de la tabla 1 o en los datos de la tabla 8-a hay 42 puntos de inflexión. Dependiendo de los valores consecutivos que se seleccionen ( $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ ) es posible realizar diferentes estimaciones del valor que toman, tanto el factor de normalización  $F$ , como el parámetro de control  $r$ , obteniendo resultados ligeramente diferentes.

Si se calcula la media aritmética con los diferentes resultados obtenidos al utilizar varias combinaciones posibles para estimar  $F$  y  $r$  con los valores de la tabla 8-a se obtiene:

$$F = 214.1216$$

$$r = 2.9149$$

Cuando se dividen los valores de la tabla 1 o de la 8-a, entre el valor del factor de normalización  $F$ , se obtienen valores que cumplen con la condición:

$$0 \leq x_n \leq 1$$

En la tabla 9 se presentan los valores normalizados para cada uno de los puntos de inflexión.

Si se comparan los valores de  $F$  y de  $2h$  (gráfica 4.19) se observa que son muy similares.

Esto era de esperar dado que tanto la ecuación (4.20) como la (4.22), al graficarse dan origen a parábolas.

El valor numérico que se obtiene, tanto para  $F$  como para  $2h$ , es muy similar y esto se debe a que son el punto de intersección de las parábolas con el eje de las abscisas.

Ambas parábolas alcanzan su máximo cuando  $x_n$  (normalizada), es igual a 0.5:

$$x_n = h = 0.5F$$

No son iguales porque, como ya se ha mencionado, únicamente se puede lograr aproximación. Así:

$$h = 107\,3604 \sim 0.5F = 107\,0608$$

El máximo de la parábola (4.19) tiene de abscisa el valor de  $h$  (107.3605) y para su ordenada el valor de 155.8987. Al dividir este último valor entre 214.7208 se obtiene la ordenada normalizada que tiene ahora el valor 0.7261.

La parábola obtenida de la ecuación (4.22) ya está normalizada y al obtener la ordenada del máximo calculada para  $r = 2.9149$  se obtiene 0.7287.

Se puede proponer que:

Si  $r = 4\beta$  y  $0.7287 = \beta$  entonces:

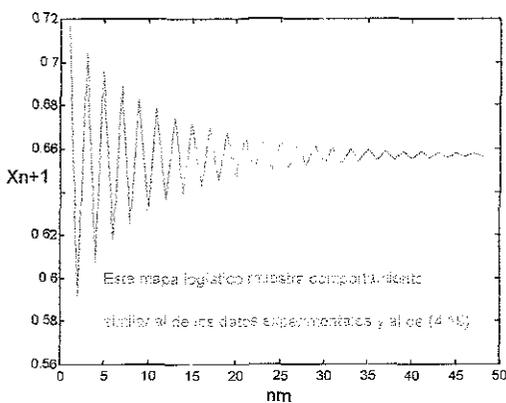
(utilizando  $r$  para el mapa y  $\mu$  para la parábola)

$$\frac{k}{2h} \sim \beta = \frac{r}{4} = \frac{\mu}{4}$$

Por lo que, el mapa logístico que más se aproxima y representa la conducta de los datos experimentales es:

$$x_{n+1} = 2.9149x_n(1-x_n) \tag{4.26}$$

La gráfica 4.25 muestra este mapa.



Gráfica 4.25 La imagen corresponde a la ecuación (4.26) y se puede observar la similitud con la gráfica 4.15 que corresponde a la ecuación (4.7) y con la gráfica 4.6 que corresponde a los datos experimentales.

4.11

Se procede ahora a mostrar como asociar a los datos de la tabla 1, el mapa seno

$$x_{n+1} = q \text{sen}(\pi x_n) \tag{4.23}$$

Se deben satisfacer, además de las condiciones mencionadas respecto a usar valores sucesivos y de inflexión, el que:

$$0 < x_n < 1$$

y que

$$0 < q < 1$$

Adicionalmente, los valores de las variables deben estar normalizados para que, de la misma manera que con el mapa logístico, sea posible determinar el valor del factor de normalización  $F_s$  y el valor del parámetro de control  $q$ .

Desde luego, no es lo mismo el mapa logístico que el mapa seno y, sin embargo, es posible lograr que los datos experimentales de la tabla 1, después de normalizarlos, puedan ser representados, aproximadamente, tanto por el mapa logístico como por el mapa seno.

Es necesario dejar en claro que los mapas son elementos fundamentales en la Teoría del Caos y que, al asociar un mapa a los datos experimentales no se pretende, únicamente, encontrar una ecuación que corresponda a los datos ni se busca la ecuación que mejor ajuste sino que, lo que se busca es conectar a dicha Teoría, con el comportamiento del tokamak.

De aquí la importancia que tiene el demostrar que los datos obtenidos durante la operación del tokamak pueden ser representados mediante mapas.

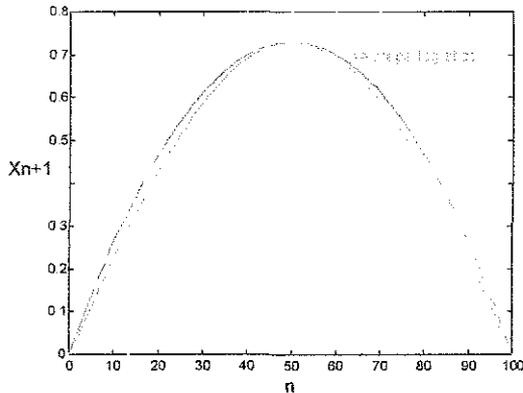
Pueden existir otros mapas pero, lo que se pretende ahora es demostrar que tal asociación es factible, quedando en segundo término, la búsqueda de nitidez en el ajuste.

El que un mapa u otro ajuste mejor a los datos experimentales depende de las respectivas peculiaridades, tanto del conjunto de datos como del mapa y no es por el momento, este ajuste, el interés principal.



Igualando las ecuaciones (4.23) y (4.26) y evaluando para  $0 < x_n < 1$ , se calcula el valor del parámetro de control  $q$  para el cual, los puntos máximos de ambas figuras coinciden.

La gráfica 4.26 permite comparar a ambos mapas para resaltar sus diferencias. Se han graficado de tal manera que coincidan sus puntos de inflexión



Gráfica 4.26. Presenta las gráficas sobrepuestas de las ecuaciones (4.23) y (4.26) a para resaltar sus diferencias

El mapa seno es más estrecho que el mapa logístico, de donde se deduce que, para alcanzar la mejor aproximación posible del mapa seno con los valores experimentales es necesario realizar, fundamentalmente, dos ajustes que consisten en aumentar el tamaño relativo en la abscisa y disminuir el de la ordenada: todo con el único objetivo de lograr que las imágenes coincidan en el punto de intersección con la diagonal y no en el punto de inflexión.

El mapa logístico y el mapa seno graficados en 4.26 son:

$$x_{n+1} = 2.9149x_n(1-x_n) \quad \text{y} \quad (4.26)$$

$$x_{n+1} = 0.7287\text{sen}(\pi x_n) \quad (4.27)$$

Ambas ecuaciones permiten obtener, con bastante proximidad, el valor del sucesor que corresponde a un valor dado, cualquiera que sea seleccionado de entre los datos del experimento.

Conviene, por lo que sigue, recordar lo dicho con relación a bifurcación en el capítulo 3.

En las gráficas 3.1 y 3.2 se observa que, mientras los parámetros de control  $r$  o  $q$  no rebasen ciertos valores, el proceso tenderá a un solo atractor. Estas condiciones están representadas por el segmento señalado como (a)

Si se rebasa el límite señalado como (b) en las gráficas 3.1 y 3.2, el proceso tenderá a dos atractores y *cambia totalmente lo que se puede decir con respecto al proceso.*

El punto de bifurcación (b) indica el valor límite que pueden tomar los parámetros de control ya que después, las condiciones se alteran.

El parámetro  $q$  se debe corregir tomando en consideración que:

- Se hacen coincidir, en el punto máximo, a ambos mapas (como en la gráfica 4.26)
- A las ordenadas, para ambos mapas en el punto máximo o de inflexión, se les asigna un valor relativo que depende del valor donde ocurre la bifurcación, el cual, a su vez, depende del valor del parámetro de control.
- se obtiene  $q$  y
- con base en este valor relativo se calcula el valor del factor de normalización  $F_s$

Específicamente, el cálculo se hace como se describe a continuación:

El mapa logístico converge en un atractor único (una intersección con la diagonal) en tanto que su parámetro de control cumpla con:

$$0 < r < 3$$

Para el caso que se analiza,  $r = 2.9149$  de donde,  $\beta = 0.7287$ .

El mapa seno converge a un único atractor (también una intersección con la diagonal) en tanto que su parámetro de control cumpla con:

$$q < 0.71996$$

Lo anterior significa que, si el mapa logístico se encuentra a un cierto intervalo de su punto de bifurcación (que es el mismo lugar donde se interceptan la diagonal y la parábola), entonces la misma proporción debe guardar el mapa seno también, con su punto de bifurcación. Con fundamento en lo anterior se propone la siguiente hipótesis:

$$3 : 2.9146 :: 0.71996 : q$$

y de aquí

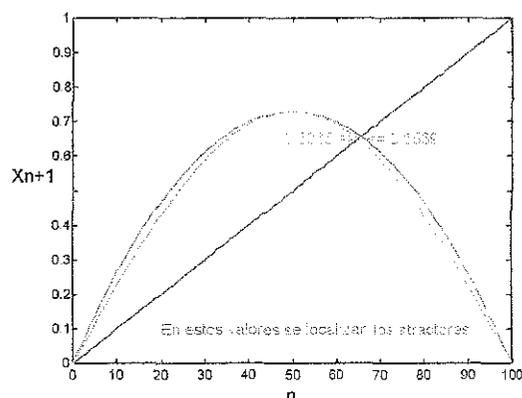
$$q = 0.6995$$

En la gráfica 4.26 se puede observar que las imágenes de los mapas, logístico y seno coinciden, tanto en los extremos como en el punto de inflexión, pero no en lo que toca al valor del punto atractor.

Para la Teoría del Caos es más importante la coincidencia en el punto atractor, es decir, donde la diagonal y la parábola coinciden y para eso se hacen las correcciones que se proponen.

Se pueden estimar los valores que corresponden a las coordenadas de los atractores para los mapas propuestos mediante iteraciones sucesivas y una vez conocidos se puede hacer el ajuste en el parámetro de control  $q$  que permita la coincidencia buscada.

Las iteraciones conducen a las siguientes coordenadas donde se presentan los atractores: 0.6569 para el mapa logístico y 0.6365 para el mapa seno.



Gráfica 4.27 Se puede observar como se alteran las ordenadas con relación al mapa seno

Se puede visualizar en la gráfica 4.27 la intersección de las curvas con la diagonal y en consecuencia, se observan los atractores.

Todo esto tiene la utilidad de permitir el cálculo del valor del factor de normalización,  $F_s$  que se debe utilizar en el mapa seno.

Este  $F_s$  se obtiene a partir del  $F$  es decir, se modifica el valor del factor de normalización utilizado en el mapa logístico

La modificación que se aplica utiliza el factor que representa la proporción que hay entre los atractores involucrados. Así:

$$F : 0.6365 :: F_s : 0.6569$$

El valor que se debe utilizar como factor de normalización para el conjunto de datos de este experimento y que permite asociar el mapa seno es 220.996.

Se concluye entonces que, el mapa seno que más se aproxima y representa la conducta de los datos experimentales es:

$$X_{n+1} = 0.6995 \text{sen}(\pi X_n / F_s) \tag{4.28}$$

Nuevamente debe hacerse notar que el juicio de calidad que se hace en el párrafo anterior no debe interpretarse en el sentido que, el mapa seno ajuste mejor que el mapa logístico sino en el sentido de que, entre todos los mapas seno posibles el que mejor ajusta es el que tiene como parámetro de control el valor  $r = 0.6995$ . El objetivo es probar que se puede conectar a la Teoría del Caos con el comportamiento del tokamak

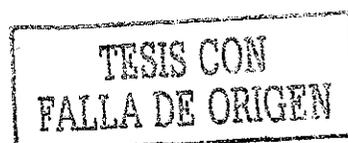
Una conclusión final, con relación al análisis realizado para este conjunto de datos es que, la siguiente ecuación general (4.29) expresa la evolución de un proceso que tiende a un punto atractor:

$$X_{n+1} = A + Be^{-wt} \cos(2\pi ft) \tag{4.29}$$

y a esta se le puede hacer corresponder con el mapa logístico y con el mapa seno:

$$X_{n+1} = rX_n(1 - X_n) = 4\beta X_n(1 - X_n) \tag{4.22}$$

$$X_{n+1} = q \text{sen}(\pi X_n) \tag{4.23}$$



en tanto se cumpla con:

$$0 < r < 3; 0 < q < 0.71996$$

y así concluir que:

$$A + Be^{-wt} \cos(2\pi ft) \quad (4.30)$$

$$r x_n (1 - x_n) - q \operatorname{sen}(\pi x_n)$$

Lo que permite establecer la correspondencia entre los datos experimentales y las conductas propias del Caos.

La equivalencia anterior, (4.30), constituye la expresión algebraica que resume las afirmaciones presentadas en la página 38, en el sentido de constituir ésta, la principal aportación de la tesis.

Tal afirmación se debe a que, (4.30), representa el puente de enlace entre los puntos de inflexión de funciones que dependen del tiempo y las órbitas que se originan en mapas típicos del Caos.

Con el enlace antes descrito es posiblemente su extensión a casos más complicados, cómo el que se presenta en el capítulo 5 y que concluye en la expresión (5.27) y se abre la posibilidad de una generalización que conduzca a una ley que, aunque ya no se busca aquí, parece posible.

Se puede utilizar también la ecuación parecida:

$$y = M + R e^{-wt} \cos 2\pi ft \quad (4.31)$$

que tiene la facilidad de utilizar la media aritmética  $M$  y el intervalo  $R$  que tienen los datos experimentales y produce resultados con aproximación suficiente, aunque no tan buena, como la obtenida con (4.30)

Se pueden resumir los resultados obtenidos hasta ahora así:

- Los datos experimentales muestran un valor central y un intervalo de dispersión.
- No tienen comportamiento gaussiano.
- Los datos presentan comportamiento oscilatorio. Esto se demuestra al hacer

la grafica los datos o al aplicarles la TRF.

- La TRF demuestra que en los datos no hay sobreposición de ondas; hay solo una onda que tiene frecuencia de 0.00035014 Hz.
- La oscilación se amortigua hasta desvanecerse.
- En 21 ciclos la amplitud de la onda se reduce hasta un 2 % de su valor original.
- El comportamiento de los datos tiende a lograr su estabilidad en un único punto atractor representado por el valor 140.664.
- Se obtuvo la ecuación (4.7) que representa el comportamiento del conjunto de datos en función del tiempo.
- Se asociaron mapas, como el logístico y el seno, con lo que se llegó al conjunto de ecuaciones (4.30) y (4.31)
- Lo anterior abre la posibilidad de estudiar estos procesos, desde la perspectiva de la Teoría del Caos.
- Lo anterior relaciona ecuaciones continuas con ecuaciones discretas.

#### REFERENCIAS

- <sup>38</sup> Cao, Q. Xu, L. Djidjeli. K. Price, W. G. Twizell. E. H. "Analysis of period-doubling and chaos of a non-symmetric oscillator with piecewise-linearity". Department of Ship Science University of Southampton Southampton SO17 1BJ, United Kingdom Chaos, Solitons and Fractals v 12 n 10 August 2001. p 1917-1927.
- <sup>39</sup> Cavalcante, H L D.D.S Vasconcelos, G L Rios Leite, J.R. "Power law periodicity in the tangent bifurcations of the logistic map". Departamento de Física Universidade Federal de Pernambuco. 50670-901 Recife, PE, Brazil. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications v 295 n 1-2 Jun 2001. p 291-296
- <sup>40</sup> Leonel, E D. Da Silva, J.K.L. Kamphorst, S.O. "Transients in a time-dependent logistic map". Departamento de Física Instituto de Ciências Exatas Universidade Federal de Minas Gerais, 30123-970 Belo Horizonte, MG, Brazil. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications v 295 n 1-2 Jun 2001. p 280-284
- <sup>41</sup> De S. Cavalcante, Hugo L D. Rios Leite, Josie R. "Bifurcations and averages in the logistic map". Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Braz. Dynamics and Stability of Systems v 15 n 1 2000. p 35-41

<sup>42</sup> Sameshima, Tomoko. Fukushima. Kazuhiro. Yamada, Tomoji. "Chaotic transition in a five-coupled  $\phi^4$ -field soliton system". Kumamoto Univ, Kumamoto, Japan. *Physica D: Nonlinear Phenomena* v 150 n 1-2 Mar 2001. p 104-117

<sup>43</sup> Borland, Lisa. "Simultaneous modeling of nonlinear deterministic and stochastic dynamics". Univ of California at Berkeley, Berkeley, CA, USA. *Physica D: Nonlinear Phenomena* v 99 n 2-3 Dec. 15 1996. p 175-190

<sup>44</sup> R.W. Ramirez [8], p. 68.

<sup>45</sup> Davis Brian [6], p. 13.

<sup>46</sup> Otero Silíceo Enrique, "Caos versus caos", *Revista de la Universidad Nacional Autónoma de México*. núm.606 p 46-50. julio de 2001.

<sup>47</sup> Davis Brian [6], p. 12.

## Capítulo 5

*Se desarrolla detalladamente el procedimiento de análisis realizado con los datos obtenidos en el segundo experimento.*

### 5.1

A continuación se muestra como, datos obtenidos en otro experimento desarrollado en condiciones diferentes, pueden aportar información adicional siguiendo el procedimiento antes aplicado.

El segundo lote de datos que se analiza a continuación, se obtuvo en una corrida experimental que se realizó en condiciones similares al primer caso, con excepción del voltaje de polarización en la bobina primaria que tuvo un incremento de 500 voltios. El tiempo transcurrido entre cada una de las lecturas registradas continuó siendo 2 segundos.

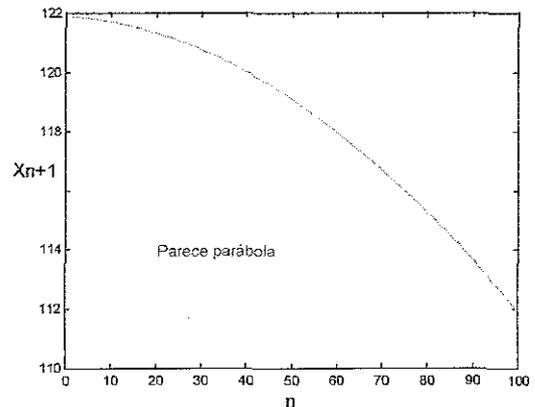
El tamaño del lote fue nuevamente de 30000 datos; algunos de los cuales se presentan en la tabla 11.

Siguiendo la estrategia utilizada en el primer caso, se graficaron lotes de 100 datos, esperando obtener resultados diferentes a los obtenidos en las gráficas del lote anterior pero no fue así.

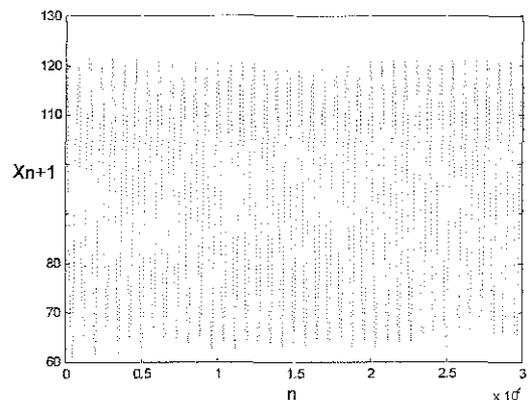
Sin importar si el lote se selecciona al principio, en el medio o al final del conjunto de datos, se obtienen figuras del comportamiento que son de poca utilidad.

Un resultado representativo del comportamiento de estos lotes de datos se presenta en la gráfica 5.1 y es típico del comportamiento de cualquiera de los lotes muestreados para el segundo grupo.

Resulta conveniente graficar los 30000 valores para, como en la gráfica 4.4 del capítulo anterior, obtener evidencia inmediata del comportamiento de los datos del segundo experimento. Lo que se obtiene se presenta en la gráfica 5.2.



Gráfica 5.1. Se muestra el comportamiento de los primeros  $n=100$  datos registrados. Se tiene una situación similar a la de las primeras gráficas. No hay información relevante



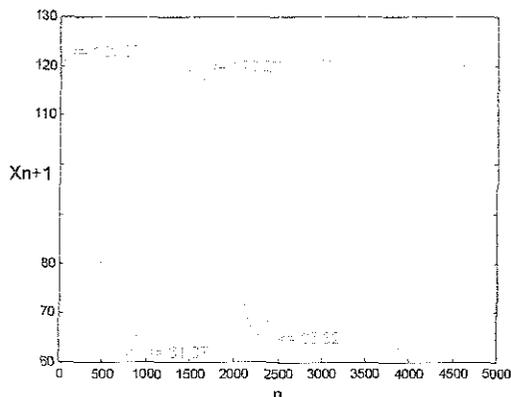
Gráfica 5.2. Todo el intervalo de datos registrados en el segundo experimento se utilizó para construir esta gráfica. Se utilizaron los datos registrados cada 2 segundos y por eso en el eje aparece "n"

La imagen de esta gráfica 5.2 implica un resultado muy diferente al obtenido en el primer experimento. Hay oscilación pero no es obvio el decaimiento.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

El tamaño de las amplitudes en las ondas que se observan en la gráfica 5.2 no es uniforme. Esto es notorio, en especial, en las ondas iniciales.

La siguiente gráfica 5.3, se construye utilizando los primeros 2500 valores que se registraron. Es posible apreciar con más claridad, las características de las ondas.



Gráfica 5.3. Muestra como las amplitudes de las ondas no son iguales

Esta gráfica 5.3 induce a suponer que se tiene conducta periódica en los datos y que las amplitudes de las ondas no son uniformes. En apariencia, nuevamente hay decaimiento y no hay alteraciones en la frecuencia.

5.2

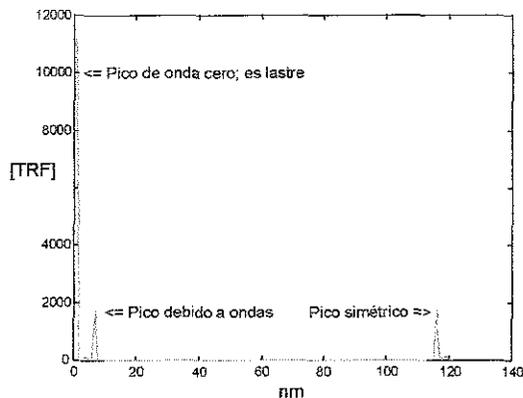
Para demostrar que el proceso, efectivamente tiene conducta periódica, se recurre a la TRF.

Con base en la gráfica 5.3 se ha seleccionado una ventana de 9200 segundos con la expectativa de atrapar seis ondas. Para corroborar ésta se calcula la TRF con los primeros 4600 valores registrados y el resultado se ilustra mediante la gráfica 5.4.

La presencia del pico en la primera posición indica interferencia de onda cero y el pico debido a ondas no aporta información confiable respecto a que haya seis ondas.

Se debe eliminar el lastre y para ello es necesario restar y después hay que dividir.

La cantidad a restar corresponde al valor central calculado mediante la media aritmética aplicada al conjunto de valores registrados. Este valor es 92 1687



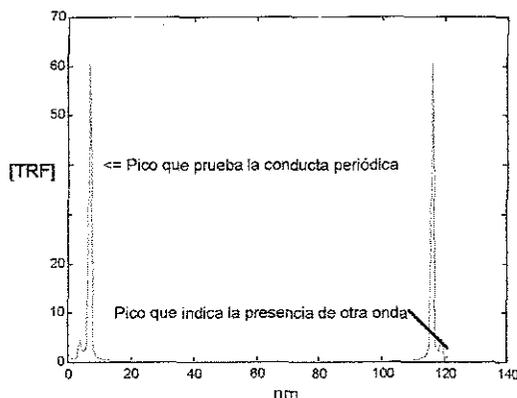
Gráfica 5.4 Muestra el resultado obtenido al graficar la norma de la TRF para los primeros 4600 datos seleccionados cada 36 lecturas

El divisor aplicado corresponde al intervalo de los datos y se calcula así: al mayor valor, 121.8754, se le resta el menor, 61.1495 y se divide entre 2 quedando 30 3629.

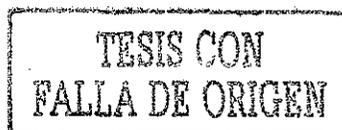
Algunos de estos valores corregidos se encuentran en la tabla 12.

Lo anterior se hace con fundamento en lo discutido para la ecuación (4.31) que, como ya se dijo, representa un excelente método para hacer una estimación preliminar.

La tabla 12 presenta los últimos 300 datos y permite mostrar la apariencia de los valores normalizados a los que se les aplica la TRF



Gráfica 5.5. Los mismos datos de la gráfica 5.4



Si se corrigen los valores antes de aplicarlos en el cálculo de la TRF, se pueden eliminar, el lastre y la onda cero que acarrearán. La gráfica 5.5 se ha construido de esta manera.

Se observa, al comparar las gráficas 5.4 y 5.5, la diferencia entre corregir o no los valores que se emplean en el cálculo de la TRF.

Se ha calculado la TRF con objeto de encontrar y demostrar que hay periodicidad en el segundo conjunto de valores y los cálculos y gráficas anteriores dan certidumbre a tal suposición.

### 5.3

Se investiga ahora si la conducta periódica abarca a todos los datos y si la frecuencia de dicha conducta permanece constante.

La tabla 11 contiene las primeras 300 y las últimas 300 lecturas realizadas durante la segunda prueba. En los cálculos que siguen se utilizaron todos los valores y no solo los de esta tabla.

Suponiendo que la frecuencia mostrada en el primer conjunto de datos se conserva en este segundo lote, entonces, es de esperar que los primeros 1500 datos deben abarcar una onda. Esta suposición se hace porque la variación de voltaje en la bobina primaria durante la segunda prueba fue de 500 voltios y no se considera que dicha variación pueda ser significativa como para alterar notoriamente el proceso.

Respetando las indicaciones de Nyquist para evitar el alisamiento, si la frecuencia hipotética del segundo proceso se conserva en el valor 0.00035 Hz del experimento anterior, lo que implica que se produzca una onda cada 2860 segundos, entonces, la tasa de muestreo debe tener una frecuencia de, al menos, el doble de ésta.

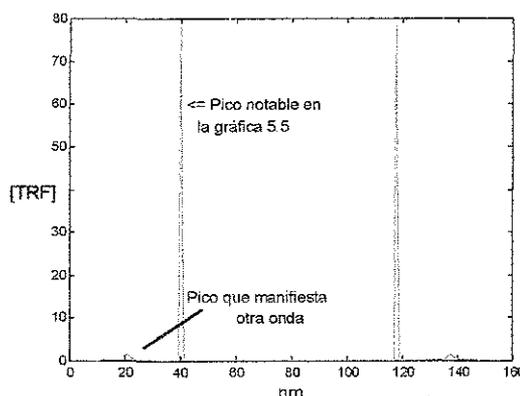
Así, la tasa de muestreo debe tener una frecuencia mínima de 0.0007 Hz y por lo mismo se debe tomar una muestra, al menos, cada 1430 segundos. El muestreo realizado cumple con Nyquist: se registraron lecturas cada dos segundos.

Hubo 30000 datos registrados en la segunda prueba, cuya duración fue de 60000 segundos. Como la frecuencia supuesta es 0.00035 Hz, se puede esperar una onda en cada 2860 segundos. Al seleccionar una ventana de 60000 segundos como se hizo en la gráfica 5.2, ésta debería contener unas veinte ondas completas.

Simultáneamente, si bajo las condiciones del segundo experimento se necesitan 2860 segundos para que se complete una onda, se concluye que, la ventana de inspección debe tener un tamaño mínimo de 2860 segundos.

Al verificar la suposición anterior de veinte ondas en el intervalo de muestreo con lo registrado en la gráfica 5.2 se observa que el número de estas ondas es el doble a las predichas pues hay una onda a cada 1430 segundos, lo que obliga a suponer la presencia de otra onda con el doble de frecuencia. Con base en esto se debe rechazar la suposición de que se mantiene la frecuencia del proceso.

Para demostrar la presencia de otra onda (que ya muestra indicios en la gráfica 5.5 a través del pico pequeño que se observa) y la conducta periódica en todo el conjunto de valores, se toman los diferentes datos registrados a intervalos de 385 segundos y con ellos se integra un lote de 160 datos. Se calcula la TRF de éste lote y se obtiene la gráfica 5.6. Se usan valores normalizados



Gráfica 5.6 Esta gráfica se construye utilizando los valores registrados con intervalos de 385 segundos entre uno y otro. Esto permite separar los picos correspondientes a cada una de las ondas que están sobrepuestas.

Es necesario realizar un proceso de optimización para obtener la información que contienen la TRF y las gráficas que ella produce

La selección de datos de entre todo el intervalo de valores registrados, la eliminación del lastre y la selección de un tamaño adecuado de ventana permite observar, en la gráfica 5.6, pruebas que permiten sustentar las suposiciones hechas para aceptarlas como verdades.

Al hacer un análisis detallado de los datos experimentales, algunos de los cuales se presentan en la tabla 11, se nota que las inflexiones ocurren espaciadas, más ó menos, cada 770 segundos. Por esta razón el tamaño de ventana de la gráfica 5.6 se dividió de esa manera.

La misma gráfica 5.6 muestra otro resultado inesperado. Se muestran picos, uno en la posición veinte como se esperaba desde un principio y otro en cuarenta que resulta novedoso.

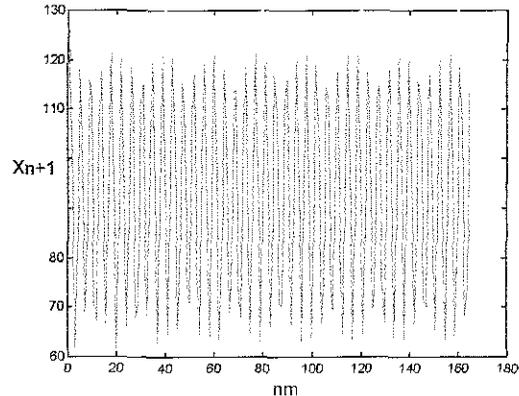
También resulta inesperado el tamaño relativo de los picos pues ahora resulta que la onda dominante y de mayor frecuencia es la que se indica en la posición 40. Dominante en el sentido de permanencia pues parece que la onda que se desvanece es la indicada en la posición veinte.

Se establece qué, el proceso experimental en estas nuevas condiciones obedece a dos ondas superpuestas y no a una como se suponía. Luego entonces la pequeña variación en el voltaje de la bobina primaria sí produjo alteraciones

La selección del tamaño de ventana es un aspecto fundamental en la obtención de información a partir de las series en el tiempo. Puede quedar oculta o se puede obtener máxima información dependiendo de la eficiencia con la que se establezcan las condiciones de la ventana. Luego, esto no es asunto trivial.

A continuación se dan algunos ejemplos para fundamentar la afirmación que se ha hecho en el párrafo anterior.

La gráfica 5.2 se construye con el total de datos ( $n$ ), es decir  $x = [0:1:30000]$  (ver sección 4.3, pág. 29) pero, si se repite la operación, ahora con  $x = [0:183:30000]$  se deforma la imagen original y podrían sacarse conclusiones erróneas.



Gráfica 5.7. Se altera la imagen en función del intervalo entre muestra y muestra seleccionada

Esta deformación se debe a la manera como se realiza la suma de las ondas superpuestas en los puntos seleccionados.

Al repetir la construcción de la gráfica anterior pero con  $x = [0:192.5:30000]$  se produce una imagen prácticamente igual a la 5.2, sin deformación y todo como consecuencia de que 192.5 lecturas corresponden a  $\pi/2$  bajo las circunstancias en las que se están manejando los datos.

La gráfica 5.6 se construye con  $x = [0:385:60000]$  y valores normalizados. Se construyen las siguientes gráficas 5.8 y 5.9 con  $x = [0:385:15000]$  y  $x = [0:77:15000]$

Cabe aclarar que una cosa es el número de muestras tomadas en un intervalo de tiempo y otra muy diferente es el intervalo de tiempo en sí

La modificación del tamaño de ventana y del número de datos contenidos en ella, permite encontrar la combinación de éstos que hace más evidente las propiedades de cada pico.

En la gráfica 5.6, el número mayor que aparece en las abscisas es 160 y los picos ocupan la posición 20 para el primer pico y la 40 para el segundo.

TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN

La información que contiene esta gráfica es que existen 20 y 40 ondas o ciclos completos, respectivamente, en el intervalo de tiempo contenido en los 160 datos.

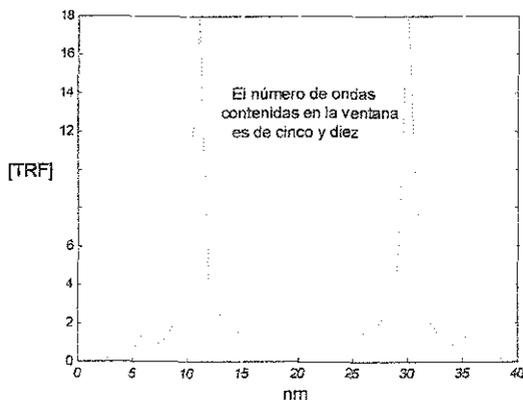
La interpretación del significado del valor 160 únicamente se puede hacer si se conoce el tamaño de la ventana.

En este caso la interpretación es fácil dado que se cuenta con la información previa de que el tamaño de ventana es 60000 segundos, luego 160 equivale a 60000 segundos y, dado que esta ventana contiene 20 y 40 ondas entonces sus frecuencias son 0.00033 Hz y 0.00066 Hz respectivamente.

El comportamiento de los datos obtenidos en el segundo experimento se puede representar con dos ondas sobrepuestas, una de 0.00033 Hz y otra de 0.00066 Hz.

Estos valores se obtienen al dividir el número de picos atrapados en la ventana (40 y 20 ondas o ciclos) entre el tamaño de la ventana (60000 segundos).

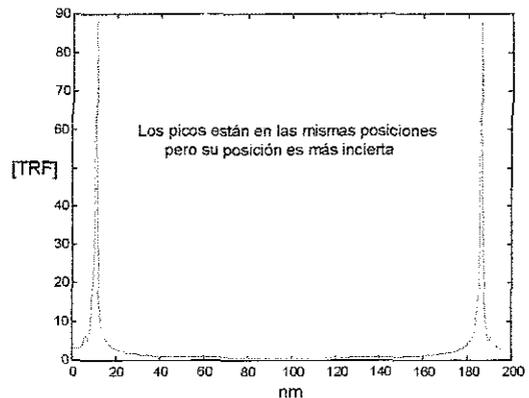
Fijo el número de muestras que integran el lote se puede alterar la ventana o viceversa. En las gráficas 5.8 y 5.9 se ilustra lo anterior



Gráfica 5.8 El tamaño de ventana es de 15000 segundos. La ventana abarca 40 datos

En la gráfica 5.8 se toman 40 datos, uno cada 385 segundos y así la ventana es de 15000 segundos.

La gráfica 5.9 utiliza 200 datos. La ventana es, nuevamente, de 15000 segundos. Se registraron lecturas cada 77 segundos.



Gráfica 5.9 La posición del pico pequeño casi se ha perdido

La diferencia en ésta es lo estrecho de los picos y la dificultan para percatarse de la presencia del pico pequeño.

La información relativa a la frecuencia no se puede establecer en tanto no se conozca el intervalo de tiempo que hay entre muestra y muestra o el tamaño de ventana, pues no se puede afirmar nada adicional al señalamiento dado, por ejemplo, para las gráficas 5.8 y 5.9, en el sentido de que hay cinco y diez ondas contenidas en el intervalo muestreado.

Esto, que parece trivial, es motivo de frecuentes confusiones al manejar las ventanas y por eso resultan convenientes las precisiones que se han hecho.

Los efectos que se producen al realizar estas modificaciones son variados, dependiendo siempre de que es lo que se altera. Resumiendo:

- Se enmascaran picos si no se elimina el lastre. En la gráfica 5.5 no aparece un pico que sí es notorio en la 5.6.
- entre más grande sea el tamaño de la ventana mayor será la separación entre los picos. En las gráficas 5.6 y 5.8 la separación entre los picos es de 20 y 5 respectivamente.
- Al aumentar el número de muestras tomadas en la ventana, más estrecho y menos disperso es el pico. Esto se puede notar al comparar las gráficas 5.8 y 5.9.
- Al aumentar el número de muestras tomadas en la ventana más altura tiene el pico de mayor frecuencia y se acorta la altura del pico de menor frecuencia.



La diferencia fundamental entre los datos del primer experimento y los del segundo es que, en este último hay dos ondas.

Todo lo anterior permite proponer que las opciones aplicadas a la manera como se conduce la prueba en el laboratorio, la manera como se toman los registros y la forma como se procesan los datos pueden ocasionar la aparición o desaparición de información en los datos registrados.

Tal desaparición no acontece en el proceso en sí, sino ante los ojos de quien interpreta los resultados experimentales.

5.4.

Mediante el empleo de técnicas estadísticas se puede obtener información adicional diferente a las típicas de tendencia central y de dispersión. Algunos procedimientos se describen a continuación.

El valor de tendencia central, calculado a través de la media aritmética y el de dispersión, calculado mediante el intervalo, da los siguientes resultados cuando se realiza, dichos cálculos, para los datos completos de la tabla 11:

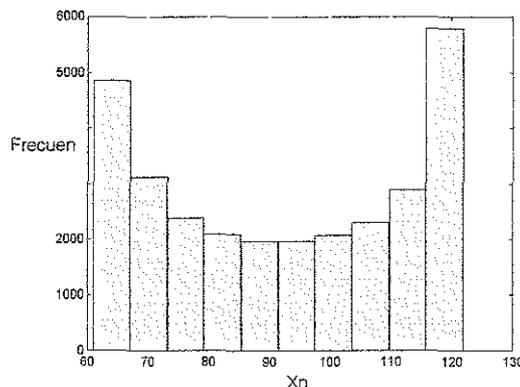
$$M(\sim A) = 92.2741, \quad R(\sim B) = 29.6180$$

Es posible llegar a resultados similares en la estimación de estos parámetros, utilizando menos datos a condición de que, éstos sean seleccionados adecuadamente. Por ejemplo, seleccionando los valores en donde ocurre una inflexión y formando con ellos una nueva colección, se puede repetir los cálculos y llegar a casi a lo mismo. Los resultados son:

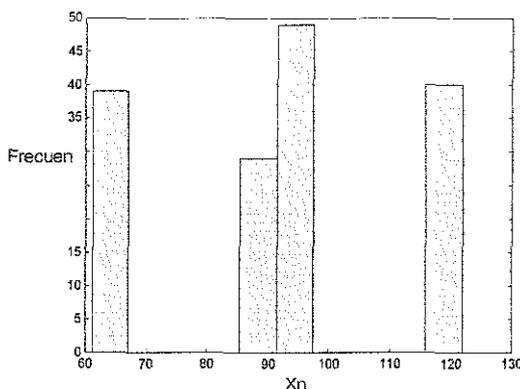
$$M(\sim A) = 92.1687, \quad R(\sim B) = 28.9082$$

Con relación al manejo de histogramas se recomienda prudencia en la manera de interpretar la información que manifiestan.

Se presentan los siguientes histogramas en las gráficas 5.10 y 5.11, para comparar los resultados obtenidos al usar todos los valores del experimento o únicamente, los puntos de inflexión.



Gráfica 5.10 Se utilizaron los 30000 datos registrados en la elaboración de este histograma



Gráfica 5.11 Se utilizan únicamente los puntos de inflexión.

Al comparar la gráfica 4.8 del capítulo anterior con la gráfica 5.10 y como en ambos casos se utilizaron todos los datos registrados, se debe mantener la conclusión anterior de que hay un atractor hacia el que tiende la conducta del primer experimento

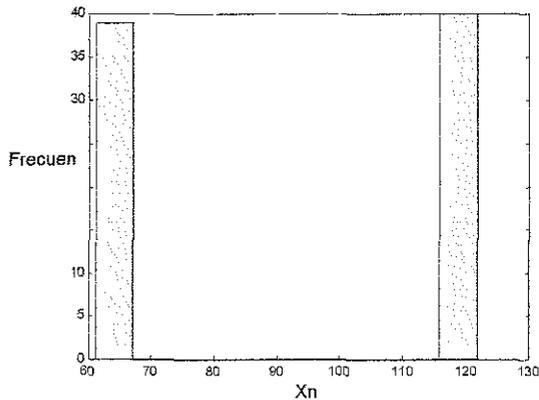
El histograma de la gráfica 5.10 indica que los datos presentan conducta oscilatoria permanente y no tienden a un atractor único.

Del histograma de la gráfica 5.11 y con base en el conocimiento previo, en el sentido de que se construye con los puntos de inflexión que ocurren en  $\pi/2$ , se obtiene información adicional que señala la presencia de, por lo menos, dos ondas superpuestas.

Se construye el histograma mostrado en la gráfica 5.12 utilizando los valores correspondientes a los puntos de inflexión que se producen en cada  $\pi$ .



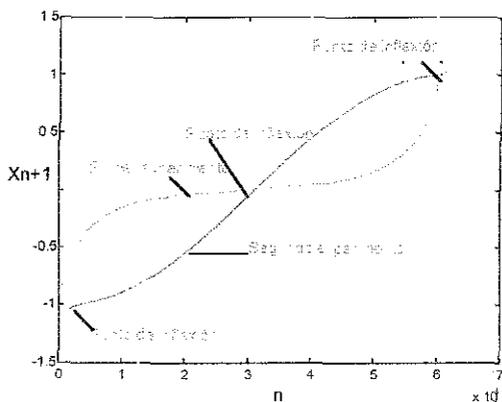
Al desaparecer las barras centrales se comprueba que se han eliminado las armónicas de seno  $\pi$ .



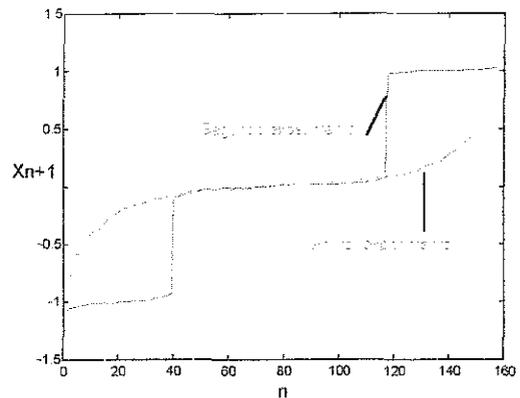
Gráfica 5.12. Se construye con los puntos de inflexión que sucedieron en  $\pi$

Se propone el siguiente método para detectar cuando hay más de una onda.

Acomodando todos los valores registrados en cada lote, después de normalizarlos, en orden ascendente y graficando estos, se obtiene otra evidencia que permite distinguir entre el conjunto de valores que tienen una onda y el conjunto que tiene a dos o más ondas todo, en función del número de inflexiones que muestra la imagen. El resultado de hacer esto se presenta en las gráficas 5.13 y 5.14.



Gráfica 5.13. Presenta todos los datos ordenados del primer experimento (capítulo 4) y del segundo experimento (capítulo 5) Un punto de inflexión está asociado a una onda como es el caso del primer experimento y dos ondas involucran dos puntos de inflexión, como es el caso de la curva azul que pertenece al segundo experimento



Gráfica 5.14 Al utilizar los puntos de inflexión que corresponden estrictamente a  $\pi/2$  se hace evidente el número de ondas que intervienen

### 5.5.

Es momento de recordar que el objetivo fundamental del análisis que se está haciendo pretende encontrar ecuaciones que representen el comportamiento de los datos experimentales y después relacionar estas ecuaciones con las del Caos para buscar como aplicar las leyes de esta teoría en los experimentos de donde provienen los datos.

Como en la sección anterior se ha demostrado que los datos manifiestan comportamiento periódico constituido por dos ondas cuyas frecuencias están en proporción 2:1 entonces, la siguiente ecuación puede representar la conducta de los datos:

$$y = B\text{sen}(2\pi f_1 n s) \pm C\text{sen}(2\pi f_2 n s) \quad (5.1)$$

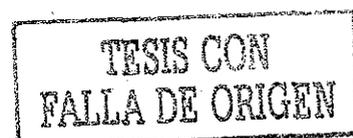
Es necesario ahora encontrar los valores específicos que deben tener cada uno de los parámetros que participan para adecuar la ecuación a los datos del experimento.

En la sección 4.3 página 28 se propuso que, si el tiempo total que se analiza es  $N$  y durante el transcurso de éste, se toman  $n$  muestras igualmente espaciadas por un intervalo de tiempo  $x$ , entonces:

$$N = n x \quad (4.3)$$

También se propuso otra ecuación con la siguiente estructura:

$$N = f t \quad (4.4)$$



En la ecuación (4.4),  $N$  indica el número de ondas atrapadas en un tiempo de muestreo  $T$  cuando se estudia un comportamiento periódico de frecuencia  $f$ .

Luego, la  $N$  tienen significado diferente en cada ecuación y para evitar confusiones se propone cambiar  $N$  por  $\tilde{N}$  en la ecuación (4.4) y, como  $N = T$  entonces:

$$\tilde{N} = fT = fN = fnx = 2\pi kfn s \quad (5.2)$$

Donde  $f$  se escoge de tal manera que sea la menor de las frecuencias encontradas mediante la TRF y así satisfacer que:

$$kf_1 = f_2 \quad (5.3)$$

La constante  $k$  indica la proporción que hay entre las frecuencias de las ondas que participan.

De la gráfica 5.6 se concluye que hay dos ondas, una de  $f_1$  y otra de  $f_2$ . De la gráfica 5.2 se deduce que la onda de frecuencia mayor es la que persiste conforme se desarrollan las iteraciones y que la onda con  $f_1$  se desvanece.

Las frecuencias tienen valor conocido y se determinan con ayuda de las gráficas 5.6 o 5.8. De aquí que:

$$k = 0.0066 / 0.00033 = 10 / 5 = 40 / 20 = 2$$

El cálculo de la TRF permite conocer  $N$ ,  $\tilde{N}$ ,  $k$  y  $n$  de donde se puede evaluar a  $s$  o a  $x$ .

El incremento en radianes que hay entre  $n$  y  $n+1$  corresponde con  $s$ . El incremento en segundos que hay entre  $n$  y  $n+1$  corresponde con  $x$ .

Los corchetes se utilizan cuando se quiere especificar el tamaño de ventana lo cual tiene dos connotaciones:

$$nn = [0 : x : N] \quad (5.4)$$

$$n = [0 : s : \tilde{N}] \quad (5.5)$$

Por ejemplo, si se propone que la ventana contiene 5 ondas y que

$$n = [0 : 0.1 : 5]$$

significa que se debe utilizar  $s$  ya que se habla de ondas y que  $s$  toma el valor de 0.1 por lo que, se necesita  $n$  veces  $2\pi s$  para completar cinco ciclos.

Al calcular la norma de la TRF para un conjunto de valores que tienen conducta ondulatoria, la altura de los picos que generan dichos cálculos depende, simultáneamente, de los valores de  $s$  y de  $\tilde{N}$  de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\frac{\tilde{N}}{(2)(s)} \sim H \quad (5.6)$$

Donde  $H$  es la altura del pico.

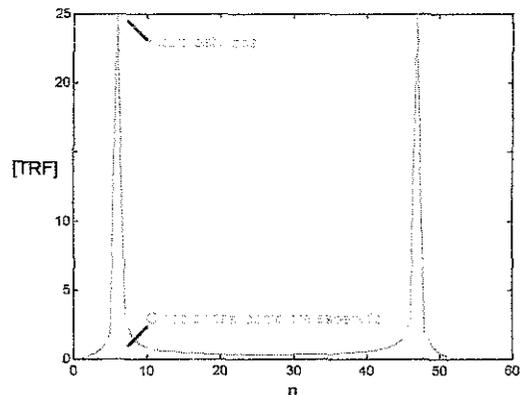
Por ejemplo, si  $n = [0 : 0.1 : 5]$  y se quiere calcular la altura del pico  $H$  que producirá la norma de la TRF de:

$$y = \text{sen}(2\pi fns) \quad (5.7)$$

con  $f = 1$  y  $n = 1$ , se puede anticipar que:

$$\frac{5}{(2)(0.1)} \sim 25$$

La siguiente gráfica 5.15 presenta los picos obtenidos al calcular la norma de la TRF del ejemplo propuesto.



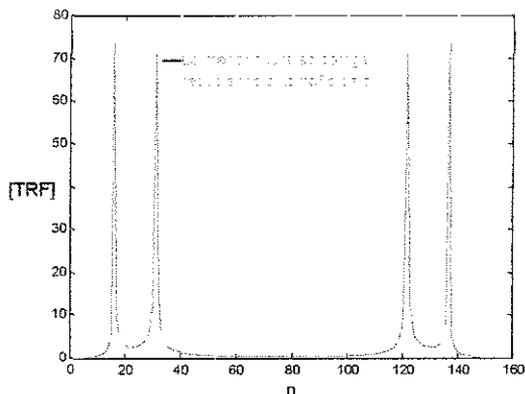
Gráfica 5.15 Muestra que la altura de los picos es 25

Si se repite el cálculo anterior buscando que  $H = 75$  y que haya una onda adicional se necesita que  $n = [0 : 0.1 : 15]$  y que

$$y = \text{sen}(2\pi fns) - \text{sen}(4\pi fns) \quad (5.8)$$

Se obtiene la gráfica 5.16.





Gráfica 5.16 Cada onda muestra su propio pico

Cada pico conserva su altura aun cuando se tengan ondas sobrepuestas.

Se ha mostrado que la altura de los picos obtenidos de la norma de la TRF depende del número de ondas que contiene la ventana y del incremento escogido para la iteración.

Simultáneamente, la altura del pico también depende de la amplitud de la onda. Dicha amplitud se expresa mediante coeficientes como  $B$  o  $C$  en la ecuación (5.1).

En el siguiente ejemplo, graficado en 5.17 se manejan simultáneamente estos factores:

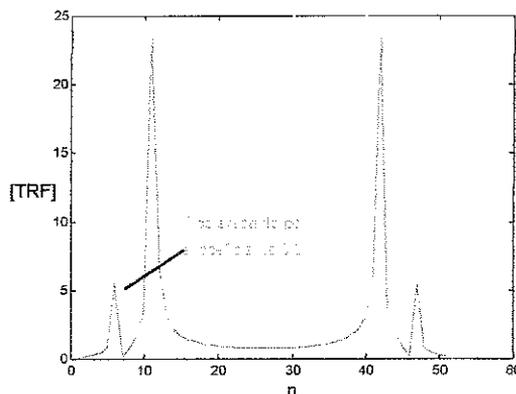
$$B = 0.2 \text{ y } C = 1.$$

$$n = [0 : 0.1 : 5];$$

$$y = 0.2 \text{sen}(2\pi fns) - \text{sen}(4\pi fns) \tag{5.9}$$

Es posible obtener mayor exactitud en la determinación de las frecuencias mediante el análisis de los datos experimentales en los puntos donde hay inflexión.

Al analizar detalladamente los 30000 datos o amplificando la gráfica 5.2 se determina que el número de ondas contenidas en este espacio es de 38 976 ondas de donde, el recálculo de las frecuencias da 0.0003248 Hz y 0.0006496 Hz respectivamente y representan la máxima exactitud que se puede obtener.



Gráfica 5.17. La altura del pico mayor aumentó porque se modificó la ventana. El pico de menor frecuencia se reduce a 0.2 de su valor original.

Por lo dicho en el párrafo anterior es posible determinar el valor de los parámetros o variables que participan en la ecuación (5.1) excepto el signo y los parámetros  $B$  y  $C$ .

Al presentar la ecuación (5.3) se argumentó porqué se debe tomar a la onda de mayor frecuencia como referencia y, por la misma razón, el parámetro  $C$  debe tomar el valor unidad.

Con base en esta última proposición se puede estimar el valor que tiene el parámetro  $B$ , asociado a la amplitud de la onda de menor frecuencia y cuyo valor se puede calcular basándose en los datos experimentales.

Al proponer que la onda dominante es la armónica de mayor frecuencia se logra el beneficio de poder filtrar esta u otras ondas cuando convenga, eliminándolas a través de restar o sumar el término adecuado.

La secuencia de razonamientos realizados en éstos últimos párrafos se puede resumir así:

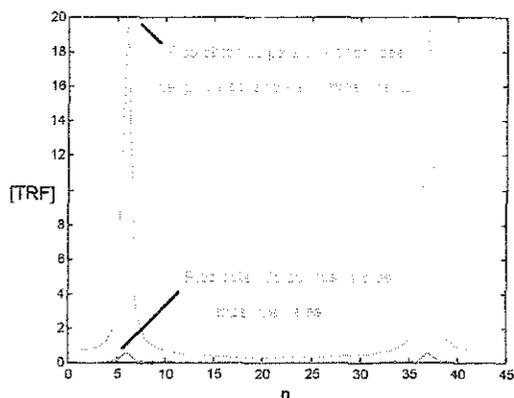
La ecuación (5.1) expresa el comportamiento de los datos experimentales. Es posible conocer los valores específicos de  $f$ ,  $n$ ,  $k$  y  $s$  ó  $x$  con fundamento en la gráfica 5.6. Es válido que  $C = 1$ . Entonces se permite restar el valor obtenido al evaluar el término:

$$C \text{sen}(2\pi f_2 n x) \tag{5.10}$$



de la ecuación (5.1) a los valores de la tabla 12 generándose nuevos valores. A estos nuevos valores, contenidos en la tabla 13, a los cuales se les ha filtrado la onda fundamental, se les puede analizar con más precisión en busca de detalles finos que pudieran pasar desapercibidos, además de permitir la evaluación del parámetro  $B$

El cálculo de la norma de la TRF tanto para los datos experimentales normalizados y filtrados, (algunos de los cuales se muestran en la tabla 13) como para los valores teóricos obtenidos de una onda ideal, permite estimar el valor de la amplitud real  $B$  al hacer comparaciones apoyados de imágenes como la que se muestra en la gráfica 5.18.



Gráfica 5.18 A los valores experimentales normalizados se les resta la onda de mayor frecuencia para filtrarla y quedarse con la onda de menor frecuencia. Se compara lo real con lo teórico y se estima un valor para  $B$

Esta comparación es posible gracias a que la onda de mayor frecuencia ha sido eliminada y se trabaja con valores normalizados y gracias a que, sustentados en las hipótesis de que, a la amplitud teórica obtenida de una onda ideal que se toma de referencia se le puede asignar, temporalmente, el valor unidad para después compararla con los resultados reales y así obtener la amplitud real  $B$ .

Se muestra a continuación como se hace lo bosquejado en las líneas anteriores.

En la gráfica 5.18 se ha utilizado un tamaño de ventana  $[384.85:384.85:16153.7]$ , es decir,

- 384.85 es el intervalo de tiempo necesario para que las ondas coincidan en el punto más alto.
- $(384.85) \times (4)$  es el número de segundos entre cada una de las muestras o valores donde el punto de inflexión es máximo y se obtiene máxima precisión al calcular la TRF.
- Al dividir  $(16153.7 - 384.85) / (384.85)(2)$  se obtiene la altura del pico  $H = 20.487$ .
- Se compara el valor teórico anterior con el obtenido realmente al calcular la norma de la TRF para los datos experimentales y se calcula el valor real de  $B$ .
- El número de ondas contenidas en esta ventana es  $(0.0003248) (16153.7 - 384.85) \cong 5$ .

Como la altura del pico para los valores experimentales es 0.8994, valor que se obtiene calculando la norma de la TRF con datos normalizados y que se puede ver en la gráfica 5.18, se puede asignar, al parámetro  $B$ , un valor preliminar de 0.0439. Este valor resulta de dividir 0.8994 entre 20.487.

Con esto, a los datos experimentales del segundo lote se les puede asociar, temporalmente, la ecuación

$$y = 0.0439 \text{sen}(2\pi 0.0003248nx) + \text{sen}(2\pi 0.0012992nx) \quad (5.9)$$

Esta ecuación establece que los datos experimentales se pueden expresar como la suma de dos ondas armónicas y que la de menor frecuencia tiene una amplitud menor que la amplitud de la armónica principal.

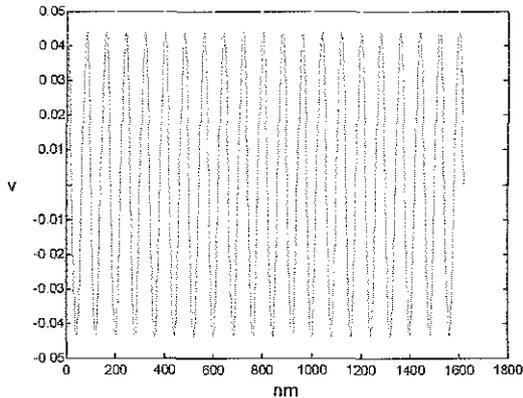
Si se filtra la armónica principal se llega a la siguiente expresión:

$$y = 0.0439 \text{sen}(2\pi 0.0003248nx) \quad (5.10)$$

Como a los datos experimentales se les filtra, es decir, se les resta el valor correspondiente a esta armónica principal entonces, la ecuación (5.10) debe coincidir con estos datos filtrados de la tabla 13.

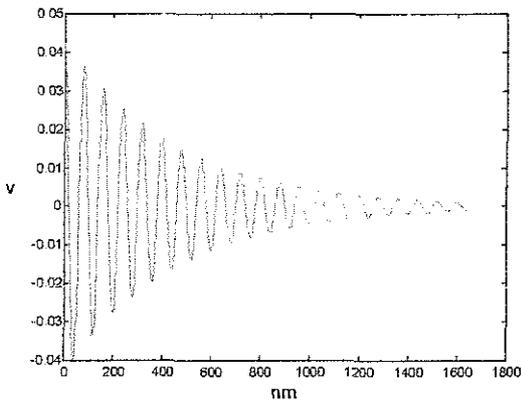
La ecuación (5.10) evaluada para una ventana  $n = [769.7:38.485:63116]$  produce la gráfica 5.19.





Gráfica 5.19. Corresponde a la ecuación (5.10) calculada para todo el tiempo requerido por el experimento

La ecuación anterior no armoniza con el comportamiento experimental, como se puede corroborar en la siguiente gráfica 5.20 obtenida con los datos experimentales normalizados y filtrados, como los mostrados en la tabla 13. Es evidente la necesidad de realizar un ajuste.



Gráfica 5.20. Muestra los valores de la tabla 13 es decir muestra los datos experimentales normalizados y sin los valores de la armónica principal

Como se busca que los valores experimentales de la tabla 13 sean semejantes a los resultados obtenidos mediante la ecuación (5.10) se debe realizar el ajuste que se describe a continuación.

Los puntos de inflexión de las crestas de la gráfica 5.20 decaen desde 0.0439 hasta 0.00155 en los 58497 segundos en que se producen 19 ondas. Es decir, en 58497 segundos la altura del pico se reduce a un 3.53% de su valor original.

La ecuación (5.10) debe ser influida por un factor de peso tal que:

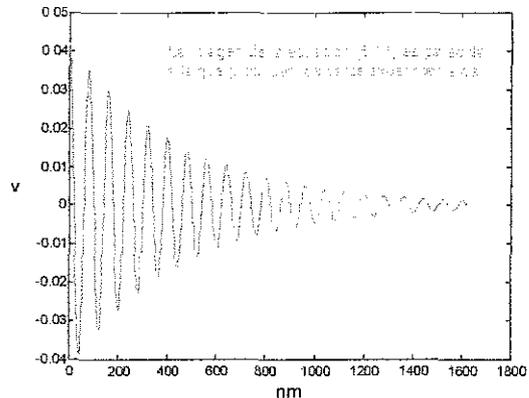
$$e^{-wnx} = 0.035398 \text{ donde}$$

$$w = (-3.341)/58497 = -0.0000571$$

Por lo que la ecuación (5.10) se modifica a la forma (5.11) que se aproxima un poco más al comportamiento experimental

$$y = (0.0439)\exp(-0.0000571nx) \quad (5.11) \\ \text{sen}(2\pi 0.0003248nx)$$

Esta ecuación se visualiza en la gráfica 5.21 y es muy similar a la 5.20. La utilidad de estas gráficas que parecen repetitivas es dejar clara la similitud entre los datos experimentales y la ecuación que se les asocia.



Gráfica 5.21 Muestra la ecuación (5.11) que ahora sí tiene similitud con los datos experimentales mostrados en la gráfica 5.20.

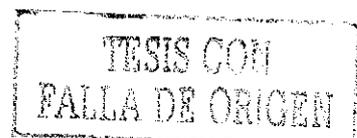
## 5.6

Se regresa a la gráfica 5.3 para observar, con más detalle, las características de los picos, especialmente los primeros.

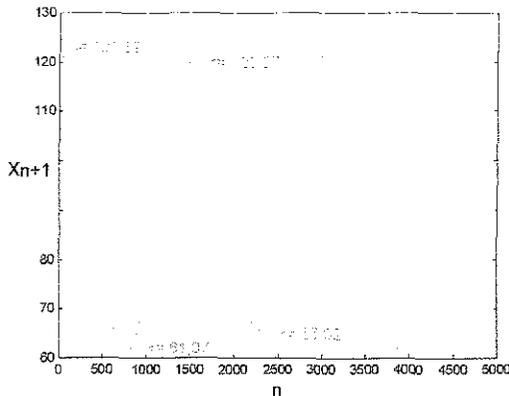
Es fundamental fijar la atención, al menos, en dos peculiaridades:

- la posición relativa de las ondas y
- el desplazamiento relativo entre ellas

Para aclarar este punto se recurre a la ayuda visual que proporcionan las siguientes gráficas.

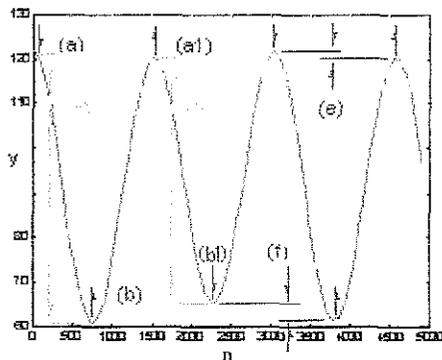


En la gráfica 5.22 se reproducen las primeras cuatro ondulaciones de la grafica 5.2 que son las mismas que se presentan en la gráfica 5.3.



Gráfica 5.22 Se grafican las primeras cuatro ondas generadas experimentalmente.

Complementando a esta gráfica 5.22 se presenta la 5.23 en la cual se hacen destacar algunas características de interés.



Gráfica 5.23 Se hacen notar ciertos detalles finos propios de las ondas que se analizan.

Puede notarse la tendencia que tiene el desplazamiento si se hace el seguimiento de los puntos de inflexión alternadamente. Así:

- Las crestas pares disminuyen su amplitud (a) y las crestas noes aumentan (a1), en tanto que, los valles noes aumentan (b1) y los valles pares disminuyen (b).
- Las ondas noes (c) son más amplias que las pares (d).
- A la derecha de la onda de mayor amplitud se desarrolla la onda menos amplia.
- Las ondas están desfasadas.

- el centro de simetría está desplazado hacia arriba (e) < (f).

La primera observación ((a), (b)) ocasiona la introducción del factor de peso en (5.11)

Las dos siguientes observaciones ((c), (d)) condicionan el signo que se debe aplicar en la ecuación (5.1).

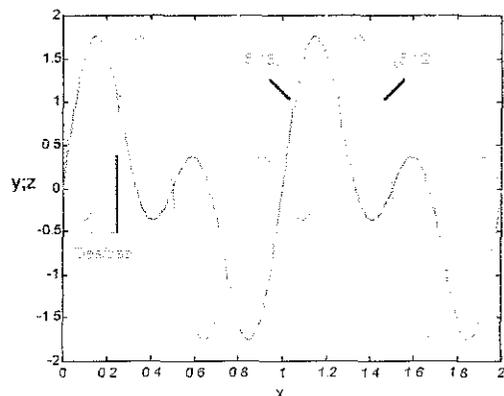
En la gráfica 5.24 se comparan las imágenes que producen las ecuaciones

$$z = \text{sen}(2\pi x) + \text{sen}(4\pi x) \quad (5.12)$$

$$y = \text{sen}(2\pi x) - \text{sen}(4\pi x) \quad (5.13)$$

Estas ecuaciones tienen la estructura de la (5.1). Para efectos ilustrativos se ha dado a los parámetros que lo permiten el valor unidad.

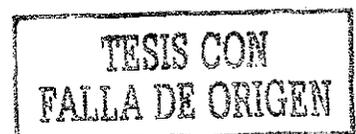
Se deduce que el signo que se debe aplicar en (5.1) es el negativo, es decir como en la ecuación (5.13), pues no hay otra manera de generar una imagen similar a la mostrada en la grafica 5.22 utilizando otra combinación.



Gráfica 5.24 Muestra simultáneamente las imágenes correspondientes a las ecuaciones (5.12) y (5.13)

Con relación al desfase cabe recordar que, los valores experimentales se inician con el valor más alto registrado y por ese motivo la aplicación de la ecuación (5.13) debe iniciar con un corrimiento cercano a noventa grados o  $\pi/2$  radianes.

Elegida la estructura de la ecuación (5.13) se presenta ahora dos problemas:



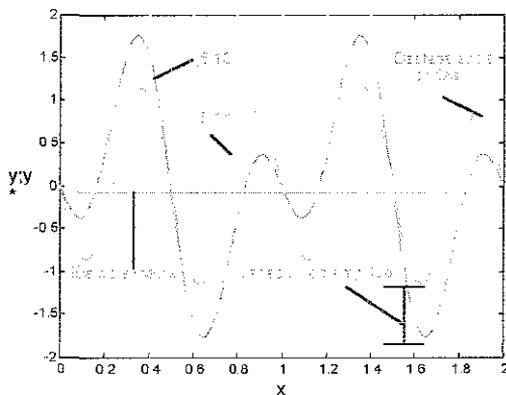
- El primero consiste en ajustar el tamaño del rizo pequeño y
- El segundo consiste en desplazar las ondas para romper la simetría y lograr los desplazamientos indicados mediante las letras (e) y (f) en la gráfica 5.23.

El primer problema se resuelve ajustando el valor asignado anteriormente, de 0.0439 al coeficiente del término de menor frecuencia,  $B$ , de la ecuación (5.13). Por ejemplo, se le asigna el valor 0.2.

Si  $B$  disminuye, la amplitud del rizo que da origen a la segunda onda aumenta. Este efecto se aprecia en la gráfica 5.25 donde se comparan las imágenes de las dos ecuaciones siguientes

$$y = \text{sen}(2\pi x) - \text{sen}(4\pi x) \quad (5.13)$$

$$y^* = 0.2\text{sen}(2\pi x) - \text{sen}(4\pi x) \quad (5.14)$$



Gráfica 5.25. Compara las ecuaciones (5.13) y (5.14). Se hace evidente el efecto de reducción de la amplitud del rizo

El segundo problema se resuelve agregando otra onda desfasada exactamente noventa grados, es decir agregando un coseno

5.7

La ecuación (5.1) se ha ido adaptando para transformarla, de una expresión general, a una particular que sea adecuada para representar a los datos experimentales que se estudian.

Lo primero fue introducir el factor de peso y el signo de donde la (5.1) se transformó en la siguiente (5.15).

$$y = e^{-wns} B \text{sen}(2\pi f_1 ns) - C \text{sen}(2\pi f_2 ns) \quad (5.15)$$

De donde, al agregar el coseno que da solución al segundo problema, modifica a la (5.15) para quedar ahora así:

$$y = e^{-wnx} [B_1 \cos(2\pi f_1 nx) + B_2 \text{sen}(2\pi f_1 nx)] - C \text{sen}(2\pi f_2 nx) \quad (5.16)$$

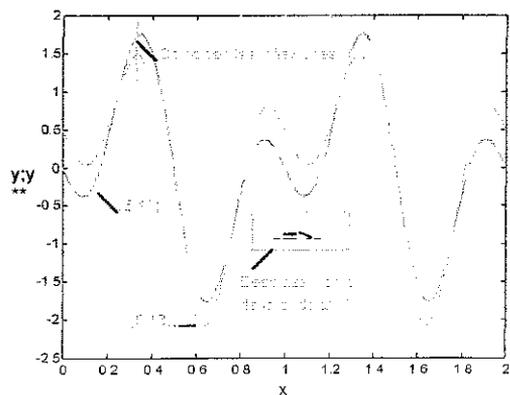
El parámetro  $C$  de la onda de mayor frecuencia, toma el valor unidad al normalizar los datos dado que, como esta onda se mantiene sin variaciones, sirve como referencia

El valor del parámetro  $B_1$  controla la amplitud del rizo menor, como se ve en la gráfica 5.22 y el valor del parámetro  $B_2$  regula el desplazamiento del eje de simetría de este rizo menor, como se puede apreciar en la siguiente gráfica 5.26.

Las ecuaciones que se grafican para dar la imagen que aparece en 5.26 son:

$$y = \text{sen}(2\pi x) - \text{sen}(4\pi x) \quad (5.13)$$

$$y^{**} = 0.5 \cos(2\pi x) + \text{sen}(2\pi x) - \text{sen}(4\pi x) \quad (5.17)$$



Gráfica 5.26 Se comparan las ecuaciones (5.13) y (5.17) Hace evidente el desplazamiento entre los rizados

**TESIS CON  
FALLA DE ORIGEN**

El signo entre seno y coseno condiciona la dirección del desplazamiento. El signo positivo desplaza hacia adelante y el negativo hace retroceder.

Mediante cálculos iterativos que pueden incluir prueba y error y cotejando con los datos experimentales, tal y como se hizo para la gráfica 5.18, se puede determinar el valor de estos parámetros  $B_1$  y  $B_2$  hasta lograr que haya coherencia entre la ecuación (5.16) y los valores registrados en la prueba.

Con apoyo en el conjunto de valores experimentales normalizados, el valor asignado a estos parámetros es:

$$B_1 = 0.0399 \text{ y } B_2 = 0.0813$$

Con los valores anteriores y sustituyendo los diferentes valores obtenidos para cada uno de los diferentes parámetros, propios de los datos analizados, se obtiene la siguiente expresión algebraica (5.18) que representa la conducta de los datos que han motivado este trabajo.

$$y = 92.1687 + 28.9082 \exp(-0.0000571x) \left[ \begin{array}{l} 0.0399 \cos(\pi 0.0006496x) + \\ 0.0813 \operatorname{sen}(\pi 0.0006496x) \end{array} \right] - 28.9082 \operatorname{sen}(\pi 0.0012992x) \quad (5.18)$$

La conclusión final de todo lo anterior, se resume en la siguiente ecuación general (5.19) que permite representar el comportamiento de cualquier proceso iterativo que evoluciona hacia dos puntos atractores.

$$y = A + B e^{-wx} [B_1 \cos(2\pi f_1 nx) + B_2 \operatorname{sen}(2\pi f_1 nx)] - C \operatorname{sen}(2\pi f_2 nx) \quad (5.19)$$

$A$ ,  $B$ , y  $w$  se pueden evaluar utilizando las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10) del capítulo anterior.

Con base en lo propuesto en la sección 4.4 del capítulo anterior, se puede utilizar una variante de la (5.19) que emplea la media aritmética ( $M$ ) y el intervalo (que en esta ecuación se representa por  $R$ ).

$$y = M + R e^{-wx} [B_1 \cos(2\pi f_1 nx) + B_2 \operatorname{sen}(2\pi f_1 nx)] - C \operatorname{sen}(2\pi f_2 nx) \quad (5.20)$$

La ecuación general (5.19) implica que hay comportamiento periódico continuo en el proceso del cual surge. Sin embargo, los puntos de inflexión  $x_n$ , que son los casos específicos que se utilizan en las ecuaciones del Caos, conllevan la perspectiva de un comportamiento discreto del proceso. *Dos concepciones diferentes de lo mismo.*

### 5.8

Se han mantenido separadas las variables  $y$  y  $x_{n+1}$  para hacer énfasis con relación a que la primera variable implica conducta continua y la segunda implica conducta discreta. Esto permite distinguir si la ecuación donde se utiliza involucra que haya o no iteración.

Al graficar una sucesión de valores iterados, prácticamente siempre, se obtienen imágenes muy similares a la parábola.<sup>48</sup> Por lo mismo, casi siempre se tiene la tendencia a buscar la parábola que mejor ajusta a los datos experimentales cuando éstos provienen de procesos periódicos para, con base en ella, asociar el mapa que más convenga.

Si se aplican las ecuaciones (4.12,a,b,c), (4.14), (4.15) y (4.16) se puede encontrar la parábola que corresponde a los puntos de inflexión encontrados en este segundo conjunto de datos.

Para obtener la mayor exactitud posible con las ecuaciones anteriores es recomendable utilizar, únicamente, valores normalizados como los de la tabla 15

Para calcular las coordenadas del vértice y las constantes necesarias de la ecuación que corresponde a esta parábola, se emplea la ecuación (4.15) y (4.16) utilizando los valores de la tabla 15, así:

$$h = \frac{y_n x_{n+1}^2 - y_{n+1} x_n^2}{2(y_n x_{n+1} - y_{n+1} x_n)}$$

$$h = \frac{(0.4405)^3 - (0.8475)(0.8491)^2}{(2)[(0.4405)^2 - (0.8475)(0.8491)]}$$

$$h = 0.5$$

$$\mu = \frac{y_n}{2hx_n - x_n^2}$$

$$\mu = \frac{0.4405}{(2)(0.5)(0.8491) - (0.8491)^2}$$

$$\mu = 3.4390 = r$$

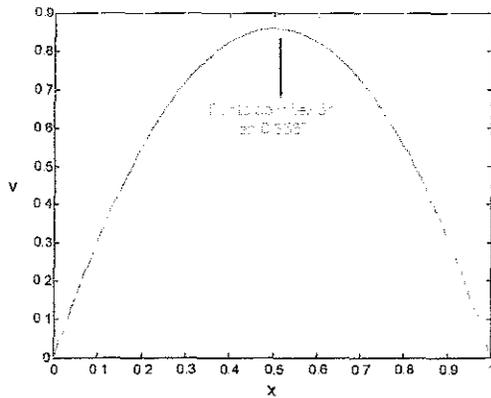
$$k = \mu h^2 \tag{5.21}$$

$$k = 0.85975$$

Una vez que se han determinado los anteriores parámetros se puede proponer la parábola que mejor ajusta a los puntos de inflexión para los datos de la segunda corrida experimental.

Con valores normalizados, a la parábola de la gráfica 5.27 le corresponde la ecuación:

$$y = -3.439(x - 0.5)^2 + 0.85975 \tag{5.22}$$

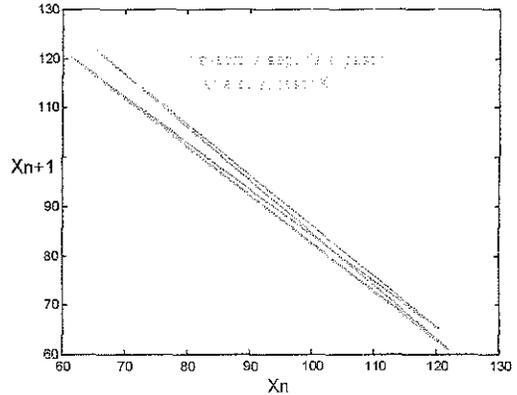


Gráfica 5.27. Muestra el punto de inflexión de la parábola formada con los puntos de inflexión experimentales.

Para utilizar los valores sin normalizar obtenidos en el experimento, se propone la siguiente ecuación para la parábola equivalente o similar a la anterior que generan los puntos de inflexión presentes en ellos:

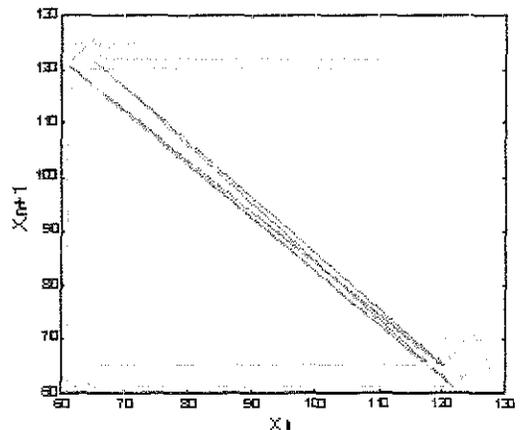
$$y - 122.0038 = -0.0194(x - 70.95306)^2 \tag{5.23}$$

De la tabla 11 se seleccionan puntos de inflexión sucesivos. Se toma el primer valor más grande de la serie, después el más pequeño, luego el más grande, luego el más pequeño y así sucesivamente. Los primeros valores, 122.0061, 67.7459, 121.0930, etc se grafican uno seguido del otro.

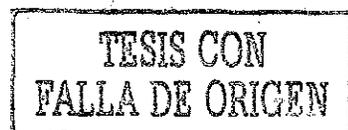


Gráfica 5.28 Esta imagen se genera trazando los saltos producidos entre un punto y su sucesor.

En la gráfica 5.28 se muestra el proceso iterativo seguido por todos los pares ordenados obtenidos de los puntos de inflexión y el sucesor inmediato respectivo, de manera semejante a como se hizo para dibujar la gráfica 4.16. Esta imagen es desconcertante pero su significado se aclara si se repite lo hecho en la gráfica 4.17, es decir, si auxiliándose con flechas se describe el desplazamiento que se realiza al avanzar de un punto dado al siguiente, con tal que este último sea el sucesor del primero.



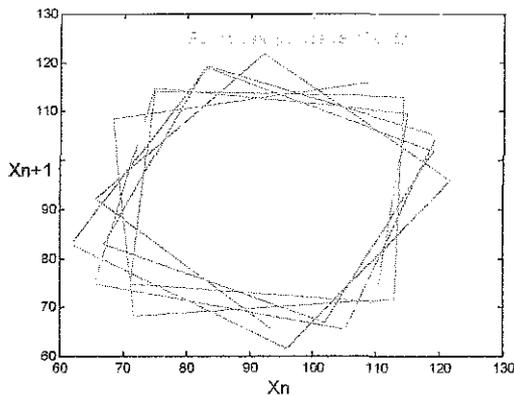
Gráfica 5.29 Siguiendo las flechas se puede proseguir los saltos producidos al pasar de un punto a su sucesor



La gráfica 5.29 permite, con la ayuda visual de las flechas, seguir detalladamente el desarrollo del proceso iterativo que da origen a la gráfica 5.28.

Se ha insistido respecto al cuidado que se debe tener en utilizar, específicamente, los puntos de inflexión porque, de no hacerlo, se producen desviaciones que alejan la posibilidad de asociar mapas a los comportamientos oscilatorios. La iteración útil para Caos, se produce únicamente, si se utilizan puntos de inflexión.

Como ejemplo ilustrativo, se muestra en la gráfica 5.30 la imagen obtenida al repetir el seguimiento de los saltos entre pares ordenados que incluyen, un punto desfasado intermedio, entre dos puntos de inflexión.

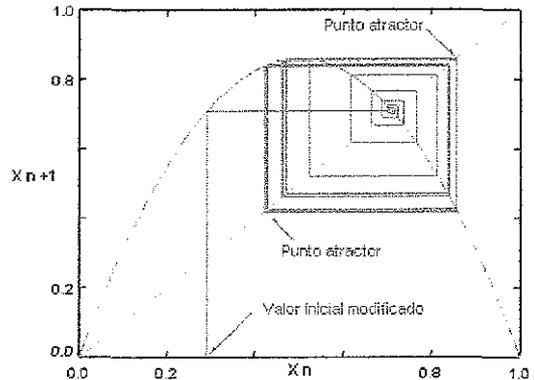


Gráfica 5.30 Traza la trayectoria de los saltos ocurridos entre sucesores que incluyen un punto intermedio entre dos puntos de inflexión

Regresando a la gráfica 5.29 conviene resaltar las siguientes peculiaridades:

- En este conjunto de datos, no hay convergencia a un punto.
- Al evolucionar el proceso hay alejamiento del punto donde hubo convergencia para los datos del primer experimento.
- La convergencia ocurre ahora en dos puntos opuestos sobre la misma diagonal, alternados a uno y otro lado del punto que antes fue atractor, como se aprecia en la gráfica 5.31.

La gráfica 5.31 presenta el resultado al que se llega cuando el procedimiento bosquejado en la gráfica 5.29 se desarrolla sobre la parábola de la ecuación (5.22) para todos los puntos de inflexión registrados durante la realización del segundo experimento.



Gráfica 5.31 Muestra la iteración de los puntos de inflexión sobre la parábola (5.22)

En la gráfica 5.31 se puede ver completo el desarrollo ilustrado parcialmente en la gráfica 5.29 y la manera como se teje la telaraña

Es imprescindible notar que el proceso desarrollado en este segundo experimento va alejándose del punto de intersección de la diagonal con la parábola, aun cuando se seleccione un valor inicial que conduzca, desde un principio, al que se podría suponer como punto atractor.

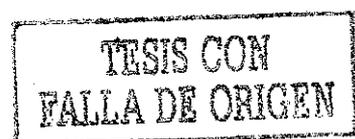
Con base en esta figura se afirma que el proceso experimental de donde surge este segundo conjunto de valores tiende a dos puntos atractores y, por lo tanto, existen dos condiciones estables, alternadas, en los valores normalizados 0.4425 y 0.8483.

Las lecturas reales que se obtienen del experimento, cuando el sistema alcanza su equilibrio, son 120.3789 y 62.7935.

Se observa que la inestabilidad del proceso persiste en tanto que el segundo término del segundo miembro de la ecuación (5.19), es decir, el término que contiene la frecuencia menor persista y no se anule. Para que la anulación de este término ocurra se requiere que el término exponencial alcance el valor más cercano posible al cero.

Al disminuir, hasta quedar imperceptible el término que contiene el exponencial queda una sola onda: la de mayor frecuencia.

Al decir que el sistema tiende a dos atractores, lo que se está diciendo es que se



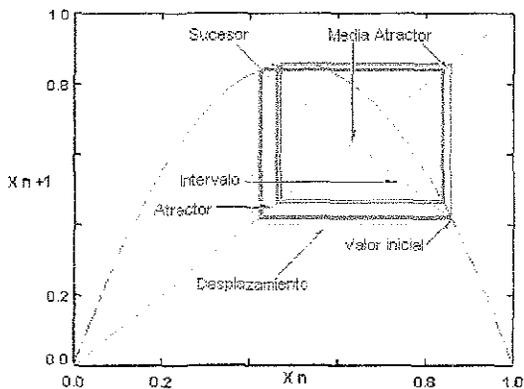
detectan dos señales originadas en el proceso que representan los puntos de inflexión de la onda que permanece y que la alternancia de valores se debe a los saltos entre los máximos y mínimos de cada cresta y cada valle de la onda.

5.9

Se procede a describir algunas de las implicaciones de la media y el intervalo.

Al calcular la media aritmética ( $M$ ) de los valores experimentales, lo que se obtiene son las coordenadas del punto de intersección de la diagonal con la línea que une a un valor inicial con su sucesor.

El intervalo ( $R = B$ ) se muestra en la gráfica 5.32 y representa la magnitud de la distancia que hay entre el valor inicial y el punto de intersección de la diagonal con este segmento.



Gráfica 5.32. Da la representación grafica de la media aritmética y el intervalo

La magnitud del intervalo corresponde a la amplitud inicial de la onda que se desvanece, es decir, a la onda de menor frecuencia.

A medida que se desarrolla la iteración, la imagen que se genera con estas líneas es un rectángulo que se va modificando hasta que, al llegar al equilibrio, se transforma en un cuadrado.

Esto implica que la magnitud de los segmentos, el continuo y el punteado, sean iguales.

Conviene reafirmar lo anterior: para que se produzca un cuadrado se necesita que los desplazamientos del valor inicial al sucesor y del sucesor al siguiente sucesor tengan igual magnitud y esto ocurre únicamente cuando se alcanza el equilibrio.

La proporción que hay entre la magnitud de desplazamientos sucesivos condiciona la rapidez con la que decae la onda que se desvanece, es decir, la proporción entre desplazamientos depende del valor del termino exponencial de la ecuación (5.19)

La diferencia entre desplazamientos motiva que la media aritmética obtenida del cálculo directo con los datos experimentales se deba corregir para compensar este efecto y lograr mayor exactitud en el ajuste. Por este motivo la ecuación (5.20) acarrea un pequeño error con relación a la ecuación (5.19).

En todo caso, utilizar (5.20) y no realizar este ajuste implica aceptar un pequeño error que, para el caso que se analiza, es de 0.017%

Este porcentaje es menor a medida que aumenta el número de iteraciones necesarias para llegar al atractor.

En el capítulo 4 se hizo énfasis en el hecho de que, el parámetro de control, por ejemplo  $r$  para el mapa logístico (4.22), condiciona la rapidez, es decir, el número de iteraciones que se necesitan para llegar al equilibrio.

Este número de iteraciones aumenta a medida que este parámetro se acerca al punto de bifurcación luego entonces, el que se necesiten muchas repeticiones para llegar al equilibrio conlleva a que la diferencia entre los segmentos sea mínima y la estimación del valor central es más exacta y por lo mismo el porcentaje de error disminuye.

Es fundamental hacer notar que la pendiente de la línea que une al punto inicial con su sucesor tiene el valor  $-1$  cuando se llega a los atractores.

El parámetro de control presente en las ecuaciones que corresponden a sistemas dinámicos discretos unidimensionales, representados por (4.21), condiciona las propiedades del vértice de la parábola



El vértice de la parábola impone restricciones al tamaño del cuadrado que se puede formar con ella y esto limita el corrimiento que pueden sufrir las coordenadas de los atractores. Este corrimiento puede ocurrir hasta ciertos valores que identifican a los atractores extremos que a su vez determinan, en que momento, el sistema está al límite de una nueva bifurcación.

Lo anterior significa que la amplitud ( $C$ ) de la onda que permanece y que, en este caso, es  $C \text{sen}(2\pi f_2 n x)$  de la (5.19), tiene un límite que no puede ser rebasado si es que se quiere mantener el número de atractores hacia los que tiende el sistema.

Con base en lo anterior es que se puede utilizar las ecuaciones (4.15) y (4.16) para calcular los valores que corresponden a los parámetros de la parábola.

5.10.

Para concluir, se procede a la asignación de mapas a los datos que se analizan. Dicha asignación se basa en todo lo expuesto antes.

El mapa logístico asociado a los resultados del segundo experimento es:

$$x_{n+1} = 3.439x_n(1 - x_n) \tag{5.24}$$

Esta ecuación es similar a la (5.22) pero difiere de ésta en que, mientras la (5.22) utiliza valores continuos, la (5.24) únicamente utiliza puntos de inflexión.

Cabe hacer notar que, para pasar de (5.23) a (5.24), basta con desarrollar (5.23). Desde luego se puede verificar que se cumple con (5.21).

Para asociar el mapa seno a los datos, se repite el procedimiento empleado en la sección 4.11 y representado en la gráfica 4.26.

El valor del parámetro de control  $r$ , al cual el mapa logístico se bifurca de dos a cuatro atractores, es 3.44949.

El valor del parámetro de control  $q$ , en el cual el mapa seno se bifurca de dos a cuatro atractores, es 0.83333.

Entonces:

$$3.44949 : 3.439 :: 0.83333 : q$$

y  $q = 0.8308$

de donde el mapa seno asociado es:

$$x_{n+1} = 0.8308 \text{sen} \pi x_n \tag{5.25}$$

Finalmente, para normalizar la ecuación (5.18) se procede así:

- Se aplican las ecuaciones (4.15) y (4.16) para calcular los parámetros  $h$  y  $\mu$  utilizando valores sucesivos tomados del registro del experimento.
- Al parámetro  $k$  se le asigna el mayor valor registrado (valor inicial, gráfica 5.32) en los datos experimentales.
- Se calcula la media aritmética de los valores experimentales ( $M$ ).
- Al restarle  $k$  a  $M$  se obtiene el intervalo ( $R = B$ ; gráfica 5.32).
- Se divide  $M$  entre dos veces  $h$  y se obtienen las coordenadas normalizadas del punto de intersección de las diagonales de la gráfica 5.32 y al resultado se le denomina  $M_n$ .
- El intervalo  $R$  se divide entre dos veces  $h$  y se obtiene el intervalo normalizado que se denomina  $R_n$ .
- A la ecuación (5.19) se le resta  $M$  y el resultado obtenido se divide entre  $R$  para obtener  $y_n$  que permite proponer la ecuación:

$$z_n = R_n y_n + M_n \tag{5.26}$$

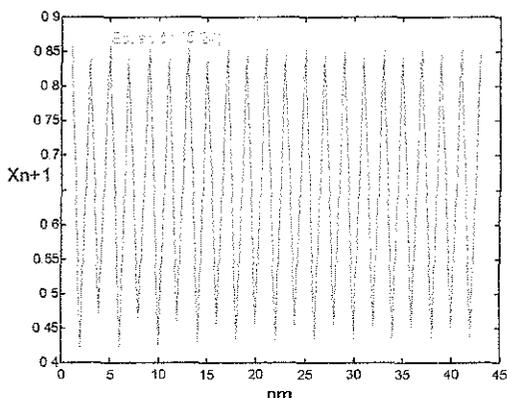
La cual es otra opción para representar la conducta de los datos del segundo experimento.

Se presenta la imagen de las ecuaciones (5.24), (5.25) y (5.26) en las gráficas 5.33, 5.34 y 5.35 para demostrar la casi total similitud en apariencia, en significado y en eficacia para representar el comportamiento experimental analizado.

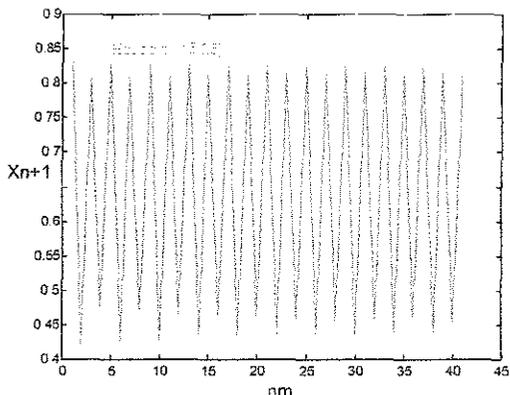
Las ecuaciones (5.24) y (5.25) así como sus gráficas 5.33 y 5.34 corresponden a mapas;

en cambio, la ecuación (5.26) y su gráfica 5.26 corresponde a una ecuación trascendente, con lo que se demuestra la correspondencia entre ambas formas de expresión.

La gráfica 5.33 corresponde a la ecuación (5.24). La gráfica 5.34 corresponde a la ecuación (5.25) y la grafica 5.35 corresponde a la ecuación (5.26)



Gráfica 5.33. Se obtiene iterando la ecuación (5.24)

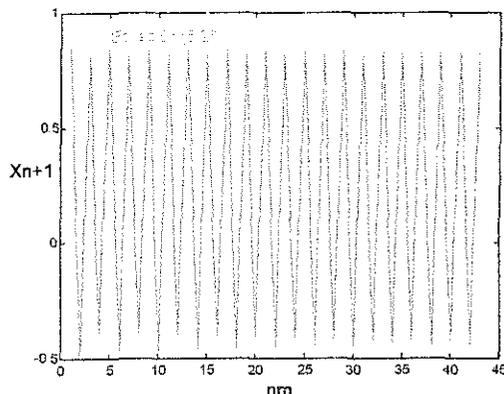


Gráfica 5.34. Se obtiene iterando la ecuación (5.25)

Para graficar la ecuación (5.26) es necesario evaluar  $M_n$  y  $R_n$ . Para ello se toman tres valores experimentales sucesivos que correspondan a puntos de inflexión. Por ejemplo, si se toman los primeros valores registrados en el orden en el que se produjeron, entonces:

$$x_n = 122.0038; y_n = x_{n+1} = 67.7459; \\ y_{n+1} = 121.093$$

Al aplicar la ecuación (4.15) se obtiene  $h = 73.2472$ . En la sección 5.4 se muestra que  $M = 92.1687$  y  $R = 28.9082$ , por lo que  $M_n = 0.6292$  y  $R_n = 0.1973$ .



Gráfica 5.35. Se obtiene iterando la ecuación (5.26)

Todo lo anterior ilustra el método general que se puede seguir para asociar, cuando esto sea posible, una parábola y algún mapa, como el logístico o el seno, a un conjunto de datos reales y, sobre todo, da el fundamento para proponer qué:

$$rx_n(1-x_n) = 4\beta x_n(1-x_n) \sim \tag{5.27}$$

$$q\text{sen}(\pi x_n) \sim$$

$$A + Be^{-wnx} [B_1 \cos(2\pi f_1 nx) + B_2 \text{sen}(2\pi f_2 nx)] \\ - C \text{sen}(2\pi f_2 nx)$$

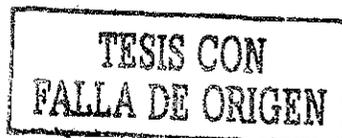
Con lo cual se establece el vínculo entre la conducta del tokamak y la Teoría del Caos.

### 5.11.

Es conveniente regresar a las sección 3.6 (pág 18) y 4.10 (pág. 38) para verificar que las equivalencias (4.30) y (5.27) satisfacen la proposición hecha en el capítulo 3 y las afirmaciones del capítulo 4.

### REFERENCIAS

<sup>48</sup> Davis Brian [6], Capítulo 2



## Capítulo 6

*Se interpretan resultados, se argumentan las razones que motivan las suposiciones y se proponen algunas rutas de investigación.*

### 6.1.

Es común la confianza del hombre en el método científico, en los alcances de éste y en la metodología de trabajo que dicho método le impone a la investigación.

Al aplicar el método científico, es frecuente concebir a los fenómenos investigados desde una visión reduccionista la cual se resume así: se puede explicar un fenómeno complicado descomponiéndolo en otros más simples y después, ensamblando adecuadamente las diferentes leyes que rigen el comportamiento de sus elementos integrantes, se da la explicación total.

La postura reduccionista, materializada en el método científico clásico, tiene la siguiente secuencia como metodología básica de trabajo:

- Establece una hipótesis.
- Somete a "causa y efecto" al comportamiento que se estudia
- Analiza los resultados obtenidos del experimento aplicando criterio lineal.
- Acepta o rechaza la hipótesis propuesta y
- Deducir la ley que regula el comportamiento estudiado.

Para comprobar que la ley deducida es correcta, se repite experimentalmente el fenómeno estudiado. Se modifican las condiciones iniciales, se aplican las ecuaciones deducidas para predecir resultados teóricos, se comparan estos con los resultados reales y se aceptan o desechan las leyes propuestas.

Si hay discrepancias entre los resultados y lo que se predijo se acepta o rechaza la hipótesis de acuerdo con las leyes de la estadística.

Es típica la postura conceptual implicada en el reduccionismo.

Se sintetiza en las siguientes líneas: el Universo, aun cuando es una maquina muy compleja, tarde o temprano será desarmada y se podrán conocer sus mecanismos, sus componentes y sus principios de operación.

De igual manera, se podría resumir la propuesta del determinismo en las siguientes líneas: conociendo los secretos universales el hombre podrá dominar a la naturaleza.

El reduccionismo y el determinismo son adecuados para estudiar fenómenos de evolución ordenada y que, por lo mismo, son terminales y aislados y se da en un único ciclo; es decir, aquellos cuyo inicio y conclusión transcurre en un corto intervalo de tiempo, aquellos que se manejan sin considerar los cambios en el medio circundante y aquellos en donde no interesa ni el antes ni el después que acotan al evento.

El reduccionismo y el determinismo tienen, en los fenómenos ordenados, su principal campo de aplicación.

Para la ciencia un fenómeno es ordenado si sus variaciones se pueden explicar en un esquema de causa y efecto representado por una ecuación diferencial lineal.

Estos fenómenos tienen las características adicionales de plantearse, casi siempre, bajo condiciones ideales y recurrir al azar para explicar las desviaciones que se presentan entre lo que predicen los cálculos y lo que se obtiene realmente en el laboratorio.

El determinismo y el criterio lineal funcionan adecuadamente para predecir las condiciones finales de un sistema, siempre y cuando el cambio provocado ocurra una sola vez, se manipulen las variables del sistema dentro de ciertos rangos y las condiciones finales permanezcan también dentro de

ciertos límites. En tal caso el fenómeno evolucionará ordenadamente.

Si se cumple con lo anterior, las condiciones finales a las que evoluciona el sistema son predecibles y están representadas por un atractor.

El atractor representa un conjunto de valores que corresponden a cada una de las variables que expresan el estado del sistema al final del proceso experimental al que éste se sometió.

Si el experimento ocurre una sola vez, las condiciones finales se pueden representar mediante un solo punto en el espacio de  $n$  dimensiones y a este se le denomina punto atractor.

Si las condiciones finales se pueden representar en el espacio de fases, las dimensiones serán siete: tres de posición, tres de momento lineal (impulso) y una de tiempo.

$$(x, y, z, p_x, p_y, p_z, t) \quad (6.1)$$

Si las variables involucradas son más, el atractor se puede representar por la superficie de un toro multidimensional, de  $n$  dimensiones.

El atractor representa las condiciones finales hacia las que tiende el sistema.

Si el experimento es iterativo y oscilante, el atractor se irá formando por todos los puntos que integran el espacio generado al ir representando la solución individual de cada iteración, creando así una Sección de Poincaré.

Esta es la razón por la cual el atractor puede presentar diferentes formas geométricas como son el punto, el ciclo límite, el toroide o el atractor extraño.

La experimentación con fenómenos ordenados está siendo rebasada por la necesidad de estudiar procesos que, durante su evolución, modifican el número y el tipo de atractores hacia los que tienden.

Es decir, cada día crece el número de investigaciones tendientes a determinar

cómo y por qué ocurren alteraciones en la continuidad de los fenómenos iterativos.

Lo anterior no significa que se proponga la existencia de una moda obsoleta de investigación y una de actualidad sino que, lo que se pretende, es puntualizar la necesidad de tomar diferentes posturas epistemológicas ante los fenómenos que se investigan (los fenómenos físicos conocidos, en su mayoría son no-lineales), lo cual permite identificar, al menos, dos posibles posiciones: o se estudia el orden de los fenómenos o se estudia la continuidad de los fenómenos.

La mayoría de los fenómenos que ocurren en la naturaleza se manifiestan como ordenados cuando se investigan aislados y en intervalos cortos de tiempo pero, si los mismos se conciben más integralmente con su entorno o a mayor plazo, es factible observar como se altera la supuesta continuidad y el supuesto orden como consecuencia de la interacción entre los sistemas involucrados, de la realimentación de condiciones y de la repetición.<sup>49</sup>

El estudio de la continuidad involucra una problemática totalmente diferente a la del estudio de fenómenos aislados dado que trabaja con fenómenos repetitivos que, frecuentemente, evolucionan a sistemas forzados, lo que conduce a que las condiciones finales del sistema se representen por atractores de estructura más compleja.

La evolución conlleva, casi siempre, a la pérdida de linealidad con todas las consecuencias que esto implica.

Tal parece que los fenómenos repetitivos fragmentan al sistema donde estos se auto organizan, creando nuevos subsistemas que evolucionan, en forma independiente, hacia nuevas condiciones de atracción.

En todos los casos el número de puntos atractores es indicativo del nivel de desorden o caos que hay en el sistema lo cual, a su vez, está relacionado con el nivel de control que se puede ejercer sobre el mismo.

Una conclusión inmediata de lo anterior es que, a mayor complejidad del atractor

asociado al sistema que se manipula, menor control se tiene de él.

El estudio de la continuidad de los procesos en evolución tiene como primer objetivo el determinar cuáles son las características del atractor hacia el que tiende el sistema, en qué condiciones se pierde la linealidad y cuales son las características, límites y condiciones en los puntos de bifurcación.

Resulta entonces necesario cambiar la expectativa que se tiene, al adoptar la postura determinista, de llegar a un resultado único y permanente cuando se investigan fenómenos iterativos, por otra expectativa en la que los resultados deben analizarse y valorarse de manera diferente.

## 6.2.

La investigación actual de frontera explora:

- La evolución de los fenómenos en el tiempo.
- La realimentación continua entre sistemas.
- La conducta de sistemas que se desarrollan con alta turbulencia

Es decir, se investiga fenómenos que se desarrollan en condiciones diferentes a las tradicionales.

Es necesario reconsiderar la manera como se aplica el reduccionismo y el determinismo en la investigación actual y, por lo mismo, resulta pertinente replantear la forma como se aplica la metodología de trabajo que estas posturas imponen.

En el fenómeno ordenado, la "prueba y error" permite ir ajustando la hipótesis hasta llegar a una ley a través de lograr que lo predicho corresponda con la realidad pero, como ya se dijo, en la investigación de fenómenos continuos o en aquellos que ocurren en sistemas turbulentos, se presentan discrepancias significativas entre lo predicho y lo que ocurre; discrepancias que en ocasiones suelen ir acentuándose a medida que el fenómeno se desarrolla hasta alcanzar dispersiones o desviaciones imprevisibles que hacen imposible establecer ninguna ley.

El reduccionismo y el determinismo se pueden aplicar a partir del momento en que haya concordancia entre los resultados y las predicciones.

Esta concordancia no siempre se alcanza, sobre todo en los fenómenos complejos o sea, aquellos en donde interaccionan múltiples sistemas.

Por lo tanto, la aplicación de los criterios reduccionistas o deterministas a fenómenos de evolución continua y no ordenados, debe esperar hasta que se tengan soluciones satisfactorias acerca de cómo controlar el comportamiento de ellos.

## 6.3.

Es frecuente que el trabajo de investigación, sustentado en el reduccionismo, se desarrolle en dos etapas: una primera de simulación y una posterior de comprobación en el laboratorio. Esto se debe a que, generalmente, el reduccionismo considera que los fenómenos se pueden simular con ecuaciones lineales y por ello se puede proponer que la metodología de trabajo tradicional inicia con simulación a partir de las ecuaciones disponibles que expresan las leyes que, se supone, rigen al fenómeno que se estudia

La simulación propone resultados que son consecuencia de aplicar un procedimiento de cálculo lógico y logra éxito, dicho proceso, cuando se confirman los resultados en el laboratorio

La simulación tiene la parte atractiva de que, la solución de una ecuación lineal permite generalizaciones que conducen a otras soluciones.

La simulación pierde su atractivo al trabajar con ecuaciones no lineales porque la mayoría no tienen solución conocida.

Con criterio reduccionista, al simular fenómenos iterativos, se puede proponer un resultado verificable al final de la iteración o se puede considerar cada paso de repetición como si fuera un fenómeno terminal,

manteniendo el criterio de que cada paso constituye una etapa independiente.

En esta última opción se puede unir, en un total, los resultados de cada etapa y así integrar la evolución del fenómeno dando la apariencia de evolución continua, lo cual no siempre es válido.

Para estimar con criterio reduccionista las condiciones finales de un fenómeno iterativo, se simula una realimentación que se efectúa mas o menos así:

- Los valores finales de la primera etapa son los valores iniciales de la segunda etapa.
- Los valores finales de la segunda etapa son los valores iniciales de la tercera etapa y
- así sucesivamente.

Los valores al final de cada una de las  $n$  etapas se supone, en la simulación, que se estiman con precisión y es aquí donde el método falla porque en la práctica no se logra tal precisión.

Si se simula la iteración con muchas etapas y si se acepta que hay azar en los valores con que inicia cada etapa, entonces se puede ir amplificando el azar hasta niveles imprevisibles como consecuencia de la realimentación del azar, lo cual conduce a un resultado que es prácticamente imprevisible. Esto es consecuencia de la propagación de incertidumbres.

La diferencia en la precisión de los resultados previsible, entre aquel en el que se considera el azar y aquel en el que no se toma en consideración es notable. La imprecisión del primero es consecuencia del azar propio de cada ciclo que, al multiplicarse por si mismo, como resultado de la iteración, destruye la linealidad del proceso y lo empujan a la no-linealidad.

Por eso, a veces, el resultado final al que se llega por estas dos rutas no es, necesariamente, el mismo. Lo anterior se debe a que la realimentación puede magnificar hasta los efectos más pequeños.

Al pasar de la simulación al resultado práctico se suele correr un riesgo.

El riesgo que se corre tiene su origen en aceptar como válido que el valor experimental caiga en la vecindad del resultado teórico. Al aceptar esto, se introduce el azar en el desarrollo experimental.

Como en la simulación, en el laboratorio se puede dar seguimiento o desarrollar cada etapa del fenómeno, en forma aislada, hasta acumular el total de etapas que se haya decidido realizar y luego integrar los resultados o se puede permitir la evolución ininterrumpida del fenómeno hasta su conclusión.

Si la corrida experimental es iterativa, es decir, si el cambio estudiado se repite una y otra vez y se realimentan las condiciones, entonces se pueden observar que los resultados, al final de cada ciclo, cambian paulatinamente dado que las condiciones iniciales, en cada ciclo, son cambiantes, lo cual realimenta y amplifica el efecto de las condiciones iniciales sobre el destino del ciclo provocando que se manifiesten, en cada paso, realidades diferentes a las esperadas.

Es necesario recalcar que se manipula el fenómeno a estudiar partiendo de ciertas condiciones iniciales y se llega a ciertas condiciones finales que casi siempre se desvían, en cierta medida, de las circunstancias esperadas.

Como hay iteración, cada situación corresponde a nuevas condiciones iniciales que conllevan una diferencia con relación al ciclo anterior.

Esto significa que, en los procesos con evolución continua, aun cuando estos estén integrados por pequeños ciclos ordenados, se pierde el orden como consecuencia de la realimentación de las mínimas fluctuaciones de las condiciones bajo las que ocurren los procesos.

La conducta del proceso se torna caótica, es decir, se vuelve incontrolable y origina resultados inesperados.

Regresando a la simulación se reitera: la solución de una ecuación lineal permite generalizaciones que conducen a otras

soluciones pero, en las ecuaciones no lineales, esto no se cumple, por lo que una solución previa no necesariamente conduce a una solución posterior.

En los fenómenos no lineales un pequeño cambio en una variable puede surtir un efecto desproporcionado en otras variables por lo que, los resultados de experimentos iterativos se vuelven imprevisibles.

El cambio no lineal sufre transiciones abruptas y discontinuas de un estado a otro arrastrado por factores externos que crean pliegues en el espacio de fases originados en las propias variables de control del sistema. Estos cambios no lineales generan la turbulencia.

Al trabajar con fenómenos no lineales es frecuente que, un experimento realizado en un sistema turbulento bajo condiciones estrictamente controladas o un experimento repetitivo que se deja evolucionar libremente *comenzando en un sistema sin turbulencia* inicial, llegue, persistentemente, a resultados muy diferentes a los esperados.

Esto se debe a que los fenómenos no lineales pueden evolucionar a diferentes puntos atractores.

En la simulación, las ecuaciones y los valores asociadas a fenómenos repetitivos también se deben iterar.

Términos lineales que se multiplican por sí mismos, se realimentan, lo que provoca que las ecuaciones lineales se transformen en no lineales.

Por esta razón, al simular con ecuaciones lineales que se iteran, es imposible llegar a soluciones y predicciones únicas pues se van generando ecuaciones no lineales que no se pueden resolver plenamente, salvo en condiciones mucho muy específicas.

De igual manera, al experimentar con fenómenos de comportamiento lineal que se repiten continuamente con realimentación, el fenómeno adquiere conducta no lineal debido a la iteración y es necesario recurrir a la especulación para predecir el resultado del experimento

#### 6.4.

Es en la dinámica de encontrar soluciones satisfactorias a problemas nuevos donde se crea la nueva ciencia. Es aquí donde se produce el avance.

Cuando no hay avance en la investigación se recurre a la especulación.

La creación de nueva ciencia implica especulación.

Se especula cuando los conocimientos disponibles no dan respuesta al problema que se plantea.

La especulación no tiene reglas; los límites están en la imaginación de quién especula.

La validez de la especulación se acredita en el laboratorio en función de los resultados ahí obtenidos.

Los que investigan en la frontera del conocimiento *recurren frecuentemente a la especulación* para sustentar y proponer nuevos experimentos o para explicar los resultados de ellos.

Dicha especulación surge como consecuencia de que los resultados predichos o esperados en un experimento no son congruentes con los obtenidos en la realidad.

En años recientes se han realizado numerosos estudios basados en simulación consistentes en explorar la turbulencia<sup>50</sup> mediante la iteración con valores obtenidos a través de ciertas ecuaciones y la simulación ha dejado en claro ciertos comportamientos que aparentemente se dan, no solo en la computadora, sino también en el laboratorio.

En estas exploraciones se observa, por ejemplo que, en las ecuaciones que son susceptibles a la iteración hay presente uno o varios parámetros de control. Es decir, aparece un término o varios términos que permanecen con un valor único, fijo, durante toda la iteración de los valores y que determina el número de puntos atractores hacia los que tienden los valores iterados y que, por lo mismo, controlan las características, en especial la amplitud y

frecuencia de las ondas asociadas a dichos atractores.

Tal es el caso de los parámetros  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $w$  en la ecuación (5.19),  $r$  en la (4.22) o  $q$  en la ecuación (4.23).

Modificando el valor de estos parámetros de control se modifica, por ejemplo, como ya se vio en los capítulos 4 y 5:

- La amplitud de las ondas que, al superponerse, modulan la señal de salida.
- El número de iteraciones que acontecen antes de llegar al atractor.
- El número de puntos atractores hacia los que tiende la iteración.

La correlación entre los valores de una cierta iteración permanece relativamente constante para una amplia gama de posibilidades pero, en ciertos valores críticos que puede tomar el parámetro de control, se pierde la constancia y las ecuaciones se lanzan hacia una nueva conducta que obedece a reglas totalmente diferentes.

Cuando el parámetro de control va tomando valores ascendentes, se alcanzan ciertos valores que son constantes universales y que tienen la cualidad de determinar las condiciones en las que, el número de atractores a los cuales tiende el sistema, se modifican. El parámetro de control señala las condiciones en las que ocurre la pérdida de invariantes.

El primer conjunto de valores analizado en el capítulo 4 está caracterizado por parámetros como  $r$ ,  $q$ ,  $w$ , etc. El valor que, según el análisis tomó  $r$  ( $r = 2.89149$ ) indica que el sistema dejará de oscilar y se estabilizará en un punto atractor el cual representa las condiciones en las que el sistema alcanza el equilibrio.

El segundo conjunto de valores analizado en el capítulo 5, corresponde a circunstancias diferentes a las anteriores las cuales provocan que, las variables involucradas y aglomeradas en  $r$  obliguen a rebasar las condiciones de estabilidad que se respetan en tanto que  $r$  no supere el valor 3. Como esta situación se dio, pues  $r = 3.439$ , el sistema se equilibra en dos atractores.

Esto es lo que se indica en las gráficas 3.1 y 3.2. El proceso o el sistema tienen comportamientos característicos definidos para cada rango de valores del parámetro.

Existen valores específicos en cada parámetro que marcan el límite (constricciones) a partir del cual el sistema se desquicia, se reestructura y encuentra un diferente número de atractores donde estabilizarse.

Estos valores específicos son de la más alta importancia pues determinan los puntos en los cuales el comportamiento del sistema se bifurca.

Para el caso particular del mapa logístico los primeros seis valores específicos del parámetro son:

- $r = 3$ . El proceso cambia de un atractor a dos. (Vea gráfica 3.1).
- $r = 3.4494$ . El proceso cambia de dos atractores a cuatro.
- $r = 3.5441$ . El proceso cambia de cuatro atractores a ocho.
- $r = 3.5644$ . El proceso cambia de ocho atractores a dieciséis.
- $r = 3.5688$ . El proceso cambia de dieciséis atractores a treinta y dos.
- $r = 3.5697$ . El proceso cambia de treinta y dos atractores a sesenta y cuatro.

Estos parámetros de control están estrechamente ligados a las condiciones en que se realiza el experimento y en específico con los valores que tienen cada una de las variables que se manipulan.

Todo lo anterior tiene como primera aplicación el permitir la especulación que da origen a nuevos experimentos y de ahí, a nuevos conocimientos. Por ejemplo, ¿sería posible operar el tokamak en condiciones tales que la combinación de valores de las variables involucradas ocasionaran que el parámetro de control tomara el valor  $r = 3.83$ ? Si este fuera el caso, el tokamak operaría en condiciones que corresponden a una zona de intermitencia (ver gráfica 3.3) y en consecuencia, trabajaría estable aun cuando estuviera inmerso en condiciones de enorme turbulencia. Ésta es, simplemente, una especulación.

## 6.5.

Continuando con la especulación y buscando conectar las ecuaciones de la sección 3.4, se puede proponer que en un tokamak específico, como consecuencia de sus características de construcción, como pueden ser sus dimensiones, sus materiales de construcción, sus sistemas de vacío, etc., tiene una "constante de restitución  $G$ " y un "nivel de turbulencia  $L$ " y que se involucra una energía en la operación tal que  $E = 2G/L$  y, en tanto que el parámetro asociado con  $L$ , posiblemente  $r$  no rebase un cierto valor, entonces, las respuestas de la máquina tenderán a ser constantes y únicas.

Así, pretendiendo que la máquina dé una respuesta única, si a  $L$  se le asocia el parámetro  $r$  de un mapa logístico,  $r$  no podrá tomar valores mayores que 3 pues solo así hay un atractor único.

$L$  implicará, por lo tanto, valores específicos para cada una de las variables de las que depende  $L$ . Así,  $L$  puede estar dado en función del valor mínimo ( $q_0$ ) del factor de seguridad.

Se puede proponer, inmersos en la especulación que, al modificar las condiciones de operación se modifica la energía (también  $r$ ) y ésta impulsa al sistema a dar respuestas oscilantes en la magnitud de la energía liberada, la cual está caracterizada por los valores de cada uno de los dos nuevos puntos atractores.

Para las condiciones de operación que generaron los datos que se han analizado, el continuar aumentando la energía puede significar un mayor número de iones en cada descarga y es de esperar que, como la energía liberada (que se puede representar como la amplitud de un pulso) no puede aumentar indefinidamente se puede provocar que, la respuesta del aparato sea incrementar la frecuencia de sus reacciones, lo que incrementa la turbulencia del sistema y que, dentro de esta turbulencia será posible encontrar condiciones estables, como se vio en las gráficas 3.1 y 3.2 y por lo mismo es posible controlar el tokamak en ciertas condiciones muy extremas.

Existen evidencias experimentales, como el modo de operación  $H$  (operación *self-*

*organization*), que prueban que hay posibilidades de realizar las suposiciones que se han hecho.

Toda esta especulación, después de superar un amplio periodo de discusión y crítica, podría materializar en cálculos y simulaciones para culminar, finalmente, con trabajo experimental en el laboratorio.

## 6.6.

La naturaleza permanece relativamente estable ante cambios que se produzcan dentro de ciertos límites, determinados estos, por la condición de que dichos cambios no violen las limitaciones que corresponden a cada rango del parámetro correspondiente.

Si esto no se cumple el comportamiento de la naturaleza también se lanza hacia conductas totalmente diferentes a las previsibles.

La naturaleza tiene métodos para cambiar continuamente las cosas y encontrar condiciones que resistan mejor los cambios.

Se adapta espontáneamente hacia las condiciones más estables, es decir, con menos puntos atractores.

Aparentemente el método predilecto consiste en dispersar el efecto perturbador entre los sistemas acoplados al sistema que recibe dicho efecto.

Cuando esto no es posible, el sistema afectado se vuelve turbulento, alcanza un punto crítico, se desquicia y se producen las bifurcaciones en sus tendencias lo cual se manifiesta como un cambio de conducta que lleva a diferentes atractores en cuanto a número y a cualidades.

La correlación entre los elementos de un sistema en evolución, permanece relativamente constante para una amplia gama de valores pero, en un cierto punto crítico, la correlación se divide y el comportamiento del sistema se lanza hacia nuevos puntos atractores.

Cuando esto acontece se dice que ha ocurrido una bifurcación. (Vea las notas al pie que corresponden al capítulo 3).

La bifurcación es importante porque las leyes que rigen la evolución de un fenómeno cambian o pierden su validez a partir del momento en que el parámetro de control cruza los valores críticos que, como ya se dijo, son específicos y constituyen constantes universales.

El parámetro de control se relaciona con la estructura espacial del fenómeno.

Con lo anterior se trata de decir que, aparentemente, el espacio que encierra al sistema considerado llega a un punto en que, éste no puede mantener sus cualidades y se colapsa y tal vez se fragmenta, sufriendo profundas alteraciones que lo fuerzan a reestructurarse cumpliendo así con la propiedad de la naturaleza consistente en poder dispersar y estabilizar las presiones externas.

El estudio de estos parámetros de control característico de cada sistema y de los parámetros propios de cada una de las variables involucradas puede conducir al conocimiento de las propiedades más íntimas del sistema.

Resumiendo:

- El parámetro de control tiene relación con el número de puntos atractores,
- Los puntos atractores guardan estrecha relación con las variables que condicionan el estado del sistema,
- Los parámetros propios de cada variable son indicadores del nivel de orden en el comportamiento de cada una de ellas y,
- Por lo mismo, condicionan el tipo de atractor.
- Estos parámetros propios pueden, a su vez, depender de otros y
- Finalmente, cabe señalar que la estabilidad del sistema también depende de la proporción que hay entre los parámetros propios.

Con fundamento en todo lo anterior, se justifica, una vez más, la necesidad de enfrentar el análisis de datos de una manera diferente a cómo tradicionalmente se viene haciendo y se justifica la propuesta de reconsiderar la manera como se aplica la metodología de trabajo que implica el reduccionismo en fenómenos iterativos.

Los datos que resultan al investigar en fenómenos iterativos difícilmente conducen a conclusiones inmediatas u obvias como ocurre en las investigaciones tradicionales y, por lo mismo, el reduccionismo no se puede aplicar sino hasta que se alcancen las conclusiones.

Para llegar a éstas se debe tener un considerable conocimiento de la manera como evoluciona el proceso y se propone a continuación una manera de lograr eso:

- Los fenómenos iterativos se conocen cuando se sabe hacia cuantos y a qué tipo de atractores evoluciona, en qué condiciones ocurren las bifurcaciones de su conducta y cuáles son los parámetros propios de sus variables.
- Es posible determinar las características anteriores mediante el análisis de los datos obtenidos durante la investigación correspondiente.

Se complementa lo anterior con las siguientes observaciones:

- El control que el hombre puede ejercer sobre el comportamiento de un cierto sistema depende de que tan ordenado sea éste.
- La investigación busca determinar cuales son las condiciones de máximo orden (mínimo número de atractores) y la manera de llegar a él.
- Lo ordenado del sistema se puede evaluar con base al número y tipo de atractores hacia los que el sistema evoluciona.
- El número de atractores está determinado por el valor del parámetro de control asociado al sistema.
- El valor del parámetro de control se determina con base en los puntos donde ocurre la bifurcación
- No es suficiente que el sistema tienda a un solo atractor para que éste sea ordenado ya que el tipo de atractor también influye.
- El atractor en sí debe ser estable.
- El tipo de atractor depende del número de variables que influyen en el sistema.
- La estabilidad del atractor depende de la estabilidad en el comportamiento de las variables.
- La estabilidad de las variables se puede determinar de acuerdo al valor que

- tengan sus parámetros propios y de la proporción que exista entre ellos.
- Los sistemas que tienen un alto nivel de caos son controlables si se manejan dentro de las zonas de intermitencia.

6.7.

Conviene puntualizar que las proposiciones que se hacen a continuación con relación a la posible estructura fractal y autosimilitud en el tokamak, tienen que ver con la postura epistemológica que se adopta al visualizar a este y no a la demostración rigurosa que implica el determinar la dimensión fractal que corresponde a una o algunas de las múltiples órbitas que pueden derivar del estudio de las variables involucradas en la conducta del aparato.

Es pertinente señalar que la auto similitud es una repetición de detalles al cambiar la escala, en forma ascendente o descendente.

Abundando con relación a lo señalado en estas últimas líneas se puede decir que, la dimensión fractal tiene que ver con el problema de medir. Tiene sentido hablar de ella, de la dimensión fractal, cuando:

- El resultado de la medición se altera como consecuencia de utilizar una unidad de referencia (o patrón) de menor tamaño.
- Después de realizar múltiples mediciones, cada una de ellas hecha contra un patrón de referencia que en cada caso es menor, se obtienen resultados diferentes.
- Es posible establecer una proporción de escalamiento constante en cada uno de los patrones de referencia utilizados.
- Es posible establecer una proporción de variación constante en el número de veces que se utilizó el patrón.
- En síntesis, se puede aplicar la ecuación de Hausdorff – Besicovitch.

$$D = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N)}{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \tag{6.2}$$

cumpliéndose que  $\epsilon \rightarrow 0$

Se reitera: son posturas epistemológicas las que se proponen y no demostraciones rigurosas. Tal es el caso de la estructura fractal y autosimilitud que a continuación se sugieren.

Se propone que el comportamiento del tokamak podría tener estructura fractal en condiciones de alta turbulencia con base en las siguientes razones:

- El comportamiento y evolución de cada ciclo está poderosamente influenciado por las condiciones iniciales en que se inicia la operación de éste.
- El conjunto de pulsos esta constituido por ciclos que a su vez están constituidos por otros ciclos que guardan auto similitud entre sí (tiene estructura fina) y así sucesivamente.
- La evolución determinista del sistema es no lineal.
- Su conducta es tan irregular que no se puede describir usando geometría tradicional

Aceptar la proposición de que el comportamiento del tokamak puede tener estructura fractal en condiciones de alta turbulencia implica que hay una posible dimensión fractal para esas condiciones en particular.

La dimensión fractal que se podría establecer en el presente caso tendría que considerar lo siguiente:

- La operación del tokamak generó un conjunto de datos.
- Estos datos describen la conducta del aparato.
- Según fueron las condiciones de operación, a los datos se les asociaron las ecuaciones (4.7) y (5.20).
- A su vez estas ecuaciones se hicieron corresponder con los mapas logístico y seno así: la (4.7) con la (4.26) y la (4.27).
- También la (5.20) con la (5.24) y la (5.25).
- Ambos mapas, el logístico y el seno, tienen una dimensión fractal propia que depende de los valores que corresponden a sus parámetros característicos.

- La dimensión fractal depende del atractor al que tienden las órbitas y de todo esto se puede concluir que:
- La dimensión fractal del tokamak es similar a la dimensión fractal que corresponde a los mapas logístico o seno, asociados a las circunstancias peculiares en que se maneja el aparato.
- Los valores de los parámetros de control guardan relación directa con cada una de las variables que intervinieron en las condiciones de operación analizadas.

## 6.8.

En los capítulos 4 y 5 se obtuvieron las ecuaciones (4.29), (5.19) y las equivalencias del tipo expresado en (4.30) o (5.27), todo a partir de los datos experimentales obtenidos del plasma producido en un tokamak. También, en los mismos capítulos 4 y 5, se demostró la correspondencia entre las ecuaciones para los datos experimentales y las ecuaciones de la Teoría del Caos.

Las ecuaciones experimentales (4.29) y (5.19) pueden ser solución para la ecuación de Mathieu y así, la conexión entre conceptos que se propuso en el capítulo 3 se puede lograr.

Finalmente lo anterior permite proponer algunas opciones para desarrollar trabajos teóricos que aborden aspectos de los campos antes señalados que pueden incluir alguna o algunas de las siguientes consideraciones:

- La ecuación de Van Der Pol puede servir para establecer las condiciones de existencia y estabilidad a través del ciclo límite.
- Se podría llegar a determinar condiciones estables en el manejo del plasma a través de las ecuaciones de Hill si se determina una función periódica del tiempo.
- La ecuación de Mathieu puede resolverse siguiendo los lineamientos de la teoría de Floquet de las ecuaciones lineales o bien a través del empleo de las funciones de Mathieu que constituyen un cierto tipo de funciones transcendentales.
- Entender el comportamiento de este sistema disipativo a través de conocer la

manera como se contrae el área en el espacio de fases  $(x, p)$  y la velocidad a la que esto ocurre.

Sea cual sea la opción de trabajo que se decida desarrollar siempre se requerirá de algún indicio que sirva de guía y para ello es necesario contar con herramientas más versátiles para el análisis de los datos experimentales que muchas veces sirven como punto de partida.

Tal herramienta es la que se ha desarrollado en los capítulos 4 y 5 las cuales, como se ha podido constatar, permiten obtener información que podría pasar desapercibida si no se realizan esfuerzos adicionales para extraer todo lo que contienen.

---

 REFERENCIAS

- <sup>49</sup> Carlson Shawn.  
Falling into Chaos  
Scientific American. Pág. 96-97.  
Noviembre 1999.

Se puede desarrollar este experimento en el laboratorio El desorden se hace evidente a medida que se prolonga el proceso.

- <sup>50</sup> Esto ha dado origen a uno de los temas fundamentales de la Teoría del Caos: el atractor extraño.

## Capítulo 7

### Consideraciones finales y conclusiones

#### 7.1.

##### CONSIDERACIONES FINALES.

Las hipótesis que fijaron los objetivos de la tesis son:

- **Es posible encontrar comportamiento periódico en condiciones muy específicas de operación del tokamak en alguna de las variables que influyen en el comportamiento de este y**
- **Dicho comportamiento evoluciona hacia uno o más atractores**

En los capítulos 4 y 5 se obtuvieron las ecuaciones (4.29), (5.19) y las equivalencias del tipo expresado en (4.30), todo a partir de los datos experimentales obtenidos del plasma producido en un tokamak. También, en los mismos capítulo 4 y 5, se demostró la correspondencia entre las ecuaciones para los datos experimentales y las ecuaciones de la Teoría del Caos.

Las ecuaciones experimentales (4.29) y (5.19) pueden ser solución para la ecuación de Mathieu y así, la conexión entre conceptos que se propuso en el capítulo 3 se puede lograr.

$$x_{n+1} = A + Be^{-wt} \cos(2\pi ft) \quad (4.29)$$

$$A + Be^{-wt} \cos(2\pi ft) \quad (4.30)$$

$$r x_n (1 - x_n) - q \operatorname{sen}(\pi x_n)$$

$$y = A + Be^{-wnx} [B_1 \cos(2\pi f_1 nx) + B_2 \operatorname{sen}(2\pi f_1 nx)] - C \operatorname{sen}(2\pi f_2 nx) \quad (5.19)$$

El método para analizar datos experimentales que se ha propuesto, permite incrementar la eficiencia que se puede obtener del trabajo realizado en el laboratorio.

Esta herramienta de trabajo es aplicable, únicamente, para el análisis de datos que implican series en el tiempo y que tienen su origen en procesos de comportamiento periódico.

La posibilidad de aplicación de este método a una determinada situación, se puede establecer desde la primera etapa del análisis.

En el momento de aplicar la TRF se observa la presencia o ausencia de picos. Si no existen, es inútil continuar.

No es confiable, como se mostró al analizar el primer lote de valores, aceptar o rechazar la periodicidad de un proceso basándose en criterios puramente estadísticos.

Es absolutamente indispensable aplicar la TRF a los datos.

No es razonable aplicar este procedimiento en el análisis de lotes pequeños (en número) de datos.

La realización de estos análisis requiere del empleo de computadoras rápidas y con buena capacidad de memoria, así como la disponibilidad de paquetería más o menos especializada.

#### 7.2.

##### CONCLUSIONES

Complementando y reiterando con respecto a los objetivos específicos de esta tesis se concluye que:

- En el tokamak hay conductas que evolucionan en forma periódica.
- Estas conductas evolucionan tendiendo a condiciones representadas por puntos atractores.
- La evolución que manifiestan los datos puede ser representada por mapas

- 
- Ha sido posible encontrar y establecer correspondencia entre mapas, que dependen del número de iteraciones, con ondas que dependen del tiempo.
  - Ha sido posible asignar un tiempo a cada paso de iteración.
  - Ha sido posible demostrar la relación que hay entre el valor del rango del parámetro de control del mapa con el número de ondas que se sobreponen.
  - Ha sido posible demostrar la relación que hay entre las amplitudes y las frecuencias de las ondas armónicas con el valor del parámetro de control.
  - Ha sido posible establecer la correspondencia que hay entre el número de iteraciones que se necesitan para llegar a una cierta vecindad del atractor con un factor exponencial que depende del tiempo.
  - Ha sido posible demostrar que el tokamak manifiesta conductas descritas por la Teoría del Caos como son la realimentación, la autosimilitud o la bifurcación.
  - Se han propuesto ecuaciones que podrían ajustarse y satisfacer los criterios de la ecuación de Mathieu.
-

## Bibliografía

*Apoyo bibliográfico para desarrollar la tesis, herramientas y bibliografía de complemento*

### BIBLIOGRAFÍA DE APOYO

- [1]  
Miyamoto Kenro.  
Plasma Physics for Nuclear Fusion.  
The MIT Press.  
Cambridge, England.1980.
- [2]  
Hagler M. O., Kristiansen M.  
An Introduction to Controlled  
Thermonuclear Fusion.  
Lexington Books.  
Toronto,Canada. 1985.
- [3]  
I.N.S.C  
A Vision for the Second Fifty Years of  
Nuclear Energy.  
American Nuclear Society, Inc. 1996.
- [4]  
Bergé P., Pomeau Y., Vidal Ch.  
Order Within Chaos.  
John Wiley & Sons. New York. 1984.
- [5]  
Briggs J., Peat F.D.  
Espejo y Reflejo.  
Conacyt. México. 1991.
- [6]  
Davis B.  
Exploring Chaos.  
Perseus Books.  
Reading, Massachusetts. 1999.
- [7]  
H:J. Korsch,H.J. Jodl.  
Chaos.  
Springer.  
New York. 1998.
- [8]  
R.W.Ramirez.  
The FFT,Fundamentals and Concepts.  
Prentice Hall,Inc.1985.
- [9]  
R. Abraham,L.Gardini,Ch.Mira.  
Chaos in Discrete Dynamical Systems.  
Springer. 1997
- [10]  
P. M. Iannaccone,M.Khokha.  
Fractal Geometry in Biological Systems.  
C R C.Press. 1996.
- [11]  
Symon, Keith R.  
Mecánica. 3ra edición. Lectura,  
Addison Wesley, 1971.
- [12]  
Weiner, Philip.  
Dictionary of the History of Ideas.  
Scribner's Sons,1973.
- [13]  
Nakamura S.  
Análisis Numérico y Visualización Gráfica.  
Simon & Schuster Company.  
Prentice Hall. 1996.
- [14]  
Delores M. E.  
Solución de Problemas de Ingeniería con  
Matlab.  
Simon & Schuster Company.  
Prentice Hall. 1997.
- P.C.**
- Acer. 54e
  - 56 MB de RAM
  - Pentium II, Intel MMX(TM)

Sistema:

Microsoft Windows 98. 4.10.1998

### PAQUETERÍA

Chaos for Java.  
Davis Brian.  
Universidad Nacional Australiana.

Java 2.  
Standard Edition Runtime Environment.  
Sun Microsyst.

Matlab.  
The Math Works, Inc.  
Versión 5.1.0.421

Math Type.  
Design Science, Inc.  
Version 4.0b.

Maple V  
Waterloo Maple, Inc.

Cabri / Géometre II.  
Texas Instruments.

Glenn Elert.  
Hypertextbook del Caos.  
2000

### BIBLIOGRAFÍA COMPLEMENTARIA

Barnsley, Michael.  
Fractales por todas partes.  
Academice Press, San Diego Ca. 1988.

Davaney R.  
Descripción de la dinámica del caos y fractales.  
American Mathematics Society.1988.

Gleick, J.  
Caos: Fabricación de una nueva ciencia.  
Viking, New York.1987.

Hocking, J.  
Topología.  
Dover, New York 1961.

Hurewicz, W., Henrio W.  
Teoría De la Dimensión.  
Princeton University Press, Princeton NJ.  
1941.

Hubbard, J.  
Sistemas de Mandelbrot y sistemas de Julia  
Videocinta. Ithaca, NY. 1990.

Morris, K.  
El pensamiento matemático desde la  
antigüedad a las épocas modernas.  
Oxford University Press, New York 1972.

Lauwerier, H  
Fractales: Figuras geométricas repetidas sin  
fin.  
Princeton University Press. Princeton. 1991.

Mandelbrot, B.  
La geometría fractal de la naturaleza.  
W. H. Freeman & Company.  
New York.1977.

Penrose, R.  
La Nueva Mente Del Emperador.  
Oxford University Press. New York.1989.

Pickover, C.  
Caos en el país de las maravillas: Aventuras  
visuales en un mundo de Fractales.  
St Martin. New York. 1995.

ESTA TESIS NO SALE  
DE LA BIBLIOTECA

## Apéndice

*Contiene algunos de los valores experimentales que se analizaron*

TABLA 1 (Lecturas de la 0 a la 2,996)

( Los valores de las diferentes tablas de este apéndice están graficados en los capítulos 4 y 5)

[152.3376]	152.3360	152.3342	152.3322	152.3300	152.3275	152.3248	152.3219	152.3188
152.3154	152.3118	152.3080	152.3039	152.2997	152.2952	152.2905	152.2855	152.2804
152.2750	152.2694	152.2635	152.2575	152.2512	152.2447	152.2380	152.2310	152.2238
152.2165	152.2088	152.2010	152.1930	152.1847	152.1762	152.1675	152.1585	152.1494
152.1400	152.1304	152.1206	152.1105	152.1003	152.0898	152.0791	152.0682	152.0571
152.0457	152.0341	152.0224	152.0104	151.9981	151.9857	151.9731	151.9602	151.9471
151.9338	151.9203	151.9066	151.8926	151.8785	151.8641	151.8495	151.8347	151.8197
151.8045	151.7891	151.7735	151.7576	151.7415	151.7253	151.7088	151.6921	151.6752
151.6581	151.6408	151.6232	151.6055	151.5876	151.5694	151.5510	151.5325	151.5137
151.4947	151.4756	151.4562	151.4366	151.4168	151.3968	151.3766	151.3562	151.3356
151.3148	151.2938	151.2726	151.2512	151.2296	151.2078	151.1858	151.1636	151.1412
151.1186	151.0958	151.0728	151.0496	151.0262	151.0027	150.9789	150.9549	150.9308
150.9064	150.8819	150.8572	150.8322	150.8071	150.7818	150.7563	150.7307	150.7048
150.6787	150.6525	150.6260	150.5994	150.5726	150.5456	150.5185	150.4911	150.4636
150.4358	150.4079	150.3798	150.3516	150.3231	150.2945	150.2657	150.2367	150.2075
150.1782	150.1487	150.1190	150.0891	150.0590	150.0288	149.9984	149.9679	149.9371
149.9062	149.8751	149.8439	149.8124	149.7809	149.7491	149.7172	149.6851	149.6528
149.6204	149.5878	149.5550	149.5221	149.4890	149.4558	149.4223	149.3888	149.3550
149.3211	149.2871	149.2529	149.2185	149.1840	149.1493	149.1145	149.0795	149.0443
149.0090	148.9736	148.9380	148.9022	148.8663	148.8302	148.7940	148.7577	148.7212
148.6845	148.6477	148.6108	148.5737	148.5365	148.4991	148.4616	148.4239	148.3862
148.3482	148.3101	148.2719	148.2336	148.1951	148.1565	148.1177	148.0788	148.0398
148.0006	147.9613	147.9219	147.8823	147.8427	147.8028	147.7629	147.7228	147.6826
147.6423	147.6019	147.5613	147.5206	147.4798	147.4388	147.3978	147.3566	147.3153
147.2739	147.2323	147.1907	147.1489	147.1070	147.0650	147.0229	146.9807	146.9383
146.8959	146.8533	146.8107	146.7679	146.7250	146.6820	146.6389	146.5957	146.5524
146.5090	146.4655	146.4219	146.3782	146.3344	146.2905	146.2464	146.2023	146.1581
146.1138	146.0694	146.0250	145.9804	145.9357	145.8910	145.8461	145.8012	145.7561
145.7110	145.6658	145.6205	145.5752	145.5297	145.4842	145.4385	145.3928	145.3471
145.3012	145.2553	145.2092	145.1631	145.1170	145.0707	145.0244	144.9780	144.9316
144.8850	144.8384	144.7918	144.7450	144.6982	144.6513	144.6044	144.5574	144.5103
144.4632	144.4160	144.3687	144.3214	144.2741	144.2266	144.1791	144.1316	144.0840
144.0363	143.9886	143.9409	143.8931	143.8452	143.7973	143.7493	143.7013	143.6533
143.6052	143.5570	143.5088	143.4606	143.4123	143.3640	143.3156	143.2672	143.2188
143.1703	143.1218	143.0733	143.0247	142.9761	142.9275	142.8788	142.8301	142.7813
142.7326	142.6838	142.6350	142.5861	142.5372	142.4884	142.4394	142.3905	142.3415
142.2925	142.2435	142.1945	142.1455	142.0964	142.0474	141.9983	141.9492	141.9001
141.8510	141.8018	141.7527	141.7035	141.6544	141.6052	141.5560	141.5069	141.4577

141.4085 141.3593 141.3101 141.2609 141.2117 141.1626 141.1134 141.0642 141.0150  
 140.9659 140.9167 140.8675 140.8184 140.7693 140.7201 140.6710 140.6219 140.5728  
 140.5237 140.4747 140.4256 140.3766 140.3276 140.2786 140.2296 140.1807 140.1317  
 140.0828 140.0340 139.9851 139.9363 139.8874 139.8387 139.7899 139.7412 139.6925  
 139.6438 139.5952 139.5466 139.4980 139.4495 139.4010 139.3525 139.3041 139.2557  
 139.2074 139.1591 139.1108 139.0626 139.0144 138.9663 138.9182 138.8702 138.8222  
 138.7742 138.7263 138.6785 138.6307 138.5829 138.5352 138.4876 138.4400 138.3925  
 138.3450 138.2976 138.2502 138.2029 138.1557 138.1085 138.0613 138.0143 137.9673  
 137.9203 137.8735 137.8267 137.7799 137.7333 137.6867 137.6401 137.5937 137.5473  
 137.5010 137.4547 137.4085 137.3624 137.3164 137.2705 137.2246 137.1788 137.1331  
 137.0874 137.0419 136.9964 136.9510 136.9057 136.8605 136.8154 136.7703 136.7254  
 136.6805 136.6357 136.5910 136.5464 136.5019 136.4574 136.4131 136.3689 136.3247  
 136.2806 136.2367 136.1928 136.1491 136.1054 136.0618 136.0184 135.9750 135.9317  
 135.8886 135.8455 135.8026 135.7597 135.7170 135.6743 135.6318 135.5894 135.5471  
 135.5049 135.4628 135.4208 135.3789 135.3372 135.2955 135.2540 135.2126 135.1713  
 135.1301 135.0891 135.0481 135.0073 134.9666 134.9260 134.8855 134.8452 134.8050  
 134.7649 134.7249 134.6850 134.6453 134.6057 134.5662 134.5269 134.4877 134.4486  
 134.4097 134.3708 134.3321 134.2936 134.2552 134.2169 134.1787 134.1407 134.1028  
 134.0650 134.0274 133.9900 133.9526 133.9154 133.8784 133.8414 133.8047 133.7680  
 133.7315 133.6952 133.6590 133.6229 133.5870 133.5512 133.5156 133.4801 133.4448  
 133.4096 133.3746 133.3397 133.3050 133.2704 133.2360 133.2017 133.1676 133.1336  
 133.0998 133.0662 133.0327 132.9993 132.9661 132.9331 132.9002 132.8675 132.8349  
 132.8026 132.7703 132.7382 132.7063 132.6746 132.6430 132.6116 132.5803 132.5492  
 132.5183 132.4875 132.4569 132.4264 132.3962 132.3661 132.3361 132.3064 132.2768  
 132.2474 132.2181 132.1890 132.1601 132.1314 132.1028 132.0744 132.0462 132.0181  
 131.9902 131.9625 131.9350 131.9077 131.8805 131.8535 131.8267 131.8000 131.7736  
 131.7473 131.7212 131.6953 131.6695 131.6439 131.6186 131.5934 131.5683 131.5435  
 131.5188 131.4944 131.4701 131.4460 131.4221 131.3983 131.3748 131.3514 131.3282  
 131.3052 131.2824 131.2598 131.2374 131.2151 131.1931 131.1712 131.1496 131.1281  
 131.1068 131.0857 131.0647 131.0440 131.0235 131.0032 130.9830 130.9630 130.9433  
 130.9237 130.9043 130.8852 130.8662 130.8474 130.8288 130.8104 130.7922 130.7741  
 130.7563 130.7387 130.7213 130.7040 130.6870 130.6702 130.6535 130.6371 130.6209  
 130.6048 130.5890 130.5733 130.5579 130.5426 130.5276 130.5127 130.4981 130.4837  
 130.4694 130.4554 130.4415 130.4279 130.4144 130.4012 130.3882 130.3753 130.3627  
 130.3503 130.3381 130.3260 130.3142 130.3026 130.2912 130.2800 130.2690 130.2582  
 130.2476 130.2372 130.2270 130.2170 130.2072 130.1976 130.1883 130.1791 130.1701  
 130.1614 130.1528 130.1445 130.1364 130.1284 130.1207 130.1132 130.1059 130.0988  
 130.0919 130.0852 130.0787 130.0724 130.0663 130.0605 130.0548 130.0493 130.0441  
 130.0390 130.0342 130.0296 130.0252 130.0209 130.0169 130.0131 130.0096 130.0062  
 130.0030 130.0000 129.9973 129.9947 129.9923 129.9902 129.9883 129.9865 129.9850  
 129.9837 129.9826 129.9817 129.9810 129.9805 129.9802 [129.9802] 129.9803 129.9807  
 129.9812 129.9820 129.9829 129.9841 129.9855 129.9870 129.9888 129.9908 129.9930  
 129.9954 129.9980 130.0009 130.0039 130.0071 130.0105 130.0142 130.0180 130.0221  
 130.0263 130.0308 130.0355 130.0403 130.0454 130.0507 130.0562 130.0619 130.0677  
 130.0738 130.0801 130.0866 130.0933 130.1002 130.1074 130.1147 130.1222 130.1299  
 130.1378 130.1459 130.1543 130.1628 130.1715 130.1804 130.1896 130.1989 130.2084  
 130.2181 130.2281 130.2382 130.2485 130.2590 130.2698 130.2807 130.2918 130.3031  
 130.3146 130.3263 130.3383 130.3504 130.3627 130.3752 130.3879 130.4008 130.4138  
 130.4271 130.4406 130.4543 130.4681 130.4822 130.4965 130.5109 130.5255 130.5404  
 130.5554 130.5706 130.5860 130.6016 130.6174 130.6334 130.6496 130.6659 130.6825  
 130.6992 130.7161 130.7333 130.7506 130.7681 130.7857 130.8036 130.8217 130.8399  
 130.8583 130.8769 130.8957 130.9147 130.9339 130.9532 130.9727 130.9925 131.0123  
 131.0324 131.0527 131.0731 131.0937 131.1145 131.1355 131.1567 131.1780 131.1995

131.2212 131.2431 131.2651 131.2874 131.3098 131.3323 131.3551 131.3780 131.4011  
131.4244 131.4478 131.4715 131.4952 131.5192 131.5433 131.5676 131.5921 131.6168  
131.6416 131.6666 131.6917 131.7170 131.7425 131.7682 131.7940 131.8199 131.8461  
131.8724 131.8989 131.9255 131.9523 131.9793 132.0064 132.0337 132.0611 132.0887  
132.1165 132.1444 132.1725 132.2007 132.2291 132.2577 132.2864 132.3152 132.3442  
132.3734 132.4027 132.4322 132.4618 132.4916 132.5215 132.5516 132.5818 132.6122  
132.6427 132.6734 132.7042 132.7352 132.7663 132.7975 132.8289 132.8605 132.8922  
132.9240 132.9560 132.9881 133.0204 133.0527 133.0853 133.1179 133.1508 133.1837  
133.2168 133.2500 133.2834 133.3169 133.3505 133.3842 133.4181 133.4521 133.4863  
133.5206 133.5550 133.5895 133.6242 133.6590 133.6939 133.7290 133.7641 133.7994  
133.8349 133.8704 133.9061 133.9419 133.9778 134.0138 134.0500 134.0863 134.1226  
134.1592 134.1958 134.2325 134.2694 134.3064 134.3434 134.3806 134.4179 134.4554  
134.4929 134.5305 134.5683 134.6062 134.6441 134.6822 134.7204 134.7587 134.7971  
134.8356 134.8742 134.9129 134.9517 134.9906 135.0296 135.0687 135.1079 135.1472  
135.1866 135.2261 135.2657 135.3054 135.3451 135.3850 135.4250 135.4650 135.5052  
135.5454 135.5857 135.6262 135.6667 135.7072 135.7479 135.7887 135.8295 135.8704  
135.9114 135.9525 135.9937 136.0350 136.0763 136.1177 136.1592 136.2007 136.2424  
136.2841 136.3259 136.3678 136.4097 136.4517 136.4938 136.5359 136.5781 136.6204  
136.6628 136.7052 136.7477 136.7902 136.8329 136.8755 136.9183 136.9611 137.0039  
137.0469 137.0899 137.1329 137.1760 137.2192 137.2624 137.3056 137.3490 137.3923  
137.4358 137.4793 137.5228 137.5664 137.6100 137.6537 137.6974 137.7412 137.7850  
137.8289 137.8728 137.9167 137.9607 138.0048 138.0488 138.0929 138.1371 138.1813  
138.2255 138.2698 138.3141 138.3584 138.4028 138.4472 138.4916 138.5361 138.5806  
138.6251 138.6696 138.7142 138.7588 138.8035 138.8481 138.8928 138.9375 138.9822  
139.0270 139.0717 139.1165 139.1613 139.2061 139.2510 139.2958 139.3407 139.3856  
139.4305 139.4754 139.5203 139.5653 139.6102 139.6552 139.7001 139.7451 139.7901  
139.8351 139.8801 139.9250 139.9700 140.0150 140.0600 140.1050 140.1500 140.1950  
140.2400 140.2850 140.3300 140.3750 140.4200 140.4649 140.5099 140.5549 140.5998  
140.6447 140.6897 140.7346 140.7795 140.8244 140.8692 140.9141 140.9589 141.0038  
141.0486 141.0934 141.1381 141.1829 141.2276 141.2723 141.3170 141.3617 141.4063  
141.4509 141.4955 141.5401 141.5846 141.6291 141.6736 141.7180 141.7624 141.8068  
141.8511 141.8954 141.9397 141.9839 142.0281 142.0723 142.1164 142.1605 142.2046  
142.2486 142.2925 142.3364 142.3803 142.4242 142.4679 142.5117 142.5554 142.5990  
142.6426 142.6862 142.7297 142.7731 142.8165 142.8599 142.9032 142.9464 142.9896  
143.0327 143.0758 143.1188 143.1618 143.2047 143.2475 143.2903 143.3330 143.3756  
143.4182 143.4607 143.5032 143.5456 143.5879 143.6302 143.6724 143.7145 143.7566  
143.7985 143.8405 143.8823 143.9241 143.9658 144.0074 144.0489 144.0904 144.1318  
144.1731 144.2144 144.2555 144.2966 144.3376 144.3785 144.4193 144.4601 144.5008  
144.5413 144.5818 144.6223 144.6626 144.7028 144.7430 144.7830 144.8230 144.8629  
144.9027 144.9424 144.9820 145.0215 145.0609 145.1002 145.1395 145.1786 145.2176  
145.2566 145.2954 145.3341 145.3728 145.4113 145.4497 145.4881 145.5263 145.5644  
145.6025 145.6404 145.6782 145.7159 145.7535 145.7910 145.8284 145.8656 145.9028  
145.9399 145.9768 146.0136 146.0503 146.0869 146.1234 146.1598 146.1961 146.2322  
146.2682 146.3041 146.3399 146.3756 146.4111 146.4466 146.4819 146.5171 146.5521  
146.5871 146.6219 146.6566 146.6912 146.7256 146.7599 146.7941 146.8282 146.8621  
146.8960 146.9296 146.9632 146.9966 147.0299 147.0631 147.0961 147.1290 147.1617  
147.1944 147.2269 147.2592 147.2914 147.3235 147.3555 147.3873 147.4190 147.4505  
147.4819 147.5131 147.5443 147.5752 147.6061 147.6368 147.6673 147.6977 147.7280  
147.7581 147.7881 147.8179 147.8476 147.8771 147.9065 147.9357 147.9648 147.9938  
148.0225 148.0512 148.0797 148.1080 148.1362 148.1643 148.1921 148.2199 148.2475  
148.2749 148.3022 148.3293 148.3563 148.3831 148.4097 148.4362 148.4626 148.4887  
148.5148 148.5406 148.5663 148.5919 148.6173 148.6425 148.6676 148.6925 148.7172  
148.7418 148.7662 148.7905 148.8146 148.8385 148.8623 148.8859 148.9093 148.9326  
148.9557 148.9786 149.0014 149.0240 149.0464 149.0687 149.0908 149.1127 149.1345

149.1561 149.1775 149.1987 149.2198 149.2407 149.2615 149.2820 149.3024 149.3227  
 149.3427 149.3626 149.3823 149.4018 149.4212 149.4404 149.4594 149.4782 149.4969  
 149.5154 149.5337 149.5518 149.5698 149.5875 149.6051 149.6226 149.6398 149.6569  
 149.6738 149.6905 149.7070 149.7234 149.7395 149.7555 149.7713 149.7870 149.8024  
 149.8177 149.8328 149.8477 149.8624 149.8770 149.8913 149.9055 149.9195 149.9333  
 149.9470 149.9604 149.9737 149.9868 149.9997 150.0124 150.0249 150.0373 150.0494  
 150.0614 150.0732 150.0848 150.0962 150.1075 150.1185 150.1294 150.1401 150.1506  
 150.1609 150.1710 150.1809 150.1907 150.2002 150.2096 150.2188 150.2278 150.2366  
 150.2452 150.2537 150.2619 150.2700 150.2779 150.2856 150.2931 150.3004 150.3075  
 150.3144 150.3212 150.3277 150.3341 150.3403 150.3463 150.3521 150.3577 150.3631  
 150.3683 150.3734 150.3782 150.3829 150.3874 150.3917 150.3958 150.3997 150.4034  
 150.4069 150.4103 150.4134 150.4164 150.4191 150.4217 150.4241 150.4263 150.4283  
 150.4302 150.4318 150.4332 150.4345 150.4356 150.4364 150.4371 150.4376 150.4379  
 [150.4381] 150.4380 150.4377 150.4373 150.4366 150.4358 150.4348 150.4336 150.4322  
 150.4306 150.4288 150.4269 150.4247 150.4224 150.4199 150.4172 150.4143 150.4112  
 150.4079 150.4044 150.4008 150.3970 150.3929 150.3887 150.3843 150.3797 150.3749  
 150.3700 150.3648 150.3595 150.3540 150.3483 150.3424 150.3363 150.3300 150.3236  
 150.3169 150.3101 150.3031 150.2959 150.2885 150.2810 150.2732 150.2653 150.2572  
 150.2489 150.2404 150.2318 150.2229 150.2139 150.2047 150.1953 150.1857 150.1759  
 150.1660 150.1559 150.1456 150.1351 150.1244 150.1136 150.1026 150.0914 150.0800  
 150.0684 150.0567 150.0448 150.0326 150.0204 150.0079 149.9953 149.9825 149.9695  
 149.9563 149.9430 149.9294 149.9158 149.9019 149.8878 149.8736 149.8592 149.8446  
 149.8299 149.8150 149.7999 149.7846 149.7692 149.7536 149.7378 149.7218 149.7057  
 149.6894 149.6730 149.6563 149.6395 149.6225 149.6054 149.5881 149.5706 149.5529  
 149.5351 149.5171 149.4990 149.4807 149.4622 149.4435 149.4247 149.4057 149.3866  
 149.3673 149.3478 149.3282 149.3084 149.2884 149.2683 149.2480 149.2275 149.2069  
 149.1862 149.1652 149.1442 149.1229 149.1015 149.0799 149.0582 149.0364 149.0143  
 148.9921 148.9698 148.9473 148.9246 148.9018 148.8789 148.8557 148.8325 148.8090  
 148.7855 148.7618 148.7379 148.7138 148.6897 148.6653 148.6409 148.6163 148.5915  
 148.5666 148.5415 148.5163 148.4909 148.4654 148.4398 148.4140 148.3881 148.3620  
 148.3358 148.3094 148.2829 148.2563 148.2295 148.2026 148.1755 148.1483 148.1209  
 148.0935 148.0659 148.0381 148.0102 147.9822 147.9540 147.9258 147.8973 147.8688  
 147.8401 147.8113 147.7823 147.7532 147.7240 147.6947 147.6652 147.6356 147.6059  
 147.5760 147.5460 147.5159 147.4857 147.4554 147.4249 147.3943 147.3635 147.3327  
 147.3017 147.2706 147.2394 147.2081 147.1767 147.1451 147.1134 147.0816 147.0497  
 147.0177 146.9855 146.9532 146.9209 146.8884 146.8558 146.8231 146.7902 146.7573  
 146.7243 146.6911 146.6578 146.6245 146.5910 146.5574 146.5237 146.4899 146.4560  
 146.4220 146.3879 146.3537 146.3194 146.2850 146.2505 146.2159 146.1812 146.1464  
 146.1115 146.0765 146.0414 146.0062 145.9709 145.9355 145.9000 145.8645 145.8288  
 145.7931 145.7572 145.7213 145.6853 145.6492 145.6130 145.5767 145.5403 145.5039  
 145.4674 145.4307 145.3940 145.3572 145.3204 145.2834 145.2464 145.2093 145.1721  
 145.1348 145.0975 145.0601 145.0226 144.9850 144.9474 144.9096 144.8719 144.8340  
 144.7961 144.7581 144.7200 144.6818 144.6436 144.6054 144.5670 144.5286 144.4901  
 144.4516 144.4130 144.3743 144.3356 144.2968 144.2579 144.2190 144.1801 144.1410  
 144.1019 144.0628 144.0236 143.9843 143.9450 143.9057 143.8662 143.8268 143.7873  
 143.7477 143.7081 143.6684 143.6287 143.5889 143.5491 143.5092 143.4693 143.4294  
 143.3894 143.3494 143.3093 143.2692 143.2290 143.1888 143.1486 143.1083 143.0680  
 143.0277 142.9873 142.9469 142.9064 142.8659 142.8254 142.7849 142.7443 142.7037  
 142.6630 142.6223 142.5817 142.5409 142.5002 142.4594 142.4186 142.3778 142.3369  
 142.2961 142.2552 142.2143 142.1733 142.1324 142.0914 142.0504 142.0094 141.9684  
 141.9274 141.8863 141.8453 141.8042 141.7631 141.7220 141.6809 141.6398 141.5987  
 141.5575 141.5164 141.4753 141.4341 141.3929 141.3518 141.3106 141.2695 141.2283  
 141.1871 141.1460 141.1048 141.0636 141.0225 140.9813 140.9402 140.8990 140.8579  
 140.8167 140.7756 140.7345 140.6934 140.6523 140.6112 140.5701 140.5290 140.4880

140.4469 140.4059 140.3649 140.3239 140.2829 140.2419 140.2010 140.1601 140.1192  
140.0783 140.0374 139.9966 139.9558 139.9150 139.8742 139.8334 139.7927 139.7520  
139.7114 139.6707 139.6301 139.5896 139.5490 139.5085 139.4680 139.4276 139.3872  
139.3468 139.3064 139.2661 139.2259 139.1856 139.1455 139.1053 139.0652 139.0251  
138.9851 138.9451 138.9052 138.8653 138.8254 138.7856 138.7458 138.7061 138.6664  
138.6268 138.5872 138.5477 138.5083 138.4688 138.4295 138.3902 138.3509 138.3117  
138.2725 138.2335 138.1944 138.1554 138.1165 138.0777 138.0389 138.0001 137.9614  
137.9228 137.8843 137.8458 137.8073 137.7690 137.7307 137.6924 137.6543 137.6162  
137.5782 137.5402 137.5023 137.4645 137.4267 137.3891 137.3515 137.3139 137.2765  
137.2391 137.2018 137.1646 137.1274 137.0904 137.0534 137.0164 136.9796 136.9429  
136.9062 136.8696 136.8331 136.7967 136.7603 136.7241 136.6879 136.6518 136.6158  
136.5799 136.5441 136.5083 136.4727 136.4371 136.4017 136.3663 136.3310 136.2958  
136.2607 136.2257 136.1908 136.1560 136.1213 136.0867 136.0521 136.0177 135.9834  
135.9492 135.9150 135.8810 135.8471 135.8133 135.7795 135.7459 135.7124 135.6790  
135.6457 135.6125 135.5794 135.5464 135.5135 135.4808 135.4481 135.4155 135.3831  
135.3508 135.3185 135.2864 135.2544 135.2225 135.1908 135.1591 135.1275 135.0961  
135.0648 135.0336 135.0025 134.9716 134.9407 134.9100 134.8794 134.8489 134.8185  
134.7883 134.7581 134.7281 134.6982 134.6685 134.6388 134.6093 134.5799 134.5507  
134.5215 134.4925 134.4636 134.4349 134.4063 134.3778 134.3494 134.3211 134.2930  
134.2650 134.2372 134.2095 134.1819 134.1544 134.1271 134.0999 134.0728 134.0459  
134.0191 133.9925 133.9660 133.9396 133.9133 133.8872 133.8613 133.8354 133.8097  
133.7842 133.7588 133.7335 133.7084 133.6834 133.6585 133.6338 133.6092 133.5848  
133.5605 133.5364 133.5124 133.4886 133.4648 133.4413 133.4179 133.3946 133.3715  
133.3485 133.3257 133.3030 133.2805 133.2581 133.2359 133.2138 133.1918 133.1701  
133.1484 133.1269 133.1056 133.0844 133.0634 133.0425 133.0218 133.0012 132.9808  
132.9606 132.9405 132.9205 132.9007 132.8811 132.8616 132.8422 132.8231 132.8040  
132.7852 132.7665 132.7479 132.7295 132.7113 132.6932 132.6753 132.6576 132.6400  
132.6225 132.6053 132.5881 132.5712 132.5544 132.5378 132.5213 132.5050 132.4888  
132.4728 132.4570 132.4414 132.4259 132.4105 132.3954 132.3803 132.3655 132.3508  
132.3363 132.3220 132.3078 132.2938 132.2799 132.2662 132.2527 132.2393 132.2262  
132.2131 132.2003 132.1876 132.1751 132.1627 132.1505 132.1385 132.1267 132.1150  
132.1035 132.0921 132.0809 132.0699 132.0591 132.0484 132.0379 132.0276 132.0174  
132.0075 131.9976 131.9880 131.9785 131.9692 131.9601 131.9511 131.9423 131.9337  
131.9252 131.9169 131.9088 131.9009 131.8931 131.8855 131.8781 131.8708 131.8638  
131.8568 131.8501 131.8435 131.8371 131.8309 131.8249 131.8190 131.8133 131.8078  
131.8024 131.7972 131.7922 131.7874 131.7827 131.7782 131.7739 131.7698 131.7658  
131.7620 131.7584 131.7549 131.7516 131.7485 131.7456 131.7428 131.7403 131.7378  
131.7356 131.7335 131.7317 131.7299 131.7284 131.7270 131.7258 131.7248 131.7239  
131.7233 131.7228 131.7224 131.7223 [131.7223] 131.7225 131.7228 131.7234 131.7241  
131.7249 131.7260 131.7272 131.7286 131.7302 131.7319 131.7338 131.7359 131.7382  
131.7406 131.7432 131.7460 131.7490 131.7521 131.7554 131.7588 131.7625 131.7663  
131.7703 131.7744 131.7787 131.7832 131.7879 131.7927 131.7977 131.8029 131.8082  
131.8137 131.8194 131.8253 131.8313 131.8375 131.8438 131.8504 131.8571 131.8639  
131.8710 131.8782 131.8856 131.8931 131.9008 131.9087 131.9167 131.9249 131.9333  
131.9419 131.9506 131.9595 131.9685 131.9777 131.9871 131.9966 132.0064 132.0162  
132.0263 132.0365 132.0468 132.0574 132.0681 132.0789 132.0900 132.1011 132.1125  
132.1240 132.1357 132.1475 132.1595 132.1717 132.1840 132.1965 132.2091 132.2219  
132.2349 132.2480 132.2613 132.2747 132.2883 132.3021 132.3160 132.3301 132.3443  
132.3587 132.3733 132.3880 132.4029 132.4179 132.4330 132.4484 132.4639 132.4795  
132.4953 132.5113 132.5274 132.5436 132.5600 132.5766 132.5933 132.6102 132.6272  
132.6444 132.6617 132.6792 132.6968 132.7146 132.7325 132.7505 132.7688 132.7871  
132.8057 132.8243 132.8431 132.8621 132.8812 132.9004 132.9198 132.9394 132.9591  
132.9789 132.9989 133.0190 133.0392 133.0596 133.0802 133.1009 133.1217 133.1427  
133.1638 133.1850 133.2064 133.2279 133.2496 133.2714 133.2933 133.3154 133.3376

133.3600 133.3825 133.4051 133.4278 133.4507 133.4738 133.4969 133.5202 133.5436  
133.5672 133.5909 133.6147 133.6387 133.6627 133.6869 133.7113 133.7357 133.7603  
133.7851 133.8099 133.8349 133.8600 133.8852 133.9106 133.9360 133.9616 133.9874  
134.0132 134.0392 134.0653 134.0915 134.1178 134.1443 134.1708 134.1975 134.2243  
134.2513 134.2783 134.3055 134.3328 134.3601 134.3877 134.4153 134.4430 134.4709  
134.4988 134.5269 134.5551 134.5834 134.6118 134.6403 134.6690 134.6977 134.7265  
134.7555 134.7846 134.8137 134.8430 134.8724 134.9019 134.9315 134.9612 134.9909  
135.0208 135.0508 135.0809 135.1111 135.1414 135.1718 135.2023 135.2329 135.2636  
135.2944 135.3253 135.3563 135.3874 135.4186 135.4498 135.4812 135.5126 135.5442  
135.5758 135.6075 135.6394 135.6713 135.7033 135.7353 135.7675 135.7998 135.8321  
135.8645 135.8971 135.9297 135.9623 135.9951 136.0279 136.0609 136.0939 136.1270  
136.1601 136.1934 136.2267 136.2601 136.2936 136.3272 136.3608 136.3945 136.4283  
136.4621 136.4961 136.5301 136.5641 136.5983 136.6325 136.6668 136.7011 136.7355  
136.7700 136.8046 136.8392 136.8739 136.9086 136.9434 136.9783 137.0133 137.0483  
137.0833 137.1184 137.1536 137.1889 137.2242 137.2595 137.2949 137.3304 137.3659  
137.4015 137.4372 137.4729 137.5086 137.5444 137.5802 137.6161 137.6521 137.6881  
137.7241 137.7602 137.7964 137.8326 137.8688 137.9051 137.9414 137.9778 138.0142  
138.0506 138.0871 138.1236 138.1602 138.1968 138.2335 138.2702 138.3069 138.3437  
138.3805 138.4173 138.4542 138.4911 138.5280 138.5650 138.6020 138.6390 138.6761  
138.7131 138.7503 138.7874 138.8246 138.8618 138.8990 138.9363 138.9735 139.0108  
139.0481 139.0855 139.1228 139.1602 139.1976 139.2351 139.2725 139.3100 139.3474  
139.3849 139.4224 139.4599 139.4975 139.5350 139.5726 139.6102 139.6477 139.6853  
139.7229 139.7606 139.7982 139.8358 139.8734 139.9111 139.9487 139.9864 140.0240  
140.0617 140.0993 140.1370 140.1747 140.2123 140.2500 140.2876 140.3253 140.3630  
140.4006 140.4383 140.4759 140.5135 140.5512 140.5888 140.6264 140.6640 140.7016  
140.7392 140.7768 140.8143 140.8519 140.8894 140.9269 140.9644 141.0019 141.0394  
141.0769 141.1143 141.1518 141.1892 141.2266 141.2639 141.3013 141.3386 141.3759  
141.4132 141.4504 141.4877 141.5249 141.5621 141.5992 141.6363 141.6734 141.7105  
141.7476 141.7846 141.8215 141.8585 141.8954 141.9323 141.9691 142.0060 142.0427  
142.0795 142.1162 142.1529 142.1895 142.2261 142.2626 142.2991 142.3356 142.3721  
142.4084 142.4448 142.4811 142.5174 142.5536 142.5897 142.6259 142.6619 142.6980  
142.7339 142.7699 142.8058 142.8416 142.8774 142.9131 142.9488 142.9844 143.0200  
143.0555 143.0909 143.1263 143.1617 143.1970 143.2322 143.2674 143.3025 143.3375  
143.3725 143.4075 143.4423 143.4771 143.5119 143.5466 143.5812 143.6157 143.6502  
143.6846 143.7190 143.7533 143.7875 143.8216 143.8557 143.8897 143.9236 143.9575  
143.9913 144.0250 144.0587 144.0922 144.1257 144.1592 144.1925 144.2258 144.2590  
144.2921 144.3251 144.3581 144.3910 144.4238 144.4565 144.4891 144.5217 144.5541  
144.5865 144.6188 144.6510 144.6832 144.7152 144.7472 144.7790 144.8108 144.8425  
144.8741 144.9056 144.9371 144.9684 144.9997 145.0308 145.0619 145.0928 145.1237  
145.1545 145.1852 145.2158 145.2463 145.2767 145.3070 145.3372 145.3673 145.3973  
145.4272 145.4570 145.4867 145.5164 145.5459 145.5753 145.6046 145.6338 145.6629  
145.6919 145.7208 145.7495 145.7782 145.8068 145.8353 145.8636 145.8919 145.9200  
145.9481 145.9760 146.0038 146.0315 146.0591 146.0866 146.1139 146.1412 146.1684  
146.1954 146.2223 146.2491 146.2758 146.3024 146.3288 146.3552 146.3814 146.4075  
146.4335 146.4594 146.4851 146.5108 146.5363 146.5617 146.5869 146.6121 146.6371  
146.6620 146.6868 146.7115 146.7360 146.7605 146.7848 146.8089 146.8330 146.8569  
146.8807 146.9044 146.9279 146.9513 146.9746 146.9978 147.0208 147.0437 147.0665  
147.0891 147.1116 147.1340 147.1562 147.1784 147.2003 147.2222 147.2439 147.2655  
147.2870 147.3083 147.3295 147.3505 147.3715 147.3923 147.4129 147.4334 147.4538  
147.4740 147.4941 147.5141 147.5339 147.5536 147.5732 147.5926 147.6119 147.6310  
147.6500 147.6689 147.6876 147.7062 147.7246 147.7429 147.7611 147.7791 147.7969  
147.8147 147.8323 147.8497 147.8670 147.8841 147.9012 147.9180 147.9347 147.9513  
147.9677 147.9840 148.0002 148.0162 148.0320 148.0477 148.0633 148.0787 148.0939  
148.1090 148.1240 148.1388 148.1535 148.1680 148.1824 148.1966 148.2107 148.2246

148.2384	148.2520	148.2655	148.2788	148.2919	148.3050	148.3178	148.3305	148.3431
148.3555	148.3678	148.3799	148.3919	148.4037	148.4153	148.4268	148.4382	148.4493
148.4604	148.4713	148.4820	148.4926	148.5030	148.5133	148.5234	148.5333	148.5431
148.5528	148.5623	148.5716	148.5808	148.5898	148.5987	148.6074	148.6160	148.6244
148.6326	148.6407	148.6487	148.6564	148.6641	148.6715	148.6788	148.6860	148.6930
148.6998	148.7065	148.7130	148.7194	148.7256	148.7317	148.7376	148.7433	148.7489
148.7543	148.7595	148.7646	148.7696	148.7744	148.7790	148.7835	148.7878	148.7919
148.7959	148.7998	148.8035	148.8070	148.8103	148.8135	148.8166	148.8195	148.8222
148.8248	148.8272	148.8294	148.8315	148.8335	148.8352	148.8369	148.8383	148.8396
148.8408	148.8417	148.8426	148.8432	148.8437	148.8441	148.8443	[148.8443]	148.8442
148.8439	148.8435	148.8429	148.8421	148.8412	148.8401	148.8389	148.8375	148.8359
148.8342	148.8324	148.8303	148.8282	148.8258	148.8233	148.8207	148.8179	148.8149
148.8118	148.8085	148.8051	148.8015	148.7977	148.7938	148.7897	148.7855	148.7811
148.7766	148.7719	148.7671	148.7621	148.7569	148.7516	148.7462	148.7405	148.7348
148.7288	148.7227	148.7165	148.7101	148.7036	148.6969	148.6900	148.6830	148.6758
148.6685	148.6610	148.6534	148.6456	148.6377	148.6296	148.6214	148.6130	148.6045
148.5958	148.5870	148.5780	148.5688	148.5595	148.5501	148.5405	148.5308	148.5209
148.5108	148.5006	148.4903	148.4798	148.4692	148.4584	148.4474	148.4364	148.4251
148.4138	148.4022	148.3906	148.3787	148.3668	148.3547	148.3424	148.3300	148.3175
148.3048	148.2919	148.2789	148.2658	148.2525	148.2391	148.2256	148.2119	148.1980
148.1840	148.1699	148.1556	148.1412	148.1267	148.1120	148.0972	148.0822	148.0671
148.0518	148.0364	148.0209	148.0052	147.9894	147.9735	147.9574	147.9412	147.9248
147.9083	147.8917	147.8749	147.8580	147.8410	147.8238	147.8065	147.7891	147.7715
147.7538	147.7360	147.7180	147.6999	147.6817	147.6633	147.6448	147.6262	147.6074
147.5885	147.5695	147.5504	147.5311	147.5117	147.4922	147.4725	147.4527	147.4328
147.4128	147.3926	147.3723	147.3519	147.3314	147.3107	147.2899	147.2690	147.2480

TABLA 2. (Lecturas de la 29,700 a la 30,000)

140.7502	140.7514	140.7526	140.7538	140.7550	140.7562	140.7574	140.7586	140.7598
140.7609	140.7621	140.7633	140.7645	140.7657	140.7668	140.7680	140.7692	140.7703
140.7715	140.7726	140.7738	140.7750	140.7761	140.7773	140.7784	140.7796	140.7807
140.7818	140.7830	140.7841	140.7852	140.7864	140.7875	140.7886	140.7897	140.7909
140.7920	140.7931	140.7942	140.7953	140.7964	140.7975	140.7986	140.7997	140.8008
140.8019	140.8030	140.8041	140.8052	140.8062	140.8073	140.8084	140.8095	140.8105
140.8116	140.8126	140.8137	140.8148	140.8158	140.8169	140.8179	140.8189	140.8200
140.8210	140.8221	140.8231	140.8241	140.8251	140.8261	140.8272	140.8282	140.8292
140.8302	140.8312	140.8322	140.8332	140.8342	140.8352	140.8361	140.8371	140.8381
140.8391	140.8400	140.8410	140.8420	140.8429	140.8439	140.8448	140.8458	140.8467
140.8476	140.8486	140.8495	140.8504	140.8514	140.8523	140.8532	140.8541	140.8550
140.8559	140.8568	140.8577	140.8586	140.8595	140.8604	140.8613	140.8621	140.8630
140.8639	140.8648	140.8656	140.8665	140.8673	140.8682	140.8690	140.8699	140.8707
140.8715	140.8723	140.8732	140.8740	140.8748	140.8756	140.8764	140.8772	140.8780
140.8788	140.8796	140.8804	140.8812	140.8819	140.8827	140.8835	140.8842	140.8850
140.8857	140.8865	140.8872	140.8880	140.8887	140.8894	140.8902	140.8909	140.8916
140.8923	140.8930	140.8937	140.8944	140.8951	140.8958	140.8965	140.8972	140.8978
140.8985	140.8992	140.8998	140.9005	140.9011	140.9018	140.9024	140.9031	140.9037
140.9043	140.9050	140.9056	140.9062	140.9068	140.9074	140.9080	140.9086	140.9092
140.9098	140.9103	140.9109	140.9115	140.9120	140.9126	140.9132	140.9137	140.9142
140.9148	140.9153	140.9158	140.9164	140.9169	140.9174	140.9179	140.9184	140.9189

140.9194 140.9199 140.9204 140.9209 140.9213 140.9218 140.9223 140.9227 140.9232  
 140.9236 140.9241 140.9245 140.9249 140.9254 140.9258 140.9262 140.9266 140.9270  
 140.9274 140.9278 140.9282 140.9286 140.9290 140.9294 140.9297 140.9301 140.9304  
 140.9308 140.9311 140.9315 140.9318 140.9322 140.9325 140.9328 140.9331 140.9334  
 140.9338 140.9341 140.9343 140.9346 140.9349 140.9352 140.9355 140.9358 140.9360  
 140.9363 140.9365 140.9368 140.9370 140.9373 140.9375 140.9377 140.9379 140.9382  
 140.9384 140.9386 140.9388 140.9390 140.9392 140.9393 140.9395 140.9397 140.9399  
 140.9400 140.9402 140.9403 140.9405 140.9406 140.9407 140.9409 140.9410 140.9411  
 140.9412 140.9413 140.9414 140.9415 140.9416 140.9417 140.9418 140.9419 140.9420  
 140.9420 140.9421 140.9421 140.9422 140.9422 140.9423 140.9423 140.9423 140.9423  
 140.9424 140.9424 140.9424 140.9424 140.9424 140.9424 140.9423 140.9423 140.9423  
 140.9423 140.9422 140.9422 140.9421 140.9421 140.9420 140.9420 140.9419 140.9418  
 140.9417 140.9417 140.9416 140.9415

TABLA 3 (Lecturas espaciadas cada 714 lugares)

152.0676 129.9802 150.4381 131.7223 148.8443 133.3602 147.3451 134.5525 146.2545  
 135.5501 145.3419 136.3849 144.5783 137.0834 143.9394 137.6679 143.4047 138.1570  
 142.9573 138.5662 142.5830 138.9086 142.2697 139.1952 142.0076 139.4349 141.7883  
 139.6356 141.6048 139.8034 141.4512 139.9439 141.3227 140.0615 141.2152 140.1598  
 141.1252 140.2421 141.0499 140.3110 140.9869 140.3686 140.9342

Tabla 4.

(Valores del 1 al 50)

11.3960 11.3944 11.3926 11.3906 11.3884 11.3859 11.3832 11.3803 11.3771 11.3738  
 11.3702 11.3664 11.3623 11.3580 11.3536 11.3488 11.3439 11.3387 11.3333 11.3277  
 11.3219 11.3158 11.3095 11.3030 11.2963 11.2894 11.2822 11.2748 11.2672 11.2593  
 11.2513 11.2430 11.2345 11.2258 11.2168 11.2077 11.1983 11.1887 11.1788 11.1688  
 11.1585 11.1480 11.1373 11.1264 11.1153 11.1039 11.0924 11.0806 11.0686 11.0563

(valores del 700 al 750)

-10.9542 -10.9559 -10.9573 -10.9586 -10.9596 -10.9605 -10.9611 -10.9616 -10.9618  
 -10.9618 -10.9616 -10.9612 -10.9606 -10.9598 -10.9587 -10.9575 -10.9561 -10.9544  
 -10.9526 -10.9505 -10.9483 -10.9458 -10.9431 -10.9403 -10.9372 -10.9339 -10.9304  
 -10.9267 -10.9228 -10.9187 -10.9144 -10.9098 -10.9051 -10.9002 -10.8951 -10.8897  
 -10.8842 -10.8784 -10.8725 -10.8663 -10.8600 -10.8534 -10.8466 -10.8397 -10.8325  
 -10.8251 -10.8175 -10.8098 -10.8018 -10.7936 -10.7852

(valores del 1400 al 1450)

9.4489	9.4531	9.4571	9.4609	9.4645	9.4679	9.4711	9.4742	9.4770	9.4797
9.4822	9.4845	9.4866	9.4885	9.4902	9.4917	9.4931	9.4942	9.4952	9.4959
9.4965	9.4969	9.4971	9.4971	9.4969	9.4966	9.4960	9.4953	9.4943	9.4932
9.4919	9.4904	9.4887	9.4868	9.4848	9.4825	9.4801	9.4774	9.4746	9.4716
9.4684	9.4650	9.4615	9.4577	9.4537	9.4496	9.4453	9.4408	9.4361	9.4261

(valores del 2200 al 2250)

-8.8758	-8.8649	-8.8539	-8.8427	-8.8314	-8.8199	-8.8082	-8.7964	-8.7844	-8.7723
-8.7600	-8.7475	-8.7349	-8.7221	-8.7091	-8.6960	-8.6828	-8.6693	-8.6557	-8.6420
-8.6281	-8.6140	-8.5998	-8.5854	-8.5709	-8.5562	-8.5413	-8.5263	-8.5111	-8.4958
-8.4803	-8.4647	-8.4489	-8.4330	-8.4169	-8.4006	-8.3842	-8.3677	-8.3510	-8.3341
-8.3171	-8.2999	-8.2826	-8.2651	-8.2475	-8.2298	-8.2118	-8.1938	-8.1756	-8.1572

(valores del 2950 al 3000)

7.1390	7.1238	7.1085	7.0931	7.0776	7.0618	7.0460	7.0300	7.0139	6.9977
6.9813	6.9647	6.9481	6.9313	6.9143	6.8973	6.8801	6.8627	6.8453	6.8277
6.8099	6.7920	6.7740	6.7559	6.7376	6.7192	6.7007	6.6820	6.6632	6.6443
6.6253	6.6061	6.5868	6.5673	6.5478	6.5281	6.5083	6.4883	6.4683	6.4481
6.4277	6.4073	6.3867	6.3660	6.3452	6.3243	6.3032	6.2820	6.2607	6.2393

Tabla 5.

(Primeros 40 valores de la norma calculada para los primeros 600 valores de la señal examinada)

( a todos hay que aplicarles 1.0e+004 )

0.2254	[1.0168]	0.1868	0.0788	0.0435	0.0276	0.0191	0.0140	0.0107	0.0084
0.0068	0.0056	0.0047	0.0040	0.0035	0.0030	0.0027	0.0024	0.0021	0.0019
0.0017	0.0016	0.0014	0.0013	0.0012	0.0011	0.0010	0.0009	0.0009	0.0008
0.0008	0.0007	0.0007	0.0006	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009

(Últimos 30 valores de la norma calculada para los primeros 600 valores de la señal examinada)

0.0006	0.0007	0.0007	0.0008	0.0008	0.0009	0.0009	0.0010	0.0011	0.0012
0.0013	0.0014	0.0016	0.0017	0.0019	0.0021	0.0024	0.0027	0.0030	0.0035
0.0040	0.0047	0.0056	0.0068	0.0084	0.0107	0.0140	0.0191	0.0276	0.0435
0.0788	0.1868	[1.0168]							

¡ Nótese los valores encerrados entre corchete!

Tabla 6 (Datos para las gráficas 4.13 y 4.14)

(Valores de la TRF para datos tomados cada 123 segundos para un tiempo de muestreo de 2860 segundos)

0.9566            9.7384 + 1.3232i -0.2073 - 0.4940i -0.0145 - 0.2569i  
 0.0386 - 0.1703i 0.0611 - 0.1217i 0.0726 - 0.0887i 0.0791 - 0.0637i  
 0.0828 - 0.0431i 0.0850 - 0.0250i 0.0860 - 0.0082i 0.0860 + 0.0082i  
 0.0850 + 0.0250i 0.0828 + 0.0431i 0.0791 + 0.0637i 0.0726 + 0.0887i  
 0.0611 + 0.1217i 0.0386 + 0.1703i -0.0145 + 0.2569i -0.2073 + 0.4940i  
 9.7384 - 1.3232i

(Valores de la norma de la TRF para los datos anteriores)

0.9566 9.8279 0.5357 0.2573 0.1746 0.1362 0.1146  
 0.1015 0.0934 0.0886 0.0864 0.0864 0.0886 0.0934  
 0.1015 0.1146 0.1362 0.1746 0.2573 0.5357 9.8279

(Valores de la TRF para datos tomados cada 12 segundos para un tiempo de muestreo de 2860 segundos)

1.3247            91.2571 + 0.2946i -0.1523 - 3.9816i -0.0093 - 2.2288i  
 0.0367 - 1.5819i 0.0573 - 1.2342i 0.0683 - 1.0144i 0.0748 - 0.8619i  
 0.0790 - 0.7495i 0.0819 - 0.6630i 0.0839 - 0.5943i 0.0854 - 0.5384i  
 0.0866 - 0.4919i 0.0875 - 0.4527i 0.0882 - 0.4190i 0.0888 - 0.3899i  
 0.0892 - 0.3644i 0.0896 - 0.3418i 0.0899 - 0.3218i 0.0902 - 0.3038i  
 0.0905 - 0.2876i 0.0907 - 0.2728i 0.0908 - 0.2594i 0.0910 - 0.2471i  
 0.0911 - 0.2358i 0.0912 - 0.2254i 0.0913 - 0.2157i 0.0914 - 0.2068i  
 0.0915 - 0.1984i 0.0916 - 0.1905i 0.0917 - 0.1832i 0.0917 - 0.1763i  
 0.0918 - 0.1698i 0.0918 - 0.1636i 0.0919 - 0.1578i 0.0919 - 0.1523i  
 0.0919 - 0.1471i 0.0920 - 0.1421i 0.0920 - 0.1374i 0.0920 - 0.1328i  
 0.0921 - 0.1285i 0.0921 - 0.1244i 0.0921 - 0.1204i 0.0921 - 0.1166i  
 0.0922 - 0.1129i 0.0922 - 0.1094i 0.0922 - 0.1060i 0.0922 - 0.1027i  
 0.0922 - 0.0995i 0.0922 - 0.0964i 0.0923 - 0.0935i 0.0923 - 0.0906i  
 0.0923 - 0.0878i 0.0923 - 0.0851i 0.0923 - 0.0825i 0.0923 - 0.0799i  
 0.0923 - 0.0774i 0.0923 - 0.0750i 0.0923 - 0.0726i 0.0924 - 0.0703i  
 0.0924 - 0.0680i 0.0924 - 0.0658i 0.0924 - 0.0637i 0.0924 - 0.0616i  
 0.0924 - 0.0595i 0.0924 - 0.0575i 0.0924 - 0.0555i 0.0924 - 0.0535i  
 0.0924 - 0.0516i 0.0924 - 0.0497i 0.0924 - 0.0479i 0.0924 - 0.0461i  
 0.0924 - 0.0443i 0.0924 - 0.0425i 0.0924 - 0.0408i 0.0924 - 0.0390i  
 0.0924 - 0.0373i 0.0924 - 0.0357i 0.0924 - 0.0340i 0.0925 - 0.0324i  
 0.0925 - 0.0308i 0.0925 - 0.0292i 0.0925 - 0.0276i 0.0925 - 0.0260i  
 0.0925 - 0.0245i 0.0925 - 0.0229i 0.0925 - 0.0214i 0.0925 - 0.0199i  
 0.0925 - 0.0183i 0.0925 - 0.0168i 0.0925 - 0.0154i 0.0925 - 0.0139i  
 0.0925 - 0.0124i 0.0925 - 0.0109i 0.0925 - 0.0095i 0.0925 - 0.0080i  
 0.0925 - 0.0065i 0.0925 - 0.0051i 0.0925 - 0.0036i 0.0925 - 0.0022i

0.0925 - 0.0007i 0.0925 + 0.0007i 0.0925 + 0.0022i 0.0925 + 0.0036i  
 0.0925 + 0.0051i 0.0925 + 0.0065i 0.0925 + 0.0080i 0.0925 + 0.0095i  
 0.0925 + 0.0109i 0.0925 + 0.0124i 0.0925 + 0.0139i 0.0925 + 0.0154i  
 0.0925 + 0.0168i 0.0925 + 0.0183i 0.0925 + 0.0199i 0.0925 + 0.0214i  
 0.0925 + 0.0229i 0.0925 + 0.0245i 0.0925 + 0.0260i 0.0925 + 0.0276i  
 0.0925 + 0.0292i 0.0925 + 0.0308i 0.0925 + 0.0324i 0.0924 + 0.0340i  
 0.0924 + 0.0357i 0.0924 + 0.0373i 0.0924 + 0.0390i 0.0924 + 0.0408i  
 0.0924 + 0.0425i 0.0924 + 0.0443i 0.0924 + 0.0461i 0.0924 + 0.0479i  
 0.0924 + 0.0497i 0.0924 + 0.0516i 0.0924 + 0.0535i 0.0924 + 0.0555i  
 0.0924 + 0.0575i 0.0924 + 0.0595i 0.0924 + 0.0616i 0.0924 + 0.0637i  
 0.0924 + 0.0658i 0.0924 + 0.0680i 0.0924 + 0.0703i 0.0923 + 0.0726i  
 0.0923 + 0.0750i 0.0923 + 0.0774i 0.0923 + 0.0799i 0.0923 + 0.0825i  
 0.0923 + 0.0851i 0.0923 + 0.0878i 0.0923 + 0.0906i 0.0923 + 0.0935i  
 0.0922 + 0.0964i 0.0922 + 0.0995i 0.0922 + 0.1027i 0.0922 + 0.1060i  
 0.0922 + 0.1094i 0.0922 + 0.1129i 0.0921 + 0.1166i 0.0921 + 0.1204i  
 0.0921 + 0.1244i 0.0921 + 0.1285i 0.0920 + 0.1328i 0.0920 + 0.1374i  
 0.0920 + 0.1421i 0.0919 + 0.1471i 0.0919 + 0.1523i 0.0919 + 0.1578i  
 0.0918 + 0.1636i 0.0918 + 0.1698i 0.0917 + 0.1763i 0.0917 + 0.1832i  
 0.0916 + 0.1905i 0.0915 + 0.1984i 0.0914 + 0.2068i 0.0913 + 0.2157i  
 0.0912 + 0.2254i 0.0911 + 0.2358i 0.0910 + 0.2471i 0.0908 + 0.2594i  
 0.0907 + 0.2728i 0.0905 + 0.2876i 0.0902 + 0.3038i 0.0899 + 0.3218i  
 0.0896 + 0.3418i 0.0892 + 0.3644i 0.0888 + 0.3899i 0.0882 + 0.4190i  
 0.0875 + 0.4527i 0.0866 + 0.4919i 0.0854 + 0.5384i 0.0839 + 0.5943i  
 0.0819 + 0.6630i 0.0790 + 0.7495i 0.0748 + 0.8619i 0.0683 + 1.0144i  
 0.0573 + 1.2342i 0.0367 + 1.5819i -0.0093 + 2.2288i -0.1523 + 3.9816i  
 91.2571 - 0.2946i

(Valores de la norma de la TRF para los datos anteriores)

1.3247 91.2575 3.9845 2.2288 1.5823 1.2356 1.0167  
 0.8651 0.7536 0.6680 0.6002 0.5451 0.4995 0.4610  
 0.4282 0.3999 0.3751 0.3534 0.3341 0.3169 0.3014  
 0.2875 0.2749 0.2633 0.2528 0.2432 0.2343 0.2261  
 0.2185 0.2114 0.2048 0.1987 0.1930 0.1876 0.1826  
 0.1779 0.1735 0.1693 0.1653 0.1616 0.1581 0.1548  
 0.1516 0.1486 0.1457 0.1430 0.1405 0.1380 0.1357  
 0.1335 0.1313 0.1293 0.1274 0.1255 0.1238 0.1221  
 0.1205 0.1189 0.1175 0.1161 0.1147 0.1134 0.1122  
 0.1110 0.1099 0.1088 0.1078 0.1068 0.1058 0.1049  
 0.1041 0.1033 0.1025 0.1017 0.1010 0.1003 0.0997  
 0.0991 0.0985 0.0980 0.0974 0.0969 0.0965 0.0960  
 0.0956 0.0953 0.0949 0.0946 0.0943 0.0940 0.0937  
 0.0935 0.0933 0.0931 0.0930 0.0928 0.0927 0.0926  
 0.0925 0.0925 0.0925 0.0925 0.0925 0.0925 0.0926  
 0.0927 0.0928 0.0930 0.0931 0.0933 0.0935 0.0937  
 0.0940 0.0943 0.0946 0.0949 0.0953 0.0956 0.0960  
 0.0965 0.0969 0.0974 0.0980 0.0985 0.0991 0.0997  
 0.1003 0.1010 0.1017 0.1025 0.1033 0.1041 0.1049  
 0.1058 0.1068 0.1078 0.1088 0.1099 0.1110 0.1122  
 0.1134 0.1147 0.1161 0.1175 0.1189 0.1205 0.1221  
 0.1238 0.1255 0.1274 0.1293 0.1313 0.1335 0.1357  
 0.1380 0.1405 0.1430 0.1457 0.1486 0.1516 0.1548  
 0.1581 0.1616 0.1653 0.1693 0.1735 0.1779 0.1826

0.1876	0.1930	0.1987	0.2048	0.2114	0.2185	0.2261
0.2343	0.2432	0.2528	0.2633	0.2749	0.2875	0.3014
0.3169	0.3341	0.3534	0.3751	0.3999	0.4282	0.4610
0.4995	0.5451	0.6002	0.6680	0.7536	0.8651	1.0167
1.2356	1.5823	2.2288	3.9845	91.2575		

(Valores de la TRF para datos tomados cada 123 segundos para un tiempo de muestreo de 2860 segundos)

0.9566	9.7384 + 1.3232i	-0.2073 - 0.4940i	-0.0145 - 0.2569i			
0.0386 - 0.1703i	0.0611 - 0.1217i	0.0726 - 0.0887i	0.0791 - 0.0637i			
0.0828 - 0.0431i	0.0850 - 0.0250i	0.0860 - 0.0082i	0.0860 + 0.0082i			
0.0850 + 0.0250i	0.0828 + 0.0431i	0.0791 + 0.0637i	0.0726 + 0.0887i			
0.0611 + 0.1217i	0.0386 + 0.1703i	-0.0145 + 0.2569i	-0.2073 + 0.4940i			
9.7384 - 1.3232i						

(Valores de la norma de la TRF para los datos anteriores)

0.9566	9.8279	0.5357	0.2573	0.1746	0.1362	0.1146
0.1015	0.0934	0.0886	0.0864	0.0864	0.0886	0.0934
0.1015	0.1146	0.1362	0.1746	0.2573	0.5357	9.8279

Tabla 7

(Primeros 30 valores obtenidos al calcular la norma para la ventana de 2856 datos iniciales)

0.0207	0.0098	[6.8946]	0.0317	0.0098	0.0050	0.0031	0.0021	0.0016	0.0012
0.0010	0.0008	0.0006	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003
0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001

¡Nótese que al primer valor en Nyquist siempre le corresponde la posición cero!

Tabla 8-a: (Contiene los valores de la tabla 1 en los cuales hay inflexión)

152.3376	129.9803	150.4418	131.7153	148.8539	133.1686	147.5238	134.3858	146.4098
135.4054	145.4767	136.2594	144.6951	136.9747	144.0405	137.5739	143.4921	138.0757
143.0328	138.4960	142.6481	138.8481	142.3259	139.1430	142.0560	139.3900	141.8300
139.5969	141.6406	139.7702	141.4820	139.9154	141.3492	140.0369	141.2379	140.1388
141.1447	140.2241	141.0666	140.2955	141.0012	140.3554	140.9465		

TABLA 8-b (Contiene los mismos valores de la tabla 8-a con la diferencia de que se elimina el primer valor y los restantes se recorren una posición)

129.9803	150.4418	131.7153	148.8539	133.1686	147.5238	134.3858	146.4098	135.4054
145.4767	136.2594	144.6951	136.9747	144.0405	137.5739	143.4921	138.0757	143.0328
138.4960	142.6481	138.8481	142.3259	139.1430	142.0560	139.3900	141.8300	139.5969
141.6406	139.7702	141.4820	139.9154	141.3492	140.0369	141.2379	140.1388	141.1447
140.2241	141.0666	140.2955	141.0012	140.3554	140.9465	140.4055		

TABLA 9. (Contiene los valores normalizados de los puntos de inflexión de la tabla 1)

0.7115	0.6070	0.7026	0.6151	0.6952	0.6219	0.6890	0.6276	0.6838	0.6324
0.6794	0.6364	0.6758	0.6397	0.6727	0.6425	0.6701	0.6448	0.6680	0.6468
0.6662	0.6485	0.6647	0.6498	0.6634	0.6510	0.6624	0.6520	0.6615	0.6528
0.6608	0.6534	0.6601	0.6540	0.6596	0.6545	0.6592	0.6549	0.6588	0.6552
0.6585	0.6555	0.6583							

TABLA 10. Contiene los valores obtenidos al iterar 45 veces el mapa logístico con parámetro de control igual a 2.91493; es decir:

$$x_{n+1} = 2.91493x_n(1 - x_n)$$

0.7115	0.5983	0.7005	0.6115	0.6925	0.6207	0.6862	0.6276	0.6813	0.6330
0.6772	0.6372	0.6739	0.6406	0.6711	0.6434	0.6688	0.6457	0.6669	0.6476
0.6653	0.6491	0.6639	0.6504	0.6628	0.6515	0.6618	0.6524	0.6610	0.6531
0.6604	0.6538	0.6598	0.6543	0.6593	0.6547	0.6590	0.6551	0.6586	0.6554
0.6584	0.6556	0.6581	0.6559	0.6579	0.6560				

TABLA 11(Contiene los primeros y los últimos 300 valores registrados en la segunda prueba)

122.0061	122.0033	121.9985	121.9917	121.9829	121.9720	121.9590
121.9440	121.9270	121.9079	121.8868	121.8637	121.8385	121.8113
121.7820	121.7507	121.7174	121.6821	121.6447	121.6053	121.5638
121.5204	121.4749	121.4274	121.3779	121.3264	121.2729	121.2174
121.1599	121.1004	121.0389	120.9754	120.9099	120.8424	120.7730
120.7015	120.6282	120.5528	120.4755	120.3963	120.3150	120.2319
120.1468	120.0598	119.9708	119.8800	119.7872	119.6925	119.5959
119.4974	119.3970	119.2947	119.1906	119.0845	118.9767	118.8669
118.7553	118.6419	118.5266	118.4095	118.2906	118.1699	118.0473
117.9230	117.7969	117.6690	117.5393	117.4079	117.2747	117.1398

117.0031	116.8647	116.7246	116.5828	116.4393	116.2941	116.1472
115.9987	115.8485	115.6966	115.5431	115.3880	115.2312	115.0729
114.9129	114.7514	114.5882	114.4236	114.2573	114.0895	113.9202
113.7494	113.5770	113.4032	113.2279	113.0511	112.8728	112.6931
112.5119	112.3294	112.1454	111.9600	111.7732	111.5850	111.3955
111.2046	111.0124	110.8189	110.6240	110.4279	110.2304	110.0317
109.8318	109.6306	109.4281	109.2245	109.0196	108.8135	108.6063
108.3979	108.1884	107.9777	107.7659	107.5530	107.3390	107.1239
106.9078	106.6906	106.4724	106.2532	106.0330	105.8118	105.5896
105.3664	105.1423	104.9173	104.6914	104.4645	104.2368	104.0083
103.7788	103.5486	103.3175	103.0856	102.8529	102.6195	102.3853
102.1504	101.9147	101.6783	101.4413	101.2035	100.9651	100.7261
100.4864	100.2461	100.0053	99.7638	99.5218	99.2792	99.0361
98.7925	98.5484	98.3039	98.0588	97.8134	97.5674	97.3211
97.0744	96.8273	96.5799	96.3320	96.0839	95.8355	95.5867
95.3377	95.0885	94.8389	94.5892	94.3393	94.0891	93.8388
93.5883	93.3377	93.0870	92.8361	92.5852	92.3342	92.0831
91.8320	91.5809	91.3298	91.0787	90.8276	90.5766	90.3256
90.0748	89.8240	89.5733	89.3228	89.0724	88.8222	88.5722
88.3223	88.0727	87.8234	87.5742	87.3254	87.0768	86.8286
86.5806	86.3331	86.0858	85.8389	85.5925	85.3464	85.1007
84.8555	84.6108	84.3665	84.1227	83.8794	83.6366	83.3944
83.1528	82.9117	82.6711	82.4312	82.1920	81.9533	81.7153
81.4780	81.2414	81.0055	80.7703	80.5358	80.3021	80.0691
79.8369	79.6056	79.3750	79.1453	78.9164	78.6884	78.4613
78.2350	78.0097	77.7853	77.5618	77.3393	77.1177	76.8972
76.6776	76.4590	76.2415	76.0251	75.8096	75.5953	75.3820
75.1699	74.9589	74.7490	74.5402	74.3326	74.1262	73.9210
73.7170	73.5142	73.3126	73.1123	72.9132	72.7154	72.5189
72.3237	72.1298	71.9372	71.7460	71.5561	71.3676	71.1805
70.9947	70.8104	70.6274	70.4459	70.2659	70.0873	69.9101
69.7344	69.5603	69.3876	69.2164	69.0468	68.8787	68.7121
68.5471	68.3837	68.2219	68.0616	67.9030	67.7459	
68.3379	68.1749	68.0135	67.8538	67.6958	67.5394	67.3846
67.1846	67.0299	66.8785	66.7281	66.5787	66.4303	66.2828
66.1354	65.9880	65.8416	65.6962	65.5518	65.4084	65.2659
65.1237	64.9823	64.8419	64.7025	64.5641	64.4267	64.2902
64.1549	64.0185	63.8831	63.7487	63.6153	63.4829	63.3514
63.2209	63.0895	62.9591	62.8297	62.7013	62.5739	62.4474
62.3219	62.1965	62.0721	61.9487	61.8263	61.7049	61.5844
61.4649	61.3455	61.2271	61.1097	60.9933	60.8779	60.7634
60.6499	60.5365	60.4241	60.3127	60.2023	60.0929	59.9844
59.8769	59.7695	59.6631	59.5577	59.4533	59.3499	59.2474
59.1459	59.0445	58.9441	58.8447	58.7463	58.6489	58.5524
58.4569	58.3615	58.2671	58.1737	58.0813	57.9899	57.8994
57.8099	57.7205	57.6321	57.5447	57.4583	57.3729	57.2884
57.2049	57.1215	57.0391	56.9577	56.8773	56.7979	56.7194
56.6419	56.5645	56.4881	56.4127	56.3383	56.2649	56.1924
56.1209	56.0495	55.9791	55.9097	55.8413	55.7739	55.7074
55.6419	55.5765	55.5121	55.4487	55.3863	55.3249	55.2644
55.2049	55.1455	55.0871	55.0297	54.9733	54.9179	54.8634
54.8099	54.7565	54.7041	54.6527	54.6023	54.5529	54.5044
54.4569	54.4095	54.3631	54.3177	54.2733	54.2299	54.1874
54.1459	54.1045	54.0641	54.0247	53.9863	53.9489	53.9124
53.8769	53.8415	53.8071	53.7737	53.7413	53.7099	53.6794
53.6499	53.6205	53.5921	53.5647	53.5383	53.5129	53.4884
53.4649	53.4415	53.4191	53.3977	53.3773	53.3579	53.3394
53.3219	53.3045	53.2881	53.2727	53.2583	53.2449	53.2324
53.2209	53.2095	53.1991	53.1897	53.1813	53.1739	53.1674
53.1619	53.1565	53.1521	53.1487	53.1463	53.1449	53.1434
53.1429	53.1425	53.1421	53.1417	53.1413	53.1409	53.1404
53.1409	53.1405	53.1401	53.1397	53.1393	53.1389	53.1384
53.1389	53.1385	53.1381	53.1377	53.1373	53.1369	53.1364
53.1364	53.1360	53.1356	53.1352	53.1348	53.1344	53.1340
53.1340	53.1336	53.1332	53.1328	53.1324	53.1320	53.1316
53.1316	53.1312	53.1308	53.1304	53.1300	53.1296	53.1292
53.1292	53.1288	53.1284	53.1280	53.1276	53.1272	53.1268
53.1268	53.1264	53.1260	53.1256	53.1252	53.1248	53.1244
53.1244	53.1240	53.1236	53.1232	53.1228	53.1224	53.1220
53.1220	53.1216	53.1212	53.1208	53.1204	53.1200	53.1196
53.1196	53.1192	53.1188	53.1184	53.1180	53.1176	53.1172
53.1172	53.1168	53.1164	53.1160	53.1156	53.1152	53.1148
53.1148	53.1144	53.1140	53.1136	53.1132	53.1128	53.1124
53.1124	53.1120	53.1116	53.1112	53.1108	53.1104	53.1100
53.1100	53.1096	53.1092	53.1088	53.1084	53.1080	53.1076
53.1076	53.1072	53.1068	53.1064	53.1060	53.1056	53.1052
53.1052	53.1048	53.1044	53.1040	53.1036	53.1032	53.1028
53.1028	53.1024	53.1020	53.1016	53.1012	53.1008	53.1004
53.1004	53.1000	53.0996	53.0992	53.0988	53.0984	53.0980
53.0980	53.0976	53.0972	53.0968	53.0964	53.0960	53.0956
53.0956	53.0952	53.0948	53.0944	53.0940	53.0936	53.0932
53.0932	53.0928	53.0924	53.0920	53.0916	53.0912	53.0908
53.0908	53.0904	53.0900	53.0896	53.0892	53.0888	53.0884
53.0884	53.0880	53.0876	53.0872	53.0868	53.0864	53.0860
53.0860	53.0856	53.0852	53.0848	53.0844	53.0840	53.0836
53.0836	53.0832	53.0828	53.0824	53.0820	53.0816	53.0812
53.0812	53.0808	53.0804	53.0800	53.0796	53.0792	53.0788
53.0788	53.0784	53.0780	53.0776	53.0772	53.0768	53.0764
53.0764	53.0760	53.0756	53.0752	53.0748	53.0744	53.0740
53.0740	53.0736	53.0732	53.0728	53.0724	53.0720	53.0716
53.0716	53.0712	53.0708	53.0704	53.0700	53.0696	53.0692
53.0692	53.0688	53.0684	53.0680	53.0676	53.0672	53.0668
53.0668	53.0664	53.0660	53.0656	53.0652	53.0648	53.0644
53.0644	53.0640	53.0636	53.0632	53.0628	53.0624	53.0620
53.0620	53.0616	53.0612	53.0608	53.0604	53.0600	53.0596
53.0596	53.0592	53.0588	53.0584	53.0580	53.0576	53.0572
53.0572	53.0568	53.0564	53.0560	53.0556	53.0552	53.0548
53.0548	53.0544	53.0540	53.0536	53.0532	53.0528	53.0524
53.0524	53.0520	53.0516	53.0512	53.0508	53.0504	53.0500
53.0500	53.0496	53.0492	53.0488	53.0484	53.0480	53.0476
53.0476	53.0472	53.0468	53.0464	53.0460	53.0456	53.0452
53.0452	53.0448	53.0444	53.0440	53.0436	53.0432	53.0428
53.0428	53.0424	53.0420	53.0416	53.0412	53.0408	53.0404
53.0404	53.0400	53.0396	53.0392	53.0388	53.0384	53.0380
53.0380	53.0376	53.0372	53.0368	53.0364	53.0360	53.0356
53.0356	53.0352	53.0348	53.0344	53.0340	53.0336	53.0332
53.0332	53.0328	53.0324	53.0320	53.0316	53.0312	53.0308
53.0308	53.0304	53.0300	53.0296	53.0292	53.0288	53.0284
53.0284	53.0280	53.0276	53.0272	53.0268	53.0264	53.0260
53.0260	53.0256	53.0252	53.0248	53.0244	53.0240	53.0236
53.0236	53.0232	53.0228	53.0224	53.0220	53.0216	53.0212
53.0212	53.0208	53.0204	53.0200	53.0196	53.0192	53.0188
53.0188	53.0184	53.0180	53.0176	53.0172	53.0168	53.0164
53.0164	53.0160	53.0156	53.0152	53.0148	53.0144	53.0140
53.0140	53.0136	53.0132	53.0128	53.0124	53.0120	53.0116
53.0116	53.0112	53.0108	53.0104	53.0100	53.0096	53.0092
53.0092	53.0088	53.0084	53.0080	53.0076	53.0072	53.0068
53.0068	53.0064	53.0060	53.0056	53.0052	53.0048	53.0044
53.0044	53.0040	53.0036	53.0032	53.0028	53.0024	53.0020
53.0020	53.0016	53.0012	53.0008	53.0004	53.0000	

99.6005	99.8342	100.0675	100.3001	100.5323	100.7638	100.9947
101.2250	101.4547	101.6837	101.9121	102.1398	102.3667	102.5930
102.8186	103.0434	103.2674	103.4907	103.7131	103.9348	104.1557
104.3757	104.5948	104.8131	105.0305	105.2470	105.4626	105.6773
105.8910	106.1037	106.3155	106.5263	106.7361	106.9449	107.1526
107.3593	107.5649	107.7694	107.9729	108.1752	108.3765	108.5766
108.7755	108.9733	109.1699	109.3653	109.5595	109.7525	109.9443
110.1348	110.3240	110.5120	110.6987	110.8841	111.0682	111.2510
111.4325	111.6125	111.7913	111.9686	112.1446	112.3192	112.4923
112.6640	112.8343	113.0032	113.1706	113.3365	113.5009	113.6639
113.8253	113.9852	114.1436	114.3005	114.4558	114.6095	114.7617
114.9123	115.0613	115.2086	115.3544	115.4986	115.6411	115.7820
115.9212	116.0587	116.1946	116.3288	116.4613	116.5921	116.7212
116.8485	116.9742	117.0981	117.2202	117.3406	117.4592	117.5761
117.6912	117.8045	117.9159	118.0256	118.1335	118.2396	118.3438
118.4462	118.5467	118.6454	118.7423	118.8373	118.9304	119.0216
119.1110	119.1984	119.2840	119.3677	119.4494	119.5293	119.6072
119.6832	119.7573	119.8295	119.8997	119.9679	120.0343	120.0986
120.1610	120.2215	120.2799	120.3364	120.3910	120.4435	120.4941
120.5427	120.5893	120.6339	120.6765	120.7171	120.7557	120.7923
120.8269	120.8594	120.8900	120.9186	120.9451	120.9696	120.9921
121.126	121.0311	121.0475	121.0619	121.0743	121.0847	121.0930

TABLA 12. (Últimos 150 valores de la segunda prueba, normalizados)

0.2813	0.2893	0.2973	0.3053	0.3133	0.3212	0.3291	0.3370	0.3449	0.3528
0.3606	0.3684	0.3762	0.3839	0.3917	0.3993	0.4070	0.4147	0.4223	0.4298
0.4374	0.4449	0.4524	0.4599	0.4673	0.4747	0.4820	0.4894	0.4967	0.5039
0.5111	0.5183	0.5255	0.5326	0.5397	0.5467	0.5537	0.5607	0.5676	0.5745
0.5813	0.5881	0.5949	0.6016	0.6083	0.6149	0.6215	0.6280	0.6345	0.6410
0.6474	0.6538	0.6601	0.6664	0.6726	0.6788	0.6849	0.6910	0.6970	0.7030
0.7090	0.7149	0.7207	0.7265	0.7322	0.7379	0.7436	0.7492	0.7547	0.7602
0.7656	0.7710	0.7763	0.7815	0.7868	0.7919	0.7970	0.8020	0.8070	0.8120
0.8168	0.8217	0.8264	0.8311	0.8358	0.8403	0.8449	0.8493	0.8537	0.8581
0.8624	0.8666	0.8708	0.8749	0.8789	0.8829	0.8868	0.8907	0.8944	0.8982
0.9019	0.9055	0.9090	0.9125	0.9159	0.9192	0.9225	0.9257	0.9289	0.9320
0.9350	0.9380	0.9409	0.9437	0.9465	0.9492	0.9518	0.9544	0.9568	0.9593
0.9616	0.9639	0.9662	0.9683	0.9704	0.9724	0.9744	0.9763	0.9781	0.9798
0.9815	0.9831	0.9847	0.9861	0.9876	0.9889	0.9902	0.9914	0.9925	0.9935
0.9945	0.9954	0.9963	0.9971	0.9978	0.9984	0.9990	0.9995	0.9999	1.0003
1.0006									

Tabla 13. (Contiene los valores normalizados del primer término de la ecuación (4.23))

0.0339	-0.0310	0.0284	-0.0260	0.0238	-0.0218	0.0200	-0.0183	0.0168	-0.0153
0.0140	-0.0129	0.0118	-0.0108	0.0099	-0.0090	0.0083	-0.0076	0.0069	-0.0064
0.0058	-0.0053	0.0049	-0.0045	0.0041	-0.0037	0.0034	-0.0031	0.0029	-0.0026
0.0024	-0.0022	0.0020	-0.0019	0.0017	-0.0016	0.0014	-0.0013	0.0012	

Tabla 14. (Contiene los valores correspondientes a los puntos de inflexión del segundo lote)

122.0038	61.2063	120.1598	65.2098	121.8470	61.5497	120.2943	64.9050	121.7139	
61.8386	120.4064	64.6507	121.6008	62.0818	120.4996	64.4388	121.5043	62.2868	
120.5768	64.2625	121.4219	62.4599	120.6406	64.1160	121.3512	62.6063	120.6930	
63.9947	121.2904	62.7303	120.7357	63.8944	121.2378	62.8356	120.7702	63.8118	
121.1921	62.9254	120.7979	63.7441	121.1522	63.0021	120.8196	63.6889	121.1170	
63.0680	120.8363	63.6443	121.0858	63.1248	120.8488	63.6085	121.0579	63.1741	
120.8576	63.5803	121.0328	63.2172	120.8633	63.5584	121.0098	63.2551	120.8663	
63.5419	120.9887	63.2886	120.8671	63.5299	120.9691	63.3187	120.8658	63.5218	
120.9508	63.3458	120.8628	63.5170	120.9333	63.3705	120.8584	63.5149	120.9167	

Tabla 15. (Los puntos de inflexión anteriores, normalizados)

0.8549	0.4265	0.8411	0.4596	0.8540	0.4286	0.8421	0.4571	0.8533	0.4304
0.8430	0.4552	0.8527	0.4318	0.8437	0.4535	0.8522	0.4330	0.8442	0.4522
0.8518	0.4341	0.8447	0.4510	0.8514	0.4350	0.8451	0.4500	0.8511	0.4358
0.8455	0.4492	0.8508	0.4366	0.8458	0.4484	0.8505	0.4372	0.8461	0.4478
0.8503	0.4378	0.8463	0.4472	0.8501	0.4383	0.8465	0.4467	0.8499	0.4387
0.8467	0.4463	0.8497	0.4391	0.8469	0.4459	0.8496	0.4395	0.8470	0.4455
0.8494	0.4398	0.8472	0.4452	0.8493	0.4401	0.8473	0.4449	0.8492	0.4403
0.8474	0.4447	0.8491	0.4405	0.8475	0.4444	0.8490	0.4407	0.8476	0.4442
0.8490									